Modélisation et méthodes de décomposition de domaines pour des problèmes de contact

Jalila Sabil

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire MAPLY à l'INSA de Lyon sous la direction de Monsieur Guy Bayada professeur à l'INSA de Lyon et Monsieur Taoufik Sassi professeur à l'université de Caen. Je tiens à les remercier pour leur disponibilité leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.

Je remercie vivement Madame Michèle Chambat, professeur à l'université Lyon 1, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury et de l'intérêt qu'elle a porté à mes travaux.

Mes sincères remerciements vont à Monsieur Yves Achdou professeur à l'université Paris VII et Monsieur Marius Cocou professeur l'université de Provence qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de mon mémoire de thèse. Je leur adresse tous mes remerciements et toute ma reconnaissance pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

Tous mes remerciements à Monsieur Laurent Baillet, maître de conférences à l'INSA de Lyon pour sa collaboration et son aide dans la partie numérique, et d'avoir accepté de participer au jury.

Je tiens à remercier Monsieur Frédéric Lebon, professeur à l'université de Provence et Madame Marina Vidrascu, directrice de recherche à l'INRIA Rocquencourt d'avoir accepté de participer au jury.

Mes remerciements s'adressent aussi à tout les membres du centre de Mathématiques de l'INSA de Lyon et du Laboratoire MAPLY pour leur sympathie et leur soutien.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents à qui je dédie ce travail ainsi qu'à toute ma famille et mes amis pour leur grand soutien.

Cette thèse a été effectuée au laboratoire Maply-INSA de Lyon, UMR 5585 avec le soutien du programme thématique de la région Rhône-Alpes “Mathématiques appliquées aux sciences de l’ingénieur”.
L’origine de ce travail provient d’une collaboration avec les laboratoires UMR 5514 LaMCoS et UMR 5006 LDMS de l’INSA de Lyon portant sur la modélisation d’un dispositif du type frein caractérisé tout à la fois par une grande anisotropie géométrique et par une non linéarité des lois de comportement. Il est apparu possible de développer autour de ce thème deux approches mathématiques très différentes. La première s’appuie sur les techniques asymptotiques pour prendre en compte au niveau de la modélisation analytique l’anisotropie (caractéristique du revêtement). La seconde vise à développer des algorithmes de calcul de décomposition de domaines adaptés aux lois de contact “frottant” et utilisant comme interface de décomposition numérique la zone de contact naturelle entre les deux solides.

Ce manuscrit se présente sous forme de deux parties indépendantes. Chacune d’entre elles commence par une introduction suivie d’une bibliographie propre. La première partie comprend un chapitre et une annexe, la deuxième partie comporte trois chapitres issus d’articles.

Table des matières

8

Partie I : Analyse asymptotique pour un problème de contact quasistatique avec frottement de Coulomb

10

Introduction : partie I

Les problèmes de contact en présence de revêtements font l'objet de recherches actives car ils ont de nombreuses applications industrielles. L'utilisation de ceux-ci diminue les phénomènes de corrosion, augmente la résistance au frottement, au vieillissement et permet d'obtenir des surfaces plus lisses. Cependant, du point de vue de la simulation numérique, la présence d'un corps de faible dimension comme un revêtement demande des discrétisations fines et induit des problèmes de très grande taille. Pour remédier à cet inconvénient, l'approche que nous développerons dans ce travail consiste à remplacer au niveau de la modélisation le revêtement par une loi d'interface prenant en compte les caractéristiques mécaniques de celui-ci.

Cette idée n'est pas nouvelle. Les premiers travaux dans ce sens ont porté sur l'étude d'une bande mince (joint de colle) plane collée entre deux corps élastiques fixes (les premiers corps). Cette bande mince est supposée d'épaisseur relative ε par rapport aux dimensions des premiers corps. On est donc en présence de la même difficulté induite par l'anisotropie géométrique que dans le problème du revêtement. On cherche à connaître le comportement asymptotique de cet ensemble lorsque ε tend vers zéro.
Dans [1], les coefficients de Lamé de la bande mince sont exprimés en fonction des ceux des deux corps élastiques par : $\mu_\varepsilon = \mu\varepsilon^\beta$, $\lambda_\varepsilon = \lambda\varepsilon^\alpha$. La loi d'interface est linéaire (adhésion parfaite correspondant au collage). Sous certaines conditions ($\alpha \geq 0$ et $0 \leq \beta \leq 2$), en faisant tendre ε vers 0, il est montré qu'il est possible d'obtenir un problème limite quand ε tend vers zéro. Dans ce problème limite, seuls les deux premiers corps subsistent avec une loi d'interface entre eux qui varie selon les puissances α et β. La méthode utilisée pour passer à la limite consiste à chercher des estimations en utilisant une technique de prolongement. Pour le cas $\alpha = \beta = 1$, le même problème a été traité dans [12] en utilisant la Γ-convergence, et dans [3] en utilisant une technique de développement asymptotique. Toujours pour la même géométrie, le cas où le comportement à l'intérieur de la bande est du type Norton (le coefficient de Poisson du joint est nul) (élasticité non linéaire) a été étudié dans [18].

Ces problèmes ont été ensuite abordés dans [9] sans fixer à priori les relations entre les coefficients de Lamé λ_ε, μ_ε du joint et ceux des deux premiers corps. Sous la condition $\dfrac{\varepsilon^2}{\mu_\varepsilon}$ borné, et en utilisant la Γ-convergence, l'existence de problèmes limites est obtenue avec une loi d'interface qui dépend des différentes limites des rapports $\dfrac{\lambda_\varepsilon}{\varepsilon}$ et $\dfrac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon}$ quand le triplet $(\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon, \varepsilon)$ tend vers zéro. La technique de Γ-convergence a été utilisée dans [6] pour une loi à comportement dissipatif dans le joint. La prise en compte des grandes déformations a été étudiée dans [7].
D'autres géométries ont été étudiées par ces différentes techniques. Dans [4], les travaux de [1] ont été généralisés pour le cas de couches minces à surfaces non planes. Dans [9], on étudie le cas où la couche mince bidimensionnelle est collée entre deux plaques.

La différence fondamentale entre les problèmes précédents et le problème du revêtement qui nous intéresse ici est que la loi de contact est non linéaire. Dans [13], un problème de contact avec loi de Tresca entre un matériau élastique et un joint élastique de faible épaisseur encastré dans un support rigide a été étudié. L'étude asymptotique utilisée consiste à transposer le problème initial posé dans un ouvert dépendant de l'épaisseur ε de la couche mince en un problème équivalent posé sur un ouvert fixe indépendant de ε. Le petit paramètre apparaît donc dans les opérateurs. Ce travail a été étendu au cas du frottement de Coulomb non local dans [10] . Notons que cette méthode d'adimensionnement est classique en élasticité, elle a été utilisée en particulier pour obtenir les équations des plaques et des coques à partir de l'élasticité tridimensionnelle [11], [17], [5]. Toujours pour des cas de lois d'interface non linéaires, les travaux, précédemment cités dans [9] pour le cas de lois d'interface linéaires, ont été étendus pour le cas de contact unilatéral sans frottement et avec frottement. A la limite, en utilisant la Γ-convergence, une loi d'interface de type “compliance normale” est obtenue pour le premier problème. Pour le second, la méthode des développement asymptotiques raccordés, permet d'établir des lois de contact pénalisées et des lois de frottement régularisées.

Les travaux cités ci-dessus sont tous effectués dans un cadre statique. La première difficulté qui apparaît si on veut étudier le même problème dans un cadre quasistatique est d'abord l'obtention d'une formulation variationnelle. Contrairement au cas statique, l'obtention d'une formulation variationnelle décrivant le comportement d'un corps élastique en contact avec un support rigide ou un autre corps élastique avec prise en compte de la vitesse dans la loi de contact est récente. Dans ce contexte, la plupart des travaux utilisent des lois de contact régularisées. Par exemple, on trouve dans [8] un théorème d'existence pour un contact quasistatique avec frottement et une loi de compliance normale. La démonstration utilise une méthode incrémentale.

Les premiers résultats qui ne font pas appel à ce modèle de régularisation apparaissent dans [14] où une loi de contact unilatéral avec un frottement de Coulomb non local a été considérée. L'existence est montrée en utilisant un schéma incrémental implicite qui conduit à la résolution d'une suite de problèmes analogues à ceux du cas statique. Ceci permet d'obtenir, sous l'hypothèse que le coefficient de frottement est suffisamment petit, des estimations pour les solutions incrémentales et par suite, en passant à la limite, de démontrer l'existence de la solution du problème quasistatique.

En appliquant la même méthode, le problème de Tresca a été étudié dans [2] où l'unicité de la solution est démontrée.

Pour le cas du contact unilatéral avec frottement de Coulomb local, l'existence est prouvée dans [16] et [19] toujours si le coefficient de frottement est suffisamment petit. La méthode utilisée consiste à discrétiser la formulation variationnelle par rapport au temps et à régulariser le terme du frottement par un problème auxiliaire qui permet d'obtenir une solution de problème discret, l'existence est prouvée par passage à la limite. Ces résultats ont été généralisés par la prise en compte du phénomène d'adhésion dans [15].

Les techniques de [14] ont servi de point de départ à notre travail pour étudier le comportement asymptotique d'un contact entre un premier corps élastique et un solide rigide revêtu d'un revêtement mince en régime quasistatique.
Afin de connaître l'influence des dimensions et des coefficients du Lamé du corps élastique, nous avons choisi de considérer un corps élastique et une couche mince qui occupent respectivement des rectangles de dimensions (L_1,L_2) et (L_1,l), et dont les coefficients de Lamé ne sont pas initialement exprimés en fonction de l'épaisseur de la couche mince.
Une nouveauté par rapport à la modélisation développée dans [10] et [13] est la manière de relier les paramètres mécaniques aux paramètres géométriques. A partir des données physiques réelles qui sont $(\lambda^+,\lambda^-,\mu^+,\mu^-)$ et géométriques (L_1,L_2,l), on peut faire apparaître plusieurs paramétrage. Dans [10], [13], on définit ε, α et β par les relations : $\varepsilon = \dfrac{l}{L_2}$, $\lambda^- = \varepsilon^\alpha \lambda^+$, $\mu^- = \varepsilon^\beta \mu^+$.
La difficulté pratique est que suivant que α, β sont inférieurs ou supérieurs à 1, on obtient des comportements différents quand ε tend vers 0, par exemple: pour $\beta = 0.99$ et $\alpha = 0.99$ la loi limite est de type Coulomb. Si $\beta = 1$ et $\alpha = 1$, on a une loi de type compliance normale avec frottement régularisé. Cette discontinuité dans les lois de comportement limites par rapport aux petites variations des paramètres n'est pas compréhensible physiquement. Par contre, on définit ici à la place de α et β deux paramètres a et b ($a = \dfrac{\lambda^+}{\lambda^-}\varepsilon$, $b = \dfrac{\mu^+}{\mu^-}\varepsilon$) qui figureront dans le problème limite. Ainsi une variation continue des données physiques entraînera une variation continue de la loi limite par rapport à ceux-ci.

Dans un premier temps et jusqu'à la démonstration de l'existence (inclus), nous n'avons pas utilisé l'hypothèse que l'un des deux corps est mince.Nous avons commencé dans le paragraphe 1.2 par un adimensionnement sur le problème fort, ce qui permet de travailler sur des domaines fixes. Le paragraphe 1.3 est consacré à la définition du cadre fonctionnel. Nous y avons introduit des espaces de Sobolev associés à l'opérateur de déformation et au déplacement. Les conditions au bord et la condition de non pénétration sur l'interface de contact Γ_c sont prises en compte dans ces espaces fonctionnels.

Nous avons défini rigoureusement la composante normale σ_N des contraintes sur Γ_c qui figure dans la formulation variationnelle (contrairement au cas statique [10]) à partir de la formule de Green classique par dualité.
La formulation variationnelle du problème présentée dans la section 1.4 est constituée d'une

équation variationnelle qui traduit la loi de de comportement linéaire (loi de Hooke) et de deux inégalités variationnelles: la première décrit l'équation d'équilibre et la loi de frottement ce qui explique la présence simultanée du déplacement et de la vitesse. La deuxième décrit le contact unilatéral en utilisant le déplacement comme fonction test pour laquelle la condition de non pénétration est satisfaite.

L'existence d'une solution pour le cas du contact entre un corps élastique et un solide rigide a été montrée dans [14] en supposant que le coefficient du frottement est plus petit qu'un terme faisant intervenir des constantes qui dépendent des dimensions du domaine et des constantes d'élasticité. L'utilisation directe de ce résultat n'est pas possible car dans notre problème, les propriétés et les dimensions des deux corps sont variables. En prêtant donc une attention particulière à toutes les données variables de notre problème, nous avons pu montrer l'existence par les mêmes techniques que dans [14], sous une condition faisant intervenir explicitement le coefficient de frottement et les paramètres géométriques et élastiques.

Dans la suite de notre étude, nous avons supposé que les propriétés physiques et géométriques de l'un des deux corps (Ω^+) sont fixes et que celles de l'autre (Ω^-) sont variables; en particulier l'épaisseur de Ω^- est négligeable par rapport aux dimensions du corps fixe Ω^+. Relativement à ces paramètres, nous avons établi des estimations du déplacement, des contraintes et de la vitesse. Les estimations du déplacement s'obtiennent par un choix convenable des fonctions test permettant d'éliminer la vitesse. Ces estimations ont permis d'obtenir des estimations sur les contraintes en utilisant la loi de Hooke ainsi que sur ses composantes normale et tangentielle en utilisant les définitions de celles-ci (au sens faible). Nous avons ensuite établi à partir des conditions de contact unilatéral et de la loi de frottement des relations entre d'une part les composantes tangentielle et normale de la dérivée des contraintes par rapport au temps, et d'autre part la trace de la vitesse. En injectant celles-ci dans l'équation d'équilibre dérivée par rapport au temps, nous avons pu obtenir des estimations sur le champ des vitesses.
A partir de ces estimations, nous avons défini ensuite un cas critique. Ceci permet de définir le comportement limite à l'aide de deux paramètres a et b faisant intervenir les rapport entre les coefficients de Lamé et les épaisseurs des deux corps. ($a = \dfrac{\lambda^+}{\lambda^-}\dfrac{l}{L_2}$, $b = \dfrac{\mu^+}{\mu^-}\dfrac{l}{L_2}$). Dans le cas statique, celui-ci correspond à un choix de paramètres qui recouvre l'ensemble des comportements possibles en faisant varier a et b de 0 à $+\infty$.

Pour obtenir le problème limite correspondant au cas critique, nous sommes passés à la limite dans la formulation variationnelle. Parmi les difficultés rencontrées, la présence dans la première inégalité -précédemment décrite dans la formulation variationnelle- du produit de déplacement et de la vitesse qui convergent tout les deux faiblement. Pour contourner cette difficulté, nous avons intégré l'inégalité par rapport au temps, ce qui nous a permis d'obtenir des termes quadratiques en déplacement seul, et a facilité l'utilisation de la semi continuité inférieure des formes bilinéaires. Pour la deuxième inégalité, la perte de la régularité du déplacement dans la couche mince rend le choix de certaines fonctions test -permettant de supprimer les composantes tangentielles- impossible, ceci nous a conduit à définir un nouveau convexe des contraintes.

Le résultat du passage à la limite donne dans un premier temps un problème de contact avec frottement défini sur les deux domaines rescalés et caractérisé par une disparition des termes faisant intervenir les dérivées par rapport à la première variable. On peut montrer que l'on peut éliminer dans un deuxième temps la couche mince. Le problème limite n'est alors défini que sur Ω^+. Les conditions d'interface entre Ω^+ et Ω^- deviennent une condition aux limites "originale" sur le bord de Ω^+. Celle-ci s'obtient en utilisant la régularité des contraintes limites à l'interface.

Dans le dernier paragraphe, nous avons envisagé le comportement des problèmes limites quand a et b sont grands ou petits. Dans le cas statique, il était possible d'obtenir rigoureusement ce comportement en faisant tendre a et b vers 0 ou l'infini. Or les estimations du problème de départ et par là même celles du problème limite imposent une condition sur les valeurs a et b, On ne peut pas de manière rigoureuse envisager certains cas (par exemple, le cas où b tend vers l'infini et a tend vers 0). Néanmoins, on peut effectuer de manière formelle une telle étude et nous présentons un tableau pour les différents comportements.

Enfin, nous donnons en annexe des résultats numériques obtenus à l'aide d'un algorithme developpé au LaMCoS de l'INSA de Lyon dans un cadre dynamique et qui valident numériquement les convergences obtenues de manière théorique dans les paragraphes précédents.(cf [20])

Bibliographie

[1] Ait Moussa A. *Modélisation et études des singularités de contraintes d'un joint collé très mince*. Thèse, Université Montpellier II, 1989.

[2] Amassad A. *Problèmes elasto-visco-plastiques avec frottement*. Thèse, Université de Perpignan, 1997.

[3] Klarbring A. Derivation of a model of adhesively bonded joints by the asymptotic expansion method. *Int. J. Engng Sci.*, 4(29):493–512, 1991.

[4] Ould Khaoua A. *Etude théorique et numérique de problèmes de couches minces en élasticité*. Thèse, Université Montpellier II, 1995.

[5] Raoult A. *Contribution à l'étude de modèles d'évolution de plaques et à l'approximation d'équation d'évolution linéaire du second ordre par des méthodes multipas*. Thèse, Université P. et M. Curie, Paris, 1981.

[6] Licht C. Comportement asymptotique d'une bande dissipative mince de faible rigidité. *C.R. Acad.Sci Paris Sér.I*, 317(4):429–433, 1993.

[7] Licht C. and Michaille G. A modeling of elastique adhesive bonded joints. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 7(2):711–740, 1997.

[8] Andersson L. E. A quasistatic frictional problem with normal compliance. *Nonlinear Anal.*, 16:347–369, 1991.

[9] Zaitouni F. *Modélisation théorique et numérique d'interface. Prise en compte du contact et du frottement*. Thèse, Université Montpellier II, 2000.

[10] Bayada G. and Lhalouani K. Asymptotic and numerical analysis for unilateral contact problem with coulomb's friction between an elastic body and a thin elastic soft layer. *Asymptotic Analysis*, 25:329–362, 2001.

[11] Ciarlet P. G. A justification of von karman equations. Technical Report LA 189, Université de Paris VI, 1979.

[12] Geymonat G. and Krasucki K. A limit model of a soft thin joint. In *Partial differential equations and applications*, volume 177 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 165–173. Dekker, 1996.

[13] Lhalouani K. *Analyse asymptotique et numérique de couches minces en élasticité*. Thèse, Université Claude Bernard, Lyon 1, 1996.

[14] Cocu M., Pratt E., and Raous M. Formulation and approximation of quasistatique frictional contact. *Int. J. Engng Sci.*, 34(7):783–798, 1996.

[15] Cocu M. and Rocca R. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 34(5):981–1001, 2000.

[16] Cocu M. and Rocca R. Existence and approximation of a solution to quasistatic signorini problem with local friction. *Int. J. Engng Sci.*, 39:1233–1255, 2001.

[17] Destuynder P. *Justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques*. Thèse, Université Paris VI, 1980.

[18] Suquet P. Discontinuities and plasticity. In Moreau. J. J. and Panagiatopoulos. P. D., editors, *Non smooth Mechanics and Applications*. Springer Verlag. Wein., 1998.

[19] Rocca R. Existence of a solution for a quasistatic problem of unilateral contact with local friction. *C. R. Acad.Sci., Paris Sér.I*, 328:1253–1258, 1999.

[20] Linck V., Bayada G., Baillet L., Sassi T., and Sabil J. Finite element analysis of a contact with friction between an elastic body and a thin layer. *ASME Journal of Tribology*, 2004. Soumis à publication.