HAL
archives-ouvertes.fr

Logarithme de Perrin-Riou pour des extensions associées à un groupe de Lubin-Tate

Lionel Fourquaux

To cite this version:

Lionel Fourquaux. Logarithme de Perrin-Riou pour des extensions associées à un groupe de Lubin-Tate. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2005. Français. tel-00011919

HAL Id: tel-00011919
https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011919

Submitted on 10 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité
Mathématiques

Présentée par
M. Lionel FOURQUAUX

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Paris 6

Sujet de la thèse : Logarithme de Perrin-Riou pour des extensions associées à un groupe de Lubin-Tate

soutenue le 12 décembre 2005

devant le jury composé de :

- M. Pierre COLMEZ, directeur de recherche au CNRS (Directeur de thèse)
- M. Denis BENOIS, professeur à l'université de Besançon (Rapporteur)
- M. Christophe BREUIL, directeur de recherche au CNRS (Rapporteur)
- M. Jan NEKOVÁŘ, professeur à l'université Paris 6
- M. Jean-Pierre WINTENBERGER, professeur à l'université de Strasbourg

Résumés

Résumé français

En 1994, Perrin-Riou a donné un procédé général de construction de fonctions L p-adiques des motifs à partir d'un système d'éléments « globaux ». Ce procédé fait intervenir une application « exponentielle de Perrin-Riou » qui interpole les exponentielles de Bloch-Kato associées à la représentation p-adique étudiée tordue par les puissances du caractère cyclotomique. Ces résultats ont ensuite été développés, avec en particulier la preuve par Colmez de la loi de réciprocité explicite conjecturée par Perrin-Riou. Plusieurs travaux récents suggèrent que ces résultats peuvent se généraliser en y remplaçant les extensions cyclotomiques par les extensions associées à un groupe de Lubin-Tate. Cette thèse donne une telle généralisation pour la construction de l'application « logarithme de Perrin-Riou » trouvée par Colmez.

Résumé anglais

In 1994, Perrin-Riou described a generic construction of p-adic L-functions of motives, given a system of "global" elements. Part of this construction is the definition of a map, the "Perrin-Riou exponential", which interpolates Bloch-Kato exponentials for twists of the representation by powers of the cyclotomic character. This work has been extended by Colmez, who among other things proved the explicit reciprocity law conjectured by Perrin-Riou. Recent works suggest that these results can be generalized by replacing cyclotomic extensions by Lubin-Tate extensions. This thesis demonstrates such a generalization for Colmez's construction of the "Perrin-Riou logarithm".

Remerciements

Je tiens à remercier M. Colmez pour m'avoir fait découvrir un sujet de recherche parfois difficile, mais aussi captivant, ainsi que pour toute l'aide, les conseils et les idées qu'il m'a donnés, et pour l'immense patience dont il a fait preuve.

Je remercie aussi les rapporteurs pour l'intérêt qu'ils ont montré pour ce travail et pour la rapidité avec laquelle ils l'ont lu, ainsi que les autres membres du jury qui se chargeront de l'évaluer.

Je remercie tous mes professeurs, qui m'ont donné le goût de comprendre et m'ont fourni les bases pour aller plus loin, ainsi que les organisateurs de séminaires, qui me donnent maintenant la chance de découvrir de nouvelles questions (et souvent de mesurer l'étendue de ce que je ne comprends pas encore).

J'adresse aussi tous mes remerciements à ceux qui m'ont à l'occasion aidé ou soutenu au fil de ce doctorat.

Merci aussi à mes parents, pour leur soutien constant. Enfin, merci à Bérangère, qui m'a apporté son soutien et plus encore.

À tout ceux que j'oublie, j'adresse également un grand merci.

Table des matières

Résumés **3**
Résumé français 3
Résumé anglais 3

Remerciements **5**

Table des matières **7**

1 Introduction **9**
1.1 Les séries de Coleman 9
1.2 L'exponentielle de Perrin-Riou et son inverse 9
1.3 Le logarithme de Perrin-Riou pour une extension de type Lubin-Tate 10
1.4 Questions en suspens 12
1.4.1 Lien avec la théorie des (φ, Γ)-modules 12
1.4.2 Lois de réciprocité explicites 12
1.4.3 Lien avec l'isomorphisme de Coleman 12
1.5 Plan de cette thèse 13

2 Rappels sur les groupes de Lubin-Tate **13**
2.1 Définitions 13
2.2 La tour d'extensions d'un groupe de Lubin-Tate 14
2.3 Rappels sur le théorème d'Ax-Sen-Tate 18
2.4 Les périodes d'un groupe de Lubin-Tate 20
2.5 Un résultat de Fontaine 21
2.6 Pourquoi le cas cyclotomique ne se généralise-t-il pas simplement ? 23
2.7 Traces de Tate normalisées dans une tour d'extensions 24
2.8 Cohomologie continue de $\mathbf{C}_p$ 28

3 Anneaux de Fontaine **31**
3.1 Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$ 31
3.2 Lien avec le corps des normes 31
3.3 Les anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}$, $\widetilde{\mathbf{B}}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+$, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, $\mathbf{A}_{\max}$, $\mathbf{B}_{\max}$ 32
3.4 Anneaux de Fontaine et séries entières 33
3.5 Sous-espaces propres sous l'action de φ_F 36
3.6 Les périodes d'un groupe de Lubin-Tate 36
3.7 Généralités sur les vecteurs de Witt 37
3.8 La valuation p-adique de $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ 40
3.9 Éléments d'ordre 1 44
3.9.1 Stabilité par addition 45
3.9.2 La topologie naturelle de X 49
3.9.3 X est l'ensemble des éléments d'ordre 1 53
3.9.4 Application aux sous-espaces propres de φ_F 56
3.10 Cohomologie continue dans des anneaux de Fontaine 57

4 Construction de l'application logarithme **64**
4.1 Distributions 64
4.1.1 Distributions continues, distributions tempérées 64
4.1.2 Distributions tempérées et distributions algébriques 65
4.1.3 Cohomologie galoisienne dans un espace de distributions 69
4.2 Le lemme principal 70
4.3 Preuve du lemme principal 73
4.3.1 Réductions préliminaires 73
4.3.2 Deux lemmes différentiels 74
4.3.3 Fin de la démonstration 77
4.4 Construction de l'application « logarithme de Perrin-Riou » 79
4.4.1 Descente de $\mathcal{G}_F$ à Γ_F 80
4.4.2 Action de Γ_F sur $q^n u_n$ 81
4.4.3 Décomposition de $q^n u_n$ dans une base adaptée 82
4.4.4 Utilisation du lemme principal 83

Références **85**

1 Introduction

1.1 Les séries de Coleman

On suppose ici que p est un nombre premier, F une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ (dont on fixe dorénavant un plongement dans $\mathbf{C}_p$), $q = p^h$ le cardinal du corps résiduel k_F de F, et $\mathcal{F}$ un groupe de Lubin-Tate d'anneau des endomorphismes l'anneau $\mathcal{O}_F$ des entiers de F. Notons π_F une uniformisante de $\mathcal{O}_F$, F_n l'extension de F engendrée par les points de π_F^n-torsion de $\mathcal{F}$, et $F_\infty = \bigcup F_n$. Soit (η_n) un générateur du module de Tate de $\mathcal{F}$ (i.e. la limite projective des modules des points de π_F^n-torsion de $\mathcal{F}$). Si K est une extension finie de F, on note $K_n = K\,F_n$ et $K_\infty = K\,F_\infty$. Enfin, on note $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe de Galois absolu de K, et $\Gamma_K = \mathcal{G}_K/\mathcal{G}_{K_\infty}$. Enfin, on note $\chi_{\mathcal{F}}$ le caractère associé au groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$.

Dans [Col79], Coleman a montré le résultat suivant.

Théorème 1.1.1. *Soit $u = (u_n)$ un élément de $\varprojlim \mathcal{O}_{F_n}$, où la limite projective est prise pour les applications normes. Alors il existe une unique série entière $\mathrm{Col}_u(X) \in \mathcal{O}_F[[X]]$ telle que*

$$\mathrm{Col}_u(\eta_n) = u_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

On trouve ainsi un morphisme injectif de $\varprojlim \mathcal{O}_{F_n}$ dans $\mathcal{O}_F[[X]]$. De plus, les séries f_u vérifient

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(F_1/F)} \mathrm{Col}_u(X +_{\mathcal{F}} \sigma(\eta_1)) = \mathrm{Col}_u([\pi_F]_{\mathcal{F}}(X)).$$

Ce morphisme (ou une variante, selon les auteurs) est habituellement appelé l'isomorphisme de Coleman.

Ce résultat joue un rôle fondamental dans l'étude des fonctions L p-adiques (en particulier avec $F = \mathbf{Q}_p$, $\mathcal{F} = \mathbf{G_m}$ pour la fonction ζ de Kubota-Leopold, ou avec le groupe formel associé à une courbe elliptique à multiplication complexe dans [CW78]).

1.2 L'exponentielle de Perrin-Riou et son inverse

Dans [Per94], Perrin-Riou donne une généralisation de ce résultat, sous la forme d'une application « exponentielle », qui permet de reconstruire l'inverse de l'isomorphisme Coleman dans le cas où $\mathcal{F} = \mathbf{G_m}$, et en est ainsi une généralisation.

Plus précisément, si V est une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$, avec K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, la suite exacte fondamentale

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p \longrightarrow \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \longrightarrow 0$$

(cf. par exemple [Col98]) donne naissance à la suite exacte longue de cohomologie suivante.

$$0 \longrightarrow V^{\mathcal{G}_K} \longrightarrow (\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K} \longrightarrow ((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K} \xrightarrow{\exp_V} H^1(K,V) \longrightarrow \dots$$

On pose $D_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\max} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K}$, et on note $H^1_e(K,V)$ le noyau de la flèche

$$H^1(K,V) \longrightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V).$$

On a alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow V^{\mathcal{G}_K} \longrightarrow D_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} \longrightarrow ((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K} \xrightarrow{\exp_V} H^1_e(K,V) \longrightarrow 0.$$

L'application $\exp_V$ est appelée exponentielle de Bloch-Kato.

Perrin-Riou construit une famille d'applications (qu'elle appelle « applications des périodes ») qui en un sens interpolent les exponentielles de Bloch-Kato des représentations obtenues en tordant V par les puissances du caractère cyclotomique. On pourra consulter [Per94] et [Pe95a] pour l'énoncé précis des résultats en question. Si l'on étudie la représentation $\mathbf{Q}_p(1)$, l'inverse de l'exponentielle de Perrin-Riou redonne l'isomorphisme de Coleman (cf. [Per94] et [CC99]).

Ces résultats s'inscrivent dans le cadre d'un procédé général (mais conjectural) de construction de fonctions L p-adique, à partir d'un système d'éléments « globaux » (comme les unités cyclotomiques).

Perrin-Riou se restreint au cas où la représentation V est cristalline. Dans [Col98], Colmez donne une construction explicite de l'exponentielle de Perrin-Riou (et de sa réciproque, l'application « logarithme de Perrin-Riou ») pour toute représentation de de Rham.

Notons $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V) = H^1(\mathcal{G}_K, \Lambda_K \otimes V)$, avec $\Lambda_K = \mathcal{O}_K[[\Gamma_K]]$. Comme les éléments de Λ_K peuvent être vus comme des mesures sur Γ_K, à un cocycle $\tau \mapsto \mu_\tau$ représentant un élément de $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ on peut associer la famille de cocycles

$$\tau \mapsto \int_{\Gamma_{K_n}} \mu_\tau.$$

Comme cette famille est compatible aux corestrictions, ce qui permet d'identifier $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ avec $\mathbf{Q}_p \otimes \varprojlim H^1(K_n, T)$ pour T un réseau de V.

Colmez obtient le résultat suivant (version simplifiée du théorème VI.3.1 de [Col98]).

Théorème 1.2.1. *Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Soit V une représentation de de Rham telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $(\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\max} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_{K_n}} = 0$. (On peut se placer dans ce cas en tordant V par une puissance du caractère cyclotomique). Soit $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ tel que*

$$\int_{\Gamma_{K_n}} \mu \in H^1_e(K_n, V) \qquad \textit{quel que soit } n \geqslant 1.$$

Finalement, soit $\tau \mapsto \mu_\tau$ un cocycle continu représentant μ et, si $n \in \mathbf{N}$, soit $c_n \in (\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\max} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ tel que l'on ait

$$(1-\tau)(c_n) = \int_{\Gamma_{K_n}} \mu_\tau \quad \textit{quel que soit } \tau \in \mathcal{G}_{K_n}.$$

Alors la suite de terme général $p^n c_n$ converge dans l'espace de Banach p-adique $\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\max} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, vers un élément de $(\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\max} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$ noté $\mathrm{Log}^{(1)}_V(\mu)$.

Cette application $\mathrm{Log}^{(1)}_V(\mu)$ est l'application logarithme de Perrin-Riou. (La correspondance entre la formulation en terme de séries utilisée par Perrin-Riou, et les distributions de l'article de Colmez découle des résultats d'Amice, cf. [Ami78]).

1.3 Le logarithme de Perrin-Riou pour une extension de type Lubin-Tate

Les résultats de Perrin-Riou et Colmez utilisent la tour d'extensions cyclotomique. Il est tentant de vouloir les généraliser à la tour d'extensions engendrée par les points de torsion d'un groupe de Lubin-Tate. On a vu que l'isomorphisme de Coleman est bien défini dans ce cadre. L'objet de cette thèse est de donner une construction du « logarithme de Perrin-Riou » qui généralise le résultat de Colmez.

Soit V une F-représentation de de Rham. Comme dans le cas cyclotomique, on a une exponentielle de Bloch-Kato, qui est définie à l'aide de la suite

$$0 \longrightarrow V^{\mathcal{G}_K} \longrightarrow ((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_K} \longrightarrow ((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K} \xrightarrow{\exp_{V,F}} H^1(K,V) \longrightarrow \dots$$

On note $H^1_{e,F}(K,V)$ le noyau de la flèche $H^1(K,V) \to H^1(K,(\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)$. Si $k \in \mathbf{Z}$ est assez grand, on a $H^1_{e,F}(K,V(\chi^k_{\mathrm{cyclo}})) = H^1(K,V(\chi^k_{\mathrm{cyclo}}))$ (où χ_{cyclo} désigne le caractère cyclotomique).

On peut également regarder la suite

$$0 \longrightarrow V^{\mathcal{G}_K} \longrightarrow ((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_K} \longrightarrow ((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}) \otimes_F V)^{\mathcal{G}_K} \xrightarrow{\exp_{V,F,\mathrm{id}}} H^1(K,V) \longrightarrow \dots$$

où $t_{\mathcal{F}} \in \mathbf{B}^+_{\max,F}$ est la période associée au groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$, et on définit $H^1_{e,F,\mathrm{id}}(K,V)$ comme le noyau de la flèche $H^1(K,V) \to H^1(K,(\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)$.

Le résultat suivant est démontré dans cette thèse.

Théorème 1.3.1. *Soit $\mathcal{F}$ un groupe de Lubin-Tate, défini sur une extension finie F de $\mathbf{Q}_p$. Soit K une extension finie de F. Soit V une F-représentation de de Rham de $\mathcal{G}_K$. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\left((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V\right)^{\mathcal{G}_{K_n}} = 0$. Soit $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ tel que*

$$\int_{\Gamma_{K_n}} \mu \in H^1_{e,F}(K_n,V) \qquad \text{quel que soit } n \geqslant 0.$$

Soit $\tau \mapsto \mu_\tau$ un cocycle continu représentant μ. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit

$$c_n \in (\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V$$

tel que

$$(1-\tau)c_n = \int_{\Gamma_{K_n}} \mu_\tau \qquad \text{quel que soit } \tau \in \mathcal{G}_{K_n}.$$

Alors la suite de terme général $q^n c_n$ converge dans l'espace $(\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V$, vers un élément de $((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$, que l'on note $\mathrm{Log}_{V,F}(\mu)$.

(On démontre en fait un résultat un peu plus général, avec des cocycles à valeurs dans un espace de distributions d'ordre assez petit).

Notons que dans le cas d'un groupe de Lubin-Tate de hauteur 1, une telle généralisation a été établie par Shaowei Zhang ([Zha04]). Cependant, ce cas n'est pas fondamentalement différent du cas cyclotomique.

Pour un groupe de Lubin-Tate de hauteur plus grande que 1, la construction de Colmez ne s'étend pas directement. Plus précisément, cette construction se divise en deux grandes parties. Tout d'abord, on descend de $\mathbf{B}^+_{\max} \otimes V$ à $(\mathbf{B}^+_{\max} \otimes V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$ en utilisant le fait que l'extension $\overline{K}/K_\infty$ est presque étale. Cette partie est essentiellement inchangée dans le cas Lubin-Tate. La difficulté apparaît dans la seconde partie, où on utilise des « traces de Tate normalisées » pour étudier l'action de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ sur $(\mathbf{B}^+_{\max} \otimes V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$. Pour construire ces « traces de Tate normalisées », dans le cas cyclotomique, on définit des applications continues de $\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$ dans K_n en associant à x la limite $\lim_{m \to +\infty} p^{n-m} \mathrm{Tr}_{K_m/K_n}(x)$. Or, cela ne fonctionne pas pour un groupe de Lubin-Tate de hauteur plus grande que 1 : $\mathrm{Tr}_{K_{m+1}/K_m}(\mathcal{O}_{K_{m+1}})$ n'est pas contenu dans $p^h \mathcal{O}_{K_n}$. On montrera ici (cf. partie 2.6) qu'il n'existe en fait pas d'application linéaire continue Galois-équivariante de $\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$ dans K qui ne soit pas identiquement nulle.

Il faut noter toutefois que ce résultat n'exclut pas qu'il soit possible de construire des sortes de traces de Tate normalisées associées à un groupe de Lubin-Tate, si l'on accepte de considérer une forme un peu plus générale. Les méthodes employées dans la partie 2.6 suggèrent en particulier qu'il pourrait être nécessaire de considérer des applications à valeurs non pas dans K, mais dans un anneau plus grand, contenant en particulier les périodes du groupe de Lubin-Tate.

1.4 Questions en suspens

1.4.1 Lien avec la théorie des (φ, Γ)-modules

Dans le cas cyclotomique, on peut étudier (cf. [Ben00], [Ber03] et [CC99]) la théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques via la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine. La théorie des (φ, Γ)-modules s'étend naturellement au cas Lubin-Tate : l'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ (que Fontaine note $W_{\mathcal{O}_F}(R)$) contient un élément $\varpi_{\mathcal{F}}$ qui vérifie $\varphi_F(\varpi_{\mathcal{F}}) = [\pi_F]_{\mathcal{F}}(\varpi_{\mathcal{F}})$ et $\gamma(\varpi_{\mathcal{F}}) = [\chi_{\mathcal{F}}(\gamma)]_{\mathcal{F}}(\varpi_{\mathcal{F}})$ pour tout $\gamma \in \mathcal{G}_F$ (cf. partie 3.6). Si on note $\mathbf{A}_F$ le sous-anneau $\widehat{\mathcal{O}_F[[\varpi_{\mathcal{F}}]][\varpi_{\mathcal{F}}^{-1}]}$ de $\widetilde{\mathbf{A}}_F$ (ou $W_{\mathcal{O}_F}(\operatorname{Frac} R)$ dans les notations de Fontaine), et $\mathbf{A} \subset \widetilde{\mathbf{A}}_F$ le complété p-adique de la clôture séparable de $\mathbf{A}_F$, il n'est pas difficile de prouver, en adaptant les arguments de Fontaine, que $V \mapsto D(V) = (\mathbf{A} \otimes_{\mathcal{O}_F} V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$ définit une équivalence de catégories entre les représentations p-adiques de $\mathcal{G}_K$ et les (φ, Γ)-modules étales sur $\mathbf{A}_K = \mathbf{A}^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$.

Malheureusement, le problème avec les traces de Tate normalisées se retrouve aussi du côté des (φ, Γ)-modules : l'opérateur ψ qui joue le rôle des traces de Tate normalisées dans la théorie cyclotomique, et dont le rôle est fondamental en théorie d'Iwasawa (on a un isomorphisme $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V) \simeq D(V)^{\psi=1}$) n'a pas d'équivalent dans le cas d'un groupe de Lubin-Tate de hauteur plus grande que 1.

1.4.2 Lois de réciprocité explicites

Colmez obtient également, dans le cas cyclotomique, la loi de réciprocité explicite qui était conjecturée par Perrin-Riou. Cette partie de [Col98] n'est pas généralisée ici, car elle fait intervenir de manière plus centrale les traces de Tate normalisées.

Même en l'absence de traces de Tate normalisées, un certain nombre de travaux récents suggèrent fortement que les résultats déjà connus dans le cas cyclotomique s'étendent aux extensions associées à un groupe de Lubin-Tate.

- Schneider et Teitelbaum, dans l'article [ST01] ont montré que l'on peut relier les distributions sur $\mathcal{O}_F$ aux séries entières convergentes sur $\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$, de manière analogue aux résultats d'Amice.
- Kato ([Kat93]) obtient une loi de réciprocité explicite pour les représentations données par les puissances du caractère associé au groupe de Lubin-Tate.
- Tsuji, dans l'article [Tsu04], étend la loi de réciprocité explicite de Kato à un caractère « de de Rham » général.

1.4.3 Lien avec l'isomorphisme de Coleman

Si

$$\delta : \varprojlim K_n^* \to H^1_{\mathrm{Iw}}(K, F(\chi_{\mathrm{cyclo}}))$$

est l'application fournie par la théorie de Kummer, et si l'on note $[x] \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ le représentant de Teichmüller de $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$, alors pour tout $u = (u_n) \in \varprojlim \mathcal{O}_{K_n}^*$, on a :

$$\operatorname{Log}_{F(\chi_{\mathrm{cyclo}}),F}(\delta(u)) = t^{-1} \log[\operatorname{Col}_u(\overline{\varpi_{\mathcal{F}}})],$$

où $\overline{\varpi_{\mathcal{F}}} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ désigne la réduction de $\varpi_{\mathcal{F}}$ modulo π_F. En l'absence de traces de Tate normalisées, il est toutefois difficile de donner une formule explicite redonnant les séries de Coleman à partir de l'application logarithme construite ici.

1.5 Plan de cette thèse

Cette thèse est organisée en trois parties. La première est consacrée à rappeler des résultats bien connus autour des groupes de Lubin-Tate, leurs périodes dans $\mathbf{C}_p$, et les traces de Tate normalisées partielles. On y trouve aussi une démonstration n'utilisant pas les anneaux de Fontaine du résultat suivant, originellement démontré par Fontaine dans [Fon04].

Théorème 1.5.1. *Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, et soit f une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire continue de $\mathbf{C}_p$ dans $\mathbf{C}_p$, que l'on suppose de plus $\mathcal{G}_K$-équivariante. Alors il existe un $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{id}$.*

La preuve donnée ici s'appuie sur les propriétés des périodes des groupes de Lubin-Tate.

La deuxième partie commence par des rappels rapides sur les définitions des anneaux de Fontaine dont on aura besoin par la suite et la définition d'une valuation p-adique sur $\mathbf{B}^+_{\max,F}$. On y montre ensuite que les éléments d'ordre 1 de $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ s'écrivent de manière unique sous la forme

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[a_n] \qquad \text{avec } a_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+,$$

ce qui permet en particulier d'étudier simplement les actions de groupes de Galois sur ces éléments. Enfin, on rappelle quelques résultats de cohomologie continue (tirés de [Col98], en adaptant les énoncés aux groupes de Lubin-Tate).

La troisième partie est consacrée à la construction de l'application logarithme. Après quelques rappels sur les distributions, la partie la plus difficile de la construction est de démontrer le lemme 4.2.1, dont l'analogue dans l'article [Col98] est démontré à l'aide des traces de Tate normalisées. La preuve donnée ici ne fait intervenir (indirectement) que les traces de Tate normalisées associées à des $\mathbf{Z}_p$-extensions, mais fait appel à des descriptions plus précises des éléments des anneaux de Fontaine (comme la description des éléments d'ordre 1 de $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ obtenue dans la deuxième partie, et la description de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ comme complété de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ donnée par Colmez dans [Col94]). Une fois ce lemme démontré, le reste de la construction est très proche de celle de Colmez dans [Col98].

2 Rappels sur les groupes de Lubin-Tate

2.1 Définitions

Cette partie est consacrée à quelques rappels élémentaires, et vise surtout à fixer les notations.

Soient F une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, et π_F une uniformisante de F. Notons $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, $\mathbf{m}_F$ son idéal maximal, et k_F son corps résiduel. Posons $q = p^h = |k_F|$, et notons e_F le degré de ramification de F.

Soit $[\pi_F]_{\mathcal{F}}(T) \in \mathcal{O}_F[[T]]$ vérifiant

$$[\pi_F]_{\mathcal{F}}(T) \equiv \pi_F T \pmod{T^2} \qquad \text{et} \qquad [\pi_F]_{\mathcal{F}}(T) \equiv T^q \pmod{\pi_F}.$$

D'après [LT65], il existe alors un unique groupe de Lie formel $\mathcal{F}$, commutatif, de dimension 1, défini sur F, tel que si l'on note $T +_{\mathcal{F}} T' \in \mathcal{O}_F[[T, T']]$ sa loi, on ait

$$T +_{\mathcal{F}} T' \equiv T + T' \pmod{T^2, TT', T'^2} \quad \text{et} \quad [\pi_F]_{\mathcal{F}}(T) +_{\mathcal{F}} [\pi_F]_{\mathcal{F}}(T') = [\pi_F]_{\mathcal{F}}(T +_{\mathcal{F}} T').$$

De plus, on a une action de $\mathcal{O}_F$ donnée par des séries $[a]_{\mathcal{F}}$ ($a \in \mathcal{O}_F$), qui sont caractérisées par

$$[a]_{\mathcal{F}} \equiv aT \pmod{T^2} \qquad \text{et} \qquad [a]_{\mathcal{F}}([\pi_F]_{\mathcal{F}}(T)) = [\pi_F]_{\mathcal{F}}([a]_{\mathcal{F}}(T)).$$

Ce groupe formel $\mathcal{F}$ est le groupe de Lubin-Tate associé à la série $[\pi_F]_{\mathcal{F}}$. L'action de $\mathcal{O}_F$ en fait un $\mathcal{O}_F$-module formel. À isomorphisme près, ce module ne dépend que de π_F et F.

Pour $F = \mathbf{Q}_p$ et $[p]_{\mathcal{F}}(T) = (1+T)^p - 1$, on retrouve le groupe multiplicatif $\mathbf{G_m}$.

La série

$$\log_{\mathcal{F}}(T) = \lim_{n\to+\infty} \frac{[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(T)}{\pi_F^n} = T + \cdots \in F[[T]]$$

définit un morphisme de groupes formels de $\mathcal{F}$ dans le groupe additif $\mathbf{G_a}$. Son rayon de convergence est 1.

De même que l'on a un logarithme $\log_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathbf{G_a}$, la série formelle réciproque donne une exponentielle $\exp_{\mathcal{F}}$ associée au groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$.

On va maintenant s'intéresser aux points de torsion de $\mathcal{F}$ et aux extensions qu'il définissent.

Notons que si $x \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ vérifie $[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(x) = 0$ et $\left[\pi_F^{n-1}\right]_{\mathcal{F}}(x) \neq 0$, alors les points de π_F^n-torsion de $\mathcal{F}$ sont exactement les $[a]_{\mathcal{F}}(x)$ pour $a \in \mathcal{O}_F/\pi_F^n\mathcal{O}_F$.

Fixons dorénavant une suite (η_n) d'éléments de $\mathbf{C}_p$ telle que
- $\eta_0 = 0$, $\eta_1 \neq 0$
- $[\pi_F]_{\mathcal{F}}(\eta_{n+1}) = \eta_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Cela correspond à fixer un générateur du module de Tate

$$T_p\mathcal{F} = \varprojlim \ker [\pi_F^n]_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_F \cdot (\eta_n).$$

L'action du groupe de Galois absolu de F, $\mathcal{G}_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ sur $T_p\mathcal{F}$ permet de définir un caractère $\chi_{\mathcal{F}} : \mathcal{G}_F \to \mathcal{O}_F^*$ associé au groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$. Il est caractérisé par la relation

$$\sigma(\eta_n) = [\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)]_{\mathcal{F}}(\eta_n) \qquad (\forall n \in \mathbf{N},\ \forall \sigma \in \mathcal{G}_F).$$

Posons $F_n = F(\eta_n)$, pour tout $n \geqslant 0$. Ce sont des extensions galoisiennes finies totalement ramifiées de F. Pour $n > 0$, l'image par $\chi_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{G}_{F_n}$ est $1 + \pi_F^n\mathcal{O}_F$.

Posons $F_\infty = \bigcup_{n\geqslant 0} F_n$, et $\widehat{F_\infty}$ son complété p-adique. Alors on a $\mathcal{G}_{F_\infty} = \mathcal{G}_{\widehat{F_\infty}} = \ker \chi_{\mathcal{F}}$.

Notons que tout ceci généralise le cas où $F = \mathbf{Q}_p$, $\mathcal{F} = \mathbf{G_m}$, $h = 1$, qui donne pour F_n la tour d'extensions cyclotomique. Le caractère $\chi_{\mathbf{G_m}}$ que l'on trouve alors est le caractère cyclotomique χ_{cyclo}.

2.2 La tour d'extensions d'un groupe de Lubin-Tate

On va maintenant étudier de plus près la tour d'extensions formée par les corps F_n, $n \geqslant 0$. Commençons par rappeler les groupes de ramification (en numérotation inférieure et supérieure) de ces extensions.

Lemme 2.2.1. *Si $n \geqslant 1$, on a*

$$\mathrm{Gal}(F_n/F)_\nu = \begin{cases} \mathrm{Gal}(F_n/F) & si\ -1 < \nu \leqslant 0 \\ \mathrm{Gal}(F_n/F_1) & si\ 0 < \nu \leqslant q-1 \\ \mathrm{Gal}(F_n/F_2) & si\ q-1 < \nu \leqslant q^2-1 \\ \dots & \\ 1 & si\ q^{n-1}-1 < \nu. \end{cases}$$

Preuve : En effet, pour $n \geqslant 1$, η_n est une uniformisante de F_n, et pour tout entier $i \geqslant -1$, on a, pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_F$:

$$\begin{aligned}
\sigma \bmod \mathcal{G}_{F_n} & \in \mathrm{Gal}(F_n/F)_i \\
& \Longleftrightarrow v_{\eta_n}\left((1-\sigma)(\eta_n)\right) \geqslant i+1 \\
& \Longleftrightarrow v_{\eta_n}\left(\eta_n - \left(\eta_n +_{\mathcal{F}} \left[\frac{\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)-1}{\pi_F^{v_{\pi_F}(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)-1)}}\right]_{\mathcal{F}} (\eta_{n-v_{\pi_F}(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)-1)})\right)\right) \geqslant i+1 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } n > v_{\pi_F}(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)-1) \\
& \Longleftrightarrow v_{\eta_n}\left(\eta_{n-v_{\pi_F}(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)-1)}\right) \geqslant i+1 \quad \text{si } n > v_{\pi_F}(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)-1) \\
& \Longleftrightarrow q^{v_{\pi_F}(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)-1)} \geqslant i+1 \quad \text{si } n > v_{\pi_F}(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)-1) \\
& \Longleftrightarrow \sigma \in \mathcal{G}_{F_n} \text{ ou } i \leqslant q^{v_{\pi_F}(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)-1)} - 1.
\end{aligned}$$

■

On en déduit le lemme analogue en numérotation supérieure.

Lemme 2.2.2. *Si $n \geqslant 1$, on a*

$$\mathrm{Gal}(F_n/F)^\nu = \begin{cases} \mathrm{Gal}(F_n/F) & \textit{si } -1 < \nu \leqslant 0 \\ \mathrm{Gal}(F_n/F_1) & \textit{si } 0 < \nu \leqslant 1 \\ \mathrm{Gal}(F_n/F_2) & \textit{si } 1 < \nu \leqslant 2 \\ \dots \\ 1 & \textit{si } n-1 < \nu. \end{cases}$$

Par passage à la limite, on obtient les groupes de ramification de l'extension F_∞/F.

Lemme 2.2.3. *On a*

$$\mathrm{Gal}(F_\infty/F)^\nu = \begin{cases} \mathrm{Gal}(F_\infty/F) & \textit{si } -1 < \nu \leqslant 0 \\ \mathrm{Gal}(F_\infty/F_1) & \textit{si } 0 < \nu \leqslant 1 \\ \mathrm{Gal}(F_\infty/F_2) & \textit{si } 1 < \nu \leqslant 2 \\ \dots \end{cases}$$

Rappelons le théorème suivant, dû à Herbrand.

Théorème 2.2.4. *Si L/K est une extension galoisienne, de groupe de Galois G, et si H est un sous-groupe distingué fermé de G, alors pour tout ν on a*

$$(G/H)^\nu = G^\nu H/H.$$

Ce théorème est démontré dans [Ser68], chapitre 4, paragraphe 3.

On en déduit les groupes de ramification de F_n/F_m, pour $n > m > 0$.

Lemme 2.2.5. *Si $n > m > 0$, on a*

$$\mathrm{Gal}(F_n/F_m)_\nu = \begin{cases} \mathrm{Gal}(F_n/F_m) & \textit{si } -1 < \nu \leqslant q^m - 1 \\ \mathrm{Gal}(F_n/F_{m+1}) & \textit{si } q^m - 1 < \nu \leqslant q^{m+1} - 1 \\ \mathrm{Gal}(F_n/F_{m+2}) & \textit{si } q^{m+1} - 1 < \nu \leqslant q^{m+2} - 1 \\ \dots \\ 1 & \textit{si } q^{n-1} - 1 < \nu. \end{cases}$$

On en déduit les groupes de ramification en numérotation supérieure.

Lemme 2.2.6. *Si $n > m > 0$, on a*

$$\mathrm{Gal}(F_n/F_m)^\nu = \begin{cases} \mathrm{Gal}(F_n/F_m) & si\ -1 < \nu \leqslant q^m - 1 \\ \mathrm{Gal}(F_n/F_{m+1}) & si\ q^m - 1 < \nu \leqslant (q^m - 1) + q^{m-1}(q-1) \\ \mathrm{Gal}(F_n/F_{m+2}) & si\ (q^m - 1) + q^{m-1}(q-1) < \nu \leqslant (q^m - 1) + 2q^{m-1}(q-1) \\ \dots & \\ 1 & si\ (q^m - 1) + (n-m-1)q^{m-1}(q-1) < \nu. \end{cases}$$

De là, on trouve les groupes de ramification de l'extension F_∞/F_m pour $m \geqslant 1$.

Lemme 2.2.7. *Si $m \geqslant 1$, on a*

$$\mathrm{Gal}(F_\infty/F_m)^\nu = \begin{cases} \mathrm{Gal}(F_\infty/F_m) & si\ -1 < \nu \leqslant q^m - 1 \\ \mathrm{Gal}(F_\infty/F_{m+1}) & si\ q^m - 1 < \nu \leqslant (q^m - 1) + q^{m-1}(q-1) \\ \mathrm{Gal}(F_\infty/F_{m+2}) & si\ (q^m - 1) + q^{m-1}(q-1) < \nu \leqslant (q^m - 1) + 2q^{m-1}(q-1) \\ \dots & \end{cases}$$

On en déduit en particulier quelques calculs de différentes.

Lemme 2.2.8. *Pour tout $n \geqslant 1$, on a*

$$v_p(\mathfrak{D}_{F_n/F}) = \frac{1}{e_F}\left(n - \frac{1}{q-1}\right),$$

en notant $\mathfrak{D}_{F_n/F}$ la différente de l'extension F_n/F.

Preuve : En effet, d'après [Ser68] (chapitre 4, paragraphe 1, proposition 4), on a

$$v_p(\mathfrak{D}_{F_n/F}) = \frac{1}{e_F}\int_{-1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{|\mathrm{Gal}(F_n/F)^\nu|}\right) d\nu,$$

donc, d'après le lemme 2.2.2,

$$\begin{aligned} v_p(\mathfrak{D}_{F_n/F}) &= \frac{1}{e_F}\left(n - \frac{1}{q^{n-1}(q-1)} - \frac{1}{q^{n-1}} - \dots - \frac{1}{q}\right) \\ &= \frac{1}{e_F}\left(n - \frac{1}{q^{n-1}(q-1)} - \frac{q^{n-1}-1}{q^{n-1}(q-1)}\right) \\ &= \frac{1}{e_F}\left(n - \frac{1}{q-1}\right). \end{aligned}$$

■

Le fait que la différente croisse linéairement dans la tour d'extensions est un cas particulier d'un résultat plus général que l'on trouve dans [Sen72].

Lemme 2.2.9. *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, et L une extension finie de K. Alors, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $\mathrm{Tr}_{L/K}(\mathbf{m}_L^n) = \mathbf{m}_K^r$, avec*

$$r = \left\lfloor n\frac{e_K}{e_L} + e_K v_p(\mathfrak{D}_{L/K}) \right\rfloor$$

(où l'on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x, et de même on note par la suite $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à x).

(Cf. [Ser68], chapitre 5, paragraphe 3, lemme 4).

Preuve : En effet, $\mathrm{Tr}_{L/K}(\mathbf{m}_L^n)$ est un idéal de $\mathcal{O}_K$, donc c'est une puissance de $\mathbf{m}_K$. D'autre part, pour tout $r \in \mathbf{Z}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{L/K}(\mathbf{m}_L^n) \subset \mathbf{m}_K^r &\iff \mathbf{m}_L^n \subset \mathbf{m}_K^r \mathfrak{D}_{L/K}^{-1} \\ &\iff n \geqslant r\frac{e_L}{e_K} - e_L v_p(\mathfrak{D}_{L/K}) \\ &\iff r \leqslant n\frac{e_K}{e_L} + e_K v_p(\mathfrak{D}_{L/K}),\end{aligned}$$

d'où le lemme 2.2.9. ■

Lemme 2.2.10. *Si L est une extension galoisienne finie de F, et si l'on pose $L_n = L \cdot F_n$, alors on a*

$$v_p(\mathfrak{D}_{L_n/F_n}) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{q^n}\right).$$

Preuve : En effet, on a

$$v_p(\mathfrak{D}_{L_n/F_n}) = \frac{1}{e_F}\int_{-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{|\mathrm{Gal}(F_n/F)^\nu|} - \frac{1}{|\mathrm{Gal}(L_n/F)^\nu|}\right) d\nu.$$

Le théorème de Herbrand (2.2.4) montre en particulier

$$\mathrm{Gal}(L/F)^\nu = \{1\} \Longleftrightarrow \mathrm{Gal}(L_n/F)^\nu \subset \mathrm{Gal}(L_n/L)$$

et

$$\mathrm{Gal}(F_n/F)^\nu = \mathrm{Gal}(L_n/F)^\nu \Big/ \left(\mathrm{Gal}(L_n/F)^\nu \cap \mathrm{Gal}(L_n/F_n)\right).$$

Comme $\mathrm{Gal}(L_n/L) \cap \mathrm{Gal}(L_n/F_n) = \{1\}$, on en déduit

$$|\mathrm{Gal}(L_n/F)^\nu| = |\mathrm{Gal}(F_n/F)^\nu| \qquad \text{si } \mathrm{Gal}(L/F)^\nu = \{1\}.$$

Soit $A \geqslant 0$ tel que $\mathrm{Gal}(L/F)^A = \{1\}$. On a alors

$$\begin{aligned}v_p(\mathfrak{D}_{L_n/F_n}) &\leqslant \frac{1}{e_F}\int_{-1}^{A} \frac{1}{|\mathrm{Gal}(F_n/F)^\nu|}\, d\nu \\ &= O\left(\frac{1}{q^n}\right),\end{aligned}$$

d'après le lemme 2.2.2. ■

On en déduit la proposition suivante (cf. partie 2.2 de [Tat66]).

Proposition 2.2.11. *Si L_∞ est une extension finie de F_∞, et si M_∞ est une extension finie de L_∞, alors l'idéal $\mathbf{m}_{L_\infty}$ est contenu dans $\mathrm{Tr}_{M_\infty/L_\infty}(\mathbf{m}_{M_\infty})$.*

Preuve : D'après [Ser68] (chapitre 5, paragraphe 4, lemme 6), il existe un $n_0 \in \mathbf{N}^*$ et une extension finie L de F_{n_0}, linéairement disjointe de F_∞, telle que $L_\infty = LF_\infty = \bigcup_{n\geqslant 0} LF_n$. De plus, on peut supposer que l'extension L/F_{n_0} est galoisienne. De même (quitte à augmenter le n_0 précédent), on peut trouver une extension galoisienne finie M/L_{n_0} linéairement disjointe de F_∞, telle que $M_\infty = MF_\infty = \bigcup_{n\geqslant 0} MF_n$.

On est donc ramené au cadre du lemme précédent, et donc en particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} v_p(\mathfrak{D}_{L_n/F_n}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_p(\mathfrak{D}_{M_n/F_n}) = 0,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_p(\mathfrak{D}_{M_n/L_n}) = 0.$$

De plus, on a $\lim_{n\to+\infty} e_{M_n} = +\infty$. Or, d'après le lemme 2.2.9, on a

$$\mathrm{Tr}_{M_n/L_n}(\mathbf{m}_{M_n}) = \mathbf{m}_{L_n}^{\left\lfloor \frac{e_{L_n}}{e_{M_n}} + e_{L_n} v_p(\mathfrak{D}_{M_n/L_n}),\right\rfloor},$$

donc tout élément de $\mathbf{m}_{L_\infty}$ se trouve dans $\mathrm{Tr}_{M_n/L_n}(\mathbf{m}_{M_n})$ pour n assez grand. ■

2.3 Rappels sur le théorème d'Ax-Sen-Tate

Nous allons rappeler ici le théorème d'Ax-Sen-Tate (cf. [Ax70]) et quelques-uns de ses corollaires, qui interviendront souvent par la suite.

Théorème 2.3.1. *Soit $x \in \mathbf{C}_p$, et soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Supposons que l'on ait :*

$$v_p(x - \sigma(x)) \geqslant A \qquad \textit{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_L.$$

Alors il existe $y \in L$ tel que $v_p(x-y) \geqslant A - \frac{p}{(p-1)^2}$.

On en déduit le corollaire suivant (qui est le théorème d'Ax-Sen-Tate à proprement parler).

Corollaire 2.3.2. *Soit G un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Alors $\mathbf{C}_p^G$ est l'adhérence de $\overline{\mathbf{Q}_p}^G$ dans $\mathbf{C}_p$.*

En particulier, on a $\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_F} = F$ et $\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_{F_\infty}} = \widehat{F_\infty}$.

La preuve d'Ax du théorème 2.3.1 repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.3.3. *Soit $P \in \overline{\mathbf{Q}_p}[X]$ un polynôme unitaire de degré n dont toutes les racines α vérifient $v_p(\alpha) \geqslant A$ (pour un certain $A \in \mathbf{R}$).*

- *Si $n = p^k d$, avec $d > 1$ non divisible par p, alors la dérivée p^k-ième de P, $P^{(p^k)}$, a au moins une racine β vérifiant $v_p(\beta) \geqslant A$.*
- *Si $n = p^{k+1}$, alors $P^{(p^k)}$ a au moins une racine β vérifiant $v_p(\beta) \geqslant A - \frac{1}{p^k(p-1)}$.*

Preuve : En effet, écrivons

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

On a alors $v_p(a_{n-i}) \geqslant iA$ d'après l'hypothèse sur les racines de P, et

$$P^{(p^k)}(X) = \sum_{i=0}^{n-p^k} \binom{n-i}{p^k} a_{n-i} X^{n-p^k-i}.$$

En particulier, le produit des racines de $P^{(p^k)}$ est $\pm \frac{a_{p^k}}{\binom{n}{p^k}}$.

On a

$$\begin{aligned} v_p\left(\frac{a_{p^k}}{\binom{n}{p^k}}\right) &\geqslant (n-p^k)A - v_p\left(\binom{n}{p^k}\right) \\ &\geqslant (n-p^k)A - v_p\left(\frac{n(n-1)\dots(n-p^k+1)}{p^k(p^k-1)\dots 1}\right), \end{aligned}$$

or n est un multiple de p^k, donc on a $v_p(n-i) = v_p(i)$ pour tout i compris entre 1 et p^k-1, donc

$$v_p\left(\frac{a_{p^k}}{\binom{n}{p^k}}\right) \geqslant (n-p^k)A - v_p\left(\frac{n}{p^k}\right).$$

Ceci étant la somme des valuations des $n-p^k$ racines de $P^{(p^k)}$, on en déduit que $P^{(p^k)}$ a une racine β vérifiant

$$v_p(\beta) \geqslant A - \frac{1}{n-p^k} v_p\left(\frac{n}{p^k}\right) \geqslant \begin{cases} A & \text{si } n = p^k d, \text{ avec } d > 1 \text{ non divisible par } p \\ A - \frac{1}{p^k(p-1)} & \text{si } n = p^{k+1}, \end{cases}$$

d'où le lemme. ■

On en déduit le théorème 2.3.1. En effet, soit $x \in \mathbf{C}_p$ comme dans l'énoncé du théorème. Soit P le polynôme minimal unitaire de x sur L, et soit n le degré de P. On va montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ qu'il existe un $y \in L$ tel que

$$v_p(x-y) \geqslant A - \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor - 1} \frac{1}{p^k(p-1)} \geqslant A - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k(p-1)} = A - \frac{p}{(p-1)^2}.$$

Pour $n = 1$, le résultat est évident avec $y = x$.

Pour $n > 1$, on peut appliquer le lemme 2.3.3 au polynôme $P(X+x)$, puisque n est de l'une des deux formes considérées. On trouve alors que $P^{(p^k)}(X+x)$ (k étant défini comme dans le lemme) a une racine y_0 de valuation supérieure ou égale à A si n n'est pas une puissance de p, ou à $A - \frac{1}{p^k(p-1)}$ si $n = p^{k+1}$.

Le polynôme $P^{(p^k)}$ est alors de degré $n-p^k$, et l'on a

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\log(n-p^k)}{\log p} \right\rfloor &= \begin{cases} k + \left\lfloor \frac{\log(d-1)}{\log p} \right\rfloor & \text{si } n = p^k d \text{ avec } d > 1 \text{ non divisible par } p \\ k & \text{si } n = p^{k+1} \end{cases} \\ &= \begin{cases} k + \left\lfloor \frac{\log d}{\log p} \right\rfloor & \text{si } n = p^k d \text{ avec } d > 1 \text{ non divisible par } p \\ k & \text{si } n = p^{k+1} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance de } p \\ \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor - 1 & \text{si } n \text{ est une puissance de } p. \end{cases} \end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à $x+y_0$, on trouve qu'il existe un $y \in L$ tel que

$$v_p(x+y_0-y) \geqslant \begin{cases} A \\ A-\frac{1}{p^k(p-1)} \end{cases} - \begin{cases} \sum_{l=0}^{\left\lfloor\frac{\log n}{\log p}\right\rfloor-1} \frac{1}{p^l(p-1)} \\ \sum_{l=0}^{\left\lfloor\frac{\log n}{\log p}\right\rfloor-2} \frac{1}{p^l(p-1)}, \end{cases} = A - \sum_{l=0}^{\left\lfloor\frac{\log n}{\log p}\right\rfloor-1} \frac{1}{p^l(p-1)}.$$

Enfin, on avait

$$v_p(y_0) \geqslant \begin{cases} A & \text{si } n \text{ n'est pas une puissance de } p \\ A-\frac{1}{p^k(p-1)} & \text{si } n \text{ est une puissance de } p \end{cases} \geqslant A - \sum_{l=0}^{\left\lfloor\frac{\log n}{\log p}\right\rfloor-1} \frac{1}{p^l(p-1)}$$

d'où la récurrence, et le théorème 2.3.1.

2.4 Les périodes d'un groupe de Lubin-Tate

Avant d'aller plus loin, il nous faut introduire les périodes du groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$ (dans $\mathbf{C}_p$). Commençons par rappeler quelques résultats dus à Tate (cf. [Tat66]) sur lesquels on s'appuiera par la suite.

Théorème 2.4.1. *Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Alors on a $H^0(K,\mathbf{C}_p)=K$, et $H^1(K,\mathbf{C}_p)$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 sur K.*

De plus, si χ est un caractère continu de $\mathcal{G}_K$ dans K^*, si K_∞ est l'extension de K déterminée par $\ker\chi$, et s'il existe une extension finie L de K, contenue dans K_∞, telle que l'extension K_∞/L soit totalement ramifiée et telle que $\mathrm{Gal}(K_\infty/L)$ soit isomorphe à $\mathbf{Z}_p$, alors $H^0(K,\mathbf{C}_p(\chi))=0$ et $H^1(K,\mathbf{C}_p(\chi))=0$.

Il s'agit des théorèmes 1 et 2 du paragraphe 3 de [Tat66]. Notons que $H^0(K,\mathbf{C}_p)=K$ a été démontré au corollaire 2.3.2.

Parmi les nombreuses conséquences de ce théorème se trouve le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.2. *Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Alors si $n \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$, on a*

$$H^0(K,\mathbf{C}_p(\chi_{\mathrm{cyclo}}^n))=0 \quad \textit{et} \quad H^1(K,\mathbf{C}_p(\chi_{\mathrm{cyclo}}^n))=0.$$

Preuve : En effet, le caractère χ_{cyclo}^n vérifie les hypothèses du théorème 2.4.1. ■

Lemme 2.4.3. *Si $\chi_{\mathcal{F}}$ est le caractère associé au groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$ sur F, alors :*

- *le $\mathcal{G}_F$-module $\mathbf{C}_p(\chi_{\mathcal{F}})$ est isomorphe à $\mathbf{C}_p(\chi_{\mathrm{cyclo}})$;*
- *si $\rho \in \mathrm{End}(F,\mathbf{C}_p)\setminus\{1\}$, le $\mathcal{G}_F$-module $\mathbf{C}_p(\rho\circ\chi_{\mathcal{F}})$ est isomorphe à $\mathbf{C}_p$.*

Ce résultat est démontré dans [SKL68] (lemme 2 de la partie A5 de l'appendice), et est essentiellement une application des résultats de [Tat66] (précisément du corollaire 2 du théorème 3 dans le paragraphe 4).

En particulier, pour tout $\rho \in \mathrm{End}(F,\mathbf{C}_p)\setminus\{1\}$, il existe un $\xi_\rho \in \mathbf{C}_p^*$ (unique à multiplication par un élément de F^* près) tel que $\rho(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)) = \frac{\xi_\rho}{\sigma(\xi_\rho)}$, pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_F$. En revanche, il n'existe pas de ξ_ρ pour $\rho = 1$ (par exemple parce que $H^0(F,\mathbf{C}_p(\chi_{\mathcal{F}}))=0$, ce qui se déduit du théorème 2.4.1 appliqué à $N_{F/\mathbf{Q}_p}(\chi_{\mathcal{F}})$).

On appellera ces éléments $\xi_\rho \in \mathbf{C}_p^*/F^*$ les périodes de $\mathcal{F}$. Notons qu'ils ne peuvent pas être algébriques sur $\mathbf{Q}_p$, puisqu'ils ont une infinité de conjugués sous l'action de $\mathcal{G}_F$.

Notons qu'il est aussi possible de construire directement les $\xi_\rho \in \mathbf{C}_p$, en démontrant que

$$\xi_\rho = \lim_{n\to+\infty} \rho(\pi_F^n) \log_{\mathcal{F}}^\rho(\eta_n)$$

convient, où, si ρ agit comme $x \mapsto x^{p^i}$ sur k_F et $\log_{\mathcal{F}}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n T^n$, on a noté

$$\log_{\mathcal{F}}^\rho(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(a_n) T^{p^i n}$$

(cf. [Col93]).

Corollaire 2.4.4. *L'image dans $H^1(F, \mathbf{C}_p)$ du cocycle $\sigma \mapsto \log \chi_{\mathcal{F}}(\sigma)$ est non nulle.*

Preuve : En effet, si cette image était nulle, il existerait une constante $c \in \mathbf{C}_p$ telle que l'on ait $c - \sigma(c) = \log \chi_{\mathcal{F}}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_F$. Si $n \in \mathbf{N}$ est assez grand pour que $\exp(p^n c)$ converge dans $\mathbf{C}_p$, posons alors $\xi = \exp(p^n c)$. On trouve alors $\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)^{p^n} = \frac{\xi}{\sigma(\xi)}$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_F$, et donc $H^0(F, \mathbf{C}_p(\chi_{\mathcal{F}}^{p^n})) = H^0(F, \mathbf{C}_p)$. Or, le premier point du lemme 2.4.3 et le corollaire 2.4.2 donnent

$$H^0(F, \mathbf{C}_p(\chi_{\mathcal{F}}^{p^n}) = H^0(F, \mathbf{C}_p(\chi_{\text{cyclo}}^{p^n}) = 0,$$

ce qui contredit le fait que $H^0(F, \mathbf{C}_p) = F$ d'après le théorème 2.4.1. ■

2.5 Un résultat de Fontaine

Nous allons redémontrer le résultat suivant, tiré de l'article [Fon04], à l'aide des périodes des groupes de Lubin-Tate.

Théorème 2.5.1. *Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, et soit f une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire continue de $\mathbf{C}_p$ dans $\mathbf{C}_p$, que l'on suppose de plus $\mathcal{G}_K$-équivariante. Alors il existe un $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{id}$.*

Preuve : Supposons d'abord $K = \mathbf{Q}_p$, et considérons une telle application f, une extension galoisienne finie F de $\mathbf{Q}_p$, et un groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$ comme ci-dessus.

Comme f est $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$-équivariante, on a

$$f(F) = f\left(\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_F}\right) \subset f(\mathbf{C}_p)^{\mathcal{G}_F} \subset \mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_F} = F.$$

En particulier, la restriction $f|_F$ de f à F est un endomorphisme $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$-équivariant de F. Or $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}_p}(F)$ est engendré comme F-espace vectoriel par $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$, donc $f|_F$ s'écrit :

$$f|_F = \sum_{\rho\in\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)} \lambda_\rho \rho,$$

avec $\lambda_\rho \in F$.

L'argument essentiel de la preuve sera d'étudier l'image par f des logarithmes des périodes de $\mathcal{F}$, pour en déduire que seul λ_1 peut être non nul.

Soit $\tau \in \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p) \setminus \{1\}$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_F$, on a

$$(1-\sigma)(\log \xi_\tau) = \tau\left(\log \chi_{\mathcal{F}}(\sigma)\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
(1-\sigma)(f(\log\xi_\tau)) &= f((1-\sigma)(\log\xi_\tau)) \\
&= \sum_{\rho\in\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)} \lambda_\rho\rho\left(\tau\left(\log\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)\right)\right) \\
&= \sum_{\rho\in\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)} \lambda_\rho \log\left((\rho\tau)(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma))\right) \\
&= \lambda_{\tau^{-1}}\log\chi_{\mathcal{F}}(\sigma) \ + \sum_{\rho\in\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)\setminus\{\tau^{-1}\}} \lambda_\rho(1-\sigma)(\log\xi_{\rho\tau}),
\end{aligned}$$

donc le cocycle $\sigma\mapsto\lambda_{\tau^{-1}}\log\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)$ est nul dans $H^1(F,\mathbf{C}_p)$, donc $\lambda_{\tau^{-1}}=0$ d'après le corollaire 2.4.4.

Ceci étant vrai pour tout $\tau\in\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)\setminus\{1\}$, on en déduit que $f|_F$ s'écrit

$$f|_F=\lambda_1\,\mathrm{id},$$

avec $\lambda_1\in F$. On a alors $\lambda_1=f(1)$, donc $\lambda_1\in\mathbf{Q}_p$, et λ_1 est indépendant du choix de F.

Comme ce raisonnement est vrai pour toute extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}_p$, on trouve

$$f|_{\overline{\mathbf{Q}_p}}=f(1)\,\mathrm{id}.$$

Enfin, par continuité de f, on obtient

$$f=f(1)\,\mathrm{id},$$

avec $f(1)\in\mathbf{Q}_p$, comme voulu.

Considérons maintenant le cas général. La $\mathcal{G}_K$-équivariance de f montre que $f(1)$ est dans K, donc il suffit de montrer que f est une homothétie. En particulier, on peut remplacer K par une extension finie de K. Ceci permet en particulier de supposer que l'extension $K/\mathbf{Q}_p$ est galoisienne.

Comme f est $\mathcal{G}_K$-équivariante, l'application $\sigma\circ f\circ\sigma^{-1}$, pour $\sigma\in\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ne dépend que de la classe de σ modulo $\mathcal{G}_K$. On peut donc considérer l'application

$$g=\sum_{\sigma\in\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathcal{G}_K}\sigma\circ\alpha(f-f(1)\mathrm{id})\circ\sigma^{-1},$$

pour $\alpha\in K$. Cette application est $\mathbf{Q}_p$-linéaire, continue. De plus, elle est $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$-équivariante. En effet, pour tout $\tau\in\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on a

$$\begin{aligned}
\tau\circ g &= \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathcal{G}_K}(\tau\circ\sigma)\circ\alpha(f-f(1)\mathrm{id})\circ\sigma^{-1} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathcal{G}_K}(\tau\circ\sigma)\circ\alpha(f-f(1)\mathrm{id})\circ(\tau\circ\sigma)^{-1}\circ\tau \\
&= \sum_{\sigma'\in\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathcal{G}_K}\sigma'\circ\alpha(f-f(1)\mathrm{id})\circ{\sigma'}^{-1}\circ\tau \\
&\qquad\text{avec } \sigma'=\tau\sigma \\
&= g\circ\tau.
\end{aligned}$$

On peut donc appliquer le cas particulier précédent à cette application, et en déduire que c'est une homothétie. Or on a $g(1) = 0$, donc $g = 0$, et

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathcal{G}_K} \sigma(\alpha)\, \sigma \circ (f - f(1)\mathrm{id}) \circ \sigma^{-1} = 0 \qquad \text{pour tout } \alpha \in K.$$

Comme les σ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{C}_p$ (d'après le théorème d'Artin d'indépendance linéaire des caractères), on trouve

$$\sigma \circ (f - f(1)\mathrm{id}) \circ \sigma^{-1} = 0 \qquad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p},$$

donc $f = f(1)\,\mathrm{id}$. ■

2.6 Pourquoi le cas cyclotomique ne se généralise-t-il pas simplement ?

Nous pouvons maintenant expliquer pourquoi la construction de l'application « Logarithme de Perrin-Riou » donnée dans [Col98] pour la tour d'extensions cyclotomique ne se transpose pas immédiatement au cas de la tour d'extensions associée à un groupe de Lubin-Tate.

La difficulté apparaît dans la construction de traces de Tate normalisées. Dans le cas cyclotomique, on considère les applications

$$\frac{1}{p^{m-n}} \mathrm{Tr}_{F_m/F_n},$$

pour des valeurs de m de plus en plus grandes, et l'on obtient une application linéaire continue de $\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ dans F_n, qui est $\mathcal{G}_F$-équivariante et qui est l'identité sur F_n.

Pour $h > 1$, la construction analogue serait de considérer les

$$\frac{1}{q^{m-n}} \mathrm{Tr}_{F_m/F_n},$$

afin d'avoir toujours des projections sur F_n. Malheureusement, si $x \in \mathcal{O}_{F_m}$, on ne peut pas affirmer que Tr_{F_m/F_n} est dans $q^{m-c}\mathcal{O}_{F_n}$ pour une constante c indépendante de m. En effet, d'après le lemme 2.2.9, on a

$$\mathrm{Tr}_{F_m/F_n}(\mathcal{O}_{F_m}) = \pi_F^{m-n} \mathcal{O}_{F_n}.$$

Pour $v_p(\pi_F) < h$, on ne peut donc pas passer à la limite pour définir une application linéaire continue sur $\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$.

Non seulement la construction employée dans le cas cyclotomique ne fonctionne pas, mais il y a un réel obstacle à l'existence d'une application analogue dans le cas considéré ici. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 2.6.1. *Il n'existe pas d'application linéaire continue f de $\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ dans F_n telle que f soit $\mathcal{G}_F$-équivariante et $f|_{F_n} = \mathrm{id}$.*

Preuve : Il suffit de regarder quelle serait l'image du logarithme d'une période du groupe de Lubin-Tate. En effet, on aurait, pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_F$:

$$\begin{aligned}(1-\sigma)(f(\log \xi_\rho)) &= f((1-\sigma)(\log \xi_\rho)) \\ &= f(\log \rho(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma))) \\ &= \log \rho(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)).\end{aligned}$$

Comme $f(\log \xi_\rho)$ a donc une infinité de conjugués sous l'action de $\mathcal{G}_F$, il ne peut pas être algébrique, et ne peut donc pas être dans F_n. ■

2.7 Traces de Tate normalisées dans une tour d'extensions

Dans la partie 3.1 de l'article [Tat66], Tate étudie les $H^1(K, \mathbf{C}_p(\chi))$ pour certains caractères χ, à l'aide des traces de Tate normalisées. Cette partie reprend les résultats de l'article de Tate en prouvant que les constantes qui apparaissent sont uniformes pour les corps $K = F_n$.

Dans cette partie, on va fixer un morphisme $\rho : \mathcal{G}_{F_n} \to \mathbf{Z}_p$ (pour $n \geqslant 1$), trivial sur $\mathcal{G}_{F_\infty}$. Comme $\mathcal{G}_{F_n}/\mathcal{G}_{F_\infty}$ est isomorphe à $1 + \pi_F^n \mathcal{O}_F$, il est facile d'en construire. On note $F_{n,\infty} = \overline{F}^{\ker \rho}$ et $F_{n,m} = \overline{F}^{\rho^{-1}(p^m \mathbf{Z}_p)}$. On se restreint très vite dans cette partie au cas où $n > \frac{e_F}{p-1}$.

Commençons par étudier les groupes de ramification de la tour d'extensions des $F_{n,m}$. D'après le théorème de Herbrand (2.2.4), on a $\rho(\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)^\nu) = \rho(\mathrm{Gal}(F_\infty/F_n)^\nu)$, donc, d'après le lemme 2.2.7, on trouve pour $n \geqslant 1$:

$$\rho(\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)^\nu) = \begin{cases} \rho(\mathcal{G}_{F_n}) & \text{si } -1 < \nu \leqslant q^n - 1 \\ \rho(\mathcal{G}_{F_{n+1}}) & \text{si } q^n - 1 < \nu \leqslant (q^n - 1) + q^{n-1}(q-1) \\ \rho(\mathcal{G}_{F_{n+2}}) & \text{si } (q^n - 1) + q^{n-1}(q-1) < \nu \leqslant (q^n - 1) + 2q^{n-1}(q-1) \\ \dots \end{cases}$$

De plus, si $n > \frac{e_F}{p-1}$, on a $(\mathcal{G}_{F_n}/\mathcal{G}_{F_\infty})^p = \mathcal{G}_{F_{n+e_F}}/\mathcal{G}_{F_\infty}$, donc il existe un entier $b \in \{0, \dots, e_F - 1\}$ tel que

$$\rho(\mathcal{G}_{F_n}) = \dots = \rho(\mathcal{G}_{F_{n+b}}) = \mathbf{Z}_p \quad \text{et} \quad \rho(\mathcal{G}_{F_{n+b+1}}) = \dots = \rho(\mathcal{G}_{F_{n+e_F}}) = p\mathbf{Z}_p.$$

On a donc

$$\rho\left(\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)^\nu\right) = \begin{cases} \mathbf{Z}_p & \text{si } -1 < \nu \leqslant (q^n - 1) + bq^{n-1}(q-1) \\ p\mathbf{Z}_p & \text{si } (q^n - 1) + bq^{n-1}(q-1) < \nu \leqslant (q^n - 1) + (b + e_F)q^{n-1}(q-1) \\ p^2\mathbf{Z}_p & \text{si } (q^n - 1) + (b + e_F)q^{n-1}(q-1) < \nu \leqslant (q^n - 1) + (b + 2e_F)q^{n-1}(q-1) \\ \dots \end{cases}$$

Lemme 2.7.1. *Pour $n > \frac{e_F}{p-1}$, fixé, on a*

$$v_p(\mathfrak{D}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}) = 1 - \frac{b_m}{p^m},$$

la suite (b_m) ne dépendant pas de n et vérifiant

$$0 \leqslant b_m \leqslant 1 - \frac{q(p-1)}{e_F p(q-1)}.$$

Preuve : En effet, on a

$$v_p(\mathfrak{D}_{F_{n,m}/F_n}) = \frac{1}{e_{F_n}} \int_{-1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{|\mathrm{Gal}(F_{n,m}/F_n)^\nu|}\right) d\nu,$$

$e_{F_n} = e_F q^{n-1}(q-1)$ (car F_n/F est totalement ramifiée) et, d'après le théorème de Herbrand

(2.2.4),

$$|\mathrm{Gal}(F_{n,m}/F_n)^\nu| = \begin{cases} p^m & \text{si } -1 < \nu \leqslant (q^n-1) + bq^{n-1}(q-1) \\ p^{m-1} & \text{si } (q^n-1) + bq^{n-1}(q-1) < \nu \leqslant (q^n-1) + (b+e_F)q^{n-1}(q-1) \\ p^{m-2} & \text{si } (q^n-1) + (b+e_F)q^{n-1}(q-1) < \nu \leqslant (q^n-1) + (b+2e_F)q^{n-1}(q-1) \\ \dots & \\ 1 & \text{si } (q^n-1) + (b+(m-1)e_F)q^{n-1}(q-1) < \nu, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} v_p(\mathfrak{D}_{F_{n,m}/F_n}) = \frac{1}{e_F q^{n-1}(q-1)} \Bigg(& 1 + (q^n-1) + (b+(m-1)e_F)q^{n-1}(q-1) \\ & - \frac{1+(q^n-1)+bq^{n-1}(q-1)}{p^m} - \frac{e_F q^{n-1}(q-1)}{p^{m-1}} - \dots - \frac{e_F q^{n-1}(q-1)}{p} \Bigg), \end{aligned}$$

donc

$$v_p(\mathfrak{D}_{F_{n,m}/F_n}) = m + \left(\frac{1}{e_F}\left(\frac{q}{q-1} + b \right) - \frac{p}{p-1} \right) \left(1 - \frac{1}{p^m} \right).$$

On a donc

$$v_p(\mathfrak{D}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}) = 1 + \frac{1}{p^m} \left(\frac{1}{e_F}\left(\frac{q}{q-1} + b \right) - \frac{p}{p-1} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right).$$

Comme $0 \leqslant b < e_F$ et $q \geqslant p > 1$, on a

$$\begin{aligned} b_m &= -\left(\frac{1}{e_F}\left(\frac{q}{q-1} + b \right) - \frac{p}{p-1} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right) \\ &\geqslant \left(\frac{p}{p-1} - 1 - \frac{1}{e_F(q-1)} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right) \\ &\geqslant \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{e_F(q-1)} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right) \\ &\geqslant 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_m &\leqslant \left(\frac{p}{p-1} - \frac{q}{e_F(q-1)} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right) \\ &\leqslant 1 - \frac{q(p-1)}{e_F p(q-1)}, \end{aligned}$$

d'où le lemme. ■

On suppose désormais $n > \frac{e_F}{p-1}$.

Lemme 2.7.2. *On a les propriétés suivantes.*

- *Si $x \in F_{n,m+1}$, alors*

$$v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}(x)) \geqslant v_p(x) + 1 - \frac{1}{p^m}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)} \right).$$

- *Si $x \in F_{n,m}$, alors*

$$v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_n}(x)) \geqslant v_p(x) + m - \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right).$$

- *Si $x \in F_{n,m+1}$ et si σ est un générateur de* $\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)$*, alors*

$$v_p\left(x - \frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}(x)\right) \geqslant v_p\left(x - \sigma^{p^m}(x)\right) - 1.$$

Preuve : Si $x \in F_{n,m+1}$, d'après le lemme 2.2.9, on a

$$v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}(x)) \geqslant \frac{1}{e_{F_{n,m}}}\left\lfloor e_{F_{n,m}}\left(v_p(x) + v_p(\mathfrak{D}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}})\right)\right\rfloor,$$

donc, en utilisant le lemme 2.7.1 et en supposant $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}(x)) &\geqslant v_p(x) + 1 - \frac{b_m}{p^m} - \frac{1}{e_F(q-1)q^{n-1}p^m} \\
&\geqslant v_p(x) + 1 - \frac{1}{p^m}\left(1 - \frac{q(p-1)}{e_F p(q-1)} + \frac{q}{e_F(q-1)q^n}\right) \\
&\geqslant v_p(x) + 1 - \frac{1}{p^m}\left(1 - \frac{q}{e_F p(q-1)}\left(p - 1 - \frac{p}{q^n}\right)\right) \\
&\geqslant v_p(x) + 1 - \frac{1}{p^m}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right).
\end{aligned}$$

Si $x \in F_{n,m}$, on en déduit

$$\begin{aligned}
v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_n}(x)) &\geqslant v_p(x) + m - \left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right)\left(1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^{m-1}}\right) \\
&\geqslant v_p(x) + m - (1 - p^{-m})\frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) \\
&\geqslant v_p(x) + m - \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right).
\end{aligned}$$

Pour le troisième point, posons $\tau = \sigma^{p^m}$. On a

$$\begin{aligned}
px - \mathrm{Tr}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}(x) &= px - \sum_{i=0}^{p-1}\tau^i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{p-1}(1 - \tau^i)(x) \\
&= \sum_{i=1}^{p-1}(1 + \tau + \cdots + \tau^{i-1})(1 - \tau)(x),
\end{aligned}$$

donc $v_p\left(x - \frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}(x)\right) \geqslant v_p((1-\tau)(x)) - 1$. ■

Soit t_n l'application F_n-linéaire de $F_{n,\infty}$ dans F_n définie par :

$$t_n(x) = \frac{1}{p^m}\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_n}(x) \quad \text{si } x \in F_{n,m}.$$

Lemme 2.7.3. *Si σ est un générateur du groupe* $\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)$*, alors pour tout x dans $F_{n,\infty}$ on a :*

$$v_p(x - t_n(x)) \geqslant v_p(x - \sigma(x)) - 1 - \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right).$$

Preuve : On suppose pour démontrer cela que x est dans $F_{n,m}$ (avec $m > 0$), et l'on montre par récurrence une inégalité

$$v_p(x - t_n(x)) \geqslant v_p(x - \sigma(x)) - C_m.$$

On peut prendre $C_1 = 1$, d'après le lemme précédent. Pour $m > 1$, on a

$$\begin{aligned}
&v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x) \;-\; p\, t_n(x)) \\
&\qquad = v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x) \;-\; p\, t_n(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x))) \\
&\qquad \geqslant v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x) - \sigma(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x))) - C_{m-1} \\
&\qquad \geqslant v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}((1-\sigma)(x))) - C_{m-1} \\
&\qquad \geqslant v_p((1-\sigma)(x)) + 1 - \frac{1}{p^{m-1}}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) - C_{m-1}.
\end{aligned}$$

En écrivant $x - t_n(x) = \left(x - \frac{1}{p}\,\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x)\right) + \frac{1}{p}\left(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x) \;-\; p\, t_n(x)\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
v_p(x - t_n(x)) &\geqslant \min\left(v_p\left(x - \frac{1}{p}\,\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x)\right), v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x) \;-\; p\, t_n(x)) - 1\right) \\
&\geqslant \min\Bigg(v_p\left(x - \sigma^{p^{m-1}}(x)\right) - 1, \\
&\qquad v_p((1-\sigma)(x)) - \frac{1}{p^{m-1}}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) - C_{m-1}\Bigg) \\
&\geqslant v_p((1-\sigma)(x)) - \max\left(1, \frac{1}{p^{m-1}}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) + C_{m-1}\right) \\
&\geqslant v_p((1-\sigma)(x)) - C_m
\end{aligned}$$

avec

$$C_m = \max\left(1, \frac{1}{p^{m-1}}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) + C_{m-1}\right).$$

Comme $C_1 = 1$, on en déduit par récurrence :

$$\begin{aligned}
C_m &= 1 + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^{m-1}}\right)\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) \\
&= 1 + \frac{1 - p^{-(m-1)}}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) \\
&\leqslant 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right),
\end{aligned}$$

d'où le lemme. ∎

Notons $\widehat{F_{n,\infty}}$ le complété de $F_{n,\infty}$. Alors le lemme 2.7.3 a en particulier pour conséquence que l'application t_n se prolonge par continuité à $\widehat{F_{n,\infty}}$, et l'application prolongée vérifie :

$$v_p(t_n(x)) \geqslant v_p(x) - 1 - \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right), \quad \text{pour tout } x \in \widehat{F_{n,\infty}}.$$

Désormais t_n désignera cette application prolongée. Notons qu'elle vérifie l'inégalité du lemme 2.7.3 pour tout $x \in \widehat{F_{n,\infty}}$.

2.8 Cohomologie continue de $\mathbf{C}_p$

Comme dans la partie précédente, on suppose dans cette partie que l'inégalité $n > \frac{e_F}{p-1}$ est vérifiée.

Lemme 2.8.1. *Soit $\lambda \in \mathcal{O}_{F_n}$, tel que*

$$v_p(1-\lambda) > 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right),$$

et soit σ un générateur de $\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)$ *(comme ci-dessus). L'opérateur $\lambda - \sigma$ est bijectif d'inverse continu sur* $\ker t_n$*, et l'on a*

$$v_p((\lambda-\sigma)^{-1}(x)) \geqslant v_p(x) - 1 - \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right)$$

pour tout $x \in$ $\ker t_n$*.*

(Notons que l'on a $1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) \leqslant \frac{p}{p-1}$, donc on peut remplacer l'hypothèse sur λ par $v_p(1-\lambda) > \frac{p}{p-1}$ et la conclusion par $v_p((\lambda-\sigma)^{-1}(x)) \geqslant v_p(x) - \frac{p}{p-1}$. C'est ce qui est fait dans la suite de cette partie, pour simplifier les formules).

Preuve : Commençons par le cas $\lambda = 1$. L'opérateur $1-\sigma$ réalise une injection continue de $F_{n,m} \cap \ker t_n$ dans lui-même, donc une bijection. On obtient ainsi un inverse sur $F_{n,\infty} \cap \ker t_n$. De plus, d'après le lemme 2.7.3, si $x \in F_{n,\infty} \cap \ker t_n$, on a

$$v_p((1-\sigma)^{-1}(x)) \geqslant v_p(x) - 1 - \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right),$$

donc $(1-\sigma)^{-1}$ est continu et se prolonge par continuité à tout $\ker t_n$. De plus, l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $x \in \ker t_n$.

Pour traiter le cas général, on écrit

$$(1-\sigma)^{-1}(\lambda-\sigma) = 1 - (1-\lambda)(1-\sigma)^{-1},$$

Grâce à l'hypothèse $v_p(1-\lambda) > 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right)$, la série

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left((1-\lambda)(1-\sigma)^{-1}\right)^i$$

converge ; $\lambda - \sigma$ est donc inversible, d'inverse continu, et l'on a

$$(\lambda-\sigma)^{-1} = (1-\sigma)^{-1} \sum_{i=0}^{+\infty} \left((1-\lambda)(1-\sigma)^{-1}\right)^i.$$

On en déduit l'inégalité

$$v_p((\lambda-\sigma)^{-1}(x)) \geqslant v_p(x) - 1 - \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right)$$

pour tout $x \in \ker t_n$. ■

Considérons maintenant un caractère continu χ de $\mathcal{G}_{F_n}$ dans $\mathcal{O}_F^*$, trivial sur $\mathcal{G}_{F_{n,\infty}}$, et tel que

$$v_p(1-\chi(\sigma)) > \frac{p}{p-1} \qquad \text{quel que soit } \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}.$$

Lemme 2.8.2. *Le $\mathcal{O}_{F_n}$-module*

$$H^1(\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n), \mathcal{O}_{\widehat{F_{n,\infty}}}(\chi))$$

est annulé par multiplication par tout élément $u \in \mathcal{O}_{F_n}$ vérifiant

$$v_p(u) \geqslant \frac{p}{p-1} + \inf_{\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}} v_p(1-\chi(\sigma)).$$

Preuve : Soit $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$, engendrant $\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)$, et soit $\tau \mapsto c_\tau$ un cocycle représentant c. Alors c est entièrement déterminé par $c_\sigma \in \mathcal{O}_{\widehat{F_{n,\infty}}}(\chi)$. Posons $x = \frac{t_n(uc_\sigma)}{1-\chi(\sigma)} \in F_n$. Alors on a

$$v_p(x) \geqslant v_p(u) - \frac{p}{p-1} - v_p(1-\chi(\sigma)) = v_p(u) - \frac{p}{p-1} - \inf_{\tau \in \mathcal{G}_{F_n}} v_p(1-\chi(\tau)) \geqslant 0.$$

D'autre part, $uc_\sigma - (1-\chi(\sigma))x$ est un élément de $\ker t_n$. Posons

$$y = (1-\chi(\sigma)\sigma)^{-1}\,(uc_\sigma - (1-\chi(\sigma))x)$$

[$uc_\sigma - (1-\chi(\sigma))x$ étant considéré comme un élément de $\widehat{F_{n,\infty}}$, sans torsion par le caractère χ]. D'après le lemme 2.8.1, on a

$$\begin{aligned}
v_p(y) &\geqslant v_p(uc_\sigma - (1-\chi(\sigma))x) - \frac{p}{p-1} \\
&\geqslant \min\left(v_p(u), v_p(x) + v_p(1-\chi(\sigma))\right) - \frac{p}{p-1} \\
&\geqslant \min\left(v_p(u), v_p(u) - \frac{p}{p-1}\right) - \frac{p}{p-1} \\
&\geqslant v_p(u) - 2\frac{p}{p-1} \\
&\geqslant \inf_{\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}} v_p(1-\chi(\sigma)) - \frac{p}{p-1} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

On a alors $uc_\sigma = (x+y) - \chi(\sigma)\sigma(x+y)$, et $x+y \in \mathcal{O}_{\widehat{F_{n,\infty}}}$, d'où le résultat. ■

Lemme 2.8.3. *On a $H^1(F_{n,\infty}, \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}) = 0$.*

Ce lemme est démontré dans [Col98], en employant la méthode qui servira ici pour la proposition 3.10.3. On peut aussi le démontrer avec les arguments employés par Tate dans la partie 3.2 de [Tat66].

Proposition 2.8.4. *Le $\mathcal{O}_{F_n}$-module $H^1(F_n, \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}(\chi))$ est annulé par multiplication par tout élément u de $\mathcal{O}_{F_n}$ vérifiant $v_p(u) \geqslant \frac{p}{p-1} + \frac{1}{e_F q^{n-1}(q-1)} + \inf_{\tau \in \mathcal{G}_{F_n}} v_p(1-\chi(\tau))$.*

Preuve : On a la suite exacte d'inflation-restriction

$$0 \to H^1(\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n), \left(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}\right)^{\mathcal{G}_{F_{n,\infty}}}(\chi)) \to H^1(\mathcal{G}_{F_n}, \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}(\chi)) \to H^1(\mathcal{G}_{F_{n,\infty}}, \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}).$$

D'après le théorème d'Ax-Sen-Tate (2.3.2), on a $\left(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}\right)^{\mathcal{G}_{F_{n,\infty}}} = \mathcal{O}_{\widehat{F_{n,\infty}}}$. D'autre part, d'après le lemme précédent, $H^1(\mathcal{G}_{F_{n,\infty}}, \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$ est annulé par tout élément de $\mathcal{O}_{F_n}$ de valuation strictement positive, comme par exemple π_{F_n} (qui est de valuation $\frac{1}{e_F q^{n-1}(q-1)}$), et il suffit alors d'employer le lemme 2.8.2. ∎

Donnons pour finir une conséquence de cette proposition qui est utilisée dans la preuve du lemme principal (partie 4.3).

Corollaire 2.8.5. *Il existe une constante $c \in \mathbf{R}$ (dépendant seulement de F), $c \geqslant 0$, telle que si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont trois idéaux fractionnaires de $\mathbf{C}_p$, avec $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, alors pour $n > \frac{pe_F}{p-1}$, le noyau de l'application*

$$H^0(F_n, (\mathfrak{b}/\mathfrak{a})(\chi_{\mathcal{F}})) \longrightarrow H^1(F_n, (\mathfrak{a}/\mathfrak{c})(\chi_{\mathcal{F}}))$$

est annulé par multiplication par tout élément $u \in \mathcal{O}_{F_n}$ vérifiant

$$v_p(u) \geqslant \frac{n}{e_F} + v_p(\mathfrak{a}) - v_p(\mathfrak{c}) + c.$$

Preuve : Quitte à diviser les trois idéaux par le produit des périodes (cf. lemme 2.4.3) du groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$, on peut remplacer le caractère $\chi_{\mathcal{F}}$ dans l'énoncé précédent par le caractère $\chi = N_{F/\mathbf{Q}_p} \circ \chi_{\mathcal{F}}$. Comme $n \geqslant 1$, l'image de $\mathcal{G}_{F_n}$ par ce caractère est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. De plus, comme $n > \frac{pe_F}{p-1}$, on a

$$v_p(1 - \chi(\sigma)) > \frac{p}{p-1} \qquad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{F_n},$$

donc on peut utiliser les résultats précédents.

Considérons maintenant un $x \in \mathfrak{b}(\chi)$ représentant un élément de $H^0(F_n, (\mathfrak{b}/\mathfrak{a})(\chi))$ dont l'image dans $H^1(F_n, (\mathfrak{a}/\mathfrak{c})(\chi_{\mathcal{F}}))$ est nulle. Ce représentant est déterminé à un élément de $\mathfrak{a}(\chi)$ près, et la classe du cocycle $\sigma \mapsto (1-\sigma)(x)$ dans $H^1(F_n, \mathfrak{a}(\chi))$ est l'image d'un élément de $H^1(F_n, \mathfrak{c}(\chi))$. Autrement dit, quitte à ajouter à x un élément de $\mathfrak{a}(\chi)$, on peut supposer que le cocycle $\sigma \mapsto (1-\sigma)(x)$ est à valeurs dans $\mathfrak{c}(\chi)$. D'après la proposition 2.8.4, cela entraîne que pour tout $u_0 \in F_n$ avec

$$v_p(u_0) \geqslant \frac{p}{p-1} + \frac{2}{e_F q^{n-1}(q-1)} + \inf_{\tau \in \mathcal{G}_{F_n}} v_p(1 - \chi(\tau)),$$

$u_0 x$ est dans $\mathfrak{c}(\chi)$. Enfin, on a

$$\inf_{\tau \in \mathcal{G}_{F_n}} v_p(1 - \chi(\tau)) = \inf_{x \in 1 + \pi_F^n \mathcal{O}_F} v_p(1 - N_{F/\mathbf{Q}_p}(x)),$$

donc, pour n assez grand,

$$\inf_{\tau \in \mathcal{G}_{F_n}} v_p(1 - \chi(\tau)) = \left\lfloor \frac{n}{e_F} + v_p(\mathfrak{D}_{F/\mathbf{Q}_p}) \right\rfloor$$

par le lemme 2.2.9.

Prenons alors

$$c = \frac{1}{e_F} \left\lceil \frac{pe_F}{p-1} + \frac{2}{q^{n-1}(q-1)} + e_F v_p(\mathfrak{D}_{F/\mathbf{Q}_p}) \right\rceil,$$

et $u_0 \in F_n$ vérifiant $v_p(u_0) = \frac{n}{e_F} + c$. Si u est comme dans l'énoncé, on trouve alors

$$v_p(ux) = (v_p(u) - v_p(u_0)) + v_p(u_0 x) \geqslant (v_p(\mathfrak{a}) - v_p(\mathfrak{c})) + v_p(\mathfrak{c}) = v_p(\mathfrak{a}),$$

donc $ux \in \mathfrak{a}$, d'où le corollaire. ■

3 Anneaux de Fontaine

Cette partie a pour but d'introduire certains anneaux de Fontaine, de fixer les notations, et de donner certains résultats à leur sujet. Pour plus de détails, on pourra consulter par exemple [Fon94] ou [Col02].

3.1 Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$

On note ici F^{nr} l'extension maximale non ramifiée de F, et F_{nr} la plus grande extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans F.

On définit $\widetilde{\mathbf{E}}$ comme l'ensemble des suites $(x^{(n)})$ d'éléments de $\mathbf{C}_p$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. On définit la somme $(s^{(n)})$ et le produit $(t^{(n)})$ de deux éléments $(x^{(n)})$ et $(y^{(n)})$ de $\widetilde{\mathbf{E}}$ par les formules :

$$\begin{aligned} s^{(n)} &= \lim_{m \to +\infty} \left(x^{(m+n)} + y^{(m+n)} \right)^{p^m} \\ t^{(n)} &= x^{(n)} y^{(n)}. \end{aligned}$$

On sait qu'on obtient ainsi un corps de caractéristique p, algébriquement clos, et complet pour la valuation $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ définie par $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x) = v_p(x^{(0)})$. De plus, il y a une action évidente des groupes $\mathcal{G}_{F_n}$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}$.

On note $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ ou $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{E}}$ (qui correspond à l'anneau R de [Fon94]), et $\mathbf{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ ou $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}$ son idéal maximal. Le corps résiduel $k_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ est isomorphe à $\overline{\mathbf{F}_p}$.

Lemme 3.1.1. *L'anneau $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ est isomorphe à*

$$\varprojlim \left(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/\{v_p \geqslant \alpha\} \longleftarrow \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/\{v_p \geqslant \alpha\} \longleftarrow \cdots \right)$$

(les flèches correspondant à des élévations à la puissance p), pour tout $0 < \alpha \leqslant 1$.

On a clairement un morphisme de $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ vers cet anneau, et le morphisme réciproque s'obtient en envoyant la suite $(x_n \mod \{v_p \geqslant \alpha\})$ sur $\left(\lim_{m \to +\infty} x_{m+n}^{p^m}\right)$ (ces limites existent et ne dépendent pas des choix des x_n).

Une conséquence immédiate du lemme 3.1.1 est que $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ a une structure naturelle de $\overline{\mathbf{F}_p}$-algèbre.

3.2 Lien avec le corps des normes

Revenons à la tour d'extensions (F_n). Si $x \in \mathcal{O}_{F_{n+1}}$, la théorie de la ramification supérieure donne que pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$, on a $v_p(x - \sigma(x)) \geqslant \frac{1}{(q-1)e_F}$. On en déduit que

$$v_p\left(N_{F_{n+1}/F_n}(x) - x^q\right) \geqslant \frac{1}{(q-1)e_F},$$

et l'on obtient ainsi (par exemple via le lemme 3.1.1) une injection ι de $\varprojlim \mathcal{O}_{F_n}$ (les applications de transition étant données par la norme) dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$.

Notons η l'élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}$ associé à la suite (η_n) par l'application ι (les η_n se correspondant par la norme). On a $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(\eta) = \frac{q}{e_F(q-1)}$. Notons $\mathbf{E}_F$ le sous-corps $k_F((\eta))$ de $\widetilde{\mathbf{E}}$, et $\mathbf{E}$ la clôture séparable de $\mathbf{E}_F$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}$.

La théorie du corps de normes permet de montrer les résultats suivants.

Proposition 3.2.1. *L'application ι induit une bijection de $\varprojlim \mathcal{O}_{F_n}$ sur l'anneau $\mathbf{E}_F^+$ des entiers de $\mathbf{E}_F$. Plus généralement, si L/F est une extension finie, on a une bijection de $\varprojlim \mathcal{O}_{L\cdot F_n}$ sur l'anneau $\mathbf{E}_L^+$ des entiers de $\mathbf{E}_L = \mathbf{E}^{\mathcal{G}_{L\cdot F_\infty}}$.*

Proposition 3.2.2. *Si L est une extension finie de F_∞, $\mathbf{E}^{\mathcal{G}_L}$ est une extension finie séparable de $\mathbf{E}_F$, de degré $[L : F_\infty]$, et $\mathbf{E} = \bigcup \mathbf{E}_L$ est une clôture séparable de $\mathbf{E}_F$.*

(En effet, F_∞/F est strictement arithmétiquement profinie, au sens de [Win83], et cette proposition découle alors des résultats de cet article, en particulier le corollaire 4.3.4 et le théorème 3.2.2).

3.3 Les anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}$, $\widetilde{\mathbf{B}}$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+$, $\mathbf{B}_{\mathbf{dR}}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{max}}$, $\mathbf{B}_{\mathbf{max}}$

Les résultats énoncés ici sont démontrés dans [Fon94] ou dans [Col02].

On définit $\widetilde{\mathbf{A}} = W(\widetilde{\mathbf{E}})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}$, $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{p}\right]$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+\left[\frac{1}{p}\right]$. (L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ correspond à $W(R)$ de [Fon94]).

La structure de $\overline{\mathbf{F}_p}$-algèbre de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ donne sur $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ une structure de $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$-algèbre. On dote $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ de la topologie produit issue de celle de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$: si $[x]$ est le représentant de Teichmüller de $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$, et si $\widetilde{p}$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifiant $\widetilde{p}^{(0)} = p$, alors les idéaux $(p^m, [\widetilde{p}]^n)$ forment une base de voisinages de 0 dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$.

On a un morphisme d'anneaux surjectif $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$, défini par

$$\theta\left(\sum_{m=0}^{+\infty} p^m \underbrace{[(x_m^{(n)})_n]}_{\in \widetilde{\mathbf{E}}^+}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} p^m x_m^{(0)},$$

qui se prolonge naturellement à $\widetilde{\mathbf{B}}^+$.

On définit (comme dans l'article [Col02], excepté pour les notations) $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} \mathcal{O}_F$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+ = \widetilde{\mathbf{A}}_F^+\left[\frac{1}{\pi_F}\right] = \widetilde{\mathbf{B}}^+ \otimes_{F_{\mathrm{nr}}} F$, afin d'avoir des $\mathcal{O}_F$-algèbres. On peut prolonger θ à $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$.

Notons que les éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ s'écrivent de manière unique sous la forme

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \pi_F^m [x_m],$$

avec $x_m \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$, et que l'on a

$$\theta\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \pi_F^m [(x_m^{(n)})_n]\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \pi_F^m x_m^{(0)}.$$

L'idéal $\ker\theta \subset \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ est alors principal, et il est engendré par tout élément $\sum_{m=0}^{+\infty} \pi_F^m [x_m]$ de $\ker\theta$ vérifiant $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_0) = \frac{1}{e_F}$. En particulier, si $\widetilde{\pi_F}$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifiant $\widetilde{\pi_F}^{(0)} = \pi_F$, alors $[\widetilde{\pi_F}] - \pi_F$ engendre $\ker\theta$.

On a un automorphisme φ_F de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ (et $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$) défini par

$$\varphi_F\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \pi_F^m [(x_m^{(n)})_n]\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \pi_F^m [(x_m^{(n)})_n]^q.$$

On définit aussi $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \varprojlim \widetilde{\mathbf{B}}^+/(\ker\theta)^n$. D'après [Fo82a] ou [Col02] (proposition 7.12), $\varprojlim \widetilde{\mathbf{B}}_F^+/(\ker\theta)^n$ est isomorphe à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (via le morphisme naturel de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dans cet anneau). Le morphisme θ se prolonge naturellement à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est un anneau de valuation discrète, de corps résiduel $\mathbf{C}_p$ et d'idéal maximal $\ker\theta$. (Notons qu'un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui a une image non nulle par θ est inversible dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$).

On note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ le corps des fractions de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Notons que si ω est un générateur quelconque de $\ker\theta$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, alors on a $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\left[\frac{1}{\omega}\right]$. Le corps $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est doté de la filtration donnée par : $\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \omega^i \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

Soit ω un générateur de $\ker\theta$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ (par exemple $[\widetilde{\pi_F}] - \pi_F$). On note $\mathbf{A}_{\max,F}$ le séparé complété pour la topologie p-adique de la sous-$\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$-algèbre de $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$ engendrée par 1 et $\frac{\omega}{\pi_F}$. On écrira $\mathbf{A}_{\max}$ pour $\mathbf{A}_{\max,\mathbf{Q}_p}$. On pose $\mathbf{B}_{\max,F}^+ = \mathbf{A}_{\max,F}\left[\frac{1}{\pi_F}\right]$, et $\mathbf{B}_{\max}^+ = \mathbf{B}_{\max,\mathbf{Q}_p}^+$. D'après [Col02] (proposition 7.13), $\mathbf{B}_{\max,F}^+$ est isomorphe à $F \otimes_{F_{\mathrm{nr}}} \mathbf{B}_{\max}^+$. Tous ces anneaux sont indépendants du choix du générateur ω.

Le morphisme φ_F se prolonge de manière naturelle en un endomorphisme injectif de $\mathbf{B}_{\max,F}^+$.

3.4 Anneaux de Fontaine et séries entières

Lemme 3.4.1. *Il existe une section $\mathcal{O}_F$-linéaire continue du morphisme surjectif $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$.*

Preuve : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ dont les classes modulo π_F forment une base de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/\pi_F\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ sur k_F (le corps résiduel de $\mathcal{O}_F$). Choisissons aussi des $\widetilde{e_i} \in \widetilde{\mathbf{E}}$ tels que $\widetilde{e_i}^{(0)} = e_i$.

Tout élément x de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ s'écrit alors sous la forme

$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i,$$

avec $x_i \in \mathcal{O}_F$, tendant vers 0 selon le filtre des complémentaires des parties finies de I. On pose

$$s(x) = \sum_{i\in I} x_i [\widetilde{e_i}] \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+.$$

L'application s est alors linéaire et continue (par construction), et l'on a $\theta(s(x)) = x$. ■

Lemme 3.4.2. *Soit s une section $\mathcal{O}_F$-linéaire continue de $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$, et soit $\omega \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ un générateur de* $\ker\theta$. *Tout élément $x \in \mathbf{A}_{\max,F}$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n)\left(\frac{\omega}{\pi_F}\right)^n,$$

avec $a_n \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ vérifiant $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. *De plus, si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$, alors on a $v_p(a_n) \geqslant \frac{n}{e_F}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

Preuve : Posons $x_0 = x$. Si $x_n \in \mathbf{A}_{\max,F}$, $n \in \mathbf{N}$ a été défini, on pose $a_n = \theta(x_n) \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$. Alors $x_n - s(a_n) \in \mathbf{A}_{\max,F}$ est dans le noyau de θ, donc dans $\frac{\omega}{\pi_F}\mathbf{A}_{\max,F}$, et l'on définit alors $x_{n+1} = \frac{\pi_F}{\omega}(x_n - s(a_n))$.

On obtient ainsi deux applications $\mathcal{O}_F$-linéaires continues de $\mathbf{A}_{\max,F}$ dans $(\mathbf{A}_{\max,F})^{\mathbf{N}}$ et $(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})^{\mathbf{N}}$ respectivement, qui à x font correspondre respectivement la suite (x_n) et la suite (a_n).

On va maintenant montrer que la suite (x_n) tend vers 0 pour la topologie p-adique. Comme $a_n = \theta(x_n)$, cela a pour conséquence que la suite (a_n) tend aussi vers 0, et comme, pour tout $N \geqslant 0$:

$$x = \sum_{n=0}^{N-1} s(a_n)\left(\frac{\omega}{\pi_F}\right)^n + x_N\left(\frac{\omega}{\pi_F}\right)^N,$$

on en déduit aussi, par passage à la limite, la relation

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n)\left(\frac{\omega}{\pi_F}\right)^n.$$

Considérons d'abord le cas où x est dans $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, x_n est dans $\pi_F^n\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ et a_n est dans $\pi_F^n\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$, donc en particulier les suites (x_n) et (a_n) tendent vers 0, et l'on a au passage montré la dernière affirmation du lemme.

Notons maintenant que les suites associées à $\frac{\omega}{\pi_F}x$ sont $\frac{\omega}{\pi_F}x, x_0, x_1, x_2, \ldots$ et $0, a_0, a_1, a_2, \ldots$. Par linéarité, on en déduit que les deux suites associées à un élément de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+\left[\frac{\omega}{\pi_F}\right]$ tendent vers 0 pour la topologie π_F-adique.

Enfin, $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+\left[\frac{\omega}{\pi_F}\right]$ étant dense pour la topologie p-adique dans $\mathbf{A}_{\max,F}$ (par définition de $\mathbf{A}_{\max,F}$), on en déduit par continuité que les suites (x_n) et (a_n) associées à tout élément x de $\mathbf{A}_{\max,F}$ tendent vers 0.

Tout élément de $\mathbf{A}_{\max,F}$ s'écrit donc sous la forme annoncée. Enfin, si l'on applique la construction ci-dessus à

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(b_n)\left(\frac{\omega}{\pi_F}\right)^n \in \mathbf{A}_{\max,F},$$

avec $b_n \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ et (b_n) tendant vers 0, on trouve

$$x_n = \sum_{k=n}^{+\infty} s(b_k)\left(\frac{\omega}{\pi_F}\right)^{k-n} \quad \text{et} \quad a_n = b_n,$$

d'où l'unicité. ■

Corollaire 3.4.3. *Soit s une section $\mathcal{O}_F$-linéaire continue de $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$. Tout élément $x \in \mathbf{A}_{\max,F}$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(b_n)\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n,$$

avec $b_n \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ vérifiant $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. De plus, si x est dans $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$, alors on a $v_p(b_n) \geqslant \frac{n}{e_F}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Preuve : On peut appliquer le lemme précédent avec $\omega = [\widetilde{\pi_F}] - \pi_F$, ce qui permet d'écrire x sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F} - 1 \right)^n,$$

avec (a_n) une suite d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ qui tend vers 0. On a alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F} \right)^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} s(a_n) \right) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F} \right)^k, \end{aligned}$$

donc x s'écrit sous la forme annoncée, avec

$$b_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_n.$$

(Comme la suite (a_n) tend vers 0, ces sommes convergent, et la suite (b_n) tend vers 0).

Montrons maintenant l'unicité. Par linéarité, il suffit de montrer que si

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} s(b_n) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F} \right)^n$$

alors les b_n sont tous nuls. Commençons par refaire à l'envers la transformation précédente. On a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} s(b_n) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F} - 1 \right)^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} s(b_n) \right) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F} - 1 \right)^k, \end{aligned}$$

donc, d'après le lemme précédent,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} b_n = 0 \qquad \text{pour tout } k \in \mathbf{N}.$$

Supposons maintenant que les b_n ne sont pas tous nuls. Comme la suite (b_n) tend vers 0, il existe un $N \in \mathbf{N}$ tel que

- $v_p(b_N) = \inf_{n \in \mathbf{N}} v_p(b_n)$;
- pour tout $n > N$, $v_p(b_n) > v_p(b_N)$.

Or on a

$$b_N = - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \binom{n}{N} b_n,$$

donc $v_p(b_N) > v_p(b_N)$, d'où la contradiction recherchée.

La dernière affirmation découle directement de la propriété analogue dans le lemme précédent, et de l'expression de b_n obtenue ci-dessus. ∎

3.5 Sous-espaces propres sous l'action de φ_F

Lemme 3.5.1. *Si $v_p(a) < 0$, on a $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a} = \{0\}$.*

Preuve : Cela découle du fait que $\mathbf{A}_{\max,F}$ est stable par φ_F. ■

Lemme 3.5.2. *On a $\mathbf{A}^{\varphi_F=1}_{\max,F} = (\widetilde{\mathbf{A}}^+_F)^{\varphi_F=1} = \mathcal{O}_F$.*

Preuve : En effet, considérons un $x \in \mathbf{A}^{\varphi_F=1}_{\max,F}$. D'après le corollaire 3.4.3, on peut écrire x sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n,$$

avec $x_n \in \widetilde{\mathbf{A}}^+_F$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a alors

$$\begin{aligned} x &= \varphi_F^m(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_F^m(x_n) \frac{[\widetilde{\pi_F}]^{nq^m}}{\pi_F^n} \\ &\equiv \varphi_F^m(x_0) \pmod{\pi_F^{q^m-1}\mathbf{A}_{\max,F}} \end{aligned}$$

donc, par passage à la limite, x appartient à $\widetilde{\mathbf{A}}^+_F$. On est donc ramené à la seconde égalité.

Enfin, pour montrer celle-ci, il suffit de remarquer que $(\widetilde{\mathbf{E}}^+)^{\varphi_F=1}$ est (canoniquement) isomorphe à k_F, et l'on a donc le lemme 3.5.2. ■

Si $v_p(a) = 0$, alors $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}$ est contenu dans F^{nr}. Plus précisément, on a le lemme suivant.

Lemme 3.5.3. *Si $a \in \mathcal{O}_F^*$, alors $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}$ est un sous-F-espace vectoriel de dimension 1 de F^{nr}.*

Preuve : Les modules $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k_F}/k_F), \overline{k_F})$ et $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k_F}/k_F), \overline{k_F}^*)$ sont nuls (Hilbert 90), donc, par dévissage, $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k_F}/k_F), \mathcal{O}^*_{F^{\mathrm{nr}}}) = 0$, si bien qu'il existe un $x' \in F^{\mathrm{nr}}$ tel que $\varphi_F(x') = ax'$. Alors $x'^{-1}x$ est un élément de $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1} = F$, d'où le lemme. ■

3.6 Les périodes d'un groupe de Lubin-Tate

On va maintenant définir dans ces anneaux quelques éléments associés au groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$ considéré.

On avait déjà défini dans la partie 3.2 un élément $\eta \in \widetilde{\mathbf{E}}^{++}$ associé à $\mathcal{F}$.

Comme l'application $[\pi_F]_{\mathcal{F}} \circ \varphi_F^{-1}$ est contractante sur chacune des classes de

$$\left\{z \in \widetilde{\mathbf{A}}^+_F \ / \ \theta(z) \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}\right\} \quad \text{modulo} \quad \pi_F \widetilde{\mathbf{A}}^+_F,$$

pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ la suite

$$\left(\left([\pi_F]_{\mathcal{F}} \circ \varphi_F^{-1}\right)^n ([x])\right)_n$$

converge vers un élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+_F$ noté $\{x\}_{\mathcal{F}}$ qui est l'unique élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+_F$ dont la réduction modulo π_F est x et qui vérifie $\varphi_F(\{x\}_{\mathcal{F}}) = [\pi_F]_{\mathcal{F}}(\{x\}_{\mathcal{F}})$. (C'est le lemme 8.3 de [Col02]).

On pose en particulier $\varpi_{\mathcal{F}} = \{\eta\}_{\mathcal{F}}$. Alors $\frac{\varpi_{\mathcal{F}}}{\varphi_F^{-1}(\varpi_{\mathcal{F}})}$ est un générateur de $\ker\theta$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$, et $\varpi_{\mathcal{F}}$ lui-même engendre $\bigcap_{n\geqslant 0}\varphi_F^{-n}(\ker\theta|_{\widetilde{\mathbf{A}}_F^+})$. (Cf. proposition 8.6 dans [Col02]).

Si $\sigma \in \mathcal{G}_F$, alors on a $\sigma(\eta) = [\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)]_{\mathcal{F}}(\eta)$ par construction de η, donc

$$\sigma(\varpi_{\mathcal{F}}) = [\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)]_{\mathcal{F}}(\varpi_{\mathcal{F}}).$$

Posons $t_{\mathcal{F}} = \log_{\mathcal{F}}(\varpi_{\mathcal{F}}) \in \mathbf{A}_{\max,F}$. Il vérifie $\varphi_F(t_{\mathcal{F}}) = \pi_F t_{\mathcal{F}}$, et l'idéal de $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ engendré par $t_{\mathcal{F}}$ est $\bigcap_{n\geqslant 0}\varphi_F^{-n}(\ker\theta|_{\mathbf{B}^+_{\max,F}})$. (Cf. proposition 8.10 dans [Col02]).

Pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_F$, on a $\sigma(t_{\mathcal{F}}) = \chi_{\mathcal{F}}(\sigma)t_{\mathcal{F}}$.

Notons que pour tout $\rho \in \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbf{Q}_p})$, on peut définir de manière naturelle un morphisme d'anneaux $\underline{\rho} : \mathbf{B}^+_{\max,F} \to \mathbf{B}^+_{\max,\rho(F)}$, dont la restriction à F est ρ et dont la restriction à $\mathbf{B}^+_{\max}$ est de la forme $\varphi^i_{\mathbf{Q}_p}$, avec $0 \leqslant i < h$ (l'action de ρ sur F_{nr} donnant la bonne valeur de i). Posons $t_{\mathcal{F},\rho} = \underline{\rho}(t_{\mathcal{F}}) \in \mathbf{B}^+_{\max,\rho(F)}$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_F$, on a alors $\sigma(t_{\mathcal{F},\rho}) = \rho(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma))t_{\mathcal{F},\rho}$. Ainsi, les $t_{\mathcal{F},\rho}$ constituent les analogues dans $\mathbf{B}^+_{\max,\rho(F)}$ des périodes $\xi_\rho \in \mathbf{C}_p$ définies précédemment. Contrairement à ce qui se passait dans $\mathbf{C}_p$, on a aussi une période pour $\rho = 1$ (à savoir, $t_{\mathcal{F}}$).

On peut montrer (cf. [Col02]) que $\theta(\underline{\rho}(t_{\mathcal{F}}))$ n'est nul que pour $\rho = 1$, si bien que les périodes ξ_ρ coïncident avec les images par θ des périodes dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$. De plus, $\prod_{\rho\in\mathrm{Hom}(F,\overline{\mathbf{Q}_p})}\underline{\rho}(t_{\mathcal{F}})$ est égal à la période t associée à $\mathbf{G_m}$, à multiplication par un élément de $(F^{\mathrm{nr}})^*$ près. En particulier, $t_{\mathcal{F}}$ divise t dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$.

Lemme 3.6.1. *Pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, on a la suite exacte*

$$0 \longrightarrow (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}t_{\mathcal{F}} \longrightarrow (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F a} \xrightarrow{\theta} \mathbf{C}_p \longrightarrow 0.$$

Preuve : Comme $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ est intègre et $\varphi_F(t_{\mathcal{F}}) = \pi_F t_{\mathcal{F}}$, l'existence et l'injectivité du morphisme $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}t_{\mathcal{F}} \to (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F a}$ ne posent pas de problème.

On a $\theta(t_{\mathcal{F}}) = 0$. D'autre part, si $x \in (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F a}$ vérifie $\theta(x) = 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\varphi_F^n(x) \in \ker\theta$, donc x est multiple de $t_{\mathcal{F}}$.

Il reste donc à montrer la surjectivité de θ. Comme θ est un morphisme d'anneaux, il suffit de montrer que $\theta\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}\right)$ n'est pas réduit à 0 et que $\theta\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F}\right) = \mathbf{C}_p$.

D'après le lemme 3.5.3, $\theta\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}\right)$ n'est pas réduit à 0 si $v_p(a) = 0$. Si de plus on arrive à montrer $\theta\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F}\right) = \mathbf{C}_p$, on en déduira que $\theta\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}\right)$ n'est pas réduit à 0 pour tout $a \in \mathcal{O}_F$.

Il suffit donc de montrer $\theta\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F}\right) = \mathbf{C}_p$. Cela est fait dans l'article [Col02]. ■

3.7 Généralités sur les vecteurs de Witt

Lemme 3.7.1. *Il existe des polynômes*

$$S_n \in k_F[X_0, Y_0, X_{-1}, Y_{-1}, \ldots, X_{-n}, Y_{-n}]$$

tels que

- $S_n(X_0, Y_0, \ldots, X_{-n}^{p^{-\lfloor \frac{n}{e_F}\rfloor}}, Y_{-n}^{p^{-\lfloor \frac{n}{e_F}\rfloor}})$ *est homogène de degré* 1 *;*
- S_n *est invariant par interversion des lettres* X *et* Y *;*

- *$S_0(X_0, Y_0, 0, 0, \dots) = X_0 + Y_0$;*
- *$S_{n+1}(X_0, Y_0, \dots, X_{-n}, Y_{-n}, X_{-n-1}, 0) = S_n(X_0, Y_0, \dots, X_{-n}, Y_{-n})$;*
- *si $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_F^n[x_n]$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_F^n[y_n]$ sont deux éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$ (en particulier, on a alors $x_n = y_n = 0$ pour n assez petit), alors leur somme est*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_F^n[S_n(x_n, y_n, x_{n-1}, y_{n-1}, \dots, x_{n-e_F}^{1/p}, y_{n-e_F}^{1/p})].$$

Preuve : Pour $F = \mathbf{Q}_p$, $e_F = 1$, $\pi_F = p$, cela découle de la construction des anneaux de vecteurs de Witt (cf. [Ser68], chapitre 2, paragraphe 6).

Dans le cas général, c'est l'existence de polynômes S_n vérifiant la dernière propriété qui est le point difficile, les autres propriétés découlant assez aisément de leur construction et de la propriété analogue dans le cas $F = \mathbf{Q}_p$.

Pour montrer l'existence, on va considérer le cas plus général d'une somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} a_{i,n}[x_{i_n}],$$

avec I_n des ensembles finis, $a_{i,n} \in \mathcal{O}_F$ vérifiant $v_p(a_{i,n}) = \frac{n}{e_F}$, et montrer par récurrence que cette somme s'écrit, pour tout $N \in \mathbf{N}$, sous la forme

$$\sum_{n=0}^{N-1} \pi_F^n[y_n] \; + \; \sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{j \in J_{N,n}} b_{N,j,n}[z_{N,j,n}],$$

avec $J_{N,n}$ des ensembles finis d'indices, $b_{N,j,n}$ de valuation $\frac{n}{e_F}$, et avec y_n et $z_{N,j,n}$ donnés par des polynômes en $x_{i,n}$, …, $x_{i,0}^{p^{-\left\lfloor \frac{n}{e_F} \right\rfloor}}$, homogènes de degré 1 en $x_{i,n}$, …, $x_{i,0}$, et invariants par échange permutation des indices i.

Pour $N = 0$, la propriété est immédiate. De plus, le passage de N à $N+1$ peut se faire en appliquant le cas $N = 1$ à

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \sum_{j \in J_{N,n}} \frac{b_{N,j,n}}{\pi_F^N}[z_{N,j,n}].$$

En effet, une expression homogène de degré 1 en $b_{N,j,n}$, …, $b_{N,j,N}$ est homogène de degré 1 en $x_{i,n}$, …, $x_{i,0}$, et un polynôme en $b_{N,j,n}$, …, $b_{N,j,N}^{p^{-\left\lfloor \frac{n-N}{e_F} \right\rfloor}}$ est un polynôme en $x_{i,n}$, …, $x_{i,0}^{p^{-\left\lfloor \frac{n}{e_F} \right\rfloor}}$ (car $\left\lfloor \frac{u}{e_F} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{v}{e_F} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{u+v}{e_F} \right\rfloor$).

On est donc ramené au cas $N = 1$. Écrivons maintenant

$$a_{i,0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_F^k[c_{i,k}] \qquad \text{avec } c_{i,k} \in k_F.$$

Alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i\in I_n} a_{i,n}[x_{i,n}] &= \sum_{i\in I_0} a_{i,0}[x_{i,0}] \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i\in I_n} a_{i,n}[x_{i,n}]\\ &= \sum_{i\in I_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\pi_F^k[c_{i,k}x_{i,0}] \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i\in I_n} a_{i,n}[x_{i,n}]\\ &= \sum_{i\in I_0}[c_{i,0}x_{i,0}] \ + \ \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i\in I_0}\pi_F^k[c_{i,k}x_{i,0}] \ + \ \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i\in I_n} a_{i,n}[x_{i,n}].\end{aligned}$$

Enfin, d'après les formules d'addition dans les anneaux de Witt, on a

$$\sum_{i\in I_0}[c_{i,0}x_{i,0}] \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} p^n[d_n],$$

avec d_n un polynôme en les $x_{i,0}^{p^{-n}}$, homogène de degré 1 en les $x_{i,0}$. De plus, on a $d_0 = \sum_{i\in I} c_{i,0}x_{i,0}$. On trouve donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i\in I_n} a_{i,n}[x_{i,n}] = [d_0] + \sum_{n=1}^{+\infty} p^n[d_n] + \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i\in I_0}\pi_F^k[c_{i,k}x_{i,0}] + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i\in I_n} a_{i,n}[x_{i,n}],$$

ce qui permet de conclure la récurrence, et le lemme s'en déduit. ■

En fait, les polynômes S_n peuvent être obtenus à partir d'une même série formelle en une infinité de variables. Plus précisément, on a le lemme suivant.

Lemme 3.7.2. *Il existe une série (précisément une somme formelle dénombrable de monômes de degré total fini)*

$$S \in k_F[[X_0, Y_0, X_{-1}, Y_{-1}, X_{-2}, Y_{-2}, \dots]]$$

telle que

- *pour tout $n \geqslant 0$, $S(X_0, Y_0, \dots, X_{-n}, Y_{-n}, 0, 0, 0, 0, \dots)$ est un polynôme en X_0, Y_0, ..., X_{-n}, Y_{-n} ;*
- *pour tout $n \geqslant 0$,*

$$S(X_0, Y_0, X_{-1}, Y_{-1}, \dots, X_{-e_F+1}, Y_{-e_F+1}, X_{-e_F}^{1/p}, Y_{-e_F}^{1/p}, \dots, X_{-n}^{p^{-\left\lfloor \frac{n}{e_F}\right\rfloor}}, Y_{-n}^{p^{-\left\lfloor \frac{n}{e_F}\right\rfloor}}, 0, 0, \dots)$$

est homogène de degré 1 en X_0, Y_0, ..., X_{-n}, Y_{-n} ;
- *S est invariante par interversion des lettres X et Y ;*
- *$S(X_0, Y_0, 0, 0, \dots) = X_0 + Y_0$;*
- *pour tout $n > 0$, $S(X_0, Y_0, \dots, X_{-n}, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)$ ne dépend pas de X_{-n} (autrement dit, tout monôme faisant intervenir X_{-n} fait aussi intervenir un Y_{-m} pour $m \geqslant n$) ;*
- *si $\sum_{n\in\mathbf{Z}}\pi_F^n[x_n]$ et $\sum_{n\in\mathbf{Z}}\pi_F^n[y_n]$ sont deux éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$ (en particulier, on a alors $x_n = y_n = 0$ pour n assez petit), alors leur somme est*

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\pi_F^n[S(x_n, y_n, x_{n-1}, y_{n-1}, \dots, x_{n-e_F}^{1/p}, y_{n-e_F}^{1/p}, \dots)].$$

Preuve : Le point essentiel est le dernier. Quitte à multiplier par une puissance de π_F, on est ramené au cas de deux éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)\otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}}\mathcal{O}_F$. On a alors $x_n = y_n = 0$ pour $n<0$. On sait alors, d'après le lemme précédent, que l'on a

$$\left(\sum_{n\geqslant 0}\pi_F^n[x_n]\right)+\left(\sum_{n\geqslant 0}\pi_F^n[y_n]\right)=\sum_{n\geqslant 0}\pi_F^n[S_n(x_n,y_n,\dots,x_0^{p^{-\lfloor\frac{n}{e_F}\rfloor}},y_0^{p^{-\lfloor\frac{n}{e_F}\rfloor}})].$$

Il s'agit donc de prouver que l'on a une série S vérifiant

$$S(X_0,Y_0,X_{-1},Y_{-1},\dots,X_{-n},Y_{-n},0,0,0,\dots)=S_n(X_0,Y_0,\dots,X_{-n},Y_{-n}),$$

ce qui découle du fait que l'on a, pour tout $n\geqslant 0$,

$$S_{n+1}(X_0,Y_0,\dots,X_{-n},Y_{-n},0,0)=S_n(X_0,Y_0,\dots,X_{-n},Y_{-n}).$$

À partir de là, les autres points se déduisent des propriétés des S_n. ∎

3.8 La valuation p-adique de $\mathbf{B}^+_{\mathbf{max},F}$

Le but de cette partie sera de définir une valuation p-adique sur $\mathbf{B}^+_{\max,F}$.

Commençons par définir ladite valuation sur les éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$. Si

$$x=\sum_{n=0}^{+\infty}\pi_F^n[x_n]\qquad\text{avec } x_n\in\widetilde{\mathbf{E}}^+$$

est un élément de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$, on pose

$$v_{\max,F}(x)=\min_{n\in\mathbf{Z}}\left(\frac{n}{e_F}+v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n)\right).$$

On a alors les résultats suivants.

Lemme 3.8.1. *Si x et y sont deux éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$, alors on a*

① $v_{\max,F}(x)=+\infty$ *si et seulement si* $x=0$ *;*

② $v_{\max,F}(x+y)\geqslant\min(v_{\max,F}(x),v_{\max,F}(y))$ *;*

③ $v_{\max,F}(xy)=v_{\max,F}(x)+v_{\max,F}(y)$ *;*

④ $v_{\max,F}([\widetilde{\pi_F}])=v_{\max,F}(\pi_F)=\frac{1}{e_F}$ *;*

⑤ $v_{\max,F}(x)\geqslant\frac{n}{e_F}$*, avec* $n\in\mathbf{N}$*, si et seulement si* x *est dans l'idéal de* $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ *engendré par* π_F^n, $\pi_F^{n-1}[\widetilde{\pi_F}]$, ..., $[\widetilde{\pi_F}]^n$.

Preuve : Le premier et le quatrième points découlent directement de la définition.

Pour le deuxième point, posons

$$x=\sum_{n=0}^{+\infty}\pi_F^n[x_n]\quad,\quad y=\sum_{n=0}^{+\infty}\pi_F^n[y_n]\quad,\quad z=x+y=\sum_{n=0}^{+\infty}\pi_F^n[z_n]$$

avec $x_n, y_n, z_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, z_n est donné par une expression homogène de degré 1 en x_0, y_0, x_1, y_1, …, x_n, y_n (d'après le lemme 3.7.1), donc on a

$$\begin{aligned}
v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(z_n) &\geqslant \min\Big(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_0), v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(y_0), \dots, v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n), v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(y_n)\Big) \\
&\geqslant \min\left(v_{\max,F}(x) - \frac{0}{e_F}, v_{\max,F}(y) - \frac{0}{e_F}, \dots, v_{\max,F}(x) - \frac{n}{e_F}, v_{\max,F}(y) - \frac{n}{e_F}\right) \\
&\geqslant \min\left(v_{\max,F}(x), v_{\max,F}(y)\right) - \frac{n}{e_F},
\end{aligned}$$

donc $v_{\max,F}(z) \geqslant \min(v_{\max,F}(x), v_{\max,F}(y))$.

Notons qu'on peut en déduire qu'il y a égalité si $v_{\max,F}(x)$ et $v_{\max,F}(y)$ ne sont pas égaux.

Passons au troisième point. Posons

$$w = xy = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_F^n[w_n]$$

Soient $n_0, n_1 \in \mathbf{N}$ tels que

$$\begin{aligned}
\frac{n}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) &> v_{\max,F}(x) && \text{si } n < n_0 \\
\frac{n_0}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_{n_0}) &= v_{\max,F}(x) \\
\frac{n}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) &\geqslant v_{\max,F}(x) && \text{si } n > n_0 \\
\frac{n}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(y_n) &> v_{\max,F}(y) && \text{si } n < n_1 \\
\frac{n_1}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(y_{n_1}) &= v_{\max,F}(y) \\
\frac{n}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(y_n) &\geqslant v_{\max,F}(y) && \text{si } n > n_1.
\end{aligned}$$

On a alors

$$v_{\max,F}\left(\pi_F^i[x_i] \cdot \pi_F^j[y_j]\right) \geqslant v_{\max,F}(x) + v_{\max,F}(y),$$

donc, par le deuxième point,

$$v_{\max,F}(w) \geqslant v_{\max,F}(x) + v_{\max,F}(y).$$

Or on a

$$\begin{aligned}
w &= xy \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n_0-1} \pi_F^i[x_i] \;+\; \pi_F^{n_0}[x_{n_0}] \;+ \dots\right)\left(\sum_{j=0}^{n_1-1} \pi_F^j[y_j] \;+\; \pi_F^{n_1}[y_{n_1}] \;+ \dots\right) \\
&\equiv \left(\sum_{i=0}^{n_0-1} \pi_F^i[x_i]\right)\left(\sum_{j=0}^{n_1-1} \pi_F^j[y_j]\right) \\
&\qquad + \pi_F^{n_0}[x_{n_0}]\left(\sum_{j=0}^{n_1-1} \pi_F^j[y_j]\right) + \left(\sum_{i=0}^{n_0-1} \pi_F^i[x_i]\right)\pi_F^{n_1}[y_{n_1}] \\
&\qquad + \pi_F^{n_0+n_1}[x_{n_0}y_{n_1}] \pmod{\pi_F^{n_0+n_1+1}},
\end{aligned}$$

or

$$v_{\max,F}\left(\sum_{i=0}^{n_0-1}\pi_F^i[x_i]\right) > v_{\max,F}(x)$$
$$v_{\max,F}\left(\sum_{j=0}^{n_1-1}\pi_F^j[y_j]\right) > v_{\max,F}(y)$$
$$v_{\max,F}\left(\pi_F^{n_0+n_1}[x_{n_0}y_{n_1}]\right) = v_{\max,F}(x)+v_{\max,F}(y),$$

donc, à l'aide du deuxième point, on en déduit $v_{\max,F}(w) = v_{\max,F}(x) + v_{\max,F}(y)$.

Pour le sixième point, l'implication

$$x \in \left(\pi_F^n, \pi_F^{n-1}[\widetilde{\pi_F}], \ldots, [\widetilde{\pi_F}]^n\right) \implies v_{\max,F}(x) \geqslant \frac{n}{e_F}$$

découle des points quatre et cinq. Pour montrer l'implication réciproque, écrivons

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty}\pi_F^n[x_n].$$

Si $v_{\max,F}(x) \geqslant \frac{n}{e_F}$, alors on a $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_0) \geqslant \frac{n}{e_F}$, $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_1) \geqslant \frac{n-1}{e_F}$, ..., $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_{n-1}) \geqslant \frac{1}{e_F}$, donc x est bien dans l'idéal $(\pi_F^n, \pi_F^{n-1}[\widetilde{\pi_F}], \ldots, [\widetilde{\pi_F}]^n)$.

Ceci conclut la preuve du lemme 3.8.1. ■

Étendons maintenant $v_{\max,F}$ à $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+\left[\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right]$.

Soit $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+\left[\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right]$. Il existe alors un $n \in \mathbf{N}$ tel que $\pi_F^n x$ soit un élément de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$. On pose alors

$$v_{\max,F}(x) = v_{\max,F}(\pi_F^n x) - \frac{n}{e_F}.$$

D'après le lemme 3.8.1, cette définition ne dépend pas du choix de n et est cohérente sur les éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$. Étendons les résultats précédents.

Lemme 3.8.2. *Si x et y sont deux éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+\left[\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right]$, alors on a*

① $v_{\max,F}(x) = +\infty$ *si et seulement si* $x = 0$ *;*

② $v_{\max,F}(x+y) \geqslant \min(v_{\max,F}(x), v_{\max,F}(y))$ *;*

③ $v_{\max,F}(xy) = v_{\max,F}(x) + v_{\max,F}(y)$ *;*

④ $v_{\max,F}([\widetilde{\pi_F}]) = v_{\max,F}(\pi_F) = \frac{1}{e_F}$ *;*

⑤ $v_{\max,F}(x) \geqslant \frac{n}{e_F}$, $n \in \mathbf{N}$ *si et seulement si x est dans* $\pi_F^n\widetilde{\mathbf{A}}_F^+\left[\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right]$.

Preuve : C'est une application immédiate du lemme 3.8.1 et de la définition étendue de $v_{\max,F}$. ■

On peut maintenant définir $v_{\max,F}$ sur $\mathbf{A}_{\max,F}$ tout entier.

Lemme 3.8.3. *La fonction $v_{\max,F}$ se prolonge par continuité à $\mathbf{A}_{\max,F}$, et vérifie les propriétés suivantes. Si x et y sont deux éléments de $\mathbf{A}_{\max}$, alors on a*

① $v_{\max,F}(x) = +\infty$ *si et seulement si* $x = 0$ *;*

② $v_{\max,F}(x+y) \geqslant \min(v_{\max,F}(x), v_{\max,F}(y))$ *;*

③ $v_{\max,F}(xy) = v_{\max,F}(x) + v_{\max,F}(y)$;

④ $v_{\max,F}([\widetilde{\pi_F}]x) = v_{\max,F}(\pi_F x) = v_{\max,F}(x) + \frac{1}{e_F}$;

⑤ $v_{\max,F}(x) \geqslant \frac{n}{e_F}$, $n \in \mathbf{N}$ *si et seulement si* x *est dans* $\pi_F^n \mathbf{A}_{\max}$.

Preuve : D'après le lemme 3.8.2 (cinquième point), si une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \left[\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right]$ tend π_F-adiquement vers 0, son image par $v_{\max,F}$ tend vers $+\infty$. D'après le deuxième point du même lemme, on en déduit que si une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \left[\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right]$ (qui est dense dans $\mathbf{A}_{\max,F}$, par exemple d'après le corollaire 3.4.3) converge dans $\mathbf{A}_{\max}$ pour la topologie π_F-adique, alors son image par $v_{\max,F}$ soit est stationnaire soit tend vers $+\infty$ (auquel cas la suite tend vers 0). On trouve donc que $v_{\max,F}$ se prolonge par continuité à $\mathbf{A}_{\max,F}$, et vérifie le premier point. Les autres résultats se déduisent alors par continuité. ■

Enfin, on peut prolonger $v_{\max,F}$ en une valuation sur $\mathbf{B}_{\max,F}^+$ en posant

$$v_{\max,F}\left(\pi_F^{-n} x\right) = v_{\max,F}(x) - \frac{n}{e_F}$$

pour $x \in \mathbf{A}_{\max,F}$ et $n \in \mathbf{N}$.

Corollaire 3.8.4. *Soit* $x \in \mathbf{B}_{\max,F}^+$. *Alors* x *est dans* $\mathbf{A}_{\max,F}$ *si et seulement si* $v_{\max,F}(x) \geqslant 0$. *La topologie définie sur* $\mathbf{B}_{\max,F}^+$ *par la valuation* $v_{\max,F}$ *est la topologie* π_F*-adique (i.e. la topologie naturelle de* $\mathbf{B}_{\max,F}^+$*).*

Preuve : C'est une conséquence immédiate du cinquième point du lemme précédent. ■

On a donc obtenu une valuation p-adique $v_{\max,F}$ sur l'anneau $\mathbf{B}_{\max,F}^+$. Notons que l'on a $v_{\max,F}(t_{\mathcal{F}}) = v_{\max,F}(\varpi_{\mathcal{F}}) = \frac{q}{e_F(q-1)}$.

Pour finir donnons un lemme qui servira à calculer la valuation des éléments d'ordre 1 de $\mathbf{B}_{\max,F}^+$, dans la partie suivante.

Lemme 3.8.5. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ *une suite d'éléments de* $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, *qui vérifie*

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{n}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) = +\infty.$$

Alors la somme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n [x_n]$ *converge dans* $\mathbf{B}_{\max,F}^+$, *et l'on a*

$$v_{\max,F}\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n [x_n]\right) = \inf_{n\in\mathbf{Z}} \left(\frac{n}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n)\right).$$

Preuve : En effet, on a

$$\lim_{n\to-\infty} v_{\max,F}(\pi_F^n [x_n]) = +\infty$$

par hypothèse, et

$$\lim_{n\to+\infty} v_{\max,F}(\pi_F^n [x_n]) = +\infty$$

car $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) \geqslant 0$, ce qui montre la convergence de la somme.

De plus, par construction de $v_{\max,F}$, on a

$$v_{\max,F}\left(\sum_{n=-N}^{N} \pi_F^n [x_n]\right) = \inf_{-N\leqslant n\leqslant N} \frac{n}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n),$$

et donc
$$v_{\max,F}\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}}\pi_F^n[x_n]\right)=\inf_{n\in\mathbf{Z}}\left(\frac{n}{e_F}+v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n)\right).$$
■

3.9 Éléments d'ordre 1

Les éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$ s'écrivent de manière unique sous la forme
$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\pi_F^n[x_n]\qquad\text{avec } x_n\in\widetilde{\mathbf{E}}^+\text{, nul pour } n \text{ assez petit.}$$
Si l'on considère maintenant une suite (x_n) d'éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ telle que
$$\lim_{n\to-\infty}v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n)+\frac{n}{e_F}=+\infty,$$
alors la série
$$\sum_{n\in\mathbf{Z}}\pi_F^n[x_n]$$
converge dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ d'après le lemme 3.8.5. De plus, les éléments ainsi obtenus sont denses pour la topologie p-adique dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ (car on obtient en particulier tous les éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+\left[\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right]$, qui est dense dans $\mathbf{A}_{\max,F}$). Ceci conduit naturellement à se demander si tous éléments de $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ peuvent s'écrire ainsi (question dont je ne connais pas la réponse). Cependant, si une telle écriture existe, elle se comporte de manière beaucoup plus désagréable qu'on ne le voudrait. Par exemple, si $p>2$ et $F=\mathbf{Q}_p$, on peut regarder la suite des
$$y_N=\left(\sum_{n\in\mathbf{N}}\frac{[\widetilde{p}]^{2n}}{p^n}\right)+\frac{[\widetilde{p}]^{2N}}{p^N}\in\mathbf{B}^+_{\max}.$$
Notons que $\frac{[\widetilde{p}]^{2N}}{p^N}$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini, et que l'on peut écrire
$$y_N=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\pi_F^n[x_n^{(N)}]$$
avec $x_n^{(N)}\in\widetilde{\mathbf{E}}$. On constate alors après calcul que les suites $(x_n^{(N)})_{N\in\mathbf{N}}$, à n fixé, ne convergent pas dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, ce qui est un peu désagréable.

À défaut d'obtenir une telle description des éléments de $\mathbf{B}^+_{\max,F}$, on va considérer un ensemble plus petit. (C'est en fait sur des sous-espaces propres de φ_F dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ que l'on se servira des résultats de cette partie). Un premier candidat naturel serait
$$\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\varphi_F^n\left(\mathbf{B}^+_{\max,F}\right).$$
Cependant, cela ne donne pas encore des conditions assez fortes pour la méthode employée ici.

On dira qu'un élément x de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$ est d'ordre $r\in\mathbf{R}$ s'il existe un $A\in\mathbf{R}$ tel que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, il soit de la forme
$$x=\varphi_F^n(x_n),\qquad\text{avec } x_n\in\mathbf{B}^+_{\max,F},\ v_{\max,F}(x_n)\geqslant A-\frac{nh}{r}.$$

On va montrer que tout élément d'ordre 1 de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$ s'écrit sous la forme

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[x_n]$$

avec $\liminf_{n\to-\infty} p^{n/e_F} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) > 0$.

Pour tout $\alpha > 0$, posons

$$X_\alpha = \left\{ \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[x_n] \Big/ \forall n \in \mathbf{Z} \quad \max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n), \frac{1}{\log p}\right) \geqslant \alpha p^{-n/e_F} \right\} \subset \mathbf{B}^+_{\max,F}$$

et

$$X = \bigcup_{\alpha>0} X_\alpha = \left\{ \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[x_n] \Big/ \liminf_{n\to-\infty} p^{n/e_F} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) > 0 \right\} \subset \mathbf{B}^+_{\max,F}.$$

Notons que la condition

$$\max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n), \frac{1}{\log p}\right) \geqslant \alpha p^{-n/e_F} \qquad (\forall n \in \mathbf{Z})$$

équivaut à

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) \geqslant \alpha p^{-n/e_F} \qquad \text{pour tout } n \leqslant \frac{e_F}{\log p} \log(\alpha \log p).$$

L'objectif de cette partie est de montrer que X coïncide avec l'ensemble des éléments d'ordre 1 de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$. Pour cela, on va d'abord montrer que l'ensemble X est stable par addition, puis donner quelques résultats de nature topologique sur X. Ceux-ci servent ensuite pour montrer que X est l'ensemble des éléments d'ordre 1 de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$. Une fois ce résultat connu, le reste de cette partie sera consacré à montrer que X est en fait homéomorphe à une partie de $(\widetilde{\mathbf{E}}^+)^{\mathbf{Z}}$ muni de la bonne topologie, puis à appliquer ces résultats aux sous-espaces propres de φ_F dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$.

3.9.1 Stabilité par addition

Montrons que X_α est stable par addition. Pour cela, commençons par le petit lemme suivant.

Lemme 3.9.1. *Soient $c_0, \ldots, c_{n-1}$ des entiers naturels, avec $c_0 > 0$, et supposons de plus*

$$c_0 + pc_1 + \ldots p^{n-1}c_{n-1} = kp^n,$$

avec $k \in \mathbf{N}^*$, alors on a

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1} \geqslant n(p-1) + p(k-1) + 1.$$

Preuve : On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on considère un entier naturel $c_0 > 0$, vérifiant $c_0 = kp$, et on a alors bien

$$c_0 \geqslant (p-1) + p(k-1) + 1 = kp.$$

Supposons maintenant le résultat vrai pour un n donné, et considérons un des entiers naturels $c_0, \ldots, c_n$, avec $c_0 > 0$, vérifiant

$$c_0 + pc_1 + \ldots p^n c_n = kp^{n+1}.$$

Comme $c_0 > 0$, on a nécessairement $c_n < kp$, donc

$$c_0 + pc_1 + \dots p^{n-1}c_{n-1} = (kp - c_n)p^n$$

avec $kp - c_n \in \mathbf{N}^*$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1} \geqslant n(p-1) + p(kp - c_n - 1) + 1,$$

donc

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_n \geqslant n(p-1) + p(kp-1) + 1 - c_n(p-1).$$

Comme $c_n \leqslant kp - 1$, on trouve

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_n \geqslant p(p-1) + (kp-1) + 1 = (n+1)(p-1) + p(k-1) + 1,$$

d'où le lemme. ■

Lemme 3.9.2. *Soit $\alpha > 0$, et soient*

$$x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[x_n] \quad et \quad y = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[y_n]$$

deux éléments de X_α, avec $\max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n), \frac{1}{\log p}\right) \geqslant \alpha p^{-n/e_F}$ et $\max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(y_n), \frac{1}{\log p}\right) \geqslant \alpha p^{-n/e_F}$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la suite

$$\left(S(x_n, y_n, \dots, x_m^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}}, y_m^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}}, 0, 0, 0, 0, \dots)\right)_{m\leqslant n}$$

converge. On notera

$$S(x_n, y_n, \dots, x_m^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}}, \dots)$$

sa limite.

De plus, pour $m \leqslant m_0 = \min\left(n-1, \left\lfloor \frac{e_F}{\log p}\log(\alpha \log p)\right\rfloor\right)$, on a

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}\left(S(x_n, y_n, \dots) - S(x_n, y_n, \dots, y_{m-1}^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m+1}{e_F}\right\rfloor}}, 0, 0, \dots)\right) \geqslant \frac{\alpha}{p^{n/e_F}}\left(1 + (p-1)\left\lfloor \frac{m_0 + 1 - m}{e_F}\right\rfloor\right),$$

et si $n \leqslant \frac{e_F}{\log p}\log(\alpha\log p)$, on a

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(S(x_n, y_n, \dots, 0, 0, \dots)) \geqslant \alpha p^{-n/e_F} \quad et \quad v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(S(x_n, y_n, \dots)) \geqslant \alpha p^{-n/e_F}.$$

Preuve : Fixons $n \in \mathbf{Z}$, et considérons un monôme faisant intervenir $x_m^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}}$ ou $y_m^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}}$ (avec $m < n$), éventuellement x_n, y_n, …, $x_{m+1}^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m-1}{e_F}\right\rfloor}}$ ou $y_{m+1}^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m-1}{e_F}\right\rfloor}}$, mais pas d'autres facteurs. Autrement dit, on regarde un monôme de

$$S(x_n, y_n, \dots, x_m^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}}, y_m^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}}, 0, 0, \dots) - S(x_n, y_n, \dots, x_{m+1}^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m-1}{e_F}\right\rfloor}}, y_{m+1}^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m-1}{e_F}\right\rfloor}}, 0, 0, \dots).$$

Il est de la forme

$$cx_n^{a_0}y_n^{b_0}\dots x_m^{a_{n-m}p^{-\left\lfloor\frac{n-m-1}{e_F}\right\rfloor}}y_m^{b_{n-m}p^{-\left\lfloor\frac{n-m-1}{e_F}\right\rfloor}}$$

avec $a_0,\dots,a_{n-m},b_0,\dots,b_{n-m}\geqslant 0$ et $a_{n-m}>0$ ou $b_{n-m}>0$.

D'après le cinquième point du lemme 3.7.2, on a en fait $a_{n-m}>0$ et $b_{n-m}>0$. D'autre part, d'après le deuxième point, on a

$$a_0+b_0+\dots+\frac{a_{n-m}+b_{n-m}}{p^{\left\lfloor\frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}}=1,$$

donc $a_{n-m}+b_{n-m}$ est multiple de p, et l'on a $a_0=b_0=\dots=a_{e_F-1}=b_{e_F-1}=0$ et $a_{n-m}+b_{n-m}\geqslant p$. On peut alors appliquer le lemme 3.9.1 aux entiers a_{n-m}, b_{n-m}, …, a_{n-m_0}, b_{n-m_0} pour $m\leqslant m_0<n$ (en les regroupant selon la puissance de p en facteur). En effet,

$$(a_{n-m}+b_{n-m})+\dots+(a_{n-m_0}+b_{n-m_0})p^{\left\lfloor\frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}$$

est un multiple strictement positif de $p^{\left\lfloor\frac{n-m}{e_F}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-m_0-1}{e_F}\right\rfloor}$ donc

$$\begin{aligned}(a_{n-m}+b_{n-m})&+\dots+(a_{n-m_0}+b_{n-m_0})\\&\geqslant\left(\left\lfloor\frac{n-m}{e_F}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-m_0-1}{e_F}\right\rfloor\right)(p-1)+1\geqslant 1+(p-1)\left\lfloor\frac{m_0+1-m}{e_F}\right\rfloor\end{aligned}$$

Prenons maintenant

$$m_0=\min\left(n-1,\left\lfloor\frac{e_F}{\log p}\log(\alpha\log p)\right\rfloor\right)$$

comme dans l'énoncé. On a alors

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_m)\geqslant\alpha p^{-m/e_F}\quad\text{et}\quad v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(y_m)\geqslant\alpha p^{-m/e_F}$$

pour tout $m\leqslant m_0$. Comme

$$\begin{aligned}v_{\widetilde{\mathbf{E}}}&\left(cx_n^{a_0}y_n^{b_0}\dots x_m^{a_{n-m}p^{-\left\lfloor\frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}}y_m^{b_{n-m}p^{-\left\lfloor\frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}}\right)=\\&a_0v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n)+b_0v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(y_n)+\dots+a_{n-m}p^{-\left\lfloor\frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_m)+b_{n-m}p^{-\left\lfloor\frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(y_m),\end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned}v_{\widetilde{\mathbf{E}}}&\Big(cx_n^{a_0}y_n^{b_0}\dots x_m^{a_{n-m}p^{-\left\lfloor\frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}}y_m^{b_{n-m}p^{-\left\lfloor\frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}}\Big)\\&\geqslant a_{n-m_0}p^{-\left\lfloor\frac{n-m_0}{e_F}\right\rfloor}v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_{m_0})+b_{n-m_0}p^{-\left\lfloor\frac{n-m_0}{e_F}\right\rfloor}v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(y_{m_0})\\&\qquad+\dots+a_{n-m}p^{-\left\lfloor\frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_m)+b_{n-m}p^{-\left\lfloor\frac{n-m}{e_F}\right\rfloor}v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(y_m)\\&\geqslant\frac{\alpha}{p^{n/e_F}}\left((a_{n-m_0}+b_{n-m_0})+\dots+(a_{n-m}+b_{n-m})\right)\\&\geqslant\frac{\alpha}{p^{n/e_F}}\left(1+(p-1)\left\lfloor\frac{m_0+1-m}{e_F}\right\rfloor\right).\end{aligned}$$

Quand m tend vers $-\infty$, cette valuation tend vers l'infini, d'où la convergence.

Enfin, le deuxième point du lemme 3.7.2 et la définition de X_α donnent la minoration

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(S(x_n, y_n, \dots, 0, 0, \dots)) \geqslant \alpha p^{-n/e_F}$$

pour $n \leqslant \frac{e_F}{\log p} \log(\alpha \log p)$, ce qui conclut la preuve du lemme. ■

Pour montrer la stabilité par addition de X, on va maintenant prouver le lemme suivant, qui permet de passer de la convergence des « composantes » $S(x_n, y_n, \dots, 0, 0, \dots)$ à une convergence dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$.

Lemme 3.9.3. *Soit $(x^{(m)})$ une suite d'éléments de X_α, avec*

$$x^{(m)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi_F^n [a_n^{(m)}],$$

et $\max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(a_n^{(m)}), \frac{1}{\log p}\right) \geqslant \alpha p^{-n/e_F}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et tout m. Supposons que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la suite $(a_n^{(m)})_m$ converge dans $\widetilde{\mathbf{E}}$ vers a_n. Alors la suite $(x^{(m)})$ converge dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ vers

$$x = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi_F^n [a_n] \ \in X_\alpha.$$

Preuve : Soit $A > 0$. Comme les $x^{(m)}$ sont dans X_α, on a

$$\lim_{n \to -\infty} \left(\frac{n}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(a_n^{(m)})\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(a_n^{(m)})\right) = +\infty,$$

uniformément en m. En particulier, on peut trouver des entiers $M < N$ tels que $\frac{n}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(a_n^{(m)}) \geqslant A$ pour tout m et pour tout entier n en-dehors de l'intervalle $[M, N]$.

On a alors aussi $\frac{n}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(a_n) \geqslant A$ pour n en-dehors de $[M, N]$.

D'autre part, $\sum_{n=M}^N \pi_F^n [a_n^{(m)}]$ tend vers $\sum_{n=M}^N \pi_F^n [a_n]$, donc pour m assez grand on a

$$v_{\max,F}\left(\sum_{n=M}^N \pi_F^n [a_n] \ - \ \sum_{n=M}^N \pi_F^n [a_n^{(m)}]\right) \geqslant A.$$

On en déduit alors, pour m assez grand,

$$v_{\max,F}\left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi_F^n [a_n] \ - \ \sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi_F^n [a_n^{(m)}]\right) \geqslant A,$$

c'est-à-dire $v_{\max,F}(x - x^{(m)}) \geqslant A$. ■

Corollaire 3.9.4. *Soient*

$$x = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi_F^n [x_n] \quad \text{et} \quad y = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi_F^n [y_n]$$

deux éléments de X_α, avec x_n et y_n comme précédemment. Alors $x + y$ est un élément de X_α, et on a

$$x + y = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi_F^n [S(x_n, y_n, \dots, x_m^{p^{-\lfloor \frac{n-m}{e_F} \rfloor}}, y_m^{p^{-\lfloor \frac{n-m}{e_F} \rfloor}}, \dots)].$$

Preuve : Cela découle de l'application du lemme 3.9.3 à la situation décrite dans le lemme 3.9.2. ■

On a alors immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 3.9.5. *La différence de deux éléments de X_α est dans X_α, et X est stable par addition et soustraction.*

Preuve : En effet, si $x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[a_n]$ est dans X_α, alors $-x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[-a_n]$ y est aussi. Comme X est la réunion des X_α, sa stabilité s'en déduit immédiatement. ■

3.9.2 La topologie naturelle de X

On munit X d'une distance ultramétrique $(x,y) \mapsto e^{-w_X(x-y)}$ en posant

$$w_X(z) = \sup\{\alpha > 0 \;/\; z \in X_\alpha\}.$$

Nous allons relier cette distance à la définition des éléments d'ordre 1.

Notons tout d'abord que l'on a $X_\alpha \subset \varphi_F(X_{\alpha/q}) \subset X_{\alpha/q}$, donc $\varphi_F(X) = X$. En particulier, X est contenu dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$.

Le lemme suivant montre (avec des constantes explicites) que X est inclus dans l'ensemble des éléments d'ordre 1, et que si l'on muni X de sa topologie naturelle et l'ensemble des éléments d'ordre 1 de la topologie p-adique, alors cette inclusion est un homéomorphisme sur son image.

Lemme 3.9.6. *Si $x \in X$, alors on a*

$$\frac{\log\log p}{\log p} \leqslant \inf_{m\in\mathbf{N}} \big(mh + v_{\max,F}(\varphi_F^{-m}(x))\big) - \frac{\log w_X(x)}{\log p} \leqslant \frac{h}{q-1} + \frac{\log(q-1) - \log h}{\log p}.$$

Preuve : En effet, on a, pour tout $m \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{\max,F}(\varphi_F^{-m}(x)) &= \inf_{n\in\mathbf{Z}} \left(\frac{n}{e_F} + \frac{v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n)}{q^m}\right) \\
&\geqslant \inf_{n\in\mathbf{Z}} \left(\frac{n}{e_F} + q^{-m}\begin{cases} p^{-n/e_F} w_X(x) & \text{si } p^{-n/e_F} w_X(x) \geqslant \frac{1}{\log p} \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\right) \\
&\geqslant \min\left(\inf_{t\leqslant \frac{\log(v_X(x)\log p)}{\log p}} \left(t + p^{-t-mh} w_X(x)\right), \inf_{t\geqslant \frac{\log(v_X(x)\log p)}{\log p}} t\right).
\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto t + p^{-t-mh} w_X(x)$ atteint son minimum pour $t = \frac{\log(w_X(x)\log p)}{\log p} - mh$, si bien qu'on trouve

$$\begin{aligned}
v_{\max,F}(\varphi_F^{-m}(x)) &\geqslant \min\left(\frac{\log(w_X(x)\log p)}{\log p} - mh + \frac{1}{\log p}, \frac{\log(v_X(x)\log p)}{\log p}\right) \\
&\geqslant \frac{\log(w_X(x)\log p)}{\log p} + \min\left(\frac{1}{\log p} - mh, 0\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\inf_{m\in\mathbf{N}} \big(mh + v_{\max,F}(\varphi_F^{-m}(x))\big) &\geqslant \inf_{m\in\mathbf{N}} \left(\frac{\log(w_X(x)\log p)}{\log p} + \min\left(\frac{1}{\log p}, mh\right)\right) \\
&\geqslant \frac{\log(w_X(x)\log p)}{\log p},
\end{aligned}$$

d'où la minoration donnée par le lemme.

Montrons maintenant la majoration. Posons

$$A = \inf_{m\in\mathbf{N}} \left(mh + v_{\max,F}(\varphi_F^{-m}(x))\right).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\forall m \in \mathbf{N} \qquad \frac{n}{e_F} + \frac{v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n)}{q^m} \geqslant A - mh,$$

donc

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) \geqslant \sup_{m\in\mathbf{N}} p^{mh}\left(A - mh - \frac{n}{e_F}\right).$$

La fonction $t \mapsto p^t\left(A - \frac{n}{e_F} - t\right)$ est strictement croissante de $-\infty$ à $A - \frac{n}{e_F} - \frac{1}{\log p}$, puis strictement décroissante jusqu'à $+\infty$. Pour minorer

$$\sup_{t\in h\mathbf{N}} p^t\left(A - \frac{n}{e_F} - t\right),$$

commençons par résoudre l'équation

$$p^{t-h}\left(A - \frac{n}{e_F} - t + h\right) = p^t\left(A - \frac{n}{e_F} - t\right).$$

On trouve $t = A - \frac{n}{e_F} - \frac{h}{q-1}$. On a alors

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) \geqslant \begin{cases} \frac{h}{q-1} p^{A - \frac{n}{e_F} - \frac{h}{q-1}} & \text{si } 0 \leqslant A - \frac{n}{e_F} - \frac{h}{q-1} \\ A - \frac{n}{e_F} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} w_X(x) &= \inf_{n\in\mathbf{Z}}\left(p^{n/e_F}\max\left(\frac{1}{\log p}, v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n)\right)\right) \\ &\geqslant \min\left(\inf_{t\leqslant A-\frac{h}{q-1}} \max\left(\frac{p^t}{\log p}, \frac{h}{q-1}p^{A-\frac{h}{q-1}}\right), \inf_{t\geqslant A-\frac{h}{q-1}} p^t\max\left(\frac{1}{\log p}, A-t\right)\right). \end{aligned}$$

Remarquons que $\frac{h}{q-1} \leqslant \frac{1}{\log p}$. En effet, la fonction $u \mapsto \frac{u}{p^u-1}$ est décroissante pour $u \geqslant 0$. On trouve alors

$$w_X(x) \geqslant \min\left(\frac{h}{q-1}p^{A-\frac{h}{q-1}}, \frac{1}{\log p}p^{A-\frac{h}{q-1}}\right) = \frac{h}{q-1}p^{A-\frac{h}{q-1}},$$

puis

$$A - \frac{\log w_X(x)}{\log p} \leqslant \frac{h}{q-1} + \frac{\log(q-1) - \log h}{\log p},$$

d'où le lemme. ■

Corollaire 3.9.7. *L'ensemble des éléments d'ordre 1 de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$ contient X. De plus, les intersections*

$$X \cap \bigcap_{m\in\mathbf{N}} \varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A-mh}\right),$$

pour $A \in \mathbf{R}$, forment une base de voisinages de 0 dans X.

Preuve : Ceci découle immédiatement du lemme 3.9.6. ■

Jusqu'à présent, il n'a jamais été nécessaire de supposer que l'écriture des éléments de X sous la forme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[x_n]$ est unique. Le lemme suivant permet d'une part de montrer cette unicité, et d'autre part de traduire la topologie naturelle de X directement en termes des composantes x_n.

Lemme 3.9.8. *Soient x et y deux éléments de X, avec*

$$x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[x_n] \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[y_n]$$

comme précédemment. On a :

$$w_X(x-y) = \inf_{n\in\mathbf{Z}} p^{n/e_F} \max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n - y_n), \frac{1}{\log p}\right).$$

Preuve : Posons

$$x - y = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[z_n],$$

avec $z_n = S(x_n, -y_n, \dots)$, et montrons d'abord que l'on a $x_n = S(y_n, z_n, \dots)$. Notons que même si $x = y + (x-y)$, ce résultat n'est pas complètement évident puisque l'unicité de l'écriture de x n'a pas encore été démontrée.

Posons

$$z_n^{(m)} = \begin{cases} S(x_n, -y_n, \dots, x_m^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m}{e_F} \right\rfloor}}, y_m^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m}{e_F} \right\rfloor}}, 0, 0, \dots) & \text{si } n \geqslant m \\ 0 & \text{si } n < m, \end{cases}$$

de sorte que

$$\sum_{n\geqslant m} \pi_F^n[x_n] - \sum_{n\geqslant m} \pi_F^n[y_n] = \sum_{n\geqslant m} \pi_F^n[z_n^{(m)}]$$

et $\lim_{m\to-\infty} z_n^{(m)} = z_n$. Par addition dans $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$ (où l'on sait que l'on a unicité des écritures sous cette forme), on trouve

$$x_n = S(y_n, z_n^{(m)}, \dots, y_m^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m}{e_F} \right\rfloor}}, (z_m^{(m)})^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m}{e_F} \right\rfloor}}, 0, 0, \dots).$$

D'après le lemme 3.9.2, on en déduit par passage à la limite $m \to -\infty$:

$$x_n = S(y_n, z_n, \dots, y_k^{p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor}}, z_k^{p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor}}, \dots),$$

comme voulu.

D'après le cinquième point du lemme 3.7.2, $x_n - y_n$ est dans l'idéal engendré par les $z_k^{p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor}}$ avec $k \leqslant n$. Pour tout $k \leqslant n \leqslant \frac{\log(w_X(x-y)\log p)}{\log p}$, on trouve :

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(z_k^{p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor}}) \geqslant p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor} p^{-\frac{k}{e_F}} w_X(x-y) \geqslant p^{-n/e_F} w_X(x-y).$$

On a alors $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n - y_n) \geqslant p^{-n/e_F} w_X(x-y)$ pour tout $n \leqslant \frac{\log(w_X(x-y)\log p)}{\log p}$, donc

$$\inf_{n\in\mathbf{Z}} p^{n/e_F} \max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n - y_n), \frac{1}{\log p}\right) \geqslant w_X(x-y).$$

Posons

$$\alpha = \inf_{n\in\mathbf{Z}} p^{n/e_F} \max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n - y_n), \frac{1}{\log p}\right).$$

Comme $S(x_n, -y_n, \dots)$ s'annule si $x_k = y_k$ pour tout $k \leqslant n$, on déduit du lemme 3.7.2 que z_n est dans l'idéal engendré par les $(x_k - y_k)^{p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor}}$, avec $k \leqslant n$. On trouve donc, pour tout $n \leqslant \frac{e_F}{\log p} \log(w_X(x-y)\log p)$:

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(z_n) \geqslant \inf_{k\leqslant n} p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor} p^{-k/e_F} \alpha \geqslant p^{-n/e_F}\alpha,$$

donc

$$w_X(x-y) \geqslant \alpha,$$

d'où le lemme. ■

Corollaire 3.9.9. *Soit x un élément de X, il s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n [x_n]$$

avec $x_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$, $\liminf_{n\to-\infty} p^{n/e_F} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) > 0$.

Preuve : C'est une conséquence immédiate du lemme 3.9.8 et du lemme 3.8.5. ■

Corollaire 3.9.10. *L'espace X, muni de sa métrique naturelle, est homéomorphe à*

$$\left\{(x_n) \in (\widetilde{\mathbf{E}}^+)^{\mathbf{Z}} \Big/ \liminf_{n\to-\infty} p^{n/e_F} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) > 0\right\}$$

muni de la norme

$$\|(x_n)\|_X = \sup_{n\in\mathbf{Z}} \min\left(e^{-1}, p^{-p^{n/e_F} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n)}\right).$$

De plus cet homéomorphisme et sa réciproque sont uniformément continus.

Preuve : C'est une conséquence immédiate du lemme 3.9.8. ■

Pour montrer que X est l'ensemble des éléments d'ordre 1, on va être amené à utiliser des convergences pour la topologie induite par $v_{\max,F}$, qui est plus faible que la topologie naturelle de X.

Lemme 3.9.11. *Soit $(x^{(m)})$ une suite d'éléments de X_α qui converge dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$, avec*

$$x^{(m)} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n [x_n^{(m)}]$$

et $x_n^{(m)}$ comme précédemment. Alors, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la suite $(x_n^{(m)})_m$ converge dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$.

Preuve : Posons $y^{(m)} = x^{(m+1)} - x^{(m)} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[y_n^{(m)}]$, avec $y_n^{(m)}$ comme précédemment. Comme $\lim_{m\to+\infty} y^{(m)} = 0$, d'après le lemme 3.8.5, on a $\lim_{m\to+\infty} y_n^{(m)} = 0$.

D'après le corollaire 3.9.4 et le corollaire 3.9.9, on a alors

$$x_n^{(m+1)} = S(x_n^{(m)}, y_n^{(m)}, \dots),$$

or $\lim_{m\to+\infty} y_n^{(m)} = 0$, donc, d'après le lemme 3.9.2 et le cinquième point du lemme 3.7.2, $S(x_n^{(m)}, y_n^{(m)}, \dots) - x_n^{(m)}$ tend vers 0, autrement dit $x_n^{(m+1)} - x_n^{(m)}$ tend vers 0 quand m tend vers l'infini, d'où le lemme. ■

Corollaire 3.9.12. *Les espaces X_α sont complets pour la valuation $v_{\max,F}$.*

Preuve : Cela résulte du lemme 3.9.11 et du lemme 3.9.3. ■

3.9.3 X est l'ensemble des éléments d'ordre 1

En utilisant la stabilité par addition (corollaire 3.9.4) et le fait que les X_α sont complets pour $v_{\max,F}$ (corollaire 3.9.12), on va maintenant montrer que X est dense dans l'ensemble des éléments d'ordre 1 de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$ pour la topologie donnée par $v_{\max,F}$, et donc (puisqu'on a montré que X est complet pour cette métrique) que ces deux ensembles sont égaux.

Fixons une section F-linéaire continue s de $\theta : \widetilde{\mathbf{B}}^+_F \to \mathbf{C}_p$, telle que $s(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}) \subset \widetilde{\mathbf{A}}^+_F$. (Il en existe d'après le lemme 3.4.1). D'après le corollaire 3.4.3, tout élément x de $\mathbf{A}_{\max,F}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n$$

avec (a_n) une suite d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ qui tend vers 0. Étendons d'abord ceci en une description de $\varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A}\right)$, pour $A \in \mathbf{R}$.

Lemme 3.9.13. *Soient $A \in \frac{1}{e_F}\mathbf{Z}$ et $m \in \mathbf{N}$, et soit x un élément de*

$$\varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A}\right) \subset (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A}$$

Alors x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n$$

avec (a_n) une suite d'éléments de $\mathbf{C}_p$ vérifiant :
- *$v_p(a_n) \geqslant A$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;*
- *$\lim_{n\to+\infty} v_p(a_n) = +\infty$;*
- *$v_p(a_n) \geqslant A + \frac{n}{e_F} - \frac{n}{q^m e_F}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

Preuve : D'après le corollaire 3.4.3 (appliqué à $\pi_F^{Ae_F}x$), $x \in \mathbf{B}^+_{\max,F}$ va s'écrire de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n$$

avec (a_n) une suite d'éléments de $\mathbf{C}_p$ tendant vers 0. Il s'agit de montrer que cette suite (a_n) vérifie les propriétés annoncées, les deux premières découlant directement du corollaire 3.4.3.

On a supposé de plus que x est dans $\varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A}\right)$. Il existe donc un $y \in \mathbf{B}^+_{\max,F}$, avec $v_{\max,F}(y) \geqslant A$, tel que $x = \varphi_F^m(y)$. Ce qui précède s'applique tout aussi bien à y, et on peut donc écrire (de manière unique)

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} s(c_n)\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n$$

avec (c_n) une suite d'éléments de $\mathbf{C}_p$ vérifiant :

- $v_p(c_n) \geqslant A$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;
- $\lim_{n\to+\infty} v_p(c_n) = +\infty$.

On a alors

$$x \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n)\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_F^m(s(c_n))\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]^{q^m}}{\pi_F}\right)^n.$$

On va maintenant chercher à relier ces deux formes.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi_F^m(s(c_n))$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_F$ vérifiant $v_{\max,F}(\varphi_F^m(s(c_n))) \geqslant A$. D'après le corollaire 3.4.3, on va pouvoir l'écrire de manière unique sous la forme

$$\varphi_F^m(s(c_n)) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(d_{n,k})[\widetilde{\pi_F}]^k,$$

avec $d_{n,k} \in \mathbf{C}_p$, $v_p(d_{n,k}) \geqslant A$, $\lim_{k\to+\infty} d_{n,k} = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_F^m(s(c_n))\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]^{q^m}}{\pi_F}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s(d_{n,k})}{\pi_F^n}[\widetilde{\pi_F}]^{k+nq^m} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{k,n\in\mathbf{N}\\ k+nq^m=j}} \frac{s(d_{n,k})}{\pi_F^n}\right)[\widetilde{\pi_F}]^j, \end{aligned}$$

donc, pour tout $j \in \mathbf{N}$:

$$\frac{a_j}{\pi_F^j} = \sum_{\substack{k,n\in\mathbf{N}\\ k+nq^m=j}} \frac{d_{n,k}}{\pi_F^n},$$

donc

$$v_p(a_j) \geqslant A + \frac{j}{e_F} - \frac{j}{q^m e_F}.$$

■

Corollaire 3.9.14. *Avec les notations du lemme précédent, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$:*

$$s(a_n)\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n \in X \cap \varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A-\frac{1}{e_F}}\right).$$

Preuve : En effet, on a $v_p(a_n) \geqslant A$ et $s(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}) \subset \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$, donc $\frac{s(a_n)}{\pi_F^n}$ est dans $\pi_F^{Ae_F - n}\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$, donc

$$s(a_n)\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n \in \pi_F^{Ae_F-n}\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \subset X.$$

De plus, l'inégalité $v_p(a_n) \geqslant A + \frac{n}{e_F} - \frac{n}{q^m e_F}$ montre de même que

$$\frac{s(a_n)}{\pi_F^n} \in \pi_F^{Ae_F - \lceil q^{-m} n\rceil}\widetilde{\mathbf{A}}_F^+,$$

donc

$$\begin{aligned} v_{\max,F}\left(\varphi_F^{-m}\left(s(a_n)\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n\right)\right) &\geqslant \frac{Ae_F - \lceil q^{-m}n\rceil}{e_F} + \frac{n}{q^m e_F} \\ &\geqslant A - \frac{1}{e_F}, \end{aligned}$$

d'où le corollaire. ■

Lemme 3.9.15. *Pour tout $A \in \mathbf{R}$, on a*

$$\bigcap_{m\in\mathbf{N}} \varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A - mh}\right) \subset X.$$

Preuve : Soit $A \in \mathbf{R}$, et soit

$$x \in \bigcap_{m\in\mathbf{N}} \varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A - mh}\right).$$

D'après le lemme 3.9.13, on peut écrire

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n)\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n$$

avec (a_n) une suite d'éléments de $\mathbf{C}_p$ vérifiant :

- $v_p(a_n) \geqslant \frac{\lfloor Ae_F\rfloor}{e_F}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;
- $\lim_{n\to+\infty} v_p(a_n) = +\infty$;
- $v_p(a_n) \geqslant \frac{\lfloor Ae_F\rfloor}{e_F} - mh + \frac{n}{e_F} - \frac{n}{q^m e_F}$ pour tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $n \in \mathbf{N}$.

En particulier, cette série converge dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$. Or, d'après le corollaire 3.9.14, ses termes sont dans

$$X \cap \varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant \frac{\lfloor Ae_F\rfloor - 1}{e_F}}\right).$$

D'après le lemme 3.9.6, ils sont donc dans X_α pour

$$\alpha = \frac{h}{q-1}p^{\frac{\lfloor Ae_F\rfloor - 1}{e_F} - \frac{h}{q-1}}.$$

D'après le corollaire 3.9.4, les sommes partielles de cette série sont aussi dans X_α. Enfin, d'après le corollaire 3.9.12, la somme de cette série, c'est-à-dire x, est dans X_α, donc dans X. ■

Corollaire 3.9.16. *L'ensemble X est l'ensemble des éléments d'ordre 1 de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$.*

Preuve : En effet, on sait d'après le corollaire 3.9.7 que les éléments de X sont des éléments d'ordre 1 de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$, et le lemme précédent donne l'inclusion réciproque. ■

3.9.4 Application aux sous-espaces propres de φ_F

Lemme 3.9.17. *Pour tout $\lambda \in \mathcal{O}_F$ vérifiant $v_p(\lambda) \leqslant h$, on a l'inclusion*

$$(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\lambda} \subset X.$$

Preuve : En effet, soit $x \in (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\lambda}$. On a $x = \varphi_F^m(\lambda^{-m}x)$, donc

$$x \in \bigcap_{m\geqslant 0} \varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant v_{\max,F}(x)-mh}\right),$$

d'où le lemme. ■

Les résultats connus sur X s'appliquent donc aux éléments de $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\lambda}$ pour $v_p(\lambda) \leqslant h$.

Lemme 3.9.18. *Soit $\lambda \in \mathcal{O}_F$ vérifiant $v_p(\lambda) \leqslant h$, et soient*

$$x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[x_n] \qquad et \qquad y = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[y_n]$$

deux éléments de $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\lambda}$. Alors la différence

$$v_{\max,F}(x-y) - \inf_{n\in\mathbf{Z}}\left(\frac{n}{e_F} + \frac{v_p(\lambda)}{h\log p}\log v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n-y_n)\right)$$

est bornée uniformément en x et y.

Preuve : On a

$$\inf_{m\in\mathbf{N}}\left(mh + v_{\max,F}(\varphi_F^{-m}(x-y))\right) = v_{\max,F}(x-y),$$

donc, d'après le lemme 3.9.6,

$$\frac{\log\log p}{\log p} \leqslant v_{\max,F}(x-y) - \frac{\log w_X(x-y)}{\log p} \leqslant \frac{h}{q-1} + \frac{\log(q-1)-\log h}{\log p}.$$

D'autre part, d'après le lemme 3.9.8, on a

$$w_X(x-y) = \inf_{n\in\mathbf{Z}} p^{n/e_F}\max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n-y_n), \frac{1}{\log p}\right).$$

Posons $v_n = v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n-y_n)$ pour simplifier les notations. On obtient alors

$$\frac{\log\log p}{\log p} \leqslant v_{\max,F}(x-y) - \inf_{n\in\mathbf{Z}}\left(\frac{n}{e_F} + \max\left(\frac{\log v_n}{\log p}, -\frac{\log\log p}{\log p}\right)\right) \leqslant \frac{h}{q-1} + \frac{\log(q-1)-\log h}{\log p}.$$

Appliquons ceci à $\varphi_F^m(x) = \lambda^m x$ et $\varphi_F^m(y) = \lambda^m y$, pour $m \in \mathbf{Z}$. On trouve

$$\begin{aligned}\frac{\log\log p}{\log p} \leqslant v_{\max,F}(x-y) - \inf_{n\in\mathbf{Z}}\left(\frac{n}{e_F} + \max\left(\frac{\log v_n}{\log p} + m(h-v_p(\lambda)), -\frac{\log\log p}{\log p} - mv_p(\lambda)\right)\right)\\ \leqslant \frac{h}{q-1} + \frac{\log(q-1)-\log h}{\log p}.\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\log v_n}{\log p}\frac{v_p(\lambda)}{h} - \frac{\log\log p}{\log p}\left(1-\frac{v_p(\lambda)}{h}\right) \\
&\qquad\qquad \leqslant \inf_{m\in\mathbf{Z}} \max\left(\frac{\log v_n}{\log p} + m(h-v_p(\lambda)), -\frac{\log\log p}{\log p} - mv_p(\lambda)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \leqslant \frac{\log v_n}{\log p}\frac{v_p(\lambda)}{h} - \frac{\log\log p}{\log p}\left(1-\frac{v_p(\lambda)}{h}\right) + v_p(\lambda)\left(1-\frac{v_p(\lambda)}{h}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{v_p(\lambda)}{h}\frac{\log\log p}{\log p} &\leqslant v_{\max,F}(x-y) - \inf_{n\in\mathbf{Z}}\left(\frac{n}{e_F} + \frac{v_p(\lambda)\log v_n}{h\log p}\right) \\
&\leqslant \frac{h}{q-1} + \frac{\log(q-1)-\log h}{\log p} + \left(v_p(\lambda) - \frac{\log\log p}{\log p}\right)\left(1-\frac{v_p(\lambda)}{h}\right),
\end{aligned}$$

d'où le lemme. ∎

Pour finir, donnons une conséquence intéressante de ces calculs.

Corollaire 3.9.19. *Pour tout a vérifiant $1 \leqslant a \leqslant he_F$, l'application*

$$\Phi_a : \begin{cases} \left(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}\right)^a & \longrightarrow \quad \left(\mathbf{B}^+_{\max,F}\right)^{\varphi_F=\pi_F^a} \\ (a_i)_{0\leqslant i<a} & \longmapsto \quad \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n\left[a_{n-a\lfloor n/a\rfloor}^{p^{-h\lfloor n/a\rfloor}}\right] \end{cases}$$

est un homéomorphisme, et Φ_a et Φ_a^{-1} sont uniformément continues.

Preuve : L'injectivité résulte du corollaire 3.9.9, la surjectivité résulte du lemme 3.9.17, et de la définition de X, et la continuité uniforme de Φ_a et Φ_a^{-1} résulte du lemme 3.9.18. ∎

3.10 Cohomologie continue dans des anneaux de Fontaine

Cette partie est consacrée à énoncer et rappeler les démonstrations des résultats cohomologiques intervenant dans la construction de l'application logarithme. Les énoncés et preuves donnés ici sont des adaptations de ceux de [Col96] et [Col98].

Lemme 3.10.1. *Soit A un anneau local valué complet muni d'une action de $\mathcal{G}_{F_\infty}$ vérifiant les deux conditions suivantes.*

- *Quelle que soit l'extension finie L de F_∞, l'extension $\mathrm{Frac}(A^{\mathcal{G}_L})/\mathrm{Frac}(A^{\mathcal{G}_{F_\infty}})$ est une extension séparable de degré $[L : F_\infty]$.*
- *Si L est une extension finie de F_∞, l'idéal maximal de $A^{\mathcal{G}_L}$ n'est pas réduit à zéro, et si $L_0 \subset L_1$ sont deux extensions finies de F_∞, alors l'image de l'idéal maximal de $A^{\mathcal{G}_{L_1}}$ par l'application Tr_{L_1/L_0} est égale à l'idéal maximal de $A^{\mathcal{G}_{L_0}}$.*

Soit π un élément de $A^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ vérifiant $v_A(\pi) > 0$. Si L_0 est une extension finie de F_∞, n un entier supérieur ou égal à 2, et $\tau \mapsto U_\tau$ un 1-cocycle continu de $\mathcal{G}_{L_0}$ dans $1 + \pi^n M_d(A)$, alors il existe $M \in 1 + \pi^{n-1}M_d(A)$ tel que le cocycle $\tau \mapsto M^{-1}U_\tau\tau(M)$ soit à valeurs dans $1 + \pi^{n+1}M_d(A)$.

Preuve : On considère pour cela L_1 une extension finie de L_0 telle que U_τ se trouve dans $1+\pi^{n+2}M_d(A)$ pour tout $\tau \in \mathcal{G}_{L_1}$, puis un $\alpha \in \mathrm{Frac}(A^{\mathcal{G}_{L_1}})$ tel que

$$\mathrm{Tr}_{L_1/L_0}(\alpha) = 1 \qquad \text{et} \qquad v_A(\alpha) \geqslant -v_A(\pi).$$

Alors, si T est un système de représentants de $\mathcal{G}_{L_0}/\mathcal{G}_{L_1}$, la matrice $M = \sum_{\tau \in T} \tau(\alpha) U_\tau$ convient. ■

Corollaire 3.10.2. *Soient A et π comme dans le lemme 3.10.1. Soient L une extension finie de F_∞ et $\tau \mapsto U_\tau$ un 1-cocycle continu de $\mathcal{G}_L$ dans $1+\pi^2 M_d(A)$, alors il existe $M \in 1+\pi M_d(A)$ tel que l'on ait $U_\tau = M\tau(M)^{-1}$ quel que soit $\tau \in \mathcal{G}_L$.*

Preuve : Il suffit d'utiliser le lemme 3.10.1 pour construire une suite de matrices (M_n) telle que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} M_i\right)^{-1} U_\tau \tau \left(\prod_{i=1}^{n} M_i\right) \in 1+\pi^{n+2}M_d(A) \qquad (\forall \tau \in \mathcal{G}_L),$$

et de prendre $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$. ■

Proposition 3.10.3. *Soit A comme dans le lemme 3.10.1. On a*
- $H^1(F_\infty, \mathrm{GL}_d(\mathrm{Frac}(A))) = \{1\}$
- $H^1(F_\infty, \mathrm{Frac}(A)) = 0.$

Si de plus la restriction de v_A à $A^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ n'est pas discrète, alors
- $H^1(F_\infty, \mathbf{m}_A) = 0$
- $H^1(F_\infty, 1+M_d(\mathbf{m}_A)) = \{1\}.$

Preuve : Pour le premier point, considérons un 1-cocycle continu $\tau \mapsto U_\tau$ sur $\mathcal{G}_{F_\infty}$, à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathrm{Frac}(A))$. Il existe alors une extension L de F_∞ telle que l'image de $\mathcal{G}_L$ soit contenue dans $1+\pi^2 M_d(A)$. Le corollaire 3.10.2 donne alors une matrice M telle que $\tau \mapsto M^{-1}U_\tau\tau(M)$ soit trivial sur $\mathcal{G}_L$. D'autre part, comme l'extension $\mathrm{Frac}(A^{\mathcal{G}_L})/\mathrm{Frac}(A^{\mathcal{G}_{F_\infty}})$ est séparable (par hypothèse), le théorème 90 de Hilbert donne que $H^1(\mathcal{G}_{F_\infty}/\mathcal{G}_L, \mathrm{Frac}(A^{\mathcal{G}_L}))$ est trivial. On en déduit que le cocycle $\tau \mapsto M^{-1}U_\tau\tau(M)$ est trivial, et de même pour le cocycle d'origine.

Pour le deuxième point, soit $\tau \mapsto c_\tau$ un cocycle continu de $\mathcal{G}_{F_\infty}$ dans $\mathrm{Frac}(A)$. Soit α un élément non nul de $A^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ tel que $\tau \mapsto \alpha c_\tau$ soit à valeurs dans $\pi^2 A$. On peut alors appliquer le corollaire 3.10.2 au cocycle $\tau \mapsto U_\tau = \begin{pmatrix} 1 & \alpha c_\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\tau \mapsto \alpha c_\tau$ est trivial, d'où le résultat.

Les deux points suivants se traitent de la même manière que les deux premier, après avoir remarqué que, puisque $\mathcal{G}_{F_\infty}$ est compact, on peut choisir un $\pi \in \mathbf{m}_{A^{\mathcal{G}_{F_\infty}}}$ tel que le cocycle considéré soit à valeurs dans $\pi^2\mathbf{m}_A$ ou $1+\pi^2 M_d(\mathbf{m}_A)$ respectivement. ■

Proposition 3.10.4. *On a*
- $H^1(\mathcal{G}_{F_\infty}, \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)) = \{1\}$ *pour tout $i \in \mathbf{N}^*$;*
- $H^1(\mathcal{G}_{F_\infty}, \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)) = \{1\}.$

Preuve : Comme $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ vérifie les conditions du lemme 3.10.1 (cf. la proposition 2.2.11), la proposition 3.10.3 donne le premier point pour $i=1$. On procède ensuite par récurrence, à l'aide de la suite exacte

$$1 \to 1+M_d(\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^{i+1}\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \to \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^{i+1}\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \to \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \to 1.$$

Comme le $\mathcal{G}_{F_\infty}$-module $1+M_d(\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\,\mathrm{Fil}^{i+1}\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ est isomorphe à $M_d(\mathbf{C}_p)$, la suite exacte de cohomologie associée donne le résultat pour tout i. Le second point s'en déduit par passage à la limite. ■

Lemme 3.10.5. *Soit V une F-représentation de $\mathcal{G}_F$. Alors :*

- *$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_F V$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\dim_F V}$ comme $\mathcal{G}_{F_\infty}$-module, donc $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ est un $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$-module libre de rang $\dim_F V$;*
- *$(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\,\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)\otimes_F V$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\,\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\dim_F V}$ comme $\mathcal{G}_{F_\infty}$-module, donc $((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\,\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)\otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ est un $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\,\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$-module libre de rang $\dim_F V$;*
- *$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_F V$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}})^{\dim_F V}$ comme $\mathcal{G}_{F_\infty}$-module, donc $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ est un $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$-espace vectoriel de dimension $\dim_F V$.*

Preuve : En fixant une base de V sur F, on peut voir la représentation comme un 1-cocycle continu de $\mathcal{G}_{F_\infty}$ dans $\mathrm{GL}_d(F)\subset \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ (avec $d=\dim_F V$). D'après la proposition 3.10.4, ce cocycle est trivial dans $H^1(\mathcal{G}_{F_\infty},\mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+))$. Cela signifie que le $\mathcal{G}_{F_\infty}$-module $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_F V$ est isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$, d'où le premier point. Les deux autres points se traitent de la même manière. ■

Théorème 3.10.6. *Si V est une F-représentation de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, alors on a*

- *$H^1(F_\infty,(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\,\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)\otimes_F V)=0$ quel que soit $i\in\mathbf{N}^*$;*
- *$H^1(F_\infty,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_F V)=0$;*
- *$H^1(F_\infty,(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)\otimes_F V)=0$;*
- *$H^1(F_\infty,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_F V)=0$.*

Preuve : D'après le lemme 3.10.5, le premier point de ce théorème se ramène à démontrer que $H^1(F_\infty,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\,\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ est trivial. On considère un cocycle $\tau\mapsto c_\tau$ à valeurs dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\,\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et on lui associe le cocycle

$$\tau\mapsto U_\tau=\begin{pmatrix}1 & c_\tau\\ 0 & 1.\end{pmatrix}$$

D'après la proposition 3.10.4, $H^1(\mathcal{G}_{F_\infty},\mathrm{GL}_2(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\,\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+))$ est trivial, et l'on en déduit que $\tau\mapsto c_\tau$ est trivial dans $H^1(F_\infty,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\,\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$, d'où le premier point.

Les trois autres points s'en déduisent par passage à la limite. ■

Lemme 3.10.7. *L'anneau $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifie les conditions du lemme 3.10.1. De plus, $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}})$ n'est pas discret.*

Preuve : La première condition du lemme 3.10.1 découle de la théorie du corps des normes (cf. lemme 3.2.2 et l'article [Win83]).

La seconde condition découle du fait que les extensions $\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathcal{G}_{L_1}}/\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathcal{G}_{L_0}}$ sont séparables, et de la stabilité de l'image de la trace sous l'action du Frobenius et de son inverse.

Le fait que $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}})$ ne soit pas discret découle de la stabilité de $\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ sous l'action du Frobenius et de son inverse, et du fait que $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}})$ n'est pas réduit à 0 ($\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ contient par exemple l'élément η). ■

Lemme 3.10.8. *Soit T une k_F-représentation de $\mathcal{G}_{F_\infty}$. Alors*

- *le sous-$\widetilde{\mathbf{E}}^+$-module de $\widetilde{\mathbf{E}}^+\otimes_{k_F} T$ engendré par $(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}\otimes_{k_F} T)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ est égal à $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}\otimes_{k_F} T$;*
- *on a $H^1(F_\infty,\widetilde{\mathbf{E}}^{++}\otimes_{k_F} T)=0$.*

Preuve : Comme l'anneau $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifie les conditions du lemme 3.10.1, on peut lui appliquer la proposition 3.10.3, et en déduire que $H^1(F_\infty, \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{E}}))$ est trivial, donc que $\widetilde{\mathbf{E}} \otimes_{k_F} T$ est isomorphe à $\widetilde{\mathbf{E}}^d$ comme $\mathcal{G}_{F_\infty}$-module. On peut donc trouver une base $f_1, \dots, f_d$ de $\widetilde{\mathbf{E}} \otimes_{k_F} T$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}$, qui est fixe par $\mathcal{G}_{F_\infty}$, et l'on peut supposer que ses éléments sont dans $\widetilde{\mathbf{E}}^{++} \otimes_{k_F} T$. Soient également une base $e_1, \dots e_d$ de T sur k_F, et $M \in \mathcal{M}_d(\widetilde{\mathbf{E}}^{++})$ la matrice de $f_1, \dots, f_d$ dans la base $e_1, \dots e_d$.

On a
$$\lim_{n \to +\infty} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(\varphi^{-n}(\det M)) = 0,$$
donc tout élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^{++} \otimes_{k_F} T$ est dans le $\widetilde{\mathbf{E}}^+$-module engendré par $\varphi^{-n}(f_1), \dots, \varphi^{-n}(f_d)$ pour un n assez grand, d'où le premier point.

Soit $\tau \mapsto c_\tau$ un cocycle représentant un élément de $H^1(F_\infty, \widetilde{\mathbf{E}}^{++} \otimes_{k_F} T)$. Comme $\mathcal{G}_{F_\infty}$ est compact, il existe un $a > 0$ tel que les coordonnées de c_τ dans la base $e_1, \dots, e_d$ soient dans $\widetilde{\mathbf{E}}^{v_{\widetilde{\mathbf{E}}} \geqslant a}$. Comme $\lim_{n \to +\infty} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(\varphi^{-n}(\det M)) = 0$, on peut trouver un n tel que pour tout τ les coordonnées de c_τ dans la base $\varphi^{-n}(f_1), \dots, \varphi^{-n}(f_d)$ appartiennent à $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}$, ce qui ramène le second point à prouver que $H^1(F_\infty, \widetilde{\mathbf{E}}^{++})$ est trivial, ce qui découle du lemme 3.10.7 et de la proposition 3.10.3. ■

Lemme 3.10.9. *Si T est une $\mathcal{O}_F$-représentation de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, alors*

- *on a $H^1(F_\infty, W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T) = 0$;*
- *le sous-$\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$-module de $W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T$ engendré par $(W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ est égal à $W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T$.*

Preuve : En effet, soit $\tau \mapsto c_\tau$ un cocycle représentant un élément de $H^1(F_\infty, W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T)$. Posons $c_\tau^{(0)} = c_\tau$, puis procédons par récurrence en supposant que l'on a défini un cocycle $\tau \mapsto c_\tau^{(n)}$. Comme le lemme précédent implique que $H^1(F_\infty, \widetilde{\mathbf{E}}^{++} \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T)$ est trivial, il existe un $c^{(n)} \in W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T$ tel que le cocycle $\tau \mapsto c_\tau^{(n)} - (1-\tau)(c^{(n)})$ soit à valeurs dans $pW(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T$. On pose $pc_\tau^{(n+1)} = c_\tau^{(n)} - (1-\tau)(c^{(n)})$. Par construction, on a alors
$$c_\tau = (1-\tau)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} p^n c^{(n)}\right),$$
d'où le premier point.

On en déduit que la suite
$$0 \to H^0(F_\infty, pW(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T) \to H^0(F_\infty, W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T) \to H^0(F_\infty, \widetilde{\mathbf{E}}^{++} \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T) \to 0$$
est exacte. Comme $H^0(F_\infty, \widetilde{\mathbf{E}}^{++} \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T)$ engendre le $\widetilde{\mathbf{E}}^+$-module $\widetilde{\mathbf{E}}^{++} \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T)$, d'après le lemme précédent, on trouve que tout élément de $W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T$ est limite, pour la topologie p-adique, d'éléments du sous-$\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$-module engendré par $H^0(F_\infty, W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T)$, d'où le résultat, puisque $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ est complet pour la topologie p-adique. ■

Corollaire 3.10.10. *Soit V une F-représentation de $\mathcal{G}_F$. Alors $(\widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ engendre le $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_F V$.*

Preuve : Soit T un réseau de V stable sous $\mathcal{G}_{F_\infty}$. D'après le lemme précédent, le sous-$\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$-module de $W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T$ engendré par $(W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ est égal à $W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T$. Par conséquent, le sous-$\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$-module de $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \otimes_F V$ engendré par $(\widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ contient $W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} V$.

Or, l'image de $W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++})$ par θ est $\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$, par construction, donc $W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++})$ contient des éléments qui ne sont pas dans $\ker\theta$, donc des éléments inversibles dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Le sous-$\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$-module de $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \otimes_F V$ engendré par $(\widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ contient donc en particulier $1 \otimes V$, d'où le corollaire. ■

Corollaire 3.10.11. *Soit V est une F-représentation de $\mathcal{G}_F$. Il existe une base du $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$-module libre $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ formée d'éléments de $(\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \otimes_{\mathcal{O}_F} V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$.*

Preuve : D'après la proposition 3.10.5, on sait que le $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_F V$ admet une base formée d'éléments fixes par $\mathcal{G}_{F_\infty}$. Comme $(\widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ engendre le $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_F V$, on en déduit que l'on peut trouver une famille génératrice finie de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_F V$ formée d'éléments de $(\widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$. En en extrayant une famille génératrice minimale, on trouve une base du $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_F V$, et le corollaire s'en déduit. ■

Lemme 3.10.12. *Il existe un unique $u_{\mathcal{F}} \in \widetilde{\mathbf{E}}^{++}$ tel que*

$$t_{\mathcal{F}} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n [u_{\mathcal{F}}^{q^{-n}}].$$

De plus, $u_{\mathcal{F}}$ est fixe sous l'action de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, et l'on a

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(u_{\mathcal{F}}) = \frac{q}{e_F(q-1)}.$$

Preuve : Comme $t_{\mathcal{F}} \in (\mathbf{B}_{\max,F}^+)^{\varphi_F=\pi_F}$, l'existence et l'unicité de $u_{\mathcal{F}}$ découlent du corollaire 3.9.19.

Comme $t_{\mathcal{F}}$ est fixe sous l'action de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, $u_{\mathcal{F}}$ l'est aussi.

Enfin, on a $v_{\max,F}(t_{\mathcal{F}}) = \frac{q}{e_F(q-1)}$, donc

$$\inf_{n\in\mathbf{Z}} \frac{n}{e_F} + q^{-n} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(u_{\mathcal{F}}) \;=\; \frac{q}{e_F(q-1)}$$

d'après le lemme 3.8.5, donc

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(u_{\mathcal{F}}) = \sup_{n\in\mathbf{Z}} q^n \left(\frac{q}{e_F(q-1)} - \frac{n}{e_F}\right) = \frac{q}{e_F(q-1)}.$$

■

Lemme 3.10.13. *Soit $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$. Alors*

- *pour tout $k \in \mathbf{N}$, la somme $\sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]x\right)}{\pi_F^{km}}$ converge dans $\mathbf{B}_{\max,F}^+$;*
- *$\sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]x\right)}{\pi_F^{km}}$ est dans $(\mathbf{B}_{\max,F}^+)^{\varphi_F=\pi_F^k}$;*
- *on a*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\theta\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]\right)} \theta\left(\sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]x\right)}{\pi_F^{km}}\right) = \theta(x).$$

Preuve : En effet, si $m \in \mathbf{Z}$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on a (dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$) :

$$v_{\max,F}\left(\frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]x\right)}{\pi_F^{km}}\right) \geqslant q^m k\frac{q-1}{qe_F} - \frac{km}{e_F},$$

or $\lim_{m\to\pm\infty} q^m k\frac{q-1}{qe_F} - \frac{km}{e_F} = +\infty$, donc la somme

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]x\right)}{\pi_F^{km}}$$

converge dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$.

On a

$$\begin{aligned}\varphi_F\left(\sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]x\right)}{\pi_F^{km}}\right) &= \sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{\varphi_F^{m+1}\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]x\right)}{\pi_F^{km}}\\ &= \sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]x\right)}{\pi_F^{k(m-1)}}\\ &= \pi_F^k\sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]x\right)}{\pi_F^{km}},\end{aligned}$$

d'où le deuxième point.

Enfin, $\inf_{m\in\mathbf{N}^*}\left(q^m\frac{q-1}{qe_F} - \frac{m}{e_F}\right) > \frac{q-1}{qe_F}$, donc

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\theta\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]\right)}\theta\left(\sum_{m\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]x\right)}{\pi_F^{km}}\right) = 0,$$

d'où le troisième point. ■

Proposition 3.10.14. *Soit V est une F-représentation de $\mathcal{G}_F$. Il existe une base du $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$-espace vectoriel $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ formée d'éléments de $D_{\mathrm{Iw}}(V) = \left((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V\right)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$.*

Preuve : D'après la proposition 3.10.5, $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ est un $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$-espace vectoriel de dimension $\dim_F V$. Fixons une base $(e_1,\dots,e_d)$ de V sur F, et, à l'aide du corollaire 3.10.11, une base

$(v_1,\ldots,v_d)$ de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ sur $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ formée d'éléments de $(\widetilde{\mathbf{A}}_F^+\otimes_{\mathcal{O}_F} V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$. Comme $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ engendre le $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_F V$ (cf. la proposition 3.10.5), l'image par θ du déterminant de $(v_1,\ldots,v_d)$ dans la base $(e_1,\ldots,e_d)$ est non nulle. Posons alors

$$v_{i,k}=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]v_i\right)}{\pi_F^{km}}.$$

D'après le lemme précédent, l'image par $\dfrac{1}{\theta\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]\right)}\theta$ du déterminant de $(v_{1,k},\ldots,v_{d,k})$ dans la base $(e_1,\ldots,e_d)$ tend vers l'image par θ du déterminant de $(v_1,\ldots,v_d)$ dans la base $(e_1,\ldots,e_d)$, qui est non nulle. Donc, pour k assez grand, le déterminant de $(v_{1,k},\ldots,v_{d,k})$ dans la base $(e_1,\ldots,e_d)$ sera inversible dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et $(\frac{1}{t_{\mathcal{F}}^k}v_{1,k},\ldots,\frac{1}{t_{\mathcal{F}}^k}v_{d,k})$ est alors une base de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_F V$ formée d'éléments de $D_{\mathrm{Iw}}(V)$ (et donc, en particulier, fixes sous $\mathcal{G}_{F_\infty}$), d'où la proposition. ∎

Lemme 3.10.15. *Si V est une F-représentation de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, alors l'image de $H^1(F_\infty,V)$ dans $H^1(F_\infty,t_{\mathcal{F}}^{-1}((\mathbf{B}_{\max,F}^+)^{\varphi_F=\pi_F}\otimes_F V))$ est nulle.*

Preuve : Soit $\tau\mapsto c_\tau$ un cocycle représentant un élément de $H^1(F_\infty,V)$. Comme $\mathcal{G}_{F_\infty}$ est compact, on peut trouver un réseau T de V, stable sous $\mathcal{G}_{F_\infty}$, tel que c_τ soit à valeurs dans T. D'après le premier point du lemme 3.10.9, il existe un $c\in\widetilde{\mathbf{A}}_F^+\otimes_{\mathcal{O}_F}V$ (et même dans $W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++})\otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}}T$) tel que l'on ait

$$[u_{\mathcal{F}}]c_\tau=(1-\tau)(c)\qquad(\forall\tau\in\mathcal{G}_{F_\infty}).$$

Posons maintenant

$$c'=\frac{1}{\pi_F t_{\mathcal{F}}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{\varphi_F^m\left([u_{\mathcal{F}}^{q-1}]c\right)}{\pi_F^m}.$$

Comme $v_{\max,F}([u_{\mathcal{F}}^{q-1}])>0$, cette série converge dans $\mathbf{B}_{\max,F}^+\otimes_F V$, et elle définit un c' qui est dans $t_{\mathcal{F}}^{-1}((\mathbf{B}_{\max,F}^+)^{\varphi_F=\pi_F}\otimes_F V)$. De plus, si $\tau\in\mathcal{G}_{F_\infty}$, on a

$$\begin{aligned}(1-\tau)(c')&=(1-\tau)\left(\frac{1}{\pi_F t_{\mathcal{F}}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{\varphi_F^m\left([u_{\mathcal{F}}^{q-1}]c\right)}{\pi_F^m}\right)\\&=\frac{1}{\pi_F t_{\mathcal{F}}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{(1-\tau)\varphi_F^m\left([u_{\mathcal{F}}^{q-1}]c\right)}{\pi_F^m}\\&=\frac{1}{\pi_F t_{\mathcal{F}}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{\varphi_F^m\left([u_{\mathcal{F}}^{q-1}](1-\tau)(c)\right)}{\pi_F^m}\\&=\frac{1}{\pi_F t_{\mathcal{F}}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{\varphi_F^m\left([u_{\mathcal{F}}^{q}]c_\tau\right)}{\pi_F^m}\\&=\left(\frac{1}{t_{\mathcal{F}}}\sum_{m\in\mathbf{Z}}\frac{[u_{\mathcal{F}}^{q^{m+1}}]}{\pi_F^{m+1}}\right)c_\tau\\&=c_\tau,\end{aligned}$$

d'où la nullité de $\tau \mapsto c_\tau$ dans $H^1(F_\infty, t_{\mathcal{F}}^{-1}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F} \otimes_F V))$. ■

Théorème 3.10.16. *Si V est une F-représentation de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, alors on a :*

- $H^1(F_\infty, t_{\mathcal{F}}^{-i}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F^i} \otimes_F V)) = 0$ *quel que soit $i \in \mathbf{N}^*$;*
- $H^1(F_\infty, (\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V) = 0.$

Preuve : Le second point se déduit immédiatement du premier par passage à la limite inductive. Pour le premier point, on considère la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow t_{\mathcal{F}}^{-i}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F^i} \otimes_F V) \longrightarrow \mathrm{Fil}^{-i}((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}) \otimes_F V) \longrightarrow 0$$

D'après le lemme précédent, la flèche

$$H^1(F_\infty, V) \longrightarrow H^1(F_\infty, t_{\mathcal{F}}^{-i}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F^i} \otimes_F V))$$

est nulle (elle se factorise par $H^1(F_\infty, t_{\mathcal{F}}^{-1}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F} \otimes_F V))$), donc la flèche

$$H^1(F_\infty, t_{\mathcal{F}}^{-i}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F^i} \otimes_F V)) \longrightarrow H^1(F_\infty, \mathrm{Fil}^{-i}((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}) \otimes_F V))$$

est injective. Or, d'après le premier point du théorème 3.10.6, $H^1(F_\infty, \mathrm{Fil}^{-i}((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}) \otimes_F V))$ est trivial, donc

$$H^1(F_\infty, t_{\mathcal{F}}^{-i}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F^i} \otimes_F V)) = 0.$$

■

4 Construction de l'application logarithme

4.1 Distributions

Commençons par rappeler quelques résultats sur les distributions p-adiques, adaptés de [Col96] au cas considéré ici.

4.1.1 Distributions continues, distributions tempérées

Considérons X un ouvert compact de $\mathcal{O}_F$. On notera $LP^+(X)$ le F-espace vectoriel des fonctions localement polynomiales sur X, et $LA(X)$ l'ensemble des fonctions localement analytiques sur X.

Si $n \in \mathbf{N}$ est tel que les boules $a + \pi_F^n \mathcal{O}_F$, avec $a \in X$, soient contenues dans X (ce qui est le cas pour tout n assez grand, par compacité de X), on note $LA_n(X)$ l'ensemble des fonctions qui sont développables en série entière sur chacune des boules $a + \pi_F^n \mathcal{O}_F$. Alors $LA(X)$ est la réunion des $LA_n(X)$. On peut munir $LA_n(X)$ d'une norme $\|\cdot\|_{LA_n}$ de la manière suivante.

Soit $f \in LA_n(X)$. Par définition, pour tout $a \in X$, f se développe en série entière sur la boule $a + \pi_F^n \mathcal{O}_F$:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j(a)(x-a)^j.$$

On pose alors

$$\|f\|_{LA_n} = \sup_{a \in X} \sup_{j \in \mathbf{N}} \left| b_j(a) \pi_F^{nj} \right|.$$

Notons que $\sup_{j\in\mathbf{N}}|b_j(a)\pi_F^{nj}|$ ne dépend pas du choix de a dans une boule donnée (mais il peut bien sûr dépendre de la boule considérée).

Pour une fonction $f \in LA(X)$ donnée, la suite $(\|f\|_{LA_n})_n$ est décroissante.

Si B est un espace de Banach sur F, on définit l'espace des distributions algébriques sur X à valeurs dans B, $\mathcal{D}^+_{\mathrm{alg}}(X,B)$, comme l'espace des homomorphismes F-linéaires de $LP^+(X)$ dans B, et l'espace des distributions continues sur X à valeurs dans B, $\mathcal{D}_{\mathrm{cont}}(X,B)$, comme l'espace des homomorphismes F-linéaires continus de $LA(X)$ (muni de la topologie de la limite inductive) dans B.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la norme $\|\cdot\|_{LA_n}$ sur $LA_n(X)$ donne une norme sur $\mathcal{D}_{\mathrm{cont}}(X,B)$:

$$\|\mu\|_{LA_n} = \sup_{f\in LA_n(X)\setminus\{0\}} \frac{\left\|\int_X f\,\mu\right\|_B}{\|f\|_{LA_n}} \qquad (\forall \mu \in \mathcal{D}_{\mathrm{cont}}(X,B)).$$

Pour une distribution continue donnée μ, la suite $(\|\mu\|_{LA_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

Posons $\mathbf{R}^- = \{r^- \,/\, r\in\mathbf{R}\}$, et définissons une application $\iota : \mathbf{R}\cup\mathbf{R}^- \to \{\pm 1\}$ par $\iota(r) = +1$ si $r\in\mathbf{R}$ et $\iota(r) = -1$ si $r\in\mathbf{R}^-$. On peut munir $\mathbf{R}\cup\mathbf{R}^-$ d'une relation d'ordre total en posant que r^- est strictement inférieur à tous les réels supérieurs ou égaux à r, et strictement supérieur à tous les réels strictement plus petits que r. Enfin, on dira qu'une suite est $(+1)$-bornée si elle est bornée, et (-1)-bornée si elle tend vers 0.

Pour tout $r\in\mathbf{R}\cup\mathbf{R}^-$, on définit l'espace des distributions tempérées d'ordre r, sur X et à valeurs dans B, par

$$\mathcal{D}_r(X,B) = \left\{\mu\in\mathcal{D}_{\mathrm{cont}}(X,B) \;\Big/\; \text{la suite } \left(\|\pi_F^{nr}\mu\|_{LA_n}\right)_n \text{ est } \iota(r)\text{-bornée}\right\}.$$

On peut munir $\mathcal{D}_r(X,B)$ d'une norme $\|\cdot\|_r$ en posant

$$\|\mu\|_r = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|\pi_F^{nr}\mu\|_{LA_n}\,.$$

Enfin, l'espace $\mathcal{D}_{\mathrm{temp}}(X,B)$ des distributions tempérées sur X à valeurs dans B est la réunion des $\mathcal{D}_r(X,B)$ pour $r\in\mathbf{R}\cup\mathbf{R}^-$.

Notons que si $r<0$, alors $\mathcal{D}_r(X,B)$ est réduit à la distribution nulle.

4.1.2 Distributions tempérées et distributions algébriques

Proposition 4.1.1. *Soient B un espace de Banach sur F, X un ouvert compact de $\mathcal{O}_F$, et $r\in\mathbf{R}\cup\mathbf{R}^-$. L'application naturelle $\mathcal{D}_r(X,B)\to\mathcal{D}^+_{\mathrm{alg}}(X,B)$ induit un isomorphisme d'espaces de Banach de $\mathcal{D}_r(X,B)$ sur*

$$\Big\{\mu\in\mathcal{D}^+_{\mathrm{alg}}(X,B) \;\Big/\; (\forall j\in\mathbf{N}) \qquad \textit{la suite } \left(\sup_{a\in X}\left\|\pi_F^{n(r-j)}\int_{a+\pi_F^n\mathcal{O}_F}(x-a)^j\mu(x)\right\|\right)_n \textit{ est } \iota(r)\textit{-bornée}\Big\}.$$

Preuve : On procède comme dans [Vis76], en approchant les fonctions localement analytiques par des développements tronqués sur des boules de plus en plus petites (de manière analogue à des sommes de Riemann).

Considérons une distribution algébrique $\mu\in\mathcal{D}^+_{\mathrm{alg}}(X,B)$ telle que, pour tout $j\in\mathbf{N}$, la suite

$$\left(\sup_{a\in X}\left\|\pi_F^{n(r-j)}\int_{a+\pi_F^n\mathcal{O}_F}(x-a)^j\mu(x)\right\|\right)_n$$

soit $\iota(r)$-bornée. Il s'agit de montrer que μ se prolonge en un élément de $\mathcal{D}_r(X,B)$. Pour cela, fixons une fonction localement analytique $f \in LA_{n_0}(X)$, et notons

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j(a)(x-a)^j$$

le développement de f sur la boule $a + \pi_F^n \mathcal{O}_F$.

Soient $m \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0$, et soit Λ un système de représentants de X modulo $\pi_F^n \mathcal{O}_F$. On définit

$$S_{m,n,\Lambda}(f,\mu) = \sum_{a \in \Lambda} \int_{a+\pi_F^n \mathcal{O}_F} \sum_{j=0}^{m} b_j(a)(x-a)^j \ \mu(x).$$

On va montrer que si $m+1 > r$, alors $\lim_{n\to+\infty} S_{m,n,\Lambda_n}(f,\mu)$ existe et ne dépend ni de n assez grand ni de la suite de systèmes (Λ_n) choisie.

Montrons d'abord la convergence. Pour cela, on fixe une suite de systèmes de représentants, (Λ_n). Fixons $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $a \in \Lambda_{n+1}$, notons $\overline{a}$ l'unique élément de Λ_n qui soit congru à a modulo $\pi_F^n \mathcal{O}_F$. On a alors, pour $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned}
&\left\| S_{m,n+1,\Lambda_{n+1}}(f,\mu) - S_{m,n,\Lambda_n}(f,\mu) \right\|_B \\
&= \left\| \sum_{a\in\Lambda_{n+1}} \int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F} \sum_{j=0}^{m} b_j(a)(x-a)^j \ \mu(x) \ - \sum_{a\in\Lambda_n} \int_{a+\pi_F^{n}\mathcal{O}_F} \sum_{j=0}^{m} b_j(a)(x-a)^j \ \mu(x) \right\|_B \\
&= \left\| \sum_{a\in\Lambda_{n+1}} \int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F} \left(\sum_{j=0}^{m} b_j(a)(x-a)^j \ - \ \sum_{j=0}^{m} b_j(\overline{a})(x-\overline{a})^j \right) \ \mu(x) \right\|_B \\
&\leqslant \sup_{a\in\Lambda_{n+1}} \left\| \int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F} \left(\sum_{j=0}^{m} b_j(a)(x-a)^j \ - \ \sum_{j=0}^{m} b_j(\overline{a})(x-\overline{a})^j \right) \ \mu(x) \right\|_B ,
\end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m} b_j(a)(x-a)^j \ - \ \sum_{j=0}^{m} b_j(\overline{a})(x-\overline{a})^j \\
&\qquad = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{k=j}^{+\infty} \binom{k}{j} b_k(\overline{a})(a-\overline{a})^{k-j} \right) (x-a)^j \ - \ \sum_{j=0}^{m} b_j(\overline{a})(x-\overline{a})^j \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{\min(k,m)} \binom{k}{j} b_k(\overline{a})(a-\overline{a})^{k-j}(x-a)^j \ - \ \sum_{k=0}^{m} b_k(\overline{a})(x-\overline{a})^k \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{\min(k,m)} \binom{k}{j} (a-\overline{a})^{k-j}(x-a)^j \right) b_k(\overline{a}) \ - \ \sum_{k=0}^{m} b_k(\overline{a})(x-\overline{a})^k \\
&\qquad = \sum_{k=m+1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} \binom{k}{j} (a-\overline{a})^{k-j}(x-a)^j \right) b_k(\overline{a})
\end{aligned}$$

donc on a

$$
\begin{aligned}
&\left\| S_{m,n+1,\Lambda_{n+1}}(f,\mu) - S_{m,n,\Lambda_n}(f,\mu) \right\|_B \\
&\quad \leqslant \sup_{0\leqslant j\leqslant m} \sup_{a\in\Lambda_{n+1}} \left\| \left(\sum_{k=m+1}^{+\infty} \binom{k}{j} b_k(\overline{a})(a-\overline{a})^{k-j} \right) \int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F} (x-a)^j \ \mu(x) \right\|_B \\
&\quad \leqslant \sup_{0\leqslant j\leqslant m} \sup_{a\in\Lambda_{n+1}} \left(\sup_{k\geqslant m+1} |\pi_F^{n(k-j)} b_k(\overline{a})| \right) \left\| \int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F} (x-a)^j \ \mu(x) \right\|_B \\
&\quad \leqslant \sup_{0\leqslant j\leqslant m} \sup_{a\in\Lambda_{n+1}} \left(\sup_{k\geqslant m+1} |\pi_F^{kn_0+(n-n_0)k-nj} b_k(\overline{a})| \right) \left\| \int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F} (x-a)^j \ \mu(x) \right\|_B \\
&\quad \leqslant \sup_{0\leqslant j\leqslant m} \sup_{a\in\Lambda_{n+1}} \|f\|_{LA_{n_0}} \left\| \pi_F^{(n-n_0)(m+1)-nj} \int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F} (x-a)^j \ \mu(x) \right\|_B \\
&\quad \leqslant |\pi_F|^{-n_0(m+1)} \|f\|_{LA_{n_0}} \sup_{0\leqslant j\leqslant m} \sup_{a\in X} \left\| \pi_F^{n(m+1-j)} \int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F} (x-a)^j \ \mu(x) \right\|_B \\
&\quad \leqslant |\pi_F|^{-(n_0+1)(m+1)} \|f\|_{LA_{n_0}} \sup_{0\leqslant j\leqslant m} \sup_{a\in X} \left\| \pi_F^{(n+1)(m+1-j)} \int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F} (x-a)^j \ \mu(x) \right\|_B ,
\end{aligned}
$$

et ce dernier majorant tend vers 0 quand n tend vers l'infini, si $m+1 > r$, donc la suite $(S_{m,n,\Lambda_n}(f,\mu))_n$ converge si $m+1>r$.

Comme la suite converge quel que soit le choix de (Λ_n), sa limite est indépendante de ce choix.

Montrons maintenant que cette limite ne dépend pas du choix de $m+1>r$. On a :

$$
\begin{aligned}
&\left\| S_{m+1,n,\Lambda}(f,\mu) - S_{m,n,\Lambda}(f,\mu) \right\|_B \\
&\qquad = \left\| \sum_{a\in\Lambda} \int_{a+\pi_F^n\mathcal{O}_F} b_{m+1}(x-a)^{m+1} \ \mu(x) \right\|_B \\
&\qquad \leqslant |\pi_F|^{-n_0(m+1)} \ |b_{m+1}\pi_F^{n_0(m+1)}| \ \sup_{a\in\Lambda} \left\| \int_{a+\pi_F^n\mathcal{O}_F} (x-a)^{m+1} \ \mu(x) \right\|_B \\
&\qquad \leqslant |\pi_F|^{-n_0(m+1)} \ \|f\|_{LA_{n_0}} \ \sup_{a\in X} \left\| \int_{a+\pi_F^n\mathcal{O}_F} (x-a)^{m+1} \ \mu(x) \right\|_B ,
\end{aligned}
$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, si $m+1>r$, donc la limite ne dépend pas du choix de m (assez grand).

On peut donc poser

$$\int_X f \ i(\mu) = \lim_{n\to+\infty} S_{m,n,\Lambda_n}(f,\mu).$$

Montrons que l'on a ainsi défini un élément de $\mathcal{D}_r(X,B)$.

L'application $f \mapsto \int_X f \ i(\mu)$ est bien définie sur tout $LA(X)$, et elle est F-linéaire par construction. De plus, si $f \in LA_{n_0}$, on a

$$\begin{aligned}
\Big\|\int_X f\ i(\mu)\Big\|_B &\leqslant \max\Big(\big\|S_{m,n_0,\Lambda_{n_0}}(f,\mu)\big\|_B, \sup_{n\geqslant n_0}\big\|S_{m,n+1,\Lambda_{n+1}}(f,\mu)-S_{m,n,\Lambda_n}(f,\mu)\big\|_B\Big)\\
&\leqslant \max\Bigg(\sup_{0\leqslant j\leqslant m}\sup_{a\in\Lambda}\Big\|b_j(a)\int_{a+\pi_F^{n_0}\mathcal{O}_F}(x-a)^j\ \mu(x)\Big\|_B,\\
&\qquad |\pi_F|^{-(n_0+1)(m+1)}\|f\|_{LA_{n_0}}\\
&\qquad\qquad \sup_{n\geqslant n_0}\sup_{0\leqslant j\leqslant m}\sup_{a\in X}\Big\|\pi_F^{(n+1)(m+1-j)}\int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F}(x-a)^j\ \mu(x)\Big\|_B\Bigg)\\
&\leqslant \|f\|_{LA_{n_0}}\max\Bigg(|\pi_F|^{-n_0m}\sup_{0\leqslant j\leqslant m}\sup_{a\in X}\Big\|\int_{a+\pi_F^{n_0}\mathcal{O}_F}(x-a)^j\ \mu(x)\Big\|_B,\\
&\qquad |\pi_F|^{-(n_0+1)(m+1)}\\
&\qquad\qquad \sup_{n\geqslant n_0}\sup_{0\leqslant j\leqslant m}\sup_{a\in X}\Big\|\pi_F^{(n+1)(m+1-j)}\int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F}(x-a)^j\ \mu(x)\Big\|_B\Bigg),
\end{aligned}$$

donc on a bien défini une distribution $i(\mu) \in \mathcal{D}_{\mathrm{cont}}(X,B)$.

Enfin, on a

$$\begin{aligned}
\|\pi_F^{n_0 r}\ i(\mu)\|_{LA_{n_0}} &\leqslant \max\Bigg(\sup_{0\leqslant j\leqslant m}\sup_{a\in X}\Big\|\pi_F^{n_0(r-j)}\int_{a+\pi_F^{n_0}\mathcal{O}_F}(x-a)^j\ \mu(x)\Big\|_B,\\
&\qquad |\pi_F|^{n_0(r-m-1)-m-1}\\
&\qquad\qquad \sup_{n\geqslant n_0}\sup_{0\leqslant j\leqslant m}\sup_{a\in X}\Big\|\pi_F^{(n+1)(m+1-j)}\int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F}(x-a)^j\ \mu(x)\Big\|_B\Bigg)\\
&\leqslant \max\Bigg(\sup_{0\leqslant j\leqslant m}\sup_{a\in X}\Big\|\pi_F^{n_0(r-j)}\int_{a+\pi_F^{n_0}\mathcal{O}_F}(x-a)^j\ \mu(x)\Big\|_B,\\
&\qquad \sum_{n\geqslant n_0}\sup_{0\leqslant j\leqslant m}\sup_{a\in X}\Big\|\pi_F^{n_0(r-m-1)-(m+1)+(n+1)(m+1-j)}\\
&\qquad\qquad \int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F}(x-a)^j\ \mu(x)\Big\|_B\Bigg)\\
&\leqslant \max\Bigg(\sup_{0\leqslant j\leqslant m}\sup_{a\in X}\Big\|\pi_F^{n_0(r-j)}\int_{a+\pi_F^{n_0}\mathcal{O}_F}(x-a)^j\ \mu(x)\Big\|_B\\
&\qquad \sum_{n\geqslant n_0}|\pi_F|^{(n+1-n_0)(m+1-r)-(m+1)}\\
&\qquad\qquad \sup_{0\leqslant j\leqslant m}\sup_{a\in X}\Big\|\pi_F^{(n+1)(r-j)}\int_{a+\pi_F^{n+1}\mathcal{O}_F}(x-a)^j\ \mu(x)\Big\|_B\Bigg)
\end{aligned}$$

Le premier terme est $\iota(r)$-borné et le second tend vers 0 quand n_0 tend vers l'infini, donc $i(\mu)$ est dans $\mathcal{D}_r(X,B)$.

Il reste à montrer que l'application naturelle $\mathcal{D}_r(X,B) \to \mathcal{D}^+_{\mathrm{alg}}(X,B)$ est injective. Pour cela, on considère une distribution $\mu \in \mathcal{D}_r(X,B)$, et l'on doit montrer que l'on a $\mu = i(\mu)$.

Soit $f \in LA_{n_0}(X)$. On a

$$\begin{aligned}\left\|\int_X f\mu \;-\; S_{m,n,\Lambda}(f,\mu)\right\|_B &\leqslant \sup_{a\in\Lambda}\left\|\int_{a+\pi_F^n\mathcal{O}_F}\sum_{j=m+1}^{\infty} b_j(a)(x-a)^j\;\mu(x)\right\|_B\\ &\leqslant \|\mu\|_{LA_n}\sup_{a\in\Lambda}\sup_{j\geqslant m+1}\left|b_j(a)\pi_F^{nj}\right|\\ &\leqslant \|\mu\|_{LA_n}\,|\pi_F|^{(n-n_0)(m+1)}\,\|f\|_{LA_{n_0}}\\ &\leqslant |\pi_F|^{-n_0(m+1)}\,\|\pi_F^{n(m+1)}\mu\|_{LA_n}\|f\|_{LA_{n_0}}\|\mu\|_r,\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc $\int_X f\mu = \int_X f\; i(\mu)$. Ceci conclut la preuve de la proposition 4.1.1. ∎

4.1.3 Cohomologie galoisienne dans un espace de distributions

Si B un espace de Banach sur F muni d'une action de $\mathcal{G}_K$ (pour K une extension de F), on définit une action de $\mathcal{G}_K$ sur $\mathcal{D}_r(\Gamma_F,B)$ (ou $\mathcal{D}^+_{\mathrm{alg}}(\Gamma_F,B)$) par :

$$\int_{\Gamma_F} f\,\sigma(\mu) = \sigma\left(\int_{\Gamma_F} f(\sigma\tau)\,\mu(\tau)\right).$$

Notons que $\chi_{\mathcal{F}}$ permet d'identifier Γ_F à $\mathcal{O}_F^*$.

Proposition 4.1.2. *Soient B un espace de Banach sur F muni d'une action de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, X un ouvert compact de $\mathcal{O}_F$, et $r \in \mathbf{R}\cup\mathbf{R}^-$. Notons $B^1(\mathcal{G}_{F_\infty},B)$ l'ensemble des 1-cobords sur $\mathcal{G}_{F_\infty}$ à valeurs dans B, et $Z^1(\mathcal{G}_{F_\infty},B)$ l'ensemble des 1-cocycles sur $\mathcal{G}_{F_\infty}$ à valeurs dans B. Si $B^1(\mathcal{G}_{F_\infty},B)$ est fermé dans $Z^1(\mathcal{G}_{F_\infty},B)$, alors l'application naturelle de $H^1(F_\infty,\mathcal{D}_r(X,B))$ dans $H^1(F_\infty,\mathcal{D}^+_{\mathrm{alg}}(X,B))$ est injective.*

(Notons que l'action de $\mathcal{G}_{F_\infty}$ sur X est triviale, puisque $\mathcal{G}_{F_\infty}$ est le noyau de $\chi_{\mathcal{F}}$).

Preuve : Comme $B^1(\mathcal{G}_{F_\infty},B)$ est fermé dans $Z^1(\mathcal{G}_{F_\infty},B)$, c'est un espace de Banach sur F. L'application linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B^1(\mathcal{G}_{F_\infty},B)\\ x & \longmapsto & (\tau\mapsto(1-\tau)x)\end{array}\right.$$

est continue et surjective, donc, d'après le théorème de l'image ouverte, elle admet une section continue s.

Soit $\mu \in H^1(F_\infty,\mathcal{D}_r(X,B))$, d'image nulle dans $H^1(F_\infty,\mathcal{D}^+_{\mathrm{alg}}(X,B))$, et soit $\tau\mapsto\mu_\tau$ un cocycle représentant μ. Alors, pour tout $f\in LP^+(X)$, $\tau\mapsto\int_X f\mu_\tau$ est dans $B^1(\mathcal{G}_{F_\infty},B)$.

Soit $\lambda\in\mathcal{D}^+_{\mathrm{alg}}(X,B)$ la distribution définie par

$$\int_X f\lambda = s\left(\tau\mapsto\int_X f\mu_\tau\right)\qquad(\forall f\in LP^+(X)).$$

Comme s est continue, on a alors

$$\sup_{a\in X}\left\|\pi_F^{n(r-j)}\int_{a+\pi_F^n\mathcal{O}_F}(x-a)^j\,\lambda(x)\right\|_B \leqslant C\sup_{\tau\in\mathcal{G}_{F_\infty}}\sup_{a\in X}\left\|\pi_F^{n(r-j)}\int_{a+\pi_F^n\mathcal{O}_F}(x-a)^j\,\mu_\tau(x)\right\|_B,$$

pour une certaine constante C, or, pour tout $\tau \in \mathcal{G}_{F_\infty}$, μ_τ est dans $\mathcal{D}_r(X, B)$ donc la suite

$$\left(\sup_{a \in X} \left\| \pi_F^{n(r-j)} \int_{a+\pi_F^n \mathcal{O}_F} (x-a)^j \, \mu_\tau(x) \right\|_B \right)_n$$

est $\iota(r)$-bornée, donc, comme $\mathcal{G}_{F_\infty}$ est compact, la suite

$$\left(\sup_{a \in X} \left\| \pi_F^{n(r-j)} \int_{a+\pi_F^n \mathcal{O}_F} (x-a)^j \, \lambda(x) \right\|_B \right)_n$$

est $\iota(r)$-bornée, donc, d'après la proposition 4.1.1, λ se prolonge en un élément de $\mathcal{D}_r(X, B)$, que l'on notera aussi λ.

Alors, pour tout $\tau \in \mathcal{G}_{F_\infty}$, la distribution $\mu_\tau - (1-\tau)(\lambda) \in \mathcal{D}_r(X, B)$ est nulle sur $LP^+(X)$ (par construction de λ), et donc elle est nulle par la proposition 4.1.1, ce qui prouve la proposition 4.1.2. ■

Lemme 4.1.3. *Soient B un espace de Banach sur F muni d'une action de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, et $r \in \mathbf{R} \cup \mathbf{R}^-$. Si $H^1(F_\infty, B) = 0$, alors on a $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, B)) = 0$.*

Preuve : Comme $H^1(F_\infty, B) = 0$, on a $H^1(F_\infty, \mathcal{D}^+_{\mathrm{alg}}(\Gamma_F, B)) = 0$. D'autre part, pour la même raison, $B^1(\mathcal{G}_{F_\infty}, B)$ est fermé dans (et même égal à) $Z^1(\mathcal{G}_{F_\infty}, B)$. D'après la proposition précédente, on en déduit que l'application naturelle $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(X, B)) \to H^1(F_\infty, \mathcal{D}^+_{\mathrm{alg}}(X, B))$ est injective, d'où le lemme. ■

Corollaire 4.1.4. *Soient V une F-représentation de $\mathcal{G}_F$ et $r \in \mathbf{R} \cup \mathbf{R}^-$. On a :*
- $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} / \operatorname{Fil}^i \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}) \otimes_F V)) = 0$ *quel que soit $i \in \mathbf{N}^*$;*
- $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_F V)) = 0$ *;*
- $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} / \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}) \otimes_F V)) = 0$ *;*
- $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_F V)) = 0$ *;*
- $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, t_{\mathcal{F}}^{-i}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = \pi_F^i} \otimes_F V))) = 0$ *quel que soit $i \in \mathbf{N}^*$;*
- $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, (\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F = 1} \otimes_F V)) = 0$*.*

Preuve : C'est une application directe du lemme précédent aux résultats du théorème 3.10.6 et du théorème 3.10.16. ■

4.2 Le lemme principal

Le point difficile de la construction sera de montrer le lemme suivant.

Lemme 4.2.1. *Soit $a \in F$. Il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ (dépendant de F et de a) telle que pour tout $A \in \mathbf{R}$ il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \in (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = a}$ vérifiant*

$$v_{\max,F}\left((1-\sigma)(x)\right) \geqslant A + v_{\max,F}(x) \qquad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$$

on ait :

$$v_{\max,F}\left((1-\sigma)(x)\right) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - C \qquad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}.$$

Notons que si l'on remplace $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}$ par $\mathbf{C}_p$, le résultat devient faux. En effet, pour tout $n>0$, on peut prendre x dans $\mathcal{O}_{F_n}$ tel que $\inf_{\sigma\in\mathcal{G}_{F_{n-1}}} v_{\max,F}((1-\sigma)(x_n)) = \frac{1}{e_F(q-1)}$ (d'après le lemme 2.2.5).

Avant de démontrer le lemme 4.2.1 (ce qui sera l'objet de la partie suivante), nous allons examiner quelques cas particuliers.

Si $v_p(a)<0$, comme on a $v_{\max,F}(\varphi_F(x)) \geqslant v_{\max,F}(x)$ pour tout $x\in\mathbf{B}^+_{\max,F}$ (ceci découle immédiatement de la construction de $v_{\max,F}$), et l'on a $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}=\{0\}$. Le lemme est donc trivial dans ce cas.

Si $v_p(a)=0$, alors $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}$ est contenu dans F^{nr} d'après le lemme 3.5.3. Le lemme 4.2.1 s'en déduit alors (pour cette situation particulière), grâce au résultat suivant.

Lemme 4.2.2. *Soit $x\in F^{\mathrm{nr}}$, vérifiant*

$$v_p(x-\sigma(x)) \geqslant A \qquad (\forall \sigma\in\mathcal{G}_{F_n}),$$

pour un certain $A\in\frac{1}{e_F}\mathbf{Z}$ et un certain $n\geqslant 1$. Alors on a

$$v_p(x-\sigma(x)) \geqslant A \qquad (\forall \sigma\in\mathcal{G}_{F}).$$

Preuve : En effet, quitte à multiplier x par une puissance de π_F, on peut supposer $v_p(x)\geqslant 0$. On procède alors par récurrence sur A.

Pour $A\leqslant 0$, le résultat est immédiat.

Si $A>0$, plaçons-nous modulo π_F. La classe de x est alors un élément de k_F, qui est fixe sous l'action de $\mathcal{G}_{F_n}$. Or l'extension F_n/F est totalement ramifiée, donc elle est linéairement disjointe de F^{nr}/F, donc la classe de x est en fait fixe sous $\mathcal{G}_F$, donc elle est dans k_F. Quitte à soustraire à x un élément de $\mathcal{O}_F$, on peut donc supposer $v_p(x)\geqslant\frac{1}{e_F}$. On est alors ramené à l'hypothèse de récurrence en divisant x par π_F. ■

Les cas évidents étant maintenant mis de côté, voici une preuve du lemme 4.2.1 dans le cas $0<v_p(a)\leqslant h$, qui s'appuie sur la description de $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}$ obtenue dans la partie 3.9.

Lemme 4.2.3. *Il existe deux constantes $A,B>0$ (ne dépendant que de F) telles que si $n\geqslant 1$ et si $x\in\widetilde{\mathbf{E}}^{++}$ vérifie*

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x-\sigma(x)) \geqslant A \qquad (\forall \sigma\in\mathcal{G}_{F_{n+1}})$$

alors on a

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x-\sigma(x)) \geqslant B \qquad (\forall \sigma\in\mathcal{G}_{F_n}).$$

Preuve : En effet, prenons $A=1$, et considérons un $x\in\widetilde{\mathbf{E}}^{++}$ vérifiant

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x-\sigma(x)) \geqslant 1 \qquad (\forall \sigma\in\mathcal{G}_{F_{n+1}}).$$

D'après le lemme 3.1.1, $x^{(0)}\in\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ vérifie alors

$$v_p(x^{(0)}-\sigma(x^{(0)})) \geqslant 1 \qquad (\forall \sigma\in\mathcal{G}_{F_{n+1}}).$$

D'après le théorème d'Ax-Sen-Tate (2.3.1), on peut donc écrire (pour $p>2$) :

$$x^{(0)} \;=\; \underbrace{x_0^{(0)}}_{\in\mathbf{m}_{F_{n+1}}} \;+\; \underbrace{x_1^{(0)}}_{v_p\geqslant 1-\frac{p}{(p-1)^2}}\;.$$

Comme $x_0^{(0)} \in \mathcal{O}_{F_{n+1}}$, la théorie de la ramification supérieure (cf. le lemme 2.2.5) donne :

$$v_p(x_0^{(0)} - \sigma(x_0^{(0)})) \geqslant \frac{1}{(q-1)e_F} \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}),$$

donc

$$v_p(x^{(0)} - \sigma(x^{(0)})) \geqslant \min\left(\frac{1}{(q-1)e_F}, 1 - \frac{p}{(p-1)^2}\right) \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}),$$

donc, à l'aide du lemme 3.1.1,

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x - \sigma(x)) \geqslant B \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n})$$

avec $B = \min\left(\frac{1}{(q-1)e_F}, 1 - \frac{p}{(p-1)^2}\right)$, ce qui démontre le lemme dans le cas $p > 2$.

Pour $p = 2$, prenons $A = 4$. d'après le lemme 3.1.1, $x^{(2)} \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ vérifie

$$v_p(x^{(2)} - \sigma(x^{(2)})) \geqslant 1 \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n+1}}),$$

donc $x^{(0)} = (x^{(2)})^4 \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ vérifie

$$v_p(x^{(0)} - \sigma(x^{(0)})) \geqslant 3 \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n+1}}).$$

On peut alors procéder comme dans le cas $p > 2$, et l'on trouve que

$$B = \min\left(\frac{1}{(q-1)e_F}, 3 - \frac{p}{(p-1)^2}\right) = \frac{1}{(q-1)e_F}$$

convient, ce qui démontre le lemme ci-dessus dans le cas $p = 2$. ■

Corollaire 4.2.4. *Soient $C > 0$ et $n \geqslant 1$. Soit $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^{++}$ vérifiant*

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x - \sigma(x)) \geqslant C \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n+1}}),$$

alors on a

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x - \sigma(x)) \geqslant cC \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}),$$

pour une certaine constante $c > 0$ indépendante de x, n et C (mais dépendant de F).

Preuve : En effet, soient A et B comme dans le lemme précédent. Posons

$$N = \left\lceil \frac{\log A - \log C}{\log p} \right\rceil,$$

de sorte que $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x^{p^N} - \sigma(x^{p^N})) \geqslant A$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_{n+1}}$. (Rappelons que $\widetilde{\mathbf{E}}$ est de caractéristique p). Alors on a

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x^{p^N} - \sigma(x^{p^N})) \geqslant B \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}),$$

donc

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x - \sigma(x)) \geqslant p^{-N} B \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}).$$

Enfin, on a

$$p^{-N} B \geqslant p^{-\frac{\log A - \log C}{\log p} - 1} B = \frac{B}{pA} C,$$

donc $c = \frac{B}{pA}$ convient. ■

On en déduit alors le lemme suivant.

Lemme 4.2.5. *Soit $a \in \mathcal{O}_F$ avec $0 < v_p(a) \leqslant h$. Il existe une constante $c' \in \mathbf{R}$, dépendant seulement de F et a, telle que pour tout $A \in \mathbf{R}$, tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = a}$ vérifiant*

$$v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant A \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n+1}}),$$

on ait :

$$v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant A - c' \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}).$$

Preuve : Cela découle directement du lemme 3.9.18 et du corollaire précédent. ■

Ce lemme démontre en particulier le lemme 4.2.1 sous la condition $0 < v_p(a) \leqslant h$.

Malheureusement, la condition $0 < v_p(a) \leqslant h$ intervient de manière essentielle dans la partie 3.9, pour assurer l'existence des limites étudiées. Nous allons donc employer une autre méthode pour montrer le lemme dans toute sa généralité.

4.3 Preuve du lemme principal

Le cas $v_p(a) \leqslant 0$ (et même $v_p(a) \leqslant h$, bien que cela ne serve pas ici) ayant été traité dans la partie précédente, on suppose dorénavant $v_p(a) > 0$. La preuve fonctionne par récurrence sur $v_p(a) \in \frac{1}{e_F}\mathbf{N}$.

On considère donc un $A \in \mathbf{R}$. L'entier n_0 considéré sera n'importe quel entier assez grand pour vérifier :

- $n_0 > \frac{pe_F}{p-1}$ (afin de pouvoir utiliser les résultats de la partie sur les traces divisées, et en particulier le corollaire 2.8.5) ;
- $n_0 \geqslant 1 + Ae_F$ (afin que $t_{\mathcal{F}}$ soit fixe modulo les éléments de valuation supérieure ou égale à A, sous l'action de $\mathcal{G}_{F_{n-1}}$).

Puis on considère un $n \geqslant n_0$ et un $x \in (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = a}$ tel que

$$v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}).$$

On veut montrer que l'on a

$$v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - C \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}),$$

$C \in \mathbf{R}$ ne dépendant que de F et de a (en particulier, C ne dépend pas de A, n ou x).

4.3.1 Réductions préliminaires

La première étape est une succession de réductions visant à passer d'un x quelconque dans $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = a}$ à un élément dont l'image par θ est dans le noyau de $\mathrm{Tr}_{F_n/F_{n-1}}$.

Pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$, on a

$$v_p(\theta(x) - \sigma(\theta(x))) = v_p(\theta(x - \sigma(x))) \geqslant v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant A + v_{\max,F}(x),$$

donc, d'après le théorème d'Ax-Sen-Tate (2.3.1), on peut écrire

$$\theta(x) = y_0 + r_0, \quad \text{avec } y_0 \in F_n \text{ et } r_0 \in \mathbf{C}_p,\ v_p(r_0) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2}.$$

L'application $\theta : (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = a} \to \mathbf{C}_p$ est un morphisme surjectif et continu d'espaces de Banach p-adiques. Elle a donc une section linéaire continue $s : \mathbf{C}_p \to (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = a}$. Notons que l'on peut choisir s ne dépendant que de F et a. Comme s est continue, il existe une constante $c_0 \in \mathbf{R}$ telle que $v_{\max,F}(s(y)) \geqslant v_p(y) - c_0$, pour tout $y \in \mathbf{C}_p$.

Posons donc $x_1 = x - s(r_0)$. On a alors

① $v_{\max,F}(x_1 - \sigma(x_1)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$;
② $\theta(x_1) = y_0 \in F_n$;
③ $v_{\max,F}(x - x_1) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0$;
④ $v_{\max,F}(x_1) \geqslant v_{\max,F}(x) + \min\Big(A - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0, 0\Big)$.

Soient τ_0, …, τ_{q-1} des représentants des classes de $\mathcal{G}_{F_{n-1}}$ modulo $\mathcal{G}_{F_n}$. Posons

$$r_1 = \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}\tau_i(x_1).$$

On a alors $\theta(r_1) = \frac{1}{q}\operatorname{Tr}_{F_n/F_{n-1}}(y_0)$.

Si $\sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}$, on note τ_i' l'unique élément de $\{\tau_0, \dots, \tau_{q-1}\}$ tel que ${\tau_i'}^{-1}\sigma\tau_i \in \mathcal{G}_{F_n}$. (Si $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$, on a $\tau_i' = \tau_i$). On trouve alors :

$$\begin{aligned}
(1-\sigma)(r_1) &= r_1 - \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}(\sigma\tau_i)(x_1)\\
&= r_1 - \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}(\tau_i'{\tau_i'}^{-1}\sigma\tau_i)(x_1)\\
&= r_1 - \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}\tau_i'(x_1) + \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}\tau_i'(1-{\tau_i'}^{-1}\sigma\tau_i)(x_1)\\
&= \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}\tau_i'(1-{\tau_i'}^{-1}\sigma\tau_i)(x_1).
\end{aligned}$$

Comme ${\tau_i'}^{-1}\sigma\tau_i \in \mathcal{G}_{F_n}$, on en déduit donc

$$v_{\max,F}(r_1 - \sigma(r_1)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0 - h.$$

Posons $x_2 = x_1 - r_1$. On a donc alors :
① $v_{\max,F}(x_2 - \sigma(x_2)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0 - h$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$;
② $\theta(x_2) = y_0 - \frac{1}{q}\operatorname{Tr}_{F_n/F_{n-1}}(y_0) \in F_n$;
③ $\theta(x_2) \in \ker \operatorname{Tr}_{F_n/F_{n-1}}$;
④ $v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant \min\Big(v_{\max,F}(x_2 - \sigma(x_2)), A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0 - h\Big)$, quel que soit $\sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}$;
⑤ $v_{\max,F}(x_2) \geqslant \min\Big(A - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0, 0\Big) + v_{\max,F}(x) - h$.

On est donc ramené à trouver une minoration convenable de $v_{\max,F}((1-\sigma)(x_2))$. C'est l'objet des deux lemmes suivants.

4.3.2 Deux lemmes différentiels

Rappelons que si K est une extension algébrique de F, alors $\mathfrak{D}_{K/F}$ est l'annulateur de $\Omega^1_{\mathcal{O}_K/\mathcal{O}_F}$ (cf. [Ser68], chapitre III, paragraphe 7, proposition 14), et qu'on a

$$v_p(\mathfrak{D}_{F_n/F}) = \frac{1}{e_F}\left(n - \frac{1}{q-1}\right)$$

d'après le lemme 2.2.8.

Lemme 4.3.1. *Soient $M \in \mathbf{N}$, $y \in \mathcal{O}_{F_n}$ et $\widetilde{y} \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ tel que $\theta(\widetilde{y}) = y$. Notons $dy \in \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{F}}/\mathcal{O}_F}$ la différentielle de Kähler de y. Il existe une constante c_1 (dépendant seulement de F) telle que, si $n > \frac{pe_F}{p-1}$ et si $\widetilde{y}$ est fixe dans $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+/(\pi_F^M, ([\widetilde{\pi_F}] - \pi_F)^2)$ sous l'action de $\mathcal{G}_{F_n}$, alors dy est annulé par tout élément de F_n de valuation supérieure ou égale à $\frac{n-M}{e_F} + c_1$.*

Preuve : Comme $y \in \mathcal{O}_{F_n}$, dy est annulé par $\mathfrak{D}_{F_n/F}$ (cf. [Ser68], chapitre III, paragraphe 7, proposition 14). D'autre part, d'après [Fo82b] (théorème 1), $\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{F}}/\mathcal{O}_F}$ est isomorphe à $\left(\overline{F}/\mathfrak{a}\right)(\chi_{\mathcal{F}})$, où

$$\mathfrak{a} = \left\{ z \in \overline{F} \Big/ v_p(z) \geqslant -v_p(\mathfrak{D}_{F/F_{\mathrm{nr}}}) - \frac{1}{e_F(q-1)} \right\}.$$

Ceci permet de considérer dy comme un élément de $\left(\mathfrak{D}^{-1}_{F_n/F}\mathfrak{a} \;/\; \mathfrak{a}\right)(\chi_{\mathcal{F}})$.

D'autre part, d'après [Col94], $\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{F}}/\mathcal{O}_F}$ est isomorphe à $\mathrm{Fil}^1\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \;/\; (\omega\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ + \mathrm{Fil}^2\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}})$, l'isomorphisme faisant correspondre dy et $\widetilde{y} - y$. Si $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$, on a par hypothèse :

$$(1-\sigma)(\widetilde{y}) \in \pi_F^M\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ + \omega^2\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \qquad \text{et} \qquad (1-\sigma)(y) = 0,$$

donc $(1-\sigma)(\widetilde{y} - y)$ est un élément de $\pi_F^M\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ + \mathrm{Fil}^2\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. D'autre part, c'est un élément de $\mathrm{Fil}^1\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, si bien qu'il est en fait dans $\pi_F^M\omega\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ + \mathrm{Fil}^2\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$.

Considérons maintenant la classe de $\frac{\widetilde{y}-y}{\pi_F^M}$ dans $\mathrm{Fil}^1\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \;/\; (\omega\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ + \mathrm{Fil}^2\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \simeq \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{F}}/\mathcal{O}_F}$. Elle est annulée par $\pi_F^M\mathfrak{D}_{F_n/F}$, et elle est fixe sous l'action de $\mathcal{G}_{F_n}$, donc c'est un élément de $H^0\left(F_n, \left((\pi_F^{-M}\mathfrak{D}^{-1}_{F_n/F}\mathfrak{a}) \;/\; \mathfrak{a}\right)(\chi_{\mathcal{F}})\right)$. En multipliant par π_F^M, on trouve alors que dy est l'image d'un élément de $H^0\left(F_n, \left(\mathfrak{D}^{-1}_{F_n/F}\mathfrak{a} \;/\; \pi_F^M\mathfrak{a}\right)(\chi_{\mathcal{F}})\right)$ dans la suite exacte de cohomologie :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0\left(F_n, \frac{\mathfrak{a}}{\pi_F^M\mathfrak{a}}(\chi_{\mathcal{F}})\right) \arrow[r] & H^0\left(F_n, \frac{\mathfrak{D}^{-1}_{F_n/F}\mathfrak{a}}{\pi_F^M\mathfrak{a}}(\chi_{\mathcal{F}})\right) \arrow[r] & H^0\left(F_n, \frac{\mathfrak{D}^{-1}_{F_n/F}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}(\chi_{\mathcal{F}})\right) \arrow[dll, rounded corners] \\
& H^1\left(F_n, \frac{\mathfrak{a}}{\pi_F^M\mathfrak{a}}(\chi_{\mathcal{F}})\right) \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

On trouve donc que dy est un élément du noyau du morphisme

$$H^0(F_n, (\mathfrak{D}^{-1}_{F_n/F}\mathfrak{a} \;/\; \mathfrak{a})(\chi_{\mathcal{F}})) \longrightarrow H^1(F_n, (\mathfrak{a} \;/\; \pi_F^M\mathfrak{a})(\chi_{\mathcal{F}})).$$

Le corollaire 2.8.5 démontre alors le lemme 4.3.1. ■

Lemme 4.3.2. *Il existe une constante $c_2 \in \mathbf{R}$, $c_2 \geqslant 0$, dépendant seulement de F, telle que si $y \in \mathcal{O}_{F_n}$ est tel que $dy = 0$, alors y est somme d'un élément de F_{n-1} et d'un élément de F_n de valuation supérieure ou égale à $v_p\left(\mathfrak{D}_{F_n/F}\right) - c_2 = \frac{1}{e_F}\left(n - \frac{1}{q-1}\right) - c_2$.*

Preuve : Comme $1, \pi_{F_n}, \pi_{F_n}^2, \dots, \pi_{F_n}^{q^{n-1}(q-1)-1}$ est une base de $\mathcal{O}_{F_n}$ sur $\mathcal{O}_F$, on peut écrire y sous la forme

$$y = \sum_{i=0}^{q^{n-1}(q-1)-1} y_i \pi_{F_n}^i,$$

avec $y_i \in \mathcal{O}_F$. On a alors

$$0 = dy = \sum_{i=1}^{q^{n-1}(q-1)-1} i y_i \pi_{F_n}^{i-1}\, d\pi_{F_n},$$

donc

$$\sum_{i=1}^{q^{n-1}(q-1)-1} i y_i \pi_{F_n}^{i-1} \in \mathfrak{D}_{F_n/F},$$

donc

$$v_p(iy_i) \geqslant v_p\left(\mathfrak{D}_{F_n/F}\right) - 1.$$

En particulier, si $q \nmid i$, on a $v_p(y_i) \geqslant v_p\left(\mathfrak{D}_{F_n/F}\right) - h$.

D'autre part, pour $n \geqslant 1$, on a

$$\pi_{F_n}^q \equiv \pi_{F_{n-1}} \pmod{\pi_F},$$

donc, par récurrence,

$$v_p\left(\pi_{F_n}^{qp^k} - \pi_{F_{n-1}}^{p^k}\right) \geqslant \begin{cases} \frac{p^k}{e_F} & \text{si } k \leqslant \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p} \\ k - \left\lfloor \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p} \right\rfloor + \frac{p^{\left\lfloor \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p} \right\rfloor}}{e_F} & \text{sinon,} \end{cases}$$

donc

$$v_p\left(\pi_{F_n}^{qp^k} - \pi_{F_{n-1}}^{p^k}\right) \geqslant k - \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p},$$

donc, pour tout $j \geqslant 1$,

$$v_p\left(\pi_{F_n}^{qj} - \pi_{F_{n-1}}^{j}\right) \geqslant v_p(j) - \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p}.$$

Si $q \mid i$, on trouve donc

$$v_p\left(y_i\pi_{F_n}^{i} - y_i\pi_{F_{n-1}}^{i/q}\right) \geqslant v_p\left(\mathfrak{D}_{F_n/F}\right) - 1 - \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p},$$

donc, finalement,

$$v_p\left(y - \underbrace{\sum_{j=0}^{q^{n-2}(q-1)-1} y_{qj}\pi_{F_{n-1}}^{j}}_{\in F_{n-1}}\right) \geqslant v_p\left(\mathfrak{D}_{F_n/F}\right) - \max\left(h, 1 + \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p}\right),$$

d'où le lemme, avec $c_2 = \max\left(h, 1 + \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p}\right)$. ■

4.3.3 Fin de la démonstration

Appliquons le lemme 4.3.1 à la situation décrite lors des réductions préliminaires. Posons $N = -\lfloor e_F v_{\max,F}(x_2) \rfloor$, afin d'avoir $\pi_F^{N+1} x_2 \in \pi_F \mathbf{A}_{\max,F}^{\varphi_F = a}$, et donc $\theta(\pi_F^{N+1} x_2) \in \pi_F \mathcal{O}_{F_n}$.

D'après le lemme 3.4.2, on peut trouver un $x_3 \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ qui est congru à $\pi_F^{N+1} x_2$ modulo $([\widetilde{\pi_F}] - \pi_F)^2 \mathbf{A}_{\max,F}$. Notons que la classe de x_3 modulo

$$\left(\pi_F^{\left\lfloor \left(A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0 - h \right) e_F + N + 1 \right\rfloor}, ([\widetilde{\pi_F}] - \pi_F)^2 \right)$$

est alors fixe sous l'action de $\mathcal{G}_{F_n}$.

Le lemme 4.3.1, appliqué avec $y = \theta(x_3) = \theta(\pi_F^{N+1} x_2)$ et $\widetilde{y} = x_3$, donne que dy est annulé par tout élément de F_n de valuation supérieure ou égale à

$$\begin{aligned} &\frac{n}{e_F} + c_1 - \frac{1}{e_F} \left\lfloor \left(A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0 - h \right) e_F + N + 1 \right\rfloor \\ &\qquad\qquad \leqslant \frac{n}{e_F} + c_0 + c_1 + \frac{p}{(p-1)^2} + h - A - \frac{N}{e_F} - v_{\max,F}(x). \end{aligned}$$

Si l'on applique le lemme 4.3.2 à

$$\begin{aligned} &\pi_F^{\left\lceil n - N + e_F \left(c_0 + c_1 + \frac{p}{(p-1)^2} + h - A - v_{\max,F}(x) \right) \right\rceil} \theta(x_3) \\ &\qquad\qquad = \pi_F^{\left\lceil n + 1 + e_F \left(c_0 + c_1 + \frac{p}{(p-1)^2} + h - A - v_{\max,F}(x) \right) \right\rceil} \theta(x_2) \end{aligned}$$

(dont on sait que la différentielle est nulle), on trouve que $\theta(x_2)$ est somme d'un élément y_4 de F_{n-1} et d'un élément r_4 de F_n avec

$$\begin{aligned} v_p(r_4) &\geqslant \frac{1}{e_F} \left(n - \frac{1}{q-1} \right) - c_2 - \frac{1}{e_F} \left\lceil n + 1 + e_F \left(c_0 + c_1 + \frac{p}{(p-1)^2} + h - A - v_{\max,F}(x) \right) \right\rceil \\ &\geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{1}{e_F(q-1)} - \frac{2}{e_F} - c_0 - c_1 - c_2 - \frac{p}{(p-1)^2} - h. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $\theta(x_2) \in \ker \mathrm{Tr}_{F_n/F_{n-1}}$, on a

$$y_4 = -\frac{1}{q} \mathrm{Tr}_{F_n/F_{n-1}}(r_4),$$

donc

$$v_p(y_4) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{1}{e_F(q-1)} - \frac{2}{e_F} - c_0 - c_1 - c_2 - \frac{p}{(p-1)^2} - 2h,$$

puis

$$v_p(\theta(x_2)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{1}{e_F(q-1)} - \frac{2}{e_F} - c_0 - c_1 - c_2 - \frac{p}{(p-1)^2} - 2h.$$

Posons $x_4 = x_2 - s(\theta(x_2))$, où s est la section de $\theta : (\mathbf{B}_{\max,F}^+)^{\varphi_F = a} \to \mathbf{C}_p$ utilisée ci-dessus pour définir x_1. Pour simplifier les notations, posons aussi

$$c_4 = \frac{1}{e_F(q-1)} + \frac{2}{e_F} + 2c_0 + c_1 + c_2 + \frac{p}{(p-1)^2} + 2h$$

On a alors :

① $v_{\max,F}(x_4-\sigma(x_4)) \geqslant A+v_{\max,F}(x)-c_4$ pour tout $\sigma\in\mathcal{G}_{F_n}$;

② $\theta(x_4)=0$;

③ $v_{\max,F}(x-\sigma(x)) \geqslant \min\left(v_{\max,F}(x_4-\sigma(x_4)), A+v_{\max,F}(x)-c_4\right)$ pour tout $\sigma\in\mathcal{G}_{F_{n-1}}$;

④ $v_{\max,F}(x_4) \geqslant \min(A-c_4,-h)+v_{\max,F}(x)$.

Comme $\theta(x_4)=0$, d'après le lemme 3.6.1, x_4 est multiple de $t_{\mathcal{F}}$. Posons donc

$$x_5=\frac{x_4}{t_{\mathcal{F}}}\in(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a/\pi_F}.$$

On a alors, pour tout $\sigma\in\mathcal{G}_{F_{n-1}}$:

$$(1-\sigma)(x_4)=t_{\mathcal{F}}(1-\sigma)(x_5)\ +\ \sigma(x_5)(1-\sigma)(t_{\mathcal{F}}),$$

donc

$$\begin{aligned}v_{\max,F}(x_5-\sigma(x_5)) &\geqslant -v_{\max,F}(t_{\mathcal{F}})+\min\left(v_{\max,F}(x_4-\sigma(x_4)), v_{\max,F}(\sigma(x_5)(1-\sigma)(t_{\mathcal{F}}))\right)\\ &= -\frac{q}{e_F(q-1)}+\min\left(v_{\max,F}(x_4-\sigma(x_4)), v_{\max,F}(\sigma(x_5)(1-\sigma)(t_{\mathcal{F}}))\right)\end{aligned}$$

et

$$v_{\max,F}(x_4-\sigma(x_4)) \geqslant \min\left(\frac{q}{e_F(q-1)}+v_{\max,F}(x_5-\sigma(x_5)), v_{\max,F}(\sigma(x_5)(1-\sigma)(t_{\mathcal{F}}))\right).$$

Or on a

$$\begin{aligned}v_{\max,F}(\sigma(x_5)) &= v_{\max,F}(x_5)\\ &= v_{\max,F}(x_4)-v_{\max,F}(t_{\mathcal{F}}) \geqslant \min(A-c_4,-h)+v_{\max,F}(x)-\frac{q}{e_F(q-1)},\end{aligned}$$

et on a choisi $n_0\geqslant 1+Ae_F$ et $n_0\geqslant 1$, donc

$$v_{\max,F}((1-\sigma)(t_{\mathcal{F}}))\geqslant\max(A,0),$$

donc

$$\begin{aligned}v_{\max,F}(\sigma(x_5)(1-\sigma)(t_{\mathcal{F}})) &\geqslant \min(A-h,A-c_4)+v_{\max,F}(x)-\frac{q}{e_F(q-1)}\\ &\geqslant A+v_{\max,F}(x)-c_4-\frac{q}{e_F(q-1)}.\end{aligned}$$

On obtient donc :

① $x_5\in(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a/\pi_F}$;

② $v_{\max,F}(x_5-\sigma(x_5)) \geqslant A+v_{\max,F}(x)-c_4-2\frac{q}{e_F(q-1)}$ pour tout $\sigma\in\mathcal{G}_{F_n}$;

③ $v_{\max,F}(x-\sigma(x)) \geqslant \min\left(v_{\max,F}(x_5-\sigma(x_5))-\frac{q}{e_F(q-1)}, A+v_{\max,F}(x)-c_4-\frac{q}{e_F(q-1)}\right)$ quel que soit $\sigma\in\mathcal{G}_{F_{n-1}}$;

④ $v_{\max,F}(x_5) \geqslant \min(A-c_4,-h)+v_{\max,F}(x)-\frac{q}{e_F(q-1)}$.

On s'est donc ramené à un élément de $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a/\pi_F}$, qui vérifie des hypothèses analogues à celles vérifiées par x. La constante A est remplacé par $A+v_{\max,F}(x)-c_4-2\frac{q}{e_F(q-1)}-v_{\max,F}(x_5)$, qui est inférieur à A puisque $c_4 \geqslant h$. Par hypothèse de récurrence, on trouve qu'il existe une constante $c_5 \in \mathbf{R}$ (le C associé à a/π_F) telle que pour n assez grand (en fait, $n \geqslant n_0$, avec le n_0 choisi ci-dessus, convient), on a

$$v_{\max,F}(x_5 - \sigma(x_5)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - c_4 - 2\frac{q}{e_F(q-1)} - c_5 \qquad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}.$$

Finalement, en se servant du troisième point ci-dessus, on obtient

$$v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - C \qquad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}},$$

avec

$$C = \max\left(c_4 + 2\frac{q}{e_F(q-1)} + c_5, c_4 + \frac{q}{e_F(q-1)}\right),$$

d'où la récurrence. (En suivant les calculs d'un peu plus près, on trouve plus précisément $C = \left(e_F c_4 + 2\frac{q}{q-1}\right) v_p(a)$). Ceci conclut la preuve du lemme 4.2.1.

4.4 Construction de l'application « logarithme de Perrin-Riou »

Les énoncés et la méthode employés ici sont tirés de [Col96] et [Col98] ; la fin de la démonstration est toutefois un peu plus délicate que dans le cas cyclotomique.

On va en fait montrer deux résultats assez proches, correspondant à deux applications « logarithme » apparentées.

Définissons $H^1_{e,F}(K_n, V)$ et $H^1_{e,F,\mathrm{id}}(K_n, V)$ comme dans l'introduction.

Théorème 4.4.1. *Soit K une extension finie de F. Soit V une F-représentation de de Rham de $\mathcal{G}_K$, soit $r \in \mathbf{R} \cup \mathbf{R}^-$ tel que $r < [F : \mathbf{Q}_p]$, et soit $\mu \in H^1(K, \mathcal{D}_r(\Gamma_K, V))$ tel que*

$$\int_{\Gamma_{K_n}} \mu \in H^1_{e,F}(K_n, V) \qquad \text{quel que soit } n \geqslant 0.$$

Soit $\tau \mapsto \mu_\tau$ un cocycle continu représentant μ. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit

$$c_n \in (\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V$$

tel que

$$(1-\tau)c_n = \int_{\Gamma_{K_n}} \mu_\tau \qquad \text{quel que soit } \tau \in \mathcal{G}_{K_n}.$$

Alors la suite de terme général $q^n c_n$ converge dans l'espace

$$\left((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V\right) \Big/ W,$$

vers un élément de $((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}/W$, où

$$W = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \left((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V\right)^{\mathcal{G}_{K_n}}$$

est de dimension finie.

Le second résultat est le raffinement suivant. (Notons que $\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}] \subset \mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}]$).

Théorème 4.4.2. *Soit K une extension finie de F. Soit V une F-représentation de de Rham de $\mathcal{G}_K$, soit $r \in \mathbf{R} \cup \mathbf{R}^-$ tel que $r < [F : \mathbf{Q}_p]$, et soit $\mu \in H^1(K, \mathcal{D}_r(\Gamma_K, V))$ tel que*

$$\int_{\Gamma_{K_n}} \mu \in H^1_{e,F,\mathrm{id}}(K_n, V) \qquad \textit{quel que soit } n \geqslant 0.$$

Soit $\tau \mapsto \mu_\tau$ un cocycle continu représentant μ. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit

$$c_n \in (\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V$$

tel que

$$(1-\tau)c_n = \int_{\Gamma_{K_n}} \mu_\tau \qquad \textit{quel que soit } \tau \in \mathcal{G}_{K_n}.$$

Alors la suite de terme général $q^n c_n$ converge dans l'espace

$$\left((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V\right) \Big/ W,$$

vers un élément de $((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}/W$, où

$$W = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \left((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V\right)^{\mathcal{G}_{K_n}}$$

est de dimension finie.

Notons que c_n est bien défini modulo W, dans les deux cas.

Alors que le premier énoncé peut être relié relativement aisément aux séries de Coleman, pour le second il n'est pas tout à fait clair qu'il existe des $\mu \in H^1(K, \mathcal{D}_r(\Gamma_K, V))$ non nuls qui en vérifient les hypothèses. Cette question n'est pas résolue ici, et demande encore un peu de travail.

Quitte à remplacer V par la représentation induite à $\mathcal{G}_F$, on peut supposer $K = F$, ce que l'on fait ici.

Dans la suite de cette partie, on notera T soit t soit $t_{\mathcal{F}}$, afin de démontrer les deux énoncés simultanément.

4.4.1 Descente de $\mathcal{G}_F$ à Γ_F

D'après le corollaire 4.1.4, on a $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, t_{\mathcal{F}}^{-1}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F} \otimes_F V))) = 0$. On obtient donc le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & H^1(F, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, V)) \arrow[d] & \\
H^1(\Gamma_F, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, ((t_{\mathcal{F}}^{-1}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}})) \arrow[r, "\sim"] & H^1(F, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, ((t_{\mathcal{F}}^{-1}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1} \otimes_F V))) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si μ est comme dans l'énoncé du théorème 4.4.2, soit $\mu' \in H^1(\Gamma_F, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, \mathrm{Fil}^{-1} D_{\mathrm{Iw}}(V)))$ ayant même image que μ dans $H^1(F, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, t_{\mathcal{F}}^{-1}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F} \otimes_F V)))$, et soient $\tau \mapsto \mu'_\tau$ un cocycle représentant μ' et $\nu \in \mathcal{D}_r(\Gamma_F, t_{\mathcal{F}}^{-1}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F} \otimes_F V)))$ tels que $\mu_\tau - \mu'_\tau = (1-\tau)\nu$. Posons

$$u_n = c_n - \int_{\Gamma_{F_n}} \nu \in (\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V,$$

de sorte que

$$(1-\tau)u_n = \int_{\Gamma_{F_n}} \mu'_\tau \qquad (\forall \tau \in \mathcal{G}_{F_n}),$$

et donc en particulier $u_n \in ((\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$.

Comme ν est d'ordre r et $r < [F : \mathbf{Q}_p]$, on a $\lim_{n\to+\infty} q^n \int_{\Gamma_{F_n}} \nu = 0$, et il suffit donc de montrer que la suite $(q^n u_n)$ converge.

D'autre part, si $T = t$, on a

$$\int_{\Gamma_{F_n}} \mu \in H^1_{e,F}(F_n, V),$$

et $H^1_{e,F}(F_n, V)$ est l'image de $F_n \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{\mathrm{dR}}(V)$ par l'exponentielle de Bloch-Kato, donc

$$u_n \in F_n \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{\mathrm{dR}}(V) + \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{\mathrm{dR}}(V) + \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

De même, si $T = t_{\mathcal{F}}$, on a $\int_{\Gamma_{F_n}} \mu \in H^1_{e,F,\mathrm{id}}(F_n, V)$, et $H^1_{e,F,\mathrm{id}}(F_n, V)$ est l'image de $F_n \otimes_F D_{\mathrm{dR}}(V)$ par l'exponentielle de Bloch-Kato, donc

$$u_n \in F_n \otimes_F D_{\mathrm{dR}}(V) + \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_F V \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_F D_{\mathrm{dR}}(V) + \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_F V.$$

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathrm{Fil}^{-k} D_{\mathrm{dR}}(V) = D_{\mathrm{dR}}(V)$, alors $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes D_{\mathrm{dR}}(V) \subset T^{-k}\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes V$ et, comme

$$T^{-k}\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \cap (\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1} = (T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1},$$

on a dans les deux cas $u_n \in ((T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1} \otimes_F V)$. On est donc ramené à montrer la proposition suivante.

Proposition 4.4.3. *Soient $\mu \in H^1(\Gamma_F, \mathcal{D}_{1^-}(\Gamma_F, ((\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}))$ et $k \in \mathbf{N}^*$ tels que pour tout $n \geqslant 1$ l'image de $\int_{\Gamma_{F_n}} \mu$ dans $H^1(\Gamma_{F_n}, ((T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}})$ soit nulle. Soit $\tau \mapsto \mu_\tau$ un cocycle représentant μ, et pour tout $n \geqslant 1$ soit $u_n \in ((T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ tel que $\int_{\Gamma_{F_n}} \mu_\tau = (1-\tau)u_n$.*

Alors la suite de terme général $q^n u_n$ converge dans $((T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}} \;/\; W$.

4.4.2 Action de Γ_F sur $q^n u_n$

Soient $\sigma \in \Gamma_{F_{n-1}}$ et $\tau \in \Gamma_{F_n}$. On a $\mu_{\sigma^{-1}\tau} = \mu_{\sigma^{-1}} + \sigma^{-1}\mu_\tau$ et $\mu_{\sigma^{-1}\tau} = \mu_{\tau\sigma^{-1}} = \mu_\tau + \tau\mu_{\sigma^{-1}}$, donc $\sigma^{-1}\mu_\tau = \mu_\tau - (1-\tau)\mu_{\sigma^{-1}}$, puis

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma\Gamma_{F_n}} \mu_\tau &= \sigma\left(\int_{\Gamma_{F_n}} \sigma^{-1}\mu_\tau\right) \\
&= \sigma\left(\int_{\Gamma_{F_n}} \mu_\tau\right) - \sigma(1-\tau)\left(\int_{\Gamma_{F_n}} \mu_{\sigma^{-1}}\right) \\
&= \sigma(1-\tau)\left(u_n - \int_{\Gamma_{F_n}} \mu_{\sigma^{-1}}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$(1-\tau)u_{n-1} = (1-\tau) \sum_{\sigma \in \Gamma_{F_{n-1}}/\Gamma_{F_n}} \sigma\left(u_n - \int_{\Gamma_{F_n}} \mu_{\sigma^{-1}}\right),$$

donc

$$u_{n-1} = \sum_{\sigma\in\Gamma_{F_{n-1}}/\Gamma_{F_n}} \sigma\left(u_n - \int_{\Gamma_{F_n}} \mu_{\sigma^{-1}}\right) \pmod W,$$

donc

$$q^n u_n - q^{n-1}u_{n-1} = q^{n-1}\sum_{\sigma\in\Gamma_{F_{n-1}}/\Gamma_{F_n}} \left((1-\sigma)u_n + \sigma\left(\int_{\Gamma_{F_n}} \mu_{\sigma^{-1}}\right)\right).$$

Comme $\sigma \mapsto \mu_{\sigma^{-1}}$ est une application continue du compact Γ_F dans les distributions d'ordre r, avec $r < [F:\mathbf{Q}_p]$, la suite de terme général $q^n\sigma\left(\int_{\Gamma_{F_n}} \mu_\tau\right)$ tend vers 0. Il suffit donc de montrer que si (σ_n) est une suite d'éléments de Γ_F vérifiant $\sigma_n \in \Gamma_{F_{n-1}}$ alors la suite de terme général $q^n(1-\sigma_n)u_n$ tend vers 0.

Si $\tau \in \Gamma_{F_n}$, on a $(1-\tau)u_n = \int_{\Gamma_{F_n}} \mu_\tau$, et μ_τ varie dans un compact des distributions d'ordre r, $r < [F:\mathbf{Q}_p]$. On en déduit donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\tau\in\mathcal{G}_{F_n}} \|(1-\tau)(q^n u_n)\| = 0.$$

Le problème est alors, sachant que $q^n u_n$ « bouge peu » sous $\mathcal{G}_{F_n}$, de montrer qu'il « ne bouge pas beaucoup plus » sous l'action de $\mathcal{G}_{F_{n-1}}$.

4.4.3 Décomposition de $q^n u_n$ dans une base adaptée

D'après la proposition 3.10.14, il existe une base $e_1,\ldots,e_d$ de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ formée d'éléments de $((\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1}\otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$. On souhaiterait décomposer $q^n u_n$ comme une combinaison linéaire des e_i à coefficients dans $(\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1}$, afin de travailler sur les coefficients. Cependant, ceux-ci sont a priori dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$, et il va falloir multiplier $q^n u_n$ par un élément de $(\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ pour obtenir des coefficients dans $(\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$.

Soit $v_1,\ldots,v_d$ une base de V sur $\mathbf{Q}_p$. Posons $e_i = \sum_{j=1}^d a_{i,j}v_j$, avec $a_{i,j}\in(\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1}$, la décomposition de e_i dans la base $1\otimes v_1,\ldots,1\otimes v_d$. Comme les e_i sont fixes sous $\mathcal{G}_{F_\infty}$, on a

$$\det(\sigma)\sigma(\det(a_{i,j})) = \det(a_{i,j}) \qquad \text{pour tout } \sigma\in\mathcal{G}_{F_\infty}.$$

La représentation $\det_F(V)$ est une F-représentation de de Rham de $\mathcal{G}_F$, et elle est de dimension un. En particulier, elle est de Hodge-Tate, et le corollaire du théorème 2 de l'appendice de [SKL68] affirme qu'une telle représentation est de la forme

$$\eta\psi\prod_{\tau\in\mathrm{Hom}(F,\overline{\mathbf{Q}_p})}(\tau\circ\chi_{\mathcal{F}})^{k_\tau},$$

avec η un caractère d'ordre fini, ψ un caractère non ramifié sur F, et $k_\tau\in\mathbf{Z}$. Notons N l'ordre de η et β l'image par ψ du morphisme de Frobenius relatif. Soit $\Omega\in\widehat{F^{\mathrm{nr}}}\subset\mathbf{B}^+_{\max,F}$ tel que $\varphi_F(\Omega) = \beta^{-1}\Omega$. Posons $\Delta = (\Omega\det(a_{i,j}))^N$, alors Δ est un élément de $(\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$. De plus, comme Δ est multiple de $\det(a_{i,j})$ dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}]$, $\Delta q^n u_n$ s'écrit comme combinaison linéaire des e_i, à coefficients dans $(\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=a,\mathcal{G}_{F_\infty}}$, où $a=\beta^{-N}\in F$ (et même dans $(T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a,\mathcal{G}_{F_\infty}}$, quitte à augmenter la valeur de k trouvée précédemment).

4.4.4 Utilisation du lemme principal

Notons

$$\Delta q^n u_n = \sum_{i=1}^{d} b_i(n) e_i,$$

avec $b_i(n) \in (T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = a, \mathcal{G}_{F_\infty}}$, la décomposition obtenue ci-dessus. On a

$$\begin{aligned}&\Delta(1-\sigma)(q^n u_n)\\ &\quad = \sum_{i=1}^{d}(1-\sigma)(T^k b_i(n))T^{-k}e_i \;+\; \sum_{i=1}^{d}\sigma(T^k b_i(n))\underbrace{(1-\sigma)(T^{-k}e_i)}_{\underset{\sigma\to 1}{\longrightarrow 0}} \;-\; \underbrace{(1-\sigma)(\Delta)}_{\underset{\sigma\to 1}{\longrightarrow 0}}\sigma(q^n u_n).\end{aligned}$$

La fin de la démonstration consiste à appliquer le lemme 4.2.1 aux suites $(b_i(n))_n$. Pour arriver au résultat, on va suivre deux fois le même raisonnement : d'abord en multipliant tout par une suite tendant assez vite vers 0 pour que les suites considérées soient bornées, en en déduisant que la suite $(q^n u_n)$ est elle-même bornée, puis en travaillant directement sur $(q^n u_n)$.

Soit (α_n) une suite bornée d'éléments de $\mathbf{Q}_p$, telle que la suite $(\alpha_n q^n u_n)$ soit bornée. Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{\tau\in\mathcal{G}_{F_n}} v_{\max,F}((1-\tau)(q^n u_n)) = +\infty,$$

on déduit de la formule ci-dessus que

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{\sigma\in\mathcal{G}_{F_n}} v_{\max,F}\left((1-\sigma)(\alpha_n T^k b_i(n))\right) = +\infty,$$

pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$. D'après le lemme 4.2.1 et comme la suite de terme général $\alpha_n T^k b_i(n)$ est bornée, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{\sigma\in\mathcal{G}_{F_{n-1}}} v_{\max,F}\left((1-\sigma)(\alpha_n T^k b_i(n))\right) = +\infty,$$

puis, en utilisant à nouveau l'hypothèse que $(\alpha_n q^n u_n)$ est bornée, on obtient que si (σ_n) est une suite d'éléments de Γ_F vérifiant $\sigma_n \in \Gamma_{F_{n-1}}$ alors la suite de terme général $\alpha_n(1-\sigma_n)(q^n u_n)$ tend vers 0, puis (d'après la partie précédente) que $\alpha_n(q^n u_n - q^{n-1}u_{n-1})$ tend vers 0.

Notons $\|\cdot\|$ une norme p-adique sur $((T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$. Considérons d'abord

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \|q^n u_n\| \leqslant 1 \\ p^{\kappa(n)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\kappa(n) \in \mathbf{Z}$ est tel que $\frac{1}{p} < p^{-\kappa(n)}\|q^n u_n\| \leqslant 1$. (On a en particulier $\kappa(n) > 0$, dans le second cas). On a alors, par construction

$$\begin{aligned}\|\alpha_n q^n u_n\| &\leqslant 1\\ |\alpha_n| &\leqslant 1,\end{aligned}$$

donc on se trouve dans les hypothèses précédentes. On en déduit que $\alpha_n(q^n u_n - q^{n-1}u_{n-1})$ tend vers 0. Or on a

$$\left\|\alpha_n q^{n-1}u_{n-1}\right\| \leqslant \max\left(\left\|\alpha_n(q^n u_n - q^{n-1}u_{n-1})\right\|, \|\alpha_n q^n u_n\|\right),$$

avec égalité si les deux normes dans la parenthèse sont différentes. Supposons n assez grand pour que

$$\left\|\alpha_n(q^n u_n - q^{n-1}u_{n-1})\right\| < \frac{1}{p}.$$

On a alors deux cas :

- soit $\|q^n u_n\| \leqslant 1$;
- soit $\|q^n u_n\| > 1$, et on a alors $\|\alpha_n q^n u_n\| > \frac{1}{p}$ par construction, et les résultats précédents donnent $\left\|\alpha_n q^{n-1}u_{n-1}\right\| = \|\alpha_n q^n u_n\|$, donc $\|q^{n-1}u_{n-1}\| = \|q^n u_n\|$.

La suite $(q^n u_n)$ est donc bornée.

On peut alors réappliquer les résultats précédents avec $\alpha_n = 1$. On obtient que la suite de terme général $q^n u_n - q^{n-1}u_{n-1}$ tend vers 0, donc que la suite de terme général $q^n u_n$ converge, ce qui conclut la preuve du théorème 4.4.2.

Références

[Ami78] Amice Y. : Duals, Proceedings of the conference on p-adic analysis (Nijmegen, 1978), Report, 7806, Katholieke Univ., Nijmegen, 1–15, 1978

[Ax70] Ax J. : Zeros of polynomials over local fields—the Galois action, Journal of Algebra 15, 417–428, 1070

[Ben00] Benois D. : On Iwasawa theory of crystalline representations, Duke Mathematical Journal 104, n°2, 211–267, 2000

[Ber03] Berger L. : Bloch and Kato's exponential map : three explicit formulas, Documenta Mathematica, vol. suppl., 99–129, 2003

[BK90] Bloch S. et Kato K. : L functions and Tamagawa numbers of motives, The Grothendieck Fesschrift 1, Prog. Math. 86, 333–400, 1990

[CC99] Cherbonnier F. et Colmez P. : Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, Journal of the AMS 12, vol. 1, 241–268, 1999

[Col79] Coleman R. : Division values in local fields, Inventiones mathematicae 53 (1979), 91–116

[Col93] Colmez P. : Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe, Annals of Mathematics 138, 625–683, 1993

[Col94] Colmez P. : Les nombres algébriques sont denses dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$, Astérisque 223, 103–109, 1994

[Col96] Colmez P. : Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, LMENS 96 18

[Col98] Colmez P. : Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Annals of Mathematics, 148 (1998), 485–571

[Col02] Colmez P. : Espaces de Banach de dimension finie, Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu 3, 2002

[CW78] Coates J. et Wiles A. : On p-adic L functions and elliptic units, Journal Australian Math. Soc. A 26, 1–25, 1978

[Fo82a] Fontaine J.-M. : Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, Annals of Mathematics 115, 529–577, 1982

[Fo82b] Fontaine J.-M. : Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux, Inventiones mathematicae 65, 379–409, 1982

[Fon94] Fontaine J.-M. : Le corps des périodes p-adiques, Astérisque 223, 59–101, 1994

[Fon04] Fontaine J.-M. : Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, Astérisque 295, 1–115, 2004

[Kat93] Kato K. : Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via BdR, Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991), Lecture Notes in Math. 1553, 50–163, 1993

[LT65] Lubin J. et Tate J. : Formal complex multiplication in local fields, Annals of Mathematics 89, 380–387, 1965

[Lub64] Lubin J. : One parameter formal Lie groups over p-adic integer rings, Annals of Mathematics 80, 464–484, 1964

[Per94] Perrin-Riou B. : Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Inventiones mathematicae 115, 81–149, 1994

[Pe95a] Perrin-Riou B. : Fonctions L p-adiques, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 * (Zürich, 1994), Birkhäuser, 400–410, 1995

[Pe95b] Perrin-Riou B. : Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques, Astérisque 229, 1995

[Sen72] Sen S. : Ramification in p-adic Lie extensions, Inventiones mathematicae 17, 44–50, 1972

[Ser68] Serre J.-P. : Corps locaux, troisième édition, Hermann

[SKL68] Serre J.-P. : Abelian l-adic representations and elliptic curves, McGill University lecture notes, 1968

[ST01] Schneider P. et Teitelbaum J. : p-adic Fourier theory, doc. math. 6, 447–481, 2001

[Tat66] Tate J. T. : p-divisible groups, Proc. Conf. Local Fields, 158–183, 1966

[Tsu04] Tsuji T. : Explicit reciprocity law and formal moduli for Lubin-Tate formal groups, J. Reine Angew. Math. 569, 103–173, 2004

[Vis76] Vishik M. : Non-archimedean measures connected with Dirichlet series, Math. U.S.S.R. Sb. 28, 216–228, 1976

[Win83] Wintenberger J.-P. : Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications, Ann. Sci ENS 16, 59–89, 1983

[Zha04] Zhang S. : On explicit reciprocity law over formal groups, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 9-12, 607–635, 2004