DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE



LABORATOIRE
KASTLER BROSSEL

Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Hichem ELEUCH

Pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

ETUDE THEORIQUE DES FLUCTUATIONS QUANTIQUES DANS LA LUMIERE SORTANT D'UNE MICROCAVITE SEMICONDUCTRICE

A Soutenir le 26 juin 1998, devant le jury composé de :

M. L ABRAM	Rapporteur
M. G. BASTARD	Rapporteur
M. R.BENNACEUR	
M. C. FABRE	
Mme. E. GIACOBINO	Directeur de thèse

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE



LABORATOIRE
KASTLER BROSSEL

Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Hichem ELEUCH

Pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet :

ETUDE THEORIQUE DES FLUCTUATIONS QUANTIQUES DANS LA LUMIERE SORTANT D'UNE MICROCAVITE SEMICONDUCTRICE

A Soutenir le 26 juin 1998 devant le jury composé de :

M. I. ABRAM	Rapporteur
M. G. BASTARD	Rapporteur
M. R. BENNACEUR	
M. C. FABRE	
Mme. E. GIACOBINO	Directeur de thèse

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Notions de base **5**
2.1 Atomes dans une cavité 5
2.1.1 Régime de couplage faible 5
2.1.2 Régime de couplage fort 6
2.2 Microcavité semi-conductrice 14
2.2.1 Exciton dans un semi-conducteur libre 14
2.2.2 Exciton dans une cavité à puits quantiques 16
2.2.3 Polariton. 18
2.2.4 Interaction non linéaire exciton-photon 22

3 Fonction d'autocorrélation et états comprimés **27**
3.1 Fonction d'autocorrélation 27
3.1.1 Définition classique de $g^{(2)}$ 28
3.1.2 Définition quantique de $g^{(2)}$: 30
3.2 Spectre de bruit 32
3.2.1 Définition des états comprimés 32
3.2.2 Spectre de bruit 36

4 Calcul de la fonction d'autocorrélation dans le cas linéaire **39**
4.1 Pompage cohérent 40
4.2 Pompage incohérent 47
4.3 Conclusion 56

5 Valeurs moyennes et intensités intracavité **57**
5.1 Non-linéarité excitonique 58
5.2 Couplage non-linéaire 66
5.3 Cas non-linéaire : couplage non-linéaire + non-linéarité excitonique . . 70
5.4 Non-linéarité optique 73
5.5 Conclusion 74

6 Spectres de Bruit **75**
6.1 Non-linéarité excitonique 75
6.2 Couplage non-linéaire 84
6.3 Interaction non-linéaire: couplage non-linéaire + non-linéarité excitonique : 88
6.4 Non-linéarité optique 92
6.5 Conclusion 96

7 Fonction d'autocorrélation **97**
7.1 Non-linéarité excitonique 97
7.1.1 Recherches des pôles 99
7.1.2 Etude numérique de la fonction d'autocorrélation 105
7.1.3 Traitement analytique 109
7.2 Couplage non-linéaire 114
7.3 Interaction non-linéaire:couplage non linéaire + non-linéarité excitonique : 115
7.4 Non-linéarité optique 115
7.5 Conclusion 117

8 L'effet du couplage avec les phonons **119**

9 Conclusion **141**

10Annexe **143**
10.1 Annexe A : Expression de la fonction d'autocorrélation à l'approximation gaussienne 143
10.2 Annexe B: 145
10.2.1 Calcul de $I_{ij}(t,t')$: 146
10.2.2 Calcul de $N_{ij}(t,t')$: 147
10.2.3 Calcul de $E_{ij}(t,t')$: 148
10.3 Annexe C : Quelques propriétés utiles de la transformation de Fourier et de la transformation de Laplace bilatérale 148
10.3.1 Définition de la transformation de Fourier et de la transformation de Laplace bilatérale 149
10.3.2 Propriétés de la transformation de Fourier et de la transformation de Laplace bilatérale 149
10.4 Annexe D : 151
10.5 Annexe E 152
10.6 Annexe F: Relation entre les fonctions d'autocorrélation intra- et extra-cavité : 153
10.6.1 Système en transmission 153
10.6.2 Système en réflexion 164
10.6.3 Relation entre l'amplitude du champ pompe intra- et extracavité . 165
10.6.4 Relation entre les fonctions d'autocorrélation intra- et extracavité 166

Bibliographie **169**

1 Introduction

L'étude du couplage matière-rayonnement, dans le cas où le champ est confiné dans une cavité de grande finesse et ou la matière présente une résonance proche de la fréquence de la cavité, est un domaine en pleine activité. L'intérêt de ces recherches est à la fois fondamental, pour une meilleure compréhension du couplage matière-rayonnement et une vérification des postulats de la mécanique quantique, et appliqué, car on espère obtenir des systèmes optiques présentant des propriétés exceptionnelles, comme par exemple une luminescence monomode à haut gain, permettant d'envisager la réalisation d'un laser sans seuil.

Jusqu'à une période récente, ces études se divisaient en deux domaines bien séparés : l'optique quantique d'atomes en milieu très dilués (qualifié d'électrodynamique quantique en cavité) et la physique des solides (semiconducteur en microcavité). Mais récemment, des phénomènes connus reliés à l'électrodynamique quantique en cavité, comme la séparation de Rabi du vide ou la réduction de bruit quantique, ont été observés dans des milieux solides, notamment dans les semiconducteurs. A la suite de ces découvertes des recherches se sont engagées pour essayer d'obtenir avec les semiconducteurs des effets d'électrodynamique quantique analogues à ceux qui avaient déjà été mis en évidence dans des expériences de physique atomique. Les semiconducteurs présentent en effet l'avantage d'être beaucoup plus faciles à manier que les atomes froids ou en jet, qui nécessitent un dispositif expérimental assez lourd.

Un effet très intéressant observé en physique atomique est la modification des propriétés quantiques du champ électromagnétique sortant de la cavité contenant des atomes : il a été prévu théoriquement et observé expérimentalement que ce champ possédait des propriétés non-classiques dégroupement de photon (antibunching) et compression des fluctuations quantiques (squeezing). Les études initiées dans le groupe d'Optique Quantique du Laboratoire Kastler Brossel visent à obtenir des effets analogues dans des microcavités semiconductrices, où le système actif n'est plus constitué d'atomes mais de puits quantiques dans un milieu semiconducteur.

Ce mémoire traite l'étude des fluctuations du champ sortant de la microcavité, et plus précisément de son spectre de bruit et de sa fonction de corrélation du second ordre à partir d'un hamiltonien modèle prenant en compte les non-linéarités du système. Les calculs présentés ici prévoient une réduction de bruit par rapport au bruit quantique standard et des effets non-classiques d'antibunching sur la fonction d'autocorrélation

lorsque les excitons du semiconducteur sont découplés de l'effet perturbateur de réseau. Les caractéristiques de la réduction de bruit dépendent de la force de couplage exciton-cavité.

Lorsque le couplage avec les fluctuations thermiques du réseau intervient, les effets non-classiques disparaissent; cependant l'étude des fluctuations de la lumière sortant de la microcavité apporte aussi des renseignements précieux sur la dynamique des phénomènes qui se produisent lors du couplage entre le champ et les excitons.

Nous présentons tout d'abord dans le chapitre 2 un aperçu rapide sur l'electrodynamique quantique en cavité. Ensuite nous introduisons les excitons et les polaritons tout en remarquant l'analogie avec l'atome habillé. A la fin de ce deuxième chapitre nous donnons les grandes lignes de la démarche menant à l'hamiltonien non-linéaire modèle du système photon-exciton que nous utilisons par la suite.

Dans le chapitre 3 nous introduisons la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$ d'un point de vue classique et quantique et nous rappelons la définition des états comprimés et du spectre de bruit.

Le chapitre 4 contient l'étude de la fonction d'autocorrélation dans le cas d'une interaction exciton-photon purement linéaire pour un pompage cohérent et pour un pompage incohérent. Nous présentons la méthode établie dans cette thèse pour le calcul de la fonction d'autocorrélation et nous donnons les propriétés de celle-ci pour les deux types de pompage.

Dans le cinquième chapitre nous calculons les intensités excitonique et photonique intracavité pour des paramètres réalistes expérimentalement . Ces intensités sont indispensables pour le calcul de la fonction d'autocorrélation et du spectre de bruit des chapitres suivants.

Le spectre de bruit est étudié dans le chapitre 6 dans le cas où l'interaction avec les phonons est négligée. Cette approximation est valable à faible température. Notre modèle nous permet de prévoir un effet de squeezing dans les microcavités semiconductrices en régime de couplage fort.

Le chapitre 7 est consacré à l'étude de la fonction d'autocorrélation. En plus des résultats numériques, une expression analytique de la fonction d'autocorrélation est établie.

L'effet du couplage du système avec les phonons du réseau est pris en considération et étudié dans le chapitre 8. Nous étudions dans quelle mesure l'augmentation de la température détruit le squeezing.

2 Notions de base

2.1 Atomes dans une cavité

Au cours des années1940, les études théoriques de Purcell et de Casimir ([Purcell 46], [Casimir 48]) ont montré que le taux d'émission spontanée de l'atome peut être modifié si on place celui-ci à proximité de miroirs ou de parois diélectriques. Des expériences menées dans les années 70 et 80 ont montré qu'on peut augmenter, diminuer l'émission spontanée [Drexhage 74], [Goy 83], [Heizen 87], [DE Martini 87] ou même la rendre réversible [Rempe 87] en mettant l'atome dans une cavité dont la longueur est de l'ordre de la longueur d'onde.

L'émission spontanée dans le vide se comprend par l'effet du couplage de l'atome avec le continuum des modes du champ électromagnétique. La présence d'une cavité modifie le continuum de modes du champ et le couplage de l'atome avec ces derniers. Lorsque l'on met l'atome dans une cavité, deux régimes sont susceptibles d'apparaître suivant la finesse F de la cavité. Pour une faible valeur de F, l'atome peut interagir avec un grand nombre de modes, et les parois ont pour effet principal de modifier la structure du champ par rapport à celle qu'il a dans le vide. Dans ce régime que l'on peut traiter perturbativement (appelé régime de couplage faible), le taux d'émission spontanée et les déplacements radiatifs des niveaux sont modifiés dans certaines conditions.

Quand on augmente la finesse F, l'interaction entre atome et cavité devient très important et le traitement perturbatif n'est plus valable: un deuxième régime apparaît, appelé régime de couplage fort. Dans ce cas, l'atome échange de l'énergie avec la cavité sur plusieurs cycles (oscillations de Rabi) et l'émission spontanée devient réversible [Rempe 87].

2.1.1 Régime de couplage faible

Dans une première approche le régime de couplage faible se caractérise par une faible valeur de la finesse F de la cavité. On traite ce cas dans un cadre pertubatif, où l'on suppose que la modification du dipôle par le champ de la cavité est assez faible pour que l'on puisse la négliger dans le calcul de ce champ.

Pour un dipôle atomique qui oscille parallèlement au plan des miroirs (classiquement, l'orbite de l'électron est parallèle au plan des miroirs), on trouve que l'on peut soit annuler le taux d'émission spontanée de l'atome en prenant une cavité de longueur

L inférieure à la demie longueur d'onde ($L < \frac{\lambda}{2}$), soit augmenter le taux d'émission pour les valeurs de L supérieur ou égale à $\frac{\lambda}{2}$ ($L = \frac{\lambda}{2}$ par exemple).

Dans le cas contraire, le dipôle atomique qui oscille perpendiculairement au plan des miroirs a un taux d'émission spontanée considérablement augmenté pour L inférieur à $\frac{\lambda}{2}$ et modifié d'une valeur négligeable pour L supérieur ou égale à $\frac{\lambda}{2}$.

On note aussi que, pour des longueurs L très grandes devant $\frac{\lambda}{2}$ et indépendamment de la polarisation, il n'y a plus de modification de l'émission spontanée [Haroche 92].

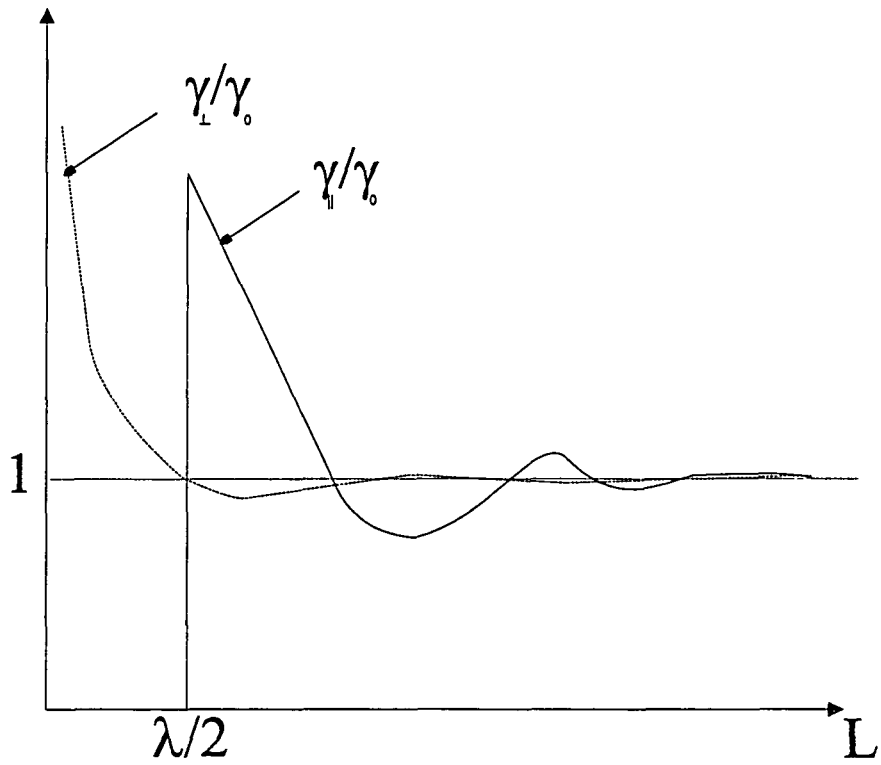


Fig. 1: le rapport de l'émission spontanée dans la cavité et le vide en fonction de la longueur de la cavité

2.1.2 Régime de couplage fort

Lorsque la cavité a une trés grande finesse F, le traitement pertubatif n'est plus valable. Un autre régime, non perturbatif appelé régime de couplage fort, apparaît. L'atome est couplé à un seul mode de la cavité, qui est résonnant ou quasi résonnant avec l'une de ses transitions : le système global (atome + mode) est décrit par un atome à deux niveaux (caractérisé par un niveau fondamental $|g\rangle$ et un niveau excité $|e\rangle$) en interaction avec le mode de la cavité. Nous supposerons par ailleurs que la cavité est ouverte et ne modifie qu'une faible portion des modes du vide. De ce fait la relaxation atomique est principalement due à l'émission de photons dans des modes vides de l'espace libre et son taux $\frac{\gamma}{2}$ n'est pas modifié.

Si on néglige la relaxation dans un premier temps, le système constitué par l'atome et le champ peut alors être décrit par l'hamiltonien de Jaynes Cummings [Jaynes 63] :

$$H = H_{at} + H_F + H_{int} \tag{2.1}$$

qui est composé de trois termes; le premier décrit l'atome, le second, le mode et le dernier, l'interaction entre l'atome et le champ.

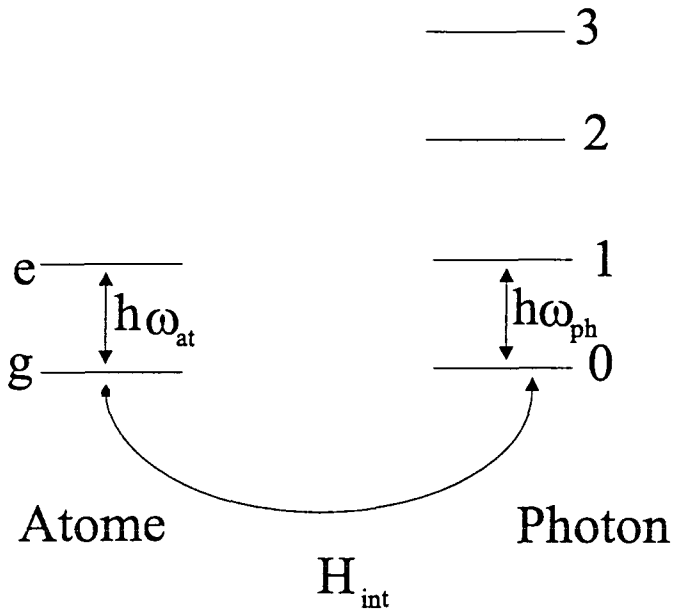


Fig. 2: Interaction entre l'atome et le champ du mode de la cavité

L'hamiltonien de l'atome s'écrit :

$$H_{at} = \hbar\omega_{at} D_z \tag{2.2}$$

où ω_{at} désigne la fréquence de l'atome et D_z l'opérateur d'inversion défini par :

$$D_z = \frac{1}{2}\left(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|\right) \tag{2.3}$$

L'hamiltonien du champ a pour expression :

$$H_F = \hbar\omega_{ph} a^\dagger a \tag{2.4}$$

où ω_{ph} désigne la fréquence de la cavité et les opérateurs a et $a^\dagger$ sont les opérateurs d'annihilation et de création d'un photon dans le mode du champ. Ils vérifient la relation de commutation :

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{2.5}$$

Les états propres du hamiltonien H_F sont les états de Fock $|n\rangle$ de nombre de photons bien déterminé.

L'hamiltonien d'interaction s'écrit :

$$H_{int} = \hbar g \left(a^\dagger D + a D^\dagger\right) \tag{2.6}$$

où g est la constante de couplage définie par :

$$g = -\frac{dE_0}{\hbar} \tag{2.7}$$

d est le moment dipolaire de l'atome, V désigne le volume de la cavité et E_0, le champ électrique par photon (amplitude des fluctuations du vide) :

$$E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{ph}}{2\varepsilon_0 V}} \tag{2.8}$$

Les opérateurs atomiques

$$D^\dagger = |e\rangle\langle g| \tag{2.9}$$

et

$$D = \left(D^\dagger\right)^\dagger = |g\rangle\langle e| \tag{2.10}$$

changent l'état atomique, $D^\dagger$ étant l'opérateur qui transforme l'état $|g\rangle$ vers l'état $|e\rangle$ et D de l'état $|e\rangle$ vers l'état $|g\rangle$.

L'interaction entre le champ et l'atome se traduit par un échange simultané de photon et d'état tout en conservant le nombre d'excitation. Le terme $aD^\dagger$ décrit l'absorption d'un photon et l'excitation de l'atome et le terme $a^\dagger D$ décrit l'émission d'un photon et la désexcitation de l'atome.

Les états du système atome champ $(H_{at} + H_F)$ non couplés s'expriment par :

$$\begin{aligned} |e,n\rangle &= |e\rangle \otimes |n\rangle \\ |g,n\rangle &= |g\rangle \otimes |n\rangle \end{aligned} \tag{2.11}$$

Le système couplé atome-champ connu sous le nom d'atome habillé [Cohen-Tannoudji 77], [Haroche 92], [Cohen-Tannoudji 96] possède des états propres (états habillés) :

$$\begin{aligned} \overline{|+,n+1\rangle} &= \cos(\theta_n)\,|e,n\rangle - \sin(\theta_n)\,|g,n+1\rangle \\ \overline{|-,n+1\rangle} &= \sin(\theta_n)\,|e,n\rangle + \cos(\theta_n)\,|g,n+1\rangle \end{aligned} \tag{2.12}$$

L'état fondamental habillé est :

$$\overline{|f\rangle} = |g,0\rangle \tag{2.13}$$

L'angle de couplage est défini par :

$$\tan(2\theta_n) = \frac{-2g\sqrt{n+1}}{\Delta};\ \ 0 < \theta_n < \frac{\pi}{2} \tag{2.14}$$

où Δ présente le désaccord entre atome et cavité

$$\Delta = \omega_{ph} - \omega_{at} \tag{2.15}$$

θ_n vaut $\frac{\pi}{4}$ à résonance, 0 pour $\Delta << -g$ et $\frac{\pi}{2}$ pour $\Delta >> g$.

Ces états habillés ont pour énergie :

$$E_{g,0} = -\frac{\hbar}{2}(\omega_{at} - \omega_{ph})$$

$$E_{n+1,\pm} = (n+1)\hbar\omega_{ph} \pm \hbar\Omega_n \tag{2.16}$$

où

$$\Omega_n = \sqrt{g^2(n+1) + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} \tag{2.17}$$

Ω_n est la fréquence de Rabi pour n photons dans le mode.

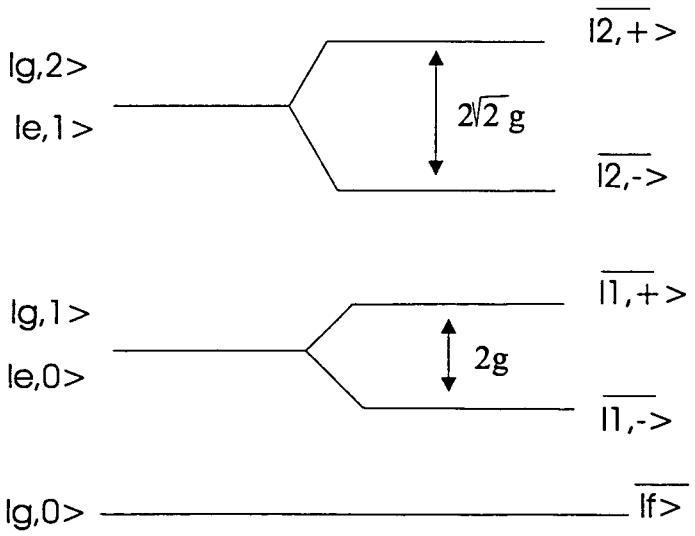


Fig. 3: Les niveaux d'énergies pour les états non couplés et couplés à résonance.

En particulier les deux premiers états excités non couplés, $|e,0\rangle$ (l'atome excité et zéro photon dans la cavité) et $|g,1\rangle$ (l'atome dans l'état fondamental et un photon dans la cavité), se couplent pour donner deux états habillés $\overline{|+,1\rangle}$ et $\overline{|-,1\rangle}$ définie par :

$$\overline{|+,1\rangle} = \cos(\theta_1)\,|e,0\rangle - \sin(\theta_0)\,|g,1\rangle \tag{2.18}$$

$$\overline{|-,1\rangle} = \sin(\theta_0)\,|e,0\rangle + \cos(\theta_0)\,|g,1\rangle$$

avec

$$\tan(2\theta_0) = \frac{-g}{2\Delta} \tag{2.19}$$

Ils sont séparés par une différence énergétique équivalente à $2\hbar\Omega_0$, où Ω_0 est la fréquence de Rabi du vide (nommée encore le dédoublement de Rabi du vide "vacuum Rabi splitting"):

$$\Omega_0 = \sqrt{g^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} \tag{2.20}$$

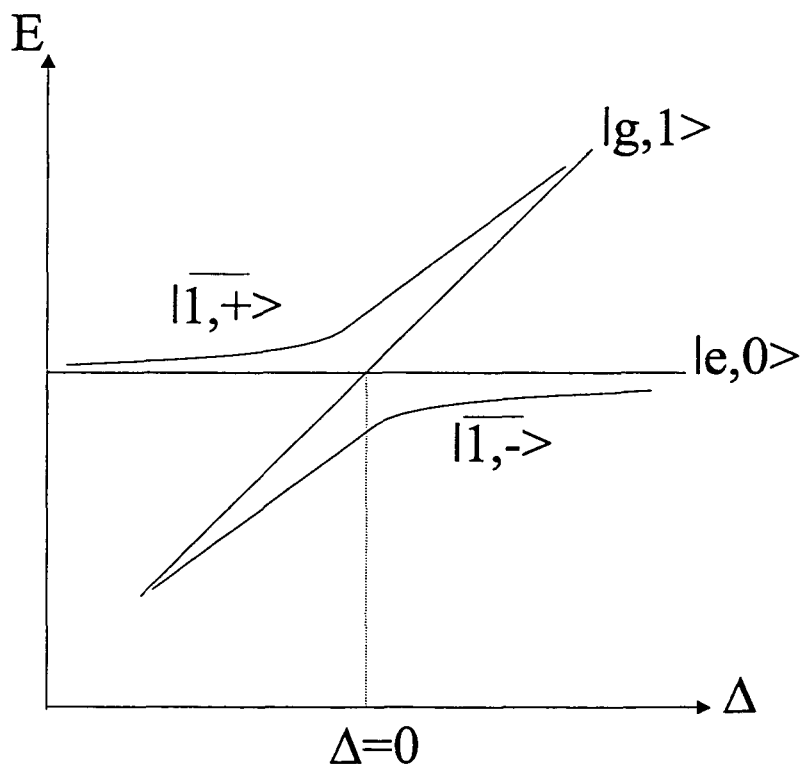


Fig. 4: Energie des deux premiers états habillés en fonction du désaccord atome-cavité

La Figure 4 montre que la fréquence de Rabi dans le vide est minimale pour la résonance cavité-atome. Les niveaux non couplés se croisent et les niveaux habillés s'anticroisent et ils tendent vers des états non couplés pour un fort désaccord.

2.1.2.1 Largeurs des premiers états habillés

Dans une situation réelle, l'atome et le champ ont un couplage dissipatif avec leur environnement. Le processus dissipatif est bien décrit par l'équation pilote de l'opérateur densité du système atome-champ [Carmicheal 89] [Haroche 92] :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H,\rho] + (\Lambda_F + \Lambda_{at})\ \rho \tag{2.21}$$

où $\Lambda_F\ \rho$ et $\Lambda_{at}\ \rho$ décrivent la relaxation du champ dans une cavité et la relaxation atomique, qui sont données par les expressions suivantes dans le cas d'une cavité à la température T=0 :

$$\Lambda_F\ \rho = -\kappa\left(a^\dagger a\rho + \rho a^\dagger a\right) + 2\kappa\left(a\rho a^\dagger\right) \tag{2.22}$$

$$\Lambda_{at}\ \rho = -\frac{\gamma}{2}\left(D^\dagger D\rho + \rho D^\dagger D\right) + \gamma\left(D\rho D^\dagger\right) \tag{2.23}$$

où $\frac{\gamma}{2}$ est le taux de dissipation atomique (taux de désexcitation de l'état $|e\rangle$ vers l'état $|g\rangle$) dans le vide (on suppose que l'émission spontanée n'a pas été modifiée par la cavité) et κ, le taux d'amortissement du champ de photons dans la cavité. κ est relié au coefficient de qualité Q de la cavité par :

$$Q = \frac{\omega_{ph}}{\kappa} \tag{2.24}$$

Les calculs de $\overline{\langle 1,+|}\ (\Lambda_F + \Lambda_{at})\ \rho\overline{|f\rangle}$et $\overline{\langle 1,-|}\ (\Lambda_F + \Lambda_{at})\ \rho\overline{|f\rangle}$ font apparaître les taux d'amortissement γ_+ et γ_-des états habillés $|+,1\rangle$ et $|-,1\rangle$. Ils ont pour expression :

$$\gamma_+ = \frac{\gamma}{2}\cos^2\theta_0 + \kappa\sin^2\theta_0 \tag{2.25}$$

$$\gamma_- = \frac{\gamma}{2}\sin^2\theta_0 + \kappa\cos^2\theta_0$$

Ils sont égaux à résonance ($\Delta = 0$) à la moyenne des dissipations atomiques et photoniques.

On a défini le régime de couplage fort comme étant le régime non pertubatif où la cavité possède une très grande finesse F. Cette définition qui a été donnée par Haroche [Haroche 92] s'applique bien au cas où le taux d'émission spontanée de l'atome est négligable. Cependant dans le cas qui va nous intéresser ici, les constantes de temps du milieu émetteur et de la cavité seront du même ordre de grandeur. Il est donc plus approprié d'utiliser une définition plus générale. Nous adoptons pour tout ce qui suit

la définition donnée par Kimble [Kimble 94] qui tient compte de l'émission spontanée. Le couplage fort est redéfini alors comme étant le domaine dans lequel le couplage g entre l'atome et le champ de la cavité est très grand devant la dissipation du dipôle atomique $\frac{\gamma}{2}$ et la dissipation du champ de la cavité κ :

$$g^2 >> \left(\frac{\frac{\gamma}{2}+\kappa}{2}\right)^2 \tag{2.26}$$

2.1.2.2 Plusieurs atomes dans une cavité

Le traitement précédent de l'atome habillé s'est limité au cas d'un seul atome dans une cavité. On étudie maintenant le cas de N atomes identiques en interaction avec le champ de la cavité en supposant que les atomes ont la même constante de couplage g et la même fréquence ω_{at}. L'hamiltonien de ce système s'écrit :

$$H_N = \hbar\omega_{at}\sum_{i=1}^{N} D_{z_i} + \hbar\omega_{ph}a^\dagger a + \hbar g\left(a\sum_{i=1}^{N} D_i^\dagger + a^\dagger\sum_{i=1}^{N} D_i\right) \tag{2.27}$$

où les opérateurs atomiques D_i, $D_i^\dagger$ et D_{z_i} de l'atome i sont donnés par les expressions suivantes :

$$D_i^\dagger = |e_i\rangle\langle g_i| \tag{2.28}$$

$$D_i = \left(D_i^\dagger\right)^\dagger = |g_i\rangle\langle e_i|$$

et

$$D_z = \frac{1}{2}\left(|e_i\rangle\langle e_i| - |g_i\rangle\langle g_i|\right) \tag{2.29}$$

L'état fondamental des N atomes non excités est :

$$|G\rangle = |g, g, \ldots\ldots, g\rangle \tag{2.30}$$

et le premier état excité est :

$$|E\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(|e, g, \ldots\ldots, g\rangle + |g, e, \ldots\ldots, g\rangle + \ldots\ldots + |g, g, \ldots\ldots, e\rangle\right)$$

Ces états se couplent avec le champ de la cavité pour donner les états habillés à N atomes.

Les deux premiers états habillés sont :

$$\overline{|+,1\rangle}_{(N)} = \cos\left(\theta_{(N)}\right)|E,0\rangle - \sin\left(\theta_{(N)}\right)|G,1\rangle \tag{2.31}$$

$$\overline{|-,1\rangle}_{(N)} = \sin\left(\theta_{(N)}\right)|E,0\rangle + \cos\left(\theta_{(N)}\right)|G,1\rangle$$

où

$$\tan\left(2\theta_{(N)}\right) = \frac{-\sqrt{N}g}{2\Delta} \tag{2.32}$$

Ils ont pour énergies :

$$E_{1,\pm(N)} = \hbar\omega_{at} + \frac{\hbar\Delta}{2} \pm \hbar\Omega \tag{2.33}$$

avec $\Omega_{(N)}$ est la fréquence de Rabi du vide (pour N atomes) :

$$\Omega_{(N)} = \sqrt{\left(g\sqrt{N}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} \tag{2.34}$$

A résonance, la structure des deux premiers états habillés (à N atomes) est identique à celle d'un seul atome avec une fréquence de Rabi du vide multipliée par $\sqrt{N}$.

Des expériences menées dans les années 80 et au début des années 90 ont mis en évidence l'oscillation de Rabi du vide pour un [Thompson 92], [Bernardot 92] et plusieurs atomes [Brecha 86a], [Raizen 89] par l'observation du spectre d'émission ou par le comportement temporel de l'intensité de fluorescence [Brecha 86a,b], [Orozco 87].

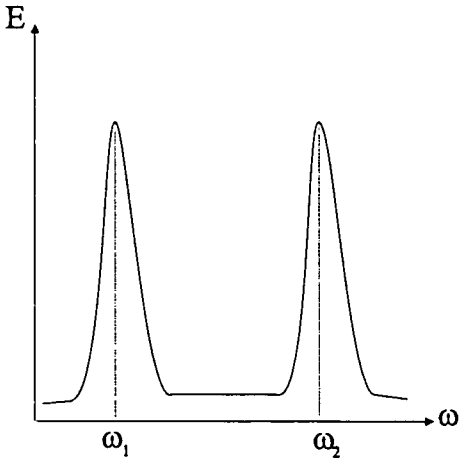


Fig. 5: Spectre d'émission en fonction du désaccord

Maintenant à partir de la figure 5, on peut interpréter le régime de couplage fort comme étant le domaine où les deux pics du spectre sont bien séparés.

2.2 Microcavité semi-conductrice

Le traitement précédent a permis de comprendre que la cavité modifie l'émission spontanée et permet l'apparition d'oscillation de Rabi pour des atomes. Des expériences au début des années 90, ont montré des effets analogues dans les semi-conducteurs. Elles ont mis en évidence une modification de l'émission spontanée [Yokoyama 90], [Yamaguchi 91], et aussi l'apparition d'un double pic, dans le spectre, caractéristique du régime d'oscillation de Rabi [Weisbuch 92]. Dans ce cas l'échange énergétique périodique se produit entre exciton et photon.

On se limite dans ce qui suit au régime de couplage fort et on suppose de plus que l'émission spontané n'est pas modifiée par la cavité.

2.2.1 Exciton dans un semi-conducteur libre

L'émission et l'absorption du rayonnement dans un semi-conducteur sont régies par le passage des électrons entre la bande de valence et la bande de conduction (de différence énergétique E_g) qui sont séparées par une bande interdite (gap) où la transition électronique est non permise. L'observation du spectre d'absorption [Baumeister 61] a montré l'existence de pics étroits d'énergie inférieure à E_g. Ces résonances sont attribuées à des états liés électron-trou résultant de l'attraction colombienne entre un électron et un trou. Ces états sont semblables à des états de l'atome d'hydrogène. Ils sont appelés états excitoniques ou simplement excitons [Frenkel 31], [Wannier 37], [Knox 63], [Haug 90].

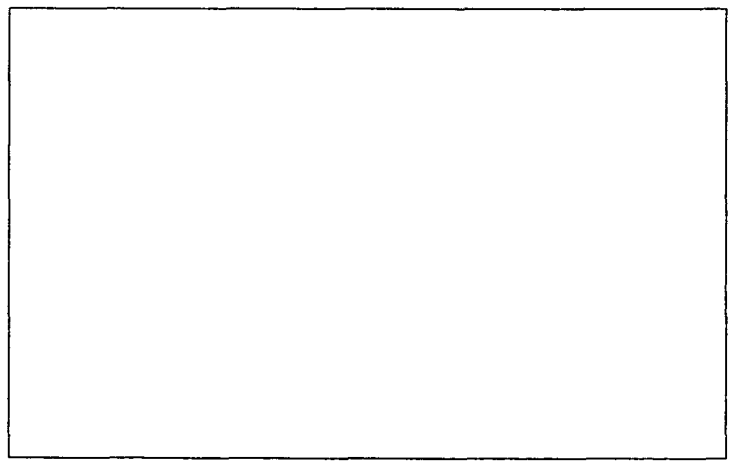


Fig. 6: Spectre d'absorption

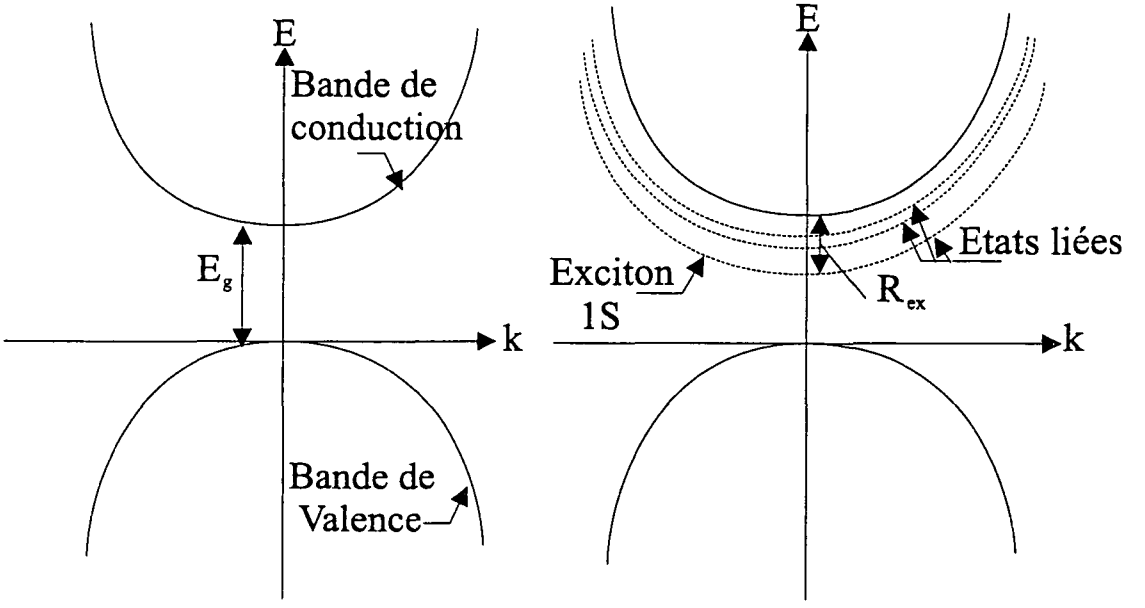


Fig. 7: les états excitoniques

Les excitons sont des états propres de l'hamiltonien[Haug 90], [Dimmock 67] :

$$H_{ex} = -\left(\frac{\hbar^2\nabla_r^2}{2m_r} + \frac{e^2}{\varepsilon\, r}\right) \tag{2.35}$$

où ε est la constante diélectrique du milieu et m_r la masse réduite définie par :

$$m_r = \frac{m_e^* m_h^*}{m_e^* + m_h^*} \tag{2.36}$$

dont m_e^* et m_h^* sont les masses effectives de l'électron et du trou. Dans l'arseniure de gallium (GaAs) où ont été faites beaucoup d'expériences, ces masses effectives sont de l'ordre de $m_e^* \approx 0.069\ m_0$ et $m_h^* \approx 0.35\ m_0$ (m_0 étant la masse libre de l'électron) [Miller 95] .

Les énergies de liaison excitonique ont une valeur de l'ordre de 10^{-4} fois celle de l'atome d'hydrogène ($E_n^{ex} \approx 10^{-4} E_n^{at}$) :

$$E_n^{ex} = -\frac{R_{ex}}{n^2};\quad n = 1, 2, ... \tag{2.37}$$

où R_{ex} est la constante de Rydberg excitonique qui définie l'énergie de liaison du premier état excitonique (exciton 1s) :

$$R_{ex} = \frac{m_r e^4}{2\hbar^2\varepsilon^2} \tag{2.38}$$

A titre indicatif la figure 8 donne pour différents semi-conducteurs la valeur de la constante de Rydberg R_{ex} et l'énergie de liaison E_g.

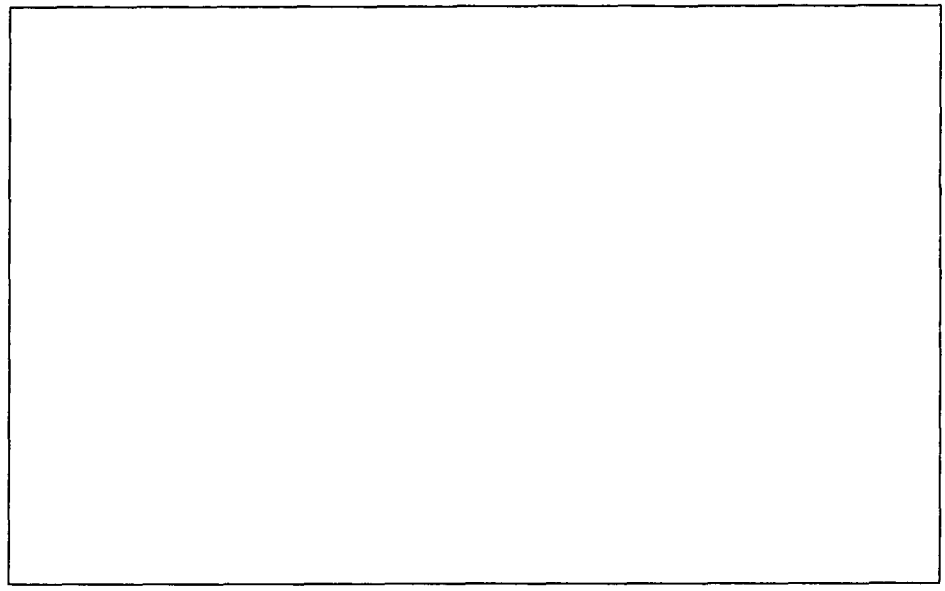


Fig. 8: Valeur de R_{ex} et E_g pour différents semi-conducteurs

Le rayon de Bohr excitonique :

$$a_0 = \frac{\hbar^2 \varepsilon}{m_r e^2} \tag{2.39}$$

est de l'ordre de 150 A^0 (dans Ga As massif [Miller 95]).

La fonction d'onde de l'exciton peut être exprimée en fonction des polynômes de Laguerre L_n^l et de la fonction harmonique sphérique Y_{lm} :

$$\Psi_{n,l,m} = -\sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3}} \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} L_{n+l}^{2l+1}(\rho)\, Y_{l,m}(\Theta, \varphi) \tag{2.40}$$

avec

$$\rho = \frac{2r}{na_0} \tag{2.41}$$

2.2.2 Exciton dans une cavité à puits quantiques

Une cavité à puits quantiques est constituée de couches trés minces de semiconducteur de dopages différents insérées entre deux miroirs de Bragg formés de couches multidiélectriques d'indices différents (figure 9). Dans de telles structures les états électroniques sont confinés dans une direction perpendiculaire au plan des puits et le mouvement est quantifié dans cette direction. Dans le plan des couches les électrons sont libres, et on peut parler de mouvement à deux dimensions.

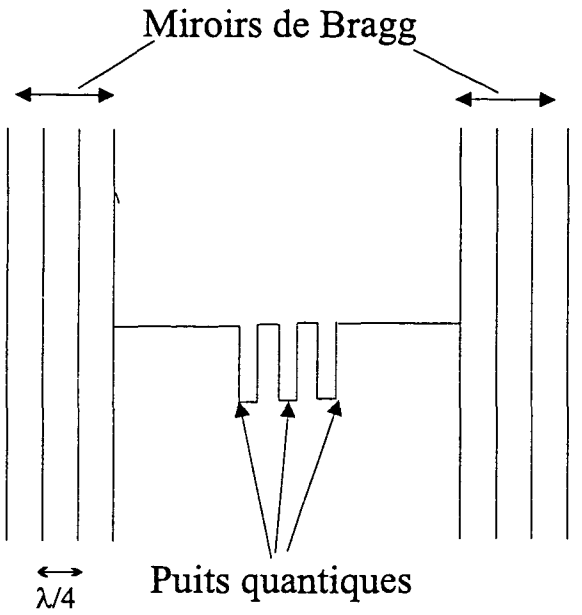


Fig. 9: Microcavité à puits quantiques

Dans cette configuration l'énergie de liaison des excitons dans les puits quantiques est donnée par [Haug 90] :

$$E_n^{2D} = \frac{-R_{ex}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}; n = 0, 1, 2, ... \tag{2.42}$$

Dans ce cas les excitons ont un Rayon de Bohr :

$$a^{2D} = \frac{a_0}{2} \tag{2.43}$$

et une fonction d'onde :

$$\Psi_{n,m} = -\sqrt{\frac{(n-|m|)!}{\pi a_0 \left(n+\frac{1}{2}\right)^3 [(n+|m|)!]^3}} \rho^{|m|} e^{-\frac{\rho}{2}} L_{n+|m|}^{2|m|}(\rho)\, e^{im\varphi} \tag{2.44}$$

avec

$$\rho = \frac{2r}{\left(n+\frac{1}{2}\right) a_0} \tag{2.45}$$

Notons que le confinement augmente l'énergie de liaison (d'un facteur quatre pour le premier état excité) et diminue le rayon de Bohr de l'exciton d'un facteur $\frac{1}{2}$. Le confinement permet aussi d'augmenter la force d'oscillateur de l'exciton [Miller 85], [Bastard 82] conduisant à une augmentation du couplage entre exciton et photon.

Pour de très faibles densités excitoniques (très faible pompage), les excitons n'interagissent pas. Ils peuvent être considérés comme des bosons sans interaction mutuelle [Haken

76]. Le couplage exciton photon donne lieu à une nouvelle particule composée appelée polariton [Hopfield 58], [Ulbrich 79], [Sermage 96].

2.2.3 Polariton.

Dans le régime de couplage fort, où la constante de couplage g est grande devant les dissipations excitoniques $\frac{\gamma}{2}$ et photoniques κ :

$$g^2 >> \left(\frac{\frac{\gamma}{2}+\kappa}{2}\right)^2 \tag{2.46}$$

L'exciton se couple à un mode unique de la cavité pour donner naissance à un polariton.

L'hamiltonien du système couplé est composé de trois termes :

$$H = H_F + H_{ex} + H_{int} \tag{2.47}$$

Le premier terme décrit les photons du mode de la cavité, le second le mode excitonique et le dernier l'interaction entre exciton et photon.

L'hamiltonien photonique s'écrit :

$$H_F = \hbar\omega_{ph} a^\dagger a \tag{2.48}$$

où ω_{ph} désigne la fréquence de ce mode et a,$a^\dagger$ les opérateurs d'annihilation et de création de photon vérifiant la relation de commutation :

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{2.49}$$

L'hamiltonien excitonique s'écrit :

$$H_{ex} = \hbar\omega_{ex} b^\dagger b \tag{2.50}$$

où ω_{ex} est la fréquence de l'exciton et b,$b^\dagger$ les opérateurs d'annihilation et de création excitonique vérifiant la relation de commutation :

$$[b, b^\dagger] = 1 \tag{2.51}$$

Ces deux oscillateurs harmoniques sont couplés par l'hamiltonien d'interaction :

$$H_{int} = \hbar g \left(a^\dagger b + a b^\dagger\right) \tag{2.52}$$

où la constante de couplage g est une fonction du nombre de puits N_{QW}, de la force d'oscillateur par unité de surface$\left(\frac{f}{S}\right)$, de la longueur effective de la cavité L_c, de la perméabilité diélectrique ε et de la masse libre de l'électron m_0 [Norris 94] :

$$g = e\sqrt{\frac{N_{QW}}{2m_0\varepsilon L_c}\left(\frac{f}{S}\right)} \tag{2.53}$$

L'interaction entre le mode de la cavité et l'exciton se traduit par échange d'excitation : le terme $a^\dagger b$ décrit la création d'un photon et l'annihilation d'un exciton et le terme $a b^\dagger$ décrit la création d'un exciton et l'annihilation d'un photon.

On considère tout d'abord le cas le plus simple où l'exciton et la cavité sont en résonance ($\omega = \omega_{ex} = \omega_{ph}$).

L'hamiltonien H est diagonalisable avec des opérateurs a_1, a_2 définis par :

$$a_1 = \frac{a+b}{\sqrt{2}} \tag{2.54}$$

$$a_2 = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

Ces opérateurs sont les modes propres du système couplé. Ils commutent entre eux et conservent les relations de commutations :

$$\left[a_1, a_1^\dagger\right] = 1$$

$$\left[a_2, a_2^\dagger\right] = 1 \tag{2.55}$$

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H = \hbar\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \hbar\omega_2 a_2^\dagger a_2 = H_1' + H_2' \tag{2.56}$$

avec

$$\omega_1 = \omega + g \tag{2.57}$$

$$\omega_2 = \omega - g$$

On constate que l'hamiltonien H est une somme de deux nouveaux oscillateurs harmoniques non couplés; ses états propres $|n_1, n_2\rangle$ sont appelés des polaritons.

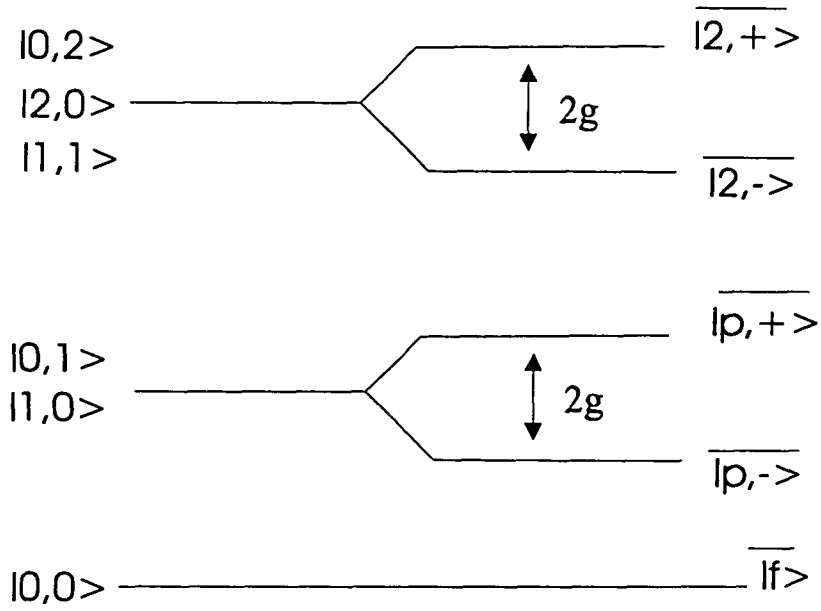


Fig. 10: Les polaritons

Les deux premiers états excités $|n_1 = 1, n_2 = 0\rangle$ et $|n_1 = 0, n_2 = 1\rangle$ ont pour énergies $\hbar\omega_1$ et $\hbar\omega_2$, séparées par la quantité $2\hbar g$. Ils vont donner naissance à un spectre d'émission ou d'absorption qui présente deux pics de fréquence ω_1 et ω_2 séparés par une fréquence de valeur 2g (fréquence de Rabi). On retrouve ici le même spectre que dans le cas de l'atome à deux niveaux.

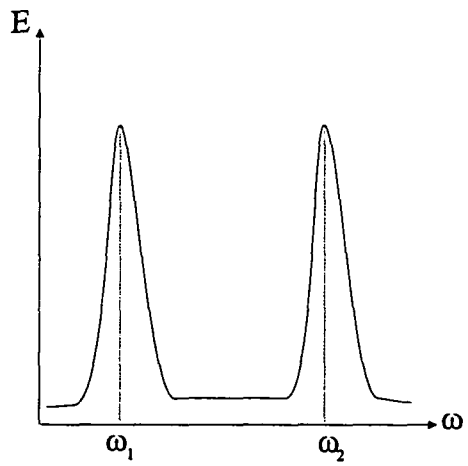


Fig. 11: Spectre d'émission en tenant compte des dissipations

Ce phénomène est analogue au couplage de deux oscillateurs classiques couplés où on observe l'apparition de deux modes propres : le premier se manifeste lorsque les deux oscillateurs oscillent ensemble en phase (mode a_1) et le deuxième lorsque les deux oscillateurs oscillent en opposition de phase (mode a_2).

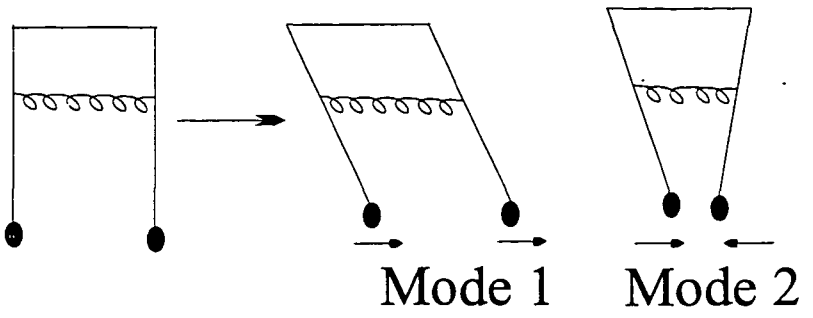


Fig. 12: Les modes de deux oscillateurs classiques couplés

D'une manière générale, lorsque le désaccord de fréquence entre exciton et cavité est non nul, les deux premiers états excités de l'hamiltonien (polaritons) sont donnés par les expressions suivantes :

$$\overline{|+,p\rangle} = \cos(\theta)\,|1,0\rangle - \sin(\theta)\,|0,1\rangle \tag{2.58}$$

$$\overline{|-,p\rangle} = \sin(\theta)\,|1,0\rangle + \cos(\theta)\,|0,1\rangle$$

où l'angle de couplage θ est défini par :

$$\tan(2\theta) = \frac{-g}{2\Delta} \tag{2.59}$$

et Δ désigne le désaccord exciton-cavité :

$$\Delta = \omega_{ph} - \omega_{ex} \tag{2.60}$$

Ces deux polaritons sont des superpositions des deux états non couplés $|1,0\rangle$ (un exciton et zéro photon dans la cavité) et $|0,1\rangle$ (zéro exciton et un photon dans la cavité) analogue à ceux définis dans le cas de l'atome (2.18). Ils sont séparés par une différence énergétique égale à $2\hbar\Omega$, où Ω est la fréquence de Rabi du vide :

$$\Omega = \sqrt{g^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} \tag{2.61}$$

La figure 13 montre la variation de la fréquence de Rabi du vide Ω en fonction de désaccord cavité-exciton. On constate que cette quantité est minimale pour la résonance exciton-cavité. Les états propres décrivant les polaritons sont alors les combinaisons $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle \pm |0,1\rangle)$.

Lorsque Δ varie, les deux branches de polaritons s'anticroisent. Les états propres correspondants tendent vers les états excitoniques et photoniques ($|1,0\rangle$ et $|0,1\rangle$) pour un fort désaccord.

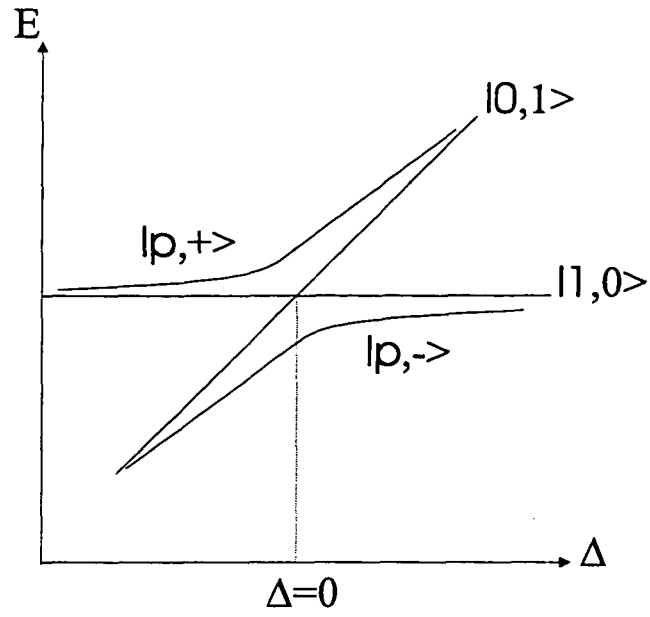


Fig. 13: variation de l' énergie en fonction de désaccord cavité-exciton

On peut montrer que les taux d'amortissements des polaritons sont [Sermage 96] :

$$\gamma_+ = \frac{\gamma}{2}\cos^2\theta + \kappa\sin^2\theta \tag{2.62}$$

$$\gamma_- = \frac{\gamma}{2}\sin^2\theta + \kappa\cos^2\theta$$

Ils sont égaux à résonance à la moyenne des dissipations excitoniques et photoniques ($\gamma_\pm = \frac{\frac{\gamma}{2}+\kappa}{2}$).

L'analogie de ce système avec l'atome habillé est frappante. Pour cette raison les polaritons sont appelés dans certains articles " exciton habillé ".

2.2.4 Interaction non linéaire exciton-photon

L'image simplifiée de l'exciton considéré comme un oscillateur harmonique (linéaire) a permis d'expliquer plusieurs phénomènes (spectre d'émission, oscillation de Rabi . . . .). Elle est valable dans la limite de très faible densité excitonique (très faible pompage). Si on augmente la densité excitonique, la distance qui sépare les excitons devient de plus en plus petite et l'exciton ne se comporte plus comme une particule libre. Les composantes électron et trou d'un exciton interagissent avec les composantes d'un autre, à cause de l'interaction colombienne et de la répulsion de Pauli, le modèle linéaire pour l'exciton ne devient plus valable.

Nous présentons dans cette partie et d'une manière rapide, la démarche [Steyn 83], [Hanamura 74] menant à l'hamiltonien non linéaire du système photon-exciton ainsi que les approximations utilisées.

On se limite au cas du semi-conducteur à deux bandes directes (bande de valence et bande de conduction).

L'hamiltonien du système couplé photon et semi-conducteur s'écrit :

$$\widetilde{H} = \widetilde{H}_{sm} + \widetilde{H}_{ph} + \widetilde{H}_{int} \tag{2.63}$$

Il est composé de trois termes, le premier décrit le semi-conducteur (système de plusieurs fermions), le second les photons de la cavité et le dernier l'interaction entre semi-conducteur et photon.

L'hamiltonien H_{sm} du système de plusieurs fermions s'écrit [Hanamura77] :

$$\widetilde{H}_{sm} = \int d^3\vec{x}\,\Psi^{\dagger}(\vec{x})\,\widetilde{H}_p(\vec{x})\,\Psi(\vec{x}) + \frac{1}{2}\int d^3\vec{x_1}d^3\vec{x_2}\Psi^{\dagger}(\vec{x_1})\,\Psi^{\dagger}(\vec{x_2})\,V_p(\vec{x_1}-\vec{x_2})\,\Psi(\vec{x_1})\,\Psi(\vec{x_2}) \tag{2.64}$$

où $\widetilde{H}_p$ est l'hamiltonien d'une seule particule placée en $\vec{x}$ et V_p représente l'interaction colombienne entre une particule en position $\vec{x_1}$ et une deuxième en position $\vec{x_2}$. La fonction d'onde Ψ s'écrit dans le formalisme de la seconde quantification en fonction de la fonction d'onde d'une seule particule Φ (état propre de l'hamiltonien H_p), de l'opérateur c_k de destruction d'un électron de la bande de conduction avec une impulsion $\vec{k}$ et de l'opérateur $d_{k'}$ opérateur de destruction d'un trou de la bande de valence avec une impulsion $\vec{k}$:

$$\Psi(\vec{x}) = \sum_k c_k\Phi_k(\vec{x}) + \sum_{k'} d_{k'}\Phi_{k'}(\vec{x}) \tag{2.65}$$

Dans ce cas, on exprime l'hamiltonien H_{sm} dans l'espace des impulsions [Hanamura 74b] sous la forme :

$$\widetilde{H}_{sm} = \sum E_{cp_1}(p_1)\,c^{\dagger}_{p_1}c_{p_1} - \sum E_{vp_2}(p_2)\,d^{\dagger}_{p_2}d_{p_2} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{p_1;p_2;q\\ p_1',p_2'}} V(q)\,(c^{\dagger}_{p_1+q}c^{\dagger}_{p_1'-q}c_{p_1'}c_{p_1} + d^{\dagger}_{p_2}d^{\dagger}_{p_2'}d_{p_2'-q}d_{p_2+q} - 2c^{\dagger}_{p_1+q}d^{\dagger}_{p_2'}d_{p_2'-q}c_{p_1}) \tag{2.66}$$

où E_c est l'énergie de la bande de conduction :

$$E_c(p_1) = \frac{\hbar^2 p_1^2}{2m_e^*} + E_g \tag{2.67}$$

E_v est l'énergie de la bande de valence :

$$E_v(p_1) = -\frac{\hbar^2 p_2^2}{2m_h^*} \tag{2.68}$$

et le potentiel d'interaction colombienne dans l'espace réciproque est :

$$V(q) = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon q^2} \tag{2.69}$$

Les deux premiers termes de (2.66) donnent l'énergie totale des électrons et des trous considérés comme libre et le troisième terme de l'hamiltonien décrit l'interaction entre électrons et trous : la première partie décrit l'interaction électron-électron, la deuxième l'interaction trou-trou et la troisième l'interaction électron-trou.

Revenons maintenant sur le deuxième et troisième termes ($\widetilde{H}_{int}$ et $\widetilde{H}_{ph}$) de l'hamiltonien total $\widetilde{H}$.

L'hamiltonien d'interaction entre champ et semi-conducteur a la forme générale suivante :

$$\widetilde{H}_{int} = \int d^3\vec{x}\,\Psi^\dagger(\vec{x})\,\vec{A}.\vec{p}\,\Psi(\vec{x}) \tag{2.70}$$

où $\vec{A}$ est le vecteur potentiel quantifié en terme d'opérateurs bosoniques $\widehat{a}$. On considère qu'un seul mode du champ interagit avec le semi-conducteur. En utilisant une procédure analogue à celle présentée ci-dessus et en faisant l'approximation du champ tournant, on trouve :

$$\widetilde{H}_{int} = \hbar \sum_{p_1 p_2} g_c' c_{p_1}^\dagger d_{p_2}^\dagger \widehat{a} \tag{2.71}$$

g_c' étant la constante de couplage.

L'hamiltonien du champ s'écrit :

$$\widetilde{H}_F = \hbar\omega_{ph}\widehat{a}^\dagger\widehat{a} \tag{2.72}$$

Dans la suite, on introduit l'opérateur de création d'un exciton de vecteur d'onde $\vec{k}$:

$$\widehat{b}_k^\dagger = \sum_{p_1 p_2} \delta_{k,p_1-p_2}\varphi(k)\, c_{p_1}^\dagger d_{p_2}^\dagger \tag{2.73}$$

où φ est la fonction d'onde de l'état fondamental de l'exciton.

L'opérateur excitonique vérifie la relation de commutation [Keldysh 68] :

$$\left[\widehat{b}_k, \widehat{b}_k^{\dagger}\right] = 1 - O\left(\varrho a^{ex}\right) \tag{2.74}$$

avec ϱ est la densité excitonique et a^{ex} le rayon de Bohr excitonique.

Pour une faible densité excitonique $\varrho a^{ex} << 1$ l'exciton peut donc être considéré comme étant un boson.

On passe de l'espace des opérateurs fermionique (décrivant les électrons et les trous) vers l'espace des opérateurs bosoniques (décrivant les excitons) soit par la transformation de Marmori modifiée [Steyn 83] ou bien par la transformation de Usi [Hanamura 74]. On obtient un nouveau hamiltonien :

$$H = U\widetilde{H}U \tag{2.75}$$

où U est l'opérateur de transformation.

On considère dans la suite le cas de faible densité excitonique,où l'opérateur excitonique vérifie la relation de commutation des bosons, mais où certains effets non linéaires venant du troisième terme de (2.66) sont non négligables et on se limite au cas des excitons d'impulsion nulle (dans le plan des couches). On ne tiendra compte que de l'état excitonique 1S de l'exciton (la force d'oscillateur est très grande pour l'exciton 1S par rapport à la force d'oscillateur des autres états excitoniques).

Dans ce cas on montre ([Hanamura 74]) que l'hamiltonien H du système total exciton-photon prend la forme suivante :

$$H = H_{ex} + H_{ph} + H_{int} \tag{2.76}$$

H est la somme de l'hamiltonien excitonique, de l'hamiltonien photonique et de l'hamiltonien d'interaction qui sont respectivement les transformés de $\widetilde{H}_{sm}$, $\widetilde{H}_{ph}$ et $\widetilde{H}_{int}$ par U.

L'hamiltonien d'interaction s'écrit :

$$H_{int} = \hbar g^{'}\left(\widehat{a}^{\dagger}\widehat{b} + \widehat{b}^{\dagger}\widehat{a}\right) - r^{'}\hbar g^{'}\left(\widehat{a}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b} + \widehat{a}^{\dagger}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b}\widehat{b}\right) \tag{2.77}$$

Il est composé de deux termes: le premier terme est le couplage linéaire et le second un terme de couplage non-linéaire. Celui-ci s'explique qualitativement par un effet du remplissage de l'espace de phases : plus il a d'excitons, plus il est difficile de créer d'autres en plus. Il est caractérisé par la constante du couplage non-linéaire $r^{'}$. La constante $r^{'}$ dépend du volume du système V et du rayon de Bohr de l'exciton a^{ex} par l'expression approché suivante:

$$r^{'} \approx \frac{7\pi\left(a^{ex}\right)^3}{V} \tag{2.78}$$

L'hamiltonien du champ est comme précédemment :

$$H_{ph} = \hbar\omega_{ph}\widehat{a}^{\dagger}\widehat{a} \tag{2.79}$$

L'hamiltonien excitonique prend la forme suivante :

$$H_{ex} = \hbar\omega_{ex}\widehat{b^\dagger}\widehat{b} + \hbar\alpha'\widehat{b^\dagger}\widehat{b^\dagger}\widehat{bb} \tag{2.80}$$

avec:

$$\alpha' \approx \frac{26\pi\,(a^{ex})^3\,E^{ex}}{3\hbar V} \tag{2.81}$$

Il contient un terme de non-linéarité excitonique $\hbar\alpha'\widehat{b^\dagger}\widehat{b^\dagger}\widehat{bb}$ décrivant l'interaction Colombienne entre deux excitons (non-linéarité excitonique). L'effet de ce terme est en général assez nettement supérieur à celui du terme non linéaire de (2.77). Nous calculerons séparément l'effet de ces différents termes non linéaires puis l'effet total dans les chapitres 5, 6 et 7.

3 Fonction d'autocorrélation et états comprimés

3.1 Fonction d'autocorrélation

L'étude des corrélations d'intensité de la lumière émise par un système physique constitue un outil puissant pour étudier ce système.

Par exemple, jusqu'au début des années 50, les astrophysiciens utilisaient l'interférométrie de Michelson pour mesurer les distances angulaires des étoiles [Pease 31]. En 1956, Hanbury Brown et Twiss ont proposé une nouvelle méthode basée sur l'utilisation des corrélations d'intensité [Hanbury Brown 56].

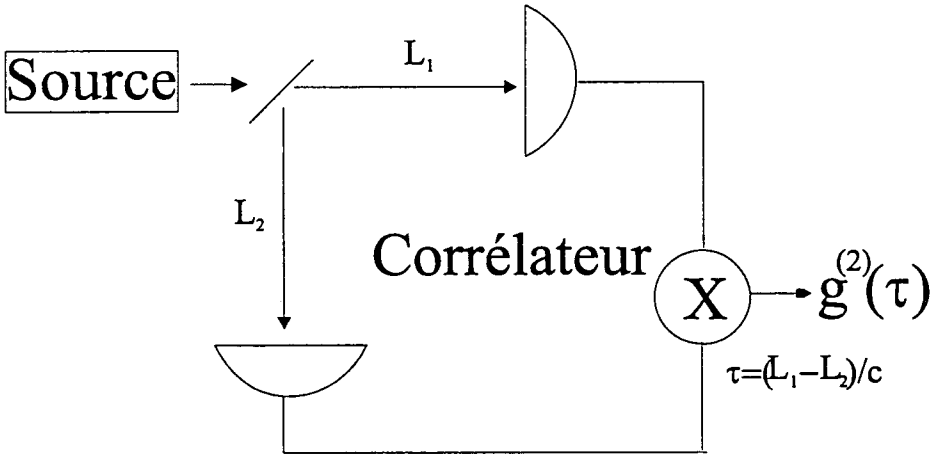


Fig. 14: Principe de corrélation d'intensité de Hany Brown et Twiss

Grâce à cette méthode, ils sont parvenus, d'une part, à améliorer la précision de ces mesures, et d'autre part, à mesurer des distances beaucoup plus petites. Au fil du temps, la mesure des corrélations d'intensité a pris une ampleur de plus en plus grande. Elle est devenue un outil puissant pour explorer la dynamique interne d'un système donné à partir de l'étude de la statistique des champs émis par celui ci. En particulier elles ont permis de mettre en évidence expérimentalement la nature non-classique de la lumière [Kimble 77].

3.1.1 Définition classique de $g^{(2)}$

Nous nous limiterons tout au long de cette thèse au régime stationnaire. Dans ce régime la fonction d'autocorrélation d'intensité est alors définie classiquement par :

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t+\tau)\, I(t)\rangle}{\langle I\rangle^2} \tag{3.1}$$

où la valeur moyenne "$\langle\rangle$" correspond à la moyenne d'ensemble statistique.

La fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$ présente un certains nombres de propriétés qui sont présentées dans la suite.

Les systèmes étudiés sont supposés ergodiques, c'est-à-dire que la valeur moyenne d'état et la valeur moyenne temporelle sont égales pour n'importe quel opérateur du système. On montre que [Mandel 95] de cette ergodicité découle la première propriété de $g^{(2)}$:

$$\lim_{\tau\to\infty} g^{(2)}(\tau) = 1 \tag{3.2}$$

Ce qui nous permet de définir le temps de cohérence τ_c comme le temps caractéristique au delà duquel $g^{(2)}(\tau) \approx 1$. Dès que τ est très supérieur au temps de cohérence τ_c ($\tau \gg \tau_c$), les valeurs moyennes de l'intensité mesurées à des instants distants de τ sont non corrélés (voir fig explicatif).

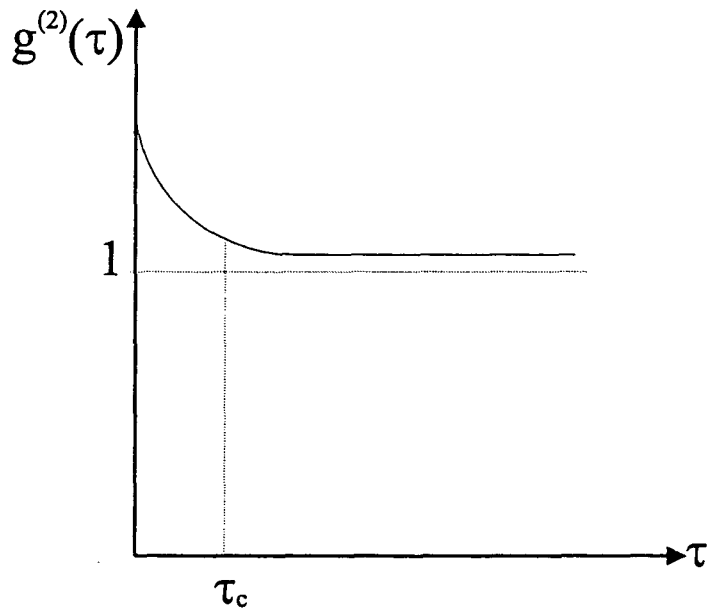


Fig. 15: Temps de cohérence

Dans ce régime (régime stationnaire) une deuxième propriété de $g^{(2)}$ est l'invariance par renversement du temps (Symétrie T) :

$$g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(-\tau) \tag{3.3}$$

En effet, à partir de la définition de $g^{(2)}$stationnaire on peut écrire :

$$g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(t, t+\tau) = \frac{\langle I(t+\tau) I(t)\rangle}{\langle I\rangle^2} \tag{3.4}$$

ensuite, la stationnarité donne :

$$\begin{aligned} \frac{\langle I(t+\tau) I(t)\rangle}{\langle I\rangle^2} &= \frac{\langle I(0) I(-\tau)\rangle}{\langle I\rangle^2} \\ &= g^{(2)}(-\tau) \end{aligned} \tag{3.5}$$

et enfin, on obtient à partir de ces deux dernières relations :

$$g^{(2)}(-\tau) = g^{(2)}(\tau) \tag{3.6}$$

Une troisième propriété marquante de $g^{(2)}$ est :

$$g^{(2)}(\tau) \leqslant g^{(2)}(0) \;\; ; \forall \tau \tag{3.7}$$

Elle découle directement de l'inégalité de Schwarz. En effet quelque soit t et τ, on a :

$$\left\langle \left(I(t+\tau) - I(t)\right)^2 \right\rangle \geq 0$$

ce qui donne :

$$\left\langle (I(t))^2 \right\rangle - 2\langle I(t+\tau) I(t)\rangle + \left\langle (I(t+\tau))^2 \right\rangle \geq 0$$

vu la stationnarité on obtient :

$$\langle I(t+\tau) I(t)\rangle \leqslant \langle I^2\rangle$$

qui est équivalent à :

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t+\tau) I(t)\rangle}{\langle I\rangle^2} \leqslant \frac{\langle I^2\rangle}{\langle I\rangle^2} = g^{(2)}(0)$$

La quatrième propriété de $g^{(2)}$est :

$$g^{(2)}(0) \geqslant 1 \tag{3.8}$$

Elle se démontre à partir de la troisième et de la première lorsque $\tau \to \infty$:

$$g^{(2)}(0) \geqslant \lim_{\tau \to \infty} g^{(2)}(\tau)$$

et on obtient :

$$g^{(2)}(0) \geqslant 1 \tag{3.9}$$

De plus la fonction d'autocorrélation est une fonction continue [Mandel 95].
Si en même temps l'intensité I est continue, alors $g^{(2)}$ possède un extremum à τ=0 :

$$\frac{dg^{(2)}}{d\tau} \mid_{\tau=0} = 0 \tag{3.10}$$

3.1.2 Définition quantique de $g^{(2)}$:

La quatrième propriété de la fonction d'autocorrélation classique indique que $g^{(2)}(0)$ ne peut être que supérieur ou égale à 1. Or il a été démontré expérimentalement, que cette propriété n'est pas respectée pour la lumière de fluorescence d'un atome [Kimble 77]. En fait, au niveau quantique, l'expression de la fonction d'autocorrélation d'intensité $g^{(2)}$ telle qu'elle est mesurée par les détecteurs n'est pas donnée par (3.1). Quantiquement la fonction d'autocorrélation d'intensité $g^{(2)}$ est définie dans le cas d'un champ monomode [Glauber 63] par :

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle : I(t+\tau)\, I(t) : \rangle}{\langle I \rangle^2} = \frac{\langle\, \widehat{a}^{\dagger}(0)\ \widehat{a}^{\dagger}(\tau)\ \widehat{a}(\tau)\ \widehat{a}(0) \rangle}{\langle\, \widehat{a}^{\dagger}\, \widehat{a} \rangle^2} \tag{3.11}$$

où ':' désigne l'ordre normal et $\widehat{a}$, $\widehat{a}^{\dagger}$ les opérateurs de création et d'annihilation d'un photon dans ce mode.

$g^{(2)}$ est donc proportionnel à la probabilité de détecter un photon à l'instant t et un autre à l'instant t+τ (qui n'est pas obligatoirement celui qui est émis juste après).

En utilisant la distribution de quasiprobabilité P(α) de Glauber-Sudarshan [Glauber 63][Sudarshan 63], on peut écrire [Cohen-Tannoudji 80] :

$$g^{(2)}(0) - 1 = \frac{\int d^2\alpha'\ P(\alpha') \left(|\alpha'|^2 - \int d^2\alpha\, |\alpha|^2\ P(\alpha) \right)^2}{\left(\int d^2\alpha\ |\alpha|^2\ P(\alpha) \right)^2} \tag{3.12}$$

ce qui ne donne $g^{(2)}(0) \leqslant 1$ que pour des quasiprobabilités P(α) qui peuvent prendre des valeurs négatives. Le fait que $g^{(2)}(0)$ est inférieur à 1 est donc caractéristique d'un champ non-classique.

La fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$ est reliée directement à la statistique du champ, En effet $g^{(2)}$ est lié au facteur de Mandel Q_M par [Teich 88] :

$$Q_M = \langle n \rangle \left(g^{(2)}(0) - 1 \right) \tag{3.13}$$

avec

$$Q_M = \frac{\Delta n^2}{\langle n \rangle} - 1$$

où $\langle n \rangle$ est le nombre de photons moyen et $\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ l'écart quadratique moyen dans le champ.

Le facteur de Mandel représente l'écart par rapport à la statistique poissonienne. Ainsi Q_M est négatif pour un champ subpoissonien, nul pour un champ poissonien et positif pour un champ superpoissonien. Ceci nous permet de déduire que l'effet de dégroupement ($g^{(2)}(0) < 1$) est une manifestation de la statistique subpoissonienne du champ tandis que l'effet de groupement ($g^{(2)}(0) > 1$) est une manifestation de la statistique superpoissonienne du champ. Enfin on peut dire que le champ poissonien ne présente ni d'effet de groupement ni d'effet de dégroupement ($g^{(2)}(0) = 1$).

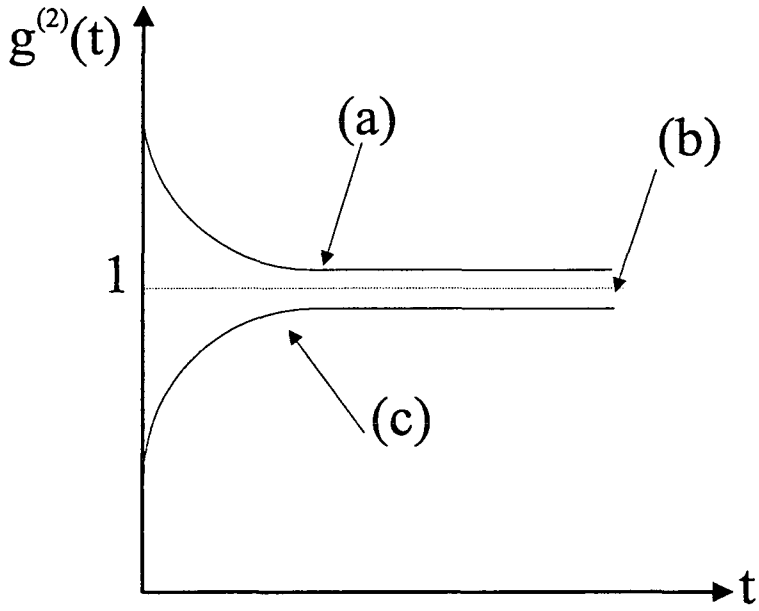


Fig. 16: Fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$ en fonction du temps t pour :(a)champ classique (effet de groupement),(b)champ cohérent et(c)champ non-classique (effet de dégroupement)

En 1977 Kimble Dagenais et Mandel ont mesuré la corrélation d'intensité dans la lumière de fluorescence d'un atome [Kimble 77], et ont mis en évidence pour la première fois l'effet de dégroupement et donc l'existence d'états non-classiques du champ.

L'effet de dégroupement s'explique dans ce cas de la façon suivante : après l'émission d'un photon, l'atome retourne dans l'état fondamental et ne peut reémettre un second photon au même instant.

La mesure de la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$ révèle des effets non classiques sur l'intensité. De plus elle est bien adapté à des champs à petit nombre de photons. Pour caractériser les effets non-classique de manière plus générale, en particulier les effets sur les diverses composantes du champ il est utile d'introduire la notion de spectre de bruit.

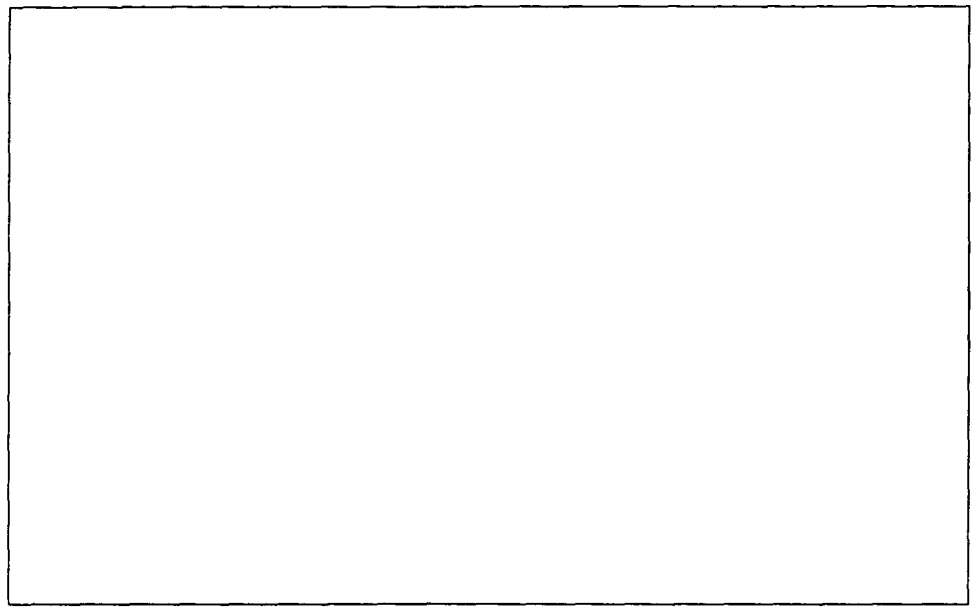


Fig. 17: Fonction de corrélation d'intensité de la lumiére de fluorescence d'un atome (experience de Kimble Dagnois et Mandel 1977)

3.2 Spectre de bruit

La précision des mesures en optique a longtemps été considérée comme limitée par le bruit de photon ou bruit quantique standard (Shot noise). Dans les années 70 et 80, des études théoriques [Stoler 70], [Stoler 71], [Yuen 76] suivies par des études expérimentales [Slusher 85], [Wu 86] ont montré la possibilité de dépasser cette limite, ouvrant la possibilité de nombreuses applications, comme l'amélioration des mesures interférométriques (en particulier dans le but de détecter les ondes gravitationnelles) [Grishuck 77], [Jaekel 90], les mesures spectroscopiques [Zhang 95], [Marin 97], [Polzik 92], [Souto Ribeiro 97] et l'utilisation des signaux de télécommunication moins bruités [Yuen 76].

3.2.1 Définition des états comprimés

Un champ classique monomode E(t) est défini par sa fréquence ω, son amplitude E et sa phase φ_0 :

$$E(t) = E\cos(\omega t - \varphi_0) \tag{3.14}$$

Le champ E peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$E(t) = E_1\cos(\omega t) + E_2\sin(\omega t) \tag{3.15}$$

où E_1 et E_2 sont les composantes de quadratures du champ. Le champ $E(t)$ est représenté dans le plan de Fresnel par un point de coordonnées cartésiennes (E_1, E_2) ou polaires (E, φ_0) .

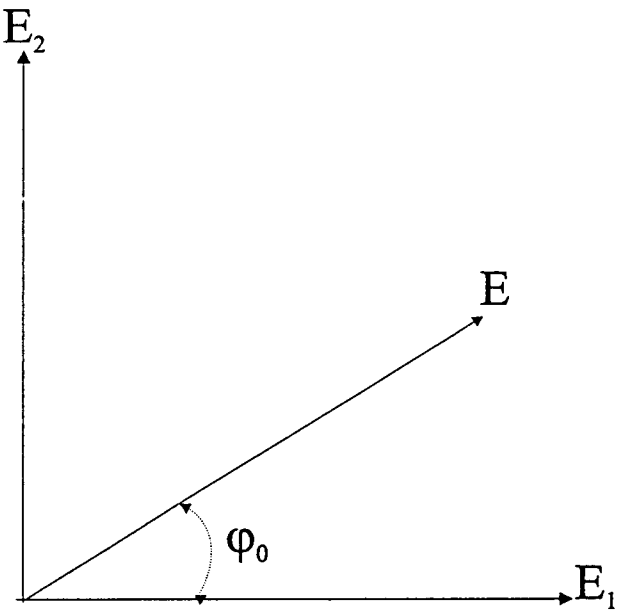


Fig. 18: Représentation du champ E dans le plan de Fresnel

En optique quantique les quadratures du champ sont des opérateurs, qui peuvent être exprimés en fonction des opérateurs photoniques d'annihilation et de création $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$ et en fonction du champ d'un seul photon E_0 :

$$\hat{E}_1 = E_0 \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger \right) \tag{3.16}$$

$$\hat{E}_2 = \frac{E_0}{i} \left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger \right)$$

De la relation $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger \right] = 1$ pour les opérateurs $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, découle la relation de commutation pour $\hat{E}_1$ et $\hat{E}_2$:

$$\left[\hat{E}_1, \hat{E}_2 \right] = 2iE_0^2 \tag{3.17}$$

Les quadratures $\hat{E}_1$ et $\hat{E}_2$ sont alors des observables conjuguées qui ne commutent pas. Par conséquent, elles obéissent à l'inégalité de Heisenberg, qui impose une limite inférieure au produit de leurs variances :

$$\left\langle \Delta \hat{E}_1^2 \right\rangle \left\langle \Delta \hat{E}_2^2 \right\rangle \geqslant E_0^4 \tag{3.18}$$

E_0 apparaît comme la limite quantique standard des fluctuations quantiques. E_0 correspond aussi à la dispersion des fluctuations pour le vide et les états cohérents.

La relation d'incertitude n'interdit pas que l'un des facteurs ($\Delta\ \widehat{E}_1$ ou $\Delta\ \widehat{E}_2$) soit inférieur au shot noise (E_0) pourvu que la grandeur conjuguée soit supérieure à E_0. Les états qui ont ce type de propriété sont appelés des états comprimés.

Dans l'espace des phases (espace décrit par les deux quadratures $\widehat{E}_1$ et $\widehat{E}_2$ qui correspond classiquement au plan de Fresnel), le champ est représenté par sa valeur moyenne classique, à laquelle sont superposées ses fluctuations quantiques. A cause de la relation d'incertitude de Heisenberg, l'extrémité du vecteur champ dans l'espace des phases n'est pas un point. Le champ est alors décrit par une distribution dans l'espace des phases.

Les fluctuations du vide ou d'un état cohérent correspondent dans l'espace des phases à un cercle dont la surface est égale à la surface minimale (πE_0^2) [Reynaud 90], [Reynaud 92], et à une distribution gaussienne des fluctuations pour les deux quadratures.

Un état comprimé (qui a une dispersion plus faible sur l'une des composantes) est représenté dans l'espace des phases par une ellipse.

La représentation d'un champ monomode en composantes de quadrature n'est pas unique. En effet, on peut changer l'origine des phases dans l'équation (3.15). Ainsi la représentation générale d'un champ peut s'écrire :

$$\widehat{E} = \widehat{E}_{1,\Theta} \cos(\omega t - \Theta) + \widehat{E}_{2,\Theta} \sin(\omega t - \Theta) \tag{3.19}$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{E}_{1,\Theta} &= \widehat{E}_1 \cos(\Theta) + \widehat{E}_2 \sin(\Theta) = E_0 X_\Theta \\ \widehat{E}_{2,\Theta} &= -\widehat{E}_1 \sin(\Theta) + \widehat{E}_2 \cos(\Theta) = E_0 X_{\Theta+\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$X_\Theta = \widehat{a}^\dagger\, e^{i\Theta} + \widehat{a}\, e^{-i\Theta} \tag{3.21}$$

Les états comprimés sont définis de manière générale comme les états ayant un bruit réduit au dessous de shot noise sur l'une des quadratures $\widehat{E}_{1,\Theta}$ ou $\widehat{E}_{2,\Theta}$, pour une valeur déterminée de Θ.

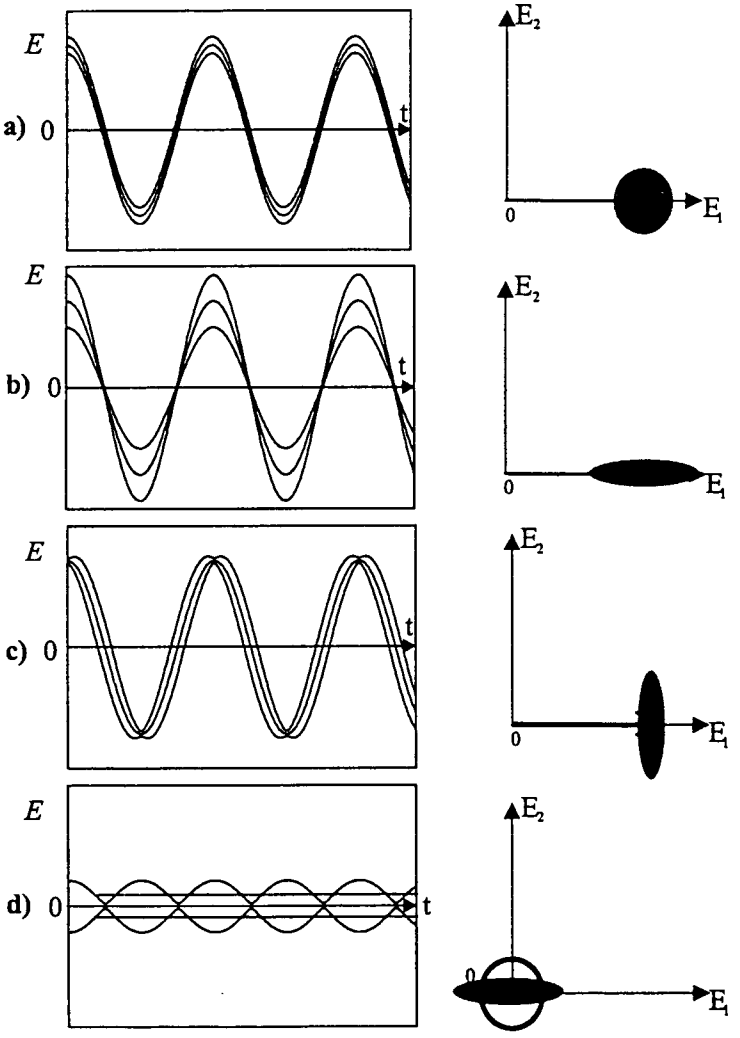


Fig. 19: Allure de la dépendence spatiale du champ électrique et représentation de Fresnel pour différents états du champ: a) Etat cohérent; b) et c) Etats comprimés; d) le vide comprimé

3.2.2 Spectre de bruit

Le spectre de bruit permet de caractériser de manière plus détaillée que la variance les fluctuations quantiques du champ.

Le spectre de bruit pour une quadrature $\widehat{X}_\theta = \widehat{a}^\dagger\, e^{i\Theta} + \widehat{a}\, e^{-i\Theta}$ est défini par :

$$S_\Theta[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle \widehat{X}_\theta(t)\,;\widehat{X}_\theta(0) \right\rangle e^{-i\omega t} dt \tag{3.22}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\widehat{X}_\theta \widehat{X}_\theta}(t)\; e^{-i\omega t} dt$$

où $C_{\widehat{X}_\theta \widehat{X}_\theta}$ est la covariance de la quadrature $\widehat{X}_\theta$ définie par :

$$C_{\widehat{X}_\theta \widehat{X}_\theta}(t) = \left\langle \widehat{X}_\theta(t)\,;\widehat{X}_\theta(0) \right\rangle \tag{3.23}$$

$$= \left\langle \widehat{X}_\theta(t)\,\widehat{X}_\theta(0) \right\rangle - \left\langle \widehat{X}_\theta(t) \right\rangle \left\langle \widehat{X}_\theta(0) \right\rangle$$

En écrivant l'opérateur de quadrature $\widehat{X}_\theta$ comme la somme d'une valeur moyenne et d'un terme de fluctuation :

$$\widehat{X}_\theta = \left\langle \widehat{X}_\theta \right\rangle + \delta\widehat{X}_\theta \tag{3.24}$$

la fonction de covariance $C_{\widehat{X}_\theta \widehat{X}_\theta}$ s'interpréte comme la moyenne des produits des fluctuations $\delta\widehat{X}_\theta$ à deux instants distants d'un laps de temps t :

$$C_{\widehat{X}_\theta \widehat{X}_\theta} = \left\langle \delta\widehat{X}_\theta(t)\,\delta\widehat{X}_\theta(0) \right\rangle \tag{3.25}$$

et le spectre de bruit S représente la transformée de Fourier de la covariance $C_{\widehat{X}_\theta \widehat{X}_\theta}$.

Le spectre de bruit du vide ou d'un état cohérent est indépendant de la fréquence et de l'angle de quadrature Θ, il a toujours 1 comme valeur :

$$(S_\Theta[\omega])_{\,shot} = 1 \tag{3.26}$$

le shot noise est donc un bruit blanc.

Un champ est dit comprimé si une de ses quadratures possède des fluctuations dont une des composantes de fréquence a un bruit inférieur au bruit quantique standard, c'est-à-dire s'il existe Θ et ω tels que :

$$S_\Theta[\omega] < 1 \tag{3.27}$$

Le spectre de bruit optimum est défini par :

$$S_{opt}[\omega] = Min_{\Theta\in[0,2\pi]} S[\omega] \tag{3.28}$$

Il donne la valeur minimale du bruit sur une composante de quadrature d'un état comprimé. On appelle souvent taux de compression ou squeezing la quantité 1-S_{opt}.

Dans la suite on dérive une relation simple permettant de déterminer le spectre de bruit optimal.

Les relations (3.21),(3.24) et (3.25) conduisent à l'expression suivante :

$$C_{\hat{X}_\theta \hat{X}_\theta} = \langle \delta\,\hat{a}(t)\,\delta\,\hat{a}(0)\rangle\ e^{-\,2i\Theta} + \langle \delta\,\hat{a}^\dagger(t)\,\delta\,\hat{a}^\dagger(0)\rangle\ e^{\,2i\Theta} + \langle \delta\,\hat{a}(t)\,\delta\,\hat{a}^\dagger(0)\rangle + \langle \delta\,\hat{a}^\dagger(t)\,\delta\,\hat{a}(0)\rangle \tag{3.29}$$

ce qui nous permet d'écrire une expression générale du spectre de bruit :

$$S[\omega] = C_{\hat{a}\,\hat{a}}[\omega]\ e^{-\,2i\Theta} + C_{\hat{a}^\dagger\,\hat{a}^\dagger}[\omega]\,e^{\,2i\Theta} + C_{\hat{a}^\dagger\,\hat{a}}[\omega] + C_{\hat{a}\,\hat{a}^\dagger}[\omega] \tag{3.30}$$

où

$$C_{\hat{a}\,\hat{a}}[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \delta\,\hat{a}(t)\,\delta\,\hat{a}(0)\rangle\ e^{-\,i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\hat{a}\,\hat{a}}(t)\ e^{-\,i\omega t}dt \tag{3.31}$$

$$C_{\hat{a}^\dagger\,\hat{a}}[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \delta\,\hat{a}^\dagger(t)\,\delta\,\hat{a}(0)\rangle\ e^{-\,i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\hat{a}^\dagger\,\hat{a}}(t)\ e^{-\,i\omega t}dt \tag{3.32}$$

$$C_{\hat{a}\,\hat{a}^\dagger}[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \delta\,\hat{a}(t)\,\delta\,\hat{a}^\dagger(0)\rangle\ e^{-\,i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\hat{a}\,\hat{a}^\dagger}(t)\ e^{-\,i\omega t}dt \tag{3.33}$$

La quadrature qui donne S_{opt} est définie par l'angle Θ_{opt} qui minimise (3.30) et vérifie la relation suivante :

$$e^{2i\Theta_{opt}} = -\frac{C_{\hat{a}\,\hat{a}}[\omega]}{|C_{\hat{a}\,\hat{a}}[\omega]|} \tag{3.34}$$

Le spectre de bruit optimum S_{opt} a finalement une expression simple en fonction des transformées de Fourier des covariances du champ $C_{\hat{a}\,\hat{a}}, C_{\hat{a}^\dagger\,\hat{a}}$ et $C_{\hat{a}\,\hat{a}^\dagger}$ [Hilico 92] :

$$S_{opt}[\omega] = -2\,|C_{\hat{a}\,\hat{a}}[\omega]| + C_{\hat{a}^\dagger\,\hat{a}}[\omega] + C_{\hat{a}\,\hat{a}^\dagger}[\omega] \tag{3.35}$$

4 Calcul de la fonction d'autocorrélation dans le cas linéaire

On rappelle que l'un des buts de cette thèse est d'étudier dans la limite du couplage fort les corrélations des champs émis par des microcavités semi-conductrices, soit pour un système en transmission, soit pour un système en réflexion.

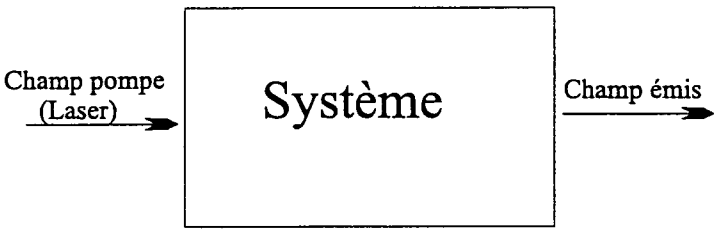


Fig. 20: Systéme en transmission

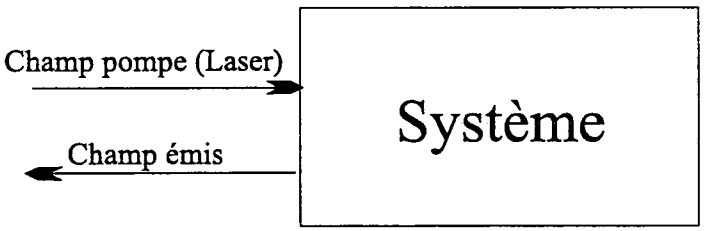


Fig. 21: Systéme en réflexion

Nous nous concentrons dans ce chapitre sur l'étude de la fonction de corrélation $g^{(2)}$, en négligeant l'interaction non-linéaire entre les excitons et en traitant séparément le cas du pompage cohérent et du pompage incohérent.

Dans un premier temps nous traitons le cas du pompage cohérent. Le traitement de ce cas donne une fonction d'autocorrélation indépendante du temps et égale à 1. Ce résultat était prévisible. En effet, un système linéaire transforme un état cohérent en un autre état cohérent et en plus la fonction d'autocorrélation d'un état cohérent est égale à 1. Cependant, ce traitement permet d'introduire les équations de base, les

transformations utilisées, et de définir les variables utiles. Il permet aussi d'éclaircir dans ce cas simple, la méthode établie dans cette thèse pour le calcul de la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$. Ensuite, nous étudions le cas du pompage incohérent que l'on modélise par un couplage avec un réservoir thermique d'excitons. Nous montrons que la fonction d'autocorrélation oscille avec des amplitudes d'autant plus faibles et des fréquences d'autant plus grandes que le désaccord exciton-cavité est plus grandes.

4.1 Pompage cohérent

Si en néglige l'interaction non-linéaire entre les excitons, l'hamiltonien du système dans le cas du pompage cohérent s'écrit :

$$H = H_{int} + H_{ph} + H_{ex} + H_L \tag{4.1}$$

H est composé de quatre termes; le premier décrit l'exciton, le second, le mode de la cavité, le troisième l'interaction entre l'exciton et le champ de la cavité et le dernier, l'interaction entre le laser (pompe) et la cavité. Ces termes sont définis de la manière suivante :

$$H_{ex} = \hbar\omega_{ex}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b} \tag{4.2}$$

$$H_{ph} = \hbar\omega_{ph}\widehat{a}^{\dagger}\widehat{a} \tag{4.3}$$

$$H_{int} = \hbar g^{'}\left(\widehat{a}^{\dagger}\widehat{b} + \widehat{b}^{\dagger}\widehat{a}\right) \tag{4.4}$$

$$H_L = \hbar\varepsilon^{'}e^{i\varphi}e^{i\omega t}\widehat{a}^{\dagger} + \hbar\varepsilon^{'}e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}\widehat{a} \tag{4.5}$$

nous notons ω_{ph}, ω_{ex} et ω_L, les fréquences respectives de la cavité, de l'exciton et du laser, $g^{'}$ la constante de couplage, $\varepsilon^{'}$ l'amplitude du champ pompe intracavité et φ sa phase. $(\widehat{a}, \widehat{a}^{\dagger})$et $\left(\widehat{b}, \widehat{b}^{\dagger}\right)$sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation des photons et des excitons, ils obéissent aux relations de commutations suivantes :

$$\left[\widehat{a}, \widehat{a}^{\dagger}\right] = 1$$

$$\left[\widehat{b}, \widehat{b}^{\dagger}\right] = 1 \tag{4.6}$$

En représentation d'interaction ($\widehat{a} = \overline{a}e^{\,-i\omega t}$, $\widehat{b} = be^{\,-i\omega t}$), l'hamiltonien H devient :

$$H_I = -\hbar\Delta_a^{'}\overline{a}^{\dagger}\overline{a} + -\hbar\Delta_b^{'}b^{\dagger}b + \hbar\varepsilon^{'}e^{i\varphi}\overline{a}^{\dagger} + \hbar\varepsilon^{'}e^{\,-i\varphi}\overline{a} + \hbar g^{'}\left(\overline{a}^{\dagger}b + \overline{a}b^{\dagger}\right) \tag{4.7}$$

où $\Delta_a^{'}$ et $\Delta_b^{'}$ désignent le désaccord de fréquence de la cavité et de l'exciton par rapport à la fréquence du laser :

$$\Delta_a^{'} = \omega_L - \omega_{ex} \tag{4.8}$$

$$\Delta_b^{'} = \omega_L - \omega_{ph} \tag{4.9}$$

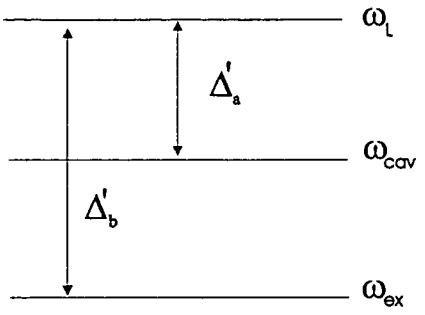


Fig. 22: désaccord de fréquence

En tenant compte de la dissipation excitonique et de la dissipation de la cavité, l'évolution du système est régie par l'évolution de l'opérateur densité ρ.

En représentation d'interaction l'équation pilote de l'opérateur densité est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{1}{i\hbar}[H_I, \rho] + \kappa^{'}\left(2\overline{a}\rho\overline{a}^{\dagger} - \overline{a}^{\dagger}\overline{a}\rho - \rho\overline{a}^{\dagger}\overline{a}\right) + \frac{\gamma^{'}}{2}\left(2b\rho b^{\dagger} - b^{\dagger}b\rho - \rho b^{\dagger}b\right) \tag{4.10}$$

Dans ce qui suit, nous transformons les opérateurs $\overline{a}$ *et* $\overline{a}^{\dagger}$ en :

$$\begin{aligned} \overline{a}^{\dagger} &\rightarrow a^{\dagger} = i\,\overline{a}^{\dagger} \\ \overline{a} &\rightarrow a = -i\,\overline{a} \end{aligned} \tag{4.11}$$

il est clair que ces deux nouveaux opérateurs vérifient les mêmes équations de commutations pour $\widehat{a}$ et $\widehat{a}^{\dagger}$:

$$\left[a, a^{\dagger}\right] = 1 \tag{4.12}$$

ils peuvent donc être interprétés comme de nouveaux opérateurs de création et d'annihilation photoniques. Cette transformation permet d'avoir une équation d'évolution avec des termes réels dans le cas de résonnance ($\Delta_a = \Delta_b = 0$).

Par mesure de commodité, nous introduisons une normalisation du temps et de toutes les constantes caractéristiques du système telles que :

$$t = \frac{\tau}{\tau_c} \tag{4.13}$$

$$\gamma = \gamma' \tau_c \tag{4.14}$$

$$\kappa = \kappa' \tau_c \tag{4.15}$$

$$g = g' \tau_c \tag{4.16}$$

$$\varepsilon = \varepsilon' \tau_c \tag{4.17}$$

$$\Delta_a = \Delta_a' \tau_c \tag{4.18}$$

$$\Delta_b = \Delta_b' \tau_c \tag{4.19}$$

où τ_c représente le temps de parcours total des photons dans la cavité. Il s'exprime en fonction de la longueur L de ce parcours, de l'indice de réfraction n_r et de la vitesse de la lumière dans le vide par :

$$\tau_c = \frac{2n_r L}{c} \tag{4.20}$$

l'équation pilote devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = {} & i\Delta_a \left[a^\dagger a, \rho\right] + i\Delta_b \left[b^\dagger b, \rho\right] + g\left[a^\dagger b - b^\dagger a, \rho\right] + \\ & \varepsilon\left[\left(e^{i\varphi} a^\dagger - e^{-i\varphi} a\right), \rho\right] + \kappa\left(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a\right) + \\ & \frac{\gamma}{2}\left(2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b\right) \end{aligned} \tag{4.21}$$

En écrivant :

$$\langle O(t) \rangle = tr\left(O(t)\,\rho(0)\right) \tag{4.22}$$

$$O(t) = U^\dagger(t,0)\, O(0)\, U(t,0) \tag{4.23}$$

$$\rho(t) = U(t,0)\, \rho(0)\, U^\dagger(t,0) \tag{4.24}$$

où $U(t,0)$ représente l'opérateur d'évolution, on déduit directement l'équation d'évolution de la valeur moyenne d'un opérateur O quelconque du système :

$$\frac{d}{dt}\langle O\rangle = i\Delta_a\langle[O,a^\dagger a]\rangle + i\Delta_b\langle[O,b^\dagger b]\rangle + g\langle[O,a^\dagger b - b^\dagger a]\rangle +$$
$$\varepsilon\langle[O,(e^{i\varphi}a^\dagger - e^{-i\varphi}a)]\rangle + \kappa\langle(2aOa^\dagger - a^\dagger aO - Oa^\dagger a)\rangle +$$
$$\frac{\gamma}{2}\langle(2bOb^\dagger - b^\dagger bO - Ob^\dagger b)\rangle \tag{4.25}$$

Les équations d' évolution pour les valeurs moyennes de a et b ont ainsi pour expression :

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \varepsilon e^{i\varphi} + g\langle b\rangle - \kappa\langle a\rangle + i\Delta_a\langle a\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle b\rangle = -g\langle a\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b\rangle + i\Delta_b\langle b\rangle \tag{4.26}$$

Le système possède des fluctuations entrantes C^{in} et D^{in} dans le mode du champ de la cavité et le mode excitonique dû à l'interaction avec l'environnement extérieur.

Les équations des évolutions des opérateurs a et b ont la même forme que (4.26) mais y apparaissent en plus les forces des fluctuations entrantes :

$$\frac{d}{dt}a = \varepsilon e^{i\varphi} + gb - \kappa a + i\Delta_a a + \sqrt{2\kappa}C^{in}$$

$$\frac{d}{dt}b = -ga - \frac{\gamma}{2}b + i\Delta_b b + \sqrt{\gamma}D^{in} \tag{4.27}$$

Ces équations peuvent être considérées comme des équations de Langevin pour les deux champs, où les fluctuations entrantes $\sqrt{2\kappa}C^{in}$ et $\sqrt{\gamma}D^{in}$ sont des forces de Langevin associées aux réservoirs du champ électromagnétique et du champ excitonique.

C^{in} est la fluctuation du champ cohérent entrant, qui est identique au fluctuation du vide. D^{in} est la fluctuation du bain thermique de phonons que nous supposerons dans cette première partie à température T=0 . Dans ce cas cette fluctuation est aussi identique à la fluctuation du vide. C^{in} et D^{in} sont des bruits blancs gaussiens qui obéissent aux relations suivantes :

$$\langle C^{in}\rangle = \langle D^{in}\rangle = 0 \tag{4.28}$$

$$\left\langle C^{in}(t)\,C^{in}\left(t'\right)\right\rangle = 0 = \left\langle C^{in\dagger}(t)\,C^{in}\left(t'\right)\right\rangle \tag{4.29}$$

$$\left\langle C^{in}(t)\,C^{in\dagger}\left(t'\right)\right\rangle = \delta\left(t-t'\right) \tag{4.30}$$

$$\left\langle D^{in}(t)\,D^{in}\left(t'\right)\right\rangle = 0 = \left\langle D^{in\dagger}(t)\,D^{in}\left(t'\right)\right\rangle \tag{4.31}$$

$$\left\langle D^{in}(t)\, D^{in\dagger}\left(t'\right)\right\rangle = \delta\left(t-t'\right) \tag{4.32}$$

C^{in} et D^{in} sont des fluctuations entrantes de deux modes de nature différente, elles sont donc décorrélées.

La fonction d'autocorrélation intracavité est définie par :

$$g^{(2)}(t) = \frac{\left\langle a^{\dagger}(0)\, a^{\dagger}(t)\, a(t)\, a(0)\right\rangle}{\left\langle a^{\dagger}a\right\rangle^{2}} \tag{4.33}$$

En utilisant l'approximation gaussienne (voir annexe A) il est possible de réécrire $g^{(2)}$ sous la forme :

$$g^{(2)}(t) = \frac{1}{\left\langle a^{\dagger}a\right\rangle^{2}}\left(\left\langle a^{\dagger}\right\rangle^{2}\langle a\rangle^{2} + L_1(t) + L_2(t) + L_3(t) + L_4(t)\right) \tag{4.34}$$

avec

$$L_1(t) = 2Re\left\{\left\langle \delta a^{\dagger}(t)\, \delta a(0)\right\rangle\right\}\left\langle a^{\dagger}\right\rangle\langle a\rangle = 2Re\left\{C_{a^{\dagger}a}(t)\right\}\left\langle a^{\dagger}\right\rangle\langle a\rangle \tag{4.35}$$

$$L_2(t) = 2Re\left\{\left\langle a^{\dagger}\right\rangle^{2}\left\langle \delta a(t)\, \delta a(0)\right\rangle\right\} = 2Re\left\{\left\langle a^{\dagger}\right\rangle^{2} C_{aa}(t)\right\} \tag{4.36}$$

$$L_3(t) = \left\{\left\langle \delta a^{\dagger}(t)\, \delta a(t)\right\rangle + \left\langle \delta a^{\dagger}(0)\, \delta a(0)\right\rangle\right\}\left\langle a^{\dagger}\right\rangle\langle a\rangle = L_1(0) \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned} L_4(t) &= G_1(t) + G_2(t) + G_3(t) \\ &= \left(C_{a^{\dagger}a}(t)\right)^{*} C_{a^{\dagger}a}(t) + \left(C_{aa}(t)\right)^{*} C_{aa}(t) + \left(C_{a^{\dagger}a}(0)\right)^{*} C_{a^{\dagger}a}(0) \end{aligned} \tag{4.38}$$

où les fluctuations des champs photonique et excitonique δa et δb sont définies par :

$$\delta a = a - \langle a\rangle \tag{4.39}$$

$$\delta b = b - \langle b\rangle \tag{4.40}$$

et les fonctions de covariance $C_{a^{\dagger}a}(t)$ et $C_{aa}(t)$ sont données par les expressions suivantes :

$$C_{a^{\dagger}a}(t) = \left\langle \delta a^{\dagger}(t)\, \delta a(0)\right\rangle \tag{4.41}$$

$$C_{aa}(t) = \left\langle \delta a(t)\, \delta a(0)\right\rangle \tag{4.42}$$

Il est clair que la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$ dépend des corrélations des fluctuations; pour calculer celles-ci, il faut tout d'abord déterminer l'équation d'évolution des fluctuations δa et δb.

L'évolution temporelle des opérateurs de fluctuation s'obtient par la soustraction des deux équations (4.27) et (4.26) :

$$\frac{d}{dt}\delta a = g\delta b - \kappa\delta a + i\Delta_a\delta a + \sqrt{2\kappa}C^{in} \tag{4.43}$$

$$\frac{d}{dt}\delta b = -g\delta a - \frac{\gamma}{2}\delta b + i\Delta_b\delta b + \sqrt{\gamma}D^{in} \tag{4.44}$$

Dans l'espace de Fourier où tout opérateur $O(t)$ se transforme en $O[\omega]$ par la relation suivante :

$$O[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} O(t)\, e^{-i\omega t} dt \tag{4.45}$$

les équations d'évolution s'écrivent en forme matricielle :

$$M_{\sim}[\omega]\begin{bmatrix}\delta a[\omega]\\ \delta b[\omega]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{2\kappa}C^{in}[\omega]\\ \sqrt{\gamma}D^{in}[\omega]\end{bmatrix} \tag{4.46}$$

$M_{\sim}[\omega]$ étant la matrice d'évolution donnée par l'expression suivante :

$$M_{\sim}[\omega] = \begin{bmatrix} i\omega - i\Delta_a + \kappa & -g \\ g & \frac{\gamma}{2} + i\omega - i\Delta_b \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

La résolution du système (4.46) aboutit à :

$$\delta a[\omega] = \sqrt{2\kappa}C^{in}[\omega]\,T_1[\omega] + \sqrt{\gamma}D^{in}[\omega]\,T_2[\omega] \tag{4.48}$$

où

$$T_1[\omega] = \frac{\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega - i\Delta_b\right)}{g^2 + (\kappa + i\omega - i\Delta_a)\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega - i\Delta_b\right)} \tag{4.49}$$

et

$$T_2[\omega] = \frac{g}{g^2 + (\kappa + i\omega - i\Delta_a)\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega - i\Delta_b\right)} \tag{4.50}$$

Dans l'espace des temps l'expression de δa et $\delta a^{\dagger}$ se traduit par :

$$\delta a(t) = \sqrt{2\kappa}\left(T_1 * C^{in}\right)(t) + \sqrt{\gamma}\left(T_2 * D^{in}\right)(t) \tag{4.51}$$

$$\delta a^{\dagger}(t) = \sqrt{2\kappa}\left(T_1^* * C^{in\dagger}\right)(t) + \sqrt{\gamma}\left(T_2^* * D^{in\dagger}\right)(t) \tag{4.52}$$

où * désigne le produit de convolution défini par :

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\; d\tau \tag{4.53}$$

Les deux fonctions de corrélations $C_{a^{\dagger}a}(t)$ et $C_{aa}(t)$ ont pour expression :

$$C_{a^\dagger a}(t) = \left\langle \delta a^\dagger(t)\, \delta a(0) \right\rangle$$
$$= 2\kappa \left\langle \left(T_1^* * C^{in\dagger}\right)(t) . \left(T_1 * C^{in}\right)(0) \right\rangle +$$
$$\gamma \left\langle \left(T_2^* * D^{in\dagger}\right)(t) . \left(T_2 * D^{in}\right)(0) \right\rangle \tag{4.54}$$

$$C_{aa}(t) = \langle \delta a(t)\, \delta a(0) \rangle$$
$$= 2\kappa \left\langle \left(T_1 * C^{in}\right)(t) . \left(T_1 * C^{in}\right)(0) \right\rangle +$$
$$\gamma \left\langle \left(T_2 * D^{in}\right)(t) . \left(T_2 * D^{in}\right)(0) \right\rangle \tag{4.55}$$

Le système étant linéaire, les covariances $C_{a^\dagger a}(t)$ et $C_{aa}(t)$ sont des combinaisons linéaires des corrélations des champs entrants (C^{in} et D^{in}).

En effet, d'aprés les formules (10.22), (10.25) et (10.34) de l'annexe B on trouve :

$$C_{a^\dagger a}(t) = 2\kappa q_{11}' T_1^* * T_1^-(t) + \gamma q_{22}' T_2^* * T_2^-(t) \tag{4.56}$$
$$C_{aa}(t) = 2\kappa q_{11} T_1 * T_1^-(t) + \gamma q_{22} T_2 * T_2^-(t) \tag{4.57}$$

avec

$$\left\langle C^{in\dagger}(t)\, C^{in}\left(t'\right) \right\rangle = q_{11}' \delta\left(t - t'\right) \tag{4.58}$$
$$\left\langle C^{in}(t)\, C^{in}\left(t'\right) \right\rangle = q_{11} \delta\left(t - t'\right) \tag{4.59}$$
$$\left\langle D^{in\dagger}(t)\, D^{in}\left(t'\right) \right\rangle = q_{22}' \delta\left(t - t'\right) \tag{4.60}$$
$$\left\langle D^{in}(t)\, D^{in}\left(t'\right) \right\rangle = q_{22} \delta\left(t - t'\right) \tag{4.61}$$

on a vu (relations (4.29) et (4.31)) que les champs entrants présentaient des corrélations nulles donc :

$$q_{11} = 0 = q_{11}' \tag{4.62}$$

et

$$q_{22} = 0 = q_{22}' \tag{4.63}$$

d'où on déduit :

$$C_{a^\dagger a}(t) = \left\langle \delta a^\dagger(t)\, \delta a(0) \right\rangle = 0 \tag{4.64}$$

$$C_{aa}(t) = \langle \delta a(t)\, \delta a(0) \rangle = 0 \tag{4.65}$$

ce qui donne:

$$L_1(t) = 0 = L_2(t) \tag{4.66}$$

$$L_3(t) = 0 = L_4(t) \tag{4.67}$$

et nous trouvons enfin :

$$G^{(2)}(t) = \langle a^\dagger \rangle^2 \langle a \rangle^2 = G^{(2)}(\infty) \tag{4.68}$$

ce qui est équivalent à :

$$g^{(2)}(t) = 1 \tag{4.69}$$

La fonction de corrélation intracavité est donc celle d'un état cohérent.

On montre dans l'annexe F dans le cas linéaire que les fonctions de corrélation intracavité, $g^{(2)}$et extracavité $g^{(2)}_{ext}$ sont égales, soit pour le système en transmission, soit pour le système en réflexion. On a donc :

$$g^{(2)}_{ext}(t) = 1 \tag{4.70}$$

Ce résultat n'est pas surprenant : l'état cohérent entrant ($g^{(2)}(t) = 1$) se transforme par un système linéaire en un autre état cohérent. On montre aussi que le spectre de bruit associé à ce cas reste à la valeur de l'état cohérent, c'est à dire au shot noise [Hilico 92] , [Fabre 95].

4.2 Pompage incohérent

L'étude de la fonction de corrélation $g^{(2)}$ dans le cas du pompage incohérent se limite dans cette thèse au cas linéaire où l'interaction entre les excitons est négligée .

On modélise le pompage incohérent par un couplage avec un réservoir thermique excitonique ce qui induit un nombre d'excitons n_{th} qui suit une distribution thermique.

Dans ce cas l'hamiltonien du système s'écrit d'une manière similaire à l'expression (4.1). Cependant dans le cas du pompage incohérent, il n'y a pas de champ pompe cohérent ($\varepsilon = 0$) :

$$\begin{aligned} H &= H_{int} + H_{ph} + H_{ex} \\ &= \hbar g' \left(\widehat{a}^\dagger \widehat{b} + \widehat{b}^\dagger \widehat{a} \right) + \hbar \omega_{ph} \widehat{a}^\dagger \widehat{a} + \hbar \omega_{ex} \widehat{b}^\dagger \widehat{b} \end{aligned} \tag{4.71}$$

En représentation d'interaction ($\widehat{a} = \overline{a} e^{-i\omega_{ex} t}$, $\widehat{b} = b e^{-i\omega_{ex} t}$) l'expression de l'hamiltonien H devient :

$$H_I = -\hbar\Delta'\overline{a}^\dagger\overline{a} + \hbar g'\left(\overline{a}^\dagger b + \overline{a}b^\dagger\right) \tag{4.72}$$

où Δ' désigne le désaccord de fréquence entre la cavité et l'exciton:

$$\Delta' = \omega_{ex} - \omega_{ph} = \frac{\Delta}{\tau_c} \tag{4.73}$$

Un calcul analogue à celui du cas du pompage cohérent mène à l'équation pilote suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= i\Delta\left[a^\dagger a, \rho\right] + g\left[a^\dagger b - b^\dagger a, \rho\right] + \\ &\kappa\left(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a\right) + \frac{\gamma}{2}\left(2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b\right) + \\ &\gamma n_{th}\left(b\rho b^\dagger + b^\dagger\rho b - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b\right)\end{aligned} \tag{4.74}$$

et par suite, aux équations d'évolution des valeurs moyennes et des fluctuations :

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = g\langle b\rangle - \kappa\langle a\rangle + i\Delta\langle a\rangle \tag{4.75}$$

$$\frac{d}{dt}\langle b\rangle = -g\langle a\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b\rangle \tag{4.76}$$

$$\frac{d}{dt}\delta a = g\delta b - \kappa\delta a + i\Delta\delta a + \sqrt{2\kappa}C^{in} \tag{4.77}$$

$$\frac{d}{dt}\delta b = -g\delta a - \frac{\gamma}{2}\delta b + \sqrt{\gamma}D^{in} \tag{4.78}$$

L'opérateur de fluctuation C^{in} est un bruit blanc qui vérifie les mêmes relations(4.28), (4.29) et (4.30), tandis que D^{in} est un bruit thermique qui obéit aux relations suivantes :

$$\left\langle D^{in}\right\rangle = 0 \tag{4.79}$$

$$\left\langle D^{in}(t)\, D^{in}\left(t'\right)\right\rangle = 0 \tag{4.80}$$

$$\left\langle D^{in\dagger}(t)\, D^{in}\left(t'\right)\right\rangle = n_{th}\delta\left(t - t'\right) \tag{4.81}$$

$$\left\langle D^{in}(t)\, D^{in\dagger}\left(t'\right)\right\rangle = (n_{th} + 1)\,\delta\left(t - t'\right) \tag{4.82}$$

nous déduisons de la stationnarité les valeurs moyennes du champ excitonique et photonique :

$$\langle a\rangle = 0$$

$$\langle b \rangle = 0 \tag{4.83}$$

à partir de ces deux dernières équations et des relations (4.35), (4.36) et (4.37) nous déduisons :

$$L_1(t) = 0 \tag{4.84}$$

$$L_2(t) = 0 \tag{4.85}$$

$$L_3(t) = 0 \tag{4.86}$$

Ainsi la fonction d'autocorrélation s'écrit dans la limite de l'approximation gaussienne :

$$\begin{aligned} g^{(2)}(t) &= L_4(t) = G_1(t) + G_2(t) + G_3(t) \\ &= \langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a(t) \rangle \langle \delta a^\dagger(t)\, \delta a(0) \rangle + \langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a^\dagger(t) \rangle \langle \delta a(t)\, \delta a(0) \rangle + \\ &\quad \langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a(0) \rangle \langle \delta a^\dagger(t)\, \delta a(t) \rangle \end{aligned}$$

donc il suffit d'étudier les deux fonctions de covariances $C_{a^\dagger a}(t)$ et $C_{aa}(t)$. Les équations d'évolution des fluctuations (4.77) et (4.78) donnent dans l'espace de Fourier l'expression matricielle suivante :

$$M_\sim[\omega] \begin{bmatrix} \delta a[\omega] \\ \delta b[\omega] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\kappa} C^{in}[\omega] \\ \sqrt{\gamma} D^{in}[\omega] \end{bmatrix} \tag{4.87}$$

où la matrice d'évolution $M_\sim[\omega]$ a pour expression :

$$M_\sim[\omega] = \begin{bmatrix} i\omega - i\Delta + \kappa & -g \\ g & \frac{\gamma}{2} + i\omega \end{bmatrix} \tag{4.88}$$

la résolution de ce système d'équations (4.87) donne :

$$\delta a[\omega] = \sqrt{2\kappa} C^{in}[\omega]\, T_1[\omega] + \sqrt{\gamma} D^{in}[\omega]\, T_2[\omega] \tag{4.89}$$

où

$$T_1[\omega] = \frac{\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega\right)}{g^2 + (\kappa + i\omega - i\Delta)\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega\right)} \tag{4.90}$$

et

$$T_2[\omega] = \frac{g}{g^2 + (\kappa + i\omega - i\Delta)\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega\right)}$$

Notons bien que les expressions de la matrice d'évolution et de l'opérateur de fluctuation δa sont les mêmes que celle du cas de pompage cohérent (4.48) (pour le choix de $\Delta = \Delta_a$ et $\Delta_b = 0$).

Avec le même calcul que dans le cas cohérent et en utilisant les relations (10.22), (10.25) et (10.34) de l'annexe B et les relations (4.80),(4.81) et (4.29) on obtient :

$$C_{aa}(t) = \langle \delta a(t)\, \delta a(0) \rangle = 0 \tag{4.91}$$

$$C_{a^\dagger a}(t) = \langle \delta a^\dagger(t)\, \delta a(0) \rangle = 2\kappa \left\langle \left(T_2^* * D^{in\dagger}\right)(t) . \left(T_2 * D^{in}\right)(0) \right\rangle$$

$$= \Gamma_1 (T_2^* * T_2^-)(t) \tag{4.92}$$

où

$$\Gamma_1 = 2\kappa\, n_{th} \tag{4.93}$$

et

$$T_2^-(t) = T_2(-t) \tag{4.94}$$

Dans l'espace de Laplace bilatéral (p=iω, annexe D) l'expression de la fonction de covariance $C_{a^\dagger a}$ devient :

$$C_{a^\dagger a}[p] = \Gamma_1 T_2^*[p] T_2^-[p] \tag{4.95}$$

Nous rappelons l'expression de T_2 dans l'espace de Fourier :

$$T_2[\omega] = \frac{g}{g^2 + (\kappa + i\omega - i\Delta)\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega\right)} \tag{4.96}$$

ce qui donne dans l'espace de Laplace (p=iω) :

$$T_2[p] = \frac{g}{g^2 + (\kappa + p - i\Delta)\left(\frac{\gamma}{2} + p\right)} = \frac{g}{T[p]} \tag{4.97}$$

Comme le système étudié est linéaire, les fonctions d'autocorrélation intracavité $g^{(2)}$et extracavité $g^{(2)}_{ext}$ sont identiques pour le système en transmission aussi bien qu' en réflexion (démonstration en annexe F). Il suffit donc de mener le calcul de la fonction de corrélation intracavité $g^{(2)}$.

Pour déterminer la covariance $C_{a^\dagger a}(t)$ et par conséquent la fonction de corrélation intracavité $g^{(2)}$, il faut tout d'abord déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction $C_{a^\dagger a}[p]$ dans l'espace des temps, pour cela on la décompose en éléments simples :

$$C_{a^\dagger a}[p] = \frac{g^2 \Gamma_1}{T^*[p]\, T^-[p]} = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)} +$$

$$\frac{A_3}{(p - p_3)} + \frac{A_4}{(p - p_4)} \tag{4.98}$$

Les pôles p_i de la fonction $C_{a^\dagger a}[p]$ s'obtiennent après une manipulation algébrique et l'utilisation de l'approximation du régime de couplage fort ($g^2 >> \left(\frac{\kappa+\frac{\gamma}{2}}{2}\right)^2$) :

$$p_1 = -k - \beta - i\left(\Omega + \frac{\Delta}{2}\right) \tag{4.99}$$

$$p_2 = -k + \beta + i\left(\Omega - \frac{\Delta}{2}\right) \tag{4.100}$$

$$p_3 = k + \beta - i\left(\Omega + \frac{\Delta}{2}\right) \tag{4.101}$$

$$p_4 = k - \beta - i\left(\Omega - \frac{\Delta}{2}\right) \tag{4.102}$$

où Ω est l'oscillation de Rabi définie par :

$$\Omega = \sqrt{g^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} \tag{4.103}$$

k représente la moyenne des dissipations totales :

$$k = \frac{\frac{\gamma}{2} + \kappa}{2} \tag{4.104}$$

et

$$\beta = \frac{(2\kappa - \gamma)\,\Delta}{8\Omega} \tag{4.105}$$

Vu que la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$est symétrique on peut se limiter à $t \geqslant 0$. On ne tiendra donc compte que des coefficients A_i des pôles ayant des parties réelles négatives (dans notre cas A_1et A_2). Ces coefficients A_1 et A_2 ont pour expressions :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_1 - p_4)} \\ &= \frac{1}{-8(\beta + i\Omega)(k + i\Omega)(k + \beta)} \end{aligned} \tag{4.106}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)(p_2 - p_4)} \\ &= \frac{1}{-8(\beta + i\Omega)(-k + i\Omega)(k - \beta)} \end{aligned} \tag{4.107}$$

La transformation de Laplace inverse $C_{a^\dagger a}[p]$, qui nous donne l'expression de la fonction de covariance

$C_{a^\dagger a}(t)$ dans l'espace des temps est alors:

$$C_{a^\dagger a}(t) = \frac{-g^2\Gamma_1}{8(i\Omega+\beta)}\, e^{-(k\ +i\frac{\Delta}{2})t}\left(\frac{1}{(k+i\Omega)(k+\beta)}e^{-(\beta+i\Omega)t}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(-k+i\Omega)(k-\beta)}\, e^{(\beta+i\Omega)t}\right) \qquad (4.108)$$

Le calcul de $G_1(t)$ en utilisant l'approximation du couplage fort et en ayant remarqué $|\beta| < k$ (car $\Omega = \sqrt{g^2 + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} > \frac{\Delta}{2}$) donne :

$$G_1(t) = C_{a^\dagger a}(t)\, C^*_{a^\dagger a}(t)$$
$$= \Gamma_1^2 \frac{g^4}{64\Omega^4} e^{-2kt}\left\{\left(\frac{e^{-2\beta t}}{(k+\beta)^2} + \frac{e^{2\beta t}}{(k-\beta)^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2}{(k^2-\beta^2)}\left(\cos(2\Omega t) + \frac{2k}{\Omega}\sin(2\Omega t)\right)\right\} \qquad (4.109)$$

Les termes exponentiels de cette expression s'annulent à l'infini. Ceci nous permet d'écrire que :

$$\lim_{t\to+\infty} G_1(t) = \lim_{t\to+\infty} C_{a^\dagger a}(t)\, C^*_{a^\dagger a}(t) = 0 \qquad (4.110)$$

comme de plus, $G_3(t) = G_1(0)$ et $G_2(t) = C_{aa}(t)\, C^*_{aa}(t) = 0$ (relation (4.91)) on obtient une expression simple de $g^{(2)}$en fonction de la covariance $C_{a^\dagger a}$:

$$g^{(2)}(t) = \frac{G_1(t) + G_1(0)}{G_1(0)} = \frac{C_{a^\dagger a}(t)\, C^*_{a^\dagger a}(t) + C_{a^\dagger a}(0)\, C^*_{a^\dagger a}(0)}{C_{a^\dagger a}(0)\, C^*_{a^\dagger a}(0)} \qquad (4.111)$$

Nous obtenons finalement l'expression analytique de la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$:

$$g^{(2)}(t) = 1 + e^{-2kt}(1-\mu^2)^2\left\{\frac{e^{2\beta t}}{4(1-\mu)^2} + \frac{e^{-2\beta t}}{4(1+\mu)^2}\right\} +$$
$$e^{-2kt}\,\frac{(1-\mu^2)}{2}\left\{\cos(2\Omega t) + \frac{2k}{\Omega}\sin(2\Omega t)\right\} \qquad (4.112)$$

où μ désigne le rapport entre β et la moyenne des dissipations k :

$$\mu = \frac{\beta}{k} \qquad (4.113)$$

$|\mu|$est strictement inférieur à 1.

Dans deux cas particuliers, le cas résonant ($\Delta = 0$) et le cas où les dissipations excitoniques et photoniques sont égales ($\frac{\gamma}{2} = \kappa$), l'expression de $g^{(2)}$ se réduit à une relation plus simple :

$$g^{(2)}(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-(2kt)}\left(1 + \cos(2gt) + \frac{2k}{g}\sin(2gt)\right) \tag{4.114}$$

D'autre part, si l'on s'intéresse à la valeur de la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$ pour t=0, il découle de la relation (4.111) :

$$g^{(2)}(0) = \frac{G_1(0) + G_1(0)}{G_1(0)} = 2 \tag{4.115}$$

pour n'importe quelle valeur de désaccord et des paramètres du système, cette valeur est caractéristique du champ chaotique.

La fonction d'autocorrélation $g^{(2)}(t)$ est une fonction oscillante amortie. Sa valeur est toujours supérieurs à 1, elle ne prend donc jamais de valeurs non-classiques comme on pouvait s'y attendre. $g^{(2)}$ oscille avec des amplitudes d'autant plus faibles et des fréquences d'autant plus grandes qu'on augmente le désaccord Δ exciton - cavité, comme le montrent les figures 23, 24 et 25.

Pour un grand désaccord la fonction d'autocorrélation n'oscille plus (figure 26), elle devient une fonction décroissante exponentiellement, elle se comporte comme si elle était dans un régime de couplage faible.

En effet, l'augmentation du désaccord diminue l'effet du couplage fort .

Enfin soulignons que la fonction d'autocorrélation normalisée ne dépend pas de n_{th}. Autrement dit , le comportement de la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}(t)$ ne dépend pas du nombre d'excitons thermiques.

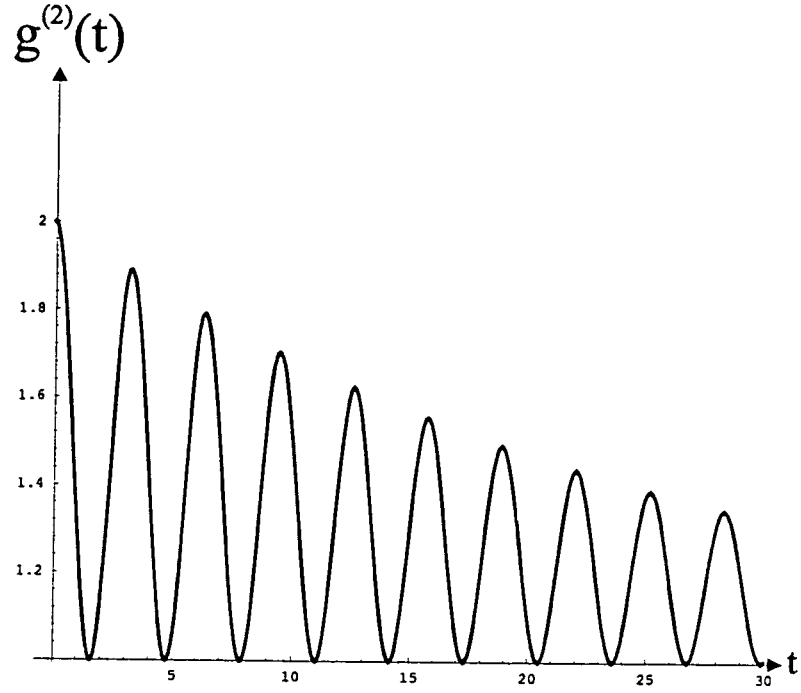


Fig. 23: La fonction d'autocorrélation $g^{(2)}(t)$ en fonction du temps t pour :$\Delta = 0$, $g = 1$, $\kappa = \gamma = \frac{1}{40}$

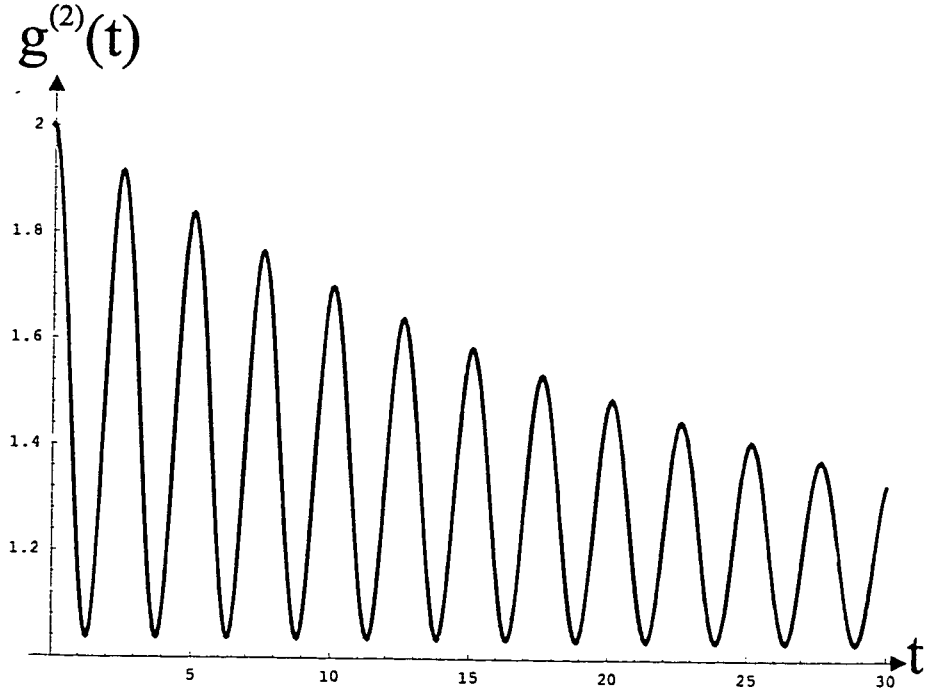


Fig. 24: La fonction d'autocorrélation $g^{(2)}(t)$ en fonction du temps t pour :$\Delta = 1.5$, $g = 1$, $\kappa = \gamma = \frac{1}{40}$

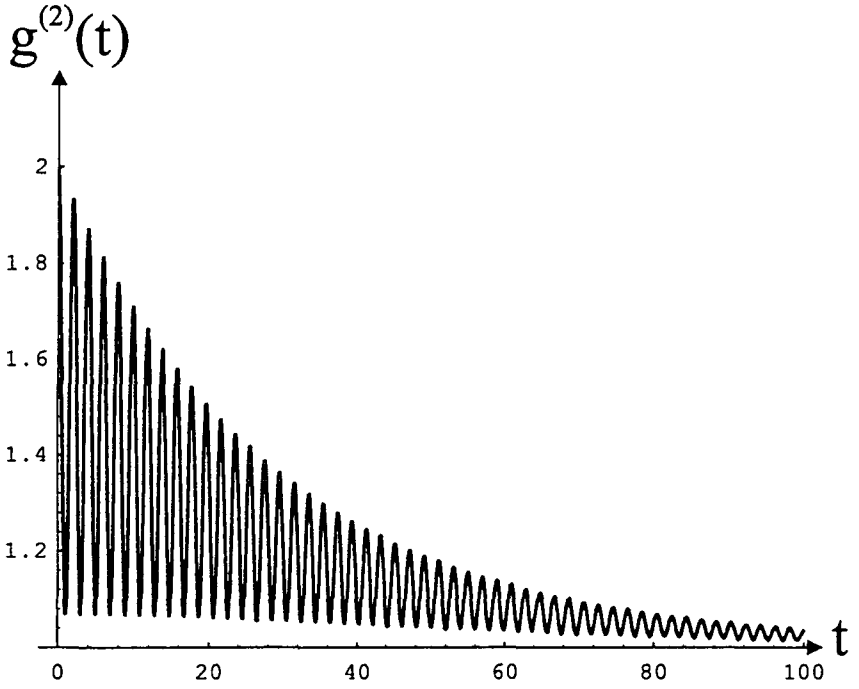


Fig. 25: La fonction d'autocorrélation $g^{(2)}(t)$ en fonction du temps t pour :$\Delta = 2.5$, $g = 1$, $\kappa = \gamma = \frac{1}{40}$

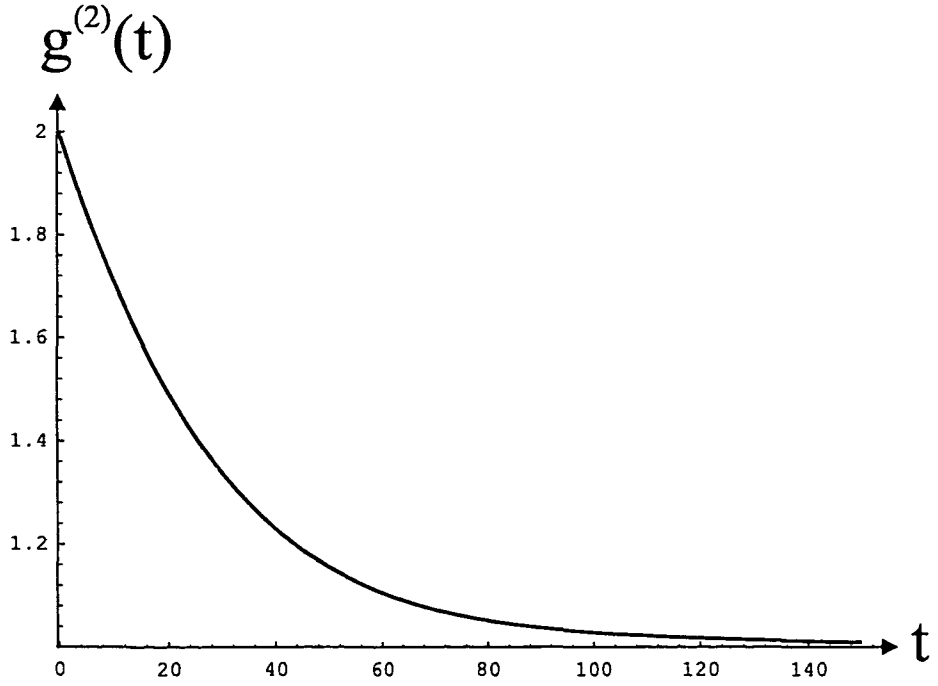


Fig. 26: La fonction d'autocorrélation $g^{(2)}(t)$ en fonction du temps t pour :$\Delta = 50$, $g = 1$, $\kappa = \gamma = \frac{1}{40}$

4.3 Conclusion

Dans la limite de l'approximation gaussienne, les deux cas traités dans ce chapitre montrent bien que l'interaction avec un milieu linéaire ne permet pas d'atteindre le régime non-classique. Si nous voulons obtenir des effets non classiques sur la statistique du champ il faut donc absolument introduire des termes non-linéaires . Ceci justifie l'étude des systèmes non-linéaires dans les chapitres suivants.

5 Valeurs moyennes et intensités intracavité

L'étude de la statistique et du spectre de bruit des champs émis par une microcavité à puits quantiques, pompée par une source cohérente (laser), constitue l'essence de cette thèse. Dans le chapitre 3 on a étudié le cas linéaire où l'interaction entre les excitons est négligée. Cette approximation est valable lorsque la densité excitonique est très faible (très faible pompage). Si on augmente la densité excitonique, les excitons interagissent entre eux et le modèle linéaire n'est plus valable.

L'expression de l'hamiltonien modèle du système non linéaire (établie dans le paragraphe 2.4 du premier chapitre) est donnée par :

$$H = \hbar\varepsilon' \left(e^{i\varphi}e^{i\omega t}\widehat{a}^{\dagger} + e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}\widehat{a}\right) + \hbar\omega_{ph}\widehat{a}^{\dagger}\widehat{a} + \hbar\omega_{ex}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b} + \hbar g' \left(\widehat{a}^{\dagger}\widehat{b} + \widehat{b}^{\dagger}\widehat{a}\right)$$
$$+\hbar\alpha'\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b}\widehat{b} - r'\hbar g' \left(\widehat{a}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b} + \widehat{a}^{\dagger}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b}\widehat{b}\right) \tag{5.1}$$

où on a tenu compte du pompage cohérent par l'amplitude du champ pompe ε', de fréquence ω et de phase φ. l'origine des phases étant arbitraire, on choisit φ dans tout ce qui suit de telle sorte que la valeur moyenne de b soit réelle positive.

La non-linéarité du système provient de deux termes, le terme $\hbar\alpha'\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b}\widehat{b}$ qui décrit l'interaction excitonique, et le terme de couplage non linéaire $-r'\hbar g' \left(\widehat{a}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b} + \widehat{a}^{\dagger}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b}\widehat{b}\right)$. Nous traitons dans ce chapitre et les chapitres qui suivent l'effet de chacun à part puis l'effet global de ces termes.

Bien que nous nous interessions principalement au régime de couplage fort $\left(g \gg \frac{\gamma}{2}+\kappa}{2}\right)$, nous poursuivrons notre étude en deça de cette limite et nous donnerons pour les cas du couplage intermédiaire $\left(g \gtrsim \frac{\gamma}{2}+\kappa}{2}\right)$,du couplage critique $\left(g = \frac{\gamma}{2}+\kappa}{2}\right)$ et du couplage faible $\left(g < \frac{\gamma}{2}+\kappa}{2}\right)$ des résultats permettant de mieux comprendre le comportement de notre système dans le régime de couplage fort. Pour enrichir davantage notre compréhension de l'interaction excitonique dans notre système, nous étudierons de plus un système constitué par un milieu Kerr optique couplé à un milieu linéaire excitonique.

Avant de calculer la fonction d'autocorrélation (qui nous indique la statistique du champ) et le spectre de bruit du système, il est indispensable de déterminer les valeurs

moyennes du mode excitonique et photonique, ainsi que les intensités intracavitées de ces modes qui constituent la matière de ce chapitre.

5.1 Non-linéarité excitonique

Un calcul analogue à celui du paragraphe 1 du chapitre 4 mène dans la représentation d'interaction à l'équation pilote suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= i\Delta_a\left[a^\dagger a,\rho\right] + i\Delta_b\left[b^\dagger b,\rho\right] + g\left[a^\dagger b - b^\dagger a,\rho\right] + \\ &\varepsilon\left[\left(e^{i\varphi}a^\dagger - e^{-i\varphi}a\right),\rho\right] + \alpha\left[b^\dagger b^\dagger bb,\rho\right] - \\ &rg\left[\left(ab^\dagger b^\dagger b + a^\dagger b^\dagger bb\right),\rho\right] + \kappa\left(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a\right) + \\ &\frac{\gamma}{2}\left(2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b\right)\end{aligned} \tag{5.2}$$

avec

$$\alpha = \tau_c\alpha'$$
$$r = r'\tau_c$$

où t et les autres paramétres sont normalisés au temps de la cavité τ_c (relations (4.13)-(4.19)) et par suite à l'équation d'évolution d'un opérateur quelconque O de notre système :

$$\begin{aligned}\frac{d\langle O\rangle}{dt} &= i\Delta_a\left\langle\left[O,a^\dagger a\right]\right\rangle + i\Delta_b\left\langle\left[O,b^\dagger b\right]\right\rangle + g\left\langle\left[O,a^\dagger b - b^\dagger a\right]\right\rangle + \\ &\varepsilon\left\langle\left[O,\left(e^{i\varphi}a^\dagger - e^{-i\varphi}a\right)\right]\right\rangle + \alpha\left\langle\left[b^\dagger b^\dagger bb,\rho\right]\right\rangle - \\ &rg\left\langle\left[O,\left(ab^\dagger b^\dagger b + a^\dagger b^\dagger bb\right)\right]\right\rangle + \kappa\left\langle\left(2aOa^\dagger - a^\dagger aO - Oa^\dagger a\right)\right\rangle + \\ &\frac{\gamma}{2}\left\langle\left(2bOb^\dagger - b^\dagger bO - Ob^\dagger b\right)\right\rangle\end{aligned} \tag{5.3}$$

On cherche dans cette partie à déterminer l'effet d'interaction excitonique (où on néglige le couplage non-linéaire entre exciton et photon, c'est à dire que l'on prend r=0). Dans ce cas on obtient les équations d'évolution des valeurs moyennes des champs photonique et excitonique :

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \varepsilon e^{i\varphi} + g\langle b\rangle - \kappa\langle a\rangle + i\Delta_a\langle a\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle b\rangle = -g\langle a\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b\rangle + i\Delta_b\langle b\rangle - 2i\alpha\langle b^\dagger bb\rangle \tag{5.4}$$

Comme nous nous intéressons dans ce chapitre aux valeurs moyennes nous pouvons écrire :

$$\langle b^\dagger bb\rangle = \langle b^\dagger\rangle\langle b\rangle\langle b\rangle \tag{5.5}$$

et par conséquent nous obtenons les équations d'évolution :

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \varepsilon e^{i\varphi} + g\langle b\rangle + (i\Delta_a - \kappa)\langle a\rangle \tag{5.6}$$

$$\frac{d}{dt}\langle b\rangle = -g\langle a\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b\rangle + i(\Delta_b - k)\langle b\rangle \tag{5.7}$$

k étant le déphasage non linéaire défini par :

$$k = 2\alpha\langle b^\dagger\rangle\langle b\rangle \tag{5.8}$$

Par ailleurs nous déduisons de la stationarité ($\frac{d}{dt} = 0$) les équations suivantes pour les valeurs moyennes :

$$\langle b\rangle = \frac{\varepsilon g}{\sqrt{\left((-\Delta_a\Delta_b) + g^2 + \frac{\gamma\kappa}{2} + k\Delta_a\right)^2 + \left(-\kappa\Delta_b - \frac{\gamma}{2}\Delta_a + k\kappa\right)^2}} \tag{5.9}$$

$$\langle a\rangle = \frac{\left(-\frac{\gamma}{2} + i\Delta_b - ik\right)}{g}\langle b\rangle \tag{5.10}$$

la phase φ a été choisie de telle sorte que $\langle b\rangle$ soit réel positif.

Les intensités intracavité excitonique et photonique définies par

$$I_a = \langle a^\dagger a\rangle = \langle a^\dagger\rangle\langle a\rangle$$

$$I_b = \langle b^\dagger b\rangle = \langle b^\dagger\rangle\langle b\rangle \tag{5.11}$$

vérifient les équations suivantes :

$$\left(\left((-\Delta_a\Delta_b) + g^2 + \frac{\gamma\kappa}{2} + 2\alpha I_b\Delta_a\right)^2 + \left(-\kappa\Delta_b - \frac{\gamma}{2}\Delta_a + 2\alpha I_b\kappa\right)^2\right) I_b = (\varepsilon g)^2 \tag{5.12}$$

$$I_a = \frac{(\Delta_b - k)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{g^2} I_b \tag{5.13}$$

ce qui donne des expressions analytiques simples pour le cas linéaire ($\alpha = 0$):

$$I_b = \frac{(\varepsilon g)^2}{\left((-\Delta_a\Delta_b) + g^2 + \frac{\gamma\kappa}{2}\right)^2 + \left(-\kappa\Delta_b - \frac{\gamma}{2}\Delta_a\right)^2} \tag{5.14}$$

$$I_a = \frac{\left((\Delta_b - k)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right)\varepsilon^2}{\left((-\Delta_a\Delta_b) + g^2 + \frac{\gamma\kappa}{2}\right)^2 + \left(-\kappa\Delta_b - \frac{\gamma}{2}\Delta_a\right)^2} \tag{5.15}$$

Pour le cas non-linéaire ($\alpha \neq 0$) les résultats des calculs des intensités intracavité excitonique et photonique en fonction du désaccord cavité-laser (Δ_b) sont présentés dans les figures 27, 28, 29 et 30 pour les quatre régimes (régime de couplage fort, intermédiaire, critique et faible) où on se limite en premier lieu au cas de résonance entre cavité et exciton ($\Delta_a = \Delta_b = \Delta$).

La dynamique du système est déterminée par cinq paramètres : la constante de couplage g, les dissipations excitonique $\frac{\gamma}{2}$ et photonique κ, lechamp pompe intracavité ε et le coefficient de la non-linéarité α.

Ce système possède une non-linéarité effective $k = 2\alpha \langle b^\dagger \rangle \langle b \rangle$ qui est aussi appelée le déphasage non-linéaire.

On peut faire varier les paramètres du système de plusieurs manières pour obtenir les quatre régimes de couplage. Notre but est ici de comparer les divers régimes dans la perspective d'obtenir une réduction des fluctuations quantiques. Il est bien connu que l'effet de réduction de bruit augmente avec la non-linéarité, ou plus précisément avec la phase non linéaire. Nous nous attacherons ici à mettre en valeur l'effet de la force de couplage. Aussi nous maintienerons constants la valeur du déphasage non-linéaire k et les valeurs des intensités intracavités des champs photonique et excitonique et nous ferons varier g.

Le choix de varier g et ε tout en conservant les valeurs des paramètres α, κ et $\frac{\gamma}{2}$ constant nous permet de maintenir ce compromis.

Pour s'approcher davantage à la réalité expérimentale, les valeurs des cinq paramètres (g,$\frac{\gamma}{2}, \kappa, \alpha, \varepsilon$) ont été choisis de telle sorte qu'elles correspondent à des paramètres d'une expérience typique.

Pour un échantillon (microcavité semiconductrice à puits quantiques) de longueur optique de cavité L=$\frac{3\lambda}{2}$, de coefficient de perméabilité diélectrique $\varepsilon = n_r^2 \approx 10$ (n_r indice de réfraction) et eclairé par un rayon de longueur d'onde $\lambda = 840\ nm$, le temps de parcours des photons dans la cavité τ_c est de l'ordre de $8,4fs$.

Notre choix de g entre 1 et 0,004 nous donne une marge pour la fréquence de Rabi g$'$ entre 20 THz et 80 GHz. Le choix des dissipations $\gamma = \kappa = 0.025$ donne un temps de vie des excitons de 0.34 ps et un temps de vie des photons de l'ordre de 0.17 ps (équivalent à un taux de réflection de l'échantillon de 95%) . Ces durées de vie sont des valeurs typiques d'un échantillon de microcavité à puits quantiques.

Le paramètre non linéaires α' est calculé à partir de la formule d'Hanamura (2.81) où le volume V d'interaction est pris égale à l'épaisseur d'un puit quantique soit 10 nm multiplié par la surface transverse du faisceau soit(0.3mm)^2 et $E^{ex} \approx 10$ meV. On obtient $\alpha' = 2\ 10^5\ s^{-1}$ soit $\alpha = 10^{-9}$.

Nous prendrons des champs entrants ε qui soit de l'ordre de 10^2 en unités réduites, ce qui correspond à une intensité à l'entré de l'ordre de 10^{19} photons par seconde soit une puissance de l'ordre du Watt.

On voit sur les figures 38, 39, 40 et 41 que ce champ entrant correspond à des nombres d'excitons qui sont inférieurs à 10^7soit 10^{10} excitons par cm^{-2} ce qui est de l'ordre de grandeur de la valeur de saturation, pour laquelle les excitons sont écrantés par les porteurs libres et le couplage fort disparait.

Signalons enfin que ce choix des cinq paramètres et de leur variation sera maintenu dans tous les autres chapitres.

Les figures 27, 28, 29 et 30 présentent la relation de l'intensité intracavité des champs excitonique et photonique entre exciton et cavité($\Delta_a = \Delta_b$) en fonction du désaccord du laser Δ_a. Dans le cas du couplage fort ($g^2 \gg \left(\frac{\frac{\gamma}{2}+\kappa}{2}\right)^2$) on observe deux pics de résonance séparés d'une distance 2g. Les figures montrent bien que lorsqu'on diminue le couplage g, le rapport entre l'écart séparant les deux pics de l'intensité et la somme de leurs largeurs, diminue. En diminuant encore g, les deux pics se confondent en un seul pic (régime de couplage faible).

A partir de la figure 31 nous remarquons que les intensités des champs excitonique I_b et photonique I_a présentent deux pics symétriques de même amplitude pour une valeur nulle de non-linéarité ($\alpha = 0$). Ils sont parfaitement symétriques pour le cas de résonance entre exciton et cavité. Lorsqu'on augmente la valeur de la non-linéarité l'amplitude de l'un des pics augmente alors que l'autre diminue. Ces deux pics se décalent à droite, respectivement à gauche, suivant le signe du désaccord qu'on introduit entre la cavité et l'exciton ($\Delta_a - \Delta_b > 0$) respectivement ($\Delta_a - \Delta_b < 0$) (voir figures 32 et 33).

Une augmentation de l'effet non-linéaire peut induire un comportement bistable. Ce comportement apparait lorsque l'intensité de pompage est très grande, et par conséquent la densité excitonique très importante. Cependant, dans ce cas, notre traitement n'est plus valable car l'effet d'écrantage des excitons réduit la force d'oscillateur et détruit le régime de couplage fort [Houdré 95], [Nelson 96].

Nous focaliserons notre attention tout au long de cette thèse au régime de faible non-linéarité où la forme des deux pics ne présente pas de changement important par rapport à celui du cas linéaire ($\alpha = 0$).

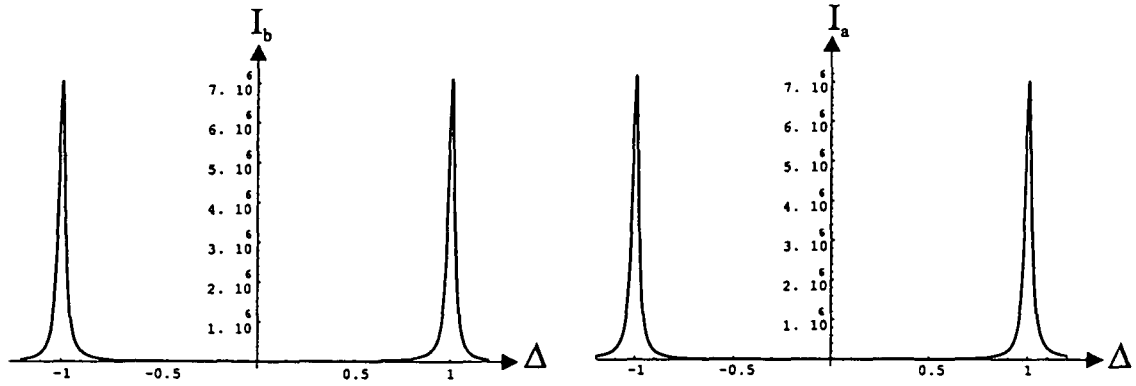


Fig. 27: Intensité excitonique I_b et photonique I_a en fonction du désaccord Laser- cavité Δ pour $g = 1$, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$ (régime de couplage fort)

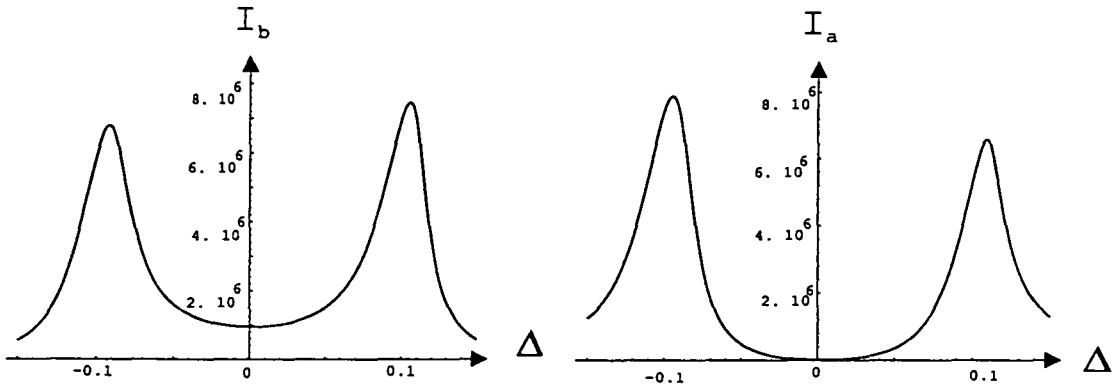


Fig. 28: Intensité excitonique I_b et photonique I_a en fonction du désaccord Laser- cavité Δ pour $g = 0.1$, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$ (régime de couplage intermédiaire).

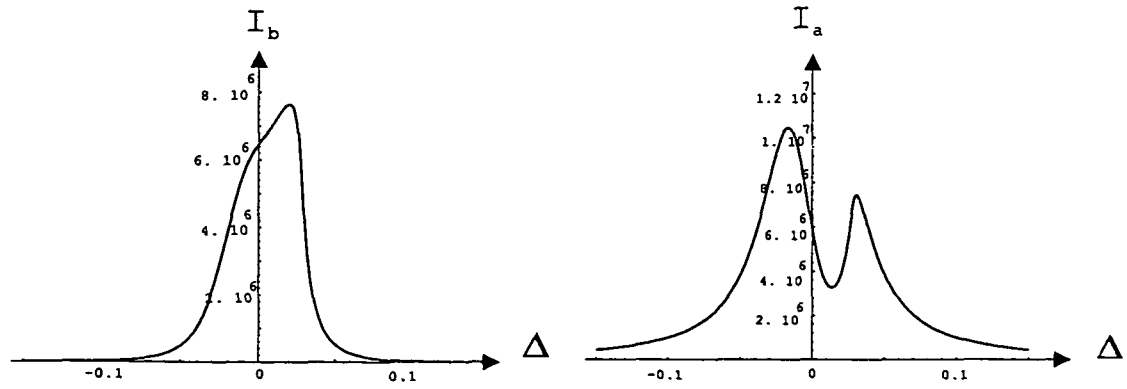


Fig. 29: Intensité excitonique I_b et photonique I_a en fonction du désaccord Laser- cavité Δ pour $g = \frac{3}{160}$, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$ (régime de couplage critique)

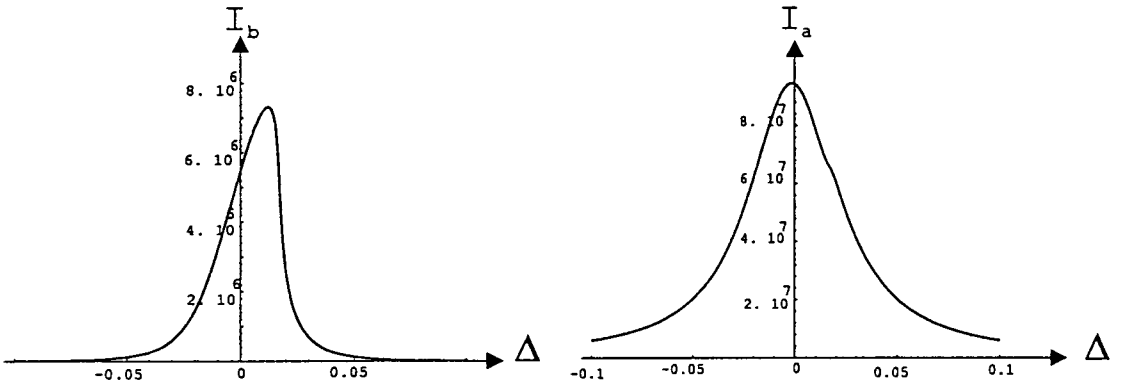


Fig. 30: Intensité excitonique I_b et photonique I_a en fonction du désaccord Laser- cavité Δ pour $g = 0.004$, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 250$ et $\alpha = 10^{-9}$ (régime de couplage faible)

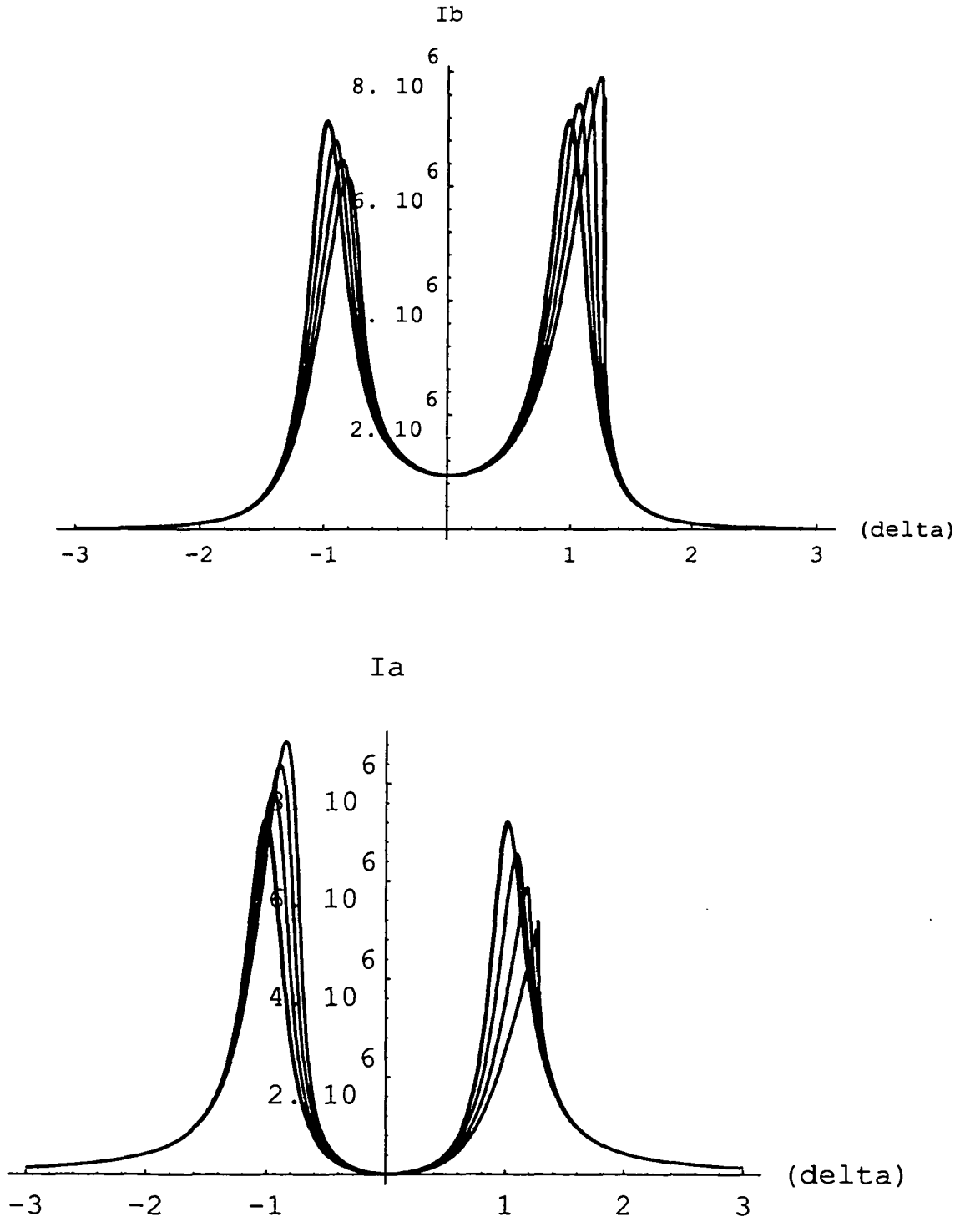


Fig. 31: Intensité excitonique I_a et photonique I_b en fonction du désaccord pour différent valeurs de la non-linéarité : (a) $\alpha = 0, (b)\ \alpha = 10^{-9}, (c)\ \alpha = 10^{-8}$, $(d)\ \alpha = 2\ 10^{-8} et\ (e)\ \alpha = 3\ 10^{-8}$ et pour $g = 1$, $\gamma = \kappa = 0.25$ et $\varepsilon = 10^3$

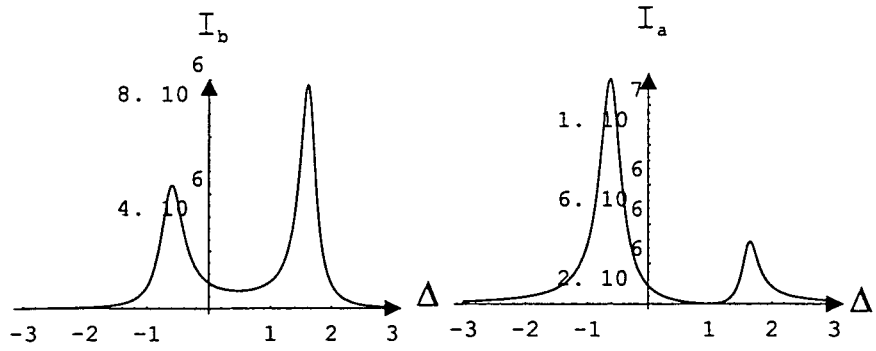


Fig. 32: Intensité excitonique I_a et photonique I_b en fonction du désaccord pour un désaccord exciton cavité $\Delta_a - \Delta_b = g$ et pour g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$, $\alpha = 10^{-9}$

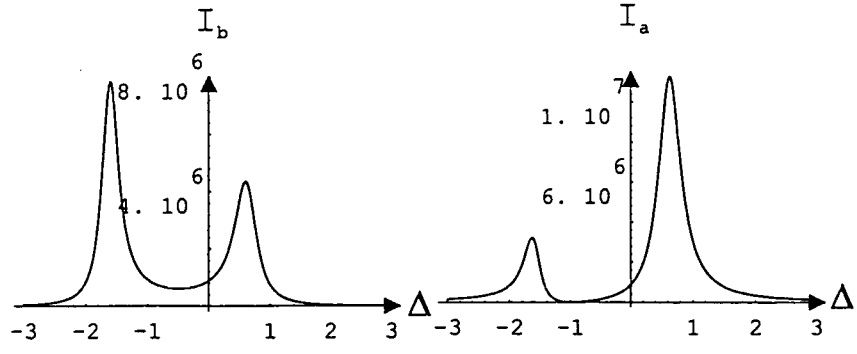


Fig. 33: Intensité excitonique I_a et photonique I_b en fonction du désaccord pour un désaccord exciton cavité $\Delta_a - \Delta_b = -g$ et pour g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$, $\alpha = 10^{-9}$

5.2 Couplage non-linéaire

On cherche dans cette partie à déterminer l'effet du couplage non-linéaire (où on néglige l'interaction non-linéaire $\alpha = 0$). Dans ce cas, les équations d'évolution des valeurs moyennes des champs photonique et excitonique ont pour expression :

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \varepsilon e^{i\varphi} + g\langle b\rangle - \kappa\langle a\rangle + i\Delta_a\langle a\rangle - rg\langle b^\dagger bb\rangle \tag{5.16}$$

$$\frac{d}{dt}\langle b\rangle = -g\langle a\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b\rangle + i\Delta_b\langle b\rangle + 2rg\langle ab^\dagger b\rangle - rg\langle a^\dagger bb\rangle \tag{5.17}$$

comme précédemment, on a :

$$\langle b^\dagger bb\rangle = \langle b^\dagger\rangle\langle b\rangle\langle b\rangle \tag{5.18}$$

$$\langle ab^\dagger b\rangle = \langle a\rangle\langle b^\dagger\rangle\langle b\rangle \tag{5.19}$$

$$\langle a^\dagger bb\rangle = \langle a^\dagger\rangle\langle b\rangle\langle b\rangle \tag{5.20}$$

Ce qui donne alors les équations d'évolutions des valeurs moyennes :

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \varepsilon e^{i\varphi} + (g-R)\langle b\rangle - \kappa\langle a\rangle + i\Delta_a\langle a\rangle \tag{5.21}$$

$$\frac{d}{dt}\langle b\rangle = -(g-R)\langle a\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b\rangle + i\Delta_b\langle b\rangle + R\left(\langle a\rangle - \langle a^\dagger\rangle\right) \tag{5.22}$$

R étant le déphasage non-linéaire associé au couplage non linéaire:

$$R = r\langle b^\dagger\rangle\langle b\rangle \tag{5.23}$$

A partir des équations (5.21) et (5.22) nous pouvons écrire les équations d'évolution linéarisées des valeurs moyennes des opérateurs hermitiques conjugés de a et b :

$$\frac{d}{dt}\langle a^\dagger\rangle = \varepsilon e^{-i\varphi} + (g-R)\langle b^\dagger\rangle - \kappa\langle a^\dagger\rangle - i\Delta_a\langle a^\dagger\rangle \tag{5.24}$$

$$\frac{d}{dt}\langle b^\dagger\rangle = -(g-R)\langle a^\dagger\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b^\dagger\rangle - i\Delta_b\langle b^\dagger\rangle + R\left(\langle a^\dagger\rangle - \langle a\rangle\right) \tag{5.25}$$

et par conséquent l'utilisation de la sationarité ($\frac{d}{dt} = 0$) nous mène au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (g-R)\langle b\rangle - \kappa\langle a\rangle + i\Delta_a\langle a\rangle = -\varepsilon e^{i\varphi} \\ -(g-R)\langle a\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b\rangle + i\Delta_b\langle b\rangle + R\left(\langle a\rangle - \langle a^\dagger\rangle\right) = 0 \\ (g-R)\langle b^\dagger\rangle - \kappa\langle a^\dagger\rangle - i\Delta_a\langle a^\dagger\rangle = -\varepsilon e^{-i\varphi} \\ -(g-R)\langle a^\dagger\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b^\dagger\rangle - i\Delta_b\langle b^\dagger\rangle + R\left(\langle a^\dagger\rangle - \langle a\rangle\right) = 0 \end{cases} \tag{5.26}$$

Des manipulations algébriques simples de ce système d'équations et le choix de φ (φ est choisie de telle sorte que $\langle b \rangle$ soit réelle positive), nous permettent d'écrire les équations suivantes pour $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$:

$$\langle a \rangle = \left(\frac{-\gamma}{2(g-R)} + i \frac{\Delta_b}{(g-3R)} \right) \langle b \rangle \tag{5.27}$$

$$\langle b \rangle = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left((g-R) + \frac{\gamma\kappa}{2(g-R)} - \frac{\Delta_a \Delta_b}{(g-3R)} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_b \kappa}{(g-3R)} + \frac{\Delta_a \gamma}{2(g-R)} \right)^2}} \tag{5.28}$$

Les intensités photonique et excitonique vérifient dans ce cas les équations suivantes :

$$\left(\left((g - rgI_b) + \frac{\gamma\kappa}{2(g-rgI_b)} - \frac{\Delta_a \Delta_b}{(g-3rgI_b)} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_b \kappa}{(g-3rgI_b)} + \frac{\Delta_a \gamma}{2(g-rgI_b)} \right)^2 \right) I_b = \varepsilon^2 \tag{5.29}$$

$$I_a = \left(\left(\frac{\gamma}{2(g-rgI_b)} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_b}{(g-3rgI_b)} \right)^2 \right) I_b \tag{5.30}$$

Pour le calculs numérique nous avons pris r=10^{-9} de maniére à avoir un déphasage non-linéaire r$\langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle$ égal à celui de la non-linéarité excitonique.

Les résultats du calcul des intensités excitonique et photonique en fonction du désaccord laser-cavité dans le cas de résonance exciton-cavité, montrent que la diminution du couplage rapproche les deux pics d'intensité jusqu'à ce qu' ils se superposent dans le régime de couplage faible (voir figures 34, 35, 36 et 37).

Le couplage non linéaire fait apparaitre deux pics d'intensités symétriques. La remarque (les pics sont symétriques pour le cas linéaire) de la partie précédente de ce chapitre nous permet de déduire que le couplage non-linéaire ne modifie pas l'allure des courbes d'intensité. Ceci revient à dire que l'effet du couplage non-linéaire est négligeable pour les valeurs moyennes devant l'effet de la non-linéarité excitonique à déphasage non-linéaire égal.

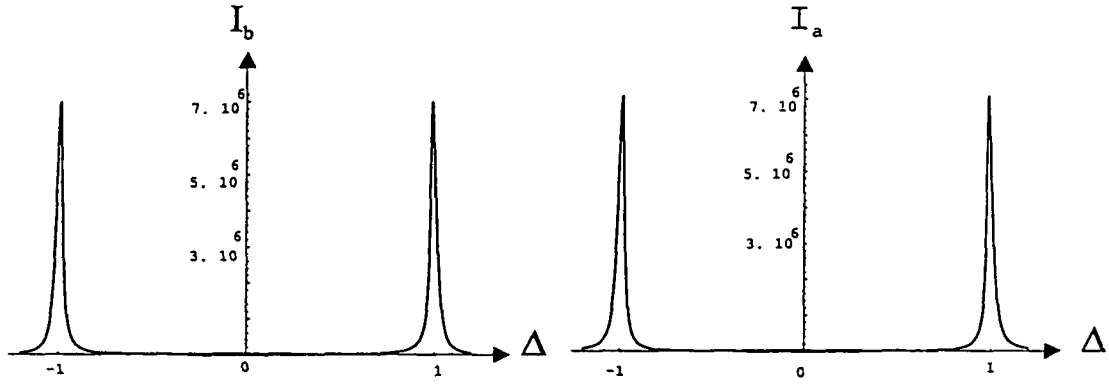


Fig. 34: I_a et I_b en fonction de Δ pour g=1,$\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $r = 10^{-9}$ (régime de couplage fort)

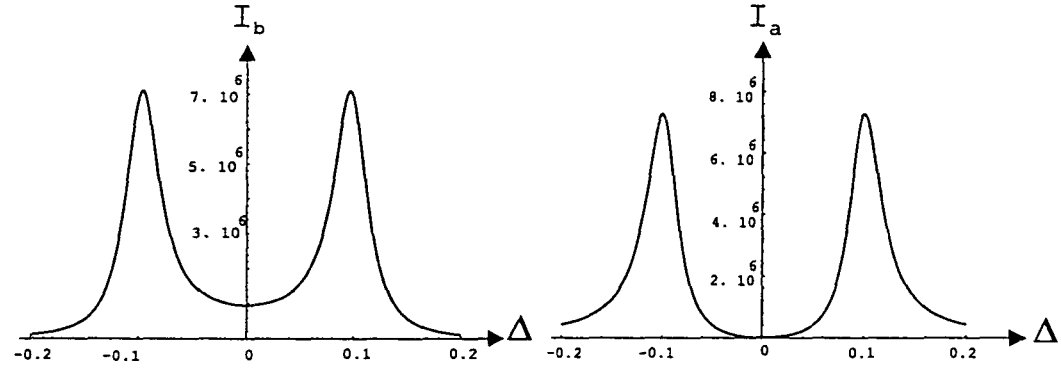


Fig. 35: I_a et I_b en fonction de Δ pour g=0.1,$\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $r = 10^{-9}$ (régime de couplage intermédiaire)

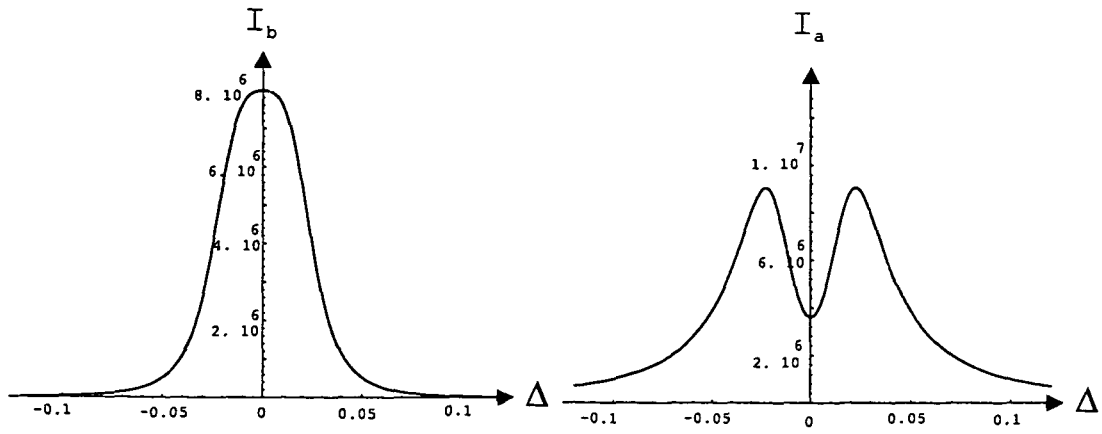


Fig. 36: I_a et I_b en fonction de Δ pour g=$\frac{3}{160}$,$\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $r = 10^{-9}$ (régime de couplage critique).

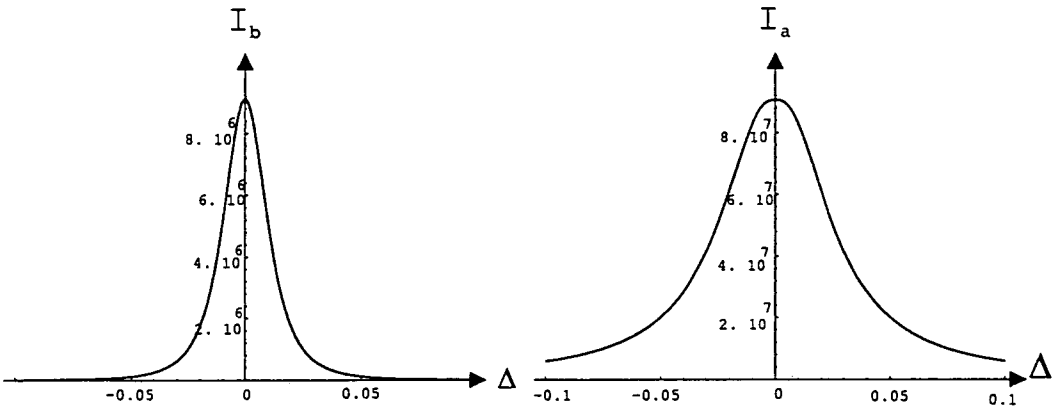


Fig. 37: I_a et I_b en fonction de Δ pour g=0.004,$\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 250$ et $r = 10^{-9}$ (régime de couplage faible).

5.3 Cas non-linéaire : couplage non-linéaire + non-linéarité excitonique

En tenant compte des deux effets non-linéaires (couplage non-linéaire et non-linéarité excitonique), les expressions d'évolution des valeurs moyennes sont :

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \varepsilon e^{i\varphi} + g\langle b\rangle - \kappa\langle a\rangle + i\Delta_a\langle a\rangle - rg\left\langle b^\dagger bb\right\rangle \tag{5.31}$$

$$\frac{d}{dt}\langle b\rangle = -g\langle a\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b\rangle + i\Delta_b\langle b\rangle + 2rg\left\langle ab^\dagger b\right\rangle - rg\left\langle a^\dagger bb\right\rangle - 2i\alpha\left\langle b^\dagger bb\right\rangle \tag{5.32}$$

ce qui nous permet alors de donner l'expression des équations des valeurs moyennes linéarisés :

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \varepsilon e^{i\varphi} + (g-R)\langle b\rangle - \kappa\langle a\rangle + i\Delta_a\langle a\rangle \tag{5.33}$$

$$\frac{d}{dt}\langle b\rangle = -(g-R)\langle a\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b\rangle + i\Delta_b\langle b\rangle + R\left(\langle a\rangle - \left\langle a^\dagger\right\rangle\right) - ik\langle b\rangle \tag{5.34}$$

Une démarche analogue au paragraphe précédent conduit aux equations pour les valeurs moyennes :

$$\langle a\rangle = \left(\frac{-\gamma}{2(g-R)} + i\frac{(\Delta_b - k)}{(g-3R)}\right)\langle b\rangle \tag{5.35}$$

$$\langle b\rangle = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\left((g-R) + \frac{\gamma\kappa}{2(g-R)} - \frac{\Delta_a(\Delta_b-k)}{(g-3R)}\right)^2 + \left(\frac{(\Delta_b-k)\kappa}{(g-3R)} + \frac{\Delta_a\gamma}{2(g-R)}\right)^2}} \tag{5.36}$$

et par conséquent, les intensités excitonique et photonique vérifient les équations suivantes :

$$\left(\left((g-rgI_b) + \frac{\gamma\kappa}{2(g-rgI_b)} - \frac{\Delta_a(\Delta_b-k)}{(g-3rgI_b)}\right)^2 + \left(\frac{(\Delta_b-k)\kappa}{(g-3rgI_b)} + \frac{\Delta_a\gamma}{2(g-rgI_b)}\right)^2\right) I_b = \varepsilon^2 \tag{5.37}$$

$$I_a = \left(\left(\frac{-\gamma}{2(g-rgI_b)}\right)^2 + \left(\frac{(\Delta_b-k)}{(g-3rgI_b)}\right)^2\right) I_b \tag{5.38}$$

Les résultats du calcul de I_a et I_b présenté dans les figures 38, 39, 40 et 41 nous montrent une trés faible différence entre l'allure des courbes d'intensité pour le cas de la non-linéarité excitonique et le cas non-linéaire, ce qui n'est pas surprenant puisque l'effet du couplage non-linéaire est très faible . Par conséquent, l'effet de la non-linéarité globale est dominé par le terme d'interaction excitonique ($\alpha b^\dagger b^\dagger bb$) pour les valeurs moyennes.

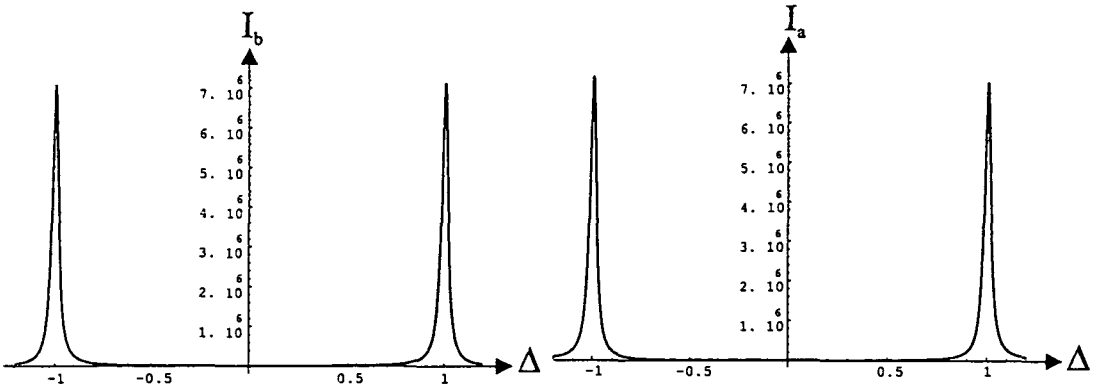


Fig. 38: I_a et I_b en fonction de Δ pour g=1,$\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\alpha = 10^{-9}$, $\varepsilon = 100$ et $r = 10^{-9}$ (régime de couplage fort).

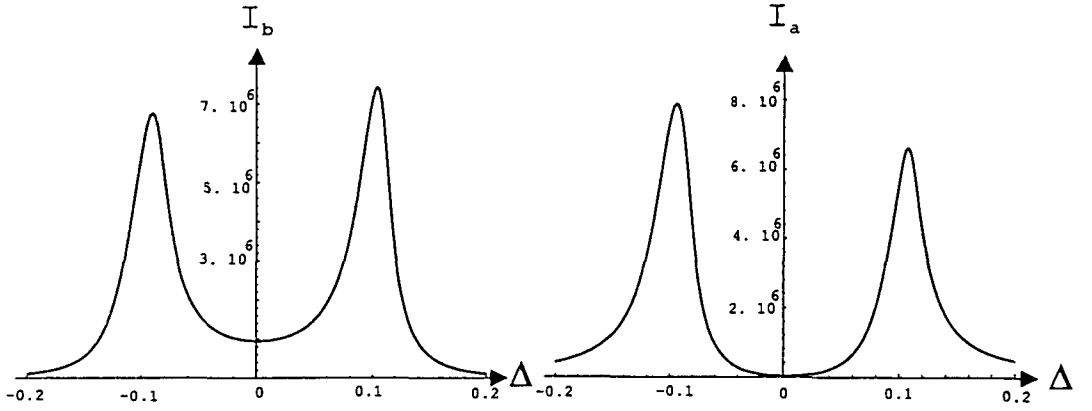


Fig. 39: I_a et I_b en fonction de Δ pour g=0.1,$\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\alpha = 10^{-9}$, $\varepsilon = 100$ et $r = 10^{-9}$ (régime de couplage intermédiaire).

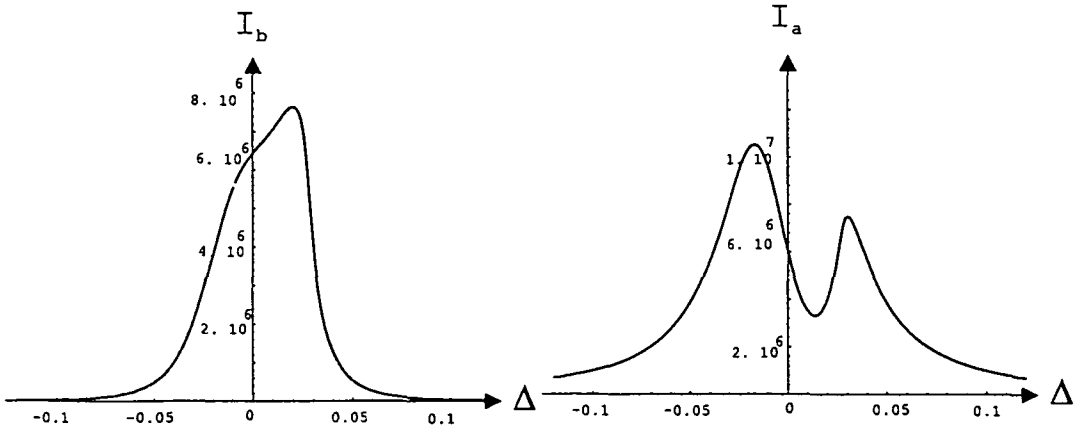


Fig. 40: I_a et I_b en fonction de Δ pour g=$\frac{3}{160}$,$\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\alpha = 10^{-9}$, $\varepsilon = 100$ et $r = 10^{-9}$ (régime de couplage critique).

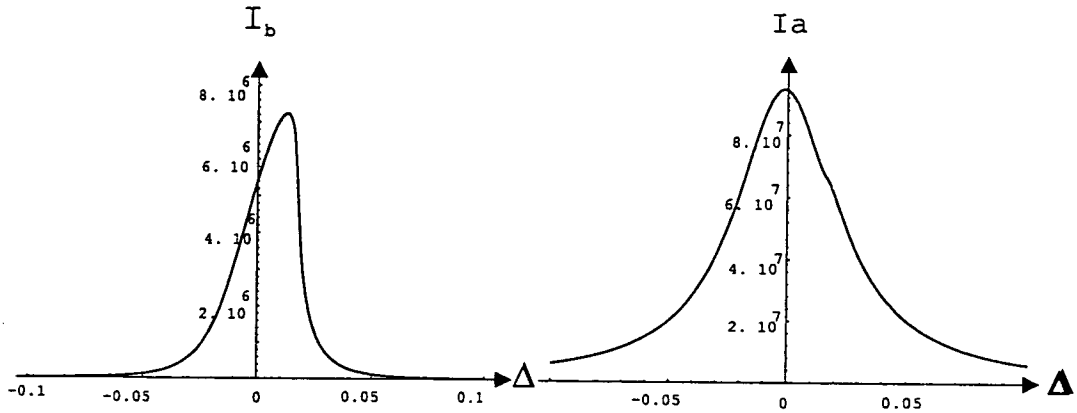


Fig. 41: I_a et I_b en fonction de Δ pour g=0.004,$\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\alpha = 10^{-9}$, $\varepsilon = 250$ et $r = 10^{-9}$ (régime de couplage faible).

5.4 Non-linéarité optique

Pour mieux comprendre l'effet de la non-linéarité excitonique, nous traitons le cas d'un système composé par un milieu Kerr couplé à un milieu linéaire excitonique. L'hamiltonien qui régit l'évolution de ce système est décrit par l'expression :

$$H = \hbar\varepsilon' \left(e^{i\varphi}e^{i\omega t}\widehat{a}^{\dagger} + e^{-i\varphi}e^{-i\omega t}\widehat{a}\right) + \hbar\omega_{ph}\widehat{a}^{\dagger}\widehat{a} + \hbar\omega_{ex}\widehat{b}^{\dagger}\widehat{b} + \hbar g\left(\widehat{a}^{\dagger}\widehat{b} + \widehat{b}^{\dagger}\widehat{a}\right)$$
$$+\hbar\alpha'\widehat{a}^{\dagger}\widehat{a}^{\dagger}\widehat{a}\widehat{a} \tag{5.39}$$

Un calcul analogue à celui du paragraphe 1 du chapitre 4 mène dans la représentation d'interaction aux équations d'évolutions des valeurs moyennes des champs excitonique et photonique suivantes :

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \varepsilon e^{i\varphi} + g\langle b\rangle - \kappa\langle a\rangle + i\Delta_a\langle a\rangle - 2i\alpha\left\langle a^{\dagger}aa\right\rangle \tag{5.40}$$

$$\frac{d}{dt}\langle b\rangle = -g\langle a\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b\rangle + i\Delta_b\langle b\rangle \tag{5.41}$$

avec

$$\left\langle a^{\dagger}aa\right\rangle = \left\langle a^{\dagger}\right\rangle\langle a\rangle\langle a\rangle \tag{5.42}$$

Nous obtenons donc :

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \varepsilon e^{i\varphi} + g\langle b\rangle - \kappa\langle a\rangle + i\left(\Delta_a - k_{No}\right)\langle a\rangle \tag{5.43}$$

$$\frac{d}{dt}\langle b\rangle = -g\langle a\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b\rangle + i\Delta_b\langle b\rangle \tag{5.44}$$

où k_{No} représente le déphasage non-linéaire associé à la non-linéarité optique, il est donné par l'expression suivante :

$$k_{No} = 2\alpha\left\langle a^{\dagger}\right\rangle\langle a\rangle$$

La phase du champ φ est une phase arbitraire, elle est choisie dans ce cas de telle sorte que la valeur moyenne du champ photonique $\langle a\rangle$ soit réelle positive. Par ailleurs, nous déduisons de la stationarité ($\frac{d}{dt} = 0$) les équations suivantes pour les valeurs moyennes suivantes :

$$\langle b\rangle = \frac{g}{\left(i\Delta_b - \frac{\gamma}{2}\right)}\langle a\rangle \tag{5.45}$$

$$\langle a \rangle = \frac{\varepsilon \sqrt{\Delta_b^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(g^2 + \kappa\frac{\gamma}{2} + \left(-\Delta_a\Delta_b + k_{No}\Delta_b\right)\right)^2 + \left(\kappa\Delta_b + \left(\Delta_a - k_{No}\right)\frac{\gamma}{2}\right)^2}} \tag{5.46}$$

ainsi les intensités I_a et I_b vérifient les équations suivantes :

$$I_b = \frac{g^2}{\left(\Delta_b^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right)} I_a \tag{5.47}$$

$$\left(\left(g^2 + \kappa\frac{\gamma}{2} + \left(-\Delta_a\Delta_b + 2\alpha I_a\Delta_b\right)\right)^2 + \left(\kappa\Delta_b + \left(\Delta_a - 2\alpha I_a\right)\frac{\gamma}{2}\right)^2\right) I_a = \varepsilon\left(\Delta_b^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right) \tag{5.48}$$

Le résultat du calcul mène aux mêmes figures que celles du cas de la non-linéarité excitonique lorsque on échange les intensités excitonique I_b et photonique I_a. Les remarques du paragraphe 5.2 s'appliquent donc aussi à ce cas en échangeant les rôles des photons et des excitons.

5.5 Conclusion

Les traitements précédents montrent bien que lorsqu'on diminue le couplage, le rapport entre l'écart séparant les deux pics d'intensité et la somme de leurs largeurs, diminue. En le diminuant encore, les deux pics se confondent et on obtient un seul pic (régime de couplage faible). La non-linéarité tend à rendre les deux pics disymetriques et même à changer leur forme. Cela se produit pour des interactions non-linéaires (ou des intensités des champs) élevées qui correspondent à des régimes où notre traitement n'est plus fiable. En effet la densité d'excitons dans ce cas correspond à des situations où les excitons sont ecrantés par les porteurs libres et où le couplage fort disparait. Nous nous restreindrons dans la suite à des cas où l'allure des pics n'est pas affectée par la non-linéarité.

6 Spectres de Bruit

Dans le chapitre précédent nous avons déterminé les intensités intracavité des champs photonique et excitonique indispensables pour calculer le spectre de bruit et la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$.

Nous consacrons ce chapitre à l'étude du spectre de bruit de notre système non-linéaire. Pour ne pas compliquer l'exposé nous nous limiterons au cas de la résonance exciton-cavité. Tout d'abord, nous traiterons séparément l'effet du couplage non-linéaire et de la non-linéarité excitonique, ensuite nous calculons l'effet global de ces deux termes, et enfin nous présenterons le spectre de bruit pour un système ayant une non-linéarité optique de type Kerr.

6.1 Non-linéarité excitonique

Nous rappelons l'expression du spectre de bruit optimum intracavité $S_{opt}[\omega]$ établi dans la dernière partie du chapitre 3 (équation(3.35)). $S_{opt}[\omega]$ est relié aux transformés de Fourier des covariances $C_{aa}, C_{a\,\dagger a}$ et $C_{aa\,\dagger}$ par la relation :

$$S_{opt}[\omega] = -2\,|C_{a\,a}[\omega]| + C_{a\,\dagger a}[\omega] + C_{aa\dagger}[\omega] \tag{6.1}$$

Le spectre de bruit dépend donc des corrélations des fluctuations. Pour déterminer le spectre de bruit, il faut tout d'abord établir les équations d'évolutions des fluctuations.

Les équation d'évolution des opérateurs des champs a, b ont la même forme que les équations d'évolution des valeurs moyennes (équations (5.6) et (5.7) établies dans le chapitre précédent) :

$$\frac{d}{dt}\langle a\rangle = \varepsilon e^{i\varphi} + g\langle b\rangle - \kappa\langle a\rangle + i\Delta_a\langle a\rangle \tag{6.2}$$

$$\frac{d}{dt}\langle b\rangle = -g\langle a\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle b\rangle + i\Delta_b\langle b\rangle - 2i\alpha\langle b\,^{\dagger}bb\rangle \tag{6.3}$$

mais y apparaissent en plus les fluctuations entrantes C^{in} et D^{in} :

$$\frac{d}{dt}a = \varepsilon e^{i\varphi} + gb - \kappa a + i\Delta_a a + \sqrt{2\kappa}C^{in} \tag{6.4}$$

$$\frac{d}{dt}b = -ga - \frac{\gamma}{2}b + i\Delta_b b - 2i\alpha b\,{}^{\dagger}bb + \sqrt{\gamma}D^{in} \tag{6.5}$$

C^{in} et D^{in} sont supposées êtres les fluctuations d'un bruit blanc, Elles obéissent alors aux relations suivantes :

$$\left\langle C^{in}\right\rangle = \left\langle D^{in}\right\rangle = 0 \tag{6.6}$$

$$\left\langle C^{in}(t)\, C^{in}\left(t'\right)\right\rangle = 0 = \left\langle C^{in\dagger}(t)\, C^{in}\left(t'\right)\right\rangle \tag{6.7}$$

$$\left\langle C^{in}(t)\, C^{in\dagger}\left(t'\right)\right\rangle = \delta\left(t - t'\right) \tag{6.8}$$

$$\left\langle D^{in}(t)\, D^{in}\left(t'\right)\right\rangle = 0 = \left\langle D^{in\dagger}(t)\, D^{in}\left(t'\right)\right\rangle \tag{6.9}$$

$$\left\langle D^{in}(t)\, D^{in\dagger}\left(t'\right)\right\rangle = \delta\left(t - t'\right) \tag{6.10}$$

C^{in} et D^{in} sont des fluctuations entrantes de deux modes de nature différente, elles sont donc décorrélées.

L'évolution temporelle de l'opérateur de fluctuation $\delta a = a - \langle a\rangle$ s'obtient par la soustraction des deux équations (6.4) et (6.2) :

$$\frac{d}{dt}\delta a = g\delta b - \kappa\delta a + i\Delta_a\delta a + \sqrt{2\kappa}C^{in} \tag{6.11}$$

de même, l'évolution de l'opérateur de fluctuation $\delta b = b - \langle b\rangle$ s'obtient par la soustraction des deux équations (6.5) et (6.3) :

$$\frac{d}{dt}\delta b = -g\delta a - \frac{\gamma}{2}\delta b + i\Delta_b\delta b - 2i\alpha\left(b\,{}^{\dagger}bb - \left\langle b\,{}^{\dagger}bb\right\rangle\right) + \sqrt{\gamma}D^{in} \tag{6.12}$$

La linéarisation nous permet d'écrire :

$$\delta\left(b\,{}^{\dagger}bb\right) = b\,{}^{\dagger}bb - \left\langle b\,{}^{\dagger}bb\right\rangle \approx \delta b^{\dagger}\langle b\rangle\langle b\rangle + 2\delta b\left\langle b^{\dagger}\right\rangle\langle b\rangle \tag{6.13}$$

comme au chapitre précédent, on a choisi la phase φ du champ entrant de telle sorte que $\langle b\rangle$ soit réel positif alors $\langle b\rangle\langle b\rangle = \left\langle b^{\dagger}\right\rangle\langle b\rangle$ et on pose $k = 2\alpha\langle b\rangle^2$.

Cela conduit à l'équation d'évolution de δb linéarisée :

$$\frac{d}{dt}\delta b = -g\delta a - \frac{\gamma}{2}\delta b + i\Delta_b\delta b - 2ik\delta b - ik\delta b^{\dagger} + \sqrt{\gamma}D^{in} \tag{6.14}$$

A partir des équations (6.11) et (6.14) nous pouvons déduire les équations d'évolution linéarisées des opérateurs hermitiques conjugés de δa et δb :

$$\frac{d}{dt}\delta\ a^{\dagger} = g\delta\ b^{\dagger} - \kappa\delta\ a^{\dagger} - i\Delta_a\delta\ a^{\dagger} + \sqrt{2\kappa}C^{in\ \dagger} \tag{6.15}$$

$$\frac{d}{dt}\delta\ b^{\dagger} = -g\delta\ a^{\dagger} - \frac{\gamma}{2}\delta\ b^{\dagger} - i\Delta_b\delta\ b^{\dagger} + 2ik\delta\ b^{\dagger} + ik\delta b + \sqrt{\gamma}D^{in\ \dagger} \tag{6.16}$$

Dans l'espace de Fourier les équations d'évolution s'écrivent sous forme matricielle :

$$M_{\sim}[\omega]\begin{bmatrix}\delta a[\omega]\\ \delta b[\omega]\\ \delta a^{\dagger}[\omega]\\ \delta b^{\dagger}[\omega]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{2\kappa}C^{in}[\omega]\\ \sqrt{\gamma}D^{in}[\omega]\\ \sqrt{2\kappa}C^{in\ \dagger}[\omega]\\ \sqrt{\gamma}D^{in\ \dagger}[\omega]\end{bmatrix} \tag{6.17}$$

La matrice d'évolution $M_{\sim}[\omega]$ a pour expression dans ce cas :

$$M_{\sim}[\omega] = \begin{bmatrix} i\omega - i\Delta_a + \kappa & -g & 0 & 0 \\ g & \frac{\gamma}{2} + i\omega - i\Delta_b + 2ik & 0 & ik \\ 0 & 0 & i\omega + i\Delta_a + \kappa & -g \\ 0 & -ik & g & \frac{\gamma}{2} + i\omega + i\Delta_b - 2ik \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

Le système (6.17) est résolu à l'aide d'un programme de calcul formel (Mathematica). Nous ne donnerons pas ici le détail des expressions obtenues mais la structure du calcul. La résolution du système aboutit à une expression de $\delta a[\omega]$ qui dépend linéairement des forces de fluctuations entrantes $C^{in}[\omega]$, $D^{in}[\omega]$ et de leurs hermitiques conjuguées $C^{in\ \dagger}[\omega]$, $D^{in\ \dagger}[\omega]$:

$$\begin{aligned}\delta a[\omega] = \sqrt{2\kappa}C^{in}[\omega]\,T_1[\omega] + \sqrt{\gamma}D^{in}[\omega]\,T_2[\omega] + \\ \sqrt{2\kappa}C^{in\ \dagger}[\omega]\,T_3[\omega] + \sqrt{\gamma}D^{in\ \dagger}[\omega]\,T_4[\omega]\end{aligned} \tag{6.19}$$

Le conjugué hermitique de cette équation nous donne :

$$\begin{aligned}\delta a^{\dagger}[\omega] = \sqrt{2\kappa}T_1^{*}[\omega]\,C^{in\dagger}[\omega] + \sqrt{\gamma}T_2^{*}[\omega]\,D^{in\dagger}[\omega] + \\ \sqrt{2\kappa}T_3^{*}[\omega]\,C^{in}[\omega] + \sqrt{\gamma}T_4^{*}[\omega]\,D^{in}[\omega]\end{aligned} \tag{6.20}$$

Nous déterminons dans ce qui suit les expressions des fonctions de covariances dans l'espace de Fourier.

Les fluctuations entrantes vérifient les relations (6.7),(6.8),(6.9) et(6.10). L'application de la relation (10.81) établit dans l'annexe E nous donne dans l'espace de Fourier les expressions suivantes :

$$\left\langle C^{in}\left[\omega\right] C^{in}\left[\omega'\right]\right\rangle = 0 = \left\langle C^{in\dagger}\left[\omega\right] C^{in}\left[\omega'\right]\right\rangle \tag{6.21}$$

$$\left\langle C^{in}\left[\omega\right] C^{in\dagger}\left[\omega\right]\right\rangle = 2\pi\delta\left[\omega+\omega'\right] \tag{6.22}$$

$$\left\langle D^{in}\left[\omega\right] D^{in}\left[\omega'\right]\right\rangle = 0 = \left\langle D^{in\dagger}\left[\omega\right] D^{in}\left[\omega'\right]\right\rangle \tag{6.23}$$

$$\left\langle D^{in}\left[\omega\right] D^{in\dagger}\left[\omega'\right]\right\rangle = 2\pi\delta\left[\omega+\omega'\right] \tag{6.24}$$

A partir de l'équation (6.19) et des quatre relations précédentes nous trouvons :

$$\left\langle \delta a\left[\omega\right]\delta a\left[\omega'\right]\right\rangle = 2\pi\delta\left[\omega+\omega'\right]\left(2\kappa\left(T_1\left[\omega\right]T_3\left[\omega'\right]\right)+\gamma\left(T_2\left[\omega\right]T_4\left[\omega'\right]\right)\right) \tag{6.25}$$

d'autre part l'équation (10.81) de l'annexe E donne :

$$\left\langle \delta a\left[\omega\right]\delta a\left[\omega'\right]\right\rangle = 2\pi\delta\left[\omega+\omega'\right] C_{aa}\left[\omega\right] \tag{6.26}$$

d'où nous déduisons une expression pour $C_{aa}\left[\omega\right]$:

$$\begin{aligned} 2\pi\delta\left[\omega+\omega'\right] C_{aa}\left[\omega\right] = {} & 2\pi\delta\left[\omega+\omega'\right] 2\kappa\left(T_1\left[\omega\right]T_3\left[\omega'\right]\right) \\ & +2\pi\delta\left[\omega+\omega'\right]\gamma\left(T_2\left[\omega\right]T_4\left[\omega'\right]\right) \end{aligned} \tag{6.27}$$

Soit :

$$C_{aa}\left[\omega\right] = 2\kappa T_1\left[\omega\right]T_3\left[-\omega\right]+\gamma T_2\left[\omega\right]T_4\left[-\omega\right] \tag{6.28}$$

De même à partir des deux relations (6.19), (6.20) et des équations (6.21),(6.22),(6.23) et (6.24) nous trouvons :

$$\left\langle \delta a^{\dagger}\left[\omega\right]\delta a\left[\omega'\right]\right\rangle = 2\pi\delta\left[\omega+\omega'\right]\left(2\kappa T_3^{*}\left[\omega\right]T_3\left[\omega'\right]+\gamma T_4^{*}\left[\omega\right]T_4\left[\omega'\right]\right) \tag{6.29}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} C_{a^{\dagger}a}\left[\omega\right] &= 2\kappa T_3^{*}\left[\omega\right]T_3\left[-\omega\right]+\gamma T_4^{*}\left[\omega\right]T_4\left[-\omega\right] \\ &= 2\kappa\left(T_3\left[-\omega\right]\right)^{*}T_3\left[-\omega\right]+\gamma\left(T_4\left[-\omega\right]\right)^{*}T_4\left[-\omega\right] \\ &= 2\kappa\left|T_3\left[-\omega\right]\right|^2+\gamma\left|T_4\left[-\omega\right]\right|^2 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Une démarche analogue pour le calcul de $C_{aa\dagger}$ nous conduit à l'expression suivante:

$$\begin{aligned} C_{aa\dagger}[\omega] &= 2\kappa T_1[\omega](T_1[\omega])^* + \gamma T_2[\omega](T_2[\omega])^* \\ &= 2\kappa |T_1[\omega]|^2 + \gamma |T_2[\omega]|^2 \end{aligned} \tag{6.31}$$

A partir des relations de covariances dans l'espace de Fourier (6.28),(6.30) et (6.31) le spectre de bruit optimum intracavité a pour expression :

$$\begin{aligned} S_{opt}[\omega] = &-2|(2\kappa T_1[\omega]T_3[-\omega] + \gamma T_2[\omega]T_4[-\omega])| + \\ &2\kappa |T_3[-\omega]|^2 + \gamma |T_4[-\omega]|^2 + \\ &2\kappa |T_1[\omega]|^2 + \gamma |T_2[\omega]|^2 \end{aligned} \tag{6.32}$$

ce que nous avons déterminé ici n'est pas le spectre de bruit optimum mesuré à l'exterieur de la cavité mais le spectre de bruit du champ intracavité qui n'est en général pas accessible à l'expérience . Dans l'annexe F, nous avons établi des relations reliant les covariances extracavités C_{aa}^{out}, $C_{a\dagger a}^{out}$ et $C_{aa\dagger}^{out}$ et les covariances intracavités C_{aa}, $C_{a\dagger a}$ et $C_{a\ a\dagger}$:

$$C_{a\dagger a}^{out}[\omega] = 2\kappa C_{a\dagger a}[\omega] \tag{6.33}$$

$$C_{aa}^{out}[\omega] = 2\kappa (C_{aa} - T_3[-\omega]) \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned} C_{aa\dagger}^{out}[\omega] &= 1 + 2\kappa (C_{aa\dagger} - T_1[\omega] - (T_1[\omega])^*) \\ &= 1 + 2\kappa (C_{aa\dagger} - 2Re[T_1[\omega]]) \end{aligned} \tag{6.35}$$

ce qui nous conduit a une expression générale du spectre de bruit optimum extracavité en fonction des fonctions $T_i[\omega]$:

$$\begin{aligned} S_{opt}^{out}[\omega] = 1 &- 4\kappa |(2\kappa T_1[\omega]T_3[-\omega] + \gamma T_2[\omega]T_4[-\omega] - T_3[-\omega])| + \\ &2\kappa \left(2\kappa |T_3[-\omega]|^2 + \gamma |T_4[-\omega]|^2\right) + \\ &2\kappa \left(\left(2\kappa |T_1[\omega]|^2 + \gamma |T_2[\omega]|^2\right) - 2Re[T_1[\omega]]\right) \end{aligned} \tag{6.36}$$

Il faut mentionner que le spectre de bruit extracavité a la même expression pour un système en transmission ou en réflexion dans les conditions précisées à l'annexe F (transmission 1), car la relation d'entrée-sortie (équation (10.83) de l'annexe F) reliant les fluctuation du champ photonique intracavité et extracavité est identique pour ces deux systèmes.

En se limitant au cas de la résonance cavité-laser ($\Delta = \Delta_a = \Delta_b$), nous avons calculé pour deux régimes de couplage (régime de couplage fort et régime de couplage faible) :

- Tout d'abord le spectre de bruit extracavité S_{opt}^{out} en fonction de désaccord cavité-laser Δ et de la fréquence ω (*figures* 42 et 45).

- Ensuite le spectre de bruit minimal en fréquence $S_{min}(\Delta) = Min_{\omega} S_{opt}$ en fonction du désaccord Δ (*figures* 43 et 46). Ce spectre est défini de la manière suivante : Pour Δ fixe, nous cherchons à minimiser S_{opt}^{out} en variant la fréquence ω, en variant le désaccord Δ nous obtenons une fonction $S_{min}(\Delta)$ qui dépend uniquement de ce désaccord.

- Enfin le spectre de bruit en fonction de ω pour un désaccord optimal (Δ_{opt}) : $S'(\omega) = S_{opt}|_{\Delta=\Delta_{opt}}$ où Δ_{opt} est le désaccord qui donne la valeur optimale de S_{min} (*figures* 44 et 47). Nous en déduisons que le squeezing maximal est atteint pour des désaccords Δ_{opt} égaux aux valeurs de la constante de couplage g et pour des fréquences proches de la fréquence nulle. L'augmentation de la constante de couplage g est favorable au squeezing et ceci à déphasage non-linéaire k sensiblement constant. Nous pouvons atteindre des valeurs importantes de squeezing dans le régime de couplage fort (45% de squeezing dans le cas de la figure 43), malgré la relativement faible non-linéarité du système, puisque nous avons $k \precsim \gamma, \kappa$.

Notons en plus que les courbes (43) et (46) qui représentent S_{min} en fonction du désaccord sont légèrement dissymétriques. La dissymétrie augmente lorsqu'on diminue le couplage g et elle est particulièrement visible en couplage faible.

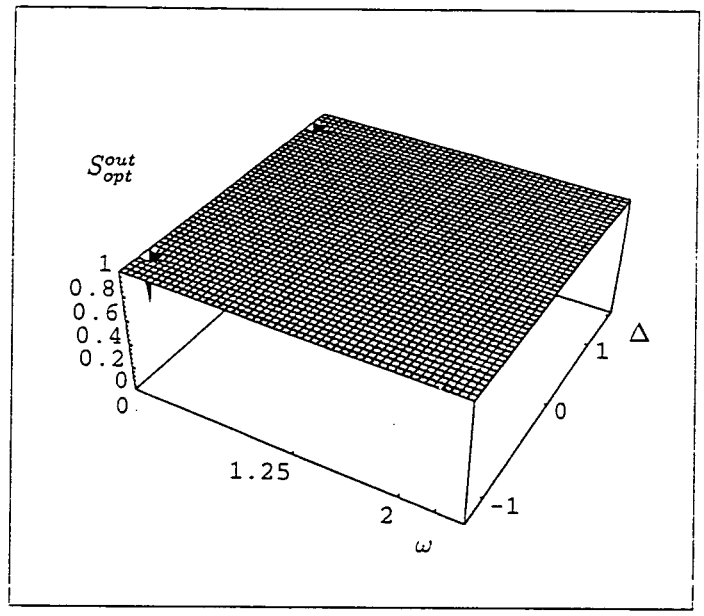


Fig. 42: Spectre de bruit S_{opt}^{out} en fonction du désaccord Δ et de la fréquence ω pour g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$ (couplage fort)

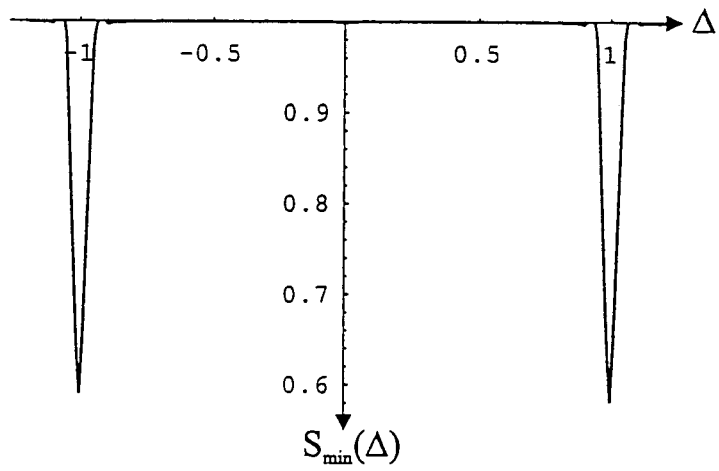


Fig. 43: Spectre de bruit minimal en fréquence S_{min} en fonction du désaccord Δ pour g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$

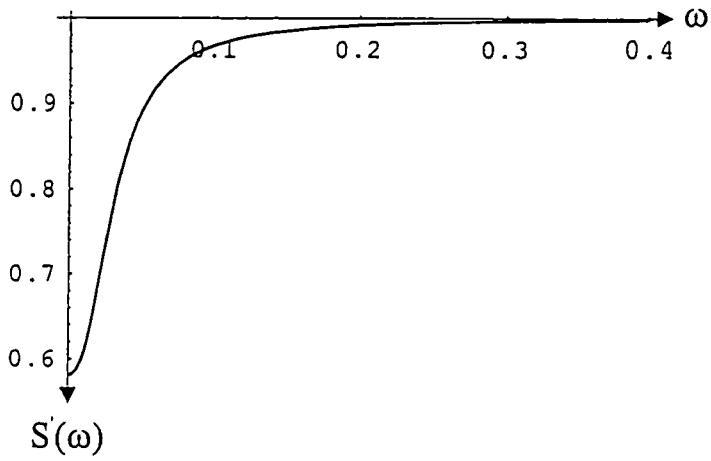


Fig. 44: Spectre de bruit S' en fonction de ω pour un désaccord optimal $\Delta = g$, g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$

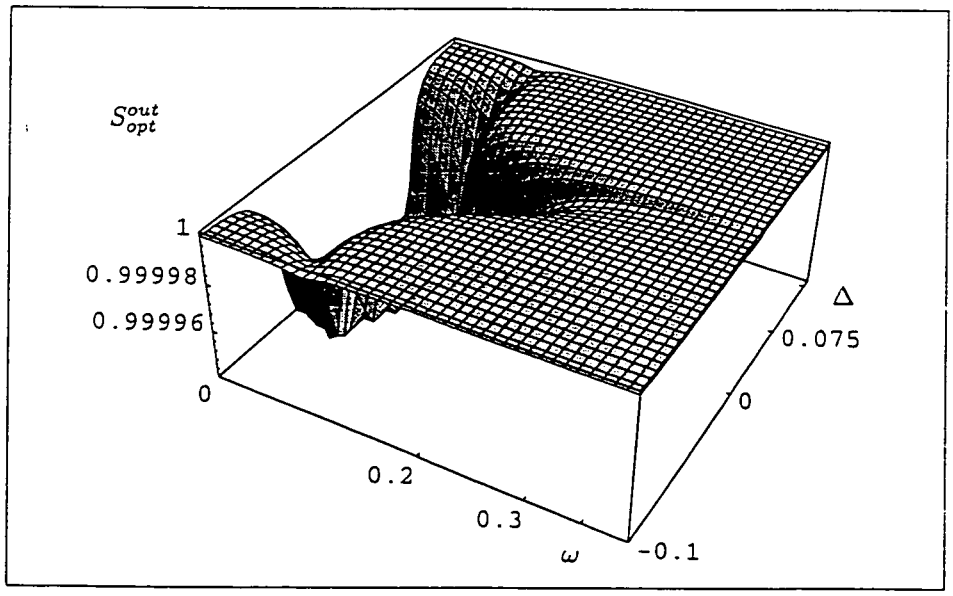


Fig. 45: Spectre de bruit S_{opt}^{out} en fonction du désaccord Δ et de la fréquence ω pour g=0.004, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 250$ et $\alpha = 10^{-9}$ (couplage faible)

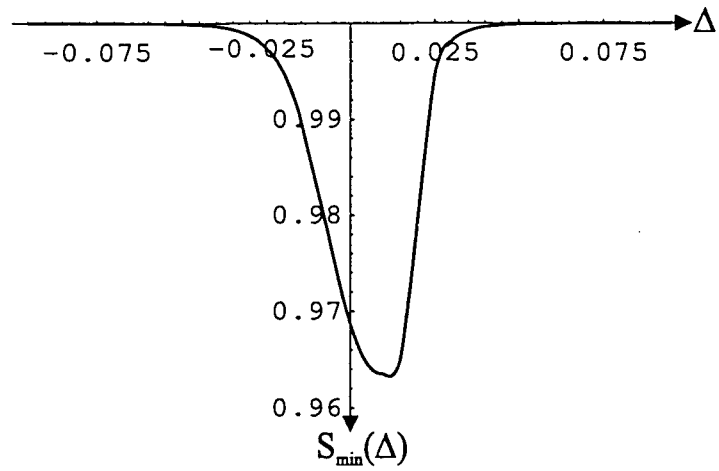


Fig. 46: Spectre de bruit minimal en fréquence S_{min} en fonction du désaccord Δ pour g=0.004, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 250$ et $\alpha = 10^{-9}$

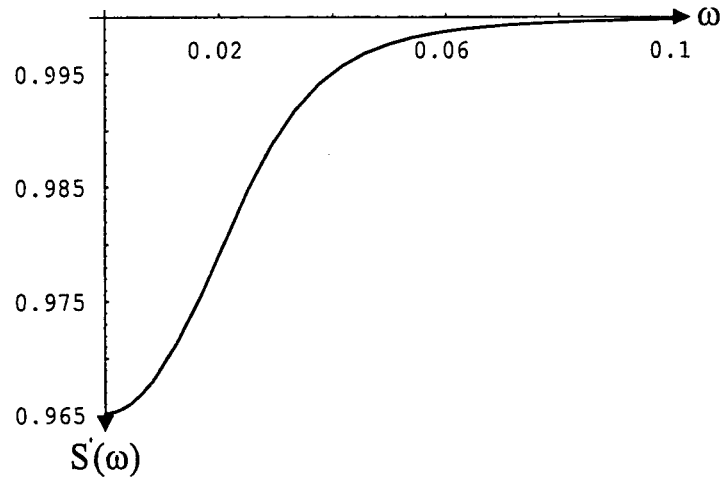


Fig. 47: Spectre de bruit S' en fonction de ω pour un désaccord optimal $\Delta = g$, g=0.004, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 250$ et $\alpha = 10^{-9}$

6.2 Couplage non-linéaire

Une démarche analogue au cas précédent conduit aux équations d'évolution des fluctuations :

$$\frac{d}{dt}\delta a = (g-2R)\,\delta b + (i\Delta_a - \kappa)\,\delta a - R\delta b^{\dagger} + \sqrt{2\kappa}C^{in} \tag{6.37}$$

$$\frac{d}{dt}\delta b = (-g+2R)\,\delta a + \left(i\Delta_b - \frac{\gamma}{2} + 2rg\left(\langle b^{\dagger}\rangle\langle a\rangle - \langle a^{\dagger}\rangle\langle b\rangle\right)\right)\delta b + (2rg\,\langle b\rangle\langle a\rangle)\,\delta b^{\dagger} + \sqrt{\gamma}D^{in} \tag{6.38}$$

$$\frac{d}{dt}\delta\, a^{\dagger} = (g-2R)\,\delta b^{\dagger} - (i\Delta_a + \kappa)\,\delta\, a^{\dagger} - R\delta b + \sqrt{2\kappa}C^{in\dagger} \tag{6.39}$$

$$\frac{d}{dt}\delta\, b^{\dagger} = (-g+2R)\,\delta\, a^{\dagger} + \left(-i\Delta_b - \frac{\gamma}{2} + 2rg\left(\langle\, b\rangle\langle\, a^{\dagger}\rangle - \langle\, a\rangle\langle\, b^{\dagger}\rangle\right)\right)\delta\, b^{\dagger} + \left(2rg\langle\, b^{\dagger}\rangle\langle\, a^{\dagger}\rangle\right)\delta\, b + \sqrt{\gamma}D^{in\dagger} \tag{6.40}$$

En utilisant les équations (5.23) et (5.27) établies dans le chapitre 5 et après des manipulations algébriques, nous obtenons dans l'espace de Fourier l'expression de la matrice d'évolution $M_{\sim}[\omega]$ suivante :

$$M_{\sim}[\omega] = \begin{bmatrix} M_1[\omega] & 2R-g & 0 & R \\ g-2R & M_2[\omega] & R & \frac{\gamma R}{g-R} - i\Theta \\ 0 & R & M_3[\omega] & 2R-g \\ R & \frac{\gamma R}{g-R} + i\Theta & g-2R & M_4[\omega] \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

avec

$$\Theta = \frac{2R\Delta_b}{g-3R} \tag{6.42}$$

$$M_1[\omega] = \kappa + i(\omega - \Delta_a) \tag{6.43}$$

$$M_2[\omega] = \frac{\gamma}{2} + i(\omega - (\Delta_b + 2\Theta)) \tag{6.44}$$

$$M_3[\omega] = \kappa + i(\omega + \Delta_a) \tag{6.45}$$

$$M_4[\omega] = \frac{\gamma}{2} + i(\omega + (\Delta_b + 2\,\Theta)) \tag{6.46}$$

Le résultat de calcul du spectre de bruit conduit aux mêmes conclusions que le cas précédent de la non-linéarité excitonique. Cependant contrairement au cas précédent les courbes (49) et (52) qui représentent S_{min} en fonction du désaccord sont parfaitement symétriques indépendamment de la valeur du couplage g .

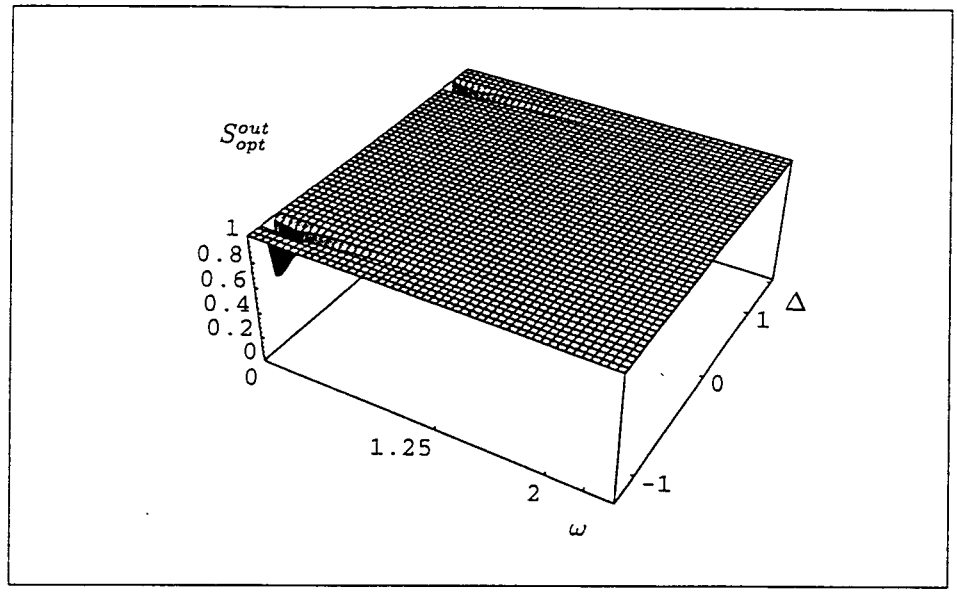


Fig. 48: Spectre de bruit S_{opt}^{out} en fonction du désaccord Δ et de la fréquence ω pour g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $r = 10^{-9}$ (couplage fort)

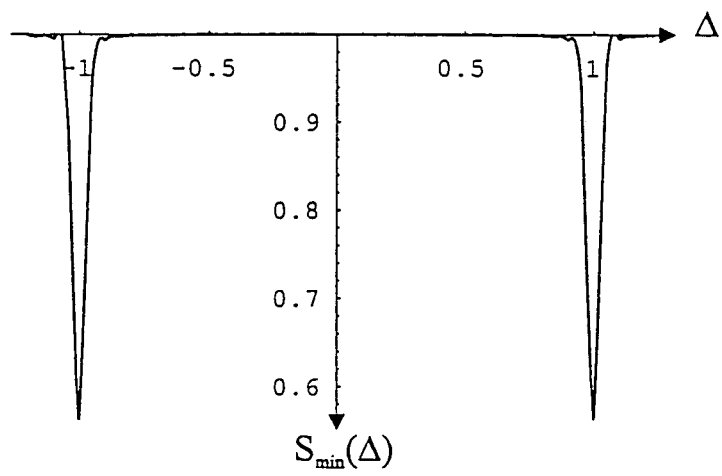


Fig. 49: Spectre de bruit minimal en fréquence S_{min} en fonction du désaccord Δ pour g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $r = 10^{-9}$

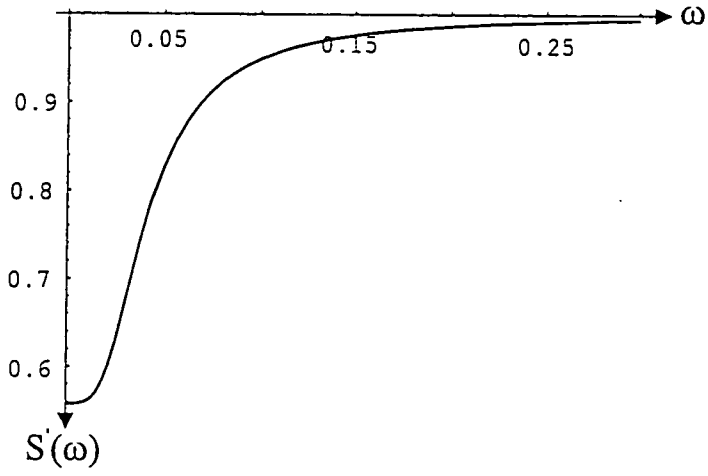


Fig. 50: Spectre de bruit S' en fonction de ω pour un désaccord optimal $\Delta = g$, g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $r = 10^{-9}$

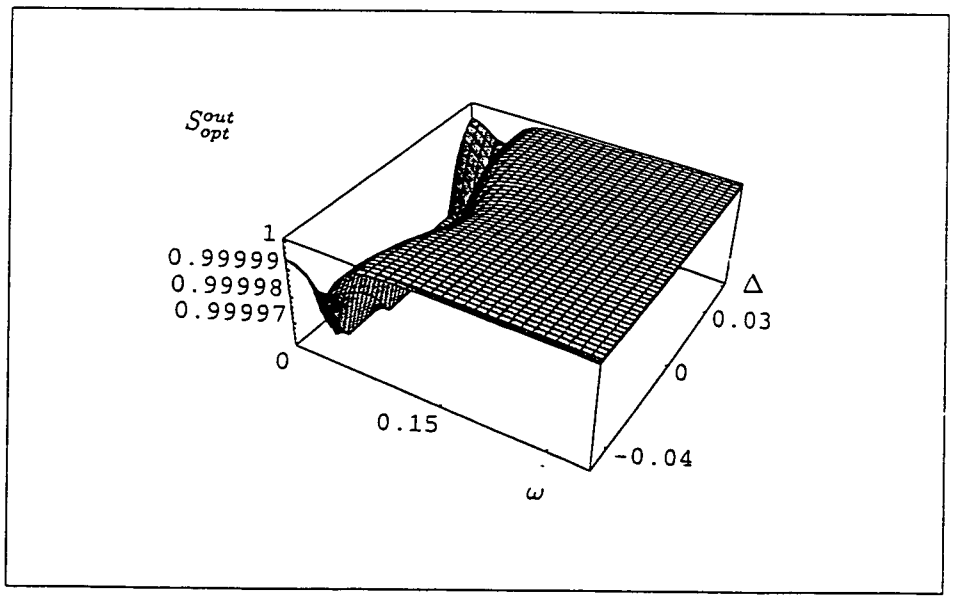


Fig. 51: Spectre de bruit S^{out}_{opt} en fonction du désaccord Δ et de la fréquence ω pour g=0.004, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 250$ et $r = 10^{-9}$ (couplage faible)

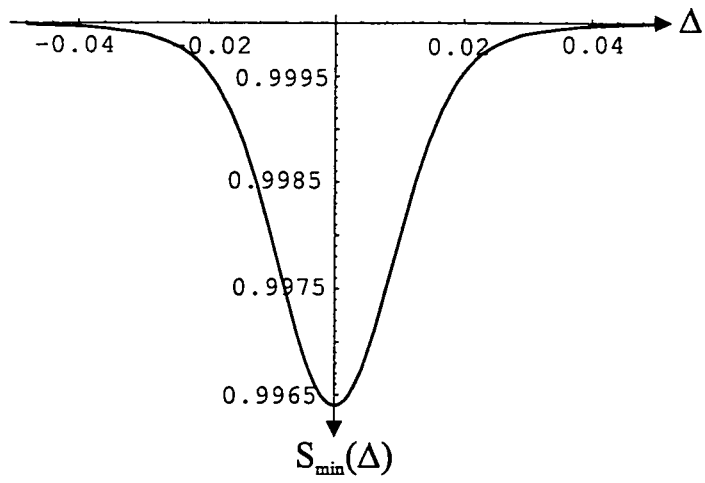


Fig. 52: Spectre de bruit minimal en fréquence S_{min} en fonction du désaccord Δ pour g=0.004, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 250$ et $r = 10^{-9}$

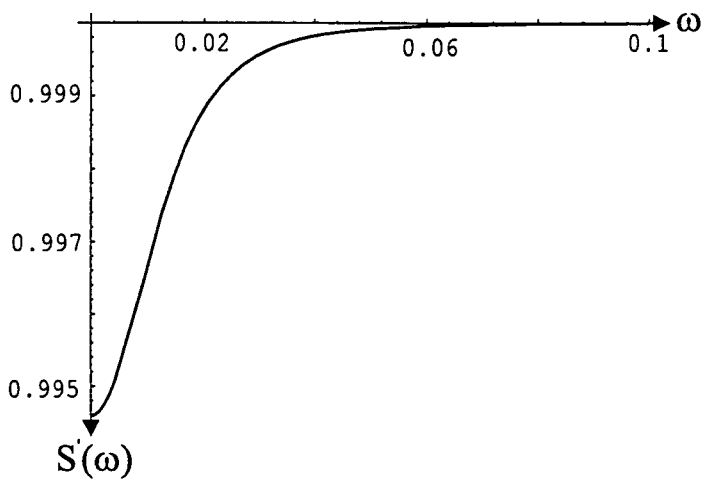


Fig. 53: Spectre de bruit S' en fonction de ω pour un désaccord optimal $\Delta = g$, g=0.004, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 250$ et $r = 10^{-9}$

6.3 Interaction non-linéaire: couplage non-linéaire + non-linéarité excitonique :

En suivant la même démarche que la paragraphe 1 de ce chapitre et en tenant compte simultanément des deux effets non-linéaires (couplage non-linéaire et l'interaction non-linéaire), les équations d'évolution des fluctuations s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\delta a = (g-2R)\,\delta b + (i\Delta_a - \kappa)\,\delta a - R\delta b^{\dagger} + \sqrt{2\kappa}C^{in} \tag{6.47}$$

$$\frac{d}{dt}\delta b = (-g+2R)\,\delta a + \left(i\,(\Delta_b - 2k) - \frac{\gamma}{2} + 2rg\left(\langle b^{\dagger}\rangle\langle a\rangle - \langle a^{\dagger}\rangle\langle b\rangle\right)\right)\delta b$$
$$+ (2rg\,\langle b\rangle\,\langle a\rangle)\,\delta b^{\dagger} + \sqrt{\gamma}D^{in} \tag{6.48}$$

$$\frac{d}{dt}\delta\, a^{\dagger} = (g-2R)\,\delta b^{\dagger} - (i\Delta_a + \kappa)\,\delta\, a^{\dagger} - R\delta b + \sqrt{2\kappa}C^{in\dagger} \tag{6.49}$$

$$\frac{d}{dt}\delta\, b^{\dagger} = (-g+2R)\,\delta\, a^{\dagger} + \left(-i\,(\Delta_b - 2k) - \frac{\gamma}{2} + 2rg\left(\langle\, b\rangle\langle\, a^{\dagger}\rangle - \langle\, a\rangle\langle\, b^{\dagger}\rangle\right)\right)\delta\, b^{\dagger}$$
$$+ \left(2rg\,\langle\, b^{\dagger}\rangle\langle\, a^{\dagger}\rangle\right)\delta\, b + \sqrt{\gamma}D^{in\dagger} \tag{6.50}$$

En utilisant l'équation (5.35) établie dans le chapitre 5 et après des manipulations algébriques nous obtenons dans l'espace de Fourier l'expression de la matrice d'évolution $M_{\sim}[\omega]$ suivante :

$$M_{\sim}[\omega] = \begin{bmatrix} M_1[\omega] & 2R-g & 0 & R \\ g-2R & M_2[\omega] & R & \Lambda - i\Theta_T \\ 0 & R & M_3[\omega] & 2R-g \\ R & \Lambda + i\Theta_T & g-2R & M_4[\omega] \end{bmatrix} \tag{6.51}$$

avec

$$\Theta_T = \frac{2R\,(\Delta_b - k)}{g-3R} - k \tag{6.52}$$

$$\Lambda = \frac{\gamma R}{g-R} \tag{6.53}$$

$$M_1[\omega] = \kappa + i\,(\omega - \Delta_a) \tag{6.54}$$

$$M_2[\omega] = \frac{\gamma}{2} + i\,(\omega - (\Delta_b + 2\Theta_T)) \tag{6.55}$$

$$M_3[\omega] = \kappa + i\,(\omega + \Delta_a) \tag{6.56}$$

$$M_4[\omega] = \frac{\gamma}{2} + i\,(\omega + (\Delta_b + 2\,\Theta_T)) \tag{6.57}$$

Les calculs montrent que l'effet non-linéaire est similaire à celui de l'effet de la non-linéarité excitonique, cependant les courbes (55) et (58) qui représentent S_{min} en fonction du désaccord sont légèrement plus dissymétriques.

Cette trés faible différence entre l'allure des courbes pour le cas de la non-linéarité excitonique et le cas d'interaction non-linéaire nous permet de déduire que l'effet de la non-linéarité global est dominé par le terme d'interaction excitonique ($\alpha b^\dagger b^\dagger b b$) pour les spectres de bruit.

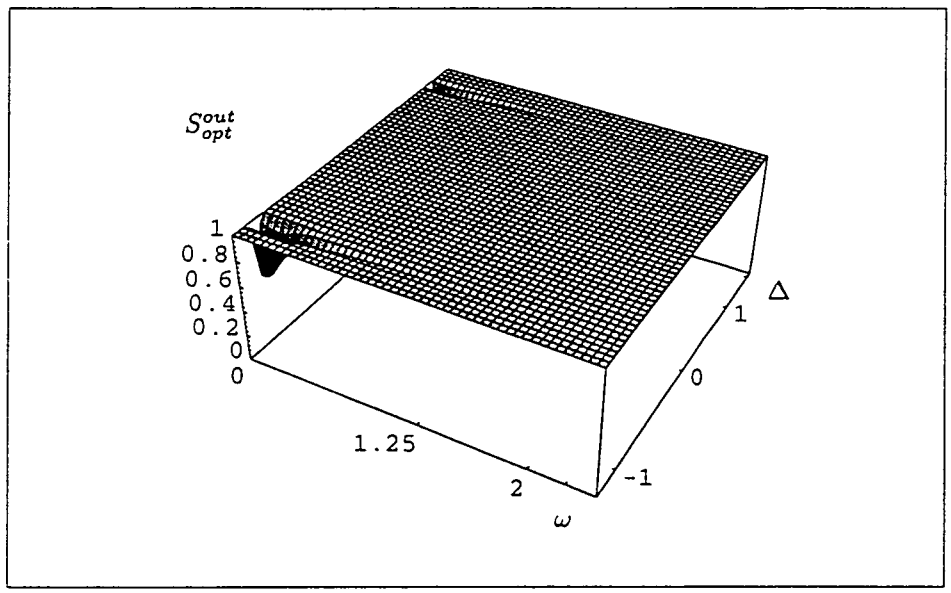


Fig. 54: Spectre de bruit S_{opt}^{out} en fonction du désaccord Δ et de la fréquence ω pour g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$, $\alpha = 10^{-9}$ et $r = 10^{-9}$ (couplage fort)

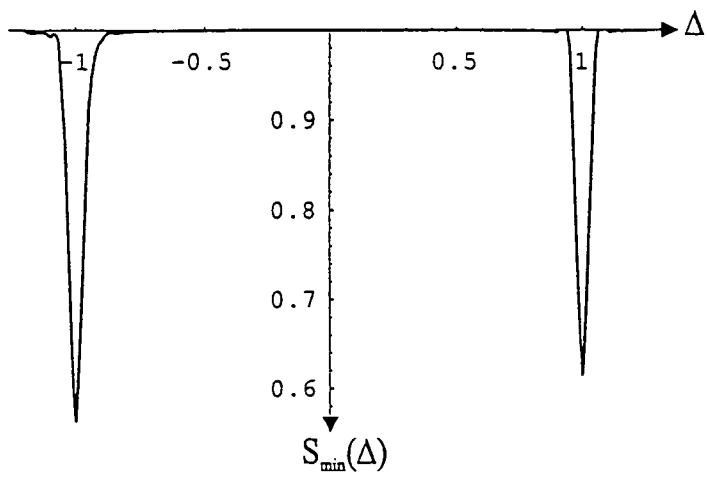


Fig. 55: Spectre de bruit minimal en fréquence S_{min} en fonction du désaccord Δ pour g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$, $\alpha = 10^{-9}$ et $r = 10^{-9}$

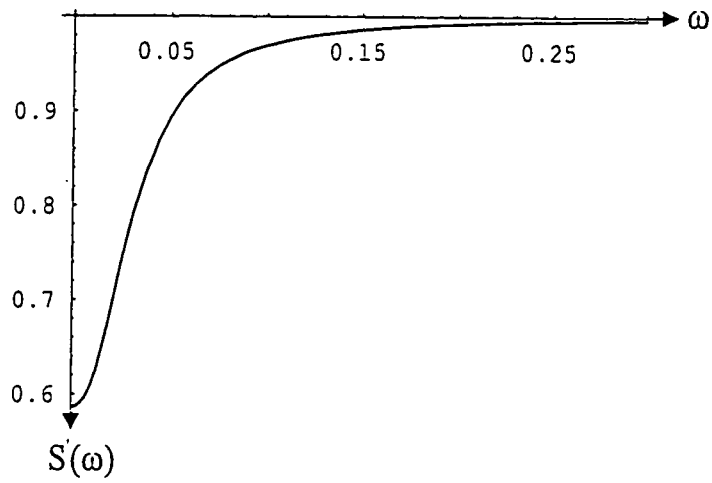


Fig. 56: Spectre de bruit S' en fonction de ω pour un désaccord optimal $\Delta = g$, g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$, $\alpha = 10^{-9}$ et $r = 10^{-9}$

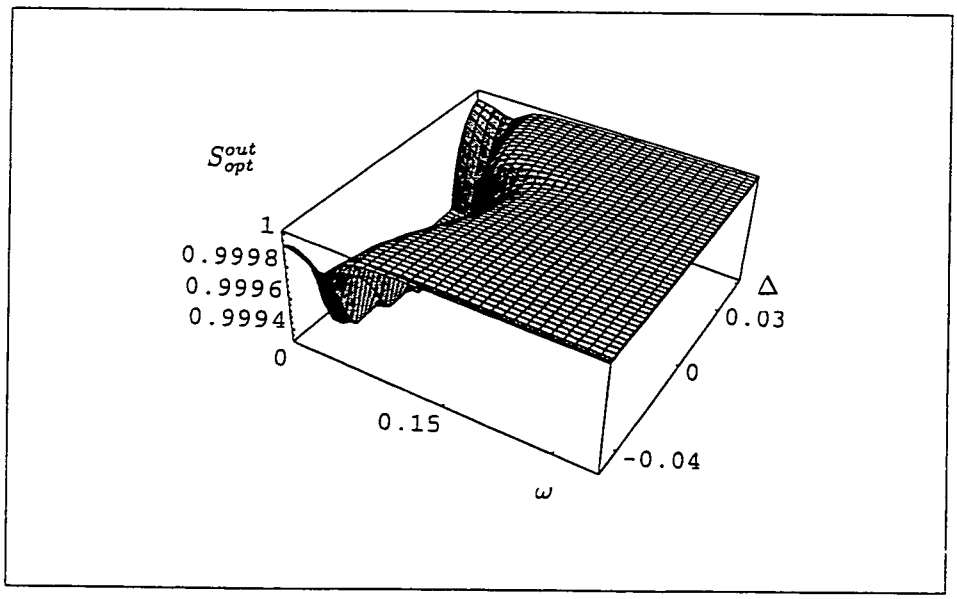


Fig. 57: Spectre de bruit S_{opt}^{out} en fonction du désaccord Δ et de la fréquence ω pour g=0.004, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 250$, $\alpha = 10^{-9}$ et $r = 10^{-9}$ (couplage faible)

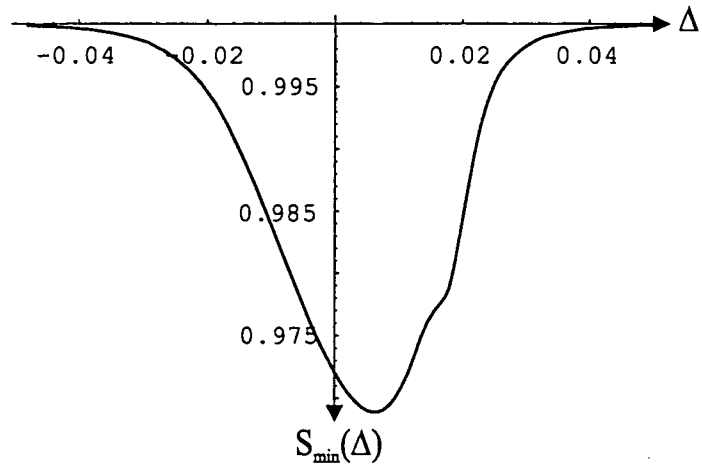


Fig. 58: Spectre de bruit minimal en fréquence S_{min} en fonction du désaccord Δ pour g=0.004, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 250$, $\alpha = 10^{-9}$ et $r = 10^{-9}$

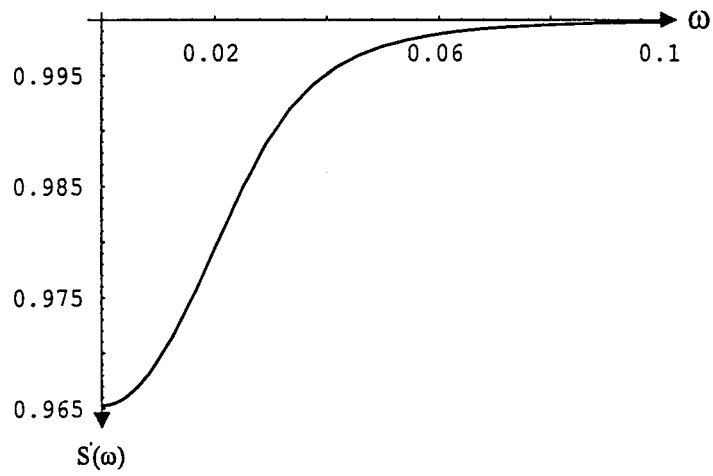


Fig. 59: Spectre de bruit S' en fonction de ω pour un désaccord optimal $\Delta = g$, g=0.004, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 250$, $\alpha = 10^{-9}$ et $r = 10^{-9}$

6.4 Non-linéarité optique

Une démarche similaire au premier paragraphe de ce chapitre mène aux équations d'évolution des fluctuations linéarisées suivantes :

$$\frac{d}{dt}\delta a = g\delta b - \kappa\delta a + i\Delta_a\delta a - 2ik\delta a - ik\delta a^{\dagger} + \sqrt{2\kappa}C^{in} \tag{6.58}$$

$$\frac{d}{dt}\delta b = -g\delta a - \frac{\gamma}{2}\delta b + i\Delta_b\delta b + \sqrt{\gamma}D^{in} \tag{6.59}$$

$$\frac{d}{dt}\delta\, a^{\dagger} = g\delta\, b^{\dagger} - \kappa\delta\, a^{\dagger} - i\Delta_a\delta\, a^{\dagger} + 2ik\delta a^{\dagger} + ik\delta a + \sqrt{2\kappa}C^{in} \tag{6.60}$$

$$\frac{d}{dt}\delta\, b^{\dagger} = -g\delta\, a^{\dagger} - \frac{\gamma}{2}\delta\, b^{\dagger} - i\Delta_b\delta\, b^{\dagger} + \sqrt{\gamma}D^{in} \tag{6.61}$$

La matrice d'évolution $M_{\sim}[\omega]$ a pour expression dans ce cas :

$$M_{\sim}[\omega] = \begin{bmatrix} i\omega + i\,(2k - \Delta_a) + \kappa & -g & ik & 0 \\ g & \frac{\gamma}{2} + i\omega - i\Delta_b & 0 & 0 \\ -ik & 0 & i\omega + i\,(\Delta_a - 2k) + \kappa & -g \\ 0 & 0 & g & \frac{\gamma}{2} + i\omega + i\Delta_b \end{bmatrix} \tag{6.62}$$

Contrairement aux cas précédents, l'augmentation du couplage dans un système présentant une non-linéarité optique de type Kerr diminue le squeezing. Le squeezing dans un milieu Kerr optique idéal est de 100%, la contamination par le couplage avec un oscillateur harmonique excitonique représente une perte effective qui diminue l'effet de squeezing au fur et à mesure que le couplage augmente.

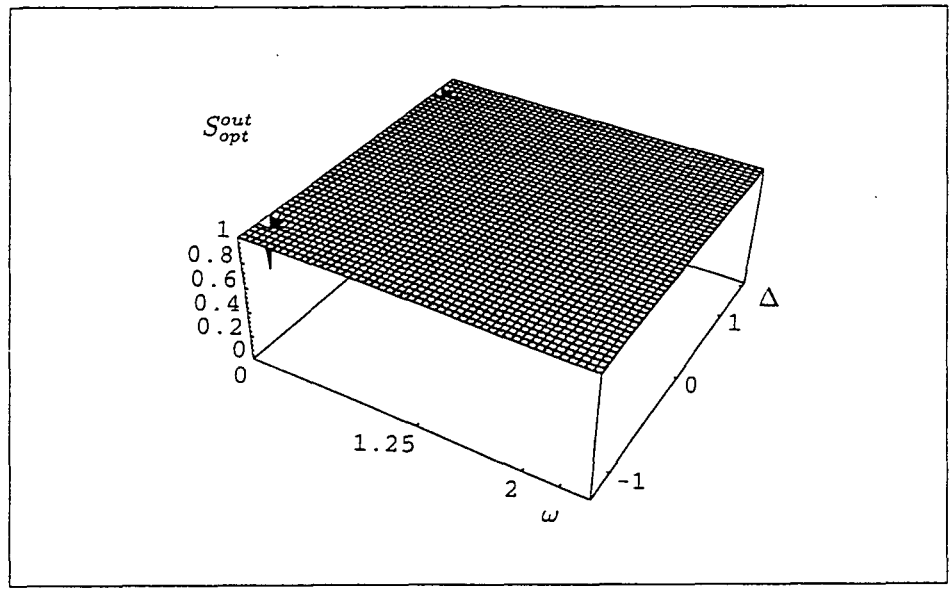


Fig. 60: Spectre de bruit S_{opt}^{out} en fonction du désaccord Δ et de la fréquence ω pour g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$ (couplage fort)

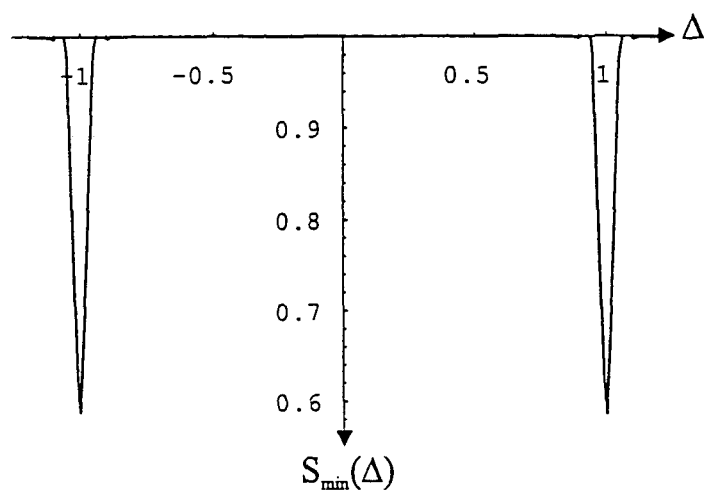


Fig. 61: Spectre de bruit minimal en fréquence S_{min} en fonction du désaccord Δ pour g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$

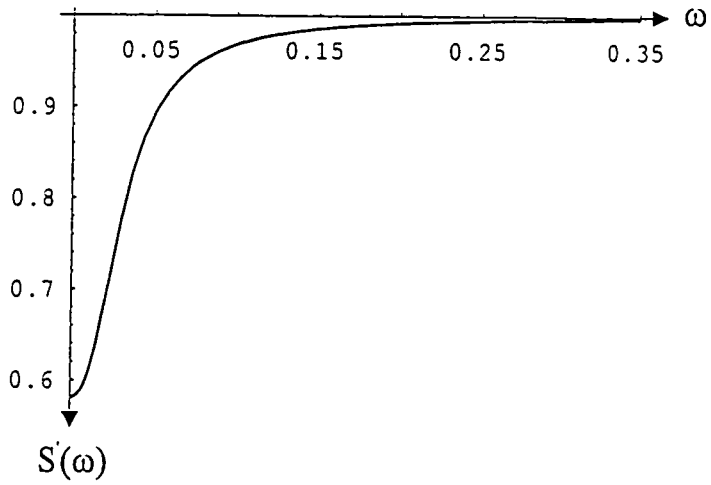


Fig. 62: Spectre de bruit S' en fonction de ω pour un désaccord optimal $\Delta = g$, g=1, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$

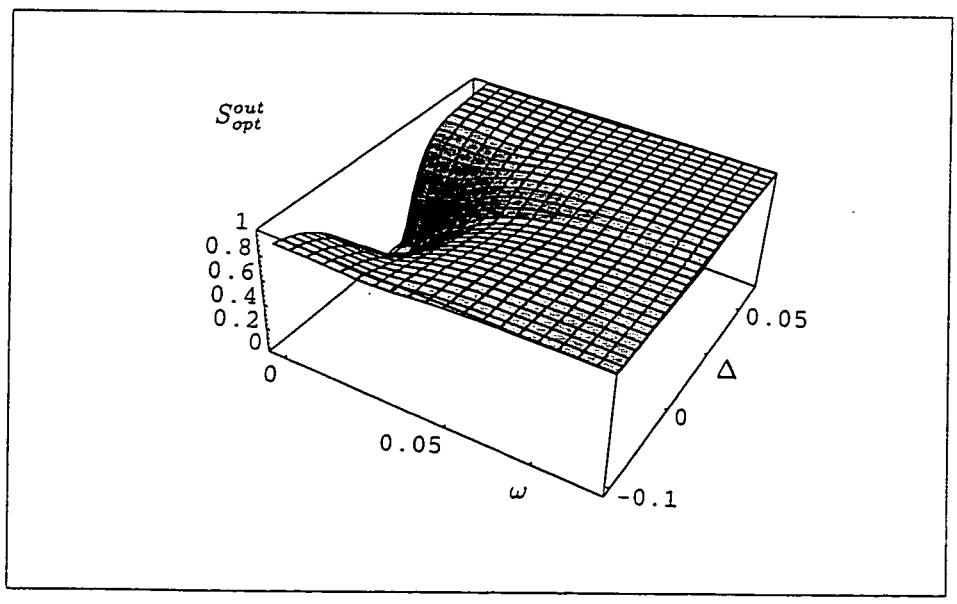


Fig. 63: Spectre de bruit S_{opt}^{out} en fonction du désaccord Δ et de la fréquence ω pour g=0.004, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 70$ et $\alpha = 10^{-9}$ (couplage faible)

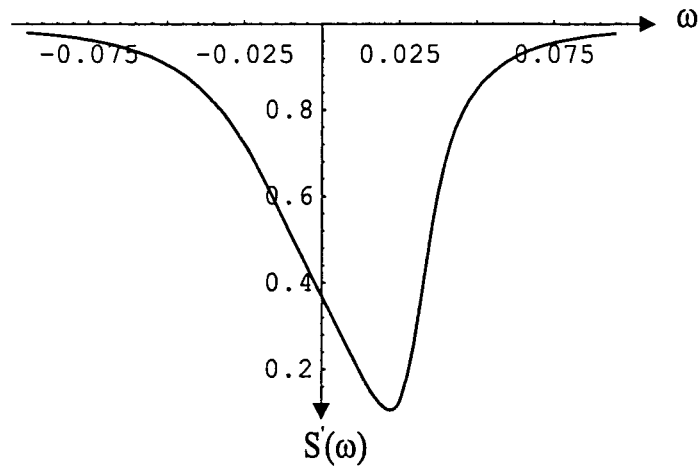


Fig. 64: Spectre de bruit minimal en fréquence S_{min} en fonction du désaccord Δ pour g=0.004, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 70$ et $\alpha = 10^{-9}$

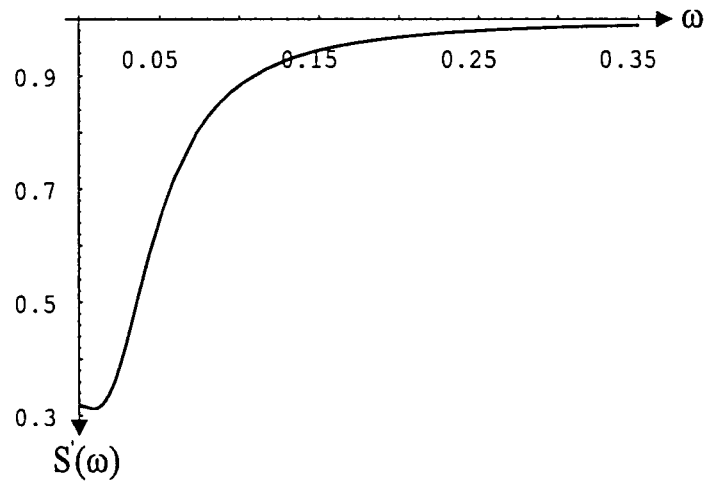


Fig. 65: Spectre de bruit S' en fonction de ω pour un désaccord optimal $\Delta = g$, g=0.004, $\gamma = \kappa = \frac{1}{40}$, $\varepsilon = 70$ et $\alpha = 10^{-9}$

6.5 Conclusion

De cette étude du spectre de bruit, nous pouvons conclure que pour notre système non-linéaire le squeezing maximal est atteint pour des désaccords égaux au valeur de la constante de couplage et pour des fréquences proches de la fréquence nulle. L'augmentation du couplage est favorable au squeezing, malgré la relativement faible non-linéarité du système. Le régime de couplage fort est le régime le plus prometteur pour donner de bonnes valeurs de squeezing.

Nous avons remarqué en plus que la différence entre l'allure des courbes de spectres pour le cas de la non-linéarité excitonique et le cas non-linéaire est très faible. Ceci nous permet de déduire que l'effet de la non-linéarité est dominé par le terme d'interaction excitonique ($\alpha b^\dagger b^\dagger bb$).

Pour le système possédant une non-linéarité optique, l'augmentation du couplage au contraire diminue le squeezing.

7 Fonction d'autocorrélation

Dans cette partie, nous étudions la statistique des champs émis par des microcavités semi-conductrices en calculant la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$ pour les deux systèmes en réflexion et en transmission en nous limitant au cas de la résonance exciton-cavité. Les traitements seront principalement numériques; cependant il sera possible, pour le cas de la non-linéarité excitonique en régime de couplage fort et pour un système en transmission, de donner des résultats analytiques.

7.1 Non-linéarité excitonique

Nous rappelons tout d'abord l'expression de la fonction d'autocorrélation intracavité :

$$g^{(2)}(t) = \frac{\langle a^\dagger(0)\, a^\dagger(t)\, a(t)\, a(0)\rangle}{\langle a^\dagger a\rangle^2} \tag{7.1}$$

En utilisant l'approximation gaussienne et l'hypothèse que les fluctuations sont petites devant leur valeurs moyennes (voir annexe A) nous obtenons une relation de la fonction de corrélation intracavité qui dépend linéairement des covariances $C_{a^\dagger a}$ et C_{aa} :

$$g^{(2)}(t) - 1 = \frac{2Re\left\{\langle a\rangle \langle a^\dagger\rangle C_{a^\dagger a}(t) + \langle a^\dagger\rangle \langle a^\dagger\rangle C_{aa}(t)\right\}}{\left(\langle a\rangle \langle a^\dagger\rangle\right)^2} \tag{7.2}$$

Il est donc clair que la fonction de d'autocorrélation dépend linéairement des corrélations des fluctuations. Nous rappelons les équations d'évolution des fluctuations dans l'espace de Fourier (équations (6.17) et (6.18)) :

$$M_{\sim}[p] \begin{bmatrix} \delta a[p] \\ \delta b[p] \\ \delta a^\dagger[p] \\ \delta b^\dagger[p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\kappa} C^{in}[p] \\ \sqrt{\gamma} D^{in}[p] \\ \sqrt{2\kappa} C^{in\,\dagger}[p] \\ \sqrt{\gamma} D^{in\,\dagger}[p] \end{bmatrix}$$

On a de plus effectué la transformation p=iω.

L'ensemble de ces deux transformations (transformation de Fourier et p=iω) est équivalente à la transformation de Laplace bilatérale, qui est peu utilisée dans la littérature. Cette transformation a l'avantage de simplifier les calculs et de donner des expressions plus simples et plus maniables que la transformation de Fourier. La matrice d'évolution dans le cas de la non-linéarité excitonique dans l'espace de Laplace $M_{\sim}[p]$ a pour expression :

$$M_{\sim}[p] = \begin{bmatrix} p - i\Delta_a + \kappa & -g & 0 & 0 \\ g & \frac{\gamma}{2} + p - i\Delta_b + 2ik & 0 & ik \\ 0 & 0 & p + i\Delta_a + \kappa & -g \\ 0 & -ik & g & \frac{\gamma}{2} + p + i\Delta_b - 2ik \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

la résolution générale du système aboutit à une relation donnant $\delta a\,[p]$ comme une combinaison linéaire des fluctuations entrantes et leurs hermitiques conjugués :

$$\delta a\,[p] = \sqrt{2\kappa} C^{in}\,[p]\,T_1\,[p] + \sqrt{\gamma} D^{in}\,[p]\,T_2\,[p] + \sqrt{2\kappa} C^{in\,\dagger}\,[p]\,T_3\,[p] + \sqrt{\gamma} D^{in\,\dagger}\,[p]\,T_4\,[p] \tag{7.4}$$

Nous rappelons les expressions des fonctions de covariances dans l'espace de Fourier établie dans le chapitre précédent :

$$C_{aa}\,[\omega] = 2\kappa T_1\,[\omega]\,T_3\,[-\omega] + \gamma T_2\,[\omega]\,T_4\,[-\omega] \tag{7.5}$$

$$C_{a^\dagger a}\,[\omega] = 2\kappa T_3^*\,[\omega]\,T_3\,[-\omega] + \gamma T_4^*\,[\omega]\,T_4\,[-\omega] \tag{7.6}$$

ce qui donne dans l'espace de Laplace (p=iω) :

$$C_{aa}[p] = 2\kappa T_1\,[p]\,T_3\,[-p] + \gamma T_2\,[p]\,T_4\,[-p] \tag{7.7}$$

$$C_{a^\dagger a}[p] = 2\kappa T_3^*\,[p]\,T_3\,[-p] + \gamma T_4^*\,[p]\,T_4\,[-p] \tag{7.8}$$

Par mesure de commodité de calcul nous noterons :

$$g_{-}^{(2)}\,(t) = g^{(2)}\,(t) - 1$$

la fonction d'autocorrélation translatée.

Nous avons montré dans l'annexe C que si f(t) est une fonction qui se transforme par Laplace en f[p] alors la transformation de Laplace de $Re[f(t)]$ est $Re[f(p)]$ (La transformé de Laplace de la partie réelle d'une fonction en t donne la partie réelle de la fonction en p). Ceci nous permet d'établir dans l'espace de Laplace l'expression de

$g_{-}^{(2)}[p]$:

$$g_{-}^{(2)}[p] = \frac{2Re\left\{\langle a\rangle\langle a^{\dagger}\rangle C_{a^{\dagger}a}[p] + \langle a^{\dagger}\rangle\langle a^{\dagger}\rangle C_{aa}[p]\right\}}{\left(\langle a\rangle\langle a^{\dagger}\rangle\right)^{2}} \tag{7.9}$$

On peut décomposer les fonctions $T_i[p]$ en un rapport de deux polynômes en p :

$$T_i[p] = \frac{T_i'[p]}{T[p]} \;\; ; \; i = 1,2,3,4 \tag{7.10}$$

où

$$T[p] = \det\left[M_{\sim}[p]\right] \tag{7.11}$$

De ces trois dernières équations et des relations(7.7) (7.8) nous déduisons une expression générale liant les polynômes T_i et T à la fonction d'autocorrélation intracavité dans l'espace de Laplace :

$$g_{-}^{(2)}[p] = \frac{2}{\langle a\rangle\langle a^{\dagger}\rangle T^{*}[p]\,T[-p]} Re\left\{2\kappa T_3'^{*}[p]\,T_3'[-p] + \gamma T_4'^{*}[p]\,T_4'[-p]\right\} +$$
$$\frac{2}{\left(\langle a\rangle\langle a^{\dagger}\rangle\right)^{2} T[p]\,T[-p]} Re\left\{\langle a^{\dagger}\rangle\langle a^{\dagger}\rangle\left(2\kappa T_1'[p]\,T_3'[-p] + \gamma T_2'[p]\,T_4'[-p]\right)\right\} \tag{7.12}$$

Pour déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction d'autocorrélation intracavité, il est nécessaire de déterminer tout d'abord les pôles de cette fonction ce qui revient à dire à déterminer les racines des fonctions $T[p], T^{*}[p]$ et $T[-p]$. Ces pôles ($p_i = \Gamma_i + i\omega_i$) définissent les fréquences (ω_i) et les dissipations propres(Γ_i) de l'évolution du système et régissent la forme de la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$. La fonction d'autocorrélation est symétrique par renversement du temps, ce qui permet de restreindre notre étude pour $t \geqslant 0$. On ne tiendra compte donc que des pôles ayant des parties réelles négatives. Dans l'annexe D nous avons montré que le polynôme $T[p]$ est un polynôme réel en p. Notre étude des pôles revient donc à la recherche des racines de $T[p]$.

7.1.1 Recherches des pôles

Dans l'annexe D nous avons montré dans le cas général que le système possède 4 pôles (deux à deux conjugués) pour n'importe quel type de non-linéarité, c'est à dire le système évolue au maximum avec deux dissipations propres $\Gamma_1$et Γ_2 et deux fréquences propres ω_1 et ω_2.

Nous déterminons maintenant d'une manière numérique les pôles du système possédant une non-linéarité excitonique. Les figures 66 et 68 montrent que les fréquences propres ω_1 et ω_2 à la résonance ($\Delta = 0$) sont égaux à la constante de couplage g. En régime de couplage fort ces fréquences se décalent linéairement en fonction de désaccord laser-cavité Δ. Les dissipations propres Γ_1 et Γ_2 sont égales à la moyenne des

dissipations excitonique $\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ et photonique (κ) pour tout désaccord Δ , excepté pour les deux cas où le désaccord Δ équivalent à $\pm g$.

Les figures 67 et 69 donnent la trajectoire des pôles dans le plan complexe $((\omega, \Gamma))$ lorsqu'on fait varier le désaccord Δ.

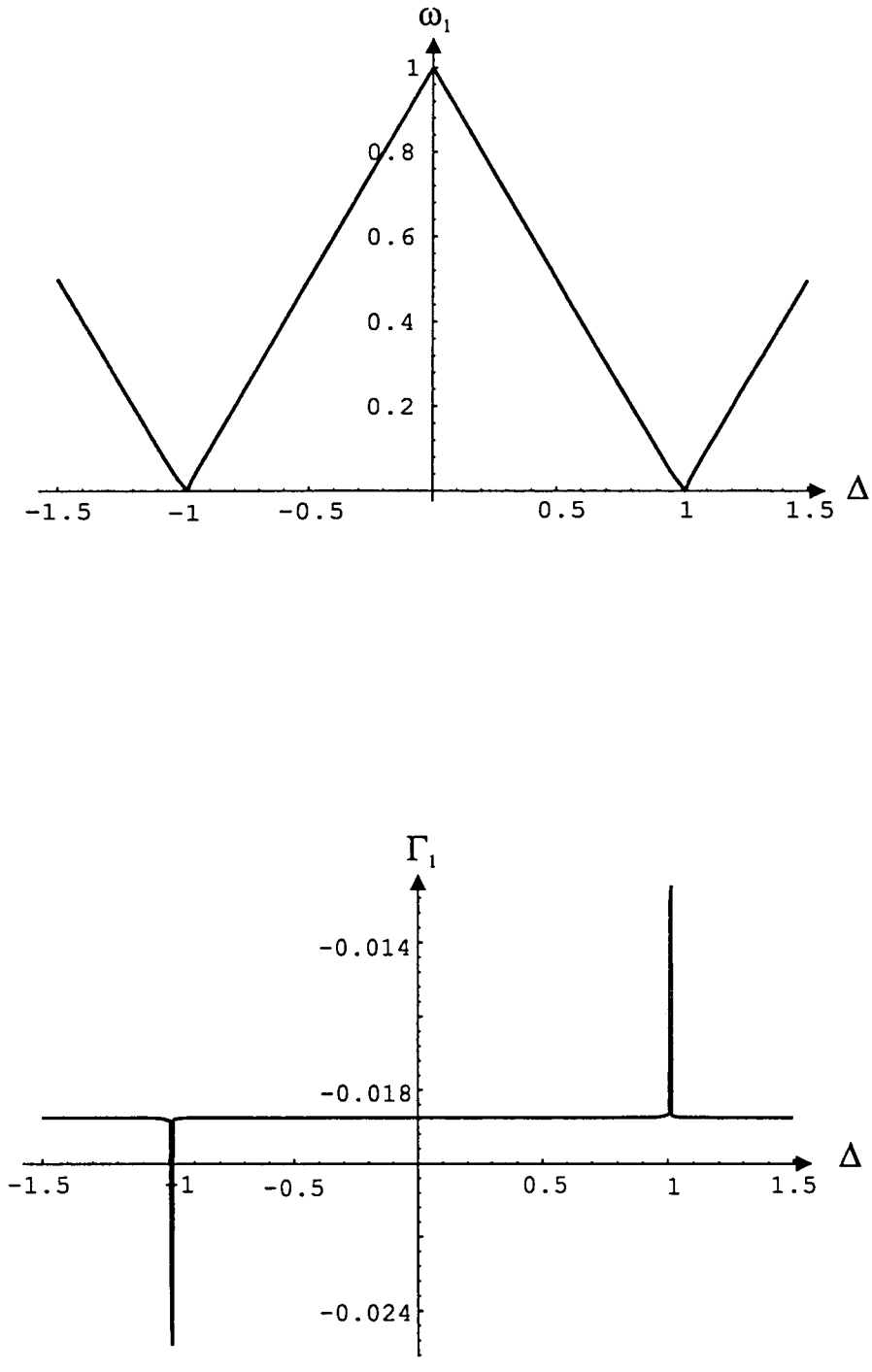


Fig. 66: Fréquence ω_1 et dissipation Γ_1 en fonction de désaccord Δ avec g=1,$\gamma = \kappa = 0.025$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$

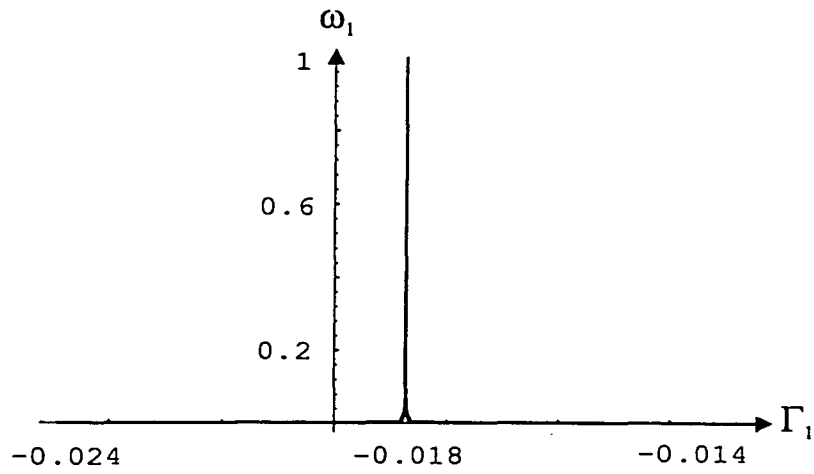


Fig. 67: Représentation du pôle p_1 dans le plan fréquence-dissipation

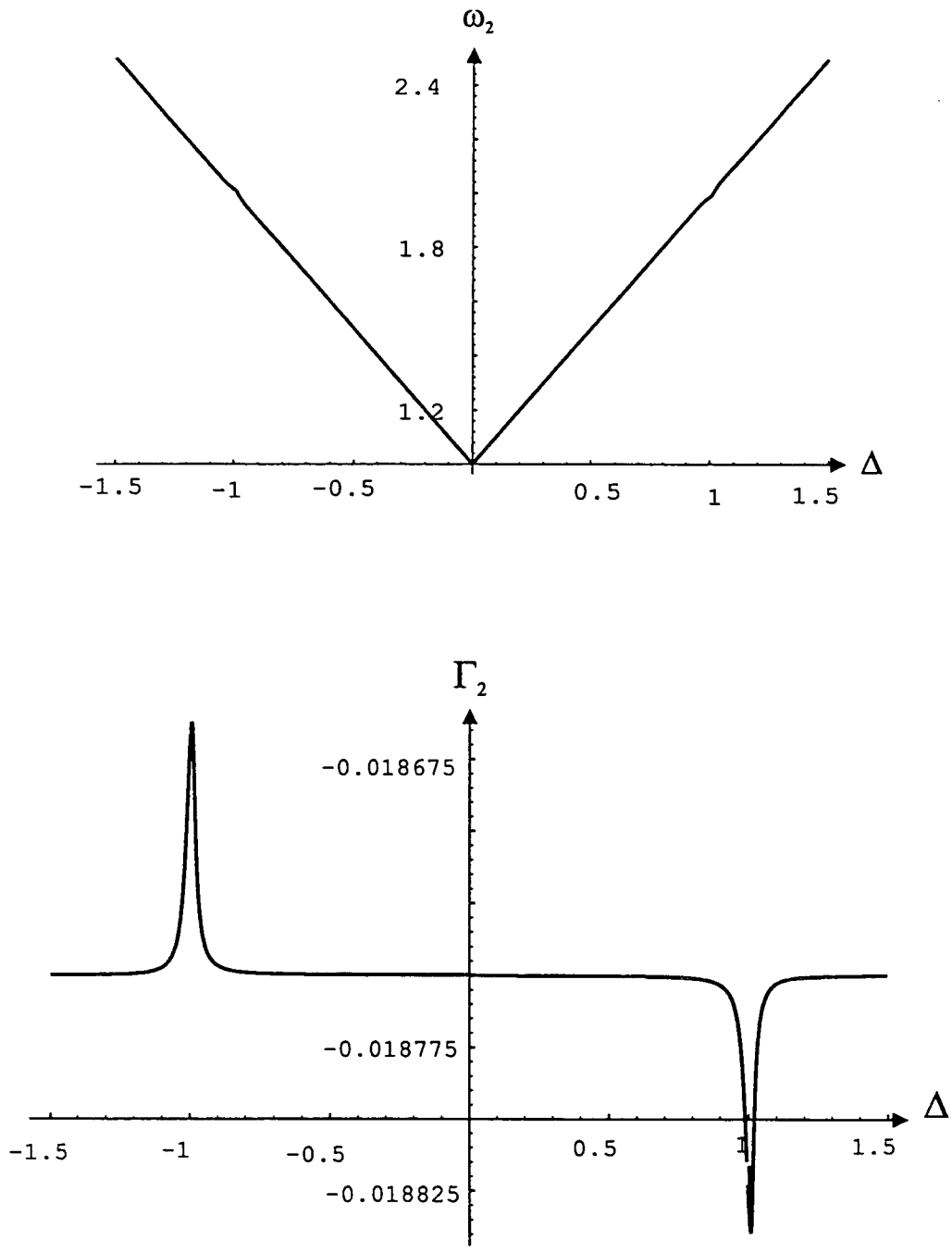


Fig. 68: Fréquence ω_2 et dissipation Γ_2 en fonction de désaccord Δ avec g=1,$\gamma = \kappa = 0.025$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$

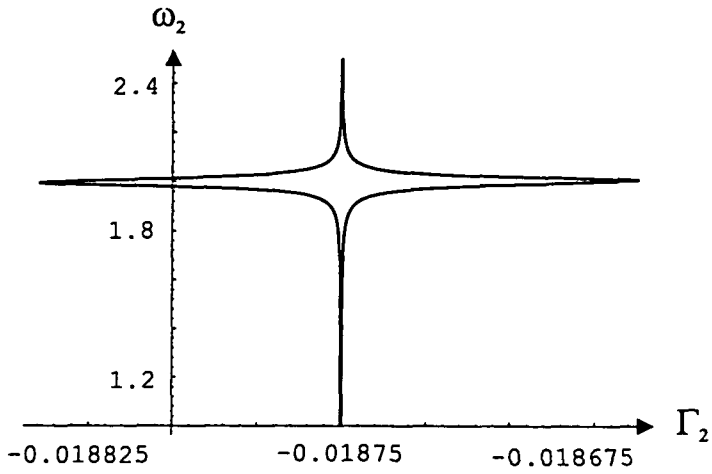


Fig. 69: Représentation du pôle p_2 dans le plan fréquence-dissipation

7.1.2 Etude numérique de la fonction d'autocorrélation

Contrairement au cas de l'interaction linéaire, la fonction d'autocorrélation n'est pas la même à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité. Elle est aussi différente en transmission ou en réflexion.

7.1.2.1 Système en transmission

Lorsque le système est en transmission, le champ entre dans la cavité par le miroir M_1 tandis que l'on observe le champ transmis par le miroir M_2.



Fig. 70: Système en transmission

Nous considérons que le taux de transmission $\left(t_1 = \sqrt{2\kappa_1}\right)$ du miroir M_1 est négligeable devant le taux de transmission $\left(t_2 = \sqrt{2\kappa_2}\right)$du deuxième miroir M_2. Dans ce cas la dissipation de la cavité κ est due principalement à la transmission du miroir M_2 $(\kappa \simeq \kappa_2)$.

L'expression liant les deux fonction d'autocorrélation intra- et extracavité pour un champ en transmission (relation établie dans l'annexe F) s'écrit :

$$g_{ext}^{(2)}(t) - 1 = g^{(2)}(t) - 1 - \frac{2Re\left\{\left\langle a^\dagger \right\rangle^2 T_3(-t)\right\}}{\left(\left\langle a^\dagger \right\rangle \langle a \rangle\right)^2} \tag{7.13}$$

Les figures 71 et 72 qui représentent la fonction d'autocorrélation en t=0 $(g_{ext}^{(2)}(0) - 1)$ en fonction du désaccord Δ montrent que le système manifeste un effet de groupement ou de dégroupement suivant la fréquence du laser. Nous n'obtenons ici que de faibles valeurs de groupement ou de dégroupement à cause du grand nombre de photons $I_a = \left\langle a^\dagger \right\rangle \langle a \rangle \gg 1$. De plus ces effets diminuent lorsqu'on diminue le couplage. Pour le régime de couplage fort (où on obtient le maximum de groupement et de dégroupement), on remarque que l'évolution de $(g_{ext}^{(2)}(0) - 1)$ ne présente une évolution marquée en fonction du désaccord Δ que pour un intervalle restreint de désaccord, ce qui nous permet de donner une forme analytique simple dans ces conditions.

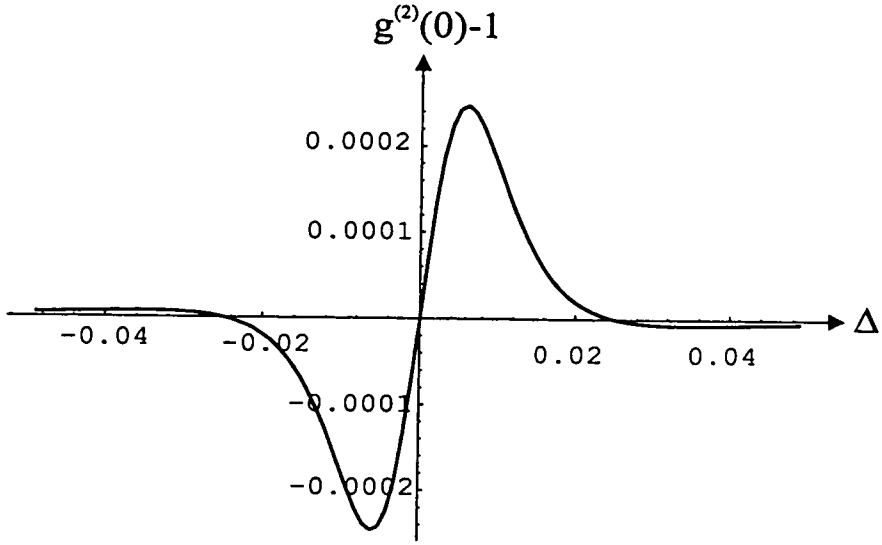


Fig. 71: $g^{(2)}_{ext}(0)-1$ en fonction de Δ pour un système en transmission avec $g = 1$, $\gamma = \kappa = 0.025$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$(régime de couplage fort)

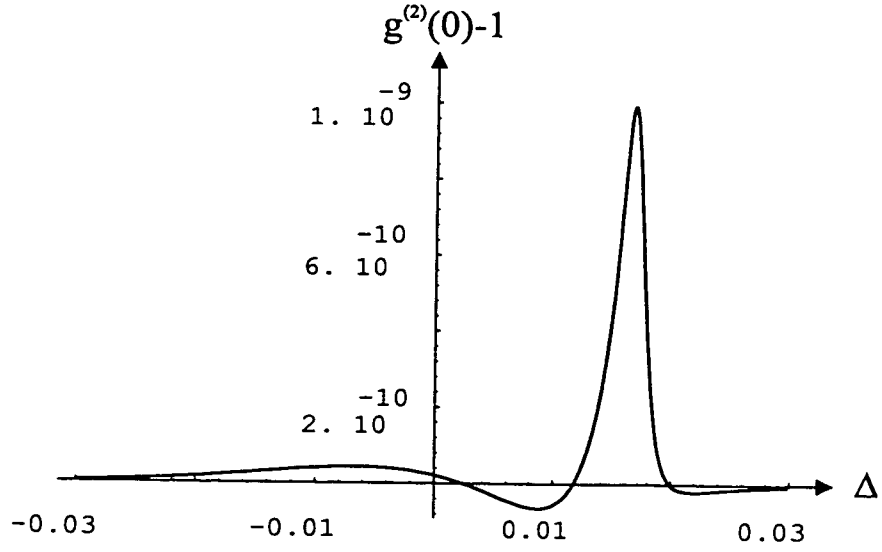


Fig. 72: $g^{(2)}_{ext}(0) - 1$ en fonction de Δ pour un système en transmission avec $g = 0.004$, $\gamma = \kappa = 0.025$, $\varepsilon = 250$ et $\alpha = 10^{-9}$(régime de couplage faible)

7.1.2.2 Système en réflexion

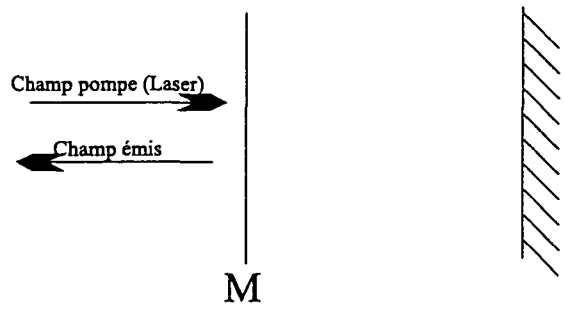


Fig. 73: Système en réflexion

Lorsque l'on étudie le champ réfléchi par la cavité on ne peut plus donner une relation simple entre les deux fonctions de corrélation intra- et extracavité. Cependant nous pouvons donner une expression de $g^{(2)}_{ext}$ en fonction des covariances (voir annexe F) :

$$g^{(2)}_{ext}(t) = 1 + \frac{2Re\left\{\langle a\rangle_{out}\langle a^\dagger\rangle_{out} C^{out}_{a^\dagger a}(t) + \langle a^\dagger\rangle_{out}\langle a^\dagger\rangle_{out} C^{out}_{aa}(t)\right\}}{\left(\langle a\rangle_{out}\langle a^\dagger\rangle_{out}\right)^2} \tag{7.14}$$

avec

$$\langle a\rangle_{out} = \sqrt{2\kappa}\left(\langle a\rangle - \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{7.15}$$

$$C^{out}_{a^\dagger a}(t) = 2\kappa C_{a^\dagger a}(t) \tag{7.16}$$

$$C^{out}_{aa}(t) = 2\kappa\left(C_{aa}(t) - T_3(-t)\right) \tag{7.17}$$

Le système présente un effet de groupement ou de dégroupement suivant la valeur du désaccord Δ. En comparaison avec le système en transmission, l'amplitude maximale de ces effets est beaucoup plus faible pour ce système en réflexion.

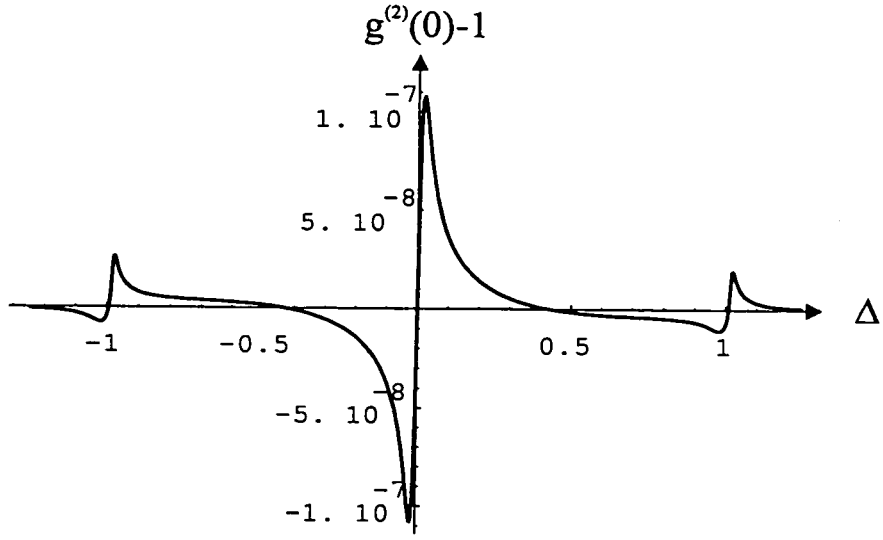


Fig. 74: $g^{(2)}_{ext}(0) - 1$ en fonction de Δ pour un système en réflexion avec $g = 1$, $\gamma = \kappa = 0.025$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$(régime de couplage fort)

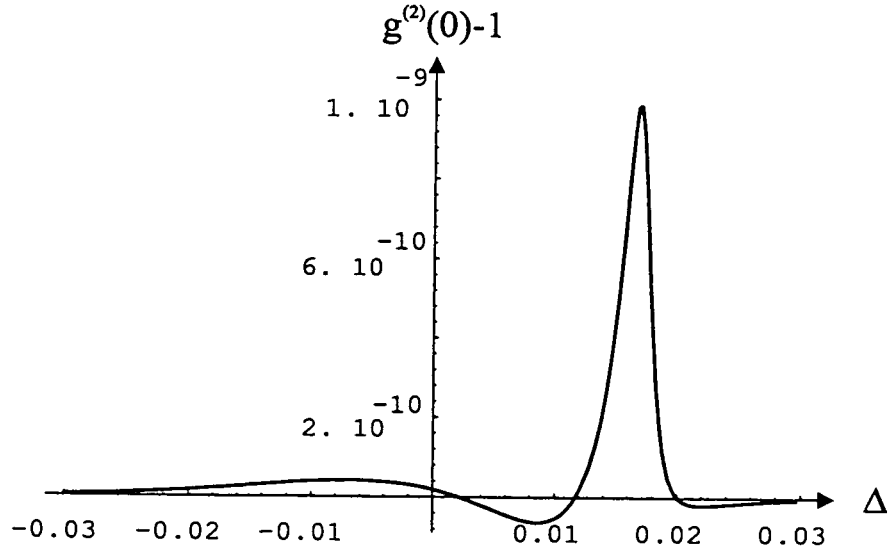


Fig. 75: $g^{(2)}_{ext}(0) - 1$ en fonction de Δ pour un système en réflexion avec $g = 0.004$, $\gamma = \kappa = 0.025$, $\varepsilon = 250$ et $\alpha = 10^{-9}$(régime de couplage faible)

7.1.3 Traitement analytique

Notre étude analytique se limite au régime de couplage fort et au cas de faible non-linéarité et faible désaccord :

$$\left(\frac{\frac{\gamma}{2}+\kappa}{2}\right)^2 << g^2 \tag{7.18}$$

$$k^2 << g^2 \tag{7.19}$$

$$\Delta^2 << g^2 \tag{7.20}$$

les calculs analytiques ici sont effectués à l'aide du logiciel Mathematica. Etant donnée la complexité des formules, nous ne présentons que les étapes et les résultats intermédiaires importants menant à l'expression de la fonction d'autocorrélation.

Tout d'abord, calculons les fonction $T[p]$ et $T_i'[p]$ qui constituent les bases de l'expression de la fonction d'autocorrélation intracavité $g^{(2)}$. Nous commençons par calculer la fonction $T[p]$ qui est définie par l'équation (7.11) et nous obtenons dans ce cas après l'utilisation des approximations (7.18), (7.19) et (7.20) et la transformation $x = p + \left(\frac{\frac{\gamma}{2}+\kappa}{2}\right)$:

$$T \approx g^4 + \left(2\Delta\gamma k - \frac{3\gamma k^2}{2} - 4\Delta k\kappa + 3k^2\kappa\right)x + 2g^2x^2 + x^4 \tag{7.21}$$

ce qui donne en négligant les termes en $\frac{\Delta k}{g^2}$ *et* $\frac{k^2}{g^2}$:

$$T[p] \approx \left(g^2 + \left(p + \left(\frac{\frac{\gamma}{2}+\kappa}{2}\right)\right)^2\right)^2 \tag{7.22}$$

Dans la limite du couplage fort, d'une faible non-linéarité et d'un faible désaccord, les fonctions $T_i'[p]$ qui s'obtiennent à partir de l'inversion de la matrice d'évolution $M_\sim[p]$ ont pour expression :

$$T_1'[p] \approx g^2\left(i(2k-\Delta)+\frac{\gamma}{2}\right) + (g^2+i\Delta)p + (i\Delta+\gamma+\kappa)p^2 + p^3 \tag{7.23}$$

$$T_2'[p] \approx g^3 + g\left(\frac{i}{2}\Delta\gamma + i(\Delta-2k)\kappa\right) + g\left(2i\Delta - 2ik + \frac{\gamma}{2} + \kappa\right)p + gp^2 \tag{7.24}$$

$$T_3'[p] = ig^2k \tag{7.25}$$

$$T_4'[p] = \Delta gk - igk\kappa - igkp \tag{7.26}$$

Par ailleurs, dans cette limite, les expressions des valeurs moyennes des champs a et b trouvées dans le chapitre 5 (équations (5.9) et (5.10)) se simplifient pour donner :

$$\langle b \rangle = \frac{\varepsilon}{g} \tag{7.27}$$

$$\langle a \rangle = \frac{\left(-\frac{\gamma}{2} + i\Delta_b - ik\right)\varepsilon}{g^2} \tag{7.28}$$

La manipulation algébrique des équations (7.28), (7.28), (7.13), (7.2) et l'utilisation des approximations et la transformation $x = p + \left(\frac{\frac{\gamma}{2}+\kappa}{2}\right)$ mènent à l'expression suivante de la fonction d'autocorrélation dans l'espace de Laplace :

$$\left(g_{-}^{(2)}\right)_{ext}[x] \approx z \left(\frac{\gamma\left(\Delta - k\right)\left(-g^2 + \gamma x + 2\kappa x - x^2\right)}{\left(g^2 + x^2\right)\left(\left(g^2 + \left(\frac{\gamma}{2} + \kappa - x\right)^2\right)^2\right)} \right) \tag{7.29}$$

où

$$z \approx \frac{2g^6 k}{\varepsilon^2\left(\left(\Delta - k\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right)^2} \tag{7.30}$$

Pour déterminer la fonction d'autocorrélation dans l'espace des temps, il est nécessaire de décomposer la relation (7.29) en éléments simples :

$$\left(g_{-}^{(2)}\right)_{ext}[x] = z \left(\frac{A_1 + B_1 x}{\left(g^2 + x^2\right)} + \frac{A_2 x + B_2}{\left(g^2 + \left(\frac{\gamma}{2} + \kappa - x\right)^2\right)} + \frac{A_3 x + B_3}{\left(g^2 + \left(\frac{\gamma}{2} + \kappa - x\right)^2\right)} \right) \tag{7.31}$$

Vu la symétrie de $g^{(2)}$ par renversement du temps, nous n'avons besoin que de son expression pour des temps $t \geq 0$. Par conséquent nous ne tiendrons compte que des coefficients A_i et B_i des pôles $p_i = x_i - \left(\frac{\frac{\gamma}{2}+\kappa}{2}\right)$ ayant des parties réelles négatives. Il suffit donc de calculer les coefficients A_1 et B_1. Après des manipulations algébriques et l'utilisation des approximations (7.18),(7.19) et (7.20), nous trouvons :

$$A_1 \approx \frac{8dg^2h^2k - 8g^2h^2k^2 + 16dg^2hku - 16g^2hk^2u}{16g^4\left(h + 2u\right)} \tag{7.32}$$

$$B_1 \approx \frac{16dg^2hk - 16g^2hk^2}{16g^4\left(h + 2u\right)} \tag{7.33}$$

Finalement, en utilisant la transformée de Laplace inverse (annexe C) on obtient une expression analytique décrivant la fonction d'autocorrélation extracavité en fonc-

tion du temps t :

$$g_{ext}^{(2)}(t) = 1 + \left(\frac{g^3 \frac{\gamma}{2}(\Delta - k)k \left(g\cos(gt) + \left(\frac{\gamma}{2} + \kappa\right)\sin(gt)\right)}{\varepsilon^2 \left((\Delta - k)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \right)^2 \left(\frac{\gamma}{2} + \kappa\right)} \right) \exp\left(-\frac{\frac{\gamma}{2} + \kappa}{2} t \right) \quad (7.34)$$

que l'on peut écrire encore sous la forme :

$$g_{ext}^{(2)}(t) = 1 + \left(\frac{\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{\Delta - k}{g}\right)\frac{k}{g}\left(\cos(gt) + \left(\frac{\frac{\gamma}{2}+\kappa}{g}\right)\sin(gt)\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{g}\right)^2 \left(\left(\frac{\Delta - k}{g}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2g}\right)^2 \right)^2 \left(\frac{\frac{\gamma}{2}+\kappa}{g}\right)} \right) \exp\left(-\frac{\frac{\gamma}{2} + \kappa}{2} t \right) \quad (7.35)$$

où

$$k = 2\alpha \left(\frac{\varepsilon}{g}\right)^2 \quad (7.36)$$

La fonction d'autocorrélation oscille avec la fréquence de Rabi amortie par la moyenne des dissipations excitonique$\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ et photonique (dissipation de la cavité κ) (Figures 77, 78 et 79).

La fonction d'autocorrélation est constante$\left(g_{ext}^{(2)}(t) = 1\right)$ pour une non-linéarité nulle k=0 ($\alpha = 0$, cas linéaire) qui rejoint le résultat du troisième chapitre, et pour k=Δ $\left(\alpha = \frac{\Delta g^2}{2\varepsilon^2}\right)$.

L'expression (7.34) conduit à une relation décrivant la fonction d'autocorrélation à t=0 en fonction de désaccord :

$$g_{ext}^{(2)}(0) = 1 + \frac{g^4 \frac{\gamma}{2}(\Delta - k)k}{\varepsilon^2 \left((\Delta - k)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \right)^2 \left(\frac{\gamma}{2} + \kappa\right)} \quad (7.37)$$

La figure 76 montre le comportement de $g_{ext}^{(2)}(0) - 1$ en fonction du désaccord Δ. Les résultats analytiques et numériques sont de plus en plus proches pour des désaccord de plus en plus faibles. Le maximum de $g_{ext}^{(2)}(0) - 1$ (c'est à dire le maximum de groupement) est atteint pour un désaccord équivalent à une somme pondérée du déphasage non linéaire et de la dissipation excitonique :

$$\Delta_{\max} = k + \frac{\sqrt{3}\gamma}{6} \quad (7.38)$$

et le minimum (maximum d'effet de dégroupement) est atteint pour un désaccord équivalent à une différence pondérée du déphasage non linéaire et de la dissipation excitonique :

$$\Delta_{\min} = k - \frac{\sqrt{3}\gamma}{6} \quad (7.39)$$

A résonance ($\Delta = 0$) la fonction d'autocorrélation présente toujours un effet de dégroupement proportionnel au carré de la non-linéarité :

$$\left[g_{ext}^{(2)}(0) - 1\right]_{\Delta=0} = -\frac{k^2 g^4 \frac{\gamma}{2}}{\varepsilon^2 \left(k^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right)^2 \left(\frac{\gamma}{2} + \kappa\right)} \tag{7.40}$$

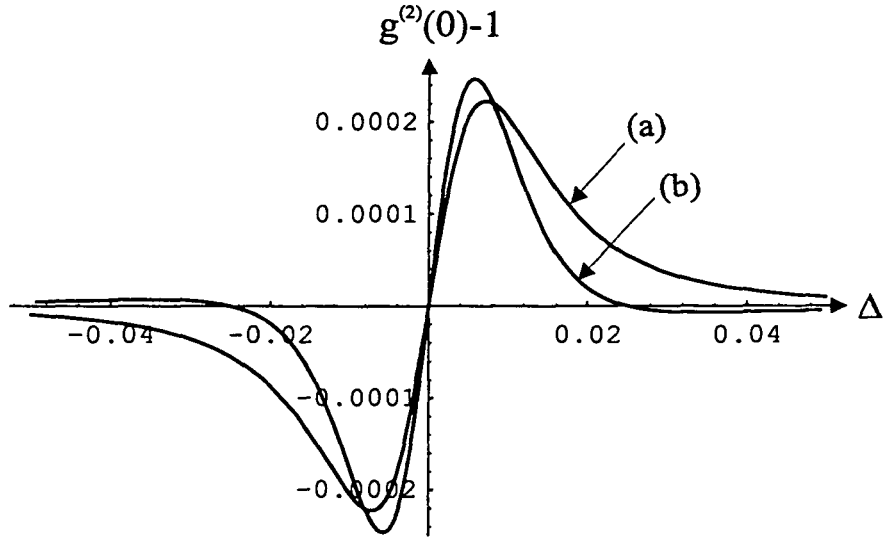


Fig. 76: $g^{(2)}(0) - 1$ en fonction deΔ pour résolution analytique (a) et numérique (b). Les valeurs paramétres sont les mêmes que la figure

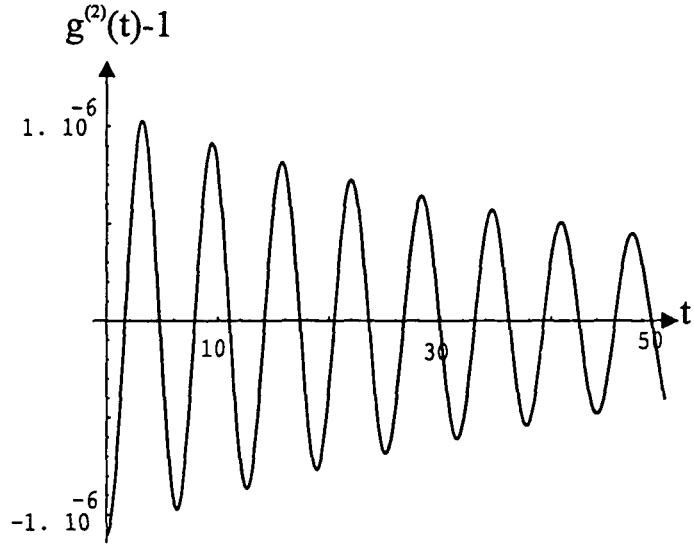


Fig. 77: Comportement temporel de la fonction d'autocorrélation ($g^{(2)}(t) - 1$ en fonction du temps t) en résonance ($\Delta = 0$) et pour les mêmes paramétres que la figure

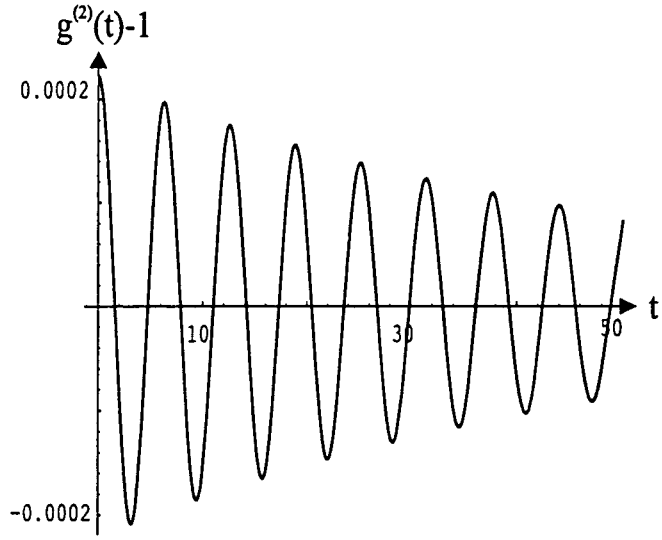


Fig. 78: Comportement temporel de la fonction d'autocorrélation pour un désaccord Δ donnant le maximum d'effet de groupement et pour les mêmes paramétres que la figure

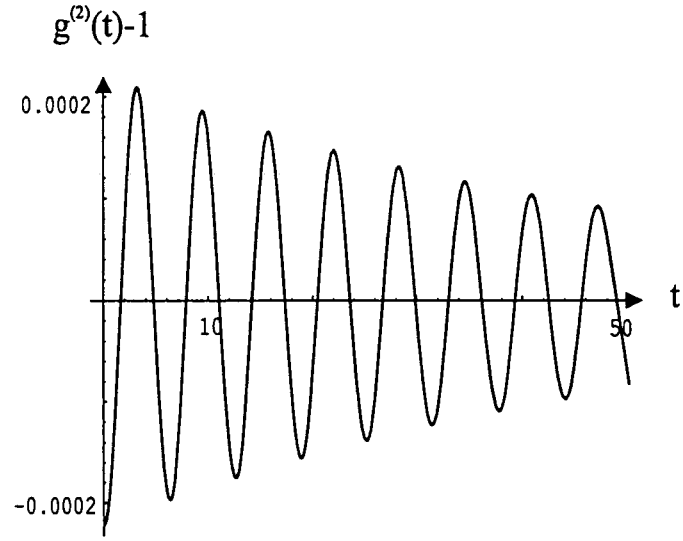


Fig. 79: Comportement temporel de la fonction d'autocorrélation pour un désaccord Δ donnant le maximum d'effet de dégroupement et pour les mêmes paramétres que la figure

7.2 Couplage non-linéaire

Une démarche analogue au cas précédent qui tient compte du couplage non-linéaire nous conduit aux résultats numériques de la fonction d'autocorrélation pour les deux systèmes en transmission et en réflexion (figures 80 et 81).

Le résultat du calcul montre que le couplage non-linéaire a un effet trés réduit sur la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$ devant la non-linéarité excitonique.

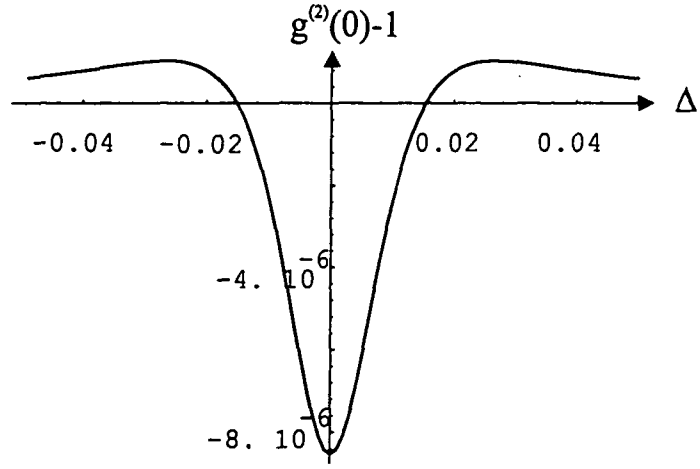


Fig. 80: $g^{(2)}_{ext}(0)-1$ en fonction de Δ pour un système en transmission avec $g=1$, $\gamma=\kappa=0.025$, $\varepsilon=100$ et $\alpha=10^{-9}$(régime de couplage fort)

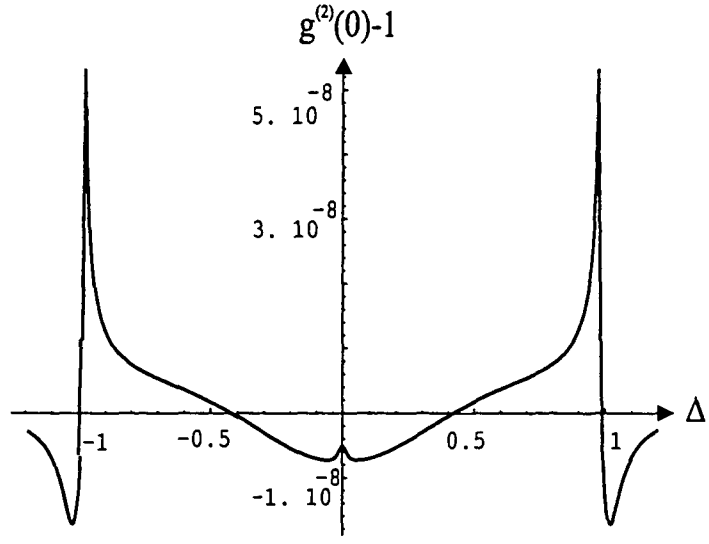


Fig. 81: $g^{(2)}_{ext}(0)-1$ en fonction de Δ pour un système en réflexion avec $g=1$, $\gamma=\kappa=0.025$, $\varepsilon=100$ et $\alpha=10^{-9}$(régime de couplage fort)

7.3 Interaction non-linéaire:couplage non linéaire + non-linéarité excitonique :

En suivant la même démarche qu'on paragraphe 1 de ce chapitre et en tenant compte des deux effets couplage non-linéaire et interaction non-linéaire, nous obtenons des courbes presque identiques au cas de la non-linéarité excitonique. Ceci est cohérent avec les résultats du paragraphe précédent et confirme que l'effet de la non-linéarité global est dominé par le terme d'interaction excitonique ($\alpha b^\dagger b^\dagger bb$).

7.4 Non-linéarité optique

Contrairement aux cas précédent, le traitement numérique du système ayant une non-linéarité optique de type Kerr nous montre que la variation $(g^{(2)}(0)-1)$ en fonction du désaccord Δ n'est pas restreinte à un intervalle de faible désaccord. En régime de couplage fort elle présente des minima et maxima pour des désaccords égaux en valeur absolue à la fréquence de Rabi g. Cela se produit pour les deux systèmes en transmission et en réflexion. En plus, l'amplitude des maxima et des minima sont plus faibles pour un système en transmission qu'un système en réflexion.

Le système de non-linéarité optique en réflexion et en régime de couplage fort permet d'observer le régime de dégroupement plus facilement que tous les autres systèmes.

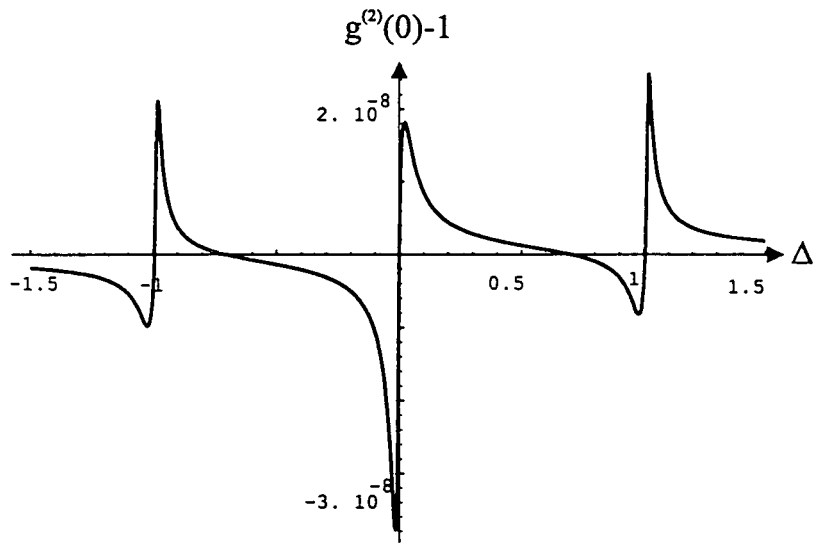


Fig. 82: $g^{(2)}_{ext}(0)-1$ en fonction de Δ pour un système en transmission avec $g=1$, $\gamma=\kappa=0.025$, $\varepsilon=100$ et $\alpha=10^{-9}$(régime de couplage fort)

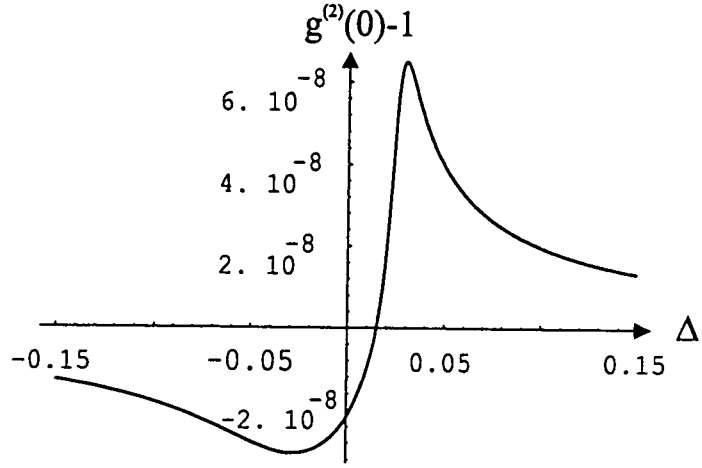


Fig. 83: $g^{(2)}_{ext}(0) - 1$ en fonction de Δ pour un système en transmission avec $g = 0.004$, $\gamma = \kappa = 0.025$, $\varepsilon = 250$ et $\alpha = 10^{-9}$(régime de couplage faible)

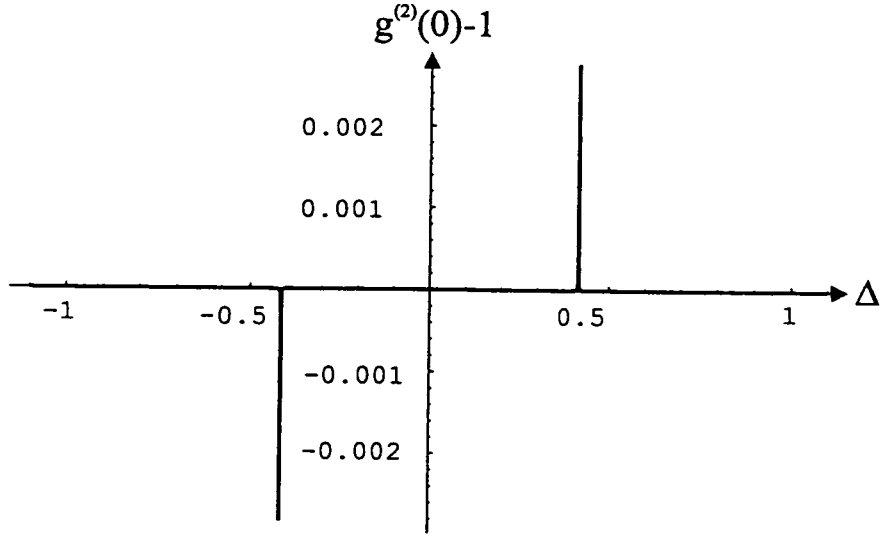


Fig. 84: $g^{(2)}_{ext}(0) - 1$ en fonction de Δ pour un système en réflexion avec $g = 1$, $\gamma = \kappa = 0.025$, $\varepsilon = 100$ et $\alpha = 10^{-9}$(régime de couplage fort)

7.5 Conclusion

Le calcul de la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$ a permis de mettre en évidence des effets de groupement ou de dégroupement de photons suivant le désaccord entre la fréquence du laser d'excitation et la fréquence de la cavité. En régime de couplage fort la fonction d'autocorrélation oscille à la fréquence de Rabi.

Les effets de groupement ou de dégroupement observés sont plus faibles en réflexion qu'en transmission, et ils diminuent lorsqu'on diminue la constate de couplage g. Autrement dit, le système en transmission en régime de couplage fort permet d'observer plus facilement des comportements non-classiques.

Une conclusion plus générale qui découle de notre traitement des chapitres 5, 6 et 7 est que la dynamique du système non-linéaire et le comportement statistique du champ émis par celui ci est dominé par le terme de non-linéarité excitonique.

Les effets obtenues ici sur la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$ sont d'une manière générale très faibles. Inversement nous pouvons penser que les effets de dégroupement seront plus apparents sur des champs à faible nombre de photons [Rempe 87]. Ce domaine ne peut être traité par la méthode de linéarisation des fluctuations que nous avons utilisée ici.

Conformément à ce qui se produit habituellement pour les faisceaux lumineux à grand nombre de photons, les spectres de bruits sont plus favorables à l'observation d'effets non classiques que la fonction d'autocorrélation, pour laquelle les effets de dégroupement ou groupement sont faibles.

8 L'effet du couplage avec les phonons

Dans les chapitres précédents nous avons négligé dans notre étude l'effet du couplage des excitons couplés au champ lumineux de pompe avec les autres modes excitoniques.

Dans ce chapitre qui présente l'article " CAVITY QED EFFECTS IN SEMICONDUCTOR MICROCAVITY " soumis à Quantum and semiclassical optics, nous tenons compte de ce couplage. Nous supposons que tous les autres modes excitoniques forment un réservoir thermique faiblement couplé au mode excitonique considéré.

Le couplage avec les autres modes excitoniques se réalise principalement par l'intermédiaire des phonons. Lors de ce processus, un exciton du mode considéré est annihilé alors qu'un exciton est crée dans un mode de réservoir, et un phonon est créé ou annihilé.

Nous montrons que le squeezing persiste à faibles nombres moyen de phonons c'est à dire pour de faibles température. Lorsque la température augmente, le squeezing est détruit complètement et nous obtenons un spectre de bruit présentant un excès de bruit.

CAVITY QED EFFECTS IN SEMICONDUCTOR MICROCAVITIES

H. Eleuch, J.M. Courty, C. Fabre, E. Giacobino
Laboratoire Kastler Brossel, UPMC case 74, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05,

INTRODUCTION

Semiconductor microcavities offer several new attractive features and have been the subject of numerous publications since the demonstration of the possibility to reach the strong coupling regime in such systems.[1] Strong coupling is observed when the cavity mode is nearly resonant with a narrow optical transition of the active medium. If the coupling frequency corresponding to a single photon is larger than the relaxation frequencies of the medium and of the cavity, vacuum Rabi splitting is observed The degeneracy between the cavity resonance and the medium resonance is lifted and two lines appear in the reflection or in the transmission spectrum of the system. Semiconductor quantum wells exhibit narrow absorption lines corresponding to excitonic resonances. The large oscillator strengths of these resonance make it possible to achieve the strong coupling regime and to observe vacuum Rabi splitting. The strong coupling between the exciton and the cavity can equivalently be interpreted in the cavity polariton model.[2,3,4]

While the quantum properties of the light field going out of microcavities containing atoms in the strong coupling regime have been investigated by several authors in the context of QED[5,6,7,8] semiconductor microcavities have been the subject of very few studies in this respect.[9,10] It is the purpose of this paper to present theoretical predictions concerning QED effects observable in semiconductor microcavities in the strong coupling regime.

At this point, it must be noted that the presence of strong coupling is not a quantum feature in itself since it appears in the coupling of two classical oscillators such as pendulums or in the coupling of a cavity with a set of classical dipoles.[11,12] As a matter of fact, it is well known that the linear coupling of the electromagnetic field with another harmonic oscillator, which is easily diagonalised in two eigenstates, leads to a linear equation of motion and, as such, cannot modify the quantum properties of the field. In the case of microcavities containing atoms, the specifically quantum features, that are revealed by the generation of non classical state of the field in the cavity,[8,13,14] arise from the coupling of the field with the atomic dipole, which is basically nonlinear.

In the case of semiconductors, the interaction with the field occurs via excitons, which are often modelled as harmonic oscillators. However, semiconductors exhibit nonlinear properties due to the Coulomb interaction and Pauli exclusion between carriers and to band filling.[15] For these non-linearities to be of interest for quantum optics, they have to give rise to coherent effects. In spite of numerous non radiative relaxation processes that cause a fast decay of coherences, semiconductors have already been shown to generate coherent nonlinear effects,[16] such as dynamical Stark shift.[17] Furthermore, recent experiments have demonstrated the possibility to modify the quantum fluctuations and to generate squeezing in semiconductors.[18] We then expect that the quantum effects predicted in this paper will be observable in experiments.

1. MODEL FOR THE INTERACTION

We consider a microcavity made of two highly reflecting planar mirrors spaced by a distance which is of the order of the wavelength. A thin layer of semiconductor quantum well parallel to the mirrors is placed in the middle of the microcavity (or at an antinode of the field). The discussion is limited to a two-band semiconductor. The electromagnetic field can excite an electron from the filled valence band to the conduction band, thereby creating a hole in the valence band. The electron-hole system possesses bound states, the excitonic states, analogous to the hydrogenic states, or more precisely to the positronium bound states. We will only consider the first of these bound states, the 1s state.

The interaction between a semiconductor quantum well and the field in a microcavity can be modelled by the coupling of two harmonic oscillators, together with some excitonic non-linearity. The Hamiltonian of the coupled system writes

$$H = \hbar\omega_{cav}\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hbar\omega_{exc}\hat{b}^{\dagger}\hat{b} + \hbar g_1(\hat{a}^{\dagger}\hat{b} + \hat{b}^{\dagger}\hat{a}) + \hbar\alpha_1\,\hat{b}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\hat{b} \qquad (1)$$

The first two terms correspond to the energies of the cavity field and of the excitonic field, $\hat{a}$ and $\hat{b}$ are respectively the annihilation operators of a photon and of an exciton in the cavity, ω_{cav} and ω_{exc} are the frequencies of the cavity resonance and exciton resonance.

The third term corresponds to the exciton-photon coupling, the strength of which is proportional to g_1. The last term describes the non-linearity arising from Coulomb interaction between excitons and Pauli exclusion effects and may be modelled by a Kerr-type non-linearity.[15] The other nonlinear term appearing at the same order in the fields and due to saturation effects will be neglected here for the sake of simplicity.

Due to the translational invariance in the plane of the semiconductor layers, excitons with a wave vector $K_{//}$ in this plane can only be coupled with light having an equal wave vector $k_{//}$. On the other hand, in the direction perpendicular to the layers, the exciton modes are quantised, as well as the cavity modes. Subsequently, we can consider the interaction of a cavity mode with one exciton mode only, giving rise to strong coupling. We will assume that all the other exciton modes form a thermal reservoir that is weakly coupled to the modes of interest.

This Hamiltonian is similar to the one studied in Ref.[19] leading to the prediction of quantum effects in propagation without a cavity. On the other hand, there has been a broad literature describing squeezing in cavities containing a nonlinear medium close to the bistability threshold, in the weak coupling regime.[20,21,22,23] The squeezing properties of the field going out of a cavity containing atoms in the strong coupling regime were investigated in Refs.[13,24]

Here we will compute the squeezing spectra and the second order correlation function of the output field of a microcavity containing excitons, for which the non-linearity is different from the atomic one and necessitates a specific treatment. We will emphasise the case of the very strong coupling (where the vacuum Rabi splitting is much larger then the cavity and material decay rates), that is often encountered in such systems and was not investigated in detail previously. Moreover, we will study the effect of the presence of a thermal reservoir of excitons coupled to the system.

The microcavity is irradiated by a coherent field from a laser of frequency ω_L . One mirror of the microcavity is perfectly reflecting, whereas the other one, having a small non-zero transmission coefficient, is the coupling mirror, through which the light is coupled in and out. Using the Hamiltonian and including the relaxation processes, one can derive evolution equations for the time dependent electromagnetic field and exciton field operators inside the cavity :

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = -(\gamma_a + i\delta_a)\hat{a} - ig\hat{b} + \sqrt{2\gamma_a}\hat{a}^{in} \tag{2a}$$

$$\frac{d\hat{b}}{dt} = -(\gamma_b + i\delta_b)\hat{b} - ig\hat{a} + i\alpha\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\hat{b} + \sqrt{2\gamma_b}\hat{b}^{in} \tag{2b}$$

where t is a dimensionless time normalised to the round trip time τ_c in the cavity, γ_a and γ_b are the dimensionless decay constants of the field in the cavity and of the exciton, i.e. the cavity field and exciton decay rates normalised to $1/\tau_c$. The other parameters, δ_a and δ_b , the detunings of the cavity and of the exciton frequencies from the frequency ω_L of the incoming

laser field $<\hat{a}^{in}>$, g the exciton to photon coupling constant and α the nonlinear coupling constant are also normalised to $1/\tau_c$.

$$\delta_a = (\omega_{cav} - \omega_L)\tau_c \qquad \delta_b = (\omega_{exc} - \omega_L)\tau_c \tag{3a}$$

$$g = g_1\tau_c \qquad \alpha' = \alpha_1\tau_c \tag{3b}$$

The fields $\hat{a}^{in}$ and $\hat{b}^{in}$ are the incoming electromagnetic and exciton fields (coherent or thermal fields). The mean values of the field intensities will be expressed in numbers of photons (or excitons) per unit time. As we have chosen the unit time to be the cavity round trip time, these mean values are also the average numbers of particle in the cavity.

The decay constant γ_a of the field in the cavity is related to the amplitude reflection coefficient r of the coupling mirror by $r = 1 - \gamma_a$. Since the cavity has a high finesse, r is close to 1, which implies that the amplitude transmission coefficient t is much smaller than 1 and verifies $t = \sqrt{2\gamma_a}$.

The decay constant γ_b of the exciton is due to two processes : the electron hole radiative recombination and to the decay towards other exciton modes (modes with different values of $K_{//}$). The coupling with other exciton modes mainly occurs through the acoustic phonons. In this process, an exciton in the mode of interest is annihilated while an exciton in a reservoir mode is created and a phonon is created or annihilated[25]. We will neglect the relaxation due to direct collisions between the excitons in the mode of interest and the other modes, which is much less efficient. When the coupling through phonons vanishes (for example at zero temperature, or if some phonon modes are forbidden in the quantum wells[26]), the decay is caused by electron-hole radiative recombination. Otherwise, the decay is mainly due to interaction with phonons and spontaneous emission is negligible. We assume here that in neither case γ_b is modified by the presence of the cavity.

We will solve the problem in the framework of the input-output formalism,[27] where the evolution of the fields for the electromagnetic and exciton modes is computed using equations (2) while the output field is related to the intracavity and input fields by[28]

$$\hat{a}^{out} = \sqrt{2\gamma_a}\,\hat{a} - \hat{a}^{in} \tag{4}$$

Equation (4) indicates that the outgoing field is the sum of the inside field transmitted through the coupling mirror and of the input field reflected by the mirror (the reflection coefficient r has been replaced by 1 in this equation).

Let us note that equations (2) can alternatively be considered as Langevin equations for the two fields, where the fluctuating part of the terms $\sqrt{2\gamma_a}\hat{a}^{in}$ and $\sqrt{2\gamma_b}\hat{b}^{in}$ are the Langevin forces associated with the reservoirs for the electromagnetic field and for the excitons.

The incoming electromagnetic field $\hat{a}^{in}$ is the laser coherent field, which is a classical field together with quantum fluctuations equal to the vacuum fluctuations. The exciton field inside the cavity is coupled with a reservoir, represented by the fluctuating field $\hat{b}^{in}$. We will consider two cases, the first one where the reservoir is at zero temperature, $\hat{b}^{in}$ is then the vacuum field, the second one where the reservoir is a thermal bath the temperature of which depends on the experimental conditions. Thus for the electromagnetic field, we have

$$\hat{a}^{in} = a^{in} + \delta\hat{a}^{in} \tag{5}$$

where a^{in} is the classical mean value of the field and where its fluctuations $\delta\hat{a}^{in}$ have a zero mean value $<\delta\hat{a}^{in}>=0$. Their correlations functions are given by

$$<\delta\hat{a}^{in}(t)\,\delta\hat{a}^{in\dagger}(t')>=\delta(t-t') \tag{6a}$$

$$<\delta\hat{a}^{in\dagger}(t)\,\delta\hat{a}^{in}(t')>=<\delta\hat{a}^{in}(t)\,\delta\hat{a}^{in}(t')>=<\delta\hat{a}^{in\dagger}(t)\,\delta\hat{a}^{in\dagger}(t')>=0 \tag{6b}$$

For the exciton field, the incoming field has a zero mean value

$$\hat{b}^{in} = \delta\hat{b}^{in} \tag{7}$$

with $<\delta\hat{b}^{in}>=0$. The correlation functions of $\delta\hat{b}^{in}$ are given by

$$<\delta\hat{b}^{in}(t)\,\delta\hat{b}^{in\dagger}(t')>=(1+<n>)\delta(t-t') \tag{8a}$$

$$<\delta\hat{b}^{in\dagger}(t)\,\delta\hat{b}^{in}(t')>=<n>\delta(t-t') \tag{8b}$$

$$<\delta\hat{b}^{in}(t)\,\delta\hat{b}^{in}(t')>=<\delta\hat{b}^{in\dagger}(t)\,\delta\hat{b}^{in\dagger}(t')>=0 \tag{8c}$$

$<n>$ is the mean number of excitations in the thermal bath. We assume that the coupling occurs mainly with the reservoir of non radiative excitons whose energy differ from the energy of the studied mode by ΔE , via absorption or emission of phonons.[4] The phonons capable to match the energy difference ΔE have a mean occupation number $<n>$

$$<n>=\frac{1}{\exp(\Delta E/kT)-1} \tag{9}$$

For the cases of interest ΔE is of the order of half the vacuum Rabi splitting, corresponding to $\Delta E/kT = 1$ for $T \sim 25$ K.

2. MEAN FIELDS

We first rewrite eqs. (2) for classical values of the fields, suppressing the fluctuating terms, and we solve them in the steady state regime in order to study the mean values of the electric field. The results of the calculation are presented for cases in which the exciton is resonant with the cavity. Due to the strong coupling, the degeneracy between the cavity and the exciton resonances is lifted and two symmetrical peaks appear in the variation of the electromagnetic and exciton fields as a function of the laser frequency. When nonlinear processes are taken into account changes are found in the shape of the peaks.

Figure 1 shows the variation of the intracavity electromagnetic field amplitude with laser detuning for equal cavity and exciton widths ($\gamma_a = \gamma_b$) and for $\gamma_a = 0.25g$, for two values of the input intensity. The nonlinear coefficient α was evaluated from Ref.[15] to be $0.75g$ in the normalised units defined above. The first value of the input intensity (Fig.1a) yields a number of excitons close to 10^9 excitons/cm^2. The latter value is usually considered as the limit of the low density case,[29] where our treatment is expected to be valid. It can be indeed be seen that in spite of a small asymmetry between the two peaks, the calculated spectrum is compatible with experimental observations. The value of the input field in Fig.1b is 4 times as large and one of the peaks starts to exhibit a steep edge, that has never been observed experimentally. This situation is unrealistic since it corresponds to excitations in which the exciton is saturated by free-carrier screening. The bleaching of the oscillator strength then causes the strong coupling effect to disappear.[29,30]

In figure 2, we show the case of very strong coupling where $\gamma_a = 0.05g$ and two values of the input intensity. The value of the intracavity field in Fig. 2a is below saturation, while in Fig. 2b it is about the same as in Fig. 1a. The shape of the curves in these cases are again compatible with experimental observations. For the calculation of the squeezing effects, we will focus on the cases of weak nonlinear effects, in which the peaks are not too much changed from their shapes in the absence of non-linearity, i.e. we will use the experimental parameters of Figs. 1a, 2a and 2b.

3. SQUEEZING EFFECTS

We will deal here with the case in which the electromagnetic and exciton fields have large average values compared with the fluctuations. We can then linearise eqs.(2) using

$$\hat{a}(t) = a_0 + \delta\hat{a}(t) \tag{10a}$$

$$\hat{b}(t) = b_0 + \delta\hat{b}(t) \tag{10b}$$

where a_0 and b_0 are the (classical) mean values derived in the previous section and $\delta\hat{a}(t)$ and $\delta\hat{b}(t)$ are the quantum fluctuations of the field inside the cavity that we are going to compute.

We will use the Fourier transforms of the fluctuations defined as

$$\delta\hat{a}[\omega] = \int \delta\hat{a}(t) e^{i\omega t} dt \tag{11a}$$

$$\delta\hat{a}^{\dagger}[\omega] = \int \delta\hat{a}^{\dagger}(t) e^{i\omega t} dt \tag{11b}$$

Linearising equations (2) and taking their Fourier transform, we obtain :

$$-i\omega\,\delta\hat{a}[\omega] = -(\gamma_a + i\delta_a)\,\delta\hat{a}[\omega] - ig\,\delta\hat{b}[\omega] + \sqrt{2\gamma_a}\,\delta\hat{a}^{in}[\omega] \tag{12a}$$

$$-i\omega\,\delta\hat{b}[\omega] = -(\gamma_b + i\delta_b)\,\delta\hat{b}[\omega] - ig\,\delta\hat{a}[\omega] + 2i\alpha|b_0|^2\,\delta\hat{b}[\omega] + i\alpha b_0^2\,\delta\hat{b}^{\dagger}[\omega] + \sqrt{2\gamma_b}\,\delta\hat{b}^{in}[\omega] \tag{12b}$$

and similar equations for the complex conjugates. These equations can be written in a matrix form as

$$-i\omega \begin{bmatrix} \delta\hat{a}[\omega] \\ \delta\hat{a}^{\dagger}[\omega] \\ \delta\hat{b}[\omega] \\ \delta\hat{b}^{\dagger}[\omega] \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \delta\hat{a}[\omega] \\ \delta\hat{a}^{\dagger}[\omega] \\ \delta\hat{b}[\omega] \\ \delta\hat{b}^{\dagger}[\omega] \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} \delta\hat{a}^{in}[\omega] \\ \delta\hat{a}^{in\dagger}[\omega] \\ \delta\hat{b}^{in}[\omega] \\ \delta\hat{b}^{in\dagger}[\omega] \end{bmatrix} \tag{13}$$

where D is the drift matrix

$$D = -\begin{bmatrix} \gamma_a + i\delta_a & 0 & ig & 0 \\ 0 & \gamma_a - i\delta_a & 0 & -ig \\ ig & 0 & \gamma_a + i\delta_b + 2i\alpha|b_0|^2 & i\alpha b_0^2 \\ 0 & -ig & -i\alpha b_0^{*2} & \gamma_a - i\delta_b - 2i\alpha|b_0|^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

where T is the transmission matrix

$$T = Diag[\sqrt{2\gamma_a}, \sqrt{2\gamma_a}, \sqrt{2\gamma_b}, \sqrt{2\gamma_b}] \tag{15}$$

The solution of eqs. (12) is the given by

$$[\delta\hat{a}[\omega]] = G[\omega]T[\delta\hat{a}^{in}[\omega]] \tag{16}$$

where $[\delta\hat{a}[\omega]]$ and $[\delta\hat{a}^{in}[\omega]]$ are the column vectors appearing in eq. (13) and representing the fluctuations of the inside fields and of the input fields and where G[ω] can be calculated from

$$(G[\omega])^{-1} = -i\omega\ Id + D[\omega] \tag{17}$$

where *Id* is the identity matrix.

Using eq. (4), the output field fluctuations are given by

$$\left[\delta\hat{a}^{out}[\omega]\right] = -\delta\hat{a}^{in}[\omega] + T\left[\delta\hat{a}[\omega]\right] \tag{18}$$

that is

$$\left[\delta\hat{a}^{out}[\omega]\right] = \left[-Id + T\,G[\omega]T\right]\left[\delta\hat{a}^{in}[\omega]\right] \tag{19}$$

Solving these equations allows to calculate the noise power spectra in the output field $S^{out}_{\hat{a}\hat{a}}$ and $S^{out}_{\hat{a}\hat{a}^\dagger}$

$$<\delta\hat{a}^{out}[\omega]\,\delta\hat{a}^{out}[\omega']> = 2\pi\, S^{out}_{\hat{a}\hat{a}}[\omega]\,\delta[\omega+\omega'] \tag{20a}$$

$$<\delta\hat{a}^{out}[\omega]\,\delta\hat{a}^{out\dagger}[\omega']> = 2\pi\, S^{out}_{\hat{a}\hat{a}^\dagger}[\omega]\,\delta[\omega+\omega'] \tag{20b}$$

For this purpose we use the noise spectra of the input fields derived from eqs. (6) and (8), that are white noise spectra due to the fact that the fluctuations of the input fields are δ correlated.

$$S^{in}_{\hat{a}\hat{a}^\dagger}[\omega] = 1 \tag{21a}$$

$$S^{in}_{\hat{a}\hat{a}}[\omega] = S^{in}_{\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}[\omega] = S^{in}_{\hat{a}^\dagger\hat{a}}[\omega] = 0 \tag{21b}$$

$$S^{in}_{\hat{b}\hat{b}^\dagger}[\omega] = 1 + <n> \tag{21c}$$

$$S^{in}_{\hat{b}^\dagger\hat{b}}[\omega] = <n> \tag{21d}$$

$$S^{in}_{\hat{b}\hat{b}}[\omega] = S^{in}_{\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger}[\omega] = 0 \tag{21e}$$

Experiments allow to measure the fluctuations of the output electric field in a quadrature defined by the phase angle θ. The corresponding fluctuation operator writes

$$\delta\hat{x}^{out}_{\vartheta}[\omega] = e^{-i\vartheta}\delta\hat{a}^{out}[\omega] + e^{i\vartheta}\delta\hat{a}^{out\dagger}[\omega] \tag{22}$$

The noise spectrum for this quadrature is then given by

$$S^{out}_{\vartheta}[\omega] = S^{out}_{\hat{a}\hat{a}^\dagger}[\omega] + S^{out}_{\hat{a}^\dagger\hat{a}}[\omega] + e^{-2i\vartheta}\,S^{out}_{\hat{a}\hat{a}}[\omega] + e^{2i\vartheta}S^{out}_{\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}[\omega]] \tag{23}$$

The optimum squeezing spectrum for a given frequency is obtained for a quadrature θ_{opt} such that

$$e^{2i\vartheta_{opt}} = -\frac{S^{out}_{\hat{a}\hat{a}}[\omega]}{\left|S^{out}_{\hat{a}\hat{a}}[\omega]\right|} \tag{24}$$

which implies

$$S_{opt}^{out}[\omega] = 1 + 2\left[S_{\hat{a}^\dagger\hat{a}}^{out}[\omega] - \left|S_{\hat{a}\hat{a}}^{out}[\omega]\right|\right] \tag{25}$$

We have calculated the curves giving the optimum noise spectrum, that is, for each given noise frequency, the noise of the quadrature that exhibits the best squeezing. Figure 3 shows the optimum noise at zero frequency as a function of the laser energy with the parameters of Figure 1(a) ($\gamma_a = \gamma_b = 0.25g$, $\alpha = 0.75g$) and for mean numbers of phonons equal to 0 (zero temperature or no coupling with phonons), 0.5 and 1. It can be seen that a sizeable amount of squeezing is predicted in the absence of phonons when the exciting laser is resonant with the Rabi peaks. The squeezing vanishes quite rapidly as the dephasing effects linked to the interaction with the lattice comes into play and excess noise appears at the same frequencies.

Figures 4 and 5 show the same noise spectra as in Fig. 3, in the very strong coupling regime, with the parameters of Fig. 2(a) and (b) respectively ($\gamma_a = \gamma_b = 0.05g$, $\alpha = 0.75g$). The field in the cavity is of the same order of magnitude or smaller than in the previous figure. However, the reduced cavity width causes an enhancement of the nonlinear phase shift relative to the latter. The squeezing reaches 50% at zero temperature in the case of Fig. 5. Another interesting feature is that the noise reduction is also less sensitive to the excess noise due to phonons and persists in the presence of small phonon numbers.

These results show that quantum effects should be observed in these semiconductor microcavities at low temperature or in a system decoupled from the phonons. The decoupling of the lower polariton branch from the phonons has been observed already in recent experiments[31,32] and gives good prospect to such experiments.

INTENSITY CORRELATION FUNCTION

The intensity autocorrelation function is also a quantity of interest to explore QED effects in microcavities. Its expression is given by :

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{<\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t+\tau)\hat{a}(t+\tau)\hat{a}(t)>}{<\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)>^2} \tag{26}$$

It can be computed from the quantum fluctuations derived in the previous section by assuming a Gaussian noise. It can then be written as:

$$g^{(2)}(\tau) - 1 = \frac{2}{|a_0|^2}\left(C_{\hat{a}^\dagger\hat{a}}^{out}(\tau) + \mathrm{Re}\left(\frac{a_0^{\,2}}{|a_0|^2} C_{\hat{a}\hat{a}}^{out}(\tau)\right)\right) \tag{27}$$

where the correlation functions as $C_{\hat{a}\hat{a}}^{in}(\tau)$ are the Fourier transform of the fluctuation spectra defined in eqs (20):

$$C_{\hat{a}\hat{a}}^{out}(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} S_{\hat{a}\hat{a}}^{out}[\omega] e^{-i\omega\tau} \qquad (28)$$

Figure 6 shows the intensity correlation function at zero time delay in the absence of thermal noise. It can be seen that the system may exhibit bunching or antibunching depending of the pump laser detuning. Contrary to what is observed in single atomic systems (antibunching), we have a rich behaviour which is linked to the nature of the assumed non-linearity.

We have also studied the time dependence of the intensity correlation function on τ . Figure 7 shows that $g^{(2)}(\tau)$ exhibits oscillations at the characteristic frequencies of the system. In the case of very strong coupling oscillations occur at the frequency g that is equal to the frequency of the oscillations in the transient luminescence of the system excited by a laser pulse in the same conditions. This behaviour is quite similar to the case of a microcavity containing atoms.

When thermal exciton noise is introduced, an interesting feature is obtained : the intensity correlation function is now always larger than 1, that is in the classical domain. However, it retains the oscillation at the Rabi frequency. This oscillation, as well as the excess noise peaks described in the previous section occur at the resonance frequency of the system, as is well known in « noise spectroscopy ».[33]

CONCLUSION

We have calculated the spectra of the output fluctuations of the field going out of a semiconductor microcavity and its intensity correlation function and shown that quantum effects such as squeezing and antibunching are predicted when thermal noise due to the coupling of excitons with phonons is weak. When interaction with phonons is present, excess noise has been predicted to appear. The characteristics of this noise are linked to the dynamical behaviour of the excitons in the cavity.

The exploration of the noise should thus provide an interesting insight into the coherent and incoherent effects that are involved in the build-up and the destruction of quantum features. In order to predict the expected phenomena more accurately, a more elaborate model for the relaxation of the polariton is needed to deal with the case in which the two polariton branches are coupled in a different way to the phonons. Nevertheless, we feel that the simple model presented here allows to identify the main features of the quantum phenomena in semiconductor microcavities.

Figure captions

Figure 1. (a) Intensity of the cavity mode as a function of the laser detuning when the cavity is resonant with the exciton and for a nonlinear parameter $\alpha=1.5\times10^{-2}$. The other parameters are as follows : losses $\gamma_a = \gamma_b = 0.5\ \times10^{-2}$, exciton-photon coupling $g=2\ \times10^{-2}$; the input field is $a^{in} = 0.4\times10^{-1}$ (the intensity being expressed in number of photons per second). (b) Same as (a) with a stronger excitation, $a^{in} = 0.8\times10^{-1}$

Figure 2. Same as fig. 1, but in the very strong coupling regime : losses $\gamma_a = \gamma_b = 0.1\times10^{-2}$, exciton-photon coupling $g=2\ \times10^{-2}$; the input intensity is $a^{in} = 0.1\times10^{-1}$ for (a) and 0.2×10^{-1} for (b).

Figure 3. Optimum squeezing (calculated at zero frequency) as a function of the laser detuning, for the parameters of Fig. 1 (a). Curves (a), (b) and (c) correspond respectively to $\langle n\rangle = 0$, 0.5 and 1

Figure 4. Optimum squeezing (calculated at zero frequency) as a function of the laser detuning, for the parameters of Fig. 2 (a). Curves (a), (b) and (c) correspond respectively to $\langle n\rangle = 0$, 0.5 and 1.

Figure 5. Optimum squeezing (calculated at zero frequency) as a function of the laser detuning, for the parameters of Fig. 2 (b). Curves (a) , (b) and (c) correspond respectively to $\langle n\rangle = 0$, 0.5 and 1.

Figure 6. Intensity correlation function $g^{(2)}(0)$ for the output field as a function of the laser detuning. Parameters are the same as in fig. 1(a).

Figure 7 Intensity correlation function $g^{(2)}(\tau)$ for the output field as a function of τ for cavity-exciton resonance.

References

[1] Weisbuch C. et al., *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 3314-3317; Houdré R. et al., *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 2043-2046.

[2] S. Pau, G. Björk, J. Jacobson, H. Cao and Y. Yamamoto *Phys.Rev. B* **51** 14437 (1995)

[3] Y. Chen, A. Treducci and F. Bassani, *Phys. Rev. B* **52**, 1800 (1995).

[4] B. Sermage, S. Long, I. Abram, J.Y. Marzin, J. Bloch, R. PLanel and V. Thierry-Mieg, *Phys. Rev. B* **53**, 16516 (1996).

[5] S. Haroche, *"Cavity Quantum Electrodynamics"*, in Fundamental Systems in Quantum Optics, p 768, Elsevier Science Publishers BV, (1992)

[6] P. Meystre et al, *Opt. Commun*, **79,** 300 (1990), H.J. Carmichael R. J. Brecha and P.R. Rice., *Opt. Commun*, **82,** 73 (1991)

[7] H.J. Carmichael, R.J. Brecha, M.G. Raizen, H.J.Kimble and P.R. Rice *Phys. Rev. A* **40**, 5516 (1989)

[8] M.G. Raizen, R.J. Thompson, R.J. Brecha, H.J.Kimble and H.J. Carmichael., *Phys. Rev. Lett.* **63** 240, (1989); G. Rempe, R.J. Thompson, R.J. Brecha, W.D. Lee and H.J.Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 1727.

[9] V. Savona, Z. Hradil and A. Quattropani, *Phys. Rev. B* **49**, 8774 (1994)

[10] S. Pau, G. Björk, J. Jacobson, H. Cao and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. B* **51**, 7090 (1995); Y. Yamamoto, F. Matinaga, S. Machida, A. Karlsson, J. Jacobson, G. Björk and T. Mukai, J Physique IV, C5 **3**, 39 (1993).

[11] Y. Kaluzny, P. Goy, M. Gross, J.M. Raimond and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1175 (1983).

[12] Y. Zhu, D.J. Gauthier, S.E. Morin, Q. Wu, H.J. Carmichael and T.W. Mossberg, *Phys. Rev. Lett*, **64**, 2499 (1994)

[13] L.A. Orozco, M.G. Raizen, Min Xiao, R.J. Brecha and H.J. Kimble, *J. Opt. Soc. Am.* B **4**, 1490 (1987)

[14] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, J.M. Raimond and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1800 (1996)

[15] E. Hanamura, *J. Phys. Soc. Japan* **37**, 1545 (1974); **37**, 1553 (1974).

[16] S.W. Koch, N. Peygambarian and M. Lindberg, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **21**, 5229 (1988).

[17] A. Mysyrowicz, D. Hulin, A. Antonetti, A. Migus, W.T. Masselink, and H. Morkoc, *Phys. Rev. Lett,* **55** ((1986)

[18] A.M. Fox, J.J. Baumberg, M. Dabbicco, B. Huttner and J.F. Ryan, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1728 (1995)

[19] G. S. Agarwal and Puri , *Phys. Rev. A* , **39**, 2969 (1989).

[20] L.Lugiato and G. Strini, *Opt. Commun.* **41**, 67 (1982).

[21] F. Castelli, L.A. Lugiato, M. Vadacchino, Nuovo Cimento B **10**, 183 (1988)

[22] M.D. Reid, Phys. Rev. **A37**, 4792 (1988)

[23] L. Hilico, C. Fabre, S. Reynaud, E. Giacobino, Phys. Rev. **A46**, 4397 (1992)

[24] H.J. Carmichael, *Phys. Rev. A* **33**, 3262 (1986).

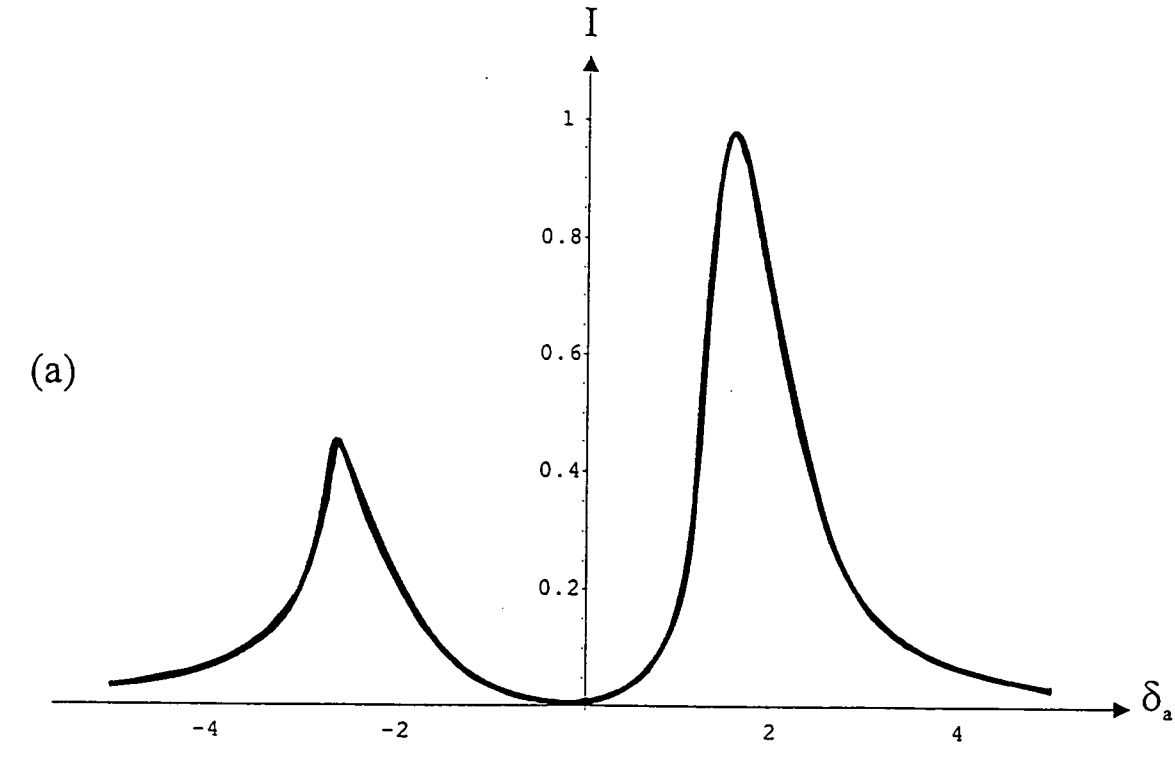
[25] M.L. Steyn-Ross and C.W. Gardiner, *Phys. Rev. A* **27**, 310 (1983).

[26] C. Piermarocchi, F. Tassone, V. Savona A. Quattropani, P. Schwendimann, *Phys. Rev.* **B 53**, 15 584 (1996).

[27] S. Reynaud and A. Heidmann, *Opt. Commun.* **71**, 209 (1989)

[28] M.J. Collett and C.W. Gardiner, *Phys. Rev. A* **30**, 1386 (1984).

[29] R. Houdré, J.L. Gibernon, P. Pellandini, R.P. Stanley, U. Oesterle, C. Weisbuch, J. O'Gorman, B. Roycroft, M. Ilegems, *Phys. Rev. B* **52**, 7810 (1995).
[30] T.R. Nelson, E.K. Lindmark, D.V. Vick, K.Tai, G. Khitrova and H.M. Gibbs, in *« Microcavities and photonic bandgaps »*, p 43, Ed J. rarity and C. Weisbuc, Kluwer Academic publishers (1996) .
[31] F. Tassone, C. Piermarocci, V. Savona, A. Quattropani, P. Schwendimann, *Phys. Rev.* **B 56**, 7 554 (1997).
[32] R. Houdré private communication.
[33] T. Yabuzaki, T. Mitsui, U. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **67** 2453 (1991)


(a)
I
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-4
-2
2
4
δ_a

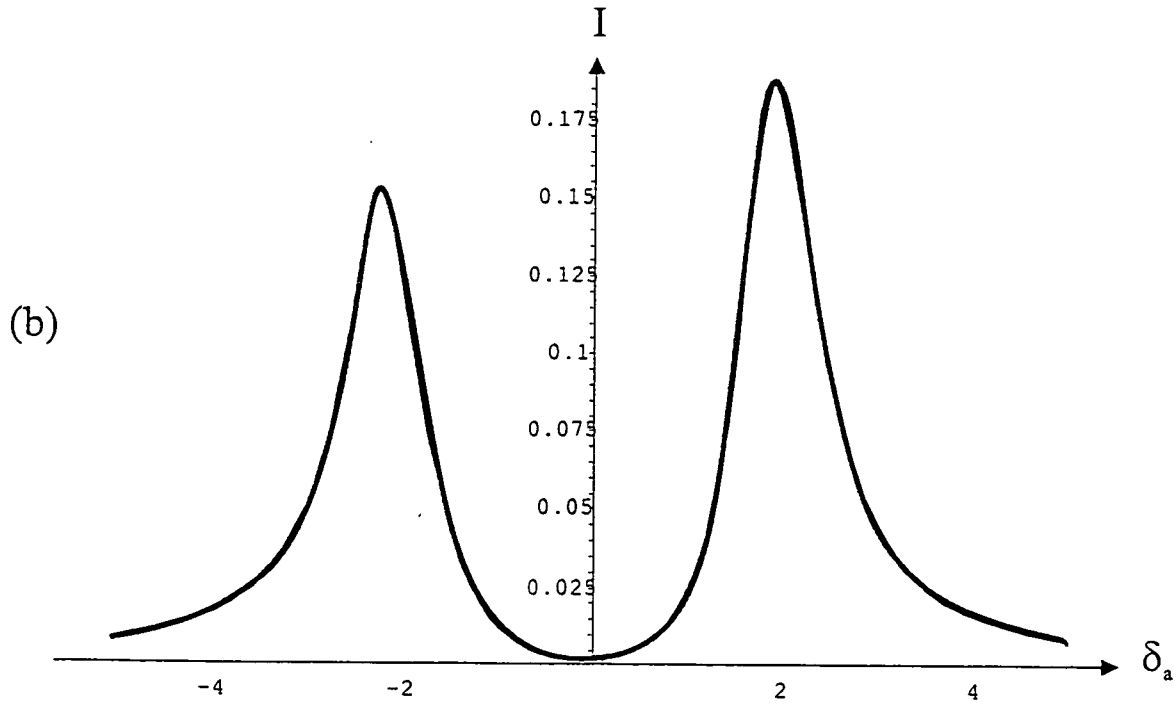

(b)
I
0.175
0.15
0.125
0.1
0.075
0.05
0.025
-4
-2
2
4
δ_a

Fig 1

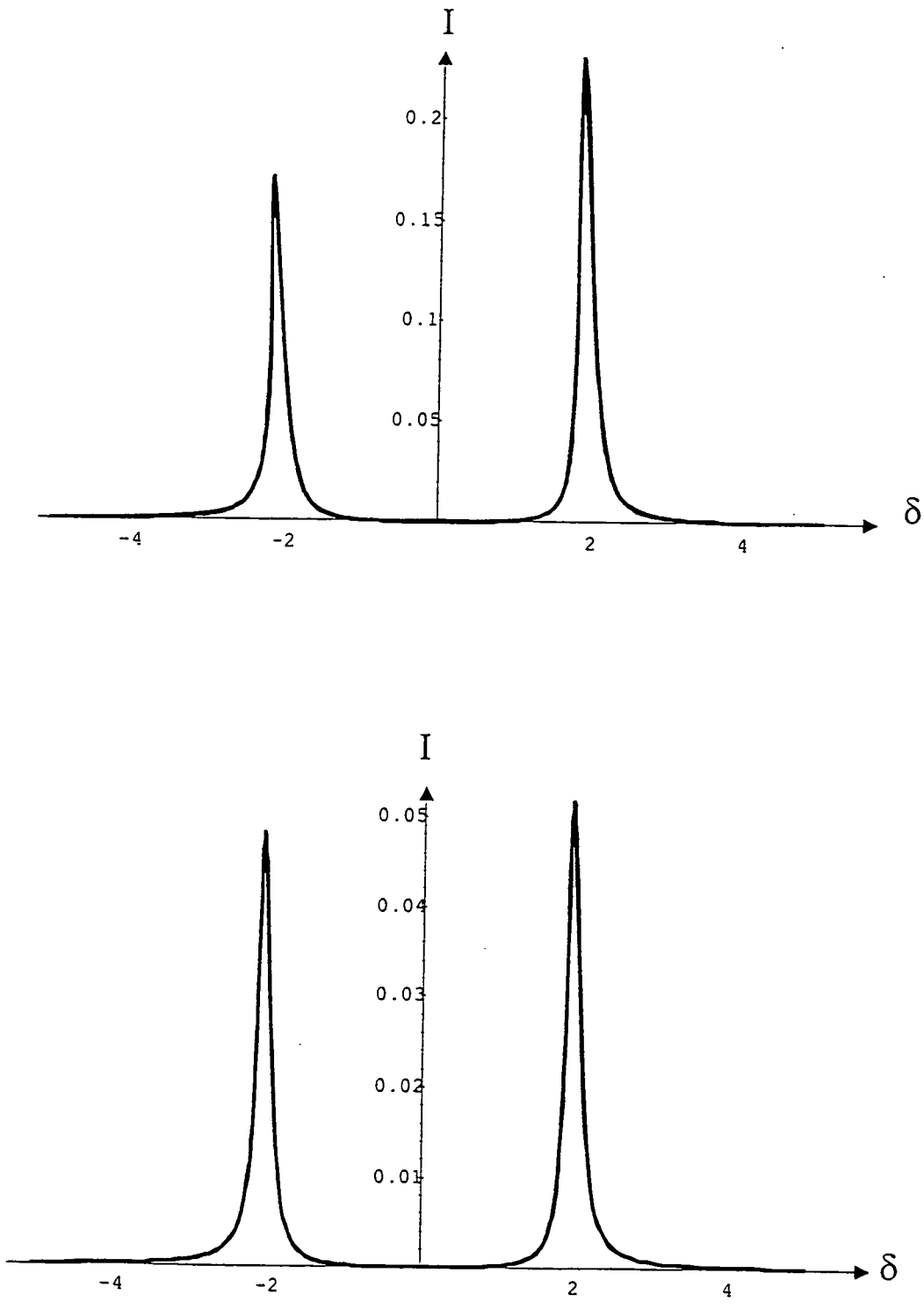


Fig 2

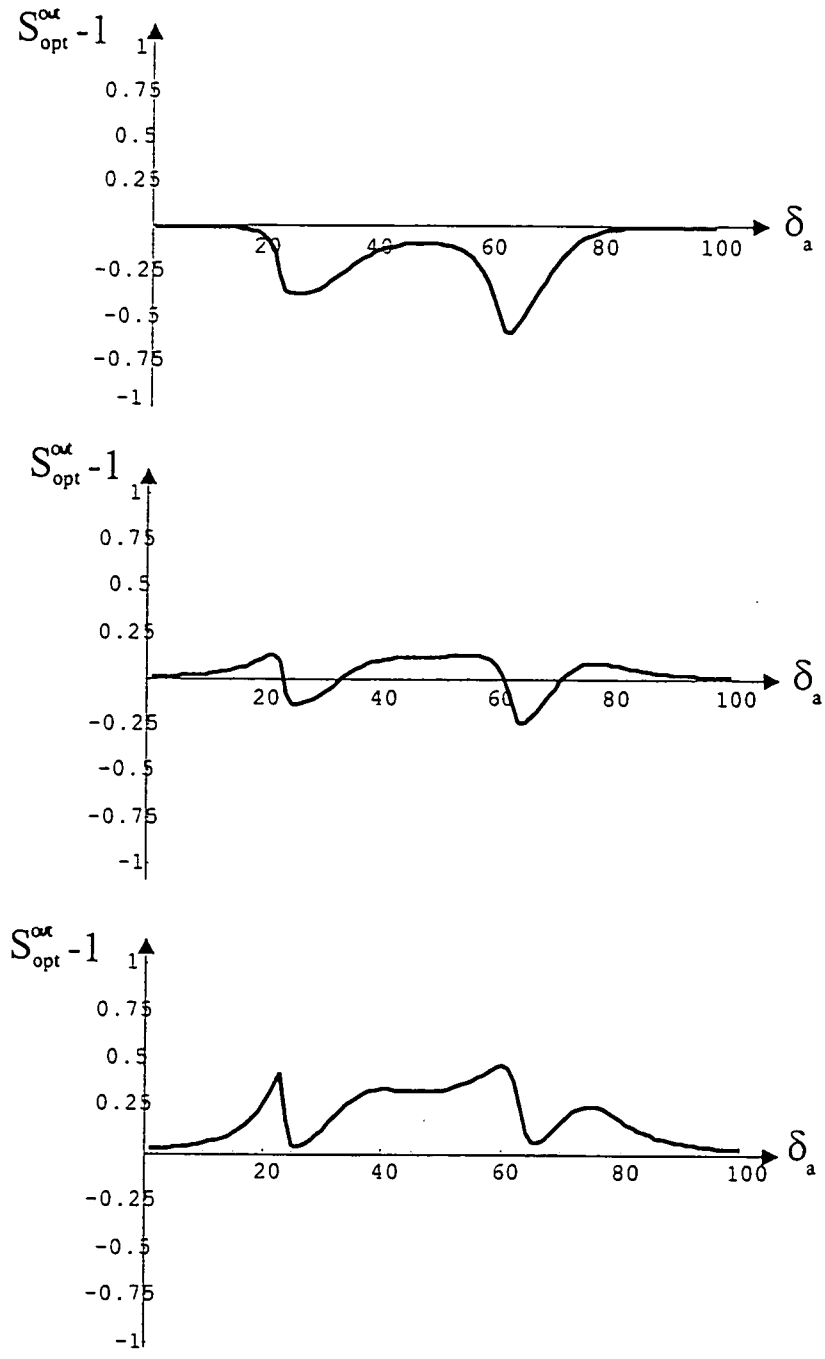

S^{out}_{opt} -1
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-1
20
40
60
80
100
δ_a
(a)
S^{out}_{opt} -1
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-1
20
40
60
80
100
δ_a
(b)
S^{out}_{opt} -1
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-1
20
40
60
80
100
δ_a
(c)

Fig 3

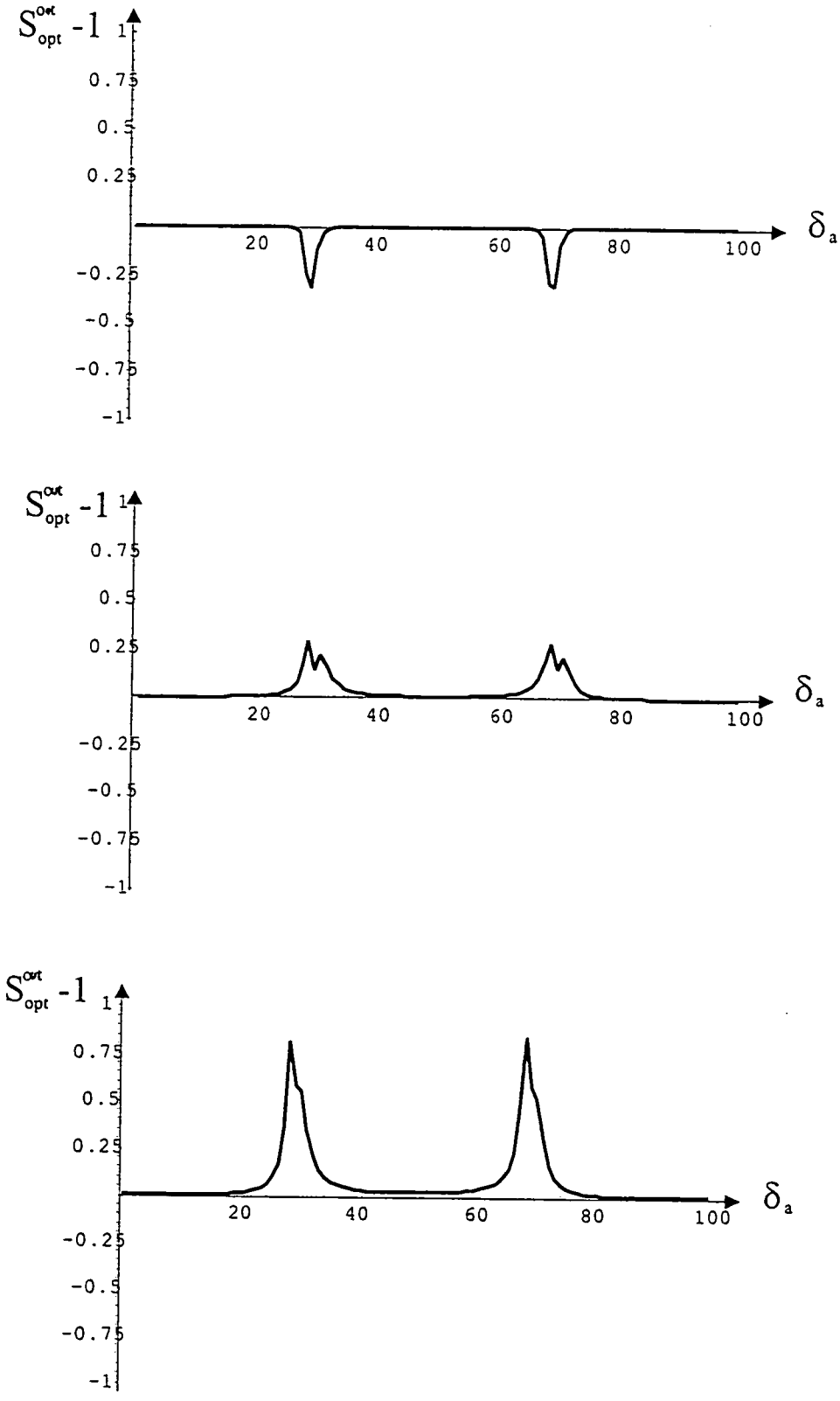

S_{opt}^{out} -1
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-1
20
40
60
80
100
δ_a
(a)
S_{opt}^{out} -1
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-1
20
40
60
80
100
δ_a
(b)
S_{opt}^{out} -1
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-0.5
-0.75
-1
20
40
60
80
100
δ_a
(c)

Fig 4

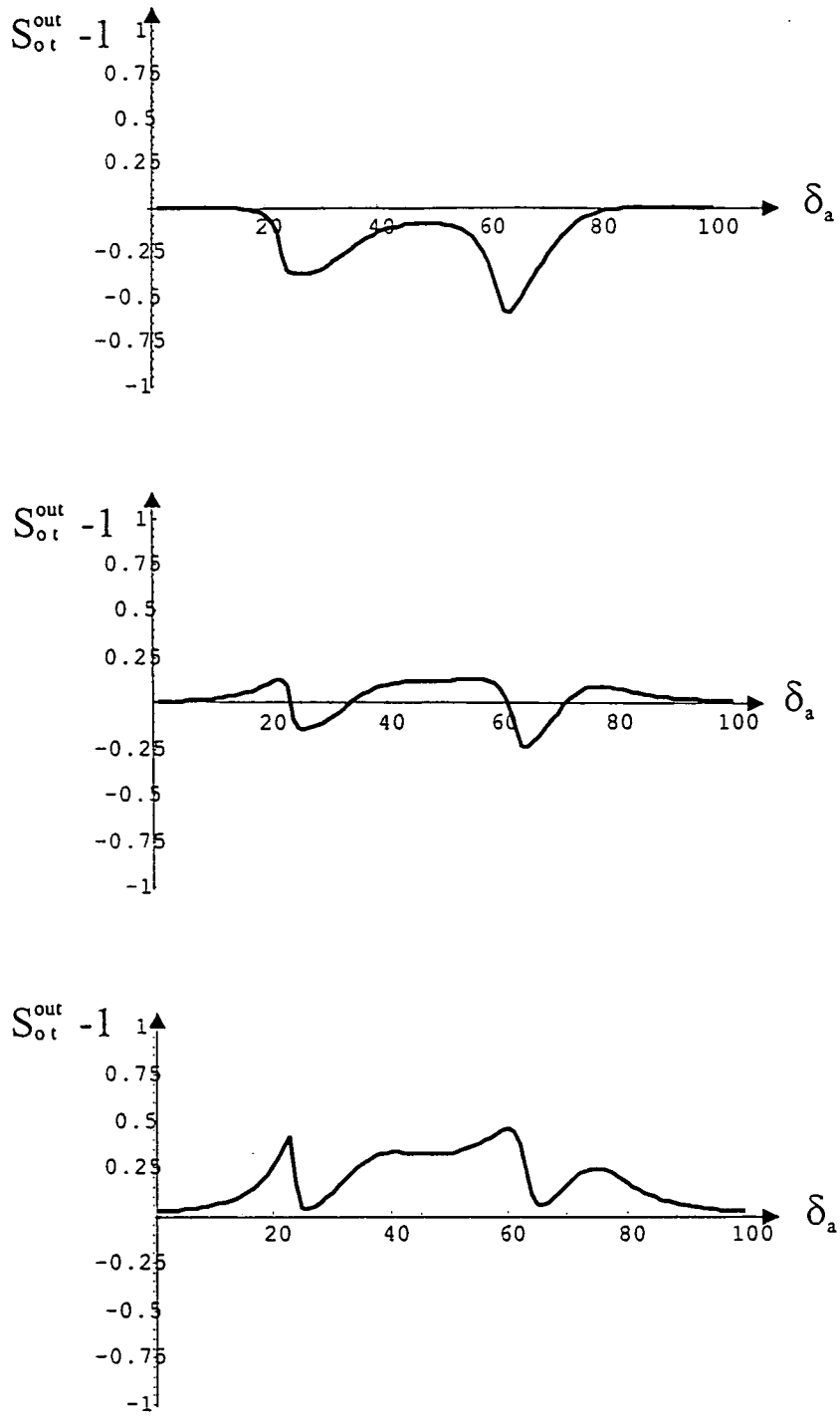


Fig 5

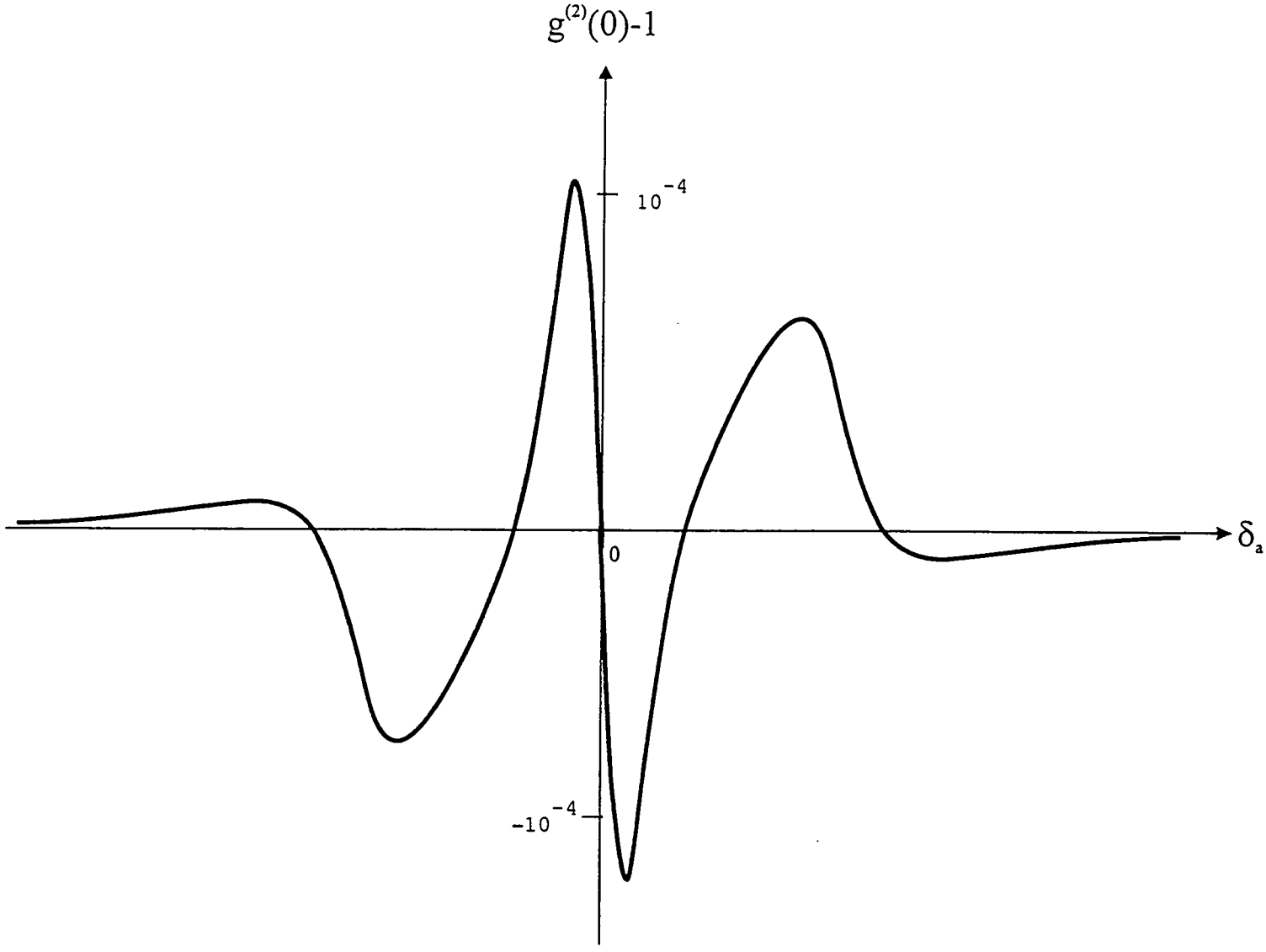


Fig 6

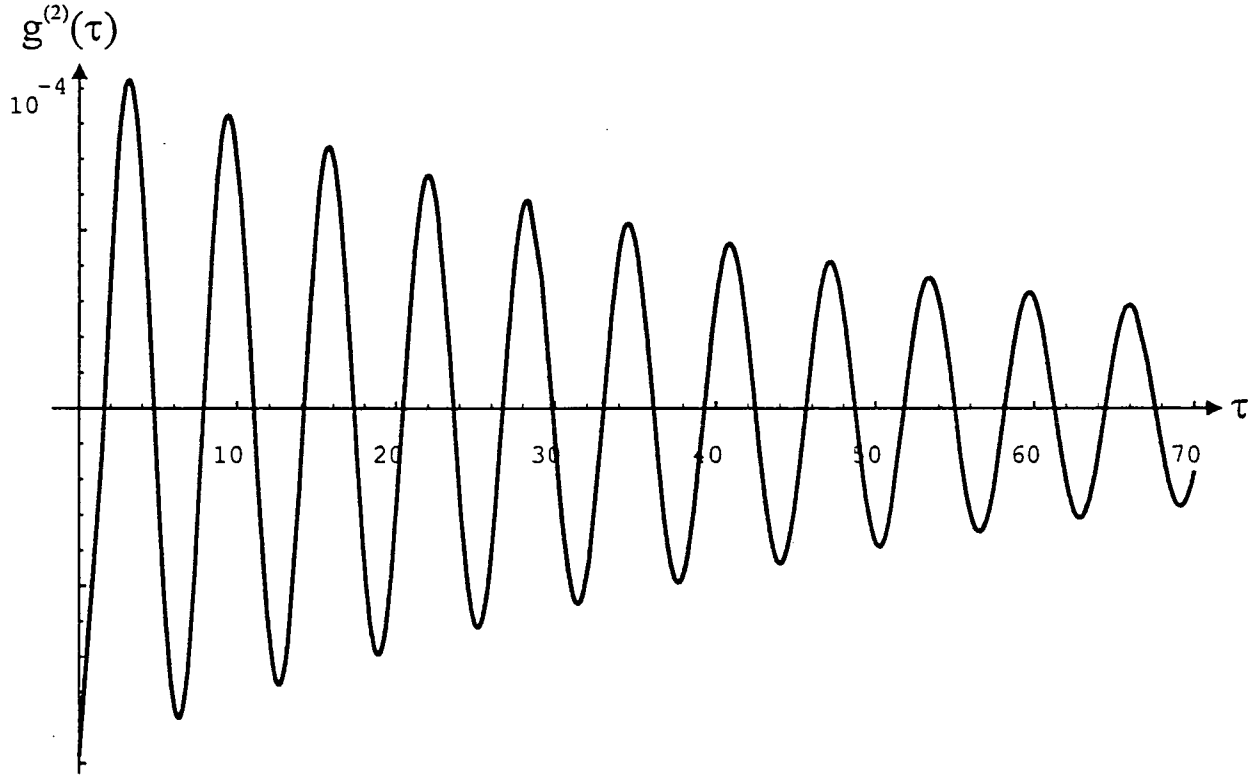


Figure 7

9 Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire une étude théorique de la fonction d'autocorrélation et du spectre de bruit des champs émis par des microcavités semi-conductrices à puits quantiques. En utilisant un hamiltonien modèle représentant l'interaction non-linéaire. Nous avons étudié différentes formes de cette interaction.

Dans un premier temps, nous avons négligé les interactions non-linéaires, ce qui est valable dans le cas de très faibles densités excitoniques (très faible pompage). Le pompage cohérent donne un résultat prévisible : la fonction d'autocorrélation est indépendante du temps comme dans un état cohérent. Néanmoins, ce traitement permet d'éclaicir la méthode établie dans cette thèse pour le calcul de la fonction d'autocorrélation. Le pompage incohérent, que nous avons modélisé par un couplage avec un réservoir thermique d'excitons produit une fonction d'autocorrélation qui a un comportement temporel oscillant amorti avec des amplitudes d'autant plus faibles et des fréquences d'autant plus grandes qu'on augmente le désaccord exciton-cavité. La fonction d'autocorrélation prend des valeurs toujours supérieurs à 1 : le champ produit par ce système ne présente aucun effet non-classique.

Dans un deuxième temps, nous avons tenu compte de l'interaction entre les excitons, qui se traduit par un comportement non-linéaire. La non-linéarité du système provient de deux termes, le terme décrivant l'interaction excitonique et le terme de couplage non-linéaire (terme de saturation décrivant l'effet de remplissage d'espace des phases).Nous avons montré que la non-linéarité est dominée par l'effet d'interaction excitonique . Nous avons calculé tout d'abord, les intensités excitonique et photonique (chapitre 5) indispensables pour l'étude de la fonction d'autocorrélation et le spectre de bruit du système. Les intensités excitonique et photonique présentent deux pics séparés par la fréquence de Rabi du vide qui se rapprochent et se confondent lorsqu'on diminue le couplage entre l'exciton et la cavité. La non-linéarité tend à rendre les deux pics dissymétriques et même à changer leur forme et induire un comportement bistable. Cela ne se produit que dans le cas de grandes valeurs de la non-linéarité, c'est à dire pour des intensités de pompages très élevées qui correspondent à des régimes où notre traitement n'est plus valable. Nous avons donc focalisé notre attention sur le régime de faible non-linéarité où la forme des deux pics ne présente pas de changement important par rapport à celui du cas linéaire.

Ensuite, nous avons calculé le spectre de bruit dans le cas où l'interaction entre les excitons et le réseau est négligée. Nous avons prévu des effets de compression de bruit

importants dans le régime de couplage fort. Malgré la faible non-linéarité du système, le taux de squeezing prévu est important (de 45 %). Notons en plus que le taux de squeezing diminue lorsqu'on diminue le couplage.

L'étude de la fonction d'autocorrélation qui est un indicateur de la statistique des champs émis a permis de mettre en évidence des effets de groupement ou de dégroupement de photons suivant le désaccord entre la fréquence du laser et la fréquence de la cavité. En plus de l'étude numérique, nous avons établi une étude analytique dans le cas du couplage fort où nous avons démontré que la fonction d'autocorrélation oscille avec des fréquences de Rabi amorties par la moyenne des dissipations excitonique et photonique. Ces effets sont néanmoins très faibles.

Lorsque l'interaction avec les phonons est prise en compte, l'effet de squeezing est détruit assez rapidement avec l'augmentation de la température du réservoir thermique et nous obtenons un excès de bruit.

L'étude des fluctuations quantiques semble donc être un outil très intéressant pour la compréhension de la dynamique du système. Si, à température très faible des effets non-classique sont observables, ils disparaissent assez rapidement lorsque le couplage des phonons est effectif. La transition entre les deux régimes quantiques et classique et la forme de l'excés de bruit classique est très sensible à ce couplage. Une modélisation plus élaborée sera bien sûr nécessaire pour prendre en compte la relaxation des polaritons quand les deux branches de polaritons sont couplées différemment avec les phonons. Cependant ce modèle simple présenté dans cette thèse est une première étape dans cette étude, qui nous a permis de prévoir un certain nombre de comportements non-classiques des champs émis par des microcavités semiconductrices à puits quantiques et de tirer des enseignements précieux sur les conditions d'observations, qui permettront d'orienter les futures investigations expérimentales.

10 Annexe

10.1 Annexe A : Expression de la fonction d'autocorrélation à l'approximation gaussienne

La fonction d'autocorrélation $g^{(2)}(t)$ est définie par :

$$g^{(2)}(t) = \frac{\langle a^\dagger(0)\, a^\dagger(t)\, a(t)\, a(0)\rangle}{\langle a^\dagger a\rangle^2} = \frac{G^{(2)}(t)}{G^{(2)}(\infty)} \tag{10.1}$$

L'opérateur du champ a se décompose en une somme d'une valeur moyenne $\langle a\rangle$ et un opérateur de fluctuation δa :

$$a(t) = \langle a(t)\rangle + \delta a(t) \tag{10.2}$$

où

$$\langle \delta a(t)\rangle = 0 \tag{10.3}$$

par conséquent, l'expression de $G^{(2)}(t)$ dans le régime stationnaire devient :

$$\begin{aligned} G^{(2)}(t) = {} & \left(\langle a^\dagger\rangle \langle a\rangle\right)^2 + \langle a^\dagger\rangle \left(\langle \delta a^\dagger(t)\, \delta a(t)\, \delta a(0)\rangle + \langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a(t)\, \delta a(0)\rangle\right) + \\ & \langle a\rangle \left(\langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a^\dagger(t)\, \delta a(0)\rangle + \langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a^\dagger(t)\, \delta a(t)\rangle\right) + \\ & \langle a^\dagger\rangle \langle a\rangle \left(\langle \delta a^\dagger(t)\, \delta a(0)\rangle + \langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a(t)\rangle + \langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a(0)\rangle + \langle \delta a^\dagger(t)\, \delta a(t)\rangle\right) + \\ & \langle a\rangle^2 \left(\langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a^\dagger(t)\rangle\right) + \langle a^\dagger\rangle^2 \left(\langle \delta a(t)\, \delta a(0)\rangle\right) + \langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a^\dagger(t)\, \delta a(t)\, \delta a(0)\rangle \end{aligned} \tag{10.4}$$

Pour un champ de distribution gaussienne, la corrélation des fluctuations de trois opérateurs quelconques A, A_1 et A_2 du champ s'annule ([Van Kampen81], [Gardiner 83], [Mandel 95]) :

$$\langle \delta A\, \delta A_1\, \delta A_2\rangle = 0 \tag{10.5}$$

et la corrélation des fluctuations de quatre opérateurs A, A_1, A_2 et A_3 se réduit à ([Van Kampen 81], [Gardiner 83], [Mandel 95]) :

$$\langle \delta A \delta A_1 \delta A_2 \delta A_3 \rangle = \langle \delta A \delta A_1 \rangle \langle \delta A_2 \delta A_3 \rangle + \langle \delta A \delta A_2 \rangle \langle \delta A_1 \delta A_3 \rangle + \langle \delta A \delta A_3 \rangle \langle \delta A_1 \delta A_2 \rangle \quad (10.6)$$

L'approximation gaussienne consiste à supposer que la distribution du champ étudié est peu modifiée par rapport à la distribution gaussienne. Les deux relations (10.5) et (10.6) sont donc valables.

Dans cette limite l'expression de $G^{(2)}$ devient :

$$G^{(2)}(t) = \langle a^\dagger \rangle^2 \langle a \rangle^2 + L_1(t) + L_2(t) + L_3(t) + L_4(t)) \quad (10.7)$$

où

$$L_1(t) = 2Re\left\{\langle \delta a^\dagger(t)\, \delta a(0) \rangle\right\} \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle \quad (10.8)$$

$$L_2(t) = 2Re\left\{\langle a^\dagger \rangle^2 \langle \delta a(t)\, \delta a(0) \rangle\right\} \quad (10.9)$$

$$L_3(t) = \left\{\langle \delta a^\dagger(t)\, \delta a(t) \rangle + \langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a(0) \rangle\right\} \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle = L_1(0) \quad (10.10)$$

$$\begin{aligned} L_4(t) &= G_1(t) + G_2(t) + G_3(t) \\ &= \langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a(t) \rangle \langle \delta a^\dagger(t)\, \delta a(0) \rangle + \langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a^\dagger(t) \rangle \langle \delta a(t)\, \delta a(0) \rangle + \\ &\quad \langle \delta a^\dagger(0)\, \delta a(0) \rangle \langle \delta a^\dagger(t)\, \delta a(t) \rangle \end{aligned} \quad (10.11)$$

avec la définition des fonctions de covariance $C_{aa}(t)$ et $C_{a^\dagger a}(t)$:

$$C_{aa}(t) = \langle \delta a(t)\, \delta a(0) \rangle \quad (10.12)$$

$$C_{a^\dagger a}(t) = \langle \delta a^\dagger(t)\, \delta a(0) \rangle \quad (10.13)$$

on obtient pour les fonctions L_i des relations plus simples :

$$L_1(t) = 2Re\left\{C_{a^\dagger a}(t)\right\} \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle \quad (10.14)$$

$$L_2(t) = 2Re\left\{\langle a^\dagger \rangle^2 C_{aa}(t)\right\} \quad (10.15)$$

$$\begin{aligned} L_4(t) &= G_1(t) + G_2(t) + G_3(t) \\ &= (C_{a^\dagger a}(t))^* C_{a^\dagger a}(t) + (C_{aa}(t))^* C_{aa}(t) + (C_{a^\dagger a}(0))^* C_{a^\dagger a}(0) \end{aligned} \quad (10.16)$$

Lorsque les fluctuations des champs sont très faibles devant leurs valeurs moyennes :

$$\left\langle \delta a^{\dagger}(t)\,\delta a(0)\right\rangle \ll \left\langle a^{\dagger}\right\rangle \langle a\rangle \tag{10.17}$$

nous pouvons négliger le terme L_4 comportant les fluctuations à la puissance 4 devant les autres et écrire :

$$G^{(2)}(t) \approx \left\langle a^{\dagger}\right\rangle^{2} \langle a\rangle^{2} + L_1(t) + L_2(t) + L_3(t) \tag{10.18}$$

et

$$\begin{aligned}\left(\langle a\rangle \left\langle a^{\dagger}\right\rangle\right)^{2} + L_3(t) &= \left(\langle a\rangle \left\langle a^{\dagger}\right\rangle\right)^{2} + 2\langle a\rangle \left\langle a^{\dagger}\right\rangle \left\langle \delta a^{\dagger}\delta a\right\rangle \\ &\approx \left(\langle a\rangle \left\langle a^{\dagger}\right\rangle + \left\langle \delta a^{\dagger}\delta a\right\rangle\right)^{2} = \left\langle a^{\dagger}a\right\rangle^{2}\end{aligned} \tag{10.19}$$

ce qui donne :

$$G^{(2)}(t) - \left\langle a^{\dagger}a\right\rangle^{2} = L_1(t) + L_2(t) \tag{10.20}$$

enfin nous obtenons une expression simple de la fonction d'autocorrélation linéarisée :

$$\begin{aligned}g^{(2)}(t) - 1 &= \frac{2Re\left\{\langle a\rangle \left\langle a^{\dagger}\right\rangle C_{a^{\dagger}a}(t) + \left\langle a^{\dagger}\right\rangle \left\langle a^{\dagger}\right\rangle C_{aa}(t)\right\}}{\left(\langle a\rangle \left\langle a^{\dagger}\right\rangle\right)^{2}} \\ &= \frac{\left(L_1(t) + L_2(t)\right)}{\left(\langle a\rangle \left\langle a^{\dagger}\right\rangle\right)^{2}}\end{aligned} \tag{10.21}$$

10.2 Annexe B:

Dans cette partie de l'annexe, nous nous proposons de simplifier les relations intervenant dans les calculs des fonctions de covariance. Nous calculons d'une manière générale :

$$I_{ij}\left(t,t'\right) = \left\langle \left(T_i * f_i^{in}\right)(t).\left(T_j * f_j^{in}\right)\left(t'\right)\right\rangle \tag{10.22}$$

$$N_{ij}\left(t,t'\right) = \left\langle f_i^{in}(t).\left(T_j * f_j^{in}\right)\left(t'\right)\right\rangle \tag{10.23}$$

$$E_{ij}\left(t,t'\right) = \left\langle \left(T_i * f_i^{in}\right)(t).f_j^{in}\left(t'\right)\right\rangle \tag{10.24}$$

où T_i et T_j des fonctions temporelles quelconques et f_i^{in} et f_j^{in} des fluctuations entrantes (forces de Langevin), qui correspondent dans cette thèse aux forces de Langevin excitoniques et photoniques ($f_i^{in},\ f_j^{in} \in \left\{C^{in}, C^{in\dagger}, D^{in}, D^{in\dagger}\right\}$). Ces opérateurs véri-

fient d'une manière générale la relation :

$$\left\langle f_i^{in}(t) f_j^{in}\left(t'\right)\right\rangle = q_{ij}\delta\left(t-t'\right) \tag{10.25}$$

le facteur q_{ij} est un scalaire qui dépend de la nature des fluctuations entrantes.

La fonction $I_{ij}\left(t,t'\right)$ intervient dans les calculs des fonctions de covariances dans les chapitres 4,5,6 et 7.

Les deux fonctions $N_{ij}\left(t,t'\right)$ et $E_{ij}\left(t,t'\right)$ seront utiles pour déterminer des relations liant les fonctions de covariances intra- et extra-cavité (annexe E).

10.2.1 Calcul de $I_{ij}\left(t,t'\right)$:

L'utilisation de la définition du produit de convolution $((x*y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau)$ conduit à :

$$I_{ij}\left(t,t'\right) = \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T_i(t-\xi) f_i^{in}(\xi) T_j\left(t'-\xi'\right) f_j^{in}\left(\xi'\right) d\xi d\xi' \right\rangle \tag{10.26}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T_i(t-\xi) T_j\left(t'-\xi'\right) \left\langle f_i^{in}(\xi) f_j^{in}\left(\xi'\right)\right\rangle d\xi d\xi' \tag{10.27}$$

En reportant l'équation (10.25) dans (10.27), il vient :

$$I_{ij}\left(t,t'\right) = q_{ij}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} T_i(t-\xi) T_j\left(t'-\xi'\right)\delta\left(\xi-\xi'\right) d\xi d\xi' \tag{10.28}$$

cette expression se simplifie, on obtient :

$$I_{ij}\left(t,t'\right) = q_{ij}\int_{-\infty}^{+\infty} T_i\left(t-\xi'\right) T_j\left(t'-\xi'\right) d\xi'$$

On pose :

$$\xi'' = t-\xi' \tag{10.29}$$

ce qui donne :

$$I_{ij}\left(t,t'\right) = q_{ij}\int_{-\infty}^{+\infty} T_i\left(\xi''\right) T_j\left(\xi'' - \left(t-t'\right)\right) d\xi'' \tag{10.30}$$

Avant de continuer le calcul, nous remarquons que la fonction $I_{ij}\left(t,t'\right)$ ne dépend que de la différence temporelle $\tau = t-t'$ qui traduit aussi la stationnarité déjà supposée dans notre étude. Ceci nous permet d'écrire :

$$I_{ij}\left(t,t'\right) = I_{ij}\left(\tau,0\right) = I_{ij}\left(\tau\right) \tag{10.31}$$

par mesure de commodité, nous définissons :

$$T_j^-\left(t\right) = T_j\left(-t\right)\ ,\ \forall t \tag{10.32}$$

dans ce cas l'équation (10.30) devient :

$$I_{ij}\left(\tau\right) = I_{ij}\left(t,t'\right) = q_{ij}\int_{-\infty}^{+\infty} T_i\left(\xi''\right) T_j^-\left(\tau-\xi''\right) d\xi'' \tag{10.33}$$

Il est clair que cette expression nous donne, à un facteur près, le produit de convolution des deux fonctions T_i et T_j :

$$I_{ij}\left(t,t'\right) = I_{ij}\left(\tau\right) = q_{ij}\left(T_i * T_j^-\right)\left(\tau\right) \tag{10.34}$$

10.2.2 Calcul de $N_{ij}\left(t,t'\right)$:

Dans cette partie nous calculons :

$$N_{ij}\left(t,t'\right) = \left\langle f_i^{in}\left(t\right).\left(T_j * f_j^{in}\right)\left(t'\right)\right\rangle \tag{10.35}$$

L'utilisation de la définition du produit de convolution conduit à :

$$N_{ij}\left(t,t'\right) = \left\langle f_i^{in}\left(t\right)\int_{-\infty}^{+\infty} T_j\left(t'-\xi\right) f_j^{in}\left(\xi\right) d\xi\right\rangle \tag{10.36}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} T_j\left(t'-\xi\right)\left\langle f_i^{in}\left(t\right) f_j^{in}\left(\xi\right)\right\rangle d\xi \tag{10.37}$$

En reportant l'équation (10.25) dans (10.37), il vient :

$$N_{ij}\left(t,t'\right) = q_{ij}\int_{-\infty}^{+\infty} T_j\left(t'-\xi\right)\delta\left(t-\xi\right) d\xi \tag{10.38}$$

ce qui donne :

$$N_{ij}\left(t,t'\right) = q_{ij}T_j\left(t'-t\right) \tag{10.39}$$

$$= q_{ij}T_j^-\left(t-t'\right) \tag{10.40}$$

Nous remarquons que la fonction $N_{ij}\left(t,t'\right)$ ne dépend que de la

différence temporelle $\tau = t - t'$. Ceci nous permet d'écrire :

$$N_{ij}\left(t,t'\right) = N_{ij}\left(\tau\right) = q_{ij}T_j^-\left(\tau\right) \tag{10.41}$$

10.2.3 Calcul de $E_{ij}\left(t,t'\right)$:

Dans cette partie, nous calculons :

$$E_{ij}\left(t,t'\right) = \left\langle \left(T_i * f_i^{in}\right)\left(t\right).f_j^{in}\left(t'\right)\right\rangle \tag{10.42}$$

L'utilisation de la définition du produit de convolution conduit à :

$$E_{ij}\left(t,t'\right) = \left\langle \left(\int_{-\infty}^{+\infty} T_i\left(t-\xi\right) f_i^{in}\left(\xi\right)\right) f_j^{in}\left(t'\right) d\xi \right\rangle \tag{10.43}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} T_i\left(t-\xi\right)\left\langle f_i^{in}\left(\xi\right) f_j^{in}\left(t'\right)\right\rangle d\xi \tag{10.44}$$

En reportant l'équation (10.25) dans (10.44), il vient :

$$E_{ij}\left(t,t'\right) = q_{ij}\int_{-\infty}^{+\infty} T_i\left(t-\xi\right)\delta\left(\xi - t'\right) d\xi \tag{10.45}$$

ce qui donne :

$$E_{ij}\left(t,t'\right) = q_{ij}T_i\left(t-t'\right) \tag{10.46}$$

Nous remarquons que la fonction $E_{ij}\left(t,t'\right)$ ne dépend que de la différence temporelle $\tau = t - t'$. Ceci nous permet d'écrire :

$$E_{ij}\left(t,t'\right) = E_{ij}\left(\tau\right) = q_{ij}T_i\left(\tau\right) \tag{10.47}$$

Nous constatons que pour des forces de Langevin décorrélées ($\left\langle f_i^{in}\left(t\right) f_j^{in}\left(t'\right)\right\rangle = 0$), les expressions de $I_{ij}\left(t,t'\right)$,$N_{ij}\left(t,t'\right)$ et $E_{ij}\left(t,t'\right)$ s'annulent.

10.3 Annexe C : Quelques propriétés utiles de la transformation de Fourier et de la transformation de Laplace bilatérale

Nous avons utilisé tout au long de cette thèse deux transformations (transformation de Fourier et transformation de Laplace bilatérale) qui ont simplifié les calculs.

Nous commençons cette partie par un rappel des définitions de ces transformations.

10.3.1 Définition de la transformation de Fourier et de la transformation de Laplace bilatérale

La transformation de Fourier transforme un opérateur O(t) quelconque du système en O[ω] (O(t) $\longrightarrow^{TF}$ $O\,[\omega]$) par la relation :

$$O\,[\omega] = TF[O] = \int_{-\infty}^{+\infty} O\,(t)\, e^{\,-i\omega t} dt \tag{10.48}$$

par ailleurs, la transformation de Fourier inverse est définie par :

$$O\,(t) = TF^{-1}[O] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} O\,[\omega]\, e^{\,i\omega t} d\omega \tag{10.49}$$

La transformation de Laplace bilatérale [Oppenheim 89] est une transformation plus générale et souvent plus commode que la transformation de Fourier ; elle transforme un opérateur quelconque O(t) en O[p] (O(t) $\longrightarrow^{L}$ $O\,[p]$) par la relation :

$$O\,[p] = L\,[O] = \int_{-\infty}^{+\infty} O\,[p]\, e^{\,-pt} dt \tag{10.50}$$

où p=$\sigma + i\omega$.

La transformation inverse de Laplace est donnée par :

$$O\,(t) = L^{-1}[O] = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} O\,[p]\, e^{\,ipt} dp \tag{10.51}$$

Pour $\sigma = 0$, la Transformation de Laplace bilatérale est strictement équivalente à la transformation de Fourier.

10.3.2 Propriétés de la transformation de Fourier et de la transformation de Laplace bilatérale

Tout d'abord cherchons la transformation de Fourier de la partie réelle d'une fonction complexe f(t) quelconque.

La fonction f (t) s'écrit :

$$f\,(t) = TF^{-1}\,[f\,[\omega]] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\,[\omega]\, e^{\,i\omega t} d\omega \tag{10.52}$$

ce qui donne :

$$f^{*}\,(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f\,[\omega]\, e^{\,i\omega t} d\omega \right)^{*} \tag{10.53}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f\,[\omega])^{*}\, e^{\,-i\omega t} d\omega \tag{10.54}$$

cette dernière relation est équivalente à

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (f[-\omega])^* e^{i\omega t} d\omega = TF^{-1}[f^*[\omega]] \tag{10.55}$$

cette relation conduit à :

$$TF[f^*(t)] = (f[-\omega])^* = (f^-[\omega])^* \tag{10.56}$$

par conséquent, en utilisant la relation :

$$Re[f(t)] = \frac{1}{2}(f(t) + f^*(t)) \tag{10.57}$$

il vient :

$$TF[Re\{f(t)\}] = \frac{1}{2}(f[\omega] + (f^-[\omega])^*) \neq Re\{f[\omega]\} \tag{10.58}$$

où

$$f^-[\omega] = f[-\omega] \tag{10.59}$$

Notons bien que la transformation de Fourier de la partie réelle de la fonction f(t) ne se transforme pas en la partie réelle de sa transformée de Fourier $f[\omega]$. Maintenant, nous allons chercher la transformation de Laplace bilatérale (pour un choix de p=iω) de la partie réelle d'une fonction quelconque $f(t)$ .Nous pouvons écrire :

$$L[f(t)] = f[p] = f[\omega] \tag{10.60}$$

dans ce cas :

$$(f[-\omega])^* = (f[-p])^* \tag{10.61}$$

Pour une fonction quelconque f[p] continue et dérivable dans le plan complexe nous pouvons écrire d'une manière générale :

$$f[p] = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j \tag{10.62}$$

ce qui donne :

$$(f[-p])^* = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^* (-p^*)^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^* (p)^j = f^*[p] \tag{10.63}$$

et par conséquent :

$$L[f^*(t)] = f^*[p] = (L[f(t)])^* \tag{10.64}$$

$$L[Re\{f(t)\}] = Re\{f[p]\} = Re\{L[f(t)]\} \tag{10.65}$$

La transformation de Laplace transforme la partie réelle d'une fonction quelconque en partie réelle de son transformé. Ceci rend en général la transformation de Laplace bilatérale plus commode pour les calculs que la transformation de Fourier et en particulier pour le calcul de la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}$.

La linéarité des deux transformations (Laplace et Fourier) nous permet de dégager une autre propriété utile (pour chacune des deux transformations) :

$$L\left[f^{-}(t)\right] = f^{-}[\omega] \tag{10.66}$$

$$TF\left[f^{-}(t)\right] = f^{-}[p] \tag{10.67}$$

10.4 Annexe D :

Dans cette partie de l'annexe, nous démontrons que la matrice d'évolution $M\text{-}[p]$ définie par :

$$M_{\sim}[p]\begin{bmatrix} \delta a[p] \\ \delta b[p] \\ \delta a^{\dagger}[p] \\ \delta b^{\dagger}[p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\kappa}C^{in}[p] \\ \sqrt{\gamma}D^{in}[p] \\ \sqrt{2\kappa}C^{in\,\dagger}[p] \\ \sqrt{\gamma}D^{in\,\dagger}[p] \end{bmatrix} \tag{10.68}$$

présente une caractéristique générale : le déterminant de la matrice d'évolution $M\text{-}[p]$, qui est un polynôme de quatrième degré en p (p=iω), a des coefficients réels.

Nous commençons la démonstration par la remarque suivante: les équations d'évolution des fluctuations $\delta a^{\dagger}(t)$ et $\delta b^{\dagger}(t)$ sont les hermitiques conjugués des équations d'évolution de $\delta a(t)$et de $\delta b(t)$. En tenant compte de cette remarque et de la propriété (10.64), nous pouvons écrire d'une manière générale la matrice d'évolution sous la forme suivante :

$$M\text{-}[p] = \begin{bmatrix} M_1\text{-}[p] & M_2\text{-}[p] \\ M_2^{*}\text{-}[p] & M_1^{*}\text{-}[p] \end{bmatrix} \tag{10.69}$$

où

$$M_1\text{-}[p] = \begin{bmatrix} M_{11}[p] & M_{12}[p] \\ M_{21}[p] & M_{22}[p] \end{bmatrix} \tag{10.70}$$

$$M_2\text{-}[p] = \begin{bmatrix} M_{13}[p] & M_{14}[p] \\ M_{23}[p] & M_{24}[p] \end{bmatrix} \tag{10.71}$$

$$(\det[M\text{-}[p]])^{*} = \det\begin{bmatrix} (M_1\text{-}[p])^{*} & (M_2\text{-}[p])^{*} \\ (M_2^{*}\text{-}[p])^{*} & (M_1^{*}\text{-}[p])^{*} \end{bmatrix} \tag{10.72}$$

La relation (10.63) nous conduit à :

$$(\det[M\text{-}[p]])^{*} = \det\begin{bmatrix} M_1^{*}\text{-}[-p] & M_2^{*}\text{-}[-p] \\ M_2\text{-}[-p] & M_1\text{-}[-p] \end{bmatrix}$$

Les propriétés du déterminant nous permettent de permuter deux lignes ou deux colonnes sans changer sa valeur :

$$\begin{aligned}(\det[M\text{-}[p]])^* &= \det\begin{bmatrix} M_2\text{-}[-p] & M_1\text{-}[-p] \\ M_1^*\text{-}[-p] & M_2^*\text{-}[-p] \end{bmatrix} \\ &= \det\begin{bmatrix} M_1\text{-}[-p] & M_2\text{-}[-p] \\ M_2^*\text{-}[-p] & M_1^*\text{-}[-p] \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10.73}$$

il vient :

$$(\det[M\text{-}[p]])^* = \det[M\text{-}[-p]] \tag{10.74}$$

$$= \det[M\text{-}[p^*]] \tag{10.75}$$

Nous en déduisons que T[p] = det [M- [p]] est un polynôme de quatrième degré en p avec des coefficients réels. Si p est une solution de T[p] alors p* est une racine de T[p]et par conséquent les racines de T[p] sont 4 racines deux à deux conjuguées.

10.5 Annexe E

Dans cette partie de l'annexe nous proposons de démontrer la relation suivante :

$$\left\langle \widehat{X}_1[\omega]\,\widehat{X}_2\left[\omega'\right]\right\rangle = 2\pi\delta\left(\omega+\omega'\right) C_{\widehat{X}_1\widehat{X}_2}[\omega] \tag{10.76}$$

pour des opérateurs $\widehat{X}_1[\omega]$ et $\widehat{X}_1[\omega]$ quelconque d'un système stationnaire dans l'espace de Fourier et où $C_{\widehat{X}_1\widehat{X}_2}[\omega]$ est la transformé de Fourier de $\left\langle \widehat{X}_1(t)\,\widehat{X}_2(0)\right\rangle$.

Nous commençons la démonstration par la transformation de $\left\langle \widehat{X}_1(t)\,\widehat{X}_2(t')\right\rangle$ dans l'espace de Fourier :

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{X}_1[\omega]\,\widehat{X}_2\left[\omega'\right]\right\rangle &= TF[\left\langle \widehat{X}_1(t)\,\widehat{X}_2\left(t'\right)\right\rangle] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\langle \widehat{X}_1(t)\,\widehat{X}_2\left(t'\right)\right\rangle e^{-i\omega t}e^{-i\omega' t'}\,dtdt'\end{aligned} \tag{10.77}$$

on pose $\tau = t - t'$ ce qui donne :

$$\left\langle \widehat{X}_1[\omega]\,\widehat{X}_2\left[\omega'\right]\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\langle \widehat{X}_1(t'+\tau)\,\widehat{X}_2\left(t'\right)\right\rangle e^{i\omega\left(t'+\tau\right)}e^{-i\omega' t'}\,dtdt' \qquad (10.78)$$

la stationnarité nous permet d'écrire :

$$\left\langle \widehat{X}_1(t'+\tau)\,\widehat{X}_2\left(t'\right)\right\rangle = \left\langle \widehat{X}_1(\tau)\,\widehat{X}_2(0)\right\rangle \qquad (10.79)$$

ceci conduit à :

$$\left\langle \widehat{X}_1[\omega]\,\widehat{X}_2\left[\omega'\right]\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\left(\omega+\omega'\right)t'}\,dt'\int_{-\infty}^{+\infty}\left\langle \widehat{X}_1(\tau)\,\widehat{X}_2(0)\right\rangle e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad (10.80)$$

enfin nous trouvons :

$$\left\langle \widehat{X}_1[\omega]\,\widehat{X}_2\left[\omega'\right]\right\rangle = 2\pi\delta\left(\omega+\omega'\right)C_{\widehat{X}_1\widehat{X}_2}[\omega] \qquad (10.81)$$

où

$$C_{\widehat{X}_1\widehat{X}_2}[\omega] = TF[\left\langle \widehat{X}_1(t)\,\widehat{X}_2(0)\right\rangle] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left\langle \widehat{X}_1(t)\,\widehat{X}_2(0)\right\rangle e^{-i\omega t}dt \qquad (10.82)$$

10.6 Annexe F: Relation entre les fonctions d'autocorrélation intra- et extracavité :

Nous établissons dans cette partie tout d'abord, les expressions liant les covariances intra- et extracavité. Ensuite, nous donnons une relation simple liant les fonctions d'autocorrélation intra- et extracavité dans un système en transmission. Enfin, nous exprimons pour un système en réflexion, une équation liant la fonction d'autocorrélation extracavité et les fonctions de covariances intracavité.

10.6.1 Système en transmission

Le champ entre dans la cavité par le miroir M_1, tandis que l'on observe le champ transmis par le miroir M_2. Nous traitons deux cas du système en transmission.

Dans le premier cas (système en transmission 1) le taux de transmission $\left(t_1 = \sqrt{2\kappa_1}\right)$ du miroir M_1est négligeable devant le taux de transmission $\left(t_2 = \sqrt{2\kappa_2}\right)$du deuxième miroir M_2. Dans ce cas la dissipation de la cavité κ est due principalement à la transmission du miroir M_2 ($\kappa \simeq \kappa_2$). Dans le second cas (système en transmission 2) le taux de transmission t_2 du miroir M_2 est négligable devant le taux de transmission $t_1$du premier miroir M_1. Dans ce cas la dissipation de la cavité κ est due principalement à la transmission du miroir M_1 ($\kappa \simeq \kappa_1$). Par ailleurs, il faut mentionner que notre étude de la fonction d'autocorrélation pour le cas non-linéaire (chapitre 6) se limite au système de transmission 1.

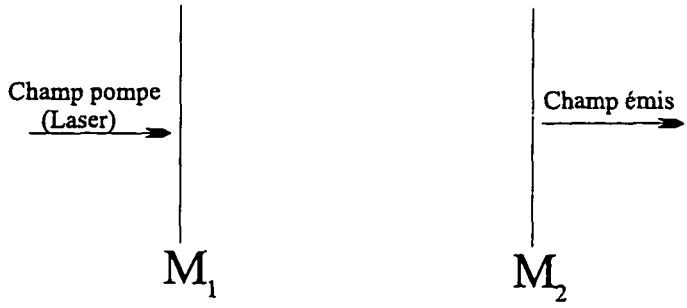


Fig. 85: Système en transmission

10.6.1.1 Système en transmission 1

Dans ce cas la dissipation de la cavité κ est due principalement à la transmission du miroir M_2 ($\kappa \simeq \kappa_2$)

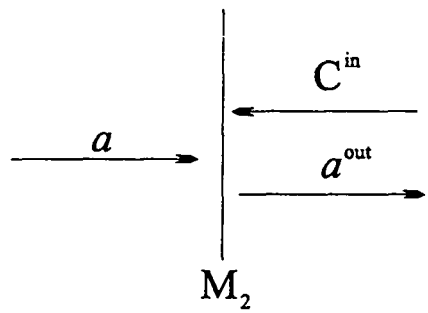


Fig. 86: Champs entrant sortant couplés par le miroir M_2

Ceci nous permet d'écrire une relation d'entrée-sortie liant les champs intra- et extracavité :

$$a^{out} = -C^{in} + \sqrt{2\kappa}\, a \tag{10.83}$$

Cette expression nous donne deux relations : la première indique que le champ moyen extracavité est proportionnel au champ moyen intracavité :

$$\langle a^{out} \rangle = \sqrt{2\kappa}\, \langle a \rangle \tag{10.84}$$

et la seconde nous permet d'exprimer les fluctuations du champ intracavité en fonction des fluctuations du champ extracavité et des fluctuations entrante C^{in}. Les fluctuations C^{in} sont ici les fluctuations du vide qui sont partiellement réfléchies et partiellement transmises pour le miroir M_2. La transmission du miroir M_1 étant très faible, on supposera que seul le champ moyen ε entre, la transmission des fluctuations associées étant négligable :

$$\delta a^{out} = -C^{in} + \sqrt{2\kappa}\,\delta a \tag{10.85}$$

d'après les relations (10.7) et (10.21) de l'annexe A, la fonction d'autocorrélation s'exprime en fonction des fonctions de covariances C_{aa} et $C_{a^\dagger a}$. Pour déterminer une relation entre la fonction d'autocorrélation intra- et extracavité il est donc nécessaire de déterminer des expressions liant les fonctions de covariances intra- et extracavités.

Relation entre les fonctions de covariance intra- et extracavité Nous cherchons dans cette partie à déterminer les covariances extracavité
$C^{out}_{aa}(t)$,$C^{out}_{a^\dagger a}(t)$ et $C^{out}_{aa^\dagger}(t)$ définies par :

$$C^{out}_{a^\dagger a} = \left\langle \delta a^{out\dagger}(t)\,\delta a^{out}(0)\right\rangle \tag{10.86}$$

$$C^{out}_{aa} = \left\langle \delta a^{out}(t)\,\delta a^{out}(0)\right\rangle \tag{10.87}$$

$$C^{out}_{aa^\dagger} = \left\langle \delta a^{out}(t)\,\delta a^{out\dagger}(0)\right\rangle \tag{10.88}$$

Calcul de la fonction de covariance extracavité $C^{out}_{a^\dagger a}(t)$: Nous commençons par le calcul de la fonction de covariance extracavité $C^{out}_{a^\dagger a}(t)$. Les relations (10.85) et (10.86) nous donnent :

$$\left\langle \delta a^{out\dagger}(t)\,\delta a^{out}(0)\right\rangle = 2\kappa\left\langle \delta a^{\dagger}(t)\,\delta a(0)\right\rangle - \sqrt{2\kappa}\left\langle C^{in\dagger}(t)\,\delta a(0)\right\rangle - \sqrt{2\kappa}\left\langle \delta a^{\dagger}(t)\,C^{in}(0)\right\rangle + \left\langle C^{in\dagger}(t)\,C^{in}(0)\right\rangle \tag{10.89}$$

L'expression de l'opérateur de fluctuation du champ δa dans le cas du système linéaire (relation(4.51)du chapitre 4) s'écrit :

$$\delta a(t) = \sqrt{2\kappa}\left(T_1 * C^{in}\right)(t) + \sqrt{\gamma}\left(T_2 * D^{in}\right)(t) \tag{10.90}$$

Dans le cas général et dans la limite de la linéarisation, δa a pour expression dans l'espace de Fourier (relation(6.19) du chapitre 6) :

$$\delta a[\omega] = \sqrt{2\kappa} C^{in}[\omega] T_1[\omega] + \sqrt{\gamma} D^{in}[\omega] T_2[\omega] + \sqrt{2\kappa} C^{in\,\dagger}[\omega] T_3[\omega] + \sqrt{\gamma} D^{in\,\dagger}[\omega] T_4[\omega] \tag{10.91}$$

Dans l'espace des temps, l'expression de δa se traduit par :

$$\delta a(t) = \sqrt{2\kappa} \left(T_1 * C^{in}\right)(t) + \sqrt{\gamma} \left(T_2 * D^{in}\right)(t) + \sqrt{2\kappa} \left(T_3 * C^{in\,\dagger}\right)(t) + \sqrt{\gamma} \left(T_4 * D^{in\,\dagger}\right)(t) \tag{10.92}$$

Notons bien que l'expression de δa dans le cas linéaire rejoint l'expression du cas général pour $T_3 = 0$ et $T_4 = 0$.

Maintenant, nous cherchons à calculer le deuxième terme de l'expression (10.89):

$$\left\langle C^{in\dagger}(t)\, \delta a(0) \right\rangle = \sqrt{2\kappa} \left\langle C^{in\dagger}(t) \left(T_1 * C^{in}\right)(0) \right\rangle + \sqrt{\gamma} \left\langle C^{in\dagger}(t) \left(T_2 * D^{in}\right)(0) \right\rangle + \sqrt{2\kappa} \left\langle C^{in\dagger}(t) \left(T_3^* * C^{in\dagger}\right)(0) \right\rangle + \sqrt{\gamma} \left\langle C^{in\dagger}(t) \left(T_4 * D^{in\dagger}\right)(0) \right\rangle \tag{10.93}$$

Comme C^{in} est une fluctuation entrante du champ photonique, elle a un spectre blanc et par suite elle vérifie les équations suivantes :

$$\left\langle C^{in} \right\rangle = 0 \tag{10.94}$$

$$\left\langle C^{in}(t)\, C^{in}\left(t'\right) \right\rangle = 0 = \left\langle C^{in\dagger}(t)\, C^{in}\left(t'\right) \right\rangle \tag{10.95}$$

$$\left\langle C^{in}(t)\, C^{in\dagger}\left(t'\right) \right\rangle = \delta\left(t - t'\right) \tag{10.96}$$

L 'utilisation des relations (10.95) et (10.39) , en considérant que les forces des fluctuations photonique et excitonique sont décolérées l'un de l'autre, nous conduit à :

$$\left\langle C^{in\dagger}(t)\, \delta a(0) \right\rangle = 0 \tag{10.97}$$

Le troisième terme de l'expression (10.89) se calcule d'une manière similaire et nous obtenons :

$$\left\langle \delta a^{\dagger}(t) C^{in}(0) \right\rangle = \sqrt{2\kappa} \left\langle \left(T_1^* * C^{in\dagger}\right)(t) C^{in}(0) \right\rangle + \sqrt{\gamma} \left\langle \left(T_2^* * D^{in\dagger}\right)(t) C^{in}(0) \right\rangle + \sqrt{2\kappa} \left\langle \left(T_3^* * C^{in}\right)(t) C^{in}(0) \right\rangle + \sqrt{\gamma} \left\langle \left(T_2^* * D^{in}\right)(t) C^{in}(0) \right\rangle \quad (10.98)$$

En considérant que les forces des fluctuations photonique et excitonique sont décolérés l'un de l'autre et en utilisant les expression (10.95) et (10.39) on trouve :

$$\left\langle \delta a^{\dagger}(t) C^{in}(0) \right\rangle = 0 \quad (10.99)$$

Les relations (10.95)et (10.46) nous donnent :

$$\left\langle \delta a^{out\dagger}(t) \delta a^{out}(0) \right\rangle = 2\kappa \left\langle \delta a^{\dagger}(t) \delta a(0) \right\rangle \quad (10.100)$$

ce qui revient à dire :

$$C^{out}_{a^{\dagger}a}(t) = 2\kappa C_{a^{\dagger}a}(t) \quad (10.101)$$

Calcul de la covariance extracavité $C^{out}_{aa}(t)$: Si on rapporte l'équation (10.85) dans l'expression de (10.87) on obtient :

$$\left\langle \delta a^{out}(t) \delta a^{out}(0) \right\rangle = 2\kappa \left\langle \delta a(t) \delta a(0) \right\rangle - \sqrt{2\kappa} \left\langle C^{in}(t) \delta a(0) \right\rangle - \sqrt{2\kappa} \left\langle \delta a(t) C^{in}(0) \right\rangle + \left\langle C^{in}(t) C^{in}(0) \right\rangle \quad (10.102)$$

le quatrième terme est nul, et les expressions du deuxième et du troisième terme de l'équation (10.102) deviennent en utilisant (10.92) :

$$\left\langle C^{in}(t) \delta a(0) \right\rangle = \sqrt{2\kappa} \left\langle C^{in}(t) \left(T_1 * C^{in}\right)(0) \right\rangle + \sqrt{\gamma} \left\langle C^{in}(t) \left(T_2 * D^{in}\right)(0) \right\rangle + \sqrt{2\kappa} \left\langle C^{in}(t) \left(T_3 * C^{in\dagger}\right)(0) \right\rangle + \sqrt{\gamma} \left\langle C^{in}(t) \left(T_4 * D^{in\dagger}\right)(0) \right\rangle \quad (10.103)$$

$$\left\langle \delta a(t) C^{in}(0) \right\rangle = \sqrt{2\kappa} \left\langle \left(T_1 * C^{in}\right)(t) C^{in}(0) \right\rangle + \sqrt{\gamma} \left\langle \left(T_2 * D^{in}\right)(t) C^{in}(0) \right\rangle + \sqrt{2\kappa} \left\langle \left(T_3 * C^{in\dagger}\right)(t) C^{in}(0) \right\rangle + \sqrt{\gamma} \left\langle \left(T_4 * D^{in\dagger}\right)(t) C^{in}(0) \right\rangle \quad (10.104)$$

Compte tenu des relations (10.95),(10.96), (10.39), (10.46) et du fait que les forces des fluctuations photonique et excitonique sont décolérées l'un de l'autre, nous trouvons :

$$\left\langle C^{in}(t)\,\delta a(0)\right\rangle = \sqrt{2\kappa}\ \left\langle C^{in}(t)\left(T_3 * C^{in\dagger}\right)(0)\right\rangle = \sqrt{2\kappa}\ T_3^{-}(t) \tag{10.105}$$

$$\left\langle \delta a(t)\, C^{in}(0)\right\rangle = 0 \tag{10.106}$$

par conséquent l'expression (10.102) devient :

$$\left\langle \delta a^{out}(t)\,\delta a^{out}(0)\right\rangle = 2\kappa\left\langle \delta a(t)\,\delta a(0)\right\rangle - 2\kappa\ T_3^{-}(t) \tag{10.107}$$

soit équivalente à :

$$C_{aa}^{out}(t) = 2\kappa\ C_{aa}(t) - 2\kappa\ T_3^{-}(t) \tag{10.108}$$

Dans l'espace de Fourier, cette relation devient :

$$C_{aa}^{out}[\omega] = 2\kappa\ C_{aa}[\omega] - 2\kappa\ T_3[-\omega] \tag{10.109}$$

et dans l'espace de Laplace cette relation s'écrit :

$$C_{aa}^{out}[p] = 2\kappa\ C_{aa}[p] - 2\kappa\ T_3[-p] \tag{10.110}$$

Calcul de la covariance extracavité $C_{aa\dagger}^{out}(t)$: Si on rapporte l'équation (10.85) dans l'expression de (10.88) on obtient :

$$\left\langle \delta a^{out}(t)\,\delta a^{out\dagger}(0)\right\rangle = 2\kappa\left\langle \delta a(t)\,\delta a^{\dagger}(0)\right\rangle - \sqrt{2\kappa}\left\langle C^{in}(t)\,\delta a^{\dagger}(0)\right\rangle - \sqrt{2\kappa}\left\langle \delta a(t)\, C^{in\dagger}(0)\right\rangle + \left\langle C^{in}(t)\, C^{in\dagger}(0)\right\rangle \tag{10.111}$$

Les expressions du deuxième et du troisième terme de l'équation (10.102) deviennent en utilisant (10.92) :

$$\left\langle C^{in}(t)\,\delta a^{\dagger}(0)\right\rangle = \sqrt{2\kappa}\left\langle C^{in}(t)\left(T_1^{*} * C^{in\dagger}\right)(0)\right\rangle + \sqrt{\gamma}\left\langle C^{in}(t)\left(T_2^{*} * D^{in\dagger}\right)(0)\right\rangle + \sqrt{2\kappa}\left\langle C^{in}(t)\left(T_3^{*} * C^{in}\right)(0)\right\rangle + \sqrt{\gamma}\left\langle C^{in}(t)\left(T_4^{*} * D^{in}\right)(0)\right\rangle \tag{10.112}$$

$$\left\langle \delta a(t)\, C^{in\dagger}(0)\right\rangle = \sqrt{2\kappa}\left\langle \left(T_1 * C^{in}\right)(t)\, C^{in\dagger}(0)\right\rangle + \sqrt{\gamma}\left\langle \left(T_2 * D^{in}\right)(t)\, C^{in\dagger}(0)\right\rangle + \sqrt{2\kappa}\left\langle \left(T_3 * C^{in\dagger}\right)(t)\, C^{in\dagger}(0)\right\rangle + \sqrt{\gamma}\left\langle \left(T_4 * D^{in\dagger}\right)(t)\, C^{in\dagger}(0)\right\rangle \tag{10.113}$$

Compte tenu des relations (10.95),(10.96), (10.39), (10.46) et du fait que les forces des fluctuations photonique et excitonique sont décolérées l'un de l'autre nous trouvons :

$$\left\langle C^{in}(t)\,\delta a^{\dagger}(0)\right\rangle = \sqrt{2\kappa}\ \left\langle C^{in}(t)\left(T_1^{*} * C^{in\dagger}\right)(0)\right\rangle = \sqrt{2\kappa}\ \left(T_1^{-}\right)^{*}(t) \tag{10.114}$$

$$\left\langle \delta a(t)\,C^{in}(0)\right\rangle = \sqrt{2\kappa}\left\langle \left(T_1 * C^{in}\right)(t)\,C^{in\dagger}(0)\right\rangle = \sqrt{2\kappa}\ T_1(t) \tag{10.115}$$

par conséquent, l'expression (10.102) devient :

$$\left\langle \delta a^{out}(t)\,\delta a^{out\dagger}(0)\right\rangle = 2\kappa\left\langle \delta a(t)\,\delta a^{\dagger}(0)\right\rangle - 2\kappa\ \left(T_1(t) + (T_1)^{*}(-t)\right) \tag{10.116}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$C^{out}_{aa^{\dagger}}(t) = 2\kappa\ C_{aa}(t) - 2\kappa\left(T_1(t) + (T_1)^{*}(-t)\right) \tag{10.117}$$

Dans l'espace de Fourier cette relation devient :

$$C^{out}_{aa^{\dagger}}[\omega] = 2\kappa\ C_{aa^{\dagger}}[\omega] - 2\kappa\left(T_1[\omega] + (T_1[\omega])^{*}\right) = 2\kappa\ C_{aa^{\dagger}}[\omega] - 2\kappa Re\left\{T_1[\omega]\right\} \tag{10.118}$$

Relation entre les fonctions d'autocorrélation intra- et extracavité : Pour le cas linéaire, les expressions liant les fonctions intra- et extracavité s'écrivent :

$$C^{out}_{a^{\dagger}a}(t) = 2\kappa C_{a^{\dagger}a}(t) \tag{10.119}$$

$$C^{out}_{aa}(t) = 2\kappa\ C_{aa}(t) \tag{10.120}$$

Dans ce cas et en utilisant la relation (10.84) on trouve :

$$L_1^{out}(t) = 2Re\left\{C^{out}_{a^{\dagger}a}(t)\right\}\left\langle a^{out\dagger}\right\rangle\left\langle a^{out}\right\rangle = (2\kappa)^2 L_1(t) \tag{10.121}$$

$$L_2^{out}(t) = 2Re\left\{\left\langle a^{out\dagger}\right\rangle^2 C^{out}_{aa}(t)\right\} = (2\kappa)^2 L_2(t) \tag{10.122}$$

$$\begin{aligned} L_4^{out}(t) &= \left(C^{out}_{a^{\dagger}a}(t)\right)^{*} C^{out}_{a^{\dagger}a}(t) + \left(C^{out}_{aa}(t)\right)^{*} C^{out}_{aa}(t) + \left(C^{out}_{a^{\dagger}a}(0)\right)^{*} C^{out}_{a^{\dagger}a}(0) \\ &= (2\kappa)^2 L_4(t) \end{aligned} \tag{10.123}$$

et par conséquent l'équation (10.7) nous donne :

$$G^{(2)}_{ext}(t) = (2\kappa)^2 G^{(2)}(t) \tag{10.124}$$

ceci revient à dire :

$$g_{ext}^{(2)} = \frac{G_{ext}^{(2)}(t)}{G_{ext}^{(2)}(\infty)} = \frac{G^{(2)}(t)}{G^{(2)}(t)} = g^{(2)}(t) \tag{10.125}$$

Nous avons démontré ici que les fonctions d'autocorrélation intra- et extracavité sont identiques pour le cas linéaire dans un système en transmission.

Dans le cas général, les manipulations algébriques des expressions (10.108), (10.101), (10.84) et (10.21) nous donnent :

$$\begin{aligned} g_{ext}^{(2)}(t) - 1 &= \frac{\left(L_1^{out}(t) + L_2^{out}(t)\right)}{\left(\langle a^{out}\rangle \langle a^{out\dagger}\rangle\right)^2} \\ &= \frac{\left(L_1(t) + L_2(t) - 2Re\left\{\langle a^{\dagger}\rangle^2 T_3^-(t)\right\}\right)}{\left(\langle a\rangle \langle a^{\dagger}\rangle\right)^2} \end{aligned} \tag{10.126}$$

ceci nous permet d'aboutir à la relation générale suivante liant les fonctions d'autocorrélation intra et extracavité pour un système en transmission :

$$g_{ext}^{(2)}(t) - 1 = \left(g^{(2)}(t) - 1\right) - \frac{2Re\left\{\langle a^{\dagger}\rangle^2 T_3^-(t)\right\}}{\left(\langle a\rangle \langle a^{\dagger}\rangle\right)^2} \tag{10.127}$$

10.6.1.2 Système en transmission 2

Dans ce cas le taux de transmission $\left(t_2 = \sqrt{2\kappa_2}\right)$ du miroir M_2 est négligable devant le taux de transmission $\left(t_1 = \sqrt{2\kappa_1}\right)$du deuxième miroir M_1. La dissipation de la cavité κ est due principalement à la transmission du miroir M_2 $(\kappa \simeq \kappa_2)$.

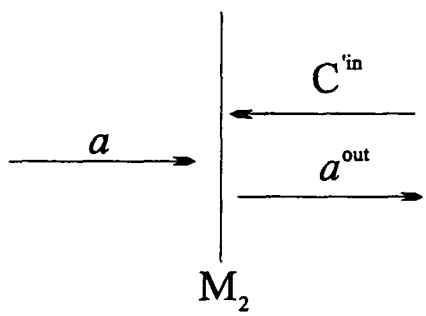


Fig. 87: Champs entrant sortant couplés par le miroir M_2

La relation d'entrée-sortie liant les champs intra- et extracavité s'écrit :

$$a^{out} = -C'^{in} + \sqrt{2\kappa_2}\, a \tag{10.128}$$

cette expression nous donne deux relations, la première indique que le champ moyen extracavité est proportionnel au champ moyen intracavité :

$$\left\langle a^{out}\right\rangle = \sqrt{2\kappa_2}\ \langle a\rangle \tag{10.129}$$

et la seconde nous traduit les fluctuations du champ intracavité en fonction des fluctuation du champ extracavité et de la fluctuation entrante par le miroir M_2 :

$$\delta a^{out} = -C'^{in} + \sqrt{2\kappa_2}\ \delta a \tag{10.130}$$

d'après les relations (10.7) et (10.21) de l'annexe A, la fonction d'autocorrélation s'exprime en fonction des fonctions de covariances C_{aa} et $C_{a^\dagger a}$. Pour déterminer une relation entre la fonction d'autocorrélation intra- et extracavité il est donc nécessaire de déterminer des expressions liant les fonctions de covariances intra- et extracavités.

Relation entre les fonctions de covariance intra- et extracavité

Calcul de la fonction de covariance extracavité $C^{out}_{a^\dagger a}(t)$: Nous commençons par le calcul de la fonction de covariance extracavité $C^{out}_{a^\dagger a}(t)$. Les relations (10.130) et (10.86) nous donnent :

$$\left\langle \delta a^{out\dagger}(t)\,\delta a^{out}(0)\right\rangle = 2\kappa_2\left\langle \delta a^\dagger(t)\,\delta a(0)\right\rangle - \sqrt{2\kappa_2}\left\langle C'^{in\dagger}(t)\,\delta a(0)\right\rangle - \sqrt{2\kappa_2}\left\langle \delta a^\dagger(t)\,C'^{in}(0)\right\rangle + \left\langle C'^{in\dagger}(t)\,C'^{in}(0)\right\rangle \tag{10.131}$$

L'expression de l'opérateur de fluctuation du champ δa dans le cas général et dans la limite de la linéarisation (relation(10.92)) :

$$\delta a(t) = \sqrt{2\kappa}\left(T_1 * C^{in}\right)(t) + \sqrt{\gamma}\left(T_2 * D^{in}\right)(t) + \sqrt{2\kappa}\left(T_3 * C^{in\ \dagger}\right)(t) + \sqrt{\gamma}\left(T_4 * D^{in\ \dagger}\right)(t) \tag{10.132}$$

Maintenant, nous cherchons à calculer le deuxième terme de l'expression (10.131):

$$\left\langle C'^{in\dagger}(t)\,\delta a(0)\right\rangle = \sqrt{2\kappa}\left\langle C'^{in\dagger}(t)\left(T_1 * C^{in}\right)(0)\right\rangle + \sqrt{\gamma}\left\langle C'^{in\dagger}(t)\left(T_2 * D^{in}\right)(0)\right\rangle + \sqrt{2\kappa}\left\langle C'^{in\dagger}(t)\left(T_3^* * C^{in\dagger}\right)(0)\right\rangle + \sqrt{\gamma}\left\langle C'^{in\dagger}(t)\left(T_4 * D^{in\dagger}\right)(0)\right\rangle \tag{10.133}$$

C^{in} et C'^{in} sont des fluctuation entrante du champ photonique, elles ont un spectre blanc et elles sont décolérées, par suite elles vérifient les équations suivantes :

$$\left\langle C'^{in}(t)\, C^{in}\left(t'\right)\right\rangle = 0 = \left\langle C'^{in\dagger}(t)\, C^{in}\left(t'\right)\right\rangle \tag{10.134}$$

$$\left\langle C'^{in\dagger}(t)\, C^{in}\left(t'\right)\right\rangle = 0 \tag{10.135}$$

L 'utilisation des relations (10.134) et (10.39) et en considérant que les forces des fluctuations photonique et excitonique sont décolérés l'un de l'autre, nous conduit à :

$$\left\langle C^{in\dagger}(t)\, \delta a(0)\right\rangle = 0 \tag{10.136}$$

Le quatrième terme de l'expression (10.131) se calcule d'une manière similaire et nous obtenons :

$$\left\langle \delta a^{\dagger}(t)\, C^{in}(0)\right\rangle = \sqrt{2\kappa}\left\langle \left(T_1^{*} * C^{in\dagger}\right)(t)\, C^{in}(0)\right\rangle + \sqrt{\gamma}\left\langle \left(T_2^{*} * D^{in\dagger}\right)(t)\, C^{in}(0)\right\rangle +$$
$$\sqrt{2\kappa}\left\langle \left(T_3^{*} * C^{in}\right)(t)\, C^{in}(0)\right\rangle + \sqrt{\gamma}\left\langle \left(T_2^{*} * D^{in}\right)(t)\, C^{in}(0)\right\rangle \tag{10.137}$$

En considérant que les forces des fluctuations photonique et excitonique sont décolérés l'un de l'autre et en utilisant les expression (10.134) et (10.39) on trouve :

$$\left\langle \delta a^{\dagger}(t)\, C^{in}(0)\right\rangle = 0 \tag{10.138}$$

Les relations (10.134)et (10.46) nous donnent :

$$\left\langle \delta a^{out\dagger}(t)\, \delta a^{out}(0)\right\rangle = 2\kappa_2 \left\langle \delta a^{\dagger}(t)\, \delta a(0)\right\rangle \tag{10.139}$$

ce qui revient à dire :

$$C^{out}_{a^{\dagger}a}(t) = 2\kappa_2 C_{a^{\dagger}a}(t) \tag{10.140}$$

Calcul de la covariance extracavité $C^{out}_{aa}(t)$: Si on rapporte l'équation (10.130) dans l'expression de (10.87) on obtient :

$$\left\langle \delta a^{out}(t)\, \delta a^{out}(0)\right\rangle = 2\kappa_2 \left\langle \delta a(t)\, \delta a(0)\right\rangle - \sqrt{2\kappa_2}\left\langle C'^{in}(t)\, \delta a(0)\right\rangle -$$
$$\sqrt{2\kappa_2}\left\langle \delta a(t)\, C'^{in}(0)\right\rangle + \left\langle C'^{in}(t)\, C'^{in}(0)\right\rangle \tag{10.141}$$

Les expressions du deuxième et du quatrième terme de l'équation (10.141) deviennent en utilisant (10.132) :

$$\left\langle C'^{in}(t)\,\delta a(0)\right\rangle = \sqrt{2\kappa}\left\langle C'^{in}(t)\,(T_1 * C^{in})(0)\right\rangle + \sqrt{\gamma}\left\langle C'^{in}(t)\,(T_2 * D^{in})(0)\right\rangle + \sqrt{2\kappa}\left\langle C'^{in}(t)\,(T_3 * C^{in\dagger})(0)\right\rangle + \sqrt{\gamma}\left\langle C'^{in}(t)\,(T_4 * D^{in\dagger})(0)\right\rangle \tag{10.142}$$

$$\left\langle \delta a(t)\,C'^{in}(0)\right\rangle = \sqrt{2\kappa}\left\langle (T_1 * C^{in})(t)\,C'^{in}(0)\right\rangle + \sqrt{\gamma}\left\langle (T_2 * D^{in})(t)\,C'^{in}(0)\right\rangle + \sqrt{2\kappa}\left\langle (T_3 * C^{in\dagger})(t)\,C'^{in}(0)\right\rangle + \sqrt{\gamma}\left\langle (T_4 * D^{in\dagger})(t)\,C'^{in}(0)\right\rangle \tag{10.143}$$

Compte tenu des relations (10.134),(10.135), (10.39), (10.46) et du fait que les forces des fluctuations photonique et excitonique sont décolérées l'un de l'autre, nous trouvons :

$$\left\langle C'^{in}(t)\,\delta a(0)\right\rangle = 0 \tag{10.144}$$

$$\left\langle \delta a(t)\,C'^{in}(0)\right\rangle = 0 \tag{10.145}$$

par conséquent l'expression (10.141) devient :

$$\left\langle \delta a^{out}(t)\,\delta a^{out}(0)\right\rangle = 2\kappa_2\left\langle \delta a(t)\,\delta a(0)\right\rangle \tag{10.146}$$

soit équivalente à :

$$C^{out}_{aa}(t) = 2\kappa_2\, C_{aa}(t) \tag{10.147}$$

Calcul de la covariance extracavité $C^{out}_{aa^\dagger}(t)$: Si on rapporte l'équation (10.130) dans l'expression de (10.88) on obtient :

$$\left\langle \delta a^{out}(t)\,\delta a^{out\dagger}(0)\right\rangle = 2\kappa_2\left\langle \delta a(t)\,\delta a^{\dagger}(0)\right\rangle - \sqrt{2\kappa_2}\left\langle C'^{in}(t)\,\delta a^{\dagger}(0)\right\rangle - \sqrt{2\kappa_2}\left\langle \delta a(t)\,C'^{in}(0)\right\rangle + \left\langle C'^{in}(t)\,C'^{in}(0)\right\rangle \tag{10.148}$$

Une démarche similaire au calcul de ($C^{out}_{aa}(t)$ et $C^{out}_{a^\dagger a}(t)$) nous conduit à la relation entre les fonctions d'autocorrélation intra- et extracavité :

$$C^{out}_{aa}(t) = 2\kappa_2\, C_{aa}(t) \tag{10.149}$$

Relation entre les fonctions d'autocorrélation intra- et extracavité : Les expressions liant les fonctions intra- et extracavité s'écrivent :

$$C_{a^\dagger a}^{out}(t) = 2\kappa_2 C_{a^\dagger a}(t) \tag{10.150}$$

$$C_{aa}^{out}(t) = 2\kappa_2\, C_{aa}(t) \tag{10.151}$$

Dans ce cas et en utilisant la relation (10.129) on trouve :

$$L_1^{out}(t) = 2Re\left\{C_{a^\dagger a}^{out}(t)\right\}\left\langle a^{out\dagger}\right\rangle\left\langle a^{out}\right\rangle = (2\kappa_2)^2 L_1(t) \tag{10.152}$$

$$L_2^{out}(t) = 2Re\left\{\left\langle a^{out\dagger}\right\rangle^2 C_{aa}^{out}(t)\right\} = (2\kappa_2)^2 L_2(t) \tag{10.153}$$

$$\begin{aligned} L_4^{out}(t) &= \left(C_{a^\dagger a}^{out}(t)\right)^* C_{a^\dagger a}^{out}(t) + \left(C_{aa}^{out}(t)\right)^* C_{aa}^{out}(t) + \left(C_{a^\dagger a}^{out}(0)\right)^* C_{a^\dagger a}^{out}(0) \\ &= (2\kappa_2)^2 L_4(t) \end{aligned} \tag{10.154}$$

et par conséquent l'équation (10.7) (pour le cas linéaire) ou bien (10.21) (pour le cas non linéaire) nous donne :

$$G_{ext}^{(2)}(t) = (2\kappa_2)^2 G^{(2)}(t) \tag{10.155}$$

ceci revient à dire :

$$g_{ext}^{(2)} = \frac{G_{ext}^{(2)}(t)}{G_{ext}^{(2)}(\infty)} = \frac{G^{(2)}(t)}{G^{(2)}(t)} = g^{(2)}(t) \tag{10.156}$$

Nous avons démontré ici que les fonctions d'autocorrélation intra- et extracavité sont identiques pour le cas d'un système en transmission 2.

10.6.2 Système en réflexion

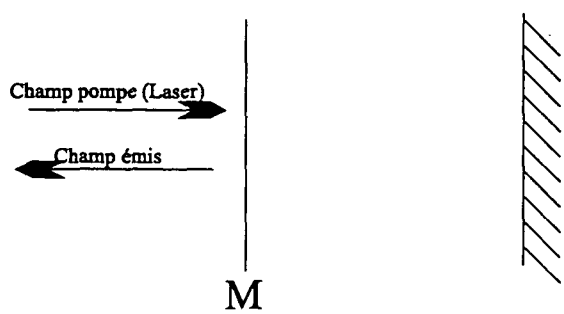


Fig. 88: Système en réflexion

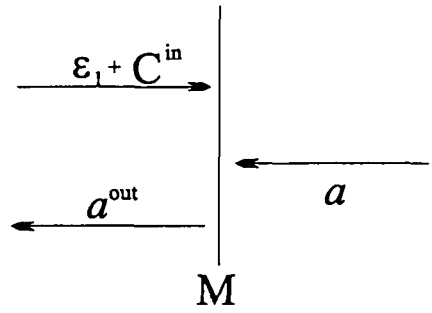


Fig. 89: Champs entrant sortant couplés par le miroir M

La relation d'entrée-sortie pour un système en réflexion s'écrit :

$$a^{out} = -\left(C^{in} + \varepsilon_1\right) + \sqrt{2\kappa}\, a \tag{10.157}$$

où ε_1 est l'amplitude extracavité du champ pompe que l'on déterminera par la suite en fonction de l'amplitude intracavité du champ pompe.

Cette expression nous donne deux relations, la première est une relation pour le champ moyen extracavité :

$$\left\langle a^{out} \right\rangle = \sqrt{2\kappa}\ \langle a \rangle - \varepsilon_1 \tag{10.158}$$

et la seconde nous donne les fluctuations du champ intracavité en fonction des fluctuations du champ extracavité et de la fluctuation entrante :

$$\delta a^{out} = -C^{in} + \sqrt{2\kappa}\ \delta a \tag{10.159}$$

cette relation est identique à celle du système en transmission. Les expressions ((10.101),(10.108) et(10.117)) liant les fonctions de covariances intra- et extracavité, sont alors dans ce cas valables.

Nous cherchons maintenant à établir une relation entre l'amplitude du champ pompe intra- et extracavité.

10.6.3 Relation entre l'amplitude du champ pompe intra- et extracavité

Nous supposons que le champ pompe est un champ classique.

Le miroir M possède un taux de transmission $t = \sqrt{2\kappa}$ et un taux de réflexion $r = \sqrt{1 - t^2}$; dans le cas où le taux de transmission est trés faible $t << 1$ on peut écrire :

$$r = \sqrt{1 - 2\kappa} \approx 1 - \kappa \tag{10.160}$$

D'une manière générale, les champs intra- et extracavité sont liés par :

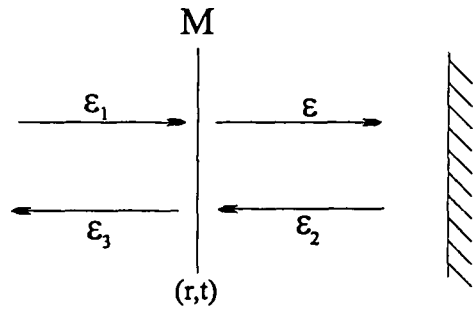


Fig. 90: Représentation schematique des champs entrant et sortant d'une cavité

$$\varepsilon_1 = r\varepsilon_2 + t\varepsilon \tag{10.161}$$

$$\varepsilon_3 = -r\varepsilon_1 + t\varepsilon_2 \tag{10.162}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon e^{i\phi} \tag{10.163}$$

où ϕ représente le déphasage dû à l'aller retour dans la cavité , il s'exprime en fonction de la longeur de la cavité et de la longeur d'onde λ par l'équation suivante :

$$\phi = 2\pi\left(\frac{2L}{\lambda}\right) \tag{10.164}$$

Dans le régime de quasi-résonance, le déphasage ϕ est à près égale à un multiple de 2π et ceci nous permet d'écrire :

$$\varepsilon_2 \approx \varepsilon \tag{10.165}$$

Les relations (10.160),(10.161) et (10.165) nous donnent enfin une relation simple liant les amplitudes des champs pompes intra- et extracavité :

$$\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{2\kappa}}\varepsilon_1 \tag{10.166}$$

10.6.4 Relation entre les fonctions d'autocorrélation intra- et extracavité

10.6.4.1 Cas linéaire

Dans le chapitre 4, on a étudié deux cas de pompage pour un système linéaire, le pompage cohérent et le pompage incohérent. Nous cherchons dans cette partie à établir une relation liant les fonctions d'autocorrélations intra- et extracavité pour ces deux types de pompage.

Pour le pompage incohérent, le champ pompe en valeur moyenne est nul ($\varepsilon = 0$) ceci correspond à un traitement strictement identique au système en transmission. On en déduit que les fonctions d'autocorrélations sont égales :

$$g_{ext}^{(2)}(t) = g^{(2)}(t) \tag{10.167}$$

Pour le pompage cohérent, les fonctions de covariances intracavité s'annulent (relations(4.64) et (4.65) du chapitre 4). Les relations ((10.119),(10.120) nous permettent d'affirmer que les fonctions de covariance extracavité s'annulent et par conséquent il découle des relations (10.8), (10.9),(10.10), (10.11) et (10.7),que :

$$G_{ext}^{(2)}(t) = \left\langle a^{\dagger}\right\rangle^2 \langle a\rangle^2 \tag{10.168}$$

soit :

$$g_{ext}^{(2)}(t) = 1 = g^{(2)}(t) \tag{10.169}$$

10.6.4.2 Cas non linéaire :

Pour le système en réflexion dans le cas non-linéaire, il n'y a plus de relation simple liant les fonctions d'autocorrélation intra et extracavité. Cependant, nous pouvons écrire une relation liant la fonction d'autocorrélation extracavité en fonction des fonctions de covariance intracavité.

La relation (10.21) nous permet d'écrire :

$$g_{ext}^{(2)}(t) = 1 + \frac{2Re\left\{\langle a\rangle_{out}\left\langle a^{\dagger}\right\rangle_{out} C_{a^{\dagger}a}^{out}(t) + \left\langle a^{\dagger}\right\rangle_{out}\left\langle a^{\dagger}\right\rangle_{out} C_{aa}^{out}(t)\right\}}{\left(\langle a\rangle_{out}\left\langle a^{\dagger}\right\rangle_{out}\right)^2} \tag{10.170}$$

Nous rappelons les expressions établies dans cet annexe liant les fonctions de covariances intra- et extracavité :

$$C_{aa}^{out}(t) = 2\kappa\, C_{aa}(t) - 2\kappa\, T_3^{-}(t) \tag{10.171}$$

$$C_{a^{\dagger}a}^{out}(t) = 2\kappa C_{a^{\dagger}a}(t) \tag{10.172}$$

La relation entre la valeur moyenne du champ photonique intra- et extracavité s'obtient à partir d'une simple manipulation algébrique des deux équations (10.166) et (10.157) :

$$\left\langle a^{out}\right\rangle = \sqrt{2\kappa}\left(\langle a\rangle - \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{10.173}$$

finalement à partir des quatre dernières équations nous trouvons :

$$g^{(2)}_{ext}(t) = 1 + \frac{2Re\left\{C_{a^\dagger a}(t)\right\}}{\left(\langle a\rangle - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\langle a^\dagger\rangle - \frac{\varepsilon}{2}\right)} + \frac{2Re\left\{\left(\langle a^\dagger\rangle - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2\left(C_{aa}(t) - T_3(-t)\right)\right\}}{\left(\left(\langle a\rangle - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\langle a^\dagger\rangle - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)^2} \quad (10.174)$$

Bibliographie

[Bastard 82] G.Bastard, E.E.Mendez,L.C.Chang and L.Esaki, Phys. Rev. B26, p.1974 (1982)

[Baumeister 61] P.W.Baumeister, Phys. Rev. 121, p.359 (1961)

[Bernardot 92] F.Bernardot, P.Nussenzveig, M.Brune, J.-M.Raimond et S.Haroche, Europhys. Lett. 17, p.33 (1992).

[Brecha 86a] R.J.Brecha, L.A Orozco, M.G.Raizen, M.Xiao et H.J.Kimble, J.opt.Soc. Am B3, p.238 (1986)

[Brecha 86b] [Brecha 86b] R.J.Brecha, L.A Orozco, M.G.Raizen, M.Xiao et H.J.Kimble, Bull. Am. Phys. Soc. 31, p.937 (1986)

[Carmichael 89] H.J.Carmichael, R.J.Brecha, M. G.Raizen et H.J.Kimble, Phys. Rev. A40, p.5516 (1989)

[Casimir 48] H.B.G.Casimir et D.Polder, Phys. Rev. 73, p.360 (1948)

[Cohen-Tannoudji 77] C.Cohen-Tannoudji, Atoms in Strong Resonant Fields, in Les Houches XXVII (1975), Frontiers in Laser Spectroscopy, Vol.1, ed. By R.Balian , S.Haroche and S.Liberman, North Holland Amsterdam, p.3 (1977)

[Cohen-Tannoudji 96] [Cohen-Tannoudji 96] C.Cohen-Tannoudji, J.Dupont-Roc et G.Grynberg, Processus dinteraction entre photons et atomes, Edition du CNRS (1996).

[Cohen-Tannoudji 80] C.Cohen-Tannoudji, Cours de Collége de France en physique atomique et moleculaire (1979-1980)

[De Martini 87] F.De Martini, G.Innocenti, G.R.Jacobovitz et P.Mataloni , Phys. Rev. 59, p.2955 (1987)

[Dimmock 67] J.Dimmock , Introducyion to the theory of Exciton states in Semiconductor, Semiconductors and semimetals Vol.3, éd. R.K.Willardson and A.C.Bcer, Academic Press, New York 1967

[Drexhage 74] K.H.Drexhage, Progress in Optics XII, éd. par E.Wolf, North Holland (1974)

[Frenkel 31] J.Frenkel, Phys. Rev. 37, p.17 (1931).

[Gardiner 83] C.W.Gardiner, Handbook of stochastic methods, Springer Verlag, (1983)

[Glauber 63] R.J.Glauber, Phys Rev. 131, p.2766 (1963)

[Goy 83] P.Goy, J.M.Raimond, M.Gross et S.Haroche, Phys. Rev.Lett. 50, p.1903 (1983)

[Grishchuk 77] L.P.Grishchuk, Usp.Fiz.Nauk 121, p.629 (1977)

[Hanamura 74a] E.Hanamura, J.Phys.Soc.Jpn. 37, p.1545 (1974)

[Hanamura 74b] E.Hanamura, J.Phys.Soc.Jpn. 37, p.1553 (1974)

[Hanamura 77] E.Hanamura et H.Haug, Phys. Rep. 33, p.209 (1977)

[Hanbury Brown 56] R.Hanbury Brown et R.Q.Twiss, Nature (London) 177, p.27 (1956).

[Haroche 90] S.Haroche ,Les Houches, session LIII (1990),Fondamental Systems in Quantum Optics ,éd J.Dalibard, J.M.Raimond etJ.Zinn_Justin, Elsevier Science Publischers B.V., p.767 (1992)

[Haug 90] H.Haug et S.Koch, Ountum theory of the optical and electronic properties of Semiconductors, World Scientific Publisching Co.Pte.Ltd.(1990)

[Hauke 76] H.Hauke, Quantum Field Theory of Solids an introduction, North Holland Publishing Company (1976)

[Heinzen 87] D.J.Heinzen, J.J.Childs, J.E.Thomas et M.SFeld, Phys. Rev.Lett 58, p.1320 (1987)

[Hilico 92] L.Helico, C.Fabre, S.Reynaud et E.Giacobino, Phys. Rev. A 46, p.4397 (1992)

[Hopfield 58] J.J.Hopfield, Phy.Rev.112, p.1555 (1958)

[Houdre 95] R.Houdré, J.L.Gbernon, P.Pellandini, R.Pstanley, U.Oesterle, C.Weisbuch, J.OGorman, B.roycroft et M.ilegems, Phys. Rev. B52, p.7810 (1995).

[Jaekel 90] M.T.Jaekel et S.Reynaud, EuroPhys. Lett. 13, p.301 (1990)

[Jaynes 87] E.T.Jaynes et F.W.Cummings, Proc.IEEE 51, p.89 (1963)

[Keldysh 68] L.V.Keldysch et A.M.Kozlov, Sov.Phys.JETP 27, p.521 (1968).

[Kimble 77] H.J.Kimble, M.Dagenais et L.Mandel, Phys. Rev. Lett 39, p.691 (1977).

[Kimble 94] H.J.Kimble, Structure and dynamics in cavity quantum electrodynamics, P.R.Berman (eds.),Cavity quantum electrodynamics, Academic Press, Boston, P.203 (1994)

[Knox 63] R.S.Knox, Theory of excitons, Academic Press, New York and London (1963)

[Mandel 95] L.Mandel et E.Wolf, Optical coherence and quantum optics, Camridge University Press (1995)

[Marin 97] F.Marin, A.Bramati,V.Jost, E.Giacobino, Opt.Com. 140, p.146 (1997)

[Miller 85] R.C.Miller, A.C.Gossard,G.Duggan, H.I.Ralph, C.T.Foxen, Phys. Rev. B32, p.8452 (1985).

[Miller 95] D.A.B.Miller, Quantum Well Optical Switching Devices, confine electrons and photons, éd. E.Burstein et C.Weisbuch, Prlenum Press, New York, p.675 (1995).

[Nelson 96] T.R.Nelson, E.K. Lindmark, D.V.Vick, K.Tai, G.Khitrova et H.M.Gibbs, Microcavities and photonic bandgaps, éd J.Rarity et C.Weisbuch, Kluwer Academic publishers, p.43 (1996)

[Norris 94] T.B.Norris et al., Phys. Rev. B50, p.14663 (1994)

[Oppenheim 89] A.S.Oppenheim et A.S.Willsky, Signale und Systeme, VCH Verlagsgeselleschaft, (1989)

[Orozco 87] L.A Orozco, M.G.Raizen, M.Xiao R.J.Brecha, et H.J.Kimble, J.opt.Soc. Am B4, p.1490 (1987)

[Pau 95] S.Pau, J.Jacobson, G.Bjork et Y.Yamamoto, stimulated emission of microcavity exciton polariton, éd J.H.Eberly et al , Quantum optics VII, Plenum, New York (1995)

[Pease 31] F.G.Pease, Ergeb. exact. Naturwiss. 10, p.84 (1931)

[Polzik 92] E.S.Polzik, J.Carri, H.J.Kimble, Phys. Rev. Lett. 68, p.3020 (1992)

[Purcell 46] E.M.Purcell, Phys. Rev. 69, p.681 (1946)

[R.Ulbrich 79] R.Ulbrichet C.Weisbuch, Phy. Rev. Lett. 43, p.963 (1979)

[Raizen 89] M.G.Raizen, R.J.Thompson,R.J.Brecha, H.J.Kimble et H.J.Carmicheal, Phys. Rev. Lett. 63, p.240 (1989)

[Rempe 87] G.Rempe, H.Walther et N.Klein, Phys. Rev. Lett 58, p.353 (1987)

[Rempe 93] G.Rempe,R.Jthompson et H.J.Kimble ,Phsica Scripta. Vol T51, p.67 (1993)

[Reynaud 90] S.Reynaud, Ann. Phy. Fr. 15, p.63 (1990)

[Reynaud 92] S.Reynaud, A.Heidmann, E.Giacobino et C.Fabre, Quantum fluctuations in optical systems, éd. E.Wolf, Progress in Optics XXX, Elsiver Science Publischers B.V, p.1 (1992)

[Sermage 96] B.Sermage, S.Long, I.Abram, Y.Marzin, J.Bloch, R.Planel et Thierry-Mieg, Phys. Rev. B53, p.16516 (1996)

[Sermage] B.Sermege, S.Long, I.Abram, J.Y.Marzin, J.Bloch, R.Planel et V.Therry-Mieg, Phys. Rew. B53 , R7642 (1996)

[Slusher 85] R.E.Slusher, L.W.Hollberg, B.Yurke, J.C.Mertz et J.F.Valley, Phys. Rev. Lett55, p.2409 (1985)

[Souto Ribeiro] P.H.Souto Ribeiro, C.Schwob, A.Maître et C.Fabre, Optics Lett.24, p.1893 (1997)

[Steyn 83] M.L.Steyn-Rosset et C.W.Gardiner , Phys. Rev. A33, p.310 (1983)

[Stoler 70] D.Stoler, Phys. Rev. D1, p.3217 (1970)

[Stoler 71] D.Stoler, Phys. Rev. D4, p.1925 (1971)

[Sudarshan 63] E.C.G.Sudarshan,Phys Rev. Lett. 10, p277 (1963)

[Teich 88] M.C.Teich et E.A.Saleh, Photon Bunching and Antibunching, Progress in optics, Vol.XXVI (1988)

[Thompson 92] R.J.Thompson, G.Rempe et H.J.Kimble, Phys. Rev. Lett. 68, p.1132 (1992)

[Van Kampen 81] N.G.Van Kampen, Stochastic processes in physics and chemistry , North Holland, (1981)

[Wannier 37] G.H.Wannier, Phys. Rev. 52, p.191 (1937)

[Weisbuch 92] C. Weisbuch, M.Nishioka, A.Ishikawa et Y.Arakawa, Phys. Rev. Lett. 69, p.3314 (1992)

[Wu 86] L.A.Wu, H.J.Kimble, J.L.Hall et H.Wu, Phys. Rev. Lett. 57, p2520 (1986)

[Yamaguchi 91] T.Yamaguchi, Y.Arakawa et M.Nishioka, Appl. Phys. Lett. 58, p.2735 (1991)

[Yamamoto 95] Y.Yamamoto, J.M. Jacobson, S.Pau, H.Cao et Björk, Microcavities and Photonic Bandgaps physics and applications, éd J.Rarity et C.Weisbuch, p.457 (1995)

[Yokoyama 90] H.Yokayama, K.Nishi, T.Anan, H.Yamada, S.D.Broson et E.P.Ippen, Appl. Phys. Lett. 57, 2814 (1990)

[Yuen 76] H.P.Yuen, Phys. Rev. A13, p.2226 (1976)

[Zhang 95] T.C.Zhang,
J.P.Poizat, P.Grelu, J.F.Roch, P.Grangier, F.Marin, A.Bramati, V.Jost, M.D. Levson, E.Giacobino, Quantum Semiclass. Opt. 7, p.607 (1995)

Résumé

Nous présentons un traitement théorique de la modification des fluctuations quantiques d'un faisceau lumineux par l'interaction non-linéaire avec une microcavité semiconductrice à puits quantiques. Nous étudions plus précisément le spectre de bruit et la fonction d'autocorrélation des champs émis.

Notre étude du spectre de bruit prévoit des effets de compression de bruit importants dans le cas de fort couplage entre excitons et photons de la cavité et à basse température où les excitons du semiconducteur sont découplés de l'effet perturbateur du réseau. Nous montrons aussi que ces effets de réduction de bruit disparaissent avec l'augmentation de la température du réservoir thermique.

L'étude de la fonction d'autocorrélation qui est un indicateur de la statistique du champ émis a permis de mettre en évidence des effets de dégroupement (non-classique) et de groupement de photons suivant le désaccord entre la fréquence du laser et la fréquence de la cavité.

Mots-clés: Microcavités semiconductrices à puits quantiques, Electrodynamique quantique en microcavité, Fonction d'autocorrélation d'intensité, Fluctuations quantiques, Couplage fort entre exciton et photon, Réduction du bruit quantique..

Abstract

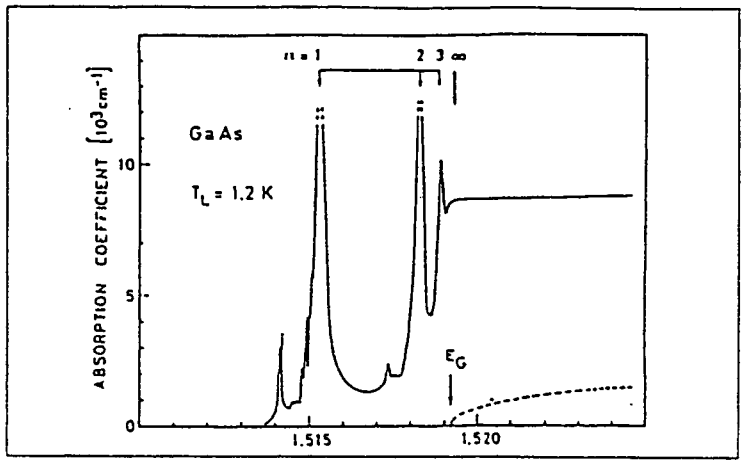
We present a theoretical treatment about the modification of the quantum fluctuations of the light beam through the nonlinear interaction with semi-conductor microcavity quantum wells. Our study is concerned more precisely with the noise spectrum and the autocorrelation function of the emitted field.

Our study of the noise spectrum predicts important squeezing effects in the case of strong coupling between excitons and cavity photons and at low temperature where the semiconductor excitons are decoupled from the lattice perturbation effects. We also demonstrated tat the noise reduction effects disappear with the increase of the thermal bath temperature.

The study of the autocorrelation function which is a statistical indicator of the emitted field has permitted to highlight the antibunching (non-classical effects) and bunching effects depending on the detuning between the laser and the cavity frequency.

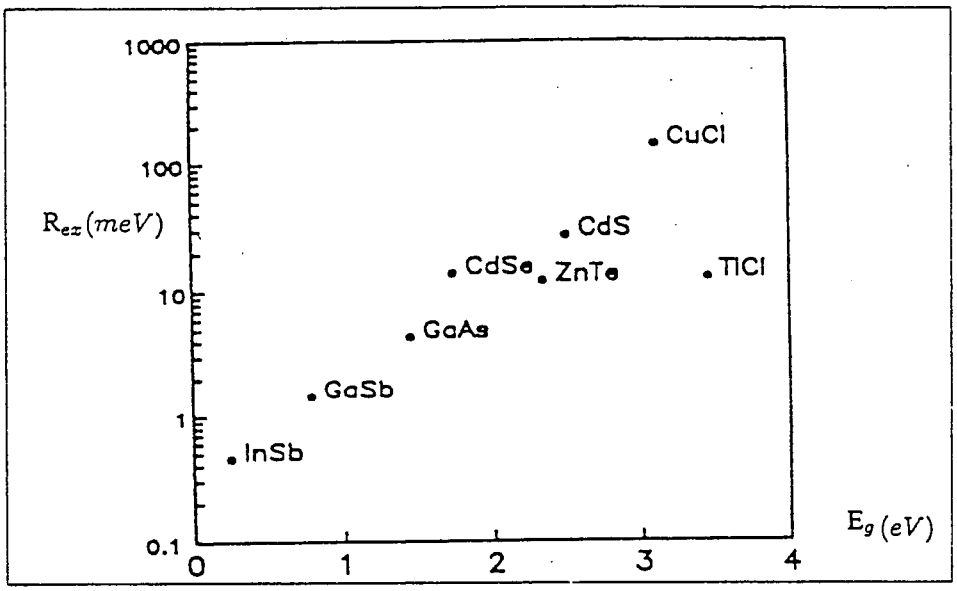
Key words : Quantum wells semiconductor microcavity, Cavity quantum electrodynamic, Intensity autocorrelation function, Quantum fluctuations, Strong coupling between exciton and photon, Squeezing.

ERRATA



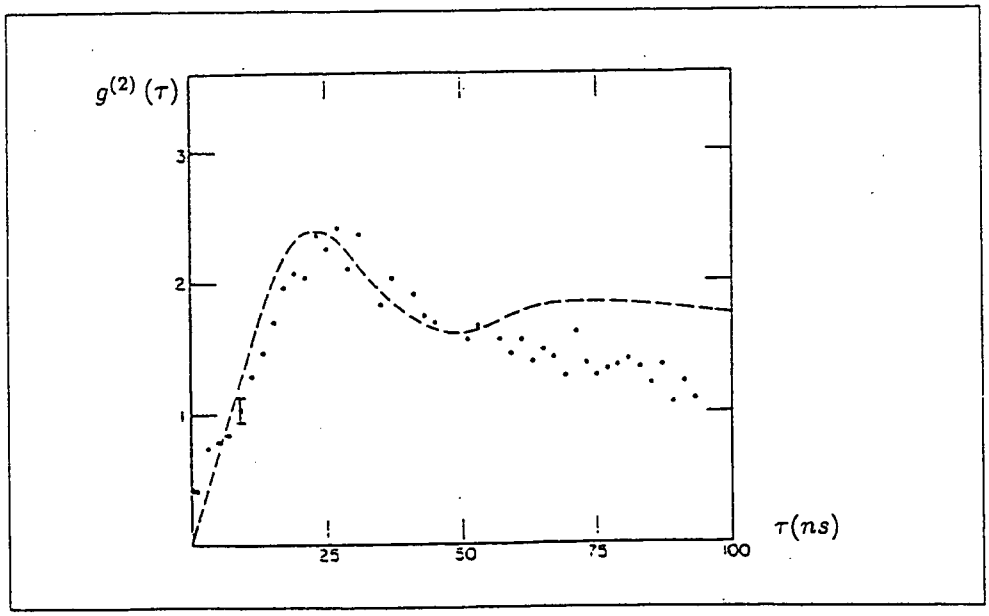
Page 14

Fig. 6: Spectre d'absorption



Page 16

Fig. 8: Valeur de R_{ex} et E_g pour différents semi-conducteurs



Page 32

Fig. 17: Fonction de corrélation d'intensité de la lumiére de fluorescence d'un atome (experience de Kimble Dagnois et Mandel 1977)

Ann. Phys. Fr. **23** • 1998
Colloque C1, supplément au n°1

Effets d'électrodynamique quantique dans des microcavités semi-conductrices

H. Eleuch, G. Messin, C. Begon, J.-M. Courty, C. Fabre et E. Giacobino

Laboratoire Kastler Brossel, École Normale Supérieure,
Université Pierre et Marie Curie et CNRS, UPMC, Case 74, 4 place Jussieu,
75252 Paris cedex 05, France

Résumé :Nous étudions une microcavité semi-conductrice en régime de couplage fort. Un modèle théorique a été développé ; il prévoit des effets non classiques comme du dégroupement de photons. Le calcul de la fonction d'autocorrélation en intensité, qui constitue un puissant outil d'investigation de la dynamique interne du système, en a permis la mise en évidence.

1. INTRODUCTION

L'interaction entre un mode unique du champ électromagnétique et un ensemble d'atomes en régime de couplage fort a été très largement étudiée dans le cadre de l'électrodynamique quantique en cavité [1,2,3].

On s'intéresse à un problème analogue : le cas dans lequel la cavité ne contient plus des atomes mais un milieu semi-conducteur. En effet, des travaux récents [4,5] ont montré la possibilité d'atteindre le régime de couplage fort dans des microcavités à puits quantiques semi-conducteurs. Notre objectif est d'étudier dans ces systèmes les propriétés quantiques du champ lumineux sortant.

2. MISE EN EVIDENCE EXPERIMENTALE DU COUPLAGE FORT

La structure que nous étudions comporte deux puits quantiques enfermés entre deux miroirs de Bragg distants de $3\lambda/2$ et présentant un léger angle entre eux, ce qui permet de faire varier l'épaisseur de la cavité en déplaçant le spot lumineux d'excitation.

L'étude de la réflectivité et de la transmission de cette microcavité semi-conductrice nous a permis de mettre en évidence à une température de 77K la « séparation de Rabi du vide », signature du couplage fort.

La photoluminescence a été étudiée dans divers régimes d'excitation : pompage cohérent au voisinage de la résonance et pompage incohérent, confirmant le fonctionnement en régime de couplage fort.

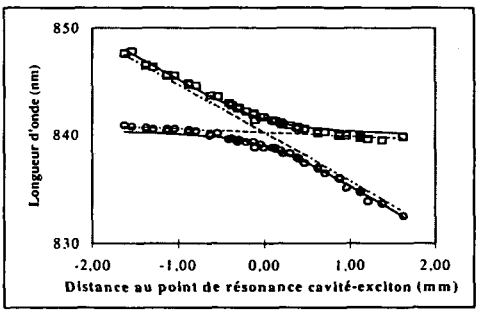


Fig. 1 : Mise en évidence du couplage fort.

3. MODELE THEORIQUE

L'interaction exciton-photon est modélisée comme un couplage entre deux oscillateurs harmoniques où l'on suppose que l'exciton possède une non-linéarité de type Kerr.

L'hamiltonien du système total s'écrit comme la somme quatre termes :

$$H = H_{ph} + H_{ex} + H_{int} + H_{nl}$$

où $H_{ph} = \hbar\omega a^+a$ et $H_{ex} = \hbar\omega b^+b$ désignent respectivement l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique des photons et des excitons à résonance, où $H_{int} = \hbar g(a^+b+ab^+)$ représente leur couplage, et où $H_{nl} = \hbar\alpha b^+b^+b\,b$ décrit la non-linéarité excitonique.

Le calcul de la fonction de corrélation de l'intensité lumineuse $g^{(2)}(\tau) \propto <:I(0)I(\tau):>$ en régime d'excitation cohérente a permis de mettre en évidence des effets de groupement ou de dégroupement de photons suivant le désaccord entre le laser d'excitation et la fréquence ω. On prévoit également l'apparition d'oscillations de la fonction $g^{(2)}(\tau)$ à la fréquence de Rabi confirmant le régime de couplage fort.

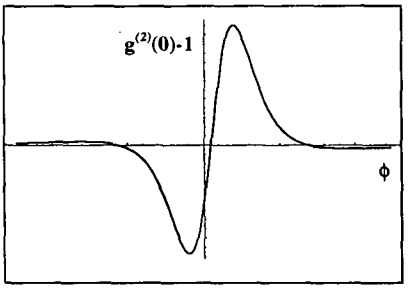


Figure 2 : Variations de la fonction d'autocorrélation à délai nul $g^{(2)}(0)$ avec le désaccord ϕ laser-cavité.

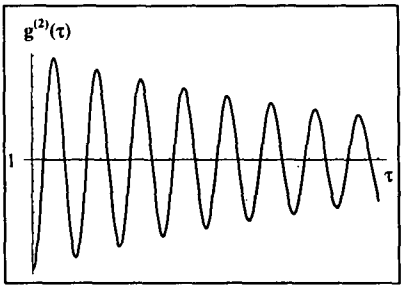


Figure 3 : Variations temporelles de la fonction d'autocorrélation $g^{(2)}(\tau)$ à désaccord ϕ=0 entre laser et cavité.

4. CONCLUSION

La démonstration du régime de couplage fort dans l'échantillon sur lequel nous travaillons et les résultats théoriques qui prévoient dans ce régime des effets de dégroupement de photons permettent d'accéder à des effets non classiques similaires à ceux mis en évidence pour des atomes. Cette similarité nous permet également d'envisager des effets de squeezing dans les microcavités semi-conductrices.

Remerciement

Les auteurs remercient H.M.Gibbs, G.Khitrova et leur équipe (Optical Sciences Center, Tucson, Arizona, U.S.A.) qui leur ont prêté l'échantillon avec lequel ils travaillent.

Références

[1] Carmichael H.J. et al., *Phys. Rev. A* **40** (1989) 5516-5519
[2] Rempe G. et al., *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 1727-1730
[3] Thompson R.J. et al., *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 1132-1135
[4] Weisbuch C. et al., *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 3314-3317
[5] Houdré R. et al., *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 2043-2046.

Résumé

Nous présentons un traitement théorique de la modification des fluctuations quantiques d'un faisceau lumineux par l'interaction non-linéaire avec une microcavité semiconductrice à puits quantiques. Nous étudions plus précisément le spectre de bruit et la fonction d'autocorrélation des champs émis.

Notre étude du spectre de bruit prévoit des effets de compression de bruit importants dans le cas de fort couplage entre excitons et photons de la cavité et à basse température où les excitons du semiconducteur sont découplés de l'effet perturbateur du réseau. Nous montrons aussi que ces effets de réduction de bruit disparaissent avec l'augmentation de la température du réservoir thermique.

L'étude de la fonction d'autocorrélation qui est un indicateur de la statistique du champ émis a permis de mettre en évidence des effets de dégroupement (non-classique) et de groupement de photons suivant le désaccord entre la fréquence du laser et la fréquence de la cavité.

Mots-clés: Microcavités semiconductrices à puits quantiques, Electrodynamique quantique en microcavité, Fonction d'autocorrélation d'intensité, Fluctuations quantiques, Couplage fort entre exciton et photon, Réduction du bruit quantique..

Abstract

We present a theoretical treatment about the modification of the quantum fluctuations of the light beam through the nonlinear interaction with semi-conductor microcavity quantum wells. Our study is concerned more precisely with the noise spectrum and the autocorrelation function of the emitted field.

Our study of the noise spectrum predicts important squeezing effects in the case of strong coupling between excitons and cavity photons and at low temperature where the semiconductor excitons are decoupled from the lattice perturbation effects. We also demonstrated tat the noise reduction effects disappear with the increase of the thermal bath temperature.

The study of the autocorrelation function which is a statistical indicator of the emitted field has permitted to highlight the antibunching (non-classical effects) and bunching effects depending on the detuning between the laser and the cavity frequency.

Key words : Quantum wells semiconductor microcavity, Cavity quantum electrodynamic, Intensity autocorrelation function, Quantum fluctuations, Strong coupling between exciton and photon, Squeezing.