



**HAL**  
open science

# Atomes froids et fluctuations quantiques

Astrid Lambrecht

► **To cite this version:**

Astrid Lambrecht. Atomes froids et fluctuations quantiques. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1995. Français. NNT: . tel-00011901

**HAL Id: tel-00011901**

**<https://theses.hal.science/tel-00011901>**

Submitted on 9 Mar 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**DEPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE**



**LABORATOIRE KASTLER BROSSEL**



**Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie**

Spécialité : Physique Quantique

*présentée par*

**Astrid LAMBRECHT**

*pour obtenir le titre de Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie*

*Sujet de la thèse:*

**ATOMES FROIDS ET FLUCTUATIONS QUANTIQUES**

*Soutenue le 15 mai 1995 devant le jury composé de :*

**M. S. HAROCHE (Président)**

**M. A. ASPECT**

**Mme. E. GIACOBINO**

**M. Ph. GRANGIER**

**M. T. HÄNSCH**

**M. L. LUGIATO**

**DEPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE**



**LABORATOIRE KASTLER BROSSSEL**



**Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie**

Spécialité : Physique Quantique

*présentée par*

**Astrid LAMBRECHT**

*pour obtenir le titre de Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie*

*Sujet de la thèse:*

**ATOMES FROIDS ET FLUCTUATIONS QUANTIQUES**

*Soutenue le 15 mai 1995 devant le jury composé de :*

**M. S. HAROCHE (Président)**

**M. A. ASPECT**

**Mme. E. GIACOBINO**

**M. Ph. GRANGIER**

**M. T. HÄNSCH**

**M. L. LUGIATO**

*” ... Then anyone who leaves behind him a written manual,  
and likewise anyone who receives it, in the belief  
that such writing will be clear and certain,  
must be exceedingly simple-minded... ”*

Platon, Phèdre

*Le travail présenté ici a été effectué dans le Laboratoire Kastler Brossel de l'École Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie au cours des années 1992 à 1995. Je remercie ses directeurs successifs, Jacques Dupont-Roc et Michèle Leduc, de m'y avoir accueillie, me permettant ainsi de travailler dans un environnement scientifique exceptionnel. Durant ces trois années j'ai bénéficié du soutien financier du M.R.T.*

*Elisabeth Giacobino m'a proposé le sujet de la thèse et a dirigé mon travail. Elle m'a donné la possibilité d'effectuer mes recherches dans des conditions remarquables et de m'intégrer très rapidement dans la communauté scientifique internationale. Souvent, elle m'a remonté le moral, surtout pendant la longue période où l'expérience ne marchait pas. Je voudrais la remercier chaleureusement pour sa confiance et son soutien.*

*J'ai eu la grande chance de pouvoir travailler avec Serge Reynaud pendant la dernière année de ma thèse. Sa compréhension et sa remarquable intuition des phénomènes physiques, ainsi que son enthousiasme communicatif, ont été essentiels pour moi. Je voudrais lui exprimer ici ma profonde reconnaissance pour sa disponibilité et sa présence amicale, qui ont été pour moi une aide incomparable.*

*Jean-Michel Courty a assuré la continuité de l'expérience après le départ de Laurent Hilico. Il a accompagné mes premiers pas dans la physique expérimentale et a été toujours disponible pour répondre à mes nombreuses questions avec beaucoup de patience et de gentillesse. Je tiens à l'en remercier vivement.*

*J'ai beaucoup profité des compétences et de la grande disponibilité de Claude Fabre et Antoine Heidmann. Les nombreuses discussions que j'ai eues avec eux ont permis de résoudre beaucoup de problèmes. Je suis reconnaissante pour leur grande disponibilité et le caractère agréable de ces discussions.*

*Lors de mon arrivée, Laurent Hilico m'a initiée aux secrets de la photodétection du bruit quantique. Depuis septembre 1994, Thomas Coudreau a commencé sa thèse dans notre groupe et a repris l'expérience avec Avec Aephraïm Steinberg qui a fait un séjour post-doctoral de quatre mois. J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec eux.*

*Je tiens à exprimer ma gratitude envers tous les autres membres de l'équipe Optique Quantique: Francesca Grassia, Yassine Hadjar, Mischa Kolobov, Paulo Maia-Neto, Michel Pinard, Christian Richy, Catherine Schwob, Alberto Bramati, Katsuyuki Kasai et Francesco Marin. La très bonne ambiance qui règne dans ce groupe crée un climat stimulant et agréable.*

*Serge Haroche, Alain Aspect, Philippe Grangier, Theodor Hänsch et Luigi Lugiato ont accepté de faire partie du jury. Je suis honorée de l'intérêt qu'ils ont ainsi manifesté pour mon travail.*

*J'ai fréquemment sollicité le concours des techniciens et des ingénieurs du laboratoire. Je tiens en particulier à exprimer toute ma gratitude à Francis Tréhin pour sa gentillesse et son efficacité. J'ai aussi beaucoup apprécié l'accueil que m'ont réservé Jean-Claude Bernard et Bernard Rodriguez et la compétence dont ils ont fait preuve.*

*Mon travail n'aurait pas pu aboutir sans leur aide. J'aimerais également remercier toute l'équipe technique, ainsi que les secrétaires Karine Vasseur et Blandine Moutiers.*

*Merci à tous ceux qui ont, par un conseil, un prêt ou une idée, contribué au succès de mon travail. Fritz Haake m'a encouragée à venir à Paris. Jean Dalibard et Christophe Salomon m'ont aidée à maîtriser la technique des pièges. Mark Levenson et Derek Stacey ont aussi fait des remarques très utiles pour l'expérience durant leur séjour à Paris. Gert Ingold a amicalement constitué pour moi un service d'urgence Latex (24h/24). Je remercie Dominique Delande pour la gentillesse avec laquelle il m'a aidée pour des problèmes d'informatique. Je suis aussi reconnaissante pour la confiance et la compréhension qu'il a manifestées envers moi.*

*Je tiens également à remercier les membres des autres groupes du laboratoire, qui m'ont fait bénéficier de leur expérience d'une manière très sympathique. Les visiteurs Andreas Buchleitner, Mischa Kolobov, Paulo Maia-Neto, Jérôme Mertz et Kuba Zakrzewski ont beaucoup facilité mon insertion dans le laboratoire. Avec Sybille & Vahid Sandoghdar, Francesca Grassia et Jakob Reichel ils ont constitué un réseau amical et m'ont accompagnée dans ma découverte de Paris.*

*Pour terminer, je remercie très chaleureusement ma famille pour m'avoir offert un soutien moral souvent nécessaire. Pendant cette période, j'ai aussi pu compter sur mes amis à Paris et ailleurs. C'est à eux que je dédie ma thèse.*

---

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Fondements théoriques et motivations</b>	<b>7</b>
2.1	Le bruit quantique . . . . .	7
2.1.1	L'inégalité de Heisenberg pour le champ électromagnétique . . . . .	7
2.1.2	Les états cohérents . . . . .	8
2.1.3	Les états comprimés . . . . .	8
2.1.4	Représentation dans l'espace de phase . . . . .	9
2.1.5	Détection homodyne du bruit quantique . . . . .	9
2.2	Réduction du bruit par effet Kerr . . . . .	12
2.2.1	Introduction . . . . .	12
2.2.2	L'effet Kerr idéal . . . . .	13
2.2.3	L'effet Kerr avec un milieu réel . . . . .	18
2.2.4	Le milieu atomique expérimental . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Montage expérimental et résultats préliminaires</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction . . . . .	25
3.2	Le laser . . . . .	25
3.2.1	La cavité laser . . . . .	25
3.2.2	L'asservissement . . . . .	27
3.3	Le piège magnéto-optique . . . . .	28
3.4	La cavité . . . . .	29
3.4.1	Première configuration . . . . .	30
3.4.2	Deuxième configuration . . . . .	31
3.4.3	Adaptation de modes . . . . .	31
3.5	Réglage du système bistable . . . . .	31
3.6	La détection homodyne . . . . .	33
3.6.1	Réalisation expérimentale . . . . .	33
3.6.2	Détecteurs de bruit . . . . .	34
3.6.3	Equilibrage des détecteurs . . . . .	37
3.6.4	Rendement pour la mesure . . . . .	37
3.7	Résultats expérimentaux . . . . .	39
3.7.1	Choix des paramètres . . . . .	39
3.7.2	Signaux observés . . . . .	43
3.8	Conclusion . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Amélioration de l'expérience</b>	<b>47</b>
4.1	Coupure des faisceaux pièges . . . . .	47
4.2	Observation des instabilités . . . . .	48
4.2.1	Introduction . . . . .	48

4.2.2	Reproduction de l'article "Optical nonlinear dynamics with cold atoms in a cavity" (Opt. Comm. <b>115</b> 199 (1995)) . . . . .	50
4.3	Conclusion . . . . .	59
4.4	Coupure du champ magnétique . . . . .	60
4.5	Prépompape optique des atomes . . . . .	62
4.6	Modifications du montage expérimental . . . . .	62
4.6.1	Montage et équilibrage des détecteurs . . . . .	62
4.6.2	Le modulateur acousto-optique: une source d'excès de bruit . . . . .	65
4.6.3	Nouveau montage . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Mesures du bruit quantique</b> . . . . .	<b>69</b>
5.1	Procédure expérimentale . . . . .	69
5.2	L'influence des constantes de temps . . . . .	70
5.2.1	La bande passante d'analyse . . . . .	71
5.2.2	Le filtre vidéo . . . . .	73
5.3	Traitement du signal . . . . .	76
5.3.1	Restauration des spectres . . . . .	76
5.3.2	Transformation en puissance de bruit . . . . .	78
5.4	Mesures de la réduction du bruit . . . . .	79
5.4.1	Reproduction de l'article: "Cold atoms: A new medium for quantum optics" (Appl. Phys. <b>B60</b> 129 (1995)) . . . . .	83
5.4.2	Comparaison entre théorie et expérience . . . . .	89
5.5	Conclusion . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Etude théorique</b> . . . . .	<b>91</b>
6.1	Introduction générale . . . . .	91
6.2	Le traitement par la méthode de la réponse linéaire . . . . .	93
6.2.1	Introduction . . . . .	93
6.2.2	Traitement du système bistable . . . . .	94
6.2.3	Résultats généraux de la théorie de la réponse linéaire . . . . .	102
6.2.4	Expressions analytiques . . . . .	103
6.2.5	Analyse linéaire de stabilité et spectres théoriques . . . . .	104
6.2.6	Insuffisance du traitement . . . . .	109
6.3	La variation du nombre d'atomes . . . . .	110
6.3.1	Description du modèle . . . . .	110
6.3.2	Reproduction de l'article "Atomic number fluctuations in a falling cold atom cloud" (soumis à Phys. Rev. <b>A</b> ) . . . . .	112
6.3.3	Conclusion . . . . .	135
6.4	Traitement de la structure transverse . . . . .	137
6.4.1	Introduction au problème et motivations . . . . .	137
6.4.2	Reproduction de l'article "Effect of transverse mode structure on squeezing with two-level atoms" (soumis à Phys. Rev. <b>A</b> ) . . . . .	139
6.4.3	Traitement de l'onde stationnaire . . . . .	169
6.4.4	Conclusion . . . . .	171

---

6.5	Limitations du modèle à deux niveaux . . . . .	174
6.5.1	Introduction . . . . .	174
6.5.2	Perturbations liées au faisceau de repompage . . . . .	174
6.5.3	Perturbations liées aux faisceaux pièges . . . . .	179
6.5.4	Conclusion . . . . .	180
<b>7</b>	<b>Synthèse des résultats</b>	<b>183</b>
7.1	Introduction . . . . .	183
7.2	Présentation des spectres théoriques et expérimentaux . . . . .	184
7.2.1	Ajustement théorique . . . . .	184
7.2.2	Reproduction de l'article "Squeezing with cold atoms", (soumis à Phys. Rev. Lett.) . . . . .	185
7.2.3	Influence du faisceau de repompage . . . . .	203
7.2.4	Réduction du bruit en présence du piège . . . . .	204
7.3	Conclusion . . . . .	206
<b>8</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>209</b>
	<b>Appendices</b>	<b>215</b>
A.	Accord de mode de la cavité . . . . .	215
B.	Pompage optique . . . . .	219
C.	Bistabilité et mesure du nombre d'atomes . . . . .	223
D.	Liste des coefficients Clebsch-Gordan . . . . .	226
	<b>Bibliographie</b>	<b>227</b>

# 1 Introduction

Le concept de fluctuations quantiques du champ électromagnétique est apparu en même temps que la mécanique quantique se développait. En 1900, Planck émit l'hypothèse des quanta d'énergie pour comprendre le problème du rayonnement du corps noir [1]. Einstein reprit cette idée en 1905 afin d'expliquer l'effet photoélectrique [2], puis en 1909 pour évaluer la force de friction subie par un miroir qui se déplace dans un champ thermique [3] en appliquant sa théorie du mouvement brownien [4]. Ces divers effets sont directement liés au concept de photon, c'est à dire au caractère corpusculaire de la lumière.

Dès 1912, Planck introduisit la notion d'énergie de point zéro correspondant à une énergie d'un demi-photon par mode du champ électromagnétique [5]. Cette notion, si étrange à cette époque, donna lieu à controverses. Ce fut Nernst qui le premier en 1916 suggéra que l'espace libre est entièrement rempli par un champ électromagnétique fluctuant qui correspond à cette énergie de point zéro [6].

En 1925 Heisenberg obtint pour la première fois l'énergie de point zéro d'un oscillateur à partir de la nouvelle mécanique quantique, qu'il était en train d'inventer [7]. Il démontra aussi les fameuses relations d'incertitude [8] qui, appliquées aux modes du champ électromagnétique, impliquent l'existence de fluctuations quantiques du champ, même dans l'espace vide. Ces relations interdisent de définir avec une précision infinie les deux composantes du champ électrique qui sont des variables conjuguées. Dirac établit ensuite la description quantique du champ électromagnétique, qui reste aujourd'hui encore la base de l'Electrodynamique Quantique [9].

De nombreuses conséquences physiques de ces fluctuations du champ dans le vide ont été étudiées au cours des années, comme l'émission spontanée, les forces de van der Waals ou de Casimir, le déplacement de Lamb, mais la question de l'observabilité directe de ces fluctuations est longtemps restée ouverte [10–12].

Ce n'est que vers la fin de ce siècle que les physiciens se sont trouvés confrontés à ces fluctuations quantiques comme une limitation réelle de la précision d'une mesure. Pour la plupart des mesures, les fluctuations quantiques sont cachées par des fluctuations classiques dues aux perturbations de l'environnement du système à mesurer ou aux imperfections de l'appareil de mesure. Néanmoins dans deux domaines de la physique, l'optique quantique et la physique micro-onde, il existe maintenant des mesures de très haute précision qui sont limitées par le bruit quantique.

On a pensé pendant longtemps que les fluctuations quantiques constitueraient une limite infranchissable. Des études théoriques ont néanmoins montré que cette limite, dite *limite quantique standard* [13, 14], peut être contournée [15–17]. Comme l'inégalité de Heisenberg n'impose une condition que pour le produit des variances des deux observables conjuguées, il est possible de réduire les fluctuations quantiques sur une des composantes à la condition que celles sur la composante conjuguée augmentent en conséquence. Ces raisonnements sont fondés sur le concept des états comprimés [18–20], qui possèdent la propriété d'avoir une composante avec des fluctuations quantiques réduites au-dessous de la limite quantique standard. Dans ce cas, on parle d'une *réduction du bruit quantique* ou de *squeezing*. Ce phénomène constitue tout d'abord une manifestation directe d'un effet purement quantique sur le champ. De tels états pourraient servir pour des mesures ultra-sensibles, de type mesure interférométrique [21] comme la mesure des ondes gravitationnelles [22–28] ou de type mesure de polarisation [29] comme la mesure de violation de parité en physique atomique [30]. Ils donnent également lieu à des effets qualitativement nouveaux comme l'inhibition des phénomènes de relaxation [31–35]. Ils sont enfin directement liés aux mesures quantiques non destructives [36–40], ou aux interférences à deux photons [41–47]. Les fluctuations quantiques sont ainsi devenues un nouvel objet d'étude pour les physiciens.

De nombreuses études théoriques ont été effectuées afin d'identifier des systèmes qui produisent des états comprimés. On trouvera un certain nombre de références sur ce sujet dans des numéros spéciaux et livres [48–53]. La génération d'un état comprimé est le plus souvent basée sur une interaction non linéaire entre la matière et la lumière produisant des corrélations entre deux photons [20, 54, 55]. Des tels processus sont par exemple des effets paramétriques par mélange à trois ou quatre ondes, avec une non-linéarité de type  $\chi^{(2)}$  ou  $\chi^{(3)}$  respectivement. Ces non-linéarités sont réalisables dans une grande variété de milieux matériels.

La première observation expérimentale d'une réduction du bruit quantique a été réalisée en 1985 par mélange à quatre ondes sur un jet atomique de sodium [56]. La non-linéarité était exaltée d'une part en plaçant des atomes dans une cavité optique, d'autre part par la résonance atomique. Malheureusement, les fluctuations atomiques dues à l'émission spontanée sont importantes au voisinage de la résonance et tendent à masquer l'effet recherché, ce qui limitait l'effet étudié [57]. Pour cette raison, on a par la suite cherché à faire des expériences avec des cristaux afin de générer des fluctuations comprimées via l'oscillation paramétrique [58–64] ou la génération de seconde harmonique [65–69]. En général, ces expériences donnent des réductions de bruit plus importantes que les expériences avec des milieux atomiques presque résonnants.

Une compression des fluctuations quantiques a été également observée en utilisant comme matériau non linéaire de type  $\chi^{(3)}$  une longue fibre optique [70, 71]. Ce matériau prometteur pour les applications s'est d'abord avéré décevant en raison de l'apparition de fluctuations d'indice dues à la diffusion Brillouin stimulée (GAWBS). Cette difficulté est maintenant en partie contournée par l'emploi d'impulsions solitons [72–76].

Il existe aussi une autre classe d'expériences de réduction du bruit quantique qui n'est pas basée sur une interaction non linéaire. Elle consiste à utiliser des diodes laser

avec un contrôle des fluctuations du courant d'alimentation [77–83]. Ces fluctuations se traduisent directement en fluctuations d'intensités du faisceau laser qui peuvent par conséquent être réduites en régularisant les fluctuations du courant.

Le record de réduction du bruit atteint aujourd'hui environ 90%. Il a été atteint indépendamment en 1991 par une interaction non linéaire dans un oscillateur paramétrique [64] et par contrôle des fluctuations du courant d'une diode laser [84].

Dans la suite de ce travail, nous nous focaliserons sur l'interaction non linéaire de type  $\chi^{(3)}$  dans un ensemble d'atomes. Comme nous l'avons déjà dit, cette interaction présente l'avantage de pouvoir être exaltée par résonance avec une transition atomique. Elle présente aussi l'inconvénient que l'effet de réduction est dégradé par les fluctuations liées à l'émission spontanée. C'est pour cette raison que les résultats expérimentaux obtenus n'ont pas atteint des taux de réductions importants. On est alors conduit naturellement à considérer une interaction non linéaire *peu résonnante* avec un milieu atomique. Il existe des expériences utilisant comme milieu atomique une vapeur contenant de nombreux atomes, mais pas de cavité [85]. Mais, le plus souvent, le milieu est placé dans une cavité. Dans ce cas, le phénomène à la base de la réduction du bruit s'identifie à la bistabilité par effet Kerr optique connu depuis longtemps [86]. La possibilité d'une génération des états comprimés par ce phénomène est évoquée pour la première fois en 1982 [87, 88]. Le dispositif consiste en un milieu non linéaire interagissant avec un faisceau laser dans une cavité optique qui sert à exalter l'interaction. Pour certaines valeurs des paramètres, le système composé a un comportement bistable et c'est au voisinage des points tournants de la bistabilité que la réduction du bruit quantique est maximale. En particulier, la réduction du bruit est la plus favorable dans la limite d'un milieu Kerr idéal dans une cavité avec un seul miroir de couplage [89, 90], un système qui est appelé "mangeur de bruit", car son seul effet consiste à réduire les fluctuations quantiques d'un faisceau laser sans changer son intensité [91]. Dans ce cas idéal, les fluctuations peuvent être comprimées à presque 100% au voisinage des points tournants de la bistabilité. En vue d'une réalisation expérimentale, la réduction du bruit via la bistabilité a ensuite été étudiée pour un milieu non linéaire formé par des atomes à deux niveaux [92–103]. L'effet paramétrique est dans ce cas induit par la saturation de la transition atomique.

Une première expérience de ce genre a été effectuée en 1987 en utilisant un jet atomique de sodium dans une cavité à haute finesse [104]. La valeur mesurée pour la réduction du bruit était de 20%, la valeur corrigée par l'imperfection de la détection de 50%. Une deuxième expérience a suivi en 1992, employant un jet de barium comme milieu non linéaire [105]. Avec ce dispositif, une réduction de bruit de 18% a été observée, la valeur corrigée atteignant également 50%. Dans les deux expériences, l'accord entre l'observation expérimentale et les prédictions théoriques était peu satisfaisant. Pour ces expériences, il était indispensable d'éviter l'élargissement Doppler de la transition en question, pour pouvoir disposer d'une non linéarité importante avec une faible absorption. Pour cette raison, les expériences en jet atomique ont été effectuées avec un jet très bien collimaté traversant la cavité dans une direction perpendiculaire au faisceau sonde afin de réduire l'élargissement Doppler longitudinal. Cependant, il est difficile

de s'affranchir de tout effet Doppler résiduel et l'influence du temps de traversée du faisceau pour les atomes sur la réduction du bruit reste peu connue.

De nouvelles perspectives se sont ouvertes depuis peu, grâce à l'apparition des pièges magnéto-optiques. Ceux ci permettent, avec une technique relativement légère, de disposer d'atomes refroidis et piégés, et de s'affranchir ainsi de l'effet Doppler tout en diminuant considérablement l'effet de temps de transit. L'idée d'un tel piège est basée initialement sur un refroidissement laser par la variation de la pression de radiation en fonction de la vitesse des atomes [106]. L'ensemble des atomes refroidis de cette manière est piégé dans un potentiel créé par l'action conjointe des faisceaux laser ayant une polarisation appropriée et d'un champ magnétique inhomogène. La première observation d'atomes piégés dans un piège magnéto-optique a été rapportée en 1987 [107] pour des atomes de sodium, puis en 1989 [108] pour des atomes de césium. Depuis, cette technique a considérablement évolué et est devenue relativement facile à utiliser [109].

Un piège magnéto-optique fournit dans une petite cellule un nuage dense d'atomes quasiment immobiles. En particulier, la température des atomes piégés est telle que la largeur Doppler est inférieure à la largeur naturelle de la transition. Les conditions sont alors excellentes pour une interaction avec un faisceau laser assez décalé en fréquence par rapport à la résonance atomique pour que l'absorption soit faible, tout en conservant un indice non linéaire élevé. Ce milieu convient donc parfaitement aux besoins d'une expérience de réduction du bruit quantique via la bistabilité. Cependant les caractéristiques du nuage d'atomes froids comme milieu non linéaire pour des expériences d'optique quantique et d'optique non linéaire avaient été assez peu étudiées et étaient mal connues.

En 1990, notre équipe a décidé d'utiliser des atomes froids comme nouveau milieu non linéaire dans une cavité optique afin de réaliser un "mangeur de bruit". Il est apparu que les faisceaux pièges tendaient à introduire de l'excès de bruit dû à l'émission spontanée des atomes qui masquait toute réduction du bruit quantique. Nous avons alors décidé de couper le piège pendant la mesure afin de nous affranchir de toute perturbation liée aux faisceaux pièges. Cela a conduit à l'apparition de nouveaux problèmes dont la solution a constitué l'essentiel de mon travail de thèse.

Le plus important de ces problèmes est bien sur que, lorsque le piège est coupé, le nuage d'atomes froids subit une explosion balistique liée à la température résiduelle dans le piège, ainsi qu'une chute libre sous l'influence de la pesanteur. On doit donc faire face à une variation du nombre d'atomes dans le faisceau sonde au cours du temps et en particulier étudier le spectre de bruit des fluctuations quantiques de champ dans un régime dépendant du temps. Cette situation est très différente de la situation standard où un spectre de bruit est mesuré sur une variable stationnaire et elle nécessite un traitement théorique élaboré de l'évolution du système.

Un autre problème s'est présenté à nous avec l'apparition d'instabilités dans le champ moyen sortant de la cavité lorsque le piège est coupé. Il a fallu comprendre l'origine de ces instabilités pour pouvoir ensuite les supprimer, condition bien sur indispensable à l'observation expérimentale d'une réduction du bruit quantique. Ayant

---

maitrisé ces différents phénomènes, nous avons pu nous placer dans les conditions optimales pour l'observation du squeezing. Nous avons obtenu des valeurs de 30 à 40% qui sont supérieures à toutes les valeurs observées avec des milieux atomiques. Grâce à une analyse détaillée du système, nous avons également pu observer une réduction du bruit (environ 20%) en présence des faisceaux pièges atténués.

Ce mémoire décrit en détail les problèmes que nous avons dû résoudre sur le montage expérimental et les développements théoriques qui ont permis de comprendre les résultats obtenus.

Dans un premier temps, nous allons présenter les fondements théoriques qui nous seront utiles pour discuter de l'expérience (chapitre 2), puis le montage expérimental tel qu'il était au début, ainsi que les premiers résultats des mesures de l'intensité moyenne et du bruit quantique avec l'effet perturbateur du piège (chapitre 3). Cela nous permettra d'expliquer les modifications qui ont été effectuées sur le montage, puis de décrire les phénomènes inattendus que nous avons observés (chapitre 4). Avec ce nouveau montage, nous avons observé une réduction significative du bruit quantique sur un signal qui dépend du temps (chapitre 5). Afin de mieux comprendre notre système, nous avons dû développer un traitement théorique de la variation du nombre d'atomes dans le faisceau sonde après la coupure du piège. Nous avons aussi amélioré et approfondi le traitement théorique des fluctuations existant et inclus l'effet de la structure transverse du faisceau (chapitre 6). Enfin, en utilisant ces résultats théoriques, nous avons pu comparer de façon satisfaisante les résultats expérimentaux aux prédictions théoriques (chapitre 7).

## 2 Fondements théoriques et motivations

### 2.1 Le bruit quantique

#### 2.1.1 L'inégalité de Heisenberg pour le champ électromagnétique

Les fluctuations quantiques dans les mesures optiques peuvent en première approche se comprendre très simplement comme provenant de la nature corpusculaire de la lumière. Considérons par exemple un faisceau laser: les photons ne se suivent jamais d'une manière parfaitement régulière, mais les intervalles temporels entre eux sont aléatoires. Si on mesurait l'intensité de ce faisceau avec un photodétecteur parfait dans des conditions idéales, après s'être débarrassé de toute source de bruit extérieure, le signal qu'on obtiendrait présenterait encore du bruit à cause de la granularité du flux de photons. Ce bruit est alors appelé *bruit de photons standard* (*shot noise*). Il est strictement lié au caractère quantique du rayonnement.

Une façon plus complète de voir les fluctuations quantiques dans les mesures optiques tient compte du caractère ondulatoire du rayonnement et les interprète comme des fluctuations propres des quadratures du champ. Pour l'explication et l'interprétation de notre expérience nous allons par la suite adopter cette deuxième approche. Considérons pour simplifier d'abord un mode d'un champ électromagnétique à fréquence  $\omega$ , de polarisation donnée, en un point de l'espace fixé. L'opérateur du champ peut être décrit par

$$\hat{E} = E_0(\hat{a} \cdot e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger \cdot e^{i\omega t}) = \hat{E}_1 \cos(\omega t) + \hat{E}_2 \sin(\omega t) \quad (2.1)$$

Les deux quadratures  $\hat{E}_1$  et  $\hat{E}_2$  sont des observables conjuguées et par conséquent ne commutent pas. Elles obéissent à l'inégalité de Heisenberg, qui impose une limite inférieure non nulle au produit de leurs variances

$$\langle \Delta \hat{E}_1^2 \rangle \cdot \langle \Delta \hat{E}_2^2 \rangle \geq E_0^4 \quad (2.2)$$

Les crochets représentent ici des valeurs moyennes dans un état quantique.  $E_0$  correspond au champ électrique par photon

$$E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \quad (2.3)$$

dans lequel interviennent la fréquence du mode  $\omega$ , la constante diélectrique du vide  $\epsilon_0$  et le volume de quantification  $V$ .  $E_0$  apparaît comme échelle naturelle des fluctuations quantiques du champ électromagnétique.

Les fluctuations quantiques sont minimales lorsque

$$\langle \Delta \hat{E}_1^2 \rangle \cdot \langle \Delta \hat{E}_2^2 \rangle = E_0^4 \quad (2.4)$$

Dans le cas particulier où le bruit est le même sur les deux quadratures, sa valeur est donnée par  $E_0^2$  et correspond au bruit de photons standard introduit au début de ce paragraphe. Il s'agit par exemple du bruit quantique naturel dans un faisceau laser, dont l'état du champ est décrit par une famille d'états particuliers, les états cohérents  $|\alpha\rangle$  [110].

### 2.1.2 Les états cohérents

Un état cohérent est défini comme état propre de l'opérateur d'annihilation  $\hat{a}$  avec la valeur propre  $\alpha$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2.5)$$

Cet état a la particularité d'avoir des fluctuations quantiques minimales *et* symétriques:

$$\langle \Delta \hat{E}_1 \rangle^2 = \langle \Delta \hat{E}_2 \rangle^2 = E_0^2 \quad (2.6)$$

Un cas particulier d'état cohérent est le vide électromagnétique. La valeur moyenne du champ dans cet état étant zéro, il correspond à l'état cohérent d'énergie la plus basse. En ce qui concerne le bruit quantique en revanche, il est clair que des fluctuations subsistent dans le vide, bien que la valeur moyenne du champ soit nulle. Le fait que ses fluctuations soient également réparties entre toutes les composantes du champ est particulièrement évident dans ce cas, car le vide électromagnétique ne peut pas avoir une phase privilégiée.

### 2.1.3 Les états comprimés

L'inégalité de Heisenberg apparaît à première vue comme une limite infranchissable à la sensibilité d'une mesure. Mais elle n'impose qu'une limite inférieure au *produit* des variances des deux observables. Les fluctuations d'une seule composante peuvent être réduites au-delà de  $E_0^2$ , pourvu que les fluctuations de l'autre composante augmentent de manière à respecter la limite fixée par l'inégalité de Heisenberg

$$\langle \Delta \hat{E}_1^2 \rangle \leq E_0^2 \quad (2.7)$$

$$\langle \Delta \hat{E}_2^2 \rangle \geq E_0^4 / \langle \Delta \hat{E}_1^2 \rangle$$

Contrairement au cas de l'état cohérent, il n'y a plus de symétrie entre les deux quadratures; de tels états sont appelés *états comprimés (squeezed states)* pour la raison évidente que la dispersion d'une des quadratures est réduite au-dessous du bruit de photons standard.

#### 2.1.4 Représentation dans l'espace de phase

Une manière intuitive de décrire les fluctuations du champ électrique consiste à représenter celui-ci dans l'espace de phase comme sa valeur moyenne classique, à laquelle sont superposées les fluctuations quantiques. Les coordonnées dans l'espace de phase correspondent aux quadratures du champ. Le champ électrique  $\hat{E}$  est représenté par un vecteur, dont la longueur correspond à l'amplitude moyenne. A cause de la relation de Heisenberg entre les quadratures il n'est par contre pas possible de fixer son extrémité à un seul point. La probabilité de trouver son extrémité en un certain point dans l'espace de phase est donnée par une distribution, à laquelle l'inégalité de Heisenberg impose une surface minimale de l'ordre de  $E_0^2$ . A un instant donné, on ne peut donc pas définir les deux quadratures du champ, ou son intensité et sa phase, plus précisément que dans cette surface. La distribution des fluctuations correspond à la distribution de Wigner [111–115] associée à l'état en question. Si l'état du champ est un état cohérent, toutes les quadratures ont les mêmes fluctuations et la surface est alors donnée par un disque (figure 1) [110].

Pour un état comprimé, ce cercle est déformé de telle manière que la dispersion d'une des quadratures soit réduite au-dessous du bruit de photons standard. Pour un état comprimé minimal, la surface est donnée par une ellipse [114, 115]. Son petit axe correspond à la valeur de la dispersion réduite (quadrature à bruit minimal). Dans la direction perpendiculaire, l'extension de l'ellipse est augmentée dans le même rapport (quadrature à bruit maximal). Selon la composante comprimée du champ, on peut distinguer des états comprimés en intensité (figure 2(a)), en phase (figure 2(b)) ou pour une quadrature quelconque (figure 2(c)). Pour mesurer la réduction du bruit sur ces états, différents systèmes de détection peuvent être envisagés. Nous allons nous concentrer dans le prochain paragraphe sur le système de détection homodyne qui correspond à notre expérience.

#### 2.1.5 Détection homodyne du bruit quantique

Pour pouvoir mesurer le bruit quantique sur une quadrature quelconque du champ il faut disposer d'une référence de phase du champ. Afin d'obtenir cette référence on superpose le faisceau à mesurer - appelé le faisceau sonde par la suite - avec un faisceau

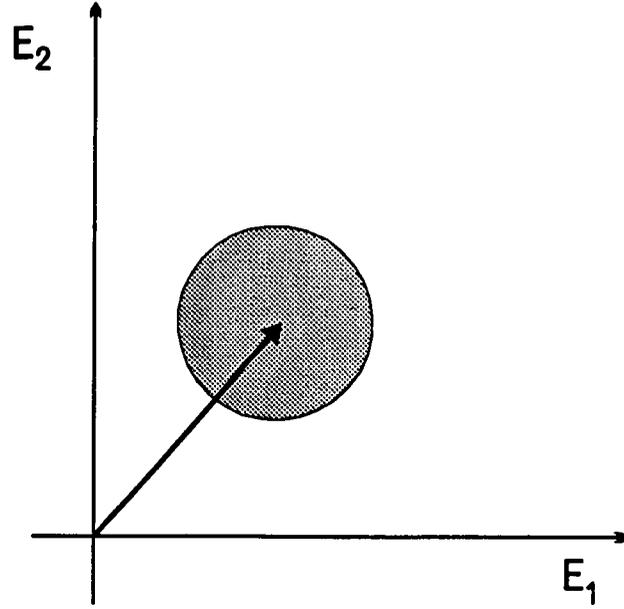


Fig. 1: Représentation d'un état cohérent dans l'espace de phase.

de puissance beaucoup plus importante (*oscillateur local*), dont la phase peut être variée au cours de la mesure. Cette superposition est faite par exemple à l'aide d'une lame semi-réfléchissante par laquelle les deux faisceaux sont séparés en deux parties d'intensité égale (figure 3). Les signaux d'intensité derrière la lame sont mesurés par deux détecteurs supposés identiques et parfaits

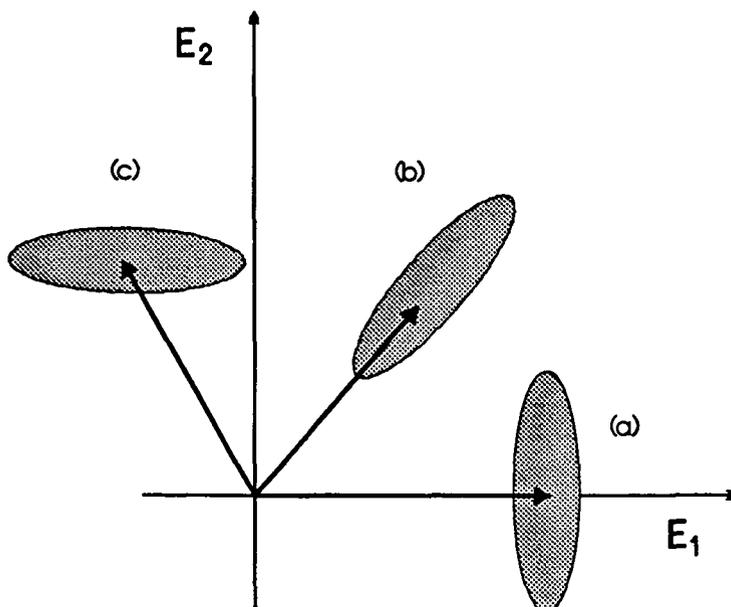
$$I_A = \frac{1}{2} |(E_{OL} + \delta E_{OL}) \cdot e^{i\Theta} + (E_{FS} + \delta E_{FS})|^2 \quad (2.8)$$

$$I_B = \frac{1}{2} |(E_{OL} + \delta E_{OL}) \cdot e^{i\Theta} - (E_{FS} + \delta E_{FS})|^2$$

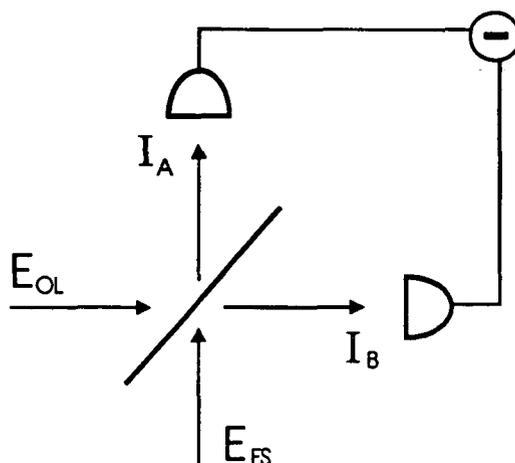
où  $E_{OL}$  et  $E_{FS}$  (variables sans chapeau) sont les valeurs moyennes des amplitudes du champ et  $\delta E_{OL}$  et  $\delta E_{FS}$  leurs fluctuations.  $\Theta$  est la phase relative entre l'oscillateur locale et le faisceau sonde. Dans un traitement linéaire des fluctuations, la différence entre les deux intensités ne contient plus que les fluctuations du faisceau sonde superposées à l'amplitude moyenne de l'oscillateur local et les fluctuations de l'oscillateur local superposées à l'amplitude moyenne du faisceau sonde comme termes du bruit:

$$\delta I_- = \delta I_A - \delta I_B \simeq (E_{OL} e^{i\Theta} \cdot \delta E_{FS}^* + E_{FS} \cdot \delta E_{OL}^* e^{-i\Theta}) + c.c \quad (2.9)$$

Dans la mesure où l'oscillateur local est beaucoup plus intense que le faisceau sonde nous pouvons négliger les contributions faisant intervenir le champ moyen du faisceau sonde et nous détectons seulement les fluctuations d'une quadrature du faisceau sonde, qui varie avec la phase de l'oscillateur local. En supposant la valeur moyenne  $\bar{E}_{OL}$  de



**Fig. 2:** Représentation des types d'états comprimés dans l'espace de phase: état comprimé (a) en intensité, (b) en phase et (c) en quadrature



**Fig. 3:** Détection des fluctuations quantiques à l'aide d'une lame semi-réfléchissante. Si les deux voies A et B sont équilibrées, le signal de différence ne contient que des fluctuations du champ.

l'amplitude de l'oscillateur locale réelle, nous obtenons

$$\delta I_- \simeq \bar{E}_{OL} (\text{Re}[\delta E_{FS}] \cos \Theta + \text{Im}[\delta E_{FS}] \sin \Theta) \quad (2.10)$$

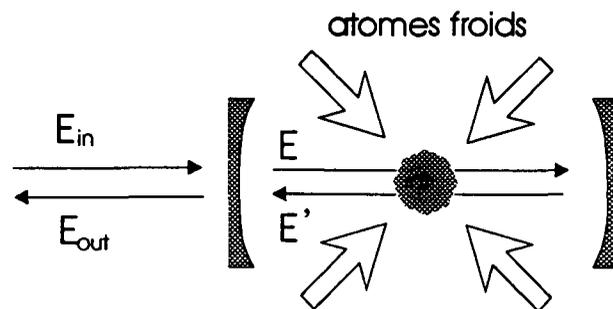
Nous sommes en fait intéressés par la densité spectrale de ces fluctuations. Pour la mesurer, on utilise un analyseur de spectre qui fournit directement la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Dans la mesure où la variation de la phase

de l'oscillateur local est quasistationnaire, elle intervient au carré dans l'expression du spectre de bruit. La variation de phase de l'oscillateur local apparaît alors à une fréquence deux fois plus élevée sur le spectre que sur le signal moyen. Dans l'espace de phase, cette mesure revient à déterminer la dimension d'une ellipse qui tourne après projection sur une direction fixe. Nous obtenons ainsi une mesure du bruit sur les diverses quadratures en fonction du temps. Dans la suite, nous nous intéresserons principalement au bruit minimal qui correspond aux fluctuations mesurées dans la direction du petit axe de l'ellipse. Des calculs détaillés de la détection du bruit se trouvent dans les références [17, 116–123].

## 2.2 Réduction du bruit par effet Kerr

### 2.2.1 Introduction

Le but de notre expérience consiste à utiliser des atomes froids comme milieu non linéaire pour réduire les fluctuations quantiques d'un faisceau laser, qui interagit avec le nuage atomique. Les atomes sont placés au milieu d'une cavité optique pour renforcer l'interaction entre les atomes et le faisceau. La cavité est dans une bonne approximation une cavité à une entrée-sortie, c'est à dire avec un seul miroir de couplage. Le faisceau sonde entre par le miroir de couplage, interagit avec les atomes et ressort par le même miroir (voir figure 4). Un tel système est plus favorable pour une réduction du bruit



**Fig. 4:** Le faisceau laser entre dans la cavité par le miroir de couplage, interagit avec le nuage d'atomes froids et ressort de la cavité par le même miroir

qu'une cavité ayant deux miroirs de couplage. Dans le cas idéal où il n'y a pas d'autres pertes par les miroirs et le milieu non linéaire, cela constitue un système optique passif qui n'a aucun effet sur l'intensité moyenne: toute l'énergie qui entre dans la cavité sort aussi par le même miroir. En revanche, il modifie les fluctuations quantiques de la lumière par l'interaction non linéaire, ce que nous allons démontrer dans les prochains paragraphes. Ce système composé constitue le cœur de notre expérience. Pour expliquer l'effet d'un tel système sur un faisceau laser, nous allons commencer par une étude

générale de l'évolution du champ et de ses fluctuations en interaction avec un milieu non linéaire dans une cavité.

Nous notons  $\hat{E}_{\text{in}}$  et  $\hat{E}_{\text{out}}$  les opérateurs représentant le champ qui entre dans la cavité et celui qui en sort,  $\hat{E}$  et  $\hat{E}'$  les opérateurs des champs intracavité avant et après l'interaction respectivement et  $r_0$  et  $t_0$  les coefficients de réflexion et transmission en amplitude du miroir de couplage. Ces champs sont liés les uns aux autres par les relations d'entrée-sortie, qui correspondent aux équations de réflexion-transmission pour une lame diélectrique

$$\hat{E} = r_0 \hat{E}' + t_0 \hat{E}_{\text{in}} \quad (2.11)$$

$$\hat{E}_{\text{out}} = t_0 \hat{E}' - r_0 \hat{E}_{\text{in}}$$

où les coefficients de réflexion et transmission vérifient  $r_0^2 + t_0^2 = 1$ . La relation entre les champs intracavité  $\hat{E}$  et  $\hat{E}'$  dépend du milieu non linéaire considéré. Elle sera spécifiée et prise en compte pour deux milieux différents dans les paragraphes suivants.

Les arguments que nous allons présenter dans la suite sont fondés sur une théorie qui linéarise les fluctuations du champ autour de sa valeur moyenne. Cela est parfaitement justifié si elles peuvent être considérées comme étant beaucoup plus petites que la valeur moyenne. En particulier, cette condition est satisfaite dans le cas où il y a beaucoup de photons dans la cavité.

Pourquoi peut-on espérer réduire les fluctuations quantiques d'un faisceau laser avec un tel dispositif? Pour répondre à cette question nous allons d'abord considérer un milieu plus simple qu'un vrai milieu atomique, c'est à dire un milieu Kerr idéal, avant de revenir au cas des atomes froids par la suite.

### 2.2.2 L'effet Kerr idéal

Un milieu Kerr idéal est un milieu purement dispersif, dont l'effet sur la lumière peut être complètement décrit par un coefficient  $\chi^{(3)}$ . Il n'y a pas dans ce cas de niveaux résonnants, et par conséquent il n'existe ni absorption ni émission spontanée. Quand la lumière traverse le milieu Kerr, le seul effet qu'elle subit consiste en un déphasage non linéaire, qui dépend de l'intensité. En négligeant toute dépendance spatiale du champ (nous allons y revenir au chapitre 6.4), ce déphasage sur un seul passage s'écrit<sup>1</sup>

$$\Phi_{\text{NL}} = \frac{k\chi^{(3)}l}{2} |\langle \hat{E} \rangle|^2 \quad (2.12)$$

<sup>1</sup> Notons que dans tout ce mémoire  $\Phi$  représente un déphasage pour *un seul passage* à travers du milieu non linéaire. Il est d'ailleurs une variable sans dimension.

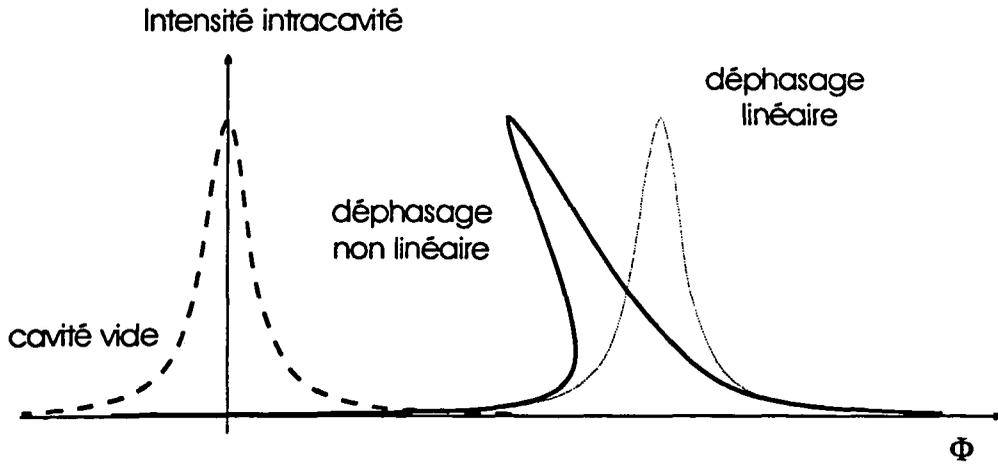


Fig. 5: L'effet du milieu non linéaire sur la courbe de résonance de la cavité: l'indice linéaire conduit à un déplacement de la résonance sur l'axe horizontal, tandis que l'indice non linéaire produit une déformation de la courbe

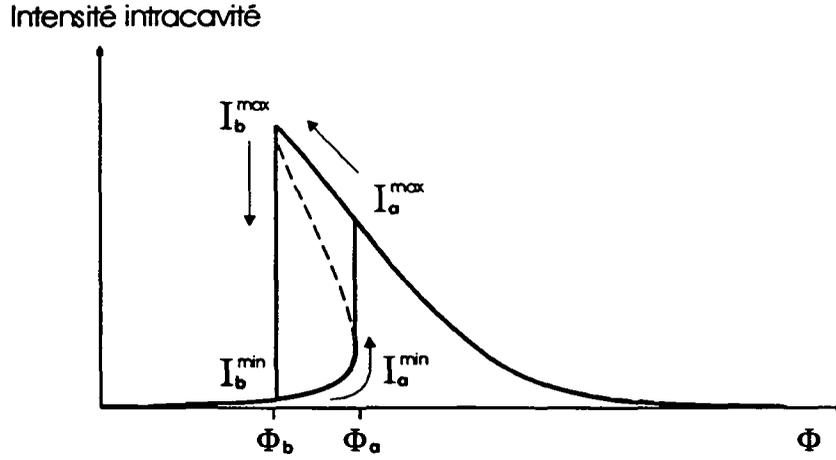
où  $k$  est le vecteur d'onde du champ,  $\langle \hat{E} \rangle$  sa valeur moyenne et  $l$  la longueur d'interaction. Notons qu'il s'agit ici d'un déphasage en unités de fréquence. Les champs avant et après l'interaction sont alors liés par

$$\hat{E}' = \hat{E} \cdot e^{-i\Phi} \quad (2.13)$$

où le déphasage  $\Phi$  contient le déphasage linéaire  $\Phi_0$  dû à la propagation du champ dans la cavité ainsi que le déphasage non linéaire dû à l'effet Kerr

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_{NL} \quad (2.14)$$

Des champs ayant des intensités différentes subissent alors des déphasages différents. Cela permet une explication très intuitive du comportement de l'intensité moyenne, si on considère l'intensité intracavité en fonction du déphasage. Sur la figure 5 est tout d'abord tracée l'intensité intracavité pour la cavité vide (en tirets). La présence d'un milieu non linéaire dans la cavité produit premièrement un déphasage linéaire, qui décale la résonance sur l'axe horizontal (en pointillés). La variation du déphasage avec l'intensité produit une déformation de la courbe de résonance, car l'intensité intracavité obéit à l'équation (2.12) (qui correspond à une droite dans ce diagramme). La courbe de résonance se déforme alors en direction de la droite, ainsi que représenté sur le dessin. Le sens de la déformation dépend du sens de variation du déphasage en fonction de l'intensité. Cette déformation aboutit au phénomène de bistabilité [124, 125]: pour certaines valeurs de  $\Phi$ , il y a deux voire trois intensités possibles dans la cavité. En revanche une analyse de stabilité montre [124, 125] que la partie comprise entre les points  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  (voir figure 6) n'est pas stable et ne peut donc pas être atteinte. Quand on balaye la cavité dans le sens où  $\Phi$  augmente, le système suit d'abord la partie faible intensité de la courbe de résonance (*branche basse*). Au moment où la cavité arrive au niveau du déphasage  $\Phi_a$ , l'intensité intracavité saute



**Fig. 6:** La bistabilité optique: la partie de la courbe de résonance déformée comprise entre les points  $\Phi_a$  et  $\Phi_b$  n'est pas stable. Par conséquent, l'intensité intracavité saute d'une intensité  $I_a^{\min}$  faible à une forte intensité  $I_a^{\max}$  quand  $\Phi$  augmente et d'une forte intensité  $I_b^{\max}$  à une intensité faible  $I_b^{\min}$  quand  $\Phi$  diminue.

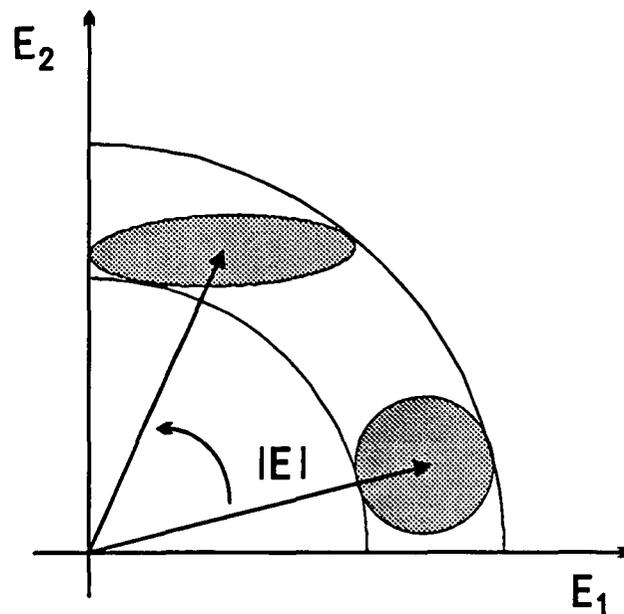
brusquement d'une valeur faible  $I_a^{\min}$  à une valeur forte  $I_a^{\max}$  avant de redescendre de l'autre côté de la résonance à forte intensité (*branche haute*). Pour ces points, il existe donc deux intensités intracavité possibles pour une seule valeur du déphasage (point de bistabilité). Le même phénomène se produit pour un balayage en sens inverse où  $\Phi$  diminue, auquel cas le système s'approche sur la branche haute vers l'autre point de bistabilité  $\Phi_b$ , où l'intensité intracavité saute d'une valeur forte  $I_b^{\max}$  vers une valeur faible  $I_b^{\min}$ . Ces effets donnent les deux courbes caractéristiques de la bistabilité.

Ces arguments quantitatifs sont tout à fait en accord avec la théorie exacte présentée dans les références [90, 91, 126]. A partir des équations (2.11) et (2.13) on peut déduire la transformation entre les champs incident et sortant, qui nous amène au comportement de l'intensité moyenne et des fluctuations:

$$\hat{E}_{\text{out}} = \hat{E}_{\text{in}} \frac{e^{-i\Phi} - r_0}{1 - r_0 e^{-i\Phi}} \quad (2.15)$$

Au lieu d'examiner l'évolution du système à partir de l'intensité intracavité en fonction du déphasage  $\Phi$ , nous allons maintenant considérer l'évolution dans l'espace de phase, ce qui est une représentation tout à fait équivalente. Dans ce cas, comme le montre l'équation (2.15), le seul effet du système consiste à faire tourner le vecteur du champ électrique autour de l'origine d'un angle qui dépend de l'intensité. La longueur du vecteur n'est pas changée. L'intensité sortante est égale à l'intensité entrante.

La situation se présente différemment pour les fluctuations quantiques: les fluctuations correspondant à une valeur faible du champ subissent une rotation d'un angle différent de celles correspondant aux valeurs de forte intensité du champ. Dans une approximation linéaire, le cercle est déformé en ellipse par l'interaction (figure 7). En particulier, l'état reste un état minimal en absence de toute source d'excès de bruit pour un milieu Kerr idéal. Par conséquent, les fluctuations le long du petit axe de

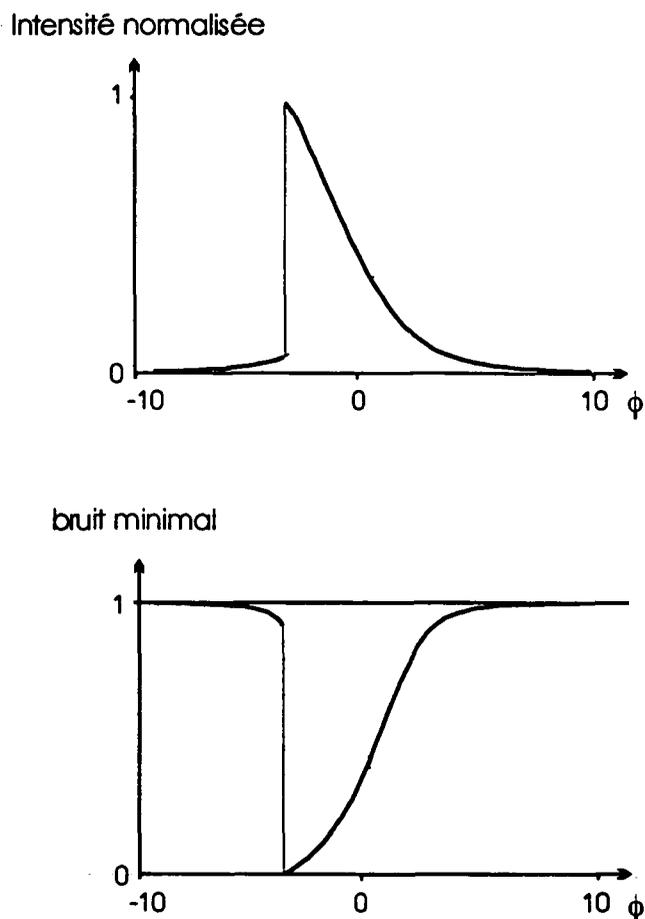


**Fig. 7:** L'effet du milieu non linéaire sur les fluctuations du champ. Les fluctuations correspondant à un champ faible subissent une rotation d'un angle différent des fluctuations correspondant à des champs intenses.

l'ellipse sont réduites au-dessous du niveau du bruit de photons. L'état du champ dans un tel cas est donc un état comprimé.

Les arguments qualitatifs développés ci-dessus sont valables seulement dans une analyse quasistatique, c'est à dire pour les fluctuations du champ ayant la même fréquence que la valeur moyenne du champ. Autrement dit, ces arguments décrivent la dynamique des fluctuations sur des échelles de temps longues. En particulier, le fait que les fluctuations d'intensité ne sont pas modifiées sur la figure 7 correspond à la conservation du nombre de photons compté sur un temps long. Pour obtenir les fluctuations de champ à des fréquences de bruit non nulles, il faut faire une analyse dynamique [90, 91]. Comme dans l'analyse de stabilité [124, 125], on linéarise les équations du champ au voisinage d'un point de fonctionnement. On écrit ensuite des équations de transformations des fluctuations par le système qui dépend de la fréquence. On obtient ainsi une description spectrale de la réduction du bruit. L'ellipse dessinée sur la figure 7 est alors modifiée pour des fréquences de bruit non nulles. Elle peut en particulier tourner ce qui conduit à une réduction du bruit de photons. Cette réduction correspond à une redistribution temporelle des photons incidents: le système bistable réduit les fluctuations d'intensité dont l'échelle de temps est plus longue que le temps moyen de stockage dans la cavité mais plus courte que le temps de ralentissement critique [91].

Sur la figure 8, nous avons tracé le bruit minimal à une certaine fréquence, comprise dans la bande passante de la cavité, ainsi que l'intensité intracavité pendant que la cavité est balayée d'un côté à l'autre de la résonance. Le bruit de photons est normalisé à la valeur 1. Au début la cavité est hors résonance, le faisceau laser n'entre pas dans la cavité, mais est totalement réfléchi. Le bruit correspond alors au bruit d'un



**Fig. 8:** Prédictions théoriques pour l'intensité intracavité normalisée et le bruit minimal en fonction du déphasage de la cavité pour un milieu Kerr idéal. Le bruit quantique standard est normalisé à 1.

état cohérent et reste au niveau du bruit de photons standard, qui est un bruit blanc normalisé à la valeur 1 ici. Quand on s'approche de la résonance<sup>2</sup>, la lumière entre dans la cavité et le bruit minimal est réduit au-dessous du bruit quantique standard. La réduction est la plus forte au voisinage du point de bistabilité [87, 88] à fréquence nulle, où la théorie prédit une réduction du bruit de 100% pour une des quadratures, pendant que les fluctuations sur la quadrature conjuguée deviennent infinies, pour que leur produit reste à la valeur constante de  $E_0^4$ . Evidemment, cela ne correspond pas une situation physique réaliste: tout d'abord, le traitement linéaire des fluctuations n'est plus valable si les fluctuations sur une quadrature deviennent infinies; ensuite, on ne peut pas s'approcher infiniment près du point de bistabilité, et enfin pour un milieu réel ayant des niveaux résonnants, le bruit dans toutes les quadratures est toujours limité à une valeur non nulle à cause de l'excès de bruit introduit par le milieu lui-même comme nous allons le voir dans la suite.

<sup>2</sup> Remarquons ici, que  $\phi$  représente le déphasage *accumulé* pendant plusieurs aller-retours dans la cavité. Il est comme  $\Phi$  une variable sans dimension.

Toujours est-il que ce système modèle donne une idée précise du processus de base. Une réalisation expérimentale de ce dispositif peut nous amener à un système qui réduit les fluctuations d'une des quadratures d'un faisceau incident sans changer son intensité moyenne. Pour cette raison, ce dispositif est souvent nommé "mangeur de bruit".

Cependant, il n'existe pas de milieu Kerr idéal et il faut maintenant revenir à un milieu non linéaire réel.

### 2.2.3 L'effet Kerr avec un milieu réel

Il existe une variété de milieux Kerr réels, fonctionnant sur des processus physiques différents et ayant par conséquent des caractéristiques différentes [127]. Pour pouvoir situer notre expérience dans ce cadre, nous allons mentionner brièvement les catégories les plus importantes. Une première classe contient les milieux non résonnants ou transparents, avec un temps de réponse très court, mais dont le coefficient  $\chi^{(3)}$  n'est normalement pas suffisamment important pour produire une réduction du bruit importante. Ceci peut être compensé par une augmentation de la phase non linéaire dans le système en utilisant une cavité de très bonne finesse ou une grande longueur d'interaction, par exemple à l'aide d'une fibre optique. En particulier ces dernières années un certain nombre d'expériences ont été réalisées sur les fibres optiques [70, 71, 75, 76], malgré la difficulté associée à l'existence d'un bruit classique dû aux processus de diffusion Brillouin spontanée des ondes acoustiques (GAWBS) [128], qui peut empêcher l'observation d'une réduction du bruit.

La deuxième catégorie contient des milieux presque résonnants, par exemple des milieux atomiques ou ioniques. Dans ce cas, le coefficient  $\chi^{(3)}$  est beaucoup plus élevé au voisinage de la résonance que pour les milieux dans la première catégorie. En revanche, le taux d'absorption et le taux d'émission spontanée sont plus importants et tendent à diminuer l'effet de réduction du bruit. Le temps de réponse est typiquement de l'ordre de l'inverse du décalage en fréquence entre la résonance atomique et la fréquence du faisceau laser.

Finalement, une troisième catégorie contient les milieux résonnants, qui possèdent une non-linéarité  $\chi^{(3)}$  très élevée, mais qui ne sont pas adaptés pour une réalisation d'un "mangeur de bruit", car la réponse non linéaire du milieu est due à la création d'une population dans l'état excité par un déphasage de la polarisation induite. Ce déphasage étant un processus dissipatif, il introduit un excès de bruit considérable qui détruit toute réduction du bruit.

Comme milieu non linéaire, nous avons choisi pour notre expérience des atomes refroidis et piégés par laser. Ce milieu atomique se place dans la deuxième catégorie. Au lieu d'aborder une théorie quantitative et précise du milieu réel, nous allons dans cette partie seulement présenter quelques arguments qualitatifs, qui nous permettront d'identifier les différences essentielles entre le milieu Kerr idéal et un milieu Kerr réel. Le milieu réel est modélisé par un ensemble d'atomes à deux niveaux. Bien que l'atome à deux niveaux n'existe pas réellement dans la nature non plus, il peut être réalisé

approximativement dans une expérience. C'est ce milieu que nous allons appeler "milieu réel" dans la suite.

Chaque atome a un état fondamental et un état excité séparés par une énergie  $\hbar\omega_0$ . L'ensemble des  $N$  atomes supposés immobiles se trouve au milieu d'une cavité optique, déjà décrite dans le paragraphe précédent. Les atomes sont excités par une source laser de fréquence  $\omega_L$ , au voisinage de la résonance atomique. Nous supposons pour le moment que les contributions de tous les atomes à la polarisation sont parfaitement accordées en phase, en accord avec l'approximation que nous avons déjà faite de négliger la dépendance spatiale du champ (nous reviendrons sur ces approximations au chapitre 6). Nous considérons donc que les  $N$  atomes sont décrits par une population collective dans l'état fondamental et excité ainsi qu'une polarisation collective. Cette polarisation est amortie avec un taux de relaxation  $\gamma$  dû exclusivement à l'émission spontanée, qui correspond en même temps à la demi largeur naturelle à mi-hauteur de la transition atomique. Les autres processus de relaxation, dus par exemple aux collisions entre les atomes, ne sont pas considérés ici, car ils ne jouent qu'un rôle mineur dans l'expérience. Le décalage en fréquence entre le faisceau lumineux et la transition atomique est donné en unités de  $\gamma$  par le paramètre de désaccord (sans dimension)

$$\delta = \frac{\omega_0 - \omega_L}{\gamma} \quad (2.16)$$

Un tel système présente un comportement bistable, dont l'origine est un processus soit absorptif soit dispersif selon la valeur du désaccord  $\delta$  [97, 100–103]. Dans les deux cas, l'effet non linéaire vient d'une saturation de la polarisation atomique par le faisceau laser. Le déphasage du faisceau est plus petit pour des fortes intensités que pour des intensités faibles. La résonance de la cavité est alors déformée de la même façon que pour l'effet Kerr idéal (voir figure 5).

Pour la réduction du bruit quantique d'une quadrature du faisceau sonde, les processus absorptifs sont nettement moins favorables pour une expérience, car ils introduisent trop d'émission spontanée et donc trop d'excès de bruit, ce qui peut diminuer ou même totalement éliminer la réduction du bruit. Nous allons plutôt nous concentrer dans la suite sur un processus essentiellement dispersif, qui est d'ailleurs plus proche d'un processus Kerr idéal.

Pendant un passage du faisceau dans la cavité, l'ensemble d'atomes produit sur le champ un déphasage total  $\Phi_1$ , donné par

$$\Phi_1 = \frac{g^2 N}{\gamma} \frac{\delta}{1 + \delta^2 + 2s_0} \quad (2.17)$$

dans lequel interviennent le nombre d'atomes  $N$  dans le faisceau, le coefficient de couplage matière-lumière  $g^2$ , la demi-largeur naturelle  $\gamma$  de la transition atomique, le désaccord  $\delta$  et le paramètre de saturation  $s_0$  à résonance

$$s_0 = \frac{I_{\text{intra}}}{I_{\text{sat}}} \quad (2.18)$$

$I_{\text{intra}}$  et  $I_{\text{sat}}$  sont respectivement l'intensité intracavité et l'intensité de saturation de la transition atomique. Le coefficient de couplage en unités de  $\gamma$  est déterminé par le rapport entre la section efficace de la diffusion résonnante  $3\lambda^2/2\pi$  et la surface  $S$  du faisceau

$$g^2 = \frac{3\lambda^2}{4\pi S} \gamma \quad (2.19)$$

Si on développe  $\Phi_1$  en puissance du paramètre de saturation,  $\Phi_1$  contient un déphasage linéaire  $\Phi_L$

$$\Phi_L = \frac{g^2 N}{\gamma \delta} \quad (2.20)$$

ainsi qu'une phase non linéaire  $\Phi_{\text{NL}}$  décrivant un effet de type Kerr

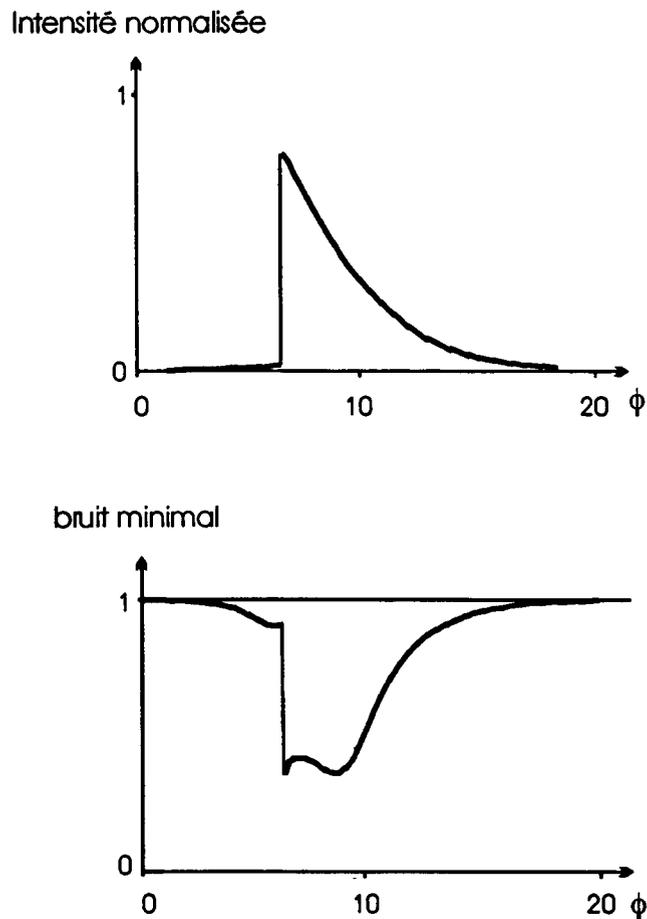
$$\Phi_{\text{NL}} = -\frac{2g^2 N}{\gamma \delta^3} s_0 \quad (2.21)$$

Afin d'étudier la bistabilité optique, nous devons aussi considérer l'effet d'exaltation de l'interaction matière-lumière par la cavité. Le paramètre important pour la bistabilité n'est alors pas le nombre d'atomes, mais la coopérativité atomique  $C$ , qui est défini par le rapport entre l'absorption atomique à résonance  $g^2 N/\gamma$  et le coefficient de transmission d'énergie  $T$  de la cavité dans laquelle sont placés les atomes:

$$C = \frac{g^2 N}{\gamma T} \quad (2.22)$$

Nous n'allons pas entrer dans un traitement théorique complet de l'interaction lumière-atomes ici (ceci est renvoyé à la partie théorique de ce mémoire à partir du chapitre 6), mais seulement discuter les résultats à l'aide de quelques spectres. La figure 9(a) montre la courbe de bistabilité obtenue avec un milieu atomique. Le désaccord est choisi à  $\delta = 40$ , ce qui correspond à un décalage de la fréquence atomique de  $40\gamma$ . Dans ce régime, c'est l'effet dispersif qui est responsable de l'effet non linéaire. L'absorption des atomes est faible, mais devra cependant être prise en compte pour le calcul de la réduction du bruit. L'intensité incidente est la même que pour la courbe de bistabilité obtenue précédemment avec un milieu Kerr idéal. Le nombre d'atomes est choisi de manière à ce que le déphasage non linéaire soit le même pour les effets Kerr réel et idéal. On voit clairement que l'intensité maximale dans la cavité est plus faible pour le milieu atomique que pour l'effet Kerr idéal (comparer à la figure 8) à cause de l'absorption par le milieu atomique. La figure 9(b) montre un spectre de bruit optimal, c'est à dire calculé en chaque point pour la quadrature de plus faible bruit, dans les mêmes conditions. Le bruit minimal ne descend visiblement plus à zéro pour ce choix de paramètres. Le bruit résiduel est dû à l'émission spontanée. Malgré cette dégradation de l'optimum de la réduction du bruit, celle-ci reste importante et d'autant plus intéressante qu'il s'agit de paramètres envisageables pour une expérience.

Pour diminuer l'influence de l'émission spontanée, on peut retrouver la limite Kerr idéale avec une réduction de 100% pour des désaccords très grands. Dans ce cas, le co-



**Fig. 9:** Prédictions théoriques pour l'intensité intracavité normalisée et le bruit minimal en fonction du déphasage de la cavité pour un milieu Kerr constitué d'un ensemble d'atomes à deux niveaux

efficient  $\chi^{(3)}$  devient de plus en plus faible et on s'approche de la première catégorie des milieux Kerr non résonnants. Cela nécessite cependant que le coefficient Kerr faible soit compensé par une intensité incidente beaucoup plus grande. D'autres effets interviendraient alors: par exemple la pression de radiation sur les atomes pourrait les pousser hors du faisceau. De plus, le désaccord entre la fréquence du faisceau et la transition atomique est naturellement limité par l'existence des autres transitions atomiques qui seraient excitées. Ceci ne présente donc pas une solution réaliste expérimentalement.

#### 2.2.4 Le milieu atomique expérimental

Nous avons vu que les estimations faites pour notre modèle d'un milieu Kerr réel ont donné des résultats très prometteurs pour la réduction du bruit quantique. Des calculs quantitatifs montrent [129] qu'une assemblée d'atomes à deux niveaux immobiles est un des meilleurs milieux non linéaires pour la réalisation expérimentale d'un "mangeur de bruit". Ils montrent également qu'il nous faut un nombre d'atomes important interagissant avec le faisceau, c'est à dire un échantillon assez dense. Nous avons éga-

lement vu que le degré de réduction du bruit augmente avec la non-linéarité et baisse avec l'absorption et l'émission spontanée. Alors que la première condition nécessite de s'approcher le plus possible de la résonance atomique, la deuxième condition l'interdit. La situation est d'autant plus difficile que le coefficient d'absorption est proportionnel à  $1/\delta^2$ , mais le coefficient  $\chi^{(3)}$  à  $1/\delta^3$ . La non-linéarité diminue donc plus rapidement en fonction du désaccord que le taux d'absorption. Pour se mettre alors le plus près possible d'une résonance, il faut soigneusement éviter toute source d'élargissement de la transition atomique.

Une source importante d'élargissement inhomogène dans une vapeur atomique libre est l'effet Doppler. Cet effet augmente la zone d'absorption, et par conséquent la région où la non-linéarité est la plus favorable n'est plus disponible pour une expérience de réduction de bruit. Une manière de contourner cette difficulté consiste à utiliser des jets atomique, qui traversent la cavité à grande vitesse dans une direction perpendiculaire à la direction du faisceau lumineux. L'effet Doppler transversal est alors limité par la vitesse transversale des atomes. Dans ce cas, l'élargissement Doppler résiduel est de l'ordre de la largeur naturelle de la transition atomique et permet de s'approcher assez près de la résonance. Des expériences sur la réduction du bruit à l'aide d'une cavité bistable utilisant un jet atomique ont été déjà effectuées par deux groupes: La première expérience a eu lieu en 1987 à l'Université du Texas, où Raizen *et al.* [104] ont utilisé un jet de sodium traversant une cavité de très grande finesse ( $\mathcal{F} = 660$ ) dans des conditions où la réduction du bruit en quadrature prédite était de l'ordre de 80%. La valeur mesurée ne dépassait par contre pas 20%. En tenant compte de toutes les imperfections de la mesure, le résultat corrigé donnait une valeur estimée de 53% de réduction du bruit. La deuxième expérience a été effectuée à l'Université de Canberra sur un jet de baryum. Hope *et al.* [105] ont mesuré une réduction de bruit de 18% au-dessous de la limite standard, à partir de laquelle une réduction du bruit estimée de 50% a été obtenue pour une mesure parfaite. Mais pour cette expérience-là aussi, la valeur de la réduction du bruit prédite était plus importante (de l'ordre de 60%) que la valeur mesurée. Dans une expérience similaire, Grangier *et al.* [39] se sont servi de l'effet Kerr croisé pour réduire les fluctuations quantiques d'un des deux faisceaux traversant le milieu Kerr constitué d'un jet de sodium. La réduction du bruit mesurée était de l'ordre de 17%.

Le désaccord entre les résultats expérimentaux et les prédictions n'a jamais été bien compris. Il y a plusieurs explications possibles, dont l'une est que la structure transverse du faisceau n'était pas pris en compte dans les calculs. Nous allons étudier ce point en détail plus tard dans ce mémoire (voir chapitre 6). Une autre explication est fondée sur le rôle du temps de transit des atomes à travers du faisceau laser et sur le fait que ce ne sont pas les mêmes atomes qui interagissent avec la lumière, au cours de la mesure du bruit.

C'est ce qui nous a conduit à chercher un système mieux contrôlé pour pouvoir comprendre les différents processus qui jouent un rôle important pour la réduction du bruit à l'aide d'un système bistable. La stratégie que nous avons adoptée pour créer un tel système consiste à diminuer la vitesse des atomes dans les trois directions d'espace.

Nous utilisons comme milieu Kerr des atomes refroidis et piégés. La technique du piégeage des atomes par laser a été mise au point récemment avec le piège magnéto-optique (MOT) [107, 108]. Elle offre la possibilité d'avoir un nuage d'atomes dense avec une vitesse moyenne des atomes de quelques millimètres à quelques dizaines de centimètres [130, 131] par seconde, selon les caractéristiques du piège. Dans tous les cas, la largeur Doppler résiduelle est plus petite que la largeur naturelle de la transition atomique et les atomes peuvent être considérés comme pratiquement immobiles dans toute direction d'espace. Nous avons tiré profit de ce nouveau développement pour exploiter les propriétés non linéaires du nuage atomique. Notons qu'il s'agit là d'une des premières expériences où on étudie les propriétés non linéaires des atomes froids plutôt que le piège lui-même.

Nous sommes maintenant parvenus à préciser dans quelles conditions un milieu Kerr réel est matérialisé par un échantillon dense d'atomes immobiles. Il nous reste encore à expliquer pourquoi les atomes peuvent être considérés approximativement comme des atomes à deux niveaux.

Le choix de l'espèce d'atomes a été basé sur plusieurs raisons de nature technique ou pratique. Nous avons décidé de monter un piège magnéto-optique contenant du césium, d'abord parce que le césium possède des transitions à partir de son état fondamental (figure 10), qui permettent un couplage important entre les atomes et le champ

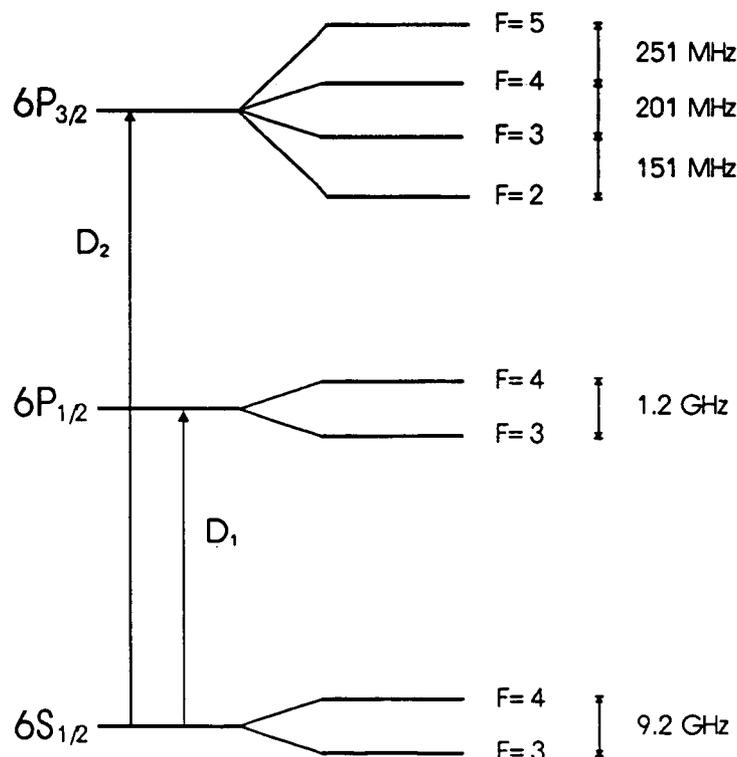


Fig. 10: Schéma des niveaux du césium

électromagnétique. Il possède aussi une structure hyperfine qui permet de réaliser le

piégeage. Les transitions possibles se trouvent dans le proche infrarouge à 894 nm (raie D1) et 852 nm (raie D2). Toutes les deux sont accessibles avec des diodes lasers ou un laser Titane-Saphir. De plus, ces transitions sont à une longueur d'onde favorable pour la détection du bruit, où on peut trouver des photodiodes (en Silicium ou Germanium) avec un rendement quantique proche de 1, ce qui est indispensable pour la mesure du bruit quantique.

Dans quelles limites et pour quelles transitions le césium se comporte-t'il comme un atome à deux niveaux?

Avec un faisceau laser nous pouvons exciter à partir de l'état fondamental toutes les transitions telles que  $\Delta F = \pm 1, 0$ , où  $F$  est le moment cinétique total compte tenu du spin du noyau. Pour effectuer notre expérience, il faut choisir une transition "fermée", où l'atome excité ne peut retomber que dans l'état initial. Sinon l'atome pourrait passer par émission spontanée vers d'autres états, où il ne serait plus couplé au champ électromagnétique et donc perdu pour l'expérience. Les seules transitions qui satisfont cette condition sont la transition  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5$ , qui correspond à la raie D2, et la transition  $6S_{1/2}, F = 3 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 2$  (raie D1).

Nous avons choisi la transition  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5$ , qui est une transition  $j \rightarrow j + 1$ . La demi-largeur de son état excité est de 2.6MHz. Les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental  $F = 3$  et  $F = 4$  sont bien séparés (de 9.2 GHz) l'un de l'autre. L'état excité possède quatre niveaux hyperfins, dont le niveau  $F' = 5$  est le plus haut en énergie. Il est séparé de 250MHz de la transition la plus proche dans le rouge  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 4$ . La transition en question est donc suffisamment loin de tous les autres niveaux, pour pouvoir être excitée vers le coté bleu ainsi que vers le coté rouge loin de résonance. Dans la mesure où nous excitons seulement des transitions Zeeman  $m_F = \pm F \rightarrow m_{F'} = \pm F'$  avec  $F' = F + 1$ , nous pourrions considérer la transition comme une transition à deux niveaux.

L'existence des sous-niveaux Zeeman pose le problème du pompage optique lorsque l'on utilise un faisceau sonde de polarisation circulaire, ce que des contraintes d'ordre expérimental nous imposent de faire. En particulier, la transition en question possède vingt sous-niveaux, et le transfert de population ne sera alors pas négligeable. Mais en ce qui concerne les fluctuations quantiques, il paraît raisonnable de supposer que le transfert de population n'ajoute de l'excès de bruit qu'aux fréquences inverses au temps de pompage, qui sont, comme nous allons voir dans la suite, nettement inférieures aux fréquences du bruit qui nous intéressent. Il paraît alors justifié de considérer le césium froid dans un premier temps comme un atome à deux niveaux. Nous reconsidérons l'influence du pompage optique en détail aux chapitres 4 et 6 de ce mémoire.

---

## 3 Montage expérimental et résultats préliminaires

### 3.1 Introduction

Le début de cette expérience date de 1991. Une partie importante du montage a été réalisée par Laurent Hilico pendant sa thèse [129]. Lors de mon arrivée dans le groupe, nous avons repris le montage existant et effectué quelques changements en ce qui concerne l'asservissement du laser, la cavité et le système de détection. Ensuite, nous avons effectué des mesures de bistabilité et de bruit quantique avec ce montage modifié. Nous allons maintenant présenter le montage expérimental et les résultats obtenus.

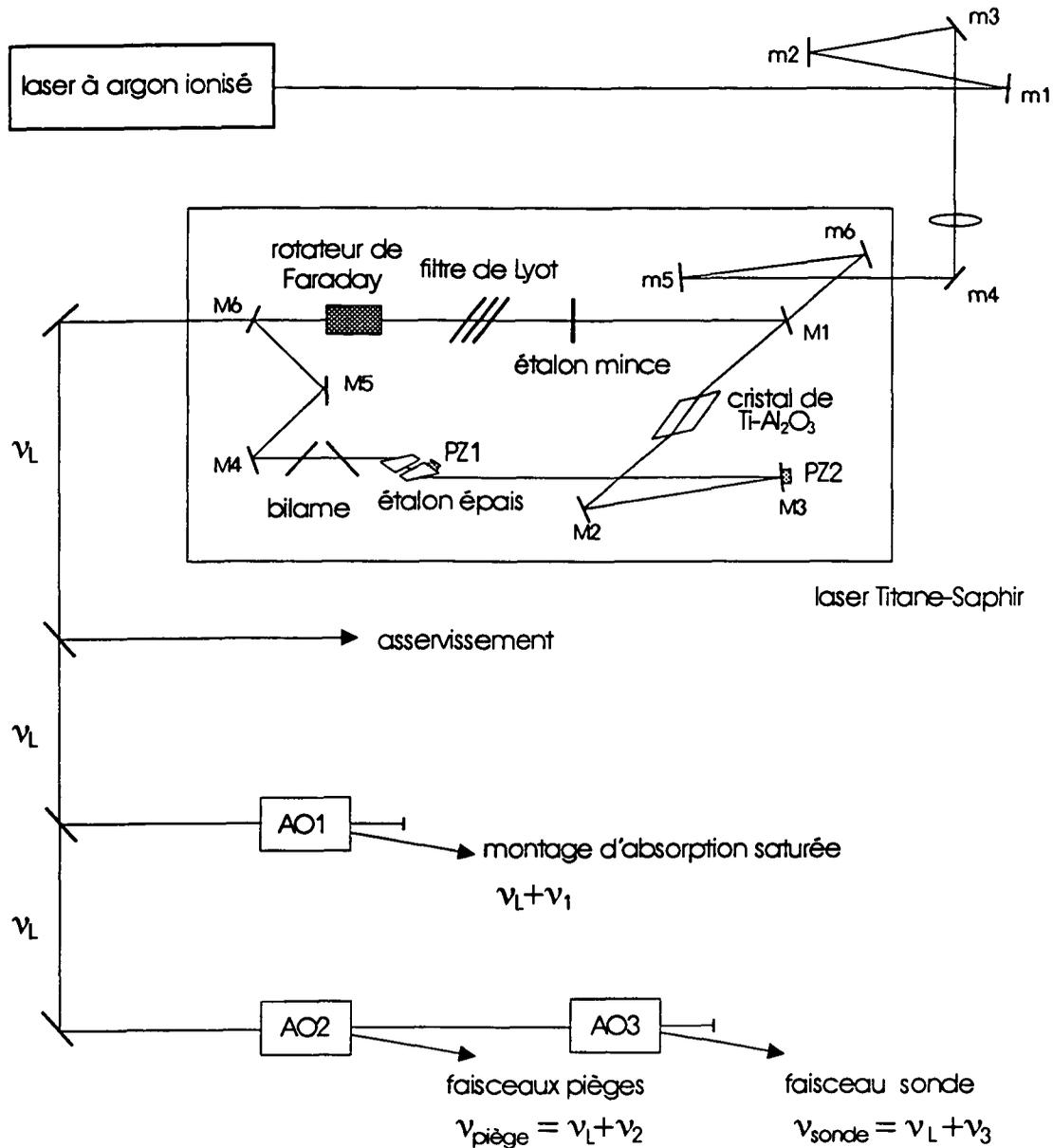
Les principaux éléments de l'expérience sont la source laser et ses asservissements, le piège magnéto-optique et la cavité optique. Nous discuterons successivement ces différentes parties et leurs caractéristiques. Ensuite, nous présenterons la réalisation du système bistable obtenu en plaçant des atomes refroidis et piégés dans la cavité optique. Le dernier paragraphe est consacré à une description de la détection homodyne destinée à mesurer le bruit quantique.

### 3.2 Le laser

#### 3.2.1 La cavité laser

Les études sur le bruit quantique nécessitent une source lumineuse, dont les fluctuations de phase et d'intensité sont au bruit standard. Pour cette raison, il n'est pas possible d'utiliser des diodes laser, car elles ont un bruit d'intensité et de phase supérieur au bruit standard de quelques dizaines de décibels. Pour éviter les problèmes d'excès de bruit, nous utilisons un laser Titane-Saphir comme laser sonde, qui a l'avantage d'être au bruit standard à partir de 2 – 3MHz. Il est pompé par un laser à argon ionisé (INNOVA 301), qui délivre 10W sur l'ensemble des raies.

Le laser (figure 11) a été construit au laboratoire d'après un modèle de F. Biraben. Il s'agit d'une cavité en anneau avec un miroir de sortie d'une transmission de 4%. Tous les autres miroirs ont une réflectivité maximale entre 750 et 850nm. La cavité contient,



**Fig. 11:** Montage expérimental. m1-m6: miroirs en dehors du laser Titane-Saphir; M1-M6: miroirs à l'intérieur du laser Titane-Saphir. AO1-AO3: modulateurs acousto-optiques pour décaler la fréquence du faisceau laser. PZ1, PZ2: cales piézo-électriques.  $\nu_L$  est la fréquence du laser.

outre le cristal de saphir dopé au Titane, trois éléments sélectifs en fréquence, un filtre de Lyot, un étalon épais et un étalon mince, dont les intervalles spectraux libres sont respectivement 150GHz, 25GHz et 170MHz, et qui permettent d'obtenir la longueur d'onde de la transition  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5$  à 852.113nm. L'étalon épais est asservi en longueur à l'aide d'un cristal piézo-électrique afin de pouvoir changer la fréquence du laser continûment sans sauts de modes sur une plage de 12GHz (correspondant à  $0.3\text{\AA}$ ). Ce réglage fin de la longueur d'onde de la résonance est effectué avec

un bilame ou en balayant un des miroirs de la cavité également monté sur une cale piézo-électrique.

Le sens de propagation du faisceau est déterminé à l'aide d'un rotateur de Faraday et d'un système composé de trois miroirs, dont un en dehors du plan de propagation. Pour un sens de propagation la rotation de Faraday s'ajoute à la rotation introduite par le système des miroirs, alors que les deux rotations se compensent dans l'autre sens. Comme plusieurs éléments dans la cavité sont montés à l'angle de Brewster par rapport au faisceau, cette procédure introduit des fortes pertes pour un des sens de propagation.

Dans un fonctionnement optimal notre laser Titane-Saphir peut délivrer une puissance de 1.5W monomode à 852nm. Il émet de façon régulière une puissance supérieure à 1W. Cette puissance dépasse la valeur nécessaire pour le faisceau sonde de plus d'un ordre de grandeur. Nous pourrions ainsi utiliser ce même laser pour le piégeage des atomes.

### 3.2.2 L'asservissement

Pour notre expérience, un asservissement du laser Titane-Saphir est indispensable pour deux raisons: D'abord, le "jitter" du laser libre est de l'ordre de 1MHz. Ceci est excessif pour une expérience comme la nôtre, qui nécessite une excitation des atomes limitée à une seule transition et qui utilise une cavité résonnante dont la largeur est de l'ordre de 5MHz, comme nous le verrons plus tard. Par conséquent, le laser doit être asservi en fréquence à une cavité de référence très stable, pour réduire ses fluctuations en fréquence de telle sorte qu'elles soient négligeables devant la largeur de la transition atomique. Ensuite, la fréquence du laser doit être fixée par rapport à la fréquence de la transition atomique, ce qui est réalisé à l'aide d'un asservissement sur une résonance d'absorption saturée.

La fréquence du laser est d'abord fixée sur une résonance d'un Fabry-Perot externe avec une méthode de spectroscopie en polarisation de Hänsch et Couillaud [132]. Cette méthode nous fournit la dérivée de la fonction d'Airy de la cavité sans aucune modulation. Le Fabry-Perot externe est une cavité linéaire en Invar avec deux miroirs d'une réflectivité de 96%, contenant une lame à Brewster. Sa finesse mesurée vaut  $\mathcal{F} = 58$ , son intervalle spectral libre 375MHz. Une petite partie du faisceau laser est envoyé dans ce Fabry-Perot externe. Seule la polarisation à l'angle de Brewster traverse la cavité et subit alors un déphasage dépendant de la fréquence de la cavité. La polarisation perpendiculaire est totalement réfléchi à l'extérieur. La superposition des deux faisceaux n'a donc seulement une polarisation linéaire qu'hors résonance et exactement à résonance. Sur les flancs de la résonance sa polarisation devient elliptique avec une hélicité différente pour les deux cotés de la résonance. L'intensité du faisceau est mesurée avec un photodétecteur à travers une lame quart-d'onde, dont l'axe rapide coïncide avec l'axe de la lame à incidence de Brewster. Le signal que nous obtenons est la dérivée de la fonction d'Airy superposée avec l'intensité moyenne du faisceau d'asservissement. Après avoir soustrait l'intensité moyenne nous disposons d'une courbe de dispersion

pour asservir notre laser en fréquence. Nous arrivons à réduire le signal d'erreur d'un facteur 10 autour de zéro avec notre asservissement. Nous estimons ainsi que la largeur spectrale du laser est inférieure à 100kHz. Ceci est suffisamment petit par rapport à la largeur de la transition atomique qui vaut  $2\gamma/2\pi = 5.2\text{MHz}$  et à la largeur de la cavité.

La résonance du Fabry-Perot est ensuite asservie sur la fréquence de transition atomique à l'aide d'une résonance d'absorption saturée du césium.

Afin de changer la fréquence du laser, le faisceau est envoyé dans un modulateur acousto-optique (AO1, fréquence centrale  $200\text{MHz} \pm 30\text{MHz}$ ) avant d'arriver au niveau de la cellule d'absorption saturée. Ce modulateur décale la fréquence du faisceau de  $\nu_1 = 190\text{MHz}$  vers les basses fréquences. Le montage d'absorption saturée asservit le laser sur la fréquence de la transition  $6S_{1/2}F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}F' = 5$ . Le faisceau qui sort de la cavité laser est alors décalé de 190MHz vers le côté bleu de la transition.

Les faisceaux pièges ont un désaccord de  $\Delta_{\text{piège}} = 2.5\gamma$  correspondant à 13MHz vers le côté rouge de la transition piégeante (aussi  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5$ ). Pour cela nous décalons la fréquence du faisceau laser avec un deuxième modulateur acousto-optique (AO2, fréquence centrale  $200\text{MHz} \pm 30\text{MHz}$ ) de  $\nu_2 = 203\text{MHz}$  vers les basses fréquences. La puissance disponible pour le piégeage est de l'ordre de 400mW réglable pour 1W du laser Titane-Saphir.

Le faisceau qui traverse le deuxième modulateur acousto-optique sans être dévié ni décalé en fréquence (ordre zéro) nous sert de faisceau sonde. Il traverse un troisième modulateur (AO3, fréquence centrale  $60\text{MHz} \pm 20\text{MHz}$ ) avec lequel nous ramenons la fréquence du faisceau sonde plus près de la résonance atomique. Le désaccord du faisceau sonde peut alors être choisi sur une plage de  $-42\gamma \leq \Delta_{\text{sonde}} \leq -58\gamma$ , où le signe moins correspond à un désaccord vers les plus hautes fréquences de la transition atomique. Nous avons effectué la plupart de ces mesures préliminaires avec un faisceau sonde décalé de  $-44\gamma$  du côté bleu de la transition.

### 3.3 Le piège magnéto-optique

Notre piège magnéto-optique est un piège à césium en cellule, qui consiste en trois faisceaux laser rétro-réfléchis dans une configuration  $\sigma^+ - \sigma^-$  et d'un champ magnétique quadrupolaire. Contrairement à la plupart des autres pièges, notre piège doit fournir un grand nombre d'atomes dans le faisceau sonde à une température inférieure à  $T_{\text{Doppler}}$  telle que la largeur Doppler soit plus petite que la largeur de la transition atomique ( $T_{\text{Doppler}} \simeq 80\text{mK}$ ). La première condition implique la fabrication d'un nuage atomique assez gros dont la température est en fait plus élevée que la limite du refroidissement Doppler, qui vaut  $T_{\text{D}} \simeq 125\mu\text{K}$ . Mais, elle reste toujours bien inférieure à la température  $T_{\text{Doppler}}$ . En fait, la température du piège croît proportionnellement au nombre d'atomes avec une loi de puissance [131]

$$T_{\text{piège}} \simeq 1.2 \cdot N^{1/3} \frac{\Omega}{\delta_{\text{piège}}} \quad (3.1)$$

où  $\Omega$  est la fréquence de Rabi des faisceaux pièges et  $\delta_{\text{piège}}$  leur désaccord par rapport à la transition atomique normalisé par  $\gamma$ .

Les atomes sont piégés sur la transition  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5$  dans une cellule de césium, dont la pression est inférieure à  $10^{-9}$  Torr. La cellule contient neuf fenêtres prismatiques et traitées antireflet, dont six laissent passer les faisceaux pièges et deux le faisceau sonde dans la cavité, qui est construite autour de la cellule. Nous observons le nuage atomique par une fenêtre à l'aide d'une caméra C.C.D. D'autres détails sur la cellule peuvent être trouvés dans la référence [129].

Le champ magnétique est produit à l'aide de deux bobines verticales à une distance de 15cm dans une configuration anti-Helmholtz. Le nuage atomique se trouve au milieu de cette configuration. Les bobines produisent un gradient du champ magnétique vertical de 10 – 12G/cm en fonction du courant appliqué. Afin de pouvoir ajuster la position du nuage atomique dans la cavité et de compenser les champs magnétiques résiduels, nous disposons aussi de trois paires de bobines de Helmholtz, placées autour de la cellule.

Les atomes qui s'échappent du piège en étant excités vers le niveau  $6P_{3/2}, F' = 4$  et en retombant dans le niveau fondamental  $6S_{1/2}, F = 3$  sont ramenés sur la transition piégeante à l'aide d'une diode laser (Spectra SDL). Ce laser est stabilisé en température et délivre une puissance de  $20\text{mW}/\text{cm}^2$ , dont  $17\text{mW}/\text{cm}^2$  arrivent au niveau du piège et se partagent sur les trois bras. La fréquence du laser est fixée sur la transition  $6S_{1/2} \rightarrow 6P_{3/2}$  du césium par un asservissement sur une absorption en vapeur.

Avec ces caractéristiques, nous avons observé régulièrement des nuages atomiques d'un diamètre de l'ordre de 1cm avec un nombre total d'atomes piégés d'environ  $10^9$ . Nous avons estimé la température des atomes avec une méthode qui sera décrite dans le chapitre 7 de ce mémoire. Cette température est de l'ordre de quelques mK, ce qui est en bon accord avec la relation (3.1).

### 3.4 La cavité

La cavité est une cavité linéaire dans une configuration semi-confocale. Elle comprend un miroir d'entrée-sortie fixe (coefficients de réflexion et transmission en amplitude  $r_1, t_1$ ) et un miroir de haute réflectivité (coefficients  $r_2, t_2$ ), fixé sur une cale piézo-électrique permettant de balayer la longueur de la cavité. Les deux miroirs sont séparés d'une distance de  $L = 25\text{cm}$ . L'intervalle spectral libre de la cavité est alors

$$\Delta\nu_{\text{libre}} = \frac{c}{2L} = 600\text{MHz} \quad (3.2)$$

d'où on déduit le temps  $\tau$  pour un aller-retour dans la cavité

$$\tau_c = \Delta\nu_{\text{libre}}^{-1} = 1.7\text{ns} \quad (3.3)$$

La cavité se trouve à l'extérieur de la cellule du césium et fait un angle de  $45^\circ$  avec les faisceaux pièges horizontaux, qui se propagent dans le même plan. Deux des

fenêtres prismatiques de la cellule se trouvent ainsi à l'intérieur de la cavité. Les pertes associées à ces fenêtres ne sont que de l'ordre de 1% en intensité, grâce à un traitement antireflet. Nous en avons tenu compte dans le calcul de la valeur théorique de la finesse en introduisant un paramètre  $t'$  qui représente ces pertes en amplitude.

$$\mathcal{F} = \pi \frac{\sqrt{r_1 r_2 t'^2}}{1 - r_1 r_2 t'^2} \quad (3.4)$$

Le paramètre le plus important pour notre expérience est la bande passante ou largeur de la cavité  $\kappa$ , c'est à dire l'intervalle en fréquence à l'intérieur duquel la cavité peut avoir une influence sur le bruit quantique. Sa valeur en MHz est directement liée à la finesse par

$$\frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{2\tau_c \mathcal{F}} \quad (3.5)$$

Au cours des diverses expériences, nous avons essayé deux configurations différentes de la cavité, en changeant le miroir de couplage. Nous allons dans la suite donner toutes les caractéristiques importantes pour l'expérience, c'est à dire la longueur de Rayleigh, le waist, le degré de dégénérescence des modes, la largeur de la cavité et sa finesse. Les calculs de la longueur de Rayleigh, du waist de la cavité et de l'intervalle spectral entre modes ont été effectués à partir des formules de Kogelnik *et al.* [133].

### 3.4.1 Première configuration

#### • Caractéristiques des miroirs

	Miroir de couplage	Miroir arrière
Réfectivité	$r_1^2 = 0.9$	$r_2^2 = 0.998$
Rayon de courbure	$R_1 = \infty$	$R_2 = 500\text{mm}$

#### • Caractéristiques de la cavité

Longueur de la cavité	$L$	25cm
Longueur de Rayleigh	$z_R$	25cm
Waist	$w_0$	260 $\mu\text{m}$
Distance des modes transverses	$\Delta\nu_{\text{libre}}$	150MHz
Demi-largeur de la cavité	$\kappa/2\pi$	5MHz
Finesse	$\mathcal{F}$	53

Ceci étant une configuration semi-confocale, le waist du faisceau se trouve sur le miroir plan et pas au milieu de la cavité où est le nuage atomique. Cela devra être pris en compte plus tard pour calculer le nombre d'atomes dans le faisceau.

### 3.4.2 Deuxième configuration

#### • Caractéristiques des miroirs

	Miroir de couplage	Miroir arrière
Réfectivité	$r_1^2 = 0.8$	$r_2^2 = 0.998$
Rayon de courbure	$R_1 = 1000\text{mm}$	$R_2 = 500\text{mm}$

#### • Caractéristiques de la cavité

Longueur de la cavité	$L$	25cm
Longueur de Rayleigh	$z_R$	24cm
Waist	$w_0$	255 $\mu\text{m}$
Distances des modes transverses	$\Delta\nu_{\text{libre}}$	174MHz
Demi-largeur de la cavité	$\kappa/2\pi$	10MHz
Finesse	$\mathcal{F}$	27

### 3.4.3 Adaptation de modes

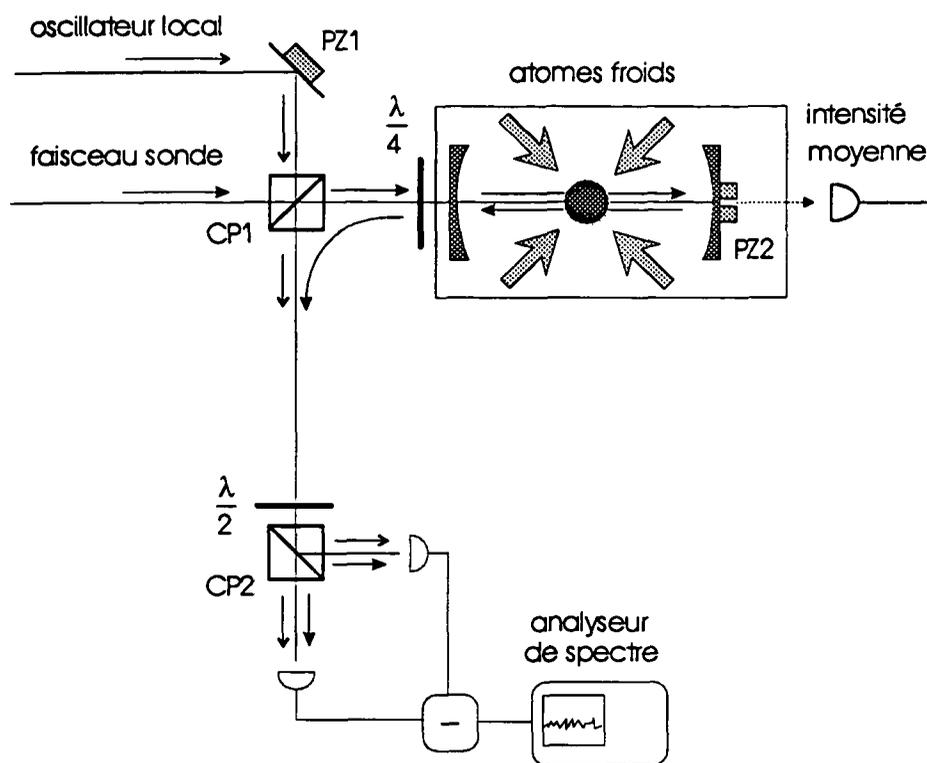
Afin de coupler un maximum d'intensité du faisceau sonde dans le mode fondamental ( $\text{TEM}_{00}$ ) de la cavité, la géométrie du faisceau incident doit être adaptée au waist de la cavité. Dans ce but nous utilisons deux lentilles d'une focale de 400mm et 500mm à une distance de 74cm et 64cm de la position du waist de la cavité, respectivement. Avec cette méthode, nous arrivons à coupler une puissance de l'ordre de  $\eta_{\text{TEM}_{00}} \simeq 96\%$  dans le mode fondamental.

## 3.5 Réglage du système bistable

La cavité est montée autour du piège de telle manière que le nuage atomique puisse être centré au milieu de la cavité. Elle est traversée par le faisceau sonde, dont nous voulons étudier les fluctuations quantiques.

Le faisceau sonde entre dans la cavité avec une polarisation circulaire. Nous allons supposer pour la suite que sa polarisation est  $\sigma^+$ . Il interagit avec le nuage atomique et sort de la cavité du même côté, par lequel il y était entré comme indiqué sur la figure 12. Bien que la cavité soit une cavité à une entrée-sortie, nous pouvons utiliser la faible transmission de l'autre miroir pour suivre l'intensité moyenne dans la cavité.

Le faisceau sortant est séparé du faisceau incident par un circulateur optique: après avoir traversé le cube polariseur le faisceau sonde est polarisé linéairement. Une lame quart-d'onde rend sa polarisation circulaire avant son entrée dans la cavité. La réflexion sur le miroir fixe et une deuxième traversée de la lame quart-d'onde dans le sens opposé reproduisent une polarisation linéaire, mais tournée de  $90^\circ$  par rapport à celle du faisceau incident. Le faisceau sortant part alors de l'autre côté du cube polariseur, où il est superposé avec l'oscillateur local. Les fluctuations du faisceau sonde sont



**Fig. 12:** Réalisation expérimentale de la détection homodyne. Le faisceau sonde et l'oscillateur local sont superposés au niveau du premier cube polariseur CP1; le faisceau est ensuite séparé en deux parties d'intensité égale par la lame demi-onde et le deuxième cube polariseur CP2. La phase de l'oscillateur local et de la cavité peuvent être balayées grâce à deux cales piézo-électriques PZ1 et PZ2.

mesurées ensuite à l'aide d'une détection homodyne, qui sera décrite dans le prochain paragraphe.

Le miroir arrière de la cavité est monté sur un cristal piézo-électrique afin de pouvoir balayer la cavité autour la résonance en changeant sa longueur.

Pour cette expérience, il est d'une grande d'importance d'avoir assez d'atomes à l'intérieur du faisceau sonde. Il faut donc que le nuage atomique soit bien centré au milieu de la cavité, en particulier dans la direction transversale. Une méthode pour contrôler le centrage consiste à observer la courbe de bistabilité en transmission en balayant la cavité. Plus le nombre d'atomes qui interagissent avec le faisceau est grand, plus le saut d'intensité au voisinage du point de bistabilité est raide et plus la hauteur du pic bistable est petite. Une autre méthode pour juger la qualité du réglage utilise le "laser à atomes froids" [134]. Cet effet laser provient du gain dû aux processus Raman entre les atomes et les faisceaux pièges. Son fonctionnement est complètement indépendant du faisceau sonde, et il peut osciller en son absence. La largeur du gain du milieu est extrêmement étroite (de l'ordre de 150kHz), en particulier beaucoup plus étroite que la largeur de la cavité, car il s'agit d'une transition entre deux sous-niveaux de l'état fondamental. Dans ce cas particulier, c'est donc le milieu qui détermine la

fréquence du laser et non pas la cavité. Le laser à atomes froids fonctionne alors sur tous les modes transverses et longitudinaux de la cavité et est facile à reconnaître quand on balaye la longueur de la cavité. Sa puissance est d'autant plus forte que le nombre d'atomes est grand. Dans un fonctionnement optimal, nécessitant une forte puissance des faisceaux pièges, beaucoup d'atomes de césium dans la cellule et un centrage optimal du nuage, le laser peut émettre jusqu'à  $30\mu\text{W}$ . C'est donc en cherchant à maximiser la puissance de ce laser, qu'on optimise habituellement le réglage du piège à l'intérieur de la cavité.

### 3.6 La détection homodyne

Les premières mesures du bruit pour ce système ont été effectuées au début de l'année 1992 [129]. Il s'agissait de mesures de bruit d'intensité. Cette méthode ne s'est pas montrée bien adaptée à nos besoins pour plusieurs raisons. D'abord la puissance du faisceau sonde est de l'ordre de dizaines à quelques centaines de  $\mu\text{W}$  et donc très faible. Le bruit quantique standard d'un tel faisceau est difficile à détecter directement et cela limite le rapport signal sur bruit et donc la sensibilité pour la mesure du bruit quantique. De plus, un système bistable réduit le bruit sur une quadrature quelconque, qui de plus change au cours du balayage de la cavité. Par conséquent, il fallait être capable de mesurer les fluctuations quantiques sur *toutes* les quadratures et non seulement sur l'intensité. Ceci augmente considérablement la probabilité d'observer une réduction du bruit. Dans ce but nous avons mis au point une détection homodyne, que nous allons décrire en détail maintenant.

#### 3.6.1 Réalisation expérimentale

Le faisceau sonde qui sort de la cavité est superposé avec un oscillateur local ayant une puissance à peu près cent fois plus grande que lui et une polarisation linéaire orthogonale à celle du faisceau sonde. La superposition des deux faisceaux se fait au niveau du cube polariseur (CP1), comme indiqué sur la figure 12. Les deux faisceaux se propagent alors ensemble avec des polarisations orthogonales.

L'oscillateur local a été prélevé sur le trajet du faisceau sonde et séparé à l'aide d'un miroir (réflectivité  $r^2 = 0.95$ ). Afin de choisir la quadrature mesurée, ce miroir est monté sur une cale piézo-électrique, qui permet de balayer périodiquement la phase de l'oscillateur local.

L'hétérodynage est réalisé par une lame demi-onde et un cube polariseur (CP2) comme indiqué sur la figure 12. La lame demi-onde est réglée pour que les polarisations des deux faisceaux soient à  $45^\circ$  par rapport aux deux axes principaux du cube polariseur. La moitié de l'intensité de chaque faisceau passe par un côté du cube. Si pour une voie les champs de l'oscillateur local et du faisceau sonde sont en phase, pour l'autre voie ils sont déphasés de  $\pi$ :

$$\hat{E}_A = \hat{E}_{OL} + \hat{E}_{FS} \quad (3.6)$$

$$\hat{E}_B = \hat{E}_{OL} - \hat{E}_{FS}$$

L'ensemble de la lame et du cube polariseur produit donc exactement le même effet qu'une lame semi-réfléchissante.

Le signal sur chaque voie est mesuré par un photodétecteur (PDA et PDB). Chaque détecteur est une photodiode (décrite plus loin) suivie par un amplificateur muni de deux sorties, dont l'un correspond à la partie basse fréquence du signal (dc), qui permet de mesurer l'intensité lumineuse arrivant sur le détecteur. L'autre partie fournit la partie haute fréquence (ac), dans laquelle le signal du bruit quantique de la lumière est traduit en fluctuations du courant. La différence des signaux alternatifs est faite par un circuit électronique (Mini-Circuits ZSCJ-2-2, bande-passante 10kHz–20MHz) avec un déséquilibre en amplitude  $< 0.1\text{dB}$  et des pertes d'insertion  $< 0.9\text{dB}$ . Le signal à la sortie du circuit correspond d'après la relation (2.10) à une amplitude de bruit du faisceau sonde superposée au champ de l'oscillateur local. Le signal de différence est envoyé à un analyseur de spectre (Tektronix 2753P) et analysé à une fréquence fixe du bruit (position "zero span") avec une bande passante donnée. Le signal est affiché en échelle linéaire ( $\mu\text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$ ) sur l'oscilloscope numérique, ce qui permet d'assurer la synchronisation des mesures de bruit et de l'intensité moyenne, et transféré par liaison GPIB sur un ordinateur. Par construction, l'analyseur ne permet pas de regarder directement le signal du bruit en puissance et nous enregistrons un signal de bruit en amplitude que nous traitons ensuite. De plus, nous ne mesurons pas un spectre de bruit, mais nous étudions l'amplitude des fluctuations à fréquence fixe au cours du temps. Cela est lié au fait que la cavité est balayée pendant la mesure, alors que la phase de l'oscillateur locale est modifiée périodiquement dans le temps pour étudier toutes les quadratures dans une seule mesure. Il n'est donc pas possible d'enregistrer directement un spectre de bruit dans ces conditions. Il serait possible en revanche de le tracer point par point.

### 3.6.2 Détecteurs de bruit

Dans des expériences qui ont pour but une mesure des fluctuations quantiques d'un faisceau laser, un soin particulier doit être apporté au choix des photodétecteurs et à l'amplification du signal de bruit. Si le flux de photons est assez important, il est possible de mesurer le signal avec des photodiodes plutôt qu'avec des photomultiplicateurs. Dans la mesure où les fluctuations de la lumière doivent être traduites en fluctuations du courant par le système de détection, le grand avantage des photodiodes par rapport aux photomultiplicateurs est d'avoir un rendement quantique (dans ce cas un facteur de conversion photon-électron) proche de 1. De plus il faut que la diode soit suffisamment rapide (ayant alors une capacité faible) pour pouvoir suivre les variations aux fréquences qui nous intéressent de 2 à 15MHz. Enfin, il est aussi important que le

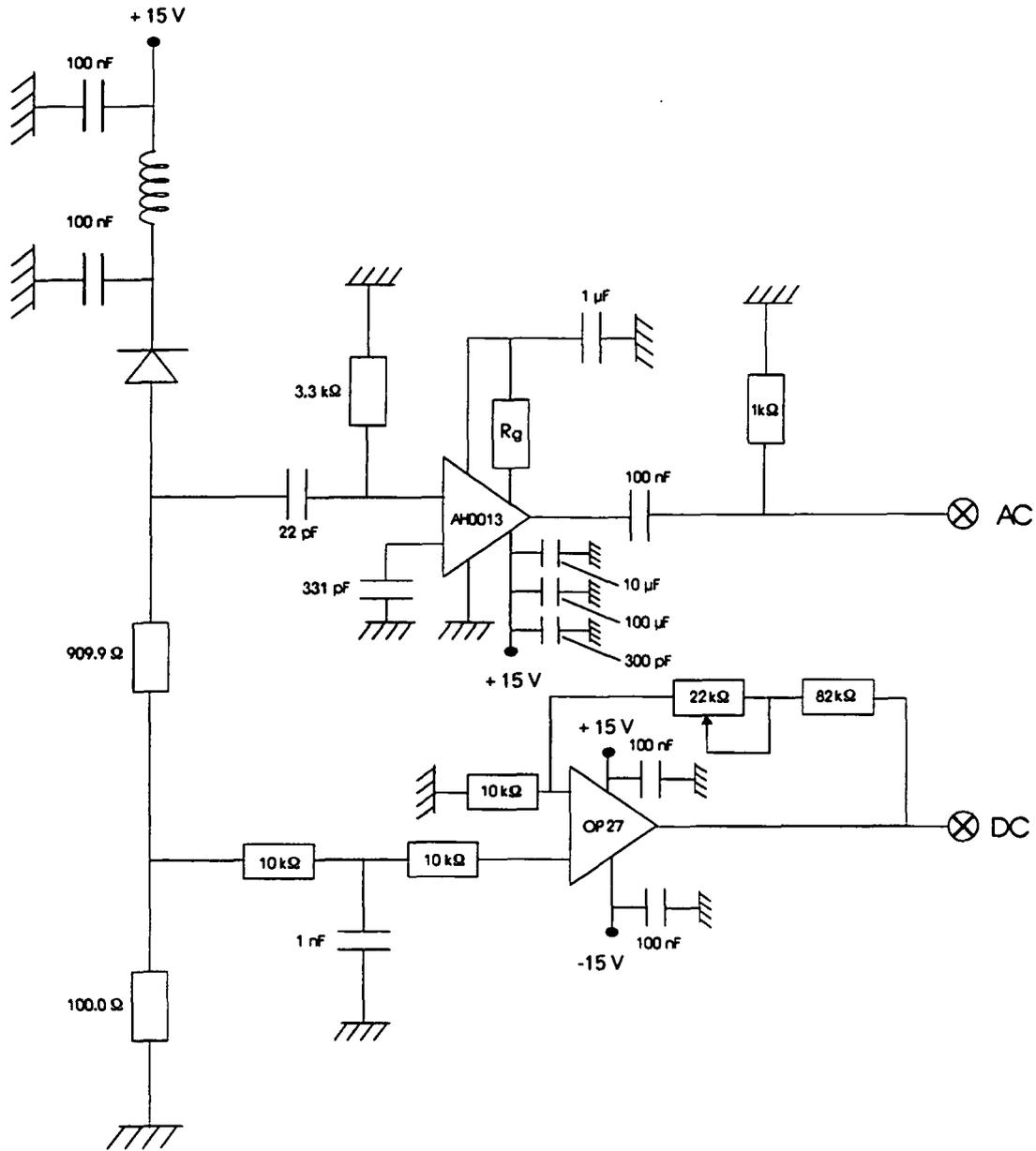
courant d'obscurité ainsi que les fluctuations propres de la diode soient bien inférieurs au signal attendu.

Notre choix s'est d'abord porté sur les diodes EG&G FFD100, des diodes *p-i-n* au silicium avec un courant d'obscurité très faible (5nA), un bruit propre de l'ordre de  $40 \cdot 10^{-15} \text{A}/\sqrt{\text{Hz}}$  à 1kHz et un rendement quantique nominal spécifié à mieux que  $\eta_{\text{diode}} = 0.88$ . La diode est polarisée en inverse par une tension de 15V, ce qui donne une capacité propre d'environ  $C_P = 8.5\text{pF}$  et un temps de montée de 1ns.

Une grande attention doit être consacrée également à l'amplification du signal du bruit, qui est une source potentiellement importante d'excès de bruit dans notre système de mesure. Le circuit du détecteur est schématisé sur la figure 13. Le signal en courant délivré par la diode est converti en tension par une résistance de charge  $R_C = 1\text{k}\Omega$  et séparé en une partie continue et une partie haute fréquence par des filtres RC. La résistance de charge détermine la bande passante de la diode, qui correspond pour notre choix à  $f_{\text{diode}} \simeq 19\text{MHz}$ . Elle a été choisie pour que la bande passante soit plus large que la gamme de fréquence (donnée par la largeur de la cavité) dans laquelle nous attendons nos signaux.

La partie continue passe par un filtre passe-bas (fréquence de coupure de l'ordre de 16kHz) et est ensuite amplifiée par un amplificateur opérationnel (OEI OP27) avec un taux de conversion de 1mA/V.

La partie alternative du signal passe par un amplificateur bas bruit (OEI AH0013), qui amplifie le signal par un facteur 5. Le bruit propre de cet amplificateur est spécifié à  $2\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Pour ne pas saturer l'amplificateur, les basses fréquences du signal sont filtrées par un filtre passe-haut (fréquence de coupure 850kHz) avant l'entrée de l'amplificateur. Le gain de l'amplificateur a été choisi assez élevé pour que le signal en tension à sa sortie soit plus important que le bruit thermique de la résistance de charge. Pour une intensité lumineuse de  $800\mu\text{W}$  le rapport signal sur bruit est supérieur à 6dB. Le rapport signal sur bruit est une fonction du logarithme de la puissance lumineuse. Une manière de l'améliorer consiste alors à augmenter la puissance de l'oscillateur local. La limite supérieure de la puissance est donnée par la saturation de la partie alternative du détecteur, qui est en générale beaucoup plus faible que l'intensité de saturation de la partie continue. Pour les circuits électroniques des détecteurs comme décrits auparavant, nous avons trouvé une intensité de  $800\mu\text{W}$  comme intensité de saturation pour le bruit.



**Fig. 13:** Circuit des détecteurs du bruit. La partie basse fréquence sert à mesurer l'intensité moyenne. La partie haute fréquence transforme les fluctuations de la lumière en fluctuations du courant. Les éléments électroniques dans les deux détecteurs sont identiques à l'exception de la valeur de la résistance de gain  $R_C$  ( $R_C^1 = 384\Omega$ ,  $R_C^2 = 417\Omega$ ). Le gain de la partie continue est ajusté en changeant la valeur de la résistance du potentiomètre.

### 3.6.3 Equilibrage des détecteurs

L'équilibrage des détecteurs comporte deux étapes, l'équilibrage électronique et l'équilibrage optique. Les circuits électroniques ont été d'abord équilibrés en l'absence de photodiodes par la mesure du gain pour une tension livrée par un générateur. Les courbes de gain des deux parties continues étaient égales à 1% près. Pour les parties haute fréquence, nous avons trouvé un taux de réjection de l'ordre de 28dB.

L'équilibrage optique comporte d'abord une comparaison des rendements quantiques des détecteurs, respectivement  $\eta_1 = 0.897$  et  $\eta_2 = 0.891$ . Ces valeurs peuvent être améliorées, si on récupère la première réflexion à la surface de la diode par un miroir et qu'on la renvoie sur la diode. Nous avons ainsi obtenu des rendements quantiques de  $\eta_1 = 0.977$  et  $\eta_2 = 0.971$  respectivement.

L'équilibrage de la partie haute fréquence se fait en modulant l'intensité du faisceau laser sur toute la bande passante de la diode à l'aide d'un modulateur électro-optique et d'une lame demi-onde. La modulation produit des variations du bruit de l'ordre de 40dB sur le signal d'un seul détecteur. Sur la différence des signaux nous avons observé des taux de réjection de l'ordre de 18dB entre 2 et 20MHz.

### 3.6.4 Rendement pour la mesure

Le rendement quantique total pour la mesure comporte plusieurs facteurs différents. Le facteur qui limite d'abord le rendement quantique de la mesure du bruit est le rendement de la diode  $\eta_{\text{diode}}$ , que nous avons déjà spécifié dans le paragraphe précédent. A part de cela, il y a d'autres facteurs qui peuvent dégrader la qualité de la mesure, comme un accord de modes imparfait entre la cavité et le faisceau sonde ou des pertes sur le faisceau sonde. Nous allons évaluer les rendements associés à ces processus par la suite.

#### L'accord de modes

Pour récupérer toute l'information sur le bruit quantique du faisceau sonde, il est extrêmement important que les deux faisceaux sonde et oscillateur local soient superposés le mieux possible. Par conséquent, il faut que leurs géométries soient bien adaptées l'une à l'autre.

Dans ce but, nous optimisons la position du miroir par lequel l'oscillateur est prélevé, pour égaliser les trajets optiques parcourus par les deux faisceaux. Le degré de superposition est mesuré en regardant les interférences entre les deux faisceaux sur un seul des détecteurs PDA ou PDB. La valeur théorique de l'amplitude totale d'interférences sur l'intensité moyenne est donnée par

$$\Delta_{\text{theo}} = 2 \cdot |E_{OL}| \cdot |E_{FS}| \quad (3.7)$$

Nous mesurons alors l'amplitude totale du signal d'interférence ainsi que les deux intensités moyennes et comparons les résultats. L'accord de modes est excellent puisque nous obtenons en général  $\eta_{\text{batt}}^{(\text{hr})} = \Delta_{\text{ex}}/\Delta_{\text{theo}} \simeq 0.98$  quand la cavité est hors résonance.

En revanche, quand la cavité devient résonnante, l'accord est moins bon. En effet, le faisceau entrant a une section légèrement elliptique après avoir traversé les divers éléments optiques. La cavité filtre ce mode et le rend plus proche d'un mode gaussien. Le faisceau sortant de la cavité est alors moins bien adapté au mode de l'oscillateur local que le faisceau réfléchi. Cet effet est d'autant plus grave que la cavité est mal adaptée au faisceau sonde. Le désaccord spatial entre les deux modes introduit des pertes sur les interférences et diminue alors le contraste de frange dans la même proportion. La relation suivante montre la valeur maximale de l'amplitude des franges d'interférence à résonance en fonction de l'amplitude hors résonance et du matching de la cavité:

$$\eta_{\text{batt}}^{(\text{res})} = \eta_{\text{batt}}^{(\text{hr})} \cdot \frac{(\xi_0 + 1) \cdot \eta_{\text{TEM}_{00}} - 1}{\sqrt{(\xi_0^2 - 1) \cdot \eta_{\text{TEM}_{00}} + 1}} \quad (3.8)$$

$\eta_{\text{TEM}_{00}}$  représente comme auparavant la proportion d'énergie dans le mode fondamental.  $\xi_0^2$  est le rapport entre l'intensité sortante à résonance et l'intensité incidente et dépend de la configuration de la cavité choisie. Le calcul complet de cet effet se trouve dans l'Appendice I. Le résultat de ce calcul permet de quantifier l'accord de modes entre le faisceau entrant et la cavité. Il permet en particulier de mesurer précisément les pertes dans la cavité.

Cependant, il n'est valable que pour le champ moyen. Les fluctuations sont transformées d'une manière différente par la cavité. Il n'est donc pas possible de déduire de la dégradation des battements entre l'oscillateur local et le faisceau sonde un rendement quantique correspondant. Nous considérons par conséquent par la suite comme rendement quantique de la mesure du bruit, dû à l'accord de modes imparfait de la cavité,  $\eta_{\text{TEM}_{00}}$  lui-même.

### Pertes sur le faisceau sonde

Afin d'estimer un rendement quantique total pour la mesure du bruit, il faut tenir compte des pertes totales sur l'intensité du faisceau sonde dans la cavité et de la sortie de la cavité jusqu'au niveau de la détection. Dans notre cas, les pertes dans la cavité sont dues aux deux fenêtres de la cellule qui se trouvent dans son intérieur. Elles ne sont que de l'ordre de 1%. Cette valeur a été mesurée en comparant le recouvrement entre l'oscillateur local et le faisceau sonde hors résonance et à résonance de la cavité. Nous avons trouvé que l'amplitude maximale d'interférences de 98% hors résonance était dégradée à une valeur de 91% à résonance. Connaissant  $\eta_{\text{TEM}_{00}} = 0.96$  nous pouvons en déduire un coefficient des pertes autre que les pertes par le miroir de couplage de  $p_1 \simeq 1\%$  (voir l'Appendice I). Les pertes sur le faisceau sonde sortant de la cavité sont essentiellement dues aux réflexions sur la seconde face du miroir de couplage à l'extérieur de la cavité. Les réflexions du faisceau à l'entrée n'ont donc aucune influence sur la réduction du bruit, car elles se produisent avant l'interaction. En revanche, les réflexions à la sortie dégradent l'état comprimé. Les pertes dans ce cas atteignent  $p_2 \simeq 2 - 3\%$ . On peut tenir compte de ces deux coefficients des pertes en introduisant un rendement quantique effectif de la mesure [135]

$$\eta_{\text{pertes}} = 1 - p_1 - p_2 \quad (3.9)$$

## 3.7 Résultats expérimentaux

### 3.7.1 Choix des paramètres

Afin d'avoir une première idée de la région de l'espace de paramètres où nous pouvons espérer une réduction du bruit, nous présentons maintenant quelques arguments généraux qui nous permettront de choisir des paramètres expérimentaux favorables.

Il y a tout d'abord des paramètres invariables de notre système, qui sont le taux d'amortissement du dipôle atomique  $\gamma$  et la largeur de la cavité  $\kappa$ , puisqu'ils sont fixés par le choix du milieu atomique ainsi que de la cavité.

Un paramètre important pour l'interaction entre le faisceau sonde et les atomes est le désaccord  $\delta$  du faisceau sonde par rapport à la transition atomique. Pour exciter autant que possible une seule transition et ainsi réaliser l'hypothèse d'atomes à deux niveaux, nous devons examiner l'effet des autres transitions  $6S_{1/2} \rightarrow 6P_{3/2}$  dans le césium. En particulier, notre traitement ne fait pas de distinction entre un désaccord vers le bleu de la transition ( $\delta < 0$ ) et un désaccord vers le rouge ( $\delta > 0$ ). Or, le niveau le plus proche de l'état  $6P_{3/2}, F' = 5$  est le niveau  $6P_{3/2}, F' = 4$  vers les basses fréquences. Par conséquent, le désaccord est limité vers le côté rouge par la condition de ne pas trop exciter le niveau immédiatement inférieur. Au-dessus de l'état  $6S_{3/2}, F' = 5$  il n'existe plus d'autres niveaux. On pourrait en déduire qu'on peut augmenter le désaccord vers les hautes fréquences autant que l'on veut. Mais, il faut aussi tenir compte du niveau  $6P_{3/2}, F' = 4$ , car si le désaccord entre la fréquence du laser et celle de la transition  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5$  vers le côté bleu est assez grand, il devient de l'ordre ou supérieur à l'intervalle en fréquence entre les deux états  $6P_{3/2}, F' = 4$  et  $6P_{3/2}, F' = 5$ . Dans ce cas, l'excitation par le laser sonde de la transition  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 4$  ne peut plus être négligée. Nous allons calculer les paramètres pour lesquels l'excitation des atomes dans le niveau  $6P_{3/2}, F' = 4$  reste négligeable. Le rapport entre les moments dipolaires pour les deux états est donné par (voir aussi l'Appendice IV)

$$d_{F=4, F'=4}^2 \simeq 0.5 \cdot d_{F=4, F'=5}^2 \quad (3.10)$$

Pour ne pas trop exciter la transition  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 4$ , les taux d'absorption doivent obéir à la condition suivante

$$\frac{d_{F=4, F'=4}^2}{\delta_{F=4, F'=4}^2} \ll \frac{d_{F=4, F'=5}^2}{\delta_{F=4, F'=5}^2} \quad (3.11)$$

Or, l'intervalle en fréquence entre l'état  $6P_{3/2}, F' = 4$  et  $6P_{3/2}, F' = 5$  normalisé par la demi-largeur  $\gamma$  de la transition envisagée vaut

$$\frac{\Delta\nu}{\gamma} = 97 \quad (3.12)$$

Les deux désaccords sont alors reliés par

$$\delta_{F=4, F'=4} = 97 \pm \delta_{F=4, F'=5} \quad (3.13)$$

où le signe - correspond à une excitation dans le rouge et le signe + à une excitation dans le bleu de la transition  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5$ . Nous déduisons les deux conditions suivantes pour le désaccord  $\delta \equiv \delta_{F=4, F'=5}$

$$|\delta| \ll \begin{cases} 58 \text{ (désaccord rouge)} \\ 331 \text{ (désaccord bleu)} \end{cases} \quad (3.14)$$

Après avoir fixé le régime du désaccord, nous allons maintenant étudier pour quelles valeurs de la coopérativité la réduction du bruit quantique est la plus favorable. Dans ce but, nous allons examiner l'influence du milieu atomique, en particulier son couplage au mode fondamental et aux autres mode de la cavité, en plus de détail. Il est connu depuis longtemps qu'un état comprimé est très sensible aux pertes. En effet, ces pertes correspondent à un couplage à des modes vides du rayonnement qui fait entrer de nouvelles fluctuations dans le système. Celles-ci ont tendance à égaliser les fluctuations des différentes quadratures et donc à détruire la réduction du bruit. Nous pouvons distinguer deux sortes de pertes dans notre système: il y a d'abord les pertes "utiles" qui sont dans notre cas données par le taux d'amortissement de la cavité; ce sont ces pertes qui nous permettent d'observer la réduction du bruit, tant que nous récupérons toute la lumière sortant de la cavité. Les pertes "inutiles" correspondent aux champs rayonnés ailleurs que dans notre système de détection. De ces arguments nous pouvons déduire immédiatement un paramètre qui limite la réduction du bruit dans notre système: c'est la proportion du champ rayonné par les atomes par émission spontanée dans les modes autres que le mode fondamental de la cavité qui conduit à une dégradation de la réduction du bruit à cause des fluctuations du vide des autres modes qui entrent par ce couplage dans le mode fondamental. Cet effet peut être caractérisé par un taux d'amortissement  $\kappa'$ , qui doit être comparé aux pertes "utiles", donc à la largeur de la cavité  $\kappa$ . Le rapport entre les deux est proportionnel au taux d'absorption des atomes au désaccord  $\delta$ , divisé par le coefficient de transmission, d'énergie  $T$  de la cavité

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = 2 \frac{g^2 N}{\gamma \delta^2 T} \quad (3.15)$$

où nous avons supposé  $\delta \gg 1$ . En utilisant la définition du paramètre de coopérativité  $C$

$$C = \frac{g^2 N}{\gamma T} \quad (3.16)$$

nous trouvons la relation simple

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = 2 \frac{C}{\delta^2} \quad (3.17)$$

Par conséquent, pour optimiser la réduction du bruit à désaccord fixe, nous devons respecter la limite supérieure pour le nombre d'atomes donnée par la relation (3.17)

$$2 \frac{C}{\delta^2} < 1 \quad (3.18)$$

Afin de permettre une interaction non linéaire suffisante pour générer une réduction du bruit, la valeur de la coopérativité ne doit pas être trop faible non plus. Pour voir un effet de bistabilité, le déphasage non linéaire accumulé pendant plusieurs aller-retours dans la cavité doit être du même ordre que la largeur de la cavité. Cette condition peut s'écrire

$$\phi_{\text{NL}} \simeq 1 \quad (3.19)$$

soit à l'aide de la relation (2.21) dans le chapitre 2

$$\frac{2C}{\delta} \cdot \frac{X}{\delta^2} \geq 1 \quad (3.20)$$

où  $X$  est l'intensité intracavité normalisée par l'intensité de saturation (et correspond alors au paramètre de saturation). De ces deux conditions, nous pouvons déduire une limite inférieure pour l'intensité intracavité  $X$  afin d'avoir une réduction du bruit importante

$$X \geq \delta \quad (3.21)$$

Remarquons toutefois que la bistabilité n'est pas une condition absolument nécessaire pour une réduction du bruit, puisque celle-ci peut être observée pour des intensités inférieures à celles qui donnent le régime de bistabilité. Par conséquent, pour observer une réduction du bruit significative, il n'est pas indispensable de satisfaire des relations (3.20) et (3.21). Mais, elles définissent la région la plus favorable en ce qui concerne la réduction du bruit.

Dans l'expérience, le paramètre de coopérativité est donné par le nombre d'atomes présents dans le faisceau sonde, qui lui, est déterminé par le fonctionnement de notre piège. Pour connaître la valeur de la coopérativité nous devons estimer le nombre d'atomes dans le faisceau sonde. Celui-ci peut être mesuré par deux méthodes. La première consiste à mesurer le déphasage linéaire produit sur le faisceau sonde en comparant la position des pics de résonance de la cavité avec et sans atomes. Le déphasage linéaire est proportionnel au déphasage pour un passage du faisceau sonde, comme spécifié dans la relation (2.20) dans le chapitre 2, divisé par le coefficient de transmission d'énergie  $T$  de la cavité

$$\phi_{\text{L}} = 2 \frac{g^2 N}{\gamma \delta T} \quad (3.22)$$

Le coefficient de couplage lumière-atome vaut  $g^2/2\pi = 4.24\text{Hz}$  dans notre cas. Nous mesurons le déplacement de la résonance  $\delta\omega$  en présence des atomes en unités de largeur de la cavité  $\kappa$ , pour lequel nous observons en général une valeur

$$\frac{\delta\omega}{\kappa} = \phi_L \simeq 5 \quad (3.23)$$

pour un désaccord  $\delta = -44$ . Avec  $\gamma/2\pi = 2.6\text{MHz}$  et  $T = 0.1$  (configuration (1) de la cavité) nous en déduisons un nombre d'atomes d'environ  $N \simeq 6.7 \cdot 10^6$  dans le faisceau sonde. Ceci correspond à une valeur du paramètre de coopérativité  $C$

$$C = \frac{g^2 N}{\gamma T} \quad (3.24)$$

de l'ordre de  $C \simeq 110$  en présence des faisceaux pièges. Comme les atomes interagissent en même temps avec les faisceaux pièges, nous pouvons supposer que le nombre d'atomes réel est encore plus élevé.

La deuxième méthode tire profit de l'effet non linéaire pour estimer le nombre d'atomes dans le faisceau sonde. La hauteur de la courbe de bistabilité dépend du nombre d'atomes, d'une part à cause de l'absorption du milieu, d'autre part par la déformation de la fonction d'Airy. Les deux effets sont inclus dans la théorie de bistabilité dispersive [103] et on peut déduire le nombre d'atomes du rapport de la hauteur des pics en absence et en présence des atomes de la manière suivante: Soit  $Y$  une variable proportionnelle à l'intensité incidente, normalisée par l'intensité de saturation et divisée par le coefficient de transmission d'énergie  $T$  de la cavité:

$$Y = \frac{4 I_{\text{in}}}{T I_{\text{sat}}} \quad (3.25)$$

et  $X$  l'intensité intracavité, normalisée par l'intensité de saturation:

$$X = s_0 = \frac{I_{\text{intra}}}{I_{\text{sat}}} \quad (3.26)$$

En l'absence des atomes, le maximum de la courbe de résonance est donné par  $Y$ , en présence des atomes il est ramené à  $X$ . Si les système saute de la branche haute vers la branche basse de la courbe de bistabilité, le rapport entre les deux grandeurs permet de déterminer le nombre d'atomes ainsi que la coopérativité par la relation suivante (voir Appendice II)

$$N = \frac{\gamma T}{g^2} \cdot \frac{1 + \delta^2 + 2X}{2} \left( \sqrt{\frac{Y}{X}} - 1 \right) \quad (3.27)$$

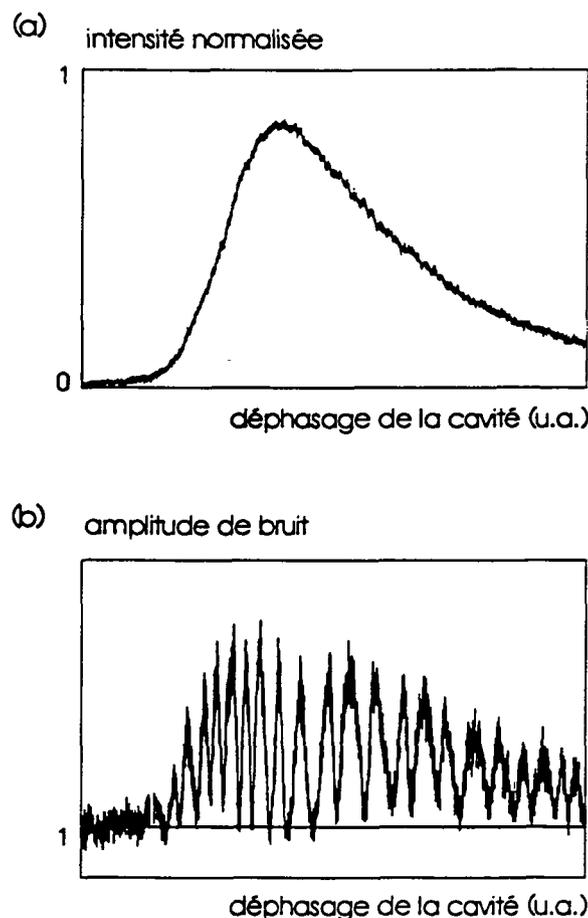
Nous avons observé typiquement des rapport de l'ordre  $Y/X \simeq 1.25$  pour une intensité incidente de  $Y = 50$  dans une cavité dans la configuration (1). Connaissant  $\gamma$ , nous en déduisons un nombre d'atomes de  $N \simeq 7.3 \cdot 10^6$  qui correspond à un paramètre de coopérativité de  $C \simeq 119$ . Cette valeur est en bon accord avec la valeur calculée par la première méthode. Les deux méthodes de mesure du nombre d'atomes sont expliqués en détail dans l'Appendice II.

Finalement, la bande de fréquence de bruit dans laquelle le système peut modifier le bruit quantique est de l'ordre de la bande passante de la cavité. Nous étudierons donc le bruit à des fréquences de  $\omega_{\text{bruit}}/2\pi \leq 5\text{MHz}$  pour la première configuration de la cavité et  $\omega_{\text{bruit}}/2\pi \leq 10\text{MHz}$  pour la deuxième configuration.

### 3.7.2 Signaux observés

Après avoir déterminé le régime des paramètres expérimentaux, nous présentons maintenant le comportement du système que nous avons observé avec ce premier montage.

En balayant la longueur de la cavité autour de la résonance, nous avons obtenu les courbes caractéristiques de la bistabilité. La figure 14(a) montre l'intensité trans-



**Fig. 14:** Intensité intracavité (a) et signal du bruit (b) quand la cavité est balayée lentement autour de la résonance. L'intensité intracavité est normalisée par l'intensité de saturation. Le niveau du bruit quantique standard est normalisé à 1. Les oscillations correspondent au balayage de la phase de l'oscillateur local. Quand la cavité est hors résonance (coté gauche des courbes), les fluctuations sont indépendantes de la phase de l'oscillateur local et le bruit est au shot noise. Quand le faisceau entre dans la cavité, les fluctuations des quadratures différentes sont transformées par le système bistable d'une manière différente et des oscillations apparaissent.

mise par le miroir arrière pendant que la cavité est lentement balayée sur la résonance. L'enregistrement de la courbe a été fait avec la cavité dans la configuration (2) pour un désaccord du faisceau sonde de  $\Delta/\gamma = \delta = -44$  et une intensité incidente de  $I_{\text{in}} = 50\mu\text{W}$ , la cavité étant balayée à une fréquence de  $f_{\text{cav}} = 0.5\text{Hz}$ . La puissance des faisceaux pièges était voisine de  $15\text{mW}/\text{cm}^2$ . La forme générale des courbes de bistabilité correspond au résultat prévu par la théorie utilisant des paramètres de l'expérience. En particulier, le coté des courbes où apparaissent les flancs abrupts est compatible avec une bistabilité due à la saturation de la transition atomique.

Le signal de bruit correspondant est montré sur la figure 14 (b). Nous avons enregistré le signal donné par l'analyseur de spectre en échelle linéaire sur un oscilloscope numérique. La courbe correspond alors à l'amplitude du bruit en fonction du décalage de la cavité. La fréquence d'analyse a été choisie égale à  $\omega_{\text{bruit}}/2\pi = 5\text{MHz}$ .

Quand la cavité est loin de la résonance, le faisceau sonde est totalement réfléchi vers l'extérieur. Ses fluctuations quantiques ne sont alors pas changées, et elles correspondent au bruit de photons standard, normalisé ici à 1. Comme ce bruit ne dépend pas de la phase du champ, il ne varie pas bien que la phase d'observation soit changée continûment en balayant la phase de l'oscillateur local durant toute la mesure. Dès que la cavité s'approche de la résonance, la lumière entre dans la cavité et interagit avec le nuage atomique. Cette interaction se manifeste par un bruit qui dépend de la phase d'observation: des oscillations apparaissent sur le signal de bruit, suivant la variation de phase de l'oscillateur local. Les maxima de ces oscillations correspondent au bruit quantique maximal, les minima au bruit quantique minimal. Tandis que le bruit maximal est beaucoup plus élevé que le niveau du shot noise, le bruit minimal ne descend pas au-dessous du bruit de photons standard.

Pour cette mesure, l'intensité de l'oscillateur local valait  $I_{OL} = 800\mu\text{W}$ , sa phase était balayée à une fréquence de l'ordre de  $f_{OL} \simeq 12\text{Hz}$ . Lors de ces mesures, la cavité était accordée en phase à mieux que  $\eta_{\text{TEM}_{00}} \simeq 0.96$ .

Une estimation du rendement quantique total donne ainsi

$$\eta_{\text{tot}} = \eta_{\text{pertes}} \cdot \eta_{\text{diode}} \cdot \eta_{\text{TEM}_{00}} \cdot \eta_{\text{batt}}^{(\text{hr})} \simeq 0.90 \quad (3.28)$$

### 3.8 Conclusion

Nous pouvons tirer plusieurs conclusions de ces observations. D'abord, nous observons un comportement bistable dû à une saturation de transition atomique. En ce qui concerne le bruit, la théorie des atomes à deux niveaux prévoit une réduction du bruit sur une des quadratures de l'ordre de 40% pour notre choix de paramètres. En tenant compte du rendement quantique total et du fait que le signal affiché est en amplitude et non pas en puissance, nous pourrions nous attendre à une réduction entre 12% et 20% (en amplitude) d'après la prédiction théorique. Sur le signal mesuré en revanche, aucune réduction de bruit n'est visible. Nous remarquons aussi que les détecteurs n'ont pas une bonne dynamique. Le rapport signal sur bruit est faible. Néanmoins il serait

possible d'observer une réduction de 20%. Il est donc souhaitable d'améliorer la performance de la détection homodyne, mais ses imperfections ne peuvent pas expliquer l'absence de toute réduction du bruit dans le signal mesuré.

D'après la figure 14(b), il est clair que l'état du champ sortant n'est pas un état minimal. Cela ne présente pas forcément un obstacle pour l'obtention d'un état comprimé. Mais il y a certainement une source d'excès de bruit dans notre expérience, soit dans le dispositif bistable lui-même, soit dans le système de mesure ou bien dans les deux, qui limite les fluctuations minimales au niveau du bruit de photons standard.

Regardons alors notre système bistable plus en détail, en particulier le fait que les faisceaux pièges excitent la même transition que le faisceau sonde. Leur premier effet consiste à saturer partiellement la transition atomique. Par conséquent, le nombre effectif d'atomes interagissant avec le faisceau sonde diminue dans une première approximation comme la différence des populations dans l'état excité et fondamental. Le deuxième effet des faisceaux pièges est de mélanger en permanence les populations dans tous les sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental. Pour un faisceau avec une polarisation circulaire, l'atome piégé ne se comporte alors pas comme un atome à deux niveaux, mais plutôt comme un atome à vingt niveaux. Tous les sous-niveaux interagissent en même temps avec la sonde. La bistabilité que nous observons est donc une bistabilité effective due à l'effet collectif de la structure Zeeman. S'il s'agissait de transitions séparées, nous pourrions tenir compte de ce fait en introduisant une coopérativité effective, qui serait la moyenne des coopérativités pour chaque transition, avec un nombre d'atomes et un coefficient Clebsch-Gordan différents. Le bruit serait le bruit quantique d'un faisceau laser ayant interagi avec un nombre d'atomes à deux niveaux correspondant à la valeur de la coopérativité effective. Des calculs détaillés montrent que nous pourrions quand-même nous attendre à une réduction du bruit.

L'effet parasite principal est donc à chercher ailleurs. La présence des faisceaux pièges implique qu'une partie des atomes est constamment excitée par les faisceaux pièges vers le niveau  $6P_{3/2}, F' = 5$ . Une fois excités, les atomes retombent dans l'état fondamental en émettant de la lumière de fluorescence, qui produit de l'excès de bruit. L'émission spontanée provoquée par le faisceau sonde est incluse dans nos calculs théoriques. Comme nous avons vu dans le chapitre 2 de ce mémoire, c'est elle qui diminue la réduction du bruit possible avec un milieu Kerr réel par rapport à un milieu Kerr idéal. En revanche, nous n'avons pas tenu compte de l'émission spontanée produite par les faisceaux pièges, qui présente cependant une source importante d'excès de bruit.

Pour cette raison, nous avons décidé de couper les faisceaux pièges et d'effectuer la mesure du bruit en leur absence, pendant que les atomes sont encore dans le faisceau. Cette méthode limite le temps de mesure à environ 30 – 40ms car, après la coupure du piège, le nuage atomique explose par suite de la distribution de vitesse et tombe sous l'influence de la gravité. Nous allons décrire cette procédure en détail dans le chapitre suivant.

## 4 Amélioration de l'expérience

Afin de résoudre les problèmes que nous avons discuté à la fin du chapitre précédent, nous avons effectué des modifications sur l'expérience que nous allons décrire maintenant.

Nous avons tout d'abord cherché à éviter les perturbations dues au piège magnéto-optique en coupant les faisceaux pièges lors des mesures. Suite à l'observation de nouveaux effets (des oscillations de relaxation), nous nous sommes attachés à obtenir un meilleur contrôle du milieu atomique en coupant le champ magnétique quadrupolaire et en pompant optiquement les atomes dans un sous-niveau Zeeman bien défini après la coupure du piège.

D'autre part, nous avons procédé à de nombreuses modifications du dispositif expérimental. Suite aux résultats des mesures du bruit présentés dans le chapitre précédent, nous avons amélioré la sensibilité de la détection homodyne. Des études détaillées du bruit nous ont permis d'identifier une source d'excès de bruit sur notre montage, qui provient de certains modulateurs acousto-optiques. Afin d'éliminer cet excès de bruit nous avons dû modifier une partie importante du montage expérimental. Le nouveau montage sera présenté à la fin de chapitre.

### 4.1 Coupure des faisceaux pièges

Les faisceaux pièges peuvent être coupés en changeant rapidement la tension d'alimentation du modulateur acousto-optique (AO2), qui décale la fréquence du faisceau laser de quelques largeurs naturelles dans le rouge de la transition atomique pour produire des faisceaux pièges. La tension maximale de pilotage pour un fonctionnement continu du modulateur est de 5V. Au lieu d'appliquer une source d'alimentation continue, nous varions alors la tension de pilotage périodiquement avec un créneau carré entre 0 à 5V. Le temps de coupure du signal électrique est de l'ordre de 3.5ns. Le temps de réponse du cristal est spécifié à 10ns pour un faisceau bien focalisé comme le nôtre ( $\simeq 200\mu\text{m}$  au niveau du cristal). Les deux effets peuvent être négligés par rapport aux échelles de temps qui nous intéressent. La fréquence de la modulation peut varier entre quelques Hz et une centaine de kHz. La fréquence utilisée est déterminée par les conditions de l'expérience imposées par le remplissage du piège et le temps minimal nécessaire pour une mesure du bruit.

Après avoir coupé les faisceaux pièges, le nuage atomique explose par suite de la distribution de vitesse. En même temps, il tombe sous l'influence de la gravité. Les atomes commencent à quitter la zone d'interaction avec le faisceau sonde dès que le piège est éteint. En supposant qu'il n'y a pas de processus de chauffage pendant la coupure, leur vitesse moyenne correspond à la température moyenne du piège qui, elle, dépend des paramètres du piège choisis. Le nombre d'atomes reste assez important dans le faisceau sonde pour faire une mesure de bistabilité et de bruit quantique pendant un intervalle temporel de 30 – 40ms. Cet intervalle est suffisamment long pour effectuer les mesures. Nous rallumons les faisceaux pièges après environ 60ms pendant un intervalle temporel de l'ordre de 1 – 2s pour remplir le piège de nouveau. Cette procédure est répétée périodiquement.

## 4.2 Observation des instabilités

### 4.2.1 Introduction

Avant de reprendre les mesures du bruit quantique dans les nouvelles conditions, nous avons d'abord recommencé à étudier l'intensité transmise sans la perturbation du système bistable par les faisceaux pièges. Nous avons effectué les mêmes mesures que précédemment, c'est à dire des enregistrement de l'intensité moyenne en fonction de la longueur de la cavité, pendant la coupure du piège. Dès les premières mesures, nous avons découvert une autre procédure pour faire l'expérience qui tire profit du fait que les atomes quittent de la zone d'interaction: la variation du nombre d'atomes fait changer l'indice du milieu et donc la longueur optique dans la cavité. La modification de l'indice provoquée est suffisamment grande pour balayer la cavité autour de la résonance: le changement d'indice de réfraction du milieu  $n$ , mesuré en unités de longueur d'onde  $\lambda$ , est supérieur à l'inverse de la finesse au cours d'une mesure

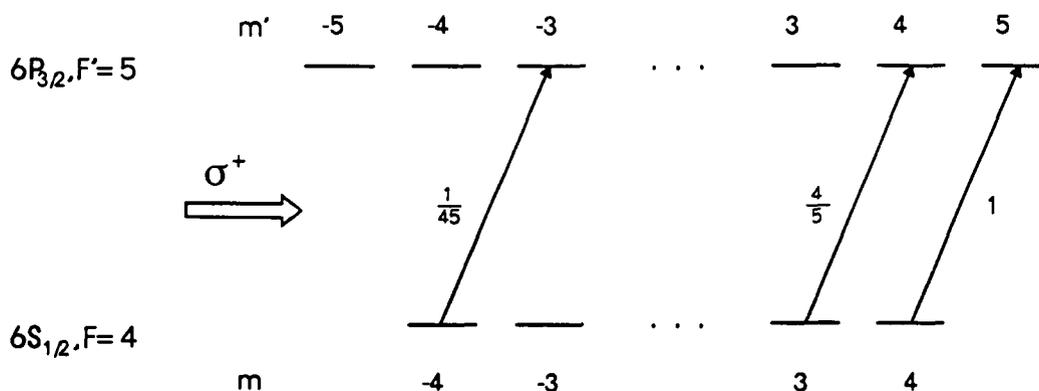
$$\frac{\Delta n \cdot d}{\lambda} = \frac{\Delta L}{\lambda} \geq \frac{1}{\mathcal{F}} \quad (4.1)$$

où  $d$  est la longueur du milieu atomique et  $\Delta L$  le changement de la longueur de la cavité nécessaire pour balayer la résonance. Dans ces conditions, il n'est plus nécessaire de balayer la longueur de la cavité à l'aide de la cale piézo-électrique. Ainsi, nous avons par la suite utilisé deux méthodes différentes pour étudier le comportement du système: la première méthode consiste à balayer rapidement la longueur de la cavité à l'aide de la cale piézo-électrique de manière à ce qu'on puisse considérer le nombre d'atomes dans le faisceau sonde constant lors d'un passage. Cette méthode est bien adaptée à l'étude de la bistabilité mais conduit à un balayage de la cavité trop rapide pour permettre des mesures de bruit. La seconde méthode, mieux adaptée à la mesure du bruit, consiste à maintenir la longueur géométrique de la cavité fixe et à profiter du départ des atomes pour obtenir un balayage de la longueur optique de la cavité.

Les premiers résultats ont été surprenants: dans une région de paramètres où nous observions un comportement bistable en présence des faisceaux pièges nous avons vu

apparaître des instabilités très prononcées quand les faisceaux pièges sont coupés pendant la mesure. Nous présentons dans le paragraphe suivant, sous forme d'un article, des enregistrements de l'intensité moyenne qui mettent ce comportement en évidence.

Ces instabilités trouvent leur origine dans une forte compétition entre deux processus non linéaires, dont l'un est la saturation de la transition atomique qui conduit à une diminution de l'indice avec l'intensité intracavité comme nous l'avons déjà vu au chapitre 2. L'autre processus est le pompage optique entre les sous-niveaux Zeeman, dont la dégénérescence est levée par le champ magnétique quadrupolaire. Un faisceau sonde avec une polarisation circulaire vide par pompage optique tous les sous-niveaux Zeeman du niveau  $6S_{1/2}, F = 4, m < 4$  au profit du niveau  $6S_{1/2}, F = 4, m = 4$  (voir figure 15). Les coefficients Clebsch-Gordan <sup>1</sup> des transitions entre sous-niveaux du ni-

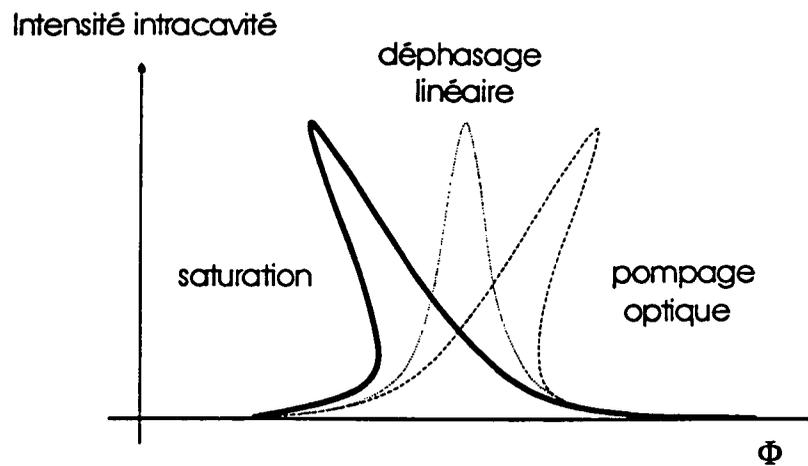


**Fig. 15:** Sous-niveaux Zeeman de la transition  $6S_{1/2}, F = 4 - 6P_{3/2}, F' = 5$ . Le faisceau sonde d'une polarisation circulaire produit un pompage optique vers les niveaux  $m = 4$  et  $m' = 5$ .

veau inférieur et du niveau supérieur changent au fur et à mesure de ce processus de pompage de  $c_{-4,-3}^2 = 1/45$  à  $c_{4,5}^2 = 1$ . Plus l'intensité intracavité est forte, plus le pompage optique est important et plus le coefficient Clebsch-Gordan moyen des atomes interagissant avec le faisceau sonde et par conséquent l'indice non linéaire augmentent. Cela conduit à une courbe de bistabilité déformée dans le sens inverse du sens de la déformation due à la saturation comme indiqué sur la figure 16. Nous avons calculé le temps de pompage optique en fonction du désaccord et de l'intensité intracavité pour des conditions expérimentales différentes, à partir duquel nous avons développé un modèle théorique pour expliquer l'origine des instabilités. Ce modèle a été complété par des études expérimentales plus détaillées.

Les résultats obtenus ainsi que l'interprétation théorique sont présentés dans l'article suivant. Le calcul du temps de pompage optique se trouve dans l'Appendice III.

<sup>1</sup> Une table des coefficients Clebsch-Gordan pour cette transition se trouve dans l'Appendice IV.



**Fig. 16:** L'effet du pompage optique sur la courbe de résonance de la cavité. Tandis que l'indice non linéaire diminue pour les fortes intensités à cause de la saturation de la transition, il augmente pour des fortes intensités dans la cas du pompage optique, car les coefficients Clebsch-Gordan augmentent au fur et à mesure du processus du pompage.

#### 4.2.2 Reproduction de l'article "Optical nonlinear dynamics with cold atoms in a cavity" (Opt. Comm. 115 199 (1995))



ELSEVIER

1 March 1995

OPTICS  
COMMUNICATIONS

Optics Communications 115 (1995) 199–206

*Full length article***Optical nonlinear dynamics with cold atoms in a cavity**

A. Lambrecht, E. Giacobino, J.M. Courty

*Laboratoire Kastler Brossel, case 74, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*

Received 29 July 1994

**Abstract**

This paper presents the nonlinear dynamics of laser cooled and trapped cesium atoms placed inside an optical cavity and interacting with a probe light beam slightly detuned from the  $6S_{1/2} F=4$  to  $6P_{3/2} F=5$  transition. The system exhibits very strong bistability and instabilities. The origin of the latter is found to be a competition between optical pumping and nonlinearities due to saturation of the optical transition.

**1. Introduction**

In an atomic vapor, the interaction of the atoms with one or several near resonant electromagnetic fields is complicated by the fact that the various velocity classes have different detunings from the fields, except when this detuning is very large. Laser cooled atoms in a magneto-optic trap [1] can have velocities as low as a centimeter per second. This means that their Doppler width is smaller than the natural linewidth and that a laser field can be set close to resonance with an atomic transition, all the atoms having the same detuning from the field. In such conditions, the interaction between the atoms and the field is well characterized and one can take advantage of the strong nonlinearities of atomic systems while keeping the absorption rather small. In particular, it was shown that a probe beam going through a cloud of cold atoms could experience a strong gain due to Raman transitions involving the trapping beams [2]. When the atoms are placed in a resonant optical cavity without a probe beam, laser action corresponding to that gain feature was demonstrated [3].

When cold atoms interact with a probe laser beam inside an optical cavity, bistability is easily observed

at very low input powers (as low as  $5 \mu\text{W}$ ) [4]. This bistability effect was observed in the presence of the cooling beams. However, to investigate the nonlinear dynamics of a collection of cold atoms in a cavity in more detail, we needed better controlled conditions, and we studied the behaviour of the system in the absence of cooling beams, right after the trap is turned off. In that case, in addition to bistability, new features were found, such as very pronounced self pulsing oscillations in a wide range of experimental parameters.

While instabilities have been observed in similar conditions in atomic vapors [5], the present situation is much easier to analyse, and we show hereafter that we have been able to find a rather simple model for these instabilities, that invokes a competition between optical pumping and saturation.

The experimental procedure is described in Sect. 2. In Sect. 3 we give a model explaining the dynamical behaviour of the system and compare its results with the measurements.

## 2. Bistability and instabilities with cold atoms

In the experiments described in the following, we prepare a cloud of cold cesium atoms in a cell using the background pressure to fill the trap. The trap operates in the standard way [1], with three orthogonal circularly polarized trapping beams generated by a Ti:sapphire laser and an inhomogeneous magnetic field. The Ti:sapphire laser is detuned by  $2.5 \Gamma$  ( $\Gamma$  being the linewidth of the upper state) on the low frequency side of the  $6S_{1/2} F=4$  to  $6P_{3/2} F=5$  transition. We obtain a cloud of cesium atoms the typical temperature of which is of the order of 1 mK, which gives a Doppler width much smaller than the natural width. The diameter (2.5 cm) and power (20 mW/cm<sup>2</sup>) of our trapping beams allow us to obtain large clouds (about 5 mm in diameter) with densities of the order of  $10^{10}$  atoms/cm<sup>3</sup>. The relevant parameter in the experiment is actually the number of trapped atoms in the probe beam, which is measured from the change in the intensity of the probe beam transmitted through the cavity with and without trapped atoms. This number is found to be ranging between  $10^7$  and  $10^8$  depending on the pressure of the background gas. As usual, the atoms non resonantly excited into the  $6P_{3/2} F=4$  state and falling back into the  $F=3$  ground state are repumped into the cooling cycle by a laser diode tuned to the  $6S_{1/2} F=3$  to  $6P_{3/2} F=4$  transition.

The cavity is a 25 cm-long linear asymmetrical cavity, close to half-confocal, with a waist of 260  $\mu$ m. Because the cell has optical quality antireflecting windows, we can build a good finesse optical cavity around the atomic cloud (Fig. 1). Losses due to the two windows are of the order of 1%. The input mirror

has a transmission coefficient of 10%, the end mirror is highly reflecting. The cavity is in the symmetry plane of the trap, making a 45° angle with the two trapping beams that propagate in this plane.

To look for bistable behaviour of the optical cavity containing cold atoms, we send a circularly polarized probe beam into the cavity. It can be detuned by 0 to 130 MHz on either side of the  $6S_{1/2} F=4$  to  $6P_{3/2} F=5$  atomic transition.

We measure the power of the beam transmitted through the cavity while scanning the cavity length for a fixed value of the input intensity, as shown in Fig. 2, or the input intensity for a fixed value of the detuning. The recording shows the characteristic hysteresis cycle due to bistability, where the output power switches abruptly between low and high values when the length of the cavity is scanned. Switching and hysteresis were also observed when the input power is scanned at fixed cavity length. In some cases overshoot and oscillations in the output power were recorded [4].

The shapes of the curves in such a case can be grossly interpreted from the theory of bistability with two-level atoms. However, the fit is approximate and the theory, even including single mode instabilities [6,7], cannot explain the overshoot and oscillations [8]. Actually the transition under investigation in cesium is far from being a two-level one in the presence of the trap. The fact that standard bistability is observed in most cases to be in fair agreement with two-level atom theory can be explained by the fact that the trapping beams randomize the ground state population among the various Zeeman sublevels.

To thoroughly investigate the phenomenon, it was thus indispensable to study the system without the

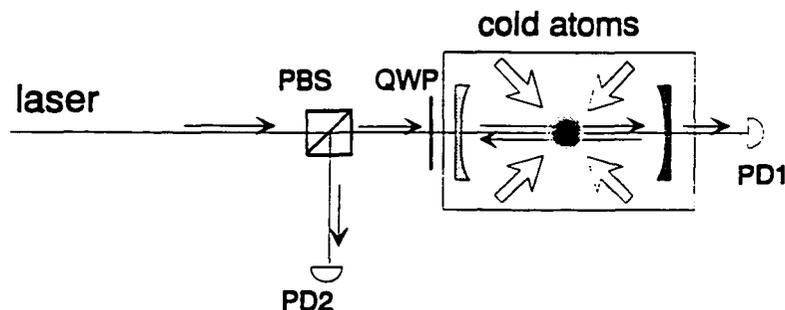


Fig. 1. Experimental set-up showing the cell containing the cold atom cloud in an optical cavity; PBS: polarizing beamsplitter. QWP: quarter wave plate, PD1, PD2: photodiodes; PD1 and PD2 measure the powers respectively transmitted and reflected by the cavity.

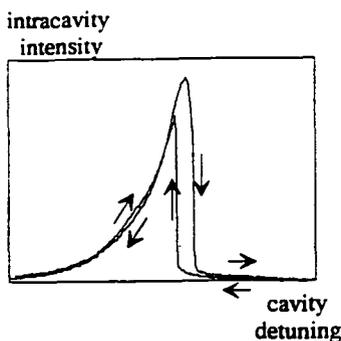


Fig. 2. Recording showing the bistable switching from low to high transmission and back when the cavity length is scanned across the cavity resonance. The trapping laser beams are on. The laser is detuned by  $22\Gamma$  on the high frequency side of the atomic transition. The input power is  $100\ \mu\text{W}$ .

trapping beams. After the trap is loaded, we turn off the trapping laser beams in order to get unperturbed atoms. We have about 20 ms to perform the measurements before most of the atoms have escaped out of the interaction region due to free fall and expansion of the cloud. In the experiment, the bistability parameter  $C$  (see definition in Sect. 3) can be as high as 1300 just after the atoms have been released.

In a broad range of experimental parameters, we observed bistability and instabilities that exhibit unusual features. Instabilities are present within the whole range of accessible detunings (from  $-25\ \Gamma$  to  $25\ \Gamma$ , where  $\Gamma$  is the linewidth of the excited state,  $\Gamma/2\pi = 5.2\ \text{MHz}$ ), and for input powers ranging from 50 to  $300\ \mu\text{W}$ . These oscillations are somewhat similar to the ones observed in the presence of trapping beams but those were obtained only at high intensity or small atomic detuning. Here, on the contrary, they are observed very easily.

Fig. 3 shows a set of recordings of the output power of the cavity when the length is scanned, for different values of the input power. At very low power (not shown), the curves exhibit neither bistability nor instabilities. Starting for an input power of the order of  $30\ \mu\text{W}$ , oscillations appear on the left hand side of the cavity resonance curve, within some range of cavity detuning. This side is the one on which a bistable switching would occur in a saturated two-level atomic system. At higher input powers, the oscillations disappear and only bistability persists. Let us mention that when the power of the probe beam is too high, the atoms are expelled very rapidly from the beam

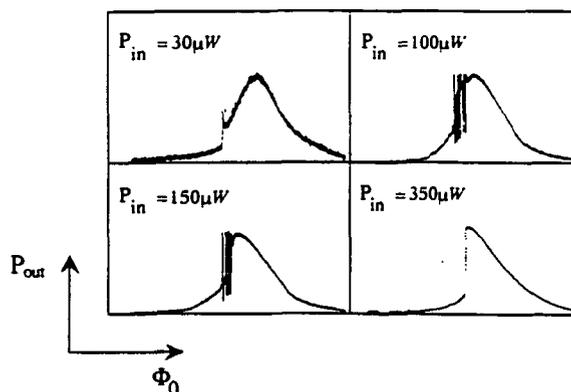


Fig. 3. Recording of the output power  $P_{\text{out}}$  of the cavity containing cold atoms when the cavity length is scanned, for four different values of the input power  $P_{\text{in}}$ . The trapping beams are off. The atomic detuning is the same as in Fig. 2.

and only the very early part of the signal can be considered as significant of the nonlinear behaviour of the atoms.

Once enlarged these oscillations look clearly like self-pulsing. Their frequency is comprised between 100 kHz and a few MHz, and they are not due to the scan of the cavity length. To investigate them in more detail, one would want to record them at a fixed cavity length. However, it is not possible to keep the optical cavity length perfectly constant in time because the atoms escape from the original cloud, thus changing the index of refraction. But in such conditions, the effective cavity scan is slow and the oscillations are observed on longer time durations. Such a recording is shown in Fig. 4.

### 3. Model for instabilities

To understand these oscillations, one has to take into account the hyperfine and Zeeman structure of the considered states. Various optical pumping effects can occur and phenomena linked to it like bistability, multistability [9–12] and instabilities [5–13] have been predicted and observed in alkali vapors. Instabilities necessitate a strong coupling between the atoms and the field, that is a small detuning. Considering that the Doppler width is of the same order as the hyperfine structure in the ground and excited state of cesium, the system is rather intricate to describe,

202

*A. Lambrecht et al. / Optics Communications 115 (1995) 199–206*

output power

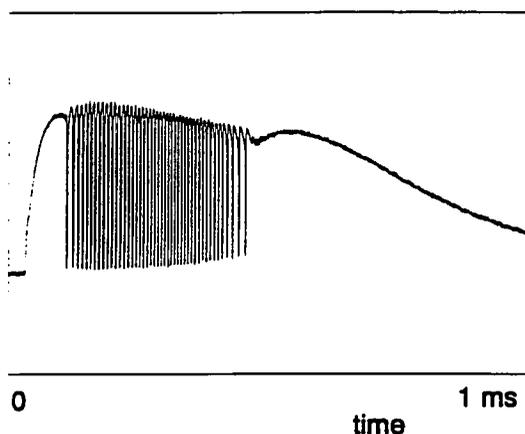


Fig. 4. Recording of the instabilities for a fixed geometrical cavity length. The optical length is slowly scanned by the decrease of the number of atoms. The detuning is the same as in Fig. 2, the input power is  $80 \mu\text{W}$ , the trapping beams are switched off at  $t=0$ .

due to the competitive action of the various velocity classes and hyperfine sublevels.

As already pointed out, the situation is much simpler with cold atoms, where one can consider that the field interacts with one hyperfine transition only. Owing to this, we have been able to develop a simple model to understand the origin of the observed oscillations. Roughly, as shown below, they result from the competition between a fast nonlinear process, the saturation of the optical transition and a much slower one, the optical pumping.

The saturation of the optical transition causes a decrease of the linear index of refraction of the atomic medium when the intensity increases. On the contrary, optical pumping by circularly polarized light is at the origin of a nonlinearity that increases the index of refraction with the light intensity: when the atoms are submitted to circularly polarized light, they tend to accumulate in the magnetic sublevels with high  $m_F$  number, which have the largest coupling coefficient with the electromagnetic field. Therefore, the two nonlinear processes have opposite effects and compete in our system. The relaxation oscillations are a consequence of the significant difference in the characteristic times of these processes.

Optical pumping tends to empty out the magnetic sublevels of low magnetic number to accumulate all

the atoms in the sublevels with highest magnetic number ( $m_F=4$  to  $m_F=5$  transition). Due to the high number of magnetic substates, it takes a rather long time, starting from an equally distributed population, to complete the optical pumping to the highest  $m_F$  sublevels of the ground and excited states.

The time evolution of the sum of the populations of these two sublevels for several values of the Rabi frequency of the probe beam (calculated as an average over the hyperfine transitions) is shown in Fig. 5. One can see that even for values close to or larger than the saturation value, the optical pumping rate is much smaller than the natural linewidth. Thus the response time of the nonlinear susceptibility due to optical pumping is much larger than the one due to saturation of the optical transition, which, for a field detuned from resonance, can be considered as being of the order of the detuning.

Although the behaviour of the system, involving many variables (all the hyperfine Zeeman populations and coherences and the field), is quite complex, the underlying mechanism can be explained with a simple model, involving basically two differential equations that give the evolution of the intracavity field and of the atomic orientation in the ground state. To write these equations, we first introduce our basic notations.

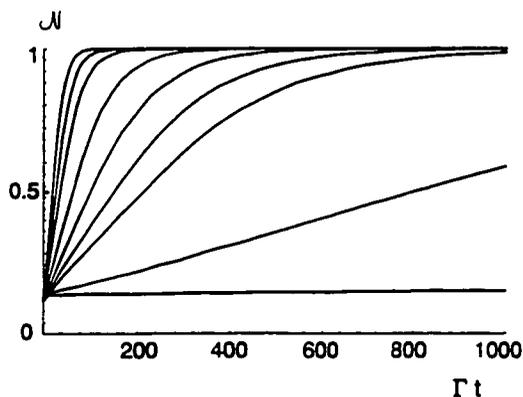


Fig. 5. Optical pumping as a function of time: the curves show the calculated variation of the sum  $\mathcal{N}$  of the populations of the  $m_F=4$  sublevel of the ground state and of the  $m_F=5$  sublevel of the excited state as a function of time, starting from a population equally distributed among the ground state sublevels, when the intensity  $I$  of the pumping light (defined by Eq. (1)) is equal to (from bottom to top): 1, 5, 10, 12, 15, 20, 30, 40, 60. Time is in units of  $\Gamma$ . The atomic detuning is  $20 \Gamma$ .

The intracavity intensity  $I$  of the laser is normalized to the saturation intensity:

$$I = \frac{g^2 |\alpha|^2}{\Gamma^2/4}, \quad (1)$$

where  $g$  is the coupling constant of the atoms with the field,

$$g^2 = \frac{d^2 \omega_L}{2\epsilon_0 \hbar S c}, \quad (2)$$

$d$  is the atomic dipole,  $\omega_L$  the frequency of the probe laser and  $S$  the cross section area of the beam.  $|\alpha|^2$  is the electric field squared, expressed in units of number of photons per second.

The round trip phase shift  $\Phi_{\text{cav}}$  of the field in the cavity (assumed to be a ring cavity) is the sum of four contributions. First, the phase shift  $\Phi_0$  proportional to the geometrical length of the cavity. Second, we have two contributions due to the presence of atoms in the cavity, a linear phase shift,

$$\Phi_L = 2Ng^2/\Gamma\delta \quad (3)$$

and a nonlinear Kerr-like phase shift

$$\Phi_{\text{NL}} = -KI.$$

The nonlinear coefficient  $K$  is given by

$$K = 4Ng^2/\Gamma\delta^3, \quad (4)$$

where  $N$  is the number of atoms and  $\delta$  the detuning of the atomic transition frequency  $\omega_0$  from the field frequency  $\omega_L$ , normalized to the atomic transition linewidth  $\Gamma/2$

$$\delta = 2(\omega_0 - \omega_L)/\Gamma. \quad (5)$$

$\Phi_L$  and  $\Phi_{\text{NL}}$  are the phase shifts corresponding to the presence of two-level atoms in the cavity. If we now consider that the ground and excited states have several Zeeman sublevels, the main additional contribution when the atoms interact with circularly polarized light is a term  $\Phi_p$  coming from the change in the populations of the ground state sublevels and proportional to the ground state orientation  $p$  (normalized to 1). Since the square of the Clebsch-Gordan coefficient of the  $m_F=4$  to  $m_F=5$  transition is about twice the mean square Clebsch-Gordan coefficient for the  $F=4$  to  $F=5$  transition,  $\Phi_p$  is equal to  $\Phi_L$  for  $p=1$ , that is when the ground state is completely pumped. Thus, we can write

$$\Phi_p = \Phi_L p. \quad (6)$$

The total phase shift in the cavity is then

$$\Phi_{\text{cav}} = \Phi_0 + \Phi_L + \Phi_{\text{NL}} + p\Phi_L. \quad (7)$$

The ground state orientation  $p$  increases with the intracavity intensity  $I$  at rate  $\beta I$  and decays at a rate  $\gamma_p$  due to magnetic precession in transverse fields and to transitions to other hyperfine sublevels (via non resonant transitions):

$$dp/dt = -\gamma_p p + \beta I(1-p). \quad (8)$$

The pumping rate coefficient  $\beta$  is computed from the calculation presented in Fig. 5 and the relaxation rate  $\gamma_p$  is evaluated from the experimental parameters.

The change of the intracavity field  $\alpha$  on a round trip of time duration  $\tau$  is due to the driving field  $\alpha_{\text{in}}$  entering through the coupling mirror of transmission  $t$ , to the mirror decay coefficient  $\gamma_{\text{cav}}$  (with  $\gamma_{\text{cav}} = t^2/2$ ) and to the round trip phase shift  $\Phi_{\text{cav}}$ :

$$\tau d\alpha/dt = t\alpha_{\text{in}} - (\gamma_{\text{cav}} - i\Phi_{\text{cav}})\alpha. \quad (9)$$

The Kerr-like nonlinearity has been assumed to have an instantaneous response. In the absence of optical pumping this system is well known to become bistable when the intensity is larger than a threshold intensity  $I_{\text{bist}}$  given by

$$I_{\text{bist}} = 8\gamma_{\text{cav}}^2/3\sqrt{3}K. \quad (10)$$

In the presence of optical pumping Eqs. (8) and (9) have to be solved numerically. They involve two different rates: the optical pumping rate  $\beta I$  and the field evolution rate in the cavity  $\gamma_{\text{cav}}/\tau$  ( $\gamma_{\text{cav}}/2\pi\tau \approx 5$  MHz) which is usually larger than the optical pumping rate, except at very high pump powers.

These equations have been used to calculate the motion of the system. In some range of initial conditions, oscillations and limit cycles are found in the intracavity intensity as well as in the output intensity. To compare these results with the experimental data, we have calculated the output intensity when  $\Phi_0$ , i.e. the cavity length, is slowly scanned for several values of the input intensity. The result is shown in Fig. 6. It can be seen that the curves reproduce the experimental recordings in a satisfactory way.

In particular, they show oscillations setting in for intermediate powers. When the input power is strong enough, the oscillations disappear, due to the fact that

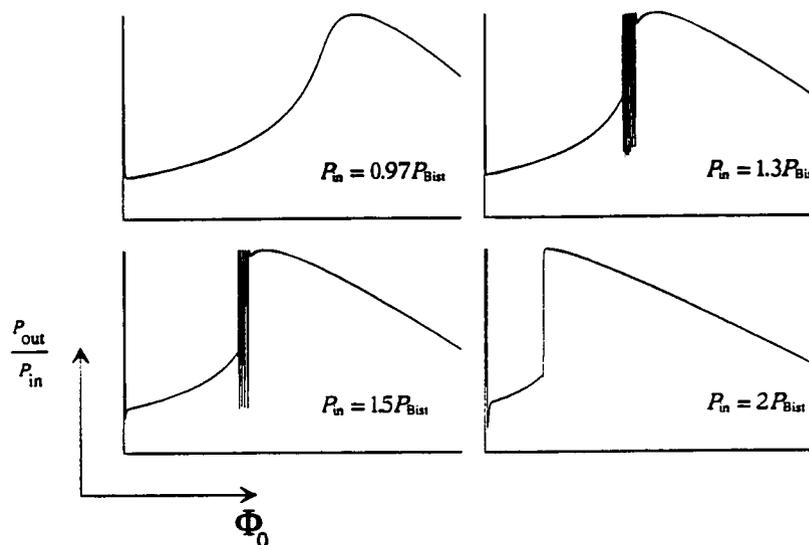


Fig. 6. Calculated output power of the cavity containing cold atoms when the cavity length is scanned for four values of the input power chosen below and above the bistability threshold  $P_{\text{bist}}$  ( $P_{\text{bist}}$  is in the absence of optical pumping, cf Eq. (10)).

the optical pumping is fast enough to bring all the atoms in the sublevels of high magnetic number before the oscillations can start. The calculations show that in the unstable region, the ground state orientation may vary by quantities as small as 1%. As a consequence, the period of the instabilities can be much smaller than the typical optical pumping time shown in Fig. 5.

This oscillatory behaviour can be understood by considering that the optical pumping changes the optical length of the cavity. It can then scan the cavity length back and forth in the vicinity of the bistable regime, causing periodic abrupt changes in the cavity transmission as shown in Fig. 7. A similar behaviour was observed in a different system with thermal effects [14].

Instabilities can also be found in the absence of relaxation for the orientation when the cavity length is scanned. This occurs for high intensities and large numbers of atoms. In such a case, in the vicinity of a resonance, the optical pumping takes over, brings the cavity first into resonance and then beyond the resonance. After this overshoot, the cavity length scan brings the cavity back into resonance, the optical pumping starts again and so on. Thus the orientation increases by steps, each time the light enters the cavity.

The validity of the model was checked by further experiments. When the atoms are released from the

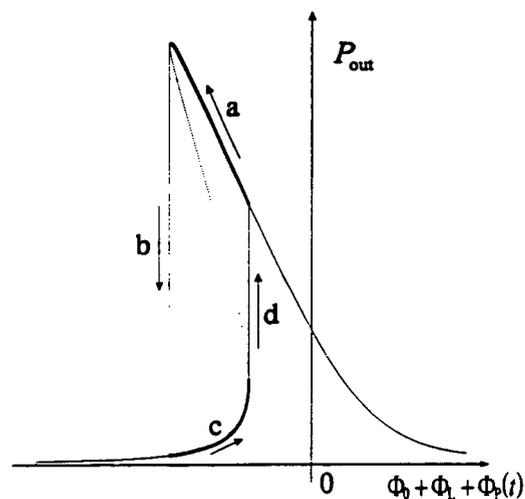


Fig. 7. Diagramme showing the self-pulsing of the bistable system due to optical pumping (for the case of  $\Phi_L$  and  $\Phi_p < 0$ ): (a) the cavity is in the high transmission state and optical pumping increases the orientation and decreases  $\Phi_L$ ; (b) abrupt switch towards the low transmission state; (c) the cavity is in the low transmission state, depumping is dominant and the orientation decreases; (d) switch towards the high transmission state.

trap, it is possible to optically pump them into the  $m_F = 4$  magnetic sublevel of the ground state with an additional circularly polarized beam parallel to the probe beam, but closer to the atomic resonance. This prepumping is done in the presence of a magnetic field

directed along the cavity. In such conditions the instabilities disappear. If the magnetic field is absent, the orientation created by the pump field is destroyed by the Larmor precession in transverse magnetic fields and the instabilities persist.

A more complete treatment of the atomic nonlinearity and of the optical pumping was also performed, where absorption and saturation of the optical nonlinearity were taken into account. In this case, the separation of linear and nonlinear phase shifts is no longer possible. Instead, one defines a total phase shift due to two-level atoms

$$\Phi_1 = \frac{2Ng^2}{\Gamma} \frac{\delta+i}{1+\delta^2+2I} \quad (11)$$

or with the help of the bistability parameter  $C$  given by

$$C = g^2 N / \gamma_{\text{cav}} \Gamma, \quad (12)$$

$$\Phi_1 = \frac{2C\gamma_{\text{cav}}(\delta+i)}{1+\delta^2+2I}. \quad (13)$$

$\Phi_1$  now includes a contribution due to the linear absorption and dispersion of the atoms. The contributions  $\Phi_L$  and  $\Phi_{NL}$  introduced below are simply the first two real terms of the expansion of formula (11) in powers of  $I$ . The total phase shift, including optical pumping now writes

$$\Phi_{\text{cav}} = \Phi_0 + \Phi_1(1+p). \quad (14)$$

For consistency, the saturation of the optical pumping was also taken into account:

$$dp/dt = -\gamma_p p + \beta \frac{I}{1+\delta^2+2I} (1-p). \quad (15)$$

The evolution of the system was calculated again using this more elaborate model. This yielded only minor changes in the results, the general behaviour predicted by the simple model for the instabilities remaining the same.

Let us note that for high powers, the probe laser tends to push the atoms out of the beam, especially when its frequency is close to resonance. This phenomenon could give rise to bistability due to the change of the effective linear index of refraction of the medium with the number of atoms in the interaction zone. A careful study of the behaviour of the cold atoms in the probe beam has shown that such

mechanical effects were negligible under our experimental conditions.

#### 4. Conclusion

The recent development of the magneto-optic trap, which enables to get clouds of motionless atoms with a density comparable to that of the atomic beams is of great interest for nonlinear optics. In such traps, one can get large non-linearities by setting the driving field close to resonance without having much absorption. The instabilities described and interpreted in this paper show that it is possible to get new nonlinear phenomena in well characterized conditions. These experiments open the way to nonlinear and quantum optics using cold atoms in resonant cavities.

#### Acknowledgements

The authors thank L.A. Lugiato for very useful comments and suggestions.

This work has been supported in part by the EC contract ESPRIT BRA 6934, the EC HMC contract CHRX-CT 930114 and the CNRS ULTIMATECH programme.

#### References

- [1] E. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu and D. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987) 2631; C. Monroe, W. Swann, H. Robinson and C. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 1571.
- [2] D. Grison, B. Lounis, C. Salomon, J.Y. Courtois and G. Grynberg, *Europhys. Lett.* 15 (1991) 149; J. Tabosa, G. Chen, Z. Hu, R. Lee and H.J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991) 3254.
- [3] L. Hilico, C. Fabre and E. Giacobino, *Europhys. Lett.* 18 (1992) 685.
- [4] E. Giacobino, J.M. Courty, C. Fabre, L. Hilico and A. Lambrecht, in: *Laser Spectroscopy XI*, eds. L. Bloomfield, T. Gallagher and D. Larson (AIP Press 1994); L. Hilico, Thesis, Université Paris VI, 1992.
- [5] P. La Penna and G. Giusfredi, *Phys. Rev. A* 48 (1993) 2299.
- [6] R. Bonifacio and L.A. Lugiato, *Optics Comm.* 19 (1976) 172; *Phys. Rev. A* 18 (1978) 1129.
- [7] L.A. Orozco, H.J. Kimble, A.T. Rosenberger, L.A. Lugiato, M.L. Asquini, M. Brambilla and L.M. Narducci, *Phys. Rev. A* 39 (1989) 1235.

- [8] M. Brambilla and L.A. Lugiato, private communication.
- [9] J. Mlynek, F. Mitschke, R. Deserno and W. Lange, *Appl. Phys. B* 28 (1982) 135; *Phys. Rev. A* 29 (1984) 1297.
- [10] S. Cecchi, G. Giusfredi, E. Pietrella and P. Salieri, *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 1928; G. Giusfredi, P. Salieri, S. Cecchi and F.T. Arecchi, *Optics Comm.* 54 (1985) 39.
- [11] M.W. Hamilton, W.J. Sandle, J.T. Shilwell, J.S. Satchell and M.D. Warrington, *Optics Comm.* 48 (1983) 190.
- [12] E. Giacobino, *Optics Comm.* 56 (1985) 249.
- [13] G. Giusfredi, S. Cecchi, E. Pietrella, P. Salieri and F.T. Arecchi, in: *Instabilities and Chaos in quantum Optics*, eds. F.T. Arecchi and R.G. Harrison (Springer, 1987).
- [14] S.L. McCall, *Appl. Phys. Lett.* 32 (1978) 284.

### 4.3 Conclusion

Dans l'article reproduit dans la section précédente, nous avons vu qu'à l'origine des instabilités se trouve une compétition entre la saturation de la transition atomique et le pompage optique, quand la saturation est instantanée par rapport au transfert de la population. Le processus de relaxation de l'orientation dans l'état fondamental, liée à la précession dans le champ magnétique est également important. Ce sont la création et la relaxation de cette orientation qui conduisent à un balayage de la cavité autour du point de bistabilité tout en produisant des changements brusques et périodiques de l'intensité intracavité, c'est à dire des instabilités.

En présence des faisceaux pièges, ces processus sont partiellement inhibés par un transfert de population dû aux faisceaux pièges. Dans un certain régime de paramètres, nous voyons en effet apparaître des instabilités en coupant les faisceaux pièges, qui ne se manifestent pas en présence des faisceaux pièges. Nous remarquons ici que nous avons aussi observé des instabilités en présence des faisceaux pièges, mais seulement pour des puissances relativement faibles, c'est à dire environ deux à trois fois plus petites par rapport au cas de coupure du piège. Cette observation est en accord avec l'observation présentée dans la référence [129]. Il semble raisonnable de supposer que des instabilités en présence des faisceaux pièges puissent également trouver leur origine dans les processus du pompage optique et de la relaxation magnétique au voisinage de la bistabilité. Un traitement théorique satisfaisant n'a pas encore été réalisé, car le système est beaucoup plus complexe en présence des faisceaux pièges.

En ce qui concerne la possibilité d'une réduction du bruit quantique, qui reste le but principal de notre expérience, il est évident qu'un comportement instable du système n'est pas souhaitable. Les oscillations produisent un excès de bruit qui peut même dépasser la limite de saturation de notre détection. Nous ne pouvons pas espérer observer une réduction du bruit quantique dans de telles conditions. Il est alors indispensable de trouver des conditions expérimentales dans lesquelles les instabilités n'apparaissent plus. La compréhension de leur génération suggère deux méthodes. La première solution consiste d'abord à éviter toute relaxation magnétique en supprimant le gradient du champ magnétique. On peut alors envisager de couper non seulement les faisceaux pièges mais aussi le champ quadrupolaire pendant la mesure. Le but de la deuxième possibilité est de minimiser le processus du pompage optique par le faisceau sonde. Au moment où les faisceaux pièges sont coupés les atomes se trouvent distribués d'une manière aléatoire entre tous les sous-niveaux Zeeman. C'est cette situation qui entraîne un processus du pompage optique par le faisceau sonde. Nous pouvons contourner cette difficulté en envoyant un faisceau laser de prépompage optique avant que le faisceau sonde entre dans la cavité.

Nous allons décrire les deux méthodes ainsi que leur réalisation expérimentale dans les prochains paragraphes.

## 4.4 Coupure du champ magnétique

Le gradient du champ magnétique est coupé en interrompant le courant des bobines à l'aide d'un relais statique (CRYDOM 100V20A). Le montage contient deux circuits électriques. Le premier circuit sert essentiellement à couper le courant (figure 17(a)). Le relais statique ouvre ou ferme le circuit en fonction d'un signal de pilotage arrivant à l'entrée BNC. Ce signal est une tension rectangulaire variant entre 0 et 5V, à la suite de laquelle le relais ouvre ou ferme le circuit avec un délai de 1ms ou 100 $\mu$ s respectivement. La chute rapide du courant peut être suivie d'un régime transitoire, pendant lequel des signaux avec des amplitudes plus fortes que l'amplitude de la tension continue peuvent se produire. Tous les éléments fragiles doivent donc être protégés contre ces pics transitoires. Dans ce but, nous utilisons des diodes transiles en parallèle avec l'alimentation, le relais statique et les bobines. Elles deviennent conductrices si une tension de  $\pm 62$ V est dépassée. Le deuxième circuit (figure 17(b)) contient une combinaison de capacités et résistances qui a pour but de minimiser le temps de décroissance du courant dans les bobines, et une résistance supplémentaire pour contrôler le courant.

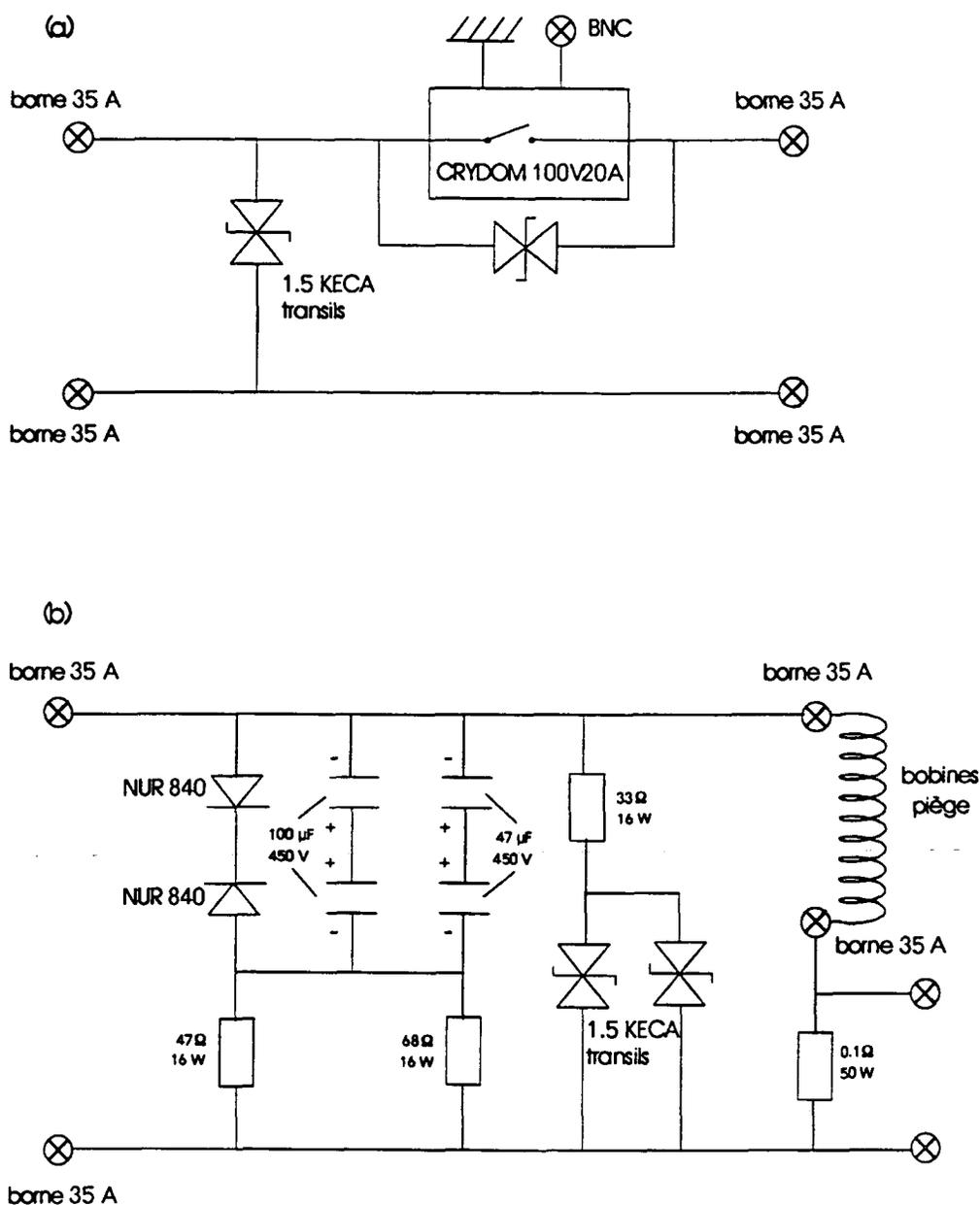
En fonctionnement continu, l'alimentation délivre un courant de 7 – 8A. Le temps d'amortissement du courant en cas de coupure a une valeur expérimentale de 2ms. Le gradient du champ décroît plus lentement à cause de la perméabilité magnétique des matériaux. Nous estimons avoir supprimé le gradient du champ magnétique environ 5ms après l'instant de la coupure.

Les signaux de pilotage pour la coupure des faisceaux pièges et du champ magnétique sont produits d'une manière synchronisée. La durée de chaque signal ainsi que leur délai, déterminé d'après le temps de mesure et le temps de remplissage du piège, sont réglables indépendamment. En fonctionnement normal, nous coupons les faisceaux pièges en même temps que le gradient du champ magnétique.

Il reste un champ magnétique statique dû au champ terrestre et aux champs produits par des éléments magnétiques situés à proximité du piège. Pour réduire l'influence de ce champ résiduel sur la relaxation de l'orientation, nous pouvons utiliser deux méthodes. Soit le champ peut être compensé en grande partie en appliquant un champ magnétique statique extérieur dans les trois directions de l'espace, soit nous pouvons forcer la précession du spin autour l'axe de propagation du faisceau sonde.

Dans le cadre de la première solution, nous avons monté trois paires de bobines dans une configuration Helmholtz autour du piège, qui peuvent produire un champ maximal de l'ordre de 3G au niveau du piège. Par cette méthode, nous arrivons à compenser le champ résiduel à mieux qu'un dixième du champ terrestre, c'est à dire à mieux que 50mG au centre du nuage. La fréquence de Larmor vaut 350kHz/G pour l'état fondamental, ce qui nous donne une fréquence de Larmor résiduelle de 17kHz pour l'état fondamental.

La deuxième méthode tient compte du fait que l'orientation dans l'état fondamental est créée par une polarisation circulaire. Par conséquent, c'est seulement la précession du spin autour de l'axe vertical qui conduit à un amortissement de cette



**Fig. 17:** Circuits électroniques pour couper le champ magnétique inhomogène. Le circuit (a) contient le relais statique ainsi que des diodes transiles pour protéger le relais statique et l'alimentation. Le circuit (b) contient une combinaison de capacités et résistances afin de minimiser le temps de décroissance du courant et des diodes transiles pour protéger les bobines.

orientation. Avec un champ magnétique fort le long de l'axe de propagation du faisceau sonde nous pouvons alors forcer le spin à précéder principalement autour de cet axe, auquel cas la précession ne conduit à aucune relaxation de l'orientation de l'état fondamental. Afin de créer un champ directeur pour supprimer la précession longitudinale du spin par rapport à sa précession transversale, nous avons aussi monté une autre paire de bobines de Helmholtz autour de la cavité qui peut produire un champ magnétique de 7 – 10G au milieu de la cellule. Nous avons encore amélioré cette mé-

thode en la combinant avec une compensation du champ magnétique dans la direction verticale du piège. En tenant compte des chiffres, le spin précesse jusqu'à 200 fois plus vite autour de l'axe de propagation qu'autour de l'axe vertical. C'est avec cette solution que nous avons obtenu la meilleure suppression des instabilités.

## 4.5 Prépompement optique des atomes

Afin d'éviter le mieux possible le pompement optique des atomes par le faisceau sonde, nous envoyons un faisceau de prépompement dans la cavité pendant les premières 1 – 2ms après la coupure. La plupart des atomes sont alors transférés dans le niveau  $6S_{1/2}, F = 4, m = 4$  avant que le faisceau sonde interagisse avec le milieu atomique. Dans ce cas, le pompement optique par le faisceau sonde n'affecte que des atomes qui ont déjà été retransférés vers d'autres niveaux par relaxation magnétique au moment de la mesure, et il a un effet beaucoup plus faible.

Nous utilisons comme faisceau de prépompement une des réflexions à l'ordre zéro d'un modulateur acousto-optique. La fréquence du faisceau est ensuite ramenée à une demi-largeur naturelle près de la transition atomique à l'aide d'un autre défecteur acousto-optique. Les détails du montage sont donnés plus loin dans le paragraphe 4.7.3 de ce même chapitre, car ils sont associés à un changement général du montage de l'expérience.

La puissance du faisceau du prépompement a été changée entre 20 et  $200\mu\text{W}$ . Cela correspond à une puissance de 0.8 à  $8\text{mW}$  à l'intérieur de la cavité, ce qui est suffisant pour pomper tous les atomes dans le niveau  $6S_{1/2}, F = 4, m = 4$  pendant 0.2 à  $9\mu\text{s}$  d'après le calcul du temps de pompement optique. La puissance du faisceau du prépompement est limitée, afin qu'il ne chasse pas les atomes hors du piège par effet de pression de radiation. La puissance maximale est déterminée en optimisant le signal de bistabilité observé.

## 4.6 Modifications du montage expérimental

### 4.6.1 Montage et équilibrage des détecteurs

Comme nous avons pu le constater sur les mesures préliminaires des fluctuations quantiques (chapitre 3 de ce mémoire), le rapport signal sur bruit est relativement faible. Cela provient d'une dynamique des détecteurs insuffisante et rend difficile l'observation d'une réduction du bruit. La dynamique de cette mesure dépend directement du rapport signal sur bruit de nos détecteurs, qui est proportionnel à la puissance lumineuse reçue par les détecteurs. Cette puissance est pratiquement celle de l'oscillateur local. Le rapport signal sur bruit est alors d'autant plus important que la puissance de l'oscillateur local est grande, tant que l'on se trouve dans un régime linéaire pour le détecteur.

La limite supérieure pour la puissance de l'oscillateur local est donnée par la saturation des détecteurs, en particulier en ce qui concerne les fluctuations dans la bande de fréquence mesurée. La tension de saturation du signal continu est en général beaucoup plus élevée. Dans la partie alternative du circuit du détecteur, il y a deux éléments qui peuvent saturer, la photodiode et l'amplificateur AH0013. La linéarité du fonctionnement de la diode est limitée par le courant qu'elle peut délivrer qui, lui, dépend de la tension d'alimentation (tension de bias). Plus la tension de bias est importante, plus le courant que la diode peut fournir et la tension de saturation de la diode sont élevés. De plus, le temps de réponse des diodes diminue en général en fonction de la tension de bias.

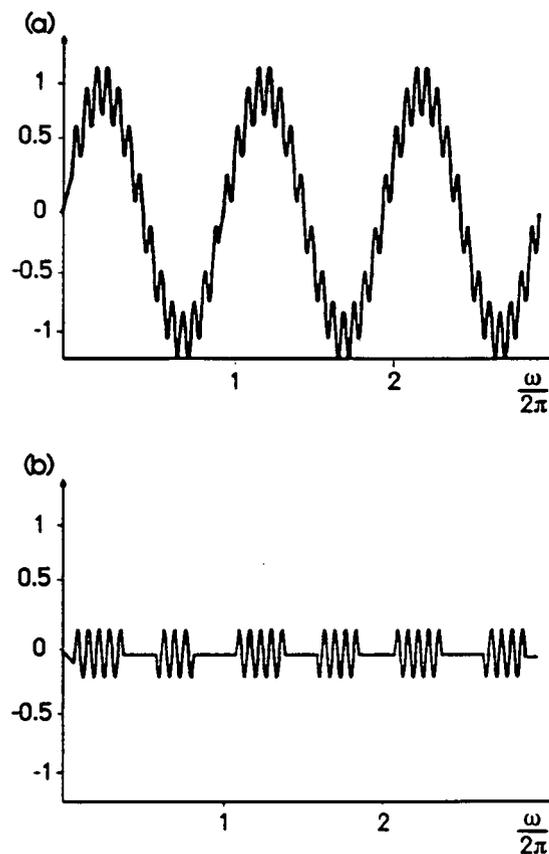
Dans les premières expériences, les diodes FFD100 étaient alimentées par une tension de  $U_{\text{bias}} = +15\text{V}$  en accord avec les indications du fabricant. La puissance de saturation correspondante d'environ  $800\mu\text{W}$  était trop faible pour notre application. Nous avons donc augmenté la tension de bias au fur et à mesure de  $U_{\text{bias}} = 15\text{V}$  à  $U_{\text{bias}} = 27,35$  et  $70\text{V}$  et repris les mesures de saturation. La puissance de saturation a augmenté respectivement de  $800\mu\text{W}$  à  $1,9,3$  et  $10\text{mW}$ . Avec une tension de bias  $U_{\text{bias}} = 70\text{V}$ , nous pouvons envoyer une puissance de l'oscillateur local de  $10\text{mW}$  sur les diodes sans les saturer ni en continu ni en alternatif. Cela améliore le rapport signal sur bruit qui atteint  $15\text{dB}$ .

Nous avons aussi testé d'autres diodes, des FND100 de EG&G, avec un courant d'obscurité de  $10\text{nA}$ , un bruit propre de  $60 \cdot 10^{-15}\text{A}/\sqrt{\text{Hz}}$  et une capacité propre de  $9,2\text{pF}$ , alimentée par  $70\text{V}$ , ce qui donne un temps de montée de  $1,5\text{ns}$ . Leur performance est donc légèrement inférieure à celle des diodes FFD100 (cf. caractéristiques données au paragraphe 3.6.2 du chapitre 3). Pour la puissance de saturation au niveau du bruit, ainsi que pour le rapport signal sur bruit, nous avons trouvé les mêmes résultats que pour les diodes FFD100. Les rendements quantiques sont un peu moins bons avec  $\eta_1 = 0,884$  et  $\eta_2 = 0,878$  sans miroir de renvoi et  $\eta_1 = 0,964$  et  $\eta_2 = 0,958$  avec miroir de renvoi.

De plus, nous avons étudié les effets de saturation de l'amplificateur AH0013. Suite aux résultats obtenus, nous avons d'abord baissé le gain de l'amplificateur de  $5$  à  $2,5$  pour éviter tout effet de saturation. Si les signaux à l'entrée de l'amplificateur étaient seulement dus à un bruit blanc du signal lumineux, ils seraient beaucoup trop faibles pour conduire à une saturation de l'amplificateur. Néanmoins le bruit du laser n'est pas simplement un bruit blanc. Le faisceau laser n'est au shot noise qu'au-dessus des fréquences de  $2,5\text{MHz}$  et montre en particulier un excès de bruit important autour de  $2\text{MHz}$  qui pourrait saturer l'amplificateur. Il est alors important de couper les fréquences autour de  $2\text{MHz}$  avant l'entrée de l'amplificateur pour ne pas le saturer à basses fréquences. Dans ce but, nous avons adapté le filtre passe-haut avant l'entrée de l'amplificateur ainsi que son filtre interne.

Un autre effet qui ressemble à une saturation de l'amplificateur pour des fréquences élevées est la distorsion d'intermodulation transitoire, un phénomène très connu dans le domaine Hi-fi. Il vient du fait qu'un signal réel à haute fréquence n'est jamais donné par une simple sinusoïde. Les hautes fréquences sont plutôt superposées aux fréquences

plus basses mais assez élevées pour passer par la partie alternative du détecteur comme indiqué sur la figure 18 (a). Sur le flanc d'une oscillation de l'onde porteuse la variation résultant d'un part de la variation importante du signal porteur et d'autre part des fluctuations à hautes fréquences devient trop importante, et l'amplificateur ne peut plus suivre les variations à hautes fréquences. Par contre, les fluctuations à hautes fréquences qui sont superposées aux maxima ou minima de l'amplitude de l'onde porteuse peuvent passer par l'amplificateur. Un tel signal produit sur l'analyseur de spectre une diminution de bruit, qui ressemble à une saturation comme indiqué sur la figure 18(b).



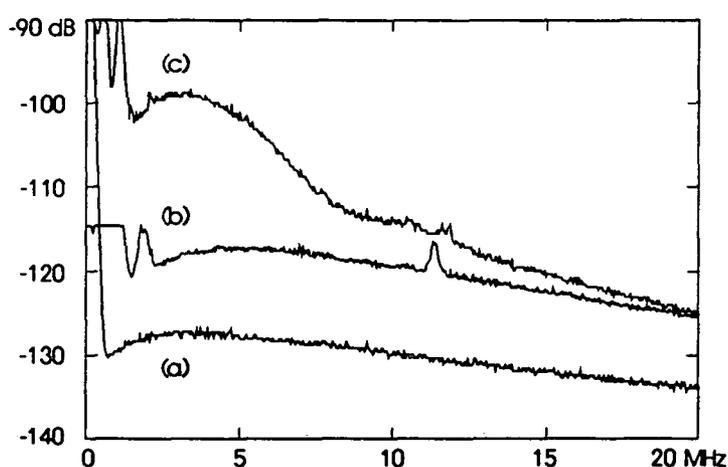
**Fig. 18:** Saturation de l'amplificateur par distorsion d'intermodulation transitoire. Le signal contient une partie à haute fréquence superposée à une onde porteuse d'une fréquence plus basse (a). Sur le flanc d'une oscillation de l'onde porteuse, la variation du signal devient trop importante et l'amplificateur ne peut plus suivre cette variation. Le signal à sa sortie est donc plat à ces endroits (b).

Nous avons ensuite entrepris un nouvel équilibrage électronique, qui a donné un taux de réjection  $\geq 35\text{dB}$  pour des fréquences entre 2.5 et 16MHz. Nous avons obtenu un équilibrage optique supérieur 24dB dans la même gamme de fréquences.

Nous disposons ainsi d'un paire des photodétecteurs pratiquement identiques, avec une bande-passante de 2.5 – 16MHz pour le bruit et un rendement quantique de  $\eta_1 = 0.977$  et  $\eta_2 = 0.971$  (avec des diodes FFD100) et de  $\eta_1 = 0.964$  et  $\eta_2 = 0.958$  (avec des diodes FND100) en utilisant des miroirs de renvoi pour récupérer la première réflexion. La puissance de saturation est 10mW en alternatif et supérieure à 15mW en continu.

### 4.6.2 Le modulateur acousto-optique: une source d'excès de bruit

Au cours des premières mesures du bruit, nous avons remarqué un excès de bruit important sur le faisceau sonde. Il s'agissait d'un bruit de phase de l'ordre de 3 – 20dB entre 3 et 15MHz, précisément dans la gamme de fréquence qui nous intéresse. En particulier, nous avons observé un excès de bruit de 15dB à notre fréquence centrale d'observation de 5MHz. Nous avons pu identifier la source de cet excès de bruit, à savoir le modulateur acousto-optique AO3 qui décalait la fréquence du faisceau sonde de 40-80MHz vers la résonance atomique (voir paragraphe 3.2.2 du chapitre précédent). La figure 19 montre le spectre du bruit sur un seul détecteur en absence de la lumière



**Fig. 19:** Excès de bruit produit par un modulateur acousto-optique. La figure montre le spectre de bruit du faisceau sonde en cas d'absence du modulateur acousto-optique (b) et le spectre du bruit du faisceau ayant traversé le modulateur acousto-optique (c). Le spectre (a) correspond au bruit électronique.

((a) bruit électronique), le spectre du bruit du faisceau en cas d'absence du modulateur acousto-optique (b) et le spectre du bruit du faisceau laser ayant traversé le modulateur acousto-optique (c). Ce bruit trouve son origine dans la génération de l'onde diffractée par l'onde acoustique. Selon les informations fournies par le fabricant, l'excès de bruit est produit par le faisceau non dévié diffusé par les bords du cristal dans le faisceau d'ordre un, ce qui peut conduire à des battements entre les deux fréquences et donc à un bruit de phase.

Ce bruit de phase étant un bruit classique, nous pouvons estimer l'effet de notre système bistable sur ce bruit. Il paraît en particulier possible, de réduire les fluctuations du faisceau au-dessous du niveau de ce bruit classique. Mais, cet excès de bruit est certainement beaucoup trop important pour pouvoir espérer de réduire les fluctuations du faisceau au-dessous du bruit de photons standard. Il est donc indispensable de s'affranchir de cette source d'excès de bruit.

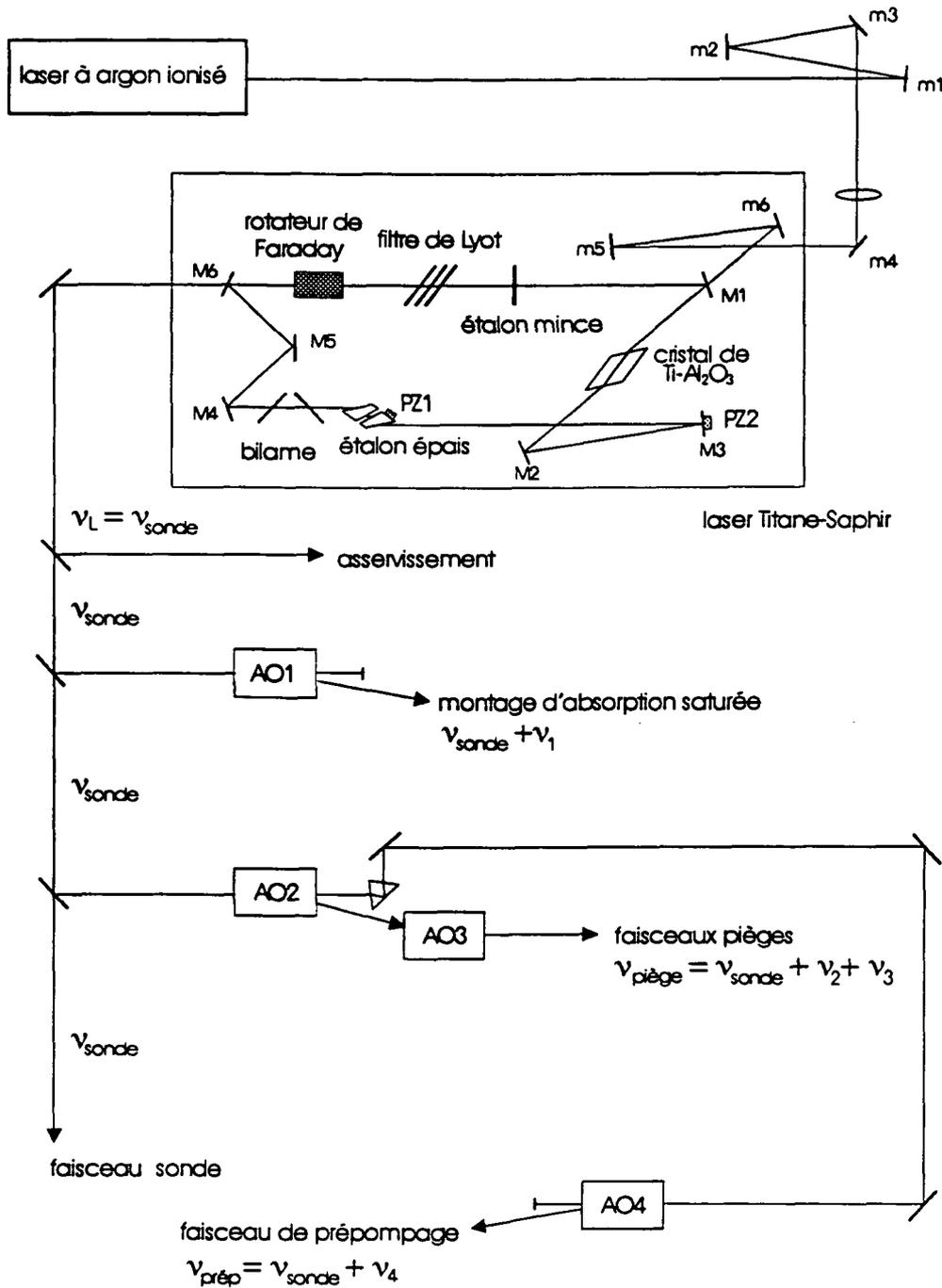
### 4.6.3 Nouveau montage

Nous avons alors été forcés de changer le montage de l'expérience pour éviter tout modulateur acousto-optique dans le chemin du faisceau sonde. Le nouveau montage est schématisé sur la figure 20. Le faisceau laser sert maintenant directement comme faisceau sonde sans décalage en fréquence. Il est alors nécessaire de modifier les fréquences mises en jeu dans l'absorption saturée. Nous utilisons maintenant comme référence de fréquence le signal du croisement entre les transitions  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5$  et  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 4$ , qui est décalée de 122MHz vers les basses fréquences par rapport à la première des deux transitions. Ce croisement a de plus l'avantage d'être plus intense qu'une simple transition. Le faisceau utilisé pour ce montage d'absorption saturée est pour la plupart de nos mesures décalé de  $\nu_1 = -174\text{MHz}$  vers les hautes fréquences, ce qui donne un désaccord du faisceau du laser et donc du faisceau sonde de  $\Delta_{\text{sonde}} = +20\gamma$  du côté rouge de la transition  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5$ .

Les faisceaux pièges sont ensuite séparés du faisceau ainsi asservi en fréquence. Leur fréquence doit être ramenée à deux ou trois largeurs naturelles de la fréquence de résonance. Le décalage en fréquence vaut alors environ  $-39\text{MHz}$  par rapport à la fréquence du faisceau sonde. Nous avons réalisé ce décalage en utilisant deux modulateurs acousto-optiques en série avec des fréquences centrales choisies telles que leur différence corresponde à 39MHz ( $\nu_2 = 178\text{MHz}$ ,  $\nu_3 = -217\text{MHz}$ ). Avec ce montage, la puissance disponible pour le piégeage est de l'ordre de 300mW.

L'ordre zéro à la sortie du premier des deux modulateurs est récupéré à l'aide d'un prisme à réflexion totale. Il nous sert comme faisceau de prépompage. Ce faisceau est envoyé dans un déflecteur acousto-optique (AO4), à l'aide duquel sa fréquence est décalée de  $\nu_4 = -49.5\text{MHz}$  ce qui l'amène à  $1\gamma$  du côté rouge de la résonance atomique. Il est important de rester du côté rouge de la transition car le faisceau du prépompage refroidit encore les atomes, alors qu'il les chaufferait dans la direction longitudinale s'il était décalé vers le bleu.

Le faisceau de prépompage est élargi jusqu'à un diamètre d'environ 6mm à l'aide d'un système de lentilles et injecté sur le trajet du faisceau sonde par une lame séparatrice. Sa polarisation est réglée par une lame demi-onde pour qu'il soit totalement transmis par le cube polariseur placé à l'entrée de la cavité. Par cette méthode, le faisceau de prépompage a automatiquement la même polarisation que le faisceau sonde et produit alors le pompage optique dans le même sens que le faisceau sonde.



**Fig. 20:** Montage expérimental amélioré. Pour éviter le décalage en fréquence du faisceau sonde par un modulateur acousto-optique, la fréquence du laser Titane-Saphir est choisie telle qu'elle corresponde à la fréquence du faisceau sonde. Le décalage en fréquence des faisceaux pièges est réalisé à l'aide de deux modulateurs acousto-optiques AO2 et AO3. L'ordre zéro à la sortie du premier des deux modulateurs est récupéré pour servir comme faisceau de prépomppe.

---

## 5 Mesures du bruit quantique

### 5.1 Procédure expérimentale

Rappelons que pour les mesures de bruit quantique nous coupons les faisceaux pièges et le gradient du champ magnétique en même temps. Le champ statique résiduel est compensé dans la direction verticale à mieux que 50mG. La compensation est faite en passant par une phase "mélasse optique" intermédiaire, c'est à dire en éteignant le gradient du champ avant les faisceaux pièges. Dans ce cas, nous observons le nuage atomique à l'aide de la fluorescence due aux faisceaux pièges détectée par une caméra C.C.D. pendant qu'il explose et se déplace. Le mouvement d'ensemble des atomes est dirigé vers l'endroit où le champ magnétique est nul. En variant l'intensité du champ compensateur nous pouvons alors arriver à une situation où le nuage ne se déplace plus après la coupure. Dans le plan horizontal, le long de la cavité, nous appliquons ensuite un champ directeur, de l'ordre de 7 – 10G. Le réglage de ce champ se poursuit presque de la même manière. Pendant la phase "mélasse optique", nous envoyons le faisceau sonde avec une forte puissance dans la cavité. Quand le paramètre de saturation est assez élevé, nous voyons l'effet de la pression de radiation sur le piège: les atomes sont expulsés hors du piège le long d'un trajet fin, qui démarque la direction du faisceau sonde. Le champ directeur est ajusté de façon que le nuage atomique se déplace le long du trajet du faisceau sonde quand nous coupons le gradient du champ magnétique.

Comme nous l'avons déjà expliqué au chapitre 4, nous avons environ 20ms pour effectuer les mesures de la courbe de bistabilité et du bruit quantique, avant que les atomes n'aient quitté la zone d'interaction avec le faisceau sonde à cause de l'explosion du nuage et sous l'influence de la gravité. Pendant ce temps, la fuite des atomes change l'indice de réfraction, ce qui conduit automatiquement à un balayage de la cavité sur la résonance. Pour les mesures du bruit, il n'est plus utile de moduler la longueur de la cavité. La longueur géométrique de la cavité est maintenue constante et nous enregistrons l'intensité transmise ainsi que le signal du bruit en fonction du temps à une fréquence d'analyse fixe pendant que les atomes balayent la longueur optique de la cavité. Le signal que nous observons sur l'analyseur de spectre n'est alors pas un spectre dans le sens strict du terme, car il s'agit d'un signal en fonction du temps et non pas de la fréquence. Nous continuerons néanmoins à l'appeler spectre du bruit dans la suite de ce texte.

En fonction de la phase initiale de la cavité, nous observons des signaux de bistabilité à des instants différents, selon le moment auquel le nombre d'atomes dans le faisceau sonde correspond à celui pour lequel la condition de résonance est satisfaite. Les signaux ont également une durée légèrement différente, parce que la variation du nombre d'atomes n'est pas constante au cours du temps. La largeur de la courbe de bistabilité est typiquement de l'ordre de 5 – 10ms.

## 5.2 L'influence des constantes de temps

Bien que la courte durée du temps de mesure ne complique pas l'observation de l'intensité moyenne, elle implique des difficultés en ce qui concerne l'observation du bruit quantique. Pour qu'on puisse parler d'une mesure d'un spectre du bruit, il faut s'assurer que la variable dont on veut mesurer les fluctuations est une variable quasi-stationnaire sur le temps de la mesure. Dans notre système, il y a plusieurs temps caractéristiques dont nous devons tenir compte. Nous allons donc d'abord présenter les constantes de temps essentielles, puis évaluer leur importance en détail.

Il y a tout d'abord le temps de fuite des atomes  $\tau_r$ , qui est donné par le rapport entre la vitesse moyenne  $\sigma_v$  des atomes dans le piège et le rayon du piège  $\sigma_r$

$$\tau_r = \frac{\sigma_v}{\sigma_r} \quad (5.1)$$

$\tau_r$  est le temps dominant dans l'évolution de notre système atomique et correspond environ à  $\tau_r = 20\text{ms}$ , selon la température du piège. Pendant ce temps, le nombre d'atomes dans le faisceau sonde diminue constamment et tend vers zéro, processus que nous utilisons pour balayer la phase de la cavité. Le temps pendant lequel nous pouvons observer la modification du bruit quantique par le système bistable est plus court, car le bruit à l'entrée de la cavité n'est modifié que tant que la cavité est à résonance. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, ce temps est plutôt de l'ordre de 10ms.

Pour mesurer le bruit sur toutes les quadratures, nous balayons la phase de l'oscillateur local au cours de la mesure. Afin qu'il y ait plusieurs périodes complètes pour cette modulation de phase sur un enregistrement d'un spectre, la fréquence de modulation doit être assez élevée. La fréquence typique du balayage de phase de l'oscillateur local est de l'ordre de  $f_{OL} \simeq 500\text{Hz}$ . La variation de la quadrature exploitée du bruit se produit à une fréquence deux fois plus élevée et alors à un temps caractéristique de l'ordre de  $\tau_{OL} \simeq 1\text{ms}$  (cf. chapitre 2.1.5).

Par suite de ces restrictions temporelles, une attention particulière doit être portée à l'analyse du signal et en particulier aux temps caractéristiques des filtres électroniques internes de l'analyseur de spectre utilisé pour la mesure du bruit. Le premier de ces filtres est la bande passante d'analyse que nous allons considérer en détail maintenant.

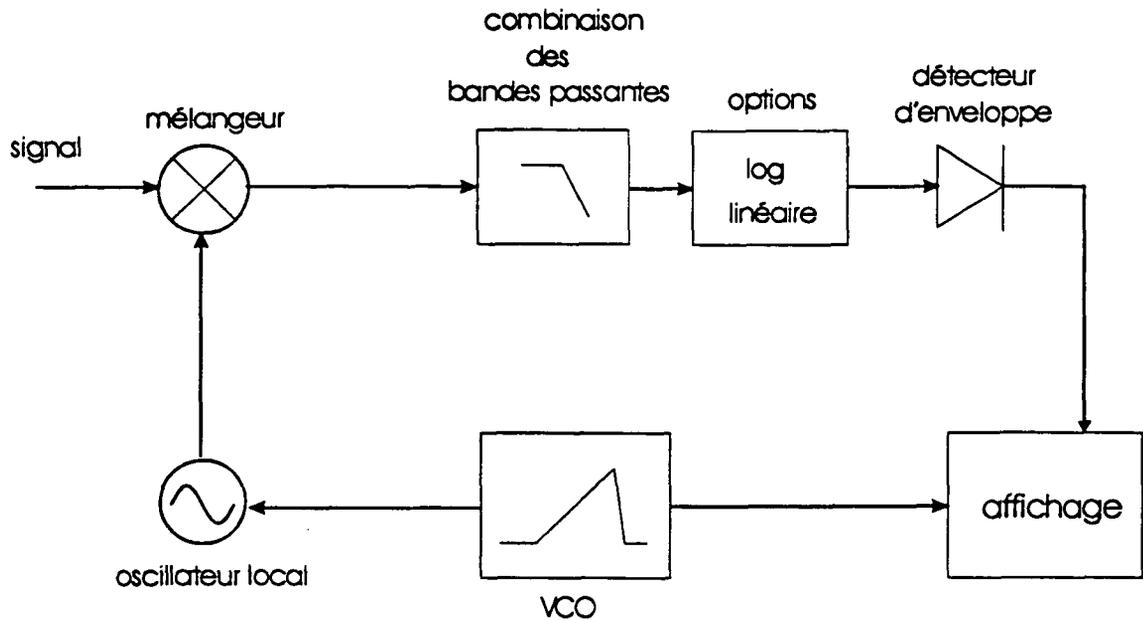


Fig. 21: Schéma simplifié d'un analyseur de spectre

### 5.2.1 La bande passante d'analyse

Afin de comprendre l'effet de la bande passante, nous allons discuter d'abord le fonctionnement général d'un analyseur de spectre. Un schéma des différentes opérations qu'il effectue est indiqué sur la figure 21. L'intervalle de fréquence dans lequel nous espérons une modification du bruit quantique est de l'ordre de 5 – 10MHz, correspondant à la largeur spectrale de la cavité. Pour pouvoir regarder le bruit à une fréquence d'observation donnée, il existe un mélangeur hétérodyne à l'intérieur de l'analyseur. Le signal à l'entrée est d'abord mélangé avec un oscillateur local électrique, qui est fourni par un VCO oscillant à la fréquence d'observation du bruit. Le signal traverse ensuite plusieurs étapes d'analyse. En cas d'enregistrement d'un spectre en fonction de la fréquence, l'oscillateur électrique est de plus piloté par une tension en dents de scie pour déclencher l'affichage du signal sur l'écran. Cela ne correspond pas à notre situation car, nous regardons le spectre à une fréquence d'observation fixe en fonction du temps.

Pour analyser le bruit, le signal est d'abord filtré par une combinaison de filtres passe-bas qui définit la bande passante d'analyse  $\Delta f_{an}$ . La fréquence de coupure du signal à la sortie ne correspond pourtant pas à cette valeur de la bande passante, mais plutôt à  $\Delta f_{an}/4$ . Le premier facteur 2 est dû au mélangeur homodyne. Le filtrage passe-bas sur le signal non mélangé correspond à un filtrage passe-bande symétriquement autour de la fréquence d'observation sur le signal mélangé. Pour le signal mélangé, la fréquence de coupure est alors  $\Delta f_{an}/2$ . Le deuxième facteur 2 vient d'une particularité de l'analyseur Tektronix 2753P qui n'affiche pas la fréquence de coupure pour l'amplitude du signal à 3dB, mais à 6dB. Or, pour l'amplitude du signal la fréquence de coupure à 3dB correspond à celle à 6dB divisée par environ 2. Nous trouvons donc

une fréquence de coupure mesurée sur le signal de sortie qui correspond à  $\Delta f_{\text{an}}/4$  où  $\Delta f_{\text{an}}$  est la valeur affichée de la bande passante. Si nous choisissons par exemple une bande-passante de  $\Delta f_{\text{an}} = 100\text{kHz}$ , la fréquence de coupure pour l'amplitude du bruit est de l'ordre de 25kHz.

Le signal ainsi filtré traverse ensuite des étapes accessoires; il peut par exemple être converti en décibel. La dernière étape est une détection d'enveloppe et l'affichage du signal sur l'écran, soit en échelle logarithmique soit en amplitude.

Le temps minimal d'analyse est donné par l'inverse de la fréquence de coupure qui est donc, en tenant compte de toutes ces informations

$$\tau_{\text{an}} \simeq \left(\frac{\Delta f_{\text{an}}}{4}\right)^{-1} \quad (5.2)$$

Si on veut parler d'un spectre, il faut d'abord que ce temps d'analyse  $\tau_{\text{an}}$  soit nettement plus petit que le temps caractéristique de variation de l'intensité moyenne

$$\tau_{\text{an}} \ll \frac{\tau_r}{4} \simeq 5\text{ms} \quad (5.3)$$

Afin de ne pas dégrader les oscillations du bruit dues au balayage de l'oscillateur local optique, la fréquence de coupure doit être nettement plus élevée que la fréquence caractéristique de la variation du signal. Nous allons supposer qu'il nous faut au moins 5 points de mesures pendant une demi-période pour pouvoir identifier une arche d'oscillation. Pour pouvoir étudier le bruit sur toutes les quadratures à la fois, il faut alors que le temps d'analyse pour au moins 5 points soit suffisamment plus petit que le temps de variation de la phase de l'oscillateur local

$$5 \cdot \tau_{\text{an}} < \tau_{\text{OL}} \simeq 2\text{ms} \quad (5.4)$$

soit

$$\tau_{\text{an}} < \frac{\tau_{\text{OL}}}{5} \simeq 0.4\text{ms} \quad (5.5)$$

Ces conditions nous conduisent à une bande-passante de  $\Delta f_{\text{an}} > 10\text{kHz}$ . Pour des fréquences nettement inférieures à 10kHz, la condition (5.5) n'est pas satisfaite. Dans ces conditions, l'analyseur de spectre commence à moyennner les variations de phase de l'oscillateur local, ce qui n'est pas souhaitable, car ce processus détruit la visibilité d'une réduction du bruit.

Les arguments précédents nous ont conduit à une limite inférieure pour la bande passante. Nous allons voir maintenant qu'il existe aussi une limite supérieure. En effet, la réduction du bruit dépend de la fréquence d'observation. Une analyse du signal de bruit avec une certaine bande passante conduit à moyennner le bruit sur cette gamme de fréquence. Si, par conséquent, la bande passante d'analyse est beaucoup plus grande que la gamme de fréquence pour laquelle le bruit est réduit au-dessous du bruit quantique standard, l'effet de la réduction du bruit disparaît et n'est plus visible sur le signal de sortie. Pour une bande passante plus petite ou du même ordre que la gamme de fréquence de la réduction du bruit, l'effet peut être dégradé, mais est toujours visible

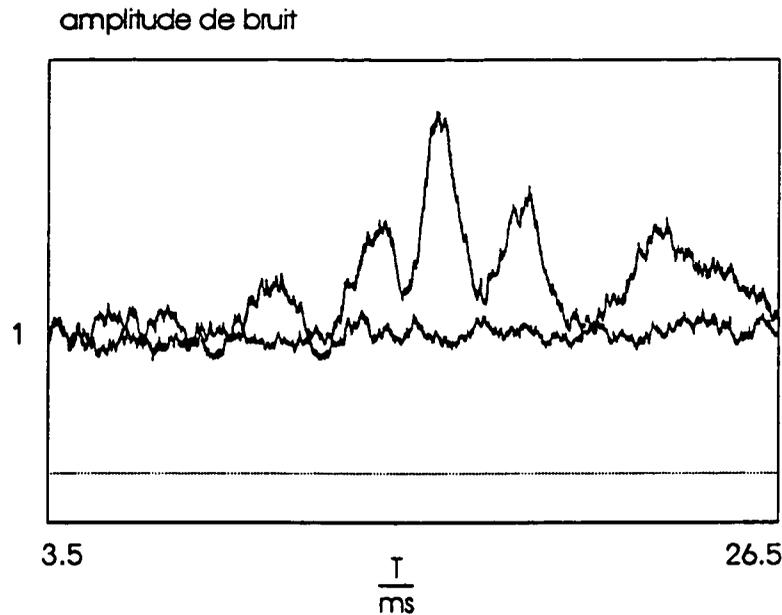
sur le signal analysé. La limitation pour la bande passante dépend alors de la largeur spectrale de la réduction du bruit, qui dépend, elle, des paramètres de l'expérience. Nous avons estimé la dégradation d'une réduction du bruit pour des valeurs différentes de la bande passante. Pour notre choix de paramètres nous avons obtenu la condition  $\Delta f_{\text{an}} < 3\text{MHz}$ , pour que le squeezing ne soit pas dégradé de plus de 5%.

Afin de satisfaire à la fois les limites inférieure et supérieure, nous avons été conduits à choisir une bande passante d'analyse de  $\Delta f_{\text{an}} = 100\text{kHz}$ .

### 5.2.2 Le filtre vidéo

Le signal à la sortie de l'analyseur de spectre contient beaucoup de fluctuations parasites. Sans filtrage, ce bruit parasite sur le bruit peut atteindre un tel niveau que le signal n'est plus visible. Pour pouvoir interpréter le résultat de la mesure, le signal doit être filtré. Dans ce but, l'analyseur prévoit un deuxième filtre, appelé le filtre vidéo. Celui-ci est un filtre passe-bas de 6dB par octave qui agit seulement sur l'affichage du signal pour supprimer le bruit parasite. Pour notre analyseur de spectre (Tektronix 2753P), sa fréquence de coupure peut être changée en fonction de la bande passante d'analyse entre deux positions,  $\Delta f_{\text{an}}/30$  et  $\Delta f_{\text{an}}/300$ . Alors qu'avec la première position, le bruit parasite est souvent toujours trop important, la deuxième position fournit un signal propre. Pour une bande-passante de  $\Delta f_{\text{an}} = 100\text{kHz}$ , la fréquence de coupure du filtre vidéo est alors  $\Delta f_{\text{vidéo}} = 300\text{Hz}$ . Toutes ces spécifications ont été vérifiées en mesurant la courbe de gain pour les filtres vidéo ainsi que pour les bandes passantes elles-mêmes. Dans ce but, nous avons appliqué une modulation à l'entrée de l'analyseur de spectre et mesuré l'amplitude de cette modulation à la sortie de l'analyseur par rapport à l'amplitude à l'entrée pour des fréquences différentes. Le rapport entre les amplitudes en fonction de la fréquence donne directement la courbe de gain du filtre considéré. Malheureusement il n'est pas possible de mesurer également le déphasage du signal par les filtres, à cause de l'existence d'autres éléments dans le circuit qui déphase le signal. En ce qui concerne la courbe de gain, nous avons trouvé que les filtres vidéo et la bande-passante sont bien réalisés par des filtres passe-bas, dont la fréquence de coupure correspond à la valeur affichée  $\Delta f_{\text{vidéo}}$  et  $\Delta f_{\text{an}}/4$  respectivement.

La figure 22 montre un signal de bruit en fonction du temps enregistré en échelle linéaire avec une bande passante de  $\Delta f_{\text{an}} = 100\text{kHz}$  et un filtre vidéo de  $\Delta f_{\text{vidéo}} = 300\text{Hz}$ . Le deuxième signal sans oscillations correspond au bruit quantique standard. Nous l'obtenons en cachant le faisceau sonde et en enregistrant le signal de l'oscillateur local seul. La ligne pointillée correspond au niveau du bruit électronique. L'intensité du faisceau sonde est  $I_{\text{sonde}} \simeq 25\mu\text{W}$ , sa fréquence est décalée de  $\delta = 20$  demi-largeurs naturelles dans le rouge, la fréquence d'observation du bruit est  $\omega_{\text{bruit}}/2\pi = 5\text{MHz}$  et l'intensité de l'oscillateur local est donnée par  $I_{\text{OL}} \simeq 9\text{mW}$ . Quand le nombre d'atomes devient tel que la cavité est résonnante avec le faisceau sonde, le bruit quantique du faisceau sonde est modifié selon sa phase par rapport à l'oscillateur local, ce qui conduit aux oscillations. Nous remarquons qu'avant que la cavité n'atteigne la résonance (coté gauche de la figure 22), l'arche d'une oscillation passe légèrement au-dessous du niveau



**Fig. 22:** Amplitude du bruit en fonction du temps après la coupure du piège. L'axe horizontal correspond au niveau zéro de l'analyseur de spectre. La ligne en tirets marque le niveau du bruit électronique. Le signal plat correspond au bruit quantique standard. Avant que la cavité n'atteigne la résonance, le bruit passe légèrement au-dessous du bruit quantique standard.

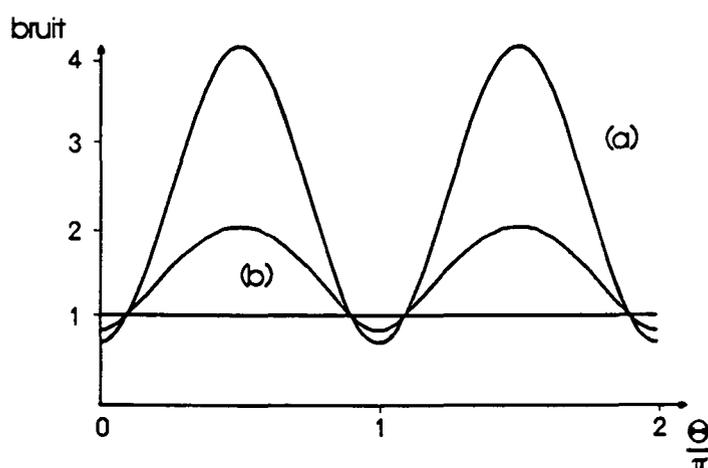
du shot noise, mais l'effet n'est pas très prononcé. La fréquence des oscillations est de l'ordre de 1kHz sur le bruit, ce qui correspond à une fréquence de balayage en phase de 500Hz. Par conséquent, les oscillations ont été moyennées par le filtre vidéo autour de la valeur moyenne du signal. Cela dégrade la visibilité du squeezing et peut en particulier complètement détruire l'effet sur le signal affiché, si la fréquence de coupure du filtre vidéo est beaucoup plus basse que la fréquence caractéristique des oscillations. L'effet est d'autant plus grave qu'il y a de l'excès de bruit sur notre signal, ce qui augmente le niveau moyen, et que le signal est affiché en amplitude. Bien que la *puissance* de bruit corresponde à une sinusoïde en fonction de la phase de l'oscillateur local [114], ce n'est plus le cas si le signal est affiché en *amplitude*. Dans ce cas en effet, le signal contient non seulement la fréquence fondamentale des oscillations, mais aussi des fréquences harmoniques plus élevées, pour lesquelles l'effet du filtrage est encore plus important. De plus, en échelle linéaire la réduction du bruit est moins visible: une réduction du bruit de 30% par exemple correspond à un niveau de la puissance du bruit de  $S_{\min} = 0.7$ . Le même signal, affiché en amplitude donne un niveau de bruit de  $\sqrt{S_{\min}} \simeq 0.84$ . Bien que la réduction du bruit n'ait pas changé, elle n'est qu'environ 16% en échelle linéaire. Un argument analogue est également valable pour un affichage du signal en échelle logarithmique.

Nous avons modélisé l'effet du filtre vidéo en considérant une situation où le signal du bruit en puissance est réduit de 30% au-dessous du bruit quantique standard, comme le prévoit la théorie pour notre choix de paramètres. La puissance du bruit est décrite

par la variance des fluctuations du champ dans une direction  $\Theta$  quelconque [114]:

$$S(\Theta) = S_{\min} \cos^2 \Theta + S_{\max} \sin^2 \Theta \quad (5.6)$$

où  $S_{\min}$  et  $S_{\max}$  correspondent respectivement aux fluctuations minimales et maximales du champ. Le bruit en puissance est alors une sinusoïde en fonction de la phase  $\Theta$ . Cela n'est plus vrai pour l'amplitude du bruit qui est tracée sur la figure 23. Il est clairement



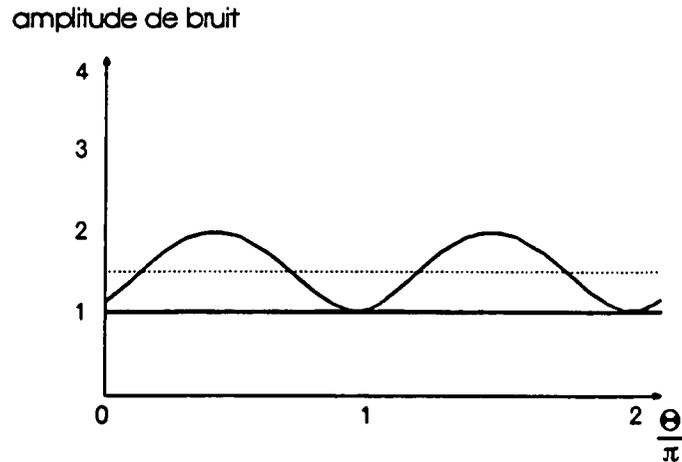
**Fig. 23:** Modélisation de l'effet d'un affichage du bruit en amplitude. Tandis que la puissance du bruit est une sinusoïde en fonction de la phase  $\Theta$  (a), ce n'est pas le cas pour l'amplitude (b). De plus, la réduction du bruit au-dessous du niveau du bruit quantique standard est moins visible.

visible qu'en échelle linéaire la réduction du bruit a diminué de la moitié et est donc plus difficile à observer. Afin de nous rapprocher de la situation expérimentale, nous avons supposé que l'état comprimé produit par notre système bistable n'est pas un état minimal, mais montre un excès de bruit de

$$S_{\min} \cdot S_{\max} \simeq 8 \quad (5.7)$$

Nous avons ensuite modélisé l'effet du filtrage numériquement. Dans ce modèle, la fréquence de coupure du filtre a été choisie  $1/3$  de la fréquence caractéristique de la variation du signal, comme c'est le cas pour le spectre expérimental (cf. figure 22). Le signal du bruit en amplitude que nous avons obtenu est tracé sur la figure 24. Après avoir traversé le filtre, la réduction du bruit a entièrement disparu sur le signal à cause du processus de moyennage autour du niveau moyen (en tirets sur la figure 24).

Nous pouvons tirer plusieurs conclusions de cette discussion. Premièrement, nous devons disposer d'un filtre vidéo à fréquence de coupure variable pour pouvoir filtrer le bruit parasite d'une manière efficace sans dégrader la visibilité du squeezing sur le signal filtré. Nous n'utilisons alors plus le filtre vidéo interne de l'analyseur de spectre, mais plutôt des filtres RC à fréquence variable à sa sortie. De plus, il est possible de restaurer les spectres partiellement détruits par le filtre vidéo à l'aide d'un traitement numérique.



**Fig. 24:** Modélisation de l'effet du filtre vidéo: le signal du bruit en échelle linéaire qui contenait 16% de squeezing, ne contient plus de squeezing après avoir traversé le filtre vidéo. La ligne pointillée correspond à la valeur moyenne du signal. La ligne droite marque le niveau du bruit quantique standard.

Il est également indispensable de transformer des spectres de bruit en amplitude en spectres de bruit en puissance pour pouvoir en tirer des informations quantitatives. Cela nécessite également un traitement numérique des spectres après l'enregistrement. Nous allons décrire les deux méthodes du traitement dans le prochain paragraphe. Tous les procédures ont été effectuées en Turbo-Pascal en utilisant des modules FFT développés au laboratoire par Antoine Heidmann.

## 5.3 Traitement du signal

### 5.3.1 Restauration des spectres

Sur les spectres pris avec le filtre vidéo, l'information sur le squeezing a été effacée par un filtrage passe-bas dont nous connaissons parfaitement la fréquence de coupure. Par conséquent nous pouvons en déduire la fonction de transfert du filtre vidéo. C'est simplement la fonction correspondant à un filtre RC passe-bas. Pour récupérer l'information sur le squeezing, on peut alors "défiltrer" les spectres numériquement. Cela consiste à appliquer aux spectres enregistrés une transformation inverse de celle du filtre vidéo avec la même fréquence de coupure. Dans ce but, le spectre est d'abord amené dans l'espace de Fourier par FFT. Ensuite nous multiplions la fonction obtenue par l'inverse du filtre vidéo. Si nous notons  $f_{\text{coup}}$  la fréquence de coupure du filtre vidéo, la fonction inverse du filtre  $F_{\text{video}}(f)$  s'écrit

$$\frac{1}{F_{\text{video}}(f)} = 1 - i \frac{f}{f_{\text{coup}}} \quad (5.8)$$

Evidemment nous ne pouvons pas poursuivre cette procédure jusqu'aux fréquences  $f \gg f_{\text{coup}}$ . La fonction du défiltrage doit alors tendre vers zéro à hautes fréquences. Afin ne pas créer des oscillations artificielles dues aux discontinuités de la fonction, un soin particulier est apporté à sa construction numérique en évitant toute rupture brusque. Nous utilisons un filtre de Hanning, qui permet de passer continûment de la fonction de défiltrage à une valeur nulle sur un intervalle de fréquence  $[f_1, f_2]$ . Le filtre de Hanning  $F_H(f)$  est défini par

$$F_H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \leq f_1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{f - f_1}{f_2 - f_1}\right) & \text{si } f_1 < f \leq f_2 \\ 0 & \text{si } f > f_2 \end{cases} \quad (5.9)$$

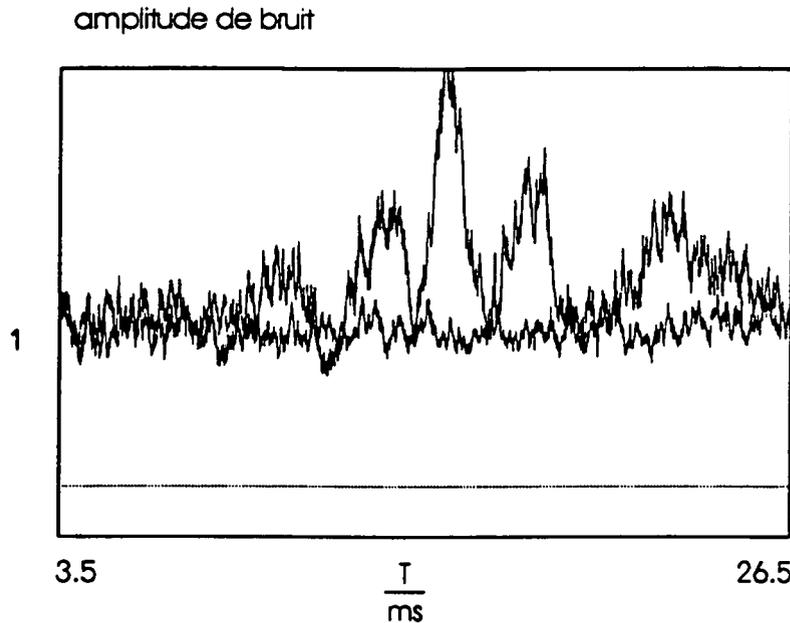
Avec cette méthode, nous récupérons évidemment aussi le bruit parasite qui avait été supprimé par le filtre vidéo. Par conséquent, il faut ensuite filtrer les spectres avec un filtre RC numérique à une fréquence bien adaptée aux fréquences caractéristiques de la modulation de phase de l'oscillateur local pour pouvoir interpréter le résultat. Dans ce but, la transformée de Fourier du spectre "défiltré" est multipliée par une fonction de filtre passe-bas  $F_{\text{RC}}(f)$  avec une fréquence de coupure  $f'_{\text{coup}} > f_{\text{coup}}$

$$F_{\text{RC}}(f) = \frac{1}{1 - i \frac{f}{f'_{\text{coup}}}} \quad (5.10)$$

Les filtres numériques ont été comparés aux filtres électroniques. Pour cela, nous avons pris un spectre de bruit avec un filtre vidéo de 300Hz ainsi que le même spectre non filtré. Le dernier a été filtré numériquement à 300Hz. Le spectre résultant de cette procédure a été trouvé identique au spectre pris avec le filtre vidéo. Par la suite, nous avons défiltré un spectre expérimental filtré par l'analyseur de spectre, filtré numériquement à 1kHz et comparé au spectre pris sans filtre vidéo mais filtré directement avec un filtre numérique à 1kHz. Dans ce cas aussi, nous avons obtenus des signaux de bruit résultants identiques.

Après toutes ces manipulations, nous effectuons une transformation de Fourier pour revenir dans l'espace de temps. Nous récupérons ainsi un spectre du bruit qui contient le même degré de squeezing qu'à l'entrée de l'analyseur de spectre ou, plus précisément, avant de traverser le filtre vidéo. Pour comparer un signal mesuré et le bruit quantique standard, il est nécessaire faute d'une échelle absolue d'effectuer le même traitement sur le bruit quantique standard que sur le signal mesuré. De plus, cela constitue un test pour les filtres numériques. Toute oscillation parasite créée par le traitement sur le signal physique apparaîtrait aussi sur le bruit quantique standard.

Pour illustrer l'effet du traitement, la figure 25 montre le spectre de bruit expérimental précédent, qui avait été pris avec un filtre vidéo de  $f_{\text{coup}} = 300\text{Hz}$ . après le défiltrage et un nouveau filtrage à fréquence de coupure de  $f'_{\text{coup}} = 1\text{kHz}$ . Le signal plat correspond au bruit quantique standard qui, lui aussi, a été traité de la même manière que le signal. Sur le spectre traité, l'amplitude des oscillations est visiblement plus grande. En particulier, la réduction du bruit sur le coté gauche de la figure paraît



**Fig. 25:** Spectre expérimental défiltré numériquement à 300Hz et filtré ensuite à 1kHz. Le signal plat correspond au bruit quantique standard qui a été traité de la même manière.

plus importante. Cependant, nous ne pouvons toujours pas donner la valeur exacte du squeezing tant que le signal reste un signal en amplitude.

### 5.3.2 Transformation en puissance de bruit

Afin de connaître le degré exact de la réduction du bruit obtenu et de pouvoir comparer les spectres expérimentaux avec des spectres théoriques, il est souhaitable de disposer des spectres en puissance du bruit. Après les procédures de filtrage et défiltrage, les spectres en amplitude sont transformés numériquement en spectres en puissance et normalisés par le bruit quantique standard. Pour pouvoir effectuer la transformation et la normalisation, nous devons connaître les valeurs des grandeurs suivantes: le niveau zéro de l'analyseur de spectre  $V_0$ , le niveau du bruit électronique  $V_{elec}(\omega)$ , le signal du bruit quantique standard  $V_{shot}(\omega)$ <sup>1</sup> et bien sur le signal à transformer  $V(\omega)$ , tous mesurés en tension.  $\omega$  est la fréquence du bruit. Le signal en puissance  $S(\omega)$  se calcule alors à partir du signal en tension  $V(\omega)$  de la manière suivante

$$S(\omega) = \frac{(V(\omega) - V_0)^2 - (V_{elec}(\omega) - V_0)^2}{(V_{shot}(\omega) - V_0)^2 - (V_{elec}(\omega) - V_0)^2} \quad (5.11)$$

Nous obtenons ainsi le spectre en puissance de bruit, à partir duquel nous pouvons estimer la réduction du bruit quantique que nous avons effectivement obtenue. Le niveau  $S(\omega) = 1$  correspond au niveau du bruit quantique standard.

<sup>1</sup> Bien que le bruit quantique standard soit un bruit blanc, il dépend ici de la fréquence  $\omega$ , à cause de la réponse en fréquence des circuits électroniques de détection.

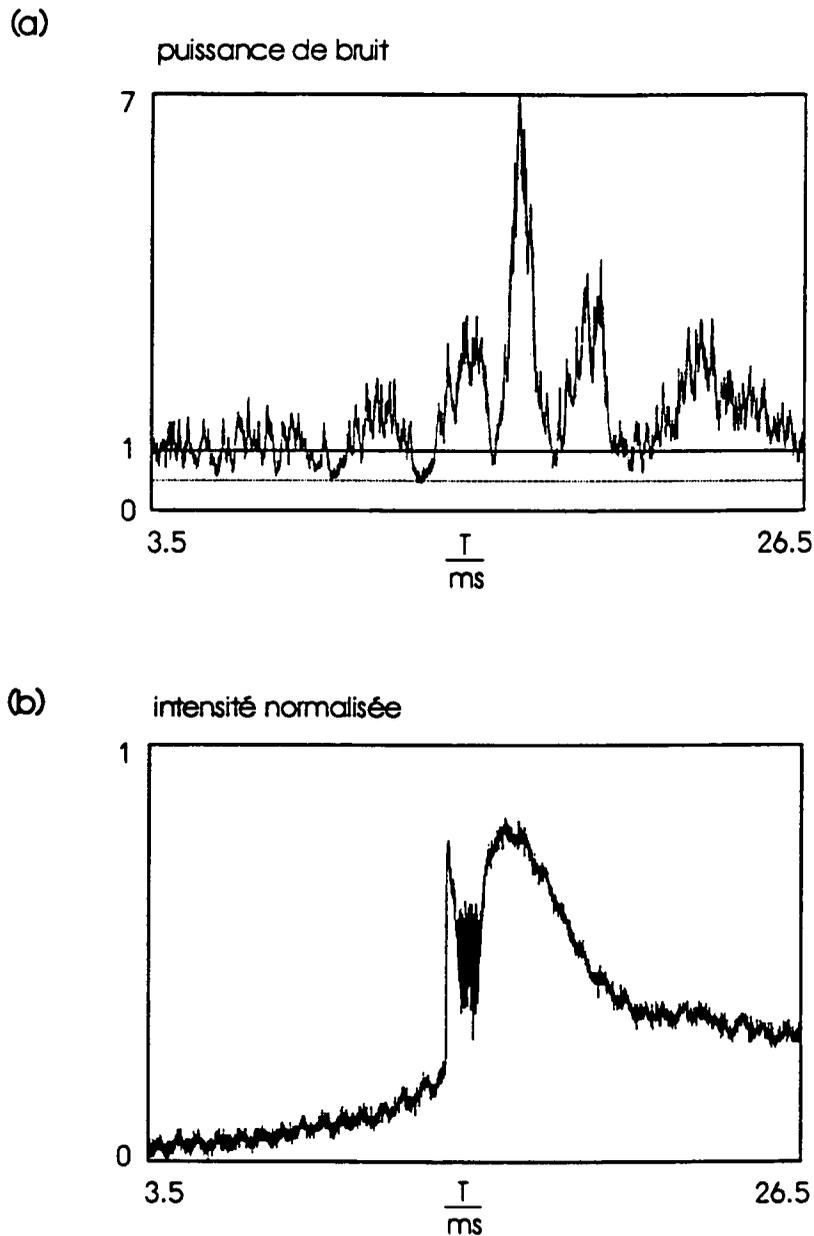
## 5.4 Mesures de la réduction du bruit

Nous avons maintenant assemblé tous les moyens pour traiter les signaux de bruit. Le résultat de la transformation en puissance de notre spectre de bruit précédent est montré sur la figure 26(a). L'axe vertical correspond maintenant à la puissance du bruit en unités de bruit quantique standard. L'axe horizontal correspond au temps en milliseconde après le moment de la coupure du piège. Nous observons une réduction du bruit quantique de 30% au-dessous du bruit quantique standard sur la branche basse de la courbe de bistabilité au moment où la cavité commence à devenir résonnante avec le faisceau sonde. Nous estimons l'erreur de la mesure à  $\pm 10\%$  à cause du bruit sur le bruit. Le rendement quantique pour cette mesure est de l'ordre de

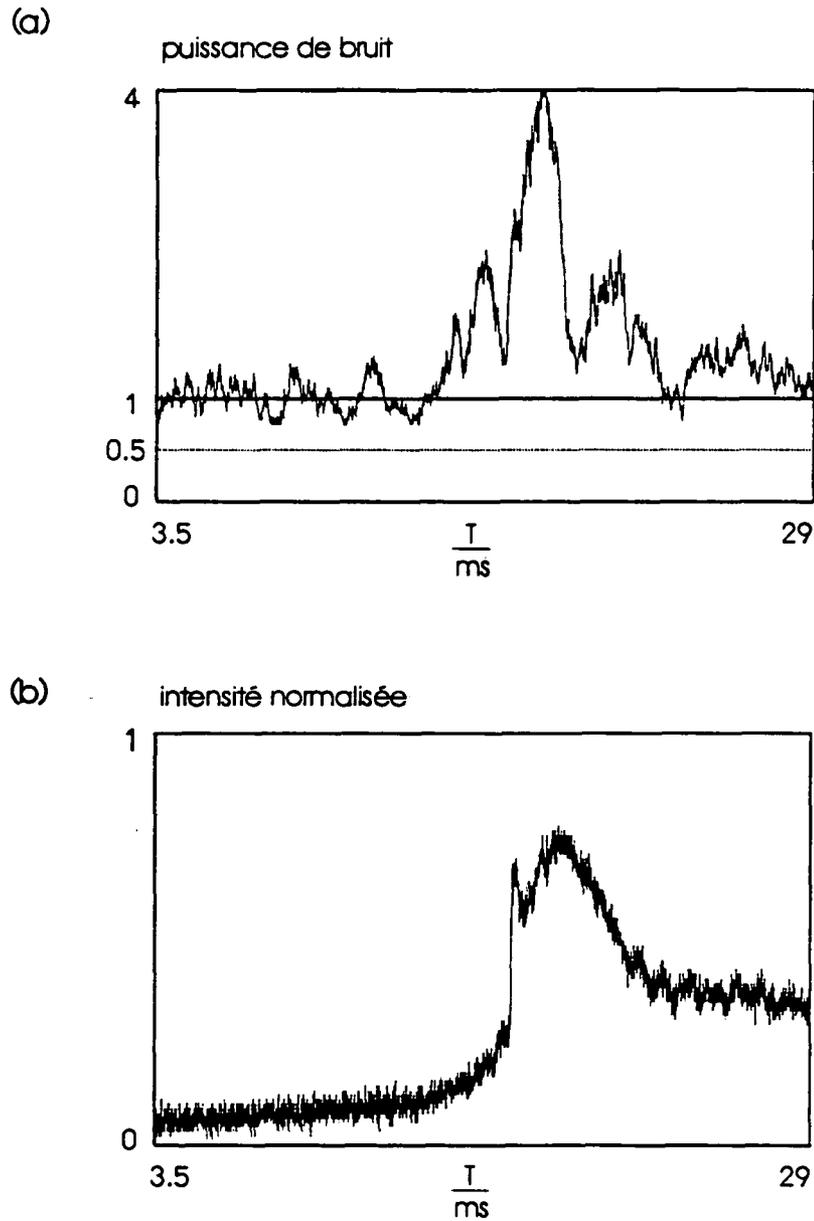
$$\eta_{\text{tot}} = \eta_{\text{pertes}} \cdot \eta_{\text{diode}} \cdot \eta_{\text{TEM}_{00}} \cdot \eta_{\text{batt}}^{(\text{hr})} \simeq 0.90 \quad (5.12)$$

L'intensité moyenne correspondante est montrée sur la figure 26(b). Nous remarquons des instabilités résiduelles malgré les processus de prépompage et de compensation du champ magnétique résiduel. Cela est vraisemblablement dû à la taille importante de notre nuage atomique. Bien que le faisceau de prépompage ait un diamètre de 6 mm, il ne peut pas prépomper les atomes des bords du nuage qui après la coupure tombent dans le faisceau sonde. D'autre part il n'est pas possible de compenser totalement le champ magnétique résiduel sur un volume d'environ  $1 \text{ cm}^3$ . Les instabilités que nous observons à certains instants sont néanmoins beaucoup plus faibles qu'auparavant. En ce qui concerne leur compatibilité avec l'observation d'une réduction du bruit quantique, nous remarquons sur les figures 26 (a) et (b) que les instabilités se trouvent à un endroit où le bruit n'est pas réduit au-dessous du bruit quantique standard.

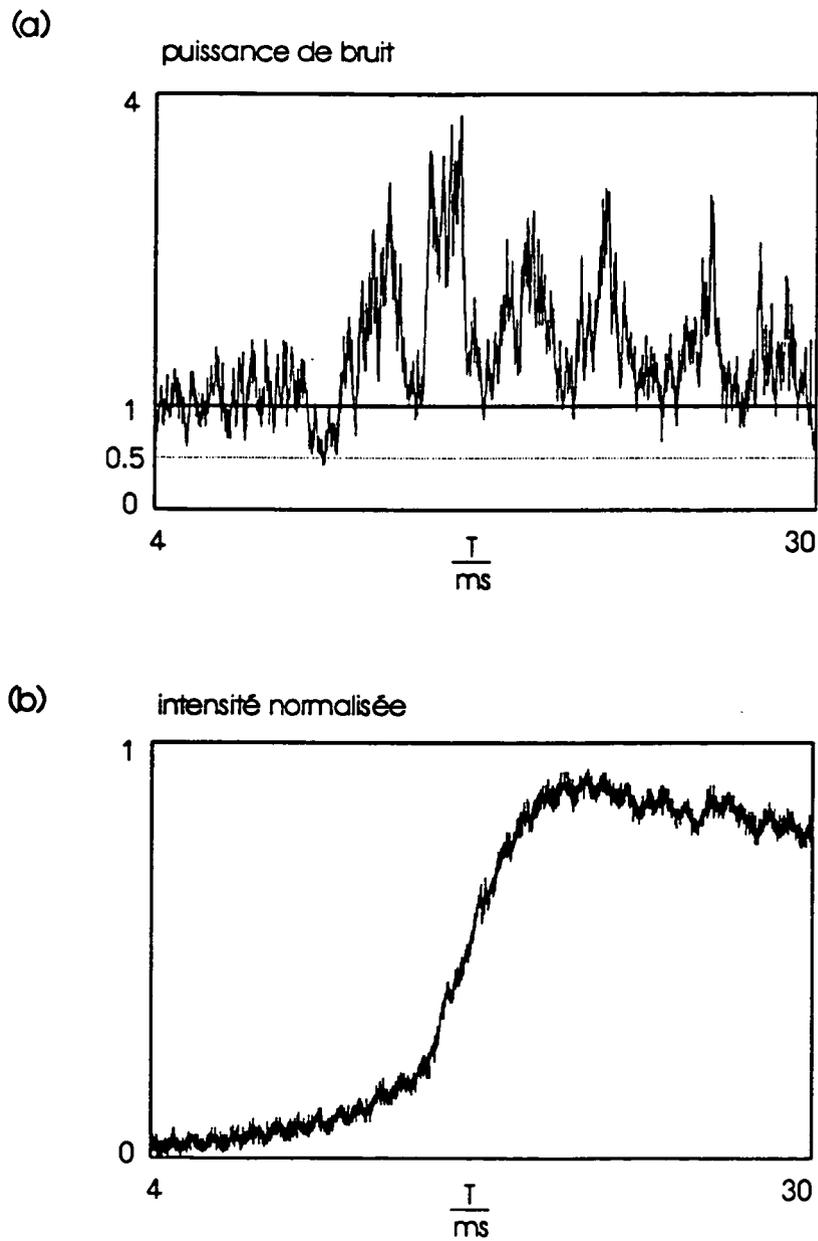
D'autres spectres de bruit pris dans les mêmes conditions montrent une réduction du bruit comparable. Sur la figure 27 une réduction du bruit d'environ 20% est visible sur trois arches de suite. L'allure de l'intensité moyenne est comparable à celle du spectre précédent, mais il n'y a pas d'instabilités. Par conséquent, l'excès de bruit est plus faible. La figure 28 présente un autre spectre avec l'intensité intracavité correspondante. Nous voyons que ce spectre a été pris plus tard par rapport à la coupure du piège que dans les deux cas précédents. La réduction de bruit atteint environ 30%. De plus, l'endroit où le squeezing se produit est toujours le même; il correspond à un déphasage tel que le faisceau sonde commence à entrer dans la cavité, mais avant que l'intensité intracavité ne soit devenue trop forte. Nous allons voir par la suite que ces résultats correspondent bien à la prédiction théorique pour ces paramètres expérimentaux. En l'absence d'autre indication, les spectres en puissance ont été filtrés à 1kHz. La comparaison entre théorie et expérience ainsi qu'un résumé des résultats obtenus se trouvent dans l'article que nous reproduisons au paragraphe suivant.



**Fig. 26:** Spectre du bruit en puissance en fonction du temps après la coupure, corrigé par le bruit électronique et normalisé par le bruit quantique standard (a). Une réduction du bruit de l'ordre de 30% est visible sur le côté gauche du spectre. La figure (b) montre l'intensité transmise correspondante. Les instabilités résiduelles apparaissent clairement après la manifestation du squeezing qui se produit presque hors résonance. Ces traces ont été obtenues à une fréquence d'observation de  $\omega_{\text{bruit}}/2\pi = 5\text{MHz}$ . L'intensité du faisceau sonde était  $25\mu\text{W}$ , sa fréquence était décalée de  $20\gamma$  dans le rouge de la transition. L'intensité de l'oscillateur local était  $9\text{mW}$ .



**Fig. 27:** Puissance de bruit (a) et intensité moyenne correspondante (b) en fonction du temps après la coupure du piège. Avant que la cavité n'atteigne la résonance, trois arches de suite passent au-dessous du niveau du bruit quantique standard indiqué par la ligne droite. La réduction du bruit est de l'ordre de 20%. Ce spectre a été filtré à 600Hz. Il a été pris légèrement plus tard que le spectre précédent, les conditions expérimentales sont les memes que pour la figure 26.



**Fig. 28:** Puissance de bruit (a) et intensité moyenne correspondante (b) en fonction du temps après la coupure du piège. Avant que la cavité n'atteigne la résonance, une réduction du bruit de l'ordre de 30% est visible. Les conditions expérimentales sont les mêmes que pour la figure 26.

### 5.4.1 Reproduction de l'article: "Cold atoms: A new medium for quantum optics" (Appl. Phys. B60 129 (1995))

Appl. Phys. B 60, 129–134 (1995)

**Applied  
Physics B** Lasers  
and Optics  
© Springer-Verlag 1995

## Cold atoms: A new medium for quantum optics

A. Lambrecht, J.M. Courty, S. Reynaud, E. Giacobino

Laboratoire Kastler Brossel, UPMC, ENS, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, F-75252 Paris, France  
(Fax: + 33-1/44273845, E-mail: ASTRID@spectro.jussieu.fr, COURTY@spectro.jussieu.fr, SR@spectro.jussieu.fr, ELG@spectro.jussieu.fr)

Received: 12 August 1994/Accepted: 21 October 1994

**Abstract.** Laser-cooled and trapped cesium atoms have been used as a nonlinear medium in a nearly resonant cavity. A study of the semiclassical dynamics of the system was performed, showing bistability and instabilities. In the quantum domain, squeezing in a probe beam having interacted with this system was demonstrated.

**PACS:** 32.80.Bx; 32.80.Pj; 42.50.Dv; 42.50.Lc; 42.65.Pc

Cold atoms in a magneto-optical trap constitute a quite new nonlinear material, the properties of which are far from being fully investigated. With the very low temperatures that can be achieved, the atoms can be considered as virtually motionless and the Doppler width of their resonances is smaller than the natural linewidth. In the vicinity of resonance lines, one can expect large nonlinear dispersive effects associated with very little absorption, but it is only recently that a cloud of cold atoms was placed in a resonant optical cavity to study its semiclassical dynamics [1]. As we show in the first part of this paper, cold cesium atoms in a cavity have a very rich nonlinear dynamics, exhibiting not only bistability but also instabilities. Analysing the nonlinear dynamics of laser-cooled atoms in a cavity was a prerequisite to the investigation of quantum noise in order to find the appropriate conditions to study the quantum properties of a light beam leaving the cavity.

The generation of quadrature squeezed light through interaction with atomic media has been the subject of numerous theoretical studies and looked particularly promising when there is no Doppler effect. All experiments up to date were performed on atomic beams. In the second part of this paper, we report on the quantum properties of cold atoms in a cavity and show that it is possible to detect quadrature squeezing in a probe beam that has passed through the cavity.

### 1 Dynamics of cold atoms in a cavity

We investigate the dynamical nonlinear behaviour of an optical cavity containing cold cesium atoms by sending a circularly polarized probe beam into the cavity. The atoms are cooled and trapped in a magneto-optical trap, operating in the standard way [2] with three orthogonal circularly polarized trapping beams generated by a Ti:Sapphire laser and an inhomogeneous magnetic field.

The cavity is a 25 cm long linear asymmetrical cavity, close to half-confocal with a waist of 260  $\mu\text{m}$ , built around the cell (Fig. 1). Losses due to the two AR coated windows are of the order of 1%. The input mirror has a transmission coefficient of 10%, the end mirror is highly reflecting, which gives a cavity linewidth of 5 MHz. The cavity is in the symmetry plane of the trap, making a 45° angle with the two trapping beams that propagate in this plane.

The trapping beams are detuned by 2.5 times the linewidth of the upper state ( $\Gamma/2\pi = 5.2$  MHz) on the low-frequency side of the  $6S_{1/2}$  ( $F = 4$ )– $6P_{3/2}$  ( $F = 5$ ) transition, yielding a cloud of cesium atoms the typical temperature of which is of the order of a few 1 mK. The diameter (2.5 cm) and power (20 mW/cm<sup>2</sup>) of the trapping beams allow us to obtain large clouds (about 8 mm in diameter) with densities of the order of  $10^{10}$  atoms/cm<sup>3</sup>. The number of trapped atoms located in the probe beam, which is the relevant parameter in the experiment, measured from the change in the transmission of the cavity in the presence of atoms, is found to range between  $10^7$  and  $10^8$  depending on the pressure of the background gas. As usual, the atoms, non-resonantly excited into the  $6P_{3/2}$  ( $F = 4$ ) state and falling back into the  $F = 3$  ground state, are repumped into the cooling cycle by a laser diode tuned to the  $6S_{1/2}$  ( $F = 3$ )– $6P_{3/2}$  ( $F = 4$ ) transition.

The probe beam, generated by the same laser, can be detuned by 0–130 MHz (corresponding to 0–25  $\Gamma$ ) on either side of the  $6S_{1/2}$  ( $F = 4$ )– $6P_{3/2}$  ( $F = 5$ ) atomic transition. We measure the power of the probe beam transmitted through the cavity while scanning the cavity length for a fixed value of the input intensity, as shown in Fig. 2, or the input intensity for a fixed value of the detuning. The recording shows the characteristic hysteresis

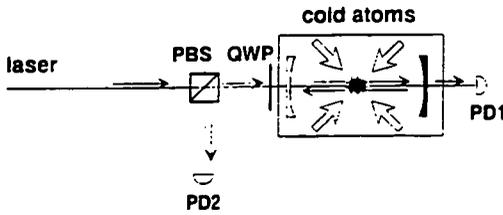


Fig. 1. Experimental setup showing the cell containing the cold-atom cloud in an optical cavity; *PBS* polarizing beam splitter; *QWP* quarter-wave plate; *PD1*, *PD2* photodiodes; *PD1* and *PD2* measure the powers transmitted and reflected by the cavity, respectively

transmitted power (a.u.)

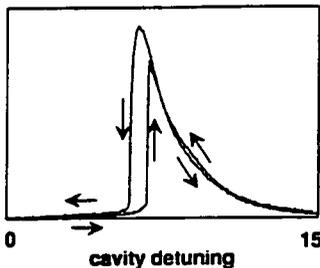


Fig. 2. Recording showing the bistable switching from low to high transmission and back when the cavity length is scanned across resonance. The trapping beams are on. The probe laser is detuned by  $22\Gamma$  on the high-frequency side of the atomic transition; the input power is  $100\mu\text{W}$ . Cavity detuning is in units of the cavity linewidth  $\gamma_{\text{cav}}/2\pi$

cycle due to bistability, where the output power switches abruptly between low and high values when the length of the cavity is scanned.

The shape of the curves is compatible with the theory of bistability with two-level atoms. However, the  $F = 4$  to  $F = 5$  transition under investigation is far from being a two-level one. In the presence of the trapping beams, it can be approximately described as a set of two-level systems: the circularly polarized probe beam interacts with all  $m_F$  to  $m_{F+1}$  transitions from the ground to excited state, while the trapping beams randomize the ground-state population among the various Zeeman sublevels. In this sense, the bistability curve shown in Fig. 2 has to be understood as an effective bistability in which all sublevels participate.

When the probe beam is strong enough, the induced optical pumping cannot be neglected. To thoroughly investigate the dynamics of the system, it was better to avoid a competition between trapping beams and probe beam in the interaction with the atoms. Consequently, the trapping-laser beams are turned off after the trap has been loaded. The time left for the measurement is about 20 ms before most of the atoms have escaped out of the interaction region due to free fall and expansion of the cloud. A significant measure of the number of atoms consists in the bistability parameter  $C$ , which is the ratio of linear absorption of the atoms at resonance to the energy-transmission coefficient of the cavity. Right after the atoms

transmitted power (a.u.)

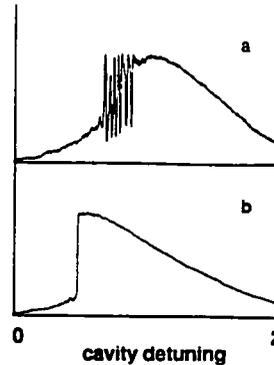


Fig. 3a, b. Recording of the power transmitted through the cavity containing cold atoms while the cavity length is scanned across resonance. Input powers are  $P_{\text{in}} = 100\mu\text{W}$  (a) and  $P_{\text{in}} = 350\mu\text{W}$  (b), respectively. The atomic detuning is  $22\Gamma$  on the blue side of the atomic transition; the trapping beams are off. Cavity detuning is in units of the cavity linewidth  $\gamma_{\text{cav}}/2\pi$

have been released, the bistability parameter can be as high as 400.

In a broad range of experimental parameters, not only bistability but instabilities are observed. Figure 3 shows a recording of the transmitted power of the cavity for two different values of the input power, while the cavity length is scanned. At low input powers of the order of  $50\mu\text{W}$ , oscillations appear on the left-hand side of the cavity resonance. This side is the one on which bistable switching would occur in a saturated two-level atomic system. In particular, it has to be noted that the first trace (input power  $100\mu\text{W}$ ) was recorded under the same experimental conditions as the trace in Fig. 2, except that the trapping beams were switched off. While in presence of the beams the system is clearly bistable, in their absence instabilities appear instead. At high input powers (about  $300\mu\text{W}$ ), the oscillations disappear and only bistability persists.

Instabilities are present within the whole range of accessible detunings on either side of the resonance. Their frequency is comprised between 100 kHz and a few MHz. They can also be observed when the cavity length is scanned by the escape of the atoms from the original cloud, which changes the index of refraction.

To understand these oscillations, the hyperfine and Zeeman structure of the considered states and the various possible optical-pumping effects have to be taken into account. Instabilities [3–5] linked to optical pumping were predicted and observed in alkali vapours. However, this system is rather intricate to describe, due to the interaction of the field with atoms in various velocity classes and hyperfine sublevels.

The situation is much simpler with cold atoms, where one can consider that the field interacts with one hyperfine transition only. Owing to this, we have been able to understand the origin of the observed oscillations with a simple model. Roughly, as shown below, they result from the competition between two nonlinear processes, saturation of the optical transition, which tends to decrease the linear index of refraction of the atomic medium

when the intensity increases, and optical pumping that increases the index of refraction by accumulating the atoms in magnetic sublevels with a high  $m_F$  number, which have the largest coupling coefficient with the light.

While the saturation of the optical transition is virtually instantaneous, it takes a comparably long time to complete the optical pumping to the highest  $m_F$  sublevels of the ground and excited states, starting from an equally distributed population in the ground state. Even for intensities close to or larger than the saturation intensity, the optical-pumping rate is much smaller than the natural linewidth [6]. The relaxation oscillations are a consequence of the significant difference in the characteristic times of these processes.

Although the behaviour of the system involving many variables (all hyperfine Zeeman populations and coherences, and the field) is quite complex, the underlying mechanism can be explained with a simple model, based on essentially two differential equations, one for the evolution of the intracavity field and the other for the atomic orientation in the ground state.

The change of the intracavity field  $\alpha$  on a round trip of time duration  $\tau$  is due to the driving field  $\alpha_{in}$  entering through the coupling mirror of transmission  $t$ , to the mirror decay coefficient  $\gamma_{cav}$  (with  $\gamma_{cav} = t^2/2$ ) and to the round-trip phase shift  $\Phi_{cav}$ :

$$\tau d\alpha/dt = t\alpha_{in} - (\gamma_{cav} - i\Phi_{cav})\alpha. \quad (1)$$

The total phase shift in the cavity  $\Phi_{cav}$  writes:

$$\Phi_{cav} = \Phi_0 + \Phi_L(1 + p) + \Phi_{NL}, \quad (2)$$

where  $\Phi_0$  is the round trip phase shift in the empty cavity,  $\Phi_L$  is the term due to the linear index of the atoms and  $p\Phi_L$  the additional contribution associated with the ground-state orientation of the atoms induced by optical pumping;  $\Phi_{NL}$  is the Kerr-like phase shift due to saturation of two-level atoms.

The ground-state orientation  $p$  increases with the intracavity intensity  $I$  at a rate  $\beta I$  and decays at a rate  $\gamma_p$  by magnetic precession in transverse fields and by transitions to other hyperfine sublevels (via non-resonant transitions):

$$dp/dt = -\gamma_p p + \beta I(1 - p). \quad (3)$$

In the presence of optical pumping, (1) and (3) have to be solved numerically. In some range of initial conditions, oscillations and limit cycles are found in the intracavity intensity as well as in the output intensity. The calculated output intensity as a function of the cavity length is shown in Fig. 4 for both a low and a high value of the input intensity. It can be seen that the curves reproduce the experimental recordings in a satisfactory way. Oscillations are essentially manifest when the different time constants involved are such that (already small) variations in the atomic ground-state orientation scan the cavity back and forth around the bistable switching point and, therefore, lead to periodic abrupt changes in the intracavity power. Only at high input powers instabilities disappear, as the optical pumping is fast enough to bring all atoms in the sublevel with the highest magnetic number before the oscillations can start. In this sense, also the absence of the instabilities in presence of the trapping beams (Fig. 2) can

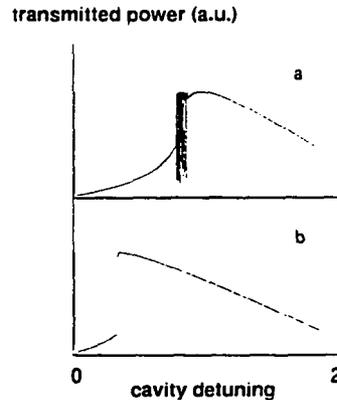


Fig. 4a. b. Calculated power transmitted through the cavity containing cold atoms as a function of cavity detuning (normalized to the cavity linewidth  $\gamma_{cav}/2\pi\tau$ ). Input powers correspond, respectively, to 1.3 (a) and 2 (b) times the bistability threshold power in the absence of optical pumping

now be understood, because optical pumping by the probe beam is counteracted by the trapping beams, which themselves produce a strong optical pumping of the atoms, which tends to randomize the populations in the various sublevels.

The validity of the model was checked by further experiments. When the atoms are released from the trap, it is possible to optically pump them into the  $m_F = 4$  magnetic sublevel of the ground state with an additional circularly polarized beam parallel to the probe beam, but closer to the atomic resonance. This prepumping is done in the presence of a magnetic field directed along the cavity axis. Under such conditions, the instabilities disappear. If the magnetic field is absent, the orientation created by the pump field is destroyed by the Larmor precession in transverse magnetic fields, and the instabilities persist.

A more complete theoretical treatment of the atomic nonlinearity and of the optical pumping was also performed, where absorption and saturation of the optical nonlinearity were taken into account. The general behaviour remains the same as the one predicted by the simple model.

If cold atoms are to be used as a nonlinear medium to produce squeezed light, clearly, instabilities have to be avoided. The results presented so far show that, although the behaviour of the system is more complicated than anticipated, it is possible to find conditions where cold cesium atoms behave as two-level atoms.

## 2 Quantum noise measurements

Nearly perfect squeezing is expected from a cavity containing a pure Kerr medium [7–9]. When motionless two-level atoms are used, the quantum noise reduction is predicted to persist in spite of added fluorescence noise. Specific theories have to be used to take these effects into account [10–13].

Squeezed vacuum was first observed in a four-wave mixing experiment using an atomic beam as a nonlinear medium [14]. Later, squeezing in a beam of finite mean intensity (bright squeezing) was demonstrated at the output of a bistable cavity traversed by an atomic beam [15, 16].

Cold atoms seem to be good candidates to achieve quantum noise reduction, since their motion is much better controlled than in an atomic beam. However, observation of squeezing requires that the trapping beams are absent. Otherwise a part of the atoms would be constantly excited to the  $6P_{3/2}$  state and fluoresce back to the ground state, causing excess noise. This condition imposed the study of the nonlinear dynamics of the cavity in absence of the trapping beams. To avoid excess noise and instabilities, both trapping beams and magnetic-field gradient are therefore turned off during the noise measurement; residual transverse fields are largely compensated by a homogeneous magnetic field.

The experimental setup used to study the quantum fluctuations of a probe beam after interaction with the system is shown in Fig. 5. The linear cavity containing the atom cloud was described in Sect. 1. It has only one coupling mirror of 10% transmission, so as to be close to the "bad-cavity" case, where the damping rate  $\gamma_{\text{cav}}/\tau$  of the cavity is larger than the one of the atomic polarization  $\Gamma/2$ , and for which the theoretically predicted squeezing is the best. The second mirror is a highly reflecting one. The mode-matching efficiency of the cavity with the input beam is of the order of at least 96% in power.

As already mentioned, the probe-laser beam is generated by the same Ti: Sapphire laser as the trapping beams. This laser has the main advantage over diode lasers that it is free from any excess noise in the MHz range. However, this imposes to adjust the frequency of the various beams with the help of acousto-optic modulators. The only beam which is not frequency-shifted is the probe beam, in order to avoid excess noise produced by the AOM.

In the presence of the trap, the atom cloud is carefully centred on the probe beam by maximizing the emission of

the "cold-atom Raman laser" [17], which spontaneously oscillates even in the absence of a probe beam when the cavity is well aligned around the cloud.

The probe beam coming out of the cavity is separated from the input beam by an optical circulator made of a polarizing beam splitter and a quarter-wave plate, and mixed with a local oscillator, 100 times more intense than the probe beam, using the second input port of the same beam splitter. At the output of the beam splitter, the signal and the local-oscillator beams are perfectly aligned and have orthogonal polarizations. A half-wave plate and a second polarizing beam splitter are used to split the combined beam of signal and local oscillator into two beams of equal power, which are then detected by two identical EG&G FFD-100 photodiodes, operated with a bias voltage of 80 V. The quantum efficiency of the photodiodes was found to be 86%; it was further increased to 94% by the method of refocusing the reflected light. The low-frequency components of photocurrents are dc coupled to provide a direct measurement of the mean power. The high-frequency components are ac coupled, amplified and subtracted to monitor the quantum noise of the probe beam. The common mode rejection generally achieved in this balanced homodyne detection is better than 20 dB in the range of 0 to 20 MHz. The noise signal is further amplified, sent to a spectrum analyzer and recorded in a digital storage oscilloscope. The mode matching between the signal and the local oscillator is optimized by measuring the dc visibility of the interference fringes on one detector when the phase of the local oscillator is scanned. The efficiency of mode matching at resonance is usually found to be of the order of 90%. The total homodyne efficiency varies between 85% at resonance and 90% on the sides of the resonance curve.

The fluctuations of the field are detected at a fixed analysis frequency  $\Omega/2\pi$ , while the phase of the local oscillator is rapidly varied with a piezoelectric transducer, and the length of the cavity is scanned across resonance by the escape of the atoms after the trap is turned off. When the cavity is close to resonance, the presence of the nonlinear medium manifests itself by a phase-dependent noise.

Detection of squeezing during the rather narrow time slot in which the atoms stay inside the beam is a non-trivial problem. Having only 20–30 ms to perform the measurement, important variations like the phase scan of the local oscillator have to take place at frequencies of the order of kHz. To record a spectrum, the bandwidth of the spectrum analyzer has consequently to be chosen equal to or larger than 100 kHz. On the other hand, squeezing is quite sensitive to the observation frequency, thus, a bandwidth larger than 1 MHz has to be avoided not to average-out the effect. A less obvious difficulty consists in the use of the so-called video filter, which is usually a simple postdetection low-pass filter, acting only on the display of the analyzed signal to extract the essential information, which would otherwise be covered by high-frequency noise. Its bandwidth is usually chosen to be 1/300 of the analyzing band width, i.e., 300 Hz for a bandwidth of 100 kHz.

The signal to be analyzed, that is, the noise power of the light beam, is a sine function having a fundamental frequency of the order of 1 kHz. As a consequence, a linear

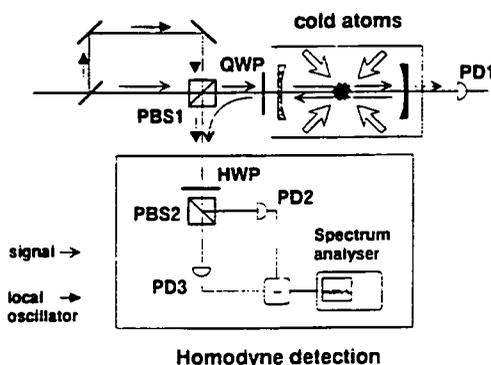


Fig. 5. Experimental layout to measure the quantum noise of a probe beam having passed through the cavity. *PBS1*, *PBS2* polarizing beam splitters; *QWP* quarter-wave plate; *HWP* half-wave plate; *PD1*, *PD2*, *PD3* photodiodes; *PD1* measures the transmitted power. *PD2* and *PD3* are employed in the homodyne detection to record the reflected power and quantum noise

(amplitude) or logarithmic (dB) display will not only involve the fundamental frequency, but also higher harmonics. In particular, in Fourier space, an important part of information about the squeezing will be stored in higher harmonics and the better the squeezing is the more important higher harmonics are. Being displayed on a linear scale, a signal containing up to 50% squeezing in power, will contain no visible squeezing any more, if a postdetection video band width of 300 Hz is used. We thus had to implement better adapted linear filters than a spectrum analyzer can supply, which means numerical filters.

The spectra should then be recorded without video filter at all, converted into noise power and filtered afterwards by a numerical RC filter at a well-adapted frequency to reduce the high-frequency noise. As we know exactly the frequency response of the video filter, it is also possible to record a filtered signal, reconstruct the original one numerically in the frequency domain and to filter this signal converted into noise power with a numerical low-pass at a better adapted frequency. The numerical filters were compared to usual electrical RC filters; the effect on the spectrum was found to be the same. They are thus equivalent to standard postdetection video filters, but have the essential advantage that their RC time can be freely chosen.

Figure 6 shows a spectrum reconstructed from a filtered one using the procedure described above. It displays a recording of the noise power obtained at a fixed geometrical cavity length, while the changing number of atoms is scanning the cavity across resonance. Out of resonance (on the left-hand side of the figure), the probe beam is totally reflected by the cavity and is hence at shot noise. The average shot-noise level is indicated by the straight

noise power

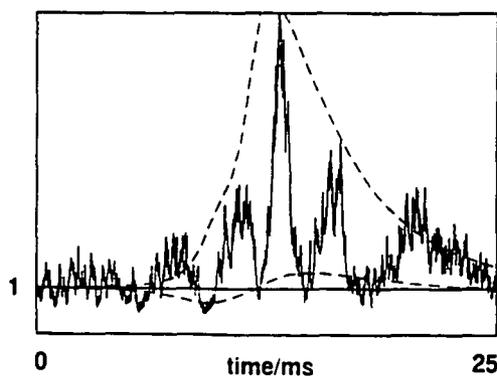


Fig. 6. Recording of the quantum noise power at  $\Omega/2\pi = 5$  MHz as a function of time, while the decaying number of atoms is scanning the cavity across resonance. The probe-beam fluctuations drop below shot noise on the lower branch of the bistability curve (left-hand side of trace). Probe beam and local oscillator were detuned by  $10\Gamma$  to the red side of the atomic resonance. Their powers were  $25\mu\text{W}$  and  $9\text{mW}$ , respectively. The straight line indicates the average shot-noise level; the broken lines correspond to theoretical predictions of the minimal and maximal noise power using the experimental data. The experimental trace was taken with a postdetection video band width of 300 Hz, reconstructed numerically, converted into noise power and low-pass filtered at 1 kHz afterwards

line. When the cavity becomes resonant with the probe beam, the noise exhibits large oscillations due to the phase scan of the local oscillator, which indicate the presence of phase-dependent fluctuations. On the lower branch of the bistability curve, i.e., before the system switches towards high intensities, a quantum-noise reduction of about 30% (within  $\pm 10\%$ ) can be seen, whereas on the upper branch large excess noise is observed in some quadratures. If one takes into account losses in propagation, detection and matching, a value of the squeezing better by 4% can be inferred. This trace was obtained at an observation frequency of  $\Omega/2\pi = 5$  MHz. The cavity linewidth ( $\gamma_{\text{cav}}/2\pi = 5$  MHz) was about as large as the atomic linewidth. Probe laser and local oscillator were detuned by  $10\Gamma$  on the high-frequency side of the atomic resonance and their powers were  $25\mu\text{W}$  and  $9\text{mW}$ , respectively. The bistability parameter  $C$  was found to be about 300 right after turning off the trapping beams.

This result has been compared with theoretical predictions given by the two-level-atom model derived from [12], including the experimental parameters. This model was developed within the plane-wave approximation and uses a linear input-output formalism to calculate the modifications of quantum fluctuations of a coherent field after interaction with an optical ring cavity containing an ensemble of two-level atoms. In agreement with the experimental situation, the cavity is scanned at a fixed geometrical length by the change in the number of atoms interacting with the probe beam. In a first approximation, the relevant number of atoms is assumed to decay exponentially in time. The quantum noise power in all quadratures can then be calculated as a function of number of atoms inside the probe beam and thus, as a function of time. The theoretical curves shown as broken lines in Fig. 6 have been computed for the experimental data given above, supposing an initial bistability parameter of 300. The two traces correspond to the minimal and maximal noise power, respectively, and are in reasonable agreement with the experiment. The next experiments step will consist in finding the best conditions for squeezing by exploring carefully the parameter space. On the theoretical side, a more exact treatment of the interaction, including in particular the temporal variation of the number of atoms and the effect of a radially varying electric field, will be carried out.

### 3 Conclusion

Our study shows that cold atoms constitute a promising medium for nonlinear and quantum optics. The fact that it is possible to generate squeezed light placing this medium inside an optical cavity opens the way to quantum optics using cold atoms and, hence, provides an interesting alternative to atomic beams. One of the difficulties of this experiment, coming from the fact that the trapping beams have to be turned off during the measurements, should be possible to be circumvented in the future by working on a transition not coupled to the trapping transition or by using a "dark SPOT" [18] demonstrated recently.

*Acknowledgements.* The authors sincerely thank A. Heidmann for his very valuable help. This work was supported in part by the EC contract ESPRIT BRA 6934 and the EC HMC contract CHRX-CT 930114.

## References

1. E. Giacobino, J.M. Courty, C. Fabre, L. Hilico, A. Lambrecht: In *Laser Spectroscopy IX*, ed. by L. Bloomfield, T. Gallagher, D. Larson, AIP Conf. Proc., Vol. 290 (AIP, New York 1993) p. 349
2. E. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, D. Pritchard: *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631 (1987)  
C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, C. Wiemann: *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1571 (1990)
3. G. Giusfredi, S. Cecchi, E. Petriella, P. Salieri, F.T. Arecchi: In *Instabilities and Chaos in Quantum Optics*, ed. by F.T. Arecchi, R.G. Harrison, Springer Ser. Syn., Vol. 34 (Springer, Berlin, Heidelberg 1987)
4. P. La Penna, G. Giusfredi: *Phys. Rev. A* **48**, 2299 (1993).
5. F. Mitschke, J. Mlynek, W. Lange: *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1660 (1983)
6. E. Giacobino, J.M. Courty, A. Lambrecht: In *Quantum Optics VI*, ed. by D.F. Walls, D.J. Harvey, Springer Proc. Phys., Vol. 77 (Springer, Berlin, Heidelberg 1994)  
A. Lambrecht, E. Giacobino, J.M. Courty: *Opt. Commun.* (in press)
7. L. Lugiato, G. Strini: *Opt. Commun.* **41**, 67, (1982); *ibid.* **41**, 374 (1982)
8. M.J. Collett, D.F. Walls: *Phys. Rev. A* **32**, 2887 (1985)
9. S. Reynaud, C. Fabre, E. Giacobino, A. Heidmann: *Phys. Rev. A* **40**, 1440 (1989)
10. L.A. Orozco, M.G. Raizen, Min Xiao, R.J. Brecha, H.J. Kimble: *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 1490 (1987)
11. F. Castelli, L.A. Lugiato, M. Vadicchino: *Nuovo Cimento B* **10**, 183 (1988)
12. M.D. Reid: *Phys. Rev. A* **37**, 4792 (1988)
13. L. Hilico, C. Fabre, S. Reynaud, E. Giacobino: *Phys. Rev. A* **46**, 4397 (1992)
14. R.E. Slusher, L. Hollberg, B. Yurke, J. Mertz, J.F. Valley: *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2409 (1985)
15. M.G. Raizen, L.A. Orozco, Min Xiao, T.L. Boyd, H.J. Kimble: *Phys. Rev. Lett.* **59**, 198 (1987)
16. D.M. Hope, H.A. Bachor, P.J. Manson, D.E. McClelland, P.T.H. Fisk: *Phys. Rev. A* **46**, R1181 (1992)
17. L. Hilico, C. Fabre, E. Giacobino: *Europhys. Lett.* **18**, 685 (1992)
18. W. Ketterle, K.B. Davis, M.A. Joffe, A. Martin, D.E. Pritchard: *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2253 (1993)

### 5.4.2 Comparaison entre théorie et expérience

Comme nous l'avons montré dans le paragraphe précédent, l'existence d'une réduction du bruit avant la résonance de la cavité est en bon accord avec les prédictions théoriques. Pour compléter la présentation des résultats nous allons expliquer dans ce paragraphe, avec plus de détail que dans l'article, la méthode que nous avons utilisée pour ajuster les spectres expérimentaux et théoriques. Par contre, nous n'allons pas entrer dans les détails du traitement théorique des fluctuations quantiques. Cela sera fait plus loin dans le chapitre 6.

Alors que les divers traitements théoriques des fluctuations quantiques sont souvent basés sur un nombre d'atomes fixe, nous avons dû adapter nos calculs à la situation expérimentale. De nos mesures de la coopérativité en fonction du temps, nous pouvons déduire la variation du nombre d'atomes. Pour des temps longs ( $t \geq 10\text{ms}$ ) cette variation peut souvent être approximée par une exponentielle, alors que pour les temps courts ( $t \leq 5\text{ms}$ ), la variation se produit plus lentement. La vraie variation est alors plus compliquée qu'une exponentielle et nécessitera un traitement détaillé. Cependant, les signaux que nous avons simulés se produisent à partir de 10ms après la coupure, à des instants, où la variation du nombre d'atomes suit approximativement une décroissance exponentielle.

Afin de pouvoir simuler un balayage de la cavité par l'indice de réfraction, nous avons donc dans un premier temps supposé une variation exponentielle du nombre d'atomes en fonction du temps

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (5.13)$$

$N_0$  est le nombre d'atomes au moment de la coupure du piège ( $t = 0$ ). Le coefficient  $\lambda$  décrit le taux de décroissance du nombre d'atomes dans le faisceau sonde. Comme l'exponentielle ne peut pas décrire la variation du nombre d'atomes pour des temps courts, mais seulement à partir d'environ 10ms, la valeur pour  $N_0$  ne correspond pas au nombre d'atomes réel au début, mais est plus faible. En revanche, la valeur  $N(t = 10\text{ms})$  représente à peu près la valeur expérimentale mesurée 10ms après la coupure du piège, donc au moment à partir duquel le spectre théorique simule bien le spectre expérimental. Avec cette approximation nous arrivons à reproduire l'allure des spectres en utilisant seulement deux paramètres ajustables, qui sont le nombre d'atomes au début et le coefficient  $\lambda$ , qui est une mesure de la température des atomes quand le piège est coupé.

Nous allons par la suite entreprendre un traitement plus exact des processus après la coupure du piège afin de mieux décrire l'explosion et la chute du nuage atomique et d'améliorer le fit théorique des résultats expérimentaux.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la première observation expérimentale d'une réduction du bruit quantique à l'aide d'atomes froids. La recherche de ce résultat a précisé nos idées sur le comportement de notre système et a attiré notre attention sur la fragilité du signal de squeezing. Nous avons expliqué en détail les difficultés particulières de notre expérience en ce qui concerne les constantes de temps impliquées. Comme le temps disponible pour faire la mesure est court, une attention particulière doit être apportée à l'analyse du signal et nous avons dû développer un traitement numérique du signal délivré par l'analyseur de spectre, traitement qui est bien adapté à cette situation. Le degré du squeezing observé de 30% est mieux que la meilleure réduction du bruit observée en jet atomique [104]. Cependant, nous remarquons deux différences importantes par rapport aux expériences déjà effectuées. Tout d'abord, nous estimons un rendement quantique total de notre mesure de l'ordre de  $\eta_{\text{tot}} \simeq 0.90$  ce qui permet une valeur estimée du squeezing réel de 33%, qui est très proche de la valeur mesurée. De plus, le résultat expérimental est en bon accord avec la prédiction théorique. Nous pouvons maintenant chercher à confirmer la valeur du squeezing mesurée et ensuite à modifier les conditions expérimentales pour améliorer la réduction du bruit. Cela nécessitera aussi une étude théorique détaillée.

Les spectres théoriques que nous avons présentés jusqu'à maintenant ont été calculés avec un certain nombre de simplifications. La variation du nombre d'atomes a été modélisée par une simple exponentielle. Bien que cette méthode donne sans doute une première idée des processus qui ont lieu dans le nuage atomique quand le piège est coupé, le traitement théorique doit certainement être amélioré. Dans ce but, nous allons développer dans le prochain chapitre un modèle statistique qui traite l'explosion du nuage atomique ainsi que sa chute. Chaque atome se déplace et poursuit un trajet en accord avec les équations du mouvement. La moyenne statistique nous fournit ensuite une expression du nombre d'atomes en fonction du temps, qui peut d'abord être comparée aux mesures de la coopérativité et qui permet ensuite de calculer le spectre du bruit d'une manière quantitative quand la cavité est balayée sur la résonance par les atomes.

## 6 Etude théorique

### 6.1 Introduction générale

Nous allons maintenant présenter les calculs théoriques que nous avons effectués pour décrire les modifications des fluctuations quantiques d'un faisceau laser au cours de l'interaction avec une cavité bistable contenant des atomes froids. Le nuage d'atomes froids est modélisé par un ensemble d'atomes à deux niveaux, qui est, comme nous l'avons vu au chapitre 2, une approximation justifiée pour notre système dans la mesure où l'on peut négliger le processus du pompage optique. Nous avons vu dans l'expérience que la réduction du bruit apparaît seulement en l'absence d'instabilités, c'est à dire dans le régime où nous avons réussi à diminuer l'effet des processus de pompage optique. Il est donc légitime dans ces conditions de modéliser la situation expérimentale en négligeant ces processus.

Pour calculer les fluctuations quantiques, il existe plusieurs méthodes possibles. L'une des premières approches développées, qui est toujours souvent utilisée, est fondée sur des équations différentielles stochastiques pour les observables du système [136–139]. Nous allons d'abord la décrire brièvement avant d'introduire le traitement des fluctuations quantiques développé au Laboratoire qui est basé sur la théorie de la réponse linéaire.

Dans la méthode traditionnelle, pour calculer les fluctuations quantiques d'un faisceau laser en interaction avec un milieu quelconque, on définit d'abord des opérateurs hamiltoniens pour le champ électromagnétique, pour le milieu atomique et pour l'interaction entre eux. Pour tenir compte des processus de relaxation du champ et du milieu atomique, on introduit ensuite un couplage du champ et des atomes avec un réservoir d'oscillateurs harmoniques, également décrit par des opérateurs hamiltoniens. A l'aide de l'équation de Liouville, on dérive une équation pilote pour l'opérateur densité. Le but de la méthode étant de déduire un jeu d'équations différentielles pour les observables du système, il faut ensuite convertir l'équation pilote en une équation de Fokker-Planck [140–142] en choisissant un ordre des opérateurs et par conséquent une distribution de quasiprobabilité, qui est très souvent la distribution généralisée  $P$  de Glauber et Sudarshan [143–145]. A partir de l'équation de Fokker-Planck on écrit les équations de Langevin pour les observables du système [146]. Elles ressemblent aux équations classiques, mais contiennent en plus des termes de fluctuations dus aux processus de relaxation. Si le système d'équations est fermé, on peut le résoudre pour les

valeurs moyennes en ignorant les termes de fluctuations. L'analyse linéaire de stabilité [125] permet de déterminer si les valeurs moyennes stationnaires constituent des solutions stables qui peuvent fournir un point de fonctionnement pour le système. Les équations sont ensuite linéarisées autour de ce point de fonctionnement, ce qui permet d'obtenir les fonctions de corrélation des fluctuations du champ dans la cavité. On peut enfin calculer les fluctuations des champs sortant de la cavité en utilisant la méthode d'entrée-sortie qui a été mise au point spécialement dans ce but [147].

Cette méthode a été extensivement utilisée par plusieurs groupes pour calculer la réduction du bruit quantique via la bistabilité optique ou via d'autres processus non linéaires. Depuis la prédiction d'une réduction du bruit considérable au voisinage du point de bistabilité [87, 88], il y a eu des nombreuses études sur ce sujet [94, 96, 97, 100–102]. Dans la plupart des publications, le faisceau laser est traité comme une onde plane, ce qui simplifie considérablement le calcul du bruit pour l'approche stochastique.

Par rapport à cette approche, nous avons préféré une méthode basée sur la théorie de la réponse linéaire. Comme l'approche stochastique, c'est une méthode semi-classique avec linéarisation des fluctuations [148]. Ce traitement par réponse linéaire est aussi performant que la méthode stochastique et fournit, avec les mêmes approximations, les mêmes résultats que cette dernière [149]. Il est plus intuitif et plus naturel [89] que le traitement basé sur les équations différentielles stochastique. En particulier, les étapes intermédiaires des calculs fournissent des interprétations beaucoup plus transparentes du comportement du système non linéaire. Nous allons présenter cette méthode en détail dans le prochain paragraphe.

En accord avec les observations expérimentales qui montrent une réduction du bruit quand le piège est coupé, nous allons tout d'abord développer un traitement de l'interaction en absence des faisceaux pièges.

Dans un premier temps, nous nous concentrons sur un modèle simplifié de notre système: le faisceau sonde est représenté par une onde plane [103, 129]. Ceci ne constitue qu'une première approximation, qui nous permettra d'estimer dans quelle région de paramètres et à quel degré nous pouvons nous attendre à une réduction du bruit quantique en quadrature. De plus, nous supposerons d'abord que le nombre d'atomes interagissant avec le champ est constant au cours du temps. Nous présenterons quelques spectres théoriques afin d'éclaircir l'influence des différents paramètres sur la réduction du bruit.

Nous allons ensuite expliquer les insuffisances de ce modèle trop simple par rapport à l'expérience réelle et améliorer le traitement au fur et à mesure de nos besoins. Comme nous l'avons déjà expliqué au chapitre précédent, la coupure du piège conduit à une variation du nombre d'atomes dans le faisceau sonde pendant la mesure. Afin de calculer ultérieurement le bruit quantique dans cette situation, nous développerons un modèle statistique représentant la fuite des atomes. Ce modèle fournit non seulement la valeur moyenne du nombre d'atomes dans le faisceau sonde en fonction du temps après la coupure, mais il permet de plus de calculer les fluctuations du nombre d'atomes. Ces fluctuations se traduisent par des fluctuations du déphasage de la cavité qui peuvent produire de l'excès de bruit.

De plus, ce traitement nous donnera les moyens d'estimer l'effet sur la réduction du bruit quand le nombre d'atomes varie pendant la mesure, non seulement à cause de l'explosion et de la chute du nuage, mais aussi à cause d'autres processus. Par exemple, les atomes qui tombent dans l'état  $6S_{1/2}, F = 3$  par pompage optique sont ramenés vers la transition piégeante par le laser repompeur. Ce processus produit un transfert continu des atomes, dont nous pouvons estimer l'effet sur la réduction du bruit grâce à notre modèle. Avec les mêmes arguments, il nous sera aussi possible d'analyser de manière qualitative l'influence de la présence des faisceaux pièges à faible saturation sur la réduction du bruit.

Nous tenterons également de répondre à une question que nous avons abordée dans le deuxième chapitre de ce mémoire qui est: d'où vient la différence entre les réductions du bruit quantique mesurées en jet atomique et les prédictions de la réduction pour un tel système? Nous avons expliqué dans ce contexte qu'il existe des arguments qui établissent un rapport entre le désaccord entre les valeurs théoriques et expérimentales de la réduction du bruit et le fait que les atomes traversent la cavité à haute vitesse. Nous estimerons l'effet du temps de traversée sur la réduction du bruit.

Par la suite, nous reviendrons sur la première approximation que nous avons faite, à savoir la représentation du faisceau sonde par une onde plane. Nous développerons un traitement des fluctuations quantiques d'un faisceau gaussien qui interagit avec un milieu atomique. Nous évaluerons la réduction du bruit prédite par ce modèle dans les différentes conditions et nous la comparerons aux prédictions du modèle "onde plane". Nous verrons en particulier, que les conditions pour que le modèle "onde plane" donne le même résultat que le traitement avec faisceaux gaussiens sont beaucoup plus restrictives en ce qui concerne les fluctuations que pour les valeurs moyennes.

## 6.2 Le traitement par la méthode de la réponse linéaire

### 6.2.1 Introduction

Le traitement des fluctuations quantiques par la théorie de la réponse linéaire a été développé dans les années 1980 [148, 149]. Il faut d'abord préciser qu'il s'agit d'un traitement où les fluctuations sont linéarisées, comme dans la méthode basée sur les équations différentielles stochastiques. Ce type de traitement suppose donc qu'on peut séparer le champ électromagnétique en une partie de champ moyen et une partie de fluctuations quantiques comme indiqué sur les diagrammes dans l'espace de phase du chapitre 2. Cela constitue une approximation qui n'est valable que pour des champs correspondant à un nombre de photons dans la cavité grand devant 1 [150, 151], afin que la taille des fluctuations quantiques soit négligeable par rapport au champ moyen. Prenons l'exemple de notre cavité de longueur  $L = 25\text{cm}$  et de finesse  $\mathcal{F} = 53$ ; quand cette cavité est alimentée par un faisceau laser à  $852\text{nm}$  d'une puissance de  $1\text{mW}$  résonnant avec la cavité, le nombre de photons dans la cavité atteint environ  $2 \cdot 10^8$ . Les fluctuations sont alors beaucoup plus petites que les valeurs moyennes et la théorie

linéaire des fluctuations est très bien adaptée. Les fluctuations quantiques étant petites, on peut supposer qu'elles obéissent aux équations linéarisées autour des valeurs moyennes. Dans ce contexte, nous remarquons que la théorie linéarisée ne peut pas décrire le comportement d'un système dont les fluctuations divergent, par exemple sur une des quadratures. Dans un tel cas, les équations linéarisées perdent leur validité. C'est par exemple le cas pour un faisceau laser interagissant avec un milieu Kerr idéal au voisinage du point de bistabilité. Dans ce cas, les fluctuations de l'une des quadratures divergent tandis que les fluctuations de l'autre tendent vers zéro, c'est à dire vers une réduction du bruit parfaite. Toutefois, au voisinage du point tournant de la bistabilité, où nous travaillons, la réduction du bruit n'atteint pas 100%. Il suffit qu'elle soit inférieure à cette valeur idéale de quelques % pour que le traitement linéaire redevienne valable. Dans la pratique, il n'est de toute façon jamais possible d'approcher trop près du point de bistabilité, d'abord parce qu'il n'est pas un point de fonctionnement stable et ensuite à cause des sources d'excès de bruit qui sont présentes dans tout système réel.

### 6.2.2 Traitement du système bistable

Nous allons maintenant introduire la méthode de réponse linéaire appliquée à notre système bistable. Dans ce premier paragraphe, le traitement sera basé sur un premier modèle qui représente le faisceau sonde comme une onde plane [103]. Nous calculons explicitement les solutions stationnaires et les fonctions de corrélation. Le traitement sera amélioré dans les paragraphes suivants et les résultats comparés avec les résultats de ce premier modèle.

Avant d'exposer la méthode de réponse linéaire, nous devons d'abord définir les notations utilisées pour décrire les champs électromagnétiques. Nous allons considérer un mode du champ d'une fréquence et polarisation données. Ce mode est décrit par un opérateur de Heisenberg  $\hat{A}(t)$  et son conjugué  $\hat{A}^\dagger(t)$  dans le référentiel tournant à la fréquence du laser  $\omega_L$

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(e^{-i\omega_L t}\hat{A}(t) + e^{i\omega_L t}\hat{A}^\dagger(t)) \quad (6.1)$$

où  $\mathcal{E}_0$  est le champ électrique correspondant à un photon par seconde dans le faisceau

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\epsilon_0 S c}} \quad (6.2)$$

$S$  représente la section d'interaction,  $\epsilon_0$  la constante diélectrique du vide et  $c$  la vitesse de la lumière. Dans l'expérience, la section d'interaction correspond à la surface du faisceau laser au niveau du nuage atomique. Nous notons que la structure spatiale du faisceau laser intervient dans ce modèle simple, bien que le faisceau soit traité comme une onde plane dans la suite. Mais, c'est la surface du faisceau qui détermine l'intensité du couplage entre le faisceau et le milieu atomique. Cette incohérence est inévitable si l'on veut d'abord estimer la réduction du bruit par ce modèle simple. Elle sera résolue par le traitement utilisant des faisceaux gaussiens.

Les champs  $\hat{A}(t)$  et  $\hat{A}^\dagger(t)$  correspondent respectivement aux composantes à fréquence positive et négative. Dans un premier temps, nous négligeons la dépendance spatiale du champ dans le plan transverse, ce qui est en accord avec la représentation du faisceau sonde par une onde plane. La surface  $S$  qui apparaît dans l'équation (6.2) est donc pour le moment une surface fictive. Nous allons renoncer à l'approximation "onde plane" plus loin dans ce chapitre et traiter le faisceau laser comme un faisceau gaussien. La surface  $S$  apparaîtra alors naturellement comme la surface effective du faisceau gaussien. Dans le même contexte, l'amplitude  $\hat{A}(t)$  de l'onde plane est pour le moment une amplitude fictive, puisque l'amplitude du champ électrique vu par les atomes est donnée par la grandeur

$$\sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\epsilon_0 c}} \frac{\hat{A}(t)}{\sqrt{S}} \quad (6.3)$$

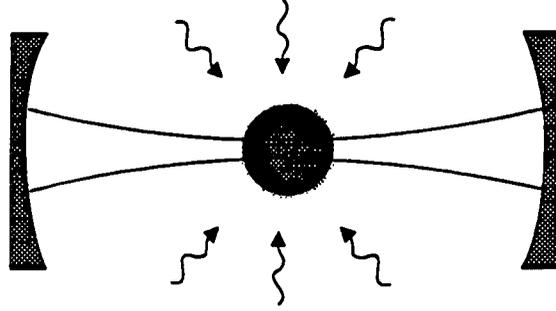
Cette amplitude est en fait définie de telle sorte que  $\langle \hat{A}^\dagger(t)\hat{A}(t) \rangle$  s'identifiera naturellement plus loin avec le débit de photons arrivant sur les atomes, mesuré comme un nombre par seconde. Nous négligeons également la dépendance spatiale de l'onde stationnaire dans la cavité. Dans le traitement de la structure transverse, nous reviendrons aussi sur cette approximation.

Nous supposons maintenant que le champ électromagnétique entre dans une cavité optique qui est une cavité à une entrée-sortie contenant le milieu atomique. Nous écrirons d'abord les relations entrée-sortie entre le champ incident  $\hat{A}_{\text{in}}(t)$ , le champ intracavité  $\hat{A}(t)$  et le champ sortant  $\hat{A}_{\text{out}}(t)$  pour une cavité à haute finesse

$$\hat{A}_{\text{out}}(t) = t_0 \hat{A}(t) - \hat{A}_{\text{in}}(t) \quad (6.4)$$

où  $t_0$  est le coefficient de transmission en amplitude du miroir de couplage. Les champs dont la fréquence est égale à une fréquence de résonance de la cavité sont renforcés dans la cavité. Si la cavité est parfaitement adaptée spatialement au faisceau sonde, ce que nous supposons dans ce calcul (voir aussi Appendice II), les autres modes n'interviennent pas. Le champ intracavité est aussi couplé au vide à l'extérieur de la cavité par le miroir de couplage. Nous supposons par la suite que ce dernier couplage est beaucoup plus fort que le couplage aux autres modes de la cavité [152, 153].

Nous allons maintenant considérer l'interaction du champ avec le milieu non linéaire constitué d'un ensemble de  $N$  atomes immobiles et indépendants possédant deux niveaux séparés par une énergie  $\hbar\omega_0$ . Les atomes sont couplés d'une part au champ intracavité, d'autre part aux modes du champ qui viennent de coté comme indiqué sur la figure 29. Nous supposons que le couplage aux modes de coté est beaucoup plus fort que le couplage aux modes de la cavité autres que le mode fondamental. Cela implique en particulier que le taux d'émission spontanée des atomes correspond au taux d'émission spontanée dans l'espace libre et n'est pas changé par la cavité. Autrement dit, nous négligeons la modification de l'émission spontanée due au fait que les atomes sont contenus dans la cavité. Cette approximation est justifiée si l'angle solide sous lequel les atomes voient les miroirs est petit devant  $4\pi$



**Fig. 29:** Couplage des atomes au mode fondamental de la cavité et aux modes vides qui viennent de coté. Le couplage aux autres modes de la cavité est négligeable devant le couplage aux modes de coté.

$$\pi \frac{r_m^2}{L^2/4} \ll 4\pi \quad (6.5)$$

soit

$$\frac{r_m}{L} \ll 1 \quad (6.6)$$

$r_m$  est le rayon des miroirs,  $L$  la longueur de la cavité. Pour notre expérience cette condition est bien satisfaite avec  $r_m = 1\text{cm}$  et  $L = 25\text{cm}$ . Dans les calculs suivants, nous n'allons pas traiter les réservoirs d'une manière explicite, ni pour la cavité ni pour les atomes. Ils n'interviendront qu'implicitement par les taux de relaxation tant que nous nous intéressons aux valeurs moyennes. En ce qui concerne le traitement des fluctuations, le traitement des réservoirs est automatiquement inclus dans la méthode de la réponse linéaire.

Les équations de Maxwell pour la propagation du champ dans la cavité s'écrivent de la manière suivante [91, 103]

$$\begin{aligned} \tau_c \partial_t \hat{A}(t) &= -\tau_c \kappa (1 + i\phi) \hat{A}(t) + \sqrt{2\kappa\tau_c} \hat{A}^{\text{in}}(t) - d\hat{A}(t) \\ \tau_c \partial_t \hat{A}^\dagger(t) &= -\tau_c \kappa (1 - i\phi) \hat{A}^\dagger(t) + \sqrt{2\kappa\tau_c} \hat{A}^{\text{int}\dagger}(t) - d\hat{A}^\dagger(t) \end{aligned} \quad (6.7)$$

où  $\partial_t$  note la dérivation par rapport au temps pour une cavité de finesse élevée. Nous avons supposé un milieu optique mince placé dans une cavité à grande finesse.  $\tau_c$  est le temps d'un aller-retour dans la cavité,  $\kappa$  le taux d'amortissement du champ intracavité. Il est relié au coefficient de transmission en amplitude  $t_0$  du miroir de couplage par

$$\kappa\tau_c = \frac{t_0^2}{2} \quad (6.8)$$

$\phi$  est le déphasage, c'est à dire le désaccord entre la fréquence de résonance de la cavité la plus proche et la fréquence du laser, normalisé par  $\kappa$

$$\phi = \frac{\omega_C - \omega_L}{\kappa} \quad (6.9)$$

$d\hat{A}(t)$  représente la modification du champ à l'intérieur de la cavité par l'interaction avec les atomes. Il correspond au champ électromagnétique rayonné par les atomes dans le mode fondamental de la cavité

$$d\hat{A}(t) = ig\hat{P}(t) \quad (6.10)$$

et est proportionnel à l'opérateur dipôle collectif  $\hat{P}(t)$  des atomes. La constante de couplage matière-lumière est  $g$

$$g = \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\epsilon_0 S c}} \frac{d_0}{\hbar} \quad (6.11)$$

où  $d_0$  note l'élément de matrice du dipôle pour la transition considérée.  $\hat{P}(t)$  et  $\hat{P}^\dagger(t)$  représentent les opérateurs de la polarisation atomique collective dans un repère tournant à la fréquence du laser  $\omega_L$

$$\hat{P}(t) = \sum_{i=1}^N \hat{S}_i(t) \quad (6.12)$$

$$\hat{P}^\dagger(t) = \sum_{i=1}^N \hat{S}_i^\dagger(t)$$

où l'indice  $i$  identifie les différents atomes.  $\hat{S}_i(t)$  correspond à un opérateur dipôle pour un atome individuel. Nous avons supposé ici que les contributions des différents atomes sont indépendantes les unes des autres, mais parfaitement accordées en phase en accord avec la description "onde plane" du champ. Dans ce cas, nous pouvons écrire la valeur moyenne du dipôle collectif  $\hat{P}(t)$  ainsi que la valeur moyenne de son complexe conjugué  $\hat{P}^\dagger(t)$  comme des valeurs moyennes des opérateurs atomiques génériques  $\hat{S}(t)$  et  $\hat{S}^\dagger(t)$  multiplié par le nombre d'atomes  $N$

$$\langle \hat{P}(t) \rangle = N \langle \hat{S}(t) \rangle \quad (6.13)$$

$$\langle \hat{P}^\dagger(t) \rangle = N \langle \hat{S}^\dagger(t) \rangle$$

Nous allons d'abord nous concentrer sur la solution stationnaire de ces équations afin d'évaluer le point de fonctionnement du système bistable. Dans ce but, nous définissons les valeurs moyennes des opérateurs  $\{\hat{A}(t), \hat{A}^\dagger(t), \hat{P}(t), \hat{P}^\dagger(t)\}$  par  $\{\alpha(t), \alpha^*(t), p(t), p^*(t)\}$ . Nous pouvons ensuite écrire les équations de Bloch pour les

polarisations  $p(t)$  et  $p^*(t)$  ainsi que pour les deux populations de l'état fondamental et de l'état excité,  $\pi_f(t)$  et  $\pi_e(t)$  respectivement, qui sont avec les approximations que nous avons faites, les mêmes équations que dans l'espace libre. Nous en déduisons la solution stationnaire pour le champ intracavité  $\alpha_0$

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{2\tau_c\kappa}\alpha^{\text{in}} + igp_0}{\tau_c\kappa(1+i\phi)} \quad (6.14)$$

$p_0$  est la solution stationnaire pour le dipôle collectif

$$p_0 = N \frac{i(1-i\delta)\beta_0}{1+\delta^2+2|\beta_0|^2} \quad (6.15)$$

où nous avons introduit un champ intracavité normalisé  $\beta_0$

$$\beta_0 = \frac{g\alpha_0}{\gamma} \quad (6.16)$$

Nous avons déjà introduit au chapitre 2 de ce mémoire le taux de relaxation  $\gamma$  du dipôle atomique en supposant que le seul processus de relaxation est l'émission spontanée. Pour les populations, nous trouvons les solutions stationnaires

$$\pi_{f0} = N \frac{1+\delta^2+|\beta_0|^2}{1+\delta^2+2|\beta_0|^2} \quad (6.17)$$

$$\pi_{e0} = N \frac{|\beta_0|^2}{1+\delta^2+2|\beta_0|^2}$$

La combinaison des équations (6.14) et (6.15) donne l'équation de bistabilité [103, 124] qui est une relation entre l'intensité incidente et l'intensité intracavité. Elle s'écrit

$$\frac{Y}{X} = \left(1 + \frac{2C}{1+\delta^2+2X}\right)^2 + \left(\phi - \frac{2C\delta}{1+\delta^2+2X}\right)^2 \quad (6.18)$$

avec l'intensité incidente normalisée  $Y$

$$Y = \frac{2}{\kappa\tau_c} |\beta^{\text{in}}|^2 = \frac{g^2\alpha^{\text{in}2}}{\gamma} \quad (6.19)$$

et l'intensité intracavité normalisée  $X$

$$X = |\beta_0|^2 = \frac{g^2\alpha_0^2}{\gamma^2} \quad (6.20)$$

Le désaccord  $\delta$  entre la fréquence de résonance atomique  $\omega_0$  et la fréquence du laser  $\omega_L$  normalisé par  $\gamma$

$$\delta = \frac{\omega_0 - \omega_L}{\gamma} \quad (6.21)$$

Nous voyons apparaître le paramètre de coopérativité  $C$  qui est défini comme le rapport entre l'absorption du milieu atomique à résonance et le coefficient de transmission en

énergie  $T$  ( $T = t_0^2$ ) de la cavité (voir aussi chapitre 2.8)

$$C = \frac{g^2 N}{\gamma T} = \frac{g^2 N}{2\kappa\tau_c\gamma} \quad (6.22)$$

Nous allons maintenant présenter le traitement des fluctuations quantiques. Les fluctuations sont décrites par des opérateurs

$$\delta\hat{A}(t) = \hat{A}(t) - \alpha(t) \quad (6.23)$$

$$\delta\hat{P}(t) = \hat{P}(t) - p(t)$$

Nous rassemblons par la suite un opérateur quelconque  $\hat{B}(t)$  et son complexe conjugué  $\hat{B}^\dagger(t)$  dans un vecteur colonne noté par

$$\mathcal{B}(t) = \begin{bmatrix} \hat{B}(t) \\ \hat{B}^\dagger(t) \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

Ses composantes seront écrites  $\mathcal{B}_\alpha(t)$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Son complexe conjugué sera noté par un vecteur ligne  $\mathcal{B}^\dagger(t)$  contenant les composantes  $\mathcal{B}^\alpha(t) = \mathcal{B}_\alpha^\dagger(t)$ . Les fluctuations relèvent d'un traitement multimode, pour lequel nous introduisons les composantes de Fourier du champ données par

$$\hat{A}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \hat{A}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} \quad (6.25)$$

$$\hat{A}(\omega) = \int dt \hat{A}(t) \cdot e^{i\omega t}$$

et les relations équivalentes pour  $\hat{A}^\dagger(t)$ . Nous nous plaçons désormais dans le référentiel tournant, où toutes les fréquences sont définies par rapport à la fréquence du champ moyen. Les fréquences  $\omega$  correspondent alors aux fréquences de bruit. Dans l'espace de Fourier, les relations (6.24) donnent

$$\mathcal{B}^\alpha(\omega) = \mathcal{B}_\alpha(-\omega)^\dagger \quad (6.26)$$

Nous notons que nous avons par simplicité supprimé les chapeaux sur ces composantes, qui sont néanmoins toujours des opérateurs.

En écrivant maintenant les équations (6.7) et (6.4) dans l'espace de Fourier et en combinant les relations écrites précédemment séparément pour les deux composantes, on obtient avec la nouvelle notation les relations entrée-sortie suivantes pour les fluctuations du champ:

$$(1 + i\epsilon\phi - i\frac{\omega}{\kappa}) \cdot \delta\mathcal{A}^{\text{out}}(\omega) = (1 - i\epsilon\phi + i\frac{\omega}{\kappa}) \cdot \delta\mathcal{A}^{\text{in}}(\omega) + ig\sqrt{\frac{2}{\kappa\tau_c}}\delta\mathcal{P}(\omega) \quad (6.27)$$

avec

$$\epsilon_\alpha = (-1)^{\alpha+1} \quad (6.28)$$

La cavité transforme le champ d'une manière différente pour différentes fréquences  $\omega$ . C'est pour cette raison que nous trouvons des relations qui dépendent de la fréquence du bruit.

Les fluctuations du dipôle  $\delta\mathcal{P}(\omega)$  contiennent deux contributions

$$\delta\mathcal{P}(\omega) = \delta\mathcal{P}_1(\omega) + \delta\mathcal{P}_2(\omega) \quad (6.29)$$

La première partie  $\delta\mathcal{P}_1(\omega)$  est la réponse des atomes aux fluctuations du champ intracavité  $\delta\mathcal{A}(\omega)$ . En utilisant la théorie de la réponse linéaire [154, 155], elle peut être exprimée à l'aide d'une matrice de susceptibilité  $\chi_\alpha^\beta(\omega)$

$$\delta\mathcal{P}_{1\alpha}(\omega) = gN \sum_\beta \chi_\alpha^\beta(\omega) \delta\mathcal{A}_\beta(\omega) \quad (6.30)$$

Cette fonction de susceptibilité se calcule comme une transformée de Fourier des commutateurs des corrélations atomiques [155]

$$\chi_\alpha^\beta(\omega) = \text{FT}[\chi_\alpha^\beta(t)] \quad (6.31)$$

$$\chi_\alpha^\beta(t) = i\Theta(t)\langle[\mathcal{S}_\alpha(t), \mathcal{S}^\beta(0)]\rangle$$

La deuxième partie  $\delta\mathcal{P}_2(\omega)$  est due aux fluctuations propres des atomes rayonnées dans le champ intracavité. On peut aussi les considérer comme la réponse des dipôles aux fluctuations du vide arrivant dans les modes de côté (voir la discussion ci-dessus). Celles-ci sont caractérisées par leur spectre de bruit  $\sigma_\alpha^\beta(\omega)$

$$\langle\delta\mathcal{P}_{2\alpha}(\omega)\delta\mathcal{P}_2^\beta(\omega')\rangle = 2\pi N\delta(\omega + \omega')\sigma_\alpha^\beta(\omega) \quad (6.32)$$

Ce spectre de bruit peut s'écrire comme la transformée de Fourier des fonctions de corrélations atomiques

$$\sigma_\alpha^\beta(\omega) = \text{FT}[\sigma_\alpha^\beta(t)] \quad (6.33)$$

$$\sigma_\alpha^\beta(t) = \langle\delta\mathcal{S}_\alpha(t)\delta\mathcal{S}^\beta(0)\rangle$$

La susceptibilité et le spectre du bruit atomique peuvent être calculés par la théorie de la résonance de fluorescence. Nous allons revenir à ce calcul plus loin dans ce pa-

ragraphe. Supposons pour l'instant que nous disposons des expressions pour  $\chi_\alpha^\beta(\omega)$  et  $\sigma_\alpha^\beta(\omega)$ .

Le but du calcul est maintenant d'exprimer les fluctuations du faisceau sortant de la cavité en fonction des fluctuations du faisceau entrant, de la réponse des atomes aux fluctuations du champ intracavité et enfin des fluctuations propres du milieu. Les fluctuations du champ  $\mathcal{A}(\omega)$  sont caractérisées par la matrice de covariance  $V(\omega)$  qui contient des éléments  $V_\alpha^\beta(\omega)$  donnés par des fonctions de corrélations

$$\langle \delta \hat{A}_\alpha(\omega) \delta \hat{A}^\beta(\omega') \rangle = 2\pi \delta(\omega + \omega') V_\alpha^\beta(\omega) \quad (6.34)$$

Le faisceau entrant est supposé dans un état cohérent. Ses fluctuations correspondent alors aux fluctuations du vide et sa matrice de covariance  $V^{\text{in}}(\omega)$  s'écrit

$$V_\alpha^{\beta \text{in}}(\omega) = \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\beta + \epsilon_\alpha^\beta) \quad (6.35)$$

$$\epsilon_\alpha^\beta = \epsilon_\alpha \delta_\alpha^\beta$$

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Les fluctuations du faisceau à la sortie sont caractérisées par les fonctions de corrélations dont la matrice de covariance  $V^{\text{out}}(\omega)$  est donnée par

$$\langle \delta \hat{A}_\alpha^{\text{out}}(\omega) \delta \hat{A}^{\beta \text{out}}(\omega') \rangle = 2\pi \delta(\omega + \omega') V_\alpha^{\beta \text{out}}(\omega) \quad (6.36)$$

Nous pouvons calculer  $V^{\text{out}}(\omega)$  en combinant les équations (6.27), (6.30) et (6.32) et utilisant la prescription (6.36)<sup>1</sup>. Nous obtenons alors le résultat sous la forme suivante

$$V_\alpha^{\beta \text{out}}(\omega) = V_\alpha^{\beta \text{in}}(\omega) + \sum_{\gamma, \delta} \mu_\alpha^\gamma(\omega) D_\gamma^\delta(\omega) \mu(\omega)_{\delta}^{\beta*} \quad (6.37)$$

Pour alléger l'écriture, nous avons introduit deux matrices, d'une part la matrice de dérive  $\mu(\omega)$  (drift matrix), d'autre part la matrice de diffusion  $D(\omega)$ . Elles s'expriment en fonction de  $\chi(\omega)$  et  $\sigma(\omega)$  par

$$\mu(\omega) = 2\left(1 + i\phi - i\frac{\omega}{\kappa} - i\frac{g^2 N}{\kappa \tau_c} \epsilon \chi(\omega)\right)^{-1} \quad (6.38)$$

$$D(\omega) = \frac{g^2 N}{4\kappa \tau_c} \epsilon (-i(1 + \epsilon)\chi(\omega)^\dagger + i\chi(\omega)(1 + \epsilon) + 2\sigma(\omega)) \epsilon \quad (6.39)$$

D'après ces expressions, il est clair que la matrice de dérive décrit la dynamique du système composé, c'est à dire de la cavité contenant l'ensemble des atomes. La matrice

<sup>1</sup> Nous soulignons que  $\mu(\omega)^*$  est la matrice complexe conjuguée de  $\mu(\omega)$  et non pas la matrice conjuguée hermitique.

$\mu(\omega)$  contient uniquement la susceptibilité linéaire  $\chi(\omega)$ . En revanche, la matrice de diffusion est un terme source de bruit qui contient  $\sigma(\omega)$  et  $\chi(\omega)$  dans son expression.

La réduction du bruit dans une quadrature quelconque  $\delta A_\Theta(\omega)$

$$\delta A_\Theta(\omega) = \delta A_1(\omega)e^{i\Theta} + \delta A_2(\omega)e^{-i\Theta} \quad (6.40)$$

est entièrement déterminée par la matrice de covariance  $V^{\text{out}}(\omega)$  et donnée par

$$S_\Theta(\omega) = V_1^{\text{1out}}(\omega) + V_2^{\text{2out}}(\omega) + V_2^{\text{1out}}(\omega)e^{2i\Theta} + V_1^{\text{2out}}(\omega)e^{-2i\Theta} \quad (6.41)$$

Le bruit minimal, c'est à dire les fluctuations en direction du petit axe de l'ellipse, auquel nous nous intéressons dans notre expérience, correspond à la valeur  $\Theta = \pi/4$

$$S_{\text{opt}}(\omega) = V_1^{\text{1out}}(\omega) + V_2^{\text{2out}}(\omega) - 2|V_1^{\text{2out}}(\omega)| \quad (6.42)$$

Etant une mesure de l'excès de bruit dans notre système, le bruit maximal est, lui aussi, une grandeur significative. Son expression correspond à  $\Theta = 0$  et est donnée par

$$S_{\text{max}}(\omega) = V_1^{\text{1out}}(\omega) + V_2^{\text{2out}}(\omega) + 2|V_1^{\text{2out}}(\omega)| \quad (6.43)$$

Nous avons ainsi obtenu le bruit quantique pour une quadrature quelconque du faisceau sortant de la cavité en fonction de la fréquence du bruit. Dans cette formule apparaissent explicitement les expressions de  $\chi(\omega)$  et de  $\sigma(\omega)$ . Nous allons maintenant présenter le calcul de ces matrices pour notre système.

### 6.2.3 Résultats généraux de la théorie de la réponse linéaire

Pour obtenir des expressions analytiques pour la matrice de susceptibilité et le spectre du bruit atomique respectivement, nous allons utiliser la théorie de résonance de fluorescence. Nous calculons d'abord la fonction de corrélation retardée  $G(\omega)$  qui est définie comme la transformée de Fourier des fonctions de corrélations atomiques  $G_\alpha^\beta(t)$

$$G_\alpha^\beta(t) = \Theta(t)\langle \delta \hat{S}_\alpha(t) \delta \hat{S}^\beta(0) \rangle \quad (6.44)$$

A l'aide des définitions (6.31) et (6.33), il est évident que  $\chi(\omega)$  et  $\sigma(\omega)$  peuvent être déduits de la fonction de corrélation retardée de la manière suivante

$$\chi_\alpha^\beta(\omega) = i(G_\alpha^\beta(\omega) - G_{\beta-\alpha}^{\alpha-\beta}(-\omega)^*) \quad (6.45)$$

$$\sigma_\alpha^\beta(\omega) = G_\alpha^\beta(\omega) + G_\beta^\alpha(\omega)^* \quad (6.46)$$

Nous faisons remarquer que les relations (6.45) et (6.46) sont valables en toute généralité et pas seulement pour notre système. Il suffit donc de calculer la fonction de corrélation retardée pour disposer de toute l'information sur les fluctuations quantiques

du système. Ceci est une conséquence directe de la théorie de la réponse linéaire. A partir des équations (6.45) et (6.46), nous déduisons la relation de fluctuation-dissipation pour notre système [152] qui exprime le fait que tout processus dissipatif agit comme source d'excès de bruit

$$\chi_{\alpha}^{\beta}(\omega) - \chi_{\beta}^{\alpha}(\omega)^* = i(\sigma_{\alpha}^{\beta}(\omega) - \sigma_{3-\beta}^{3-\alpha}(-\omega)^*) \quad (6.47)$$

Une conséquence importante et immédiate de cette relation est qu'elle garantit la cohérence du traitement par la théorie de la réponse linéaire. Le champ entrant obéit aux relations de commutations suivantes, formulées à l'aide de la matrice de covariance

$$V_{\alpha}^{\beta \text{in}}(\omega) - V_{3-\beta}^{3-\alpha \text{in}}(-\omega)^* = \epsilon_{\alpha}^{\beta} \quad (6.48)$$

On peut montrer [152, 153] que les commutateurs du champ sortant sont automatiquement préservés indépendamment du système particulier considéré, sous la seule condition que les relations (6.47) et (6.48) soient satisfaites:

$$V_{\alpha}^{\beta \text{out}}(\omega) - V_{3-\beta}^{3-\alpha \text{out}}(-\omega)^* = \epsilon_{\alpha}^{\beta} \quad (6.49)$$

Cette propriété peut être considérée comme une validation a posteriori de la théorie de la réponse linéaire.

### 6.2.4 Expressions analytiques

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats analytiques obtenus pour des atomes à deux niveaux couplés à une onde plane. Nous donnons l'expression pour la fonction de corrélation retardée  $G(\omega)$  à partir de laquelle les matrices  $\chi(\omega)$  et  $\sigma(\omega)$  peuvent être déduites:

$$\begin{aligned} G_1^1(\bar{\omega}) &= \frac{(1 + \delta^2)(2 - i\bar{\omega})(1 - i\delta - i\bar{\omega})(1 + \delta^2 + 2|\beta_0|^2)}{L(\bar{\omega})} + \frac{2i\bar{\omega}(1 + i\delta)(1 + \delta^2)|\beta_0|^2 + (i\bar{\omega}(1 - 2i\delta) + 4 - \bar{\omega}^2)|\beta_0|^4 + 4|\beta_0|^6}{L(\bar{\omega})} \\ G_1^2(\bar{\omega}) &= \beta_0^2 \frac{(1 - i\delta)((2 - i\bar{\omega})(1 - i\delta - i\bar{\omega})(1 - i\delta) + 2i\bar{\omega}|\beta_0|^2) + 4|\beta_0|^4}{L(\bar{\omega})} \\ G_2^1(\bar{\omega}) &= \beta_0^{2*} \frac{(1 + i\delta)^2(2 - i\bar{\omega})(3 - i\delta - i\bar{\omega}) + 2(1 + i\delta)(4 - i\bar{\omega})|\beta_0|^2 + 4|\beta_0|^4}{L(\bar{\omega})} \\ G_2^2(\bar{\omega}) &= 2|\beta_0|^2 \frac{|\beta_0|^2((1 - i\delta)(3 + i\delta - i\bar{\omega}) + (2 - i\bar{\omega})(1 + i\delta - i\bar{\omega})) + 4|\beta_0|^4}{L(\bar{\omega})} \end{aligned} \quad (6.50)$$

avec

$$L(\bar{\omega}) = \gamma(1 + \delta^2 + 2|\beta_0|^2)^2 \left( (2 - i\bar{\omega})((1 - i\bar{\omega}) + \delta^2) + 4|\beta_0|^2(1 - i\bar{\omega}) \right) \quad (6.51)$$

$\bar{\omega}$  correspond à la fréquence du bruit normalisée par le taux d'amortissement  $\gamma$  du dipôle atomique. Nous donnons également l'expression analytique de la matrice de diffusion, pour rectifier les erreurs d'impression contenues dans la référence [103]. Les formules correctes s'écrivent

$$D_1^1(\bar{\omega}) = C\gamma|\beta_0|^4 \frac{(4 + \bar{\omega}^2) + 2|\beta_0|^6}{L'(\omega)} \quad (6.52)$$

$$D_1^2(\bar{\omega}) = -2C\gamma\beta_0^2 \left[ \frac{(1 - i\delta)(4 + \bar{\omega}^2)(1 - i\delta + i\bar{\omega})(1 - i\delta - i\bar{\omega})}{L'(\bar{\omega})} - \frac{4|\beta_0|^2(3 - i\delta)\omega^2 - 8|\beta_0|^4}{L'(\bar{\omega})} \right]$$

$$D_2^1(\bar{\omega}) = D_1^2(\bar{\omega})^*$$

$$D_2^2(\bar{\omega}) = D_1^1(\bar{\omega})$$

avec

$$L'(\omega) = \gamma^2(1 + \delta^2 + 2|\beta_0|^2)^2 \left( (2 - i\bar{\omega})((1 - i\bar{\omega}) + \delta^2) + 4|\beta_0|^2(1 - i\bar{\omega}) \right)^2 \quad (6.53)$$

Ainsi corrigées, ces expressions sont identiques aux résultats obtenus par d'autres groupes en utilisant l'approche des équations différentielles stochastiques [100-102].

### 6.2.5 Analyse linéaire de stabilité et spectres théoriques

Nous sommes maintenant en mesure de calculer des spectres théoriques en fonction des paramètres expérimentaux. Avant de pouvoir tracer des spectres théoriques significatifs, il faut s'assurer de la stabilité de la solution stationnaire. Ceci est d'autant plus important que nous observons sur l'expérience des instabilités que nous interprétons comme des instabilités dues au pompage optique. Néanmoins, il est connu que dans un système bistable peuvent exister des instabilités monomode [156], c'est à dire des instabilités de la solution stationnaire pour un choix particulier des paramètres. Nous allons donc étudier la stabilité de la solution stationnaire pour nos paramètres expérimentaux par une analyse linéaire.

Comme nous l'avons déjà expliqué au paragraphe 6.2.2 de ce chapitre, la dynamique du système composé et donc les fréquences propres de l'évolution sont déterminées par la matrice  $\mu(\omega)$ , plus précisément par le polynôme caractéristique de son

inverse  $\mu(\omega)^{-1}$ . Celui-ci constitue un polynôme du cinquième degré en accord avec le fait qu'il y a cinq degrés de liberté indépendants, deux observables du champ et trois observables atomiques. Par conséquent, il aura aussi cinq fréquences propres du système. Le polynôme caractéristique s'écrit de la manière suivante

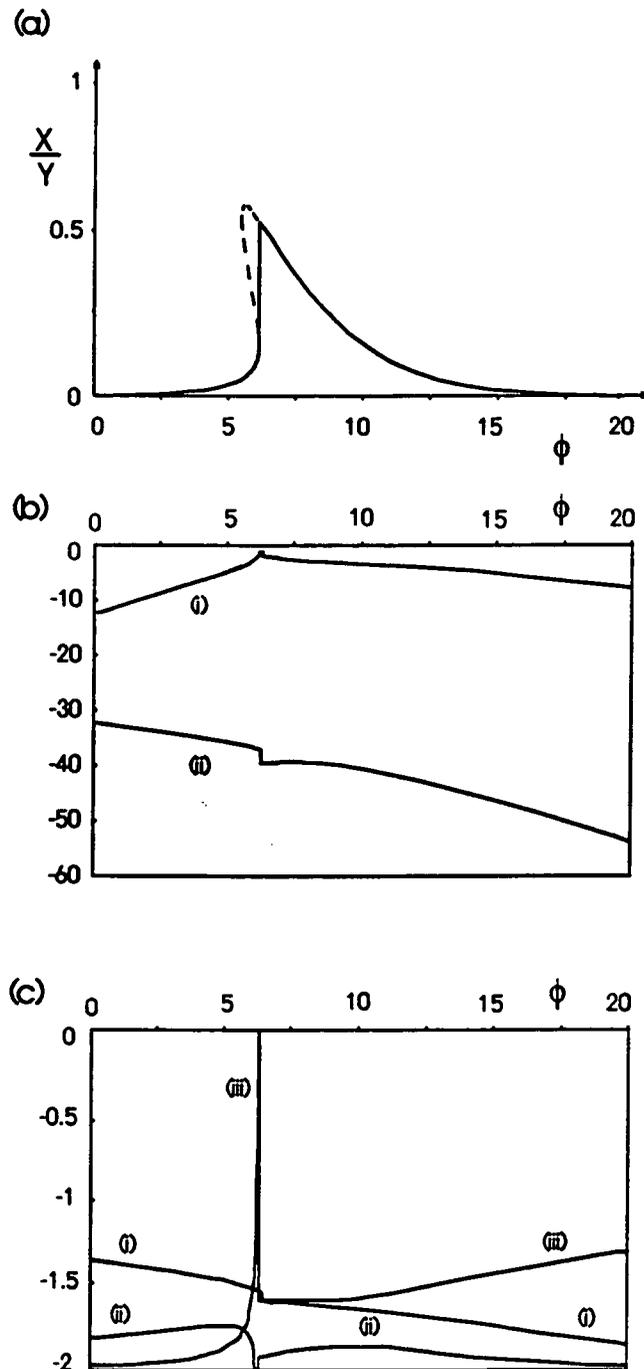
$$\begin{aligned}
 |\mu(\bar{\omega})^{-1}| &= (1 + \delta^2 + 2|\beta_0|^2)^2. & (6.54) \\
 & \left[ (2 - i\bar{\omega}) \left( (1 - i\bar{\omega}) + \delta^2 \right) + 4|\beta_0|^2(1 + i\delta) \right] \cdot ((1 - i\bar{\omega})^2 + \phi^2) + \\
 & 2C(1 + \delta^2 + 2|\beta_0|^2) \cdot \\
 & \left[ (1 - i\bar{\omega})((1 + \delta^2)(1 + i\delta - i\bar{\omega})(2 - i\bar{\omega}) + 2i\bar{\omega}(1 - i\delta)|\beta_0|^2) + \right. \\
 & \left. (1 - i\bar{\omega})((1 + \delta^2)(1 - i\delta - i\bar{\omega})(2 - i\bar{\omega}) + 2i\bar{\omega}(1 + i\delta)|\beta_0|^2) \right] + \\
 & 4C^2(1 + \delta^2) \left[ (2 - i\bar{\omega})(1 + \delta^2) - 4|\beta_0|^2 \right]
 \end{aligned}$$

où  $\bar{\omega}$  est comme auparavant la fréquence du bruit normalisée par l'amortissement du dipôle atomique  $\gamma$ . Comme le polynôme est un polynôme réel en  $p = -i\bar{\omega}$ , les solutions sont complexes conjuguées deux à deux. Nous nous attendons alors à une valeur propre avec  $\text{Re}[\bar{\omega}] = 0$  ainsi qu'à deux paires de solutions complexes conjuguées. La dynamique est donc entièrement déterminée par trois valeurs propres indépendantes. La fréquence propre de la partie réelle nulle représente la valeur moyenne du signal, alors que les fréquences propres d'une partie réelle non nulle représentent des fluctuations du signal à une fréquence donnée par la valeur de la partie réelle. Nous en déduisons que seules les valeurs propres avec  $\text{Re}[\bar{\omega}] \neq 0$  peuvent correspondre aux instabilités monomode. La condition de stabilité est donnée par

$$\text{Re}[p] < 0 \iff \text{Im}[\bar{\omega}] < 0 \quad (6.55)$$

Si la partie imaginaire d'une fréquence propre devient positive, sa partie réelle donne la fréquence caractéristique de l'instabilité.

Nous allons maintenant tracer la variation des valeurs propres du polynôme caractéristique pour des conditions expérimentales typiques lorsque la longueur de la cavité est balayée pour passer de la branche basse vers la branche haute de la courbe de bistabilité. Les paramètres choisis pour l'étude sont  $Y = 250$ ,  $\delta = 20$ ,  $C = 100$ . La figure 30(a) montre la courbe de bistabilité. La branche dessinée en tirets ne correspond pas à une solution stable. L'intensité intracavité saute alors au point tournant de la bistabilité. Sur les figures 30(b) et 30(c), nous avons tracé respectivement les parties réelles et imaginaires des trois fréquences propres différentes du polynôme caractéristique. Les valeurs de la fréquence sont données en unité de  $\gamma$ . Nous remarquons d'abord que la partie réelle des deux solutions tracées est toujours négative, celle de la troisième solution est zéro partout. Au point tournant de la bistabilité, les deux valeurs propres

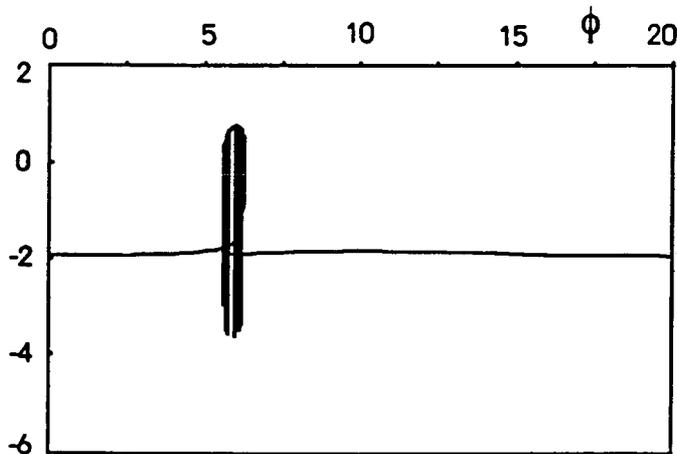


**Fig. 30:** L'évolution des parties réelles (b) et imaginaires (c) des valeurs propres de  $\mu(\omega)$  quand la cavité est balayée à partir de la branche basse de la courbe de bistabilité. La figure (a) montre l'intensité intracavité normalisée. La partie dessinée en tirets n'est pas stable. Les traces (i), (ii) et (iii) correspondent respectivement aux trois valeurs propres indépendantes. La partie réelle de la troisième valeur propre est zéro. Les parties imaginaires sont toujours négatives ce qui garantit la stabilité de la solution. Les traces ont été obtenues avec des paramètres  $Y = 250$ ,  $C = 100$ ,  $\delta = 20$ .

significatives pour la dynamique des fluctuations sont  $\bar{\omega}_1 = 2$  et  $\bar{\omega}_2 = 38$ . Nous allons voir plus loin dans ce paragraphe que ce sont ces deux fréquences qui déterminent la fréquence où la réduction du bruit est optimale.

En ce qui concerne la stabilité, nous voyons que les parties imaginaires restent négatives sur toute la résonance. Seule la partie imaginaire de la troisième solution tend vers zéro au point tournant de la bistabilité. Par conséquent, la bistabilité peut être considérée comme une instabilité à fréquence zéro. Notre analyse montre alors l'absence de toute instabilité monomode pour ce choix de paramètres expérimentaux. Ce résultat est aussi compatible avec notre interprétation des instabilités observées comme instabilités dues au pompage optique.

Un test significatif pour notre analyse de stabilité consiste à simuler une situation non-réaliste: Nous laissons le système suivre la branche instable de la courbe de bistabilité au lieu de provoquer des sauts d'intensité intracavité aux points bistables. Le résultat de cette étude est montré sur la figure 31 où nous avons tracé la partie imagi-



**Fig. 31:** L'évolution de la partie imaginaire quand la cavité est balayée sur la branche instable. Les oscillations violentes mettent en évidence l'instabilité de cette branche.

naire d'une des fréquences propres. Nous voyons qu'elle est négative sauf à l'endroit de l'existence de la solution instable où elle oscille violemment entre des valeurs positives et négatives, ce qui signifie l'instabilité de la solution stationnaire sur cette branche.

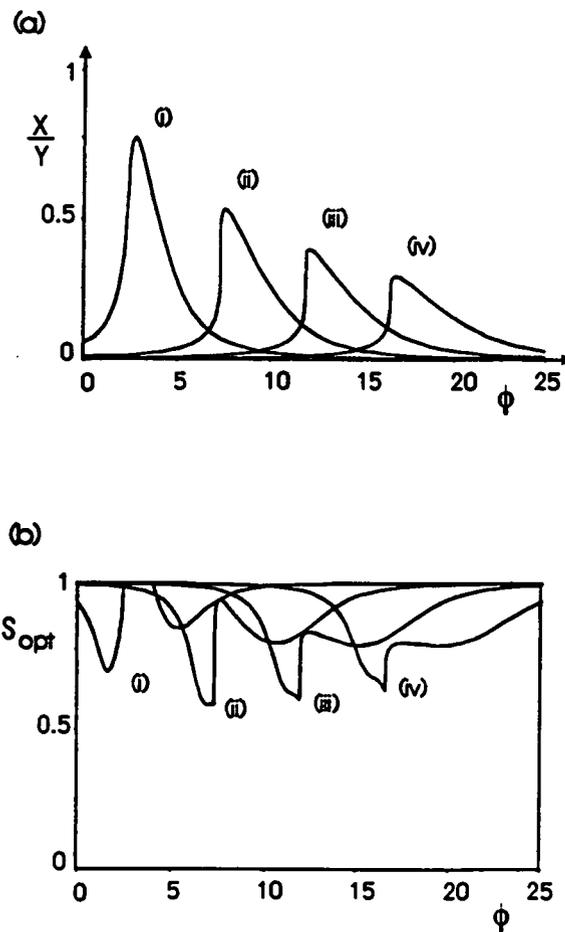
Après avoir prouvé la stabilité de la solution stationnaire, nous pouvons maintenant tracer quelques spectres de bruit minimal correspondant à des paramètres expérimentaux déterminés pour estimer la réduction du bruit à laquelle nous pouvons nous attendre d'après ce traitement préliminaire. Il est toutefois difficile de comprendre qualitativement comment les différents paramètres influent sur les spectres de bruit et en particulier sur le bruit minimal. La première raison est la complexité des expressions que nous avons trouvées ci-dessus. La deuxième raison est que les paramètres sont reliés entre eux d'une manière assez compliquée par l'intermédiaire des relations obtenues pour les valeurs moyennes. Nous allons tracer systématiquement le bruit quantique

minimal, c'est à dire les fluctuations selon le petit axe de l'ellipse qui caractérise la distribution dans l'espace de phases. Les paramètres invariables sont données par

$$\frac{\kappa}{\gamma} = 2 \quad (6.56)$$

$$\delta = 20$$

La figure 32 montre (a) l'intensité intracavité  $X$  quand la courbe de bistabilité est

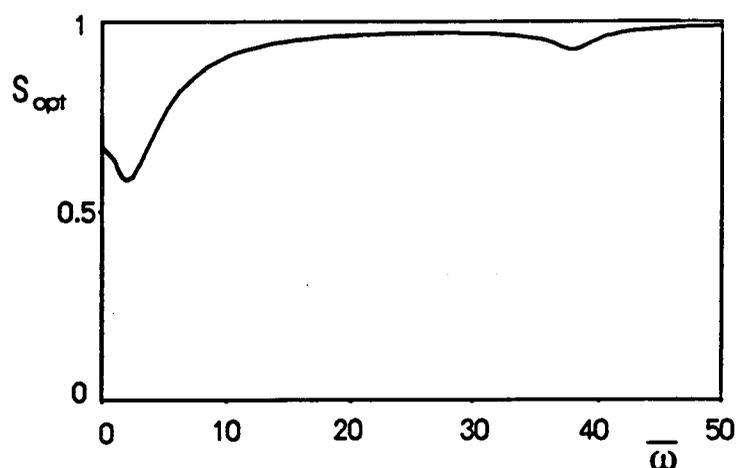


**Fig. 32:** L'intensité intracavité (a) et le bruit minimal (b) en fonction du déphasage de la cavité pour des paramètres de coopérativité différents. Les valeurs de  $C$  sont respectivement  $C = 40, 100, 150, 200$  (traces (i)-(iv)).

balayée à partir de la branche basse et (b) le bruit quantique minimal à une fréquence d'observation fixe de  $\omega_{\text{bruit}}/2\pi = 5\text{MHz}$  (correspondant à une valeur de  $\bar{\omega} \simeq 2$ ) en fonction du déphasage de la cavité. Nous avons choisi une intensité incidente de  $Y = 250$  et fait varier le paramètre de coopérativité. La valeur de  $Y$  correspond à la valeur expérimentale de l'intensité incidente de l'ordre de  $I_{in} = 25\mu W$ . Nous remarquons qu'à partir de  $C \geq 200$  le squeezing optimal commence à baisser. Par contre, si le nombre

d'atomes devient trop petit ( $C \leq 50$ ) la bistabilité disparaît et la réduction du bruit diminue aussi. Ces résultats mettent en évidence les conditions limites pour  $C$  que nous avons données par des arguments qualitatifs au chapitre 3.6.1 (cf. relations (3.18) et (3.20)) et d'après lesquelles le nombre d'atomes doit être d'une part suffisamment grand pour permettre un effet non linéaire, et d'autre part pas trop élevé afin de limiter le rayonnement du champ par émission spontanée dans les modes autres que le mode fondamental de la cavité. De plus, la figure 32 montre, que d'après le modèle "onde plane", nous pouvons donc nous attendre à une réduction du bruit de l'ordre de 43% dans nos conditions expérimentales, c'est à dire pour un paramètre de coopérativité de l'ordre de  $C = 100$ . Cette valeur est tout à fait du même ordre de grandeur que l'observation expérimentale.

Nous avons ensuite tracé le bruit minimal au point tournant où le système saute de la branche basse vers la branche haute de la courbe de bistabilité ( $X = 42$  et  $\phi = 6.25$ ) en fonction de la fréquence de bruit normalisée  $\bar{\omega}$ . La figure 33 montre le spectre que



**Fig. 33:** Bruit minimal en fonction de la fréquence d'observation pour un choix de paramètres de  $X = 42, \phi = 6.25, \delta = 20, C = 100$ . Ces valeurs correspondent au point tournant de la courbe de bistabilité montrée auparavant.

nous avons obtenu. Nous voyons que la fréquence de la réduction de bruit optimale se trouve à  $\bar{\omega} = 2$ , en accord avec une des fréquences propres.

La deuxième fréquence caractéristique correspond à  $\bar{\omega} = 38$ , également en accord avec une racine du polynôme caractéristique. Cependant, dans ce deuxième cas, la réduction du bruit est nettement moins importante que dans le premier cas. Notre fréquence d'observation correspond à la fréquence la plus basse, et donc au cas le plus favorable.

### 6.2.6 Insuffisance du traitement

Avec les paramètres de l'expérience, nous trouvons une réduction du bruit théorique qui est du même ordre que le résultat observé. Néanmoins, le traitement utilisé

ne peut donner qu'une idée préliminaire du comportement du système car il ne tient compte ni de la vraie variation du nombre d'atomes au cours du temps, ni de la structure spatiale du faisceau sonde. Pour mieux modéliser notre expérience, il est maintenant indispensable d'inclure ces effets dans le traitement théorique.

La variation du nombre d'atomes au cours du temps est suffisante pour balayer la résonance de la cavité (voir chapitre 4.2). Dans une approche préliminaire (voir chapitre 5.4), nous avons représenté cette variation par une variation exponentielle du nombre d'atomes. Comme nous l'avons déjà remarqué, cette approximation est tout à fait insuffisante pour les temps courts. Nous allons développer dans le paragraphe suivant une description de l'explosion et de la chute gravitationnelle du nuage atomique, qui nous permettra de calculer d'une manière précise la variation du nombre d'atomes dans le faisceau sonde. De plus, cette méthode nous fournira non seulement la valeur moyenne du nombre d'atomes en fonction du temps, mais aussi les fluctuations de ce nombre d'atomes. Celles-ci constituent à priori un terme source d'excès de bruit et nous pourrions estimer leur influence sur la réduction du bruit.

Au début du calcul de la variation du nombre d'atomes, nous avons rencontré une autre question importante, à savoir comment définir le nombre effectif d'atomes dans le faisceau sonde. Cette question est directement liée à la définition précise de la surface délimitant le volume d'interaction et, par conséquent, au traitement de la structure transverse du faisceau sonde. Nous allons abandonner le modèle qui traite le faisceau sonde comme une onde plane et aborder un traitement plus précis de la bistabilité et du bruit quantique qui tient compte de la structure spatiale du faisceau.

## 6.3 La variation du nombre d'atomes

### 6.3.1 Description du modèle

Quand nous coupons les faisceaux pièges ainsi que le gradient du champ magnétique, les atomes se trouvent tout d'un coup libres dans l'espace. Si on suppose qu'il n'existe aucun processus de chauffage dû à la procédure de coupure du piège, la vitesse moyenne  $\sigma_v$  des atomes est donnée par la température  $T_{\text{piège}}$  du piège qui est de l'ordre de quelques mK

$$\sigma_v = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{kT_{\text{piège}}}{m}} \quad (6.57)$$

où nous avons supposé la même vitesse  $v$  dans toutes les directions de l'espace.  $k$  est la constante de Boltzmann et  $m$  la masse d'un atome de Césium ( $m = 2.24 \cdot 10^{-25}$  kg). Pour une température de  $T = 1$  mK, nous trouvons ainsi une vitesse moyenne de  $\sigma_v \simeq 40$  cm/s. Le libre parcours moyen des atomes dans notre piège est de l'ordre de  $l_c \simeq 1$  m, alors que le diamètre du piège est environ 1 cm et donc beaucoup plus petit. Nous en déduisons que le mouvement des atomes est un mouvement balistique et non pas diffusif. Il peut être décrit par un vol libre sous l'influence de la gravité. Soient  $\mathbf{r}_0$

et  $\mathbf{v}_0$  la position et la vitesse d'un atome générique à l'instant  $t = 0$  et  $\mathbf{r}(t)$  et  $\mathbf{v}(t)$  sa position et sa vitesse à l'instant  $t$ . Les équations de mouvement s'écrivent alors tout simplement

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 \quad (6.58)$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$$

Notre but est de calculer à partir de ces équations le nombre d'atomes dans le faisceau sonde en fonction du temps écoulé depuis la coupure du piège et de comparer le résultat obtenu au résultat expérimental. Pour cela, nous avons développé un traitement statistique qui sera présenté dans la prochaine section dans la reproduction de l'article "Atomic number fluctuations in a falling cold atom cloud". Avant d'entrer dans le détail de ce traitement, nous allons préciser les questions ouvertes et importantes en ce qui concerne le nombre d'atomes.

Comme nous l'avons déjà expliqué au chapitre 3.6.1, il existe plusieurs méthodes pour mesurer le nombre d'atomes dans le faisceau sonde. La première est basée sur une mesure de la phase linéaire par le déplacement de la résonance de la cavité en présence des atomes. Dans une deuxième méthode, nous mesurons la phase non linéaire par la diminution du pic de bistabilité en présence des atomes. Or, quand le piège est coupé, la résonance de la cavité est balayée par la fuite des atomes. Par conséquent, il n'est plus possible de mesurer le déplacement du pic et d'en déduire le nombre d'atomes par la mesure du déphasage linéaire. On ne peut utiliser que la deuxième méthode qui est basée sur l'effet non linéaire. Mais, évidemment, le nombre d'atomes qu'on mesure à l'aide d'un faisceau sonde dépend de l'effet physique utilisé pour la mesure. Nous sommes ainsi conduits à la conclusion que la définition correcte du nombre d'atomes dans un faisceau laser dépend de l'interaction particulière ainsi que des caractéristiques du faisceau. Nous allons considérer les deux cas d'une interaction linéaire et non linéaire à tous les ordres entre ce faisceau et le milieu atomique et donner des expressions du nombre d'atomes dans le faisceau pour un cas très général. Nous allons voir que la structure gaussienne du faisceau nous permettra de trouver des expressions analytiques du nombre d'atomes.

Dans la mesure où nous disposerons d'une définition fiable du nombre d'atomes, nous pourrons revenir à son calcul en fonction du temps. La aussi, nous allons donner une expression analytique, qui décrit la décroissance du nombre d'atomes. Nous verrons que l'effet de la gravité ne joue que pour des nuages atomiques à une température très basse où pour des temps très longs.

Comme la variation du nombre d'atomes est suffisante pour balayer la cavité sur la résonance, il paraît important dans une expérience de réduction du bruit quantique d'évaluer précisément les fluctuations de ce nombre d'atomes. En effet, les fluctuations du nombre d'atomes peuvent induire des fluctuations de la phase linéaire qui, elles, ont une influence sur les fluctuations du champ. Comme nous allons voir dans l'article

suivant, il est possible de calculer le spectre de bruit caractérisant ces fluctuations si la section du faisceau laser est beaucoup plus petite que la taille du piège, auquel cas le nombre d'atomes peut être considéré comme une variable quasistationnaire. Pour terminer, nous donnerons des estimations de l'influence des fluctuations atomiques sur la réduction du bruit dans différentes conditions expérimentales.

### **6.3.2 Reproduction de l'article "Atomic number fluctuations in a falling cold atom cloud" (soumis à Phys. Rev. A)**

# Atomic number fluctuations in a falling cold atom cloud

Astrid Lambrecht, Elisabeth Giacobino and Serge Reynaud  
Laboratoire Kastler Brossel, UPMC, ENS, CNRS  
4 place Jussieu F75252 Paris, France

## Abstract

We evaluate the effective number of atoms in experiments where a probe laser beam with a Gaussian transverse profile passes through an atomic medium consisting in a cold atom cloud released from a magneto-optical trap. Considering the case where the initial distribution is a Gaussian function of position and of velocity, we give a quantitative description of the temporal variation of the effective number while the cloud is exploding and falling down. We discuss the two cases where the effective number is defined from the linear and nonlinear phaseshifts respectively. We also evaluate the fluctuations of the effective atomic number by calculating their correlation functions and the associated noise spectra. We finally estimate the effect of these fluctuations on experiments where the probe beam passes through a cavity containing the atomic cloud.

PACS: 32.80Pv; 42.50Lc

## 1. Introduction

In recent years, the development of magneto-optical traps [1] has opened the way to the use of cold atoms for various purposes such as atomic interferometry, and nonlinear or quantum optics. In many of these experiments, a cloud of cold atoms is first trapped and then released when the laser beams and the magnetic field of the trap are turned off. The experiment is thus performed while the cloud is undergoing a ballistic expansion due to the velocity distribution in the trap and falling down under the influence of gravity. Models using a Monte-Carlo simulation of the evolution of the atomic positions and velocities have been developed to analyze the free fall of the cloud of cold atoms. They have been used to obtain informations about the initial position and velocity distribution in the trap from

fluorescence measurements, particularly to evaluate temperature in the trap when it is released and to investigate deviations from a Maxwellian velocity distribution ([2] and references therein).

Here, we want to concentrate on the category of experiments where the falling cloud of cold atoms is used in spectroscopy, nonlinear or quantum optics experiments. In this case, the cloud interacts with a probe laser beam that passes through it. A crucial point for these experiments lies in the definition of an effective number of atoms contributing to the interaction with the probe beam and also to variation of this effective atomic number as a function of time.

A first aim of the present paper is to provide a definition of the effective number of atoms in the probe beam, as well as a precise modelisation of its temporal evolution. We will show that this is a quite involved problem in the general case, and in particular that different definitions may be given, depending upon the specific physical effect chosen as a reference for the evaluation of the atomic number. We will discuss the example where the linear phase produced by the atomic medium is chosen as a reference, as well as the case where the nonlinear phase shift is considered. This general discussion will lead to simpler conclusions in the two limiting cases where either the transverse size of the probe beam is much smaller than the cloud size or the Rayleigh length characteristic of the divergence of the probe beam is much larger than the cloud size.

A further problem is that this effective number of atoms has fluctuations. These fluctuations must be added to the fluctuations usually evaluated with the number of atoms kept constant and they may have an influence in spectroscopy, metrology or quantum optics experiments. In this class of experiments indeed, the signal is often measured with such a high precision that any excess noise produced by the atomic medium can appear as a limiting factor for the sensitivity.

This is why in a second part of this paper we will evaluate atomic number fluctuations by calculating their characteristic correlation functions. We will show in particular that it is possible to calculate time dependent noise spectra, when the transverse size of the probe beam is much smaller than the cloud size. In this case indeed, the correlation time, expected to be of the order of the time of flight through the probe beam, is much smaller than the typical variation time of the mean number of atoms, of the order of the time of flight through the cloud, so that the effective atomic number may be considered as a quasistationary random variable.

The theoretical developments of the present paper are in particular essential for the understanding and interpretation of experimental results we obtained recently [3]. The experiment consists in the measurement of quantum fluctuations of a weak probe beam passing through a cloud of cold atoms expanding and falling down after it has been released from a standard magneto-optical trap. To enhance

the interaction between atoms and light, the atoms are placed inside an optical cavity. The variation of the number of atoms leads to a continuous variation of the linear phaseshift of the laser beam, which is sufficient to scan the cavity across resonance. Due to the non-stationary character of the measurement of quantum fluctuations, the knowledge of the time variation of the number of atoms plays a crucial role in the interpretation of experimental results. The fit with the experimental results, using the theory developed in the present paper, will be presented in a further publication [4]. While a variation of the mean atomic number scans the cavity detuning through a variation of the linear phase shift, atomic number fluctuations result in fluctuations of the detuning which have an effect on the fluctuations of the probe beam which are measured in the experiment. If they are large enough, they may enter exponentially in the expression for the field fluctuations after interaction, and therefore produce excess noise not only at the frequencies contained in their own noise spectrum, but also at higher frequencies through a multiplicative noise processing [5]. The evaluation of atomic number fluctuations contained in the present paper are particularly useful to delineate under which conditions these fluctuations degrade squeezing measurements.

As already pointed out by Weiss et al. [6], the density distribution of a freely falling atom cloud can be calculated analytically at any instant, if a Gaussian profile in the trap is assumed for position density as well as for velocity distribution. Experiments by Drewsen et al. [2] have shown this assumption to be justified if multiple scattering effects become negligible, that means for large clouds and atoms with a temperature in the 100  $\mu\text{K}$  to mK range [7]. These conditions are met in the experiment that we are modeling [3]. When the number of trapped atoms is deduced from their fluorescence signal, the detectivity function does not have a Gaussian profile and does in general not lead to analytical results. In the case studied in this paper, the experimental determination of the number of atoms relies on a phase shift measurement of a probe laser beam. It may thus be expected that the detectivity function is given by the Gaussian profile of the laser beam, leading to analytical solutions for the mean atomic number and for correlation functions of atomic number fluctuations.

In Section 2 of this paper, we describe our model in more detail and show how the effective number of atoms is deduced from phase shift measurements, accounting for the transverse mode structure of the probe beam. From this, we analyze in Section 3 the expression of the case of a linear phase shift measurement, considering the general case of an atomic motion under gravity. In Section 4, we address the problem of a saturated phase shift. The correlation functions and the noise spectrum of atomic number fluctuations are then calculated in Section 5. When evaluating fluctuations, we restrict our attention to the particular case of the atomic number deduced from the linear phase shift since we are mainly inter-

ested in potential effects of linear phase fluctuations. We finally give an estimate of the effect of the latter on the probe-cavity detuning in Section 6.

## 2. Description of the model

As already discussed, we consider that the number of atoms is monitored through a phase measurement performed on a probe laser beam. Hence, this number will be obtained as an integral of the atomic density over the volume, with a weight function fitting the Gaussian profile of the laser beam.

To determine precisely this weight function, we introduce the Gaussian mode  $u(\mathbf{r})$  ( $\mathbf{r}$  stands for the three-dimensional position  $(x, y, z)$ ) describing the intra-cavity field propagating along the  $x$  direction and coming onto the atoms:

$$u(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(x)} \exp \left[ -\frac{y^2 + z^2}{w^2(x)} - i\varphi(\mathbf{r}) \right] \quad (2.1)$$

$w(x)$  is the position-dependent beam size:

$$w^2(x) = w_0^2 \left( 1 + \frac{x^2}{l_R^2} \right) \quad (2.2)$$

$$l_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (2.3)$$

where  $w_0$  is the beam waist,  $l_R$  the Rayleigh divergence length and  $\lambda$  the laser wavelength. The field phase  $\varphi(\mathbf{r})$  is the sum of contributions representing propagation phase and curvature of the wave at longitudinal position  $x$ :

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{2\pi x}{\lambda} + \arctg \left( \frac{x}{l_R} \right) - \frac{\pi (y^2 + z^2) x}{\lambda (x^2 + l_R^2)} \quad (2.4)$$

The squared modulus of the Gaussian mode:

$$|u(\mathbf{r})|^2 = \frac{f(\mathbf{r})}{S(x)} \quad (2.5)$$

may be written in terms of a Gaussian weight function  $f(\mathbf{r})$  normalized to unity on the beam axis and an effective beam section  $S$ :

$$f(\mathbf{r}) = \exp \left[ \frac{-2(y^2 + z^2)}{w^2(x)} \right] \quad (2.6)$$

$$S(x) = \frac{\pi w^2(x)}{2} \quad (2.7)$$

The normalisation of the Gaussian mode  $u(\mathbf{r})$  has been chosen so that:

$$\int |u(\mathbf{r})|^2 dy dz = 1 \quad (2.8)$$

This relation holds for any position  $x$  along the propagation axis.

We will write the incident field seen at time  $t$  by the atoms located at point  $\mathbf{r}$  in the interaction representation with respect to the laser frequency  $\omega_L$ :

$$E(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega_L t} E(\mathbf{r}, t) + e^{i\omega_L t} E(\mathbf{r}, t)^\dagger \quad (2.9)$$

where  $E(\mathbf{r}, t)$  is the product of the Gaussian profile  $u(\mathbf{r})$  by a mode amplitude  $A(t)$ :

$$E(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\varepsilon_0 c}} A(t) u(\mathbf{r}) \quad (2.10)$$

This definition is such that  $A(t)^\dagger A(t)$  is the number of photons passing through a beam section per unit time.

As explained below, the field radiated by the atoms will have a different transverse profile as a consequence of the nonlinear character of light-matter interaction. The Gaussian mode  $u(\mathbf{r})$  is the lowest order mode  $u_{00}$  of the family of orthogonal Hermite modes. We will consider that the higher-order Hermite modes  $u_{mn}$  (with  $m \neq 0$  or  $n \neq 0$ ) are not resonant at the same frequency as the lowest order mode  $u_{00}$ . Hence, any field radiated by the atoms into these higher-order modes will not be efficiently coupled back onto the atoms and can therefore be disregarded. We will then calculate the field amplitude radiated into the fundamental mode by a mere projection.

The effect of an optically thin atomic layer of length  $dx$  may be described by a local modification  $dE(\mathbf{r})$  of the field:

$$E(\mathbf{r}) \rightarrow E(\mathbf{r}) + dE(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

with [8]:

$$dE(\mathbf{r}) = -\frac{3\lambda^2}{4\pi} \rho(\mathbf{r}) \alpha(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}) dx \quad (2.12)$$

Note that we have treated the motion of atoms as quasistatic and neglected any consequence of the Doppler effect. As a result, we have used the atomic density  $\rho(\mathbf{r})$  integrated over the velocity distribution.  $\alpha(\mathbf{r})$  is the atomic polarizability measured as a dimensionless number:

$$\alpha(\mathbf{r}) = \frac{\alpha_l}{1 + 2s(\mathbf{r})} \quad (2.13)$$

The linear polarizability  $\alpha_l$  is a function of the dimensionless detuning  $\delta$  between laser frequency  $\omega_L$  and atomic resonance frequency  $\omega_0$  normalized to the decay rate  $\gamma$  of the atomic dipole:

$$\alpha_l = \frac{1}{1 + i\delta} \quad (2.14)$$

$$\delta = \frac{\omega_0 - \omega_L}{\gamma} \quad (2.15)$$

The saturation parameter  $s$  is proportional to the local laser intensity  $|\beta(\mathbf{r})|^2$  measured as a dimensionless number:

$$s(\mathbf{r}) = \frac{|\beta(\mathbf{r})|^2}{1 + \delta^2} \quad (2.16)$$

$$\beta(\mathbf{r}) = \frac{d_0 E(\mathbf{r})}{\hbar\gamma} = \sqrt{\frac{3\lambda^2}{4\pi}} u(\mathbf{r}) \frac{A}{\sqrt{\gamma}} \quad (2.17)$$

where  $d_0$  is the matrix element of the atomic dipole.

As a first step, we consider that the saturation of polarizability may be neglected; we will come back to the nonlinear case later on. The number of atoms is then evaluated by monitoring the linear phase shift produced by the atomic cloud, with  $dE(\mathbf{r})$  written as:

$$dE(\mathbf{r}) = -\frac{3\lambda^2}{4\pi} \rho(\mathbf{r}) \alpha_l E(\mathbf{r}) dx \quad (2.18)$$

Even in this linear case, the radiated field  $dE(\mathbf{r})$  does not have the same spatial variation as the incident field  $E(\mathbf{r})$  when the atomic density  $\rho(\mathbf{r})$  is position-dependent. Ignoring the field radiated into higher-order modes, one gets the modification of the field amplitude  $dA$  in the Gaussian mode by projecting  $dE(\mathbf{r})$  onto  $u(\mathbf{r})$ :

$$\sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\varepsilon_0 c}} dA = \int dE(\mathbf{r}) u^*(\mathbf{r}) dy dz \quad (2.19)$$

Assuming that the modification of the field by the whole atomic cloud remains small (assumption of an optically thin atomic cloud), we obtain this modification by summing up the contributions of all the atomic layers as:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{3\lambda^2}{4\pi} \alpha_l \sigma \quad (2.20)$$

with :

$$\sigma = \int |u(\mathbf{r})|^2 \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.21)$$

The modification of the field intensity is:

$$d(A^\dagger A) = A^\dagger dA + (dA^\dagger) A = -A^\dagger A \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{\sigma}{1 + \delta^2} \quad (2.22)$$

As the absorption cross section is  $(3\lambda^2/2\pi)$  at resonance and is divided by  $(1 + \delta^2)$  otherwise, this equation shows that  $\sigma$  must be interpreted as the effective number of atoms present in the detection beam per unit beam section. This interpretation may be made more precise by rewriting  $\sigma$  as:

$$\sigma = \int \frac{dn(x)}{S(x)} \quad (2.23)$$

where  $dn(x)$  is the number of atoms present in the detection beam in a thin layer of length  $dx$ , that is the number obtained by integrating the atomic density  $\rho(\mathbf{r})$  over the beam area with a Gaussian weight function  $f(\mathbf{r})$ :

$$\frac{dn(x)}{dx} = \int f(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dy dz \quad (2.24)$$

This effective number has to be distinguished from the number of atoms present in the whole cloud in a thin layer of length  $dx$ , which is obtained by integrating the atomic density  $\rho(\mathbf{r})$ :

$$\frac{dN(x)}{dx} = \int \rho(\mathbf{r}) dy dz \quad (2.25)$$

The atomic medium considered in this paper consists in a freely falling cloud of cold atoms. We will assume that the phase space distribution  $\pi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0)$ , at time  $t = 0$  chosen as the beginning of the free fall, is a Gaussian function of position as well as of velocity:

$$\pi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) = \frac{\mathcal{N}}{(2\pi\sigma_r\sigma_v)^3} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{2\sigma_r^2} - \frac{\mathbf{v}^2}{2\sigma_v^2}\right) \quad (2.26)$$

$\mathcal{N}$  is the total number of atoms while  $\sigma_r$  measures the radius of the initial cloud and  $\sigma_v$  the thermal velocity related to the trap temperature  $T$  through:

$$\sigma_v^2 = \frac{k_B T}{m} \quad (2.27)$$

As already mentioned in the introduction, this Gaussian approximation gives a rather good description of the trap distribution [2, 7]. It presents the great advantage that it will lead to analytical expressions for the integrals encountered in

the evaluation of the mean atomic number and of atomic number fluctuations, at least in the case where the Rayleigh divergence length is larger than the cloud size. For the sake of simplicity, the initial cloud has been considered to be centered on the detection beam, and the detection beam supposed to propagate in horizontal direction. Note however that releasing these two simplifying assumptions would not change the Gaussian character of the atomic density, which is the key point of the following calculations.

The motion of atoms at later times  $t$  is determined by the laws of free fall, which preserve the phase space volume:

$$d\mathbf{r}(t) d\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(0) d\mathbf{v}(0) \quad (2.28)$$

The time-evolution of the phase space distribution  $\pi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  is deduced from the conservation of the number of atoms (Liouville's theorem):

$$\pi\left(\mathbf{r} + \mathbf{v}t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2, \mathbf{v} + \mathbf{g}t, t\right) = \pi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) \quad (2.29)$$

with  $\mathbf{g}$  oriented downwards in the  $z$  direction, or equivalently:

$$\pi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \pi\left(\mathbf{r} - \mathbf{v}t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2, \mathbf{v} - \mathbf{g}t, 0\right) \quad (2.30)$$

The atomic density is defined as the integral over velocity of the phase space distribution:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int \pi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad (2.31)$$

This Gaussian integral is easily evaluated [6]:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathcal{N}}{[2\pi(\sigma_r^2 + \sigma_v^2 t^2)]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2)^2}{2(\sigma_r^2 + \sigma_v^2 t^2)}\right] \quad (2.32)$$

For example, the atomic density at the initial center of the cloud ( $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ) is:

$$\rho(\mathbf{0}, t) = \frac{\mathcal{N}}{[2\pi\sigma_r^2]^{3/2}} \left[\frac{\tau_r^2}{\tau_r^2 + t^2}\right]^{3/2} \exp\left[\frac{-t^4}{\tau_g^2(\tau_r^2 + t^2)}\right] \quad (2.33)$$

with:

$$\tau_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_v} \quad (2.34)$$

$$\tau_g = \frac{2\sqrt{2}\sigma_v}{|\mathbf{g}|} \quad (2.35)$$

This shows that the atomic cloud undergoes a ballistic expansion on a time scale  $\tau_r$ , the time of flight through the trap radius  $\sigma_r$  for an atom flying at mean thermal velocity  $\sigma_v$ , while at the same time the cloud is falling down under the influence of gravity on a time scale  $\tau_g$ . When the time scale  $\tau_g$  is longer than  $\tau_r$ , the effect of gravity may be disregarded for short times ( $t \ll \tau_g$ ) and the atomic density varies mainly as a consequence of ballistic expansion. Gravity leads to an exponential decrease at longer times ( $t \gg \tau_g$ ) and the variation of the atomic density may be rewritten in this case:

$$\rho(0, t) \approx \frac{\mathcal{N}}{[2\pi\sigma_r^2]^{3/2}} \left[ \frac{\tau_r^2}{\tau_r^2 + t^2} \right]^{3/2} \exp \left[ -\frac{t^2}{\tau_g^2} \right] \quad (2.36)$$

A third time scale  $\tau_w$  will be found in the following, which will measure the time of flight through the detection beam:

$$\tau_w(x) = \frac{w(x)}{2\sigma_v} \quad (2.37)$$

### 3. Effective number of atoms deduced from the linear phase shift

Using the results of the previous section, the linear phase shift of the field due to the interaction with the atomic cloud may be written in terms of equations (2.20, 2.23, 2.24) where we have introduced a time-dependence of the effective atomic number per beam section  $\sigma(t)$  in order to account for the quasistatic time-variation of the atomic density  $\rho(\mathbf{r}, t)$ :

$$\frac{dA}{A} = -\alpha_l \frac{3\lambda^2}{4\pi} \sigma(t) \quad (3.1)$$

$$\sigma(t) = \int \frac{dn(x, t)}{S(x)} \quad (3.2)$$

$$\frac{dn(x, t)}{dx} = \int f(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}, t) dy dz \quad (3.3)$$

The latter integral over the transverse variables  $y$  and  $z$  has a Gaussian character and can be readily performed. The resulting expression for the number of atoms  $dn(x, t)$  present at time  $t$  in the detection beam in a thin layer of length  $dx$  may be written:

$$dn(x, t) = \frac{d\mathcal{N}(x, t) w^2(x)}{4(\sigma_r^2 + \sigma_v^2 t^2) + w^2(x)} \exp \left[ -\frac{\frac{1}{2} g^2 t^4}{4(\sigma_r^2 + \sigma_v^2 t^2) + w^2(x)} \right] \quad (3.4)$$

$d\mathcal{N}(x, t)$  is the number of atoms present at time  $t$  in the whole cloud in a thin layer of length  $dx$  (cf. definition 2.25):

$$\frac{d\mathcal{N}(x, t)}{dx} = \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{2\pi(\sigma_r^2 + \sigma_v^2 t^2)}} \exp\left[-\frac{x^2}{2(\sigma_r^2 + \sigma_v^2 t^2)}\right] \quad (3.5)$$

The integral over the longitudinal variable  $x$  keeps a Gaussian character either when the beam size is much smaller than the trap radius ( $w \ll \sigma_r$ ) or when the Rayleigh divergence length is much larger than the cloud size ( $\sigma_r \ll l_R$ ). We discuss these two limiting cases in the next paragraphs, and recall that both assumptions are fulfilled in the experimental situation of reference [3].

We consider first the limiting case  $w \ll \sigma_r$ , but with  $\sigma_r/l_R$  arbitrary, where the number of atoms  $dn(x, t)$  given by equation (3.4) is proportional to  $w^2(x)$ , and therefore also to the beam section  $S(x)$ . The  $x$ -dependent factor  $S(x)$  disappears in the expression (3.2) of  $\sigma(t)$  which is thus a Gaussian integral. Its evaluation leads to:

$$\sigma(t) = \frac{\mathcal{N}}{2\pi\sigma_v^2(\tau_r^2 + t^2)} \exp\left[-\frac{t^4}{\tau_g^2(\tau_r^2 + t^2)}\right] \quad (3.6)$$

where  $\tau_r$  and  $\tau_g$  are the already introduced time scales which correspond respectively to free flight through the trap and free fall (compare with equation 2.33).

In the case where the Rayleigh divergence length is much larger than the cloud size ( $\sigma_r \ll l_R$  with  $w/\sigma_r$  arbitrary), the  $x$ -dependence of the beam section  $S$  can be ignored and  $\sigma(t)$  is again a Gaussian integral. For an arbitrary beam size  $w$ , the time of flight through the probe beam  $\tau_w$  becomes a relevant parameter. After the evaluation of the integral, we obtain  $\sigma(t)$  as:

$$\sigma(t) = \frac{\mathcal{N}}{2\pi\sigma_v^2(\tau_r^2 + \tau_w^2 + t^2)} \exp\left[-\frac{t^4}{\tau_g^2(\tau_r^2 + \tau_w^2 + t^2)}\right] \quad (3.7)$$

where  $\tau_w$  is the time of flight through the probe beam. When both assumptions, a large Rayleigh divergence length and a small beam size ( $w \ll \sigma_r$  and  $\sigma_r \ll l_R$ ), are valid, expression (3.7) is identical to expression (3.6) which is valid for any ratio  $\sigma_r/l_R$ .

As already discussed with the help of equation (2.33), the effect of gravity may be disregarded for times  $t \ll \tau_g$  when  $\tau_r \ll \tau_g$ . It follows that  $n(t)$  thus varies as a Lorentzian function of time, as a consequence of ballistic explosion. Gravity leads to an exponential decrease at longer times. In the particular case  $\tau_w \ll \tau_r \ll \tau_g$  for example, these various regimes of time-dependence of  $\sigma(t)$  may be described in a single formula:

$$\sigma(t) = \frac{\mathcal{N}}{2\pi\sigma_v^2(\tau_r^2 + t^2)} \exp\left[-\frac{t^2}{\tau_g^2}\right] \quad (3.8)$$

This condition  $\tau_r \ll \tau_g$  corresponds to a high temperature limit, since it may be rewritten from equations (2.272.34,2.35):

$$k_B T \gg \frac{m\sigma_r |\mathbf{g}|}{2\sqrt{2}} \quad (3.9)$$

In the opposite low temperature limit, the variation of  $\sigma(t)$  is mainly determined for all times by the exponential factor which describes the free fall of the cloud under the effect of gravity.

#### 4. Effective number of atoms deduced from the nonlinear phase shift

In the previous section, we have studied the field modification in a linear regime, and deduced an effective number of atoms from a linear phase shift. We now come to the general case where the atomic polarizability may be saturated.

The transverse variation of  $dE(\mathbf{r})$  is then completely different from the transverse variation of the incident field  $E(\mathbf{r})$  as a consequence of the dependence of the saturation parameter (see equations 2.12-2.16):

$$dE(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha_l}{1 + 2s(\mathbf{r})} \frac{3\lambda^2}{4\pi} \rho(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}) dx \quad (4.1)$$

$$s(\mathbf{r}) = s_m(x) f(\mathbf{r}) \quad (4.2)$$

$s_m$  is the saturation parameter evaluated on the beam axis:

$$s_m(x) = \frac{3\lambda^2}{4\pi S(x)} \frac{|A|^2}{\gamma} \frac{1}{1 + \delta^2} \quad (4.3)$$

As in the linear case, we ignore the field radiated into higher-order modes and we obtain the modification of the field amplitude  $dA$  projected onto the Gaussian mode through equation (2.19):

$$\frac{dA}{A} = -\alpha_l \frac{3\lambda^2}{4\pi} \sigma_s(t) \quad (4.4)$$

where  $\sigma_s$  is now modified by saturation:

$$\sigma_s(t) = \int \frac{dn_s(x,t)}{S(x)} \quad (4.5)$$

$$\frac{dn_s(x, t)}{dx} = \int \frac{f(\mathbf{r})}{1 + 2s_m(x) f(\mathbf{r})} \rho(\mathbf{r}, t) dy dz \quad (4.6)$$

In order to evaluate  $\sigma_s$ , we will first expand  $dn_s$  in powers of the saturation parameter:

$$dn_s(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-2s_m(x))^k dn^{(1+k)}(x, t) \quad (4.7)$$

where:

$$\frac{dn^{(j)}(x, t)}{dx} = \int f(\mathbf{r})^j \rho(\mathbf{r}, t) dy dz \quad (4.8)$$

$dn^{(1)}(x, t)$  is exactly the expression (3.3) of the effective number of atoms  $dn(x, t)$  in the detection beam in a thin layer of length  $dx$ , as it was evaluated in the previous section. Due to the Gaussian shape of function  $f(\mathbf{r})$ , function  $f(\mathbf{r})^j$  has the same expression as  $f(\mathbf{r})$  with a modified value of the beam size parameter, precisely with  $w^2(x)$  replaced by  $(w^2(x)/j)$ . Therefore,  $dn^{(j)}(x, t)$  corresponds to the expression (3.4) of  $dn(x, t)$  evaluated for a modified beam size:

$$dn^{(j)}(x, t) = \frac{dN(x, t) \frac{w^2(x)}{j}}{4(\sigma_r^2 + \sigma_v^2 t^2) + \frac{w^2(x)}{j}} \exp \left[ -\frac{\frac{1}{2} g^2 t^4}{4(\sigma_r^2 + \sigma_v^2 t^2) + \frac{w^2(x)}{j}} \right] \quad (4.9)$$

These expressions are greatly simplified in the limiting case of a small beam size ( $w \ll \sigma_r$ ), where  $dn^{(j)}(x, t)$  is proportional to  $w^2(x)$ , so that:

$$dn^{(j)}(x, t) = \frac{dn(x, t)}{j} \quad (4.10)$$

Assuming furthermore that the Rayleigh divergence length is large ( $\sigma_r \ll l_R$ ), one may disregard the  $x$ -dependence of the on-axis saturation parameter  $s_m$  and obtain a closed analytical expression for  $dn_s(x, t)$  and therefore for  $\sigma_s$ :

$$\sigma_s(t) = \frac{\sigma(t)}{2s_m} \ln(1 + 2s_m) \quad (4.11)$$

This expression may then be used to derive the bistability relation which connects the mean field sent into the cavity and the mean field inside the cavity (see for example [9]). An important consequence of this equation is that  $\sigma_s(t)$  and  $\sigma(t)$  have exactly the same time dependence. It follows that the evaluations of the number of atoms obtained from the linear and non linear phase shift agree as soon as the transverse structure of the mode has been properly accounted for.

It is however worth to stress that this property relies on the two simplifying assumptions  $w \ll \sigma_r$  and  $\sigma_r \ll l_R$  which have been used to derive equation (4.11), and does no longer hold in a more general situation.

## 5. Fluctuations of the number of atoms

Up to now, we have studied only the mean value of the field modification in the atomic medium. We now want to evaluate the fluctuations of this modification which are associated with fluctuations of the number of atoms coupled to the field. As shown by the previous discussions, the definition of such a number is not simple in the general case. This is why we will study the fluctuations of the number of atoms with the help of simplifying assumptions.

First, we will restrict our attention to the regime of a linear polarisability where the field modification is related to the quantity  $\sigma(t)$  given by equation (2.23). We are indeed interested mainly in fluctuations of the linear phase shift, which is usually much larger than the nonlinear one. We will then consider that the Rayleigh divergence length is much larger than the cloud size ( $\sigma_r \ll l_R$ ), so that the beam area  $S$  is independent of  $x$  and equation (2.23) may be rewritten in terms of an effective number  $n(t)$  of atoms in the probe beam at time  $t$ :

$$\sigma(t) = \frac{n(t)}{S} \quad (5.1)$$

with:

$$n(t) = \int dn(x, t) = \int f(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (5.2)$$

It would be possible to study the fluctuations of  $\sigma(t)$  in the general case, using the same techniques as presented below. However, it will be more instructive to discuss the fluctuations of  $n(t)$ , which is a dimensionless number and is expected to have a nearly Poissonian statistics. For completeness, note that in the limiting case studied in the present section ( $\sigma_r \ll l_R$ ),  $n(t)$  is simply the product of  $\sigma(t)$  by the beam section  $S$ .

We come now to the discussion of atomic number fluctuations. To this aim, we notice that the atomic density  $\rho(\mathbf{r}, t)$  may be considered as an average value taken over the random distribution of the atomic positions, precisely over the random values of the initial positions and velocities:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \langle P(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (5.3)$$

$$P(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(0) - \mathbf{v}_i(0)t - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2\right) \quad (5.4)$$

where  $i$  labels the atoms ( $i = 1 \dots \mathcal{N}$  with a total number of atoms  $\mathcal{N}$  in the cloud);  $\mathbf{r}_i(t)$  is the position of the  $i$ th atom at time  $t$ ;  $\mathbf{r}_i(0)$  and  $\mathbf{v}_i(0)$  are its initial position and velocity. Therefore,  $n(t)$  may be considered as the mean value of a random number  $N(t)$ :

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} f(\mathbf{r}_i(t)) \quad (5.5)$$

This random number has fluctuations which, as already discussed in the introduction, may reveal themselves as fluctuations of the linear phase shift and then of the cavity-detuning parameter.

In order to discuss the statistical properties of these numbers, we will consider that the atoms are statistically uncorrelated in the initial distribution. We will define covariances of random variables according to the general prescription:

$$\langle u, v \rangle = \langle uv \rangle - \langle u \rangle \langle v \rangle \quad (5.6)$$

$d\mathcal{N}_0$  is the random variable associated with the number of atoms in an elementary volume  $dr dv$  of the phase space at time  $t = 0$ . We consider it to be a Poisson random variable:

$$\langle d\mathcal{N}_0, d\mathcal{N}_0 \rangle = \langle d\mathcal{N}_0 \rangle = \pi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) dr dv \quad (5.7)$$

while different  $d\mathcal{N}_0$  and  $d\mathcal{N}'_0$  evaluated for non overlapping elementary volumes are uncorrelated random variables:

$$\langle d\mathcal{N}_0, d\mathcal{N}'_0 \rangle = 0 \quad (5.8)$$

Before coming to the discussion of the fluctuations of the effective atomic number in the detection beam, we want to recall briefly how these assumptions are commonly used to derive Poisson statistics. Usually, one studies a number of atoms integrated in a finite volume:

$$N_0 = \int d\mathcal{N}_0 f_v(\mathbf{r}) \quad (5.9)$$

where the function  $f_v$  is either 1 inside the detection volume or 0 otherwise; this function therefore obeys the property  $f_v^2 = f_v$ . By summing up the variances corresponding to the various elementary volumes, one deduces that the integrated number  $N_0$  has a Poissonian variance:

$$\langle N_0, N_0 \rangle = \int \langle d\mathcal{N}_0 \rangle f_v^2(\mathbf{r}) = \langle N_0 \rangle \quad (5.10)$$

The same conclusion is reached for the number of atoms integrated in a finite volume after a free fall during a time  $t$ :

$$N(t) = \int dN_0 f_v \left( \mathbf{r} + \mathbf{v}t + \frac{1}{2} \mathbf{g}t^2 \right) \quad (5.11)$$

$$\langle N(t), N(t) \rangle = \int \langle dN_0 \rangle f_v^2 \left( \mathbf{r} + \mathbf{v}t + \frac{1}{2} \mathbf{g}t^2 \right) = \langle N(t) \rangle \quad (5.12)$$

The case studied in the present paper does not lead to such a simple conclusion since the effective number is defined with a Gaussian weight function which does not obey the property  $f^2 = f$ . By summing up the variances corresponding to the various elementary volumes, one obtains the variance of this effective number to be:

$$\langle N(t), N(t) \rangle = \int f^2 \left( \mathbf{r} + \mathbf{v}t + \frac{1}{2} \mathbf{g}t^2 \right) \pi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) d\mathbf{r} d\mathbf{v} \quad (5.13)$$

By changing variables from  $\{\mathbf{r}(0), \mathbf{v}(0)\}$  to  $\{\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)\}$  and integrating over the velocity distribution, this variance can be rewritten as:

$$\langle N(t), N(t) \rangle = \int f^2(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (5.14)$$

while the mean value is:

$$\langle N(t) \rangle = \int f(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (5.15)$$

The mean value is obtained as the product of the expression (3.7) evaluated previously for  $\sigma(t)$  with the effective beam section ( $S = \pi w^2/2$ ):

$$\langle N(t) \rangle = \frac{\mathcal{N} \tau_w^2}{\tau_r^2 + \tau_w^2 + t^2} \exp \left[ -\frac{t^4}{\tau_g^2 (\tau_r^2 + \tau_w^2 + t^2)} \right] \quad (5.16)$$

The variance has the same expression evaluated for a modified beam size parameter ( $w^2$  replaced by  $(w^2/2)$ , i.e.  $\tau_w^2$  replaced by  $(\tau_w^2/2)$ ):

$$\langle N(t), N(t) \rangle = \frac{\mathcal{N} \tau_w^2}{2\tau_r^2 + \tau_w^2 + 2t^2} \exp \left[ -\frac{2t^4}{\tau_g^2 (2\tau_r^2 + \tau_w^2 + 2t^2)} \right] \quad (5.17)$$

The variance is therefore smaller than the mean value, which implies that the distribution of the random variable  $N(t)$  has always a sub-Poissonian character:

$$\langle N(t), N(t) \rangle < \langle N(t) \rangle \quad (5.18)$$

In the limiting case where the detection beam waist  $w$  is much smaller than the trap radius  $\sigma_r$ , the variance is simply half the mean value:

$$\langle N(t), N(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle N(t) \rangle \quad (5.19)$$

We now look for a dynamical characterization of temporal correlations rather than for a static statistical description. Precisely, we wish to evaluate the covariance function for the numbers of atoms  $N(t)$  and  $N(t')$  present in the detection beam at two different times. By summing up the variances corresponding to the various elementary volumes, one obtains this covariance function as:

$$\langle N(t), N(t') \rangle = \int f\left(\mathbf{r} + \mathbf{v}t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2\right) f\left(\mathbf{r} + \mathbf{v}t' + \frac{1}{2}\mathbf{g}t'^2\right) \pi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) d\mathbf{r} d\mathbf{v} \quad (5.20)$$

Since the positions at times  $t$  and  $t'$  are linear functions of the initial position and initial velocity, this expression appears as a six-dimensional Gaussian integral which may be readily evaluated. We will write the covariance function:

$$C_{NN}(T, \tau) = \langle N(t), N(t') \rangle \quad (5.21)$$

as a function of the mean time  $T$  and of the delay  $\tau$  between the two time parameters  $t$  and  $t'$ :

$$T = \frac{t + t'}{2} \quad \tau = t - t' \quad (5.22)$$

The time  $T$  will be associated with the global time variation of the atomic number during the free fall of the cloud while the delay  $\tau$  will rather correspond to the correlation between numbers evaluated at different times.

The explicit evaluation of the Gaussian integral (5.20) gives the following expression:

$$C_{NN}(T, \tau) = n(0) L(T, \tau) \exp[-M(T, \tau)] \quad (5.23)$$

where:

$$n(0) = \frac{\mathcal{N}\tau_w^2}{\tau_r^2 + \tau_w^2} \quad (5.24)$$

$$L(T, \tau) = \frac{\tau_w^2 (\tau_r^2 + \tau_w^2)}{2\tau_w^2 T^2 + \left(\tau_r^2 + \frac{\tau_w^2}{2}\right) (\tau^2 + 2\tau_w^2)} \quad (5.25)$$

$$M(T, \tau) = \frac{\left(T^2 + \frac{\tau^2}{4}\right)^2 (\tau^2 + 2\tau_w^2) + 4\left(\tau_r^2 + \frac{\tau_w^2}{2}\right) T^2 \tau^2}{\tau_g^2 \left[2\tau_w^2 T^2 + \left(\tau_r^2 + \frac{\tau_w^2}{2}\right) (\tau^2 + 2\tau_w^2)\right]} \quad (5.26)$$

The expression of the variance of the number  $N(T)$  evaluated at a given time  $T$  is recovered at  $\tau = 0$ :

$$C_{NN}(T, 0) = \langle N(T), N(T) \rangle \quad (5.27)$$

Instead evaluating the exact expressions (5.23-5.26), we will rather concentrate on the limiting case where the detection waist is much smaller than the trap radius. This assumption implies in particular that the correlation time  $\tau_w$  is much smaller than the global fall time  $\tau_r$ . This will allow us to treat the number of atoms as a quasistationary random variable. Considering only not too long delays  $\tau \ll \tau_r$  and not too short fall times  $T \gg \tau_w$ , we may rewrite the covariance function in terms of two scaled time parameters  $T/\tau_r$  and  $\tau/\tau_w$ :

$$C_{NN}(T, \tau) = n(0) L(T, \tau) \exp[-\zeta(a_T - b_T L(T, \tau))] \quad (5.28)$$

with:

$$n(0) = \frac{N\tau_w^2}{\tau_r^2} \quad (5.29)$$

$$L(T, \tau) = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)^2 + \alpha_T^2} \quad (5.30)$$

$$\alpha_T^2 = 2 \left[ 1 + \left(\frac{T}{\tau_r}\right)^2 \right] \quad (5.31)$$

$$a_T = \left(\frac{T}{\tau_r}\right)^2 \left[ 4 + \left(\frac{T}{\tau_r}\right)^2 \right] \quad (5.32)$$

$$b_T = 2 \left(\frac{T}{\tau_r}\right)^2 \left[ 2 + \left(\frac{T}{\tau_r}\right)^2 \right]^2 \quad (5.33)$$

$$\zeta = \frac{\tau_r^2}{\tau_g^2} \quad (5.34)$$

In the limiting case  $\zeta \ll 1$  where the time scale characteristic of gravity is long, the covariance function is essentially a Lorentzian function. More generally when including the effect of gravity, it may be expanded in terms of powers of this Lorentzian function:

$$C_{NN}(T, \tau) = n(0) e^{-\zeta a_T} \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta b_T)^k \frac{L^{1+k}}{k!} \quad (5.35)$$

Since the correlation time, of the order of  $\tau_w$ , is much smaller than the characteristic time of variation of the mean values, of the order of  $\tau_r$ , the number of

detected atoms may be considered as a quasistationary random variable and it is therefore possible to characterize its fluctuations by a noise spectrum  $S_{NN}(T, \omega)$ :

$$S_{NN}(T, \omega) = \int d\tau e^{i\omega\tau} C_{NN}(T, \tau) \quad (5.36)$$

This spectrum is obtained through a Fourier transformation with respect to the delay  $\tau$  and it slowly depends upon the time of fall  $T$ . It has the same definition as the ambiguity function of radar theory [10] which is the analog for time-frequency distributions of the Wigner distribution for position-momentum distributions [11]. Because of the quasistationary character of the random variable  $N(t)$ , it will remain positive for all values of the parameters, as the noise spectrum for a stationary random variable. The spectrum may be written as the product of the variance at time  $T$  by a normalized spectrum:

$$S_{NN}(T, \omega) = C_{NN}(T, 0) \bar{S}(T, \omega) = \frac{1}{2}n(T) \bar{S}_{NN}(T, \omega) \quad (5.37)$$

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \bar{S}_{NN}(T, \omega) = 1 \quad (5.38)$$

In the limiting case  $\zeta \ll 1$ , the effect of gravity upon the correlation function  $C_{NN}(T, \tau)$  may be disregarded, so that the latter is a Lorentzian function of  $\tau$  and the noise spectrum has an exponential shape:

$$S_{NN}(T, \omega) = n(0) \frac{\pi\tau_w}{\alpha_T} e^{-\alpha_T\omega\tau_w} \quad (5.39)$$

The normalized spectrum:

$$\bar{S}_{NN}(T, \omega) = \pi\alpha_T\tau_w e^{-\alpha_T\omega\tau_w} \quad (5.40)$$

has a linewidth  $(\alpha_T\tau_w)^{-1}$  and a peak value  $(\pi\alpha_T\tau_w)$  mainly determined by the time of flight  $\tau_w$  through the probe beam.

In the general case of an arbitrary  $\zeta$ , the noise spectrum may be deduced from expression (5.35) of the correlation function (using formulas 8.432.5 and 8.468 in ref. [12]) as:

$$S_{NN}(T, \omega) = n(0) \frac{\pi\tau_w}{\alpha_T} e^{-\alpha_T\omega\tau_w} e^{-\zeta\alpha_T} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta b_T}{4}\right)^k \frac{p_k(\alpha_T\omega\tau_w)}{(k!)^2} \quad (5.41)$$

where  $p_k$  is a polynomial function of frequency:

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{(2x)^j (2k-j)!}{j! (k-j)!} \quad (5.42)$$

This leads to a normalized spectrum:

$$\bar{S}_{NN}(T, \omega) = \pi \alpha_T \tau_w e^{-\alpha_T \omega \tau_w} e^{-\frac{\zeta b_T}{\alpha_T^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta b_T}{4} \right)^k \frac{p_k(\alpha_T \omega \tau_w)}{(k!)^2} \quad (5.43)$$

with a peak value at zero frequency:

$$\bar{S}_{NN}(T, 0) = \pi \alpha_T \tau_w e^{-\frac{\zeta b_T}{\alpha_T^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta b_T}{4} \right)^k \frac{(2k)!}{(k!)^3} \quad (5.44)$$

The expressions (5.41-5.44) provide a quantitative evaluation of the fluctuations of the number of atoms coupled to the probe beam in the general case of a motion under gravity. They may be used for assessing the effect of these number fluctuations in any high precision measurements such as spectroscopic, nonlinear or quantum optics experiments where the falling cloud acts as the atomic medium. For only qualitative assessments, we can draw the following two conclusions: first, the instantaneous variance of the effective atomic number has a subPoissonian character; it is precisely half the Poissonian variance at the limit of a small probe beam size. Second, the correlation time for the fluctuations of the effective atomic number is mainly determined by the time of flight  $\tau_w$  through the probe beam.

## 6. Fluctuations of the cavity detuning

We now focus our attention on experiments where the probe field goes through an optical cavity containing the cloud of cold atoms. As already discussed in the introduction, atomic number fluctuations emulate fluctuations of the cavity detuning. The present section is devoted to a precise evaluation of this effect. For simplicity, we consider only the regime of a linear polarisability in the limit where the Rayleigh divergence length is much larger than the cloud size (same simplifying assumptions as in section 5). We also consider the dispersive regime where the atom is excited far from resonance ( $\delta^2 \gg 1$ ).

A key parameter in the experiments with atoms inside a cavity is the so-called cooperativity parameter (see for example [13, 14] and references therein):

$$C = \frac{3\lambda^2}{4\pi S} \frac{n}{2\kappa\tau_c} \quad (6.1)$$

where  $\kappa$  is the decay rate of the intracavity field and  $\tau_c$  the cavity round-trip time ( $2\kappa\tau_c$  is just the intensity transmission of the coupling mirror), while  $S$  and  $n$  are respectively the beam section and the effective atomic number studied in the

present paper. The effect of the atomic medium on the field may be written as a variation  $\Phi$  of the cavity detuning (see for example [14]):

$$\Phi = \frac{2\kappa C}{\delta} = \frac{3\lambda^2 n}{4\pi S \delta\tau_c} \quad (6.2)$$

The fluctuations of the atomic number  $N$  studied in the previous section are therefore equivalent to fluctuations of the cavity detuning  $\Phi$  characterized by a noise spectrum:

$$S_{\Phi\Phi}(T, \omega) = \left( \frac{3\lambda^2}{4\pi S} \right)^2 \frac{S_{NN}(T, \omega)}{(\delta\tau_c)^2} \quad (6.3)$$

that is (using equations 5.37 and 6.1):

$$S_{\Phi\Phi}(T, \omega) = \kappa \frac{C(T)}{\delta^2} \frac{3\lambda^2}{4\pi S} \frac{\bar{S}_{NN}(T, \omega)}{\tau_c} \quad (6.4)$$

We have introduced here a time-dependent cooperativity parameter  $C(T)$  proportional to the mean effective number  $n(T)$  at time  $T$ . Since the cavity detuning  $\Phi$  is a frequency, its noise spectrum  $S_{\Phi\Phi}$  also has the dimension of a frequency. The first factor appearing in its expression (6.4) is the frequency  $\kappa$ , which can be regarded as measuring the noise spectrum of detuning fluctuations associated with the decay of the intracavity field through the coupling mirror. The other factors which appear in equation (6.4) have been written in dimensionless terms.

As long as  $S_{\Phi\Phi}$  remains smaller than  $\kappa$ , the effect of the detuning fluctuations on cavity dynamics remains in a linear regime. In the opposite case, it would be necessary to give a more elaborate treatment of these fluctuations accounting for multiplicative noise processes. It is worth stressing that detuning fluctuations may not be considered as a white noise, since the spectrum has a width essentially given by the inverse of the time of flight through the detection beam.

In the case where the measurements are performed at frequencies much higher than this spectral width, the detuning fluctuations become negligible. This is in particular the case in the experiment on squeezing with cold atoms [3, 4] where the squeezing spectrum is monitored at frequencies in the MHz range. It follows that the effective atomic number may be considered as a fluctuationless classical variable, even when it varies as a function of time while the cloud is exploding and falling down. The fluctuations of the effective number might be detectable at much lower frequencies in the kHz range. In order to detect these fluctuations, it would thus be necessary to get rid of the large excess noise present in this frequency range.

In conclusion, we have investigated the problem of evaluating the number of atoms effectively interacting with a probe beam passing through a cloud of

cold atoms released from a magneto-optical trap, accounting for the transverse Gaussian profile of the probe beam, in the general case of a motion under gravity.

We have shown that this problem requires a detailed treatment which depends on the quantity of interest in the specific measurement. We have given explicit evaluations of the effective atomic number for the two cases where the linear or nonlinear phaseshifts are measured. These two cases correspond to a same time variation of the effective number when the two simplifying assumptions of a small beam waist ( $w \ll \sigma_r$ ) and of a long Rayleigh divergence length ( $\sigma_r \ll l_R$ ) are fulfilled. The more general situation may also be dealt with by using the expressions obtained in sections 3 and 4.

We have also calculated the correlation functions characterizing the fluctuations of the effective atomic number, focussing attention upon fluctuations of the linear phaseshift since they may be quite large and consequently affect high precision measurements such as spectroscopic, nonlinear or quantum optics experiments. We have found that the instantaneous variance of the effective atomic number has a subPoissonian character, due to the Gaussian profile of the probe beam. In particular, the variance is half the Poissonian variance at the limit of a small beam waist ( $w \ll \sigma_r$ ). At the same limit, the spectral width characteristic of these fluctuations is essentially the inverse of the time of flight through the probe beam for an atom flying at the mean thermal velocity. The effect of these number fluctuations on the field fluctuations is thus confined to a low frequency range, especially for cold atoms which correspond to relatively long time of flight. For atoms at room temperature, the spectral width would be larger. In both cases, the techniques used in the present paper allow to obtain quantitative estimates of the influence of atomic number fluctuations on field fluctuations, and then to the sensitivity of optical measurements.

#### Acknowledgements

Thanks are due to Jean Dalibard and Claude Fabre for discussions.

## References

- [1] Arimondo E., Phillips W. and Strumia F. eds, *Laser Manipulation of Atoms* (North Holland, 1992)
- [2] Drewsen M., Laurent Ph., Nadir A., Santarelli G., Clairon A., Castin Y., Grison D. and Salomon C., *Applied Physics B59* 283 (1994)
- [3] Lambrecht A., Courty J.M., Reynaud S. and Giacobino E., *Applied Physics B60* 129 (1995)
- [4] Lambrecht A. et al, *Squeezing with cold atoms*, preprint (1995)

- 
- [5] Schleich W. and Scully M.O., *Physical Review* **A37** 1261 (1988)
  - [6] Weiss D.S. Riis E., Shevy Y., Ungar P.J. and Chu S., *Journal of the Optical Society of America* **B6** 2072 (1989)
  - [7] Ketterle W., Davis K.B., Joffe M.A., Martin A. and Pritchard D.E., *Physical Review Letters* **70** 2253 (1993)
  - [8] Heidmann A. and Reynaud S., *Journal de Physique* **46** 1937 (1985)
  - [9] Drummond P.D., *IEEE Journal of Quantum Electronics* **QE17** 301 (1981)
  - [10] Papoulis A., *Journal of the Optical Society of America* **64** 779 (1974)
  - [11] Haken H., *Review of Modern Physics* **47** 67 (1975)
  - [12] Gradshteyn I.S. and Ryzhik I.M., *Table of integrals, series and products* (Academic Press, 1980)
  - [13] Lugiato L.A., in *Progress in Optics* **XXI** 71 (1984)
  - [14] Hilico L., Fabre C., Giacobino E. and Reynaud S., *Physical Review* **A46** 4397 (1992)

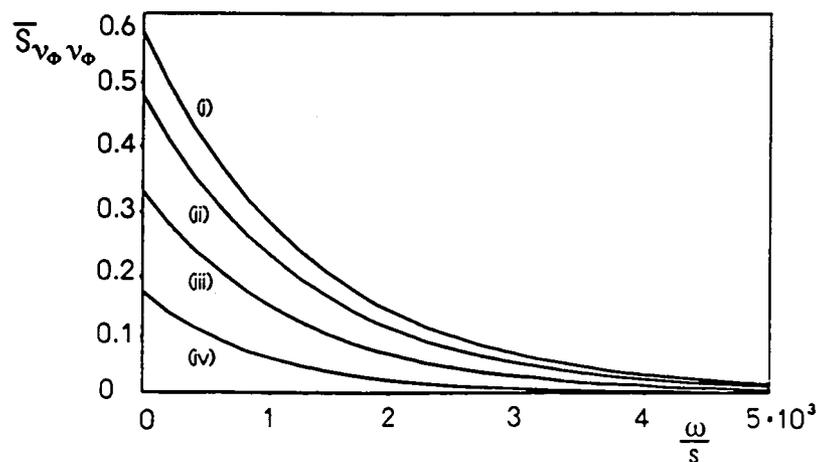
### 6.3.3 Conclusion

Le traitement de la variation du nombre d'atomes au cours du temps présenté dans la reproduction de l'article précédent nous a amené à deux conclusions principales. D'abord, le nombre moyen d'atomes dans le faisceau sonde, qui varie pour notre système à cause de l'explosion et de la chute du nuage atomique, peut être considéré comme une variable quasistationnaire aux échelles de temps qui nous intéressent pour une mesure du bruit quantique, bien qu'elle soit responsable du balayage de la résonance de la cavité. Bien sur, la variation du nombre d'atomes conduit aussi à des fluctuations qui se produisent à des échelles de temps beaucoup plus courtes et qui se traduisent par des fluctuations du déphasage linéaire de la cavité.

Comme le nombre d'atomes est une variable quasistationnaire, il est possible de calculer le spectre de bruit associé à ses fluctuations. Pour évaluer l'influence de ces fluctuations, nous devons distinguer deux régimes différents. Si le spectre de bruit caractérisant les fluctuations du déphasage est comparable à la largeur de la cavité, ces fluctuations rentrent exponentiellement dans les expressions du bruit quantique. Ceci conduit à une génération d'excès de bruit aux fréquences plus grandes que les fréquences caractéristiques de ces fluctuations par une génération multiplicative de bruit ("multiplicative noise processing") [157]. Ce cas nécessiterait un traitement plus élaboré pour évaluer l'effet des fluctuations du nombre d'atomes sur la réduction du bruit quantique.

Au contraire, dans le cas où le spectre de bruit reste plus petit que la largeur de la cavité, l'influence de ces fluctuations sur le bruit quantique reste dans un régime linéaire et se restreint alors aux fréquences caractéristiques de leur spectre.

Sur la figure 34, nous avons tracé le spectre  $\bar{S}_{\nu_\phi \nu_\phi}(T, \omega)$  des fluctuations du dépha-



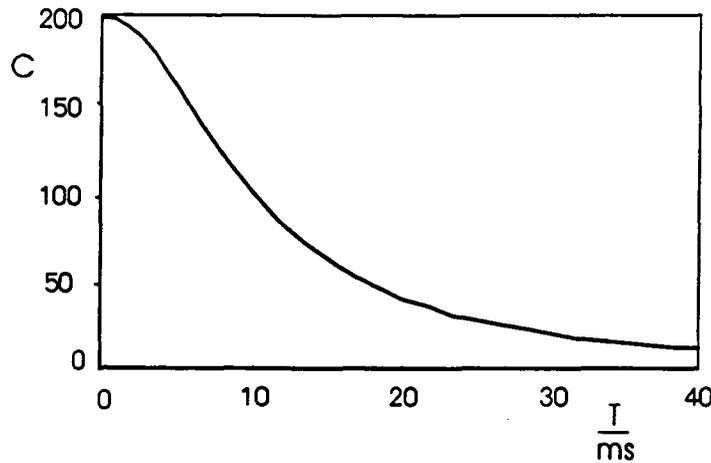
**Fig. 34:** Spectres normalisés des fluctuations du déphasage de la cavité dues aux fluctuations du nombre d'atomes calculées à des instants  $T$  différents.  $T$  prend respectivement les valeurs  $T = 0, 5, 10, 20$ ms (traces (i)-(iv)).

sage de la cavité en unités de la largeur  $\kappa$  de la cavité pour des instants  $T$  différents variant de 0 à 20ms. Nous voyons que la valeur maximale des spectres (à  $\omega = 0$ ) diminue continûment de 0.6 pour  $T = 0$ ms à 0.2 pour  $T = 20$ ms.

Pour simplifier, nous avons ici négligé l'effet de la gravité, car pour nos paramètres expérimentaux elle ne joue un rôle qu'après 30 – 40ms. La température du piège a été choisie de  $T_{\text{piège}} = 4$ mK, ce qui donne un temps caractéristique de la variation lente du nombre d'atomes de  $\tau_r \simeq 10$ ms et un temps caractéristique des fluctuations de  $\tau_w \simeq 0.3$ ms. On a supposé que le paramètre de coopérativité variait conformément à la prédiction théorique comme une lorentzienne

$$C(T) = C(0) \frac{\tau_r^2}{\tau_r^2 + T^2} \quad (6.59)$$

en négligeant encore l'effet de la gravité, avec une valeur à  $T = 0$  de  $C(0) = 200$ . La figure 35 indique la variation de la coopérativité au cours du temps.



**Fig. 35:** Variation du paramètre de coopérativité en fonction du temps  $T$ . La courbe est une lorentzienne car l'effet de la gravité a été négligé. La température du piège est supposée de 4mK, le rayon du nuage de 5mm.

La valeur maximale  $\bar{S}_{\nu_\phi \nu_\phi}(0,0) = 0.6$  des fluctuations du déphasage n'est donc pas négligeable devant la largeur de la cavité, mais elle reste quand-même toujours plus petite. Par conséquent, l'influence de ces fluctuations ne se fait sentir que sur la largeur de leur spectre qui est de l'ordre de quelque kHz. A la fréquence d'observation du bruit quantique, ces fluctuations ne jouent plus aucun rôle. En revanche, il devrait être possible d'observer les fluctuations du nombre d'atomes aux basses fréquences si on pouvait se débarrasser de l'excès de bruit du laser à ces fréquences.

Le fait que les fluctuations du nombre d'atomes ne viennent pas gêner l'observation de la réduction du bruit quantique était loin d'être évident a priori, d'autant plus que le nombre d'atomes moyen varie au cours du temps d'une quantité assez grande pour que ce soit le déphasage dû aux atomes qui balaie la résonance de la cavité.

Dans des situations où le temps de vol des atomes à travers le faisceau sonde devient beaucoup plus court, comme c'est le cas par exemple pour les expériences utilisant des jets atomiques, la question de l'excès de bruit dû aux fluctuations atomiques doit être reconsidérée. En effet, la largeur du spectre des fluctuations atomiques est déterminée par le temps de vol des atomes à travers le faisceau sonde, et elle devient plus importante pour des atomes avec des vitesses thermiques ordinaires.

Ces fluctuations associées au temps de transit des atomes dans le faisceau sonde pourraient donc constituer une explication possible du fait que dans des expériences de squeezing utilisant des jets atomiques, la réduction du bruit quantique a toujours été plus petite que les prédictions théoriques. Néanmoins, il serait nécessaire de calculer précisément les spectres des fluctuations atomiques dans le cas d'un jet atomique, pour pouvoir donner des réponses plus précises à ce problème.

## 6.4 Traitement de la structure transverse

### 6.4.1 Introduction au problème et motivations

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes dans une première approximation contentés de décrire l'effet de notre système bistable sur le bruit quantique d'un faisceau laser par une théorie qui traite le faisceau sonde comme une onde plane. Nous avons vu que diverses grandeurs fictives interviennent dans ces calculs, d'abord la surface  $S$  du faisceau, puis la projection du champ intracavité sur le mode fondamental de la cavité  $A(t)$ , ensuite le nombre d'atomes  $N$  interagissant avec le faisceau sonde. Ces variables ne sont pas bien définies pour une onde plane, mais leur introduction est néanmoins indispensable pour lier les paramètres théoriques aux paramètres expérimentaux. Dans le but d'éliminer cette incohérence, nous allons maintenant améliorer notre traitement du système bistable et traiter le faisceau sonde comme une onde gaussienne. L'étude détaillée de la variation du nombre d'atomes dans le faisceau sonde, expliquée dans le paragraphe précédent, nous a déjà amenés à introduire une définition plus naturelle et physique pour le nombre d'atomes, qui est le nombre d'atomes par unité de surface du faisceau sonde  $n$

$$n = \frac{N}{S} \quad (6.60)$$

Nous allons voir maintenant, que dans un traitement de bistabilité et de bruit quantique qui tient compte de la structure transverse du faisceau, le paramètre important n'est plus le champ  $A(t)$  mais le champ divisé par la racine de la surface du faisceau

$$\frac{A(t)}{\sqrt{S}} \quad (6.61)$$

avec

$$S = \frac{\pi w^2}{2} \quad (6.62)$$

$w$  note le rayon du faisceau à l'endroit considéré du nuage atomique. Nous avons supprimé ici la dépendance en  $x$  de la surface, ce qui est tout à fait justifié si la longueur de Rayleigh est beaucoup plus grande que la longueur d'interaction. Ceci est le cas dans notre expérience. Le champ est donc maintenant décrit par un *flux* de photons, c'est à dire un nombre de photons par unité de temps et de surface.

Avec ces nouveaux paramètres, nous allons calculer l'équation de la bistabilité et donner des expressions analytiques pour la fonction de corrélation retardée qui détermine les fluctuations quantiques et donc la réduction du bruit dans le cas d'une interaction du milieu atomique avec une onde gaussienne. Nous allons comparer ces résultats avec les prédictions du modèle "onde plane" et déterminer les régions de recouvrement des deux modèles. Cette étude montrera explicitement que le modèle "onde plane" ne donne pas des prédictions fiables dans des conditions favorables pour une réduction du bruit et que le recouvrement des zones de validité des deux modèles ne dépend pas du rayon du faisceau.

Dans la suite, nous allons aussi comparer nos résultats en ce qui concerne la réduction du bruit ainsi que la validité du modèle "onde plane" aux résultats trouvés par d'autres groupes. La première approche de la bistabilité optique qui tient compte de la structure transverse du faisceau sonde date de 1981 [158] (voir aussi [159–161]). Il s'agit d'un calcul des conditions de bistabilité pour l'intensité moyenne intracavité mais pas des fonctions de corrélations. A notre connaissance, il n'existe que deux études qui traitent l'effet de la structure transverse du faisceau laser sur le bruit quantique en présence de bistabilité optique [162–164]. Toutes les deux sont basées sur les équations différentielles stochastiques. Dans le but d'intégrer la surface du faisceau sonde dans le traitement, les auteurs introduisent un "volume effectif" des modes, mais gardent les mêmes définitions du nombre d'atomes et du champ intracavité. Les références [162, 163] ne considèrent que la limite d'une cavité de très haute finesse, dans laquelle l'amortissement de la polarisation atomique est beaucoup plus rapide que l'amortissement du champ intracavité. Les variables atomiques sont donc éliminées adiabatiquement. Dans ces conditions, les auteurs trouvent un accord des modèles "onde plane" et "onde gaussienne" dans les limites (a) faible saturation  $X \ll \delta^2$  et (b) linéaire  $X \ll 1$ .

Dans la deuxième étude [164] se trouve un traitement complet sans élimination adiabatique ainsi que des comparaisons avec des résultats expérimentaux obtenus par [104]. Les auteurs ont en particulier essayé d'établir une relation entre la dégradation de la réduction du bruit et le rapport entre les taux d'amortissement de la polarisation atomique et de la cavité.

A l'aide de notre traitement de la structure transverse par la théorie de la réponse linéaire qui est présenté dans l'article suivant nous allons montrer que le paramètre crucial pour déterminer la dégradation de la réduction du bruit est le paramètre de saturation. En particulier, nous verrons qu'en général, la limite faible de saturation  $X \ll \delta^2$  n'est pas suffisante pour retrouver les résultats du modèle "onde plane" en ce qui concerne les fonctions de corrélations, alors que les courbes de bistabilité sont très peu différentes. Les conditions pour lesquelles les prédictions de la réduction du bruit

faites pour un faisceau plan correspondent à celles faites pour un faisceau gaussien sont plus sévères.

Nous allons ensuite tenir compte du fait que notre cavité est une cavité linéaire et non pas une cavité en anneau comme supposé auparavant. La variation longitudinale de l'intensité intracavité peut être traitée par les mêmes moyens que la variation transversale et nous allons voir que dans le cas de faible saturation, les corrections correspondantes restent peu importantes.

#### **6.4.2 Reproduction de l'article "Effect of transverse mode structure on squeezing with two-level atoms" (soumis à Phys. Rev. A)**

# Effect of transverse structure on squeezing with two-level atoms

Astrid Lambrecht, Jean-Michel Courty and Serge Reynaud  
Laboratoire Kastler Brossel, UPMC, ENS, CNRS  
4 place Jussieu F75252 Paris, France

## Abstract

We evaluate the squeezing of a probe beam with a transverse Gaussian structure interacting with an ensemble of two-level atoms in a cavity. We use the linear input-output formalism where the effect of atoms is described by susceptibility and noise functions, and show that the transverse structure is accounted for by averaging these atomic functions over the intensity profile. The results of the plane-wave and Gaussian-wave theories are compared. We find that, when a large squeezing is predicted, the prediction of the plane-wave model is not reliable outside the Kerr domain. We give an estimate of the squeezing degradation due to the Gaussian transverse structure.

PACS: 42.50Lc.

## 1. Introduction

When an optical cavity containing a nonlinear medium approaches a bistability turning point [1], the fluctuations of the incoming beam are squeezed [2]. Nearly perfect squeezing is expected when the nonlinear medium is a lossless Kerr medium [3, 4]. Squeezing was experimentally demonstrated at the output of a bistable cavity containing an atomic beam [5, 6] or a cloud of cold atoms released from a magneto-optical trap [7]. A lot of theoretical work has been devoted to the case where the nonlinear medium consists in two-level atoms [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

Most theoretical treatments have simplified the description of the field-matter interaction by modeling the laser beam as a plane-wave. It is however clear that the description of the bistable behaviour of the cavity has to be modified to account for the transverse Gaussian profile of the laser beam [17, 18, 19, 20].

This is also true for the predictions concerning field fluctuations at the output of the cavity, as shown in references [21, 22, 23]. These papers contain a derivation of squeezing spectra in optical bistability accounting for the transverse Gaussian structure of the laser beam. For particular sets of parameters, the spectra obtained in Gaussian-wave calculations are compared by the authors with the predictions of the plane-wave model. In the good-cavity limit where the atomic damping occurs on a much shorter time than the intracavity field damping and where the atomic variables can be adiabatically eliminated, Xiao et al [21] conclude that the plane-wave calculations may be trusted in either the weak-field or dispersive limits. In a complete treatment without adiabatic elimination [23], Hope et al relate squeezing degradation due to transverse structure to the ratio of atomic and cavity damping times.

In the present paper, we quantitatively delineate the regions in the parameter space where the predictions of the plane-wave and Gaussian-wave calculations coincide, and therefore estimate the reliability of plane-wave model. We obtain criteria for reliability of plane-wave model which are quite different from those of references [21, 22, 23].

We will use the linear input-output formalism generalized to incorporate the treatment of atomic fluctuations [16]. This formalism is based upon a linearisation of the fluctuations around the working point of the bistable cavity, as the quantum stochastic methods [24], and it provides the same spectra as the latter when the same system is studied with the same simplifying assumptions [25]. In contrast with the quantum stochastic methods, it provides an intuitive understanding of the noise processing occurring in the bistable cavity. The squeezing process through the parametric transformation of vacuum fluctuations going into the intracavity mode is described in terms of atomic susceptibility functions, while the squeezing degradation through the addition of fluctuations by the atoms is characterized by atomic noise functions.

We will show in the following that the effect of Gaussian profile upon noise processing appears quite naturally as a spatial averaging of these susceptibility and noise functions. This will allow us to obtain simple techniques for describing the influence of transverse structure. It is worth stressing that the property of averaging of the susceptibility and noise functions is not postulated a priori, but is rather a consequence of the simple assumptions made in the treatment of Gaussian profile: we assume that the higher-order transverse modes are either far from resonance with the cavity, or of such a high order that they are not efficiently coupled to the fundamental mode. It is thus possible to project any field radiated by the atoms upon this mode, and to obtain the averaging property as a consequence of this projection.

Using this technique, we will first recover the well-known result [17, 18, 19, 20]

that the mean fields evaluated with the plane-wave and Gaussian-wave calculations coincide in the low-saturation limit where the population of the atomic excited state remains small. This implies that the bistability curves relating the input and intracavity intensities also coincide provided that these intensities are properly defined. We will then evaluate the atomic susceptibility and noise functions, and deduce that the conditions for coincidence of plane-wave and Gaussian-wave calculations are much more restrictive in this case: the limit of a small population in the excited state is not sufficient for ensuring the coincidence for atomic noise functions. In particular, we will conclude that the noise functions evaluated in the plane-wave model are not reliable when large squeezing is predicted with parameters lying outside the Kerr domain. We will finally give a quantitative estimate for the degradation of squeezing due to transverse structure.

## 2. Model and assumptions

We consider a single ended ring cavity containing a nonlinear medium. A probe beam is entering the cavity through the coupling mirror, interacting with the medium and leaving the cavity through the same mirror. To study the influence of this device on the quantum fluctuations of the probe beam, we use a semiclassical input-output formalism, in which the field fluctuations are considered as classical stochastic variables, which are driven by the quantum fluctuations of the incoming fields at the laser frequency  $\omega_L$ . The linear input-output relations give the quantum fluctuations of the output field as a function of those of the input field, in cases when they are small compared to the mean field-values, an assumption which is particularly well adapted for high photon numbers, i.e. laser beams in a resonator. The method is described in detail in [16].

The intracavity field is defined as Heisenberg operator in the frame rotating with respect to the laser frequency  $\omega_L$ :

$$e^{-i\omega_L t} E(\mathbf{r}, t) + e^{i\omega_L t} E(\mathbf{r}, t)^\dagger \quad (2.1)$$

In order to account for the spatial beam structure, the components  $E(\mathbf{r}, t)$  and  $E(\mathbf{r}, t)^\dagger$  are written as products of a Gaussian mode function by a time-dependent mode amplitude ( $\mathbf{r}$  stands for the three-dimensional position  $(x, y, z)$ ):

$$E(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\epsilon_0 c}} A(t) u(\mathbf{r}) \quad (2.2)$$

$$E(\mathbf{r}, t)^\dagger = \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\epsilon_0 c}} A(t)^\dagger u(\mathbf{r})^* \quad (2.3)$$

This definition is such that  $\langle A(t)^\dagger A(t) \rangle$  is the number of photons going through a beam section in the unit time.

The normalized Gaussian mode functions are written for a propagation along the  $x$  direction:

$$u(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{f(\mathbf{r})}{S(x)}} \exp[-i\varphi(\mathbf{r})] \quad (2.4)$$

$f(\mathbf{r})$  is the Gaussian intensity normalized to unity on the beam axis,  $S$  the effective beam section and  $\varphi(\mathbf{r})$  the phase:

$$f(\mathbf{r}) = \exp\left[\frac{-2(y^2 + z^2)}{w^2(x)}\right] \quad (2.5)$$

$$S(x) = \frac{\pi w^2(x)}{2} \quad (2.6)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{2\pi x}{\lambda} + \arctg\left(\frac{x}{l_R}\right) - \frac{\pi(y^2 + z^2)x}{\lambda(x^2 + l_R^2)} \quad (2.7)$$

$w(x)$  denotes the position-dependent beam size,  $w_0$  the beam waist,  $l_R$  the Rayleigh divergence length and  $\lambda$  the laser wavelength:

$$w^2(x) = w_0^2 \left(1 + \frac{x^2}{l_R^2}\right) \quad (2.8)$$

$$l_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (2.9)$$

Since we suppose the cavity to be perfectly mode matched to the laser beam, the same transverse structure holds for the input field and for the intracavity field before its interaction with the atoms. This structure is modified for the output field however, through the non linear interaction with the atoms on one hand, and through spontaneous emission of light in all possible directions by the atoms on the other hand. Both effects couple the fundamental Gaussian mode to all the other cavity modes. We will suppose here that the field radiated by the atoms into the other modes has an effect on intracavity fields much smaller than the field radiated into the fundamental Gaussian mode. This may be due either to the fact that the fundamental Gaussian mode is close to a cavity resonance while the other modes at the same frequency are far from any cavity resonance, or that they have such a high order that their coupling with the fundamental mode is negligible. We will also consider that the detection setup is perfectly matched to the Gaussian mode.

As a consequence, we can write the input and output fields  $E^{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$  and  $E^{\text{out}}(\mathbf{r}, t)$  in the same manner as the intracavity field  $E(\mathbf{r}, t)$ :

$$E^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\varepsilon_0 c}} A^{\text{in}}(t) u(\mathbf{r}) \quad (2.10)$$

$$E^{\text{out}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\varepsilon_0 c}} A^{\text{out}}(t) u(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

Clearly the reflection-transmission equations for the fields on the coupling mirror will be the same for the field amplitudes as for the plane-wave fields in [16]. In contrast, the effect of the atoms on these field amplitudes will be modified, due to the non-linearity of the interaction and to the Gaussian variation of laser intensity. In order to evaluate the modification of the mode amplitudes due to the atomic medium, we will disregard the fields radiated by the atoms into the higher-order modes and obtain these modifications by projecting the radiated field onto the fundamental mode. This will be the key simplifying assumption in the forthcoming calculations concerning the mean fields as well as the field fluctuations.

We will also use two simplifying hypothesis. First, we will consider that the transverse size  $w$  of the probe beam is much smaller than the size of the atomic medium, so that the dependence of the atomic density versus the transverse variables  $y$  and  $z$  may be disregarded. This density  $\rho(\mathbf{r})$  will therefore be replaced by the on-axis atomic density  $\rho_{\mathbf{m}}$ :

$$\rho_{\mathbf{m}}(x) = \rho(x, y = 0, z = 0) \quad (2.12)$$

Note that the longitudinal dependence of the atomic density will have to be accounted for, since we consider that the length of the interaction zone is limited by the size of the atomic medium. Second, we will assume that the Rayleigh divergence length  $l_R$  is much larger than this size, so that the  $x$ -dependence of the laser beam size  $w$  can be ignored. However, we will not suppose that the atomic medium is centered on the cavity waist.

### 3. Description of mean fields in a Gaussian-wave theory

The atomic medium is considered to be a homogeneously broadened system of two-level atoms with a resonance frequency  $\omega_0$ , which is placed inside an optical cavity and driven by a coherent mean field of frequency  $\omega_L$  close to a cavity mode  $\omega_C$ . Atom-laser detuning  $\delta$  and cavity-laser detuning  $\phi$  are respectively normalised by the atomic dipole decay rate  $\gamma$  and the cavity field decay rate  $\kappa$ :

$$\delta = \frac{\omega_0 - \omega_L}{\gamma} \quad (3.1)$$

$$\phi = \frac{\omega_C - \omega_L}{\kappa} \quad (3.2)$$

It follows from the discussions of the previous section that the evolution of the intracavity Gaussian mode amplitude during one cavity round trip time is described by the same differential equation as in the plane-wave model:

$$\tau_C \partial_t A(t) = -\kappa \tau_C (1 + i\phi) A(t) + \sqrt{2\kappa\tau_C} A^{\text{in}}(t) + dA(t) \quad (3.3)$$

However, the modification  $dA$  of the intracavity Gaussian mode amplitude due to one passage through the atomic medium has not the same expression as in the plane-wave model, as a consequence of the nonlinearity of atoms-field interaction. In the present section, we evaluate its mean value and then deduce the bistability curve.

The effect of an optically thin atomic layer of length  $dx$  may be described by a local modification  $dE(\mathbf{r})$  of the field:

$$E(\mathbf{r}) \rightarrow E(\mathbf{r}) + dE(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

with [26]:

$$dE(\mathbf{r}) = -\frac{3\lambda^2}{4\pi} \rho(\mathbf{r}) \alpha(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}) dx \quad (3.5)$$

$\alpha(\mathbf{r})$  is the atomic polarizability derived from the solution of the optical Bloch equations [16] and measured as a dimensionless number:

$$\alpha(\mathbf{r}) = \frac{\alpha_l}{1 + 2s(\mathbf{r})} \quad (3.6)$$

$\alpha_l$  is the dimensionless linear polarizability of the atomic dipole:

$$\alpha_l = \frac{1}{1 + i\delta} \quad (3.7)$$

$s(\mathbf{r})$  is the dimensionless saturation parameter proportional to the local laser intensity:

$$s(\mathbf{r}) = \frac{|\beta(\mathbf{r})|^2}{1 + \delta^2} \quad (3.8)$$

$\beta(\mathbf{r})$  is the dimensionless field parameter, that is precisely the Rabi frequency normalized to the decay rate of the dipole:

$$\beta(\mathbf{r}) = \frac{d_0 E(\mathbf{r})}{\hbar\gamma} = \sqrt{\frac{3\lambda^2}{4\pi}} \frac{A}{\sqrt{\gamma}} u(\mathbf{r}) \quad (3.9)$$

where  $d_0$  is the matrix element of the atomic dipole. These relations may also be written in terms of the saturation parameter  $s_m$  and of the field parameter  $\beta_m$  evaluated on the beam axis:

$$s(\mathbf{r}) = s_m f(\mathbf{r}) \quad (3.10)$$

$$s_m = \frac{|\beta_m|^2}{1 + \delta^2} \quad (3.11)$$

$$\beta_m = \sqrt{\frac{3\lambda^2}{4\pi S}} \frac{A}{\sqrt{\gamma}} \quad (3.12)$$

Note that we may forget the  $x$ -dependence of the on-axis saturation parameter  $s_m$  as a consequence of the assumption of a large Rayleigh divergence length. The more general case of an arbitrary Rayleigh divergence length might as well be studied [27]. Using the transverse monomode approximation discussed above, we project  $dE$  onto the Gaussian mode, and write the following equation for the modification  $dA$  of the mode amplitude, summing up over the layers inside the atomic medium:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{3\lambda^2}{4\pi S} \alpha_l n_s \quad (3.13)$$

$n_s$  is the effective number of atoms in the probe beam, taking into account the effect of the saturation:

$$n_s = \int \frac{f(\mathbf{r})}{1 + 2s_m f(\mathbf{r})} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3.14)$$

In order to evaluate  $n_s$ , we expand it in powers of the saturation parameter:

$$n_s = \sum_{k=0}^{\infty} (-2s_m)^k n^{(1+k)} \quad (3.15)$$

$$n^{(1+k)} = \int f(\mathbf{r})^{1+k} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3.16)$$

$n^{(1)}$ , that we will denote simply  $n$ , is the effective number of atoms in the probe beam, defined in the unsaturated regime:

$$n = \int f(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3.17)$$

The next term  $n^{(2)}$  corresponds to the lowest-order saturation effect, that is precisely the Kerr nonlinearity of the atomic medium. The other terms represent higher-order saturation effects. Due to the Gaussian shape of the function  $f(\mathbf{r})$ , the function  $f(\mathbf{r})^{1+k}$  has the same expression as  $f(\mathbf{r})$  with a modified value of the beam size parameter, precisely with  $w^2$  replaced by  $w^2/(1+k)$ ;  $n^{(1+k)}$  has therefore the same expression as  $n$  with  $w^2$  replaced by  $w^2/(1+k)$ .

We now use the assumption that the transverse size  $w$  of the probe beam is much smaller than the size of the atomic medium. The unsaturated effective number  $n$  has thus a simple expression in terms of the on-axis atomic density:

$$n = \frac{\pi w^2}{2} \int \rho_m(x) dx \quad (3.18)$$

The higher-order integrals  $n^{(1+k)}$  may therefore be written as:

$$n^{(1+k)} = \frac{n}{1+k} \quad (3.19)$$

The saturated effective number  $n_s$  can then be related to the unsaturated effective number  $n$  through an analytical expression:

$$n_s = nF(s_m) \quad (3.20)$$

$$F(s_m) = 1 - \frac{2s_m}{2} + \frac{(2s_m)^2}{3} - \frac{(2s_m)^3}{4} + \dots = \frac{1}{2s_m} \log(1 + 2s_m) \quad (3.21)$$

This may be compared with the corresponding equation in the plane-wave model:

$$n_s = nF_{pw}(s) \quad (3.22)$$

$$F_{pw}(s) = 1 - 2s + (2s)^2 - (2s)^3 + \dots = \frac{1}{1 + 2s} \quad (3.23)$$

The two expressions nearly coincide in the low saturation regime, where only the linear index and the Kerr term are appreciable, provided that an effective value  $s_e$  of the saturation parameter is chosen in the plane-wave model such that:

$$s_m = 2s_e \quad (3.24)$$

In more physical terms, this condition means that, in the Kerr limit, the plane-wave and Gaussian results have to be compared for equal mean intensities, i.e. equal intensities after averaging over the Gaussian profile. As soon as the saturation parameter is appreciable in contrast ( $s \approx 1$  or  $s > 1$ ), the two expressions differ. More strikingly, the expression (3.21) which accounts for transverse mode profile does not tend towards the plane-wave expression (3.23) when the beam size parameter grows. In this regime also, valid conclusions about the effect of

gaussian beam structure may be reached only after a criterium has been chosen to compare plane-wave and Gaussian-beam spectra. In the following, we will always compare spectra with equation (3.24) obeyed.

The modification  $dA$  of the intracavity Gaussian mode amplitude due to one passage in the atomic medium may now be written:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{3\lambda^2}{4\pi S} \frac{nF(s_m)}{1+i\delta} \quad (3.25)$$

We easily obtain the steady state solution of the differential equation (3.3) for the intracavity amplitude  $A$ :

$$\sqrt{2\kappa\tau_C} A^{\text{in}} = \kappa\tau_C (1+i\phi) A - dA \quad (3.26)$$

which may be written as:

$$\frac{2}{\sqrt{T}} \beta^{\text{in}} = \beta_m \left[ (1+i\phi) + 2C \frac{F(s_m)}{1+i\delta} \right] \quad (3.27)$$

$\beta_m$  denotes the dimensionless parameter for the on-axis intracavity field (cf. equation(3.12)) and  $\beta^{\text{in}}$  a dimensionless parameter for the input field defined in an analogous manner:

$$\beta^{\text{in}} = \sqrt{\frac{3\lambda^2}{4\pi S}} \frac{A^{\text{in}}}{\sqrt{\gamma}} \quad (3.28)$$

$C$  is the cooperativity parameter, which is proportional to the effective number  $n$  of atoms present in the probe beam:

$$C = \frac{3\lambda^2}{4\pi S} \frac{n}{T} \quad (3.29)$$

$T$  is the intensity transmission of the coupling mirror:

$$T = 2\kappa\tau_C \quad (3.30)$$

We then derive the relation between the input intensity and the intracavity intensity:

$$\frac{4}{T} |\beta^{\text{in}}|^2 = |\beta_m|^2 \left| (1+i\phi) + 2C \frac{F(s_m)}{1+i\delta} \right|^2 \quad (3.31)$$

or:

$$Y = X \left[ (1 + CF'(X))^2 + (\phi - \delta CF'(X))^2 \right] \quad (3.32)$$

where we have replaced the field parameters by normalized intensities  $X$  and  $Y$  defined from the intensities averaged over the Gaussian profile:

$$Y = \frac{2}{T} |\beta^{\text{in}}|^2 \quad (3.33)$$

$$X = \frac{1}{2} |\beta_{\text{m}}|^2 = \frac{1}{2} s_{\text{m}} (1 + \delta^2) \quad (3.34)$$

$$F'(X) = \frac{2F(s_{\text{m}})}{1 + \delta^2} = \frac{1}{2X} \log \left( 1 + \frac{4X}{1 + \delta^2} \right) \quad (3.35)$$

Equation (3.32) is identical with results of [17, 18, 19, 20, 21, 23]. It must be compared with the corresponding equation in the plane-wave model:

$$Y = X \left[ \left( 1 + CF'_{\text{pw}}(X) \right)^2 + \left( \phi - \delta CF'_{\text{pw}}(X) \right)^2 \right] \quad (3.36)$$

where the normalized intensities  $X$  and  $Y$  are now defined from the position-independent intensities in the plane-wave model:

$$Y = \frac{4}{T} |\beta^{\text{in}}|^2 \quad (3.37)$$

$$X = |\beta_{\text{e}}|^2 = s_{\text{e}} (1 + \delta^2) \quad (3.38)$$

$$F'_{\text{pw}}(X) = \frac{2F_{\text{pw}}(s_{\text{e}})}{1 + \delta^2} = \frac{2}{1 + \delta^2 + 2X} \quad (3.39)$$

As long as the saturation parameter remains small ( $X \ll 1 + \delta^2$ ), the bistability curves (3.32) and (3.36) are identical. Note that this regime corresponds to a low-saturation limit where the mean population of the atomic excited state defined in the plane-wave model remains small:

$$\frac{X}{1 + \delta^2 + 2X} \ll 1 \quad (3.40)$$

In the following, we will focus the attention on this regime where the predictions of the plane-wave and Gaussian-wave theories coincide for the mean fields. As already emphasized in the introduction, this does not imply that the predictions will also coincide for the fluctuations.

Before coming to the study of fluctuations, we want to give conditions for obtaining a large squeezing. A first condition is that a bistability turning point is approached ([4] and references therein). This condition can be formulated in more quantitative terms by writing the slope of the bistability curve:

$$\frac{dY}{dX} = (1 + a)^2 + (\phi - a\delta)^2 - \zeta^2 \quad (3.41)$$

where:

$$a = \frac{2C(1 + \delta^2)}{(1 + \delta^2 + 2X)^2} \quad (3.42)$$

$$\zeta = \frac{4CX\sqrt{1 + \delta^2}}{(1 + \delta^2 + 2X)^2} \quad (3.43)$$

The coefficient  $a$  describes the damping of intracavity field due to atomic absorption, normalized to the damping due to the coupling mirror while the coefficient  $\zeta$  represents the normalized strength of the Kerr coupling due to atomic non-linearity. The presence of a turning point ( $dY/dX = 0$ ) requires that the Kerr coupling is large enough so that third term in the right-hand side of equation (3.41) is larger than the first one:

$$\zeta \geq 1 + a \quad (3.44)$$

and then that the detuning  $\phi$  of empty cavity is chosen such as to reach one of the two turning points:

$$\phi - a\delta = \pm\sqrt{\zeta^2 - (1 + a)^2} \quad (3.45)$$

The second condition for getting a large squeezing is that bistability is mainly in the dispersive regime, which means that the effect of atomic absorption on the field remains small:

$$a \ll 1 \quad (3.46)$$

If this condition is not satisfied, atoms efficiently couple vacuum fluctuations coming from the empty modes responsible for spontaneous emission into the intracavity field fluctuations, leading to a degradation of the expected squeezing.

In the low-saturation regime ( $X \ll 1 + \delta^2$ ), conditions (3.46,3.44) imply a large atom-laser detuning ( $\delta^2 \gg 1$ ) and they may be rewritten:

$$\delta \leq 2C \ll \delta^2 \quad (3.47)$$

$$\frac{\delta^3}{4C} \leq X \quad (3.48)$$

In the following, we will consider that these conditions delineate the region where a large squeezing may be obtained. It is in particular worth noting that the intensity parameter  $X$  lies in the domain  $\delta \ll X \ll \delta^2$ .

#### 4. Description of fluctuations in a Gaussian-wave theory

We are now going to study the quantum fluctuations of the field. We will closely follow the reference [16] where quantum fluctuations were derived from a linear input-output theory with a plane-wave model. As in the previous analysis of mean values, the reflection-transmission equations for the field fluctuations on the coupling mirror are the same as in the plane-wave model. In contrast, the effect of the atoms on these fluctuations is modified, due to the non-linearity of the interaction and to the Gaussian profile of laser intensity.

In order to discuss the transformation of field fluctuations, we now introduce a new notation for the positive-frequency and negative-frequency components  $E(\mathbf{r}, t)$  and  $E^\dagger(\mathbf{r}, t)$  of the field operator (see equation (2.1)) which are coupled by the nonlinear interaction. They will be considered as the components  $\mathcal{E}_\alpha$  of a two-fold column matrix  $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} E(\mathbf{r}, t) \\ E^\dagger(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

We will also denote  $\mathcal{E}^\alpha = \mathcal{E}_\alpha^\dagger$  the components of the adjoint line matrix  $\mathcal{E}^\dagger$ .

The field components are written in terms of mode amplitudes and Gaussian mode functions:

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\varepsilon_0 c}} \mathcal{A}_\alpha(t) \mathcal{U}_\alpha(\mathbf{r}) \quad (4.2)$$

The two components  $\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{r})$  coincide with the functions  $u(\mathbf{r})$  and  $u(\mathbf{r})^*$  defined previously in equation (2.2-2.4):

$$\mathcal{U}_\alpha(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{f(\mathbf{r})}{S(\mathbf{x})}} \exp(-i\varepsilon_\alpha \varphi(\mathbf{r})) \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_\alpha = (-1)^{1+\alpha} \quad (4.4)$$

The same notation will be used also for the positive-frequency and negative-frequency mode amplitudes:

$$\mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} A(t) \\ A^\dagger(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

as well as for the components of the atomic dipole measured as a dimensionless number:

$$\mathcal{S}(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ S^\dagger(t) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

( $S(t)$  and  $S^\dagger(t)$  have the same definition as in [16]; they will be denoted  $\mathcal{S}_\alpha(t)$  in the following).

As for the mean values, the effect of an optically thin atomic layer of length  $dx$  may be described by a local modification of the field fluctuations:

$$\delta\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r}, t) \rightarrow \delta\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r}, t) + d(\delta\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r}, t)) \quad (4.7)$$

We have introduced here a generic notation for the fluctuations  $\delta O$  of an operator  $O$ :

$$\delta O = O - \langle O \rangle \quad (4.8)$$

The field modification  $d(\delta\mathcal{E}_\alpha)$  may be separated into two parts [16] representing respectively the linear response  $d(\delta\mathcal{E}_\alpha^{\text{lr}})$  of the atomic dipoles to the intracavity field fluctuations and the spontaneous emission noise  $d(\delta\mathcal{E}_\alpha^{\text{se}})$ , that is the linear response of atomic dipoles to the vacuum fluctuations in the field modes coupled to the atoms which are different from the intracavity modes [28, 29]:

$$d(\delta\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r}, t)) = d(\delta\mathcal{E}_\alpha^{\text{lr}}(\mathbf{r}, t)) + d(\delta\mathcal{E}_\alpha^{\text{se}}(\mathbf{r}, t)) \quad (4.9)$$

The spontaneous emission term is uncorrelated with the intracavity field fluctuations. Note that we disregard the effect of the higher-order intracavity modes, in consistency with our assumptions on the treatment of transverse mode structure. We now evaluate these two terms.

The first term may be written in terms of linear susceptibility functions  $\chi_\alpha^\beta$ :

$$d(\delta\mathcal{E}_\alpha^{\text{lr}}(\mathbf{r}, t)) = -\frac{3\lambda^2}{4\pi}\rho(\mathbf{r})dx \int \sum_\beta \chi_\alpha^\beta(\mathbf{r}, \tau) \delta\mathcal{E}_\beta(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \quad (4.10)$$

The susceptibility function  $\chi_\alpha^\beta(\mathbf{r}, \tau)$  is deduced from commutators of the atomic dipoles evaluated at different times:

$$\chi_\alpha^\beta(\mathbf{r}, \tau) = i\Theta(\tau) \left\langle \left[ \mathcal{S}_\alpha(\tau), \mathcal{S}^\beta(0) \right] \right\rangle_{\mathbf{r}} \quad (4.11)$$

$\Theta(\tau)$  is the Heaviside function. The symbol  $\langle \dots \rangle_{\mathbf{r}}$  means that the correlation functions are evaluated from the solution of the optical Bloch equations for an atom located at point  $\mathbf{r}$ . As usually, the optical Bloch equations are solved in the frequency domain rather than in the time domain. We will give below the

solution for the Fourier transforms  $\chi_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega])$  of  $\chi_\alpha^\beta(\mathbf{r}, \tau)$  defined according to the general prescription:

$$f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f[\omega]$$

The field modification  $d(\delta\mathcal{E}_\alpha^{\text{r}})$  will then be written in the frequency domain:

$$d(\delta\mathcal{E}_\alpha^{\text{r}}(\mathbf{r}, [\omega])) = -\frac{3\lambda^2}{4\pi} \rho(\mathbf{r}) dx \sum_\beta \chi_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega]) \delta\mathcal{E}_\beta(\mathbf{r}, [\omega]) \quad (4.12)$$

Clearly, the susceptibility function will depend upon the position of the atom because of the Gaussian mode structure of the field, which will make a difference with the plane-wave model of reference [16].

Before considering this problem of position-dependence of the susceptibility function, we come to characterize the second fluctuating term  $d(\delta\mathcal{E}_\alpha^{\text{se}})$  appearing in equation (4.9), which represents the spontaneous emission noise. Assuming a dilute atomic medium such that the fluctuations of the different dipoles are independent of each other, we obtain field fluctuations by summing up the contributions of all dipoles:

$$\langle d(\delta\mathcal{E}_\alpha^{\text{se}}(\mathbf{r}, [\omega])) d(\delta\mathcal{E}_\beta^{\text{se}}(\mathbf{r}', [\omega'])) \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{3\lambda^2}{4\pi} \rho(\mathbf{r}) dx \sigma_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega]) \quad (4.13)$$

The correlation functions  $\sigma_\alpha^\beta$  describe the fluctuations of the dipole components evaluated for one atom at point  $\mathbf{r}$ :

$$\sigma_\alpha^\beta(\mathbf{r}, \tau) = \langle \delta\mathcal{S}_\alpha(\tau) \delta\mathcal{S}^\beta(0) \rangle_{\mathbf{r}} \quad (4.14)$$

The analytical expressions of the Fourier transforms  $\sigma_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega])$ , as well as those of  $\chi_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega])$ , can be obtained in terms of a single atomic function  $G_\alpha^\beta$  which will be given in the next section.

As already carried out for the mean values, we now solve the problem of the transverse dependence of correlation functions by supposing that the fluctuations radiated by the atoms into the higher-order modes have a negligible effect on intracavity field fluctuations, and furthermore are not matched to the detection setup. We will therefore obtain the modification  $d(\delta\mathcal{A}_\alpha)$  of the amplitude fluctuations due to the atomic medium by projecting the field fluctuations  $d(\delta\mathcal{E}_\alpha)$  onto the Gaussian mode functions:

$$d(\delta\mathcal{A}_\alpha(t)) = \int d(\delta\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{r}, t)) \mathcal{U}_\alpha^*(\mathbf{r}) dy dz$$

Considering first the linear response term, we project the effect of a thin atomic layer of length  $dx$  (cf. equation (4.10)) and sum up over the whole atomic medium. We thus write  $d(\delta\mathcal{A}_\alpha^{\text{tr}})$  in the frequency domain in terms of a new susceptibility function  $\bar{\chi}_\alpha^\beta[\omega]$ :

$$d(\delta\mathcal{A}_\alpha^{\text{tr}}[\omega]) = -\frac{3\lambda^2}{4\pi S} n \sum_\beta \bar{\chi}_\alpha^\beta[\omega] \delta\mathcal{A}_\beta[\omega] \quad (4.15)$$

which is defined as the local susceptibility function averaged over the beam profile:

$$\bar{\chi}_\alpha^\beta[\omega] = \frac{1}{n} \int \chi_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega]) \rho(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) e^{i(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)\varphi(\mathbf{r})} d\mathbf{r} \quad (4.16)$$

For the spontaneous emission noise, we once more disregard the fluctuations radiated by the atoms into the higher-order modes, then project the field fluctuations  $d\delta\mathcal{E}_\alpha^{\text{se}}$  onto the Gaussian mode, and finally sum up the independent contributions of all atoms. We thus obtain the contribution of spontaneous emission noise in terms of a correlation function  $\bar{\sigma}_\alpha^\beta[\omega]$  averaged over the transverse profile of the beam:

$$\langle d(\delta\mathcal{A}_\alpha^{\text{se}}[\omega]) d(\delta\mathcal{A}^{\beta \text{ se}}[\omega']) \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') \frac{3\lambda^2}{4\pi S} n \bar{\sigma}_\alpha^\beta[\omega] \quad (4.17)$$

$$\bar{\sigma}_\alpha^\beta[\omega] = \frac{1}{n} \int \sigma_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega]) \rho(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) e^{i(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)\varphi(\mathbf{r})} d\mathbf{r} \quad (4.18)$$

Now, the computation of quantum fluctuations in the output field proceeds along the same lines as in the plane-wave model [16], provided that the following modifications are accounted for. First, field fluctuations are understood as referring to the Gaussian mode amplitudes, for the intracavity field  $\delta\mathcal{A}_\alpha$  as well as for input and output fields  $\delta\mathcal{A}_\alpha^{\text{in}}$  and  $\delta\mathcal{A}_\alpha^{\text{out}}$ . Then, the plane-wave susceptibility function  $\chi_\alpha^\beta$  and noise spectrum  $\sigma_\alpha^\beta$  are replaced by the averaged expressions  $\bar{\chi}_\alpha^\beta$  and  $\bar{\sigma}_\alpha^\beta$  given respectively by equations (4.16) and (4.18). This leads to a simple and natural generalisation of the results of the plane-wave model. When transverse beam structure is accounted for, the position-dependent expressions for atomic susceptibility function and atomic noise spectrum have to be averaged over the beam intensity profile. The same property was in fact used in published calculations accounting for Gaussian profile of the laser beam [21, 23]: in these papers where quantum stochastic methods were used, the squeezing spectra were obtained by averaging the drift and diffusion matrices which describe in these methods the effect of atoms. In the present paper, the fact that the contributions of elementary volumes have to be added independently has not been postulated. We have shown that this averaging property follows from a simple treatment of Gaussian profile

where fields radiated by the atoms are projected onto the fundamental Gaussian mode.

## 5. Evaluation of the averaged atomic spectra

Before coming to the estimation of the squeezing spectra, we now give the expressions of the atomic spectra and deduce the expressions averaged over the intensity profile. We then compare the atomic spectra thus obtained with those derived in the plane-wave model.

The local susceptibility function and noise spectrum  $\chi_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega])$  and  $\sigma_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega])$  are obtained by solving optical Bloch equations for an atom located at point  $\mathbf{r}$ . They have the same form as in the plane-wave model [15, 16], with a position-dependent field parameter  $\beta(\mathbf{r})$  however, and may be written in terms of the phase  $\varphi(\mathbf{r})$  of the Gaussian mode and of a function  $G_\alpha^\beta$  which only depends on the local intensity parameter:

$$\chi_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega]) = \frac{i}{2\gamma} \left( G_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega]) - G_{3-\alpha}^{3-\beta}(\mathbf{r}, [-\omega])^* \right) e^{-i(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)\varphi(\mathbf{r})} \quad (5.1)$$

$$\sigma_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega]) = \frac{1}{2\gamma} \left( G_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega]) + G_\beta^\alpha(\mathbf{r}, [\omega])^* \right) e^{-i(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)\varphi(\mathbf{r})} \quad (5.2)$$

$$G_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega]) = \frac{p_\alpha^\beta(|\beta(\mathbf{r})|^2, [\omega])}{q(|\beta(\mathbf{r})|^2, [\omega])} \quad (5.3)$$

where:

$$\begin{aligned} p_1^1(|\beta|^2, [\omega]) &= (1 + \delta^2 + 2|\beta|^2) (1 + \delta^2) (1 - i\delta - i\bar{\omega}) (2 - i\bar{\omega}) \\ &\quad + 2|\beta|^2 (1 + \delta^2 + 2|\beta|^2) i\bar{\omega} (1 + i\delta) \\ &\quad + 2|\beta|^4 (2 - i\bar{\omega})^2 + 4|\beta|^6 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} p_2^1(|\beta|^2, [\omega]) &= 2|\beta|^2 (1 + \delta^2 + 2|\beta|^2) (2 - i\bar{\omega}) (1 + i\delta) \\ &\quad + |\beta|^2 (1 + i\delta)^2 (1 + i\delta - i\bar{\omega}) (2 - i\bar{\omega}) \\ &\quad + 2|\beta|^4 i\bar{\omega} (1 + i\delta) + 4|\beta|^6 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} p_1^2(|\beta|^2, [\omega]) &= |\beta|^2 (1 - i\delta)^2 (1 - i\delta - i\bar{\omega}) (2 - i\bar{\omega}) \\ &\quad + 2|\beta|^4 i\bar{\omega} (1 - i\delta) + 4|\beta|^6 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$p_2^2(|\beta|^2, [\omega]) = 2|\beta|^4 (2 - i\bar{\omega})^2 + 4|\beta|^6 \quad (5.7)$$

$$q(|\beta|^2, [\omega]) = (1 + \delta^2 + 2|\beta|^2)^2 (2 - i\bar{\omega}) ((1 - i\bar{\omega})^2 + \delta^2)$$

$$+ (1 + \delta^2 + 2|\beta|^2)^2 4|\beta|^2 (1 - i\bar{\omega}) \quad (5.8)$$

$\delta$  and  $\beta$  are the dimensionless parameters already defined for measuring laser-atom detuning and Rabi frequency respectively;  $\bar{\omega}$  is the noise frequency also normalized to the decay rate of the dipole:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\gamma} \quad (5.9)$$

In order to perform the average over the beam profile, we first note that the phases do not enter the averaged expressions (compare equations (4.16,4.18) with equations (5.1,5.2)). We then proceed by analogy with the computation of the factors  $n^{(1+k)}$  which appeared in the expression (3.15) of the effective number of atoms, by developing the functions  $G_\alpha^\beta$  in terms of the intensity parameter:

$$G_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega]) = \sum_{k=0}^{\infty} G_\alpha^{\beta(k)}[\omega] |\beta(\mathbf{r})|^{2k} \quad (5.10)$$

Writing the position-dependent local intensity as in the previous discussion of the bistability curve:

$$|\beta(\mathbf{r})|^2 = |\beta_m|^2 f(\mathbf{r}) = 2Xf(\mathbf{r}) \quad (5.11)$$

we obtain:

$$\bar{\chi}_\alpha^\beta[\omega] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i\xi_k X^k}{2\gamma} (G_\alpha^{\beta(k)}[\omega] - G_{3-\alpha}^{3-\beta(k)}[-\omega]^*) \quad (5.12)$$

$$\bar{\sigma}_\alpha^\beta[\omega] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi_k X^k}{2\gamma} (G_\alpha^{\beta(k)}[\omega] + G_\beta^{\alpha(k)}[\omega]^*) \quad (5.13)$$

where:

$$\xi_k = \frac{2^k}{1+k} \quad (5.14)$$

The plane-wave expressions  $\chi_\alpha^\beta[\omega]$  and  $\sigma_\alpha^\beta[\omega]$  written in equations (5.1,5.2) may be identified with equations (5.1,5.2) with  $\xi_k$  replaced by unity (global phase factors are unessential and may be disregarded). The definitions of  $X$ , standing for the position-independent intensity parameter  $|\beta|^2$  in the plane-wave model and for its spatial average over the beam profile in the Gaussian-wave theory, have been precisely chosen so that the coefficients  $\xi_0$  and  $\xi_1$  are equal to unity. This implies that the differences between the plane-wave and Gaussian-beam predictions for squeezing only come from the fact that the higher-order coefficients  $\xi_k$  (with  $k =$

2, 3...) differ from unity. The discussion of these differences may therefore be restricted to the analysis of the contributions to atomic spectra proportional to  $X^2, X^3 \dots$ : the plane-wave predictions cannot be considered as reliable as soon as these contributions become appreciable.

It could be expected that the contributions proportional to  $X^2, X^3 \dots$  to the atomic spectra become appreciable, as for the mean values, only when the excited state becomes significantly populated, that is when the intensity parameter  $X$  approaches  $\delta^2$ . The plane-wave predictions would thus be reliable in the whole range  $\delta < X < \delta^2$  where a large squeezing is expected (see the discussion at the end of section 3). We now show that this is not the case.

We first consider the limiting case, that we will call the Kerr domain in the following, where only the terms proportional to  $X^0$  and  $X^1$  are appreciable. In this case, the coincidence between the atomic spectra obtained in the two models is guaranteed. The linear terms (proportional to  $X^0$ ) are given by:

$$G_1^{1(0)} = \frac{1}{1 + i\delta - i\bar{\omega}} \quad (5.15)$$

$$G_2^{1(0)} = G_1^{2(0)} = G_2^{2(0)} = 0 \quad (5.16)$$

and the Kerr terms (proportional to  $X^1$ ) by:

$$G_1^{1(1)} = \frac{-2(2 + 2i\delta - i\bar{\omega})}{(1 + \delta^2)(1 + i\delta - i\bar{\omega})^2} \quad (5.17)$$

$$G_2^{1(1)} = \frac{2}{(1 - i\delta)((1 - i\bar{\omega})^2 + \delta^2)} + \frac{1}{(1 - i\delta)^2(1 - i\delta - i\bar{\omega})} \quad (5.18)$$

$$G_1^{2(1)} = \frac{1}{(1 + i\delta)^2(1 + i\delta - i\bar{\omega})} \quad (5.19)$$

$$G_2^{2(1)} = 0 \quad (5.20)$$

These terms have a simple physical interpretation in terms of a diagrammatic perturbative expansion of the field-matter interaction [30, 31]. The linear terms are described by two-photon elastic scattering amplitudes which are resonant at frequencies close to the atomic eigenfrequency ( $\bar{\omega} \simeq \delta$ ) while the Kerr terms are described by four-photon inelastic scattering amplitudes which are resonant at frequencies either close to the atomic eigenfrequency ( $\bar{\omega} \simeq \delta$ ) or symmetric to the atomic eigenfrequency with respect to the laser frequency ( $\bar{\omega} \simeq -\delta$ ). The interpretation of squeezing in terms of these photon scattering amplitudes was already performed for the case of atoms coupled to field in free space [26, 31]. The previous equations give a more complete description of the effect of these

amplitudes which may be used also for interpreting squeezing by atoms coupled to field in a cavity. An important consequence of this discussion is that the squeezing processing is resonant on the sidebands of fluorescence triplet ( $\bar{\omega} \simeq \pm\delta$ ) and not on the central component ( $\bar{\omega} \simeq 0$ ). In contrast, squeezing via bistability is usually studied for frequencies close to the laser frequency. This is particularly clear in the good-cavity limit where the entire cavity bandwidth is contained in the central component of the emission triplet. In this case, the previous equations have to be evaluated at zero frequency ( $\bar{\omega} = 0$ ) where they correspond to non-resonant processes.

We come now to the analysis of the higher-order contributions to atomic spectra proportional to  $X^2, X^3 \dots$ , and focus the discussion on the same regime where squeezing is studied for frequencies close to the laser frequency. In this regime, it is easily checked on the expressions of the atomic susceptibility functions  $\chi_\alpha^\beta$  that the higher-order contributions remain negligible as long as  $X \ll \delta^2$ . This is related to the general property of linear response theory which states that static susceptibilities evaluated at  $\bar{\omega} = 0$  are directly related to differentiated forms of the relations between mean fields, and to the already known fact that the plane-wave model provides reliable expressions for mean fields when  $X \ll \delta^2$ . However, the higher-order contributions to the noise spectra  $\sigma_\alpha^\beta$  may become appreciable even when  $X \ll \delta^2$ . This can be shown by considering the atomic spectra at zero frequency (obtained by setting  $\bar{\omega} = 0$  in the unapproximated forms (5.3)):

$$G_1^1[0] = \frac{(1 + \delta^2)(1 - i\delta)}{(1 + \delta^2 + 2|\beta|^2)^2} + \frac{4|\beta|^4 + 2|\beta|^6}{(1 + \delta^2 + 2|\beta|^2)^3} \quad (5.21)$$

$$G_2^1[0] = \frac{2|\beta|^2(1 + i\delta)}{(1 + \delta^2 + 2|\beta|^2)^2} + \frac{|\beta|^2(1 + i\delta)^3 + 2|\beta|^6}{(1 + \delta^2 + 2|\beta|^2)^3} \quad (5.22)$$

$$G_1^2[0] = \frac{|\beta|^2(1 - i\delta)^3 + 2|\beta|^6}{(1 + \delta^2 + 2|\beta|^2)^3} \quad (5.23)$$

$$G_2^2[0] = \frac{4|\beta|^4 + 2|\beta|^6}{(1 + \delta^2 + 2|\beta|^2)^3} \quad (5.24)$$

The evaluation of the susceptibility spectra relies only upon the first terms appearing in  $G_1^1[0]$  and  $G_2^1[0]$ , so that the higher-order contributions to these terms are negligible when  $X \ll \delta^2$ . In contrast, the other terms, which enter in the evaluation of the noise spectra, may be appreciable even for  $X \ll \delta^2$ . Restricting our interest to this low-saturation limit, we may identify the main contribution to the squeezing process as the parametric terms proportional to  $X/\delta^3$  which appear in

$G_2^1[0]$ . Among the dominant noise contributions, there are the terms proportional to  $1/\delta^2$  in  $G_1^1[0]$  and  $X/\delta^4$  in  $G_2^1[0]$  or  $G_1^2[0]$ , but also the higher-order terms proportional to  $X^2/\delta^6$  or  $X^3/\delta^6$  which appear in the four functions  $G_\beta^\alpha[0]$ . It is thus clear that these terms may not be disregarded for  $X \ll \delta^2$ . In particular, the noise term proportional to  $X^3/\delta^6$  reaches the magnitude of the parametric Kerr coefficient  $X/\delta^3$  for  $X \approx \delta^{3/2}$ .

This noise term is not accounted for in a Kerr model and is found to be responsible for excess noise and degradation of the expected squeezing [8]. From the qualitative evaluations of previous paragraph, one deduces that the noise correlation functions have to be suspected in the domain  $\delta < X < \delta^2$ , where a large squeezing is expected from plane-wave computations (see conditions (3.47,3.48)). This does not imply that plane-wave predictions of squeezing are wrong in the whole domain, but this forces us to perform the Gaussian-wave computations in order to get reliable expectations. In the next section, we give a quantitative estimate of squeezing degradation due to this effect and delineate the domain of validity of plane-wave computations.

The conclusion of this discussion is that, although the plane-wave model provides reliable estimations for the bistability curve and for the susceptibility functions in the whole low-saturation domain  $X \ll \delta^2$ , this is not the case for the noise correlation functions. A qualitative interpretation of this result may be found by coming back to photon scattering amplitudes. As already discussed, the two-photon and four-photon amplitudes are resonant on the sidebands of the fluorescence triplet. In contrast, there exists higher-order scattering amplitudes which give rise to inelastic fluorescence on the central component of the triplet [30]. Although these amplitudes are proportional to higher-order powers of  $X$ , they are favored with respect to the lowest-order amplitudes, due to their resonant enhancement around the central frequency. This explains why they can have an influence in the low-saturation domain.

## 6. Squeezing spectra

We come now to the computation of quantum fluctuations in the output field. As already discussed, this computation proceeds along the same lines in the Gaussian-wave computations as in the plane-wave model, provided that the matrices  $\chi_\alpha^\beta$  and  $\sigma_\alpha^\beta$  are replaced by the averaged expressions  $\bar{\chi}_\alpha^\beta$  and  $\bar{\sigma}_\alpha^\beta$ .

The covariance functions for the input or output fields are defined in terms of noise matrices:

$$\langle \delta \mathcal{A}_\alpha^{\text{in}}[\omega] \delta \mathcal{A}^{\beta \text{ in}}[\omega'] \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') \mathcal{V}_\alpha^{\beta \text{ in}}[\omega] \quad (6.1)$$

$$\langle \delta \mathcal{A}_\alpha^{\text{out}}[\omega] \delta \mathcal{A}^{\beta \text{ out}}[\omega'] \rangle = 2\pi \delta(\omega + \omega') \mathcal{V}_\alpha^{\beta \text{ out}}[\omega] \quad (6.2)$$

$\mathcal{V}_\alpha^{\beta \text{ in}}$  and  $\mathcal{V}_\alpha^{\beta \text{ out}}$  are the elements of square matrices  $\mathcal{V}^{\text{in}}$  and  $\mathcal{V}^{\text{out}}$  which are connected through noise processing relations (equations (47-51) of reference [16]):

$$\mathcal{V}^{\text{out}}[\omega] = (\mu[\omega] - 1) \cdot \mathcal{V}^{\text{in}}[\omega] \cdot (\mu[\omega] - 1)^\dagger + \mu[\omega] \cdot \mathcal{V}^{\text{at}}[\omega] \cdot \mu[\omega]^\dagger \quad (6.3)$$

$(\mu[\omega] - 1)$  and  $\mu[\omega]$  are transfer matrices which characterize noise processing by the cavity containing atoms and which depends on the susceptibility matrix  $\bar{\chi}$ :

$$\mu[\omega] = \frac{2}{1 + i\phi - i\frac{\omega}{\kappa} - 2\gamma C \varepsilon \cdot \bar{\chi}[\omega]} \quad (6.4)$$

$\mathcal{V}^{\text{at}}$  describes the noise added by the atomic medium, and which depends on the atomic noise matrix  $\bar{\sigma}$ :

$$\mathcal{V}^{\text{at}}[\omega] = \gamma C \varepsilon \cdot \bar{\sigma}[\omega] \cdot \varepsilon \quad (6.5)$$

In these expressions,  $\varepsilon$  is a diagonal matrix containing the coefficients  $\varepsilon_\alpha$ :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

It is worth stressing at this stage that, while the atomic spectra  $\bar{\chi}$  and  $\bar{\sigma}$  are obtained by averaging the plane-wave spectra over the intensity profile, this is not the case for the noise spectra of the output fields.

We may now give a quantitative estimation of the influence of the Gaussian profile upon the noise spectra for the output fields. The transfer matrices are not modified in the low-saturation limit, since they depend only upon the susceptibility matrix  $\bar{\chi}$ . It follows that the first term in the right-hand side of equation (6.3) is not influenced by the Gaussian profile. In contrast, the second term, which is proportional to the atomic noise matrix  $\bar{\sigma}$ , has a larger degrading effect on squeezing in the Gaussian-wave theory than in the plane-wave model. Precisely, the squeezing degradation due to higher-order noise terms is greater in Gaussian-wave theory than in the plane-wave model; for terms proportional to  $X^2$  (respectively  $X^3$ ), this degradation is multiplied by  $\xi_2 = 4/3$  (respectively by  $\xi_3 = 2$ ). In the Kerr domain, those higher-order noise terms have a negligible influence on squeezing, so that the predictions of plane-wave model coincide with those of Gaussian-wave theory.

A more detailed discussion may be given by studying the example of the optimum squeezing expected at zero frequency ( $\omega = 0$ ) on a bistability turning point (defined by equations (3.44,3.45)). The optimum squeezing (variance of the

quadrature component with minimal fluctuations, evaluated at zero frequency on a bistability turning point) reaches in the Kerr domain the value:

$$S_{\text{opt}}^{\text{Kerr}} = \frac{a}{1+a} \quad (6.7)$$

This value is small, of the order of  $2C/\delta^2$ , when condition (3.47) is obeyed, that is when the effect of atomic absorption on the field remains small. Note that a small value of  $S_{\text{opt}}$  means an efficient squeezing of input field fluctuations by the bistable cavity. Assuming that the intensity parameter  $X$  lies in the domain  $\delta \ll X \ll \delta^2$ , a close inspection of the equations describing noise processing by the bistable cavity shows that the optimum squeezing  $S_{\text{opt}}$  accounting for higher-order noise terms in the plane-wave model may be written:

$$S_{\text{opt}} \simeq \frac{S_{\text{opt}}^{\text{Kerr}} + 2f \frac{X^2}{\delta^3}}{1 + 2f \frac{X^2}{\delta^3}} \quad (6.8)$$

The numerical factor  $f$  has the following value, of the order of unity ( $\phi$  is defined by (3.45)):

$$f = \frac{\zeta - (\phi - a\delta)}{1+a} \quad (6.9)$$

The degradation due to higher-order noise terms is thus found to become appreciable when  $2X^2/\delta^3 \simeq 2C/\delta^2$ , that is when:

$$X \simeq \sqrt{C\delta} \quad (6.10)$$

The degradation of squeezing appearing in equation (6.8) is enlarged when passing from the plane-wave to the Gaussian-wave theory. It turns out that, in the limiting case where degradation is small, it may be attributed mainly to higher-order atomic noise terms proportional to  $X^3$ , so that squeezing degradation is roughly multiplied by  $\xi_3 = 2$  due to Gaussian transverse profile. In other words, the plane-wave model systematically underestimates the degrading effect of higher-order contributions to atomic noise and does not provide reliable estimations for the squeezing when such contributions cannot be neglected.

In contrast, we may consider now the condition which delineates the Kerr region:

$$X \ll \sqrt{C\delta} \quad (6.11)$$

When this condition is satisfied, the optimum squeezing is not degraded by higher-order noise terms, so that the plane-wave computation provides a reliable estimation for squeezing. It is worth recalling here that this condition has been derived

in the domain  $\delta \ll X \ll \delta^2$  where a large squeezing is expected. In the domain of very low intensity  $X < \delta$ , different conclusions would be drawn for reliability of the plane-wave model, but a poor squeezing would be predicted.

The previous discussion was restricted to the particular case of zero frequency where analytical expressions may be handled more easily. Figure 1 shows spectra for the optimum squeezing evaluated as a function of noise frequency  $\omega$ . The three spectra correspond to the same value for the atomic absorption coefficient  $a$  and to the same working point on the bistability curve; we have chosen the bistability threshold such that there is only one turning point, which corresponds to  $\zeta = 1 + a$  and  $\phi = a\delta$  ( $f = 1$  in this particular case). The first spectrum (trace (i)) is computed for a detuning sufficiently large so that the Kerr limit is reached. In this case, the spectra computed from plane-wave model and Gaussian-wave theory cannot be distinguished. The two other spectra are computed for a lower detuning, such that higher-order noise terms degrade optimum squeezing. The results of plane-wave computations (trace (ii)) and Gaussian-wave computations (trace (iii)) now differ, revealing in particular a larger degradation when transverse structure is accounted for. In addition, these spectra clearly show, in consistency with the discussion at the end of section 5, that the excess noise responsible for squeezing degradation is associated with the central peak of the atomic fluorescence spectrum, whose width equals  $2\gamma$ , where  $\gamma$  is the decay constant of the atomic dipole, in the limiting case of low saturation [32]. Note that the spectra of Figure 1 have been computed in the bad-cavity limit where the decay constant  $\kappa$  of the intracavity field is larger than  $\gamma$ . In the opposite good-cavity limit, the resonant behaviour of the higher-order excess noise would not be apparent on the squeezing spectrum.

## 7. Conclusion

We have used the linear input-output formalism generalized to incorporate the treatment of atomic fluctuations to discuss the effect of Gaussian transverse structure on squeezing with two-level atoms. We have shown that this effect is described quite naturally as a spatial averaging of the susceptibility and noise functions which appear in the linear input-output formalism. This property has not been postulated a priori, but derived as a consequence of the simple assumptions made in the treatment of transverse profile: higher-order transverse modes have been supposed either far from resonance, or of such a high order that they are not efficiently coupled to the Gaussian mode.

The mean fields and the bistability curves deduced from plane-wave and Gaussian-wave calculations coincide in the low-saturation limit where the population of the atomic excited state remains small ( $X \ll \delta^2$ ). We have shown that this is also the

case for the atomic susceptibility functions evaluated around zero frequency. This is related to the general property of linear response theory that the static susceptibilities are differentiated forms of the relations between mean fields. In contrast, the limit of low saturation is not sufficient for ensuring the coincidence of plane-wave and Gaussian-wave predictions for atomic noise functions. This is due to the existence of higher-order noise terms, arising from the central peak of the fluorescence spectrum. These terms are able to degrade the optimum squeezing when  $X$  reaches the value  $\sqrt{C\delta}$ . We have shown that these terms have a larger degrading effect in the Gaussian-wave calculations as in the plane-wave ones. This implies that plane-wave predictions of a large squeezing are reliable only in the Kerr domain, that is for  $X \ll \sqrt{C\delta}$ . This criterium for reliability of plane-wave model appears quite different from those published in previous references [21, 22, 23].

#### Acknowledgements

Thanks are due to Claude Fabre and Elisabeth Giacobino for discussions.

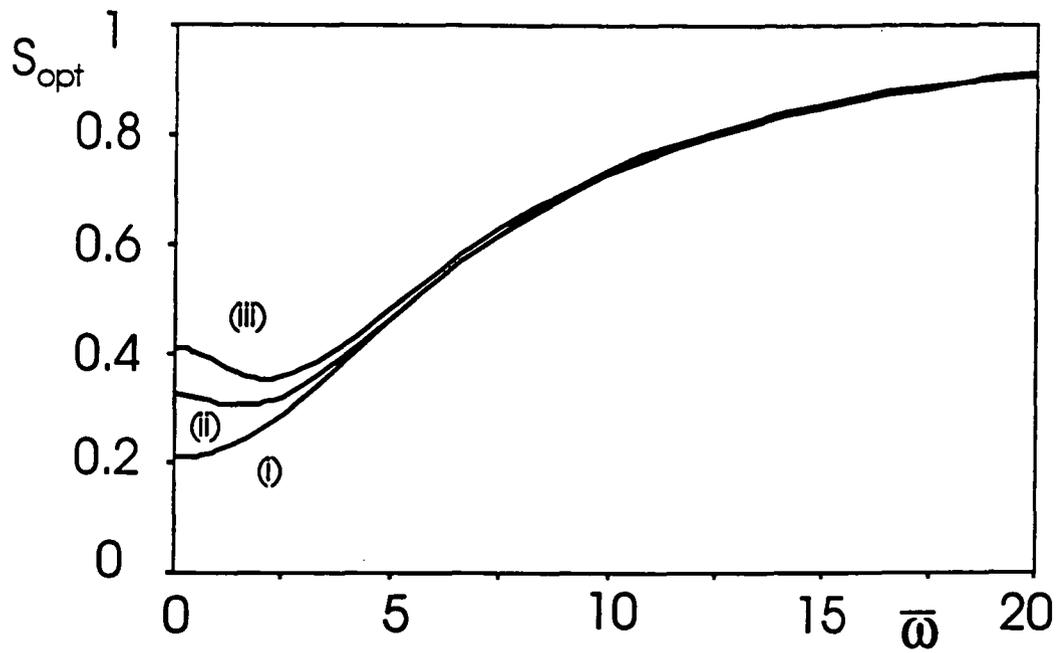
#### References

- [1] Lugiato L.A., in *Progress in Optics XXI* 71 (1984)
- [2] Lugiato L.A. and Strini G., *Optics Communications* 41 67 (1982); *Optics Communications* 41 374 (1982)
- [3] Collett M.J. and Walls D.F., *Physical Review* A32 2887 (1985)
- [4] Reynaud S., Fabre C., Giacobino E. and Heidmann A., *Physical Review* A40 1440 (1989)
- [5] Raizen M.G., Orozco L.A., Min Xiao, Boyd T.L. and Kimble H.J., *Physical Review Letters* 59 198 (1987)
- [6] Hope D.M., Bachor H.A., Manson P.J., McClelland D.E., Fisk P.T.H., *Physical Review* A46 R1181 (1992)
- [7] Lambrecht A., Giacobino E., Courty J.-M. and Reynaud S., *Applied Physics* B60 129 (1995)
- [8] Reid M.A. and Walls D.F., *Physical Review* A32 396 (1985)
- [9] Reid M.A. and Walls D.F., *Physical Review* A33 4465 (1986)
- [10] Reid M.A. and Walls D.F., *Physical Review* A34 4929 (1986)
- [11] Carmichael H.J., *Physical Review* A33 3262 (1986)

- [12] Lugiato L.A., *Physical Review* **A33** 4079 (1986)
- [13] Orozco L.A., Raizen M.G., Min Xiao, Brecha R.J. and Kimble H.J., *Journal of the Optical Society of America* **B4** 1490 (1987)
- [14] Castelli F., Lugiato L.A. and Vadicchino M., *Nuovo Cimento* **B10** 183 (1988)
- [15] Reid M.A., *Physical Review* **A37** 4792 (1988)
- [16] Hilico L., Fabre C., Giacobino E. and Reynaud S., *Physical Review* **A46** 4397 (1992)
- [17] Drummond P.D., *IEEE Journal of Quantum Electronics* **QE17** 301 (1981)
- [18] Ballagh R.J., Cooper J., Hamilton M.W., Sandle W.J. and Warrington D.M., *Optics Communications* **37** 143 (1981)
- [19] Lugiato L.A. and Milani M., *Zeitschrift fur Physik* **B50** 171 (1983)
- [20] Rosenberger A.T., Orozco L.A. and Kimble H.J., *Physical Review* **A28** 2569 (1983)
- [21] Xiao M., Kimble H.J. and Carmichael H.J., *Physical Review* **A35** 3832 (1987)
- [22] Xiao M., Kimble H.J. and Carmichael H.J., *Journal of the Optical Society of America* **B4** 1546 (1987)
- [23] Hope D.M., McClelland D.E. and Savage C.M., *Physical Review* **A41** 5074 (1990)
- [24] Collett J. and Gardiner C.W., *Physical Review* **A30** 1386 (1984)
- [25] Reynaud S. and Heidmann A., *Optics Communications* **71** 209 (1989)
- [26] Heidmann A. and Reynaud S., *Journal de Physique* **46** 1937 (1985)
- [27] Lambrecht A., Giacobino E. and Reynaud S., *Atomic number fluctuations in a cold atom cloud* preprint (1995)
- [28] Courty J.-M., Grangier P., Hilico L. and Reynaud S., *Optics Communications* **83** 251 (1991)
- [29] Courty J.-M. and Reynaud S., *Physical Review* **A46** 2766 (1992)
- [30] Dalibard J. and Reynaud S., *Journal de Physique* **44** 1337 (1983)
- [31] Heidmann A. and Reynaud S., *Journal of Modern Optics* **34** 923 (1987)

- [32] Cohen-Tannoudji C. and Reynaud S., in *Multiphoton Processes*, eds J.H.Eberly and P.Lambropoulos (Wiley, 1978) p.103

**Figure 1:** Spectra for the optimum squeezing as a function of normalized noise frequency  $\bar{\omega} = \omega/\gamma$ , with a decay constant for the intracavity field  $\kappa = 10\gamma$ ; the three spectra correspond to the same atomic absorption coefficient ( $a = 0.25$ ) and to the same turning point at bistability threshold ( $\zeta = 1+a$ ;  $\phi = a\delta$ ); the spectrum (i) is computed for a large detuning lying in the Kerr domain ( $\delta = 1000$ ; the other parameters deduced from the values of  $\delta$ ,  $a$  and  $\zeta$  are  $X = 2500$ ,  $C = 126253$ ,  $\phi = 250$ ); the two other spectra are computed for a lower detuning lying outside the Kerr domain ( $\delta = 100$ ;  $X = 250$ ,  $C = 1378$ ,  $\phi = 25$ ) and result from plane-wave computations (ii) and Gaussian-wave computations (iii).



A. Lambrecht et al.:  
Effect of transverse structure on squeezing with two-level atoms  
Figure 1

### 6.4.3 Traitement de l'onde stationnaire

Nous allons maintenant tenir compte du fait que dans notre expérience la cavité n'est pas une cavité en anneau, mais une cavité linéaire. Le faisceau laser ne correspond donc pas à une onde progressive mais à une onde stationnaire. Cela peut avoir une influence sur la réduction du bruit que nous allons calculer dans ce paragraphe. Le champ intracavité décrit par le paramètre de saturation local  $|\beta(\mathbf{r})|^2$  dépend donc non seulement des coordonnées transverses  $y$  et  $z$  mais aussi de la coordonnée longitudinale  $x$ . Il est donc défini par (cf. aussi équation (3.9) de l'article précédent)

$$\beta(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{3\lambda^2}{4\pi}} \frac{A}{\sqrt{\gamma}} u(\mathbf{r}) \sin(x) \quad (6.63)$$

Nous allons supposer par la suite que la longueur de Rayleigh est beaucoup plus grande que la longueur du milieu, ce qui est le cas dans notre expérience. La fonction des modes transverses  $u(\mathbf{r})$  ne dépend alors pas de la coordonnée longitudinale et toutes les intégrales se sépareront en une intégrale transverse et une intégrale longitudinale par la suite.

Le traitement de la structure transverse nous a montré que nous pouvons tenir compte d'une variation de l'intensité sur la largeur du milieu en intégrant la fonction de mode transverse sur le rayon du faisceau. Il paraît donc raisonnable de traiter la variation de l'intensité intracavité dans la direction de propagation du faisceau par une intégrale longitudinale.

Comme nous l'avons vu au paragraphe 6.2 de ce mémoire, les fluctuations quantiques sont entièrement décrites par la matrice des corrélations retardées  $G_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega])$  qui dépend dans le cas général de la position  $\mathbf{r}$  par l'intermédiaire du paramètre de saturation local  $|\beta(\mathbf{r})|^2$  (cf. équations (5.9) et (5.10) de l'article précédent)

$$G_\alpha^\beta(\mathbf{r}, [\omega]) = \sum_{k=0}^{\infty} G_\alpha^{\beta(k)}[\omega] |\beta(\mathbf{r})|^{2k} \quad (6.64)$$

où  $\beta(\mathbf{r})$  est donné par la relation 6.63.

La matrice de susceptibilité  $\bar{\chi}_\alpha^\beta[\omega]$  et la matrice des corrélations  $\bar{\sigma}_\alpha^\beta[\omega]$  sont ensuite calculées de la manière suivante

$$\bar{\chi}_\alpha^\beta[\omega] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i\xi_k \alpha^k X^k}{2\gamma} \left( G_\alpha^{\beta(k)}[\omega] - G_{3-\alpha}^{3-\beta(k)}[-\omega]^* \right) \quad (6.65)$$

$$\bar{\sigma}_\alpha^\beta[\omega] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i\xi_k \alpha^k X^k}{2\gamma} \left( G_\alpha^{\beta(k)}[\omega] + G_\alpha^{\beta(k)}[\omega]^* \right) \quad (6.66)$$

Le facteur  $\xi^k$  contient maintenant non seulement la partie correspondant à la variation de l'intensité due à la structure transverse  $\frac{2^k}{1+k}$ , mais aussi la moyenne sur l'onde stationnaire. Pour faire cette moyenne, nous avons introduit un nouveau facteur  $\alpha^k$  qui implique une redéfinition de l'intensité intracavité  $X$  afin de garder les mêmes valeurs pour les coefficients  $\xi_0$  et  $\xi_1$ . Ces définitions correspondent à la condition que la courbe de bistabilité ne soit pas changée dans la limite de faible saturation  $X \ll \delta^2$

$$\xi_k \alpha^k = \frac{4}{\pi} \frac{2^k}{1+k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(k+1)}(x) dx \quad (6.67)$$

L'intégrale longitudinale s'écrit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(k+1)}(x) dx = \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \frac{\pi}{2} \quad (6.68)$$

Nous trouvons donc l'expression

$$\xi_k \alpha^k = 2 \frac{2^k}{1+k} \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} \quad (6.69)$$

Dans la relation (6.67), nous avons introduit le facteur  $4/\pi$  afin d'imposer

$$\xi_0 = 1 \quad (6.70)$$

Cela revient à redéfinir le nombre effectif d'atomes (voir la section 6.3). Nous choisissons maintenant la valeur de  $\alpha$  de telle sorte que

$$\xi_1 \alpha = \frac{3}{8} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{8} \quad (6.71)$$

Comme pour les faisceaux gaussiens ceci est équivalent à une redéfinition de l'intensité effective, égale à la valeur moyenne spatiale de l'intensité. Il s'agit maintenant d'évaluer l'influence de cet effet sur la réduction du bruit. Nous ne considérons ici que le cas intéressant expérimentalement de faible saturation. Pour ce cas nous savons déjà par l'article précédent que la courbe de bistabilité et la matrice de susceptibilité sont très peu changées. L'effet principal de cette moyenne est donc d'augmenter les fluctuations propres des atomes. Nous allons estimer le changement de la matrice des corrélations en considérant les valeurs de  $\xi_k$  d'ordre plus élevé:

$$\xi_2 \alpha^2 = \frac{5}{24} \Rightarrow \xi_2 = \frac{40}{27} \simeq 1.48 \quad (6.72)$$

$$\xi_3 = \frac{35}{256} \Rightarrow \xi_3 = \frac{70}{27} \simeq 2.56 \quad (6.73)$$

Ces valeurs doivent être comparées aux valeurs correspondant à une onde gaussienne progressive qui sont

$$(\xi_2)_{\text{progressive}} = \frac{4}{3} \simeq 1.33 \quad (6.74)$$

$$(\xi_3)_{\text{progressive}} = 2 \quad (6.75)$$

On voit donc que la dégradation de la réduction du bruit est plus grande pour une onde stationnaire que pour une onde progressive. Toutefois, le changement des valeurs numériques de  $\xi_2$  et  $\xi_3$  ne conduira pas à une modification significative des résultats que nous avons obtenus. Dans la mesure où nous disposons de résultats analytiques à tous les ordres pour les ondes gaussiennes progressives nous conserverons par la suite les valeurs correspondant à ce cas.

#### 6.4.4 Conclusion

Dans ce paragraphe nous avons traité l'influence d'une variation spatiale de l'intensité intracavité. Dans l'article inséré, nous avons tout d'abord vu que la structure transverse du faisceau sonde peut changer les spectres de bruit quantique ainsi que la prédiction théorique de la réduction du bruit d'une manière importante. Dans tous les cas que nous avons étudiés, la structure transverse dégrade la réduction optimale du bruit. Cela est dû au fait que les matrices de susceptibilité et de corrélation sont moyennées par suite de la variation d'intensité sur le profil du faisceau laser. Rappelons pour mémoire que cette moyenne des fonctions de corrélation atomiques n'est pas une hypothèse faite a priori, mais une conséquence de la façon dont nous avons calculé l'interaction en projetant les champs émis par les atomes sur le mode gaussien fondamental.

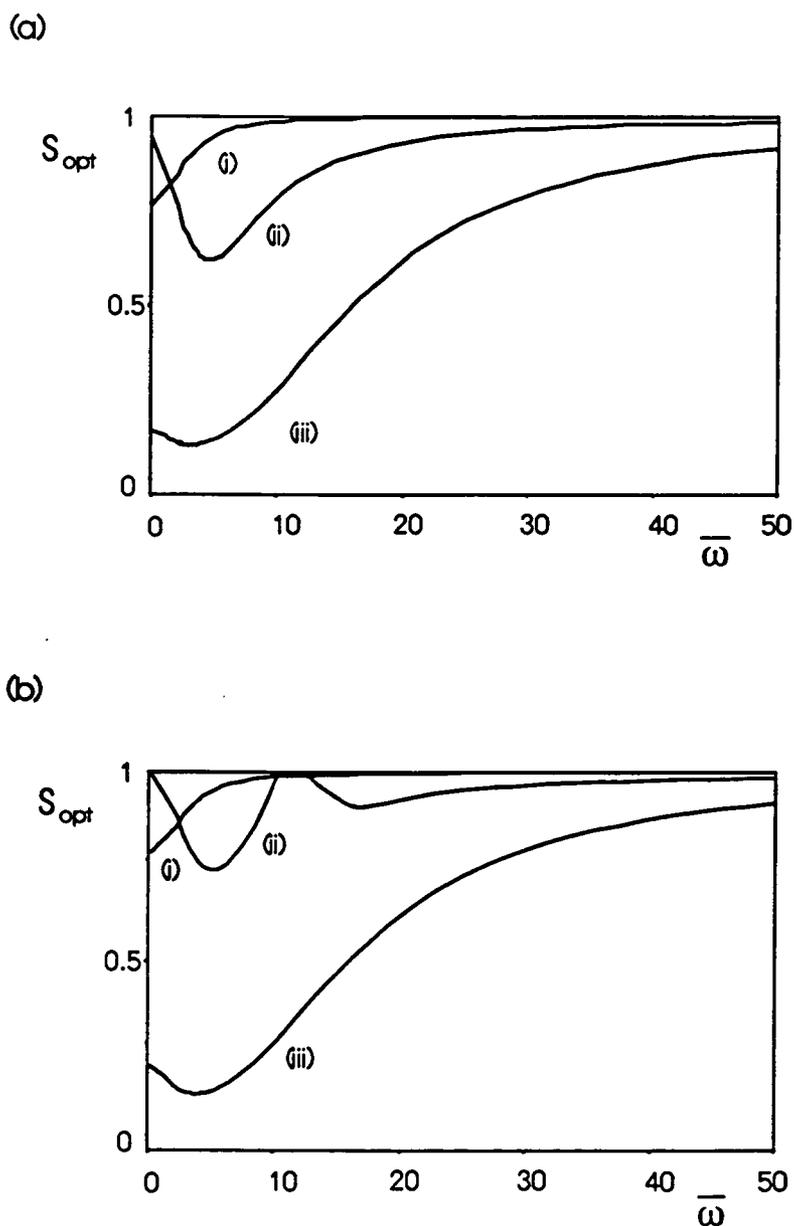
Nous avons pu déterminer une condition physique permettant de comparer les spectres calculés en modélisant le faisceau sonde par une onde plane aux spectres tenant compte de la structure gaussienne du faisceau. Cette condition implique une comparaison des spectres pour les mêmes valeurs moyennes de l'intensité intracavité, c'est à dire lorsque l'intensité intracavité normalisée du faisceau gaussien sur l'axe est deux fois plus grand que celle du faisceau "onde plane".

D'après ce raisonnement il est clair que les deux modèles ne coïncident plus dès qu'un milieu Kerr réel comme un ensemble d'atomes à deux niveaux est considéré. En faisant un développement des fonctions de susceptibilité et de corrélation en puissances de  $X$ , on s'aperçoit que les termes d'ordre  $X^2$  ou d'ordre plus élevé deviennent plus grands dans le modèle "onde gaussienne" que dans le modèle "onde plane". Toutefois, ces termes n'ont pas le même effet pour les fonctions de susceptibilité et de bruit. Dans la gamme de fréquence qui nous intéresse, c'est à dire pour les fréquences de bruit dans la raie centrale, la susceptibilité varie comme les valeurs moyennes. Cela correspond à une propriété générale de la méthode de la réponse linéaire qui veut que les susceptibilités à fréquence nulle soient liées aux dérivées des relations entre les valeurs

moyennes. Donc, les susceptibilités qui décrivent la transformation paramétrique du bruit dans la cavité, sont les mêmes dans les deux modèles tant que  $X \ll \delta^2$ . Ce n'est pas le cas pour les fonctions de corrélation décrivant le bruit ajouté par les atomes. Ces fonctions contiennent des termes d'ordre supérieur qui sont non négligeables en comparaison des termes Kerr, alors même que  $X \ll \delta^2$ . La condition pour que ces termes restent négligeables est beaucoup plus restrictive puisqu'elle s'écrit  $X^2 \ll C\delta$ .

Par conséquent, nous pouvons distinguer trois régimes différents en qui concerne la validité du modèle "onde plane": Dans la limite de très faible saturation  $X \ll \delta$ , l'effet de la structure transverse du faisceau sonde est négligeable pour la susceptibilité et la fonction de corrélation, donc également pour le spectre du bruit qui reste cependant proche de 1. Le modèle "onde plane" donne alors les mêmes prédictions que le modèle "onde gaussienne". Pour des intensités intracavité plus importantes  $\delta \leq X \ll \delta^2$ , la fonction de susceptibilité ainsi que la courbe de bistabilité sont peu changées. Le bruit propre des atomes est aussi peu changé dans le régime Kerr  $X^2 \ll C\delta$ , mais il augmente en dehors de ce régime. Dans ce dernier cas, la réduction du bruit quantique est moins favorable que celle qui est prédite par le modèle "onde plane". Celui-ci n'est donc pas valable dans toute la région  $X \ll \delta^2$ , mais seulement dans la limite Kerr. Enfin, pour des intensités intracavité très importantes  $X \gg \delta^2$ , ni la susceptibilité ni la fonction de corrélation ne sont correctement décrites par le modèle "onde plane".

Ces comportements apparaissent sur la figure 36 où nous avons tracé les prédictions pour le bruit minimal, quand la cavité est balayée à partir de la branche basse de la courbe de la bistabilité, en fonction de la fréquence d'observation, obtenues (a) par le modèle "onde plane" et (b) par le modèle "onde gaussienne" dans des régimes de paramètres différents. Nous voyons que dans la limite  $X < \delta$  (trace (i)) les deux modèles coïncident, mais la réduction du bruit reste faible. Pour une intensité intracavité plus élevée  $X^2 \simeq C\delta$  (trace (ii)) la réduction du bruit est mal décrite par le modèle "onde plane". C'est seulement dans la limite d'un milieu Kerr idéal (trace (iii)) que les prédictions du modèle "onde plane" redeviennent correctes pour une réduction du bruit appréciable. Il faut cependant noter que les expressions analytiques des fonctions atomiques fournies par le modèle "onde plane" restent incorrectes dans ce cas. Soulignons que les critères que nous avons obtenus pour la validité du modèle "onde plane" sont différents de ceux qui figurent dans les publications existantes [162, 164]. On peut remarquer que les modèles "onde plane" et "onde gaussienne" ne se recouvrent pas dans la limite d'une onde gaussienne avec un waist infini. Ceci est dû au fait que, quand on tient compte de la structure transverse du faisceau sonde, les fluctuations du vide dans les autres modes transverses entrent dans les fluctuations du champ dans le mode fondamental et ont tendance à dégrader la réduction du bruit.



**Fig. 36:** Comparaisons entre les modèles "onde plane" (a) et "onde gaussienne" (b). La largeur en fréquence de la cavité est fixée à  $\kappa/\gamma = 10$ , les autres paramètres sont changés pour étudier la validité du modèle "onde plane" dans différents régimes de paramètres (trace (i):  $X = 5, \delta = 10, \phi = 24.5, C = 150$ ; trace (ii):  $X = 20, \delta = 10, \phi = 6.2, C = 80$ ; trace (iii):  $X = 11350, \delta = 1000, \phi = 102.12, C = 52295$ ).

## 6.5 Limitations du modèle à deux niveaux

### 6.5.1 Introduction

Pour terminer cette partie théorique, nous allons maintenant tenir compte d'une manière qualitative du fait que le système à deux niveaux ne peut pas toujours être considéré comme un système fermé. Il existe dans l'expérience des perturbations qui sont dues au faisceau de repompage, ou aux faisceaux pièges dans le cas où ils ne sont pas coupés pendant la mesure.

Afin de prendre en compte cette situation, nous allons considérer un modèle d'atomes à plus de deux niveaux. Pour décrire au moins qualitativement les effets perturbateurs les plus importants pour l'expérience, il faudra considérer au minimum un atome à quatre niveaux. Les deux niveaux supplémentaires permettront de modéliser le départ de la population de la transition principale  $S_{1/2}, F = 4, m = 4 \rightarrow P_{3/2}, F' = 5, m' = 5$  par pompage optique et son retour après un certain temps. Nous considérerons que les processus de pompage optique pour le départ et le retour des atomes se font soit par une excitation très non résonnante, soit par une excitation incohérente. Dans ces conditions, les processus de pompage optique pourront être représentés par un modèle simplifié, avec seulement trois niveaux et deux taux de pompage  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .  $\Gamma_1$  décrira le taux de départ vers le troisième niveau et  $\Gamma_2$  le taux de retour.

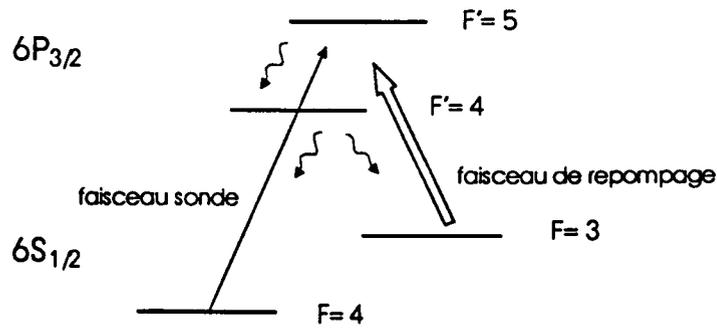
Les perturbations seront alors décrites essentiellement par des fluctuations du nombre effectif d'atomes couplés à la transition principale. On pourra les étudier en utilisant la technique mise au point pour traiter les fluctuations du nombre d'atomes dues à l'explosion du piège. Nous allons caractériser les fluctuations dues au pompage optique par leur fonction de corrélation et leur spectre de bruit. Comme nous l'avons vu au paragraphe 6.3, les grandeurs importantes pour évaluation de l'influence de ces fluctuations sur la réduction du bruit, sont la valeur au pic du spectre et sa largeur en fréquence. Dans ce paragraphe nous allons donc calculer le spectre de bruit des fluctuations dues à un processus de pompage optique et évaluer ces deux paramètres. Nous considérerons d'abord le cas du faisceau de repompage pour ensuite appliquer le résultat obtenu au cas des faisceaux pièges. Ce calcul nous permettra plus loin dans ce mémoire, d'estimer d'une manière qualitative l'influence du faisceau du repompage et des faisceaux pièges sur la réduction du bruit.

### 6.5.2 Perturbations liées au faisceau du repompage

Pour expliquer l'effet du faisceau de repompage, nous rappelons d'abord que dans le modèle à deux niveaux, les atomes sont excités de l'état fondamental  $6S_{1/2}, F = 4$  vers l'état excité  $6P_{3/2}, F' = 5$ . L'état excité étant l'état d'énergie la plus élevée d'un ensemble d'états hyperfins, une partie des atomes est également excitée dans l'état  $6P_{3/2}, F' = 4$  d'où il peuvent retomber vers l'état  $6S_{1/2}, F = 3$ . Le faisceau de repompage les ramène par une excitation incohérente vers les états excités  $6P_{3/2}, F' = 3$  ou  $6P_{3/2}, F' = 4$  à partir desquels ils retombent avec une certaine probabilité dans

l'état  $6S_{1/2}, F = 4$ . Le schéma des niveaux est dessiné sur la figure 37(a). Nous avons

(a)



(b)

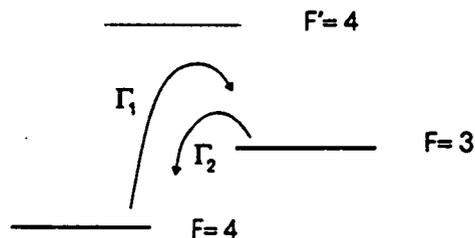


Fig. 37: Schéma des niveaux pour le faisceau repompeur (a) et schéma réduit (b).

simplifié ce schéma en supprimant l'état  $6P_{3/2}, F' = 3$  et en considérant que les atomes sont repompés seulement vers l'état excité intermédiaire  $6P_{3/2}, F' = 4$ .

Dans la mesure où le faisceau sonde est très non résonnant avec le niveau intermédiaire, nous pouvons éliminer adiabatiquement les cohérences et traiter ce processus comme un simple transfert de population vers le deuxième niveau fondamental  $6S_{1/2}, F = 3$ . Cela nous donne un premier taux de pompage que nous noterons  $\Gamma_1$ . Les atomes sont repompés du niveau fondamental  $F = 3$  vers la transition principale par une excitation incohérente de  $F = 3 \rightarrow F' = 4$  par le faisceau de repompage (voir paragraphe 3.3). On peut donc décrire ce processus, lui aussi, comme un pompage optique avec un taux de transfert  $\Gamma_2$  et considérer le schéma de niveaux réduit qui est indiqué sur la figure 37(b). Comme la transition principale est excitée en régime de faible saturation, la population de l'état excité reste petite. Nous allons donc encore simplifier le problème en la négligeant et en calculant les fluctuations du nombre effectif d'atomes couplés à la transition principale dans un modèle à deux niveaux, les deux états fondamentaux, et deux taux de pompage  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Dans ce modèle très simpli-

fié, les fluctuations du nombre d'atomes affectent les fluctuations quantiques dans la mesure où elles se traduisent en fluctuations du déphasage.

Dans ce chapitre, nous notons  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  les deux niveaux fondamentaux avec des populations

$$\hat{\Pi}_1 = |1\rangle\langle 1| \quad (6.76)$$

$$\hat{\Pi}_2 = |2\rangle\langle 2|$$

et des valeurs moyennes  $\pi_1$  et  $\pi_2$  respectivement. Le niveau  $|1\rangle$  correspond au niveau fondamental de la transition principale et le niveau  $|2\rangle$  au niveau fondamental supplémentaire. Nous considérons d'abord le comportement des valeurs moyennes avant de calculer les fluctuations. L'équation de transfert des populations entre les deux niveaux s'écrit pour les valeurs moyennes

$$\frac{d}{dt}\pi_1 = -\frac{d}{dt}\pi_2 = -\Gamma_1\pi_1 + \Gamma_2\pi_2 \quad (6.77)$$

L'état stationnaire est donné par

$$\Gamma_1\bar{\pi}_1 = \Gamma_2\bar{\pi}_2 = \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (6.78)$$

Nous avons utilisé  $\bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 = 1$ . Dans les conditions expérimentales, le repompage est optimisé pour que la plupart des atomes se trouvent dans l'état  $|1\rangle$ . Nous avons donc

$$\bar{\pi}_2 \ll \bar{\pi}_1 \quad (6.79)$$

ce qui suppose que les deux taux de pompage vérifient la condition  $\Gamma_2 \gg \Gamma_1$ .

Pour traiter maintenant les fluctuations induites par ce processus, nous considérons la variation temporelle des populations au lieu des populations elles mêmes. Nous définissons un opérateur  $\widehat{m}$  dont la valeur moyenne est la variation de la population de l'état  $|1\rangle$

$$\langle \widehat{m} \rangle = \frac{d}{dt}\pi_1 = -\Gamma_1\pi_1 + \Gamma_2\pi_2 \quad (6.80)$$

La valeur stationnaire de cet opérateur est:

$$\overline{\langle \widehat{m} \rangle} = 0 \quad (6.81)$$

Son évolution temporelle est alors donnée par l'équation

$$\frac{d}{dt}\widehat{m} = -(\Gamma_1 + \Gamma_2)\widehat{m} \quad (6.82)$$

dont la solution suit une loi exponentielle

$$\widehat{m}(t) = e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2) \cdot t} \cdot \widehat{m}(0) \quad (6.83)$$

D'après le théorème de régression quantique [165] , la fonction de corrélation  $C_{m,m}(t)$  suit la même variation temporelle:

$$C_{m,m}(t) = C_{m,m}(0) \cdot e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2) \cdot t} \quad (6.84)$$

Il nous reste à calculer la valeur de  $C_{m,m}(0)$  qui correspond à la variance de  $\widehat{m}$

$$C_{m,m}(0) = \langle \widehat{m}^2 \rangle - \langle \widehat{m} \rangle^2 \equiv \langle \widehat{m}^2 \rangle \quad (6.85)$$

où nous avons utilisé la propriété (6.81) de l'opérateur  $\widehat{m}$  pour déduire la deuxième relation. En tenons compte de la définition (6.80) de  $\widehat{m}$  cette variance s'écrit

$$C_{m,m}(0) = \Gamma_1^2 \langle \widehat{\Pi}_1^2 \rangle + \Gamma_2^2 \langle \widehat{\Pi}_2^2 \rangle - 2\Gamma_1\Gamma_2 \langle \widehat{\Pi}_1 \widehat{\Pi}_2 \rangle$$

Nous pouvons ensuite utiliser les propriétés suivantes

$$\widehat{\Pi}_1^2 = \widehat{\Pi}_1 \quad (6.86)$$

$$\widehat{\Pi}_2^2 = \widehat{\Pi}_2$$

$$\widehat{\Pi}_1 \widehat{\Pi}_2 = 0$$

afin de simplifier l'expression:

$$C_{m,m}(0) = \Gamma_1^2 \bar{\pi}_1 + \Gamma_2^2 \bar{\pi}_2 = \Gamma_1 \Gamma_2 \quad (6.87)$$

La fonction de corrélation pour un atome s'écrit alors

$$C_{m,m}(t) = \Gamma_1 \Gamma_2 \cdot e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2) \cdot t} \quad (6.88)$$

Qu'est-ce que cela nous apprend sur les fluctuations du nombre d'atomes? D'abord, les relations (6.86) nous permettent de tirer des conclusions sur leur statistique. Les variances des deux populations pour un seul atome sont données par

$$\langle \Delta \widehat{\Pi}_1^2 \rangle = \langle \Delta \widehat{\Pi}_2^2 \rangle = \pi_1 - \pi_1^2 = \pi_1 \pi_2 \quad (6.89)$$

Nous avons utilisé le fait que la variable  $\widehat{\Pi}_1 + \widehat{\Pi}_2 = 1$  n'a pas de fluctuations. Si nous considérons maintenant  $N$  atomes au lieu d'un seul, cette équation se généralise en ajoutant indépendamment les fluctuations correspondant à chaque atome:

$$\langle \Delta \widehat{N}_1^2 \rangle = \langle \Delta \widehat{N}_2^2 \rangle = N \bar{\pi}_1 \bar{\pi}_2 = N \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2} \quad (6.90)$$

Nous avons introduit les opérateurs collectifs du nombre d'atomes  $\widehat{N}_1$  et  $\widehat{N}_2$  dans l'état  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  respectivement, leur valeur moyennes  $\overline{N}_1 = N \overline{\pi}_1$  et  $\overline{N}_2 = N \overline{\pi}_2$ , où  $N$  est le nombre total d'atomes  $N = \overline{N}_1 + \overline{N}_2$ . Nous pouvons remarquer que ce résultat correspond exactement à une statistique binomiale. Si nous écrivons maintenant les valeurs moyennes de ces variables:

$$\overline{N}_1 = N \overline{\pi}_1 = N \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (6.91)$$

$$\overline{N}_2 = N \overline{\pi}_2 = N \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$$

nous obtenons les relations

$$\frac{\langle \Delta \widehat{N}_1^2 \rangle}{\overline{N}_1} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (6.92)$$

$$\frac{\langle \Delta \widehat{N}_2^2 \rangle}{\overline{N}_2} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$$

En utilisant la condition (6.79) nous déduisons que la variable  $N_2$  a une statistique quasi-poissonienne

$$\langle \Delta \widehat{N}_2^2 \rangle \simeq \overline{N}_2 \quad (6.93)$$

tandis que la variable  $N_1$  a une statistique très subpoissonienne

$$\langle \Delta \widehat{N}_1^2 \rangle \ll \overline{N}_1 \quad (6.94)$$

Ce résultat est bien connu pour toute loi binomiale dans la limite où une des variables à une valeur moyenne négligeable devant l'autre.

Nous calculons maintenant la fonction de corrélation  $C_{N_1, N_1}(t)$  en fonction de  $C_{m, m}(t)$ . En écrivant  $N_1$  en fonction de  $m$  et du nombre total d'atomes  $N$

$$N_1 = \frac{N\Gamma_2 - Nm}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (6.95)$$

nous voyons que la relation entre les deux fonctions de corrélations est donnée par

$$C_{N_1, N_1}(t) = \frac{N}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2} \cdot C_{m, m}(t) \quad (6.96)$$

soit

$$C_{N_1, N_1}(t) = N \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2} \cdot e^{-(\Gamma_1 + \Gamma_2) \cdot t} \quad (6.97)$$

Le spectre de bruit correspond à la transformée de Fourier de la fonction de corrélation d'après la définition (5.36) du paragraphe 5.3.2 et est donné par une lorentzienne

$$S_{N_1, N_1}[\omega] = N \frac{2\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \cdot \frac{1}{\omega^2 + (\Gamma_1 + \Gamma_2)^2} \quad (6.98)$$

Les grandeurs caractéristiques dont nous avons besoin sont sa valeur maximum ( $\omega = 0$ )

$$S_{N_1, N_1}[0] = N \frac{2\Gamma_1\Gamma_2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^3} \quad (6.99)$$

et la largeur de la lorentzienne ( $\Gamma_1 + \Gamma_2$ ). La valeur au pic du spectre peut être transformée d'après l'équation (6.2) du paragraphe 6.3.2 en une valeur maximale des fluctuations de désaccord  $\nu_\phi$  de

$$S_{\nu_\phi \nu_\phi}[0] = \left( \frac{3\lambda^2}{4\pi S} \right)^2 \frac{N}{(\delta\tau_c)^2} \frac{2\Gamma_1\Gamma_2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^3} \quad (6.100)$$

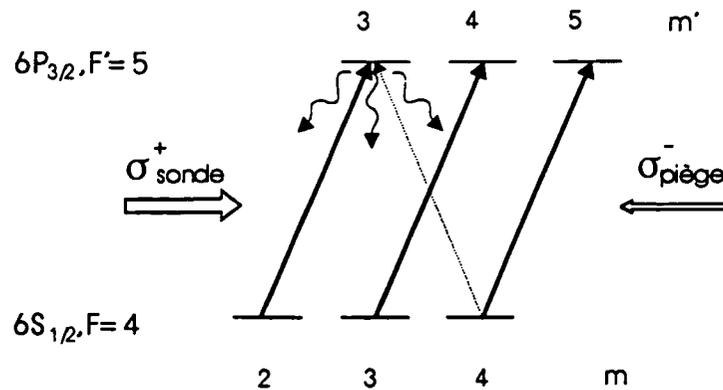
Cette valeur doit être comparée à la largeur  $\kappa$  de la cavité pour estimer l'influence de cet excès de bruit sur la réduction du bruit. Ces estimations seront présentées dans le chapitre 7 de ce mémoire. On peut ici se contenter de remarquer que cette valeur pic est essentiellement déterminée par deux facteurs:

$$S_{\nu_\phi \nu_\phi}[0] = \frac{N}{(\delta\tau_c)^2} \frac{1}{\Gamma_2} \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \quad (6.101)$$

Le premier  $1/\Gamma_2$  représente l'effet de la largeur du spectre (de l'ordre de  $\Gamma_2$  puisque  $\Gamma_1 \ll \Gamma_2$ ); le second  $\Gamma_1/\Gamma_2$  est le facteur de réduction du bruit lié au caractère très subpoissonien de la statistique de la variable  $N_1$ .

### 6.5.3 Perturbations liées aux faisceaux pièges

Nous allons maintenant considérer la perturbation due aux faisceaux pièges dans le cas où ceux-ci ne sont pas coupés. La situation se présente différemment que pour le faisceau de repompage, mais elle pourra être traitée qualitativement d'une manière analogue. Le schéma des niveaux est indiqué sur la figure 38. Ayant des polarisations circulaires, les faisceaux pièges transfèrent des atomes de la transition hyperfine  $F = 4, m = 4 \rightarrow F' = 5, m' = 5$  en question vers d'autres niveaux Zeeman, en particulier vers les niveaux  $F' = 5, m' = 3$  et 4. De ce niveau les atomes peuvent retomber vers les niveaux  $F = 4, m = 2, 3, 4$  à partir desquels le faisceau sonde produit un repompage vers la transition principale. Dans la mesure où la population des niveaux excités reste faible, ce processus peut être décrit par des équations de pompage sans tenir compte de l'évolution des cohérences. Nous pouvons donc représenter ce processus par le même schéma des niveaux simplifié que nous avons déjà utilisé pour décrire l'effet du faisceau de repompage. Dans ce cas, les deux taux de transition  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont donnés par les taux de pompage des faisceaux pièges et du faisceau sonde respectivement. Nous



**Fig. 38:** Schéma des niveaux pour les faisceaux pièges. Le schéma réduit est le même que dans le cas du faisceau repompeur.

obtenons le même spectre de bruit pour les fluctuations dues au pompage optique par les faisceaux pièges que par le faisceau de repompage. Seuls les taux de transfert sont modifiés. L'approximation de ce processus par un effet purement destructif pour la réduction du bruit est un peu pessimiste dans le cas des faisceaux pièges, car elle néglige le fait que les autres paires de transitions  $m \rightarrow m+1$  peuvent également produire une réduction du bruit. Néanmoins, l'approximation sera suffisante pour estimer d'une manière qualitative la réduction du bruit attendu en présence des faisceaux pièges.

### 6.5.4 Conclusion

Dans cette dernière partie théorique, nous avons généralisé les résultats du traitement des fluctuations du nombre d'atomes que nous avons effectué dans le cas d'une variation du nombre moyen dans le faisceau sonde au début de ce chapitre, à une situation plus générale où le nombre d'atomes fluctue à cause des processus de pompage optique. Ces considérations tiennent compte du fait que notre système a deux niveaux n'est pas strictement fermé à cause des perturbations dues à la présence d'un faisceau repompeur ou des faisceaux pièges. Nous avons vu que dans une bonne approximation en ce qui concerne notre expérience, le pompage optique produit par ces deux types de faisceaux peut être décrit en supposant un taux de départ  $\Gamma_1$  et un taux de retour  $\Gamma_2$ . Cela conduit à des équations simples de transfert de population, grâce auxquelles nous avons pu déduire la fonction de corrélation et donc le spectre de bruit pour les fluctuations du nombre d'atomes. La largeur du spectre ainsi que sa valeur du pic sont entièrement déterminées par les taux de pompage optique des processus. Bien que les schémas de niveaux soient différents dans le cas du faisceau de repompage et dans le cas des faisceaux pièges, les deux effets produisent un changement de la population effective dans la transition "à deux niveaux" dont les fluctuations peuvent être modélisées par le même type de spectre de bruit, mais avec des taux de pompage  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  différents. Avec ces arguments qualitatifs, nous allons non seulement pouvoir estimer le degré d'excès de bruit produit par les deux effets, mais aussi les fréquences pour

---

lesquelles l'excès de bruit est important. Nous pourrions ainsi discuter qualitativement leur influence sur la réduction du bruit.

## 7 Synthèse des résultats

### 7.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre du mémoire, nous allons rassembler les résultats expérimentaux et notre traitement théorique afin d'interpréter les spectres obtenus. Nous disposons maintenant d'un traitement des fluctuations quantiques beaucoup mieux adapté à notre expérience. Nous tenons compte de la variation du nombre d'atomes au cours du temps, de la structure transverse du faisceau sonde et nous pouvons également estimer qualitativement l'influence du faisceau de repompage sur la réduction du bruit.

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté des expressions analytiques pour la variation temporelle du nombre moyen d'atomes dans le faisceau. Nous allons maintenant comparer ces prédictions théoriques aux mesures expérimentales du paramètre de coopérativité et donc du nombre d'atomes dans le faisceau sonde que nous avons effectuées. Ensuite, nous allons inclure cette variation dans les calculs des spectres du bruit et pouvoir remplacer l'approximation exponentielle qui nous avait servi pour l'interprétation préliminaire présentée dans la reproduction de l'article "Cold atoms: A new medium for quantum optics" dans le chapitre 5. Nous avons également vu que les fluctuations de ce même nombre d'atomes sont négligeables dans la gamme de fréquences importante pour notre expérience, car la largeur spectrale de leurs fluctuations est de l'ordre de quelques kHz et donc trop étroite pour produire un effet à une fréquence de l'ordre du MHz. Avec le même raisonnement, nous trouverons que l'effet du repompeur est également restreint aux basses fréquences du spectre de bruit et donc négligeable à notre fréquence d'observation typique.

La structure transverse du faisceau en revanche, dégrade le squeezing optimal par rapport aux estimations faites par le modèle "onde plane". Comme nous travaillons toujours dans la limite faible saturation et non pas à des fortes intensités intracavité, cette dégradation reste limitée à quelques pourcents. Elle n'est pourtant pas négligeable et nous devons en tenir compte pour l'interprétation théorique des résultats expérimentaux.

Nous allons d'abord expliquer en détail la modélisation améliorée des résultats expérimentaux. Ensuite, nous présenterons de nouveaux spectres de squeezing obtenus en coupant le piège pendant la mesure. Nous avons aussi observé une réduction du bruit quantique en présence du piège en utilisant des faisceaux pièges d'une puissance très faible. Un résumé de ces résultats nouveaux ainsi que le fit théorique des spectres de

bruit en absence du piège seront présentés dans la reproduction de l'article "Squeezing with laser cooled atoms". A la fin de ce chapitre nous allons expliquer d'une manière qualitative l'influence des processus perturbateurs dans notre système. Nous allons en particulier estimer l'effet du faisceau de repompage et des faisceaux pièges sur la réduction du bruit en utilisant le modèle développé au paragraphe 6.5 du chapitre 6.

## 7.2 Présentation des spectres théoriques et expérimentaux

### 7.2.1 Ajustement théorique

Comme nous l'avons vu au chapitre 6.3, la variation du nombre moyen d'atomes dans le faisceau sonde dans le cas le plus général est décrit par le produit d'une lorentzienne qui modélise le vol balistique des atomes avec une exponentielle qui tient compte de l'effet de la gravité. Le paramètre de coopérativité qui est la grandeur que nous mesurons dans l'expérience a une variation donnée par

$$C(t) = C(0) \frac{\tau_r^2}{\tau_r^2 + t^2} \cdot \exp\left(-\frac{t^4}{\tau_g^2(\tau_r^2 + t^2)}\right) \quad (7.1)$$

si nous supposons que la longueur de Rayleigh est beaucoup plus grande que le rayon du faisceau sonde, ce qui est le cas pour notre dispositif expérimental.  $C(0)$  représente la valeur de la coopérativité immédiatement après la coupure. Les deux constantes de temps  $\tau_r$  et  $\tau_g$  dépendent de la température  $T_{\text{piège}}$  par l'intermédiaire de la vitesse moyenne des atomes dans le piège  $\sigma_v = \sqrt{kT_{\text{piège}}/m}$ . Le temps balistique  $\tau_r$  dépend aussi de la taille du nuage atomique de rayon  $\sigma_r$

$$\tau_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_v} \quad (7.2)$$

Le temps de chute  $\tau_g$  dépend pour sa part du champ de pesanteur  $g$ :

$$\tau_g = \frac{2\sqrt{2}\sigma_v}{g} \quad (7.3)$$

Ces deux échelles de temps correspondent respectivement au temps caractéristique de la diminution lente du nombre d'atomes dans le faisceau sonde et au temps typique pour lequel l'effet de la gravité devient important. Pour ajuster la courbe théorique et le résultat expérimental, nous disposons donc de deux paramètres "libres", la taille du piège et sa température. La coopérativité à l'instant de la coupure  $C(0)$  ne change que la hauteur de la courbe, mais pas son allure en fonction du temps. Ces paramètres ne sont libres que dans des domaines limités. La taille du nuage atomique dans l'expérience est comprise entre environ  $4\text{mm} \leq \sigma_r \leq 6\text{mm}$ . Nous supposons que la température du piège varie entre  $3\text{mK} \leq T_{\text{piège}} \leq 8\text{mK}$ , ce qui est compatible avec le nombre d'atomes piégés d'après l'équation (3.1) du chapitre 3. Les temps caractéristiques de la variation sont

donc compris entre  $5\text{ms} \leq \tau_r \leq 20\text{ms}$  et  $100\text{ms} \leq \tau_g \leq 200\text{ms}$ . Nous allons présenter le résultat de cette procédure dans la reproduction d'article suivant.

Pour modéliser le spectre de bruit avec cette variation du nombre d'atomes, nous remplaçons le paramètre de coopérativité fixe qui apparaît dans l'équation de bistabilité (6.18) et dans la matrice de diffusion (6.52) par la fonction  $C(t)$  définie plus haut. Nous estimons que les valeurs de l'intensité incidente  $Y$  et de l'intensité intracavité  $X$  ainsi que du désaccord  $\delta$  du faisceau sonde et de la largeur de la cavité sont connues à  $\pm 10\%$ , en raison de l'incertitude de leur mesure. Le seul paramètre que nous ne pouvons pas mesurer directement est le déphasage de la cavité  $\phi$  pour lequel nous ne disposons d'aucune information. Nous l'ajustons de telle manière que le signal de bruit correspondant s'étende sur la même plage temporelle que et le spectre du bruit mesuré. Afin de réaliser les mêmes conditions que dans l'expérience, nous procédons au calcul de la coopérativité lorsque les atomes s'échappent du piège. La variation de  $C(t)$  conduit alors la variation du déphasage en fonction du temps. Nous choisissons ensuite la valeur du déphasage de la cavité à l'origine qui permet de reproduire au mieux les spectres du bruit minimal et maximal.

Pour tenir compte des imperfections de la détection, nous avons tracé le bruit minimal et maximal avec un rendement quantique total de 90%, évalué en considérant le rendement quantique des détecteurs ainsi que les pertes sur le faisceau sonde et l'accommodation de modes limitée du faisceau sonde à la cavité. Les comparaisons entre les spectres théoriques et expérimentaux ainsi obtenus sont présentées dans la reproduction de l'article suivant.

### 7.2.2 Reproduction de l'article "Squeezing with cold atoms", (soumis à Phys. Rev. Lett.)

## Squeezing with cold atoms

A. Lambrecht, T. Coudreau, A.M. Steinberg and E. Giacobino,  
Laboratoire Kastler Brossel, UPMC, ENS et CNRS,  
Université Pierre et Marie Curie, case 74,  
F75252 Paris, France

### Abstract

Cold atoms from a magneto-optic trap have been used as a nonlinear ( $\chi^{(3)}$ ) medium in a nearly resonant cavity. Squeezing in a probe beam passing through the cavity was demonstrated. The measured noise reduction is 40% for free atoms and 20% for weakly trapped atoms.

**PACS:** 32.80.Pj; 42.50.Lc; 42.65.Pc

## 1 Introduction

Soon after the first implementations of magneto-optic traps [1, 2], the strong nonlinear properties of laser cooled atoms were recognized. It was shown that a probe beam going through the cloud of cold atoms could experience gain due to Raman transitions involving the trapping beams [3, 4]. When the atoms are placed in a resonant optical cavity, laser action corresponding to that gain feature was demonstrated [5]. On the other hand, when cold atoms are driven by a slightly detuned probe laser beam inside an optical cavity, bistability is very easily observed at very low light powers [6]. This high nonlinear dispersion comes from the fact that, since the atoms are virtually motionless, the Doppler width is smaller than the natural linewidth and the probe frequency can be set close to atomic resonance.

Such nonlinear behavior indicates that the system is capable of significantly modifying the quantum fluctuations of the probe beam, a feature that is well known to allow squeezing. The generation of quadrature squeezed

light through interaction with atomic media has been the subject of several theoretical studies and looked particularly promising in the absence of significant Doppler broadening[7, 8, 9]. All experiments to date were performed on atomic beams, where the transverse Doppler effect is small but often not completely negligible[10, 11, 12]. In this paper we report quantum noise reduction in a probe beam that has interacted with cold atoms in an optical cavity. Quadrature squeezing as large as 40% was measured at the output of the cavity. This value is the largest ever measured in an atomic medium. The squeezing was first observed in a free cloud, just after the trapping beams were turned off. It was also observed in a weakly bound trap with trapping beams turned down by a factor of 10 as compared to the original trap. The measured quantum noise is in good agreement with the theoretical predictions calculated with the experimental parameters. The Gaussian transverse structure of the laser beam was fully accounted for.

In contrast to atomic beams, cold atoms constitute a well controlled medium, where theoretical models can in principle be fully tested against experimental results, including realistic conditions such as the Gaussian character of the laser beam and spurious noise sources like atomic number fluctuations. In such conditions one should be able to fully understand the squeezing spectra and to interpret why quantum noise reduction using atomic beams has never reached the high expectations predicted by the models.

Furthermore, in light of the rapid development of atom-cooling technology, it is conceivable that a set-up of this type be constructed on a much smaller scale, relying exclusively on diode lasers. This could lead to the realization of a compact and efficient quantum “noise eater.”

## 2 Experimental set-up

The experimental set-up used to demonstrate squeezing with laser cooled atoms placed in an optical cavity has been described in detail elsewhere [13]. Here, we will only recall its main features. We investigate the phenomenon by sending a circularly polarized probe beam into a resonant optical cavity containing cold atoms. The atoms are cooled and trapped in a magneto-optic trap, operating in the standard way [1, 2], with three orthogonal circularly polarized trapping beams generated by a Ti:Sapphire laser and an inhomogeneous magnetic field. The trapping Ti:Sapphire laser is detuned by 3 times

the linewidth of the upper state on the low frequency side of the  $6S_{1/2}$ ,  $F = 4$  to  $6P_{3/2}$ ,  $F = 5$  transition. With large and rather intense beams, we obtain a cloud of 1cm in diameter, with densities of the order of  $10^9$  atoms/cm<sup>3</sup>. The temperature of the cesium atoms is of the order of some mK. The number of trapped atoms interacting with the probe beam, which is the relevant parameter in the experiment, is measured with a method described below.

The cavity is a 25cm-long linear cavity, with a waist of  $260\mu\text{m}$ , built around the cell (Fig.1). Losses due to the two AR coated windows are of the order of 1%. The input mirror has a transmission coefficient of 10%, the end mirror is a highly reflecting mirror. The cavity is thus close to the "bad cavity" case, where the linewidth of the cavity (5MHz) is larger than that of the atomic linewidth ( $\gamma = 2.6\text{MHz}$ ). This is the case for which the theoretically predicted squeezing is the best. The cavity is in the symmetry plane of the trap, making a  $45^\circ$  angle with the two trapping beams that propagate in this plane. The probe beam, generated by the same laser, can be detuned by 0 to 130MHz on either side of the  $6S_{1/2}$ ,  $F = 4$  to  $6P_{3/2}$ ,  $F = 5$  atomic transition. We can measure the power of the probe beam transmitted through the cavity with a photodiode located behind the end mirror.

The field reflected from the cavity is separated by an optical circulator, made of a polarizing beamsplitter and of a quarter-wave plate. The probe beam going out of the cavity is mixed with a local oscillator beam with an intensity about 100 times larger than the probe beam using the second input port of the same beamsplitter. At the output of the beamsplitter, the signal and the local oscillator beams are aligned and have orthogonal polarizations. A half-wave plate and a second polarizing beamsplitter are used to split the signal and the local oscillators in two equal parts which are then detected by photodiodes the quantum efficiency of which is 96%. The total efficiency of the homodyne detection is of the order of 90%. The ac parts of the photodiode currents are amplified and subtracted. The resulting signal is further amplified and sent to a spectrum analyzer and to a computer.

### 3 Mean fields

When the cavity length is scanned through resonance, bistability is easily observed with incident (extra-cavity) powers as low as a few  $\mu\text{W}$ , as soon as the number  $N$  of atoms in the probe beam is large enough. The cooperativity

parameter  $C$  ( $C = g^2 N / \gamma T$ , where  $g$  is the atom-light coupling coefficient,  $\gamma$  is the radiative linewidth of the transition and  $T$  is the energy transmission coefficient of the mirror) is measured by two different methods relying respectively on the linear phase shift and the nonlinear effect due to the atoms in the cavity.

The linear phase shift  $\phi_L = 2C/\delta$  (where  $\delta$  is the atomic detuning normalized to the radiative linewidth) is obtained by measuring the shift of the cavity resonance  $\Delta\omega = \kappa\phi_L$  when the atomic cloud is present ( $\kappa$  is the cavity linewidth). This method implies that the cavity resonance frequency must be measured in the presence of atoms and in their absence, that is at different times. It is thus subject to errors coming from drifts in the cavity length.

The cooperativity can also be measured from the ratio between the amplitudes of the bistability curve and of the resonance curve of the empty cavity, using the ratio between the maximum of the intracavity intensity on the upper branch and the intracavity intensity for the empty cavity, which can be calculated from the theory of two-level atom bistability. This method was used in most cooperativity measurements.

Both methods give comparable results, on the order of 100 in the presence of trapping beams. It should be noted that the atoms are also partially saturated by the trapping beams, and that the measured  $C$  value corresponds not to the total number of atoms, but roughly to the number of ground-state atoms minus the number of excited-state atoms.

The fluorescence emitted by the atoms excited by the trapping beams constitutes a source of excess noise for the experiment, which decreases the amount of quantum noise reduction attainable in principle. To avoid this effect, we turn off the trapping beams during the noise measurements. This method has the disadvantage that the available measurement time is limited to 20 to 30ms, due to the expansion and the free fall of the atomic cloud.

On the other hand, when the trapping beams are turned off, self-pulsing oscillations are observed around the bistability switching points. These instabilities, which were shown to arise from a competition between optical pumping by the circularly polarized probe beam and saturation of the optical transition [14], must be suppressed for the observation of quantum noise reduction. This was achieved by preparing the system before the measurements in an appropriate way : the atoms were prepumped into the high  $m_F$  sublevels by an auxiliary beam and the trapping field gradient was turned off while a driving field in the direction of the probe beam was turned on.

Moreover, the instabilities are the strongest for rather high values of the  $C$  parameter (200 to 300), whereas the most favorable values of  $C$  for squeezing range around 100.

When the trapping beams are turned off, the variation of the refractive index due to the escape of the atoms out of the probe beam provides a natural scan of the cavity across the resonance. In this way, the resonance peak is scanned in about 10ms. However, under these conditions, it is clear that the  $C$  value is no longer constant over the scan and it becomes necessary to adopt a specific model of its time-dependence in order to interpret the curves.

A model for the variation of  $C$  with time can be obtained by calculating the variation of the linear phase shift caused by an expanding and falling ensemble of atoms in a Gaussian laser beam [15]. If one assumes that the Rayleigh length of the beam is much larger than its waist and that the beam waist is small compared to the atomic cloud size, the variation of  $C(t)$  is given by the product of a Lorentzian function that represents the ballistic flight of the atoms by an exponential function that accounts for the effect of gravity

$$C(t) = C(0) \frac{\tau_r^2}{\tau_r^2 + t^2} \exp\left(-\frac{t^4}{\tau_g^2(\tau_r^2 + t^2)}\right) \quad (1)$$

where  $C(0)$  is the cooperativity value right after the trapping beams are turned off; the time constant  $\tau_r = \sigma_r/\sigma_v$  is the time for the atoms with temperature  $T$  and with mean velocity  $\sigma_v = \sqrt{kT/m}$  to fly through the cloud of radius  $\sigma_r$ , and  $\tau_g = 2\sqrt{2}\sigma_v/g$  is the time it takes for the falling atoms to accelerate to  $2\sqrt{2}$  times their original thermal velocity.

To check this model, the cooperativity was experimentally studied as a function of time. For this we performed a series of experiments where the cloud was released at various values of the geometrical cavity length. In each experiment, the intensity at the output of the cavity was recorded as a function of time, as the the escape of the atoms scanned the cavity across resonance. The only point where the cooperativity is measurable is the maximum of the resonance curve, as described above. When the length of the cavity is varied, this maximum occurs at different time delays after the release, which allowed us to reconstruct the curve giving the cooperativity as a function of time.

This experimental curve can then be fitted by the theoretical expression

given above. The fit allows one to determine the parameters  $C(0)$ ,  $\tau_r$  and  $\tau_g$ . The time constants are related to the size of the trap and the temperature of the atoms. Such an experimental curve and its theoretical fit are shown in Fig.2. The corresponding cloud radius and temperature are 4mm and 5mK. The rather large value of the temperature is linked to the values of the trap parameters that have been chosen to provide a large number of trapped atoms. It can be seen that the fit is very good; the model thus provides a reliable interpretation of the phase scan of the cavity due to the escape of the atoms and will be used for the fit of the noise spectra with the theoretical predictions.

## 4 Noise measurements

The fluctuations of the field going out of the cavity are monitored with the detection system described above at a fixed analysis frequency. This frequency is chosen to be 5MHz, which is of the order of the cavity linewidth, and for which squeezing is expected to occur. The cavity is scanned across resonance by the escape of the atoms and at the same time, the phase of the local oscillator is rapidly varied with a piezoelectric transducer in order to explore all the noise quadratures of the probe beam.

When the cavity is close to resonance, the presence of the nonlinear medium manifests itself by a phase dependent noise. The oscillations that can be seen on the spectrum shown in Fig.3 correspond to the variation of this phase dependent noise between its maximum and minimum values. Squeezing is manifest on the left hand side of the curve, on the lower branch of the bistability curve.

Detection of squeezing during the rather narrow time slot in which the atoms stay in the beam is a non-trivial problem. Since we have 20 – 30 milliseconds to perform the measurement, the phase of the local oscillator must be scanned at frequencies of the order of a kHz. To record a spectrum the bandwidth of the spectrum analyzer has consequently to be chosen equal to or larger than 100kHz. On the other hand squeezing is quite sensitive to the observation frequency, thus a bandwidth larger than 3MHz has to be avoided not to average out the effect. The bandwidth of the video filter of the spectrum analyzer, which is a simple low-pass filter that extracts the signal from high frequency noise, should be adjusted to avoid any distortion of the

spectrum. As the filter of our spectrum analyzer (Tektronix 2753 P) did not have enough flexibility, we had to use numerical filters in the processing of the spectrum.

The spectrum shown in Fig.3 was obtained in such conditions. The averaged shot noise level (determined by blocking the cavity) is indicated by the straight line. It can be seen that the noise on the left hand side of the figure, when the cavity is out of resonance, is at shot noise, whereas it goes below shot noise on the lower branch of the bistability curve. The observed squeezing is  $(40 \pm 10)\%$ . On the upper branch (right hand part of the figure), a large excess noise is observed in some quadratures. The powers of the probe laser and local oscillator were  $25\mu\text{W}$  and  $9\text{mW}$ , the detuning from atomic resonance was  $52\text{MHz}$ , i.e. 20 times the atomic linewidth, on the red side of the atomic resonance. The bistability parameter  $C$  was found to be 220 right after turning off the trapping beams. The error bar for the squeezing measurement is due to the width of the random noise of the signal which is generated within the measurement system itself. This random noise varies inversely with the mean noise level and is estimated from the shot noise level to be  $\pm 10\%$  at the minimum of Fig.3. The variation of the transmitted field reproduced in the insert of Fig.3 shows that the system is slightly below the bistability threshold. Squeezing was already observed in such conditions by other authors [11].

In a second series of experiment, we have looked for quantum noise reduction in the presence of the trapping beams. As mentioned above, the trapping beams with full power produce too much excess noise to allow observation of squeezing. However, we have been able to find a compromise by first trapping the atoms from the vapor with laser beams having the full power, and then turning down the trapping beams to about  $1/10$  of their original power. In such conditions, the cooperativity parameter is of the order of 20. The noise spectrum shown in Fig.4 is recorded in similar conditions as above (detuning equal to 20 times the atomic linewidth and incident power of the probe beam equal to  $16\mu\text{W}$ ) except that the cavity is scanned by means of a piezoelectric transducer. The best value for squeezing obtained in such conditions is of the order of  $20\%$  ( $\pm 10\%$ ).

Here, quantum noise reduction appears on the upper branch of the bistability curve. An interesting feature of the present result is that the steep edge on the left hand side of the bistability curve observed on the mean field (upper trace in Fig.4) is due to the optical pumping process, rather than to

the saturation which is responsible for squeezing. Indeed the two processes that can lead to bistability, saturation of the optical transition and optical pumping, are easily distinguished by their sign. The saturation of the optical transition causes a decrease of the magnitude of the index of refraction, whereas the optical pumping increases it, because it brings all the atoms into the sublevels that have the highest coupling coefficient with the light. Thus the bistability curves due to the two processes have steep edges on opposite sides. In the case shown in Fig.4, the left hand side of the bistability curve can be unambiguously attributed to optical pumping. If the intensity of the probe beam is increased, the dominant phenomenon becomes the saturation of the atomic transition [14] and the steep edge changes sides.

Squeezing is reproducibly observed only in the range of parameters where the bistability curve originates from optical pumping. However, squeezing is still linked to the saturation of a two-level transition and the observed features can be interpreted as a consequence of the dynamical processes that take place in the cavity. As the cavity length is scanned, light from the probe beam enters the cavity and pumps the atoms towards the sublevels with the highest  $m_F$ . At that stage, saturation of the atomic transition starts to take place, and this non-linearity is at the origin of squeezing in the output field. As was shown in [14], the instabilities that can be seen on the right hand side of the curve (after the region where the squeezing occurs) come from a competition between optical pumping, which is not fully completed here, and the saturation of the atomic transition.

## 5 Interpretation of the squeezing spectra

The experimental spectra have been compared with the theoretical predictions given by the two-level atom model derived from ref.[16]. The measured experimental parameters are included in the model, which takes into account the Gaussian character of the beam in a complete way. It is actually shown in ref.[16] that the plane wave approximation is not valid in the range of experimentally obtainable saturation parameters where large squeezing appears. This conclusion is independent of the size of the beam waist. The minimal and maximal quantum noise were calculated in conditions reproducing those of the experiments, i.e. by including the variation in time of the cooperativity as represented in Fig.2. The overall detection efficiency of

the system  $\eta = 90\%$  is also included. The resulting spectra are shown by the broken lines in Fig.3. It can be seen that the agreement between theory and experiment is satisfactory.

As far as the squeezing in the presence of trapping beams is concerned, one can calculate the value of the squeezing from the same two-level atom theory. The expected quantum noise reduction is then 20%, in good agreement with the observed value. This rather lower value of the squeezing comes from the lower value of the cooperativity, which is only of the order of 20 in this experiment.

We have evaluated the potential effect of spurious noise sources in the experiments. In the experiment with free atoms, the excess noise due to the atomic number fluctuations in the cold atom cloud in the process of expanding and of falling [15] was shown to have a spectrum peaked at frequencies that are too low to affect the noise measurements at 1MHz. Additional causes of excess noise are the repumping laser and the weak trapping beams in the second experiment. Their effects have been evaluated with a calculation based on the atomic number fluctuations they produce. It shows that in the studied frequency range, the excess noise can also be neglected for the rather low powers that are used in the repumping beam and in the trapping beams.

This study shows that cold atoms provide a very interesting medium for quantum optics. The measured squeezing is higher than those observed in previous atomic experiments. One of the difficulties of our first set of experiments, in which the trapping beams had to be turned off during the noise measurements, is avoided in the second kind of experiments. It should be possible to go further by working with cold trapped atoms that do not interact at all with the trapping beams. for example, by using a “dark SPOT” set-up[17].

## References

- [1] E. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, D. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631, (1987)
- [2] C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, C. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1571 (1990)
- [3] D. Grison, B. Lounis, C. Salomon, J.Y. Courtois, G. Grynberg, *Europhys. Lett.* **15**, 149 (1991)
- [4] J. Tabosa, G. Chen, Z. Hu, R. Lee, H.J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3254 (1991)
- [5] L. Hilico, C. Fabre, E. Giacobino, *Europhys. Lett.* **18**, 685 (1992)
- [6] E. Giacobino, J.M. Courty, C. Fabre, L. Hilico, A. Lambrecht, in "Fundamental of Quantum optics III", ed.F. Elhlotzky Springer-Verlag (1993)
- [7] F. Castelli, L.A. Lugiato, M. Vadamchino, *Nuovo Cimento* **B10** 183 (1988)
- [8] M. D. Reid *Phys. Rev.* **A37**, 4792 (1988)
- [9] L. Hilico, C. Fabre, S. Reynaud, E. Giacobino, *Phys. Rev.* **A46**, 4397 (1992)
- [10] M. G. Raizen, L.A. Orozco, Min Xiao, T.L. Boyd, H.J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 198 (1987)
- [11] D.M. Hope, H.A. Bachor, P.J. Mansen, D.E. McLelland, P.T.H. Fisk *Phys. Rev.* **A46**. R1181 (1992)
- [12] Ph. Grangier, J.Ph. Poizat, P. Grelu, F. Castelli, L.A. Lugiato, A. Sinatra, *J. Mod. Opt.* **41**. 2241 (1994)

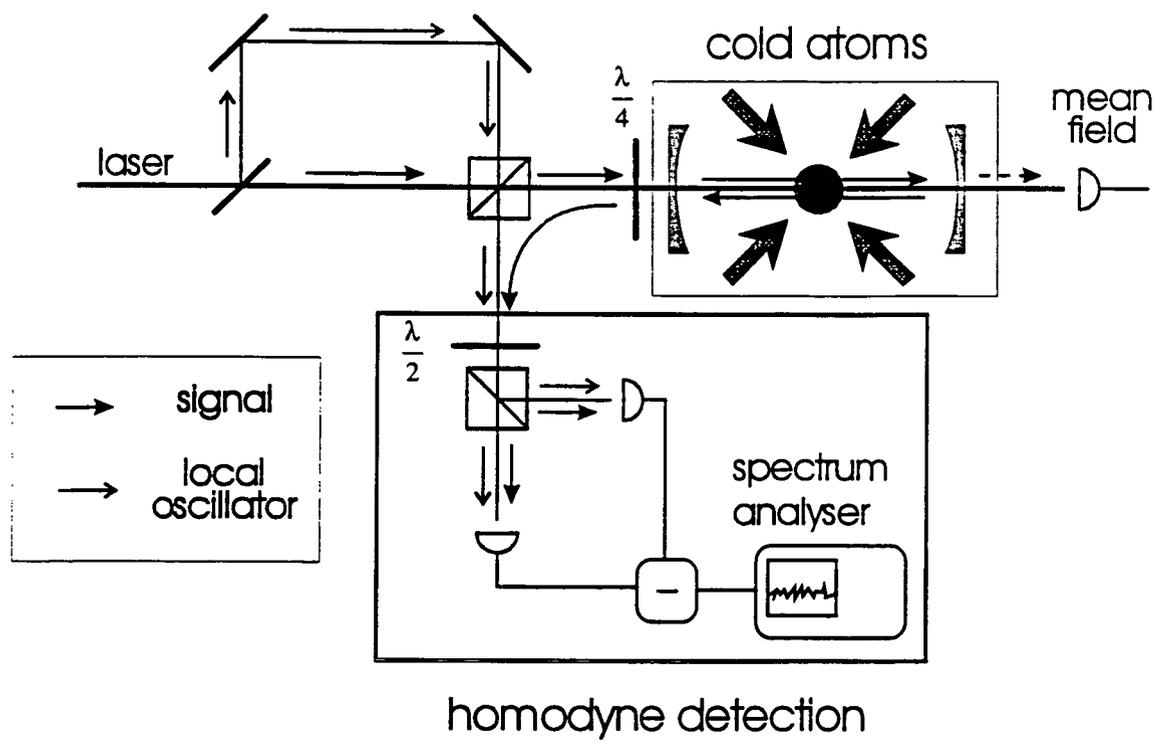
- 
- [13] A. Lambrecht, J.M. Courty, S. Reynaud, E. Giacobino, *Appl. Phys.* **B60**, 129 (1995)
  - [14] A. Lambrecht, E. Giacobino, J.M. Courty, *Opt.Comm.* **115**, 199 (1995)
  - [15] A. Lambrecht, E. Giacobino, S. Reynaud, “Atomic number fluctuations in a falling cold atom cloud” preprint.
  - [16] A. Lambrecht, J.M. Courty, S. Reynaud, “Effect of transverse structure on squeezing with two-level atoms” preprint
  - [17] W. Ketterle, K.B. Davis, M.A. Joffre, A. Martin, D.E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2253 (1993)

**Figure 1:** Experimental set-up designed to study the quantum fluctuations of a probe beam that has interacted with laser cooled atoms in a single-ended cavity. PBS, polarizing beamsplitter; QWP, quarterwave plate; HWP, halfwave plate; PD, photodiode.

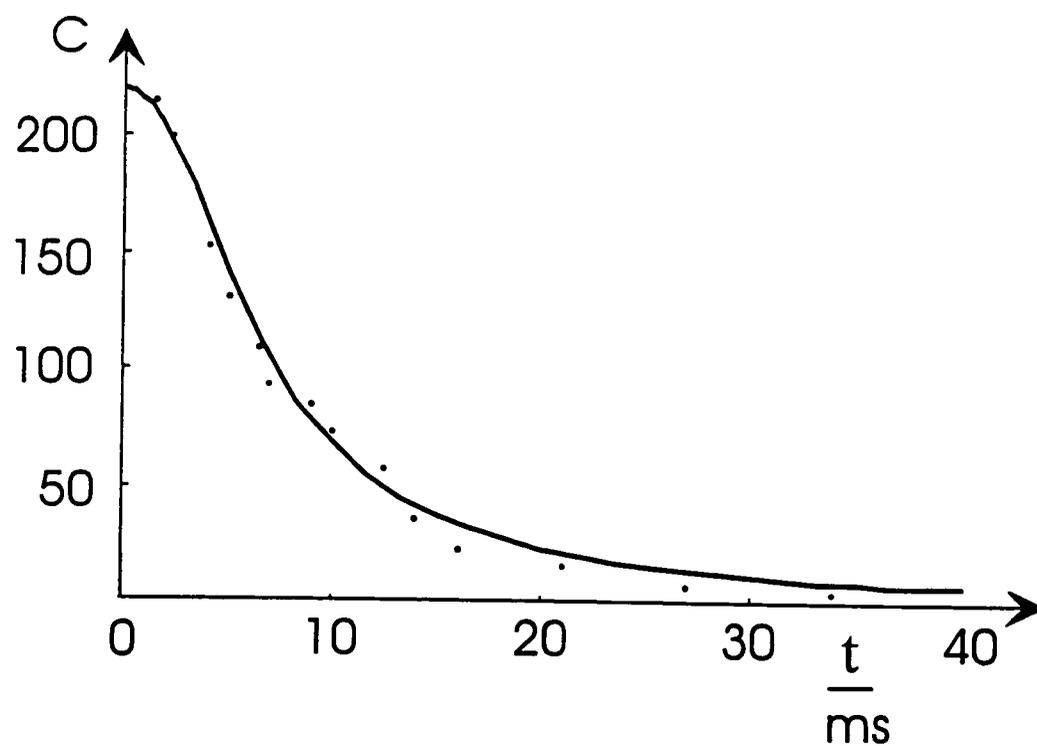
**Figure 2:** Time dependence of the cooperativity parameter  $C$  as the cloud of cold atoms is released at  $t = 0$ . The dots correspond to experiments as described in the text, the curves are derived from Eq.(1).

**Figure 3:** Noise spectrum taken with free atoms. This recording shows the noise measured with the homodyne detection at a fixed frequency of 5MHz, as a function of time, while the cavity optical length is swept by the atoms escaping from the beam and the phase of the local oscillator is modulated rapidly. The solid horizontal line indicates the shot noise level. The broken lines correspond to the theoretical prediction for the minimal and maximal noise. The error bar is due to the width of the noise trace. This uncertainty is proportional to the noise level, and was estimated from its shot noise level to be  $\pm 10\%$  at the minimum of the displayed curve. The experimental parameters are atomic detuning: 55MHz to the red, probe beam power:  $25\mu\text{W}$ . The insert shows the corresponding variation of the mean intracavity intensity.

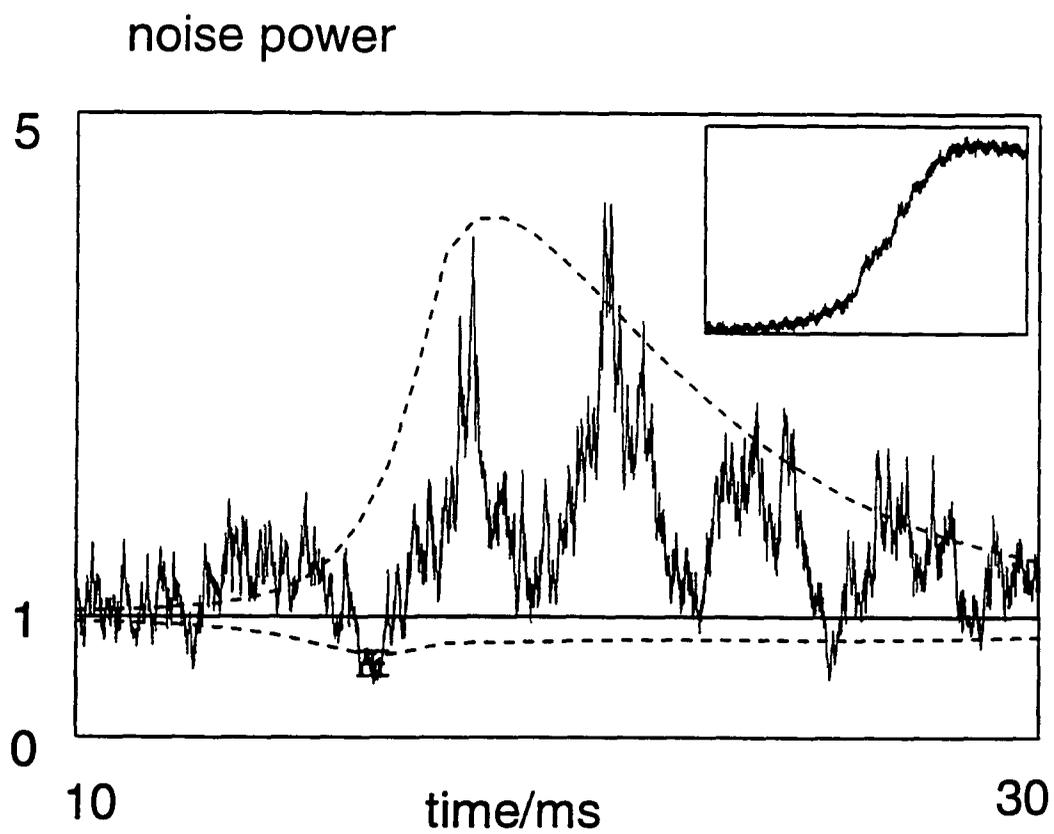
**Figure 4:** Noise spectrum (lower trace) taken with weakly trapped atoms. This recording shows the noise measured at a fixed frequency of 5MHz, as a function of time, while the cavity length is swept with a piezoelectric transducer and the phase of the local oscillator is modulated rapidly. The solid horizontal line indicates the shot noise level. The error bar is determined as in Fig.3. The upper trace shows the corresponding variation of the mean intracavity intensity.



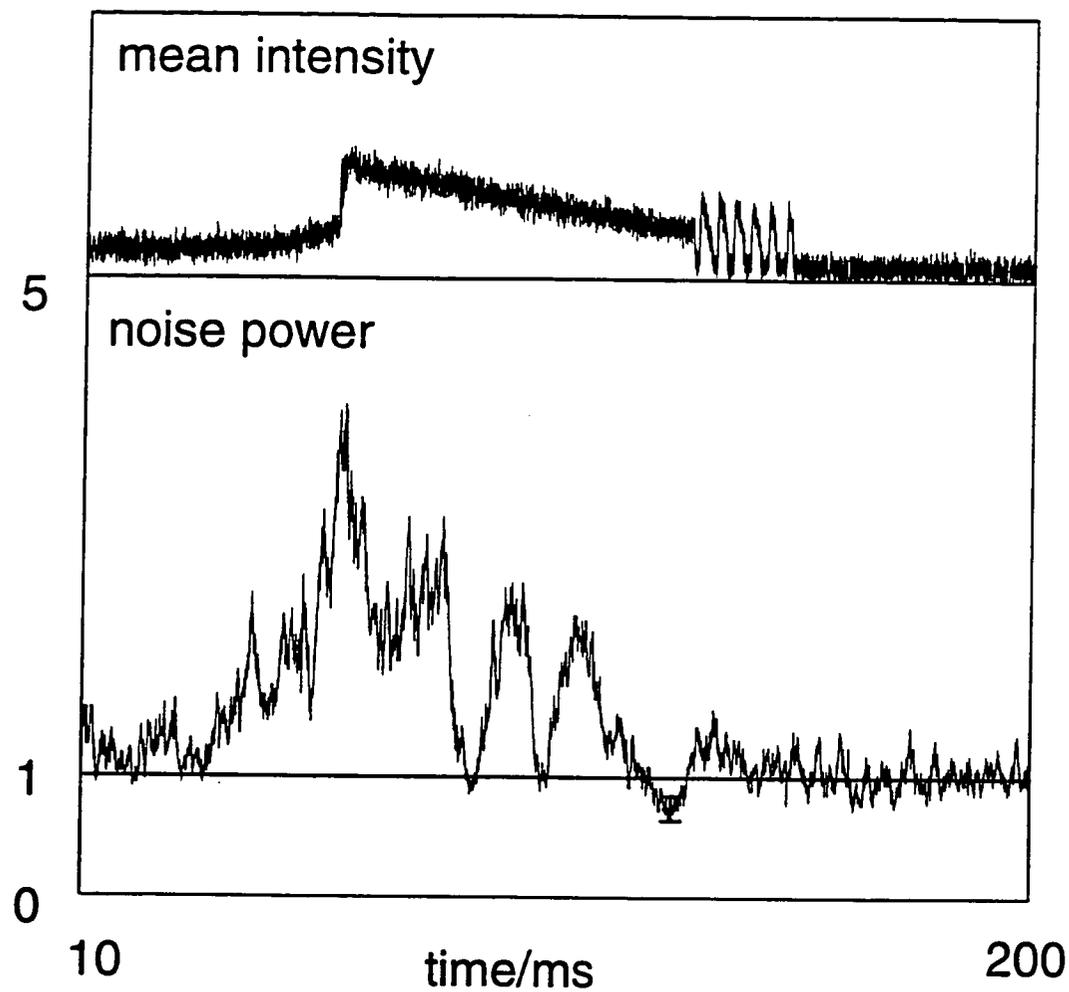
A. Lambrecht et al.: Squeezing with cold atoms  
Figure 1



A. Lambrecht et al.: Squeezing with cold atoms  
Figure 2



A. Lambrecht et al.: Squeezing with cold atoms  
Figure 3



A. Lambrecht et al.: Squeezing with cold atoms  
Figure 4

### 7.2.3 Influence du faisceau de repompage

Comme nous l'avons déjà expliqué en détail au paragraphe 6.5, l'effet du faisceau de repompage sur notre système à deux niveaux peut être modélisé par un processus de pompage optique entre le niveau fondamental de la transition principale  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5$  et un niveau hyperfin supplémentaire, vers lequel une partie de la population dans la transition principale est pompée par le faisceau sonde. En effet, celui-ci excite aussi, avec un taux faible  $\Gamma_1$ , la transition  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 4$ . De ce niveau les atomes peuvent tomber dans l'état supplémentaire correspondant au niveau  $6S_{1/2}, F = 3$ , à partir duquel ils sont repompés par un faisceau auxiliaire vers l'état fondamental principal par l'intermédiaire d'un autre état excité que nous négligeons ici. Ce dernier transfert est caractérisé par un taux de pompage  $\Gamma_2$ , qui est nettement plus grand que  $\Gamma_1$ . Les fluctuations du nombre d'atomes produites par ce processus se traduisent en fluctuations du déphasage de la cavité qui peuvent avoir une influence sur la réduction du bruit. Cet excès de bruit est caractérisé par son spectre. Pour évaluer son influence sur la réduction du bruit, nous devons comparer la valeur au pic du spectre et sa largeur en fréquence à la largeur de la cavité  $\kappa$  ( $\kappa/2\pi \simeq 5\text{MHz}$ ). D'après la relation (6.100) du paragraphe 6.5, la valeur au pic est donnée par

$$S_{\nu_\phi\nu_\phi}[0] = \left(\frac{3\lambda^2}{4\pi S}\right)^2 \frac{N}{(\delta\tau_c)^2} \frac{2\Gamma_1\Gamma_2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^3} \quad (7.4)$$

où  $\delta$  est le désaccord du faisceau sonde pour la transition principale,  $\tau_c$  le temps pour un aller-retour dans la cavité,  $\lambda$  la longueur d'onde du faisceau,  $S$  sa surface et  $N$  le nombre d'atomes interagissant avec le faisceau sonde. La largeur du spectre est donnée par  $\Gamma_1 + \Gamma_2$ . Le taux de pompage  $\Gamma_1$  est déterminé par le produit entre la probabilité  $p_{4-4}$  d'une excitation de la transition  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 4$  et la probabilité d'une déexcitation  $p_{4-3}$  via la transition  $6P_{3/2}, F' = 4 \rightarrow 6S_{1/2}, F = 3$

$$\Gamma_1 = p_{4-4} \cdot p_{4-3} \cdot \Gamma \quad (7.5)$$

où  $\Gamma$  est comme habituellement la largeur naturelle de l'état excité. Le premier de ces termes est donné par

$$p_{4-4} = \frac{d_{4,4}^2 \delta_{4,5}^2}{\delta_{4,4}^2 d_{4,5}^2} \quad (7.6)$$

où  $d_{i,j}$  et  $\delta_{i,j}$  notent respectivement l'élément de dipôle et le désaccord pour la transition en question. Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 4.7 du chapitre 4 de ce mémoire, les éléments de dipôle obéissent  $d_{4,4}^2 \simeq 0.5 \cdot d_{4,5}^2$ , pour le désaccord  $\delta_{4,4}$  nous trouvons une valeur  $\delta_{4,4} \simeq 77$  pour  $\delta_{4,5} \equiv \delta = 20$ . Cela donne une probabilité de 1:30 d'exciter la transition  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 4$ . La probabilité d'une déexcitation vers le niveau  $6S_{1/2}, F = 3$  est déterminée par le rapport entre le coefficient Clebsch-

Gordan  $c_{4,3}^2$  et celui pour l'autre voie de déexcitation  $c_{4,4}^2$ . Nous trouvons qu'un atome tombe 5 fois sur 12 dans l'état  $F = 3$ <sup>1</sup>. Le premier taux de pompage vaut alors

$$\frac{\Gamma_1}{2\pi} \simeq \frac{1}{30} \frac{5}{12} \frac{\Gamma}{2\pi} \simeq 70\text{kHz} \quad (7.7)$$

Par ailleurs la valeur du deuxième taux de pompage est de l'ordre de

$$\frac{\Gamma_2}{2\pi} \simeq \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{2\pi} \simeq 2.6\text{MHz} \quad (7.8)$$

car le faisceau du repompage est ajusté de manière qu'il y ait un nombre maximal d'atomes dans le piège. La largeur du spectre est alors déterminée par  $\Gamma_2$  et augmente à environ 2.6MHz. Notons que la largeur du spectre est du même ordre que la largeur de la cavité.

En revanche, nous trouvons pour un paramètre de coopérativité de  $C = 100$ , une valeur au pic du spectre de

$$\frac{S_{\nu_\phi\nu_\phi}[0]}{2\pi} \simeq 4\text{Hz} \quad (7.9)$$

ce qui est cinq ordres de grandeur plus petit que la largeur de la cavité. Bien que la largeur du spectre de l'excès de bruit dû au pompage optique par le faisceau de repompage soit comparable à la largeur de la cavité, et puisse donc a priori avoir une influence sur la réduction du bruit, les fluctuations du déphasage dues à ce processus sont tout à fait négligeables même à fréquence nulle. Nous estimons donc que ce processus ne peut pas dégrader la réduction du bruit d'une façon importante.

#### 7.2.4 Réduction du bruit en présence du piège

Comme nous l'avons expliqué dans la présentation de l'article, nous avons non seulement observé une réduction du bruit quantique en coupant le piège et en laissant fuir les atomes, mais aussi en présence des faisceaux pièges et du champ magnétique. Pour cette mesure, les faisceaux pièges étaient d'une puissance très faible, de l'ordre de 2 mW/cm<sup>2</sup> pour l'ensemble des trois bras. Ceci correspond à un paramètre de saturation de l'ordre de

$$s_{\text{piege}} = \frac{I_{\text{piege}}}{I_{\text{sat}}} \frac{1}{\delta_{\text{piege}}^2} \simeq 0.03 \quad (7.10)$$

à un désaccord de  $\delta_{\text{piege}} = \Delta_{\text{piege}}/\gamma \simeq 6$ . Nous avons mesuré un paramètre de coopérativité de  $C = 20$  par la méthode de mesure de la phase linéaire (voir l'Appendice I). Le spectre sur lequel apparaît une réduction du bruit de l'ordre de 20%  $\pm$  10% (figure 4 de l'article) a été pris pour une intensité du faisceau sonde de 16  $\mu\text{W}$ , avec un désaccord de  $\delta = 20$ . Pour ces valeurs des paramètres, nous pouvons nous attendre à une réduction du bruit de l'ordre de 15 – 20% en absence des faisceaux pièges d'après le traitement théorique développé au paragraphe 6.4. Cette valeur de la réduction du

<sup>1</sup> Pour une liste des coefficients Clebsch-Gordan, voir l'Appendice IV.

bruit est essentiellement limitée par la valeur faible du paramètre de la coopérativité. Une particularité intéressante est que, pour ces paramètres, nous observons une courbe de bistabilité qui n'est pas due à la saturation de la transition atomique, mais au processus du pompage optique entre les sous-niveaux Zeeman. Le sens de bistabilité change si nous augmentons l'intensité intracavité. Entre les deux régions de bistabilité, nous observons un régime de fortes instabilités, probablement dues à la compétition entre la saturation et le pompage optique. Néanmoins, la situation est plus compliquée à cause de la présence des faisceaux pièges.

Nous allons essayer de donner une première explication de la réduction du bruit en présence des faisceaux pièges en utilisant le modèle qualitatif que nous avons présenté au chapitre 6.5. Dans cette approximation, les faisceaux pièges sont traités comme une perturbation, ce qui paraît raisonnable si leur paramètre de saturation (7.10) est négligeable devant la saturation par le faisceau sonde  $X/\delta^2$ . Leur effet principal consiste en un processus de pompage optique, qui transfère une partie de la population de la transition principale  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5$  vers un niveau Zeeman supplémentaire avec un taux de pompage  $\Gamma_1$  qui dépend de la saturation de la transition par les faisceaux pièges. La population est ensuite retransférée par pompage optique dû au faisceau sonde vers la transition principale avec un taux de pompage  $\Gamma_2$  qui, lui, dépend du paramètre de saturation pour le faisceau sonde. Comme déjà montré dans le cas du faisceau repompeur, ce processus conduit à des fluctuations qui se traduisent en fluctuations du déphasage de la cavité qui, elles, produisent un excès de bruit dont le spectre est caractérisé par les deux taux de pompage. Dans ce raisonnement qualitatif nous avons négligé le fait que le niveau supplémentaire fait partie d'une autre transition à deux niveaux qui pourrait également produire une réduction du bruit. Pour évaluer l'effet de l'excès de bruit sur la réduction du bruit, nous devons comparer la valeur au pic du spectre (cf. relation (7.4)) et sa largeur en fréquence  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  avec la largeur de la cavité.

Pour un paramètre de saturation de  $s_{\text{piège}} \simeq 0.03$  pour les faisceaux pièges et de  $s \simeq 0.2$  pour le faisceau sonde, nous trouvons deux taux de pompage

$$\frac{\Gamma_1}{2\pi} = s_{\text{piège}} \frac{\Gamma}{2\pi} \simeq 130\text{kHz} \quad (7.11)$$

$$\frac{\Gamma_2}{2\pi} = s \cdot \frac{\Gamma}{2\pi} \simeq 1\text{MHz}$$

La largeur du spectre est alors essentiellement déterminée par le taux de pompage plus important,  $\Gamma_2$  ici, et est avec 1MHz du même ordre que la largeur de la cavité, mais toujours plus petite. La valeur au pic correspond à

$$\frac{S_{\nu_\phi\nu_\phi}[0]}{2\pi} \simeq 7\text{Hz} \quad (7.12)$$

pour un nombre d'atomes  $N \simeq 2 \cdot 10^6$ , correspondant à un paramètre de coopérativité  $C \simeq 20$ . Cette valeur au pic est négligeable devant la largeur de la cavité, ce qui assure

que les fluctuations du nombre d'atomes dues au pompage optique ne produisent de l'excès de bruit qu'aux fréquences caractéristiques de leur spectre. Il n'y a donc pas de génération du bruit multiplicatif pour ce processus et son influence est limitée aux fréquences inférieures à 1MHz, ce qui est plus petit que notre fréquence d'observation. De plus, l'excès de bruit est sur toute cette gamme de fréquences négligeable devant la largeur de la cavité, ce qui peut expliquer que ce processus perturbateur ne détruit pas la réduction du bruit à notre fréquence d'observation. Pour que ce raisonnement qualitatif soit valable, il est indispensable que le processus reste une perturbation et qu'en particulier le paramètre de saturation des faisceaux pièges soient nettement inférieur au paramètre de saturation du faisceau sonde. Notons que le régime de paramètres pour lequel nous pouvons nous attendre à une réduction du bruit en présence des faisceaux pièges d'après ce raisonnement est très limité. D'une part, la puissance des faisceaux doit être assez élevée pour fournir un nombre d'atomes suffisant afin de produire un effet non linéaire qui peut conduire à une réduction du bruit observable. A ce propos, un paramètre de coopérativité  $C \simeq 20$  constitue presque la limite inférieure pour une réduction du bruit. D'autre part, les faisceaux pièges doivent être suffisamment faibles afin de ne pas trop perturber la transition principale.

Dans un fonctionnement normal du piège avec une puissance des faisceaux pièges d'au moins  $15 \text{ mW/cm}^2$ , notre raisonnement n'est plus valable car la saturation de la transition par les faisceaux pièges est tout à fait comparable à la saturation par le faisceau sonde. Néanmoins il paraît raisonnable de penser que dans une situation où l'influence des faisceaux pièges ne peut plus être traitée comme une perturbation, la réduction du bruit sera sérieusement dégradée par leur présence. Des réponses précises à ce sujet nécessiteraient pourtant un traitement complet d'un système atomique d'au moins quatre niveaux.

### 7.3 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons effectué une synthèse de l'ensemble des résultats théoriques et expérimentaux. Le résultat expérimental principal qui a été présenté dans le chapitre 5 consiste en une réduction du bruit quantique via la bistabilité de  $40\% \pm 10\%$ . Nous avons ensuite cherché à comparer ces résultats aux prédictions théoriques. Pour rapprocher la théorie de la situation expérimentale, nous avons amélioré la modélisation de la variation du nombre d'atomes dans le faisceau sonde pendant la mesure en utilisant des expressions analytiques développées dans ce but. Les courbes théoriques du nombre moyen d'atomes interagissant avec la sonde ainsi obtenues reproduisent particulièrement bien les mesures du paramètre de coopérativité en fonction du temps. Nous soulignons ici que cette méthode peut être utilisée aussi pour mesurer la température du piège qui est un des deux paramètres libres pour ajuster l'allure de la courbe  $C(t)$ . Dans ce cas, il faut mesurer d'une manière précise non seulement la coopérativité en fonction du temps, mais aussi le deuxième paramètre qui caractérise

la variation, à savoir la taille du piège. On peut ensuite déduire de l'allure de la courbe la température des atomes dans le piège.

Nous nous sommes ensuite servis de ces expressions pour calculer les spectres du bruit théoriques pour notre choix de paramètres expérimentaux. Comme le modèle "onde plane" est insuffisant dans cette région des paramètres expérimentaux, nous avons modélisé notre système par un ensemble d'atomes à deux niveaux interagissant avec un faisceau sonde gaussien. Par rapport à l'ajustement préliminaire fait avec le modèle "onde plane", les prédictions pour une réduction du bruit se sont dégradées de 5 à 10% dépendant des paramètres, ce qui est un changement relativement faible parce que l'expérience a été effectuée dans la limite d'une faible saturation. L'accord entre l'allure des spectres théoriques et expérimentaux pour le bruit minimal et maximal est très satisfaisant, d'autant plus que *tous* les paramètres sont fixés dans des limites assez restreintes et qu'il n'y a aucun paramètre librement ajustable.

Nous avons ensuite estimé l'influence du faisceau de repompage sur la réduction du bruit. Avec les arguments qualitatifs développés au chapitre 6.5, nous avons montré que les fluctuations du déphasage induites par des fluctuations du nombre d'atomes dues au pompage optique par le faisceau de repompage sont négligeables sur toute la gamme de fréquence de leur spectre et en particulier à notre fréquence d'observation. Nous avons pu en déduire que pour nos conditions expérimentales, la dégradation de la réduction du bruit par ce processus est négligeable.

En plus de l'observation d'une réduction du bruit de 40% en absence du piège, nous avons aussi obtenu des spectres qui mettent en évidence une réduction du bruit en présence du piège. Cette mesure nécessite des faisceaux pièges d'une puissance très faible, ce qui conduit également à des valeurs faibles du paramètre de coopérativité, au maximum de  $C = 20$ . Dans de telles conditions, nous avons trouvé une réduction du bruit de  $20\% \pm 10\%$ . C'est essentiellement la faible coopérativité qui limite la réduction du bruit dans ce cas. Afin d'essayer d'expliquer ce phénomène d'une manière qualitative, nous avons analysé qualitativement la modification de la réduction du bruit en présence d'une perturbation due au pompage optique. Nous avons pu montrer que la dégradation de la réduction du bruit est faible à la fréquence d'observation du bruit si les faisceaux pièges sont très peu saturants. L'excès de bruit produit par des faisceaux pièges n'est important qu'aux fréquences plus basses que notre fréquence d'observation et sa valeur est négligeable. Cependant, afin de comprendre ce processus en détail, un traitement plus élaboré serait nécessaire qui permettrait aussi de modéliser le changement du sens de la courbe de bistabilité. Pour tenir compte du pompage optique effectué par les faisceaux pièges ainsi que par le faisceau sonde, un tel traitement devrait contenir au moins quatre niveaux.

## 8 Conclusions et perspectives

L'étude des atomes froids comme nouveau milieu non linéaire nous a conduit à de nombreux résultats en partie inattendus. Le résultat le plus significatif, qui était l'objectif principal de l'expérience, est la mise en évidence d'une réduction du bruit de l'ordre de 40% en quadrature. Il s'agit d'une réduction du bruit par un système bistable composé d'un nuage atomique froid à l'intérieur d'une cavité à une entrée-sortie. Notre expérience constitue donc une première réalisation d'un "mangeur de bruit quantique". Nous pouvons comparer ce résultat avec ceux des trois autres expériences de réduction du bruit via la bistabilité qui ont été réalisées précédemment, avec un jet atomique [39, 104, 105] plutôt qu'un nuage d'atomes froids. La valeur de notre résultat de  $40\% \pm 10\%$  de réduction du bruit *mesurée* est supérieure à celle des observations précédentes (20%). De plus, la valeur de la réduction du bruit que nous avons observée correspond bien aux prédictions théoriques pour les valeurs des paramètres expérimentaux.

Nous avons également pu observer une réduction du bruit de  $20 \pm 10\%$  en présence des faisceaux pièges, dans la limite où ceux-ci saturent très peu la transition atomique.

Avant d'arriver à ces résultats, l'expérience est passée par des étapes difficiles dans lesquelles nous avons rencontré divers problèmes qu'il a fallu résoudre. D'abord, la perturbation du système bistable par la présence des faisceaux pièges nous a conduits à couper le piège pendant la mesure du bruit. C'est à cette occasion que nous avons observé des oscillations de relaxation sur l'intensité intracavité dues à une compétition entre la saturation de la transition et le pompage optique, tous les deux provoqués par le faisceau sonde. Ce phénomène constituait une difficulté considérable provoquant un excès de bruit important sur les fluctuations du faisceau sonde, empêchant ainsi l'observation d'une réduction du bruit. L'étude des instabilités nous a non seulement permis de trouver l'origine de ce phénomène, mais aussi d'arriver à une compréhension plus profonde des processus en jeu dans notre système. Connaissant l'origine des instabilités, nous avons pu prendre des précautions afin de les éviter et d'éliminer leurs effets néfastes.

Grâce à la coupure du piège, nous sommes arrivés à une situation où le dispositif expérimental est devenu plus proche du modèle théorique. Néanmoins, cette procédure a entraîné une deuxième difficulté pour l'observation du signal du bruit. L'explosion et la chute libre du nuage atomique conduit à une variation du nombre d'atomes dans le faisceau sonde au cours du temps. Cet effet est si important que nous avons pu l'utiliser pour balayer la cavité sur la résonance. Par conséquent, nous avons étudié la réduction

du bruit avec un signal qui dépend du temps, ce qui est une situation inhabituelle pour ce genre d'étude.

La variation du nombre d'atomes limite le temps de mesure d'un spectre à quelques dizaines de ms pendant lesquelles l'étude du bruit sur toutes les quadratures doit être réalisée. Comme il faut un temps minimal à l'analyseur de spectre pour traiter et filtrer le signal du bruit, il a fallu adapter soigneusement l'analyse du signal aux différentes constantes de temps dans notre système. En particulier, nous nous sommes aperçus qu'un filtrage électronique du signal par le filtre vidéo standard qui sert à réduire le bruit parasite sur le signal, peut détruire la réduction du bruit dans nos conditions. Ayant identifié ce problème, nous avons pu améliorer le filtrage et le traitement du signal du bruit et mettre ainsi en évidence la réduction du bruit quantique qui était masquée dans les données brutes issues de l'analyseur de spectre.

Cette difficulté "technique" est liée à une question plus profonde et très importante dans ce contexte. Comment peut-on décrire les fluctuations d'un signal qui varie lui-même au cours du temps? Et dans quelles conditions ces fluctuations peuvent-elles être caractérisées par un spectre du bruit? Pour répondre à ces questions, nous avons essayé de rapprocher de l'expérience la description théorique de notre système. Nous avons développé une description théorique de la variation du nombre d'atomes dans le faisceau sonde en employant un traitement statistique pour modéliser à la fois le vol balistique et la chute des atomes après la coupure du piège. Cette étude nous a fourni des expressions analytiques pour la variation du nombre d'atomes moyen en fonction du temps. Les courbes théoriques obtenues par ce modèle ont été comparées aux mesures expérimentaux de ce paramètre, ce qui a conduit à un accord très satisfaisant entre la théorie et l'expérience.

De plus, ce traitement a montré que le nombre d'atomes dans le faisceau sonde peut être considéré comme une variable quasistationnaire par rapport aux échelles de temps correspondant aux fréquences d'observation du bruit. Les fluctuations du faisceau sonde peuvent alors être décrites par leur spectre de bruit bien que le nombre moyen d'atomes varie au cours du temps. Par le même raisonnement nous avons aussi pu calculer un spectre des fluctuations du nombre d'atomes. Comme celles-ci se traduisent en fluctuations du déphasage de la cavité, elles peuvent ainsi avoir une influence sur les fluctuations du faisceau sonde. Le résultat de cette étude est que la largeur et la valeur maximale du spectre et donc l'influence sur les fluctuations du faisceau sonde dépendent du temps de traversée des atomes par le faisceau sonde.

Dans nos conditions expérimentales, nous trouvons un temps caractéristique de l'ordre de la milliseconde, de sorte que les fluctuations atomiques sont négligeables à nos fréquences d'observation du bruit. Ces fluctuations pourraient avoir une influence plus importante pour des expériences en jet atomique. Les atomes dans un jet étant beaucoup plus rapides, le temps de traversée devient plus court et pourrait conduire à un spectre de bruit nettement plus large en fréquence. Ceci pourrait éventuellement constituer une explication, au moins partielle, du désaccord entre les prédictions théoriques de la réduction du bruit et les observations expérimentales sur les jets atomiques. Néanmoins, les distributions de position et de vitesse sont différentes pour des atomes

dans un jet et dans un nuage froid; il faudrait donc calculer le spectre plus précisément afin d'arriver à des arguments plus concluants.

L'étude des fluctuations du nombre d'atomes nous a fourni un argument plus général pour estimer l'effet d'une perturbation du nombre effectif d'atomes sur la réduction du bruit. Si la perturbation est faible, l'excès de bruit qu'elle produit est restreint aux fréquences correspondant aux temps caractéristiques de la perturbation. A l'aide de cet argument, nous avons pu estimer l'influence du repompeur et des faisceaux pièges à faible saturation sur les fluctuations du faisceau sonde.

Nous avons ensuite poursuivi l'amélioration du traitement théorique et inclus l'effet de la structure transverse du faisceau sonde sur la réduction du bruit. La comparaison avec l'ancien modèle qui décrit le faisceau par une onde plane, a montré que les prédictions de la réduction du bruit de ce dernier ne sont fiables que dans des limites très restrictives. En particulier, le modèle "onde plane" n'est pas suffisamment fiable dans le régime dispersif qui est intéressant expérimentalement.

Puis, nous avons utilisé une synthèse de ces développements théoriques qui tient compte à la fois de la structure transverse du faisceau sonde et de la variation du nombre d'atomes au cours du temps pour modéliser nos spectres de bruit expérimentaux. Les spectres théoriques que nous avons obtenus sont en accord satisfaisant avec les résultats expérimentaux, ce qui est d'autant plus remarquable que tous les paramètres sont fixés dans des plages de variation assez restreintes.

Grâce à cet accord entre les prédictions théoriques et l'observation expérimentale, il paraît possible d'augmenter le degré de la réduction du bruit en changeant les paramètres expérimentaux. Le traitement de la structure transverse du faisceau a montré qu'une réduction du bruit parfaite est théoriquement possible. Cela nécessiterait une intensité intracavité  $X$ , un désaccord  $\delta$  et un paramètre de coopérativité  $C$  beaucoup plus grands que ce qu'ils sont actuellement tout en respectant toujours des conditions suivantes

$$\frac{\delta^3}{4C} \leq X \ll \sqrt{C\delta} \quad (8.1)$$

$$\frac{\delta}{2} < C \ll \frac{\delta^2}{2} \quad (8.2)$$

Vis à vis de l'expérience, ces conditions sont difficiles à réaliser en raison des imperfections du milieu non linéaire. L'intensité intracavité est limitée par le seuil de dommage du milieu atomique (qui est pour notre expérience donné par l'intensité pour laquelle les atomes sont chassés hors du piège par la pression de radiation du faisceau sonde), le désaccord par l'existence des autres transitions. Enfin, le paramètre de coopérativité est limité par le fonctionnement du piège.

Avec un piège plus froid et dense nous pourrions augmenter la densité d'un facteur  $\sim 700$ . Néanmoins, la taille du nuage  $\sigma_r$  serait réduite à environ 1/30 de la taille actuelle de notre nuage atomique. Par conséquent, il serait possible de réaliser un paramètre de coopérativité environ 20 fois plus grand. La température d'un tel piège serait environ 100 fois plus petite, ce qui produirait des atomes 10 plus lents. Cela paraît à

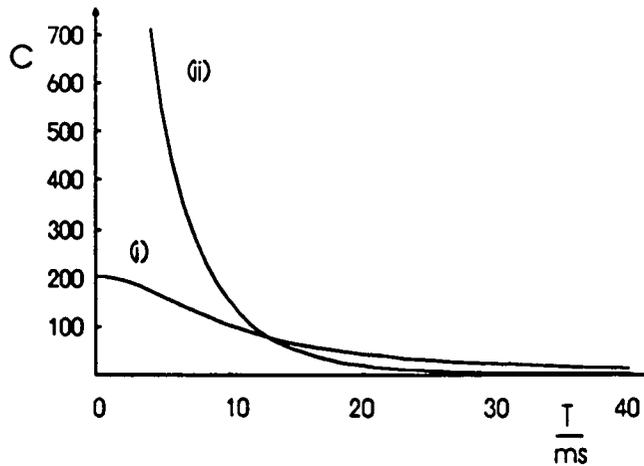
premier vue beaucoup plus favorable, puisque le départ des atomes détermine le temps de mesure. Néanmoins, pour un tel piège, la variation du nombre d'atomes ne serait plus gouvernée par le vol libre, et donc par la température des atomes, mais par la gravité qui intervient d'autant plus tôt que le piège est froid. De plus, la diminution du nombre d'atomes à cause de la gravité suit une loi exponentielle avec un temps caractéristique

$$\tau_g = \frac{2\sqrt{2}}{g} \sqrt{\frac{kT_{\text{piege}}}{m}} \quad (8.3)$$

tandis que le vol libre conduit à une lorentzienne d'une largeur

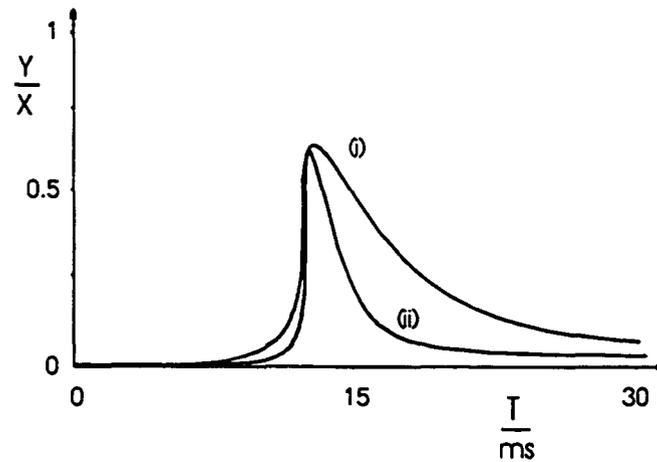
$$\tau_r = \sigma_r \sqrt{\frac{m}{kT_{\text{piege}}}} \quad (8.4)$$

Pour illustrer la différence entre ces deux fonctionnements du piège, nous avons tracé sur la figure 39 la coopérativité en fonction du temps. Notre piège est modélisé par une



**Fig. 39:** L'évolution temporelle du paramètres de coopérativité pour deux fonctionnements différents du piège magnéto-optique: la trace (i) modélise le fonctionnement de notre piège avec une température de 4mK, un rayon du nuage de 5mm et un paramètre de coopérativité  $C_0 = 200$ ; la trace (ii) modélise un piège plus dense et plus froid avec une température de  $60\mu\text{K}$ , un rayon de  $200\mu\text{m}$  et un paramètre de coopérativité de 1500 à l'instant  $T = 0$ .

température de  $T_{\text{piege}} = 4\text{mK}$ , une taille de 5mm et une coopérativité de  $C(0) = 200$  au moment de la coupure (trace (i)). Pour l'autre fonctionnement du piège, nous avons supposé une température de  $T_{\text{piege}} = 60\mu\text{K}$ , une taille de  $200\mu\text{m}$  et une coopérativité au début de  $C(0) = 1500$  (trace (ii)). Nous voyons que la variation du nombre d'atomes est beaucoup plus rapide pour le deuxième fonctionnement. Si nous considérons maintenant que la cavité est balayée par ce processus, cela conduit à des pics de bistabilité qui sont nettement plus étroits que pour un piège comme le nôtre. La valeur très importante de la coopérativité se traduit par un déplacement du pic en fonction du temps, mais n'a évidemment aucune influence sur sa largeur. Le comportement est illustré sur la figure 40. En conclusion, un piège plus froid et dense, mais aussi plus petit semble moins



**Fig. 40:** Courbes de bistabilités obtenues quand la cavité est balayée par le départ des atomes pour les deux fonctionnements (i) et (ii) du piège et un choix typique des paramètres optiques ( $Y = 300$ ,  $\delta = 22$ ,  $\phi_{(i)} = 5$ ,  $\phi_{(ii)} = 6$ ).

favorable pour le type d'expériences que nous faisons. Cependant, il est possible qu'il existe un régime de fonctionnement intermédiaire qui fournisse un nombre d'atomes plus grand à une température telle que le départ des atomes reste gouverné par une loi lorentzienne.

Par ailleurs, nous avons vu que le paramètre de coopérativité doit satisfaire la relation (8.2) pour obtenir une bonne réduction du bruit. Il dépend alors du désaccord. Le choix du désaccord  $\delta$  est plus favorable dans le rouge de la transition pour éviter de effets de chauffage longitudinal. Sa valeur est limitée afin de ne pas exciter la transition  $6S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 4$ . Pour notre choix de  $\delta = 20$ , cette transition est excitée une fois sur trente. Pour s'approcher plus des conditions idéales, on pourrait augmenter le désaccord jusqu'à  $\delta = 30$ , auquel cas, un atome serait excité dans le niveau  $6P_{3/2}, F' = 4$  une fois sur dix. Cela permettrait une valeur maximale de la coopérativité de  $C \simeq 400$ .

Quel est alors le facteur limitant pour la réduction du bruit? Dans notre expérience, nous étudions la réduction du bruit dans la raie centrale de la fluorescence atomique, c'est à dire autour des fréquences nulles. La réduction du bruit que nous observons dans cette situation est produite par un processus qui est résonnant sur les raies latérales. Nous observons la réduction du bruit à l'intérieur de la bande passante  $\kappa$  de la cavité qui est beaucoup plus petite que la fréquence de raies latérales du triplet de fluorescence. Par conséquent nous ne pouvons observer qu'une réduction du bruit dû aux ailes des raies latérales qui recouvrent la raie centrale. Si on augmentait la largeur de la cavité, on pourrait observer la réduction du bruit à une fréquence plus proche de la raie latérale et la réduction du bruit devrait s'améliorer. La largeur en fréquence de la cavité dépend de sa longueur et du coefficient de transmission qui détermine également le paramètre de coopérativité. En particulier, sa valeur diminuerait si on voulait augmenter la largeur en fréquence de la cavité en augmentant le coefficient de transmission. Pour ne pas perdre

sur le paramètre de coopérativité, il faudrait par conséquent raccourcir la cavité. En choisissant une nouvelle longueur réaliste de 5 cm, nous pourrions augmenter la largeur de la cavité d'un facteur 5 à  $\kappa = 25$  MHz ce qui améliorerait la réduction de bruit. Un tel projet nécessiterait un changement important du montage de la cavité qui devrait être dans ce cas montée à l'intérieur de la cellule de piégeage.

Pour accompagner ce projet expérimental, une étude théorique plus poussée des processus de réduction du bruit et en particulier de l'influence de la structure transverse du faisceau sur les raies latérales du triplet de fluorescence s'imposerait. Il faut noter en particulier que les raies latérales sont élargies dans un faisceau gaussien puisqu'elles subissent un déplacement lumineux qui dépend de l'intensité. Cet effet doit néanmoins rester limité si la transition est peu saturée. Dans le traitement actuel de la structure transverse, nous projetons le champ rayonné par les atomes sur le mode fondamental de la cavité en négligeant tous les autres modes. Il serait maintenant intéressant d'étudier la réduction du bruit en tenant compte des effets transverses par un couplage entre le mode fondamental et des autres modes par l'intermédiaire du milieu non linéaire.

En ce qui concerne le comportement du système en présence des faisceaux pièges, il serait nécessaire de développer un traitement qui tienne compte des processus de pompage optique produits par les faisceaux pièges et le faisceau sonde. On devrait dans ce cas pouvoir modéliser le changement du sens de la courbe de bistabilité ainsi qu'estimer la réduction du bruit maximale accessible par ce fonctionnement du système. Cela permettrait en même temps d'améliorer notre modèle simple des oscillations de relaxation dues au pompage optique. Jusqu'à présent, nous n'avons pas entrepris une étude expérimentale de ces oscillations car elles constituaient un effet gênant pour la réduction du bruit. Avec un modèle plus élaboré des instabilités, une telle étude permettrait une compréhension plus profonde des processus dans notre système bistable. Dans ce contexte il serait également intéressant de rechercher les instabilités monomode qui sont prédites pour une telle configuration.

## Appendices

### A. Accord de mode de la cavité

Dans cet appendice, nous allons étudier l'influence du fait que le faisceau sonde n'est pas parfaitement adapté aux modes de la cavité bistable.

Nous considérons le cas expérimental où le faisceau a une section légèrement elliptique après avoir traversé les divers éléments optiques sur son chemin. Le mode du faisceau qui entre dans la cavité ne peut alors pas être parfaitement adapté au mode fondamental de la cavité. On peut au mieux adapter une proportion de l'énergie de l'ordre de  $\eta_{\text{TEM}_{00}} \simeq 0.96$ . Quand la cavité devient résonnante avec le faisceau sonde, seule la partie du faisceau qui correspond au mode fondamental entre dans la cavité et interagit avec le milieu atomique, les autres modes étant réfléchis. Nous supposons ici que l'interaction non linéaire ne couple pas efficacement le mode fondamental aux autres modes de la cavité, soit parce que la fréquence de ces derniers ne correspond pas à une fréquence de résonance de la cavité, soit parce qu'ils sont d'un ordre trop élevé pour jouer un rôle important. C'est donc seul le mode  $\text{TEM}_{00}$  que nous considérons pour la dégradation du recouvrement entre l'oscillateur local et le faisceau sonde.

En revanche, le fait que le faisceau n'est pas parfaitement adapté au mode fondamental de la cavité peut avoir une influence sur le degré de réduction du bruit observé. En effet, d'une part les fluctuations des autres modes vides se mélangent avec les fluctuations comprimées du mode fondamental, bien que ces modes n'interviennent pas dans l'interaction non linéaire. D'autre part, le système de détection homodyne et en particulier l'oscillateur local détecte non seulement le mode fondamental contenant les fluctuations comprimées qui sortent de la cavité, mais aussi les modes réfléchis sur le miroir de couplage. Ces effets nécessitent un traitement détaillé de la transformation des fluctuations quantiques d'un faisceau sonde "mal" adapté à la cavité pour estimer l'influence sur la réduction du bruit. Ici, nous allons nous intéresser à l'influence d'un faisceau sonde "mal" adapté sur le champ moyen. Nous allons calculer le recouvrement entre les modes fondamentaux de l'oscillateur local et du faisceau sonde en fonction du déphasage de ce mode de la résonance de la cavité. La comparaison entre la valeur théorique de ce recouvrement et la valeur mesurée permet en particulier de calculer précisément les pertes dans la cavité, ce qui est important afin d'estimer le rendement quantique pour la mesure.

L'oscillateur local a la même structure spatiale que le faisceau sonde hors résonance. Son chemin optique est en particulier ajusté pour que son waist soit le mieux possible adapté au waist du faisceau sonde sortant de la cavité. Nous mesurons le recouvrement entre les deux faisceaux par l'amplitude maximale des franges d'interférence visibles sur le signal d'intensité d'un photodétecteur, quand nous balayons la phase de l'oscillateur local. Nous arrivons ainsi à un recouvrement de  $\eta_{\text{batt}}^{(\text{hr})} \simeq 0.98$  entre l'oscillateur local et le faisceau sonde hors résonance. Ce recouvrement se dégrade quand la sonde devient résonnante avec la cavité, car sa structure spatiale est changée par la cavité. C'est cet effet que nous allons utiliser pour estimer les pertes intracavité.

Nous notons  $E_S(t)$  le champ du faisceau sonde et  $E_{\text{OL}}(t)$  le champ de l'oscillateur local. Les deux champs se décomposent de la même manière sur les modes de la cavité. Par simplicité, nous ne considérons que deux modes, dont l'un est le mode fondamental (TEM<sub>00</sub>), noté  $u_0(\mathbf{r})$ . L'autre mode  $u_1(\mathbf{r})$  modélise tous les autres modes de la cavité.  $\mathbf{r}$  ne représente ici que les deux variables transverses. Les deux fonctions de modes sont normalisées et orthogonales l'une à l'autre

$$\int d\mathbf{r} u_0(\mathbf{r}) u_0(\mathbf{r})^* = 1 \quad (8.5)$$

$$\int d\mathbf{r} u_1(\mathbf{r}) u_1(\mathbf{r})^* = 1$$

$$\int d\mathbf{r} u_0(\mathbf{r}) u_1(\mathbf{r})^* = 0$$

Les champs du faisceau sonde et de l'oscillateur local s'écrivent alors respectivement

$$E_S(\mathbf{r}, t) = A_0(t) \cdot u_0(\mathbf{r}) + A_1(t) \cdot u_1(\mathbf{r}) \quad (8.6)$$

$$E_{\text{OL}}(\mathbf{r}, t) = B_0(t) \cdot u_0(\mathbf{r}) + B_1(t) \cdot u_1(\mathbf{r})$$

Les amplitudes des modes pour le faisceau sonde incident sont différentes de celles du faisceau sortant de la cavité. Nous allons d'abord considérer le faisceau entrant. Nous supposons une intensité moyenne  $|\alpha(t)|^2$  pour le faisceau sonde et  $|\beta(t)|^2$  pour l'oscillateur local. Si on fait l'hypothèse que le faisceau sonde et l'oscillateur local sont parfaitement adaptés en l'absence de la cavité, les amplitudes de modes s'écrivent

$$A_0^{\text{in}}(t) = \alpha(t) \cdot \cos \Theta \quad (8.7)$$

$$A_1^{\text{in}}(t) = \alpha(t) \cdot \sin \Theta$$

pour le faisceau sonde incident et

$$B_0(t) = \beta(t) \cdot \cos \Theta \quad (8.8)$$

$$B_1(t) = \beta(t) \cdot \sin \Theta$$

pour l'oscillateur local. Les coefficients  $\cos \Theta$  et  $\sin \Theta$  modélisent le degré d'adaptation de modes, avec  $\cos^2 \Theta = \eta_{\text{TEM00}}$ .

Le champ incident est transformé par la cavité d'après les relations entrée-sortie données dans le chapitre 6.2. Nous trouvons alors les expressions suivantes

$$A_0^{\text{out}}(t) = \frac{1 - \gamma' + i\phi_0}{1 + \gamma' - i\phi_0} \alpha(t) \cdot \cos \Theta \quad (8.9)$$

$$A_1^{\text{out}}(t) = \frac{1 - \gamma' + i\phi_1}{1 + \gamma' - i\phi_1} \alpha(t) \cdot \sin \Theta$$

où  $\phi_0$  et  $\phi_1$  représentent le déphasage de la cavité pour les deux modes respectivement, c'est à dire le désaccord en fréquence normalisé par la largeur de la cavité. Les pertes de la cavité autres que les pertes de transmission par le miroir d'entrée-sortie ont été modélisées ici par un miroir supplémentaire ayant un coefficient  $\gamma'$ , également normalisé par la largeur de la cavité. Pour alléger la notation, nous appellerons par la suite  $f(\phi_i)$  la fonction de transformation du champ moyen pour le mode  $i$  du faisceau sonde

$$f(\phi_i) = \frac{1 - \gamma' + i\phi_i}{1 + \gamma' - i\phi_i} \quad (8.10)$$

Nous supposons maintenant que le champ sortant est superposé avec l'oscillateur local et envoyé sur un photodétecteur. Le signal obtenu correspond à l'intensité moyenne du champ composé:

$$I(t) = E_S^{\text{out}}(t) E_{\text{OL}}(t)^* + E_S^{\text{out}}(t)^* E_{\text{OL}}(t) \quad (8.11)$$

Dans cette expression nous n'avons conservé que les termes d'interférence car leur amplitude maximale donne une mesure du recouvrement des deux faisceaux. Avec l'équation (8.9) et en utilisant l'orthonormalité des fonction de modes  $u_0(\mathbf{r})$  et  $u_1(\mathbf{r})$ , nous trouvons que ce terme d'interférence s'écrit

$$\Delta = \alpha(t) \overline{\beta(t)}^* e^{-i\psi} \left( f(\phi_0) \cos^2 \Theta + f(\phi_1) \sin^2 \Theta \right) + \text{c.c.} \quad (8.12)$$

où nous avons traduit le balayage périodique de la phase de l'oscillateur local par  $\beta(t) = \overline{\beta(t)} \cdot e^{i\psi}$ . L'amplitude maximale des interférences correspond alors à

$$\Delta^{\text{max}} = 2|\alpha(t)| |\overline{\beta(t)}| \left| f(\phi_0) \cos^2 \Theta + f(\phi_1) \sin^2 \Theta \right| \quad (8.13)$$

Elle dépend de l'adaptation de modes entre le faisceau sonde et la cavité, des écarts de résonance des deux modes et des pertes intracavité. Dans l'expérience, cette amplitude est ensuite comparée à la valeur théorique de l'amplitude maximale des interférences qui est donnée par

$$\Delta_{\text{th}}^{\text{max}} = 2\sqrt{I_S^{\text{out}}(t) \cdot I_{\text{OL}}(t)} \quad (8.14)$$

soit

$$\Delta_{\text{th}}^{\text{max}} = 2\sqrt{|\alpha(t)|^2|\beta(t)|^2 (|f(\phi_0)|^2 \cos^2 \Theta + |f(\phi_1)|^2 \sin^2 \Theta)} \quad (8.15)$$

A partir de cette comparaison, nous pouvons définir un taux de recouvrement  $\eta_{\text{batt}}$  des deux faisceaux comme le rapport entre l'amplitude maximale détectée  $\Delta^{\text{max}}$  et sa valeur théorique  $\Delta_{\text{th}}^{\text{max}}$

$$\eta_{\text{batt}} = \frac{\Delta^{\text{max}}}{\Delta_{\text{th}}^{\text{max}}} \quad (8.16)$$

Ce recouvrement est en particulier une fonction du déphasage  $\phi_0$  du mode fondamental de la cavité.

Considérons d'abord le cas le plus simple d'un faisceau sonde parfaitement adapté à une cavité parfaite, c'est à dire une cavité sans pertes. Avec  $\gamma' = 0$ ,  $\cos^2 \Theta = 1$  et  $\sin^2 \Theta = 0$ , les expressions (8.13) et (8.15) se simplifient pour donner  $\eta_{\text{batt}} = 1$ .

Pour une cavité avec des pertes, mais toujours parfaitement adaptée au mode du faisceau sonde ( $\sin \Theta = 0$ ), l'intensité moyenne du faisceau sonde diminue dans la mesure où il entre dans la cavité. Mais les franges d'interférences diminuent de la même manière que l'intensité moyenne du faisceau sonde et nous trouvons encore la valeur optimale pour le contraste des franges  $\eta_{\text{batt}} = 1$ .

Le cas qui nous intéresse correspond à une situation où le faisceau sonde n'est pas parfaitement adapté au mode fondamental de la cavité. Dans ce cas, le recouvrement entre les deux faisceaux dépend explicitement de  $f(\phi_0)$  et donc du déphasage  $\phi_0$  de résonance du mode fondamental. Afin de modéliser la situation expérimentale, nous allons supposer que les autres modes de la cavité sont assez désaccordés et que la cavité ne devient pas résonnante avec eux lorsqu'on traverse une résonance du mode fondamental. Avec  $\phi_1 \gg 1$ , nous trouvons un recouvrement de

$$\eta_{\text{batt}} = \frac{|f(\phi_0) \cos^2(\Theta) - \sin^2(\Theta)|}{\sqrt{|f(\phi_0)|^2 \cos^2(\Theta) + \sin^2(\Theta)}} \quad (8.17)$$

et avec  $\eta_{\text{TEM00}} = \cos^2 \Theta$

$$\eta_{\text{batt}} = \frac{|(f(\phi_0) + 1) \cdot \eta_{\text{TEM00}} - 1|}{\sqrt{(|f(\phi_0)|^2 - 1) \cdot \eta_{\text{TEM00}} + 1}} \quad (8.18)$$

Loin de la résonance du mode fondamental ( $\phi_0 \gg 1$ ), le recouvrement entre l'oscillateur local et le faisceau sonde redevient le même que dans le cas d'une cavité parfaitement adaptée

$$f(\phi_0) = -1 \quad (8.19)$$

$$\eta_{\text{batt}} = 1$$

Quand la cavité devient résonnante avec le faisceau sonde, ce recouvrement se dégrade progressivement. La dégradation la plus importante est à résonance où nous obtenons un recouvrement de

$$f(\phi_0) = \xi_0 = \frac{1 - \gamma'}{1 + \gamma'} \quad (8.20)$$

$$\eta_{\text{batt}} = \frac{(\xi_0 + 1) \cdot \eta_{\text{TEM00}} - 1}{\sqrt{(\xi_0^2 - 1) \cdot \eta_{\text{TEM00}} + 1}} \quad (8.21)$$

$\xi_0^2$  représente le rapport entre l'intensité réfléchie et l'intensité incidente à résonance. Si le recouvrement entre l'oscillateur local et le faisceau sonde n'est pas 1, mais correspond à une valeur  $\eta_{\text{batt}}^{\text{hr}}$ , cette formule se généralise à

$$\eta_{\text{batt}}^{\text{res}} = \eta_{\text{batt}}^{\text{hr}} \frac{(\xi_0 + 1) \cdot \eta_{\text{TEM00}} - 1}{\sqrt{(\xi_0^2 - 1) \cdot \eta_{\text{TEM00}} + 1}} \quad (8.22)$$

Nous retrouvons ainsi les formules (3.28) et (3.29) données dans le chapitre 3.7 de ce mémoire. La comparaison entre le contraste de frange hors et à résonance offre en particulier la possibilité de faire une mesure précise du coefficient des pertes intracavité  $\gamma'$ .

## B. Pompage optique

Le but du calcul présenté dans cet appendice est d'évaluer le temps de pompage optique sur les sous-niveaux Zeeman de la transition  $6S_{1/2}, F' = 4 \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5$ . L'état fondamental possède neuf sous-niveaux  $m = -4$  à  $m = 4$ , tandis que l'état excité en possède onze, numérotés par l'indice  $m'$ , comme le montré sur la figure 15 au chapitre 4. La transition atomique est excitée par un faisceau sonde à une fréquence  $\omega_L$  décalée d'un désaccord  $\delta$  par rapport à la fréquence de résonance atomique  $\omega_0$

$$\delta = \frac{\omega_0 - \omega_L}{\gamma} \quad (8.23)$$

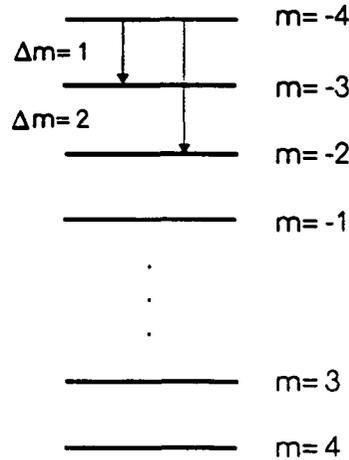
$\gamma$  correspond au taux d'amortissement du dipôle atomique. La polarisation du faisceau est circulaire, soit  $\sigma^+$  (nous remarquons ici que nous obtiendrons les mêmes résultats pour un faisceau d'une polarisation  $\sigma^-$  pour des raisons de symétrie). Le pompage se produit alors sur toutes les transitions représentées sur la figure 15, depuis la transition  $m = -4 \rightarrow m' = -3$  jusqu'à la transition  $m = 4 \rightarrow m' = 5$ . Nous allons calculer le temps qui s'écoule jusqu'à ce que les atomes soient arrivés à la transition  $m = 4 \rightarrow m' = 5$ . Dans une première étape, nous supposons toute la population initialement dans l'état  $m = 4$ . La situation expérimentale correspond plutôt au cas où la population totale est également répartie entre tous les sous-niveaux. Nous déduirons le temps de pompage optique dans ce deuxième cas par la suite.

Par simplicité, nous ne considérons le processus du pompage optique que pour la situation expérimentale où le désaccord du faisceau sonde satisfait  $\delta^2 \gg 1, s_0$ , où  $s_0$  est le paramètre de saturation à résonance évalué sur la transition  $m = 4 \rightarrow m' = 5$ . Ceci correspond à la limite perturbative où la population dans les états excités est négligeable; presque toute la population se trouve en moyenne dans les états fondamentaux. Bien qu'il y ait un transfert de population qui s'effectue par l'excitation par le faisceau sonde, on peut représenter le processus de pompage optique par des équations où apparaissent seulement les populations des niveaux fondamentaux.

Nous notons  $\pi_m$  la population du sous-niveau  $m$  dans l'état fondamental. Son évolution temporelle est décrite par l'équation suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\pi_m(t) = & -\Gamma'(m, m+1)\pi_m(t) + \Gamma'(m-1, m)\pi_{m-1}(t) \\ & -\Gamma'(m, m+2)\pi_m(t) + \Gamma'(m-2, m)\pi_{m-2}(t) \end{aligned} \quad (8.24)$$

La population  $\pi_m$  diminue par transfert vers les  $m$  plus élevés et augmente par transfert à partir des  $m$  plus petits. Il y a deux types de transitions correspondant à des variations de la valeur de  $m$  de 1 et 2 respectivement (voir la figure 41). Les taux de transfert sont déterminés par la formule suivante



**Fig. 41:** Cascade du pompage optique: seules les transitions respectant  $\Delta m = 1, 2$  sont permises.

$$\Gamma'(m, m+1) = \Gamma \cdot C(m+1, m+1) \frac{s_0}{\delta^2} \quad (8.25)$$

$$\Gamma'(m, m+2) = \Gamma \cdot C(m+1, m+2) \frac{s_0}{\delta^2}$$

$\Gamma$  est le taux d'émission spontanée à partir de l'un quelconque des niveaux de l'état excité ( $\Gamma = 2\gamma$  où  $\gamma$  est le taux d'amortissement du dipôle sur la transition finale  $m = 4 \rightarrow m' = 5$ ); les  $C(m, n)$  sont les carrés des coefficients de Clebsch-Gordan:

$$C(m, m+1) = \langle F' = 5, m+1 | 1, F = 4, 1, m \rangle^2 \quad (8.26)$$

$$C(m+1, m+1) = \langle F' = 5, m+1 | 1, F = 4, 0, m+1 \rangle^2$$

Les valeurs de ces coefficients pour toutes les transitions  $\sigma^+$  se trouvent dans l'Appendice IV.

Comme équation 8.24 est valable pour tous les sous-niveaux, le processus de pompage optique peut être décrit par une cascade radiative. Le système d'équations est résolu facilement dans l'espace de Fourier, en commençant par la population de l'état  $m = -4$ , et en étudiant ensuite par itération les autres populations:

$$\begin{aligned} \pi_{-4}[\omega] &= \frac{\pi_{-4}(t=0)}{-i\omega + \Gamma'(-4, -3) + \Gamma'(-4, -2)} \quad (8.27) \\ \pi_{-3}[\omega] &= \frac{\Gamma'(-4, -3)\pi_{-4}(t=0)}{-i\omega + \Gamma'(-3, -2) + \Gamma'(-3, -1)} \\ \pi_{-2}[\omega] &= \frac{\Gamma'(-4, -2)\pi_{-4}(t=0) + \Gamma'(-3, -2)\pi_{-3}(t=0)}{-i\omega + \Gamma'(-2, -1) + \Gamma'(-2, 0)} \\ &\vdots \\ \pi_4[\omega] &= \frac{1}{-i\omega} (\Gamma'(2, 4)\pi_2[\omega] + \Gamma'(3, 4)\pi_3[\omega]) \end{aligned}$$

La population de l'état  $m = -4$  décroît donc exponentiellement

$$\pi_{-4}(t) = \pi_{-4}(0) \exp [(\Gamma'(-4, -3) + \Gamma'(-4, -2)) \cdot t] \quad (8.28)$$

Les autres populations sont obtenues comme des produits de convolutions d'exponentielles

$$\begin{aligned} \pi_{-3}(t) &= \int dt' \exp [(\Gamma'(-3, -2) + \Gamma'(-3, -1)) \cdot (t - t')] \Gamma'(-4, -3)\pi_{-4}(t') \quad (8.29) \\ &\vdots \end{aligned}$$

On obtient ainsi la solution des équations de pompage optique d'une manière directe mais assez longue. Le résultat pour la population dans la transition  $m = 4 \rightarrow m' = 5$  en fonction du temps est tracé pour des valeurs différentes du paramètre de saturation

dans la reproduction de l'article "Optical nonlinear dynamics with cold atoms in a cavity" dans le paragraphe 4.2 du chapitre 4 de ce mémoire.

On peut toutefois évaluer simplement le temps moyen que met un atome pour atteindre le niveau  $m = 4$  en utilisant l'argument qui suit. La cascade peut prendre un certain nombre de chemins du niveau  $m = -4$ , selon que les diverses transitions correspondent à des sauts  $\Delta m = 1$  ou  $\Delta m = 2$ . La populations dans le niveau fondamental  $m = 4$  peut donc s'écrire sous une forme plus générale:

$$\pi_4[\omega] = \sum_{\text{chemins}} \prod \frac{f(m, m')}{-i\omega + \Gamma'(m, m+1) + \Gamma'(m, m+2)} \quad (8.30)$$

avec

$$f(m, m') = \frac{\Gamma'(m, m')}{\Gamma'(m, m+1) + \Gamma'(m, m+2)} \quad (8.31)$$

On peut évaluer les probabilités et les temps de parcours de tous les chemins et obtenir le temps moyen de parcours en faisant une moyenne des divers temps pondérée par les diverses probabilités. Le temps moyen du pompage optique s'écrit donc

$$\bar{T} = \sum_{\text{chemins}} T_{\text{chemin}} \cdot f_{\text{chemin}} \quad (8.32)$$

où  $T_{\text{chemin}}$  est le temps de pompage pour un chemin quelconque

$$T_{\text{chemin}} = \sum \frac{1}{\Gamma'(m, m+1) + \Gamma'(m, m+2)} \quad (8.33)$$

et  $f_{\text{chemin}}$  la probabilité correspondante

$$f_{\text{chemin}} = \prod f(m, m') \quad (8.34)$$

On peut d'ailleurs aussi moyennner sur la distribution initiale des populations en faisant ce calcul pour un atome initialement dans  $m = -4, m = -3, \dots, m = 4$ . Ici, nous nous contenterons d'estimer le temps de pompage maximal en ne considérant que le chemin le plus long, qui correspond à une succession de sauts  $\Delta m = 1$ . Sa probabilité est

$$p_{\text{max}} = \prod_{m=-4}^4 \frac{\Gamma'(m, m+1)}{\Gamma'(m, m+1) + \Gamma'(m, m+2)} \quad (8.35)$$

Le temps moyen de parcours de ce chemin est obtenu comme la somme des constantes de temps des diverses exponentielles

$$\bar{T}_{\text{max}} = \sum_{m=-4}^4 \frac{1}{\Gamma'(m, m+1) + \Gamma'(m, m+2)} \quad (8.36)$$

Les autres chemins ont tous un temps de parcours plus court. Le plus court d'entre eux, qui correspond à une succession de sauts  $\Delta m = 2$ , correspond à un temps de parcours

$$\bar{T}_{\text{min}} = \sum_{m=-2}^2 \frac{1}{\Gamma'(2m, 2m+1) + \Gamma'(2m, 2m+2)} \quad (8.37)$$

Dans un raisonnement qualitatif, on se contentera ici d'évaluer le temps de parcours le plus long correspondant à la formule 8.36, en utilisant les valeurs des coefficients de Clebsch-Gordan

$$\bar{T}_{\max} \simeq 36.7 \cdot \frac{1}{\Gamma} \frac{\delta^2}{s_0} \quad (8.38)$$

Pour terminer, nous allons donner quelques chiffres expérimentaux. Dans une situation typique de notre expérience, le faisceau sonde est décalé de  $\delta \simeq 20 - 40$  par rapport à la fréquence de résonance atomique. Pour un paramètre de saturation à résonance de  $s_0 \simeq 100$ , nous trouvons avec  $\Gamma/2\pi = 5.2\text{MHz}$  un temps de pompage de l'ordre de  $\bar{T}_{\max} = 9 - 36\mu\text{s}$  en fonction du désaccord choisi. Bien que le processus de pompage optique soit alors assez rapide pour être négligeable aux échelles de temps sur lesquelles nous mesurons nos signaux, il est beaucoup plus lent que la saturation de la transition atomique. Pour un paramètre de saturation de  $s_0 \simeq 1$ , le temps de transfert peut même arriver à une durée d'environ  $\bar{T}_{\max} = 1 - 4\text{ms}$ .

### C. Bistabilité et mesure du nombre d'atomes

Nous présentons dans cet appendice les différentes méthodes que nous avons utilisées pour mesurer le nombre d'atomes dans le faisceau sonde à l'aide de la courbe de bistabilité.

Comme nous l'avons déjà vu aux chapitres 3.7.1 et 6.2.2, si nous considérons le faisceau sonde comme une onde plane, la courbe de bistabilité est décrite par une relation algébrique entre l'intensité intracavité  $X$  et l'intensité incidente  $Y$

$$\frac{Y}{X} = \left(1 + \frac{2C}{1 + \delta^2 + 2X}\right)^2 + \left(\phi - \frac{2C\delta}{1 + \delta^2 + 2X}\right)^2 \quad (8.39)$$

$\delta$  note le désaccord du faisceau sonde normalisé par le taux d'amortissement du dipôle  $\gamma$ ,  $\phi$  représente le déphasage de la cavité en unité de la largeur de la cavité. L'intensité intracavité est normalisé par l'intensité de saturation:

$$I_{\text{sat}} = \frac{4\pi\gamma hc}{3\lambda^3} \quad (8.40)$$

Pour notre transition l'intensité de saturation correspond à  $I_{\text{sat}} = 2.1\text{mW}$  (avec  $\gamma/2\pi = 2.6\text{MHz}$  et  $\lambda = 852\text{nm}$ ). L'intensité incidente est également redéfinie pour tenir compte de la finesse de la cavité.

$C$  est le paramètre de coopérativité qui mesure le nombre d'atomes interagissant avec le faisceau sonde. Il est donné par le rapport entre l'absorption atomique à résonance et le coefficient de transmission en énergie  $T$  de la cavité

$$C = \frac{g^2 N}{\gamma T} \quad (8.41)$$

où  $g^2$  est la constante de couplage de la transition (voir chapitre 6.2.2 pour sa définition) et  $N$  le nombre d'atomes.

Pour l'évaluation du nombre d'atomes, nous allons nous restreindre au cas où le faisceau sonde est traité comme une onde plane. Nous avons vu en effet au chapitre 6.4 que la courbe de bistabilité change très peu entre une onde gaussienne et une onde plane si  $X < \delta^2$ . Le calcul du paramètre de coopérativité se simplifie considérablement pour le traitement "onde plane", et comme la condition  $X < \delta^2$  est satisfaite pour toutes nos mesures, nous allons nous placer ici dans cette hypothèse.

Il existe deux méthodes différentes pour mesurer le nombre d'atomes interagissant avec le faisceau. La première est basée sur la mesure du déphasage linéaire induit par les atomes. En présence du milieu atomique dans la cavité, la courbe de résonance est décalée d'une quantité correspondant au déphasage linéaire  $\phi_L$ . En considérant la relation 8.39 à l'ordre 0 en  $X$  et pour  $\delta^2 \gg 1$ , nous obtenons

$$\phi_L \simeq \frac{2C}{\delta} \quad (8.42)$$

Ceci correspond à un déphasage mesuré en unités de largeur de la cavité<sup>1</sup>. Si nous mesurons alors le décalage de la courbe de résonance, nous pouvons en déduire directement le paramètre de coopérativité et par suite, le nombre d'atomes dans le faisceau sonde.

La deuxième méthode est basée sur l'interaction non linéaire entre les atomes et le champ. En présence des atomes, la fonction d'Airy de la cavité est non seulement décalée mais aussi déformée, ce qui conduit au phénomène de bistabilité. L'intensité intracavité saute aux deux points tournants de la bistabilité et ce processus donne lieu à une "branche haute" et une "branche basse" de la bistabilité. A partir de la hauteur de ces résonances déformées, nous pouvons déduire le nombre d'atomes dans le faisceau. Dans ce but, nous comparons la hauteur au point tournant de la bistabilité à la hauteur de la fonction d'Airy de la cavité vide. Pour la cavité vide ( $C = 0$ ), l'équation 8.39 se simplifie pour obtenir

$$\frac{Y}{X} = 1 + \phi^2 \quad (8.43)$$

La condition de résonance est alors donnée par  $\phi = 0$  et l'intensité intracavité à résonance est égale à l'intensité incidente en absence de tout milieu absorbant:  $X_{\text{res}} = Y$ .

Considérons maintenant le point où l'intensité intracavité devient maximale sur la branche haute de la bistabilité. A ce point le déphasage  $\phi$  satisfait donc automatiquement la condition de résonance suivante

$$\phi = \frac{2C\delta}{1 + \delta^2 + 2X_s} \quad (8.44)$$

où nous avons nommé  $X_s$  la valeur de l'intensité intracavité maximale correspondante. L'équation de bistabilité à ce point est simplement

<sup>1</sup> Nous rappelons ici, que la 'largeur'  $\kappa$  de la cavité est défini comme le taux d'amortissement du champ intracavité et correspond alors à la *demi-largeur à mi-hauteur* de la courbe de résonance.

$$\frac{Y}{X_s} = \left(1 + \frac{2C}{1 + \delta^2 + 2X_s}\right)^2 \quad (8.45)$$

En mesurant donc l'intensité intracavité au sommet de la courbe de bistabilité ainsi que l'intensité à résonance de la cavité vide, nous pouvons en déduire le paramètre de coopérativité

$$C = \frac{1 + \delta^2 + 2X_s}{2} \left(\sqrt{\frac{Y}{X_s}} - 1\right) \quad (8.46)$$

Nous retrouvons ainsi la relation (3.27) du chapitre 3.7.1 en utilisant la définition de  $C$  en fonction de  $N$ .

Ce raisonnement n'est pas valable lorsque la courbe de bistabilité est balayée sur la branche basse de la courbe de bistabilité, ce qui est le cas dans les expériences où nous coupons les faisceaux pièges. Il faut alors adopter une autre approche pour évaluer le paramètre de coopérativité.

La relation (8.39) est une équation du deuxième degré en  $C$  et possède par conséquent deux solutions qui dépendent de l'intensité intracavité  $X$

$$C_{1,2} = \frac{1}{F(1 + \delta^2)} \left[ -(1 - \delta\phi) \pm \sqrt{\frac{Y}{X}(1 + \delta^2) - (\phi + \delta)^2} \right] \quad (8.47)$$

avec

$$F = \frac{2}{1 + \delta^2 + 2X} \quad (8.48)$$

Pour des valeurs données pour  $Y$  et  $\delta$ , il existe un régime de valeurs de  $\phi$  dans lequel la condition de bistabilité est satisfaite et où existent deux valeurs de l'intensité intracavité. Nous noterons  $X_a$  et  $X_b$  ces deux valeurs correspondant au maximum de la courbe de bistabilité quand la cavité est balayée à partir de la branche haute et de la branche basse de la courbe de bistabilité respectivement. Si nous traçons l'intensité intracavité  $X_b$  en fonction de la coopérativité pour des valeurs du déphasage  $\phi$  différentes, nous obtenons dans ce régime de paramètres des courbes de bistabilité. A chaque valeur de la coopérativité correspondent deux valeurs de l'intensité intracavité au point de bistabilité. La valeur  $X_b$  de l'intensité qui nous intéresse correspond à la valeur la plus grande. Il est alors possible de déduire des paires des variables  $(C, X_b)$  pour chaque valeur de  $\phi$ . Utilisant le déphasage  $\phi$  comme variable de paramétrisation, nous pouvons ensuite reporter les valeurs de la coopérativité obtenues en fonction de l'intensité  $X_b$ . Les points obtenus ainsi sont transformés en une fonction polynomiale. Cette fonction nous donne alors pour une intensité incidente  $Y$  et un désaccord  $\delta$  donnés, la valeur de la coopérativité en fonction de l'intensité intracavité au point tournant de bistabilité. Nous pouvons ainsi attribuer à chaque rapport de  $Y/X_b$  mesuré sur la courbe de bistabilité quand  $\phi$  augmente la valeur du paramètre de coopérativité correspondant.

## D. Liste des coefficients Clebsch-Gordan

### Taux de transition entre les niveaux hyperfins

Nous notons  $D(F', F) = d_{F,F'}^2$ , le carré du coefficient Clebsch-Gordan entre le niveau hyperfin fondamental  $F$  et le niveau hyperfin excité  $F'$ . D'après la référence [166], il se calcule par la formule suivante

$$D(F', F) = (2F' + 1)(2F + 1) \left\{ \begin{matrix} j'_1 & F' & j_2 \\ F & j_1 & 1 \end{matrix} \right\}^2 \quad (8.49)$$

où  $j_1$  et  $j'_1$  sont les moments cinétiques de l'état fondamental et de l'état excité respectivement.  $F$  et  $F'$  sont le moment cinétique qui incluent le spin du noyau  $j_2$ . Pour le césium, le spin du noyau vaut  $j_2 = \frac{7}{2}$ . Dans le cas de la raie D2 ( $6S_{1/2} \rightarrow 6P_{3/2}$ ), nous avons  $j_1 = \frac{1}{2}$ ,  $j'_1 = \frac{3}{2}$ . Les coefficients Clebsch-Gordan au carré  $D(F', F)$  sont alors

$$\begin{aligned} D(5, 4) &= \frac{11}{4} & D(4, 4) &= \frac{21}{16} & D(4, 3) &= \frac{15}{16} \\ D(3, 4) &= \frac{7}{16} & D(3, 3) &= \frac{21}{16} & D(2, 3) &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

### Taux de transition entre les sous-niveaux Zeeman

Nous considérons maintenant les coefficients Clebsch-Gordan des sous-niveaux Zeeman de la transition  $6S_{1/2}, F = 4, m \rightarrow 6P_{3/2}, F' = 5, m'$ , pour laquelle nous notons d'une manière analogue au paragraphe précédent  $C(m, m') = c_{m,m'}^2$ , le carré du coefficient Clebsch-Gordan. Celui-ci s'écrit habituellement sous la forme

$$C(m, m') = \left( \begin{matrix} F' & 1 & F \\ -m' & m' & -m \end{matrix} \right)^2 \quad (8.50)$$

ce qui donne les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} C(5, 4) &= 1 \\ C(4, 4) &= \frac{1}{5} & C(4, 3) &= \frac{4}{5} \\ C(3, 4) &= \frac{1}{45} & C(3, 3) &= \frac{16}{45} & C(3, 2) &= \frac{28}{45} \\ C(2, 3) &= \frac{1}{15} & C(2, 2) &= \frac{7}{15} & C(2, 1) &= \frac{7}{15} \\ C(1, 2) &= \frac{2}{15} & C(1, 1) &= \frac{8}{15} & C(1, 0) &= \frac{1}{3} \\ C(0, 1) &= \frac{2}{9} & C(0, 0) &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

## Bibliographie

- [1] Planck M., Verh. dt. phys. Ges. **2** 202 (1900)
- [2] Einstein A., Annalen der Physik **17** 132 (1905)
- [3] Einstein A., Physikalische Zeit. **10** 185 (1909)
- [4] Einstein A., Annalen der Physik **17** 549 (1905)
- [5] Planck M., Annalen der Physik **37** 642 (1912)
- [6] Verh. dt. phys. Ges. **18** 83 (1916)
- [7] Heisenberg W., Zeit. Physik **33** 879 (1925)
- [8] Heisenberg W., Zeit. Physik **43** 172 (1927)
- [9] Dirac P.A.M., Proc. Roy. Soc. **A114** 243, 706 (1927)
- [10] Landau L. and Peierls R., Zeit. Physik **69** 56 (1931)
- [11] Bohr N. and Rosenfeld L., Mat. Fys. Medd. Dan. Vidensk. Selsk. **12** (1927)
- [12] Bohr N. and Rosenfeld L., Phys. Rev. **78** 794 (1950)
- [13] Braginski V.B. and Vorontsov Yu.I., Uspekhi Fizika Nauk **114** 41 (1974) [Soviet Physics Uspekhi **17** 644 (1975)]
- [14] Caves C.M., Thorne K.S., Drever R.W.P., Sandberg V.D. and Zimmermann M, Rev. Mod. Phys. **52** 341 (1980)
- [15] Unruh W.G., Phys. Rev. **D19** 2888 (1979)
- [16] Yurke B. and Denker P., Physica **BC108** 1359 (1981)
- [17] Caves C.M., Phys. Rev. **D23** 1693 (1981)
- [18] Stoler D., Phys. Rev. **D1** 3217 (1970)
- [19] Stoler D., Phys. Rev. **D4** 1925 (1971)
- [20] Yuen H.P., Phys. Rev. **A13** 2226 (1976)
- [21] Min Xiao, Wu L.A. and Kimble H.J., Phys. Rev. Lett. **59** 278 (1987)
- [22] Grishchuk, L.P., Usp. Fiz. Nauk **121** 629 (1977)
- [23] Thorne K.S., Rev. Mod. Phys. **52** 285 (1980)
- [24] Quantum Optics, Experimental Gravitation and Measurement Theory, eds Meystre and Scully, Plenum (New York, 1983)
- [25] Gea-Banacloche J. and Leuchs G., J. Opt. Soc. Am. **B4** 1667 (1987)
- [26] Gea-Banacloche J. and Leuchs G., J. Mod. Opt. **34** 793 (1987)
- [27] Grushchuk L.P., Usp. Fiz. Nauk **156** 297 (1988)
- [28] Jaekel M.-T. and Reynaud S., EuroPhys. Lett. **13** 301 (1990)
- [29] Grangier P., Slusher R.E., Yurke B. and LaPorta A., Phys. Rev. Lett. **59** 2153 (1987)
- [30] Guena J., Jacquier P., Lintz M., Pottier L., Bouchiat M.A. and Hrisoho A., Opt. Comm. **71** 6 (1989)

- [31] Gardiner C.W., Phys. Rev. Lett. **56** 1917 (1986)
- [32] Savage C.M. and Walls D.F., Phys. Rev. Lett. **57** 2164 (1986)
- [33] Carmichael H.J., Lane A.S. and Walls D.F., Phys. Rev. Lett. **58** 2539 (1987)
- [34] An S., Sargent M. and Walls D.F., Opt. Comm. **67** 373 (1988)
- [35] Courty J.M. and Reynaud S., EuroPhys. Lett. **10** 237 (1989)
- [36] Yurke B., J. Opt. Soc. Am. **B2** 732 (1985)
- [37] Levenson M.B., Shelby R.M., Reid M. and Walls D.F., Phys. Rev. Lett. **57** 2473 (1986)
- [38] LaPorta A., Slusher R.E. and Yurke B., Phys. Rev. Lett. **62** 28 (1989)
- [39] Grangier P., Roch J.-F. and Roger G., Phys. Rev. Lett. **66** 1418 (1991)
- [40] Roch J.-F., Roger G., Grangier P., Courty J.-M. and Reynaud S., Appl. Phys. **B55** 291 (1992)
- [41] Reid M.D. and Walls D.F., Phys. Rev. **A34** 1260 (1986)
- [42] Glesh R. and Mandel L., Phys. Rev. Lett. **59** 1903 (1987)
- [43] Ou Z.Y., and Mandel L., Phys. Rev. Lett. **61** 50, 54 (1988)
- [44] Grangier P., Potasek M.J. and Yurke B., Phys. Rev. **A38** 3132 (1988)
- [45] Ou Z.Y, Wong L.J. and Mandel L., Phys. Rev. **A40** 1428 (1989)
- [46] Zukowski M., Zeilinger A., Horne M.A., and Ekert A.K., Phys. Rev. Lett. **71** 4287 (1993)
- [47] Herzog T.J., Rarity J.G., Weinfurter H., and Zeilinger A., Phys. Rev. Lett. **72** 629 (1994)
- [48] *Quantum mechanical pure states with Gaussian wave functions*, by Schumaker B. L., Physics Reports **135** 319 (1986)
- [49] *Squeezed Light*, eds Loudon and Knight, J. Mod. Opt. **34** 709 (1987)
- [50] *Squeezed States of the Electromagnetic Field*, eds Kimble and Walls, J. Opt. Soc. Am. **B4** 1449 (1987)
- [51] *Photons and quantum fluctuations*, eds Pike and Walther, Adam Hilger (Bristol, 1988)
- [52] *Squeezed and non classical Light*, eds Tombesi and Pike, Plenum (New York, 1989)
- [53] *Quantum Noise Reduction in Optical Systems*, eds Giacobino and Fabre, Appl. Phys. **B55** No 3 (1992)
- [54] Yuen H.P. and Shapiro J.H., Opt. Lett. **4** 334 (1979)
- [55] Walls D.F., Nature **306** 141 (1983)
- [56] Slusher R.E., Hollberg L.W., Yurke B., Mertz J.C. and Valley J.F., Phys. Rev. Lett. **55** 2409 (1985)
- [57] Slusher R.E., Yurke B., Grangier P., LaPorta A., Walls D.F. and Reid M.D., J. Opt. Soc. Am. **B4** 1454 (1987)

- 
- [58] Wu L.A., Kimble H.J, Hall J.L. and Wu H., Phys. Rev. Lett. **57** 2520 (1986)
- [59] Heidmann A., Horowicz R.J., Reynaud S., Giacobino E., Fabre C. and Camy G., Phys. Rev. Lett. **59** 2555 (1987)
- [60] Slusher R.E., Grangier P., LaPorta A., Yurke B. and Potasek M.J., Phys. Rev. Lett. **59** 2566 (1987)
- [61] Wu L.A., Min Xiao, Kimble H.J, J. Opt. Soc. Am. **B4** 1465 (1988)
- [62] Debuisschert T., Reynaud S., Heidmann A., Giacobino E. and Fabre C., Quantum Optics **1** 3 (1989)
- [63] Nabors C.D. and Shelby R.M., Phys. Rev. **A42** 556 (1990)
- [64] Mertz J.C., Debuisschert T., Heidmann A., Fabre C. and Giacobino E., Opt. Lett. **16** 1234 (1991)
- [65] Lugiato L., Strini G. and DeMartini J.L., Opt. Lett. **8** 256 (1983)
- [66] Pereira S.F., Min Xiao, Kimble H.J. and Hall J.L., Phys. Rev. **A38** 4981 (1987)
- [67] Sizmman A., Horowicz R.J., Wagner G. and Leuchs G., Opt. Comm. **80** 138 (1990)
- [68] Kürz P., R. Paschotta, K. Fiedler, and Mlynek J., EuroPhys. Lett. **24** 449 (1993)
- [69] Paschotta R., Collett M., Kürz P., Fiedler K., Bachor H.-A., and Mlynek J., Phys. Rev. Lett. **72** 3807 (1994)
- [70] Shelby R.M., Levenson M.D., Perlmutter S.H., DeVoe R.G. and Walls D.F., Phys. Rev. Lett. **57** 691 (1986)
- [71] Schumaker B.L., Perlmutter S.H., Shelby R.M. and Levenson M.D., Phys. Rev. Lett. **58** 357 (1987)
- [72] Yurke B., Grangier P., Slusher R.E., and Potasek M.J, Phys. Rev. **A35** 3586 (1987)
- [73] Shelby R.M., Drummond P.D. and Carter R.J., Phys. Rev. **A42** 2966 (1990)
- [74] Shurasaki M. and Haus H.A., J. Opt. Soc. Am. **B7** 30 (1990)
- [75] Rosenbluh M. and Shelby R.M., Phys. Rev. Lett. **66** 153 (1991)
- [76] Bergman K. and Haus H.A., Opt. Lett. **16** 663 (1991)
- [77] Machida S. and Yamamoto Y., Opt. Comm. **57** 290 (1986)
- [78] Yamamoto Y., Imoto N., and Machida S., Phys. Rev. **A33** 3243 (1986)
- [79] Tapster P.R., Rarity .G. and Satchell J.S., EuroPhys. Lett. **4** 293 (1987)
- [80] Machida S. Yamamoto Y. and Y.Itaya, Phys. Rev. Lett. **58** 1000 (1987)
- [81] Richardson W.H., Machida S. and Yamamoto Y., Phys. Rev. Lett. **64** 400 (1990)
- [82] Wang H., Freeman M.J., and Steel D.G., Phys. Rev. Lett. **71** 3951 (1993)
- [83] Freeman M.J., Wang H., Steel D.G., Craig R., and Scifres D.R., Opt. Lett. **18** 2141 (1993)
- [84] W.H. Richardson, S. Machida, and Y. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. **66** 2876 (1991)

- 
- [85] Maeda M.W., Kumar P., and Shapiro J.H., *Opt. Lett.* **12** 161 (1987)
- [86] H.M. Gibbs, S.L. Mc Call, and T.N.C. Venkatesan., *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976)
- [87] Lugiato L.A. and Strini G., *Opt. Comm.* **41** 67 (1982)
- [88] Lugiato L.A. and Strini G., *Opt. Comm.* **41** 374 (1982)
- [89] Yurke B., *Phys. Rev.* **A29** 408 (1984)
- [90] Collett M.J. and Walls D.F., *Phys. Rev.* **A32** 2887 (1985)
- [91] Reynaud S., Fabre C., Giacobino E. and Heidmann A., *Phys. Rev.* **A40** 1440 (1989)
- [92] Reid M.A. and Walls D.F., *Opt. Comm.* **50** 406 (1984)
- [93] Reid M.A. and Walls D.F., *Phys. Rev.* **A31** 1622 (1985)
- [94] Reid M.A. and Walls D.F., *Phys. Rev.* **A32** 396 (1985)
- [95] Reid M.A. and Walls D.F., *J. Opt. Soc. Am.* **B2** 1682 (1985)
- [96] Carmichael H.J., *Phys. Rev.* **A33** 3262 (1986)
- [97] Lugiato L.A., *Phys. Rev.* **A33** 4079 (1986)
- [98] Reid M.A. and Walls D.F., *Phys. Rev.* **A33** 4465 (1986)
- [99] Reid M.A. and Walls D.F., *Phys. Rev.* **A34** 4929 (1986)
- [100] Orozco L.A., Raizen M.G., Min Xiao, Brecha R.J. and Kimble H.J., *J. Opt. Soc. Am.* **B4** 1490 (1987)
- [101] Castelli F., Lugiato L.A. and Vadicchino M., *Nuovo Cimento* **B10** 183 (1988)
- [102] Reid M.A., *Phys. Rev.* **A37** 4792 (1988)
- [103] Hilico L., Fabre C., Giacobino E. and Reynaud S., *Phys. Rev.* **A46** 4397 (1992)
- [104] Raizen M.G., Orozco L.A., Min Xiao, Boyd T.L. and Kimble H.J., *Phys. Rev. Lett.* **59** 198 (1987)
- [105] Hope D.M., Bachor H.A., Manson P.J., McClelland D.E., Fisk P.T.H., *Phys. Rev.* **A46** R1181 (1992)
- [106] Hänsch T. and Schawlow A., *Opt. Comm.* **13** 68 (1975)
- [107] Raab E., Prentiss M., Cable A., Chu S. and Pritchard D., *Phys. Rev. Lett.* **59** 2631 (1987)
- [108] Sesko D., Walker T., Monroe C., Gallagher A. and Wieman C., *Phys. Rev. Lett.* **63** 961 (1989)
- [109] Special issue of *J. Opt. Soc. Am.*, **B6** (November 1989)
- [110] Glauber R.J., in *Quantum Optics and Electronics*, eds deWitt, Blandin and Cohen-Tannoudji, Gordon and Breach (1965)
- [111] Wigner E.P., *Phys. Rev.* **40** 749 (1932)
- [112] Takabayasi T., *Progress in Theoretical Physics* **11** 341 (1954)
- [113] Haken H., *Reviews in Modern Physics* **47** 67 (1975)
- [114] Reynaud S., *Annales de Physique* **15** 63 (1990)

- 
- [115] Reynaud S., Heidmann A., Giacobino E. and Fabre C., *Progress in Optics XXX* 1 (1992)
- [116] Yuen H. P., Chan V. W. S., *Opt. Lett.* **8** 177 (1983)
- [117] Abbas G. L., Chan V. W. S., and Yee T. K., *Opt.Lett.* **8** 419 (1983)
- [118] Schumaker B. L., *Opt. Lett.* **9** 189 (1984)
- [119] Shapiro J. H., and Wagner S. S., *IEEE J. Quant. Electr.* **QE20** 803 (1984)
- [120] Heidmann A., Reynaud S. and Cohen-Tannoudji C., *Opt. Comm.* **52** 235 (1984)
- [121] Shapiro H. S., *IEEE J. Quant. Electr.* **QE21** 237 (1985)
- [122] Yurke B., *Phys. Rev.* **A32** 300 (1985)
- [123] Yurke B., *Phys. Rev.* **A32** 311 (1985)
- [124] Lugiato L., *Progress in optics XXI* 71 (1984)
- [125] Gibbs HgM., *Optical Bistability: Controlling Light by Light* Academic (New-York, 1985)
- [126] Shelby R.M., Levenson M.D., Walls D.F., Aspect A. and Milburn G.J., *Phys. Rev.* **A33** 4008 (1986)
- [127] Hilico L., Courty J.M., Fabre C., Giacobino E., Abram I., and Oudar J.L., *Appl. Phys.* **B55** 202 (1992)
- [128] Shelby R.M., Levenson M.D., and Bayer P.W., *Phys. Rev.* **B31** 5244 (1985)
- [129] Hilico L., Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie (1992)
- [130] Ketterle W., Davis K.B., Joffe M.A., Martin A. and Pritchard D.E., *Phys. Rev. Lett.* **70** 2253 (1993)
- [131] Drewsen M., Laurent Ph., Nadir A., Santarelli G., Clairon A., Castin Y., Grison D. and Salomon C., *Appl. Phys.* **B59** 283 (1994)
- [132] Hänsch T.W., Couillaud B., *Opt. Comm.* **35** 441 (1980)
- [133] Kogelnik H., Li T., *Applied Optics* **5** 1550 (1966)
- [134] Hilico L., Fabre C., Giacobino E., *EuroPhys. Lett.* **18** 685 (1992)
- [135] Teich M.C. and Saleh B.E.A., *Progress in Optics XXVI* 104 (1988)
- [136] Drummond P.D., McNeil K.J. and Walls D.F., *Optica Acta* **28** 211 (1981)
- [137] Gardiner C.W., *Handbook of Stochastic Methods* Springer (Berlin, 2e édition, 1985)
- [138] Gardiner C.W., *Quantum Noise* Springer (Berlin, 1991)
- [139] Walls D.F. and Milburn G.J., *Quantum Optics* Springer (Berlin, 1994)
- [140] Fokker A.D., *Annalen der Physik* **43** 310 (1915)
- [141] Planck M., *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.* **325** (1917)
- [142] Risken H., *The Fokker-Planck Equation* Springer (Berlin, 1984)
- [143] Glauber R.J., *Phys. Rev.* **130** 2529 (1963)
- [144] Glauber R.J., *Phys. Rev.* **131** 2766 (1963)

- [145] Sudarshan E.C.G., Phys. Rev. Lett. **10** 277 (1963)
- [146] Langevin P., Comptes Rendus **146** 530 (1908)
- [147] Gardiner C.W. and Collett M.J., Phys. Rev. **A31** 3761 (1985)
- [148] Reynaud S., Fabre C. and Giacobino E., J. Opt. Soc. Am. **B4** 1520 (1987)
- [149] Reynaud S. and Heidmann A., Opt. Comm. **71** 209 (1989)
- [150] Heidmann A., Raimond J.-M. and Reynaud S., Phys. Rev. Lett. **54** 326 (1985)
- [151] Heidmann A., Raimond J.-M., Zagury N. and Reynaud S., Opt. Comm. **54** 189 (1985)
- [152] Courty J.-M., Grangier P., Hilico L. and Reynaud S., Opt. Comm. **83** 251 (1991)
- [153] Courty J.-M. and Reynaud S., Phys. Rev. **A46** 2766 (1992)
- [154] Mori H., Progress in theoretical physics **33** 423 (1965)
- [155] Kubo R., Reports in progress in physics **29** 255 (1966)
- [156] Bonifacio R., Lugiato L.A., Lettere Nuovo Cimento **21** 510 (1978)
- [157] Schleich W. and Scully M.O., Phys. Rev. **A37** 1261 (1988)
- [158] Drummond P.D., IEEE J. Quant. Elec. **QE17** 301 (1981)
- [159] Ballagh R.J., Cooper J., Hamilton M.W., Sandle W.J. and Warrington D.M., Opt. Comm. **37** 143 (1981)
- [160] Lugiato L.A. and Milani M., Zeitschrift fur Physik **B50** 171 (1983)
- [161] Rosenberger A.T., Orozco L.A. and Kimble H.J., Phys. Rev. **A28** 2569 (1983)
- [162] Xiao M., Kimble H.J. and Carmichael H.J., Phys. Rev. **A35** 3832 (1987)
- [163] Xiao M., Kimble H.J. and Carmichael H.J., J. Opt. Soc. Am. **B4** 1546 (1987)
- [164] Hope D.M., McClelland D.E. and Savage C.M., Phys. Rev. **A41** 5074 (1990)
- [165] Lax M., Phys. Rev. **172** 350 (1968)
- [166] Landau L. et Lifshitz E., *Mécanique Quantique* chap. XIV Mir (Moscou, 1967)

## Résumé

Nous avons observé une réduction des fluctuations quantiques d'un faisceau lumineux interagissant avec un milieu non linéaire constitué d'atomes refroidis par laser. Le nuage atomique, produit par un piège magnéto-optique, est placé dans une cavité optique où il interagit avec le faisceau sonde. Quand le piège est coupé, les atomes quittent la zone d'interaction en suivant un mouvement balistique. Cet effet est utilisé pour balayer la cavité sur la résonance. Des mesures du bruit quantique peuvent être effectuées sur ce système bistable pendant un temps de l'ordre de 20-30ms. Une réduction du bruit de  $40 \pm 10\%$  pour une des quadratures a été mesurée dans ces conditions.

Sur le plan théorique, nous avons développé un traitement de la variation du nombre moyen d'atomes dans le faisceau sonde ainsi que des fluctuations de cette variable. De plus, nous avons effectué un traitement complet des fluctuations du faisceau sonde en tenant compte de sa structure spatiale. Une synthèse de ces développements a été utilisée pour modéliser les spectres du bruit expérimentaux. Nous avons trouvé un accord satisfaisant entre les spectres théoriques et les observations expérimentales.

Une réduction du bruit a été aussi observée en présence du piège magnéto-optique avec des atomes très faiblement piégés. La meilleure réduction du bruit mesurée dans de telles conditions est de  $20 \pm 10\%$ .

**Mots-clés:** Réduction du bruit, Atomes froids, Expansion balistique d'un nuage d'atomes froids, Structure transverse, Instabilités, Bistabilité optique par effet Kerr.

## Abstract

Laser cooled atoms have been used as a nonlinear medium to reduce quantum fluctuations of a laser beam. The atomic sample is produced by a magneto-optical trap and placed inside an optical cavity where it is interacting with the probe beam. When the trap is switched off, the atomic cloud undergoes a ballistic expansion, an effect which is used to scan the cavity across resonance. This system exhibits bistable behavior and noise measurements can be performed during a time slot of 20-30ms. A quadrature squeezing of the order of  $40 \pm 10\%$  due to the nonlinear interaction has been observed under such conditions.

On the theoretical side, a treatment of the variation of mean number of atoms in the probe beam as well as of atomic number fluctuations has been developed. A full treatment of quantum fluctuations of the probe beam has been performed taking also into account its transverse mode structure. A synthesis of the theoretical developments has been used to model the experimental noise spectra. The theoretical spectra obtained are in satisfactory agreement with the experimental observations.

A quantum noise reduction has also been observed in presence of the magneto-optical trap with very weakly trapped atoms. The best measured squeezing under these conditions is of the order of  $20 \pm 10\%$ .

**Key words:** Squeezing, Cold atoms, Ballistic expansion of a falling cold atom cloud. Transverse structure. Instabilities. Optical bistability via Kerr effect