Conjecture de Greenberg généralisée et capitulation dans les Zp-extensions d'un corps de nombres

David Vauclair

Conjecture de Greenberg généralisée et capitulation dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions d'un corps de nombres

David Vauclair

Décembre 2005

Résumé : Le cadre général de cette thèse est celui de la théorie d'Iwasawa. Nous nous intéressons plus particulièrement à la conjecture de Greenberg généralisée (multiple) (GG). Après avoir relié celle-ci à différents problèmes de capitulation pour certains groupes de cohomologie p-adiques en degré 2 ($FCap^{(i)}$, $TCap^{(i)}$, $fCap^{(i)}$), nous proposons une version faible (GGf) de (GG) dont nous montrons la validité, pour tout corps de nombres F contenant μ_p et un corps quadratique imaginaire dans lequel (p) se décompose, du moment que F vérifie la conjecture de Leopoldt. Les outils développés permettent de retrouver et de généraliser (notamment dans des $\mathbb{Z}_p$-extensions autre que la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique) un certain nombre de résultats classiques en théorie d'Iwasawa.

Mots-clés : Théorie d'Iwasawa, cohomologie galoisienne, capitulation, cup-produit, conjecture de Greenberg généralisée.

Table des matières

Introduction

L'objet initial de la théorie d'Iwasawa classique est l'étude du comportement asymptotique de groupes de nature arithmétique (essentiellement le groupe de classes) dans une $\mathbb{Z}_p$-extension (souvent cyclotomique) F_∞/F de groupe Γ. Par limite projective dans la tour F_∞/F, on définit des modules $X'(F_\infty) = \varprojlim \mathcal{C}l'(F_n) \otimes \mathbb{Z}_p$ sur l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] = \varprojlim \mathbb{Z}_p[G(F_n/F)]$. L'étude asymptotique en question se résume alors à déterminer la structure de ces modules. Comme Λ est un anneau noethérien factoriel de dimension de Krull égale à 2, on dispose d'un théorème de classification des Λ-modules de type fini à pseudo-isomorphisme près. En 1973 R. Greenberg a proposé la conjecture suivante :

Conjecture 0.0.1 (GC) *([G1]) Le module d'Iwasawa $X'(F^c)$ associé aux p-groupes de classes dans la tour cyclotomique F^c/F d'un corps de nombres totalement réel est pseudo-nul.*

Cette conjecture équivaut à la trivialité de $\mathcal{C}l'(F_\infty) \otimes \mathbb{Z}_p$. Il est bien connu que pour $F = \mathbb{Q}(\mu_p)^+$, cette conjecture est un affaiblissement de la conjecture de Vandiver, si bien que (GC) constitue une généralisation raisonnable (d'une version faible) de la conjecture de Vandiver à tous les corps réels. La conjecture (GC) a fait l'objet de nombreuses études, dont beaucoup ont fourni des exemples numériques corroborant sa validité. Plus tard, se fondant sur une heuristique dans le cas où F est un corps quadratique imaginaire (p)-décomposé, attaché à une courbe elliptique à multiplication complexe, R. Greenberg proposa une généralisation (GG) de (GC). On note $\tilde{F}/F$ le compositum de toutes les $\mathbb{Z}_p$-extensions de F, $\tilde{\Gamma}$ son groupe de Galois, et $\tilde{\Lambda} = \mathbb{Z}_p[[\tilde{\Gamma}]]$. $\tilde{\Lambda}$ est un anneau noethérien factoriel dont la dimension de Krull est égale à $rg_{\mathbb{Z}_p}\tilde{\Gamma} + 1$, si bien qu'on dispose encore d'un théorème de classification des $\tilde{\Lambda}$-modules de torsion. On se propose dans cette thèse d'étudier différents aspects de la conjecture (GG) :

Conjecture 0.0.2 (GG) *([G3] conj. 3.5, voir aussi [G2]) Le $\tilde{\Lambda}$-module $X'(\tilde{F})$ est pseudo-nul.*

Si F est un corps totalement réel, la conjecture de Leopoldt prédit que la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique est l'unique $\mathbb{Z}_p$-extension de F ; si c'est vrai, (GG) coïncide alors avec (GC). On possède quelques exemples de corps (non réels) vérifiant (GG). Le résultat le plus spectaculaire serait celui de [MC] et [Ma1] concernant $\mathbb{Q}(\mu_p)$ si la preuve en était complète, nous reviendrons sur ce point en 2.3. Plus récemment, W. McCallum et R. Sharifi ont montré (GG) pour $\mathbb{Q}(\mu_p)$, $p < 1000$ et $i(p) \leq 1$ (l'indice d'irrégularité de p). Leur méthode repose d'abord sur l'étude d'un certain cup-produit, puis sur la théorie de Hida et certaines propriétés d'un opérateur de Hecke, vérifiées numériquement (cf [MCS], [Sh]).

Le point de vue adopté dans cette thèse est le suivant. Soit E/F une $\mathbb{Z}_p$-extension multiple, et laissons E'/F parcourir ses sous-extensions finies. Plutôt que de travailler avec le module $X(E)$ attaché au p-groupe de classes (ou même le module $X'(E)$ attaché au p-groupe de (p)-classes) dont le comportement galoisien laisse à désirer, on s'intéresse systématiquement au module $X^{(i)}(E) := \varprojlim H^2(G_S(E'), \mathbb{Z}_p(i))$, celui-ci ayant un comportement galoisien idéal. Comme le p-groupe de (p)-classes de E' coïncide avec la $\mathbb{Z}_p$-torsion de $H^2(G_S(E'), \mathbb{Z}_p(1))$, on peut considérer que ce point de vue englobe l'étude du p-groupe de (p)-classes. Les méthodes de la théorie d'Iwasawa se heurtent néanmoins rapidement à la difficulté suivante : en général, le groupe $H^2(G_S(E'), \mathbb{Z}_p(1))$ n'est pas fini (son quotient $\mathbb{Z}_p$-libre s'identifie au module de Tate du S-groupe de Brauer). On contournera souvent cette difficulté en choisissant un bon i (ie. tel que tous les groupes $H^2(G_S(E'), \mathbb{Z}_p(i))$ considérés soient finis, par exemple $i \geq 2$, par un théorème de C. Soulé). Le changement d'objet par rapport à la théorie d'Iwasawa classique n'est en fait qu'apparent puisqu'il est possible de changer i au-dessus de la $\mathbb{Z}_p$-extension multiple considérée, dès que celle-ci contient la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.

La ligne conductrice est l'étude de la conjecture de Greenberg généralisée (voir 2.2.3). Nous procédons en deux temps : Dans un premier temps (Chapitres 1 et 2), on établit le lien précis entre (GG) et différents problèmes de capitulation (faible, total, fort...) pour les groupes de cohomologie p-adiques en degré 2. De façon vague, cette première partie correspond à l'étude du conoyau de l'application de capitulation (voir le chap. 1 pour la définition de $\mathcal{H}_S^m$)

$$\mathcal{H}_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to \mathcal{H}_S^2(\tilde{F}, \mathbb{Z}_p(i))^{\tilde{\Gamma}}$$

Ensuite, on entame l'étude du problème de capitulation lui-même. Nous proposons alors l'affaiblissement suivant de (GG) (voir 2.2.3 et fin du paragraphe 2.2) :

Conjecture 0.0.3 $GGf^{(i)}$ *(conj. 4.2.10) : Le noyau de l'application de capitulation ci-dessus est non trivial.*

L'approche proposée consiste en l'étude d'un certain cup-produit. Nous obtiendrons le résultat positif suivant (cor. 4.2.23) :

Théorème 0.0.4 *Soit F un corps de nombres contenant μ_p. On suppose que F vérifie la conjecture de Leopoldt. Si F contient un corps quadratique imaginaire k dans lequel (p) se décompose, alors F vérifie la conjecture $GGf^{(i)}$ pour $i \geq 2$.*

Au passage, les méthodes développées pour obtenir ce résultat permettent de donner de nouvelles preuves d'un certain nombre de résultats classiques de la théorie d'Iwasawa cyclotomique, et de les étendre facilement aux $\mathbb{Z}_p$-extensions quelconques.

Le plan est le suivant. Les notations qui ne sont pas expliquées ici le seront dans la section intitulée "Notations".

- Chapitre 1 : L'objectif poursuivi dans ce chapitre est une reformulation uniforme d'un certain nombre de résultats classiques. Lorsque cela semble intéressant, on redonnera une preuve cohomologique. La section intitulée "Théorie d'Iwasawa" ne comporte que des résultats plus ou moins bien connus, elle sera complétée tout au long de la thèse, dans les sections intitulées "Théorie d'Iwasawa : suite". Tout en s'inscrivant dans la ligne conductrice décrite ci-dessus, ces dernières présentent de nouveaux résultats, tantôt préliminaires, tantôt corollaires à l'étude en cours. Nous supposerons connus les résultats de la théorie du corps de classes, la dualité globale de Poitou-Tate, ainsi que le formalisme usuel de l'algèbre homologique.

- Chapitre 2 : On présente d'abord deux résultats concernant la structure des Λ-modules ($\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T_1, ..., T_s]]$). Le premier consiste en une caractérisation asymptotique du rang et permet de montrer l'équivalence entre (GG) et la trivialité du groupe $\mathcal{H}^2_S(\tilde{F}, \mathbb{Z}_p(i))$. Comme conséquence, on obtient que si la conjecture (GG) est vraie pour F, alors elle l'est automatiquement pour toute sous-extension finie F'/F de $\tilde{F}/F$. Le second, inspiré des techniques de [Mi1], établit un critère pour la pseudo-nullité d'un module dont les coïnvariants sont finis. On montre ainsi l'équivalence entre (GG) et la capitulation de $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ dans une $\mathbb{Z}_p$-extension simple (capitulation forte). Dans la section 2.3 on réinterprète la stratégie de [MC] pour montrer que, dans le cas où $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est cyclique, la capitulation de ce groupe dans une $\mathbb{Z}_p$-extension multiple (capitulation totale) est une condition suffisante pour (GG).

- Chapitre 3 : On entreprend une étude du cup-produit

$$c_{i,0} : \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p) \to \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

par montée et descente. Le but de cette étude - établir un lien avec le problème de capitulation - ne sera atteint qu'au chapitre suivant. On se contente ici de mener cette étude pour elle-même et d'en tirer des conséquences intéressantes. On établit notamment un isomorphisme fonctoriel entre le quotient de $\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ par le sous-groupe des normes universelles d'une $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F d'une part et les points fixes du module $X^{(i)}(F_\infty)$ d'autre part. Cet isomorphisme est présent dans [Ku], dans le cas classique ($i = 1$), lorsque F_∞/F est l'extension cyclotomique ; il y est obtenu en comparant la théorie du corps de classes avec la théorie de Kummer. Ici c'est l'étude du cup-produit qui se substitue à cette comparaison et permet la généralisation, pour tout i, à toute $\mathbb{Z}_p$-extension. De même, on généralise la suite exacte de Sinnott.

Il est bien connu que dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique F^c/F, le sous-module fini maximal de $X'(F^c)$ mesure le défaut de liberté du quotient sans Λ-torsion de $\mathcal{X}(F^c)$. Grâce à une amélioration des résultats de C. Greither concernant la structure des modules attachés aux normes universelles dans une $\mathbb{Z}_p$-extension, on généralise ce fait à tout i et à toute $\mathbb{Z}_p$-extension.

- Chapitre 4 : Les résultats du chapitre précédent permettent d'établir un lien précis entre cup-produit et capitulation dans une $\mathbb{Z}_p$-extension. On en déduit alors que l'image du cup-produit $c_{i,0}$ capitule dans $\tilde{F}$. Après avoir montré que l'approche naturelle du problème de capitulation (tenter d'établir un analogue du théorème de l'idéal principal dans le corps obtenu en adjoignant suffisamment de racines de l'unité au corps de Hilbert de F) est vouée à l'échec, nous utilisons le résultat précédent pour montrer que si $F \supset \mu_p$ vérifie la conjecture de Leopoldt et possède une (p)-place v telle que le symbole d'Artin $(p_v, \tilde{F}/F)$ soit non trivial (th. 4.2.16), alors F vérifie, pour $i \geq 2$, la conjecture $GGf^{(i)}$ proposée au chapitre 2. Malheureusement, l'hypothèse concernant le symbole d'Artin semble très difficile à vérifier en général. Nous obtenons néanmoins un résultat positif (cf 4.2.23), en nous restreignant à la famille des corps contenant un corps quadratique imaginaire (p)-décomposé.

Le travail effectué durant cette thèse a donné lieu à deux publications ([NV] et [V]) dont le contenu a été librement modifié et reporté dans le présent texte.

Notations

Sauf indication contraire, on adoptera les notations suivantes :

$p \neq 2$ un nombre premier fixé.
μ_p le groupe des racines p^{iemes} de l'unité.
$\mathbb{Q}^{alg}$ une clôture algébrique fixée.
F un sous-corps de $\mathbb{Q}^{alg}$, de degré fini sur $\mathbb{Q}$; on dira un corps de nombres.
$G_F = G(\mathbb{Q}^{alg}/F)$ le groupe de Galois absolu de F.
v une place, c'est-à-dire un plongement de $\mathbb{Q}^{alg}$ dans un corps complet.
F_v le complété de F en v.
S l'ensemble des (p)-places (ie. des plongements dans $\mathbb{C}_p$).
$S(F)$ un ensemble maximal de (p)-places dont les restrictions à F sont toutes distinctes.
$s(F)$ le cardinal de $S(F)$.
F_S/F l'extension non ramifiée hors de S (on dit S-ramifiée) maximale.
E/F sera toujours une sous-extension de F_S/F, le plus souvent une $\mathbb{Z}_p$-extension multiple, de groupe $\Gamma \simeq {\mathbb{Z}_p}^s$, d'algèbre de groupe complète $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \mathbb{Z}_p[[T_1, ..., T_s]]$.
E'/F parcourt les sous-extensions finies de E/F.
F_∞/F, une $\mathbb{Z}_p$-extension de groupe $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$, d'algèbre de groupe complète $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$. F_n/F son étage de degré p^n, $\Gamma_n = G(F_\infty/F_n)$, $G_n = G(F_n/F)$.
F^c/F, la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F, Γ, Λ, F_n, Γ_n, G_n, comme ci-dessus avec $F_\infty = F^c$.
$\tilde{F}/F$ le composé de toutes les $\mathbb{Z}_p$-extensions de F, $\tilde{\Gamma} = G(\tilde{F}/F)$, $\tilde{\Lambda} = \mathbb{Z}_p[[\tilde{\Gamma}]]$.
$G_S = G(F_S/F)$, $G_S(E) = G(F_S/E)$.
$\hat{G}_S(E)$ le pro-p-complété de $G_S(E)$, $\hat{G}_S = \hat{G}_S(F)$.
$I_{\hat{G}_S}$ l'idéal d'augmentation de l'algèbre de groupe complète $\mathbb{Z}_p[[\hat{G}_S]]$.
G_{F_v} le groupe de Galois absolu de F_v.
$\mathcal{H}^m_S(E, \mathbb{Z}_p(i)) = \varinjlim H^m(G_S(E'), \mathbb{Z}_p(i))$.
$\mathcal{H}^m(E_v, \mathbb{Z}_p(i)) = \varinjlim H^m(E'_v, \mathbb{Z}_p(i))$.
$\mathcal{K}er^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))$ le noyau de la localisation.
$H_q(E, \bullet)$ (resp. $H^S_q(E, \bullet)$, $H_q(E_v, \bullet)$) l'homologie profinie du groupe G_E (resp. $G_S(E)$, G_{E_v}).
$E^q(\bullet) = E^q_\Lambda(\bullet) = Ext^q_\Lambda(\bullet, \Lambda)$.
$\mathcal{C}l(E)$, le groupe des classes d'idéaux de F.
$A(E) = \mathcal{C}l(E) \otimes \mathbb{Z}_p$.
$X(E) = \varprojlim A(E')$.

$\mathcal{C}l'(E)$ le groupe des classes d'idéaux de E à support hors de S.
$A'(E) = \mathcal{C}l'(E) \otimes \mathbb{Z}_p$.
$X'(E) = \varprojlim A'(E')$.
$\mathcal{X}(E) = \hat{G}_S(E)^{ab} = H_1^S(E, \mathbb{Z}_p)$.
$Y(E) = H_0^S(E, I_{\hat{G}_S})$.
$\mathcal{O}'_E = \mathcal{O}_E[\frac{1}{p}]$ Les S-entiers de E.
$E_S(E) = \mathcal{O}'^{\times}_E$ les S-unités de E.
$E_S = E_S(F_S)$.
$A^{(i)}(E) = \mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))$
$WA^{(i)}(E) = \mathcal{K}er^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))$
$W^{(i)}(E) = A^{(i)}(E)/WA^{(i)}(E)$
$X^{(i)}(E) = \varprojlim H^2_S(E', \mathbb{Z}_p(i))$.
$WX^{(i)}(E) = \varprojlim \mathcal{K}er^2_S(E', \mathbb{Z}_p(i))$.
$\overline{W}^{(i)}(E) = X^{(i)}(E)/WX^{(i)}(E)$.
$\mathcal{X}^{(-i)}(E) = H_1^S(E, \mathbb{Z}_p(-i))$.
$Y^{(-i)}(E) = H_0^S(E, I_{\hat{G}_S}(-i))$ si F contient μ_p.
$t_\Lambda M$ la torsion du Λ-module M.
$f_\Lambda M = M/t_\Lambda M$.
$M[p]$, M/p la p-torsion, resp. le p-quotient du groupe M.
rg_Λ le rang du Λ-module M.
$rg_p M$ le p-rang du $\mathbb{Z}/p$-module M/p.
M^0 le sous-module pseudo-nul maximal du Λ-module M.
$M^\vee = Hom(M, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ le dual de Pontryagin du $\mathbb{Z}_p$-module M. $M^\vee$ est muni de la topologie de la convergence compacte. Si M est un G-module (ou Λ-module) à gauche, alors $M^\vee$ aussi, via l'action habituelle $g.x(m) = x(g^{-1}m)$.
$Ind_G^H(M) = Cont_H(G, M)$: pour un H-module discret M, $H < G$, c'est le G-module des applications continues de G dans M vérifiant $x(hg) = hx(g), \forall h \in H$. L'action de G est donnée par $g.x(g') = x(g'g)$. C'est l'induction discrète.
$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$, l'algèbre d'Iwasawa d'une $\mathbb{Z}_p$-extension, multiple E/F de rang s, ou simple (ie. $s = 1$) F_∞/F (éventuellement $F_\infty = F^c$).
$s = rg_{\mathbb{Z}_p}\Gamma$ le $\mathbb{Z}_p$-rang de l'extension E/F.
$d(E) = rg_p \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}/p)$, $r(E) = rg_p \mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}/p)$ les nombres de générateurs et de relations de $G_S(E)$. $d = d(F)$, $r = r(F)$.
$\lambda(M)$, $\mu(M)$ les invariants d'Iwasawa du Λ-module M, lorsque $s = 1$.
$r_1(E)$, $r_2(E)$ le nombres de places réelles, resp. complexes, de E. $r_1 = r_1(F)$,

$r_2 = r_2(F)$.

$\simeq$ isomorphisme non canonique, ou non fonctoriel, ou ne respectant pas les structures.
$=$ isomorphisme canonique, fonctoriel, respectant les structures. Petite exception : on note $WA^{(0)}(E) = A'(E)$ et $\mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(1)) = E_S(E) \otimes \mathbb{Z}_p$ alors que ces deux isomorphismes sont fonctoriels mais dépendent du choix d'un générateur de $\varprojlim \mu_{p^n}$.
$\approx$ pseudo-isomorphisme, ie. morphisme de Λ-modules dont le noyau et le conoyau sont pseudo-nuls.

Par module, on entendra, selon le contexte, G_S-module ou Λ-module.

Chapitre 1

Théorie d'Iwasawa des groupes de cohomologie p-adique

L'objet central de ce travail est l'étude de certains groupes de cohomologie p-adique. Nous commençons par quelques rappels.

1.1 Définitions et propriétés fondamentales

Soit F un corps de nombres, S l'ensemble des places au-dessus de (p). Soit G_S le groupe de Galois de l'extension non ramifiée hors de S (on dira S-ramifiée) maximale F_S/F. La lettre E désignera toujours une extension algébrique, S-ramifiée de F, et $G_S(E)$ le sous-groupe de G_S lui correspondant par la théorie de Galois. On laissera régulièrement E'/F parcourir les sous-extensions finies de E/F

Définition 1.1.1 *Soit E/F une extension (algébrique) S-ramifiée, et M un $\mathbb{Z}_p$-module topologique muni d'un action continue de G_S. On pose alors*

$$\mathcal{H}^m_S(E,M) = \varinjlim H^m(G_S(E'),M)$$

où E'/F parcourt les sous-extensions finies de E/F. Le groupe de cohomologie $H^m(G_S(E),M)$ est ici défini par cochaines continues.

Si v est une (p)-place, on note $E_v = \cup E'_v$, où E'_v est le complété en v du corps de nombres E', et l'on définit de même

$$\mathcal{H}^m(E_v,M) = \varinjlim H^m(G_{E'_v},M)$$

Remarque 1.1.2 *On a* $\mathcal{H}_S^m(E,M) = H^m(G_S(E),M)$ *dans les cas suivants :*

- Lorsque E/F *est finie (cohomologie p-adique habituelle, cf [Ta]).*

- Lorsque M *est discret (cohomologie galoisienne).*

Notons aussi que $\mathcal{H}_S^0(E,\mathbb{Z}_p(i)) = 0$ *si* $i \neq 0$*, même si* E *contient* μ_{p^∞}*. Ici on note* $\mathbb{Z}_p(i)$ *le* i^{eme} *tordu "à la Tate" du module galoisien* $\mathbb{Z}_p$ *(avec action triviale).*

Comme pour les groupes de cohomologie habituels, on dispose pour $\mathcal{H}^q(E,M)$ d'une suite exacte longue de cohomologie (sous certaines conditions, cf [Ta]), de morphismes de restriction et corestriction, et d'une suite spectrale (déduite de la suite spectrale des extensions de groupes en cohomologie galoisienne en passant d'abord à la limite projective sur les coefficients, puis à la limite inductive sur les E') :

$$E_2^{p,q} = H^p(E/F, \mathcal{H}_S^q(E,M)) \Rightarrow \mathcal{H}_S^{p+q}(F,M) = E^{p+q}$$

lorsque M est de $\mathbb{Z}_p$-type fini.

Commençons par rappeler la (fin de la) suite exacte longue de Poitou-Tate. Il sera souvent commode d'utiliser l'homologie à coefficients profinis. Si M est un module profini muni d'une action galoisienne continue, on notera $H_m^S(E,M) = H_m(G_S(E),M)$ (resp. $H_m(E_v,M) = H_m(G_{E_v},M)$). Notant $\bullet^\vee$ la dualité de Pontryagin, on peut prendre l'isomorphisme canonique $H_m(G_S(E),M) = H^m(G_S(E),M^\vee)^\vee$ pour définition.

Proposition 1.1.3 *Soit* E/F *une extension finie, galoisienne et* S*-ramifiée. Alors on a une suite exacte canonique de* G_S*-modules*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K}er_S^2(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \hookrightarrow & \mathcal{H}_S^2(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \to & \bigoplus_{v\in S(F)} \mathbb{Z}_p[G(E/F)] \bigotimes_{\mathbb{Z}_p[G(E/F)_v]} H_0(E_v,\mathbb{Z}_p(i-1)) \\ & & & \twoheadrightarrow & H_0^S(E,\mathbb{Z}_p(i-1)) \end{array}$$

où le noyau de localisation $\mathcal{K}er_S^2(F,\mathbb{Z}_p(i))$ *est défini comme le noyau de la seconde flèche.*

Pour la suite, il convient de donner une définition G_S-équivariante des morphismes intervenant dans cette suite exacte. Soit M un $\mathbb{Z}_p[G_S]$-module fini et v une (p)-place de F dont on fixe définitivement un prolongement à F_S. Le morphisme canonique de G_S-modules

$$M \to Ind_{G_S}^{(G_S)_v} M$$

induit

$$H_S^q(E,M) \to Ind_{G(E/F)}^{G(E/F)_v} H^q(G_S(E)_v, M)$$

En composant avec l'inflation de $G_S(E)_v$ à G_{E_v}, on obtient l'homomorphisme de localisation

$$H_S^q(E,M) \to Ind_{G(E/F)}^{G(E/F)_v} H^q(E_v, M)$$

dont on notera le noyau $\mathcal{K}er_S^q(E,M)$. Ensuite, la dualité locale donne

$$H^q(E_v,M) = H^{2-q}(E_v, Hom(M,\mu_{p^\infty}))^\vee = H_{2-q}(E_v, M(-1))$$

et, comme $G(E/F)$ est fini on obtient

$$Ind_{G(E/F)}^{G(E/F)_v} H^q(E_v,M) = \mathbb{Z}_p[G(E/F)] \otimes_{\mathbb{Z}_p[G(E/F)_v]} H_{2-q}(E_v, M(-1))$$

Enfin il y un morphisme naturel de G_S-modules

$$\mathbb{Z}_p[G(E/F)] \otimes_{\mathbb{Z}_p[G(E/F)_v]} H_{2-q}(E_v, M(-1)) \to H_{2-q}^S(E, M(-1))$$

Récapitulons. On a construit une suite de G_S-modules :

$$H_S^q(E,M) \quad \to \quad \bigoplus_{v\in S(F)} \mathbb{Z}_p[G(E/F)] \underset{\mathbb{Z}_p[G(E/F)_v]}{\otimes} H_{2-q}(E_v, M(-1)) \quad \to \quad H_{2-q}^S(E, M(-1))$$

Soit $q=2$ et $M = \mathbb{Z}/p^k(i)$, on obtient les morphismes de la suite exacte annoncée en passant à la limite projective sur k. Pour la preuve de l'exactitude au deux derniers termes, on renvoie à [Sch].

$\square$

Remarque 1.1.4 *Pour $i=1$, la suite exacte de localisation de la proposition précédente peut s'écrire*

$$0 \quad \to \quad \mathcal{C}l'(F) \otimes \mathbb{Z}_p \quad \to \quad \mathcal{H}_S^2(F, \mathbb{Z}_p(1)) \quad \to \quad \bigoplus_{v\in S(F)} \mathbb{Z}_p \quad \to \quad \mathbb{Z}_p \quad \to \quad 0$$

Proposition 1.1.5 *Soit E/F une extension galoisienne finie, S-ramifiée, de groupe G. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la co-restriction induit un isomorphisme fonctoriel :*

$$\mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))_G = \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

et la restriction induit pour tout $i \neq 0$ un isomorphisme

$$\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) = \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i))^G$$

Preuve : Ces deux résultats sont bien connus. Le premier résulte de l'existence d'un module dualisant en dimension 2 pour G_S (cf. [Se2]). Pour obtenir le second, il suffit d'examiner la suite spectrale de l'extension de groupes $G_S(E) \hookrightarrow G_S \twoheadrightarrow G$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p(i)$ (cf. [J2] pour les suites spectrales continues) en remarquant que $\mathbb{Z}_p(i)^{G_S(E)} = 0$ pour $i \neq 0$.

$\square$

Définition 1.1.6 *Soit E/F une extension S-ramifiée galoisienne de groupe G. La restriction définit un homomorphisme*

$$\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to \mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))^G$$

On l'appellera l'homomorphisme de capitulation et l'on notera $cap^{(i)}(E/F)$ (resp. $cocap^{(i)}(E/F)$) son noyau (resp. son conoyau).

Proposition 1.1.7 *(cf. [Ka]) On conserve les notations de la définition ci-dessus. Pour $i \neq 0$, on a des isomorphismes canoniques :*

$$cap^{(i)}(E/F) = H^1(G, \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i)))$$

$$cocap^{(i)}(E/F) = H^2(G, \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i)))$$

$$H^q(G, \mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))) = H^{q+2}(G, \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i))) \quad \forall q \geq 1$$

Si G est fini, on a de plus $\hat{H}^0(G, \mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))) = H^2(G, \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i)))$.

Preuve : On considère d'abord le cas où G est fini. Un examen attentif de la suite spectrale de l'extension de groupes $G_S(E) \hookrightarrow G_S \twoheadrightarrow G$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p(i)$ permet de montrer les trois premières égalités sans difficulté, compte tenu de $cd_p G_S \leq 2$. Pour la dernière, il faut tenir compte de la surjectivité de

$$cor : \mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i)) \to \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

Si maintenant G est profini, il suffit de passer à la limite inductive.

$\square$

Remarque 1.1.8 *Le groupe* $cap^{(i)}(E/F)$ *est un sous-module de torsion du* $\mathbb{Z}_p$*-module de type fini* $\mathcal{H}^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$*. Il est donc fini.*

Remarque 1.1.9 *Pour* $i = 1$*, la théorie de Kummer identifie* $\mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(1))$ *avec* $E_S(E) \otimes \mathbb{Z}_p$*, on retrouve donc l'isomorphisme de la théorie du corps de classes :* $H^1(G, E_S(E))$ *s'identifie au sous-groupe de* $\mathcal{C}l'(F)$ *constitué des classes d'idéaux qui deviennent principales dans* E*.*

Définition 1.1.10 *On dira que* i *est* F*-bon si* $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) = 0$*. On dira encore que* i *est* E/F*-bon si* i*-est* E'*-bon pour toute sous-extension finie* E'/F *de* E/F*.*

Remarque 1.1.11 *Si* E/F *est finie, on montre facilement que l'hypothèse "*i *est* E*-bon" équivaut à la finitude de* $\mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))$*.*

On discutera plus loin (1.2.6 et 1.2.39) la signification de l'hypothèse "i est bon" en fonction de différents modules d'Iwasawa. Notons déjà que que 1 est F-bon si et seulement si F ne possède qu'une seule (p)-place. L'hypothèse "0 est F-bon", quant à elle, équivaut à la conjecture de Leopoldt pour F. En fait l'hypothèse "i est F-bon" est sujette à la conjecture suivante :

Conjecture 1.1.12 *(cf [Sch] p. 192) Tout* $i \neq 1$ *est* F*-bon.*

Remarque 1.1.13 *Si* $E \subset F^c$*, alors tout* $i \in \mathbb{Z}$ *est* E*-bon. C'est la conjecture de Leopoldt faible (cf [N2], th 2.2). Cela tient à la nullité du groupe de Brauer* $H^2(F(\mu_{p^\infty}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))$*.*

Nous utiliserons souvent le résultat profond suivant, dû à Soulé.

Théorème 1.1.14 *([Sou], th.5) Si* $i \geq 2$*, alors* i *est bon pour tous les corps de nombres.*

En fait la preuve du théorème 1.1.14 est liée à l'étude de la conjecture suivante, qui propose une interprétation des groupes $\mathcal{H}^m_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$.

Conjecture 1.1.15 *(Quillen) Pour* $i \geq 2$ *et* $m = 1, 2$*, il existe des isomorphismes*

$$ch_{i,m} : K_{2i-m}\mathcal{O}'_F \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^m_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

Dwyer et Friedlander ont obtenu, via la K-théorie étale, l'existence et la surjectivité des caractères de Chern p-adiques $ch_{i,m}$. Par ailleurs, la conjecture de Bloch-Kato (qui implique celle de Quillen) a été démontrée par Voevodsky (conjecture de Milnor) pour $p = 2$ et semble maintenant démontrée aussi pour $p \neq 2$, grâce aux travaux de Rost et Voevodsky.

Remarque 1.1.16 *Si la conjecture de Quillen est vraie, alors l'isomorphisme en question* $K_{2i-m}\mathcal{O}'_E \otimes \mathbb{Z}_p = \mathcal{H}^m_S(E, \mathbb{Z}_p(i))$ *tient encore pour* E/F *infinie.*

1.2 Théorie d'Iwasawa

Nous rassemblons ici quelques faits de la théorie d'Iwasawa. Les références (directes ou indirectes) pour cette section sont nombreuses. Citons [I1], [Ta], [Sch], [N1], [N2], [N3], [J1].

1.2.1 Les modules $X^{(i)}$

Afin d'alléger les notations, on pose $A(F) = \mathcal{C}l(F) \otimes \mathbb{Z}_p$ et $A'(F) = \mathcal{C}l'(F) \otimes \mathbb{Z}_p$. La théorie du corps de classes donne l'interprétation suivante de ces groupes : $A(F)$ (resp. $A'(F)$) s'identifie au groupe de Galois $X(F)$ de la p-extension abélienne non ramifiée (resp. au groupe de Galois $X'(F)$ de la p-extension abélienne S-ramifiée, totalement décomposée aux places de S - on dira S-décomposée) maximale de F. Si l'on remplace F par une extension algébrique infinie, disons S-ramifiée, E/F, la théorie du corps de classes n'est plus valable au-dessus de E, si bien qu'il convient de définir séparément $A(E) = \mathcal{C}l(E) \otimes \mathbb{Z}_p$ (resp. $A'(E) = \mathcal{C}l'(E) \otimes \mathbb{Z}_p$), d'une part, et $X(E) = G(H_E/E)$ (resp. $X'(E) = G(H'_E/E)$) où H_E/E (resp. H'_E/E) est la pro-p-extension abélienne non ramifiée (resp. S-ramifiée, S-décomposée) maximale, d'autre part. On appellera souvent H_E (resp. H'_E) le corps de Hilbert (resp. le (p)-corps de Hilbert) de E.

On a alors les identifications suivantes : D'une part

$$A(E) = \varinjlim A(E') = \varinjlim X(E')$$

$$A'(E) = \varinjlim A'(E') = \varinjlim X'(E')$$

la limite inductive étant prise sur les sous-extensions finies E'/F de E/F, suivant l'extension des idéaux pour le foncteur A (resp. A'), et le transfert pour le foncteur X (resp. X'). D'autre part

$$X(E) = \varprojlim A(E') = \varprojlim X(E')$$

$$X'(E) = \varprojlim A'(E') = \varprojlim X'(E')$$

suivant la norme pour le foncteur A (resp. A') et la restriction de groupes de Galois pour le foncteur X (resp. X').

Si maintenant E/F est une $\mathbb{Z}_p$-extension multiple, disons de groupe $\Gamma \simeq {\mathbb{Z}_p}^s$ et d'algèbre de groupe complète $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \mathbb{Z}_p[[T_1, ..., T_s]]$, $X(E)$ et $X'(E)$ sont naturellement munis d'une structure de Λ-module noethérien (compact), tandis que $A(E)$ et $A'(E)$ sont des Λ-modules discrets. L'un des objets de la théorie d'Iwasawa est l'étude de la structure de ces Λ-modules, en vue d'une description asymptotique des groupes $A(E')$. Il est naturel de généraliser ces définitions de la manière suivante :

Définition 1.2.1 *Soit $i \in \mathbb{Z}$, on pose*

$$A^{(i)}(E) = \mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))$$

$$WA^{(i)}(E) = \mathcal{K}er^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i)) := \varinjlim \mathcal{K}er^2_S(E', \mathbb{Z}_p(i))$$

$$X^{(i)}(E) = \varprojlim \mathcal{H}^2_S(E', \mathbb{Z}_p(i))$$

$$WX^{(i)}(E) = \varprojlim \mathcal{K}er^2_S(E', \mathbb{Z}_p(i))$$

Les limites inductives (resp. projectives) étant prises par rapport aux morphismes de restriction (resp. corestriction).

Proposition 1.2.2 *Notons $\Lambda_v = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]$, on a une suite exacte de Λ-modules :*

$$WX^{(i)}(E) \hookrightarrow X^{(i)}(E) \rightarrow \bigoplus_{v \in S(F)} \Lambda \underset{\Lambda_v}{\otimes} H_0(E_v, \mathbb{Z}_p(i-1)) \twoheadrightarrow H^S_0(E, \mathbb{Z}_p(i-1))$$

Si $i \neq 1$, on a :

$$\begin{aligned} WA^{(i)}(E) \hookrightarrow A^{(i)}(E) &\rightarrow \bigoplus_{v \in S^{lc}(E/F)} Ind_{\Gamma}^{\Gamma_v} H^0(E_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i-1)) \\ &\twoheadrightarrow H^0_S(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i-1)) \end{aligned}$$

où $S^{lc}(E/F)$ désigne l'ensemble des places pour lesquelles on a $E_v \subset F_v^c$. Pour $i = 1$, on a

$$WA^{(1)}(E) = t_{\mathbb{Z}_p} A^{(1)}(E)$$

Preuve : Il s'agit simplement de faire passer la suite exacte 1.1.3 à la limite projective (resp. inductive) en faisant attention aux morphismes de connexion.

$\square$

Remarque 1.2.3 *La fonctorialité de la première suite exacte en E est parfaitement naturelle. Les notations sont moins heureuses pour la seconde : il faudrait, pour bien rendre compte de la fonctorialité en E, écrire*

$$\varinjlim \mathbb{Z}_p[G(E'/F)] \underset{\mathbb{Z}_p[G(E'/F)_v]}{\otimes} H_0(E'_v, \mathbb{Z}_p(i-1))$$

en laissant E'/F parcourir les sous-extensions finies de E/F, en lieu et place de $Ind_{\Gamma}^{\Gamma_v} H^0(E_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i-1))$. Remarquons que pour $i = 1$, on obtient un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel. Afin de ne pas alourdir les notations, nous conserverons néanmoins cette notation trompeuse pour $i \neq 1$.

On notera parfois $\overline{W}^{(i)}(E)$ et $W^{(i)}(E)$ les modules définis par les suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & WX^{(i)}(E) & \longrightarrow & X^{(i)}(E) & \longrightarrow & \overline{W}^{(i)}(E) & \to & 0 \\
0 & \to & WA^{(i)}(E) & \longrightarrow & A^{(i)}(E) & \longrightarrow & W^{(i)}(E) & \to & 0
\end{array}$$

Proposition 1.2.4 *La co-descente des modules $X^{(i)}$ est parfaite :*

$$X^{(i)}(E)_\Gamma = \mathcal{H}_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

Preuve : Ici encore on fait passer la proposition 1.1.5 à la limite projective.

$\square$

Remarque 1.2.5 *Lorsque E contient la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F, on a, pour $i = j \, mod \, [F(\mu_p) : F]$, $X^{(j)}(E) = X^{(i)}(E)(j-i)$ et $WX^{(j)}(E) = WX^{(i)}(E)(j-i)$. En particulier $WX^{(i)}(E) = X'(i-1)$ pour $i = 1 \, mod \, [F(\mu_p) : F]$. Aussi, en prenant les coïnvariants de la première suite exacte ci-dessus, on voit que pour $i = 1 \, mod \, [F(\mu_p) : F]$, $i \neq 1$, on a $\mathcal{K}er^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) = X'(F^c)(i-1)_\Gamma$.*

Proposition 1.2.6 *Soit F_∞/F une $\mathbb{Z}_p$-extension de groupe Γ, d'algèbre d'Iwasawa Λ. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) i est F-bon.

(ii) $X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma$ est fini.

(iii) $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) = 0$.

(iv) $H^S_2(F, \mathbb{Z}_p(-i)) = 0$.

Preuve : L'équivalence de (i) et (ii) est, compte tenu de 1.2.4, une conséquence immédiate de la classification des Λ-modules. L'équivalence de (iii) et (iv) est immédiate, et celle de (i) et (iii) se lit sur la suite exacte suivante (cf [Ta] prop. 2.3, ou [Sch] Satz 3) :

$$0 \rightarrow f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \rightarrow \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Q}_p(i)) \rightarrow \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) \rightarrow 0$$

puisque $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est a priori un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini.

$\square$

Remarque 1.2.7 *Soit F^c/F la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique. Les $i \in \mathbb{Z}$ qui ne sont pas F^c/F-bons sont en nombre fini. En effet, si f est un polynôme de Weierstrass, et si $p^\mu f$ engendre l'idéal caractéristique de $X^{(i)}(F^c)$, alors i est F_n-bon si et seulement si les polynômes f et $\omega_n^{(i)} := ((1+p)^i(T+1))^{p^n} - 1$ sont étrangers. Maintenant, il est facile de voir que $pgcd(f, \omega_n^{(i)}) = pgcd(f, \omega_m^{(i)})$ pour $p^n > p^m \geq deg\, f$; comme les $\omega_n^{(i)}$, $i \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux étrangers, c'est que seuls un nombre fini d'entre eux possèdent d'éventuels facteurs communs avec f.*

Proposition 1.2.8 *Soit F_∞/F une $\mathbb{Z}_p$-extension, et supposons que i soit F_∞/F-bon. Dans ce cas, il existe une suite exacte naturelle*

$$0 \;\to\; (X^{(i)}(F_\infty)^0)_\Gamma \;\to\; \mathcal{H}^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \;\to\; \mathcal{H}^2_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))^\Gamma \;\to\; 0$$

En d'autres termes, $cap^{(i)}(F_\infty/F) = (X^{(i)}(F_\infty)^0)_\Gamma$ et $cocap^{(i)}(F_\infty/F) = 0$

Preuve : Notons $C = X^{(i)}(F_\infty)/X^{(i)}(F_\infty)^0$, γ un générateur de Γ, $\omega_n = \gamma^{p^n} - 1$, et $\nu_n = \frac{\omega_n}{\gamma-1}$. Comme i est F_∞/F-bon et que C ne possède pas de sous-module fini non trivial, on a, pour $n \geq 0$, un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & (X^{(i)}(F_\infty)^0)_\Gamma & \longrightarrow & X^{(i)}(F_\infty)_\Gamma & \longrightarrow & C_\Gamma & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \nu_n} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_n} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_n} & & \\
0 & \to & ((X^{(i)}(F_\infty)^0)_{\Gamma_n})^{G_n} & \longrightarrow & (X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_n})^{G_n} & \longrightarrow & (C_{\Gamma_n})^{G_n} & &
\end{array}$$

Il est clair que la première flèche verticale est triviale pour $n >> 0$. Montrons maintenant que la dernière flèche verticale est un isomorphisme. Comme son noyau et son conoyau sont respectivement $\hat{H}^{-1}(G_n, C_{\Gamma_n})$ et $\hat{H}^0(G_n, C_{\Gamma_n})$ et que le G_n-quotient de Herbrand de C_{Γ_n} est trivial (car C_{Γ_n} est fini), il suffit de montrer l'injectivité. Soit donc $x \in C$ tel que $\nu_n x = \omega_n y$, on a alors $\nu_n(x - (\gamma - 1)y) = 0$, mais C ne contient aucun élément non trivial tué par ν_n, puisque $C^{\Gamma_n} = 0$; c'est donc que $x = (\gamma - 1)y$, et cela montre l'injectivité souhaitée. On obtient le résultat en faisant passer la seconde ligne du diagramme à la limite inductive sur n, puisque $\varinjlim (X^{(i)}(F_\infty)^0)_{\Gamma_n} = 0$.

□

Gross et Sinnott

Le twist $i = 1$ est exceptionnel en ceci que qu'il n'est pas bon en général. C'est la conjecture de Gross qui remplace alors la conjecture 1.1.12. Commençons par rappeler la suite exacte de Sinnott :

Proposition 1.2.9 *([FGS] prop. 6.5 et [Ko] §1) Soit E/F une extension galoisienne, S-ramifiée, de groupe G. Notons Γ (resp. Γ_v) le groupe de Galois de l'extension cyclotomique E^c/E (resp. son groupe de décomposition en v). On a une suite exacte canonique de G_S-modules :*

$$\begin{array}{lllll} \mathcal{N}^{(1)}_{loc}(E) & \hookrightarrow & E_S(E)\otimes\mathbb{Z}_p & \rightarrow & \widetilde{\bigoplus_{v\in S(F)}}\mathbb{Z}_p[G(E^c/F)/G(E^c/F)_v] \\ & & & \rightarrow & X'(E^c)_\Gamma \quad \rightarrow \quad A'(E) \end{array}$$

où l'on a, comme toujours, fixé un prolongement de $v\in S(F)$. Le symbole $\widetilde{\oplus}$ signifie que l'on prend le noyau de la forme linéaire naturelle

$$\oplus\mathbb{Z}_p[G(E^c/F)/G(E^c/F)_v]\rightarrow\mathbb{Z}_p$$

et $\mathcal{N}^{(1)}_{loc}(E)$ désigne le sous-groupe des éléments de $E_S(E)\otimes\mathbb{Z}_p$ qui sont localement des normes universelles dans l'extension E^c/E.

Preuve : Par inflation-restriction dans E^c/E, on a un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\Gamma) & \hookrightarrow & \mathcal{H}^1_S(E) & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}^1_S(E^c)^\Gamma \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{v\in S(F)} Ind_G^{G_v}H^1(\Gamma_v) & \hookrightarrow & \bigoplus_{v\in S(F)} Ind_G^{G_v}\mathcal{H}^1(E_v) & \twoheadrightarrow & \bigoplus_{v\in S(F)} Ind_G^{G_v}\mathcal{H}^1(E_v^c)^{\Gamma_v} \end{array}$$

dans lequel tous les groupes de cohomologie sont à coefficients dans $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Comme le conoyau de la seconde flèche verticale s'injecte dans $\mathcal{H}^1_S(E,\mathbb{Z}_p(1))^\vee = E_S(E)\otimes\mathbb{Z}_p{}^\vee$ par dualité de Poitou-Tate, le lemme du serpent donne, après dualité de Pontryagin, la suite exacte suivante :

$$E_S(E)\otimes\mathbb{Z}_p \rightarrow \widetilde{\bigoplus_{v\in S(F)}}\mathbb{Z}_p[G(E^c/F)/G(E^c/F)_v] \rightarrow X'(E^c)_\Gamma \rightarrow A'(E)$$

Reste à déterminer le noyau de la première flèche. Rappelons qu'elle est définie sur chaque composante locale par la composition des morphismes suivants :

$$\mathcal{H}^1_S(E,\mathbb{Z}_p(1)) \overset{loc_v}{\to} \mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Z}_p(1))$$

$$\overset{\cup}{\to} Hom(\mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p),\mathcal{H}^2(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))) \overset{inv_E}{\to} G^{ab}_{E_v} \to \Gamma_v$$

où loc_v est l'homomorphisme de localisation, $\cup : x \mapsto (x\cup : y \mapsto x \cup y)$ est le cup-produit et inv_E est l'isomorphisme induit par l'isomorphisme invariant de la théorie du corps de classes local : $\mathcal{H}^2(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)) \overset{inv_E}{\to} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Maintenant l'homomorphisme composé

$$Hom(\mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p),\mathcal{H}^2(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))) \overset{inv_E}{\to} G^{ab}_{E_v} \to \Gamma_v$$

coïncide avec la composition suivante :

$$Hom(\mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p),\mathcal{H}^2(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))) \overset{inf^\vee \circ inv_E}{\to} Hom(H^1(\Gamma_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p),\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \to \Gamma_v$$

Mais il est bien connu (cf. remarque ci-dessous) que l'orthogonal dans $\mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Z}_p(1)) = \widehat{E_v^\times}$, du sous-groupe $H^1(\Gamma_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ de $\mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$, pour le cup-produit

$$\mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Z}_p(1)) \otimes \mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \overset{\cup}{\to} \mathcal{H}^2(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)) = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

est le sous-groupe de $\widehat{E_v^\times}$ constitué de normes universelles dans l'extension E_v^c/E_v, est cela termine la preuve.

□

Remarque 1.2.10 *Nous reviendrons sur ces questions de cup-produit et de normes universelles dans un cadre plus général (cf. section 3.2.1). Indiquons néanmoins comment on déduit la propriété d'orthogonalité invoquée ci-dessus de la non-dégénérescence du symbole de Hilbert. D'abord, un argument facile de descente galoisienne montre qu'il n'est pas restrictif de supposer* $\mu_p \subset E_v$. *Notons alors* $(E_v)_n$ *le* n^{eme} *étage de la tour cyclotomique* E_v^c/E_v. *Il est commode d'exprimer la formule* $cor(b\cup res\, a) = (cor b)\cup a$ *par le "diagramme"* *suivant, dont on dira qu'il est commutatif.*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{H}^1((E_v)_n,\mathbb{Z}_p(1)) & \otimes & \mathcal{H}^1((E_v)_n,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\cup} & \mathcal{H}^2((E_v)_n,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)) \\
{\scriptstyle cor}\downarrow & & {\scriptstyle res}\uparrow & & {\scriptstyle cor}\downarrow \\
\mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Z}_p(1)) & \otimes & \mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\cup} & \mathcal{H}^2(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))
\end{array}$$

On en déduit facilement l'orthogonalité du sous-groupe $\mathcal{N}_v$ des normes universelles de $\widehat{E_v^\times}=\mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Z}_p(1))$ dans l'extension E_v^c/E_v avec le sous-groupe $\mathcal{H}^1(E_v^c/E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ de $\mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. Reste à montrer que l'homomorphisme

$$\mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Z}_p(1))/\mathcal{N}_v\to Hom(\mathcal{H}^1(E_v^c/E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p),\mathcal{H}^2(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p))=\Gamma_v$$

est injectif. Par le corps de classes local, le groupe de départ de cet homomorphisme n'est autre que Γ_v, et il suffit donc de montrer que l'homomorphisme en question n'est pas trivial. Dans le "diagramme" commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Z}_p(1)) & \otimes & \mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\cup} & \mathcal{H}^2(E_v,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)) \\
\downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Z}/p(1)) & \otimes & \mathcal{H}^1(E_v,\mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{\cup} & \mathcal{H}^2(E_v,\mathbb{Z}/p(1))
\end{array}$$

la flèche verticale à l'arrivée est injective. La non dégénérescence du symbole de Hilbert (et donc du cup-produit de la seconde ligne ci-dessus) permet de conclure.

Remarque 1.2.11 *Déjà ici, il apparaît dans cette preuve que la suite exacte de Sinnott doit se généraliser à une $\mathbb{Z}_p$-extension quelconque, puisque le point crucial de la preuve, qui est la propriété d'orthogonalité discutée ci-dessus, est valable dans n'importe quelle $\mathbb{Z}_p$-extension. On renvoie à 3.2.5 pour une suite exacte de Sinnott générale.*

Dans [FGS] (voir aussi [Ko]), l'auteur de l'appendice définit la flèche

$$E_S(E) \otimes \mathbb{Z}_p \to \tilde{\bigoplus_{v \in S(F)}} \mathbb{Z}_p[G(E^c/F)/G(E^c/F)_v]$$

par un "logarithme p-adique galoisien". Le $\mathbb{Z}_p$-rang de son image est alors donné par $s(F^c) - 1 - \delta_F$ où $\delta_F = rg_{\mathbb{Z}_p} X'(F^c)_\Gamma$. La conjecture suivante est attribuée à Gross et Jaulent [Jau] :

Conjecture 1.2.12 $\delta_F = 0$.

En fait, compte-tenu de la proposition 1.2.6, on peut réunir les conjectures 1.1.12 et 1.2.12 dans la suivante :

Conjecture 1.2.13 *Soit F un corps de nombres quelconque, alors $WX^{(i)}(F^c)_\Gamma$ est fini pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*

Question 1.2.14 *Qu'en est-il des autres $\mathbb{Z}_p$-extensions ?*

1.2.2 Adjoints

Dans ce paragraphe, Γ est un groupe isomorphe à ${\mathbb{Z}_p}^s$, $s \geq 1$, et Λ désigne son algèbre de groupe complète. Comme dans [J1], on pose, pour un Λ-module noethérien M, $E^0_\Lambda(M) = Hom_\Lambda(M, \Lambda)$, et lorsque le contexte ne prête pas à confusion, on notera simplement $E^0 = E^0_\Lambda$. Le $\mathbb{Z}_p$-module $Hom_\Lambda(M, \Lambda)$, comme tous les groupes d'homomorphismes de ce paragraphe, sera muni de l'action à droite de Γ suivante : $\gamma.x(m) = x(\gamma m)$. Nous considérons donc E^0 comme un foncteur, contravariant, exact à gauche, de la catégorie des Λ-modules dans elle-même, puisque Λ est commutatif. On notera aussi $E^k(M) = Ext^k_\Lambda(M, \Lambda)$. Dans [J1], l'auteur utilise ces foncteurs - ainsi que d'autres - pour étudier les Λ-modules à isomorphisme près. Sans entrer dans les détails, nous reproduisons ici quelques résultats utiles à notre propos. Quelques arguments sont empruntés au très utile chapitre 3 de [Hi], et on renvoie à [Br] pour toutes les questions d'algèbre homologique.

Le foncteur E^1 généralise l'adjoint d'Iwasawa et transforme un Λ-module de torsion en un Λ-module pseudo-isomorphe. Rappelons qu'un Λ-module est dit pseudo-nul si tous ses localisés aux premiers de hauteur 1 sont nuls. On dit encore qu'un Λ-homomorphisme $M \to M'$ est un pseudo-isomorphisme si son noyau et son conoyau sont pseudo-nuls, on note alors $M \approx M'$. Si M et M' sont deux Λ-modules de torsion, l'existence d'un pseudo-isomorphisme de M vers M' équivaut à l'existence d'un pseudo-isomorphisme de M' vers M, et l'on dira simplement que M et M' sont pseudo-isomorphes.

Proposition 1.2.15 *Si M est un Λ-module noethérien de torsion, alors*

$$E^1(M) \approx M$$

Preuve : Rappelons d'abord que Λ est un anneau noethérien intégralement clos, donc de Krull ([B] VII §1.3 cor. to thm.2). Soit Q le corps des fractions de Λ. Appliquant $Hom_\Lambda(M, \bullet)$ à la suite exacte $\Lambda \hookrightarrow Q \twoheadrightarrow Q/\Lambda$, on obtient $Hom_\Lambda(M, Q/\Lambda) = E^1(M)$, puisque $Hom_\Lambda(M, Q) = 0$ et $Ext^1_\Lambda(M, Q) = 0$. Soit $S = \Lambda \backslash \cup \mathfrak{p}_i$ où $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_\mathfrak{k}$ sont les idéaux premiers de hauteur 1 du support de M (ils sont en nombre fini, voir [B], VII, §1.8 th.4 (iii) et VII, §4.4 th 5, preuve de l'existence). Maintenant $S^{-1}\Lambda$ est un anneau principal ([B], VII, §4.4 lem. 2), et $S^{-1}E^1(M) = Hom_{S^{-1}\Lambda}(S^{-1}M, Q/S^{-1}\Lambda)$ ([B], II §2.7 prop. 19). Le théorème de classification des modules sur un anneau principal fournit un isomorphisme non canonique entre $S^{-1}M$ et $Hom_{S^{-1}\Lambda}(S^{-1}M, Q/S^{-1}\Lambda)$. En le multipliant par un élément de S convenable, on obtient un homomorphisme $M \to E^1(M)$ dont le noyau et le conoyau sont pseudo-nuls.

$\square$

Remarque 1.2.16 *Comme Λ est factoriel (en fait Krull suffit), on voit facilement que Q/Λ, et donc $Hom_\Lambda(M, Q/\Lambda)$, ne possèdent aucun sous-module pseudo-nul non trivial. Ainsi, si M est de torsion, le sous-module pseudo-nul maximal $E^1(M)^0$ de $E^1(M)$ est trivial.*

Un outil très utile pour la description des Λ-modules $E^k(M)$ est l'expression de E^0 comme foncteur composé :

$$E^0(M)^\vee = \varinjlim M_U \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

où U parcourt les sous-groupes ouverts de Γ. Le foncteur $M \rightsquigarrow \varinjlim M_U$ tranforme les Λ-modules projectifs en Λ-modules acycliques pour le foncteur $M \rightsquigarrow M \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ ($\Lambda_U = \mathbb{Z}_p[G/U]$ est sans $\mathbb{Z}_p$-torsion). Suivant Jannsen, on observe donc que cette décomposition donne lieu à une suite spectrale de Grothendieck de type homologique (cf [Gro] th. 2.4.1) :

$$E^2_{k,l} = Tor_k^{\mathbb{Z}_p}(\varinjlim H_l(U, M), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \Rightarrow E^{k+l}(M)^\vee = E_{k+l}$$

Proposition 1.2.17 *([J1] th. 2.1) Soit M un Λ-module noethérien et $k \geq 1$. Alors il existe une suite exacte canonique de Λ-modules discrets :*

$$0 \quad \to \quad \varinjlim H_k(U, M) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \quad \to \quad E^k(M)^\vee \quad \to \quad t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim H_{k-1}(U, M) \quad \to \quad 0$$

où U parcourt les sous-groupes ouverts de Γ.

Preuve : Comme $E^2_{k,l} = 0$ pour $k \neq 0, 1$, les termes de la suite spectrale ci-dessus se stabilisent dès le début et cela donne le résultat.

□

Remarque 1.2.18 *Si $s = 1$, c'est-à-dire si $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p$, on retrouve les adjoints d'Iwasawa : si $H_1(\Gamma_n, M) = M^{\Gamma_n}$ est fini pour tout n, alors $M \approx E^1(M) = (\varinjlim M_{\Gamma_n})^\vee$. Comme $cd_p\Gamma = 1$, on voit aussi que $E^2(M)^\vee = t_{\mathbb{Z}_p} \varinjlim H_1(\Gamma_n, M) = \cup t_{\mathbb{Z}_p} M^{\Gamma_n}$ est le sous-module fini maximal de M.*

Notons qu'Iwasawa munit le dual de Pontryagin de l'action à gauche de Γ : $\gamma.x(m) = x(\gamma^{-1})m$; pour cette action, il faut alors écrire $M^{op} \approx (\varinjlim M_{\Gamma_n})^\vee$, où M^{op} est le module déduit de M en inversant l'action de Γ.

Convention 1.2.19 *A l'exception de ce paragraphe consacré aux adjoints, dans lequel tous les groupes d'homomorphismes, y compris les duaux de Pontryagin, sont munis de l'action à droite de Λ, nous adopterons la convention suivante :* ***Les E^k seront des modules à droite, tandis que les duaux de Pontryagin seront des modules à gauche****.*

Définition 1.2.20 *On dit que DM est un transposé de M si l'on peut trouver le début d'une résolution projective :*

$$P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

vérifiant

$$DM \simeq coker(E^0(P_0) \to E^0(P_1))$$

Remarque 1.2.21 *Si $pd_\Lambda M \leq 1$, alors $E^1(M)$ est un transposé de M.*

DM n'est pas bien défini comme Λ-module, en fait il faudrait voir D comme un foncteur de la catégorie de Λ-modules dans celle des Λ-modules à homotopie près (cf [J1]). Néanmoins, la proposition suivante montre que les modules $E^1(DM)$ et $E^2(DM)$ sont bien définis et cela nous suffira pour la suite.

Proposition 1.2.22 *Soit DM un transposé de M, alors on a une suite exacte naturelle*

$$0 \rightarrow E^1(DM) \rightarrow M \rightarrow E^0(E^0(M)) \rightarrow E^2(DM) \rightarrow 0$$

Preuve : Soit $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ le début d'une résolution projective définissant DM. De la suite exacte

$$0 \rightarrow E^0(M) \rightarrow E^0(P_0) \rightarrow E^0(P_1) \rightarrow DM \rightarrow 0$$

on tire la seconde ligne du diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & P_1 & \rightarrow & P_0 & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & E^0(C) & \rightarrow & E^0(E^0(P_0)) & \rightarrow & E^0(E^0(M)) & \rightarrow & E^2(DM) & \rightarrow & 0
\end{array}$$

dans lequel $C = Ker(E^0(P_1) \rightarrow DM)$. Comme P_0 est projectif de type fini $E^0(P_0)$ l'est aussi, et la flèche de bidualité $P \rightarrow E^0(E^0(P_0))$ est bijective. Une chasse rapide dans le diagramme ci-dessus donne donc une suite exacte

$$P_1 \rightarrow E_0(C) \rightarrow M \rightarrow E^0(E^0(M)) \rightarrow E^2(DM) \rightarrow 0$$

Mais on vérifie sans difficulté que la flèche $P_1 \rightarrow E_0(C)$ en question est duale à l'inclusion $C \rightarrow E^0(P_1)$ par laquelle on a défini C, si bien que son conoyau s'identifie à $E^1(DM)$.

$\square$

Remarque 1.2.23 *le conoyau de l'application de bidualité $M \to E^0(E^0(M))$ est parfois appelé le défaut de liberté de $f_\Lambda M$. Il est utile de noter que si $pd_\Lambda M \leq 1$, alors le sous-module de torsion de M (resp. le défaut de liberté de $f_\Lambda M$) s'identifient canoniquement à $E^1(E^1(M))$ et $E^2(E^1(M))$.*

Proposition 1.2.24 *Si $pd_\Lambda M \leq 1$, alors $M^0 = 0$. On rappelle que M^0 est le sous-module pseudo-nul maximal de M.*

Preuve : Soit $0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ une résolution projective de M. En tensorisant la suite exacte suivante par Q

$$0 \to E^0(M) \to E^0(P_0) \to E^0(P_1) \to E^1(M) \to 0$$

on voit que $E^1(M)$ est de torsion. Mais alors $E^1(E^1(M))$ ne possède, d'après 1.2.16, aucun sous-module pseudo-nul non trivial, et cela termine la preuve puisque $t_\Lambda M = E^1(E^1(M))$.

$\square$

Remarque 1.2.25 *Pour $s = 1$, la réciproque est vraie. En effet, 1.2.17 montre que $E^2(M) = (M^0)^\vee$. Si donc $M^0 = 0$, c'est que $E^2(M) = 0$. Mais comme $pd_\Lambda M \leq 2$, c'est que $E^2(M) \twoheadrightarrow Ext^2_\Lambda(M, \mathbb{Z}_p)$ et $Ext^2_\Lambda(M, \mathbb{Z}_p) \twoheadrightarrow Ext^2_\Lambda(M, \mathbb{Z}/p)$. On en déduit que $Ext^2(M, \mathbb{Z}/p) = 0$, et donc que $pd_\Lambda M \leq 1$.*

La théorie des idéaux de Fitting, comme présentée dans [Hi] chap. 3, généralise aux anneaux de Krull la théorie des facteurs invariants pour un anneau principal. Nous utiliserons simplement le lemme suivant :

Lemme 1.2.26 *Soit M un Λ-module de dimension projective ≤ 1, présenté par*

$$0 \to \Lambda^r \xrightarrow{\Phi} \Lambda^d \longrightarrow M \to 0$$

Alors tout déterminant $r \times r$ de la matrice Φ annule $t_\Lambda M$.

Preuve : Comme dans la preuve de 1.2.15, on localise au support de $t_\Lambda M$. Comme $M^0 = 0$, c'est que $M \hookrightarrow S^{-1}M$. La théorie des invariants pour $S^{-1}\Lambda$ donne donc le résultat. On renvoie à [Hi], chap. 3 pour plus de détails.

□

1.2.3 Lien entre $\mathcal{X}^{(-i)}$ et $X^{(i)}$

Soit E/F une $\mathbb{Z}_p$-extension multiple, disons de groupe $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p{}^s$ et d'algèbre complète $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$. On note $G_S(E) = G(F_S/E)$ et $\hat{G}_S(E)$ son pro-p-quotient maximal. Notons encore $\mathcal{X}(E)$ l'abélianisé de $\hat{G}_S(E)$. $\mathcal{X}(E)$ est un module très important en théorie d'Iwasawa, notamment à cause de la proposition suivante (pour $E = F^c$) :

Proposition 1.2.27 *([I1], [Ku] th. 8.1) Supposons que F contienne μ_p, alors pour $n >> 0$, il existe une suite exacte (non canonique) de $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_n]]$-modules :*

$$0 \;\to\; A'(F^c)^\vee \;\to\; t_\Lambda \mathcal{X}(F^c)(-1) \;\to\; \mathbb{Z}_p{}^{s(F^c)-1} \;\to\; 0$$

où $s(F^c)$ est le nombre de (p)-places de F^c.

Ce résultat, dû à Iwasawa, est démontré dans [I1] de la façon suivante : La théorie de Kummer au-dessus de F^c donne une suite exacte ([I1], lemma 10)

$$0 \;\to\; A'(F^c)^\vee \;\longrightarrow\; \mathcal{X}(F^c)(-1) \;\longrightarrow\; (E_S(F^c) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee \;\to\; 0$$

et, comme on sait que $A'(F^c)^\vee$ est de Λ-torsion, il s'agit d'identifier la structure de $t_\Lambda(E_S(F^c) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee$; celle-ci s'obtient de façon abstraite en observant le comportement asymptotique de $E_S(F_n)$ ([I1], th. 9 et 15).

Le lien avec le module $X'(F^c)$ est donné par le pseudo-isomorphisme

$$A'(F^c)^\vee \approx X'(F^c)$$

dont Iwasawa donne une preuve ad hoc ([I1], th. 11). La proposition 1.2.27 concerne le twist $i = 1$; si on le remplace par un bon i, la situation est bien plus simple et c'est ce qu'on expose dans ce paragraphe. Les méthodes de [J1] (adjoints) et l'introduction d'un module auxiliaire $Y^{(-i)}$, comme dans [N1], permettent d'obtenir un lien direct entre $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E)$ et $X^{(i)}(E)$. Nous consacrerons un paragraphe au cas $i = 1$, plus subtil, à la fin de la section 2.1.2. On y retrouvera en particulier la proposition 1.2.27.

Comme $\mathcal{X}(F) = H_1^S(F, \mathbb{Z}_p)$, il est naturel de proposer la définition suivante :

Définition 1.2.28 *Soit $i \in \mathbb{Z}$, et E/F une sous-extension (non nécessairement finie) de F_S/F. On pose*

$$\mathcal{X}^{(-i)}(E) = H_1^S(E, \mathbb{Z}_p(-i))$$

En particulier, $\mathcal{X}^{(0)}(E) = \mathcal{X}(E)$.

Remarque 1.2.29 *On a $\mathcal{X}^{(-i)}(E)^\vee = \mathcal{H}_S^1(E, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$. Comme $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)$ est $G(EF^c/E)$-cohomologiquement trivial pour $i \neq 0$, la suite exacte d'inflation-restriction donne, après dualité de Pontryagin,*

$$\mathcal{X}^{(-i)}(E) = \mathcal{X}(EF^c)(-i)_{G(EF^c/E)}$$

pour $i \neq 0$.

Proposition 1.2.30 *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a une suite exacte canonique*

$$0 \ \to \ (t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i)))^\vee \ \to \ \mathcal{X}^{(-i)}(F) \ \to \ (\mathcal{H}_S^1(F, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee \ \to \ 0$$

identifiant le premier terme à $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(F)$ et le dernier à $f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(F)$.

Preuve : [Ta] prop. 2.3 décrit l'image (resp. le noyau) du cobord de degré 1 associé à la suite exacte de G_S-modules

$$0 \ \to \ \mathbb{Z}_p(i) \ \to \ \mathbb{Q}_p(i) \ \to \ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i) \ \to \ 0$$

comme le sous-groupe de torsion de $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ (resp. le sous-groupe divisible maximal de $\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))$). La suite exacte ci-dessus est obtenue en appliquant la dualité de Pontryagin à cette description, identifiant ainsi le premier terme à $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(F)$ et le dernier à $f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(F)$.

$\square$

Le module $X^{(i)}(E)$ (resp. $\mathcal{X}^{(-i)}(E)$) vérifie la descente galoisienne (resp. la co-descente galoisienne) dans l'extension $E(\mu_p)/E$. Il n'est donc pas restrictif, pour leur étude, de supposer que F contient μ_p. Sous cette hypothèse, $\mathbb{Z}_p(i)$ est un $\hat{G}_S(E)$-module et la cohomologie (resp. homologie) de $\hat{G}_S(E)$ s'identifie en tous degrés par inflation (resp. déflation) à celle de $G_S(E)$ pour les modules de p-torsion, voire - par limite projective - pour les pro-p-modules de $\mathbb{Z}_p$-type fini, (resp. les pro-p-modules) ([Ha] prop. 22).

Il sera souvent commode de plonger $\mathcal{X}^{(-i)}$ dans un autre module plus maniable, $Y^{(-i)}$, défini en présence de μ_p (pour que le caractère cyclotomique se factorise par $\hat{G}_S$). La définition suivante est une extension naturelle de celle de [N1] :

Définition 1.2.31 *Soit $I_{\hat{G}_S}$ l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Z}_p[[\hat{G}_S]]$. On pose, pour toute pro-p-sous-extension galoisienne E/F de F_S/F :*

$$Y^{(-i)}(E) = H^S_0(E, I_{\hat{G}_S}(-i))$$

Remarque 1.2.32 *Par construction, $Y^{(-i)}$ vérifie la co-descente galoisienne. Notons aussi que, contrairement à $\mathcal{X}^{(-i)}(E)$, $Y^{(-i)}(E)$ dépend du corps de base F.*

Fixons une présentation pro-p-libre minimale $R \hookrightarrow L \twoheadrightarrow \hat{G}_S$, c'est-à-dire que L est pro-p-libre et possède le même nombre d de générateurs que $\hat{G}_S$. Le caractère cyclotomique $\kappa : \Gamma^c \to {\mathbb{Z}_p}^\times$ donne par inflation un caractère $L \to \mathbb{Z}_p^\times$, via lequel on peut tordre tout L-module “à la Tate”.

Proposition 1.2.33 *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a deux suites exactes canoniques de G_S-modules :*

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{X}^{(-i)}(E) & \hookrightarrow & Y^{(-i)}(E) & \to & H^S_0(E, \mathbb{Z}_p[[\hat{G}_S]]) & \twoheadrightarrow & H^S_0(E, \mathbb{Z}_p(-i)) \\
H^S_2(E, \mathbb{Z}_p(-i)) & \hookrightarrow & H^S_0(E, R^{ab}(-i)) & \to & H^S_0(E, I_L(-i)_R) & \twoheadrightarrow & Y^{(-i)}(E)
\end{array}$$

Le troisième terme de la première s'identifie à $\mathbb{Z}_p[[G(E/F)]]$ et les deux termes du milieu de la seconde suite exacte sont $\mathbb{Z}_p[[G(E/F)]]$-libres, de rang respectif r (nombre de relations de $\hat{G}_S$) et d (nombre de générateurs de $\hat{G}_S$).

Preuve : La première suite exacte s'obtient en écrivant la $\hat{G}_S(E)$-homologie de la suite exacte d'augmentation de $\mathbb{Z}_p[[\hat{G}_S]]$ tordue (noter que $\mathbb{Z}_p[[\hat{G}_S]]$ est homologiquement trivial) :

$$0 \rightarrow I_{\hat{G}_S}(-i) \longrightarrow \mathbb{Z}_p[[\hat{G}_S]] \longrightarrow \mathbb{Z}_p(-i) \rightarrow 0$$

Ecrivons ensuite la R-homologie de la suite exacte d'augmentation de L tordue :

$$0 \rightarrow R^{ab}(-i) \longrightarrow I_L(-i)_R \longrightarrow I_{\hat{G}_S}(-i) \rightarrow 0$$

On sait que l'idéal d'augmentation I_L de $\mathbb{Z}_p[[L]]$ s'identifie au module des dérivations universelles de L (cf [NSW], 5.6.4), et que ce dernier est $\mathbb{Z}_p[[L]]$-libre de rang d. Maintenant, il n'est pas très difficile de montrer que $\mathbb{Z}_p[[L]](-i)$ est un $\mathbb{Z}_p[[L]]$-module libre de rang 1, si bien que l'on a $I_L(-i) \simeq \mathbb{Z}_p[[L]]^d$ et $I_L(-i)_R \simeq \mathbb{Z}_p[[\hat{G}_S]]^d$. Comme $cd\ \hat{G}_S \leq 2$, on en déduit, par [Br] prop. 3.1 et th. 4.1, que $R^{ab}(-i)$ est aussi $\mathbb{Z}_p[[\hat{G}_S]]$-libre, de rang r le nombre de relations de $\hat{G}_S$. La $\hat{G}_S(E)$-homologie de la suite exacte précédente donne alors la seconde suite exacte de la proposition.

On pourra consulter [N1] pour plus de détails, notamment quant à l'interprétation de la flèche entre ces deux modules par dérivation de Fox des relations de $\hat{G}_S$.

□

Corollaire 1.2.34 *$\mathcal{X}^{(-i)}(E)$ et $Y^{(-i)}(E)$ ont la même $\mathbb{Z}_p$-torsion. Si de plus $\mathbb{Z}[[G(E/F)]]$ est un anneau commutatif intègre (par exemple si E/F est une $\mathbb{Z}_p$-extension multiple), ils ont aussi la même $\mathbb{Z}_p[[G(E/F)]]$-torsion.*

□

Remarque 1.2.35 *Si $E \supset F^c$, alors $H_1^S(E, I_{\hat{G}_S}(-i)) = H_2^S(E, \mathbb{Z}_p(-i)) = 0$ (cf. rem. 1.1.13). La suite spectrale d'homologie de l'extension de groupes $G_S(E) \hookrightarrow G_S \twoheadrightarrow G(E/F)$ à coefficients dans $I_{\hat{G}_S}(-i)$ montre alors que $H_2^S(F, \mathbb{Z}_p(-i)) = H_1^S(F, I_{\hat{G}_S}(-i)) = H^1(E/F, Y^{(-i)}(E))$.*

Corollaire 1.2.36 *Si E contient F^c ou si i est E/F-bon, alors $\mathcal{X}^{(-i)}(E)$ ne possède aucun sous-module pseudo-nul non trivial.*

Preuve : Cela résulte de la même propriété pour $Y^{(-i)}(E)$, qui elle-même découle de $pd_\Lambda Y^{(-i)}(E) \leq 1$ (cf. prop 1.2.24)

□

Revenons maintenant à l'étude des modules $\mathcal{X}^{(-i)}$ et $X^{(i)}$ dans une $\mathbb{Z}_p$-extension multiple E/F d'un corps de nombres quelconque F.

Proposition 1.2.37 *Soit F un corps de nombres quelconque, si $i \in Z$ est $E(\mu_p)/F(\mu_p)$-bon alors*

$$E^1(X^{(i)}(E)) = t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E)^{op}$$

En particulier, $X^{(i)}(E) \approx t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E)^{op}$.

Preuve : Quitte à prendre les points fixes par $G(E(\mu_p)/E)$, on peut supposer que F contient μ_p. D'après la remarque 1.2.35, on sait que $H_1(U, Y^{(-i)}) = 0$ pour tout sous-groupe ouvert $U < \Gamma$. La proposition 1.2.17 donne alors $E^1(Y^{(-i)}(E))^\vee = \varinjlim t_{\mathbb{Z}_p} Y^{(-i)}(E')^{op}$. Mais $t_{\mathbb{Z}_p} Y^{(-i)}(E') = t_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-i)}(E') = \mathcal{H}_S^2(E', \mathbb{Z}_p(i))^\vee$, d'où $E^1(Y^{(-i)}(E)) = X^{(i)}(E)^{op}$ et finalement $E^1(X^{(i)}(E))^{op} = E^1(E^1(Y^{(-i)}(E)))$, ce qui donne le résultat puisque $pd_\Lambda Y^{(-i)}(E) \leq 1$.

□

Corollaire 1.2.38 *Si $E \subset F^c$, alors on a en fait*

$$E^1(X^{(i)}(E)) = t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E)^{op}$$

pour tout i.

Preuve : On choisit j $E(\mu_p)/F(\mu_p)$-bon, $j = i \, mod [F(\mu_p) : F]$, on applique la proposition précédente et on sort les twists.

$\square$

Corollaire 1.2.39 *Soit F_∞/F une $\mathbb{Z}_p$-extension de groupe Γ, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) i est F-bon.

(ii) $\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)^\Gamma = 0$

(iii) $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)$ est fini.

$\square$

Remarque 1.2.40 *En appliquant le foncteur E^1 à la suite exacte de localisation 1.2.2, on obtient une suite exacte dans le sens contraire de 1.2.27 : Comme $E^1(X^{(i)}(E))^{op} = t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E)$, on a*

$$0 \rightarrow E^1(\overline{W}^{(i)}(E))^{op} \longrightarrow t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E) \longrightarrow E^1(WX^{(i)}(E))^{op}$$

Si E/F est une $\mathbb{Z}_p$-extension simple, la flèche de droite est surjective puisque dans ce cas $E^2(\overline{W}^{(i)}(E)) = 0$.

Chapitre 2

La conjecture de Greenberg généralisée

Après avoir présenté différentes versions équivalentes de la conjecture de Greenberg généralisée, nous nous attardons sur le cas particulier où $\mathcal{H}_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est cyclique pour énoncer un critère de validité en fonction du problème de capitulation totale.

2.1 Théorie d'Iwasawa : suite

Commençons par un premier complément de théorie d'Iwasawa.

2.1.1 Sur les Λ-modules

On présente ici deux nouveaux résultats dans la théorie des Λ-modules. Le premier généralise aux $\mathbb{Z}_p$-extensions multiples un résultat d'Iwasawa concernant le Λ-rang d'un module ; il permettra de compléter la preuve de [LN] pour l'équivalence entre les formulations connues de (GG). Le second est inspiré des techniques de [Mi1] et donne une caractérisation de la pseudo-nullité ; nous l'utiliserons pour proposer une nouvelle version de (GG).

Caractérisation du rang d'un Λ-module

Soit $\Gamma = H \times G$ où $G = \mathbb{Z}_p$, $H = {\mathbb{Z}_p}^{s-1}$, $s \geq 1$. On pose $\Lambda_0 = \mathbb{Z}_p[[H]]$ et $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] = \Lambda_0[[G]] = \Lambda_0[[T]]$. On note aussi $G_n = G^{p^n}$ (dans ce paragraphe seulement).

L'objet de ce paragraphe est la preuve du résultat suivant :

Proposition 2.1.1 *Soit M un Λ-module noethérien. Alors*

$$rg_\Lambda M = \lim_{n\to\infty} \frac{rg_{\Lambda_0} M_{G_n}}{p^n}$$

En fait ce résultat s'obtient directement en combinant les deux lemmes suivants :

Lemme 2.1.2 *Si M est un Λ-module noethérien sans torsion, alors*

$$rg_{\Lambda_0} M_{G_n} = p^n rg_\Lambda M$$

Lemme 2.1.3 *Si M est un Λ-module noethérien, alors M est de torsion si et seulement si M_{G_n} est de Λ_0-rang borné.*

On rappelle que pseudo-nul signifie localement nul (i.e. le localisé en tout premier de hauteur 1 est nul). Commençons par un lemme.

Lemme 2.1.4 *Si $M \approx 0$, alors M_{G_n} est un Λ_0-module de torsion.*

Preuve de 2.1.4 : D'après [B] VII §4.8 prop. 18, si $M \approx 0$ comme Λ-module, c'est que $M \approx 0$ comme $\Lambda_0[[G_n]]$-module. Il suffit donc de montrer le lemme pour $n = 0$. Comme $M \approx 0$, M possède un annulateur étranger à T, donc M_G est de Λ_0-torsion.

$\square$

Montrons maintenant le lemme 2.1.2. Soit $\omega_n(T) = (T+1)^{p^n} - 1$. Comme $\Lambda_0[[T]]$ est entier sur $\Lambda_0[[\omega_n(T)]]$ et que ce dernier anneau est intégralement clos (car factoriel), on voit que tout module de $\Lambda_0[[T]]$-torsion est de $\Lambda_0[[\omega_n(T)]]$-torsion. Par ailleurs, on voit facilement que $rg_{\Lambda_0[[\omega_n(T)]]} M = p^n rg_{\Lambda_0[[T]]} M$. Ces deux remarques ramènent la preuve du lemme au cas où $n = 0$. Soit donc $r = rg_{\Lambda_0[[T]]} M$. Il existe un plongement $M \hookrightarrow \Lambda_0[[T]]^r$ dont le conoyau Z est annulé par des éléments non divisibles par T. Il suffit en effet de relever un isomorphisme qui provient de la localisation en (T). Mais alors le lemme du serpent donne une suite exacte

$$Z^G \hookrightarrow M_G \longrightarrow {\Lambda_0}^r \twoheadrightarrow Z_G$$

Comme Z^G et Z_G sont de Λ_0-torsion, on obtient $rg_{\Lambda_0} M_G = r$, ce qui termine la preuve de 2.1.2.

$\square$

Passons au lemme 2.1.3. Supposons d'abord M de torsion. Alors, grâce au théorème de structure des modules de type fini sur un anneau noethérien intégralement clos ([B] VII §4.4 Th.5), on sait qu'il existe une suite exacte

$$E \hookrightarrow M \twoheadrightarrow Z$$

où E est un module élémentaire, et Z est pseudo-nul. Il suffit donc de vérifier le lemme pour E et Z. Pour Z, il est trivial grâce au lemme 2.1.4. On peut évidemment supposer $E = \Lambda/(f^k)$, où f est un élément irréductible de Λ. En fait on peut même se ramener au cas où $k = 1$ en exécutant une récurrence immédiate grâce à la suite exacte

$$\Lambda/(f^{k-1}) \hookrightarrow \Lambda/(f^k) \twoheadrightarrow \Lambda/(f)$$

Or si $E = \Lambda/(f)$, de deux choses l'une : soit f et ω_n sont étrangers pour tout n et dans ce cas, E_{G_n} est de Λ_0-torsion (lemme 2.1.4), ce qui règle la question ; soit il existe n tel que $f \mid \omega_n$, et alors $E_{G_n} = E$ pour n grand, le rang cherché est donc bien borné et cela termine la preuve du sens direct.

La réciproque est une conséquence immédiate de 2.1.2. Supposons $rg_{\Lambda_0} M_{G_n}$ borné, alors $rg_{\Lambda_0}(f_{\Lambda_0[[T]]} M)_{G_n}$ l'est aussi, et le lemme 2.1.2 montre que dans ce cas $f_\Lambda M$ est nul, ce qui termine la preuve de 2.1.3.

□

Question : *Peut-on montrer une proposition analogue avec un groupe* $\Gamma = {\mathbb{Z}_p}^s$*, en prenant la limite sur le filtre des sous-groupes ouverts ? Ce qui manque a priori, c'est le lemme du serpent.*

Pour l'application que nous avons en vue (lemme 2.1.13), la proposition 2.1.1 suffira, le cas d'un $\mathbb{Z}_p$-extension multiple se ramenant à celui d'une $\mathbb{Z}_p$-extension simple par dévissage.

Caractérisation de la pseudo-nullité

Soit $\Gamma = {\mathbb{Z}_p}^s$ et $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$. L'ensemble des sous-groupes $H < \Gamma$ vérifiant $\Gamma/H \simeq \mathbb{Z}_p$ s'identifie naturellement à l'espace projectif $\mathbb{P}(Hom(\Gamma, \mathbb{Q}_p))$; on écrira donc $H \in \mathbb{P}(Hom(\Gamma, \mathbb{Q}_p))$.

Le résultat suivant est inspiré de [Mi1]. Néanmoins l'hypothèse concernant la finitude de Z_Γ, simplifie considérablement la situation. Cette hypothèse sera vérifiée par le module attaché aux groupes de cohomologie p-adiques en degré 2 pour les bons i, alors qu'elle ne l'est pas a priori pour le module attaché au groupe de classes.

Proposition 2.1.5 *(Comparer à [Mi1], prop. 4.C) Soit* Z *un* Λ*-module tel que* Z_Γ *soit fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Z est Λ-pseudo-nul*

(ii) *Il existe une infinité de* $H \in \mathbb{P}(Hom(\Gamma, \mathbb{Q}_p))$ *tels que* Z_H *soit fini.*

(iii) *Il existe* $H \in \mathbb{P}(Hom(\Gamma, \mathbb{Q}_p))$ *tel que* Z_H *soit fini.*

Preuve : L'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ est connue et nous éviterons de l'utiliser, on renvoie donc à [PR], lemme 4. Nous montrerons seulement $(i) \Rightarrow (ii)$.

Le lemme suivant est un cas particulier de [Mo2] lemma 2.2 :

Lemme 2.1.6 *Soit* $f \in \Lambda$*, non divisible par* p*, alors il existe* $\mathcal{E}_f \subset \mathbb{P}(Hom(\Gamma, \mathbb{Q}_p))$*, union d'un nombre fini d'hyperplans, tel que* $p \nmid \epsilon_H(f)$ *dès que* $H \notin \mathcal{E}_f$*. Ici,* ϵ_H *désigne l'augmentation* $\Lambda \to \mathbb{Z}_p[[\Gamma/H]]$.

□

Remarque 2.1.7 *Soit Z un Λ-module pseudo-nul. On peut alors trouver un annulateur f de Z étranger à p. D'après le lemme précédent, il suffit d'éviter quelques hyperplans de $\mathbb{P}(Hom(\Gamma, \mathbb{Q}_p))$ pour choisir H tel que l'invariant μ du $\mathbb{Z}_p[[\Gamma/H]]$-module Z_H soit nul. Dans ces conditions, le lemme de Nakayama montre que Z est $\mathbb{Z}_p[[H]]$-noethérien.*

Revenons à la preuve de 2.1.5. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est obtenue en utilisant plusieurs fois la proposition ci-dessous, dans laquelle on identifie $\mathbb{P}(\Gamma \otimes \mathbb{Q}_p)$ avec l'ensemble des sous-groupes $G < \Gamma$ vérifiant $\Gamma/G \simeq {\mathbb{Z}_p}^{s-1}$.

Proposition 2.1.8 *Soit Z un Λ-module pseudo-nul tel que Z_Γ soit fini. Alors il y a une infinité de $H \in \mathbb{P}(\Gamma \otimes \mathbb{Q}_p)$ tel que Z_H soit $\mathbb{Z}_p[[\Gamma/H]]$-pseudo-nul.*

Preuve : D'après la remarque 2.1.7, il y a une infinité de $H \in \mathbb{P}(Hom(\Gamma, \mathbb{Q}_p))$ tels que Z soit un $\mathbb{Z}_p[[H]]$-module noethérien. Il est alors automatiquement de $(\mathbb{Z}_p[[H]])$-torsion puisque sinon il ne serait pas Λ-pseudo-nul. Deux cas se présentent.

Supposons d'abord que $s \geq 3$, alors $rg_{\mathbb{Z}_p} H \geq 2$ et il suffit de montrer l'existence d'une infinité de $G \in \mathbb{P}(H \otimes \mathbb{Q}_p)$ tels que Z_G soit encore de $\mathbb{Z}_p[[H/G]]$-torsion. En effet pour de tels G, Z_G est $\mathbb{Z}_p[[\Gamma/G]]$-pseudo-nul puisque H/G est de codimension 1 dans Γ/G. Soit donc $f \in \mathbb{Z}_p[[H]]$ un annulateur de Z. Pour que Z_G soit de $\mathbb{Z}_p[[H/G]]$-torsion, il suffit que l'image de f dans $\mathbb{Z}_p[[H/G]]$ soit non triviale. Pour se convaincre de l'existence d'une infinité de tels G, on peut au choix invoquer le lemme 2.1.6 en remplaçant Γ par H, ou simplement remarquer le fait suivant : si G (resp. G') est engendré par g (resp. par g'), alors $g-1$ et $g'-1$ sont étrangers dès que $G \neq G'$, et f ne peut donc être divisible que par un nombre fini de tels éléments.

Si $s = 2$, la situation est plus délicate car il faut contrôler la structure de $\mathbb{Z}_p[[\Gamma/H]]$-module lorsque H varie. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.1.9 *Si $s = 2$, disons $\Gamma = H_1 \times H_2$, et si*

$$0 \;\rightarrow\; Z' \;\longrightarrow\; Z \;\longrightarrow\; Z'' \;\rightarrow\; 0$$

est une suite exacte de Λ-modules pseudo-nuls, alors Z_Γ est fini si et seulement si Z'_Γ et Z''_Γ le sont.

Preuve : Montrons l'implication non triviale. Supposons donc Z_Γ fini, il suffit de montrer que $H_1(\Gamma, Z'')$ l'est aussi. L'inflation-restriction pour l'extension $H_1 \hookrightarrow \Gamma \twoheadrightarrow H_2$ donne une suite exacte

$$H_1(H_1, Z'')_{H_2} \quad \rightarrow \quad H_1(\Gamma, Z'') \quad \twoheadrightarrow \quad H_1(H_2, Z''_{H_1})$$

Montrons d'abord que le dernier terme de cette suite exacte est fini. Le $\mathbb{Z}_p[[H_2]]$-module Z''_{H_1} est de type fini. Le groupe $H_1(H_2, Z''_{H_1}) = (Z''_{H_1})^{H_2}$ est donc fini, puisque $(Z''_{H_1})_{H_2} = Z''_\Gamma$ l'est, comme quotient de Z_Γ. De la même façon, on voit que $H_1(H_1, Z'')_{H_2} = (Z''^{H_1})_{H_2}$ (et donc $H_1(\Gamma, Z'')$) est fini dès que Z''^Γ l'est. Notons I l'idéal d'augmentation, ie. le noyau de $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}_p$, et $\mathfrak{a} \subset \Lambda$ l'annulateur de Z''. Si $\mathfrak{a} \not\subseteq I$, c'est que Z''^Γ est de $\mathbb{Z}_p$-torsion, donc fini, et cela termine la preuve. On peut donc supposer $\mathfrak{a} \subset I$. Puisque Z'' est pseudo-nul, c'est que I et $\mathfrak{a}$ ont la même hauteur de Krull (c'est 2). On en déduit facilement que I est le nilradical de $\Lambda/\mathfrak{a}$, et donc que Z'' est annulé par une puissance I^k de l'idéal d'augmentation. Mais Z''_Γ est fini, donc $Z'' = Z''/I^k$ aussi et enfin Z''^Γ aussi.

$\square$

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des $H \in \mathbb{P}(Hom(\Gamma, \mathbb{Q}_p))$ tels que Z soit de type fini sur $\mathbb{Z}_p[[H]]$. D'après la remarque 2.1.7, il suffit, pour obtenir $\mathcal{F}$, d'enlever quelques points à $\mathbb{P}(Hom(\Gamma, \mathbb{Q}_p))$ (on rappelle que $rg_{\mathbb{Z}_p}\Gamma = 2$).

Définition 2.1.10 *On dira qu'un sous-$\mathbb{Z}_p[[H]]$-module de Z est* pseudo-strict *s'il n'est ni fini, ni d'indice fini dans Z. Alors Z sera dit H-*pseudo-simple *s'il ne possède aucun sous-$\mathbb{Z}_p[[H]]$-module pseudo-strict.*

La classification des $\mathbb{Z}_p[[H]]$-modules noethériens de torsion montre que Z est H-pseudo-simple si et seulement s'il ne possède aucun sous-$\mathbb{Z}_p[[H]]$-module pseudo-strict de la forme $Z[f]$ (le noyau de la multiplication par f), $f \in \mathbb{Z}_p[[H]]$. Maintenant si H' est un autre sous-groupe choisi dans $\mathcal{F}$, $Z[f]$ est aussi un sous-$\mathbb{Z}_p[[H']]$-module strict (c'est en fait un Λ-module), si bien que l'on obtient :

Lemme 2.1.11 *La propriété "Z est H-pseudo simple" ne dépend pas de H tant que celui-ci est choisi dans $\mathcal{F}$. On dira donc simplement "Z est pseudo-simple".*

□

Pour terminer la preuve de la proposition 2.1.8, on souhaite procéder par dévissage, ce qui permettra de traiter uniquement le cas Z pseudo-simple. C'est possible grâce au lemme 2.1.9 à condition de n'éliminer qu'un nombre fini de $H \in P(\Gamma \otimes \mathbb{Q}_p)$ pour chaque sous-quotient pseudo-simple de Z.

On travaille donc désormais avec Z pseudo-simple. Supposons d'abord que Z soit de $\mathbb{Z}_p$-torsion. Dans ce cas, pour tout $H \in \mathcal{F}$, Z_H est fini et c'est terminé. Si maintenant λ est non nul (λ ne dépend pas de H), deux cas se présentent : $\lambda = 1$ et $\lambda > 1$. Soit h un générateur de H. Si $\lambda > 1$, c'est que $h - 1$ ne divise pas la série caractéristique de Z comme $\mathbb{Z}_p[[H]]$-module, et encore une fois, il n'y a pas de restriction supplémentaire à imposer sur H pour obtenir Z_H fini. Supposons enfin $\lambda = 1$, quitte à quotienter par la $\mathbb{Z}_p$-torsion, on se ramène à l'étude de $\mathbb{Z}_p(\chi)$, $\chi \in Hom(\Gamma, {\mathbb{Z}_p}^\times)$ donnant l'action de Λ. Alors Z_H est fini sauf si $\chi(H) = 1$, ce qui ne peut se produire que pour un seul $H \in \mathbb{P}(\Gamma \otimes \mathbb{Q}_p)$, puisque Z_Γ est fini par hypothèse et donc que $\chi(\Gamma) \neq 1$.

□

Remarque 2.1.12 *En fait, dans 2.1.5 (ii), on peut choisir H dans un sous-ensemble dense de $\mathbb{P}(Hom(\Gamma, \mathbb{Q}_p))$ (pour la topologie p-adique).*

2.1.2 Lien entre $\mathcal{X}^{(-i)}$ et $A^{(i)}$

Soit F un corps de nombres quelconque et E/F une $\mathbb{Z}_p$-extension multiple dont on note Γ le groupe de Galois et $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ l'algèbre de groupe complète. E'/F parcourt comme d'habitude les sous-extensions finies de E/F. L'objet principal de ce paragraphe est de mettre en dualité les modules $A^{(i)}(E)$ et $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E)$.

Commençons par deux lemmes.

Lemme 2.1.13 *$\mathcal{X}^{(-i)}(E)$ et $\varprojlim f_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-i)}(E')$ ont le même Λ-rang. En d'autres termes :*

$$\varprojlim t_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-i)}(E') \subset t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E)$$

Preuve : D'abord, l'équivalence des deux assertions se lit sur la suite exacte suivante, obtenue par passage à la limite sur E' :

$$0 \to \varprojlim t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(E') \longrightarrow \mathcal{X}^{(-i)}(E) \longrightarrow \varprojlim f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(E') \to 0$$

Montrons donc la première assertion. Pour $\underline{n} = (n_i) \in \mathbb{N}^s$, notons $n = \sum n_i$, $\Gamma_{\underline{n}}$ le sous-groupe de Γ engendré (topologiquement) par $\{\gamma_1^{p^{n_1}}, .., \gamma_s^{p^{n_s}}\}$, et $F_{\underline{n}} = E^{\Gamma_{\underline{n}}}$. Avec ces notations, on a donc $(\Gamma : \Gamma_{\underline{n}}) = p^n$. D'après la proposition 2.1.1, il s'agit de montrer que $\frac{1}{p^{\underline{n}}}(rg_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(E'))_{\Gamma_{\underline{n}}} - rg_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(E)_{\Gamma_{\underline{n}}})$ est une quantité qui tend vers 0 lorsque les coordonnées de n tendent successivement vers l'infini. Par inflation-restriction, on obtient la première ligne exacte dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H_2(\Gamma_{\underline{n}}, H_0^S(E, \mathbb{Z}_p(-i))) & \to & \mathcal{X}^{(-i)}(E)_{\Gamma_{\underline{n}}} & \to & \mathcal{X}^{(-i)}(F_{\underline{n}}) \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ & & (\varprojlim f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(E'))_{\Gamma_{\underline{n}}} & \to & f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(F_{\underline{n}}) \end{array}$$

Comme le noyau de la seconde flèche verticale est de torsion, une chasse rapide dans le diagramme montre que le $\mathbb{Z}_p$-rang du noyau de la première flèche verticale est inférieur ou égal à $rg_{\mathbb{Z}_p}H_2(\Gamma_{\underline{n}}, H_0^S(E, \mathbb{Z}_p(-i)))$. Par ailleurs, la première flèche verticale est surjective, on obtient donc

$$rg_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(E)_{\Gamma_{\underline{n}}} - rg_{\mathbb{Z}_p}(\varprojlim f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(E'))_{\Gamma_{\underline{n}}} \leq rg_{\mathbb{Z}_p}H_2(\Gamma_{\underline{n}}, H_0^S(E, \mathbb{Z}_p(-i)))$$

Comme $rg_{\mathbb{Z}_p}H_2(\Gamma_{\underline{n}}, H_0^S(E, \mathbb{Z}_p(-i)))$ est borné par $\binom{s}{2}$, cela termine la preuve.

$\square$

Lemme 2.1.14 *Si $i \in \mathbb{Z}$ est $F(\mu_p)$-bon et si $H_2^S(E(\mu_p), \mathbb{Z}_p(-i)) = 0$, alors $t_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(E)_\Gamma$ est de $\mathbb{Z}_p$-torsion.*

Preuve : Puisque l'on a

$$t_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(E)_\Gamma = H_0(E(\mu_p)/E, t_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(E(\mu_p)))_\Gamma = H_0(E(\mu_p)/E, (t_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(E(\mu_p)))_\Gamma)$$

il n'est pas restrictif de supposer que F contient μ_p. Sous cette hypothèse, la proposition 1.2.33 fournit un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Lambda^r & \xrightarrow{\Phi} & \Lambda^d & \to & Y^{(-i)}(E) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & {\mathbb{Z}_p}^r & \xrightarrow{\Phi(0,\dots,0)} & {\mathbb{Z}_p}^d & \to & Y^{(-i)}(F) & \to & 0
\end{array}$$

où Φ est une matrice $r \times d$ à coefficients dans Λ dont $\Phi(0, ..., 0)$ est l'évaluation en $T_1 = ... = T_s = 0$. Comme $\Phi(0, ..., 0)$ est injective, elle possède un déterminant de taille r non nul. Comme $pd_\Lambda Y^{(-i)}(E) \leq 1$, le lemme 1.2.26 montre alors que $t_\Lambda Y^{(-i)}(E)$ est annulé par un élément de Λ dont l'évaluation en $T_1 = ... = T_s = 0$ est non nulle. On en déduit que $(t_\Lambda Y^{(-i)}(E))_\Gamma$ est de $\mathbb{Z}_p$-torsion, et cela termine la preuve puisque $t_\Lambda Y^{(-i)}(E) = t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E)$ (cor. 1.2.34).

□

Proposition 2.1.15 *((comparer avec [LN] th. 2.6) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le sous-module $\varprojlim t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(E')$ de $\mathcal{X}^{(-i)}(E)$ est de Λ-torsion.*

Si i est $E(\mu_p)/F(\mu_p)$-bon, alors

$$t_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(E) = \varprojlim t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(E') = \mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))^\vee$$

$$f_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(E) = \varprojlim f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(E') = (\mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee$$

Preuve : La première assertion est donnée par le lemme 2.1.13. Passons à la seconde : Si i est $E(\mu_p)/F(\mu_p)$-bon, alors

$$H_2^S(E(\mu_p), \mathbb{Z}_p(-i)) = \varprojlim(\mathcal{H}^2_S(E'(\mu_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^\vee) = 0$$

et l'on peut appliquer le lemme 2.1.14. Maintenant l'application naturelle $t_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(E) \to \mathcal{X}^{(-i)}(E_{\underline{n}})$ factorise par $(t_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(E))_{\Gamma_{\underline{n}}}$, si bien que son image est de torsion. En passant à la limite projective, on obtient $t_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(E) \subset \varprojlim t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-i)}(E')$, et cela donne l'égalité de gauche dans la première ligne d'égalités, puisque l'inclusion inverse a déjà été montrée. L'égalité de droite provient quant à elle de la remarque 1.2.30. Passons à la seconde ligne d'égalités : celle de gauche découle de ce qui précède par quotient de la Λ-torsion et de la limite projective de la $\mathbb{Z}_p$-torsion ; celle de droite (indépendante de l'hypothèse selon laquelle i est $E(\mu_p)/F(\mu_p)$-bon) résulte de la remarque 1.2.30.

□

Corollaire 2.1.16 *Si i est $E(\mu_p)/F(\mu_p)$-bon, alors*

$$E^1(X^{(i)}(E))^{op} = \mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))^\vee$$

Preuve : Il s'agit de la proposition 1.2.37, traduite à l'aide de 2.1.15.

□

Corollaire 2.1.17 *Soit $i \in \mathbb{Z}$. Si E contient la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F, disons $E = LF^c$ avec $L \cap F^c = F$, alors*

$$t_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(E) = \varprojlim t_{\mathbb{Z}_p[[G(L'^c/L)]]}\mathcal{X}^{(-i)}(L'^c)$$

où L'/F parcourt les sous-extensions finies de L/F et $L'^c = L'F^c$.

Preuve : Comme pour $j = i\, mod[F(\mu_p) : F]$ on a

$$t_{\mathbb{Z}_p[[G(L'^c/L)]]}\mathcal{X}^{(-i)}(L'^c) = t_{\mathbb{Z}_p[[G(L'^c/L)]]}\mathcal{X}^{(-j)}(L'^c)(i-j)$$

et $t_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(E) = t_\Lambda\mathcal{X}^{(-j)}(E)(i-j)$, on peut supposer que i est $E(\mu_p)/F(\mu_p)$-bon (il suffit par exemple de choisir $i \geq 2$) ; deux applications de 2.1.15 donnent le résultat dans ce cas.

□

Remarque 2.1.18 *La proposition 2.1.15 (ou le lemme 2.1.13) répond à la question 2.7 de [LN].*

Remarque 2.1.19 *Comme $Y^{(-i)}(E(\mu_p))$ est Λ-noethérien (cf prop. 1.2.33 pour un présentation finie), c'est que $\mathcal{X}^{(-i)}(E) = H_0(E(\mu_p)/E, \mathcal{X}^{(-i)}(E(\mu_p)))$ l'est aussi, et $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E))_\Gamma$ est donc un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini. Si maintenant i est $E(\mu_p)/F(\mu_p)$-bon, le lemme 2.1.13 affirme alors la finitude $(t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E))_\Gamma$, ou de façon équivalente celle de $\mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma$ (prop. 2.1.15), ou encore celle de cocap$^{(i)}(E/F)$ (cocap$^{(i)}(E/F)$ et $\mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))^\Gamma$ sont simultanément finis ou infini, puisque $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est fini). Cela répond partiellement à la question 6.1 de [Ka]. Dans le cas où F contient μ_p et $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est cyclique, nous montrerons en fait la nullité de cocap$^{(i)}(E/F)$.*

Remarque 2.1.20 *Si i est E/F-bon, on obtient, compte tenu de 2.1.15, une description locale-globale de $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E)$ (comparer avec 1.2.40) en dualisant la seconde suite exacte de 1.2.2 :*

$$0 \to W^{(i)}(E)^\vee \longrightarrow t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E) \longrightarrow WA^{(i)}(E)^\vee \to 0$$

Remarque 2.1.21 *Supposons que l'une des deux hypothèses : "E contient F^c", ou "i est E/F bon", est vérifiée. Si F contient μ_p, les suites exactes de la proposition 1.2.33 donnent $rg_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E) = d - r + 1$. Cette quantité n'est autre que la caractéristique d'Euler-Poincaré de G_S, dont on sait qu'elle vaut $r_2(F)$.*

Pour F quelconque, on peut utiliser les techniques du lemme 2.1.13 pour montrer, en s'appuyant sur les formules de rang pour les groupes $\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$:

$$rg_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E) = r_1(F) + r_2(F) \qquad \textit{pour } i \textit{ impair}$$

$$rg_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E) = r_2(F) \qquad \textit{pour } i \textit{ pair}$$

Malheureusement, la seconde partie de 2.1.15 ne s'applique pas si $i = 1$, à moins bien sûr que $\tilde{F}$ ne possède qu'une seule (p)-place.

Le cas $i = 1$

A la lumière des résultats précédents, on revient sur le cas $i = 1$ comme annoncé en 1.2.27. Les résultats de ce paragraphe sont empruntés à [LFMN].

On se fixe comme objectif la preuve de la proposition suivante, dans laquelle E/F est comme toujours une $\mathbb{Z}_p$-extension multiple de groupe Γ, d'algèbre complète Λ.

Il sera souvent commode de faire l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.1.22 *$(Dec)(E/F)$ Pour toute place $v \in S(F)$, $rg_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_v \geq 2$.*

Proposition 2.1.23 *Soit E/F une $\mathbb{Z}_p$-extension multiple contenant F^c. Si toute sous-extension finie de E/F vérifie la conjecture de Gross et si, pour toute place $v \in S(F)$, on a, $rg_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_v \geq 2$, alors*

$$t_\Lambda \varprojlim f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-1)}(E') \approx 0$$

en d'autres termes, le conoyau de l'injection naturelle $A'(E)^\vee \to t_\Lambda\mathcal{X}^{(-1)}(E)$ est pseudo-nul.

F^c/F désigne comme d'habitude la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F et l'on note F_n ses étages. Rappelons d'abord un fait bien connu :

Lemme 2.1.24 *Soit $i \in \mathbb{Z}$. Alors*

$$WX^{(i)}(F^c)^{op} \approx WA^{(i)}(F^c)^\vee$$

Preuve : Pour $i \neq 1$, on se ramène à i F^c/F-bon grâce à la remarque 1.2.5, on a dans ce cas

$$WA^{(i)}(F^c)^\vee = E^1(WX^{(i)}(F^c))^{op}$$

par 1.2.17. Pour $i = 1$, ce lemme est bien connu, voir par exemple [I1].

□

Lemme 2.1.25 *Pour tout $n \geq 0$, on a $rg_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}^{(-1)}(F^c)^{\Gamma_n} = s(F^c) - 1$*

Preuve : D'après le corollaire 1.2.38, on sait que $t_\Lambda\mathcal{X}^{(-1)}(F^c) = E^1(X^{(1)}(F^c))^{op}$. Il s'agit donc de calculer $rg_{\mathbb{Z}_p}(E^1(X^{(1)})^{op})^{\Gamma_n}$. Maintenant,

$$rg_{\mathbb{Z}_p}(E^1(X^{(1)}(F^c))^{op})^{\Gamma_n} = rg_{\mathbb{Z}_p}E^1(X^{(1)}(F^c))^{\Gamma_n} = rg_{\mathbb{Z}_p}X^{(1)}(F^c)^{\Gamma_n}$$

$$= rg_{\mathbb{Z}_p}X^{(1)}(F^c)_{\Gamma_n} = rg_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(1)) = s(F_n) - 1$$

□

Corollaire 2.1.26 *Pour $n >> 0$, on a*

$$\mathcal{X}^{(-1)}(F^c)^{\Gamma_n} = W^{(1)}(F^c)^\vee$$

Preuve : Soit $i = 1\, mod[F(\mu_p) : F]$, F^c/F-bon. La remarque 2.1.20 donne alors

$$W^{(1)}(F^c)^\vee \quad \hookrightarrow \quad t_\Lambda \mathcal{X}^{(-1)}(F^c) \quad \twoheadrightarrow \quad WA^{(i)}(F^c)^\vee(i-1)$$

On a, pour $n >> 0$, $W^{(1)}(F^c)^\vee \subset \mathcal{X}^{(-1)}(F^c)^{\Gamma_n}$. Maintenant, comme tous deux ont le même rang d'après le lemme ci-dessus, il suffit pour conclure, de noter que $WA^{(i)}(F^c)^\vee(i-1)$ ne possède aucun sous-module fini non nul.

$\square$

Remarque 2.1.27 *Regarder $WA^{(i)}(F^c)^\vee$ comme le quotient de $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F^c)$ par $\mathcal{X}^{(i)}(F^c)^{\Gamma_n}$ pour $n >> 0$ permet d'écrire un isomorphisme canonique*

$$WA^{(i)}(F^c) = WA^{(j)}(F^c)(i-j)$$

pour $i = j\, mod\, [F(\mu_p) : F]$ si i et j sont tous deux F^c/F-bons. Pour obtenir un lien avec $A'(F^c) = WA^{(1)}(F^c)$, il semble nécessaire d'avoir recours au pseudo-isomorphisme $A'(F^c)^\vee \approx X'(F^c)^{op}$ obtenu à la main par Iwasawa. En combinant avec l'isomorphisme canonique $X'(F^c) = WX^{(i)}(F^c)(-i)$ pour $i = 1\, mod\, [F(\mu_p) : F]$ on obtient, grâce au lemme 2.1.24, un pseudo-isomorphisme

$$A'(F^c)^\vee \approx WA^{(i)}(1-i)^\vee$$

Pour simplifier, on note $Z(F^c) = t_\Lambda \varprojlim f_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-1)}(F_n)$ (c'est le module Z'_∞ dans [LFMN]). Notons que si F contient μ_p, $\varprojlim f_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-1)}(F_n)$ est le groupe de Galois de l'extension de Kummer obtenue en adjoignant à F^c toutes les racines p^n-ièmes de $E_S(F^c)$, si bien que $Z(F^c)$ n'est autre que dernier terme de la suite exacte d'Iwasawa 1.2.27. On peut voir ce qui suit comme la comparaison de la suite exacte 1.2.27 avec celle de la remarque 2.1.20 ; nous invitons le lecteur à consulter [LFMN], §2, pour plus de détails concernant l'interprétation galoisienne de cette comparaison.

Lemme 2.1.28 *Pour $n >> 0$, $Z(F^c)$ est fixé par Γ_n.*

Preuve : Il s'agit d'un fait bien connu, on peut aussi le voir grâce à la classification des Λ-modules : les suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A'(F^c)^\vee & \to & t_\Lambda \mathcal{X}^{(-1)}(F^c) & \to & Z(F^c) & \to & 0 \\ 0 & \to & W^{(1)}(F^c)^\vee & \to & t_\Lambda \mathcal{X}^{(-1)}(F^c) & \to & WA^{(i)}(F^c)^\vee(i-1) & \to & 0 \end{array}$$

et le pseudo-isomorphisme $A'(F^c)^\vee \approx WA^{(i)}(F^c)^\vee(i-1)$ (cf remarque ci-dessus) montrent que $Z(F^c)$ et $W^{(1)}(F^c)^\vee$ ont la même structure, d'où le résultat puisque $W^{(1)}(F^c)^\vee$ est fixé par Γ_n pour $n >> 0$.

$\square$

Proposition 2.1.29 *Supposons que tous les F_n vérifient la conjecture de Gross. On a alors une suite exacte canonique*

$$W^{(1)}(F^c)^\vee \hookrightarrow Z(F^c) \to (\varprojlim A'(F^c)^{\Gamma_n})^\vee \to (\varprojlim A'(F_n))^\vee$$

Preuve : Par définition de $Z(F^c)$ et Γ_n-homologie, on a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & (A'(F^c)^\vee)_{\Gamma_n} & \longrightarrow & (t_\Lambda \mathcal{X}^{(-1)}(F^c))_{\Gamma_n} & \longrightarrow & Z(F^c)_{\Gamma_n} & \to & 0 \\ & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & & & \\ 0 & \to & A'(F_n)^\vee & \longrightarrow & \mathcal{X}^{(-1)}(F_n) & & & & \end{array}$$

Comme la seconde flèche verticale est injective, on obtient une suite exacte

$$(A'(F^c)^\vee)^{\Gamma_n} \hookrightarrow t_\Lambda \mathcal{X}^{(-1)}(F^c)^{\Gamma_n} \to Z(F^c)^{\Gamma_n} \to (A'(F^c)^\vee)_{\Gamma_n} \to A'(F_n)^\vee$$

La conjecture de Gross stipule la finitude de $X'(F^c)_{\Gamma_n}$, et donc, par 2.1.24, celle de $(A'(F^c)^\vee)^{\Gamma_n}$. Comme $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-1)}(F^c)^{\Gamma_n} = W^{(1)}(F^c)^\vee$ ne possède pas de sous-module fini (cf 2.1.26), et que $Z(F^c)$ est fixé par Γ_n pour $n >> 0$, on obtient la suite exacte annoncée en passant à la limite inductive.

$\square$

Remarque 2.1.30 *Puisque la suite exacte, obtenue dans la preuve ci-dessus par passage à la limite inductive, se stabilise en fait à partir d'un certain niveau, c'est que le conoyau des applications de capitulation*

$$A'(F_n) \to A'(F^c)^{\Gamma_n}$$

se stabilise aussi, et donc que le conoyau de l'application

$$X'(F^c) \to \varprojlim A'(F^c)^{\Gamma_n}$$

déduite par passage à la limite projective est fini.

Lemme 2.1.31 *([LFMN] th 1.5) Supposons que tous les F_n vérifient la conjecture de Gross. On a alors une suite exacte fonctorielle*

$$X'(F^c)^0 \hookrightarrow X'(F^c) \to \varprojlim A'(F^c)^{\Gamma_n} \to \varinjlim X'(F^c)_{\Gamma_n} \to A'(F^c)$$

Preuve : on renvoie à [LFMN].

$\square$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer la proposition 2.1.23.

Preuve de 2.1.23 : Soit L comme dans le corollaire 2.1.17 et laissons L' parcourir les sous-extensions finies de L/F, de sorte que

$$t_\Lambda \varprojlim_{E'} f_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-i)}(E') = \varprojlim_{L'} Z(L'^c)$$

Nous utilisons la décomposition de $\varprojlim Z(L'^c)$ donnée par la suite exacte de 2.1.29. Soit, comme dans 2.1.17 une sous-extension L/F correspondant à une section $G(F^c/F) \to \Gamma$, et laissons L'/F parcourir les sous-extensions finies de L/F et notons $L'^c = F^cL'$. D'abord, on voit facilement que

$$\varprojlim W^{(1)}(L'^c)^\vee = 0$$

En effet, d'après l'hypothèse sur les groupes de decomposition, le degré local de E/F^c est infini pour toute (p)-place v ; on en déduit facilement que

$$\varinjlim Ind_{G(E'/F)}^{G(E'/F)_v} H_0(E_v, \mathbb{Z}_p(i-1)) = 0$$

(voir 1.2.3), et donc que

$$\varinjlim W^{(1)}(L'^c) = \varinjlim W^{(1)}(E') = 0$$

D'après 2.1.29, il reste à montrer que le noyau de

$$\varprojlim_{L'}(\varprojlim_{n} A'(L'^c)^{\Gamma_n})^\vee \to \varprojlim_{L'}(X'(L'^c)^\vee)$$

est pseudo-nul. Par le lemme 2.1.31 il est isomorphe au dual de Pontryagin du noyau de

$$\varinjlim_{n,L'} X'(L'^c)_{\Gamma_n} \to A'(E)$$

Ecrivons maintenant la suite exacte de Sinnott 1.2.9 :

$$\widetilde{\bigoplus_{v\in S(F)}} \mathbb{Z}_p[G(L'^c/F)/G(L'^c/F)_v] \to \quad X'(L'^c)_{\Gamma_n} \quad \to \quad A'(L'F_n)$$

Ici, le signe $\widetilde{\oplus}$ désigne le noyau de la forme linéaire "somme". Comme, pour chaque $v \in S(F)$, on a $rg_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_v \geq 2$, c'est qu'il existe $\gamma_v \in \Gamma_v$ tel que $\kappa(\gamma_v) = 1$ (κ est le caractère cyclotomique). Comme les $v \in S(F)$ sont en nombre fini, il existe un indice j tel que, pour toute place $v \in S(F)$, $\gamma_v^{\mathbb{Z}_p} \cap \Gamma^{p^j}$ soit un facteur direct de Γ^{p^j}. Notons γ'_v un générateur de $\gamma_v^{\mathbb{Z}_p} \cap \Gamma^{p^j}$ et $\Lambda_j = \mathbb{Z}_p[[\Gamma^{p^j}]]$, alors $\prod(\gamma'_v - 1)$ annule le premier terme de la suite exacte ci-dessus, ceci pour tout L'. On en déduit donc que $\prod(\gamma'_v - 1)$ annule $\varprojlim Z(L'^c)$. Mais, dans la preuve de 2.1.14, on a montré, pour $i = 1\, mod[F(\mu_p) : F]$, E/F bon, l'existence d'un $f \in \Lambda_j$ annulant $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(E)$ et dont l'image dans $\mathbb{Z}_p$ par l'augmentation est non nulle. On en déduit l'existence d'un $g \in \Lambda_j$ annulant $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-1)}(E)$ (donc $\varprojlim Z(L'^c)$) et dont l'image dans $\mathbb{Z}_p[[\Gamma^{cp^j}]]$ par l'augmentation est non nulle. Puisque les $\gamma_v'^{-1} - 1$ sont irréductibles dans Λ_j et que leur augmentation est nulle dans $\Lambda^{c'}$, c'est que g et $\prod \gamma_v'^{-1} - 1$ sont sans facteur commun. On en conclut que $\varprojlim Z(L'^c)$ est pseudo-nul comme Λ_j-module, et donc par [B], VII, §4.8 prop. 18, comme Λ-module.

$\square$

Remarque 2.1.32 *Dans le cas particulier où $s(E) < \infty$ (ce qui est automatique si $s(F) = 1$) l'isomorphisme algébrique de [MC] Proposition 5 permet d'obtenir $t_\Lambda \varprojlim f_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-1)}(E') \approx 0$ (mais pas $= 0$, cf ci-dessous) sans faire d'hypothèses concernant la conjecture de Gross.*

Remarque 2.1.33 *La technique de la preuve ci-dessus consiste essentiellement à remarquer que le noyau de*

$$X(L'^c)_{\Gamma_n} \to A'(L'F_n)$$

n'est pas trop gros et cela conduit à exhiber des annulateurs. Dans [MC], le thm. 3 affirme la trivialité (sous l'hypothèse $s(F) = 1$) de $t_\Lambda \varprojlim f_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-1)}(E')$. La preuve de ce "résultat" repose de façon cruciale sur [MC] thm. 5 dont la preuve semble erronée : l'auteur y confond l'isomorphisme abstrait $\varinjlim X'(E)_{G(E/E')} \to A'(E)$ donné par un théorème algébrique raffinant 1.2.17 et le morphisme naturel de co-descente, concluant par là que ce dernier est injectif. Il n'y a apparemment aucune raison générale pour que ces deux morphismes coïncident : si un tel résultat était vrai pour la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique, on pourrait en déduire la conjecture de Gross ! (Pour n $>> 0$, le noyau de $X'(F^c)_{\Gamma_n} \to \varinjlim_m X'(F^c)_{\Gamma_m}$ est fini, donc celui de $X'(F^c)_{\Gamma_n} \to A'(F_n)$ le serait aussi). La méthode développée ci-dessus ne semble pas permettre de récupérer le thm. 8 de [MC] : il faudrait contrôler le comportement fonctoriel du noyau de l'homomorphisme de co-descente $X'(L'^c)_{G(L'^c/L')} \to X'(L')$ lorsque L' varie, et malheureusement, la suite exacte de Sinnott ne suffit pas.

2.2 Différentes formulations

Dans cette section et toutes les suivantes, F désigne un corps de nombres et $\tilde{F}/F$ est le composé des $\mathbb{Z}_p$-extensions de F. On note $\tilde{\Gamma} = G(\tilde{F}/F)$ et $\tilde{\Lambda} = \mathbb{Z}_p[[\tilde{\Gamma}]]$ son algèbre de groupe complète.

Dans [G3], R. Greenberg a proposé la conjecture suivante :

Conjecture 2.2.1 (GG) *$X'(\tilde{F})$ est un $\tilde{\Lambda}$-module pseudo-nul.*

Remarque 2.2.2 *Si F est un corps de nombres totalement réel vérifiant la conjecture de Leopoldt, alors la conjecture (GG) coïncide avec la conjecture de Greenberg classique.*

Notons (Dec) l'hypothèse $(Dec)(\tilde{F}/F)$ de 2.1.22. Selon la conjecture de Leopoldt, cette hypothèse ne peut être valide pour un corps totalement réel. Par contre, elle est automatiquement vérifiée pour les corps contenant μ_p, ainsi que pour les corps quadratiques imaginaires. Comme nous le verrons plus loin (cf 4.2.3), il serait très intéressant d'en savoir plus pour un corps quelconque, mais cela semble inaccessible pour l'instant.

Théorème 2.2.3 *Soit $i = 1 \, mod \, [F(\mu_p) : F]$. Les assertions suivantes sont équivalentes dès que l'hypothèse (Dec) est vérifiée :*

$(G1)$ *F vérifie la conjecture (GG).*

$(G2)$ $X^{(i)}(\tilde{F}) \approx_{\tilde{\Lambda}} 0$.

$(G3)$ $t_{\tilde{\Lambda}}\mathcal{X}^{(-i)}(\tilde{F}) = 0$.

Si de plus i est $\tilde{F}/F$-bon (par exemple si $i \geq 2$), elles sont encore équivalentes à :

$(G4)$ $\mathcal{H}^2_S(\tilde{F}, \mathbb{Z}_p(i)) = 0$.

$(G5)$ *Il existe une $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F dans laquelle $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ capitule.*

$(G5')$ *Il existe une infinité de $\mathbb{Z}_p$-extensions F_∞/F dans lesquelles $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ capitule.*

Si toute sous-extension finie de $\tilde{F}/F$ vérifie la conjecture de Gross, alors $(G1) - (G3)$ sont équivalentes à

$(G6)$ $A'(\tilde{F}) = 0$.

Preuve : Comme on suppose l'hypothèse (Dec) vérifiée, il est facile de voir que $X'(\tilde{F}) = WX^{(1)}(\tilde{F}) \approx X^{(1)}(\tilde{F})$ et cela montre $(G1) \Leftrightarrow (G2)$. $(G2) \Leftrightarrow (G3)$ résulte de 1.2.38 et de 1.2.36.

Supposons maintenant i $\tilde{F}/F$-bon. $(G3) \Leftrightarrow (G4)$ résulte de 2.1.15. Pour $(G2) \Leftrightarrow (G5) \Leftrightarrow (G5')$, il faut noter l'équivalence, pour une $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F entre la capitulation de $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ dans F_∞, la trivialité de $\mathcal{H}^2_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$

et la finitude de $X^{(i)}(F_\infty)$. La proposition 2.1.5 donne alors l'équivalence souhaitée. Sous l'hypothèse supplémentaire que toute sous-extension finie de $\tilde{F}/F$ vérifie la conjecture de Gross, l'équivalence $(G3) \Leftrightarrow (G6)$ pour $i = 1$ est donnée par 2.1.23. Notons que $(G3) \Rightarrow (G6)$ est indépendante de la conjecture de Gross.

$\square$

Remarque 2.2.4 *L'équivalence de $(G2)$ à $(G5')$ tient encore sans les hypothèses (Dec) et $i = 1\, mod\, [F(\mu_p) : F]$. Mais alors, on sort du cadre de la conjecture (GG).*

Corollaire 2.2.5 *(Comparer avec [Ma2], th. 6) Si F vérifie (Dec) et (GG), alors toute sous-extension finie de $\tilde{F}/F$ aussi.*

Preuve : Fixons un bon $i = 1\, mod\, [F(\mu_p) : F]$ et utilisons la formulation $(G3)$. Soit E'/F une sous-extension finie de $\tilde{F}/F$. Si E_1/E' et E_2/E' sont respectivement une ${\mathbb{Z}_p}^s$ et une ${\mathbb{Z}_p}^{s+1}$-extension d'algèbre Λ_1 et Λ_2, on a

$$(t_{\Lambda_2}\mathcal{X}^{(-i)}(E_2))_{G(E_2/E_1)} \hookrightarrow t_{\Lambda_1}\mathcal{X}^{(-i)}(E_1)$$

Ainsi, on montre de proche en proche que

$$t_{\tilde{\Lambda}}\mathcal{X}^{(-i)}(\tilde{F}) = 0 \Rightarrow t_{\mathbb{Z}_p[[G(\tilde{E}'/E')]]}\mathcal{X}^{(-i)}(\tilde{E}') = 0$$

$\square$

Remarque 2.2.6 *Dans le théorème 2.2.3, l'implication $(G5) \Rightarrow (G3)$, peut être obtenue de la même manière que le corollaire ci-dessus, ce qui évite le recours à la partie admise de la proposition 2.1.5.*

Remarque 2.2.7 *Le théorème 3 de [MC] est au moins conjecturalement vrai. En fait, il est vérifié dès que l'une des deux hypothèses suivantes l'est :*
- F vérifie (G6) et toute sous-extension finie de E/F vérifie la conjecture de Gross.
- F vérifie (GG).

Remarque 2.2.8 *Les implications $(G1) \Leftrightarrow (G3) \Rightarrow (G6)$ sont démontrées pour $i = 1$ dans [LN], sous l'hypothèse supplémentaire que 0 est $\tilde{F}/F$-bon. La preuve de [LN] de l'implication $(G6) \Rightarrow (G3)$ est erronée. C'est encore la fonctorialité de la description de $Z(F^c) = t_\Lambda\mathcal{X}^{(-1)}(F^c)$ par Iwasawa (cf 1.2.27) qui est en cause.*

La formulation (G5) suggère l'étude des hypothèses suivantes :

$FCap^{(i)}(F)$: (capitulation forte) Il existe une $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F vérifiant $cap^{(i)}(F_\infty/F) = \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$

$TCap^{(i)}(F)$: (capitulation totale) $cap^{(i)}(\tilde{F}/F) = \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$

$fCap^{(i)}(F)$: (capitulation faible) $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \neq 0 \Rightarrow cap^{(i)}(\tilde{F}/F) \neq 0$

Ces hypothèses sont visiblement rangées de la plus forte à la plus faible. Comme la première est équivalente, pour i et F comme dans le théorème 2.2.3 ($G5$), à la conjecture (GG), il est naturel de considérer $TCap^{(i)}(F)$ (resp. $fCap^{(i)}(F)$) comme une version faible (resp. très faible) de la conjecture (GG). Les résultats principaux de ce travail concernent ces versions faibles. Mais d'abord, nous montrons dans la prochaine section que dans le cas “cyclique”, $TCap^{(i)}$ entraîne la conjecture (GG). Ensuite, nous proposons au chapitre 4 une approche du problème de capitulation (ie. de l'étude des hypothèses ci-dessus) via l'étude d'un certain cup-produit.

2.3 Le cas cyclique

Dans toute ce paragraphe, on suppose que F contient μ_p. Dans [MC], McCallum a annoncé le résultat suivant :

Enoncé 2.3.1 *([MC] th. 1 (ou 26)) Soit $F = \mathbb{Q}(\mu_p)$. Si $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(F)$ est cyclique d'ordre p, alors F vérifie la conjecture (GG).*

Remarque 2.3.2 *L'hypothèse concernant $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(F)$ entraine la conjecture de Vandiver.*

Pour démontrer ce “théorème”, la stratégie de [MC] est la suivante : Considérons le morphisme de co-descente suivant (δ pour descente) :

$$\delta^{(0)} : t_\Lambda \mathcal{X}(\tilde{F})_{\tilde{\Gamma}} \to \mathcal{X}(F)$$

La conjecture (GG) postule la trivialité du groupe de départ, elle équivaut donc à la conjonction des deux hypothèses suivantes :

($H1$) $Ker\, \delta^{(0)} = 0$
($H2$) $Im\, \delta^{(0)} = 0$

Afin d'adapter cette stratégie au cadre qu'on s'est fixé, il convient de définir les homomorphismes de co-descente pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$\delta^{(-i)} : t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(\tilde{F})_{\tilde{\Gamma}} \to \mathcal{X}^{(-i)}(F)$$

et d'en étudier le noyau et la co-image. Notons que si $t_\Lambda \underleftarrow{\lim} f_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-i)}(E') = 0$, alors on a

$$\delta^{(-i)} : t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(\tilde{F})_{\tilde{\Gamma}} \to t_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-i)}(F)$$

son homomorphisme dual est alors simplement l'homomorphisme de capitulation :

$$\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to \mathcal{H}^2_S(\tilde{F}, \mathbb{Z}_p(i))^{\tilde{\Gamma}}$$

Les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$ correspondent alors respectivement à la nullité de $cocap^{(i)}(\tilde{F}/F)$ et à l'hypothèse $TCap^{(i)}(F)$.

Soit E/F une $\mathbb{Z}_p$-extension multiple d'un corps de nombres, dont on note Γ le groupe de Galois, s le $\mathbb{Z}_p$-rang, et Λ son algèbre d'Iwasawa. On notera $\delta^{(-i)}_{E/F}$ la co-descente dans l'extension E/F, si bien que $\delta^{(-i)} = \delta^{(-i)}_{\tilde{F}/F}$. Pour $(H1)$ on a les résultats suivants :

Proposition 2.3.3 *On suppose que $i \in \mathbb{Z}$ est F-bon et E-bon, et que F contient μ_p. Alors $Ker\delta^{(-i)}_{E/F} = H_1(\Gamma, f_\Lambda Y^{(-i)}(E))$. En particulier, $\delta^{(-i)}_{E/F}$ est injectif si $s = 1$, puisque dans ce cas $H_1(\Gamma, f_\Lambda Y^{(-i)}(E)) = f_\Lambda Y^{(-i)}(E)^\Gamma = 0$.*

$\square$

Théorème 2.3.4 *([MC] lemma 24) Supposons que $i \in \mathbb{Z}$ est F-bon et E-bon, et que F contient μ_p. Si $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est cyclique, alors $Ker\delta^{(-i)}_{E/F} = 0$, ie. $cocap^{(i)}(E/F) = 0$.*

Preuve : Nous proposons une preuve différente de celle de [MC], ceci dans le but "d'expliquer" l'hypothèse de cyclicité. Comme $H^S_2(E, \mathbb{Z}_p(-i)) = 0$, c'est que $pd_\Lambda Y^{(-i)}(E) \leq 1$. Rappelons que $E^1(E^1(Y^{(-i)}(E))$ est canoniquement isomorphe au noyau $t_\Lambda Y^{(-i)}(E)$ de l'homomorphisme naturel $Y^{(-i)}(E) \to E^0(E^0(Y^{(-i)}(E)))$ (cf 1.2.21 et 1.2.22). De la suite exacte (1.2.33)

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{\Phi} \Lambda^d \longrightarrow Y^{(-i)}(E) \to 0$$

on en tire une autre en appliquant le foncteur E^0 :

$$0 \to M \xrightarrow{E^0(\Phi)} \Lambda \longrightarrow E^1(Y^{(-i)}(E)) \to 0$$

où M est défini par l'exactitude de la suite. En recommençant, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Lambda & \xrightarrow{E^0(E^0(\Phi))} & E^0(M) & \longrightarrow & t_\Lambda Y^{(-i)}(E) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Lambda & \xrightarrow{\Phi} & \Lambda^d & \longrightarrow & Y^{(-i)}(E) & \to & 0
\end{array}$$

En prenant l'homologie par rapport à Γ, on en obtient un autre :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & H_1(\Gamma, f_\Lambda Y^{(-i)}(E)) & \xrightarrow{=} & H_1(\Gamma, f_\Lambda Y^{(-i)}(E)) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & E^0(M)_\Gamma & \longrightarrow & (t_\Lambda Y^{(-i)}(E))_\Gamma & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & {\mathbb{Z}_p}^d & \longrightarrow & Y^{(-i)}(K) & \to & 0
\end{array}$$

Comme $(t_\Lambda Y^{(-i)}(E))_\Gamma$ est de $\mathbb{Z}_p$-torsion (cf 2.1.14), on lit sur ce diagramme que $H_1(\Gamma, f_\Lambda Y^{(-i)}(E)) = t_{\mathbb{Z}_p} E^0(M)_\Gamma$. C'est ici qu'intervient l'hypothèse de cyclicité : Il est bien connu que pour $s = 1$ (ie. pour Γ de rang 1), un Λ-module est libre si et seulement s'il est réflexif ; mais pour $s > 1$, l'équivalence n'est conservée que pour les idéaux (i.e. les modules de rang 1) (voir [B] VII§4.2 Example (2) et noter qu'ici un idéal divisoriel est principal, puisque Λ est factoriel). Comme $E^0(M)$ est réflexif de rang 1, il est libre, et $H_1(\Gamma, f_\Lambda Y^{(-i)}(E)) = t_{\mathbb{Z}_p} E^0(M)_\Gamma = 0$, ce qui termine la preuve.

Pour la commodité du lecteur, on redonne ici une preuve de la liberté de $E^0(M)$: disons que $\{m_1, .., m_q\}$ engendrent M comme idéal de $\Lambda = E^0(E^0(\Lambda))$, alors $E^0(M) = \frac{1}{pgcd(m_j)}\Lambda$, cette égalité ayant lieu dans $Hom_Q(M \otimes_\Lambda Q, Q)$, identifié à Q, où Q est le corps des fractions de Λ.

□

Dans [MC], l'auteur utilise le théorème 2.3.4 pour $i = 0$, ce qui règle (sous Leopoldt) la question de l'hypothèse $(H1)$. Concernant l'hypothèse $(H2)$, le raisonnement de [MC] repose de façon cruciale sur l'absence de $\tilde{\Lambda}$-torsion dans le module attaché aux unités, c'est-à-dire sur l'identification $t_{\tilde{\Lambda}} \mathcal{X}^{(-1)}(\tilde{F}) = A'(\tilde{F})^\vee$ (ou encore $t_\Lambda \mathcal{X}(\tilde{F}) = A'(\tilde{F})^\vee(1)$). Comme nous l'avons déjà signalé après la proposition 2.1.23, ce point est spécialement délicat et la preuve de [MC] semble erronée, si bien que l'énoncé 2.3.1 reste à prouver. Le mieux que l'on puisse faire pour l'instant est le corollaire suivant, qui remplace alors l'énoncé 2.3.1 de [MC] :

Corollaire 2.3.5 *Soit F un corps de nombres contenant μ_p. On suppose que $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est cyclique. Si $t_\Lambda \varprojlim f_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-i)}(E') = 0$, et si F vérifie l'hypothèse $TCap^{(i)}$ alors la conjecture (GG) est vraie pour F.*

□

Pour appliquer ce corollaire, il convient de distinguer le cas $i = 1$ et le cas $i \neq 1$.

Si $i = 1$, l'hypothèse $TCap^{(i)}$ est accessible, au moins dans certains cas particuliers. Par exemple, si F ne contient qu'une seule (p)-place, elle est vérifiée dès que $\tilde{F}$ contient le (p)-corps de Hilbert de F, c'est le cas pour $F = \mathbb{Q}(\mu_p)$ dès que p vérifie la conjecture de Vandiver (celle-ci est automatique si $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(F)$, ou de manière équivalente $A'(F)$, est cyclique). Notons qu'il est plus avantageux de travailler directement avec $i = 1$: le changement de twist - implicite dans [MC] - de $i = 1$ à $i = 0$ n'ayant plus lieu, l'hypothèse concernant l'ordre de $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(F)$ est affaiblie en une hypothèse de cyclicité. C'est alors l'hypothèse $t_\Lambda \varprojlim f_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-i)}(E') = 0$ qui semble complètement hors de portée (cf rem. 2.1.33). Afin de contourner cette difficulté, il faudrait éviter le (p)-corps de Hilbert : Si $A'(F)$ capitule dans une $\mathbb{Z}_p$-extension multiple E/F contenant F^c et ne possédant qu'un seule (p)-place, alors par 2.3.4, c'est que $t_\Lambda \mathcal{X}^{(-1)}(E) = 0$ et cela entraîne la validité de (GG) pour F. Cette dernière démarche est rapprocher de [Mi1] proposition 5.B.

Si i est $\tilde{F}/F$-bon, l'hypothèse $t_\Lambda \varprojlim f_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{X}^{(-i)}(E') = 0$ est automatique (cf th 2.1.15) et il faut examiner le problème de capitulation pour $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$. C'est ce dernier qui est alors vraiment difficile puisque l'on ne dispose plus d'un bon analogue du (p)-corps de Hilbert qui fournirait un analogue du théorème de l'idéal principal.

Ainsi, en vue de la stratégie de [MC] décrite un peu plus haut, remplacer $i = 1$ par un bon i revient à ramener la difficulté au niveau fini.

Chapitre 3

Cup produit dans une $\mathbb{Z}_p$-extension

Comme nous l'avons signalé dans le chapitre précédent, la conjecture (GG) est intimement liée à la capitulation des groupes de cohomologie p-adiques en degré 2 dans des $\mathbb{Z}_p$-extensions (multiples). A ce jour, ce problème reste très mystérieux, ce qui est connu se résumant essentiellement à la proposition 1.2.8. Dans [MCS] les auteurs étudient le cup-produit

$$\mathcal{H}^1_S(F, \mu_p) \otimes \mathcal{H}^1_S(F, \mu_p) \overset{\cup}{\to} \mathcal{H}^2_S(F, \mu_p^{\otimes 2})$$

et le symbole

$$E_S(F) \otimes E_S(F) \overset{(.,.)_S}{\to} \mathcal{H}^2_S(F, \mu_p^{\otimes 2})$$

qu'il induit via l'isomorphisme de la théorie de Kummer : $E_S(F) \otimes \mathbb{Z}_p = \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(1))$. Après avoir donné une formule pour le symbole $(b, a)_S$ de deux S-unités, les auteurs étudient le cas particulier où $\mathcal{C}l'(F) \otimes \mathbb{Z}_p$ est cyclique d'ordre p. Dans cette situation, ils montrent, par le biais de la théorie des genres dans l'extension $F(a^{\frac{1}{p}})/F$, que les valeurs prises par le cup-produit déterminent le comportement (et indirectement la capitulation) du groupe de S-classes dans les premiers étages des $\mathbb{Z}_p$-extensions. Inspiré par ce travail, nous proposons ici l'étude du cup-produit suivant :

$$\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(j)) \overset{\cup}{\to} \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i+j))$$

On fixe $j = 0$, ce qui permet un interprétation galoisienne sans condition sur le nombre de racines de l'unités contenues dans F.

L'idée générale est la suivante : un élément non nul $a \in \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p)$ détermine une $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F. On exprime alors l'application $\cup a : \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ comme la composition d'une application de montée : $m_a : \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma$ avec une application de descente : $d_a : X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \to \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$. On commence par travailler au niveau fini, pour passer ensuite à la limite. Le reste du chapitre se résume alors à l'étude des noyaux et conoyaux de m_a. Bien que la plupart des résultats présentés dans ce chapitre soient utiles pour la suite, ils sont intéressants pour eux-mêmes, c'est pourquoi on prend la peine de les développer, quitte à s'écarter un peu du fil conducteur annoncé dans l'introduction.

3.1 Etude du cup-produit par montée et descente

On présente ici le résultat technique (3.1.1) qui servira de support à toute la suite. Il s'agit essentiellement de comparer, pour un élément $a \in \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p)$, l'application $\cup a$ modulo p^n à la différentielle $d_2^{0,2}$ d'une certaine suite spectrale.

Cela nous conduira, à retrouver, dans le cadre qu'on s'est fixé, la formule proposée par [MCS].

3.1.1 L'application $\cup a : \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$

On souhaite décrire le cup-produit

$$c_{i,0} : \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cup} \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

Pour cela, il suffit de connaître les applications $\cup a : \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ où a est un élément de $\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p) = Hom(G_S, \mathbb{Z}_p)$, non divisible par p. Soit donc un tel a et notons a_n son image dans $\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}/p^n) = Hom(G_S, \mathbb{Z}/p^n)$. Soit F_n le corps fixé par le noyau $G_S(F_n)$ de a_n et $G_n = G(F_n/F)$. On notera simplement *res* et *cor* (resp. $\widehat{res}$, $\widehat{cor}$) pour les morphismes de restriction et co-restriction dans l'extension F_n/F (resp. leurs modifications évidentes). L'objet de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

Théorème 3.1.1 *On suppose toujours $i \neq 0$. Il existe $\alpha_n \in \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p)^{G_n}$ tel que $a = cor\, \alpha_n$ et le cup-produit avec α_n induit un isomorphisme dans le* *diagramme commutatif suivant.*

$$\begin{array}{ccc}
\hat{H}^0(G_n, \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) & \xrightarrow[\sim]{\cup \alpha_n} & \hat{H}^0(G_n, \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \\
\widehat{res} \uparrow & & \downarrow \widehat{cor} \\
\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup a_n} & \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}/p^n(i))
\end{array}$$

En particulier $\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a = cor(\mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))^{G_n})$ *dès que* p^n *tue le groupe* $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$.

Preuve : Commençons par montrer l'existence de $\alpha_n \in \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p)$ tel que $cor\, \alpha_n = a$. Notons $\Gamma_n = G(F_\infty/F_n)$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\Gamma_n, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{inf} & \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p) \\
cor \downarrow & & cor \downarrow \\
H^1(\Gamma, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{inf} & \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p)
\end{array}$$

Par définition de F_∞, on peut écrire $a = \inf \overline{a}$, où $\overline{a} \in H^1(\Gamma, \mathbb{Z}_p)$. La corestriction de gauche étant un isomorphisme, il existe $\overline{\alpha}_n \in H^1(\Gamma_n, \mathbb{Z}_p)$ tel que $\overline{a} = cor\, \overline{\alpha}_n$. Notons $\alpha_n = inf\, \overline{\alpha}_n$, on a alors $cor\, \alpha_n = a$. Remarquons que, comme $H^1(\Gamma_n, \mathbb{Z}_p)$ est fixé par G_n, α_n l'est aussi et l'application $\cup\alpha_n$ est G_n-équivariante. Le cup-produit avec α_n induit donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
H^0(G_n, \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) & \xrightarrow{\cup \alpha_n} & H^0(G_n, \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \\
res \uparrow & & \downarrow cor \\
\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup a} & \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))
\end{array}$$

Notant ν_{G_n} la norme algébrique, on a $cor \circ \nu_{G_n} = p^n\, cor$. La flèche notée $\widehat{cor} : \hat{H}^0(G_n, \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \to \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}/p^n(i))$ est donc bien définie et le diagramme du théorème est induit par le carré ci-dessus.

Reste à montrer que $\cup\alpha_n : \hat{H}^0(G_n, \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \to \hat{H}^0(G_n, \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$ est un isomorphisme. Comme $\mathbb{Z}_p(i)^{G_S(F_n)} = 0$ et $cd_p(G_S) \leq 2$, un rapide examen des premiers termes de la suite spectrale de l'extension de groupes

$$1 \;\to\; G_S(F_n) \;\longrightarrow\; G_S \;\longrightarrow\; G_n \;\to\; 1$$

donne, comme en 1.1.7, la suite exacte

$$\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \;\to\; H^0(G_n, \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \;\overset{d_2^{0,2}}{\twoheadrightarrow}\; H^2(G_n, \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$$

L'application de co-restriction $cor : \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \to \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ étant surjective (cf [Se2], lettre de Tate), c'est que l'image de la norme algébrique ν_{G_n} : $\mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \to \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$ est $res\, \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$, et finalement $d_2^{0,2}$ induit un isomorphisme $\hat{d}_2^{0,2}$ entre $\hat{H}^0(G_n, \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$ et $H^2(G_n, \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$. Nous allons montrer que $\hat{d}_2^{0,2} \circ \cup\alpha_n : \hat{H}^0(G_n, \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \to H^2(G_n, \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$ est un isomorphisme, ce qui terminera la preuve.

Notons pour simplifier $E_2^{p,q}(\mathbb{Z}_p(i)) = H^p(G_n, \mathcal{H}^q_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$ et $\hat{E}_2^{p,q}(\mathbb{Z}_p(i)) = \hat{H}^p(G_n, \mathcal{H}^q_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$. Le cup-produit

$$\mathcal{H}^q_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathcal{H}^{q'}_S(F_n, \mathbb{Z}_p) \to \mathcal{H}^{q+q'}_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$$

induit un cup-produit

$$E_2^{p,q}(\mathbb{Z}_p(i)) \otimes E_2^{p'+q'}(\mathbb{Z}_p) \to E_2^{p+p',q+q'}(\mathbb{Z}_p(i))$$

et l'on a ([J2], prop 6.2), pour $\beta \in E_2^{p,q}(\mathbb{Z}_p(i))$,$\gamma \in E_2^{p',q'}(\mathbb{Z}_p)$

$$d_2^{p+p',q+q'}(\beta \cup \gamma) = d_2^{p,q}\beta \cup \gamma + (-1)^{p+q}\beta \cup d_2^{p',q'}\gamma$$

Rappelons que $\alpha_n \in E_2^{0,1}(\mathbb{Z}_p)$. La différentielle $d_2^{0,1}$ de la suite spectrale à coefficients dans $\mathbb{Z}_p(i)$ est nulle puisqu'à valeurs dans $H^2(G_n, \mathcal{H}^0_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) = 0$. La formule ci-dessus donne donc, pour $\beta \in E_2^{0,1}(\mathbb{Z}_p(i))$, $d_2^{0,2}(\beta \cup \alpha_n) = -\beta \cup d_2^{0,1}\alpha_n$

Soit δ_{G_n} l'homomorphisme de Bockstein, c'est-à-dire le morphisme de connexion associé à la suite exacte de G_n-modules $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Z}_p \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^n$. En tenant compte du lemme ci-dessous, on obtient $d_2^{0,2}(\beta \cup \alpha_n) = -\beta \cup \delta_{G_n} a_n$ ie. $\hat{d}_2^{0,2} \circ \cup\alpha_n = -\cup\delta_{G_n} a_n$, ce qui termine la preuve puisque $\cup\delta_{G_n} a_n : \hat{H}^0(G_n, \bullet) \to H^2(G_n, \bullet)$ est un isomorphisme ([Se1]).

□

Lemme 3.1.2 $d_2^{0,1}\alpha_n = -\delta_{G_n} a_n$

Preuve : Comme l'action de $G_S(F_n)$ est triviale sur $\mathbb{Z}_p$, on sait exprimer la transgression $d_2^{0,1}$ comme un cup-produit. Précisément, si u est l'élément de $H^2(G_n, G(F_n)^{ab})$ correspondant à l'extension de groupes

$$1 \to G_S(F_n)^{ab} \longrightarrow G_S/[G_S(F_n), G_S(F_n)] \longrightarrow G_n \to 1$$

alors $d_2^{0,1}\alpha_n = -u \cup \alpha_n = -\alpha_n \cup u$. Soit, pour $0 \leq k \leq p^n - 1$, $\sigma_k \in G_S$ tel que $a(\sigma_k) = k$. On peut représenter u par un 2-cocycle défini par

$$u(\tau_1, \tau_2) = \sigma_{\overline{\alpha_n(\tau_1)}}\, \sigma_{\overline{\alpha_n(\tau_2)}}\, \sigma^{-1}_{\overline{\alpha_n(\tau_1\tau_2)}}$$

où $\overline{k}$ désigne l'entier congru à k modulo p^n compris entre 0 et $p^n - 1$. On obtient alors

$$\alpha_n \cup u(\tau_1, \tau_2) = \alpha_n(u(\tau_1, \tau_2)) = \alpha_n(\sigma_{\overline{\alpha_n(\tau_1)}}\, \sigma_{\overline{\alpha_n(\tau_2)}}\, \sigma^{-1}_{\overline{\alpha_n(\tau_1\tau_2)}})$$

Maintenant, $res\ a = p^n(\alpha_n)$ donc

$$\alpha_n(u(\tau_1, \tau_2)) = \frac{1}{p^n} a(\sigma_{\overline{\alpha_n(\tau_1)}}\, \sigma_{\overline{\alpha_n(\tau_2)}}\, \sigma^{-1}_{\overline{\alpha_n(\tau_1\tau_2)}})$$
$$= \frac{1}{p^n}(\overline{\alpha_n(\tau_1)} + \overline{\alpha_n(\tau_2)} - \overline{\alpha_n(\tau_1\tau_2)}) = \delta_{G_n} a_n(\tau_1, \tau_2)$$

□

Remarque 3.1.3 *Si $i = 0$, les termes $E_2^{p,0}(\mathbb{Z}_p(i))$ ne sont plus triviaux ; la comparaison entre $\cup\alpha_n$ et $d_2^{0,2}$ est alors plus technique, c'est la raison pour laquelle on supposera systématiquement $i \neq 0$.*

Remarque 3.1.4 *Au cours de la preuve on a établi le fait suivant : l'homomorphisme*

$$\cup\alpha_n : \hat{H}^0(G_n, \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) \to \hat{H}^0(G_n, \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$$

admet pour inverse l'homomorphisme composé $(\cup\delta_{G_n} a_n)^{-1} \circ \hat{d}_2^{0,2}$.

Remarque 3.1.5 *Les seules propriétés de* G_S *que nous avons utilisées sont*
- $cd_p\, G_S \leq 2$.
- *Les groupes* $\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}/p)$ *et* $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}/p)$ *sont finis.*
- $\mathcal{H}^0_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) = 0$. *Il est tout à fait possible d'énoncer des résultats analogues dans un cadre plus abstrait. En particulier, l'analogue local évident du théorème 3.1.1 est vrai.*

3.1.2 Symbole de S-unités

On se propose ici de retrouver, dans le cadre qui nous occupe, la formule proposée par [MCS].

Décalage de suites spectrales

L'objectif de cette petite digression est la preuve du lemme suivant, utile pour retrouver la formule de [MCS] :

Lemme 3.1.6 *Soit* E/F *une extension galoisienne,* S*-ramifiée, de corps de nombres et notons* $G = G(E/F)$. *On a un diagramme commutatif à lignes exactes :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(1)) \arrow[r] & \mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(1))^G \arrow[r, two heads, "d_2^{0,2}(\mathbb{Z}_p(1))"] & H^2(G, \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(1))) \\
\mathcal{H}^1_S(F, E_S) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{H}^1_S(E, E_S)^G \arrow[r, "-d_2^{0,1}(E_S)"] \arrow[u] & H^2(G, E_S(E)) \arrow[u] \\
\mathcal{C}l'(F) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{C}l'(E)^G \arrow[r, "\delta_G \circ \delta_G"] \arrow[u] & H^2(G, E_S(E)) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux premières lignes exactes sont obtenues respectivement en considérant les suites spectrales de l'extension de groupes $G_S(E) \hookrightarrow G_S \twoheadrightarrow G$

$$E_2^{p,q}(\mathbb{Z}_p(1)) = H^p(G, \mathcal{H}_S^q(E, \mathbb{Z}_p(1))) \Rightarrow E^{p+q}(\mathbb{Z}_p(1)) = \mathcal{H}_S^{p+q}(F, \mathbb{Z}_p(1))$$

$$E_2^{p,q}(E_S) = H^p(G, \mathcal{H}_S^q(E, E_S)) \Rightarrow E^{p+q}(E_S) = \mathcal{H}_S^{p+q}(F, E_S)$$

et la dernière est obtenue en prenant la G*-cohomologie de la suite exacte*

$$0 \ \to \ E_S(E) \ \to \ E^\times \ \to \ I_S(E) \ \to \ \mathcal{C}l'(E) \ \to \ 0$$

où $I_S(E)$ *est le groupe des idéaux de* E *à support hors de* S*.*

Séparément, ces trois suites exactes sont bien connues (on peut même prolonger la première en une suite exacte à quatre termes et les deux secondes en une suite exacte à sept termes, cf. [I2] prop. 1 et §5 ou [CHR]), et le seul point délicat concernant la commutativité de ces diagrammes tient dans la commutativité des carrés dont les flèches horizontales sont les morphismes nommés $d_2^{0,2}(\mathbb{Z}_p(1))$, $-d_2^{0,1}(E_S)$ et $\delta_G \circ \delta_G$.

Pour traiter ce point, nous montrons d'abord deux lemmes concernant le calcul par décalage des différentielles de la suite spectrale d'une extension de groupes.

Soit $1 \to H \to G \to G/H \to 1$ une extension de groupes profinis et

$$E_2^{p,q} = H^p(G/H, H^q(H, \bullet)) \Rightarrow H^{p+q}(G, \bullet) = E^{p+q}$$

la suite spectrale cohomologique qui en résulte. On s'intéresse en général aux différentielles

$$d_2^{p,q} : E_2^{p,q} \to E_2^{p+2,q-1}$$

Lemme 3.1.7 *Soit* $0 \to A \to B \to C \to 0$ *une suite exacte de* G*-modules discrets, soit* δ_H^q *le cobord*

$$H^q(H, C) \to H^{q+1}(H, A)$$

Alors le carré suivant est anti-commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p,q}(C) & \xrightarrow{d_2^{p,q}} & E_2^{p+2,q-1}(C) \\ {\scriptstyle H^p(G/H,\delta_H^q)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H^{p+2}(G/H,\delta_H^{q-1})} \\ E_2^{p,q+1}(A) & \xrightarrow{d_2^{p,q+1}} & E_2^{p+2,q}(A) \end{array}$$

pour $q \geq 1$ et $p \geq 0$.

Esquisse de preuve : On se ramène d'abord au cas où B est G-injectif de la façon suivante. Soit $A \to I_0$ un plongement de A dans un injectif, et A_1 son conoyau. Puisque I_0 est injectif, on peut prolonger $A \to I_0$ en $B \to I_0$, et écrire un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A & \longrightarrow & I_0 & \longrightarrow & A_1 & \to & 0 \end{array}$$

On vérifie alors qu'il suffit de montrer le lemme pour la seconde suite exacte. Indiquons rapidement comment conclure dans ce cas. Le plongement injectif $A \to I_0$ se prolonge en une résolution injective de $A \to I$ (I est un complexe). Notant $J_n = I_{n+1}$ pour $n \geq 0$, on obtient une résolution injective de A_1. En examinant la construction de la suite spectrale exposée dans [CE] chap. XV-XVII, on remarque naturellement un morphisme décalé de suites spectrales $E_2^{p,q}(A_1) \to E_2^{p,q+1}(A)$ et celui-ci donne le résultat souhaité.

$\square$

Remarque 3.1.8 *Comme me l'a indiqué le premier rapporteur, on pourrait considérer la suite spectrale d'hypercohomologie à coefficients dans le complexe $[B \to C]$, qui s'identifie à celle de A décalée de 1.*

Lemme 3.1.9 *Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte telle que $H^1(H,B)=0$. Notons alors $\delta_{G/H} \circ \delta_{G/H}$ le double cobord associé à la suite exacte de G/H-modules*

$$0 \;\to\; A^H \;\longrightarrow\; B^H \;\longrightarrow\; C^H \;\longrightarrow\; H^1(H,A) \;\to\; 0$$

Le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
H^p(G/H, H^1(H,A)) & \xrightarrow{\delta_{G/H}\circ\delta_{G/H}} & H^{p+2}(G/H, A^H) \\
\downarrow & & \downarrow \\
E_2^{p,1}(A) & \xrightarrow{(-1)^{p+1}d_2^{p,1}} & E_2^{p+2,0}(A)
\end{array}$$

Esquisse de preuve : Ici encore on se ramène au cas où B est injectif. Dans ce cas un examen attentif de la définition de $d_2^{p,1}$ donne le résultat.

$\square$

Remarque 3.1.10 *Ici aussi, l'emploi de l'hypercohomologie simplifie certainement le raisonnement (voir la troisième remarque suivant le théorème 2.4.1 de [Gro]).*

Revenons à la preuve de la commutativité dans 3.1.6

D'abord, appliquons le lemme 3.1.7 à l'extension de groupes $1 \to G_S(E) \to G_S \to G_n \to 1$ et à la suite exacte de G_S-modules

$$0 \;\to\; \mathbb{Z}/p^k(1) \;\longrightarrow\; E_S \;\xrightarrow{p^k}\; E_S \;\to\; 0$$

on obtient alors, après passage à la limite projective sur k, un carré anti-commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(G_n, \mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(1))) & \xrightarrow{d_2^{0,2}} & H^2(G_n, \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(1))) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^0(G_n, \mathcal{H}^1_S(E, E_S)) & \xrightarrow{d_2^{0,1}} & H^2(G_n, E_S(E)) \end{array} \tag{3.1}$$

Appliquons maintenant le lemme 3.1.9 avec la même extension de groupes et la suite exacte de G_S-modules suivante :

$$0 \rightarrow E_S \longrightarrow F_S^\times \longrightarrow I_S \rightarrow 0$$

On obtient un carré anticommutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^0(G_n, \mathcal{H}^1_S(E, E_S)) & \xrightarrow{\delta\circ\delta} & H^2(G_n, E_S(E)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^0(G_n, \mathcal{H}^1_S(E, E_S)) & \xrightarrow{d_2^{0,1}} & H^2(G_n, E_S(E)) \end{array} \tag{3.2}$$

Et cela termine la preuve de 3.1.6

$\square$

La Formule

Soit F un corps de nombres contenant μ_{p^n}, $n > 0$. Si x et y sont deux S-unités de F, on définit le symbole $(y, x)_S = \delta_S y \cup \delta_S x$ où δ_S est le cobord de la suite exacte de Kummer

$$0 \to T_p \longrightarrow \varprojlim_p E_S \longrightarrow E_S \to 0$$

dans laquelle $T_p = \varprojlim \mu_{p^k}$. Rappelons que $\mathcal{C}l'(F) \otimes \mu_{p^n}$ s'injecte canoniquement dans $\mathcal{H}^2_S(F, T_p) \otimes \mu_{p^n} = \mathcal{H}^2_S(F, \mu_{p^n}^{\otimes 2})$ (cf [Ta]). Dans ce cadre, [MCS] th. 2.4 donne une formule modulo p^n pour le symbole $(y,x)_S$. On peut l'exprimer de la façon suivante :

Proposition 3.1.11 *([MCS] th. 2.4). Soit F un corps de nombres contenant μ_{p^n}, $x \in E_S(F)$ et F_n/F l'extension correspondant à $\delta x \in \mathcal{H}^1_S(F, \mu_{p^n})$, de groupe de Galois G_n. Fixons une racine primitive $p^{n\,ieme}$ de l'unité ζ ; δx détermine alors un élément $a_n \in H^1(G_n, \mathbb{Z}/p^n)$. Le symbole $(.,x)$ envoie $E_S(F) \cap \nu_{G_n} F_n^\times$ dans $\mathcal{C}l'(F) \otimes \mu_{p^n}$ (vu comme sous-groupe de $\mathcal{H}^2_S(F, \mu_{p^n}^{\otimes 2})$) et l'on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
E_S(F) \cap NF_n^\times / NE_S(F_n) & \xrightarrow{\phi^{-1}\circ(\cup \delta_{G_n} a_n)} & \hat{H}^0(G_n, \mathcal{C}l'(F_n)) \\
\widehat{res} \uparrow & & \downarrow \widehat{cor}\otimes\zeta \\
E_S(F) \cap NF_n^\times & \xrightarrow{\cup x} & \mathcal{C}l'(F) \otimes \mu_{p^n}
\end{array}$$

où δ_{G_n} désigne, comme dans le paragraphe précédent, l'homomorphisme de Bockstein, et $\phi : \hat{H}^0(G_n, \mathcal{C}l'(F_n)) \to Ker(H^2(G_n, E_S(F_n)) \to H^2(G_n, F_n^\times))$ est l'isomorphisme induit par le double cobord associé à la suite exacte de G_n-modules

$$E_S(F_n) \hookrightarrow F_n^\times \to I_S(F_n) \twoheadrightarrow \mathcal{C}l'(F_n)$$

dans laquelle $I_S(F_n)$ est le groupe des idéaux de F_n à support hors de S.

$\square$

Dans le cas où l'extension $F(a^{\frac{1}{p^n}})/F$ est $\mathbb{Z}_p$-plongeable, nous nous proposons de retrouver ce résultat à l'aide des méthodes du paragraphe précédent.

Puisque $\cup x = \cup a_n \otimes \zeta$, il s'agit de montrer la commutativité de la face avant dans le cube suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{E}_2^{0,1}(\mathbb{Z}_p(1)) \arrow[rr, "\cup\alpha_n"] & & \hat{E}_2^{0,2}(\mathbb{Z}_p(1)) \arrow[dd, "\widehat{cor}"] \\
\dfrac{E_S(F)\cap NF_n^\times}{NE_S(F_n)} \arrow[ur] \arrow[rr, "\phi^{-1}\circ(\cup\delta_{G_n}a_n)"] & & \hat{H}^0(G_n, \mathcal{C}l'(F_n)) \arrow[ur] \arrow[dd, "\widehat{cor}"] & \\
 & \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(1)) \arrow[uu, "\widehat{res}"] \arrow[rr, "\cup a_n"] & & \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}/p^n(1)) \\
E_S(F)\cap NF_n^\times \arrow[uu, "\widehat{res}"] \arrow[ur] \arrow[rr, "\cup a_n"] & & \mathcal{C}l'(F)/p^n \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Parmi les autres, seule la commutativité la face supérieure n'est pas immédiate. Au vu de la remarque 3.1.4 et de la définition de ϕ, il suffit donc de montrer que le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
H^0(G_n, \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(1))) & \xrightarrow{d_2^{0,2}} & H^2(G_n, \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(1))) \\
\uparrow & & \uparrow \\
H^0(G_n, \mathcal{C}l'(F_n)) & \xrightarrow{\delta\circ\delta} & H^2(G_n, E_S(F_n))
\end{array} \tag{3.3}$$

or c'est ce qu'affirme le lemme 3.1.6.

$\square$

3.2 Théorie d'Iwasawa : suite

Nous présentons ici un certain nombre de conséquences du théorème 3.1.1. En passant à la limite, on obtient une description de l'homomorphisme $\cup a$ par montée et descente dans la $\mathbb{Z}_p$-extension définie par a. On voit alors apparaître naturellement les normes universelles et les sous-modules finis, et l'on obtient ainsi une description "par cup-produit" de ces modules arithmétiques dans n'importe quelle $\mathbb{Z}_p$-extension. Cela nous conduit d'abord à généraliser à une $\mathbb{Z}_p$-extension quelconque et à tout couple $(\mathcal{H}_S^1, \mathcal{H}_S^2)$ les résultats classiques de Kuz'min, Sinnott, Greither etc... relatifs au couple (S-unités, S-groupe de classes) et à la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique. Pour ce faire, il nous faut modifier les résultats abstraits de Greither ([Grei], voir 3.2.2) pour les rendre utilisables dans ce contexte.

3.2.1 Cup produit et normes universelles

Soit F un corps de nombres. Comme dans la section précédente, a définit une $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F dont le groupe de Galois est noté Γ et les étages de degré p^n, F_n/F. On note encore $\Gamma_n = G(F_\infty/F_n)$, $G_n = G(F_n/F)$, $X^{(i)}(F_\infty) = \varprojlim \mathcal{H}_S^2(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$ et $X^{(i)}(F_{\infty,v}) = \varprojlim \mathcal{H}^2(F_{n,v}, \mathbb{Z}_p(i))$; de sorte qu'on a une suite exacte

$$0 \to WX^{(i)}(F_\infty) \longrightarrow X^{(i)}(F_\infty) \longrightarrow \bigoplus_{v \in S(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} X^{(i)}(F_{\infty,v})$$

où $\Lambda_v = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]$.

Lemme 3.2.1 *En passant à la limite via la co-restriction, on obtient un isomorphisme*

$$X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma = \varprojlim \hat{H}^0(G_n, \mathcal{H}_S^2(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))$$

Preuve : Rappelons d'abord que l'isomorphisme fonctoriel de 1.2.4 donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_m} & \to & \mathcal{H}^2_S(F_m, \mathbb{Z}_p(i)) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_n} & \to & \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \end{array}$$

dans lequel toutes les applications sont naturelles.

Soit γ un générateur de Γ et notons $\nu_n = \frac{\gamma^{p^n}-1}{\gamma-1}$ la norme algébrique. Pour $m \geq n$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_m} & \stackrel{\nu_m}{\to} & (X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_m})^{G_m} & \to & \hat{H}^0(G_m, \mathcal{H}^2_S(F_m, \mathbb{Z}_p(i))) & \to & 0 \\ \frac{\nu_m}{\nu_n}\Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \\ X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_n} & \stackrel{\nu_n}{\to} & (X^{(i)}(F_\infty)_{\Gamma_n})^{G_n} & \to & \hat{H}^0(G_n, \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) & \to & 0 \end{array}$$

Comme ν_n tend vers 0, on obtient l'isomorphisme annoncé en passant à la limite projective sur n.

□

On définit par passage à la limite un cup-produit

$$\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \varprojlim \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p) \to X^{(i)}(F_\infty)$$

On a déjà vu dans la première section qu'il existe $\alpha = \varprojlim \alpha_n \in \varprojlim \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p)$ avec $\alpha_0 = a$. C'est le cup-produit avec α qui donne l'homomorphisme de "montée", noté m_a dans l'introduction.

Proposition 3.2.2 *Soit $i \neq 0$. Le cup-produit avec α donne les suites exactes suivantes :*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{N}^{(i)}(F) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup\alpha} & X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma & \rightarrow & 0 \\ & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{N}^{(i)}(F) & \longrightarrow & \mathcal{N}^{(i)}_{loc}(F) & \xrightarrow{\cup\alpha} & WX^{(i)}(F_\infty)^\Gamma & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dans lesquelles $\mathcal{N}^{(i)}(F)$ (resp. $\mathcal{N}^{(i)}_{loc}(F)$) est le groupe des normes universelles (resp. groupe des normes universelles locales) c'est-à-dire l'image de l'application

$$\varprojlim \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \rightarrow \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

(resp. l'image réciproque par la localisation de l'image de l'application

$$\bigoplus_{v \in S(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} \varprojlim \mathcal{H}^1(F_{n,v}, \mathbb{Z}_p(i)) \rightarrow \bigoplus_{v \in S(F)} \mathcal{H}^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))$$

où $\Lambda_v = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_v]]$).

Remarque 3.2.3 *Un élément $x \in \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est une norme locale universelle si et seulement si son localisé $x_v \in \mathcal{H}^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))$ est dans l'image de $\varprojlim \mathcal{H}^1(F_{n,v}, \mathbb{Z}_p(i)) \rightarrow \mathcal{H}^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i))$ pour toutes les places $v \in S(F)$.*

Preuve : Compte-tenu du lemme précédent, la première suite exacte provient du théorème 3.1.1 par passage à la limite projective sur n. Détaillons : pour $m \geq n$, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}^1_S(F_m, \mathbb{Z}_p(i)))^{G_m} & \xrightarrow{\cup\alpha_m} & (\mathcal{H}^2_S(F_m, \mathbb{Z}_p(i)))^{G_m} \\ {\scriptstyle (res^{F_m}_{F_n})^{-1}} \Big\downarrow & & {\scriptstyle cor^{F_m}_{F_n}} \Big\downarrow \\ (\mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))^{G_n} & \xrightarrow{\cup\alpha_n} & (\mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))^{G_n} \end{array}$$

et celui-ci en induit un second :

$$\begin{array}{ccc}
\hat{H}^0(G_m, \mathcal{H}^1_S(F_m, \mathbb{Z}_p(i))) & \xrightarrow[\sim]{\cup\alpha_m} & \hat{H}^0(G_m, \mathcal{H}^2_S(F_m, \mathbb{Z}_p(i))) \\
{\scriptstyle (res^{F_m}_{F_n})^{-1}}\Big\downarrow & & {\scriptstyle cor^{F_m}_{F_n}}\Big\downarrow \\
\hat{H}^0(G_n, \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) & \xrightarrow[\sim]{\cup\alpha_n} & \hat{H}^0(G_n, \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)))
\end{array}$$

En passant à la limite projective, on obtient bien la première suite exacte.

De la même façon, on obtient, pour chaque (p)-place v finiment décomposée dans F_∞ (ie. $F_{\infty,v} \neq F_v$), une suite exacte

$$\varprojlim \mathcal{H}^1(F_{n,v}, \mathbb{Z}_p(i)) \longrightarrow \mathcal{H}^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i)) \longrightarrow X^{(i)}(F_{\infty,v})^{\Gamma_v} \to 0$$

Notons $S^{fd}(F) = \{v \in S(F), F_{\infty,v} \neq F_v\}$ l'ensemble de ces places. Après induction, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{N}^{(i)}(F) & \hookrightarrow & \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \overset{\cup\alpha}{\twoheadrightarrow} & X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \\
 & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\bigoplus_{S^{fd}(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} \varprojlim \mathcal{H}^1(F_{n,v}, \mathbb{Z}_p(i)) & \to & \bigoplus_{S^{fd}(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} \mathcal{H}^1(F_v, \mathbb{Z}_p(i)) & \twoheadrightarrow & \bigoplus_{S^{fd}(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} X^{(i)}(F_{\infty,v})^{\Gamma_v}
\end{array}$$

Compte-tenu de la suite exacte

$$0 \to WX^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \longrightarrow X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \longrightarrow \Big(\bigoplus_{v \in S(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} X^{(i)}(F_{\infty,v})\Big)^\Gamma$$

et ayant remarqué que $(\Lambda \otimes_{\Lambda_v} X^{(i)}(F_{\infty,v}))^\Gamma = 0$ si $v \in S(F)\backslash S^{fd}(F)$, une chasse rapide dans le diagramme ci-dessus donne la seconde ligne exacte de la proposition.

$\square$

Remarque 3.2.4 *Rappelons que* $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(1)) = E_S(F) \otimes \mathbb{Z}_p$ *et* $WX^{(1)}(F_\infty) = X'(F_\infty)$. *Aussi, si* $i = 1$, *la seconde suite exacte de la proposition ci-dessus généralise à une* $\mathbb{Z}_p$*-extension quelconque un résultat de Kuz'min ([Ku] prop. 7.5) relatif à la* $\mathbb{Z}_p$*-extension cyclotomique :* $X'(F_\infty)^\Gamma$ *est isomorphe au quotient des* S*-unités* p*-complétées de* F *qui sont des normes locales universelles dans* F_∞/F*, par le sous-groupe des normes universelles globales de* S*-unités* p*-complétées dans* F_∞/F.

Rappelons que $W^{(i)}(F_n) = \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))/\mathcal{K}er^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$ et $\overline{W}^{(i)}(F_\infty) = \varprojlim W^{(i)}(F_n)$ de sorte que 1.2.2 donne une suite exacte de Λ-modules :

$$\overline{W}^{(i)}(F_\infty) \quad \hookrightarrow \quad \bigoplus_{S(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1)) \quad \twoheadrightarrow \quad H_0^S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i-1))$$

dans laquelle la dernière flèche est définie par la somme directe des applications $\Lambda \otimes_{\Lambda_v} H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1)) \to H_0^S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i-1))$ obtenues en composant les applications naturelles $\Lambda \otimes_{\Lambda_v} H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1)) \to H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1))$ et $H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1)) \to H_0^S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i-1))$.

On notera $m_i(F)$ (resp. $m_i(F_v)$) l'ordre de $H_0^S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ (resp. $H_0(F_v, \mathbb{Z}_p(i))$) pour $i \neq 0$ et $m_0(F) = m_0(F_v) = 1$. Enfin le signe $\widetilde{\oplus}$ désigne le noyau de la somme.

Théorème 3.2.5 *Notons encore* $S^{fd}(F) \subset S(F)$ *l'ensemble des* (p)*-places finiment décomposées dans* F_∞/F. *On a une suite exacte "à la Sinnott" :*

$$\begin{array}{llllll} \mathcal{N}^{(i)}_{loc}(F) & \hookrightarrow & \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \to & \widetilde{\bigoplus}_{S^{fd}(F)} H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(1-i))^{\Gamma_v} & \to \\ WX^{(i)}(F_\infty)_\Gamma & \to & \mathcal{K}er^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \to & \overline{W}^{(i)}(F_\infty)_\Gamma & \twoheadrightarrow \overline{W}^{(i)}(F) \end{array}$$

En particulier, le noyau de l'application $WX^{(i)}(F_\infty)_\Gamma \to \mathcal{K}er^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ *est engendré par au plus* $\#S^{fd}(F) - 1$ *éléments et son conoyau est cyclique d'ordre égal à* $max(1, \min_{v \in S^{fd}(F)} \dfrac{(\Gamma : \Gamma_v) m_{i-1}(F)}{m_{i-1}(F_v)})$.

Remarque 3.2.6 *Pour* $i = 1$*, il s'agit bien d'une généralisation aux* $\mathbb{Z}_p$*-extensions quelconques de la suite exacte de Sinnott, comme annoncé en 1.2.11*

Remarque 3.2.7 *Nous invitons le lecteur à comparer cette suite exacte avec les résultats de [KM] concernant la co-descente du noyau sauvage étale dans une extension cyclique de degré p (notamment avec le théorème 2.14). Les résultats en questions font intervenir un cup-produit dans la cohomologie du groupe de Galois absolu* G_F *de* F*, à valeurs dans la p-torsion du groupe de Brauer, et donc les normes locales de l'extension considérée.*

Preuve : La proposition 3.2.2 montre que les applications $\mathcal{N}^{(i)}_{loc}(F) \to \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ et $WX^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \to X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma$ ont le même conoyau, d'où une suite exacte

$$\mathcal{N}^{(i)}_{loc}(F) \hookrightarrow \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to \overline{W}^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \to WX^{(i)}(F_\infty)_\Gamma \to X^{(i)}(F_\infty)_\Gamma \twoheadrightarrow \overline{W}^{(i)}(F_\infty)_\Gamma$$

par Γ-homologie de la suite exacte courte définissant $\overline{W}^{(i)}(F_\infty)$.

Maintenant, la seconde flèche verticale est un isomorphisme dans le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & WX^{(i)}(F_\infty)_\Gamma & \longrightarrow & X^{(i)}(F_\infty)_\Gamma & \longrightarrow & \overline{W}^{(i)}(F_\infty)_\Gamma & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{K}er^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & \overline{W}^{(i)}(F) & \to & 0 \end{array}$$

et donc une chasse rapide donne la suite exacte de l'énoncé, au troisième terme près. Il suffit, pour obtenir celui-ci, de remarquer que pour $v \notin S^{fd}(F)$, on a $(\Lambda \otimes_{\Lambda_v} X^{(i)}(F_{\infty,v}))^\Gamma = 0$, ce qui termine la preuve de la suite exacte.

Reste à déterminer le noyau de $\overline{W}^{(i)}(F_\infty)_\Gamma \to \overline{W}^{(i)}(F)$. Les deux flèches verticales de droites sont des isomorphismes dans le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\overline{W}^{(i)}(F_\infty)_\Gamma & \to & (\bigoplus_{S(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1)))_\Gamma & \twoheadrightarrow & H_0^S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i-1))_\Gamma \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\overline{W}^{(i)}(F) & \hookrightarrow & (\bigoplus_{S(F)} H_0(F_v, \mathbb{Z}_p(i-1))) & \twoheadrightarrow & H_0^S(F, \mathbb{Z}_p(i-1))
\end{array}$$

On voit donc que le noyau en question est isomorphe au conoyau de l'application $(\bigoplus_{S(F)} \Lambda \otimes_{\Lambda_v} H_0(F_{\infty,v}, \mathbb{Z}_p(i-1)))^\Gamma \to H_0^S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i-1))^\Gamma$. Ce dernier est cyclique, d'ordre $max(1, \underset{v \in S^{fd}(F)}{min} \frac{(\Gamma : \Gamma_v) m_{i-1}(F)}{m_{i-1}(F_v)})$.

$\square$

3.2.2 A propos des normes universelles

Soit $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$, où $\Gamma =< \gamma >\simeq \mathbb{Z}_p$. Dans l'esprit de [Grei], mais avec les outils de [J1], on montre deux lemmes concernant la structure des normes universelles et des modules qui leurs sont associés. Rappelons que pour un Λ-module M, $E^0(M)$ désigne le Λ-module à droite $Hom_\Lambda(M, \Lambda)$.

Lemme 3.2.8 *(Comparer avec [Gr]) Soit B_∞ un Λ-module topologique (non nécessairement noethérien) tel que $B_n = B_\infty^{\Gamma_n}$ soit compact noethérien et vérifiant $B_\infty = \cup B_n$. On suppose de plus que les groupes $H^1(\Gamma_n, B_\infty)$ et $\varprojlim H^1(\Gamma_n, t_{\mathbb{Z}_p} B_\infty)$ ($\varprojlim$ via la co-restriction) sont finis. Notons $\nu_{m,n} = \frac{\gamma^{p^m}-1}{\gamma^{p^n}-1}$, $\nu B_n = \bigcap_{m \geq n} \nu_{m,n} B_m$ le sous-groupe des normes universelles de B_n et $\nu B_\infty =$*

$\cup\nu B_n$. Soit M le Λ-module compact $(B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee$. On a alors deux isomorphismes canoniques :

$$E^0(M) = \varprojlim (f_{\mathbb{Z}_p} B_\infty)^{\Gamma_n}$$

$$E^0(E^0(M)) = (\nu B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee$$

Lemme 3.2.9 *On conserve les hypothèses du lemme ci-dessus, et l'on suppose de plus que $H^1(\Gamma_n, \nu B_\infty)$ est fini. Alors $f_{\mathbb{Z}_p}\nu B_\infty$ est Γ-cohomologiquement trivial et l'on a un isomorphisme canonique $E^0(M)_{\Gamma_n} = (f_{\mathbb{Z}_p}\nu B_\infty)^{\Gamma_n}$, si bien que $(f_{\mathbb{Z}_p}\nu B_\infty)^{\Gamma_n}$ est un $\mathbb{Z}_p[G_n]$-module libre.*

Preuve de 3.2.8 : On utilise la description de Jannsen (cf section 1.2.2)

$$E^0(M) = \varprojlim Hom(M_{\Gamma_n}, \mathbb{Z}_p) = (\varinjlim M_{\Gamma_n} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee$$

Cela donne

$$E^0(M) = \varprojlim (M_{\Gamma_n} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee) = \varprojlim ((B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^{\Gamma_n})^\vee \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee)$$

Notons que la finitude de $H^1(\Gamma_n, B_\infty)$ implique celle de $H^1(\Gamma_n, f_{\mathbb{Z}_p}B_\infty)$. La suite exacte

$$0 \rightarrow (f_{\mathbb{Z}_p}B_\infty)^{\Gamma_n} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^{\Gamma_n} \longrightarrow H^1(\Gamma_n, f_{\mathbb{Z}_p}B_\infty)$$

donne donc

$$(B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^{\Gamma_n})^\vee \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = ((f_{\mathbb{Z}_p}B_\infty)^{\Gamma_n} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

Mais comme pour tout $\mathbb{Z}_p$-module noethérien B on a $(B \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee = Hom(B, \mathbb{Z}_p)$, on obtient enfin

$$E^0(M) = \varprojlim Hom(Hom((f_{\mathbb{Z}_p}B_\infty)^{\Gamma_n}, \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p) = \varprojlim (f_{\mathbb{Z}_p}B_\infty)^{\Gamma_n}$$

Passons au calcul de $E^0(E^0(M))$. En prenant la Γ_m-cohomologie de la suite exacte $t_{\mathbb{Z}_p}B_\infty \hookrightarrow B_\infty \twoheadrightarrow f_{\mathbb{Z}_p}B_\infty$ on obtient, après passage à la limite projective sur m via la co-restriction, la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \varprojlim f_{\mathbb{Z}_p}B_m \longrightarrow E^0(M) \longrightarrow \varprojlim H^1(\Gamma_m, t_{\mathbb{Z}_p}B_\infty)$$

Notons C l'image de la dernière flèche et prenons les Γ_n-coïnvariants. On obtient la suite exacte

$$C^{\Gamma_n} \longrightarrow (\varprojlim_m f_{\mathbb{Z}_p} B_m)_{\Gamma_n} \longrightarrow (E^0(M))_{\Gamma_n} \longrightarrow C_{\Gamma_n} \to 0$$

Par hypothèse C est fini et donc $\varinjlim_n C_{\Gamma_n} = 0$. En appliquant $\varinjlim_n$ et $\otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ on obtient

$$\varinjlim_n (E^0(M))_{\Gamma_n} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = \varinjlim_n (\varprojlim_m f_{\mathbb{Z}_p} B_m)_{\Gamma_n} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

Maintenant la $\mathbb{Z}_p$-torsion de B_n est finie, donc $(\varprojlim_m t_{\mathbb{Z}_p} B_m)^{\Gamma_n} = 0$ et cela implique la finitude de $(\varprojlim_m t_{\mathbb{Z}_p} B_m)_{\Gamma_n}$. On obtient alors

$$(\varprojlim_m f_{\mathbb{Z}_p} B_m)_{\Gamma_n} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = (\varprojlim_m B_m)_{\Gamma_n} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$$

Enfin, comme les $\hat{H}^{-1}(\Gamma_n/\Gamma_m, B_m)$ sont bornés (par $H^1(\Gamma_n, B_\infty)$), la suite exacte

$$\hat{H}^{-1}(\Gamma_n/\Gamma_m, B_m) \longrightarrow (B_m)_{\Gamma_n} \longrightarrow B_n$$

donne, après passage à la limite projective sur m et tensorisation par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, $(\varprojlim_m B_m)_{\Gamma_n} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = \nu B_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Finalement, on obtient

$$E^0(E^0(M)) = (\varinjlim (E^0(M))_{\Gamma_n} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee = (\nu B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^\vee$$

□

Preuve de 3.2.9 : Comme $cd_p \Gamma_n = 1$, la finitude de $H^1(\Gamma_n, \nu B_\infty)$ entraîne celle de $H^1(\Gamma_n, f_{\mathbb{Z}_p} \nu B_\infty)$. Dans la suite exacte suivante :

$$(f_{\mathbb{Z}_p} \nu B_\infty)^{\Gamma_n} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \nu B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^{\Gamma_n} \to H^1(\Gamma_n, f_{\mathbb{Z}_p} \nu B_\infty) \to 0$$

le terme $\nu B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^{\Gamma_n}$ est divisible puisque c'est le dual de Pontryagin de $(E^0(E^0(M)))_{\Gamma_n}$ $(E^0(E^0(M))$ est libre). Ainsi $H^1(\Gamma_n, f_{\mathbb{Z}_p}\nu B_\infty)$ est fini et divisible c'est-à-dire nul. Maintenant on a,

$$H^2(\Gamma_n, f_{\mathbb{Z}_p}\nu B_\infty) = H^1(\Gamma_n, \nu B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = H_1(\Gamma_n, E^0(E^0(M))) = 0$$

et cela achève de montrer la Γ-trivialité cohomologique de $f_{\mathbb{Z}_p}\nu B_\infty$.

Passons à la liberté du $\mathbb{Z}_p[G_n]$-module $(f_{\mathbb{Z}_p}\nu B_\infty)^{\Gamma_n}$. Comme $E^0(M)$ est Λ-libre, il suffit de montrer que $(E^0(M))_{\Gamma_n} = (f_{\mathbb{Z}_p}\nu B_\infty)^{\Gamma_n}$. Soit $m \geq n$, on a la suite exacte

$$\begin{array}{rcr} \hat{H}^{-1}(\Gamma_n/\Gamma_m, (f_{\mathbb{Z}_p}\nu B_\infty)^{\Gamma_m}) & \hookrightarrow & ((f_{\mathbb{Z}_p}\nu B_\infty)^{\Gamma_m})_{\Gamma_n} \quad \rightarrow \qquad (f_{\mathbb{Z}_p}\nu B_\infty)^{\Gamma_n} \\ & & \twoheadrightarrow \quad \hat{H}^0(\Gamma_n/\Gamma_m, (f_{\mathbb{Z}_p}\nu B_\infty)^{\Gamma_m}) \end{array}$$

La Γ-trivialité cohomologique de $f_{\mathbb{Z}_p}\nu B_\infty$ et un passage à la limite projective sur m permettent de conclure.

□

Remarque 3.2.10 *Puisque les arguments de la preuve de 3.2.8 sont fonctoriels, on a en fait montré un isomorphisme canonique entre les foncteurs* $H : B_\infty \rightsquigarrow E^0(E^0(B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee))$ *et* $N : B_\infty \rightsquigarrow \nu B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee$. *Si l'on note* $M : B_\infty \rightsquigarrow B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee$, *on a deux morphismes naturels :* $M \rightarrow N$ *et* $M \rightarrow H$. *On voit facilement que le triangle suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[dr] & N \arrow[d] \\ & H \end{tikzcd}$$

Remarque 3.2.11 *La remarque ci-dessus montre que*

$$(B_\infty/\nu B_\infty) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee = t_\Lambda(B_\infty \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee)$$

Dans [Gr], l'auteur fait les hypothèses suivantes :
$P3$: Il existe deux entiers s et t tels que, pour n suffisamment grand, $rg_{\mathbb{Z}_p}(B_n) = sp^n + t$.
$P4$: Les groupes $H^1(\Gamma_n, B_\infty)$ sont bornés et $H^1(\Gamma_n, t_{\mathbb{Z}_p}B_\infty) = 0$.

Remarque 3.2.12 *Contrairement à l'hypothèse $P4$, les hypothèses des lemmes ci-dessus sont vérifiées pour $B_\infty = \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$ dans n'importe quelle $\mathbb{Z}_p$-extension, pour tout $i \neq 0$ (cf rem. 1.1.8 pour les hypothèses du premier lemme, et prendre les points fixes de 3.2.22 pour l'hypothèse supplémentaire).*

Concernant l'hypothèse $P3$, on a le lemme suivant :

Lemme 3.2.13 *On conserve les hypothèses des lemmes 3.2.8 et 3.2.9. Soit $s = rg_\Lambda E^0(M)$. Alors il existe une suite croissante t_n telle que*

$$rg_{\mathbb{Z}_p} \nu B_n = sp^n$$

et

$$rg_{\mathbb{Z}_p} B_n = sp^n + t_n$$

pour tout $n \geq 0$.

Preuve : Au cours de la preuve de 3.2.8, on a montré $E^0(M)_{\Gamma_n} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = \nu B_n \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. La première égalité résulte alors de la liberté de $E^0(M)$.

Passons à la seconde. Soit $t_n = rg_{\mathbb{Z}_p} B_0/\nu B_0$. La suite exacte

$$B_{n+1}/\nu B_{n+1} \longrightarrow B_n/\nu B_n \longrightarrow \hat{H}^0(\Gamma_n/\Gamma_{n+1}, B_{n+1})$$

montre que la suite t_n est croissante.

□

Remarque 3.2.14 *Dans le cas où $B_\infty = \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$, $i \neq 0$, la première suite exacte de 3.2.2 montre que pour $n >> 0$, on a*

$$B_n/\nu B_n = B_\infty/\nu B_\infty = \cup_n X^{(i)}(F_\infty)^{\Gamma_n}$$

si bien que t_n est bornée. Notons que $t_n = 0$ si et seulement si i est F_n-bon.

3.2.3 Sur la structure de certains modules

Les résultats algébriques du paragraphe précédent, appliqués à la description arithmétique des normes universelles proposée en 3.2.1, permettent de retrouver et d'étendre quelques résultats concernant la structure des modules $\varprojlim \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$ et $f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)$.

Comme dans les deux paragraphes précédents, F_∞/F est une $\mathbb{Z}_p$-extension fixée, de groupe de Galois Γ, d'algèbre de groupe complète Λ. Soit F_n/F la sous-extension de degré p^n, $\Gamma_n = G(F_\infty/F)$, a un générateur de $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}_p) \subset \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p)$ et $\alpha = (\alpha_n)$ l'unique élément de $\varprojlim H^1(\Gamma_n, \mathbb{Z}_p) \subset \varprojlim \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p)$ vérifiant $\alpha_0 = a$.

Proposition 3.2.15 *Soit $i \neq 0$. Alors on a la première ou la seconde des suites exactes canoniques suivantes selon que F_∞/F est ou non la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}_p(i)^{G_S} & \hookrightarrow & \varprojlim \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) & \twoheadrightarrow & Hom_\Lambda(\mathcal{X}^{(-i)}(F^c), \Lambda) \\
\varprojlim \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) & \hookrightarrow & Hom_\Lambda(\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty), \Lambda) & \twoheadrightarrow & Hom(\Gamma, t_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{N}^{(i)}(F_\infty))
\end{array}$$

Remarque 3.2.16 *Comme $Hom_\Lambda(\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty), \Lambda)$ est Λ-libre, la première suite exacte justifie les résultats de liberté de [Ku] ou [Grei] dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.*

Commençons par deux lemmes techniques. Jusqu'ici, $\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$ était toujours muni de la topologie discrète, qui en fait un Γ module continu, pour lequel on peut former le groupe de cohomologie galoisienne $H^q(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)))$. Maintenant il y a sur $\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$ une autre topologie naturelle : celle induite par la topologie p-adique des $\mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$. On note momentanément $H^q_{cont}(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)))$ la cohomologie continue de Γ, pour cette topologie. Comme la topologie discrète est la plus fine, toute cochaîne continue pour la topologie discrète l'est automatiquement pour toute autre. Cela définit une application naturelle de la cohomologie discrète vers la cohomologie continue.

Lemme 3.2.17 *L'application naturelle $H^1(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i))) \to H^1_{cont}(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i)))$ est injective et son image est $t_{\mathbb{Z}_p} H^1_{cont}(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i)))$.*

Si i est F_∞/F-bon, alors $f_{\mathbb{Z}_p}H^1_{cont}(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(E,\mathbb{Z}_p(i)))$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, si bien qu'on a un isomorphisme canonique

$$H^1(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(E,\mathbb{Z}_p(i))) = H^1_{cont}(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(E,\mathbb{Z}_p(i)))/div$$

où $/div$ signifie que l'on a quotienté par le sous-groupe divisible maximal.

Lemme 3.2.18 *Soit $i \neq 0$. Il existe un diagramme commutatif naturel*

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))) & \otimes & H^1_{cont}(\Gamma,\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\cup} & H^1_{cont}(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))) \\ \uparrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta''} \\ \mathcal{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \otimes & \mathcal{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\cup} & \mathcal{H}^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \end{array}$$

dans lequel le noyau de la flèche notée β'' est sans torsion. Le premier cup-produit a lieu dans la cohomologie continue de Γ, le second dans celle de G_S.

Preuve de 3.2.17 : Comme $H^1(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))) = \varinjlim H^1(F_n/F,\mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)))$, l'injectivité en question provient de celle de l'inflation continue. Montrons maintenant que toute la $\mathbb{Z}_p$-torsion de $H^1_{cont}(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)))$ provient de $H^1(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)))$. Si x est un 1-cocycle continu tel que p^kx soit le cobord d'un élément $a \in \mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))$, alors il existe $n \geq 0$ tel que $a \in \mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))$. Le cocycle p^kx est alors à valeurs dans $\mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))$. Mais comme, par noethérianité du $\mathbb{Z}_p$-module $\mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))$, il existe $m \geq n$, telle que $p^k\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)) \cap \mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)) \subset p^k\mathcal{H}^1_S(F_m,\mathbb{Z}_p(i))$, c'est que x est à valeurs dans $\mathcal{H}^1_S(F_m,\mathbb{Z}_p(i)) + \mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))[p^k] \subset \mathcal{H}^1_S(F_{m'},\mathbb{Z}_p(i))$ pour un certain $m' \geq m$, d'où le résultat annoncé puisque

$$H^1(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))) = \varinjlim H^1(F_n/F,\mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)))$$

Il reste à établir, pour les bons i, la divisibilité du quotient

$$H^1_{cont}(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)))/H^1(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)))$$

Les suites exactes continues

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))[p] & \longrightarrow & \mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & p\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)) & \to & 0 \\ 0 & \to & p\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))/p & \to & 0 \end{array}$$

admettent toutes deux une section continue (pour la première, on peut utiliser une section de groupes topologiques $f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)) \hookrightarrow \mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))$, pour la seconde il suffit de remarquer que le dernier terme est discret) et donnent donc lieu à deux suites exactes longues de cohomologie continue ([Ta]), desquelles on déduit que la multiplication par p dans $H^1_{cont}(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)))$ se décompose en une application surjective

$$H^1_{cont}(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))) \to H^1_{cont}(\Gamma,p\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)))$$

suivie d'une application dont le conoyau s'injecte dans $H^1_{cont}(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))/p)$. On a donc

$$H^1_{cont}(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)))/p \hookrightarrow H^1_{cont}(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))/p)$$

Mais, i est F_∞/F-bon, donc $H^2(\Gamma,p\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))) = H^2(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))) = 0$ (cf 1.2.8), si bien que

$$H^1(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)))/p = H^1(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))/p)$$

Comme $H^1_{cont}(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))/p) = H^1(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))/p)$, c'est que

$$rg_pH^1_{cont}(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)))/p \leq rg_pH^1(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)))/p$$

et cela suffit à conclure.

$\square$

Preuve de 3.2.18 : Les suites spectrales

$$E_2^{p,q} = H^p(G_n,\mathcal{H}^q_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))) \Rightarrow \mathcal{H}^{p+q}_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) = E^{p+q}$$

donnent lieu à des morphismes $H^1(G_n,\mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))) \to \mathcal{H}^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$ fonctoriels en n. En 1.1.7, on en a déduit un morphisme

$$\beta : H^1(\Gamma,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))) \to \mathcal{H}^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$$

par passage à la limite inductive. Considérons maintenant la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(\Gamma, H^q_S(F_\infty, \mathbb{Z}/p^k(i))) \Rightarrow H^{p+q}_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) = E^{p+q}$$

Comme $cd_p\,\Gamma = 1$, celle-ci donne lieu à des morphismes

$$\beta'_k : H^1(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}/p^k(i))) \to \mathcal{H}^2_S(F_\infty, \mathbb{Z}/p^k(i))$$

fonctoriels en k. Si $\beta' = \varprojlim \beta'_k$, on voit, par fonctorialité des suites spectrales par rapport aux changements de groupes, que β est le composé de β' avec le morphisme naturel $H^1(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))) \to \varprojlim H^1(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}/p^k(i)))$.

La fonctorialité des suites spectrales par rapports au cup-produit ([J2] prop. 6.2) donne un système cohérent de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))) & \otimes & H^1_{cont}(\Gamma, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\cup} & H^1_{cont}(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^0(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}/p^k(i))) & \otimes & H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/p^k) & \xrightarrow{\cup} & H^1(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}/p^k(i))) \\
\uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) & \otimes & \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) & \xrightarrow{\cup} & \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i))
\end{array}$$

Le diagramme de l'énoncé est obtenu en passant à la limite projective sur k. L'absence de torsion dans le noyau du morphisme $\beta'' : H^1_{cont}(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))) \to \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ s'observe sur le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))) & \longrightarrow & H^1_{cont}(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))) \\
{\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\beta''}\downarrow \\
\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))
\end{array}$$

compte tenu du lemme 3.2.17 et de l'injectivité de β.

$\square$

Remarque 3.2.19 *Notons* $\beta : H^1(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))) \to \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ *le morphisme implicite dans la proposition 1.1.7 (et décrit plus haut). Si i est* F_∞/F*-bon, on peut identifier* $H^1(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i)))$ *et* $H^1_{cont}(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i)))/div$ *pour obtenir un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} H^0(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))) & \otimes & H^1_{cont}(\Gamma, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\cup} & H^1(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))) \\ \big\uparrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \otimes & \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\cup} & \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \end{array}$$

Afin de ne pas alourdir les notations (et pour rester cohérent avec la notation habituelle $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}_p)) = H^1_{cont}(\Gamma, \mathbb{Z}_p)$*), on abandonne désormais la notation* $H^q_{cont}(\Gamma, \bullet)$*, si bien que* $H^q(\Gamma, \bullet)$ *désignera, selon le contexte, la cohomologie discrète ou continue de* Γ*.*

Preuve de la proposition 3.2.15 : Si F_∞/F est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique, $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$ est Γ-cohomologiquement trivial et donc $(f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)))^\Gamma_n = f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$, si bien que la première suite exacte est une conséquence immédiate de 3.2.8 avec $B_\infty = \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$.

Supposons maintenant que F_∞/F n'est pas la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique. La première identification de 3.2.8 donne cette fois une suite exacte

$$0 \to \varprojlim \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \to Hom_\Lambda(\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty), \Lambda) \to \varprojlim C_n \to 0$$

où

$$\begin{aligned} C_n &= Coker\,(\mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \to (f_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)))^{\Gamma_n}) \\ &= Ker\,(H^1(\Gamma_n, t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))) \to H^1(\Gamma_n, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)))) \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'identifier C_n pour terminer la preuve. Pour $n >> 0$, on a $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) = t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))$, si bien que dans le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup\alpha_n} & H^1(\Gamma_n, t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup\alpha_n} & H^1(\Gamma_n, \mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)))
\end{array}$$

la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme. Une chasse rapide montre alors que ($\cup\alpha_n$ désigne tantôt la première flèche du carré ci-dessus, tantôt la seconde)

$$C_n = (t_{\mathbb{Z}_p}Ker\,(\mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)) \stackrel{\cup\alpha_n}{\to} H^1(\Gamma_n,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))))) \cup \alpha_n$$

Maintenant le lemme 3.2.18 donne (en remplaçant F par F_n) un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup\alpha_n} & H^1(\Gamma_n, \mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i))) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup\alpha_n} & \mathcal{H}^2_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))
\end{array} \tag{3.4}$$

dans lequel le noyau de la seconde flèche verticale est sans torsion, si bien que

$$t_{\mathbb{Z}_p}Ker\,(\mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)) \stackrel{\cup\alpha_n}{\to} H^1(\Gamma_n,\mathcal{H}^1_S(F_\infty,\mathbb{Z}_p(i)))) = t_{\mathbb{Z}_p}Ker\,(\mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)) \stackrel{\cup\alpha_n}{\to} \mathcal{H}^2_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)))$$

Soit maintenant, comme dans 3.2.22, $\alpha = (\alpha_n) \in \varprojlim \mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p)^\Gamma$. Si n est suffisamment grand on a

$$t_{\mathbb{Z}_p}X^{(i)}(F_\infty)^{\Gamma_n} \hookrightarrow \mathcal{H}^2_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i))$$

si bien que le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup\alpha} & X^{(i)}(F_\infty)^{\Gamma_n} \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup\alpha_n} & \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))
\end{array}$$

donne

$$t_{\mathbb{Z}_p}Ker\,(\mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \stackrel{\cup\alpha_n}{\rightarrow} \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))) = t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{N}^{(i)}(F_\infty)$$

compte tenu de la première suite exacte de 3.2.2. Enfin

$$C_n = (t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{N}^{(i)}(F_n)) \cup \alpha_n$$

Pour $n >> 0$, on a $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{N}^{(i)}(F_\infty) = t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{N}^{(i)}(F_n)$, donc

$$(t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{N}^{(i)}(F_n)) \cup \alpha_n = H^1(\Gamma_n, t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{N}^{(i)}(F_\infty)) \hookrightarrow H^1(\Gamma_n, t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)))$$

et l'on obtient donc bien $\varprojlim C_n = Hom(\Gamma, t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{N}^{(i)}(F_\infty))$.

$\square$

Remarque 3.2.20 *Les suites exactes de la proposition 3.2.15 sont indépendantes de tout choix de $a \in \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p)$.*

Proposition 3.2.21 *Soit $i \neq 0$ tel que $WX^{(i)}(F_\infty)^{\Gamma_n}$ soit fini pour tout $n \geq 0$. On a une suite exacte*

$$\begin{array}{ccccccc}
t_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty) & \hookrightarrow & \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty) & \rightarrow & E^0(E^0(\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty))) & & \\
& \rightarrow & (X^{(i)}(F_\infty)^0)^\vee & \rightarrow & (t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)))^\vee & \twoheadrightarrow & (t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{N}^{(i)}(F_\infty))^\vee
\end{array}$$

Pour un Λ-module M, on note $M^{irr} = \cup M^{\Gamma_n}$. La proposition 3.2.2 donne, après passage à la limite inductive :

Lemme 3.2.22 *On suppose $i \neq 0$. On a deux une suites exactes*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{N}^{(i)}(F_\infty) & \longrightarrow & \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup\alpha} & X^{(i)}(F_\infty)^{irr} & \to & 0 \\
 & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \\
0 & \to & \mathcal{N}^{(i)}(F_\infty) & \longrightarrow & \mathcal{N}^{(i)}_{loc}(F_\infty) & \xrightarrow{\cup\alpha} & WX^{(i)}(F_\infty)^{irr} & \to & 0
\end{array}$$

où $\mathcal{N}^{(i)}(F_\infty) = \varinjlim \mathcal{N}^{(i)}(F_n)$ *et* $\mathcal{N}^{(i)}_{loc}(F_\infty) = \varinjlim \mathcal{N}^{(i)}_{loc}(F_n)$.

□

Remarque 3.2.23 *Pour $i = 1$, la remarque 3.2.11 et le lemme ci-dessus montrent que la Λ-torsion $Z(F^c)$ du module attaché aux S-unités est isomorphe à $X^{(1)}(F_\infty)^{irr} \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee$. Un examen attentif de la première suite exacte de localisation (1.2.2) permet de retrouver sans peine les résultats du paragraphe intitulé "Le cas $i = 1$" (2.1.2).*

Preuve de 3.2.21 : Il faut distinguer les cas $i = 1$ et $i \neq 1$.

Supposons d'abord $i \neq 1$, dans ce cas l'hypothèse signifie que i est F_∞/F-bon. La première suite exacte du lemme 3.2.22 donne après tensorisation par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{N}^{(i)}(F_\infty) & \to & t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) & \to & X^{(i)}(F_\infty)^0 & & \\
 & & & \to & \mathcal{N}^{(i)}(F_\infty) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \to & \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \to & 0
\end{array} \tag{3.5}$$

Mais $f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty) = \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee$ (cf 2.1.15). Appliquons maintenant le lemme 3.2.8 avec $B_\infty = \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$. On obtient

$$\mathcal{N}^{(i)}(F_\infty) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee = E^0(E^0(\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee)) = E^0(E^0(\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)))$$

La suite exacte 3.5 dualisée devient alors celle du théorème.

Passons au cas $i = 1$. La seconde suite exacte du lemme 3.2.22 donne, après tensorisation avec $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \rightarrow & t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{N}^{(1)}(F_\infty) & \rightarrow & t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{N}^{(1)}_{loc}(F_\infty) & \rightarrow & X'(F_\infty)^0 & \\ & & & \rightarrow & \mathcal{N}^{(1)}(F_\infty)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \rightarrow & \mathcal{N}^{(1)}_{loc}(F_\infty)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p & \rightarrow \ 0 \end{array} \tag{3.6}$$

Montrons que l'on a

$$f_\Lambda\mathcal{X}^{(-1)}(F_\infty) = f_\Lambda(\mathcal{N}^{(1)}_{loc}(F_\infty)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee)$$

D'abord, comme dans le cas $i \neq 1$, la proposition 2.1.15 donne

$$f_\Lambda\mathcal{X}^{(-1)}(F_\infty) = f_\Lambda(E_S(F_\infty)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee)$$

mais la suite exacte (cf 2.1.13)

$$\mathcal{N}^{(1)}_{loc}(F_n) \hookrightarrow E_S(F_n)\otimes\mathbb{Z}_p \rightarrow \underset{S^{fd}(F)}{\widetilde{\oplus}} \mathbb{Z}_p[G_n/(G_n)_v] \tag{3.7}$$

montre après passage à la limite inductive, tensorisation avec $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ et dualité de Pontryagin, que

$$f_\Lambda(E_S(F_\infty)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee) = f_\Lambda(\mathcal{N}^{(1)}_{loc}(F_\infty)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee)$$

Maintenant le lemme 3.2.8 appliqué à $B_\infty = E_S(F_\infty)\otimes\mathbb{Z}_p$ montre que

$$\mathcal{N}^{(1)}(F_\infty)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee = E^0(E^0(E_S(F_\infty)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee)) = E^0(E^0(\mathcal{X}^{(-1)}(F_\infty)))$$

Remarquons encore que $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{N}^{(1)}_{loc}(F_\infty) = t_{\mathbb{Z}_p}E_S(F_\infty)\otimes\mathbb{Z}_p$ (cf 3.7). La suite exacte 3.6 dualisée donne alors celle du théorème.

Remarque 3.2.24 *La suite exacte 3.6 montre qu'en fait*

$$f_\Lambda\mathcal{X}^{(-1)}(F_\infty) = \mathcal{N}^{(1)}_{loc}(F_\infty)\otimes\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p{}^\vee$$

$\square$

Remarque 3.2.25 *Si i est F_∞/F-bon, on peut montrer la suite exacte du théorème 3.2.21 sans parler de cup-produit. Signalons deux preuves alternatives : La première consiste à adapter la preuve de [J1], §6, à notre situation, il faut pour cela utiliser le module $Y^{(-i)}(F_\infty)$. La seconde repose sur le passage à la limite projective de la suite exacte*

$$0 \quad \to \quad t_{\mathbb{Z}_p}(f_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty))_{\Gamma_n} \quad \to \quad cap^{(i)}(F_\infty/F_n)^\vee \quad \to \quad H_1(\Gamma_n, H_0^S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(-i)))$$

obtenue en comparant la co-descente de la suite exacte décrivant la Λ torsion de $\mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)$ avec celle qui décrit la $\mathbb{Z}_p$-torsion de $\mathcal{X}^{(-i)}(F_n)$.

Notons que, même si c'est moins apparent dans ces preuves alternatives, les morphismes $E^2(Df_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F_\infty)) \to (X^{(i)}(F_\infty)^0)^\vee$ obtenus dépendent, tout comme dans la proposition 3.2.21, du choix d'un générateur de Γ. Ce choix correspond à l'élément $a \in \mathcal{H}_S^1(F, \mathbb{Z}_p)$ implicite dans le lemme 3.2.22.

Corollaire 3.2.26 *$f_\Lambda \mathcal{X}^{(i)}(F_\infty)$ est libre si et seulement si*

$$X^{(i)}(F_\infty)^0 = t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}_S^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) \cup \alpha$$

$\square$

Remarque 3.2.27 *Si F^c/F est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique, alors $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{N}^{(i)}(F^c) = t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}_S^1(F^c, \mathbb{Z}_p(i))$ (cela provient de la Γ-trivialité cohomologique de $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}_S^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))$). Dans ce cas, on retrouve donc la suite exacte bien connue (indépendante de i)*

$$t_\Lambda \mathcal{X}^{(-i)}(F^c) \quad \hookrightarrow \quad \mathcal{X}^{(-i)}(F^c) \quad \to \quad E^0(E^0(\mathcal{X}^{(-i)}(F^c))) \twoheadrightarrow \quad (X^{(i)}(F^c)^0)^\vee$$

si bien que $f_\Lambda \mathcal{X}^{(i)}(F^c)$ est libre si et seulement si $X^{(i)}(F^c)^0 = 0$ (ce qui revient à $X'(F^c)^0 = 0$).

$\square$

Question 3.2.28 *Les deux derniers termes de la suite exacte de 3.2.21 s'annulent-ils toujours ? En d'autre termes : A-t-on toujours $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{H}_S^1(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) \cup \alpha = 0$?*

Chapitre 4

Capitulation

Nous donnons une description par cup-produit du sous-groupe $cap^{(i)}(F_\infty/F)$ de $\mathcal{H}^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$. Cette étude fournira une nouvelle approche du problème de capitulation. Dans les cas où l'on peut contrôler la taille de la décomposition des (p)-places dans l'extension $\tilde{F}/F$, on obtiendra un résultat positif pour le problème de capitulation faible. Comme annoncé dans l'introduction, nous exhibons une famille infinie de corps de nombres vérifiant $GGf^{(i)}$ pour tous les bons i (cf 4.2.3).

4.1 Théorie d'Iwasawa : suite

Grâce aux résultats du chapitre précédent, nous exprimons le lien précis entre cup-produit et capitulation. En 4.1.2 on étudie le lien entre les différents noyaux de Tate, il s'agit essentiellement d'affiner, pour des besoins ultérieurs, des résultats connus.

4.1.1 Cup produit et capitulation

Dans l'optique de l'interprétation du cup-produit avec un élément de $\mathcal{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p)$ par "montée et descente" dans la $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F qu'il définit, nous savons que la "montée" : $m_a : \mathcal{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \to X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma$ est surjective et son noyau (les normes universelles, cf prop. 3.2.2) a fait l'objet du chapitre précédent. Ici on étudie la "descente" : $d_a : X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma \to \mathcal{H}^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$.

Fixons, comme auparavant, un élément $a \in \mathcal{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p)$ non divisible par

p, F_∞/F la $\mathbb{Z}_p$-extension qu'il détermine, F_n/F l'étage de degré p^n, $\Gamma_n = G(F_\infty/F_n)$, $\Gamma = \Gamma_0$, $G_n = \Gamma/\Gamma_n = G(F_n/F)$, et $\alpha = (\alpha_n) \in \varprojlim \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p)^\Gamma$ un élément vérifiant $\alpha_0 = a$. Remarquons que $\alpha_n \in \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p)$ est un élément non divisible par p, et qui définit la $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F_n. Par abus de notation, on appelle encore $cor_F^{F_\infty}$ l'application naturelle $X^{(i)}(F_\infty) \to \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ (c'est la limite projective des applications de co-restriction).

Notons I l'idéal d'augmentation de Λ (ie. le noyau de $\Lambda \to \mathbb{Z}_p$). Le théorème suivant exprime le lien entre cup-produit et capitulation :

Théorème 4.1.1 *Pour tout corps de nombres F et tout $i \neq 0$, on a*

$$\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a = cor_F^{F_\infty}(X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma)$$

et on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a \longrightarrow \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \longrightarrow IX^{(i)}(F_\infty)_\Gamma \to 0$$

Si l'on suppose de plus que i est F_∞/F-bon (par ex. $i \geq 2$), alors

$$cap^{(i)}(F_\infty/F) = cor_F^{F_\infty} X^{(i)}(F_\infty)^0 = (X^{(i)}(F_\infty)^0)_\Gamma$$

et on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a \longrightarrow cap^{(i)}(F_\infty/F) \longrightarrow I(X^{(i)}(F_\infty)^0)_\Gamma \to 0$$

Preuve : La seconde affirmation est donnée par le lemme 1.2.8. Passons à l'égalité

$$\mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a = cor_F^{F_\infty}(X^{(i)}(F_\infty)^\Gamma)$$

sous la seule hypothèse $i \neq 0$. Comme dans le chapitre précédent, considérons le cup-produit

$$\mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \varprojlim \mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p) \to X^{(i)}(F_\infty)$$

Le théorème 3.1.1 dit que les flèches horizontales supérieures du cube commutatif suivant sont des isomorphismes (voir la preuve de la proposition 3.2.2 pour la commutativité de la face supérieure)

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{H}^0(m,1) \arrow[dl, "(res_{F_n}^{F_m})^{-1}"'] \arrow[rr, "\cup\alpha_m", "\sim"'] & & \hat{H}^0(m,2) \arrow[dl, "\widehat{cor_{F_n}^{F_m}}"'] \arrow[dd, "\widehat{cor_F^{F_m}}"] \\
\hat{H}^0(n,1) \arrow[rr, "\cup\alpha_n", "\sim"'] & & \hat{H}^0(n,2) \arrow[dd, "\widehat{cor_F^{F_m}}"] & \\
 & \mathcal{H}_S^1(F,\mathbb{Z}_p(i)) \arrow[uu, "\widehat{res_F^{F_m}}"] \arrow[dl] \arrow[rr, "\cup a_m"] & & \mathcal{H}_S^2(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^m \arrow[dl] \\
\mathcal{H}_S^1(F,\mathbb{Z}_p(i)) \arrow[uu, "\widehat{res_F^{F_n}}"] \arrow[rr, "\cup a_n"] & & \mathcal{H}_S^2(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^n &
\end{tikzcd}$$

On a noté, par manque de place, $\hat{H}^0(n,1)$ (resp. $\hat{H}^0(n,2)$) pour $\hat{H}^0(G_n,\mathcal{H}_S^1(F_n,\mathbb{Z}_p(i)))$ (resp. $\hat{H}^0(G_n,\mathcal{H}_S^2(F_n,\mathbb{Z}_p(i)))$). Par passage à la limite projective, on obtient donc un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\varprojlim \hat{H}^0(G_n,\mathcal{H}_S^1(F_n,\mathbb{Z}_p(i))) & \underset{\sim}{\xrightarrow{\cup\alpha}} & \varprojlim \hat{H}^0(G_n,\mathcal{H}_S^2(F_n,\mathbb{Z}_p(i))) \\
\widehat{res_F^{F_\infty}} \uparrow & & \widehat{cor_F^{F_\infty}} \downarrow \\
\mathcal{H}_S^1(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup a} & \mathcal{H}_S^2(F,\mathbb{Z}_p(i))
\end{array}$$

La première égalité du théorème provient alors de la surjectivité de la première flèche verticale.

Pour obtenir les suites exactes cherchées, on utilise le lemme suivant :

Lemme 4.1.2 *Pour tout Λ-module M, le conoyau de l'application naturelle $M^\Gamma \to M_\Gamma$ est isomorphe à IM_Γ*

Preuve du lemme : Soit γ un générateur de Γ. La suite exacte

$$0 \rightarrow M^{\Gamma} \longrightarrow M \xrightarrow{\gamma-1} IM \rightarrow 0$$

donne par Γ-cohomologie une suite exacte

$$0 \rightarrow IM^{\Gamma} \longrightarrow M^{\Gamma} \longrightarrow M_{\Gamma} \longrightarrow IM_{\Gamma} \rightarrow 0$$

$\square$

Appliquant le lemme au module $M = X^{(i)}(F_\infty)$ (resp. $M = X^{(i)}(F_\infty)^0$), on obtient la première (resp. la seconde) suite exacte. Cela termine la preuve du théorème.

$\square$

Remarque 4.1.3 *Des résultats analogues sont obtenus dans [Sh], §4, pour le twist $i = 1$, au-dessus de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.*

En remplaçant F par F_n, et donc a par α_n, on obtient le résultat asymptotique suivant :

Corollaire 4.1.4 *On suppose que $i \neq 0$ est F_∞/F est bon. L'inclusion*

$$\mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \cup \alpha_n \subset cap^{(i)}(F_\infty/F_n)$$

est une égalité pour n suffisamment grand.

$\square$

Remarque 4.1.5 *L'inclusion $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a \subset cap^{(i)}(F_\infty)$ pour les bons i peut se déduire du carré commutatif* (3.4)

$$\begin{array}{ccc}
H^0(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))) & \xrightarrow{\cup a} & H^1(\Gamma, \mathcal{H}^1_S(F_\infty, \mathbb{Z}_p(i))) \\
\uparrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow{\cup a} & \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))
\end{array}$$

obtenu grâce au lemme 3.2.18. Cet argument est bien plus rapide puisqu'il n'utilise aucun résultat de la section 3.1.1. Néanmoins, il semble impossible de décrire le conoyau de l'application

$$\cup a : \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \to cap^{(i)}(F_\infty/F)$$

sans avoir recours à la comparaison du cup-produit avec la différentielle étudiée en 3.1.1.

Le lemme suivant précise la signification de la condition

$$\mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \cup \alpha_n = cap^{(i)}(F_\infty/F)$$

Lemme 4.1.6 *On suppose que $i \neq 0$ est F_∞/F-bon. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{H}^1_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i)) \cup \alpha_n = cap^{(i)}(F_\infty/F_n)$.
2. $\mathcal{H}^1_S(F_m, \mathbb{Z}_p(i)) \cup \alpha_m = cap^{(i)}(F_\infty/F_m)$ *pour tout* $m \geq n$.
3. $cap^{(i)}(F_\infty/F_n) = cap^{(i)}(F_\infty/F_{n+1})$.
4. $cap^{(i)}(F_\infty/F_n) = cap^{(i)}(F_\infty/F_m)$ *pour tout* $m \geq n$.
5. $X^{(i)}(F_\infty)^{\Gamma_n} = X^{(i)}(F_\infty)^0$.

Preuve : Montrons d'abord l'équivalence de 1, 2 et 5. Il suffit de montrer $1 \Rightarrow 5 \Rightarrow 2$. Il suffit de remplacer F par F_m (et donc a par α_m) dans la première égalité du théorème 4.1.1 pour obtenir $5 \Rightarrow 2$. L'implication $1 \Rightarrow 5$ découle directement de la seconde suite exacte du théorème en remplaçant F par F_n (et donc a par α_n).

Passons à la l'équivalence de 3, 4 et 5. Le lemme 1.2.8 donne $5 \Rightarrow 4$. Reste $3 \Rightarrow 5$. Soit I_n le noyau de l'augmentation $\Lambda \to \mathbb{Z}_p[G_n]$ et $\nu_{n+1,n} = \frac{\gamma^{p^{n+1}}-1}{\gamma^{p^n}-1}$ où γ est un générateur de Γ. 3 signifie que $I_{n+1}(X^{(i)}(F_\infty)^0) = I_n(X^{(i)}(F_\infty)^0)$, mais alors l'application surjective

$$I_n(X^{(i)}(F_\infty)^0) \stackrel{\nu_{n+1,n}}{\to} I_{n+1}(X^{(i)}(F_\infty)^0)$$

est automatiquement injective, et cela n'est possible que si $I_n(X^{(i)}(F_\infty)^0)$ est trivial, c'est-à-dire si $X^{(i)}(F_\infty)^0 = X^{(i)}(F_\infty)^{\Gamma_n}$.

$\square$

En faisant varier a, on obtient le théorème suivant :

Théorème 4.1.7 *Soit F un corps de nombres quelconque ; si $i \neq 0$ est $\tilde{F}/F$-bon, alors*

$$\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p) \subset cap^{(i)}(\tilde{F}/F)$$

□

4.1.2 Les noyaux de Tate

On s'attarde ici sur le cup-produit avec un élément $a_c \in \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p)$ définissant l'extension cyclotomique, ou avec son image modulo une puissance de p. Cela nous conduit naturellement à considérer les différents noyaux de Tate, notés V_i, et la capitulation des groupes de cohomologie p-adiques en degré 2 dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.

Les résultats présentés dans cette section ne sont guère nouveaux, et remontent essentiellement à [G4]. Il semble néanmoins difficile de trouver une référence suffisamment précise pour les besoins de la suite, c'est pourquoi on se propose de les récapituler et de les affiner lorqu'il y a lieu (comparer avec [AM] et [Hu]).

Définition

Pour $i, j \in \mathbb{Z}$, pour $k \leq n + v_p(j - i)$, la réduction modulo p^k donne lieu à une injection

$$\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(j))(i - j)/p^k \to \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$$

Notons $V_j(F, p^k, i)$ son image. Notons $H^q(F, \bullet)$ la cohomologie continue du groupe de Galois absolu G_F. Par inflation, on regardera $\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ (resp. $V_j(F, p^k, i)$) comme un sous-groupe de $H^1(F, \mathbb{Z}_p(i))$ (resp. de $H^1(F, \mathbb{Z}/p^k(i))$). Le résultat suivant est bien connu :

Proposition 4.1.8 *Notons δ (resp. δ_S) le G_F-cobord (resp. G_S-cobord) associé à la suite exacte*

$$0 \to \mathbb{Z}_p(j - i) \longrightarrow \mathbb{Z}_p(j - i) \longrightarrow \mathbb{Z}/p^k(j - i) \to 0$$

Alors le sous-espace $H^1(F,\mathbb{Z}_p(j))/p^k(i-j)\cap H^1(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^k \subset H^1(F,\mathbb{Z}/p^k(i))$ *de* $H^1(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^k$ *est l'orthogonal de* $\delta(\mathbb{Z}/p^k(j-i))$ *pour le cup-produit*

$$H^1(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^k \otimes H^1(F,\mathbb{Z}_p(j-i))[p^k] \to H^2(F,\mathbb{Z}_p(j))$$

et le sous-espace $V_j(F,p^k,i)\cap V_i(F,p^k,i)$ *de* $V_i(F,p^k,i)$ *est l'orthogonal de* $\delta_S(\mathbb{Z}/p^k(j-i))$ *pour le cup-produit*

$$\mathcal{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^k \otimes \mathcal{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(j-i))[p^k] \to \mathcal{H}^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$$

Preuve : Il s'agit de l'interprétation classique de l'homomorpisme de Bockstein par cup-produit. Compte-tenu de la suite exacte

$$H^1(F,\mathbb{Z}_p(j))/p^k \longrightarrow H^1(F,\mathbb{Z}/p^k(j)) \longrightarrow H^1(F,\mathbb{Z}_p(j))$$

(resp. son analogue pour G_S), il suffit d'examiner le diagramme commutatif suivant (resp. son analogue pour G_S) :

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \otimes & H^1(F,\mathbb{Z}_p(j-i)) & \xrightarrow{\cup} & H^2(F,\mathbb{Z}_p(j)) \\
{\scriptstyle id}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \delta} & & \uparrow{\scriptstyle \delta} \\
H^1(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \otimes & \mathbb{Z}/p^k(j-i) & \xrightarrow{\cup} & H^1(F,\mathbb{Z}/p^k(j))
\end{array}$$

□

Fixons $i=j=1$, $k\le n$ et notons (comme en 1.2) $T_p = \varprojlim_t \mu_{p^t}$ le module de Tate des racines de l'unité. On a alors $H^1(F,T_p)/p^k = H^1(F,\mu_{p^k}) = F^\times/p^k$. Fixons un générateur z de T_p et notons ζ le genérateur de μ_{p^k} qu'il détermine. Le choix de z donne lieu au diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathbb{Z}_p(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(1) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^k(1) & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle z}\big\downarrow & & \big\downarrow & & {\scriptstyle \zeta}\big\downarrow & & \\
0 & \to & T_p & \to & \varprojlim_p \overline{F}^\times & \longrightarrow & \overline{F}^\times & \to & 0
\end{array}$$

où $\overline{F}$ désigne une clôture algébrique de F.

Notant δ le cobord de l'une ou l'autre de ces suites exactes et $(x, y) = \delta x \cup \delta y$, on retrouve donc bien l'interprétation du noyau de Tate classique :

$$V_2(F, p^k, 1) = \{x \in F^\times, (x, \zeta) = 0\}/F^{\times p^k}$$

Il est à noter que la proposition 4.1.8 ne préjuge aucunement de la nullité du cup-produit $\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup H^1(F^c/F, \mathbb{Z}_p)$.

Comparaison

On étudie ici le lien entre les V_i. Cette comparaison entre les différents noyaux de Tate a fait l'objet de de nombreuses études, notamment dans le but de déterminer les premiers étages des $\mathbb{Z}_p$-extensions de F (voir e.g. [G4]). Les résultats obtenus ici serviront d'abord à comparer différentes conjectures (4.2.1), mais permettront aussi d'utiliser les méthodes galoisiennes (propres à V_0) pour contrôler le comportement des V_i par rapport à la localisation (4.2.3).

Pour simplifier, on suppose $k \leq n$ et l'on note $V_i(F, p^k) = V_i(F, p^k, 0)$. Si E/F est une extension galoisienne, on note encore $V_i(E/F, p^k)$ l'image de

$$\mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i))^{G(E/F)}(-i) \to \mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}/p^n)$$

(si $i \neq 0$, on a simplement $V_i(E/F, p^k) = res^E_F V_i(F, p^k)$). Le résultat suivant est inspiré de [G1].

Proposition 4.1.9 *(comparer à [AM], lemma 2.1 et [Hu] cor. 2.4) Soit F un corps de nombres contenant exactement μ_{p^n}, et F^c/F sa $\mathbb{Z}_p$-extension* *cyclotomique. Soit i, j deux entiers F-bons et*

$$h = min(v_p(X^{(i)}(F^c)^0_\Gamma), v_p(X^{(j)}(F^c)^0_\Gamma))$$

où $v_p(M)$ désigne l'exposant du p-groupe abélien M (la plus petite puissance de p qui tue M). Alors

$$n + v_p(i-j) \geq h + k \Rightarrow V_i(F, p^k) = V_j(F, p^k)$$

Si l'on suppose de plus que l'un des deux modules $X^{(i)}(F^c)^0$, $X^{(j)}(F^c)^0$ est fixé par Γ, alors on a en fait l'équivalence

$$V_i(F, p^k) = V_j(F, p^k) \Leftrightarrow n + v_p(i-j) \geq h + k$$

Rappel 4.1.10 *Si l'on suppose de plus que i est F^c/F-bon, alors $cap^{(i)}(F^c/F)) = (X^{(i)}(F^c)^0)_\Gamma$.*

Remarque 4.1.11 *Si $v_p(i-j) > 0$, et $k \leq n + v_p(i-j)$, il y a encore un sens à comparer $V_i(F, p^k, i)$ et $V_j(F, p^k, i)$. On peut alors énoncer les mêmes conditions nécessaires et suffisantes pour l'égalité de ces deux sous-espaces. La preuve est obtenue en remplaçant le twist 0 par le twist i dans tout ce qui suit.*

Proposition 4.1.12 *Soit F un corps de nombres contenant μ_{p^n} et E/F une sous-extension finie de $\tilde{F}/F$. Supposons i F-bon, j E-bon, et $X^{(j)}(E^c)^0 = 0$. Alors $V_i(E/F, p^n) \subset V_j(E, p^n)$.*

Si $i \neq 0$, on a déjà remarqué que $V_i(E/F, p^n) = res_F^E V_i(F, p^n)$. Dans ce cas, la proposition 4.1.12 se déduit aisément de la proposition 4.1.9. Nous traiterons le cas $i = 0$ un peu plus loin.

Commençons par un lemme :

Lemme 4.1.13 *Soit $i \in \mathbb{Z}$; si F contient μ_{p^k}, alors $V_i(F, p^k)$ est l'image réciproque de $(\mathcal{H}^1_S(F^c, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(i)^\Gamma)^{div}[p^k](-i)$ par l'application naturelle*

$$\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k) \to \mathcal{H}^1_S(F^c, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

où l'on a noté F^c/F la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique.

Preuve : Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathbb{Z}_p(i) & \xrightarrow{p^k} & \mathbb{Z}_p(i) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^k(i) & \to & 0 \\
 & & \Big\downarrow & & \frac{1}{p^k}\Big\downarrow & & \frac{1}{p^k}\Big\downarrow & & \\
0 & \to & \mathbb{Z}_p(i) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p(i) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i) & \to & 0
\end{array}$$

En prenant la G_S-cohomologie, on obtient le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
Z_i & \longrightarrow & Z_i & \hookrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i))/p^k & \hookrightarrow & \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))[p^k] \\
\downarrow & & f_i \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p[p^k] & \overset{g_i}{\hookrightarrow} & \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))[p^k] & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))[p^k] \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

où Z_i désigne $\mathbb{Z}/p^k(i)$ pour $i \neq 0$ et 0 sinon. On voit sur ce diagramme que $V_i(F, p^k)(i) = f_i^{-1}(Im\, g_i)$. Maintenant, le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k(i)) & \xrightarrow{res} & \mathcal{H}^1_S(F^c, \mathbb{Z}/p^k(i)) \\
f_i \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i)) & \xrightarrow[\sim]{res} & \mathcal{H}^1_S(F^c, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^\Gamma
\end{array}$$

montre que l'application détordue

$$(res \circ f_i)(-i) : \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}/p^k) \to \mathcal{H}^1_S(F^c, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

est indépendante de i : c'est l'application naturelle de l'énoncé. Puisque $Im\, g_i = \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^{div}[p^k]$, c'est que

$$V_i(F, p^k) = (res \circ f_i)(-i)^{-1}((\mathcal{H}^1_S(F^c, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i))^\Gamma)^{div}[p^k](-i))$$

$\square$

Preuve de 4.1.12 : On considère les accouplements

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^1_S(E^c, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \otimes & \mathcal{X}(E^c) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \\ \Big\uparrow & & \Big\downarrow & & \Big\uparrow \\ \mathcal{H}^1_S(E^c, \mathbb{Z}/p^n)^\Gamma & \otimes & \mathcal{X}(E^c)_\Gamma/p^n & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p \end{array} \qquad (4.1)$$

Comme sous-module de $\mathcal{H}^1_S(E^c, \mathbb{Z}/p^n)^\Gamma$, $(\mathcal{H}^1_S(E^c, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(j)^\Gamma)^{div}[p^n](-j)$ est l'orthogonal, pour le second accouplement dans 4.1, du sous-module $(t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(E^c)(-j)_\Gamma)/p^n(j)$ de $\mathcal{X}(E^c)_\Gamma/p^n$. D'après le lemme 4.1.13, $res_E^{E^c} V_j(E, p^n)$ est donc l'orthogonal de $(t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(E^c)(-j)_\Gamma)/p^n(j)$ et il suffit de montrer que $res_E^{E^c} V_0(E/F, p^n)$ est orthogonal à $(t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(E^c)(-j)_\Gamma)/p^n(j)$.

Comme j est E-bon, $t_\Lambda\mathcal{X}(E^c)(-j)_\Gamma$ est fini et on a une suite exacte

$$(t_\Lambda\mathcal{X}(E^c)(-j))_\Gamma \quad \hookrightarrow \quad t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(E^c)(-j)_\Gamma \quad \twoheadrightarrow \quad t_{\mathbb{Z}_p}f_\Lambda\mathcal{X}(E^c)(-j))_\Gamma$$

L'hypothèse $X^{(j)}(E^c)^0 = 0$ signifie la liberté de $f_\Lambda\mathcal{X}(E^c)$ (cf rem. 3.2.27). On voit donc finalement que $(t_\Lambda\mathcal{X}(E^c)(-j))_\Gamma = t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(E^c)(-j)_\Gamma$. Montrons donc que $res_E^{E^c} V_0(E/F, p^n)$, comme sous-module de $\mathcal{H}^1_S(E^c, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$, est orthogonal à $t_\Lambda\mathcal{X}(E^c)$, ce qui terminera le preuve. Remarquons d'abord que $V_0(E/F, p^n) = H^1(\tilde{F}/E, \mathbb{Z}/p^n)$. L'orthogonalité souhaitée provient alors de la surjectivité de la première flèche verticale dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^1_S(\tilde{F}/E,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \otimes & \mathcal{X}(E^c) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \\ \Big\uparrow & & \Big\downarrow & & \Big\uparrow \\ \mathcal{H}^1_S(\tilde{F}/F,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \otimes & \mathcal{X}(F^c) & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \end{array}$$

et de l'orthogonalité de $\mathcal{H}^1_S(\tilde{F}/F,\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ et $t_\Lambda\mathcal{X}(F^c)$ (0 est F-bon).

□

Preuve de 4.1.9 : Encore grâce au lemme 4.1.13, on voit que $V_i(F,p^k) = V_j(F,p^k)$ si et seulement si

$$t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(F^c)(-i)_\Gamma/p^k(i) = t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(F^c)(-j)_\Gamma/p^k(j)$$

comme sous-modules de $\mathcal{X}(F^c)_\Gamma/p^k$. Comme $t_\Lambda\mathcal{X}(F^c)(-i)_\Gamma$ est fini, c'est que $t_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{X}(F^c)(-i)_\Gamma/p^k(i)$ est l'image réciproque de $t_{\mathbb{Z}_p}f_\Lambda\mathcal{X}(F^c)(-i)_\Gamma/p^k(i)$ dans $\mathcal{X}(F^c)(-i)_\Gamma/p^k(i)$, et de même pour j. Ainsi, $V_i(F,p^k) = V_j(F,p^k)$ si et seulement si l'on a, dans $\mathcal{X}(F^c)_\Gamma/p^k$, l'égalité suivante :

$$t_{\mathbb{Z}_p}f_\Lambda\mathcal{X}(F^c)(-i)_\Gamma/p^k(i) = t_{\mathbb{Z}_p}f_\Lambda\mathcal{X}(F^c)(-j)_\Gamma/p^k(j)$$

Il est bien connu (cf rem. 3.2.27) que $(X^{(i)}(F^c)^0)^\vee$ est isomorphe au conoyau de l'application canonique

$$f_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(F^c) \to E^0(E^0(f_\Lambda\mathcal{X}^{(-i)}(F^c)))$$

où, comme en 1.2.2, $E^0(M)$ désigne le Λ-module à gauche $Hom_\Lambda(M,\Lambda)$. La preuve de la proposition 4.1.9 se réduit donc au lemme algébrique suivant :

Lemme 4.1.14 *Soit M un Λ-module noethérien, sans torsion et $e \in \mathbb{Z}$. Soit H le conoyau de l'application naturelle $M \to E^0(E^0(M))$. Notons encore*

$$h = min(v_p(H^\Gamma), v_p(H(e)^\Gamma)$$

et

$$n = v_p((\mathbb{Z}_p{}^\times : \kappa(\Gamma))) + 1 = v_p(m_1(F))$$

κ étant le caractère cyclotomique. Alors

$$n + v_p(e) \geq h + k \Rightarrow (t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma)/p^k = (t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma)/p^k$$

Si l'on suppose de plus que l'un des deux Λ-modules H, $H(e)$ est fixé par Γ, alors on a en fait l'équivalence

$$(t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma)/p^k = (t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma)/p^k \Leftrightarrow n + v_p(e) \geq h + k$$

Preuve de 4.1.14, sens direct : Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 4.1.15 *Soit Z un $\mathbb{Z}_p$-module noethérien, h et k deux entiers naturels, alors l'image de l'application naturelle $Z/p^{h+k}[p^h] \to f_{\mathbb{Z}_p} Z/p^k$ est triviale.*

Preuve : C'est trivial si l'on décompose $Z = t_{\mathbb{Z}_p} Z \oplus f_{\mathbb{Z}_p} Z$.

□

Supposons $n + v_p(e) \geq h + k$, on peut alors faire les identifications suivantes : $M_\Gamma/p^{h+k} = M(e)_\Gamma/p^{h+k}$ et $M_\Gamma/p^k = M(e)_\Gamma/p^k$. Il s'agit de montrer que $t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k$ et $t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma/p^k(-e)$, vus comme sous-modules de M_Γ/p^k, sont égaux. D'abord ils ont même ordre puisque

$$\#(f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k) = \#(f_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma/p^k) = p^{k\, rg_\Lambda M}$$

Ensuite le lemme 4.1.15 appliqué à $Z = M_\Gamma$ et $Z = M(e)_\Gamma$ montre que tous deux contiennent l'image de l'application naturelle $M_\Gamma/p^{h+k}[p^h] \to M_\Gamma/p^k$. On peut supposer sans perte de généralité que $h = v_p(H^\Gamma)$. Dans ce cas $v_p(t_{\mathbb{Z}_p}(M_\Gamma)) = h$ et $M_\Gamma/p^{h+k}[p^h]$ contient $t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^{h+k}$. On en déduit que $t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma(-e)$ contient $t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k$, ce qui termine la preuve puisqu'ils ont même ordre.

□

Preuve de 4.1.14, suite : Passons à l'équivalence dans le cas où l'un des deux Λ-modules H, $H(e)$ est fixé par Γ. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 4.1.16 *On conserve les hypothèses et notations du lemme 4.1.14. Soit Z un Λ-module fini. Si Z et $Z(e)$ sont fixés par Γ, c'est que $v_p(Z) \leq v_p(e) + n$.*

Preuve : C'est immédiat si l'on décompose Z en Λ-modules cycliques (comme groupes).

$\square$

Il s'agit de montrer que si $t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma / p^k = t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma / p^k$, alors $v_p(e) + n \geq h + k$. Comme dans [G1], 6., on définit les Λ-modules Y, Y_e, Z et Z_e par l'exactitude des suites suivantes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & Y & \longrightarrow & M & \longrightarrow & f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma / p^k & \to & 0 \\
0 & \to & Y_e & \longrightarrow & M(e) & \longrightarrow & f_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma / p^k & \to & 0 \\
0 & \to & Y & \longrightarrow & E^0(E^0(M)) & \longrightarrow & Z & \to & 0 \\
0 & \to & Y_e & \longrightarrow & E^0(E^0(M))(e) & \longrightarrow & Z_e & \to & 0
\end{array}$$

Par hypothèse, on a $t_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma / p^k = t_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma / p^k$, et donc $Y_e = Y(e)$ et $Z_e = Z(e)$.

Considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & Y & \to & Y & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M & \to & E^0(E^0(M)) & \to & H & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma / p^k & \to & Z & \to & H & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

En prenant la Γ-cohomologie, on observe que le cobord

$$H^\Gamma \to f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma / p^k$$

est nul. Cela résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H^\Gamma & \longrightarrow & M_\Gamma \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
H^\Gamma & \longrightarrow & f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k
\end{array}$$

Ainsi, la suite

$$0 \;\to\; f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k \;\longrightarrow\; Z^\Gamma \;\longrightarrow\; H^\Gamma \;\to\; 0$$

est exacte. De la même façon, on a une suite exacte

$$0 \to\; f_{\mathbb{Z}_p} M(e)_\Gamma/p^k \;\longrightarrow\; Z(e)^\Gamma \;\longrightarrow\; H(e)^\Gamma \;\to\; 0$$

Notons alors Z' l'image réciproque, dans Z, de $H' = H^\Gamma \cap H(e)^\Gamma$. Les deux suites exactes ci-dessus montrent que Z' et $Z'(e)$ sont fixés par Γ. Reste, pour appliquer le lemme 4.1.16, à déterminer l'exposant de Z'. On peut supposer, sans perte de généralité, que Z est fixé par Γ. La surjection $\Lambda^{rg_\Lambda M} \simeq E^0(E^0(M)) \twoheadrightarrow Z$ montre alors que $rg_p Z/p \leq rg_\Lambda M$. On en déduit que $rg_p Z'/p \leq rg_\Lambda M$. La suite exacte tautologique

$$0 \to\; f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k \;\longrightarrow\; Z' \;\longrightarrow\; H' \;\to\; 0$$

montre alors que $v_p(Z') = k + v_p(H') = k + h$ puisque $f_{\mathbb{Z}_p} M_\Gamma/p^k = (\mathbb{Z}/p^k)^{rg_\Lambda M}$. Grâce au lemme 4.1.16, on en conclut que $v_p(e) + n \geq k + h$, et cela termine la preuve.

□

Remarque 4.1.17 *Si aucun des deux Λ-modules H, $H(e)$, n'est fixé par Γ l'équivalence dans 4.1.14 n'est plus vraie (et donc a priori dans 4.1.9 non plus) : cela tient au fait qu'on ne contrôle plus le p-rang de Z'. L'exemple suivant illustre bien la situation : soit M l'idéal $((1+p)^{-1}(1+T)-1, p^2)$ de $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$, et choisissons $n = e = k = 1$. On a alors $H = \mathbb{Z}/p^2(1)$, si bien que ni H, ni $H(1)$ n'est fixé par Γ et que $h = 1$. On vérifie facilement que les sous-groupes $t_{\mathbb{Z}_p}M_\Gamma/p$ et $t_{\mathbb{Z}_p}M(1)_\Gamma/p$ de M_Γ/p sont égaux, bien que l'inégalité $h + k \leq n + v_p(e)$ ne soit pas satisfaite. En fait $Z = \mathbb{Z}_p[[T]]/(T^2, pT, p^2)$ et $Z' = Z^\Gamma = pZ + TZ = \mathbb{Z}/p \oplus \mathbb{Z}/p$, le raisonnement de la preuve ci-dessus donne donc seulement $n + v_p(e) \geq v_p(Z') = 1$.*

4.2 La conjecture faible

Nous étudions le problème de capitulation faible à l'aide des outils développés précédemment.

4.2.1 Récapitulatif

Réécrivons ici les hypothèses dont l'étude, motivée par la conjecture (GG), a été proposée en 2.2 :

$FCap^{(i)}(F)$: (capitulation forte) Il existe une $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F vérifiant $cap^{(i)}(F_\infty/F) = \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$

$TCap^{(i)}(F)$: (capitulation totale) $cap^{(i)}(\tilde{F}/F) = \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$

$fCap^{(i)}(F)$: (capitulation faible) $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \neq 0 \Rightarrow cap^{(i)}(\tilde{F}/F) \neq 0$

Les résultats de la section 4.1.1 (pour $j = 0$) suggèrent d'énoncer, parallèlement, les hypothèses suivantes :

$FC_{i,j}(F)$: Il existe $a \in \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(j))$ tel que $\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup a = \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i+j))$

$TC_{i,j}(F)$: $\mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(j)) = \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i+j))$

$fC_{i,j}(F)$: $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i+j)) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \cup \mathcal{H}^1_S(F, \mathbb{Z}_p(j)) \neq 0$

L'étude de ces trois dernières hypothèses est motivée indépendamment par la conjecture suivante, proposée par McCallum et Sharifi dans [MCS] :

Conjecture 4.2.1 *([MCS], conj. 5.3) Si $F = \mathbb{Q}(\mu_p)$ alors $TC_{1,1}(F)$ est vraie.*

Proposition 4.2.2 *Soit $F = \mathbb{Q}(\mu_p)$. Si p vérifie la conjecture de Vandiver, alors*

$$TC_{1,1}(F) \Leftrightarrow TC_{i,j}(F)$$

pour tous i, j F-bons.

Preuve : Il est bien connu que sous la conjecture de Vandiver, on a $X'(F^c)^0 = 0$. Le résultat découle alors de la proposition 4.1.9.

$\square$

Les six hypothèses ci-dessus sont en fait liées, pour F quelconque, par la proposition suivante :

Proposition 4.2.3 *Soit $i \neq 0$ $\tilde{F}/F$-bon. On a les implications suivantes :*

$$\begin{array}{ccccc} FCap^{(i)}(F) & \Rightarrow & TCap^{(i)}(F) & \Rightarrow & fCap^{(i)}(F) \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ FC_{i,0}(F) & \Rightarrow & TC_{i,0}(F) & \Rightarrow & fC_{i,0}(F) \end{array}$$

De plus, pour une infinité de $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F, il existe n_0 tel que

$$FCap^{(i)}(F) \Rightarrow FC_{i,0}(F_n)\ \forall n \geq n_0$$

Si $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ cyclique, alors on les implications supplémentaires

$$FCap^{(i)}(F) \Leftarrow TCap^{(i)}(F)$$

$$FC_{i,0} \Leftarrow TC_{i,0}(F)$$

Enfin si $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est cyclique d'ordre p, on a en plus

$$TCap^{(i)}(F) \Leftarrow fCap^{(i)}(F)$$

$$TC_{i,0} \Leftarrow fC_{i,0}(F)$$

Preuve : Le premier diagramme d'implications est donné par le corollaire 4.1.4 et le théorème 4.1.7. L'implication asymptotique est une conséquence directe du théorème 2.2.3 et du corollaire 4.1.4. Si $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est cyclique, l'équivalence de $FC_{i,0}(F)$ et $TC_{i,0}(F)$ est triviale ; l'implication $TCap^{(i)}(F) \Rightarrow FCap^{(i)}(F)$, quant à elle, ne semble pas posséder de preuve immédiate ; en fait c'est le théorème 2.3.4 réinterprété grâce au théorème 2.2.3. Les deux dernières implications sont triviales.

$\square$

En particulier on voit que la conjecture 4.2.1 et la conjecture de Vandiver (toutes deux vérifiées pour $p < 1000$, cf [Sh]) entraînent la validité de l'hypothèse $TCap^{(i)}(F)$ pour $F = \mathbb{Q}(\mu_p)$.

Remarque 4.2.4 *En fait, on peut préciser l'implication asymptotique de la façon suivante. Pour une infinité de $\mathbb{Z}_p$-extension F_∞/F il existe n_0 tel que :*

$$FCap^{(i)}(F) \Rightarrow V_i(F_n, p) \cup V_0(F_n/F, p) = \mathcal{H}^2_S(F_n, \mathbb{Z}_p(i))/p \quad \forall n \geq n_0$$

4.2.2 Résultats négatifs

Nous donnons ici deux résultats parallèles, tous deux négatifs, qui montrent que le corps de Hilbert ne semble pas jouer le rôle attendu dans le problème capitulation du noyau sauvage.

Corps de Hilbert et capitulation

Soit L'/F^c l'extension non ramifiée, S-décomposée (ie. décomposant totalement toutes les (p)-places), maximale de F^c. La recherche d'un analogue du théorème de l'idéal principal pour $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ conduit naturellement à se poser la question suivante (cf [Ka], introduction) :

Question 4.2.5 *Est-ce que $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ capitule dans L'/F ?*

La réponse à cette question ne peut être affirmative en général. En effet :

Proposition 4.2.6 *On suppose que $i \neq 0$ est L'/F-bon. Si $G(L'/F^c)$ est pro-p-libre et si $i = 1\, mod[F(\mu_p) : F]$, alors :*

$$cap^{(i)}(L'/F) = 0$$

Preuve : Il suffit de montrer que si E/F est une extension galoisienne finie non ramifiée S-décomposée, alors $cap^{(i)}(E/F) = 0$. En effet en remplacant F par F_n, et en passant à la limite inductive sur n et E on obtient immédiatement $cap^{(i)}(L'/F^c) = 0$, ce qui suffit à conclure puisque la pro-p-liberté de $G(L'/F^c)$ force $X'(F^c)^0 = 0$, donc $X^{(i)}(F^c)^0 = 0$, et enfin $cap^{(i)}(F^c/F) = 0$.

Soit donc une telle extension E/F. Dans le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \mathcal{K}er^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & \mathcal{H}^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in S(F)} Ind_{G(E/F)} \mathcal{H}^2(E_v, \mathbb{Z}_p(i)) \\
 & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow \\
0 & \to & \mathcal{K}er^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & \mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in S(F)} \mathcal{H}^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i))
\end{array}$$

Sur chaque composante locale de la somme directe, la dernière flèche verticale n'est rien d'autre que l'application injective naturelle

$$\mathcal{H}^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i)) \to Ind_{G(E/F)} \mathcal{H}^2(F_v, \mathbb{Z}_p(i))$$

Ainsi on lit sur le diagramme commutatif ci-dessus que

$$cap^{(i)}(E/F) \subset \mathcal{K}er^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$$

Nous allons donc montrer que l'application

$$\mathcal{K}er^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \overset{res_F^{F^c}}{\to} \mathcal{K}er^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))$$

est injective. Remarquons d'abord que $X'(F^c)$ et $X'(E^c)$ sont $\mathbb{Z}_p$-libres. Notons tr le transfert de F^c à E^c, on définit C tautologiquement :

$$0 \to X'(F^c) \xrightarrow{tr} X'(E^c) \longrightarrow C \to 0$$

L'injectivité à gauche provient du fait facile que le noyau, s'il était non trivial, serait tué par $[E^c : F^c]$. Le serpent de la multiplication par p donne alors la suite exacte

$$0 \;\rightarrow\; C[p] \;\longrightarrow\; X'(F^c)/p \;\longrightarrow\; X'(E^c)/p$$

or la flèche $X'(F^c)/p \rightarrow X'(E^c)/p$ est duale à la co-restriction

$$H^1(L'/E^c, \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^1(L'/F^c, \mathbb{Z}/p)$$

et celle-ci est surjective puisque $cd_p G(L'/F^c) = 1$. On en conclut donc que $C[p] = 0$. En tenant compte de l'isomorphisme fonctoriel $\mathcal{K}er^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) = X'(F^c)(i)_\Gamma$, on obtient une suite exacte

$$X'(E^c)(i)^\Gamma \;\rightarrow\; C(i)^\Gamma \;\rightarrow\; \mathcal{K}er^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i)) \rightarrow\; \mathcal{K}er^2_S(E, \mathbb{Z}_p(i))$$

Comme i est E-bon, c'est que $X'(E^c)(i)^\Gamma$, $\mathcal{K}er^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ et donc $C(i)^\Gamma$, sont finis. Mais $C[p] = 0$, on en conclut que $C(i)^\Gamma = 0$ et cela termine la preuve.

□

Remarque 4.2.7 *En fait cette proposition admet une réciproque ([NQD] th. 3.1) : Soit $F \supset \mu_p$ un corps de nombres. On suppose que l'invariant d'Iwasawa $\mu(X'(F^c))$ est trivial. Si $cap^{(2)}(L'/F) = 0$, alors $G(L'/F^c)$ est pro-p-libre.*

Remarque 4.2.8 *L'hypothèse de liberté est vérifiée par exemple si $\lambda = 1$, $\mu = 0$ et $cap^{(i)}(F^c/F) = 0$. C'est le cas pour $F = \mathbb{Q}(\mu_p)$, sous Vandiver, si $\lambda = 1$.*

Ainsi, dans la recherche de sous-extensions E/F de $\tilde{F}/F$ dans lesquelles $\mathcal{H}^2_S(F, \mathbb{Z}_p(i))$ capitulerait, il convient d'écarter les extensions cyclotomiques du (p)-corps de Hilbert.

Corps de Hilbert et cup-produit

Parallèlement, il est naturel de chercher à atteindre les éléments du noyau sauvage $\mathcal{K}er^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))$ par cup-produit avec des éléments “sauvages”. Comme le noyau de localisation $\mathcal{K}er^1_S(F,\mathbb{Z}_p)$ est trivial, il faut regarder le cup-produit modulo p^k avec des éléments de $\mathcal{K}er^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k)$. Là encore, la proposition suivante montre que la situation n'est pas si simple.

Proposition 4.2.9 *On suppose que la pro-p-extension non ramifiée S-décomposée maximale L'/F^c est pro-p-libre. Si $i \neq 0$ est L'/F-bon et si $i = 1\, mod[F(\mu_p):F]$, alors l'image du cup-produit restreint à*

$$\mathcal{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \otimes \mathcal{K}er^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k) \to \mathcal{H}^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^k$$

est nulle.

Preuve : Soit $a \in \mathcal{K}er^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k)$, on veut montrer que $\mathcal{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) \cup a = 0$. Notons E le corps fixé par $Ker\, a$, $G = G(E^c/F^c)$ et $p^t = o(G) = o(res_f^{F^c} a)$. Par fonctorialité du cup-produit, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim(\mathcal{H}^1_S(E_n,\mathbb{Z}_p(i)))^G & \otimes & \mathcal{K}er^1_S(E^c,\mathbb{Z}/p^k)^G \arrow[d, "cor_{F^c}^{E^c}"', "\star\star"] \arrow[r, "\cup"] & (WX^{(2)}(E^c)/p^k)^G \arrow[d, "cor_{F^c}^{E^c}"'] \\
\varprojlim \mathcal{H}^1_S(F_n,\mathbb{Z}_p(i)) \arrow[u, "res_{F^c}^{E^c}"] \arrow[d, "cor_F^{F^c}"', "\star"] & \otimes & \mathcal{K}er^1_S(F^c,\mathbb{Z}/p^k) \arrow[r, "\cup"] & WX^{(i)}(F^c)/p^k \arrow[d, "cor_F^{F^c}"'] \\
\mathcal{H}^1_S(F,\mathbb{Z}_p(i)) & \otimes & \mathcal{K}er^1_S(F,\mathbb{Z}/p^k) \arrow[u, "res_F^{F^c}"] \arrow[r, "\cup"] & \mathcal{K}er^2_S(F,\mathbb{Z}_p(i))/p^k
\end{tikzcd}$$

Comme $G(L'/F^c)$ est pro-p-libre et que i est F-bon, c'est que $X^{(i)}(F^c)^\Gamma = 0$. D'après 3.2.2, on en déduit que la flèche $\star$ est surjective. Maintenant $res_F^{F^c} a$ possède un antécédant d'ordre p^t par la flèche notée $\star\star$, il suffit pour le voir de plonger E^c/F^c dans une $\mathbb{Z}_p$-extension non ramifiée S-décomposée de F^c

(c'est possible puisque $G(L'/F^c)$ est pro-p-libre), puis de procéder comme dans la preuve de 3.1.1. D'après le diagramme commutatif ci-dessus, il suffit donc de montrer $cor_{F^c}^{E^c}((WX^{(i)}(E^c)/p^k)^G[p^t]) = 0$. Là encore on utilise la pro-p-liberté de $G(L'/F^c)$: comme dans la preuve de 4.2.6, on montre que l'injectivité de l'application $X'(F^c)/p^k \to X'(E^c)/p^k$, puis de

$$res_{F^c}^{E^c} : WX^{(i)}(F^c)/p^k \to WX^{(i)}(E^c)/p^k$$

L'argument habituel de restriction - co-restriction permet de conclure.

□

4.2.3 Résultats positifs

Dans toute la section, F est un corps de nombres contenant μ_p. On propose ici une approche du problème de capitulation faible via le contrôle de la taille des groupes de décomposition aux (p)-places dans les extensions $\tilde{E}/E$ pour $E \subset \tilde{F}$. Après avoir établi quelques lemmes, nous distinguons le cas $s(F) > 1$ et le cas $s(F) = 1$. Dans le premier, on peut conclure si F contient un corps de nombres quadratique imaginaire dans lequel (p) se décompose.

Stratégie

On souhaite établir une condition suffisante pour vérifier la validité de la version faible suivante pour (GG) :

Conjecture 4.2.10 $(GGf^{(i)})$ *: F vérifie l'hypothèse $fCap^{(i)}$.*

Rappelons d'abord un lemme :

Lemme 4.2.11 *Soit F'/F une sous-extension galoisienne finie d'une pro-p-extension galoisienne F''/F. Si i est F'-bon, alors*

$$cap^{(i)}(F''/F) = 0 \Rightarrow cap^{(i)}(F''/F') = 0$$

Preuve : Comme F'/F est résoluble, on peut, quitte à dévisser l'extension F'/F, supposer que celle-ci est cyclique, disons de groupe G. Il s'agit alors de montrer que $H^1(F''/F', \mathcal{H}^1_S(F'', \mathbb{Z}_p(i))) = 0$, ou encore $H^1(F''/F', \mathcal{H}^1_S(F'', \mathbb{Z}_p(i)))^G = 0$. La suite exacte d'inflation-restriction donne

$$H^1(F''/F, \mathcal{H}^1_S(F'', \mathbb{Z}_p(i))) \quad \to \quad H^1(F''/F', \mathcal{H}^1_S(F'', \mathbb{Z}_p(i)))^G \quad \to \quad H^2(F'/F, \mathcal{H}^1_S(F', \mathbb{Z}_p(i)))$$

Maintenant, comme G est cyclique, on a pour tout q, (cf 1.1.7)

$\hat{H}^q(F'/F, \mathcal{H}^1_S(F', \mathbb{Z}_p(i))) \simeq \hat{H}^{q+2}(F'/F, \mathcal{H}^1_S(F', \mathbb{Z}_p(i))) = \hat{H}^q(F'/F, \mathcal{H}^2_S(F', \mathbb{Z}_p(i)))$

En particulier, on voit que $H^1(F'/F, \mathcal{H}^2_S(F', \mathbb{Z}_p(i))) = 0$. Comme $\mathcal{H}^2_S(F', \mathbb{Z}_p(i))$ est fini, son quotient de Herbrand est trivial, si bien que l'on a en fait

$$H^2(F'/F, \mathcal{H}^1_S(F', \mathbb{Z}_p(i))) = H^2(F'/F, \mathcal{H}^2_S(F', \mathbb{Z}_p(i))) = 0$$

La suite exacte d'inflation-restriction ci-dessus permet donc de conclure.

□

Comme toujours, par une (p)-place, on entend une place $v \in S(F_S)$. Le lemme ci-dessus va nous permettre d'appliquer le théorème 4.1.1, non pas au niveau de F, (ce qui semble a priori trop ambitieux en général puisque le cup-produit ne remplit le noyau de capitulation qu'asymptotiquement, cf cor. 4.1.4) mais au niveau d'une sous-extension L/F de $\tilde{F}/F$, triviale en v.

Proposition 4.2.12 *Soit $K \supset \mu_p$ un corps de nombres, E/K une extension finie, et $i \neq 0$ $\tilde{E}/K$ bon.*

(i) S'il existe une sous-extension finie L/E de $\tilde{E}/E$ et une (p)-place v vérifiant $L_v = E_v = K_v$ et

$$rg_p\, Im(\mathcal{H}^1_S(L, \mathbb{Z}_p(i))/p \to H^1(K_v, \mathbb{Z}/p(i))) \geq \frac{1}{2} rg_p H^1(K_v, \mathbb{Z}/p(i))$$

$$rg_p\, Im(H^1(\tilde{E}/L, \mathbb{Z}/p) \to H^1(K_v, \mathbb{Z}/p)) \geq 1 + \frac{1}{2} rg_p H^1(K_v, \mathbb{Z}/p)$$

alors $cap^{(i)}(\tilde{E}/E) \neq 0$.

(ii) S'il existe une sous-extension finie L/E de $\tilde{K}E/E$ et une (p)-place v vérifiant $L_v = E_v = K_v$ et

$$rg_p\, Im(\mathcal{H}^1_S(L, \mathbb{Z}_p(i))/p \to H^1(K_v, \mathbb{Z}/p(i))) \geq 1 + \frac{1}{2} rg_p H^1(K_v, \mathbb{Z}/p(i))$$

$$rg_p\, Im(H^1(\tilde{K}E/L, \mathbb{Z}/p) \to H^1(K_v, \mathbb{Z}/p)) \geq \frac{1}{2} rg_p H^1(K_v, \mathbb{Z}/p)$$

alors $cap^{(i)}(\tilde{K}E/E) \neq 0$.

Preuve : (i) Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{H}^1_S(L, \mathbb{Z}_p(i)) & \otimes & H^1(\tilde{E}/L, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\cup} & \mathcal{H}^2_S(L, \mathbb{Z}_p(i)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1(K_v, \mathbb{Z}/p(i)) & \otimes & H^1(K_v, \mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{\cup} & H^2(K_v, \mathbb{Z}/p(i))
\end{array}$$

montre, compte-tenu de la non-dégénérescence du symbole de Hilbert et des minorations de l'énoncé, que l'image du cup-produit de la première ligne du diagramme est non triviale. On en déduit $cap^{(i)}(\tilde{E}/L) \neq 0$ par le théorème 4.1.1 (ou le corollaire 4.1.4). Cela qui suffit à conclure grâce au lemme 4.2.11.

(ii) Même chose avec le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{H}^1_S(L, \mathbb{Z}_p(i)) & \otimes & H^1(\tilde{K}E/L, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\cup} & \mathcal{H}^2_S(L, \mathbb{Z}_p(i)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1(K_v, \mathbb{Z}/p(i)) & \otimes & H^1(K_v, \mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{\cup} & H^2(K_v, \mathbb{Z}/p(i))
\end{array}$$

□

Remarque 4.2.13 *Pour obtenir une extension L/E vérifiant les hypothèses de la proposition ci-dessus, il suffit de trouver*

pour (i) : une sous-extension L'/K de $\tilde{K}/K$, triviale en v, vérifiant la première inégalité, et une sous-extension L''/E de $\tilde{E}/E$, triviale en v, vérifiant la seconde.
pour (ii) : une sous-extension L'/E de $\tilde{K}E/E$, triviale en v, vérifiant la première inégalité et une sous-extension L''/K de $\tilde{K}/K$, triviale en v, vérifiant

$$rg_p\, Im(H^1(\tilde{K}/L'', \mathbb{Z}/p) \to H^1(K_v, \mathbb{Z}/p)) \geq \frac{1}{2} rg_p H^1(K_v, \mathbb{Z}/p)$$

On prendra alors $L = L'L''$.

A partir d'ici, on note, pour tout corps de nombres F, $\tilde{D}_v(F)$ (resp. $\tilde{I}_v(F)$) le sous-groupe de décomposition (resp. d'inertie) de $G(\tilde{F}/F)$.

Lemme 4.2.14 *Soit F un corps de nombres contenant μ_p, alors il existe une (p)-place v telle que*

$$rg_{\mathbb{Z}_p} \tilde{I}_v(F) \geq \frac{1}{2} rg_p H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)$$

En particulier, il existe une sous-extension finie L/F de $\tilde{F}/F$ vérifiant $L_v = F_v$ et

$$rg_p\, Im(H^1(\tilde{F}/L, \mathbb{Z}/p) \to H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)) \geq \frac{1}{2} rg_p H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)$$

Preuve : Comme le p-groupe de classes est fini, c'est que les sous-groupes d'inertie $\tilde{I}_v(F)$ engendrent un sous-groupe d'indice fini dans $\tilde{\Gamma}$. Il y a donc une inégalité

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{v \in S(F)} [F_v : \mathbb{Q}_p] = 1 + r_2(F) = rg_{\mathbb{Z}_p} \tilde{\Gamma} \leq \sum rg_{\mathbb{Z}_p} \tilde{I}_v(F)$$

et celle-ci montre qu'il existe un groupe d'inertie $\tilde{I}_v(F)$ dont le $\mathbb{Z}_p$-rang est strictement supérieur à $\frac{1}{2}[F_v : \mathbb{Q}_p] = \frac{1}{2} rg_{\mathbb{Z}/p}\, H^1(F_v, \mathbb{Z}/p) - 1$, ce qui donne l'inégalité souhaitée puisque $[F_v : \mathbb{Q}_p]$ est pair.

On a alors a fortiori

$$rg_{\mathbb{Z}_p} \tilde{D}_v(F) \geq \frac{1}{2} rg_p H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)$$

Le choix d'une section de l'injection naturelle $D_v(F) \otimes \mathbb{Q}_p \to \tilde{\Gamma} \otimes \mathbb{Q}_p$ produit alors une sous-$\mathbb{Z}_p$-extension multiple E/F de $\tilde{F}/F$, dans le groupe de laquelle $\tilde{D}_v(F)$ s'injecte avec un conoyau fini. $L = E^{\tilde{D}_v(F)}$ possède alors les propriétés requises.

□

Remarque 4.2.15 *Si $F/\mathbb{Q}$ est galoisienne, alors toute les (p)-places conviennent.*

Le cas $s(F) > 1$

Pour $v \in S(F)$, on note p_v l'idèle de F dont l'entrée est p à la place v et 1 partout ailleurs. Pour une extension abélienne E/F, on note $(p_v, E/F) \in G(E/F)$ le symbole d'Artin de p_v.

Théorème 4.2.16 *Soient F un corps de nombres. On suppose que F contient un corps $K \supset \mu_p$ vérifiant, pour toute (p)-place v :*
(i) $(p_v, \tilde{F}/F) \neq 0$.
(ii) $F_v = K_v$.
(iii) K vérifie la conjecture de Leopoldt.
(iv) $X'(K^c)^0 = 0$.
alors F vérifie $GGf^{(i)}$ dès que i est $\tilde{F}/K$-bon.

Commençons par un lemme :

Lemme 4.2.17 *Si le symbole d'Artin $(p_v, \tilde{F}/F)$ est non trivial, alors*

$$rg_{\mathbb{Z}_p}\tilde{D}_v(F) = 1 + rg_{\mathbb{Z}_p}\tilde{I}_v(F)$$

Preuve : Il s'agit de montrer que l'extension résiduelle de la $\mathbb{Z}_p$-extension multiple $(\tilde{F})_v/F_v$ est infinie. Comme $\tilde{D}_v(F)$ ne possède pas de $\mathbb{Z}_p$-torsion, l'hypothèse implique que le symbole local $(p^k, (\tilde{F})_v/F_v)$ est non trivial, ceci pour tout $k \geq 0$. Pour un groupe G, on note $\hat{G}^{ab}$ le pro-p-complété abélien de G. La composition des applications naturelles (de restriction et de transfert)

$$\hat{G}((\tilde{F})_v/F_v)^{ab} \to \hat{G}((\tilde{F})_v/\mathbb{Q}_p)^{ab} \to \hat{G}((\tilde{F})_v/F_v)^{ab}$$

envoie $(p^k, (\tilde{F})_v/F_v)$ sur l'élément non nul $(p^{k[F_v:\mathbb{Q}_p]}, (\tilde{F})_v/F_v)$. L'image par Artin de $p^{k[F_v/\mathbb{Q}_p]}$ dans $\hat{G}((\tilde{F})_v/\mathbb{Q}_p)^{ab}$ est donc non triviale. Maintenant, puisque $(\tilde{F})_v/\mathbb{Q}_p$ contient la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique ${\mathbb{Q}_p}^c/\mathbb{Q}_p$, c'est que le noyau de l'application d'Artin

$$\widehat{{\mathbb{Q}_p}^\times} \to \hat{G}((\tilde{F})_v/\mathbb{Q}_p)^{ab}$$

est contenu dans $p^{\mathbb{Z}_p}$. D'après ce qui précède, on en conclut que ce noyau est nécessairement trivial. On en conclut que l'extension résiduelle de $(\tilde{F})_v/\mathbb{Q}_p$, et donc celle de $(\tilde{F})_v/F_v$, est infinie et cela termine la preuve.

□

Remarque 4.2.18 *On pourrait remplacer p_v par n'importe quel idèle, trivial hors de v, et dont l'entrée en v est de norme absolue dans $p^{\mathbb{Z}_p} \subset \widehat{{\mathbb{Q}_p}^\times}$ (ie. l'entrée en v est une norme universelle dans l'extension ${\mathbb{Q}_p}^c/\mathbb{Q}_p$).*

Remarque 4.2.19 *Si $F/\mathbb{Q}$ est galoisienne, il est facile de voir que l'hypothèse (i) du théorème 4.2.16 est équivalente à l'hypothèse (Dec) pour le corps $F^{G(F/\mathbb{Q})_v}$. Il n'est donc pas raisonnable d'espérer qu'elle soit toujours vérifiée : le corps $F^{G(F/\mathbb{Q})_v}$ peut très bien être totalement réel.*

On peut néanmoins se poser la question suivante :

Question 4.2.20 *Peut-on espérer que tout corps possèdant au moins une place complexe vérifie l'hypothèse (Dec) ?*

Preuve de 4.2.16 : On souhaite appliquer la proposition 4.2.12 avec $E = F$. Nous suivons la démarche indiquée dans la remarque 4.2.13 (i). La sous-extension L'/K de $\tilde{K}/K$ est fournie par la seconde partie du lemme 4.2.14 appliqué à K, duquel on déduit, pour une certaine (p)-place v, l'inégalité

$$rg_p\, Im(\mathcal{H}^1_S(L', \mathbb{Z}_p(i))/p \to H^1(K_v, \mathbb{Z}/p(i))) \geq \frac{1}{2} rg_p H^1(K_v, \mathbb{Z}/p(i))$$

par changement de twist : comme K vérifie la conjecture de Leopoldt, la proposition 4.1.12 montre que comme sous-espaces de $\mathcal{H}^1_S(L', \mathbb{Z}/p)$, on a

$$H^1(\tilde{K}/L', \mathbb{Z}/p) = V_0(L'/K, p) \subset V_i(L', p) = \mathcal{H}^1_S(L', \mathbb{Z}_p(i))/p$$

Reste à construire la sous-extension L''/F de $\tilde{F}/F$. On procède comme dans la seconde partie du lemme 4.2.14 : une section de $\tilde{D}_v(F) \otimes \mathbb{Q}_p \to \tilde{\Gamma} \otimes \mathbb{Q}_p$

détermine une sous-$\mathbb{Z}_p$-extension multiple, on prend les points fixes par $\tilde{D}_v(F)$ pour obtenir L''. On alors

$$rg_p \, Im(H^1(\tilde{F}/L'', \mathbb{Z}/p) \to H^1(K_v, \mathbb{Z}/p)) = rg_{\mathbb{Z}_p} \tilde{D}_v(F)$$

si bien que l'inégalité souhaitée découle du lemme 4.2.17 appliqué à F, et de la première partie du lemme 4.2.14 : comme $rg_{\mathbb{Z}_p} \tilde{I}_v(F) \geq rg_{\mathbb{Z}_p} \tilde{I}_v(K)$, c'est que

$$rg_{\mathbb{Z}_p} \tilde{D}_v(F) = 1 + rg_{\mathbb{Z}_p} \tilde{I}_v(F) \geq 1 + \frac{1}{2} rg_p H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)$$

□

Remarque 4.2.21 *Si F est galoisien sur $\mathbb{Q}$, il suffit que les hypothèses du théorème 4.2.16 soient vérifiées pour une seule (p)-place.*

Cas particulier

On donne une famille de corps pour lesquels la conjecture $GGf^{(i)}$ est vraie.

Théorème 4.2.22 *Soit F un corps de nombres contenant un corps $K \supset \mu_p$ et un corps k vérifiant*

(i) k est un corps quadratique imaginaire dans lequel (p) se décompose.

(ii) $F_v = K_v$ pour toute (p)-place.

(iii) K vérifie la conjecture de Leopoldt.

(iv) $X'(K^c)^0 = 0$.

alors F vérifie $GGf^{(i)}$ dès que i est $\tilde{F}/K$-bon.

Corollaire 4.2.23 *Soit F un corps de nombres contenant μ_p. On suppose que F vérifie la conjecture de Leopoldt et que $i \neq 0$ est $\tilde{F}/F$-bon. Si F contient un corps quadratique imaginaire k dans lequel (p) se décompose, alors F vérifie la conjecture $GGf^{(i)}$.*

Preuve de 4.2.22 : Il suffit de vérifier l'hypothèse (i) du théorème 4.2.16. On dispose pour cela du résultat suivant :

Lemme 4.2.24 *([Mi1] lemma 3.1) Soit k un corps quadratique imaginaire dans lequel (p) se décompose, $v \in S(k)$, alors $(p_v, \tilde{k}/k) \neq 0$*

Preuve : Soit $(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ la décomposition de l'idéal (p) dans k. On note v (resp v') la place associée à $\mathfrak{p}$, (resp. $\mathfrak{p}'$) et $[\mathfrak{p}]$ (resp. $\mathfrak{p}'$) la classe d'un l'idéal $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{p}$). Si $o([\mathfrak{p}])o([\mathfrak{p}'])(p-1) \mid k$, alors il existe $\pi = 1 \, mod \, \mathfrak{p}'$, $\pi' = 1 \, mod \, \mathfrak{p}$ tels que $p^k = \pi\pi'$. Par la théorie du corps de classes, on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & U_v^1 \oplus U_{v'}^1 & \xrightarrow{(.,k_S^{ab}(p)/k)} & \mathcal{X}(k) \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ E_S(k) \otimes \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \widehat{k_v^\times} \oplus \widehat{k_{v'}^\times} & \xrightarrow{(.,k_S^{ab}(p)/k)} & \mathcal{X}(k) \end{array}$$

sur lequel on voit que

$$(p_v^k, k_S^{ab}(p)/k) = ((\pi'^{-1}, \pi), k_S^{ab}(p)/k) \neq 0$$

puisque $(\pi'^{-1}, \pi) \in U_v^1 \oplus U_{v'}^1$. On a ainsi montré que l'ordre de $(p_v^k, k_S^{ab}(p)/k)$ n'est pas borné, d'où le résultat.

□

De $(p_v, \tilde{k}/k) \neq 0$, on déduit que $(p_v, \tilde{F}/F) \neq 0$ par fonctorialité du symbole d'Artin. En effet, si l'on note $(p_v)_F$ l'idèle de F et $(p_v)_k$ cellui de k, on a $N_{F/k}(p_v)_F = (p_v)_k^{[F_v:k_v]}$.

□

Remarque 4.2.25 *Dans le cas où l'on suppose, en plus des hypothèses de 4.2.22 (ou 4.2.23), que $\mathcal{H}_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est cyclique d'ordre p, le théorème 2.3.4 montre qu'en fait, F vérifie la conjecture (GG). Ces cas sont déjà connus puisque l'on a alors nécessairement $s(F) = 2$ et $\mathcal{C}l'(F) \otimes \mathbb{Z}_p = 0$ ([Mi1] prop 3.B, [Mi2] th. 2).*

Le cas $s(F) = 1$

C'est le cas a priori difficile : dans la configuration la plus simple, ie. lorsque $\mathcal{H}_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est cyclique d'ordre p, $\mathcal{H}_S^2(F, \mathbb{Z}_p(i))$ est réduit à son noyau sauvage.

Comme $s(F) = 1$, $(p_v, F_S^{ab}/F)$ est nécessairement d'ordre fini, puisque dans le cas contraire les groupes d'inertie et de décomposition de $\tilde{\Gamma}$ n'auraient pas le même $\mathbb{Z}_p$-rang (cf preuve de 4.2.17), ce qui est absurde. On ne peut donc pas espérer appliquer le théorème 4.2.16 tel quel. Il convient de le modifier comme suit.

Soit $v \in S(F)$, π une uniformisante de F dont la norme absolue est une puissance de p. Pour tout corps E, on note $(\pi_v)_E$ l'idèle de E égal à π en v, trivial ailleurs. On écrit simplement $(\pi_v, \bullet/E) = ((\pi_v)_E, \bullet/E)$.

Théorème 4.2.26 *Notons E le p-corps de Hilbert de F et E_1 le sous-corps de $\tilde{E}$ fixé par $G(\tilde{E}/E)^p$. Si on a*

(i) $E \subset \tilde{F}$.

(ii) E vérifie la conjecture de Leopoldt.

(iii) $(\pi_v, E_1/E) \neq 0$.

alors F vérifie $GGf^{(i)}$ dès que i est $\tilde{F}/F$-bon

Preuve : On utilise cette fois le (ii) du théorème 4.2.12 avec $K = F$, selon le plan indiqué par la remarque 4.2.13. On prend $L' = L'' = E$. D'abord, comme E est le (p)-corps de Hilbert de F et que v est l'unique (p)-place de F, c'est que $G(\tilde{F}/E) = G(\tilde{F}/F)_v$, si bien que le noyau de

$$H^1(\tilde{F}/E, \mathbb{Z}/p) \to H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)$$

est trivial. Cela donne la seconde inégalité dans la remarque 4.2.13(ii). Passons à la première inégalité de la remarque 4.2.13(ii). Comme $(\pi_v, \tilde{F}/E) = (\pi_v, \tilde{F}/F) = 0$ (noter que $N_{E/F}(\pi_v)_E = (\pi_v)_F$) alors que $(\pi_v, E_1/E) \neq 0$), c'est que

$$rg_p\, Im(H^1(E_1/E, \mathbb{Z}/p) \to H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)) \geq 1 + rg_p\, Im(H^1(\tilde{F}/E, \mathbb{Z}/p) \to H^1(F_v, \mathbb{Z}/p))$$

et cela donne, compte tenu de l'inégalité déjà démontrée :

$$rg_p\, Im(H^1(\tilde{E}/E, \mathbb{Z}/p) \to H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)) \geq 1 + \frac{1}{2} rg_p H^1(F_v, \mathbb{Z}/p)$$

Comme 0 et i sont E-bon et que l'on peut supposer $X'(E^c)^0 = 0$ (sans quoi $cap^{(i)}(E^c/E) \neq 0$ et la conclusion est immédiate), la proposition 4.1.9 permet d'obtenir l'inégalité souhaitée :

$$rg_p\, Im(\mathcal{H}^1_S(E, \mathbb{Z}_p(i))/p \to H^1(F_v, \mathbb{Z}/p(i))) \geq 1 + \frac{1}{2} rg_p H^1(F_v, \mathbb{Z}/p(i))$$

□

Malheureusement, la condition $(\pi_v, E_1/E) \neq 0$ semble complètement inaccessible en général. Pour $F = \mathbb{Q}(\mu_p)$, R. Sharifi, inspiré par le travail de Ohta et Harder et Pink, a récemment énoncé (voir [Sh]) une condition suffisante pour la surjectivité du cup-produit $c_{1,1}$. Celle-ci fait intervenir les formes modulaires et la théorie de Hida, et s'exprime en fonction de l'opérateur de Hecke U_p. Il est très intéressant de noter que l'approche de [Sh] fait intervenir de façon cruciale la valeur du Frobenius en (p) dans une extension abélienne sur le corps de Hilbert de F^c, ce qui constitue un analogue au niveau infini de la situtation qui nous préoccupe.

Question 4.2.27 *Est-il possible d'énoncer une condition similaire à celle de [Sh] (eg. th 5.6), mais au niveau fini cette fois, et qui permettrait de vérifier les hypothèses du théorème ci-dessus ?*

Nous espérons revenir sur ce point dans un travail ultérieur.

Bibliographie

[AM] J. Assim, A. Movahhedi, *Bounds for Etale Capitulation Kernels*, K-Theory, **33** (2004), 199-213.

[B] N. Bourbaki, *Commutative Algebra*, Chapter 1-7, Springer (1989).

[Br] A. Brumer, *Pseudocompact Algebras, Profinite Groups and Class Formations*, Journal of Algebra **4** (1966), 442-470.

[CE] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton Landmarks (1973).

[CHR] S. U. Chase, D. K. Harrison, A. Rosenberg, *Galois theory and cohomology of commutative rings*, Mem. Amer. Math. Soc. **52** (1965).

[DF] W.G. Dwyer, E.M. Friedlander, *Algebraic and étale K-theory*, Trans. Am. Math. Soc. **292**, No. 1 (1985), 247-280.

[FGS] L. Federer, B.H. Gross, with an appendix by W.Sinnott, *Regulators and Iwasawa Modules*, Invent. Math. **62** (1981), 443-457.

[G1] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, American J. of Math. **98** (1976), 263-284.

[G2] R. Greenberg, *On the Structure of Certain Galois Groups*, Invent. Math. **47** (1978), 85-99.

[G3] R. Greenberg, *Iwasawa theory, past and present*, Adv. Studies in Pure Math. **30** (2001), Class Field Theory - Its Centenary and Prospect, 335-385.

[G4] Greenberg, *A note on K_2 and the theory of $\mathbb{Z}_p$-extensions*, Amer. J. of Math. **100**, No. 6 (1978), 1235-1245.

[Grei] C. Greither, *Sur les normes universelles dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **6** (1994), 205-220.

[Gro] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku math. J. **9** (1957), 119-221.

[Ha] K. Haberland, *Galois cohomology of algebraic number fields*, Deutscher Verlag der Wissen., Berlin (1978).

[Hi] J. Hillman, *Alexander Ideals of links*, Lecture Notes in Mathematics. **895**. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag (2000).

[Hu] K. Hutchinson, *Tate kernels, etale K-theory and the Gross Kernel*, Preprint (2005).

[I1] K. Iwasawa, *On $\mathbb{Z}_l$-extensions of algebraic number fields*, Annals of Math. **98** (1973), 246-326.

[I2] K. Iwasawa, *On cohomology groups of units for $\mathbb{Z}_p$-extensions*, American J. of Math., **105** (1983), 189-200.

[J1] U. Jannsen, *Iwasawa Modules up to Isomorphism*, Advanced Studies in Pure Mathematics **17** (1989), 171-207.

[J2] U. Jannsen, *Continuous Etale Cohomology*, Math. Ann. **280** (1988), 207-245.

[Jau] J-F. Jaulent, *L'arithmétique des l-extensions*, Thèse, Université de Franche-Comté (1986).

[Ka] B. Kahn, *Descente Galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-Theory **7** (1993), 55-100.

[KM] M. Kolster, A. Movahhedi, *Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation*, Ann. Inst. Fourier, **50**, No. 1 (2000), 35-65.

[Ko] M. Kolster, *An idelic approach to the wild kernel*, Invent. Math. **103** (1991), 9-24.

[Ku] L.V. Kuz'Min, *The Tate module for algebraic number fields*, Math. USSR Izvestija **6**, No.2 (1972), 263-321.

[LFMN] M. Le Floc'h, A.Movahhedi, T. Nguyen Quang Do, *On Capitulation cokernels in Iwasawa theory*, to appear in American J. of Math.

[LN] A. Lannuzel, T. Nguyen Quang Do, *Conjectures de Greenberg et extensions pro-p-libres d'un corps de nombres*, Manuscripta Math. **102** (2000), 187-209.

[Ma1] D.C. Marshall, *Galois Groups and Greenberg's Conjecture*, Thesis, University of Arizona (2000).

[Ma2] D.C. Marshall, *Greenberg's conjecture and cyclotomic towers*, Acta Arithmetica **113**, no. 1 (2004), 1-14.

[MC] W. McCallum, *Greenberg's conjecture and units in multiple $\mathbb{Z}_p$-extensions*, American J. of Math. **123** (2001), 909-930.

[MCS] W. McCallum, R.Sharifi, *A cup product in the Galois cohomology of number fields*, Duke Math. J. **120**, no.2. (2003), 269-309.

[Mi1] J. Minardi, *Iwasawa modules for ${\mathbb{Z}_p}^d$-extensions of algebraic number fields*, Thesis, University of Washington (1985).

[Mi2] J. Minardi, *Iwasawa modules for ${\mathbb{Z}_p}^d$-extensions of number fields*, Canadian Math. Soc., Conf. Proc. **7** (1987), 237-242.

[Mo1] P. Monsky, *On p-adic Power Series*, Math. Ann. **255** (1981), 217-227.

[Mo2] P. Monsky, *Some Invariants of ${\mathbb{Z}_p}^d$-Extensions*, Math. Ann. **255** (1981), 229-233.

[N1] T. Nguyen Quang Do, *Formations de classes et modules d'Iwasawa*, Springer Lect. Notes **1068** (1984), 167-185.

[N2] T. Nguyen Quang Do, *Sur la $\mathbb{Z}_p$-torsion de certains modules galoisiens*, Ann. Inst. Fourier **36** no. 2 (1986), 27-46.

[N3] T. Nguyen Quang Do, *Sur torsion de certains modules galoisiens II*, Sem. Th. des Nombres de Paris (1986-87), 271-297.

[NV] T. Nguyen Quang Do, D. Vauclair, *K_2 et conjectures de Greenberg dans les $\mathbb{Z}_p$-extensions multiples*, à paraître dans le numéro spécial dédié à G. Gras, au Journal de Théorie des nombres de Bordeaux (2006).

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Springer (2000).

[PR] B. Perrin-Riou, *Arithmétique des courbes elliptiques et théorie d'Iwasawa*, Thèse, Université de Paris Sud (1983).

[Sch] P.Schneider, *Über Gewisse Galoiscohomologiegruppen*, Math. Z. **168** (1979), 181-205.

[Se1] J-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann (1968).

[Se2] J-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Springer (1994).

[Sh] R. Sharifi, *Iwasawa theory and the Eisenstein ideal*, preprint (2005).

[Sou] C. Soulé, *K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale*, Invent. Math. **55** (1979), 251-295.

[Ta] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Invent. Math. **36** (1976), 257-274.

[V] D. Vauclair, *Cup produit, noyaux de capitulation étales et conjecture de Greenberg généralisée*, à paraître dans K-theory (2006).

David Vauclair
vauclair@math.univ-fcomte.fr
Université de Franche-Comté
Laboratoire de Mathématiques
CNRS UMR 6623
16, route de Gray
25030 BESANCON CEDEX
France