

Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwich/multicouches intelligentes

Marcelo Areias Trindade

▶ **To cite this version:**

Marcelo Areias Trindade. Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwich/multicouches intelligentes. Mécanique [physics.med-ph]. Conservatoire national des arts et metiers - CNAM, 2000. Français. NNT : . tel-00012077

HAL Id: tel-00012077
https://theses.hal.science/tel-00012077

Submitted on 3 Apr 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS

THÈSE

Présentée en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR EN MÉCANIQUE

Spécialité : Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés

CONTRÔLE HYBRIDE ACTIF–PASSIF DES VIBRATIONS DE STRUCTURES PAR DES MATÉRIAUX PIÉZOÉLECTRIQUES ET VISCOÉLASTIQUES :

POUTRES SANDWICH/MULTICOUCHES INTELLIGENTES

Marcelo AREIAS TRINDADE

Soutenue le 15 juin 2000 devant le jury composé de :

Rapporteurs :	**L. JEZEQUEL**	**ECL Lyon**	
	M. TOURATIER	**ENSAM Paris**	
Examinateurs :	**A. BENJEDDOU**	**CNAM Paris**	
	P.-F. GOBIN	**INSA Lyon**	***Président***
	J.-P. GRELLIER	**DGA Paris**	
	R. OHAYON	**CNAM Paris**	***Directeur de thèse***
	C. SOIZE	**ONERA Chatillon**	

A ma mère, qui malheureusement n'a pu partager ça avec moi

A ma femme, qui est sans doute la raison de mes succès

Avant propos et remerciements

Cette thèse présente les résultats des recherches réalisées dans la période de septembre 1996 à janvier 2000 au sein du Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés (LMSSC) du Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM) dans le cadre d'un accord CAPES/COFECUB entre la France et le Brésil, par l'intermédiaire du département de génie mécanique de la Pontifice Université Catholique de Rio de Janeiro (PUC-Rio). Plusieurs personnes ont contribué à l'aboutissement de ce travail et je tiens à les remercier. Dès mon arrivée à Paris, le Professeur Roger Ohayon non seulement m'a très bien accueilli dans son laboratoire mais m'a aussi accompagné et encouragé. En tant que directeur de thèse, il a toujours su réunir les conditions propices à l'aboutissement et à la reconnaissance de mes efforts. Ses conseils m'ont été, et le seront toujours, très utiles pour enrichir mon expérience en recherche. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie également Ayech Benjeddou, maître de conférences au CNAM, pour avoir co-encadré ma thèse et pour les nombreuses et fructueuses discussions sur l'ensemble de mes recherches. A travers notre collaboration, j'ai énormément appris.

J'exprime toute ma reconnaissance à Christian Soize (ONERA), Benoît Petitjean (ONERA), Emmanuel Friot (LMA/CNRS) et Étienne Balmès (ECP) pour leurs précieux conseils tout au long de mes recherches. J'adresse également ma gratitude à Pierre-François Gobin (INSA Lyon), Daniel J. Inman (Virginia Tech.), C.T. Sun (Purdue Univ.), George A. Lesieutre (Penn State Univ.) et Arthur M.B. Braga (PUC-Rio) pour l'encouragement et l'intérêt qu'ils ont manifesté à mes travaux. Encore aujourd'hui, ma durable reconnaissance s'adresse au Professeur Rubens Sampaio (PUC-Rio) pour avoir éveillé mon goût pour la recherche et l'enseignement et, particulièrement, pour m'avoir conseillé à préparer mon doctorat à Paris.

Je remercie vivement MM. Louis Jezequel et Maurice Touratier pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi que tous les membres du jury pour m'avoir fait l'honneur de juger mes travaux de recherche.

J'ai eu la chance de pouvoir être financé personnellement par l'organe ministériel brésilien de coordination de la formation des enseignants du supérieur (CAPES). Je remercie donc ses responsables pour l'intérêt qu'ils ont accordé à ma recherche, en particulier, Madame Marta Elias R. de Oliveira qui a toujours été très gentille et efficace. Les travaux de recherche dont j'ai fait partie ont été financés par la Délégation Générale pour l'Armement (DGA), par l'intermédiaire de J.-P. Grellier que je remercie vivement. Je remercie aussi chaleureusement tous mes collègues du laboratoire qui ont contribué à rendre non seulement productive mais agréable cette période de travail.

Finalement, il me serait impossible de réaliser ce travail sans le soutien de ma

famille. En particulier mes parents Armando e Ana Maria, qui dès l'enfance m'ont fait savoir l'importance des études et qui pendant tout mon parcours m'ont encouragé à me dévouer à mes rêves plutôt qu'à ceux des autres, même sachant que ces rêves, généralement, imposaient plusieurs milliers de kilomètres entre nous. Comme si il n'était pas suffisant d'avoir tout le support de ma famille, j'ai eu la chance que Valéria ait décidé de venir partager ma nouvelle expérience à Paris et devenir par ailleurs mon épouse. Son amour et sa patience, en particulier lors des moments où j'étais un peu trop chargé de travail, ont été infinis.

Résumé

Cette thèse présente une analyse numérique de l'amortissement des vibrations structurales obtenu par des traitements passifs, actifs et hybrides actifs-passifs. Pour cela, un modèle éléments finis de poutre sandwich dont les couches peuvent être élastiques, piézoélectriques ou viscoélastiques est présenté. Il est validé à travers des comparaisons avec les résultats analytiques, expérimentaux et numériques trouvés dans la littérature, puis, étendu au cas de peaux stratifiées. Ensuite, la représentation de la dépendance en fréquence des propriétés des matériaux viscoélastiques est étudiée en utilisant les modèles *Anelastic Displacement Fields* (ADF), *Golla-Hughes-McTavish* (GHM) et *Modal Strain Energy* (MSE) itératif. Une réduction modale à base complexe est proposée et validée à travers des comparaisons avec les résultats trouvés dans la littérature. Un algorithme itératif est proposé pour trouver le contrôle optimal du type *Linear Quadratic Regulator* (LQR) respectant le champ électrique maximum applicable aux pastilles piézoélectriques. La comparaison entre les performances d'amortissement des mécanismes d'action piézoélectrique par extension et par cisaillement montre que les derniers sont plus efficaces pour de petites amplitudes et fréquences élevées et pour des structures sandwich à peaux rigides et cœur souple. Trois traitements amortissants hybrides, obtenus en modifiant l'emplacement relatif des couches viscoélastique et piézoélectrique, ont été analysés et comparés. Il est montré que les traitements par revêtement contraint actif (RCA), consistant à remplacer la couche externe élastique par un actionneur piézoélectrique, ne sont efficaces que pour des couches viscoélastiques très minces. Tandis que les traitements par revêtement contraint passif (RCP) associé à un actionneur piézoélectrique collé sur la surface opposée de la structure (RCP/CA) ou entre la couche viscoélastique et la structure (RCPA/CA) sont, généralement, plus efficaces. Cependant, les trois traitements fournissent des systèmes de contrôle efficaces et robustes. L'étude du contrôle de vibrations d'une poutre sandwich à cœur viscoélastique, à l'aide de deux pastilles collées symétriquement sur ses surfaces supérieure et inférieure, en utilisant trois contrôleurs de types LQR, dérivatif et *Linear Quadratic Gaussian* (LQG) est réalisée. Il est montré que les contrôleurs optimaux LQR et LQG sont plus efficaces que le dérivatif, puisqu'ils sont moins dépendants de la co-localisation des actionneurs et capteurs. Finalement, l'influence de la température d'opération sur la performance de l'amortissement par traitement du type RCA est analysée ; les résultats montrent qu'il est possible d'aboutir à des performances uniformes dans un intervalle de températures.

Mots-clés : Contrôle des vibrations, structures intelligentes, matériaux piézoélectriques, matériaux viscoélastiques, dépendance en fréquence, éléments finis, poutres sandwich

II

Abstract

This thesis presents a numerical analysis of the structural vibrations damping obtained by passive, active and hybrid active-passive damping treatments. For that, a finite element model of a sandwich beam which layers can be elastic, piezoelectric or viscoelastic is presented. It is validated through comparisons with analytical, experimental and numerical results found in the literature and, then, extended to the case of laminated surface layers. The representation of the frequency-dependence of the viscoelastic materials properties is studied using the *Anelastic Displacement Fields* (ADF), *Golla-Hughes-McTavish* (GHM) and iterative *Modal Strain Energy* (MSE) models. A modal reduction of the resulting state-space system using a complex base is proposed and validated through comparisons with the results found in the literature. An iterative algorithm is proposed to evaluate the optimal control (*Linear Quadratic Regulator*, LQR) respecting the maximum electric field allowed by the piezoelectric patches. The comparison between the damping performances of the extension and shear piezoelectric actuation mechanisms shows that the latter are more effective for small amplitudes and high frequencies and for sandwich structures with rigid surface layers and soft core. Three hybrid damping treatments, obtained by modifying the relative position of the viscoelastic and piezoelectric layers, were analyzed and compared. It is shown that active constrained layer (ACL) treatments, consisting in replacing the elastic constraining layer by a piezoelectric actuator, are effective only for very thin viscoelastic layers. At the same time, treatments using passive constrained layer (PCL) associated with a piezoelectric actuator bonded directly on the opposite surface of the structure (AC/PCL) or between the viscoelastic layer and the structure (AC/PSOL) are, generally, more effective. However, the three treatments provide effective and robust control systems. The study of the vibration control of a sandwich beam with viscoelastic core, through two piezoelectric patches bonded symmetrically on its upper and lower surfaces, using three controllers, namely LQR, derivative and *Linear Quadratic Gaussian* (LQG), is carried out. It is shown that optimal controllers LQR and LQG are more effective than the derivative one, since they are less dependent on the colocalisation of the actuators and sensors. Finally, the influence of the operating temperature on the damping performance of an active constrained layer treatment is analyzed. Results show that it is possible to obtain uniform performances in an interval of temperatures.

Keywords : Vibration control, smart structures, piezoelectric materials, viscoelastic materials, frequency-dependence, finite elements, sandwich beams

Table des matières

1 Introduction générale **1**
- 1.1 Motivations . . . 1
- 1.2 Analyse bibliographique . . . 3
  - 1.2.1 Configurations de contrôle hybride . . . 3
  - 1.2.2 Modélisation de poutres sandwich intelligentes . . . 7
  - 1.2.3 Modélisation des matériaux viscoélastiques . . . 9
  - 1.2.4 Algorithmes de contrôle actif . . . 11
  - 1.2.5 Mécanismes d'action piézoélectrique . . . 13
- 1.3 Organisation de la thèse . . . 14

2 Modèles éléments finis de poutre sandwich intelligente **17**
- 2.1 Introduction . . . 17
- 2.2 Formulation théorique . . . 17
  - 2.2.1 Description cinématique de la poutre . . . 18
  - 2.2.2 Lois de comportement . . . 20
  - 2.2.3 Description de l'état électrique . . . 23
  - 2.2.4 Formulation variationnelle . . . 25
  - 2.2.5 Équations de mouvement et conditions limites . . . 33
- 2.3 Discrétisation par éléments finis . . . 35
  - 2.3.1 Modèle sans degrés de liberté électriques . . . 36
  - 2.3.2 Modèle avec degrés de liberté électriques . . . 39
- 2.4 Validation des modèles . . . 42
  - 2.4.1 Validation du modèle sans ddls électriques . . . 42
  - 2.4.2 Comparaison des résultats pour le cas capteur . . . 49
- 2.5 Extension du modèle aux peaux multicouches . . . 54
  - 2.5.1 Champs électriques dans les sous-couches des peaux . . . 55
  - 2.5.2 Formulation variationnelle . . . 56
  - 2.5.3 Équations de mouvement et conditions limites . . . 60
  - 2.5.4 Discrétisation par éléments finis . . . 64
- 2.6 Validation des modèles à peaux multicouches . . . 66
  - 2.6.1 Validation du modèle sans ddls électriques . . . 67
  - 2.6.2 Validation du modèle avec ddls électriques . . . 68
  - 2.6.3 Comparaison des résultats pour le cas capteur . . . 70
- 2.7 Conclusion . . . 73

3 Modélisation des matériaux viscoélastiques **77**
3.1 Introduction . . . 77
3.2 Comportement viscoélastique linéaire . . . 78
3.2.1 Lois de comportement viscoélastique . . . 78
3.2.2 Approche de modules complexes . . . 79
3.3 La méthode itérative des énergies modales . . . 81
3.4 Le modèle Golla-Hughes-McTavish . . . 83
3.5 Le modèle Anelastic Displacement Fields . . . 86
3.6 Système d'équations d'état . . . 88
3.7 Réduction modale des systèmes d'état . . . 89
3.7.1 Représentation d'état des modèles amortis . . . 91
3.8 Lissage des paramètres des modèles ADF/GHM . . . 92
3.8.1 Propriétés asymptotiques du lissage . . . 96
3.9 Validation des modèles viscoélastiques . . . 99
3.9.1 Validation expérimentale par l'analyse modale d'une poutre sandwich . . . 99
3.9.2 Validation des modèles réduits . . . 101
3.10 Conclusion . . . 105

4 Contrôle actif de vibrations **107**
4.1 Introduction . . . 107
4.2 Contrôle optimal quadratique . . . 107
4.2.1 Théorie de contrôle optimal . . . 107
4.2.2 Régulateur linéaire quadratique (LQR) . . . 109
4.2.3 Choix de la matrice de pondération d'état . . . 112
4.2.4 Limitations du gain de contrôle . . . 113
4.2.5 Observation . . . 115
4.3 Controlabilité et observabilité . . . 118
4.3.1 Test de Popov-Belevitch-Hautus . . . 119
4.4 Mise en œuvre digitale . . . 120
4.5 Contrôle actif d'une poutre sandwich à cœur viscoélastique . . . 121
4.5.1 Contrôle optimal linéaire quadratique . . . 122
4.5.2 Contrôle par rétroaction directe des vitesses . . . 126
4.5.3 Prise en compte d'un observateur d'état . . . 133
4.6 Conclusion . . . 137

5 Application aux contrôles actif et hybride actif-passif des vibrations **139**
5.1 Introduction . . . 139
5.2 Analyse statique des mécanismes d'action piézoélectrique . . . 140
5.3 Contrôle actif par action piézoélectrique . . . 146
5.4 Traitements amortissants hybrides actifs-passifs . . . 150
5.4.1 Amortissement par revêtement contraint actif . . . 150
5.4.2 Amortissement par revêtement contraint passif et contrôle actif . . . 157
5.4.3 Amortissement par revêtement contraint passif éloigné et contrôle actif . . . 161

5.4.4 Comparaison des traitements amortissants hybrides 166
5.5 Analyse de l'effet de la température 169
5.5.1 Effet de la température sur l'amortissement 169
5.5.2 Contrôleur dédié à une température 173
5.6 Conclusion 177

6 Conclusion générale **179**
6.1 Résumé des résultats de la thèse 179
6.1.1 Modèles éléments finis de poutre sandwich intelligente 179
6.1.2 Modélisation des matériaux viscoélastiques 179
6.1.3 Contrôle actif de vibrations 180
6.1.4 Application aux contrôles actif et hybride actif-passif des vibrations 180
6.2 Originalités de la thèse 181
6.3 Perspectives de recherche 182
6.4 Publications 182

Bibliographie **185**

A Propriétés des matériaux **193**
A.1 Matériaux élastiques 193
A.2 Matériaux viscoélastiques 193
A.2.1 ISD112 193
A.2.2 Dyad606 194
A.3 Matériaux piézoélectriques 195
A.3.1 PZT5H 195
A.3.2 Matériau piézoélectrique utilisé par Lin *et al.* 195

B Matrices de masse et de rigidité **197**
B.1 Modèle sandwich à trois couches 197
B.2 Modèle sandwich à peaux multicouches 201

Table des figures

1.1 Mécanisme d'amortissement par revêtement contraint passif. 2
1.2 Définition d'une structure intelligente. 2
1.3 Mécanisme d'amortissement par revêtement contraint actif. 4
1.4 Configurations de contrôle hybride actif-passif. 5
1.5 Représentation des mécanismes d'action par extension et par cisaillement. 14

2.1 Cinématique de la poutre sandwich. 19
2.2 Degrés de liberté de l'élément fini PSAP. 37
2.3 Degrés de liberté de l'élément fini PSEP. 40
2.4 Poutres actionnées par extension (a) et par cisaillement (b) (dimensions en mm et pas à l'échelle). 43
2.5 Flèche de la poutre actionnée par cisaillement (PSAP 2 vs. analytique). . . 44
2.6 Flèche de la poutre actionnée par extension (PSAP 2 vs. analytique). . . . 44
2.7 Convergence de la flèche du bout de la poutre actionnée par cisaillement. . 45
2.8 Convergence de la flèche du bout de la poutre actionnée par extension. . . 45
2.9 Effet de l'épaisseur de l'actionneur sur la précision des éléments finis pour l'action par cisaillement. 46
2.10 Effet de l'épaisseur de l'actionneur sur la précision des éléments finis pour l'action par extension. 46
2.11 Variation de la flèche du bout de la poutre avec la position de l'actionneur. 47
2.12 Propriétés géométriques des poutres pour l'analyse modale (dimensions en mm et pas à l'échelle). 47
2.13 Premiers modes propres de flexion pour les mécanismes d'action par cisaillement et par extension 48
2.14 Propriétés géométriques de la poutre pour l'analyse de l'effet du potentiel induit (dimensions en mm et pas à l'échelle). 49
2.15 Effet du potentiel induit en fonction des longueur et épaisseur des pastilles. 49
2.16 Propriétés géométriques des poutres pour le cas capteur (dimensions en mm et pas à l'échelle). 50
2.17 Déplacement axial induit par une force de traction. 51
2.18 Flèche induite par une force de traction. 51
2.19 Tension induite dans les pastilles piézoélectriques par une force axiale. . . 51
2.20 Déplacement axial induit par une force transversale. 52
2.21 Flèche induite par une force transversale. 52
2.22 Tension induite dans les peaux piézoélectriques par un chargement transversal. 53

2.23 Déplacement axial induit par un moment de flexion. 54
2.24 Flèche induite par un moment de flexion. 54
2.25 Tension induite dans les peaux piézoélectriques par un chargement de flexion. 54
2.26 Cinématique de la poutre sandwich à peaux multicouches. 55
2.27 Poutre stratifiée à *n* plis de même épaisseur. 67
2.28 Couche piézoélectrique collée à une poutre relativement épaisse (dimensions en mm et pas à l'échelle). 69
2.29 Propriétés géometriques de la poutre sandwich pour le cas capteur (dimensions em mm et pas à l'échelle). 71
2.30 Déplacement axial induit par une force de traction. 71
2.31 Flèche induite par une force de traction. 71
2.32 Tension induite dans les pastilles piézoélectriques par une force axiale. . . 72
2.33 Déplacement axial induit par une force transversale. 72
2.34 Flèche induite par une force transversale. 72
2.35 Tension induite dans les peaux piézoélectriques par un chargement transversal. 73
2.36 Déplacement axial induit par un moment de flexion. 74
2.37 Flèche induite par un moment de flexion. 74
2.38 Tension induite dans les peaux piézoélectriques par un chargement de flexion. 74

3.1 Fonction de relaxation du matériau ISD112 à 27^{o}C. 79
3.2 Algorithme itératif pour calculer l'amortissement viscoélastique. 83
3.3 Lissage des courbes maîtresses de l'ISD112 avec une série de paramètres : a) ADF, b) GHM. Trait continu : données mesurées, trait discontinu : données estimées. 94
3.4 Lissage des courbes maîtresses de l'ISD112 avec trois séries de paramètres : a) ADF, b) GHM. Trait continu : données mesurées, trait discontinu : données estimées. 95
3.5 Lissage des propriétés de l'ISD112 en dehors de la bande utilisée. a) ADF, b) GHM. Trait continu : données mesurées, trait discontinu : données estimées. 97
3.6 Lissage des propriétés du Dyad606 à 38^{o}C en dehors de la bande utilisée. 98
3.7 Poutre sandwich encastrée-libre avec des pastilles piézoélectriques (dimensions en mm et pas à l'échelle). 99
3.8 Les trois premiers modes de flexion de la poutre à cinq couches. 100
3.9 Propriétés géométriques de la poutre encastrée-libre traitée par un revêtement viscoélastique contraint (dimensions en mm et pas à l'échelle). 101
3.10 Variation des trois premières fréquences propres (a) et amortissement modaux (b) avec l'épaisseur de la couche viscoélastique pour les modèles ADF, GHM et MSE. ∇ : premier mode, $\circ$: deuxième mode, $\square$: troisième mode. ($a = 190$ mm) 102

3.11 Variation des trois premières fréquences propres (a) et amortissement modaux (b) avec la longueur du traitement pour les modèles ADF, GHM et MSE. ▽ : premier mode, ○ : deuxième mode, □ : troisième mode. ($h_v = 0,5$ mm) 103
3.12 FRF de la poutre utilisant les modèles MSE et ADF/GHM réduit et complet. 104
3.13 Réponse transitoire utilisant les modèles MSE et ADF/GHM réduit et complet. 104

4.1 Représentation des entrées et sorties du système. 109
4.2 Algorithme itératif pour calculer le gain de contrôle optimal avec limitation de l'entrée. 115
4.3 Tension maximale et amortissements modaux en fonction du facteur de pondération d'entrée γ. 116
4.4 Conversion A/D, traitement digital et conversion D/A. 121
4.5 Poutre sandwich à cœur viscoélastique contrôlée activement. 121
4.6 La somme des trois premiers amortissements modaux de la poutre sandwich en boucle-ouverte. 123
4.7 La somme des trois premiers amortissements modaux de la poutre sandwich en boucle-fermée. 124
4.8 La somme des gains d'amortissements des trois premiers modes fournit par l'actionneur piézoélectrique. 124
4.9 Fonction de réponse en fréquence de la poutre sandwich en boucle-ouverte et en boucle-fermée pour $a = 70$ mm et $h_v = 0,1$ mm. 125
4.10 Réponse transitoire de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour $a = 70$ mm et $h_v = 0,1$ mm. 125
4.11 Tension dans l'actionneur pour contrôler la réponse de la poutre sandwich pour $a = 70$ mm et $h_v = 0,1$ mm. 126
4.12 Lieu des racines entre le capteur de la vitesse du bout de la poutre et l'actionneur piézoélectrique (pôles $\times$ et zéros $\circ$ en boucle ouverte et pôles $+$ en boucle fermée pour $K_d = 605$). 127
4.13 Fonction de réponse en fréquence limitée aux cinq premiers modes propres, entre le capteur piézoélectrique et la force de perturbation en boucle-ouverte et fermée, pour trois gains du contrôle par rétroaction de la vitesse du bout de la poutre. 128
4.14 Réponses transitoires, en boucle-ouverte et fermée, de la flèche du bout de la poutre pour les trois gains du contrôle par rétroaction de la vitesse du bout de la poutre. 129
4.15 Tensions de contrôle imposées à l'actionneur pour les trois gains du contrôle par rétroaction de la vitesse du bout de la poutre. 129
4.16 Lieu des racines entre les capteur et actionneur piézoélectriques collés sur les surfaces opposées de la poutre sandwich (pôles $\times$ et zéros $\circ$ en boucle ouverte et pôles $+$ en boucle fermée pour $K_d = -13,5.10^{-3}$). 131

4.17 Fonction de réponse en fréquence limitée aux cinq premiers modes propres, entre le capteur piézoélectrique et la force de perturbation en boucle-ouverte et fermée, pour trois gains du contrôle par rétroaction de la tension du capteur piézoélectrique. 131
4.18 Réponses transitoires, en boucle-ouverte et fermée, de la flèche du bout de la poutre pour les trois gains du contrôle par rétroaction de la tension du capteur piézoélectrique. 132
4.19 Tensions de contrôle imposées à l'actionneur pour les trois gains du contrôle par rétroaction de la tension du capteur piézoélectrique. 132
4.20 Réponse transitoire en boucle fermée de la poutre sandwich contrôlée avec observateur d'état de covariance du bruit de sortie $\mathbf{V} = 1$. 134
4.21 Tension maximale dans l'actionneur pour le contrôleur optimal avec observateur d'état de covariance du bruit de sortie $\mathbf{V} = 1$. 134
4.22 Réponse transitoire en boucle fermée de la poutre sandwich contrôlée avec observateur d'état de covariance du bruit de sortie $\mathbf{V} = 10^{-8}$. 135
4.23 Tension maximale dans l'actionneur pour le contrôleur optimal avec observateur d'état de covariance du bruit de sortie $\mathbf{V} = 10^{-8}$. 135
4.24 Réponse transitoire en boucle fermée de la poutre sandwich contrôlée avec observateur d'état de covariance du bruit de sortie $\mathbf{V} = 10^{-10}$. 136
4.25 Tension maximale dans l'actionneur pour le contrôleur optimal avec observateur d'état de covariance du bruit de sortie $\mathbf{V} = 10^{-10}$. 136

5.1 Configurations d'action par extension (a) et par cisaillement (b) d'une poutre encastrée-libre (dimensions en mm et pas à l'échelle). 140
5.2 Déformées des poutres sandwich actionnées par extension (a) et par cisaillement (b). 140
5.3 Contraintes axiales dans l'épaisseur des poutres sandwich actionnées par extension (a) et par cisaillement (b). 141
5.4 Déformations de cisaillement du cœur suivant la longueur de la poutre : (a) EAM, (b) SAM. 143
5.5 Variation de la flèche du bout de la poutre avec les position du centre et longueur des pastilles piézoélectriques : (a) EAM, (b) SAM. 144
5.6 Variation de la flèche du bout de la poutre avec l'épaisseur de l'actionneur. 145
5.7 Variation de la flèche du bout de la poutre avec la rigidité relative de la structure. 145
5.8 Configurations d'action par extension (a) et par cisaillement (b) d'une poutre encastrée-libre. 146
5.9 Fonction de réponse en fréquence en boucle-ouverte de la flèche en $x = L/3$ des poutres sandwich (trait continu : SAM, trait discontinu : EAM). . 147
5.10 Variation de l'amortissement relatif $(\log_{10}(\tilde{\zeta}_{sam}/\tilde{\zeta}_{eam}) + 5)$ avec la longueur d'un actionneur unique. 148
5.11 Variation de l'amortissement relatif $(\log_{10}(\tilde{\zeta}_{sam}/\tilde{\zeta}_{eam}) + 6)$ avec la position d'un actionneur unique. 148
5.12 Variation de l'amortissement relatif $(\log_{10}(\tilde{\zeta}_{sam}/\tilde{\zeta}_{eam}) + 2)$ avec la rigidité relative de la structure (E_b/E_p). 149

5.13 Variation de l'amortissement relatif ($\log_{10}(\tilde{\zeta}_{sam})+3$) avec la rigidité de la mousse ($E_m/35,3e6$). 149
5.14 Poutre traitée par un revêtement viscoélastique contraint actif. 151
5.15 La somme des trois premiers amortissements modaux du RCA en boucle-ouverte. 151
5.16 La somme des trois premiers amortissements modaux du RCA en boucle-fermée. 152
5.17 La somme des gains d'amortissements des trois premiers modes fournit par le RCA. 152
5.18 Fonction de réponse en fréquence de la poutre avec RCA en boucle-ouverte et en boucle-fermée ($a = 70$ mm, $h_v = 0,03$ mm). 153
5.19 Réponse transitoire de la poutre avec RCA en boucle-ouverte et en boucle-fermée ($a = 70$ mm, $h_v = 0,03$ mm). 154
5.20 Tension de l'actionneur pour les contrôleurs RCA du premier et du deuxième modes ($a = 70$ mm, $h_v = 0,03$ mm). 155
5.21 Variation de l'amortissement modal avec le nombre d'actionneurs pour $a = 70$ mm et $h_v = 0,03$ mm (trait continu : hybride, trait discontinu : passif). 156
5.22 Variation de la controlabilité des trois premiers modes par le premier actionneur avec le nombre d'actionneurs pour $a = 70$ mm et $h_v = 0,03$ mm ($\mathbf{B}(i)$ est la i-ième composante du vecteur de contrôle). 156
5.23 Poutre traitée par revêtement contraint passif et contrôle actif. 157
5.24 La somme des trois premiers amortissements modaux du RCP/CA en boucle-ouverte. 158
5.25 La somme des trois premiers amortissements modaux du RCP/CA en boucle-fermée. 158
5.26 La somme des gains d'amortissements des trois premiers modes fournit par le RCP/CA. 159
5.27 Fonction de réponse en fréquence de la poutre avec RCP/CA en boucle-ouverte et en boucle-fermée ($a = 70$ mm, $h_v = 0,03$ mm). 159
5.28 Réponse transitoire de la poutre avec RCP/CA en boucle-ouverte et en boucle-fermée ($a = 70$ mm, $h_v = 0,03$ mm). 160
5.29 Tension de l'actionneur pour les contrôleurs RCP/CA du premier et du deuxième modes ($a = 70$ mm, $h_v = 0,03$ mm). 161
5.30 Poutre traitée par revêtement contraint passif éloigné et contrôle actif. . . 161
5.31 La somme des trois premiers amortissements modaux du RCPE/CA en boucle-ouverte. 162
5.32 La somme des trois premiers amortissements modaux du RCPE/CA en boucle-fermée. 163
5.33 La somme des gains d'amortissements des trois premiers modes fournit par le RCPE/CA. 163
5.34 Fonction de réponse en fréquence de la poutre avec RCPE/CA en boucle-ouverte et en boucle-fermée ($a = 70$ mm, $h_v = 0,1$ mm). 164
5.35 Réponse transitoire de la poutre avec RCPE/CA en boucle-ouverte et en boucle-fermée ($a = 70$ mm, $h_v = 0,1$ mm). 165

5.36 Tension de l'actionneur pour les contrôleurs RCPE/CA du premier et du deuxième modes. 165
5.37 Variation de la différence entre les sommes d'amortissements ($\zeta_p + \zeta_h$) des traitements RCP/CA et RCA en fonction de a et h_v. 168
5.38 Variation de la différence entre les sommes d'amortissements ($\zeta_p + \zeta_h$) des traitements RCPE/CA et RCA en fonction de a et h_v. 168
5.39 Variation de la différence entre les sommes d'amortissements ($\zeta_p + \zeta_h$) des traitements RCPE/CA et RCP/CA en fonction de a et h_v. 169
5.40 Poutre encastrée-libre traitée par un revêtement contraint actif. 170
5.41 Variation des propriétés du matériau viscoélastique Dyad606 avec la température. 170
5.42 Réponse en fréquence de l'extrémité libre de la poutre : (a) en boucle-ouverte, utilisant les modèles ADF, GHM et MSE ; (b) en boucle-ouverte et fermée. 172
5.43 Réponse du premier mode propre en boucle-ouverte pour plusieurs températures. 173
5.44 Déviation de la performance de contrôle relative à 25°C : (a) Amortissement hybride $(\zeta(\theta)/\zeta(25))$; (b) Tension maximale $(V_{max}(\theta)/V_{max}(25))$. . 174
5.45 Réponse transitoire en boucle-ouverte et fermée (un contrôleur par température) à : (a) 10°C ; (b) 25°C ; (c) 30°C ; (d) 38°C. 175
5.46 Variation de l'amortissement avec la température : (a) Amortissement passif ; (b) Gain d'amortissement fournit par le contrôleur ; ○ : MSE ; ▽ : ADF ; □ : GHM. 176

Liste des tableaux

2.1 Les cinq premières fréquences (Hz) propres de flexion de la poutre de Lin *et al.*, pour les configurations d'action par cisaillement et par extension. . 48
2.2 Les cinq premières fréquences propres (Hz) de flexion d'une poutre de graphite-epoxy (AS4/3501-6) simplement appuyée. 67
2.3 Les trois premières fréquences propres adimensionalisées ($= \omega L^2(\rho/E_1H^2)^{1/2}$) de flexion de poutres composites à 4 plis $(0/90)_s$ symétriques. 68
2.4 Les trois premières fréquences propres adimensionalisées ($= \omega L^2(\rho/E_1H^2)^{1/2}$) de flexion de poutres composites à 100 plis $(0/90)_{50s}$ symétriques. 68
2.5 Propriétés des matériaux de la poutre tricouche relativement épaisse. . . . 69
2.6 Les cinq premières fréquences propres (Hz) de la poutre tricouche relativement épaisse. 70

3.1 Représentations mathématiques des fonctions viscoélastiques $h(s)$. 79
3.2 Les paramètres optimaux des modèles ADF/GHM à la convergence pour le matériau ISD112 à 27°C. 93
3.3 Les paramètres optimaux du modèle GHM à la convergence pour le matériau Dyad606 à 38°C. 99
3.4 Propriétés des matériaux de la poutre à cinq couches. 100
3.5 Les trois premières fréquences propres de flexion de la poutre encastrée-libre à cinq couches. 100
3.6 Fréquences propres (Hz) et amortissements modaux (%), calculés en utilisant les modèles ADF, GHM et MSE. 101

4.1 Performances optimales du contrôle actif d'une poutre sandwich amortie. 123
4.2 Amortissements modaux (%) passif et supplémentaires ajoutés par le contrôleur par rétroaction directe des vitesses $\dot{w}_L$ et $\dot{V}_S$ à gain maximum. . 128

5.1 Performances optimales des traitements hybrides en boucle-ouverte (passif) et fermée (hybride). 167
5.2 Fréquences propres (Hz) et amortissements (%) en boucle-ouverte et fermée à 25°C. 171

A.1 Propriétés des matériaux composites isotropes transverses. 193
A.2 Paramètres des modèles ADF/GHM pour le matériau ISD112 à 27°C. . . 194
A.3 Paramètres des modèles ADF/GHM pour le matériau Dyad606 à 10°C. . 194

A.4 Paramètres des modèles ADF/GHM pour le matériau Dyad606 à 25°C. . 194
A.5 Paramètres des modèles ADF/GHM pour le matériau Dyad606 à 30°C. . 194
A.6 Paramètres des modèles ADF/GHM pour le matériau Dyad606 à 38°C. . 195

Nomenclature

Indices

i ..... indice désignant les couches *a*, *b* et *c* de la poutre sandwich

k ..... indice désignant les peaux *a* et *b* de la poutre sandwich

j ..... sous-indice désignant la j-ième sous-couche des peaux *a* et *b*

l ..... indice désignant des nombres entiers variant de 1 à 6

m ..... indice désignant des nombres entiers variant de 1 à 6

p ..... indice désignant la somme des quantités des peaux *a* et *b*

Propriétés géométriques

A_i ..... aire de la section transversale de la i-ième couche

b ..... largeur de la poutre

d ..... le quart de la différence entre les épaisseurs des peaux supérieure et inférieure

h_i ..... épaisseur de la i-ième couche de la poutre

I_i ..... moment quadratique de la section transversale de la i-ième couche

$\overline{I_i}$ ..... moment statique de la section transversale de la i-ième couche

k_c ..... facteur de correction de cisaillement

L ..... longueur de la poutre

λ ..... rapport de la moyenne des épaisseurs des peaux à celle du cœur

Propriétés des matériaux

$\hat{\alpha}_i, \hat{\omega}_i, \hat{\zeta}_i$ ... i-ième série de paramètres du modèle GHM

c^i_{lm} ..... constantes élastiques du matériau de la i-ième couche

c^{*i}_{lm} ..... constantes élastiques modifiées du matériau de la i-ième couche

e^i_{nm} ..... constantes piézoélectriques du matériau de la i-ième couche

e^{*k}_{nm} ..... constantes piézoélectriques modifiées du matériau de la k-ième couche

ϵ^i_{nn} ..... constantes diélectriques du matériau de la i-ième couche

ϵ^{*k}_{nn} ..... constantes diélectriques modifiées du matériau de la k-ième couche

$G^*(\omega)$ .... module complexe de cisaillement du matériau viscoélastique
G_0 ..... module de cisaillement relaxé du matériau viscoélastique
G_∞ ..... module de cisaillement non-relaxé du matériau viscoélastique
Ω_i,Δ_i,C_i ... i-ième série de paramètres du modèle ADF

Variables scalaires

β_i ..... rotation, dans le plan xz, de la section transversale de la i-ième couche
D_{ni} ..... n-ième composante du vecteur de déplacement électrique de la i-ième couche
δH ..... travail virtuel des efforts électromécaniques internes
δT ..... travail virtuel des efforts d'inertie
δW ..... travail virtuel réalisé par les forces externes
E_{ni} ..... n-ième composante du vecteur champ électrique de la i-ième couche
ε_c^c ..... déformation généralisée de cisaillement du cœur
ε_i^f ..... déformation généralisée de flexion de la i-ième couche
ε_i^m ..... déformation généralisée de membrane de la i-ième couche
ε_{li} ..... l-ième composante du vecteur déformation de la i-ième couche
$\overline{\varphi}_i$ ..... moyenne des potentiels imposés sur les surfaces supérieure et inférieure de la i-ième couche
V_i ..... différence entre les potentiels imposés sur les surfaces supérieure et inférieure de la i-ième couche
φ^+ ..... potentiel imposé sur la surface supérieure des couches piézoélectriques
φ^- ..... potentiel imposé sur la surface inférieure des couches piézoélectriques
γ ..... facteur de multiplication de la pondération de contrôle
J ..... fonction coût quadratique
K_d ..... gain de contrôle pour la rétroaction directe de vitesse
M_i ..... moment concentré aux bords de la i-ième couche
m_i ..... moment reparti dans la i-ième couche
N_i ..... force normale concentrée aux bords de la i-ième couche
N_l ..... l-ième fonction de forme
n_i ..... force normale repartie dans la i-ième couche
Q_i ..... force transversale concentrée aux bords de la i-ième couche
q_i ..... force transversale repartie dans la i-ième couche
σ_{li} ..... l-ième composante du vecteur contrainte de la i-ième couche
s ..... variable de Laplace, $s = j\omega$
F_x^i,F_z^i ..... forces surfaciques axiale et transversale imposées à la i-ième couche

f_x^i, f_z^i ..... forces volumiques axiale et transversale imposées à la i-ième couche
$\bar{u}$ ..... déplacement moyen des plans moyens des peaux
u_i ..... déplacement axial du plan moyen de la i-ième couche de la poutre sandwich
$\tilde{u}$ ..... déplacement relatif des plans moyens des peaux supérieure et inférieure
$\check{u}_i$ ..... déplacement axial de la i-ième couche de la poutre sandwich
ω ..... pulsation
w ..... déplacement transversal de la i-ième couche de la poutre sandwich
$x, 1$ ..... direction longitudinale suivant la longueur de la poutre
$y, 2$ ..... direction transversale suivant la largeur de la poutre
$z, 3$ ..... direction transversale suivant l'épaisseur de la poutre

Variables vectorielles et matricielles

$\mathbf{A}$ ..... matrice d'état
$\hat{\mathbf{A}}$ ..... matrice d'état réduite
$\mathbf{B}$ ..... matrice de contrôle
$\hat{\mathbf{B}}$ ..... matrice de contrôle réduite
$\mathbf{B}_{im}, \mathbf{B}_{if}, \mathbf{B}_{ic}$ vecteurs d'interpolation des déformations de membrane (m), de flexion (f) et de cisaillement (c) de la i-ième couche
$\mathbf{C}$ ..... matrice de sortie d'état
$\hat{\mathbf{C}}$ ..... matrice de sortie d'état réduite
$\mathbf{D}$ ..... matrice d'amortissement visqueux de la poutre sandwich
$\mathbf{F}_m$ ..... vecteur des forces généralisées mécaniques distribuées
$\mathbf{F}_e$ ..... vecteur des forces généralisées électriques
$\mathbf{I}$ ..... matrice identité
$\mathbf{K}_c^0$ ..... matrice de rigidité statique du cœur viscoélastique
$\mathbf{K}_c^\infty$ ..... matrice de rigidité haute-fréquence du cœur viscoélastique
$\mathbf{K}_g$ ..... matrice de gain de contrôle
$\mathbf{K}_i$ ..... matrice de rigidité de la i-ième couche
$\mathbf{K}_p$ ..... somme des matrices de rigidité des peaux
$\bar{\mathbf{K}}_c$ ..... matrice de rigidité du cœur viscoélastique facteur de G^*
$\bar{\mathbf{K}}_k$ ..... matrice de rigidité de la k-ième couche piézoélectrique
Λ ..... matrice diagonale des valeurs propres
$\mathbf{M}$ ..... matrice de masse de la poutre sandwich
$\mathbf{N}_{ix}, \mathbf{N}_{iz}, \mathbf{N}_{ir}$ vecteurs d'interpolation des déplacements axial (x) et transversal (z) et des rotations (r) de la i-ième couche

$\mathbf{P}$ ..... matrice solution de l'équation de Riccati
$\mathbf{p}$ ..... vecteur des perturbations
$\hat{\mathbf{p}}$ ..... vecteur des perturbations réduit
$\mathbf{Q}$ ..... matrice de pondération d'état
$\mathbf{q}$ ..... vecteur des degrés de liberté
$\mathbf{q}_e$ ..... vecteur des degrés de liberté élémentaires
$\mathbf{q}^e$ ..... vecteur des degrés de liberté élastiques
$\mathbf{q}_i^d$ ..... vecteur de la i-ième série de degrés de liberté dissipatifs
$\hat{\mathbf{q}}_i^d$ ..... vecteur de la i-ième série de degrés de liberté dissipatifs réduits
$\mathbf{R}$ ..... matrice de pondération de contrôle
$\bar{\mathbf{R}}$ ..... matrice de pondération de contrôle pour $\gamma = 1$
$\mathbf{T}$ ..... matrice des vecteurs propres correspondant à Λ
$\mathbf{T}_d$ ..... base de réduction modale, à droite, des variables d'état
$\mathbf{T}_g$ ..... base de réduction modale, à gauche, des variables d'état
$\mathbf{u}$ ..... vecteur des entrées de contrôle
$\mathbf{x}$ ..... vecteur des variables d'état
$\hat{\mathbf{x}}$ ..... vecteur des variables d'état réduit
χ ..... vecteur des déplacements modaux
$\mathbf{y}$ ..... vecteur des sorties d'état

Opérations mathématiques

$(\bullet)'$ ..... dérivée par rapport à la direction x, $\partial(\bullet)/\partial x$
$\dot{(\bullet)}$ ..... dérivée par rapport au temps t, $\partial(\bullet)/\partial t$
$\delta(\bullet)$ ..... variation virtuelle de la quantité $(\bullet)$

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Motivations

Les vibrations structurales sont très indésirables puisqu'elles peuvent causer des problèmes tels que la fatigue structurale, la transmission des vibrations à d'autres systèmes, le bruit interne ou externe dû au rayonnement acoustique, etc. Néanmoins, il est possible de limiter leurs effets grâce, fondamentalement, à trois types de techniques de réduction de vibrations. La première est la technique d'annulation (ou suppression), utilisée surtout pour éliminer le bruit engendré par la vibration et non la vibration elle-même, se fait par la production d'une source de bruit secondaire émettant le négatif du bruit primaire afin d'aboutir à une annulation des deux sources. La seconde est l'isolation qui consiste à éviter la transmission des vibrations d'un système à un autre sans pour autant éliminer les vibrations du système émetteur. Finalement, le troisième groupe de techniques, dit d'atténuation, est utilisé pour diminuer l'amplitude des vibrations d'un système, en cas d'échec ou d'impossibilité de son isolation, ou pour réduire le rayonnement acoustique, en cas d'impossibilité de production ou d'inefficacité d'une source secondaire d'anti-bruit. Les techniques d'atténuation consistent à diminuer l'amplitude des vibrations structurales dont les fréquences sont dans le voisinage des fréquences propres de la structure. Par conséquent, ces techniques permettent d'atténuer, ou même d'éliminer, les résonances de la structure. En général, elles peuvent être classées en passives ou actives.

Les techniques passives d'amortissement des vibrations structurales utilisent l'intégration ou l'ajout de matériaux ou systèmes, possédant des propriétés amortissantes, couplés à la structure de telle façon que les vibrations de la structure sont amorties passivement, c'est-à-dire, sans aucune intervention extérieure supplémentaire. Les revêtements composés de matériaux polymères viscoélastiques constituent des traitements très efficaces pour réduire les amplitudes de résonance de structures vibrantes. Ces matériaux ont la propriété de passer d'un état peu rigide (caoutchouteux), pour des températures élevées et des fréquences de vibration basses, à un autre rigidifié (vitreux), pour la situation opposée. De plus, dans la région de transition entre ces deux états, où leurs propriétés élastiques varient rapidement, ces matériaux sont capables de transformer l'énergie de déformation en énergie thermique, dissipant ainsi, sous forme de chaleur, l'énergie vibratoire de la structure sur laquelle ils sont collés. Par ailleurs, il a été constaté [66, 68] que

ces revêtements viscoélastiques sont beaucoup plus efficaces quand ils sont recouverts d'une couche élastique permettant de les faire déformer en cisaillement (Figure 1.1). Ce traitement est dénommé *Revêtement Contraint Passif* (RCP).

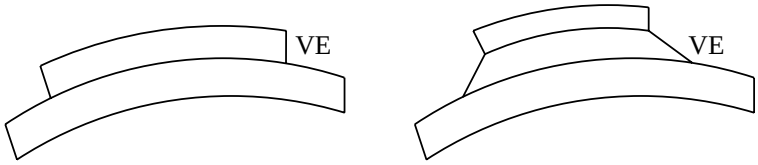


Figure 1.1: Mécanisme d'amortissement par revêtement contraint passif.

Les techniques actives permettent, quant à elles, de contrôler les vibrations à chaque instant par des actionneurs qui agissent sur la structure selon une loi de commande conçue pour minimiser une mesure quelconque de l'intensité des vibrations indésirables. C'est le principe du contrôle actif (CA) des vibrations. Ces mesures sont, soit basées sur une référence, soit fournies par des capteurs plus ou moins intégrés dans la structure. Dans le premier cas, le système est dit *feedforward* et, dans l'autre, *feedback*, ce dernier étant dû à la rétroaction des mesures effectuées sous forme d'action de contrôle des vibrations.

Une structure contenant des actionneurs et capteurs collés ou intégrés et couplés par un système de contrôle (Figure 1.2) est dite intelligente ou adaptative. En effet, les mesures fournies par le capteur sont traitées par un système de contrôle approprié, qui envoie ensuite à l'actionneur un signal capable de modifier le comportement de la structure, l'adaptant à un comportement requis.

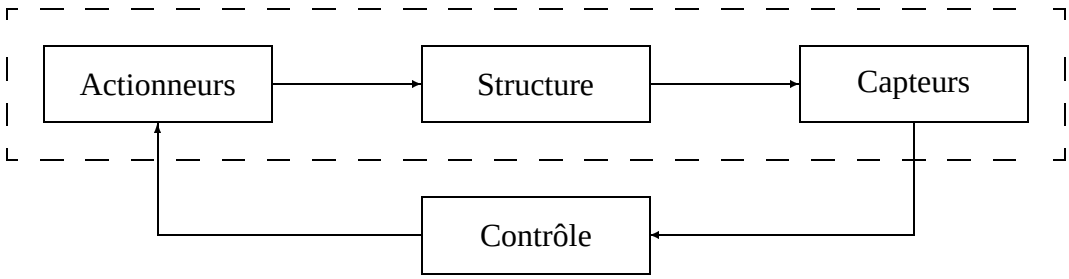


Figure 1.2: Définition d'une structure intelligente.

Il existe plusieurs manières de construire une structure intelligente à partir d'une structure de base. Cette conception consiste à choisir les actionneurs, capteurs et systèmes de contrôle. Les actionneurs et capteurs sont, généralement, fabriqués à partir de matériaux, dits *intelligents*, capables de fournir une action distribuée, générée par le couplage naturel de leurs déformations ou contraintes avec différents facteurs externes comme des champs électrique, magnétique ou de température, etc. Parmi les matériaux intelligents les plus utilisés on peut citer les céramiques et polymères piézoélectriques, les matériaux à mémoire de forme, les matériaux électrostrictifs ou magnétostrictifs et les fluides électro-rhéologiques.

Ce travail sera limité aux actionneurs construits à partir de pastilles céramiques piézoélectriques, à base de *zirconate et titanate de plomb* PZT, qui se déforment lorsqu'ils sont actionnés par un potentiel électrique (effet inverse) et induisent un potentiel

électrique lorsqu'ils sont déformés (effet direct). Ces actionneurs font partie de la famille des actionneurs distribués qui, contrairement aux actionneurs ponctuels, agissent à travers des forces réparties sur leur surface. Ces matériaux peuvent aussi être utilisés comme capteurs piézoélectriques permettant de fournir, à chaque instant, une valeur moyenne des déformations d'une région de la structure correspondant à la surface du capteur. Cependant, ce travail ne se limitera pas aux capteurs piézoélectriques, considérant aussi des capteurs discrets du type accéléromètres ou optiques. L'intérêt des actionneurs et capteurs distribués est qu'ils permettent de contrôler une bande plus large de fréquences et, aussi, d'aboutir à un système de contrôle moins encombrant, puisque les actionneurs et capteurs sont intégrés dans la structure et toute action ne nécessite que des câbles de connexion entre les actionneurs, capteurs et contrôleurs. Par ailleurs, dans cette classe de contrôle, il existe une multitude de systèmes de contrôle intégrés qui diffèrent en fonction de la configuration capteur/actionneur/structure.

La nécessité de systèmes de contrôle à la fois, fiables et robustes, comme le contrôle passif et, efficaces et commandables, comme le contrôle actif, a motivé récemment le développement de systèmes de contrôle hybride actif-passif, utilisant dans le même traitement les matériaux viscoélastique (passif) et piézoélectrique (actif). Le premier assure la fiabilité et la robustesse du système puisqu'en cas de mauvais fonctionnement du contrôle actif, le système reste amorti. Le second améliore les performances du système pour les très basses fréquences. Les deux contrôles passif et actif agissent donc en complémentarité.

Cette thèse s'intéresse aux deux techniques passive et active d'atténuation des amplitudes des vibrations, séparément puis conjointement à travers le contrôle hybride actif-passif.

1.2 Analyse bibliographique

Le développement de systèmes de contrôle actif-passif fait l'objet actuellement de plusieurs projets de recherche dans le monde. L'analyse des publications trouvées dans la littérature montre que les principaux centres d'intérêt concernent : 1) les configurations de contrôle hybride ; 2) la modélisation de structures sandwich multicouches ; 3) la modélisation des matériaux viscoélastiques ; 4) les algorithmes de contrôle. Cependant, le mécanisme d'action de l'actionneur piézoélectrique n'a pas été étudié par cette communauté. On présente donc ici une discussion sur les mécanismes d'action piézoélectrique. Dans les sous-sections suivantes, l'analyse bibliographique concernant chacun de ces thèmes est présentée. Même si les travaux analysés concernent plusieurs applications, l'analyse qui suit sera limitée aux études de structures du type poutre, puisqu'elles seront les seules structures traitées dans ce travail. D'autres analyses bibliographiques sur le contrôle actif-passif peuvent être trouvées dans les synthèses fournies dans [15, 42, 57].

1.2.1 Configurations de contrôle hybride

Les traitements amortissants passifs par revêtement viscoélastique contraint sont déjà largement utilisés pour amortir des vibrations structurales [66, 68]. Pour certaines

applications, visant un amortissement intégré, il est aussi envisageable de remplacer des parties de la structure par d'autres sous forme de sandwich à cœur viscoélastique, ou même d'en concevoir directement des parties sandwich intégrées.

Le succès de ces traitements passifs combiné aux progrès obtenus dans le domaine des structures intelligentes a motivé le développement de traitements hybrides actif-passif, consistant à remplacer la couche élastique par des actionneurs piézoélectriques. Ces traitements, dit par *Revêtement Contraint Actif* (RCA) ont été suggérés par Plump et Hubbard[1] [73]. Leurs principaux avantages résident dans (i) leur capacité d'augmenter activement le cisaillement du matériau viscoélastique ($\gamma_a > \gamma_s$, Figure 1.3), à travers l'actionneur piézoélectrique, améliorant ainsi la dissipation d'énergie ; (ii) la combinaison des performances aux fréquences plus élevées, des matériaux viscoélastiques, et aux très basses fréquences, des actionneurs piézoélectriques ; (iii) l'augmentation de la robustesse du contrôle actif, dans la mesure où, en cas de mauvais fonctionnement, le système reste amorti.

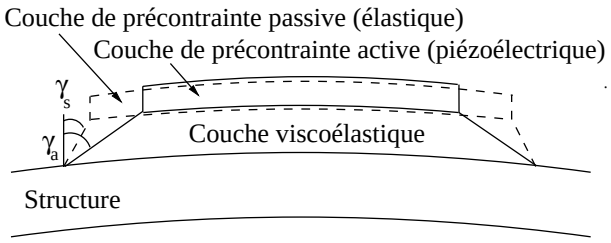


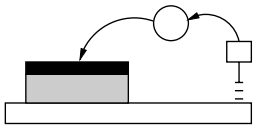
Figure 1.3: Mécanisme d'amortissement par revêtement contraint actif.

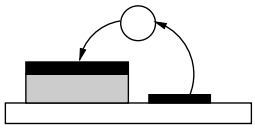
Depuis le début des années 90, plusieurs configurations de traitements RCA ont été présentées dans la littérature. Celle proposée par Plump et Hubbard [73] a été retenue par la majorité des chercheurs. Néanmoins, une multitude de systèmes ont été proposés selon les positions et types des capteurs/actionneurs. Ainsi, Agnes et Napolitano [1], Huang *et al.* [40] et Yellin et Shen [94] ont supposé des actionneurs auto-capteurs dans le revêtement contraint actif (Figure 1.4d), tandis que Shen [80, 81] et Liao et Wang [61] ont utilisé des capteurs optiques pour mesurer la flèche du bout de la poutre (Figure 1.4a). L'avantage des actionneurs auto-capteurs est d'aboutir à un système de contrôle co-localisé. Varadan *et al.* [88] ont considéré un capteur piézoélectrique collé à côté du traitement hybride (Figure 1.4b). Lesieutre et Lee [57] ont proposé de segmenter le traitement afin d'augmenter sa robustesse, bien que les performances pour les fréquences plus élevées ont été diminuées. Dans ce cas, les déformations de la surface opposée de la poutre sont mesurées (Figure 1.4c). Cette configuration a aussi été étendue par Baz [10] en considérant deux traitements collés symétriquement sur les surfaces d'une poutre, mais seuls les déplacements longitudinaux ont été considérés afin d'étudier le mécanisme d'amélioration du cisaillement de la couche viscoélastique.

Une variation de la configuration précédente a été proposée par Baz [11, 13, 14] en plaçant un capteur piézoélectrique entre la couche viscoélastique et la structure (Figure 1.4e). Elle permet d'aboutir à une bonne co-localisation des actionneurs et capteurs sans

[1]Cette référence n'a pu être consultée mais un consensus existe dans la littérature que c'est le premier travail sur le revêtement contraint actif.

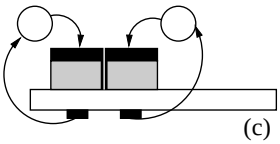
Liao et Wang [61]
Shen [81]

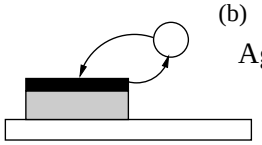

(a)


(b)

Varadan *et al.* [88]

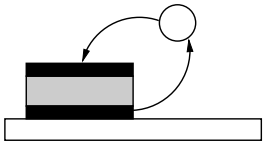
Lesieutre et Lee [57]

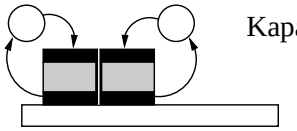

(c)


(d)

Agnes et Napolitano [1]
Huang *et al.* [40]
Yellin et Shen [94]

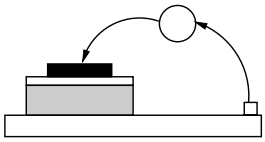
Baz [11]
Baz et Ro [13, 14]
Veley et Rao [89]

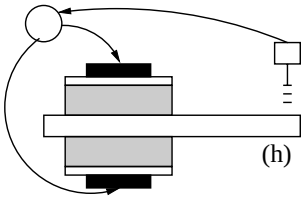

(e)


(f)

Kapadia et Kawiecki [46]

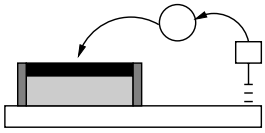
Azvine *et al.* [4]

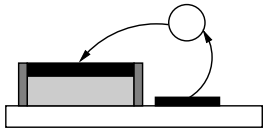

(g)


(h)

Azvine *et al.* [3]
Rongong *et al.* [78]

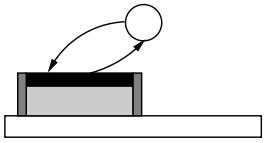
Liao et Wang [60]

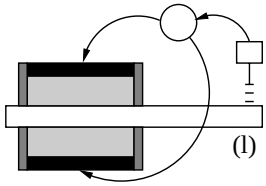

(i)


(j)

Varadan *et al.* [88]

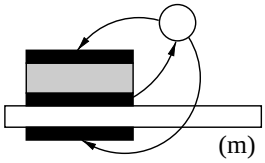
Liu et Wang [64]

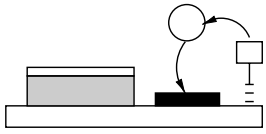

(k)


(l)

Badre-Alam *et al.* [5]

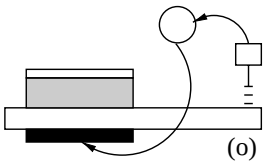
Chen et Baz [20]
Crassidis *et al.* [22]

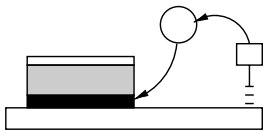

(m)


(n)

Lam *et al.* [51]

Lam *et al.* [51]


(o)


(p)

Lam *et al.* [51]

Friswell et Inman [31]

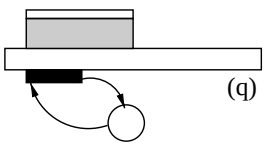

(q)

Figure 1.4: Configurations de contrôle hybride actif-passif.

avoir à mettre en œuvre les circuits complexes des actionneurs auto-capteurs. Cette configuration a aussi été retenue par Veley et Rao [89] et, en version segmentée, par Kapadia et Kawiecki [46] (Figure 1.4f). Parallèlement, afin de traiter activement des structures déjà revêtues par des traitements passifs contraints, Azvine *et al.* [4] ont collé une pastille piézoélectrique sur le revêtement contraint passif (Figure 1.4g). Cette configuration a été reprise dans [3, 78] mais avec deux traitements collés symétriquement sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre (Figure 1.4h). Dans les deux cas, des mesures des déplacements de la poutre sont effectuées, à l'aide d'un accéléromètre pour le premier cas et d'un capteur optique pour l'autre. Un avantage de cette construction est de permettre que les longueurs des traitements actif et passif soient différentes, contrairement aux précédentes qui nécessitent des actionneurs couvrant entièrement les couches viscoélastiques.

D'après les travaux ci-dessus présentés, les traitements hybrides sont plus efficaces que les passifs dans tous les cas. Par rapport au contrôle purement actif, ils sont plus efficaces pour des revêtements courts [40], pour des gains de contrôle peu élevés [40, 61], pour des matériaux viscoélastique rigides [61], et plus robustes [57, 78], puisque la marge de stabilité des modes excités par le contrôleur est plus large. D'autre points de vue indiquent que le traitement hybride permet d'avoir une performance comparable à celles des passif et actif avec des revêtements plus légers (moins de matériau viscoélastique) [89] et avec moins de puissance de contrôle (tensions de contrôle moins élevées) [61].

Cependant, ces traitements hybrides souffrent tous de la perte de transmissibilité entre la structure et l'actionneur piézoélectrique, due à la souplesse de la couche viscoélastique. Ainsi, d'autres configurations ont été proposées dans la littérature afin de remédier à ce problème. Liao et Wang [60] ont suggéré de placer des éléments rigides aux bords des actionneurs les reliant ainsi à la structure et, donc, aboutissant à une certaine action directe des actionneurs (Figure 1.4i). Bien que cela permet, effectivement, d'augmenter la transmissibilité entre l'actionneur et la structure, le cisaillement de la couche viscoélastique est réduit et le traitement devient donc moins amortissant passivement. Cette configuration a aussi été étudiée par Varadan *et al.* [88] afin de déterminer des formes optimales pour les éléments aux bords. Cependant, ils ont considéré un capteur piézoélectrique à côté du traitement (Figure 1.4j), alors que Liao et Wang [60] ont mesuré la flèche de la poutre avec un capteur optique. Liu et Wang [64] ont aussi considéré ce traitement mais en utilisant un actionneur auto-capteur (Figure 1.4k). Badre-Alam *et al.* [5] ont repris la configuration de [60] en considérant deux traitements collés symétriquement sur les surfaces opposées de la poutre (Figure 1.4l). D'après Liao et Wang [60], les éléments aux bords élargissent les régions d'optimalité du RCA, par rapport aux traitements purement passif et actif.

Une autre manière de résoudre le problème de la transmissibilité est de considérer des traitements actifs et passifs agissant séparément. Ainsi, Chen et Baz [20] ont proposé de coller un actionneur piézoélectrique directement sur la surface inférieure d'une poutre, en plus d'un revêtement contraint actif collé sur sa surface opposée (Figure 1.4m). Cette construction a été reprise par Crassidis *et al.* [22] afin de comparer les performances obtenues en agissant, d'une part, à travers l'actionneur du revêtement contraint actif et, d'autre part, à travers celui du côté opposé. Dans ce dernier cas, l'actionneur du côté supérieur agit passivement comme une couche élastique. Leurs résultats montrent que le revêtement

contraint actif est plus performant et requiert des tensions de contrôle moins élevées que la combinaison du contrôle purement actif avec le revêtement contraint passif. Par ailleurs, d'autres chercheurs ont aussi étudié les traitements actif et passif séparés, comme Friswell et Inman [31] qui ont supposé une poutre traitée par un revêtement contraint passif, sur sa surface supérieure, et par un actionneur piézoélectrique, sur la surface opposée (Figure 1.4q). Lam *et al.* [51] ont présenté des traitements séparés, collés sur le côté opposé d'une poutre (Figure 1.4o) et sur le même côté (Figure 1.4n). Leurs résultats montrent que, pour le cas étudié, les deux mécanismes sont plus efficaces et requièrent une tension de contrôle moins élevée que le revêtement contraint actif et que les traitements sont optimaux quand ils sont placés sur les côtés opposés. Ils suggèrent aussi l'utilisation de l'actionneur en dessous du matériau viscoélastique (Figure 1.4p).

Comme le montre la Figure 1.4, la majorité des configurations hybrides sont composées de plus de trois couches. Par conséquent, à part dans quelques travaux purement expérimentaux [46], des modèles de poutre sandwich ont été adoptés.

1.2.2 Modélisation de poutres sandwich intelligentes

La première étude sur les propriétés vibratoires des poutres sandwich à cœur viscoélastique a été présentée par Kerwin [47], vers la fin des années 50. Il a considéré des poutres sandwich simplement appuyées, dont les peaux élastiques étaient beaucoup plus rigides que le cœur et dont la rigidité en flexion de la couche de précontrainte était négligeable par rapport à celle de la structure de base. Ainsi, le cœur était supposé ne se déformer qu'en cisaillement transverse et la rigidité en flexion de la poutre sandwich était celle de la structure de base. DiTaranto [25] a étendu les travaux de Kerwin pour traiter les vibrations libres des poutres sandwich avec des conditions aux limites arbitraires. Ensuite, tout en gardant les hypothèses de Kerwin, un autre modèle a été développé par Mead et Markus [67] pour étudier les vibrations forcées pour plusieurs conditions aux limites. Ils ont abouti à une équation différentielle de mouvement d'ordre six en fonction de la flèche.

Ces premiers travaux ont été, récemment, étendus au cas des revêtements contraints actifs pour tenir compte de la couche piézoélectrique. Ainsi, Agnes et Napolitano [1] ont utilisé la théorie de Kerwin, en considérant l'effet de l'actionneur piézoélectrique comme une augmentation de la rigidité de la couche de précontrainte. Leibowitz et Vinson [53] ont étudié le même problème, mais pour une poutre partiellement couverte par le RCA. D'autre part, Baz et Ro [13] sont partis de l'équation de Mead et Markus pour étudier, par la méthode des ondes progressives, une poutre encastrée-libre partiellement traitée par le RCA, bien que dans leur cas, une couche piézoélectrique, servant de capteur, est placée entre le matériau viscoélastique et la poutre. C'est pourquoi, afin de rester dans le cadre de la théorie de poutres sandwich, ils ont supposé que le capteur et la poutre forment une seule couche dont la rigidité est équivalente à la somme de celles des deux couches. Dans ce cas, l'action piézoélectrique a été approchée par une déformation imposée. Cela a aussi été supposé par Shen [80] afin de dériver les équations de mouvement d'une poutre totalement couverte par un traitement hybride, qu'il a analysé ensuite à travers l'approche des fonctions de transfert. De même, van Nostrand et Inman [87] ont utilisé ces hypothèses pour développer leur modèle éléments finis (EF) avec quatre degrés de liberté (ddls) par nœud, pour lequel, tout comme Baz [11] et Huang *et al.* [40], ils ont supposé que la

couche viscoélastique ne se déforme qu'en cisaillement transverse. Un modèle EF similaire a été développé par Baz et Ro [12] pour leur configuration de RCA (Figure 1.4e), mais en tenant compte aussi des extension et flexion de la couche viscoélastique. Ensuite, Lesieutre et Lee [57] ont développé un modèle EF à 9 ddls par élément avec des interpolations quadratiques pour le déplacement longitudinal et l'angle de cisaillement. Les effets des inerties de rotation ont été pris en compte pour les trois couches. Par ailleurs, des éléments finis isoparamètriques ont été utilisés pour étudier des traitements hybrides par Varadan *et al.* [88] et Veley et Rao [89]. Dans les deux cas, des ddls électriques ont été utilisés pour modéliser l'action piézoélectrique.

D'autre part, la méthode de Rayleigh-Ritz a aussi été utilisée par Lam *et al.* [51] et Liao et Wang [61] pour discrétiser les équations de mouvement, où l'inertie de rotation a été négligée mais les déformations axiales de la couche viscoélastique ont été considérées. Le dernier modèle [61] a été utilisé dans [60] par les mêmes auteurs pour étudier l'effet des éléments aux bords (Figure 1.4i). Ces derniers étant modélisés par des ressorts reliant l'actionneur à la poutre.

Des poutres à cinq couches ont aussi été étudiées dans la littérature. Chen et Baz [20] et Crassidis *et al.* [22] ont étendu les travaux de Baz et Ro [12, 13] pour étudier une poutre traitée à la fois par le revêtement hybride à trois couches [13] (Figure 1.4e) collé sur sa surface supérieure, et par un actionneur piézoélectrique collé sur la surface opposée (Figure 1.4m). Dans les deux cas, ce dernier a été supposé composer, avec la poutre et le capteur de la surface opposée, une seule couche. Cependant, dans le travail de Chen et Baz [20], la rigidité du capteur a été négligée. Un modèle éléments finis de poutre à cinq couches a aussi été développé par Badre-Alam *et al.* [5] afin d'étudier deux traitements hybrides avec des éléments aux bords [60] (Figure 1.4i) collés sur les surfaces supérieure et inférieure d'une poutre. Dans ce cas, le matériau viscoélastique a été supposé se déformer en cisaillement transverse seulement. Des ddls électriques ont été considérés pour les couches piézoélectriques, aboutissant à un élément fini à 7 ddls par nœud. Dans une autre perspective, Wang et Wereley [91] ont utilisé le modèle de Mead et Markus afin d'étudier une poutre sandwich à cœur viscoélastique avec deux actionneurs piézoélectriques collés sur ses surfaces supérieure et inférieure, bien que ces derniers ont été remplacés par des moments concentrés aux bords [23], réduisant ainsi le modèle à celui à trois couches. Comme Baz et Ro [13], ils ont utilisé la méthode des ondes progressives pour analyser le problème.

Représentant le modèle au plus grand nombre de couches parmi ceux trouvés dans la littérature, celui proposé par Rongong *et al.* [78] (Figure 1.4h) considère une poutre traitée sur ses surfaces supérieure et inférieure par des revêtements contraints actifs à trois couches, comme proposé par Azvine *et al.* [4] (Figure 1.4g). Néanmoins, la poutre, la couche viscoélastique et celles de précontrainte et piézoélectrique ont été supposées se déformer seulement en flexion, cisaillement et extension, respectivement. En plus, la couche de précontrainte et l'actionneur piézoélectrique ont été considérés comme une seule couche, aboutissant à une poutre symétrique à cinq couches. La méthode de Rayleigh-Ritz a été utilisée dans ce cas pour discrétiser les équations.

On peut résumer les hypothèses principales utilisées dans la littérature comme suit :

1. cisaillement pure dans la couche viscoélastique, à l'exception de Baz et Ro [12], Crassidis *et al.* [22], Lam *et al.* [51], Lesieutre et Lee [57], Liao et Wang [60, 61],

Varadan *et al.* [88] et Veley et Rao [89] ;

2. inertie de rotation négligeable, à l'exception de Agnes et Napolitano [1], Lesieutre et Lee [57], Varadan *et al.* [88] et Veley et Rao [89] ;
3. cisaillement négligeable dans les couches élastiques ou piézoélectrique, à l'exception des modèles éléments finis isoparamètriques de Varadan *et al.* [88] et Veley et Rao [90] ;
4. actionneur piézoélectrique modélisé comme une déformation, force ou rigidité induite, à l'exception de Badre-Alam *et al.* [5], Lam *et al.* [51], Liao et Wang [60, 61], Varadan *et al.* [88], Veley et Rao [89].

D'autre part, la majorité de ces travaux ont supposé des vibrations sinusoïdales, ce qui leur a permis de considérer un module de rigidité complexe pour tenir compte à la fois des propriétés élastiques et visqueuses du matériau viscoélastique. Cependant, cette approche n'est pas réaliste dans le cas général. Par ailleurs, l'efficacité du revêtement est fortement dépendante du comportement du matériau viscoélastique et, donc, de sa modélisation.

1.2.3 Modélisation des matériaux viscoélastiques

Les propriétés élastiques et dissipatives des matériaux viscoélastiques dépendent, généralement, des fréquence, amplitude, type d'excitation et de la température. Le besoin de modèles d'amortissement viscoélastique capables de représenter la réalité physique de ces propriétés a motivé une grande quantité d'études dans les années 80. À cette époque-là, l'approche des modules complexes était déjà largement utilisée. Cependant, la construction des modèles à matrices complexes rendait les analyses impraticables. Par conséquent, Johnson *et al.* [45] ont proposé une méthode, dite des énergies modales (*Modal Strain Energy*, MSE), consistant à estimer les amortissements modaux à travers une relation entre les facteurs de perte et les énergies de déformation de la structure et du matériau viscoélastique. Néanmoins, il a été considéré que les propriétés du matériau viscoélastique restent constantes pour toute condition de chargement, ce qui éloigne cette approche de la réalité. Pour pouvoir tenir compte de la dépendance en fréquence des propriétés des matériaux viscoélastiques, cette méthode doit être considérée dans une version itérative [31]. D'autre part, Plouin et Balmès [72] ont proposé l'utilisation d'une base modale réelle, augmentée par une base de correction pour tenir compte des effets d'amortissement. De bons résultats ont été obtenus ; cependant, la base utilisée contient le double du nombre de modes.

Pour permettre la représentation temporelle des caractéristiques des matériaux viscoélastiques, une série de méthodes temporelles capables de représenter la dépendance en fréquence des propriétés des matériaux viscoélastiques, tout en étant compatibles avec les techniques d'analyse habituellement utilisées dans la dynamique des structures, a été développée. Ainsi, Bagley et Torvik [6, 7] ont proposé une méthode basée sur des dérivées fractionnaires efficace pour des analyses dans le domaine fréquentiel mais aboutissant, dans le domaine temporel, à des équations différentielles d'ordre fractionnaire assez complexes à résoudre. D'autres méthodes temporelles ont, ainsi, été proposées aboutissant à des équations différentielles ordinaires. Lesieutre [54, 58] a proposé un modèle nommé

Augmenting Thermodynamic Fields (ATF), basée sur l'introduction de variables internes (dissipatives), similaires aux variables cachées introduites par Biot [18] dans sa théorie linéaire de la thermodynamique irréversible. Limité aux cas unidimensionnels, ce modèle a été ensuite étendu aux cas tridimensionnels par Lesieutre et son équipe [55, 57] grâce à un nouveau modèle nommé *Anelastic Displacement Fields* (ADF). En parallèle, Dovstam [27] a présenté une étude analogue, bien que dans ce cas-ci, seule une analyse dans le domaine fréquentiel a été réalisée. Hughes et son équipe [35, 65] ont aussi développé un modèle, dit *Golla-Hughes-McTavish* (GHM), basé sur l'introduction de variables dissipatives, tout comme le modèle ADF. Les modèles ATF/ADF et GHM sont assez similaires vu qu'ils utilisent tous des variables additionnelles pour bien modéliser les relaxations du matériau viscoélastique. Néanmoins, on peut distinguer quelques différences entre eux. Le modèle GHM utilise une formulation dans le domaine de Laplace devant être transformée pour des analyses dans le domaine temporel. Par ailleurs, il aboutit à une équation du second ordre compatible avec les équations provenant du modèle éléments finis. Tandis que le modèle ATF/ADF aboutit à des équations du premier ordre de telle façon que la compatibilité entre ces équations et celles provenant du modèle éléments finis n'est obtenue qu'en construisant un système couplé sous la forme d'équations d'état. D'autre part, même si les modèles GHM et ADF utilisent différents paramètres ayant différentes significations physiques, les modèles éléments finis construits en les utilisant présentent des réponses similaires. D'autres méthodes basées aussi sur l'addition de variables internes peuvent être trouvées dans la littérature [44, 97]. Ces modèles représentent bien la variation des propriétés des matériaux viscoélastiques avec la fréquence, mais pour une température constante donnée. Afin de permettre la représentation de la dépendance en température des propriétés et l'échauffement du matériau, Lesieutre et son groupe [19, 56] ont étendu le modèle ADF pour ces cas, aboutissant, néanmoins, à des équations non-linéaires. Pour cette thèse, les modèles ADF, GHM et MSE seront les seules méthodes utilisées pour modéliser la dépendance en fréquence des matériaux viscoélastiques.

Étant donné que les modèles GHM et ADF représentent le module du matériau viscoélastique par des séries de fonctions dans les domaines Laplacien $G(s)$ ou fréquentiel $G(\omega)$, il est d'une grande importance de bien déterminer les paramètres des modèles à partir des données du matériau utilisé. Ces paramètres sont, en général, ajustés à partir du lissage des courbes maîtresses du matériau, afin de minimiser une mesure quelconque de l'écart entre les données mesurées et estimées. Lesieutre et Bianchini [55] ont présenté le lissage des données du matériau ISD112, à une température de 27^{o}C, entre 8 et 8000 Hz. Ils ont conclu que cinq ADFs (avec deux paramètres par ADF) représentent exactement le comportement du module élastique et du facteur de perte du matériau en fonction de la fréquence. Friswell *et al.* [32] ont présenté la même analyse pour le modèle de Golla et Hughes [35], avec trois ou quatre paramètres par modèle. Ils ont utilisé l'ISD112 à 20^{o}C, entre 10 et 4800 Hz et le Dyad 601 à 24^{o}C, entre 2 et 4800 Hz. Les résultats indiquent que le modèle avec quatre paramètres représente mieux les données du matériau, bien qu'il introduit des matrices non symétriques dans le modèle global. Cela dit, en général, les modèles ADF et GHM lissent bien les courbes maîtresses des matériaux dont la dépendance en fréquence des propriétés est très forte. Néanmoins, on peut dire que le nombre de paramètres utilisés est inversement proportionnel au degré de dépendance en fréquence des propriétés. C'est pourquoi, Enelund et Lesieutre [28] ont proposé une

combinaison du modèle ADF avec les dérivées fractionnaires afin de bien représenter une faible dépendance en fréquence.

Le principal inconvénient des modèles ADF et GHM est que, associés à une discrétisation par éléments finis, ils conduisent à des systèmes de grande taille, puisqu'ils ajoutent des degrés de liberté auxiliaires pour tenir compte de la dépendance en fréquence du matériau viscoélastique. Par conséquent, il est généralement nécessaire de réduire la dimension du modèle, par projection dans une base modale réduite appropriée. Afin d'éliminer les modes de relaxation, Park *et al.* [70] ont utilisé une méthode, dénommée *Modified Internal Balancing Method*, combinant la méthode *Internal Balancing Method*, courante dans le domaine d'automatique, avec la méthode de Guyan pour éliminer les modes moins contrôlables et observables, d'une part, et pour réécrire le modèle réduit en terme d'un sous-space des variables nodales provenant du modèle éléments finis, d'autre part. Dans cette thèse, une base de réduction modale complexe, retenant les premiers modes propres de la structure, sera proposée. Ensuite, une représentation réelle des équations d'état réduites sera utilisée pour les analyses.

1.2.4 Algorithmes de contrôle actif

Pour la conception du système de contrôle, un modèle mathématique de la structure doit, en général, être construit et les performances requises et les perturbations auxquelles la structure sera soumise doivent être définies. La conception du système de contrôle est très dépendante du choix et de l'emplacement relatif des actionneurs et capteurs. Il est connu que, pour des actionneurs et capteurs co-localisés, la conception du système de contrôle est facilitée, au point que même des systèmes simples de rétroaction proportionnelle ou dérivative aboutissent à des systèmes stables [75]. C'est pourquoi, des actionneurs auto-capteurs [26] sont intéressants pour le contrôle de vibrations. Cependant, pour des systèmes non-co-localisés, des systèmes de contrôle plus complexes, comme le contrôle optimal, doivent être utilisés.

D'autre part, la performance du système est aussi fortement dépendante de l'algorithme de contrôle utilisé pour traiter les informations fournies par les capteurs afin de déterminer les signaux de commande envoyés aux actionneurs. Plusieurs algorithmes ont été utilisés dans la littérature pour les revêtements hybrides, sachant que ceux proportionnels (P), dérivatifs (D) ou proportionnel-dérivatifs (PD) occupent la majeure partie des travaux, dû à leurs simples conception et mise en œuvre. Ainsi, Kapadia et Kawiecki [46] ont considéré un contrôle proportionnel à la flèche de l'extrémité libre de la poutre, pour la configuration RCA proposée par Baz (Figure 1.4e). Tandis que Azvine *et al.* [3], Badre-Alam *et al.* [5] et Rongong *et al.* [78] ont utilisé une rétroaction directe des vitesses (*Direct Velocity Feedback*, DVF) de la flèche de la poutre. Les systèmes précédents sont très non-co-localisés, puisque, en général, l'actionneur piézoélectrique est positionné près de l'encastremment, tandis que la mesure de la flèche est effectuée, au moyen d'un accéléromètre ou d'un capteur optique, placé à l'extrémité libre de la poutre. Par conséquent, les modes qui ne sont pas en phase avec le couple actionneur/capteur sont déstabilisés, comme mis en évidence dans ces travaux. Rongong *et al.* [78] ont observé que l'amortissement passif additionnel, fourni par la couche viscoélastique, garantit une marge de stabilité pour les modes excités par le contrôleur, évitant ainsi leur déstabilisation. Badre-Alam *et al.* [5]

ont proposé de filtrer la vitesse avant de l'envoyer au contrôleur, afin d'éliminer sa contribution périodique due à la rotation de la poutre. En outre, quelques auteurs ont utilisé une rétroaction de la dérivée de la tension fournie par un capteur piézoélectrique. Huang *et al.* [40] et Yellin et Shen [94] ont considéré un actionneur auto-capteur (*Self-Sensing Actuator*, SSA) dans le RCA, où la dérivé de la tension induite dans l'actionneur est envoyée après amplification, comme tension de contrôle. Dans ce cas, le système est parfaitement co-localisé et, donc, stable pour tout gain d'amplification. En effet, Yellin et Shen [94] ont montré que la combinaison SSA/DVF garantit une dissipation positive de l'énergie du système.

D'autres travaux ont aussi présenté une combinaison des algorithmes précédents, utilisant une rétroaction proportionnelle-dérivative d'un déplacement ou de la tension du capteur. Shen [80] a considéré un algorithme PD de la flèche de l'extrémité libre d'une poutre encastrée-libre. Il a montré que, pour le premier mode propre, ce contrôle aboutit à de meilleures performances d'amortissement, par rapport au proportionnel simple, mais aussi à un rapport inférieur entre les performances des traitements hybride et actif. Baz et Ro [12] se sont servis de la tension et de sa dérivée fournies par le capteur piézoélectrique, collé entre la couche viscoélastique et la poutre, pour alimenter l'actionneur piézoélectrique du RCA. Ensuite, dans un travail ultérieur [14], ils ont appliqué un algorithme d'optimisation pour calculer les facteurs multiplicatifs de la tension et de sa dérivée afin de minimiser l'énergie du système, tout comme Veley et Rao [89]. Varadan *et al.* [88] ont considéré aussi un algorithme PD mais pour un système non-co-localisé, puisque leur capteur piézoélectrique a été placé à côté du revêtement contraint actif (Figure 1.4b). La déstabilisation des modes excités par un contrôleur PD a été présentée par Lesieutre et Lee [57]. Ils ont proposé de segmenter le traitement afin d'aboutir à un système de contrôle plus robuste, de manière que le nombre de revêtements corresponde à la quantité minimale de modes amortis par le contrôle.

Des algorithmes optimaux, du type LQR (*Linear Quadratic Regulator*), appliqués aux revêtements hybrides ont aussi été utilisés dans la littérature, bien qu'en moindre quantité. Lam *et al.* [51] et Liao et Wang [60, 61, 62] ont adopté cette approche, quoique, pour les premiers [51], la fonction coût soit construite en fonction des variables d'état et, pour les autres, elle l'est à partir du vecteur des sorties. Tsai et Wang [86] ont utilisé aussi un algorithme optimal LQR pour étudier un traitement RCA dont l'actionneur piézoélectrique est connecté à un circuit *shunt* pour augmenter la dissipation d'énergie. Dans leur cas, comme chaque groupe de paramètres du circuit *shunt* fournit un gain optimal différent, un algorithme d'optimisation SQP (*Sequential Quadratic Programming*) a été utilisé pour trouver les paramètres permettant de minimiser davantage la fonction coût. Toutefois, dans tous les cas précédents, la tension appliquée à l'actionneur est proportionnelle aux variables d'état et, par conséquent, ces dernières sont supposées mesurables. Cette hypothèse est assez contraignante et peu réaliste, bien que ce problème pourrait être résolu par la prise en compte d'un observateur d'état, aboutissant à un algorithme du type LQG (*Linear Quadratic Gaussian*). Cependant, celui-ci n'a pas été utilisé dans la littérature pour le contrôle hybride mais le sera ici pour la première fois.

Friswell et Inman [31] ont employé l'algorithme de contrôle PPF (*Positive Position Feedback*), proposé par Goh et Caughey [34], pour réduire les vibrations d'une poutre revêtue d'un traitement contraint passif, d'un côté, et d'un actionneur auto-capteur

piézoélectrique, de l'autre. Cet algorithme permet de contrôler chaque mode séparément, bien que, dans leur travail, Friswell et Inman n'ont considéré que le premier mode. En plus, la stabilité de l'algorithme ne dépend que de la connaissance des fréquences propres du système.

Le groupe de Baz s'est beaucoup intéressé à l'utilisation d'algorithmes adaptés au cas spécifique des revêtements hybrides. Ainsi, dans [11], Baz a adopté un algorithme de contrôle robuste afin de garantir la stabilité du système, sujet à incertitudes quant aux propriétés du matériau viscoélastique, dues à des variations de température, tout en minimisant la norme $\mathcal{H}_2$ de la fonction de transfert entre la force de perturbation et la flèche de la poutre. Il a abouti à un contrôleur du second ordre avec une performance uniforme pour les trois températures étudiées. Crassidis *et al.* [22] ont aussi utilisé un contrôle robuste, mais avec la norme $\mathcal{H}_\infty$. D'autre part, afin de construire un algorithme capable de garantir une décroissance de l'énergie de la poutre, Baz [8] et Shen [82] ont proposé un contrôleur de frontières (*Boundary Controller*) par la rétroaction amplifiée de la vitesse axiale relative des bords de l'actionneur. Cette vitesse a été supposée mesurable, ce qui ne peut se faire qu'à travers un actionneur auto-capteur, ou, au moins, observable à partir de la déformation de la poutre [8]. Cet algorithme a été aussi adopté par Liu et Wang [64] et généralisé ensuite par Baz [9] en multipliant la vitesse relative des bords par des fonctions de transfert arbitraires, au lieu des gains constants précédents, bien que seules des fonctions d'ordre deux et trois aient été considérées dans [9]. Ce contrôleur dynamique de frontières (*Dynamic Boundary Controller*) a fourni des performances supérieures à celles de son correspondant statique.

1.2.5 Mécanismes d'action piézoélectrique

Les actionneurs piézoélectriques considérés jusqu'ici sont collés sur les surfaces de la structure ou d'un revêtement contraint passif produisant ainsi des déformations de membrane lorsqu'ils sont actionnés par un potentiel électrique. Dans cette configuration, le champ électrique imposé et la polarisation du matériau piézoélectrique sont dans la même direction (transversale) et le couplage électromécanique se réalise par la constante piézoélectrique e_{31}. Ce mécanisme, dénommé *mécanisme d'action par extension* (Figure 1.5a), constitue la majeure partie des applications des actionneurs piézoélectrique au contrôle des vibrations. Plusieurs modèles ont été présentés dans la littérature [24, 36, 37, 39, 41, 93] afin d'étudier l'interaction entre ces types d'actionneurs/capteurs piézoélectriques et la structure.

Cependant, le progrès dans la fabrication des composites a suscité un grand intérêt pour les actionneurs intégrés. Ainsi, certains auteurs ont utilisé des actionneurs intégrés pour produire des déformations de torsion, en utilisant des fibres piézoélectriques [17]. Néanmoins, il est connu que les actionneurs par extension sont beaucoup plus performants quand ils sont placés loin du plan moyen de la structure, induisant des moments imposés plus importants [24]. Cependant, dans ce cas, ils sont susceptibles de ruptures puisqu'ils sont soumis à des contraintes/déformations axiales très élevées. Quelques travaux récents [48, 83, 84, 98] ont proposé l'utilisation d'actionneurs par cisaillement. Ces actionneurs, contrairement à ceux par extension, sont polarisés longitudinalement de manière à induire des déformations de cisaillement lorsqu'ils sont actionnés par un champ électrique trans-

versal. Ainsi, le couplage électromécanique se fait par la constante piézoélectrique e_{15} (Figure 1.5b). Ce couplage, généralement utilisé pour les résonateurs de quartz [92] et pour des accéléromètres, définit le *mécanisme d'action par cisaillement*. Bien que ce type d'action n'a pas encore été employée pour le contrôle de vibrations, une étude statique comparative d'une poutre sandwich encastrée-libre utilisant les modes de cisaillement et d'extension d'un actionneur piézoélectrique fut réalisée par Sun et Zhang [84]. D'après leurs analyses statiques effectuées à l'aide d'un code éléments finis commercial, l'action par cisaillement pourrait se montrer plus efficace que l'action par extension dans les cas des fréquences élevées et petites amplitudes. Ces résultats furent ensuite confirmés par une analyse théorique [98]. En particulier, les auteurs ont montré que les contraintes dans l'actionneur par cisaillement et dans l'interface actionneur/structure sont plus faibles que pour l'actionneur par extension. Ce qui est un avantage pour les problèmes de délaminage et, aussi, de rupture du matériau piézoélectrique.

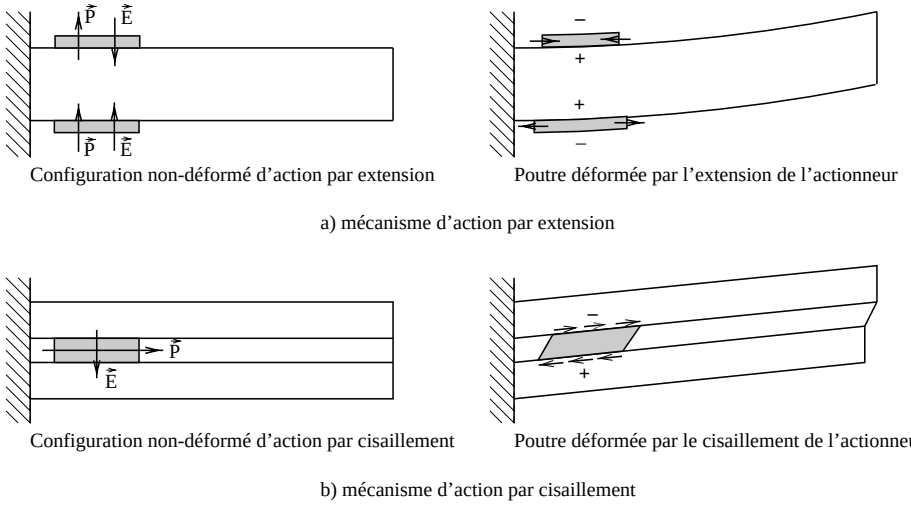


Figure 1.5: Représentation des mécanismes d'action par extension et par cisaillement.

1.3 Organisation de la thèse

L'objectif de ce travail est d'étudier les différentes techniques passives et actives et leurs combinaisons possibles afin d'aboutir à un amortissement hybride actif-passif efficace des vibrations structurales. Dans le prochain chapitre, un modèle éléments finis de poutre sandwich dont les couches peuvent être élastiques, piézoélectriques ou viscoélastiques est présenté. Ce modèle est ensuite utilisé, pour étudier d'une part, les mécanismes d'action par extension et par cisaillement, et les revêtements amortissants actif-passif du type RCA, d'autre part. D'abord, des analyses statiques et vibratoires, pour des poutres non-amorties, sont effectuées et leurs résultats sont comparés aux résultats analytiques et numériques trouvés dans la littérature afin de valider le modèle. Puis, la prise en compte de degrés de liberté électriques dans le modèle est considérée et son effet sur les résultats analysé. Ensuite, le modèle éléments finis est étendu au cas de peaux multicouches, en considérant la théorie de stratifiés pour les peaux et celle de poutre sandwich

à trois couches pour l'ensemble peaux/cœur. Ainsi, un modèle éléments finis, capable de représenter des poutres sandwich à plusieurs couches, est développé et validé à travers des comparaisons avec les résultats d'analyse vibratoire trouvés dans la littérature.

La modélisation des matériaux viscoélastiques est présentée dans le troisième chapitre. La représentation de la dépendance en fréquence de tels matériaux sera, notamment, étudiée. Trois modèles sont considérés, à savoir les modèles temporels ADF et GHM et une version itérative de la méthode des énergies modales. Afin d'appliquer ces modèles à la conception de la loi de commande, les équations résultantes sont écrites sous forme d'équations d'état, puis, transformées à travers une réduction modale à base complexe. Des analyses portant sur les complexités induites par l'augmentation de la dimension des systèmes, due à l'ajout de variables internes, et par la présence d'amortissement non-négligeable, dans la réduction modale sont faites. Les modèles réduits sont, par la suite, validés par l'analyse des réponses impulsionnelles de quelques exemples.

Dans le quatrième chapitre, une brève introduction au problème du contrôle optimal est présentée. Une interprétation physique du système en boucle-fermée soumis à un algorithme de contrôle optimal quadratique est donnée. Par ailleurs, quelques problématiques de ce type d'algorithme comme le choix de ses paramètres sont analysées. Étant donné que la loi de commande doit s'appliquer au contrôle par action piézoélectrique, un algorithme itératif est proposé pour trouver le contrôle optimal respectant le champ électrique maximum applicable aux actionneurs piézoélectriques. Dans un deuxième temps, la conception d'observateurs d'état est présentée, afin de permettre l'estimation des variables non mesurables. Enfin, les concepts de controlabilité et d'observabilité sont introduits. Les algorithmes de contrôle optimal, LQR et LQG, et dérivatif sont comparés entre-eux à travers l'analyse du contrôle actif d'une poutre sandwich à cœur viscoélastique.

Les modèles réduits sont, ensuite, associés à l'algorithme de contrôle LQR et utilisés pour étudier quelques applications de poutres sandwich adaptatives. Les résultats sont présentés dans le cinquième chapitre. En premier lieu, les mécanismes d'action piézoélectrique par extension et par cisaillement sont étudiés et comparés quant à leurs performances d'action statique et dynamique. Par la suite, plusieurs configurations d'amortissement actif-passif avec des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques travaillant ensemble ou séparés sont présentées. Quelques considérations quand aux avantages et inconvénients de chaque configuration, ainsi que leurs conditions d'optimalité sont présentées. En outre, une analyse de l'influence de la variation des propriétés des matériaux viscoélastiques avec la température sur la performance de l'amortissement hybride est présentée.

Finalement, quelques conclusions sont présentées dans le chapitre 6 afin de (i) résumer les principaux résultats présentés, (ii) souligner les originalités de cette thèse et (iii) définir les perspectives de continuation des travaux de recherche présentés ici.

Chapitre 2

Modèles éléments finis de poutre sandwich intelligente

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, la formulation théorique d'une poutre sandwich piézoélectrique à trois couches est présentée. Une analyse des équations analytiques est faite. Ensuite, un modèle éléments finis de poutre sandwich munie d'actionneurs piézoélectriques est développé à partir d'une formulation variationnelle. Il est montré que le choix du champs de déplacement conduit à un élément fini avec seulement huit degrés de liberté et sans blocage par cisaillement. La prise en compte de ddls électriques est aussi analysée.

Afin de pouvoir étudier plusieurs configurations de traitements hybrides, ce modèle est alors étendu au cas de peaux multicouches, en considérant une théorie des milieux stratifiés pour traiter chaque peau et celle de poutre sandwich pour modéliser l'ensemble peau stratifiée/cœur/peau stratifiée. Deux modèles éléments finis sont proposés, sans et avec ddls électriques.

Les éléments finis sont implémentés sous MATLAB® et validés à travers des comparaisons avec des résultats analytiques et numériques trouvés dans la littérature.

2.2 Formulation théorique

Deux configurations de poutre sandwich sont considérées. La première est constituée d'un cœur élastique ou viscoélastique pris entre deux peaux piézoélectriques polarisées dans le sens de l'épaisseur, tandis que l'autre est constituée d'un cœur piézoélectrique, polarisé longitudinalement, pris entre deux peaux élastiques. Pour des considérations pratiques, la mise en œuvre suppose que toutes les couches sont piézoélectriques. La théorie d'Euler-Bernoulli est appliquée aux peaux, supposées résistantes aux contraintes de membrane et de flexion ; alors que, la théorie de Timoshenko est appliquée au cœur, supposé résistant en plus à la contrainte de cisaillement transverse. Les couches piézoélectriques ont des électrodes sur les surfaces supérieure et inférieure qui les couvrent entièrement. Les matériaux élastiques et piézoélectriques sont considérés orthotropes dont les axes d'orthotropie coïncident avec les axes de la poutre

sandwich. Toutes les couches sont supposées parfaitement collées. La contrainte normale transversale est supposée négligeable devant les autres composantes. Les longueur, largeur et épaisseur de la poutre sont notées par L, b et h, respectivement. Les indices a, b et c représentent les quantités relatives aux peaux supérieure et inférieure et au cœur. Les lettres x,y,z seront parfois utilisées pour désigner les directions 1,2,3 et les dérivées par rapport à la direction x et au temps seront notées par $(')$ et $(\dot{})$, respectivement.

2.2.1 Description cinématique de la poutre

D'après les hypothèses citées précédemment, les champs de déplacements sont décrits par

$$\begin{aligned} \breve{u}_i(x,y,z) &= u_i(x) + (z-z_i)\beta_i(x) \ , \quad {\scriptstyle i=a,b,c} \\ v_i(x,y,z) &= 0 \\ w_i(x,y,z) &= w(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donc, les déplacements axiaux $\breve{u}_i$ sont linéaires dans l'épaisseur pour chaque couche. La description cinématique de la poutre sandwich est représentée dans la Figure 2.1. D'après les hypothèses d'Euler-Bernoulli, $\beta_k = \beta = -w'$ $(k = a,b)$. Le plan moyen du cœur est supposé coïncider avec l'origine de l'axe z, donc $z_c = 0$. Inspiré par [2], on définie $\bar{u}$ et $\tilde{u}$ comme étant les déplacements moyen et relatif des plans moyens des peaux, respectivement,

$$\bar{u} = \frac{u_a + u_b}{2} \ ; \quad \tilde{u} = u_a - u_b \tag{2.2}$$

donc, les déplacements des plan moyens des peaux $\bar{u}_a$ et $\bar{u}_b$ s'écrivent en fonction de $\bar{u}$ et $\tilde{u}$ par

$$u_a = \bar{u} + \frac{\tilde{u}}{2} \ ; \quad u_b = \bar{u} - \frac{\tilde{u}}{2} \tag{2.3}$$

Par ailleurs, puisque les couches sont parfaitement collées, les conditions suivantes de continuité des déplacements s'appliquent aux interfaces[1]

$$\breve{u}_a = \breve{u}_c, \text{ pour } z = \frac{h_c}{2} \text{ et } \breve{u}_b = \breve{u}_c, \text{ pour } z = -\frac{h_c}{2}$$

Donc, de (2.1),

$$u_c = \bar{u} + dw' \ ; \quad \beta_c = \frac{\tilde{u}}{h_c} + \lambda w' \tag{2.4}$$

où

$$d = \frac{h_a - h_b}{4} \ ; \quad \lambda = \frac{h_a + h_b}{2h_c}$$

[1] Les conditions de continuité des contraintes aux interfaces n'ont pas été considérées puisqu'elles aboutissent à des champs de déplacements complexes [33].

Ainsi, les déplacements axiaux des couches *a*, *b* et *c* s'écrivent

$$\boxed{\begin{aligned} \breve{u}_k &= \left(\bar{u} \pm \frac{\tilde{u}}{2}\right) - (z - z_k)w' \; ; \quad k{=}a(+),b(-) \\ \breve{u}_c &= (\bar{u} + dw') + z\left(\frac{\tilde{u}}{h_c} + \lambda w'\right) \end{aligned}} \tag{2.5}$$

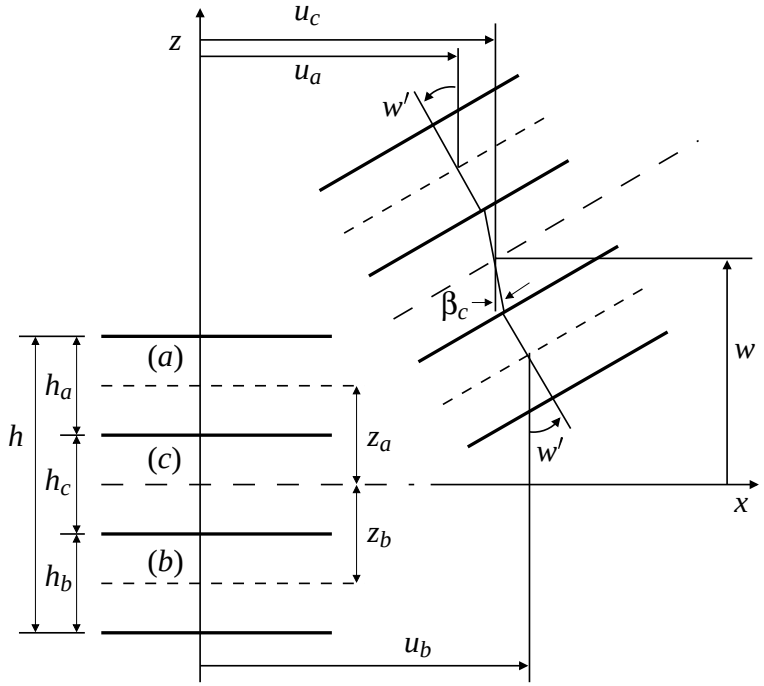


Figure 2.1: Cinématique de la poutre sandwich.

Les relations déformations – déplacements pour la *i*-ième couche sont décrites par

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1i} &= \frac{\partial \breve{u}_i}{\partial x} = \varepsilon_i^m + (z - z_i)\varepsilon_i^f \\ \varepsilon_{2i} &= \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{3i} &= \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0 \\ \varepsilon_{4i} &= 2\gamma_{yz} = \frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{5i} &= 2\gamma_{xz} = \frac{\partial \breve{u}_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial x} = \varepsilon_i^c \\ \varepsilon_{6i} &= 2\gamma_{xy} = \frac{\partial \breve{u}_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

avec $z_c = 0$ et $\varepsilon_k^c = 0$. D'où on note que les hypothèses cinématiques conduisent à des déformations de cisaillement, pour les peaux, et transversales, pour les trois couches, nulles. Les exposants m, f et c qualifient les déformations généralisées de membrane, de flexion et de cisaillement, respectivement. Elles peuvent être écrites en fonction des variables principales $\bar{u}$, $\tilde{u}$ et w, de la façon suivante

$$\boxed{\begin{array}{l} \varepsilon_k^m = \bar{u}' \pm \dfrac{\tilde{u}'}{2} \; ; \; \varepsilon_k^f = -w'' \; ; \; {}_{k=a(+),b(-)} \\ \varepsilon_c^m = \bar{u}' + dw'' \; ; \; \varepsilon_c^f = \dfrac{\tilde{u}'}{h_c} + \lambda w'' \; ; \; \varepsilon_c^c = \dfrac{\tilde{u}}{h_c} + (\lambda+1)w' \end{array}} \tag{2.7}$$

Notons que le paramètre d couple la flexion avec la déformation de membrane du cœur. Il s'annule pour des configurations symétriques, tandis que le paramètre λ, qui couple la flexion avec le cisaillement relatif du cœur, est intrinsèque aux poutres sandwich puisqu'il ne s'annule que pour des peaux à épaisseur nulle, c'est-à-dire, pour des poutres Timoshenko monocouche.

2.2.2 Lois de comportement

Dans cette section sont décrites les lois de comportement des matériaux utilisés. Ces derniers sont considérés comme des matériaux piézoélectriques orthotropes dont les axes d'orthotropie coïncident avec les axes de la poutre. Les constantes élastiques, piézoélectriques et diélectriques sont données, respectivement, par c_{lm}, e_{nm} et ϵ_{nn} ($l, m = 1,\ldots,6; n = 1,2,3$). Les peaux et le cœur sont étudiés séparément à cause de la différence de leurs directions de polarisation.

Lois de comportement des matériaux des peaux

Les matériaux utilisés pour les peaux sont orthotropes et polarisés dans la direction $3(z)$; par conséquent leurs lois de comportement sont celles des matériaux piézoélectriques standards[2] [85], c'est-à-dire, pour la k-ième peau,

$$\left\{\begin{array}{c} \sigma_{1k} \\ \sigma_{2k} \\ \sigma_{3k} \\ \sigma_{4k} \\ \sigma_{5k} \\ \sigma_{6k} \\ \hline D_{1k} \\ D_{2k} \\ D_{3k} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} c_{11}^k & c_{12}^k & c_{13}^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31}^k \\ c_{12}^k & c_{22}^k & c_{23}^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{32}^k \\ c_{13}^k & c_{23}^k & c_{33}^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33}^k \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^k & 0 & 0 & 0 & -e_{24}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^k & 0 & -e_{15}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^k & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^k & 0 & \epsilon_{11}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24}^k & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{22}^k & 0 \\ e_{31}^k & e_{32}^k & e_{33}^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}^k \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \varepsilon_{1k} \\ \varepsilon_{2k} \\ \varepsilon_{3k} \\ \varepsilon_{4k} \\ \varepsilon_{5k} \\ \varepsilon_{6k} \\ \hline E_{1k} \\ E_{2k} \\ E_{3k} \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

[2] Cette référence n'a pu être consultée mais est couramment citée dans la littérature.

où σ_{lk}, ε_{lk}, D_{nk} et E_{nk} sont les composantes des vecteurs de contrainte et de déformation, et des vecteurs de déplacement et champ électriques. Puisque les champs de déplacements considérés sont indépendants de y et nuls suivant la direction y ($v = 0$), on a

$$\varepsilon_{2k} = \varepsilon_{6k} = 0 \tag{2.9}$$

En plus, ayant supposé $\sigma_{3k} = 0$, de (2.8) on a[3]

$$\varepsilon_{3k} = \frac{1}{c_{33}^k}\left(e_{33}^k E_{3k} - c_{13}^k \varepsilon_{1k}\right) \tag{2.10}$$

Ainsi, en tenant compte de (2.9) et en remplaçant l'expression (2.10) de la déformation transversale dans (2.8), les lois de comportement prennent la forme réduite suivante

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{1k} \\ D_{3k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{*k} & -e_{31}^{*k} \\ e_{31}^{*k} & \epsilon_{33}^{*k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1k} \\ E_{3k} \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

avec,

$$\epsilon_{33}^{*k} = \epsilon_{33}^k + \frac{{e_{33}^k}^2}{c_{33}^k}\ ,\ e_{31}^{*k} = e_{31}^k - \frac{c_{13}^k}{c_{33}^k} e_{33}^k\ ,\ c_{11}^{*k} = c_{11}^k - \frac{{c_{13}^k}^2}{c_{33}^k}$$

La modification des constantes ϵ_{33}^k, e_{31}^k et c_{11}^k est due à l'hypothèse de contrainte transversale négligeable ($\sigma_{3k} = 0$), les autres composantes non nulles σ_{2k}, σ_{6k}, ε_{3k}, ε_{4k} et ε_{5k} ne contribuent pas à l'énergie électromécanique. De plus, les champs électriques E_{1k} et E_{2k} ne sont pas considérés dans (2.11) puisque leur contribution à l'énergie électromécanique est généralement négligeable. Cela se justifie par le fait que, dans le cas actionneur, seuls des champs électriques dans la direction de l'épaisseur sont imposés et, dans le cas capteur, les champs électriques induits dans les directions x et y sont petits devant ceux induits dans la direction z (dû à la minceur des couches piézoélectriques). On peut noter de (2.11) que le couplage électromécanique est entre la déformation axiale et le champ électrique transversal. Cette propriété caractérise les *actionneurs par extension* ou *capteurs d'extension*.

Lois de comportement des matériaux du coeur

Le matériau piézoélectrique utilisé pour le cœur est supposé orthotrope et polarisé dans la direction $1(x)$; par conséquent, ses lois de comportement peuvent être obtenues par rotation des lois de comportement des peaux [17, 38]. Il en résulte que les directions 1 et 3 sont échangées. Ceci conduit à

[3]Pour le calcul de ε_{3i}, l'hypothèse $\sigma_{3k} = 0$ est prioritaire à celle de déplacement transversal w constant suivant l'épaisseur ($\varepsilon_{3i} = 0$).

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{1c}\\ \sigma_{2c}\\ \sigma_{3c}\\ \sigma_{4c}\\ \sigma_{5c}\\ \sigma_{6c}\\ \hline D_{1c}\\ D_{2c}\\ D_{3c}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} c_{33}^c & c_{23}^c & c_{13}^c & 0 & 0 & 0 & -e_{33}^c & 0 & 0\\ c_{23}^c & c_{22}^c & c_{12}^c & 0 & 0 & 0 & -e_{32}^c & 0 & 0\\ c_{13}^c & c_{12}^c & c_{11}^c & 0 & 0 & 0 & -e_{31}^c & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{66}^c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^c & 0 & 0 & 0 & -e_{15}^c\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^c & 0 & -e_{24}^c & 0\\ \hline e_{33}^c & e_{32}^c & e_{31}^c & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}^c & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{24}^c & 0 & \epsilon_{22}^c & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^c & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{11}^c \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{1c}\\ \varepsilon_{2c}\\ \varepsilon_{3c}\\ \varepsilon_{4c}\\ \varepsilon_{5c}\\ \varepsilon_{6c}\\ \hline E_{1c}\\ E_{2c}\\ E_{3c}\end{array}\right\} \tag{2.12}$$

À l'exception de la contrainte de cisaillement transversal σ_{5c}, qui n'est pas nulle, les hypothèses mécaniques et électriques concernant le cœur sont similaires à celles pour les peaux. Donc, on a

$$\varepsilon_{2c} = \varepsilon_{6c} = \sigma_{4c} = 0$$

L'hypothèse de contrainte normale nulle ($\sigma_{3c} = 0$) conduit à

$$\varepsilon_{3c} = -\frac{c_{13}^c}{c_{11}^c}\varepsilon_{1c}$$

Le champ électrique longitudinal E_{1c} se couple avec la déformation axiale du cœur. Néanmoins, sa contribution à l'énergie électromécanique est négligée ici, puisqu'on va s'intéresser plutôt à la flexion de poutres sandwich à cœurs minces. Ainsi, il est raisonnable de considérer que la déformation axiale, ainsi que le champ électrique qu'elle induit, sont négligeables. L'étude de la valeur du champ électrique longitudinal, calculée par post-traitement, pour quelques exemples, a montré que cette hypothèse est, en effet, raisonnable.

On ne considère que les composantes σ_{1c} et σ_{5c} des contraintes et la composante D_{3c} des déplacements électriques, puisque les composantes σ_{2c}, σ_{6c}, ε_{3c} et ε_{4c} ne contribuent pas à l'énergie électromécanique. Les lois de comportement réduites s'écrivent donc

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{1c}\\ \sigma_{5c}\\ D_{3c}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} c_{33}^{*c} & 0 & 0\\ 0 & c_{55}^c & -e_{15}^c\\ 0 & e_{15}^c & \epsilon_{11}^c \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{1c}\\ \varepsilon_{5c}\\ E_{3c}\end{array}\right\} \tag{2.13}$$

avec,

$$c_{33}^{*c} = c_{33}^c - \frac{{c_{13}^c}^2}{c_{11}^c}$$

La modification de la constante c_{33}^c est due à l'hypothèse $\sigma_{3c} = 0$. On constate que le couplage électromécanique n'intervient qu'entre la déformation de cisaillement et le champ électrique transversal. Cette propriété caractérise les *actionneurs par cisaillement* ou *capteurs de cisaillement*.

2.2.3 Description de l'état électrique

Cette section décrit la forme du potentiel électrique dans les couches piézoélectriques. Les mécanismes d'action par cisaillement et par extension sont étudiés séparément vu que les couches piézoélectriques, dans chaque mécanisme, ont des directions de polarisation différentes.

Potentiels et champs électriques dans les peaux

Selon l'étude réalisée par Rahmoune *et al.* [77, 76], le potentiel dans une plaque piézoélectrique mince se compose de deux parties, l'une linéaire en z connue à partir des potentiels imposés φ^+ et φ^-, et l'autre quadratique en z représentant le potentiel induit. Il a été démontré [76] que, celui-ci est proportionnel à la flexion de la structure.

En supposant que les charges électriques volumiques sont nulles dans la poutre, la loi d'équilibre électrique s'écrit

$$\operatorname{div} D_k = 0 \; ; \quad {\scriptstyle k=a,b} \tag{2.14}$$

Supposant $\partial D_{1k}/\partial x$ et $\partial D_{2k}/\partial y$ négligeables devant $\partial D_{3k}/\partial z$ et en considérant l'expression de D_{3k}, définie en (2.11), on a

$$\epsilon_{33}^{*k}\frac{\partial E_{3k}}{\partial z} + e_{31}^{*k}\frac{\partial \varepsilon_{1k}}{\partial z} = 0 \tag{2.15}$$

En utilisant les expressions de la déformation longitudinale (2.6) et (2.7) et la relation champ électrique – potentiel $E_{3k} = -\partial\varphi_k/\partial z$, (2.15) devient

$$\epsilon_{33}^{*k}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial z^2} + e_{31}^{*k}w'' = 0$$

En intégrant cette équation par rapport à z, on a

$$\varphi_k = a_{0k} + (z - z_k)a_{1k} - (z - z_k)^2\frac{e_{31}^{*k}}{2\epsilon_{33}^{*k}}w''$$

Comme les surfaces supérieure et inférieure des peaux sont entièrement couvertes par les électrodes, on a les conditions aux limites électriques suivantes

$$\varphi_k\big|_{z=z_k+\frac{h_k}{2}} = \varphi_k^+ \; ; \quad \varphi_k\big|_{z=z_k-\frac{h_k}{2}} = \varphi_k^- \tag{2.16}$$

ce qui conduit à

$$a_{1k} = \frac{\varphi_k^+ - \varphi_k^-}{h_k} = \frac{V_k}{h_k}$$
$$a_{0k} = \frac{\varphi_k^+ + \varphi_k^-}{2} + \frac{h_k^2}{4}\frac{e_{31}^{*k}}{2\epsilon_{33}^{*k}}w'' = \bar{\varphi}_k + \frac{h_k^2}{4}\frac{e_{31}^{*k}}{2\epsilon_{33}^{*k}}w''$$

V_k étant la différence de potentiels électriques dans la k-ième peau. Finalement, le potentiel électrique s'écrit

$$\varphi_k = \bar{\varphi}_k + (z - z_k)\frac{V_k}{h_k} + \left[1 - \frac{4(z-z_k)^2}{h_k^2}\right]\frac{h_k^2}{8}\frac{e_{31}^{*k}}{\epsilon_{33}^{*k}}w'' \tag{2.17}$$

La dérivée par rapport à z du potentiel électrique, quadratique en z, fournit un champ électrique linéaire en z

$$\boxed{E_{3k} = -\frac{V_k}{h_k} + (z - z_k)\frac{e_{31}^{*k}}{\epsilon_{33}^{*k}}w''} \tag{2.18}$$

Potentiels et champs électriques dans le coeur

L'approche de la section précédente est aussi utilisée pour décrire le potentiel électrique dans le cœur. Supposant $\partial D_{1c}/\partial x$ et $\partial D_{2c}/\partial y$ négligeables devant $\partial D_{3c}/\partial z$ et d'après l'expression de D_{3c}, définie en (2.13), l'expression de l'équilibre électrique (2.14) se réduit à

$$\epsilon_{11}^c \frac{\partial E_{3c}}{\partial z} + e_{15}^c \frac{\partial \varepsilon_{5c}}{\partial z} = 0 \tag{2.19}$$

En plus, ε_{5c} étant supposé constant dans l'épaisseur (2.6),(2.7) et puisque $E_{3c} = -\partial\varphi_c/\partial z$, l'expression (2.19) devient,

$$\epsilon_{11}^c \frac{\partial^2 \varphi_c}{\partial z^2} = 0 \tag{2.20}$$

Intégrant cette équation par rapport à z, on obtient

$$\varphi_c = a_{0c} + z a_{1c}$$

Les surfaces supérieure et inférieure du cœur étant supposées entièrement couvertes par les électrodes, les conditions aux limites électriques suivantes doivent donc être vérifiées,

$$\varphi_c\big|_{z=\frac{h_c}{2}} = \varphi_c^+ \; ; \quad \varphi_c\big|_{z=-\frac{h_c}{2}} = \varphi_c^- \tag{2.21}$$

ce qui conduit à

$$a_{1c} = \frac{\varphi_c^+ - \varphi_c^-}{h_c} = \frac{V_c}{h_c}$$
$$a_{0c} = \frac{\varphi_c^+ + \varphi_c^-}{2} = \bar{\varphi}_c$$

où V_c est la différence de potentiels électriques dans le cœur. Donc, le potentiel électrique est

$$\varphi_c = \bar{\varphi}_c + z\frac{V_c}{h_c} \tag{2.22}$$

Puisque $E_{3c} = -\partial\varphi_c/\partial z$, ce potentiel électrique, linéaire en z, conduit à un champ électrique constant dans l'épaisseur du cœur,

$$\boxed{E_{3c} = -\frac{V_c}{h_c}} \tag{2.23}$$

2.2.4 Formulation variationnelle

En utilisant le principe de d'Alembert, la formulation variationnelle de la poutre sandwich peut être exprimée par

$$\boxed{\delta T - \delta H + \delta W = 0, \quad \forall \delta\bar{u}, \delta\tilde{u}, \delta w, \delta V_i \quad i = a,b,c} \tag{2.24}$$

où δT, δH et δW sont les travaux virtuels des efforts d'inertie, électromécaniques internes et externes, respectivement. Ces trois quantités seront exprimées en termes des trois variables principales $\bar{u}$, $\tilde{u}$ et w et des différences de potentiels électriques V_i de chaque couche piézoélectrique, dans les sous-sections suivantes.

Travail virtuel des efforts électromécaniques internes

Le travail virtuel des efforts électromécaniques internes d'un milieu piézoélectrique de volume Ω est définie par

$$\boxed{\delta H = \int_\Omega (\delta\varepsilon\sigma - \delta E D)\mathrm{d}\Omega} \tag{2.25}$$

Il peut aussi s'écrire comme la somme des contributions de chaque couche

$$\delta H = \sum_i \delta H_i \ , \quad i = a,b,c \tag{2.26}$$

D'après les hypothèses considérées, les contributions correspondantes à chaque peau δH_k $(k = a,b)$ et au cœur δH_c se réduisent à

$$\delta H_k = \int_{\Omega_k} (\delta\varepsilon_{1k}\sigma_{1k} - \delta E_{3k} D_{3k})\,\mathrm{d}\Omega_k$$

$$\delta H_c = \int_{\Omega_c} (\delta\varepsilon_{1c}\sigma_{1c} + \delta\varepsilon_{5c}\sigma_{5c} - \delta E_{3c} D_{3c})\,\mathrm{d}\Omega_c$$

qui, d'après les lois de comportement (2.11) et (2.13), s'écrivent

$$\delta H_k = \int_{\Omega_k} \left(\delta\varepsilon_{1k} c_{11}^{*k}\varepsilon_{1k} - \delta\varepsilon_{1k} e_{31}^{*k} E_{3k} - \delta E_{3k} e_{31}^{*k}\varepsilon_{1k} - \delta E_{3k}\epsilon_{33}^{*k} E_{3k}\right)\mathrm{d}\Omega_k$$

$$\delta H_c = \int_{\Omega_c} (\delta\varepsilon_{1c} c_{33}^{*c} \varepsilon_{1c} + \delta\varepsilon_{5c} c_{55}^{c} \varepsilon_{5c} - \delta\varepsilon_{5c} e_{15}^{c} E_{3c} - \delta E_{3c} e_{15}^{c} \varepsilon_{5c} - \delta E_{3c} \epsilon_{11}^{c} E_{3c})\, \mathrm{d}\Omega_c$$

En remplaçant les expressions des champs de déformations (2.6) et des champs électriques (2.18) et (2.23), et en supposant les couches a, b et c symétriques par rapport à leurs lignes moyennes $(z-z_a)$, $(z-z_b)$ et z, les termes correspondant aux peaux, peuvent être décomposés en sous-termes représentant les parties mécaniques δH_{km}, piézoélectriques δH_{kme} et δH_{kem}, et diélectriques δH_{ke},

$$\delta H_k = \delta H_{km} - \delta H_{kme} - \delta H_{kem} + \delta H_{ke} \tag{2.27}$$

où

$$\delta H_{km} = \int_0^L \left(\delta\varepsilon_k^m c_{11}^{*k} A_k \varepsilon_k^m + \delta\varepsilon_k^f \vec{c}_{11}^{k} I_k \varepsilon_k^f \right) \mathrm{d}x$$

$$\delta H_{kme} = -\int_0^L \delta\varepsilon_k^m e_{31}^{*k} A_k \frac{V_k}{h_k}\, \mathrm{d}x$$

$$\delta H_{kem} = -\int_0^L \frac{\delta V_k}{h_k} e_{31}^{*k} A_k \varepsilon_k^m\, \mathrm{d}x$$

$$\delta H_{ke} = -\int_0^L \frac{\delta V_k}{h_k} \epsilon_{33}^{*k} A_k \frac{V_k}{h_k}\, \mathrm{d}x$$

La constante $\vec{c}_{11}^{k}$ introduite dans l'expression de δH_{km} est la modification de c_{11}^{*k} de (2.11) due cette fois-ci à l'effet du potentiel induit quadratique, qui augmente la rigidité de flexion des peaux. Cette constante est définie par

$$\boxed{\vec{c}_{11}^{k} = c_{11}^{*k} + \frac{e_{31}^{*k\,2}}{\epsilon_{33}^{*k}}} \tag{2.28}$$

Également, pour le cœur, δH_c s'écrit

$$\delta H_c = \delta H_{cm} - \delta H_{cme} - \delta H_{cem} + \delta H_{ce} \tag{2.29}$$

où

$$\delta H_{cm} = \int_0^L \left(\delta\varepsilon_c^m c_{33}^{*c} A_c \varepsilon_c^m + \delta\varepsilon_c^f c_{33}^{*c} I_c \varepsilon_c^f + \delta\varepsilon_c^c k_c c_{55}^{c} A_c \varepsilon_c^c \right) \mathrm{d}x$$

$$\delta H_{cme} = -\int_0^L \delta\varepsilon_c^c e_{15}^{c} A_c \frac{V_c}{h_c}\, \mathrm{d}x$$

$$\delta H_{cem} = -\int_0^L \frac{\delta V_c}{h_c} e_{15}^{c} A_c \varepsilon_c^c\, \mathrm{d}x$$

$$\delta H_{ce} = -\int_0^L \frac{\delta V_c}{h_c} \epsilon_{11}^{c} A_c \frac{V_c}{h_c}\, \mathrm{d}x$$

Pour tenir compte du fait que le cisaillement est distribué paraboliquement dans la section transversale, nous avons introduit un facteur de réduction de la section transversale k_c, généralement, dénommé facteur de correction de cisaillement.

Les termes de δH_k représentent les travaux virtuels des efforts de déformation (membrane et flexion), piézoélectriques et diélectrique. En effectuant la même décomposition pour δH_c, on note que la contribution mécanique contient cette fois trois termes (déformations de membrane, flexion et cisaillement). On observe alors que les couplages électromécaniques sont entre ε_k^m et V_k/h_k pour les peaux (extension - champ électrique transversal) et entre ε_c^c et V_c/h_c pour le cœur (cisaillement transversal - champ électrique transversal), comme prévu par les lois de comportement.

Notons que, lorsque les différences de potentiel V_i sont imposées aux couches piézoélectriques (cas actionneur), les variations δV_i sont nulles car les électrodes couvrent entièrement les surfaces des couches actives. Dans ce cas, les variations δH_{kem}, δH_{ke}, δH_{cem}, δH_{ce} sont nulles.

Remarque 2.1 *Pour le cas d'action piézoélectrique, il est intéressant d'analyser les termes piézoélectriques des peaux* $\delta H_{pme} = \sum_k \delta H_{kme}$ *et du cœur* δH_{cme}*. D'après les définitions des déformations généralisées (2.7),* δH_{pme} *et* δH_{cme} *s'écrivent*

$$\delta H_{pme} = -\int_0^L \left[\delta\vec{u}'\left(e_{31}^{*a}A_a\frac{V_a}{h_a}+e_{31}^{*b}A_b\frac{V_b}{h_b}\right)+\frac{1}{2}\delta\tilde{u}'\left(e_{31}^{*a}A_a\frac{V_a}{h_a}-e_{31}^{*b}A_b\frac{V_b}{h_b}\right)\right]\mathrm{d}x \quad (2.30)$$

$$\delta H_{cme} = -\int_0^L \left[\frac{\delta\tilde{u}}{h_c}+(\lambda+1)\delta w'\right]e_{15}^{c}A_c\frac{V_c}{h_c}\mathrm{d}x \quad (2.31)$$

Pour le cas symétrique de peaux identiques, la variation δH_{pme} *est*

$$\delta H_{pme} = -\int_0^L e_{31}^{*p}A_p\left(\delta\vec{u}'\frac{V_a+V_b}{h_p}+\frac{1}{2}\delta\tilde{u}'\frac{V_a-V_b}{h_p}\right)\mathrm{d}x$$

Ainsi, deux cas particuliers peuvent être considérés : potentiels électriques imposés aux peaux égaux ou opposés.

– *Dans le premier cas,* $V_a = V_b = V_p$ *et,* δH_{pme} *s'écrit*

$$\delta\bar{H}_{pme} = -\int_0^L 2e_{31}^{*p}A_p\delta\vec{u}'\frac{V_p}{h_p}\mathrm{d}x$$

Pour des propriétés homogènes du matériau dans la direction longitudinale,

$$\delta\bar{H}_{pme} = -2e_{31}^{*p}A_p\frac{V_p}{h_p}\left[\delta\vec{u}\right]_0^L \quad (2.32)$$

Dans ce cas, $\delta\bar{H}_{pme}$ *peut être interprété comme le travail virtuel de forces d'action d'amplitude* $2e_{31}^{*p}A_pV_p/h_p$*, aux bords de la pastille piézoélectrique, induites par les potentiels électriques appliqués aux surfaces des peaux. Seuls des déplacements ou déformations longitudinaux peuvent être produits.*

– *Dans le cas de potentiels imposés opposés $V_a = -V_b = V_p$, δH_{pme} s'écrit*

$$\delta\tilde{H}_{pme} = -\int_0^L e_{31}^{*p} A_p \delta\tilde{u}' \frac{V_p}{h_p} \mathrm{d}x$$

Par conséquent, une analyse similaire à celle du cas précédent conduit à

$$\delta\tilde{H}_{pme} = -e_{31}^{*p} A_p \frac{V_p}{h_p} [\delta\tilde{u}]_0^L \tag{2.33}$$

Dans ce cas, $\delta\tilde{H}_{pme}$ correspond au travail virtuel de forces d'action $e_{31}^{*p} A_p V_p / h_p$ dans les peaux, induisant un déplacement relatif $\tilde{u}$ des peaux aux bords des pastilles, ce qui permettra de fléchir la poutre.

En comparant les expressions de δH_{cme} (2.31) avec celles de $\delta\bar{H}_{pme}$ (2.32) et $\delta\tilde{H}_{pme}$ (2.33), on observe que le mécanisme d'action par extension ne produit que des forces de traction ou de compression aux bords, tandis que celui par cisaillement induit des moments répartis. Cela signifie que le mécanisme d'action par cisaillement peut-être plus avantageux pour réduire les problèmes de délaminage aux bords, caractéristiques des actionneurs par extension. Cela dit, il faut noter aussi que les actionneurs par cisaillement ne peuvent produire qu'une flexion/cisaillement.

Pour exprimer le travail virtuel des efforts électromécaniques internes, des peaux (2.27) et du cœur (2.29), en fonction des variables $\bar{u}$, $\tilde{u}$ et w, on y substitue les définitions des déformations généralisées (2.7), ce qui conduit à

$$\begin{aligned}\delta H_k = \int_0^L \Bigg\{ & \delta\bar{u}' \left[c_{11}^{*k} A_k \left(\bar{u}' \pm \frac{\tilde{u}'}{2} \right) + e_{31}^{*k} A_k \frac{V_k}{h_k} \right] \\ & \pm \frac{\delta\tilde{u}'}{2} \left[c_{11}^{*k} A_k \left(\bar{u}' \pm \frac{\tilde{u}'}{2} \right) + e_{31}^{*k} A_k \frac{V_k}{h_k} \right] + \delta w'' \bar{c}_{11}^{k} I_k w'' \\ & + \frac{\delta V_k}{h_k} \left[e_{31}^{*k} A_k \left(\bar{u}' \pm \frac{\tilde{u}'}{2} \right) - \epsilon_{33}^{*k} A_k \frac{V_k}{h_k} \right] \Bigg\} \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}\delta H_c = \int_0^L \Bigg\{ & \delta\bar{u}' c_{33}^{*c} A_c \left(\bar{u}' + d w'' \right) + \delta\tilde{u}' c_{33}^{*c} \frac{I_c}{h_c} \left(\frac{\tilde{u}'}{h_c} + \lambda w'' \right) \\ & + \delta w'' \left[c_{33}^{*c} A_c d \bar{u}' + c_{33}^{*c} \frac{I_c}{h_c} \lambda \tilde{u}' + (c_{33}^{*c} A_c d^2 + c_{33}^{*c} I_c \lambda^2) w'' \right] \\ & + \delta\tilde{u} \left[k_c c_{55}^{c} \frac{A_c}{h_c} \left(\frac{\tilde{u}}{h_c} + (\lambda+1) w' \right) + e_{15}^{c} \frac{A_c}{h_c} \frac{V_c}{h_c} \right] \\ & + \delta w' (\lambda+1) \left[k_c c_{55}^{c} A_c \left(\frac{\tilde{u}}{h_c} + (\lambda+1) w' \right) + e_{15}^{c} A_c \frac{V_c}{h_c} \right] \\ & + \frac{\delta V_c}{h_c} \left[e_{15}^{c} A_c \left(\frac{\tilde{u}}{h_c} + (\lambda+1) w' \right) - \epsilon_{11}^{c} A_c \frac{V_c}{h_c} \right] \Bigg\} \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.35}$$

En intégrant par parties une fois sur les termes en $\delta\bar{u}'$, $\delta\tilde{u}'$ et deux fois sur les termes en $\delta w''$, on peut écrire δH_k sous la forme

$$\delta H_k = \delta H_k^{lm} + \delta H_k^{vl} \tag{2.36}$$

avec

$$\delta H_k^{lm} = \left\{ \left(\delta\bar{u} \pm \frac{\delta\tilde{u}}{2} \right) \left[c_{11}^{*k} A_k \left(\bar{u}' \pm \frac{\tilde{u}'}{2} \right) + e_{31}^{*k} A_k \frac{V_k}{h_k} \right] + \delta w' \bar{c}_{11}^{k} I_k w'' - \delta w \bar{c}_{11}^{k} I_k w''' \right\}_0^L$$

$$\begin{aligned} \delta H_k^{vl} = -\int_0^L \Bigg\{ & \delta\bar{u} \left[c_{11}^{*k} A_k \left(\bar{u}'' \pm \frac{\tilde{u}''}{2} \right) + e_{31}^{*k} A_k \frac{V_k{}'}{h_k} \right] \\ & \pm \frac{\delta\tilde{u}}{2} \left[c_{11}^{*k} A_k \left(\bar{u}'' \pm \frac{\tilde{u}''}{2} \right) + e_{31}^{*k} A_k \frac{V_k{}'}{h_k} \right] - \delta w \bar{c}_{11}^{k} I_k w'''' \\ & - \frac{\delta V_k}{h_k} \left[e_{31}^{*k} A_k \left(\bar{u}' \pm \frac{\tilde{u}'}{2} \right) - \epsilon_{33}^{*k} A_k \frac{V_k}{h_k} \right] \Bigg\} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Également, pour le cœur,

$$\delta H_c = \delta H_c^{lm} + \delta H_c^{vl} \tag{2.37}$$

avec

$$\begin{aligned} \delta H_c^{lm} = \Bigg\{ & \delta\bar{u} c_{33}^{*c} A_c \left(\bar{u}' + d w'' \right) + \delta\tilde{u} c_{33}^{*c} \frac{I_c}{h_c} \left(\frac{\tilde{u}'}{h_c} + \lambda w'' \right) \\ & + \delta w' \left[c_{33}^{*c} A_c d \bar{u}' + c_{33}^{*c} \frac{I_c}{h_c} \lambda \tilde{u}' + (c_{33}^{*c} A_c d^2 + c_{33}^{*c} I_c \lambda^2) w'' \right] \\ & + \delta w \left[k_c c_{55}^c A_c (\lambda+1) \left(\frac{\tilde{u}}{h_c} + (\lambda+1) w' \right) + e_{15}^c A_c (\lambda+1) \frac{V_c}{h_c} \right. \\ & \left. - (c_{33}^{*c} A_c d^2 + c_{33}^{*c} I_c \lambda^2) w''' - c_{33}^{*c} A_c d \bar{u}'' - c_{33}^{*c} \frac{I_c}{h_c} \lambda \tilde{u}'' \right] \Bigg\}_0^L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta H_c^{vl} = -\int_0^L \Bigg\{ & \delta\bar{u} c_{33}^{*c} A_c \left(\bar{u}'' + d w''' \right) + \delta\tilde{u} \left[c_{33}^{*c} \frac{I_c}{h_c^2} \tilde{u}'' \right. \\ & \left. + c_{33}^{*c} \frac{I_c}{h_c} \lambda w''' - k_c c_{55}^c \frac{A_c}{h_c} \left(\frac{\tilde{u}}{h_c} + (\lambda+1) w' \right) - e_{15}^c \frac{A_c}{h_c} \frac{V_c}{h_c} \right] \\ & - \delta w \left[c_{33}^{*c} A_c d \bar{u}''' + c_{33}^{*c} \frac{I_c}{h_c} \lambda \tilde{u}''' + (c_{33}^{*c} A_c d^2 + c_{33}^{*c} I_c) w'''' \right. \\ & \left. - k_c c_{55}^c A_c (\lambda+1) \left(\frac{\tilde{u}'}{h_c} + (\lambda+1) w'' \right) - e_{15}^c A_c (\lambda+1) \frac{V_c{}'}{h_c} \right] \\ & - \frac{\delta V_c}{h_c} \left[e_{15}^c A_c \left(\frac{\tilde{u}}{h_c} + (\lambda+1) w' \right) - \epsilon_{11}^c A_c \frac{V_c}{h_c} \right] \Bigg\} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Travail virtuel des efforts d'inertie

Le travail virtuel des efforts d'inertie de la poutre sandwich de volume Ω à trois couches est

$$\delta T = -\sum_i \int_{\Omega_i} \left(\delta \breve{u}_i \rho_i \ddot{\breve{u}}_i + \delta w_i \rho_i \ddot{w}_i\right) \mathrm{d}\Omega_i \ , \quad {\scriptstyle i=a,b,c} \tag{2.38}$$

où ρ_i est la densité volumique de masse de la i-ième couche. Remplaçant les expressions des champs de déplacements (2.1) et supposant les couches a, b et c symétriques par rapport à $(z-z_a)$, $(z-z_b)$ et z, respectivement, on obtient

$$\delta T_k = -\int_0^L \rho_k \left[A_k \left(\delta u_k \ddot{u}_k + \delta w \ddot{w}\right) + I_k \delta w' \ddot{w}'\right] \mathrm{d}x \tag{2.39}$$

$$\delta T_c = -\int_0^L \rho_c \left[A_c \left(\delta u_c \ddot{u}_c + \delta w \ddot{w}\right) + I_c \delta \beta_c \ddot{\beta}_c\right] \mathrm{d}x \tag{2.40}$$

En tenant compte des équations (2.3) et (2.4), on exprime le travail virtuel des efforts d'inertie en fonction de $\bar{u}$, $\tilde{u}$ et w seulement

$$\delta T_k = -\int_0^L \left[\delta \bar{u} \rho_k A_k \left(\ddot{\bar{u}} \pm \frac{\ddot{\tilde{u}}}{2}\right) \pm \frac{\delta \tilde{u}}{2} \rho_k A_k \left(\ddot{\bar{u}} \pm \frac{\ddot{\tilde{u}}}{2}\right) + \delta w \rho_k A_k \ddot{w} + \delta w' \rho_k I_k \ddot{w}'\right] \mathrm{d}x \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned} \delta T_c = -\int_0^L \Bigg\{ & \delta \bar{u} \rho_c A_c \left(\ddot{\bar{u}} + d\ddot{w}'\right) + \delta \tilde{u} \frac{\rho_c I_c}{h_c} \left(\frac{\ddot{\tilde{u}}}{h_c} + \lambda \ddot{w}'\right) \\ & + \delta w \rho_c A_c \ddot{w} + \delta w' \left[\rho_c A_c d \ddot{\bar{u}} + \rho_c \frac{I_c}{h_c} \lambda \ddot{\tilde{u}} + (\rho_c A_c d^2 + \rho_c I_c \lambda^2) \ddot{w}'\right] \Bigg\} \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.42}$$

En intégrant par parties les termes en $\delta w'$, δT_k peut être écrite sous la forme

$$\delta T_k = \delta T_k^{lm} + \delta T_k^{vl} \tag{2.43}$$

avec

$$\delta T_k^{lm} = \left(-\delta w \rho_k I_k \ddot{w}'\right)_0^L$$

$$\delta T_k^{vl} = -\int_0^L \left[\delta \bar{u} \rho_k A_k \left(\ddot{\bar{u}} \pm \frac{\ddot{\tilde{u}}}{2}\right) \pm \frac{\delta \tilde{u}}{2} \rho_k A_k \left(\ddot{\bar{u}} \pm \frac{\ddot{\tilde{u}}}{2}\right) + \delta w \left(\rho_k A_k \ddot{w} - \rho_k I_k \ddot{w}''\right)\right] \mathrm{d}x$$

De même, pour le cœur, on a

$$\delta T_c = \delta T_c^{lm} + \delta T_c^{vl} \tag{2.44}$$

avec

$$\delta T_c^{lm} = \left\{ -\delta w \left[\rho_c A_c d\ddot{\bar{u}} + \rho_c \frac{I_c}{h_c} \lambda \ddot{\tilde{u}} + (\rho_c A_c d^2 + \rho_c I_c \lambda^2) \ddot{w}' \right] \right\}_0^L$$

$$\delta T_c^{vl} = -\int_0^L \left\{ \delta\bar{u} \rho_c A_c \left(\ddot{\bar{u}} + d\ddot{w}' \right) + \delta\tilde{u} \frac{\rho_c I_c}{h_c} \left(\frac{\ddot{\tilde{u}}}{h_c} + \lambda \ddot{w}' \right) \right.$$
$$\left. -\delta w \left[\rho_c A_c d\ddot{\bar{u}}' + \rho_c \frac{I_c}{h_c} \lambda \ddot{\tilde{u}}' + (\rho_c A_c d^2 + \rho_c I_c \lambda^2) \ddot{w}'' - \rho_c A_c \ddot{w} \right] \right\} \mathrm{d}x$$

Travail virtuel des efforts extérieurs

Des forces axiales et transversales, surfaciques (F_x^i,F_z^i) et volumiques (f_x^i,f_z^i), sont considérées pour chaque couche de la poutre sandwich. Le travail virtuel réalisé pour ces forces est défini par

$$\delta W_i = \left[\int_{A_i} \left(F_x^i \delta\breve{u}_i + F_z^i \delta w_i \right) \mathrm{d}A_i \right]_0^L + \int_{\Omega_i} \left(f_x^i \delta\breve{u}_i + f_z^i \delta w_i \right) \mathrm{d}\Omega_i \ , \quad i=a,b,c \tag{2.45}$$

En remplaçant les expressions des champs de déplacements (2.1), on obtient

$$\delta W_k = \left[\int_{A_k} \left\{ F_x^k [\delta u_k - (z - z_k) \delta w'] + F_z^k \delta w \right\} \mathrm{d}A_k \right]_0^L$$
$$+ \int_{\Omega_k} \left\{ f_x^k [\delta u_k - (z - z_k) \delta w'] + f_z^k \delta w \right\} \mathrm{d}\Omega_k$$

$$\delta W_c = \left\{ \int_{A_c} \left[F_x^c (\delta u_c + z \delta\beta_c) + F_z^c \delta w \right] \mathrm{d}A_c \right\}_0^L + \int_{\Omega_c} \left[f_x^c (\delta u_c + z \delta\beta_c) + f_z^c \delta w \right] \mathrm{d}\Omega_c$$

Supposant les couches *a*, *b* et *c* symétriques pas rapport à $(z - z_a)$, $(z - z_b)$ et *z*, on a

$$\delta W_k = \left[N_k \delta u_k - M_k \delta w' + Q_k \delta w \right]_0^L + \int_0^L \left[n_k \delta u_k - m_k \delta w' + q_k \delta w \right] \mathrm{d}x \tag{2.46}$$

$$\delta W_c = \left[N_c \delta u_c + M_c \delta\beta_c + Q_c \delta w \right]_0^L + \int_0^L \left[n_c \delta u_c + m_c \delta\beta_c + q_c \delta w \right] \mathrm{d}x \tag{2.47}$$

où les forces et moments concentrés et distribués sont définies par

$$N_i = \int_{A_i} F_x^i \mathrm{d}A_i \ ; \qquad n_i = \int_{A_i} f_x^i \mathrm{d}A_i$$
$$M_i = \int_{A_i} F_x^i (z - z_i) \mathrm{d}A_i \ ; \quad m_i = \int_{A_i} f_x^i (z - z_i) \mathrm{d}A_i$$
$$Q_i = \int_{A_i} F_z^i \mathrm{d}A_i \ ; \qquad q_i = \int_{A_i} f_z^i \mathrm{d}A_i$$

En tenant compte des équations (2.3) et (2.4), le travail virtuel des efforts extérieurs peut être exprimé en fonction des variables $\bar{u}$, $\tilde{u}$ et w seulement

$$\begin{aligned}\delta W = \Bigg[& N_a\left(\delta\bar{u}+\frac{\delta\tilde{u}}{2}\right) - M_a\delta w' + Q_a\delta w + N_b\left(\delta\bar{u}-\frac{\delta\tilde{u}}{2}\right) - M_b\delta w' \\ & + Q_b\delta w + N_c(\delta\bar{u}+d\delta w') + M_c\left(\frac{\delta\tilde{u}}{h_c}+\lambda w'\right) + Q_c\delta w\Bigg]_0^L \\ & + \int_0^L \Bigg[n_a\left(\delta\bar{u}+\frac{\delta\tilde{u}}{2}\right) - m_a\delta w' + q_a\delta w + n_b\left(\delta\bar{u}-\frac{\delta\tilde{u}}{2}\right) - m_b\delta w' \\ & + q_b\delta w + n_c(\delta\bar{u}+d\delta w') + m_c\left(\frac{\delta\tilde{u}}{h_c}+\lambda w'\right) + q_c\delta w\Bigg]\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

qu'on peut réarranger de la façon suivante

$$\begin{aligned}\delta W = \Bigg[& (N_a+N_b+N_c)\delta\bar{u} + \left(\frac{N_a-N_b}{2}+\frac{M_c}{h_c}\right)\delta\tilde{u} \\ & - (M_a+M_b-dN_c-\lambda M_c)\,\delta w' + (Q_a+Q_b+Q_c)\delta w\Bigg]_0^L \\ & + \int_0^L \Bigg[(n_a+n_b+n_c)\delta\bar{u} + \left(\frac{n_a-n_b}{2}+\frac{m_c}{h_c}\right)\delta\tilde{u} - (m_a+m_b \\ & - dn_c-\lambda m_c)\delta w' + (q_a+q_b+q_c)\delta w\Bigg]\,\mathrm{d}x \qquad (2.48)\end{aligned}$$

À travers une intégration par parties des termes en $\delta w'$ sous l'intégrale, δW peut s'écrire sous la forme

$$\delta W = \delta W^{lm} + \delta W^{vl} \qquad (2.49)$$

où

$$\begin{aligned}\delta W^{lm} = \Bigg[& (N_a+N_b+N_c)\delta\bar{u} + \left(\frac{N_a-N_b}{2}+\frac{M_c}{h_c}\right)\delta\tilde{u} - (M_a+M_b \\ & - dN_c-\lambda M_c)\delta w' + (Q_a+Q_b+Q_c-m_a-m_b+dn_c+\lambda m_c)\,\delta w\Bigg]_0^L\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta W^{vl} = \int_0^L \Bigg[& (n_a+n_b+n_c)\delta\bar{u} + \left(\frac{n_a-n_b}{2}+\frac{m_c}{h_c}\right)\delta\tilde{u} \\ & + (q_a+q_b+q_c+m_a'+m_b'-dn_c'-\lambda m_c')\delta w\Bigg]\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On peut en conclure que les forces axiales N_a, n_a et N_b, n_b, appliquées aux peaux supérieure et inférieure respectivement, cisaillent le cœur par leurs différences. En étant égales, elles ne peuvent induire que des déplacements de membrane. Par contre, en étant égales mais opposées, elles induisent une flexion.

2.2.5 Équations de mouvement et conditions limites

Les équations de mouvement et les conditions aux limites de la poutre sandwich peuvent être obtenues à partir de la formulation variationnelle (2.24), en y remplaçant les expressions des travaux virtuels internes (2.36) et (2.37), d'inertie (2.43) et (2.44) et externes (2.49).

Équations de mouvement

Puisque les variables $\delta\bar{u}$, $\delta\tilde{u}$, δw, δV_a, δV_b et δV_c sont indépendantes et arbitraires dans l'intervalle $[0, L]$, l'équation résultante de la combinaison de (2.24), (2.36), (2.37), (2.43), (2.44) et (2.49) n'a d'autre solution que la triviale, ce qui conduit à

$$\begin{aligned}\delta\bar{u}\ :\quad & (c_{11}^{*a}A_a + c_{11}^{*b}A_b + c_{33}^{*c}A_c)\bar{u}'' + \frac{1}{2}(c_{11}^{*a}A_a - c_{11}^{*b}A_b)\tilde{u}'' + c_{33}^{*c}A_c d w''' \\ & + e_{31}^{*a}A_a\frac{V_a{}'}{h_a} + e_{31}^{*b}A_b\frac{V_b{}'}{h_b} + (n_a + n_b + n_c) = (\rho_a A_a + \rho_b A_b + \rho_c A_c)\ddot{\bar{u}} \\ & + \frac{1}{2}(\rho_a A_a - \rho_b A_b)\ddot{\tilde{u}} + \rho_c A_c d\ddot{w}' \end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}\delta\tilde{u}\ :\quad & \frac{1}{2}(c_{11}^{*a}A_a - c_{11}^{*b}A_b)\bar{u}'' + \frac{1}{4}\left(c_{11}^{*a}A_a + c_{11}^{*b}A_b + c_{33}^{*c}\frac{4I_c}{h_c^2}\right)\tilde{u}'' + c_{33}^{*c}\frac{I_c}{h_c}\lambda w''' \\ & + \frac{1}{2}\left(e_{31}^{*a}A_a\frac{V_a{}'}{h_a} - e_{31}^{*b}A_b\frac{V_b{}'}{h_b}\right) - k_c c_{55}^{c}\frac{A_c}{h_c}\left(\frac{\tilde{u}}{h_c} + (\lambda+1)w'\right) \\ & - e_{15}^{c}\frac{A_c}{h_c}\frac{V_c}{h_c} + \left(\frac{n_a - n_b}{2} + \frac{m_c}{h_c}\right) = \frac{1}{2}(\rho_a A_a - \rho_b A_b)\ddot{\bar{u}} \\ & + \frac{1}{4}\left(\rho_a A_a + \rho_b A_b + \frac{4\rho_c I_c}{h_c^2}\right)\ddot{\tilde{u}} + \rho_c\frac{I_c}{h_c}\lambda\ddot{w}' \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}\delta w\ :\quad & c_{33}^{*c}A_c d\bar{u}''' + c_{33}^{*c}\frac{I_c}{h_c}\lambda\tilde{u}''' + (\bar{c}_{11}^{a}I_a + \bar{c}_{11}^{b}I_b + c_{33}^{*c}A_c d^2 + c_{33}^{*c}I_c)w'''' \\ & - k_c c_{55}^{c}A_c(\lambda+1)\left[\frac{\tilde{u}'}{h_c} + (\lambda+1)w''\right] - e_{15}^{c}A_c(\lambda+1)\frac{V_c{}'}{h_c} \\ & - (q_a + q_b + q_c + m_a' + m_b' - d n_c' - \lambda m_c') = \rho_c A_c d\ddot{\bar{u}}' + \rho_c\frac{I_c}{h_c}\lambda\ddot{\tilde{u}}' \\ & + (\rho_a I_a + \rho_b I_b + \rho_c A_c d^2 + \rho_c I_c\lambda^2)\ddot{w}'' - (\rho_a A_a + \rho_b A_b + \rho_c A_c)\ddot{w} \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\delta V_a \ : \quad e_{31}^{*a}\left(\bar{u}' + \frac{\tilde{u}'}{2}\right) - \epsilon_{33}^{*a}\frac{V_a}{h_a} = 0 \tag{2.53}$$

$$\delta V_b \ : \quad e_{31}^{*b}\left(\bar{u}' - \frac{\tilde{u}'}{2}\right) - \epsilon_{33}^{*b}\frac{V_b}{h_b} = 0 \tag{2.54}$$

$$\delta V_c \ : \quad e_{15}^{c}\left[\frac{\tilde{u}}{h_c} + (\lambda+1)w'\right] - \epsilon_{11}^{c}\frac{V_c}{h_c} = 0 \tag{2.55}$$

Remarque 2.2 *Dans le cas où les potentiels V_i sont inconnus (cas capteur), les expressions (2.53), (2.54) et (2.55), les fournissent en fonction des déformations de membrane pour les peaux et de cisaillement pour le cœur. D'ailleurs, si l'on substitue ces expressions dans les autres équations (2.50), (2.51) et (2.52), on observe que la rigidité de la couche piézoélectrique est augmentée par un effet passif du matériau, représentée par la modification des constantes élastiques suivante*

$$\bar{c}_{11}^{k} = c_{11}^{*k} + \frac{{e_{31}^{*k}}^2}{\epsilon_{33}^{*k}} \ ; \ \bar{c}_{55}^{c} = k_c c_{55}^{c} + \frac{{e_{15}^{c}}^2}{\epsilon_{11}^{c}} \tag{2.56}$$

Cette modification n'est pas à confondre avec celle due au potentiel quadratique induit (2.28), qui ne modifie que la rigidité en flexion des peaux, tandis que celle-ci augmente les rigidités de membrane des peaux et de cisaillement du cœur. Ceci est par contre équivalent à une condensation statique des ddls électriques sur les ddls mécaniques. Le problème devient mécanique avec de constantes modifiées par l'effet piézoélectrique.

Dans le cas pratique de poutre symétrique, dont les peaux ont les mêmes propriétés géométriques et matérielles, on obtient un découplage entre $\bar{u}$ et $\tilde{u}$,w (2.50). En plus, si l'on annule les propriétés des peaux et l'on considère que le cœur est élastique, on retrouve les équations standards pour une poutre de Timoshenko.

Conditions aux limites

En remplaçant les équations de mouvement (2.50)–(2.55) dans la formulation variationnelle (2.24) et utilisant (2.36), (2.37), (2.43), (2.44) et (2.49), on obtient, aux limites $x = 0, L$, les conditions suivantes

$$\left[(c_{11}^{*a}A_a + c_{11}^{*b}A_b + c_{33}^{*c}A_c)\bar{u}' + \frac{1}{2}(c_{11}^{*a}A_a - c_{11}^{*b}A_b)\tilde{u}' + c_{33}^{*c}A_c dw'' + e_{31}^{*a}A_a\frac{V_a}{h_a} + e_{31}^{*b}A_b\frac{V_b}{h_b} - (N_a + N_b + N_c)\right]\delta\bar{u} = 0 \tag{2.57}$$

$$\left[\frac{1}{2}(c_{11}^{*a}A_a - c_{11}^{*b}A_b)\bar{u}' + \frac{1}{4}\left(c_{11}^{*a}A_a + c_{11}^{*b}A_b + c_{33}^{*c}\frac{4I_c}{h_c^2}\right)\tilde{u}' + c_{33}^{*c}\frac{I_c}{h_c}\lambda w'' + \frac{1}{2}\left(e_{31}^{*a}A_a\frac{V_a}{h_a} - e_{31}^{*b}A_b\frac{V_b}{h_b}\right) - \left(\frac{N_a - N_b}{2} + \frac{M_c}{h_c}\right)\right]\delta\tilde{u} = 0 \quad (2.58)$$

$$\left[c_{33}^{*c}A_c d\bar{u}' + c_{33}^{*c}\frac{I_c}{h_c}\lambda\tilde{u}' + (\bar{c}_{11}^{a}I_a + \bar{c}_{11}^{b}I_b + c_{33}^{*c}A_c d^2 + c_{33}^{*c}I_c\lambda^2)w'' + (M_a + M_b - dN_c - \lambda M_c)\right]\delta w' = 0 \quad (2.59)$$

$$\left\{-\rho_c A_c d\bar{\ddot{u}} - \rho_c\frac{I_c}{h_c}\lambda\ddot{\tilde{u}} - (\rho_a I_a + \rho_b I_b + \rho_c A_c d^2 + \rho_c I_c\lambda^2)\ddot{w}' + c_{33}^{*c}A_c d\bar{u}'' + c_{33}^{*c}\frac{I_c}{h_c}\lambda\tilde{u}'' + (\bar{c}_{11}^{a}I_a + \bar{c}_{11}^{b}I_b + c_{33}^{*c}A_c d^2 + c_{33}^{*c}I_c\lambda^2)w''' - k_c c_{55}^{c}A_c(\lambda+1)\left[\frac{\tilde{u}}{h_c} + (\lambda+1)w'\right] - e_{15}^{c}A_c(\lambda+1)\frac{V_c}{h_c} + (Q_a + Q_b + Q_c - m_a - m_b + dn_c + \lambda m_c)\right\}\delta w = 0 \quad (2.60)$$

Dans le cas de poutre symétrique, le déplacement moyen $\bar{u}$ est découplé des déplacements relatif $\tilde{u}$ et transversal w (2.57). D'ailleurs, pour le cas actionneur, si les potentiels imposés V_a et V_b sont égaux, seul un déplacement moyen $\bar{u}$ peut être induit. Au contraire, d'après (2.57), si les potentiels sont opposés ($V_a = -V_b$), seuls des déplacements relatif $\tilde{u}$ et transversal w sont induits.

Il est aussi intéressant d'observer que les peaux piézoélectriques ne peuvent actionner la poutre que par les bords. Tandis que le cœur piézoélectrique le fait par des moments distribués, comme en (2.51), et forces transversales concentrées aux bords, comme en (2.60).

De (2.51) et (2.58), on voit qu'une partie du cisaillement du cœur est dû au glissement des peaux, qui peut être induit par des forces membranaires mécaniques (n_a, N_a, n_b, N_b) opposées ou par des différences de potentiels (V_a, V_b).

2.3 Discrétisation par éléments finis

Dans cette section le modèle théorique présenté précédemment sera discrétisé par la méthode des éléments finis, pour deux cas spécifiques, à savoir le cas où les pastilles piézoélectriques sont supposées être des actionneurs, auxquelles le champ électrique est

imposé, et le cas, où elles sont considérées comme des capteurs, dont le champ électrique est inconnu.

Le premier modèle éléments finis, dénommé *PSAP (Poutre Sandwich avec Actionneurs piézoélectriques)*, est plus simple à mettre en œuvre et aboutit à des matrices de dimensions plus faibles, grâce à l'absence de ddls électriques additionnels. En plus, même s'il n'est valable, en principe, que pour les cas d'actionneurs piézoélectriques, on montre que ce modèle peut fournir des approximations assez satisfaisantes pour des tensions inconnues dans les couches piézoélectriques à travers un post-traitement des résultats.

Le deuxième modèle, dénommé *PSEP (Poutre Sandwich avec Éléments Piézoélectriques)* tient compte de la piézoélectricité à travers l'ajout de ddls électriques pour chaque couche piézoélectrique. C'est pourquoi il aboutit à des matrices de tailles plus grandes. Néanmoins, il fournit des approximations plus précises des comportements mécanique et piézoélectrique. En plus, il est valable pour des cas de tensions inconnues ou imposées. En effet, pour le cas capteur, les ddls électriques résultants du calcul éléments finis fournissent directement les tensions induites dans chaque couche piézoélectrique, sans avoir besoin de réaliser des post-traitements. Pour le cas actionneur, l'imposition des tensions sur les couches piézoélectriques peut être faite directement à travers la substitution dans les ddls électriques. Ce deuxième modèle peut également être modifié à travers une condensation statique des ddls électriques au niveau élémentaire aboutissant à un élément fini avec le même nombre de ddls que le modèle PSAP, mais tenant compte des tensions induites dans les couches piézoélectriques dont les potentiels sont inconnus.

Ces modèles seront présentés dans les prochaines sous-sections, puis, comparés à travers le calcul des tensions induites dans les capteurs piézoélectriques. Pour l'interpolation des déplacements moyen et relatif, $\bar{u}$ et $\tilde{u}$, des fonctions de forme linéaires de Lagrange seront utilisées, puisque ces variables sont C^0-continues. Pour la flèche w, qui est C^1-continue, des fonctions de forme cubiques d'Hermite sont nécessaires. Les différences de potentiels électriques V_i seront considérées constantes par élément puisque tous les éléments piézoélectriques sont supposés complètement couverts par les électrodes.

2.3.1 Modèle sans degrés de liberté électriques

L'objectif de cette section est de présenter la discrétisation par éléments finis de la poutre sandwich piézoélectrique, en considérant que les champs électriques dans les couches piézoélectriques sont imposés, c'est-à-dire, ces dernières agissent en tant qu'actionneurs. Par conséquent, il n'est pas nécessaire d'ajouter des ddls électriques. Les déplacements généralisés $\mathbf{d} = \text{col}(\bar{u}, w, \tilde{u})$, col( ) étant utilisé pour dénoter des vecteurs ligne, sont discrétisés par

$$\mathbf{d} = \mathbf{N}\mathbf{q}_e \tag{2.61}$$

où

$$\mathbf{N} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{array}\right]$$

est la matrice d'interpolation définie par les fonctions de forme N_l ($l = 1 \ldots 6$) suivantes

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L_e} \; ; \; N_2 = \frac{x}{L_e} \; ; \; N_3 = 1 - \frac{3x^2}{L_e^2} + \frac{2x^3}{L_e^3}$$
$$N_4 = x\left(1 - \frac{x}{L_e}\right)^2 \; ; \; N_5 = \frac{x^2}{L_e^2}\left(3 - \frac{2x}{L_e}\right) \; ; \; N_6 = \frac{x^2}{L_e}\left(\frac{x}{L_e} - 1\right)$$

L_e est la longueur de l'élément. Le vecteur des degrés de liberté élémentaires $\mathbf{q}_e$ est composé de huit ddls mécaniques (Figure 2.2)

$$\mathbf{q}_e = \mathrm{col}(\bar{u}_1, w_1, w_1', \tilde{u}_1, \bar{u}_2, w_2, w_2', \tilde{u}_2) \tag{2.62}$$

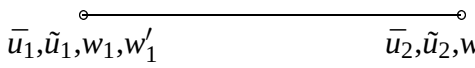


Figure 2.2: Degrés de liberté de l'élément fini PSAP.

Les composantes u_i, β_i, w des déplacements de chaque couche (2.1) peuvent être discrétisées par

$$u_i = \mathbf{N}_{xi}\mathbf{q}_e \; ; \; \beta_i = \mathbf{N}_{ri}\mathbf{q}_e \; ; \; w = \mathbf{N}_z\mathbf{q}_e \tag{2.63}$$

où les vecteurs d'interpolation des déplacements axiaux $\mathbf{N}_{xi}$ et transversal $\mathbf{N}_z$ et des rotations $\mathbf{N}_{ri}$ sont

$$\mathbf{N}_{xk} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \pm\frac{1}{2}N_1 & | & N_2 & 0 & 0 & \pm\frac{1}{2}N_2 \end{bmatrix} \; ; \; k{=}a(+),b(-)$$
$$\mathbf{N}_{xc} = \begin{bmatrix} N_1 & dN_3' & dN_4' & 0 & | & N_2 & dN_5' & dN_6' & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{N}_{rk} = \begin{bmatrix} 0 & -N_3' & -N_4' & 0 & | & 0 & -N_5' & -N_6' & 0 \end{bmatrix} \; ; \; k{=}a(+),b(-)$$
$$\mathbf{N}_{rc} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda N_3' & \lambda N_4' & \frac{1}{h_c}N_1 & | & 0 & \lambda N_5' & \lambda N_6' & \frac{1}{h_c}N_2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{N}_z = \begin{bmatrix} 0 & N_3 & N_4 & 0 & | & 0 & N_5 & N_6 & 0 \end{bmatrix}$$

De même, les déformations généralisées de chaque couche $\varepsilon_i^m, \varepsilon_i^f, \varepsilon_c^c$ (2.7) peuvent être discrétisées par,

$$\varepsilon_i^m = \mathbf{B}_{mi}\mathbf{q}_e \; ; \; \varepsilon_i^f = \mathbf{B}_{fi}\mathbf{q}_e \; ; \; \varepsilon_c^c = \mathbf{B}_{cc}\mathbf{q}_e \tag{2.64}$$

où les vecteurs d'interpolation des déformations de membrane $\mathbf{B}_{mi}$, de flexion $\mathbf{B}_{fi}$ et de cisaillement $\mathbf{B}_{cc}$ sont

$$\mathbf{B}_{mk} = \begin{bmatrix} N_1' & 0 & 0 & \pm\frac{1}{2}N_1' & | & N_2' & 0 & 0 & \pm\frac{1}{2}N_2' \end{bmatrix} \; ; \; k{=}a(+),b(-)$$
$$\mathbf{B}_{mc} = \begin{bmatrix} N_1' & dN_3'' & dN_4'' & 0 & | & N_2' & dN_5'' & dN_6'' & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B}_{fk} = \begin{bmatrix} 0 & -N_3'' & -N_4'' & 0 & | & 0 & -N_5'' & -N_6'' & 0 \end{bmatrix} \; ; \; k{=}a(+),b(-)$$
$$\mathbf{B}_{fc} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda N_3'' & \lambda N_4'' & \frac{1}{h_c}N_1' & | & 0 & \lambda N_5'' & \lambda N_6'' & \frac{1}{h_c}N_2' \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{cc} = \left[0 \quad (\lambda+1)N_3' \quad (\lambda+1)N_4' \quad \tfrac{1}{h_c}N_1 \quad | \quad 0 \quad (\lambda+1)N_5' \quad (\lambda+1)N_6' \quad \tfrac{1}{h_c}N_2\right]$$

Ainsi, on observe que les vecteurs d'interpolation des déplacements et des déformations sont associés à travers les relations suivantes

$$\mathbf{N}_{rk} = -\mathbf{N}_z' \; ; \; \mathbf{B}_{mi} = \mathbf{N}_{xi}' \; ; \; \mathbf{B}_{fi} = \mathbf{N}_{ri}' \; ; \; \mathbf{B}_{cc} = \mathbf{N}_{rc} - \mathbf{N}_{rk} \tag{2.65}$$

En utilisant les équations (2.27) et (2.29), la discrétisation des contributions élémentaires δH_k^e et δH_c^e au travail des efforts électromécaniques internes conduit à

$$\delta H_k^e = \delta H_{km}^e - \delta H_{kme}^e \; ; \; \delta H_c^e = \delta H_{cm}^e - \delta H_{cme}^e \tag{2.66}$$

avec

$$\delta H_{km}^e = \delta \mathbf{q}_e^T \bar{\mathbf{K}}_k^e \mathbf{q}_e \; ; \; \delta H_{kme}^e = \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{F}_{ke}^e \; ; \quad \delta H_{cm}^e = \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_c^e \mathbf{q}_e \; ; \; \delta H_{cme}^e = \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{F}_{ce}^e$$

$\bar{\mathbf{K}}_k^e$ et $\mathbf{K}_c^e$ étant les matrices élémentaires de rigidité de la k-ième peau et du cœur, respectivement, définies par

$$\bar{\mathbf{K}}_k^e = \int_0^{L_e} \left(c_{11}^{*k} A_k \mathbf{B}_{mk}^T \mathbf{B}_{mk} + \bar{c}_{11}^k I_k \mathbf{B}_{fk}^T \mathbf{B}_{fk} \right) \mathrm{d}x \tag{2.67}$$

$$\mathbf{K}_c^e = \int_0^{L_e} \left(c_{33}^{*c} A_c \mathbf{B}_{mc}^T \mathbf{B}_{mc} + c_{33}^{*c} I_c \mathbf{B}_{fc}^T \mathbf{B}_{fc} + k_c c_{55}^c A_c \mathbf{B}_{cc}^T \mathbf{B}_{cc} \right) \mathrm{d}x \tag{2.68}$$

L'exposant ^{T} définie l'opération de transposition. $\mathbf{F}_{ke}^e$ et $\mathbf{F}_{ce}^e$ sont les vecteurs des forces électriques généralisées induites par les actionneurs piézoélectriques

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ke}^e &= -\int_0^{L_e} e_{31}^{*k} A_k \frac{V_k}{h_k} \mathbf{B}_{mk}^T \, \mathrm{d}x \; = \; -e_{31}^{*k} A_k \frac{V_k}{h_k} \left[\mathbf{N}_{xk}^T\right]_0^{L_e} \\ \mathbf{F}_{ce}^e &= -\int_0^{L_e} e_{15}^c A_c \frac{V_c}{h_c} \mathbf{B}_{cc}^T \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.69}$$

À partir des expressions (2.39) et (2.40), les contributions élémentaires des travaux virtuels des efforts d'inertie sont discrétisées par

$$\delta T_k^e = -\delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{M}_k^e \ddot{\mathbf{q}}_e \; ; \; \delta T_c^e = -\delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{M}_c^e \ddot{\mathbf{q}}_e \tag{2.70}$$

où $\ddot{\mathbf{q}}_e$ est le vecteur d'accélération. Les matrices élémentaires de masse s'écrivent, pour la i-ième, sous la forme

$$\mathbf{M}_i^e = \int_0^{L_e} \rho_i \left[A_i \left(\mathbf{N}_{xi}^T \mathbf{N}_{xi} + \mathbf{N}_z^T \mathbf{N}_z \right) + I_i \mathbf{N}_{ri}^T \mathbf{N}_{ri} \right] \mathrm{d}x \; ; \quad {}_{i=a,b,c} \tag{2.71}$$

Les expressions des travaux des forces réparties externes (2.46) et (2.47) peuvent aussi être discrétisées, fournissant la contribution élémentaire suivante

$$\delta W^e = \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{F}_m^e \tag{2.72}$$

où $\mathbf{F}_m^e$ définit le vecteur élémentaire des efforts mécaniques distribuées généralisées

$$\mathbf{F}_m^e = \sum_i \int_0^{L_e} \left(n_i \mathbf{N}_{xi}^T + q_i \mathbf{N}_z^T + m_i \mathbf{N}_{ri}^T \right) \, \mathrm{d}x \tag{2.73}$$

Utilisant les expressions (2.66), (2.70) et (2.72) et assemblant les contributions élémentaires de tous les éléments, la formulation variationnelle (2.24), exprimée sous forme matricielle, fournit les équations de mouvement suivantes

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c)\mathbf{q} = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_e \tag{2.74}$$

où $\mathbf{K}_p = \bar{\mathbf{K}}_a + \bar{\mathbf{K}}_b$ pour des peaux piézoélectriques. Pour des peaux élastiques, $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_b$, $\mathbf{K}_k$ étant équivalente à $\bar{\mathbf{K}}_k$ avec $\bar{c}_{11}^k = c_{11}^{*k}$ ($e_{31}^{*k} = 0$). Une matrice d'amortissement visqueux $\mathbf{D}$ est ajoutée *a posteriori*.

Les matrices élémentaires de masse (2.71) et de rigidité (2.67),(2.68), et les vecteurs élémentaires des efforts mécaniques (2.73) et électriques (2.69) généralisées ont été intégrées analytiquement et sont présentées dans l'annexe B.

2.3.2 Modèle avec degrés de liberté électriques

Dans cette section la discrétisation par éléments finis de la poutre sandwich (élément fini PSAP) présentée dans la section précédente est étendue, en considérant que les couches piézoélectriques peuvent aussi être des capteurs (élément fini PSEP). Pour cela, la matrice d'interpolation définie en (2.61) est augmentée pour tenir compte des ddls électriques V_i ($i = a, b, c$), considérés constants par élément $V_i = V_{ie}$, de telle façon que le vecteur de déplacements généralisés $\mathbf{d}$ s'écrit

$$\mathbf{d} = \hat{\mathbf{N}}_d \hat{\mathbf{q}}_e \tag{2.75}$$

où

$$\hat{\mathbf{N}}_d = \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & N_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le nouveau vecteur des degrés de liberté élémentaires augmenté $\hat{\mathbf{q}}_e$ aboutit à un élément fini à onze ddls (huit mécaniques et trois électriques) et s'écrit

$$\hat{\mathbf{q}}_e = \mathrm{col}(\bar{u}_1, w_1, w_1', \tilde{u}_1, \bar{u}_2, w_2, w_2', \tilde{u}_2, V_{ae}, V_{be}, V_{ce}) \tag{2.76}$$

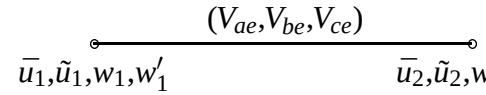


Figure 2.3: Degrés de liberté de l'élément fini PSEP.

La discrétisation des déplacements et des déformations de chaque couche n'est pas changée. Les nouvelles matrices $\mathbf{N}_{xi}$, $\mathbf{N}_z$, $\mathbf{N}_{ri}$, $\mathbf{B}_{mi}$, $\mathbf{B}_{fi}$ et $\mathbf{B}_{cc}$ sont obtenues par l'introduction de zéros pour tenir compte du changement du vecteur de ddls. Les relations (2.65) restent valables. Les potentiels électriques sont discrétisés par,

$$V_i = \hat{\mathbf{N}}_{vi}\hat{\mathbf{q}}_e \; ; \quad i = a,b,c \tag{2.77}$$

où

$$\hat{\mathbf{N}}_{va} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\hat{\mathbf{N}}_{vb} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\hat{\mathbf{N}}_{vc} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dans le cas où les potentiels sont inconnus, les termes δH_{kem} et δH_{ke}, dans (2.27), et δH_{cem} et δH_{ce}, dans (2.29), ne sont pas nuls, contrairement à l'élément précédent. Ainsi, la discrétisation de (2.27) et (2.29) conduit à

$$\delta H_i^e = \delta H_{im}^e - \delta H_{ime}^e - \delta H_{iem}^e + \delta H_{ie}^e \; ; \quad i = a,b,c \tag{2.78}$$

avec

$$\delta H_{im}^e = \delta\hat{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{K}_{im}^e \hat{\mathbf{q}}_e \; , \; \delta H_{ime}^e = \delta\hat{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{K}_{ime}^e \hat{\mathbf{q}}_e \; , \; \delta H_{iem}^e = \delta\hat{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{K}_{ime}^{e\,T} \hat{\mathbf{q}}_e \; , \; \delta H_{ie}^e = \delta\hat{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{K}_{ie}^e \hat{\mathbf{q}}_e$$

$\bar{\mathbf{K}}_{km}^e$ et $\mathbf{K}_{cm}^e$ s'écrivent comme dans (2.67) et (2.68), mais avec l'ajout de zéros correspondant au nouveau vecteur de ddls. $\mathbf{K}_{kme}^e$ et $\mathbf{K}_{cme}^e$ sont les matrices élémentaires de rigidité piézoélectrique

$$\mathbf{K}_{kme}^e = -\int_0^{L_e} e_{31}^{*k} \frac{A_k}{h_k} \hat{\mathbf{B}}_{mk}^T \hat{\mathbf{N}}_{vk} \, \mathrm{d}x \; ; \; \mathbf{K}_{cme}^e = -\int_0^{L_e} e_{15}^c \frac{A_c}{h_c} \hat{\mathbf{B}}_{cc}^T \hat{\mathbf{N}}_{vc} \, \mathrm{d}x \tag{2.79}$$

et, $\mathbf{K}_{ke}^e$ et $\mathbf{K}_{ce}^e$ sont les matrices élémentaires de rigidité diélectrique

$$\mathbf{K}_{ke}^e = -\int_0^{L_e} \epsilon_{33}^{*k} \frac{A_k}{h_k^2} \mathbf{N}_{vk}^T \mathbf{N}_{vk} \, \mathrm{d}x \; ; \; \mathbf{K}_{ce}^e = -\int_0^{L_e} \epsilon_{11}^c \frac{A_c}{h_c^2} \mathbf{N}_{vc}^T \mathbf{N}_{vc} \, \mathrm{d}x \tag{2.80}$$

Le travail des efforts d'inertie et extérieurs n'étant pas changés, les expressions de $\hat{\mathbf{M}}_i^e$ et $\hat{\mathbf{F}}_m^e$ sont données par (2.71) et (2.73), respectivement, mais augmentées par les zéros correspondant aux ddls électriques.

Utilisant les expressions (2.70), (2.72) augmentées et (2.78), la discrétisation de la formulation variationnelle (2.24), réduite au niveau élémentaire, fournit les équations de mouvement exprimées sous la forme matricielle suivante

$$\sum_i \hat{\mathbf{M}}_i^e \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_e + \sum_i \left(\mathbf{K}_{im}^e + \mathbf{K}_{ime}^e + \mathbf{K}_{ime}^{e\,T} + \mathbf{K}_{ie}^e\right) \hat{\mathbf{q}}_e = \hat{\mathbf{F}}_m^e \; ; \quad i = a,b,c \tag{2.81}$$

Comme pour l'élément précédent, les matrices ont été intégrées analytiquement. Elles sont aussi présentées dans l'annexe B.

L'expression (2.81) permet de calculer à la fois les variables mécaniques et électriques. Néanmoins, sous cette forme, l'équation ne peut être résolue directement que pour le cas statique, puisque les ddls électriques n'ont pas d'inertie et, ainsi, les matrices $\hat{\mathbf{M}}_i^e$ sont singulières. En plus, même pour ce cas, le système (2.81) est, en général, mal conditionné, puisque les constantes de rigidité élastique sont beaucoup plus élevées que celles piézoélectrique et diélectrique. Afin de remédier à ce problème, il est possible de résoudre le système (2.81) en remplaçant les ddls électriques V_{ie} par V_{ie}/C_o, où C_o est un coefficient de conditionnement. Cela est équivalent à multiplier les constantes de rigidité piézoélectriques ($e_{31}^{*k}A_k/h_k$,$e_{15}^c A_c/h_c$) et diélectriques ($\epsilon_{33}^{*k}A_k/h_k^2$,$\epsilon_{11}^c A_c/h_c^2$) par C_o et C_o^2, respectivement. Il est clair que C_o est fonction des rapports entre les constantes de rigidité élastique et piézoélectrique/diélectrique. C'est pourquoi il est intéressant de réécrire l'équation (2.81) sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_e \\ \ddot{\mathbf{V}}_S^e \\ \ddot{\mathbf{V}}_A^e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m^e & -\mathbf{K}_{meS}^e & -\mathbf{K}_{meA}^e \\ -\mathbf{K}_{meS}^{e\,T} & \mathbf{K}_{eS}^e & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{meA}^{e\,T} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{eA}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_e \\ \mathbf{V}_S^e \\ \mathbf{V}_A^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_m^e \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{2.82}$$

où le vecteur élémentaire des ddls électriques a été décomposé en deux vecteurs composés des différences de potentiel imposées $\mathbf{V}_A^e$, correspondant aux actionneurs piézoélectriques, et mesurées $\mathbf{V}_S^e$, correspondant aux capteurs piézoélectriques. Puisque les ddls électriques $\mathbf{V}_A^e$ sont imposés, leurs variations virtuelles $\delta\mathbf{V}_A^e$ sont nulles. Par conséquent, leur sous-système correspondant en (2.82) (dernière ligne) est satisfait automatiquement et peut être éliminé. En plus, le terme référant aux tensions $\mathbf{V}_A^e$ appliquées au sous-système mécanique, correspondant à $\mathbf{q}_e$ (première ligne de (2.82)), peut être considéré comme une force piézoélectrique équivalente sous la forme

$$\mathbf{F}_e^e = \mathbf{K}_{meA}^e \mathbf{V}_A^e \tag{2.83}$$

De même, la deuxième ligne de (2.82) peut être utilisée pour écrire le vecteur des tensions inconnues $\mathbf{V}_S^e$ en fonction des ddls mécaniques $\mathbf{q}_e$,

$$\mathbf{V}_S^e = \mathbf{K}_{eS}^{e\,-1} \mathbf{K}_{meS}^{e\,T} \mathbf{q}_e \tag{2.84}$$

Ainsi, utilisant les équations (2.83) et (2.84), le sous-système correspondant aux ddls mécaniques en (2.82) (première ligne) représente les équations du mouvement élémentaires condensées

$$\mathbf{M}^e\ddot{\mathbf{q}}_e + \left(\mathbf{K}^e_m - \mathbf{K}^e_{meS}\mathbf{K}^{e\,-1}_{eS}\mathbf{K}^{e\,T}_{meS}\right)\mathbf{q}_e = \mathbf{F}^e_m + \mathbf{F}^e_e \tag{2.85}$$

Par conséquent, cette écriture permet de calculer les ddls mécaniques, à travers (2.85), soumis à des chargements mécaniques $\mathbf{F}^e_m$ et/ou piézoélectriques équivalents $\mathbf{F}^e_e$, en tenant compte de la modification de la rigidité due aux champs électriques induits dans les couches piézoélectriques. Ensuite, les ddls électriques correspondants peuvent-être calculés à travers l'expression (2.84).

Les matrices du système mécanique (2.85) peuvent ainsi être assemblées pour tous les éléments afin de trouver les équations de mouvement de la poutre

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_e \tag{2.86}$$

où les matrices **M** et **D** sont les matrices de masse et d'amortissement visqueux assemblées pour toute la poutre et $\mathbf{F}_m$ et $\mathbf{F}_e$ sont les vecteurs globaux de chargement mécanique et piézoélectrique équivalent. **K** est la matrice de rigidité de la poutre, composée des contributions des peaux et du cœur, tenant compte de la rigidité additionnelle induite par le champ électrique induit dans les couches piézoélectriques. Pour un cœur viscoélastique, les matrices relatives aux ddls électriques dans (2.85) n'ont que des contributions des peaux et, donc, la décomposition de $\mathbf{K} = \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c$ sera faite pour obtenir une équation identique à (2.74).

2.4 Validation des modèles

Dans cette section, les modèles éléments finis, avec et sans ddls électriques, présentés précédemment sont validés à travers la comparaison des résultats obtenus avec ceux trouvés dans la littérature. Pour cela, deux cas seront étudiés, à savoir l'action statique d'une poutre encastrée-libre à travers des actionneurs piézoélectriques et l'analyse modale d'une poutre sandwich à peaux ou cœur piézoélectriques. Pour le premier cas, les résultats du modèle PSAP présenté dans ce chapitre sont aussi comparés à ceux obtenus en utilisant un modèle développé précédemment [16], basé sur les déplacements moyen et relatif du cœur au lieu de ceux des plans moyens des peaux. Ainsi, dans cette section les deux éléments seront dénommées *PSAP 1* (élément décrit en [16]) et *PSAP 2* (présent élément), afin de les distinguer.

2.4.1 Validation du modèle sans ddls électriques

Considérons deux configurations de poutre sandwich encastrée-libre, représentées dans la Figure 2.4, pouvant être actionnées par des actionneurs par extension ou par cisaillement. Afin de valider le modèle proposé, nous comparons nos résultats numériques avec ceux trouvés dans la littérature. Des résultats analytiques et numériques pour une action statique au moyen d'actionneurs par cisaillement continus [98] et segmentés [84] ont été présentés par Sun et Zhang [84, 98]. L'analyse modale d'une poutre avec des actionneurs par extension a été présentée par Lin *et al.* [63].

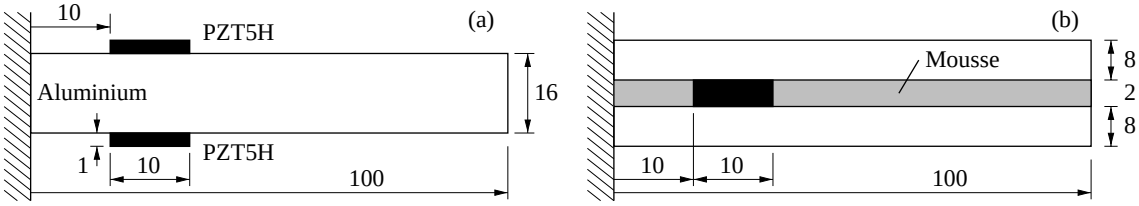


Figure 2.4: Poutres actionnées par extension (a) et par cisaillement (b) (dimensions en mm et pas à l'échelle).

Analyse statique

Les configurations géométriques segmentées des deux mécanismes sont présentées dans la Figure 2.4 et les propriétés des matériaux sont données dans l'annexe A. Les poutres sont encastrées en $x = 0$ et libres à $x = L$. Afin de fléchir la poutre, des tensions sont appliquées sur les surfaces supérieures et inférieures des couches piézoélectriques, induisant des efforts électriques de flexion. Pour le *mécanisme d'action par cisaillement*, la tension appliquée à la couche piézoélectrique a une valeur de $V_c = 20$ V, et pour le *mécanisme d'action par extension*, la tension appliquée aux actionneurs est $V_p = 10$ V.

Comme première analyse, la flèche des deux poutres pour le cas continu, c'est-à-dire, avec des actionneurs ayant la longueur de la poutre, a été évaluée et comparée aux résultats analytiques de Zhang et Sun [98], afin d'examiner la convergence de l'élément fini proposé. Dans ce cas-ci, pour le *mécanisme d'action par cisaillement*, il n'y a aucune mousse rigide puisque l'actionneur piézoélectrique occupe tout le cœur du sandwich.

Pour les deux mécanismes, la déformation de la poutre actionnée a été calculée avec seulement quatre éléments finis PSAP 2. Les comparaisons de ces résultats avec la solution analytique [98] sont présentées dans les Figures 2.5 et 2.6, indiquant qu'ils coïncident très bien.

La convergence des éléments PSAP 1 et PSAP 2 par rapport à la flèche de référence de l'extrémité libre de la poutre [98] est montrée dans la Figure 2.7 pour le mécanisme d'action par cisaillement. Il est clair que le présent élément (PSAP 2) est très précis même avec un faible nombre d'éléments (moins de 2% d'erreur pour 2 éléments). En plus, il converge de façon monotone et rapidement vers la flèche de référence de la poutre. Tandis que l'élément décrit en [16] (PSAP 1) présente des erreurs beaucoup plus élevés (12% d'erreur pour 2 éléments) et converge plus lentement et de façon non-monotone. La même analyse pour le mécanisme d'action par extension, conduit à des erreurs des modèles éléments finis de moins de 0,1% pour la flèche de la poutre (Figure 2.8), même si l'élément PSAP 2 est encore plus précis.

Dans un deuxième temps, la flèche de la poutre est analysée pour les deux mécanismes, par les deux modèles et pour plusieurs épaisseurs d'actionneur. Cette analyse permet d'évaluer à la fois deux caractéristiques des modèles. En effet, d'une part, la variation de l'épaisseur de l'actionneur permet d'analyser, pour le mécanisme d'action par cisaillement, le blocage par cisaillement des modèles. D'autre part, elle permet d'évaluer, pour le mécanisme d'action par extension, les limitations imposées par les hypothèses d'Euler-Bernoulli. La Figure 2.9 montre que les deux modèles sont assez précis avec 10 éléments pour tout l'intervalle d'épaisseurs [0,02–10] mm. Néanmoins, on observe que

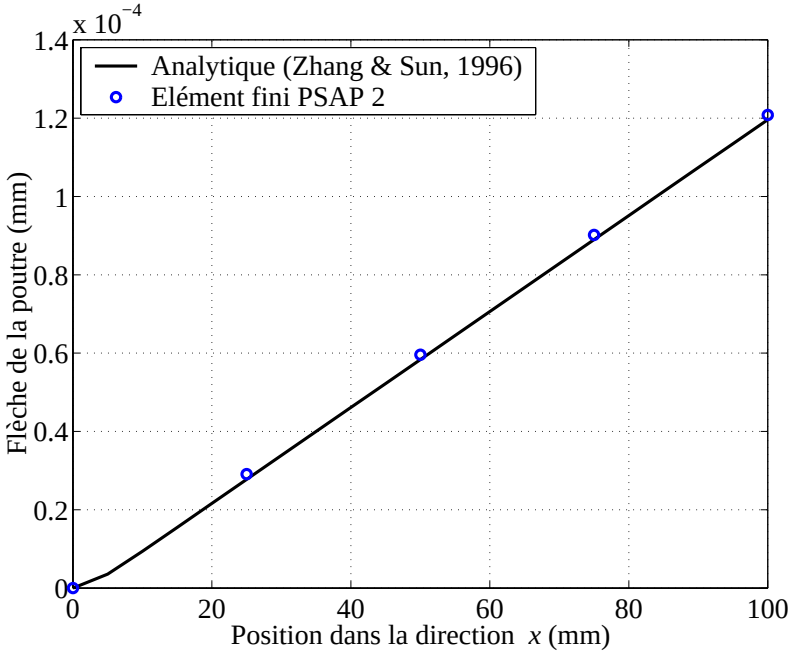


Figure 2.5: Flèche de la poutre actionnée par cisaillement (PSAP 2 vs. analytique).

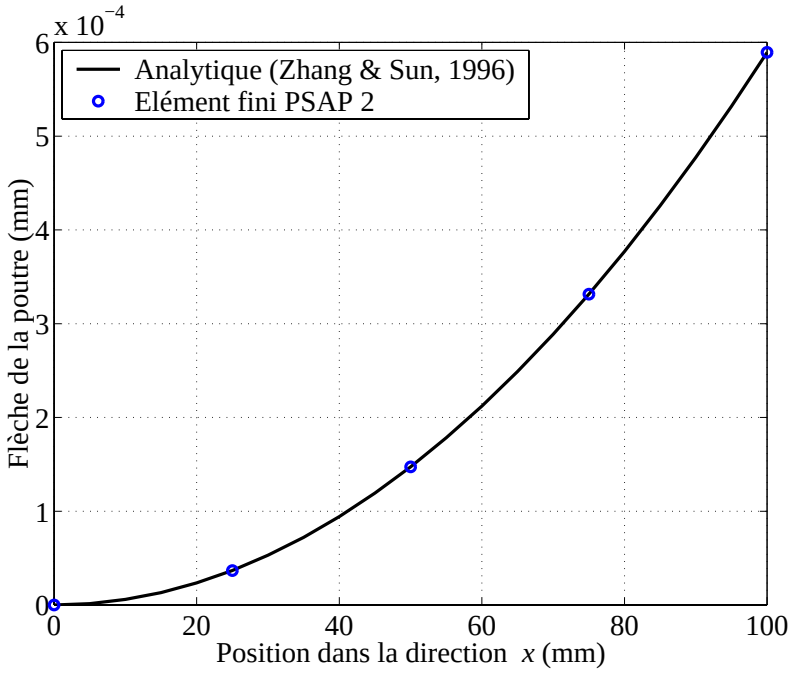


Figure 2.6: Flèche de la poutre actionnée par extension (PSAP 2 vs. analytique).

le modèle PSAP 1, même avec une intégration réduite, s'écarte du résultat analytique rapidement pour des cœurs minces, tandis que l'erreur du modèle PSAP 2, bien que sans intégration réduite, est rapidement stabilisé autour de 1%.

Pour le mécanisme d'action par extension, le problème s'inverse puisque les peaux

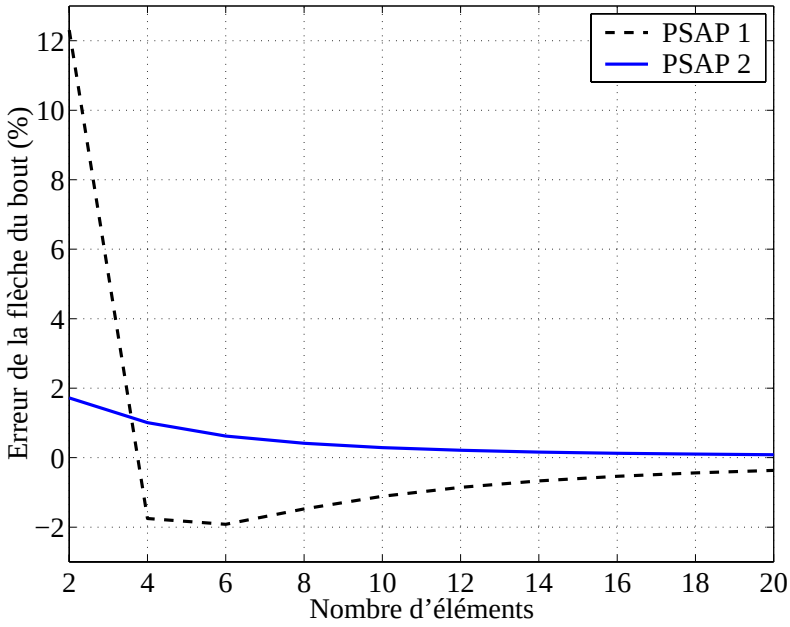


Figure 2.7: Convergence de la flèche du bout de la poutre actionnée par cisaillement.

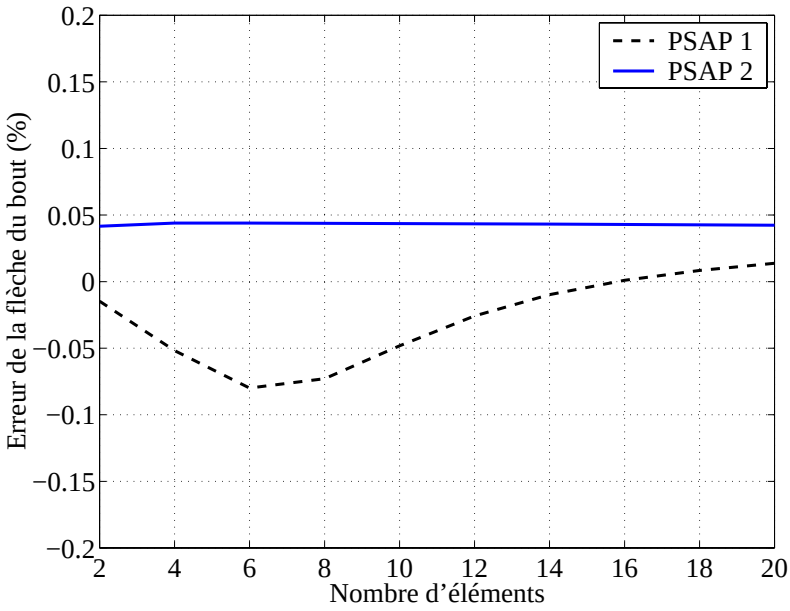


Figure 2.8: Convergence de la flèche du bout de la poutre actionnée par extension.

sont modélisées avec l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, c'est-à-dire, pour des peaux relativement épaisses ($t/L > 5\%$ ou $t > 5$ mm) les modèles ne seront plus capables de bien représenter les actionneurs par extension. Afin d'analyser ce problème, la Figure 2.10 montre la variation de l'erreur de la flèche de l'extrémité libre de la poutre avec l'épaisseur de l'actionneur variant dans l'intervalle [0,01–5] mm. On observe que, effectivement, les deux modèles sont assez précis pour des épaisseurs inférieures à 0,2 mm, mais diver-

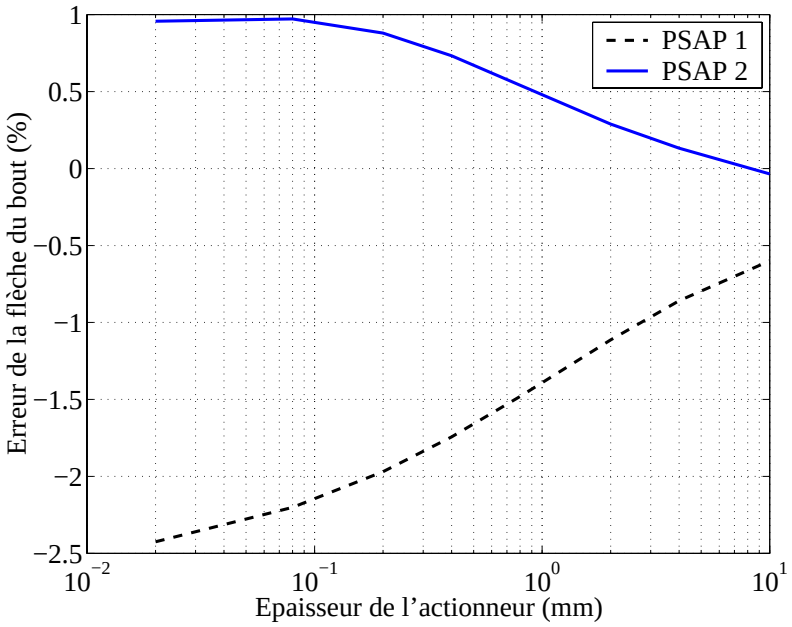


Figure 2.9: Effet de l'épaisseur de l'actionneur sur la précision des éléments finis pour l'action par cisaillement.

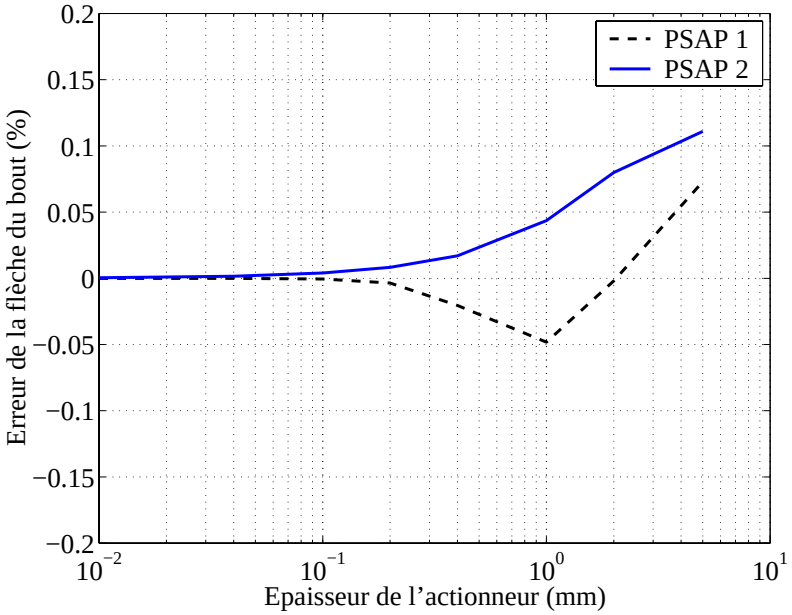


Figure 2.10: Effet de l'épaisseur de l'actionneur sur la précision des éléments finis pour l'action par extension.

gent très rapidement au-delà de cette valeur. Néanmoins, l'erreur reste très faible sur tout l'intervalle étudiée.

Le cas d'actionneurs constitués de pastilles piézoélectriques a aussi été étudié par Sun et Zhang [84]. Dans ce cas, comme le montre la Figure 2.4, les actionneurs sont moins longs que la poutre d'aluminium. Afin de valider le modèle pour ce cas pratique, on fait

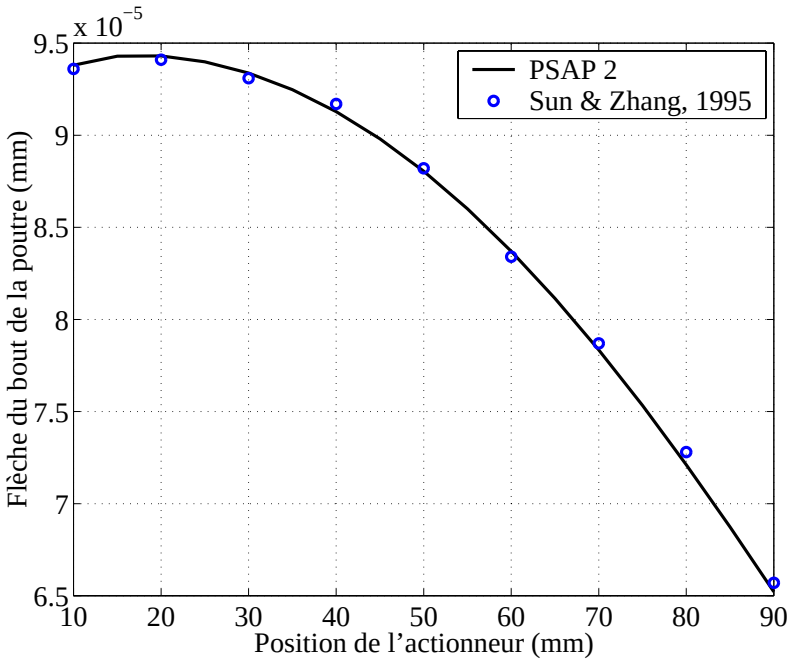


Figure 2.11: Variation de la flèche du bout de la poutre avec la position de l'actionneur.

varier la position du centre de l'actionneur dans l'intervalle [10–90] mm. Les résultats pour la flèche maximale de la poutre (à l'extrémité libre), présentés dans la Figure 2.11 indiquent que ceux de l'élément fini PSAP 2 concordent bien avec ceux présentés par Sun et Zhang [84], utilisant un code élément fini commercial.

Analyse modale

Les modes et fréquences propres ont été évalués pour les *mécanismes d'action par cisaillement* et par *extension*. Les données matérielles sont identiques à celles présentées par Lin *et al.* [63] (voir Annexe A) et les propriétés géométriques sont données dans la Figure 2.12. Les cinq premières fréquences propres sont indiquées dans le Tableau 2.1 pour les deux mécanismes. Les résultats numériques correspondent assez bien avec ceux analytiques présentés par Lin *et al.* [63].

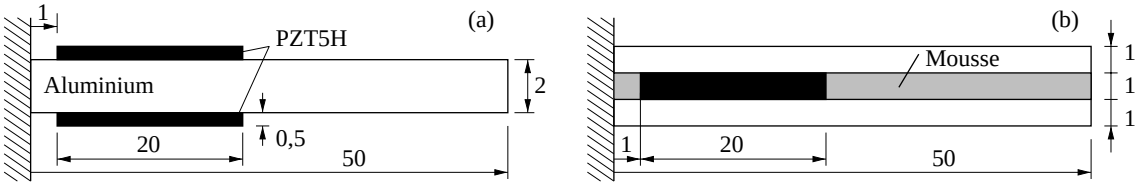


Figure 2.12: Propriétés géométriques des poutres pour l'analyse modale (dimensions en mm et pas à l'échelle).

Il est clair, d'après le Tableau 2.1, que les fréquences propres de la poutre actionnée par cisaillement sont inférieures à celles de l'action par extension. Ceci peut être expliqué

par le fait que la configuration sandwich soit moins rigide que celle d'extension en raison de la présence de la mousse dans le cœur. Cette différence augmente avec la fréquence parce que la mousse devient plus déformée (Figure 2.13). On peut voir que dans les trois premiers modes de flexion, l'actionneur est moins déformé pour le *mécanisme d'action par cisaillement*. Des fréquences analytiques n'ont pu être trouvées dans la littérature pour ce mécanisme.

Tableau 2.1: Les cinq premières fréquences (Hz) propres de flexion de la poutre de Lin *et al.*, pour les configurations d'action par cisaillement et par extension.

	1	2	3	4	5
Mécanisme d'action par cisaillement	985	3912	8305	17273	25980
Mécanisme d'action par extension	1084	4787	12422	24547	38599
Résultats analytiques [63]	1030	4230	12000	23500	38500
Erreur (%)	4,98	13,17	3,52	4,46	0,26

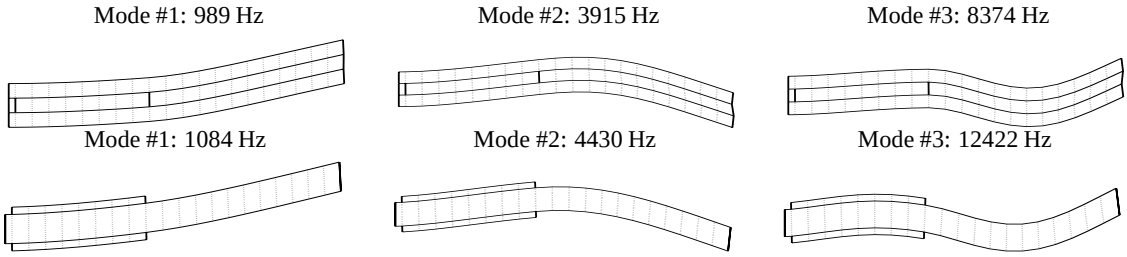


Figure 2.13: Premiers modes propres de flexion pour les mécanismes d'action par cisaillement et par extension

Effet du potentiel quadratique induit

Auparavant, il a été montré que l'équilibre électrique (2.14) n'est respecté dans les pastilles piézoélectriques actionnées par extension que si un potentiel électrique quadratique (2.17) est considéré. En plus, il a aussi été observé (cf. (2.28)) que cette contribution induit une augmentation de la rigidité des pastilles piézoélectriques (même pour le cas actionneur). Néanmoins, il est intéressant d'étudier l'importance de cette contribution pour les applications considérées. Ainsi, dans cette section, on analyse l'importance du potentiel induit pour différentes longueurs et épaisseurs des pastilles. Pour ce faire, considérons une poutre d'aluminium encastrée-libre avec deux pastilles piézoélectriques collées sur ses surfaces supérieure et inférieure, comme présenté dans la Figure 2.14.

Sachant que le matériau piézo-céramique PZT5H présente une constante de rigidité élastique très proche de celle de d'aluminium, le rapport entre la rigidité globale de la poutre sandwich et celle des pastilles sera dépendant des longueurs et épaisseurs des pastilles piézoélectriques. Ainsi, on fait varier leur longueur dans l'intervalle [10–190] mm et, leur épaisseur, entre 0,25 et 1 mm. Afin d'étudier l'influence de la rigidité supplémentaire induite par le potentiel quadratique, la flèche statique due à une force mécanique transversale appliquée à l'extrémité libre de la poutre est calculée avec et sans le terme de rigidité

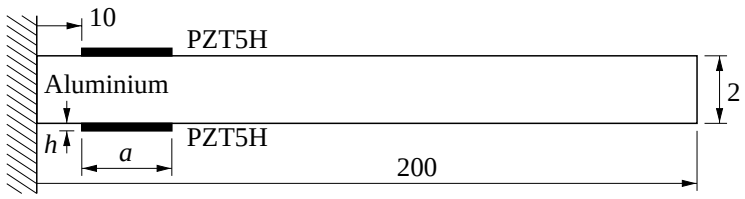


Figure 2.14: Propriétés géométriques de la poutre pour l'analyse de l'effet du potentiel induit (dimensions en mm et pas à l'échelle).

additionnel (2.28). La Figure 2.15 montre la différence relative entre les flèches statiques maximales ($w^{max}_{sans}/w^{max}_{avec} - 1$), sachant que celle sans tenir compte de l'effet du potentiel induit (w^{max}_{sans}) est plus élevée puisque, dans ce cas, la poutre est moins rigide. On observe, dans la Figure 2.15, que la différence augmente pour des pastilles longues et épaisses, comme prévu. Cependant, la différence est toujours plus faible que 1%, même pour le cas extrême des pastilles aussi longues que la poutre. Par conséquent, on peut en conclure que l'effet du potentiel induit est négligeable, pour les cas traités dans ce travail.

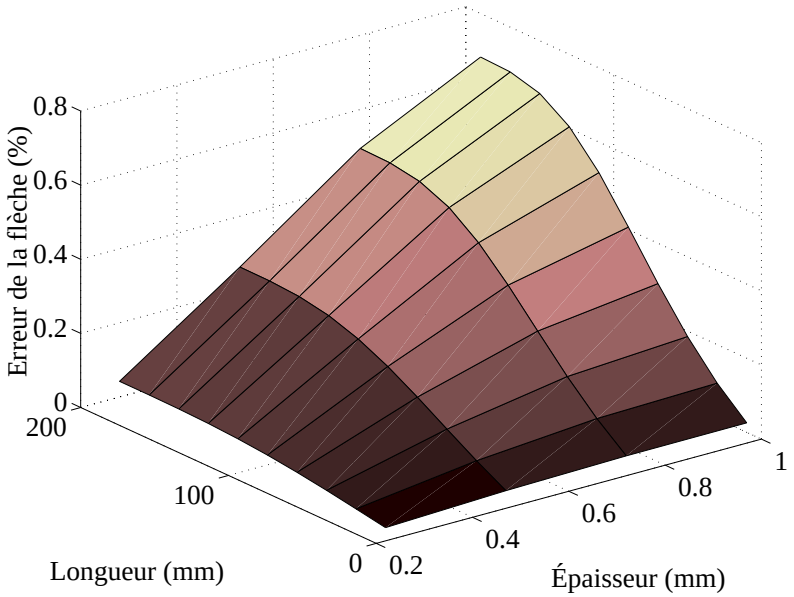


Figure 2.15: Effet du potentiel induit en fonction des longueur et épaisseur des pastilles.

2.4.2 Comparaison des résultats pour le cas capteur

Dans cette section, on s'intéresse aux capteurs piézoélectriques, généralement, utilisés pour mesurer des déformations de la structure sur laquelle ils sont collés. Dans ce cas, les champs électriques dans les couches piézoélectriques ne sont pas imposés, comme pour les actionneurs. Ils sont donc *a priori* inconnus. On propose de les calculer de deux manières. Premièrement, le modèle éléments finis *PSAP* (dorénavant le '2' du modèle PSAP 2 est supprimé pour simplifier), qui ne contient pas de ddls électriques, peut être

utilisé pour calculer les ddls mécaniques induits par le chargement mécanique en question. Ensuite, les tensions sont calculées à partir des équations (2.53), (2.54) et (2.55). Cela conduit à une approximation des tensions induites dans les pastilles piézoélectriques. La seconde façon de les approcher consiste à calculer la réponse au chargement mécanique utilisant le modèle éléments finis *PSEP* avec ou sans condensation statique. Dans ce cas, les valeurs prises par les ddls électriques sont, directement, les solutions. D'après (2.56), le premier modèle (PSAP) ne tient pas compte de la rigidité supplémentaire due aux tensions induites par la déformation des pastilles. Cependant, il est possible d'utiliser la modification des constantes élastiques (2.56), induite par le champ électrique, pour corriger le calcul.

Il est aussi important de souligner que, à cause de différences trop importantes entre les ordres de grandeur des constantes de rigidité élastique et diélectrique, fournies par le modèle PSEP sans condensation statique, les matrices de rigidité finales ne sont pas bien conditionnées. En effet, pour les cas étudiés ici, le rapport entre les constantes de rigidité élastique ($c^{*i}_{lm}A_i$) et celles piézoélectrique ($e^{*i}_{nm}A_i/h_i$) et diélectrique ($\epsilon^{*i}_{nn}A_i/h_i^2$) sont de l'ordre de 10^8 et 10^{16}, respectivement. C'est pourquoi, un coefficient de conditionnement de 10^8 a été utilisé pour les ddls électriques.

Dans les prochaines sous-sections, on compare les résultats numériques de la poutre encastrée-libre représentée dans la Figure 2.16 excitée par divers chargements mécaniques. Deux versions des éléments finis PSAP et PSEP sont considérés, aboutissant à un total de quatre modèles : (i) PSAP, tel que décrit dans §2.3.1, (ii) PSAP avec une correction des rigidités des couches piézoélectriques (PSAP+correction), pour tenir compte de (2.56), (iii) PSEP avec condensation statique des ddls électriques, tel qu'en (2.85), et (iv) PSEP sans condensation statique (PSEP-condens.), tel qu'en (2.81).

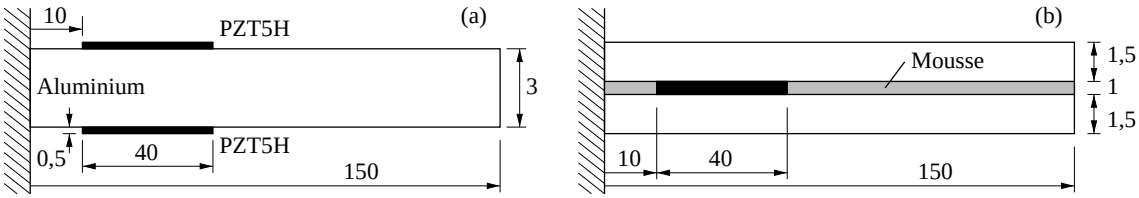


Figure 2.16: Propriétés géométriques des poutres pour le cas capteur (dimensions en mm et pas à l'échelle).

Chargement longitudinal

Dans ce cas, une force de traction de 100 N est appliquée à la surface moyenne au bout de la poutre. Les Figures 2.17 et 2.18 présentent les déplacements axial et transversal, induits par le chargement longitudinal, de la poutre à cœur élastique et à peaux piézoélectriques. On observe, dans la Figure 2.17, que les quatre modèles aboutissent à des résultats similaires. Cependant, le modèle PSAP sous-estime la rigidité de la poutre, puisqu'il ne tient pas compte de la rigidité supplémentaire des pastilles piézoélectriques due aux tensions induites (Figure 2.19). En utilisant la correction (augmentation, dans ce cas) des constantes élastiques (2.56), il est possible d'obtenir (PSAP+correction dans la Figure 2.17) le déplacement axial du modèle PSEP. La Figure 2.18 présente la flèche

induite par la force longitudinale appliquée. Elle devrait être nulle, puisque la poutre est symétrique. Cependant, la faible flèche, de l'ordre de 10^{-15} mm, obtenue avec le modèle PSEP sans condensation statique (PSEP-condens.) est due à des erreurs numériques qui aboutissent à des déformations axiales, et, par conséquent, des tensions induites, différents dans les peaux. Or, des tensions différentes dans les peaux induisent des efforts de flexion ; c'est pourquoi ce modèle présente une flèche. Néanmoins, le modèle PSEP dont les ddls électriques sont condensés au niveau élémentaire (PSEP) n'aboutit pas à ces erreurs.

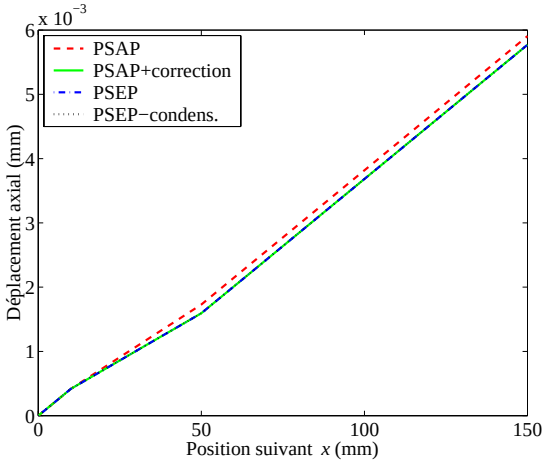


Figure 2.17: Déplacement axial induit par une force de traction.

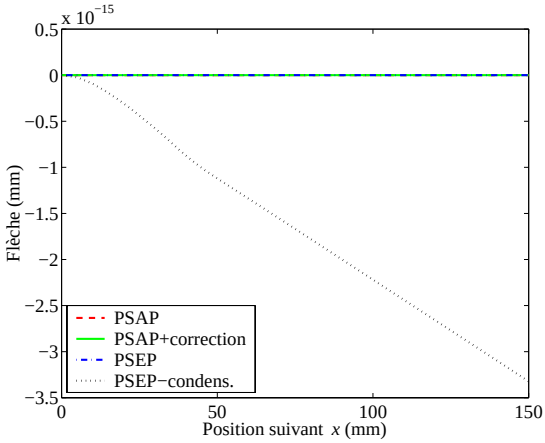


Figure 2.18: Flèche induite par une force de traction.

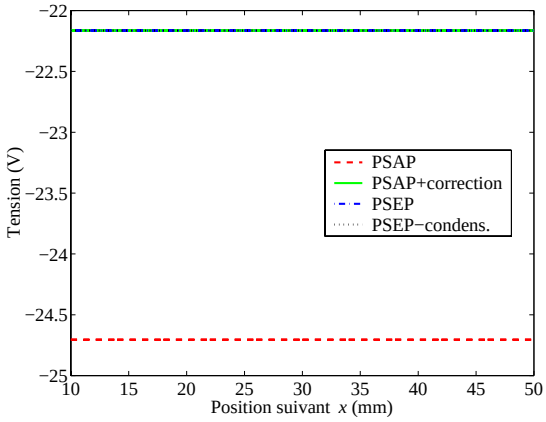


Figure 2.19: Tension induite dans les pastilles piézoélectriques par une force axiale.

La Figure 2.19 montre les tensions induites dans les pastilles piézoélectriques, des peaux supérieure et inférieure, calculées par post-traitement des résultats obtenus avec les éléments PSAP, PSAP+correction et PSEP, et par résolution directe avec l'élément PSEP-condens.. On observe que l'élément PSAP aboutit à des erreurs significatives pour les tensions dans les peaux. Ce qui est une conséquence directe de la sous-estimation de la rigidité de la structure, comme présenté dans la Figure 2.17. Cependant, en utilisant la correction des constantes élastiques, l'élément PSAP+correction fournit des résultats

assez bons comparés à ceux obtenus avec le modèle PSEP. On note que les tensions sont égales dans les pastilles des peaux supérieure et inférieure.

La configuration sandwich à cœur piézoélectrique n'a pas été étudiée dans ce cas-ci puisque la déformation axiale produit, dans une pastille piézoélectrique polarisée dans ce même sens, un champ électrique longitudinal dont l'effet n'est pas considéré dans le modèle utilisé. Cela importe peu puisque les applications auxquelles nous nous intéressons sont du type flexion.

Chargement transversal

Dans ce deuxième cas, une force transversale de 10 N est appliquée au bout de la poutre. Les Figures 2.20 et 2.21 présentent les déplacements axial et transversal, induits par le chargement transversal, des poutres à cœur élastique et peaux piézoélectriques. La Figure 2.21 montre que, comme pour le cas précédent, le modèle PSAP sous-estime la rigidité (dans ce cas de flexion) de la poutre pour la même raison. On observe aussi, dans la Figure 2.20, qu'un déplacement longitudinal négligeable dû à des asymétries numériques dans le calcul des tensions dans les peaux est produit par le modèle PSEP sans condensation statique.

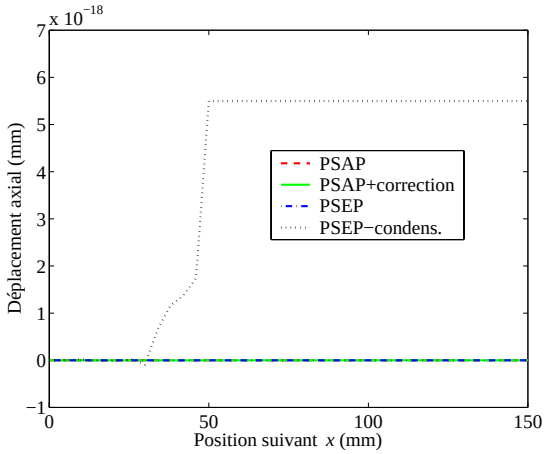


Figure 2.20: Déplacement axial induit par une force transversale.

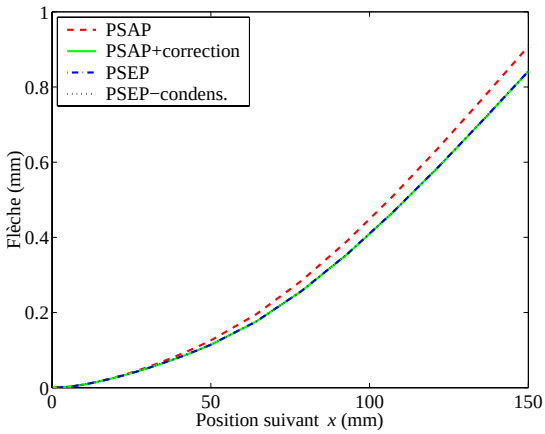


Figure 2.21: Flèche induite par une force transversale.

La Figure 2.22 montre les tensions induites dans les pastilles piézoélectriques des peaux supérieure et inférieure, calculées par post-traitement des résultats obtenus avec les éléments PSAP et PSEP condensé et par résolution directe avec le modèle PSEP sans condensation statique. On observe que le modèle PSAP, comme pour le cas précédent, fournit des tensions plus élevées que le modèle PSEP, dû à la sous-estimation de la rigidité des pastilles piézoélectriques. Néanmoins, avec la correction des constantes élastiques, l'erreur est éliminée. Dans ce cas, les tensions induites dans les pastilles sont opposées dans les peaux supérieure et inférieure mais ne sont pas constantes dans la direction x. Il est clair que cela n'est pas physique puisque les électrodes couvrent entièrement les pastilles piézoélectriques. En fait, ce résultat est dû au fait qu'aucune condition d'égalité entre

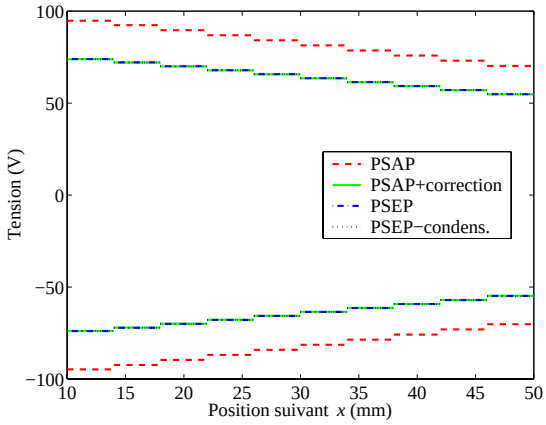


Figure 2.22: Tension induite dans les peaux piézoélectriques par un chargement transversal.

les tensions des éléments piézoélectriques voisins n'a été mise en œuvre. En pratique, la tensions réelle peut être obtenu par la moyenne des tensions de chaque élément.

Dans le cas d'une configuration sandwich à cœur piézoélectrique, l'actionneur par cisaillement est très peu déformé par la charge mécanique transversale à cause de la souplesse relative de la mousse. Par conséquent, le cisaillement de la pastille piézoélectrique est négligeable ainsi que le champ électrique transversal qu'il induit et, donc, la rigidité piézoélectrique additionnelle due à ce champ induit dans l'actionneur n'est pas observable dans les résultats.

Chargement de flexion

Un moment de flexion de 1 N.m est appliquée au bout de la poutre. Les Figures 2.23 et 2.24 montrent les déplacements axial et transversal, induits par le chargement de flexion, des poutres à cœur élastique et peaux piézoélectriques. Pour un chargement de flexion, les résultats (Figures 2.23 et 2.24) concernant les asymétries numériques et les différences de rigidité, sont assez similaires à ceux du cas précédent (Figures 2.20 et 2.21). La principale différence est que les tensions induites dans les peaux piézoélectriques sont constantes suivant la direction x (Figure 2.25). En effet, comme prévu dans (2.33) pour une poutre sandwich symétrique, l'application de tensions constantes opposées sur les peaux piézoélectriques induit seulement des chargements de flexion. Par conséquent, on peut affirmer, et la Figure 2.25 le prouve, que l'inverse est aussi vraie.

Il est important d'observer que les déplacements axiaux, produit par les chargements transversal et de flexion, sont de l'ordre de la précision de la machine. C'est pourquoi ils ne sont pas uniformes dans la longueur de l'actionneur (Figures 2.20 et 2.23). Ces erreurs sont probablement dues au mauvais conditionnement des matrices de rigidité, bien qu'un facteur de conditionnement ait été utilisé pour le modèle PSEP sans condensation statique. On peut donc conclure que l'utilisation de la condensation statique pour l'élément PSEP ou de la correction des constantes élastiques pour l'élément PSAP est bien plus recommandée que la résolution directe du système couplé (2.81).

Pour la même raison que le cas précédent, la configuration d'action par cisaillement

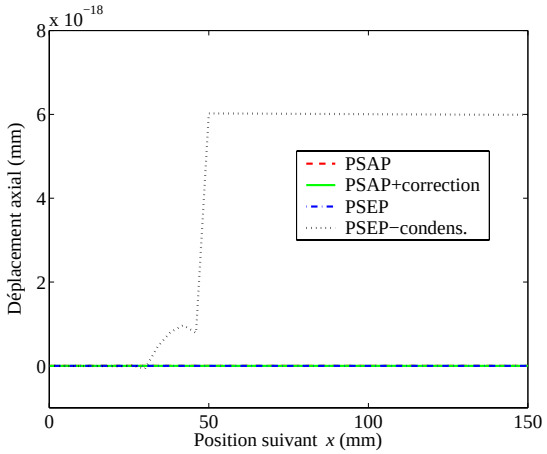


Figure 2.23: Déplacement axial induit par un moment de flexion.

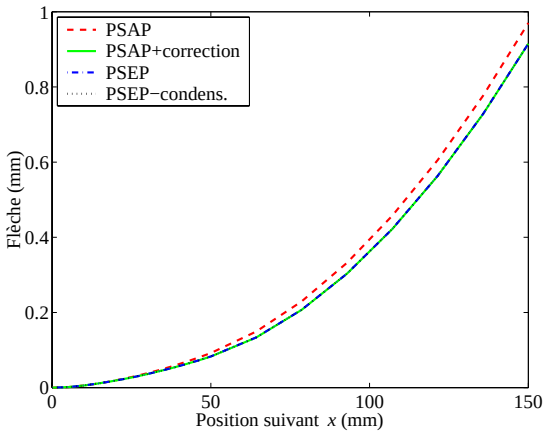


Figure 2.24: Flèche induite par un moment de flexion.

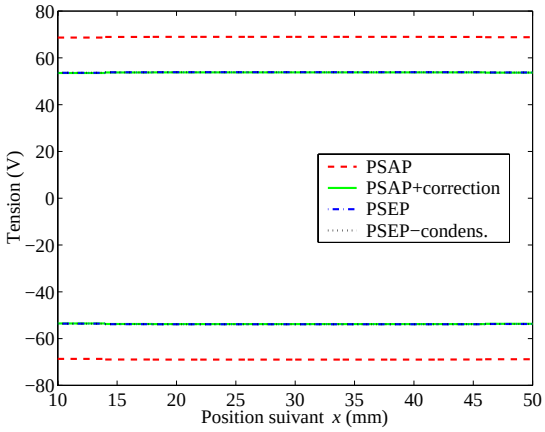


Figure 2.25: Tension induite dans les peaux piézoélectriques par un chargement de flexion.

présente les mêmes résultats pour tous les modèles.

2.5 Extension du modèle aux peaux multicouches

Afin de pouvoir étudier d'autres configurations d'action piézoélectrique, le modèle sandwich à trois couches, décrit précédemment, sera étendu au cas de peaux multicouches. On considère que les peaux supérieure a et inférieure b sont composées de n et m sous-couches élastiques ou piézoélectriques, respectivement. Les sous-couches piézoélectriques des peaux sont polarisées dans le sens de l'épaisseur et ont des électrodes sur leurs surfaces supérieure et inférieure qui les couvrent entièrement. Toutes les couches sont supposées parfaitement collées. Les indices $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_m$ vont être utilisés pour identifier les quantités relatives aux sous-couches des peaux supérieure et inférieure, respectivement.

Comme le montre la Figure 2.26, les champs des déplacements des couches sont

supposés être les mêmes que ceux du modèle précédent (cf. (2.1)). Cela signifie que les sous-couches des peaux sont supposées avoir le même champ de déplacement. Cette hypothèse est valable si les sous-couches sont parfaitement collées entre elles et si leurs rigidités sont de même ordre. Ainsi, les déplacements axiaux des couches *a*, *b* et *c* sont exprimés par l'équation (2.5) et leurs champs de déformations par (2.6) et (2.7).

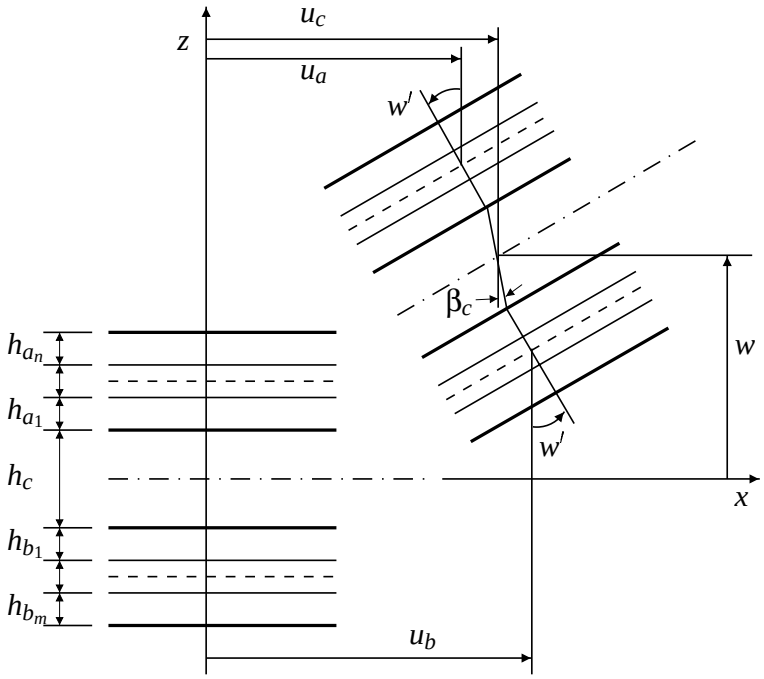


Figure 2.26: Cinématique de la poutre sandwich à peaux multicouches.

2.5.1 Champs électriques dans les sous-couches des peaux

On considère que chaque sous-couche d'une peau peut-être piézoélectrique dont l'état électrique est indépendant des sous-couches adjacentes. On peut, donc, imposer des potentiels électriques $\varphi^+_{k_j}$ et $\varphi^-_{k_j}$ sur la j-ième sous-couche de la k-ième peau. Comme montré auparavant, l'effet du potentiel induit peut être négligé pour les problèmes traités dans ce qui suit, c'est-à-dire, pour des pastilles piézoélectriques collées sur une structure. Ainsi, on suppose un potentiel électrique linéaire de la forme

$$\varphi_{k_j} = \bar{\varphi}_{k_j} + (z - z_{k_j})\frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \tag{2.87}$$

où les quantités z_{k_j} sont les distances entre la ligne moyenne de la k_j-ième sous-couche et la ligne moyenne de la poutre sandwich. Elles s'écrivent

$$z_{k_j} = \pm\frac{h_{k_j} + h_c}{2} \pm \sum_{r=1}^{j-1} h_{k_r} \; ; \quad {\scriptstyle k=a(+),b(-)} \tag{2.88}$$

Le potentiel électrique de chaque couche étant linéaire en z, le champ électrique est donc constant dans l'épaisseur

$$\boxed{E_{3k_j} = -\frac{V_{k_j}}{h_{k_j}}} \tag{2.89}$$

2.5.2 Formulation variationnelle

Comme pour le modèle précédent, la formulation variationnelle de la poutre sandwich peut être exprimée par (2.24). Puisque les champs de déplacements sont les mêmes, les quantités δT, δH et δW peuvent être exprimées en termes des trois variables principales $\bar{u}$, $\tilde{u}$ et w et des potentiels électriques de chaque sous-couche piézoélectrique V_{k_j} et du cœur V_c.

Travail virtuel des efforts électromécaniques internes

Considérant les expressions (2.25) et (2.26), le travail virtuel des efforts électromécaniques internes de la poutre sandwich peut s'écrire comme la somme des contributions de chaque couche, où dans ce cas-ci, les contributions des peaux sont, elles-mêmes, composées des contributions de leurs sous-couches,

$$\delta H_k = \sum_{j=1}^{n,m} \delta H_{k_j} \tag{2.90}$$

La contribution du cœur n'étant pas changé (2.29), on ne réécrit, dans cette sous-section, que les expressions correspondantes aux peaux. D'après les lois de comportement (2.11), appliquées à la k_j-ième sous-couche piézoélectrique, et en tenant compte de (2.90), la contribution de la k_j-ième sous-couche au travail virtuel des efforts internes est

$$\delta H_{k_j} = \int_{\Omega_{k_j}} \left(\delta\varepsilon_{1k} c_{11}^{*k_j} \varepsilon_{1k} - \delta\varepsilon_{1k} e_{31}^{*k_j} E_{3k_j} - \delta E_{3k_j} e_{31}^{*k_j} \varepsilon_{1k} - \delta E_{3k_j} \epsilon_{33}^{*k_j} E_{3k_j} \right) \mathrm{d}\Omega_{k_j}$$

avec $k = a, b$ et $j = 1, \ldots, (n,m)$. On rappelle que le champ de déformation est uniforme par peau et celui électrique l'est par sous-couche des peaux.

Contrairement au modèle précédent, les couches a et b ne sont pas nécessairement symétriques par rapport à $(z - z_a)$ et $(z - z_b)$ à cause de leur caractère stratifié. En remplaçant les expressions des champs de déformations (2.6) et des champs électriques (2.89) dans δH_{k_j} et après son intégration dans l'épaisseur, ce travail peut être décomposée en sous-termes représentant les contributions mécaniques $\delta H_{k_j m}$, piézoélectriques $\delta H_{k_j me}$ et $\delta H_{k_j em}$ et diélectriques $\delta H_{k_j e}$,

$$\delta H_{k_j} = \delta H_{k_j m} - \delta H_{k_j me} - \delta H_{k_j em} + \delta H_{k_j e} \tag{2.91}$$

$$\delta H_{k_j m} = \int_0^L c_{11}^{*k_j} \left(\delta\varepsilon_k^m A_{k_j} \varepsilon_k^m + \delta\varepsilon_k^m \bar{I}_{k_j} \varepsilon_k^f + \delta\varepsilon_k^f \bar{I}_{k_j} \varepsilon_k^m + \delta\varepsilon_k^f I_{k_j} \varepsilon_k^f \right) \, \mathrm{d}x$$

$$\delta H_{k_j me} = -\int_0^L \left(\delta\varepsilon_k^m A_{k_j} + \delta\varepsilon_k^f \bar{I}_{k_j} \right) e_{31}^{*k_j} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \, \mathrm{d}x$$

$$\delta H_{k_j em} = -\int_0^L \frac{\delta V_{k_j}}{h_{k_j}} e_{31}^{*k_j} \left(A_{k_j} \varepsilon_k^m + \bar{I}_{k_j} \varepsilon_k^f \right) \, \mathrm{d}x$$

$$\delta H_{k_j e} = -\int_0^L \frac{\delta V_{k_j}}{h_{k_j}} \epsilon_{33}^{*k_j} A_{k_j} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \, \mathrm{d}x$$

où A_{k_j}, $\bar{I}_{k_j}$ et I_{k_j} sont, respectivement, l'aire, le moment statique et le moment quadratique de la section transversale de la k_j-ième sous-couche. Ils s'écrivent

$$A_{k_j} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{z_{k_j} - h_{k_j}/2}^{z_{k_j} + h_{k_j}/2} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y$$

$$\bar{I}_{k_j} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{z_{k_j} - h_{k_j}/2}^{z_{k_j} + h_{k_j}/2} (z - z_k) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y$$

$$I_{k_j} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{z_{k_j} - h_{k_j}/2}^{z_{k_j} + h_{k_j}/2} (z - z_k)^2 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y$$

Remarque 2.3 *Dans le cas de peaux piézoélectriques multicouches, on observe que les couplages électromécaniques sont entre le champ électrique transversal V_{k_j}/h_{k_j} et les déformations de membrane ε_k^m et de flexion ε_k^f. Ainsi, si l'on effectue l'analyse d'action piézoélectrique par extension comme pour le modèle précédent, δH_{pme} s'écrit*

$$\delta H_{pme} = -\sum_k \sum_j \int_0^L \left(\delta\varepsilon_k^m A_{k_j} + \delta\varepsilon_k^f \bar{I}_{k_j} \right) e_{31}^{*k_j} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \, \mathrm{d}x \tag{2.92}$$

ou, en tenant compte des définitions des déformations généralisées (2.7),

$$\delta H_{pme} = -\sum_k \sum_j \int_0^L \left[A_{k_j} \left(\delta\bar{u}' \pm \frac{\delta\tilde{u}'}{2} \right) - \bar{I}_{k_j} \delta w'' \right] e_{31}^{*k_j} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \, \mathrm{d}x$$

Pour des propriétés des matériaux des peaux homogènes dans la direction longitudinale, l'intégration de cette expression conduit à

$$\delta H_{pme} = -\sum_k \sum_j \left[A_{k_j} \left(\delta\bar{u} \pm \frac{\delta\tilde{u}}{2} \right) - \bar{I}_{k_j} \delta w' \right]_0^L e_{31}^{*k_j} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \tag{2.93}$$

On observe, de (2.93), que dans ce cas, contrairement au modèle précédent, les actionneurs piézoélectriques peuvent aussi fléchir la poutre sandwich par le couplage membrane - flexion dans chaque peau dû au moment statique $\bar{I}_{k_j}$.

Le travail virtuel des efforts électromécaniques (2.91) peut être exprimée en fonction des variables $\bar{u}$, $\tilde{u}$ et w en utilisant les définitions des déformations généralisées (2.7),

$$\begin{aligned}\delta H_{k_j} = \int_0^L \Bigg\{ & \delta\bar{u}' \left[c_{11}^{*k_j} A_{k_j} \left(\bar{u}' \pm \frac{\tilde{u}'}{2} \right) - c_{11}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} w'' + e_{31}^{*k_j} A_{k_j} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \right] \\ & \pm \frac{\delta\tilde{u}'}{2} \left[c_{11}^{*k_j} A_{k_j} \left(\bar{u}' \pm \frac{\tilde{u}'}{2} \right) - c_{11}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} w'' + e_{31}^{*k_j} A_{k_j} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \right] \\ & + \delta w'' \left[-c_{11}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} \left(\bar{u}' \pm \frac{\tilde{u}'}{2} \right) + c_{11}^{*k_j} I_{k_j} w'' + e_{31}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \right] \\ & + \frac{\delta V_{k_j}}{h_{k_j}} \left[e_{31}^{*k_j} A_{k_j} \left(\bar{u}' \pm \frac{\tilde{u}'}{2} \right) - e_{31}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} w'' - \epsilon_{33}^{*k_j} A_{k_j} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \right] \Bigg\} \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.94}$$

En intégrant par parties une fois les termes en $\delta\bar{u}'$,$\delta\tilde{u}'$ et deux fois les termes en $\delta w''$, on peut écrire δH_{k_j} sous la forme

$$\delta H_{k_j} = \delta H_{k_j}^{lm} + \delta H_{k_j}^{vl} \tag{2.95}$$

avec

$$\begin{aligned}\delta H_{k_j}^{lm} = \Bigg\{ & \delta\bar{u} \left[c_{11}^{*k_j} A_{k_j} \left(\bar{u}' \pm \frac{\tilde{u}'}{2} \right) - c_{11}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} w'' + e_{31}^{*k_j} A_{k_j} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \right] \\ & \pm \frac{\delta\tilde{u}}{2} \left[c_{11}^{*k_j} A_{k_j} \left(\bar{u}' \pm \frac{\tilde{u}'}{2} \right) - c_{11}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} w'' + e_{31}^{*k_j} A_{k_j} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \right] \\ & + \delta w' \left[-c_{11}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} \left(\bar{u}' \pm \frac{\tilde{u}'}{2} \right) + c_{11}^{*k_j} I_{k_j} w'' + e_{31}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \right] \\ & - \delta w \left[-c_{11}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} \left(\bar{u}'' \pm \frac{\tilde{u}''}{2} \right) + c_{11}^{*k_j} I_{k_j} w''' + e_{31}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} \frac{V'_{k_j}}{h_{k_j}} \right] \Bigg\}_0^L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta H_{k_j}^{vl} = - \int_0^L \Bigg\{ & \delta\bar{u} \left[c_{11}^{*k_j} A_{k_j} \left(\bar{u}'' \pm \frac{\tilde{u}''}{2} \right) - c_{11}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} w''' + e_{31}^{*k_j} A_{k_j} \frac{V'_{k_j}}{h_{k_j}} \right] \\ & \pm \frac{\delta\tilde{u}}{2} \left[c_{11}^{*k_j} A_{k_j} \left(\bar{u}'' \pm \frac{\tilde{u}''}{2} \right) - c_{11}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} w''' + e_{31}^{*k_j} A_{k_j} \frac{V'_{k_j}}{h_{k_j}} \right] \\ & - \delta w \left[-c_{11}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} \left(\bar{u}''' \pm \frac{\tilde{u}'''}{2} \right) + c_{11}^{*k_j} I_{k_j} w'''' + e_{31}^{*k_j} \bar{I}_{k_j} \frac{V''_{k_j}}{h_{k_j}} \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{\delta V_{k_j}}{h_{k_j}}\left[e_{31}^{*k_j}A_{k_j}\left(\bar{u}'\pm\frac{\tilde{u}'}{2}\right)-e_{31}^{*k_j}\bar{I}_{k_j}w''-\epsilon_{33}^{*k_j}A_{k_j}\frac{V_{k_j}}{h_{k_j}}\right]\Bigg\}\,\mathrm{d}x$$

Travail virtuel des efforts d'inertie

En utilisant l'expression (2.38) du travail virtuel des efforts d'inertie de la poutre sandwich et en y remplaçant les expressions des champs de déplacements (2.1), on obtient

$$\begin{aligned}\delta T_{k_j} &= -\int_{\Omega_{k_j}}\left(\delta\breve{u}_k\rho_{k_j}\ddot{\breve{u}}_k+\delta w_k\rho_{k_j}\ddot{w}_k\right)\mathrm{d}\Omega_{k_j}\\ \delta T_c &= -\int_{\Omega_c}\left(\delta\breve{u}_c\rho_c\ddot{\breve{u}}_c+\delta w_c\rho_c\ddot{w}_c\right)\mathrm{d}\Omega_c\end{aligned}\tag{2.96}$$

Comme auparavant, la contribution du cœur reste inchangé et n'est donc pas répétée ici. Pour ce qui est des peaux multicouches a et b, elles ne sont pas nécessairement symétriques par rapport à $(z-z_a)$ et $(z-z_b)$. Par conséquent, en intégrant dans l'épaisseur la contribution correspondante à la k_j-ième sous-couche des peaux, on a

$$\delta T_{k_j}=-\int_0^L\rho_{k_j}\left[A_{k_j}\left(\delta u_k\ddot{u}_k+\delta w\ddot{w}\right)-\bar{I}_{k_j}\left(\delta u_k\ddot{w}'+\delta w'\ddot{u}_k\right)+I_{k_j}\delta w'\ddot{w}'\right]\mathrm{d}x\tag{2.97}$$

En tenant compte de la définition des déplacements (2.3) et (2.4), on exprime δT_{k_j} en fonction de $\bar{u}$, $\tilde{u}$ et w seulement

$$\begin{aligned}\delta T_{k_j}=-\int_0^L\Bigg\{&\delta\bar{u}\left[\rho_{k_j}A_{k_j}\left(\bar{\bar{u}}\pm\frac{\ddot{\tilde{u}}}{2}\right)-\rho_{k_j}\bar{I}_{k_j}\ddot{w}'\right]\pm\frac{\delta\tilde{u}}{2}\left[\rho_{k_j}A_{k_j}\left(\bar{\bar{u}}\pm\frac{\ddot{\tilde{u}}}{2}\right)-\rho_{k_j}\bar{I}_{k_j}\ddot{w}'\right]\\&+\delta w\rho_{k_j}A_{k_j}\ddot{w}+\delta w'\left[-\rho_{k_j}\bar{I}_{k_j}\left(\bar{\bar{u}}\pm\frac{\ddot{\tilde{u}}}{2}\right)+\rho_{k_j}I_{k_j}\ddot{w}'\right]\Bigg\}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Faisant une intégration par parties sur le terme de $\delta w'$, la variation δT_{k_j} peut être écrite sous la forme

$$\delta T_{k_j}=\delta T_{k_j}^{lm}+\delta T_{k_j}^{vl}\tag{2.98}$$

avec

$$\delta T_{k_j}^{lm}=\left\{\delta w\left[\rho_{k_j}\bar{I}_{k_j}\left(\bar{\bar{u}}\pm\frac{\ddot{\tilde{u}}}{2}\right)-\rho_{k_j}I_{k_j}\ddot{w}'\right]\right\}_0^L$$

$$\begin{aligned}\delta T_{k_j}^{vl}=-\int_0^L\Bigg\{&\delta\bar{u}\left[\rho_{k_j}A_{k_j}\left(\bar{\bar{u}}\pm\frac{\ddot{\tilde{u}}}{2}\right)-\rho_{k_j}\bar{I}_{k_j}\ddot{w}'\right]\pm\frac{\delta\tilde{u}}{2}\left[\rho_{k_j}A_{k_j}\left(\bar{\bar{u}}\pm\frac{\ddot{\tilde{u}}}{2}\right)-\rho_{k_j}\bar{I}_{k_j}\ddot{w}'\right]\\&+\delta w\left[\rho_{k_j}A_{k_j}\ddot{w}+\rho_{k_j}\bar{I}_{k_j}\left(\ddot{\bar{u}}'\pm\frac{\ddot{\tilde{u}}'}{2}\right)-\rho_{k_j}I_{k_j}\ddot{w}''\right]\Bigg\}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Travail virtuel des efforts extérieurs

L'expression du travail virtuel des efforts extérieurs (2.49) peut être étendue au cas des peaux multicouches en considérant des forces axiales et transversales, surfaciques ($F_x^{k_j}$,$F_z^{k_j}$) et volumiques ($f_x^{k_j}$,$f_z^{k_j}$), pour chaque sous-couche des peaux de la poutre sandwich. La contribution du cœur reste inchangé et n'est donc pas répétée ici.

Puisque le même champ de déplacements est considéré dans les sous-couches d'une peau, l'équation (2.46) reste valable, mais avec les nouvelles définitions des forces et moments concentrés et distribués

$$N_k = \sum_j N_{k_j} \; ; \; M_k = \sum_j M_{k_j} \; ; \; Q_k = \sum_j Q_{k_j} \; ; \; n_k = \sum_j n_{k_j} \; ; \; m_k = \sum_j m_{k_j} \; ; \; q_k = \sum_j q_{k_j} \tag{2.99}$$

où

$$\begin{aligned} N_{k_j} &= \int_{A_{k_j}} F_x^{k_j} \mathrm{d}A_{k_j} \; ; & n_{k_j} &= \int_{A_{k_j}} f_x^{k_j} \mathrm{d}A_{k_j} \\ M_{k_j} &= \int_{A_{k_j}} F_x^{k_j} (z - z_k) \mathrm{d}A_{k_j} \; ; & m_{k_j} &= \int_{A_{k_j}} f_x^{k_j} (z - z_k) \mathrm{d}A_{k_j} \\ Q_{k_j} &= \int_{A_{k_j}} F_z^{k_j} \mathrm{d}A_{k_j} \; ; & q_{k_j} &= \int_{A_{k_j}} f_z^{k_j} \mathrm{d}A_{k_j} \end{aligned}$$

On observe que l'aspect multicouche des peaux ne change pas les forces axiales N_k et transversales Q_k, qui peuvent être obtenues par la somme des forces correspondantes appliquées à chaque sous-couche. Cependant, la différence entre les forces axiales $F_x^{k_j}$ ($j = 1, \ldots, (n,m)$) des sous-couches de la peau k peut induire un moment M_k. De même, les forces distribuées $f_x^{k_j}$ ($j = 1, \ldots, (n,m)$) peuvent induire un moment distribué m_k par leurs différences. Ce couplage membrane - flexion est équivalent à celui observé pour l'action piézoélectrique due au moment statique $\bar{I}_{k_j}$.

2.5.3 Équations de mouvement et conditions limites

Les équations de mouvement et les conditions aux limites de la poutre sandwich s'écrivent à partir de la formulation variationnelle (2.24), en utilisant les expressions des travaux virtuels internes (2.37) et (2.95), d'inertie (2.44) et (2.98) et externes (2.49), avec (2.99), tel que l'expression (2.24) peut être réécrite par

$$\boxed{\sum_k \sum_j \delta T_{k_j} + \delta T_c - \sum_k \sum_j \delta H_{k_j} - \delta H_c + \delta W = 0 \; , \quad \forall \delta\bar{u}, \delta\tilde{u}, \delta w, \delta V_{k_j}, \delta V_c} \tag{2.100}$$

Équations de mouvement

Comme les variables $\delta\bar{u}$, $\delta\tilde{u}$, δw, δV_{k_j} et δV_c sont indépendantes dans l'intervalle $[0, L]$, l'équation résultante n'a de solutions non-triviales que si ses coefficients sont nuls, ce qui conduit à

$$\delta\bar{u}\ :\quad \left(\sum_k\sum_j c_{11}^{*k_j}A_{k_j}+c_{33}^{*c}A_c\right)\bar{u}''+\frac{1}{2}\left(\sum_j c_{11}^{*a_j}A_{a_j}-\sum_j c_{11}^{*b_j}A_{b_j}\right)\tilde{u}''$$
$$+\left(c_{33}^{*c}A_c d-\sum_k\sum_j c_{11}^{*k_j}\bar{I}_{k_j}\right)w'''+\sum_k\sum_j e_{31}^{*k_j}A_{k_j}\frac{V'_{k_j}}{h_{k_j}}+(n_a+n_b+n_c)=$$
$$\left(\sum_k\sum_j \rho_{k_j}A_{k_j}+\rho_c A_c\right)\ddot{\bar{u}}+\frac{1}{2}\left(\sum_j \rho_{a_j}A_{a_j}-\sum_j \rho_{b_j}A_{b_j}\right)\ddot{\tilde{u}}$$
$$+\left(\rho_c A_c d-\sum_k\sum_j \rho_{k_j}\bar{I}_{k_j}\right)\ddot{w}' \quad (2.101)$$

$$\delta\tilde{u}\ :\quad \frac{1}{2}\left(\sum_j c_{11}^{*a_j}A_{a_j}-\sum_j c_{11}^{*b_j}A_{b_j}\right)\bar{u}''+\frac{1}{4}\left(\sum_k\sum_j c_{11}^{*k_j}A_{k_j}+c_{33}^{*c}\frac{4I_c}{h_c^2}\right)\tilde{u}''$$
$$+\left(c_{33}^{*c}\frac{I_c}{h_c}\lambda-\sum_j c_{11}^{*a_j}\bar{I}_{a_j}+\sum_j c_{11}^{*b_j}\bar{I}_{b_j}\right)w'''+\frac{1}{2}\left(\sum_j e_{31}^{*a_j}A_{a_j}\frac{V'_{a_j}}{h_{a_j}}-\sum_j e_{31}^{*b_j}A_{b_j}\frac{V'_{b_j}}{h_{b_j}}\right)$$
$$-k_c c_{55}^{c}\frac{A_c}{h_c}\left[\frac{\tilde{u}}{h_c}+(\lambda+1)w'\right]-e_{15}^{c}\frac{A_c}{h_c}\frac{V_c}{h_c}+\left(\frac{n_a-n_b}{2}+\frac{m_c}{h_c}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_j \rho_{a_j}A_{a_j}-\sum_j \rho_{b_j}A_{b_j}\right)\ddot{\bar{u}}+\frac{1}{4}\left(\sum_k\sum_j \rho_{k_j}A_{k_j}+\frac{4\rho_c I_c}{h_c^2}\right)\ddot{\tilde{u}}$$
$$+\left(\rho_c\frac{I_c}{h_c}\lambda-\sum_j \rho_{a_j}\bar{I}_{a_j}+\sum_j \rho_{b_j}\bar{I}_{b_j}\right)\ddot{w}' \quad (2.102)$$

$$\delta w\ :\quad \left(c_{33}^{*c}A_c d-\sum_k\sum_j c_{11}^{*k_j}\bar{I}_{k_j}\right)\bar{u}'''+\left(c_{33}^{*c}\frac{I_c}{h_c}\lambda-\sum_j c_{11}^{*a_j}\bar{I}_{a_j}+\sum_j c_{11}^{*b_j}\bar{I}_{b_j}\right)\tilde{u}'''$$
$$+\left(\sum_k\sum_j c_{11}^{*k_j}I_{k_j}+c_{33}^{*c}A_c d^2+c_{33}^{*c}I_c\right)w''''-k_c c_{55}^{c}A_c(\lambda+1)$$
$$\times\left[\frac{\tilde{u}'}{h_c}+(\lambda+1)w''\right]+\sum_k\sum_j e_{31}^{*k_j}\bar{I}_{k_j}\frac{V''_{k_j}}{h_{k_j}}-e_{15}^{c}A_c(\lambda+1)\frac{V'_c}{h_c}$$
$$-(q_a+q_b+q_c+m'_a+m'_b-dn'_c-\lambda m'_c)=$$
$$\left(\rho_c A_c d-\sum_k\sum_j \rho_{k_j}\bar{I}_{k_j}\right)\ddot{\bar{u}}'+\left(\rho_c\frac{I_c}{h_c}\lambda-\sum_j \rho_{a_j}\bar{I}_{a_j}+\sum_j \rho_{b_j}\bar{I}_{b_j}\right)\ddot{\tilde{u}}'$$

$$+\left(\sum_k\sum_j \rho_{k_j} I_{k_j} + \rho_c A_c d^2 + \rho_c I_c \lambda^2\right)\ddot{w}' - \left(\sum_k\sum_j \rho_{k_j} A_{k_j} + \rho_c A_c\right)\ddot{w} \quad (2.103)$$

$$\delta V_{a_j} \; : \quad e_{31}^{*a_j} A_{a_j}\left(\bar{u}' + \frac{\tilde{u}'}{2}\right) - e_{31}^{*a_j}\bar{I}_{a_j} w'' - \epsilon_{33}^{*a_j} A_{a_j}\frac{V_{a_j}}{h_{a_j}} = 0 \quad (2.104)$$

$$\delta V_{b_j} \; : \quad e_{31}^{*b_j} A_{b_j}\left(\bar{u}' - \frac{\tilde{u}'}{2}\right) - e_{31}^{*b_j}\bar{I}_{b_j} w'' - \epsilon_{33}^{*b_j} A_{b_j}\frac{V_{b_j}}{h_{b_j}} = 0 \quad (2.105)$$

$$\delta V_c \; : \quad e_{15}^{c}\left[\frac{\tilde{u}}{h_c} + (\lambda+1)w'\right] - \epsilon_{11}^{c}\frac{V_c}{h_c} = 0 \quad (2.106)$$

Dans le cas où les potentiels V_{k_j} et V_c sont inconnus (cas capteur), les expressions (2.104), (2.105) et (2.106), les fournissent en fonction des déformations de membrane et de flexion pour les peaux et de cisaillement pour le cœur. C'est pourquoi en substituant ces expressions dans les autres équations de mouvement (2.101), (2.102) et (2.103), la rigidité des couches piézoélectriques est augmentée par un effet passif du matériau, que l'on peut représenter par des modifications des constantes élastiques,

$$\bar{c}_{11}^{k_j} = c_{11}^{*k_j} + \frac{{e_{31}^{*k_j}}^2}{\epsilon_{33}^{*k_j}} \; ; \; \hat{c}_{11}^{k_j} = c_{11}^{*k_j} + \frac{(e_{31}^{*k_j})^2}{\epsilon_{33}^{*k_j}}\frac{\bar{I}_{k_j}^2}{A_{k_j} I_{k_j}} \; ; \; \bar{c}_{55}^{c} = k_c c_{55}^{c} + \frac{{e_{15}^{c}}^2}{\epsilon_{11}^{c}} \quad (2.107)$$

On vérifie que, pour des peaux monocouches, les équations (2.101–2.106) conduisent aux équations du modèle précédent (2.50–2.55). D'ailleurs, les observations formulées pour ces dernières sont aussi applicables ici.

Conditions aux limites

En remplaçant les équations de mouvement (2.101)–(2.106) dans la formulation variationnelle (2.100), on obtient les conditions aux limites $x = 0, L$ suivantes

$$\left[\left(\sum_k\sum_j c_{11}^{*k_j} A_{k_j} + c_{33}^{*c} A_c\right)\bar{u}' + \frac{1}{2}\left(\sum_j c_{11}^{*a_j} A_{a_j} - \sum_j c_{11}^{*b_j} A_{b_j}\right)\tilde{u}'\right.$$
$$\left. + \left(c_{33}^{*c} A_c d - \sum_k\sum_j c_{11}^{*k_j}\bar{I}_{k_j}\right)w'' + \sum_k\sum_j e_{31}^{*k_j} A_{k_j}\frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} - (N_a + N_b + N_c)\right]\delta\bar{u} = 0 \quad (2.108)$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\sum_j c_{11}^{*a_j}A_{a_j}-\sum_j c_{11}^{*b_j}A_{b_j}\right)\vec{u}'+\frac{1}{4}\left(\sum_k\sum_j c_{11}^{*k_j}A_{k_j}+c_{33}^{*c}\frac{4I_c}{h_c^2}\right)\tilde{u}'\right.$$
$$+\left(c_{33}^{*c}\frac{I_c}{h_c}\lambda-\frac{1}{2}\sum_j c_{11}^{*a_j}\bar{I}_{a_j}+\frac{1}{2}\sum_j c_{11}^{*b_j}\bar{I}_{b_j}\right)w''+\frac{1}{2}\left(\sum_j e_{31}^{*a_j}A_{a_j}\frac{V_{a_j}}{h_{a_j}}\right.$$
$$\left.\left.-\sum_j e_{31}^{*b_j}A_{b_j}\frac{V_{b_j}}{h_{b_j}}\right)-\left(\frac{N_a-N_b}{2}+\frac{M_c}{h_c}\right)\right]\delta\tilde{u}=0 \quad (2.109)$$

$$\left[\left(c_{33}^{*c}A_cd-\sum_k\sum_j c_{11}^{*k_j}\bar{I}_{k_j}\right)\vec{u}'+\left(c_{33}^{*c}\frac{I_c}{h_c}\lambda-\frac{1}{2}\sum_j c_{11}^{*a_j}\bar{I}_{a_j}+\frac{1}{2}\sum_j c_{11}^{*b_j}\bar{I}_{b_j}\right)\tilde{u}'\right.$$
$$+\left(\sum_k\sum_j c_{11}^{*k_j}I_{k_j}+c_{33}^{*c}A_cd^2+c_{33}^{*c}I_c\lambda^2\right)w''$$
$$\left.+e_{31}^{*k_j}\bar{I}_{k_j}\frac{V_{k_j}}{h_{k_j}}+(M_a+M_b-dN_c-\lambda M_c)\right]\delta w'=0 \quad (2.110)$$

$$\left\{-\left(\rho_cA_cd-\sum_k\sum_j\rho_{k_j}\bar{I}_{k_j}\right)\ddot{\bar{u}}-\frac{1}{2}\left(2\rho_c\frac{I_c}{h_c}\lambda-\sum_j\rho_{k_j}\bar{I}_{a_j}+\sum_j\rho_{k_j}\bar{I}_{b_j}\right)\ddot{\tilde{u}}\right.$$
$$-\left(\sum_k\sum_j\rho_{k_j}I_{k_j}+\rho_cA_cd^2+\rho_cI_c\lambda^2\right)\ddot{w}'+\left(c_{33}^{*c}A_cd-\sum_k\sum_j c_{11}^{*k_j}\bar{I}_{k_j}\right)\vec{u}''$$
$$+\left(c_{33}^{*c}\frac{I_c}{h_c}\lambda-\frac{1}{2}\sum_j c_{11}^{*a_j}\bar{I}_{a_j}+\frac{1}{2}\sum_j c_{11}^{*b_j}\bar{I}_{b_j}\right)\tilde{u}''+\left(\sum_k\sum_j c_{11}^{*k_j}I_{k_j}+c_{33}^{*c}A_cd^2+c_{33}^{*c}I_c\lambda^2\right)w'''$$
$$-k_cc_{55}^cA_c(\lambda+1)\left[\frac{\tilde{u}}{h_c}+(\lambda+1)w'\right]+e_{31}^{*k_j}\bar{I}_{k_j}\frac{V'_{k_j}}{h_{k_j}}-e_{15}^cA_c(\lambda+1)\frac{V_c}{h_c}$$
$$\left.+(Q_a+Q_b+Q_c-m_a-m_b+dn_c+\lambda m_c)\right\}\delta w=0 \quad (2.111)$$

Comme pour le cas précédent, les peaux piézoélectriques ne peuvent actionner la poutre que par les bords. Alors que le cœur piézoélectrique agit à travers des moments distribués (2.102) et des forces transversales concentrées aux bords (2.111).

2.5.4 Discrétisation par éléments finis

L'objectif de cette section est d'étendre les modèles éléments finis de poutre sandwich (PSAP et PSEP) présentés dans §2.3 pour le cas de peaux multicouches. Comme pour le modèle précédent, on peut considérer deux modèles distincts, sans et avec des ddls électriques pour chaque couche piézoélectrique. Le premier modèle, dénommé *PMAP (Poutre Multicouche avec Actionneurs Piézoélectriques)*, est extensible à partir du modèle PSAP, puisque seuls des termes de couplage membrane - flexion des peaux sont ajoutés. Par conséquent, dans ce qui suit, on ne présente que les termes modifiés par ce couplage et on se réfère aux expressions du modèle PSAP. Cependant, pour le modèle avec ddls électriques, l'extension du modèle PSEP n'est pas si simple, puisque le nombre de ddls électriques, et donc celui global, est dépendant du nombre de couches piézoélectriques dans chaque peau. Ainsi, le modèle étendu développé, dénommé *PMEP (Poutre Multicouche avec Éléments Piézoélectriques)*, aura un nombre de ddls variable. Comme pour les cas des peaux simples, une modification de ce dernier modèle est possible à travers une condensation statique au niveau élémentaire.

Modèle sans degrés de liberté électriques

De (2.91) et (2.97), on peut réécrire les expressions des matrices de masse $\mathbf{M}^e_k$ (2.71) et de rigidité $\mathbf{K}^e_k$ (2.67) des peaux, et de la force $\mathbf{F}^e_{ke}$ (2.69) équivalente à l'action piézoélectrique des peaux

$$\mathbf{M}^e_{k_j} = \int_0^{L_e} \rho_{k_j} \left[A_{k_j} \mathbf{N}^T_{xk} \mathbf{N}_{xk} + \bar{I}_{k_j} \left(\mathbf{N}^T_{xk} \mathbf{N}_{rk} + \mathbf{N}^T_{rk} \mathbf{N}_{xk} \right) + I_{k_j} \mathbf{N}^T_{rk} \mathbf{N}_{rk} + A_{k_j} \mathbf{N}^T_z \mathbf{N}_z \right] \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{K}^e_{k_j} = \int_0^{L_e} c^{*k_j}_{11} \left[A_{k_j} \mathbf{B}^T_{mk} \mathbf{B}_{mk} + \bar{I}_{k_j} \left(\mathbf{B}^T_{mk} \mathbf{B}_{fk} + \mathbf{B}^T_{fk} \mathbf{B}_{mk} \right) + I_{k_j} \mathbf{B}^T_{fk} \mathbf{B}_{fk} \right] \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{F}^e_{k_j e} = - \int_0^{L_e} e^{*k_j}_{31} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \left(A_{k_j} \mathbf{B}^T_{mk} + \bar{I}_{k_j} \mathbf{B}^T_{fk} \right) \, \mathrm{d}x \; = \; - e^{*k_j}_{31} \frac{V_{k_j}}{h_{k_j}} \left[A_{k_j} \left(\mathbf{N}^T_{xk} \right)^{L_e}_0 + \bar{I}_{k_j} \left(\mathbf{N}^T_{rk} \right)^{L_e}_0 \right]$$

Les matrices de masse et de rigidité de l'élément de poutre sandwich à peaux multicouches s'écrivent

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{M}^e_c + \sum_k \sum_j \mathbf{M}^e_{k_j} \tag{2.112}$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}^e_c + \mathbf{K}^e_p \tag{2.113}$$

où $\mathbf{K}^e_p = \sum_k \sum_j \mathbf{K}^e_{k_j}$ et $\mathbf{M}^e_c$,$\mathbf{K}^e_c$ sont fournies par (2.68) et (2.71).

Comme pour le modèle précédent, en utilisant les expressions (2.26), (2.66), (2.70), (2.72), la discrétisation de la formulation variationnelle (2.100) fournit les équations de mouvement (2.74).

Modèle avec degrés de liberté électriques

Dans cette section la discrétisation par éléments finis présentée dans la section §2.3.2 est étendue, en considérant que les peaux sont composées de plusieurs sous-couches piézoélectriques ($\hat{n}$ pour la peau a et $\hat{m}$ pour la peau b), les sous-couches restantes étant élastiques. La matrice d'interpolation définie en (2.61) est augmentée pour tenir compte des ddls électriques V_{k_r} $(k = a,b;\ r = 1,\ldots,(\hat{n},\hat{m}))$. Ainsi, le vecteur des déplacements généralisés $\mathbf{d}$ s'écrit

$$\mathbf{d} = \hat{\mathbf{N}}_d \hat{\mathbf{q}}_e \tag{2.114}$$

où

$$\hat{\mathbf{N}}_d = \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & N_6 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le vecteur des degrés de liberté élémentaires $\hat{\mathbf{q}}_e$, aboutissant à un élément fini à huit ddls mécaniques et $\hat{n}+\hat{m}+1$ électriques, devient

$$\hat{\mathbf{q}}_e = \mathrm{col}(\bar{u}_1, w_1, w_1', \tilde{u}_1, \bar{u}_2, w_2, w_2', \tilde{u}_2, V_{a_1 e}, \ldots, V_{a_{\hat{n}} e}, V_{b_1 e}, \ldots, V_{b_{\hat{m}} e}, V_{ce}) \tag{2.115}$$

La discrétisation des déplacements et des déformations n'est pas changée. Les nouvelles matrices $\mathbf{N}_{xi}$, $\mathbf{N}_z$, $\mathbf{N}_{ri}$, $\mathbf{B}_{mi}$, $\mathbf{B}_{fi}$ et $\mathbf{B}_{cc}$ sont obtenues par l'introduction de zéros pour tenir compte du changement de taille du vecteur de ddls $\mathbf{q}_e$. Les relations (2.65) restent valables. Les potentiels électriques sont discrétisées par,

$$V_{k_j} = \hat{\mathbf{N}}_{vk_j} \hat{\mathbf{q}}_e \ ;\ V_c = \hat{\mathbf{N}}_{vc} \hat{\mathbf{q}}_e \tag{2.116}$$

où $\mathbf{N}_{vk_j}$ $(k = a,b;\ j = 1,\ldots,(\hat{n},\hat{m}))$ et $\mathbf{N}_{vc}$ sont les vecteurs d'interpolation des potentiels électriques V_{k_j}, dans les sous-couches des peaux, et V_c, dans le cœur,

$$\left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{N}}_{va_1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{N}}_{va_{\hat{n}}} \\ \hat{\mathbf{N}}_{vb_1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{N}}_{vb_{\hat{m}}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\hat{\mathbf{N}}_{vc} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La discrétisation des variations δH_k^e et δH_c^e (2.78) n'est pas modifiée que dans certains termes, de telle façon que les matrices de rigidités des peaux deviennent $\mathbf{K}_k^e = \sum_j \mathbf{K}_{k_j}^e$ et que, de (2.91), les matrices piézoélectriques $\mathbf{K}_{kme}^e$ et diélectriques $\mathbf{K}_{ke}^e$ deviennent

$$\mathbf{K}^e_{k_j me} = -\sum_j \int_0^{L_e} e_{31}^{*k_j} \frac{1}{h_{k_j}} \left[A_{k_j} \mathbf{B}^T_{mk} + \bar{I}_{k_j} \mathbf{B}^T_{fk} \right] \hat{\mathbf{N}}_{vk_j} \, \mathrm{d}x \tag{2.117}$$

$$\mathbf{K}^e_{k_j e} = -\sum_j \int_0^{L_e} \epsilon_{33}^{*k_j} \frac{A_{k_j}}{h^2_{k_j}} \hat{\mathbf{N}}^T_{vk_j} \hat{\mathbf{N}}_{vk_j} \, \mathrm{d}x \tag{2.118}$$

Le travail des efforts d'inertie et extérieurs sont obtenus d'après les nouvelles expressions de $\hat{\mathbf{M}}^e$ et $\hat{\mathbf{F}}^e_m$ données par (2.112) et (2.73), respectivement, en faisant attention à l'ajout des zéros correspondant aux ddls électriques et aux nouvelles définitions de forces et moments concentrés et distribués (2.99) évidement.

La discrétisation de la formulation variationnelle (2.100), réduite au niveau élémentaire, fournit les équations de mouvement exprimées en (2.81), en tenant compte des modifications des matrices présentées dans cette section. La condensation statique effectuée pour le modèle avec ddls électriques PSEP (2.82)–(2.85) reste valable pour le présent modèle. Ainsi, les équations du mouvement de la poutre sandwich à peaux multicouches sont toujours représentées par (2.86).

2.6 Validation des modèles à peaux multicouches

Dans cette section, les modèles avec et sans ddls électriques sont validés à travers des comparaisons avec des résultats trouvés dans la littérature. Dans un premier temps, la validation de l'aspect multicouche des peaux est réalisée par l'analyse modale d'une poutre composite stratifiée avec un grand nombre de plis croisés. Les premières fréquences propres de flexion sont comparées avec celles, obtenues par des théories d'ordre plus élevé pour représenter le cisaillement transversal [96]. Cette analyse permet ainsi d'évaluer les limitations des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les peaux multicouches. Ensuite, l'étude du comportement vibratoire d'une poutre sandwich, à cœur viscoélastique et avec deux pastilles piézoélectriques collées sur les surfaces de ses peaux, permet de comparer les résultats fournis par le modèle présenté avec ceux analytiques et expérimentaux présentés dans [91].

Dans un deuxième temps, le modèle avec ddls électriques est validé en réalisant une analyse modale d'une poutre sandwich, dont une des peaux est piézoélectrique. La couche piézoélectrique est considérée en circuit ouvert, où le champ électrique induit par la flexion de la poutre est inconnu, ou en circuit fermé, où le potentiel électrique est nul. Les résultats obtenus sont alors comparés avec ceux numériques trouvés dans [50, 79].

Enfin, les modèles développés dans ce travail sont comparés entre eux, pour évaluer les réponses électriques, et leurs effets sur la réponse mécanique, des capteurs piézoélectriques sous l'effet de charges mécaniques. Cette analyse, similaire à celle réalisée dans la section §2.4.2, permet d'étudier la prise en compte des effets passifs (de modification de la rigidité), dûs aux potentiels induits dans les couches piézoélectriques.

2.6.1 Validation du modèle sans ddls électriques

Le modèle sans ddls électriques PMAP (§2.5.4) est utilisé dans ce qui suit pour le traitement de poutres sandwich à peaux multicouches afin d'évaluer sa précision à travers des comparaisons avec des résultats trouvés dans la littérature.

Analyse modale de poutres composites stratifiées

Afin de valider l'aspect peaux multicouches du modèle, les premières fréquences propres de vibration en flexion de poutres composites stratifiées ont été évaluées et comparées aux résultats numériques présentés dans [96]. Plusieurs poutres seront traités, à savoir, une monocouche de graphite-epoxy (AS4/3501-6), simplement appuyée, et d'autres à quatre plis $(0/90)_s$ et à 100 plis $(0/90)_{50s}$, encastrées sur le côté gauche et pouvant être libres, appuyées ou encastrées sur le côté droit.

Dans un premier temps, la poutre composite monocouche simplement appuyée est considérée. Les propriétés géométriques sont présentées dans la Figure 2.27 et celles des matériaux sont données dans l'annexe A. Les cinq premières fréquences propres de flexion ont été évaluées dans [96], pour $n = 1$, $L/H = 120$ et $L/b = 15$ ($L = 762$ mm), utilisant une théorie du premier ordre pour le cisaillement transversal (FSDT) et, ensuite, comparées avec celles obtenues avec une théorie d'ordre plus élevé (HSDT). Ces résultats sont présentés dans le Tableau 2.2 avec ceux du présent modèle PMAP. La différence par rapport aux résultats HSDT, présentée aussi dans le même tableau, montre une bonne concordance du présent élément fini (PMAP).

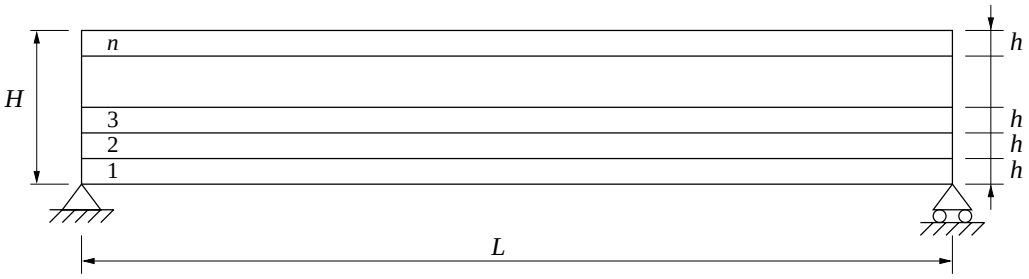


Figure 2.27: Poutre stratifiée à *n* plis de même épaisseur.

Tableau 2.2: Les cinq premières fréquences propres (Hz) de flexion d'une poutre de graphite-epoxy (AS4/3501-6) simplement appuyée.

	1	2	3	4	5
HSDT	51,0	202,0	454,0	804,0	1262,0
FSDT	51,0	202,0	451,0	795,0	1229,0
PMAP	50,8	203,1	456,9	812,2	1268,9
Erreur (%, ref.HSDT)	-0,39	0,54	0,64	1,01	0,55

Dans un deuxième temps, trois poutres composites stratifiées sont étudiées. Les matériaux composites utilisés dans chaque poutre sont les graphite-epoxy AS4/3501-6 et T300/N5208 et le Kevlar 49-epoxy. Leurs propriétés sont données dans l'annexe A. Le

Tableau 2.3 présente les trois premières fréquences propres de flexion des poutres à quatre plis croisés $(0/90)_s$ ($n = 4$, $L/H = 120$, $L/b = 15$ et $L = 762$ mm) pour trois conditions aux limites, à savoir encastrée-libre (EL), encastrée-appuyée (EA) et encastrée-encastrée (EE). Les résultats obtenus montrent que la théorie classique de poutres stratifiées, utilisée ici pour les peaux multicouches, permet d'approcher assez bien les premières fréquences propres de flexion des poutres composites à 4 plis. La différence entre les résultats utilisant FSDT et PMAP ne dépasse pas 3%. On observe aussi, d'après le Tableau 2.3, que la précision du modèle PMAP est maximale pour la condition encastrée-libre et minimale pour celle encastrée-encastrée. De même, le modèle est plus efficace pour les matériaux plus rigides, c'est-à-dire, les erreurs sont minimales pour le T300/N5208 et maximales pour le Kevlar 49-epoxy.

Tableau 2.3: Les trois premières fréquences propres adimensionalisées ($= \omega L^2(\rho/E_1H^2)^{1/2}$) de flexion de poutres composites à 4 plis $(0/90)_s$ symétriques.

	Kevlar 49-epoxy			AS4/3501-6			T300/N5208		
	EL	EA	EE	EL	EA	EE	EL	EA	EE
1(FSDT)	0,954	4,171	6,037	0,954	4,170	6,035	0,953	4,168	6,035
1(PMAP)	0,958	4,203	6,099	0,957	4,196	6,088	0,955	4,190	6,079
2(FSDT)	5,957	13,45	16,52	5,955	13,44	16,52	5,954	13,45	16,53
2(PMAP)	6,006	13,62	16,81	5,996	13,60	16,78	5,987	13,58	16,76
3(FSDT)	16,59	27,84	32,10	16,59	27,84	32,09	16,59	27,87	32,15
3(PMAP)	16,81	28,41	32,95	16,79	28,36	32,89	16,76	28,32	32,85

Par la suite, une poutre composite à 100 plis croisés $(0/90)_{50s}$ symétrique a été considérée, pour les mêmes trois matériaux et conditions aux limites. Dans le Tableau 2.4, les trois premières fréquences propres sont comparées avec celles présentées dans [96]. On observe les mêmes caractéristiques, quant aux maximum et minimum de la précision du modèle, comme pour la poutre à 4 plis, à la différence que, comme prévu, les écarts sont plus élevés pour la poutre à 100 plis.

Tableau 2.4: Les trois premières fréquences propres adimensionalisées ($= \omega L^2(\rho/E_1H^2)^{1/2}$) de flexion de poutres composites à 100 plis $(0/90)_{50s}$ symétriques.

	Kevlar 49-epoxy			AS4/3501-6			T300/N5208		
	EL	EA	EE	EL	EA	EE	EL	EA	EE
1(FSDT)	0,744	3,254	4,715	0,742	3,246	4,703	0,738	3,232	4,683
1(PMAP)	0,756	3,316	4,812	0,753	3,303	4,792	0,749	3,286	4,768
2(FSDT)	4,649	10,51	12,94	4,637	10,49	12,91	4,617	10,44	12,86
2(PMAP)	4,739	10,75	13,26	4,720	10,70	13,21	4,696	10,65	13,14
3(FSDT)	12,97	21,83	25,22	12,94	21,78	25,16	12,89	21,70	25,09
3(PMAP)	13,27	22,42	26,00	13,21	22,33	25,89	13,15	22,21	25,76

2.6.2 Validation du modèle avec ddls électriques

Le modèle avec ddls électriques PMEP (§2.5.4) est considéré ici pour l'étude de l'effet passif, d'augmentation de la rigidité des couches piézoélectrique, dû au potentiel

induit par les déformations de la poutre. Une condensation statique des ddls électriques est effectuée au niveau élémentaire afin de diminuer le nombre total des ddls du modèle. Une comparaison entre les modèles PMEP sans et avec condensation statique est montrée dans la prochaine section.

Cas d'une couche piézoélectrique collée à une poutre rélativement épaisse

L'objectif de cette section est de valider l'augmentation de rigidité des couches piézoélectriques due au champ électrique induit par leur déformation. On considère une poutre en Aluminium encastrée-libre, dont les épaisseur, largeur et longueur sont de 15,24 mm, 25 mm et 152,4 mm, respectivement, avec une couche de matériau piézoélectrique collée sur sa surface supérieure, comme montré dans la Figure 2.28. L'épaisseur de la couche piézoélectrique est de 1,524 mm et celle de la colle, qui relie les deux autres couches, est de 0,254 mm. Les propriétés des matériaux, adaptées de [50], sont présentées dans le Tableau 2.5.

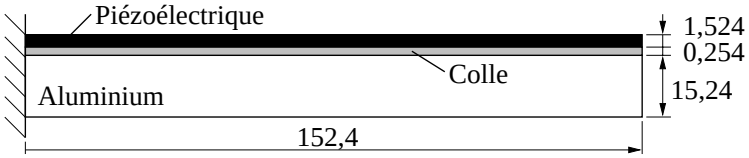


Figure 2.28: Couche piézoélectrique collée à une poutre relativement épaisse (dimensions en mm et pas à l'échelle).

Tableau 2.5: Propriétés des matériaux de la poutre tricouche relativement épaisse.

	Aluminium	Piézoélectrique	Colle
Constante élastique (GPa), c^*_{11}	68,97	68,97	6,90
Constante de cisaillement (GPa), c_{55}	27,59	–	–
Masse volumique (kg m^{-3}), ρ	2769	7600	1662
Constante piézoélectrique (C m^{-2}), e^*_{31}	–	-8,41	–
Constante diélectrique (F m^{-1}), ϵ^*_{33}	–	1,15 10^{-8}	–

Les cinq premières fréquences propres ont été calculées pour deux situations : circuit fermé et circuit ouvert dans la couche pizoélectrique. Pour le premier cas, le matériau piézoélectrique est court-circuité et, donc, le champ électrique est nul. Par conséquent, la couche piézoélectrique ne possède qu'une rigidité élastique. Tandis que, pour le second cas, la déformation du matériau piézoélectrique induit un champ électrique qui induit une déformation additionnelle dans le matériau. Cela est équivalent à une contribution piézoélectrique passive à la rigidité de la couche.

Les résultats du présent élément fini ont été comparés avec ceux donnés par Krommer et Irschik [50], présentés dans le Tableau 2.6, où PT dénote les résultats trouvés avec une théorie du premier ordre (FSDT) et AB ceux trouvés avec le logiciel Abaqus, et présentés dans [50]. Dans [79], Saravanos et Heyliger ont traité le même problème avec la théorie *layerwise*, capable de représenter des distributions non-linéaires des déplacements axiaux et des potentiels électriques à travers la subdivision des couches piézoélectriques

Tableau 2.6: Les cinq premières fréquences propres (Hz) de la poutre tricouche relativement épaisse.

	1	2	3	4	5
			Circuit fermé		
SH [79]	538,10	3199,00	7580,00	8350,00	15039,00
PT [50]	538,60	3211,00	7580,30	8394,86	15139,53
AB [50]	539,60	3200,40	7584,70	8326,70	14922,00
FEM (présent)	538,43	3206,67	7584,04	8388,22	15143,26
Erreur (%, ref.SH)	0,06	0,24	0,05	0,46	0,69
			Circuit ouvert		
SH [79]	544,10	3232,00	7614,00	8428,00	15167,00
PT [50]	544,10	3241,79	7611,03	8469,41	15262,68
AB [50]	543,81	3223,30	7608,70	8378,90	15004,00
FEM (présent)	543,34	3234,35	7613,47	8454,78	15252,56
Erreur (%, ref.SH)	-0,14	0,07	-0,01	0,32	0,56

en plusieurs sous-couches. Leurs résultats (SH) sont pris comme référence. À partir du Tableau 2.6, on observe que les présents résultats concordent bien pour les deux situations, circuit ouvert et circuit fermé.

2.6.3 Comparaison des résultats pour le cas capteur

Dans cette section, l'effet de l'augmentation passive de rigidité des matériaux piézoélectriques due au potentiel électrique induit par leurs déformations est étudiée. Pour cela, les potentiels électriques induits dans les capteurs par des chargements mécaniques sont évalués par les modèles éléments finis PMAP, avec et sans correction, et PMEP, avec et sans condensation statique. Cela est fait à travers les quatre méthodes suivantes : (i) utilisant le modèle éléments finis sans ddls électriques PMAP, tel que décrit dans §2.5.4, pour calculer les déformations, induites par le chargement mécanique, qui sont utilisées pour approcher les tensions, à travers les équations (2.104), (2.105) et (2.106) ; (ii) ajoutant au calcul des déformations, avec ce dernier modèle, la correction des rigidités des couches piézoélectriques, donnée par (2.107), pour tenir compte de la rigidité supplémentaire induite par les tensions induites (PMAP+correction) ; (iii) calculant la réponse au chargement mécanique avec le modèle éléments finis PMEP, tel qu'en (2.81), dont les ddls électriques fournissent directement les solutions (PMEP-condens.) ; (iv) utilisant l'élément PMEP avec condensation statique des ddls électriques, tel qu'en (2.85), pour éviter les problèmes de conditionnement du système (2.81).

Une poutre sandwich encastrée-libre, représentée dans la Figure 2.29, est excitée par divers chargements mécaniques. Pour l'élément PMEP sans condensation statique (PMEP-condens.), un coefficient de conditionnement de 10^8 a été utilisé pour les ddls électriques, comme décrit dans l'analyse du système (2.81) (§2.3.2).

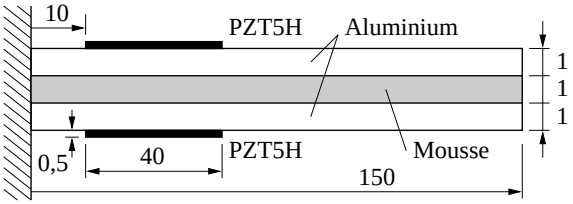


Figure 2.29: Propriétés géometriques de la poutre sandwich pour le cas capteur (dimensions em mm et pas à l'échelle).

Chargement longitudinal

Considérons une force de traction de 100 N appliquée au bout de la poutre. Les déplacements axial et transversal induits par le chargement longitudinal sont présentés dans les Figures 2.30 et 2.31. Comme prévu, le modèle PMAP sous-estime la rigidité de flexion de la poutre (Figure 2.31), mais la correction des constantes élastiques (2.107) permet d'obtenir le résultat du modèle PMEP. Comme pour le modèle tricouche précédent, on observe que le mauvais conditionnement des matrices de rigidité correspondantes aux ddls électriques du modèle PMEP aboutit à des erreurs numériques qui occasionnent, par exemple, la faible flèche (de l'ordre de 10^{-15} mm) présente dans la Figure 2.31.

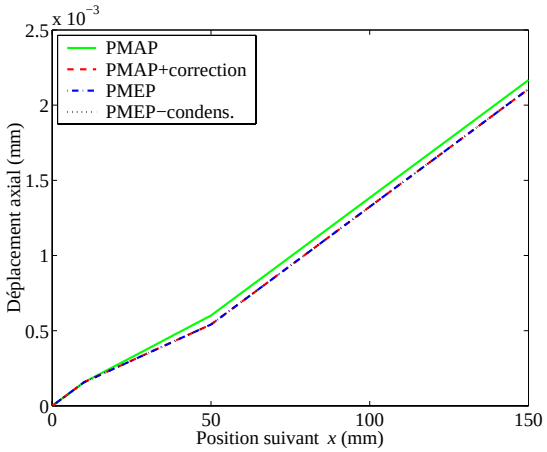


Figure 2.30: Déplacement axial induit par une force de traction.

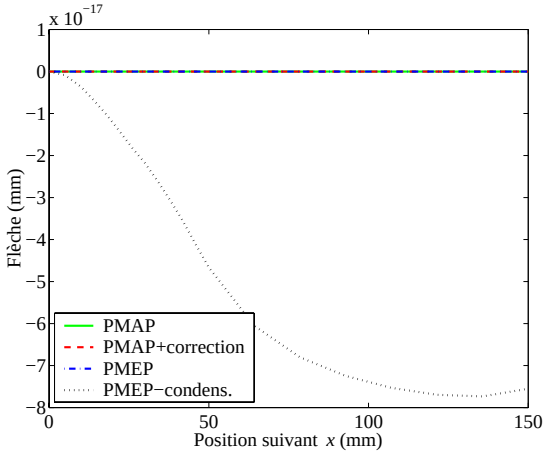


Figure 2.31: Flèche induite par une force de traction.

La Figure 2.32 montre que les tensions induites dans les pastilles piézoélectriques sont indépendantes de x et égales pour les peaux supérieure et inférieure. On observe aussi que le modèle PMAP sur-estime les tensions, dû à la sous-estimation de la rigidité en flexion de la poutre. Cependant, avec la correction, le modèle PMAP (PMAP+correction) fournit de bons résultats. Les modèles PMEP, avec et sans condensation statique, présentent les mêmes résultats, montrant que les erreurs numériques présentes dans le calcul des déplacements du modèle PMEP-condens. n'affectent pas le calcul des tensions.

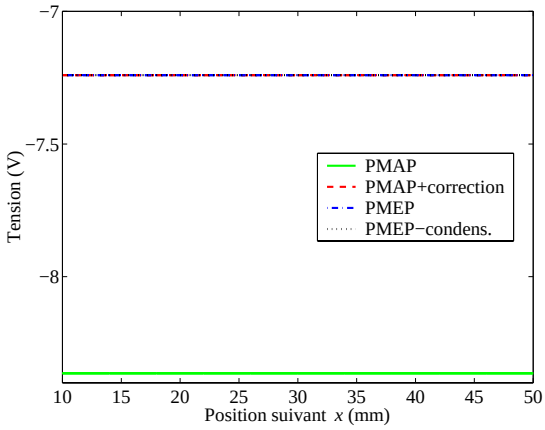


Figure 2.32: Tension induite dans les pastilles piézoélectriques par une force axiale.

Chargement transversal

Une force transversale de 5 N est appliquée au bout de la poutre. Dans la Figure 2.33, on observe qu'un déplacement longitudinal négligeable dû à des asymmétries numériques dans le calcul des tensions dans les peaux est produit par le modèle PMEP sans condensation statique (PMEP-condens.). Comme pour le cas précédent, la Figure 2.34 montre que le modèle PMAP sur-estime la flèche de la poutre pour la même raison.

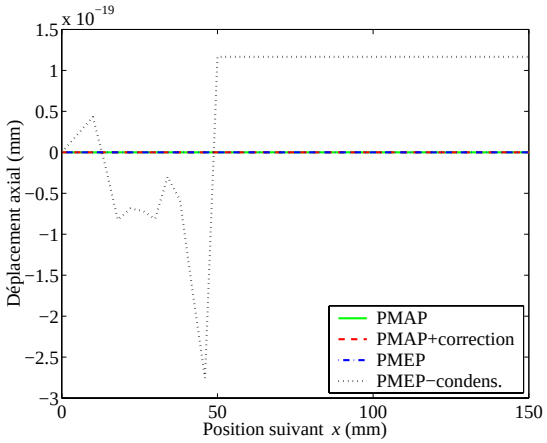


Figure 2.33: Déplacement axial induit par une force transversale.

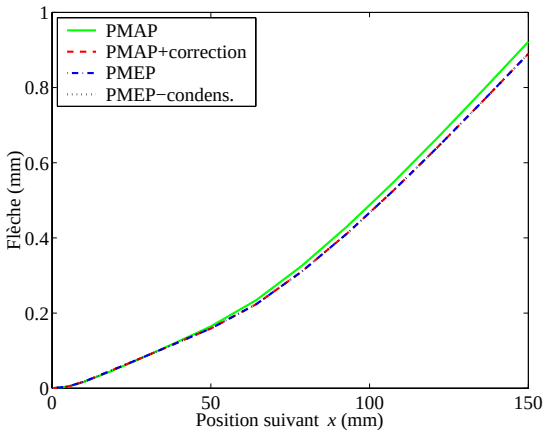


Figure 2.34: Flèche induite par une force transversale.

La Figure 2.35 montre les tensions induites dans les pastilles piézoélectriques des peaux supérieure et inférieure. Le modèle PMAP (sans correction) fournit une fois de plus des tensions plus élevées que le modèle PMEP, dû à la sur-estimation de la déformation des pastilles piézoélectriques. Cependant, la correction des constantes élastiques fournit par le modèle PMAP+correction permet d'éliminer l'erreur.

On observe que, dans ce cas, les tensions induites dans les pastilles sont opposées dans les peaux supérieure et inférieure mais ne sont pas constantes suivant x. Ce résultat est dû à l'absence de conditions d'égalité entre les tensions des éléments piézoélectriques

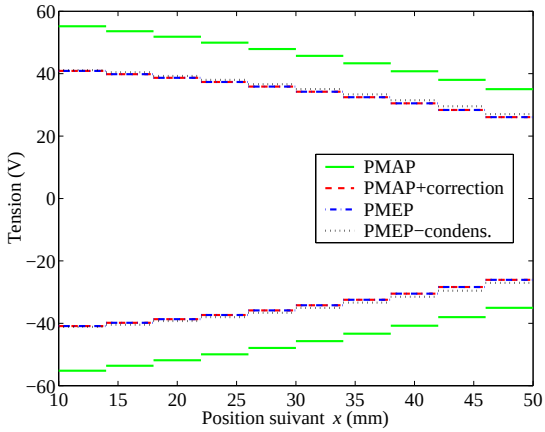


Figure 2.35: Tension induite dans les peaux piézoélectriques par un chargement transversal.

adjacents. En pratique, la tension réelle peut être obtenue par la moyenne des tensions de chaque élément, comme pour le modèle tricouche. La Figure 2.35 montre aussi que, contrairement au cas précédent, les tensions fournies par le modèle PMEP sans condensation statique sont légèrement supérieures à celles calculées par les modèles PMAP+correction et PMEP. Cela veut dire que, ici, les erreurs numériques du modèle PMEP-condens. présentes dans le calcul des déplacements peuvent affecter le calcul des tensions.

Chargement de flexion

Pour le chargement de flexion, un moment de 0,5 N.m est appliquée au bout de la poutre. La Figure 2.36 montre des erreurs numériques similaires à ceux du cas précédent pour le modèle PMEP sans condensation statique (PMEP-condens.). D'autre part, l'effet de la sous-estimation de la rigidité est aussi assez similaire à celui du cas précédent (Figures 2.37), à la différence que les tensions induites dans les peaux piézoélectriques sont presque constantes suivant la direction x (Figure 2.38). La Figure 2.38 montre aussi que, comme dans le cas précédent, le calcul des tensions utilisant le modèle PMEP sans condensation peut être affecté par les erreurs numériques dans le calcul des déplacements.

Notons que les déplacements axiaux, produit par les chargements transversal et de flexion, sont de l'ordre de la précision de la machine. Cela explique leur non-uniformité suivant la longueur de l'actionneur (Figures 2.33 et 2.36). Ces erreurs, dûs au mauvais conditionnement des matrices de rigidité, montrent que l'utilisation de la condensation statique, pour le modèle PMEP, ou de la correction des constantes élastiques, pour le modèle PMAP, est fortement recommandée.

2.7 Conclusion

Deux modèles éléments finis de poutre sandwich ont été développés pour étudier les vibrations de structures composées à la fois de matériaux élastiques, piézoélectriques et viscoélastiques. Ils supposent des peaux minces, respectant les hypothèses d'Euler-

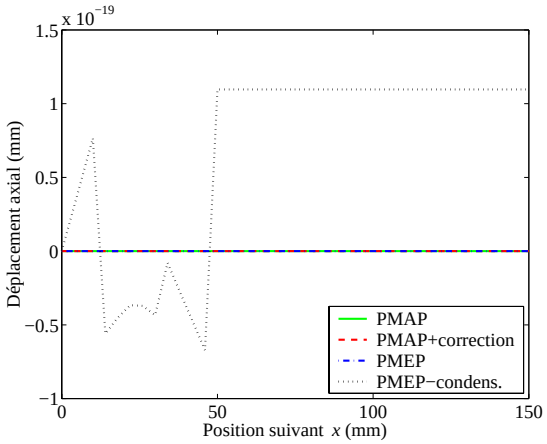


Figure 2.36: Déplacement axial induit par un moment de flexion.

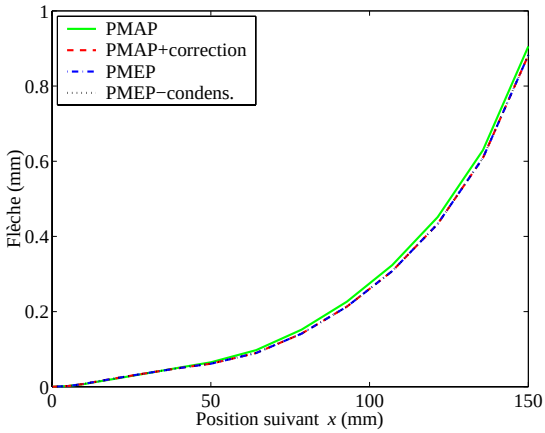


Figure 2.37: Flèche induite par un moment de flexion.

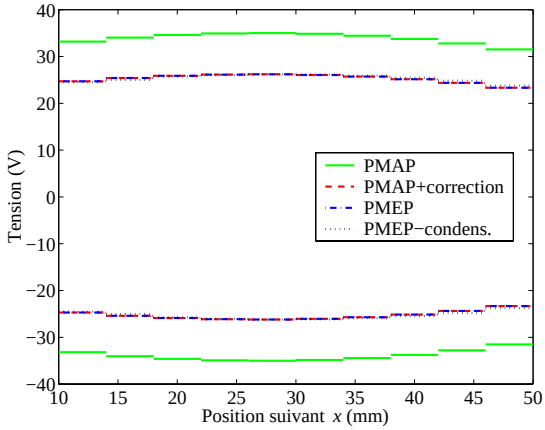


Figure 2.38: Tension induite dans les peaux piézoélectriques par un chargement de flexion.

Bernoulli, et un cœur relativement épais, représenté par les hypothèses de Timoshenko. Le premier modèle éléments finis de poutre sandwich à trois couches est à 2 nœuds et 4 ddls mécaniques par nœud, qui sont le déplacement transversal, et sa dérivée, et les déplacements axiaux moyens et relatifs des plans moyens des peaux. Il a été validé par des comparaisons avec des résultats analytiques et numériques trouvés dans la littérature, notamment pour deux cas d'intérêts spécifiques, à savoir la flexion d'une poutre élastique à travers deux pastilles piézoélectriques collées sur ses surfaces supérieure et inférieure, et la flexion d'une poutre sandwich à travers une pastille piézoélectrique agissant par cisaillement placée au cœur du sandwich. Les résultats coïncident bien avec ceux analytiques, pour des couches piézoélectriques couvrant entièrement les peaux ou le cœur, et avec ceux numériques, pour des pastilles piézoélectriques collées dans une région limitée de la poutre. Il a été montré que les actionneurs par extension induisent des forces concentrées, alors que ceux par cisaillement induisent des moments distribués. Le deuxième modèle éléments finis a été obtenu en étendant le modèle de poutre à trois couches au cas où les peaux sont composées elles-mêmes de sous-couches ayant les mêmes champs de

déplacements mais faites de différents matériaux. Il a été validé par des comparaisons avec des résultats analytiques et numériques trouvés dans la littérature. Les résultats ont montré que le modèle est capable de bien représenter des poutres multicouches, dont les rigidités des sous-couches des peaux ne différent pas trop.

Ces deux éléments finis ont été développés en trois versions supplémentaires chacun. La première est obtenue par l'ajout d'un ddl électrique, représentant la tension électrique, par élément et par couche/sous-couche piézoélectrique. La deuxième est obtenue par la condensation statique de ces ddls électriques au niveau élémentaire de manière que le nombre total de ddls de l'élément original (quatre par nœud) reste inchangé. Il a été montré que ces deux versions permettent de tenir compte de l'effet d'augmentation de rigidité des couches piézoélectriques, dû au potentiel électrique induit dans ces couches par leurs déformations. Cependant, la première version aboutit à des erreurs numériques dues au mauvais conditionnement des matrices de rigidité, alors que la deuxième version évite ces erreurs grâce à la condensation statique. D'autre part, il a été montré que l'effet d'augmentation de rigidité des couches piézoélectriques peut aussi être pris en compte d'une troisième manière, sans avoir à inclure des ddls électriques, à travers une modification des constantes élastiques des couches piézoélectriques dans les éléments finis originaux. Ces trois versions supplémentaires ont été comparées entre elles et avec l'élément fini original pour le calcul du potentiel induit dans les pastilles piézoélectriques lorsque la poutre est soumise à des chargements mécaniques. Les résultats ont montré que les éléments finis à constantes élastiques corrigées ou à ddls électriques condensés sont les mieux adaptés pour traiter les poutres multicouches à couches/sous-couches piézoélectriques.

Chapitre 3

Modélisation de la dépendance en fréquence des matériaux viscoélastiques

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, la rigidité du cœur viscoélastique a été supposée constante. Or, elle varie avec la fréquence d'excitation. Par conséquent, ce chapitre présente trois modèles pour tenir compte de la dépendance en fréquence des propriétés des matériaux viscoélastiques, à savoir les modèles Anelastic Displacement Fields (ADF), Golla-Hughes-McTavish (GHM) et une version itérative de la méthode des énergies modales (MSE). Ces modèles peuvent être appliqués directement aux modèles éléments finis, tels que décrits dans le chapitre précédent. Les deux premiers sont capables de bien représenter le comportement de l'amortissement viscoélastique même pour des structures très amorties dans le domaine temporel grâce à l'ajout de variables internes. Tandis que le dernier permet, avec un coût beaucoup moins élevé, d'approcher les fréquences propres et les amortissements modaux pour des structures peu amorties. Bien que les modèles ADF et GHM présentent des avantages quant à la représentation du comportement dynamique des structures avec matériaux viscoélastiques, ils ont quelques inconvénients majeurs, à savoir la difficulté à bien lisser les courbes maîtresses des matériaux avec les séries de fonctions propres à ces modèles, l'aboutissement à des systèmes d'état d'ordre élevé et l'identification des modes propres correspondant aux variables internes. Dans ce qui suit, les modèles seront présentés, les trois inconvénients des modèles ADF et GHM seront analysés en détails et des solutions leurs seront proposées. Ensuite, une réduction des modèles d'état par troncature modale est proposée et une transformation spatiale des modèles d'état réduits est réalisée afin de représenter les systèmes complexes par des équations d'état réelles. Enfin, les modèles ADF, GHM et MSE sont comparés à travers l'analyse des réponses vibratoires d'une poutre amortie par un revêtement viscoélastique. Le modèle ADF réduit est validé expérimentalement à travers l'analyse modale d'une poutre sandwich.

3.2 Comportement viscoélastique linéaire

3.2.1 Lois de comportement viscoélastique

Utilisant la théorie de la viscoélasticité linéaire [21], les lois de comportement d'un matériau viscoélastique quelconque peuvent s'écrire

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{c}(t-\tau)\, \mathrm{d}\varepsilon(\tau) \tag{3.1}$$

où ε représente le tenseur de déformation. Cette forme est générale, par exemple, dans le cas d'un matériau élastique linéaire, les fonctions $\mathbf{c}(t)$ sont des constants $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}^0$ et, les lois de comportement (3.1) se réduisent à

$$\sigma(t) = \mathbf{c}^0 \varepsilon(t) \tag{3.2}$$

en supposant que le matériau est initialement au repos, $\varepsilon(t) = 0 (-\infty < t < 0)$, ce qui conduit aux lois de comportement déjà présentées dans le chapitre précédent.

Pour un matériau viscoélastique, les fonctions $\mathbf{c}(t)$ ne sont pas constantes, ainsi, l'intégrale dans (3.1) doit être calculée pour chaque instant de temps dans l'intervalle $[-\infty, t]$. Cependant, $\mathbf{c}(t)$ satisfait toutes les propriétés de symétrie propres aux tenseurs d'élasticité [18]. Considérons, maintenant, chaque composante du tenseur de contrainte séparément. Cela ne constitue pas une hypothèse puisque cette analyse est généralisable aux autres composantes. Si le matériau est initialement au repos, la j-ième composante de l'équation (3.1) s'écrit

$$\sigma_j(t) = G(t)\varepsilon_j(0) + \int_0^t G(t-\tau)\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \tau}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{3.3}$$

ou, en définissant $\bar{h}(t) = G(t) - G_0$,

$$\sigma_j(t) = G_0\varepsilon_j(t) + \bar{h}(t)\varepsilon_j(0) + \int_0^t \bar{h}(t-\tau)\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \tau}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{3.4}$$

où G_0 est le module d'élasticité relaxé (ou statique), c'est-à-dire, le module après relaxation du matériau $G_0 = \lim_{t\to\infty} G(t)$ (Figure 3.1). On observe que l'équation (3.4), pour des conditions initiales nulles, est exactement la transformée de Laplace de

$$\tilde{\sigma}_j(s) = [G_0 + h(s)]\tilde{\varepsilon}_j(s) \tag{3.5}$$

avec $h(s) = s\bar{h}(s)$. s est la variable complexe de Laplace. Le terme $G_0\tilde{\varepsilon}_j(s)$ représente l'élasticité du matériau, alors que, le terme $h(s)\tilde{\varepsilon}_j(s)$ représente sa dissipation. Il est intéressant de remarquer que, lorsque la fréquence est nulle $s = 0$, le module est égal à $G(s)|_{s=0} = G_0$. C'est pourquoi on dénomme G_0 module statique. Les fonctions $h(s)$ sont, donc, des propriétés du matériau qui régissent son comportement dissipatif. Plusieurs auteurs ont développé des représentations mathématiques de ces fonctions ; les plus facilement trouvables dans la littérature sont présentées dans le Tableau 3.1.

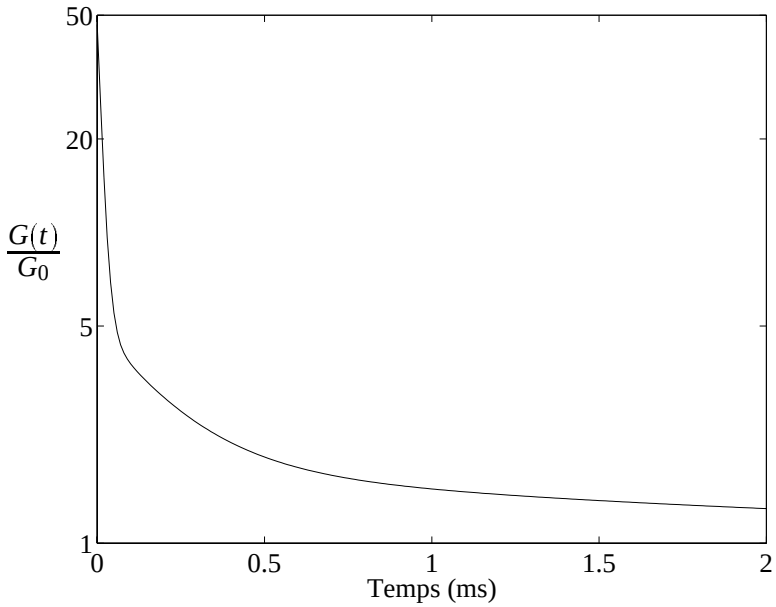


Figure 3.1: Fonction de relaxation du matériau ISD112 à 27°C.

Tableau 3.1: Représentations mathématiques des fonctions viscoélastiques $h(s)$.

Fonction	Auteur
$h(s) = G_0 \sum_i \frac{a_i}{s+b_i}$	Biot (1955) [18]
$h(s) = \frac{E_1 s^\alpha - E_0 b s^\beta}{1+bs^\beta}, \begin{cases} 0<\alpha<1 \\ 0<\beta<1 \end{cases}$	Bagley et Torvik (1983) [6]
$h(s) = G_0 \sum_i \frac{\Delta_i s}{s+\Omega_i}$	Lesieutre (1992) [54]
$h(s) = G_0 \sum_i \hat{\alpha}_i \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s}{s^2 + 2\hat{\zeta}_i \hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2}$	McTavish et Hughes (1993) [65]
$h(s) = G_0 \left(\tau_0 s + \sum_i \frac{\alpha_i \tau_i s}{\tau_i s + 1} \right)$	Yiu (1993) [97]

3.2.2 Approche de modules complexes

Si l'on suppose que s est purement imaginaire $s = i\omega$, le terme $[G_0 + h(s)]$ dans l'équation (3.5) s'écrit en fonction de la pulsation ω sous la forme complexe suivante

$$G^*(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega) = G'(\omega)[1 + i\eta_G(\omega)] \tag{3.6}$$

où $G'(\omega)$ est le *module élastique* et $\eta_G(\omega)$ le *facteur de perte* définit par

$$\eta_G(\omega) = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} \tag{3.7}$$

Cette relation sert, généralement, à calculer le facteur de perte $\eta_G(\omega)$ à partir des mesures des modules $G'(\omega)$ et $G''(\omega)$.

Ainsi, si l'on revient à l'équation de mouvement de la poutre sandwich (2.74) ou (2.86), en considérant que seule la rigidité du cœur viscoélastique est complexe et dépend de la fréquence, on a

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c^*(\omega)]\mathbf{q} = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_e \tag{3.8}$$

où $\mathbf{K}_p$ représente la contribution des peaux à la rigidité de la poutre sandwich et, $\mathbf{K}_c^*(\omega)$, celle du cœur viscoélastique, dépendante de la fréquence.

Dans ce travail on considère des matériaux viscoélastiques linéaires homogènes et isotropes. Par conséquent, les modules élastiques d'Young $E'(\omega)$ et de cisaillement $G'(\omega)$ sont liés par

$$G'(\omega) = \frac{E'(\omega)}{2[1+\nu(\omega)]}$$

Par contre, les modules complexes $E^*(\omega)$ et $G^*(\omega)$ ne sont pas, en général, proportionnels puisque le coefficient de Poisson $\nu(\omega)$ dépend de la fréquence et, leurs facteurs de perte correspondants $\eta_E(\omega), \eta_G(\omega)$ ne sont pas égaux. Cependant, par simplicité, on peut relaxer ces deux contraintes en supposant $\eta_E(\omega) = \eta_G(\omega) = \eta(\omega)$ et $\nu(\omega) = \nu$. Cela dit, la matrice de rigidité viscoélastique du cœur peut être donc exprimée par

$$\mathbf{K}_c^*(\omega) = G^*(\omega)\bar{\mathbf{K}}_c \tag{3.9}$$

où $G^*(\omega)$ est le module complexe de cisaillement du matériau viscoélastique du cœur. Or, de (3.6), on peut exprimer la matrice de rigidité globale de la poutre sandwich $\mathbf{K}^*(\omega) = \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c^*(\omega)$ par

$$\mathbf{K}^*(\omega) = \mathbf{K}'(\omega) + j\mathbf{K}''(\omega) = \mathbf{K}'(\omega)[1 + j\eta(\omega)] \tag{3.10}$$

L'écriture (3.8) est très commode, néanmoins, sa résolution n'est pas sans difficulté, puisque le système dépend de la fréquence d'excitation. Si l'on suppose, une force d'excitation $\mathbf{F} = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_e$ composée par des forces sinusoïdales et une réponse harmonique de la structure, l'équation (3.8) peut s'écrire sous la forme

$$[-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{D} + \mathbf{K}^*(\omega)]\mathbf{X} = \mathbf{F} \tag{3.11}$$

Cette équation peut être résolue pour chaque fréquence d'excitation ω et, à travers une somme pondérée de la solution fréquentielle du système, on a une solution de (3.11).

Cependant, mis à part les cas de chargement harmonique, cette méthode n'est pas applicable, et, même dans ces cas, la solution serait trop coûteuse pour des problèmes pratiques.

Dans les prochaines sections, trois méthodes sont présentées pour résoudre l'équation (3.8). La première, basée sur la méthode des énergies modales, permet de résoudre le problème pour de faibles amortissements. Les deux autres sont des méthodes basées sur l'introduction de variables internes et permettent de résoudre aussi le problème pour des structures très amorties.

3.3 La méthode itérative des énergies modales

La méthode des énergies modales (Modal Strain Energy method) a été présentée par Johnson, Kienholz et Rogers [45]. Elle considère que, pour un mode propre donné, le rapport entre les facteurs de perte de la structure et du matériau viscoélastique est égal au rapport entre les énergies de déformation élastique du matériau viscoélastique et de la structure lorsqu'elle se déforme dans le mode considéré,

$$\frac{\eta_s^r}{\eta} = \frac{H_v^r}{H_s^r} \tag{3.12}$$

où η_s^r est le facteur de perte de la structure, pour le r-ième mode et, H_v^r et H_s^r sont, respectivement, les énergies de déformation élastique accumulées dans le matériau viscoélastique et dans la structure toute entière. Le rapport H_v^r/H_s^r signifie donc la fraction d'énergie de déformation associé au matériau viscoélastique lorsque la structure se déforme dans le r-ième mode.

Les énergies de déformation élastique H_v^r et H_s^r associés au r-ième mode s'expriment par

$$H_v^r = \Phi_r^T \mathbf{K}_c' \Phi_r \; ; \quad H_s^r = \Phi_r^T \mathbf{K}' \Phi_r \tag{3.13}$$

où Φ_r est le r-ième mode propre, solution du problème réel de valeurs propres suivant

$$[-\omega_r^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}'] \Phi_r = \mathbf{0} \tag{3.14}$$

Le facteur de perte de la structure s'écrit donc

$$\eta_s^r = \eta \frac{\Phi_r^T \mathbf{K}_c' \Phi_r}{\Phi_r^T \mathbf{K}' \Phi_r} \tag{3.15}$$

or, $\mathbf{K}_c'' = \eta \mathbf{K}_c'$ et, puisque seule la rigidité du cœur viscoélastique est complexe, $\mathbf{K}'' = \mathbf{K}_c''$, donc

$$\boxed{\eta_s^r = \frac{\Phi_r^T \mathbf{K}'' \Phi_r}{\Phi_r^T \mathbf{K}' \Phi_r}} \tag{3.16}$$

La pulsation propre associée au r-ième mode, calculée par (3.14), peut être aussi approchée par le quotient de Rayleigh,

$$\boxed{\omega_r^2 = \frac{\Phi_r^T \mathbf{K}' \Phi_r}{\Phi_r^T \mathbf{M} \Phi_r}} \tag{3.17}$$

Cette méthode présente de bons résultats [45] pour des structures pas trop amorties. En effet, l'utilisation des modes propres réels Φ_r suppose que ces modes ne sont pas trop modifiés par l'amortissement modal. En plus, il est aussi supposé implicitement que ces modes diagonalisent la matrice $\mathbf{K}''$.

Le développement présenté depuis le début de cette section, suppose des matrices constantes. Il est clair que cela n'est pas réaliste puisque les modules élastiques et les facteurs de perte varient fortement avec la fréquence. Ainsi, l'objectif de ce qui suit c'est d'appliquer cette méthode, mais en version itérative, pour le cas où la matrice de rigidité du cœur viscoélastique est dépendante de la fréquence. Pour cela un algorithme itératif, présenté dans la Figure 3.2, a été développé. Il consiste à évaluer, pour une fréquence donnée, les propriétés du matériau viscoélastique qui seront utilisées pour le calcul des fréquences et modes propres de la structure servant à l'actualisation des propriétés du matériau. Ce processus est donc répété dans un algorithme itératif jusqu'à ce qu'une certaine condition de convergence soit remplie. Ensuite, le mode propre à la convergence est utilisé pour évaluer le facteur de perte de la structure à travers l'expression (3.16). Ainsi, les fréquences et modes propres sont approchés en tenant compte de la dépendance en fréquence des propriétés viscoélastiques. En général, la convergence est très rapide. Néanmoins, la procédure doit être répétée pour chaque fréquence d'intérêt. Le schéma itératif conduit aux fréquences propres du système non-amorti. Cette technique évite de calculer les modes complexes (à gauche et à droite) prévus dans [31]. En plus, l'utilisation des matrices du système du second ordre non-amorti réduit le problème de calcul des modes propres par rapport à l'utilisation de la matrice d'état.

Afin de pouvoir étendre cette méthode à l'étude du contrôle hybride actif-passif, où plusieurs modes peuvent être excités par les forces de contrôle, on considère que les r-ièmes pulsations ω_r et modes Φ_r propres sont calculés pour les n modes d'intérêt ($r = 1, \ldots, n$) et, ensuite, rangés dans les matrices $\mathbf{T}_e$ et Ω_e suivantes :

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \cdots & \Phi_n \end{bmatrix} \; ; \; \Omega_e = \begin{bmatrix} \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Par ailleurs, la matrice représentant l'amortissement viscoélastique est définie par $\eta_s \Omega_e$ et construite à partir des n facteurs de perte de la structure η_s^r ($r = 1, \ldots, n$), tel que

$$\eta_s = \begin{bmatrix} \eta_s^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \eta_s^n \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

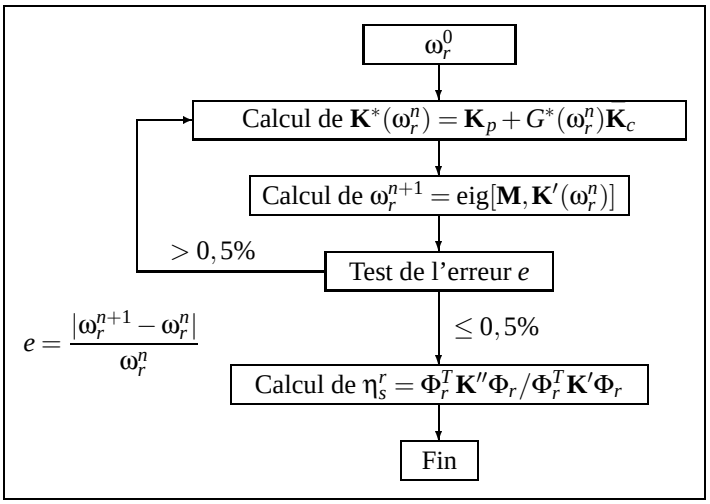


Figure 3.2: Algorithme itératif pour calculer l'amortissement viscoélastique.

Par conséquent, en faisant $\mathbf{q} = \mathbf{T}_e\chi$, le système (3.8) est approché par

$$\ddot{\chi} + (2\zeta + \eta_s)\Omega_e\dot{\chi} + \Omega_e^2\chi = \mathbf{T}_e^T(\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m) \tag{3.20}$$

où la matrice d'amortissement visqueux $\mathbf{D}$ de (3.8) est supposée telle que $\mathbf{T}_e^T\mathbf{D}\mathbf{T}_e = 2\zeta\Omega_e$. Il est clair que $\mathbf{T}_e$ ne diagonalise pas forcément $\mathbf{K}'$, puisque chaque colonne de $\mathbf{T}_e$ n'est, en toute rigueur, valable que pour une seule fréquence. Cependant, ce système constitue une approximation raisonnable du système (3.8) pour des structures pas trop amorties et dont les propriétés des composants viscoélastiques ne varient pas trop avec la fréquence.

3.4 Le modèle Golla-Hughes-McTavish

Le modèle Golla-Hughes-McTavish (GHM) propose de représenter le module du matériau par une série de termes *mini-oscillateurs* en fonction de la fréquence (Tableau 3.1), dans le domaine Laplacien, de façon que [65]

$$G(s) = G_0 + h(s) = G_0\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \hat{\alpha}_i \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_i\hat{\omega}_i s}{s^2 + 2\hat{\zeta}_i\hat{\omega}_i s + \hat{\omega}_i^2}\right) \tag{3.21}$$

G_0 représente la valeur finale de la fonction de relaxation, dénommée module relaxé ou module en basse-fréquence. Notons que le module non-relaxé s'écrit $G_\infty = G_0(1 + \sum_i \hat{\alpha}_i)$. Chaque terme *mini-oscillateur* est une fonction rationnelle de trois constantes positives, à savoir $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\omega}_i$ et $\hat{\zeta}_i$, déterminées par ajustement au module de cisaillement mesuré du matériau (voir §3.8). Écrivons donc la transformée de Laplace de l'équation de mouvement (3.8), en tenant compte de (3.9),

$$[s^2\mathbf{M} + s\mathbf{D} + \mathbf{K}_p + G(s)\overline{\mathbf{K}}_c]\tilde{\mathbf{q}}(s) = \tilde{\mathbf{F}}(s) \tag{3.22}$$

où **F** représente la somme des forces mécaniques et électriques. La substitution de l'expression du module (3.21) dans cette équation conduit à

$$\left[s^2\mathbf{M}+s\mathbf{D}+\mathbf{K}_p+\mathbf{K}_c^0\left(1+\sum_i \hat{\alpha}_i \frac{s^2+2\hat{\zeta}_i\hat{\omega}_i s}{s^2+2\hat{\zeta}_i\hat{\omega}_i s+\hat{\omega}_i^2}\right)\right]\tilde{\mathbf{q}}(s)=\tilde{\mathbf{F}}(s) \tag{3.23}$$

avec $\mathbf{K}_c^0 = G_0\bar{\mathbf{K}}_c$ étant la matrice de rigidité statique du cœur. Introduisons une série de n variables de dissipation $\mathbf{q}_i^d$ $(i=1,\ldots,n)$ qui sont liées aux variables élastiques **q** par

$$\tilde{\mathbf{q}}_i^d(s)=\frac{\hat{\omega}_i^2}{s^2+2\hat{\zeta}_i\hat{\omega}_i s+\hat{\omega}_i^2}\tilde{\mathbf{q}}(s) \tag{3.24}$$

qu'on peut aussi ramener sous la forme

$$\tilde{\mathbf{q}}(s)-\tilde{\mathbf{q}}_i^d(s)=\frac{s^2+2\hat{\zeta}_i\hat{\omega}_i s}{s^2+2\hat{\zeta}_i\hat{\omega}_i s+\hat{\omega}_i^2}\tilde{\mathbf{q}}(s)$$

Substituant ce résultat dans l'équation de mouvement (3.23), celle-ci devient

$$(s^2\mathbf{M}+s\mathbf{D}+\mathbf{K}_p+\mathbf{K}_c^0)\tilde{\mathbf{q}}(s)+\mathbf{K}_c^0\sum_i \hat{\alpha}_i\left[\tilde{\mathbf{q}}(s)-\tilde{\mathbf{q}}_i^d(s)\right]=\tilde{\mathbf{F}}(s) \tag{3.25}$$

À partir des équations (3.24) et (3.25) on définit le système couplé suivant

$$\left(s^2\mathbf{M}+s\mathbf{D}+\mathbf{K}_p+\mathbf{K}_c^\infty\right)\tilde{\mathbf{q}}(s)-\mathbf{K}_c^0\sum_i \hat{\alpha}_i\tilde{\mathbf{q}}_i^d(s)=\tilde{\mathbf{F}}(s) \tag{3.26a}$$

$$\left(s^2\frac{1}{\hat{\omega}_i^2}+s\frac{2\hat{\zeta}_i}{\hat{\omega}_i}+1\right)\tilde{\mathbf{q}}_i^d(s)-\tilde{\mathbf{q}}(s)=\mathbf{0} \tag{3.26b}$$

où $\mathbf{K}_c^\infty = \mathbf{K}_c^0(1+\sum_i \hat{\alpha}_i)$ définit la matrice de rigidité instantanée ou en haute-fréquence. La multiplication des équations (3.26b) par $\hat{\alpha}_i\mathbf{K}_c^0$ et la transformation au domaine temporel, évidente puisque toutes les matrices sont indépendantes de s, conduit à

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}+(\mathbf{K}_p+\mathbf{K}_c^\infty)\mathbf{q}-\mathbf{K}_c^0\sum_i \hat{\alpha}_i\mathbf{q}_i^d=\mathbf{F} \tag{3.27a}$$

$$\frac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\omega}_i^2}\mathbf{K}_c^0\ddot{\mathbf{q}}_i^d+\frac{2\hat{\alpha}_i\hat{\zeta}_i}{\hat{\omega}_i}\mathbf{K}_c^0\dot{\mathbf{q}}_i^d+\hat{\alpha}_i\mathbf{K}_c^0\mathbf{q}_i^d-\hat{\alpha}_i\mathbf{K}_c^0\mathbf{q}=\mathbf{0} \tag{3.27b}$$

ou sous la forme du système matriciel suivant

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{D}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{F}} \tag{3.28}$$

où

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} ; \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{dd} \end{bmatrix} ; \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c^{\infty} & \mathbf{K}_{qd} \\ \mathbf{K}_{qd}^T & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathrm{col}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1^d, \ldots, \mathbf{q}_n^d) ; \bar{\mathbf{F}} = \mathrm{col}(\mathbf{F}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$$

avec

$$\mathbf{M}_{dd} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\omega}_1^2}\mathbf{K}_c^0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{\hat{\alpha}_n}{\hat{\omega}_n^2}\mathbf{K}_c^0 \end{bmatrix} ; \mathbf{D}_{dd} = \begin{bmatrix} \frac{2\hat{\alpha}_1\hat{\zeta}_1}{\hat{\omega}_1}\mathbf{K}_c^0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{2\hat{\alpha}_n\hat{\zeta}_n}{\hat{\omega}_n}\mathbf{K}_c^0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{dd} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1\mathbf{K}_c^0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{\alpha}_n\mathbf{K}_c^0 \end{bmatrix} ; \mathbf{K}_{qd} = \begin{bmatrix} -\hat{\alpha}_1\mathbf{K}_c^0 & \cdots & -\hat{\alpha}_n\mathbf{K}_c^0 \end{bmatrix}$$

Chaque groupe de variables $\mathbf{q}_i^d$, correspondant à l'i-ième série de paramètres utilisés pour la modélisation de la dépendance en fréquence des propriétés du matériau, a la même dimension que le vecteur des ddls élastiques $\mathbf{q}$ (voir (3.26b)). Cela signifie que l'ajout de variables internes double, au minimum, le nombre de ddls du système et, par conséquence, la dimension des matrices associées. Ainsi, il est prévu que le coût du calcul croisse fortement avec le nombre de séries de paramètres nécessaires pour bien modéliser le matériau viscoélastique. D'autre part, il est possible que seuls quelques éléments de la poutre aient des composants viscoélastiques. Par conséquent, la matrice $\bar{\mathbf{K}}_c$ peut être composée de plusieurs lignes (colonnes) nulles. Ainsi, seul le cas d'un revêtement total, où tous les éléments ont des composants viscoélastiques, conduit à une matrice $\bar{\mathbf{K}}_c$, et donc $\bar{\mathbf{M}}$, définie positive.

Ces deux dernières caractéristiques constituent les principaux inconvénients de l'écriture (3.28), ou plus spécialement de la multiplication de l'équation (3.26b) par $\hat{\alpha}_i\mathbf{K}_c^0$. Puisque, dans ce cas, la dimension des vecteurs de ddls dissipatifs $\mathbf{q}_i^d$ est forcement la même que celle de $\mathbf{q}$ et la matrice de masse $\bar{\mathbf{M}}$ peut ne pas être définie positive. Afin de résoudre ces problèmes deux alternatives se présentent : la première consiste à utiliser $\hat{\alpha}_i\mathbf{I}$ comme multiplicateur de l'équation (3.26b), aboutissant à une matrice de masse non-singulière, mais détruisant la symétrie de la matrice de rigidité ($\mathbf{K}_{qd}^T \neq \mathbf{K}_{dq}$) et ne réduisant pas la dimension des matrices. La deuxième consiste à utiliser une projection modale telle que $\hat{\mathbf{q}}_i^d = \mathbf{T}^T\mathbf{q}_i^d$ et $\Lambda = \mathbf{T}^T\bar{\mathbf{K}}_c\mathbf{T}$, où Λ est une matrice diagonale composée par les valeurs propres non nulles de la matrice $\bar{\mathbf{K}}_c$ et, $\mathbf{T}$ la matrice des vecteurs propres normalisés (par $\mathbf{T}^T\mathbf{T} = \mathbf{I}$) correspondants. Dans ce cas, non seulement la matrice de masse est définie positive, mais la dimension du système complémentaire est réduite par le nombre de valeurs propres nulles de la matrice $\bar{\mathbf{K}}_c$, pour chaque terme GHM, et la symétrie de la matrice de rigidité globale est préservée. C'est cette dernière solution qui est retenue dans ce travail.

Ainsi, avec la projection modale, les matrices $\mathbf{M}_{dd}$, $\mathbf{D}_{dd}$, $\mathbf{K}_{dd}$, $\mathbf{K}_{qd}$ (3.28) prennent les formes suivantes

$$\mathbf{M}_{dd} = G_0 \begin{bmatrix} \frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\omega}_1^2}\Lambda & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{\hat{\alpha}_n}{\hat{\omega}_n^2}\Lambda \end{bmatrix} ; \mathbf{D}_{dd} = G_0 \begin{bmatrix} \frac{2\hat{\alpha}_1\hat{\zeta}_1}{\hat{\omega}_1}\Lambda & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{2\hat{\alpha}_n\hat{\zeta}_n}{\hat{\omega}_n}\Lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{dd} = G_0 \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1\Lambda & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{\alpha}_n\Lambda \end{bmatrix} ; \mathbf{K}_{qd} = \begin{bmatrix} -\hat{\alpha}_1\mathbf{K}_c^0\mathbf{T} & \cdots & -\hat{\alpha}_n\mathbf{K}_c^0\mathbf{T} \end{bmatrix}$$

Cette méthode permet une bonne représentation de la dépendance en fréquence des propriétés du matériau viscoélastique et l'analyse du système dans le domaine temporel, puisque toutes les matrices du système sont constantes. D'après McTavish et Hughes [65], le nombre de modes flexibles reste inchangé et les modes dissipatifs sont sur-amortis et peu observables, correspondant aux relaxations internes du matériau viscoélastique. Observons que l'on peut aussi faire une réduction modale du système élastique (3.26a), diagonalisant, ainsi, les matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c^\infty$.

3.5 Le modèle Anelastic Displacement Fields

Le modèle des champs de déplacements anélastiques (Anelastic Displacement Fields, ADF) développé par Lesieutre [55, 57], représente le module complexe du matériau viscoélastique par une série de termes de la forme

$$G^*(\omega) = G_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \frac{\omega^2 + j\omega\,\Omega_i}{\omega^2 + \Omega_i^2} \right) \tag{3.29}$$

où G_0 est le module relaxé (ou module en basse-fréquence). Le module non-relaxé $G_\infty = G^*(\infty)$ s'écrit $G_\infty = G_0(1 + \sum_i \Delta_i)$. Ω_i est l'inverse du temps caractéristique de relaxation à déformation constante et, Δ_i la résistance de relaxation correspondante liée au paramètre C_i, décrivant le couplage du processus physique de relaxation au déplacement total, par

$$C_i = \frac{1 + \sum_i \Delta_i}{\Delta_i} \tag{3.30}$$

C_i peut être aussi considéré comme le rapport du module anélastique au module élastique correspondant [55]. Les paramètres Δ_i, Ω_i sont déterminés à partir de l'ajustement au module de cisaillement mesuré du matériau (voir §3.8).

Cette méthode se base sur la séparation des déformations du matériau viscoélastique en une partie élastique, instantanément proportionnelle à la contrainte, et une partie anélastique représentant la relaxation du matériau. Pour tenir compte de cette relaxation, n séries de degrés de liberté anélastiques $\mathbf{q}_i^d$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont introduites et les degrés de liberté $\mathbf{q}$ sont remplacés par $\mathbf{q}^e$ dans l'énergie de déformation du matériau viscoélastique

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{q} - \sum_i \mathbf{q}_i^d \tag{3.31}$$

Ce qui conduit l'équation (3.8) à

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c^{\infty})\mathbf{q} - \mathbf{K}_c^{\infty}\sum_i \mathbf{q}_i^d = \mathbf{F} \tag{3.32}$$

où $\mathbf{K}_c^{\infty} = (1+\sum_i \Delta_i)\mathbf{K}_c^0$ est la matrice de rigidité en haute-fréquence du cœur. En plus de cette équation, un système d'équations décrivant l'évolution des champs de déplacements anélastiques (ADF) doit être considéré

$$\frac{C_i}{\Omega_i}\mathbf{K}_c^{\infty}\dot{\mathbf{q}}_i^d + C_i\mathbf{K}_c^{\infty}\mathbf{q}_i^d - \mathbf{K}_c^{\infty}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{3.33}$$

On observe que les équations (3.32) et (3.33) sont assez similaires à celles présentées pour le modèle GHM (3.27a) et (3.27b), respectivement, à part l'absence des termes d'inertie dans (3.33). Par conséquent, l'équation (3.27b) peut aussi être considérée comme une description du comportement de relaxation du matériau viscoélastique.

Les équations (3.32) et (3.33) conduisent au système matriciel couplé suivant

$$\bar{\mathbf{M}}\ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{D}}\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{F}} \tag{3.34}$$

avec

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \; ; \; \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{dd} \end{bmatrix} \; ; \; \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c^{\infty} & \mathbf{K}_{qd} \\ \mathbf{K}_{qd}^T & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathrm{col}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1^d, \ldots, \mathbf{q}_n^d) \; ; \; \bar{\mathbf{F}} = \mathrm{col}(\mathbf{F}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$$

et

$$\mathbf{D}_{dd} = \begin{bmatrix} \frac{C_1}{\Omega_1}\mathbf{K}_c^{\infty} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{C_n}{\Omega_n}\mathbf{K}_c^{\infty} \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{K}_{dd} = \begin{bmatrix} C_1\mathbf{K}_c^{\infty} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & C_n\mathbf{K}_c^{\infty} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{qd} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_c^{\infty} & \cdots & -\mathbf{K}_c^{\infty} \end{bmatrix}$$

Néanmoins, comme pour le modèle GHM, sous cette forme le nombre de ddls anélastiques du système, pour chaque ADF, est égal à celui des ddls élastiques. Par contre, une projection modale telle que $\hat{\mathbf{q}}_i^d = \mathbf{T}^T\mathbf{q}_i^d$ et $\Lambda = \mathbf{T}^T\bar{\mathbf{K}}_c\mathbf{T}$ peut réduire la dimension du système, de manière que les matrices $\mathbf{D}_{dd}$,$\mathbf{K}_{dd}$,$\mathbf{K}_{qd}$ deviennent

$$\mathbf{D}_{dd} = G_{\infty}\begin{bmatrix} \frac{C_1}{\Omega_1}\Lambda & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{C_n}{\Omega_n}\Lambda \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{K}_{dd} = G_{\infty}\begin{bmatrix} C_1\Lambda & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & C_n\Lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{qd} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_c^{\infty}\mathbf{T} & \cdots & -\mathbf{K}_c^{\infty}\mathbf{T} \end{bmatrix}$$

La dimension de $\hat{\mathbf{q}}_i^d$ peut être beaucoup plus petite que celle de $\mathbf{q}_i^d$ dans le cas de revêtement viscoélastique partiel court. Par ailleurs, comme pour le modèle GHM, le système élastique peut être réduit par une réduction modale de $\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c^{\infty}$.

De (3.33) et (3.34), on note que, contrairement au modèle GHM, les variables dissipatives n'ont pas d'inertie et, par conséquent, la matrice de masse globale $\bar{\mathbf{M}}$ n'est, en aucun cas, définie positive. En effet, pour ce modèle, la réduction des matrices correspondantes aux variables dissipatives n'est réalisée que pour réduire la dimension du système résultant. Cependant, il sera montré ultérieurement que la singularité de la matrice de masse peut se résoudre à travers l'écriture du système (3.34) sous une forme d'équations d'état. D'ailleurs, cette caractéristique constitue plutôt un avantage de ce modèle, conduisant à des matrices d'état plus petites par rapport à celles du modèle GHM.

3.6 Système d'équations d'état

Afin d'appliquer les modèles précédents à la conception d'un système de contrôle actif optimal, leurs équations de mouvement respectives (3.20), (3.28) et (3.34) doivent être réécrites sous la forme d'équations d'état. Ainsi, on définit un vecteur d'état $\mathbf{x}$, propre à chaque modèle, soumis à des forces de perturbation mécaniques $\mathbf{p}$, basées sur le vecteur des chargements mécaniques $\mathbf{F}_m$, et à des forces de contrôle $\mathbf{Bu}$, basées sur les forces piézoélectriques $\mathbf{F}_e$. Les équations d'état des trois modèles peuvent s'écrire sous la forme générale suivante

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{p} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{3.35}$$

La matrice $\mathbf{C}$ établit, en fonction de l'état, un vecteur des sorties $\mathbf{y}$, qui est, en général, composé des variables mesurées. Néanmoins, chaque modèle viscoélastique conduit à un vecteur d'état $\mathbf{x}$ différent. Les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{p}$ correspondantes aux trois modèles peuvent être écrites sous la forme

Modèle GHM :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c^{\infty}) & -\alpha_1 \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_c^0\mathbf{T} & \cdots & -\alpha_n \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_c^0\mathbf{T} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ -\hat{\omega}_1^2\mathbf{T}^T & -\hat{\omega}_1^2\mathbf{I} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2\hat{\zeta}_1\hat{\omega}_1\mathbf{I} & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & & \mathbf{0} & & \ddots & \\ -\hat{\omega}_n^2\mathbf{T}^T & \mathbf{0} & & -\hat{\omega}_n^2\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & -2\hat{\zeta}_n\hat{\omega}_n\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \hat{\mathbf{q}}_1^d \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{q}}_n^d \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_d \\ \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{C}}_v \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Modèle ADF :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \frac{\Omega_1}{C_1}\mathbf{T}^T & -\Omega_1\mathbf{I} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & & \mathbf{0} \\ \frac{\Omega_n}{C_n}\mathbf{T}^T & \mathbf{0} & & -\Omega_n\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}_p+\mathbf{K}_c^\infty) & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_c^\infty\mathbf{T} & \cdots & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_c^\infty\mathbf{T} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_m \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_e \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_d \\ \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{C}}_v \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Modèle MSE :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega_e^2 & -(2\zeta+\eta_s)\Omega_e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \chi \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_e^T\mathbf{F}_m \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_e^T\mathbf{F}_e \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_d\mathbf{T}_e \\ \bar{\mathbf{C}}_v\mathbf{T}_e \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

où $\bar{\mathbf{C}}_d$ et $\bar{\mathbf{C}}_v$ sont les matrices des sorties en déplacements et en vitesses, respectivement.

L'analyse des expressions (3.36), (3.37) et (3.38) conduit à des conclusions assez importantes quant au coût de calcul des modèles viscoélastiques. Supposons que n^e et n_i^d soient les nombres de ddls élastiques ($\dim(\mathbf{q})$) et dissipatifs ($\dim(\hat{\mathbf{q}}_i^d)$), pour l'$i$-ième ($i = 1,\ldots,n$) série de paramètres ADF/GHM, respectivement. De (3.36), on observe que le nombre total de ddls ($\mathbf{x} = \mathrm{col}(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}})$), pour le modèle GHM, est de $2n^e + 2nn_i^d$. C'est aussi la dimension des matrices et vecteurs du système d'état correspondant à ce modèle. Tandis que pour le modèle ADF, cette analyse conduit à $2n^e + nn_i^d$, puisque seules les dérivées des ddls élastiques sont représentées dans le vecteur d'état $\mathbf{x}$. Par conséquent, le modèle ADF économise nn_i^d ddls dans le système d'état par rapport au modèle GHM. Cela correspond à $nn_i^d(4n^e + 3nn_i^d)$ éléments en moins dans la matrice $\mathbf{A}$. À titre d'exemple, considérons le cas pratique du revêtement total d'une poutre par un matériau viscoélastique contraint, dont les propriétés sont telles que trois séries de paramètres sont nécessaires pour bien modéliser son comportement. Dans ce cas, $n = 3$ et $n_i^d = n^e$, donc, les dimensions des systèmes d'état sont, pour ADF et GHM, $5n^e$ et $8n^e$, respectivement. Ainsi, le modèle ADF économise $3n^e$ ddls, ou $39n^{e2}$ éléments dans la matrice $\mathbf{A}$, conduisant à une raisonnable économie du coût de calcul.

D'autre part, le modèle MSE, n'ayant pas de ddls dissipatifs, conduit à $2n^r$ ddls, où n^r est le nombre des modes propres retenus dans l'algorithme itératif.

3.7 Réduction modale des systèmes d'état

Même avec une possible réduction modale des ddls dissipatifs supplémentaires, dû aux éléments non viscoélastiques, les matrices (3.36) et (3.37) du système d'état (3.35) sont encore trop grandes pour la conception des systèmes de contrôle. C'est pourquoi une

réduction modale des systèmes obtenus précédemment est réalisée. L'objectif est d'approcher le système d'état original par un système équivalent dont la dimension soit beaucoup plus faible, tout en minimisant les variations du comportement dynamique de l'état. Cela est obtenu à travers l'élimination des modes qui contribuent peu à la réponse dynamique de la structure dans la bande de fréquences d'intérêt.

Les valeurs propres et vecteurs propres complexes (à droite $\mathbf{T}_d$ et à gauche $\mathbf{T}_g$) du système (3.35) sont calculés par

$$\mathbf{A}\mathbf{T}_d = \Lambda\mathbf{T}_d \; ; \; \mathbf{A}^T\mathbf{T}_g = \Lambda\mathbf{T}_g \tag{3.39}$$

où les modes propres sont normalisés par $\mathbf{T}_g^T\mathbf{T}_d = \mathbf{I}$. On peut supposer que la matrice Λ, des valeurs propres de $\mathbf{A}$, est composée des valeurs propres Λ_e et Λ_d associés aux ddls élastiques et dissipatifs, respectivement,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_d \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

De même, les vecteurs propres à droite $\mathbf{T}_d$ et à gauche $\mathbf{T}_g$ sont composés des modes propres associés aux valeurs propres de Λ_e et Λ_d, tel que

$$\mathbf{T}_d = [\mathbf{T}_{de} \; \mathbf{T}_{dd}] \; ; \; \mathbf{T}_g = [\mathbf{T}_{ge} \; \mathbf{T}_{gd}] \tag{3.41}$$

En général, les modes propres associés aux ddls dissipatifs sont sur-amortis, c'est-à-dire, $\mathrm{Im}(\Lambda_d) = 0$ et $\mathrm{Re}(\Lambda_d) < 0$. Par conséquent, on peut supposer que leur contribution à la réponse dynamique du système est négligeable et, donc, le vecteur d'état est approché par la contribution des modes élastiques, tel que $\mathbf{x} \approx \mathbf{T}_{de}\mathbf{x}_e$. Ainsi, le système d'équations (3.35) se réduit au système suivant, avec l'état $\mathbf{x}_e$,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_e &= \Lambda_e\mathbf{x}_e + \mathbf{T}_{ge}^T\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{T}_{ge}^T\mathbf{p} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{T}_{de}\mathbf{x}_e \end{aligned} \tag{3.42}$$

Par ailleurs, on peut encore réduire le système (3.42), en considérant que, généralement, seule une bande Γ de fréquences est importante, soit parce que cette bande couvre entièrement la bande opérationnelle de fréquences d'excitation, soit parce que la majorité de l'énergie du système y est concentrée. Ainsi, supposons que la matrice Λ_e soit composée de valeurs propres à l'intérieur (retenues, r) et à l'extérieur (négligées, n) de Γ. On peut, donc, décomposer la matrice Λ_e de la façon suivante

$$\Lambda_e = \begin{bmatrix} \Lambda_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_n \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

ce qui correspond aussi à décomposer les matrices des vecteurs propres $\mathbf{T}_{de}$ et $\mathbf{T}_{ge}$,

$$\mathbf{T}_{de} = [\mathbf{T}_{dr} \; \mathbf{T}_{dn}] \; ; \; \mathbf{T}_{ge} = [\mathbf{T}_{gr} \; \mathbf{T}_{gn}] \tag{3.44}$$

Si l'on néglige la contribution des valeurs propres Λ_n à l'extérieur de la bande de fréquences d'intérêt Γ dans le système (3.35), on peut écrire le système réduit suivant, avec $\mathbf{x} \approx \mathbf{T}_{dr}\mathbf{x}_r$,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_r &= \Lambda_r \mathbf{x}_r + \mathbf{T}_{gr}^T \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{T}_{gr}^T \mathbf{p} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{T}_{dr}\mathbf{x}_r \end{aligned} \tag{3.45}$$

Cette méthode de réduction modale, est assez simple à mettre en œuvre puisque le choix de modes à retenir n'est basé que sur l'analyse des valeurs propres. Cependant, pour des systèmes trop amortis cette analyse n'est guère facile, parce que quelques modes élastiques peuvent être sur-amortis ou trop couplés avec ceux correspondant aux ddls dissipatifs, compliquant ainsi le choix des modes à retenir. En toute rigueur, l'analyse des valeurs propres doit être accompagnée par une analyse des vecteurs propres. D'autre part, dans certains cas, il peut être intéressant de garder quelques modes dissipatifs afin de bien représenter la relaxation du matériau.

Il est intéressant de remarquer que, pour le modèle MSE, le système d'état réduit est construit directement, puisque seules les fréquences d'intérêt peuvent être calculées dans l'algorithme itératif.

3.7.1 Représentation d'état des modèles amortis

Puisque la base considérée dans la réduction modale de la section précédente est composée de modes propres complexes, l'écriture (3.45) aboutit aussi à des matrices complexes. Cependant, grâce au fait que seuls les modes sous-amortis sont retenus, les éléments des matrices se présentent en complexes conjugués, tel que

$$\Lambda_r = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \lambda_j & & \\ & & \bar{\lambda}_j & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{T}_{gr}^T\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \psi_j \\ \bar{\psi}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{T}_{gr}^T\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \varphi_j \\ \bar{\varphi}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{C}\mathbf{T}_{dr} = \begin{bmatrix} \cdots & \phi_j & \bar{\phi}_j & \cdots \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

où λ_j $(j = 1, \ldots, r)$ sont les valeurs propres du système réduit. Par conséquent, les vecteurs $\mathbf{x}_r$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{u}$ sont des quantités réelles. L'inconvénient de l'écriture (3.45) repose sur la difficulté d'utiliser les matrices complexes pour l'analyse du système et pour la conception du contrôleur. Ainsi, il est intéressant de réécrire le système d'état (3.45) sous une forme réelle, dont les variables d'état sont encore associées à des déplacements et vitesses modaux relatifs aux modes propres de vibration de la structure. Afin de construire un système équivalent à (3.45) avec des matrices réelles, une transformation linéaire de l'état $\mathbf{x}_r$, tel que $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_c\mathbf{x}_r$, est réalisée en se basant sur [30]. La matrice $\mathbf{T}_c$ de changement de base est définie par

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & -\frac{1}{2}\frac{j}{\mathrm{Im}(\lambda_j)} & \frac{1}{2}\frac{j}{\mathrm{Im}(\lambda_j)} & & \\ & & & \ddots & \\ \ddots & & & & \\ & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{j\mathrm{Re}(\lambda_j)}{\mathrm{Im}(\lambda_j)} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{j\mathrm{Re}(\lambda_j)}{\mathrm{Im}(\lambda_j)} & & \\ & & & \ddots & \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

Ainsi, à partir de (3.45), le nouveau système d'état réel s'écrit

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{p}} \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}} \end{aligned}} \tag{3.48}$$

où

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_c \Lambda_r \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \mathbf{I} & \\ \ddots & & \ddots & \\ & -|\lambda_j|^2 & & 2\mathrm{Re}(\lambda_j) \\ & & \ddots & \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}_c \mathbf{T}_{gr}^T \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{\mathrm{Im}(\psi_j)}{\mathrm{Im}(\lambda_j)} \\ \vdots \\ \mathrm{Re}(\psi_j) + \mathrm{Im}(\psi_j)\frac{\mathrm{Re}(\lambda_j)}{\mathrm{Im}(\lambda_j)} \\ \vdots \end{bmatrix} \; ; \; \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{T}_c \mathbf{T}_{gr}^T \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{\mathrm{Im}(\varphi_j)}{\mathrm{Im}(\lambda_j)} \\ \vdots \\ \mathrm{Re}(\varphi_j) + \mathrm{Im}(\varphi_j)\frac{\mathrm{Re}(\lambda_j)}{\mathrm{Im}(\lambda_j)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}_{dr}\mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \cdots & -2[\mathrm{Re}(\phi_j)\mathrm{Re}(\lambda_j) + \mathrm{Im}(\phi_j)\mathrm{Im}(\lambda_j)] & \cdots & 2\mathrm{Re}(\phi_j) & \cdots \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de $\hat{\mathbf{A}}$ sont définis par les éléments de Λ_r. Sous cette forme, le système (3.48) est équivalent au système (3.45), mais avec des matrices réelles. Les variables d'état sont découplées par couples représentant les déplacements et vitesses modaux. Par conséquent, cette écriture est équivalente à celle du modèle MSE (3.38).

3.8 Lissage des paramètres des modèles ADF/GHM

Dans cette section, on présente le lissage des paramètres des modèles ADF et GHM, à partir des courbes maîtresses du matériau viscoélastique. Ce lissage est réalisé à l'aide de la boîte à outils d'optimisation (Optimization Toolbox) de MATLAB®, plus particulièrement, la fonction *lsqnonlin*, qui utilise un algorithme non-linéaire (*Nonlinear Least Squares*). Deux fonctions ont été développées sous MATLAB pour calculer le module de cisaillement $G'(\omega)$ et le facteur de perte $\eta(\omega) = G''(\omega)/G'(\omega)$ d'un matériau

viscoélastique à partir d'une bande de fréquences donnée et d'un ensemble de paramètres. La fonction *nlsqadf* utilise la formule de Lesieutre (3.29) et la fonction *nlsqghm* utilise la formule de Golla-Hughes-McTavish (3.21). Ces fonctions sont appelées par la fonction *lsqnonlin*, qui optimise les paramètres GHM/ADF afin de minimiser l'écart entre les valeurs, calculées et mesurées, des parties réelles des modules de cisaillement et des facteurs de perte. La bande de fréquences utilisée pour le lissage doit être plus large que celle considérée dans l'analyse du système de manière à minimiser l'effet des erreurs aux bords de la bande.

Les paramètres du modèle GHM sont composés de n triplets ($\hat{\alpha}_i$, $\hat{\omega}_i$, $\hat{\zeta}_i$, $i = 1, \ldots, n$) et du module relaxé G_0. Le nombre de mini-oscillateurs n définit la dimension du système final, en même temps que la précision de l'ajustement. Généralement, une grande valeur de n conduit à un meilleur ajustement, mais aussi, à un système d'ordre plus grand. Pour le modèle ADF, en plus du module relaxé G_0, seuls n couples de paramètres (Δ_i, Ω_i, $i = 1, \ldots, n$) sont nécessaires. Dans ce cas, la valeur n a la même influence que pour le modèle GHM.

Le lissage des paramètres ADF/GHM a été réalisé pour les divers matériaux viscoélastiques utilisés dans ce travail. Leurs propriétés sont données dans l'annexe A. Cependant, dans cette section, nous nous limitons à un seul exemple afin de présenter l'effet du nombre de séries de paramètres sur le lissage. Ainsi, une à trois séries de paramètres sont considérées pour représenter les propriétés du matériau viscoélastique ISD112 à 27°C dans l'intervalle de fréquences [20–5000] Hz. Pour les deux modèles, la convergence est très bonne. Elle est un peu plus rapide pour l'ADF puisque seuls des couples de paramètres sont optimisés au lieu de triplets pour le GHM. Le Tableau 3.2 montre les paramètres ADF et GHM résultants de l'optimisation qui ajustent les données de l'ISD112 avec un, deux et trois ensembles de paramètres.

Tableau 3.2: Les paramètres optimaux des modèles ADF/GHM à la convergence pour le matériau ISD112 à 27°C.

modèle		ADF			GHM			
n	i	G_0 (MPa)	Δ_i	Ω_i (rad/s)	G_0 (MPa)	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\omega}_i$ (rad/s)	$\hat{\zeta}_i$
1	1	0,62	19,908	18 076,3	0,62	19,811	259 557	7,21
2	1	0,53	2,038	1396,8	0,53	2,037	84 503,6	30,26
	2		33,359	46 633,4		33,236	764 580	8,23
3	1	0,50	0,746	468,7	0,50	0,742	6 502,9	6,97
	2		3,265	4 742,4		3,237	50 618,8	5,38
	3		43,284	71 532,5		41,654	352 782	2,56

Les Figures 3.3 et 3.4 présentent l'ajustement du module et du facteur de perte avec un et trois termes ADF/GHM, respectivement. On note que les modèles à un seul terme dans les séries n'est pas suffisant pour bien estimer les caractéristiques d'amortissement du matériau, puisque cela conduit à un comportement viscoélastique peu réaliste (Figure 3.3). Néanmoins, des modèles à trois termes dans les séries ajustent de manière satisfaisante les courbes maîtresses du matériau. À la convergence, les modèles à trois termes représentent, dans la bande de fréquences d'intérêt, les courbes maîtresses avec une erreur maximale de $\pm 5\%$.

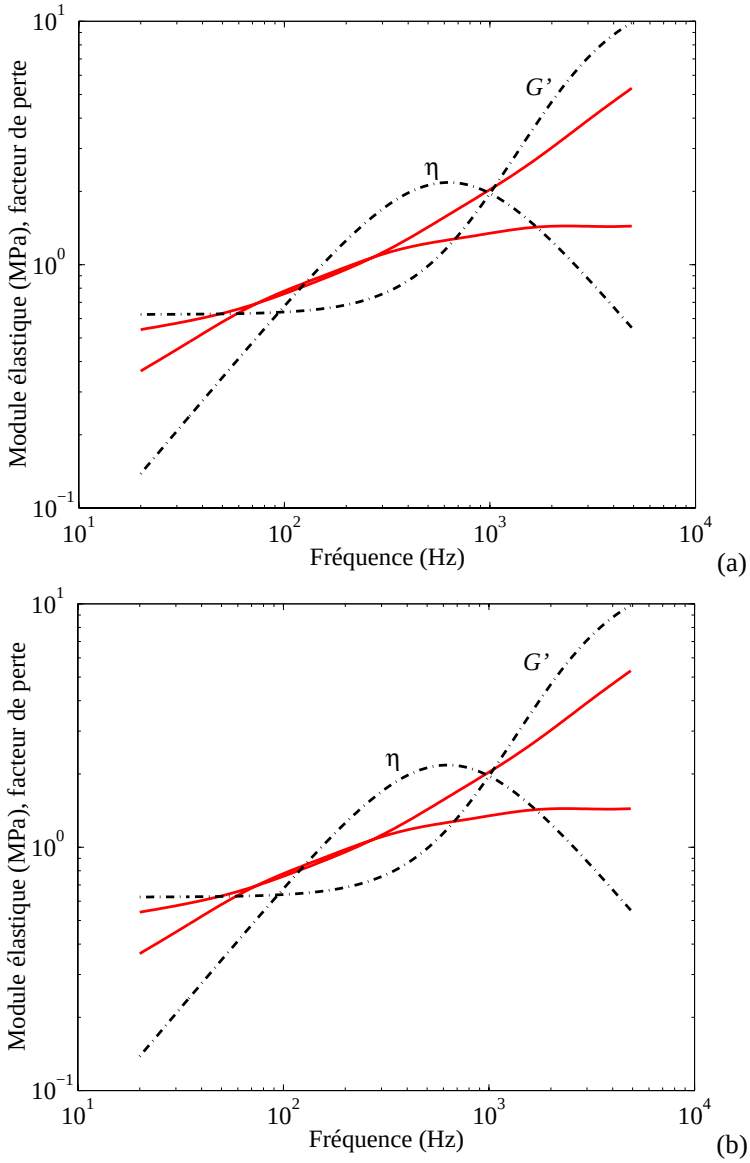


Figure 3.3: Lissage des courbes maîtresses de l'ISD112 avec une série de paramètres : a) ADF, b) GHM. Trait continu : données mesurées, trait discontinu : données estimées.

Par ailleurs, on observe que les modèles ADF et GHM, bien qu'ayant des paramètres différents, aboutissent à des courbes équivalentes pour les cas présentés. Cela peut être expliqué par l'analyse des fonctions $G(s)$ (3.21) et $G^*(\omega)$ (3.29) pour le matériau ISD112. En effet, puisque dans ce cas, $\hat{\zeta}_i > 1$ (Table 3.2), la fonction $G(s)$ du modèle GHM (3.21) peut être réécrite de la manière suivante,

$$G^*(\omega) = G_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \hat{\alpha}_i \frac{\omega(\omega + jz_i)}{(\omega + j\omega_{i1})(\omega + j\omega_{i2})} \right) \tag{3.49}$$

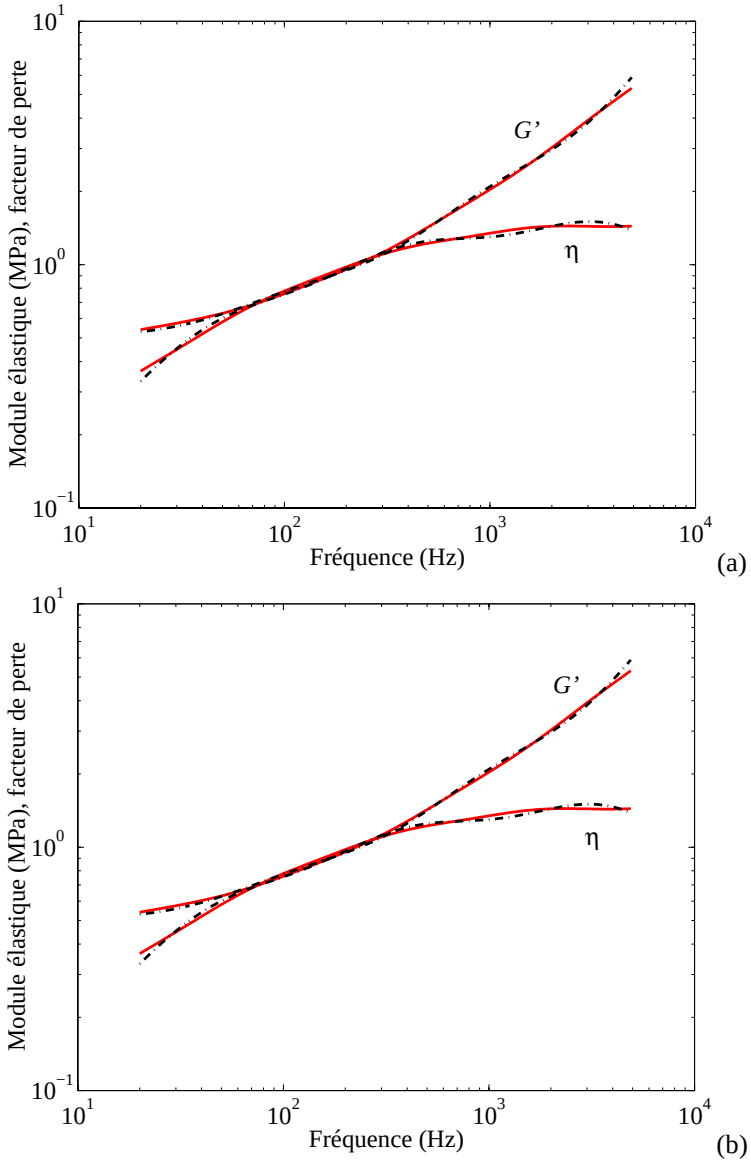


Figure 3.4: Lissage des courbes maîtresses de l'ISD112 avec trois séries de paramètres : a) ADF, b) GHM. Trait continu : données mesurées, trait discontinu : données estimées.

où

$$\omega_{i1}, \omega_{i2} = -\hat{\omega}_i \hat{\zeta}_i \pm \hat{\omega}_i \sqrt{\hat{\zeta}_i^2 - 1}$$

et $z_i = -2\hat{\omega}_i \hat{\zeta}_i$. Ainsi, chaque série de paramètres GHM présente deux zéros réels, dont un nul et l'autre égal à z_i, et deux pôles réels ω_{i1} et ω_{i2}. De même, la fonction $G^*(\omega)$ du modèle ADF (3.29) s'écrit

$$G^*(\omega) = G_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \frac{\omega}{\omega - j\Omega_i} \right) \tag{3.50}$$

Cette fonction (3.50) ne présente qu'un zéro nul et un pôle réel égal à $-\Omega_i$, puisque le pôle réel égal à Ω_i de (3.29) s'annule avec le zéro correspondant. D'après le calcul des pôles ω_{i1} et ω_{i2} et des zéros z_i du modèle GHM (Table 3.2), et, en comparant les équations (3.49) et (3.50), on observe que

$$\omega_{i1} \approx -\Omega_i \; ; \; z_i \approx \omega_{i2} \; ; \; \hat{\alpha}_i \approx \Delta_i \; ; \qquad \forall(n,i) \tag{3.51}$$

Par conséquent, le pôle ω_{i2} et le zéro z_i de GHM s'annulent presque, aboutissant à un pôle unique à ω_{i1} correspondant à $-\Omega_i$ du modèle ADF. On s'attend alors que les modèles ADF et GHM pourraient présenter les mêmes résultats, pour ce matériau. Il faut rappeler que cette équivalence ne s'obtient que pour les cas où $\hat{\zeta}_i > 1$, c'est-à-dire, pour des modes sur-amortis de relaxation du matériau viscoélastique.

Il est connu que les modèles ADF et GHM représentent bien, en général, des matériaux dont les propriétés varient assez fortement avec la fréquence. Par contre, pour le cas opposé, un nombre élevé de paramètres doit être utilisé. Dans ce cas, d'autres méthodes, comme celle des dérivées fractionnelles [6, 7] ou une combinaison de cette dernière avec l'ADF [28], s'imposent. D'autre part, pour des matériaux viscoélastiques dont les propriétés ne varient pas beaucoup avec la fréquence, il peut être moins coûteux de considérer des propriétés constantes par bande, voire constantes.

3.8.1 Propriétés asymptotiques du lissage

Il est intéressant de noter que les valeurs des paramètres trouvées (Tableau 3.2) ne sont valables que dans la bande de fréquences utilisée pour le lissage. Or, lors d'une excitation quelconque, des modes situés hors de cette bande peuvent être excités ce qui nécessite que le modèle utilisé ait un comportement asymptotiquement correct. C'est pourquoi, il est important de vérifier que les propriétés suivantes sont respectées [69] :

– La partie réelle du module de cisaillement doit tendre vers le module statique G_0 pour $\omega \to 0$ et vers le module non-relaxé G_∞ pour $\omega \to \infty$:

$$\lim_{\omega\to 0} G^*(\omega) = G_0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} G^*(\omega) = G_\infty = G_0\left(1+\sum_i \hat{\alpha}_i\right) \qquad \text{pour GHM}$$

$$\lim_{\omega\to\infty} G^*(\omega) = G_\infty = G_0\left(1+\sum_i \Delta_i\right) \qquad \text{pour ADF}$$

– La partie imaginaire du module de cisaillement doit tendre vers zéro[1] pour $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$:

[1] Cela est la conséquence immédiate du premier point, puisque G_0 et G_∞ sont des quantités réelles.

$$\lim_{\omega \to 0} G''(\omega) = 0 \text{ et } \lim_{\omega \to \infty} G''(\omega) = 0$$

Pour cela, il est important d'analyser le comportement des courbes maîtresses, représentées par les modèles ADF et GHM, en dehors de la bande utilisée pour le lissage (Figure 3.5). On observe que, pour ce cas effectivement, les courbes maîtresses estimées par les modèles ADF et GHM présentent de bonnes propriétés asymptotiques. Il faut noter que ce comportement est caractéristique des modèles dont les fonctions $G^*(\omega)$ sont sur-amorties et est étroitement lié aux paramètres des modèles. Pour le modèle GHM, par exemple, cette propriété est satisfaite lorsque $\hat{\zeta}_i > 1$.

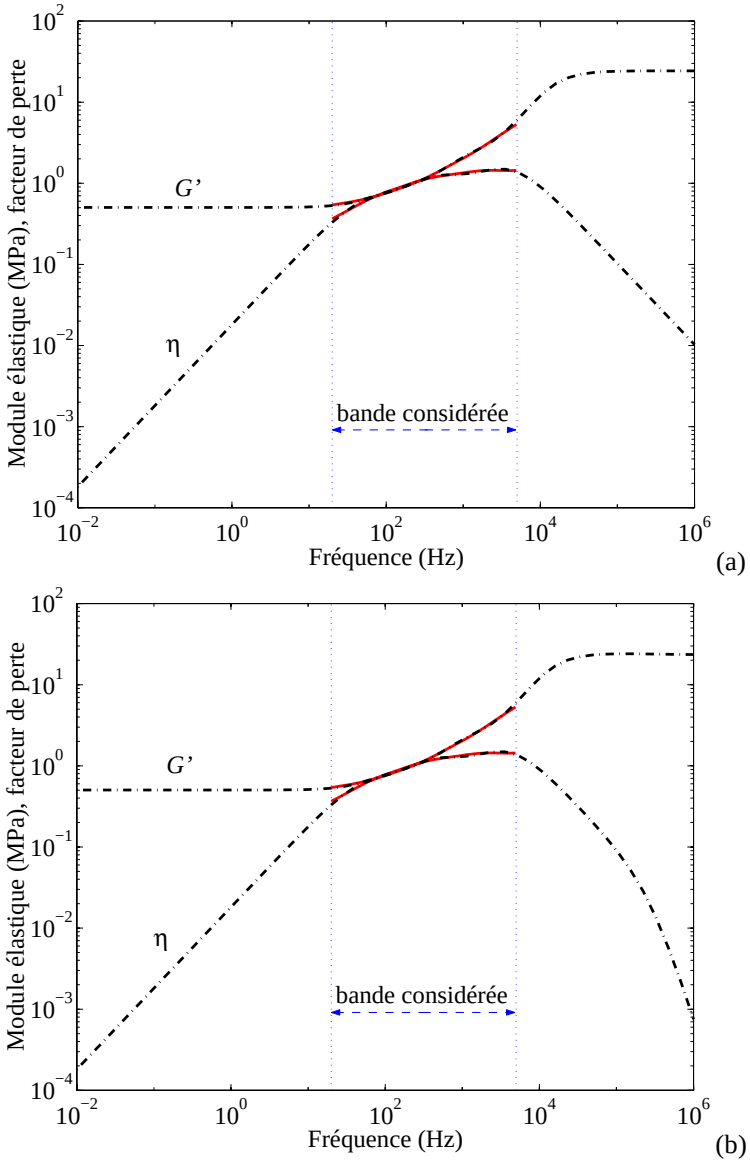


Figure 3.5: Lissage des propriétés de l'ISD112 en dehors de la bande utilisée. a) ADF, b) GHM. Trait continu : données mesurées, trait discontinu : données estimées.

La Figure 3.6, relative au matériau viscoélastique Dyad606 à 38°C, montre que certains groupes de paramètres résultants de l'optimisation peuvent conduire à des propriétés peu réalistes hors de la bande concernée par l'optimisation. Dans ce cas, les modèles ADF et GHM ont nécessité cinq groupes de paramètres pour représenter assez bien les propriétés de ce matériau avec une erreur maximale de 25% dans la bande de fréquences [2–6300] Hz. Pour le modèle GHM, l'optimisation est réalisée avec et sans contraintes. Dans le premier cas, les paramètres GHM peuvent prendre des valeurs arbitraires à l'issue de l'optimisation, aboutissant aux courbes GHMa de la Figure 3.6. Cependant, l'augmentation du facteur de perte à droite de la bande de fréquences considérée n'est pas réaliste et l'irregularité dans le module élastique ne l'est pas non plus. Cela est dû à quelques valeurs du paramètre $\hat{\zeta}_i$ qui sont en dessous des amortissements critiques ($\hat{\zeta} = [1,81;\ 1,56;\ 1,63;\ 0,95;\ 0,65.10^{-4}]$). Après l'ajout d'une limite inférieure pour ces paramètres ($\hat{\zeta}_i > 1$), une deuxième optimisation est réalisée, aboutissant aux courbes GHMb de la Figure 3.6. Dans ce cas, les nouveaux paramètres $\hat{\zeta} = [1,60;\ 1,41;\ 1,28;\ 1,16;\ 1,00]$ empêchent les irrégularités des courbes maîtresses estimées du matériau. Les paramètres du modèle GHM, optimisés avec et sans contrainte ($\hat{\zeta}_i > 1$), pour le matériau Dyad606 à 38°C, sont présentés dans le Tableau 3.3. Il est aussi intéressant de noter que ces courbes maîtresses sont assez plates, comparées à celles de l'ISD112 à 27°C du cas précédent. C'est pourquoi autant de paramètres (cinq séries) ont été nécessaires pour représenter les propriétés du matériau.

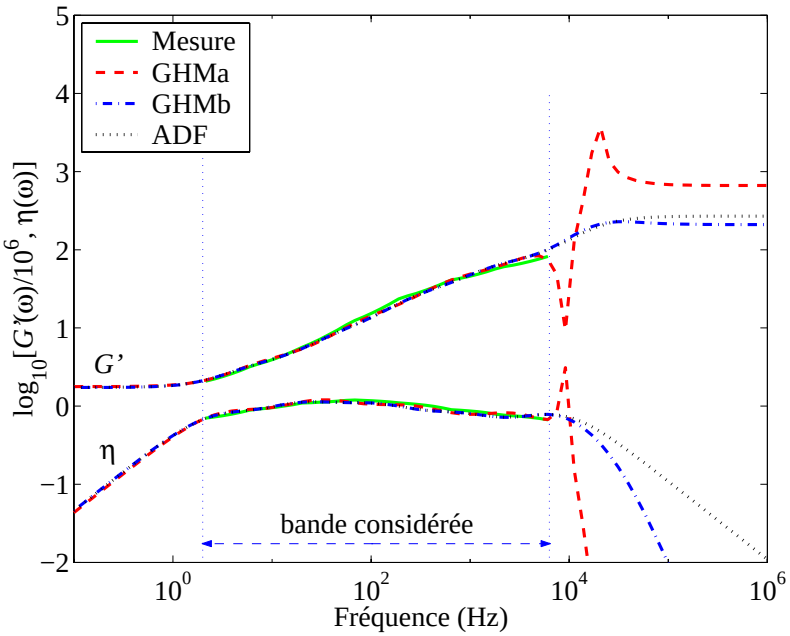


Figure 3.6: Lissage des propriétés du Dyad606 à 38°C en dehors de la bande utilisée.

Les paramètres des modèles ADF et GHM pour les matériaux ISD112 à 27°C et Dyad606 à 10, 25, 30 et 38°C sont présentés dans l'annexe A. Il est claire qu'il est toujours possible d'améliorer les paramètres ADF/GHM, à travers une optimisation avec contrainte, néanmoins le modèle à paramètres contraints peut aussi représenter moins bien les propriétés de certains matériaux dans la bande de fréquences d'intérêt.

Tableau 3.3: Les paramètres optimaux du modèle GHM à la convergence pour le matériau Dyad606 à 38°C.

modèle	GHM illimité (GHMa)				GHM limité (GHMb)			
i	G_0 (MPa)	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\omega}_i$ (rad/s)	$\hat{\zeta}_i$	G_0 (MPa)	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\omega}_i$ (rad/s)	$\hat{\zeta}_i$
1	1,78	1,30	110,69	1,81	1,73	1,01	76,36	1,60
2		5,51	1014,12	1,56		3,15	521,97	1,41
3		18,51	8216,87	1,63		10,03	2734,49	1,28
4		50,34	40489,05	0,95		20,41	14137,25	1,16
5		296,56	120121,23	0,00		85,77	123345,6	1,00

3.9 Validation des modèles viscoélastiques

Dans les prochaines sous-sections, les modèles viscoélastiques présentés dans ce chapitre sont validés à travers une comparaison des résultats de l'analyse modale d'une poutre sandwich, pour le modèle ADF, avec ceux expérimentaux trouvés dans la littérature et, puis, à travers une comparaison des modèles MSE et ADF/GHM réduits et complets.

3.9.1 Validation expérimentale par l'analyse modale d'une poutre sandwich

Une des applications majeures du contrôle hybride actif-passif consiste à traiter des structures sandwich élastique/viscoélastique/élastique avec des actionneurs piézoélectriques collés sur leurs surfaces, les peaux élastiques pouvant être composées de matériaux composites stratifiés avec, dans ce cas, des pastilles piézoélectriques insérées dans le composite.

Dans cette section, les résultats analytiques et expérimentaux de l'analyse modale d'une poutre sandwich avec des pastilles piézoélectriques collées sur ses surfaces inférieure et supérieure, présentés par Wang et Wereley [91], sont utilisés pour valider le modèle en présence d'un cœur relativement souple. La poutre étudiée dans [91], dont les propriétés géométriques sont présentées dans la Figure 3.7, est composée d'une couche de matériau viscoélastique ISD112 en sandwich entre deux peaux d'aluminium qui, par ailleurs, ont des pastilles piézoélectriques collées sur leurs surfaces extérieures. Les propriétés des matériaux, adaptées de [91], sont présentées dans le Tableau 3.4. Les matériau ISD112 est représenté par le modèle ADF avec trois paramètres (Tableau 3.2).

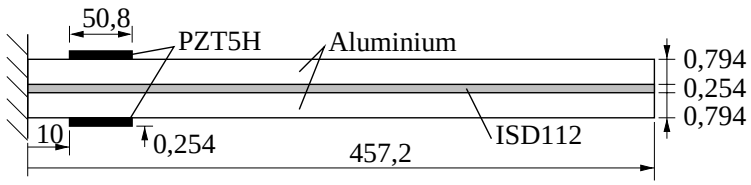


Figure 3.7: Poutre sandwich encastrée-libre avec des pastilles piézoélectriques (dimensions en mm et pas à l'échelle).

Tableau 3.4: Propriétés des matériaux de la poutre à cinq couches.

	Aluminium	PZT5H	ISD112
Constante élastique (GPa), c_{11}^*	75,8	68,1	Fig.3.4
Masse volumique (kg m^{-3}), ρ	2800	7500	1600
Constante piézoélectrique (C m^{-2}), e_{31}^*	–	-23,2	–
Constante diélectrique (F m^{-1}), ϵ_{33}^*	–	1,54 10^{-8}	–

Les trois premiers modes de flexion, présentés dans la Figure 3.8, ainsi que les fréquences propres correspondantes, sont calculés pour trois épaisseurs de la couche viscoélastique (0,254/0,127/0,051 mm). Les résultats sont ensuite comparés à ceux, analytiques et expérimentaux, présentés dans [91]. Les premiers ont été trouvés en utilisant la méthode des ondes progressives (Progressive Wave Method, PWM) et tient compte, donc, de la dépendance en fréquence des propriétés du matériau viscoélastique. Le Tableau 3.5 montre que les résultats obtenus par le présent modèle concordent bien avec ceux de [91]. Néanmoins, on observe un écart significatif de 21,20%, par rapport au résultat expérimental, de la troisième fréquence propre de la poutre avec le cœur le plus mince, tandis que toutes les autres fréquences pour ce même cas coïncident. Il n'en est pas moins que le résultat numérique PWM présente presque le même écart pour cette fréquence. Cela suggère que la valeur expérimentale de référence n'aurait pas été bien mésurée.

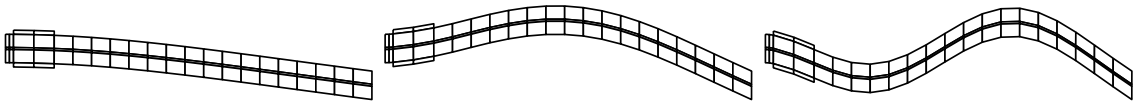


Figure 3.8: Les trois premiers modes de flexion de la poutre à cinq couches.

Tableau 3.5: Les trois premières fréquences propres de flexion de la poutre encastrée-libre à cinq couches.

	Expérimental [91]	PWM [91]		FEM (présent)	
Mode	Fréq. (Hz)	Fréq. (Hz)	Erreur (%, ref.Exp.)	Fréq. (Hz)	Erreur (%, ref.Exp.)
Cœur viscoélastique à 0,051 mm					
1	6,64	6,37	-4,07	6,90	3,92
2	36,21	37,88	4,61	39,27	8,45
3	85,23	102,33	20,06	103,30	21,20
Cœur viscoélastique à 0,127 mm					
1	6,84	6,69	-2,19	7,05	3,07
2	35,62	37,40	5,00	36,62	2,81
3	92,42	96,13	4,01	92,25	-0,00
Cœur viscoélastique à 0,254 mm					
1	7,22	7,00	-3,05	7,30	1,11
2	36,79	36,76	-0,00	34,62	-5,90
3	89,50	89,60	0,11	84,66	-5,41

3.9.2 Validation des modèles réduits

Afin de valider la réduction modale des modèles viscoélastiques, en utilisant le modèle PSAP, une poutre en aluminium encastrée-libre, revêtue avec des traitements viscoélastiques contraints, est analysée. Le revêtement considéré consiste en une couche de matériau viscoélastique ISD112 entièrement couverte par une fine couche externe en Aluminium. Les propriétés géométriques de la poutre traitée sont : $h_b = 5$ mm, $h_v = 0,5$ mm, $h_c = 1$ mm, $L = 200$ mm, $a = 190$ mm et $p = 10$ mm (Figure 3.9). Les propriétés des matériaux utilisés sont présentées dans l'annexe A. Pour faire varier l'amortissement de la poutre, tout en gardant le même matériau viscoélastique, on fait varier les longueur et épaisseur du traitement dans les intervalles [30–190] mm et [0,01–1] mm, respectivement.

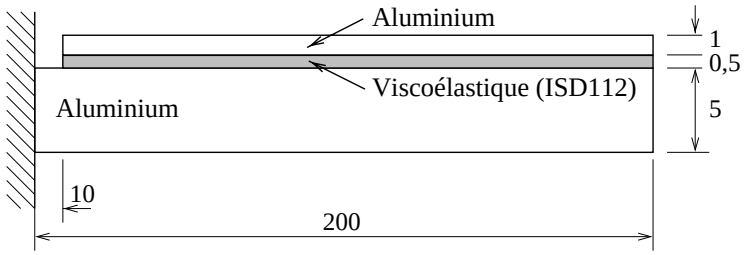


Figure 3.9: Propriétés géométriques de la poutre encastrée-libre traitée par un revêtement viscoélastique contraint (dimensions en mm et pas à l'échelle).

Tableau 3.6: Fréquences propres (Hz) et amortissements modaux (%), calculés en utilisant les modèles ADF, GHM et MSE.

		Mode #1	Mode #2	Mode #3	Mode #4
$h_v = 0,01$ mm	ADF	144,9 (1,71)	884,1 (4,89)	2444,7 (6,59)	4748,1 (7,26)
	GHM	144,9 (1,71)	884,1 (4,89)	2444,7 (6,59)	4748,1 (7,26)
	MSE	143,2 (2,68)	843,5 (9,14)	2298,9 (11,79)	4403,7 (14,04)
$h_v = 1$ mm	ADF	102,7 (5,17)	612,0 (3,48)	1684,4 (2,26)	3280,2 (1,77)
	GHM	102,7 (5,17)	612,0 (3,48)	1684,4 (2,26)	3280,2 (1,77)
	MSE	102,2 (5,19)	609,7 (3,44)	1682,5 (2,30)	3278,3 (1,71)

Le Tableau 3.6 présente, pour des couches viscoélastiques mince et relativement épaisse, les quatre premières fréquences propres (en Hz) et leurs amortissements correspondants (en %) calculés en utilisant les modèles ADF, GHM et MSE. Les résultats montrent que les modèles ADF et GHM aboutissent aux mêmes valeurs pour les deux cas. Cependant, les résultats utilisant le modèle MSE ne concordent avec ceux des modèles ADF et GHM que pour le cas d'une couche viscoélastique relativement épaisse. Or, le modèle MSE devrait pouvoir représenter l'influence de l'épaisseur de la couche viscoélastique sur l'amortissement de la poutre sandwich. En effet, on peut observer dans le Tableau 3.6 que les valeurs d'amortissement pour le premier cas sont beaucoup plus élevées pour tous sauf le premier mode. On peut donc en conclure que le modèle MSE n'est pas capable de bien représenter l'amortissement viscoélastique, même des modes

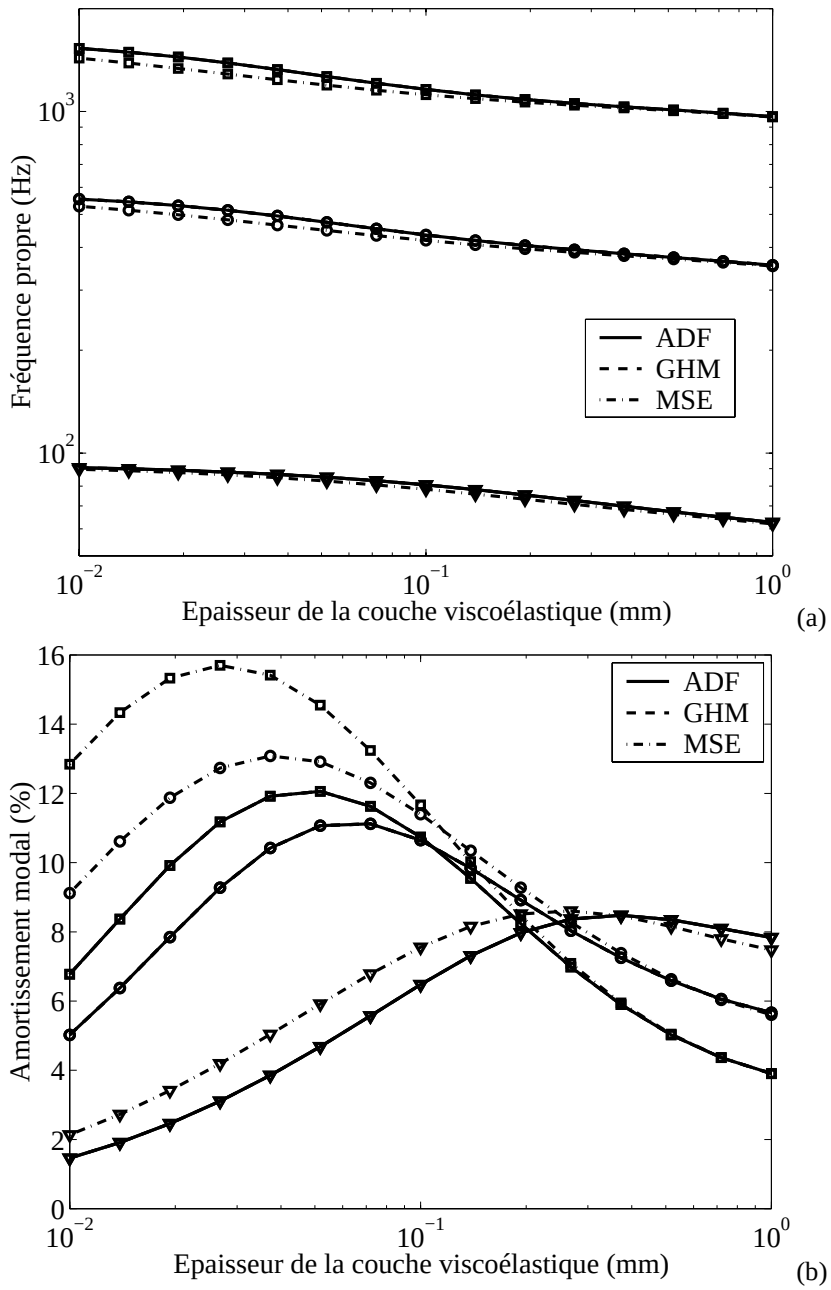


Figure 3.10: Variation des trois premières fréquences propres (a) et amortissement modaux (b) avec l'épaisseur de la couche viscoélastique pour les modèles ADF, GHM et MSE. $\triangledown$: premier mode, $\circ$: deuxième mode, $\square$: troisième mode. ($a = 190$ mm)

peu amortis, si quelques modes considérés dans le modèle sont trop amortis. Pour mieux comprendre, on montre, dans la Figure 3.10, la variation des fréquences propres, et amortissements correspondants, des trois premiers modes calculés avec les modèles ADF, GHM et MSE. On voit que, au fur et à mesure que tous les amortissements diminuent au dessous d'un amortissement modal limite (à peu près 6%), les résultats du modèle MSE s'approchent de ceux des modèles ADF et GHM.

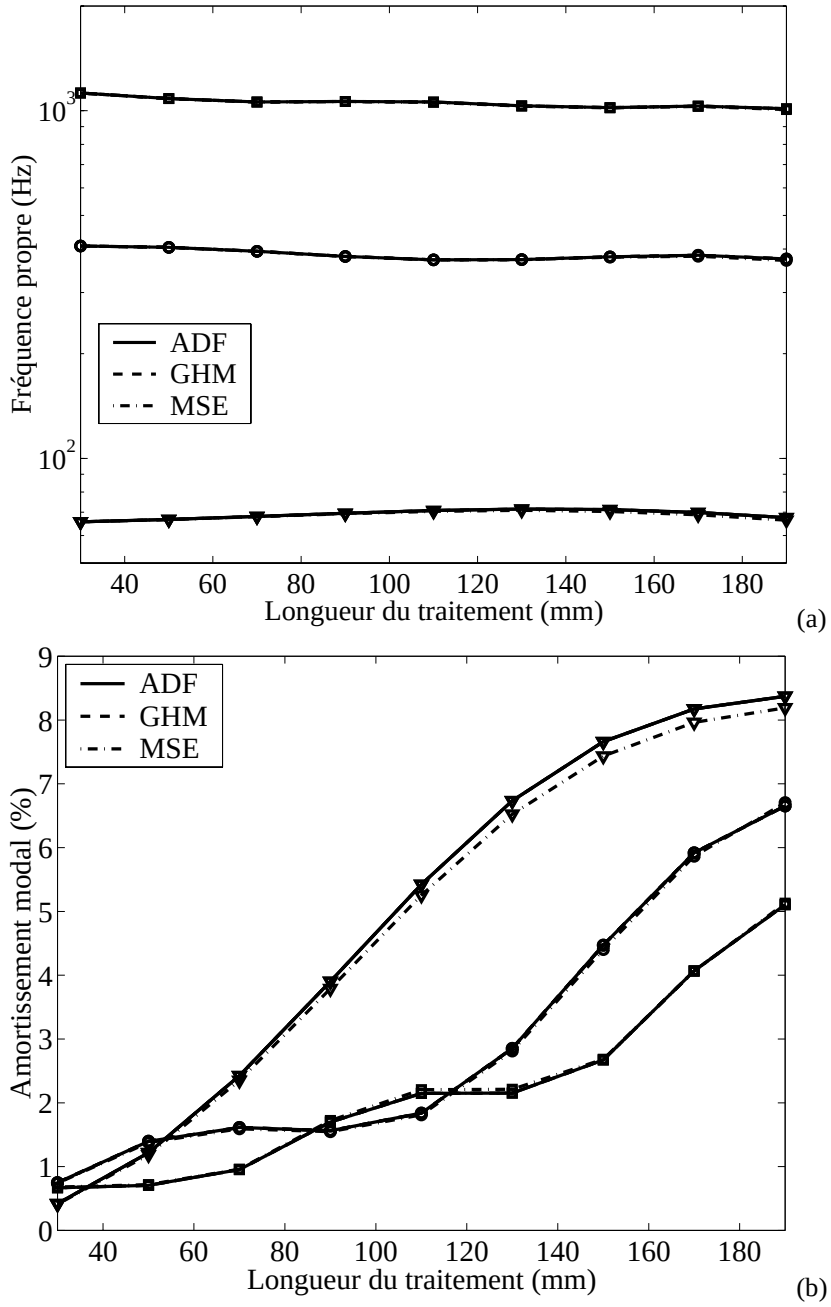


Figure 3.11: Variation des trois premières fréquences propres (a) et amortissement modaux (b) avec la longueur du traitement pour les modèles ADF, GHM et MSE. $\triangledown$: premier mode, $\circ$: deuxième mode, $\square$: troisième mode. ($h_v = 0,5$ mm)

Dans une deuxième analyse, on présente, dans la Figure 3.11, la variation des trois premières fréquences propres, et amortissements modaux correspondants, de la poutre sandwich avec la longueur du traitement viscoélastique contraint, pour une épaisseur de la couche viscoélastique de 0,5 mm. Dans ce cas, où l'amortissement modal maximum des deuxième et troisième modes est de l'ordre de 6%, on voit que le modèle MSE représente assez bien l'amortissement viscoélastique. Pour des traitements longs, l'amortissement

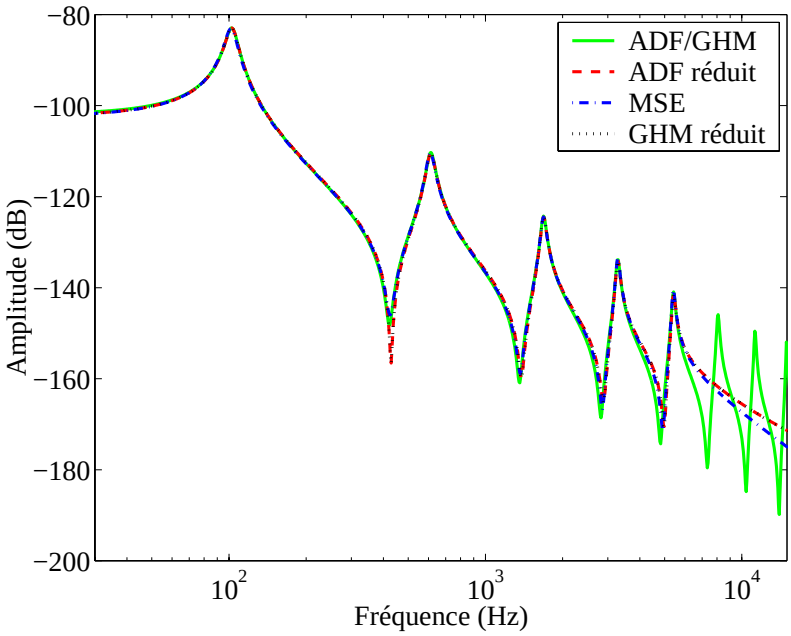


Figure 3.12: FRF de la poutre utilisant les modèles MSE et ADF/GHM réduit et complet.

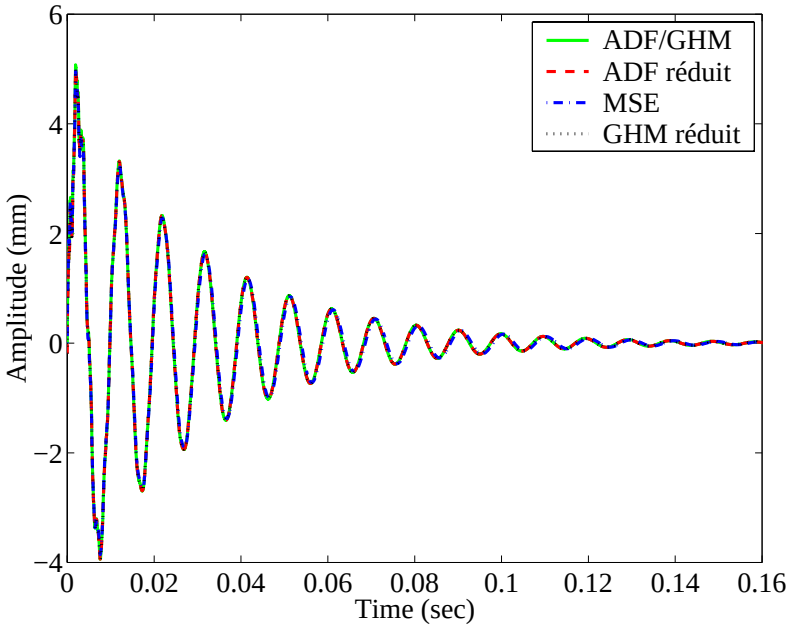


Figure 3.13: Réponse transitoire utilisant les modèles MSE et ADF/GHM réduit et complet.

du premier mode (autour de 8%) est sous-estimé.

En plus du calcul des fréquences propres et amortissements, on peut aussi analyser les réponses impulsionnelles, dans les domaines fréquentiel et temporel, de la poutre traitée (Figure 3.9). Même si les réponses harmonique et transitoire du système représenté par le modèle MSE doivent être, en principe, calculées pour chaque fréquence d'ex-

citation, on considère l'approximation fournie par le système (3.38). Les réponses en fréquence des systèmes sont présentées dans la Figure 3.12. On observe que les trois modèles, réduits aux cinq premiers modes de vibration, représentent assez bien le comportement vibratoire du système. Les réponses des modèles ADF et GHM réduits sont presque confondues. D'autre part, les réponses impulsionnelles dans le domaine temporel ont aussi été calculées et sont présentées dans la Figure 3.13. On y observe, également, que les réponses des trois modèles coïncident assez bien avec la réponse des modèles ADF/GHM complets, bien que la réponse du modèle MSE est un peu en retard.

3.10 Conclusion

Afin de prendre en compte des cœurs viscoélastiques, des méthodes ont été proposées pour la représentation de la dépendance en fréquence des propriétés de tels matériaux. Dans un premier temps, une version itérative de la méthode des énergies modales a été retenue. L'algorithme développé a fourni de bons résultats pour la représentation des comportements vibratoires de poutres sandwich à cœur viscoélastique, permettant des analyses en fréquence et en temps. Cependant, les résultats ont montré que les faibles amortissements modaux sont contaminés par ceux qui sont élevés. L'utilisation de cette méthode devrait donc être limitée aux structures peu amorties. Dans un deuxième temps, deux méthodes temporelles, à savoir *Golla-Hughes-McTavish* (GHM) et *Anelastic Displacement Fields* (ADF), ont été présentées afin de représenter des structures très amorties. Ces méthodes sont basées sur l'ajout de variables internes supplémentaires pour décrire le processus de relaxation du matériau viscoélastique. Il a été montré que la qualité de la représentation des propriétés vibratoires de structures à composantes viscoélastiques, fournie par les modèles ADF et GHM, est fortement dépendante de la qualité du lissage des courbes maîtresses du matériau par ces modèles. Par exemple, le matériau ISD112 à 27^{o}C a été très bien modélisé avec seulement trois séries de paramètres ADF/GHM, alors qu'il a fallu plus de cinq séries pour le matériau Dyad606 à 10^{o}C.

L'écriture des systèmes du second ordre sous forme d'équations d'état a fait apparaître que les modèles ADF et GHM aboutissent à des systèmes couplés dont la dimension est beaucoup plus élevée que celle du système initial. Par conséquent, il a été nécessaire de réduire les modèles d'état afin de les utiliser pour la conception du contrôle actif optimal. Pour ce faire, comme les matrices du système d'état sont complexes, il a été nécessaire de calculer leurs modes propres à gauche et à droite, ce qui a aboutit à deux calculs de valeurs propres pour chaque modèle. Pour les cas étudiés dans ce travail, le coût de ces calculs a été moins élevé pour le modèle ADF, puisqu'il aboutit à un nombre moins élevé de variables d'état, par rapport au modèle GHM, grâce à l'absence des dérivées des variables internes dans ce modèle. Une réduction des modèles par troncature modale a été proposée. Pour cela, les modes de relaxation du matériau viscoélastique, correspondant aux variables internes, ont été éliminés en analysant leurs amortissements (en général, sur-amortis) et quelques premiers modes élastiques sont retenus. Le choix des modes retenus a été plus difficile dans certains cas pour deux raisons : 1) pour des structures très amorties, certains modes élastiques sont sur-amortis. Ils peuvent donc être éliminés avec les modes de relaxation et, 2) pour certains paramètres des modèles ADF et GHM, quelques

modes de relaxation, n'étant pas sur-amortis, sont confondus avec les modes élastiques. Par conséquent, l'analyse des valeurs propres a dû, en général, être accompagnée d'une analyse des modes propres correspondants.

Puisque l'application finale des modèles d'état réduits est la conception et l'analyse du contrôle actif optimal, une transformation spatiale a dû être réalisée afin de représenter les systèmes complexes par des équations d'état réelles. Cette transformation, réalisée pour les modèles ADF et GHM, a aboutit à des systèmes similaires à ceux obtenus avec le modèle MSE, dont les variables d'état représentent les déplacements et vitesses modaux. La comparaison des réponses vibratoires d'une poutre, dans les domaines fréquentiel et temporel, utilisant les modèles ADF, GHM et MSE, a montré que les trois modèles présentent des résultats similaires bien que, pour des structures très amorties, le modèle MSE n'aboutit pas aux mêmes réponses que les modèles ADF et GHM. En utilisant le modèle ADF réduit, l'analyse modale d'une poutre sandwich à cœur viscoélastique a montré que les présents résultats concordent bien avec ceux expérimentaux trouvés dans la littérature.

Chapitre 4

Contrôle actif de vibrations

4.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de présenter brièvement la théorie de contrôle optimal et de l'appliquer au problème de contrôle optimal à entrées bornées. En effet, dans le cas spécifique du contrôle de vibrations par des actionneurs piézoélectriques, il est nécessaire de tenir compte de champs électriques maximaux supportables par de tels actionneurs. Ainsi, un algorithme itératif, très simple à utiliser et de convergence très rapide, a été développé pour calculer un gain de contrôle optimal en tenant compte des limitations de la tension d'action. Ensuite, un observateur d'état optimal est proposé afin d'estimer les variables d'état non mesurables. Les concepts de controlabilité et d'observabilité sont aussi étudiés.

Les systèmes de contrôle sont appliqués à l'étude du contrôle actif de poutres sandwich déjà amorties par leur cœur viscoélastique, à travers deux pastilles collées symétriquement sur ses surfaces supérieure et inférieure. Pour cela, les éléments finis PMAP et PMEP, dont les peaux peuvent être composées de plusieurs couches (cf. §2.5.4), associés au modèle viscoélastique ADF (cf. §3.5) et à la réduction modale proposée dans la section §3.7, sont utilisés.

4.2 Contrôle optimal quadratique

4.2.1 Théorie de contrôle optimal

Considérons un système continu défini par l'équation suivante

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{4.1}$$

avec $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n$, le vecteur de variables d'état, et $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^m$, le vecteur de contrôle. Le problème général d'optimisation consiste à trouver un contrôle $\mathbf{u}(t)$ qui minimise une fonction coût de la forme

$$J(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, \mathrm{d}t \tag{4.2}$$

soumise à l'équation de contrainte (4.1). En utilisant des multiplicateurs de Lagrange, on peut définir une fonction coût augmentée J^* sous la forme suivante

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \mathbf{r}^T \left[\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) - \dot{\mathbf{x}} \right] \right\} \mathrm{d}t \tag{4.3}$$

D'après la théorie de Lagrange, le minimum de la fonction J (4.2) soumise à la contrainte (4.1) est atteint au minimum de la fonction sans contraintes J^* [59]. Pour des raisons de convenance, définissons l'Hamiltonien $H(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{r},t)$ par

$$H(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{r},t) = L(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \mathbf{r}^T \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \tag{4.4}$$

Par conséquent, la fonction J^* peut être exprimée en termes de l'Hamiltonien par

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} \left[H(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{r},t) - \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{x}} \right] \mathrm{d}t$$

Le minimum de J^* est atteint pour $\mathrm{d}J^* = 0$, étant donné que $\mathrm{d}^2 J^*$ est positive. Utilisant le principe de Leibniz [59], la dérivée de J^* s'écrit

$$\mathrm{d}J^* = \left[(H - \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{x}}) \delta t \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}^T \delta\mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}^T \delta\mathbf{u} - \mathbf{r}^T \delta\dot{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} - \dot{\mathbf{x}} \right)^T \delta\mathbf{r} \right] \mathrm{d}t$$

En intégrant par parties pour éliminer le terme en $\delta\dot{\mathbf{x}}$, on obtient

$$\mathrm{d}J^* = \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{x}} \right) \delta t - \mathbf{r}^T \delta\mathbf{x} \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{r}} \right)^T \delta\mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}^T \delta\mathbf{u} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} - \dot{\mathbf{x}} \right)^T \delta\mathbf{r} \right] \mathrm{d}t \tag{4.5}$$

Étant donné qu'on peut choisir un $\mathbf{r}(t)$ de façon à ce que les variations $\delta\mathbf{r}$, $\delta\mathbf{x}$ et $\delta\mathbf{u}$ soient indépendantes, le système d'équations suivant, correspondant aux coefficients de ces variables, doit être respecté

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \tag{4.6a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \tag{4.6b}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \dot{\mathbf{x}} \tag{4.6c}$$

où l'équation (4.6c) n'est autre que l'équation d'état (4.1). Les deux premières équations du système sont dénommées *équation d'état complémentaire* (4.6a) et *condition de stationnarité* (4.6b), respectivement [59].

Dans la section suivante cette théorie générale est appliquée au cas pratique du contrôle optimal quadratique des vibrations des structures.

4.2.2 Régulateur linéaire quadratique (LQR)

Considérons le système sous forme d'équation d'état (3.48), stationnaire et invariant dans le temps. À partir d'une entrée $\mathbf{u}$ et de perturbations $\hat{\mathbf{p}}$, ce système fournit $\mathbf{y}$ à la sortie (Figure 4.1). Le vecteur $\mathbf{y}$, dénommé la sortie d'état, est fonction de l'état réduit $\hat{\mathbf{x}}$, à travers la matrice de sortie d'état $\hat{\mathbf{C}}$. La dynamique de l'état $\hat{\mathbf{x}}$ est donné par les matrices du système $\hat{\mathbf{A}}$ et d'entrée $\hat{\mathbf{B}}$.

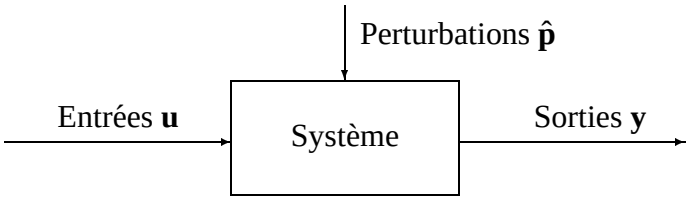


Figure 4.1: Représentation des entrées et sorties du système.

Supposons un contrôle optimal quadratique, c'est à dire, dont la fonction coût J est quadratique sous la forme suivante

$$J(t_0) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left(\hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right)\, \mathrm{d}t \tag{4.7}$$

Le terme $(1/2)\hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}$ peut être interprété comme une mesure de l'énergie du système et le terme $(1/2)\mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}$, de l'énergie de contrôle. $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ sont des matrices symétriques et, positive semi-définie et positive définie, respectivement. Elles sont choisies selon l'énergie qu'on veut minimiser. $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ peuvent être aussi interprétées comme accélérateurs de convergence de la solution $\hat{\mathbf{x}} \to 0$ et $\mathbf{u} \to 0$, respectivement.

En utilisant la méthodologie de contrôle optimal présentée précédemment et en supposant $\hat{\mathbf{p}} = 0$, l'Hamiltonien du système s'écrit

$$H = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right) + \mathbf{r}^T(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}) \tag{4.8}$$

Ainsi, l'équation d'état complémentaire, la condition de stationnarité et l'équation d'état, aussi dénommées équations d'Euler, s'écrivent

$$\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{A}}^T\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \tag{4.9a}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{r} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{r} \tag{4.9b}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} \tag{4.9c}$$

Si l'on considère un contrôle proportionnel à l'état $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_g^*\hat{\mathbf{x}}$, le multiplicateur de Lagrange $\mathbf{r}$ doit être aussi proportionnel à l'état $\mathbf{r} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}$. Remplaçant l'expression de $\mathbf{u}$ (4.9b) dans l'équation d'état (4.9c), pré-multipliant cette dernière par $\mathbf{P}$ et considérant l'expression de $\mathbf{r}$, les équations d'Euler (4.9) deviennent

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= -\dot{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{A}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{P}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{P}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{P}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

Pour que ces deux équations soient vérifiées pour tout $\hat{\mathbf{x}}$, il faut que l'équation suivante, dénommée équation de Riccati, soit vérifiée

$$\boxed{-\dot{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{A}}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{P}} \tag{4.10}$$

Pour un système en boucle ouverte, avec un contrôle $\mathbf{u}$ nul, l'équation (4.10) devient l'équation de Lyapunov,

$$\boxed{-\dot{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{A}}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{Q}} \tag{4.11}$$

On montre que, si la solution est asymptotiquement stable, la fonction coût (4.7) minimisée n'est fonction que de la matrice $\mathbf{P}(t_0)$ et des conditions initiales, puisque

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}})\,\mathrm{d}t &= \int_{t_0}^{t_1} \dot{\hat{\mathbf{x}}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^T\dot{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}\dot{\hat{\mathbf{x}}}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(4.9c)}{=} \int_{t_0}^{t_1} (\hat{\mathbf{x}}^T\hat{\mathbf{A}}^T + \mathbf{u}^T\hat{\mathbf{B}}^T)\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^T\dot{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{P}(\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u})\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(4.9b)}{=} \int_{t_0}^{t_1} \hat{\mathbf{x}}^T(\dot{\mathbf{P}} + \hat{\mathbf{A}}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{P}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{P})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(4.10)}{=} \int_{t_0}^{t_1} -\hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

donc,

$$\frac{1}{2}\hat{\mathbf{x}}^T(t_1)\mathbf{P}(t_1)\hat{\mathbf{x}}(t_1) - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{x}}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0)\hat{\mathbf{x}}(t_0) = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (\hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})\,\mathrm{d}t \tag{4.12}$$

et, pour que la solution soit asymptotiquement stable, $\lim_{t_1\to\infty}\hat{\mathbf{x}}(t_1) = \mathbf{0}$. Par conséquent,

$$J(t_0) = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{x}}^T(t_0)\mathbf{P}(t_0)\hat{\mathbf{x}}(t_0) \tag{4.13}$$

ce qui permet d'évaluer le coût résultant $J(t_0)$, à partir des conditions initiales, avant de calculer la réponse du système. Ayant calculé la solution de l'équation de Riccati (4.10), on définit le gain de contrôle de Kalman $\mathbf{K}_g^*$ par

$$\mathbf{K}_g^*(t) = \mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{P}(t) \tag{4.14}$$

Remarque 4.1 *Il est clair que* $\mathbf{K}_g^*$ *est fonction du temps même pour un système invariant dans le temps ; donc toute la séquence* $\mathbf{K}_g^*(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, *doit être connue pour calculer le contrôle* $\mathbf{u}$. *Néanmoins, cette séquence peut être calculée avant de l'appliquer au système, puisque son calcul ne dépend pas de l'état* $\mathbf{x}$.

Pour éviter d'avoir à calculer toute la séquence des gains de contrôle $\mathbf{K}_g^*$, *on peut utiliser sa valeur stationnaire* $\mathbf{K}_g$, *calculée par*

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{P}^\infty \tag{4.15}$$

où $\mathbf{P}^\infty$ *est la valeur d'équilibre* $\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(t)$. *Si l'on remplace ce gain, qui n'est pas nécessairement optimal, dans le système (3.48), le coût résultant dans l'intervalle de temps* $[t_0, t_1]$ *est*

$$\bar{J}(t_0) = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{x}}^T(t_0)\bar{\mathbf{P}}(t_0)\hat{\mathbf{x}}(t_0) \tag{4.16}$$

où $\bar{\mathbf{P}}(t)$ *est la solution de*

$$-\dot{\bar{\mathbf{P}}} = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{K}_g)^T\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}}(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{K}_g) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}_g^T\mathbf{R}\mathbf{K}_g \tag{4.17}$$

Cette équation n'est rien d'autre que l'équation de Lyapunov du système en boucle fermée $\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{K}_g$, *puisque* $\mathbf{K}_g$ *est connu. On montre que le coût* $\bar{J}(t)$ *correspondant au gain de contrôle* $\mathbf{K}_g$ *est toujours supérieur ou égal à celui correspondant au gain de contrôle optimal* $\mathbf{K}_g^*(t)$. *Néanmoins, les valeurs au limite* $\bar{\mathbf{P}}(\infty)$ *et* $\mathbf{P}^\infty = \mathbf{P}(\infty)$ *sont égales et, donc, le coût* J_∞ *pour l'intervalle* $[0, \infty]$ *est le même. Cela signifie que plus l'intervalle considéré devient grand, plus il semble plus raisonnable d'utiliser un gain de contrôle constant. Le coût* J_∞ *est*

$$J_\infty = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{x}}^T(0)\mathbf{P}^\infty\hat{\mathbf{x}}(0) \tag{4.18}$$

Comme la matrice $\mathbf{P}^\infty$ *est constante, d'après (4.10), elle est aussi solution de l'équation algébrique de Riccati suivante*

$$\boxed{\hat{\mathbf{A}}^T\mathbf{P}^\infty + \mathbf{P}^\infty\hat{\mathbf{A}} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}^\infty\hat{\mathbf{B}}\mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{P}^\infty = \mathbf{0}} \tag{4.19}$$

Cette loi de contrôle sous-optimale à gain constant est ainsi adoptée pour ce qui suit.

La méthodologie de conception d'un contrôle optimal quadratique, présentée précédemment, peut être résumée par les étapes suivantes :

1. Définition des matrices de pondération $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ pour atteindre la performance désirée avec l'effort de contrôle disponible ;
2. Calcul de la matrice $\mathbf{P}^\infty$ solution de l'équation algébrique de Riccati (4.19), à partir des matrices du système $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{B}}$, et de pondération $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$;
3. Calcul de la matrice de gain (constante) $\mathbf{K}_g$ à partir de $\mathbf{P}^\infty$ (4.15).

Si l'on revient à l'équation (3.48), avec $\mathbf{u}$ vérifiant $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_g\hat{\mathbf{x}}$, on a le système contrôlé suivant

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{K}_g)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{p}} \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}} \tag{4.20}$$

On peut donc dire que la matrice $\mathbf{K}_g$ contrôle le système à travers la modification de la matrice $\hat{\mathbf{A}}$, qui devient $\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{K}_g$. Ainsi, la loi de contrôle peut stabiliser quelques modes propres du système en augmentant leurs amortissements ; c'est à dire, des modes de $\hat{\mathbf{A}}$ peuvent devenir des modes plus amortis de $\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{K}_g$.

4.2.3 Choix de la matrice de pondération d'état

L'objectif du contrôle optimal étant de minimiser l'énergie vibratoire du système, représentée par le terme $(1/2)\hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}$, dont la performance sera très dépendante de la matrice $\mathbf{Q}$. Par conséquent, le choix de cette matrice détermine la performance de l'amortissement des vibrations du système, ainsi que l'évolution de ce dernier.

Sachant que le vecteur d'état $\hat{\mathbf{x}}$ est composé des déplacements χ et vitesses $\dot{\chi}$ modaux, on peut écrire

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix}\chi \\ \dot{\chi}\end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

Donc, la matrice $\mathbf{Q}$ peut être décomposée telle que

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{\chi\chi} & \mathbf{Q}_{\chi\dot{\chi}} \\ \mathbf{Q}_{\dot{\chi}\chi} & \mathbf{Q}_{\dot{\chi}\dot{\chi}}\end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Pour simplifier l'interprétation, supposons $\mathbf{Q}_{\chi\dot{\chi}} = \mathbf{Q}_{\dot{\chi}\chi} = \mathbf{0}$. La question maintenant est : *Comment choisir* $\mathbf{Q}_{\chi\chi}$ *et* $\mathbf{Q}_{\dot{\chi}\dot{\chi}}$?. On peut considérer quatre cas particulièrement pratiques.

Le premier est le contrôle uniforme de tout les modes retenus. Dans ce cas, la matrice de pondération $\mathbf{Q}_{\chi\chi}$ est équivalente à la matrice identité $\mathbf{Q}_{\chi\chi} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{Q}_{\chi\chi} = \mathbf{Q}_{\dot{\chi}\dot{\chi}}$. Cela ne veut pas dire que tout les modes seront également amortis activement, mais qu'ils seront optimisés avec la même pondération. Comme la controlabilité des modes n'est pas la même, ils seront amortis différemment.

Un deuxième cas consiste à contrôler quelques modes seulement. Supposons, donc, que seuls les modes $i = 1, \ldots, n$ sont à contrôler. La matrice $\mathbf{Q}_{\chi\chi} = \mathbf{Q}_{\dot{\chi}\dot{\chi}}$ peut, donc, être décomposée en

$$\mathbf{Q}_{\chi\chi} = \begin{bmatrix}\mathbf{Q}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{4.23}$$

où la matrice $\mathbf{Q}_n$ est à choisir en fonction des pondérations de chaque mode en question.

Afin de minimiser une mesure de l'énergie du système, on peut aussi considérer un troisième cas, où

$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \; ; \quad \mathbf{Q}_{\dot{\chi}\dot{\chi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

où ω_i est la *i*-ième pulsation propre.

Enfin, un quatrième cas pratique est défini par le contrôle de la sortie $\mathbf{y}$. Dans ce cas, la quantité à minimiser est $\mathbf{y}^T\mathbf{Q}_{yy}\mathbf{y}$. Cependant, sachant que $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}$, la relation entre les matrices $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}_{yy}$ s'écrit

$$\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{C}}^T\mathbf{Q}_{yy}\hat{\mathbf{C}} \tag{4.25}$$

Dans ce cas, généralement, $\mathbf{Q}$ n'est pas diagonale et $\mathbf{Q}_{\chi\chi} \neq \mathbf{Q}_{\dot{\chi}\dot{\chi}}$. Néanmoins, cette situation est très pratique, puisque, en général, on veut contrôler des variables que l'on sait mesurer ou observer.

4.2.4 Limitations du gain de contrôle

Dans la section précédente, des critères pour le choix de la matrice de pondération d'état $\mathbf{Q}$ ont été présentés. Néanmoins, la relation de cette matrice avec le gain de contrôle n'est pas linéaire (voir équation de Riccati (4.19)). Par conséquent, à partir de la matrice $\mathbf{Q}$, il n'est pas possible de déterminer directement si le gain de contrôle nécessaire pour atteindre cette performance est faisable. En effet, pour une application de contrôle actif par des pastilles piézoélectriques, il faut tenir compte, par exemple, des champs électriques de dépolarisation (coercive field) du matériau piézoélectrique en question. Dans le cas de contrôle de vibrations transitoires, le champ électrique appliqué à la pastille piézoélectrique peut avoir une direction opposée à celle de la polarisation remanente du matériau. Ainsi, un champ électrique de l'ordre de la polarisation remanente peut l'annuler et, donc, dépolariser le matériau, qui devient non-piézoélectrique. Par conséquent, il faudrait tenir compte du champ électrique maximum appliqué au matériau piézoélectrique dans la conception du contrôle. Néanmoins, cela n'est pas sans difficulté vu que la tension de contrôle dépend de l'excitation mécanique (ou des conditions initiales) de la structure à contrôler ($\mathbf{V}(t) = \mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_g\hat{\mathbf{x}}(t)$).

Principe du maximum de Pontryagin

Pour calculer le gain de contrôle dans les sections précédentes, le contrôle a été considéré comme étant une fonction implicite continue de l'état $\mathbf{x}$ et du co-état $\mathbf{r}$. Supposant $L(\mathbf{x},\mathbf{u})$ et $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$ des fonctions continues, le contrôle est aussi continu et peut être calculé par les équations d'Euler (4.6). Néanmoins, si l'on considère un contrôle borné, il est possible que la solution optimale (4.6), (4.9) ne puisse pas être atteinte.

Considérons les équations d'état (4.1) associées à une fonction coût du type (4.2). Si le contrôle est non-borné, le problème de contrôle optimal est résolu par les équations d'Euler (4.6). L'optimalité du contrôle est définie par la condition de stationnarité

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0 \tag{4.26}$$

d'où, en utilisant l'Hamiltonien (4.4), on calcule $\mathbf{u}$ par

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \mathbf{r}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) = 0 \tag{4.27}$$

Maintenant, supposons que le contrôle est contraint à une région admissible U, qui peut être définie comme une valeur maximale admissible par le contrôle, par exemple. Dans ce cas, on ne peut pas garantir que le contrôle optimal calculé par (4.27) appartienne à la région U. Néanmoins, il a été montré par Pontryagin *et al.* [74] que les équations d'Euler sont aussi valables à condition de remplacer la condition de stationnarité (4.26) ou (4.27) par une condition plus générale sous la forme

$$H(\mathbf{x}^o,\mathbf{u}^o,\mathbf{r}^o,t) \leq H(\mathbf{x}^o,\mathbf{u}^o+\delta\mathbf{u},\mathbf{r}^o,t)\ , \quad \forall \delta\mathbf{u} \text{ admissible}$$

où l'exposant ^{o} indique des quantités optimales. Cela signifie que toute variation du contrôle optimal $\mathbf{u}^o$, à l'instant t et pour des état et co-état optimaux fixes, mènera à une augmentation de la valeur de l'Hamiltonien. Cette condition peut être aussi écrite sous la forme

$$H(\mathbf{x}^o,\mathbf{u}^o,\mathbf{r}^o,t) \leq H(\mathbf{x}^o,\mathbf{u},\mathbf{r}^o,t)\ , \quad \forall \mathbf{u} \text{ admissible} \tag{4.28}$$

Cette expression est dénommé le *Principe du maximum de Pontryagin*. Par conséquent, l'Hamiltonien doit être minimisé pour toute valeur admissible de $\mathbf{u}$, avec état et co-état optimaux [49].

Algorithme itératif pour le calcul du gain de contrôle

On propose, donc, un algorithme itératif, tenant compte du champ électrique maximum, pour la conception du contrôle optimal. Les conditions d'opération sont généralement connues, par exemple, on peut concevoir un système de contrôle pour amortir les vibrations d'une poutre soumise à une excitation $\mathbf{p}(t)$ ou à des conditions initiales $\hat{\mathbf{x}}(0)$ connues. Ici, on suppose le premier cas. L'algorithme est le suivant (Figure 4.2) :

1. On considère des matrices de pondération d'état $\mathbf{Q}$ et de pondération d'entrée $\mathbf{R} = \gamma\,\bar{\mathbf{R}}$. Où $\bar{\mathbf{R}}$ est une matrice de pondération d'entrée initiale, représentant la forme de $\mathbf{R}$, et γ est un facteur de multiplication, que l'on fait varier de façon à adapter la matrice $\mathbf{R}$ aux restrictions imposées ;
2. À partir d'un facteur initial de multiplication γ_0, on calcule $\mathbf{K}_g$ par l'algorithme LQR pour le système (3.48) avec $\mathbf{R}_0 = \gamma_0\bar{\mathbf{R}}$;
3. Avec le $\mathbf{K}_g$ calculé, on calcule $\hat{\mathbf{x}}(t)$, de (4.20) avec $\mathbf{p}(t)$, et, ensuite, $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_g\hat{\mathbf{x}}(t)$;

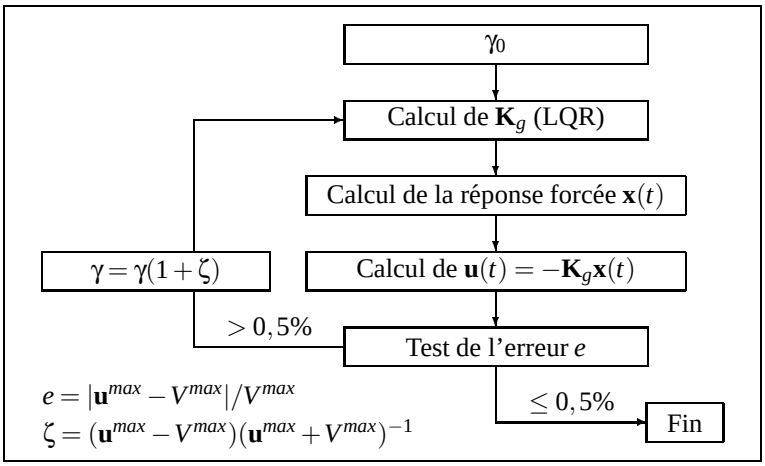


Figure 4.2: Algorithme itératif pour calculer le gain de contrôle optimal avec limitation de l'entrée.

4. On compare $\mathbf{u}^{max} = \max(\mathbf{u})$ avec la tension maximale spécifiée pour le matériau piézoélectrique en question et on corrige le facteur γ en fonction de cette comparaison (Figure 4.2), jusqu'à la convergence $\mathbf{u}^{max} \approx V^{max}$;
5. On retient la valeur de $\mathbf{K}_g$ à la convergence.

Cette stratégie est nécessaire afin de concevoir une loi de contrôle optimal faisable. La Figure 4.3 montre la variation typique des facteurs d'amortissement modal (%) des trois premiers modes propres induite par une augmentation du facteur de pondération d'entrée γ (où dans ce cas $\mathbf{R} = \gamma\,\mathbf{I}$). La fonction coût minimisée J_{min} et la tension maximale V^{max}, nécessaire pour obtenir cette performance, pour chaque pondération d'entrée sont aussi montrés dans la Figure 4.3. Comme prévu, l'amortissement diminue, tout comme la tension maximale, pour des grandes valeurs de pondération d'entrée, car l'effort de contrôle est pénalisé davantage. Cependant, le coût optimal augmente, puisque la performance diminue. La région encadrée par des traits interrompus, dans la Figure 4.3, détermine la région de faisabilité du contrôle, où la tension maximale correspond à un champ électrique plus petit que celui de saturation du matériau piézoélectrique (dans ce cas, 250 V). L'algorithme itératif proposé (Figure 4.2) consiste à trouver la performance maximale dans la région de faisabilité.

Pour les exemples étudiés dans ce travail, cet algorithme converge assez rapidement. Cependant, comme la relation entre γ et $\mathbf{u}^{max}$ n'est pas linéaire, c'est-à-dire, une augmentation de γ n'induit pas forcement une diminution de $\mathbf{u}^{max}$, la convergence de l'algorithme peut être déstabilisé par certaines conditions initiales. Pour remédier à ce problème, des stratégies de diminution du pas $(1+\zeta)$ ont été utilisées.

4.2.5 Observation

Dans les sections précédentes, on a considéré que toutes les variables d'état étaient disponibles pour la rétroaction. Cependant, il serait plus réaliste de considérer que seule la sortie $\mathbf{y}$ est connue et non tout l'état $\hat{\mathbf{x}}$. En effet, mesurer tout l'état nécessiterait un nombre trop grand de capteurs et, même, quelques variables d'état pourraient encore être

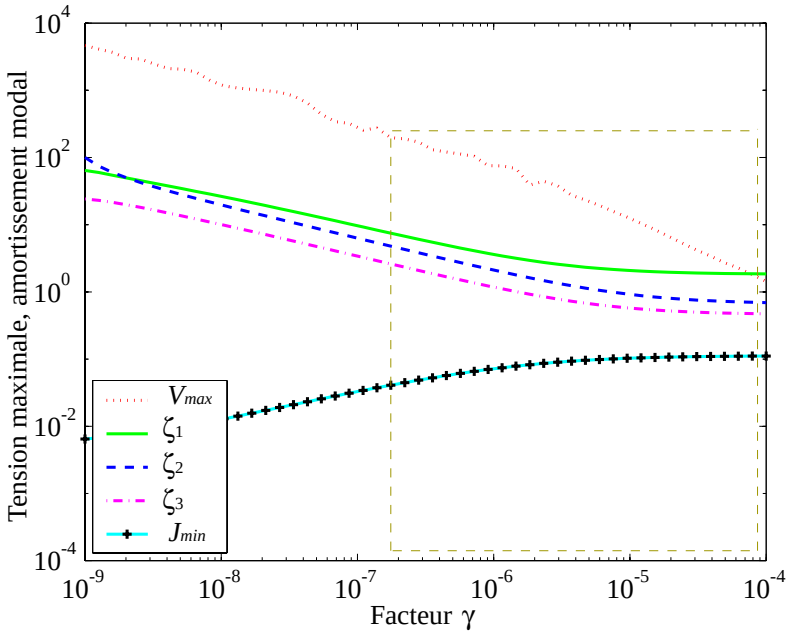


Figure 4.3: Tension maximale et amortissements modaux en fonction du facteur de pondération d'entrée γ.

inaccessibles aux mesures. Dans ce cas, pour pouvoir fournir l'état au système de contrôle pour la rétroaction, il est nécessaire de le reconstruire à partir d'un modèle du système et de la sortie $\mathbf{y}$. Cette reconstruction est, généralement, réalisée par un *observateur*.

Observateurs d'état

Un observateur d'état complet reconstruit toutes les variables d'état, même celles qui ont été mesurées, à partir de la sortie $\mathbf{y}$. Considérons l'observateur suivant, dit de Luenberger, [75]

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_e(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}) \; ; \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0} \tag{4.29}$$

où le vecteur $\tilde{\mathbf{x}}$ est l'état reconstruit et $\mathbf{K}_e$ le gain de l'observateur. Cette dernière équation, d'une part, simule le système réel et, d'autre part, pénalise la différence entre la mesure $\mathbf{y}$ et la sortie reconstruite $\hat{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}$. Soustrayant cette équation de la première équation de (3.48) et substituant $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}$ dans (4.29), on obtient

$$\dot{\mathbf{e}} = (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{K}_e\hat{\mathbf{C}})\mathbf{e} \tag{4.30}$$

où $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}$ est la différence entre l'état réel et celui reconstruit, dénommé erreur de reconstruction, ayant comme valeur initiale $\mathbf{e}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0)$. On observe, de l'équation (4.30), que l'erreur est asymptotiquement stable si les valeurs propres de $\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{K}_e\hat{\mathbf{C}}$, dit pôles de l'observateur, ont des parties réelles négatives, c'est-à-dire, si $\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{K}_e\hat{\mathbf{C}}$ est asymptotiquement stable. Si le système est complètement observable, les pôles de l'observateur peuvent être choisis librement et, en général, on doit les placer bien à gauche des pôles du

système dans le mi-plan complexe, pour que l'erreur de l'observateur disparaisse rapidement. Pour cela, les éléments de $\mathbf{K}_e$ doivent avoir des valeurs élevées. Cependant, (4.29) indique que si la mesure de sortie $\mathbf{y}$ est bruyante, des gains $\mathbf{K}_e$ élevés amplifieront le bruit de la mesure. Par conséquent, il faut établir un compromis entre le bruit inséré dans le système et la vitesse à laquelle l'observation doit suivre l'état réel.

Un observateur qui minimise la variance de l'erreur des mesures d'un système dont le bruit d'entrée et de sortie sont des bruits blancs, c'est-à-dire, dont la puissance est uniformément distribuée dans la bande de fréquences, est dénommé *Filtre de Kalman-Bucy* [75].

Filtre de Kalman-Bucy

Considérons l'équation de l'erreur d'observation (4.30), augmentée par des termes relatifs aux bruits d'entrée $\mathbf{w}$ et de sortie $\mathbf{v}$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{K}_e\hat{\mathbf{C}})\mathbf{e} + \mathbf{w} - \mathbf{K}_e\mathbf{v} \tag{4.31}$$

où $\mathbf{w}$ et $\mathbf{v}$ sont supposés être des bruits blancs, avec $E[\mathbf{w}] = 0$ et $E[\mathbf{v}] = 0$ et dont les matrices de covariance sont $\mathbf{W}$ et $\mathbf{V}$. On cherche, donc, le gain optimal $\mathbf{K}_e$ qui minimise la fonction coût quadratique suivante [75]

$$J_e = \mathbf{h}^T\mathbf{P}_e\mathbf{h} \tag{4.32}$$

où $\mathbf{P}_e = E[\mathbf{e}\mathbf{e}^T]$ et $\mathbf{h}$ est un vecteur arbitraire. Le gain $\mathbf{K}_e$ qui minimise J_e pour tout $\mathbf{h}$ s'écrit [75]

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{P}_e\hat{\mathbf{C}}^T\mathbf{V}^{-1} \tag{4.33}$$

$\mathbf{P}_e$, dénommé aussi matrice de covariance de l'observateur optimal, est solution de l'équation de Riccati suivante

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{P}_e + \mathbf{P}_e\hat{\mathbf{A}}^T + \mathbf{W} - \mathbf{P}_e\hat{\mathbf{C}}^T\mathbf{V}^{-1}\hat{\mathbf{C}}\mathbf{P}_e = \mathbf{0} \tag{4.34}$$

Cet observateur est dénommé Filtre de Kalman-Bucy. En comparant l'équation de Riccati pour l'observateur (4.34) et celle pour le contrôleur (4.19), on s'aperçoit que les matrices de covariance $\mathbf{W}$ et $\mathbf{V}$ sont équivalentes aux matrices de pondération $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$. Par ailleurs, la matrice $\mathbf{V}$ pénalise le gain de l'observateur de manière à limiter l'amplification, à travers le terme $\mathbf{K}_e\mathbf{v}$, du bruit de sortie $\mathbf{v}$. Tandis que, pour des entrées bruyantes, la matrice $\mathbf{W}$ augmente le gain de l'observateur afin d'amortir rapidement l'erreur produite par ce bruit.

Contrôleur linéaire quadratique gaussien

L'algorithme linéaire quadratique gaussien (LQG) est obtenue à travers la combinaison d'un contrôle optimal LQR et d'un observateur optimal. Ainsi, de (3.48), augmenté par le bruit d'entrée $\mathbf{w}$ et avec $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_g\tilde{\mathbf{x}}$, et (4.31), on a le système couplé suivant

$$\begin{Bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{K}_g & \hat{\mathbf{B}}\mathbf{K}_g \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{K}_e\hat{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{K}_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \tag{4.35}$$

Grâce au fait que ce système couplé est sous une forme triangulaire par blocs, les valeurs propres des sous-systèmes en boucle-fermée sont découplées. Cela constitue le principe de séparation [75], qui permet d'exécuter, séparément, la conception du système de contrôle et de l'observateur en deux étapes différentes. Cependant, la stabilité de la boucle-fermée du système couplé (4.35) est fonction de la stabilité des deux sous-systèmes. Des techniques pour augmenter la marge de stabilité du système couplé (4.35) sont présentées en [71] et une discussion sur les caractéristiques du contrôle LQG peut être trouvée dans [43].

4.3 Controlabilité et observabilité

La notion de controlabilité permet de mesurer la capacité de contrôler toutes les variables d'état avec un actionneur spécifique. De même, la notion d'observabilité quantifie la capacité de reconstruire tout l'état du système à partir des mesures d'un capteur spécifique.

Ainsi, on appelle un système *complètement contrôlable* si l'état peut être transféré d'un état initial quelconque à n'importe quel autre état, dans un intervalle de temps fini, à travers une action de contrôle $\mathbf{u}$. Si le système n'est pas complètement contrôlable, il peut être *stabilisable*, ce qui signifie que toutes les variables d'état instables sont contrôlables, ou, de même, que le sous-space non-contrôlable est stable.

D'autre part, un système est dit *complètement observable* si, à partir de la mesure de la sortie pendant un intervalle de temps fini, l'état peut être totalement déterminé. Dans le cas contraire, le système est *détectable* si, au moins, les variables d'état instables sont observables, ou, de même, si le sous-space non-observable est stable.

Supposons un système sous la forme (3.48), de dimension n, avec les conditions initiales $\hat{\mathbf{x}}(0)$ et $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$. Afin de montrer la notion de controlabilité, on cherche le contrôle $\mathbf{u}$ qui transfère le système d'état initial $\hat{\mathbf{x}}(0)$ à l'état final $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$. De (3.48), l'état à l'instant t peut être exprimé par

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{\hat{\mathbf{A}}t}\hat{\mathbf{x}}(0) + \int_0^t e^{\hat{\mathbf{A}}(t-\tau)}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4.36}$$

Si l'on substitue les conditions finales $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}$ dans l'expression précédente, elle devient

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = -\int_0^t e^{-\hat{\mathbf{A}}\tau}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4.37}$$

où l'expansion en séries de l'exponentielle de $-\hat{\mathbf{A}}\tau$ s'écrit

$$e^{-\hat{\mathbf{A}}\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)\hat{\mathbf{A}}^k$$

Donc, on a

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \hat{\mathbf{A}}^k \hat{\mathbf{B}} \beta_k(t) \; ; \quad \beta_k = \int_0^t \alpha_k(\tau)\mathbf{u}(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{4.38}$$

L'expression (4.38) peut aussi être écrite de la façon suivante

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = -\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}^{n-1}\hat{\mathbf{B}}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{Bmatrix}$$

Pour que le système soit complètement contrôlable, il doit exister une solution β pour toute condition initiale $\hat{\mathbf{x}}(0)$ et, donc, la matrice de controlabilité $\mathcal{C}$ suivante doit être de rang n

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} & \cdots & \hat{\mathbf{A}}^{n-1}\hat{\mathbf{B}}\end{bmatrix} \tag{4.39}$$

Dans ce cas, la paire $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}})$ est dite contrôlable. Ce résultat peut être étendu pour l'observabilité, en définissant la matrice d'observabilité O suivante

$$O = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}} \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

Ainsi, la paire $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{C}})$ est dite observable si la matrice d'observabilité O est de rang n.

4.3.1 Test de Popov-Belevitch-Hautus

La construction de la matrice de controlabilité $\mathcal{C}$ du système réduit (3.45) (représentation complexe), conduit à

$$\mathcal{C} = \mathrm{diag}(\mathbf{T}_{gi}^T \mathbf{B}) \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

où $\mathbf{T}_{gi}$ est l'i-ième vecteur propre à gauche du système. La deuxième matrice, dénommée *matrice de Vandermonde*, est non-singulière si les valeurs propres λ_i du système sont distinctes. Dans ce cas, le rang de la matrice de controlabilité $\mathcal{C}$ coïncide avec celui de la matrice $\mathrm{diag}(\mathbf{T}_{gi}^T \mathbf{B})$. Par conséquent, le système est contrôlable si, pour tout mode i

$$\mathbf{T}_{gi}^T \mathbf{B} \neq \mathbf{0} \tag{4.42}$$

Ce qui permet de conclure que tout mode non-orthogonal au vecteur de contrôle est contrôlable. De même, on peut mesurer la controlabilité, ou l'entrée effective de contrôle, d'un mode spécifique, à travers un actionneur (spécifié par le vecteur de contrôle), par cette expression.

Grâce à la dualité entre controlabilité et observabilité, ces résultats peuvent être étendus pour mesurer l'observabilité relative d'un mode, à travers la relation $\mathbf{CT}_{di}$, qui mesure la contribution du mode i à la sortie. De même, on peut affirmer que le système est complètement observable si, pour tout mode i,

$$\mathbf{CT}_{di} \neq \mathbf{0} \tag{4.43}$$

On peut aussi en conclure qu'un système dont les valeurs propres sont multiples n'est ni contrôlable à partir d'une seule entrée ni observable à partir d'une seule sortie. Ces tests de controlabilité et observabilité sont souvent dénommés tests des valeurs propres de Popov-Belevitch-Hautus.

En combinant les deux mesures de controlabilité (4.42) et observabilité (4.43), on obtient la matrice des résidus du mode i

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{CT}_{di}\mathbf{T}_{gi}^T\mathbf{B} \tag{4.44}$$

dont l'élément jl combine l'observabilité du mode i à partir de la sortie j et sa controlabilité à partir de l'entrée l.

4.4 Mise en œuvre digitale

Même si toute la conception des systèmes de contrôle et d'observation, présentée précédemment, a supposé des signaux d'entrée et de sortie analogiques (continus), ces systèmes sont, en pratique, mis en œuvre dans des ordinateurs, microcontroleurs ou DSPs (Processeurs de Signaux Digitaux). Bien que l'on peut développer des algorithmes digitaux [29], similaires à ceux présentés dans ce chapitre, il est possible, grâce à la vitesse élevée des microprocesseurs actuels, de développer un algorithme continu et le transporter dans un contrôleur digital. Cependant, la transformation des signaux d'entrée et de sortie analogiques en signaux digitaux requiert quelques soins.

Un schéma représentant la conversion d'un signal de sortie continu, reçu du capteur, en digital, son traitement par l'algorithme de contrôle et la reconversion vers un signal de contrôle continu envoyé à un actionneur est montré dans la Figure 4.4.

Puisque le processeur reçoit et envoie des signaux discrets (digitaux), il est important de savoir à quelle vitesse les données doivent être discrétisées. Le théorème d'échantillonnage, dénommé théorème de Shannon, montre que la fréquence d'échantillonnage doit être deux fois plus élevée que la fréquence maximale de la bande considérée. Cependant, les composantes de fréquence à l'extérieur de la bande apparaîtront comme des composantes de fréquence inférieure, caractérisant le phénomène d'*aliasing*. Pour éviter ce phénomène, on filtre les composantes des fréquences

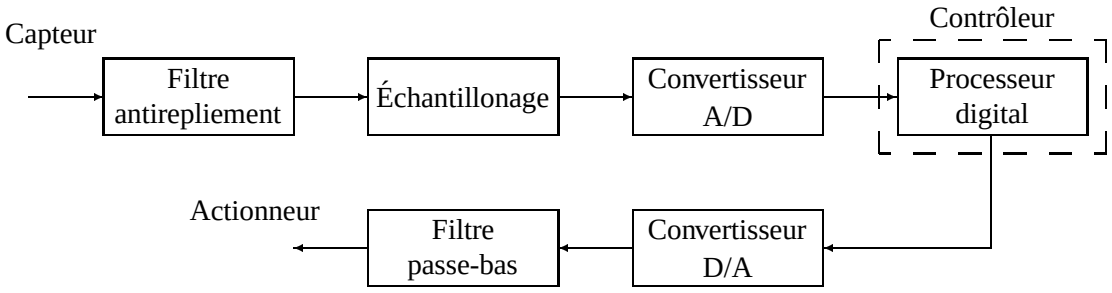


Figure 4.4: Conversion A/D, traitement digital et conversion D/A.

supérieures à la fréquence maximale de la bande, dite de Nyquist, avant l'échantillonnage. Il faut noter que cette coupure de la bande induit un retardement de phase pour la fréquence de coupure. Les données échantillonnées discrètes sont transformées en une fonction escalier par un circuit "hold" d'ordre zéro. Cette fonction est ensuite transformée en un signal digital de dimension finie (par exemple, 16 bits) représentant la bande du signal analogique. Puisque le nombre de niveaux est fini, une erreur d'approximation existe toujours. Elle est de l'ordre de $2^{-N}R_E$, où N est la longueur du mot digital et R_E est la largeur de bande du signal analogique d'entrée. De même, à la sortie du signal digital du processeur, une erreur de l'ordre $2^{-N}R_S$ est produite, où R_S est la largeur de bande du signal analogique de sortie. Après la conversion du signal digital de contrôle en analogique, il est aussi convenant de filtrer les composantes d'haute-fréquence, qui peuvent être produites lors du traitement du signal, avant d'envoyer le signal analogique à l'actionneur.

4.5 Contrôle actif d'une poutre sandwich à cœur viscoélastique

Dans cette section, on analyse le contrôle actif, par deux pastilles piézoélectriques, des vibrations d'une poutre sandwich déjà amortie passivement par son cœur viscoélastique (Figure 4.5). Les propriétés des matériaux sont données dans l'annexe A. Les longueur, largeur et épaisseur des peaux d'Aluminium sont, respectivement $L = 280$ mm, $b = 25$ mm et $h_b = 3$ mm. Le cœur viscoélastique a ces mêmes dimensions à l'exception de son épaisseur qui est de $h_v = 0,09$ mm. Les pastilles piézoélectriques de longueur $a = 50$ mm et épaisseur $h_p = 0,5$ mm et dont les centres sont positionnés à $d_c = 35$ mm de l'encastrement sont collés sur les surfaces libres de la poutre sandwich.

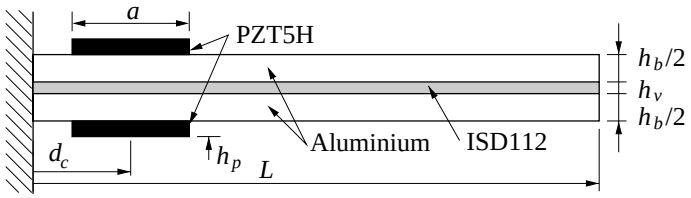


Figure 4.5: Poutre sandwich à cœur viscoélastique contrôlée activement.

La dépendance en fréquence du matériau viscoélastique du cœur (ISD112 à 27°C) est représentée par le modèle ADF à trois séries de paramètres ($G_0 = 0,50$ MPa, $\Delta = [0,746;\ 3,265;\ 43,284]$ et $\Omega = [468,7;\ 4742,4;\ 71532,5]$ rad/s). Une réduction modale est effectuée à travers l'élimination des modes de relaxation, introduits par le modèle ADF, et en gardant seulement les cinq premiers modes propres de flexion de la poutre sandwich. Premièrement, l'optimisation des performances d'amortissement passif et hybride, à travers une analyse paramétrique utilisant l'algorithme de contrôle LQR, est réalisée. Ensuite, les algorithmes dérivatif et LQG sont appliqués à la configuration optimale pour comparer les performances des trois contrôleurs LQR, dérivatif et LQG.

4.5.1 Contrôle optimal linéaire quadratique

Afin d'améliorer activement l'amortissement des trois premiers modes, la pastille piézoélectrique collée sur la surface supérieure de la poutre sandwich est associée à la stratégie de contrôle LQR itérative présentée précédemment (Figure 4.2), dont les paramètres sont $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(1,1,1,0,\ldots,0)$ et $\mathbf{R} = \gamma\,\mathbf{I}$. La poutre est excitée par une force de perturbation transversale concentrée, appliquée à son bout. Son intensité est choisie telle qu'elle induit une flèche maximale de $w_L = h_b/2 = 1,5$ mm. La tension de contrôle est limitée à 250 V, soit un champ électrique maximum dans l'actionneur de 500 V/mm. L'autre pastille piézoélectrique, bien que non utilisée dans ce cas, est gardée pour des comparaisons ultérieures. Une force de perturbation transversale est appliquée au bout de la poutre et la flèche induite en ce même point est mesurée.

Une analyse paramétrique des amortissements passif, fourni par la couche viscoélastique, et hybride, augmenté par le contrôle actif, a été réalisée. On fait varier la longueur de l'actionneur piézoélectrique dans l'intervalle [20–70] mm et l'épaisseur de la couche viscoélastique dans l'intervalle [0,01–2] mm. La Figure 4.6 montre que l'augmentation de la longueur des actionneurs n'affecte pas énormément l'amortissement passif, puisque seul un effet de raidissement des peaux est obtenu, aboutissant à une légère augmentation de l'amortissement des premier et deuxième modes. Cette figure montre aussi que l'amortissement du premier mode propre augmente pour des couches viscoélastiques épaisses, confirmant les résultats numériques de van Nostrand et Inman [87]. Les amortissements modaux des deuxième et troisième modes sont, quant à eux, optimaux pour des couches relativement mince et très minces respectivement ($h_v = 0,1$ mm pour le deuxième et $h_v = 0,06$ mm pour le troisième). Ces modes sont, en général, beaucoup plus amortis passivement que le premier (amortissements passifs moyens : $\zeta_{p1} = 5,3\%$, $\zeta_{p2} = 10,0\%$, $\zeta_{p3} = 12,0\%$). Par conséquent, d'après la Figure 4.6, la somme des trois premiers amortissements modaux est optimale pour $a = 50$ mm et $h_v = 0,1$ mm.

La somme des trois premiers amortissements modaux de la poutre sandwich en boucle-fermée est présentée dans la Figure 4.7 pour les diverses longueur de l'actionneur et épaisseur de la couche viscoélastique. D'après cette figure, la performance du système hybride est optimale pour des actionneurs longs ($a = 70$ mm) et couches relativement minces ($h_v = 0,1$ mm), bien que le contrôle est performant dans toute la région $40 < a < 70$ mm et $0,1 < h_v < 2$ mm. Pourtant, le gain d'amortissement fournit par l'actionneur, calculé par $\zeta_a = \zeta_h/\zeta_p - 1$, est optimal pour des couches viscoélastiques très minces comme le montre la Figure 4.8. Cela est dû au fait que l'amortissement passif est très peu

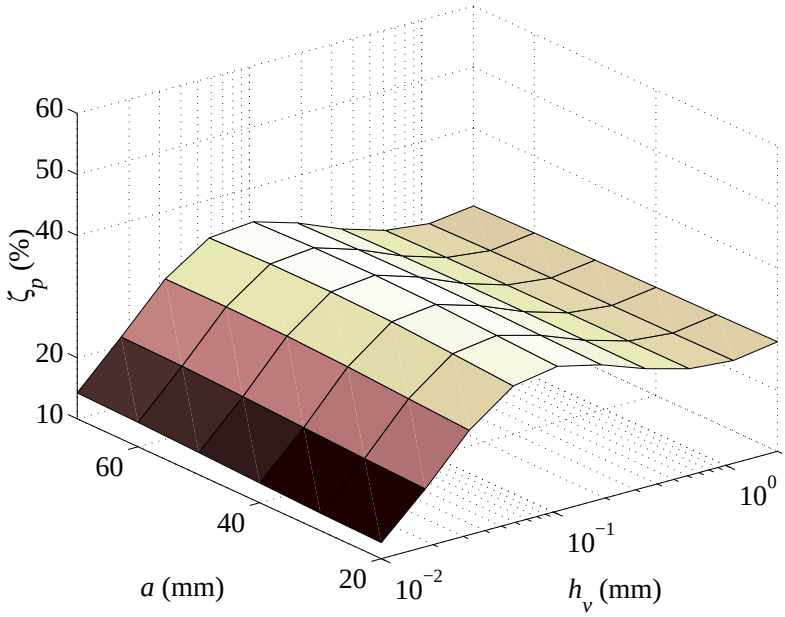


Figure 4.6: La somme des trois premiers amortissements modaux de la poutre sandwich en boucle-ouverte.

efficace dans ce cas.

Les performances optimales du contrôle de la poutre en boucle-ouverte et en boucle-fermée sont présentées dans le Tableau 4.1. Il montre, notamment, que l'amortissement du premier mode est augmenté de 400% ($\zeta_{h1} = 24,85\%$ contre $\zeta_{p1} = 5,01\%$), les deuxième et troisième modes sont très peu amortis alors que les quatrième et cinquième modes ne sont pas affectés par le contrôleur. Comme le montre le Tableau 4.1, le contrôleur actif réduit l'amplitude maximale de la poutre de 1,50 mm (passif) à 1,07 mm (hybride).

Tableau 4.1: Performances optimales du contrôle actif d'une poutre sandwich amortie.

	ζ_1 (%)	ζ_2 (%)	ζ_3 (%)	ζ_4 (%)	ζ_5 (%)	t_s (sec)	$\mathbf{y}_{max}$ (mm)
Passif	5,01	13,36	16,17	15,94	15,57	0,60	1,50
Hybride	24,85	13,63	16,36	15,94	15,57	0,10	1,07

Les réponses en fréquence, en boucle-ouverte et en boucle-fermée, de la poutre sandwich excitée par la force de perturbation transversale sont mesurées à son extrémité libre. Elles sont présentées dans la Figure 4.9 pour les valeurs optimales de a et h_v, qui montre que le contrôle hybride permet de diminuer l'amplitude de résonance du premier mode de 14dB (par rapport au passif), tout en gardant l'amortissement passif des autres modes. On observe aussi, dans cette figure, que les quatre derniers modes considérés sont très amortis passivement. Cela permet, notamment, de prévenir les instabilités dues au *spillover* (renversement des modes).

La réponse transversale transitoire de l'extrémité libre de la poutre est présentée dans la Figure 4.10. Elle permet, particulièrement, d'analyser le comportement dynamique de la sortie $\mathbf{y}$. Ainsi, on observe que la réponse s'atténue beaucoup plus rapidement

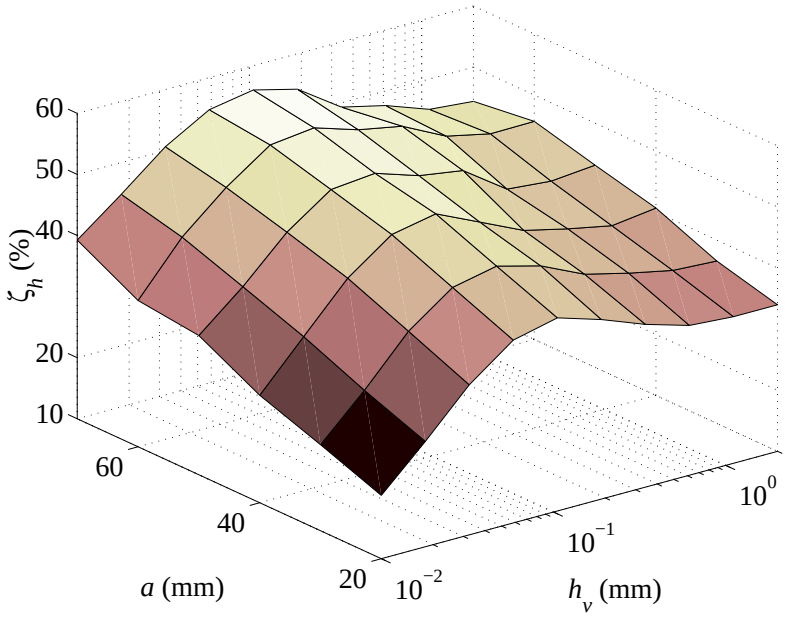


Figure 4.7: La somme des trois premiers amortissements modaux de la poutre sandwich en boucle-fermée.

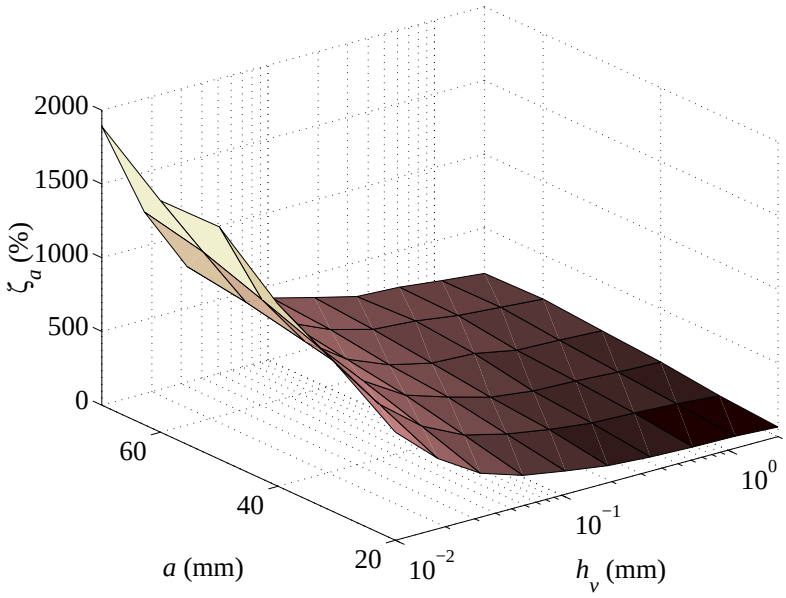


Figure 4.8: La somme des gains d'amortissements des trois premiers modes fournit par l'actionneur piézoélectrique.

en boucle-fermée. En effet, le temps de réponse et l'amplitude maximale de la poutre en boucle-fermée sont réduits de 83% et 29%, respectivement, par rapport à ceux en boucle-ouverte. La tension fournie à l'actionneur piézoélectrique pour obtenir cette performance est montré dans la Figure 4.11. La tension s'amorti à la même vitesse que la réponse en boucle-fermée. Par ailleurs, on peut noter que la tension est limitée à 250 V, comme requis

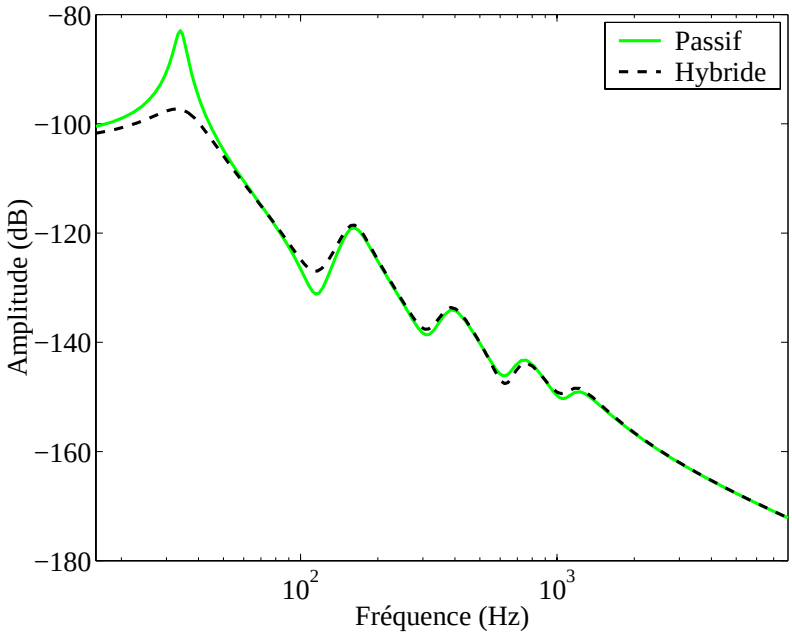


Figure 4.9: Fonction de réponse en fréquence de la poutre sandwich en boucle-ouverte et en boucle-fermée pour $a = 70$ mm et $h_v = 0,1$ mm.

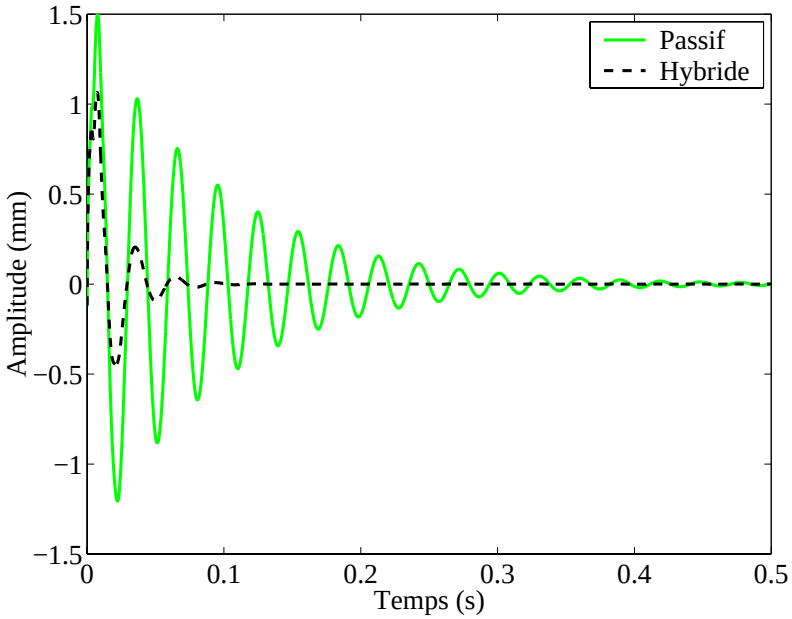


Figure 4.10: Réponse transitoire de la poutre en boucle-ouverte et fermée pour $a = 70$ mm et $h_v = 0,1$ mm.

par l'algorithme de contrôle.

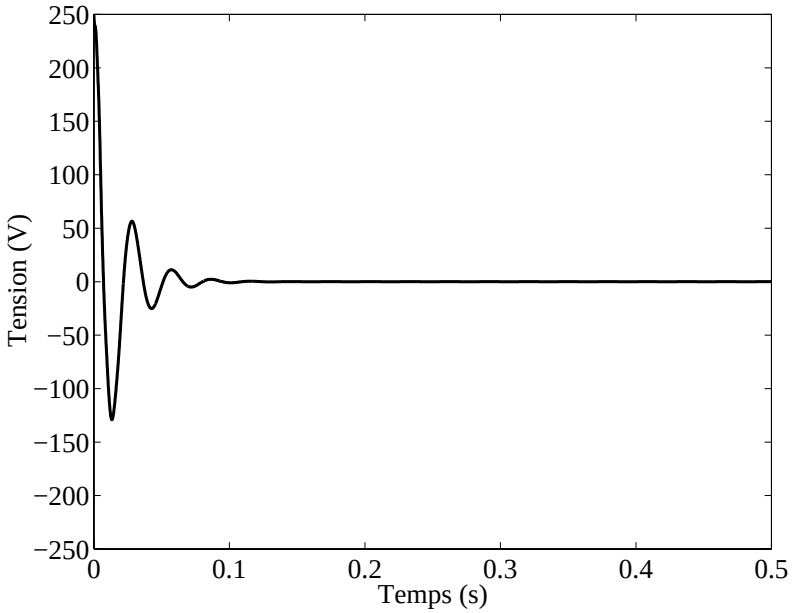


Figure 4.11: Tension dans l'actionneur pour contrôler la réponse de la poutre sandwich pour $a = 70$ mm et $h_v = 0,1$ mm.

4.5.2 Contrôle par rétroaction directe des vitesses

Le principal inconvénient de l'algorithme de contrôle LQR utilisé dans les sections précédentes est la nécessité de mesurer toutes les variables d'état afin de construire le contrôle proportionnel. On propose donc d'analyser dans cette section une loi de contrôle très simple de rétroaction directe des vitesses (DVF). Dans ce cas, puisque l'effort de contrôle est proportionnel à une combinaison des dérivées temporelles de quelques variables du modèle éléments finis, le contrôleur n'ajoute qu'une matrice d'amortissement au système. Deux contrôleurs de ce type seront donc considérés consistant à envoyer comme signal (tension) de contrôle à l'actionneur, dans un premier temps, la vitesse de la flèche du bout de la poutre et, dans un deuxième temps, la dérivée temporelle de la tension induite dans le capteur collé sur la surface inférieure de la poutre. Afin d'étudier ce problème, le modèle éléments finis PMEP est utilisé pour modéliser les actionneur et capteur piézoélectriques. La configuration optimale de la poutre sandwich de la Figure 4.5, c'est-à-dire, pour $h_v = 0,1$ mm et $a = 70$ mm, est considérée.

Rétroaction de la vitesse du bout de la poutre

Dans un premier temps, on considère une tension de contrôle proportionnelle à la vitesse de la flèche w_L du bout de la poutre $V_A = -K_d \dot{w}_L$. Le gain de contrôle K_d est limité de manière à respecter la tension de saturation de l'actionneur piézoélectrique (250 V). Il varie dans l'intervalle [0–605]. Des gains plus élevés fournissent plus d'amortissement mais requièrent aussi plus de tension de contrôle. La Figure 4.12 présente le lieu des racines entre un capteur de la vitesse du bout de la poutre et l'actionneur. Précisons que le capteur piézoélectrique collé sur la surface inférieure de la poutre n'est pas utilisé dans la boucle

de contrôle. Dans cette figure, l'augmentation du gain de contrôle K_d déplace les pôles en boucle ouverte $\times$ vers les zéros $\circ$, sachant que l'amortissement modal $\mathrm{Im}(s)/\mathrm{Re}(s)$ augmente lorsque les pôles s'éloignent de l'axe imaginaire $\mathrm{Re}(s) = 0$. On observe que cette loi de contrôle permet d'augmenter assez fortement les amortissements des modes 1 et 4 et, pour des gains de contrôle élevés, celui du deuxième mode. Cependant, elle réduit l'amortissement des modes 3 et 5, pour tout gain de contrôle, pouvant même les déstabiliser ; d'où l'importance de l'amortissement passif, dû au cœur viscoélastique, afin d'augmenter la marge de stabilité des modes excités par le contrôle actif. Les pôles en boucle-fermée $+$ pour le gain maximum considéré ($K_d = 605$) sont aussi présentés dans la Figure 4.12. Il est intéressant de noter que, bien que le deuxième mode peut être amorti par cette loi de contrôle, la limitation de tension aboutit à une diminution de son amortissement modal.

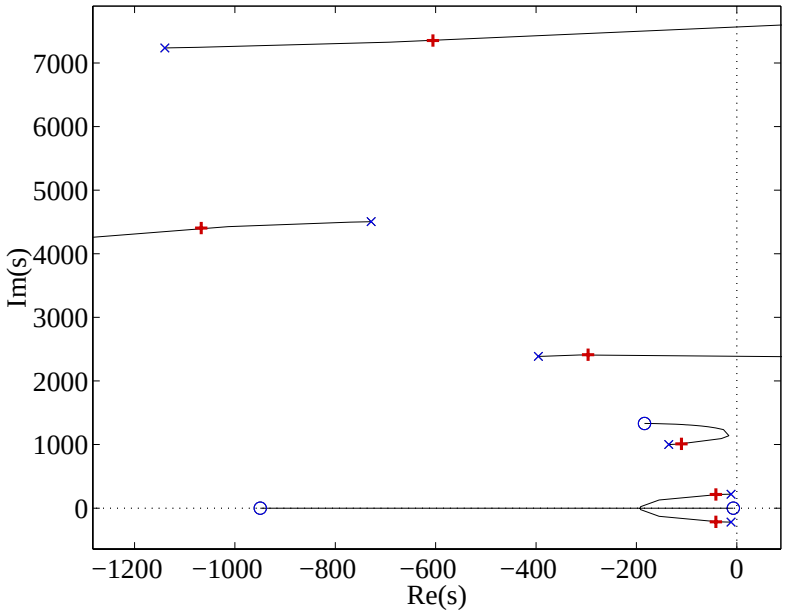


Figure 4.12: Lieu des racines entre le capteur de la vitesse du bout de la poutre et l'actionneur piézoélectrique (pôles $\times$ et zéros $\circ$ en boucle ouverte et pôles $+$ en boucle fermée pour $K_d = 605$).

Les réponses en fréquence de la poutre limitée aux cinq premiers modes propres sont présentées dans la Figure 4.13, pour trois gains de contrôle 137, 302 et 605. On peut noter que, effectivement, les premier et quatrième modes sont raisonnablement amortis, par rapport à la réponse en boucle-ouverte ($K_d = 0$), alors que les autres modes sont excités pour tous les gains de contrôle, comme le montre aussi la Figure 4.12. Les amortissements modaux supplémentaires ajoutés par le contrôleur sont présentés dans le Tableau 4.2 (Gain DVF $\dot{w}_L$). Ce dernier montre que les modes 2, 3 et 5 sont excités par le contrôle actif, c'est-à-dire, leurs amortissements sont réduits. Cependant, l'amortissement passif, dû au matériau viscoélastique du cœur de la poutre sandwich, fournit à ces modes une marge de stabilité raisonnable et, par conséquent, la diminution de leurs amortissements n'est pas suffisante pour les déstabiliser.

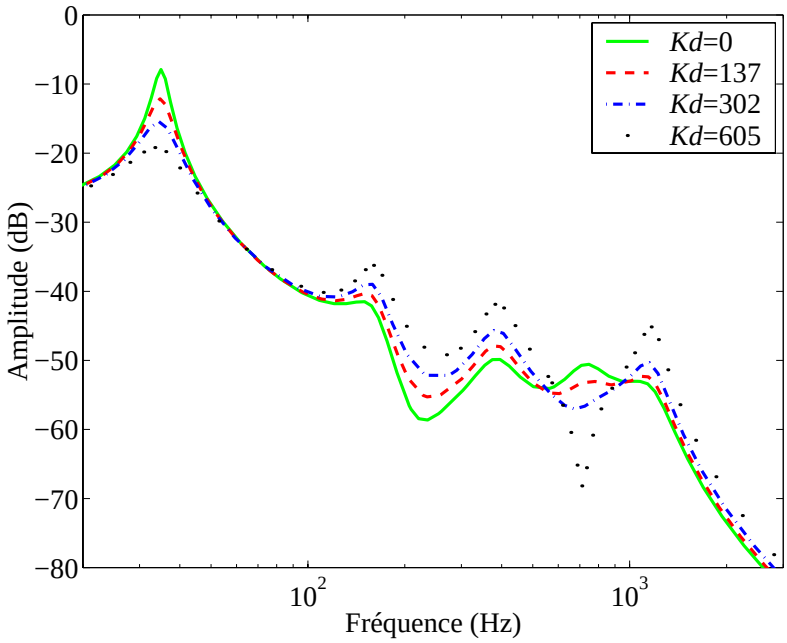


Figure 4.13: Fonction de réponse en fréquence limitée aux cinq premiers modes propres, entre le capteur piézoélectrique et la force de perturbation en boucle-ouverte et fermée, pour trois gains du contrôle par rétroaction de la vitesse du bout de la poutre.

Tableau 4.2: Amortissements modaux (%) passif et supplémentaires ajoutés par le contrôleur par rétroaction directe des vitesses $\dot{w}_L$ et $\dot{V}_S$ à gain maximum.

	1	2	3	4	5
Passif	5,2	13,4	16,3	16,0	15,6
Gain DVF $\dot{w}_L$	13,9	-2,6	-4,2	7,6	-7,3
Gain DVF $\dot{V}_S$	16,7	2,4	4,8	4,5	83,7

Les réponses transitoires, en boucle-ouverte et fermée, de la flèche du bout de la poutre, pour les trois gains de contrôle considérés, sont présentées dans la Figure 4.14. On remarque que la réponse vibratoire de la poutre est rapidement atténuée avec le contrôle actif couplé à l'amortissement passif. Les tensions de contrôle imposées à l'actionneur sont présentées dans la Figure 4.15. Afin d'obtenir cette performance comparable à celle du LQR, sans dépasser la tension limite (250 V) de l'actionneur, la flèche du bout de la poutre a dû être limitée à 0,36 mm, c'est-à-dire, 24% de celle considérée dans la sous-section précédente. La Figure 4.15 montre aussi des variations plus prononcées de la tension à $K_d = 605$, par rapport aux autres gains moins élevés, qui peuvent être dues au contrôle du quatrième mode.

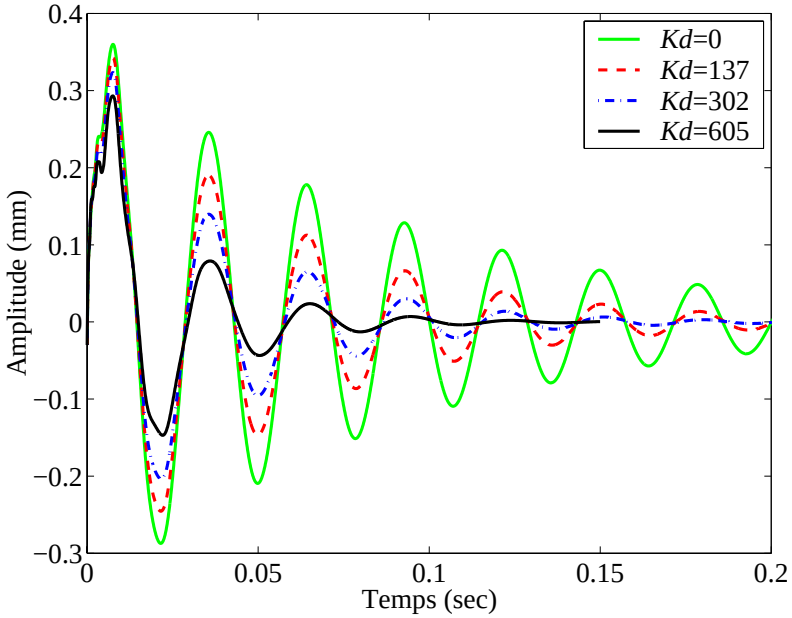


Figure 4.14: Réponses transitoires, en boucle-ouverte et fermée, de la flèche du bout de la poutre pour les trois gains du contrôle par rétroaction de la vitesse du bout de la poutre.

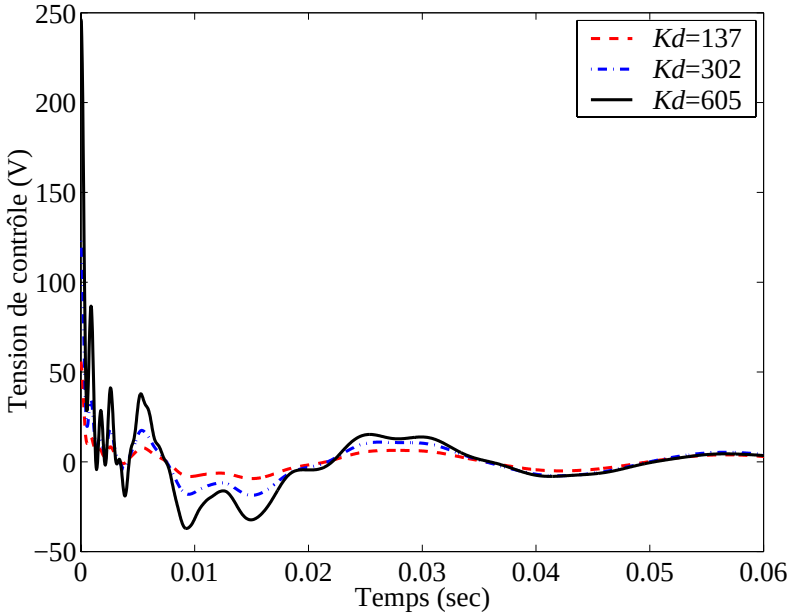


Figure 4.15: Tensions de contrôle imposées à l'actionneur pour les trois gains du contrôle par rétroaction de la vitesse du bout de la poutre.

Rétroaction de la dérivée temporelle de la tension du capteur piézoélectrique

Lorsque le capteur piézoélectrique collé sur la surface inférieure de la poutre sandwich est utilisé dans la boucle de contrôle, la tension V_S induite dans le capteur par les déformations de la poutre est mesurée et envoyée au contrôleur qui calcule sa dérivée temporelle et l'envoie, amplifiée par le gain de contrôle K_d, à l'actionneur piézoélectrique comme tension imposée $V_A = -K_d\dot{V}_S$. Dans le cas précédent, lorsque la poutre fléchi au premier mode, la tension qu'on doit imposer à l'actionneur pour annuler cette flexion a un signe opposé à celui de la flèche du bout de la poutre. C'est pourquoi l'application d'une rétroaction négative aboutit à une atténuation des vibrations dues à ce mode. Par contre, dans le présent cas, la flèche de la poutre induit des tensions opposées dans les deux pastilles piézoélectriques. Donc, l'application à l'actionneur d'une tension, dont le signe est le même que celui induit dans le capteur, tend à annuler la flèche. Par conséquent, contrairement au cas précédent, les gains de contrôle sont négatifs. La Figure 4.16 montre le lieu des racines entre les capteur et actionneur piézoélectriques collés sur les surfaces opposées de la poutre sandwich, pour des gains de contrôle entre 0 et $-\infty$. On observe que tous les modes sont amortis pour des gains de contrôle K_d faibles. Cependant, les amortissements des premier et cinquième modes sont réduits pour des gains très élevés ; la marge de stabilité fournie par l'amortissement viscoélastique est suffisante pour éviter la déstabilisation du cinquième mode mais pas celle du premier mode. Quant au deuxième mode, ses pôles sont presque annulés par un couple de zéros ; donc, l'amélioration de son amortissement ne peut qu'être faible. Les pôles en boucle-fermée $+$ pour un gain de contrôle $K_d = -13,5.10^{-3}$ sont aussi présentés dans la Figure 4.16, sachant que ceux correspondant au cinquième mode sont visibles sur l'axe $\mathrm{Im}(s) = 0$, car ce mode est suramorti par le contrôleur.

Dans la Figure 4.17, les réponses en fréquence de la poutre limitées aux cinq premiers modes propres sont présentées pour les trois gains de contrôle $-4,5.10^{-3}$, $-9,0.10^{-3}$ et $-13,5.10^{-3}$. Comme prévu à partir de la Figure 4.16, les cinq premiers modes sont amortis pour tous les gains de contrôle considérés. La Figure 4.17 montre que les résonances des modes 3, 4 et 5 sont presque totalement éliminées par le contrôle hybride, tandis que celles des premier et deuxième modes sont moins amorties. Ce contrôleur favorise donc l'amortissement des trois derniers modes contrairement à celui utilisant la flexion au bout de la poutre (voir Tableau 4.2, gain DVF $\dot{V}_S$). Ceci est dû à l'importance de la contribution de la flexion du bout de la poutre pour le premier mode. Cela n'empêche pas que le présent contrôleur soit plus efficace aussi pour contrôler le premier mode. Cette dépendance des performances d'amortissement avec les emplacements relatifs des actionneurs et capteurs constitue le principal inconvénient des contrôleurs du type DVF. Notamment, dans les deux cas étudiés dans cette section, le pouvoir amortissant des contrôleurs pour le premier mode est très limité si l'on tient compte de la limitation de la flèche maximale.

Les réponses transitoires de la flèche du bout de la poutre, avec et sans contrôle actif, sont analysées et présentées dans la Figure 4.18. On note que les vibrations transversales de la poutre sont atténuées, pour les trois gains de contrôle, aussi rapidement que par le premier contrôleur. La similitude entre les performances d'atténuation de la sortie des contrôleurs, relatifs à la flexion et à la tension du capteur, est due notamment à l'amor-

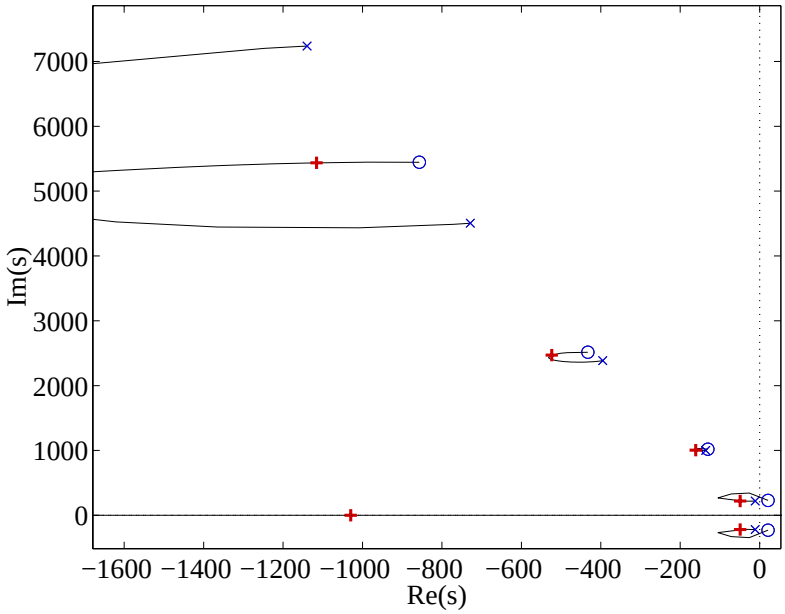


Figure 4.16: Lieu des racines entre les capteur et actionneur piézoélectriques collés sur les surfaces opposées de la poutre sandwich (pôles $\times$ et zéros $\circ$ en boucle ouverte et pôles $+$ en boucle fermée pour $K_d = -13,5.10^{-3}$).

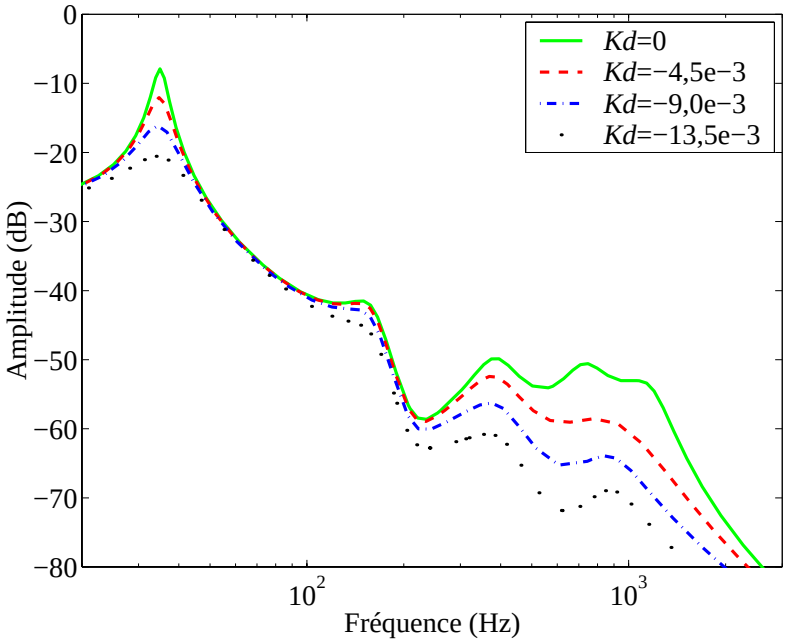


Figure 4.17: Fonction de réponse en fréquence limitée aux cinq premiers modes propres, entre le capteur piézoélectrique et la force de perturbation en boucle-ouverte et fermée, pour trois gains du contrôle par rétroaction de la tension du capteur piézoélectrique.

tissement en boucle-fermée du premier mode qui est similaire pour les deux contrôleurs. Les tensions de contrôle imposées à l'actionneur sont présentées dans la Figure 4.19.

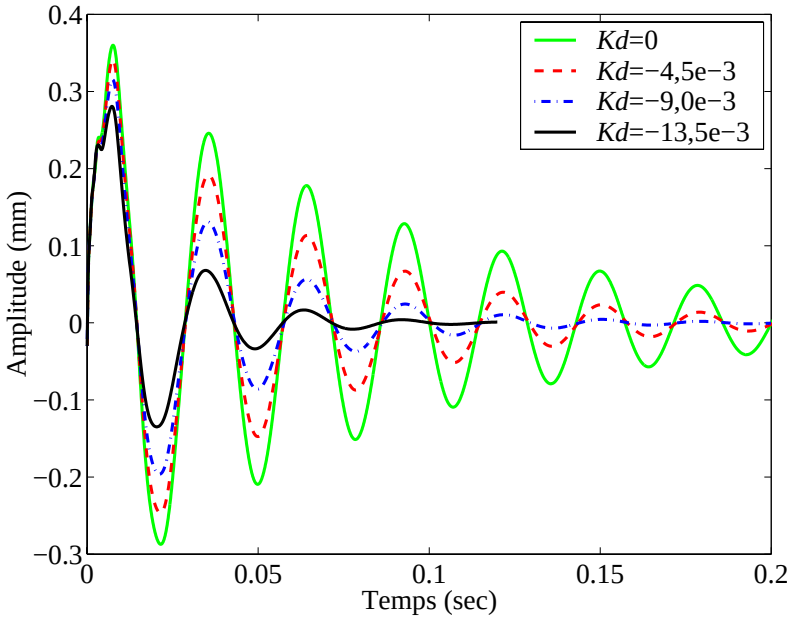


Figure 4.18: Réponses transitoires, en boucle-ouverte et fermée, de la flèche du bout de la poutre pour les trois gains du contrôle par rétroaction de la tension du capteur piézoélectrique.

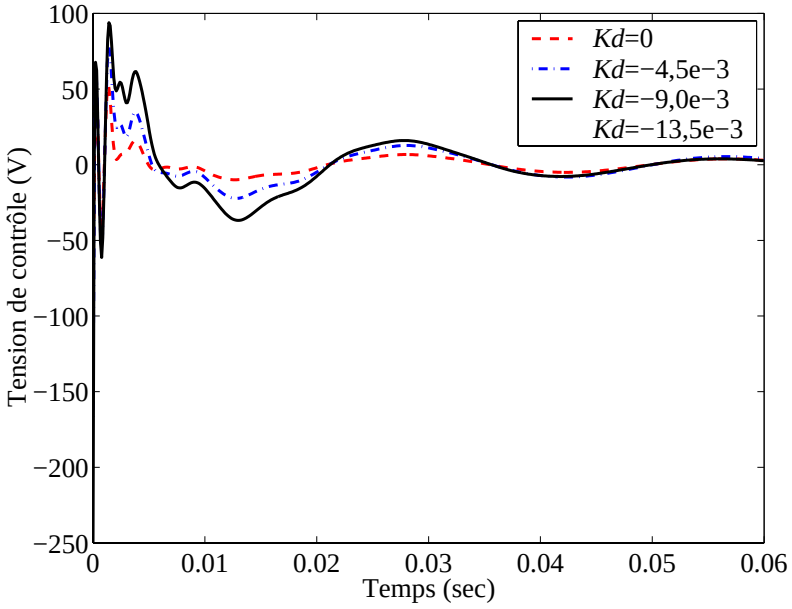


Figure 4.19: Tensions de contrôle imposées à l'actionneur pour les trois gains du contrôle par rétroaction de la tension du capteur piézoélectrique.

Évidemment, la fragilité de la polarisation des pastilles piézoélectriques limite le gain de contrôle. Il convient de remarquer que les oscillations rapides de la tension de contrôle s'atténuent très rapidement puisque le deuxième contrôleur amorti préférentiellement les modes à fréquences élevées, contrairement au premier contrôleur.

Il a été montré ici que le contrôle par rétroaction directe des vitesses peut se montrer efficace pour des systèmes plus ou moins co-localisés. Cependant, les instabilités qui peuvent être induites sur certains modes font que la conception du système de contrôle soit très dépendante de la configuration actionneur/capteur et des amortissements modaux passifs.

4.5.3 Prise en compte d'un observateur d'état

Dans cette section, on applique la théorie d'observateurs d'état présentée précédemment (cf. §4.2.5) à la configuration optimale de la Figure 4.5, c'est-à-dire, pour $h_v = 0,1$ mm et $a = 70$ mm. L'intérêt de l'observateur est de pouvoir effectuer un contrôle optimal, plus robuste que celui par DVF présenté précédemment, tout en mesurant seulement la sortie $\mathbf{y}$, qui représente dans ce cas-ci la tension du capteur. Ainsi, en utilisant le principe de séparation (cf. §4.2.5), le contrôle LQR itératif est d'abord évalué puis couplé à l'observateur d'état, aboutissant à un algorithme LQG. La principale difficulté introduite par l'observateur est le couplage de sa propre dynamique avec celle du système mécanique. Puisque, l'observateur ne connaît pas, à priori, les conditions initiales, l'erreur d'observation initiale est $\mathbf{e}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0)$. Par conséquent, il est clair que tant que l'erreur de l'observateur ne s'annule pas, le contrôleur ne pourra pas contrôler parfaitement la structure. Tandis que, si les conditions initiales sont connues par l'observateur ($\mathbf{e}(0) = \mathbf{0}$), la réponse en boucle-fermée est strictement égale à celle avec un contrôle LQR supposant toutes les variables mesurables.

Considérant le cas réaliste où les conditions initiales sont inconnues, les réponses du système contrôlé par LQG sont comparées avec celles du système contrôlé par LQR et non contrôlé, pour plusieurs vitesses de l'observateur d'état. La covariance du bruit d'entrée est fixée à $\mathbf{W} = 10^{-5}$ et on fait varier celle du bruit de sortie $\mathbf{V}$ entre 1 et 10^{-10}. Pour $\mathbf{V} = 1$, les Figures 4.20 et 4.21 montrent que l'erreur de l'observateur s'amortie plus lentement que le système en boucle-fermée. Donc, le contrôleur ne peut pas suivre la réponse du système et, par conséquent, le contrôle n'est pas possible. Cela est dû à la valeur relativement élevée de $\mathbf{V}$, correspondant à une mesure bruiteuse, qui induit un gain d'observation faible. En effet, puisque $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_g\tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}_g(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{e})$, où $\mathbf{K}_g$ est le gain de contrôle optimal calculé par l'algorithme LQR itératif, et que l'estimation de l'état n'est pas possible, la tension de contrôle est nulle (Figure 4.21) et la réponse du système en boucle fermée coïncide avec celle en boucle ouverte (Figure 4.20).

En réduisant la covariance du bruit de sortie à $\mathbf{V} = 10^{-8}$, l'erreur de l'observateur converge rapidement vers zéro et le système est estimé avant d'être amorti, comme le montre la Figure 4.22. Cependant, pour une performance assez similaire, la tension de contrôle du système contrôleur-observateur est moins élevée à l'état initial et plus élevée pour les autres instants de temps, que celle obtenue en considérant connues toutes les variables d'état (Figure 4.23). Cela est dû au fait que l'estimation de la réponse transitoire de la poutre contrôlée faite par l'observateur converge moins rapidement que l'augmentation de la tension (Figure 4.22).

Afin d'accélérer encore l'estimation de l'état, la covariance du bruit de sortie est réduite à $\mathbf{V} = 10^{-10}$. Pourtant, comme le montrent les Figures 4.24 et 4.25, bien que l'estimation soit plus rapide, la performance du contrôleur se dégrade et la tension li-

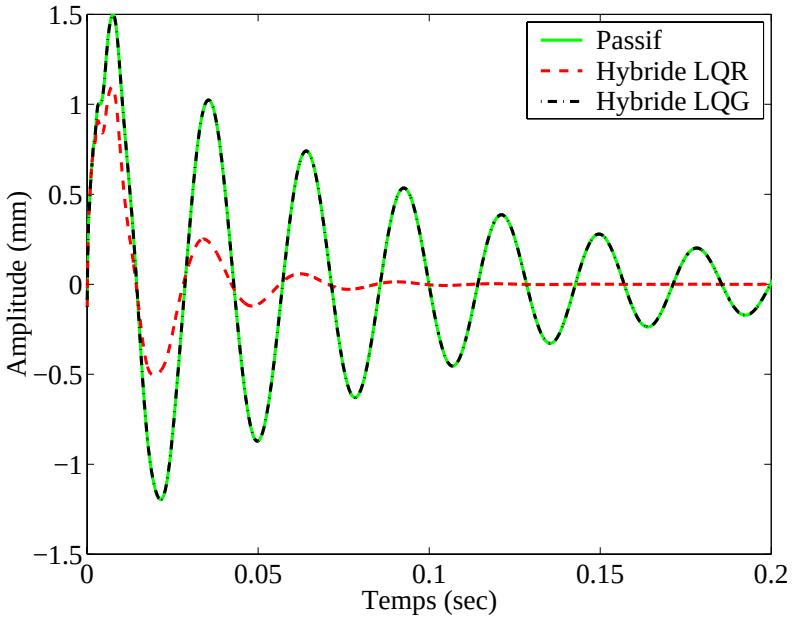


Figure 4.20: Réponse transitoire en boucle fermée de la poutre sandwich contrôlée avec observateur d'état de covariance du bruit de sortie $\mathbf{V} = 1$.

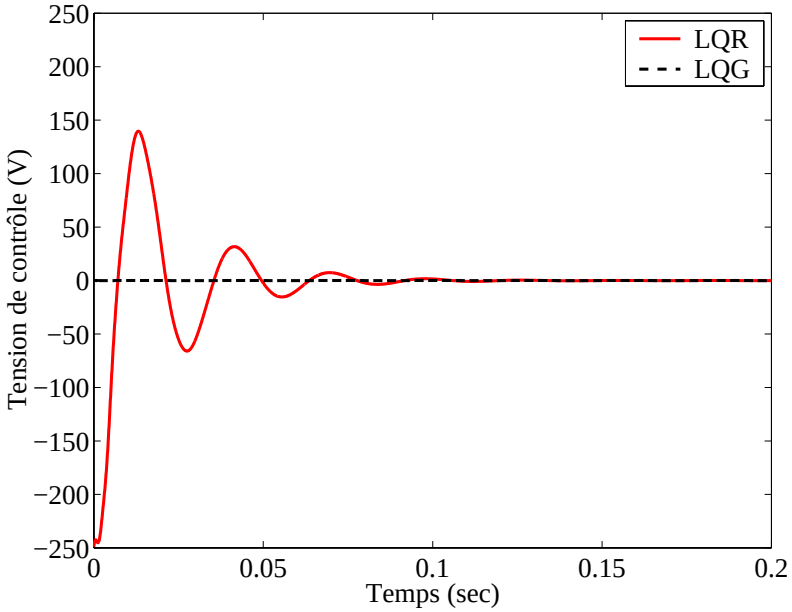


Figure 4.21: Tension maximale dans l'actionneur pour le contrôleur optimal avec observateur d'état de covariance du bruit de sortie $\mathbf{V} = 1$.

mite de l'actionneur est dépassée. En effet, l'amplitude maximale est plus faible dans ce cas ($\mathbf{y}_{max} = 1,40$ mm contre $\mathbf{y}_{max} = 1,43$ mm pour $\mathbf{V} = 10^{-8}$), bien qu'elle est encore plus élevée que celle du LQR ($\mathbf{y}_{max} = 1,10$ mm). Cependant, le temps de réponse $t_s = 0,14$ secondes est plus élevé que celui pour $\mathbf{V} = 10^{-8}$ et pour le LQR ($t_s = 0,12$ secondes). En plus, d'après la Figure 4.25, l'observateur excite la structure après estimation.

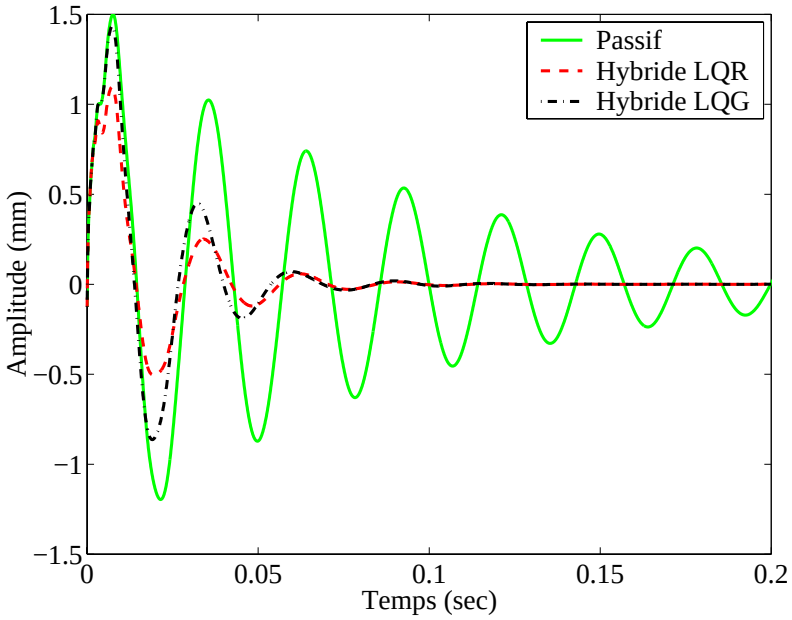


Figure 4.22: Réponse transitoire en boucle fermée de la poutre sandwich contrôlée avec observateur d'état de covariance du bruit de sortie $\mathbf{V} = 10^{-8}$.

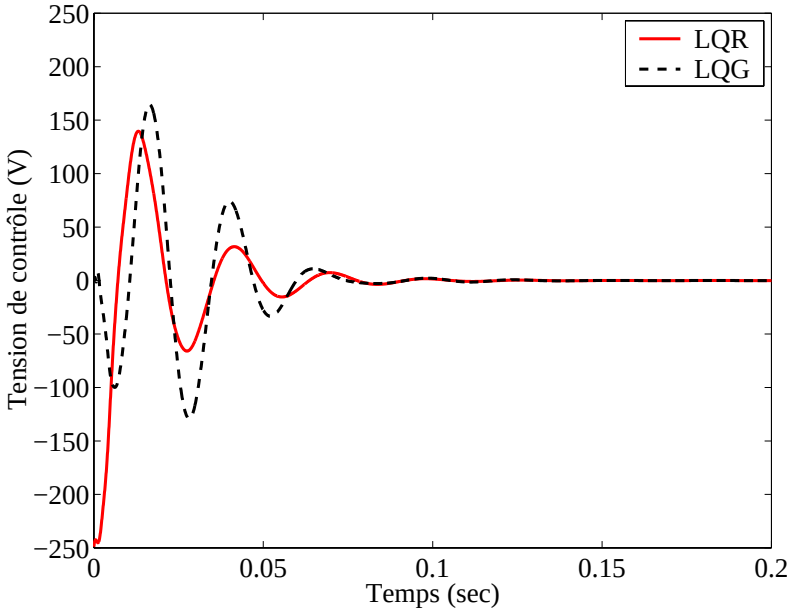


Figure 4.23: Tension maximale dans l'actionneur pour le contrôleur optimal avec observateur d'état de covariance du bruit de sortie $\mathbf{V} = 10^{-8}$.

Ce qui explique que la tension de contrôle est plus élevée et qu'elle s'atténue moins rapidement. Ses oscillations, présentes dans la Figure 4.25, pourraient être dues à l'excitation du troisième mode. On peut conclure qu'à cause de l'augmentation excessive du gain de l'observateur, le système de contrôle devient sensible aux modes peu contrôlés, en particulier au troisième dans ce cas. De plus, davantage de diminution de la covariance du

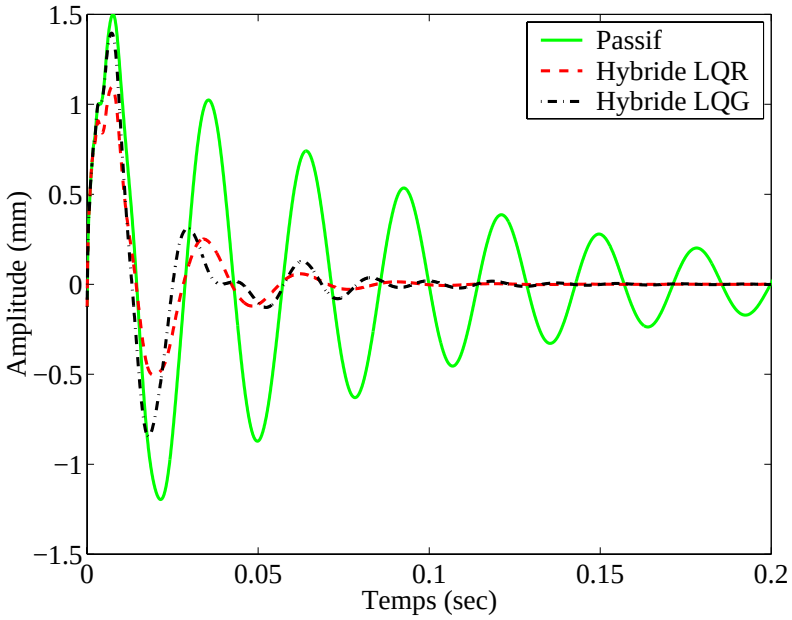


Figure 4.24: Réponse transitoire en boucle fermée de la poutre sandwich contrôlée avec observateur d'état de covariance du bruit de sortie $\mathbf{V} = 10^{-10}$.

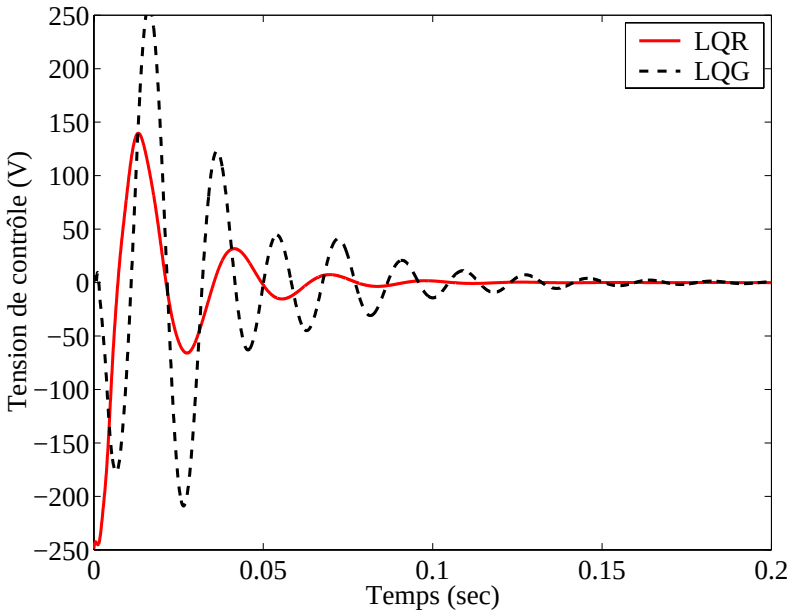


Figure 4.25: Tension maximale dans l'actionneur pour le contrôleur optimal avec observateur d'état de covariance du bruit de sortie $\mathbf{V} = 10^{-10}$.

bruit de sortie n'améliore ni la performance du contrôleur ni l'atténuation de la tension dans l'actionneur.

Il est clair que la prise en compte d'un observateur d'état augmente la dimension des matrices du système couplé contrôleur-observateur résultant. Cependant, grâce au principe de séparation, la conception de l'observateur n'affecte pas celle du contrôleur,

à moins qu'il est tenu compte de la modification de la performance ou de la tension de contrôle nécessaire. Un des avantages du système couplé contrôleur-observateur, pour le cas étudié, est le fait que la tension de contrôle ne croît qu'après que la réponse de la structure soit un peu amortie passivement et, par conséquent, la tension maximale pour le meilleur cas du LQG (avec $\mathbf{V} = 10^{-8}$) est inférieure à celle du LQR correspondant pour une performance de contrôle presque aussi satisfaisante. Néanmoins, comme la covariance du bruit de sortie n'est pas un paramètre du système mais plutôt une quantité liée au traitement des signaux, elle ne peut donc être choisie librement.

4.6 Conclusion

Les modèles réduits développés dans le chapitre précédent ont été appliqués à la théorie du contrôle optimal quadratique du type LQR. Un algorithme itératif a été proposé pour régler automatiquement la pondération de contrôle afin de respecter les limitations de tension, imposées par le champ électrique maximum supportable par les actionneurs piézoélectriques. La prise en compte d'un observateur d'état, aboutissant à un contrôleur du type LQG, a été présentée. Les systèmes de contrôle ont été ensuite appliqués à l'étude du contrôle actif d'une poutre sandwich déjà amortie par son cœur viscoélastique, à travers deux pastilles collées symétriquement sur ses surfaces supérieure et inférieure. Les résultats montrent que, pour des couches viscoélastiques minces, le contrôle actif LQR amorti fortement les résonances de quelques modes propres tout en gardant l'amortissement passif des autres modes. Cependant, vu que l'algorithme LQR suppose que toutes les variables d'état sont mesurées, ce qui n'est pas réaliste, d'autres contrôleurs ont été analysés. Ainsi, il a été proposé d'utiliser la pastille piézoélectrique collée sur la surface inférieure de la poutre comme capteur. Dans un premier temps, un algorithme de contrôle très simple a été utilisé, consistant à envoyer la dérivée du signal du capteur amplifié à l'actionneur. Les résultats ont montré que ce contrôleur dérivatif est assez performant pour amortir quelques modes, mais, en même temps, il excite d'autres modes et, en plus, sa performance est limitée par les positions relatives des actionneurs et capteurs. D'ailleurs, une comparaison de ce contrôleur avec un autre utilisant la rétroaction des mesures d'un capteur de déplacement de l'extrémité libre de la poutre, au lieu du capteur piézoélectrique, a montré que de bonnes performances peuvent être obtenues pour certains modes, mais au prix de la déstabilisation d'autres modes. Dans un deuxième temps, en utilisant un observateur d'état optimal, le contrôleur du type LQG a aussi été construit afin d'estimer l'influence de ses paramètres dans la performance de contrôle par rapport au contrôleur LQR. Les résultats ont montré que, pour le cas étudié, une performance de contrôle presque aussi satisfaisante que celle du LQR a pu être obtenue par le contrôleur LQG avec une tension de contrôle inférieure.

Chapitre 5

Application aux contrôles actif et hybride actif-passif des vibrations

5.1 Introduction

Ce chapitre consiste, dans un premier temps, à présenter une analyse numérique des mécanismes d'action piézoélectrique, pour le cas statique, suivie de quelques résultats de performance du contrôle actif en utilisant le mécanisme d'action par cisaillement, et, dans un deuxième temps, utiliser les trois modèles viscoélastiques présentés précédemment, à savoir ADF, GHM et MSE, associés à une stratégie de contrôle actif piézoélectrique, pour traiter quelques exemples de poutre partiellement couverte par des revêtements hybride passif (viscoélastique) - actif (piézoélectrique) avec et sans dépendance en température.

Les mécanismes d'action piézoélectrique, par extension et par cisaillement, sont comparés à travers une analyse statique, c'est-à-dire, pour les cas de déformation de la poutre sous l'action d'un champ électrique imposé aux actionneurs piézoélectriques. Il est clair, que dans ce cas, les potentiels électriques dans chaque couche piézoélectrique sont connus ; par conséquent, l'élément fini PSAP, sans degrés de liberté électriques (cf. §2.3.1), est utilisé. Cette étude est une application aux problèmes pratiques de contrôle de forme à travers la conception de structures intelligentes. L'application de ces mécanismes d'action au contrôle actif de vibrations est ensuite étudiée. En effet, bien que les actionneurs par extension sont déjà largement utilisés pour cela, aucune référence quant à l'utilisation des actionneurs par cisaillement n'a été trouvée dans la littérature. Pourtant, l'étude de ces derniers montre qu'ils sont tout aussi efficaces pour le contrôle de vibrations structurales. Les actionneurs piézoélectriques par extension sont ensuite associés à des revêtements viscoélastiques contraints pour étudier des traitements amortissants hybride actif-passif. Ainsi, la performance des revêtements contraints actifs est analysée et comparée à celle des revêtements passifs pour plusieurs variations de paramètres. Puis, d'autres traitements hybrides, comme ceux des revêtements contraints passifs associés à un contrôle purement actif, sont étudiés. Afin de trouver les conditions d'optimalité de chaque traitement, des éléments de comparaison entre les traitements hybrides sont ainsi présentés. Enfin, les effets de la température sur les performances d'amortissement hybride sont étudiés.

5.2 Analyse statique des mécanismes d'action piézoélectrique

Dans cette section, on considère une poutre élastique encastrée-libre déformée à travers une action piézoélectrique, par extension (EAM) ou par cisaillement (SAM). La configuration géométrique de l'exemple considéré est présentée dans la Figure 5.1. Les propriétés des matériaux sont données dans l'annexe A. L'actionneur par cisaillement est deux fois plus épais que ceux par extension pour que la construction soit symétrique. D'autre part, pour que le champ électrique imposé dans les deux types d'actionneur soit le même, on considère une tension deux fois plus élevée pour l'actionneur par cisaillement. Ainsi, des tensions de 10 V et 20 V sont imposées aux actionneurs par extension et par cisaillement, respectivement.

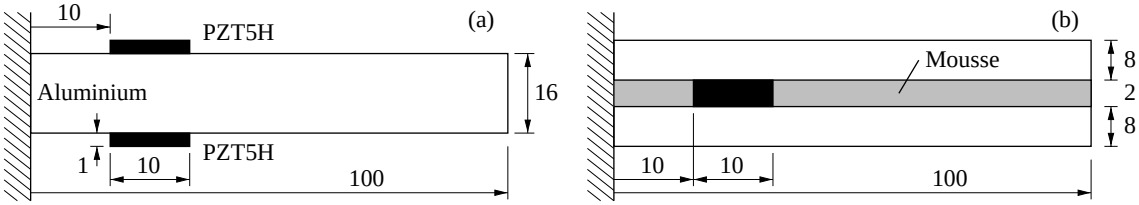


Figure 5.1: Configurations d'action par extension (a) et par cisaillement (b) d'une poutre encastrée-libre (dimensions en mm et pas à l'échelle).

Bien que ces deux mécanismes soient différents par construction, il est intéressant d'analyser ce qui se passe dans les actionneurs et dans la structure lors de l'application d'un champ électrique. Les déformées des poutres actionnées par extension et par cisaillement sont présentées dans la Figure 5.2.

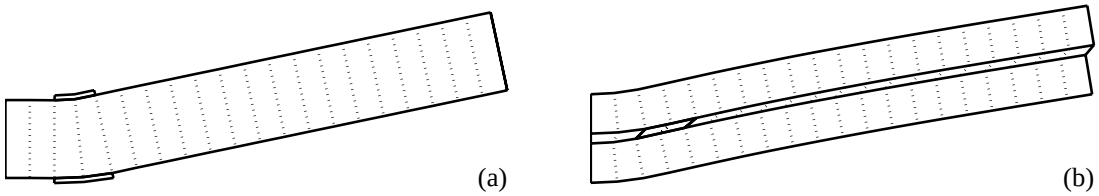


Figure 5.2: Déformées des poutres sandwich actionnées par extension (a) et par cisaillement (b).

Dans un premier temps, les contraintes axiales induites dans les poutres déformées par l'action piézoélectrique sont étudiées. On observe, dans la Figure 5.3a, que les contraintes axiales sont beaucoup plus élevées dans les actionneurs par extension que dans la poutre élastique. Comme prévu, pour fléchir la poutre, l'actionneur collé sur la surface supérieure de la poutre est en compression tandis que celui de l'autre surface est en traction. On note aussi que les contraintes axiales varient linéairement, aux deux extrémités des actionneurs, mais sont presque constantes, à leurs centres. C'est aussi dans cette dernière position que la discontinuité des contraintes axiales, aux interfaces

actionneurs/poutre, est la plus élevée. Les contraintes axiales dans l'épaisseur de l'actionneur en sandwich (SAM), sont présentées dans la Figure 5.3b. On constate qu'elles sont beaucoup moins élevées que celles dans les actionneurs par extension. Ceci est dû, premièrement, à la position de l'actionneur SAM, proche de la ligne moyenne de la poutre et, deuxièmement, à la façon dont il déforme la poutre (Figure 5.2b).

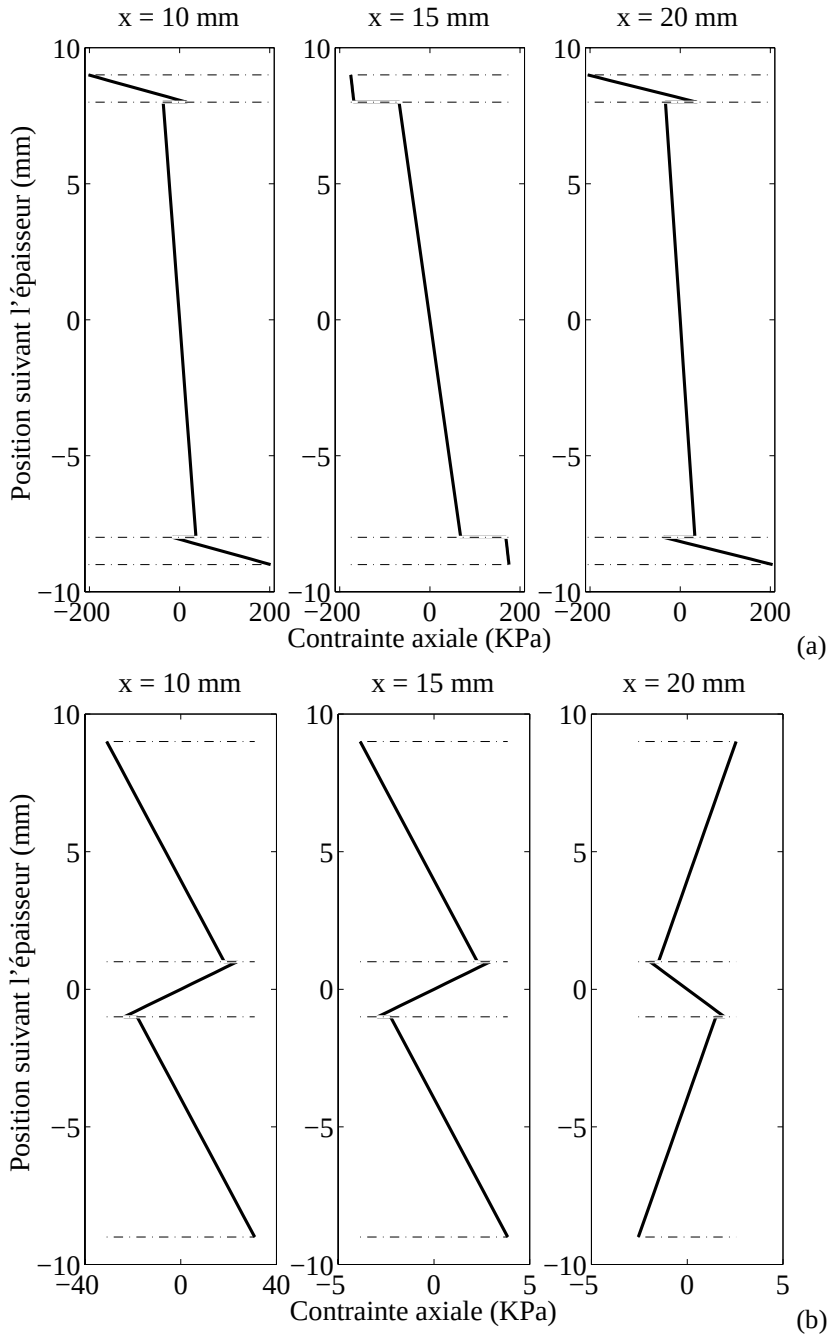


Figure 5.3: Contraintes axiales dans l'épaisseur des poutres sandwich actionnées par extension (a) et par cisaillement (b).

Puisque l'actionneur par cisaillement induit des déformations de cisaillement dans

le cœur de la poutre sandwich, il est aussi intéressant d'analyser la variation de ces déformations suivant la longueur de la poutre. Par ailleurs, on peut les comparer aux déformations du cœur élastique dans le cas de l'action par extension. D'après la formulation théorique de la poutre sandwich présentée au chapitre 2, les actionneurs par extension induisent, pour le cas symétrique, des moments concentrés. Donc, on peut prévoir que le cisaillement induit par cette action piézoélectrique dans la poutre soit nul. La Figure 5.4a montre effectivement que le cisaillement du cœur élastique s'annule dans la partie sous les pastilles piézoélectriques. En outre, il est constant pour toute position au delà de celle des actionneurs. Pour le mécanisme d'action par cisaillement, il est clair, d'après la Figure 5.4b, que le cisaillement maximum se produit dans l'actionneur et diminue lentement jusqu'au bout de la poutre, ce qui justifie le terme *action par cisaillement*. À travers une variation des paramètres, on observe que la valeur à laquelle le cisaillement converge au bout de la poutre est fonction de la rigidité des peaux. Pour des peaux souples, cette valeur s'annule ; par conséquent, ces actionneurs sont présumés plus efficaces pour des peaux relativement rigides.

Dans ce qui suit, l'analyse se focalise sur les performances des mécanismes d'action par extension et par cisaillement. Pour cela, la flèche du bout de la poutre sous l'action d'un même champ électrique imposé est prise comme critère de performance. En effet, cette flèche est maximale pour les configurations d'action considérées. Dans un premier temps, on analyse l'influence des position du centre et longueur des actionneurs sur leur capacité de fléchir la poutre. Ainsi, la Figure 5.5a montre que l'action par extension est très efficace pour des actionneurs longs et positionnés près de l'encastrement. Ce résultat correspond tout à fait à ceux généralement trouvés dans la littérature. D'autre part, on voit dans la Figure 5.5b que l'actionneur par cisaillement, qui n'est pas aussi efficace dans ce cas, présente une performance presque constante pour les différentes position et longueur étudiées. Ceci nous permet de dire que la performance des actionneurs par cisaillement est moins dépendante de leurs position et longueur. Ce résultat est très intéressant pour les cas pratiques où la longueur du traitement est limitée et où les positions optimales du traitement sont inaccessibles.

Par ailleurs, on analyse l'influence de l'épaisseur des actionneurs sur leurs performances. La Figure 5.6 montre que l'action par extension est optimale pour des actionneurs minces, alors que celle par cisaillement l'est pour le cas contraire. En réalité, ces résultats dépendent aussi de la rigidité relative structure/actionneur. En effet, la rigidité de la configuration d'action par extension augmente pour des actionneurs épais, tandis que celle de la configuration d'action par cisaillement diminue. C'est pourquoi, on s'intéresse maintenant à l'influence du rapport entre la rigidité de la structure et celle de l'actionneur sur la performance. Dans la Figure 5.7, on observe que les actionneurs par extension sont très efficaces pour des structures souples, alors que ceux par cisaillement sont moins dépendants de ce paramètre et présentent une valeur optimale dans une région où la rigidité de la structure est légèrement supérieure à celle de l'actionneur.

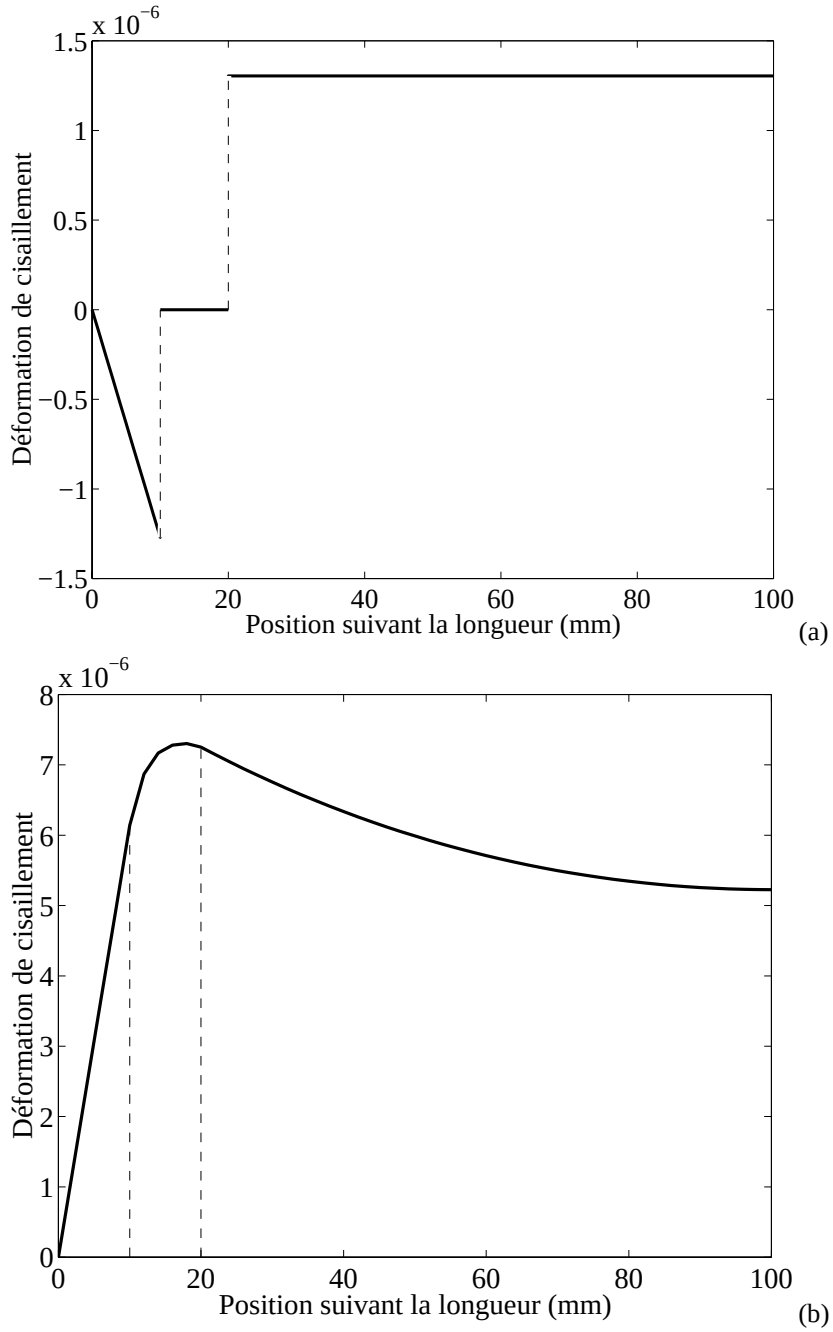


Figure 5.4: Déformations de cisaillement du cœur suivant la longueur de la poutre : (a) EAM, (b) SAM.

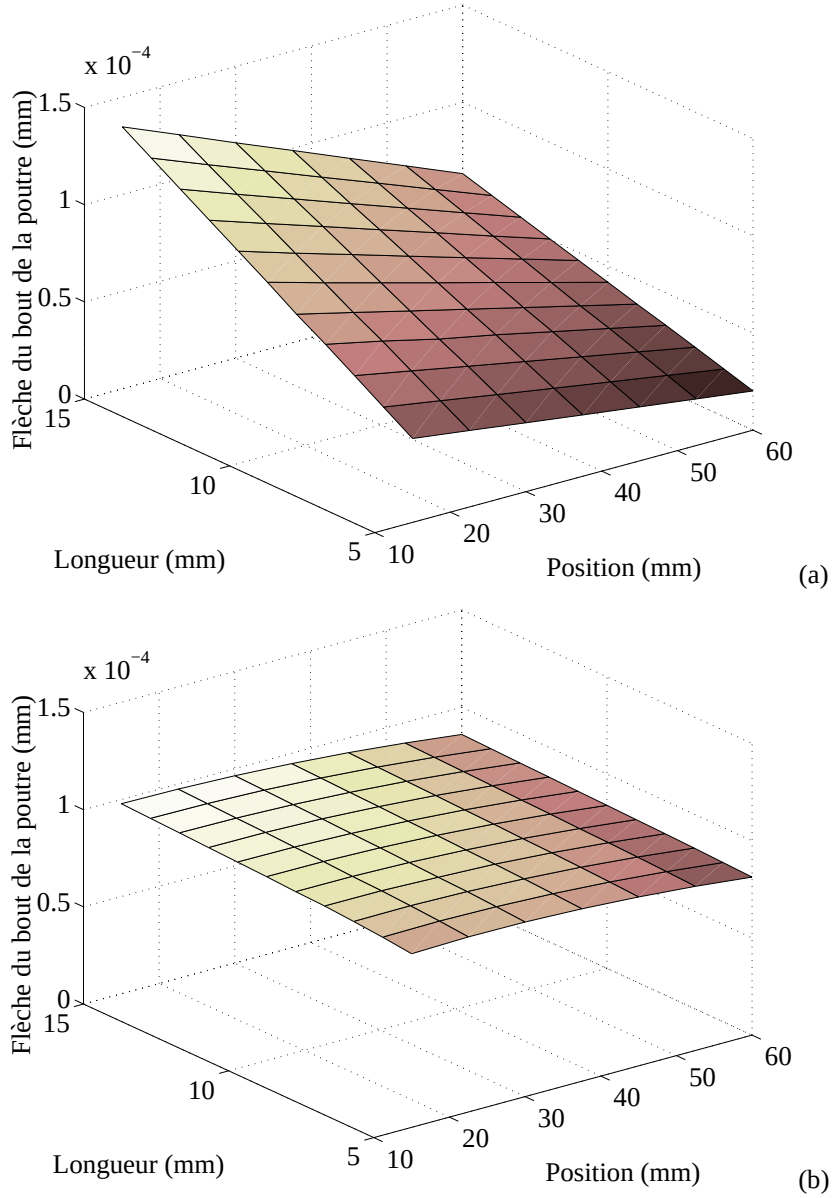


Figure 5.5: Variation de la flèche du bout de la poutre avec les position du centre et longueur des pastilles piézoélectriques : (a) EAM, (b) SAM.

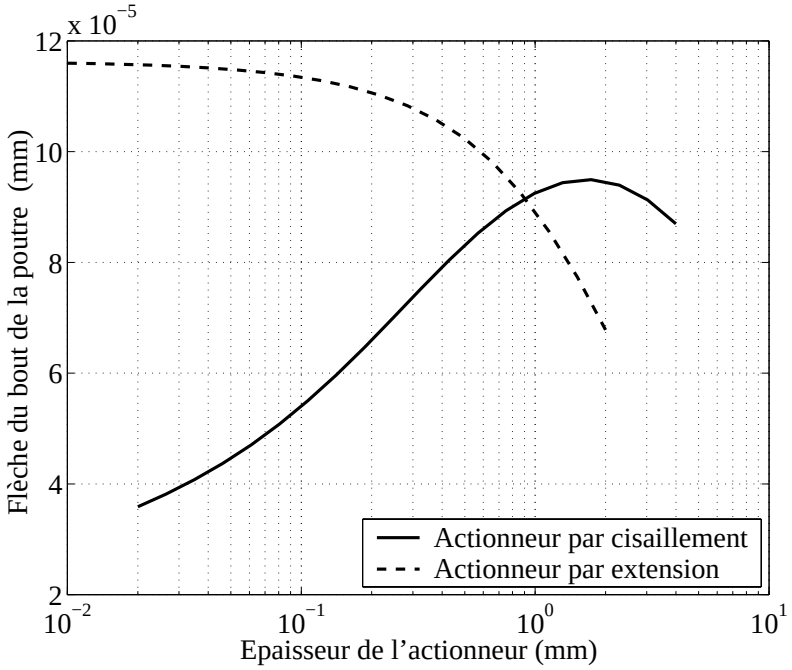


Figure 5.6: Variation de la flèche du bout de la poutre avec l'épaisseur de l'actionneur.

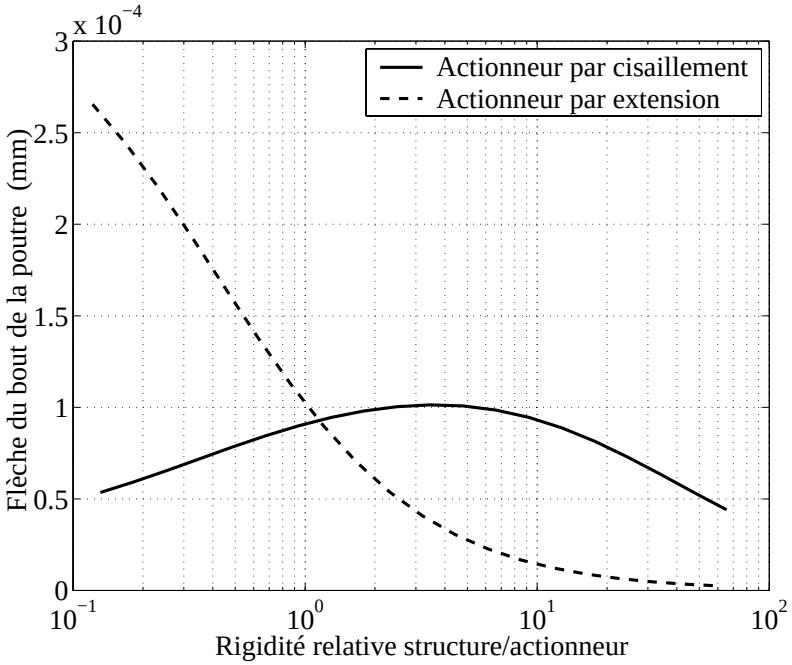


Figure 5.7: Variation de la flèche du bout de la poutre avec la rigidité relative de la structure.

5.3 Contrôle actif par action piézoélectrique

Dans la section précédente, il a été montré que les actionneurs piézoélectriques par cisaillement peuvent être efficaces pour fléchir une poutre encastrée-libre. Par conséquent, dans cette section, ce mécanisme d'action est appliqué au contrôle de vibrations d'une telle poutre. Considérons, donc, une poutre sandwich encastrée-libre, à peaux actives ou à cœur actif, dont les propriétés géométriques et matérielles sont présentées dans les Figure 5.8 et Annexe A, respectivement.

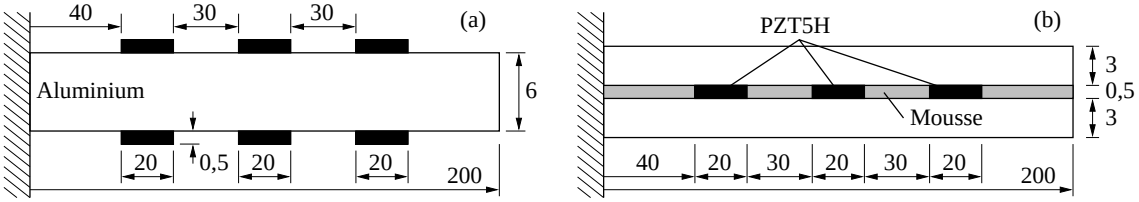


Figure 5.8: Configurations d'action par extension (a) et par cisaillement (b) d'une poutre encastrée-libre.

On s'intéresse à l'amortissement actif des vibrations induit par les actionneurs par extension et par cisaillement, lorsqu'ils sont couplés à une loi de contrôle optimale. Trois actionneurs de même longueur sont positionnés à 40 mm de l'encastrement et avec un espacement de 30 mm entre eux. Ils sont soit collés à la surface d'une poutre soit pris en sandwich entre deux peaux, comme présenté dans la Figure 5.8. Les deux configurations sont différentes par construction, néanmoins, les performances d'amortissement actif qu'elles fournissent sont comparées afin d'analyser les applications optimales pour le mécanisme d'action par cisaillement.

L'amortissement modal actif fournit par les deux mécanismes est évalué à partir des valeurs propres complexes d'un modèle réduit composé des quinze premiers modes propres de flexion des deux configurations de poutre. Les poutres sont excitées par une force de perturbation transversale ponctuelle positionnée en $x = L/3$. La flèche de ce même point est mesurée. La fonction de réponse en fréquence entre ces force de perturbation et flèche est présentée dans la Figure 5.9. Tous les modes ont été supposés uniformément amortis par un amortissement visqueux de 1%. On note que quelques modes sont très peu observables, comme les quatrième et septième, pour les deux configurations. D'autre part, un certain décalage des modes est aussi notable du fait des différences des deux configurations (rigidité, masse,...). Les modèles modaux résultants sont ensuite utilisés pour la conception du contrôle actif optimal. L'algorithme itératif présenté au chapitre 4 (Figure 4.2) est utilisé avec une tension maximale de 250 V (soit un champ électrique maximum de 500 V/mm dans chaque actionneur) et une flèche maximale de 0,1 mm. Les pondérations de sortie et d'entrée sont $\mathbf{Q} = \text{diag}(\omega_1^3, \ldots, \omega_{15}^3, 0, \ldots, 0)$ et $\mathbf{R} = \gamma\,\mathbf{I}$, afin de bien contrôler les modes propres à fréquences plus élevées.

Afin d'étudier les régions d'optimalité des actionneurs par cisaillement, par rapport à ceux par extension, ont fait varier plusieurs paramètres. Dans un premier temps, on considère un actionneur unique dont le centre coïncide avec celui de la poutre (correspondant au deuxième actionneur de la Figure 5.8) et la longueur varie dans l'intervalle [20–140] mm. Les amortissements relatifs $\tilde{\zeta}_{sam}$ et $\tilde{\zeta}_{eam}$ du contrôle actif sont calculés par

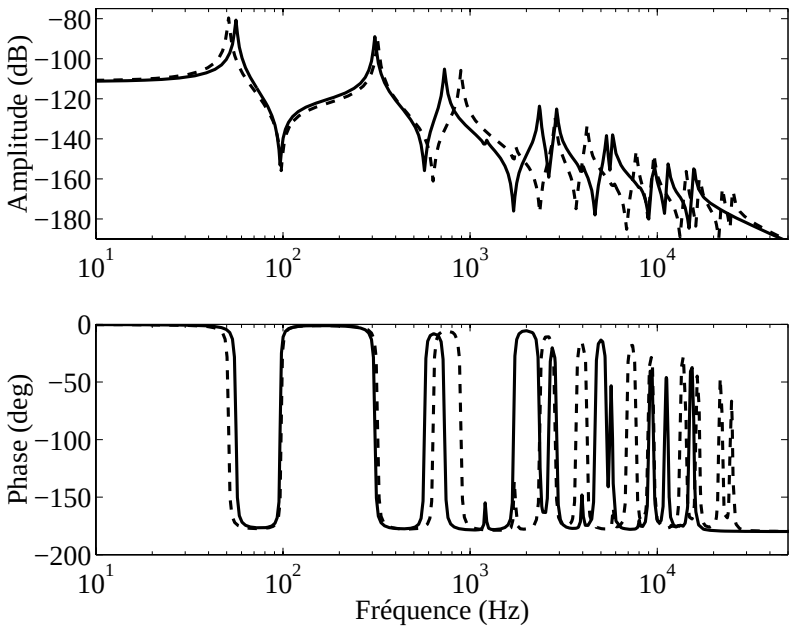


Figure 5.9: Fonction de réponse en fréquence en boucle-ouverte de la flèche en $x = L/3$ des poutres sandwich (trait continu : SAM, trait discontinu : EAM).

le pourcentage d'amortissement additionnel fourni à la structure $(100\zeta - 1)$. Pour comparer les performances des deux mécanismes, le rapport entre leurs amortissements relatifs est évalué, pour chaque longueur de l'actionneur et mode propre. Il est présenté dans la Figure 5.10, où les carreaux clairs représentent les rapports élevés et les carreaux foncés sont pour les rapports faibles. Un facteur additif d'échelle de 5 a été considéré pour une meilleure visualisation. On observe que l'avantage des actionneurs par cisaillement, par rapport à ceux par extension, est plus notable pour les modes plus élevés, notamment les modes 5, 7, 11, 13 et 15. De plus, pour la majorité des modes, ces actionneurs sont plus efficaces lorsqu'ils sont courts excepté le treizième mode qui est plus amorti par un actionneur long. Puisqu'il est connu que les actionneurs par extension sont beaucoup moins efficaces pour des actionneurs courts, ces résultats signifient que l'action par cisaillement est préférable quand la longueur des actionneurs est limitée.

Pour des considérations pratiques, la longueur de l'actionneur est fixée à 30 mm. Pour choisir sa position optimale pour cette longueur, on fait varier la position de l'extrémité gauche de l'actionneur dans l'intervalle [30–150] mm. Le rapport correspondant entre les amortissements relatifs des mécanismes d'action par cisaillement et par extension est présenté dans la Figure 5.11. On remarque que ce rapport est beaucoup moins dépendant de la position des actionneurs que de leur longueur. Cependant, pour les modes plus élevés, les actionneurs par cisaillement sont plus efficaces que ceux par extension lorsqu'ils sont positionnés loin de l'encastrement. Ce résultat est, en fait, dû à la perte de performance des actionneurs par extension pour ces cas. On note aussi que le mécanisme d'action par cisaillement est beaucoup moins dépendant de la position, comme dans le cas statique de la section précédente.

Dans un deuxième temps, pour la configuration à trois actionneurs de la Figure 5.8,

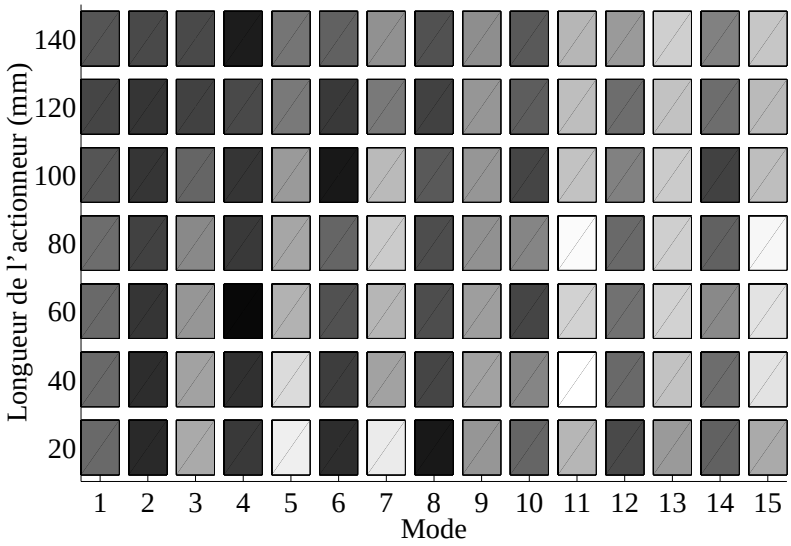


Figure 5.10: Variation de l'amortissement relatif ($\log_{10}(\tilde{\zeta}_{sam}/\tilde{\zeta}_{eam})+5$) avec la longueur d'un actionneur unique.

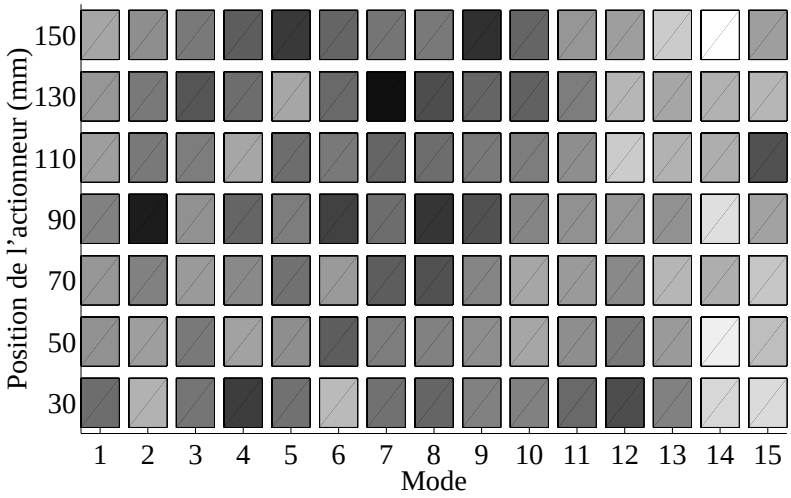


Figure 5.11: Variation de l'amortissement relatif ($\log_{10}(\tilde{\zeta}_{sam}/\tilde{\zeta}_{eam})+6$) avec la position d'un actionneur unique.

l'influence de la rigidité de la structure sur la performance du contrôle actif est analysée. Ainsi, le rapport entre les amortissements relatifs $\tilde{\zeta}_{sam}$ et $\tilde{\zeta}_{eam}$ est calculé pour les quinze premiers modes de flexion et pour des valeurs de la rigidité relative entre la poutre et l'actionneur variant dans l'intervalle [1–100]. D'après la Figure 5.12, pour des structures rigides, tous les modes sont mieux contrôlés par l'action par cisaillement. Dans ce cas, cette différence est visible même pour les trois premiers modes qui sont, généralement, mieux contrôlés par l'action par extension. Cela s'explique, d'une part, par la perte de performance des actionneurs par extension pour des poutres rigides. En effet, ils induisent une force constante dans tous ces cas, qui, évidemment, déforme moins bien une poutre

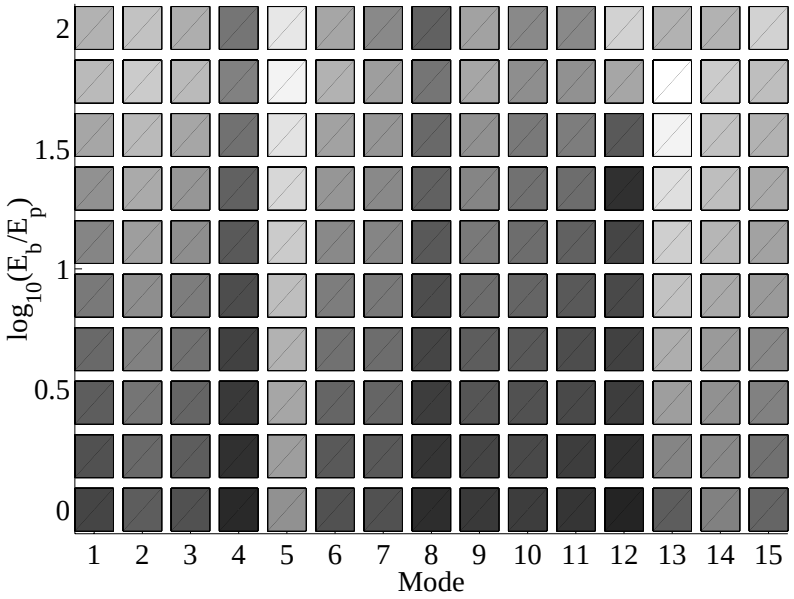


Figure 5.12: Variation de l'amortissement relatif ($\log_{10}(\tilde{\zeta}_{sam}/\tilde{\zeta}_{eam})+2$) avec la rigidité relative de la structure (E_b/E_p).

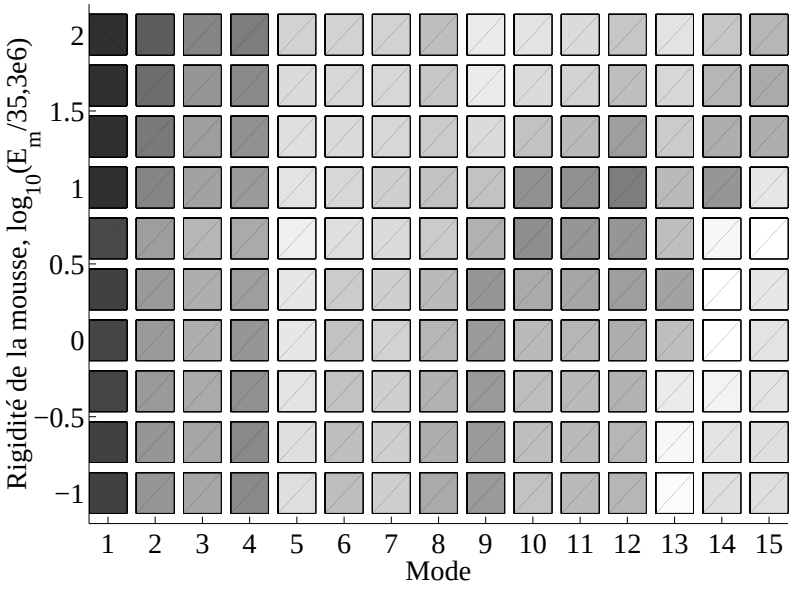


Figure 5.13: Variation de l'amortissement relatif ($\log_{10}(\tilde{\zeta}_{sam})+3$) avec la rigidité de la mousse ($E_m/35,3e6$).

plus rigide. D'autre part, la meilleure performance de l'actionneur par cisaillement est due à l'augmentation de la force qu'il induit, puisque sa capacité de fléchir la poutre augmente avec la rigidité de celle-ci.

En outre, l'efficacité d'action des actionneurs par cisaillement est aussi liée à la rigidité de la mousse, puisque cette dernière consiste en une résistance à la production

de cisaillement par l'actionneur. En effet, l'amortissement relatif $\tilde{\zeta}_{sam}$ induit par l'action par cisaillement est assez dépendant de ce facteur, comme le montre la Figure 5.13. Pour une rigidité variant dans l'intervalle $35,3\times$[0,1–100] MPa, cette figure indique que cette influence varie selon le mode considéré. Ainsi, des mousses plus souples améliorent l'amortissement des trois premiers et du treizième modes, mais détériore ceux du sixième au douzième mode. Les modes 4, 5, 14 et 15 sont, quant à eux, mieux amortis au milieu de l'intervalle.

5.4 Traitements amortissants hybrides actifs-passifs

Dans la section précédente, il a été montré que le contrôle actif peut être efficace pour amortir activement l'amplitude de vibrations de quelques modes dans le domaine des basses fréquences. Cependant, afin d'augmenter la fiabilité et la robustesse du système, il est intéressant de considérer des traitements hybrides actif-passif. Les configurations suivantes d'amortissement hybride, associant les traitements viscoélastiques passifs et piézoélectriques actifs, sont analysées dans cette section : (i) RCA (Revêtement Contraint Actif), (ii) RCP/CA (Revêtement Contraint Passif avec Contrôle Actif) et (iii) RCPE/CA (Revêtement Contraint Passif Éloigné avec Contrôle Actif). Elles sont ensuite comparées afin d'établir leurs régions d'optimalité.

5.4.1 Amortissement par revêtement contraint actif

Considérons la poutre en Aluminium encastrée-libre de la Figure 5.14. Ses longueur, largeur et épaisseur sont, respectivement $L = 280$ mm, $b = 25$ mm et $h_b = 3$ mm. Un revêtement viscoélastique (ISD112) - piézoélectrique (PZT5H) de longueur $a = 50$ mm, dont le centre est positionné à $d_c = 35$ mm de l'encastrement, est collé sur la surface supérieure de la poutre. Les épaisseurs des couches viscoélastique et piézoélectrique sont $h_v = 0,5$ mm et $h_p = 0,5$ mm, respectivement. Les propriétés des matériaux sont présentées dans l'annexe A. Le matériau viscoélastique ISD112 est représenté avec trois séries ADF dont les paramètres sont $G_0 = 0,50$ MPa, $\Delta = [0,746;\ 3,265;\ 43,284]$ et $\Omega = [468,7;\ 4742,4;\ 71532,5]$ rad/s. Pour étudier la performance d'amortissement du revêtement hybride, l'algorithme itératif de contrôle optimal LQR présenté au chapitre 4 est appliqué au système réduit basé sur les cinq premiers modes de flexion de la poutre. Un amortissement visqueux de 0,1% est supposé pour la poutre nue. Celle-ci est excitée par une force de perturbation transversale concentrée, appliquée à son bout. Son intensité est choisie telle qu'elle induit une flèche maximale de $w_L = h_b/2 = 1,5$ mm. La tension de contrôle est limitée à 250 V, soit un champ électrique maximum dans l'actionneur de 500 V/mm. Les pondérations de sortie et d'entrée considérées sont $\mathbf{Q} = \text{diag}(1,1,1,0,\ldots,0)$ et $\mathbf{R} = \gamma\,\mathbf{I}$, de façon à contrôler activement les trois premiers modes propres.

Les amortissements modaux, passif (en boucle-ouverte) et hybride (en boucle-fermée), fournis par le revêtement contraint actif (RCA) sont étudiés pour diverses longueurs du traitement et épaisseurs du matériau viscoélastique, afin d'obtenir une construction optimale. La longueur du traitement est limitée à $a = 70$ mm. Elle correspond

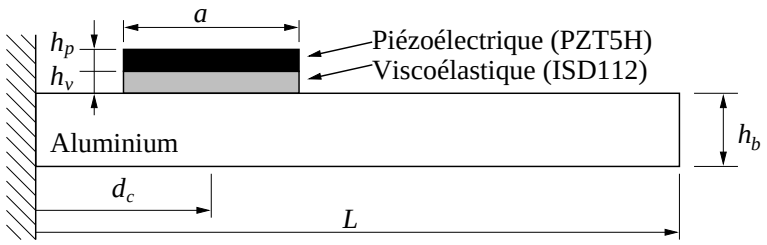


Figure 5.14: Poutre traitée par un revêtement viscoélastique contraint actif.

à la longueur maximale des actionneurs piézo-céramiques disponibles sur le marché. L'épaisseur des couches viscoélastiques, quant à elle, est limitée à $h_v = 2$ mm pour des raisons d'économie de matériau et de limitation du poids total de la structure.

La Figure 5.15 présente la variation de la somme des trois premiers amortissements modaux en boucle-ouverte ζ_p avec les longueur a et épaisseur h_v de la couche viscoélastique. Elle montre que l'amortissement passif est optimum pour des traitements longs ($a = 70$ mm) et une couche viscoélastique très mince ($h_v = 0,03$ mm pour le premier mode, $h_v = 0,06$ mm pour le deuxième et $h_v = 0,02$ mm pour le troisième). Néanmoins, il est utile de préciser que ceci est toujours le cas pour les deuxième et troisième amortissements modaux, tandis que, pour le premier mode, l'épaisseur optimale croît avec la longueur du traitement, par exemple, avec $a = 240$ mm, son amortissement est optimum pour une épaisseur de $h_v = 2$ mm.

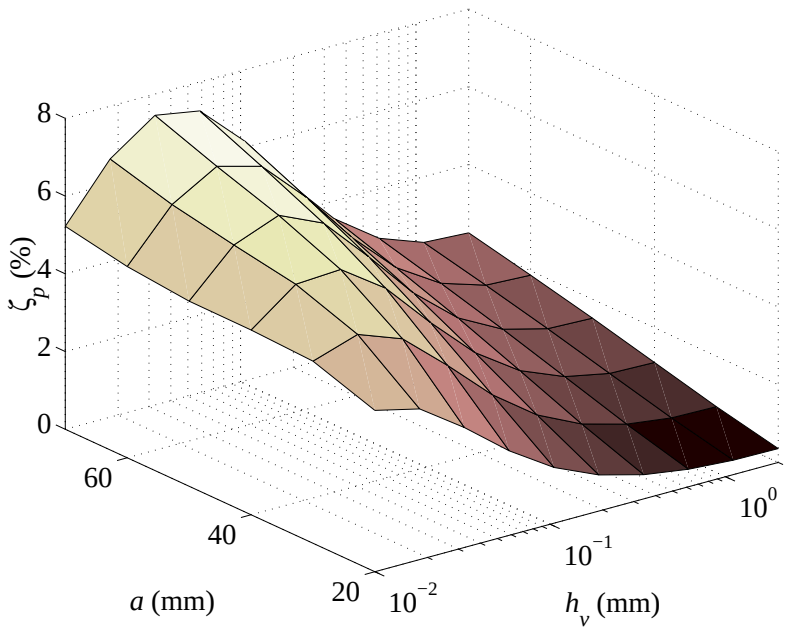


Figure 5.15: La somme des trois premiers amortissements modaux du RCA en boucle-ouverte.

L'influence des longueur a et épaisseur h_v de la couche viscoélastique sur la somme des trois premiers amortissements modaux en boucle-fermée ζ_h est présentée dans la Figure 5.16. On observe que l'amortissement hybride est aussi optimal pour des traitements

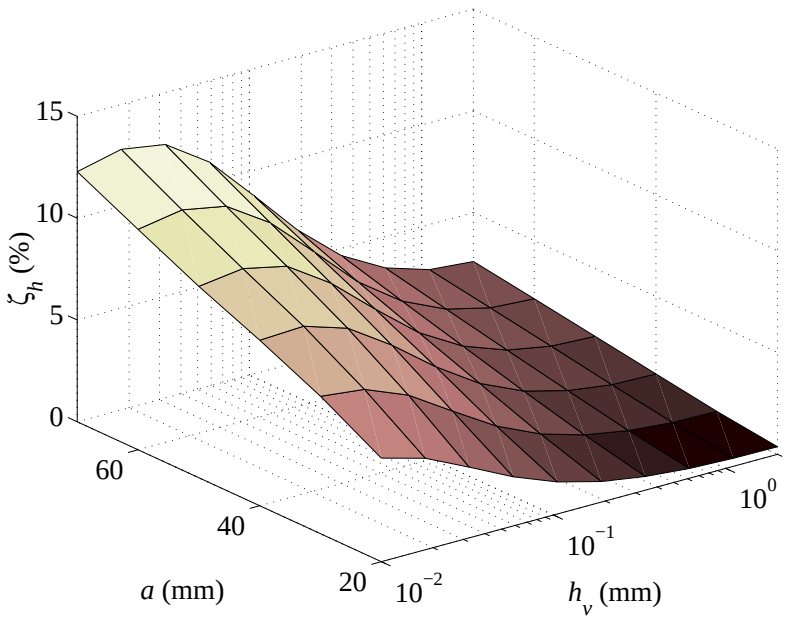


Figure 5.16: La somme des trois premiers amortissements modaux du RCA en boucle-fermée.

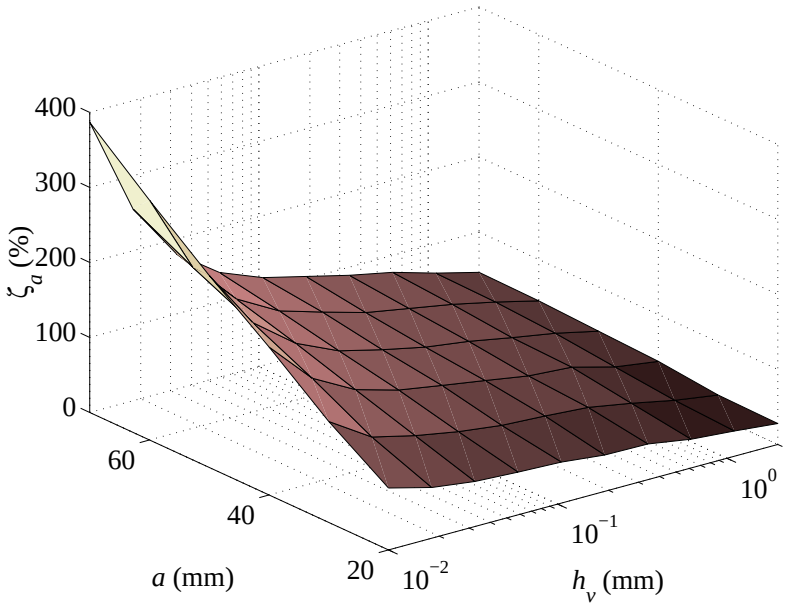


Figure 5.17: La somme des gains d'amortissements des trois premiers modes fournit par le RCA.

longs ($a = 70$ mm) et une couche viscoélastique très mince ($h_v = 0,01$ mm pour le premier mode et $h_v = 0,03$ mm pour les deuxième et troisième). La Figure 5.16 montre aussi que l'amortissement hybride, tout comme le passif (Figure 5.15), n'est efficace que pour des couches viscoélastiques très minces. Cela est dû au fait que la transmissibilité entre la poutre et l'actionneur est réduite par la souplesse de la couche viscoélastique. La perfor-

mance du contrôleur diminue donc fortement avec l'épaisseur de la couche viscoélastique. La Figure 5.17 présente le gain d'amortissement (ou l'apport de l'amortissement actif) fournit par le contrôleur, calculé par $\zeta_a = \zeta_h/\zeta_p - 1$. Elle confirme la perte d'efficacité de l'actionneur piézoélectrique avec l'augmentation de l'épaisseur de la couche viscoélastique. Il est donc clair que ce traitement n'est avantageux par rapport au RCP que lorsque ce dernier est très limité en épaisseur ($h_v = 0,02$ mm pour le présent exemple). Néanmoins, afin de garantir une bonne performance en boucle-ouverte, la somme des amortissements passif ζ_p et hybride ζ_h sera considérée comme une mesure d'optimalité. Ainsi, d'après les Figures 5.15 et 5.16, l'optimum est obtenu pour $a = 70$ mm et $h_v = 0,03$ mm.

Étudions, donc, la performance du contrôle hybride pour ce cas optimum. La Figure 5.18 montre la réponse en fréquence de la poutre nue et traitée par un RCA en boucle-ouverte (agissant comme un RCP) et en boucle-fermée. L'algorithme de contrôle LQR itératif est conçu pour optimiser dans un cas le premier mode (en faisant $\mathbf{Q} = \text{diag}(1,0,\ldots,0)$) et dans l'autre le deuxième ($\mathbf{Q} = \text{diag}(0,1,0,\ldots,0)$). On observe, de la Figure 5.18, qu'il est possible d'augmenter l'amortissement du mode choisi sans pour autant perdre l'amortissement passif des autres modes de la poutre. Notons que, même l'amortissement passif seul, fournit par le RCP, réduit raisonnablement l'amplitude des résonances. Les premier et deuxième modes sont amortis par leurs contrôleurs de 9dB (4,7%) et 10dB (4,8%), respectivement. Les contrôleurs des premier et deuxième modes excitent les deuxième et quatrième anti-résonances mais sans exciter les résonances correspondantes aux autres modes.

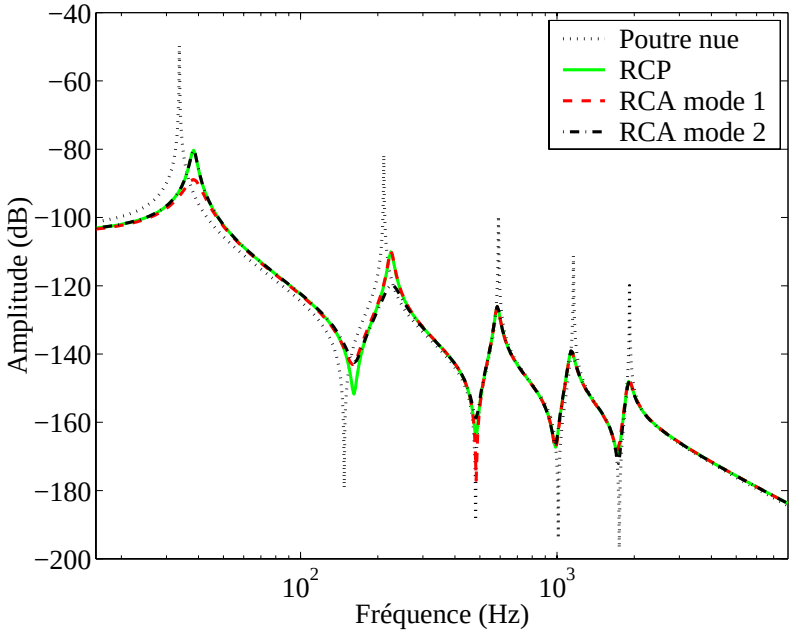


Figure 5.18: Fonction de réponse en fréquence de la poutre avec RCA en boucle-ouverte et en boucle-fermée ($a = 70$ mm, $h_v = 0,03$ mm).

La réponse transitoire de la flèche de la poutre est présentée aussi pour le cas optimum dans la Figure 5.19. Elle montre que le contrôleur hybride (optimisé pour contrôler

le premier mode) double la vitesse d'atténuation de la vibration transversale de la poutre (0,35 secondes pour le RCA contre 0,80 pour le RCP). Le contrôleur optimisé pour le deuxième mode n'est pas présenté dans cette figure car sa réponse est presque identique à celle du revêtement passif (RCP). Cela s'explique par le fait que le deuxième mode contribue très peu à la flèche du bout de la poutre et, donc, son contrôle n'aide en rien à l'amortir. La tension dans l'actionneur piézoélectrique pour les deux contrôleurs est présentée dans la Figure 5.20. On note que les deux tensions sont bien limitées à la tension maximale supportable par l'actionneur (250 V). Cependant, pour le contrôleur du premier mode, la tension s'amorti presque à la même vitesse que la réponse en boucle-fermée de la poutre (Figure 5.19), tandis que la tension de contrôle du deuxième mode s'annule beaucoup plus rapidement que la réponse en boucle-ouverte de la poutre. En effet, ce temps correspond au temps nécessaire pour que ce contrôleur élimine la vibration du deuxième mode. Néanmoins, cela n'est pas observable dans la réponse en boucle-fermée puisque cette dernière est presque composée de la contribution du premier mode seulement.

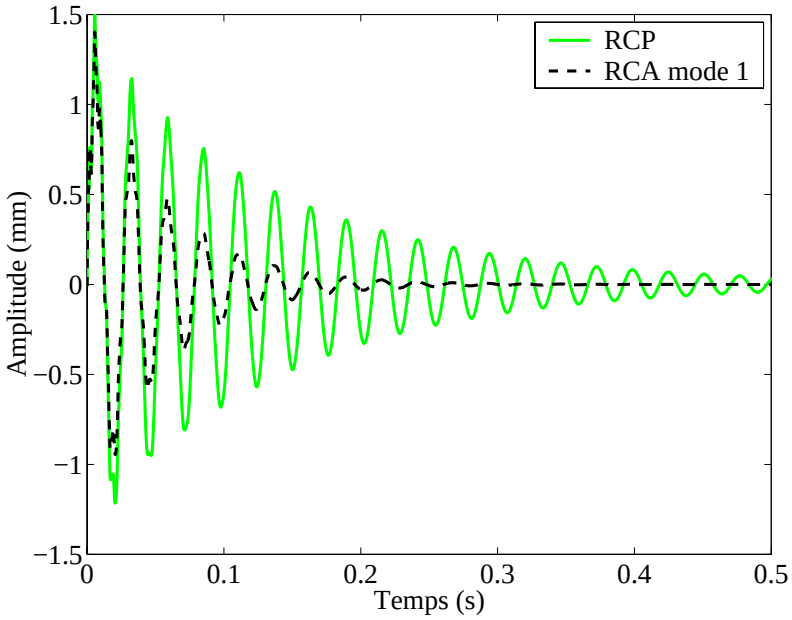


Figure 5.19: Réponse transitoire de la poutre avec RCA en boucle-ouverte et en boucle-fermée ($a = 70$ mm, $h_v = 0,03$ mm).

On se propose maintenant d'étudier, pour le cas optimum, l'influence de la segmentation du traitement sur les amortissements modaux. Pour cela, on suppose que le revêtement de longueur $a = 70$ mm, peut être divisé jusqu'à cinq segments liés au même contrôleur mais avec des tensions individuelles. Néanmoins, afin de respecter les hypothèses du modèle éléments fins, on garde un espacement de 5 mm entre les segments. Comme le montre la Figure 5.21, la segmentation du traitement n'améliore pas l'amortissement passif des trois premiers modes, en particulier pour 2 et 3 traitements où les amortissements sont plutôt réduits. De plus, l'amortissement actif additionnel est le plus efficace pour un seul actionneur. Cela est dû au fait que la tension limite n'est atteinte que dans l'actionneur optimum pour contrôler les modes dont la pondération est élevée, ici

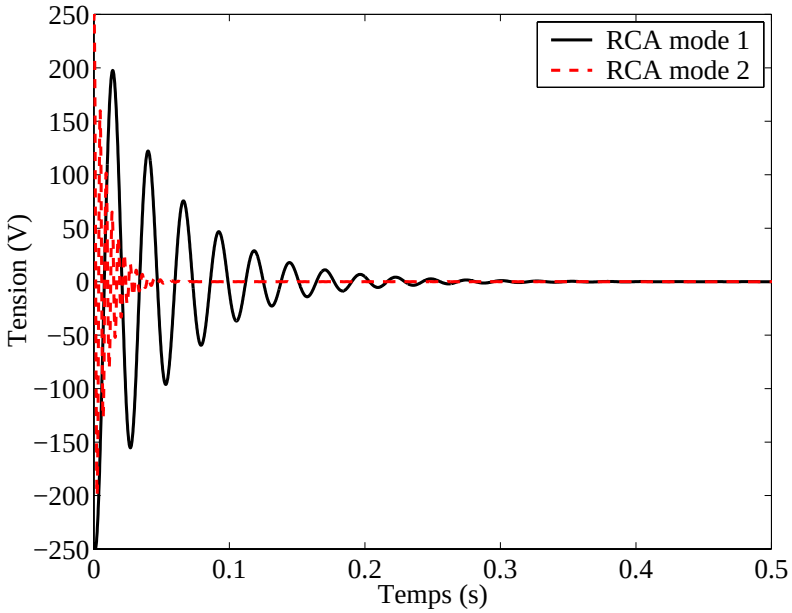


Figure 5.20: Tension de l'actionneur pour les contrôleurs RCA du premier et du deuxième modes ($a = 70$ mm, $h_v = 0,03$ mm).

le premier, et, donc, les autres actionneurs ne sont pas utilisés pleinement. Les tensions maximalles dans chaque actionneur sont : $V_1 = 251,02$ V, $V_2 = 214,77$ V, $V_3 = 162,99$ V, $V_4 = 117,35$ V et $V_5 = 47,50$ V. La controlabilité des trois premiers modes par le premier actionneur (celui qui est le plus proche de l'encastrement) pour divers degrés de segmentation est présenté dans la Figure 5.22. On observe que cet actionneur est optimum lorsqu'il est tout seul. Par conséquent, on peut conclure que la segmentation associée à cet algorithme de contrôle n'est pas efficace à cause de la diminution de la surface active pleinement utilisée.

D'après ces résultats, on peut conclure que le principal inconvénient de ce traitement est que la performance du contrôle hybride, par rapport à celle du passif, ne peut être augmentée qu'en réduisant l'épaisseur de la couche viscoélastique. Par conséquent, il peut être utilisé lorsque l'amortissement passif des premiers modes propres n'est pas prioritaire, ou lorsque des contraintes techniques ou économiques limitent au minimum l'usage du matériau passif.

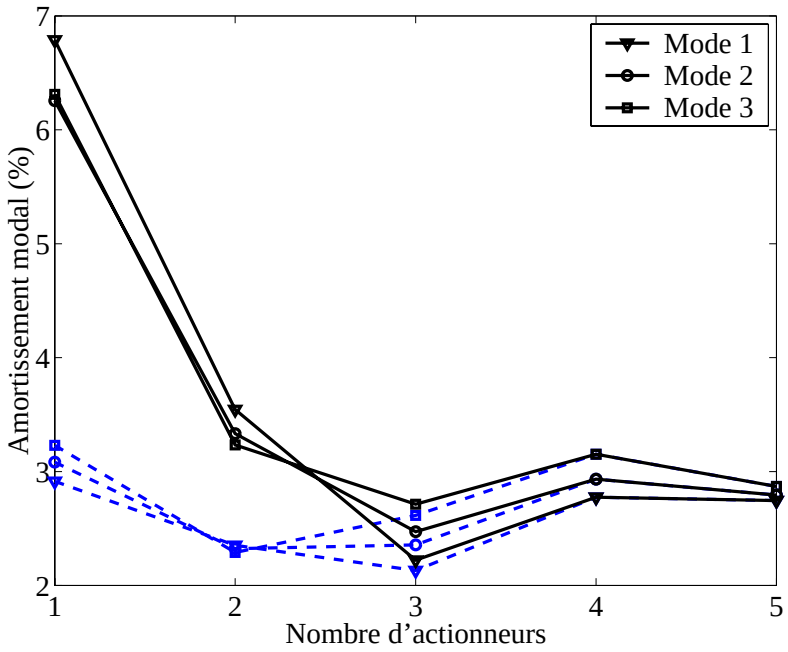


Figure 5.21: Variation de l'amortissement modal avec le nombre d'actionneurs pour $a =$ 70 mm et $h_v = 0,03$ mm (trait continu : hybride, trait discontinu : passif).

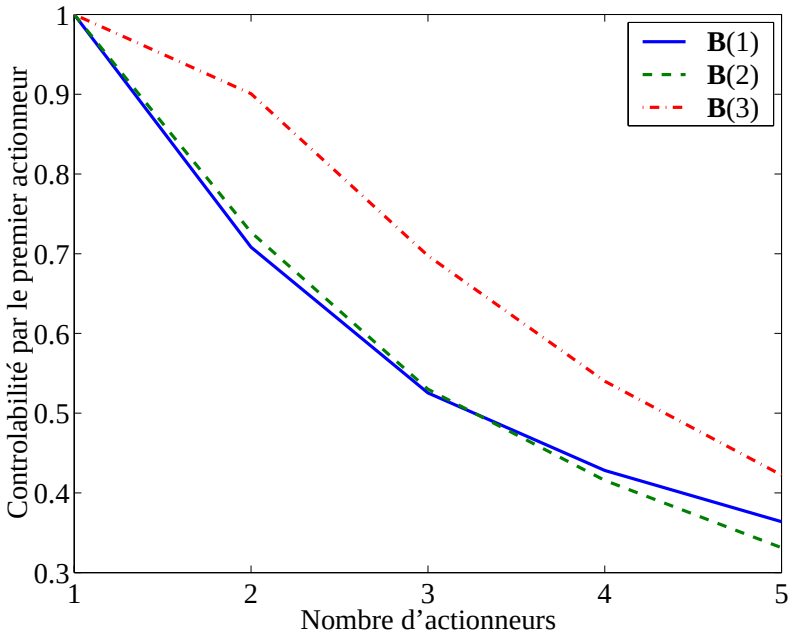


Figure 5.22: Variation de la controlabilité des trois premiers modes par le premier actionneur avec le nombre d'actionneurs pour $a = 70$ mm et $h_v = 0,03$ mm ($\mathbf{B}(i)$ est la i-ième composante du vecteur de contrôle).

5.4.2 Amortissement par revêtement contraint passif et contrôle actif

Dans cette section, on considère une variante de la configuration précédente où les traitements passif (RCP) et actif (CA) n'agissent pas directement ensemble, mais séparément (RCP/CA). Cela consiste en un revêtement contraint passif collé sur une surface de la poutre et un actionneur piézoélectrique collé au même endroit sur la surface opposée (Figure 5.23). Les données matérielles et géométriques sont celles du cas précédent, augmentées de l'épaisseur de la couche externe du revêtement (Aluminium) $h_c = 0,5$ mm. La performance d'amortissement de ce revêtement hybride est analysée, en utilisant la loi de contrôle du cas précédent, avec les mêmes paramètres.

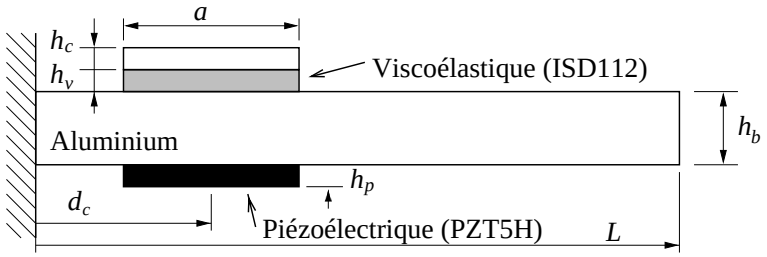


Figure 5.23: Poutre traitée par revêtement contraint passif et contrôle actif.

Comme pour le cas précédent, une analyse paramétrique des amortissements modaux, en boucle-ouverte et en boucle-fermée, des trois premiers modes de la poutre de la Figure 5.23 est effectuée. La longueur a du traitement varie entre 20 et 70 mm, avec un espacement de 10 mm entre son extrémité gauche et l'encastrement. L'épaisseur de la couche viscoélastique varie entre 0,01 et 2 mm.

Tout comme pour le traitement précédent, l'amortissement passif (en boucle-ouverte) est optimum pour des traitements longs ($a = 70$ mm) et une couche viscoélastique très mince ($h_v = 0,03$ mm pour le premier mode, $h_v = 0,06$ mm pour le deuxième et $h_v = 0,02$ mm pour le troisième), comme le montre la Figure 5.24. Cependant, ce traitement est moins performant que le traitement précédent (RCA inactif). Ceci peut être dû à la présence de l'actionneur piézoélectrique collé à la surface inférieure de la poutre. Cette avantage pour le RCA augmente jusqu'à 30% pour des traitements courts avec des couches viscoélastiques minces ($h_v = 0,1$ mm).

Bien que les amortissements passifs des traitements RCA et RCP/CA soient influencés de la même manière par les longueur et épaisseur du traitement, leurs performances en boucle-fermée sont très différentes. La Figure 5.25 montre que l'amortissement hybride du présent traitement est optimum pour des revêtements longs ($a = 70$ mm) et presque indépendant de l'épaisseur de la couche viscoélastique, bien que légèrement plus efficace pour des couches viscoélastiques minces ($h_v = 0,1$ mm pour le premier mode, $h_v = 0,03$ mm pour les deuxième et troisième). La séparation des matériaux viscoélastique et piézoélectrique conduit, contrairement au RCA, à un apport du contrôleur actif croissant fortement avec l'épaisseur de la couche viscoélastique (Figure 5.26).

Les Figures 5.27 et 5.28 montrent, pour le cas optimum ($\max(\zeta_p + \zeta_h) \rightsquigarrow a = 70$ mm, $h_v = 0,03$ mm), les réponses impulsionnelles de la poutre, dans les domaines fréquentiel et temporel. Comme dans la section précédente, deux contrôleurs sont considérés afin d'optimiser, dans un cas l'amortissement du premier mode et, dans l'autre celui du

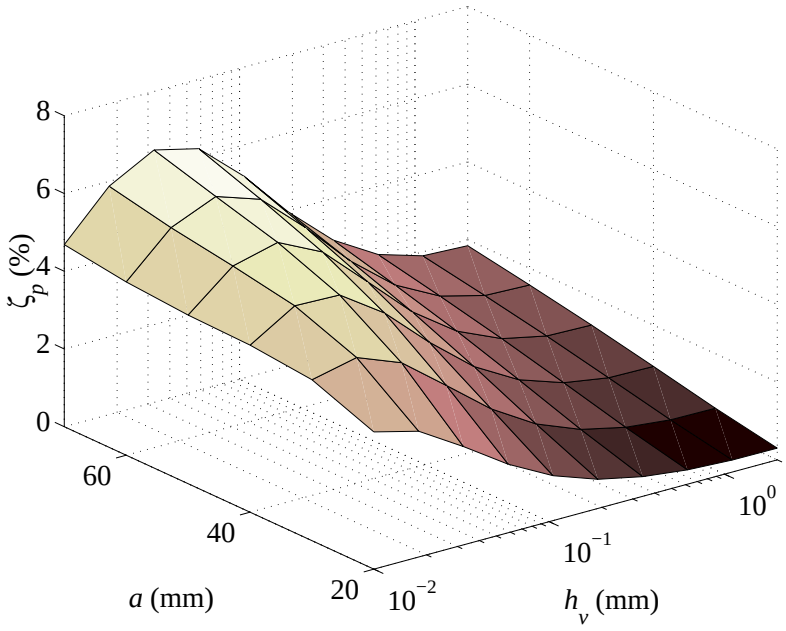


Figure 5.24: La somme des trois premiers amortissements modaux du RCP/CA en boucle-ouverte.

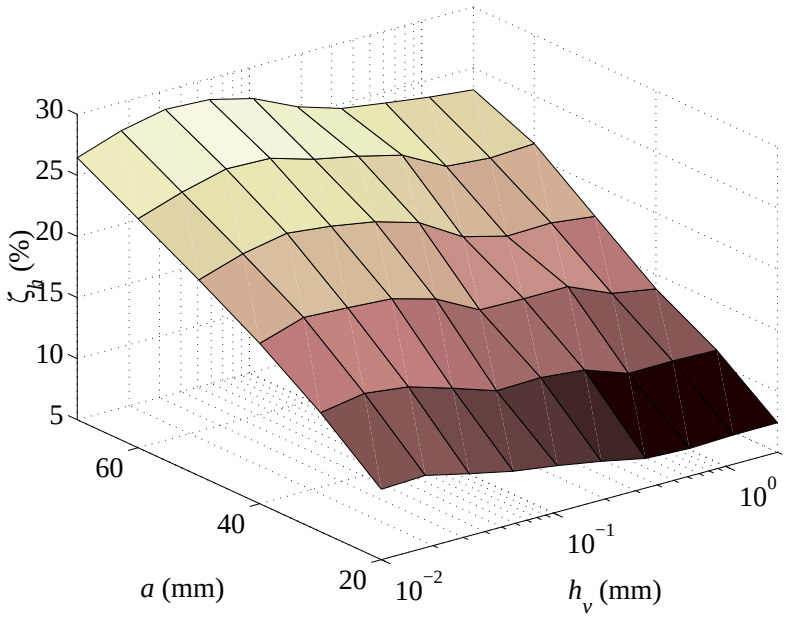


Figure 5.25: La somme des trois premiers amortissements modaux du RCP/CA en boucle-fermée.

deuxième. La Figure 5.27 indique que le premier contrôleur amorti le premier mode de 20dB (19,3%), alors que le second amorti le deuxième mode de 15dB (11,3%). Comme dans le cas précédent, les contrôleurs excitent certaines anti-résonances.

Comme pour le cas précédent, la Figure 5.28, présentant la réponse transitoire de la

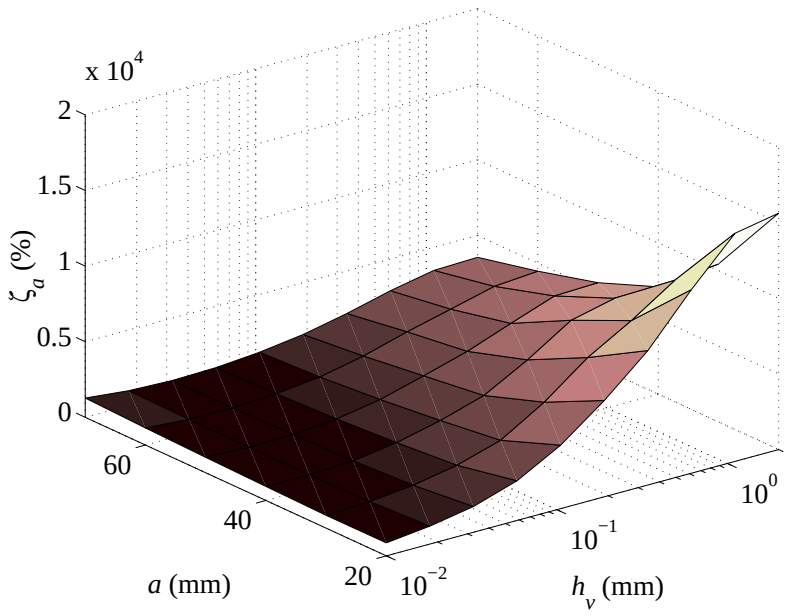


Figure 5.26: La somme des gains d'amortissements des trois premiers modes fournit par le RCP/CA.

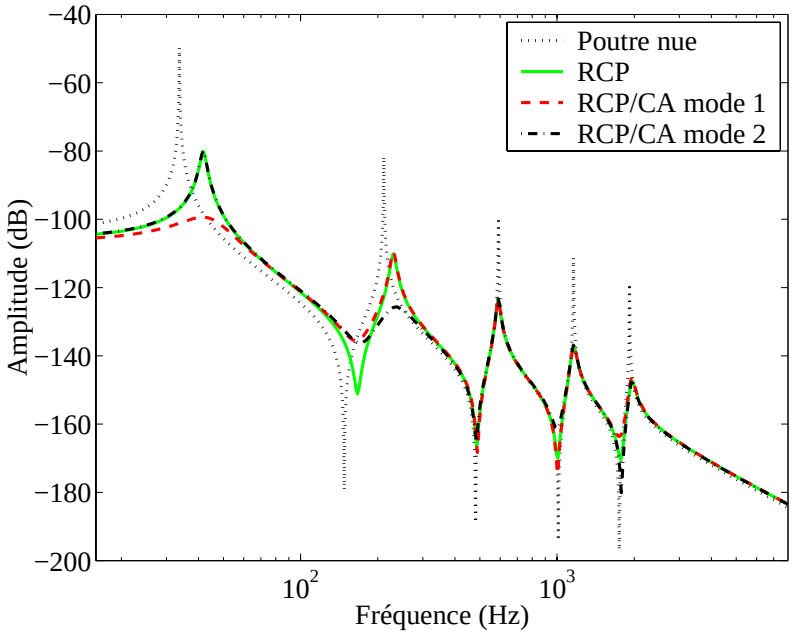


Figure 5.27: Fonction de réponse en fréquence de la poutre avec RCP/CA en boucle-ouverte et en boucle-fermée ($a = 70$ mm, $h_v = 0,03$ mm).

poutre avec RCP/CA, montre que le contrôleur optimisé pour contrôler le premier mode atténue mieux la vibration transversale de la poutre. Celui du deuxième mode aboutit à des réponses identiques en boucles ouverte et fermée. Par ailleurs, la tension du deuxième contrôleur s'amorti plus rapidement, correspondant au temps nécessaire pour éliminer la

vibration relative au deuxième mode (Figure 5.29). On note, d'après la Figure 5.28, que le temps de réponse[1] de la réponse transitoire de la poutre est fortement réduit par le premier contrôleur (0,9 secondes en boucle-ouverte contre 0,1 en boucle-fermée). Les oscillations rapides observées dans cette figure sont dues au fait que la contribution du premier mode à la réponse transitoire de la poutre est presque éliminée, rendant les autres modes plus observables. Ce phénomène apparaît aussi dans la Figure 5.27, puisque la différence entre les résonances du premier et deuxième modes passe de 30dB, en boucle-ouverte, à 10dB, en boucle-fermée.

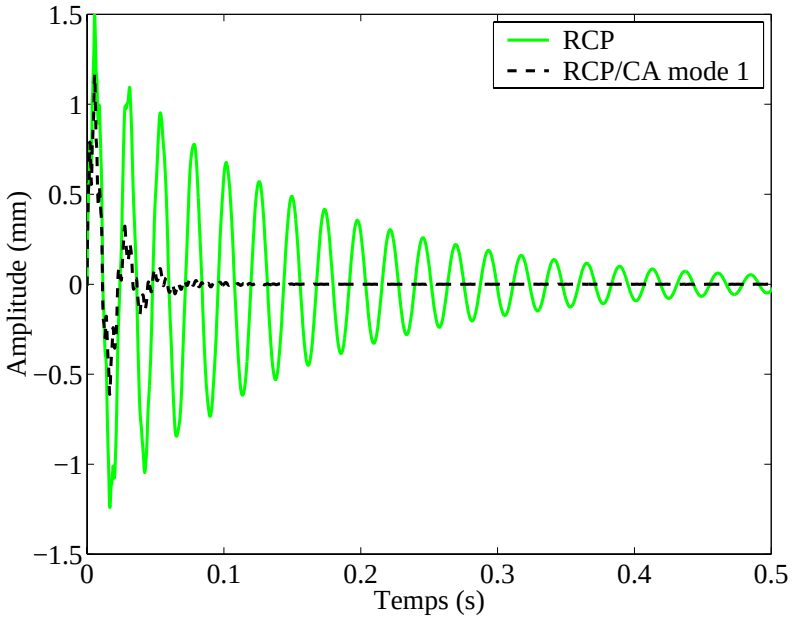


Figure 5.28: Réponse transitoire de la poutre avec RCP/CA en boucle-ouverte et en boucle-fermée ($a = 70$ mm, $h_v = 0,03$ mm).

Ces résultats montrent que l'utilisation des traitements passif et actif séparément (RCP/CA) aboutit généralement à des performances supérieures à celles obtenues en utilisant l'actionneur collé sur la couche viscoélastique (RCA). Ce traitement permet aussi de garder une bonne performance pour des couches viscoélastiques suffisamment épaisses, permettant ainsi d'étendre le choix d'amortissement passif. En plus, contrairement au RCA, les longueurs des traitements passif et actif peuvent être différentes, permettant ainsi de considérer des traitements passifs plus longs que la limite imposée par les actionneurs piézoélectriques. En revanche, ce traitement aboutit à des épaisseurs globales plus élevées puisqu'une couche élastique collée sur le matériau viscoélastique est nécessaire.

[1]Le temps nécessaire pour que la sortie converge à 2% de sa valeur maximale. Aussi dénommé temps d'établissement ou de stabilisation.

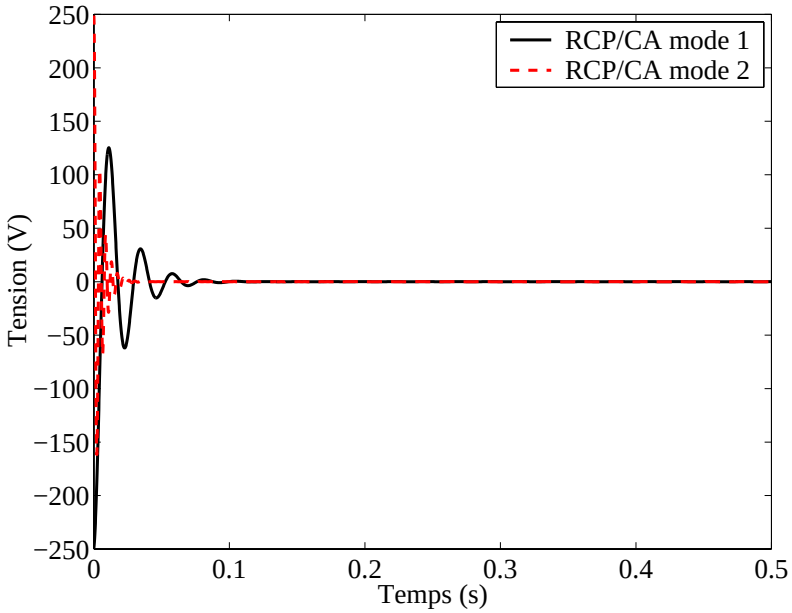


Figure 5.29: Tension de l'actionneur pour les contrôleurs RCP/CA du premier et du deuxième modes ($a = 70$ mm, $h_v = 0,03$ mm).

5.4.3 Amortissement par revêtement contraint passif éloigné et contrôle actif

Une variante des traitements présentés précédemment consiste à coller un actionneur piézoélectrique entre le revêtement contraint passif et la poutre (Figure 5.30). Afin de distinguer ce traitement du RCP/CA précédent, on le dénomme revêtement contraint passif éloigné et contrôle actif (RCPE/CA)[2]. Les propriétés géométriques et matérielles, ainsi que les paramètres de contrôle, sont identiques à ceux de la section précédente. L'analyse paramétrique des amortissements modaux, en boucle-ouverte et en boucle-fermée, réalisée dans les sections précédentes est reprise pour la présente configuration d'amortissement hybride (Figure 5.30).

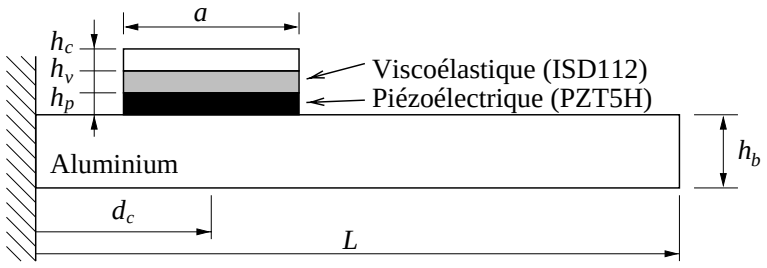


Figure 5.30: Poutre traitée par revêtement contraint passif éloigné et contrôle actif.

La variation de la somme des amortissements passifs (en boucle-ouverte) des trois premiers modes propres de flexion de la poutre avec les longueur du traitement

[2]Ce traitement est aussi dénommé *Passive Stand-Off Layer Damping* ou *Stand-Off Damping* dans la littérature [95].

et épaisseur de la couche viscoélastique est présentée dans la Figure 5.31. Elle montre que l'amortissement passif est aussi optimum pour des couches viscoélastiques minces ($h_v = 0,03$ mm pour les premier et troisième modes et $h_v = 0,06$ mm pour le deuxième) et des traitements longs ($a = 70$ mm). Ce traitement, lorsqu'il est passif, est toujours plus performant que les deux précédents (jusqu'à 50% par rapport au RCA), en particulier pour des traitements courts ($a = 20$ mm) et couches viscoélastiques minces ($h_v = 0,1$ mm). En effet, comme l'ont montré Yellin et Shen [95], l'augmentation de la distance entre le revêtement passif contraint et l'axe neutre de la structure, dû ici à l'actionneur piézoélectrique, accentue la déformation de cisaillement du matériau viscoélastique et, donc, la dissipation passive d'énergie. Lam, Inman et Saunders [52] ont aussi montré que ce traitement est plus avantageux pour supprimer passivement les vibrations que les RCA et RCP/CA précédents, bien qu'ils ont considéré des traitements très longs de l'ordre de 270 mm. D'après les présents résultats (Figures 5.15, 5.24 et 5.31), cette avantage est plus visible pour des traitements courts.

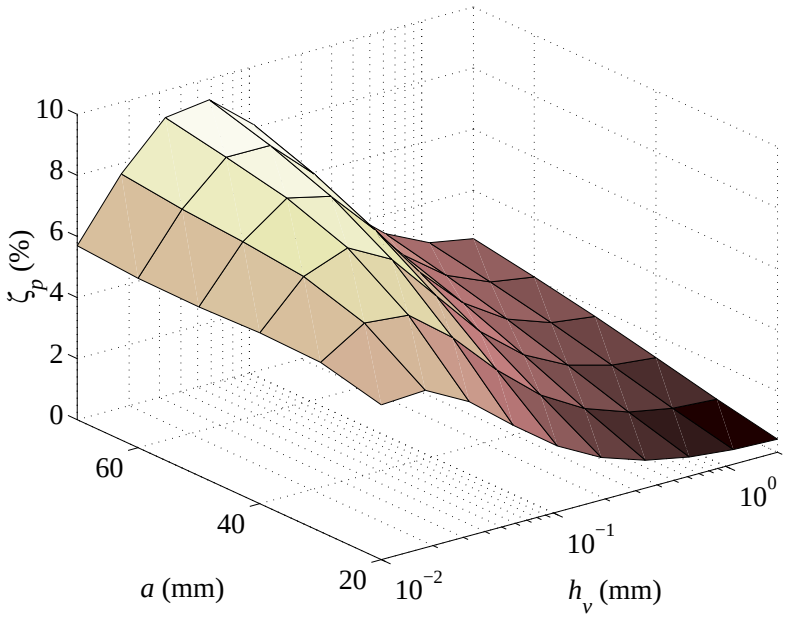


Figure 5.31: La somme des trois premiers amortissements modaux du RCPE/CA en boucle-ouverte.

Quant à l'amortissement hybride, le présent traitement, tout comme le précédent, est toujours plus performant que le RCA en particulier pour des traitements courts et des couches viscoélastiques épaisses (Figures 5.16, 5.25 et 5.32)). Cela s'explique par la dépendance moins prononcée de la performance du présent traitement avec l'épaisseur du matériau viscoélastique (Figure 5.32)), par rapport au RCA (Figure 5.16). La Figure 5.32 montre aussi que le traitement RCPE/CA est optimum pour des traitements longs ($a = 70$ mm) et couches viscoélastiques plus épaisses ($h_v = 0,2$ mm pour le premier mode, $h_v = 0,1$ mm pour le deuxième et $h_v = 0,05$ mm pour le troisième) que celles des traitements optimaux précédents (Figures 5.16 et 5.25). De plus, d'après la Figure 5.32, la performance du contrôleur actif ne diminue pas avec l'augmentation de l'épaisseur

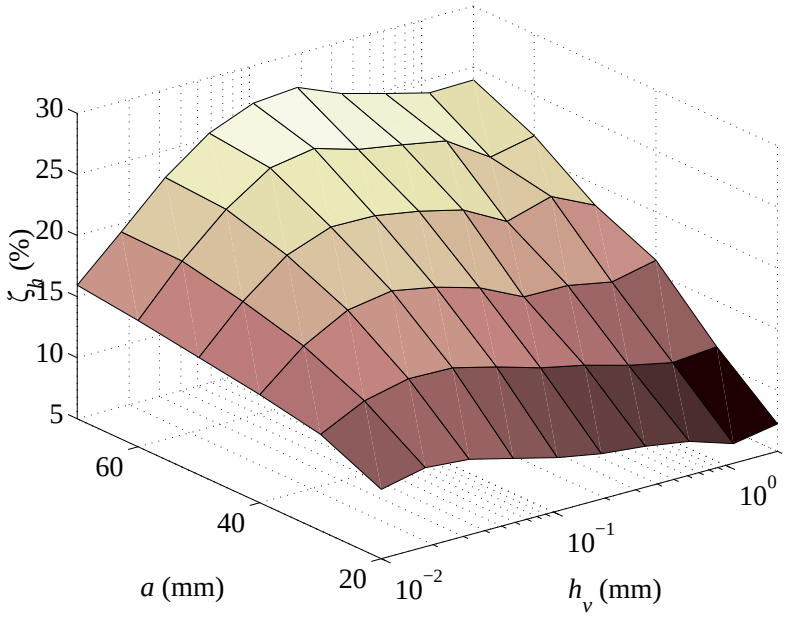


Figure 5.32: La somme des trois premiers amortissements modaux du RCPE/CA en boucle-fermée.

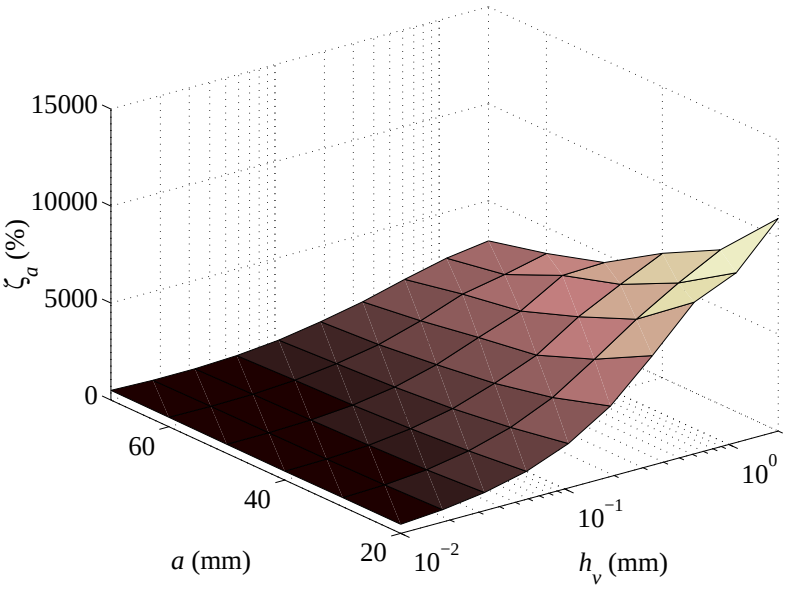


Figure 5.33: La somme des gains d'amortissements des trois premiers modes fournit par le RCPE/CA.

de la couche viscoélastique, bien que l'amortissement hybride du présent traitement est plus dépendant de ce paramètre que le précédent (RCP/CA). Par conséquent, comme pour le RCP/CA, l'apport d'amortissement fournit par l'actionneur piézoélectrique augmente pour des couches viscoélastiques épaisses (Figure 5.33).

À l'exemple des sections précédentes, les longueur et épaisseur optimales sont

déterminées par la maximisation de la somme des amortissements passif ζ_p et hybride ζ_h. Cela aboutit à $a = 70$ mm et $h_v = 0,1$ mm. Les réponses impulsionnelles de la poutre dans les domaines fréquentiel et temporel sont présentées pour ce cas optimum dans les Figures 5.34 et 5.35. Les contrôleurs du premier et deuxième modes décrits dans la section 5.4.1 ont été utilisés. La Figure 5.34 montre que les contrôleurs relatifs aux premier et deuxième modes aboutissent à des amortissements de 17dB (16,3%) et 9dB (6,1%), respectivement. En comparant les Figures 5.27 et 5.34, on observe que le présent traitement amorti moins bien le deuxième mode que le RCP/CA. Cependant, l'amortissement passif de ce mode est plus élevé pour le RCPE/CA.

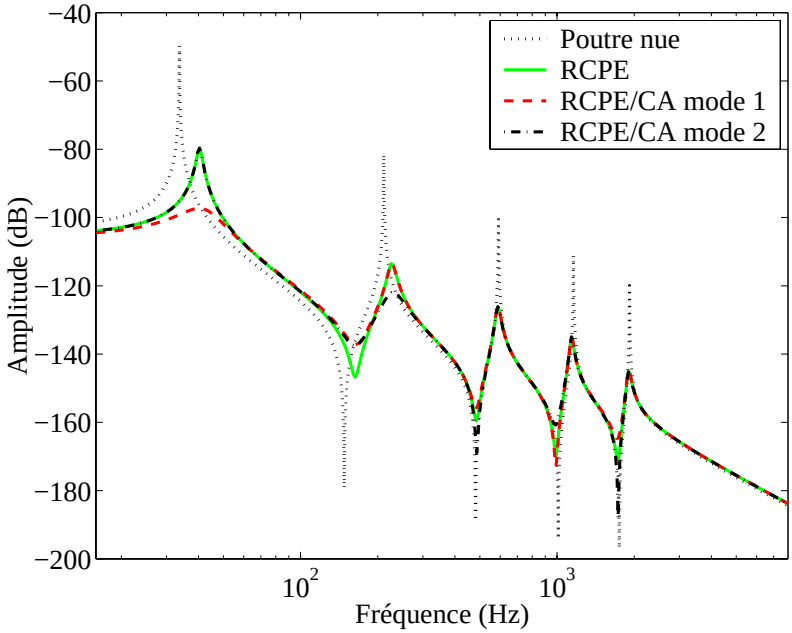


Figure 5.34: Fonction de réponse en fréquence de la poutre avec RCPE/CA en boucle-ouverte et en boucle-fermée ($a = 70$ mm, $h_v = 0,1$ mm).

La Figure 5.35 présente la réponse transitoire de la poutre avec RCPE/CA. Elle montre que le contrôleur du premier mode améliore de manière assez satisfaisante le temps de réponse de la vibration transversale de la poutre (0,12 secondes en boucle-fermée contre 0,90 en boucle-ouverte). Celui du deuxième mode, quant à lui, ne modifie pas la réponse de la poutre. À travers la comparaison des Figures 5.28 et 5.35, on observe que, contrairement au RCP/CA, les oscillations rapides ne sont pas présentes pour le RCPE/CA. Cela s'explique par la différence entre les amplitudes des résonances du premier mode, en boucle-ouverte et fermée, par rapport aux autres modes, pour les deux traitements. En effet, comme présenté précédemment, l'écart entre les amplitudes des premier et deuxième modes pour le RCP/CA passent de 30dB, en boucle-ouverte, à 10dB, en boucle fermée, tandis que pour le présent traitement (RCPE/CA) cette différence passe de 33dB à 16dB (Figure 5.34). Ceci est dû au fait que le RCPE/CA, contrairement au RCP/CA, contrôle activement moins bien le premier mode, d'une part, et mieux passivement le deuxième, d'autre part.

La Figure 5.36, présentant la tension de contrôle des premier et deuxième modes,

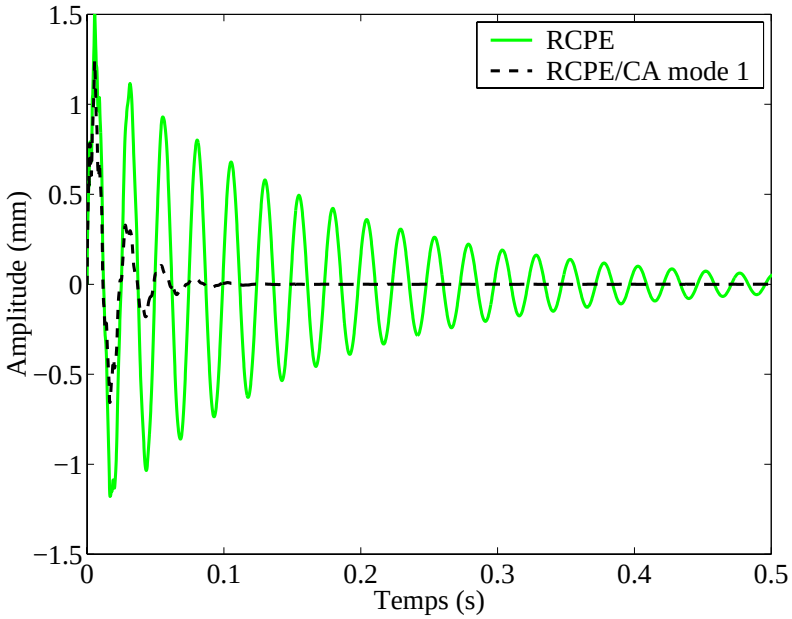


Figure 5.35: Réponse transitoire de la poutre avec RCPE/CA en boucle-ouverte et en boucle-fermée ($a = 70$ mm, $h_v = 0,1$ mm).

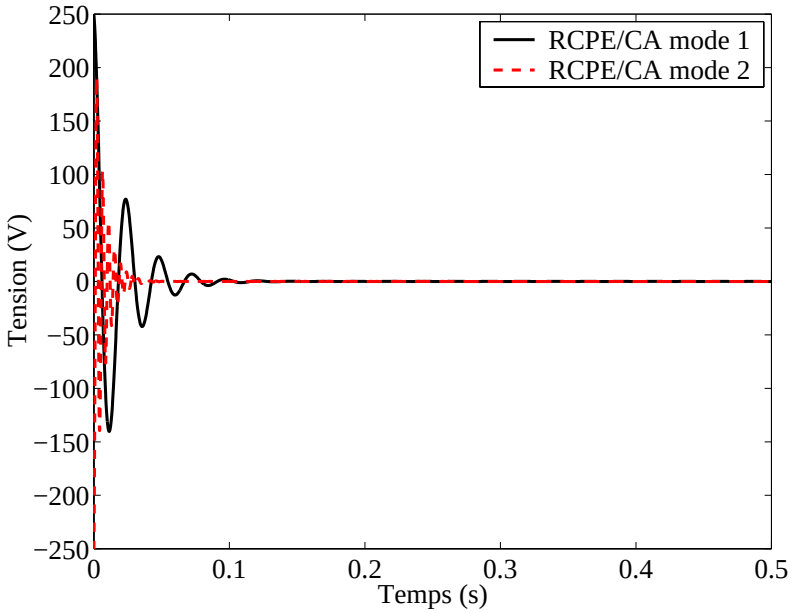


Figure 5.36: Tension de l'actionneur pour les contrôleurs RCPE/CA du premier et du deuxième modes.

montre que celle du deuxième mode s'annule moins rapidement que celle du traitement précédent (Figure 5.29), mais plus rapidement que celle du premier mode.

Dans ce traitement, l'actionneur agit directement sur la poutre élastique mais, aussi, modifie le comportement du revêtement contraint passif sous lequel il est placé. En effet, l'actionneur piézoélectrique éloigne le RCP de la poutre, augmentant ainsi son efficacité

en dissipation d'énergie [95].

5.4.4 Comparaison des traitements amortissants hybrides

Les résultats présentés dans les sections précédentes permettent de confirmer que les revêtements hybrides sont assez efficaces pour améliorer les amortissements modaux de quelques modes choisis, tout en gardant les amortissements passifs fournis par les revêtements viscoélastiques. Les revêtements contraints passifs, associés à des actionneurs piézoélectriques, peuvent être efficaces, soit lorsque ces actionneurs sont collés sur les premiers soit lorsqu'ils sont collés directement sur la structure. Dans le premier cas, l'actionneur doit agir sur la structure à travers la couche viscoélastique. Il perd ainsi en controlabilité lorsque l'épaisseur de la couche viscoélastique croît, du fait de la réduction de la transmissibilité entre la structure et l'actionneur. Dans l'autre cas, l'actionneur piézoélectrique peut être collé sur la surface opposée de la structure ou entre la couche viscoélastique et la structure de manière que le contrôleur actif peut agir directement sur la structure, sans être trop influencé par la couche viscoélastique. En même temps, le revêtement passif permet de garder une marge d'amortissement raisonnable pour les modes non-contrôlés activement. Par contre, puisque le revêtement contraint passif est optimum pour des couches externes rigides, les traitements RCP/CA et RCPE/CA aboutissent à des épaisseurs et poids plus élevés, par rapport aux traitements RCA. D'autre part, ces premiers, étant globalement plus efficaces, permettent l'utilisation de traitements passifs et actifs moins longs pour des performances similaires.

Dans cette section, des comparaisons entre les traitements amortissants hybrides RCA, RCP/CA et RCPE/CA sont présentées. Pour cela, dans un premier temps, les performances optimales des traitements hybrides en boucle-ouverte et fermée sont comparées et, dans un deuxième temps, les différences entre les performances globales des traitements pour les diverses longueur du traitement et épaisseur de la couche viscoélastique sont étudiées.

Le Tableau 5.1 montre quelques mesures des performances optimales des traitements hybrides en boucle-ouverte et fermée, à savoir les amortissements des cinq premiers modes ($\zeta_i,\ i = 1,\ldots,5$) et les temps de réponse t_s et amplitude maximale $\mathbf{y}_{max}$ de la sortie $\mathbf{y}$. On observe que les amortissements passifs des trois traitements sont assez similaires, bien que celui du premier mode soit 15% supérieur pour le RCA. En effet, cet avantage quant à l'amortissement du premier mode est la raison pour laquelle ce traitement aboutit à un temps de réponse en boucle-ouverte plus faible. On note aussi que, bien que l'amortissement du deuxième mode soit 50% supérieur pour le RCPE/CA, ceux des quatrième et cinquième modes sont plus faibles pour ce traitement. L'amplitude maximale de la flèche du bout de la poutre est évidemment identique pour tous les traitements puisqu'elle est fixée à $h_b/2 = 1,5$ mm afin de calculer la force de perturbation. Pour les amortissement hybrides, il est clair que les RCP/CA et RCPE/CA sont beaucoup plus efficaces pour contrôler activement le premier mode. C'est pourquoi le temps de réponse pour ces traitements est plus faible que pour le RCA. Également, on observe que les performances des traitements hybrides permettent de réduire les flèches maximales de 6% pour le RCA, 23% pour le RCP/CA et 19% pour le RCPE/CA.

Il est aussi intéressant d'analyser la variation de la différence entre les amor-

Tableau 5.1: Performances optimales des traitements hybrides en boucle-ouverte (passif) et fermée (hybride).

		ζ_1 (%)	ζ_2 (%)	ζ_3 (%)	ζ_4 (%)	ζ_5 (%)	t_s (sec)	$\mathbf{y}_{max}$ (mm)
	Poutre nue	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	30,0	1,50
Passif	RCA	2,91	2,35	2,13	2,77	2,74	0,80	1,50
	RCP/CA	2,53	2,30	1,63	2,24	2,51	0,90	1,50
	RCPE/CA	2,53	3,54	2,18	1,79	2,00	0,90	1,50
Hybride	RCA	6,79	3,54	2,22	2,77	2,74	0,35	1,41
	RCP/CA	20,83	5,84	1,74	2,24	2,51	0,10	1,15
	RCPE/CA	19,38	4,77	2,67	1,79	2,00	0,12	1,22

tissements des traitements avec les longueur du traitement et épaisseur de la couche viscoélastique. Pour cela, la somme des amortissements passif ζ_p et hybride ζ_h, utilisée comme mesure d'optimalité dans les sections précédentes, sera considérée ici. Sachant que leurs valeurs optimales sont 19,90% pour le RCA, 34,95% pour le RCP/CA et 35,03% pour le RCPE/CA.

La Figure 5.37 présente la différence des performances $(\zeta_p + \zeta_h)$ des traitements RCP/CA et RCA en fonction des longueur du traitement et épaisseur de la couche viscoélastique. Elle montre que le premier est plus performant que le dernier pour toutes les valeurs de a et h_v. Cette figure indique aussi que l'avantage du RCP/CA sur le RCA augmente avec les longueur du traitement et épaisseur de la couche viscoélastique. Cela s'explique par le fait que le RCA n'est efficace que pour des couches viscoélastiques très minces, alors que le RCP/CA garde une bonne performance dans toute l'intervalle d'épaisseurs. Les performances des traitements RCA et RCPE/CA sont comparés, quant à eux, dans la Figure 5.38. Celle-ci indique que le RCPE/CA est toujours plus performant que le RCA, tout comme le RCP/CA, en particulier pour des traitements longs et de couches viscoélastiques épaisses. Cependant, pour des traitements longs, cette différence diminue fortement avec la diminution de l'épaisseur de la couche viscoélastique, puisque, dans ce cas la performance du RCA est presque optimale alors que celle du RCPE/CA est plutôt minimale.

Il est clair que les traitements utilisant les revêtements passifs et actionneurs piézoélectriques séparément sont beaucoup plus performants que le RCA. La Figure 5.39 montre la différence entre les sommes d'amortissements $(\zeta_p + \zeta_h)$ des traitements RCPE/CA et RCP/CA. On observe que le RCPE/CA est, en général, plus performant que le RCP/CA, en particulier pour des revêtements courts ou pour des couches viscoélastiques relativement épaisses. L'avantage du premier est maximum pour $a =$ 70 mm et $h_v = 0,2$ mm. Cependant, le RCP/CA est beaucoup plus performant que le RCPE/CA pour des traitements longs et couches viscoélastiques très minces, puisque dans ce cas la performance du premier est presque optimale et celle du deuxième est plutôt minimale.

On peut donc conclure que, puisque la performance de contrôle du RCA n'est augmentée qu'en réduisant l'amortissement passif des premiers modes propres, l'utilisation des traitements passif et actif séparément du type RCP/CA ou RCPE/CA permet d'obtenir, en général, des performances supérieures sans modifier l'amortissement passif. Un

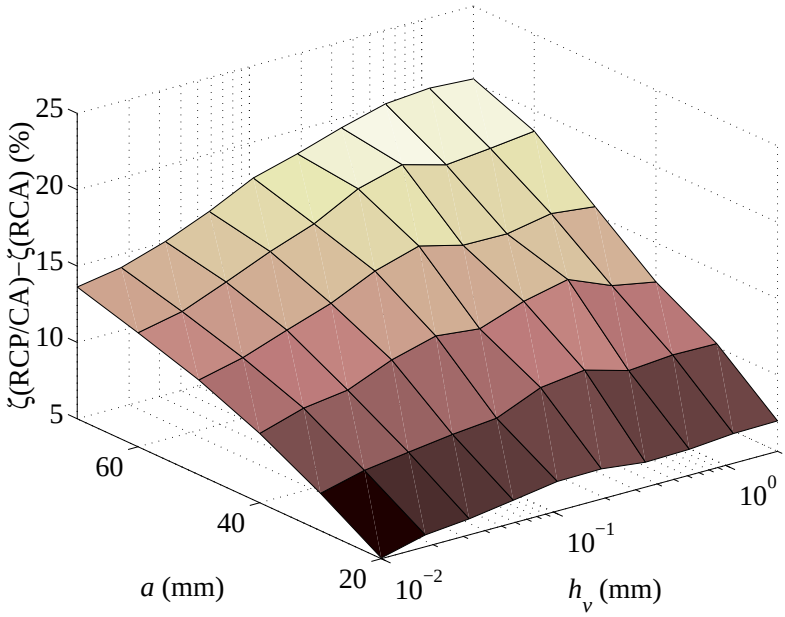


Figure 5.37: Variation de la différence entre les sommes d'amortissements ($\zeta_p + \zeta_h$) des traitements RCP/CA et RCA en fonction de a et h_v.

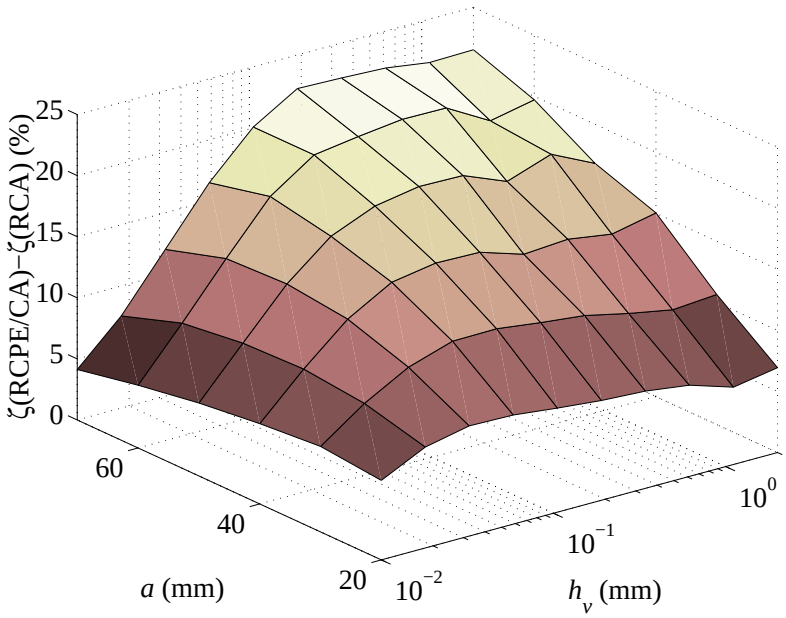


Figure 5.38: Variation de la différence entre les sommes d'amortissements ($\zeta_p + \zeta_h$) des traitements RCPE/CA et RCA en fonction de a et h_v.

des avantages pratiques du traitement RCP/CA sur les autres est que les longueurs des traitements passif et actif peuvent être différentes. Par conséquent, il est possible d'utiliser des traitements passifs plus longs que la limite imposée par les actionneurs piézoélectriques. Néanmoins, cela peut se faire aussi pour le RCA en collant l'actionneur piézoélectrique

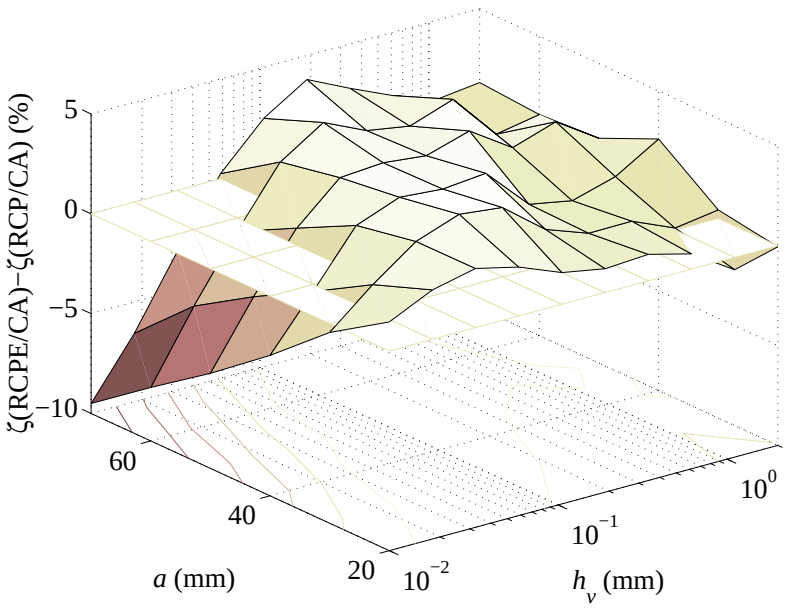


Figure 5.39: Variation de la différence entre les sommes d'amortissements ($\zeta_p + \zeta_h$) des traitements RCPE/CA et RCP/CA en fonction de a et h_v.

sur la couche élastique externe du RCP, au lieu de remplacer cette dernière par l'actionneur. Dans ce cas, le RCA perd l'avantage d'aboutir à des épaisseurs de traitement moins élevées.

5.5 Analyse de l'effet de la température

Une autre analyse importante consiste à considérer l'effet de la variation de la température sur la performance du contrôle. En effet, puisque les propriétés des matériaux viscoélastiques sont très sensibles à la température, l'amortissement de la structure, ainsi que la conception du système de contrôle, seront modifiées par des variations de température. Or, la modélisation des matériaux viscoélastiques présentée précédemment considère une température constante. C'est pourquoi, dans cette section, l'effet de la variation de la température à la fois sur l'amortissement passif lui-même et sur le contrôle actif-passif est étudié.

5.5.1 Effet de la température sur l'amortissement

Considérons une poutre en Aluminium traitée par un revêtement contraint actif, constitué par une couche de matériau viscoélastique Dyad606 totalement couverte par une pastille piézo-céramique PZT5H, comme présentée dans la Figure 5.40. Le matériau viscoélastique est représenté par les modèles MSE, ADF et GHM, pour chaque température considérée. Les propriétés des matériaux sont données dans l'Annexe A.

Dans un premier temps, pour une température constante de 25°C, les propriétés du matériau, présentées dans la Figure 5.41, sont utilisées pour évaluer les paramètres ADF

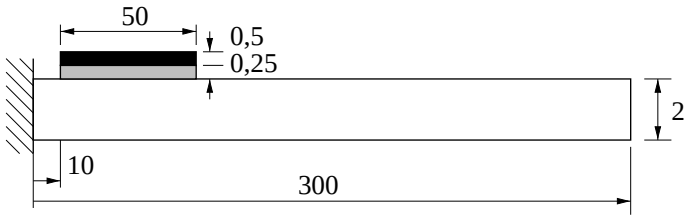


Figure 5.40: Poutre encastrée-libre traitée par un revêtement contraint actif.

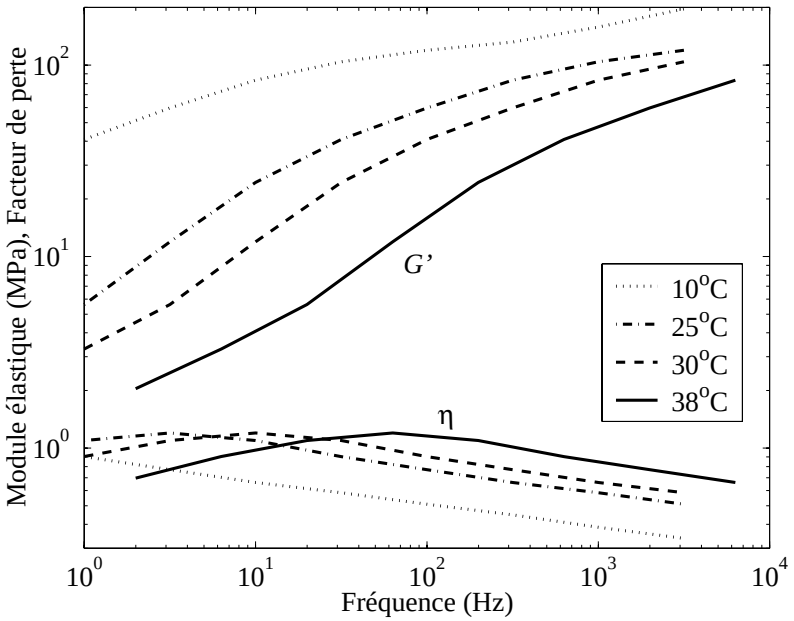


Figure 5.41: Variation des propriétés du matériau viscoélastique Dyad606 avec la température.

et GHM correspondants dans une bande de fréquences de 2–3000 Hz. Ces paramètres, présentés dans l'annexe A, sont ensuite utilisés dans le modèle éléments finis pour évaluer les cinq premières fréquences propres et leurs amortissements modaux correspondants. Les résultats, présentés dans le Tableau 5.2, montrent que les fréquences propres concordent bien pour les trois modèles, tandis que les amortissements modaux calculés avec les modèles ADF et GHM sont de l'ordre de 30% inférieurs à ceux calculés avec MSE. Cela est dû à un lissage non satisfaisant des propriétés du matériau bien que cinq séries de paramètres ADF/GHM aient été utilisées. Par contre, le matériau ISD112 à 27°C a pu être bien ajusté (erreur maximale de 5%) avec seulement trois séries de paramètres ADF/GHM (voir §3.8). Cette différence de représentativité des modèles pour les deux matériaux viscoélastiques est due au fait que la dépendance en fréquence des propriétés de l'ISD112 est beaucoup plus forte que celle du Dyad606 pour les bandes de fréquences étudiées.

Dans un deuxième temps, l'algorithme itératif de contrôle optimal présenté dans la Figure 4.2 est appliqué aux systèmes réduits correspondant à chaque modèle. Les matrices de pondération suivantes sont considérées : $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(1,1,1,0,\ldots,0)$ et $\mathbf{R} = \gamma\,\mathbf{I}$,

Tableau 5.2: Fréquences propres (Hz) et amortissements (%) en boucle-ouverte et fermée à 25°C.

	1	2	3	4	5
RCP ADF	23,6 (1,82%)	139,8 (0,66%)	364,3 (0,46%)	676,1 (0,71%)	1106,5 (0,91%)
RCP GHM	23,7 (1,81%)	139,8 (0,67%)	364,3 (0,45%)	676,1 (0,72%)	1106,7 (0,93%)
RCP MSE	23,6 (2,57%)	139,4 (0,99%)	363,6 (0,65%)	673,3 (1,00%)	1100,0 (1,25%)
RCA ADF	23,7 (8,88%)	139,9 (3,79%)	364,4 (1,64%)	676,5 (0,72%)	1106,5 (0,91%)
RCA GHM	23,8 (8,65%)	140,0 (3,79%)	364,4 (1,62%)	676,4 (0,73%)	1106,7 (0,93%)
RCA MSE	23,9 (11,80%)	139,5 (2,20%)	363,7 (0,86%)	673,6 (1,01%)	1100,0 (1,25%)

où γ est calculé afin de ne pas dépasser une tension maximale de 250 V dans la pastille piézoélectrique lorsque la structure est soumise à une force de perturbation transversale, appliquée à son extrémité libre et dont l'amplitude induit une flèche maximale en ce même point de 2 mm.

Le Tableau 5.2 présente aussi les fréquences et amortissements modaux des cinq premiers modes propres pour le système en boucle-fermée, c'est-à-dire, avec un revêtement contraint actif (RCA). On peut observer que les fréquences propres sont encore assez concordantes, tandis que les amortissements modaux des modèles ADF/GHM ne coïncident pas avec ceux du modèle MSE. Les différences sont clairement dues au fait que le modèle MSE n'est pas adapté à l'algorithme de contrôle utilisé, basé sur le calcul des réponses transitoires. Pour ce qui est de la différence entre les amortissements actifs calculés par les modèles ADF et GHM, la raison est plutôt due à la troncature des modes qui ne se fait pas avec les mêmes bases pour les deux cas. Ainsi, des différences entre les bases modales induisent des vecteurs de contrôle et, par conséquent, des performances de contrôle discordants. Néanmoins, ces erreurs sont peu élevées (maximum 2%).

Les réponses en fréquence du système en boucle-ouverte ont aussi été calculées en utilisant les trois modèles viscoélastiques. On observe, dans la Figure 5.42a, que les amplitudes de l'extrémité libre de la poutre s'interposent pour les modèles ADF et GHM, alors que, pour le modèle MSE, les résonances sont un peu plus amorties. On note aussi que, bien que la base modale résultant du modèle MSE n'est pas valable pour toute la bande de fréquences, l'approximation résultante est assez bonne. Les réponses en boucle-ouverte sont ensuite comparées à celles en boucle-fermée dans la Figure 5.42b. Seule la réponse en boucle-ouverte pour le modèle ADF y est présentée puisqu'elle coïncide avec celle pour GHM. La Figure 5.42b montre que les réponses en boucle-fermée des modèles ADF et GHM sont assez similaires. Cependant, comme prévu dans le Tableau 5.2, le modèle MSE aboutit à des amortissements supérieurs, pour le premier mode, mais inférieurs, pour les deux autres contrôlés. D'autre part, il est aussi clair que le contrôle actif augmente sensiblement l'amortissement des trois premiers modes, tandis que les deux autres modes ne sont pas affectés par le contrôleur. Cela signifie que le contrôleur n'aboutit pas à des problèmes de spillover.

Puisque la température modifie les propriétés du matériau viscoélastique (Figure 5.43), il est intéressant d'analyser l'effet de sa variation sur la performance du contrôle hybride. Ainsi, considérons que le contrôleur conçu précédemment, pour une température de 25°C, soit appliqué tel quel pour le même système soumis à d'autres températures. On peut supposer qu'à cause des variations des propriétés, rigidité et facteur de perte,

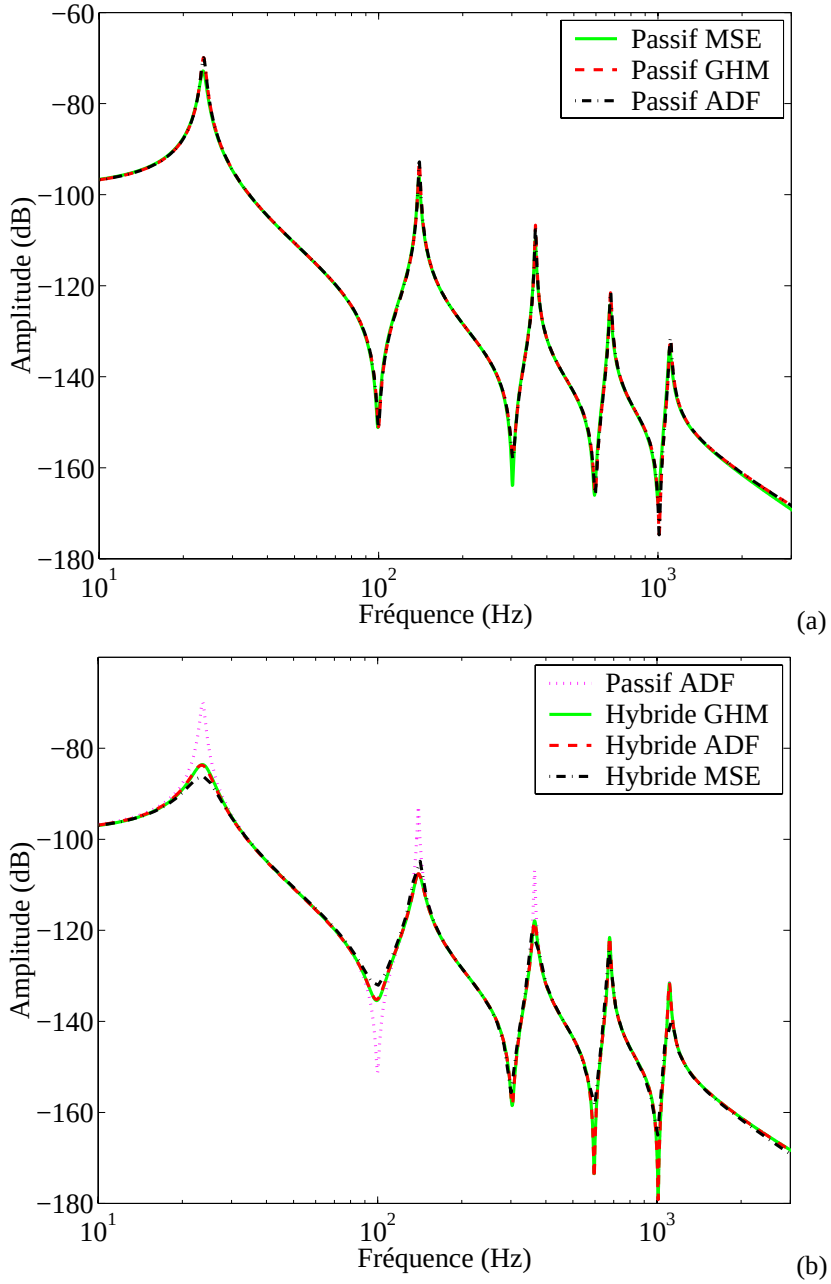


Figure 5.42: Réponse en fréquence de l'extrémité libre de la poutre : (a) en boucle-ouverte, utilisant les modèles ADF, GHM et MSE ; (b) en boucle-ouverte et fermée.

du matériau viscoélastique, les performances seront différentes. Pour ce faire, la solution de l'équation de Ricatti $\mathbf{P}_o$, obtenue pour 25°C, est utilisée pour le calcul du gain de contrôle $\mathbf{K}_g = \mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{P}_o$, où la matrice $\hat{\mathbf{B}}$ est dépendante de la température. La Figure 5.44 montre la déviation des amortissement hybride et tension maximale du système à 10°C, 30°C et 38°C, par rapport à ceux à 25°C, lorsqu'il est contrôlé par le contrôleur conçu à 25°C. L'écart des amortissements modaux des trois premiers modes propres, en boucle-fermée, sont présentés dans la Figure 5.44a, pour les trois modèles viscoélastiques

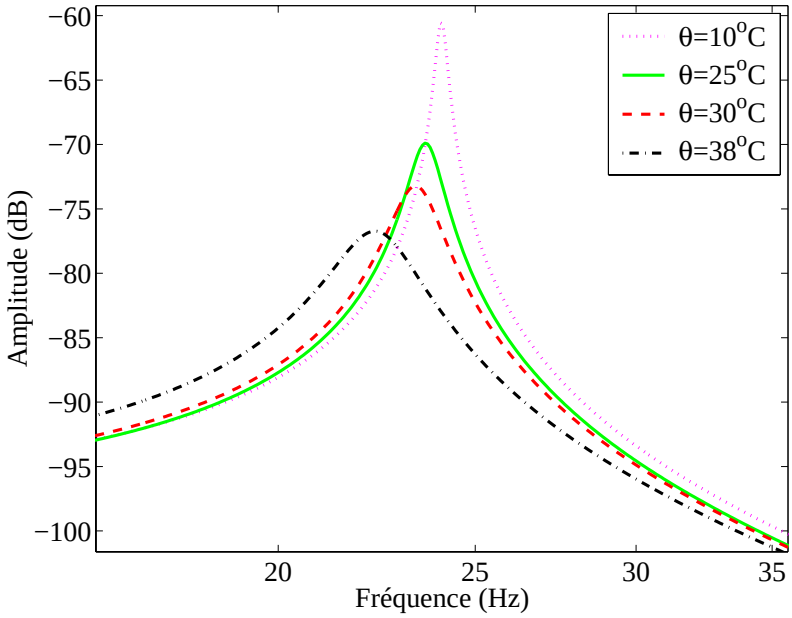
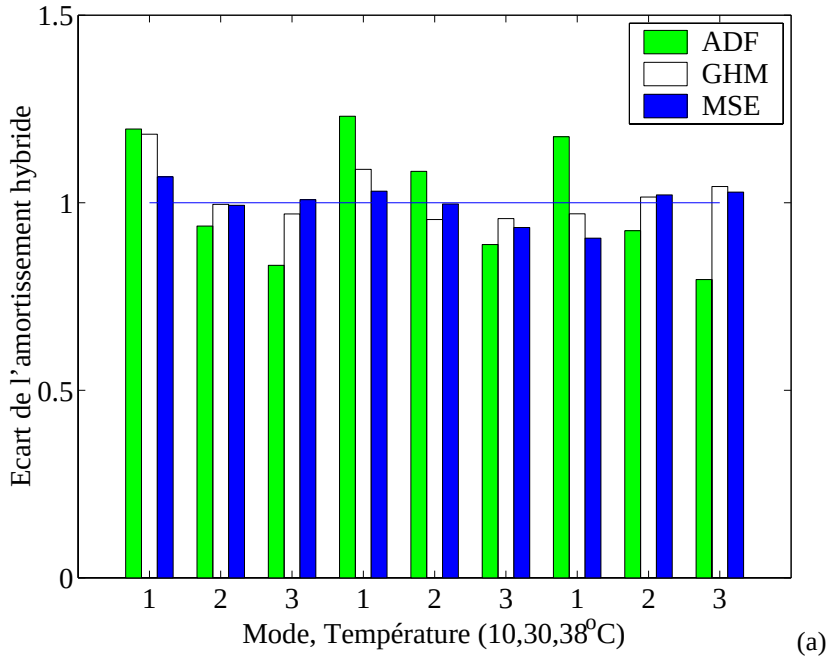


Figure 5.43: Réponse du premier mode propre en boucle-ouverte pour plusieurs températures.

et pour les trois températures. On observe que, pour 10°C et 30°C, l'amortissement du premier mode propre augmente pour les trois modèles, tandis que, pour 38°C, seul celui du modèle ADF augmente. En plus, pour 10°C, et aussi pour le modèle GHM à 30°C, la tension maximale nécessaire pour cette amélioration de performance augmente aussi (Figure 5.44b). Dans ces cas, l'utilisation du contrôleur conçu pour le système à 25°C aboutit à un système de contrôle impraticable à cause de la saturation de l'actionneur piézoélectrique. Néanmoins, notamment pour le système à 38°C, on peut observer une augmentation de l'amortissement accompagné d'une diminution de la tension maximale. Dans ces cas, le contrôleur améliore simplement l'amortissement d'un des modes, le premier pour ADF et les deuxième et troisième pour GHM et MSE, au dépend des autres. Il est clair qu'il est très difficile de prévoir le comportement du contrôleur en cas de grandes modifications des propriétés du système. Ainsi, il est peut être préférable de concevoir une série de contrôleurs conçus pour quelques températures choisies dans une bande de températures. C'est l'objet de la section suivante.

5.5.2 Contrôleur dédié à une température

Ainsi, considérons quatre contrôleurs différents pour les systèmes aux températures de 10°C, 25°C, 30°C et 38°C. La Figure 5.45 présente les réponses transitoires, en boucle-ouverte et fermée, pour chaque température. On constate que, bien que la réponse en boucle-ouverte du système s'amortie plus rapidement pour les températures élevées, le temps nécessaire pour annuler la réponse en boucle-fermée est presque constant. Cela signifie que, indépendamment de l'amortissement passif du système, le contrôleur maintient une performance hybride uniforme. Ainsi, comme les variations de température sont,



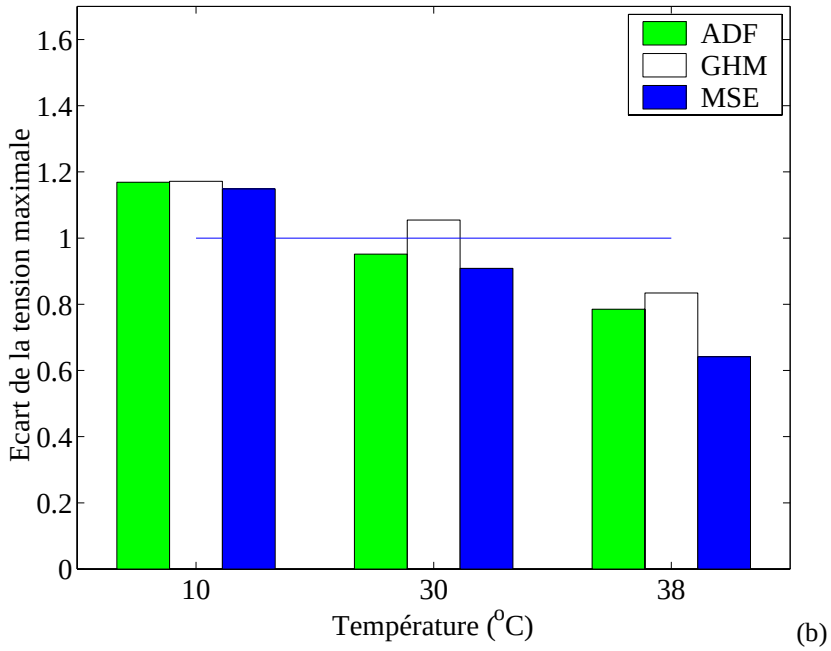


Figure 5.44: Déviation de la performance de contrôle relative à 25°C : (a) Amortissement hybride $(\zeta(\theta)/\zeta(25))$; (b) Tension maximale $(V_{max}(\theta)/V_{max}(25))$.

généralement, lentes, il est possible de concevoir un ensemble de contrôleurs à l'intérieur d'un intervalle de températures de fonctionnement et de permuter de l'un à l'autre suivant les changements de température. Cela permet de maintenir un niveau satisfaisant d'amortissement tout en respectant les limitations de la tension de contrôle.

La Figure 5.46a montre l'effet de la température sur l'amortissement passif. Elle confirme que le système est plus amorti pour des températures élevées. Néanmoins, à

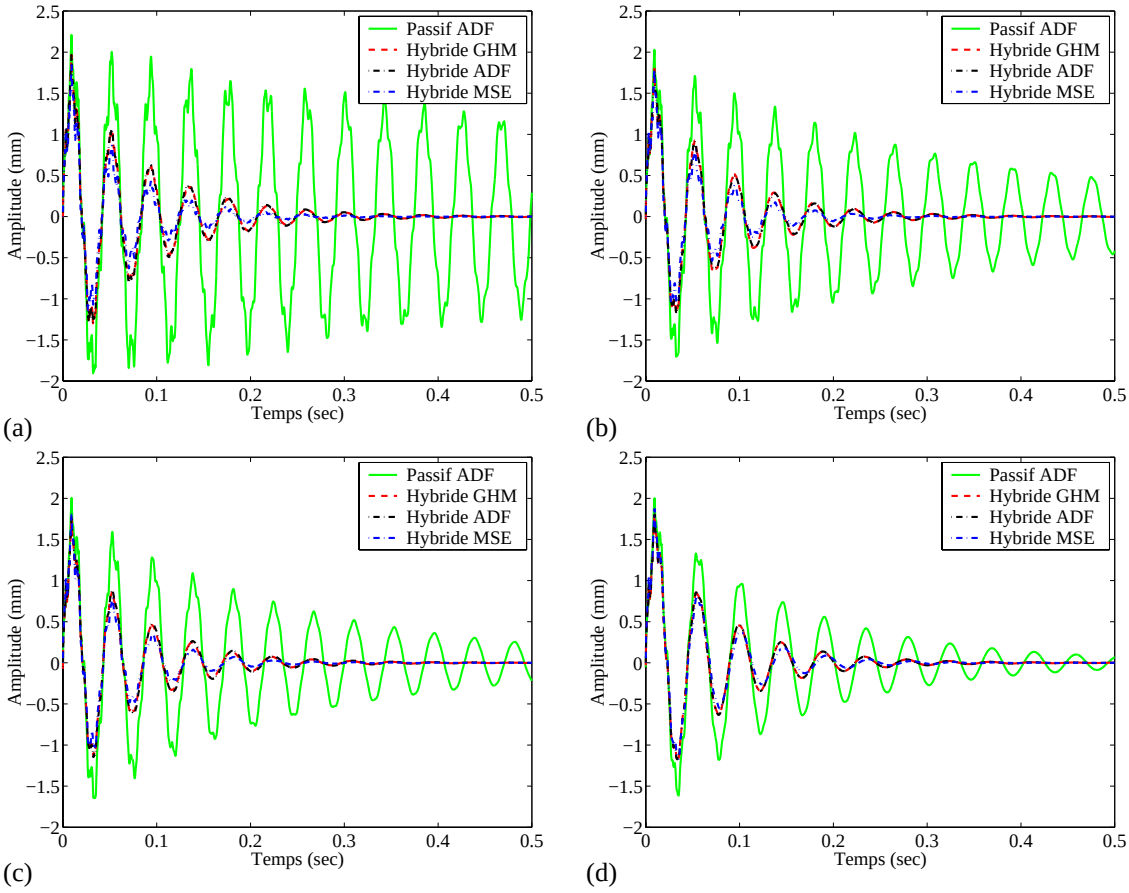


Figure 5.45: Réponse transitoire en boucle-ouverte et fermée (un contrôleur par température) à : (a) 10°C ; (b) 25°C ; (c) 30°C ; (d) 38°C.

cause de la nature des matériaux viscoélastiques, on s'attend à ce que l'amortissement diminue après une certaine température. Cela est une conséquence immédiate du glissement vers les hautes fréquences des courbes maîtresses du matériau viscoélastique induit par l'augmentation de la température. En effet, la Figure 5.41 montre que, pour une température de 38°C, la région d'optimalité du facteur de perte du matériau Dyad606 coïncide avec la bande de fréquences où se trouvent les cinq premiers modes propres de la structure, tandis que, à 10°C, ce matériau n'est plus aussi efficace dans cette bande. Cependant, on peut imaginer que pour des températures plus élevées, les courbes maîtresses du matériau (Figure 5.41) seront décalées vers la droite et le facteur de perte du matériau, pour les cinq premières fréquences propres de la structure, sera celui de la partie gauche de la courbe ; donc, moins élevé.

Il a été montré, précédemment, que le contrôle actif permet de maintenir une performance uniforme en dépit de la variation de l'amortissement passif du système. Néanmoins, il est intéressant d'étudier le gain d'amortissement fournit par le contrôleur, par rapport au passif, afin d'analyser la viabilité du système de contrôle. Ce gain est calculé par $100(\zeta_h/\zeta_p - 1)$. En effet, la Figure 5.45 montre que l'amortissement passif augmente avec la température, alors que l'amortissement hybride reste presque constant. Ainsi, on peut voir de la Figure 5.46b qu'au fur et à mesure que la température augmente,

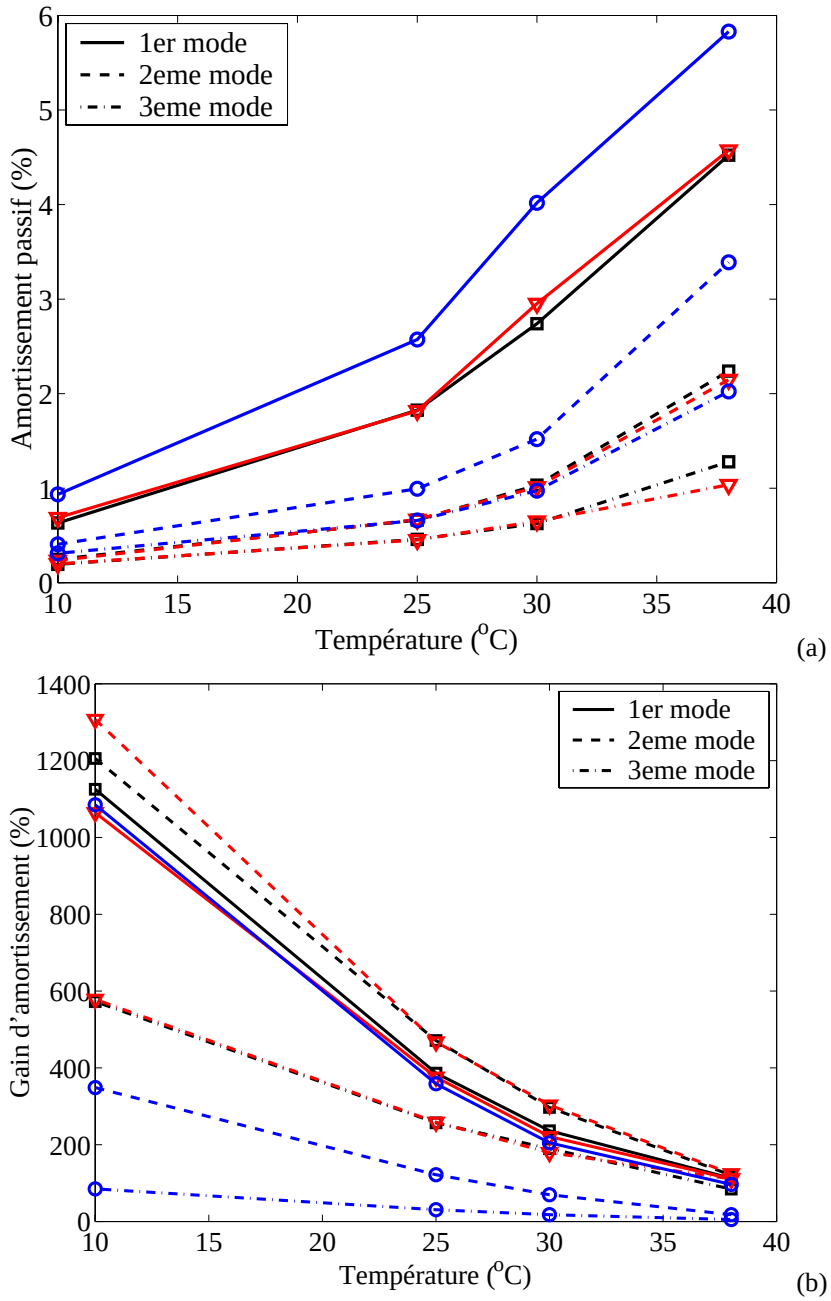


Figure 5.46: Variation de l'amortissement avec la température : (a) Amortissement passif ; (b) Gain d'amortissement fournit par le contrôleur ; ○ : MSE ; ▽ : ADF ; □ : GHM.

le gain d'amortissement fournit par le contrôleur actif diminue. Il est donc de moins en moins avantageux d'inclure le contrôle actif, puisque l'amélioration de l'amortissement peut ne pas être suffisante pour justifier l'ajout de câbles électriques, de filtres de contrôle et de matériaux supplémentaires.

5.6 Conclusion

Dans un premier temps, les mécanismes d'action piézoélectrique par extension et par cisaillement ont été comparés pour le contrôle actif de forme et de vibrations. Les résultats ont montré que les actionneurs par cisaillement sont efficaces pour produire des déformations, ou contrôler des vibrations, de flexion de petites amplitudes et fréquences relativement élevées lorsqu'ils sont intégrés dans le cœur de structures sandwich, à peaux rigides et cœur souple. De plus, il a été trouvé que ces actionneurs sont optimaux lorsqu'ils sont courts et relativement épais.

Dans un deuxième temps, quelques configurations d'amortissement hybride ont été analysées. Pour ce faire, le modèle ADF réduit a été associé à l'algorithme de contrôle optimal LQR itératif. Les traitements amortissants hybrides, associant les traitements viscoélastiques passifs et piézoélectriques actifs, du type RCA (Revêtement Contraint Actif), RCP/CA (Revêtement Contraint Passif avec Contrôle Actif) ou RCPE/CA (Revêtement Contraint Passif Éloigné avec Contrôle Actif) ont été analysés et comparés afin d'établir leurs régions d'optimalité. Les analyses paramétriques de la performance des traitements du type RCA, obtenus par le collage d'actionneurs piézoélectriques directement sur des revêtements viscoélastiques, ont montré qu'ils fournissent des systèmes de contrôle efficaces et robustes. En effet, la partie passive du traitement fournit des amortissements raisonnables en boucle-ouverte et augmente la marge de stabilité des modes non contrôlés. Cependant, la perte de transmissibilité entre l'actionneur et la structure, due à la souplesse de la couche viscoélastique, impose des restrictions quant à l'épaisseur de cette dernière. Par conséquent, ces traitements n'ont été efficaces qu'avec des actionneurs piézoélectriques collés sur des couches viscoélastiques très minces. Néanmoins, pour les cas étudiés dans ce travail, leur association à un contrôle actif des premiers modes propres, moins amortis passivement dans ces cas, aboutit à un contrôle hybride performant dans une bande de fréquences assez large. D'autre part, les traitements hybrides du type RCP/CA et RCPE/CA, où le revêtement actif n'est pas collé sur le passif et, donc, agit séparément, ont aussi été étudiés à travers une analyse paramétrique. Les résultats ont montré que, comme prévu, ces traitements sont moins dépendants de l'épaisseur de la couche viscoélastique, puisqu'elle ne réduit pas la transmissibilité entre l'actionneur et la structure. En plus, pour les exemples étudiés dans ce travail, ces traitements sont, généralement, plus performants que les RCA d'une part, et peuvent fournir des performances comparables à celles des RCA avec des traitements moins longs d'autre part. Il a été montré que les traitements RCPE/CA peuvent aboutir à des amortissements passifs plus efficaces grâce à l'élévation du revêtement passif. Par contre, puisque le revêtement contraint passif est optimum pour des couches externes rigides, les traitements RCP/CA et RCPE/CA aboutissent à des épaisseurs et poids plus élevées, par rapport aux traitements RCA. Un des avantages pratiques du traitement RCP/CA sur les autres est que les longueurs des traitements passif et actif peuvent être différentes. Par conséquent, il est possible d'utiliser des traitements passifs plus longs que la limite imposée par les actionneurs piézoélectriques. Il est clair, d'après les résultats présentés dans ce travail, que chaque traitement est optimum pour certaines conditions d'opération.

Sachant que les propriétés des matériaux viscoélastiques dépendent aussi de la température, en plus de la fréquence, les modèles viscoélastiques ADF, GHM et MSE ont

aussi été utilisés pour étudier l'influence de la température d'opération sur la performance d'amortissement d'un traitement du type RCA, en boucle-ouverte et fermée. Puisque les modèles viscoélastiques, tels qu'ils ont été présentés, ne permettent pas une modélisation directe de la variation des propriétés du matériau avec la température, ils ont été appliqués pour quelques températures fixées. Les résultats ont montré que, pour l'exemple étudié utilisant le matériau Dyad606, les variations des propriétés du matériau viscoélastique modifient la performance du contrôleur. Il est donc difficile de garantir que la performance désirée du système soit respectée pour toutes les températures d'opération. Ainsi il a été proposé de concevoir une série de contrôleurs dans l'intervalle de températures et commuter entre eux à chaque variation significative de température, ce qui aboutit à des performances uniformes dans l'intervalle.

Chapitre 6

Conclusion générale

6.1 Résumé des résultats de la thèse

Dans cette section, les principaux résultats de la thèse concernant les modèles éléments finis de poutre sandwich intelligente, la modélisation des matériaux viscoélastiques et le contrôle actif et hybride actif-passif des vibrations, sont présentés.

6.1.1 Modèles éléments finis de poutre sandwich intelligente

Deux modèles éléments finis de poutre sandwich, l'un à trois couches et l'autre à peaux multicouches, ont été développés. Les couches/sous-couches de la poutre peuvent être élastiques, piézoélectriques ou viscoélastiques. L'étude de la flexion d'une poutre élastique à travers deux pastilles piézoélectriques agissant en extension ou à travers une pastille piézoélectrique agissant par cisaillement a montré que les résultats coïncident bien avec ceux trouvés dans la littérature. Elle a montré aussi que les actionneurs par extension induisent des forces concentrées, alors que ceux par cisaillement induisent des moments distribués. D'autre part, les résultats des comparaisons avec des résultats trouvés dans la littérature ont montré que le modèle à peaux multicouches représente bien des poutres multicouches, dont les rigidités des sous-couches des peaux ne différent pas trop. Il a aussi été montré que l'effet piézoélectrique d'augmentation de rigidité des couches/sous-couches piézoélectriques peut être pris en compte par l'ajout de ddls électriques condensés au niveau élémentaire ou à travers une modification des constantes élastiques des couches piézoélectriques.

6.1.2 Modélisation des matériaux viscoélastiques

Trois méthodes ont été proposées pour la représentation de la dépendance en fréquence des propriétés des matériaux viscoélastiques : (i) une version itérative de la méthode des énergies modales, limitée aux structures peu amorties ; (ii) le modèle *Golla-Hughes-McTavish* (GHM) et (iii) le modèle *Anelastic Displacement Fields* (ADF). Les deux derniers basés sur l'ajout de variables internes sont meilleurs que le premier pour des structures très amorties. Il a été montré que la représentativité des modèles ADF et GHM est fortement dépendante de la qualité du lissage des courbes maîtresses du matériau par

ces modèles. En plus, l'écriture des systèmes du second ordre sous forme d'équations d'état a fait apparaître que les modèles ADF et GHM augmentent beaucoup la dimension du système initial. Ainsi, une réduction des modèles d'état par troncature modale a été proposée. Le choix des modes à retenir a été plus difficile dans certains cas, où l'analyse des valeurs propres a dû être accompagnée d'une analyse des modes propres correspondants. Une représentation des systèmes réduits complexes par des équations d'état réelles, dont les variables d'état représentent les déplacements et vitesses modaux, a été présentée. Le modèle ADF a été retenu pour les études ultérieures puisque : (i) il aboutit à des systèmes d'état de dimension plus faible par rapport au modèle GHM ; (ii) il contient moins de paramètres matériels que le modèle GHM ; (iii) il est plus précis que le modèle MSE.

6.1.3 Contrôle actif de vibrations

La théorie de contrôle optimal quadratique LQR a été présentée. Un algorithme itératif a été proposé pour régler automatiquement la pondération de contrôle afin de respecter le champ électrique maximum supportable par les actionneurs piézoélectriques. La prise en compte d'un observateur d'état, aboutissant à un contrôleur du type LQG, a été présentée. L'étude du contrôle actif d'une poutre sandwich déjà amortie par son cœur viscoélastique, à travers un actionneur et un capteur piézoélectriques a été présentée en utilisant trois contrôleurs : (i) LQR, (ii) dérivatif et (iii) LQG. Les résultats ont montré que les contrôleurs LQR et LQG sont plus efficaces que le dérivatif, puisque la performance de ce dernier est limitée par le positionnement relatif des actionneurs et capteurs. De plus, pour le cas étudié, une performance de contrôle presque aussi satisfaisante que celle du LQR a pu être obtenue par le contrôleur LQG avec une tension de contrôle inférieure.

6.1.4 Application aux contrôles actif et hybride actif-passif des vibrations

Dans un premier temps, les mécanismes d'action piézoélectrique par extension et par cisaillement ont été comparés pour le contrôle actif de forme et de vibrations. Les résultats ont montré que les actionneurs par cisaillement sont efficaces pour produire des déformations, ou contrôler des vibrations, de flexion de petites amplitudes et fréquences relativement élevées lorsqu'ils sont intégrés dans le cœur de structures sandwich, à peaux rigides et cœur souple. De plus, il a été trouvé que ces actionneurs sont optimaux lorsqu'ils sont courts et relativement épais.

Dans un deuxième temps, les traitements amortissants hybrides, associant les traitements viscoélastiques passifs et piézoélectriques actifs, du type RCA (Revêtement Contraint Actif), RCP/CA (Revêtement Contraint Passif avec Contrôle Actif) ou RCPE/CA (Revêtement Contraint Passif Éloigné avec Contrôle Actif) ont été analysés et comparés. Il a été montré que les trois sont plus performants que les traitements purement passifs. Les traitements du type RCA n'ont été efficaces qu'avec des actionneurs piézoélectriques collés sur des couches viscoélastiques très minces. Les deux autres sont moins dépendants de l'épaisseur de la couche viscoélastique et, en général, plus performants que le RCA.

Les résultats ont montré que le RCPE/CA aboutit à des amortissements passifs plus efficaces que les deux autres.

L'étude de l'influence de la température sur la performance d'amortissement d'un RCA a montré que les variations des propriétés du matériau viscoélastique, dues aux variation de température, modifient la performance du contrôleur. Ainsi il a été proposé de concevoir une série de contrôleurs dans l'intervalle de températures et commuter entre eux à chaque variation significative de température, ce qui aboutit à des performances uniformes dans l'intervalle.

6.2 Originalités de la thèse

D'après l'analyse bibliographique détaillée dans la section §1.2, les originalités de cette thèse peuvent être résumées dans les points suivants :

- Un modèle éléments finis de poutre sandwich piézoélectrique, pouvant représenter à la fois les mécanismes d'action par extension et par cisaillement, a été présenté ; ce modèle ne présente pas de blocage par cisaillement grâce au choix des déplacements axiaux moyen et relatif des plans moyens des peaux comme ddls ;
- L'effet piézoélectrique d'augmentation de rigidité dû au potentiel induit dans les couches piézoélectriques a été représenté à travers des modifications des constantes élastiques et de manière équivalente à travers la prise en compte de ddls électriques condensés au niveau élémentaire ;
- Le contrôle actif des vibrations utilisant des actionneurs par cisaillement n'avait pas été présenté auparavant ;
- Un modèle éléments finis de poutre sandwich piézoélectrique, dont les peaux sont composées de plusieurs sous-couches, a été présenté et validé ;
- L'application à l'étude de l'amortissement hybride actif-passif d'une version itérative de la méthode des énergies modales ;
- La réduction par troncature modale des systèmes d'état augmentés, résultant de l'utilisation des modèles viscoélastiques ADF et GHM, ainsi qu'une représentation réelle du système d'état réduit complexe ont été présentées ;
- Une comparaison des modèles viscoélastiques ADF, GHM et MSE appliqués à l'étude de l'amortissement hybride actif-passif dépendant de la fréquence et de la température, a été présentée pour la première fois ;
- Un algorithme itératif a été proposé pour évaluer automatiquement les pondérations de contrôle optimal LQR, de manière à respecter les limitations des champs électriques imposables aux matériaux piézoélectriques ;
- Une synthèse sur les traitements amortissants hybrides actif-passif, associant les matériaux viscoélastiques et piézoélectriques dans un seul traitement ou séparément, a été présentée ;
- Le contrôle actif de poutres sandwich à cœur viscoélastique, à travers des pastilles piézoélectriques associés à des algorithmes de contrôle, tenant compte de

la dépendance en fréquence des propriétés des matériaux viscoélastiques, a été présenté.

6.3 Perspectives de recherche

Dans une perspective de poursuite des travaux de recherche développés dans cette thèse, il serait intéressant de généraliser les analyses présentées ici à d'autres types de structures, notamment aux plaques et coques sandwich, afin d'élargir leur champ d'applications. Dans cette extension, il serait nécessaire d'étudier, d'une part, les actionneurs par cisaillement agissant en deux dimensions et, d'autre part, l'extension des modèles viscoélastiques présentés aux cas bidimensionnels. En outre, l'étude détaillée des champs électriques induits dans les actionneurs par cisaillement semble très intéressante. D'autre part, une analyse approfondie de l'influence des modes de relaxation sur la représentation du comportement vibratoire des poutres sandwich par des modèles réduits reste à faire. De même, le développement d'une base de données, classifiant les matériaux viscoélastiques bien modélisables par les modèles ADF, GHM et MSE et contenant leurs paramètres respectifs, serait très utile. L'étude d'autres configurations de contrôle hybride actif-passif est aussi possible en utilisant les modèles proposés et constitue une continuation naturelle de cette thèse. De plus, l'optimisation des paramètres géométriques et des propriétés des matériaux des traitements hybrides est à prendre en considération comme une extension des analyses paramétriques présentées dans ce travail. Dans le cadre expérimental, plusieurs essais pourraient être réalisés pour, d'une part, valider quelques résultats numériques de performance du contrôle hybride et, d'autre part, étudier d'autres configurations d'amortissement hybride. Enfin, l'assemblage des différents algorithmes et modèles proposés dans ce travail, afin de développer une boîte à outils facile à utiliser en entreprise ou par d'autres laboratoires, pour l'analyse des systèmes de contrôle hybride actif-passif, est envisagée.

6.4 Publications

1. Benjeddou, A., Trindade, M.A., and Ohayon, R. A finite element model for extension and shear piezoelectrically actuated adaptive structures. In *Japan-France Seminar on Intell. Mater. Struct.*, Sendai (Japan), pp. 277–295, 1997.
2. Benjeddou, A., Trindade, M.A., and Ohayon, R. A finite element model for shear actuated adaptive structures. In Murotsu, Y., Rogers, C.A., Santini, P., and Okubo, H., eds., *Proceedings of the 8th Int. Conf. Adaptive Struct. Tech.*, Technomic Pub. Co., Lancaster (USA), pp. 133–142, 1997.
3. Benjeddou, A., Trindade, M.A., and Ohayon, R. A unified beam finite element model for extension and shear piezoelectric actuation mechanisms. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **8**(12) :1012–1025, 1997.
4. Benjeddou, A., Trindade, M.A., and Ohayon, R. Comparison of extension and shear actuation mechanisms for smart structure beams. In Tomlinson, G.R. and Bullough, W.A., eds., *Smart Mater. Struct.*, IOP Publishing, Bristol (UK), pp. 131–138, 1998.

5. Benjeddou, A., Trindade, M.A., and Ohayon, R. Piezoelectric actuation mechanisms for intelligent sandwich structures. *Smart Mater. Struct.*, **9**(3) :328–335, 2000.
6. Benjeddou, A., Trindade, M.A., and Ohayon, R. A new shear actuated smart structure beam element. In *39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct., Structural Dyn., and Mater. Conf.*, AIAA, Reston (USA), vol. **3**, pp. 1831–1839, 1998.
7. Benjeddou, A., Trindade, M.A., and Ohayon, R. New shear actuated smart structure beam finite element. *AIAA J.*, **37**(3) :378–383, 1999.
8. Benjeddou, A., Trindade, M.A., and Ohayon, R. Two models for two actuation mechanisms : A comparison. In Weber, H.I., Gonçalves, P.B., Jasiuk, I., Pamplona, D., Steele, C.R., and Bevilacqua, L, eds., *Applied Mechanics in the Americas*, AAM/ABCM, Rio de Janeiro (Brazil), vol. **8**, pp. 1545–1548, January 1999.
9. Trindade, M.A., Benjeddou, A., and Ohayon, R. Shear and extension actuation mechanisms for structural vibration control. In Haggod, N.W. and Atalla, M.J., eds., *Proceedings of the 9th Int. Conf. Adaptive Struct. Tech.*, Technomic Pub. Co., Lancaster (USA), pp. 105–114, 1999.
10. Trindade, M.A., Benjeddou, A., and Ohayon, R. Parametric analysis of the vibration control of sandwich beams through shear-based piezoelectric actuation. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* (in press).
11. Trindade, M.A., Benjeddou, A., and Ohayon, R. Performances d'un mécanisme hybride actif/passif d'amortissement des vibrations. In *Actes du 4ème Colloque GDR Vibroacoustique – CNRS 1138*, Publications du LMA n.149, Marseille (France), pp. 209–225, 1998.
12. Trindade, M.A., Benjeddou, A., and Ohayon, R. Amortissement hybride passif-actif des vibrations de structures composites. Rapport technique d'avancement D.G.A./D.S.P./S.T.T.C./MA. no.97-2530, Conservatoire National des Arts et Métiers, Chaire de Mécanique, Février 1999.
13. Trindade, M.A., Benjeddou, A., and Ohayon, R. Modélisation de la dépendance en fréquence des matériaux viscoélastiques pour le contrôle hybride actif-passif des vibrations. In Guédra-Degeorges, D., Ladèveze, P., and Raous, M., eds., *Actes du 4ème Colloque National en Calcul des Structures*, Teknea, Toulouse (France), vol. **2**, pp. 837–842, 1999.
14. Trindade, M.A., Benjeddou, A., and Ohayon, R. Modeling of frequency-dependent viscoelastic materials for active-passive vibration damping. *J. Vib. Acoust.*, **122**(2) :169–174, 2000.
15. Trindade, M.A., Benjeddou, A., and Ohayon, R. Finite element analysis of frequency- and temperature-dependent hybrid active-passive vibration damping. *Revue Européenne des Éléments Finis*, **9**(1-3) :89–111, 2000.
16. Trindade, M.A., Benjeddou, A., and Ohayon, R. Finite element modeling of hybrid active-passive vibration damping : a unified approach. In Ohayon, R. and Bernadou, M., eds., *Proceedings of the 10th Int. Conf. Adaptive Struct. Tech.*, Technomic Pub. Co., Lancaster (USA), pp. 280–287, 2000.
17. Trindade, M.A., Benjeddou, A., and Ohayon, R. Finite element modeling of hybrid active-passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams.

submitted to *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2000.

18. Trindade, M.A., Benjeddou, A., and Ohayon, R. Amortissement hybride passif-actif des vibrations de structures composites. Rapport final D.G.A./D.S.P./S.T.T.C./MA. no.97-2530, Conservatoire National des Arts et Métiers, Chaire de Mécanique, Février 2000.

Bibliographie

[1] Agnes, G.S. and Napolitano, K. Active constrained layer viscoelastic damping. In *34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct., Structural Dyn., and Mater. Conf.*, AIAA, Reston (USA), pp. 3499–3506, 1993.

[2] Assaf, S. *Modélisation par la Méthode des Éléments Finis du Comportement Vibratoire des Poutres et Plaques Sandwiches : Métal Matériaux Viscoélastiques*. Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, Compiègne, 1991.

[3] Azvine, B., Tomlinson, G.R., and Wynne, R. Use of active constrained-layer damping for controlling resonant vibration. *Smart Mater. Struct.*, **4**(1) :1–6, 1995.

[4] Azvine, B., Tomlinson, G.R., Wynne, R., and Sensburg, O. Vibration suppression of flexible structures using active damping. In Breitbach, E.J., Wada, B.K., and Natori, M.C., eds., *Proceedings of the 4th Int. Conf. Adaptive Struct. Tech.*, Technomic Pub. Co., Lancaster (USA), pp. 340–356, 1993.

[5] Badre-Alam, A., Wang, K.W., and Gandhi, F. Optimization of enhanced active constrained layer (EACL) treatment on helicopter flexbeams for aeromechanical stability augmentation. *Smart Mater. Struct.*, **8**(2) :182–196, 1999.

[6] Bagley, R.L. and Torvik, P.J. Fractional calculus – a different approach to analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA J.*, **21**(5) :741–748, 1983.

[7] Bagley, R.L. and Torvik, P.J. Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA J.*, **23**(6) :918–925, 1985.

[8] Baz, A. Boundary control of beams using active constrained layer damping. *J. Vib. Acoust.*, **119**(2) :166–172, 1997.

[9] Baz, A. Dynamic boundary control of beams using active constrained layer damping. *Mech. Syst. Signal Proc.*, **11**(6) :811–825, 1997.

[10] Baz, A. Optimization of energy dissipation characteristics of active constrained layer damping. *Smart Mater. Struct.*, **6**(3) :360–368, 1997.

[11] Baz, A. Robust control of active constrained layer damping. *J. Sound Vib.*, **211**(3) :467–480, 1998.

[12] Baz, A. and Ro, J. Finite element modeling and performance of active constrained layer damping. In Meirovitch, L., ed., *9th VPI&SU Conf. on Dyn. & Control of Large Struct.*, Blacksburg (USA), pp. 345–357, 1993.

[13] Baz, A. and Ro, J. Partial treatment of flexible beams with active constrained layer damping. In Guran, A., ed., *Recent Developments in Stability, Vibration and Control of Structural Systems*, ASME, New York, vol. **AMD-167**, pp. 61–80, 1993.

[14] Baz, A. and Ro, J. Optimum design and control of active constrained layer damping. *J. Vib. Acoust.*, **117**(B) :135–144, 1995.

[15] Benjeddou, A. Recent advances in hybrid active-passive vibration control (submitted). *J. Vib. Control*, 1999.

[16] Benjeddou, A., Trindade, M.A., and Ohayon, R. A unified beam finite element model for extension and shear piezoelectric actuation mechanisms. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **8**(12) :1012–1025, 1997.

[17] Bent, A.A., Hagood, N.W., and Rodgers, J.P. Anisotropic actuation with piezoelectric fiber composites. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **6**(3) :338–349, 1995.

[18] Biot, M.A. Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity. *Phys. Rev.*, **97**(6) :1463–1469, 1955.

[19] Brackbill, C.R., Lesieutre, G.A., Smith, E.C., and Govindswamy, K. Thermomechanical modeling of elastomeric materials. *Smart Mater. Struct.*, **5**(5) :529–539, 1996.

[20] Chen, T. and Baz, A. Performance characteristics of active constrained layer damping versus passive constrained layer damping with active control. In Varadan, V.V. and Chandra, J., eds., *Smart Struct. & Mater. 1996 : Mathematics and Control in Smart Structures*, SPIE, Bellingham (USA), vol. **2715**, pp. 256–268, 1996.

[21] Christensen, R.M. *Theory of Viscoelasticity : An Introduction*. Academic Press, Inc., New York, 2^{nd} edition, 1982.

[22] Crassidis, J., Baz, A., and Wereley, N. H_∞ control of active constrained layer damping. *J. Vib. Control*, **6**(1) :113–136, 2000.

[23] Crawley, E.F. and Anderson, E.H. Detailed models of piezoceramic actuation of beams. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **1**(1) :4–25, 1990.

[24] Crawley, E.F. and deLuis, J. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA J.*, **25**(10) :1373–1385, 1987.

[25] DiTaranto, R.A. Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite-length beams. *J. Appl. Mech.*, **32** :881–886, 1965.

[26] Dosch, J.J., Inman, D.J., and Garcia, E. A self-sensing piezoelectric actuator for collocated control. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **3**(1) :167–185, 1992.

[27] Dovstam, K. Augmented Hooke's law in frequency domain : a three dimensional, material damping formulation. *Int. J. Solids Struct.*, **32**(19) :2835–2852, 1995.

[28] Enelund, M. and Lesieutre, G.A. Time domain modeling of damping using anelastic displacement fields and fractional calculus. *Int. J. Solids Struct.*, **36**(29) :4447–4472, 1999.

[29] Franklin, G.F. and Powell, J.D. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, Reading (USA), 1980.

[30] Friot, E. and Bouc, R. Contrôle optimal par rétroaction du rayonnement d'une plaque munie de capteurs et d'actionneurs piézo-électriques non colocalisés. In *2^{eme} Colloque GDR Vibroacoustique*, LMA, Marseille, pp. 229–248, 1996.

[31] Friswell, M.I. and Inman, D.J. Hybrid damping treatments in thermal environments. In Tomlinson, G.R. and Bullough, W.A., eds., *Smart Mater. Struct.*, IOP Publishing, Bristol (UK), pp. 667–674, 1998.

[32] Friswell, M.I., Inman, D.J., and Lam, M.J. On the realisation of GHM models in viscoelasticity. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **8**(11) :986–993, 1997.

[33] Ganapathi, M., Patel, B.P., Polit, O., and Touratier, M. A C^1 finite element including transverse shear and torsion warping for rectangular sandwich beams. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **45**(1) :47–75, 1999.

[34] Goh, C.J. and Caughey, T.K. On the stability problem caused by finite actuator dynamics in the collocated control of large space structures. *Int. J. Control*, **41**(3) :787–802, 1985.

[35] Golla, D.F. and Hughes, P.C. Dynamics of viscoelastic structures – a time-domain, finite element formulation. *J. Appl. Mech.*, **52**(4) :897–906, 1985.

[36] Ha, S.K., Keilers, C., and Chang, F.-K. Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators. *AIAA J.*, **30**(3) :772–780, 1992.

[37] Hagood, N.W., Chung, W.H., and von Flotow, A. Modelling of piezoelectric actuator dynamics for active structural control. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **1**(7) :327–354, 1990.

[38] Hagood, N.W., Kindel, R., Ghandi, K., and Gaudenzi, P. Improving transverse actuation of piezoceramics using interdigitated surface electrodes. In Hagood, N.W., ed., *Smart Struct. and Mater. 1993 : Smart Struct. and Intel. Syst.*, SPIE, Bellingham (USA), vol. **1917**, pp. 341–352, 1993.

[39] Herman Shen, M.-H. Analysis of beams containing piezoelectric sensors and actuators. *Smart Mater. Struct.*, **3**(4) :439–447, 1994.

[40] Huang, S.C., Inman, D.J., and Austin, E.M. Some design considerations for active and passive constrained layer damping treatments. *Smart Mater. Struct.*, **5**(3) :301–313, 1996.

[41] Im, S. and Atluri, S.N. Effects of a piezo-actuator on a finitely deformed beam subjected to general loading. *AIAA J.*, **27**(12) :1801–1807, 1989.

[42] Inman, D.J. and Lam, M.J. Active constrained layer damping treatments. In Ferguson, N.S., Wolfe, H.F., and Mei, C., eds., *6^{th} Int. Conf. on Recent Advances in Struct. Dyn.*, Southampton (UK), vol. **1**, pp. 1–20, 1997.

[43] Jemai, B., Ichchou, M.N., Jezequel, L., and Noe, M. Comparison between a large bandwidth LQG and modal control methods applied to complex flexible structure. In *2^{nd} Int. Conf. on Active Control in Mechanical Engineering*, Lyon (France), October 1997.

[44] Johnson, A.R., Tessler, A., and Dambach, M. Dynamics of thick viscoelastic beams. *J. Eng. Mater. Tech.*, **119**(3) :273–278, 1997.

[45] Johnson, C.D., Keinholz, D.A., and Rogers, L.C. Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layers. *Shock Vib. Bulletin*, **50**(1) :71–81, 1981.

[46] Kapadia, R.K. and Kawiecki, G. Experimental evaluation of segmented active constrained layer damping treatments. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **8**(2) :103–111, 1997.

[47] Kerwin, Jr., E.M. Damping of flexural waves by a constrained visco-elastic layer. *J. Acoust. Soc. Am.*, **31**(7) :952–962, 1959.

[48] Kim, G., Jensen, T., DeGiorgi, V., Bender, B., Wu, C.C., Flipen, D., Lewis, D., Zhang, Q., Mueller, V., Kahn, M., Silberglett, R., and Len, L.K. Composite piezoe-

lectric assemblies for torsional actuators. Technical Report NRL/MR/6380-97-7997, Naval Research Lab. and PSU, 1997.

[49] Kirk, D.E. *Optimal Control Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970.

[50] Krommer, M. and Irschik, H. On the influence of the electric field on free transverse vibrations of smart beams. *Smart Mater. Struct.*, **8**(3) :401–410, 1999.

[51] Lam, M.J., Inman, D.J., and Saunders, W.R. Vibration control through passive constrained layer damping and active control. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **8**(8) :663–677, 1997.

[52] Lam, M.J., Inman, D.J., and Saunders, W.R. Variations of hybrid damping. In Davis, L.P., ed., *Smart Struct. & Mater. 1998 : Passive Damping and Isolation*, SPIE, Bellingham (USA), vol. **3327**, pp. 32–43, 1998.

[53] Leibowitz, M.M. and Vinson, J.R. On active (piezoelectric) constrained layer damping in composite sandwich structures. In Breitbach, E.J., Wada, B.K., and Natori, M.C., eds., *Proceedings of the 4th Int. Conf. Adaptive Struct. Tech.*, Technomic Pub. Co., Lancaster (USA), pp. 530–541, 1993.

[54] Lesieutre, G.A. Finite elements for dynamic modeling of uniaxial rods with frequency-dependent material properties. *Int. J. Solids Struct.*, **29**(12) :1567–1579, 1992.

[55] Lesieutre, G.A. and Bianchini, E. Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement fields. *J. Vib. Acoust.*, **117**(4) :424–430, 1995.

[56] Lesieutre, G.A. and Govindswamy, K. Finite element modeling of frequency-dependent and temperature-dependent dynamic behavior of viscoelastic materials in simple shear. *Int. J. Solids Struct.*, **33**(3) :419–432, 1996.

[57] Lesieutre, G.A. and Lee, U. A finite element for beams having segmented active constrained layers with frequency-dependent viscoelastics. *Smart Mater. Struct.*, **5**(5) :615–627, 1996.

[58] Lesieutre, G.A. and Mingori, D.L. Finite element modeling of frequency-dependent material damping using augmenting thermodynamic fields. *J. Guidance*, **13**(6) :1040–1050, 1990.

[59] Lewis, F.L. *Optimal Control*. John Wiley & Sons, 1986.

[60] Liao, W.H. and Wang, K.W. A new active constrained layer configuration with enhanced boundary actions. *Smart Mater. Struct.*, **5**(5) :638–648, 1996.

[61] Liao, W.H. and Wang, K.W. On the active-passive hybrid control of structures with active constrained layer treatments. *J. Vib. Acoust.*, **119**(4) :563–572, 1997.

[62] Liao, W.H. and Wang, K.W. On the analysis of viscoelastic materials for active constrained layer damping treatments. *J. Sound Vib.*, **207**(3) :319–334, 1997.

[63] Lin, M.W., Abatan, A.O., and Rogers, C.A. Application of commercial finite element codes for the analysis of induced strain-actuated structures. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **5**(6) :869–875, 1994.

[64] Liu, Y. and Wang, K.W. Enhanced active constrained layer damping treatment with symmetrically and non-symmetrically distributed edge elements. In Davis, L.P., ed., *Smart Struct. & Mater. 1998 : Passive Damping and Isolation*, SPIE, Bellingham (USA), vol. **3327**, pp. 61–72, 1998.

[65] McTavish, D.J. and Hughes, P.C. Modeling of linear viscoelastic space structures. *J. Vib. Acoust.*, **115** :103–110, 1993.

[66] Mead, D.J. *Passive Vibration Control*. John Wiley & Sons, New York, 1999.

[67] Mead, D.J. and Markus, S. The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *J. Sound Vib.*, **10**(2) :163–175, 1969.

[68] Nashif, A., Jones, D., and Henderson, J. *Vibration Damping*. John Wiley & Sons, New York, 1985.

[69] Ohayon, R. and Soize, C. *Structural Acoustics and Vibration : Mechanical Models, Variational Formulations and Discretization*. Academic Press, London (UK), 1998.

[70] Park, C.H., Inman, D.J., and Lam, M.J. Model reduction of viscoelastic finite element models. *J. Sound Vib.*, **219**(4) :619–637, 1999.

[71] Petitjean, B. and Legrain, I. Contrôle actif large bande des vibrations d'une plaque en feedback : aspects théoriques et pratiques. In *2^{eme} Colloque GDR Vibroacoustique*, LMA, Marseille, pp. 215–228, 1996.

[72] Plouin, A.-S. and Balmès, E. Pseudo-modal representations of large models with viscoelastic behavior. In *Int. Modal Analysis Conf.*, SEM, Bethel (USA), pp. 1440–1446, 1998.

[73] Plump, J.M. and Hubbard Jr., J.E. Modeling of an active constrained layer damper. In *12^{th} Int. Congress on Acoustics*, Toronto (Canada), pp. #D4–1, 1986.

[74] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., and Mishchenko, E.F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley-Interscience, New York, 1962.

[75] Preumont, A. *Vibration Control of Active Structures : An Introduction*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (The Netherlands), 1997.

[76] Rahmoune, M., Benjeddou, A., Ohayon, R., and Osmont, D. New thin piezoelectric plate models. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **9**(12) :1017–1029, 1998.

[77] Rahmoune, M., Osmont, D., Benjeddou, A., and Ohayon, R. Finite element modeling of a smart structure plate system. In Santini, P., Rogers, C.A., and Morotsu, Y., eds., *Proceedings of the 7^{th} Int. Conf. Adaptive Struct. Tech.*, Technomic Pub. Co., Lancaster (USA), pp. 463–473, 1996.

[78] Rongong, J.A., Wright, J.R., Wynne, R.J., and Tomlinson, G.R. Modelling of a hybrid constrained layer/piezoceramic approach to active damping. *J. Vib. Acoust.*, **119**(1) :120–130, 1997.

[79] Saravanos, D.A. and Heyliger, P.R. Coupled layerwise analysis of composite beams with embedded piezoelectric sensors and actuators. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, **6**(3) :350–363, 1995.

[80] Shen, I.Y. Hybrid damping through intelligent constrained layer treatments. *J. Vib. Acoust.*, **116**(3) :341–349, 1994.

[81] Shen, I.Y. Stability and controllability of Euler-Bernoulli beams with intelligent constrained layer treatments. *J. Vib. Acoust.*, **118**(1) :70–77, 1996.

[82] Shen, I.Y. A variational formulation, a work-energy relation and damping mechanisms of active constrained layer treatments. *J. Vib. Acoust.*, **119**(2) :192–199, 1997.

[83] Soong, T.T. and Hanson, R.D. Recent development in active and hybrid control research. In Housner, G.W. and Masri, S.F., eds., *Int. Workshop on Structural Control*, USC, Honolulu (Hawaii), vol. **CE-9311**, pp. 483–490, 1993.

[84] Sun, C.T. and Zhang, X.D. Use of thickness-shear mode in adaptive sandwich structures. *Smart Mater. Struct.*, **4**(3) :202–206, 1995.

[85] The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. *IEEE Standard on Piezoelectricity n.176-1987*. 1987.

[86] Tsai, M.S. and Wang, K.W. Integrating active-passive hybrid piezoelectric networks with active constrained layer treatments for structural damping. In Clark, W.W., Xie, W.C., Allaei, D., Namachchivaya, N.S., and O'Reilly, O.M., eds., *Active/Passive Vib. Contr. & Nonlinear Dyn. of Struct.*, ASME, New York, vol. **DE-95/AMD-223**, pp. 13–24, 1997.

[87] van Nostrand, W.C. and Inman, D.J. Finite element model for active constrained layer damping. In Anderson, G.L. and Lagoudas, D.C., eds., *Active Mater. & Smart Struct.* SPIE, vol. **2427**, pp. 124–139, 1995.

[88] Varadan, V.V., Lim, Y.-H., and Varadan, V.K. Closed loop finite-element modeling of active/passive damping in structural vibration control. *Smart Mater. Struct.*, **5**(5) :685–694, 1996.

[89] Veley, D.E. and Rao, S.S. A comparison of active, passive and hybrid damping in structural design. *Smart Mater. Struct.*, **5**(5) :660–671, 1996.

[90] Veley, D.E. and Rao, S.S. A comparison of active, passive and hybrid damping treatments in structural design. In Johnson, C.D., ed., *Smart Struct. & Mater. 1996 : Passive Damping and Isolation*, SPIE, Bellingham (USA), vol. **2720**, pp. 184–195, 1996.

[91] Wang, G. and Wereley, N.M. Frequency response of beams with passively constrained damping layers and piezo-actuators. In Davis, L.P., ed., *Smart Struct. & Mater. 1998 : Passive Damping and Isolation*, SPIE, Bellingham (USA), vol. **3327**, pp. 44–60, 1998.

[92] Wang, J., Yong, Y.-K., and Imai, T. Finite element analysis of the piezoelectric vibrations of quartz plate resonators with high-order plate theory. *Int. J. Solids Struct.*, **36**(15) :2303–2319, 1999.

[93] Yang, S.M. and Lee, Y.J. Interaction of structure vibration and piezoelectric actuation. *Smart Mater. Struct.*, **3**(4) :494–500, 1994.

[94] Yellin, J.M. and Shen, I.Y. A self-sensing active constrained layer damping treatment for a Euler-Bernoulli beam. *Smart Mater. Struct.*, **5**(5) :628–637, 1996.

[95] Yellin, J.M. and Shen, I.Y. An analytical model for a passive stand-off layer damping treatment applied to an Euler-Bernoulli beam. In Davis, L.P., ed., *Smart Struct. & Mater. 1998 : Passive Damping and Isolation*, SPIE, Bellingham (USA), vol. **3327**, pp. 349–356, 1998.

[96] Yildirim, V., Sancaktar, E., and Kiral, E. Free vibration analysis of symmetric cross-ply laminated composite beams with the help of the transfer matrix approach. *Commun. Num. Meth. Eng.*, **15**(9) :651–660, 1999.

[97] Yiu, Y.C. Finite element analysis of structures with classical viscoelastic materials. In *34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct., Structural Dyn. & Mater. Conf.*, AIAA, La Jolla, CA, pp. 2110–2119, 1993.

[98] Zhang, X.D. and Sun, C.T. Formulation of an adaptive sandwich beam. *Smart Mater. Struct.*, **5**(6) :814–823, 1996.

Annexe A

Propriétés des matériaux

A.1 Matériaux élastiques

Aluminium :
Module d'Young : $E = 70,3$ GPa
Coefficient de Poisson : $\nu = 0,345$
Masse volumique : $\rho = 2690$ kg m^{-3}

Mousse :
Module d'Young : $E = 35,3$ MPa
Coefficient de Poisson : $\nu = 0,38$
Masse volumique : $\rho = 32$ kg m^{-3}

Tableau A.1: Propriétés des matériaux composites isotropes transverses.

	E_1 (GPa)	$E_2 = E_3$	$G_{12} = G_{13}$	G_{23}	$\nu_{12} = \nu_{13}$	ν_{23}	ρ (kg m^{-3})
AS4/3501-6	144,8	9,65	4,14	3,45	0,30	0,4	1389
T300/N5208	181,0	10,3	7,17	3,40	0,28	0,5	1600
Kevlar49-epoxy	76,0	5,56	2,30	1,60	0,34	0,7	1460

A.2 Matériaux viscoélastiques

A.2.1 ISD112

Masse volumique : $\rho = 1600$ kg m^{-3}
Coefficient de Poisson : 0,5

Tableau A.2: Paramètres des modèles ADF/GHM pour le matériau ISD112 à 27°C.

modèle		ADF			GHM		
i	G_0 (MPa)	Δ_i	Ω_i (rad/s)	G_0 (MPa)	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\omega}_i$ (rad/s)	$\hat{\zeta}_i$
1	0,50	0,746	468,7	0,50	0,742	6 502,9	6,97
2		3,265	4 742,4		3,237	50 618,8	5,38
3		43,284	71 532,5		41,654	352 782	2,56

A.2.2 Dyad606

Masse volumique : $\rho = 1104$ kg m^{-3}
Coefficient de Poisson : 0,29

Tableau A.3: Paramètres des modèles ADF/GHM pour le matériau Dyad606 à 10°C.

modèle		ADF			GHM		
i	G_0 (MPa)	Δ_i	Ω_i (rad/s)	G_0 (MPa)	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\omega}_i$ (rad/s)	$\hat{\zeta}_i$
1	5,94	5,88	5,85	1,27	54,42	6194,52	1,21
2		13,66	2345,09		44,95	2489,67	3,23
3		8,94	331,70		30,63	485,15	48,39
4		6,47	50,65		32,21	814,56	7,74
5		34,52	25033,79		146,11	49073,04	1,00

Tableau A.4: Paramètres des modèles ADF/GHM pour le matériau Dyad606 à 25°C.

modèle		ADF			GHM		
i	G_0 (MPa)	Δ_i	Ω_i (rad/s)	G_0 (MPa)	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\omega}_i$ (rad/s)	$\hat{\zeta}_i$
1	2,02	9,89	58,18	1,15	51,96	7363,77	1,34
2		3,14	6,75		16,98	415,24	3,82
3		18,94	403,00		33,34	2814,07	3,57
4		35,06	3097,38		5,84	202,31	18,91
5		165,97	57244,00		225,54	83108,68	1,00

Tableau A.5: Paramètres des modèles ADF/GHM pour le matériau Dyad606 à 30°C.

modèle		ADF			GHM		
i	G_0 (MPa)	Δ_i	Ω_i (rad/s)	G_0 (MPa)	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\omega}_i$ (rad/s)	$\hat{\zeta}_i$
1	2,09	5,40	73,06	2,11	1,47	421,31	22,99
2		14,15	453,34		23,00	7735,54	1,25
3		1,43	8,83		5,64	1264,80	8,18
4		28,33	3406,80		14,25	3130,35	3,26
5		128,85	52781,28		104,12	81159,59	1,00

Tableau A.6: Paramètres des modèles ADF/GHM pour le matériau Dyad606 à 38°C.

modèle		ADF			GHM		
i	G_0 (MPa)	Δ_i	Ω_i (rad/s)	G_0 (MPa)	$\hat{\alpha}_i$	$\hat{\omega}_i$ (rad/s)	$\hat{\zeta}_i$
1	1,74	1,15	27,02	1,73	1,01	76,36	1,60
2		3,55	213,35		3,15	521,97	1,41
3		11,79	1257,50		10,03	2734,49	1,28
4		24,41	7585,29		20,41	14137,25	1,16
5		113,12	92517,87		85,77	123345,60	1,00

A.3 Matériaux piézoélectriques

A.3.1 PZT5H

Masse volumique : $\rho = 7500$ kg m^{-3}
Matrice des constantes élastiques :

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 12,6 & 7,95 & 8,41 & 0 & 0 & 0 \\ & 12,6 & 8,41 & 0 & 0 & 0 \\ & & 11,7 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2,3 & 0 & 0 \\ & \textit{sym} & & & 2,3 & 0 \\ & & & & & 2,3 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$$

Matrice des constantes piézoélectriques :

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ -6,5 & -6,5 & 23,3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ C m}^{-2}$$

Matrice des constantes diélectriques :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 1,503 & 0 & 0 \\ 0 & 1,503 & 0 \\ 0 & 0 & 1,3 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{ F m}^{-1}$$

A.3.2 Matériau piézoélectrique utilisé par Lin *et al.*

Masse volumique : $\rho = 7730$ kg m^{-3}
Matrice des constantes élastiques :

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 12,8 & 6,6 & 6,6 & 0 & 0 & 0 \\ & 12,8 & 6,6 & 0 & 0 & 0 \\ & & 11,0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2,1 & 0 & 0 \\ & \textit{sym} & & & 2,1 & 0 \\ & & & & & 2,1 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$$

Matrice des constantes piézoélectriques :

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6,1 & -6,1 & 15,7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ C m}^{-2}$$

Matrice des constantes diélectriques :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 8,797 & 0 & 0 \\ 0 & 8,797 & 0 \\ 0 & 0 & 8,797 \end{bmatrix} \times 10^{-9} \text{ F m}^{-1}$$

Annexe B

Matrices de masse et de rigidité

B.1 Modèle sandwich à trois couches

Les matrices de masse et de rigidité de la poutre sandwich ont été calculées analytiquement, par intégration directe, en utilisant le logiciel Mathematica®. Les matrices de rigidité des peaux et du cœur sont composées par les rigidités de membrane (m), de flexion (f) et de cisaillement (c) (pour le cœur seulement). Tandis que les matrices de masse sont composées par les termes d'inertie de translations en x (u) et en z (w), et de rotation autour de y (r).

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_{ma} + \mathbf{K}_{fa} + \mathbf{K}_{mb} + \mathbf{K}_{fb} \tag{B.1}$$

$$\mathbf{K}_{ma} = \frac{c_{11}^{*a} A_a}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & -1/2 & 0 & 0 & -1/4 \\ -1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{mb} = \frac{c_{11}^{*b} A_b}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & -1/4 \\ -1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/4 & -1/2 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{fa} = \frac{\bar{c}_{11}^{a} I_a}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12/L^2 & 6/L & 0 & 0 & -12/L^2 & 6/L & 0 \\ 0 & 6/L & 4 & 0 & 0 & -6/L & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12/L^2 & -6/L & 0 & 0 & 12/L^2 & -6/L & 0 \\ 0 & 6/L & 2 & 0 & 0 & -6/L & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{fb} = \frac{\bar{c}_{11}^{b} I_b}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12/L^2 & 6/L & 0 & 0 & -12/L^2 & 6/L & 0 \\ 0 & 6/L & 4 & 0 & 0 & -6/L & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12/L^2 & -6/L & 0 & 0 & 12/L^2 & -6/L & 0 \\ 0 & 6/L & 2 & 0 & 0 & -6/L & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_{mc} + \mathbf{K}_{fc} + \mathbf{K}_{cc} \tag{B.2}$$

$$\mathbf{K}_{mc} = \frac{c_{33}^{*c} A_c}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d & 0 & -1 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 12d^2/L^2 & 6d^2/L & 0 & 0 & -12d^2/L^2 & 6d^2/L & 0 \\ d & 6d^2/L & 4d^2 & 0 & -d & -6d^2/L & 2d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -d & 0 & 1 & 0 & d & 0 \\ 0 & -12d^2/L^2 & -6d^2/L & 0 & 0 & 12d^2/L^2 & -6d^2/L & 0 \\ -d & 6d^2/L & 2d^2 & 0 & d & -6d^2/L & 4d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{fc} = \frac{c_{33}^{*c} I_c}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12\lambda^2/L^2 & 6\lambda^2/L & 0 & 0 & -12\lambda^2/L^2 & 6\lambda^2/L & 0 \\ 0 & 6\lambda^2/L & 4\lambda^2 & \lambda/h_c & 0 & -6\lambda^2/L & 2\lambda^2 & -\lambda/h_c \\ 0 & 0 & \lambda/h_c & 1/h_c^2 & 0 & 0 & -\lambda/h_c & -1/h_c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12\lambda^2/L^2 & -6\lambda^2/L & 0 & 0 & 12\lambda^2/L^2 & -6\lambda^2/L & 0 \\ 0 & 6\lambda^2/L & 2\lambda^2 & -\lambda/h_c & 0 & -6\lambda^2/L & 4\lambda^2 & \lambda/h_c \\ 0 & 0 & -\lambda/h_c & -1/h_c^2 & 0 & 0 & \lambda/h_c & 1/h_c^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{cc} = k_c c_{55}^c A_c (\lambda+1)^2 \times$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2h_c(\lambda+1)} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{2h_c(\lambda+1)} \\
0 & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & \frac{L}{12h_c(\lambda+1)} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & -\frac{L}{12h_c(\lambda+1)} \\
0 & -\frac{1}{2h_c(\lambda+1)} & \frac{L}{12h_c(\lambda+1)} & \frac{L}{3h_c^2(\lambda+1)^2} & 0 & \frac{1}{2h_c(\lambda+1)} & -\frac{L}{12h_c(\lambda+1)} & \frac{L}{6h_c^2(\lambda+1)^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2h_c(\lambda+1)} & 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2h_c(\lambda+1)} \\
0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & -\frac{L}{12h_c(\lambda+1)} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & \frac{L}{12h_c(\lambda+1)} \\
0 & -\frac{1}{2h_c(\lambda+1)} & -\frac{L}{12h_c(\lambda+1)} & \frac{L}{6h_c^2(\lambda+1)^2} & 0 & \frac{1}{2h_c(\lambda+1)} & \frac{L}{12h_c(\lambda+1)} & \frac{L}{3h_c^2(\lambda+1)^2}
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{M}_{xa} + \mathbf{M}_{za} + \mathbf{M}_{ra} + \mathbf{M}_{xb} + \mathbf{M}_{zb} + \mathbf{M}_{rb} \tag{B.3}$$

$$\mathbf{M}_{xa} = \rho_a A_a L \begin{bmatrix}
1/3 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 1/12 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/6 & 0 & 0 & 1/12 & 1/12 & 0 & 0 & 1/24 \\
1/6 & 0 & 0 & 1/12 & 1/3 & 0 & 0 & 1/6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/12 & 0 & 0 & 1/24 & 1/6 & 0 & 0 & 1/12
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{xb} = \rho_b A_b L \begin{bmatrix}
1/3 & 0 & 0 & -1/6 & 1/6 & 0 & 0 & -1/12 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1/6 & 0 & 0 & 1/12 & -1/12 & 0 & 0 & 1/24 \\
1/6 & 0 & 0 & -1/12 & 1/3 & 0 & 0 & -1/6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1/12 & 0 & 0 & 1/24 & -1/6 & 0 & 0 & 1/12
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{za} = \frac{\rho_a A_a L}{420} \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\
0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\
0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{zb} = \frac{\rho_b A_b L}{420}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{ra} = \rho_a I_a L\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5L^2 & 1/10L & 0 & 0 & -6/5L^2 & 1/10L & 0 \\ 0 & 1/10L & 2/15 & 0 & 0 & -1/10L & -1/30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/5L^2 & -1/10L & 0 & 0 & 6/5L^2 & -1/10L & 0 \\ 0 & 1/10L & -1/30 & 0 & 0 & -1/10L & 2/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{rb} = \rho_b I_b L\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5L^2 & 1/10L & 0 & 0 & -6/5L^2 & 1/10L & 0 \\ 0 & 1/10L & 2/15 & 0 & 0 & -1/10L & -1/30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/5L^2 & -1/10L & 0 & 0 & 6/5L^2 & -1/10L & 0 \\ 0 & 1/10L & -1/30 & 0 & 0 & -1/10L & 2/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_{xc} + \mathbf{M}_{zc} + \mathbf{M}_{rc} \tag{B.4}$$

$$\mathbf{M}_{xc} = \rho_c A_c L\begin{bmatrix} 1/3 & -d/2L & d/12 & 0 & 1/6 & d/2L & -d/12 & 0 \\ -d/2L & 6d^2/5L^2 & d^2/10L & 0 & -d/2L & -6d^2/5L^2 & d^2/10L & 0 \\ d/12 & d^2/10L & 2d^2/15 & 0 & -d/12 & -d^2/10L & -d^2/30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & -d/2L & -d/12 & 0 & 1/3 & d/2L & d/12 & 0 \\ d/2L & -6d^2/5L^2 & -d^2/10L & 0 & d/2L & 6d^2/5L^2 & -d^2/10L & 0 \\ -d/12 & d^2/10L & -d^2/30 & 0 & d/12 & -d^2/10L & 2d^2/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{zc} = \frac{\rho_c A_c L}{420}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{rc} = \rho_c I_c L \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\lambda^2/5L^2 & \lambda^2/10L & -\lambda/2h_cL & 0 & -6\lambda^2/5L^2 & \lambda^2/10L & -\lambda/2h_cL \\ 0 & \lambda^2/10L & 2\lambda^2/15 & \lambda/12h_c & 0 & -\lambda^2/10L & -\lambda^2/30 & -\lambda/12h_c \\ 0 & -\lambda/2h_cL & \lambda/12h_c & 1/3h_c^2 & 0 & \lambda/2h_cL & -\lambda/12h_c & 1/6h_c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6\lambda^2/5L^2 & -\lambda^2/10L & \lambda/2h_cL & 0 & 6\lambda^2/5L^2 & -\lambda^2/10L & \lambda/2h_cL \\ 0 & \lambda^2/10L & -\lambda^2/30 & -\lambda/12h_c & 0 & -\lambda^2/10L & 2\lambda^2/15 & \lambda/12h_c \\ 0 & -\lambda/2h_cL & -\lambda/12h_c & 1/6h_c^2 & 0 & \lambda/2h_cL & \lambda/12h_c & 1/3h_c^2 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs d'efforts électriques équivalents à l'actuation piézoélectrique ont aussi été calculés analytiquement. Ils sont dénommés F_{ma} et F_{mb} pour les forces membranaires des actionneurs par extension (peaux) et F_{cc} pour le moment des actionneurs par cisaillement (cœur).

$$F_{ma} = \frac{e_{31}^{*a} A_a V_a}{h_a}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}^T$$

$$F_{mb} = \frac{e_{31}^{*b} A_b V_b}{h_b}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}^T$$

$$F_{cc} = \frac{e_{15}^{c} A_c V_c}{h_c}\begin{bmatrix} 0 & -(\lambda+1) & 0 & L/2h_c & 0 & (\lambda+1) & 0 & L/2h_c \end{bmatrix}^T$$

B.2 Modèle sandwich à peaux multicouches

Comme pour le cas précédent, les matrices de masse et de rigidité de la poutre sandwich ont été calculées analytiquement, par intégration directe, en utilisant le logiciel Mathematica®. Les matrices de rigidité des peaux et du cœur sont composées par les rigidités de membrane (m), de flexion (f), de cisaillement (c) (pour le cœur seulement) et, en plus, de couplage membrane-flexion, dû aux peaux multicouches. Les matrices de masse sont composées par les termes d'inertie de translations en x (u) et en z (w), de rotation autour de y (r) et de couplage translation en x-rotation. Les matrices relatives au cœur reste inchangées et ne sont donc pas répétées ici.

$$\mathbf{K}_p = \sum_{j=1}^{n}(\mathbf{K}_{ma_j} + \mathbf{K}_{fa_j} + \mathbf{K}_{mfa_j}) + \sum_{j=1}^{m}(\mathbf{K}_{mb_j} + \mathbf{K}_{fb_j} + \mathbf{K}_{mfb_j}) \tag{B.5}$$

$$\mathbf{K}_{ma_j} = \frac{c_{11}^{*a_j} A_{a_j}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/4 & -1/2 & 0 & 0 & -1/4 \\ -1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{mb_j} = \frac{c_{11}^{*b_j} A_{b_j}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & -1/4 \\ -1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/4 & -1/2 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{mfa_j} = \frac{c_{11}^{*a_j} \bar{I}_{a_j}}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{mfb_j} = \frac{c_{11}^{*b_j} \bar{I}_{b_j}}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{fa_j} = \frac{c_{11}^{*a_j} I_{a_j}}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12/L^2 & 6/L & 0 & 0 & -12/L^2 & 6/L & 0 \\ 0 & 6/L & 4 & 0 & 0 & -6/L & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12/L^2 & -6/L & 0 & 0 & 12/L^2 & -6/L & 0 \\ 0 & 6/L & 2 & 0 & 0 & -6/L & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{fb_j} = \frac{c_{11}^{*b_j} I_{b_j}}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12/L^2 & 6/L & 0 & 0 & -12/L^2 & 6/L & 0 \\ 0 & 6/L & 4 & 0 & 0 & -6/L & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12/L^2 & -6/L & 0 & 0 & 12/L^2 & -6/L & 0 \\ 0 & 6/L & 2 & 0 & 0 & -6/L & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_p = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{M}_{xa_j} + \mathbf{M}_{xra_j} + \mathbf{M}_{ra_j} + \mathbf{M}_{za_j}) + \sum_{j=1}^{m} (\mathbf{M}_{xb_j} + \mathbf{M}_{xrb_j} + \mathbf{M}_{rb_j} + \mathbf{M}_{zb_j}) \quad \text{(B.6)}$$

$$\mathbf{M}_{xa_j} = \rho_{a_j} A_{a_j} L \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1/12 & 1/12 & 0 & 0 & 1/24 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1/12 & 1/3 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/12 & 0 & 0 & 1/24 & 1/6 & 0 & 0 & 1/12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{xb_j} = \rho_{b_j} A_{b_j} L \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & -1/6 & 1/6 & 0 & 0 & -1/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & 0 & 0 & 1/12 & -1/12 & 0 & 0 & 1/24 \\ 1/6 & 0 & 0 & -1/12 & 1/3 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/12 & 0 & 0 & 1/24 & -1/6 & 0 & 0 & 1/12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{xra_j} = \rho_{a_j} \bar{I}_{a_j} L \begin{bmatrix} 0 & -1/2L & 1/12 & 0 & 0 & 1/2L & -1/12 & 0 \\ -1/2L & 0 & 0 & -1/4L & -1/2L & 0 & 0 & -1/4L \\ 1/12 & 0 & 0 & 1/24 & -1/12 & 0 & 0 & -1/24 \\ 0 & -1/4L & 1/24 & 0 & 0 & 1/4L & -1/24 & 0 \\ 0 & -1/2L & -1/12 & 0 & 0 & 1/2L & 1/12 & 0 \\ 1/2L & 0 & 0 & 1/4L & 1/2L & 0 & 0 & 1/4L \\ -1/12 & 0 & 0 & -1/24 & 1/12 & 0 & 0 & 1/24 \\ 0 & -1/4L & -1/24 & 0 & 0 & 1/4L & 1/24 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{xrb_j} = \rho_{b_j} \bar{I}_{b_j} L \begin{bmatrix} 0 & -1/2L & 1/12 & 0 & 0 & 1/2L & -1/12 & 0 \\ -1/2L & 0 & 0 & 1/4L & -1/2L & 0 & 0 & 1/4L \\ 1/12 & 0 & 0 & -1/24 & -1/12 & 0 & 0 & 1/24 \\ 0 & 1/4L & -1/24 & 0 & 0 & -1/4L & 1/24 & 0 \\ 0 & -1/2L & -1/12 & 0 & 0 & 1/2L & 1/12 & 0 \\ 1/2L & 0 & 0 & -1/4L & 1/2L & 0 & 0 & -1/4L \\ -1/12 & 0 & 0 & 1/24 & 1/12 & 0 & 0 & -1/24 \\ 0 & 1/4L & 1/24 & 0 & 0 & -1/4L & -1/24 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{ra_j} = \rho_{a_j} I_{a_j} L \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5L^2 & 1/10L & 0 & 0 & -6/5L^2 & 1/10L & 0 \\ 0 & 1/10L & 2/15 & 0 & 0 & -1/10L & -1/30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/5L^2 & -1/10L & 0 & 0 & 6/5L^2 & -1/10L & 0 \\ 0 & 1/10L & -1/30 & 0 & 0 & -1/10L & 2/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{rb_j} = \rho_{b_j} I_{b_j} L \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5L^2 & 1/10L & 0 & 0 & -6/5L^2 & 1/10L & 0 \\ 0 & 1/10L & 2/15 & 0 & 0 & -1/10L & -1/30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/5L^2 & -1/10L & 0 & 0 & 6/5L^2 & -1/10L & 0 \\ 0 & 1/10L & -1/30 & 0 & 0 & -1/10L & 2/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{za_j} = \frac{\rho_{a_j} A_{a_j} L}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{zb_j} = \frac{\rho_{b_j} A_{b_j} L}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 0 & 156 & -22L & 0 \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & 0 & -22L & 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$