Prescription de courbures sur l'espace hyperbolique

Erwann Delay

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
U.F.R FACULTE DES SCIENCES

Laboratoire de
Mathématiques J.A. Dieudonné

THESE

présentée pour obtenir le titre de

Docteur en SCIENCES

spécialité : MATHEMATIQUES

par

ERWANN DELAY

PRESCRIPTION DE COURBURES SUR L'ESPACE HYPERBOLIQUE

Soutenue le 20 Février 1998 devant le jury composé de :

A. PIRIOU	Professeur Université de Nice	Président Rapporteur E. D.
P. T. CHRUSCIEL	Professeur Université de Tours	Rapporteur
M. TROYANOV	Professeur E.P.F.L. (Lausanne)	Rapporteur
P. GAUDUCHON	Professeur Ecole Polytechnique	Examinateur
Ph. DELANOE	Chargé de Rech. C.N.R.S. (Nice)	Directeur de thèse

Dans la salle de conférence à 14 heures

REMERCIEMENTS

Il m'est difficile d'exprimer en quelques mots ma profonde gratitude à l'égard de mon directeur de thèse Philippe DELANOE, sans lequel ce travail n'aurait pu être mené à bien. Il a su me transmettre son entrain et sa passion pour la recherche en Mathématiques.

Je sais gré à Messieurs Piotr T. CHRUSCIEL et Marc TROYANOV d'avoir rempli (dans les délais !) la charge de rapporteurs de thèse.

Je tiens à remercier Monsieur Alain PIRIOU d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse, qu'il a bien voulu examiner avec soin pour l'Ecole Doctorale.

Je suis très honoré de la participation de Monsieur Paul GAUDUCHON au jury, je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie les membres de l'équipe Analyse & Géometrie pour leur accueil de mes exposés en séminaires et pour le soutien qui m'a permis de participer à deux colloques.

Je remercie Marc HERZLICH pour l'intérêt qu'il porte à mon travail et pour ses remarques concernant la masse.

Je remercie aussi Marie-Jeanick ALLANIC, Rosalba BERTINO, Jocelyne BETTINI, Annie BOREL, , Françoise JEGAT, Janine LACHKAR, Jean-Marc LACROIX, Isabelle LAURENT, Heike LAURIN, Bernard LHOMME, Jean-Paul PRADERE, Jean-Louis THOMIN, pour leur gentillesse et leur serviablilité.

Je remercie Yahya MEZROUI et Nazim SALIH pour l'ambiance très amicale qui a régnée au bureau durant ces années.

Enfin, je remercie François GAUTERO et Gilles LASCHON dont l'amitié m'a été d'une grande aide.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

On considère une variété M de dimension n, de classe C^∞ munie d'un champ de formes bilinéaires symétriques définies positives g. On dit alors que (M, g) est une variété Riemannienne munie de la métrique g.

Considérons pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ le fibré des tenseurs covariants de rang p et contravariants de rang q noté $\mathcal{T}_p^q$. Riemann a montré qu'étant donnée une métrique g sur M, on peut lui associer un tenseur $Riem(g) \in \mathcal{T}_3^1$ défini en coordonnées locales $(x^1, ..., x^n)$ par (on utilise la convention de sommation) :

$$Riem(g) = R^q_{jlk} \frac{\partial}{\partial x^q} \otimes dx^j \otimes dx^l \otimes dx^k,$$

où

$$R^q_{jlk} = \partial_l \Gamma^q_{jk} - \partial_k \Gamma^q_{jl} + \Gamma^p_{jk} \Gamma^q_{pl} - \Gamma^p_{jl} \Gamma^q_{pk},$$
$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks} (\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij})$$

et où g^{ks} dénote la matrice inverse de g_{ij}.

On considère ensuite d'autres tenseurs qui en découlent :

$$\begin{array}{rcl} Sect(g) & = & g_{iq} R^q_{jlk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^l \otimes dx^k \\ & =: & S_{ijlk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^l \otimes dx^k, \end{array}$$

le tenseur de courbure sectionnelle dans $\mathcal{T}_4$,

$$Ricci(g) = R^q_{jqk} dx^j \otimes dx^k =: R_{jk} dx^j \otimes dx^k,$$

le tenseur de courbure de Ricci dans $\mathcal{S}_2$ (sous-espace de $\mathcal{T}_2$ des tenseurs symétriques), et

$$Scal(g) = g^{ij} R_{ij},$$

la courbure scalaire, qui est une fonction sur M. Ces tenseurs ont certaines propriétés algébriques (cf. Ch. 2, section 1), notamment, il suffit de connaître les S_{ijij} et les g_{ij} pour retrouver algébriquement toutes les courbures, $Sect(g)$, $Riem(g)$, $Ricci(g)$ et $Scal(g)$.

Cartan a montré que deux variétés Riemanniennes, ayant localement "la même" (cf. Ch. 2, section 1) courbure sectionnelle, sont localement isométriques (Riemann l'avait montré pour le cas localement euclidien, de courbure nulle). Une question naturelle se pose alors : si l'on impose une courbure, existe-il une métrique réalisant cette courbure ? C'est aussi une question importante en relation avec les équations d'Einstein de la relativité générale.

Des résultats d'existence et d'obstruction ont été donnés par plusieurs auteurs.

1.1 Prescription de la courbure de Ricci

DeTurck [DT1] a tout d'abord montré le résultat *local* suivant :

Théorème 1 *([DT1]) Si R est dans $\mathcal{S}_2$, de classe $C^{m,\alpha}_{loc}$ (resp. C^∞, analytique) au voisinage d'un point p de M (de dimension $n \geq 3$) et si $R^{-1}(p)$ existe, alors il existe une métrique Riemannienne g de classe $C^{m,\alpha}_{loc}$ (resp. C^∞, analytique) telle que $Ricci(g) = R$ dans un voisinage de p.*

Kamberov [K] a montré un résultat similaire sous une condition (due à DeTurck) moins restrictive que l'inversibilité de R en p moyennant l'adoption d'un cadre analytique local. Sa condition est alors nécessaire et suffisante.

Passons aux résultats *globaux* toujours pour l'équation de Ricci.

DeTurck [DT2] a traité le cas très particulier de la dimension 2, pour les surfaces *compactes*. Il obtient une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir la caractéristique d'Euler-Poincaré :

Théorème 2 *([DT2]) Soit M une variété compacte de dimension 2 (sans bord) et soit $R \in \mathcal{S}_2$ satisfaisant la condition nécessaire $R = k\gamma$ avec k fonction sur M et γ une métrique. Alors R est le tenseur de Ricci d'une métrique sur M si et seulement si $\int_M k dV_\gamma = 2\pi\chi(M)$.*

Hamilton [H] a traité le cas de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ (avec $n > 2$) en prouvant un résultat d'inversion locale au voisinage de la métrique standard :

Théorème 3 *([H]) Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère de dimension n munie de la métrique standard g_0, de sorte que $R_0 := Ricci(g_0) = (n-1)g_0$. Alors l'image d'un voisinage de g_0 par l'application de Ricci est une sous-variété de codimension 1 dans un voisinage de R_0. Pour tout R voisin de R_0, il existe une unique constante c telle que l'on puisse résoudre l'équation $Ricci(g) = cR$ pour g voisin de g_0, et un tel g est unique dans le voisinage de g_0 si on normalise le volume $V(g) = V(g_0)$.*

Enfin, on a aussi ajouté de la structure sur la variété, en supposant M (dim $M = 2m$) compacte munie d'un atlas holomorphe et la métrique g Kählérienne. Les composantes de g dans un carte holomorphe $(z^1, ..., z^m)$ vérifient : pour tout μ, ν dans $\{1, ...m\}$,

$$g_{\nu\,\mu} = g_{\overline{\nu}\,\overline{\mu}} = 0 \text{ et } g_{\nu\,\overline{\mu}} = g_{\overline{\mu}\,\nu} = \overline{g}_{\mu\,\overline{\nu}},$$

et la 2-forme de Kähler

$$\omega = \frac{i}{2\pi} g_{\lambda\,\overline{\mu}} dz^\lambda \wedge dz^{\overline{\mu}}$$

est fermée $d\omega = 0$. Dans ce cas, les composantes du tenseur de Ricci prennent une forme simple :

$$R_{\nu\,\mu} = R_{\overline{\nu}\,\overline{\mu}} = 0 \text{ et } R_{\nu\,\overline{\mu}} = -\partial_{\nu\,\overline{\mu}} \ln |g|,$$

où $|g|$ est le déterminant

$$\begin{bmatrix} g_{1\overline{1}} & \cdots & g_{1\overline{m}} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m\overline{1}} & \cdots & g_{m\overline{m}} \end{bmatrix}.$$

On considère alors la forme de Ricci

$$\Psi = \frac{i}{2\pi} R_{\lambda\,\overline{\mu}} dz^{\lambda} \wedge dz^{\overline{\mu}},$$

qui est fermée. Elle définit donc une classe de cohomologie qui est la première classe de Chern :$C_1(M)$. La conjecture de Calabi, démontrée par Yau [Ya] affirme que

Théorème 4 *([Ya]) Tout représentant de $C_1(M)$ est la forme de Ricci d'une métrique Kählérienne (dont la forme de Kähler est cohomologue à ω, celle de g).*

Ce type de résultats a été aussi traité [De] sur des variétés Kählériennes complètes non compactes.

Résultat complémentaire de celui de Hamilton sur la sphère (cf. supra), nous avons d'abord visé le théorème suivant concernant la prescription de la courbure de Ricci sur l'espace hyperbolique (des énoncés précis figurent dans le Ch. 4)

Théorème 5 *(section 4.4) Sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$, on considère la métrique hyperbolique standard H_0 dont la courbure de Ricci vaut : $R_0 = -(n-1)H_0$ (c'est une métrique d'Einstein). Alors, au moins si $n \geq 10$, pour tout tenseur R suffisamment proche de R_0 sur la boule, il existe une métrique unique H (dépendant continûment de R) proche de H_0, dont la courbure de Ricci vaut R.*

Ce résultat découle d'un argument d'inversion locale. On travaille dans des espaces de fonctions ou de tenseurs dont les composantes et leurs dérivées se comportent comme des puissances de la distance (euclidienne) au bord, notons-la ρ (exemple : $H_0 = \rho^{-2}E$ où E est la métrique euclidienne).

Ce théorème est démontré pour des métriques H asymptotiques à H_0 à l'infini : $H - H_0 = O(\rho^{s-2})$ avec $s > 0$.

L'équation de Ricci est un système différentiel quasilinéaire du second ordre en la métrique. Les opérateurs utilisés dans notre contexte sont totalement caractéristiques(chaque dérivation est compensée par une multiplication par ρ ce qui a pour effet de conserver le même poids s).

Nous avons ensuite essayé d'améliorer ce théorème par une méthode permettant de déformer "l' infinité conforme" (qui par exemple est E, pour H_0). Enfin, nous avons démontré un théorème analogue pour le tenseur de *Ricci contravariant*, en dimension n ≥ 2.

Corollairement à notre premier résultat, nous avons obtenu un *scindage* du sous-fibré des tenseurs de type 4-tenseur de Riemann, au voisinage de celui de la métrique hyperbolique H_0. Ce scindage nous a permis de donner, dans le cadre C^∞, le théorème suivant

Théorème 6 *(section 4.5.6) L'image de $H \longrightarrow Riem(H)$ au voisinage de H_0 est une sous-variété, graphe d'une application (pour le scindage précédent) lisse.*

Il existe aussi des résultats d'obstruction sur la courbure de Ricci [DK], [Ba], [H], dans le cadre de la courbure positive. De notre côté, nous obtenons l'obstruction suivante :

Théorème 7 *(section 4.9) Si $R - R_0 = \mu\rho^s H_0$, où $\mu \neq 0$ est un réel assez petit et s est plus grand que $n-1$ (notons que $R - R_0 = O(\rho^{s-2})$), alors il n'existe pas de métrique H vérifiant $H - H_0 = O(\rho^{s-2})$, voisine de H_0, qui admette R pour tenseur de Ricci.*

Enfin, en dimension deux, où l'équation de Ricci est linéaire, nous obtenons des résultats d'existence et d'obstruction (cf. section 4.7).

1.2 Prescription de la courbure scalaire conforme

Sur les variétés Riemanniennes, on dispose de beaucoup de résultats concernant la courbure scalaire conforme (voir e.g. [AB] et ses références). On cherche dans ce cas à prescrire la courbure scalaire en restant dans la classe conforme de la métrique g. Autrement dit, on veut trouver une métrique de la forme $\widetilde{g} = fg$ (où f est une fonction strictement positive) ayant sa courbure scalaire prescrite. Lorsque $n \geq 3$, S dénotant la courbure scalaire de (M, g), la métrique conforme $\widetilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ (où $u > 0$ est une fonction réelle sur M) a une courbure scalaire $\widetilde{S}$ donnée par :

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \triangle_g u + \widetilde{S} u^{\frac{n+2}{n-2}} = Su. \tag{$*$}$$

Nous nous intéressons ici au cas de la courbure scalaire négative. Donnons tout d'abord quelques résultats récents :

Théorème 8 *([AM]) Soit (M, g) une variété Riemannienne connexe complète de dimension $n \geq 3$ avec une courbure sectionnelle S encadrée par deux constantes $-A^2 < S < -B^2 < 0$, où A et B vérifient $1 \leq A^2 B^{-2} < \frac{(n-1)^2}{n(n-2)}$. Soit $\widetilde{S}$ une fonction Höldérienne continue sur M telle que $-a^2 \leq \widetilde{S} \leq -b^2 < 0$ sur $M \backslash M_0$, où M_0 est un compact et $a \geq b > 0$ sont des constantes. Alors il existe $\epsilon > 0$ pour lequel l'équation $(*)$ admet une solution de classe C^2_{loc} encadrée par deux constantes positives pourvu que $\widetilde{S} \leq \epsilon$. Si $\widetilde{S} \leq 0$ alors la solution est unique.*

Théorème 9 *([CCY]) Soit B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ munie de la métrique hyperbolique $g = H_0$ (donc ici $S \equiv -n(n-1)$). Soit $\widetilde{S}$ une fonction Höldérienne continue sur B telle que $\widetilde{S} \leq -b^2 < 0$ sur $B \backslash K$, où K est un compact de B. Soient $\Omega = \{x \in B \ : \ \widetilde{S} < 0\}$ et Ω_1 la composante connexe de Ω telle que $B \backslash \Omega_1$ soit compacte dans B. Soit*

$$\widetilde{S}_\lambda = \begin{cases} \widetilde{S} & si \quad x \in B \backslash \Omega_1 \\ \lambda \widetilde{S} & si \quad x \in \Omega_1 \end{cases},$$

et

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \triangle_g u + \widetilde{S}_\lambda u^{\frac{n+2}{n-2}} = -n(n-1)u. \tag{$*\lambda$}$$

Alors il existe une constante λ^* dépendant de $\widetilde{S}$, telle que $(*\lambda)$ a une solution de classe C^2_{loc} encadrée par deux constantes positives pour tout $\lambda > \lambda^*$ et $(*\lambda)$ n'a pas de solution encadrée par deux constantes positives pour tout $\lambda < \lambda^*$. Si $B = \Omega_1$ alors $\lambda^* = 0$. Si $\widetilde{S} \leq 0$ et $\widetilde{S}(x) \not\equiv 0$ pour $x \in B \backslash \Omega_1$, alors $\lambda^* > 0$.

Théorème 10 *([LTY]) Considérons l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n(-1)$ (donc ici $S \equiv -n(n-1)$). Notons r la fonction distance à un point fixe. Soit $a \geq e$ un réel, considérons les suites de fonctions $\{a_n\}_{n\geq 1}$ et $\{b_n\}_{n\geq 1}$ définies pour $t \geq 0$ par*

$$\begin{aligned} &a_1(t) = \ln(a+t) \\ &a_{m+1}(t) = \ln[a + a_m(t)] \\ &b_m(t) = e^{a_1(t)+\ldots+a_m(t)}. \end{aligned}$$

Soit $\widetilde{S}$ une fonction négative continue sur $\mathbb{H}^n(-1)$. Supposons que $\widetilde{S}$ vérifie

$$\widetilde{S} \geq -Ca_m^{-\beta}(r(x))b_m^{-1}(r(x))e^{2r(x)}$$

près de l'infini pour des constantes $C, \beta > 1$ et un entier naturel m. Alors l'équation $(*)$ a une sous-solution positive lisse sur $\mathbb{H}^n(-1)$. Plus précisément, la fonction u définie par

$$u(x) = \delta \cosh^\alpha[\epsilon r(x)][a + a_m(t)]^{\beta_1}$$

est une sous-solution pour $\delta > 0$ assez petit, où $\beta_1 = \frac{(\beta-1)(n-2)}{4} > 0$, $t = \theta \ln \cosh[\epsilon r(x)]$, $\alpha = \frac{2-n}{2}\epsilon^{-1}$, et avec $\theta > 0$ et $\epsilon > 0$ bien choisis.

De plus, si $\widetilde{S}$ est essentiellement négative sur $\mathbb{H}^n(-1)$, alors l'équation $(*)$ a une solution positive maximale, de classe C^2_{loc} qui est minorée par la sous-solution précédente.

Par contre, si $\widetilde{S}$ (toujours négative) vérifie

$$\widetilde{S} \leq -Ca_m^{-1}(r(x))b_m^{-1}(r(x))e^{2r(x)}$$

près de l'infini pour une constante C et un entier naturel m, alors l'équation $(*)$ n'a pas de solution (ni de sous-solution) positive C^2_{loc} sur $\mathbb{H}^n(-1)$.

Théorème 11 *([RRV1]) Soit (M, g) une variété Riemannienne complète non compacte. Notons r la fonction distance à un point fixe p. Supposons que pour des constantes $c, R > 0, 0 \leq \beta < 1$ on ait*

$$-c^2[r(x)\ln r(x)]^2 \leq [r(x)]^\beta \widetilde{S}(x) < 0 \text{ lorsque } r(x) \geq R.$$

Supposons de plus que

$$\begin{array}{lll} i) Ricci(g) \geq -(n-1)B^2 & sur & M\,; \\ ii) Riem(g) \leq -A^2 & sur & B_R(p)\,; \\ iii) S(x) \leq -n(n-1)T^2[1+r(x)]^{-\beta} & sur & M \qquad (0 < T \leq B) \end{array}$$

pour des constantes $0 < A \leq B$ vérifiant

$$B^2 < [1 + \frac{1}{n(n-2)}]A^2[coth(AR)]^2.$$

Alors il existe $\eta > 0$ tel que, si $\widetilde{S}(x) \leq \eta$ sur M, l'équation $(*)$ admet une solution positive u telle que $\widetilde{g}$ soit une métrique Riemannienne complète.

Nous obtenons dans cette thèse le résultat d'existence et d'unicité suivant (l'énoncé précis est donné plus loin)

Théorème 12 *(section 3.3.2) Sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$, soit la métrique hyperbolique standard H_0 dont la courbure scalaire vaut : $S_0 = -(n-1)n$. Alors pour toute fonction S suffisamment proche de S_0 sur la boule, il existe une métrique unique H (dépendant continûment de S) conforme à H_0 et proche de H_0, dont la courbure scalaire vaut S.*

Ce résultat est obtenu par étapes : d'abord un simple résultat d'inversion locale ; ensuite, plus globalement, par une méthode de sur et sous-solutions.

Tout comme pour le théorème concernant la courbure de Ricci, on travaille dans des espaces de fonctions qui se comportent comme des puissances de la distance euclidienne au bord (notée ρ) ainsi que leurs dérivées. La précision sur le comportement des dérivées est **nouvelle** par rapport aux résultats antérieurs cités plus haut, elle permet entre autre de comparer ce théorème avec le théorème 13 (cf. infra).

Le théorème est démontré pour des fonctions vérifiant $S - S_0 = O(\rho^s)$, avec $0 \leq s < n$, les métriques trouvées sont du type $H = (1+v)H_0$, où $v > -1$ est une fonction vérifiant $v = O(\rho^s)$ (unicité lorsque $s > 0$). En outre, le comportement des dérivées $k^{\text{ièmes}}$ des fonctions S ou v considérées est $O(\rho^{s-k})$. Nous avons récemment pris connaissance de résultats comparables obtenus dans [CA] (proposition 7.3.1 combinée avec le lemme 4.1.4) pour l'équation de Lichnérowicz, dont (*) est un cas particulier, équation qui intervient dans le problème des contraintes en relativité générale.

D'autre part, il y a aussi des résultats d'obstruction, l'un d'entre eux est dû à Min-Oo [MO1][MO2] pour des métriques qui ne sont pas forcément conformes :

Théorème 13 *Une variété spinorielle fortement asymptotiquement hyperbolique de dimension $n \geq 3$, dont la courbure scalaire vérifie $S \geq -n(n-1)$, est isométrique à l'espace hyperbolique.*

La condition d'asymptoticité hyperbolique forte se traduit pour nous par des métriques vérifiant $H - H_0 = O(\rho^{s-2})$ et $\partial(H - H_0) = O(\rho^{s-3})$, avec $s > n$. Ainsi ces théorèmes se complètent exactement autour du poids $s = n$. Notons par ailleurs que le résultat de [LTY] donné précédemment nous donne une obstruction (cf. corollaire 7, section 3.3.2) lorsque $s \leq -2$.

Nous avons aussi le théorème d'obstruction suivant

Théorème 14 *(section 3.5) En dimension $n \geq 6$, soit*

$$s_2 = \frac{1}{2}[n - 1 + \sqrt{(n-1)^2 + \frac{2n(3n-2)}{(n-2)}}] \in]n, n+1[.$$

S'il existe $\epsilon > 0$ tel que $S - S_0 \geq \epsilon \rho^s$, où $s > s_2$ est un réel, alors il n'existe pas de métrique conforme H vérifiant $H - H_0 = O(\rho^{s-2})$ et admettant S pour courbure scalaire.

Ce résultat est moins fort que celui de [MO1][MO2] puisque l'on reste dans la classe conforme, par contre, nous n'imposons aucune condition de comportement à l'infini sur le gradient du facteur conforme (Min-Oo a besoin d'une condition de type Sobolev H_1^1).

1.3 Plan de la thèse

Au cours de cette thèse, nous verrons dans un premier temps (Ch. 2) des rappels de géométrie Riemannienne (Ch.2, section 1, le lecteur averti peut passer directement à la section 2), ainsi que des outils d'analyse appropriés à nos problèmes (Ch. 2, section 2). Ensuite nous présentons les résultats concernant la courbure scalaire conforme (Ch. 3), puis ceux concernant la courbure de Ricci (Ch. 4). Enfin nous traçons une esquisse de projets post-doctoraux motivés par la thèse (Ch. 5).

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Courbure Riemannienne (quelques rappels)

Dans cette section on rappelle, pour le lecteur non spécialiste, quelques bases de géométrie Riemannienne locale. Le thème-directeur est le suivant : un champ de produits scalaires euclidiens défini sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est caractérisé par un invariant local, sa courbure Riemannienne. On ira du théorème de Riemann (courbure nulle, forme normale euclidienne) au théorème de Cartan (cas général). Chemin faisant on procèdera à la construction de coordonnées normales géodésiques, et on liera le comportement local de géodésiques voisines à la courbure. Enfin nous nous intéresserons plus particulièrement à l'application exponentielle sur les variétés à courbure négative.

2.1.1 Métriques Riemanniennes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une métrique Riemannienne sur Ω est un champ lisse de produits scalaires euclidiens.

A tout point $x \in \Omega$ on associe donc une forme bilinéaire symétrique définie positive $g(x)$, qui agit sur les vecteurs tangents en x à Ω, de telle sorte que pour tout couple (U, V) de champs de vecteurs lisses sur Ω, la fonction

$$x \in \Omega \longrightarrow g(x)(U_x, V_x) \in \mathbb{R}$$

soit lisse. En pratique, on écrit g dans un système de coordonnées $(x^1, ..., x^n)$ sur Ω, comme un champ de matrices symétriques définies positives :

$$(x^1, ..., x^n) \longrightarrow [g_{ij}(x^1, ..., x^n)],\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Un changement de coordonnées $x = \Psi(x')$ transforme l'expression de la métrique de la manière suivante

$$g'_{ij}(x') = \frac{\partial \Psi^k}{\partial x'^i}(x')\frac{\partial \Psi^l}{\partial x'^j}(x')g_{kl}[\Psi(x')]$$

(en convenant désormais de sommer sur les indices muets répétés).

Riemann considère une métrique g sur Ω et cherche à quelle condition il existe un changement de coordonnées $x = \Psi(x')$ dans lequel la métrique ait la "forme normale" euclidienne

$$g'_{ij}(x') = \delta_{ij}.$$

Il bute sur une obstruction, qui est la courbure.

2.1.2 Courbure Riemannienne

Riemann cherche tout d'abord une condition nécessaire (Spivak T.II 4D-4 ; 4D-19). Notons φ l'inverse de Ψ ; φ vérifie

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^i}(x) \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^j}(x) = g_{ij}(x).$$

Définissons les symboles de Christoffel :

$$\Gamma_{ij}^{k}(x) = \frac{1}{2} g^{ks}(x)[\partial_i g_{sj}(x) + \partial_j g_{si}(x) - \partial_s g_{ij}(x)], \qquad (*)$$

où $[g^{ij}(x)]$ désigne la matrice *inverse* de $[g_{ij}(x)]$. En manipulant l'équation $(*)$, on obtient

$$\frac{\partial(\frac{\partial \varphi^r}{\partial x^j})}{\partial x^k} = \Gamma_{jk}^{q} \frac{\partial \varphi^r}{\partial x^q}.$$

Notons alors

$$\alpha = (\frac{\partial \varphi^r}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial \varphi^r}{\partial x^n}) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

On a

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x^k}(x) = f_k(x, \alpha(x)),$$

où

$$f_k^j(y, z) = \Gamma_{jk}^{q}(y) z^q.$$

Cette équation en α possède une solution si et seulement si

$$R_{jlk}^{q} z^q = 0,$$

où

$$R_{jlk}^{q} = \frac{\partial \Gamma_{jk}^{q}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^{q}}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^{p} \Gamma_{pl}^{q} - \Gamma_{jl}^{p} \Gamma_{pk}^{q},$$

ceci pour tout $z = (z^1, ...z^n) \in \mathbb{R}^n$. Ainsi

$$R_{jlk}^{q} = 0$$

est une condition nécessaire. Cette condition est aussi suffisante : pour le démontrer on considère une base $(V_1, ...V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour $g(0)$, on note α_p la solution, obtenue en posant une suite de problèmes de Cauchy (indexée par $k = 1, ..., n$), qui vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha^j}{\partial x^k} & = & \Gamma_{jk}^{q} \alpha^q \\ \alpha(0) & = & V_p \end{cases}.$$

On montre que $\alpha_p = d\varphi^p$ pour un certain $\varphi^p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, enfin, on montre que $x' = \varphi(x)$ où $\varphi = (\varphi^1, ..., \varphi^n)$, est un changement de coordonnées qui répond à la question, quitte à restreindre Ω. Riemann montre ensuite le

Théorème 15 *Soit $\Psi : \Omega' \longrightarrow \Omega$ un difféomorphisme, notons φ son inverse. Notons ${R'}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ la quantité précédente sur Ω'. On a alors*

$$ {R'}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}(x') = R^{i}_{jkl}(\Psi(x'))\frac{\partial \Psi^j}{\partial {x'}^{\beta}}(x')\frac{\partial \Psi^k}{\partial {x'}^{\gamma}}(x')\frac{\partial \Psi^l}{\partial {x'}^{\delta}}(x')\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^{i}}(\Psi(x')). $$

Autrement dit, le champ

$$ (x^1, ..., x^n) \longrightarrow R^{i}_{jkl}(x) $$

est un champ de tenseurs. On appelle ce champ de tenseurs la courbure Riemannienne *de la métrique g. On note*

$$ R(U, V)W $$

le champ de vecteurs Z de composantes

$$ Z^p = R^{p}_{ijk} U^j V^k W^i. $$

Remarque : A partir de g et de sa courbure Riemannienne, on définit d'autres tenseurs,

celui de la *courbure sectionnelle* :

$$ S_{ijkl} := g_{ip} R^{p}_{jkl}, $$

celui de la *courbure de Ricci* :

$$ R_{ij} := R^{p}_{ipj}, $$

enfin, la *courbure scalaire* :

$$ S = g^{ij} R_{ij}. $$

Ces quantités possèdent les propriétés algébriques suivantes

$$ S_{ikjl} = -S_{kijl} = -S_{iklj} = S_{jlik}, $$

$$ S_{ijkl} + S_{iljk} + S_{iklj} = 0, $$

$$ R_{ij} = R_{ji}. $$

Remarquons que

$$ S(x)(X, Y, Z, T) = g(x)(X, R(x)(Z, T)Y). $$

2.1.3 Coordonnées géodésiques

On définit la *longueur* d'une courbe $C : [a,b] \longrightarrow \Omega$ de classe C^1, par :

$$L(C) := \int_a^b \sqrt{g_{ij}(C(t))\frac{dC^i}{dt}(t)\frac{dC^j}{dt}(t)}dt.$$

On montre que cette définition est invariante par changement de coordonnées et indépendante du paramétrage de la courbe. On définit alors une topologie sur Ω : pour tout couple x, y de Ω, on définit la *distance* de x à y par :

$$d(x,y) := \inf L(C),$$

où l'inf est pris sur toutes les courbes C^1 de x à y dans Ω. On peut montrer que cette topologie est équivalente à celle de $\mathbb{R}^n$. Etudions les courbes réalisant le minimum. Si C est une courbe $C^2([a,b],\Omega)$ telle que

$$\forall t \in [a,b], \quad ||C'(t)|| := \sqrt{g_{ij}(C(t))\frac{dC^i}{dt}(t)\frac{dC^j}{dt}(t)} \neq 0,$$

quitte à changer de paramétrage $t \to s$, on peut supposer que $a = 0$ ($b = \tau$) et $||C'(s)|| = 1$ pour tout s dans $[0,\tau]$. On montre alors que si C réalise le minimum de $x = C(0)$ à $y = C(\tau)$, alors C vérifie l'équation

$$\frac{d^2C^p}{ds^2} + \Gamma^p_{jk}(C)\frac{dC^k}{ds}\frac{dC^j}{ds} = 0, \quad \forall p \in \{1,...,n\} \qquad (E)$$

qui est invariante par changement de coordonnées. On dira qu'une courbe vérifiant (E) est une *géodésique*. En notant $V(s) = \frac{dC}{ds}(s)$, l'équation (E) s'écrit

$$\forall p \in \{1,...,n\}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dV^p}{ds} & = & -\Gamma^p_{jk}(C)V^kV^j \\ & & \\ \frac{dC^p}{ds} & = & V^p \end{array} \right. .$$

D'après le théorème de Cauchy, à $C(0) = x$ et $V(0) = v$ donnés, il existe une unique solution locale définie sur $[-\epsilon,\epsilon]$, où ϵ peut être choisi continu en x et v. On note $\gamma_v(t)$ la courbe solution (la géodésique passant par x à la vitesse v au temp $t = 0$). Remarquons que par la forme de (E), si $t > 0$ est fixé, la courbe $\gamma_v(t.)$ définie sur $[-\frac{\epsilon}{t}, \frac{\epsilon}{t}]$ vérifie

$$\gamma_{tv}(s) = \gamma_v(ts).$$

On définit l'application *exponentielle* : pour $x \in \Omega$ et tout $v \in T_x\Omega = \mathbb{R}^n$,

$$\exp_x(v) = \gamma_v(1),$$

si 1 appartient au domaine de définition de γ_v. Par continuité des bornes de définitions de γ_v et par compacité de $\mathbb{S}^{n-1}$, on montre que $\exp_x$ est définie sur un voisinage de zéro. De plus on montre que sa différentielle en 0 est

$$D\exp_x(0) = Id.$$

Ainsi, par le théorème d'inversion locale, $\exp_x(.)$ est un difféomorphisme local. Ce difféomorphisme nous donne un nouveau système de coordonnées, appelé *coordonnées géodésiques* en x. On montre qu'en coordonnées géodésiques $(x'^1, ..., x'^n)$ la métrique g s'écrit

$$g'_{ij}(x') = \delta_{ij} + \partial_k \partial_l g'_{ij}(0) x'^k x'^l + o(|x'|^2).$$

Notons que des coordonnées dans lesquelles g est osculatrice à la métrique euclidienne s'appellent *coordonnées normales.*

2.1.4 Transport parallèle et champs de Jacobi

Pour $C : [a,b] \longrightarrow \Omega$ une courbe C^2, on voudrait construire pour tout $t \in [a,b]$ une isométrie $I(t)$ de $T_{C(a)}\Omega = \mathbb{R}^n$ à $T_{C(t)}\Omega = \mathbb{R}^n$. En particulier, on veut que pour tout $V \in T_{C(a)}\Omega$,

$$t \in [a,b] \longmapsto V(t) = I(t)V \in T_{C(t)}\Omega = \mathbb{R}^n,$$

vérifie

$$||V(t)|| = \sqrt{g_{ij}(C(t))V^i(t)V^j(t)} = Cte.$$

En dérivant $\frac{d}{dt}(g_{ij}(C(t))V^i(t)V^j(t)) = 0$, on obtient l'équation

$$(\frac{dV^p}{dt} + \Gamma^p_{kj}\frac{dC^k}{dt}V^j)g_{pi}V^i = 0,$$

à partir de laquelle Levi-Civita a considéré l'équation différentielle linéaire en V :

$$\frac{dV^p}{dt} + \Gamma^p_{kj}\frac{dC^k}{dt}V^j = 0. \qquad (F)$$

A $V(a) = V_a$ donné, il existe une unique solution V de l'équation (F) définie sur $[a,b]$. On dit que $V(t)$ est le *transporté parallèle* de V_a le long de C au point $C(t)$. On montre alors aisément que si V et W vérifient l'équation (F) alors

$$g(C)(V,W) = Cte.$$

Remarques :
i) Si C est une géodésique, $T = \frac{dC}{dt}$ vérifie l'équation (F), en particulier

$||T|| = Cte.$

ii) L'équation étant linéaire, le transport parallèle est bien une isométrie (linéaire) de $T_{C(a)}\Omega = \mathbb{R}^n$ dans $T_{C(t)}\Omega = \mathbb{R}^n$.

iii) Si $(e_1(a), ..., e_n(a))$ est une base orthonormée de $T_{C(0)}\Omega$, et si $e_i(t)$ est le transporté parallèle de $e_i(a)$ au point $C(t)$ le long de C, alors $(e_1(t), ..., e_n(t))$ est une base orthonormée de $T_{C(t)}\Omega$.

Etudions maintenant la variation des géodésiques. Considérons une application de classe C^2 :

$$\alpha : [a, b] \times [-\epsilon, \epsilon] \longrightarrow \Omega,$$

telle que $\forall \lambda \in [-\epsilon, \epsilon]$, $\alpha(., \lambda)$ est une géodésique. On note $C(.) = \alpha(., 0)$. Alors, on a (cf. équation (E))

$$\frac{\partial^2 \alpha^k}{\partial t^2}(t, \lambda) + \Gamma^k_{ij}(\alpha(t, \lambda))\frac{\partial \alpha^i}{\partial t}(t, \lambda)\frac{\partial \alpha^j}{\partial t}(t, \lambda) = 0.$$

On pose $V(.) = \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}(., 0) \in T_{C(t)}\Omega = \mathbb{R}^n$, alors en dérivant l'équation précédente par rapport au paramètre λ, on obtient que V vérifie l'équation différentielle suivante (invariante par changement de coordonnées) :

$$\frac{d^2 V^k}{dt^2} + \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^p}(C)\frac{dC^i}{dt}\frac{dC^j}{dt}V^p + 2\Gamma^k_{ij}(C)\frac{dC^i}{dt}\frac{dV^j}{dt} = 0. \qquad (J)$$

On dit qu'un champ V le long d'une géodésique C est un **champ de Jacobi** s'il vérifie l'équation (J). Remarquons qu'il y a une solution unique à $V(a)$ et $\frac{dV}{dt}(a)$ (ou $V(b)$) donnés. Nous allons simplifier l'équation (J). Si V est un champ le long d'une géodésique C, nous noterons $T = \frac{dC}{dt}$ et $\nabla_T V$ le champ le long de C défini en coordonnées locales par

$$(\nabla_T V)^k = \frac{dV^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} T^i V^j.$$

Remarquons que V est un champ parallèle le long de C (i.e. vérifiant l'équation (F)) si et seulement si $\nabla_T V = 0$. On peut s'assurer par le calcul que l'équation (J) se réécrit

$$(\nabla_T \nabla_T V)^i = [R(T, V)T]^i = R^i_{jkl} T^j T^k V^l.$$

Si maintenant $(e_1(t), ..., e_n(t))$ est une base orthonormée parallèle le long de C et si V est un champ le long de C, on a

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} V_i(t) e_i(t).$$

On montre aisément que $\nabla_T V = \sum_{i=1}^n \frac{dV_i}{dt}(t)e_i(t)$ et que

$$\frac{d^2V_j}{dt^2} = \sum_{i=1}^n g(R(T,e_i)T,e_j)V_i.$$

Notons que si C est normalisée (i.e. $||T|| = 1$), on peut prendre $e_n = T$. Nous avons vu qu'une variation de géodésique donne un champ de Jacobi. Inversement, si J est un champ de Jacobi le long d'une géodésique C, alors J vient d'une variation de géodésique. En effet, on note $p = C(0)$ et on considère γ, une courbe passant par p à la vitesse $J(0)$ au temp $\lambda = 0$; on identifie $J'(0)$ à un vecteur de $T_p\Omega$. On note $T = \frac{dC}{dt}(0)$, on considère $J'_\lambda(0)$, le transporté parallèle de $J'(0)$ sur $\gamma(\lambda)$, de même pour T_λ et T. Enfin, pour $|\lambda| << 1$, on considère

$$\alpha(t,\lambda) = \exp_{\gamma(\lambda))}[t(T_\lambda + \lambda J'_\lambda(0))].$$

Alors à λ fixé, $\alpha(.,\lambda)$ est une géodésique et $\alpha(t,0) = C(t)$, donc $V(t) = \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}(t,0)$ vérifie l'équation de Jacobi sur C. On vérifie ensuite que $V(0) = J(0)$ et $V'(0) = J'(0)$ et on montre au passage que lorsque $J(0) = 0$,

$$J(t) = D_v\exp_p(tC'(0))(tJ'(0)).$$

Les champs de Jacobi permettent donc d'étudier le comportement des fuseaux de géodésiques ; nous allons voir ce qui se passe dans des cas particuliers. Définissons tout d'abord la courbure sectionnelle : pour $a \in \Omega$ et pour deux vecteurs linéairements indépendants V et W de $T_a\Omega$, on définit la *courbure sectionnelle* par

$$K(V,W) = \frac{S_{ikjl}V^kV^lW^iW^j}{||V \wedge W||_g^2}.$$

On peut montrer que $K(V,W)$ ne dépend que du 2-plan σ défini par (V,W), on la note $K(\sigma)$. Regardons ce que donne l'équation de Jacobi lorsque la courbure sectionnelle est constante. Supposons que V soit un champ le long d'une géodésique normalisée, on considère $(e_1(t),...,e_n(t) = T(t) = \frac{dC}{dt}(t))$ une base orthonormée parallèle le long de C ; on a

$$V(t) = \sum_{i=1}^n V_i(t)e_i(t).$$

L'équation de Jacobi s'écrit :

$$\frac{d^2V_j}{dt^2} + KV_j = 0.$$

Ainsi :
-si $K > 0$, $V_j(t) = A_j \cos(\sqrt{K}t) + B_j \sin(\sqrt{K}t)$, les géodésiques se rapprochent.

-si $K = 0$, $V_j(t) = A_j t + B_j$, les géodésiques s'éloignent linéairement.

-si $K < 0$, $V_j(t) = A_j \mathrm{e}^{\sqrt{-K}t} + B_j \mathrm{e}^{\sqrt{-K}t}$, les géodésiques s'éloignent exponentiellement.

2.1.5 La courbure caractérise la métrique

Nous suivons ici l'exposé de [Ca, p.156-158]. Soient (Ω, g) et $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{g})$ deux ouverts avec des métriques Riemanniennes, soient $p \in \Omega$ et $\widetilde{p} \in \widetilde{\Omega}$. Choisissons une isométrie linéaire : $i : T_p\Omega \longrightarrow T_{\widetilde{q}}\widetilde{\Omega}$. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage normal de p tel que $\exp_{\widetilde{p}}$ soit défini sur $i \circ \exp_p^{-1}(\mathcal{V})$. Pour $q \in \mathcal{V}$ on définit

$$f(q) = \exp_{\widetilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q).$$

Pour tout q dans $\mathcal{V}$, il existe une unique géodésique normalisée $\gamma : [0, t] \longrightarrow \Omega$ ($||\gamma'|| = 1$) telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma(t) = q$. Compte-tenu de la propriété 1 du lemme 1 ci-après (section 2.1.6), on a

$$d(p, q) = \widetilde{d}[\widetilde{p}, f(q)] = t$$

car i est une isométrie. On note P_t le transport parallèle le long de γ, de $\gamma(0)$ à $\gamma(t)$. On définit

$$\begin{array}{rccl} \Phi_t : & T_q\Omega & \longrightarrow & T_{f(q)}\widetilde{\Omega} \\ & V & \longmapsto & \widetilde{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}(V), \end{array}$$

où $\widetilde{P}_t$ est le transport parallèle le long de la géodésique normalisée $\widetilde{\gamma}$: $[0, t] \longrightarrow \widetilde{\Omega}$ donnée par $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{p}$ et $\widetilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$. On note R et $\widetilde{R}$ les courbures de Riemann sur Ω et $\widetilde{\Omega}$ respectivement.

Théorème 16 *(E.Cartan) Si pour tout q dans $\mathcal{V}$ et tout quadruplet X, Y, U, V de vecteurs de $T_q\Omega$, on a*

$$g(q)(R(X, Y)U, V) = \widetilde{g}(f(q))(\widetilde{R}(\Phi_t(X), \Phi_t(Y))\Phi_t(U), \Phi_t(V)),$$

alors $f : \mathcal{V} \longrightarrow f(\mathcal{V})$ est une isométrie locale et $df_p = i$. On a donc $f^*\widetilde{g} = g$ sur $\mathcal{V}$.

Preuve
Soit $q \in \mathcal{V}$ et $\gamma : [0,l] \longrightarrow \Omega$ géodésique normale avec $\gamma(0) = p$ et $\gamma(l) = q$. Soit $v \in T_q\Omega$ et J le champ de Jacobi le long de γ donné par $J(0) = 0$ et $J(l) = v$. Soit $(e_1, ..., e_n = \gamma'(0))$ une base orthonormée de $T_p\Omega$ et $e_i(t)$ le transporté parallèle de e_i, le long de γ, au point $\gamma(t)$. Décomposons

$$J(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)e_i(t),$$

on a alors

$$y_j'' - \sum_{i=1}^{n} g(R(e_n, e_i)e_n, e_j)y_i = 0.$$

Soit $\widetilde{\gamma} : [0,l] \longrightarrow \widetilde{\Omega}$ la géodésique normalisée vérifiant $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{p}$ et $\widetilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$. Soit $\widetilde{J}$ le champ de Jacobi le long de $\widetilde{\gamma}$ défini par

$$\widetilde{J}(t) = \Phi_t(J(t)), \quad \forall t \in [0,l].$$

Soit $\widetilde{e}_i(t) = \Phi(e_i(t))$, alors par linéarité de Φ_t,

$$\widetilde{J}(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\widetilde{e}_i(t).$$

Or $g(R(e_n, e_i)e_n, e_j) = \widetilde{g}(\widetilde{R}(\widetilde{e}_n, \widetilde{e}_i)\widetilde{e}_n, \widetilde{e}_j)$, donc

$$y_i'' - \sum_{i=1}^{n} \widetilde{g}(\widetilde{R}(\widetilde{e}_n, \widetilde{e}_i)\widetilde{e}_n, \widetilde{e}_j)y_i = 0,$$

par suite $\widetilde{J}$ est un champ de Jacobi le long de $\widetilde{\gamma}$ avec $\widetilde{J}(0) = 0$ et comme le transport parallèle est une isométrie, $||\widetilde{J}(l)|| = ||J(l)||$. Si on montre que $\widetilde{J}(l) = df_q(v) = df_q(J(l))$, on aura bien $||df_q(v)|| = ||v||$. Comme $\widetilde{J}(t) = \Phi_t(J(t))$, $\widetilde{J}'(0) = \partial_t\Phi(0, J(0)) + \partial_V\Phi(0, J(0))\frac{dJ}{dt}(o) = i(J'(0))$, car $\frac{\partial}{\partial t}\Phi(0, J(0)) = 0$ puique $J(0) = 0$, et car $\partial_V\Phi(0, J(0)) = i$. Par ailleurs J et $\widetilde{J}$ sont des champs de Jacobi qui s'annulent en $t = 0$ ainsi

$$J(t) = D\exp_p(t\gamma'(0))(tJ'(0)),$$

$$\widetilde{J}(t) = D\exp_{\widetilde{p}}(t\widetilde{\gamma}'(0))(t\widetilde{J}'(0)).$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\widetilde{J}(l) &= (D\exp_{\widetilde{p}}(l\widetilde{\gamma}'(0))(li(J'(0))) \\
&= (D\exp_{\widetilde{p}}(l\widetilde{\gamma}'(0)) \circ i \circ (D(exp_p(l\gamma'(0)))^{-1}(J(l)) \\
&= df_q(J(l)),
\end{aligned}$$

la dernière égalité étant dûe au fait que $l\widetilde{\gamma}'(0) = i(l\gamma'(0))$ et que $l\gamma'(0) = \exp_p^{-1}(q)$. ■

2.1.6 Complétude et exponentielle ; cas de la courbure non positive

Nous avons vu que l'application exponentielle est un difféomorphisme local, nous l'étudions ici plus en détails car elle nous sera très utile dans le cas particulier de la courbure négative. Donnons tout d'abord le

Lemme 1 *([CE p. 10]) Soit $B_r(0)$ une boule de $T_p\Omega$ sur laquelle exp_p est un difféomorphisme local. Alors :*
1) Pour tout $V \in B_r(0)$, $t \longrightarrow exp_p(tV)$ est l'unique courbe telle que

$$L(\gamma) = d(p, exp_p(V)) = ||V||,$$

2) Si $q \notin exp_p B_r(0) =: B_r(p)$, il existe $q' \in \partial B_r(p)$ tel que

$$d(p,q) = r + d(q',q).$$

Preuve
1) Si γ est une courbe de p à q $=\exp_p(V)$ dans $B_r(p)$ qui réalise le minimum, alors γ est une géodésique de p à q. Soit $\widetilde{V}$ sa vitesse de passage en p, l'unicité du problème de Cauchy implique : $\gamma(t) = \exp_p(t\widetilde{V})$, et il suffit de reparamétrer γ pour avoir le résultat.

2) Soit $C(t)$ une courbe de p à q. Il existe un premier temps t_0 tel que $C(t_0) \in \partial B_r(p)$, donc $L(C) = r + d(C(t_0), q) \geq r + d(\partial B_r(p), q)$ donc $d(p,q) = \inf_C L(C) \geq r + d(\partial B_r(p), q)$. L'inégalité inverse est vraie par l'inégalité triangulaire donc

$$d(p,q) = r + d(\partial B_r(p), q).$$

Comme $\partial B_r(q)$ est compacte, il existe q' dans $\partial B_r(p)$ tel que $d(q,q') = d(\partial B_r(p), q)$. ■

Remarques
i)D'après 2), si γ sort de $B_r(p)$ dans 1), alors γ ne peut pas réaliser le minimum (car $L(\gamma) \geq r \geq ||V||$).

ii)Une telle boule est appelée boule normale.

Théorème 17 (Hopf-Rinow) *([CE p. 11], [Au p. 13]) Soit M une variété Riemannienne, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

a) M est complète,
b) il existe $p \in M$ tel que exp_p est défini sur tout T_pM ;
c) pour tout $p \in M$, exp_p est défini sur tout T_pM.
Elles entrainent :
d) Pour tout p, q dans M il existe γ géodésique de p à q telle que $L(\gamma) = d(p, q)$.

Définition 1 *On dit que q est conjugué à p si q est un point singulier de $exp_p : T_pM \longrightarrow M$. Autrement dit il existe v dans T_pM tel que $q = exp_p(v)$ et $Dexp_p(v)$ est de noyau non réduit à zéro.*

Proposition 1 *Avec les notations de la définition précédente, q est conjugué à p si et seulement si il existe J champ de Jacobi sur $t \longmapsto exp_p(tv)$ tel que $J \not\equiv 0$, $J(0) = J(1) = 0$.*

Preuve
i) “seulement si” : soit $v \in T_pM$ et $0 \neq w \in T_v(T_pM)$ tels que $(D\exp_p)(v)(w) = 0$. On identifie w à un vecteur de T_pM. Remarquons que $C(t) = \exp_p(tv)$ est une géodésique donc $||C'|| = Cte$, d'où $\forall t$, $||D\exp(tv)(v)|| = Cte$ et donc $||v|| = ||(D\exp_p(v)(v)||$, ce qui assure que w est non colinéaire à v (on peut montrer que w est orthogonal à v). Soient $\rho_\lambda(t) = (v + \lambda w)t$ puis $\gamma_\lambda(t) = \exp_p \circ \rho_\lambda(t)$. D'une part on a

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}[\exp_p \circ \rho_\lambda(t)]|_{\lambda=0} = D\exp_p(tv)(tw) = 0,$$

ceci en $t = 0$ et $t = 1$. D'autre part $\frac{\partial}{\partial \lambda}[\exp_p \circ \rho_\lambda(t)]|_{\lambda=0}$ est un champ de Jacobi le long de $C(t)$.

ii) “si” : $\alpha(t, \lambda) = \exp_{C(0)}[(C'(0) + \lambda J'(0))t]$ est la variation qui donne J et on a

$$D\exp_{C(0)}(C'(0))(J'(0)) = \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}(1, 0) = J(1) = 0,$$

donc q est conjugué à p. ■

Théorème 18 *([Au p. 18]) Si la courbure sectionnelle K est non positive alors il n'y a pas de champ de Jacobi non nul qui s'annule en deux points distincts.*

Preuve
Soit $J(s)$ champ de Jacobi le long de $C(s)$, géodésique normalisée. Supposons que $J(0) = 0$ et que $J \not\equiv 0$. Soit $(e_1(s), ..., e_n(s))$ base orthonormée parallèle le long de $C(s)$, avec $e_n(s) = C'(s)$. On décompose $J(s) = y^i(s)e_i(s)$, donc

$(y^j)''(s) = (R(e_n, e_p)e_n, e_j)y^p$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^n (y^i)^2)'' & = & \sum_{i=1}^n [(y^i)']^2 + \sum_{i=1}^n (y^i)(y^i)'' \\
& = & \sum_{i=1}^n [(y^i)']^2 + \sum_{i=1}^n (R(e_n, e_p)e_n, e_i)y^p y^i \\
& = & \sum_{i=1}^n [(y^i)']^2 + \sum_{i=1}^n (R(e_n, J)e_n, J) \\
& \geq & \sum_{i=1}^n [(y^i)']^2 \geq 0.
\end{array}$$

Posons $f(s) = ||J(s)||^2 = \sum_{i=1}^n [y^i(s)]^2$. On a $f(0) = 0$, $f'(0) = 2\sum_{i=1}^n y^i(0)(y^i)'(0) = 0$, $f''(0) = 2\sum_{i=1}^n [(y^i)'(0)]^2 = ||J'(0)|| > 0$, (car si $J'(0) = 0$, comme $J(0) = 0$, par unicité de la solution du problème de cauchy, on aurait $J \equiv 0$). Et comme $\forall s > 0,\ f''(s) \geq 0$, alors $\forall s > 0,\ f(s) \neq 0$. ■

Corollaire 1 *Si la courbure sectionnelle K est non positive, il n'y a pas de points conjugués, donc exp n'a pas de points singuliers.*

Lemme 2 *([CE p. 35]) Soient M et N deux variétés Riemanniennes de dimension n. Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une isométrie locale. Alors si M est complète, φ est un revêtement. Autrement dit, pour tout p dans N, il existe U voisinage de p tel que $\varphi^{-1}(U) = \cup_\alpha U_\alpha$, union disjointe d'ouverts de M tels que pour tout α, $\varphi_{|U_\alpha} : U_\alpha \longrightarrow U$ soit un difféomorphisme.*

Preuve

Soient $p \in N$ et r tel que $B_r(p)$ soit incluse strictement dans une boule de coordonnées normales. Soient $U = B_r(p)$, $\{q_\alpha\}_\alpha = \varphi^{-1}(p)$ et $U_\alpha = B_r(q_\alpha)$. Soit $B_r(0)$ boule de T_pN et $B_r^\alpha(0)$ boule de $T_{q_\alpha}M$. φ étant une isométrie locale, le diagrame suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 & T_{q_\alpha}M & \overset{d\varphi}{\overset{\rightarrow}{\sim}} & T_pN & \\
\exp_{q_\alpha} & \downarrow & & \downarrow & \exp_p \\
 & M & \underset{\varphi}{\longrightarrow} & N &
\end{array}.$$

Il se restreint au diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 & B_r^\alpha(0) & \overset{d\varphi}{\overset{\rightarrow}{\sim}} & B_r(0) & \\
\exp_{q_\alpha} & \downarrow & & \downarrow & \exp_p \\
 & U_\alpha & \underset{\varphi}{\longrightarrow} & U &
\end{array}.$$

Or comme $\exp_p \circ d\varphi : B_r^\alpha(0) \longrightarrow U$ est un difféomorphisme, $\varphi : U_\alpha \longrightarrow U$ l'est aussi. Il est clair que $\{\cup_\alpha U_\alpha\} \subset \varphi^{-1}(U)$. Montrons l'autre inclusion. Soient $\overline{q} \in \varphi^{-1}(U)$ et $q = \varphi(\overline{q})$, soit γ géodésique normale minimale de q à p. Soit $v = d\varphi^{-1}(\gamma'(q)) \in T_{\overline{q}}M$, soit $\overline{\gamma}$ la géodésique partant de $\overline{q}$ à la vitesse v. Comme M est complète, $\overline{\gamma}$ est définie sur $[0, \infty[$. Soit $t_0 = d(p, q)$ et soit $\overline{p} = \overline{\gamma}(t_0)$. Comme $(\varphi \circ \overline{\gamma}) = \gamma$, on a $\varphi(\overline{p}) = p$. On a donc $d(\overline{p}, \overline{q}) = d(p, q) < r$, donc $q \in \cup_\alpha U_\alpha$.

Il reste à montrer que l'intersection $U_\alpha \cap U_\beta$ est vide, pour cela, il suffit de montrer que si $\overline{p}_\alpha \neq \overline{p}_\beta \in \varphi^{-1}(p)$ alors $d(\overline{p}_\alpha, \overline{p}_\beta) > 2r$. Soit $\overline{\gamma}$ géodésique minimale de $\overline{p}_\alpha$ à $\overline{p}_\beta$. Alors $\gamma = \varphi \circ \overline{\gamma}$ est une géodésique fermée en p, et comme p est contenu dans une boule de coordonnées normales de rayon strictement plus grand que r, γ doit être de rayon strictement plus grand que $2r$, donc $d(\overline{p}_\alpha, \overline{p}_\beta) > 2r$. ■

Théorème 19 (Cartan-Hadamard) *([CE p. 36]) Soit M une variété Riemannienne complète à courbure sectionnelle non positive. Alors, pour tout p dans M, $exp_p : T_pM \longrightarrow M$ est un revêtement.*

Preuve
Comme M n'a pas de points conjugués, $\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ a une différentielle sans points singuliers. Ainsi $\exp_p$ induit une métrique $<,>$ sur T_pM, les lignes partant de l'origine sont des géodésiques sur T_pM, donc par Hopf-Rinow (b), $(T_pM, <,>)$ est complet. Ainsi, par le lemme précédent, $\exp_p$ est un revêtement. ■

Corollaire 2 *([CE p.37]) Soit M une variété Riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle non positive. Alors, pour tout p dans M, $exp_p : T_pM \longrightarrow M$ est un difféomorphisme.*

Preuve
Un revêtement sur un simplement connexe est un homéomorphisme, $\exp_p$ est en plus lisse et sans point singulier, donc c'est un difféomorphisme. ■

2.2 Quelques outils d'analyse sur l'espace hyperbolique

Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats de [GL], en particulier un théorème d'isomorphisme pour l'opérateur de type Schrödinger $(\triangle + K)$ sur les tenseurs (où K est un terme d'ordre zéro), entre espaces de Hölder appropriés. Ces espaces permettent entre autre des estimations de type Schauder pour les opérateurs elliptiques uniformément dégénérés (par exemple dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$). Nous avons ajouté quelques propriétés de ces espaces, utiles pour la suite, et qui n'apparaissent pas dans [GL]. Seules les démonstrations correspondantes seront détaillées.

2.2.1 Espaces fonctionnels appropriés.

Soit M ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière ∂M lisse. Pour $k \in \mathbb{N}$ et Ω ouvert de M, on notera $C_k(\overline{\Omega})$ ou $C_{k,0}(\overline{\Omega})$ le Banach usuel des fonctions k fois continuement différentiables sur $\overline{\Omega}$, et pour $0 < \alpha < 1$ nous noterons $C_{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ le sous espace des fonctions dont la k^{eme} dérivée satisfait sur $\overline{\Omega}$ la condition uniforme de Hölder d'ordre α, avec leurs normes usuelles $\| \, . \, \|_{k,\overline{\Omega}} = \| \, . \, \|_{k,0,\overline{\Omega}}$ et $\| \, . \, \|_{k,\alpha,\overline{\Omega}}$. Nous noterons $C_k(\Omega) = C_{k,0}(\Omega)$ et $C_{k,\alpha}(\Omega)$ les espaces vectoriels de fonctions satisfaisant aux estimations correspondantes sur les compacts de Ω (rappelons qu'on ne peut pas définir de normes sur ces espaces). Pour $x \in M$ notons d_x la distance euclidienne de x à ∂M. Pour $s \in \mathbb{R}$ on définit :

$$\| u \|_{k,0,\Omega}^{(s)} = \sum_{|\gamma| \leq k} \sup_{x \in \Omega} [d_x^{-s+|\gamma|} |\partial^\gamma u(x)|],$$

où pour tout multi-indice γ, $\partial^\gamma = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma}$, et pour $0 < \alpha < 1$ on définit :

$$\| u \|_{k,\alpha,\Omega}^{(s)} = \| u \|_{k,0,\Omega}^{(s)} + \sum_{|\gamma| = k} \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \min(d_x^{-s+k+\alpha}, d_y^{-s+k+\alpha}) \frac{|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Les sous-espaces de $C_k(\Omega)$ des fonctions pour lesquelles les quantités ci-dessus sont finies sont des Banach notés $\Lambda_k^s(\Omega) = \Lambda_{k,0}^s(\Omega)$ et $\Lambda_{k,\alpha}^s(\Omega)$ respectivement (avec leurs normes ci-dessus).

Une propriété très utile de ces espaces est que la norme peut être estimée essentiellement sur les "petites boules près de ∂M" comme nous allons le voir dans le lemme et la proposition qui suivent.

Lemme 3 *Pour $x \in M$, notons B_x la boule euclidienne de centre x et de rayon $\frac{1}{2} d_x$, alors pour $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha < 1$ on a $\| u \|_{k,\alpha,B_x \cap \Omega}^{(s)} \leq \| u \|_{k,\alpha,\Omega}^{(s)}$*

d'évidence et

$$\| u \|_{k,\alpha,\Omega}^{(s)} \leq C \sup_{x\in\Omega} \| u \|_{k,\alpha,B_x\cap\Omega}^{(s)}$$

où C ne dépend que de k.

PREUVE :
(i) Si $0 \leq |\gamma| = l \leq k$ on a
$\| d^{-s+l}\partial^\gamma u \|_{L^\infty(\Omega)} = sup_{x\in\Omega} \| d^{-s+l}\partial^\gamma u \|_{L^\infty(B_x\cap\Omega)} \leq \sup_{x\in\Omega} \| u \|_{k,0,B_x\cap\Omega}^{(s)}$.

(ii) Si $0 < \alpha < 1$ fixons γ, $|\gamma| = k$, on doit estimer

$$m_{x,y} = \min(d_x^{-s+k+\alpha}, d_y^{-s+k+\alpha})\frac{|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

- si $|x-y| < \frac{1}{2}\max(d_x, d_y)$ alors $x \in B_y$ ou $y \in B_x$ ainsi $m_{x,y} \leq \| u \|_{k,\alpha,B_x\cap\Omega}^{(s)}$ par exemple.
- si $|x-y| \geq \frac{1}{2}\max(d_x, d_y)$, on montre que $m_{x,y} \leq 4 \| d^{-s+k}\partial^\gamma u \|_{L^\infty(\Omega)}$, on se retrouve alors dans le cas (i). ∎

Le lemme précédent peut se réécrire de la manière suivante : considérons B_0 la boule de centre 0 et rayon $\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}^n$ et définissons pour $x \in M$, le difféomorphisme $\Psi_x : B_0 \ni z \longmapsto x + d_x z \in B_x$, on a alors en remarquant que $\forall y \in B_x$, $\frac{1}{2}d_x < d_y < \frac{3}{2}d_x$.

Proposition 2 *Soit $u \in C_k(\Omega)$, alors $u \in \Lambda_{k,\alpha}^s(\Omega)$ si et seulement si*

$$\sup_{x\in\Omega} d_x^{-s} \| u \circ \Psi_x \|_{k,\alpha,\Psi_x^{-1}(B_x\cap\Omega)} < \infty,$$

et ce sup *est comparable à $\| u \|_{k,\alpha}^{(s)}$*

La proposition suivante donne une grande partie des propriétés des espaces $\Lambda_{k,\alpha}^s$. Fixons une fonction ρ dans $C^\infty(\overline{M})$ strictement positive sur M, $\rho = 0$ sur ∂M et $\forall x \in \partial M$, $d\rho(x) \neq 0$.

Proposition 3
(1) Si $\Omega' \subset \Omega \subset M$ alors $\Lambda_{k,\alpha}^s(\Omega) \subset \Lambda_{k,\alpha}^s(\Omega')$ continûment de norme 1.
(2) $C_{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset \Lambda_{k,\alpha}^0(\Omega)$ continûment.
(3) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\Lambda_{k,\alpha}^s(\Omega) \subset C_{k,\alpha}(\Omega)$.
(4) Si $\Omega \subset\subset M$ et $0 < \alpha < 1$ alors $\Lambda_{k,\alpha}^s(\Omega) \subset C_{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ continûment avec une norme dépendant de la distance de Ω à ∂M, de k, s, α et du diamètre de M.
(5) Si $k' + \alpha' \leq k + \alpha$, $\Lambda_{k,\alpha}^s(\Omega) \subset \Lambda_{k',\alpha'}^s(\Omega)$ continûment.
(6) Si $s > s'$, $\Lambda_{k,\alpha}^s(\Omega) \subset \Lambda_{k,\alpha}^{s'}(\Omega)$ continûment.
(7) Si $0 < \alpha < 1$, $\Lambda_{k,\alpha}^{k+\alpha}(\Omega) \subset C_{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ continûment.

(8) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in [0,1[$, $\rho^s \in \Lambda^s_{k,\alpha}(\Omega)$, on écrira $\rho^s \in \Lambda^s_\infty(\Omega)$.
(9) La multiplication point par point : $\Lambda^s_{k,\alpha}(\Omega) \times \Lambda^{s'}_{k,\alpha}(\Omega) \longrightarrow \Lambda^{s+s'}_{k,\alpha}(\Omega)$ et

$$\| uv \|^{(s+s')}_{k,\alpha,\Omega} \leq C \| u \|^{(s)}_{k,\alpha,\Omega} \| v \|^{(s')}_{k,\alpha,\Omega} .$$

(10) $\rho\partial_i$ est une application continue de $\Lambda^s_{k+1,\alpha}(\Omega)$ dans $\Lambda^s_{k,\alpha}(\Omega)$.
(11) Si $u \in \Lambda^s_{k,\alpha}(\Omega)$ et $\rho^{-s}u \geq \delta > 0$ alors $u^{-1} \in \Lambda^{-s}_{k,\alpha}(\Omega)$ et l'application $u \longmapsto u^{-1}$ est lisse entre les Banach correspondants.
(12) Si $s > t$, $0 < \beta < \alpha < 1$, l'injection $\Lambda^s_{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow \Lambda^t_{k,\beta}(\Omega)$ est compacte.
(13) Si M et M' sont des ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ à frontière lisse et $\Phi : \overline{M'} \longrightarrow \overline{M}$ est un difféomorphisme de variétés à frontière, avec Φ et Φ^{-1} de classes $C_{k,\alpha}$ si $k \geq 1$ ou C_1 si $k = 0$, soit $\Omega \subset M$ ouvert et $\Omega' = \Phi^{-1}\Omega$. Si $u \in \Lambda^s_{k,\alpha}(\Omega)$ alors $u \circ \Phi \in \Lambda^s_{k,\alpha}(\Omega')$ et

$$\| u \circ \Phi \|^{(s)}_{k,\alpha,\Omega'} \leq C \| u \|^{(s)}_{k,\alpha,\Omega}$$

où C dépend de k, s, α, du diamètre de M, M' et de la norme $C_{k,\alpha}$ (ou C_1) de Φ et Φ^{-1}.
(14) Si $v \in \Lambda^s_{l,\alpha}(M)$, $s \geq 0$, $\| v \|^{(s)}_{l,\alpha} \leq K$, $-a \leq v \leq b$ où $a, b \in \mathbb{R}^+$.
Si $\Psi \in C^{l+1}([-a,b])$ avec $\Psi(0) = 0$, alors $u = (\Psi \circ v) \in \Lambda^s_{l,\alpha}(M)$ et $\| \Psi \circ v \|^{(s)}_{l,\alpha}$ est majorée par une constante qui ne dépend de v qu'à travers K, a et b.

La démonstration de cette proposition est laissée au lecteur, elle utilise essentiellement le lemme 3 et la proposition 2. Nous détaillerons plus loin les propriétés (12) et (14) qui sont nouvelles.

Remarques :
(i) D'après (8) et (9), la multiplication par ρ^s est un isomorphisme de $\Lambda^{s'}_{k,\alpha}$ dans $\Lambda^{s+s'}_{k,\alpha}$ et $\| u \|^{(s)}_{k,\alpha,\Omega} \approx \| \rho^{-s}u \|^{(0)}_{k,\alpha,\Omega}$.
(ii) D'après (9), la multiplication par les fonctions $\Lambda^0_{k,\alpha}(\Omega)$ préserve $\Lambda^s_{k,\alpha}(\Omega)$; *idem* par les fonctions $C^\infty(\overline{\Omega})$ d'après (2).

Nous allons maintenant étendre ces espaces aux tenseurs sur M. Notons $\Lambda^s_{k,\alpha}(\Omega, \mathcal{T}_p)$ l'espace des tenseurs covariants de rang p sur Ω dont les composantes en coordonnées euclidiennes (par exemple) sont dans $\Lambda^s_{k,\alpha}(\Omega)$, avec la norme évidente. Il est clair que cet espace est indépendant du choix des coordonnées sur $\overline{M}$ d'après la proposition précédente (13). Remarquons même si nous n'en aurons pas besoin que ces espaces peuvent se définir sur toute variété C^∞ compacte à frontière en utilisant un atlas et une partition de l'unité (on aura toujours l'indépendance du choix des cartes).

2.2.2 Opérateurs différentiels elliptiques

Nous allons maintenant étudier les estimations de type Schauder pour les opérateurs elliptiques uniformément dégénérés. Nous avons ici modifié la définition d'opérateurs elliptiques uniformément dégénérés de [GL] pour permettre aux coefficients d'être dans $\Lambda^0_{k,\alpha}(M)$ au lieu de $C^\infty(\overline{M})$; bien entendu la proposition suivante et sa preuve ont été modifiées en conséquence.
Soit P un système linéaire $N \times N$ d'opérateurs différentiels d'ordre 2 sur M.On dira que P est *uniformément dégénéré* si pour $u = (u^1, .., u^N) \in C_2(M, \mathbb{R}^N)$,

$$(Pu)^i = \sum_{j=1}^{N} P^i_j(x, \rho\partial)u^j,\ 1 \leq i \leq N,$$

où pour $1 \leq i, j \leq N$, $P^i_j(x, \xi)$ est réel, polynomial quadratique en ξ à coefficients dans $\Lambda^0_{k,\alpha}(M)$. Remarquons que $P : \Lambda^s_{k+2,\alpha}(\Omega) \longrightarrow \Lambda^s_{k,\alpha}(\Omega)$ est continue. On dira que P est *elliptique* comme opérateur uniformément dégénéré si la partie homogène quadratique $p^i_j(x, \xi)$ satisfait : $\forall x \in M$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$,

$$det(p^i_j(x, \xi)) \geq K|\xi|^{2N},$$

où K est une constante strictement positive.

Proposition 4 *Soient $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]0, 1[$, et soit $\Omega' \subset \Omega$ ouverts de M tels que $\forall x \in \Omega'$, $B_x \subset \Omega$. Soit P un opérateur elliptique uniformément dégénéré ; si $u \in C_2(M, \mathbb{R}^N) \cap \Lambda^s_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ est tel que $Pu \in \Lambda^s_{k,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, alors $u \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}(\Omega', \mathbb{R}^N)$ et*

$$\| u \|^{(s)}_{k+2,\alpha,\Omega'} \leq C(\| Pu \|^{(s)}_{k,\alpha,\Omega} + \| u \|_{0,0,\Omega})$$

où C est indépendante de u, Ω et Ω'.

Preuve :
Remarquons que sur les compacts de M, P est elliptique au sens usuel donc on a certainement $u \in C_{k+2,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. La démonstration consiste à se ramener, à travers les difféomorphismes Ψ_x introduits pour la proposition 2 ci-avant, aux estimées elliptiques intérieures usuelles dont nous rappelons à présent un énoncé : soit Q un système elliptique du second ordre $N \times N$ sur la boule B_0,

$$(Qv)^i = \sum_{j=1}^{N} Q^i_j(z, \partial)v^j.$$

Soit B'_0 la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{4}$, supposons que $v \in C_2(B_0, \mathbb{R}^N) \cap L^\infty(B_0, \mathbb{R}^N)$ est telle que $Qv \in C_{k,\alpha}(\overline{B_0}, \mathbb{R}^N)$, alors $v \in C_{k+2,\alpha}(\overline{B'_0}, \mathbb{R}^N)$ et

$$\| v \|_{k+2,\alpha,\overline{B'_0}} \leq C(\| Qv \|_{k,\alpha,\overline{B_0}} + \| v \|_{0,0,\overline{B_0}}),$$

où C ne dépend que de k, α, N, n et de la norme $C_{k,\alpha}(\overline{B_0})$ des coefficients de Q.
Transformons le système P sur B_x en un système Q sur B_0 par Ψ_x. Pour $x \in M$, notons B'_x la boule de centre x et de rayon $\frac{1}{4}d_x$. Considérons Q sur B_0 définit par

$$Q(u \circ \Psi_x) := (Pu) \circ \Psi_x.$$

Comme $d_x^{-1}\partial(u \circ \Psi_x) = \partial u \circ \Psi_x$ on a :

$$Q^i_j(z, \partial) = P^i_j(\Psi_x(z), d_x^{-1}(\rho \circ \Psi_x(z))\partial),$$

or sur B_x, $\rho \approx d_x$ donc Q est elliptique sur B_0 au sens usuel avec une constante d'ellipticité indépendante de x. Il faut encore s'assurer que la norme $C_{k,\alpha}(\overline{B_0})$ des coefficients de Q est bornée indépendamment de x (on notera $C(\hat{x})$ une constante indépendante de x). Notons $K \in \Lambda^0_{k,\alpha}(M)$ un coefficient de P ; via Ψ_x, K se transforme en un terme de l'ordre de $\tilde{K}(z) = K(\Psi_x(z))$ et d'après la proposition 2, $K \in \Lambda^0_{k,\alpha}(M)$ ssi $\sup_{x\in M} \| K \circ \Psi_x \|_{k,\alpha,\Psi_x^{-1}(B_x)} \leq C(\hat{x})$ donc ssi $\forall x \in M$, $\| K \circ \Psi_x \|_{k,\alpha,B_0} \leq C(\hat{x})$ ainsi $\| \tilde{K} \|_{k,\alpha,\overline{B_0}} \leq C(\hat{x})$.
On déduit alors le résultat aisément à l'aide de la proposition 2 (en remarquant qu'elle reste vraie pour les B'_x). ■

De cette proposition sur les estimées intérieures de [GL] découle, en vertu du lemme 3 une conséquence évidente sur les estimées globales :

Corollaire 3 *Soient $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0,1[$. Soit P un opérateur elliptique uniformément dégénéré ; si $u \in C_2(M, \mathbb{R}^N) \cap \Lambda^s_0(M, \mathbb{R}^N)$ est tel que $Pu \in \Lambda^s_{k,\alpha}(M, \mathbb{R}^N)$, alors $u \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}(M, \mathbb{R}^N)$ et*

$$\| u \|^{(s)}_{k+2,\alpha,M} \leq C(\| Pu \|^{(s)}_{k,\alpha,M} + \| u \|_{0,0,M}),$$

où C est indépendante de u.

2.2.3 Principe du Maximum

Nous allons maintenant donner un principe du maximum généralisé sur les variétés riemanniennes complètes (c.f. [GL] p. 211).

Théorème 20 *Soit M l'intérieur d'une variété lisse compacte $\overline{M}$, avec frontière, ρ comme précédemment, g une métrique sur M telle que $\rho^2 g$ s'étende continûment sur $\overline{M}$ en une métrique $\overline{g}$ non dégénérée avec les $\rho\partial_i\overline{g}_{jk}$ bornés ; soit $f \in C_2(M)$ bornée. Alors il existe une suite $\{x_k\} \subset M$ telle que*

$$\begin{array}{ll} (i) & \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \sup_M f, \\ (ii) & \lim_{k\to\infty} |\nabla_g f(x_k)|_g = 0, \\ (iii) & \lim_{k\to\infty} \inf_{p\geq k} \triangle_g f(x_p) \geq 0. \end{array}$$

Preuve :
On note $L = \sup_M f$ et on considère $F = L - f$; alors $F \geq 0$, on peut supposer $F > 0$ (sinon on prend $x_k = x$ où $F(x) = 0$ et le théorème est démontré). On cherche $\{x_k\}$ telle que (i) $\lim F(x_k) = 0$, (ii) $\lim |\nabla_g F(x_k)|_g = 0$, (iii) $\limsup \triangle_g F(x_k) \leq 0$. On considère $y_k \to y \in \partial M$ telle que $F(y_k) \to 0$. On introduit un système de coordonnées (x^i) au voisinage de y (et on note abusivement y_k l'image de y_k dans ce système, ∂M celle de ∂M, et d, la distance euclidienne standard dans ce système). Pour k assez grand fixé, on considère $\varphi(x) = 1 - \delta_k^{-2}|x - y_k|^2$ où $2\delta_k = d(y_k, \partial M)$. Notons $D = \{\varphi > 0\}$, on a alors $\sup_D |\partial_i\varphi| \leq 2\delta_k^{-1}$ et $\sup_D |\partial_i\partial_j\varphi| \leq 2\delta_k^{-2}$. Comme $\delta_k \approx \rho$ sur D on en déduit (d'après les hypothèses sur $\overline{g}$) que $\sup_D |\nabla_g\varphi|_g$, $\sup_D |\triangle_g\varphi| \leq C$ où C est indépendante de k. On considère ensuite $x_k \in D$ où $\frac{F}{\varphi}$ est minimum, alors $F(x_k) \leq F(y_k)$ et en utilisant la fonction $\log \frac{F}{\varphi}$ on montre que $|\nabla_g F(x_k)|_g \leq CF(y_k)$ et $\triangle_g F(x_k) \leq CF(y_k)$, on a alors le résultat lorsque $k \to \infty$. ■

Dorénavant on considère $\overline{g} \in C^\infty(\overline{M})$ avec $g = \rho^{-2}\overline{g}$ (on dit que g est *conformément compacte*) ; on va montrer un théorème d'isomorphisme pour l'opérateur $\triangle_g + \mathcal{K}$ où $\mathcal{K}$ est un endomorphisme autoadjoint agissant sur $\mathcal{T}_p$ le fibré des tenseurs covariants de rang p. Tout d'abord, nous avons besoin d'une estimation *a priori* pour la norme Λ_0^s d'un tenseur u en fonction de $(\triangle_g + \mathcal{K})u$.

2.2.4 Estimation de base

Définition 2 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K} \in C_0(M, End(\mathcal{T}_p))$, on dira que l'estimation basique (E. B.) est vraie pour $\triangle_g + \mathcal{K}$ sur $\Lambda^s(M, \mathcal{T}_p)$ si pour tout $u \in C_2(\Omega, \mathcal{T}_p) \cap \Lambda_0^s(\Omega, \mathcal{T}_p)$ tel que $(\triangle_g + \mathcal{K})u \in \Lambda_0^s(\Omega, \mathcal{T}_p)$, dans une de ces situations :*

$$\begin{array}{ll} (i) & \Omega \subset\subset M,\ u \in C_0(\overline{\Omega}, \mathcal{T}_p),\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ ou} \\ (ii) & \Omega = M, \end{array}$$

on a :

$$\| u \|^{(s)}_{0,\Omega} \leq C \| (\triangle + \mathcal{K})u \|^{(s)}_{0,\Omega} \qquad \textit{(E.B.)}$$

où C est indépendante de u et Ω.

Proposition 5 *Soient M un domaine borné lisse de $\mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$, $p, k \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0, 1[$. Soit $\mathcal{K} \in \Lambda^s_{k,\alpha}(M, End(\mathcal{T}_p))$ autoadjoint ; supposons que (E.B.) soit vraie pour $\triangle + \mathcal{K}$ sur $\Lambda^s(M, \mathcal{T}_p)$ alors*

$$\triangle_g + \mathcal{K} : \Lambda^s_{k+2,\alpha}(M, \mathcal{T}_p) \longrightarrow \Lambda^s_{k,\alpha}(M, \mathcal{T}_p)$$

est un isomorphisme.

PREUVE :
L'injectivité est évidente d'après (ii) de l'(E. B.). Pour la surjectivité, considérons $f \in \Lambda^s_{k,\alpha}(M, \mathcal{T}_p)$; si $\Omega \subset\subset M$ à frontière lisse, $\Lambda^s_{k,\alpha}(M, \mathcal{T}_p) \subset C_{k,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathcal{T}_p)$, ainsi le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} (\triangle + \mathcal{K})u = f \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique $u \in C_{k+2,\alpha}(\overline{\Omega}, \mathcal{T}_p)$. Considérons une suite exhaustive $\{\Omega_i\}_i$ de M d'ouverts relativements compacts à frontière lisse telle que $\overline{\Omega_i} \subset \Omega_{i+1} \subset\subset M$ et $M = \cup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$. Pour tout i, on note u_i la solution du problème de Dirichlet ci-dessus sur $\Omega = \Omega_i$. Si on fixe j, pour i suffisamment grand, $\forall x \in \Omega_j$, $B_x \subset \Omega_i$, on peut donc appliquer la proposition 4 avec $P = \triangle + \mathcal{K}$, puis la combiner à (E.B.) :

$$\begin{aligned} \| u_i \|^{(s)}_{k+2,\alpha,\Omega_j} &\leq C(\| Pu_i \|^{(s)}_{k,\alpha,\Omega_i} + \| u_i \|^{(s)}_{0,\Omega_i}) \\ &\leq C(\| Pu_i \|^{(s)}_{k,\alpha,\Omega_i} + C' \| Pu_i \|^{(s)}_{0,\Omega_i}) \\ &\leq C \| f \|^{(s)}_{k,\alpha,\Omega_i} \leq C \| f \|^{(s)}_{k,\alpha,M} . \end{aligned}$$

D'après la proposition 3 (alinéa 4), u_i est bornée dans $C_{k+2,\alpha}(\overline{\Omega_j}, \mathcal{T}_p)$ donc par le théorème d'Ascoli, , elle a une sous-suite $u_i^{(j)}$ qui converge dans $C_{k+2,\beta}(\overline{\Omega_j}, \mathcal{T}_p)$ (avec $\beta \in]0, \alpha[$), vers $u^{(j)} \in C_{k+2,\alpha}(\overline{\Omega_j}, \mathcal{T}_p)$, ceci pour tout j. En extrayant une sous-suite diagonale, on montre que $u^{(j)} = u_{|\Omega_j}$ où u vérifie $(\triangle + \mathcal{K})u = f$ dans M et $\| u \|^{(s)}_{k+2,\alpha,M} \leq C \| f \|^{(s)}_{k,\alpha,M}$ (donc $u \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}(M, \mathcal{T}_p)$). La surjectivité est donc prouvée. ■

La proposition qui suit donne une condition suffisante pour avoir l'(E. B.), et donc l'isomorphisme.

Proposition 6 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{K} \in C_0(M, End(\mathcal{T}_p))$, on définit $K \in C_0(M)$ par :*

$$K(x) = \inf\{(\mathcal{K}(x)u, u)_g, \ u \in \mathcal{T}_{p_x}, \ |u|_g = 1\}.$$

S'il existe $\varphi \in C_2(M)$ telle que $\rho^{-s}\varphi \in C_1(\overline{M})$, $\rho^{-s}\varphi > 0$ sur $\overline{M}$ et $(\triangle + K)\varphi \geq \delta\varphi$ pour un $\delta > 0$, alors (E. B.) est vraie pour $\triangle + \mathcal{K}$ sur $\Lambda^{s-p}(M, \mathcal{T}_p)$ et on peut prendre comme constante d'estimation $C = \frac{C'}{\delta}$ où C' est indépendante de δ et $\mathcal{K}$.

Preuve :
On reprend Ω comme ci-avant, dans la définition de (E. B.). Pour le cas $p = 0$ (fonctions), on a $\mathcal{K} = K$; soit $u \in C_2(\Omega) \cap \Lambda_0^s(\Omega)$ telle que $(\triangle + K)u \in \Lambda_0^s(\Omega)$. Notons que $\frac{u}{\varphi} \in C_2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Dans le cas (i), $\frac{u}{\varphi} = 0$ sur $\partial\Omega$, un calcul direct montre que $\delta\frac{u}{\varphi}(x) \leq \frac{(\triangle+K)u}{\varphi}(x)$ où $\frac{u}{\varphi}(x) = \sup_\Omega \frac{u}{\varphi}$ et comme $\varphi \approx \rho^s$ on a le résultat. Dans le cas (ii), on applique le principe du maximum généralisé à $f = \frac{u}{\varphi}$, en évaluant en x_k puis en faisant tendre k vers l'infini, on obtient

$$\delta \sup_M |\frac{u}{\varphi}| \leq \sup_M |\frac{(\triangle + K)u}{\varphi}|,$$

ce qui implique de nouveau le résultat.
Pour le cas $p > 0$ (tenseurs), on recommence le travail avec la fonction $\frac{|u|_g}{\varphi}$.
■

Nous allons maintenant construire une fonction φ dans le cas particulier où $M = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ muni de la métrique hyperbolique $H_0 = \rho^{-2}E$, $E = \sum_{i=1}^n dx_i^2$ désignant la métrique euclidienne standard, $|.|$ la norme associée à E et $\rho(x) = \frac{1}{2}(1 - |x|^2)$. Pour cela nous aurons besoin de la condition $\inf_M K > s(s-(n-1))$ (notons qu'elle implique $K > -\frac{(n-1)^2}{4} \equiv -\lambda_1$, où λ_1 est la borne inférieure des premières valeurs propres de Dirichlet sur l'espace hyperbolique c. f. [Cha]).

Proposition 7 *Soit $s \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $\varphi \in C^\infty(B)$ telle que $0 < \rho^{-s}\varphi \in C^\infty(\overline{B})$ et $[\triangle + s(s-(n-1))]\varphi \geq 0$.*

Preuve :
On cherche φ sous forme radiale : $\varphi = f \circ \rho$ avec $f \in C_2(0, \frac{1}{2}]$, on obtient $[\triangle + s(s-(n-1))]\varphi = F(f)(\rho)$ où

$$F(f)(t) = (2t^3 - t^2)f''(t) + [(n-2)t - (n-4)t^2]f'(t) + s[s-(n-1)]f(t).$$

On cherche ensuite $f : (0, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $t^{-s}f \in C^\infty[0, \frac{1}{2}]$, $t^{-s}f > 0$ et $F(f) \geq 0$. Si $2s \geq n-2$ ou si $s \leq 0$ on prend $f(t) = t^s$, sinon on cherche f formellement : $f(t) = t^s(\sum_{k \geq 0} a_k t^k)$ et on trouve un polynôme qui convient.
■

2.2.5 Théorèmes d'isomorphismes

On obtient d'après ce qui précède le

Théorème 21 *Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^n$ munie de la métrique hyperbolique H_0, soit $s \in \mathbb{R}$, $k, p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0,1[$ et $\mathcal{K} \in \Lambda^0_{k,\alpha}(B, End(\mathcal{T}_p))$ endomorphisme autoadjoint satisfaisant :*

$$\inf_{\substack{x \in B \\ u \in \mathcal{T}_p,\ |u|_{H_0}=1}} (\mathcal{K}(x)u, u)_{H_0} > s(s-(n-1)),$$

alors

$$\triangle + \mathcal{K} : \Lambda^{s-p}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{T}_p) \longrightarrow \Lambda^{s-p}_{k,\alpha}(B, \mathcal{T}_p)$$

est un isomorphisme.

Dans le cas particulier où $p = 2$, on a le scindage des 2-tenseurs covariants $\mathcal{T}_2 = \mathcal{S}_2 \oplus \mathcal{A}_2$ où $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{A}_2$ sont les fibrés des 2-tenseurs covariants symétriques et antisymétriques respectivement. Si K est un multiple de l'identité $\mathcal{K}(x) = K(x)I$, l'opérateur $\triangle + \mathcal{K}$ préserve ce scindage, on peut donc remplacer $\mathcal{T}_2$ par $\mathcal{S}_2$ dans l'isomorphisme. De même $\mathcal{S}_2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{S}_{20}$ où $\mathcal{H}$ est le fibré des multiples de H_0 et $\mathcal{S}_{20}$ le fibré des tenseurs de trace nulle. On obtient ainsi le

Corollaire 4 *Avec les notations précédentes, si $\inf_M K > s(s-(n-1))$,*

$$\triangle + KI : \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_{20}) \longrightarrow \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_{20}),$$

et

$$\triangle + KI : \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{H}) \longrightarrow \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{H})$$

sont des isomorphismes.

Ayons la curiosité ici de traduire le théorème 21 dans la boule B munie de la métrique *euclidienne* $E = \rho^2 H_0$, qui est *conforme* à H_0 ; au moins dans le cas des fonctions ($p = 0$).

Théorème 22
Si K est une fonction sur B satisfaisant $\inf_B K > s(s-(n-1))$, alors l'application

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^s_{k+2,\alpha}(B) & \longrightarrow & \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B) \\ v & \longmapsto & \triangle_E v + \frac{n-2}{\rho} < grad\rho, gradv >_E + \frac{K}{\rho^2} v \end{array}$$

est un isomorphisme.

PREUVE :
Il suffit de calculer $\triangle_0$ en termes de la métrique E et de réénoncer alors le théorème 21 précédent. En coordonnées euclidiennes : $\rho(x) = \frac{1}{2}(1 - |x|^2)$ et

$$H_{0ij} = \rho^{-2}\delta_{ij},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}H_0^{kl}(\partial H_{0lj} + \partial_j H_{0li} - \partial_l H_{0ij}) \\
&= \frac{1}{\rho}(x_i\delta_{kj} + x_j\delta_{ki} - x_k\delta_{ij}),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\triangle_0 u &= -\rho^2\delta^{ij}(\partial_{ij}u - \Gamma_{ij}^k\partial_k u) \\
&= \rho^2\triangle_E u + \rho(n-2) < grad\rho, grad\ u >_E
\end{aligned}$$

d'où le résultat. $\blacksquare$

2.2.6 Démonstrations des propriétés nouvelles.

Dans ce paragraphe, nous démontrons les propriétés (12) et (14) de la proposition 3, ainsi que deux lemmes qui nous seront utiles par la suite.

Une estimation non-linéaire

Lemme 4 *Si $v \in \Lambda^s_{l,\alpha}(M)$, $s \geq 0$, $\parallel v \parallel^{(s)}_{l,\alpha} \leq K$, $-a \leq v \leq b$ où $a, b \in \mathbb{R}^+$. Si $\Psi \in C^{l+1}([-a,b])$ avec $\Psi(0) = 0$, alors $u = (\Psi \circ v) \in \Lambda^s_{l,\alpha}(M)$ et $\parallel \Psi \circ v \parallel^{(s)}_{l,\alpha}$ est majorée par une constante qui ne dépend de v qu'à travers K, a et b(nous noterons ici de telles constantes C(K,a,b)).*

PREUVE : Rappelons que d_x =dist$(x, \partial M)$, et que

$$\begin{aligned}
\parallel u \parallel^{(s)}_{l,\alpha} = & \sum_{|\gamma| \leq l} \sup_{x \in M} [d_x^{-s+|\gamma|} |\partial^\gamma u(x)|] \\
& + \sum_{|\gamma|=l} \sup_{\substack{x,y \in M \\ x \neq y}} \min(d_x^{-s+l+\alpha}, d_y^{-s+l+\alpha}) \frac{|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u(y)|}{|x-y|^\alpha} \\
= & \sum_{|\gamma| \leq l} \parallel \partial^\gamma u \parallel_0^{(s-|\gamma|)} + \sum_{|\gamma|=l} \sup_{\substack{x,y \in M \\ x \neq y}} \min(d_x^{-s+l+\alpha}, d_y^{-s+l+\alpha}) \frac{|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u(y)|}{|x-y|^\alpha}
\end{aligned}$$

a) $|\gamma| = 0$: on a alors facilement

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in M} d_x^{-s} |u(x)| &= \sup_{x \in M} d_x^{-s} |v(x)| \tfrac{|\Psi \circ v(x)|}{|v(x)|} \\
&\leq \sup_{[-a,b]} |\tfrac{\Psi(t)}{t}| \sup_{x \in M} d_x^{-s} |v(x)| = C(K,a,b) \parallel v \parallel_0^{(s)} .
\end{aligned}$$

b) $1 \leq |\gamma| \leq l$: il est facile de s'assurer par récurrence (c'est un cas particulier de la formule de Faa-di-Bruno) que $\partial^\gamma u$ est une somme de termes de la forme

$$\prod_{i \in I} (\partial^{\mu_i} v)^{r_i} (\Psi^{(j)} \circ v),$$

où I est fini non vide, $r_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq |\gamma|$, $1 \leq |\mu_i| \leq |\gamma|$, $\sum_{i \in I} |\mu_i| r_i = |\gamma|$ et $\Psi^{(j)} = \frac{d^j \Psi}{dt^j}$.
Comme $\parallel \partial^{\mu_i} v \parallel_0^{(s-|\mu_i|)} \leq C(K,a,b)$, et comme

$$\parallel \Psi^{(j)} \circ v \parallel_0^{(0)} \leq \sup_{t \in [-a,b]} |\Psi^{(j)}(t)| \leq C(K,a,b),$$

d'après la proposition 3, le terme ci-dessus est dans

$$\Lambda_0^{\sum_{i \in I} r_i (s - |\mu_i|)} = \Lambda_0^{\sum_{i \in I} r_i s - \sum_{i \in I} r_i |\mu_i|} = \Lambda_0^{(\sum_{i \in I} r_i) s - |\gamma|},$$

et puisque $\sum_{i\in I} r_i \geq 1$, il est donc au moins dans $\Lambda_0^{s-|\gamma|}$ et majoré en norme $\|\ \|_0^{(s-|\gamma|)}$ par $C(K,a,b)$. Ainsi

$$\| \partial^\gamma u \|_0^{(s-|\gamma|)} \leq C(K,a,b).$$

c)si $|\gamma| = l$: en raisonnant comme précédemment et en notant $w = \prod_{i\in I}(\partial^{\mu_i} v)^{r_i}$, w est au moins dans $\Lambda_{0,\alpha}^{s-l}$ et $\| w \|_{0,\alpha}^{(s-l)} \leq C(K,a,b)$. Maintenant,

$$\min(d_x^{-s+l+\alpha}, d_y^{-s+l+\alpha}) \frac{|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

est majoré par une somme de termes de la forme :

$$\begin{aligned}
&\min(d_x^{-s+l+\alpha}, d_y^{-s+l+\alpha}) \frac{|w(x)\Psi^{(j)}(v(x)) - w(y)\Psi^{(j)}(v(y))|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq \overbrace{\min(d_x^{-s+l+\alpha}, d_y^{-s+l+\alpha}) \frac{|w(x)\Psi^{(j)}(v(x)) - w(y)\Psi^{(j)}(v(x))|}{|x-y|^\alpha}}^{(i)} \\
&\quad + \overbrace{\min(d_x^{-s+l+\alpha}, d_y^{-s+l+\alpha}) \frac{|w(y)\Psi^{(j)}(v(x)) - w(y)\Psi^{(j)}(v(y))|}{|x-y|^\alpha}}^{(ii)}.
\end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned}
\text{(i)} &\leq \min(d_x^{-s+l+\alpha}, d_y^{-s+l+\alpha}) \tfrac{|w(x)-w(y)|}{|x-y|^\alpha} |\Psi^{(j)}(v(x))| \\
&\leq \| w \|_{0,\alpha}^{(s-l)} \sup_{t\in[-a,b]} |\Psi^{(j)}(t)| \leq C(K,a,b).
\end{aligned}$$

D'autre part, compte-tenu du théorème des accroissements finis (appliqué à $\Psi^{(j)}$),

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} &\leq \min(d_x^{-s+l+\alpha}, d_y^{-s+l+\alpha}) \tfrac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^\alpha} \tfrac{|\Psi^{(j)}(v(x)) - \Psi^{(j)}(v(y))|}{|v(x)-v(y)|} |w(y)| \\
&\leq \min(d_x^{-s+l+\alpha}, d_y^{-s+l+\alpha}) \tfrac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^\alpha} |w(y)| \sup_{t\in[-a,b]} |\Psi^{(j+1)}(t)|.
\end{aligned}$$

Distinguons deux cas : Si $-s+l \geq 0$ alors

$$\begin{aligned}
\min(d_x^{-s+l+\alpha}, d_y^{-s+l+\alpha}) = [\min(d_x, d_y)]^{-s+l+\alpha} &\leq d_y^{-s+l}[\min(d_x, d_y)]^\alpha \\
&= d_y^{-s+l}[\min(d_x^\alpha, d_y^\alpha)]
\end{aligned}$$

et donc

$$\text{(ii)} \leq \| v \|_{0,\alpha}^{(0)} \| w \|_0^{(s-l)} \sup_{t\in[-a,b]} |\Psi^{(j+1)}(t)| \leq C(K,a,b).$$

Si $-s+l < 0$ alors $d_y^{-s+l} \geq 1$ ainsi $|w(y)| \leq d_y^{-s+l}|w(y)| \leq \| w \|_0^{(s-l)}$ et

$$\text{(ii)} \leq \| v \|_{0,\alpha}^{(s-l)} \| w \|_0^{(s-l)} \sup_{t\in[-a,b]} |\Psi^{(j+1)}(t)| \leq C(K,a,b). \qquad \blacksquare$$

Compacité des injections $\Lambda^s_{k,\alpha} \longrightarrow \Lambda^t_{k,\beta}$ $({\scriptstyle s>t,\ 0<\beta<\alpha<1})$

Considérons $\rho \in C^\infty(\overline{M})$ telle que $\rho > 0$ sur M, $\forall x \in \partial M$, $d\rho(x) \neq 0$ (par exemple ρ solution de $\left\{ \begin{array}{l} \triangle\rho = 1 \\ \rho_{|\partial M} = 0 \end{array} \right.$), quitte à multiplier ρ par une constante, on peut supposer que $\sup_{\overline{M}} \rho = 1$ (il est important de noter que $\rho \approx d$ sur $\overline{M}$).

Pour tout entier positif j, posons $d_j = 2^{-j}$, soit $\Omega_j = x \in M,\ \rho(x) > d_j$. Remarqons que pour j assez grand ($j \geq j_0$), les Ω_j sont à frontière lisse ($d\rho(x) \neq 0$ dans un voisinage de ∂M).

Lemme 5 *Pour tout entier positif k, il existe une suite de fonctions $\{\varphi_j\}_{j\geq j_0}$ possédant les propriétés suivantes :*

$$\varphi_j = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & sur & \Omega_j \\ 0 & sur & M\backslash\Omega_{j+1} \end{array} \right.$$

avec $\varphi_j \in C^{k+1}_{loc}(M)$ et,

$$\forall x \in M,\ \forall\gamma,\ |\gamma| \leq k+1,\ |\partial^\gamma \varphi_j(x)| \leq \frac{C(|\gamma|, k)}{d_j^{|\gamma|}}.$$

PREUVE : Notons que la suite $\{\Omega_j\}_{j>j_0}$ vérifie : $\overline{\Omega_j} \subset\subset \Omega_{j+1} \subset M$ avec

$$dist(\overline{\Omega_j}, \partial\Omega_{j+1}) = d_j - d_{j+1} = \frac{1}{2} d_j = d_{j+1}.$$

Nous allons construire φ_j par étapes.
a) Pour $u \in [0,1]$, soit $f(u) = \int_u^1 t^{k+1}(1-t)^{k+1} dt$. Alors $f(0) > 0$, $f(1) = 0$ et $\forall i = 1,..,k+1$, $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0$ et $|f^{(i)}(u)| \leq C(i,k)$.
b) Pour $u \in [0, \frac{d_j}{2}]$ soit $g_j(u) = \frac{1}{f(0)} f(\frac{2u}{d_j})$ alors

$$\forall i \leq k+1,\ |g_j^{(i)}(u)| \leq \frac{C(i,k)}{(d_j)^i}.$$

c) Soit

$$h_j(u) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{sur} & [0, 1-d_j] \\ g_j(u-1+d_j) & \text{sur} & [1-d_j, 1-d_{j+1}] \\ 0 & \text{sur} & [1-d_{j+1}, 1]. \end{array} \right.$$

Les dérivées de h_j se recollent bien et sont bornées comme précédemment : $h_j \in C^{k+1}([0,1])$, et $\forall i \in \{1,..,k+1\}$, $|h_j^{(i)}| \leq \frac{C(i,k)}{(d_j)^i}$.
d) Soit $\varphi_j(x) = h_j(1-\rho(x))$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $j \geq j_0$. Les dérivées de $1-\rho$ sont bornées sur $\overline{M}$; or $\partial^\gamma \varphi_j$ ne fait intervenir que des dérivées d'ordre au plus $|\gamma|$ de h_j sur $[1-d_j, 1-d_{j+1}]$, et de $1-\rho$ sur $\overline{\Omega_{j+1}\backslash\Omega_j} \subset \overline{M}$. Comme $0 < d_j < 1$, $\forall m \leq |\gamma|$, $\frac{1}{d_j^{|\gamma|}} \geq \frac{1}{d_j^m}$, donc $|\partial^\gamma \varphi_j(x)| \leq \frac{C(|\gamma|,k)}{d_j^{|\gamma|}}$. $\blacksquare$

Corollaire 5 *$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j \geq 1$, $\varphi_j \in \Lambda^s_{k+1}$ et $\| \varphi_j \|^{(0)}_{k+1} \leq C(k, \hat{j})$.*

N.B. L'indépendance de l'estimation sur $\| \varphi_j \|^{(0)}_{k+1}$ par rapport à j est essentielle. Elle n'a plus lieu pour $\| \varphi_j \|^{(s)}_{k+1}$ avec $s \neq 0$.

PREUVE. Si $|\gamma| = 0$, $|\varphi_j| \leq 1$. Et $\forall \gamma$, $1 \leq |\gamma| \leq k+1$ on a $\partial^\gamma \varphi_j = 0$ sauf sur $d_{j+1} \leq \rho \leq d_j$, donc $d^{|\gamma|}|\partial^\gamma \varphi_j| \leq Cted_j^{|\gamma|}|\partial^\gamma \varphi_j| \leq Cted_j^{|\gamma|}\frac{C(|\gamma|,k)}{d_j^{|\gamma|}} \leq C(|\gamma|, k)$. ■

Pour Ω ouvert tel que $\overline{\Omega} \subset\subset M$, posons

$$C_0^{k,\beta}(\overline{\Omega}) := \{u \in C^{k,\beta}(\overline{\Omega}),\ \forall |\gamma| \leq k,\ \partial^\gamma u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

$C_0^{k,\beta}(\overline{\Omega})$ est un sous-espace de Banach fermé de $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$. Pour $u \in C_0^{k,\beta}(\overline{\Omega})$, soit $\widetilde{u}$ l'extension canonique de u à M par zéro hors de Ω : il est immédiat de vérifier que $\widetilde{u} \in C^{k,\beta}(\overline{M})$.

Lemme 6 *$\forall u \in C_0^{k,\beta}(\overline{\Omega})$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{u} \in \Lambda^t_{k,\beta}(M)$ et*

$$\| \widetilde{u} \|^{(t)}_{k,\beta} < C(dist(\partial\Omega, \partial M), diam(M), t, k, \beta) \| u \|_{k,\beta,\overline{\Omega}} .$$

Autrement dit, l'extension $u \longrightarrow \widetilde{u}$ fournit une inclusion continue

$$C_0^{k,\beta}(\overline{\Omega}) \longrightarrow \Lambda^t_{k,\beta}(M).$$

PREUVE. Soit $u \in C_0^{k,\beta}(\overline{\Omega})$; nous voulons une majoration convenable de

$$\begin{aligned} \| \widetilde{u} \|^{(t)}_{k,\beta,B} = & \sum_{|\gamma| \leq k} \sup_{x \in M} [d_x^{-t+|\gamma|} |\partial^\gamma \widetilde{u}(x)|] \\ & + \sum_{|\gamma| = k} \sup_{\substack{x,y \in M \\ x \neq y}} \min(d_x^{-t+k+\beta}, d_y^{-t+k+\beta}) \frac{|\partial^\gamma \widetilde{u}(x) - \partial^\gamma \widetilde{u}(y)|}{|x-y|^\beta}. \end{aligned}$$

Déja $\forall |\gamma| \leq k$,

$$\begin{aligned} \sup\nolimits_M d^{-t+|\gamma|} |\partial^\gamma \widetilde{u}| & = \sup\nolimits_{\overline{\Omega}} d^{-t+|\gamma|} |\partial^\gamma u| \\ & \leq C(dist(\partial\Omega, \partial M), diam(M), t, |\gamma|) \| u \|_{k,\beta,\overline{\Omega}} \end{aligned}$$

car sur $\overline{\Omega}$: $0 < dist(\partial\Omega, \partial M) \leq d \leq diam(M)$. Ensuite si $|\gamma| = k$ notons

$$U^t_{x,y} = \min(d_x^{-t+k+\beta}, d_y^{-t+k+\beta}) \frac{|\partial^\gamma \widetilde{u}(x) - \partial^\gamma \widetilde{u}(y)|}{|x-y|^\beta}.$$

Si $x, y \in M \backslash \Omega$ alors $U^t_{x,y} = 0$. Si $x, y \in \Omega$ alors

$$\begin{aligned} U^t_{x,y} & = \min(d_x^{-t+k+\beta}, d_y^{-t+k+\beta}) \tfrac{|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u(y)|}{|x-y|^\beta} \\ & \leq C(dist(\partial\Omega, \partial M), diam(M), t, k, \beta) \| u \|_{k,\beta,\overline{\Omega}} . \end{aligned}$$

Enfin si $x \in \Omega$, $y \in M\backslash\Omega$, il faut distinguer encore deux sous-cas. Premier cas : $|x-y| \leq \frac{d_x}{2}$. Soit z un point d'intersection du segment $[x, y]$ avec $\partial\Omega$; alors $\partial^\gamma u(z) = \partial^\gamma u(y) = 0$, donc

$$\begin{array}{rcl} U_{x,y}^t & = & \min(d_x^{-t+k+\beta}, d_y^{-t+k+\beta})\frac{|\partial^\gamma u(x)-\partial^\gamma u(z)|}{|x-y|^\beta} \\ & \leq & \min(d_x^{-t+k+\beta}, d_y^{-t+k+\beta})\frac{|\partial^\gamma u(x)-\partial^\gamma u(z)|}{|x-z|^\beta} \\ & \leq & Cte \min(d_x^{-t+k+\beta}, d_y^{-t+k+\beta}) \parallel u \parallel_{k,\beta,\overline{\Omega}} . \end{array}$$

Or $dist(\partial\Omega, \partial M) \leq d_x \leq diam(M)$ et

$$\forall y \in B(x, \frac{d_x}{2}), \ \frac{dist(\partial\Omega, \partial M)}{2} \leq \frac{d_x}{2} \leq d_y \leq \frac{3}{2}d_x \leq \frac{3}{2}diam(M),$$

donc on a bien

$$U_{x,y}^t \leq C(dist(\partial\Omega, \partial M), diam(M), t, k, \beta) \parallel u \parallel_{k,\beta,\overline{\Omega}} .$$

Deuxième cas : si $|x-y| > \frac{d_x}{2}$. Dans ce cas

$$U_{x,y}^t \leq d_x^{-t+k+\beta}\frac{|\partial^\gamma u(x)|}{\frac{d_x^\beta}{2^\beta}} = 2^\beta d_x^{-t+k}|\partial^\gamma u(x)| \leq 2^\beta d_x^{-t+k} Cte \parallel u \parallel_{k,\overline{\Omega}},$$

et comme on a toujours $dist(\partial\Omega, \partial M) \leq d_x \leq diam(M)$, finalement

$$U_{x,y}^t \leq C(dist(\partial\Omega, \partial M), diam(M), t, k, \beta) \parallel u \parallel_{k,\beta,\overline{\Omega}} . \qquad \blacksquare$$

Lemme 7 *Soit $u \in \Lambda_{k,\alpha}^s$ et C une constante telle que $\parallel u \parallel_{k,\alpha}^{(s)} \leq C$. Alors $\forall t < s$,*

$$\parallel u(1-\varphi_j) \parallel_{k,\alpha}^{(t)} \leq Cte(C, k, \alpha, s, t) d_j^{s-t}.$$

On a donc, en particulier, $\forall t < s$, $\lim_{j\to\infty} \parallel u(1-\varphi_j) \parallel_{k,\alpha}^{(t)} = 0$.

PREUVE. Rappelons que

$$\parallel u(1-\varphi_j) \parallel_{k,\alpha}^{(t)} = \sum_{|\gamma|\leq k} \sup_{x\in B}[d_x^{-t+|\gamma|}|\partial^\gamma(u(1-\varphi_j))(x)|]$$
$$+\sum_{|\gamma|=k} \sup_{\substack{x,y\in B \\ x\neq y}} \min(d_x^{-t+k+\alpha}, d_y^{-t+k+\alpha})\frac{|\partial^\gamma(u(1-\varphi_j))(x) - \partial^\gamma(u(1-\varphi_j))(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Tout d'abord pour $|\gamma| \leq k$:

$$\partial^\gamma(u(1-\varphi_j)) = \sum_{\mu+\nu=\gamma} Cte(|\mu|, |\nu|)\partial^\mu u \partial^\nu(1-\varphi_j),$$

où $\gamma = \mu+\nu$ signifie que le couple d'indices (μ,ν) est une partition de l'indice γ. Or avec $\gamma = \mu+\nu$,

$$\begin{aligned}
\sup_M d^{-t+|\gamma|}|\partial^\mu u \partial^\nu(1-\varphi_j)| &= \sup_{M\backslash\Omega_j} d^{-t+|\gamma|}|\partial^\mu u \partial^\nu(1-\varphi_j)| \\
&= \sup_{M\backslash\Omega_j} d^{s-t+|\nu|}d^{-s+|\mu|}|\partial^\mu u \partial^\nu(1-\varphi_j)| \\
&\leq Cte\ d_j^{s-t+|\nu|} \sup_{M\backslash\Omega_j} d^{-s+|\mu|}|\partial^\mu u \partial^\nu(1-\varphi_j)| \\
&\leq Cte\ d_j^{s-t+|\nu|} \sup_{M\backslash\Omega_j} |\partial^\nu(1-\varphi_j)| \sup_{M\backslash\Omega_j} d^{-s+|\mu|}|\partial^\mu u| \\
&\leq Cte\ d_j^{s-t+|\nu|} \frac{Cte(|\nu|,C)}{d_j^{|\nu|}} \parallel \partial^\mu u \parallel_{0,0}^{(s-|\mu|)} \\
&\leq Cte(|\nu|,C) \parallel u \parallel_{k,\alpha}^{(s)} d_j^{s-t}.
\end{aligned}$$

Maintenant si $|\gamma| = k$, notons

$$V_{x,y}^t = \min(d_x^{-t+k+\alpha}, d_y^{-t+k+\alpha})\frac{|\partial^\gamma(u(1-\varphi_j))(x) - \partial^\gamma(u(1-\varphi_j))(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Si $x,y \in \Omega_j$, $V_{x,y}^t = 0$. Si $x,y \in M\backslash\Omega_j$, comme sur $M\backslash\Omega_j$:

$$d^{-t+k+\alpha} = d^{s-t}d^{-s+k+\alpha} \leq Cte\ d_j^{s-t}d^{-s+k+\alpha},$$

alors

$$V_{x,y}^t \leq Cte\ d_j^{s-t}V_{x,y}^s \leq Cte\ d_j^{s-t} \parallel u(1-\varphi_j) \parallel_{k,\alpha}^{(s)} \leq Cte\ d_j^{s-t} \parallel u \parallel_{k,\alpha}^{(s)} \parallel 1-\varphi_j \parallel_{k+1}^{(0)},$$

la dernière égalité ayant lieu d'après la proposition 3. Si $y \in \overline{\Omega_j}$ et $x \in \overline{M\backslash\Omega_{j+1}}$ alors $|x-y| \geq d_{j+1}$ et

$$\begin{aligned}
V_{x,y}^t &= \min(d_x^{-t+k+\alpha}, d_y^{-t+k+\alpha})\tfrac{|\partial^\gamma u(x)|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq d_x^{-t+k+\alpha}\tfrac{|\partial^\gamma u(x)|}{d_{j+1}^\alpha} \qquad\qquad \leq d_x^{s-t+\alpha}d_x^{-s+k}\tfrac{|\partial^\gamma u(x)|}{d_{j+1}^\alpha} \\
&\leq Cte\ d_{j+1}^{s-t+\alpha}d_x^{-s+k}\tfrac{|\partial^\gamma u(x)|}{d_{j+1}^\alpha} \qquad \leq \tfrac{d_j^{s-t}}{2^{s-t}} Cte \parallel u \parallel_k^{(s)}.
\end{aligned}$$

Si $y \in \overline{\Omega_{j-1}}$ et $x \in \overline{M\backslash\Omega_j}$ on a de même : $V_{x,y}^t \leq d_j^{s-t}Cte \parallel u \parallel_k^{(s)}$. Enfin si $y \in \Omega_j\backslash\Omega_{j-1}$ et $x \in \Omega_{j+1}\backslash\Omega_j$, distinguons deux cas.
Si $-s+k+\alpha \geq 0$ alors $-t+k+\alpha \geq 0$ et

$$\begin{aligned}
\min(d_x^{-t+k+\alpha}, d_y^{-t+k+\alpha}) &= d_x^{-t+k+\alpha} \qquad\qquad = d_x^{s-t}d_x^{-s+k+\alpha} \\
&\leq Cte\ d_j^{s-t}d_x^{-s+k+\alpha} = Cte\ d_j^{s-t}\min(d_x^{-s+k+\alpha}, d_y^{-s+k+\alpha}).
\end{aligned}$$

Si $-s+k+\alpha<0$, alors

$$\begin{array}{rcl} \min(d_x^{-t+k+\alpha}, d_y^{-t+k+\alpha}) & \leq & d_y^{-t+k+\alpha} \quad = \quad d_y^{s-t} d_y^{-s+k+\alpha} \\ & \leq & Cte\ d_{j-1}^{s-t} d_y^{-s+k+\alpha} \quad = \quad Cte\ 2^{s-t} d_j^{s-t} \min(d_x^{-s+k+\alpha}, d_y^{-s+k+\alpha}). \end{array}$$

Ainsi dans les deux cas,

$$V_{x,y}^t \leq d_j^{s-t} Cte \parallel u(1-\varphi_j) \parallel_{k,\alpha}^{(s)} \leq d_j^{s-t} Cte \parallel u \parallel_{k,\alpha}^{(s)} \parallel 1-\varphi_j \parallel_{k+1}^{(0)} .$$

Il ne nous reste plus qu'à remarquer que, tout comme dans le corollaire 5, on a : $\parallel 1-\varphi_j \parallel_{k+1}^{(0)} \leq C(k,\hat{j})$ pour achever la preuve du lemme 7. ■

Proposition 8 *$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall s > t \in \mathbb{R}$, $\forall 0 < \beta < \alpha < 1$, l'injection*

$$\Lambda_{k,\alpha}^s \longrightarrow \Lambda_{k,\beta}^t$$

est compacte.

PREUVE : Dans tout ce qui suit, il sera commode de conserver abusivement la même notation pour une suite et diverses sous-suites extraites.
Soit $\{u_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ suite de $\Lambda_{k,\alpha}^s$ uniformément bornée en norme $\Lambda_{k,\alpha}^s$ par une constante C. On veut en extraire une sous-suite qui converge dans $\Lambda_{k,\beta}^t$; Il suffit pour cela qu'elle soit de Cauchy *i.e.* telle que :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N,\ \forall p,q > N,\ \parallel u_p - u_q \parallel_{k,\beta}^{(t)} < \epsilon.$$

Pour chaque $j \geq j_0$ nous écrirons : $u_p = u_p\varphi_j + u_p(1-\varphi_j)$.
La suite $\{u_p\varphi_{j_0}\}_p$ est bornée dans $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega_{j_0+1}})$ donc il existe une sous-suite de $\{u_p\}_p$ telle que $\{u_p\varphi_{j_0}\}_p$ converge vers $v_{j_0} \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega_{j_0+1}})$. En repartant de cette sous-suite, on considère $\{u_p\varphi_{j_0+1}\}_p$ qui est une suite bornée de $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega_{j_0+2}})$ donc il existe une sous-suite de $\{u_p\}_p$ telle que $\{u_p\varphi_{j_0+1}\}_p$ converge vers $v_{j_0+1} \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega_{j_0+2}})$. Une fois itérée cette procédure sur $\{u_p\varphi_j\}_p$ pour tout $j \geq j_0$, nous extrayons de $\{u_p\}_p$ une sous-suite *diagonale* qui possède la propriété suivante : $\forall j \geq j_0$, $\exists v_j \in C^{k,\beta}(\overline{\Omega_{j+1}})$ telle que $\{u_p\varphi_j\}_p$ converge vers v_j dans $C^{k,\beta}(\overline{\Omega_{j+1}})$; comme $u_p\varphi_j$ est à support dans Ω_{j+1}, on voit que $v_j \in C_0^{k,\beta}(\overline{\Omega_{j+1}})$. D'après le lemme 6 nous aurons donc $\lim_{p\to\infty} u_p\varphi_j = \widetilde{v_j}$ dans $\Lambda_{k,\beta}^t(M)$. Ainsi

$$\forall j \geq 1,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p,q > N,\ \parallel u_p\varphi_j - u_q\varphi \parallel_{k,\beta}^{(t)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

D'après la proposition 3 et d'après le lemme 7, comme $\parallel u_p - u_q \parallel_{k,\alpha}^{(s)} \leq 2C$,

$$\begin{array}{rcl} \parallel (u_p-u_q)(1-\varphi_j) \parallel_{k,\beta}^{(t)} & \leq & cte(\alpha,\beta) \parallel (u_p-u_q)(1-\varphi_j) \parallel_{k,\alpha}^{(t)} \\ & \leq & Cte(C,k,\alpha,\beta,s,t)\ d_j^{s-t}, \end{array}$$

d'où

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists j,\ \forall p, q,\ \parallel (u_p - u_q)(1-\varphi_j) \parallel_{k,\beta}^{(t)} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Un tel j étant fixé

$$\exists N,\ \forall p, q > N,\ \parallel u_p\varphi_j - u_q\varphi_j \parallel_{k,\beta}^{(t)} \leq \frac{\epsilon}{2},$$

soit finalement :

$$\parallel u_p - u_q \parallel_{k,\beta}^{(t)} \leq \parallel (u_p - u_q)\varphi_j \parallel_{k,\beta}^{(t)} + \parallel (u_p - u_q)(1-\varphi_j) \parallel_{k,\beta}^{(t)} < \epsilon. \qquad \blacksquare$$

Borne uniforme et convergence

Lemme 8 *Soit $\{u_i\}_i$ une suite de $\Lambda_{k,\alpha}^s$ telle que $\forall i$, $\parallel u_i \parallel_{k,\alpha}^{(s)} \leq C$ et $\{u_i\}_i$ converge vers u dans $\Lambda_{k,\beta}^t$, $s > t$, $0 < \beta < \alpha < 1$. Alors $u \in \Lambda_{k,\alpha}^s$ et*

$$\parallel u \parallel_{k,\alpha}^{(s)} \leq Cte(k,n)C.$$

PREUVE. On rappelle que

$$\begin{aligned} \parallel u_i \parallel_{k,\alpha}^{(s)} = & \sum_{|\gamma|\leq k} \sup_{x\in M} [d_x^{-s+|\gamma|} |\partial^\gamma u_i(x)|] \\ & + \sum_{|\gamma|=k} \sup_{\substack{x,y\in M \\ x\neq y}} \min(d_x^{-s+k+\alpha}, d_y^{-s+k+\alpha}) \frac{|\partial^\gamma u_i(x) - \partial^\gamma u_i(y)|}{|x-y|^\alpha}. \end{aligned}$$

Si $|\gamma| \leq k$, alors en tout point $x \in M$ on a :

$$\begin{aligned} d_x^{-s+|\gamma|}|\partial^\gamma u(x)| & \leq d_x^{-s+|\gamma|}|\partial^\gamma u_i(x)| + d_x^{-s+|\gamma|}|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u_i(x)| \\ & \leq C + d_x^{-s+t} d_x^{-t+|\gamma|}|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u_i(x)| \\ & \leq C + d_x^{t-s} \parallel u - u_i \parallel_{k,\beta}^{(t)}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{i\to\infty} \parallel u - u_i \parallel_{k,\beta}^{(t)} = 0$, on en déduit (à x fixé et $i \to \infty$) :

$$d_x^{-s+|\gamma|}|\partial^\gamma u(x)| \leq C,$$

et par suite

$$\sup_{x\in M} d_x^{-s+|\gamma|}|\partial^\gamma u(x)| \leq C.$$

Si $|\gamma| = k$, alors pour tout couple (x, y) de M, $x \neq y$, en supposant (quitte à inverser x et y) $\min(d_x^{-s+k+\alpha}, d_y^{-s+k+\alpha}) = d_x^{-s+k+\alpha}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} d_x^{-s+k+\alpha}\frac{|\partial^\gamma u(x)-\partial^\gamma u(y)|}{|x-y|^\alpha} & \leq & d_x^{-s+k+\alpha}\frac{|\partial^\gamma u(x)-\partial^\gamma u_i(x)|}{|x-y|^\alpha} + d_x^{-s+k+\alpha}\frac{|\partial^\gamma u_i(x)-\partial^\gamma u_i(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ & & +d_x^{-s+k+\alpha}\frac{|\partial^\gamma u_i(y)-\partial^\gamma u(y)|}{|x-y|^\alpha} \\ & \leq & \frac{d_x^{t-s+\alpha}}{|x-y|^\alpha}[d_x^{-t+k}|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u_i(x)|] + C \\ & & +\frac{1}{|x-y|^\alpha}\frac{d_x^{-s+k+\alpha}}{d_y^{-t+k}}[d_y^{-t+k}|\partial^\gamma u_i(y) - \partial^\gamma u(y)|] \\ & \leq & \frac{d_x^{t-s+\alpha}}{|x-y|^\alpha} \parallel u - u_i \parallel_{k,\beta}^{(t)} +C \\ & & +\frac{1}{|x-y|^\alpha}\frac{d_x^{-s+k+\alpha}}{d_y^{-t+k}} \parallel u - u_i \parallel_{k,\beta}^{(t)} . \end{array}$$

Comme $\lim_{i\to\infty} \parallel u - u_i \parallel_{k,\beta}^{(t)}= 0$, on en déduit (à x, y fixés et $i \to \infty$) :

$$\min(d_x^{-s+k+\alpha}, d_y^{-s+k+\alpha})\frac{|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C,$$

et donc

$$\sup_{\substack{x,y\in M \\ x\neq y}} [\min(d_x^{-s+k+\alpha}, d_y^{-s+k+\alpha})\frac{|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u(y)|}{|x-y|^\alpha}] \leq C.$$

D'où le résultat annoncé, en prenant pour $Cte(k, n)$ le nombre de multi-indices γ de longueur au plus k augmenté du nombre de multi-indices γ de longueur exactement k. ■

Isomorphisme et continuité.

Nous donnons ici un lemme général qui n'utilise pas l'espace hyperbolique ; il nous sera d'un usage fréquent dans cette thèse.

Lemme 9 *Soient E et F deux espaces de Banach, soit $u : E \longrightarrow F$ linéaire, continue, inversible d'inverse u^{-1}. Si $v : E \longrightarrow F$ est linéaire et que $||v-u|| < \frac{1}{||u^{-1}||}$ alors v est continue, inversible et*

$$||v^{-1}|| \leq \frac{||u^{-1}||}{1 - ||u^{-1}||.||u-v||} \text{ et } ||v^{-1} - u^{-1}|| \leq \frac{||u^{-1}||^2||u-v||}{1 - ||u^{-1}||.||u-v||}.$$

Remarque :
Les normes considérées sont les normes d'applications linéaires continues ; d'une manière générale, nous noterons $\mathcal{L}(E, F)$ le Banach des applications linéaires continues de E dans F muni de sa norme.

Preuve :

Posons pour simplifier $w = v - u$ et $z = u^{-1}w$. On a ainsi $v = u + w = u(I + z)$. On peut donc écrire formellement :

$$v^{-1} = \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k z^k \right] u^{-1}.$$

La série ci-dessus converge dès que $||z|| < 1$, et comme $||z|| \leq ||u^{-1}||.||w||$, il suffit que $||w|| < \frac{1}{||u^{-1}||}$. Dans ce cas, v est inversible et

$$||v^{-1}|| \leq \left[\sum_{k=0}^{\infty} (||z||)^k \right] ||u^{-1}|| = \frac{1}{1 - ||z||} ||u^{-1}|| \leq \frac{||u^{-1}||}{1 - ||u^{-1}||.||w||},$$

donc v^{-1} est continue. D'autre part

$$v^{-1} - u^{-1} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k z^k \right] u^{-1},$$

d'où

$$\begin{aligned} ||v^{-1} - u^{-1}|| &\leq ||z|| \frac{1}{1 - ||z||} ||u^{-1}|| \\ &\leq ||u^{-1}||.||w|| \frac{1}{1 - ||u^{-1}||.||w||} ||u^{-1}|| \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Chapitre 3

Prescription de courbures I : Courbure scalaire conforme

3.1 Introduction

Dans cette section, nous utilisons tout d'abord le "théorème d'isomorphisme de [GL]" pour démontrer que l'application :

$$v \in \Lambda^s_{k+2,\alpha} \longrightarrow Scal(H_v) - Scal(H_0) \in \Lambda^s_{k,\alpha}$$

est localement inversible près de $v = 0$ dès que $s \in [0, n[$. Nous montrons ensuite que ce fait vient s'imbriquer parfaitement à côté d'un important théorème de rigidité de Min-Oo [MO1] dont il a catalysé une rectification d'hypothèse [MO2]. Selon ce théorème rectifié, dans le cas particulier de la boule B, si une métrique H est convenablement asymptotique à H_0 à l'infini (pour nous H_v le sera précisément dès que $s > n$), alors il est impossible d'avoir $Scal(H) \geq Scal(H_0)$ sauf si H est *isométrique* à H_0, auquel cas $Scal(H) = Scal(H_0)$. D'après l'inversion locale indiquée plus haut, ce résultat ne tient plus dès lors que $s \in [0, n[$. Ce théorème peut être vu comme un analogue, en asymptotiquement hyperbolique (où l'on ne dispose toutefois pas encore d'une notion convenable de *masse*), du théorème de la masse positive en asymptotiquement euclidien (voir e.g. le §. 3 de Leung [L]).

Finalement, ce premier résultat nous pousse à étudier de façon plus globale l'application "courbure scalaire conforme", considérée dans les espaces Λ^s, en dimension $n > 2$ (section 3.3) et $n = 2$ (section 3.4), sur B munie de la métrique hyperbolique standard H_0. Une telle étude[1] vient compléter les travaux antérieurs sur le sujet [AM][CCY][LTY][RRV1] dans lesquels le comportement au voisinage de l'infini n'est précisé qu'à l'ordre zéro. Or c'est l'étude du comportement à l'infini qui a permis de tester la validité du théorème de Min-Oo [MO2]. Au §.3.5 nous construisons un exemple qui met directement en évidence les limites de notre méthode lorsque la valeur du paramètre de pondération s est située *hors* de l'intervalle prescrit par le théorème d'isomorphisme de [GL]. Les résultats de cette section sont parus au *Bulletin de la S.M.F.* (1997) [D1].

[1] une étude indépendante donnant des résultats comparables est celle de [AC] (proposition 7.3.1 et lemme 4.1.4)

3.2 Prescriptibilité locale de la courbure scalaire conforme

La courbure scalaire d'une variété Riemanienne munie d'une métrique H est donnée par :

$$Scal(H) = Trace_H(R) \text{ où } R = Ricci(H)$$

La linéarisation de $H \longrightarrow Scal(H)$ est donnée par (cf. e.g.[Be p. 63]) :

$$d(Scal)(H)\delta H = \triangle\tau + \nabla^{ij}(\delta H)_{ij} - R^{ij}(\delta H)_{ij},$$

où $\tau = Trace_H \delta H$, ∇ désigne la connexion de Levi-Civita de H et $\triangle = -Trace_H(\nabla^2)$ son laplacien. Si H est d'Einstein $R^{ij} = \frac{Scal(H)}{n} H^{ij}$, dans ce cas :

$$d(Scal)(H)\delta H = \triangle\tau + \nabla^{ij}(\delta H)_{ij} - \frac{Scal(H)}{n}\tau$$

et lorsque $Scal(H) = -n(n-1)$, comme en H_0 (et en toutes les métriques d'Einstein construites par [GL]) :

$$d(Scal)(H)\delta H = \triangle\tau + \nabla^{ij}(\delta H)_{ij} + (n-1)\tau$$

REMARQUE. L'opérateur différentiel :

$$\delta H \longrightarrow \triangle\tau + \nabla^{ij}(\delta H)_{ij} + (n-1)\tau$$

est elliptique sous-déterminé (*i.e.* son symbole est *surjectif*). En effet son terme principal s'écrit localement :

$$(H^{ik}H^{jl} - H^{ij}H^{kl})\partial_{ij}(\delta H)_{kl}.$$

Pour tout covecteur $\xi \neq 0$:

$$(H^{ik}H^{jl} - H^{ij}H^{kl})\xi_i\xi_j = (\xi^k\xi^l - |\xi|^2 H^{kl}),$$

et $L : \delta H \longrightarrow (\xi^k\xi^l - |\xi|^2 H^{kl})(\delta H)_{kl}$ est une application linéaire surjective. En effet

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, L(\frac{-\eta}{(n-1)|\xi|^2}H) = \eta. \qquad \blacksquare$$

Cette démonstration suggère de se restreindre à des variations *conformes* de H *i.e.* de prendre $\delta H = \frac{\tau}{n}H$ (ainsi $\tau = Trace_H \delta H$) pour laquelle $\nabla^{ij}(\delta H)_{ij} = -\frac{\triangle\tau}{n}$ et

$$d(Scal)(H)(\delta H) = \frac{n-1}{n}(\triangle\tau + n\tau).$$

D'après [GL], si $H = H_0$, $\triangle + n$ est un isomorphisme de $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$ dans $\Lambda^s_{k,\alpha}$ dès que $n > s(s-(n-1))$ *i.e.* dès que $-1 < s < n$. Par ailleurs, il est nécessaire de supposer $s \geq 0$ pour avoir $H + \delta H = (1+\frac{\tau}{n})H$ définie positive dès lors que τ est assez petit dans $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$. Ainsi en vertu du théorème d'inversion locale on obtient le

Théorème 23 *Soient $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0,1[$, $s \in [0,n[$. Pour toute fonction σ assez proche de zéro dans $\Lambda^s_{k,\alpha}$, il existe une unique fonction v assez proche de zéro dans $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$, dépendant différentiablement de σ telle que la métrique $H_v = (1+v)H_0$ vérifie*

$$Scal(H_v) = Scal(H_0) + \sigma = -n(n-1) + \sigma.$$

Il n'est pas difficile d'établir qu'il existe *au plus une* solution v de l'équation précédente dès lors que $s > 0$ et $Scal(H_0) + \sigma \leq 0$ (cela découle du principe du maximum). Par contre, *l'existence* d'une solution v dans le bon espace, lorsque $s \geq n$, n'est plus assurée : nous construisons un exemple le démontrant directement pour $s > n+1$ au § 3.5 ci-après. Pour lors, à ce sujet nous allons procéder indirectement, par une comparaison entre le théorème 1 et un important résultat de rigidité dû à Min-Oo [MO1] [MO2] (voir aussi [L]).

En prenant comme modèle de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique qui s'exprime en coordonnées polaires à l'origine par :
$\overline{H_0} = dR^2 + (shR)^2 d\Theta^2$ où $R \in]0,\infty[$ et $d\Theta^2$ désigne la métrique standard de S^{n-1}, rappelons [MO1][MO2] la

Définition 3 *Une variété Riemanienne (M,H) est dite fortement asymptotiquement hyperbolique s'il existe un compact K de M et un difféomorphisme $\Phi : M\backslash K \longrightarrow \mathbb{R}^n\backslash\overline{B_{R_0}(0)}$ pour un $R_0 \geq 0$ tel que si on définit la transformation de jauge :*
$A : T(M\backslash K) \longrightarrow T(M\backslash K)$ par :

$$\begin{aligned} i) H(Au, Av) &= (\Phi^\star \overline{H_0})(u,v) \\ ii) H(Au, v) &= H(u, Av) \end{aligned}$$

alors A vérifie :
<u>$AH1$</u> : $\exists C \geq 1$ *tq* $\forall v \in T(M\backslash K)$, $\frac{1}{C}H(v,v) \leq H(Av,Av) \leq CH(v,v)$

<u>$AH2$</u> : *le champ d'endomorphismes sur $M\backslash K$ définis par*

$x \in M \backslash K \longrightarrow e^{|\Phi(x)|}(A - Id)(x) \in T^\star(M\backslash K) \otimes T(M\backslash K)$
(où $|.|$ désigne la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$) est dans l'intersection des espaces de Sobolev $H_1^2 \cap H_1^1$ sur $M\backslash K$ relativement à H.

N.B. Par continuité à partir d'un voisinage de l'infini, on voit que les valeurs propres de A sont nécessairement *positives* sur $M\backslash K$ (elles le sont à l'infini et ne peuvent s'annuler à cause de (i), *a fortiori* à cause de AH1).

Le résultat visé par Min-Oo s'énonce alors

Théorème 24 *Si (M,H) est spinorielle fortement asymptotiquement hyperbolique de dimension $n > 2$ à courbure scalaire $S \geq S_0 = Scal(H_0)$, alors (M,H) est isométrique à $\mathbb{H}^n$ (donc $S = S_0$).*

Adaptons cette définition et ce théorème au cas particulier où $M = B := \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}$ munie de H, qui est évidemment spinorielle ($w_2(B) = 0$), quand on prend plutôt pour modèle de $\mathbb{H}^n$, B munie de $H_0 = \rho^{-2}E$, E étant la métrique euclidienne standard et ρ la fonction définie par $\rho(x) = \frac{1}{2}(1-|x|^2)$ (ici encore $|.|$ désigne la norme euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$).

Considérons $\Phi : B\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ définie en coordonnées polaires à l'origine par $(r, \Theta) \longrightarrow (R = 2argth(r), \Theta)$ alors $\Phi^\star \overline{H_0} = H_0$. Sur B, la transformation de jauge A de la définition 1 est définie par :

$$\begin{aligned} A_i^l A_j^k H_{kl} &= H_{o_{ij}} \\ A_i^k H_{kl} &= A_l^k H_{ki}. \end{aligned}$$

Si l'on prend H sous la forme $H_v = (1+v)H_0$ pour $v \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}$ (cf. définition § 2.2) et $\| v \|^{(s)}_{k+2,\alpha} < 1$, que devient la condition AH2 (ci-dessus) ?

REMARQUES :
(i) déjà $A = (1+u)Id$ avec $u \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}$ et $(1+u)^2(1+v) = 1$

(ii) $\sqrt{detH} = \sqrt{det((1+v)H_0)} = (1+v)^{\frac{n}{2}}\sqrt{detH_0} = (1+v)^{\frac{n}{2}}\rho^{-n}$
$= \frac{1}{(1+u)^n}\rho^{-n} \in \Lambda^{-n}_{k+2,\alpha}$

(iii) $e^{|\Phi(x)|} = e^{ln(\frac{1+|x|}{1-|x|})} = \frac{1+|x|}{1-|x|} \in \Lambda^{-1}_\infty$

(iv) $e^{|\Phi|}(A - Id) = e^{|\Phi|}uId \in \Lambda^{s-1}_{k+2,\alpha}$ en tant que tenseur de type $\binom{1}{1}$ donc $\nabla[e^{|\Phi|}(A-Id)] \in \Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}$ en tant que tenseur de type $\binom{1}{2}$. ■

Comme la condition AH2 s'écrit :

$$\int_B \| e^{|\Phi|}uId \|_H^2 \sqrt{detH}dx < \infty \text{ et } \int_B \| \nabla(e^{|\Phi|}uId) \|_H^2 \sqrt{detH}dx < \infty$$

et,

$$\int_B \| e^{|\Phi|}uId \|_H \sqrt{detH}dx < \infty \text{ et } \int_B \| \nabla(e^{|\Phi|}uId) \|_H \sqrt{detH}dx < \infty$$

et que pour $a \in T^\star(B) \otimes T(B)$, $\| a \|_H^2 = H^{lk}a_l^i a_k^j H_{ij} \in \Lambda^{2s-2}$ si $a \in \Lambda^{s-1}$

et pour $b \in T^\star(B) \otimes T^\star(B) \otimes T(B)$, $\| b \|_H^2 = H^{jk}H^{lp}b_{jl}^i b_{pq}^k H_{ik} \in \Lambda^{2s-2}$ si $b \in \Lambda^{s-2}$ alors, compte-tenu des remarques (ii) et (iv) précédentes :

$$\text{AH2} \Leftrightarrow \int_B \rho^{s-1-n}dx < \infty \Leftrightarrow \int_B (1-|x|^2)^{s-1-n}dx < \infty \Leftrightarrow s > n$$

On remarque de plus que AH1 est vérifiée dès que $|u|$ est assez petite (*i.e.* $|v|$ assez petite). Ainsi il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $\| v \|_{k+2,\alpha}^{(s)} < \epsilon$ et si $s > n$, la variété B munie de la métrique Riemannienne $H_v = (1+v)H_0$ est fortement asymptotiquement hyperbolique. Pour de telles métriques, le théorème 24 et un argument d'unicité conduisent au

Corollaire 6 *Soit $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0,1[$, $s > n$ et $v \in \Lambda_{k+2,\alpha}^s$ avec $\| v \|_{k+2,\alpha}^{(s)}$ assez petite. Si $Scal(H_v) \geq Scal(H_0)$, alors $v \equiv 0$.*

Notons que d'après le théorème 23, pour tout $\sigma \in \Lambda_{k,\alpha}^s$ *non négatif* assez petit et tout $t \in [0,n[$, compte-tenu de l'inclusion $\Lambda_{k,\alpha}^s \subset \Lambda_{k,\alpha}^t$ [GL], il existe une unique solution $v \in \Lambda_{k+2,\alpha}^t$ de l'équation

$$Scal(H_v) = Scal(H_0) + \sigma.$$

Bien sûr $\sigma \not\equiv 0 \Rightarrow v \not\equiv 0$. Le corollaire 6 implique que cette solution *n'est pas dans* $\Lambda_{k+2,\alpha}^s$. Ainsi les théorèmes 23 et 24 se complètent-ils exactement de part et d'autre de l'exposant critique $s = n$.

Dans la suite de cet article, motivés par l'inversibilité locale (en $v = 0$) de la courbure scalaire conforme considérée dans les espaces Λ^s de [GL], nous allons, par des techniques d'analyse non-linéaire appropriées, passer du résultat purement local précédent à des résultats globaux, en précisant en particulier "la taille" dans $\Lambda_{k,\alpha}^s$ des σ pour lesquels il existe une solution $v \in \Lambda_{k+2,\alpha}^s$ de l'équation $Scal[(1+v)H_0] = S_0 + \sigma$.

3.3 Courbure scalaire conforme en dimension supérieure à 2

Dans cette partie, on se propose d'abord d'étudier dans la boule B munie de la métrique H_0, l'équation :

$$\triangle v = (A-f)(1+v)+(g-A)(1+v)^p \text{ avec } v > -1, \tag{E}$$

où A et p sont réels, $A > 0$, $p > 1$, f et g sont des fonctions données sur B, avec $g \leq A$. Il sera parfois commode d'abréger le second membre de (E) en le notant $\phi(x, v)$. Nous allons tour à tour démontrer, sous des conditions appropriées, l'existence d'une solution de (E), puis son unicité, enfin sa régularité. Nous appliquerons ensuite cette étude à l'équation, cas particulier de (E), qui traduit en dimension $n > 2$ la prescription sur B de la courbure scalaire d'une métrique conforme à E et asymptotique à H_0 à l'infini (près du bord de B).

3.3.1 Etude EDP (dimension n quelconque)

Existence

Réécrivons l'équation (E) sous la forme :

$$\begin{aligned}\triangle v + A(p-1)v &= (A-f)(1+v)+(g-A)(1+v)^p + A(p-1)v \\ &=: \widetilde{\Phi}(x, v)\end{aligned}$$

Soit $M = M(n, s, A(p-1))$ la constante de la proposition 18 (telle que $\varphi = M\rho^s$ vérifie $[\triangle + A(p-1)]\varphi \geq \rho^s$). Dans tout ce qui suit, chaque fois qu'on utilisera la condition (C) du paragraphe 3.6, on l'entendra lue avec $K = A(p-1)$.

Proposition 9 *Si f et g sont dans $\Lambda_0^s \bigcap C_{loc}^{k,\alpha}(B)$, $s \geq 0$ vérifiant (C), $0 < \alpha < 1$ et s'il existe des réels $\lambda \geq 0$ et $\delta \in]0, 1[$ tels que, en posant $q = \frac{1-\delta^p}{1-\delta}$ (donc $q \in]1, p[$), on ait l'encadrement :*

$$-(1-\delta)[\frac{1}{M} - A(p-1) + q(A-g) + f - A] \leq (2\rho)^{-s}(g-f) \leq \lambda(\frac{1}{M} + f - pg), \tag{1}$$

alors il existe une solution $v > -1$ de (E) dans $\Lambda_0^s \bigcap C_{loc}^{k+2,\alpha}$.

PREUVE.
Nous allons résoudre (E) en construisant pour elle des solutions supérieure

et inférieure *i.e.* en construisant $v^+ \geq v^- \geq -1$ telles que $\triangle v^+ \geq \Phi(x, v^+)$ et $\triangle v^- \leq \Phi(x, v^-)$. D'après une procédure bien connue (voir e.g.[N]), l'existence d'une solution $v > -1$ comprise entre v^+ et v^- en résulte.

Soit

$$v^+ = \frac{2^s \lambda}{M}\varphi = \lambda(2\rho)^s.$$

Alors $0 < v^+ \leq \lambda$ et comme $t \longrightarrow (1+t)^p$ est convexe pour $p > 1$, on a : $\forall t \geq 0, (1+t)^p \geq 1 + pt$, ainsi :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}(x, v^+) &\leq (A - f)(1 + v^+) + (g - A)(1 + pv^+) + A(p-1)v^+ \\
&= (A - f)[1 + \lambda(2\rho)^s] + (g - A)[1 + p\lambda(2\rho)^s] + A(p-1)\lambda(2\rho)^s \\
&= (g - f) + \lambda(2\rho)^s(pg - f),
\end{aligned}$$

donc d'après le côté droit de l'encadrement (1)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}(x, v^+) &\leq \tfrac{2^s\lambda}{M}\rho^s \\
&\leq \tfrac{2^s\lambda}{M}[\triangle\varphi + A(p-1)\varphi] \\
&= [\triangle + A(p-1)]v^+.
\end{aligned}$$

De même Soit

$$v^- = -\frac{2^s(1-\delta)}{M}\varphi = -(1-\delta)(2\rho)^s.$$

Alors $0 > v^- \geq -(1-\delta) > -1$ et comme $t \longrightarrow (1+t)^p$ est convexe pour $p > 1$, on a :
$\forall t \in [-(1-\delta), 0], (1+t)^p \leq 1 + qt$, ainsi (en rappelant que $g \leq A$) :

$$\widetilde{\Phi}(x, v^-) \geq (A - f)(1 + v^-) + (g - A)(1 + qv^-) + A(p-1)v^-$$

$$= (A - f)[1 - (1-\delta)(2\rho)^s] + (g - A)[1 - q(1-\delta)(2\rho)^s] - A(p-1)(1-\delta)(2\rho^s)$$

$$= (g - f) + (f - A)(1-\delta)(2\rho)^s + q(A - g)(1-\delta)(2\rho)^s - (1-\delta)A(p-1)(2\rho)^s,$$

donc d'après le côté gauche de l'encadrement (1)

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(x,v^-) &\geq -\tfrac{2^s(1-\delta)}{M}\rho^s \\ &= -\tfrac{2^s(1-\delta)}{M}[\triangle + A(p-1)]\varphi \\ &= [\triangle + A(p-1)]v^-.\end{aligned}$$

Pour tout $\beta \in]0,\alpha[$ il existe donc (cf. [N] par exemple) une solution v de classe $C^{k+2,\beta}_{loc}(B)$ de l'equation (E) comprise entre v^+ et v^-, v est donc dans Λ^s_0.

En outre l'opérateur $\triangle + A(p-1)$ est uniformément elliptique sur les *compacts* de la boule unité, donc par la théorie de Schauder classique, comme $\widetilde{\Phi}(x,v)$ est dans $C^{k,\alpha}_{loc}(B)$, v est dans $C^{k+2,\alpha}_{loc}(B)$. ■

REMARQUE. Comme v est comprise entre v^+ et v^-, on a l'encadrement :

$$-1 < -(1-\delta) \leq -2^s(1-\delta)\rho^s \leq v \leq 2^s\lambda\rho^s \leq \lambda.$$

Unicité

Proposition 10 *Si f et g sont dans $C^0(B)$, avec toujours $(A-g) \geq 0$, si v est solution de (E) dans $C^2_{loc}(B) \bigcap C^0(\bar{B})$, $v > -1$ et $v = 0$ sur ∂B, alors v est unique.*

PREUVE. Soit $u = \ln(1+v)$ alors (E) devient :

$$\triangle u - |\nabla u|^2 = A - f + (g-A)\mathrm{e}^{(p-1)u}.$$

Si u_0 et u_1 sont deux telles solutions, soit $w = u_1 - u_0$ alors :

$$\triangle w - |\nabla u_1|^2 + |\nabla u_0|^2 = (g-A)[\mathrm{e}^{(p-1)u_1} - \mathrm{e}^{(p-1)u_0}].$$

Or

$$\nabla^i u_1 \nabla_i u_1 - \nabla^i u_0 \nabla_i u_0 = \nabla^i(u_1+u_0)\nabla_i(u_1-u_0),$$

et

$$\mathrm{e}^{(p-1)u_1} - \mathrm{e}^{(p-1)u_0} = (p-1)\int_0^1 \mathrm{e}^{(p-1)u_t}dt(u_1-u_0),$$

où $u_t = tu_1 + (1-t)u_0$, ainsi

$$Lw := \triangle w - \nabla^i(u_1+u_0)\nabla_i w + (A-g)(p-1)\int_0^1 \mathrm{e}^{(p-1)u_t}dt\ w = 0$$

et $w = 0$ sur ∂B. Comme L est elliptique et que son coefficient d'ordre zéro est non-négatif (par hypothèse $(A-g) \geq 0$), nécessairement $w = 0$ sur B (cf

[GT] p. 33 th. 3.3). ■

REMARQUE. La solution construite au paragraphe 3.3.1 est donc unique dès que $s > 0$.

Régularité

On suppose $f, g \in \Lambda^s_{k,\alpha}$: Que peut-on en déduire sur la solution de l'équation (E) construite précédemment ? Pour répondre à cette question, nous avons besoin du

Lemme 10 (Borne uniforme) *Soient $f, g \in \Lambda^s_{k,\alpha}$, $s \geq 0$ vérifiant la condition (C) (cf appendice 6.4, avec $K = A(p-1)$) et $0 < \alpha < 1$. On suppose :*

$$A > \frac{n-1+s(s-(n-1))}{p-1} \tag{3.2}$$

$$\inf_{x \in B}[(A-g)p(1-(1-\delta)(2\rho)^s)^{p-1} + f - A - (n-1)] > s(s-(n-1)) \tag{3.3}$$

Si v est solution de (E) dans $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$ avec $-(1-\delta)(2\rho)^s \leq v \leq \lambda(2\rho)^s$, alors $\| v \|^{(s)}_{k+2,\alpha} \leq C$ où C ne dépend que de $A, f, g, n, s, k, \alpha, \delta, p$.

PREUVE. Dans toute la suite de cet article, pour préciser qu'une constante C est indépendante d'une quantité v, nous utiliserons la notation $C(\hat{v})$.

a) On sait (cf. remarque en fin de § 3.3.1) que

$$\| v \|^{(s)}_0 \leq 2^s \max((1-\delta), \lambda) \| \rho^s \|^{(s)}_0 = 2^s \max((1-\delta), \lambda) = C(\hat{v}).$$

Si on montre que $\| \nabla v \|^{(s-1)}_0 \leq C(\hat{v})$ alors $\| v \|^{(s)}_1 \leq C(\hat{v})$ et donc $\forall \alpha \in]0,1[$, on aurra

$$\| v \|^{(s)}_{0,\alpha} \leq C(\hat{v}).$$

Pour montrer cela dérivons l'équation (E) : $\forall i = 1, .., n$,

$$\nabla_i \triangle v = p(1+v)^{p-1}(g-A)\nabla_i v + (1+v)^p \nabla_i g + (A-f)\nabla_i v - (1+v)\nabla_i f.$$

Or

$$\nabla_i \triangle v = R_{ik}\nabla^k v + \triangle \nabla_i v = -(n-1)\nabla_i v + \triangle \nabla_i v,$$

donc

$$\triangle \nabla_i v + [(A-g)p(1+v)^{p-1} + f - A - (n-1)]\nabla_i v = (1+v)^p \nabla_i g - (1+v)\nabla_i f.$$

Notons $K(x)$ le terme d'ordre 0 (terme entre crochets facteur de $\nabla_i v$) ; puisque $(A-g) \geq 0$ on a $K(x) \geq (A-g)p(1-(1-\delta)(2\rho)^s)^{p-1}+f-A-(n-1)$ donc d'après la condition (3) : $\inf_{x\in B} K(x) > s(s-(n-1))$.

Dans ce cas l'estimation basique de [GL] est vraie pour $\triangle + K\ I$ agissant sur les 1-tenseurs covariants :

$$\begin{aligned}
\| \nabla v \|_0^{(s-1)} &\leq C(\hat{K}) \| (1+v)^p \nabla g - (1+v)\nabla f \|_0^{(s-1)} \\
&\leq C(\hat{K})[\| (1+v)^p \|_0^{(0)} \| \nabla g \|_0^{(s-1)} + \| 1+v \|_0^{(0)} \| \nabla f \|_0^{(s-1)}] \\
&\leq C(\hat{K})[(1+\| v \|_0^{(0)})^p \| \nabla g \|_0^{(s-1)} + (1+\| v \|_0^{(0)}) \| \nabla f \|_0^{(s-1)}] \\
&\leq C(\hat{K}).
\end{aligned}$$

b) On a donc $\| v \|_{0,\alpha}^{(s)} \leq C(\hat{v})$. Soit l un entier compris entre 0 et k, pour lequel on suppose $\| v \|_{l,\alpha}^{(s)} \leq C(\hat{v})$. D'après l'estimation de Schauder étendue à tout B (cf. corollaire 3) on a :

$$\begin{aligned}
\| v \|_{l+2,\alpha}^{(s)} &\leq C(\hat{v})[\| (1+v)^p(g-A) + (A-f)(1+v) \|_{l,\alpha}^{(s)} + \| v \|_0^{(s)}] \\
&\leq C(\hat{v})[\| ((1+v)^p - 1)(g-A) + (A-f)v + (g-f) \|_{l,\alpha}^{(s)} + \| v \|_0^{(s)}].
\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 3 alinéa (14) avec la fonction $\Psi(t) = (1+t)^p - 1$, $a = 1-\delta$ et $b = \lambda$ (c'est ici qu'intervient la condition $s \geq 0$) on obtient $(1+v)^p - 1 \in \Lambda_{l,\alpha}^s$ et $\| (1+v)^p - 1 \|_{l,\alpha}^{(s)} \leq C(\hat{v})$. Ainsi compte tenu de [GL] prop. 3.3 p. 208,

$$\begin{aligned}
\| v \|_{l+2,\alpha}^{(s)} \leq C(\hat{v})[\| (1+v)^p - 1 \|_{l,\alpha}^{(s)} \| g-A \|_{l,\alpha}^{(0)} + \| v \|_{l,\alpha}^{(s)} \| A-f \|_{l,\alpha}^{(0)} \\
+ \| g-f \|_{l,\alpha}^{(s)} + \| v \|_0^{(s)}
\end{aligned}$$

],
soit finalement $\| v \|_{l+2,\alpha}^{(s)} \leq C(\hat{v})$.

Ainsi par récurrence (nous sommes partis de $l = 0$) :

$$\| v \|_{k+2,\alpha}^{(s)} \leq C(\hat{v}). \qquad \blacksquare$$

Nous allons maintenant pouvoir répondre à la question posée au début de cette section en redémontrant en fait directement (par la méthode de continuité) l'existence d'une unique solution avec la bonne "régularité pondérée".

Proposition 11 *On suppose : $f, g \in \Lambda^s_{k,\alpha}$, $s > 0$ vérifiant (C), toujours $g \leq A$, $A > \frac{(n-1)+s(s-(n-1))}{p-1}$ (2), et :*

$$\inf_{x\in B}[(A-|g|)p(1-(1-\delta)(2\rho)^s)^{p-1}-|f|-A-(n-1)] > s(s-(n-1)) \quad (3.4)$$

$$-(1-\delta)[\frac{1}{M}-A(p-1)+q(A-|g|)-(A+|f|)] \leq (2\rho)^{-s}|g-f| \leq \lambda(\frac{1}{M}-p|g|-|f|) \quad (5)$$

où $M = M(n, s, A(p-1))$ (cf. paragraphe 3.6 avec $K = A(p-1)$).
Alors l'unique solution $v \in \Lambda^s_0 \bigcap C^{k+2,\alpha}_{loc}$ de l'équation (E) avec $v > -1$ est en fait dans $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$. De plus v tend vers 0 dans $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$ quand f, g tendent vers 0 dans $\Lambda^s_{k,\alpha}$.

REMARQUE. (4)⇒(3) et (5)⇒(1).

PREUVE. Considérons pour $t \in [0,1]$ la famille d'équations :

$$\triangle v = (tg - A)(1+v)^p + (A - tf)(1+v),\ v > -1 \qquad (\mathrm{E}_t)$$

et soit $\mathcal{S} = \{t \in [0,1], \exists v_t \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}$ solution de (E_t) avec $v_t > -1\}$.

Nous allons montrer que $\mathcal{S} = [0,1]$ par un argument de connexité ; dès lors, la partie "existence" de la proposition sera démontrée pour l' équation (E) qui n'est autre que (E_1). L'unicité a lieu en vertu de notre proposition 10 du § 3.3.1.
La continuité par rapport à f, g au voisinage de zéro découle de l'argument d'inversion locale utilisé ci-après (en l'appliquant à $t_0 = 0$).

a) $\mathcal{S} \neq \phi$ car $0 \in \mathcal{S}$ (en effet, on peut prendre $v_0 = 0$).

b) $\mathcal{S}$ est ouvert dans $[0,1]$:
Soit $\Psi : [0,1] \times \Lambda^s_{k+2,\alpha} \longrightarrow \Lambda^s_{k,\alpha}$ définie par :

$$\Psi(t, v) = \triangle v - (tg - A)(1+v)^p - (A - tf)(1+v)$$

Si on montre que $\frac{\partial\Psi}{\partial v}(t_0, v_0)$ est un isomorphisme de $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$ sur $\Lambda^s_{k,\alpha}$ pour tout couple $(t_0, v_0) \in [0,1] \times \Lambda^s_{k+2,\alpha}$ solution de $\Psi(t_0, v_0) = 0$ avec $v_0 > -1$, alors il suit du théorème des fonctions implicites, l'existence d'un $\epsilon > 0$, tel que : $\forall t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\bigcap[0,1]$, $\exists v_t \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}$ solution de $\Psi(t, v) = 0$ avec $v > -1$; dans ce cas on aura bien $\mathcal{S}$ ouvert relativement à $[0,1]$.

Calculons :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial v}(t_0, v_0)\delta v = \triangle\delta v - (t_0 g - A)p(1+v_0)^{p-1}\delta v + (t_0 f - A)\delta v.$$

Les conditions (4) et (5) étant vérifiées pour f et g, $\forall t \in [0,1]$ elles le sont encore pour tf et tg, donc (3) et (1) aussi. Ainsi par unicité (proposition 10 du § 3.3.1) et d'après la remarque qui suit la proposition 9 du § 3.3.1, pour tout couple $(t, v_t) \in [0,1] \times \Lambda^s_{k+2,\alpha}$ solution de $\Psi(t, v_t) = 0$ avec $v_t > -1$ on a l'estimation uniforme $v_t \geq -2^s(1-\delta)\rho^s$; celle-ci est donc vérifiée par v_0. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
K_0 &:= -(t_0 g - A)p(1+v_0)^{p-1} + (t_0 f - A) \\
&\geq (A - t_0|g|)p[1-(1-\delta)(2\rho)^s]^{p-1} - A - t_0|f| \\
&\geq (A - |g|)p[1-(1-\delta)(2\rho)^s]^{p-1} - A - |f| \\
&\geq \inf_{x\in B}[(A-|g|)p(1-(1-\delta)(2\rho)^s)^{p-1} - A - |f|] \\
&> s(s-(n-1)), \text{ d'après notre condition (4)}
\end{aligned}$$

Le théorème 3.10 de [GL] p. 217 affirme alors que $\triangle + K_0$ est bien un isomorphisme de $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$ sur $\Lambda^s_{k,\alpha}$.

c) $\mathcal{S}$ est fermé :
Soit $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$suite de $\mathcal{S}$ qui tend vers $t \in [0,1]$, on veut montrer que $t \in \mathcal{S}$. Notons $v_i = v_{t_i}$; par le lemme 10, les v_i sont uniformément bornés dans $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$ (en effet l'equation (E$_t$) n'est autre que l'equation (E) pour tf et tg, comme la constante C ne fait intervenir que des sommes et produits de $\| f \|^{()}$ et $\| g \|^{()}$, et que $\| th \|^{()} \leq \| h \|^{()}$ pour $t \in [0,1]$, les v_i auront la même borne C).
Ainsi d'après la proposition 8 et le lemme 8, il existe pour tout $t \in]0, s[$ et tout $\beta \in]0, \alpha[$ une sous-suite renotée v_i qui converge dans $\Lambda^t_{k+2,\beta}$ vers une fonction $v \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}$ avec $v \geq -1$.

De plus $\forall i$, $\Psi(t_i, v_i) = 0$ et Ψ est encore continue sur $[0,1] \times \Lambda^t_{k+2,\beta}$ donc $0 = \lim_{i\to\infty} \Psi(t_i, v_i) = \Psi(t, v)$ ainsi v vérifie (E_t). Notons pour conclure la minoration uniforme : $v_i \geq -(1-\delta)$, qui a lieu par unicité et s'applique encore à v ; donc $v > -1$ et $t \in \mathcal{S}$. ■

3.3.2 Application géométrique (dimension $n \geq 3$)

Soit H une métrique conforme à la métrique hyperbolique H_0, écrite sous la forme $H = (1+v)^{\frac{4}{n-2}} H_0$. Sa courbure scalaire s'écrit (voir e.g [A] p. 126) : $Scal(H) = (1+v)^{-\frac{n+2}{n-2}}(4\frac{n-1}{n-2}\triangle v + S_0(1+v))$, où $S_0 = Scal(H_0)$, et prescrire $Scal(H) = S_0 + \sigma$, équivaut à chercher H sous la forme précédente avec v

solution sur B de l'équation (E) :

$$\triangle v = (A - f)(1 + v) + (g - A)(1 + v)^p,$$

avec :

$$A = -\frac{n-2}{4(n-1)}S_0 = \frac{n(n-2)}{4} \text{ car } S_0 = -n(n-1),$$

$$p = \frac{n+2}{n-2}, \text{ donc ici } A(p-1) = n,$$

$$g = \frac{n-2}{4(n-1)}\sigma,$$

$$f = 0.$$

Notons qu'on a $p > 1$. Par ailleurs s vérifie la condition (C) (du paragraphe 3.6) avec $K = A(p-1) = n$ si et seulement si $s \in]-1, n[$. Enfin $A = \frac{n}{p-1} > \frac{n-1+s(s-(n-1))}{p-1}$ dès que $s \in]s_-, s_+[$ où $s_\pm = \frac{n-1\pm\sqrt{(n-1)^2+4}}{2}$. Notons que $s_- \in]-1, 0[$ et $s_+ \in]n-1, n[$.
L'étude précédente de l'équation (E) jointe au corollaire 11 conduit au

Théorème 25 *S'il existe $\delta \in]0, 1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ tel que, en notant $q = \frac{1-\delta^p}{1-\delta}$, la fonction $\sigma \in \Lambda_0^s \bigcap C_{loc}^{k,\alpha}$ ($0 \leq s < n$, $0 < \alpha < 1$) vérifie $S_0 + \sigma \leq 0$ et l'encadrement :*

$$\begin{aligned} -(1-\delta)\left(\frac{1}{M} - n + q\left(\frac{n(n-2)}{4} - \frac{n-2}{4(n-1)}\sigma\right) - \frac{n(n-2)}{4}\right) &\leq (2\rho)^{-s}\frac{n-2}{4(n-1)}\sigma \\ &\leq \lambda\left(\frac{1}{M} - \frac{n+2}{4(n-1)}\sigma\right), \end{aligned}$$

où $M = M(n, s, n)$ (cf. proposition 18), alors il existe $v \in \Lambda_0^s \bigcap C_{loc}^{k+2,\alpha}$ telle que la métrique conforme $H = (1+v)^{\frac{4}{n-2}} H_0$ admette $S_0 + \sigma$ pour courbure scalaire et v est unique si $s > 0$.
Si de plus $\sigma \in \Lambda_{k,\alpha}^s$ avec $s \in]0, s_+[$ vérifie

$$\begin{aligned} -(1-\delta)\left(\frac{1}{M} - n + q\left(\frac{n(n-2)}{4} - \frac{n-2}{4(n-1)}|\sigma|\right) - \frac{n(n-2)}{4}\right) &\leq (2\rho)^{-s}\frac{n-2}{4(n-1)}|\sigma| \\ &\leq \lambda\left(\frac{1}{M} - \frac{n+2}{4(n-1)}|\sigma|\right), \end{aligned}$$

et

$$\inf_{x\in B}\left[\left(\frac{n(n-2)}{4} - \frac{n-2}{4(n-1)}|\sigma|\right)\frac{n+2}{n-2}\left(1-(1-\delta)(2\rho)^s\right)^{\frac{4}{n-2}} - \frac{n(n-2)}{4} - (n-1)\right] > s(s-(n-1))$$

alors $v \in \Lambda_{k+2,\alpha}^s$.

REMARQUE.
L'obtention de ce résultat global nous a coûté une diminution de l'intervalle $0 \leq s < n$ nécessaire pour le résultat local du paragraphe 3.2 (Théorème 23).

Comparons notre résultat avec celui de [LTY] (cf. introduction, théorème 10), avec notre modèle de l'espace hyperbolique (B, H_0). Prenons $p = 0$, alors pour tout x dans B,

$$r(x) = 2\mathrm{Argth}|x| = \ln(\frac{1+|x|}{1-|x|}).$$

Comme par ailleurs $\rho = \frac{1}{2}(1-|x|)^2$, alors $\rho(x) \approx 2e^{-r(x)}$ au voisinage de ∂B. Regardons le cas $a = e$, $m = 1$, $\beta = 2$ dans le théorème 10. On a alors $a_1(t) = \ln(e+t)$ et $b_1(t) = e + t$. Ainsi, au voisinage de l'infini, on a :

$$\rho^0(x) = 1 \geq \{a_1[r(x]\}^{-1}\{b_1[r(x)]\}^{-1},$$

et pour tout $\epsilon > 0$,

$$\rho^\epsilon(x) \approx 2^\epsilon e^{-\epsilon r(x)} \leq \{a_1[r(x]\}^{-2}\{b_1[r(x)]\}^{-1}.$$

Notons $(*)$ l'équation

$$Scal[(1+v)^{\frac{4}{n-2}}H_0] = S_0 + \sigma.$$

Ainsi d'après [LTY], on obtient le

Corollaire 7 *Si $S_0 + \sigma \in C^0(B)$ est essentiellement négative et s'il existe une constante $C > 0$ et un réel $\epsilon > 0$ tels que $S_0 + \sigma \geq -C\rho^{-2+\epsilon}$ près de l'infini, alors l'équation $(*)$ possède une solution $v > -1$ de classe C^2 sur B. Si par contre il existe une constante $C > 0$ telle que $\sigma \leq -C\rho^{-2}$ près de l'infini, alors l'équation $(*)$ n'a pas de solution $v > -1$ de classe C^2 sur B.*

Remarque :
Ce corollaire nous donne une obstruction lorsque $s \leq -2$ ainsi qu'une existence lorsque $s > -2$ mais ne permet pas de préciser de manière simple le comportement de v à l'infini.

3.4 Courbure scalaire conforme en dimension deux

Toujours sur B munie de la métrique hyperbolique $H_0 = \rho^{-2}E$, on considère à présent l'équation :

$$\triangle v = \mathrm{e}^v (f - A) + A, \tag{E'}$$

où $A \in \mathbb{R}^+$ et f est une fonction donnée sur B.

Nous allons montrer l'existence d'une solution, son unicité puis sa régularité, ceci en toute dimension ; pour cela nous procédons comme au paragraphe 3.3. Ensuite nous appliquerons ce résultat au cas particulier de la prescription de la courbure scalaire conforme en dimension 2 .

3.4.1 Etude EDP (en dimension n quelconque)

Existence

Soit $M = M(n, s, 0)$ la constante de la proposition 18 (telle que la fonction positive $\varphi = M\rho^s$ vérifie sur tout B l'inéquation $\triangle\varphi \geq \rho^s$).

Proposition 12 *Soit* $f \in \Lambda_0^s \bigcap C_{loc}^{k,\alpha}$, $s \in]0, n-1[$, $\alpha \in]0, 1[$. *S'il existe* $\lambda \geq 0$ *tel que*

$$f \leq \frac{\lambda\rho^s - A}{e^{\lambda\varphi}} + A,$$

alors il existe v solution de (E') dans $\Lambda_0^s \bigcap C_{loc}^{k+2,\alpha}$. *En outre :*

$$-2^s\varphi \parallel f \parallel_0^{(s)} \leq v \leq \lambda\varphi.$$

PREUVE. Cherchons une sur-solution et une sous-solution de l'équation (E'). Soit $v^+ = \lambda\varphi$; on a : $\triangle v^+ \geq \lambda\rho^s \geq (f - A)\mathrm{e}^{\lambda\varphi} + A$, la deuxième inégalité étant vérifiée d'après l'hypothèse de la proposition.
Soit $v^- = -2^s \parallel f \parallel_0^{(s)} \varphi$; déjà, comme $\varphi \geq 0$, v^- est non-positive donc on a bien $v^- \leq v^+$. Et comme

$$f \geq -2^s \parallel f \parallel_0^{(s)} \rho^s = -A - 2^s \parallel f \parallel_0^{(s)} \rho^s + A \geq \frac{-A - 2^s \parallel f \parallel_0^{(s)} \rho^s}{\mathrm{e}^{-2^s \| f \|_0^{(s)} \rho^s}} + A,$$

on a aussi : $\triangle v^- \leq -2^s \parallel f \parallel_0^{(s)} \rho^s \leq \mathrm{e}^{-2^s \| f \|_0^{(s)} \rho^s}(f - A) + A = \mathrm{e}^{v^-}(f - A) + A$.

Ainsi il existe (voir e.g [N]) $v \in C_{loc}^{k+2,\alpha}$ comprise entre v^+ et v^-, donc dans Λ_0^s, solution de l'équation (E'). ■

Unicité

Proposition 13 *Si $f \in C^0_{loc}$ et $f \leq A$, alors l'équation (E') admet au plus une solution v dans $C^2_{loc} \bigcap C^0(\overline{B})$ nulle sur ∂B.*

PREUVE. Soient v_0 et v_1 deux telles solutions et $w = v_1 - v_0$, alors :

$$\triangle w = (\mathrm{e}^{v_1} - \mathrm{e}^{v_0})(f - A) = (f - A)\left[\int_0^1 \mathrm{e}^{tv_1+(1-t)v_0} dt\right](v_1 - v_0),$$

donc w vérifie :

$$\triangle w + (f - A)\left[\int_0^1 \mathrm{e}^{tv_1+(1-t)v_0} dt\right] w = 0$$

dans B, avec $w = 0$ sur ∂B. Le coefficient de w est non-négatif puisque $(A - f) \geq 0$; le principe du maximum [GT] p. 33 th. 3.3 implique $w = 0$. ■

REMARQUE. Si $f \leq A$ on peut prendre $\lambda = 2^s \parallel f \parallel_0^{(s)}$ dans la proposition 12 du § 3.4.1. En effet prenons $v^+ = 2^s \parallel f \parallel_0^{(s)} \varphi$ alors

$$\triangle v^+ \geq 2^s \parallel f \parallel_0^{(s)} \rho^s \geq f \geq f + (\mathrm{e}^{v^+} - 1)(f - A) = \mathrm{e}^{v^+}(f - A) + A.$$

Dans ce cas la solution de (E') vérifie l'estimation

$$|v| \leq 2^s \varphi \parallel f \parallel_0^{(s)} .$$

Régularité

Proposition 14 *Si $f \in \Lambda^s_{k,\alpha}$, $s \in]0, n-1[$, $\alpha \in]0,1[$,*
$A \geq (n-1) + s(s-(n-1))$, $f \leq A$, et

$$\inf_{x \in B} [e^{-2^s \|f\|_0^{(s)} \varphi}(A - |f|) - (n-1)] > s(s-(n-1)) \tag{6}$$

alors la solution v de l'équation (E') est dans $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$. De plus v tend vers 0 dans $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$ quand f tend vers 0 dans $\Lambda^s_{k,\alpha}$.

REMARQUE. Si $n \leq 5$ alors la condition (6) implique $|f| \leq A$.

PREUVE. D'après les propositions 12 et 13 précédentes et l'avant-dernière remarque, il existe bien une solution unique de (E') dans $\Lambda^s_0 \bigcap C^{k+2,\alpha}_{loc}$. On va montrer qu'elle est dans $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$ par la méthode de continuité ; l'argument d'inversion locale utilisé ci-après montre (appliqué en $t_0 = 0$) que v tend vers 0 quand f tend vers 0.

Soit $\Psi : [0,1]\times\Lambda^s_{k+2,\alpha}\longrightarrow\Lambda^s_{k,\alpha}$ définie par :

$$\Psi(t,v)=\triangle v-\mathrm{e}^v(tf-A)-A,$$

et soit $\mathcal{S}=\{t\in[0,1],\ \exists v_t\in\Lambda^s_{k+2,\alpha}$ solution de $\Psi(t,v)=0\}$.

a) $\mathcal{S}\neq\phi$ car $0\in\mathcal{S}$ (en effet $\Psi(0,0)=0$).

b) $\mathcal{S}$ est ouvert dans $[0,1]$: Soit $t_0\in\mathcal{S}$ et $v_0=v_{t_0}\in\Lambda^s_{k+2,\alpha}$, alors

$$\frac{\partial\Psi}{\partial v}(t_0,v_0)\delta v=\triangle\delta v+(A-t_0f)\mathrm{e}^{v_0}\delta v.$$

Quand $f\geq 0$, $t_0f\leq f\leq A$ et quand $f\leq 0$, $t_0f\leq 0<A$, donc on a toujours $(A-t_0f)\mathrm{e}^{v_0}\geq 0$ et d'après [GL] p. 217

$$\triangle+(A-t_0f)\mathrm{e}^{v_0}$$

est un isomorphisme de $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$ dans $\Lambda^s_{k,\alpha}$ sous l'hypothèse $0>s(s-(n-1))$ vérifiée pour $s\in]0,n-1[$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe donc $\epsilon>0$ tel que $\forall t\in]t_0-\epsilon,t_0+\epsilon[\bigcap[0,1]$, $\exists v_t\in\Lambda^s_{k+2,\alpha}$ solution de $\Psi(t,v_t)=0$. Par suite $\mathcal{S}$ est ouvert dans $[0,1]$.

c) $\mathcal{S}$ est fermé : Comme précédemment (cf. fin du § 3.3.1) il suffit de majorer uniformément les solutions de (E'). Pour cela, dérivons l'équation (E') : $\nabla_i\triangle v=\mathrm{e}^v(f-A)\nabla_iv+\mathrm{e}^v\nabla_if$ or $\nabla_i\triangle v=-(n-1)\nabla_iv+\triangle\nabla_iv$, donc :

$$\triangle\nabla_iv+[\mathrm{e}^v(A-f)-(n-1)]\nabla_iv=\mathrm{e}^v\nabla_if.$$

D'après (6) et la remarque qui suit l'unicité(§ 3.4.1), on a :

$$\mathrm{e}^v(A-f)-(n-1)\geq\mathrm{e}^{-2^s\|f\|_0^{(s)}\varphi}(A-|f|)-(n-1)$$

$$\geq\inf_{x\in B}[\mathrm{e}^{-2^s\|f\|_0^{(s)}\varphi}(A-|f|)-(n-1)]>s(s-(n-1)),$$

donc l'estimation de base de [GL] a lieu :

$$\begin{aligned}\|\nabla v\|_0^{(s-1)} &\leq C(\hat v)\,\|\mathrm{e}^v\nabla f\|_0^{(s-1)} \leq C(\hat v)\,\|\mathrm{e}^v\|_0^{(0)}\ \|\nabla f\|_0^{(s-1)}\\ &\leq C(\hat v)\mathrm{e}^{\|v\|_0^{(0)}}\,\|\nabla f\|_0^{(s-1)} = C(\hat v).\end{aligned}$$

Ainsi $v\in\Lambda^s_{0,\alpha}$ et $\|v\|^{(s)}_{0,\alpha}\leq C(\hat v)$. D'après l'estimation de type Schauder du corollaire 3, si $v\in\Lambda^s_{l,\alpha}$, $0\leq l\leq k$,

$$\|v\|^{(s)}_{l+2,\alpha}\leq C(\hat v)[\|(\mathrm{e}^v-1)(f-A)+f\|^{(s)}_{l,\alpha}+\|v\|^{(s)}_0].$$

En utilisant la proposition 3 alinéa (14) avec $\Psi(t) = \mathrm{e}^t - 1$ et $a = b = 2^s M \parallel f \parallel_0^{(s)}$, on a : $\mathrm{e}^v - 1 \in \Lambda^s_{l,\alpha}$ et $\parallel \mathrm{e}^v - 1 \parallel^{(s)}_{l,\alpha} \leq C(\hat{v})$. Ainsi

$$\parallel v \parallel^{(s)}_{l+2,\alpha} \leq C(\hat{v})[\parallel (\mathrm{e}^v - 1) \parallel^{(s)}_{l,\alpha} \parallel A - f \parallel^{(0)}_{l,\alpha} + \parallel f \parallel^{(s)}_{l,\alpha} + \parallel v \parallel^{(s)}_0] \leq C(\hat{v}).$$

On conclut alors comme précédemment (§ 3.3.1) ■

3.4.2 Application géométrique (dimension n=2)

En dimension $n = 2$, si $H = \mathrm{e}^{2g} H_0$, alors $Scal(H) = \mathrm{e}^{-2g}(S_0 + 2\triangle g)$ où $S_0 = Scal(H_0) = -2$, donc si l'on prescrit $Scal(H) = S_0 + \sigma$, chercher g revient à résoudre :

$$2\triangle g = \mathrm{e}^{2g}(S_0 + \sigma) - S_0.$$

On est donc conduit à regarder (E') avec

$$A = -S_0 = 2, v = 2g, f = \sigma.$$

Ici en outre $s \in]0, 1[$ et $\varphi = \frac{1}{s(1-s)}\rho^s$. L'étude précédente nous donne le

Théorème 26 *Si $\sigma \in \Lambda^s_0 \bigcap C^{k,\alpha}_{loc}$, $0 < s < 1$, $0 < \alpha < 1$, et s'il existe $\lambda \geq 0$ tel que*

$$\sigma \leq \frac{\lambda\rho^s - 2}{e^{\lambda\varphi}} + 2,$$

alors il existe une métrique conforme $H = e^{2g} H_0$ admettant $S = S_0 + \sigma$ pour courbure scalaire, et asymptotique à H_0 avec un facteur conforme $2g$ appartenant à $\Lambda^s_0 \bigcap C^{k+2,\alpha}_{loc}$, et vérifiant $-2^s\varphi \parallel \sigma \parallel^{(s)}_0 \leq 2g \leq \lambda\varphi$.
Si de plus $S \leq 0$ alors $H = e^{2g} H_0$ est unique et $|2g| \leq 2^s\varphi \parallel \sigma \parallel^{(s)}_0$.
Enfin si $\sigma = S - S_0 \in \Lambda^s_{k,\alpha}$, $0 < s < 1$, $0 < \alpha < 1$
et si

$$\inf_{x \in B}[e^{-2^s\varphi\|\sigma\|^{(s)}_0}(2 - |\sigma|) - 1] > s(s-1),$$

alors $g \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}$.

3.4.3 Un élargissement de l'intervalle des poids

On réécrit à présent l'équation (E') sous la forme

$$(\triangle + A)v = \mathrm{e}^{v}(f-A) + A(1+v). \qquad \text{(E')}$$

Nous procédons ensuite comme précédemment.

Etude EDP (en dimension n quelconque)

Existence

Soit $M = M(n,s,A)$ la constante de la proposition 18 (telle que la fonction positive $\varphi = M\rho^s$ vérifie sur tout B l'inéquation $(\triangle + A)\varphi \geq \rho^s$).

Proposition 15 *Soit $f \in \Lambda_0^s \bigcap C_{loc}^{k,\alpha}$, $\alpha \in]0,1[$ et $s \geq 0$ vérifiant (C) avec $K = A$. S'il existe deux réels non-négatifs λ^+ et λ^- tels que*

$$\frac{-\lambda^-\rho^s - A(1-\lambda^-\varphi)}{e^{-\lambda^-\varphi}} + A \leq f \leq \frac{\lambda^+\rho^s - A(1+\lambda^+\varphi)}{e^{\lambda^+\varphi}} + A, \qquad \mathbf{(7)}$$

alors il existe v solution de (E') dans $\Lambda_0^s \bigcap C_{loc}^{k+2,\alpha}$. En outre :

$$-\lambda^-\varphi \leq v \leq \lambda^+\varphi.$$

PREUVE. Cherchons des sur et sous-solutions de l'équation (E').
Soit $v^+ = \lambda^+\varphi$; on a :

$$(\triangle + A)v^+ \geq \lambda^+\rho^s \geq (f-A)\mathrm{e}^{\lambda^+\varphi} + A(1+\lambda^+\varphi) = (f-A)\mathrm{e}^{v^+} + A(1+v^+),$$

la deuxième inégalité étant vérifiée d'après (7). Soit $v^- = -\lambda^-\varphi$; déjà, comme $\varphi \geq 0$, v^- est non-positive donc on a bien $v^- \leq v^+$. Et comme, toujours en utilisant (7),

$$(\triangle + A)v^- \leq -\lambda^-\rho^s \leq \mathrm{e}^{-\lambda^-\varphi}(f-A) + A(1-\lambda^-\varphi) = \mathrm{e}^{v^-}(f-A) + A(1+v^-),$$

il existe (voir e.g [N]) $v \in C_{loc}^{k+2,\alpha}$ comprise entre v^+ et v^-, donc dans Λ_0^s, solution de l'équation (E'). ■

REMARQUES.
(i) La condition (C) autorise des s négatifs mais l'encadrement de f n'a alors plus de sens (en divisant par ρ^s et en regardant à l'infini, sachant que $AM = \frac{A}{A+s(s-1)} > 1$ on tombe sur $+\infty \leq 0$), c'est pourquoi il faut aussi supposer $s \geq 0$.
(ii) D'après l'unicité (cf. paragraphe 3.4.1), si $s > 0$, $f \leq A$, la solution précédente est unique.

Régularité

Proposition 16 *Soient $f \in \Lambda^s_{k,\alpha}$, $s \geq 0$ vérifiant (C) avec $K = A$, $\alpha \in]0,1[$, $A > (n-1) + s(s-(n-1))$. Si $f \leq A$ et s'il existe deux réels non-négatifs λ^+ et λ^- tels que $\forall t \in [0,1]$, tf vérifie l'encadrement (7), et si*

$$\inf_{x\in B}[e^{-\lambda^-\varphi}(A-|f|)] > (n-1)+s(s-(n-1)) \tag{8}$$

alors il existe une solution $v \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}$ de l'équation (E'), unique lorsque $s > 0$. De plus $v \to 0$ dans $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$ quand $f \to 0$ dans $\Lambda^s_{k,\alpha}$.

REMARQUE. Si $n \leq 5$ alors la condition (8) implique $|f| \leq A$.

PREUVE. Utilisons la méthode de continuité ; l'argument d'inversion locale utilisé ci-après montrera en particulier (appliqué en $t_0 = 0$) que $v \to 0$ quand $f \to 0$. Soit $\Psi : [0,1] \times \Lambda^s_{k+2,\alpha} \longrightarrow \Lambda^s_{k,\alpha}$ définie par :

$$\Psi(t,v) = \triangle v - \mathrm{e}^v(tf - A) - A,$$

et soit $\mathcal{S} = \{t \in [0,1],\ \exists v_t \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}$ solution de $\Psi(t,v) = 0\}$.

a) $\mathcal{S} \neq \phi$ car $0 \in \mathcal{S}$ (en effet $\Psi(0,0) = 0$).

b) $\mathcal{S}$ est ouvert dans $[0,1]$: Soit $t_0 \in \mathcal{S}$ et $v_0 = v_{t_0} \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}$, alors

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v}(t_0, v_0)\delta v = \triangle \delta v + (A - t_0 f)\mathrm{e}^{v_0}\delta v.$$

Or $(A - t_0 f)\mathrm{e}^{v_0} \geq (A - |f|)\mathrm{e}^{-\lambda^-\varphi} > n - 1 + s(s-(n-1)) > s(s-(n-1))$ donc d'après [GL] p. 217

$$\triangle + (A - t_0 f)\mathrm{e}^{v_0}$$

est un isomorphisme de $\Lambda^s_{k+2,\alpha}$ dans $\Lambda^s_{k,\alpha}$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $\forall t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\bigcap[0,1]$, $\exists v_t \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}$ solution de $\Psi(t, v_t) = 0$. Par suite $\mathcal{S}$ est ouvert dans $[0,1]$.

c) $\mathcal{S}$ est fermé : Comme précédemment (cf. fin du § 3.3.1) il suffit de majorer uniformément les solutions de (E'). Pour cela, dérivons l'équation (E') : $\nabla_i \triangle v = \mathrm{e}^v(f - A)\nabla_i v + \mathrm{e}^v \nabla_i f$ or $\nabla_i \triangle v = -(n-1)\nabla_i v + \triangle \nabla_i v$, donc :

$$\triangle \nabla_i v + [\mathrm{e}^v(A - f) - (n-1)]\nabla_i v = \mathrm{e}^v \nabla_i f.$$

D'après (8) et la dernière partie de la proposition 15, on a :

$\mathrm{e}^v(A - f) - (n-1) \geq \mathrm{e}^{-\lambda^-\varphi}(A - |f|) - (n-1)$

$\geq \inf_{x\in B}[\mathrm{e}^{-\lambda^-\varphi}(A-|f|)]-(n-1) > s(s-(n-1))$,

donc l'estimation de base de [GL] a lieu :

$$\begin{aligned}\| \nabla v \|_0^{(s-1)} &\leq C(\hat{v}) \| \mathrm{e}^v \nabla f \|_0^{(s-1)} \leq C(\hat{v}) \| \mathrm{e}^v \|_0^{(0)} \| \nabla f \|_0^{(s-1)} \\ &\leq C(\hat{v}) \mathrm{e}^{\|v\|_0^{(0)}} \| \nabla f \|_0^{(s-1)} = C(\hat{v}).\end{aligned}$$

Ainsi $v \in \Lambda^s_{0,\alpha}$ et $\| v \|_{0,\alpha}^{(s)} \leq C(\hat{v})$. D'après l'estimation de type Schauder du corollaire 3, si $v \in \Lambda^s_{l,\alpha}$, $0 \leq l \leq k$,

$$\| v \|_{l+2,\alpha}^{(s)} \leq C(\hat{v})[\| (\mathrm{e}^v-1)(f-A)+f \|_{l,\alpha}^{(s)} + \| v \|_0^{(s)}].$$

En utilisant la proposition 3 alinéa (14) avec $\Psi(t) = \mathrm{e}^t - 1$, $a = \frac{\lambda^- M}{2^s}$ et $b = \frac{\lambda^+ M}{2^s}$ (car $\sup \varphi = \frac{M}{2^s}$) on a : $\mathrm{e}^v - 1 \in \Lambda^s_{l,\alpha}$ et $\| \mathrm{e}^v - 1 \|_{l,\alpha}^{(s)} \leq C(\hat{v})$. Ainsi

$$\| v \|_{l+2,\alpha}^{(s)} \leq C(\hat{v})[\| (\mathrm{e}^v-1) \|_{l,\alpha}^{(s)} \| A-f \|_{l,\alpha}^{(0)} + \| f \|_{l,\alpha}^{(s)} + \| v \|_0^{(s)}] \leq C(\hat{v}).$$

d) Conclusion : par connexité $S=[0,1]$ et $v=v_1$ est la solution annoncée dans la proposition 16. ■

Courbure scalaire en dimension 2

Ici $s \in [0,2[$, $\varphi = \frac{1}{2-s(s-1)}\rho^s$, la condition $A-(n-1) > s(s-(n-1))$ s'écrit $s \in]s_-, s_+[$ avec $s_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. L'étude précédente nous donne le

Théorème 27 *Si $\sigma \in \Lambda^s_0 \bigcap C^{k,\alpha}_{loc}$, $0 \leq s < 2$, $0 < \alpha < 1$, et s'il existe deux réels non-négatif λ^+ et λ^- tels que*

$$\frac{-\lambda^-\rho^s - 2(1-\lambda^-\varphi)}{e^{-\lambda^-\varphi}} + 2 \leq \sigma \leq \frac{\lambda^+\rho^s - 2(1+\lambda^+\varphi)}{e^{\lambda^+\varphi}} + 2, \qquad \mathbf{(9)}$$

alors il existe une métrique conforme $H = e^{2g}H_0$ admettant $S = S_0 + \sigma$ pour courbure scalaire et un facteur conforme $2g$ appartenant à $\Lambda^s_0 \bigcap C^{k+2,\alpha}_{loc}$ vérifiant $-\lambda^-\varphi \leq 2g \leq \lambda^+\varphi$. Si de plus $s > 0$ et $S \leq 0$ alors $H = e^{2g}H_0$ est unique. Enfin si $\sigma = S - S_0 \in \Lambda^s_{k,\alpha}$ avec $0 \leq s < s_+$, si $\forall t \in [0,1]$, $t\sigma$ vérifie l'encadrement (9) et si

$$\inf_{x\in B}[e^{-\lambda^-\varphi}(2-|\sigma|)] > 1 + s(s-1),$$

alors il existe un facteur conforme $2g \in \Lambda^s_{k+2,\alpha}$, unique lorsque $s > 0$, tel que $H = e^{2g}H_0$ admette S pour courbure scalaire.

Remarques sur les encadrements du type (7) et sur la réécriture de l'équation (E').

a) Lorsque $s=0$, sachant que $\varphi = M\rho^0 = \frac{1}{A}$, la condition d'encadrement (7) s'écrit : il existe deux réels positifs λ^+ et λ^- tels que

$$A(1-\mathrm{e}^{\frac{\lambda^-}{A}}) \leq f \leq A(1-\mathrm{e}^{\frac{-\lambda^+}{A}}).$$

Cette condition équivaut à f bornée et $f \leq A$; en effet, elle l'implique, et réciproquement si f est ainsi, on peut prendre

$$\lambda^- = \begin{cases} 0 & \text{si } f \geq 0 \\ A\ \ln(1-\frac{\inf f}{A}) & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\lambda^+ = A\ \ln(\frac{1}{1-\frac{\sup f}{A}}),$$

pour lesquels elle est vérifiée. De plus comme notre solution vérifie l'encadrement $-\lambda^-\varphi \leq v \leq \lambda^+\varphi$, on a ici

$$\ln(\frac{1}{1-\frac{\sup f}{A}}) \geq v \geq \begin{cases} 0 & \text{si } f \geq 0 \\ -\ln(1-\frac{\inf f}{A}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) On ne peut pas augmenter indéfiniment le poids s par la méthode précédente ; en effet si on réécrit l'équation (E') sous la forme

$$(\triangle + \mu A)v = \mathrm{e}^v(f-A) + A(1+\mu v),$$

avec $\mu \in]1,\infty[$, on aura besoin pour construire des solutions supérieure et inférieure de supposer vérifié l'encadrement :

$$\frac{-\lambda^-\rho^s - A(1-\mu\lambda^-\varphi)}{\mathrm{e}^{-\lambda^-\varphi}} + A \leq f \leq \frac{\lambda^+\rho^s - A(1+\mu\lambda^+\varphi)}{\mathrm{e}^{\lambda^+\varphi}} + A.$$

Si $s>0$, en divisant par ρ^s, une condition s'ensuit à l'infini (sachant que $\mathrm{e}^{\lambda\varphi} = 1+\lambda\varphi+O(\rho^{2s})$) :

$$-\lambda^-(1+AM(1-\mu)) \leq \lambda^+(1+AM(1-\mu))$$

qui entraîne $AM(\mu-1) \leq 1$. Prenons $s \geq \frac{n-2}{2}$ tel que $\mu A + s(n-1-s) > 0$ (cf. condition (C)) et $A+s(n-1-s) < 0$. Alors $AM(\mu-1) = \frac{A(\mu-1)}{\mu A+s(n-1-s)} > 1$ et nous obtenons une contradiction. La plus grande valeur possible pour μ est donc celle que nous utilisons $\mu = 1$.

c) De façon analogue, la constante $A(p-1)$ utilisée au paragraphe 3.3 est la plus grande possible pour notre méthode.

3.5 Un exemple de sortie de l'intervalle des poids isomorphiques.

Dans ce paragraphe, nous considérons l'équation de la courbure scalaire conforme dans le cas où l'exposant du poids est un réel $s > s_2$, avec $s_2 := \frac{1}{2}[n - 1 + \sqrt{(n-1)^2 + \frac{2n(3n-2)}{(n-2)}}] \in]n, n+1[$ lorsque $n > 4$.

Proposition 17 *On suppose $n \geq 6$, $s > s_2$ et $\exists \epsilon > 0$ tel que $\sigma \geq \epsilon \rho^s$. Alors si v est solution de l'équation $Scal[(1+v)^{\frac{4}{n-2}} H_0] = S_0 + \sigma$ avec $v = 0$ sur ∂B et $-1 < v \leq 1$, v ne peut appartenir à Λ_0^k si $k > s_2$.*

PREUVE. Rechercher une métrique H sous la forme $H = (1+v)^{\frac{4}{n-2}} H_0$ ayant pour courbure scalaire $S_0 + \sigma = -n(n-1) + \sigma$ revient à résoudre l'équation :

$$4\frac{n-1}{n-2}\triangle v = n(n-1)(1+v) + (\sigma - n(n-1))(1+v)^p,$$

en notant $p = \frac{n+2}{n-2}$ qui est dans l'intervalle $[1, 2]$ car $n \geq 6$. Remarquons que $v \geq 0$; en effet, sinon : $0 > \inf_B v = v(x_0) \Rightarrow \triangle v(x_0) \leq 0$, ce qui joint à $\sigma \geq 0$ permet de déduire de l'équation en x_0 : $1 \leq (1+v)^{p-1} \Rightarrow v(x_0) \geq 0$, contradiction.

L'équation peut s'écrire :

$$\triangle v + [n + \frac{n}{2}(\frac{n+2}{n-2})v]v = \frac{n-2}{4(n-1)}\sigma(1+v)^p + G(v),$$

où l'examen de la fonction :

$$v \geq 0 \longrightarrow G(v) = \frac{-n(n-2)}{4}[(1+v)^p - 1 - pv - \frac{p(p-1)}{2}v^2]$$

permet de s'assurer que $G(v) \geq 0$ si $p \in [1, 2]$ (et $v \geq 0$). D'autre part, comme $v \leq 1$, on a :

$$\frac{n(3n-2)}{2(n-2)} = n + \frac{n}{2}\frac{n+2}{n-2} \geq n + \frac{n}{2}\frac{n+2}{n-2}v.$$

Comme $v \geq 0$ on a finalement :

$$\begin{array}{rcccl} (\triangle + \frac{n(3n-2)}{2(n-2)})v & \geq & \triangle v + (n + \frac{n}{2}\frac{n+2}{n-2}v)v & = & \frac{n-2}{4(n-1)}\sigma(1+v)^p + G(v) \\ & \geq & \frac{n-2}{4(n-1)}\sigma \;\geq\; \frac{n-2}{4(n-1)}\epsilon\rho^s. & & \end{array}$$

Ainsi par les corollaires 9 et 10 ci-après et le principe du maximum, $v \geq \frac{n-2}{4(n-1)}\epsilon\Phi(\rho)$ et donc v est au mieux dans $\Lambda_0^{s_2}$. ■

REMARQUE. Si on suppose en outre $\sigma \in \Lambda_0^s \bigcap C_{loc}^{k,\alpha}$ dans la proposition 17, nos résultats d'existence locale (l'inversion locale (Théorème 23)), et globale (Théorème 25, première partie) fournissent une solution $v \in \Lambda_0^t \bigcap C_{loc}^{k+2,\alpha}$ pour tout $t \in [0,n[$, qui vérifie bien $-1 < v \leq 1$ dès que σ est prise assez petite (en particulier, σ telle que $\lambda \leq 1$ cf. Théorème 25). La proposition précédente affirme alors que cette solution v *ne peut être dans* Λ_0^s : il y a *perte de poids.*

Pour établir les corollaires que nous venons d'utiliser, commençons par démontrer un lemme de perte de poids :

Lemme 11 *Soit un réel $K \geq \frac{-(n-1)^2}{4}$ tel que $s_2 = \frac{(n-1)+\sqrt{(n-1)^2+4K}}{2} > 0$; si $s = s_2 + p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $p \neq 0$, alors la solution de $(\triangle + K)\varphi = \rho^s$ qui s'annule sur ∂B est dans Λ_0^k si et seulement si $k \leq s_2$.*

PREUVE. On cherche la solution sous la forme $\varphi(x) = \Phi(\rho(x))$ (radiale) avec, pour l'instant formellement : $\Phi'(\rho) = \rho^{s_2-1}\sum_{j\geq 0} b_j\rho^j$; $\Phi(\rho) = \rho^{s_2}\sum_{j\geq 0}\frac{b_j}{j+s_2}\rho^j$. Alors d'après le lemme 12 :

$$
\begin{aligned}
(\triangle + K)\Phi(\rho) &= \rho^{s_2}\Big[\sum_{j\geq 1} 2b_{j-1}(j+s_2-2)\rho^j - \sum_{j\geq 0} b_j(j+s_2-1)\rho^j \\
&\qquad + (4-n)\sum_{j\geq 1} b_{j-1}\rho^j + (n-2)\sum_{j\geq 0} b_j\rho^j \\
&\qquad + K\sum_{j\geq 0}\frac{b_j}{j+s_2}\rho^j\Big] \\
&= b_0\left(n - s_2 - 1 + \frac{K}{s_2}\right)\rho^{s_2} \\
&\quad + \rho^{s_2}\sum_{j\geq 1}\Big[(2j+2s_2-n)b_{j-1} \\
&\qquad + \left(-j - s_2 + n - 1 + \frac{K}{j+s_2}\right)b_j\Big]\rho^j \\
&= \rho^{s_2}\sum_{j\geq 1}\left[(2j+2s_2-n)b_{j-1} + \frac{j(-j-2s_2+n-1)}{j+s_2}b_j\right]\rho^j
\end{aligned}
$$

car s_2 est racine de $s(s-(n-1)) - K = 0$. Donc $(\triangle + K)\Phi(\rho) = \rho^s = \rho^{s_2}\rho^p$ si et seulement si :

$$
\begin{cases}
b_j = 0 & \forall j \geq p \\
b_{p-1} = \frac{1}{2p+2s_2-n} = \frac{1}{2s-n} & j = p-1 \\
b_{j-1} = \frac{j(j+2s_2-n+1)}{(j+s_2)(2j+2s_2-n)}b_j & \forall j \in \{1,..,p-1\}.
\end{cases}
$$

REMARQUES. Comme $s_2 \geq \frac{n-1}{2}$ et $p \geq 1$ alors $\forall j < p$, $b_j > 0$. On a toujours $s_2 > 0$ lorsque $n \neq 1$ ou $K \neq 0$.

On obtient ainsi une solution *polynomiale* en ρ :

$$\Phi(\rho) = \rho^{s_2} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{b_j}{j + s_2} \rho^j$$

qui s'annule sur ∂B. Une telle solution est unique par le principe du maximum (cf [GT] p. 33 Th. 3.3). Elle est dans $\Lambda_0^{s_2}$ et ne peut donc pas "s'écraser" plus vite à l'infini. $\blacksquare$

De ce lemme suivent immédiatement les corollaires suivants.

Corollaire 8 *Si $K = n$ alors $s_2 = n$ ainsi $\forall s \in \mathbb{N}$, $s > n$ la solution de $(\triangle + K)\varphi = \rho^s$ qui s'annule sur ∂B est dans Λ_0^k si et seulement si $k \leq n$.*

Corollaire 9 *Si $K = \frac{n(3n-2)}{2(n-2)}$ alors $s_2 = \frac{1}{2}[n-1+\sqrt{(n-1)^2 + \frac{2n(3n-2)}{(n-2)}}]$ ainsi $\forall s \in \mathbb{N}$, $s > s_2$ la solution de $(\triangle + K)\varphi = \rho^s$ qui s'annule sur ∂B est dans Λ_0^k si et seulement si $k \leq s_2$.*

Corollaire 10 *Si $\exists \epsilon > 0$ et un réel $t > s_2$ tels que $\sigma \geq \epsilon \rho^t$, et si v est solution nulle sur ∂B de $(\triangle + K)v \geq \sigma$, alors v ne peut être dans Λ_0^k si $k > s_2$.*

PREUVE DU COROLLAIRE 10. Prenons $s = s_2 + E(t - s_2 + 1)$ alors $\rho^t \geq \rho^s$ donc par le principe du maximum $v \geq \epsilon\varphi$. $\blacksquare$

3.6 Appendice : construction d'une sur-solution explicite de l'équation $(\triangle + K)\varphi = \rho^s$

Dans cette partie on cherche $\varphi \in \Lambda^s_\infty$ telle que $(\triangle + K)\varphi \geq \rho^s$ où s vérifie la condition :

$$(C) \quad \begin{cases} K > s(s-(n-1)) & \text{si} \quad s < 0 \text{ ou } s \geq \frac{n-2}{2} \\ K > -\frac{sn}{2} & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{n-2}{2} \end{cases}$$

Lemme 12 *Si $\varphi = \Phi \circ \rho$ où $\Phi \in C^2(]0, \frac{1}{2}])$ et $\rho(x) = \frac{1}{2}(1 - |x|^2)$ alors,*

$$\triangle\varphi = \rho^2(2\rho - 1)\Phi''(\rho) + [(4-n)\rho^2 + (n-2)\rho]\Phi'(\rho).$$

PREUVE. On a $\triangle\varphi = -H^{ij}(\partial_i\partial_j\varphi - \Gamma^k_{ij}\partial_k\varphi)$. Calculons les coefficients du Laplacien :

$$H_{ij} = \rho^{-2}\delta_{ij}, \; \partial_s H_{ij} = \frac{2x_s}{\rho^3}\delta_{ij},$$

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{H^{ks}}{2}(\partial_i H_{sj} + \partial_j H_{si} - \partial_s H_{ij}) = \frac{1}{\rho}(x_i\delta_{kj} + x_j\delta_{ki} - x_k\delta_{ij}),$$

donc

$$H^{ij}\Gamma^k_{ij}\partial_k\varphi = \rho(2\sum_{j=1}^n x_j\partial_j\varphi - n\sum_{k=1}^n x_k\partial_k\varphi) = \rho(2-n)\sum_{j=1}^n x_j\partial_j\varphi,$$

ainsi

$$\triangle\varphi = -\rho^2\sum_{j=1}^n \partial_j^2\varphi + \rho(2-n)\sum_{j=1}^n x_j\partial_j\varphi.$$

Si $\varphi = \Phi \circ \rho$ alors

$$\partial_j\varphi = -x_j\Phi'(\rho), \; \partial_j^2\varphi = -\Phi'(\rho) + x_j^2\Phi''(\rho).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \triangle\varphi &= \rho^2[n\Phi'(\rho) + (2\rho-1)\Phi''(\rho)] + (2-n)\rho(2\rho-1)\Phi'(\rho) \\ &= \rho^2(2\rho-1)\Phi''(\rho) + [(4-n)\rho^2 + (n-2)\rho]\Phi'(\rho). \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Proposition 18 *Soit s vérifiant (C) et soit*

$$M(n,s,K) := \begin{cases} \frac{1}{K+s(n-1-s)} & si \quad s < 0 \text{ ou } s \geq \frac{n-2}{2} \\ \frac{1}{K+\frac{sn}{2}} & si \quad 0 \leq s \leq \frac{n-2}{2} \end{cases}.$$

Si $\varphi = M\rho^s$, alors $(\triangle + K)\varphi \geq \rho^s$.

PREUVE. Calculons

$$\begin{aligned}\triangle(\rho^s) &= \rho^2(2\rho-1)s(s-1)\rho^{s-2}+[(4-n)\rho^2+(n-2)\rho]s\rho^{s-1}\\ &= s\rho^s[(2s-n+2)\rho+n-1-s],\end{aligned}$$

d'où

$$(\triangle+K)(\rho^s)=\rho^s[s(2s-n+2)\rho+s(n-1-s)+K].$$

Si $2s-n+2\geq 0$ ou $s<0$,

$$(\triangle+K)(\rho^s)\geq\rho^s[s(n-1-s)+K];$$

si $2s-n+2\leq 0$ et $s\geq 0$,

$$(\triangle+K)(\rho^s)\geq\rho^s[s(s-\frac{n}{2}+1)+s(n-1-s)+K]\geq[\frac{ns}{2}+K]\rho^s. \qquad \blacksquare$$

REMARQUE. Si $s=\frac{n-2}{2}$,

$$\frac{ns}{2}=s(n-1-s)=\frac{n(n-2)}{4}.$$

Corollaire 11 *Si $s\in]-1,n[$, et si $\varphi=M(n,s,n)\rho^s$, alors*

$$(\triangle+n)\varphi\geq\rho^s=\frac{1}{M}\varphi.$$

PREUVE. Avec $K=n$, la condition (C) devient :

$$\begin{cases} n>s(s-(n-1)) & \text{si} \quad s<0 \text{ ou } s\geq\frac{n-2}{2}\\ n>-\frac{sn}{2} & \text{si} \quad 0\leq s\leq\frac{n-2}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{n-2}{2}\leq s<n \quad \text{ou} \quad -1<s<0\\ 0\leq s\leq\frac{n-2}{2}\end{cases}$$

L'intervalle total permis pour s est donc bien $]-1,n[$. Le corollaire suit donc de la proposition précédente. $\blacksquare$

Chapitre 4

Prescription de courbures II : Courbure de Ricci

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous montrons (section 4.4) que, sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$, l'application qui à un métrique Riemannienne associe sa courbure de Ricci est localement inversible au voisinage de la métrique hyperbolique H_0 (ici la localité est entendue au sens fonctionnel).

Ce résultat vient compléter ceux de : [DT1], au voisinage d'un point dans $\mathbb{R}^n$, [DT2] sur les variétés compactes de dimension 2, [H] au voisinage de la métrique standard sur la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, [Ya] sur les variétés Kählériennes compactes et [De] sur les variétés Kählériennes non compactes.

Nous en déduisons, via un scindage de l'espace des tenseurs de type Riemann-Christoffel, que l'image de l'application qui à une métrique associe sa courbure de Riemann-Christoffel est une sous-variété au voisinage de H_0 (section 4.5.6).

Par ailleurs, nous étudions l'équation de Ricci pour des métriques non asymptotes à H_0 (section 4.8), l'équation de Ricci contravariante (section 4.6), puis, plus en détail, l'équation de Ricci en dimension 2 (section 4.7).

Enfin, nous donnons une obstruction liée au comportement asymptotique des métriques solutions (section 4.9).

L'essentiel des résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une note au *C. R. Acad. Sci.* (1998) [D2] et seront soumis prochainement pour article.

4.2 Notations et conventions

Considérons une variété Riemannienne munie d'une métrique H. Pour p et q entiers naturels, nous noterons $\mathcal{T}_p^q$, l'ensemble des tenseurs covariants de rang p et contravariants de rang q. Lorsque $q = 0$ et $p = 2$, nous noterons $\mathcal{S}_2$ le sous-espace des tenseurs symétriques qui se scinde en $\mathcal{S}_2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{S}_{20}$, où $\mathcal{H}$ sont les multiples de H et $\mathcal{S}_{20}$ sont ceux de trace nulle (par rapport à H). Lorsque $q = 2$ et $p = 0$, nous noterons $\mathcal{S}^2$ le sous-espace des tenseurs symétriques.

∇ désignera la connexion de Levi-Civita de H et, dans un système de coordonnées, nous noterons Γ^i_{jk} ses symboles de Christoffel. Par exemple si $\omega \in \mathcal{T}_1$ et $g \in \mathcal{T}_2$, en utilisant la convention de sommation,

$$\nabla_j \omega_i = \partial_j \omega_i - \Gamma^k_{ij} \omega_k,$$

et

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma^q_{ki} g_{qj} - \Gamma^q_{kj} g_{iq}.$$

$\triangle$ désignera le laplacien brut relatif à H : pour tout $\Upsilon \in \mathcal{T}_p$,

$$(\triangle \Upsilon)_{j_1 \dots j_p} = -H^{st} \nabla_t \nabla_s \Upsilon_{j_1 \dots j_p} = -\nabla^t \nabla_t \Upsilon_{j_1 \dots j_p}$$

($\triangle \Upsilon \in \mathcal{T}_p$) où H^{st} désigne la matrice *inverse* de H_{ij}.

Pour $g \in \mathcal{S}_2$, nous noterons $\mathrm{Trace}(g)$ le scalaire

$$\mathrm{Trace}(g) = H^{st} g_{st}.$$

Pour $g \in \mathcal{S}_2$, nous définissons $\mathrm{grav}(g) \in \mathcal{S}_2$ par

$$\mathrm{grav}(g) = g - \frac{1}{2} \mathrm{Trace}(g) H,$$

et $\mathrm{div}(g) \in \mathcal{T}_1$ (la divergence de g) par

$$\mathrm{div}(g)_i = -H^{jk} \nabla_k g_{ij} = -\nabla^j g_{ij}.$$

Pour $\omega \in \mathcal{T}_1$, on défini $\mathrm{div}^* \omega \in \mathcal{S}_2$ (l'adjoint formel de div dans L^2 appliqué à ω) par

$$(\mathrm{div}^* \omega)_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_j \omega_i + \nabla_i \omega_j).$$

Nous noterons Ricci, l'opérateur différentiel non-linéaire qui à une métrique associe sa courbure de Ricci ; de même pour *Riem* et la courbure de Riemann-Christoffel (qui est dans $\mathcal{T}_3^1$).

Soit B la boule unitée de $\mathbb{R}^n$ (munie de la métrique euclidienne standard E) et soit ρ la fonction définie sur B par :

$$\rho(x) = \frac{1}{2}(1 - |x|^2).$$

Nous utiliserons pour modèle de l'espace hyperbolique standard $\mathbb{H}^n(-1)$ la boule B munie de la métrique conforme :

$$H_0 = \rho^{-2} E.$$

En général, $H = H_0 + h$ désignera une métrique sur B voisine de H_0. Dans le cas particulier où $H = H_0$ (*i.e.* $h = 0$), toutes les notations et définitions précédentes seront indicées par 0 (∇_0, $\triangle_0$, Trace_0, ...). De plus nous noterons $R_0 = \mathrm{Ricci}(H_0) = -(n-1)H_0$ et $\mathcal{R}_0 = Riem(H_0)$.

4.3 Préliminaires (sur l'opérateur de Bianchi)

Commençons par des rappels de nature purement *locale*. Pour H métrique sur une variété et R appartenant à $\mathcal{S}_2$, nous noterons $\mathrm{Bian}(H,R)$ la 1-forme définie par :

$$\mathrm{Bian}(H,R)_m := (-\mathrm{div}\ \mathrm{grav}R)_m = H^{st}(\nabla_t R_{sm} - \frac{1}{2}\nabla_m R_{st})$$

(où ∇ désigne la connexion de Levi-Civita de H). Remarquons que l'opérateur Bian est linéaire en R et rappelons qu'une identité due à Bianchi stipule que $\mathrm{Bian}(H,R) = 0$ si $R = \mathrm{Ricci}(H)$. D'autre part, la différentielle par rapport à H (à R fixé) de l'opérateur de Bianchi est donnée par (cf. [DT1] par exemple) :

$$(D_H \mathrm{Bian}(H,R)\delta h)_m := \frac{d}{dt}(\mathrm{Bian}(H+t\delta h, R)_m)\Big|_{t=0} = R^s_m(\ \mathrm{div}\ \mathrm{grav}\delta h)_s - T^{qs}_m \delta h_{qs},$$

avec $R^s_m = (H^{-1}R)^s_m = H^{st}R_{tm}$ et $T^{qs}_m = H^{qk}H^{sl}(\partial_k R_{lm} - \frac{1}{2}\partial_m R_{kl} - \Gamma^i_{kl}R_{im})$. Cette différentielle prend une forme simple sur toute variété d'Einstein, comme il résulte du

Lemme 13 *S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R = \lambda H$ alors $T^{qs}_m \delta h_{qs} = 0$.*

Preuve :
Rappelons que

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}H^{ij}(\partial_l H_{kj} + \partial_k H_{lj} - \partial_j H_{kl}),$$

ainsi $\Gamma^i_{kl}H_{im} = \frac{1}{2}(\partial_l H_{km} + \partial_k H_{lm} - \partial_m H_{kl})$ et, finalement,

$$T^{qs}_m = \lambda H^{qk}H^{sl}(\frac{1}{2}\partial_k H_{lm} - \frac{1}{2}\partial_l H_{km}),$$

ainsi $T^{qs}_m = -T^{sq}_m$. Comme δh est symétrique, on obtient $T^{qs}_m \delta h_{qs} = 0$. ■

Lemme 14 *Pour toute métrique H et toute 1-forme ω on a :*

$$\mathit{Bian}(H, \mathit{div}^*\omega)_m = \frac{1}{2}(-\triangle\omega_m + \mathit{Ricci}(H)_{km}H^{sk}\omega_s).$$

En particulier, si $H = H_0$ de courbure constante égale à -1,

$$\mathit{Bian}(H_0, \mathit{div}^*_0\omega) = -\frac{1}{2}(\triangle\omega + (n-1)\omega).$$

Preuve :
Rappelons que $(div^*\omega)_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j\omega_i + \nabla_i\omega_j)$. On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}
\text{Bian}(H, \text{div}^*\omega) &= \tfrac{1}{2}H^{st}[\nabla_t(\nabla_m\omega_s + \nabla_s\omega_m) - \tfrac{1}{2}\nabla_m(\nabla_t\omega_s + \nabla_s\omega_t)] \\
&= \tfrac{1}{2}H^{st}(\nabla_t\nabla_m\omega_s + \nabla_t\nabla_s\omega_m - \nabla_m\nabla_t\omega_s) \\
&= \tfrac{1}{2}(\nabla_t\nabla_m\omega^t - \nabla_m\nabla_t\omega^t + H^{st}\nabla_t\nabla_s\omega_m) \\
&= \tfrac{1}{2}(-\triangle\omega_m + \text{Riem}(H)^t_{ktm}\omega^k) \\
&= \tfrac{1}{2}(-\triangle\omega_m + \text{Ricci}(H)_{km}\omega^k),
\end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité résultant de l'identité (cf. [Au] par exemple) :

$$R^l_{kij}\omega^k = \nabla_i\nabla_j\omega^l - \nabla_j\nabla_i\omega^l.$$

Pour conclure, il ne reste qu'à rappeler que $\text{Ricci}(H_0) = -(n-1)H_0$. ■

Passons à des considérations *globales* en nous plaçant sur l'espace hyperbolique (B, H_0). Pour $r \in \Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ et h dans $\Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$, fixés assez petits dans $\Lambda^{-2}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$, nous allons considérer l'application :

$$g \in \Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow \text{Bian}(H_0 + h + g, R_0 + r) \in \Lambda^{s-1}_{k,\alpha}(B, \mathcal{T}_1)$$

qui est lisse au voisinage de zéro (cf. corollaire 23 de l'appendice 4.10). Nous noterons

$$\omega_{h,r} = \text{Bian}(H_0 + h, R_0 + r) \in \Lambda^{s-1}_{k,\alpha}(B, \mathcal{T}_1).$$

Proposition 19 *Supposons $s \geq 0$ et $n - 1 > s(s - (n-1))$. Pour r et h dans $\Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ assez petits en norme $\Lambda^{-2}_{k+1,\alpha}$, l'ensemble*

$$\sum\nolimits_{h,r} := \{g \in \Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \text{ tels que } Bian(H_0 + h + g, R_0 + r) = \omega_{h,r}\}$$

est, au voisinage de zéro, une sous-variété de $\Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$. De plus, il existe V voisinage de zéro dans $\Lambda^{s-1}_{k,\alpha}(B, \mathcal{T}_1)$ tel que, si l'on pose

$$\sum\nolimits_{h,r,\omega} = \{g \in \Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \text{ tels que } Bian(H_0 + h + g, R_0 + r) = \omega\},$$

alors $\{\sum_{h,r,\omega}\}_{\omega \in V}$ fournit, au voisinage de zéro, un feuilletage de $\Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$.

Preuve :
Considérons l'application linéaire $L_{h,r}$ de $\Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ dans $\Lambda^{s-1}_{k,\alpha}(B,\mathcal{T}_1)$ définie par :

$$(L_{h,r}\delta g)_m \;=\; (D_H\mathrm{Bian}(H_0+h,R_0+r)\delta g)_m.$$

D'après l'expression donnée juste avant le lemme 13,

$$\begin{array}{rcl}(L_{h,r}\delta g)_m & = & (H^{-1}R\;\mathrm{divgrav}\delta g)_m-(T\delta g)_m\\ & = & -(H^{-1}R\;\mathrm{Bian}(H,\delta g))_m-(T\delta g)_m,\end{array}$$

où l'on a posé $H=H_0+h$, $R=R_0+r$ et

$$T^{qs}_m=H^{qk}H^{sl}(\partial_k R_{lm}-\frac{1}{2}\partial_m R_{kl}-\Gamma^i_{kl}R_{im}).$$

Nous allons montrer que $L_{h,r}$ est *surjective* et de noyau *direct* (*i.e.* qu'il existe un sous-espace fermé de $\Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ complémentaire de $\mathrm{Ker}L_{h,r}$).

D'après le lemme 14 et le théorème d'isomorphisme de [GL], si

$$n-1>s(s-(n-1)),$$

alors $\mathrm{Bian}(H_0,\mathrm{div}^*_0.)$ est un *isomorphisme* de $\Lambda^{s-1}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{T}_1)$ dans $\Lambda^{s-1}_{k,\alpha}(B,\mathcal{T}_1)$. Notons S_0 son inverse, qui est continu. Or dans le corollaire 19 de l'appendice 4.10, nous montrons que $L_{h,r}$ tend vers $L_{0,0}$ dans $\mathcal{L}(\Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B,\mathcal{S}_2),\Lambda^{s-1}_{k,\alpha}(B,\mathcal{T}_1))$, lorsque (h,r) tend vers zéro dans $\Lambda^{-2}_{k+1,\alpha}\times\Lambda^{-2}_{k+1,\alpha}$. Donc $L_{h,r}\mathrm{div}^*_0$ tend vers $L_{0,0}\mathrm{div}^*_0$ dans $\mathcal{L}(\Lambda^{s-1}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{T}_1),\Lambda^{s-1}_{k,\alpha}(B,\mathcal{T}_1))$, lorsque (h,r) tend vers zéro dans $\Lambda^{-2}_{k+1,\alpha}\times\Lambda^{-2}_{k+1,\alpha}$. Ainsi, d'après le lemme 9, pour (h,r) assez petit dans $\Lambda^{-2}_{k+1,\alpha}\times\Lambda^{-2}_{k+1,\alpha}$, $L_{h,r}\mathrm{div}^*_0$ est une application linéaire inversible ; nous noterons $S_{h,r}$ son inverse (qui est, bien entendu [Yo p. 77], linéaire continu). Nous avons ainsi le diagramme :

$$\begin{tikzcd}\Lambda^{s-1}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{T}_1) \arrow[r, "div^*_0"] & \Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B,\mathcal{S}_2) \arrow[r, "L_{h,r}"] & \Lambda^{s-1}_{k,\alpha}(B,\mathcal{T}_1) \arrow[ll, dashed, bend left, "S_{h,r}"]\end{tikzcd}$$

La surjectivité de $L_{h,r}$ en résulte : en effet, pour tout $\omega\in\Lambda^{s-1}_{k,\alpha}(B,\mathcal{T}_1)$, $g=\mathrm{div}^*_0 S_{h,r}\omega\in\Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}$ vérifie $L_{h,r}g=\omega$.

Montrons à présent que le noyau de $L_{h,r}$ est *direct*. Nous allons montrer en fait que

$$\Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)=ker\;L_{h,r}\oplus Im\;\mathrm{div}^*_0,$$

avec Im div_0^* fermé. Notons que

$$Im\mathrm{div}_0^* \equiv Im\mathrm{div}_0^* S_{h,r}$$

puisque $S_{h,r}$ est un isomorphisme. Passons aux vérifications. Vérifions d'abord que Im $\mathrm{div}_0^* S_{h,r}$ est un complémentaire algébrique de $\mathrm{ker}L_{h,r}$: pour $g \in \Lambda_{k+1,\alpha}^{s-2}(B,\mathcal{S}_2)$, notons $g_1 = g - \mathrm{div}_0^* S_{h,r} L_{h,r} g$. On a alors

$$L_{h,r} g_1 = L_{h,r} g - L_{h,r} \mathrm{div}_0^* S_{h,r} L_{h,r} g = 0,$$

ainsi

$$g = g_1 + \mathrm{div}_0^* S_{h,r} L_{h,r} g$$

avec $g_1 \in \mathrm{Ker}L_{h,r}$ et $\mathrm{div}_0^* S_{h,r} L_{h,r} g \in \mathrm{Im}\ \mathrm{div}_0^* S_{h,r}$. Supposons maintenant que $g \in$ Im $\mathrm{div}_0^* S_{h,r} \cap \mathrm{Ker}L_{h,r}$. Il existe $\omega \in \Lambda_{k,\alpha}^{s-1}(B,\mathcal{T}_1)$ tel que

$$g = \mathrm{div}_0^* S_{h,r}\omega.$$

D'autre part $L_{h,r} g = 0$ ainsi

$$L_{h,r}\mathrm{div}_0^* S_{h,r}\omega = 0,$$

donc $\omega = 0$, puis $g = 0$.

Vérifions ensuite que Im $\mathrm{div}_0^* S_{h,r}$ est fermée : considérons $\{\omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ suite de $\Lambda_{k,\alpha}^{s-1}(B,\mathcal{T}_1)$, telle que $\mathrm{div}_0^* S_{h,r}\omega_i$ converge vers g dans $\Lambda_{k+1,\alpha}^{s-2}(B,\mathcal{S}_2)$. Comme $L_{h,r}$ est continue,

$$L_{h,r}\mathrm{div}_0^* S_{h,r}\omega_i = \omega_i$$

tend vers $L_{h,r} g$ dans $\Lambda_{k,\alpha}^{s-1}(B,\mathcal{T}_1)$. Et comme $S_{h,r}$ et div_0^* sont continus, $\mathrm{div}_0^* S_{h,r}\omega_i$ tend vers $\mathrm{div}_0^* S_{h,r} L_{h,r} g$ dans $\Lambda_{k+1,\alpha}^{s-2}(B,\mathcal{S}_2)$. Donc $g = \mathrm{div}_0^* S_{h,r} L_{h,r} g \in$ Im $\mathrm{div}_0^* S_{h,r}$. La première partie de la proposition est donc démontrée.

Pour la deuxième partie, rappelons que pour h et r voisins de zéro dans $\Lambda_{k+1,\alpha}^{-2}(B,\mathcal{S}_2)$, $L_{h,r}$ est surjective et de noyau direct. Ainsi, pour r et h fixés dans $\Lambda_{k+1,\alpha}^{s-2}(B,\mathcal{S}_2)$, voisins de zéro dans $\Lambda_{k+1,\alpha}^{-2}(B,\mathcal{S}_2)$, l'application de $\Lambda_{k+1,\alpha}^{s-2}(B,\mathcal{S}_2)$ dans $\Lambda_{k,\alpha}^{s-1}(B,\mathcal{T}_1)$ qui à g associe

$$\omega = \mathrm{Bian}(H_0 + h + g, R_0 + r)$$

est une submersion au voisinage de zéro (cf. [La p. 20, 21]). Par conséquent, il existe U voisinage de zéro dans $\Lambda_{k+1,\alpha}^{s-2}(B,\mathcal{S}_2)$ et V voisinage de zéro dans $\Lambda_{k,\alpha}^{s-1}(B,\mathcal{T}_1)$, ainsi que deux isomorphismes $\varphi : U \longrightarrow U_1 \times U_2$ (U_1 (resp. U_2) ouvert dans un Banach) et $\psi : V \longrightarrow V_1$ (V_1 ouvert dans un Banach et $V_1 \supset U_1$) tels que l'application

$$\psi\ \mathrm{Bian}(H_0 + h + .,R_0 + r)\ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \longrightarrow V_1$$

soit la première projection. Il en résulte bien dans U le feuilletage annoncé. ■

N.B. Dans la suite de ce chapitre, la méthode que nous utilisons pour résoudre l'équation de Ricci, ne s'appuiera *pas* sur la proposition 19, laquelle figure ici par son intérêt propre (mais on pourrait imaginer une méthode comme celle de [DT1] qui y recourerait). Par contre les notations et les lemmes, introduits dans cette section, nous seront très utiles. En outre, la proposition 19 nous permettra d'étudier (cf. paragraphe 4.5.5) la structure de l'image de l'application "courbure de Riemann-Christoffel" au voisinage de H_0.

4.4 Une première résolution de l'équation de Ricci

Dans cette partie, nous voudrions prescrire la courbure de Ricci sur tout B au *voisinage* de la métrique hyperbolique. Autrement dit, pour $R = R_0 + r \in \mathcal{S}_2$ *voisin* de R_0, peut-on trouver une métrique $H = H_0 + h$ *voisine* de H_0 telle que $\mathrm{Ricci}(H_0 + h) = R_0 + r$? (où "voisinage" sera entendu dans un sens approprié).

Rappelons que la courbure de Ricci d'une métrique H est donnée en coordonnées locales par la formule :

$$\mathrm{Ricci}(H)_{km} = \partial_l \Gamma^l_{km} - \partial_m \Gamma^l_{kl} + \Gamma^l_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^l_{nm}\Gamma^n_{kl},$$

où $\Gamma^l_{km} = \frac{1}{2}H^{ls}(\partial_k H_{sm} + \partial_m H_{ks} - \partial_s H_{km})$. Nous devons donc résoudre un système d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaire du second ordre en les composantes de H.

La différentielle de l'opérateur Ricci est donnée par (cf. [DT1] par exemple) :

$$D\mathrm{Ricci}(H)\delta h := \frac{d}{dt}\mathrm{Ricci}(H + t\delta h)_{|t=0} = \frac{1}{2}\triangle_L \delta h - \mathrm{div}^*\mathrm{div}\ \mathrm{grav}\delta h,$$

où $\triangle_L$ est le Laplacien de Lichnérowicz qui s'exprime en coordonnées locales par :

$$\triangle_L \delta h_{ij} = -\nabla^s\nabla_s \delta h_{ij} + \mathrm{Ricci}(H)_{is}\delta h^s_j + \mathrm{Ricci}(H)_{js}\delta h^s_i - 2Sect(H)_{isjt}\delta h^{st},$$

ce que l'on réécrit sous la forme $\triangle_L \delta h = \triangle \delta h + 2\Theta(\delta h)$.

Pour calculer le symbole de l'opérateur $D_H\mathrm{Ricci}$, détaillons :

$$\begin{aligned}
-[\mathrm{div}^*\mathrm{div}\ \mathrm{grav}\delta h]_{ij} &= [\mathrm{div}^*(\mathrm{Bian}(H, \delta h))]_{ij} \\
&= \tfrac{1}{2}[H^{st}(\nabla_j\nabla_t \delta h_{si} - \tfrac{1}{2}\nabla_j\nabla_i \delta h_{st}) \\
&\quad + H^{st}(\nabla_i\nabla_t \delta h_{sj} - \tfrac{1}{2}\nabla_i\nabla_j \delta h_{st})].
\end{aligned}$$

Ainsi le symbole de l'opérateur $D_H\mathrm{Ricci}$ est l'application de $\mathcal{S}_2$ dans $\mathcal{S}_2$ définie par :

$$h \to \sigma(\xi)h = \frac{1}{2}H^{st}(-\xi_t\xi_s h_{ij} + \xi_j\xi_t h_{si} + \xi_t\xi_i h_{sj} - \xi_i\xi_j h_{st}),$$

qui n'est un isomorphisme pour aucun $\xi \neq 0$ dans $\mathbb{R}^{n*}$. En effet, si on prend $h_{ij} = \xi_i \xi_j$, on a $\sigma(\xi)h = 0$ alors que $h \neq 0$ (en particulier l'opérateur D_HRicci n'est pas elliptique).

Nous avons vu précédemment que suivant [DT1] nous allons introduire un terme correctif naturel qui nous donnera de l'ellipticité :

$$(D_H \mathrm{Bian}(H,R)\delta h)_m = R^s_m(\mathrm{div\ grav}\delta h)_s - T^{qs}_m \delta h_{qs},$$

avec $T\delta h = 0$ lorsque $R = \lambda H$ comme c'est le cas en (H_0, R_0) (cf. lemme 13, et Bian(H,Ricci(H)) $\equiv 0$). Considérons donc (avec, désormais toujours, $H = H_0 + h$ et $R = R_0 + r$)

$$F(h,r) = Q(H,R) = \mathrm{Ricci}H - \frac{1}{n-1}\mathrm{div}_0^*\mathrm{Bian}(H,R) - R.$$

Alors

$$\begin{aligned} D_h F(h,r)\delta h &= D_H Q(H,R)\delta h \\ &= \tfrac{1}{2}\triangle\delta h + \Theta(\delta h) - \mathrm{div}^*\mathrm{div\ grav}\delta h \\ &\quad -\tfrac{1}{n-1}\mathrm{div}_0^*\widetilde{R}(\mathrm{div\ grav}\delta h - T\delta h) \end{aligned}$$

(où $\widetilde{R}^j_i = (H^{-1}R)^j_i = H^{jk}R_{ki}$), de sorte que

$$D_h F(0,0)\delta h = D_H Q(H_0,R_0)\delta h = \frac{1}{2}\triangle_0\delta h + \Theta_0(\delta h),$$

et nous obtenons ainsi l'ellipticité désirée. Ici

$$\Theta_0(\delta h) = (\mathrm{Trace}_0\delta h)H_0 - n\delta h.$$

Décomposons δh à l'aide du scindage $\mathcal{S}_2 = \mathcal{H}_0 + \mathcal{S}_{20}$, où l'on rappelle que les élements de $\mathcal{H}_0$ sont ceux de $\mathcal{S}_2$ multiples de H_0 et ceux de $\mathcal{S}_{02}$, ceux de $\mathcal{S}_2$ de trace nulle (par rapport à H_0). On a donc $\delta h = uH_0 + h_0$, $\Theta_0(uH_0) = 0$, et $\Theta_0(h_0) = -nh_0$, soit finalement

$$D_h F(0,0)\delta h = \frac{1}{2}[\triangle_0(uH_0) + (\triangle_0 - 2n)h_0].$$

D'après le théorème d'isomorphisme de [GL] (cf. section 2.2), nous obtenons le

Lemme 15 *Si $-2n > s(s-(n-1))$ alors $D_hF(0,0)$ est un isomorphisme de $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ dans $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$.*

Nous voulons appliquer le Théorème des fonctions implicites en $(0,0)$ à la relation $F(h,r) = 0$. Pour cela il nous reste seulement à démontrer le

Lemme 16 *Lorsque $s \geq 0$, l'application F définie précédemment est lisse de $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2) \times \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ dans $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ au voisinage de zéro.*

PREUVE :
Tout d'abord, d'après le corollaire 22 de l'appendice 4.10, l'application

$$h \longrightarrow \mathrm{Ricci}(H_0+h) - R_0$$

est lisse de $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ dans $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$. Ensuite d'après le corollaire 23 de l'appendice 4.10, l'application

$$(h,r) \longrightarrow \mathrm{Bian}(H_0+h, R_0+r)$$

est lisse de $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2) \times \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ dans $\Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B,\mathcal{T}_1)$. Et comme l'application

$$\omega \longrightarrow \mathrm{div}_0^*\omega$$

est lisse de $\Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B,\mathcal{T}_1)$ dans $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ d'évidence, le lemme est démontré.

Nous avons maintenant assez d'éléments pour pouvoir donner le

Théorème 28 *Si $-2n > s(s-(n-1))$, alors l'équation*

$$F(h,r) = Ricci(H_0+h) - \frac{1}{n-1} div_0^* Bian(H_0+h, R_0+r) - (R_0+r) = 0$$

pour r donné dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ voisin de zéro, possède une unique solution h voisine de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ et l'application ainsi définie $r \longrightarrow h$ est lisse d'un voisinage de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ dans un voisinage de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$. De plus, lorsque $k \geq 1$, quitte à réduire les voisinages de zéro, la solution vérifie

$$Ricci(H_0+h) = R_0 + r.$$

PREUVE :
D'après les lemmes 15 et 16 et le Théorème des fonctions implicites, la première partie du théorème est évidente. Il nous reste à montrer que pour "r petit", notre solution vérifie $\mathrm{Ricci}(H_0+h) = R_0+r$ (c'est-à-dire $\mathrm{Ricci}(H) = R$) . Nous montrerons pour cela que $\mathrm{Bian}(H,R) = 0$, sans recourt à la proposition 19, la méthode consistant à appliquer brutalement l'opérateur $\mathrm{Bian}(H,.)$ à l'équation $Q(H,R) = 0$. Nous obtenons d'abord

$$\underbrace{\mathrm{Bian}(H,\mathrm{Ricci}(H))}_{=0} - \frac{1}{n-1}\mathrm{Bian}(H, \mathrm{div}_0^*\mathrm{Bian}(H,R)) - \mathrm{Bian}(H,R) = 0.$$

Posons ensuite $\omega = \mathrm{Bian}(H, R)$; ω vérifie l'équation :

$$\mathrm{Bian}(H, \mathrm{div}_0^*\omega) + (n-1)\omega = 0. \qquad (*)$$

Rappelons que, d'après le lemme 14,

$$\mathrm{Bian}(H_0, \mathrm{div}_0^*\omega) = -\frac{1}{2}(\triangle_0\omega + (n-1)\omega),$$

et considérons l'application linéaire L de $\Lambda^{s-1}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{T}_1)$ dans $\Lambda^{s-1}_{k-1,\alpha}(B, \mathcal{T}_1)$ définie par

$$L\omega := \mathrm{Bian}(H_0, \mathrm{div}_0^*\omega) + (n-1)\omega = -\frac{1}{2}(\triangle_0 - (n-1)\omega).$$

D'après le Théorème d'isomorphisme de [GL], lorsque

$$-(n-1) > s(s-(n-1)),$$

L est un isomorphisme et il existe $C > 0$ tel que

$$\| \omega \|^{(s-1)}_{k+1,\alpha} \leq C \| L\omega \|^{(s-1)}_{k-1,\alpha} .$$

Dans notre cas, comme ω vérifie $(*)$ on a

$$L\omega = \underbrace{\mathrm{Bian}(H_0, \mathrm{div}_0^*\omega) - \mathrm{Bian}(H, \mathrm{div}_0^*\omega)}_{\mathcal{L}_r\omega}.$$

Pour ϵ tel que $\epsilon C < 1$, on veut montrer qu'il existe ν tel que, si $\| r \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha} \leq \nu$ alors

$$\| \mathcal{L}_r\omega \|^{(s-1)}_{k-1,\alpha} \leq \epsilon \| \omega \|^{(s-1)}_{k+1,\alpha} .$$

D'après le lemme 27 de l'appendice 4.10, on a

$$\| \mathcal{L}_r\omega \|^{(s-1)}_{k-1,\alpha} \leq C(\hat{h})[1 + \epsilon(\| h \|^{(-2)}_{k,\alpha})] \| h \|^{(-2)}_{k,\alpha} \| \mathrm{div}_0^*\omega \|^{(s-2)}_{k,\alpha} .$$

D'autre part, comme div_0^* est un opérateur linéaire continu de $\Lambda^{s-1}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{T}_1)$ dans $\Lambda^{s-1}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$, on a

$$\| \mathrm{div}_0^*\omega \|^{(s-2)}_{k,\alpha} \leq Cte \| \omega \|^{(s-1)}_{k+1,\alpha} .$$

Comme ici l'application $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha} \ni r \longrightarrow h \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}$ est lisse au voisinage de zéro et comme $s \geq 0$, d'après la proposition 3, $\| h \|^{(-2)}_{k,\alpha}$ tend vers zéro lorsque $\| r \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha}$ tend vers zéro. On peut ainsi écrire

$$\| \mathcal{L}_r\omega \|^{(s-1)}_{k-1,\alpha} \leq C(r) \| \omega \|^{(s-1)}_{k+1,\alpha}$$

avec $C(r)$ qui tend vers 0 lorsque $\| r \|_{k+2,\alpha}^{(s-2)}$ tend vers 0. Il existe donc ν tel que pour $\| r \|_{k+2,\alpha}^{(s-2)} \leq \nu$, $C(r) \leq \epsilon$. Pour conclure, il ne reste plus qu'à rappeler que ω vérifie $(*)$ et donc que l'on a :

$$\| \omega \|_{k+1,\alpha}^{(s-1)} \leq C \| L\omega \|_{k-1,\alpha}^{(s-1)} = C \| \mathcal{L}_r\omega \|_{k-1,\alpha}^{(s-1)} \leq C\epsilon \| \omega \|_{k+1,\alpha}^{(s-1)},$$

donc que $\| \omega \|_{k+1,\alpha}^{(s-1)} = 0$ puisque $\epsilon C < 1$; finalement $\omega = 0$. ■

Remarques :
(i)La condition $-2n > s(s-(n-1))$ peut s'écrire $(n-1)(s-2) > s^2+2$ et comme $n > 1$, il faut $s > 2$; de même en l'écrivant $n > \frac{s^2+2}{s-2} + 1 = f(s)$, on voit qu'il faut au moins $n \geq 10$, puisque f est minimum pour $s = 2 + \sqrt{6}$ et vaut alors environ $9,9$. Enfin la condition peut se réécrire sous la forme

$$s_1 = \frac{n-1-\sqrt{(n-1)^2-8n}}{2} < s < s_2 = \frac{n-1+\sqrt{(n-1)^2-8n}}{2},$$

nous voyons qu'alors s_2 tend vers l'infini quand n tend vers l'infini et un simple développement limité montre que s_1 tend vers 2 quand n tend vers l'infini.

(ii)Dans la démonstration du théorème, on a vu que pour annuler ω on a uniquement besoin de la continuité de $r \longrightarrow h$ et de la condition $-(n-1) > s(s-(n-1))$ qui est plus faible que $-2n > s(s-(n-1))$.

(iii)Notons que la solution h de l'équation $F(h,r) = 0$ est dans $\Lambda_{k+2,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$, tout comme l'est le tenseur r, et nous ne savons pas si elle est dans $\Lambda_{k+4,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$. Ce manque de régularité (perte de deux points) est dû au terme

$$-\frac{1}{n-1}\mathrm{div}_0^*\mathrm{Bian}(H,R)$$

nécessaire pour compenser le défaut d'ellipticité de l'opérateur de Ricci.

Cette dernière remarque nous pousse à détailler le processus de résolution. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons h_{k+2} l'application $r \rightarrow h$ d'un voisinage de zéro dans $\Lambda_{k+2,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$ dans un autre, donnée par le théorème 28. Notons r_{k+2} l'application d'un voisinage de zéro dans $\Lambda_{k+2,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$ dans un voisinage de zéro dans $\Lambda_{k,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$ définie par

$$r_{k+2}(.) := \mathrm{Ricci}(H_0 + .) - R_0.$$

On a alors le

Corollaire 12 *Sous les hypothèses du théorème 28, l'application r_{k+2} est injective au voisinage de zéro. Si de plus $k \geq 1$, l'application h_{k+2} l'est aussi.*

Preuve :

La deuxième partie du corollaire est évidente. En effet, on a pour $k \geq 1$

$$\forall r \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \text{ voisin de zéro, } r_{k+2} \circ h_{k+2}(r) = r.$$

Pour la première partie, montrons que l'on a :

$$\forall h \in \Lambda^{s-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \text{ voisin de zéro, } h_{k+2} \circ r_{k+4}(h) = h.$$

En effet, pour tout $h \in \Lambda^{s-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ voisin de zéro, $r_{k+4}(h)$ est voisin de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ et vérifie

$$F(h_{k+2} \circ r_{k+4}(h), r_{k+4}(h)) = 0,$$

avec $h_{k+2} \circ r_{k+4}(h)$ voisin de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$. Mais d'autre part, on a

$$F(h, r_{k+4}(h)) = 0,$$

avec h voisin de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ donc dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$. Ainsi, par construction de l'application h_{k+2}, on a

$$h_{k+2} \circ r_{k+4}(h) = h. \qquad \blacksquare$$

Remarque : Pour $k \geq 1$ et $s \in [0, n[$, l'application h_{k+2} ne peut être surjective. En effet, soit $v \in \Lambda^{s}_{k+2,\alpha}(B)$ voisin de zéro et tel que

$$v \notin \Lambda^{s}_{k+4,\alpha}(B).$$

Supposons que $h = vH_0 \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$, voisine de zéro, soit dans l'image de h_{k+2} :

$$\exists r \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2),\ F(h, r) = 0.$$

Comme $k \geq 1$, on a nécessairement

$$r_{k+2}(h) = r.$$

En outre (pour la définition de $\widetilde{h}$, voir le corollaire 17), on a

$$\sigma := (H_0^{ij} + \widetilde{h}^{ij}) r_{k+2}(h)_{ij} + \widetilde{h}^{ij} R_{0ij},$$

voisin de zéro dans $\Lambda^{s}_{k+2,\alpha}(B)$. Pour $s \in [0, n[$, le théorème 23 (section 3.2) implique que h est dans $\Lambda^{s-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ et v dans $\Lambda^{s}_{k+4,\alpha}(B)$, ce qui est absurde.

Notons que les exposants caractéristiques s_1 et s_2 du théorème 28 (section 4.4) vérifient

$$s_1 = \frac{1}{2}(n - 1 - \sqrt{(n-1)^2 - 8n}) > 0,$$

$$s_2 = \frac{1}{2}(n - 1 + \sqrt{(n-1)^2 - 8n}) < n - 1 < n.$$

Ils sont donc dans l'intervalle $[0, n[$ du théorème 23 (section 3.2).

4.5 Une étude de la courbure Riemannienne au voisinage de la métrique hyperbolique

4.5.1 Linéarisation de l'opérateur de Riemann-Christoffel

Les calculs que nous avons réalisés dans cette section sont, bien entendu, classiques. Nous les incluons ici par souci de complétude, puisque nous les utiliserons par la suite.

Nous voulons linéariser l'opérateur qui, à une métrique $H \in \mathcal{S}_2$ associe son tenseur de Riemann-Christoffel $Riem(H) \in \mathcal{T}_3^1$.

Rappelons que cet opérateur est défini en coordonnées locales par :

$$Riem(H)^i_{klm} = \partial_l \Gamma^i_{km} - \partial_m \Gamma^i_{kl} + \Gamma^i_{jl}\Gamma^j_{km} - \Gamma^i_{jm}\Gamma^j_{kl},$$

avec $\Gamma^i_{km} = \frac{1}{2}H^{is}(\partial_k H_{ms} + \partial_m H_{ks} - \partial_s H_{km})$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\partial_l \Gamma^i_{km} &= -\tfrac{1}{2}H^{js}H^{it}\partial_l H_{tj}(\partial_k H_{ms} + \partial_m H_{ks} - \partial_s H_{km}) \\
&\quad +\tfrac{1}{2}H^{is}(\partial_l\partial_k H_{ms} + \partial_l\partial_m H_{ks} - \partial_l\partial_s H_{km}) \\
&= -H^{it}\partial_l H_{tj}\, \Gamma^j_{km} + \tfrac{1}{2}H^{is}(\partial_l\partial_k H_{ms} + \partial_l\partial_m H_{ks} - \partial_l\partial_s H_{km}).
\end{aligned}$$

Donc (en repérant, pour la commodité du lecteur, des couples de termes qui se compensent) :

$$\begin{aligned}
Riem(H)^i_{klm} &= H^{is}\Big[\underline{-\partial_l H_{sj}\, \Gamma^j_{km}} + \tfrac{1}{2}(\partial_l\partial_k H_{ms} + \widehat{\partial_l\partial_m H_{ks}} - \partial_l\partial_s H_{km}) \\
&\qquad + \underbrace{\partial_m H_{sj}\Gamma^j_{kl}} - \tfrac{1}{2}(\partial_m\partial_k H_{ls} + \widehat{\partial_m\partial_l H_{ks}} - \partial_m\partial_s H_{kl}\Big] \\
&\qquad +\tfrac{1}{2}H^{is}(\partial_j H_{sl} + \underline{\partial_l H_{sj}} - \partial_s H_{lj})\Gamma^j_{km} \\
&\qquad -\tfrac{1}{2}H^{is}(\partial_j H_{sm} + \underbrace{\partial_m H_{sj}} - \partial_s H_{mj})\Gamma^j_{kl} \\
&= H^{is}\Big[\tfrac{1}{2}(\partial_l\partial_k H_{sm} - \partial_l\partial_s H_{km} + \partial_m\partial_s H_{kl} - \partial_m\partial_k H_{sl}) \\
&\qquad -\Gamma^p_{sl}\Gamma^j_{km}H_{pj} + \Gamma^p_{ms}\Gamma^j_{kl}H_{pj}\Big] \;=\; H^{is}Sect(H)_{sklm}
\end{aligned}$$

(le dernier morceau entre crochets n'est autre que le tenseur de Riemann (de courbure sectionnelle) que l'on note ici $Sect(H)_{sklm}$ en coordonnées). Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}(D_H Riem(H)\delta h)^i_{klm} &= -H^{ip}H^{sq}\delta h_{pq}Sect(H)_{sklm} + H^{is}(D_H Sect(H)\delta h)_{sklm} \\ &= -Riem(H)^q_{klm}\delta h^i_q + H^{is}(D_H Sect(H)\delta h)_{sklm}.\end{aligned}$$

Nous allons donc nous intéresser tout d'abord au linéarisé de $Sect(H)$. Pour cela nous aurons besoin du :

Lemme 17 *En coordonnées locales, le linéarisé d'un symbole de Christoffel est :*

$$(D_H\Gamma(H)\delta h)^i_{jk} = \frac{1}{2}(\nabla_k \delta h^i_j + \nabla_j \delta h^i_k - \nabla^i \delta h_{jk}).$$

Preuve :
On a :

$$\begin{aligned}(D_H\Gamma(H)\delta h)^i_{jk} &= \tfrac{1}{2}H^{is}(\partial_k \delta h_{js} + \partial_j \delta h_{ks} - \partial_s \delta h_{jk}) \\ &\quad -\tfrac{1}{2}H^{pt}H^{is}\delta h_{ps}(\partial_k H_{jt} + \partial_j H_{kt} - \partial_t H_{jk}) \\ &= \tfrac{1}{2}H^{is}(\partial_k \delta h_{js} + \partial_j \delta h_{ks} - \partial_s \delta h_{jk}) - H^{is}\delta h_{ps}\Gamma^p_{jk}.\end{aligned}$$

D'autre part (en repérant les termes qui se compensent),

$$\begin{array}{rcl}\nabla_k \delta h_{js} & = & \partial_k \delta h_{js} - \Gamma^p_{kj}\delta h_{ps} - \widehat{\Gamma^p_{ks}\delta h_{pj}} \\ +\nabla_j \delta h_{ks} & = & \partial_j \delta h_{ks} - \Gamma^p_{jk}\delta h_{ps} - \underline{\Gamma^p_{js}\delta h_{pk}} \\ -\nabla_s \delta h_{jk} & = & -\partial_s \delta h_{jk} + \underline{\Gamma^p_{sj}\delta h_{pk}} + \widehat{\Gamma^p_{sk}\delta h_{pj}} \\ ----- & -- & ----------------- \\ \text{la somme} & = & \partial_k \delta h_{js} + \partial_j \delta h_{ks} - \partial_s \delta h_{jk} - 2\Gamma^p_{kj}\delta h_{ps}.\end{array}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(D_H\Gamma)(H)\delta h)^i_{jk} &= \tfrac{1}{2}H^{is}(\nabla_k \delta h_{js} + \nabla_j \delta h_{ks} - \nabla_s \delta h_{jk}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\nabla_k \delta h^i_j + \nabla_j \delta h^i_k - \nabla^i \delta h_{jk}). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer $(D_H Sect(H)\delta h)_{sklm}$ qui est égal à :

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(\partial_l\partial_k\delta h_{sm} - \partial_l\partial_s\delta h_{km} + \partial_m\partial_s\delta h_{kl} - \partial_m\partial_k\delta h_{sl})\\
&-\tfrac{1}{2}(\nabla_s\delta h^p_l + \nabla_l\delta h^p_s - \nabla^p\delta h_{ls})\Gamma^j_{km}H_{pj}\\
&-\tfrac{1}{2}\Gamma^p_{sl}(\nabla_k\delta h^j_m + \nabla_m\delta h^j_k - \nabla^j\delta h_{km})H_{pj} - \Gamma^p_{sl}\Gamma^j_{km}\delta h_{pj}\\
&+\tfrac{1}{2}(\nabla_s\delta h^p_m + \nabla_m\delta h^p_s - \nabla^p\delta h_{ms})\Gamma^j_{kl}H_{pj}\\
&+\tfrac{1}{2}\Gamma^p_{sm}(\nabla_k\delta h^j_l + \nabla_l\delta h^j_k - \nabla^j\delta h_{kl})H_{pj} + \Gamma^p_{sm}\Gamma^j_{kl}\delta h_{pj},
\end{aligned}$$

donc (en repérant des familles de termes de même type) à :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Bigg[&\underbrace{(\partial_l\partial_k\delta h_{sm} - \partial_l\partial_s\delta h_{km} + \partial_m\partial_s\delta h_{kl} - \partial_m\partial_k\delta h_{sl})}_{1}\\
&-\underbrace{\Gamma^t_{km}(\nabla_s\delta h_{tl} + \nabla_l\delta h_{ts} - \nabla_t\delta h_{ls})}_{2} - \underbrace{\Gamma^t_{sl}(\nabla_k\delta h_{tm} + \nabla_m\delta h_{tk} - \nabla_t\delta h_{km})}_{3}\\
&+\underbrace{\Gamma^t_{kl}(\nabla_s\delta h_{tm} + \nabla_m\delta h_{ts} - \nabla_t\delta h_{ms})}_{4} + \underbrace{\Gamma^t_{sm}(\nabla_k\delta h_{tl} + \nabla_l\delta h_{tk} - \nabla_t\delta h_{kl})}_{5}\\
&-\underbrace{2\Gamma^p_{sl}\Gamma^j_{km}\delta h_{pj}}_{6} + \underbrace{2\Gamma^p_{sm}\Gamma^j_{kl}\delta h_{pj}}_{7}\Bigg].
\end{aligned}$$

Rappelons que $\nabla_k\delta h_{sm} = \partial_k\delta h_{sm} - \Gamma^p_{ks}\delta h_{pm} - \Gamma^p_{km}\delta h_{ps}$, nous avons ainsi :

$$\begin{aligned}
\nabla_l\nabla_k\delta h_{sm} = {}&\underbrace{\partial_l\partial_k\delta h_{sm}}_{1} - \partial_l\widehat{\Gamma^p_{ks}\delta h}_{pm} - \overbrace{\Gamma^p_{ks}\partial_l\delta h_{pm}} - \partial_l\Gamma^p_{km}\delta h_{ps}\\
&-\Gamma^p_{km}(\underbrace{\nabla_l\delta h_{ps}}_{2} + \Gamma^q_{lp}\delta h_{qs} + \underbrace{\Gamma^q_{ls}\delta h_{pq}}_{6}) - \underbrace{\Gamma^q_{lk}\nabla_q\delta h_{sm}}_{4} - \underbrace{\Gamma^q_{ls}\nabla_k\delta h_{qm}}_{3} - \overline{\Gamma^q_{lm}\nabla_k\delta h_{sq}},
\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}
-\nabla_l\nabla_s\delta h_{km} = {}&\underbrace{-\partial_l\partial_s\delta h_{km}}_{1} + \partial_l\widehat{\Gamma^p_{sk}\delta h}_{pm} + \overbrace{\Gamma^p_{sk}\partial_l\delta h_{pm}} + \partial_l\Gamma^p_{sm}\delta h_{pk}\\
&+\Gamma^p_{sm}(\underbrace{\nabla_l\delta h_{pk}}_{5} + \Gamma^q_{lp}\delta h_{qk} + \underbrace{\Gamma^q_{lk}\delta h_{pq}}_{7}) + \underbrace{\Gamma^q_{ls}\nabla_q\delta h_{km}}_{3} + \underbrace{\Gamma^q_{lk}\nabla_s\delta h_{qm}}_{4} + \Gamma^q_{lm}\widetilde{\nabla_s\delta h_{kq}},
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\nabla_m\nabla_s\delta h_{kl} = \underbrace{\partial_m\partial_s\delta h_{kl}}_{1} - \underline{\partial_m\Gamma^p_{sk}\delta h_{pl}} - \underbrace{\Gamma^p_{sk}\partial_m\delta h_{pl}} - \partial_m\Gamma^p_{sl}\delta h_{pk}$$

$$-\Gamma^p_{sl}(\underbrace{\nabla_m\delta h_{pk}}_{3} + \Gamma^q_{mp}\delta h_{qk} + \underbrace{\Gamma^q_{mk}\delta h_{pq}}_{6}) - \underbrace{\Gamma^q_{ms}\nabla_q\delta h_{kl}}_{5} - \underbrace{\Gamma^q_{mk}\nabla_s\delta h_{ql}}_{2} - \Gamma^q_{ml}\widetilde{\nabla_s\delta h_{kq}},$$

et que

$$-\nabla_m\nabla_k\delta h_{sl} = \underbrace{-\partial_m\partial_k\delta h_{sl}}_{1} + \underline{\partial_m\Gamma^p_{ks}\delta h_{pl}} + \underbrace{\Gamma^p_{ks}\partial_m\delta h_{pl}} + \partial_m\Gamma^p_{kl}\delta h_{ps}$$

$$+\Gamma^p_{kl}(\underbrace{\nabla_m\delta h_{ps}}_{4} + \Gamma^q_{mp}\delta h_{qs} + \underbrace{\Gamma^q_{ms}\delta h_{pq}}_{7}) + \underbrace{\Gamma^q_{mk}\nabla_q\delta h_{sl}}_{2} + \underbrace{\Gamma^q_{ms}\nabla_k\delta h_{ql}}_{5} + \overline{\Gamma^q_{ml}\nabla_k\delta h_{sq}}.$$

Les termes repérés sans numéro se compensent tous ; les termes numérotés reproduisent exactement ceux numérotés plus haut ; enfin les termes “de trop”, non repérés, sont repris un à un ci-après (changés de signe), soit au total :

$$\begin{aligned}
(D_H Sect(H)\delta h)_{sklm} = \frac{1}{2}\Big[& \nabla_l\nabla_k\delta h_{sm} - \nabla_l\nabla_s\delta h_{km} + \nabla_m\nabla_s\delta h_{kl} - \nabla_m\nabla_k\delta h_{sl} \\
& +\partial_l\Gamma^p_{km}\delta h_{ps} + \Gamma^p_{km}\Gamma^q_{lp}\delta h_{qs} \\
& -\partial_l\Gamma^p_{sm}\delta h_{pk} - \Gamma^p_{sm}\Gamma^q_{lp}\delta h_{qk} \\
& +\partial_m\Gamma^p_{sl}\delta h_{pk} + \Gamma^p_{sl}\Gamma^q_{mp}\delta h_{qk} \\
& -\partial_m\Gamma^p_{kl}\delta h_{ps} - \Gamma^p_{kl}\Gamma^q_{mp}\delta h_{qs} \Big].
\end{aligned}$$

Or

$$Riem(H)^p_{klm} = \partial_l\Gamma^p_{km} - \partial_m\Gamma^p_{kl} + \Gamma^p_{jl}\Gamma^j_{km} - \Gamma^p_{jm}\Gamma^j_{kl},$$

et

$$Riem(H)^p_{sml} = \partial_m\Gamma^p_{sl} - \partial_l\Gamma^p_{sm} + \Gamma^p_{jm}\Gamma^j_{sl} - \Gamma^p_{jl}\Gamma^j_{sk}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
(D_H Sect(H)\delta h)_{sklm} = & \frac{1}{2}[\nabla_l\nabla_k\delta h_{sm} - \nabla_l\nabla_s\delta h_{km} + \nabla_m\nabla_s\delta h_{kl} - \nabla_m\nabla_k\delta h_{sl} \\
& +Riem(H)^p_{klm}\delta h_{ps} + Riem(H)^p_{sml}\delta h_{pk}].
\end{aligned}$$

On peut donc en conclure (cf. supra)

Proposition 20 *Le linéarisé de $H \longrightarrow Riem(H)$ s'exprime en coordonnées locales par la formule :*

$$\begin{aligned}(D_H Riem(H)\delta h)^i_{klm} &= \frac{1}{2}\left[\nabla_l \nabla_k \delta h^i_m - \nabla_l \nabla^i \delta h_{km} + \nabla_m \nabla^i \delta h_{kl} - \nabla_m \nabla_k \delta h^i_l \right. \\ &\quad \left. + H^{is} Riem(H)^p_{sml} \delta h_{pk} - Riem(H)^p_{klm} \delta h^i_p \right].\end{aligned}$$

4.5.2 Un opérateur du type Bianchi pour le tenseur de Riemann-Christoffel, et sa linéarisation

Nous construisons ici une application $Bianc(H,\mathcal{R})$ pour $\mathcal{R}$ dans un sous-fibré de $\mathcal{T}_3^1$ qui contient les tenseurs de Riemann-Christoffel. Nous voulons que cette application se ramène à $\mathrm{Bian}(H,R)$ par une contraction de $\mathcal{R}$. Nous calculons ensuite en $(H_0,\mathcal{R}_0)$ la linéarisation de $Bianc(H,\mathcal{R})$ par rapport à H (à $\mathcal{R}_0$ fixé), en notant $\mathcal{R}_0$ le tenseur de Riemann-Christoffel de la métrique hyperbolique H_0.

Rappelons que si $\mathcal{R} = Riem(H)$, alors d'après une identité due à Bianchi, $\mathcal{R}$ vérifie l'équation en coordonnées locales :

$$\nabla_l \mathcal{R}^t_{ijk} + \nabla_j \mathcal{R}^t_{ikl} + \nabla_k \mathcal{R}^t_{ilj} = 0. \qquad (*)$$

Et si $R = \mathrm{Ricci}(H)$, on a :

$$\mathrm{Bian}(H,R)_l = -\frac{1}{2} H^{ij} \nabla_l R_{ij} + H^{ij} \nabla_j R_{il} = 0. \qquad (**)$$

D'autre part, on a

$$\mathrm{Ricci}(H)_{ij} = Riem(H)^p_{ipj}.$$

Comme $\mathrm{Ricci}(H)$ est symétrique, $Riem(H)$ appartient au sous-fibré vectoriel $\mathcal{S}_3^1$ de $\mathcal{T}_3^1$ défini par

$$\mathcal{S}_3^1 := \{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_3^1 \ , \mathcal{R}^p_{ipj} = \mathcal{R}^p_{jpi} \ \forall i,j \in \{1,...,n\}\}.$$

On définit l'application Tr de $\mathcal{S}_3^1$ dans $\mathcal{S}_2$ par

$$Tr(\mathcal{R})_{ij} = \mathcal{R}^p_{ipj}.$$

Ainsi que l'application tr de $\mathcal{T}_2^1$ dans $\mathcal{T}_1$ par

$$tr(B)_l = B^p_{pl}.$$

Nous allons maintenant construire une application $Bianc(H,\mathcal{R})$, pour toute métrique H et tout tenseur $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{S}_3^1$, vérifiant

$$tr(Bianc(H,\mathcal{R})) = \mathrm{Bian}(H, Tr(\mathcal{R})).$$

Pour cela regardons comment on passe de l'identité $(*)$ à l'identité $(**)$, lorsque $\mathcal{R} = Riem(H)$ et $R = \mathrm{Ricci}(H)$. Le calcul est le suivant : on contracte $(*)$ par H^{ij}, on obtient alors

$$H^{ij} \nabla_l \mathcal{R}^t_{ijk} + H^{ij} \nabla_j \mathcal{R}^t_{ikl} + \nabla_k H^{ij} H^{st} \mathcal{R}_{silj} = 0,$$

donc
$$-H^{ij}\nabla_l\mathcal{R}^t_{ikj}+H^{ij}\nabla_j\mathcal{R}^t_{ikl}+H^{st}\nabla_k\mathcal{R}^j_{sjl}=0.$$
Il ne reste plus qu'à prendre $t=k$ (sommation) pour avoir $(**)$.

Pour toute métrique H et tout tenseur $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{S}^1_3$, considérons
$$Bianc(H,\mathcal{R})^t_{kl}:=\frac{1}{2}(-H^{ij}\nabla_l\mathcal{R}^t_{ikj}+H^{ij}\nabla_j\mathcal{R}^t_{ikl}+H^{st}\nabla_k\mathcal{R}^j_{sjl})\in\mathcal{T}^1_2,$$
où ∇ est la connexion de Levi-Civita de H.

Remarques :
(i) Même s'il paraît plus naturel de travailler dans le sous-fibré classique de $\mathcal{T}^1_3$, des tenseurs vérifiant (les propriétés algébriques des tenseurs de Riemmann-Christoffel) :
$$\mathcal{R}^p_{ijk}+\mathcal{R}^p_{kij}+\mathcal{R}^p_{jki}=0\ ,\ \mathcal{R}^p_{ijk}=-\mathcal{R}^p_{ikj}\ \text{et}\ \mathcal{R}^p_{ipj}=\mathcal{R}^p_{jpi}.$$
et de prendre comme application $Bianc$, la contraction du terme gauche de l'identité $(*)$ par H^{ij}, nous n'avons trouvé de cette façon aucune contraction de $Bianc(H,\mathcal{R})$ qui redonne $\mathrm{Bian}(H,R)$.

(ii) On a bien entendu $Bianc(H,\mathcal{R})=0$, lorsque $\mathcal{R}=Riem(H)$.

En vue de calculer le linéarisé de $Bianc(H,\mathcal{R})$ par rapport à H, réécrivons
$$\begin{aligned}2Bianc(H,\mathcal{R})^t_{kl}=&-H^{ij}(\partial_l\mathcal{R}^t_{ikj}-\Gamma^q_{il}\mathcal{R}^t_{qkj}-\Gamma^q_{kl}\mathcal{R}^t_{iqj}-\underline{\Gamma^q_{jl}\mathcal{R}^t_{ikq}}+\Gamma^t_{lq}\mathcal{R}^q_{ikj})\\&+H^{ij}(\partial_j\mathcal{R}^t_{ikl}-\Gamma^q_{ij}\mathcal{R}^t_{qkl}-\Gamma^q_{kj}\mathcal{R}^t_{iql}-\underline{\Gamma^q_{lj}\mathcal{R}^t_{ikq}}+\Gamma^t_{jq}\mathcal{R}^q_{ikl})\\&+H^{st}(\partial_k\mathcal{R}^j_{sjl}-\Gamma^q_{sk}\mathcal{R}^j_{qjl}-\underbrace{\Gamma^q_{kj}\mathcal{R}^j_{sql}}-\Gamma^q_{kl}\mathcal{R}^j_{sjq}+\underbrace{\Gamma^j_{kq}\mathcal{R}^q_{sjl}}).\end{aligned}$$
Donc (comme les termes repérés se compensent)
$$\begin{aligned}2Bianc(H,\mathcal{R})^t_{kl}\ =\ &-H^{ij}(\partial_l\mathcal{R}^t_{ikj}-\Gamma^q_{il}\mathcal{R}^t_{qkj}-\Gamma^q_{kl}\mathcal{R}^t_{iqj}+\Gamma^t_{lq}\mathcal{R}^q_{ikj})\\&+H^{ij}(\partial_j\mathcal{R}^t_{ikl}-\Gamma^q_{ij}\mathcal{R}^t_{qkl}-\Gamma^q_{kj}\mathcal{R}^t_{iql}+\Gamma^t_{jq}\mathcal{R}^q_{ikl})\\&+H^{st}(\partial_k\mathcal{R}^j_{sjl}-\Gamma^q_{sk}\mathcal{R}^j_{qjl}-\Gamma^q_{kl}\mathcal{R}^j_{sjq}).\end{aligned}$$
Rappelons que (d'après le lemme 17)
$$(D_H\Gamma(H)\delta h)^i_{jk}=\frac{1}{2}(\nabla_k\delta h^i_j+\nabla_j\delta h^i_k-\nabla^i\delta h_{jk})$$

et que

$$(D_H(H^{-1})\delta h)^{ij} = -H^{ip}H^{jq}\delta h_{pq}.$$

On obtient ainsi, à $\mathcal{R}$ fixé :

$$4(D_H Bianc(H,\mathcal{R})\delta h)^t_{kl} = +H^{ij}(\nabla_i \delta h^q_l + \nabla_l \delta h^q_i - \nabla^q \delta h_{il})\mathcal{R}^t_{qkj}$$

$$+H^{ij}(\nabla_k \delta h^q_l + \nabla_l \delta h^q_k - \nabla^q \delta h_{kl})\mathcal{R}^t_{iqj} - H^{ij}(\nabla_q \delta h^t_l + \nabla_l \delta h^t_q - \nabla^t \delta h_{ql})\mathcal{R}^q_{ikj}$$

$$-H^{ij}(\nabla_i \delta h^q_j + \nabla_j \delta h^q_i - \nabla^q \delta h_{ij})\mathcal{R}^t_{qkl}$$

$$-H^{ij}(\nabla_k \delta h^q_j + \nabla_j \delta h^q_k - \nabla^q \delta h_{kj})\mathcal{R}^t_{iql} + H^{ij}(\nabla_j \delta h^t_q + \nabla_q \delta h^t_j - \nabla^t \delta h_{jq})\mathcal{R}^q_{ikl}$$

$$-H^{st}(\nabla_k \delta h^q_s + \nabla_s \delta h^q_k - \nabla^q \delta h_{sk})\mathcal{R}^j_{qjl} - H^{st}(\nabla_k \delta h^q_l + \nabla_l \delta h^q_k - \nabla^q \delta h_{lk})\mathcal{R}^j_{sjq}$$

$$H^{ip}H^{jq}\delta h_{pq}\nabla_l \mathcal{R}^t_{ikj} - H^{ip}H^{qj}\delta h_{pq}\nabla_j \mathcal{R}^t_{ikl} - H^{sp}H^{tq}\delta h_{pq}\nabla_k \mathcal{R}^j_{sjl}.$$

Particularisons désormais ce calcul au cas où

$$\mathcal{R}^t_{qkj} = -\delta^t_k H_{qj} + \delta^t_j H_{qk}.$$

Alors

$$\mathcal{R}^j_{qjl} = -(n-1)H_{ql} \text{ et } \nabla\mathcal{R} = 0$$

(en particulier $\mathcal{R}$ est bien dans $\mathcal{S}^1_3$). C'est le cas en $H = H_0$ et $\mathcal{R} =$Riem(H_0). On a dans ce cas

$$\begin{aligned}
4(D_H Bianc(H,\mathcal{R})\delta h)^t_{kl} \quad = \quad & +H^{ij}(\nabla_i \delta h^q_l + \nabla_l \delta h^q_i - \nabla^q \delta h_{il})(-\delta^t_k H_{qj} + \delta^t_j H_{qk}) \\
& +H^{ij}(\nabla_k \delta h^q_l + \nabla_l \delta h^q_k - \nabla^q \delta h_{kl})(-\delta^t_q H_{ij} + \delta^t_j H_{iq}) \\
& -H^{ij}(\nabla_q \delta h^t_l + \nabla_l \delta h^t_q - \nabla^t \delta h_{ql})(-\delta^q_k H_{ij} + \delta^q_j H_{ik}) \\
& -H^{ij}(\nabla_i \delta h^q_j + \nabla_j \delta h^q_i - \nabla^q \delta h_{ij})(-\delta^t_k H_{ql} + \delta^t_l H_{qk}) \\
& -H^{ij}(\nabla_k \delta h^q_j + \nabla_j \delta h^q_k - \nabla^q \delta h_{kj})(-\delta^t_q H_{il} + \delta^t_l H_{iq}) \\
& +H^{ij}(\nabla_j \delta h^t_q + \nabla_q \delta h^t_j - \nabla^t \delta h_{jq})(-\delta^q_k H_{il} + \delta^q_l H_{ik}) \\
& +(n-1)H^{st}(\nabla_k \delta h^q_s + \nabla_s \delta h^q_k - \nabla^q \delta h_{sk})H_{ql} \\
& +(n-1)\delta^t_q(\nabla_k \delta h^q_l + \nabla_l \delta h^q_k - \nabla^q \delta h_{lk}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
4(D_H Bianc(H,\mathcal{R})\delta h)^t_{kl} &= (\nabla_i\delta h^q_l + \nabla_l\delta h^q_i - \nabla^q\delta h_{il})(H^{it}H_{qk} - \delta^t_k\delta^i_q)\\
&\quad + \underline{(\nabla_k\delta h^q_l + \nabla_l\delta h^q_k - \nabla^q\delta h_{kl})(\delta^t_q - n\delta^t_q)}\\
&\quad + (\nabla_q\delta h^t_l + \nabla_l\delta h^t_q - \nabla^t\delta h_{ql})(-\delta^q_k + n\delta^q_k)\\
&\quad - (\nabla_i\delta h^q_j + \nabla_j\delta h^q_i - \nabla^q\delta h_{ij})H^{ij}(-\delta^t_k H_{ql} + \delta^t_l H_{qk})\\
&\quad + (\nabla_k\delta h^q_j + \nabla_j\delta h^q_k - \nabla^q\delta h_{kj})(\delta^t_q\delta^j_l - \delta^t_l\delta^j_q)\\
&\quad + (\nabla_j\delta h^t_q + \nabla_q\delta h^t_j - \nabla^t\delta h_{jq})(-\delta^q_k\delta^j_l + \delta^q_l\delta^j_k)\\
&\quad + (n-1)(\nabla_k\delta h^q_s + \nabla_s\delta h^q_k - \nabla^q\delta h_{sk})H^{st}H_{ql}\\
&\quad + \underline{(n-1)(\nabla_k\delta h^q_l + \nabla_l\delta h^q_k - \nabla^q\delta h_{lk})\delta^t_q}.
\end{aligned}$$

Par suite (comme les termes soulignés se compensent) $4(D_H Bianc(H,\mathcal{R})\delta h)^t_{kl}$ est égal à :

$$\begin{aligned}
&(\underbrace{\nabla^t\delta h_{lk}}_{a} + \underbrace{\nabla_l\delta h^t_k}_{1} - \underbrace{\nabla_k\delta h^t_l}_{b}) - (\underbrace{\nabla_i\delta h^i_l}_{c} + \underbrace{\nabla_l\delta h^i_i}_{2} - \underbrace{\nabla^i\delta h_{il}}_{c})\delta^t_k\\
&+(n-1)(\underbrace{\nabla_k\delta h^t_l}_{3} + \underbrace{\nabla_l\delta h^t_k}_{d} - \underbrace{\nabla^t\delta h_{kl}}_{e})\\
&+(\underbrace{\nabla^j\delta h_{lj}}_{4} + \underbrace{\nabla^i\delta h_{li}}_{4} - \underbrace{\nabla_l\delta h^i_i}_{2})\delta^t_k - (\underbrace{\nabla^j\delta h_{kj}}_{f} + \underbrace{\nabla^i\delta h_{ki}}_{5} - \underbrace{\nabla_k\delta h^i_i}_{g})\delta^t_l\\
&+\underbrace{(\nabla_k\delta h^t_l + \nabla_l\delta h^t_k - \nabla^t\delta h_{kl})}_{h} - (\underbrace{\nabla_k\delta h^j_j}_{g} + \underbrace{\nabla_j\delta h^j_k}_{5} - \underbrace{\nabla^j\delta h_{kj}}_{f})\delta^t_l\\
&-\underbrace{(\nabla_l\delta h^t_k + \nabla_k\delta h^t_l - \nabla^t\delta h_{lk})}_{h} + (\underbrace{\nabla_k\delta h^t_l}_{b} + \underbrace{\nabla_l\delta h^t_k}_{1} - \underbrace{\nabla^t\delta h_{kl}}_{a})\\
&+(n-1)(\underbrace{\nabla_k\delta h^t_l}_{3} + \underbrace{\nabla^t\delta h_{kl}}_{e} - \underbrace{\nabla_l\delta h^t_k}_{d}).
\end{aligned}$$

Comme les termes repérés par les mêmes lettres se compensent et que ceux repérés par les mêmes chiffres s'ajoutent, finalement on a la

Proposition 21 *La linéarisation par rapport à H, de l'opérateur Bianc en $(H_0,\mathcal{R}_0)$, est donnée en coordonnées locales par la formule*

$$(D_H Bianc(H_0,\mathcal{R}_0)\delta h)^t_{kl} = \frac{1}{2}[\nabla_l\delta h^t_k - \delta^t_k\nabla_l\delta h^i_i + (n-1)\nabla_k\delta h^t_l + \delta^t_k\nabla^j\delta h_{lj} - \delta^t_l\nabla_j\delta h^j_k].$$

Remarque :

Il est important de noter que lorsque $t = k$ (sommation), on retrouve la quantité

$$(n-1)(\nabla_t \delta h^t_l - \frac{1}{2}\nabla_l \delta h^i_i),$$

qui correspond au linéarisé par rapport à H de l'opérateur *Bian* en (H_0, R_0) (cf. paragraphe 4.3).

4.5.3 Scindage d'un sous-fibré de $\mathcal{T}_3^1$

Nous construisons ici une fonction $\mathcal{F}(h,\varrho)$, pour h dans $\mathcal{S}_2$ et ϱ dans $\mathcal{S}_3^1$, dont l'image est dans $\mathcal{S}_3^1$, ceci de telle sorte que par une contraction, on retrouve la fonction $F(h,r)$ introduite au paragraphe 4.4 pour la résolution de l'équation de Ricci. Nous en déduisons un scindage pour un sous-fibré de $\mathcal{S}_3^1$ *via* le théorème d'isomorphisme de [GL].

Nous avons vu au paragraphe précédent que

$$\begin{aligned} trD_H Bianc(H_0,\mathcal{R}_0)\delta h &= (n-1)\mathrm{Bian}(H_0,\delta h) \\ &= D_H \mathrm{Bian}(H_0,R_0)\delta h. \end{aligned}$$

Considérons, pour une métrique H, l'opérateur D de $\mathcal{T}_2^1$ dans $\mathcal{S}_3^1$ défini par

$$D(B)^i_{mlk} = \frac{1}{2}(\nabla_m B^i_{lk} + \nabla_k B^i_{lm}).$$

Ceci de telle sorte que $Tr(D(B)) = \mathrm{div}^*(tr(B))$. Lorsque $H = H_0$, nous noterons D_0 l'opérateur correspondant.

Pour $H = H_0 + h$ métrique et $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + \varrho$ dans $\mathcal{S}_3^1$, on pose

$$\mathcal{F}(h,\varrho) = \mathcal{Q}(H,\mathcal{R}) = Riem(H) - \frac{1}{n-1} D_0[Bianc(H,\mathcal{R})] - \mathcal{R}.$$

L'application $\mathcal{F}$ ainsi définie est lisse d'un voisinage de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)\times \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_3^1)$ dans $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_3^1)$. Nous obtenons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2) & \xrightarrow{D_h\mathcal{F}(0,0)} & \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_3^1) & \xrightarrow{Tr} & \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_2) \\ \uparrow & & & & \uparrow \\ - & - & - & - & - \\ & & D_hF(0,0) & & \end{array}$$

avec

$$D_h\mathcal{F}(0,0)\delta h = D_H Riem(H_0)\delta h - \frac{1}{n-1} D_H\{D_0[Bianc(H_0,\mathcal{R}_0)]\}\delta h.$$

Donc

$$TrD_h\mathcal{F}(0,0)\delta h = D_H \mathrm{Ricci}(H_0)\delta h - \frac{1}{n-1} D_H\{\mathrm{div}_0^*[\mathrm{Bian}(H_0,R_0)]\}\delta h.$$

D'où

$$TrD_h\mathcal{F}(0,0)\delta h = D_H F(0,0)\delta h.$$

Or nous avons vu que $D_hF(0,0)$ est un *isomorphisme* lorsque

$$-2n > s(s-(n-1)).$$

Ainsi $D_h\mathcal{F}(0,0)$ est injective et Tr surjective. D'autre part, l'image de $D_h\mathcal{F}(0,0)$ est fermée dans $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}^1_3)$ (pour le montrer, il suffit de reprendre la méthode de démonstration de la proposition 19). Nous obtenons ainsi la

Proposition 22 *Si $s \in \mathbb{R}$ vérifie $-2n > s(s-(n-1))$ alors nous avons le scindage*

$$\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}^1_3) = Im\, D_h\mathcal{F}(0,0) \oplus Ker\, Tr.$$

Remarque :

Fixons x dans B et notons $\mathcal{S}_{2|_x}$ (resp. $\mathcal{S}^1_{3|_x}$) la fibre du fibré $\mathcal{S}_2$ (resp. $\mathcal{S}^1_3$) au dessus de x. Notons de plus Tr_x, l'application Tr restreinte à $\mathcal{S}^1_{3|_x}$. De manière purement algébrique, les n^2 équations indépendantes $R^p_{ipj} = 0$, nous donnent la dimension (sur $\mathbb{R}$) de ker Tr_x qui est en l'occurence $n^4 - n^2$. De la même manière, *via* les équations $R^p_{ipj} = R^p_{jpi}$, la dimension (sur $\mathbb{R}$) de $\mathcal{S}^1_{3|_x}$ est $n^4 - \frac{1}{2}n(n-1)$. De plus la dimension (sur $\mathbb{R}$) de $\mathcal{S}_{2|_x}$ est $\frac{1}{2}n(n+1)$. On retrouve bien (les dimensions étant sur $\mathbb{R}$)

$$dim\, \mathcal{S}_{2|_x} + dim\ ker\ Tr_x = dim\, \mathcal{S}^1_{3|_x}.$$

4.5.4 Remarques sur le scindage classique des tenseurs de type courbure sectionnelle

Nous donnons ici un scindage pour un sous-espace de $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3)$ déduit du scindage classique du sous-espace de $\mathcal{T}_4$ des tenseurs de type courbure sectionnelle (cf. [Be p.45-48]). Ce scindage n'ayant ensuite plus d'utilité pour la thèse, nous l'avons placé ici pour permettre une comparaison avec le scindage précédent. Donnons tout d'abord les

Définition 4 *Le produit de Kulkarni-Nomizu de deux tenseurs symétriques h et g est le 4-tenseur $h \bowtie g$ donné par*

$$(h \bowtie g)_{ijkl} = h_{ik}g_{jl} + h_{jl}g_{ik} - h_{il}g_{jk} - h_{jk}g_{il}.$$

Définition 5 *On définit $\mathcal{C}_4$, le sous-fibré de $\mathcal{T}_4$ des tenseurs vérifiant :*

$$\tau_{ijkl} = \tau_{klij}, \;\; \tau_{ijkl} = -\tau_{jikl} = \tau_{jilk},$$

et

$$\tau_{ijkl} + \tau_{kijl} + \tau_{jkil} = 0.$$

Définition 6 *Pour $H \in \mathcal{S}_2$ non dégénérée, on définit l'application c_H de $\mathcal{C}_4$ dans $\mathcal{S}_2$ par :*

$$c_H(\tau)_{ij} = H^{kl}\tau_{ikjl}.$$

On a alors (cf. [Be]) le

Théorème 29 *Si $n \geq 4$, $\mathcal{C}_4$ admet une unique décomposition en espaces irréductibles (en tant que $O(H)$-modules) :*

$$\mathcal{C}_4 = \mathcal{U} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{W},$$

où

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U} & = & \mathbb{R}H \bowtie H \\ \mathcal{L} & = & H \bowtie \mathcal{S}_{20} \\ \mathcal{W} & = & ker\; c_H. \end{array}$$

En fait on montre que si l'on pose

$$r_{ij} = c_H(\tau)_{ij}, \; s = H^{ij}r_{ij}$$

et

$$z_{ij} = (r_{ij} - \frac{s}{n}H_{ij}) \in \mathcal{S}_{20},$$

alors on a

$$\tau_{ijkl} = \frac{s}{2n(n-1)}(H \bowtie H)_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(z \bowtie H)_{ijkl} + w_{ijkl},$$

avec $H^{ik}w_{ijkl} = 0$. En prenant désormais $H = H_0$, on déduit alors immédiatement le

Corollaire 13 *Soient $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]0,1[$ et supposons que $n \geq 4$. Alors pour tout $\tau \in \Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{C}_4)$, on a*

$$\tau = \frac{s_0}{2n(n-1)} H_0 \bowtie H_0 + \frac{1}{n-2} z_0 \bowtie H_0 + w_0,$$

où $r_{0ij} = H_0^{pq} \tau_{piqj}$, $s_0 = {H_0}^{ij} r_{0ij}$ et $z_{0ij} = r_{0ij} - \frac{s_0}{n} H_{0ij}$, avec $H_0^{ij} w_{0ijkl} = 0$. A cette décomposition unique correspond le scindage (défini avec H_0)

$$\Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{C}_4) = \Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{U}) \oplus \Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{L}) \oplus \Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{W}).$$

Remarque : On a $r_0 \in \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$, $s_0 \in \Lambda^{s}_{k,\alpha}(B)$ et $z_0 \in \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_{20})$.

Considérons maintenant l'application $H_0^{-1}.$ de $\Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{C}_4)$ dans $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3)$ définie par

$$(H_0^{-1}\tau)^p_{jkl} = H_0^{ip} \tau_{ijkl}$$

Il est immédiat que l'image de $\Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{C}_4)$ par l'application $H_0^{-1}.$ est un sous-espace de $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3)$ et que $H_0^{-1}.$ est un isomorphisme de $\Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{C}_4)$ sur son image. On a alors le

Corollaire 14 *Soient $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]0,1[$ et supposons que $n \geq 4$. Alors pour tout $\tau \in \Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{C}_4)$, on a*

$$H_0^{-1}\tau = \frac{s_0}{2n(n-1)} H_0^{-1}(H_0 \bowtie H_0) + \frac{1}{n-2} H_0^{-1}(z_0 \bowtie H_0) + H_0^{-1} w_0,$$

avec les notations précédentes. On a ainsi $H_0^{-1} w_0 \in ker\ Tr$. A cette décomposition unique correspond le scindage de l'image de $H_0^{-1}.$,

$$H_0^{-1}\Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{C}_4) = H_0^{-1}\Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{U}) \oplus H_0^{-1}\Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{L}) \oplus H_0^{-1}\Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{W}).$$

Remarque : Il est clair que l'image de $H_0^{-1}.$ n'est pas $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3)$ tout entier. D'autre part lorsque $-2n > s(s-(n-1))$, nous avions le scindage

$$\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3) = Im D_h \mathcal{F}(0,0) \oplus ker\ Tr.$$

Ainsi notre axe *ker Tr* comprend l'axe $H_0^{-1}\Lambda^{s-4}_{k,\alpha}(B, \mathcal{W})$. Par contre, nous allons montrer la

Proposition 23 *Si $n > 2$ et s est un réel vérifiant $0 > s(s-(n-1))$, alors*

$$Im D_h \mathcal{F}(0,0) \cap \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, H_0^{-1}\mathcal{C}_4) = \{0\}.$$

Preuve :
Les éléments de $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, H_0^{-1}\mathcal{C}_4)$ vérifient entre autre les propriétés

$$\tau^i_{ilm} = 0, \tag{1}$$

$$H_{0is}{H_0}^{lm}\tau^i_{klm} = 0, \tag{2}$$

et

$$H_{0is}{H_0}^{mk}(\tau^i_{klm} + \tau^i_{mkl} + \tau^i_{lmk}) = 0. \tag{3}$$

Nous allons montrer qu'un élément de $ImD_h\mathcal{F}(0,0)$ vérifiant ces propriétés est forcément nul. Soit donc $\delta h \in \Lambda^{s-2}_{k+2}(B, \mathcal{S}_2)$ et

$$\Psi := D_h\mathcal{F}(0,0)\delta h = DRiem(H_0)\delta h - \frac{1}{n-1}[D_H(D_0Bianc)(H_0, \mathcal{R}_0)]\delta h.$$

On a $\tau := [D_H(D_0Bianc)(H_0, \mathcal{R}_0)]\delta h = [D_0(D_HBianc)(H_0, \mathcal{R}_0)]\delta h$, par linéarité de D_0. Comme $DRiem(H_0)\delta h$ vérifie (1), (2)et (3), alors Ψ vérifie (1), (2) et (3) si et seulement si τ vérifie (1), (2) et (3). Montrons maintenant que si τ vérifie (1), (2) et (3), alors $\delta h = 0$. Détaillons tout d'abord τ, on a (cf. proposition 21)

$$\begin{aligned} B^i_{lk} &:= \{D_HBianc(H_0, \mathcal{R}_0)\delta h\}^i_{lk} \\ &= \tfrac{1}{2}[\nabla_k\delta h^i_l - \delta^i_l\nabla_k\delta h^j_j + (n-1)\nabla_l\delta h^i_k + \delta^i_l\nabla_j\delta h^j_k - \delta^i_k\nabla_j\delta h^j_l], \end{aligned}$$

et comme $D_0(B)^i_{klm} = \frac{1}{2}(\nabla_m B^i_{lk} + \nabla_k B^i_{lm})$, finalement $4\tau^i_{klm}$ est égal à

$$\nabla_m\nabla_k\delta h^i_l - \delta^i_l\nabla_m\nabla_k\delta h^j_j + (n-1)\nabla_m\nabla_l\delta h^i_k + \delta^i_l\nabla_m\nabla_j\delta h^j_k - \delta^i_k\nabla_m\nabla_j\delta h^j_l$$

$$+\nabla_k\nabla_m\delta h^i_l - \delta^i_l\nabla_k\nabla_m\delta h^j_j + (n-1)\nabla_k\nabla_l\delta h^i_m + \delta^i_l\nabla_k\nabla_j\delta h^j_m - \delta^i_m\nabla_k\nabla_j\delta h^j_l.$$

La propriété (1) se traduit par

$$\begin{aligned} &(1-n)\nabla_m\nabla_j\delta h^j_l + (n-2)\nabla_m\nabla_l\delta h^j_j - \nabla_l\nabla_m\delta h^j_j \\ &+\nabla_j\nabla_m\delta h^j_l + (n-1)\nabla_j\nabla_l\delta h^j_m + \nabla_l\nabla_j\delta h^j_m = 0. \end{aligned}$$

Décomposons $\delta h = uH_0 + h_0$ à travers le scindage $\mathcal{S}_2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{S}_{20}$. On a alors

$$(1-n)\nabla_m\nabla_j {h_0}^j_l + (n-1)\nabla_j\nabla_l {h_0}^j_m + \nabla_j\nabla_m {h_0}^j_l + \nabla_l\nabla_j {h_0}^j_m + (n-1)(n-2)\nabla_m\nabla_l u = 0.$$

Or , on a

$$(a)\left\{\begin{aligned} \nabla_m\nabla_j {h_0}^j_l - \nabla_j\nabla_m {h_0}^j_l &= {h_0}^j_p {\mathcal{R}_0}^p_{ljm} - {h_0}^s_l {\mathcal{R}_0}^j_{sjm} \\ &= {h_0}^j_p(-\delta^p_j H_{0lm} + \delta^p_m H_{0lj}) + (n-1)h_{0lm} \\ &= nh_{0lm}. \end{aligned}\right.$$

Donc $4\tau^i_{ilm}$ est égal à

$$(1-n)\underbrace{[\nabla_j\nabla_m h_{0l}^{\ j} - \nabla_j\nabla_l h_{0m}^{\ j}]}_{\text{antisymétrique}}$$
$$+\underbrace{(1-n)nh_{0lm} + \nabla_m\nabla_j h_{0l}^{\ j} + \nabla_l\nabla_j h_{0m}^{\ j} - nh_{0lm} + (n-1)(n-2)\nabla_l\nabla_m u}_{\text{symétrique}} = 0.$$

Ce qui nous donne

$$(b)\begin{cases} \nabla_j\nabla_m h_{0l}^{\ j} - \nabla_j\nabla_l h_{0m}^{\ j} = 0 \\ \nabla_m\nabla_j h_{0l}^{\ j} + \nabla_l\nabla_j h_{0m}^{\ j} - n^2 h_{0lm} + (n-1)(n-2)\nabla_l\nabla_m u = 0 \end{cases}.$$

De la même manière, la propriété (2) nous donne

$$\nabla_l\nabla_k h_{0s}^{\ l} - (n-1)\triangle h_{0sk} + \nabla_s\nabla_j h_{0k}^{\ j} - H_{0sk}\nabla^l\nabla_j h_{0l}^{\ j} + \nabla_k\nabla_l h_{0s}^{\ l}$$
$$+(n-1)\nabla_k\nabla_l h_{0s}^{\ l} + \nabla_k\nabla_j h_{0s}^{\ j} - \nabla_k\nabla_j h_{0s}^{\ j} + (2-n)\nabla_s\nabla_k u + (2-n)(\triangle u)H_{0ks} = 0.$$

Donc, on a

$$-(n-1)\triangle h_{0ks} + \nabla_l\nabla_k h_{0s}^{\ l} + \nabla_s\nabla_j h_{0k}^{\ j} - H_{0ks}\nabla^l\nabla_j h_{0l}^{\ j}$$
$$+n\nabla_k\nabla_j h_{0s}^{\ j} - (n-2)[(\triangle u)H_{0ks} + \nabla_k\nabla_s u] = 0.$$

Or d'après (a) et (b), on a

$$\begin{aligned} \nabla_l\nabla_k h_{0s}^{\ l} + \nabla_s\nabla_j h_{0k}^{\ j} &= \nabla_k\nabla_l h_{0s}^{\ l} - nh_{0sk} + \nabla_s\nabla_j h_{0k}^{\ j} \\ &= n(n-1)h_{0sk} - (n-1)(n-2)\nabla_k\nabla_s u. \end{aligned}$$

On a aussi (toujours d'après (a) et (b))

$$\begin{aligned} \nabla_k\nabla_l h_{0s}^{\ l} &= \tfrac{1}{2}[\nabla_k\nabla_l h_{0s}^{\ l} + \nabla_s\nabla_l h_{0k}^{\ l} + \nabla_k\nabla_l h_{0s}^{\ l} - \nabla_s\nabla_l h_{0k}^{\ l}] \\ &= \tfrac{1}{2}[n^2 h_{0ks} - (n-1)(n-2)\nabla_k\nabla_s u + 0], \end{aligned}$$

donc, en particulier

$$\nabla^l\nabla_j h_{0l}^{\ j} = (n-1)(n-2)\triangle u.$$

Ce qui nous donne

$$-(n-1)\triangle h_{0sk} + n(n-1)h_{0sk} - (n-1)(n-2)\nabla_k\nabla_s u$$
$$+\tfrac{n}{2}[n^2 h_{0ks} - (n-1)(n-2)\nabla_k\nabla_s u] - (n-1)(n-2)\triangle u H_{0ks}$$
$$-(n-2)[(\triangle u)H_{0ks} + \nabla_k\nabla_s u] = 0.$$

Prenons alors la trace relative à H_0, on obtient

$$-\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)\triangle u = 0.$$

Donc, lorsque $n \geq 4$ et $0 > s(s-(n-1))$, on a $u = 0$, et

$$[\triangle - (n + \frac{n^3}{2(n-1)})]h_0 = 0. \qquad (c)$$

Enfin $4(\tau^i_{klm} + \tau^i_{mkl} + \tau^i_{lmk})$ est égal à

$$\nabla_m\nabla_k\delta h^i_l - \delta^i_l\nabla_m\nabla_k\delta h^j_j + (n-1)\nabla_m\nabla_l\delta h^i_k + \delta^i_l\nabla_m\nabla_j\delta h^j_k - \delta^i_k\nabla_m\nabla_j\delta h^j_l$$

$$+\nabla_k\nabla_m\delta h^i_l - \delta^i_l\nabla_k\nabla_m\delta h^j_j + (n-1)\nabla_k\nabla_l\delta h^i_m + \delta^i_l\nabla_k\nabla_j\delta h^j_m - \delta^i_m\nabla_k\nabla_j\delta h^j_l$$

$$+\nabla_l\nabla_m\delta h^i_k - \delta^i_k\nabla_l\nabla_m\delta h^j_j + (n-1)\nabla_l\nabla_k\delta h^i_m + \delta^i_k\nabla_l\nabla_j\delta h^j_m - \delta^i_m\nabla_l\nabla_j\delta h^j_k$$

$$+\nabla_m\nabla_l\delta h^i_k - \delta^i_k\nabla_m\nabla_l\delta h^j_j + (n-1)\nabla_m\nabla_k\delta h^i_l + \delta^i_k\nabla_m\nabla_j\delta h^j_l - \delta^i_l\nabla_m\nabla_j\delta h^j_k$$

$$+\nabla_k\nabla_l\delta h^i_m - \delta^i_m\nabla_k\nabla_l\delta h^j_j + (n-1)\nabla_k\nabla_m\delta h^i_l + \delta^i_m\nabla_k\nabla_j\delta h^j_l - \delta^i_l\nabla_k\nabla_j\delta h^j_m$$

$$+\nabla_l\nabla_k\delta h^i_m - \delta^i_m\nabla_l\nabla_k\delta h^j_j + (n-1)\nabla_l\nabla_m\delta h^i_k + \delta^i_m\nabla_l\nabla_j\delta h^j_k - \delta^i_k\nabla_l\nabla_j\delta h^j_m.$$

Les deux dernières colonnes s'annulent, la troisième vaut $(n-1)$-fois la première et la deuxième reste inchangée, donc $4(\tau^i_{klm} + \tau^i_{mkl} + \tau^i_{lmk})$ est égal à

$$n[(\nabla_m\nabla_k\delta h^i_l + \nabla_k\nabla_m\delta h^i_l) + (\nabla_m\nabla_l\delta h^i_k + \nabla_l\nabla_m\delta h^i_k)$$

$$+(\nabla_k\nabla_l\delta h^i_m + \nabla_l\nabla_k\delta h^i_m)]$$

$$-2(\delta^i_l\nabla_m\nabla_k + +\delta^i_k\nabla_m\nabla_l + \delta^i_m\nabla_k\nabla_l)\delta h^j_j.$$

D'après la propriété (3), on a donc

$$n[-2\triangle\delta h_{ls} + 2\nabla^k\nabla_l\delta h_{ks} + 2\nabla_l\nabla^k\delta h_{ks}] + (2\triangle\delta h^j_j)H_{0ls} - 4\nabla_l\nabla_s\delta h^j_j = 0.$$

En écrivant $\delta h = uH_0 + h_0$, on obtient

$$2n[-\triangle h_{0ls} + (\nabla^k\nabla_l h_{0ks} + \nabla_l\nabla^k h_{0ks})] = 0.$$

Or d'après les propriétés (a) et (b), on a

$$\nabla^k\nabla_l h_{0ks} + \nabla_l\nabla^k h_{0ks} = n(n-1)h_{0sl} - (n-1)(n-2)\nabla_s\nabla_l u,$$

donc

$$-\triangle h_{0sl} + n(n-1)h_{0sl} - (n-1)(n-2)\nabla_s \nabla_l u = 0.$$

Prenons la trace relative à H_0, on obtient

$$(n-1)(n-2)\triangle u = 0,$$

donc $u = 0$ lorsque $n > 2$ et $0 > s(s-(n-1))$. Dans ce cas, on a

$$[\triangle - n(n-1)]h_0 = 0.$$

En combinant cette dernière égalité avec (c), on obtient $h_0 = 0$. $\blacksquare$

4.5.5 Structure de l'image de $H \longrightarrow Riem(H)$ près de H_0 dans $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3)$

Le scindage de l'avant-dernier paragraphe et le théorème d'inversion de l'opérateur Ricci (cf. théorème 28), nous permettent d'étudier la structure des tenseurs de courbure voisins de $\mathcal{R}_0$ dans $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3)$.

Donnons tout d'abord le

Lemme 18 *Soient $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0,1[$, et $s \in \mathbb{R}$ vérifiant*

$$-2n > s(s-(n-1)).$$

Considérons le sous-ensemble de $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3)$ définit par :

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{F}(h,0),\ h \text{ voisin de zéro dans } \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)\}.$$

Alors $\mathcal{M}$ est, au voisinage de zéro, une sous-variété de $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3)$.

Preuve

Nous allons montrer que l'application d'un voisinage de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ dans un voisinage de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3)$ définie par

$$h \longrightarrow \mathcal{F}(h,0)$$

est une immersion. Pour clarifier la suite de la démonstration, donnons le diagrame suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \arrow[r, "D_h\mathcal{F}(.,0)"] \arrow[rr, bend right, dashed, "D_hF(.,0)"'] & \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3) \arrow[r, "Tr"] & \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_2).
\end{tikzcd}$$

Tout d'abord (nous le verrons au paragraphe 4.8), comme $D_hF(0,0)$ est un isomorphisme, par continuité, $D_hF(h,0)$ est encore un isomorphisme pour h voisin de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$. Ainsi, $D_h\mathcal{F}(h,0)$ est injective. Ensuite, par la même méthode que pour la démonstration de la proposition 22, on a le scindage

$$\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3) = Im\ D_h\mathcal{F}(h,0) \oplus ker\ Tr.$$

Rappelons enfin que $ker\ Tr$ est fermé. Il en résulte (voir [La p. 20]) que $\mathcal{F}(.,0)$ est une immersion au voisinage de zéro. ■

Remarque : Comme $D_hF(0,0)$ est un isomorphisme, l'application

$$f \equiv F(.,0) : \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$$

est localement inversible au voisinage de zéro, notons f^{-1} son inverse. Alors $\mathcal{M}$ peut se voir comme le graphe de l'application de $Im\ D_h\mathcal{F}(0,0)$ dans $ker\ Tr$ définie par

$$\varphi \longmapsto \mathcal{F}(f^{-1}(Tr\varphi),0)-\varphi.$$

En effet, on a

$$Tr\mathcal{F}(f^{-1}(Tr\varphi),0)-Tr\varphi = F(f^{-1}(Tr\varphi),0)-Tr\varphi = 0. \qquad \blacksquare$$

Nous allons maintenant étudier la structure de l'image de l'application d'un voisinage de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ dans un voisinage de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}^1_3)$ définie par

$$\varrho(h) := Riem(H_0+h)-\mathcal{R}_0.$$

Rappelons tout d'abord, comme nous l'avons vu dans la proposition 19 que, si l'on définit, pour ω voisin de zéro dans $\Lambda^{s-1}_{k+1,\alpha}(B,\mathcal{T}_1)$, l'ensemble

$$\sum\nolimits_{0,\omega} = \{h \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2),\ \mathrm{Bian}(H_0+h,R_0)=\omega\},$$

alors $\{\sum_{0,\omega}\}_{\omega\in V}$, où V est un voisinage de zéro dans $\Lambda^{s-1}_{k+1,\alpha}(B,\mathcal{T}_1)$, fournit un feuilletage de $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ au voisinage de zéro. On peut maintenant donner la

Proposition 24 *Soient $k\in\mathbb{N}$, $\alpha\in]0,1[$, et $s\in\mathbb{R}$ vérifiant*

$$-2n > s(s-(n-1)).$$

Considérons le sous-ensemble de $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}^1_3)$ définit par :

$$\mathcal{R} = \{\varrho(h),\ h \text{ voisin de zéro dans } \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)\}.$$

Alors $\mathcal{R}$ se déduit de la sous variété $\mathcal{M}$ (définie au lemme précédent), de la manière suivante :

$$\varrho(h) = \mathcal{F}(h,0)+\varphi[\omega(h)]+W(h),$$

où

$$\omega(h) = Bian(H_0+h,R_0),$$
$$\varphi[\omega(h)] \in Im\ D_h\mathcal{F}(0,0),$$
$$W(h)\in ker\ Tr.$$

D'autre part, lorsque $k\geq 1$, l'application ϱ est injective au voisinage de zéro.

Preuve :
Rappelons que, par définition, on a

$$\mathcal{F}(h,0) = \varrho(h) - \psi(h),$$

avec $\psi(h) = \frac{1}{n-1} D_0[Bianc(H_0 + h, \mathcal{R}_0)]$. Ainsi, si $h \in \sum_{0,\omega}$, on a

$$Tr(\psi(h)) = \frac{1}{n-1}\mathrm{div}_0^*\omega.$$

Considérons alors $\varphi(\omega)$, l'unique élément de $Im\ D_h\mathcal{F}(0,0)$ tel que

$$Tr(\varphi(\omega)) = \frac{1}{n-1}\mathrm{div}_0^*\omega.$$

Remarquons que $\varphi(\omega)$ est la première projection de $\psi(h)$, à travers le scindage

$$\Lambda_{k,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_3^1) = \mathrm{Im}\ D_h\mathcal{F}(0,0) \oplus \mathrm{Ker}\ Tr.$$

On pose ensuite

$$W(h) = \psi(h) - \varphi(\omega).$$

On a bien $W(h) \in ker\ Tr$ (c'est la deuxième projection de $\psi(h)$ à travers le scindage précédent). La première partie de la proposition est donc démontrée. Supposons maintenant que $k \geq 1$, alors, comme nous l'avons vu au paragraphe 4.4, l'application d'un voisinage de zéro dans $\Lambda_{k+2,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$ dans un voisinage de zéro dans $\Lambda_{k,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$ définie par

$$r(h) = \mathrm{Ricci}(H_0 + h) - R_0$$

est injective. Ainsi, d'après le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Lambda_{k+2,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2) \arrow[r, "Riem(H_0+.)-\mathcal{R}_0"] \arrow[rr, bend right, dashed, "\mathrm{Ricci}(H_0+.)-R_0"'] & \Lambda_{k,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_3^1) \arrow[r, "Tr"] & \Lambda_{k,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2) \end{tikzcd}$$

on en déduit que ϱ est injective.

Remarque : Lorsque $k \geq 2$, il n'y a pas d'éléments de $Im\ D\varrho(0)$ verticaux (i.e. dans $ker\ Tr$). En effet, comme on a identiquement $Bianc[H, Riem(H)] \equiv 0$ (cf. section 4.5.2), on a

$$\mathcal{F}(h, \varrho(h)) \equiv 0.$$

Donc, en différentiant par rapport à h en 0, on obtient, pour tout $\delta h \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$,

$$D_h\mathcal{F}(0,0)\delta h + D_\varrho\mathcal{F}(0,0)D\varrho(0)\delta h = 0.$$

Comme $\mathcal{F}$ est linéaire en ϱ, on a de plus

$$\begin{array}{rcl} D_\varrho\mathcal{F}(0,0)D\varrho(0)\delta h & = & \mathcal{F}(0, D\varrho(0)\delta h) \\ & = & -D\varrho(0)\delta h - \frac{1}{n-1}D_0[Bianc(H_0, \mathcal{R}_0 + D\varrho(0)\delta h)] \\ & = & -D\varrho(0)\delta h - \frac{1}{n-1}D_0[Bianc(H_0, D\varrho(0)\delta h)]. \end{array}$$

Supposons qu'il existe $\delta h \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ tel que $\delta\varrho := D\varrho(0)\delta h \in \text{Ker } Tr$, alors

$$Tr\ D_0(Bianc(H_0, \delta\varrho)) = \text{div}_0^*(tr\ Bianc(H_0, \delta\varrho)) = \text{div}_0^*(\text{Bian}(H_0, Tr\ \delta\varrho)) = 0.$$

Donc $\mathcal{F}(0, \delta\varrho)$ est dans Ker Tr. Or comme il est aussi dans Im $D_h\mathcal{F}(0,0)$, finalement $\mathcal{F}(0,\delta\varrho) = 0$. Par suite $D_h\mathcal{F}(0,0)\delta h = 0$. Et comme $D_h\mathcal{F}(0,0)$ est un isomorphisme, $\delta h = 0$, d'où $\delta\varrho = 0$. ■

Remarque :

La proposition 24 et le théorème 28 fournissent le résultat algébrique suivant : notons t^1_3 le produit tensoriel $\mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^n$ et s^1_3 le sous-espace de t^1_3 des tenseurs vérifiant

$$\varrho^p_{ipj} = \varrho^p_{jpi}.$$

Alors, pour tout ϱ dans s^1_3, il existe w dans s^1_3 tel que $w^p_{ipj} = 0$ et tel que, si l'on note

$$R = \varrho + w,$$

$R \in s^1_3$ vérifie (les propriétés algébriques du tenseur de Riemann-Christoffel) :

$$R^p_{ijk} + R^p_{kij} + R^p_{jki} = 0 \text{ et } R^p_{ijk} = -R^p_{ikj},$$

donc aussi $R^p_{pij} = 0$.

En effet, considérons $\alpha \in]0,1[$ et $s \in \mathbb{R}$ vérifiant $-2n > s(s-(n-1))$. Pour $\varrho \in s^1_3$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, considérons, dans le système de coordonnées canonique de $\mathbb{R}^n$, le champ de tenseurs sur B :

$$\varrho_\lambda = \lambda\rho^{s-2}\varrho.$$

Ce champ est dans $\Lambda^{s-2}_{3,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3)$ et vérifie

$$\lim_{\lambda\to 0} \parallel \varrho_\lambda \parallel^{(s-2)}_{3,\alpha} = 0.$$

Ainsi d'après le théorème 28, pour λ assez petit, il existe h_λ dans $\Lambda^{s-2}_{3,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ tel que

$$\text{Ricci}(H_0 + h_\lambda) - R_0 = Tr(Riem(H_0 + h_\lambda) - \mathcal{R}_0) = Tr\varrho_\lambda,$$

donc il existe w_λ dans $\ker Tr$ tel que

$$R_\lambda := \varrho_\lambda + w_\lambda = Riem(H_0 + h_\lambda) - \mathcal{R}_0.$$

Posons $w = \frac{1}{\lambda \rho^{s-2}(0)} w_\lambda(0)$. Alors

$$R_\lambda(0) = \lambda \rho^{s-2}(0)(\varrho + w)$$

vérifie les propriétés algébriques demandées, donc $R = \varrho + w$ aussi dans s_3^1.
■

4.5.6 La restriction de $Im\rho$ à Λ^s_∞ est une sous-variété

Dans la section précédente, nous n'obtenons pas un résultat aussi complet pour $Im\rho$ que pour $\mathcal{M}$ à cause d'une perte de régularité. Dans cette section, nous nous plaçons dans le cadre C^∞ pour éviter ce phénomène.

Pour $s \in \mathbb{R}$, nous dirons qu'une fonction $u \in C^\infty(B)$ est dans $\Lambda^s_\infty(B)$ si elle est dans $\Lambda^s_{k,\alpha}(B)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (α étant fixé dans $]0,1[$). On munit l'espace $\Lambda^s_\infty(B)$ de la famille de normes $\{\| \, . \, \|^{(s)}_{k,\alpha}\}_{k\in\mathbb{N}}$. L'espace $\Lambda^s_\infty(B)$ est un espace de Fréchet. Remarquons que d'après la proposition 3, u tend vers v dans $\Lambda^s_\infty(B)$ si et seulement si il existe $k_0 \geq 0$ tel que $\forall k \geq k_0$, $\| \, u - v \, \|^{(s)}_{k,\alpha}$ tend vers 0. Comme pour les $\Lambda^s_{k,\alpha}(B)$, on étend cette définition aux tenseurs.

Rappelons maintenant que pour s vérifiant $-2n > s(s-(n-1))$, on a défini au paragraphe 4.4 les applications lisses au voisinage de zéro

$$r_{k+2}(.) \equiv \text{Ricci}(H_0 + .) - R_0 : \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$$

et

$$h_{k+2}(.) : \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2),$$

l'unique solution de

$$r \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow F(h_{k+2}(r), r) \equiv 0 \text{ dans } \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_2).$$

On a vu que

$$h_{k+2} \circ r_{k+4} : \Lambda^{s-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \hookrightarrow \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$$

est l'injection canonique, et que, lorsque $k \geq 1$,

$$r_{k+2} \circ h_{k+2} : \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \hookrightarrow \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$$

est l'injection canonique. Considérons les applications correspondantes

$$r(.) \equiv \text{Ricci}(H_0 + .) - R_0 : \Lambda^{s-2}_\infty(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow \Lambda^{s-2}_\infty(B, \mathcal{S}_2)$$

et

$$h(.) : \Lambda^{s-2}_\infty(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow \Lambda^{s-2}_\infty(B, \mathcal{S}_2).$$

Alors d'après ce qui précède, les applications r et h sont lisses au voisinage de zéro et vérifient

$$h \circ r = r \circ h = Id_{\Lambda^{s-2}_\infty(B, \mathcal{S}_2)}, \qquad (*)$$

au voisinage de zéro. On alors directement le

Théorème 30 *Soit s un réel vérifiant $-2n > s(s-(n-1))$. Alors, pour tout r voisin de zéro dans $\Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{S}_2)$, l'équation*

$$Ricci(H_0+h) = R_0 + r,$$

possède une unique solution $h \in \Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{S}_2)$ voisine de zéro. De plus l'application $r \longrightarrow h$ est lisse au voisinage de zéro entre les Fréchet correspondants.

Considérons $\mathcal{R}^1_3$, le sous-espace de $\mathcal{T}^1_3$ des tenseurs vérifiants

$$\tau^i_{ilm} = 0,\ \tau^i_{klm} = -\tau^i_{kml},\ \tau^i_{klm} + \tau^i_{mkl} + \tau^i_{lmk} = 0.$$

On définit l'application

$$\rho(.) \equiv Riem(H_0 + .) - \mathcal{R}_0 : \Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{S}_2) \longrightarrow \Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{R}^1_3).$$

Il est clair que $\rho(.)$ est lisse au voisinage de zéro.

Enfin, on définit l'application linéaire

$$Tr : \Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{R}^1_3) \longrightarrow \Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{S}_2)$$

qui à τ^i_{klm} associe τ^i_{kim}. On a alors le

Théorème 31 *Soit s un réel vérifiant $-2n > s(s-(n-1))$. On a*

$$\Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{R}^1_3) = Im D\rho(0) \oplus Ker Tr.$$

Preuve

On a $Tr \circ \rho \equiv r$, donc $Tr \circ D\rho(0) = Dr(0)$. Par ailleurs d'après $(*)$, on a

$$Dh(0) \circ Dr(0) \equiv Dr(0) \circ Dh(0) \equiv Id_{\Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{S}_2)}.$$

Le diagramme suivant est donc commutatif

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{S}_2) \arrow[r, "D\rho(0)"] \arrow[rr, bend right=40, "Dr(0)"'] & \Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{R}^1_3) \arrow[r, "Tr"] & \Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{S}_2) \arrow[ll, bend left=60, "Dh(0)"] \end{tikzcd} \qquad (D).$$

Ainsi, pour tout τ dans $\Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{R}^1_3)$, on a

$$\tau = \underbrace{[D\rho(0)\circ Dh(0)\circ Tr](\tau)}_{\in Im D\rho(0)} + \underbrace{\tau - [D\rho(0)\circ Dh(0)\circ Tr](\tau)}_{\in Ker Tr}.$$

Si maintenant $\tau = D\rho(0)\delta h \in Im D\rho(0)$ est dans $ker Tr$, alors $Dr(0)\delta h = Tr[D\rho(0)\delta h] = 0$, donc $\delta h = Dh(0)(0) = 0$, puis $\tau = 0$. ■

Théorème 32 *Soit s un réel vérifiant $-2n > s(s-(n-1))$. Alors $Im\rho$ est une sous-variété de $\Lambda^{s-2}_{\infty}(B,\mathcal{R}^1_3)$, graphe de l'application de $ImD\rho(0)$ dans $KerTr$ donnée par*

$$\Psi \longrightarrow (\rho\circ h\circ Tr)(\Psi)-\Psi.$$

Preuve

Nous allons montrer qu'il y a un changement de coordonnées au voisinage de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{\infty}(B,\mathcal{R}^1_3)$ qui redresse $Im\rho$ en $ImD\rho(0)$. Pour fixer les idées, remarquons qu'en plus du diagramme (D), nous avons le diagramme commutatif suivant (au voisinage de zéro) :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{s-2}_{\infty}(B,\mathcal{S}_2) \arrow[r, "\rho"] \arrow[rr, bend right=30, dashed, "r"'] & \Lambda^{s-2}_{\infty}(B,\mathcal{R}^1_3) \arrow[r, "Tr"] & \Lambda^{s-2}_{\infty}(B,\mathcal{S}_2) \arrow[ll, bend left=60, dashed, "h"] \end{tikzcd}.$$

Ainsi, tout τ voisin de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{\infty}(B,\mathcal{R}^1_3)$ peut se décomposer de deux façons

$$\tau=\underbrace{[D\rho(0)\circ Dh(0)\circ Tr](\tau)}_{\in ImD\rho(0)}+\underbrace{\tau-[D\rho(0)\circ Dh(0)\circ Tr](\tau)}_{\in KerTr}$$

et

$$\tau=\underbrace{(\rho\circ h\circ Tr)(\tau)}_{\in Im\rho}+\underbrace{\tau-(\rho\circ h\circ Tr)(\tau)}_{\in KerTr}.$$

Considérons l'application Φ de $\Lambda^{s-2}_{\infty}(B,\mathcal{R}^1_3)$ dans $\Lambda^{s-2}_{\infty}(B,\mathcal{R}^1_3)$ lisse au voisinage de zéro définie par

$$\Phi(\tau)=\tau'=[D\rho(0)\circ Dh(0)\circ Tr](\tau)+\tau-(\rho\circ h\circ Tr)(\tau)$$

(notons que $Tr(\tau')=Tr(\tau)$). Alors Φ est inversible, d'inverse lisse :

$$\Phi^{-1}(\tau')=\tau=\tau'-[D\rho(0)\circ Dh(0)\circ Tr](\tau')+(\rho\circ h\circ Tr)(\tau').$$

Par ailleurs $\Phi(Im\rho)=ImD\rho(0)$ au voisinage de zéro. ■

Remarques :

(i) On peut remplacer $\mathcal{R}^1_3$ dans tout ce qui précède par n'importe quel sous-espace de $\mathcal{S}^1_3=\{R\in\mathcal{T}^1_3,\ R^p_{ipj}=R^p_{jpi}\}$, comprenant les tenseurs de type Riemann.

(ii) Lorsque s vérifie $-2n > s(s-(n-1)$, nous avons obtenu le scindage

$$\Lambda_\infty^{s-2}(B,\mathcal{R}_3^1) = ImD\rho(0) \oplus KerTr.$$

Tout comme au paragraphe 4.5.4 le scindage de Besse, nous donne

$$\Lambda_\infty^{s-4}(B,\mathcal{C}_4) = \Lambda_\infty^{s-4}(B,\mathcal{U}) \oplus \Lambda_\infty^{s-4}(B,\mathcal{L}) \oplus \Lambda_\infty^{s-4}(B,\mathcal{W}).$$

Comparons ces deux scindages : on a déjà

$$H_0^{-1}\Lambda_\infty^{s-2}(B,\mathcal{C}_4) \subset\subset \Lambda_\infty^{s-2}(B,\mathcal{R}_3^1),$$

en effet, l'inclusion est immédiate et pour $\tau \in \Lambda_\infty^{s-2}(B,\mathcal{R}_3^1)$, on n'a pas forcément

$$H_{0ji}\tau^i_{klm} = -H_{0ik}\tau^i_{jlm}.$$

De la même manière, on a

$$H_0^{-1}\Lambda_\infty^{s-2}(B,\mathcal{W}) \subset\subset kerTr.$$

Etudions l'intersection $ImD\rho(0)\cap H_0^{-1}\Lambda_\infty^{s-2}(B,\mathcal{C}_4)$. Remarquons tout d'abord que $\forall h \in \Lambda_\infty^{s-2}(B,\mathcal{S}_2)$,

$$s(h) := Sect(H_0+h) - Sect(H_0) \in \Lambda_\infty^{s-4}(B,\mathcal{C}_4),$$

avec $Sect(H_0+h)_{jklm} = (H_0+h)_{ji}Riem(H_0+h)^i_{klm}$, donc

$$Ds(0)\delta h_{jklm} = H_{0ji}[D\rho(0)\delta h]^i_{klm} + \mathcal{R}_0{}^i_{klm}\delta h_{ij} \in \Lambda_\infty^{s-4}(B,\mathcal{C}_4).$$

Ainsi $D\rho(0)\delta h \in H_0^{-1}\Lambda_\infty^{s-2}(B,\mathcal{C}_4)$ si et seulement si

$$\mathcal{R}_0{}^i_{klm}\delta h_{ij} \in \Lambda_\infty^{s-4}(B,\mathcal{C}_4),$$

ce qui est le cas si et seulement si (rappelons que $\mathcal{R}_0{}^i_{klm} = H_{0km}\delta^i_l - H_{0kl}\delta^i_m$)

$$H_{0kl}\delta h_{jm} - H_{0mj}\delta h_{lk} = 0. \qquad (CNS)$$

Donc, en particulier $n\delta h_{jm} = (H_0^{lk}\delta h_{lk})H_{0mj}$, d'où $\delta h \in \Lambda_\infty^{s-2}(B,\mathcal{H})$ (on rappelle que $\mathcal{S}_2 = \mathcal{H}\oplus\mathcal{S}_{20}$). Inversement, si $\delta h = uH_0$, alors δh vérifie (CNS), donc on a

$$ImD\rho(0)\cap H_0^{-1}\Lambda_\infty^{s-2}(B,\mathcal{C}_4) = D\rho(0)\Lambda_\infty^{s-2}(B,\mathcal{H}).$$

Enfin, remarquons que lorsque $\delta h = uH_0$, on peut détailler

$$
\begin{aligned}
&H_{0ij}[D\rho(0)(uH_0)]^i_{klm}\\
&= \tfrac{1}{2}(H_{0jm}\nabla_l\nabla_k u - H_{0km}\nabla_l\nabla_j u + H_{0kl}\nabla_m\nabla_j u - H_{0jl}\nabla_m\nabla_k u)\\
&= -\tfrac{1}{2}(H_0 \bowtie \nabla\nabla u)_{jklm}\\
&= \tfrac{1}{2n}\underbrace{(\triangle u)(H_0 \bowtie H_0)_{jklm}}_{\in\Lambda^{s-4}_\infty(B,\mathcal{U})} - \tfrac{1}{2}\underbrace{[H_0 \bowtie (\nabla\nabla u + \frac{1}{2}(\triangle u)H_0)]_{jklm}}_{\in\Lambda^{s-4}_\infty(B,\mathcal{L})}.
\end{aligned}
$$

Finalement, on a

$$
\begin{aligned}
Im D\rho(0) \cap H_0^{-1}\Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{C}_4) &= Im D\rho(0) \cap H_0^{-1}\Lambda^{s-2}_\infty(B,(\mathcal{U}\oplus\mathcal{L}))\\
&= D\rho(0)\Lambda^{s-2}_\infty(B,\mathcal{H}).
\end{aligned}
$$

4.6 Une résolution de l'équation de Ricci contravariante

Il est possible d'améliorer les conditions $s > 2$ et $n \geq 10$ du théorème 28 (section 4.4) si l'on prescrit plutôt le tenseur de Ricci *contravariant* qui est donné en coordonnées locales par

$$\overline{\mathrm{Ricci}}(H)^{ij} := H^{is}H^{jt}\mathrm{Ricci}(H)_{st}.$$

Autrement dit, on va résoudre au voisinage de zéro l'équation

$$\overline{\mathrm{Ricci}}(H_0 + h) = \overline{R_0} + \overline{r},$$

où

$$\overline{R_0}^{ij} = H_0^{is}H_0^{jt}R_{0st} = -(n-1)H_0^{ij}$$

et où $\overline{r}$ est donné dans $\mathcal{S}^2$ voisin de zéro. Pour cela nous procédons, comme pour l'opérateur de Ricci, par un argument de fonction implicite. Commençons par calculer des opérateurs linéarisés en $(H_0, \overline{R}_0)$. Tout d'abord, le linéarisé de l'opérateur $\overline{\mathrm{Ricci}}$ est donné par

$$\begin{aligned}(D\overline{\mathrm{Ricci}}(H)\delta h)^{ij} &= -H^{ip}H^{sq}H^{jt}\ \mathrm{Ricci}(H)_{st}\delta h_{pq} \\ &\quad -H^{is}H^{jp}H^{tq}\ \mathrm{Ricci}(H)_{st}\delta h_{pq} \\ &\quad +H^{is}H^{jt}(D\mathrm{Ricci}(H)\delta h)_{st}.\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $H = H_0$, on a

$$-H^{ip}H^{sq}H^{jt}\mathrm{Ricci}(H)_{st} = (n-1)H^{ip}H^{sq}\delta_s^j = (n-1)H^{ip}H^{jq}.$$

Ainsi comme δh est symétrique, on obtient

$$(D\overline{\mathrm{Ricci}}(H_0)\delta h)^{ij} = H_0^{is}H_0^{jt}[(D\mathrm{Ricci}(H)\delta h)_{st} + 2(n-1)\delta h_{st}].$$

Pour toute métrique H et tout tenseur $\overline{R} \in \mathcal{S}^2$, nous devons aussi considérer un analogue de l'opérateur de Bianchi : soit $\overline{\mathrm{Bian}}$ l'opérateur à valeurs dans les 1-formes, défini par

$$\overline{\mathrm{Bian}}(H, \overline{R}) = \mathrm{Bian}(H, HH\overline{R}),$$

où $(HH\overline{R})_{ij} = H_{is}H_{jt}\overline{R}^{st}$ (nous utiliserons cette écriture tout au long du calcul qui suit). L'identité de Bianchi Bian(H,Ricci(h)) $\equiv 0$ (section 4.4) se traduit ici par l'identitée de Bianchi contravariante

$$\overline{\mathrm{Bian}}(H, \overline{\mathrm{Ricci}}) \equiv 0.$$

Le linéarisé de $\overline{\text{Bian}}$ par rapport à H est donné par

$D_H\overline{\text{Bian}}(H,\overline{R})\delta h = D_H\text{Bian}(H,HH\overline{R})\delta h{+}D_R\text{Bian}(H,HH\overline{R})(\delta hH\overline{R}{+}H\delta h\overline{R}),$

et comme $Bian$ est linéaire en R, on obtient

$D_H\overline{\text{Bian}}(H,\overline{R})\delta h = D_H\text{Bian}(H,HH\overline{R})\delta h{+}\text{Bian}(H,\delta hH\overline{R}){+}\text{Bian}(H,H\delta h\overline{R}).$

Notons que $(\delta hH_0\overline{R})_{ij} = \delta h_{is}H_{0jt}\overline{R}_0^{st} = -(n-1)\delta h_{ij}$. Ainsi en $H = H_0$ et $\overline{R} = \overline{R}_0$, on a

$$\begin{aligned} D_H\overline{\text{Bian}}(H_0,\overline{R}_0)\delta h &= D_H\text{Bian}(H_0,R_0)\delta h - 2(n-1)\text{Bian}(H_0,\delta h) \\ &= -(n-1)\text{div}_0\text{grav}_0\delta h + 2(n-1)\text{div}_0\text{grav}_0\delta h \\ &= (n-1)\text{div}_0\text{grav}_0\delta h. \end{aligned}$$

Considérons (avec, désormais toujours $H = H_0 + h$ et $\overline{R} = \overline{R}_0 + \overline{r}$) :

$$\overline{F}(h,\overline{r}) = \overline{Q}(H,\overline{R}) = \overline{\text{Ricci}}(H) + \frac{1}{n-1}H_0^{-1}H_0^{-1}\text{div}_0^*\overline{\text{Bian}}(H,\overline{R}) - \overline{R}.$$

$\overline{F}$ définit une application d'un voisinage de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)\times\Lambda^{s+2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}^2)$ dans $\Lambda^{s+2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}^2)$. En effet, il suffit pour cela de reprendre la démonstration du lemme 16 (section 4.4) en remarquant que si l'on pose $R = HH\overline{R}$, l'application de $\Lambda^{s+2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}^2)$ dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ qui à $\overline{r} = \overline{R} - \overline{R}_0$ associe $r = R - R_0$ est lisse (en fait, affine).

D'autre part, d'après ce qui précède et d'après le paragraphe 4.4(en gardant les mêmes notations), on a

$$\begin{aligned} D_h\overline{F}(0,0)\delta h &= D_H\overline{Q}(H_0,\overline{R}_0)\delta h \\ &= H_0^{-1}H_0^{-1}\{\tfrac{1}{2}[(\triangle_0 + 4(n-1))(uH_0) + (\triangle_0 + 2n - 4)h_0]\}. \end{aligned}$$

Tout comme pour le lemme 15 (section 4.4), d'après le théorème d'isomorphisme de [GL], en remarquant que l'application de $\Lambda^{t-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ dans $\Lambda^{t+2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}^2)$ qui à δr associe $H_0^{-1}H_0^{-1}\delta r$ (où $(H_0^{-1}H_0^{-1}\delta r)^{ij} = H_0^{is}H_0^{js}\delta r_{st}$) est un isomorphisme, on obtient le

Lemme 19 *Si* $2n-4 > s(s-(n-1))$ *alors* $D_h\overline{F}(0,0)$ *est un isomorphisme de* $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}^2)$ *dans* $\Lambda^{s+2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$.

On peut maintenant donner le

Théorème 33 *Si $s \geq 0$ et $2n-4 > s(s-(n-1))$, alors l'équation*

$$\overline{F}(h,\overline{r}) = \overline{Ricci}(H_0+h)+\frac{1}{(n-1)}H_0^{-1}H_0^{-1}div_0^*\overline{Bian}(H_0+h,\overline{R}_0+\overline{r}))-(\overline{R}_0+\overline{r}) = 0,$$

pour $\overline{r}$ donné dans $\Lambda^{s+2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}^2)$ voisin de zéro, possède une unique solution h voisine de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$. L'application solution $\overline{r} \longrightarrow h$ est lisse d'un voisinage de zéro dans $\Lambda^{s+2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}^2)$ dans un voisinage de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$. De plus, lorque $k \geq 1$, quitte à réduire les voisinages, la solution vérifie

$$\overline{Ricci}(H_0+h) = \overline{R}_0 + \overline{r}.$$

Rappel : La condition $s \geq 0$ est imposée pour assurer que le tenseur symétrique $H_0 + h$ reste non dégénéré pour h voisin de zéro.

Preuve :
Tout comme pour le théorème 28 (section 4.4), il suffit de vérifier que pour r "petit", la solution vérifie $\overline{\mathrm{Ricci}}(H_0+h) = \overline{R}_0 + \overline{r}$. On procède de la même manière. On applique l'opérateur $\overline{\mathrm{Bian}}(H,.)$ à l'équation $\overline{Q}(H,\overline{R}) = 0$, ce qui nous donne, compte-tenu de l'identité de Bianchi contravariante (cf. supra),

$$\frac{1}{(n-1)}\overline{\mathrm{Bian}}[H, H_0^{-1}H_0^{-1}\mathrm{div}_0^*\overline{\mathrm{Bian}}(H,\overline{R})] - \overline{\mathrm{Bian}}(H,\overline{R}) = 0.$$

On pose ensuite $\omega = \overline{\mathrm{Bian}}(H,\overline{R})$; ω vérifie l'équation

$$\overline{\mathrm{Bian}}(H, H_0^{-1}H_0^{-1}\mathrm{div}_0^*\omega) - (n-1)\omega = 0. \qquad (*)$$

D'autre part, d'après le lemme 14 (section 4.4), on a

$$\overline{\mathrm{Bian}}(H_0, H_0^{-1}H_0^{-1}\mathrm{div}_0^*\omega) = \mathrm{Bian}(H_0, \mathrm{div}_0^*\omega) = -\frac{1}{2}(\triangle_0\omega + (n-1)\omega).$$

On considère l'application linéaire $\overline{L}$ de $\Lambda^{s-1}_{k+1,\alpha}(B,\mathcal{T}_1)$ dans $\Lambda^{s-1}_{k-1,\alpha}(B,\mathcal{T}_1)$ définie par :

$$\overline{L}\omega = \overline{\mathrm{Bian}}(H_0, H_0^{-1}H_0^{-1}\mathrm{div}_0^*\omega) - (n-1)\omega = -\frac{1}{2}(\triangle_0\omega + 3(n-1)\omega).$$

D'après le théorème d'isomorphisme de [GL], $\overline{L}$ est un isomorphime puisque $3(n-1) \geq 2n-4 > s(s-(n-1))$ et il existe $C > 0$ tel que

$$\| \omega \|^{(s-1)}_{k+1,\alpha} \leq C \| \overline{L}\omega \|^{(s-1)}_{k-1,\alpha} .$$

Comme d'autre part ω vérifie $(*)$ on a :

$$\overline{L}\omega = \overline{\mathrm{Bian}}(H_0, H_0^{-1}H_0^{-1}\mathrm{div}_0^*\omega) - \overline{\mathrm{Bian}}(H, H_0^{-1}H_0^{-1}\mathrm{div}_0^*\omega).$$

Par le même procédé que pour l'équation de Ricci (cf. paragraphe 4.4), on conclut que pour $\overline{r}$ assez petit, $\omega = 0$. ■

Remarques :
(i)La condition $2n-4 > s(s-(n-1))$ peut s'écrire $(n-1)(s+2) > s^2+2$ et comme $n > 1$, il faut $s > -2$; de même en l'écrivant $n > \frac{s^2+2}{s+2} + 1 = f(s)$, on voit qu'il faut au moins $n \geq 2$, puisque f est minimale pour $s = -2+\sqrt{6}$ et vaut alors environ $1,8$. Comme d'autre part, on a $s \geq 0$, il faut en fait $n > 2$. Enfin la condition peut s'écrire

$$0 \leq s < s_2 = \frac{n-1+\sqrt{(n-1)^2+8(n-2)}}{2},$$

nous voyons qu'alors s_2 tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

(ii) La condition pour annuler ω est, ici encore, plus faible que celle requise pour l'existence de h (cf. remarque (ii) en fin de section 4.4).

On vient de voir que l'on peut prescrire l'opérateur de Ricci contravariant au voisinage de $\overline{R}_0$, pour $s \geq 0$, donc en particulier pour $s = 0$, c'est-à-dire pour des perturbations qui se comportent comme H_0 à l'infini. L'unicité de la solution locale h donnée par le théorème 33 (section 4.6), pour $\overline{r}$ donné, implique que la métrique conforme à l'infini

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^2(H_0 + h)$$

ne peut être prescrite sur ∂B (on ne peut pas poser de problème de Dirichlet conforme du type considéré dans [GL]), mais que cette quantité est déterminée sur ∂B par l'équation $\overline{F}(h, \overline{r}) = 0$ dans B. Explicitons ce qui se passe au bord en considérant $\overline{r} \in \rho^2 C^0(\overline{B}, \mathcal{S}^2)$ et en *supposant* que l'on a une solution $h \in \rho^{-2}C^2(\overline{B}, \mathcal{S}_2)$ (notons que même pour $\overline{r}$ petit dans $\Lambda^2_{k+2,\alpha}$, le théorème 33 (section 4.6) donne une solution dans $\Lambda^{-2}_{k+2,\alpha}$, mais pas forcément dans $\rho^{-2}C^0(\overline{B}, \mathcal{S}_2)$). Sous les hypothèses précédentes sur h, a lieu le développement suivant [GL p.192], en posant $\breve{H} = \rho^2 H$:

$$R_{jk} = -\rho^{-2}(n-1)(\breve{H}^{il}\rho_i\rho_l)\breve{H}_{jk} + O(\rho^{-1})$$

(en particulier, $\rho^2 R_{jk}$ tend vers $-(n-1)(\breve{H}^{il}\rho_i\rho_l)\breve{H}_{jk}$ lorsque ρ tend vers 0). Ici $\breve{H}^{il}$ désigne le tenseur *inverse* de $\breve{H}_{ij}$, tel que $\breve{H}^{il}\breve{H}_{ij} = \delta^l_j$. Il vient

$$H^{ik}H^{jl}R_{lk} = -\rho^{-2}(n-1)(\breve{H}^{st}\rho_s\rho_t)H^{ik}H^{jl}\breve{H}_{lk} + O(\rho^3),$$

ou encore

$$\overline{R}^{ij} = -\rho^2(n-1)|d\rho|^2_{\breve{H}}\breve{H}^{ij} + O(\rho^3).$$

On a donc

$$\breve{H}^{ij} = -\frac{1}{(n-1)|d\rho|^2_{\breve{H}}}\rho^{-2}\overline{R}^{ij} + O(\rho),$$

et quand ρ tend vers 0, on obtient sur ∂B :

$$\breve{H}^{ij} = -\frac{1}{(n-1)|d\rho|^2_{\breve{H}}}\lim_{\rho\to 0}\rho^{-2}\overline{R}^{ij}.$$

Si $\breve{G}$ est une autre solution, elle doit donc être conforme à $\breve{H}$ sur ∂B : on a $\breve{G}^{ij} = e^{-2f}\breve{H}^{ij}$ et $|d\rho|^2_{\breve{G}} = e^{-2f}|d\rho|^2_{\breve{H}}$ sur ∂B. D'autre part, on a aussi

$$\breve{G}^{ij} = -\frac{1}{(n-1)|d\rho|^2_{\breve{G}}}\lim_{\rho\to 0}\rho^{-2}\overline{R}^{ij},$$

ce qui nous donne sur ∂B

$$e^{-4f}\breve{H}^{ij} = -\frac{1}{(n-1)|d\rho|^2_{\breve{H}}}\lim_{\rho\to 0}\rho^{-2}\overline{R}^{ij},$$

soit finalement $e^{-4f} = 1$ puisque $\lim_{\rho\to 0}\rho^{-2}\overline{R}^{ij}$ est non dégénérée pour $\overline{r}$ petit. Donc $f = 0$ et on retrouve l'unicité au bord.

4.7 Equation de Ricci en dimension deux

4.7.1 Existence et unicité

En dimension $n = 2$, on sait que la courbure de Ricci d'une métrique H est donnée par (cf. [H] par exemple) :

$$\mathrm{Ricci}(H) = \frac{\mathrm{Scal}(H)}{2} H,$$

où $\mathrm{Scal}(H) = H^{ij}\mathrm{Ricci}(H)_{ij}$ est la courbure scalaire de la métrique H. Pour résoudre l'équation

$$\mathit{Ricci}(H) = R, \tag{1}$$

où R est donné dans S_2 au voisinage de R_0, nous devons donc chercher H sous la forme

$$H = \mathrm{e}^{2f}(-R)$$

(rappelons que $R_0 = -H_0$ et donc que si R est assez proche de R_0, $-R$ est définie positive et peut être considérée comme une métrique sur B). Or la courbure scalaire d'une telle métrique conforme est donnée par

$$\mathrm{Scal}(H) = \mathrm{e}^{-2f}[\triangle_{-R}(2f) + \mathrm{Scal}(-R)],$$

donc sa courbure de Ricci, par

$$\mathrm{Ricci}(H) = \frac{1}{2}\mathrm{Scal}(H)\mathrm{e}^{2f}(-R) = [\triangle_{-R}(f) + \frac{\mathrm{Scal}(-R)}{2}](-R).$$

Ainsi, résoudre l'équation (1) équivaut à résoudre

$$[\triangle_{-R}(f) + \frac{\mathrm{Scal}(-R)}{2}] = -1. \tag{2}$$

On peut maintenant donner le

Théorème 34 *Si $0 < s < 1$ alors l'équation*

$$\mathit{Ricci}(H_0 + h) = R_0 + r,$$

pour r donné dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ voisin de zéro, possède une unique solution h voisine de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$. De plus l'application solution $r \to h$ est lisse au voisinage de zéro entre les Banach correspondants.

Preuve :
Remarquons tout d'abord que lorsque $R = R_0 + r = -H_0 + r$, avec $r \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}^2)$, alors $[(-R)^{-1}]^{ij} = H_0^{ij} + \widetilde{(-r)}^{ij}$ où $\widetilde{(-r)} \in \Lambda^{s+2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}^2)$ joue ici le rôle de la perturbation $\widetilde{h}$ introduite dans le corollaire 17 (section 4.10) ; l'application

$$r \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow \widetilde{(-r)} \in \Lambda^{s+2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}^2)$$

est en particulier *lisse*. Il vient par conséquent

$$\mathrm{Scal}(-R) = \mathrm{Scal}(H_0 - r) = (H_0 + \widetilde{(-r)})^{ij}\mathrm{Ricci}(H_0 - r)_{ij}$$

ce qui permet de définir une application lisse (d'après le corollaire 22 section 4.10)

$$r \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow \sigma = \sigma(r) \in \Lambda^{s}_{k,\alpha}(B)$$

par

$$\mathrm{Scal}(H_0) + \sigma = -2 + \sigma = (H_0 + \widetilde{(-r)})^{ij}\mathrm{Ricci}(H_0 - r)_{ij}.$$

L'équation (2) est finalement équivalente à la suivante :

$$\triangle_{-R} f = -\frac{\sigma(r)}{2}. \tag{3}$$

D'après le théorème d'isomorphisme de [GL], si

$$0 > s(s-1),$$

alors $\triangle_0$ est un isomorphisme de $\Lambda^{s}_{k+2,\alpha}(B)$ dans $\Lambda^{s}_{k,\alpha}(B)$. D'autre part, d'après le lemme 26 (section 4.10), on sait que $\triangle_{H_0+h}$ tend vers $\triangle_0$ dans $\mathcal{L}(\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B), \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B))$ lorsque h tend vers 0 dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$. Ainsi d'après le lemme 9 (section 2.2), pour r voisin de zéro dans $\Lambda^{s}_{k+2,\alpha}(B)$, $\triangle_{-R}$ reste un isomorphisme. Il existe donc une unique solution $f \in \Lambda^{s}_{k+2,\alpha}(B)$ de l'équation (3). Bien entendu, comme $H_0 + h = \mathrm{e}^{2f}(-R) = \mathrm{e}^{2f}(H_0 - r)$, alors

$$h = (\mathrm{e}^{2f} - 1)H_0 - \mathrm{e}^{2f} r$$

est dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ car $H_0 \in \Lambda^{-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$, $(\mathrm{e}^{f} - 1) \in \Lambda^{s}_{k+2,\alpha}(B)$ d'après la proposition 3 alinéa (14) (section 2.2), e^{2f} est dans $\Lambda^{0}_{k+2,\alpha}(B)$ et r dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ ■

4.7.2 Un problème de Dirichlet

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'il y a existence et unicité d'une métrique $H = H_0 + h$ (avec $h \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$) voisine de H_0 pour $r \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ donné assez petit avec $0 < s < 1$. Nous allons examiner ici ce qui se passe lorsque

$$r = \lambda R_0 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

cas dans lequel on atteint le poids-limite $s = 0$.

On considère donc l'équation

$$\mathrm{Ricci}(H_0 + h) = (1 + \lambda) R_0,$$

où λ est un réel donné quelconque. Rappelons que pour tout réel positif C,

$$\mathrm{Ricci}(CH_0) = R_0$$

ce qui exclut la piste naïve d'une solution h du même type que la donnée r. On a vu précédemment que $H = H_0 + h$ est forcément conforme à $R = (1+\lambda)R_0$ donc à H_0, et que si l'on pose $H = \mathrm{e}^{2f} H_0$, l'équation précédente équivaut à

$$\triangle_0 f = -\lambda. \tag{4}$$

Nous avons maintenant assez d'éléments pour donner la

Proposition 25 *Les solutions de l'équation*

$$Ricci(H) = (1 + \lambda) R_0,$$

où λ est un réel donné quelconque, sont toutes les métriques de la forme

$$H = e^{2g} \rho^{-2\lambda} H_0,$$

où g est une fonction harmonique sur B.

Preuve :
En dimension deux, dans le système de coordonnées euclidien, le Laplacien hyperbolique est donné par (cf. preuve du théorème 22 section 2.2) :

$$\triangle_0 f = -\rho^2 (\partial_1^2 f + \partial_2^2 f).$$

Ainsi nous devons résoudre l'équation

$$\partial_1^2 f + \partial_2^2 f = \frac{\lambda}{\rho^2} = \frac{4\lambda}{(1 - x_1^2 - x_2^2)^2}.$$

Une solution particulière est

$$f(x_1, x_2) = -\lambda \ln[\frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2)] = -\lambda \ln(\rho),$$

et si $\widetilde{f}$ est une autre solution, alors $g = \widetilde{f} - f$ est harmonique. Finalement, les solutions sont de la forme

$$H = \mathrm{e}^{-2\lambda \ln(\rho)+2g} H_0 = \mathrm{e}^{2g} \rho^{-2\lambda} H_0. \qquad \blacksquare$$

La proposition 25 (section 4.7) nous donne une infinité de solutions pour l'équation

$$\mathrm{Ricci}(H) = (1 + \lambda) R_0,$$

qui sont toutes de la forme $H = \mathrm{e}^{2g} \rho^{-2\lambda} H_0 = \mathrm{e}^{2g} \rho^{-2\lambda-2} E$, où g est harmonique sur B. Or d'après [An], le problème de Dirichlet asymptotique

$$\begin{cases} \triangle_0 g &= 0 \quad \text{sur } B \\ g &= f \quad \text{sur } \partial B \end{cases}$$

pour f donnée dans $C^0(\partial B)$, possède une unique solution g dans $C^\infty(B) \cap C^0(\overline{B})$. Ainsi on obtient directement le

Théorème 35 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque. Pour toute fonction f continue sur ∂B donnée, le problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} \mathit{Ricci}(H) &= (1 + \lambda) R_0 \quad \mathit{sur}\ B \\ \lim_{\rho \to 0} \rho^{2\lambda+2} H &= e^{2f} E \quad \mathit{sur}\ \partial B \end{cases}$$

possède une solution unique H dans $C^\infty(B, \mathcal{S}_2)$, avec $\rho^{2\lambda+2} H \in C^0(\overline{B}, \mathcal{S}_2)$.

4.7.3 Un résultat d'obstruction

Nous déduisons en outre de la proposition 25 le résultat d'obstruction suivant :

Corollaire 15 *Si $\lambda \neq 0$, il n'y a pas de solution h dans $\Lambda_0^{-2} \cap C^2_{loc}(B, \mathcal{S}_2)$ de l'équation*

$$\mathit{Ricci}(H_0 + h) = (1 + \lambda) R_0.$$

PREUVE :
On a vu précédemment que toute solution est nécessairement *conforme* : $H = \mathrm{e}^{2u} H_0$. Si donc $H = H_0 + h$, on a l'équivalence

$$h \in \Lambda_0^{-2} \cap C^2_{loc}(B, \mathcal{S}_2) \Longleftrightarrow u \in \Lambda_0^0 \cap C^2_{loc}(B),$$

ceci d'après la proposition 3 alinéa (14) (section 2.2). Or pour $H = \mathrm{e}^{2u} H_0$ solution, avec $u \in \Lambda_0^0 \cap C_{loc}^2(B)$, la proposition 25 montre que

$$\varphi = \lambda \ln(\rho) + u$$

est *harmonique*. D'après [GT p. 14], on a alors

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} \varphi ds = \frac{1}{2\pi R} \lambda 2\pi R \ln[\frac{1}{2}(1 - R^2)] + \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} u ds.$$

Comme $u \in \Lambda_0^0(B)$, d'une part

$$\varphi(0) = \lambda \ln(\frac{1}{2}) + u(0)$$

est fini ; d'autre part il existe $M > 0$ telle que $|u| \leq M$, ce qui nous donne

$$|\varphi(0)| \geq |\lambda \ln[\frac{1}{2}(1 - R^2)]| - \frac{1}{2\pi R} 2\pi R M = |\lambda \ln[\frac{1}{2}(1 - R^2)]| - M.$$

Ainsi $|\varphi(0)|$ tend vers l'infini quand R tend vers 1, ce qui est impossible. ■

4.8 Une résolution de l'équation de Ricci avec changement d'infinité conforme.

Au paragraphe 4.4 nous résolvions l'équation $\mathrm{Ricci}(H_0+h) = R_0+r$ pour r voisin de zéro donné dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ avec la solution h dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$. Pour l'argument de fonction implicite, nous avions besoin de la condition technique $s > 2$ (cf. remarque (i) en fin de section 4.4). Ainsi cette solution h ne modifiait pas ce qu'il est convenu d'appeler avec [GL] *l'infinité conforme* :

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{-2}(H_0 + h)$$

qui est égale à E, la métrique euclidienne, en l'occurence.

Dans ce paragraphe, nous commençons par modifier H_0 en une métrique $H_1 = H_0 + h_0$ où h_0 est donné dans $\Lambda^{-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ voisin de zéro. On cherche ensuite à résoudre l'équation

$$\mathrm{Ricci}(H_1 + h) = \mathrm{Ricci}(H_1) + r,$$

où r est donné dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$. Posons R_1 =Ricci(H_1) et mettons l'indice 1 pour toutes les quantités faisant intervenir la métrique H_1, comme nous le faisions pour H_0. Nous allons utiliser la même méthode que dans la section 4.4 plus un ingrédient, un argument de continuité par rapport au paramètre h_0.

Remarque : Le "vrai" problème de Dirichlet reste ouvert. Ce problème consiste à se donner un tenseur $R = R_0+r_0$ avec $r_0 \in \Lambda^{-2}(B, \mathcal{S}_2)$ de sorte que $\breve{R} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 R \neq \breve{R}_0 = -(n-1)E$ (E désignant la métrique euclidienne) et à chercher une métrique asymptotiquement hyperbolique admettant R pour tenseur de Ricci. On sait que si H est une telle métrique, alors nécessairement à l'infini, d'une part $|d\rho|^2_{\breve{H}} = 1$, d'autre part $\breve{H} = -\frac{1}{n-1}\breve{R}$: l'ensemble fournit donc une condition *nécessaire* sur R. Lorsqu'elle est satisfaite, on peut partir, non pas de H_0, mais d'une métrique *d'Einstein* H_1 admettant $-\frac{1}{n-1}\breve{R}$ comme infinité conforme (une telle H_1 existe d'après [GL]). Il reste à trouver $h_1 \in \Lambda^{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$ solution de l'équation

$$\mathrm{Ricci}(H_1 + h_1) = R = R_1 + r_1$$

(la dernière égalité définit r_1). A ce stade, on sait [GL] (p. 192) que

$$\mathrm{Ricci}(H_1 + h_1) = -(n-1)(H_1 + h_1) \bmod O(\rho^{-1}),$$

ce qui implique

$$r_1 = -(n-1)h_1 \bmod O(\rho^{-1}).$$

Sur cette dernière relation, on anticipe qu'il faille travailler (pour h_1 et r_1) dans des espaces $\Lambda^{s-2}(B,\mathcal{S}_2)$ avec $(s-2)<-1$, c'est à dire avec $s<1$. Or comme il est souligné dans [GL] p. 218, on pourrait espérer résoudre notre problème pour $(s-2)$ compris dans un intervalle un peu plus large que $]s_1-2,s_2-2[$, mais la borne inférieure de l'intervalle mentionnée par [GL] (liée à un exposant caractéristique) se trouve supérieure à 1 (et tendant vers 1 quand n tend vers l'infini). Ceci laisse peu d'espoir pour $(s-2)<-1$. ■

Pour h et r dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ voisins de zéro, soit

$$F_1(h,r)=\mathrm{Ricci}(H_1+h)+\mathrm{div}_1^*(H_1R_1^{-1}\mathrm{Bian}(H_1+h,R_1+r))-(R_1+r),$$

où $(H_1R_1^{-1})^i_j=H_1^{si}R_{1sj}$. On rappelle que (cf. paragraphe 4.4) :

$$(D_H\mathrm{Ricci}(H)\delta h)_{ij}=\frac{1}{2}(\triangle\delta h)_{ij}+\Theta(\delta h)_{ij}-(\mathrm{div}^*\mathrm{div\ grav}(\delta h))_{ij},$$

et que (cf. paragraphe 4.3)

$$(D_H\mathrm{Bian}(H,R)\delta h)_m=H^{st}R_{tm}(\mathrm{div\ grav}\delta h)_s-T_m^{ps}\delta h_{qs}.$$

Ce qui nous donne

$$D_hF_1(0,0)\delta h=\frac{1}{2}\triangle_1\delta h+\Theta_1(\delta h)-\mathrm{div}_1^*(H_1R_1^{-1}T_1\delta h),$$

avec,

$$\triangle_1\delta h_{ij}=-(H_1)^{pq}\nabla_{1p}\nabla_{1q}\delta h_{ij},$$

$$\begin{aligned}\Theta_1(\delta h)_{ij} &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Ricci}(H_1)_{is}(H_1)^{st}\delta h_{tj}\\ &\quad+\tfrac{1}{2}\mathrm{Ricci}(H_1)_{js}(H_1)^{st}\delta h_{ti}\\ &\quad-Sect(H_1)_{isjt}(H_1)^{sp}(H_1)^{tq}\delta h_{pq}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}T_{1m}^{qs} &= (H_1)^{qk}(H_1)^{sl}(\partial_k\mathrm{Ricci}(H_1)_{lm}-\tfrac{1}{2}\partial_m\mathrm{Ricci}(H_1)_{kl}\\ &\quad-\Gamma_{1kl}^{\ i}\mathrm{Ricci}(H_1)_{im}).\end{aligned}$$

Commençons par donner le

Lemme 20 *Si s vérifie $-2n>s(s-(n-1))$, et si h_0 est voisin de zéro dans $\Lambda^{-2}_{k+4,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$, alors $D_hF_1(0,0)$ est un isomorphisme de $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ dans $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$*

Preuve :
Sachant d'après le lemme 15 (section 4.4), que pour $h_0 = 0$, on a isomorphisme, en vertu du lemme 9 (section 2.2), il nous suffit de montrer que l'application

$$h_0 \in \Lambda^{-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow D_h F_1(0,0) \in \mathcal{L}(\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2), \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_2))$$

est continue en zéro. Déjà, il est clair que tout comme au corollaire 22, (section 4.4) les applications

$$h_0 \in \Lambda^{-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow R_1 = \mathrm{Ricci}(H_0 + h_0) \in \Lambda^{-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2),$$

et

$$h_0 \in \Lambda^{-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow \mathcal{R}_1 = Sect(H_0 + h_0) \in \Lambda^{-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_4),$$

sont continues en zéro. Ainsi, les applications

$$h_0 \in \Lambda^{-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow \Theta_1 \in \mathcal{L}(\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2), \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)),$$

et

$$h_0 \in \Lambda^{-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow T_1 \in \Lambda^{s-1}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{T}_1)$$

sont continues en zéro. D'autre part, d'après le lemme 26 (section 4.10), l'application

$$h_0 \in \Lambda^{-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow \triangle_1 \in \mathcal{L}(\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2), \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_2))$$

est continue en zéro. Enfin d'après le lemme 25 (section 4.10)et ce qui précède sur T_1 et R_1, l'application

$$h_0 \in \Lambda^{-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \longrightarrow \mathrm{div}^*_1(H_1^{-1} R_1 T_1 .) \in \mathcal{L}(\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2), \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_2))$$

est continue en zéro. Finalement,

$$h_0 \longrightarrow D_h F_1(0,0)$$

est continue en zéro. ■

Remarque :
Il est clair que pour h_0 voisin de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+4,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$, H_1 est une métrique, donc $D_h F_1(0,0)$ est encore elliptique.

En vue d'utiliser le Théorème des fonctions implicites, il nous reste à montrer que F_1 est lisse d'un voisinage de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2) \times \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$, à valeurs dans $\Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$, pour $h_0 \in \Lambda^{-2}_{k+4,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ lui-même assez voisin de zéro. Pour cela, il suffit de remarquer que les corollaires 22 et 23 de l'appendice 4.10 n'utilisent pas la spécificité de H_0. Par conséquent, on peut y remplacer H_0 par H_1 et R_0 par R_1, la seule condition supplémentaire requise est que H_1 soit plus régulière ($k+4$ au lieu de $k+2$) pour que R_1 ait la bonne régularité ($k+2$). On conclut ensuite comme pour le lemme 16 (section 4.4).

On peut maintenant donner le

Théorème 36 *Si $-2n > s(s-(n-1))$ et si h_0 est voisin de zéro dans $\Lambda^{-2}_{k+4,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$, alors l'équation*

$$Ricci(H_1+h) + div_1^*(H_1R_1^{-1}Bian(H_1+h,R_1+r)) = (R_1+r),$$

pour r donné dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ voisin de zéro, possède une solution unique h voisine de zéro dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$. De plus, lorsque $k \geq 1$, quitte à réduire les voisinages de zéro, notre solution vérifie

$$Ricci(H_0+h_0+h) = Ricci(H_0+h_0) + r.$$

PREUVE :
D'après le Théorème des fonctions implicites, la première partie du théorème est évidente. Il reste à montrer que notre solution vérifie $\mathrm{Bian}(H,R)=0$ avec $H = H_1+h$ et $R = R_1+r$. Pour cela on procède comme pour le théorème 28 (section 4.4). On applique l'opérateur Bian(H,.) à $F_1(h,r)=0$, ce qui nous donne

$$\mathrm{Bian}(H, \mathrm{div}_1^* H_1R_1^{-1}\mathrm{Bian}(H,R)) - \mathrm{Bian}(H,R) = 0.$$

Posons alors $\omega = H_1R_1^{-1}\mathrm{Bian}(H,R)$; ω vérifie l'équation

$$\mathrm{Bian}(H,\mathrm{div}_1^*\omega) - R_1H_1^{-1}\omega = 0. \qquad (*1)$$

Rappelons que, d'après le lemme 14 (section 4.3), on a

$$\mathrm{Bian}(H_1,\mathrm{div}_1^*\omega) = \frac{1}{2}(-\triangle_1\omega + R_1H_1^{-1}\omega).$$

Considérons l'application linéaire L_1 de $\Lambda^{s-1}_{k+1,\alpha}(B,\mathcal{T}_1)$ dans $\Lambda^{s-1}_{k-1,\alpha}(B,\mathcal{T}_1)$ définie par

$$L_1\omega = \mathrm{Bian}(H_1,\mathrm{div}_1^*\omega) - R_1H_1^{-1}\omega = \frac{1}{2}(-\triangle_1\omega - R_1H_1^{-1}\omega).$$

Il est clair que l'application

$$h_0 \in \Lambda^{-2}_{k+4,\alpha}(B,\mathcal{S}_2) \longrightarrow L_1 \in \mathcal{L}(\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2), \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)),$$

est continue en zéro (cf. preuve du lemme 26). Or d'après [GL], pour $h_0 = 0$, $L_1 = L$ est un isomorphimse si

$$-(n-1) > s(s-(n-1)).$$

D'après le lemme 9 (section 2.2) c'est aussi le cas de L_1 pour h_0 voisin de zéro. De plus il existe $C_1 > 0$ telle que

$$\| \omega \|_{k+1,\alpha}^{(s-1)} \leq C_1 \| L_1\omega \|_{k-1,\alpha}^{(s-1)} .$$

D'autre part si ω vérifie (*1), on a

$$L_1\omega = \underbrace{\mathrm{Bian}(H_1, \mathrm{div}_1^*\omega) - \mathrm{Bian}(H, \mathrm{div}_1^*\omega)}_{\mathcal{L}_r^1\omega}.$$

Il suffit alors de reprendre la démonstration du théorème sur l'équation de Ricci (cf. paragraphe 4.4) pour obtenir

$$\| \mathcal{L}_r^1\omega \|_{k-1,\alpha}^{(s-1)} \leq C_1(r) \| \omega \|_{k+1,\alpha}^{(s-1)},$$

avec $C_1(r)$ qui tend vers 0 quand r tend vers 0 dans $\Lambda_{k+2,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$. On en conclut que $\omega = 0$ en raisonnant comme pour le théorème 28 (section 4.4). ■

4.9 Une obstruction liée au poids, pour l'équation de Ricci

Nous travaillons toujours sur l'équation

$$\mathrm{Ricci}(H_0 + h) = R_0 + r,$$

avec r donné dans $\Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$. Mais ici, nous prenons s assez grand ($s > n-1$). Nous montrons alors que pour certains r, il ne peut y avoir de solution appartenant à $\Lambda^{s-2}_0(B, \mathcal{S}_2)$.

4.9.1 Remarque sur une équation linéaire

Rappelons que (cf. preuve du lemme 11, section 3.5) lorsque s est un entier plus grand que $n-1$, la solution de l'équation

$$\triangle_0 \varphi = \rho^s,$$

qui s'annule sur ∂B est de la forme $\varphi = a_{n-1}\rho^{n-1} + ... + a_{s-1}\rho^{s-1}$ avec $a_i > 0$ pour $i \in \{n-1, .., s-1\}$. De même que la solution de l'équation

$$\triangle_0 \psi = \rho^{s+1}$$

qui s'annule sur ∂B est de la forme $\psi = b_{n-1}\rho^{n-1} + ... + b_s\rho^s$ avec $b_i > 0$ pour $i \in \{n-1, .., s\}$. De plus les a_i et les b_i vérifient la *même* relation de récurrence : en particulier il existe $c > 0$ tel que $a_i = cb_i$. On a alors les trois relations suivantes (les équivalences sont en $\rho = 0$)

$$\begin{array}{lll}
(1) & \triangle_0 \varphi = \rho^s & \text{et} \quad \varphi \approx a_{n-1}\rho^{n-1} \\
(2) & \triangle_0(\varphi - 2c\psi) = \rho^s - 2c\rho^{s+1} \approx \rho^s & \text{et} \quad \varphi - 2c\psi \approx -a_{n-1}\rho^{n-1} \\
(3) & \triangle_0(\varphi - c\psi) = \rho^s - c\rho^{s+1} \approx \rho^s & \text{et} \quad \varphi - c\psi \approx -cb_s\rho^s.
\end{array}$$

Ainsi, par (1) et (2), on remarque qu'une inéquation du type $\triangle_0 v \geq \rho^s$, pour ρ voisin de zéro, ne suffit pas pour préciser le comportement de v quand ρ tend vers 0. D'autre part, même si l'on a $\triangle_0 v = \rho^s + O(\rho^{s+1})$, on ne peut rien dire, par exemple dans le cas (2) où le terme en $O(\rho^{s+1})$ fait tout changer. On a donc besoin de l'équation sur tout B et de toutes les puissances de ρ, ce dont nous tenons compte dans ce qui suit.

4.9.2 Idée pour une obstruction

Rappelons que pour résoudre l'équation de Ricci (cf. paragraphe 4.4), nous avons introduit la fonction Q définie pour toute métrique H, de classe

C^2 sur B et tout R, 2-tenseur covariant symétrique, de classe C^2 sur B, par :

$$Q(H,R) = \mathrm{Ricci}(H) - R - \frac{1}{n-1}\mathrm{div}_1^*\mathrm{div}\ \mathrm{grav}R,$$

(où div et grav sont relatif à la métrique H et div_1^* est relatif à une métrique fixée H_1 dans $\Lambda^{-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$, cf. section 4.8).

Donnons tout d'abord un développement de Q.

Proposition 26 *Soient $H \in \Lambda^{-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ une métrique sur B, $R \in \Lambda^{-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ et $t \in [0,\infty[$. Soit $h \in \Lambda^{t-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ petit et $r \in \Lambda^{t-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$. On a*

$$Q(H+h,R+r) = Q(H,R) + D_HQ(H,R)h + D_RQ(H,R)r + G(h,r),$$

avec

$$D_HQ(H,R) \in \mathcal{L}(\Lambda^{t-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2),\Lambda^{t-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)),$$
$$D_RQ(H,R) \in \mathcal{L}(\Lambda^{t-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2),\Lambda^{t-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)).$$

En outre $G(h,r) \in \Lambda^{2t-2}_{k,\alpha}(M,\mathcal{S}_2)$ vérifie

$$\| G(h,r) \|^{(2t-2)}_{k,\alpha} \leq C(\hat{h},\hat{r})(1+\varepsilon(\| h \|^{(t-2)}_{k+2,\alpha}))(\| r \|^{(t-2)}_{k+2,\alpha} + \| h \|^{(t-2)}_{k+2,\alpha})^2,$$

avec $\varepsilon(\nu)$ qui tend vers 0 quand ν tend vers 0. En particulier l'application $(h,r) \longrightarrow G(h,r)$ est lisse au voisinage de zéro entre les Banach correspondants.

Preuve :
Tout d'abord, d'après le lemme 32 (section 4.10), on a

$$\mathrm{Ricci}(H+h) = \mathrm{Ricci}(H) + r_1 + r_2,$$

où r_1 est linéaire en h. Ensuite, d'après le lemme 33 (section 4.10), on a

$$\mathrm{Bian}(H+h,R+r) = \mathrm{Bian}(H,R) + b_1 + b_2,$$

où b_1 est linéaire en (h,r). Posons

$$G(h,r) = r_2 + \frac{1}{n-1}\mathrm{div}_1^* b_2.$$

On a alors

$$Q(H+h,R+r) = Q(H,R) + r_1 - r + \frac{1}{n-1}\mathrm{div}_0^* b_1 + G(h,r).$$

D'après les lemmes 32 et 33 (section 4.10) et en utilisant le fait que div_0^* est linéaire continue de $\Lambda_{k+1,\alpha}^{t-1}(B,\mathcal{T}_1)$ dans $\Lambda_{k,\alpha}^{t-2}(B,\mathcal{S}_2)$, on a

$$\| G(h,r) \|_{k+2,\alpha}^{(2t-2)} \leq C(\hat{h},\hat{r})(1+\varepsilon(\| h \|_{k+2,\alpha}^{(t-2)}))(\| r \|_{k+2,\alpha}^{(t-2)} + \| h \|_{k+2,\alpha}^{(t-2)})^2.$$

Comme d'autre part, $r_1 - r + \frac{1}{n-1}\mathrm{div}_1^* b_1$ est linéaire en (h,r) et que

$$\| G(h,r) \|_{k+2,\alpha}^{(t-2)} \leq Cte \| G(h,r) \|_{k+2,\alpha}^{(2t-2)}$$

lorsque $t \geq 0$, alors par définition du linéarisé, on a :

$$r_1 - r + \frac{1}{n-1}\mathrm{div}_1^* b_1 = D_H Q(H,R)h + D_R Q(H,R)r.$$

Remarquons que, puisque par ailleurs un calcul direct fournit

$$D_R Q(H,R)r = -r + \frac{1}{n-1}\mathrm{div}_1^*\mathrm{Bian}(H,r) \in \Lambda_{k,\alpha}^{t-2}(B,\mathcal{S}_2),$$

on a finalement

$$D_H Q(H,R)h = r_1 + \frac{1}{n-1}\mathrm{div}_1^*[b_1 - \mathrm{Bian}(H,r)] \in \Lambda_{k,\alpha}^{t-2}(B,\mathcal{S}_2). \qquad \blacksquare$$

Remarque : Sous les conditions de la proposition précédente, on a

$$Q(H+h,R+r) - Q(H,R) \in \Lambda_{k,\alpha}^{t-2}(B,\mathcal{S}_2). \qquad \blacksquare$$

Dans le cas particulier où $H = H_0 + h$ et $R = R_0 + r$, on remplace $Q(H_0+h,R_0+r)$ par

$$F(h,r) = \mathrm{Ricci}(H_0+h) - R_0 - r - \frac{1}{n-1}\mathrm{div}_0^*\mathrm{Bian}(H_0+h,R_0+r),$$

qui est *linéaire* en r. D'après la proposition 26, cette fonction peut se développer de la manière suivante.

Proposition 27 *Soit t un réel non négatif, pour h et r dans $\Lambda_{k+2,\alpha}^{t-2}(B,\mathcal{S}_2)$, on a*

$$F(h,r) = F(0,0) + D_h F(0,0)h + D_r F(0,0)r + G(h,r),$$

où $G(h,r) \in \Lambda_{k,\alpha}^{2t-2}(B,\mathcal{S}_2)$ et lorsque $\| r \|_{k+2,\alpha}^{(t-2)}$ et $\| h \|_{k+2,\alpha}^{(t-2)}$ sont assez petites

$$\| G(h,r) \|_{k,\alpha}^{(2t-2)} \leq C(\hat{h},\hat{r})(1+\epsilon(\| h \|_{k+2,\alpha}^{(t-2)}))(\| r \|_{k+2,\alpha}^{(t-2)} + \| h \|_{k+2,\alpha}^{(t-2)})^2,$$

avec $\varepsilon(\nu)$ qui tend vers 0 quand ν tend vers 0.

Rappelons maintenant que le linéarisé de F par rapport à h (à r fixé) est :

$$D_hF(0,0)\delta h = \frac{1}{2}[\triangle_0(uH_0) + (\triangle_0 - 2n)h_0],$$

où l'on a décomposé $\delta h = uH_0 + h_0$ à travers le scindage $\mathcal{S}_2 = \mathcal{H} + \mathcal{S}_{20}$. Nous avons vu que, par le Théorème des fonctions implicites, pour

$$t_1 = \frac{n-1-\sqrt{(n-1)^2-8n}}{2} < t < t_2 = \frac{n-1+\sqrt{(n-1)^2-8n}}{2},$$

il existe U voisinage de zéro dans $\Lambda^{t-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ et V voisinage de zéro dans $\Lambda^{t-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ ainsi que $h : r \in U \longrightarrow h \in V$ fonction C^1 sur U telle que $F(h,r) = 0 \Longleftrightarrow h = h(r)$ au voisinage de zéro. Ainsi, il existe $M > 0$ telle que ($||.||$ désignant la norme d'application linéaire) :

$$||D_rh|| < M$$

pour r dans un voisinage de zéro que l'on renote U. Par le Théorème des accroissements finis, on a donc

$$\| h \|^{(t-2)}_{k+2,\alpha} \leq M \| r \|^{(t-2)}_{k+2,\alpha} . \tag{$*$}$$

Dans toute la suite de cette section, nous supposerons donc ce fait acquis.

Corollaire 16 *Pour $t \in]t_1, t_2[$ et r assez petit dans $\Lambda^{t-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$, notons $h = uH_0 + h_0 \in \Lambda^{t-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{H}\oplus\mathcal{S}_{20})$ la solution du théorème 28. Alors, si $0 \leq s \leq 2t$, dans tout système euclidien de coordonnées, il existe une constante C indépendante de r telle que, pour tout i et j dans $\{1,...,n\}$,*

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}[\triangle_0(uH_0) + (\triangle_0 - 2n)h_0]_{ij} \quad &\geq \quad r_{ij} + \tfrac{1}{n-1}[div^*_0 Bian(H_0,r)]_{ij} \\ &\quad -C[\| r \|^{(t-2)}_{k+2,\alpha}]^2\rho^{s-2},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}[\triangle_0(uH_0) + (\triangle_0 - 2n)h_0]_{ij} \quad &\leq \quad r_{ij} + \tfrac{1}{n-1}[div^*_0 Bian(H_0,r)]_{ij} \\ &\quad +C[\| r \|^{(t-2)}_{k+2,\alpha}]^2\rho^{s-2}.\end{aligned}$$

Preuve :
D'après ($*$) et la proposition 27 (section 4.9), on a, pour tout i et j dans $\{1,...,n\}$,

$$|G(h,r)_{ij}| \leq C[\| r \|^{(t-2)}_{k+2,\alpha}]^2\rho^{2t-2} \leq C[\| r \|^{(t-2)}_{k+2,\alpha}]^2\rho^{s-2},$$

car $0 \leq s \leq 2t$ et $0 < \rho \leq \frac{1}{2}$. $\blacksquare$

On va maintenant montrer que $r = \mu\rho^s H_0$ donne une obstruction pour l'équation de Ricci, pour $\mu \neq 0$ assez petit et s bien choisi. On s'intéresse pour cela à la *partie conforme* (à travers la décomposition $\mathcal{S}_2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{S}_{20}$) des termes de droite dans les inéquations ci-dessus.

Lemme 21 *La partie conforme de* $\rho^s H_0 + \frac{1}{n-1} div_0^* Bian(H_0, \rho^s H_0)$ *est*

$$\underbrace{[\frac{2-n}{2(n-1)} s(\frac{s+1}{n} - 1) + 1]}_{A} \rho^s H_0 + \underbrace{\frac{2-n}{2(n-1)} s[1 - \frac{2}{n}(s+1)]}_{B} \rho^{s+1} H_0.$$

Preuve :
Tout d'abord, pour toute fonction $v \in C^2(B)$, on a

$$\mathrm{Bian}(H_0, vH_0) = H_0^{st}[\nabla_{0t}(vH_{0sm} - \frac{1}{2}\nabla_{0m}(vH_{0st})] = \nabla_{0m}v - \frac{n}{2}\nabla_{0m}v = \frac{2-n}{2}\nabla_{0m}v,$$

ainsi

$$\mathrm{div}_0^*\mathrm{Bian}(H_0, vH_0)_{ij} = \frac{2-n}{4}(\nabla_{0i}\nabla_{0j}v + \nabla_{0j}\nabla_{0i}v) \equiv \frac{2-n}{2}\nabla_{0j}\nabla_{0i}v.$$

D'une part $\nabla_{0i}\nabla_{0j}v = \partial_i\partial_j v - \Gamma_{0ij}^{\,k}\partial_k v$, avec (cf. démonstration du théorème 22) $\Gamma_{0ij}^{\,k} = \frac{1}{\rho}(\delta_i^k x_j + \delta_j^k x_i - \delta^{pk}x_p\delta_{ij})$, donc

$$\nabla_{0i}\nabla_{0j}v = \partial_i\partial_j v - \frac{1}{\rho}(x_j\partial_i v + x_i\partial_j v - \delta^{pk}x_p\partial_k v\delta_{ij}).$$

D'autre part, si $v = \rho^s$ alors $\partial_j v = -s\rho^{s-1}x_j$, ainsi

$$-\Gamma_{0ij}^{\,k}\partial_k v = s\rho^{s-2}(2x_ix_j - (\sum x_k^2)\delta_{ij}).$$

Comme $(\sum x_k^2) = 1 - 2\rho$ et comme $\partial_i\partial_j v = s(s-1)\rho^{s-2}x_ix_j - s\rho^{s-1}\delta_{ij}$, on a finalement

$$\mathrm{div}_0^*\mathrm{Bian}(H_0, \rho^s H_0)_{ij} = \frac{2-n}{2}s\rho^{s-2}[(s+1)x_ix_j + (\rho - 1)\delta_{ij}].$$

Or

$$x_ix_j = \underbrace{\frac{1-2\rho}{n}\delta_{ij}}_{\in\mathcal{H}} + \underbrace{x_ix_j + \frac{2\rho - 1}{n}\delta_{ij}}_{\in\mathcal{S}_{20}},$$

donc la partie conforme de $\mathrm{div}_0^*\mathrm{Bian}(H_0, \rho^s H_0)$ est

$$\frac{2-n}{2}s\rho^{s-2}[(s+1)\frac{1-2\rho}{n} + \rho - 1]\delta_{ij}. \qquad \blacksquare$$

Lemme 22 *Si $s > n-1$ est un entier, la solution de (A et B ayant étés définis au lemme précédent)*

$$\triangle_0 v = A\rho^s + B\rho^{s+1},$$

qui s'annule sur ∂B est de la forme $\alpha_{n-1}\rho^{n-1} + ... + \alpha_s\rho^s$, avec $\alpha_{n-1} > 0$ dès que $s > \frac{n}{2}$.

Preuve :

Nous savons d'après le lemme 11 que la solution est de la forme $\alpha_{n-1}\rho^{n-1} + ..\alpha_s\rho^s$, mais quel est le signe de α_{n-1} ? En utilisant la démonstration du lemme 11 avec $p = s-(n-1)$ et $s_2 = n-1$, on obtient que la solution de l'équation

$$\triangle_0\varphi = \rho^s,$$

est

$$\varphi = \rho^{n-1}\sum_{j=0}^{p-1}\frac{B_j}{j+n-1}\rho^j,$$

avec $B_{p-1} = \frac{1}{2s-n}$ et les B_j reliés par la relation de récurrence (où $j \geq 1$)

$$B_{j-1} = \frac{j}{(2j+n-2)}B_j.$$

Notons que cette relation est *linéaire* par rapport à B_j et que le coefficient de B_j est *positif*. De même la solution de

$$\triangle_0\psi = \rho^{s+1}$$

est

$$\psi = \rho^{n-1}\sum_{j=0}^{p}\frac{C_j}{j+n-1}\rho^j$$

où $C_p = \frac{1}{2(s+1)-n}$ et les C_j sont reliés par la *même* relation de récurrence que les B_j. En particulier,

$$\begin{aligned} C_{p-1} &= \tfrac{p}{(2p+n-2)}C_p \\ &= \tfrac{(s-n+1)}{(2s-n)}\tfrac{1}{2(s+1)-n}. \end{aligned}$$

Comme d'une part les B_j et les C_j sont définis par la même relation de récurrence et que celle-ci est *linéaire* à coefficients *positifs*, comme d'autre part

$$\alpha_{n-1} = \frac{1}{n-1}(AB_0 + BC_0),$$

il suffit pour connaître le *signe* de α_{n-1} de connaître celui de $(AB_{p-1}+BC_{p-1})$ qui lui est identique. On calcule donc

$$\begin{aligned}
&AB_{p-1} + BC_{p-1}\\
&= [\frac{2-n}{2(n-1)}s(\frac{s+1}{n}-1)+1]\frac{1}{2s-n}\\
&+\frac{2-n}{2(n-1)}s[1-\frac{2}{n}(s+1)]\frac{(s-n+1)}{(2s-n)}\frac{1}{[2(s+1)-n]}\\
&= \frac{1}{2s-n}+\frac{s(2-n)}{2(n-1)}\{(\frac{s+1}{n}-1)\frac{1}{(2s-n)}\\
&+[1-\frac{2}{n}(s+1)]\frac{(s-n+1)}{(2s-n)}\frac{1}{[2(s+1)-n]}\}
\end{aligned}$$

et l'accolade vaut

$$\{...\} = \frac{(s+1-n)}{(2s-n)}\{\frac{1}{n}+[1-\frac{2}{n}(s+1)]\frac{1}{n[\frac{2}{n}(s+1)-1]}\} = 0.$$

Donc

$$AB_{p-1} + BC_{p-1} = \frac{1}{2s-n}$$

qui est positif pour $s > \frac{n}{2}$. ■

On peut donc donner le

Théorème 37 *Soit $n \geq 10$, soit s un entier dans l'intervalle $]n-1, n-1+\sqrt{(n-1)^2-8n}[$. Posons $t = \frac{s}{2} \in]t_1, t_2[$, alors pour $\mu \neq 0$ assez petit, la solution du théorème 28 $h = uH_0 + h_0$ telle que*

$$Ricci(H_0 + h) = R_0 + \mu\rho^s H_0,$$

n'est pas dans Λ_0^{k-2} pour tout réel $k > n-1$.

Preuve : Supposons $\mu > 0$ assez petit et prenons la trace par rapport à H_0 de la première inégalité du corollaire 16 (section 4.9) en remarquant que $\triangle_0(uH_0) = (\triangle_0 u)H_0$ et en utilisant le lemme 21 (section 4.9), on a

$$\frac{1}{2}n\triangle_0 u \geq An\mu\rho^s + Bn\mu\rho^{s+1} - \underbrace{(\| \mu\rho^s H_0 \|_{k+2,\alpha}^{(t-2)})^2}_{nc^2\mu^2}\rho^s,$$

où $c = \| \rho^s H_0 \|_{k+2,\alpha}^{(t-2)}$. Par le Principe du maximum et par le lemme 22 (section 4.9), on a $u \geq 2\mu[(A-c^2\mu)\varphi + B\psi]$, c'est-à-dire

$$u \geq 2\mu\{[(A-c^2\mu)\frac{B_0}{n-1} + B\frac{C_0}{n-1}]\rho^{n-1} + \beta_n\rho^n + ... + \beta_s\rho^s\}.$$

Or comme $[(A - c^2\mu)\frac{B_0}{n-1} + B\frac{C_0}{n-1}] > 0$ pour μ assez petit, alors la fonction u ne peut appartenir à Λ_0^k lorsque $k > n-1$. De même lorsque $\mu < 0$, on travaille avec la deuxième inégalité du corollaire 16 (section 4.9). ■

4.10 Appendice

Dans cette section, H_0 désigne, plus généralement que la métrique hyperbolique, une métrique quelconque dans $\Lambda^{-2}_{p,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ (p correspondant à la régularité de h, cf. infra) et R_0, plus généralement que le tenseur de Ricci de la métrique hyperbolique, un tenseur quelconque de $\Lambda^{-2}_{p,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$.

Enonçons tout d'abord une condition qui reviendra tout au long de ce paragraphe. Rappelons que d'après la proposition 3, pour tout $s \in [0, \infty[$, tout $l \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in]0, 1[$, il existe deux constantes C' et C'' telles que pour tout $h \in \Lambda^{s-2}_{l,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$, on a (en notant $(H_0^{-1}h)^i_j = H_0^{ik} h_{kj}$) :

$$\| H_0^{-1}h \|^{(0)}_{l,\alpha} \leq Cte \| H_0^{-1}h \|^{(s)}_{l,\alpha} \leq C' \| H_0^{-1} \|^{(2)}_{l,\alpha} \| h \|^{(s-2)}_{l,\alpha} .$$

Et pour tout u et v dans $\Lambda^0_{l,\alpha}(B, \mathcal{T}^1_1)$,

$$\| uv \|^{(0)}_{l,\alpha} \leq C'' \| u \|^{(0)}_{l,\alpha} \| v \|^{(0)}_{l,\alpha} .$$

Définition 7 *Soient $s \in [0, \infty[$, $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in [0, 1[$. Soit h dans $\Lambda^{s-2}_{l,\alpha}(B, \mathcal{S}^2)$. Nous dirons que h vérifie la condition $(B_{l,\alpha;s})$ si h vérifie*

$$\| h \|^{(s-2)}_{l,\alpha} < C^{-1} (\| H_0^{-1} \|^{(2)}_{l,\alpha})^{-1},$$

où $C = C'C''$ (C' et C'' ayant été définies ci-avant).

Cette condition a été créée pour avoir la

Proposition 28 *Soient $s \in [0, \infty[$, $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0, 1[$. Soit h dans $\Lambda^{s-2}_{l,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$; supposons que h vérifie le condition $(B_{l,\alpha;s})$. Alors, on a*

$$\| H_0^{-1}h \|^{(0)}_{l,\alpha} < (C'')^{-1}.$$

où C'' a été définie ci-avant.

4.10.1 Inverse d'une métrique voisine de la métrique H_0.

Lemme 23 *Soient $s \in [0, \infty[$, $l \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0, 1[$. Soit $h \in \Lambda^{s-2}_{l,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$; supposons que h vérifie la condition $(B_{l,\alpha;s})$. Alors $H = H_0 + h$ est inversible. On peut définir $h_1 \in \Lambda^{s+2}_{l,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ linéaire en h et $h_2 \in \Lambda^{2s+2}_{l,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ tels que*

$$H^{-1} = H_0^{-1} + h_1 + h_2,$$

$$\| h_1 \|^{(s+2)}_{l,\alpha} \leq C(\hat{h}) \| h \|^{(s-2)}_{l,\alpha},$$

et

$$\| h_2 \|_{l,\alpha}^{(2s+2)} \leq C(\hat{h})(1+\epsilon(\| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)}))(\| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)})^2,$$

avec $\lim_{\mu\to 0}\epsilon(\mu) = 0$. *En particulier les applications* $h \longrightarrow h_1$ *et* $h \longrightarrow h_2$ *sont lisses en zéro entre les Banach correspondants.*

Preuve :
Regardons H^{-1} formellement : remarquons que

$$H_{ij} = H_{0ij} + h_{ij} = H_{0ij}(\delta_j^k + h_j^k),$$

où l'on a posé $h_j^i = H_0^{ik} h_{kj}$. Ainsi on a (en notant H^{ij} *l'inverse* de H_{ij}) :

$$\begin{aligned} H^{ij} &= H_0^{ik}\left[\delta_k^j + \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^{q+1} h_k^{\alpha_1} h_{\alpha_1}^{\alpha_2} ... h_{\alpha_q}^j\right] \\ &= H_0^{ij} \underbrace{-H_0^{ik} h_k^j}_{{h_1}^{ij}} + \underbrace{H_0^{ik} h_k^{\alpha} h_{\alpha}^p \overbrace{\left[\delta_p^j - h_p^j + \sum_{q=1}^{\infty}(-1)^{q+1} h_p^{\alpha_1} h_{\alpha_1}^{\alpha_2} ... h_{\alpha_q}^j\right]}^{S_p^j}}_{{h_2}^{ij}}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 3, on a :

$$\| h_1 \|_{l,\alpha}^{(s+2)} \leq Cte(\| H_0^{-1} \|_{l,\alpha}^{(2)})^2 \| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)} = C(\hat{h}) \| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)}.$$

Regardons maintenant h_2. D'après l'inégalité triangulaire et le rappel en début d'appendice, on a :

$$\| S \|_{l,\alpha}^{(0)} \leq 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(C'')^{j-1}(\| H_0^{-1}h \|_{l,\alpha}^{(0)})^j = 1 + \frac{\| H_0^{-1}h \|_{l,\alpha}^{(0)}}{1 - C'' \| H_0^{-1}h \|_{l,\alpha}^{(0)}}.$$

Ainsi la série S converge dès que $\| H_0^{-1}h \|_{l,\alpha}^{(0)} < (C'')^{-1}$, ce qui est vérifié d'après la condition $(B_{l,s;\alpha})$ et la proposition 28. Maintenant que h_2 est bien défini, nous allons estimer sa norme. Rappelons que l'on a

$$\| H_0^{-1}h \|_{l,\alpha}^{(0)} \leq C' \| H_0^{-1} \|_{l,\alpha}^{(2)} \| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)}.$$

Ainsi, d'après la proposition 3, on a

$$\| h_2 \|_{l,\alpha}^{(2s+2)} \leq Cte \| H_0^{-1} \|_{l,\alpha}^{(2)} \| H_0^{-1} \|_{l,\alpha}^{(2)} \| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)} \| H_0^{-1} \|_{l,\alpha}^{(2)} \| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)} \| S \|_{l,\alpha}^{(0)}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\| h_2 \|_{l,\alpha}^{(2s+2)} &\leq Cte(\| H_0^{-1} \|_{l,\alpha}^{(2)})^3(\| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)})^2 \left[1 + \frac{C' \| H_0^{-1} \|_{l,\alpha}^{(2)}\| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)}}{1 - C \| H_0^{-1} \|_{l,\alpha}^{(2)}\| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)}}\right] \\
&= Cte \left[1 + \frac{C' \| H_0^{-1} \|_{l,\alpha}^{(2)}\| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)}}{1 - C \| H_0^{-1} \|_{l,\alpha}^{(2)}\| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)}}\right] (\| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)})^2.
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de poser $\epsilon(\mu) = \dfrac{C' \| H_0^{-1} \|_{l,\alpha}^{(2)} \mu}{1 - C \| H_0^{-1} \|_{l,\alpha}^{(2)} \mu}$. ■

De ce lemme découle directement le

Corollaire 17 *Sous les hypothèses du lemme précédent, on a* $H^{-1} = H_0^{-1} + \widetilde{h}$*, avec* $\widetilde{h} \in \Lambda_{l,\alpha}^{s+2}(B, \mathcal{S}^2)$ *et*

$$\| \widetilde{h} \|_{l,\alpha}^{(s+2)} \leq C(\hat{h})(1 + \epsilon(\| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)})) \| h \|_{l,\alpha}^{(s-2)},$$

avec $\lim_{\mu \to 0} \epsilon(\mu) = 0$.

4.10.2 Symboles de Christoffel d'une métrique voisine de la métrique H_0

Nous travaillons ici dans un système de coordonnées fixé. Nous noterons ${\Gamma_0}_{ij}^k$ les symboles de Christoffel relatifs à H_0 et Γ_{ij}^k ceux d'une métrique voisine $H = H_0 + h$.

Lemme 24 *Soient* $s \in [0, \infty[$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0, 1[$. *Soit* h *dans* $\Lambda_{k+1,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$ *; supposons que* h *vérifie la condition* $(B_{k+1,\alpha;s})$*. Alors on peut définir* $\Gamma_1 \in \Lambda_{k,\alpha}^{s-1}(B, \mathcal{T}_2^1)$ *linéaire en* h *et* $\Gamma_2 \in \Lambda_{k,\alpha}^{2s-1}(B, \mathcal{T}_2^1)$ *tels que*

$$\Gamma_{ij}^k = {\Gamma_0}_{ij}^k + {\Gamma_1}_{ij}^k + {\Gamma_2}_{ij}^k,$$

$$\| \Gamma_1 \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \leq C(\hat{h}) \| h \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)},$$

et

$$\| \Gamma_2 \|_{k,\alpha}^{(2s-1)} \leq C(\hat{h})(1 + \epsilon(\| h \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)}))(\| h \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)})^2.$$

En particulier les applications $h \longrightarrow \Gamma_1$ *et* $h \longrightarrow \Gamma_2$ *sont lisses en zéro entre les Banach correspondants.*

Preuve :
On a

$$\begin{aligned}
2\Gamma_{ij}^k &= H^{ks}(\partial_i H_{sj} + \partial_j H_{is} - \partial_s H_{ij}) \\
&= H^{ks}(\nabla_{0i} H_{sj} + \underbrace{\Gamma_{0}{}_{is}^{p} H_{pj}} + \Gamma_{0}{}_{ij}^{p} H_{sp} \\
&\quad + \nabla_{0j} H_{is} + \Gamma_{0}{}_{ji}^{p} H_{ps} + \underline{\Gamma_{0}{}_{js}^{p} H_{ip}} \\
&\quad - \nabla_{0s} H_{ij} - \underbrace{\Gamma_{0}{}_{si}^{p} H_{pj}} - \underline{\Gamma_{0}{}_{sj}^{p} H_{ip}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, comme les termes soulignés se compensent, on a (pour la définition de $\widetilde{h}$, voir le corollaire 17 ci-avant)

$$\begin{aligned}
2(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{0}{}_{ij}^{k}) &= H^{ks}(\nabla_{0i} H_{sj} + \nabla_{0j} H_{is} - \nabla_{0s} H_{ij}) \\
&= (H_0^{ks} + \widetilde{h}^{ks})(\nabla_{0i} h_{sj} + \nabla_{0j} h_{is} - \nabla_{0s} h_{ij}) \\
&= 2(\Gamma_{1}{}_{ij}^{k} + \Gamma_{2}{}_{ij}^{k}),
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\Gamma_{1}{}_{ij}^{k} = \frac{1}{2} H_0^{ks}(\nabla_{0i} h_{sj} + \nabla_{0j} h_{is} - \nabla_{0s} h_{ij})$$

et

$$\Gamma_{2}{}_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \widetilde{h}^{ks}(\nabla_{0i} h_{sj} + \nabla_{0j} h_{is} - \nabla_{0s} h_{ij}).$$

Pour simplifier l'écriture, omettons les constantes de majoration (de la proposition 3) dans ce qui suit. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
\| \Gamma_1 \|_{k,\alpha}^{(s+1)} &\leq \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \nabla_0 h \|_{k,\alpha}^{(s-3)} \\
&\leq \| \partial h \|_{k,\alpha}^{(s-3)} + \| \Gamma_0 \|_{k,\alpha}^{(-1)} \| h \|_{k,\alpha}^{(s-2)} \\
&\leq \| h \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)},
\end{aligned}$$

les inégalités étant vérifiées d'après la proposition 3. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\| \Gamma_2 \|_{k,\alpha}^{(2s-1)} &\leq \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(s+2)} \| \nabla_0 h \|_{k,\alpha}^{(s-3)} \\
&\leq \| \widetilde{h} \|_{k+1,\alpha}^{(s+2)} \| h \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)} \\
&\leq (1 + \epsilon(\| h \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)}))(\| h \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)})^2,
\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant vérifiée d'après le corollaire 17 (et la proposition 3). ■

De ce lemme découle directement le

Corollaire 18 *Sous les hypothèses du lemme précédent, on a*

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{0ij}^{\ k} + \widetilde{\Gamma}_{ij}^{k},$$

avec $\widetilde{\Gamma} \in \Lambda_{k,\alpha}^{s-1}(B, \mathcal{T}_2^1)$*. De plus*

$$\| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \leq C(\hat{h})(1 + \epsilon(\| h \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)})) \| h \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)} .$$

En particulier l'application $h \longrightarrow \widetilde{\Gamma}$ *est lisse en zéro entre les Banach correspondants.*

4.10.3 Dérivation covariante associée à une métrique voisine de la métrique H_0

Lemme 25 *Soient* $k \in \mathbb{N}$*,* $\alpha \in]0,1[$ *et* $p \in \mathbb{N}$*. Soit* $h \in \Lambda_{k+1,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$ *; supposons que* h *vérifie la condition* $(B_{k+1,\alpha;s})$*. Si l'on note* ∇*, la dérivation covariante relative à* $H = H_0 + h$*. Alors, on a*

$$\nabla = \nabla_0 + \widetilde{\nabla},$$

avec $\widetilde{\nabla} \in \mathcal{L}(\Lambda_{k+1,\alpha}^{s-p}(B, \mathcal{T}_p), \Lambda_{k,\alpha}^{s-p-1}(B, \mathcal{T}_{p+1}))$*. De plus, on a :*

$$\| \widetilde{\nabla} \| \leq C(\hat{h})(1 + \epsilon(\| h \|_{k+1,\alpha}^{(-2)})) \| h \|_{k+1,\alpha}^{(-2)},$$

où $\| \ \|$ *est la norme d'application linéaire continue. En particulier l'application* $h \longrightarrow \widetilde{\nabla}$ *est continue en zéro entre les Banach correspondants.*

Preuve :

Rappelons que la dérivation covariante d'un tenseur covariant $\tau \in \mathcal{T}_p$ est définie en coordonnées locales par :

$$\nabla_i \tau_{j_1 \ldots j_p} = \partial_i \tau_{j_1 \ldots j_p} - \Gamma_{ij_1}^{q} \tau_{qj_2 \ldots j_p} - \ldots - \Gamma_{ij_p}^{q} \tau_{j_1 \ldots j_{p-1} q}.$$

D'après le corollaire 18, on a $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{0ij}^{\ k} + \widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}$, ainsi

$$\nabla_i \tau_{j_1 \ldots j_p} = \nabla_{0i} \tau_{j_1 \ldots j_p} - \widetilde{\Gamma}_{ij_1}^{q} \tau_{qj_2 \ldots j_p} - \ldots - \widetilde{\Gamma}_{ij_p}^{q} \tau_{j_1 \ldots j_{p-1} q}.$$

Finalement,

$$\| \widetilde{\nabla} \tau \|_{k,\alpha}^{(s-p-1)} \leq Cte \| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(-1)} \| \tau \|_{k+1,\alpha}^{(s-p)} .$$

Ou encore

$$\| \widetilde{\nabla} \| \leq Cte \| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(-1)} .$$

Le corollaire 18 permet de conclure. ■

4.10.4 Laplacien brut d'une métrique voisine de la métrique H_0

Lemme 26 *Soient $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0,1[$ et $p \in \mathbb{N}$. Soit $h \in \Lambda^{-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$; supposons que h vérifie la condition $(B_{l,\alpha;0})$ (pour $l = k+2$ et $l = k+1$). Si l'on note $\triangle$, le Laplacien brut relatif à $H = H_0 + h$. Alors, on a*

$$\triangle = \triangle_0 + \widetilde{\triangle},$$

avec $\widetilde{\triangle} \in \mathcal{L}(\Lambda^{s-p}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{T}_p), \Lambda^{s-p}_{k,\alpha}(B, \mathcal{T}_p))$. De plus, on a :

$$\| \widetilde{\triangle} \| \leq C(\hat{h})(1 + \epsilon(\| h \|^{(-2)}_{k+1,\alpha})) \| h \|^{(-2)}_{k+1,\alpha},$$

où $\| \ \|$ est la norme d'application linéaire continue. En particulier l'application $h \longrightarrow \widetilde{\triangle}$ est continue en zéro entre les Banach correspondants.

Preuve :
Rappelons que dans un système de coordonnées locales, si $\tau \in \mathcal{T}_p$, on a

$$-(\triangle \tau)_{j_1 \dots j_p} = H^{ij} \nabla_i \nabla_j \tau_{j_1 \dots j_p}.$$

Considérons $\tau \in \Lambda^{s-p}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{T}^p)$, d'après le corollaire 17 et le lemme 25, on a

$$\begin{aligned}
-(\triangle \tau)_{j_1 \dots j_p} &= (H_0^{ij} + \widetilde{h}^{ij})(\nabla_{0i} + \widetilde{\nabla}_i)(\nabla_{0j} + \widetilde{\nabla}_j)\tau_{j_1 \dots j_p} \\
&= H_0^{ij} \nabla_{0i} \nabla_{0j} \tau_{j_1 \dots j_p} + \widetilde{h}^{ij} \nabla_{0i} \nabla_{0j} \tau_{j_1 \dots j_p} \\
&\quad + H_0^{ij} \widetilde{\nabla}_i \nabla_{0j} \tau_{j_1 \dots j_p} + H_0^{ij} \nabla_{0i} \widetilde{\nabla}_j \tau_{j_1 \dots j_p} \\
&\quad + \widetilde{h}^{ij} \widetilde{\nabla}_i \nabla_{0j} \tau_{j_1 \dots j_p} + \widetilde{h}^{ij} \nabla_{0i} \widetilde{\nabla}_j \tau_{j_1 \dots j_p} \\
&\quad + H_0^{ij} \widetilde{\nabla}_i \widetilde{\nabla}_j \tau_{j_1 \dots j_p} + \widetilde{h}^{ij} \widetilde{\nabla}_i \widetilde{\nabla}_j \tau_{j_1 \dots j_p} \\
&=: -(\triangle_0 \tau)_{j_1 \dots j_p} - (\widetilde{\triangle} \tau)_{j_1 \dots j_p}.
\end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que pour $l \in \{k, k+1\}$, ∇_0 est une application linéaire continue de $\Lambda^{s-p}_{l+1,\alpha}(B, \mathcal{T}_p)$ dans $\Lambda^{s-p}_{l,\alpha}(B, \mathcal{T}_{p+1})$, nous noterons $\| \, . \, \|$ sa norme lorsque $l = k$ et $|.|$, lorsque $l = k+1$; de même pour $\widetilde{\nabla}$ (cf. lemme 25). Comme toujours, dans les majorations qui vont suivre, les constantes ne seront pas indiquées. On a

$$\begin{aligned}
\| \widetilde{\triangle}\tau \|_{k,\alpha}^{(s-p)} &\leq \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \nabla_0\nabla_0\tau \|_{k,\alpha}^{(s-p-2)} + \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{\nabla}\nabla_0\tau \|_{k,\alpha}^{(s-p-2)} \\
&+ \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \nabla_0\widetilde{\nabla}\tau \|_{k,\alpha}^{(s-p-2)} + \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{\nabla}\nabla_0\tau \|_{k,\alpha}^{(s-p-2)} \\
&+ \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \nabla_0\widetilde{\nabla}\tau \|_{k,\alpha}^{(s-p-2)} + \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{\nabla}\widetilde{\nabla}\tau \|_{k,\alpha}^{(s-p-2)} \\
&+ \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{\nabla}\widetilde{\nabla}\tau \|_{k,\alpha}^{(s-p-2)} \\
&\leq \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \nabla_0 \| \, |\nabla_0| \, \| \tau \|_{k+2,\alpha}^{(s-p)} + \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{\nabla} \| \, |\nabla_0| \, \| \tau \|_{k+2,\alpha}^{(s-p)} \\
&+ \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \nabla_0 \| \, |\widetilde{\nabla}| \, \| \tau \|_{k+2,\alpha}^{(s-p)} + \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{\nabla} \| \, |\nabla_0| \, \| \tau \|_{k+2,\alpha}^{(s-p)} \\
&+ \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \nabla_0 \| \, |\widetilde{\nabla}| \, \| \tau \|_{k+2,\alpha}^{(s-p)} + \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{\nabla} \| \, |\widetilde{\nabla}| \, \| \tau \|_{k+2,\alpha}^{(s-p)} \\
&+ \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{\nabla} \| \, |\widetilde{\nabla}| \, \| \tau \|_{k+2,\alpha}^{(s-p)} .
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de regarder les majorations respectives des normes de $\widetilde{h}$ et $\widetilde{\nabla}$ dans le corollaire 17 et le lemme 25. ■

4.10.5 Accroissement de l'opérateur de Bianchi pour une métrique voisine de la métrique H_0

Lemme 27 *Soient $s \in [0, \infty[$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0, 1[$. Soit $h \in \Lambda_{k+1,\alpha}^{-2}(B, \mathcal{S}_2)$; supposons que h vérifie la condition $(B_{k+1,\alpha;0})$. Alors, on a*

$$Bian(H_0 + h, .) = Bian(H_0, .) + B(.),$$

avec $B \in \mathcal{L}(\Lambda_{k+1,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}^2), \Lambda_{k,\alpha}^{s-1}(B, \mathcal{T}^1))$. De plus, on a

$$\| B \| \leq C(\hat{h})(1 + \epsilon(\| h \|_{k+1,\alpha}^{(-2)})) \| h \|_{k+1,\alpha}^{(-2)},$$

où $\| \ \|$ est la norme d'application linéaire continue. En particulier l'application $h \longrightarrow B$ est continue en zéro entre les Banach correspondants.

Preuve :
Dans un système de coordonnées, pour tout g dans $\Lambda_{k+1,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bian}(H, g)_m &= H^{st}(\nabla_t g_{sm} - \tfrac{1}{2}\nabla_m g_{st}) \\
&= H^{st}[\partial_t g_{sm} - \Gamma_{ts}^p g_{pm} - \Gamma_{tm}^p g_{sp} - \tfrac{1}{2}(\partial_m g_{st} - \Gamma_{ms}^p g_{pt} - \Gamma_{mt}^p g_{sp})].
\end{aligned}$$

Tout d'abord, d'après le corollaire 17, on a

$$\omega_{1m} := H^{st}\partial_t g_{sm} - H_0^{st}\partial_t g_{sm} = \widetilde{h}_1^{st}\partial_t g_{sm},$$

ainsi

$$\| \omega_1 \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \leq Cte \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(-2)} \| \partial g \|_{k,\alpha}^{(s-3)} \leq Cte \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(-2)} \| g \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)} .$$

On procède de même pour l'autre terme de la forme $H^{-1}\partial g$. D'autre part, d'après les corollaires 17 et 18, on a

$$\begin{aligned} H^{st}\Gamma_{ts}^{p} g_{pm} &= (H_0^{st} + \widetilde{h}^{st})(\Gamma_{0\,ts}^{\;p} + \widetilde{\Gamma}_{ts}^{p}) g_{pm} \\ &= H_0^{st}\Gamma_{0\,ts}^{\;p} g_{pm} + \widetilde{h}^{st}\Gamma_{0\,ts}^{\;p} g_{pm} + H_0^{st}\widetilde{\Gamma}_{ts}^{p} g_{pm} + \widetilde{h}^{st}\widetilde{\Gamma}_{ts}^{p} g_{pm}. \end{aligned}$$

Posons $\omega_{2m} := H^{st}\Gamma_{ts}^{p} g_{pm} - H_0^{st}\Gamma_{0\,ts}^{\;p} g_{pm}$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} \| \omega_2 \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \leq\ & Cte \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \Gamma_0 \|_{k,\alpha}^{(-1)} \| g \|_{k,\alpha}^{(s-2)} \\ & + Cte \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(-1)} \| g \|_{k,\alpha}^{(s-2)} \\ & + Cte \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(-1)} \| g \|_{k,\alpha}^{(s-2)} . \end{aligned}$$

On procède de même pour les trois autres termes de la forme $H^{-1}\Gamma g$. Finalement, on a (d'après les corollaires 17 et 18) :

$$\begin{aligned} \| B(g) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} &= \| \mathrm{Bian}(H_0 + h, g) - \mathrm{Bian}(H_0, g) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \\ &\leq C(\hat{h})(1 + \epsilon(\| h \|_{k+1,\alpha}^{(-2)})) \| h \|_{k+1,\alpha}^{(-2)} \| g \|_{k,\alpha}^{(s-2)}, \end{aligned}$$

avec $\lim_{\mu\to 0} \epsilon(\mu) = 0$. ■

Nous nous intéressons maintenant au tenseur $T \in \mathcal{T}_2^1$ qui apparait dans la différentielle de l'opérateur de Bianchi dans le paragraphe 4.3. Ceci lorsque H est voisine de H_0 et R voisin de R_0. Rappelons que pour toute métrique H et tout tenseur symétrique covariant R, T est défini par

$$T_m^{qs} = H^{qk}H^{sl}(\partial_k R_{lm} - \frac{1}{2}\partial_m R_{kl} - \Gamma_{kl}^{i} R_{im}).$$

Comme toujours, lorsque $H = H_0$ et $R = R_0$, nous noterons T_0 le tenseur correspondant.

Lemme 28 *Soient $s \in [0,\infty[$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0,1[$ et $r \in \Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$. Soit $h \in \Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$; supposons que h vérifie la condition $(B_{k+1,\alpha;s})$. Alors*

$$T^{qs}_m = T_0{}^{qs}_m + \widetilde{T}^{qs}_m,$$

avec $\widetilde{T} \in \Lambda^{s+1}_{k,\alpha}(B,\mathcal{T}^2_1)$. De plus, on a

$$\parallel \widetilde{T} \parallel^{(s+1)}_{k,\alpha} \leq C(\hat{h},\hat{r})(1+\epsilon(\parallel h \parallel^{(s-2)}_{k+1,\alpha}))(\parallel h \parallel^{(s-2)}_{k+1,\alpha} + \parallel r \parallel^{(s-2)}_{k+1,\alpha}).$$

En particulier l'application $(h,r) \longrightarrow \widetilde{T}$ est continue en zéro entre les Banach correspondants.

PREUVE :
D'après la définition de T et les corollaires 17 et 18, on a

$$\begin{aligned}
T^{qs}_m &= (H^{qk}_0 + \widetilde{h}^{qk})(H^{sl}_0 + \widetilde{h}^{sl}) \Bigg(\underbrace{\partial_k R_{0lm} - \frac{1}{2}\partial_m R_{0kl} - \Gamma_0{}^i_{kl} R_{0im}}_{t_{0klm}} \\
&\quad \underbrace{- \widetilde{\Gamma}^i_{kl} R_{0im} + \partial_k r_{lm} - \frac{1}{2}\partial_m r_{kl} - \Gamma_0{}^i_{kl} r_{im}}_{t_{1klm}} - \underbrace{\widetilde{\Gamma}^i_{kl} r_{im}}_{t_{2klm}} \Bigg) \\
&= \underbrace{H^{qk}_0 H^{sl}_0 t_{0klm}}_{(0)^{qs}_m} \\
&\quad + \underbrace{H^{qk}_0 H^{sl}_0 t_{1klm} + H^{qk}_0 \widetilde{h}^{sl} t_{0klm} + \widetilde{h}^{qk} H^{sl}_0 t_{0klm}}_{(1)^{qs}_m} \\
&\quad + \underbrace{H^{qk}_0 H^{sl}_0 t_{2klm} + H^{qk}_0 \widetilde{h}^{sl} t_{1klm} + \widetilde{h}^{qk} H^{sl}_0 t_{1klm} + \widetilde{h}^{qk}\widetilde{h}^{sl} t_{0klm}}_{(2)^{qs}_m} \\
&\quad + \underbrace{\widetilde{h}^{qk}\widetilde{h}^{sl} t_{1klm} + H^{qk}_0 \widetilde{h}^{sl} t_{2klm} + \widetilde{h}^{qk} H^{sl}_0 t_{2klm}}_{(3)^{qs}_m} \\
&\quad + \underbrace{\widetilde{h}^{qk}\widetilde{h}^{sl} t_{2klm}}_{(4)^{qs}_m}.
\end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que $(0) = T_0$ et que $t_0 \in \Lambda^{-3}_{k,\alpha}$, puisque $R_0 \in \Lambda^{-2}_{k+1,\alpha}$ et $\Gamma_0 \in \Lambda^{-1}_{k,\alpha}$. Nous allons tour à tour majorer les termes sélectionnés ci-dessus. Pour simplifier l'écriture, nous ne signalerons pas les constantes de majoration de la proposition 3. Déja, on a

$$\begin{aligned}\| t_1 \|_{k,\alpha}^{(s-3)} &\leq \| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \| R_0 \|_{k,\alpha}^{(-2)} + \| \partial r \|_{k,\alpha}^{(s-3)} + \| \Gamma_0 \|_{k,\alpha}^{(-1)} \| r \|_{k,\alpha}^{(s-2)} \\ &\leq \| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(s-1)} + \| r \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)},\end{aligned}$$

et

$$\| t_2 \|_{k,\alpha}^{(2s-3)} \leq \| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \| r \|_{k,\alpha}^{(s-2)} .$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\| (1) \|_{k,\alpha}^{(s+1)} &\leq (\| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)})^2 \| t_1 \|_{k,\alpha}^{(s-3)} \\ &\quad + \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(s+2)} \| t_0 \|_{k,\alpha}^{(-3)} .\end{aligned}$$

Ainsi que

$$\begin{aligned}\| (2) \|_{k,\alpha}^{(s+1)} \leq \| (2) \|_{k,\alpha}^{(2s+1)} &\leq (\| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)})^2 \| t_2 \|_{k,\alpha}^{(2s-3)} \\ &\quad + \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(s+2)} \| t_1 \|_{k,\alpha}^{(s-3)} \\ &\quad +(\| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(s+2)})^2 \| t_0 \|_{k,\alpha}^{(-3)} .\end{aligned}$$

Et que

$$\begin{aligned}\| (3) \|_{k,\alpha}^{(s+1)} \leq \| (3) \|_{k,\alpha}^{(3s+1)} &\leq (\| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(s+2)})^2 \| t_1 \|_{k,\alpha}^{(s-3)} \\ &\quad \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(s+2)} \| t_2 \|_{k,\alpha}^{(2s-3)} .\end{aligned}$$

Enfin

$$\| (4) \|_{k,\alpha}^{(s+1)} \leq \| (4) \|_{k,\alpha}^{(4s+1)} \leq (\| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(s+2)})^2 \| t_2 \|_{k,\alpha}^{(2s-3)} .$$

On utilise une nouvelle fois les corollaires 17 et 18 pour conclure. ■

Corollaire 19 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0,1[$ et $r \in \Lambda_{k+1,\alpha}^{-2}(B, \mathcal{S}_2)$. Soit $h \in \Lambda_{k+1,\alpha}^{-2}(B, \mathcal{S}_2)$; supposons que h vérifie la condition $(B_{k+1,\alpha;0})$. Considérons l'application linéaire $L_{h,r}$ de $\Lambda_{k+1,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$ dans $\Lambda_{k,\alpha}^{s-1}(B, \mathcal{T}_1)$ définie par*

$$(L_{h,r}g)_m = -(H_0 + h)^{st}(R_0 + r)_{tm} Bian(H_0 + h, g)_s - (Tg)_m.$$

Alors

$$L_{h,r} = L_{0,0} + \widetilde{L}_{h,r},$$

avec $\widetilde{L}_{h,r} \in \mathcal{L}(\Lambda_{k+1,\alpha}^{s-2}(B, \mathcal{S}_2), \Lambda_{k,\alpha}^{s-1}(B, \mathcal{T}_1))$. De plus

$$\| \widetilde{L}_{h,r} \| \leq C(\hat{h}, \hat{r})(1 + \epsilon(\| h \|_{k+1,\alpha}^{(-2)}))(\| h \|_{k+1,\alpha}^{(-2)} + \| r \|_{k+1,\alpha}^{(-2)}),$$

avec $\lim_{\mu \to 0} \epsilon(\mu) = 0$. En particulier l'application $(h, r) \longrightarrow \widetilde{L}_{h,r}$ est continue en zéro entre les Banach correspondants.

Preuve : D'après le corollaire 17 et les lemmes 27 et 28, on a

$$
\begin{aligned}
(L_{h,r}g)_m &= -(H_0^{st}+\widetilde{h}^{st})(R_{0tm}+r_{tm})[\mathrm{Bian}(H_0,g)_s+B(g)_s]-(Tg)_m \\
&= (L_{0,0}g)_m \\
&\quad \underbrace{-\widetilde{h}^{st}R_{0tm}\mathrm{Bian}(H_0,g)_s - H_0^{st}r_{tm}\mathrm{Bian}(H_0,g)_s - H_0^{st}R_{0tm}B(g)_s}_{(1)_m} \\
&\quad \underbrace{-\widetilde{h}^{st}r_{tm}\mathrm{Bian}(H_0,g)_s - H_0^{st}r_{tm}B(g)_s - \widetilde{h}^{st}R_{0tm}B(g)_s}_{(2)_m} \\
&\quad \underbrace{-\widetilde{h}^{st}r_{tm}B(g)_s}_{(3)_m}\underbrace{-(\widetilde{T}g)_m}_{(4)_m}.
\end{aligned}
$$

Nous allons tour à tour estimer les termes sélectionnés ci-dessus, en omettant systématiquement d'indiquer les constantes de majoration. Déjà, par définition, on a $\mathrm{Bian}(H_0,g)_s = H_0^{pq}(\nabla_{0p}g_{qs}-\frac{1}{2}\nabla_{0s}g_{pq})$, ainsi

$$\| \mathrm{Bian}(H_0,g) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \leq \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} (\| \partial g \|_{k,\alpha}^{(s-3)} + \| \Gamma_0 \|_{k,\alpha}^{(-1)} \| g \|_{k,\alpha}^{(s-2)}) \leq \| g \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)} .$$

On a

$$
\begin{aligned}
\| (1) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} &\leq \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| R_0 \|_{k,\alpha}^{(-2)} \| \mathrm{Bian}(H_0,g) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \\
&\quad + \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| r \|_{k,\alpha}^{(-2)} \| \mathrm{Bian}(H_0,g) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \\
&\quad + \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| R_0 \|_{k,\alpha}^{(-2)} \| B(g) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} .
\end{aligned}
$$

D'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
\| (2) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} &\leq \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| r \|_{k,\alpha}^{(-2)} \| \mathrm{Bian}(H_0,g) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \\
&\quad + \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| r \|_{k,\alpha}^{(-2)} \| B(g) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \\
&\quad + \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| R_0 \|_{k,\alpha}^{(-2)} \| B(g) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} .
\end{aligned}
$$

Et

$$\| (3) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \leq \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| r \|_{k,\alpha}^{(-2)} \| B(g) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} .$$

Enfin

$$\| (4) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \leq \| \widetilde{T} \|_{k,\alpha}^{(1)} \| g \|_{k,\alpha}^{(s-2)} \leq \| \widetilde{T} \|_{k,\alpha}^{(1)} \| g \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)} .$$

Pour conclure, il suffit de regarder les majorations respectives des normes de $\widetilde{h}$ et $\widetilde{T}$ dans le corollaire 17 et le lemme 28.

4.10.6 Dérivée covariante d'un symbole de Christoffel en coordonnées locales pour une métrique voisine de la métrique H_0

Nous travaillons ici dans un système de coordonnées locales. Les quantités que nous définissons sont tensorielles.

Lemme 29 *Soient $s \in [0,\infty[$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0,1[$. Soit $h \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$; supposons que h vérifie la condition $(B_{k+2,\alpha;s})$. Alors, on a (pour la définition de Γ_1 et Γ_2, voir le lemme 24 ci-avant)*

$$\nabla_{0l}\Gamma^k_{ij} = \nabla_{0l}{\Gamma_0}^k_{ij} + \nabla_{0l}{\Gamma_1}^k_{ij} + \nabla_{0l}{\Gamma_2}^k_{ij},$$

avec $\nabla_0\Gamma_1 \in \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{T}^1_3)$ linéaire en h et $\nabla_0\Gamma_2 \in \Lambda^{2s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{T}^1_3)$. De plus, on a

$$\| \nabla_0\Gamma_1 \|^{(s-2)}_{k,\alpha} \leq C(\hat{h}) \| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha},$$

et

$$\| \nabla_0\Gamma_2 \|^{(2s-2)}_{l,\alpha} \leq C(\hat{h})(1+\epsilon(\| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha}))(\| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha})^2,$$

avec $\lim_{\mu\to 0}\epsilon(\mu) = 0$. En particulier les applications $h \longrightarrow \nabla_0\Gamma_1$ et $h \longrightarrow \nabla_0\Gamma_2$ sont lisses en zéro entre les Banach correspondants.

Preuve : On a (en omettant les constantes de majoration de la proposition 3) :

$$\| \nabla_0\Gamma_1 \|^{(s-2)}_{k,\alpha} \leq \| \partial\Gamma_1 \|^{(s-2)}_{k,\alpha} + \| \Gamma_0 \|^{(-1)}_{k,\alpha} \| \Gamma_1 \|^{(s-1)}_{k,\alpha} \leq \| \Gamma_1 \|^{(s-2)}_{k+1,\alpha} .$$

De la même façon, on a

$$\| \nabla_0\Gamma_2 \|^{(2s-2)}_{k,\alpha} \leq \| \Gamma_2 \|^{(2s-2)}_{k+1,\alpha} .$$

On conclut ensuite avec le lemme 24. ■

De ce lemme se déduit immédiatement le

Corollaire 20 *Sous les hypothèses du lemme précédent, on a (pour le définition de $\widetilde{\Gamma}$, voir le corollaire 18 ci-avant)*

$$\nabla_{0l}\Gamma^k_{ij} = \nabla_{0l}{\Gamma_0}^k_{ij} + \nabla_{0l}\widetilde{\Gamma}^k_{ij},$$

avec $\nabla_0\widetilde{\Gamma} \in \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{T}^1_3)$. De plus

$$\| \nabla_0\widetilde{\Gamma} \|^{(2s-2)}_{l,\alpha} \leq C(\hat{h})(1+\epsilon(\| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha})) \| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha},$$

avec $\lim_{\mu\to 0}\epsilon(\mu) = 0$. En particulier l'application $h \longrightarrow \partial\widetilde{\Gamma}$ est lisse en zéro entre les Banach correspondants.

4.10.7 Courbure de Riemann pour une métrique voisine de la métrique H_0

Donnons tout d'abord le

Lemme 30 *Pour toute métrique H sur B, on a*

$$Riem(H)^i_{klm} - \mathcal{R}_0{}^i_{klm} = \nabla_{0l}\widetilde{\Gamma}^i_{km} - \nabla_{0m}\widetilde{\Gamma}^i_{kl} + \widetilde{\Gamma}^i_{jl}\widetilde{\Gamma}^j_{km} - \widetilde{\Gamma}^i_{jm}\widetilde{\Gamma}^j_{kl},$$

où l'on rappelle que

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma_0{}^k_{ij},$$

et que $\widetilde{\Gamma} \in \mathcal{T}^1_2$.

Preuve :

Rappelons que la courbure de Riemann s'exprime en coordonnées locales par

$$Riem(H)^i_{klm} = \partial_l\Gamma^i_{km} - \partial_m\Gamma^i_{kl} + \Gamma^i_{jl}\Gamma^j_{km} - \Gamma^i_{jm}\Gamma^j_{kl}.$$

Or on a

$$\partial_l\Gamma^i_{km} = \partial_l\Gamma_0{}^i_{km} + \partial_l\widetilde{\Gamma}^i_{km} = \partial_l\Gamma_0{}^i_{km} + \nabla_{0l}\widetilde{\Gamma}^i_{km} + \underbrace{\Gamma_0{}^p_{lk}\widetilde{\Gamma}^i_{pm}}_{a} + \underbrace{\Gamma_0{}^p_{lm}\widetilde{\Gamma}^i_{kp}}_{b} - \underbrace{\Gamma_0{}^i_{lp}\widetilde{\Gamma}^p_{km}}_{c},$$

ainsi que

$$-\partial_m\Gamma^i_{kl} = -\partial_m\Gamma_0{}^i_{kl} - \partial_m\widetilde{\Gamma}^i_{kl} = -\partial_m\Gamma_0{}^i_{kl} - \nabla_{0m}\widetilde{\Gamma}^i_{kl} - \underbrace{\Gamma_0{}^p_{mk}\widetilde{\Gamma}^i_{pl}}_{d} - \underbrace{\Gamma_0{}^p_{ml}\widetilde{\Gamma}^i_{kp}}_{b} + \underbrace{\Gamma_0{}^i_{mp}\widetilde{\Gamma}^p_{kl}}_{e}.$$

D'autre part, on a

$$\Gamma^i_{jl}\Gamma^j_{km} = \Gamma_0{}^i_{jl}\Gamma_0{}^j_{km} + \underbrace{\Gamma_0{}^i_{jl}\widetilde{\Gamma}^j_{km}}_{c} + \underbrace{\widetilde{\Gamma}^i_{jl}\Gamma_0{}^j_{km}}_{d} + \widetilde{\Gamma}^i_{jl}\widetilde{\Gamma}^j_{km},$$

et

$$-\Gamma^i_{jm}\Gamma^j_{kl} = -\Gamma_0{}^i_{jm}\Gamma_0{}^j_{kl} - \underbrace{\Gamma_0{}^i_{jm}\widetilde{\Gamma}^j_{kl}}_{e} - \underbrace{\widetilde{\Gamma}^i_{jm}\Gamma_0{}^j_{kl}}_{a} - \widetilde{\Gamma}^i_{jm}\widetilde{\Gamma}^j_{kl}.$$

Ainsi, en sommant les quantités ci-dessus, comme les termes repérés par les mêmes lettres se compensent, on obtient :

$$Riem(H)^i_{klm} = \mathcal{R}_0{}^i_{klm} + \nabla_{0l}\widetilde{\Gamma}^i_{km} - \nabla_{0m}\widetilde{\Gamma}^i_{kl} + \widetilde{\Gamma}^i_{jl}\widetilde{\Gamma}^j_{km} - \widetilde{\Gamma}^i_{jm}\widetilde{\Gamma}^j_{kl}. \qquad \blacksquare$$

Rappelons qu'on a défini $\mathcal{S}^1_3$ comme le sous-espace de $\mathcal{T}^1_3$ des tenseurs vérifiant

$$\varrho^i_{kim} = \varrho^i_{mik}.$$

Lemme 31 *Soient* $s \in [0,\infty[$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0,1[$. *Soit* $h \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B,\mathcal{S}_2)$ *; supposons que* h *vérifie la condition* $(B_{k+2,\alpha;s})$. *Alors, on peut choisir* $\varrho_1 \in \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}^1_3)$ *linéaire en* h *et* $\varrho_2 \in \Lambda^{2s-2}_{k,\alpha}(B,\mathcal{S}^1_3)$ *tels que*

$$Riem(H_0+h) = \mathcal{R}_0 + \varrho_1 + \varrho_2.$$

Avec de plus

$$\| \varrho_1 \|^{(s-2)}_{k,\alpha} \leq C(\hat{h}) \| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha},$$

et

$$\| \varrho_2 \|^{(2s-2)}_{k,\alpha} \leq C(\hat{h})(1+\epsilon(\| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha}))(\| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha})^2,$$

avec $\lim_{\mu\to 0}\epsilon(\mu) = 0$. *En particulier les applications* $h \longrightarrow \varrho_1$ *et* $h \longrightarrow \varrho_2$ *sont lisses en zéro entre les Banach correspondants.*

Preuve :
D'après le lemme précédent, on a

$$Riem(H)^i_{klm} - \mathcal{R}_0{}^i_{klm} = \nabla_{0l}\widetilde{\Gamma}^i_{km} - \nabla_{0m}\widetilde{\Gamma}^i_{kl} + \widetilde{\Gamma}^i_{jl}\widetilde{\Gamma}^j_{km} - \widetilde{\Gamma}^i_{jm}\widetilde{\Gamma}^j_{kl}.$$

Or on a (en vertu du lemme 24) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}^i_{jm}\widetilde{\Gamma}^j_{kl} &= (\Gamma_1{}^i_{jm} + \Gamma_2{}^i_{jm})(\Gamma_1{}^j_{kl} + \Gamma_2{}^j_{kl}) \\
&= \underbrace{\Gamma_1{}^i_{jm}\Gamma_1{}^j_{kl}}_{(2)_{km}} \underbrace{+\Gamma_2{}^i_{jm}\Gamma_1{}^j_{kl} + \Gamma_1{}^i_{jm}\Gamma_2{}^j_{kl}}_{(3)_{km}} \underbrace{+\Gamma_2{}^i_{jm}\Gamma_2{}^j_{kl}}_{(4)_{km}}.
\end{aligned}$$

Estimons la norme des termes sélectionnés ci-dessus. On a

$$\| (2) \|^{(2s-2)}_{k,\alpha} \leq (\| \Gamma_1 \|^{(s-1)}_{k,\alpha})^2 \leq (\| \Gamma_1 \|^{(s-1)}_{k+1,\alpha})^2.$$

De plus $\| (3) \|^{(2s-2)}_{k,\alpha} \leq \| (3) \|^{(3s-2)}_{k,\alpha}$ et

$$\| (3) \|^{(3s-2)}_{k,\alpha} \leq \| \Gamma_1 \|^{(-1)}_{k,\alpha} \| \Gamma_2 \|^{(s-1)}_{k,\alpha} \leq \| \Gamma_1 \|^{(s-1)}_{k+1,\alpha} \| \Gamma_2 \|^{(2s-1)}_{k+1,\alpha}.$$

De la même manière $\| (4) \|^{(2s-2)}_{k,\alpha} \leq \| (4) \|^{(4s-2)}_{k,\alpha}$ et

$$\| (4) \|^{(4s-2)}_{k,\alpha} \leq (\| \Gamma_2 \|^{(2s-1)}_{k,\alpha})^2 \leq (\| \Gamma_2 \|^{(2s-1)}_{k+1,\alpha})^2.$$

On procède de même pour l'autre terme de la forme $\widetilde{\Gamma}\widetilde{\Gamma}$. D'autre part, d'après le lemme 29, on a

$$\nabla_{0l}\Gamma^i_{km} = \nabla_{0l}\Gamma_0{}^i_{km} + \nabla_{0l}\Gamma_1{}^i_{km} + \nabla_{0l}\Gamma_2{}^i_{km},$$

de même pour l'autre terme de la forme $\nabla_0\Gamma$. En regroupant les deux termes du type $\nabla_0\Gamma_1$, on obtient un terme que l'on note ϱ_1, qui vérifie les conditions demandées d'après le lemme 29. En regroupant ensuite les deux termes du type $\nabla_0\Gamma_2$ et ceux repérés par (2), (3) et (4) dans les deux produits du type $\widetilde{\Gamma}\widetilde{\Gamma}$, on obtient un terme que l'on note ϱ_2 vérifiant les propriétés demandées, d'après les lemmes 29 et 24.

Ce lemme nous donne directement le

Corollaire 21 *Sous les hypothèses du lemme précédent, on a*

$$Riem(H_0 + h) = \mathcal{R}_0 + \varrho,$$

avec $\varrho \in \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}^1_3)$. *De plus*

$$\| \varrho \|^{(s-2)}_{k,\alpha} \leq C(\hat{h})(1 + \epsilon(\| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha})) \| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha},$$

avec $\lim_{\mu\to 0} \epsilon(\mu) = 0$. *En particulier l'application* $h \longrightarrow \varrho$ *est lisse en zéro entre les Banach correspondants.*

4.10.8 Courbure de Ricci pour une métrique voisine de la métrique H_0

D'après le paragraphe précédent, on a

Lemme 32 *Soient* $s \in [0, \infty[$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0, 1[$. *Soit* $h \in \Lambda^{s-2}_{k+2,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ *; supposons que* h *vérifie la condition* $(B_{k+2,\alpha;s})$. *Alors, on peut choisir* $r_1 \in \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ *linéaire en* h *et* $r_2 \in \Lambda^{2s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$ *tels que*

$$Ricci(H_0 + h) = R_0 + r_1 + r_2.$$

Avec de plus

$$\| r_1 \|^{(s-2)}_{k,\alpha} \leq C(\hat{h}) \| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha},$$

et

$$\| r_2 \|^{(2s-2)}_{k,\alpha} \leq C(\hat{h})(1 + \epsilon(\| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha}))(\| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha})^2,$$

avec $\lim_{\mu\to 0} \epsilon(\mu) = 0$. *En particulier les applications* $h \longrightarrow r_1$ *et* $h \longrightarrow r_2$ *sont lisses en zéro entre les Banach correspondants.*

Corollaire 22 *Sous les hypothèses du lemme précédent, on a*

$$Ricci(H_0 + h) = R_0 + r,$$

avec $r \in \Lambda^{s-2}_{k,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$. *De plus*

$$\| r \|^{(s-2)}_{k,\alpha} \leq C(\hat{h})(1 + \epsilon(\| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha})) \| h \|^{(s-2)}_{k+2,\alpha},$$

avec $\lim_{\mu\to 0} \epsilon(\mu) = 0$. *En particulier l'application* $h \longrightarrow r$ *est lisse en zéro entre les Banach correspondants.*

4.10.9 Opérateur de Bianchi pour une métrique voisine de la métrique H_0 et un tenseur voisin du tenseur R_0

Lemme 33 *Soient $s \in [0, \infty[$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in]0,1[$ et $r \in \Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$. Soit $h \in \Lambda^{s-2}_{k+1,\alpha}(B, \mathcal{S}_2)$; supposons que h vérifie la condition $(B_{k+1,\alpha;s})$. Alors, on peut choisir $b_1 \in \Lambda^{s-1}_{k,\alpha}(B, \mathcal{T}_1)$ linéaire en (h, r) et $b_2 \in \Lambda^{2s-1}_{k,\alpha}(B, \mathcal{T}_1)$ tels que*

$$Bian(H_0 + h, R_0 + r) = Bian(H_0, R_0) + b_1 + b_2.$$

Avec de plus

$$\| b_1 \|^{(s-1)}_{k,\alpha} \leq C(\hat{h}, \hat{r})(\| h \|^{(s-2)}_{k+1,\alpha} + \| r \|^{(s-2)}_{k+1,\alpha})$$

et

$$\| b_2 \|^{(2s-2)}_{k,\alpha} \leq C(\hat{h}, \hat{r})(1 + \epsilon(\| h \|^{(s-2)}_{k+1,\alpha}))(\| h \|^{(s-2)}_{k+1,\alpha} + \| r \|^{(s-2)}_{k+1,\alpha})^2,$$

avec $\lim_{\mu \to 0} \epsilon(\mu) = 0$. En particulier les applications $(h, r) \longrightarrow b_1$ et $(h, r) \longrightarrow b_2$ sont lisses en zéro entre les Banach correspondants.

Preuve :
Rappelons que l'opérateur de Bianchi est défini en coordonnées locales par

$$\mathrm{Bian}(H, R)_m = H^{st}(\nabla_t R_{sm} - \frac{1}{2}\nabla_m R_{st}).$$

Or on a

$$\nabla_t R_{sm} = \partial_t R_{sm} - \Gamma^p_{ts} R_{pm} - \Gamma^t_{tm} R_{sp}$$

et

$$\nabla_{0t} R_{sm} = \partial_t R_{sm} - \Gamma_0{}^p_{ts} R_{pm} - \Gamma_0{}^t_{tm} R_{sp}.$$

Ainsi, en rappelant que $\widetilde{\Gamma} = \Gamma - \Gamma_0$, on a

$$\mathrm{Bian}(H, R)_m = H^{st}[\nabla_{0t} R_{sm} - \widetilde{\Gamma}^p_{ts} R_{pm} - \widetilde{\Gamma}^p_{tm} R_{sp} - \frac{1}{2}(\nabla_{0m} R_{st} - \widetilde{\Gamma}^p_{ms} R_{pt} - \widetilde{\Gamma}^p_{mt} R_{sp})].$$

D'une part on a (en vertu du corollaire 17) :

$$\begin{aligned} H^{st}\nabla_{0t} R_{sm} &= (H^{st}_0 + \widetilde{h}^{st})(\nabla_{0t} R_{0sm} + \nabla_{0t} r_{sm}) \\ &= \underbrace{H^{st}_0 \nabla_{0t} R_{0sm}}_{(0)_m} + \underbrace{\widetilde{h}^{st}_0 \nabla_{0t} R_{0sm} + H^{st}_0 \nabla_{0t} r_{sm}}_{(1)_m} \underbrace{+ \widetilde{h}^{st} \nabla_{0t} r_{sm}}_{(2)_m}. \end{aligned}$$

Estimons la norme des termes sélectionnés ci-dessus. On a (en omettant les constantes) :

$$\| (1) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \leq \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \nabla_0 r \|_{k,\alpha}^{(s-3)} \leq \| r \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)}$$

De la même manière,

$$\| (2) \|_{k,\alpha}^{(2s-1)} \leq \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(s+2)} \| \nabla_0 r \|_{k,\alpha}^{(s-3)} \leq \| \widetilde{h} \|_{k+1,\alpha}^{(s+2)} \| r \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)} .$$

On procède de même pour l'autre terme de la forme $H^{-1}\nabla_0 R$.

D'autre part, on a (en vertu du corollaire 17 et du lemme 24)

$$\begin{aligned}
H^{st}\widetilde{\Gamma}^p_{ts}R_{pm} &= ({H_0}^{st} + \widetilde{h}^{st})\widetilde{\Gamma}^p_{ts}(R_{0pm} + r_{pm}) \\
&= \underbrace{+{H_0}^{st}{\Gamma_1}^p_{ts}R_{0pm}}_{(1)_m} \\
&\quad \underbrace{+{H_0}^{st}{\Gamma_2}^p_{ts}R_{0pm} + {H_0}^{st}\widetilde{\Gamma}^p_{ts}r_{pm} + \widetilde{h}^{st}\widetilde{\Gamma}^p_{ts}R_{0pm}}_{(2)_m} \\
&\quad \underbrace{+\widetilde{h}^{st}\widetilde{\Gamma}^p_{ts}r_{pm}}_{(3)_m} .
\end{aligned}$$

Comme précédemment, estimons la norme des termes selectionnés ci-dessus. On a (en omettant les constantes) :

$$\begin{aligned}
\| (1) \|_{k,\alpha}^{(s-1)} &\leq \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(s+2)} \| \nabla_0 R_0 \|_{k,\alpha}^{(-3)} + \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \Gamma_1 \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \| R_0 \|_{k,\alpha}^{(-2)} \\
&\leq \| \widetilde{h} \|_{k+1,\alpha}^{(s+2)} \| \Gamma_1 \|_{k,\alpha}^{(s-1)} .
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\| (2) \|_{k,\alpha}^{(2s-1)} &\leq \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \Gamma_2 \|_{k,\alpha}^{(2s-1)} \| R_0 \|_{k,\alpha}^{(-2)} + \| H_0^{-1} \|_{k,\alpha}^{(2)} \| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \| r \|_{k,\alpha}^{(s-2)} \\
&\quad + \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(s+2)} \| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \| R_0 \|_{k,\alpha}^{(-2)} \\
&\leq \| \Gamma_2 \|_{k,\alpha}^{(2s-1)} + \| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \| r \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)} + \| \widetilde{h} \|_{k+1,\alpha}^{(s+2)} \| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(s-1)} .
\end{aligned}$$

De plus $\| (3) \|_{k,\alpha}^{(2s-1)} \leq \| (3) \|_{k,\alpha}^{(3s-1)}$ et

$$\begin{aligned}
\| (3) \|_{k,\alpha}^{(3s-1)} &\leq \| \widetilde{h} \|_{k,\alpha}^{(s+2)} \| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \| r \|_{k,\alpha}^{(s-2)} \\
&\leq \| \widetilde{h} \|_{k+1,\alpha}^{(s+2)} \| \widetilde{\Gamma} \|_{k,\alpha}^{(s-1)} \| r \|_{k+1,\alpha}^{(s-2)} .
\end{aligned}$$

On procède de même pour les trois autres termes de la forme $H^{-1}\widetilde{\Gamma}R$.

En regroupant les termes repérés par (0), on obtient $\mathrm{Bian}(H_0, R_0)$. En regroupant ensuite les termes repérés par (1), on obtient un terme que l'on note b_1. De même, en regroupant les termes repérés par (2) et (3), on obtient un terme que l'on note b_2. b_1 et b_2 vérifient les conditions demandées d'après les corollaires 17 et 18 et le lemme 24.

Ce lemme nous donne directement le

Corollaire 23 *Sous les hypothèses du lemme précédent, on a*

$$Bian(H_0 + h, R_0 + r) = Bian(H_0, R_0) + \widetilde{b},$$

avec $\widetilde{b} \in \Lambda^{s-1}_{k,\alpha}(B, \mathcal{T}_1)$. *De plus*

$$\| \widetilde{b} \|^{(s-2)}_{k,\alpha} \leq C(\hat{h}, \hat{r})(1 + \epsilon(\| h \|^{(s-2)}_{k+1,\alpha}))(\| h \|^{(s-2)}_{k+1,\alpha} + \| r \|^{(s-2)}_{k+1,\alpha}),$$

avec $\lim_{\mu \to 0} \epsilon(\mu) = 0$. *En particulier l'application* $(h, r) \longrightarrow \widetilde{b}$ *est lisse en zéro entre les Banach correspondants.*

Chapitre 5

Quelques projets consécutifs à cette thèse.

A la suite de cette thèse, je voudrais améliorer ma compréhension du problème de Dirichlet pour l'équation de Ricci (signalé au paragraphe 4.8) ;si je ne parviens pas à prescrire l'infinité conforme, j'examinerai quelles sont les possibles obstructions (question bien plus difficile en courbure négative que positive). Je voudrais aussi réfléchir à l'équation de Ricci lorsque la dimension est comprise entre 3 et 9.

Par ailleurs, j'aimerais aborder le thème de la prescription du tenseur d'Einstein :

$$\mathcal{E}(H) = Ricci(H) - \frac{1}{2}Scal(H)H,$$

qui est à divergence nulle (identité de Bianchi), et celui de la prescription du tenseur

$$T(H) = Ricci(H) - \frac{1}{n}Scal(H)H,$$

qui est de trace nulle (relativement à H).

Je voudrais aussi travailler à l'extension au cadre de variétés à courbure négative plus générales que l'espace hyperbolique de résultats utilisés ou trouvés dans ma thèse. En effet remarquons que pour des variétés asymptotiquement hyperboliques (cf. [GL]) plus générales que l'espace hyperbolique, si l'on trouve une fonction φ satisfaisant aux conditions de la proposition 6, on obtiendra les mêmes théorèmes d'isomorphismes et donc aussi certainement une grande partie des résultats qui en découlent. Une démarche crédible pour construire φ serait la suivante : calculer $\triangle_g(\rho^s)$ au voisinage de ∂M, en utilisant le fait que $g = \rho^{-2}\overline{g}$ est asymptotique à la métrique hyperbolique ; on veut trouver $\triangle_g(\rho^s) = \mu\rho^s + o(\rho^s) > 0$ pour certains s . On prolonge ρ^s et $\triangle_g(\rho^s)$ en des fonctions u et f lisses sur M avec $f > 0$. On résoud sur M :

$$\begin{cases} \triangle_g v = f - \triangle_g u \\ v_{|\partial M} = 0 \end{cases}$$

sachant que le membre de droite est à support compact dans M. On pose ensuite $\varphi = v + u$ qui vérifie $\triangle\varphi = f$ dans M, $\varphi_{|\partial M} = 0$, φ est unique et $\varphi > 0$ car $f > 0$ (principe du maximum). Il faudra ensuite vérifier qu'au voisinage de ∂M, $\varphi = \nu\rho^s + o(\rho^s)$, ainsi il existera $\epsilon > 0$ tel que $\triangle_g\varphi \geq \epsilon\varphi$.

Enfin, j'aimerais étudier sur la sphère, comme je l'ai fait sur l'espace hyperbolique (cf. section 4.5), la courbure Riemannienne au voisinage de la métrique standard. Compte-tenu des résultats de [H], ce projet parait plausible.

Bibliographie

[An] M. T. ANDERSON, The Dirichlet problem at infinity for manifolds of negative curvature, *J. Differential Geometry* **18** (1983) 701-721.

[Ans] L. ANDERSSON, Elliptic Systems on Manifolds with Asymptotically Negative Curvature. *Indiana Univ. Math. J.* **42**, $N^0 4$ (1993), 1359-1387.

[AC] L. ANDERSSON, P. T. CHRUSCIEL, On asymptotic behaviour of solutions of the constraint equations in general relativity with "hyperboloidal boundary conditions", *Dissert. Math.* **355** (1996), 1-100.

[Au] Th. AUBIN, Nonlinear analysis on manifold. Monge-Ampère Equations, *Springer-Verlag* (1982).

[AB] Th. AUBIN, A. BAHRI, Méthodes de topologie algébrique pour le problème de la courbure scalaire prescrite, *J. Math. Pures Appl.* **76** (1997), 525-549.

[AM] P. AVILES, R. McOWEN, Conformal deformations of complete manifolds with negative curvature, *J. Diff. Geom.* **21** (1985), 269-281.

[Ba] A. BALDES, Non-Existence of Riemannian Metrics with Prescribed Ricci Tensor. *Contemporary Math.* **51** (1986), 1-8.

[Be] A. BESSE, Einstein manifolds, *Springer-Verlag* (1987).

[Ca] M.P. do CARMO, Riemannian geometry, Birkhäuser Boston (1992).

[CE] J. CHEEGER, D. EBIN, Comparison Theorems in Riemannian Geometry. *North Holland*, Amsterdam (1975).

[CCY] C. Y. CHEN , K. S. CHEN, W. N. YU, Conformal Deformations of Metrics on $H^n(-1)$ with Prescribed Scalar Curvature, *Chinese J. Math.* **16**, $N^0 3$ (1988), 157-187.

[De] P. DELANOE, Extending Calabi's conjecture to complete noncompact Kähler manifolds which are asymptotically C^n, $n > 2$. *Composito Math.* **75** (1990), 219-230.

[D1] E. DELAY, Analyse précisée d'équations semi-linéaires elliptiques sur l'espace hyperbolique et application à la courbure scalaire conforme, *Bull. Soc. math. France.* **125** (1997), 345-381.

[D2] E. DELAY, Prescription de la courbure de Ricci au voisinage de la métrique hyperbolique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **t. 326**, Série I (1998).

[DT1] D. DETURCK, Existence of Metrics With Prescribed Ricci Curvature : Local Theory, *Invent. Math.* **65** (1981), 179-207.

[DT2] D. DETURCK, Metrics with prescribed Ricci curvature, *Annals of Math. Studies*, *Princeton Univ. Press* **102** (1982), 525-537.

[DC] D. DETURCK, J. CAO, Prescribing Ricci curvature on open surfaces, *Hokkaido Math. J.* **20** (1991) 265-278.

[DK] D. DETURCK, N. KOISO, Uniqueness and non-existence of metrics with prescribed Ricci curvature. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **1**, $N^0 5$ (1984), 351-359.

[DY] D. DETURCK, D. YANG, Local Existence of Smooth Metrics with Prescribed Curvature. *Compemporary Math.* **51** (1986), 1-8.

[GT] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, 2^{nd} edition, *Springer-Verlag* (1983).

[GL] C. R. GRAHAM, J. M. LEE, Einstein metrics with prescribed infinity on the ball, *Adv. in Math.* **87**, $N^0 2$ (1991), 186-225.

[H] R. HAMILTON, The Ricci Curvature Equation, *Seminar on Nonlinear Partial Differential Equation, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo* (1984), 47-72.

[K] G. KAMBEROV, Riemannian Metrics With Prescribed Ricci Curvature : The Cauchy Problem for Degenerate Ricci Tensors (1991), Preliminary version.

[La] S. LANG, Introduction to differentiable manifolds, *John Wiley & Sons* (1962).

[L] M. C. LEUNG, Pinching theorem on asymptotically hyperbolic spaces, *Internat. J. Math.* **4**, $N^0 5$ (1993), 841-857.

[LTY] P. LI, L. F. TAM, D. G. YANG, On the elliptic equations $\triangle u + ku - Ku^p = 0$ on complete Riemannian manifolds and their geometric applications (preprint 1994).

[Ma] R. MAZZEO, The Hodge cohomology of a conformally compact metric, *J. Differential Geometry* **28** (1988), 309-339.

[MO1] M. MIN-OO, Scalar curvature rigidity of asymptotically hyperbolic spin manifolds, *Math.Ann.* **285** (1989), 527-539.

[MO2] M. MIN-OO, *Erratum* 1997 (en préparation).

[N] W. -M. NI, On the elliptic equation $\triangle u + K(x)u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$ its generalisation, and applications in geometry, *Indiana. Univ. Math. J.* **31**, $N^0 4$ (1982), 493-529.

[RRV1] A. RATTO, M. RIGOLI, L. VERON, Scalar curvature and conformal deformations of noncompact Riemannian manifolds (preprint 1995).

[RRV2] A. RATTO, M. RIGOLI, L. VERON, Courbure scalaire et déformations conformes de l'espace hyperbolique *C. R. Acad. Sci. Paris,* t.315, Série I (1992), 1153-1158.

[S] M. SPIVAK, A comprehensive introduction to differential geometry. vol. I, II. *M. Spivak* (1970).

[Ya] S-T. YAU, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I. *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), 339-411.

[Yo] K. YOSIDA, Functionnal Analysis, *Springer-Verlag, Berlin* (1965).

Laboratoire J. A. Dieudonné
U.M.R. n^0 6621 du C.N.R.S.
Université de Nice-Sophia Antipolis
Mathématiques, Parc Valrose
06 108 NICE CEDEX 02

e-mail : <delay@math.unice.fr>

Résumé :

La thèse se compose de deux parties.

Première partie : thème de la courbure scalaire conforme sur l'espace hyperbolique. Nous apportons ici une étude fine du comportement asymptotique en toute dimension. Nous traitons toujours d'équations semi-linéaires générales, avant d'appliquer nos résultats au cas particulier de l'équation géométrique.

Deuxième partie : thème de la courbure de Ricci sur l'espace hyperbolique. Nous obtenons le résultat suivant. Sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$, on considère la métrique hyperbolique standard H_0, dont la courbure de Ricci vaut R_0 et la courbure de Riemann-Christoffel vaut $\mathcal{R}_0$. Nous montrons qu'en dimension $n \geq 10$, pour tout tenseur symétrique R voisin de R_0, il existe une unique métrique H voisine de H_0 dont la courbure de Ricci vaut R. Nous en déduisons, dans le cadre C^∞, que l'image de l'opérateur de Riemann-Christoffel est une sous-variété au voisinage de $\mathcal{R}_0$. Nous traitons aussi dans cette partie de la courbure de Ricci contravariante en toute dimension, du problème de Dirichlet à l'infini en dimension 2, et de quelques obstructions.

Mots clés :

espace hyperbolique ; courbures de Riemann-Christoffel, de Ricci, scalaire ; classe conforme ; EDP non-linéaire, elliptique dégénéré, estimations *a priori*, comportement asymptotique, existence, unicité, obstruction, sur et sous-solutions, méthode de continuité.