



**HAL**  
open science

**Etude théorique d'un gaz de Bose atomique ultra-froid :  
1. Diffusion et localisation de la lumière 2.  
Condensation de Bose-Einstein en dimensionalité réduite**

Emmanuel Mandonnet

► **To cite this version:**

Emmanuel Mandonnet. Etude théorique d'un gaz de Bose atomique ultra-froid: 1. Diffusion et localisation de la lumière 2. Condensation de Bose-Einstein en dimensionalité réduite. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2000. Français. NNT : . tel-00011872

**HAL Id: tel-00011872**

**<https://theses.hal.science/tel-00011872>**

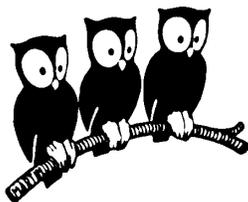
Submitted on 9 Mar 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LABORATOIRE KASTLER BROSSEL



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI  
spécialité : Physique Quantique

présentée par  
Emmanuel MANDONNET

pour obtenir le titre de  
Docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

ÉTUDE THÉORIQUE  
D'UN GAZ DE BOSE ATOMIQUE ULTRA-FROID:  
1. DIFFUSION ET LOCALISATION DE LA LUMIÈRE  
2. CONDENSATION DE BOSE-EINSTEIN EN DIMENSIONALITÉ  
RÉDUITE

Soutenue le 13 mars 2000 devant le jury composé de :

M. R. COMBESCOT	Président
M. M. LEWENSTEIN	Rapporteur
M. B. van TIGGELEN	Rapporteur
M. A. ASPECT	Examineur
M. Y. CASTIN	Examineur
M. J. DALIBARD	Directeur de thèse



# Remerciements

*J'ai effectué ce travail de thèse au laboratoire Kastler-Brossel du département de physique de l'ENS ainsi qu' au laboratoire Charles-Fabry de l'Institut d'Optique à Orsay. Je remercie leurs directeurs successifs – M. Leduc puis E. Giacobino au LKB et C. Imbert puis P. Chavel au LCF – de m'y avoir accueilli.*

*J'ai eu la chance exceptionnelle de travailler sous la direction de deux grands maîtres de la physique atomique. Alain Aspect a lancé mon travail de recherche sur le thème général de l'interaction de la lumière avec un condensat. Au cours des nombreux entretiens que nous avons eus, j'ai été impressionné par sa capacité à dégager le point clef d'un phénomène physique. A ses côtés, la physique quantique m'est progressivement apparue beaucoup plus intuitive - et somme toute beaucoup plus classique - que je ne l'aurais crue.*

*Jean Dalibard m'a fait travailler sur un sujet qui me tenait particulièrement à cœur, le laser à atomes. L'efficacité avec laquelle nous avons avancé est en très large part redevable à son énergie, à son enthousiasme et à sa double compétence d'expérimentateur et de théoricien. Jean m'a appris à ne rien laisser au hasard. J'en veux pour preuve cette semaine du mois d'août 1999 où, reprenant à sa manière tous les calculs analytiques de l'évaporation 1D, il fut conduit à découvrir une grossière erreur dans mes simulations ! Son sens de l'honnêteté intellectuelle est pour moi une référence.*

*Ce serait un euphémisme que de dire que R. Dum et Y. Castin ont très fortement soutenu mon travail. Ralph m'a fait partager sa grande expérience de numéricien et d'informaticien ; j'ai également été marqué par sa façon très personnelle de concrétiser la physique et par sa curiosité pour d'autres domaines scientifiques.*

*J'ai connu Yvan lors de mon stage de DEA en janvier 1996, c'est à dire au tout début de l'explosion de l'activité théorique sur la condensation de Bose-Einstein dans les gaz atomiques. J'ai immédiatement été fasciné par sa maîtrise de la physique. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir dès le départ enseigné la beauté et la puissance du formalisme ainsi que son interprétation. Je me souviens qu'à l'époque, je ne comprenais pas grand chose ; c'est seulement petit à petit et au prix d'un gros effort que se sont mis en place les premiers éléments de ma compréhension. Heureusement, Yvan a toujours fait preuve d'une grande patience à mon égard. Sa disponibilité pour répondre à mes questions – les bonnes comme les stupides – a joué un rôle fondamental dans la*

*progression de mon travail.*

*Pour toutes les raisons que je viens d'évoquer, je remercie très chaleureusement ces quatre physiciens qui, au-delà de cette thèse, auront su m'initier aux exigences comme aux joies de la recherche en physique atomique.*

*Je remercie Bart van Tiggelen et Maceik Lewenstein pour leur lecture attentive de ce mémoire au titre de rapporteur. Je remercie également Roland Combescot pour l'intérêt qu'il porte à mon travail de thèse en acceptant de présider mon jury de soutenance.*

*Je voudrais aussi remercier Eric Akkermans, qui nous a présenté la localisation de la lumière avec la vision du physicien de la matière condensée, ainsi qu'Anna Minguzzi et Iacopo Carusotto, qui furent des collaborateurs efficaces et pleins de bonne humeur sur l'étude du laser à atomes.*

*Je remercie également l'ensemble des membres du groupe « Atomes froids » de Claude Cohen-Tannoudji et du groupe « Optique atomique » d'Alain Aspect. Les nombreuses discussions soulevées – notamment au sein des réunions de groupe – m'ont été très profitables. Je remercie plus particulièrement les théoriciens de ces deux groupes : Roberta Marani, Alice Sinatra et Markus Holzmann. Je voudrais aussi remercier, pour leur contribution au développement du projet sur le laser à atomes, Philippe Bouyer et David Guéry-Odelin. Je remercie de plus David pour les corrections qu'il a apportées à mon manuscrit.*

*Je suis très reconnaissant envers mes amis du DEA de physique quantique : Isabelle Bouchoule, Vincent Boyer et David Larousserie. Ils ont toujours su renforcer ma motivation et mon moral, et nous avons passé ensemble de très bons moments de détente, que ce soit en forêt de Fontainebleau ou dans le Bugey ...*

*Enfin, je remercie les responsables de la gestion des ressources informatiques d'Orsay et du LKB pour leurs compétences techniques ; je remercie également l'équipe accueillante et efficace du secrétariat du LKB, ainsi que l'équipe de la bibliothèque du département de physique de l'ENS.*

# Table des matières

<b>I</b>	<b>A la recherche d'effets de localisation de la lumière dans un gaz atomique dense</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>L'hamiltonien effectif</b>	<b>17</b>
1.1	Point de vue du champ . . . . .	17
1.1.1	Equivalence entre un atome diffuseur et un potentiel en Dirac régularisé . . . . .	18
1.1.2	Cas de $N$ diffuseurs fixes . . . . .	20
1.2	Point de vue des atomes . . . . .	22
1.2.1	Méthode de la résolvante . . . . .	23
1.2.2	Etablissement de l'équation pilote en point de vue de Heisenberg	26
<b>2</b>	<b>Temps de sortie d'un photon</b>	<b>33</b>
2.1	Equation pilote . . . . .	34
2.2	Un peu de théorie de la photodétection . . . . .	34
2.3	Cas d'un seul atome excité . . . . .	36
2.4	Cas d'atomes fixes . . . . .	38
2.5	Approximation de Thomas-Fermi . . . . .	39
2.6	Préparation de l'état initial . . . . .	40
2.7	Présentation et analyse des résultats . . . . .	40
2.8	Calculs analytiques à $t = 0$ . . . . .	42
2.9	Mouvement des atomes . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Propriétés spectrales de <math>H_{\text{eff}}</math></b>	<b>49</b>
3.1	Lien avec le point de vue temporel . . . . .	49
3.2	Densité d'état . . . . .	51
3.3	Longueur de localisation . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Diffusion généralisée</b>	<b>55</b>

<b>II</b>	<b>Vers le laser à atomes continu</b>	<b>59</b>
<b>1</b>	<b>Refroidissement évaporatif d'un jet atomique</b>	<b>65</b>
1.1	Dispositif expérimental . . . . .	65
1.2	Modélisation . . . . .	68
1.3	Principe de la simulation Monte-Carlo . . . . .	69
1.4	Equations hydrodynamiques 1D . . . . .	70
1.4.1	Forme générale des équations . . . . .	71
1.4.2	Calcul des taux d'évaporation . . . . .	73
1.4.3	Etude du déversement . . . . .	74
1.4.4	Optimisation du paramètre $\eta$ . . . . .	75
1.4.5	Comparaison avec la simulation Monte-Carlo . . . . .	77
1.4.6	Echelles de longueur . . . . .	81
1.5	Equations hydrodynamiques 2D . . . . .	82
1.5.1	Forme générale des équations . . . . .	82
1.5.2	Calcul des taux d'évaporation . . . . .	83
1.5.3	Etude du déversement . . . . .	85
1.5.4	Optimisation du paramètre $\eta$ . . . . .	85
1.5.5	Comparaison avec la simulation Monte-Carlo . . . . .	86
1.5.6	Echelles de longueur . . . . .	88
1.6	Comparaison 1D/2D . . . . .	89
<b>2</b>	<b>Cohérence du jet dans le régime quantique</b>	<b>91</b>
2.1	Cas du gaz parfait . . . . .	91
2.1.1	Condensation de Bose-Einstein et dimensionalité . . . . .	91
2.1.2	Condensation des degrés de liberté transverses . . . . .	94
2.2	Prise en compte des interactions . . . . .	98
2.2.1	Non-condensation à 1D . . . . .	99
2.2.2	Approximation du champ classique . . . . .	101
2.3	Perspectives . . . . .	108
<b>A</b>	<b>Code F90 Monte-Carlo</b>	<b>109</b>
<b>B</b>	<b>Calcul des taux d'évaporation 1D</b>	<b>121</b>
<b>C</b>	<b>Méthodes stochastiques</b>	<b>125</b>
C.1	Cas modèle du mouvement brownien . . . . .	125

C.2 Cas d'une distribution thermique classique . . . . . 126



## Première partie

A la recherche d'effets de  
localisation de la lumière dans un  
gaz atomique dense



# Introduction

Développé à partir des années 60, la théorie de la localisation d'Anderson reste aujourd'hui un domaine très actif et ce dans différentes branches de la physique. Elle a donné naissance à une matière à part entière : l'étude quantique des propriétés de transport. Dans cette introduction, nous voudrions poser le problème dans sa généralité et présenter rapidement les différents modèles théoriques existants - aussi bien quantitatifs que qualitatifs. Nous terminerons en insistant sur les spécificités qui apparaissent dans le cas de la localisation de la lumière dans un milieu atomique. Cette introduction s'inspire largement des cours [1] et [2].

## Qu'est-ce que la localisation ?

Plutôt que de répondre immédiatement à cette question délicate, commençons par définir le problème étudié. Il s'agit en fait de décrire les propriétés de transport de l'intensité d'une onde qui subit des diffusions multiples dans un milieu désordonné. Historiquement, c'est pour comprendre le comportement isolant ou conducteur d'un semi-conducteur - selon sa concentration en impuretés - que cette question fut posée.

Commençons par le cas du semi-conducteur décompensé pour lequel l'étude des propriétés de transport se formule exactement dans les termes employés ci-dessus. Dans un semi-conducteur décompensé, le nombre d'électrons de valence est plus grand que le nombre de niveaux accepteurs. Il s'en suit que la conduction est assurée par des électrons « libres » qui diffusent sur les impuretés du cristal. On retrouve bien la diffusion multiple d'une onde électronique sur les impuretés - réparties aléatoirement dans le cristal. Dans le modèle le plus élémentaire, les électrons obéissent à un mouvement de type diffusif, caractérisé par un coefficient de diffusion  $D_0$ . Dans cette approche, on ne prend en compte aucun effet d'interférence entre les ondes successivement diffusées. Toute théorie de la localisation cherchera à inclure - généralement en resumant certains types de diagrammes - l'effet des interférences à tous les ordres. La localisation n'est donc pas un effet de type perturbatif. La théorie auto-cohérente - qui sera étudiée au chapitre 4 - prédit, si le milieu est suffisamment désordonné, une annulation du coefficient de diffusion. L'onde électronique est donc *localisée* dans une région de l'espace et le semi-conducteur est alors un isolant.

Examinons à présent le semi-conducteur compensé, pour lequel le nombre d'électrons

TAB. 1 – *Tableau comparatif des différents champs d'application de la localisation.*

<b>onde</b>	<b>diffuseurs</b>	<b>désordre</b>	<b>mesure</b>
électronique	impuretés	position des impuretés	conductance
micro-ondes	objets diélectriques	position des objets diélectriques	densité spatiale d'énergie électromagnétique
lumière	poudres semi-conducteurs	position des grains	coefficient de transmission

de valence est inférieur ou égal au nombre de niveaux accepteurs. La majeure partie de la conduction provient alors de la possibilité offerte à un électron de sauter d'un site à un autre, par effet tunnel, entre les états fortement liés des différentes impuretés, états ayant entre eux un faible recouvrement. P.W. Anderson [3] propose en 1958 l'hamiltonien le plus simple possible comportant les trois ingrédients physiques indispensables à la modélisation : interférence, diffusion multiple et désordre. Cet hamiltonien est le suivant :

$$H = \sum_n \epsilon_n |n\rangle\langle n| + V \sum_{n,m} |n\rangle\langle m| \quad . \quad (1)$$

L'énergie  $\epsilon_n$  de chaque site est une variable aléatoire, ce qui est un moyen simple de prendre en compte le désordre. Munis de cet hamiltonien, il nous faut répondre à la question ainsi formulée par Anderson : supposons qu'à  $t = 0$  l'électron soit sur le site  $n = 0$ , quelles sont les différentes populations de chaque site au bout d'un temps infini ? Par des calculs non perturbatifs compliqués et approchés de la résolvante, il démontre alors que, pour un désordre suffisamment fort, les populations des différents sites décroissent rapidement avec la distance au site  $n = 0$ , la population de ce dernier site restant quant à elle non négligeable. C'est ce qu'Anderson entend par "l'absence de diffusion dans certains réseaux aléatoires " et que la communauté des physiciens retiendra par la suite comme la « localisation d'Anderson » .

L'exemple du semi-conducteur nous a permis de présenter deux des grandes théories dont nous disposons actuellement pour décrire la localisation : la théorie auto-cohérente et le modèle d'Anderson. Bien évidemment, les effets d'interférences lors de la diffusion multiple dans un milieu désordonné - effets responsables de la localisation - sont susceptibles d'être observés dans de nombreux systèmes physiques. Le tableau 1 résume les caractéristiques des observations expérimentales de la localisation sur des ondes électroniques [4], des micro-ondes [5], [6] et des ondes lumineuses [7]. Le cas des ondes acoustiques a été très étudié du point de vue théorique [8], [9] mais les réalisations expérimentales semblent assez rares [10], [11].

## Les critères qualitatifs de localisation

Lorsque l'on cherche à évaluer rapidement la possibilité d'observer des effets de localisation sur un système donné, la solution la plus efficace consiste à tester des critères qualitatifs. Deux critères - d'interprétation simple - sont très utilisés en pratique : le critère de Thouless et celui de Ioffe-Regel. Ces deux critères peuvent être établis à partir des modèles théoriques cités ci-dessus.

Le critère de Ioffe-Regel est une condition qualitative situant la transition entre le régime localisé et le régime délocalisé. Ce critère compare la longueur d'onde réduite de la particule incidente  $\lambda/2\pi$  à son libre parcours moyen  $\ell$  et s'énonce, dans le cas d'un système 3D :

$$k\ell \sim 1, \quad (2)$$

$k$  désignant le vecteur d'onde de l'onde incidente. Dans la suite, nous utiliserons très souvent le produit  $k\ell$  comme paramètre de notre étude.

Le critère de Thouless repose sur la comparaison de deux échelles de temps. La première - caractéristique macroscopique du système - est le temps typique  $t_D = L^2/D$  mis par une excitation pour traverser l'échantillon de taille  $L$  et de coefficient de diffusion  $D$ . La deuxième échelle de temps - directement reliée à la nature microscopique du système - est en fait l'échelle de temps la plus grande possible susceptible d'être portée par le milieu ; on la définit par  $t_H = \hbar/\Delta E$ , où  $\Delta E$  est l'écart moyen entre niveaux d'énergie. Le critère de Thouless prédit l'apparition d'effets de localisation lorsque  $t_D > t_H$ . En notant  $\delta E \sim \hbar D/L^2$  et en introduisant la conductance adimensionnée  $g \equiv \delta E/\Delta E$ , le critère de Thouless prend la forme suivante :

$$g = \hbar\rho(E)D(E)L^{d-2} < 1, \quad (3)$$

où  $\rho(E)$  désigne la densité d'états par unité de volume et  $d$  la dimensionalité du système.

Afin de faire le lien entre ce critère et celui de Ioffe-Regel, nous introduisons la relation suivante :

$$\rho(E) = \frac{k^2}{\hbar v_E}, \quad (4)$$

où l'on a introduit  $v_E$ , vitesse de transport de l'énergie, qui varie selon

$$v_E \sim l \times \Gamma, \quad (5)$$

où  $l$  décrit le libre parcours moyen dans le milieu et  $\Gamma$  est l'inverse du temps qui sépare deux diffusions. La conductance  $g$  s'écrit alors, en dimension  $d = 3$  :

$$g = \frac{k^2}{v_E}D(E)L \quad (6)$$

Loin de la transition, on peut négliger les effets d'interférences, et le coefficient de diffusion s'écrit simplement :

$$D = D_0 \sim l^2\Gamma. \quad (7)$$

On trouve alors l'expression suivante de la conductance :

$$g = (kl)^2 \frac{L}{l} \quad (8)$$

Comme  $L > l$ , on retrouve que  $g \gg 1$  lorsque  $kl \gg 1$  (c'est à dire en régime non localisé). Mais le critère de Thouless prend tout son sens lorsqu'on lui associe un modèle phénoménologique permettant d'analyser le phénomène de localisation à travers le comportement du coefficient de diffusion  $D$ . Loin de la transition, nous avons vu que

$$D = D_0 \sim l^2 \Gamma \quad . \quad (9)$$

A la transition, on peut écrire :

$$D = D_0 \frac{l}{\zeta} \quad , \quad (10)$$

où  $\zeta$  est la longueur de cohérence dans le milieu. On a bien entendu  $l < \zeta < L$ . En injectant cette relation dans la conductance, on trouve

$$g = (kl)^2 \frac{L}{\zeta} \quad . \quad (11)$$

A la transition, on déduit du critère de Thouless ( $g = 1$ ) et du critère de Ioffe-Regel ( $kl = 1$ ) que l'on a  $L \sim \zeta$  et en conséquence :

$$D \sim D_0 \frac{l}{L} \quad , \quad (12)$$

ce qui donne comme échelle de temps caractéristique :

$$t \sim \frac{L^2}{D} \sim \frac{L^3}{D_0 l} \quad . \quad (13)$$

On a donc un « temps de localisation » qui varie comme le cube de la taille du milieu. Enfin, dans le régime localisé, on a :

$$D = D_0 e^{-L/\xi} \quad , \quad (14)$$

où  $\xi$  est la longueur sur laquelle se concentre l'onde localisée. Cette fois, le « temps de localisation » croît exponentiellement avec la taille du milieu.

Ces lois d'échelles sont au coeur du phénomène de la localisation. Nous n'avons pas pris le temps d'étudier le comportement à la transition ; en revanche, et c'est un point très important de notre étude, nous allons retrouver cette dépendance exponentielle, caractéristique du régime localisé.

## Localisation de la lumière

La première étude théorique du transport de la lumière à résonance dans un gaz atomique [12] date de 1920. Elle permit de montrer que le mouvement d'un photon dans l'échantillon n'était pas un simple vol balistique : les événements succesifs d'émissions et réabsorptions sont bien décrits par un mouvement de type brownien et le temps mis par le photon pour traverser l'échantillon obéit à une loi de type diffusion. Un modèle plus complet, élaboré dans les années 50, permet de prendre en compte les effets d'élargissements naturels et Doppler [13]. Enfin, l'étude de la localisation d'Anderson avec des ondes électromagnétiques a été initiée dans les années 80 [14], [15].

Il existe bien sûr de nombreuses spécificités pour le cas de la lumière, la plus marquée étant le caractère vectoriel du champ électromagnétique. L'essentiel des résultats de cette thèse sont obtenus à l'aide d'un modèle scalaire ; mais la généralisation de la méthode au cas vectoriel ne poserait qu'un simple problème de temps pour les calculs numériques.

Par ailleurs, on distingue pour la lumière les concepts de localisation faible et de localisation forte. La localisation faible se manifeste par un pic deux fois plus intense que le fond dans la rétrodiffusion cohérente. Ce pic possède une forme triangulaire tout à fait caractéristique. Cette localisation faible, qui est théoriquement bien comprise [16], a été observée dans de nombreux systèmes [17], [18], [19]. Il n'en n'est pas de même pour la localisation forte, et à l'heure actuelle seule une équipe est parvenue à observer des effets de localisation forte de la lumière en utilisant comme échantillons diffusants des poudres de semi-conducteur [7].

Le physicien des atomes froids peut se demander si un condensat d'atomes alcalins ne constitue pas un candidat sérieux pour l'observation de la localisation de la lumière. La récente observation de la localisation faible dans un nuage d'atomes froids par le groupe de R. Kaiser et C. Miniatura à Nice [20] incite à poursuivre les investigations dans cette voie.

On peut se convaincre avec quelques ordres de grandeur qu'il est possible de satisfaire au critère de Ioffe-Regel. Dans un gaz atomique, le libre parcours moyen  $\ell$  est donné par

$$\ell = \frac{1}{n\sigma} \quad , \quad (15)$$

où  $n$  est la densité atomique et  $\sigma$  la section efficace de diffusion d'un atome. Dans le cas du modèle d'un atome à deux niveaux soumis à une onde incidente scalaire, la section efficace de diffusion à résonance vaut

$$\sigma = \lambda^2/\pi \quad . \quad (16)$$

On peut donc réécrire le critère de Ioffe-Regel sous la forme:

$$n\lambda^3 \sim 20 \quad . \quad (17)$$

Pour des atomes de rubidium, pour lesquels  $\lambda \simeq 800$  nm, on obtient une densité critique  $n \simeq 4.10^{13}$ at/cm<sup>3</sup>. Il semble donc tout à fait envisageable de mettre à profit les très fortes densités d'un condensat<sup>1</sup> pour observer la localisation de la lumière. Intuitivement, on s'interroge cependant sur le caractère désordonné d'un tel milieu diffuseur. On est tenté a priori de se représenter un condensat comme un système très ordonné puisque tous les atomes sont dans le même état quantique. Nous tenterons d'éclaircir cette notion et d'apporter les premiers éléments de réponse quant à la possibilité de piéger des photons dans un condensat par des effets de localisation.

---

1. Les densités d'un condensat peuvent atteindre les  $10^{15}$ at/m<sup>3</sup>. Au-delà, les pertes à trois corps limitent considérablement la durée de vie du condensat.

# Chapitre 1

## L'hamiltonien effectif

### Introduction

Le problème général de l'interaction entre un photon et  $N$  atomes dans un piège est très compliqué. Afin de réduire la complexité du problème, on peut commencer par ne conserver comme variables d'étude que celles du champ ou que celles des atomes. On trouve alors que le système « réduit » évolue selon un hamiltonien effectif. Cet hamiltonien effectif comprend les effets du couplage entre les deux systèmes (champ électromagnétique et  $N$  atomes). Dans ce chapitre, nous allons établir l'expression de cet hamiltonien effectif en conservant tout d'abord comme variables d'étude celles du champ électromagnétique - c'est ce que nous appellerons le point de vue du champ - puis en ne retenant que les variables atomiques - ce sera le point de vue des atomes.

### 1.1 Point de vue du champ

La localisation de la lumière est souvent présentée comme étant la localisation d'une *onde* dans un *potentiel aléatoire*. Il semble donc naturel de commencer par s'intéresser au champ électromagnétique et montrer que celui-ci obéit effectivement à une équation de type Schrödinger avec un potentiel aléatoire.

Dans le premier paragraphe, nous montrons tout d'abord quel est le potentiel associé à un atome diffuseur fixé et agissant sur un champ incident. Nous traitons ensuite le cas de  $N$  diffuseurs placés en des positions fixes. Dans toute cette partie sur le point de vue du champ, nous décrivons l'atome à l'aide du modèle à deux niveaux.

### 1.1.1 Equivalence entre un atome diffuseur et un potentiel en Dirac régularisé

Nous considérons le système constitué d'un atome sur lequel est envoyée une onde plane électromagnétique incidente  $E_0(\vec{r})$  (ou champ électrique en l'absence du diffuseur). Nous cherchons à écrire l'équation déterminant le champ dans l'état stationnaire de diffusion  $E(\vec{r})$  sous la forme

$$(\Delta + k^2)E(\vec{r}) = U(\vec{r})E(\vec{r}) \quad . \quad (1.1)$$

Le membre de gauche de cette équation n'est autre que l'équation de D'Alembert décrivant l'évolution libre du champ de vecteur d'onde dans le vide  $k$  et de fréquence  $\omega = kc$ ; le membre de droite est un terme source qui traite la diffusion sur l'atome au moyen d'un potentiel  $U(\vec{r})$ . On utilise le terme potentiel car on peut voir cette équation comme une équation de Schrödinger en régime stationnaire dont le champ  $E(\vec{r})$  est une solution d'énergie  $\epsilon = k^2$ . Nous allons supposer que le potentiel est un Dirac régularisé [21], encore appelé pseudo-potentiel en théorie des collisions:

$$U(\vec{r}) = U_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \left( \frac{\partial}{\partial |\vec{r} - \vec{r}_0|} |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot \right) \quad , \quad (1.2)$$

où  $\vec{r}_0$  désigne la position de l'atome diffuseur et  $U_0$  est à déterminer. Ce pseudo-potentiel permet de traiter un champ divergent en  $1/|\vec{r} - \vec{r}_0|$ , d'où le terme Dirac *régularisé*. On résout l'équation (1.1) formellement à l'aide de sa fonction de Green:

$$E(\vec{r}) = E_0(\vec{r}) + \int d^3 r' g(\vec{r} - \vec{r}') U(\vec{r}') E(\vec{r}') \quad , \quad (1.3)$$

avec

$$g(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi r} e^{ikr} \quad . \quad (1.4)$$

En injectant l'expression (1.2) ci-dessus, on obtient, pour  $\vec{r} \neq \vec{r}_0$ :

$$\begin{aligned} E(\vec{r}) &= E_0(\vec{r}) \\ &+ U_0 \int d^3 r' g(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \frac{\partial}{\partial |\vec{r}' - \vec{r}_0|} (|\vec{r}' - \vec{r}_0| E(\vec{r}')) \quad , \end{aligned}$$

ou encore

$$E(\vec{r}) = E_0(\vec{r}) + U_0 g(\vec{r} - \vec{r}_0) \frac{d_0}{b\epsilon_0} \quad , \quad (1.5)$$

avec la notation

$$\begin{aligned} \frac{d_0}{b\epsilon_0} &= \frac{\partial}{\partial |\vec{r}' - \vec{r}_0|} (|\vec{r}' - \vec{r}_0| E(\vec{r}')) \Big|_{\vec{r}' = \vec{r}_0} \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (r E(\vec{r} + \vec{r}_0)) \Big|_{\vec{r} = \vec{0}} \quad , \end{aligned} \quad (1.6)$$

$d_0$  étant le dipôle électrique moyen de l'atome et  $b$  désignant un coefficient à déterminer. En réinjectant (1.5) dans (1.6), on trouve:

$$\frac{d_0}{b\epsilon_0} = E_0(\vec{r}_0) + U_0 \frac{d_0}{b\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} (rg(r)) \Big|_{r=0}, \quad (1.7)$$

et en utilisant (1.4), on peut finalement exprimer le dipôle en fonction du champ incident:

$$d_0 = \frac{b}{1 + i \frac{U_0 k}{4\pi}} \epsilon_0 E_0(\vec{r}_0) \quad . \quad (1.8)$$

On identifie alors la polarisabilité de l'atome comme étant

$$\alpha = \frac{b}{1 + i \frac{U_0 k}{4\pi}} \quad . \quad (1.9)$$

Or le calcul quantique de la polarisabilité d'un atome dans une onde plane incidente est bien connu [22] et donne, dans le cas des faibles saturations:

$$\alpha = -\frac{d^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{\delta + i \frac{\Gamma}{2}} \quad , \quad (1.10)$$

avec  $\Gamma$  l'inverse de la durée de vie de l'état excité due à l'émission spontanée et  $\delta$  le désaccord en fréquence de l'onde incidente par rapport à la résonance. En comparant les deux expressions de la polarisabilité, on en déduit

$$U_0 = \frac{2\pi\Gamma}{k\delta} \quad , \quad (1.11)$$

et

$$b = -\frac{d^2}{\delta\epsilon_0\hbar} \quad . \quad (1.12)$$

On reconnaît  $b$  comme étant la polarisabilité de l'atome lorsque l'on considère que la durée de vie de l'état excité est infinie ( $\Gamma = 0$ ). La constante de couplage  $U_0$  permet de définir, comme on le fait dans le cas des collisions entre atomes, une longueur de diffusion dans l'onde  $s$ :

$$a = \frac{U_0}{4\pi} \quad . \quad (1.13)$$

A résonance, c'est à dire lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , la longueur de diffusion tend vers l'infini, mais la section efficace de diffusion [23],

$$\sigma = 4\pi \left| \frac{a}{1 + ika} \right|^2 \quad , \quad (1.14)$$

reste parfaitement définie et tend vers  $\sigma_0 = 4\pi/k^2$ .

### 1.1.2 Cas de N diffuseurs fixes

On considère désormais  $N$  diffuseurs se trouvant en des positions fixées  $\{\vec{r}_i\}$ . Le champ total  $E(\vec{r})$  est un état stationnaire de diffusion pour l'hamiltonien

$$H = H_0 + V \quad , \quad (1.15)$$

avec  $H_0 = -\Delta$  et

$$V = U_0 \sum_{i=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \left( \frac{\partial}{\partial |\vec{r} - \vec{r}_i|} |\vec{r} - \vec{r}_i| \cdot \right) \quad . \quad (1.16)$$

Nous allons calculer la résolvante associée à cet hamiltonien,

$$G(z) = \frac{1}{z - H} \quad , \quad (1.17)$$

pour  $z = k^2 + i\epsilon$ ,  $k$  désignant toujours la norme du vecteur d'onde dans le vide de l'onde plane incidente. On utilise le développement de  $G$  en puissances de  $V$ :

$$G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + \dots \quad (1.18)$$

où  $G_0$  est la résolvante de  $H_0$ , c'est à dire que

$$\langle \vec{r} | G_0 | \vec{r}' \rangle = g(\vec{r} - \vec{r}') \quad . \quad (1.19)$$

Nous cherchons à calculer les éléments de matrice  $\langle \vec{r} | G | \vec{r}' \rangle$ , pour  $\vec{r}$  et  $\vec{r}'$  différents des  $\{\vec{r}_i\}$ . Etudions par exemple le terme  $\langle \vec{r} | G_0 V G_0 V G_0 | \vec{r}' \rangle$ . Pour cela, remplaçons  $V$  par son expression pour obtenir:

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | G_0 V G_0 V G_0 | \vec{r}' \rangle &= \langle \vec{r} | G_0 \left[ U_0 \sum_{i=1}^N |\vec{r}_i\rangle \langle \vec{r}_i| \left( \frac{\partial}{\partial |\vec{r} - \vec{r}_i|} |\vec{r} - \vec{r}_i| \cdot \right) \right] \\ &\times G_0 \left[ U_0 \sum_{j=1}^N |\vec{r}_j\rangle \langle \vec{r}_j| \left( \frac{\partial}{\partial |\vec{r} - \vec{r}_j|} |\vec{r} - \vec{r}_j| \cdot \right) \right] G_0 | \vec{r}' \rangle \quad . \end{aligned}$$

Les termes avec  $i \neq j$  ne comportent pas de singularités et ont pour contribution:

$$\sum_{i \neq j} U_0 g(\vec{r} - \vec{r}_i) [U_0 g(\vec{r}_j - \vec{r}_i)] g(\vec{r}_j - \vec{r}') \quad . \quad (1.20)$$

Les termes  $i = j$  sont plus subtils et le pseudo-potiel est là pour les régulariser. En effet, compte tenu de

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \right) \right|_{r=0} = ik \quad , \quad (1.21)$$

on obtient:

$$\sum_i U_0 g(\vec{r} - \vec{r}_i) \left[ U_0 \frac{-1}{4\pi} (ik) \right] g(\vec{r}_i - \vec{r}') \quad . \quad (1.22)$$

On peut regrouper les résultats sous l'écriture

$$\langle \vec{r} | G_0 V G_0 V G_0 | \vec{r}' \rangle = \sum_{i,j} U_0 g(\vec{r} - \vec{r}_i) \left[ \frac{1}{\delta} (H_{\text{eff}})_{ij} \right] g(\vec{r}_j - \vec{r}') \quad , \quad (1.23)$$

où l'on a introduit l'hamiltonien effectif dont les éléments de matrice sont donnés par

$$(H_{\text{eff}})_{i \neq j} = -\frac{\Gamma}{2} \frac{e^{ikr_{ij}}}{kr_{ij}} \quad , \quad (H_{\text{eff}})_{ii} = -i\frac{\Gamma}{2} \quad , \quad (1.24)$$

avec  $r_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ . En faisant le même travail pour les autres puissances de  $V$ , on peut écrire:

$$\begin{aligned} \langle \vec{r} | G | \vec{r}' \rangle &= g(\vec{r} - \vec{r}') \\ &+ U_0 \sum_{i,j} g(\vec{r} - \vec{r}_i) \left[ \delta_{ij} + \frac{1}{\delta} (H_{\text{eff}})_{ij} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\delta^2} \sum_k (H_{\text{eff}})_{ik} (H_{\text{eff}})_{kj} + \dots \right] g(\vec{r}_j - \vec{r}') \quad , \end{aligned} \quad (1.25)$$

soit en resommant la série géométrique:

$$\langle \vec{r} | G | \vec{r}' \rangle = g(\vec{r} - \vec{r}') + U_0 \sum_{i,j} g(\vec{r} - \vec{r}_i) \langle i | \frac{1}{\delta - H_{\text{eff}}} | j \rangle g(\vec{r}_j - \vec{r}') \quad . \quad (1.26)$$

Revenant à une notation en termes d'opérateurs, on a :

$$G = G_0 + G_0 T G_0 \quad , \quad (1.27)$$

où l'on a introduit l'opérateur  $T$ , qui n'est autre que la matrice  $T$ , défini par:

$$T = U_0 \sum_{i,j} |\vec{r}_i\rangle \langle i | \frac{1}{\delta - H_{\text{eff}}} | j \rangle \langle \vec{r}_j | \quad . \quad (1.28)$$

Supposons que  $H_{\text{eff}}$  possède une valeur propre  $\epsilon_S$  de partie imaginaire presque nulle. et appelons  $|| \phi_S \rangle$  le vecteur propre correspondant:

$$H_{\text{eff}} || \phi_S \rangle = \epsilon_S || \phi_S \rangle \quad . \quad (1.29)$$

En ne retenant dans la matrice  $T$  que le terme dominant, on a:

$$T \simeq U_0 |\phi_S\rangle \frac{1}{\delta - \epsilon_S} \langle \phi_S | \quad , \quad (1.30)$$

avec

$$|\phi_S\rangle = \sum_i |\vec{r}_i\rangle \langle i | \phi_S \rangle \quad . \quad (1.31)$$

On interprètera cet état au chapitre 3 comme étant un état localisé du champ électromagnétique.

Remarquons cependant qu'il est très difficile d'observer cet état dans une expérience de diffusion. Calculons en effet le produit scalaire entre l'onde plane incidente et l'état localisé:

$$\langle \vec{k} | \phi_S \rangle = \sum_i e^{-ik\vec{u}\cdot\vec{r}_i} \langle i | \phi_S \rangle = \mathcal{D}(\vec{u}) \parallel \phi_S \rangle \quad , \quad (1.32)$$

avec la notation

$$\mathcal{D}(\vec{u}) \equiv \sum_i e^{-ik\vec{u}\cdot\vec{r}_i} \langle i | \quad . \quad (1.33)$$

Sachant que

$$\langle \phi_S \parallel (H_{\text{eff}} - H_{\text{eff}}^\dagger) \parallel \phi_S \rangle = 2i\text{Im}[\epsilon_S] \quad , \quad (1.34)$$

on en déduit que

$$\int \frac{d^2\vec{n}}{4\pi} \langle \phi_S \parallel \mathcal{D}^\dagger(\vec{n})\mathcal{D}(\vec{n}) \parallel \phi_S \rangle = 2\text{Im}[\epsilon_S] \quad . \quad (1.35)$$

Il faut en conclure que le recouvrement de l'onde plane incidente avec l'état localisé est très faible. Ce résultat constitue une motivation supplémentaire pour rechercher des effets de localisation par une voie autre que des expériences de diffusion, comme nous le proposerons au chapitre 2.

## 1.2 Point de vue des atomes

Nous choisissons maintenant d'étudier notre système à l'aide des variables atomiques. Cette approche présente en autres avantages la possibilité de traiter quantiquement le mouvement des atomes. La première méthode pour éliminer les variables de champ consiste à établir l'équation pilote décrivant l'évolution des variables atomiques. Cette équation repose sur les approximations de Born-Markov. On trouvera l'établissement de cette équation dans la référence [24].

La méthode la plus simple pour obtenir l'hamiltonien effectif, et qui fait l'objet de notre premier paragraphe, consiste à calculer la restriction de la résolvante à un sous-espace particulier. Les calculs étant relativement courts, ce sera l'occasion de donner l'expression de  $H_{\text{eff}}$  dans le cas d'une transition  $J = 0 \rightarrow J = 1$  (donc en tenant compte du caractère vectoriel de la lumière).

Nous présenterons ensuite un calcul plus élaboré permettant de retrouver en point de vue de Heisenberg non seulement  $H_{\text{eff}}$  mais aussi l'équation pilote.

### 1.2.1 Méthode de la résolvante

Nous présentons dans ce paragraphe la méthode la plus directe pour retrouver l'hamiltonien effectif. Elle consiste à calculer la restriction de la résolvante à un sous-espace par la méthode des projecteurs ([22], chapitre III). L'hamiltonien<sup>1</sup> du système des  $N$  atomes couplés au champ électromagnétique s'écrit, en jauge  $\vec{d} \cdot \vec{E}$ ,  $H = H_A + H_{\text{ext}} + H_R + V$  où

$$H_A = \sum_{i=1}^N \hbar\omega_A \sum_{\alpha} |e_{\alpha}^i\rangle\langle e_{\alpha}^i| \quad , \quad (1.36)$$

$$H_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + U(\vec{r}_i) \quad , \quad (1.37)$$

$$H_R = \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon} \perp \vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}^{\dagger} a_{\vec{k}\vec{\epsilon}} \quad , \quad (1.38)$$

$$V = - \sum_{i=1}^N \vec{d}_i \cdot \vec{E}(\vec{r}_i) \quad . \quad (1.39)$$

L'opérateur champ électrique<sup>2</sup> a pour expression:

$$\vec{E}(\vec{r}) = i \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon} \perp \vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V}} \left( a_{\vec{k}} \vec{\epsilon} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - a_{\vec{k}}^{\dagger} \vec{\epsilon} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \quad . \quad (1.40)$$

On notera  $H_0 = H_A + H_{\text{ext}} + H_R$  l'hamiltonien du système sans interaction. Dans la suite nous supposons que  $H_{\text{ext}}$  est constant et nous choisisons de prendre cette constante égale à zéro.

On restreint l'étude en ne prenant en compte que l'interaction entre un atome dans l'état excité et un atome dans l'état fondamental, ce qui signifie que l'on ne considère que le cas des faibles intensités lumineuses<sup>3</sup> pour la préparation de l'état initial. Pour cela, on introduit le sous-espace des degrés de liberté internes  $\mathcal{E}_e$  où seul un quelconque des  $N$  atomes est dans l'état excité. Une base de ce sous-espace est constituée par les vecteurs

$$|i : e_{\alpha}\rangle = |e_{\alpha}^i\rangle \otimes_{i \neq j} |g^j\rangle \quad . \quad (1.41)$$

L'indice  $\alpha$  vaut  $x, y, z$  si l'on choisit une base cartésienne ou  $-1, 0, 1$  si l'on se place dans une base standard. Notons que dans l'écriture ci-dessus, l'état du champ électromagnétique est le vide.

1. Nous n'écrivons pas, pour simplifier les écritures, les termes de contact qui interviennent dans  $V$ . En effet, les positions des atomes étant fixes et distinctes, ce terme est nul. On pourra consulter la référence [25] pour un calcul complet.

2. Rappelons que, en jauge  $\vec{d} \cdot \vec{E}$ , l'opérateur champ électrique  $\vec{E}(\vec{r})$  représente l'induction divisée par la constante  $\epsilon_0$ , c'est à dire, avec la notation habituelle,  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{D}(\vec{r})/\epsilon_0$ .

3. Cela signifie que l'on prend une fréquence de Rabi très inférieure à la largeur de l'état excité:  $\Omega \ll \Gamma$ .

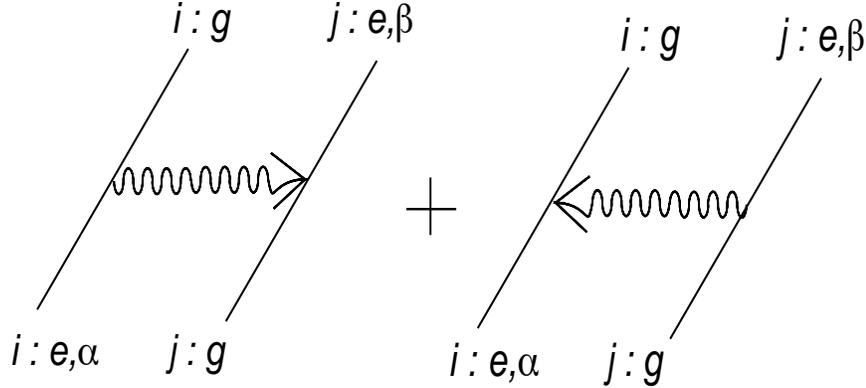


FIG. 1.1 – Diagrammes pris en compte dans le calcul de  $H_{\text{eff}}$ .

Nous allons calculer la restriction de la résolvante à ce sous-espace, c'est à dire, en introduisant le projecteur  $P$  sur le sous-espace  $\mathcal{E}_e$ , que nous cherchons à évaluer pour  $z = \hbar\omega + i\epsilon$ ,  $\omega$  étant à ce stade quelconque :

$$PG(z)P = \frac{P}{z - P(H_0 + R(z))P} \quad , \quad (1.42)$$

où  $R(z)$  désigne l'opérateur déplacement. En utilisant les formules d'algèbre de la référence [22], on peut développer selon les puissances de  $V$  l'opérateur déplacement :

$$R = V + V \frac{Q}{z - H_0} V + V \frac{Q}{z - H_0} V \frac{Q}{z - H_0} V + \dots \quad . \quad (1.43)$$

En négligeant les termes à partir de l'ordre 3 en  $V$ , on obtient :

$$PRP = PV \frac{Q}{z - H_0} VP \quad . \quad (1.44)$$

On a introduit le projecteur  $Q$  sur le complémentaire de  $\mathcal{E}_e$ . En injectant deux relations de fermeture de  $\mathcal{E}_e$ , on obtient :

$$PRP = \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} |i : e_\alpha\rangle \langle j : e_\beta| \langle i : e_\alpha| PV \frac{Q}{z - H_0} VP |j : e_\beta\rangle \quad (1.45)$$

Il faut faire attention à ne pas faire l'approximation du champ tournant et à bien prendre en compte les deux diagrammes de la figure (1.1) :

$$\langle i : e_\alpha| PV \frac{Q}{z - H_0} VP |j : e_\beta\rangle = \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V} (d\epsilon_\alpha)(d^*\epsilon_\beta) \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}}{\hbar\omega - \hbar\omega_{\vec{k}} + i\epsilon}$$

$$+ \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} (d\epsilon_\alpha)(d^*\epsilon_\beta) \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}}{\hbar\omega - (\hbar\omega_{\vec{k}} + 2\hbar\omega_\Lambda + i\epsilon)} .$$

On peut donc définir un hamiltonien effectif  $H_{\text{eff}} = P(H_0 + R(z))P$  qui s'écrit, en faisant l'approximation du pôle ( $\omega \simeq \omega_\Lambda$ ):

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha, \beta} \left( \hbar\omega_\Lambda \delta_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}(\vec{0}) \right) |i : e_\alpha\rangle \langle i : e_\beta| \\ &+ \sum_{i \neq j} \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}(\vec{r}_{ij}) |i : e_\alpha\rangle \langle j : e_\beta| , \end{aligned} \quad (1.46)$$

avec

$$g_{\alpha\beta}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \frac{|d|^2 \omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 V} \epsilon_\alpha \epsilon_\beta \left( \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{-\omega_\Lambda - \omega_{\vec{k}} - i\epsilon} + \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\omega_\Lambda - \omega_{\vec{k}} + i\epsilon} \right) . \quad (1.47)$$

On consultera la référence [25], p. 331-332 et p. 338 pour le calcul de ce tenseur. Pour  $\vec{r} = \vec{0}$ , on retrouve le déplacement de Lamb et la largeur de l'état excité:

$$g_{\alpha\beta}(\vec{0}) = (\Delta E - i\hbar\frac{\Gamma}{2})\delta_{\alpha\beta} , \quad (1.48)$$

avec

$$\Gamma = \frac{|d|^2 k^3}{3\pi\epsilon_0 \hbar} . \quad (1.49)$$

Pour  $\vec{r} \neq \vec{0}$ , on retrouve l'interaction résonnante dipôle-dipôle [26]:

$$g_{\alpha\beta}(\vec{r}) = \frac{4}{3}\hbar\Gamma e^{ik_A r} \left[ \left( -\frac{1}{k_A r} - \frac{i}{(k_A r)^2} + \frac{1}{(k_A r)^3} \right) \delta_{\alpha\beta} + \left( \frac{1}{k_A r} + \frac{3i}{(k_A r)^2} - \frac{3}{(k_A r)^3} \right) \frac{r_\alpha r_\beta}{r^2} \right] \quad (1.50)$$

Nous pouvons approfondir notre compréhension de  $H_{\text{eff}}$  en prenant le cas très simple de deux atomes. Remarquons que le tenseur  $\hat{g}(\vec{r})$  est diagonal dans toute base orthogonale dont l'un des vecteurs est  $\vec{u}_z = \vec{r}/r$ . Nous noterons  $g_m$  les éléments diagonaux de  $\hat{g}(\vec{r})$  dans la base standard d'axe  $\vec{u}_z$ . En utilisant cette base, les vecteurs propres de  $H_{\text{eff}}$  sont tout simplement :

$$|m_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1 : g, 2 : e_m\rangle \pm |1 : e_m, 2 : g\rangle] , \quad (1.51)$$

de valeurs propres

$$\epsilon_m = -i\hbar\Gamma \pm g_m . \quad (1.52)$$

Il y a donc quatre valeurs propres distinctes ( $g_{+1} = g_{-1}$ ).

La figure 1.2 montre la valeur des parties imaginaires et réelles de ces valeurs propres en fonction de la distance  $r$  entre les deux atomes. On retrouve sur la partie imaginaire

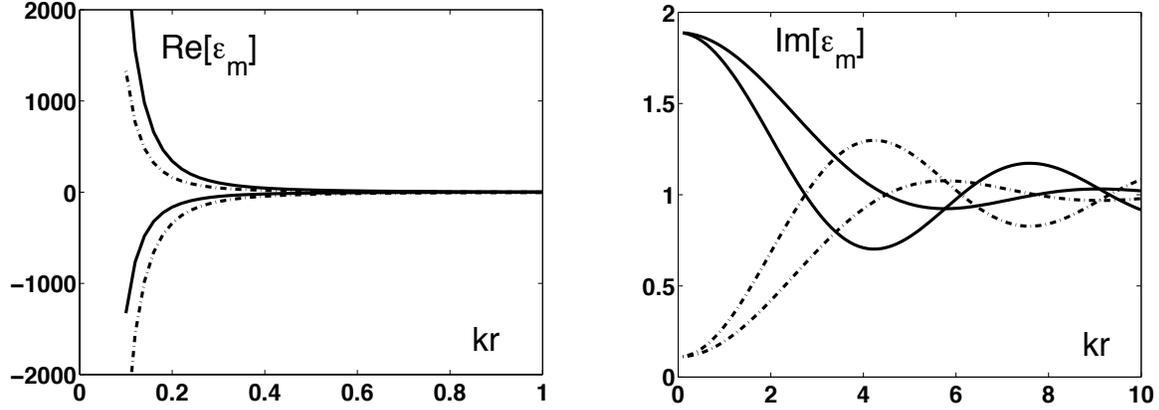


FIG. 1.2 – Parties imaginaires et parties réelles des valeurs propres de  $H_{\text{eff}}$  pour deux atomes. L'unité sur l'axe des ordonnées est  $\hbar\Gamma$ . Les états superradiants sont en trait plein, les états subradiants en pointillé.

qu'il existe deux états subradiants et deux états superradiants. La partie réelle est responsable d'une force entre les deux atomes, force qui peut être aussi bien répulsive qu'attractive. Notons que l'approche que nous développerons, dans laquelle le mouvement des atomes sera négligé, est susceptible d'être invalidée par l'existence de cette force.

### 1.2.2 Etablissement de l'équation pilote en point de vue de Heisenberg

Nous établissons dans ce paragraphe l'équation pilote à partir du point de vue de Heisenberg. La motivation initiale de ce calcul est de déterminer l'expression des opérateurs champ qu'il faut utiliser pour déterminer le signal de photodétection. Quelques formules seront donc utilisées au paragraphe 2.2.

L'hamiltonien du système des  $N$  atomes de coordonnées  $\{\vec{r}_i\}$  couplés au champ électromagnétique s'écrit [22], en jauge  $\vec{d} \cdot \vec{E}$ ,  $H = H_A + H_{\text{dip}} + H_R + V$  où

$$H_A = \sum_{i=1}^N \hbar\omega_A |e_i\rangle\langle e_i| \quad , \quad (1.53)$$

$$H_{\text{dip}} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i<j} d_i d_j \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad , \quad (1.54)$$

$$H_R = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \quad , \quad (1.55)$$

$$V = - \sum_{i=1}^N d_i E(\vec{r}_i) \quad . \quad (1.56)$$

Nous avons considéré ici un modèle de champ scalaire en interaction avec un atome à deux niveaux. On a introduit les opérateurs dipôles atomiques  $d_i = d_i^+ + d_i^-$  avec  $d_i^+ = d\sigma_i^+ = d|e_i\rangle\langle g_i|$  et  $d_i^- = (d_i^+)^\dagger$ . L'opérateur champ  $E(\vec{r})$  est la somme d'un terme  $E^{(+)}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} v_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} a_{\vec{k}}$  ne contenant que des annihilateurs et d'un terme  $E^{(-)}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} a_{\vec{k}}^\dagger$  ne contenant que des créateurs, où  $v_{\vec{k}} = i\sqrt{\hbar\omega_{\vec{k}}/2\epsilon_0 V}$ . En point de vue de Heisenberg, l'équation d'évolution des  $a_{\vec{k}}$  s'écrit

$$i\hbar\dot{a}_{\vec{k}} = \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}} - \sum_{i=1}^N d_i v_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \quad , \quad (1.57)$$

ce qui s'intègre formellement en

$$a_{\vec{k}}(t) = e^{-i\omega_{\vec{k}}t} \left[ a_{\vec{k}}(0) + \int_0^t d\tau \left( -\frac{1}{i\hbar} \sum_{i=1}^N d_i(\tau) v_{\vec{k}}^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} \right) e^{-i\omega_{\vec{k}}\tau} \right] \quad . \quad (1.58)$$

L'expression de l'opérateur champ en fonction des dipôles s'écrit:

$$E^{(+)}(\vec{r}, t) = E_{\text{libre}}^{(+)}(\vec{r}, t) - \frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \sum_{i=1}^N d_i(\tau) f(\vec{r} - \vec{r}_i, t - \tau) \quad , \quad (1.59)$$

où l'on a introduit les notations  $E_{\text{libre}}^{(+)}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} v_{\vec{k}} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} a_{\vec{k}}(0)$  et

$$f(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} |v_{\vec{k}}|^2 e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_{\vec{k}}t)} \quad . \quad (1.60)$$

Le calcul de  $f(\vec{r}, t)$  s'effectue en coordonnées sphériques après passage à la limite continue, on introduit également un facteur de convergence  $\exp(-k\epsilon)$  et on fera tendre  $\epsilon$  vers 0 à la fin du calcul. On obtient donc

$$f(\vec{r}, t) = \frac{\hbar c}{r\epsilon_0 4\pi^2} \frac{1}{2i} \int_0^\infty dk k^2 \left[ e^{ik(r-ct)} - e^{-ik(r-ct)} \right] e^{-k\epsilon} \quad . \quad (1.61)$$

Compte tenu de  $\int_0^\infty dk k^2 e^{\alpha k} = -\frac{2}{\alpha^3}$ , on trouve finalement  $f(\vec{r}, t) = f_+(\vec{r}, t) + f_-(\vec{r}, t)$  avec

$$f_{\pm}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar c}{\epsilon_0 4\pi^2} \frac{i}{r} \frac{1}{(i(r \mp ct) \mp \epsilon)^3} \quad (1.62)$$

Les fonctions  $f_{\pm}$  sont piquées autour de  $t = \pm r/c$ . Les dipôles oscillant essentiellement à la fréquence  $\omega_A$  de la transition atomique, on définit les opérateurs  $\tilde{d}_i^{\pm}$  tels que  $d_i^{\pm} = e^{\pm i\omega_A t} \tilde{d}_i^{\pm}$ . On pourra alors utiliser le fait que les  $\tilde{d}_i^{\pm}$  évoluent très lentement à l'échelle de  $\omega_A^{-1}$ . On peut alors écrire (1.59) sous la forme

$$\begin{aligned} E^{(+)}(\vec{r}, t) &= E_{\text{libre}}^{(+)}(\vec{r}, t) \\ &\quad - \frac{1}{i\hbar} \sum_{i=1}^N e^{i\omega_A t} \int_0^t d\tau \left[ \tilde{d}_i^+(t - \tau) e^{-i\omega_A \tau} f(\vec{r} - \vec{r}_i, \tau) \right] \\ &\quad - \frac{1}{i\hbar} \sum_{i=1}^N e^{-i\omega_A t} \int_0^t d\tau \left[ \tilde{d}_i^-(t - \tau) e^{i\omega_A \tau} f(\vec{r} - \vec{r}_i, \tau) \right] \quad . \quad (1.63) \end{aligned}$$

C'est surtout le pic de  $f_+$  qui contribue à l'intégrale (car  $\tau > 0$ ) et, en utilisant comme annoncé l'approximation de l'enveloppe lentement variable, on peut sortir les  $\tilde{d}_i^\pm$  des intégrales pour obtenir :

$$\begin{aligned} E^{(+)}(\vec{r}, t) &\simeq E_{\text{libre}}^{(+)}(\vec{r}, t) \\ &\quad - \frac{1}{i\hbar} \sum_{i=1}^N e^{i\omega_A t} \tilde{d}_i^+ \left(t - \frac{R_i}{c}\right) \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega_A \tau} f(\vec{r} - \vec{r}_i, \tau) \\ &\quad - \frac{1}{i\hbar} \sum_{i=1}^N e^{-i\omega_A t} \tilde{d}_i^- \left(t - \frac{R_i}{c}\right) \int_0^\infty d\tau e^{i\omega_A \tau} f(\vec{r} - \vec{r}_i, \tau) \quad , \end{aligned} \quad (1.64)$$

où l'on a introduit la notation  $R_i = |\vec{r} - \vec{r}_i|$ . Les deux dernières lignes définissent la contribution à  $E^{(+)}$  créée par les sources :

$$E_{\text{source}}^{(+)}(\vec{r}) = -\frac{1}{i\hbar} \sum_{i=1}^N [d_i^+ \mathcal{F}_+(\vec{r} - \vec{r}_i) + d_i^- \mathcal{F}_-(\vec{r} - \vec{r}_i)] \quad , \quad (1.65)$$

avec

$$\mathcal{F}_\pm(\vec{r}) = \int_0^\infty d\tau e^{\mp i\omega_A \tau} f(\vec{r}, \tau) \quad . \quad (1.66)$$

Revenant au champ électrique total, on a

$$\begin{aligned} E(\vec{r}, t) &\simeq E_{\text{libre}}(\vec{r}, t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N e^{i\omega_A t} \tilde{d}_i^+ \left(t - \frac{R_i}{c}\right) F(\vec{r} - \vec{r}_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N e^{-i\omega_A t} \tilde{d}_i^- \left(t - \frac{R_i}{c}\right) F^*(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad , \end{aligned} \quad (1.67)$$

avec  $F(\vec{r}) = -\frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega_A \tau} [f(\vec{r}, \tau) - f^*(\vec{r}, \tau)]$ . En utilisant

$$f(\vec{r}, t) = \frac{\hbar c}{2\epsilon_0 (2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} k e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - kct)} e^{-k\epsilon} \quad , \quad (1.68)$$

on peut évaluer les intégrales sur  $\tau$ , ce qui donne:

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0 (2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} k c e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left[ \frac{1}{kc + \omega_A - i\epsilon} + \frac{1}{kc - \omega_A + i\epsilon} \right] \quad , \quad (1.69)$$

soit

$$F(\vec{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0 (2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left[ 1 + \frac{i\epsilon - \omega_A}{kc + \omega_A - i\epsilon} + 1 + \frac{-i\epsilon + \omega_A}{kc - \omega_A + i\epsilon} \right] \quad . \quad (1.70)$$

On obtient alors un premier terme proportionnel à un Dirac, tandis que le deuxième terme est évalué, après passage aux coordonnées sphériques, à l'aide du théorème des résidus. L'expression finale de  $F(\vec{r})$  s'écrit:  $F(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} [\delta(\vec{r}) + \mathcal{G}(\vec{r})]$  avec

$$\mathcal{G}(\vec{r}) = \frac{k^3 e^{ikr}}{4\pi kr} \quad (1.71)$$

où  $k = \omega_A/c$ . Finalement, nous écrivons l'opérateur champ sous la forme :  $E = E_{\text{libre}} + E_{\text{source}}$  avec

$$E_{\text{source}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N e^{i\omega_A t} \tilde{d}_i^+(t - \frac{R_i}{c}) \left[ \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) + \frac{k^3}{4\pi} \frac{e^{ikR_i}}{kR_i} \right] + h.c. \quad (1.72)$$

On notera  $E_+(\vec{r})$  la partie de  $E_{\text{source}}(\vec{r}, t)$  de fréquences positives:

$$E_+(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N d_i^- [\delta(\vec{r} - \vec{r}_i) + \mathcal{G}(\vec{r} - \vec{r}_i)] \quad . \quad (1.73)$$

Remarquons que  $E_+$  est différent de  $E_{\text{source}}^{(+)}$  défini par (1.65). Ceci est dû au fait que nous n'avons pas introduit l'approximation du champ tournant dans le calcul.

Nous allons à présent déterminer l'équation d'évolution de la valeur moyenne d'un opérateur atomique ne dépendant que des variables atomiques internes et des positions des atomes. Nous pourrions déduire de cette équation l'équation d'évolution de la matrice densité en point de vue de Schrödinger, c'est à dire l'équation pilote.

Partons de l'équation d'évolution d'un opérateur atomique en point de vue de Heisenberg :

$$i\hbar \frac{d}{dt} A(t) = [A(t), H(t)] \quad , \quad (1.74)$$

soit

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} A(t) &= [A(t), H_A(t) + H_{\text{dip}}(t)] \\ &- \sum_{i=1}^N [A(t), d_i(t) E_{\text{source}}(\vec{r}_i, t)] \\ &- \sum_{i=1}^N [A(t), d_i(t) E_{\text{libre}}(\vec{r}_i, t)] \quad . \end{aligned} \quad (1.75)$$

Intéressons nous aux termes contenant  $E_{\text{libre}} = E_{\text{libre}}^{(+)} + E_{\text{libre}}^{(-)}$  avec

$$E_{\text{libre}}^{(+)} = \sum_{\vec{k}} v_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - ct)} a_{\vec{k}}(0) \quad .$$

En utilisant le fait que le champ libre est dans un état cohérent, nous obtenons:

$$\langle A(t) d_i(t) E_{\text{libre}}(\vec{r}_i, t) \rangle = \langle A(t) d_i(t) \rangle \langle E_{\text{libre}}^{(+)}(\vec{r}_i, t) \rangle + \langle A(t) d_i(t) E_{\text{libre}}^{(-)}(\vec{r}_i, t) \rangle \quad . \quad (1.76)$$

Or  $E_{\text{libre}}^{(-)} = E^{(-)} - E_{\text{source}}^{(-)}$ , d'où:

$$\begin{aligned} \langle A(t) d_i(t) E_{\text{libre}}^{(-)}(\vec{r}_i, t) \rangle &= \langle E_{\text{libre}}^{(-)}(\vec{r}_i, t) \rangle \langle A(t) d_i(t) \rangle + \langle [A(t) d_i(t), E_{\text{libre}}^{(-)}(\vec{r}_i, t)] \rangle \\ &= \langle E_{\text{libre}}^{(-)}(\vec{r}_i, t) \rangle \langle A(t) d_i(t) \rangle - \langle [A(t) d_i(t), E_{\text{source}}^{(-)}(\vec{r}_i, t)] \rangle \\ &+ \langle [A(t) d_i(t), E^{(-)}(\vec{r}_i, t)] \rangle \quad . \end{aligned} \quad (1.77)$$

Etant donné que  $A$  ne dépend que des variables internes et de position,  $[A(t), E^{(-)}] = 0$ . Comme on a également  $[d_i, E^{(-)}] = 0$ , le dernier terme de (1.77) est nul:

$$\langle A(t)d_i(t)E_{\text{libre}}^{(-)}(\vec{r}_i, t) \rangle = \langle E_{\text{libre}}^{(-)}(\vec{r}_i, t) \rangle \langle A(t)d_i(t) \rangle - \langle [A(t)d_i(t), E_{\text{source}}^{(-)}(\vec{r}_i, t)] \rangle \quad (1.78)$$

En revenant à la valeur moyenne de (1.75) et en regroupant les différents termes, nous obtenons:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \langle A(t) \rangle &= \langle A(t) \mathcal{H}_g(t) - \mathcal{H}_d(t) A(t) \rangle \\ &- \sum_{i=1}^N \langle E_{\text{source}}^{(-)}(\vec{r}_i, t) A(t) d_i(t) \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^N \langle d_i(t) A(t) E_{\text{source}}^{(+)}(\vec{r}_i, t) \rangle \quad , \end{aligned} \quad (1.79)$$

avec

$$\mathcal{H}_g(t) = H_A(t) + H_{\text{dip}}(t) - \sum_{i=1}^N d_i(t) \left[ \langle E_{\text{libre}}(\vec{r}_i, t) \rangle + E_{\text{source}}^{(+)}(\vec{r}_i, t) \right] \quad , \quad (1.80)$$

et  $\mathcal{H}_d(t) = \mathcal{H}_g^\dagger(t)$ .

Nous retournons à présent au point de vue de Schrödinger et nous déduisons de (1.79) l'équation d'évolution de la matrice densité:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) &= \mathcal{H}(t) \rho(t) - \rho(t) \mathcal{H}^\dagger(t) \\ &- \sum_{i=1}^N \left[ d_i \rho(t) E_{\text{source}}^{(-)}(\vec{r}_i) + E_{\text{source}}^{(+)}(\vec{r}_i) \rho(t) d_i \right] \quad . \end{aligned} \quad (1.81)$$

Nous introduisons à ce stade l'approximation du champ tournant: en point de vue interaction vis à vis de  $H_A$ , on néglige tous les termes qui oscillent à une fréquence de l'ordre de  $\omega_A$ , ce qui donne:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(t) &= \frac{1}{i\hbar} [H_{\text{eff}}(t) \rho(t) - \rho(t) H_{\text{eff}}^\dagger(t)] \\ &+ \sum_{i,j} \frac{1}{\hbar^2} \left\{ d_j^+ \mathcal{F}_+(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \rho(t) d_i^- + d_j^- \mathcal{F}_-(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \rho(t) d_i^+ + h.c. \right\} \quad , \end{aligned} \quad (1.82)$$

avec

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(t) &= H_A + V_{\text{AL}}(t) + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) d_i^+ d_j^- \\ &+ \frac{1}{i\hbar} \sum_{i \neq j} d_i^+ d_j^- [\mathcal{F}_-(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \mathcal{F}_+(\vec{r}_i - \vec{r}_j)] \\ &+ \frac{d^2}{i\hbar} \sum_{i=1}^N |g_i\rangle \langle g_i| \mathcal{F}_+(\vec{0}) + |e_i\rangle \langle e_i| \mathcal{F}_-(\vec{0}) \quad , \end{aligned} \quad (1.83)$$

où

$$V_{\text{AL}}(t) = - \left\{ \sum_{i=1}^N d_i^+ \langle E_{\text{libre}}^{(+)}(\vec{r}_i, t) \rangle + h.c. \right\} . \quad (1.84)$$

Etudions d'abord les termes  $i \neq j$ : il faut calculer  $\mathcal{F}_+(\vec{r}) + \mathcal{F}_-(\vec{r})$ . Pour cela on revient à l'expression (1.66) dans laquelle on injecte (1.60); on obtient, en réutilisant (1.69):

$$-\frac{1}{i\hbar}(\mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-)(\vec{r}) = F(\vec{r}) + \frac{ic}{2\epsilon_0(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left[ \frac{1}{ikc - i\omega_A + \epsilon} + \frac{1}{-ikc + i\omega_A + \epsilon} \right]$$

Or on a:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{ikc - i\omega_A + \epsilon} + \frac{1}{-ikc + i\omega_A + \epsilon} \right] &= \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + (\omega_A - kc)^2} \\ &= 2\pi\delta(\omega_A - kc) . \end{aligned}$$

d'où finalement, à l'aide de (1.71):

$$-\frac{1}{i\hbar}(\mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-)(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{k^3}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{kr} . \quad (1.85)$$

Pour les termes  $i = j$ , seule la partie réelle de  $\mathcal{F}_{\pm}(\vec{0})$  est importante (la partie imaginaire peut être réintégrée dans  $H_A$ ):

$$\text{Re}[\mathcal{F}_{\pm}(\vec{r})] = \frac{\hbar}{2\epsilon_0(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} (-i)\pi\delta(kc \pm \omega_A) . \quad (1.86)$$

On en déduit que

$$\text{Re}[\mathcal{F}_+(\vec{r})] = 0 , \quad (1.87)$$

et

$$\text{Re}[\mathcal{F}_-(\vec{r})] = \frac{\hbar k^3}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin(kr)}{kr} , \quad (1.88)$$

d'où

$$\frac{d^2}{i\hbar} \text{Re}[\mathcal{F}_-(\vec{0})] = -i\hbar \frac{\Gamma}{2} , \quad (1.89)$$

où l'on a posé

$$\Gamma = \frac{d^2 k^3}{2\pi\epsilon_0\hbar} . \quad (1.90)$$

Nous avons donc établi l'expression finale suivante de  $H_{\text{eff}}$ :

$$H_{\text{eff}}(t) = H_A + V_{\text{AL}}(t) + H_{\text{int}} \quad (1.91)$$

avec

$$H_{\text{int}} = -i\hbar \frac{\Gamma}{2} \sum_{i=1}^N |e_i\rangle \langle e_i| - \frac{\hbar\Gamma}{2} \sum_{i \neq j} \frac{e^{ik|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{k|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} d_i^+ d_j^- \quad (1.92)$$

L'interprétation des différents termes de  $H_{\text{int}}$  est très claire: les éléments diagonaux sont là pour tenir de compte de l'émission spontanée d'atomes isolés de durée de vie  $\Gamma^{-1}$ ; les éléments non diagonaux sont responsables de la modification due aux effets collectifs de l'émission spontanée ainsi que de l'interaction résonnante dipôle-dipôle. Notons que l'hamiltonien effectif que nous avons obtenu n'est pas hermitique; ceci est du au fait que nous avons éliminé les variables de champ pour reporter toute l'évolution du système sur les variables atomiques. C'est pourquoi l'hamiltonien obtenu ne conserve pas la norme d'un état initial (alors que l'hamiltonien du système total atomes+champ conserve la norme de l'état initial du système atomes+champ).

Enfin, le calcul des termes de la deuxième ligne de (1.82) permet d'obtenir l'équation pilote :

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{1}{i\hbar}[H_{\text{eff}}(t)\rho(t) - \rho(t)H_{\text{eff}}^\dagger(t)] + \frac{\Gamma}{d^2} \sum_{i,j} d_j^- \rho(t) d_i^+ \frac{\sin k|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{k|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} . \quad (1.93)$$

# Chapitre 2

## Temps de sortie d'un photon

### Introduction

Les expériences habituelles [7] de localisation forte consistent à mesurer le coefficient de transmission d'un échantillon en forme de tranche<sup>1</sup> en fonction de son épaisseur. La transition délocalisé-localisé se traduit alors par un changement de loi d'échelle: dans le régime délocalisé, le coefficient de transmission varie comme l'inverse de l'épaisseur du milieu; dans le régime localisé, il varie exponentiellement avec l'épaisseur du milieu. A la transition, on a un comportement remarquable avec une variation comme l'inverse du carré de l'épaisseur.

Ces expériences ne sont pas facilement transposables au cas où l'on utilise comme milieu diffusant un nuage atomique: celui-ci ne possède pas une géométrie plane et le coefficient de transmission n'est peut-être plus la bonne quantité à étudier pour mettre en évidence un effet de localisation forte. C'est pourquoi nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier l'expérience « modèle » que nous présentons à présent. Nous plaçons à  $t = 0$  un photon au centre d'un condensat de Bose-Einstein. De manière équivalente, ceci signifie, du point de vue des atomes, que l'on fait passer un atome de l'état fondamental à l'état excité. Nous discuterons au paragraphe 2.6 des différentes solutions qui s'offrent pour réaliser cette étape expérimentalement. On enregistre alors le temps de sortie du photon sur un détecteur qui entoure le milieu atomique. En itérant l'expérience de nombreuses fois, on construit ainsi la distribution des temps de sortie du photon, qui donne accès à la probabilité de détecter un photon entre 0 et  $t$ . C'est à la détermination théorique de cette probabilité  $P(t)$  qu'est consacré ce chapitre. On cherchera à montrer que  $P(t)$  révèle des effets de localisation forte qui se manifesteront par un piégeage du photon dans le nuage atomique. Cette mise en évidence de la localisation *dans l'espace des temps* constitue un cadre nouveau pour l'étude des propriétés du transport quantique.

---

1. On parle de « slab geometry » .

## 2.1 Equation pilote

Nous rappelons les résultats du chapitre précédent, à savoir l'équation pilote décrivant l'évolution de  $N$  atomes couplés aux modes du vide et en interaction via un terme de type dipôle-dipôle. En l'absence de champ laser classique, la matrice densité atomique  $\rho$  obéit à l'équation:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H_{\text{eff}}\rho - \rho H_{\text{eff}}^\dagger] + \frac{\Gamma}{4\pi} \int d^2\vec{n} \left( \sum_{i=1}^N \sigma_i^- e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{r}_i} \right) \rho \left( \sum_{i=1}^N \sigma_i^- e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{r}_i} \right)^\dagger, \quad (2.1)$$

où l'opérateur atomique  $\sigma_i^-$  agissant sur l'atome numéro  $i$  est défini par  $\sigma_i^- = |g_i\rangle\langle e_i|$ ,  $g$  et  $e$  désignant respectivement l'état fondamental et l'état excité. Rappelons que  $\Gamma = d^2k^3/2\pi\epsilon_0\hbar$  est le taux d'émission spontanée pour un modèle d'atome à deux niveaux en interaction avec un champ scalaire.

On peut écrire l'hamiltonien effectif non-hermitien  $H_{\text{eff}}$  comme  $H_{\text{eff}} = H_{\text{at}} + H_{\text{int}}$  avec

$$H_{\text{at}} = \hbar\omega_{\Lambda}N_e + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\vec{P}_i^2}{2m} + V(\vec{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N g\delta(\vec{r}_{ij}), \quad (2.2)$$

et

$$H_{\text{int}} = -\frac{i\hbar\Gamma}{2}N_e - \frac{\hbar\Gamma}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N g(\vec{r}_{ij})\sigma_i^+\sigma_j^-. \quad (2.3)$$

On a défini  $N_e = \sum_{i=1}^N \sigma_i^+\sigma_i^-$  (avec  $\sigma_i^+ = (\sigma_i^-)^\dagger$ ) qui donne le nombre d'atomes excités et  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ .

Le premier terme de (2.2) est simplement l'énergie de la transition atomique, le second décrit la dynamique des atomes,  $V(\vec{r})$  étant le potentiel de piégeage, et le dernier terme<sup>2</sup> prend en compte l'énergie de champ moyen due aux collisions entre atomes. Cette énergie est caractérisée par la constante  $g = 4\pi\hbar^2a/m$ , avec  $a$  la longueur de diffusion. Dans l'équation (2.3), on a introduit l'interaction résonnante dipôle-dipôle

$$g(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{kr}. \quad (2.4)$$

## 2.2 Un peu de théorie de la photodétection

Dans ce paragraphe, nous montrons comment il est possible de déterminer le signal reçu par un photo-détecteur à partir des valeurs moyennes à un temps d'observables

---

2. Il faudrait en principe utiliser un dirac régularisé:

$$\delta(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial r} [r \cdot].$$

En fait, cette régularisation ne jouera pas de rôle dans ce qui suit.

atomiques. Nous renvoyons le lecteur à la référence [22] pour la justification de certains résultats que nous utiliserons directement.

Nous cherchons donc à calculer la probabilité pour qu'un photodétecteur situé à la distance  $R_d$  du milieu atomique détecte un photon à l'instant  $t$ . Nous choisissons un modèle de photodétecteur à bande large centrée autour d'une fréquence  $\omega_0 \simeq \omega_A$ . L'hypothèse de bande large signifie que la largeur typique  $\Delta\omega$  de la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du détecteur est beaucoup plus grande que la largeur typique de la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du champ. Dans notre cas, compte tenu que l'état initial est constitué d'un atome dans l'état excité, cette dernière est donnée par la largeur naturelle  $\Gamma$  de l'état excité<sup>3</sup>. On a donc

$$\Delta\omega \gg \Gamma \quad . \quad (2.5)$$

Nous assimilerons par simplicité la fonction de corrélation du détecteur à une gaussienne :

$$G_d(\omega) \propto e^{-(\omega-\omega_0)^2/2\Delta\omega^2} \quad , \quad (2.6)$$

soit en point de vue temporel,

$$G_d^*(t, t') \propto e^{-i\omega_0(t-t')} e^{-(t-t')^2\Delta\omega^2/2} \quad . \quad (2.7)$$

D'après l'équation (1.72), le champ émis par les dipôles en dehors du milieu atomique s'écrit, en séparant les parties de fréquences positives et négatives,

$$E_{\text{source}} = e^{i\omega_A t} E_- + e^{-i\omega_A t} E_+ \quad , \quad (2.8)$$

où, d'après (1.73),

$$E_+ = \frac{k^3}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N g(\vec{R}_d - \vec{r}_i) \tilde{d}_i^-(t - |\vec{R}_d - \vec{r}_i|/c) \quad , \quad (2.9)$$

et  $E_- = E_+^\dagger$ . Nous choisissons un temps « d'exposition » au détecteur  $\Delta t$  tel que :

$$\Delta\omega^{-1} \ll \Delta t \ll \Gamma^{-1} \quad . \quad (2.10)$$

On peut ainsi négliger la dépendance temporelle de  $E_+$  et  $E_-$  pendant  $\Delta t$ , et écrire la fonction de corrélation du champ comme

$$\begin{aligned} G(t', t'') &= \langle E_{\text{source}}(t') E_{\text{source}}(t'') \rangle \\ &= e^{i\omega_A(t'-t'')} \langle E_- E_+ \rangle + e^{-i\omega_A(t'-t'')} \langle E_+ E_- \rangle \\ &+ e^{i\omega_A(t'+t'')} \langle E_-^2 \rangle + e^{-i\omega_A(t'+t'')} \langle E_+^2 \rangle \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

---

3. Nous verrons au paragraphe 2.8 qu'il apparaît du fait du couplage entre atomes des largeurs  $\Gamma_{\text{max}}$  qui peuvent être de l'ordre de  $10 \Gamma$ . En toute rigueur, il faudrait donc utiliser  $\Gamma_{\text{max}}$  et non la largeur naturelle  $\Gamma$ .

Alors la probabilité de détection du photon par unité de temps à l'instant  $t$  s'écrit:

$$S(\vec{R}_d, t) \propto \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' G_d^*(t', t'') G(t', t'') \quad . \quad (2.12)$$

Comme  $\Delta t \gg 1/\Delta\omega$ , cette probabilité devient

$$S(\vec{R}_d, t) \propto \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G_d^*(t', t' + \tau) G(t', t' + \tau) \quad . \quad (2.13)$$

En évaluant les intégrales et en utilisant  $\omega_A \simeq \omega_0 \gg 1/\Delta t$ , on aboutit à:

$$S(\vec{R}_d, t) \propto \sum_{i,j} \langle g^*(\vec{R}_d - \vec{r}_i) g(\vec{R}_d - \vec{r}_j) \tilde{d}_i^+(t - |\vec{R}_d - \vec{r}_i|/c) \tilde{d}_j^-(t - |\vec{R}_d - \vec{r}_j|/c) \rangle \quad . \quad (2.14)$$

En faisant l'hypothèse que  $L \ll c\Gamma^{-1}$ , où  $L$  désigne la taille typique du milieu, on peut remplacer dans l'argument des dipôles  $|\vec{R}_d - \vec{r}_i|$  par  $R_d$ . En développant  $g(\vec{R}_d - \vec{r}_i)$ , compte tenu que le détecteur est à une distance  $R_d$  telle que  $R_d \gg (kL)L$ , on trouve l'expression finale:

$$S(R_d \vec{n}, t) \propto \sum_{i,j} \langle e^{ik\vec{n} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} d_i^+(t - R_d/c) d_j^-(t - R_d/c) \rangle \quad . \quad (2.15)$$

L'interprétation en électromagnétisme classique de ce résultat est très claire: il faut calculer la valeur moyenne du module carré du champ émis qui s'écrit comme la somme de chaque dipôle affecté d'un facteur de phase géométrique. Si l'on considère à présent un détecteur entourant tout le milieu, on obtient la probabilité de détection d'un photon sur le détecteur en sommant  $S(R_d \vec{n}, t)$  sur tous les angles solides:

$$\begin{aligned} \pi(t) &\propto \int \frac{d^2 \vec{n}}{4\pi} S(R_d \vec{n}, t) \\ &\propto \sum_{i,j} \langle \frac{\sin(kr_{ij})}{r_{ij}} d_i^+(t) d_j^-(t) \rangle \quad . \end{aligned} \quad (2.16)$$

## 2.3 Cas d'un seul atome excité

On envisagera dans la suite des états initiaux de la forme suivante:

$$|\Psi(t=0)\rangle = |g, \phi : (N-1); e, \chi : 1\rangle \quad . \quad (2.17)$$

On a pris en compte dans cette écriture la symétrisation bosonique de cet état initial. On a appelé  $\phi$  la fonction d'onde du condensat, tandis que  $\chi$  désigne la fonction d'onde de l'état excité. Les fonctions  $\phi$  et  $\chi$  sont normalisées à l'unité. On reporte au paragraphe 2.6 la discussion de la préparation d'un tel état initial ainsi que les différents choix possibles pour la fonction  $\chi$ .

On peut alors restreindre l'étude de l'équation pilote au sous-espace des degrés de liberté internes  $\mathcal{E}_e$  où seul un quelconque des  $N$  atomes est dans l'état excité. Une base de ce sous-espace est constituée par les vecteurs

$$|i : e\rangle = |e_i\rangle \otimes_{j \neq i} |g_j\rangle \quad . \quad (2.18)$$

La restriction de la matrice densité à ce sous-espace est  $\rho_{ee} = P_e \rho P_e$ ,  $P_e$  désignant le projecteur sur ce sous-espace (attention,  $\rho_{ee}$  agit aussi dans l'espace des degrés de liberté externes). Elle obéit à l'équation suivante:

$$\rho_{ee}(t) = e^{-iH_{\text{eff}}t/\hbar} \rho_{ee}(0) e^{iH_{\text{eff}}t/\hbar} \quad . \quad (2.19)$$

On peut alors récrire l'équation (2.16) sous la forme:

$$\pi(t) \propto -Tr \left[ \frac{H_{\text{eff}} - H_{\text{eff}}^\dagger}{i\hbar} \rho_{ee}(t) \right] \quad , \quad (2.20)$$

c'est à dire, en utilisant l'équation d'évolution de  $\rho_{ee}(t)$ ,

$$\begin{aligned} \pi(t) &\propto -\frac{1}{i\hbar} Tr \left[ H_{\text{eff}} \rho_{ee}(t) - \rho_{ee}(t) H_{\text{eff}}^\dagger \right] \\ &\propto -\frac{d}{dt} Tr [\rho_{ee}(t)] \quad . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Il reste à déterminer le coefficient de proportionnalité, qui s'obtient en utilisant la condition de normalisation de  $\pi(t)$ :

$$\int_0^\infty d\tau \pi(\tau) = 1 \quad . \quad (2.22)$$

Compte tenu des deux égalités

$$Tr [\rho_{ee}(0)] = 1 \quad , \quad Tr [\rho_{ee}(\infty)] = 0 \quad , \quad (2.23)$$

on montre immédiatement que l'on a l'égalité:

$$\pi(t) = -\frac{d}{dt} Tr [\rho_{ee}(t)] \quad , \quad (2.24)$$

soit en termes d'opérateurs atomiques:

$$\pi(t) = \Gamma \sum_{i,j} \left\langle \frac{\sin(kr_{ij})}{r_{ij}} \sigma_i^+(t) \sigma_j^-(t) \right\rangle \quad . \quad (2.25)$$

Il sera commode de considérer également la probabilité de détecter un photon entre 0 et  $t$ :

$$P(t) \equiv \int_0^t d\tau \pi(\tau) \quad . \quad (2.26)$$

On a immédiatement

$$P(t) = 1 - Tr [\rho_{ee}(t)] \quad . \quad (2.27)$$

Il n'est pas inintéressant de noter que ce résultat très simple correspond bien à ce que l'on aurait écrit intuitivement.

## 2.4 Cas d'atomes fixes

On introduit maintenant une approximation sévère sur  $H_{\text{eff}}$ : on néglige dans  $H_{\text{at}}$  le terme d'énergie cinétique. On aura alors la propriété remarquable que  $H_{\text{eff}}$  sera *local* en position. Nous préciserons au paragraphe 2.9 la validité de cette approximation. On peut d'ores et déjà donner une première condition intuitive: il faut comparer  $1/k$ , échelle typique de variation de  $g(\vec{r})$ , avec la distance parcourue par un atome de vitesse  $v$  pendant un temps de l'ordre de  $\Gamma^{-1}$ . En prenant pour  $v$  la vitesse de recul  $\hbar k/m$ , on obtient la condition suivante:

$$\frac{\hbar k^2}{m\Gamma} \ll 1 \quad , \quad (2.28)$$

ce qui est vérifié pour des atomes de rubidium.

En introduisant une relation de fermeture en position dans l'équation (2.27), on obtient:

$$P(t) = 1 - \int d^3\vec{r}_1 \dots d^3\vec{r}_N \varrho(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \|e^{-iH_{\text{eff}}t/\hbar} |\Psi_i\rangle\|^2 \quad , \quad (2.29)$$

avec

$$\varrho(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\chi(\vec{r}_i)|^2 \prod_{k \neq i} |\phi(\vec{r}_k)|^2 \quad , \quad (2.30)$$

et

$$|\Psi_i\rangle = \frac{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \chi(\vec{r}_i) \prod_{k \neq i} \phi(\vec{r}_k) |i : e\rangle}{\sqrt{\varrho(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}} \quad . \quad (2.31)$$

Cette expression de  $P(t)$  permet d'envisager la simulation suivante:

1. Pour chaque réalisation, on doit:
  - (i) tirer les positions atomiques  $\{\vec{r}_i\}$  selon la loi de distribution  $\varrho(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ ,
  - (ii) calculer  $H_{\text{eff}}$  pour les positions  $\{\vec{r}_i\}$ ,
  - (iii) faire évoluer  $|\Psi_i\rangle$  avec  $H_{\text{eff}}$  par une méthode de Runge-Kutta.
2. Il faut alors évaluer  $P(t) = 1 - \ll \|e^{-iH_{\text{eff}}t/\hbar} |\Psi_i\rangle\|^2 \gg$  où  $\ll \gg$  désigne la valeur moyenne sur les réalisations.

Il est intéressant de noter que les expressions de  $P(t)$  et de  $\varrho(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  permettent de voir un condensat comme un milieu *désordonné*: si l'on regarde les positions des atomes, la fonction de distribution (2.30) s'écrit, si  $\chi$  et  $\phi$  sont de même module, comme un produit de fonctions à 1 corps; elle ne contient aucune corrélation. En ce qui concerne les positions des atomes, il est donc légitime de se représenter un condensat comme un milieu désordonné.

## 2.5 Fonction d'onde du condensat: approximation de Thomas-Fermi

Dans ce paragraphe, nous explicitons la fonction  $\Phi$  solution stationnaire, de potentiel chimique  $\mu$ , de l'équation de Gross-Pitaevskii:

$$\mu\Phi = \left( -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + V + g|\Phi|^2 \right) \Phi \quad , \quad (2.32)$$

avec  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ . Dans cette équation,  $\Phi$  est normalisée à  $N$ . La fonction d'onde  $\phi$  utilisée précédemment n'est autre que

$$\phi = \frac{\Phi}{\sqrt{N}} \quad . \quad (2.33)$$

Nous prendrons dans la suite un potentiel de piégeage harmonique et isotrope, de fréquence d'oscillation des atomes  $\Omega$ . Dans l'approximation de Thomas-Fermi [27], qui consiste à négliger le terme d'énergie cinétique, on obtient:

$$\Phi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{1}{g}(\mu - V(\vec{r}))} \quad , \quad (2.34)$$

soit

$$\Phi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{1}{8\pi a a_0^4}(r_0^2 - r^2)} \quad , \quad (2.35)$$

où l'on a appelé  $a_0$  la taille du fondamental de l'oscillateur harmonique,

$$a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}} \quad . \quad (2.36)$$

On a également posé  $r_0 = \sqrt{2\mu/m\Omega^2}$  qui est homogène à une longueur et qui représente le rayon du condensat. La condition de normalisation conduit à:

$$\frac{r_0^5}{N} = 15aa_0^4 = 15a \frac{\hbar^2}{(m\Omega)^2} \quad . \quad (2.37)$$

On peut évaluer le libre parcours moyen (15) en prenant pour  $n$  la densité au centre du piège:

$$\ell = \frac{8\pi^2 r_0^3}{15N\lambda^2} \quad (2.38)$$

Cette formule permet de calculer le nombre d'atomes lorsque l'on fait varier  $r_0$  à  $\ell$  fixé.

## 2.6 Préparation de l'état initial

Comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants, le choix de l'état initial conditionne l'observation d'effets de localisation spectaculaires.

Numériquement, nous traiterons deux possibilités: l'une - que nous nommerons état initial centré - consiste à remplacer  $\chi$  par une fonction de Dirac au centre de l'échantillon tandis que l'autre - que nous appellerons état initial uniforme - consiste à prendre pour  $\chi$  la fonction d'onde du condensat  $\phi$ .

Expérimentalement, on sent intuitivement qu'il ne va pas être facile de faire rentrer un photon dans un milieu quand on espère qu'il ne pourra pas en sortir!

Une première solution, suggérée par C. Westbrook, consiste à ne pas utiliser un faisceau lumineux et à exciter le milieu atomique à l'aide d'un faisceau électronique. Dans ce cas, il est possible de focaliser fortement le faisceau et de créer ainsi une excitation dans une région très limitée du nuage. C'est à ce type de préparation auquel nous penserons lorsque nous utiliserons l'état centré.

Un autre mode d'excitation, proposé par Y. Castin, s'inspire directement des expériences sur l'hydrogène polarisé. Il est possible, par une transition à deux photons, de faire une transition d'un niveau  $ns$  vers un niveau  $n's$ . Le niveau  $n's$  ne pouvant se désexciter vers le niveau  $ns$ , il est nécessaire de transférer par un couplage électrique une partie de la population du niveau  $n's$  vers un niveau  $n'p$ . Ce dernier peut alors se désexciter vers le niveau  $ns$ . Pour cette préparation, les faisceaux de la transition à deux photons peuvent être choisis contre-propageants, si bien que la fonction d'onde dans laquelle sera préparée l'état excité sera tout simplement celle du condensat. C'est donc un moyen de préparer l'état uniforme.

## 2.7 Présentation et analyse des résultats

La figure (2.2) montre l'allure typique des courbes obtenues pour la probabilité  $P(t)$  ainsi que la distribution des temps de sortie  $P'(t) = \pi(t)$ .

On notera sur la courbe tracée pour  $k\ell = 0.2$  l'existence d'échelles de temps très longues: pour  $t = 10000\Gamma^{-1}$ , la probabilité pour que le photon soit sorti n'est que de 80% dans le cas de l'état initial centré. On remarque également que l'état initial uniforme est moins bon que l'état centré en ce qui concerne l'observation d'un effet de localisation spectaculaire. La distribution des temps de sortie confirme l'analyse: l'aire sous la courbe en trait pointillé est beaucoup plus grande que l'aire sous la courbe en trait plein pour  $t \leq 10\Gamma^{-1}$ , ce qui signifie que, pour l'état initial uniforme, une grande proportion des photons sortent aux temps courts. L'étude du spectre de  $H_{\text{eff}}$  (voir chapitre 3) apportera une nouvelle compréhension de l'influence de l'état initial sur la probabilité  $P(t)$ . Notons également sur ces courbes la présence d'une petite bosse de  $P'(t)$  pour  $t$  de l'ordre de  $\Gamma$ . La signification physique de cette bosse reste à découvrir.

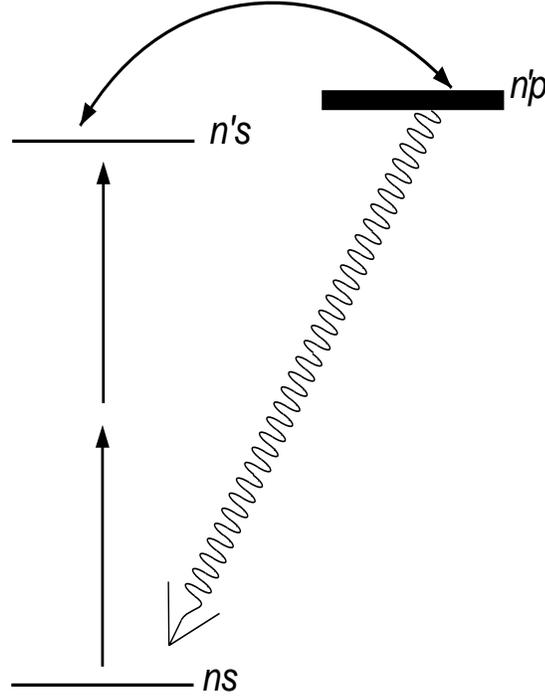


FIG. 2.1 – Schéma du processus d'excitation à deux photons.

Nous allons maintenant étudier le temps  $T_\alpha$  tel que la probabilité que le photon soit sorti entre 0 et  $T_\alpha$  soit égale à  $\alpha$ :

$$P(T_\alpha) = \alpha \quad . \quad (2.39)$$

La figure (2.3) montre  $T_{0.85}$  pour  $k\ell = 0.2$  (régime localisé) et dans le cas d'un état initial centré. Elle met en évidence la variation exponentielle de  $T_\alpha$  avec la taille  $r_0$  du condensat. C'est le résultat central de cette première partie. Il confirme ce que l'on savait déjà à propos d'un régime de localisation, à savoir que les grandeurs liées au transport - comme le coefficient de transmission d'un échantillon - varient exponentiellement avec la taille du milieu. A l'inverse, si le transport de la lumière s'effectuait dans un régime diffusif, on obtiendrait une variation de  $T_{0.85}$  avec la taille  $r_0$  selon une loi de puissance (dans le cas d'un régime purement diffusif,  $T_{0.85}$  varierait comme le carré de  $r_0$ ). Nous avons donc obtenu une preuve très claire d'un effet de localisation.

On observe le même effet avec un état initial uniforme, comme le montre la figure 2.4. Remarquons cependant que l'échelle des temps est tout à fait différente. Comme nous l'avons déjà dit, ceci est dû au fait qu'une grande proportion des photons sont sortis aux temps courts.

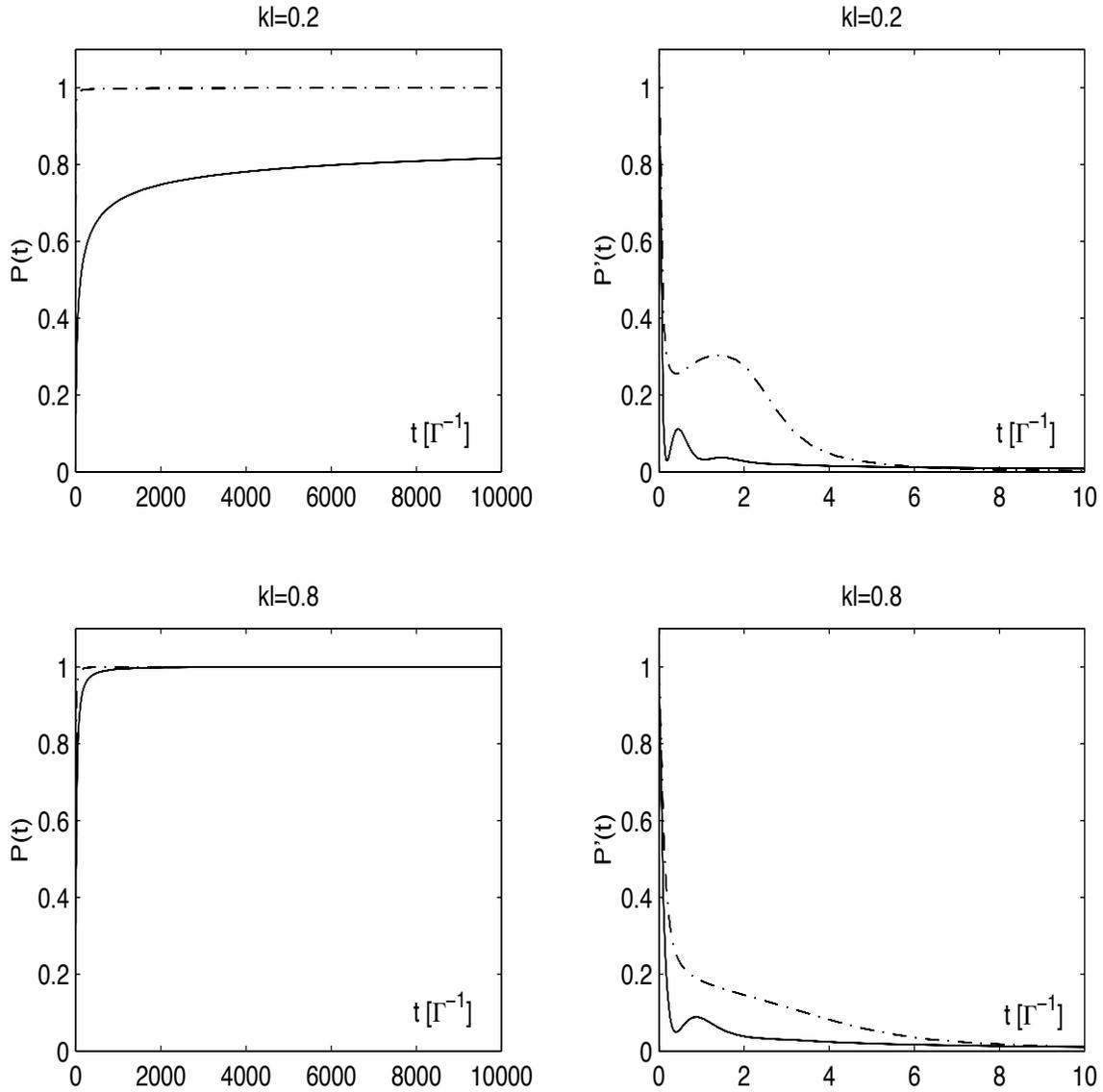


FIG. 2.2 – Probabilité  $P(t)$  de sortie du photon et distribution  $P'(t) = \pi(t)$  des temps de sortie pour  $kl = 0.2$  et  $kl = 0.8$ . La taille du condensat est de  $10/k$ . Le trait plein est relatif à un état initial centré, le trait pointillé à un état initial uniforme pour l'atome excité.

## 2.8 Calculs analytiques à $t = 0$

Nous présentons quelques calculs analytiques sur les propriétés de  $\pi(t)$  pour  $t = 0$ . Ces calculs constituent des tests des résultats numériques et donnent également accès à une meilleure compréhension physique.

Signalons dès à présent que la valeur de  $\pi(0)$ , qui est donc la pente de  $P(t)$  à

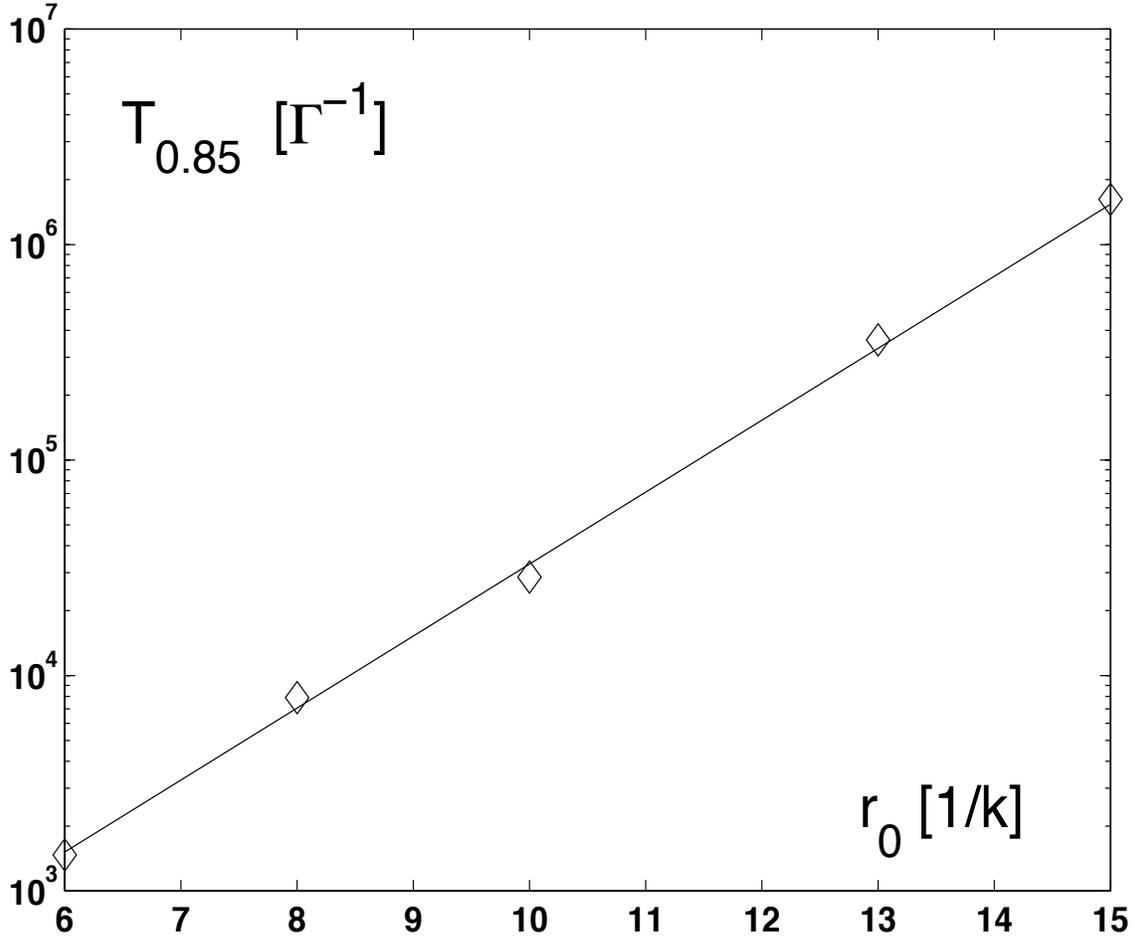


FIG. 2.3 – Variation de  $T_{0.85}$  en fonction de la taille  $r_0$  du condensat, pour  $kl = 0.2$  dans le cas d'un état initial centré. Les diamants montrent le résultat de la simulation numérique, le trait plein est un ajustement avec une exponentielle ( $15.0 \times e^{r_0/1.3}$ ).

l'origine, permet d'estimer les durées de vie les plus courtes. On s'intéresse donc, dans l'espace des fréquences, à la partie du spectre de  $H_{\text{eff}}$  faisant intervenir de grandes parties imaginaires.

La probabilité de détecter le photon entre  $t$  et  $t + dt$  est donnée par la formule (2.24):

$$\begin{aligned} \pi(t) &= -\frac{d}{dt} \langle \Psi(0) | e^{iH_{\text{eff}}^\dagger t/\hbar} e^{-iH_{\text{eff}} t/\hbar} | \Psi(0) \rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} \langle \Psi(t) | [H_{\text{eff}}^\dagger - H_{\text{eff}}] | \Psi(t) \rangle \quad , \end{aligned} \quad (2.40)$$

où  $|\Psi(0)\rangle$  est donné par l'égalité (2.17):

$$|\Psi(0)\rangle = |g, \phi : (N - 1); e, \chi : 1\rangle \quad ,$$

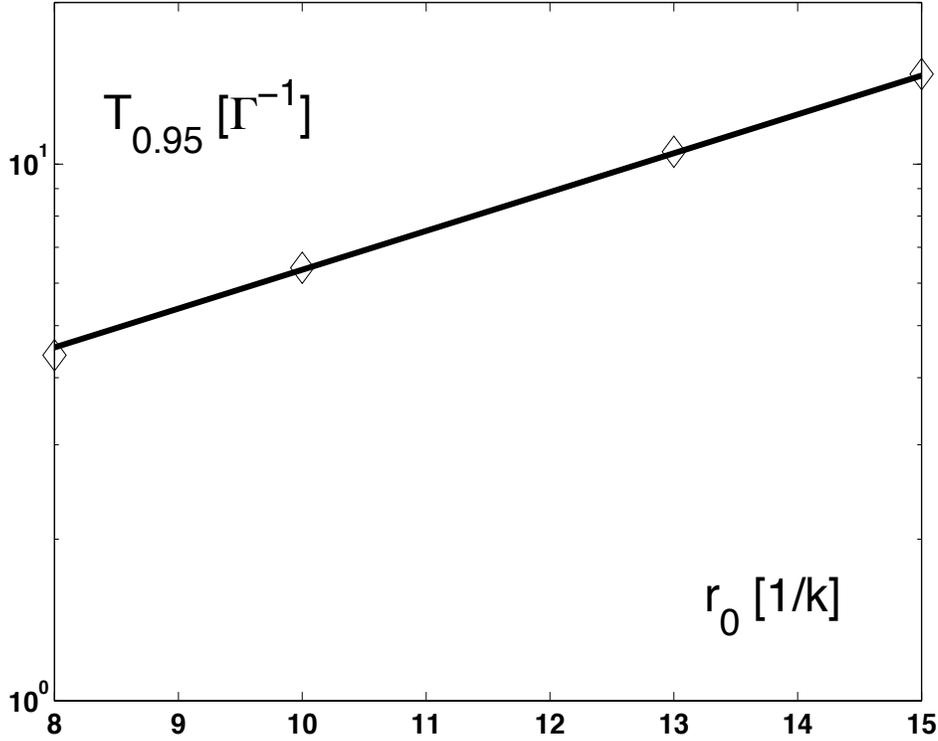


FIG. 2.4 – Variation de  $T_{0.95}$  en fonction de la taille  $r_0$  du condensat, pour  $kl = 0.2$ , dans le cas d'un état initial uniforme. Les diamants montrent le résultat de la simulation numérique, le trait plein est un ajustement avec une exponentielle.

et

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-iH_{\text{eff}}t/\hbar}|\Psi(0)\rangle \quad .$$

On en déduit l'expression de  $\pi(0)$ :

$$\pi(0) = -\frac{1}{i\hbar}\langle\Psi(0)|[H_{\text{eff}} - H_{\text{eff}}^\dagger]|\Psi(0)\rangle \quad , \quad (2.41)$$

c'est à dire que seule la partie imaginaire de  $g(r_{ij})$  intervient. Après quelques manipulations et en utilisant l'égalité

$$\frac{\sin(kr_{12})}{kr_{12}} = \int \frac{d^2\vec{n}}{4\pi} e^{ik\vec{n}\cdot\vec{r}_{12}} \quad , \quad (2.42)$$

on trouve:

$$\pi(0) = \Gamma \left[ 1 + (N - 1) \int \frac{d^2\vec{n}}{4\pi} |\langle\chi|e^{ik\vec{n}\cdot\vec{r}}|\phi\rangle|^2 \right] \quad . \quad (2.43)$$

Ce résultat appelle plusieurs commentaires. On peut tout d'abord donner une interprétation de cette formule, qui montre comment la largeur naturelle  $\Gamma$  est modifiée

par la présence du condensat: le  $(N - 1)$  est un facteur d'amplification bosonique, tandis que l'intégrale est un terme de Lamb-Dicke faisant intervenir le recouvrement entre la fonction d'onde  $\phi$  du condensat et la fonction d'onde  $\chi$  de l'état excité traduite par le recul du photon émis.

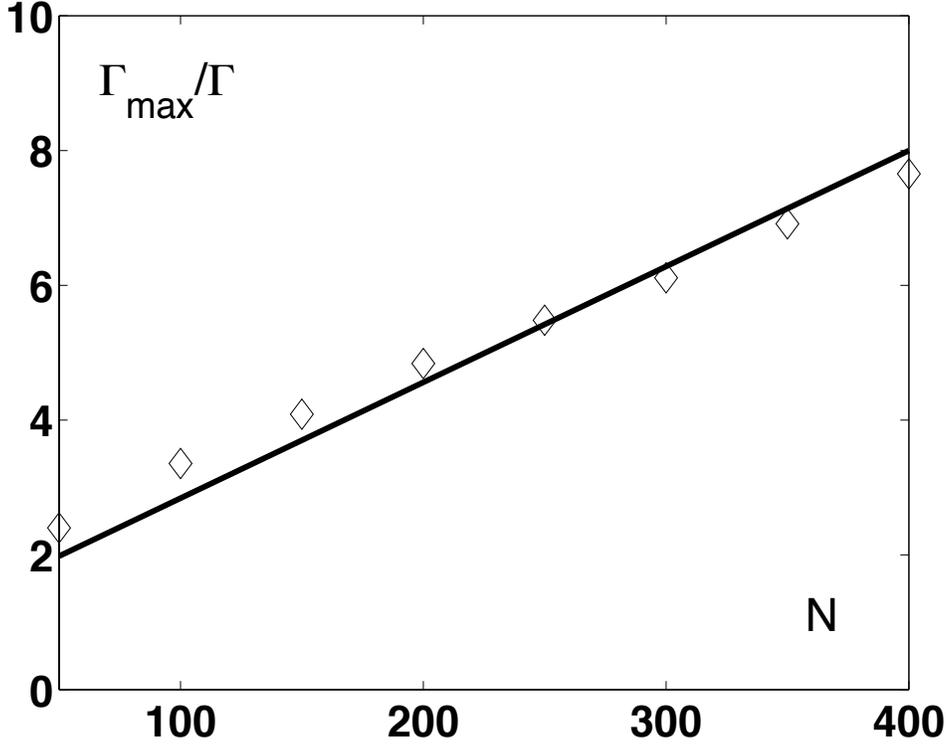


FIG. 2.5 – Comparaison entre  $\pi(0)$  donnée par (2.45) (trait plein) et  $\Gamma_{\max}$  donnée par la plus grande partie imaginaire des valeurs propres de  $H_{\text{eff}}$  (diamants). On a moyenné sur 100 réalisations. La largeur de la gaussienne pour  $|\phi|^2$  est telle que  $k\Delta r = 5$ .

Par ailleurs, étudions la situation où l'on prépare l'état excité en envoyant une onde plane de vecteur d'onde  $\vec{k}_L$  tel que  $k_L \simeq k$ . La fonction d'onde décrivant cet état excité s'écrit :

$$\chi = e^{i\vec{k}_L \cdot \vec{r}} \phi \quad , \quad (2.44)$$

On voit alors sur (2.43) que  $\pi(0)$  peut prendre de grandes valeurs. En prenant pour  $|\phi|^2$ , et ce afin de simplifier les calculs, une gaussienne de largeur  $\Delta r$ , on a :

$$\pi(0) = \Gamma \left[ 1 + \frac{N - 1}{2(k\Delta r)^2} \right] \quad . \quad (2.45)$$

La figure 2.5 montre alors que  $\pi(0)$  est une bonne estimation de la plus grande partie imaginaire  $\Gamma_{\max}$  des valeurs propres de  $H_{\text{eff}}$ .

Ces résultats mettent en lumière l'importance primordiale de la préparation de l'état initial: un état initialement excité dans la fonction d'onde  $\chi = e^{i\vec{k}_L \cdot \vec{r}} \phi$  est extrêmement défavorable à l'observation d'effets de localisation.

Notons que les auteurs qui étudient l'interaction de la lumière avec un condensat à l'aide du formalisme des polaritons [28] ne retiennent précisément que ces modes de courte durée de vie pour lesquels les atomes retombent dans le condensat en émettant un photon. C'est pourquoi ils n'obtiennent pas les modes de longue durée de vie présents dans notre étude.

Enfin, dans le cas des états initiaux que nous avons considérés, nous voyons que la formule (2.43) montre bien que  $\pi(0) \simeq \Gamma$ , comme c'est le cas sur les courbes obtenues numériquement. D'ailleurs, dans le cas de l'état initial centré, le calcul donne :

$$\pi(0) = \Gamma \quad .$$

Afin de caractériser la forme du pic à  $t = 0$ , on peut aussi évaluer, en s'inspirant du calcul de  $\pi(0)$ , la valeur en zéro de la dérivée de  $\pi(t)$ . A la limite thermodynamique -  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta r \rightarrow \infty$ , avec  $N/(\Delta r)^3$  constant - et dans le cas de l'état initial centré, on trouve :

$$\pi'(0) \sim -\Gamma^2 \frac{N}{2(k\Delta r)^2} \quad . \quad (2.46)$$

Ceci permet de conclure que  $\pi(0)^2/|\pi'(0)|$  tend vers zéro à la limite thermodynamique, c'est à dire que le poids de ce pic devient négligeable à la limite thermodynamique.

## 2.9 Mouvement des atomes

Le but de ce paragraphe est de préciser la validité de l'hypothèse consistant à négliger le mouvement des atomes. En fait, ce qui suit se veut être essentiellement un balisage pour des travaux futurs.

Nous allons nous inspirer de la méthode de Born-Oppenheimer utilisée par exemple en physique du solide ou en physique moléculaire. Elle repose sur l'idée qu'il existe deux échelles de temps bien distinctes : dans notre cas, il s'agit du temps caractéristique associé à la dynamique des degrés de liberté atomiques internes - à savoir  $\Gamma^{-1}$  - et le temps typique sur lequel les degrés de liberté atomiques externes évoluent et qui est beaucoup plus grand que  $\Gamma^{-1}$ .

Le vecteur décrivant complètement l'état des  $N$  atomes sera noté:

$$\vec{\Psi}(\vec{R}) \quad , \quad (2.47)$$

où la notation vectorielle désigne les  $N$  composantes du vecteur dans la base de  $\mathcal{E}_e$  et où  $\vec{R}$  est une notation compacte pour  $\{\vec{r}_i\}$ . Pour être capable de calculer la probabilité

$P(t)$ , il faut résoudre l'équation sur  $\vec{\Psi}$ :

$$i\hbar\partial_t\vec{\Psi} = \left( \frac{\vec{P}^2}{2m} + H_{\text{int}}(\vec{R}) \right) \vec{\Psi} \quad (2.48)$$

Anticipant sur l'étude faite au chapitre 3, on diagonalise  $H_{\text{int}}(\vec{R})$  pour tout  $\vec{R}$ :

$$H_{\text{int}}(\vec{R}) = \sum_k z_k(\vec{R}) |\vec{\Phi}_k(\vec{R})\rangle \langle \vec{\Phi}_k^*(\vec{R})| \quad . \quad (2.49)$$

En décomposant l'état  $\vec{\Psi}(\vec{R})$  sur les états propres  $|\vec{\Phi}_k(\vec{R})\rangle$  de valeurs propres  $z_k(\vec{R})$  selon

$$\vec{\Psi}(\vec{R}) = \sum_k \alpha_k(\vec{R}) \vec{\Phi}_k(\vec{R}) \quad , \quad (2.50)$$

on obtient l'équation d'évolution des  $\alpha_k(\vec{R})$ :

$$i\hbar\partial_t\alpha_k(\vec{R}, t) = \sum_{k'} \vec{\Phi}_k \cdot \frac{\vec{P}^2}{2m} [\vec{\Phi}_{k'}\alpha_{k'}] + z_k(\vec{R})\alpha_k(\vec{R}, t) \quad (2.51)$$

Nous allons maintenant chercher à quelles conditions on peut faire une hypothèse d'adiabaticité. Celle-ci nécessite que le couplage entre un mode  $k$  et un mode  $k' \neq k$  soit beaucoup plus petit que la différence d'énergie entre les deux modes, c'est à dire:

$$\frac{1}{\alpha_{k'}} \vec{\Phi}_k \cdot \frac{\vec{P}^2}{2m} [\vec{\Phi}_{k'}\alpha_{k'}] \ll |z_k(\vec{R}) - z_{k'}(\vec{R})| \quad . \quad (2.52)$$

En développant le laplacien du produit, on trouve les deux conditions suivantes:

$$\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\Phi}_k \cdot \Delta_{\vec{R}} \vec{\Phi}_{k'}| \ll |z_k(\vec{R}) - z_{k'}(\vec{R})| \quad (2.53)$$

$$\frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{\alpha_{k'}} \sum_i (\vec{\Phi}_k \cdot \partial_{x_i} \vec{\Phi}_{k'}) \partial_i \alpha_{k'} \ll |z_k(\vec{R}) - z_{k'}(\vec{R})| \quad . \quad (2.54)$$

En remplaçant  $\partial_i \alpha_{k'}$  par  $ik_{\text{max}}\alpha_{k'}$ , où  $k_{\text{max}}$  est un nombre d'onde typique donné par

$$\frac{\hbar^2 k_{\text{max}}^2}{2m} \simeq \hbar\Gamma \quad , \quad (2.55)$$

la condition (2.54) s'écrit:

$$\frac{\hbar^2}{m} k_{\text{max}} \sum_i (\vec{\Phi}_k \cdot \partial_{x_i} \vec{\Phi}_{k'}) \ll |z_k(\vec{R}) - z_{k'}(\vec{R})| \quad . \quad (2.56)$$

On peut avancer deux arguments en faveur de la validité de (2.53) et (2.56): d'une part, les membres de gauche sont petits car les états localisés ont un faible recouvrement et

d'autre part, les membres de droite peuvent ne pas être petits en raison des parties réelles des  $z_k$  qui sont de l'ordre de  $\Gamma$ .

On peut estimer grossièrement les conditions (2.53) et (2.56) en exprimant que l'échelle de variation typique des  $\vec{\Phi}_k$  est donnée par  $1/k$ , ce qui donne:

$$\Gamma \left( \frac{\hbar k^2}{m\Gamma} \right) \ll |z_k(\vec{R}) - z_{k'}(\vec{R})| \quad , \quad \Gamma \left( \frac{\hbar k^2}{m\Gamma} \right)^{1/2} \ll |z_k(\vec{R}) - z_{k'}(\vec{R})| \quad . \quad (2.57)$$

Afin de fixer les idées, on a l'estimation suivante pour des atomes de rubidium :

$$\hbar k^2/m\Gamma \simeq 1/900 \quad . \quad (2.58)$$

La condition (2.56) est la plus restrictive et on peut la récrire sous la forme:

$$\frac{\hbar^2}{m} k_{\max} \sum_i |\vec{\Phi}_k \cdot (\partial_{x_i} H_{\text{int}}) \vec{\Phi}_{k'}| \ll |z_k(\vec{R}) - z_{k'}(\vec{R})|^2 \quad (2.59)$$

On peut alors contrôler numériquement si cette dernière condition est vérifiée pour les états propres localisés quelque soit la réalisation considérée.

Si l'on suppose donc que l'hypothèse d'adiabaticité est justifiée, il faut ensuite évaluer comment le couplage - même faible - entre les différentes nappes modifie la durée de vie d'un état propre. Illustrons notre propos par un modèle très simple à deux modes, l'un de largeur  $\Gamma$ , l'autre de largeur nulle, en interaction par un couplage de Rabi. Les équations de Bloch optiques sont régies par la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} -\delta - i\Gamma/2 & \Omega/2 \\ \Omega/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

La diagonalisation de  $M$  montre que la largeur qui était nulle devient

$$(\Omega/2)^2 \left[ \frac{\Gamma/2}{\delta^2 + (\Gamma/2)^2} \right] \quad . \quad (2.61)$$

On évalue ainsi ce que l'on appelle la durée de vie « ramenée » .

Si on trouve que les durées de vie ramenées des états localisés ne sont pas trop diminuées, on pourra alors envisager de traiter le mouvement à l'intérieur de chaque nappe dans le cadre d'une approximation semi-classique ; c'est à dire en faisant évoluer les positions atomiques selon des forces classiques calculées avec les gradients de la partie réelle de l'hamiltonien effectif.

# Chapitre 3

## Propriétés spectrales de $H_{\text{eff}}$

### Introduction

Dans ce chapitre, on montre comment la transition entre un régime délocalisé et un régime localisé peut se manifester dans l'étude du spectre de l'hamiltonien effectif. Des études des propriétés spectrales de  $H_{\text{eff}}$  ont déjà été réalisées [29], [30] mais nous présenterons ici nos résultats sous un angle différent.

L'hamiltonien effectif n'étant pas hermitique, ses valeurs propres seront complexes. La partie imaginaire d'une valeur propre donne bien sûr l'inverse de la durée de vie de l'état propre correspondant. On peut alors raisonnablement supposer qu'un état propre localisé se caractérise par une très faible partie imaginaire. On s'attend donc à une modification du spectre dans la région des très petites parties imaginaires lorsque l'on passe d'un régime non localisé à un régime localisé.

### 3.1 Lien avec le point de vue temporel

L'hamiltonien effectif étant non-hermitien, il faut faire attention car les valeurs propres sont complexes et il existe des vecteurs propres droits et des vecteurs propres gauches. Un vecteur propre droit de valeur propre  $\epsilon_n = \nu_n - i\gamma_n$  est défini par

$$H_{\text{eff}}|r_n\rangle = \epsilon_n|r_n\rangle \quad , \quad (3.1)$$

tandis que le vecteur propre gauche correspondant obéit à

$$\langle l_n|H_{\text{eff}} = \epsilon_n\langle l_n| \quad . \quad (3.2)$$

On posera

$$|r_n\rangle = \sum_i \alpha_i |i : e\rangle \quad , \quad (3.3)$$

où les vecteurs  $|i : e\rangle$  ont été définis en (2.18). Etant donné la propriété de l'hamiltonien effectif

$$H_{\text{eff}}^\dagger = H_{\text{eff}}^* \quad , \quad (3.4)$$

on a

$$|l_n\rangle = |r_n^*\rangle \quad , \quad (3.5)$$

avec

$$|r_n^*\rangle = \sum_i \alpha_i^* |i : e\rangle \quad . \quad (3.6)$$

Pour deux valeurs propres  $\epsilon_n$  et  $\epsilon_m$  telles que  $\epsilon_n \neq \epsilon_m$  on a

$$\langle r_m^* | r_n \rangle = 0 \quad , \quad (3.7)$$

ce qui permet d'écrire une relation de fermeture:

$$1 = \sum_n \frac{|r_n\rangle \langle r_n^*|}{\langle r_n^* | r_n \rangle} \quad . \quad (3.8)$$

Revenons à l'équation (2.27) donnant la probabilité qu'un photon soit détecté entre 0 et  $t$ :

$$P(t) = 1 - \ll \sum_i \left| \langle i : e | e^{-iH_{\text{eff}}t/\hbar} | \Psi_i \rangle \right|^2 \gg \quad (3.9)$$

On peut alors insérer la relation de fermeture (3.8):

$$P(t) = 1 - \ll \sum_i \left| \sum_n e^{-i\epsilon_n t/\hbar} o_n \langle i : e | r_n \rangle \right|^2 \gg \quad (3.10)$$

avec

$$o_n = \frac{\langle r_n^* | \Psi_i \rangle}{\langle r_n^* | r_n \rangle} \quad (3.11)$$

désignant le recouvrement normalisé entre un état propre  $|r_n\rangle$  et l'état initial  $|\Psi_i\rangle$ .

On peut alors faire l'approximation qui consiste à négliger dans (3.10) les termes d'interférences<sup>1</sup> et obtenir l'expression finale de la probabilité de détecter un photon entre 0 et  $t$ :

$$P(t) = 1 - \ll \sum_n e^{-2\gamma_n t/\hbar} |o_n|^2 \gg \quad (3.12)$$

Cette dernière expression montre explicitement que le choix de la fonction d'onde de l'état initial est crucial pour obtenir un effet spectaculaire: il faut choisir un état qui ait un bon recouvrement avec les états localisés de petites parties imaginaires.

---

1. Nous avons testé la validité de cette hypothèse en comparant la courbe de  $P(t)$  obtenue à l'aide de l'expression ci-dessous à celle obtenue avec l'expression (3.9). Les deux courbes coïncidaient aux temps plus grands que  $\Gamma^{-1}$ .

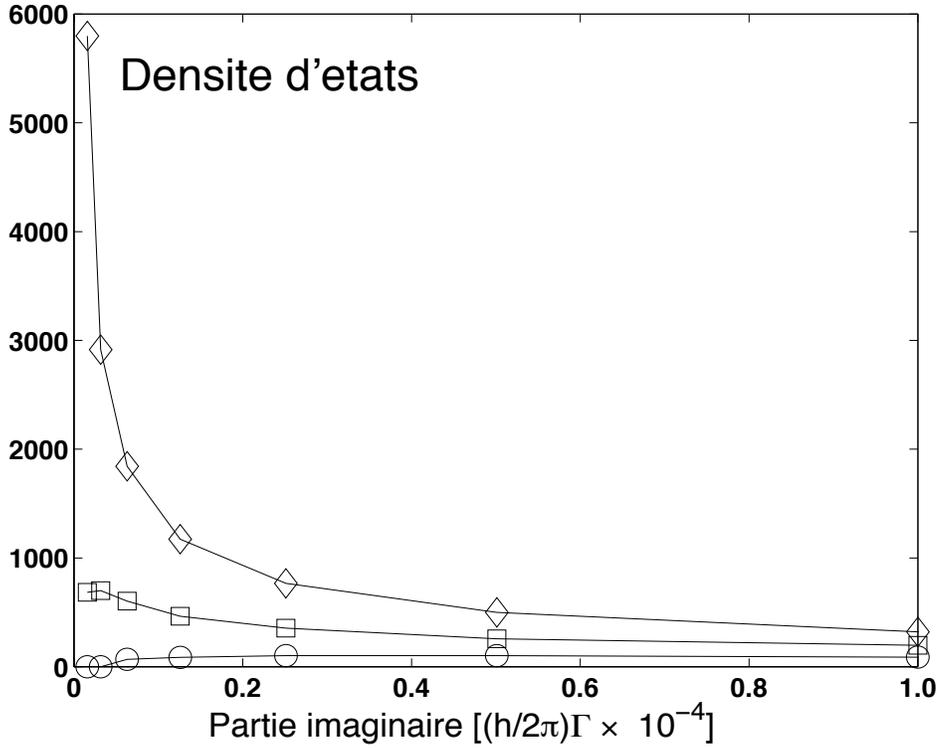


FIG. 3.1 – Densité d'états en fonction de la partie imaginaire des valeurs propres, pour  $r_0 = 10/k$ .  $kl = 0.2$  (diamants),  $kl = 0.3$  (carrés) et  $kl = 0.4$  (cercles). Ceci permet de situer la transition pour  $kl \simeq 0.3$ .

### 3.2 Densité d'état en fonction de la partie imaginaire des valeurs propres

La densité d'état en fonction de la partie imaginaire est un histogramme où l'on porte en ordonnée le nombre d'états ayant une valeur propre de partie imaginaire dans le canal centré autour de l'abscisse correspondante. En d'autres termes, la densité d'état est tout simplement la loi de distribution des parties imaginaires. La figure (3.1) montre cette densité d'état pour différentes valeurs de  $kl$  et pour  $r_0 = 10/k$ .

Ces densités d'états sont toutes normalisées à l'unité, contrairement à ce que pourrait laisser penser l'impression visuelle. Remarquons tout d'abord qu'il s'agit de très petites valeurs propres: elles sont plus petites que  $\hbar\Gamma \times 10^{-4}$ . On voit une transition spectaculaire entre  $kl = 0.4$  et  $kl = 0.2$ : un pic centré en 0 pousse de façon très prononcée. On retrouve donc bien l'idée que les effets de localisation sont dus au fait qu'un très grand nombre d'états propres de très petites parties imaginaires apparaissent soudainement.

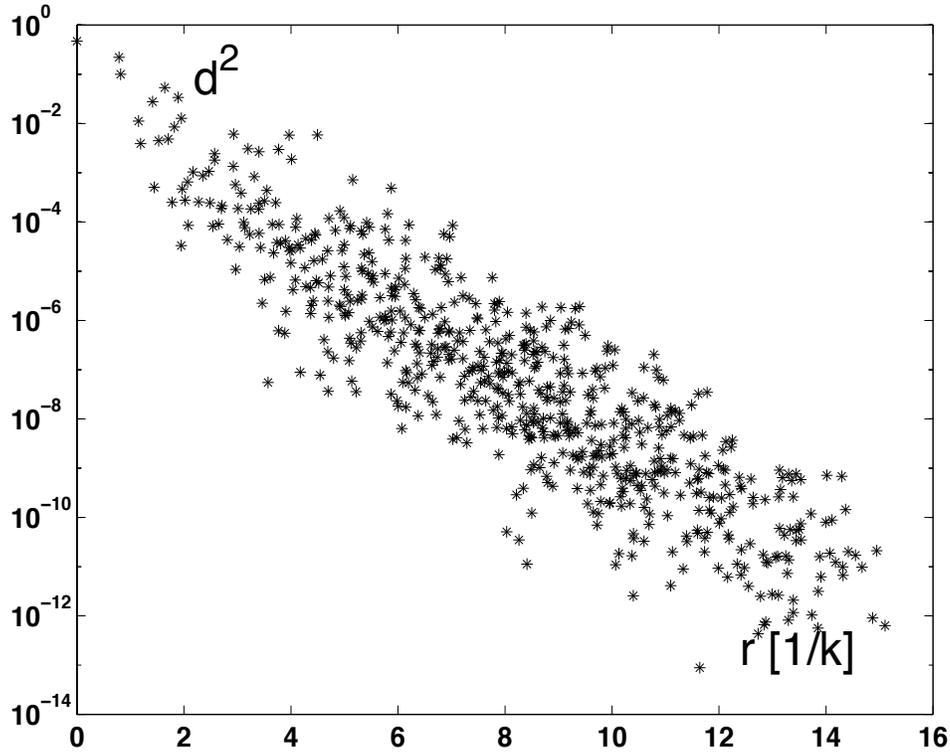


FIG. 3.2 – Poids  $d^2 = |\alpha_i|^2$  de chaque dipôle en fonction de la distance au centre de l'état localisé; ces points correspondent à une réalisation typique dans le régime localisé.

### 3.3 Longueur de localisation

Nous allons à présent étudier l'extension spatiale de chaque état propre. Comme l'indique son nom, un état localisé se doit d'être spatialement confiné dans une région bien délimitée de l'espace.

Afin de réaliser une étude systématique, nous associons à chaque état propre une longueur calculée par le procédé suivant. On cherche d'abord l'atome ayant le poids  $|\alpha_i|^2$  le plus important dans la décomposition de l'état propre  $|r_n\rangle$ : ce sera le centre de la distribution spatiale. On cherche alors par ajustement l'enveloppe exponentielle telle que tous les autres poids  $|\alpha_j|^2$  vérifient:

$$|\alpha_j|^2 \leq |\alpha_i|^2 e^{-r_{ij}/\xi} \quad (3.13)$$

La longueur  $\xi$  trouvée sera caractéristique de l'extension spatiale de l'état propre correspondant. La figure 3.2 assure la légitimité de cette définition de la longueur de localisation. On trace alors une densité d'état - même définition que ci-dessus - en fonction de la partie imaginaire des valeurs propres et en fonction de la longueur caractéristique.

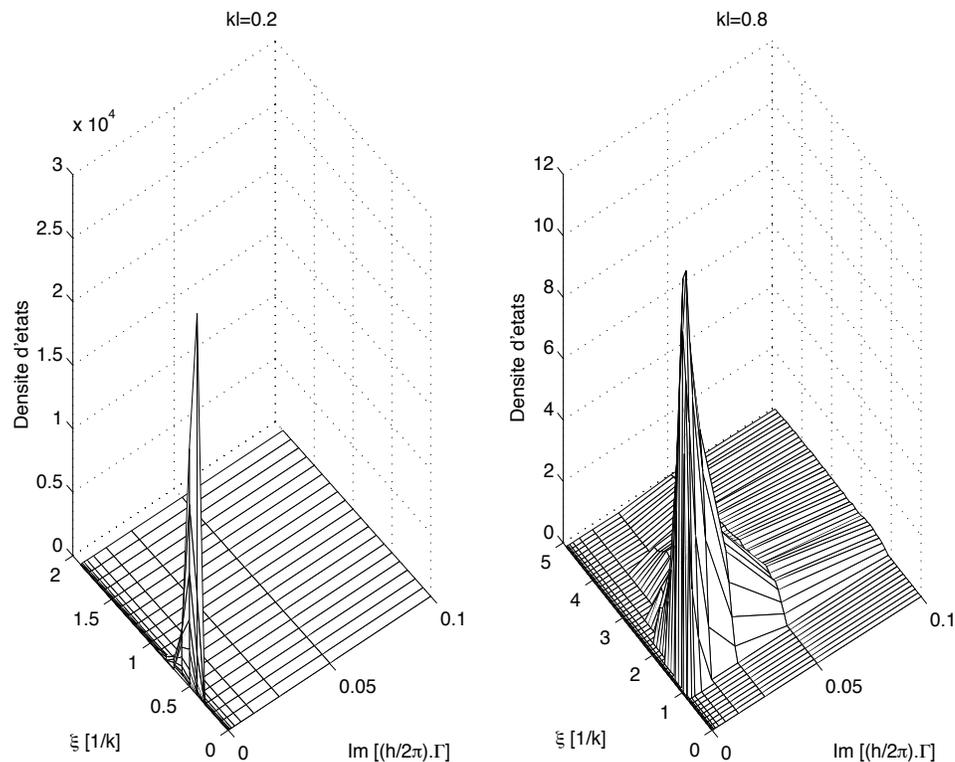


FIG. 3.3 – Densité d'états en fonction de la partie imaginaire des valeurs propres et de la longueur de localisation, pour  $r_0 = 10/k$ .

La figure (3.3) montre le résultat obtenu dans les deux régimes ( $kl = 0.2$  et  $kl = 0.8$ ). On retrouve là-aussi un pic très étroit dans le régime localisé. On trouve ainsi que les états propres localisés ont une longueur de localisation d'environ  $\lambda/\pi$ .



## Chapitre 4

# Lien avec la théorie de la diffusion généralisée

Nous allons nous inspirer des résultats obtenus par les auteurs étudiant les propriétés de transport de l'intensité lumineuse lors de la diffusion multiple de la lumière à l'aide de méthodes diagrammatiques [31], [32], [1].

On peut conclure à partir de ces travaux que le transport de l'intensité lumineuse au sein d'un milieu diffusant n'est plus gouverné par une équation de diffusion habituelle. On est amené à introduire un coefficient de diffusion dépendant du temps, ce qui se traduit dans l'espace des fréquences par un  $D(\Omega)$  qui obéit à l'équation auto-cohérente suivante:

$$D(\Omega) = 1 - \alpha \int_0^1 d\kappa \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - \frac{i\Omega}{D(\Omega)}} \quad , \quad (4.1)$$

où

$$\alpha = \frac{3}{\pi} \frac{1}{(k\ell)^2} \quad . \quad (4.2)$$

Dans cette écriture,  $D(\Omega)$  est exprimé en unité de  $D_0$ . Ce dernier, qui n'est autre que le coefficient de diffusion  $D_0$  en l'absence de prise en compte des effets d'interférences, s'écrit :

$$D_0 = \frac{1}{3} v_E \ell = \frac{1}{3} \ell^2 \Gamma \quad , \quad (4.3)$$

Dans ces expressions,  $\ell$  désigne le libre parcours moyen<sup>1</sup>,

$$\ell = \frac{1}{n\sigma} \quad (4.4)$$

---

1. En toute rigueur, il s'agit ici du libre parcours moyen de transport  $\ell^*$  défini par

$$\ell^* = \frac{\ell}{1 - \langle \cos(\theta) \rangle} \quad ,$$

où la valeur moyenne du  $\cos(\theta)$  se calcule à l'aide de la section efficace différentielle d'un seul atome. Dans notre cas, la diffusion par un atome est isotrope, et on aura égalité entre les deux grandeurs.

et  $v_E$  est la vitesse de transport de l'énergie. Dans notre cas, elle vaut simplement  $v_E = \ell\Gamma$  (un photon se déplace de  $\ell$  entre deux diffusions séparées d'une durée de l'ordre de  $\Gamma^{-1}$ ).

La transition vers le régime localisé, qui est déterminée par le comportement de  $D(\Omega)$  en zéro, a lieu pour

$$\alpha = 1 \quad . \quad (4.5)$$

En effet, lorsque  $\alpha > 1$ , on a, pour  $\Omega \rightarrow 0$  :

$$D(\Omega) \sim -i\xi^2\Omega \quad , \quad (4.6)$$

où  $\xi$  est la longueur de localisation en unité de  $\ell$  déterminée par

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{\xi} \arctan \xi \quad . \quad (4.7)$$

A l'inverse, si  $\alpha < 1$ ,  $D(\Omega)$  tend vers une constante non nulle en zéro.

Il est plus parlant de se placer en point de vue temporel, dans lequel la densité d'énergie électromagnétique  $u(\vec{r}, t)$  obéit alors à une équation de diffusion « généralisée » :

$$\partial_t u(\vec{r}, t) = \int_0^t d\tau \, 2D(\tau) \Delta u(\vec{r}, t - \tau) \quad (4.8)$$

Le coefficient de diffusion  $D(\tau)$  est tel que sa transformée de Laplace  $D(p)^2$  soit donnée par l'équation auto-cohérente

$$D(p) = 1 - \alpha \int_0^1 d\kappa \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \frac{p}{D(p)}} \quad . \quad (4.9)$$

Pour simplifier les calculs, nous nous plaçons dans le cas d'un milieu atomique de forme sphérique et de densité uniforme. On cherche à déterminer la distribution des temps de sortie. Celle-ci s'exprime simplement comme :

$$\pi(t) = - \int_{\text{boule}} d^3r \, \partial_t u(\vec{r}, t) \quad (4.10)$$

En utilisant la propriété de la transformée de Laplace,

$$\mathcal{L}[\partial_t f](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(t=0) \quad , \quad (4.11)$$

on trouve

$$\pi(p) = - \int_{\text{boule}} d^3r \left[ -u(\vec{r}, 0) + p \int_0^\infty dt \, u(\vec{r}, t) e^{-pt} \right] \quad , \quad (4.12)$$

---

2. Rappelons la définition d'une transformée de Laplace d'une fonction  $f$ :

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^\infty dt \, f(t) e^{-pt} \quad .$$

soit

$$\pi(p) = 1 - p \int_{\text{boule}} d^3r u(\vec{r}, p) \quad . \quad (4.13)$$

La transformée de Laplace de (4.8) conduit à:

$$\begin{aligned} pu(\vec{r}, p) - u(\vec{r}, t = 0) &= \int_0^\infty dt e^{-pt} \int_0^t d\tau 2D(\tau) \Delta u(\vec{r}, t - \tau) \\ &= \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty dt e^{-pt} 2D(\tau) \Delta u(\vec{r}, t - \tau) \\ &= \int_0^\infty d\tau e^{-p\tau} 2D(\tau) \int_\tau^\infty dt e^{-p(t-\tau)} \Delta u(\vec{r}, t - \tau) \\ &= 2D(p) \Delta u(\vec{r}, p) \quad . \end{aligned} \quad (4.14)$$

On peut alors développer  $u(\vec{r}, p)$  sur les modes propres du Laplacien qui vérifient:

$$\Delta \Phi_n + k_n^2 \Phi_n = 0 \quad . \quad (4.15)$$

Ces modes sont donnés par

$$\Phi_n(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{R/2}} \frac{1}{r} \sin(k_n r) \quad , \quad (4.16)$$

avec

$$k_n R = n\pi \quad . \quad (4.17)$$

On obtient ainsi les coefficients du développement :

$$c_n(p) = \frac{c_n(t=0)}{p + 2D(p)k_n^2} \quad , \quad (4.18)$$

ce qui conduit à:

$$\pi(p) = 1 - p \int_{\text{boule}} d^3r \sum_n \frac{c_n(t=0)}{p + 2D(p)k_n^2} \Phi_n(\vec{r}) \quad . \quad (4.19)$$

Dans le cas d'un état initial centré, c'est à dire un  $u(\vec{r}, t = 0)$  donné par un dirac, on peut poursuivre le calcul, ce qui aboutit à:

$$\pi(p) = 1 - 2p \sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{p + 2D(p) \left(\frac{n\pi}{R/\ell}\right)^2} \quad (4.20)$$

On voit alors sur cette dernière expression, que dans le régime localisé, on a

$$\pi(p=0) < 1 \quad . \quad (4.21)$$

Or comme

$$\pi(p=0) = \int_0^\infty dt \pi(t) \quad , \quad (4.22)$$

ce résultat signifie que le photon a une probabilité non nulle de ne jamais sortir du milieu! Ceci diffère des prédictions données par la méthode utilisant l'hamiltonien effectif, dans laquelle on a toujours  $\pi(p = 0) = 1$ . Les raisons de ce désaccord entre les deux méthodes ne sont pas parfaitement comprises. En fait, l'étude réalisée avec le coefficient de diffusion n'est en principe valable que dans le cas d'un milieu infini. Son utilisation dans notre situation d'un milieu de taille finie requiert certainement plus de prudence (voir [1], paragraphe 2.2).

## Deuxième partie

### Vers le laser à atomes continu



# Introduction

C'est pendant la décennie 1985-1995 que la physique atomique vit la naissance et les développements spectaculaires des techniques de piégeage et de refroidissement d'atomes neutres alcalins par faisceaux laser. Ce domaine de recherche est désormais connu sous le nom d' « Atomes froids »<sup>3</sup>. Le prix Nobel 97 a récompensé S. Chu, C. Cohen-Tannoudji et W.D. Phillips pour leurs travaux pionniers aussi bien expérimentaux que théoriques dans ce domaine [34, 35, 36].

Parallèlement, les équipes cherchant à refroidir un gaz d'hydrogène polarisé et piégé magnétiquement développèrent la technique du refroidissement évaporatif [37, 38]. Les atomes sont piégés magnétiquement, mais la profondeur du puits de potentiel dans une des directions est ajustable. Les atomes les plus chauds s'échappent du piège. Les atomes restant voient alors leur température s'abaisser par thermalisation *via* les collisions élastiques. En abaissant progressivement la hauteur de la coupure, on refroidit continûment le gaz piégé. Finalement, au prix d'une perte d'atomes, la densité dans l'espace des phases du gaz - c'est à dire  $n\lambda_{dB}^3$ ,  $n$  étant la densité spatiale et  $\lambda_{dB} = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$  la longueur d'onde de De Broglie thermique - s'accroît par ce procédé de refroidissement de façon spectaculaire.

Quelques équipes tentèrent alors d'utiliser le refroidissement évaporatif sur les alcalins en prolongement du refroidissement laser. Dans ce cas, l'ajustement de la profondeur du puits de potentiel se fait par l'application d'un champ radio-fréquence [39]. Cette combinaison fut rapidement couronnée de succès et conduisit aux premières observations [40, 41, 42] de la condensation de Bose-Einstein [43, 44] dans un gaz atomique dilué. A ce jour, il existe à travers le monde plusieurs condensats sur différents alcalins ( $^{87}\text{Rb}$ ,  $^{23}\text{Na}$ ,  $^7\text{Li}$ ). Deux équipes françaises, celle de A. Aspect et celle de J. Dalibard, disposent d'un condensat d'atomes de rubidium. Finalement, la condensation de Bose-Einstein fut également observée dans un gaz d'hydrogène polarisé [45]. Notons enfin que plusieurs laboratoires - dont le laboratoire Kastler-Brossel et le laboratoire Charles-Fabry en France - poursuivent des efforts en vue d'obtenir la condensation dans un gaz d'hélium métastable polarisé. Les propriétés de réactivité chimique de cet atome en font un cas très intéressant pour d'éventuelles applications comme la nanolithographie.

---

3. On parle également d'atomes ultrafroids. On peut systématiser la distinction entre les deux domaines à partir des propriétés de collision [33]: sont ultrafroids les atomes pour lesquels il est légitime de décrire les collisions en ne retenant que les ondes  $s$ .

Le lecteur pourra consulter la référence [46] qui fait le point sur les expériences récentes utilisant des condensats de gaz atomiques dilués.

Peut-être faut-il souligner ici pourquoi ces obtentions expérimentales de condensats de Bose-Einstein atomiques ont tant d'importance. Tout d'abord, à la différence des autres systèmes sur lesquels on avait déjà observé des phénomènes liés à la condensation (supraconducteurs, He superfluide), les gaz atomiques sont dans un régime que l'on peut qualifier d'« idéal » pour le théoricien :

- aux températures considérées, les collisions dans l'onde  $s$  sont les seules à prendre en compte, si bien que les collisions sont entièrement caractérisées par un unique paramètre, la longueur de diffusion  $a$ , directement reliée à la section efficace totale de diffusion ( $\sigma = 8\pi a^2$  pour des bosons),
- la densité spatiale  $n$  vérifie  $na^3 \ll 1$ , ce qui assure le caractère binaire des collisions,
- $\sqrt{na^3}$  étant un petit paramètre, on peut utiliser l'approximation de Bogoliubov pour prendre en compte l'effet des interactions aux températures très basses,
- $(na^3)^{1/3}$  étant aussi un petit paramètre, il est possible de calculer l'écart entre la température de transition pour le gaz parfait et celle pour le gaz avec interactions.

Toutes ces raisons rendent possibles des prédictions théoriques quantitatives précises et une comparaison rigoureuse avec les expériences [27].

Sur un plan conceptuel, la condensation de Bose-Einstein des gaz d'alcalins marque l'avènement d'une nouvelle ère, celle des ondes de matière cohérentes. Plusieurs expériences sur des atomes froids avaient déjà contribué à rendre plus concrète l'idée d'équivalence onde-particule avancée au tout début de la mécanique quantique par de Broglie [44]. Ces expériences, qui appartiennent au domaine de l'optique atomique, visent à faire avec des atomes (ou des ondes atomiques) ce que l'on sait bien faire avec des photons (ou des ondes électromagnétiques) : citons par exemple la réflexion et la diffraction sur un miroir ou l'interférométrie. Cependant, il manquait une source qui fasse pour les atomes ce que fait un laser pour la lumière, c'est à dire un faisceau intense, extrêmement monochromatique<sup>4</sup> et hautement directionnel. Ces propriétés qui caractérisent un faisceau laser découlent de la capacité de celui-ci à émettre des photons dont un très grand nombre sont dans le même mode. Or dans un condensat, tous les atomes ont même énergie donc même longueur d'onde de de Broglie : si l'on peut sortir les atomes du piège par un processus qui conserve cette propriété, on obtiendra un faisceau que l'on pourrait qualifier de monochromatique si la gravité ne venait modifier la vitesse donc la longueur de de Broglie des atomes au cours de leur propagation. Plusieurs expériences ([50, 51, 52, 53]) ont montré la faisabilité d'un tel couplage avec l'extérieur (« output coupling »). Certains auteurs, frappés par l'analogie entre les

---

4. A cette monochromaticité est associée une cohérence du faisceau, la cohérence d'ordre un. Un faisceau laser possède également des propriétés de cohérence d'ordre supérieur, ce qui le distingue d'une source de lumière monochromatique thermique. Pour la définition de la cohérence d'une source, voir les références [47, 48, 49].

propriétés d'un tel faisceau et celles d'un laser, n'hésitent pas à employer le terme de laser à atomes<sup>5</sup>(« atom laser »). La monochromaticité d'un condensat - que nous avons introduite ici comme une notion attachée aux particules - trouve son pendant en terme ondulatoire dans la cohérence du faisceau. Ainsi, on peut se représenter un condensat comme un champ classique auquel on associe une phase. A ce titre, il devient tout à fait pertinent de se laisser guider par les schémas de pensée propres aux ondes pour comprendre certains phénomènes comme l'interférence entre deux condensats [54]. Plus quantitativement, la cohérence d'un laser à atomes est évaluée par les fonctions de corrélation du champ atomique :

- la fonction  $g_1(1, 2) = \langle \Psi^\dagger(1)\Psi(2) \rangle$  permet de définir la longueur de cohérence du faisceau,
- la fonction  $g_2(1, 2) = \langle \Psi^\dagger(1)\Psi^\dagger(2)\Psi(2)\Psi(1) \rangle$  évalue les fluctuations de densité et définit le degré de cohérence d'ordre 2, sur lequel se fait la distinction entre une source thermique et un laser.

Ces différentes fonctions seront étudiées dans le chapitre 2.

Les applications des laser à atomes sont potentiellement très nombreuses. Elles mettraient à profit le caractère cohérent de l'onde atomique ainsi que la petitesse des longueurs d'onde atomiques de De Broglie comparé aux longueurs d'onde optiques d'un laser usuel. La référence [55] recense quelques unes des perspectives les plus attrayantes. On peut par exemple penser à des expériences d'holographie atomique, d'interférométrie atomique ou de microscopie atomique.

Mais, si la cohérence d'un faisceau laser est une de ses grandes qualités, il ne faut pas oublier qu'il se caractérise également par sa capacité à délivrer de fortes intensités et ce même en régime continu. Or, jusqu'à présent, une séquence typique d'obtention d'un condensat de 100 millions d'atomes nécessite environ quelques dizaines de secondes, si bien que l'on obtient un laser à atomes pulsé, chaque pulse - ou chaque série de pulse si le processus d'extraction n'est pas continu - émettant environ 100 millions d'atomes pendant une durée d'environ 0.1 s [56] ; chaque pulse est séparé du suivant de quelques dizaines de secondes. Il est alors naturel de se demander s'il est possible d'appliquer le refroidissement évaporatif à un jet atomique et obtenir ainsi un faisceau atomique continu, intense et cohérent. Le but de cette partie est de présenter et d'analyser théoriquement un dispositif qui devrait permettre d'atteindre cet objectif. Notons que notre proposition est dans son principe assez différente des modèles antérieurs dans lesquels on cherche à obtenir un laser à atomes en alimentant en continu un condensat dans un piège tridimensionnel [57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65].

Le plan de cette partie est le suivant:

- dans le chapitre 1, nous traiterons le problème du refroidissement évaporatif d'un

---

5. D'un point de vue linguistique, on peut déplorer cette terminologie, puisque l'acronyme laser contient le mot light! Il faut donc accepter l'idée que l'on nomme désormais laser toute source ondulatoire cohérente.

jet atomique dans le régime classique, on retrouvera l'essentiel de ce travail dans la référence [66],

- dans le chapitre 2, nous présenterons une première approche des propriétés de cohérence du jet dans le régime quantique, c'est à dire lorsque les effets de statistique quantique doivent être pris en compte.
- enfin, les appendices apportent une compréhension détaillée des techniques utilisées dans cette partie.

# Chapitre 1

## Refroidissement évaporatif d'un jet atomique

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter un dispositif expérimental susceptible d'appliquer le refroidissement évaporatif à un jet atomique. Des valeurs numériques sont données afin de fixer les idées. Nous exposons ensuite deux méthodes pour résoudre l'équation de Boltzmann qui donne l'évolution de la densité dans l'espace des phases  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{t})$ . L'une, purement numérique, repose sur une simulation Monte-Carlo de la dynamique de l'écoulement ; l'autre, essentiellement analytique, utilise un ansatz pour la densité dans l'espace des phases  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{t})$  et permet d'obtenir des équations hydrodynamiques. Les résultats obtenus à l'aide de ces deux méthodes conduisent à l'évaluation des longueurs caractéristiques des variations de la densité dans l'espace des phases et du flux. On peut ainsi déterminer l'efficacité du refroidissement évaporatif et estimer la longueur minimale du jet pour atteindre le régime de dégénérescence quantique.

### 1.1 Dispositif expérimental

Dans l'expérience que nous nous proposons d'étudier, un jet atomique, produit par une source d'atomes refroidis par laser, est injecté dans un guide magnétique longitudinal (voir figure 1.1).

Ce guide est constitué de quatre fils parallèles à l'axe  $z$  parcourus par des courants  $\pm I$ . Chaque fil est à la distance  $a$  de l'axe  $z$ . Ces fils produisent un champ magnétique quadrupolaire  $\mathbf{B} = b'(x, -y, 0)$ , avec  $b' = 2\mu_0 I / (\pi a^2)$ . On superpose au champ précédent un champ magnétique longitudinal  $\mathbf{B}_0$  orienté selon l'axe  $z$  si bien que le module du champ magnétique total s'écrit, pour  $x, y$  suffisamment petits:

$$B(\mathbf{r}) \simeq B_0 + \frac{b'^2}{2B_0}(x^2 + y^2) \quad . \quad (1.1)$$

Un atome de moment magnétique  $\mu$  dirigé dans le sens opposé à  $\mathbf{B}$  verra donc un

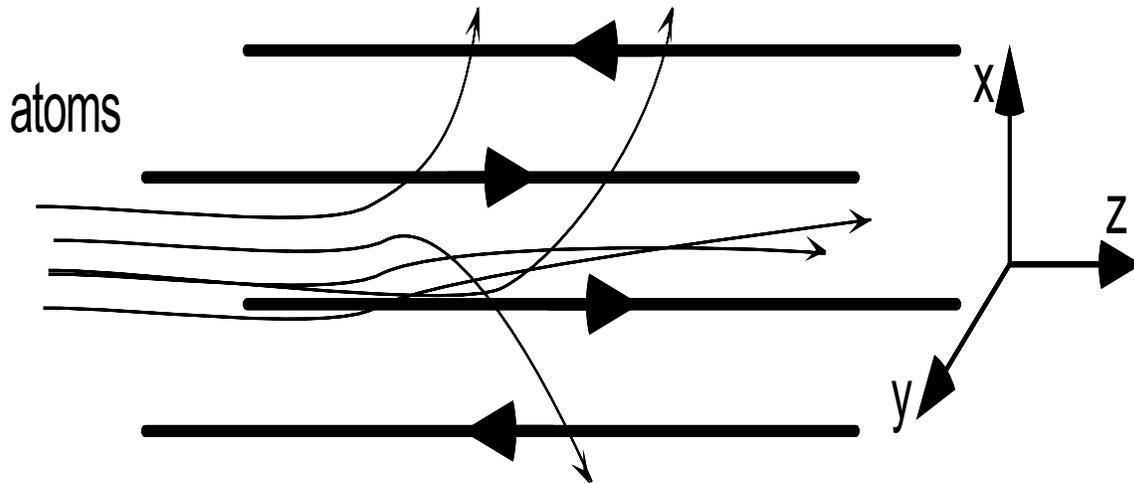


FIG. 1.1 – Schéma du dispositif expérimental.

potentiel de piégeage dans le plan transverse. Notons qu'en l'absence de gradient selon  $z$ , les équations de Maxwell impliquent l'isotropie 2D de ce potentiel. La fréquence d'oscillation dans le plan transverse vaut

$$\Omega_{\perp} = (\mu b^2 / (m B_0))^{1/2} \quad (1.2)$$

où  $m$  désigne la masse d'un atome. On peut prendre comme valeurs expérimentales typiques  $a = 4$  mm,  $I = 500$  A et  $B_0 = 1$  mT. Pour des atomes de rubidium,  $\mu$  est égal à un magnéton de Bohr, ce qui conduit à une fréquence d'oscillation  $\Omega_{\perp} \sim 2\pi \times 1000$  rad  $s^{-1}$ . Le domaine de validité du développement quadratique de (1.1) s'étend jusqu'à des températures de l'ordre de  $500$   $\mu$ K ( $\mu B_0 \sim k_B T$ ).

Nous supposons que les atomes entrent dans le guide en  $z = 0$  avec une distribution gaussienne (distribution de Maxwell) pour les vitesses et les positions. Cette distribution est caractérisée par une unique température  $T_0$ . La distribution des vitesses longitudinales est centrée autour d'une valeur moyenne notée  $\bar{v}_0$ . Le rapport  $\bar{v}_0 / \Delta v_0$ , où  $\Delta v_0 = \sqrt{k_B T / m}$  est la largeur de la distribution des vitesses, doit être plus grand que 1 pour garantir qu'initialement seule une petite fraction des atomes est à contre-courant. Dans la suite, nous avons choisi

$$\bar{v}_0 / \Delta v_0 = 3. \quad (1.3)$$

Si la température initiale a pour valeur  $T_0 = 400$   $\mu$ K - la raison de ce choix apparaîtra au paragraphe suivant - la vitesse moyenne initiale vaut  $\bar{v}_0 = 60$  cm/s. La largeur de la distribution des positions transverses est  $R_{\perp 0} = \Delta v_0 / \Omega_{\perp}$ , soit dans notre cas,  $R_{\perp 0} = 32$   $\mu$ m.

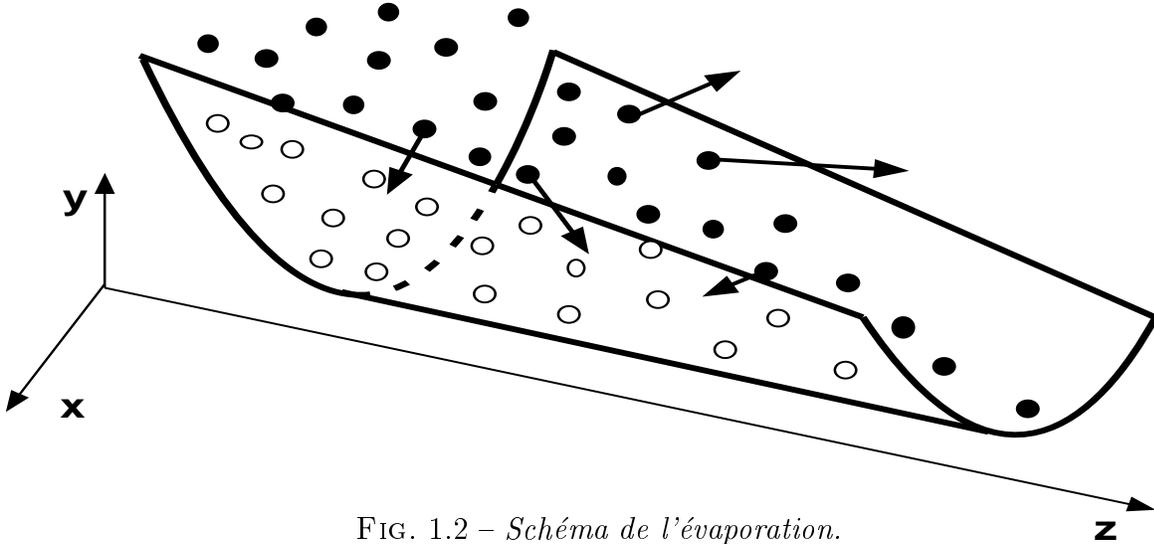


FIG. 1.2 – Schéma de l'évaporation.

Nous prendrons une densité centrale  $n_0$  en  $x = y = 0$  de  $8 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ . Le flux d'atomes entrant dans le guide est donc  $\Phi_0 = 2\pi R_{\perp 0}^2 n_0 \bar{v}_0 = 3 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ . La longueur d'onde thermique initiale s'écrit

$$\lambda_0 = h / \sqrt{2\pi m k_B T_0} \quad (1.4)$$

La densité dans l'espace des phases  $n_0 \lambda_0^3 \approx 7 \times 10^{-7}$  est donc très petite devant 1. On en déduit qu'il est légitime d'utiliser une description classique pour décrire le début du refroidissement évaporatif.

Tout au long de sa propagation, le jet atomique est refroidi par évaporation (voir figure 1.2) : les atomes les plus énergétiques sont éjectés et la thermalisation abaisse la température des atomes restants. On réalise ainsi une évaporation forcée non plus dans le domaine temporel comme c'est le cas pour les pièges 3D usuels, mais dans le domaine spatial. On peut envisager plusieurs méthodes d'évaporation. Si l'on impose un gradient de champ magnétique longitudinal (selon  $z$ ), il est possible de modifier la position du fond du puits de potentiel transverse. On peut alors, en appliquant une radio-fréquence uniforme sur le guide, diminuer la profondeur du puits de potentiel le long de la propagation du jet. Du fait de la symétrie cylindrique du piège magnétique - du moins tant que la gravité reste négligeable - on évapore par cette méthode dans les deux directions transverses. On parlera par la suite de situation bidimensionnelle (2D). L'ajout de ce gradient rend la fréquence d'oscillation transverse variable le long du guide. Cependant, il est possible de jouer sur la géométrie du piège quadrupolaire afin de conserver une fréquence constante au cours de la propagation. L'évaporation

peut également être assurée par deux parois absorbantes planes et parallèles. On règle le dispositif en sorte que la distance entre l'axe  $z$  et les deux parois diminue dans le sens de propagation du jet. On parlera alors de situation unidimensionnelle (1D), puisque l'évaporation n'aura lieu que dans une seule direction.

## 1.2 Modélisation

L'outil théorique utilisé pour modéliser la dynamique collisionnelle du gaz dans le guide est l'équation de Boltzmann qui donne l'évolution temporelle de la densité dans l'espace des phases<sup>1</sup>  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f - \nabla_{\mathbf{r}} U \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = I_{\text{coll}}[f] \quad , \quad (1.5)$$

où  $U(x, y, z) = U_x(x) + U_y(y)$  avec  $U_x(x) = \frac{1}{2}m\Omega_{\perp}^2 x^2$  et  $U_y(y) = \frac{1}{2}m\Omega_{\perp}^2 y^2$ . Dans l'hypothèse de collisions isotropes de section efficace  $\sigma$  indépendante de l'impulsion des atomes, l'intégrale de collision dans le membre de droite s'écrit:

$$\begin{aligned} I_{\text{coll}}[f] &= \frac{\sigma}{\pi m^2} \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \int d^3 p_4 (f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_4) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)) \\ &\quad \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \delta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_3^2}{2m} - \frac{p_4^2}{2m}\right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Pour les atomes alcalins, le domaine de validité de cette hypothèse est celui des basses températures pour lesquelles les collisions ont lieu essentiellement dans l'onde  $s$ . Dans le cas d'atomes de rubidium polarisés, la région de diffusion dans l'onde  $s$  s'étend jusqu'à une température de  $400 \mu\text{K}$ , à laquelle il correspond une vitesse quadratique moyenne  $\Delta v_0 = 20 \text{ cm/s}$ . Le lecteur peu familier avec la théorie des collisions pourra consulter les références [67, 68, 33].

La section efficace de diffusion du rubidium étant  $\sigma = 7.6 \times 10^{-16} \text{ m}^2$ , on peut calculer le taux de collision initial  $\gamma_{\text{coll}} = (2/\sqrt{\pi}) n_0 \sigma \Delta v_0$ . On obtient:

$$\gamma_{\text{coll}}/\Omega_{\perp} = 0.02 \quad , \quad (1.7)$$

ce qui signifie qu'un atome subit en moyenne plusieurs oscillations transverses entre deux collisions. Le plus souvent, nous utiliserons comme échelle de longueur le libre parcours moyen initial donné par

$$d_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{n_0 \sigma} \quad . \quad (1.8)$$

---

1. Nous choisissons d'exprimer la densité dans l'espace des phases  $f$  en  $\text{J}^3\text{s}^3$ .

L'évaporation est prise en compte en imposant  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0$  si la cellule  $\{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$  est dans le domaine d'évaporation. Pour la méthode utilisant une radio-fréquence, c'est à dire pour le cas 2D, ce domaine d'évaporation est:

$$x^2 + y^2 > \Lambda_{\text{evap}}^2(z) \quad (1.9)$$

où  $\Lambda_{\text{evap}}(z)$  est déterminée par la dépendance en  $z$  du biais et par la radio-fréquence selon la formule

$$g\mu(B_0^2 + b'^2\Lambda_{\text{evap}}^2)^{1/2} = h\nu_{\text{rf}} \quad (1.10)$$

où  $g$  est le facteur de Landé du niveau atomique. Nous étudierons également la situation 1D pour laquelle le domaine d'évaporation est défini par:

$$x^2 > \Lambda_{\text{evap}}^2(z) \quad . \quad (1.11)$$

Nous définissons l'énergie de coupure comme étant

$$\epsilon_c(z) = \frac{1}{2}m\Omega_{\perp}^2\Lambda_{\text{evap}}^2(z) \quad . \quad (1.12)$$

Nous allons à présent proposer deux méthodes de résolution de l'équation (1.5) :

- l'une purement numérique, qui fait l'objet du paragraphe 1.3,
- l'autre quasi-analytique, qui est présentée au paragraphe 1.4.

## 1.3 Principe de la simulation Monte-Carlo

Nous exposons dans ce paragraphe les grandes lignes de la résolution de l'équation (1.5) à l'aide d'une simulation Monte-Carlo. Nous renvoyons le lecteur désireux d'approfondir ce type de modélisation au programme commenté de l'appendice A.

Cette méthode a été initialement introduite afin de simuler des écoulements gazeux à l'échelle moléculaire [69]. Elle repose sur l'idée que l'on peut découpler, pour des gaz suffisamment dilués, la description du mouvement des particules de celle des collisions entre particules. A chaque pas  $\delta t$ , choisi petit devant la durée moyenne qui sépare deux collisions, on fait évoluer les positions et les vitesses des atomes selon les équations du mouvement. Dans un deuxième temps, on décide par tirage aléatoire quelles sont les particules qui vont entrer en collision et on traite toutes les collisions. C'est bien évidemment dans cette deuxième étape qu'intervient le caractère probabiliste de la méthode.

Il semblerait naturel de modéliser chaque atome dans la simulation. En fait, on ne peut pas le faire à cause de la contrainte imposée par la taille de la mémoire vive d'un ordinateur (de l'ordre du Go à l'heure actuelle). On introduit alors la notion de macro-atomes: un macro-atome de la simulation représente  $\ell$  atomes réels. On multiplie la section efficace de collision  $\sigma$  par  $\ell$  et on divise la densité spatiale  $n_0$  par le même

facteur  $\ell$ . Ceci est justifié par le fait que l'équation de Boltzmann (1.5) est invariante sous le changement d'échelle  $\sigma \rightarrow \ell\sigma$  et  $f \rightarrow f/\ell$ . En pratique, le choix du nombre de macro-atomes résulte d'un compromis entre le temps de calcul et l'importance des fluctuations.

On profite des symétries du problème en mettant des murs réfléchissants sur les plans  $x = 0$  et  $y = 0$ . On fait ainsi une simulation dans un quart de cylindre, ce qui permet de gagner en temps et en mémoire. Les positions et les vitesses des atomes entrants sont tirées au sort selon les lois de distribution initiales.

On prend en compte les collisions élastiques à l'aide d'une technique de pavage (« boxing ») [70], [71], [72]. L'espace des positions est pavé, chaque maille du pavage étant un parallélépipède de volume  $\delta V$  allongé suivant la direction  $z$ . La taille de cette maille est choisie en sorte que la probabilité d'occupation  $p_{\text{occ}}$  de toute maille soit beaucoup plus petite que 1. Les collisions ont lieu uniquement entre deux atomes qui se trouvent dans la même maille et le pas temporel  $\delta t$  est ajusté de telle sorte que la probabilité  $p_{\text{coll}}$  pour qu'il y ait collision entre deux atomes d'une même maille pendant  $\delta t$  soit également petite devant 1. Dans notre simulation, nous avons choisi initialement  $p_{\text{occ}} = 3\%$  et  $p_{\text{coll}} = 10\%$ . Notons que la valeur de  $p_{\text{occ}}$  pour la cellule du bout du tube va augmenter : il faut donc penser à vérifier a posteriori que cette valeur reste petite.

L'évaporation est prise en compte en éliminant les macro-atomes dont les coordonnées vérifient la condition d'évaporation choisie, c'est à dire un critère 1D ou 2D, en position ou en énergie.

On laisse tourner la simulation jusqu'à l'obtention d'un régime stationnaire, c'est à dire pendant un temps de l'ordre de  $2L/v_0$ , où  $L$  est la longueur totale du guide. On a alors accès aux énergies moyennes selon chaque axe, à la densité linéique et à la vitesse moyenne à chaque abscisse  $z$ . On en déduit les variations avec  $z$  de la température, du flux et de la densité dans l'espace des phases.

Anticipant sur les paragraphes suivants, nous insistons sur le fait que cette simulation ne repose sur aucune des hypothèses que nous allons faire pour remplacer  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  par un ansatz : elle ne nécessite ni l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local - qui sera faite ci-après - ni celle d'ergodicité - qui sera faite dans le cas 2D.

## 1.4 Equations hydrodynamiques 1D

Nous allons établir progressivement les équations hydrodynamiques décrivant le refroidissement du jet atomique : nous détaillerons le passage de l'équation de Boltzmann aux équations hydrodynamiques, puis nous étudierons successivement les pertes dues à l'évaporation et celles dues au déversement (« spilling »). Nous pourrions alors résoudre numériquement les équations obtenues et comparer les résultats à ceux de la simulation Monte-Carlo. Enfin, nous donnerons une solution analytique approchée permettant de prévoir les longueurs caractéristiques des variations de la densité dans

l'espace des phases et du flux du jet.

### 1.4.1 Forme générale des équations

Nous supposons que l'écoulement du gaz dans le guide est dans le régime hydrodynamique, c'est à dire que les quantités macroscopiques - comme la densité ou la vitesse moyenne - varient lentement avec  $z$  à l'échelle du libre parcours moyen  $d(z) = \Delta v(z)/\gamma_{\text{coll}}(z)$ . Cette hypothèse de régime hydrodynamique est synonyme d'équilibre thermodynamique local à chaque abscisse  $z$  à la température  $T(z)$ . Soulignons que cette hypothèse nécessite que la température soit la même selon les trois axes. La simulation Monte-Carlo permettra de valider cette dernière affirmation. L'hypothèse d'équilibre local suggère de prendre pour la densité dans l'espace des phases  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  l'ansatz suivant:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(z) e^{-\beta(z)(\epsilon_x + \epsilon_y)} e^{-\beta(z)(p_z - \bar{p}(z))^2/2m} Y(\epsilon_c(z) - \epsilon_x(x, p_x)). \quad (1.13)$$

On a défini  $\beta(z) = 1/(k_B T(z))$  et  $\epsilon_{x,y} = U_{x,y} + \frac{p_{x,y}^2}{2m}$  qui sont les énergies transverses selon les directions  $x$  et  $y$ . La fonction de Heavyside  $Y$  est une troncature dont le rôle est de prendre en compte l'évaporation : au-delà d'une certaine énergie selon l'axe  $x$ , les particules sont évaporées. Expérimentalement, l'évaporation est contrôlée par le critère en position (1.11). Cependant, nous avons déjà mentionné le fait que nous sommes dans un régime « collisionless » pour le mouvement transverse, c'est à dire qu'un atome a le temps d'effectuer plusieurs oscillations entre chaque collision. En conséquence, pour une évaporation 1D, si un atome acquiert à l'issue d'une collision une énergie totale selon l'axe  $x$  (cinétique+potentielle) plus grande que la coupure  $\epsilon_c(z)$ , il remplira durant l'oscillation suivante – et ce avant d'entrer en collision avec un autre atome – la condition d'évaporation (1.11) et sera donc évaporé. Ainsi, il est possible de reformuler le critère d'évaporation non plus en fonction de la position  $x$  d'un atome mais en fonction de son énergie  $\epsilon_x(x, p_x) = U_x + p_x^2/(2m)$ . C'est ce que nous avons fait dans (1.13).

La densité dans l'espace des phases sur l'axe  $f_0(z)$  se calcule par la condition de normalisation

$$\int dx dy \int d^3 p f = \rho_{\text{lin}}(z) \quad (1.14)$$

On a noté  $\rho_{\text{lin}}(z)$  la densité linéique, c'est à dire le nombre de particules dans le guide par unité de longueur. Un calcul simple donne :

$$f_0(z) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \frac{1}{1 - e^{-\eta}} \frac{\rho_{\text{lin}}(z)}{(m\Delta v(z))^3 R_{\perp}^2(z)} \quad , \quad (1.15)$$

où l'on a introduit la vitesse thermique

$$\Delta v(z) = \sqrt{k_B T(z)/m} \quad ,$$

la taille thermique transverse

$$R_{\perp}(z) = \sqrt{k_B T(z)/m\Omega_{\perp}^2} \quad ,$$

et le paramètre

$$\eta = \frac{\epsilon_c(z)}{k_B T(z)} \quad .$$

Nous allons maintenant établir un jeu d'équations différentielles couplées portant sur les trois grandeurs  $T(z, t)$ ,  $\rho_{\text{lin}}(z, t)$  et  $\bar{p}(z, t)$ . En fait,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  ne dépend dans les directions transverses que de  $\epsilon_x$  et  $\epsilon_y$ , qui sont des constantes de l'évolution hamiltonienne. On peut ainsi réduire (1.5) à:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_z}{m} \frac{\partial f}{\partial z} = I_{\text{coll}}[f] \quad . \quad (1.16)$$

Cependant, l'équation écrite ci-dessus ne prend pas correctement en compte l'effet de l'évaporation. Pour le voir, écrivons la variation de  $f$  pendant  $dt$ :

$$f_{t+dt-} = f_t + \mathcal{D}f_t dt \quad ,$$

où  $\mathcal{D}$  désigne un opérateur de différentiation quelconque. Pour obtenir  $f_{t+dt}$ , il faut appliquer la coupure à  $f_{t+dt-}$  :

$$f_{t+dt} = Y f_{t+dt-} \quad .$$

On en déduit le résultat suivant:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Y \mathcal{D}f \quad .$$

En appliquant ce résultat à notre cas, l'équation (1.16) devient:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + Y \frac{p_z}{m} \frac{\partial f}{\partial z} = I_{\text{coll}}[f] \quad . \quad (1.17)$$

On procède alors de façon analogue à l'établissement des équations de l'hydrodynamique à partir de l'équation de Boltzmann [73]: en multipliant l'équation (1.17) par 1,  $p_z$  et  $\epsilon_x + \epsilon_y + \bar{p}^2/2m$ , respectivement, et en intégrant sur les cinq variables  $x, y, p_x, p_y, p_z$ , on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{lin}} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\bar{p}}{m} \rho_{\text{lin}} \right] = -\Gamma \rho_{\text{lin}} \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\bar{p} \rho_{\text{lin}}] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( k_B T + \frac{\bar{p}^2}{m} \right) \rho_{\text{lin}} \right] = -\Gamma \bar{p} \rho_{\text{lin}} \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \bar{\epsilon}_x + \frac{3}{2} k_B T + \frac{\bar{p}^2}{2m} \right) \rho_{\text{lin}} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \bar{\epsilon}_x + \frac{5}{2} k_B T + \frac{\bar{p}^2}{2m} \right) \frac{\bar{p}}{m} \rho_{\text{lin}} \right] = - \left( \Gamma \frac{\bar{p}^2}{2m} + \Gamma_{\epsilon} k_B T \right) \rho_{\text{lin}} \quad (1.20)$$

où l'on a introduit la valeur moyenne de l'énergie selon l'axe  $x$  :

$$\bar{\epsilon}_x = \frac{1}{\rho_{\text{lin}}} \int \dots \int \epsilon_x f = k_B T \left( 1 - \frac{\eta}{e^\eta - 1} \right). \quad (1.21)$$

Les équations (1.18),(1.19),(1.20) ne sont rien d'autre que les équations de conservation pour le nombre de particules, l'impulsion et l'énergie. Afin d'alléger les écritures, on a omis dans les membres de gauche les termes de déversement. Ces termes apparaissent lors de l'interversion des intégrations et de la dérivée partielle par rapport à  $z$ . Ces termes seront étudiés dans un paragraphe à part. Les membres de droites sont des termes de perte dus à l'évaporation:  $\Gamma$  est le taux d'évaporation à l'abscisse  $z$  et  $\Gamma_\epsilon k_B T$  est le taux de perte d'énergie dans le référentiel local de vitesse  $\bar{v}(z)$ . Le calcul de ces taux fait l'objet du paragraphe suivant.

### 1.4.2 Calcul des taux d'évaporation

Ces calculs étant quelque peu techniques, nous renvoyons le lecteur à l'appendice B. Nous nous contenterons ici de formuler les résultats et de les commenter.

Pour le taux de perte de particules, on peut mettre le résultat sous la forme:

$$\Gamma = \sigma \rho_{\text{lin}}(z) \frac{\Delta v(z)}{R_\perp^2(z)} e^{-\eta(z)} S_1(\eta(z)), \quad (1.22)$$

avec

$$S_1(\eta) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{e^\eta}{(1 - e^{-\eta})^2} \int_{-\sqrt{2\eta}}^{\sqrt{2\eta}} dw e^{-w^2} \int_0^a du (a - u) e^{-u^2} (\text{erfc}(a - u) + \text{erfc}(a + u)), \quad (1.23)$$

où l'on a posé  $a = \sqrt{2\eta - w^2}$ . L'équation (1.22) montre clairement que  $\Gamma \rho_{\text{lin}}$  est proportionnel à la section efficace de diffusion et au carré de la densité atomique, comme prévu compte tenu du caractère binaire des collisions. Le coefficient sans dimension  $S_1(\eta)$  est à peu près constant lorsque  $\eta$  varie entre 2 et 10 et vaut 0.075 (voir figure 1.3).

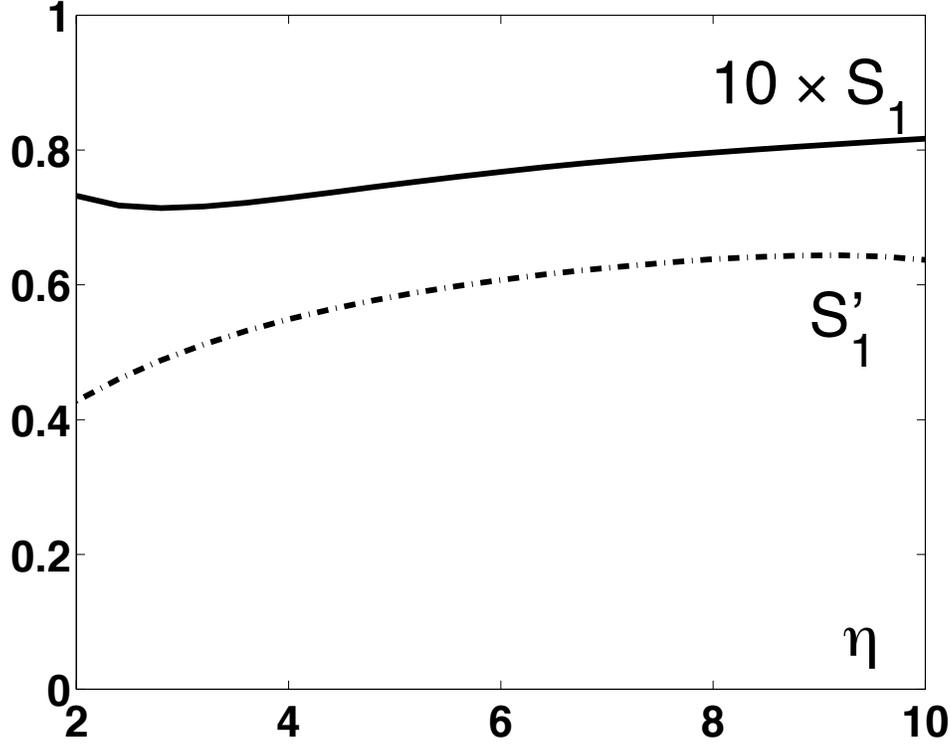
Pour le taux de perte d'énergie, on trouve

$$\Gamma_\epsilon = \Gamma \left( \eta(z) + \frac{3}{2} + S_1'(\eta(z)) \right), \quad (1.24)$$

avec

$$S_1'(\eta) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{e^\eta}{S_1(\eta) (1 - e^{-\eta})^2} \int_{-\sqrt{2\eta}}^{\sqrt{2\eta}} dw e^{-w^2} \int_0^a du (a - u) e^{-u^2} \times \left\{ \frac{a + u}{\sqrt{\pi}} e^{-(a-u)^2} + \frac{a - u}{\sqrt{\pi}} e^{-(a+u)^2} - (a^2 - u^2)(\text{erfc}(a - u) + \text{erfc}(a + u)) \right\}.$$

Le coefficient  $S_1'(\eta)$  est également sans dimension et croît de 0.4 à 0.6 lorsque  $\eta$  varie entre 2 et 10 (voir figure 1.3).

FIG. 1.3 – Coefficients  $S_1$  et  $S'_1$  pour  $\eta$  variant entre 2 et 10

### 1.4.3 Etude du déversement

Nous avons déjà signalé que ces termes proviennent de l'interversion d'une intégration et d'une dérivation. Pour ce faire, on utilise la formule :

$$\int_0^{A(z)} dx \frac{\partial}{\partial z} F(u, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_0^{A(z)} dx F(u, z) \right] - \frac{dA}{dz} F(A(z), z) \quad .$$

Ainsi, à l'équation (1.18), il faut rajouter au membre de droite le terme de perte suivant :

$$-\Gamma_{\text{sp}} \rho_{\text{lin}} = \frac{d\epsilon_c}{dz} \left( \int dy dp_y e^{-\beta \epsilon_y} \right) \int dp_z \frac{p_z}{m} e^{-\beta(p_z - \bar{p})^2 / (2m)} f_0(z) \frac{2\pi}{\Omega_{\perp}} e^{-\beta \epsilon_c(z)} \quad . \quad (1.25)$$

Tous calculs faits, on est conduit à :

$$\Gamma_{\text{sp}} = -\frac{e^{-\eta}}{1 - e^{-\eta}} \frac{1}{k_B T} \frac{\bar{p}}{m} \frac{d\epsilon_c}{dz} \quad . \quad (1.26)$$

A ce stade, il est possible d'anticiper sur les résultats du paragraphe 1.4.6 afin de comparer ce taux de perte par déversement à celui dû à l'évaporation. On montre alors

que, dans le régime où  $\eta$  reste constant au cours de la propagation du jet, le rapport entre ces deux grandeurs vaut :

$$\frac{\Gamma_{\text{sp}}}{\Gamma} \simeq \frac{2\eta(\eta + S'_1(\eta) - 1)}{S_1(\eta)(e^\eta - 1)} . \quad (1.27)$$

Lorsque  $\eta$  varie entre 3 et 6, ce rapport décroît de 16% à 3%. Dans la suite, nous travaillerons, pour une raison qui apparaîtra au paragraphe suivant, avec un paramètre  $\eta$  proche de 5. Il est alors tout à fait légitime de négliger le terme dû au déversement devant celui dû à l'évaporation.

On peut également calculer les termes de déversement qui interviennent dans les bilans d'impulsion et d'énergie. Ainsi, dans l'équation (1.19), il faut ajouter au membre de droite le terme

$$-\Gamma_{\text{sp}}\left(\bar{p} + \frac{mk_B T}{\bar{p}}\right)\rho_{\text{lin}} ,$$

tandis que dans l'équation (1.20), vient s'ajouter le terme

$$-\Gamma_{\text{sp}}\left(\frac{\bar{p}^2}{2m} + \frac{5}{2}k_B T + \bar{\epsilon}_c\right)\rho_{\text{lin}} .$$

Là aussi, nous négligerons ces termes dans ce qui suit.

#### 1.4.4 Optimisation du paramètre $\eta$

Nous revenons donc aux équations (1.18-1.20) et nous nous plaçons dans le régime  $\eta \gg 1$ . Ceci permet, comme nous l'avons vu précédemment, de négliger les pertes par déversement . Par ailleurs, les expressions de l'énergie moyenne selon  $x$  et de la densité dans l'espace des phases sur l'axe se simplifient pour  $\eta \gg 1$ :

$$\bar{\epsilon}_x \simeq k_B T ,$$

et

$$f_0(z) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \frac{\rho_{\text{lin}}(z)}{(m\Delta v(z))^3 R_\perp^2(z)} .$$

Après quelques réarrangements, on obtient le système d'équations suivant:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{p}}{m} \frac{\partial}{\partial z}\right) \rho_{\text{lin}} + \rho_{\text{lin}} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\bar{p}}{m}\right] = -\Gamma \rho_{\text{lin}} \quad (1.28)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{p}}{m} \frac{\partial}{\partial z}\right) \bar{p} + \frac{1}{\rho_{\text{lin}}} \frac{\partial}{\partial z} [k_B T \rho_{\text{lin}}] = 0 \quad (1.29)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{p}}{m} \frac{\partial}{\partial z}\right) k_B T + \frac{2}{5} k_B T \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\bar{p}}{m}\right] = k_B T \left(\Gamma - \frac{2}{5} \Gamma_\epsilon\right) \quad (1.30)$$

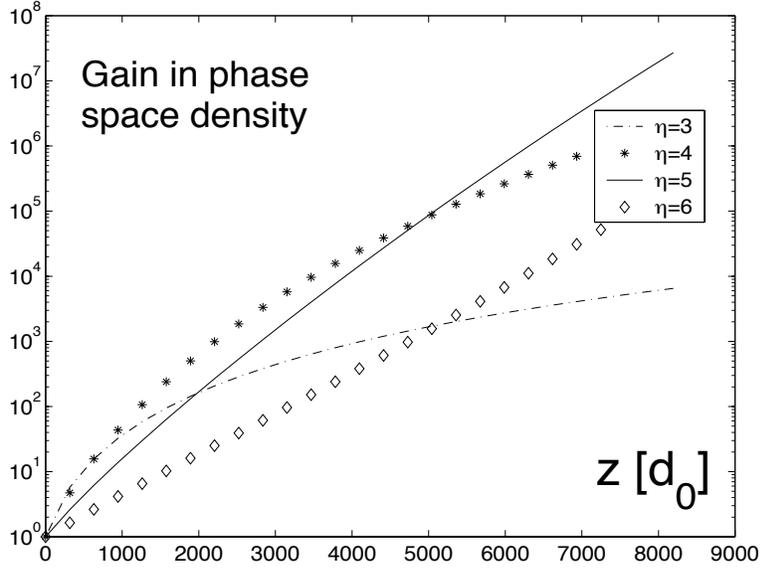


FIG. 1.4 – *Refroidissement 1D*. Gain dans l'espace des phases en fonction de  $z$  pour différentes valeurs de  $\eta$ . L'unité de longueur selon  $z$  est le libre parcours moyen  $d_0$ .

Nous ne nous intéresserons qu'au régime stationnaire, pour lequel il suffit de résoudre, par une méthode de Runge-Kutta par exemple, le système d'équations différentielles non-linéaires suivant:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho_{\text{lin}}) = -\frac{m}{\bar{p}}\rho_{\text{lin}}\left(\Gamma + \Gamma_\epsilon \frac{k_B T}{E}\right) \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\bar{p}}{m}\right) = \Gamma_\epsilon \frac{k_B T}{E} \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(k_B T) = -\frac{mk_B T}{\bar{p}}\left(\frac{2}{5}\Gamma_\epsilon - \Gamma + \frac{2}{5}\Gamma_\epsilon \frac{k_B T}{E}\right) \quad (1.33)$$

où nous avons posé

$$E = \frac{5\bar{p}^2}{2m} - \frac{7}{2}k_B T \quad .$$

L'objectif final de notre dispositif étant d'atteindre le régime de dégénérescence quantique, nous cherchons à obtenir un gain dans l'espace des phases de l'ordre de  $10^7$ . On voudrait, avant de lancer une simulation Monte-Carlo, déterminer quelle doit être la dépendance selon  $z$  de la coupure  $\epsilon_c(z)$  afin d'obtenir ce gain avec une longueur de guide la plus courte possible. Pour cela, on peut résoudre numériquement les équations hydrodynamiques en se restreignant à  $\eta$  constant pour différentes valeurs de  $\eta$ . La température obtenue nous dictera la fonction  $\epsilon_c(z)$  à mettre dans le Monte-Carlo.

Les courbes des figures 1.4 et 1.5 montrent le gain dans l'espace des phases et le flux en fonction de  $z$  pour différentes valeurs de  $\eta$ . Le refroidissement à  $\eta \simeq 5$  minimise

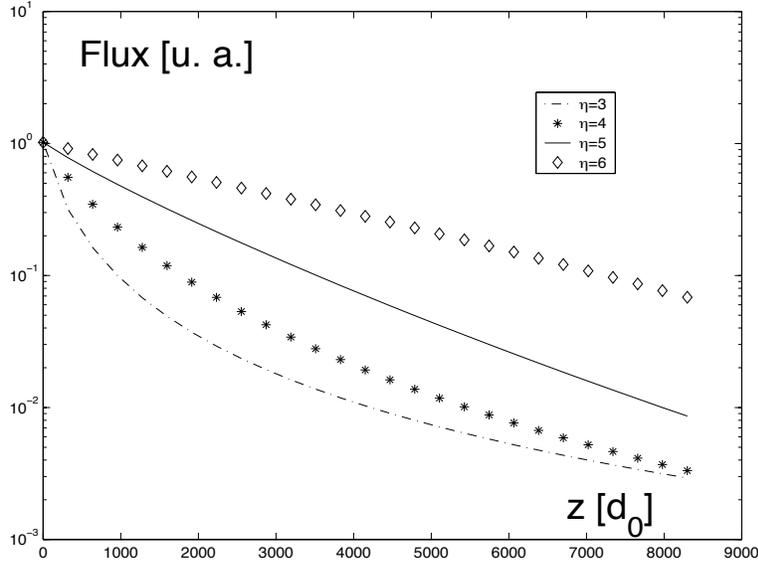


FIG. 1.5 – Refroidissement 1D. Flux en fonction de  $z$  pour différentes valeurs de  $\eta$ . L'unité de longueur selon  $z$  est le libre parcours moyen  $d_0$ .

la longueur nécessaire à l'obtention d'un gain dans l'espace des phases de  $10^7$ . Nous travaillerons donc dans la suite à  $\eta \simeq 5$ .

### 1.4.5 Comparaison avec la simulation Monte-Carlo

Pour tester la validité de notre traitement analytique, nous comparons les résultats donnés par la résolution numérique des équations hydrodynamiques à ceux de la simulation Monte-Carlo. Nous avons pris un guide de longueur

$$L = 2500 d_0 \quad . \quad (1.34)$$

Le temps moyen mis par un atome non évaporé pour traverser tout le guide est  $T = L/\bar{v}_0 = 4 \times 10^4 \Omega^{-1}$ . Ce temps correspond à  $830 \gamma_{\text{coll}}^{-1}$ .

Donnons quelques précisions concernant la simulation Monte-Carlo. Nous avons utilisé les résultats numériques des équations hydrodynamiques pour déterminer la fonction  $\epsilon_c(z)$  en sorte que  $\eta$  soit constant et égal à 5.

La figure (1.6) montre la fonction  $k_B T(z)$  déterminée numériquement ainsi que la fonction  $\epsilon_c(z)$  utilisée dans la simulation Monte-Carlo. On injecte en moyenne 21 macro-atomes tous les  $\Omega_{\perp}^{-1}$  dans le quart de plan défini par  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z = 0$ . En l'absence d'évaporation, on dénombre  $N = 21 \times 4 \times 10^4 = 8.4 \times 10^5$  macro-atomes. Avec les chiffres donnés au paragraphe 1.1, on trouve que le paramètre  $\ell$  vaut 5600. Le critère d'évaporation retenu est celui d'une évaporation 1D en position. Enfin, on laisse évoluer jusqu'au régime stationnaire, ce qui correspond à une durée d'environ  $2L/\bar{v}_0$ .

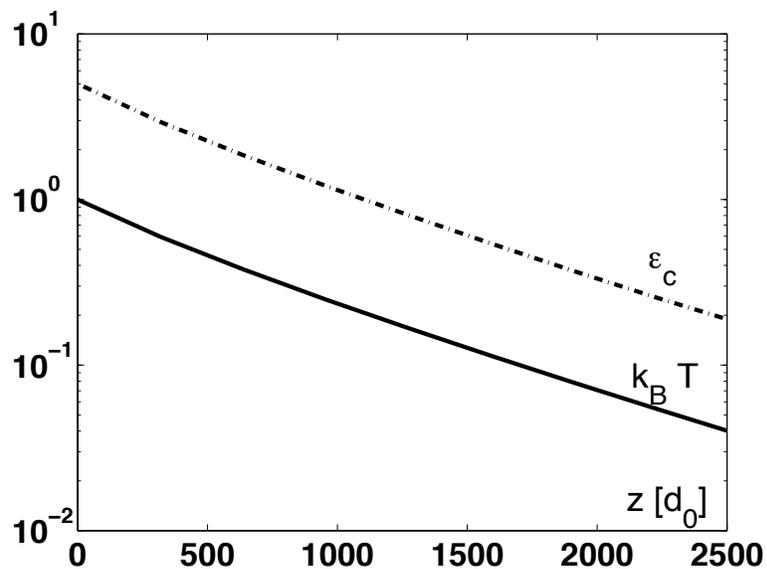


FIG. 1.6 – Refroidissement 1D. Température et coupure en fonction de  $z$ . L'unité de longueur selon  $z$  est le libre parcours moyen  $d_0$ .

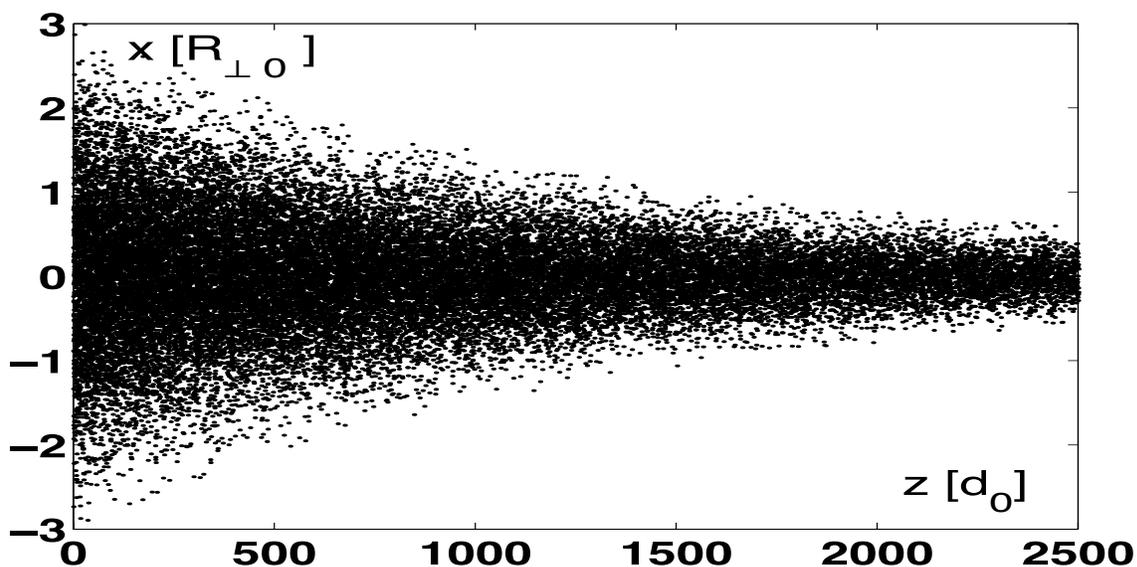


FIG. 1.7 – Refroidissement 1D. Photo en régime stationnaire des positions des macro-atomes de la simulation Monte-Carlo.

A titre d'illustration, la figure 1.7 montre la projection des positions des atomes dans le plan horizontal à un instant donné en régime stationnaire.

Etant donné que  $\Gamma_c$  est positif, on voit sur l'équation (1.32) que la vitesse moyenne augmente le long du guide. La figure 1.8 montre cette évolution, qui est confirmée par

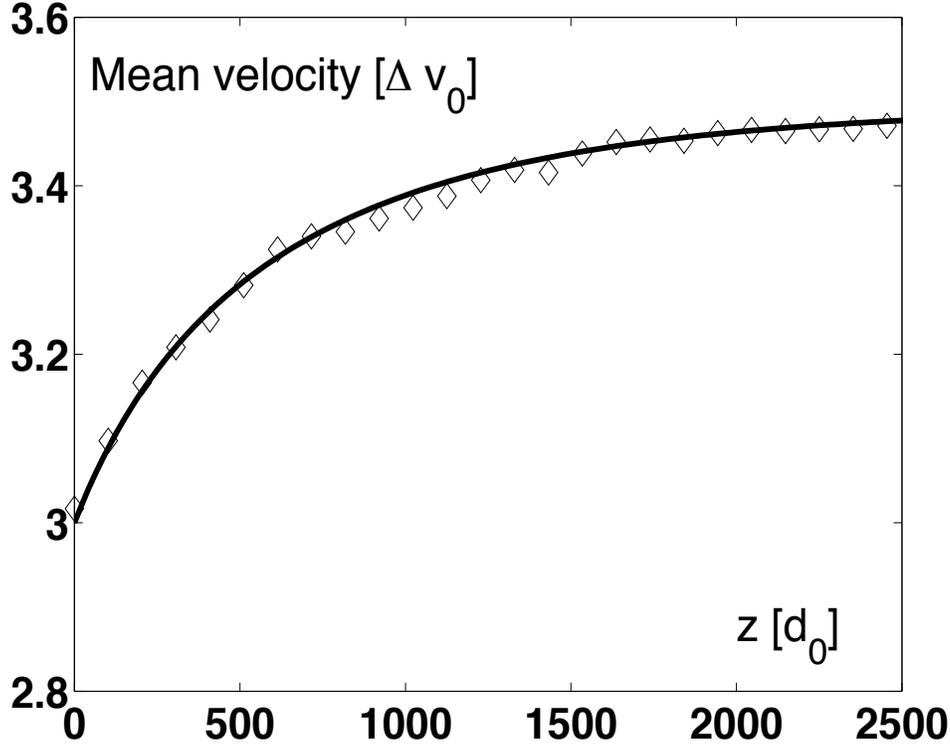


FIG. 1.8 – *Refroidissement 1D. Evolution de la vitesse moyenne le long du guide, pour  $\eta \simeq 5$ . L'unité de longueur selon  $z$  est le libre parcours moyen  $d_0$ . La courbe en trait plein est obtenue par la résolution numérique des équations hydrodynamiques, les diamants proviennent de la résolution par Monte-Carlo.*

la simulation Monte-Carlo.

On peut expliquer cette augmentation de la vitesse moyenne par un argument de cinématique. On peut se représenter en effet le refroidissement de façon simplifiée comme un processus au cours duquel une particule rapide entre en collision avec une particule lente, l'une des deux étant éjectée du guide. Mais à une abscisse donnée, le taux de renouvellement de particules est plus grand pour les particules rapides que pour les particules lentes. C'est pourquoi, après un certain temps d'évolution, la vitesse moyenne en  $z > 0$  est plus grande que celle en  $z = 0$ . Cette interprétation permet d'ailleurs de comprendre pourquoi la vitesse moyenne, après une phase de croissance, atteint une valeur constante : lorsque le refroidissement a notablement réduit la dispersion en vitesse ( $\Delta v(z) \ll \bar{v}(z)$ ), l'effet précédent devient négligeable.

Les figures 1.9 et 1.10 montrent respectivement la densité dans l'espace des phases et le flux du jet en fonction de  $z$ . Nous constatons tout d'abord l'excellent accord entre les deux méthodes. Ceci permet de justifier l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local qui est à la base de notre traitement analytique. Une augmentation significative de la

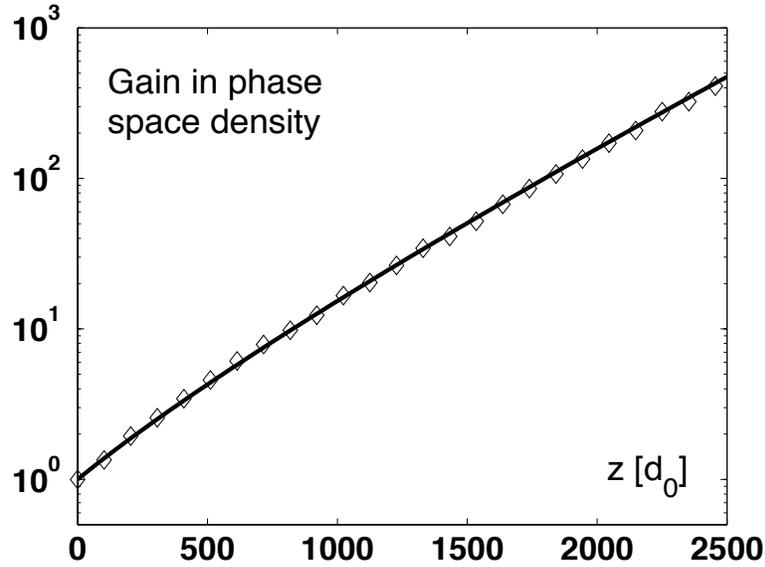


FIG. 1.9 – *Refroidissement 1D. Gain de densité dans l'espace des phases en fonction de  $z$ . L'unité de longueur selon  $z$  est le libre parcours moyen  $d_0$ . La courbe en trait plein montre le résultat analytique, les diamants le résultat Monte-Carlo.*

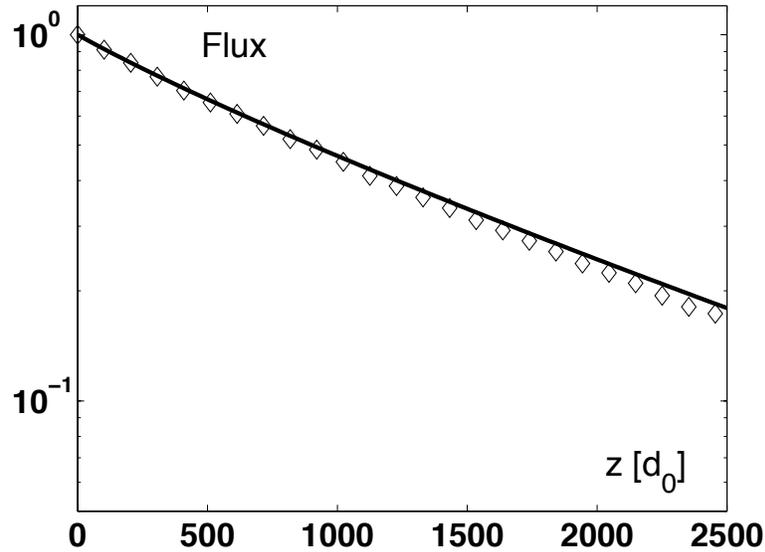


FIG. 1.10 – *Refroidissement 1D. Décroissance du flux du jet atomique en fonction de  $z$ . L'abscisse  $z$  est en unité du libre parcours moyen  $d_0$ . La courbe en trait plein montre le résultat analytique, les diamants le résultat Monte-Carlo.*

densité dans l'espace des phases d'un facteur 500 montre l'efficacité du refroidissement évaporatif. Ce gain dans l'espace des phases et le flux varient quasi-exponentiellement

avec la longueur du tube. L'objet du paragraphe suivant est de déterminer analytiquement et de façon approchée les longueurs caractéristiques de ces exponentielles.

### 1.4.6 Echelles de longueur

Nous allons résoudre analytiquement les équations (1.31),(1.32),(1.33) dans le régime où l'on a atteint une vitesse moyenne  $\bar{v}$  constante et où  $k_B T \ll E$ . Dans ce cas, ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho_{\text{lin}}) \simeq -\frac{m}{\bar{p}} \Gamma \rho_{\text{lin}} \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{p}}{m} \right) \simeq 0 \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (k_B T) \simeq -\frac{m}{\bar{p}} \left( \frac{2}{5} \Gamma_\epsilon - \Gamma \right) k_B T \quad (1.37)$$

En se plaçant de plus à  $\eta$  constant, les solutions de ces équations sont:

$$\rho_{\text{lin}}(z) = \rho_{\text{lin}}(0) \left( 1 - \frac{z}{\zeta_1} \right)^{\alpha_1} \quad T(z) = T(0) \left( 1 - \frac{z}{\zeta_1} \right)^{\beta_1} \quad (1.38)$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{5}{\eta + S'_1(\eta) - 6} \quad \beta_1 = \frac{2(\eta + S'_1(\eta) - 1)}{\eta + S'_1(\eta) - 6} \quad , \quad (1.39)$$

et

$$\zeta_1 = d_0 \frac{\bar{v}_0}{\Delta v_0} \frac{5 e^\eta}{\pi^{3/2} S(\eta) (\eta + S'_1(\eta) - 6)} \quad . \quad (1.40)$$

Pour les valeurs de  $z$  explorées sur les courbes des figures 1.9 et 1.10,  $z \ll \zeta_1$  et les expressions ci-dessus deviennent:

$$\rho_{\text{lin}}(z) = \rho_{\text{lin}}(0) \exp(-\alpha_1 z / \zeta_1) \quad T(z) = T(0) \exp(-\beta_1 z / \zeta_1) \quad (1.41)$$

On trouve alors que le flux varie comme

$$e^{-z/(d_0 \kappa_1)} \quad (1.42)$$

avec

$$\kappa_1 = \frac{\bar{v}_0}{\Delta v_0} \frac{e^\eta}{\pi^{3/2} S_1(\eta)} \quad , \quad (1.43)$$

tandis que la densité dans l'espace des phases varie comme

$$e^{+z/(d_0 \tau_1)} \quad (1.44)$$

avec

$$\tau_1 = \frac{\bar{v}_0}{\Delta v_0} \frac{e^\eta}{\pi^{3/2} (\eta + S'_1(\eta) - 2) S_1(\eta)} \quad . \quad (1.45)$$

Pour  $\eta = 5$ , l'application numérique donne  $\kappa_1 \simeq 360 \bar{v}_0 / \Delta v_0$  et  $\tau_1 \simeq 100 \bar{v}_0 / \Delta v_0$ .

Il est intéressant de noter que le taux de collision varie faiblement avec  $z$ , dans le régime  $z \ll \zeta_1$ . En effet, on a :

$$\gamma_{\text{coll}}(z) = \gamma_{\text{coll}}(0) \left(1 - \frac{z}{\zeta_1}\right)^{\alpha_1 - \frac{\beta_1}{2}} = \gamma_{\text{coll}}(0) \frac{\zeta_1}{\zeta_1 - z} \quad . \quad (1.46)$$

Ceci montre que, selon le signe de  $\zeta_1$ , le taux de collision  $\gamma_{\text{coll}}$  augmente ( $\eta > 5.4$ ) ou diminue ( $\eta < 5.4$ ) légèrement avec  $z$ . Pour la valeur particulière  $\eta \simeq 5.4$ , pour laquelle le dénominateur  $(\eta + S'_1(\eta) - 6)$  de  $\zeta_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  s'annule, les solutions exponentielles de longueurs caractéristiques  $d_0 \kappa_1$  et  $d_0 \tau_1$  deviennent exactes vis à vis de (1.35)-(1.37).

## 1.5 Equations hydrodynamiques 2D

### 1.5.1 Forme générale des équations

Nous traitons maintenant le cas où le dispositif d'évaporation éjecte un atome d'abscisse  $z$  dès que sa position transverse (c'est à dire sa distance à l'axe  $z$ ) dépasse une certaine valeur  $\Lambda_{\text{evap}}(z)$ . La dépendance en  $z$  de cette valeur critique  $\Lambda_{\text{evap}}(z)$  est choisie par l'expérimentateur qui peut jouer sur le gradient de champ magnétique selon  $z$ .

Comme pour la situation 1D, nous faisons l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local et nous exprimons le critère d'évaporation en fonction de l'énergie transverse  $\epsilon_{\perp}$ , ce qui donne un ansatz de la forme :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_0(z) e^{-\beta(z)\epsilon_{\perp}} e^{-\beta(z)(p_z - \bar{p}(z))^2 / 2m} Y(\epsilon_c(z) - \epsilon_{\perp}) \quad , \quad (1.47)$$

avec  $f_0(z)$  déterminée par la condition de normalisation (1.14). Pour  $\eta \gg 1$ , on a toujours

$$f_0(z) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \frac{\rho_{\text{lin}}(z)}{(m\Delta v(z))^3 R_{\perp}^2(z)} \quad .$$

La formulation de cette condition d'évaporation en fonction de l'énergie transverse est, à la différence du cas 1D, a priori injustifiée. En effet, il faudrait faire une hypothèse d'ergodicité qui n'est pas correcte en ce qui concerne la dynamique dans le potentiel transverse isotrope: la connaissance de l'énergie transverse totale  $\epsilon_{\perp} = \epsilon_x + \epsilon_y$  n'est pas suffisante pour décider si une particule peut remplir ou non au cours de son mouvement la condition d'évaporation. Par exemple, un atome suivant une trajectoire transverse rectiligne d'énergie  $\epsilon_{\perp} > \epsilon_c(z)$  sera évaporé tandis qu'un atome suivant une trajectoire transverse circulaire ne sera évaporé que si  $\epsilon_{\perp}$  dépasse la valeur  $2\epsilon_c(z)$ . A posteriori, l'ansatz (1.47) donne d'assez bons résultats.

On reprend alors la même démarche que celle suivie au paragraphe 1.4.1. On retrouve donc, pour  $\eta \gg 1$ , les équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{lin}} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\bar{p}}{m} \rho_{\text{lin}} \right] = -\Gamma \rho_{\text{lin}} \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\bar{p} \rho_{\text{lin}}] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( k_B T + \frac{\bar{p}^2}{m} \right) \rho_{\text{lin}} \right] = -\Gamma \bar{p} \rho_{\text{lin}} \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{5}{2} k_B T + \frac{\bar{p}^2}{2m} \right) \rho_{\text{lin}} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{7}{2} k_B T + \frac{\bar{p}^2}{2m} \right) \frac{\bar{p}}{m} \rho_{\text{lin}} \right] = - \left( \Gamma \frac{\bar{p}^2}{2m} + \Gamma_\epsilon k_B T \right) \rho_{\text{lin}} \quad (1.50)$$

Nous allons d'abord étudier les taux de perte par évaporation, puis nous estimerons les taux de perte par déversement.

### 1.5.2 Calcul des taux d'évaporation

Afin de rendre les calculs faisables, nous introduisons une nouvelle approximation, qui consiste à exprimer la condition d'évaporation en fonction de l'énergie totale de la particule de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \epsilon_c(z) - \epsilon_\perp &= \epsilon_c(z) + \frac{(p_z - \bar{p}_z)^2}{2m} - \left( \epsilon_\perp + \frac{(p_z - \bar{p}_z)^2}{2m} \right) \\ &\simeq \epsilon'_c(z) - \epsilon \quad , \end{aligned} \quad (1.51)$$

où l'on a introduit une énergie de coupure effective

$$\epsilon'_c(z) = \epsilon_c(z) + \frac{k_B T(z)}{2} \quad , \quad (1.52)$$

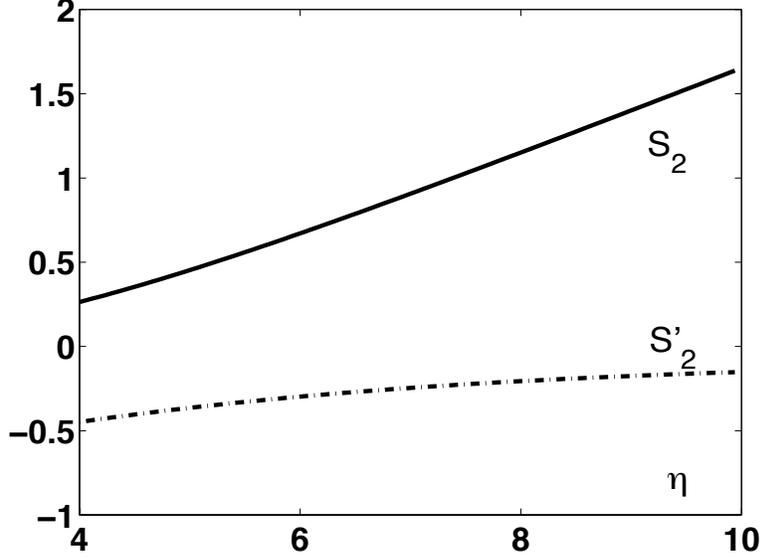
ainsi que l'énergie dans le référentiel du centre de masse

$$\epsilon = \epsilon_\perp + \frac{(p_z - \bar{p}_z)^2}{2m} \quad . \quad (1.53)$$

Nous pouvons alors calculer les taux d'évaporation en utilisant la même démarche que celle suivie pour calculer les taux dans les pièges 3D. Nous nous contenterons ici de donner les résultats importants, et le lecteur pourra trouver des calculs plus détaillés dans les références [74],[75].

La première quantité à calculer est la densité d'état par unité de longueur, définie par:

$$\rho(\epsilon) = \int dx dy \int d^3 p \delta \left( \epsilon - \left( \frac{m\Omega^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right) \right) \quad (1.54)$$


 FIG. 1.11 – Coefficients  $S_2$  et  $S'_2$  pour  $\eta'$  variant entre 2 et 10

On obtient comme résultat:

$$\rho(\epsilon) = \frac{2^{3/2} 8\pi^2 \sqrt{m}}{3 \Omega_{\perp}^2} \sqrt{\epsilon^3} \quad . \quad (1.55)$$

Le taux de perte pour le nombre de particules s'écrit alors:

$$-\Gamma \rho_{\text{lin}} = -8\pi m \sigma \int_0^{\epsilon'_c(z)} d\epsilon_3 \int_{\epsilon_3}^{\epsilon'_c(z)} d\epsilon_2 \int_{\epsilon'_c(z)+\epsilon_3-\epsilon_2}^{\epsilon'_c(z)} d\epsilon_1 f(z, \epsilon_1) f(z, \epsilon_2) \rho(\epsilon_3) \quad . \quad (1.56)$$

Il est agréable de mettre le résultat sous la même forme que dans le cas 1D:

$$\Gamma = \sigma \rho_{\text{lin}}(z) \frac{\Delta v(z)}{R_{\perp}^2(z)} e^{-\eta'(z)} S_2(\eta'(z)) \quad , \quad (1.57)$$

avec le coefficient sans dimension  $S_2(\eta'(z))$  donné par

$$S_2(\eta'(z)) = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi^2} \int_0^{\eta'(z)} du u^{3/2} [e^{-u}(\eta'(z) - u - 1) + e^{-\eta'(z)}] \quad . \quad (1.58)$$

Pour le taux de perte d'énergie, il faut évaluer:

$$-\Gamma_{\epsilon} k_B T \rho_{\text{lin}} = -8\pi m \sigma \int_0^{\epsilon'_c(z)} d\epsilon_3 \int_{\epsilon_3}^{\epsilon'_c(z)} d\epsilon_2 \int_{\epsilon'_c(z)+\epsilon_3-\epsilon_2}^{\epsilon'_c(z)} d\epsilon_1 \epsilon_4 f(z, \epsilon_1) f(z, \epsilon_2) \rho(\epsilon_3) \quad (1.59)$$

avec  $\epsilon_4 = \epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon_2$ . Tous calculs faits, le résultat se met sous la forme:

$$\Gamma_{\epsilon} = \Gamma (\eta'(z) + 1 + S'_2(\eta'(z))) \quad (1.60)$$

avec

$$S_2'(\eta'(z)) = \frac{1}{S_2(\eta'(z))} \frac{4\sqrt{2}}{3\pi^2} \int_0^{\eta'(z)} du u^{3/2} \left[ -e^{-u} + e^{-\eta'(z)}(\eta'(z) + 1 - u) \right] \quad . \quad (1.61)$$

La figure 1.11 montre les variations de  $S_2$  et  $S_2'$  pour  $\eta'$  variant entre 2 et 10.

### 1.5.3 Etude du déversement

On fait le même calcul que dans le cas 1D. Le résultat peut se mettre sous une forme très simple:

$$\Gamma_{\text{sp}}^{2D} = \eta \times \Gamma_{\text{sp}}^{1D} \quad . \quad (1.62)$$

Le taux de pertes par déversement est donc multiplié par un facteur  $\eta$  lorsque l'on passe de 1D à 2D. Parallèlement, le taux d'évaporation est multiplié par le facteur  $S_2/S_1$  qui est de l'ordre de  $3 \times (\eta + 1)$ . Ceci montre que l'on peut négliger également à 2D les pertes par déversement devant celles dues à l'évaporation. C'est ce que nous ferons dans la suite.

### 1.5.4 Optimisation du paramètre $\eta$

Nous reprenons donc l'étude numérique du système d'équations différentielles (1.31-1.33), avec les taux calculés au paragraphe 1.5.2 :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho_{\text{lin}}) = -\frac{m}{\bar{p}} \rho_{\text{lin}} \left( \Gamma + \Gamma_\epsilon \frac{k_B T}{E} \right) \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\bar{p}}{m} \right) = \Gamma_\epsilon \frac{k_B T}{E} \quad (1.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(k_B T) = -\frac{mk_B T}{\bar{p}} \left( \frac{2}{5} \Gamma_\epsilon - \Gamma + \frac{2}{5} \Gamma_\epsilon \frac{k_B T}{E} \right) \quad (1.65)$$

où nous avons posé

$$E = \frac{5}{2} \frac{\bar{p}^2}{m} - \frac{7}{2} k_B T \quad .$$

Pour les mêmes raisons que celles invoquées au paragraphe 1.4.4, nous avons cherché la valeur de  $\eta$  permettant de minimiser la longueur du tube nécessaire à l'obtention d'un gain dans l'espace des phases de  $10^7$ .

La courbe 1.12 montre que la valeur  $\eta = 6$  est proche de la valeur optimale. Nous choisirons donc par la suite de réaliser nos simulations avec la valeur  $\eta = 6$ .

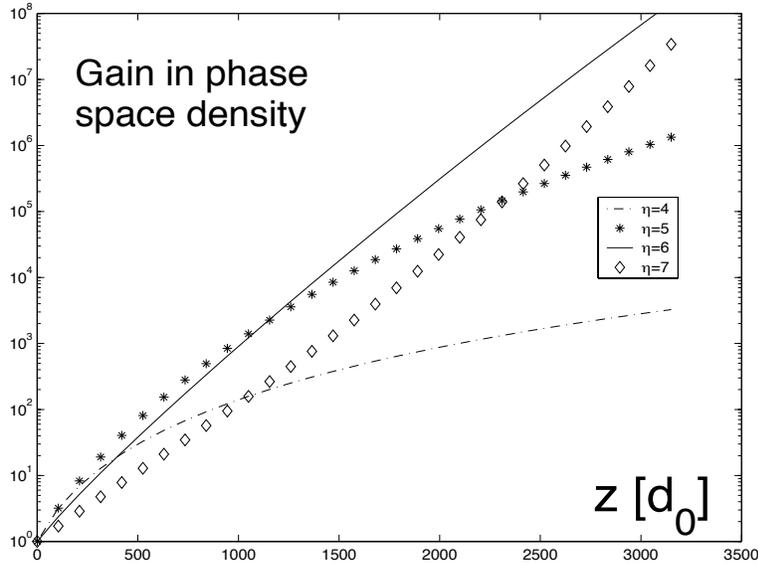


FIG. 1.12 – Refroidissement 2D. Gain dans l'espace des phases en fonction de  $z$  pour différentes valeurs de  $\eta$ . L'unité de longueur selon  $z$  est le libre parcours moyen  $d_0$ .

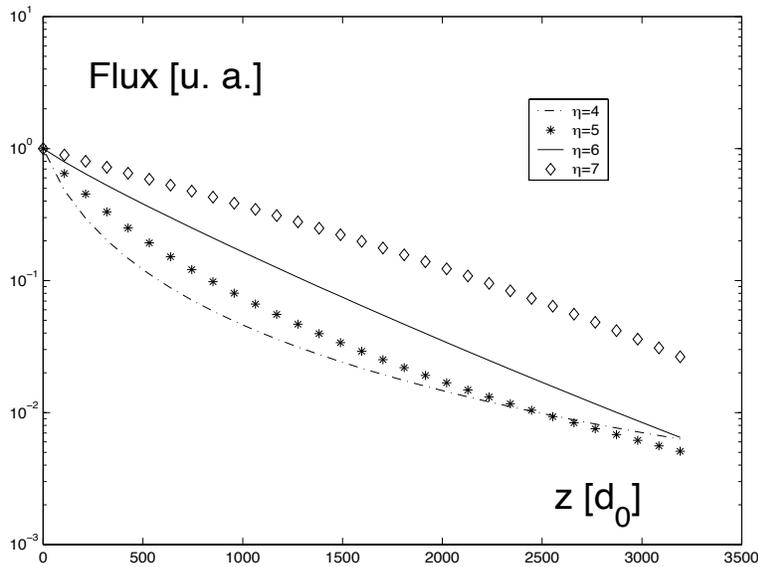


FIG. 1.13 – Refroidissement 2D. Flux en fonction de  $z$  pour différentes valeurs de  $\eta$ . L'unité de longueur selon  $z$  est le libre parcours moyen  $d_0$ .

### 1.5.5 Comparaison avec la simulation Monte-Carlo

Les figures 1.14 et 1.15 montrent respectivement l'évolution de la densité dans l'espace des phases et du flux en fonction de  $z$ . L'accord entre les deux méthodes, sans

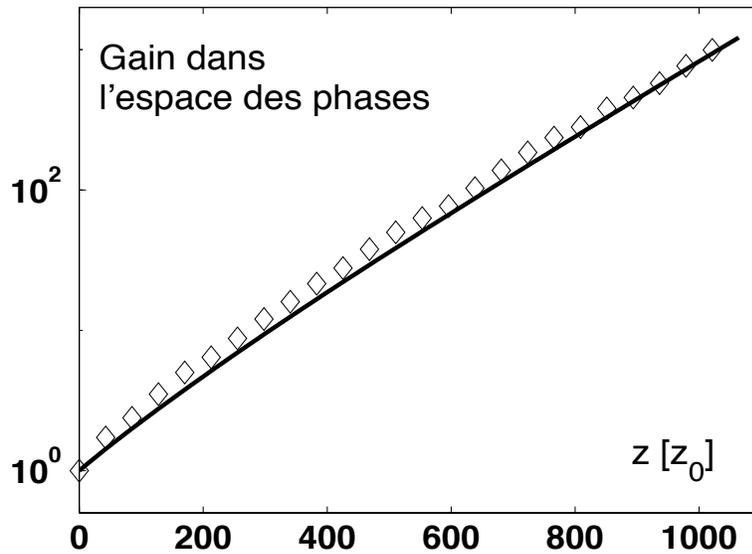


FIG. 1.14 – Refroidissement 2D. Gain de la densité dans l'espace des phases en fonction de  $z$ . L'unité de longueur selon  $z$  est le libre parcours moyen  $d_0$ . La courbe en trait plein montre le résultat analytique, les diamants le résultat Monte-Carlo.

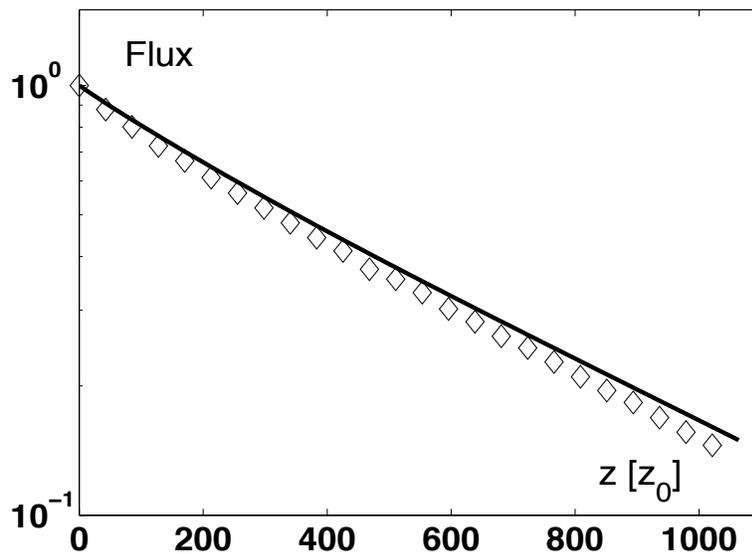


FIG. 1.15 – Refroidissement 2D. Flux du jet atomique en fonction de  $z$ , en unité du flux en  $z = 0$ . L'abscisse  $z$  est en unité du libre parcours moyen  $d_0$ . La courbe en trait plein montre le résultat analytique, les diamants le résultat Monte-Carlo.

être parfait, n'en reste pas moins étonnamment bon, compte tenu du caractère rustique de la méthode analytique.

Ces courbes mettent en évidence l'avantage du refroidissement 2D : un même gain dans l'espace des phases, avec la même perte sur le flux, est obtenu pour une longueur environ 3 fois plus petite en 2D qu'en 1D : alors qu'un gain dans l'espace des phases de  $10^7$  nécessitait une longueur de  $7500d_0$  dans le cas 1D,  $2500d_0$  suffisent dans le cas 2D. Exprimé en mètres, ce résultat montre qu'il est possible d'atteindre le régime de dégénérescence quantique avec un guide d'environ 4 m.

### 1.5.6 Echelles de longueur

Nous reprenons exactement la même étude qu'au paragraphe 1.4.6. Avec les mêmes notations, les solutions s'écrivent :

$$\rho_{\text{lin}}(z) = \rho_{\text{lin}}(0) \left(1 - \frac{z}{\zeta_2}\right)^{\alpha_2} \quad T(z) = T(0) \left(1 - \frac{z}{\zeta_2}\right)^{\beta_2} \quad (1.66)$$

avec

$$\alpha_2 = \frac{5}{\eta' + S_2'(\eta') - \frac{13}{2}} \quad \beta_2 = \frac{2(\eta' + S_2'(\eta') - \frac{3}{2})}{\eta' + S_2'(\eta') - \frac{13}{2}} \quad , \quad (1.67)$$

et

$$\zeta_2 = d_0 \frac{\bar{v}_0}{\Delta v_0} \frac{5 e^{\eta'}}{\pi^{3/2} S_2(\eta') (\eta' + S_2'(\eta') - \frac{13}{2})} \quad . \quad (1.68)$$

Pour les valeurs de  $z$  explorées sur les courbes des figures 1.14 et 1.15,  $z \ll \zeta_2$  et les expressions ci-dessus deviennent :

$$\rho_{\text{lin}}(z) = \rho_{\text{lin}}(0) \exp(-\alpha_2 z / \zeta_2) \quad T(z) = T(0) \exp(-\beta_2 z / \zeta_2) \quad (1.69)$$

On trouve alors que le flux varie comme

$$e^{-z/(d_0 \kappa_2)} \quad (1.70)$$

avec

$$\kappa_2 = \frac{\bar{v}_0}{\Delta v_0} \frac{e^{\eta'}}{\pi^{3/2} S_2(\eta')} \quad (1.71)$$

tandis que la densité dans l'espace des phases varie comme

$$e^{+z/(d_0 \tau_2)} \quad (1.72)$$

avec

$$\tau_2 = \frac{\bar{v}_0}{\Delta v_0} \frac{e^{\eta'}}{\pi^{3/2} (\eta' + S_2'(\eta') - \frac{5}{2}) S_2(\eta')} \quad . \quad (1.73)$$

Pour  $\eta' = 6.5$ , l'application numérique donne  $\kappa_2 \simeq 160\bar{v}_0/\Delta v_0$  et  $\tau_2 \simeq 43\bar{v}_0/\Delta v_0$ .

Il est intéressant de noter que le taux de collision varie faiblement avec  $z$ , dans le régime  $z \ll \zeta_2$ . En effet, on a :

$$\gamma_{\text{coll}}(z) = \gamma_{\text{coll}}(0) \left(1 - \frac{z}{\zeta_2}\right)^{\alpha_2 - \frac{\beta_2}{2}} = \gamma_{\text{coll}}(0) \frac{\zeta_2}{\zeta_2 - z} . \quad (1.74)$$

Ceci montre que, selon le signe de  $\zeta_2$ , le taux de collision  $\gamma_{\text{coll}}$  augmente ( $\eta' > 6.3$ ) ou diminue ( $\eta' < 6.3$ ) légèrement avec  $z$ . Pour la valeur particulière  $\eta' \simeq 6.3$ , pour laquelle le dénominateur ( $\eta' + S_2'(\eta') - \frac{13}{2}$ ) de  $\zeta_2$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  s'annule, les solutions exponentielles de longueurs caractéristiques  $d_0\kappa_2$  et  $d_0\tau_2$  deviennent exactes vis à vis de (1.35)-(1.37).

## 1.6 Comparaison 1D/2D

Nous allons utiliser les résultats des paragraphes 1.4.6 et 1.5.6 pour comparer l'efficacité du refroidissement selon la dimensionalité de l'évaporation. Pour ce faire, il faut définir ce que l'on entend par efficacité du refroidissement.

Une première approche consiste à ne s'intéresser uniquement au gain dans l'espace des phases. Le dispositif le plus efficace sera celui pour lequel l'obtention du gain de  $10^7$  se fait sur la longueur la plus petite. Il suffit donc de comparer  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , chacune de ces quantités étant déjà optimisée en fonction de  $\eta$ . Dans notre cas, il faut donc étudier le rapport :

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = e^{5-6.5} \frac{6.5 + S_2'(6.5) - 2.5}{5 + S_1'(5) - 2} \frac{S_2(6.5)}{S_1(5)} \simeq 2.25 . \quad (1.75)$$

En comparant ce résultat avec les courbes 1.4 et 1.12, on constate que la solution analytique des équations hydrodynamiques permet d'obtenir un bon ordre de grandeur. Un relevé graphique sur les courbes montre que l'on a plutôt un facteur 3 entre ces deux quantités.

Cependant, on peut également rechercher à obtenir un certain gain tout en perdant le moins possible sur le flux atomique. L'évaluation de l'efficacité se fait alors par le rapport entre les deux longueurs caractéristiques de variation du flux et du gain dans l'espace des phases, c'est à dire :

$$\mathcal{G}_i = \frac{\kappa_i}{\tau_i} , \quad (1.76)$$

où l'indice  $i$  vaut 1 ou 2 selon l'évaporation considérée. Plus  $\mathcal{G}_i$  est grand, plus le refroidissement est efficace.

Pour comparer les deux situations, il faut donc étudier le rapport de  $\mathcal{G}_1$  sur  $\mathcal{G}_2$  :

$$\frac{\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_2} = \frac{\eta' + S_2'(\eta') - \frac{5}{2}}{\eta + S_1'(\eta) - 2} . \quad (1.77)$$

Avec les valeurs  $\eta = 5$  et  $\eta' = 6.5$ , on trouve

$$\frac{\mathcal{G}_1}{\mathcal{G}_2} \simeq 1 \quad , \quad (1.78)$$

ce qui montre que d'après ce critère, le refroidissement 1D est aussi efficace que le refroidissement 2D : un gain de  $10^7$  dans l'espace des phases s'obtient au prix d'une perte de  $10^3$  sur le flux incident, si l'on choisit dans chacun des cas le paramètre  $\eta$  conduisant à la distance d'évaporation la plus courte.

# Chapitre 2

## Cohérence du jet dans le régime quantique

### Introduction

Nous supposons à présent que le refroidissement évaporatif a été suffisamment efficace pour que l'on atteigne le régime de dégénérescence quantique. Nous allons chercher dans ce chapitre à décrire les propriétés de cohérence du jet atomique ainsi obtenu.

Remarquons tout d'abord que deux situations très différentes se présentent selon le rapport entre l'énergie thermique  $k_B T$  et l'énergie de l'oscillateur transverse  $\hbar\Omega_\perp$ . Le régime  $k_B T \ll \hbar\Omega_\perp$  est un peu particulier. En effet, dans ce cas, seul l'état fondamental des niveaux transverse est peuplé et l'on a un véritable système 1D. L'originalité de ce dernier provient de l'absence de processus de thermalisation : lors d'une collision  $p_1 + p_2 \rightarrow p'_1 + p'_2$ , les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion imposent  $p'_1 = p_1$  et  $p'_2 = p_2$  (ou  $p'_1 = p_2$  et  $p'_2 = p_1$ ), si bien qu'il n'y a pas de redistribution de l'énergie au sein du système. Cette situation peu courante ne sera pas étudiée ici.

Nous ne considérerons donc que le cas  $k_B T \gg \hbar\Omega_\perp$ , c'est à dire que nous nous plaçons dans le cas où un grand nombre de niveaux transverse sont potentiellement peuplables. Dans un premier temps, nous présenterons les résultats dans le cas du gaz parfait, puis nous verrons comment les interactions atomiques modifient radicalement certains de ces résultats.

## 2.1 Cas du gaz parfait

### 2.1.1 Condensation de Bose-Einstein et dimensionalité

Reprenons tout d'abord la démonstration habituelle de la formule reliant la température de transition à la densité spatiale. Nous considérons un gaz de  $N$  bosons, sans inter-

actions, dans une boîte *cubique* de volume  $V = L_x \times L_y \times L_z$ . On place l'étude dans l'ensemble grand canonique, avec  $T$  la température et  $\mu$  le potentiel chimique du gaz à l'équilibre thermodynamique. Les différents niveaux d'énergies sont:

$$\epsilon = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{2\pi n_x}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{2\pi n_y}{L_y} \right)^2 + \left( \frac{2\pi n_z}{L_z} \right)^2 \right] , \quad (2.1)$$

où  $n_x, n_y, n_z$  désignent des entiers relatifs. Le facteur d'occupation d'un niveau d'énergie  $\epsilon$  s'écrit :

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} . \quad (2.2)$$

Ce facteur d'occupation étant nécessairement positif, on en déduit la condition

$$\mu < \epsilon_{\text{fond}} , \quad (2.3)$$

où  $\epsilon_{\text{fond}}$  désigne l'énergie de l'état fondamental, qui est nulle dans notre cas. A  $T$  et  $N$  fixés, le potentiel chimique est solution de l'équation de normalisation :

$$N = \sum_{n_x, n_y, n_z} f(\epsilon) . \quad (2.4)$$

Comme le montre cette dernière équation, lorsqu'on augmente le nombre de particules  $N$  à  $T$  et  $V$  fixés, le potentiel chimique  $\mu$  s'approche de sa borne supérieure  $\epsilon_{\text{fond}} = 0$ . Nous allons à présent chercher un majorant  $\rho^{(e)}$  de la densité spatiale des états excités. Pour cela, on peut prendre  $\mu = 0$  :

$$\rho^{(e)} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{n} \neq \vec{0}} \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1} . \quad (2.5)$$

On peut passer à la limite continue, c'est à dire remplacer la somme discrète par une intégrale:

$$\rho^{(e)} = \frac{1}{h^3} \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{1/2} f(\epsilon) . \quad (2.6)$$

En calculant cette dernière intégrale par un développement en série, on trouve finalement que la densité spatiale dans les états excités est bornée par

$$\rho^{(e)} = \zeta(3/2) \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^3} , \quad (2.7)$$

avec la longueur d'onde de de Broglie thermique

$$\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} . \quad (2.8)$$

On en conclut que si l'on augmente la densité spatiale au-delà de  $\rho^{(c)}$ , les particules ne peuvent que s'accumuler dans l'état fondamental dont la densité est donnée par

$$\rho_0 = \frac{f(0)}{V} \simeq \frac{k_B T}{|\mu|V} \quad . \quad (2.9)$$

C'est le phénomène de condensation de Bose-Einstein. On peut résumer les deux résultats en écrivant la condition de normalisation (2.4) sous la forme :

$$\rho \simeq \frac{k_B T}{|\mu|V} + \rho^{(c)} \quad (2.10)$$

Appliquons à présent la même démarche au cas d'une boîte anisotrope dont la dimension selon  $z$  est beaucoup plus grande que les dimensions selon  $x$  et  $y$ . Le passage à la limite continue utilisé ci-dessus montre qu'un majorant du nombre d'atomes que l'on peut mettre dans les états excités varie comme

$$N' \sim \frac{L_x L_y L_z}{\lambda_{\text{dB}}^3} \quad . \quad (2.11)$$

Cependant, le nombre d'atomes dans le fondamental transverse mais excités suivant  $z$  est donné par :

$$N'_{00} = \sum_{n_z \neq 0} \frac{1}{e^{\beta \epsilon_z} - 1} \quad , \quad (2.12)$$

avec

$$\epsilon_z = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{2\pi n_z}{L_z} \right)^2 \quad . \quad (2.13)$$

Or, pour une boîte telle que  $L_z \gg \lambda_{\text{dB}}$ , les premiers termes de cette somme sont de l'ordre de  $L_z^2/\lambda_{\text{dB}}^2$ , tandis que les termes suivants peuvent se calculer par un passage à la limite continue et donneront une contribution en  $L_z/\lambda_{\text{dB}}$ . On en conclut que

$$N'_{00} \sim \frac{L_z^2}{\lambda_{\text{dB}}^2} \quad . \quad (2.14)$$

Ainsi, le calcul de  $N'$  où l'on passe froidement à la limite continue n'est valable que si  $N'_{00} < N'$ , c'est à dire lorsque:

$$\frac{L_z^2}{\lambda_{\text{dB}}^2} < \frac{L_x L_y L_z}{\lambda_{\text{dB}}^3} \quad . \quad (2.15)$$

Il faut donc être très prudent lors du passage à la limite continue dans le cas d'une boîte anisotrope. Ce problème n'est que trop rarement signalé dans la littérature [76].

L'étude de la condensation de Bose-Einstein dans un piège harmonique anisotrope ( $\omega_{x,y} \gg \omega_z$ ) a déjà été abordée dans la référence [77]. Y-est introduite la notion de condensation en deux temps (« two-step condensation ») : lorsqu'on augmente le nombre de particules à température et fréquences fixées, un premier phénomène de condensation a lieu dans les directions transverses, puis c'est seulement dans un deuxième temps qu'apparaît la population macroscopique de l'état fondamental. Nous allons retrouver le même type de phénomène dans le paragraphe suivant.

### 2.1.2 Condensation des degrés de liberté transverses

Nous considérons dans ce paragraphe un gaz de  $N$  bosons, piégés transversalement par un potentiel harmonique de fréquence  $\Omega_\perp$  et longitudinalement par une boîte de longueur  $L$ . Nous avons choisi des conditions aux limites périodiques selon la direction longitudinale  $z$ . Précisons dès maintenant comment prendre la limite thermodynamique dans notre système. Il s'agit de faire tendre le nombre de particules  $N$  et la taille longitudinale de la boîte  $L$  vers l'infini en maintenant le rapport  $N/L$  constant ainsi que la température  $T$  et la fréquence transverse d'oscillation  $\Omega_\perp$ .

La densité linéique maximale pouvant peupler les états excités transverses s'écrit lorsque  $\mu \ll \hbar\Omega_\perp$  (on prend  $\mu = 0$ ):

$$\rho_{\text{lin}}^{(c)} = \sum_{(n_x, n_y) \neq (0,0)} \frac{1}{L} \sum_{n_z} \frac{1}{e^{\beta \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{2\pi n_z}{L} \right)^2 + n_\perp \hbar\Omega_\perp \right]} - 1} \quad , \quad (2.16)$$

avec  $n_\perp = n_x + n_y$ . En prenant la limite thermodynamique, l'équation ci-dessus devient:

$$\rho_{\text{lin}}^{(c)} = \sum_{(n_x, n_y) \neq (0,0)} \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{e^{\beta \left[ \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + n_\perp \hbar\Omega_\perp \right]} - 1} \quad . \quad (2.17)$$

En développant en puissances, on obtient:

$$\rho_{\text{lin}}^{(c)} = \sum_{l \geq 1} \int \frac{dk}{2\pi} \sum_{(n_x, n_y) \neq (0,0)} e^{-\beta l \frac{\hbar^2 k^2}{2m}} e^{-\beta l n_\perp \hbar\Omega_\perp} \quad . \quad (2.18)$$

On calcule l'intégrale sur  $k$ , on reconnaît le produit de deux séries géométriques, et nous trouvons:

$$\rho_{\text{lin}}^{(c)} = \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}} \sum_{l \geq 1} \frac{1}{\sqrt{l}} \left[ \frac{1}{(1 - e^{-l\beta\hbar\Omega_\perp})^2} - 1 \right] \quad (2.19)$$

En utilisant l'encadrement

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{(1 - e^{-x})^2} - 1 \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \quad , \quad (2.20)$$

on en déduit:

$$\rho_{\text{lin}}^{(c)} \simeq \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}} \zeta(5/2) \left( \frac{k_B T}{\hbar\Omega_\perp} \right)^2 \quad . \quad (2.21)$$

Nous pouvons facilement vérifier ce résultat numériquement: on choisit par exemple  $k_B T = 20\hbar\Omega_\perp$ , on prend une boîte de longueur  $L = 1000\lambda_{\text{dB}}^{-1}$  et on peut calculer tous les nombres d'occupations en faisant varier le potentiel chimique. La figure (2.1) montre la fraction d'atomes dans l'état fondamental transverse en fonction de la densité linéique. On voit très clairement que pour  $\rho_{\text{lin}} \simeq 500\lambda_{\text{dB}}^{-1}$ , ce qui correspond à la valeur donnée

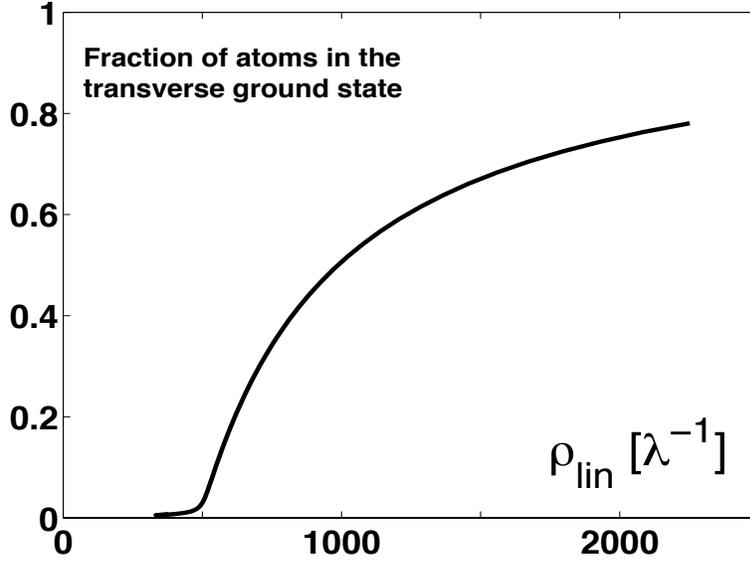


FIG. 2.1 – Fraction des atomes dans l'état transverse fondamental en fonction de la densité linéique. Cette courbe est tracée pour  $k_B T = 20\hbar\Omega_\perp$ , ce qui correspond à  $\rho_{\text{lin}}^{(c)} \simeq 500\lambda_{dB}^{-1}$ .

par (2.21), la fraction d'atomes dans le fondamental transverse croît subitement : c'est le phénomène de condensation transverse.

Intéressons-nous à présent à la fonction  $g_1$  définie par :

$$g_1(1, 2) = \langle \Psi^\dagger(1)\Psi(2) \rangle \quad . \quad (2.22)$$

Dans cette écriture,  $\Psi(2)$  est un opérateur qui détruit une particule au point  $\vec{r}_2$  tandis que  $\Psi^\dagger(1)$  crée une particule au point  $\vec{r}_1$ . On peut définir une première fonction  $g_1^{[m]}(z)$  comme

$$g_1^{[m]}(z = z_1 - z_2) = \int dx dy \langle \Psi^\dagger(x, y, z_1)\Psi(x, y, z_2) \rangle \quad . \quad (2.23)$$

Or pour un gaz parfait, l'opérateur champ se développe aisément sur les fonctions propres  $\Phi_{\vec{n}} = \Phi_{n_x}(x)\Phi_{n_y}(y)\Phi_{n_z}(z)$ , de valeurs propres  $\epsilon_{\vec{n}}$  :

$$\Psi(1) = \sum_{\vec{n}} \Phi_{\vec{n}}(1)a_{\vec{n}} \quad . \quad (2.24)$$

On en déduit que

$$g_1^{[m]}(z_1, z_2) = \sum_{n_z} \Phi_{n_z}^*(z_1)\Phi_{n_z}(z_2) \sum_{n_x, n_y} \langle a_{\vec{n}}^\dagger a_{\vec{n}} \rangle \quad . \quad (2.25)$$

En prenant une boîte de longueur  $L$  selon  $z$  avec des conditions aux limites périodiques, on trouve finalement

$$g_1^{[m]}(z = z_1 - z_2) = \sum_{n_z} \frac{1}{L} e^{i\frac{2\pi}{L}n_z z} \sum_{n_x, n_y} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\vec{n}} - \mu)} - 1} \quad . \quad (2.26)$$

On prend alors la limite thermodynamique, et on suppose  $|\mu| \ll \hbar\Omega_\perp$ . On peut alors ne retenir dans  $g_1^{[m]}$  que la contribution de l'état fondamental transverse, ce qui donne :

$$\tilde{g}_1^{[m]}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikz} \frac{1}{e^{\beta(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu)} - 1} . \quad (2.27)$$

En développant l'exponentielle du dénominateur au premier ordre,

$$\frac{1}{e^{\beta(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu)} - 1} = \frac{1}{\beta(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu)} , \quad (2.28)$$

on voit que  $\tilde{g}_1^{[m]}(z)$  s'écrit comme la transformée de Fourier d'une Lorentzienne, c'est à dire :

$$\tilde{g}_1^{[m]}(z) \simeq \frac{2\pi}{\lambda_{\text{dB}}^2} \frac{1}{k_c} e^{-k_c|z|} , \quad (2.29)$$

avec

$$\frac{\hbar^2 k_c^2}{2m} = -\mu . \quad (2.30)$$

On voit donc apparaître une longueur de corrélation,

$$\xi_c = \frac{1}{k_c} . \quad (2.31)$$

Remarquons que  $\tilde{g}_1^{[m]}(0)$  donne la densité linéique dans l'état fondamental transverse, si bien qu'en combinant (2.29) et (2.21), on trouve la formule suivante pour  $\rho_{\text{lin}}$ , dans le domaine où  $|\mu| \ll \hbar\Omega_\perp \ll k_B T$ :

$$\rho_{\text{lin}} \simeq \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}} \left[ \zeta(5/2) \left( \frac{k_B T}{\hbar\Omega_\perp} \right)^2 + \sqrt{\frac{\pi k_B T}{|\mu|}} \right] \quad (2.32)$$

On déduit l'expression suivante de la longueur de corrélation:

$$\xi_c = \zeta(5/2) \frac{R_\perp^2}{\lambda} \frac{\rho_{\text{lin}} - \rho_{\text{lin}}^{(c)}}{\rho_{\text{lin}}^{(c)}} \quad (2.33)$$

On peut reprendre tous les calculs que nous venons de faire mais en exprimant les résultats en fonction de la densité spatiale 3D sur l'axe  $\rho$ . Il faut alors se placer dans la base propre de l'oscillateur harmonique transverse de moment cinétique bien défini [78]. Seules les fonctions de moment cinétique nul selon l'axe  $z$  sont non nulles sur l'axe et elles y ont toutes la même valeur

$$\Phi_\perp(0) = \frac{1}{\pi} \frac{m\Omega_\perp}{\hbar} . \quad (2.34)$$

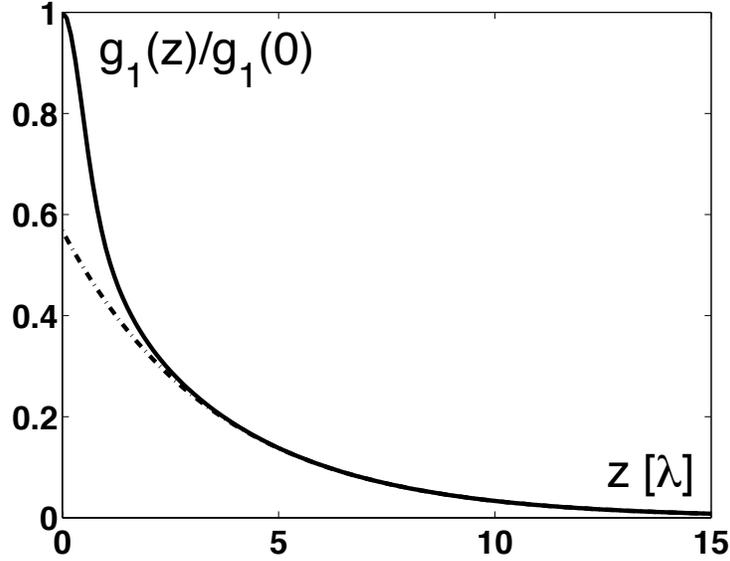


FIG. 2.2 – Fonction  $g_1$  normalisée en fonction de  $z$ . Le trait plein est obtenu numériquement, le pointillé montre le résultat de la formule approchée (2.29). Ces deux courbes sont tracées pour  $\rho_{\text{lin}} = 1.1 \rho_{\text{lin}}^{(c)}$  soit  $\mu \simeq -6.4 \cdot 10^{-3} k_B T$ . On s'est placé à  $k_B T = 20 \hbar \Omega_{\perp}$ .

On retrouve alors la formule bien connue qui donne la densité critique :

$$\rho^{(c)} = \zeta(3/2) \lambda_{\text{dB}}^{-3} . \quad (2.35)$$

On définit également la fonction  $g_1^{[a]}(z)$  comme

$$g_1^{[a]}(z) = \langle \Psi^{\dagger}(0, 0, z_1) \Psi(0, 0, z_2) \rangle . \quad (2.36)$$

On appelle  $\tilde{g}_1^{[a]}$  la contribution à  $g_1^{[a]}$  de l'état fondamental transverse. Les fonctions  $\tilde{g}_1^{[a]}(z)$  et  $\tilde{g}_1^{[m]}(z)$  sont identiques à un facteur multiplicatif près. La longueur de corrélation exprimée en fonction de  $\rho$  et  $\rho^{(c)}$  s'écrit :

$$\xi_c = \frac{1}{2} \zeta(3/2) \frac{a_0^2}{\lambda_{\text{dB}}} \frac{\rho - \rho^{(c)}}{\rho^{(c)}} , \quad (2.37)$$

avec  $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\Omega_{\perp}}$  la longueur du fondamental de l'oscillateur harmonique transverse.

La figure (2.2) permet de comparer pour  $\rho_{\text{lin}} = 1.1 \rho_{\text{lin}}^{(c)}$  le résultat approché analytique (2.29) au résultat « exact » numérique. Ce dernier est obtenu en calculant  $g_1^{[a]}(z)$  numériquement. Le potentiel chimique est calculé par dichotomie et la valeur trouvée est injectée dans (2.30). Le résultat exact montre que les états excités transverse ont pour contribution à  $g_1(z)$  un pic étroit, d'une largeur d'environ  $\lambda_{\text{dB}}$  et confirme la queue exponentielle prédite par la formule (2.29).

Il est important de noter que les fluctuations de la densité ne sont pas réduites comme c'est le cas pour un « vrai » condensat. En effet, l'hamiltonien du gaz parfait que nous considérons s'écrit, avec les notations introduites précédemment :

$$H = \sum_{\vec{n}} \epsilon_{\vec{n}} a_{\vec{n}}^{\dagger} a_{\vec{n}} \quad (2.38)$$

Cet hamiltonien est quadratique et on peut donc utiliser le théorème de Wick pour calculer la fonction  $g_2$  :

$$\begin{aligned} g_2(z) &= \langle \Psi^{\dagger}(z) \Psi^{\dagger}(0) \Psi(0) \Psi(z) \rangle \\ &= \rho_{\text{lin}}^2 + |g_1(z)|^2 \quad . \end{aligned} \quad (2.39)$$

On en déduit que

$$g_2(0) = 2\rho_{\text{lin}}^2 \quad , \quad (2.40)$$

c'est à dire qu'il n'y a pas de réduction des fluctuations. On peut s'assurer que l'ensemble grand canonique ne conduit pas - à la différence du cas 3D - à des fluctuations pathologiques du nombre de particules. Calculons la valeur moyenne de  $N^2$  :

$$\begin{aligned} \langle N^2 \rangle &= \langle \int dz_1 \Psi^{\dagger}(z_1) \Psi(z_1) \int dz_2 \Psi^{\dagger}(z_2) \Psi(z_2) \rangle \\ &= \int dz_1 dz_2 [\rho_{\text{lin}}^2 + g_1^2(z_1 - z_2)] \\ &= \rho_{\text{lin}}^2 L^2 + L \int dz g_1^2(z) \\ &\simeq \langle N \rangle^2 + L \rho_{\text{lin}}^2 \xi_c \quad . \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de la variance du nombre de particules :

$$\Delta N \equiv \sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2} = \langle N \rangle \left( \frac{\xi_c}{L} \right)^{1/2} \quad . \quad (2.41)$$

Ce dernier résultat montre bien que, dès que la taille de la boîte est grande devant la longueur de corrélation, les fluctuations du nombre de particules sont faibles et il est possible d'utiliser l'ensemble grand canonique.

## 2.2 Prise en compte des interactions

Nous nous plaçons dans le régime où l'on a déjà condensé dans l'état fondamental transverse, c'est à dire que l'on considère une « vraie » situation 1D. Dans toute la suite, nous travaillerons avec des conditions aux limites périodiques.

### 2.2.1 Non-condensation à 1D

L'obtention expérimentale de l'hélium superfluide suscita dans les années soixante de nombreuses études théoriques sur le gaz de Bose, y compris dans une géométrie unidimensionnelle.

Commençons par rappeler que dans le cas d'un gaz 1D, il n'existe pas de température critique en dessous de laquelle se produit la condensation de Bose-Einstein. Ce résultat se déduit d'un théorème connu dans la littérature sous le nom de théorème de Bogoliubov et dont la démonstration complète est donnée par P. C. Hohenberg [79]. Considérons un gaz de bosons dans une boîte isotrope à  $s$  dimensions, avec des conditions aux limites périodiques. On notera  $n$  une densité - linéique, surfacique ou volumique selon la dimensionalité. Nous allons faire un raisonnement par l'absurde : supposons l'existence d'un condensat de densité  $n_0$ . Le théorème de Bogoliubov s'exprime sous la forme d'une inégalité :

$$n_k = \langle a_k^\dagger a_k \rangle \geq -\frac{1}{2} + \frac{k_B T}{(\hbar^2 k^2/m)} \frac{n_0}{n} . \quad (2.42)$$

Or le nombre de particules non condensées s'écrit :

$$N' = \sum_{k \neq 0} n_k = \frac{L^s}{(2\pi)^s} \int d^s k n_k , \quad (2.43)$$

d'où

$$n - n_0 = \int \frac{d^s k}{(2\pi)^s} n_k . \quad (2.44)$$

On déduit alors du théorème de Bogoliubov que

$$n - n_0 \geq \int \frac{d^s k}{(2\pi)^s} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{k_B T}{(\hbar^2 k^2/m)} \frac{n_0}{n} \right] \quad (2.45)$$

Or, pour  $s \leq 2$ , l'intégrale  $\int d^s k/k^2$  diverge en  $k = 0$ , ce qui montre l'absurdité de cette dernière inégalité pour  $n_0 \neq 0$ . On peut commenter la divergence de cette intégrale à 1D et à 2D en disant que la densité de particules que l'on peut mettre dans les états excités ne tend pas vers une constante finie lors du passage à la limite continue. En résumé, il n'y a pas de condensation ni à 1D ni à 2D.

E. H. Lieb et W. Liniger ont résolu exactement le problème de  $N$  bosons en interaction  $\delta$  à 1D [80], [81]. Cette solution est également connue sous le nom d'Ansatz de Bethe dans le problème très similaire de la chaîne de spin quantiques 1D dans le modèle de Heisenberg avec interaction entre plus proches voisins [82]. On prend une interaction en  $\delta$  avec une constante de couplage  $g$ . Le paramètre  $\gamma = \rho^{-1}g$  permet de mesurer l'importance de l'interaction. Le cas  $\gamma = 0$  correspond au cas d'un gaz idéal.

Les fonctions propres sont de la forme suivante :

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \sum_P \alpha(P) P [e^{i \sum_{j=1}^N k_j z_j}] , \quad (2.46)$$

lorsque  $0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_N \leq L$ . Le cas général est obtenu en symétrisant la fonction  $\Psi$  ci-dessus. Dans l'équation (2.46), la somme porte sur les  $N!$  permutations de l'ensemble ordonné  $\{k_j\} = \{k_1 < k_2 < \dots < k_N\}$ . Pour tout ensemble  $\{k_j\}$ , le coefficient  $\alpha(P)$  peut être déterminé de façon unique. Chaque solution est étiquetée par  $N$  entiers naturels. Pour un  $N$ -uplet  $\{n_j\}$  donné, les quasi-impulsions  $\{k_j\}$  d'un état sont obtenues par la résolution d'un système linéaire. L'énergie d'un état est  $E = (\hbar^2/2m) \sum_{j=1}^N k_j^2$ .

Bien que l'on dispose de cette solution exacte, il a été jusqu'à présent impossible de l'exploiter pour calculer les fonctions de corrélations telles que  $g_1$  ou  $g_2$ .

En fait, cette solution exacte est une généralisation du travail réalisé par M. Girardeau [83]. Cet auteur considère le cas d'une interaction de sphères dures. Ceci correspond au cas où  $\gamma \rightarrow \infty$  dans l'étude ci-dessus. Il est alors possible de montrer que ce système de bosons impénétrables est équivalent à un système de fermions, ce qui rend donc l'expression de la solution beaucoup plus simple:

$$\Psi(z_1, z_2, \dots, z_N) = \frac{1}{\sqrt{N!L^N}} |\det(e^{ik_j z_i})| \quad , \quad (2.47)$$

avec

$$-k_{\text{Fermi}} \leq k_j = \frac{2\pi}{L} j \leq k_{\text{Fermi}} \quad , \quad (2.48)$$

et

$$k_{\text{Fermi}} = \frac{\pi}{L}(N-1) \quad . \quad (2.49)$$

On peut dans ce cas calculer à température nulle la fonction de corrélation  $g_1$  que l'on trouvera dans la référence [84].

J. W. Kane et L. P. Kadanov [85] donnent une prédiction<sup>1</sup> pour la fonction  $g_1$  d'un gaz de Bose 1D à température donnée :

$$g_1(z) \propto e^{-\frac{\alpha}{\beta \rho_s} |z|} \quad , \quad (2.50)$$

où  $\alpha$  désigne une fonction indéterminée des paramètres thermodynamiques du système. Nous retrouverons ce résultat, et nous préciserons la valeur de  $\alpha$  dans l'approximation du champ classique.

---

1. Dans cette expression,  $\rho_s$  désigne la densité de la composante superfluide. Il est important de distinguer superfluide et condensat. En effet, la superfluidité ne nécessite pas la présence d'un condensat. Un premier critère de superfluidité, appelé critère de Landau, est basé sur la forme du spectre des excitations du système. On peut également donner une définition physique de la fraction superfluide. Supposons  $N$  particules dans un tore, de rayon  $R$ , comportant un petit défaut d'amplitude  $\epsilon$  et tournant à la vitesse  $\Omega$ . En notant  $L$  le moment cinétique total des particules autour de l'axe de rotation, la fraction normale  $\rho_n$ , telle que  $\rho_n + \rho_s = \rho$ , est définie par :

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L}{m\Omega R^2 N} = \frac{\rho_n}{\rho} \quad .$$

V. N. Popov [86] obtient également la fonction  $g_1$  par des calculs d'intégrales fonctionnelles. Dans le cas limite où  $T = 0$ , il trouve

$$g_1(z) \propto z^{-\frac{mc}{4\pi\rho}} \quad , \quad (2.51)$$

avec  $c$  désignant la vitesse du son. Pour  $T \neq 0$ , il retrouve également une exponentielle :

$$g_1(z) \propto e^{-\frac{m}{2\beta\rho} z} \quad . \quad (2.52)$$

Il en déduit qu'un gaz de bosons 1D ne peut présenter un caractère superfluide qu'à température nulle. Le lien entre la superfluidité et l'existence d'un ordre à grande portée n'est pas clairement établi.

Enfin, on trouvera une étude très proche de ce qui suit dans la référence [87].

### 2.2.2 Approximation du champ classique

Nous avons vu que la solution exacte est en pratique inutilisable pour le calcul des fonctions de corrélation du champ atomique. Nous allons donc chercher à déterminer ces dernières à l'aide d'approximations.

Nous allons d'abord introduire l'approximation du champ classique. Cette approximation consiste à remplacer les opérateurs champs par des fonctions et à utiliser la statistique de Boltzmann. Ceci peut paraître un peu naïf : la divergence de la densité d'énergie obtenue par cette approche dans le calcul du rayonnement d'un corps noir [88] a montré il y a plus d'un siècle les limites des traitements classiques. Sans entrer pleinement dans les détails, nous allons montrer sur le gaz parfait pourquoi il est légitime d'utiliser cette méthode dans notre cas. Notons tout d'abord que la valeur moyenne de l'énergie d'un gaz parfait, calculée dans l'ensemble grand-canonique à la limite classique, diverge (et ce quelque soit la dimension du système). Il est donc nécessaire d'introduire une coupure en énergie de l'ordre de l'énergie thermique :

$$\Lambda \sim k_B T \quad .$$

Par la suite, on fait tous les calculs avec cette coupure et on dira alors que l'approximation du champ classique est valable si le résultat obtenu reste fini lorsque  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Prenons l'exemple simple du calcul de la densité pour un système de dimension  $s$ . On calcule la population moyenne  $\langle |a_k|^2 \rangle$  de chaque mode propre (onde plane) avec une loi de distribution gaussienne, ce qui donne :

$$\langle |a_k|^2 \rangle = \frac{k_B T}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + |\mu|} \quad .$$

On en déduit l'expression suivante de la densité moyenne :

$$\langle \rho \rangle = \int_{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} < \Lambda} \frac{d^s k}{(2\pi)^s} \frac{k_B T}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + |\mu|} \quad .$$

Lorsque l'on prend la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ , on voit que cette intégrale diverge pour  $s = 2$  et  $s = 3$ . L'approximation du champ classique ne permet donc pas de calculer la densité moyenne, ni à 2 ni à 3D. En revanche, à 1D, l'intégrale est convergente à la limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  : l'approximation est valable à 1D. On voit donc sur cet exemple le statut privilégié du cas 1D lors de l'approximation du champ classique. C'est pourquoi nous allons appliquer cette méthode de calcul pour déterminer comment les interactions vont modifier les résultats du paragraphe 2.1 relatifs aux fonctions  $g_1$  et  $g_2$ .

Traiter le champ  $\Psi$  classiquement c'est lui attribuer la probabilité fonctionnelle :

$$P[\Psi, \Psi^*] = \frac{1}{Z} e^{-\beta E[\Psi, \Psi^*]} \quad (2.53)$$

avec

$$E[\Psi, \Psi^*] = \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L \left| \frac{d}{dz} \Psi \right|^2 + \frac{g}{2} \int_0^L |\Psi|^4 - \mu \int_0^L |\Psi|^2 \quad (2.54)$$

où  $g$  est la constante de couplage à 1D. Le lien entre  $g$  et la constante de couplage habituelle  $g_{3D} = 4\pi\hbar^2 a/m$  s'écrit [84] :

$$g = \frac{g_{3D}}{\pi a_{\perp}^2} \quad ,$$

où  $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/(m\Omega_{\perp})}$  désigne la taille du fondamental de l'oscillateur harmonique transverse.

La valeur moyenne d'une fonctionnelle arbitraire  $F[\Psi, \Psi^*]$  s'écrit :

$$\langle F[\Psi, \Psi^*] \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}^2 \Psi F[\Psi, \Psi^*] e^{-\beta E[\Psi, \Psi^*]} \quad (2.55)$$

### Point de vue densité-phase

Nous aurons à étudier des fonctionnelles qui ne dépendent que du module du champ. Il est donc intéressant d'établir une expression de la valeur moyenne d'une telle fonctionnelle après intégration sur la phase.

En séparant module et phase dans  $\Psi$ , on pose :

$$\Psi = \sigma e^{i\theta} \quad (2.56)$$

La valeur moyenne d'une fonctionnelle ne dépendant que de  $\sigma$  est donnée par :

$$\langle F[\sigma] \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}^2 \Psi e^{-\beta E[\Psi, \Psi^*]} F[\sigma] \quad (2.57)$$

Il est alors fondamental de remarquer que  $E$  est une fonctionnelle quadratique de  $\theta$ , sa dépendance en  $\theta$  étant simplement donnée par :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L dz \sigma^2 \left( \frac{d}{dz} \theta \right)^2$$

On peut donc intégrer fonctionnellement sur  $\theta$ . Le lecteur peu familier avec les intégrales fonctionnelles pourra consulter les références [89], [90]. On peut par exemple discrétiser  $z$  en  $\mathcal{N} + 1$  points:

$$z_0 = 0, \dots, z_k, \dots, z_{\mathcal{N}} = L \quad . \quad (2.58)$$

La mesure d'intégration devient:

$$\mathcal{D}^2\Psi = \prod_1^{\mathcal{N}-1} d(\text{Re}\Psi_k)d(\text{Im}\Psi_k) = \prod_1^{\mathcal{N}-1} \sigma_k d\sigma_k d\theta_k \quad . \quad (2.59)$$

On introduit un changement de variables défini par

$$q_1 = \frac{\theta_1 - 0}{dl}, \dots, q_k = \frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{dl}, \dots, q_{\mathcal{N}-1} = \frac{\theta_{\mathcal{N}-1} - \theta_{\mathcal{N}-2}}{dl}, \quad (2.60)$$

où l'on a posé  $dl = L/\mathcal{N}$ . Chaque intégrale gaussienne sur  $q_k$  donne un facteur  $1/\sigma_k$  qui vient compenser le facteur  $\sigma_k$  du Jacobien. On trouve finalement:

$$\langle F[\sigma] \rangle = \frac{1}{Z'} \int_{\sigma \geq 0} \mathcal{D}\sigma F[\sigma] e^{-\beta \tilde{E}[\sigma]} \quad (2.61)$$

avec

$$\tilde{E}[\sigma] = \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L \left( \frac{d}{dz} \sigma \right)^2 + \frac{g}{2} \int_0^L \sigma^4 - \mu \int_0^L \sigma^2 \quad (2.62)$$

L'écriture  $\int_{\sigma \geq 0}$  rappelle qu'il faut sommer sur tous les chemins tels que  $\sigma(z) \geq 0$  quelque soit  $z$ . Dans la suite, nous allons nous limiter à un régime de faibles fluctuations de densité, ce qui nous permettra de quadratiser  $\tilde{E}[\sigma]$  autour d'un chemin extrêmum  $\sigma_0$ . Le régime des faibles fluctuations de densité est précisément celui qui nous intéresse *physiquement*.

### Limite des faibles fluctuations de densité

La solution classique  $\sigma_0$ , minimisant  $\tilde{E}[\sigma]$ , obéit à l'équation d'Euler-Lagrange:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\sigma_0}{dz^2} + g\sigma_0^3 = \mu\sigma_0 \quad . \quad (2.63)$$

Cette solution est simplement

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\mu}{g}} \quad . \quad (2.64)$$

Nous allons estimer l'importance des fluctuations de densité à l'aide d'un développement quadratique. Le développement quadratique de  $\tilde{E}[\sigma]$  autour de  $\sigma_0$  donne:

$$\tilde{E}[\sigma] = \tilde{E}[\sigma_0] + \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L \left( \frac{d}{dz} \delta\sigma \right)^2 + 3g\sigma_0^2 \int_0^L \delta\sigma^2 - \mu \int_0^L \delta\sigma^2 \quad , \quad (2.65)$$

soit

$$\tilde{E}[\sigma] = \tilde{E}[\sigma_0] + \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L \left( \frac{d}{dz} \delta\sigma \right)^2 + 2g\sigma_0^2 \int_0^L \delta\sigma^2 \quad . \quad (2.66)$$

On développe alors  $\delta\sigma(z)$  sur les modes propres de cette forme quadratique:

$$\delta\sigma(z) = \sqrt{\frac{1}{L}} \left[ c_{k_0} + \sqrt{2} \sum_{k_n} c_{k_n} \cos k_n z + s_{k_n} \sin k_n z \right] \quad , \quad (2.67)$$

avec

$$k_n = n \frac{2\pi}{L} \quad , \quad (2.68)$$

$n$  désignant un entier naturel non nul. Avec ces notations, on a:

$$\tilde{E}[\sigma] = \tilde{E}[\sigma_0] + \delta\tilde{E}[\delta\sigma] \quad (2.69)$$

avec

$$\delta\tilde{E}[\delta\sigma] = 2\sigma_0^2 g c_{k_0}^2 + \sum_{k_n} \left( \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} + 2\sigma_0^2 g \right) (c_{k_n}^2 + s_{k_n}^2) \quad . \quad (2.70)$$

Nous pouvons alors évaluer les fluctuations de densité:

$$\langle \delta\sigma^2 \rangle \equiv \frac{1}{L} \int_0^L \langle [\delta\sigma(z)]^2 \rangle = \frac{1}{L} \left[ \langle c_{k_0}^2 \rangle + \sum_{k_n} (\langle c_{k_n}^2 \rangle + \langle s_{k_n}^2 \rangle) \right] \quad (2.71)$$

avec

$$\langle c_{k_n}^2 \rangle = \langle s_{k_n}^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{k_B T}{\frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} + 2g\sigma_0^2} \quad . \quad (2.72)$$

On en déduit que les fluctuations de la densité sont données, à la limite thermodynamique, par

$$\langle \delta\sigma^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{k_B T}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2g\sigma_0^2} \quad , \quad (2.73)$$

soit

$$\langle \delta\sigma^2 \rangle = \frac{\pi^{1/2}}{2\sqrt{2}} \lambda_{\text{dB}}^{-1} \sqrt{\frac{k_B T}{g\sigma_0^2}} \quad . \quad (2.74)$$

La condition de validité de la quadratisation de  $\tilde{E}$ , à savoir  $\langle \delta\sigma^2 \rangle \ll \sigma_0^2 \simeq \rho$  est donc:

$$\varepsilon \equiv \sqrt{\frac{k_B T}{\rho g}} [\rho \lambda_{\text{dB}}]^{-1} \ll 1 \quad (2.75)$$

Pour des interactions assez fortes,  $\varepsilon$  est effectivement petit et l'approximation quadratique est justifiée. A l'inverse, dans le cas d'un gaz parfait,  $\varepsilon$  est infini et la quadratisation n'est plus valable.

Calculons également la longueur de corrélation des fluctuations de  $\delta\sigma$ :

$$\langle \delta\sigma(z)\delta\sigma(0) \rangle = \frac{2}{L} \sum_{k_n} \langle c_{k_n}^2 \rangle \cos(k_n z) \quad . \quad (2.76)$$

A la limite thermodynamique, nous obtenons:

$$\langle \delta\sigma(z)\delta\sigma(0) \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \frac{k_B T}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\rho_0 g} \cos(kz) \quad , \quad (2.77)$$

soit

$$\langle \delta\sigma(z)\delta\sigma(0) \rangle = \frac{mk_B T}{2\hbar^2 k_c} e^{-k_c z} \quad , \quad (2.78)$$

où l'on a posé

$$\frac{\hbar^2 k_c^2}{2m} = 2\mu \simeq 2\rho_0 g \quad . \quad (2.79)$$

### Fonctions de corrélation

Nous pouvons à présent passer au calcul de  $g_1(z)$  dans le régime des faibles fluctuations de densité. La fonction  $g_1$  est définie par

$$g_1(z) = \langle \Psi^*(z)\Psi(0) \rangle \quad , \quad (2.80)$$

c'est à dire

$$g_1(z) = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}^2\Psi \sigma(z)\sigma(0) e^{-i(\theta(z)-\theta(0))} e^{-\beta E[\Psi, \Psi^*]} \quad . \quad (2.81)$$

On peut de nouveau intégrer fonctionnellement sur  $\theta$ . Tous calculs faits, on trouve:

$$g_1 \propto \int \mathcal{D}\sigma \sigma(z)\sigma(0) e^{-(mk_B T/2\hbar^2) \int_0^z dz/\sigma^2} e^{-\beta \tilde{E}[\sigma]} \quad . \quad (2.82)$$

On peut alors remplacer  $\sigma$  par  $\sigma_0 + \delta\sigma$  et développer  $\int dz/\sigma^2$  en puissances de  $\delta\sigma$ . En ne conservant que le terme d'ordre 0 en  $\varepsilon$ , on obtient:

$$g_1(z) \simeq \sigma_0^2 e^{-(mk_B T/2\hbar^2 \sigma_0^2) z} \quad (2.83)$$

On en déduit une longueur de cohérence donnée par

$$\xi_c = \frac{2\hbar^2 \rho}{mk_B T} \quad . \quad (2.84)$$

Cette longueur est deux fois plus grande que celle trouvée dans le cas du gaz quasi-idéal. C'est le premier effet des interactions. Remarquons que l'on peut réinterpréter

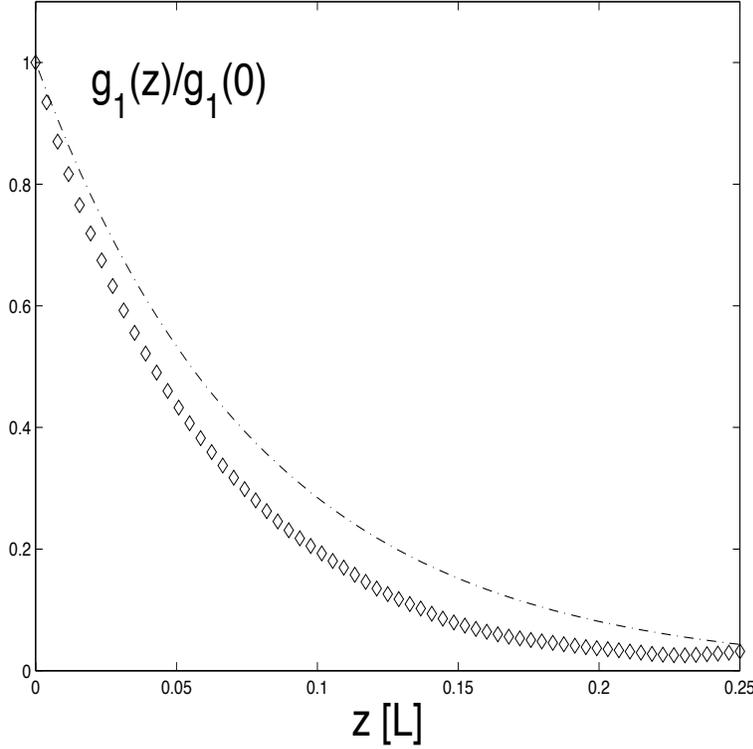


FIG. 2.3 – Fonction  $g_1$  dans l'approximation du champ classique. Ces courbes sont obtenues pour  $\rho\lambda_{dB} = 50$  et  $\rho g/k_B T = 0.1$ . Le trait pointillé est obtenu par le champ classique, les diamants sont le résultat de la méthode numérique .

la condition de validité de l'approximation quadratique en disant que la longueur de corrélation  $\xi_c$  est beaucoup plus grande que la « healing length »  $\xi$  définie par

$$\frac{\hbar^2 \xi^{-2}}{2m} = 2\mu \quad . \quad (2.85)$$

La figure 2.3 donne la courbe de la fonction  $g_1$ . On donne le résultat à l'ordre 0 en  $\varepsilon$  ainsi que celui d'une méthode purement numérique (mais toujours dans l'approximation du champ classique). L'idée générale de cette dernière est expliquée dans l'appendice C.

Etudions la fonction  $g_2$ , toujours dans l'approximation quadratique. Cette fonction  $g_2$  est définie comme

$$g_2(z) = \langle \Psi^*(z)\Psi^*(0)\Psi(0)\Psi(z) \rangle \quad , \quad (2.86)$$

soit

$$g_2(z) = \langle [\sigma(z)]^2[\sigma(0)]^2 \rangle \quad . \quad (2.87)$$

Le développement autour de  $\sigma_0$  donne

$$g_2(z) = \sigma_0^4 + 2\sigma_0^2 \langle \delta\sigma^2 \rangle + 4\sigma_0^2 \langle \delta\sigma(z)\delta\sigma(0) \rangle + 4\sigma_0 \langle \delta\sigma(z)\delta\sigma(0)^2 \rangle + \langle \delta\sigma(z)^2\delta\sigma(0)^2 \rangle \quad . \quad (2.88)$$

Or on a

$$\rho = \langle \sigma^2 \rangle = \sigma_0^2 + \langle \delta \sigma^2 \rangle \quad , \quad (2.89)$$

d'où

$$g_2(z) = \rho^2 + 4\sigma_0^2 \langle \delta \sigma(z) \delta \sigma(0) \rangle + 4\sigma_0 \langle \delta \sigma(z) \delta \sigma(0)^2 \rangle + \langle \delta \sigma(z)^2 \delta \sigma(0)^2 \rangle - \langle \delta \sigma^2 \rangle^2 \quad . \quad (2.90)$$

L'approximation quadratique permet d'appliquer le théorème de Wick :

$$\langle \delta \sigma(z)^2 \delta \sigma(0)^2 \rangle - \langle \delta \sigma^2 \rangle^2 = \langle \delta \sigma(z) \delta \sigma(0) \rangle^2 \quad , \quad (2.91)$$

et

$$\langle \delta \sigma(z) \delta \sigma(0)^2 \rangle = 0 \quad . \quad (2.92)$$

On trouve donc finalement :

$$g_2(z) = \rho^2 + 4\sigma_0^2 \langle \delta \sigma(z) \delta \sigma(0) \rangle + \langle \delta \sigma(z) \delta \sigma(0) \rangle^2 \quad , \quad (2.93)$$

que l'on peut calculer à l'aide de (2.78).

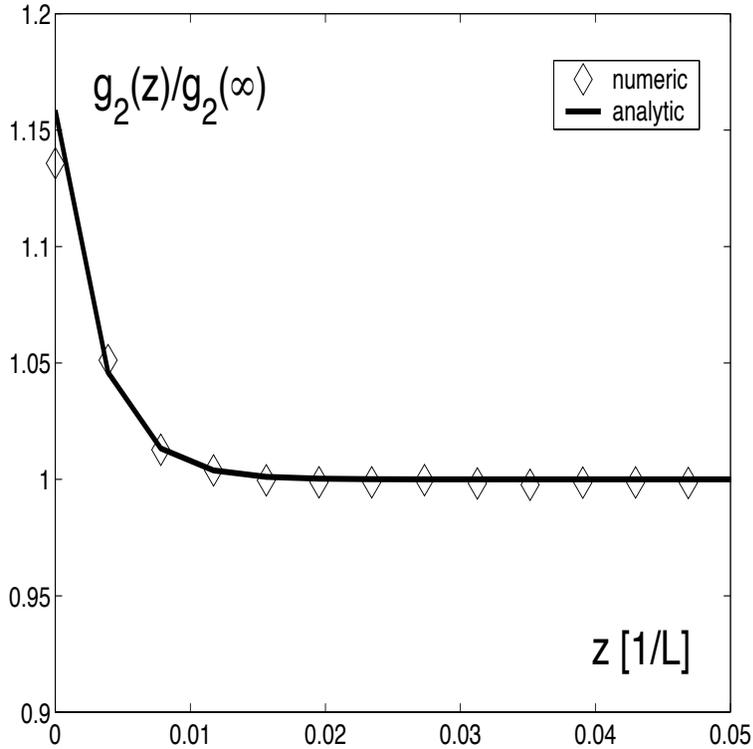


FIG. 2.4 – Fonction  $g_2$  dans l'approximation du champ classique. Ces courbes sont obtenues pour  $\rho\lambda_{dB} = 50$  et  $\rho g/k_B T = 0.1$ .

La figure 2.4 montre la courbe de la fonction  $g_2$ . Elle montre le bon accord entre le résultat (2.93) et celui de la méthode numérique. De ces courbes, on peut tirer

la conclusion importante suivante : les fluctuations de densité sont réduites par les interactions. Le fameux facteur 2 entre  $g_2(0)$  et  $g_2(\infty)$  devient ici un facteur 1.15. Il est remarquable que cette réduction des fluctuations de densité ait lieu en l'absence de condensat. On est en effet habitué à associer condensation et réduction des fluctuations. On voit ici qu'un condensat est une condition suffisante à la réduction des fluctuations, mais que ce n'est pas une condition nécessaire.

## 2.3 Perspectives

Nous avons vu au cours de ce chapitre que le refroidissement d'un jet atomique jusqu'au régime de dégénérescence quantique conduit à des effets de statistiques quantiques spécifiques à cette géométrie. Nous avons d'abord mis en évidence le phénomène de condensation transverse, puis nous avons utilisé l'approximation du champ classique pour calculer les fonctions de corrélation. Cependant, nous avons restreint l'étude au cas des faibles fluctuations de densité. La référence [91] étend l'approximation du champ classique au-delà de ce régime. On peut alors tracer la courbe  $g_2(0)/g_2(\infty)$  en fonction de l'intensité du couplage  $g$  (pour l'instant, nous possédons la partie asymptotique des fortes interactions).

Une autre question reste entièrement ouverte : dans le régime « quasi-1D » (c'est à dire après condensation transverse), le jet présente-t-il des propriétés de superfluidité ?

Par ailleurs, que se passe-t'il dans le régime  $k_B T \ll \hbar \Omega_\perp$  ?

Toutes ces questions sont autant de pistes passionnantes pour des travaux futurs sur les effets de statistiques quantiques dans un jet atomique dégénéré.

# Annexe A

## Programme Fortran 90 de la simulation Monte-Carlo

```

! -----
! SIMULATION MONTE-CARLO DU REFROIDISSEMENT EVAPORATIF DANS UN TUBE
! -----

      implicit none
      integer :: nrmax,nzmax,nat,natmax
      real*8 :: pr_occ,gammac,dz,dr,probacoll,dt
      include 'param.com'

! unite de longueur : taille thermique transverse initiale
! unite de temps : inverse de la pulsation du piege transverse
! unite d'energie :  $k_B T_i$ 

! lecture des parametres initiaux
      open(8,file='tube.inp')
         read(8,*) Lt           ! longueur du tube
         read(8,*) v0          ! vitesse moyenne
         read(8,*) gammac      ! taux de collision
         read(8,*) rho2_c      ! rayon au carre de la coupure
         read(8,*) tmax        ! temps maximum d'evolution
         read(8,*) opt         ! parametre gerant le type d'evaporation
         read(8,*) pr_occ      ! proba d'occupation d'une maille centrale
         read(8,*) probacoll   ! proba de faire une collision dans une maille
         read(8,*) nrmax       ! nbre de boites dans direction transverse
         read(8,*) nzmax       ! nbre de boites dans direction longitudinale
         read(8,*) idum        ! initialisation generateur aleatoire
      close(8)

```

```

! initialisation des parametres:
    pi=acos(-1.0d0)
! taille transverse de la maille du pavage
    dr=3./float(nrmax)
!taille longitudinale de la maille du pavage
    dz=1.0d0*Lt/nzmax
! nbre atomes maximum autorise pour le 1/4 de cylindre
    natmax=int(1.1d0*pr_occ*2.0d0*pi*Lt/(dr**2.0*dz*4))
! nbre atomes initial dans le 1/4 de cylindre
    nat=int(pr_occ*2.0d0*pi*Lt/(dr**2.0*dz*4))
! flux initial dans le 1/4 de cylindre
    flux=nat*v0/(1.*Lt)
! section efficace d'un macro-atome
    sigma=gammac*sqrt(pi)*pi*Lt/(float(nat)*4.0d0)
! choix du pas dt
    dt=probacoll*dr**2.0d0*dz/sigma/sqrt(16./pi)

! creation d'un fichier d'informations
    open(2,file='tube.info')
        write(2,*) 'gammac= ',gammac
        write(2,*) 'sigma= ',sigma
        write(2,*) 'natmax=',natmax
        write(2,*) 'nat=',nat
        write(2,*) ' rhoc2=',rho2_c
        write(2,*) 'nrmax=',nrmax
        write(2,*) 'nzmax=',nzmax
        write(2,*) 'v_0= ',v0
        write(2,*) 'Lt= ',Lt
        write(2,*) 'dt=',dt
        write(2,*) 'dr=',dr
        write(2,*) 'dz=',dz
        write(2,*) 'opt=',opt
    close(2)

! mise a zero des fichiers
    open(12,file='warning',status='replace')
    close(12)
    open(unit=10,file='tube.dat',status='replace')
    close(10)
    open(unit=11,file='procc_n.dat',status='replace')
    close(11)
    open(14,file='progres',status='replace')
        write(14,*) 'ndentro, nat, pcoll_moy, tauxcoll'
    close(14)

    call simul(nat,natmax,nrmax,nzmax,dz,dr,dt)

end

```

```

! -----
  subroutine simul(nat,natmax,nrmax,nzmax,dz,dr,dt)
! -----

  implicit none
  include 'param.com'
  integer :: nrmax,nzmax,nat,natmax,iat,nbr
  real*8 :: dz,dr,dt,deltat,t,told,tmes,pcoll_moy,ncoll,ncollpos
  real*8 :: ran3
  integer :: zpunti,dtmin,compt
  parameter(zpunti=100)
  real*4, dimension(1:natmax,1:3) :: pos,vit
  logical, dimension(1:natmax) :: index

! initialisation du tube et premiere mesure
  call sampling(nat,natmax,pos,vit,index)
  call mesure(pcoll_moy,ncoll,ncollpos,zpunti,nat,natmax,pos,vit,index,dz,dr,deltat)

  t=0.0d0
  ncoll=0
! on fait la premiere mesure a tmax/2
  tmes=tmax/2.0d0
! on fait 100 mesures
  deltat=(tmax-tmes)/100
  told=0.d0
  compt=0
! on injecte les particules par paquets de 10
  dtmin=nint(10.0d0/flux/dt)
  if (dtmin .eq. 0) then
    write(*,*) 'Probleme pour ajouter les particules 10 par 10'
    stop
  endif

  do while((t .lt. tmax) .and. (nat .lt.natmax))
! on injecte les particules a l'entree du tube
    if (compt == dtmin) then
      call ajouter(nat,natmax,compt,dt,pos,vit,index)
      compt=1
    else
      compt=compt+1
    endif
! on traite toutes les collisions
    call collision(nrmax,nzmax,nat,natmax,pos,vit,index,dz,dr,dt,ncoll, &
      & ncollpos,pcoll_moy)
! on fait evoluer les coordonnees des particules
    call evol(nat,natmax,pos,vit,index,dt)
! on evapore les particules
    call adjust(nat,natmax,pos,vit,index)
! on fait une mesure

```

```

        if ((t-told) .ge. deltat) then
            told=t
! on enregistre les positions et les vitesses de temps en temps
            open(13,file='coord.dat',status='replace')
            do iat=1,nat
                write(13,'(6E14.6)') pos(iat,1),pos(iat,2),pos(iat,3),&
&
                vit(iat,1),vit(iat,2),vit(iat,3)

            enddo
            close(13)
            if (t .ge. tmes) then
                call mesure(pcoll_moy,ncoll,ncollpos,zpunti,nat,natmax,pos, &
&
                vit,index,dz,dr,deltat)
                open(14,file='progres',position='append')
                write(14,*) t
                close(14)
            endif
        endif
! incrementation du temps et ecriture sur un fichier
        t=t+dt
        open(15,file='time')
        write(15,*) t
        close(15)
    enddo

    end

! -----
    subroutine sampling(nat,natmax,pos,vit,index)
! -----

! on remplit le 1/4 de cylindre avec des lois gaussiennes pour
! les vitesses et les positions

    implicit none
    include 'param.com'
    integer :: nat,idim,iat,natmax
    real*4 :: vmin,vmax,vitint
    real*8 :: alea1,alea2,alea3,ran3
    parameter(vmin=-10.d0,vmax=10.0d0)
    real*4, dimension(1:natmax,1:3) :: pos,vit
    logical, dimension(1:natmax) :: index

    pos(:,:)=0.0d0
    vit(:,:)=0.0d0
    index(:)=.false.
    do iat=1,nat
        index(iat)=.true.
        do idim=1,2
            alea1=1.0-ran3(idum)
            alea2=1.0-ran3(idum)
! valeur absolue pour le 1/4 de cylindre

```

```

        pos(iat,idim)=abs(sqrt(-2.*log(alea1))*cos(2*pi*alea2))
        vit(iat,idim)=sqrt(-2.*log(alea1))*sin(2*pi*alea2)
    enddo
    alea1=1.0-ran3(idum)
    alea2=1.0-ran3(idum)
    alea3=1.0-ran3(idum)
    vitint=v0+sqrt(-2.*log(alea1))*sin(2*pi*alea2)
    if((vitint.gt.vmin).and.(vitint.lt.vmax))then
        vit(iat,3)=vitint
    else
        index(iat)=.false.
    endif
    pos(iat,3)=1.*Lt*alea3
enddo
end

! -----
!          subroutine ajouter(nat,natmax,compt,dt,pos,vit,index)
! -----

! on injecte des particules a l'entree du tube
! seule subtilite : il faut choisir la bonne
! loi de proba pour tirer la vitesse selon z
    implicit none
    include 'param.com'
    integer :: nat,natmax,natold,iat,idim,compt
    real*8 :: dt,alea1,alea2,alea3,ran3,loi_prob,v0pr
    real*4 :: vitint,vmin,vmax
    parameter (vmin=-10.d0,vmax=10.d0)
    real*4, dimension(1:natmax,1:3) :: pos,vit
    logical, dimension(1:natmax) :: index

    v0pr=v0+1./v0
    natold=nat
    nat=natold+nint(flux*dt*compt)
    if(nat.le.natmax) then
        do iat=natold+1,nat
            index(iat)=.true.
            do idim=1,2
                alea1=1.0-ran3(idum)
                alea2=1.0-ran3(idum)
                pos(iat,idim)=abs(sqrt(-2.*log(alea1))*cos(2*pi*alea2))
                vit(iat,idim)=sqrt(-2.*log(alea1))*sin(2*pi*alea2)
                if(pos(iat,idim).lt.0.) index(iat)=.false.
            enddo
            alea1=1.0-ran3(idum)
            alea2=1.0-ran3(idum)
            alea3=1.0-ran3(idum)
            vitint=v0pr+sqrt(-2.*log(alea1))*cos(2*pi*alea2)

```

```

        if((vitint.gt.vmin).and.(vitint.lt.vmax))then
            vit(iat,3)=vitint
        else
            index(iat)=.false.
        endif
        pos(iat,3)=vit(iat,3)*dt*compt*alea3
    enddo
else
    open(12,file='warning',position='append')
        write(12,*) 'Errore: nat>natmax'
    close(12)
endif

end

! -----
! FUNCTION ran3(idum)
! -----

INTEGER idum
INTEGER MBIG,MSEED,MZ
! REAL MBIG,MSEED,MZ
REAL*8 ran3,FAC
PARAMETER (MBIG=100000000,MSEED=161803398,MZ=0,FAC=1./MBIG)
! PARAMETER (MBIG=4000000.,MSEED=1618033.,MZ=0.,FAC=1./MBIG)
INTEGER i,iff,ii,inext,inextp,k
INTEGER mj,mk,ma(55)
! REAL mj,mk,ma(55)
SAVE iff,inext,inextp,ma
DATA iff /0/
if(idum.lt.0.or.iff.eq.0)then
    iff=1
    mj=MSEED-iabs(idum)
    mj=mod(mj,MBIG)
    ma(55)=mj
    mk=1
    do 11 i=1,54
        ii=mod(21*i,55)
        ma(ii)=mk
        mk=mj-mk
        if(mk.lt.MZ)mk=mk+MBIG
        mj=ma(ii)
11    continue
    do 13 k=1,4
        do 12 i=1,55
            ma(i)=ma(i)-ma(1+mod(i+30,55))
            if(ma(i).lt.MZ)ma(i)=ma(i)+MBIG
12        continue
13    continue
    inext=0
    inextp=31

```

```

        idum=1
    endif
    inext=inext+1
    if(inext.eq.56)inext=1
    inextp=inextp+1
    if(inextp.eq.56)inextp=1
    mj=ma(inext)-ma(inextp)
    if(mj.lt.MZ)mj=mj+MBIG
    ma(inext)=mj
    ran3=mj*FAC
    return
    END
! (C) Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software 3^03.
!
! -----
!      subroutine check(index,natmax,nat)
! -----

    integer natmax,nat
    logical index(natmax)
    integer iat

    isum=0
    do iat=1,natmax
        if(index(iat)) isum=isum+1
    enddo
    if(isum.ne.nat) then
        write(*,*) 'Check Error, isum=',isum,' nat=',nat
        stop
    endif

    end

! -----
!      subroutine collision(nrmax,nzmax,nat,natmax,pos,vit,index,dz,dr,dt,ncoll, &
!      & ncollpos,pcoll_moy)
! -----

    implicit none
    include 'param.com'
    integer :: nrmax,nzmax,nat,natmax
    integer :: ix,iy,iz,iat,iat2,idim
    integer, dimension(0:nrmax,0:nrmax,0:nzmax) :: table
    real*8 :: ctheta,stheta,phi,dz,dr,ran3,cut,dt,ncoll,ncollpos,pcoll_moy
    real*4,dimension(1:3) :: vcdm,vrel
    real*4 :: pcoll,vcoll
    real*4, dimension(1:natmax,1:3) :: pos,vit
    logical, dimension(1:natmax) :: index

```

```

table(:, :, :) = 0.d0

do iat=1, nat
  if(index(iat)) then
    ix=nint(pos(iat,1)/dr)
    iy=nint(pos(iat,2)/dr)
    iz=nint(pos(iat,3)/dz)
! si atome dans la grille de calcul
    if((ix.le.nrmax).and.(ix.ge.0).and.(iy.le.nrmax).and.(iy.ge.0).and.&
      & (iz.le.nzmax).and.(iz.ge.0)) then
! si pas d'atome deja present, on coche la case
    if (table(ix,iy,iz).eq.0) then
      table(ix,iy,iz)=iat
! si l'atome iat2 est deja present
    else
      iat2=table(ix,iy,iz)
      vcoll=0.
      do idim=1,3
        vcdm(idim)=0.5*(vit(iat,idim)+vit(iat2,idim))
        vrel(idim)=vit(iat,idim)-vit(iat2,idim)
        vcoll=vcoll+vrel(idim)**2
      enddo
      vcoll=sqrt(vcoll)
! proba de collision
      pcoll=sigma*vcoll*dt/(dr**2.0*dz)
      pcoll_moy=pcoll_moy+pcoll
      ncollpos=ncollpos+1.d0
! collision elastique
      if (pcoll.gt.ran3(idum)) then
! on incremente ncoll pour le calcul du taux de collision (test)
      ncoll=ncoll+1.d0
      ctheta=2.*ran3(idum)-1.
      stheta=sqrt(1.-ctheta**2)
      phi=2.*pi*ran3(idum)
      vit(iat ,1)=vcdm(1)+0.5*vcoll*stheta*cos(phi)
      vit(iat2,1)=vcdm(1)-0.5*vcoll*stheta*cos(phi)
      vit(iat ,2)=vcdm(2)+0.5*vcoll*stheta*sin(phi)
      vit(iat2,2)=vcdm(2)-0.5*vcoll*stheta*sin(phi)
      vit(iat ,3)=vcdm(3)+0.5*vcoll*ctheta
      vit(iat2,3)=vcdm(3)-0.5*vcoll*ctheta
      table(ix,iy,iz)=0
      endif
    endif
  endif
enddo

end

```

```

! -----
      subroutine evol(nat,natmax,pos,vit,index,dt)
! -----

      implicit none
      include 'param.com'
      integer :: nat,natmax
      integer :: iat, idim
      real*8 cut,dt
      real*8 si,co
      real*4, dimension(1:natmax,1:3) :: pos,vit
      real*4 posint
      logical, dimension(1:natmax) :: index

! evolution selon les equations du mouvement
      si=sin(dt)
      co=cos(dt)
      do iat=1,nat
      do idim=1,2
         posint=pos(iat,idim)
         pos(iat,idim)=pos(iat,idim)*co+vit(iat,idim)*si
         vit(iat,idim)=-posint*si+vit(iat,idim)*co
      enddo
         pos(iat,3)=pos(iat,3)+vit(iat,3)*dt
      enddo

! evaporation et reflexion sur les murs
      do iat=1,nat
         if(index(iat)) then
            do idim=1,2
               if(pos(iat,idim).lt.0.)then
                  pos(iat,idim)=-pos(iat,idim)
                  vit(iat,idim)=-vit(iat,idim)
               endif
            enddo

            if((pos(iat,3).gt.(1.*Lt)).or.(pos(iat,3).lt.0)) index(iat)=.false.

            if(opt.eq.1) then
               if((pos(iat,1)**2+pos(iat,2)**2).ge.rho2_c* &
                  & cut(pos(iat,3))) index(iat)=.false.
            elseif(opt.eq.2) then
               if((pos(iat,1)**2+pos(iat,2)**2+vit(iat,1)**2 &
                  & +vit(iat,2)**2).ge.rho2_c*cut(pos(iat,3))) index(iat)=.false.
            elseif(opt.eq.3) then
               if(pos(iat,1)**2.ge.rho2_c*cut(pos(iat,3))) index(iat)=.false.
            elseif(opt.eq.4) then
               if((pos(iat,1)**2+vit(iat,1)**2).ge.rho2_c* &
                  & cut(pos(iat,3))) index(iat)=.false.
            &

```

```

        elseif(opt.eq.5) then
            if((pos(iat,1)**2+vit(iat,1)**2).ge.rho2_c) index(iat)=.false.
        endif
    endif
enddo
end

! -----
      subroutine adjust(nat,natmax,pos,vit,index)
! -----

      implicit none
      integer :: nat,natmax
      integer :: iat,nat_vac,compt
      real*4, dimension(1:natmax,1:3) :: pos,vit
      logical, dimension(1:natmax) :: index

      nat_vac=-1
      iat=1
      do while(iat.le.nat)
          if(index(iat)) then
              iat=iat+1
          else
! on note le numero de iat dans nat_vac
              nat_vac=iat
              iat=iat+1
              do while((index(iat).eqv..false.) .and.(iat.le.nat))
                  iat=iat+1
              enddo
              if(iat.le.nat) then
! si iat>nat, on a fini la liste
                  vit(nat_vac,:)=vit(iat,:)
                  pos(nat_vac,:)=pos(iat,:)
                  index(iat)=.false.
                  index(nat_vac)=.true.
! on retourne au numero suivant
                  iat=nat_vac+1
              endif
          endif
      enddo

      if(nat_vac.gt.0) nat=nat_vac-1

! call check(index,natmax,nat)

end

```

```

! -----
!      real*8 function cut(z)
! -----
      real*4 z
      cut=0.0059d0+0.20981d0*exp(-z/12379.77d0)+0.78238d0*exp(-z/36722.87d0)+&
&      0.00191d0*exp(-z/0.22091d0)

      end
! -----

      subroutine mesure(pcoll_moy,ncoll,ncollpos,zpunti,nat,natmax, &
&      pos,vit,index,dz,dr,deltat)
! -----

      implicit none
      include 'param.com'
      integer :: zpunti,nat,natmax,ipunti,ndentro,kz,iat
      real*4, dimension(1:natmax,1:3) :: pos,vit
      real*8 :: deltaz,zcoord,dz,dr,deltat,tauxcoll,pcoll_moy,ncollpos,ncoll
      logical, dimension(1:natmax) :: index
      real*8, dimension(0:zpunti-1) :: dens_z,vel_z,temp_z
      real*8, dimension(0:zpunti-1) :: temp_x,temp_y,probaocc

      deltaz=float(Lt)/float(zpunti)
      dens_z(:)=0      ! densite lineique
      vel_z(:)=0      ! <v_z>
      temp_z(:)=0     ! <v_z^2> - <v_z>^2
      temp_x(:)=0     ! <v_x^2>
      temp_y(:)=0     ! <v_y^2>
      probaocc(:)=0   ! proba d'occupation d'une maille sur l'axe

      ndentro=0
      do iat=1,nat
         if(index(iat)) then
            ndentro=ndentro+1
            if(pos(iat,3).gt.0.) kz=int(pos(iat,3)/deltaz)
            if((kz.lt.zpunti).and.(kz.ge.0)) then
               dens_z(kz)=dens_z(kz)+1.
               vel_z(kz)=vel_z(kz)+vit(iat,3)
               temp_z(kz)=temp_z(kz)+vit(iat,3)**2
               temp_x(kz)=temp_x(kz)+vit(iat,1)**2
               temp_y(kz)=temp_y(kz)+vit(iat,2)**2
               if((abs(pos(iat,1)).lt.dr).and.(abs(pos(iat,2)).lt.dr)) then
                  probaocc(kz)=probaocc(kz)+1
               endif
            endif
         endif
      enddo
      if(ndentro.gt.0) then
         open(unit=10,file='tube.dat', position='append')
         open(unit=11,file='procc_n.dat',position='append')
      end

```

```

do ipunti=0,zpunti-1
  zcoord=ipunti*deltaz
  if(dens_z(ipunti).ne.0.) then
! on fait la moyenne
    vel_z(ipunti)=vel_z(ipunti)/dens_z(ipunti)
    temp_z(ipunti)=temp_z(ipunti)/dens_z(ipunti)- &
      &
      vel_z(ipunti)**2
    temp_x(ipunti)=temp_x(ipunti)/dens_z(ipunti)
    temp_y(ipunti)=temp_y(ipunti)/dens_z(ipunti)
    probaocc(ipunti)=probaocc(ipunti)/deltaz*dz
! facteur 4 pour le 1/4 de cylindre
    dens_z(ipunti)=4.d0*dens_z(ipunti)/deltaz
  else
    vel_z(ipunti)=0
    temp_z(ipunti)=0
    temp_x(ipunti)=0
    temp_y(ipunti)=0
  endif
! ecriture du resultat
  write(10,'(6E14.6)') zcoord,dens_z(ipunti),vel_z(ipunti),temp_z(ipunti), &
    &
    temp_x(ipunti),temp_y(ipunti)
  write(11,*) zcoord,probaocc(ipunti)
enddo
! calcul du taux de collision et ecriture du resultat (test)
if (deltat.gt.0.) tauxcoll=2.*ncoll/(nat*deltat)
if(ncollpos.ne.0) pcoll_moy=pcoll_moy/ncollpos

open(14,file='progres',position='append')
write(14,'(4E14.6)') ndentro*1.0d0,nat*1.0d0,pcoll_moy,tauxcoll
close(14)

close(10)
close(11)

ncoll=0.
ncollpos=0.
pcoll_moy=0.d0
endif
end

```

## Annexe B

# Calcul des taux d'évaporation 1D

Nous établissons les expressions (1.22) et (1.24) du taux de perte de particules  $\Gamma$  et du taux de perte d'énergie  $\Gamma_\epsilon$ .

En intégrant (1.5) sur  $x, y$ , et  $\mathbf{p}$ , on obtient (1.18), avec

$$\Gamma(z) \rho_{\text{lin}}(z) = \frac{\sigma}{\pi m^2} \int dx dy \int d^3 p \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \int d^3 p_4 (f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_4)) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \delta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_3^2}{2m} - \frac{p_4^2}{2m}\right). \quad (\text{B.1})$$

Dans cette intégrale, la cellule de l'espace des phases  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  est la variable d'intégration du membre de gauche de (1.5) et se trouve donc toujours dans le domaine piégé défini par

$$\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega_\perp^2 x^2 < \epsilon_c(z) \quad (\text{B.2})$$

Pour le premier terme de l'intégrand représentant la collision  $\mathbf{p} + \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4$  et faisant intervenir  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$ , la cellule  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$  est aussi dans le domaine piégé tandis que les cellules  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3)$  et  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_4)$  peuvent se trouver aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du domaine piégé. Pour le second terme de l'intégrand, représentant la collision  $\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{p}_2$  et faisant intervenir  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_4)$ , les deux cellules  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3)$  et  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_4)$  sont dans le domaine de piégeage, tandis que la cellule  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$  peut être aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de ce domaine. En échangeant les rôles de  $(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2)$  et  $(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$  dans ce second terme, on trouve après simplification:

$$\Gamma \rho_{\text{lin}} = \frac{\sigma}{\pi m^2} \int dx dy \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \int d^3 p_4 f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2) \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \delta\left(\frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_3^2}{2m} - \frac{p_4^2}{2m}\right). \quad (\text{B.3})$$

où  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$  et  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$  sont dans le domaine,  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3)$  est en dehors du domaine, et  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_4)$  est à l'intérieur ou à l'extérieur du domaine.

On introduit alors les changements de variables suivants:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2}{2} & \mathbf{q} &= \frac{\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2}{2} \\ \mathbf{P}' &= \frac{\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4}{2} & \mathbf{q}' &= \frac{\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_4}{2} \end{aligned} .$$

La fonction  $\delta$  dans (B.3) impose  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$  et  $|\mathbf{q}| = |\mathbf{q}'|$ . Après quelques réarrangements et l'intégration angulaire autour de l'axe  $x$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \Gamma \rho_{\text{lin}} &= 64\pi \frac{\sigma}{m} f_0^2(z) \int_{-x_c}^{x_c} dx \int_0^Q dP_x \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dP_y \int_{-\infty}^{\infty} dP_z e^{-2(U_x+U_y)/k_B T} e^{-P^2/mk_B T} \\ &\times \int_0^{Q-P_x} dq_x \left\{ \int_{Q-P_x}^{Q+P_x} dq q e^{-q^2/mk_B T} \int_{Q-P_x}^q dq'_x \right. \\ &\quad \left. + \int_{Q+P_x}^{\infty} dq q e^{-q^2/mk_B T} \left[ \int_{Q-P_x}^{Q+P_x} dq'_x + 2 \int_{Q+P_x}^q dq'_x \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où  $P = |\mathbf{P}|$  et  $q = |\mathbf{q}|$ . La position  $x_c(z)$  est la solution positive de  $m\Omega_{\perp}^2 x_c^2(z) = 2\epsilon_c(z)$ , et  $Q(x, z)$  est l'impulsion locale d'échappement  $Q^2/2m = \epsilon_c(z) - U_x(x)$ . L'expression (B.4) est l'analogie pour notre dispositif de l'équation (26) de [92].

Les intégrations sur  $y, P_y, P_z$  sont immédiates, ainsi que celle sur  $q_x$ . Après intégration par partie sur  $q$ , on trouve:

$$\Gamma \rho_{\text{lin}} = 16 \pi^3 \sigma (k_B T)^{9/2} m^{3/2} \Omega_{\perp}^{-2} f_0^2 \int_{-\sqrt{2\eta}}^{\sqrt{2\eta}} dw e^{-w^2} \int_0^a du (a-u) e^{-u^2} (\text{erfc}(a-u) + \text{erfc}(a+u)) \quad (\text{B.5})$$

où l'on a posé  $w = x/R_{\perp}$ ,  $a = Q/\sqrt{mk_B T} = \sqrt{2\eta - w^2}$ ,  $u = P_x/\sqrt{mk_B T}$  et

$$\text{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} dv e^{-v^2} .$$

En utilisant (1.15) pour exprimer  $f_0$  en fonction de la densité linéique  $\rho_{\text{lin}}$ , on aboutit à (1.22) avec:

$$S(\eta) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{e^{\eta}}{(1 - e^{-\eta})^2} \int_{-\sqrt{2\eta}}^{\sqrt{2\eta}} dw e^{-w^2} \int_0^a du (a-u) e^{-u^2} (\text{erfc}(a-u) + \text{erfc}(a+u)) \quad (\text{B.6})$$

Le calcul de  $\Gamma_{\epsilon}$  se fait selon la même démarche. On multiplie (1.5) par  $\epsilon_x + \epsilon_y + p_z^2/2m$  et on intègre sur  $x, y$  et  $\mathbf{p}$ . Par les mêmes réarrangements que ci-dessus, on trouve:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\epsilon} k_B T \rho_{\text{lin}} &= 64\pi \frac{\sigma}{m} f_0^2(z) \int_{-x_c}^{x_c} dx \int_0^Q dP_x \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dP_y \int_{-\infty}^{\infty} dP_z e^{-2(U_x+U_y)/k_B T} e^{-P^2/mk_B T} \\ &\times \int_0^{Q-P_x} dq_x \left\{ \int_{Q-P_x}^{Q+P_x} dq q e^{-q^2/mk_B T} \int_{Q-P_x}^q E_3 dq'_x \right. \\ &\quad \left. + \int_{Q+P_x}^{\infty} dq q e^{-q^2/mk_B T} \left[ \int_{Q-P_x}^{Q+P_x} E_3 dq'_x + \int_{Q+P_x}^q (E_3 + E_4) dq'_x \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

où

$$\begin{aligned}
 E_3 &= \frac{p_3^2}{2m} + U_x + U_y = \frac{(\mathbf{P}' + \mathbf{q}')^2}{2m} + U_x + U_y \\
 E_4 &= \frac{p_4^2}{2m} + U_x + U_y = \frac{(\mathbf{P}' - \mathbf{q}')^2}{2m} + U_x + U_y
 \end{aligned}$$

L'expression (B.7) est également l'analogie de l'équation (26) de [92]. L'intégrale se calcule comme précédemment, et on trouve (1.24) avec

$$\begin{aligned}
 S'(\eta) &= \frac{1}{4\pi^2 S(\eta)} \frac{e^\eta}{(1 - e^{-\eta})^2} \int_{-\sqrt{2\eta}}^{\sqrt{2\eta}} dw e^{-w^2} \int_0^a du (a - u) e^{-u^2} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{a + u}{\sqrt{\pi}} e^{-(a-u)^2} + \frac{a - u}{\sqrt{\pi}} e^{-(a+u)^2} - (a^2 - u^2)(\operatorname{erfc}(a - u) + \operatorname{erfc}(a + u)) \right\} .
 \end{aligned}$$

avec  $a = \sqrt{2\eta - w^2}$  comme dans (B.6).



## Annexe C

# Echantillonnage d'une loi de distribution par une méthode stochastique

Nous présentons dans cette annexe les idées clefs à la base de l'échantillonnage numérique d'une loi de distribution par une méthode stochastique. On trouvera dans la référence [93] un exposé très complet des méthodes stochastiques.

### C.1 Cas modèle du mouvement brownien

Nous expliquons dans ce paragraphe comment échantillonner une loi de distribution obéissant à une équation de diffusion par une méthode stochastique. Ce cas très classique contient l'essence même de la méthode et constitue donc une excellente introduction au problème plus général qui sera traité dans le second paragraphe.

On veut tirer des variables distribuées selon la loi  $P(x, t)$  qui obéit à l'équation de diffusion:

$$\partial_t P = D\Delta P \quad . \quad (C.1)$$

La méthode stochastique utilisée pour résoudre ce problème est bien connue: elle consiste à simuler cette équation à l'aide d'un mouvement brownien. Pour ce faire, on fait évoluer chaque réalisation selon:

$$dx = \sqrt{2Ddt} \xi \quad (C.2)$$

où  $\xi$  est un bruit gaussien, de valeur moyenne nulle et de variance:

$$\overline{\xi^2} = 1 \quad . \quad (C.3)$$

Notons que cette valeur moyenne concerne les tirages qui ont lieu entre  $t$  et  $t + dt$ .

Montrons que les valeurs des tirages à chaque instant  $t$  sont distribuées selon  $P(x, t)$ . Soit  $O(x)$  une observable quelconque. Sa valeur moyenne est donnée par

$$\langle O(x) \rangle = \int dx P(x, t) O(x) \quad . \quad (\text{C.4})$$

On a alors:

$$\begin{aligned} dt \frac{d}{dt} \int OP &= d\langle O(x) \rangle \\ &= \langle O(x + dx) - O(x) \rangle \\ &= \langle dx \partial_x O + \frac{1}{2} dx^2 \partial_x^2 O \rangle \\ &= \langle \overline{dx} \partial_x O + \frac{1}{2} \overline{dx^2} \partial_x^2 O \rangle \\ &= \langle \frac{1}{2} 2D dt \partial_x^2 O \rangle \\ &= D dt \langle \Delta O \rangle \\ &= D dt \int O \Delta P \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Cette dernière égalité étant vérifiée pour toute observable  $O$ , on en déduit que l'on a bien:

$$\partial_t P = D \Delta P \quad . \quad (\text{C.6})$$

## C.2 Cas d'une distribution thermique classique

L'objectif est de généraliser la méthode précédente pour échantillonner la distribution

$$P(Z, Z^*) \propto e^{-\beta E[Z, Z^*]} \quad . \quad (\text{C.7})$$

Dans cette écriture,  $\beta = 1/k_B T$ ,  $Z$  désigne un ensemble de coordonnées complexes  $z_\alpha$  et  $Z^*$  est le complexe conjugué de  $Z$ .

En suivant la même démarche, nous cherchons à évaluer:

$$d\langle O(Z, Z^*) \rangle = \langle O(Z + dZ, Z^* + dZ^*) \rangle - \langle O(Z, Z^*) \rangle \quad , \quad (\text{C.8})$$

avec

$$dz_\alpha = F_\alpha(Z, Z^*) dt + M_{\alpha\beta} d\xi_\beta \quad , \quad (\text{C.9})$$

où

$$\overline{d\xi_\alpha d\xi_\beta} = 0 \quad , \quad \overline{d\xi_\alpha^* d\xi_\beta} = 2dt \delta_{\alpha\beta} \quad . \quad (\text{C.10})$$

En développant, on obtient:

$$d\langle O(Z, Z^*) \rangle = \sum_\alpha \langle \partial_\alpha O F_\alpha(Z, Z^*) + \partial_{\alpha^*} O F_{\alpha^*}^*(Z, Z^*) \rangle dt + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \langle (\partial_{\alpha^*} \partial_\beta O) \overline{dz_\alpha^* dz_\beta} \rangle \quad , \quad (\text{C.11})$$

soit

$$d\langle O(Z, Z^*) \rangle = \sum_{\alpha} \langle \partial_{\alpha} O F_{\alpha}(Z, Z^*) + \partial_{\alpha^*} O F_{\alpha}^*(Z, Z^*) \rangle dt + \sum_{\alpha, \beta} \langle (\partial_{\alpha^*} \partial_{\beta} O) (M^* {}^t M)_{\alpha\beta} \rangle dt \quad . \quad (C.12)$$

On en déduit que  $P(Z, Z^*, t)$  obéit à l'équation de Fokker-Planck:

$$\partial_t P = - \left[ \sum_{\alpha} \partial_{\alpha} (F_{\alpha} P) + \partial_{\alpha^*} (F_{\alpha}^* P) - \sum_{\alpha, \beta} \partial_{\alpha^*} \partial_{\beta} [(M^* {}^t M)_{\alpha\beta} P] \right] \quad . \quad (C.13)$$

Nous allons choisir

$$F_{\alpha}(Z, Z^*) = -\partial_{\alpha^*} E[Z, Z^*] \quad . \quad (C.14)$$

Alors:

$$\partial_t P = - \sum_{\alpha} \partial_{\alpha} \left[ 2F_{\alpha} P + \sum_{\beta} \partial_{\beta^*} [(M^* {}^t M)_{\alpha\beta} P] \right] dt \quad . \quad (C.15)$$

Pour annuler  $\partial_t P$ , Le choix le plus simple consiste à prendre

$$M_{\alpha\beta} = \sqrt{2D} \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (C.16)$$

avec  $D$  tel que

$$F_{\alpha} = \frac{1}{2} 2D (-\partial_{\beta^*} E) \quad , \quad (C.17)$$

c'est à dire

$$D = k_B T \quad . \quad (C.18)$$

On alors

$$dz_{\alpha} = -(\partial_{\alpha^*} E) 2dt + \sqrt{k_B T} \sqrt{2} d\xi_{\alpha} \quad . \quad (C.19)$$

En posant  $d\tau = 2dt$ , on obtient finalement

$$dz_{\alpha} = -(\partial_{\alpha^*} E) d\tau + \sqrt{k_B T} d\xi_{\alpha} \quad , \quad (C.20)$$

avec

$$\overline{d\xi_{\alpha}^* d\xi_{\beta}} = 2d\tau \quad . \quad (C.21)$$

Dans le cas où l'on a un ensemble continu de coordonnées, c'est à dire un champ classique  $\Psi$ , on utilise<sup>1</sup>

$$d\Psi = -\partial_{\Psi^*} E[\Psi, \Psi^*] d\tau + \sqrt{k_B T} d\xi \quad , \quad (C.22)$$

où  $d\xi$  est champ complexe tel que

$$\overline{|d\xi|^2} = 2d\tau \quad . \quad (C.23)$$

---

1. Numériquement, on fait un « splitting » pour calculer le premier terme de (C.22): on sépare l'évolution due au terme d'énergie cinétique - que l'on calcule en représentation  $p$  - de celle due à l'effet du champ moyen - évaluée en représentation  $r$  - .



# Bibliographie

- [1] B. A. VAN TIGGELEN. Localization of Waves. *Wave Diffusion in Complex Media, lectures at les Houches 1998*, 531, 1, (1999).
- [2] B. A. VAN TIGGELEN. Mesoscopic Light Scattering in Atomic Physics. *Atomic Matter Waves, lectures at les Houches 1999*, (2000).
- [3] P.W. ANDERSON. Absence of diffusion in certain random lattice. *Phys. Rev.*, **109**, 1492, (1958).
- [4] N.F. MOTT. Metal Insulator Transitions. *Physics Today*, November, (1978).
- [5] R. DALICHAOUCH, J.P. ARMSTRONG, S. SCHULTZ, P.M. PLATZMAN, ET S.L. MCCALL. Microwave localization by two-dimensional random scattering. *Nature*, **354**, 53, (1991).
- [6] N. GARCIA ET A.Z. GENACK. Anomalous Photon Diffusion at the Threshold of the Anderson Localization. *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 1850, (1991).
- [7] D.S. WIERSMA, P. BARTOLINI, A. LAGENDIJK, ET R. RIGHINI. Localization of light in a disordered media. *Nature*, **390**, 671, (1997).
- [8] B. WHITE, P. SHENG, ET Z.Q. ZHANG. Wave Localization Characteristics in the Time Domain. *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 1918, (1987).
- [9] P. SHENG. *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media*. World Scientific, (1990).
- [10] C.H. HODGES ET J. WOODHOUSE. *J. Acoust. Soc. Am.*, **74**, 894, (1983).
- [11] Z. YE, H. HSU, E. HOSKINSON, ET A. ALVAREZ. On Localization of Acoustic Waves. *arXiv:physics/9904007* 6 Apr 99.
- [12] K.T. COMPTON. *Phys. Rev.*, **20**, 283, (1922).
- [13] T. HOLSTEIN. Imprisonment of Resonance Radiation in Gases. *Phys. Rev.*, **72**, 1212, (1947).
- [14] S. JOHN. Localization of Light. *Physics Today*, May, (1991).
- [15] P.W. ANDERSON. The Question of Classical Localization: A Theory of White Paint. *Phil. Mag. B*, **85**, 505, (1985).
- [16] E. AKKERMANS, P.E. WOLF, R. MAYNARD, ET G. MARET. Theoretical study of the coherent backscattering of light by disordered media. *J. Phys.*, **49**, 77, (1988).
- [17] Y. KUGA ET A. ISHIMARU. *J. Opt. Soc. Am. A*, **1**, 831, (1984).

- [18] M.P.V. VAN ALBADA ET A. LAGENDIJK. *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 2692, (1985).
- [19] P.-E. WOLF ET G. MARET. *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 2696, (1985).
- [20] G. LABEYRIE, F. DE TOMASI, J.-C. BERNARD, C. A. MUELLER, C. MINIA-TURA, ET R. KAISER. Coherent Backscattering of Light by Cold Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 5266, (1999).
- [21] K. HUANG. *Statistical Mechanics*. Wiley, London, (1966).
- [22] C. COHEN-TANNOUJDI, J. DUPONT-ROC, ET G. GRYNBERG. *Atom-Photon Interactions*. Wiley, New-York, (1992).
- [23] Y. CASTIN. *Condensation de Bose-Einstein dans les gaz atomiques*. Cours de l'Ecole Doctorale, (1999).
- [24] G. LENZ, P. MEYSTRE, ET E. M. WRIGHT. Nonlinear atom optics: General formalism and atomic solitons. *Phys. Rev. A*, **50**, 1681, (1994).
- [25] OLIVIER MORICE. *Atomes refroidis par laser: du refroidissement sub-recul à la recherche d'effets quantiques collectifs*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, décembre 1995.
- [26] J. D. JACKSON. *Classical Electrodynamics*. John Willey & Sons, (1973).
- [27] F. DALFOVO, S. GIORGINI, LEV P. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI. Theory of trapped Bose-condensed gases. *Reviews of Modern Physics*, **71**, 463, (1999).
- [28] B. V. SVISTUNOV ET G. V. SHLYAPNIKOV. Effect of Bose condensation on resonant optics in gaseous H. *Sov. Phys. JETP*, **71**, 71, (1990).
- [29] M. RUSEK ET A. ORLOWSKI. Example of self-averaging in three dimensions: Anderson localization of electromagnetic waves in random distributions of pointlike scatterers. *Phys. Rev. E*, **56**, 6090, (1997).
- [30] M. RUSEK, A. ORLOWSKI, ET J. MOSTOWSKI. Localization of light in three-dimensional random dielectric media. *Phys. Rev. E*, **53**, 4122, (1996).
- [31] K. ARYA, Z. B. SU, ET J. L. BIRMAN. Anderson Localization of Electromagnetic Waves in a Dielectric Medium of Randomly Distributed Metal Particles. *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 2725, (1986).
- [32] A. LAGENDIJK ET B. A. TIGGELEN. Resonant multiple scattering of light. *Physics Reports*, **270**, 145, (1996).
- [33] DAVID GUÉRY-ODELIN. *Dynamique collisionnelle des gaz d'alcalins lourds: du refroidissement évaporatif à la condensation de Bose-Einstein*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, novembre 1998.
- [34] S. CHU. The manipulation of neutral particules. *Reviews of Modern Physics*, **70**, 685, (1998).
- [35] C. COHEN-TANNOUJDI. Manipulating atoms with photons. *Reviews of Modern Physics*, **70**, 707, (1998).
- [36] W.D. PHILLIPS. Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Reviews of Modern Physics*, **70**, 721, (1998).
- [37] H.F. HESS. *Bull. Am. Phys. Soc.*, **30**, 854, (1985).

- [38] H.F. HESS. Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen. *Phys. Rev. B*, **34**, 3476, (1986).
- [39] W. KETTERLE ET N. VAN DRUTEM. *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, **37**, 181, (1996).
- [40] M.H. ANDERSON, J.R. ENSHER, M.R. MATTHEWS, C.E. WIEMAN, ET E. A. CORNELL. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, **269**, 198, (1995).
- [41] K.B. DAVIS, M.-O. MEWES, M.R. ANDREWS, N.J. VAN DRUTEN, D.S. DURFEE, D.M. KURN, ET W. KETTERLE. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3969, (1995).
- [42] C.C. BRADLEY, C.A. SACKETT, ET R.G. HULET. Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 1687, (1995).
- [43] A. EINSTEIN. *Oeuvres choisies*. Seuil-CNRS, Paris, (1993).
- [44] J. LEITE LOPES ET B. ESCOUBÈS. *Sources et évolution de la physique quantique*. Masson, Paris, (1995).
- [45] D. G. FRIED, T.C. KILLIAN, L. WILLMANN, D. LANDHUIS, S.C. MOSS, D. KLEPPNER, ET T.J. GREYTAK. Bose-Einstein Condensation of Atomic Hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 3811, (1998).
- [46] Y. CASTIN, R. DUM, ET A. SINATRA. Bose-Einstein condensates make quantum leaps and bounds. *Physics World*, page 37, (1999).
- [47] M. BORN ET E. WOLF. *Principles of Optics*. Pergamon Press, Londres, (1959).
- [48] L. MANDEL ET E. WOLF. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, (1975).
- [49] C. COHEN-TANNOUJJI. *Atomes ultrafroids — Propriétés de cohérence des condensats*. Cours de Physique atomique et moléculaire, Collège de France, (1999).
- [50] B. P. ANDERSON ET M.A. KASEVICH. Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays. *Science*, **282**, 1686, (1998).
- [51] I. BLOCH, T.W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER. Atom laser with a cw output coupler. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 3008, (1999).
- [52] E. HAGLEY, L. DENG, M. KOZUMA, J. WEN, K. HELMERSON, S. L. ROLSTON, ET W. D. PHILLIPS. A well-collimated quasi-continuous atom laser. *Science*, **283**, 1706, (1999).
- [53] M.-O. MEWES, M.R. ANDREWS, D.M. KURN, D.S. DURFEE, C.G. TOWNSEND, , ET W. KETTERLE. An Output Coupler for Bose-Condensed Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 582, (1997).
- [54] M.R. ANDREWS, D.M. KURN, H.-J. MIESNER, D.S. DURFEE, C.G. TOWNSEND, S. INOUE, ET W. KETTERLE. *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 553, (1997).
- [55] K. HELMERSON, D. HUTCHINSON, K. BURNETT, ET W.D. PHILLIPS. Atom lasers. *Physics World*, page 31, (1999).

- [56] I. BLOCH, T.W. HÄNSCH, ET T. ESSLINGER. Atom laser with a cw output coupler. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 3008, (1999).
- [57] A.S. PARKINS ET D.F. WALLS. The Physics of Trapped Dilute-Gas Bose-Einstein Condensates. *Physics Report*, 303, (1998).
- [58] P. C. SPREEUW, T. PFAU, U. JANICKE, ET M. WILKENS. *Euro. Phys. Lett.*, **32**, 469, (1995).
- [59] M. OLSHANI, Y. CASTIN, ET J. DALIBARD. A model for an atom laser. *Proceedings of the XII Conference on Laser Spectroscopy*, page 7, (1996).
- [60] M. WISEMAN ET M. J. COLLETT. *Phys. Lett. A*, **202**, 246, (1995).
- [61] C. BORDÉ. *Phys. Lett. A*, **204**, 217, (1995).
- [62] J. I. CIRAC ET M. LEWENSTEIN. *Phys. Rev. A*, **53**, 2466, (1996).
- [63] M. HOLLAND, K. BURNETT, C. GARDINER, J. I. CIRAC, ET P. ZOLLER. *Phys. Rev. A*, **54**, 1757, (1996).
- [64] H. M. WISEMAN. *Phys. Rev. A*, **56**, 2068, (1997).
- [65] B. KNEER, T. WONG, K. VOGEL, W. P. SCHLEICH, ET D.F. WALLS. *Phys. Rev. A*, **58**, 4841, (1998).
- [66] Y. CASTIN, R. DUM, , J. DALIBARD, E. MANDONNET, A. MINGUZZI, ET I. CARUSOTTO. Evaporative cooling of an atomic beam. *The European Physical Journal D*, **10**, 9, (2000).
- [67] A. MESSIAH. *Quantum Mechanics*. North Holland, Amsterdam, (1965).
- [68] J. DALIBARD. *Collisional dynamics of ultra-cold atomic gases*. Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", (1999).
- [69] G. A. BIRD. *Molecular Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Clarendon, Oxford, (1994).
- [70] H. WU ET FOOT. Direct simulation of evaporative cooling. *J. Phys. B:At. Mol. Opt. Phys. (Lett.)*, **29**, 321, (1996).
- [71] H. WU, E. ARIMONDO, ET C.J. FOOT. Dynamics of evaporative cooling for Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. A*, **56**, 560, (1997).
- [72] D. GUÉRY-ODELIN, J. SÖDING, P. DESBIOLLES, ET J. DALIBARD. Strong evaporative cooling of a trapped cesium gas. *Optics Express*, **2**, 323, (1998).
- [73] L.P. LANDAU ET E.M. LIFSHITZ. *Course of Theoretical Physics, vol 10*. Pergamon Press, Oxford, (1988).
- [74] O.J. LUITEN, M.W. REYNOLDS, ET J.T.M. WALRAVEN. Kinetic theory of evaporative cooling of a trapped gas. *Phys. Rev. A*, **53**, 381, (1996).
- [75] C. COHEN-TANNOUDJI. *Atomes ultrafroids — Piégeage non dissipatif et refroidissement évaporatif*. Cours de Physique atomique et moléculaire, Collège de France, (1996).
- [76] E. B. SONIN. *SOVIET PHYSIC JETP*, **32**, 773, (1971).
- [77] N. J. VAN DRUTEN ET W. KETTERLE. Two-Step Condensation of the Ideal Bose Gas in Highly Anisotropic Traps. *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 549, (1997).

- [78] C. COHEN-TANNOUJDI, B. DIU, ET F. LALOË. *Mécanique Quantique*. Hermann, (1973).
- [79] P. C. HOHENBERG. Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions. *Phys. Rev.*, **158**, 383, (1967).
- [80] E. H. LIEB ET W. LINIGER. Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground state. *Phys. Rev.*, **130**, 1605, (1963).
- [81] E. H. LIEB. Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. II. The Excitation Spectrum. *Phys. Rev.*, **130**, 1616, (1963).
- [82] M. GAUDIN. *La fonction d'onde de Bethe*. Masson, (1983).
- [83] M. GIRARDEAU. Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension. *J. Math. Phys.*, **1**, 516, (1960).
- [84] M. OLSHANIL. Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 938, (1998).
- [85] J. W. KANE ET L. P. KADANOFF. Long-Range Order in Superfluid Helium. *Phys. Rev.*, **155**, 1967, (1997).
- [86] V. N. POPOV. *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics*. D. Reidel Publishing Company, (1983).
- [87] D.J. SCALAPINO, M. SEARS, ET R.A. FERRELL. *Phys. Rev. B*, **6**, 3409, (1972).
- [88] R. BALIAN. *From Microphysics to Macrophysics*. Springer-Verlag, (1992).
- [89] R. P. FEYNMAN ET A.R. HIBBS. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill, (1965).
- [90] M. LE BELLAC. *Des phénomènes critiques aux champs de jauge*. Inter-Editions du CNRS, (1988).
- [91] Y. CASTIN, R. DUM, E. MANDONNET, A. MINGUZZI, ET I. CARUSOTTO. Coherence properties of a continuous atom laser. *cond-mat/0006250*, (2000).
- [92] P. PINKSE, A. MOSK, M. WEIDEMULLER, M. REYNOLDS, T. HIJMANS, ET J. WALRAVEN. One-dimensional evaporative cooling of magnetically trapped atomic hydrogen. *Phys. Rev. A*, **57**, 4747, (1998).
- [93] C. W. GARDINER. *Handbook of Stochastic Methods*. Springer Verlag, (1983).