



HAL
open science

Théorie des champs : approche multisymplectique de la quantification, théorie perturbative et application

Dikanaina Harrivel

► **To cite this version:**

Dikanaina Harrivel. Théorie des champs : approche multisymplectique de la quantification, théorie perturbative et application. Mathématiques [math]. Université d'Angers, 2005. Français. NNT : . tel-00011761

HAL Id: tel-00011761

<https://theses.hal.science/tel-00011761>

Submitted on 6 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Théorie des champs : approche multisymplectique de la
quantification, théorie perturbative et application

Ramiaramanana Dikanaina HARRIVEL¹

•
THÈSE DE DOCTORAT
•

13 janvier 2006

¹LAREMA, UMR 6093, Université d'Angers, France. dika@tonton.univ-angers.fr

Table des matières

Introduction	4
0.1 Enoncé des résultats du chapitre I	6
0.1.1 Etude multisymplectique	6
0.1.2 Quantifications	7
0.2 Enoncé des résultats du chapitre II	12
0.2.1 Arbres plans	13
0.2.2 Calcul perturbatif d'observable	14
0.2.3 Séries de Butcher	16
0.2.4 Lien avec le calcul perturbatif quantique	17
0.2.5 Une application à la théorie du contrôle	18
0.3 Perspectives	20
I Etude multisymplectique de l'équation de Klein–Gordon linéaire	22
I.1 Formulation multisymplectique du problème	23
I.1.1 Transformée de Legendre	23
I.1.2 Formalisme multisymplectique	24
I.2 Etude des formes observables	25
I.3 Fonctionnelles observables	28
I.4 Cas de l'espace de Minkowski plat	30
I.4.1 Etudes des observables	31
I.4.2 Fonctionnelles observables	32
I.5 Préquantification de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens .	34
I.5.1 Décomposition de \mathcal{V}	34
I.5.2 Structures algébriques	35
I.5.3 Représentation de \mathcal{V}	36
I.6 Quantification par déformation	39
I.6.1 Préalables	40
I.6.2 Déformation	41
I.6.3 Lien avec la théorie du champ libre	43
I.6.4 Ordre de Wick	45
I.7 Quantification Géométrique	47
I.7.1 Préquantification de Kostant–Souriau–Kirillov	48
I.7.2 Préquantification du champ libre	48

I.7.3	Cas de l'espace de Minkowski plat	50
II	Etude de l'équation de Klein–Gordon avec interaction	53
II.1	Etude multisymplectique de la théorie ϕ^p	54
II.2	Introduction au calcul perturbatif	56
II.3	Arbres Plans	59
II.3.1	Définitions et Notations	60
II.3.2	Propriétés élémentaires	62
II.3.3	Greffes	64
II.4	Calcul perturbatif	65
II.4.1	Espaces fonctionnels	65
II.4.2	Calcul perturbatif d'observables	67
II.5	Séries de Butcher	70
II.5.1	Lien avec le coproduit $\tilde{\Delta}$	73
II.5.2	Exemples	74
II.5.3	Lien avec le calcul perturbatif d'observable	77
II.5.4	Lien avec le calcul perturbatif quantique	81
II.6	Applications à la théorie du contrôle	84
II.6.1	Problème en dimension finie : cas linéaire	84
II.6.2	Cas non linéaire : Principe	86
II.6.3	Calcul perturbatif du contrôle	87
	Annexes	90
A	Théorie quantique du champ libre	90
A.1	Espace de Fock	90
A.2	Théorie Quantique du champ libre	91
B	Preuves du chapitre I	93
B.1	Formes Observables	93
B.2	Représentation	97
B.3	Quantification par déformation	100
B.3.1	Associativité	100
B.3.2	Ordre d'opérateur	103
B.3.3	Produit Normal	107
C	Preuves du chapitre II	109
C.1	Calcul perturbatif d'observables	109
C.1.1	Rayon de convergence	110
C.1.2	Calculs algébriques	114
C.1.3	Etude analytique	117
C.1.4	Combinatoire sur les arbres binaires plans	119
C.2	Séries de Butcher	124
C.3	Lien entre série de Butcher et calcul perturbatif quantique	129

D Preuves de l'application à la théorie du contrôle	134
D.1 Dimension finie	134
D.1.1 Définition du contrôle	134
D.1.2 Sommabilité du contrôle	135
D.1.3 Vérification du contrôle	139
Bibliographie	141
Index des notations	145

Introduction

La géométrie multisymplectique définit un cadre général permettant de donner une formulation hamiltonienne aux problèmes variationnels à plusieurs variables similaire à la théorie hamiltonienne bien connue pour la mécanique. Dans le cas d'une particule évoluant dans un espace cible la formulation hamiltonienne de la dynamique peut éventuellement être un bon préalable à la formulation de la version quantique du problème par des procédés maintenant relativement bien compris.

Le but de cette thèse est d'étudier l'équation de Klein–Gordon sur les champs scalaires couplée avec une non-linéarité et sa quantification par le biais de la géométrie multisymplectique.

La thèse se divise en deux chapitres. Le premier concerne l'étude du champ libre (c'est-à-dire l'équation linéaire associée) et sa quantification du point de vue multisymplectique. Dans le deuxième chapitre nous étudions l'équation non linéaire de manière perturbative. Dans un souci de lisibilité nous avons regroupé les différentes preuves dans les annexes.

Dans cette introduction nous allons tout d'abord introduire la géométrie multisymplectique et le formalisme hamiltonien pour les problèmes variationnel à plusieurs variables. Nous reprenons essentiellement les résultats expliqués dans les articles de Frédéric Hélein et Joseph Kouneiher [28], [29] (voir aussi [27] pour une introduction à la géométrie multisymplectique). Ensuite nous énonçons les résultats principaux des chapitres de la thèse.

Commençons par introduire le formalisme hamiltonien issu de la géométrie multisymplectique. Considérons un lagrangien $\mathcal{L}[u]$ défini sur l'espace des champs $u : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{L}[u] := \int_{\mathcal{U}} L(x, u(x), du(x)) dx$$

avec $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lisse. Nous cherchons à étudier les points critiques de ce lagrangien c'est-à-dire les solutions de l'équation d'Euler Lagrange

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial L}{\partial v_{\mu}}(x, u(x), du(x)) \right) = \frac{\partial L}{\partial u}(x, u(x), du(x))$$

Pour étudier ce problème de manière géométrique nous pouvons nous placer du point de vue de Frédéric Hélein et Joseph Kouneiher ([28], [29]). Celui-ci consiste à travailler sur

le fibré $\mathcal{M} := \Lambda^n T^*(\mathcal{U} \times \mathbb{R})$ sur $\mathcal{U} \times \mathbb{R}$ muni d'une $(n+1)$ -forme *multisymplectique* (voir la section I.1.2 p.24) $\Omega \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^n T^* \mathcal{M})$ (pour \mathcal{F} un fibré sur \mathcal{B} , nous noterons $\Gamma(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ l'ensemble de ses sections lisses). De la même manière que pour la formulation d'Hamilton de la mécanique [3] on peut effectuer une transformée de Legendre qui permet de voir un point critique de \mathcal{L} comme une n -courbe *hamiltonienne* c'est à dire une sous-variété $\Gamma \subset \mathcal{M}$ de dimension n telle que $\forall m \in \Gamma, \exists X \in \Lambda^n T_m \Gamma$ tel que

$$X \lrcorner \Omega = (-1)^n d\mathcal{H}$$

où $X \lrcorner \Omega$ désigne l'unique 1-forme sur \mathcal{M} telle que pour tout $V \in T\mathcal{M}$, $X \lrcorner \Omega(V) = \Omega(X \wedge V)$ et où $\mathcal{H} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est la *fonction hamiltonienne* correspondant au problème. C'est une fonction \mathcal{H} construite à l'aide de la transformée de Legendre (voir la section I.1 p.23-25 pour plus de détails ou [27], [28], [29]). Nous noterons $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ l'ensemble des n -courbes \mathcal{H} -hamiltoniennes. Cette construction est générale et peut s'appliquer à tout problème variationnel.

Vient ensuite la question des observables. Cette notion est naturelle dans le cas d'une particule, mais elle ne l'est plus pour les champs. L'école Polonaise sous l'impulsion des travaux de W. M. Tulczyjew [56] et J. Kijowski [35] ont défini les **observables algébriques** comme étant les $(n-1)$ -formes $F \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^{n-1} T^* \mathcal{M})$ admettant un *champ de vecteurs hamiltonien* c'est-à-dire un champ de vecteurs $\zeta_F \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ tel que $dF + \zeta_F \lrcorner \Omega = 0$ (nous noterons $\zeta \lrcorner \Omega$ le produit intérieur du champ de vecteur ζ dans Ω). A partir de cette définition nous pouvons définir un crochet de Poisson entre deux $(n-1)$ -formes observables F et G par la formule

$$\{F, G\} := (\zeta_F \wedge \zeta_G) \lrcorner \Omega = \zeta_F \lrcorner dG = -\zeta_G \lrcorner dF$$

Remarquons que Ω étant une $(n+1)$ -forme, $\{F, G\} = (\zeta_F \wedge \zeta_G) \lrcorner \Omega$ est bien une $(n-1)$ -forme. Ce crochet vérifie alors l'identité de Jacobi modulo une forme exacte. D'autre part J. Kijowski [35] (voir aussi les travaux de H. Goldschmidt et S. Sternberg en collaboration avec S. Coleman [24]) a introduit la condition supplémentaire $d\mathcal{H}(\zeta_F) = 0$ sur les $(n-1)$ -formes observables; de telles formes sont appelées $(n-1)$ -formes **observables dynamiques**. Ces observables correspondent aux symétries du problème : en effet nous avons dans ce cas un analogue du théorème de Noether.

A partir d'une $(n-1)$ -forme, nous pouvons construire une fonctionnelle sur l'ensemble des n -courbes hamiltoniennes $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ de la manière suivante. Considérons Σ une hypersurface de \mathcal{M} transverse à toutes les n -courbes hamiltoniennes et $F \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^{n-1} T^* \mathcal{M})$ une $(n-1)$ -forme sur \mathcal{M} , alors nous pouvons définir la fonctionnelle $\int_{\Sigma} F$ sur $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ par la formule (rappelons que $\dim \Sigma \cap \Gamma = n-1$)

$$\int_{\Sigma} F : \Gamma \in \mathcal{E} \mapsto \int_{\Sigma \cap \Gamma} F$$

Alors si nous considérons les fonctionnelles $\int_{\Sigma} F$ et $\int_{\Sigma} G$ obtenues à partir de deux $(n-1)$ -formes observables F et G , nous pouvons définir le crochet de Poisson entre $\int_{\Sigma} F$ et $\int_{\Sigma} G$

en posant

$$\left\{ \int_{\Sigma} F, \int_{\Sigma} G \right\} := \int_{\Sigma} \{F, G\}$$

Ce crochet de Poisson vérifie l'identité de Jacobi et il coïncide avec le crochet de Poisson utilisé habituellement par les physiciens en théorie des champs [31]. Ceci justifie l'introduction de la notion de $(n - 1)$ -forme observable et la définition du crochet de Poisson entre ces formes.

Se pose alors le problème de la définition du crochet de Poisson entre deux fonctionnelles $\int_{\tilde{\Sigma}} F$ et $\int_{\Sigma} G$ où $\tilde{\Sigma}$ et Σ sont deux hypersurfaces *différentes*. Cette question est cruciale si nous cherchons à avoir une théorie covariante. Dans le cas où l'une des $(n - 1)$ -formes, par exemple F , est une observable *dynamique* la solution est très simple. En effet on peut facilement prouver que dans ce cas la fonctionnelle $\int_{\Sigma} F$ ne dépend que de la classe de cobordisme de Σ . On peut alors définir le crochet de Poisson entre $\int_{\tilde{\Sigma}} F$ et $\int_{\Sigma} G$ par $\left\{ \int_{\tilde{\Sigma}} F, \int_{\Sigma} G \right\} := \left\{ \int_{\Sigma} F, \int_{\Sigma} G \right\} = \int_{\Sigma} \{F, G\}$. Malheureusement, comme les observables dynamiques correspondent aux symétries du problème, il en existe en général très peu dès lors que nous introduisons une non-linéarité. Nous verrons comment nous pouvons contourner ce problème perturbativement.

Remarque 0.0.1

Avant de présenter les résultats des différents chapitres nous précisons que nous utiliserons dans tout le texte de la thèse la convention d'Einstein sur les sommations. Ainsi tous les indices répétés en position haute et basse seront sommés sauf mention du contraire. Ainsi l'expression $X_{\mu} dx^{\mu}$ désignera la somme $\sum_{\mu} X_{\mu} dx^{\mu}$.

0.1 Enoncé des résultats du chapitre I

Dans ce chapitre nous étudions le champ libre du point de vue multisymplectique. Nous commençons par suivre les étapes décrites par F. Hélein et J. Kounieher dans [28] et [29] et présentée précédemment de manière à donner la formulation multisymplectique de l'équation de Klein-Gordon *linéaire*. Comme expliqué dans [28] et [29] nous obtenons ainsi une formulation hamiltonienne covariante du problème.

Ceci peut être un bon préalable pour obtenir une procédure de quantification du champ libre covariante. Nous cherchons ainsi à quantifier du point de vue multisymplectique. Nous abordons ce problème de trois manières différentes. Tout d'abord nous définissons une préquantification des symétries, puis nous adoptons une stratégie de quantification par déformation. Enfin nous donnons les idées d'un travail en cours (effectué en collaboration avec Frédéric Hélein) consistant à définir un processus de quantification géométrique dans le cadre multisymplectique.

0.1.1 Etude multisymplectique

Nous nous donnons une variété pseudo Riemannienne (\mathcal{X}, g) de dimension n et $(x^{\mu})_{\mu \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ un système de coordonnées sur \mathcal{X} . Nous noterons ω la forme volume induite par la métrique

sur \mathcal{X} . Considérons alors l'équation de Klein–Gordon linéaire sur les champs scalaires $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \right) + m^2 \varphi + \xi R \varphi = 0 \quad (\text{K-G})$$

où $g := \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}$ et $m > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$ sont deux constantes réelles. R désigne la courbure scalaire de \mathcal{X} .

En nous plaçant du point de vue de F. Hélein et J. Kounieher [28], la formulation multisymplectique du problème revient à considérer le fibré $\mathcal{M} := \Lambda^n T^*(\mathcal{X} \times \mathbb{R})$ sur $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$. La variété \mathcal{M} admet le système de coordonnées (x, ϕ, e, p) où (x, ϕ) désigne les coordonnées naturelles sur $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$ et où nous repérons $\pi \in \Lambda^n T^*_{(x,\phi)} \mathcal{X} \times \mathbb{R}$ par $\pi = e\omega + p^\mu d\phi \wedge \omega_\mu$ avec $\omega_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lrcorner \omega$. Nous munissons alors \mathcal{M} de la $(n+1)$ -forme multisymplectique $\Omega \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^{n+1} T^* \mathcal{M})$ définie par $\Omega := de \wedge \omega + dp^\mu \wedge d\phi \wedge \omega_\mu - \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} p^\mu d\phi \wedge \omega$. Alors après une transformée de Legendre (section I.1.1 p.23) nous trouvons que la fonction d'Hamilton $\mathcal{H} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ correspondant au problème est donnée par $\mathcal{H}(x, \phi, e, p) = e + \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2)$.

Les solutions de (K-G) sont alors vues comme des n -courbes \mathcal{H} -hamiltoniennes c'est-à-dire des sous-variétés $\Gamma \subset \mathcal{M}$ de dimension n telles que \mathcal{H} est constante le long de Γ et telle que pour tout $q \in \Gamma$, il existe un n vecteur $X \in \Lambda^n T_q \Gamma$ tel que

$$X \lrcorner \Omega = (-1)^n d\mathcal{H}$$

Nous noterons $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ l'ensemble des n -courbes \mathcal{H} -hamiltoniennes.

Nous nous intéressons ensuite aux $(n-1)$ -formes observables algébriques et dynamiques de cette théorie. Nous obtenons alors que l'espace $\mathcal{O}^{\mathcal{H}}$ des observables dynamiques est la somme directe de deux composantes (propositions I.2.1 et I.2.2 p.27). L'une correspond aux symétries de l'espace-temps et les champs de vecteurs hamiltoniens correspondant sont les champs de Killing de \mathcal{X} . Elle permet de retrouver le tenseur d'énergie-impulsion.

L'autre composante permet d'obtenir une évaluation des valeurs locales du champ. En terme de symétries elle correspond à l'ajout d'une solution de (K-G) à une autre solution. Ces observables dynamiques sont intimement liées à la linéarité de l'équation (K-G). Nous verrons ainsi que contrairement aux $(n-1)$ -formes F_X , les F_ψ cessent d'être des observables dynamiques dès que nous introduisons une non-linéarité dans l'équation (K-G).

0.1.2 Quantifications

Nous cherchons ensuite à quantifier le problème. La quantification du champ libre via la *quantification canonique* est maintenant très bien connue ([48], [52], [31]), mais cette construction s'adapte mal à la géométrie multisymplectique. Il nous faut trouver de nouvelles pistes pour quantifier. Dans cet esprit nous définissons une préquantification des symétries (c'est-à-dire des champs de vecteurs hamiltoniens dynamiques) du problème.

Nous essayons ensuite de suivre une stratégie de *quantification par déformation* de l'algèbre de Poisson des champs locaux qui correspondent aux fonctionnelles $\int_{\Sigma} F_{\psi}$. Nous définissons dans un premier temps un produit étoile nous semblant adapté à la géométrie multisymplectique. Malheureusement nous nous rendons compte que celui-ci ne correspond pas à l'ordre de Wick ou ordre normal d'opérateur de la quantification canonique. Or cet ordre a une signification physique importante : il permet de fixer l'énergie du vide et d'avoir des énergies finies. Par ailleurs J. Dito a défini dans ses articles [17], [18] le produit étoile correspondant à l'ordre normal. Nous avons alors adapté cette quantification par déformation à notre cas mais il nous a semblé difficile de donner une interprétation multisymplectique à celui-ci.

Enfin nous mettons en oeuvre une stratégie de quantification géométrique. Cette démarche nous semble la plus prometteuse et bien que ce soit un travail en cours (en collaboration avec Frédéric Hélein), nous en présentons les principaux résultats.

Préquantification des symétries

D'après la proposition I.2.1-I.2.2 l'algèbre de Lie \mathcal{V} des champs de vecteurs hamiltoniens dynamiques se décompose en $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\phi} \oplus \mathcal{V}_{\mathcal{X}}$ où l'espace \mathcal{V}_{ϕ} décrit les symétries infinitésimales correspondant à la linéarité de l'équation et $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}$ les symétries de l'espace-temps.

On montre alors que \mathcal{V}_{ϕ} est un idéal de l'algèbre de Lie \mathcal{V} . Nous considérons les complexifiés $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}^{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}$ de $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}$ et \mathcal{V}_{ϕ} . Nous supposons donnée une structure hermitienne $(\bullet|\bullet)$ sur $\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}$ telle que pour tout $\zeta_{\mathcal{X}} \in \mathcal{V}_{\mathcal{X}}$ réel l'application $i[\zeta_{\mathcal{X}}, \bullet]$ soit auto-adjointe c'est-à-dire telle que l'on ait

$$\forall \zeta_{\mathcal{X}} \in \mathcal{V}_{\mathcal{X}} ; \forall (v, w) \in (\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})^2 ; (i[\zeta_{\mathcal{X}}, v] | w) = (v | i[\zeta_{\mathcal{X}}, w])$$

Alors nous pouvons étendre le produit scalaire $(\bullet|\bullet)$ à l'algèbre commutative $(S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}), \odot)$ librement engendrée par $\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}$ i.e. $S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}) := \bigoplus_{k \geq 0} [(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})^{\otimes k} / \mathfrak{S}_k]$.

Nous définissons alors $\mathcal{Q} : \mathcal{V}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{L}(S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}))$ par $\forall \zeta \in \mathcal{V}^{\mathbb{C}}$

$$\mathcal{Q}(\zeta) := p^{\phi}(\zeta) \odot \bullet + \odot \circ \left(\left\{ i[p^{\mathcal{X}}(\zeta), \bullet] + \left(\bullet \middle| p^{\phi}(\zeta)^* \right) \right\} \otimes id \right) \circ \delta$$

où nous avons noté p^{ϕ} et $p^{\mathcal{X}}$ les projections sur \mathcal{V}_{ϕ} et $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}$ respectivement et où $\delta : S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}} \otimes S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})$ désigne l'opérateur de Spencer (voir la définition I.5.3 p.35). Alors l'application $\mathcal{Q} : \mathcal{V}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{L}(S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}))$ vérifie les propriétés suivantes :

Théorème I.5.1 p.39

1. Pour tout ζ, ζ' appartenant à $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ nous avons

$$\mathcal{Q}([\zeta, \zeta']) = i[\mathcal{Q}(\zeta), \mathcal{Q}(\zeta')]$$

où le crochet du membre de gauche désigne le crochet dans $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ et celui du membre de droite le commutateur de $\mathcal{L}(S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}))$ ($\forall (A, B) \in \mathcal{L}(S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}))$ on a $[A, B] := A \circ B - B \circ A$).

2. pour tout $\zeta \in \mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ on a l'identité suivante

$$\mathcal{Q}(\zeta^*) = \mathcal{Q}(\zeta)^*$$

où l'astérisque du membre de gauche désigne la conjugaison complexe et celui de droite l'opérateur adjoint.

Quantification par déformation

La quantification par déformation a été introduite par F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer dans leur article fondateur [5]. Celle-ci consiste à obtenir la quantification comme une déformation de la structure des observables classiques plutôt que comme un changement radical de la nature des observables. Plus précisément donnons nous une algèbre de Poisson $(\mathcal{A}, \times, \{\bullet, \bullet\})$. La quantification par déformation revient à rechercher un produit associatif \star_{\hbar} sur l'espace $\mathcal{A}[[\hbar]]$ des séries formelles à coefficients dans \mathcal{A} vérifiant les propriétés suivantes : la projection naturelle $\pi : \mathcal{A}[[\hbar]] \rightarrow \mathcal{A}$ est un morphisme d'algèbre et le *principe de correspondance* est vérifié c'est-à-dire

$$\frac{1}{\hbar} [A, B]_{\hbar} \bmod \hbar = \{A \bmod \hbar, B \bmod \hbar\}$$

avec $[A, B]_{\hbar} = A \star_{\hbar} B - B \star_{\hbar} A$. Récemment cette théorie a fait l'objet d'une intense activité et de nombreuses avancées ont été réalisées.

Nous nous plaçons dans le cas où \mathcal{X} est l'espace de Minkowski plat \mathcal{X}_0 i.e. sur \mathbb{R}^n muni d'une métrique $(\eta_{\mu\nu})_{\mu\nu}$ de signature $(n-1, 1)$. Nous nous donnons alors Σ une hypersurface de \mathcal{M} et nous considérons les espaces P et \mathcal{P} définis par $P := \{\psi \in C^{\infty}(\mathcal{X}_0) ; \eta^{\beta\alpha} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} + m^2 \psi = 0\}$ et $\mathcal{P} := \{\int_{\Sigma} F_{\psi} ; \psi \in P\}$ où $F_{\psi} := (p^{\mu} \psi - g^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\nu}}) \omega_{\mu}$ est une $(n-1)$ -forme observable dynamique. On peut montrer que les fonctionnelles $\int_{\Sigma} F_{\psi}$ permettent de donner une évaluation des valeurs locales des champs.

Nous considérons alors $S(\mathcal{P})$ l'algèbre librement engendrée par \mathcal{P} . Nous nous rendons compte que le crochet de Poisson $\{\bullet, \bullet\}$ défini sur les fonctionnelles observables permet de munir $S(\mathcal{P})$ d'une structure d'algèbre de Poisson. Cette structure se transmet alors à $S(P)$ l'algèbre librement engendrée par P . Nous noterons \odot le produit (commutatif) sur $S(P)$ et $P^{\odot k}$ la k -ième puissance symétrique de P i.e. $P^{\odot k} := P^{\otimes k} / \mathfrak{S}_k$. Le triplet $(S(P), \odot, \{\bullet, \bullet\})$ définit ainsi l'algèbre de Poisson des observables.

Nous définissons alors un produit \star_{\hbar} sur $S(P)[[\hbar]]$ (section I.6 p.39-42) tel que l'on ait le résultat suivant

Théorème I.6.2 p.43 $(S(P)[[\hbar]], \star_{\hbar})$ est une algèbre associative et cette algèbre est une quantification par déformation de l'algèbre de Poisson $(S(P), \odot, \{\bullet, \bullet\})$ i.e. la projection naturelle $\pi : S(P)[[\hbar]] \rightarrow S(P)$ est un morphisme d'algèbre et le principe de correspondance est valide.

Le produit étoile est construit de manière analogue au produit de Moyal [47] et de façon totalement covariante. De plus il semble que l'on puisse en donner une formulation multi-symplectique simple.

Malheureusement nous nous rendons compte que ce produit étoile ne correspond pas à la quantification canonique du champ libre utilisé par les physiciens. Pour bien comprendre ce fait nous nous plaçons dans un système de coordonnées $(x^\mu)_{\mu \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ dans lequel la matrice de la métrique est donnée par $\text{diag}(1, -1 \dots -1)$. La première coordonnée jouant le rôle du temps nous la noterons t et nous prenons comme hypersurface Σ l'hypersurface $\Sigma_0 := \{t = 0\}$. Alors les observables classiques que nous quantifions sont des fonctionnelles de la forme

$$\varphi \longrightarrow \sum_{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket} (-1)^{|I|} \left[\prod_{i \in I} \int_{\Sigma} \psi_i \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \left[\prod_{j \notin I} \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \varphi \right]$$

Quantifier revient alors (voir [19]) à remplacer chacune des intégrales $\int_{\Sigma} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \varphi$ et $\int_{\Sigma} \psi_j \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ dans l'expression précédente respectivement par les opérateurs $\varphi_m \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \Big|_{t=0} \right)$ et $\pi_m((\psi_j)|_{t=0})$ où $\varphi_m(f)$ et $\pi_m(g)$ sont des opérateurs agissant sur l'espace de Fock symétrique \mathcal{F}_s tels que $[\varphi_m(f), \varphi_m(g)] = [\pi_m(f), \pi_m(g)] = 0$ et $[\varphi_m(f), \pi_m(g)] = i \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} fg \right) id$. Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A et au livre de M. Reed et B. Simon [50] pour une définition précise de ces opérateurs. Se pose alors le problème de l'ordre dans lequel écrire les opérateurs $\varphi_m(f)$ et $\pi_m(g)$ car ces opérateurs ne commutent pas. D'après J. Dito [18],[17] ou K. Fredenhagen et M. Dütsch [19] à chaque quantification par déformation correspond une façon d'ordonner les opérateurs.

Choisissons d'ordonner les opérateurs en mettant tous les opérateurs $\pi_m(f)$ à gauche des opérateurs $\varphi_m(g)$ c'est-à-dire que nous définissons l'application de $\mathbb{R}[\hbar]$ -module Θ de $S(P)[\hbar]$ dans l'espace des opérateurs agissant sur l'espace de Fock en posant $\Theta(\hbar.1) := -i$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \psi_1 \odot \dots \odot \psi_k \in P^{\odot k}$

$$\Theta(\psi_1 \odot \dots \odot \psi_k) := \sum_{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket} (-1)^{|I|} \left[\prod_{i \in I} \pi_m((\psi_i)|_{t=0}) \right] \left[\prod_{j \notin I} \varphi_m \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) \right]$$

Alors nous avons le résultat suivant nous assurant que cette façon d'ordonner les opérateurs $\varphi_m(f)$ et $\pi_m(g)$ correspond au produit étoile \star_{\hbar} que nous avons défini

Théorème I.6.1 p.45 *Pour tout A et B appartenant à $S(P)[\hbar]$ nous avons*

$$\Theta(A)\Theta(B) = \Theta(A \star_{\hbar} B)$$

Remarquons que cet ordre ne correspond pas à l'ordre de Wick utilisé par les physiciens en théorie quantique des champs. Or l'ordre de Wick a une signification physique profonde, il permet d'obtenir une énergie finie et positive ([48], [52], [31]).

Dans ses articles [17] et [18] J. Dito définit le produit étoile correspondant à l'ordre de Wick. Nous voyons comment ses résultats se transcrivent dans notre cas, obtenant ainsi un produit \star_W sur $S(P)[[\hbar]]$ tel que $(S(P)[[\hbar]], \star_W)$ soit une quantification par déformation de l'algèbre de Poisson $(S(P), \odot, \{\bullet, \bullet\})$ et tel que l'on ait le théorème suivant :

Théorème I.6.2 p.47 *Pour tout P, Q appartenant à $S(P)[[\hbar]]$ nous avons*

$$\Theta_W(P)\Theta_W(Q) = \Theta_W(P \star_W Q)$$

avec $\Theta_W : S(P)[[\hbar]] \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ est le morphisme de $\mathbb{R}[[\hbar]]$ -module tel que $\Theta(\hbar \cdot 1) = 1$ et

$$\Theta_W(\psi_1 \odot \cdots \odot \psi_k) := \sum_{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket} (-1)^{|I|} : \prod_{i \in I} \pi_m((\psi_i)|_{t=0}) \prod_{j \notin I} \varphi_m \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) :$$

où : $\prod_{i \in I} \pi_m(f_i) \prod_{j \notin I} \varphi_m(g_j)$: désigne le produit d'opérateurs ordonnés dans l'ordre normal (voir l'annexe A p.90 ou [52], [31], [48] pour une définition précise).

Mais comme la définition du produit \star_W fait intervenir la transformée de Fourier de $\psi|_\Sigma$ et $\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_\Sigma$ il nous semble difficile de donner une signification multisymplectique à \star_W . Nous avons donc préféré nous engager dans une nouvelle direction, la quantification géométrique.

Quantification géométrique

Nous présentons les idées d'un travail en cours effectué en collaboration avec Frédéric Hélein. Nous adoptons une stratégie de quantification géométrique dans le cadre multisymplectique en adaptant la construction de A.A. Kirillov, B. Kostant et J.M. Souriau [36], [39], [55] généralisant les constructions de B.O. Koopman [38], L. Van Hove [58] et I.E. Segal [54]. Cette démarche permet a priori de retrouver la théorie quantique obtenue par la quantification canonique [31], [52], [48] et ceci de manière géométrique et covariante. Elle est donc pleinement satisfaisante.

Nous nous plaçons cette fois dans le cadre général, c'est-à-dire $\mathcal{M} := \Lambda^n T^*(\mathcal{X} \times \mathbb{R})$ muni de la forme multisymplectique Ω définie par $\Omega := de \wedge \omega + dp^\mu \wedge d\phi \wedge \omega_\mu - \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} p^\mu d\phi \wedge \omega$ et nous considérons l'hamiltonien $\mathcal{H}(q, e, p) = e + \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2)$. Nous notons alors $\mathcal{O}^{\mathcal{H}}$ l'ensemble des $(n-1)$ -formes observables dynamiques et $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ l'ensemble des n -courbes \mathcal{H} -hamiltoniennes.

Considérons le fibré $\mathcal{L} = \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}} \times \mathbb{C}$ sur $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}$ les complexifié de $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$. Pour tout $F \in \mathcal{O}^{\mathcal{H}}$ nous allons construire un opérateur \hat{F} agissant sur l'ensemble des sections $\Gamma(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}, \mathcal{L})$.

Soit $F \in \mathcal{O}^{\mathcal{H}}$, sous certaines hypothèses sur le flot du champ de vecteurs hamiltonien de F (proposition I.7.1 p.49) il existe $U : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ tel que $\forall m \in \mathcal{M}, U(0, m) = m$ et $\forall \tau \in (-\epsilon, \epsilon), \frac{\partial U}{\partial \tau}(\tau, m) = \zeta_F(U(\tau, m))$. Alors on montre que U induit une application

$$\begin{aligned} (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{E}^{\mathcal{H}} &\longrightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{H}} \\ (\tau, \Gamma) &\longmapsto \Gamma_\tau := U(\tau, \Gamma) \end{aligned}$$

où $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ désigne l'ensemble des n -courbes \mathcal{H} -hamiltoniennes.

Cette propriété nous permet de définir pour $F \in \mathcal{O}^{\mathcal{H}}$ un champ de vecteur Ξ_F sur $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}$ de la manière suivante

$$\forall \Gamma \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}} ; \Xi_F(\Gamma) := \left. \frac{d\Gamma_{\tau}}{d\tau} \right|_{\tau=0} \in T_{\Gamma} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}$$

ce qui nous permet finalement de définir une connexion ∇_{Ξ_F} sur $\Gamma(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}, \mathcal{L})$ en posant

$$\forall A \in \Gamma(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}, \mathcal{L}) ; \nabla_{\Xi_F} A := \Xi_F \cdot A - \frac{i}{\hbar} \left(\int_{\Sigma} \zeta_F \lrcorner \theta^{(s)} \right) A$$

où pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, $\theta^{(s)}$ désigne la n -forme définie par $\theta^{(s)} := \left(e - (1-s) \frac{1}{g} \frac{\partial q}{\partial x^{\mu}} \phi p^{\mu} \right) \omega + (s p^{\mu} d\phi - (1-s) \phi dp^{\mu}) \wedge \omega_{\mu}$.

Enfin pour $F \in \mathcal{O}^{\mathcal{H}}$ nous définissons l'opérateur \widehat{F} agissant sur $\Gamma(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}, \mathcal{L})$ par

$$\begin{aligned} \forall A \in \Gamma(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}, \mathcal{L}) ; \widehat{F}A &:= \left(\int_{\Sigma} F \right) A + \frac{\hbar}{i} \nabla_{\Xi_F} A \\ &= \frac{\hbar}{i} \Xi_F \cdot A + \left(\int_{\Sigma} (F - \zeta_F \lrcorner \theta^{(s)}) \right) A \end{aligned}$$

Ceci définit une *préquantification* du problème et non une quantification car comme pour le cas d'une particule on se rend compte que l'espace sur lequel agissent les opérateurs \widehat{F} est trop grand, permettant ainsi à l'énergie d'être négative. Une polarisation c'est-à-dire une restriction des opérateurs à un sous-espace de $\Gamma(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}, \mathcal{L})$ est nécessaire. Nous pouvons définir une polarisation permettant de retrouver exactement la théorie obtenue par la quantification canonique dans le cas de l'espace de Minkowski plat.

Nous pouvons remarquer que cette quantification géométrique est effectuée indépendamment du système de coordonnées, elle est donc complètement covariante. Nous pouvons de plus remarquer que contrairement à la quantification canonique nous quantifions *toutes* les observables suivant la même procédure, aussi bien les positions $\int_{\Sigma} F_{\psi}$ que le tenseur d'énergie-impulsion $\int_{\Sigma} F_X$. De plus c'est une construction générale, elle permet ainsi de quantifier au moins formellement le champ libre dans un espace-temps courbe. Nous pouvons aussi imaginer pouvoir quantifier d'autres problèmes pourvus qu'ils contiennent assez d'observables dynamiques ce qui, malheureusement, n'est en général pas le cas lorsque nous introduisons une non-linéarité. Nous voyons dans le second chapitre comment nous pouvons contourner cette difficulté perturbativement.

0.2 Enoncé des résultats du chapitre II

Dans ce chapitre nous étudions l'équation de Klein-Gordon (K-G) couplée avec une non-linéarité d'ordre $p \in \mathbb{N}$. Comme dans le cas de l'équation linéaire nous commençons par donner la formulation multisymplectique du problème. Mais comme I. Kanatchikov l'a remarqué [34] le nombre de formes observables dynamiques est considérablement réduit. Il ne reste que les observables correspondant aux symétries de l'espace-temps.

Suivant une idée de Frédéric Hélein [27] nous montrons que nous pouvons contourner le problème de manière perturbative. Nous montrons que nous pouvons définir des observables perturbativement sous la forme de séries indexées par les *arbres plans* et nous montrons la convergence de ces séries.

Suite à une discussion avec Christian Brouder nous nous sommes rendu compte que ces observables étaient étroitement liées aux *séries de Butcher* permettant de donner explicitement les termes du développement perturbatif d'une solution de l'équation de Klein–Gordon couplée avec une non-linéarité analytique. Nous montrons encore une fois un résultat de convergence et nous voyons comment retrouver les observables précédentes à partir des séries de Butcher.

Nous voyons ensuite comment ce calcul perturbatif réalisé dans un cadre classique peut formellement être relié aux calculs perturbatifs quantiques effectués par les physiciens [31], [48]. Plus précisément nous montrons que formellement les séries de Butcher permettent de retrouver la formulation d'Heisenberg du champ quantique en interaction [48] p. 83.

Enfin nous présentons une application de ces calculs perturbatifs en théorie du contrôle. Ainsi nous voyons comment nous pouvons définir perturbativement un contrôle pour une équation différentielle ordinaire à l'aide des arbres plans.

0.2.1 Arbres plans

Pour énoncer les résultats principaux de ce chapitre nous devons introduire la notion d'*arbres plans*. Nous ne donnons ici que quelques définitions. Nous renvoyons le lecteur à la section II.3 p.59-64 pour plus de détails.

Les *arbres plans* sont la donnée d'un graphe fini orienté connexe et sans boucles muni d'un plongement dans le plan ; on suppose que l'un des sommets de ce graphe n'est l'arrivée d'aucune arête, ce sommet est appelé la *racine* de l'arbre. Les arbres plans seront dessinés avec la racine en bas. Nous noterons \mathbb{T} l'ensemble des arbres plans. Nous appelons *feuilles* les noeuds externes d'un arbre et *noeud interne* les autres noeuds. Pour b un arbre plan, nous noterons $\|b\|$ le nombre de feuilles de b .

Certains arbres plans nous intéresseront particulièrement. Tout d'abord pour $p \in \mathbb{N}^*$ nous appelons p -arbre plan tout arbre dont chaque noeud a soit 0 fils (c'est alors une feuille) soit exactement p fils. Nous noterons $\mathbb{T}(p)$ l'ensemble des p -arbres plans. Nous noterons aussi $\mathbb{T}(2, \infty)$ l'ensemble des arbres plans dont les noeuds ont soit 0 fils soit au moins deux fils.

Enfin à partir de m arbres plans $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{T}^m$, nous pouvons construire un arbre plan $B_+(b_1, \dots, b_m)$ en connectant une nouvelle racine aux racines de b_1, b_2, \dots, b_m dans cet ordre (voir la définition II.3.4 p.62). En réitérant ce procédé nous obtenons tous les arbres plans autres que l'arbre plan réduit à une racine.

0.2.2 Calcul perturbatif d'observable

Nous nous plaçons dans le cas de l'espace de Minkowski plat \mathcal{X}_0 muni d'une métrique diagonale $(\eta^{\mu\nu})_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1 \dots -1)$. La première variable jouant le rôle du temps, nous la noterons t . Nous étudions alors l'équation sur les champs scalaires $\varphi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + m^2 \varphi + \lambda \varphi^p = 0 \quad (\text{K-Gp})$$

qui dérive elle aussi d'un lagrangien. Nous pouvons alors suivre la démarche expliquée précédemment qui conduit au même espace multisymplectique, seul l'hamiltonien est modifié. Mais lorsque nous nous intéressons aux observables dynamiques nous nous rendons compte que seules subsistent les observables F_X correspondant aux symétries de \mathcal{X}_0 , car les $(n-1)$ -formes F_ψ donnant une approximation des valeurs locales des champs ne sont plus des observables dynamiques. Nous obtenons ainsi un espace d'observables de dimension finie.

Pour voir comment nous pouvons passer outre cette difficulté nous pouvons revenir à la justification de la notion d'observable dynamique. Ces observables ont été introduites pour pouvoir définir le crochet de Poisson entre deux fonctionnelles $\int_{\tilde{\Sigma}} F$ et $\int_{\Sigma} G$ lorsque les hypersurfaces $\tilde{\Sigma}$ et Σ étaient distinctes. Voyons s'il n'est pas possible de calculer $\int_{\tilde{\Sigma}} F$ en fonction de fonctionnelles de type $\int_{\Sigma} \tilde{F}$ et de produit de telles fonctionnelles.

Nous nous restreignons au cas d'une non-linéarité quadratique (i.e. $p = 2$) mais notre démarche peut s'appliquer à des non-linéarité polynomiales quelconques sans difficultés.

Nous nous donnons F_ψ la $(n-1)$ -forme de la proposition I.2.1-I.2.2 correspondant à $\psi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $(\square + m^2)\psi = 0$ et Σ une hypersurface de type $\{t = t_0\}$. Alors pour toute solution $\varphi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de (K-Gp) nous avons

$$\int_{\Sigma \cap \Gamma_\varphi} F_\psi = \int_{\Sigma} \psi \overleftrightarrow{\partial} \varphi \quad (1)$$

où pour tout $f, g : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ nous avons noté $f \overleftrightarrow{\partial} g$ pour $\frac{\partial f}{\partial t} g - f \frac{\partial g}{\partial t}$ et où Γ_φ désigne la n -courbe hamiltonienne correspondant à φ .

Considérons alors les surfaces $\tilde{\Sigma} = \Sigma_0 := \{t = 0\}$ et $\Sigma = \Sigma_s := \{t = s\}$ avec $s \geq 0$ fixé. Il s'agit d'exprimer la fonctionnelle $\int_{\Sigma_0} F_\psi$ à l'aide de produits de fonctionnelles de type $\int_{\Sigma_s} \tilde{F}$. Frédéric Hélein a proposé d'aborder ce problème de manière perturbative [27]. Nous nous proposons de finaliser cette idée en donnant explicitement les termes du développement perturbatif et en montrant sa convergence. Ce travail a fait l'objet d'un article accepté pour publication aux annales de l'IHP [26].

Nous nous donnons un temps $T > 0$, alors pour $\psi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ donné avec $\psi \in \mathcal{C}^1([0, T], H^{-q})$ où nous supposons $q > \frac{n-1}{2}$ et où nous avons noté de manière habituelle H^{-q} le dual de l'espace de Sobolev $H^q(\mathbb{R}^{n-1})$.

Nous construisons alors une famille de fonctionnelle $(\Psi(b))_{b \in \mathbb{T}(2)}$ indexée par les arbres binaires plans de la manière suivante : soit b un arbre binaire plan $b \in \mathbb{T}(2)$, nous notons alors k le nombre de feuilles de b

1. Attachons à chaque feuille de b une variable d'espace-temps $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathcal{X}_0$ en respectant l'ordre des feuilles.
2. Pour chaque noeud interne nous attachons une variable $y_i \in \mathbb{R}^n$ que nous intégrons sur $P_+ = \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \mid t > 0\}$.
3. Pour chaque arête entre les noeuds v et w où la profondeur de v est plus petite que celle de w , nous multiplions l'intégrande par un facteur $G_{ret}(a_v - a_w)$ où a_v (resp. a_w) est la variable associée à v (resp. w) où G_{ret} désigne la fonction de Green retardée de l'opérateur $(\square + m^2)$ [48] i.e.

$$G_{ret}(z) := \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \theta(z^0) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d^{n-1}k \frac{\sin(z^0 \omega_k)}{\omega_k} e^{ik \cdot \vec{z}}$$

où θ désigne la fonction seuil $\theta(x) = 1$ si $x \geq 0$ et 0 sinon et nous avons noté \vec{z} la partie spatiale de $z \in \mathbb{R}^n$ i.e. $z = (z^0, \vec{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Enfin pour $k \in \mathbb{R}^{n-1}$ nous avons noté $\omega_k := (|k|^2 + m^2)^{1/2}$.

4. Enfin nous multiplions par $\psi(a_r)$ où a_r est la variable associée à la racine de b .

Nous renvoyons le lecteur à la définition II.4.2 p.68 pour une définition rigoureuse. Pour $s \in [0, T]$, nous considérons la fonctionnelle $\Psi(b) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes k}$ sur l'espace $\mathcal{C}^2([0, T], H^q)$ définie formellement par

$$\left\langle \Psi(b) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes k}, \varphi \right\rangle = \int_{(\Sigma_s)^p} \Psi(b) \overleftrightarrow{\partial}^{\otimes k} \varphi^{\otimes k}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^2([0, T], H^q)$. Remarquons que c'est en quelque sorte un produit (généralisé) de k fonctionnelles de type (1).

Théorème II.4.1 p.69

- i. Soient $\psi \in \mathcal{C}^1([0, T], H^{-q})$, $\varphi \in \mathcal{C}^2([0, T], H^q)$ et $s \in [0, T]$. Alors la série entière en λ

$$\sum_{b \in \mathbb{T}(2)} (-\lambda)^{|b|} \left\langle \Psi(b) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes |b|+1}, \varphi \right\rangle \quad (2)$$

a un rayon de convergence R non nul vérifiant

$$R \geq \left(4C_q M^2 T \left[\|\varphi(s)\|_{H^q} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s) \right\|_{H^q} \right] \right)^{-1} > 0$$

avec $M := \max(\frac{1}{m}, 1)$ où m désigne la masse et C_q une constante ne dépendant que de q et n .

- ii. De plus si φ est solution de l'équation $(\square + m^2)\varphi + \lambda\varphi^2 = 0$ et $\psi \in \mathcal{C}^2([0, T], H^{-q+2})$ est telle que $(\square + m^2)\psi = 0$ dans H^{-q} et si la condition

$$8|\lambda|C_q M^2 T \|\varphi\|_{\mathcal{E}} (1 + |\lambda|C_q T \|\varphi\|_{\mathcal{E}}) < 1$$

est vérifiée alors la série entière (2) converge pour tout $s \in [0, T]$ et nous avons l'égalité suivante

$$\sum_{b \in \mathbb{T}(2)} (-\lambda)^{|b|} \left\langle \Psi(b) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes |b|+1}, \varphi \right\rangle = \left\langle \psi \overleftrightarrow{\partial}_0, \varphi \right\rangle$$

Pour avoir le développement perturbatif pour $p \geq 3$, il suffit de considérer des p -arbres plans et de définir la famille $(\Psi(b))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ en utilisant la même construction. Alors on peut montrer que nous avons un théorème analogue au théorème II.4.1.

Par ailleurs bien que le point de vue diffère du notre, les arbres binaires plans apparaissent dans d'autres travaux sur des équations aux dérivées partielles analogues à (K-Gp), voir par exemple les travaux de Ch. Brouder et A. Frabetti [7], [11] sur l'électrodynamique quantique ou [41], [20] qui montrent la relation entre les arbres et l'équation (K-Gp) du point de vue probabiliste ou encore les travaux de D. Bahns [4] sur les champs évoluant dans un espace temps courbe.

0.2.3 Séries de Butcher

Nous pouvons nous interroger sur l'origine de l'intervention des arbres plans dans le résultat précédent. D'un certain point de vue ces arbres sont des diagrammes de Feynman sans boucles (ce qui pourrait se justifier par le fait que le calcul se fasse dans un cadre classique). Une discussion avec Christian Brouder nous a mis sur une autre voie, celle des *séries de Butcher*.

Les séries de Butcher sont des séries indexées par les arbres introduites par J.C. Butcher [13] pour étudier les méthodes de Runge–Kutta de résolution numérique des équations différentielles ordinaires. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [13] ou [25] pour des informations plus complètes.

Dans son article [10] Christian Brouder a fait remarquer que les séries de Butcher pouvaient être utilisées pour étudier les équations aux dérivées partielles, plus précisément elles pouvaient permettre de donner un développement perturbatif des solutions. Nous précisons ici cette idée en donnant un résultat de convergence en voyant les équation aux dérivées partielles comme une équation différentielle ordinaire sur un espace de Banach général (pas nécessairement de dimension finie).

Nous nous donnons \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}_0 trois espaces de Banach tels que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}'$ avec injections continues. On note alors \mathcal{K} l'espace $\mathcal{K} := \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{B}')$ qui est naturellement un espace de Banach. On se donne enfin $T > 0$ un réel strictement positif et $x^0 \in \mathcal{B}$. Nous considérons alors le problème (\mathcal{P}_F) suivant

$$\begin{cases} x \in \mathcal{K} \\ x' = Lx + f + \lambda F(x) \text{ sur } [0, T] \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (\mathcal{P}_F)$$

où $f \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}')$ et L est une application linéaire $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ et $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0$ est de la forme $F(x) = \sum_{p \geq 2} F_p(x, \dots, x)$ où pour tout $p \geq 2$, F_p désigne une application p -linéaire symétrique continue de \mathcal{B} dans \mathcal{B}_0 . On a alors le résultat suivant

Théorème II.5.1 p.72 *Supposons que L et F vérifient les hypothèses suivantes*

- *La série entière $|F|(z) := \sum_{p \geq 2} \|F_p\| z^p$ a un rayon de convergence infini.*

- Le problème linéaire (\mathcal{P}_0) obtenu en prenant $F = 0$ dans (\mathcal{P}_F) se résoud facilement. Plus précisément on suppose que pour tout $x^0 \in \mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}_0)$ il existe une unique solution $\phi_0(x^0, f)$ au problème (\mathcal{P}_0) et que l'application $\phi_0 : \mathcal{B} \times \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}_0) \rightarrow \mathcal{K}$ est continue. Nous notons alors μ l'application $\mu : \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}_0) \rightarrow \mathcal{K}$ définie par $\mu(f) := \phi_0(0, f)$.

Alors on définit l'application $\phi : \mathbb{T}(2, \infty) \rightarrow \mathcal{K}$ récursivement par $\phi(\circ) := \phi_0(x^0, f)$ et pour tout $r \geq 2$ et $(b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{T}(2, \infty)^r$

$$\phi[B_+(b_1, \dots, b_r)] := \mu[F_r(\phi(b_1), \dots, \phi(b_r))]$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifie la condition

$$|\lambda| < \frac{\|\phi_0(x^0, f)\|}{\|\mu\| \|F\| (16\|\phi_0(x^0, f)\|)}$$

alors la famille $(\lambda^{|b|}\phi(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ est sommable dans \mathcal{K} et la somme $x := \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \lambda^{|b|}\phi(b)$ est solution du problème (\mathcal{P}_F) .

Nous pouvons alors appliquer ce théorème pour trouver un développement perturbatif des solutions d'une équation aux dérivées partielles. Ainsi pour l'équation (K-Gp) nous obtenons les solutions sous la forme d'une série sur les arbres plans, et à partir de ce développement nous pouvons retrouver le résultat du théorème II.4.1.

0.2.4 Lien avec le calcul perturbatif quantique

Partant de l'étude de l'équation linéaire $(\square + m^2)\varphi = 0$ nous pouvons utiliser le théorème II.5.1 pour écrire les solutions de l'équation non-linéaire $(\square + m^2)\varphi + \lambda\varphi^p = 0$ sous forme de série de Butcher. Nous savons par ailleurs qu'en suivant une démarche similaire au niveau quantique, c'est-à-dire en se basant sur la théorie quantique du champ libre, les physiciens ont développé des théories perturbatives pour l'étude des champs *quantiques* en interaction. Même si pour l'instant ces théories ne sont pas formulées de manière correcte du point de vue mathématique, elles permettent d'obtenir des résultats concordant avec l'expérience.

Nous pouvons nous demander s'il existe un rapport entre la série de Butcher décrivant le développement perturbatif d'une solution *classique* et les calculs perturbatifs de la théorie quantique des champs tels qu'ils sont présentés dans la littérature (voir par exemple [48], [31] ou [52]).

Comme nous l'avons précisé, les calculs perturbatifs quantiques effectués par les physiciens n'ont pas encore de sens mathématique rigoureux. Ainsi les calculs que nous faisons sont purement formels en ce sens que les objets manipulés n'ont pas de sens mathématique, néanmoins les physiciens les utilisent sans complexes.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ un temps que nous fixons pour le reste de cette partie. Suivant les notations de M. Peskin et D. Schroeder [48] p. 83, pour $x \in \mathcal{X}_0$ nous notons $\phi_I(x)$ le champ quantique

libre dans l'espace-temps avec comme surface de Cauchy $\{t = t_0\}$. $\phi_I(x)$ est ainsi un opérateur agissant sur l'espace de Fock.

Soit $t > t_0$ alors nous définissons la famille d'opérateur $(\Phi(b))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ agissant sur l'espace de Fock de manière similaire à la construction du théorème II.5.1. C'est à dire que nous posons $\Phi(\circ)(x) := \phi_I(x)$ et pour tout $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{T}(p)^p$

$$\Phi(B_+(b_1, \dots, b_p))(t, \vec{x}) := \int_{t_0}^t dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} G_{ret}(x - y) \Phi(b_1)(y) \cdots \Phi(b_p)(y)$$

Nous avons ainsi exactement la même définition que les séries de Butcher à la différence que les $\Phi(b)$ sont maintenant des opérateurs agissant sur l'espace de Fock. Remarquons que la définition précédente est formelle car nous n'avons pas pris en compte les problèmes de définition du produit d'opérateur sur la diagonale. Alors en utilisant les règles de commutation des opérateurs $\phi_I(x)$ nous obtenons le résultat suivant

Théorème II.5.4 p.83 Soient $t > t_0$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Nous avons

$$\Phi(t, \vec{x}) := \sum_{b \in \mathbb{T}(p)} \lambda^{|b|} \Phi(b)(x) = U^\dagger(t) \phi_I(t, \vec{x}) U(t)$$

$U(t)$ désignant l'opérateur

$$U(t) := \sum_{\alpha \geq 0} (-i\lambda)^\alpha \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{\alpha-1}} d\tau_\alpha H_I(\tau_1) H_I(\tau_2) \cdots H_I(\tau_\alpha) \quad (3)$$

où $H_I(\tau)$ est donné par $H_I(\tau) := \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} \phi_I^{p+1}(\tau, \vec{y})$.

Remarquons que l'opérateur U défini par (3) peut se réécrire en utilisant le produit ordonné dans le temps (voir [48] p.85)

$$U(t) = T \left\{ \exp \left(-i\lambda \int_{t_0}^t d\tau H_I(\tau) \right) \right\}$$

Nous avons ainsi relié le calcul perturbatif classique obtenu par les séries de Butcher à la formulation perturbative du champ quantique en interaction qu'utilisent les physiciens.

0.2.5 Une application à la théorie du contrôle

Nous voyons que le développement en série de Butcher nous donne la forme précise des solutions de certaines équations non-linéaires. Ainsi nous nous rendons compte que ceci peut nous permettre d'influer précisément sur les solutions d'un système non-linéaire, par exemple de contrôler celles-ci.

Nous allons traiter un problème de contrôle intérieur en dimension finie. Nous nous donnons $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $T > 0$ et nous considérons le problème

$$\begin{cases} x \in C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \cap H^1([0, T], \mathbb{R}^n) \\ x' = Ax + Bv + \lambda F(x) \\ x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\mathcal{P}_F)$$

où $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice carré $n \times n$, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $v \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$. La question que nous nous posons est la suivante : étant donné $x^0 \in \mathbb{R}^n$ est-il possible de trouver $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ telle que la solution x du problème (\mathcal{P}_F) vérifie $x(T) = 0$? Si elle existe, la fonction u est appelé *contrôle*.

Nous nous sommes inspirés de la méthode de contrôle optimale permettant de résoudre ce problème pour $\lambda = 0$ et nous avons utilisé les séries de Butcher pour étudier ce problème. Nous supposons ainsi que $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme $F(x) = \sum_{p \geq 2} F_p(x, \dots, x)$ où pour tout $p \geq 2$; F_p est une application linéaire continue $F_p : (\mathbb{R}^n)^{\otimes p} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Nous supposons de plus que la série entière $|F|$ définie par

$$|F|(z) := \sum_{p \geq 0} \|F_p\| z^p$$

a un rayon de convergence infini. Alors nous avons le résultat suivant

Théorème II.6.2 p.88 Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ fixé. Nous supposons que B vérifie la condition de Kalman

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$$

Nous pouvons alors définir récursivement la famille $(v(b))_{b \in \mathbb{T}}$ d'éléments de $L^2((0, T), \mathbb{R}^m)$ comme suit. Nous posons $v(\circ) := B^* \tilde{y}(\circ)$ où $\tilde{y}(\circ)$ est la solution du problème dual

$$\begin{cases} y \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^n) \cap H^1([0, T], \mathbb{R}^n) \\ -y' = A^* y \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\mathcal{P}')$$

correspondant à la condition initiale $\tilde{y}(\circ) \in \mathbb{R}^n$ minimisant la fonctionnelle $J(\circ) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie donnée par $J(\circ)(y^0) := J_0(y^0) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \tilde{y}(t)|^2 dt + \langle x^0, y^0 \rangle$ où pour tout $y^0 \in \mathbb{R}^n$, \tilde{y} désigne la solution de (\mathcal{P}') correspondant à y^0 . Ensuite pour $(b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{T}^r$ nous posons $b = B_+(b_1, \dots, b_r)$ et $v(b) := B^* \tilde{y}(b)$ avec $\tilde{y}(b)$ solution de (\mathcal{P}') correspondant à la condition initiale $\tilde{y}^{(b)} \in \mathbb{R}^n$ minimisant une fonctionnelle $J(b) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$J(b)(y^0) := \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \tilde{y}(t)|^2 dt + \int_0^T (\tilde{y}(t), F_r[(\Phi * u)(b_1), \dots, (\Phi * u)(b_r)]) dt$$

où \tilde{y} désigne la solution de (\mathcal{P}') correspondant à la condition initiale y^0 et où pour tout $c \in \mathbb{T}$, $(\Phi * u)(c)$ ne dépend que des $(v(d))_{\|d\| \leq \|c\|}$ (voir la section II.5.1 p.73 pour plus de précisions).

1. Il existe une constante C telle que si $\lambda \in \mathbb{R}$ et x^0 vérifient la condition

$$\frac{|\lambda| \|B\|}{\|u(\circ)\|} |F|(16C \|u(\circ)\|) < 1$$

alors la famille $(\lambda |b| v(b))_{b \in \mathbb{T}}$ est sommable dans $L^2((0, T), \mathbb{R}^m)$ et la série $|u|$ définie par $|u| := \sum_{b \in \mathbb{T}} |\lambda| |b| \|u(b)\|$ vérifie $|u| \leq \frac{16 \|u(\circ)\|}{1 - \frac{|\lambda| \|B\|}{\|u(\circ)\|} |F|(16C \|u(\circ)\|)}$.

2. Si de plus nous avons

$$|\lambda| < \frac{\|\phi_0\||u|}{\|\mu\||F|(16\|\phi_0\||u|)}$$

alors la fonction $v = \sum_{b \in \mathbb{T}} \lambda^{|b|} v(b)$ conduit la solution du problème (\mathcal{P}_F) de x^0 à 0.

0.3 Perspectives

- **Quantification du champ libre sur un espace-temps courbe.** Tout d'abord il nous reste à finaliser la quantification géométrique multisymplectique que nous présentons dans la section I.7, c'est-à-dire définir de manière précise les espaces fonctionnels sur lesquels nous travaillons. Ensuite il faudra comprendre comment nous pouvons quantifier un produit d'observables, nous verrons alors apparaître le problème de l'ordre dans lequel écrire les opérateurs.

Cette quantification géométrique nous donne aussi une nouvelle direction pour attaquer le problème du champ libre sur un espace temps courbe. En effet notre construction est indépendante de la nature de l'espace-temps considéré. Nous pouvons donc théoriquement définir la quantification du champ libre sur un espace quelconque. Il pourrait être intéressant d'étudier la théorie obtenue et voir si nous pouvons définir des opérateurs de création et de destruction dans ce cadre.

- **Champs quantiques en interaction.** Une autre question qui nous semble très intéressante est l'apparition des boucles. En effet les séries de Butcher nous permettent d'avoir une théorie perturbative classique ne faisant intervenir que des arbres plans. Or nous savons que la théorie perturbative quantique introduite par les physiciens fait intervenir des graphes contenant des boucles. Nous pouvons nous demander comment ces boucles apparaissent et si elle sont liées aux arbres des séries de Butcher. Pour aborder cette question nous devons être en mesure de quantifier la théorie perturbative classique *directement*.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{théorie libre classique} & \xrightarrow{\text{Séries Butcher}} & \text{théorie perturbative classique} \\
 \text{quant. canonique/géométrique} \downarrow & & \downarrow ? \\
 \text{théorie libre quantique} & \xrightarrow[\text{Schwinger}]{\text{Feynman}} & \text{théorie perturbative quantique}
 \end{array}$$

Il nous paraît naturel de reprendre la quantification géométrique introduite pour le champ libre. Malheureusement nous avons vu que nous n'avons pas assez d'observables pour appliquer telle quelle notre méthode de quantification géométrique. En effet la non linéarité élimine toutes les observables du type $\int_{\Sigma} F_{\psi}$.

Nous avons vu comment nous pouvons contourner cette difficulté de manière perturbative en transformant la fonctionnelle $\int_{\Sigma} F_{\psi}$ en quantité conservée. Nous obtenons alors des observables généralisées que nous pouvons essayer de quantifier

géométriquement.

Il nous faut essentiellement définir les transformations canoniques correspondant à ces observables. Nous obtiendrons alors la connection Ξ_F qui nous permettra de (pré)quantifier. Les séries de Butcher devraient nous permettre de trouver relativement facilement ces transformations canoniques.

Nous devrions ainsi pouvoir définir une théorie perturbative quantique à partir de la théorie perturbative classique. Nous pourrions alors comparer cette théorie à la théorie quantique perturbative utilisée par les physiciens.

- **Renormalisation.** Il nous semble inévitable qu'une renormalisation soit nécessaire à un moment ou à un autre dans les étapes décrites ci-dessus. Même si cela semble prématuré quelques questions rendent cette perspective très excitante. Dans leur travail sur la renormalisation [15] Alain Connes et Dirk Kreimer ont montré que les calculs intervenant dans la renormalisation pouvaient être structurés à l'aide d'une structure d'algèbre de Hopf sur les arbres. Or Christian Brouder a remarqué que cette structure d'algèbre de Hopf avait déjà été utilisée par J.C. Butcher [13] pour classifier les méthodes de Runge–Kutta en analyse numérique en exprimant les solutions d'une équation différentielle sous la forme d'une série indexée par les arbres. Christian Brouder a ainsi montré [10] que le processus de renormalisation pouvait être vu comme une méthode de Runge–Kutta. Nous pouvons nous demander si nous retrouverons ces résultats dans notre contexte.

D'autre part, comme nous sommes partis d'une théorie perturbative classique pour construire la théorie perturbative quantique, nous pouvons espérer avoir une interprétation *classique* de la renormalisation.

- **Théorie du contrôle.** Enfin, selon nous il reste encore beaucoup de travail à faire en ce qui concerne l'application à la théorie du contrôle. Tout d'abord nous n'avons traité qu'un exemple en dimension finie i.e. contrôle d'une équation différentielle ordinaire. Or il semble que nous pouvons suivre la même stratégie pour contrôler une équation aux dérivées partielles. Plusieurs difficultés techniques sont à surmonter mais d'après le travail engagé dans ce sens elles ne semblent pas infranchissables. En effet le principal problème vient de la décomposition de la solution en série de Butcher. Ensuite si nous arrivons à définir assez facilement l'analogue des composantes $v(b)$ du contrôle, l'étude de la convergence de celui-ci est plus délicate. D'autre part nous pouvons étudier les propriétés éventuelles du contrôle obtenu (minimalité, régularité...). Enfin l'intérêt principal de cette méthode est de pouvoir trouver facilement un contrôle approché. Pour que cela soit satisfaisant il faut vérifier que cette méthode est effectivement efficace.

Chapitre I

Etude multisymplectique de l'équation de Klein–Gordon linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, nous nous donnons (\mathcal{X}, g) une variété pseudo Riemannienne orientable lisse de dimension n et $(x^\mu)_{\mu \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ un système de coordonnées sur \mathcal{X} . Nous noterons $(g_{\mu\nu})_{\mu\nu}$ les composantes de la métrique g dans le système de coordonnées $(x^\mu)_\mu$.

On étudie alors l'équation sur les champs $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ suivante

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(g g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \right) + m^2 \varphi + \xi R \varphi = 0 \quad (\text{K-G})$$

avec $g := \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}$ et où $m > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$ sont deux paramètres réels et où R désigne la courbure scalaire de \mathcal{X} . On sait alors que cette équation dérive du lagrangien $\mathcal{L}[\varphi]$ défini par

$$\mathcal{L}[\varphi] := \int_{\mathcal{X}} \frac{1}{2} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - m^2 \varphi^2 - \xi R \varphi^2 \right) \omega \quad (\text{L})$$

où ω désigne la forme volume induite par la métrique sur \mathcal{X} i.e. $\omega := g dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$.

Dans ce chapitre nous étudions le champ libre et sa quantification du point de vue multisymplectique. Dans les premières sections nous suivons les étapes décrites par F. Hélein et J. Kouneiher [28], [29] que nous expliquons rapidement. Ceci nous permet ainsi d'obtenir une formulation hamiltonienne (multisymplectique) du problème et nous décrivons les symétries et l'espace des observables dans ce cadre (propositions I.2.1–I.2.2 p.27).

Nous nous intéressons ensuite à la procédure de quantification dans ce cadre. Nous abordons ce problème de trois manières différentes. Tout d'abord nous définissons une préquantification des symétries.

Ensuite nous adoptons une stratégie de quantification par déformation. Nous définissons ainsi un produit étoile sur l'algèbre des fonctionnelles observables correspondant aux valeurs locales des champs. Nous relierons cette déformation à la quantification canonique du

champ libre [48], [31], [52] et nous voyons qu'elle ne correspond pas au produit normal utilisé par les physiciens (section I.6.3 p.44). Nous voyons alors quel est le produit étoile correspondant à l'ordre normal. Remarquons que J. Dito [17], [18] a explicité un produit étoile correspondant à l'ordre de Wick dans un cadre plus général.

Enfin nous donnons les idées d'un travail en cours (effectué en collaboration avec Frédéric Hélein) consistant à définir un processus de quantification géométrique dans le cadre multisymplectique en nous inspirant de la construction de A. A. Kirillov [2], B. Kostant et J.M. Souriau [39], [55] pour le cas d'une particule.

I.1 Formulation multisymplectique du problème

La géométrie multisymplectique permet de formuler un formalisme hamiltonien de dimension finie aux problèmes variationnels à plusieurs variables de manière analogue à la formulation symplectique des problèmes variationnels à une variable (formulation d'Hamilton de la mécanique). Le formalisme multisymplectique est fondé sur un analogue du fibré cotangent muni d'une $(n+1)$ -forme dite *multisymplectique* qui joue un rôle similaire à la forme symplectique canonique du fibré cotangent.

A partir d'un lagrangien $\mathcal{L}[u] := \int_{\mathcal{X}} L(x, u, du)\omega$ où $u : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est une fonction lisse d'une variété source \mathcal{X} muni d'une forme volume ω vers une variété cible \mathcal{Y} (voir [28]), on peut construire un hamiltonien via une transformée de Legendre qui permet d'avoir une formulation géométrique du problème. Il est par ailleurs remarquable que la transformée de Legendre soit toujours possible dès que les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont supérieures à 2 (voir [29]), il n'y a donc plus le phénomène de dégénérescence du lagrangien qui est observé en dimension 1.

Remarquons qu'il existe d'autres formulations hamiltoniennes pour les problèmes variationnels à plusieurs variables, mais le point de vue est radicalement différent. Nous pouvons citer notamment le formalisme hamiltonien couramment utilisé par les physiciens pour la *quantification canonique des champs* (voir [48], [52], [31]). Celui-ci consiste essentiellement à choisir une coordonnée temporelle t et considérer un champ $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ comme une particule évoluant dans un espace de dimension infinie $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \{f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}\}$, $\varphi : t \mapsto (\varphi(t, \bullet))$. La procédure implique ainsi dès le départ un choix de temps, elle n'est donc clairement pas *covariante* (c'est-à-dire ne respecte pas le principe de relativité (générale) d'Einstein), contrairement au formalisme multisymplectique qui permet d'avoir une théorie géométrique complètement covariante. Un autre avantage de cette théorie provient du fait qu'elle permet de travailler sur des espaces de dimension finie (même si cette dimension peut être très grande : $\dim \Lambda^n T^*(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = n + k + \frac{(n+k)!}{n!k!}$ avec $n := \dim \mathcal{X}$ et $k := \dim \mathcal{Y}$). Pour plus d'informations sur la géométrie multisymplectique, nous renvoyons le lecteur à [27] pour une introduction et aux articles [33], [28], [29] pour une étude plus précise.

I.1.1 Transformée de Legendre

Considérons \mathcal{N} la variété de dimension $n+1$ définie par $\mathcal{N} := \mathcal{X} \times \mathbb{R}$ et le fibré $T_{\mathcal{N}}^* \mathcal{X}$ au dessus de \mathcal{N} . Un système de coordonnées sur \mathcal{N} est donné par $((x^\mu)_{\mu \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}, \phi)$ et pour

$q = (x, \phi) \in \mathcal{N}$, un élément v de $T_q^* \mathcal{X}$ sera noté $v = v_\mu dx^\mu$. Définissons alors la fonction $L : T_{\mathcal{N}}^* \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$L(x, \phi, v) := \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} v_\mu v_\nu - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2)$$

Avec ces notations l'action (L) est donnée par $\mathcal{L}[\varphi] = \int_{\mathcal{X}} L(x, \varphi(x), d\varphi(x)) \omega(x)$.

Considérons alors \mathcal{M} le fibré au dessus de \mathcal{N} des n -formes différentielles sur \mathcal{N} c'est-à-dire $\mathcal{M} := \Lambda^n T^* \mathcal{N}$. Soit $q \in \mathcal{N}$, toute n -forme $P \in \Lambda^n T_q^* \mathcal{N}$ peut être repérée par les coordonnées $(e, (p^\mu)_{\mu \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket})$ telles que $P = e\omega + p^\mu d\phi \wedge \omega_\mu$ où ω_μ désigne la $(n-1)$ -forme définie par

$$\omega_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lrcorner \omega$$

la notation \lrcorner désigne le produit intérieur.

Nous étudions ici les champs scalaires $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, le formalisme multisymplectique se réduit ainsi à la théorie de *De Donder–Weyl* (voir [16], [59], [32] ou [29]). A tout $(q, v) \in T_{\mathcal{N}}^* \mathcal{X}$, on fait correspondre $\Pi(q, v) = \Pi^\mu(q, v) d\phi \wedge \omega_\mu \in \Lambda^n T_q^* \mathcal{N}$ défini par

$$\Pi^\mu(q, v) := \frac{\partial L}{\partial v_\mu} = g^{\mu\nu} v_\nu \quad (\text{I.1.1})$$

Nous voyons alors facilement que la relation (I.1.1) peut être inversée c'est-à-dire que nous pouvons définir $\mathcal{V} : \mathcal{M} \rightarrow T_{\mathcal{N}}^* \mathcal{X}$ telle que $\mathcal{V} \circ \Pi = id_{T_{\mathcal{N}}^* \mathcal{X}}$. Il suffit de prendre pour tout $(q, e, p) \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{V}(q, e, p) := g_{\nu\mu} p^\mu dx^\nu$$

Nous définissons alors l'*hamiltonien* $\mathcal{H} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall (q, e, p) \in \mathcal{M}$, $\mathcal{H}(q, e, p) := e + p^\nu \mathcal{V}_\nu(q, e, p) - L(q, \mathcal{V}(q, e, p))$. Un calcul simple nous donne alors l'expression suivante pour \mathcal{H}

$$\mathcal{H}(q, e, p) = e + \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2) \quad (\text{I.1.2})$$

Remarquons qu'il est possible de définir \mathcal{H} de manière intrinsèque (voir [28] ou [29]). Nous pouvons maintenant donner une formulation hamiltonienne du problème (K-G).

I.1.2 Formalisme multisymplectique

Nous définissons la forme de Poincaré–Cartan $\theta \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^n T^* \mathcal{M})$ par

$$\theta := e\omega + p^\alpha d\phi \wedge \omega_\alpha$$

et la $(n+1)$ -forme Ω sur \mathcal{M} par $\Omega := d\theta$. En coordonnées nous obtenons

$$\Omega := de \wedge \omega + dp^\mu \wedge d\phi \wedge \omega_\mu - \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} p^\mu d\phi \wedge \omega \quad (\text{I.1.3})$$

La $(n+1)$ -forme Ω est une *forme multisymplectique* sur \mathcal{M} , c'est à dire qu'elle est fermée et non dégénérée i.e. $d\Omega = 0$ et $\forall \xi \in T\mathcal{M}$, $(\xi \lrcorner \Omega = 0 \Rightarrow \xi = 0)$.

Remarque I.1.1

Nous pouvons observer que nous avons aussi pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\Omega = d\theta^{(s)}$ où $\theta^{(s)}$ désigne la n -forme définie par

$$\theta^{(s)} := (sp^\mu d\phi - (1-s)\phi dp^\mu) \wedge \omega_\mu + \left(e - (1-s) \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} \phi p^\mu \right) \omega$$

Définition I.1.1 Soit Γ une sous-variété de dimension n de \mathcal{M} . Alors Γ est une n -courbe \mathcal{H} -hamiltonienne (ou n -courbe hamiltonienne s'il n'y a pas d'ambiguïté) si, et seulement si \mathcal{H} est constante sur Γ et pour tout $m \in \Gamma$, il existe un n -vecteur $X \in \Lambda^n T_m \Gamma$ tel que $\omega(X) = 1$ et

$$X \lrcorner \Omega = (-1)^n d\mathcal{H} \quad (\text{I.1.4})$$

où $X \lrcorner \Omega$ désigne l'unique 1-forme sur \mathcal{M} telle que pour tout $V \in T\mathcal{M}$, $X \lrcorner \Omega(V) = \Omega(X \wedge V)$. Nous noterons $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ l'ensemble des n -courbes hamiltoniennes.

Remarque I.1.2

On montre facilement que la condition (I.1.4) entraîne automatiquement que \mathcal{H} est localement constante sur les n -courbes hamiltoniennes. Ainsi la condition \mathcal{H} constante sur Γ est inutile si nous supposons Γ connexe.

Voyons comment les solutions de l'équation (K-G) peuvent être reliées aux n -courbes \mathcal{H} -hamiltoniennes.

Soit φ une application lisse $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$. Nous associons alors à (φ, h) l'application $f_{\varphi, h} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$ définie par $\forall x \in \mathcal{X}$

$$f_{\varphi, h}(x) := (x, \varphi(x), E_{\varphi, h}(x)\omega + \Pi(x, \varphi(x), d\varphi(x))) \in \mathcal{M} \quad (\text{I.1.5})$$

où $E_{\varphi, h}$ est définie par $E_{\varphi, h}(x) := h - \mathcal{H}(x, \varphi(x), 0, \Pi(x, \varphi(x), d\varphi(x)))$. Considérons alors $\Gamma_{\varphi, h} \subset \mathcal{M}$ l'image de l'application $f_{\varphi, h}$. C'est alors une sous-variété de dimension n de \mathcal{M} et on vérifie très facilement que \mathcal{H} est constante, égale à h sur $\Gamma_{\varphi, h}$. Les résultats de [28], [29] nous assurent alors que φ est solution de l'équation (K-G) si, et seulement si $\Gamma_{\varphi, h}$ est une n -courbe \mathcal{H} -hamiltonienne.

Réciproquement donnons-nous Γ une n -courbe hamiltonienne, alors par définition il existe $h \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{H}|_\Gamma \equiv h$ et pour tout $m \in \Gamma$ il existe $X \in \Lambda^n T_m \Gamma$ tel que $\omega(X) = 1$ et $X \lrcorner \Omega = (-1)^n d\mathcal{H}$. La condition $\omega(X) = 1 \neq 0$ nous assure que Γ est localement le graphe d'une application $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$ et d'après [28] et [29] les conditions $\mathcal{H}|_\Gamma \equiv h$ et $X \lrcorner \Omega = (-1)^n d\mathcal{H}$ nous assurent que Γ est localement le graphe d'une application $f_{\varphi, h}$ où $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de (K-G) et où $f_{\varphi, h}$ est définie par (I.1.5).

I.2 Etude des formes observables

Nous avons défini un cadre géométrique permettant de donner une formulation hamiltonienne de l'équation de Klein-Gordon (K-G), formulation analogue à la formulation

hamiltonienne de la dynamique d'une particule évoluant dans un espace cible de dimension finie \mathcal{Y} (formulation d'Hamilton de la mécanique). Si nous cherchons à pousser plus en avant l'analogie, il se pose alors naturellement la question des observables. Dans le cas d'une particule il est naturel de considérer l'espace $\mathcal{C}^\infty(T^*\mathcal{Y})$ comme étant l'espace des observables. Le crochet de Poisson entre deux observable f et g est alors donné naturellement par la structure symplectique de l'espace cotangent ($\{f, g\} := \zeta_f \lrcorner dg$ où ζ_f est le champ de vecteurs hamiltonien associé à f).

Dans le cas des champs la notion d'observable du point de vue multisymplectique n'est plus si évidente. Dans les années soixante-dix, l'école Polonaise sous l'impulsion des travaux de W. M. Tulczyjew [56], J. Kijowski [35] (voir aussi [23], [24] et [28], [29]) a introduit la définition suivante

Définition I.2.1 Soit $F \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^{n-1}T^*\mathcal{M})$ une $(n-1)$ -forme sur \mathcal{M} .

1. F est une $(n-1)$ -**forme observable algébrique** si, et seulement si il existe un champ de vecteurs $\zeta_F \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ tel que

$$dF + \zeta_F \lrcorner \Omega = 0 \quad (\text{I.2.1})$$

le vecteur ζ_F est alors unique et on l'appelle le champ de vecteurs hamiltonien de F . Nous noterons \mathcal{O} l'ensemble des $(n-1)$ -formes observables algébriques.

2. F est une $(n-1)$ -**forme observable dynamique** si, et seulement si F est une $(n-1)$ -forme observable algébrique et le champ de vecteurs hamiltonien ζ_F associé à F vérifie la condition supplémentaire suivante

$$d\mathcal{H}(\zeta_F) = 0 \quad (\text{I.2.2})$$

Nous noterons $\mathcal{O}^{\mathcal{H}}$ l'ensemble des $(n-1)$ -formes observables dynamiques.

Remarquons que la notion d'observable algébrique est indépendante de l'hamiltonien \mathcal{H} , elle ne dépend que de la structure multisymplectique (\mathcal{M}, Ω) . La dynamique (c'est à dire \mathcal{H}) n'intervient que dans la définition des formes observables dynamiques. Par ailleurs, on se rend compte que si la condition (I.2.1) n'est pas très restrictive, il n'en est pas de même pour la condition (I.2.2) qui est une condition très forte. Nous verrons par exemple que dès que l'on rajoute une non-linéarité à l'équation (K-G), il ne reste pratiquement plus d'observables dynamiques.

La définition (I.2.1) permet de définir le crochet de Poisson entre deux formes observables algébriques

Définition I.2.2 Soient $F \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^{n-1}T^*\mathcal{M})$ et $G \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^{n-1}T^*\mathcal{M})$ deux $(n-1)$ -formes observables algébriques, nous noterons ζ_F et ζ_G leur champ de vecteurs hamiltonien respectif (i.e. $dF + \zeta_F \lrcorner \Omega = 0$ et $dG + \zeta_G \lrcorner \Omega = 0$).

Alors la $(n-1)$ -forme $\{F, G\}$ définie par

$$\{F, G\} := (\zeta_F \wedge \zeta_G) \lrcorner \Omega = \zeta_F \lrcorner dG = -\zeta_G \lrcorner dF \quad (\text{I.2.3})$$

est une forme observable algébrique. On l'appelle le crochet de Poisson de F et G .

Le crochet de Poisson $\{\bullet, \bullet\}$ vérifie l'*identité de Jacobi* modulo une forme exacte, c'est-à-dire que pour A , B et C des $(n-1)$ -formes observables algébriques nous avons

$$\{A, \{B, C\}\} + \{C, \{A, B\}\} + \{B, \{C, A\}\} = -d(\zeta_A \wedge \zeta_B \wedge \zeta_C \lrcorner \Omega) \quad (\text{I.2.4})$$

voir [28] pour une preuve de ce résultat. Cette définition du crochet de Poisson peut être reliée au crochet de Poisson habituellement utilisé par les physiciens en théorie des champs et elle justifie l'introduction de la notion d'observable algébrique. Nous renvoyons le lecteur à la section I.3 pour plus de détails.

Recherchons l'ensemble des formes observables algébriques et dynamiques dans le cas de l'équation de Klein–Gordon linéaire (K-G). Soit $F \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^{n-1}T^*\mathcal{M})$ une observable algébrique alors par définition il existe $\zeta \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ tel que $dF + \zeta \lrcorner \Omega = 0$. Par conséquent la n -forme $\zeta \lrcorner \Omega$ est fermée.

Recherchons ainsi les champs de vecteurs ζ tels que $d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0$, nous avons la proposition suivante

Proposition I.2.1 *Soit $\zeta \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ alors ζ vérifie $d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0$ si, et seulement si ζ s'écrit $\zeta = \chi + \bar{\zeta}$ où $\bar{\zeta}$ est de la forme*

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} := X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \psi \frac{\partial}{\partial \phi} - \left[e \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [gX^\mu] + p^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \right] \frac{\partial}{\partial e} \\ + \left[p^\beta \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} - p^\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [gX^\mu] \right) - e \frac{\partial X^\alpha}{\partial \phi} \right] \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \end{aligned} \quad (\text{I.2.5})$$

avec $X^\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions lisses de $(x, \phi) \in \mathcal{N}$ et où χ est de la forme $\chi := E \frac{\partial}{\partial e} + \Pi^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu}$ avec $E : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Pi^\mu : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation

$$\frac{\partial E}{\partial \phi} - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [g\Pi^\mu] = 0 \quad (\text{I.2.6})$$

De plus nous avons $d(\bar{\zeta} \lrcorner \Omega) = d(\chi \lrcorner \Omega) = 0$.

Pour plus de lisibilité, les preuves des propositions de cette section ont été reportées à l'annexe B.1. Le corollaire suivant donne les $(n-1)$ -formes algébriques correspondants aux champs de vecteurs décrits dans la proposition I.2.1

Corollaire I.2.1 *Soit $F \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^{n-1}T^*\mathcal{M})$ alors F est une $(n-1)$ -forme observable algébrique si, et seulement si F s'écrit $F = F_X + F_\psi + F_\chi$ avec F_X et F_ψ de la forme*

$$\begin{aligned} F_X &:= eX^\alpha \omega_\alpha - p^\alpha X^\beta d\phi \wedge \omega_{\beta\alpha} \\ F_\psi &:= p^\alpha \psi \omega_\alpha \end{aligned}$$

où $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et $X^\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions lisses quelconques et avec F_χ telle que

$$dF_\chi = E\omega + \Pi^\mu d\phi \wedge \omega_\mu$$

avec $E : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Pi^\mu : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation (I.2.6).

Intéressons nous maintenant aux observables dynamiques, nous avons la proposition suivante

Proposition I.2.2 Soit $\zeta \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ un champ de vecteurs tel que $d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0$ et vérifiant de plus $d\mathcal{H}(\zeta) = 0$ alors ζ s'écrit de manière unique $\zeta = \zeta_X + \zeta_\psi$ où ζ_ψ est donné par

$$\zeta_\psi := \psi \frac{\partial}{\partial \phi} - \left(\phi(m^2 + \xi R)\psi + p^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial e} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \quad (\text{I.2.7})$$

avec $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation (K-G) et ζ_X un champ de vecteurs de Killing i.e. vérifiant l'équation

$$L_{\zeta_X}(g_{\mu\nu})_{,\mu\nu} = 0 \quad (\text{I.2.8})$$

où $L_{\zeta_X}(g_{\mu\nu})_{,\mu\nu}$ désigne la dérivée de Lie de la métrique.

Notons \mathcal{V} l'ensemble des champs de vecteurs $\zeta \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ tels que $d\mathcal{H}(\zeta) = 0$ et $d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0$

$$\mathcal{V} := \{ \zeta \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M}) \text{ tel que } d\mathcal{H}(\zeta) = 0 \text{ et } d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0 \} \quad (\text{I.2.9})$$

L'espace \mathcal{V} donne les symétries du problème liées par le théorème de Noether aux lois de conservations (voir [28]). La proposition I.2.2 nous donne une décomposition de \mathcal{V} . Nous avons d'autre part le résultat suivant

Proposition I.2.3 \mathcal{V} est une sous-algèbre de Lie de $\Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$.

Preuve: (proposition I.2.3)

Il suffit de revenir à la définition (I.2.9) de \mathcal{V} . Soit ζ et $\tilde{\zeta}$ appartenant à \mathcal{V} alors nous avons $d\mathcal{H}(\zeta) = \zeta \cdot \mathcal{H} = 0$ et $d\mathcal{H}(\tilde{\zeta}) = \tilde{\zeta} \cdot \mathcal{H} = 0$ ainsi $d\mathcal{H}([\zeta, \tilde{\zeta}]) = \zeta \cdot (\tilde{\zeta} \cdot \mathcal{H}) - \tilde{\zeta} \cdot (\zeta \cdot \mathcal{H}) = 0$. D'autre part nous voyons que nous avons $[\zeta, \tilde{\zeta}] \lrcorner \Omega = d((\zeta \wedge \tilde{\zeta}) \lrcorner \Omega)$ ce qui nous assure que $d([\zeta, \tilde{\zeta}] \lrcorner \Omega) = 0$.

■

I.3 Fonctionnelles observables

Nous pouvons nous demander s'il existe un rapport entre les formes observables et les observables habituelles de la théorie des champs. Nous expliciterons ce lien en nous fondant sur les travaux de Frédéric Hélein et Joseph Kounieher [28], [29] et [30].

Commençons tout d'abord par une définition. Nous nous plaçons toujours dans la variété multisymplectique (\mathcal{M}, Ω) décrite dans la section I.1.1 et nous considérons l'hamiltonien \mathcal{H} défini par (I.1.2). Nous noterons toujours $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ l'ensemble des n -courbes hamiltoniennes (voir la définition I.1.1).

Définition I.3.1 Une tranche de codimension 1 est une sous-variété Σ de codimension 1 de \mathcal{M} transverse à toute n -courbe hamiltonienne $\Gamma \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ telle que pour tout $m \in \Sigma$ l'espace quotient $T_m\mathcal{M}/T_m\Sigma$ soit continument orienté en fonction de m .

Par tranche de codimension 1, il faut penser *tranche de temps* c'est à dire une hypersurface du type $\Sigma = \{t = \text{Constante}\}$.

Exemples I.3.1

- On se place dans le cas où \mathcal{X} est l'espace de Minkowski plat c'est-à-dire $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ muni d'une métrique constante $(\eta_{\mu\nu})_{\mu,\nu}$ donnée dans la base canonique par la matrice $\text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. La première coordonnée joue alors le rôle de temps, on la note ainsi t . Dans ce cas (voir la section I.4) \mathcal{M} s'identifie à $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ via les coordonnées $(x^\mu, \phi, e, p^\alpha)$ et l'hamiltonien \mathcal{H} est donné par $\mathcal{H}(x, \phi, e, p) = e + \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + m^2 \phi^2)$. On vérifie alors facilement que pour tout $s \in \mathbb{R}$ les surfaces Σ_s définies par

$$\Sigma_s := \{(x, \phi, e, p) \in \mathcal{M} \text{ tel que } t = s\}$$

sont des tranches de codimension 1.

- Dans le cas général, on se rend compte que les contraintes sur Σ ne sont pas trop restrictives et qu'il existe toujours des tranches de codimension 1. Par exemple on peut considérer les surfaces de niveau d'une fonction du type $f \circ \pi^{\mathcal{X}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ où $\pi^{\mathcal{X}}$ désigne la projection naturelle $\pi^{\mathcal{X}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}$ et où $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction \mathcal{C}^1 sans point critiques. Nous renvoyons le lecteur à [29] pour une étude plus précise.

La notion de tranche de codimension 1 va nous permettre de construire des *fonctionnelles* sur $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ à partir des $(n-1)$ -formes observables.

Définition I.3.2 Soient Σ une tranche de codimension 1 et $F \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^{n-1} T^* \mathcal{M})$ une $(n-1)$ -forme sur \mathcal{M} . On note alors $\int_{\Sigma} F$ la fonctionnelle $\int_{\Sigma} F : \mathcal{E}^{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{R}$ sur l'ensemble des n -courbes hamiltoniennes $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ définie par

$$\int_{\Sigma} F : \Gamma \mapsto \int_{\Sigma \cap \Gamma} F$$

Remarque I.3.1

Remarquons que $\int_{\Sigma} F$ est bien définie car par définition des tranches de codimension 1, pour tout $\Gamma \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ la variété $\Sigma \cap \Gamma$ est de dimension $n-1$ et est orientée. Nous pouvons donc intégrer la $(n-1)$ -forme F sur $\Sigma \cap \Gamma$.

Nous avons ainsi construit à partir d'une $(n-1)$ -forme $F \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^{n-1} T^* \mathcal{M})$ et d'une tranche Σ une *fonctionnelle* $\int_{\Sigma} F$ sur l'ensemble des n -courbes hamiltoniennes.

Définition I.3.3 On appellera fonctionnelle observable toute fonctionnelle du type $\int_{\Sigma} F$ où Σ est une tranche de codimension 1 et où $F \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^{n-1} T^* \mathcal{M})$ une $(n-1)$ -forme observable algébrique.

Alors pour toute tranche Σ de codimension 1 on peut définir un crochet de Poisson entre deux *fonctionnelles observables* $\int_{\Sigma} F$ et $\int_{\Sigma} G$ par la formule

$$\left\{ \int_{\Sigma} F, \int_{\Sigma} G \right\} := \int_{\Sigma} \{F, G\} \quad (\text{I.3.1})$$

où le crochet $\{\bullet, \bullet\}$ du membre de droite désigne le crochet défini par (I.2.3) de la page 26.

Si nous restreignons les fonctionnelles observables aux n -courbes hamiltoniennes Γ telles que $\partial\Gamma = \emptyset$, l'identité (I.2.4) page 27 nous assure que le crochet (I.3.1) vérifie l'identité de Jacobi

$$\left\{ \int_{\Sigma} A, \left\{ \int_{\Sigma} B, \int_{\Sigma} C \right\} \right\} + \left\{ \int_{\Sigma} C, \left\{ \int_{\Sigma} A, \int_{\Sigma} B \right\} \right\} + \left\{ \int_{\Sigma} B, \left\{ \int_{\Sigma} C, \int_{\Sigma} A \right\} \right\} = 0$$

De plus on se rend compte ([28], [33], [35]) que le crochet (I.3.1) coïncide avec le crochet de Poisson standard de la théorie des champs (voir [52] ou [31]). Ces propriétés justifient l'introduction de la notion d'observable algébrique et de leur crochet de Poisson.

Nous pouvons maintenant nous demander comment définir le crochet de Poisson entre deux fonctionnelles observables $\int_{\Sigma} F$ et $\int_{\tilde{\Sigma}} G$ où Σ et $\tilde{\Sigma}$ sont deux tranches de codimension 1 différentes. Ce problème a une réponse fort simple si l'une des deux formes observables F ou G est une observable *dynamique*. En effet on a la proposition suivante dont on trouvera la preuve dans [28] ou [29]

Proposition I.3.1 *Soit $F \in \Gamma(\mathcal{M}, \Lambda^{n-1}T^*\mathcal{M})$ une $(n-1)$ -forme observable dynamique. On se donne alors deux tranches Σ et $\tilde{\Sigma}$ telles qu'il existe un ouvert D de \mathcal{M} vérifiant $\partial D = \Sigma - \tilde{\Sigma}$. On a alors l'égalité*

$$\int_{\Sigma} F = \int_{\tilde{\Sigma}} F$$

Ainsi la fonctionnelle $\int_{\Sigma} F$ ne dépend que de la classe de cobordisme de la tranche Σ .

Nous voyons ainsi que si F est une $(n-1)$ -forme observable dynamique et G une $(n-1)$ -forme observable algébrique, et si Σ et $\tilde{\Sigma}$ sont deux tranches de codimension 1 dans la même classe de cobordisme, alors d'après la proposition I.3.1, on peut définir le crochet de $\int_{\Sigma} F$ et $\int_{\tilde{\Sigma}} G$ par

$$\left\{ \int_{\Sigma} F, \int_{\tilde{\Sigma}} G \right\} := \left\{ \int_{\tilde{\Sigma}} F, \int_{\tilde{\Sigma}} G \right\}$$

où le crochet du membre de droite est défini par (I.3.1).

I.4 Cas de l'espace de Minkowski plat

Il est maintenant temps de traiter un exemple important pour fixer les idées. Nous reviendrons constamment sur cet exemple dans la suite.

Nous nous plaçons dans le cas particulier $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 := \mathbb{R}^{1,n-1}$ où $\mathbb{R}^{1,n-1}$ désigne l'espace de Minkowski plat i.e. l'espace \mathbb{R}^n munie d'une métrique constante $(\eta_{\mu\nu})_{\mu\nu}$ de signature $(n-1, 1)$. Soit $(x^\mu)_\mu$ des coordonnées sur \mathcal{X}_0 telles que la forme volume ω induite par la métrique s'écrive $\omega = dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$. L'équation (K-G) se réduit alors à

$$(\square + m^2)\varphi = 0 \tag{I.4.1}$$

où \square désigne l'opérateur $\square := \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$. Dans le cas où la métrique est donnée dans la base canonique de \mathbb{R}^n par la matrice diagonale $\text{diag}(1, -1, \dots, -1)$, l'opérateur \square est le d'Alembertien, c'est à dire l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \sum_{i \geq 1} \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2}$.

Dans ce cas la variété $\mathcal{N} := \mathcal{X}_0 \times \mathbb{R}$ est réduite à \mathbb{R}^{n+1} et la variété \mathcal{M} décrite précédemment est donnée par $\mathcal{M}_0 := \Lambda^n T^* \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $(x, \phi) \in \mathcal{X}_0 \times \mathbb{R}$, on repère $\pi \in \Lambda^n T^*_{(x, \phi)} \mathbb{R}^{n+1}$, $\pi = e\omega + p^\mu d\phi \wedge \omega_\mu$. On identifie alors \mathcal{M}_0 à $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ via les coordonnées (x^μ, ϕ, e, p^μ) . On munit \mathcal{M}_0 de la $(n+1)$ -forme multisymplectique Ω_0 définie par

$$\Omega_0 := de \wedge \omega + dp^\mu \wedge d\phi \wedge \omega_\mu \quad (\text{I.4.2})$$

avec $\omega_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lrcorner \omega$. Enfin l'hamiltonien (I.1.2) est donné dans ce cas par

$$\mathcal{H}_0(x, \phi, e, p) = e + \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + m^2 \phi^2) \quad (\text{I.4.3})$$

I.4.1 Études des observables

Recherchons maintenant les $(n-1)$ -formes observables algébriques dans ce cas particulier. Tout d'abord le corollaire I.2.1 se simplifie pour donner la proposition suivante explicitant l'espace des formes observables algébriques de $(\mathcal{M}_0, \Omega_0)$

Proposition I.4.1 *Soit $F \in \Gamma(\mathcal{M}_0, \Lambda^{n-1} T^* \mathcal{M}_0)$. Alors F est une $(n-1)$ -forme observable algébrique si, et seulement si F s'écrit $F = F_X + F_\psi + F_\Pi + F_0$ où F_0 est fermée, $dF_0 = 0$ et où F_X, F_ψ et F_Π sont de la forme*

$$\begin{aligned} F_X &:= e X^\alpha \omega_\alpha - p^\alpha X^\beta d\phi \wedge \omega_{\beta\alpha} \\ F_\psi &:= p^\alpha \psi \omega_\alpha \\ F_\Pi &:= \Pi^\mu \omega_\mu \end{aligned}$$

avec $X^\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Pi^\mu : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions lisses quelconques.

et la proposition I.2.2 nous donne facilement l'ensemble des champs de vecteurs correspondant aux observables dynamiques de l'espace $(\mathcal{M}_0, \Omega_0)$ muni de l'hamiltonien \mathcal{H}_0 .

Proposition I.4.2 *1. Soit $\zeta \in \Gamma(\mathcal{M}_0, T\mathcal{M}_0)$ un champ de vecteurs, alors ζ vérifie $d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0$ et $d\mathcal{H}(\zeta) = 0$ si, et seulement si ζ s'écrit $\zeta = \zeta_X + \zeta_\psi$ où $\zeta_X := X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ est une isométrie infinitésimale i.e. $\forall \alpha, \mu ; \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} = 0$ et où ζ_ψ est donné par*

$$\zeta_\psi := \psi \frac{\partial}{\partial \phi} - \left(m^2 \phi \psi + p^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial e} + \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \quad (\text{I.4.4})$$

où $\psi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $(\square + m^2)\psi = 0$.

2. Les $(n-1)$ -formes observables correspondant respectivement aux champs de vecteurs ζ_X et ζ_ψ de la proposition I.4.2 sont données modulo les $(n-1)$ -formes fermées par

G_X et G_ψ définies par

$$G_X := eX^\alpha \omega_\alpha - p^\alpha X^\beta d\phi \wedge \omega_{\beta\alpha} \quad (\text{I.4.5})$$

$$G_\psi := \left(p^\mu \psi - \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \phi \right) \omega_\mu \quad (\text{I.4.6})$$

La preuve de la proposition I.4.2 découle directement de la proposition I.2.2.

Remarque I.4.1

Les champs de vecteurs solutions de l'équation $\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} = 0$ sont de la forme $X(x) = v + Ax$ avec $v \in \mathbb{R}^n$ et $A \in so(n)$.

I.4.2 Fonctionnelles observables

Comme nous avons explicité l'ensemble des $(n-1)$ -formes observables, nous sommes en mesure de décrire les fonctionnelles observables correspondantes.

Voyons à quoi correspondent ces fonctionnelles observables lorsqu'elles sont restreintes aux courbes hamiltoniennes $\Gamma_{h,\varphi}$ correspondant aux solutions $\varphi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de (I.4.1) (voir section I.1.2 de la page 24).

Proposition I.4.3 Soient $\psi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation de Klein–Gordon (I.4.1) $(\square + m^2)\psi = 0$ et $X = (X^\alpha)_\alpha : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie $\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} = 0$. Notons G_X et G_ψ les $(n-1)$ -formes observables dynamiques correspondant respectivement à X et ψ par les expressions (I.4.5) et (I.4.6).

Considérons Σ une tranche de codimension 1 du type $\Sigma = (f \circ \pi^{\mathcal{X}_0})^{-1}(0)$ où $\pi^{\mathcal{X}_0}$ désigne la projection naturelle $\pi^{\mathcal{X}_0} : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{X}_0$ et où $f : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse sans point critique telle que $f^{-1}(0) \neq \emptyset$.

Alors pour toute fonction $\varphi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (I.4.1) et pour tout $h \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{\Sigma \cap \Gamma_{\varphi,h}} G_X = \int_{\pi^{\mathcal{X}_0}(\Sigma)} \left[hX^\alpha + \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - m^2 \varphi^2 \right) X^\alpha - \eta^{\alpha\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} X^\beta \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} \right] \omega_\alpha \quad (\text{I.4.7})$$

$$\int_{\Sigma \cap \Gamma_{\varphi,h}} G_\psi = - \int_{\pi^{\mathcal{X}_0}(\Sigma)} \eta^{\mu\nu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \varphi - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) \omega_\nu \quad (\text{I.4.8})$$

Pour bien comprendre à quoi correspondent ces fonctionnelles nous allons nous placer dans un système de coordonnées tel que la métrique $(\eta_{\mu\nu})_{\mu\nu}$ soit donnée par la matrice diagonale $\text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. La première coordonnée jouant alors le rôle du temps, nous la noterons t . Nous allons alors nous intéresser plus particulièrement aux fonctionnelles observables correspondant aux tranche de codimension 1 du type $\{\text{temps} = \text{const}\}$. Plus précisément introduisons la définition suivante

Définition I.4.1 Soit $s \in \mathbb{R}$, on appelle une tranche de temps de l'espace \mathcal{M}_0 et on note Σ_s l'hypersurface de \mathcal{M}_0 définie par

$$\Sigma_s := \{(x, \phi, e, p) \in \mathcal{M}_0 \mid x^0 = s\} \subset \mathcal{M}_0$$

On vérifie facilement que Σ_s est une tranche de codimension 1.

La proposition I.4.3 nous permet alors de décrire les fonctionnelles observables obtenues à partir des tranches de temps. Soit $\varphi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de $(\square + m^2)\varphi = 0$. On a dans le cas où $X = (1, 0, \dots, 0)$, c'est-à-dire $\zeta_X = \frac{\partial}{\partial t}$ en reprenant les notations de la proposition I.4.2, pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$\int_{\Sigma_s \cap \Gamma_{\varphi, 0}} G_{\frac{\partial}{\partial t}} = -\frac{1}{2} \int_{\{t=s\}} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right)^2 + m^2 \varphi^2 \right)$$

On reconnaît alors l'énergie telle qu'elle est définie dans la littérature (voir [52], [31], [48]). De même pour $\zeta_X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ nous obtenons

$$\int_{\Sigma_s \cap \Gamma_{\varphi, 0}} G_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = - \int_{\{t=s\}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

c'est-à-dire les impulsions. Ainsi on retrouve le tenseur d'énergie-impulsion comme étant observable.

Voyons maintenant le cas des formes G_ψ . Soit $\psi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $(\square + m^2)\psi = 0$, d'après (I.4.8) nous avons

$$\int_{\Sigma_s \cap \Gamma_{h, \varphi}} G_\psi = - \int_{\{t=s\}} \psi \overleftrightarrow{\partial} \varphi \quad (\text{I.4.9})$$

où pour $f : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, nous avons noté $f \overleftrightarrow{\partial} g$ la fonction

$$f \overleftrightarrow{\partial} g := \frac{\partial f}{\partial t} g - f \frac{\partial g}{\partial t}$$

Nous pouvons faire remarquer que cette notation apparaît naturellement en théorie quantique des champs (voir par exemple [52] page 129 ou [31] page 115).

Remarque I.4.2

Notons que les fonctionnelles $\int_{\Sigma_s \cap \Gamma_{h, \varphi}} G_\psi$ nous donnent une estimation des valeurs locales du champ φ . En effet soit $x_0 = (t_0, \vec{x}_0) \in \mathcal{X}_0 = \mathbb{R}^{1, n-1}$, si on choisit ψ solution de (I.4.1) telle que

$$\psi|_{t=t_0} = 0 \text{ et } \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=t_0} = -\chi_\delta$$

avec $\chi_\delta : \{t = t_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est une approximation de la masse de Dirac concentrée en un point x_0 de Σ_{t_0} alors on voit que la fonctionnelle (I.4.9) nous donne dans ce cas

$$\int_{\Sigma_{t_0} \cap \Gamma_{h, \varphi}} G_\psi = \int_{\{t=t_0\}} \varphi \chi_\delta \approx \varphi(x_0)$$

Pour obtenir la valeur de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ en x_0 , il suffit d'invertir les rôles de ψ et $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ dans le raisonnement précédent. On retrouve ainsi les observables fondamentales de la théorie des champs.

I.5 Préquantification de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens

Revenons maintenant dans le cadre général. Nous nous proposons ici d'exhiber une représentation des symétries du problème c'est-à-dire de l'algèbre de Lie \mathcal{V} .

I.5.1 Décomposition de \mathcal{V}

Notons $\pi^{\mathcal{X}}$ et π^ϕ les projections naturelles $\pi^{\mathcal{X}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}$ et $\pi^\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. $\pi^{\mathcal{X}}(x, \phi, e, p) := x$ et $\pi^\phi(x, \phi, e, p) := \phi$). Les fonctions $\pi^{\mathcal{X}}$ et π^ϕ induisent alors des applications $\pi_*^{\mathcal{X}} : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{X}$ et $\pi_*^\phi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition I.5.1 – On définit \mathcal{V}_ϕ comme étant l'ensemble des champs de vecteurs $\zeta \in \mathcal{V}$ tels que $\pi_*^{\mathcal{X}}\zeta = 0$ c'est-à-dire

$$\mathcal{V}_\phi := \mathcal{V} \cap \Gamma(\mathcal{M}, \ker(\pi_*^{\mathcal{X}}))$$

– De la même façon, on définit $\mathcal{V}_{\mathcal{X}}$ comme étant l'ensemble des éléments de \mathcal{V} tels que $\pi_*^\phi\zeta = 0$ c'est-à-dire

$$\mathcal{V}_{\mathcal{X}} := \mathcal{V} \cap \Gamma(\mathcal{M}, \ker(\pi_*^\phi))$$

Nous avons alors la proposition suivante

Proposition I.5.1 1. \mathcal{V}_ϕ est un idéal commutatif de l'algèbre de Lie \mathcal{V} .

2. $\mathcal{V}_\phi \oplus \mathcal{V}_{\mathcal{X}}$ est une algèbre de Lie isomorphe à \mathcal{V} .

Preuve: (proposition I.5.1)

Le second point est une conséquence directe de la proposition (I.2.2). Intéressons nous au premier point. Soit $\zeta \in \mathcal{V}_\phi$, alors $\zeta \in \mathcal{V}$ et $\pi_*^{\mathcal{X}}\zeta = 0$. D'après la proposition I.2.2, il existe alors $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de (K-G) telle que $\zeta = \zeta_\psi$ où ζ_ψ est donné par (I.2.7). Soit $\tilde{\zeta} \in \mathcal{V}_\phi$ alors de la même façon il existe $\tilde{\psi} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de (K-G) telle que $\tilde{\zeta} = \zeta_{\tilde{\psi}}$. Alors $[\zeta, \tilde{\zeta}]$ est donné en coordonnées par

$$[\zeta, \tilde{\zeta}] = \left(-\psi(m^2 + \xi R)\tilde{\psi} + \tilde{\psi}(m^2 + \xi R)\psi - g^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x^\beta} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x^\alpha} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial e} = 0$$

Ainsi \mathcal{V}_ϕ est une sous-algèbre de Lie commutative de \mathcal{V} . Il ne reste plus qu'à montrer que \mathcal{V}_ϕ est un idéal de \mathcal{V} . D'après la proposition I.2.2 il suffit de montrer que pour $\zeta_X \in \mathcal{V}$ de la forme (I.2.8) on a $[\zeta, \zeta_X] \in \mathcal{V}_\phi$ ceci pour tout $\zeta \in \mathcal{V}_\phi$. Soient $\zeta_X \in \mathcal{V}$ de la forme (I.2.8) et $\zeta \in \mathcal{V}_\phi$ alors il existe $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\zeta = \zeta_\psi$ donné par (I.2.7). Un calcul simple montre alors que $\pi_*^{\mathcal{X}}[\zeta_\psi, \zeta_X] = 0$ donc $[\zeta, \zeta_X] \in \mathcal{V}_\phi$ ce qui complète la preuve. ■

I.5.2 Structures algébriques

Introduisons quelques notations, tout d'abord nous allons définir l'algèbre commutative librement engendrée par un espace vectoriel

Définition I.5.2 Soit K un corps de caractéristique non nulle et W un K -espace vectoriel.

– Nous notons $\mathcal{T}(W)$ l'algèbre librement engendrée par W c'est-à-dire

$$\mathcal{T}W := \bigoplus_{p \geq 0} W^{\otimes p}$$

avec la convention $W^{\otimes 0} := K$. Alors $\mathcal{T}(W)$ muni du produit tensoriel que nous noterons \bullet (au lieu de \otimes) est une algèbre unitaire graduée non commutative.

– Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $W^{\odot k}$ la k -ième puissance symétrique de W c'est-à-dire $W^{\odot k} := W^{\otimes k} / \mathfrak{S}_k$ où \mathfrak{S}_k désigne le groupe des permutations d'ordre k qui agit de manière habituelle¹ sur $W^{\otimes k}$. On note alors $S(W)$ l'espace défini par

$$S(W) := \bigoplus_{k \geq 0} W^{\odot k}$$

avec $W^{\odot 0} := \mathbb{R}$. Alors le produit tensoriel $\bullet : W^{\otimes k} \otimes W^{\otimes l} \rightarrow W^{\otimes(k+l)}$ induit une application $\odot : S(W) \otimes S(W) \rightarrow S(W)$ bilinéaire qui confère à $S(W)$ une structure d'algèbre commutative graduée unitaire, le neutre est donné par $1 \in W^{\odot 0} = \mathbb{R}$. L'algèbre $S(W)$ est alors l'algèbre commutative librement engendrée par W .

Remarque I.5.1

Nous pouvons voir $S(W)$ comme un sous-espace (mais pas une sous-algèbre) de $\mathcal{T}W$ via l'isomorphisme $S : W^{\odot k} \rightarrow W^{\otimes k}$ défini par

$$S(v_1 \odot \cdots \odot v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$$

Nous utiliserons aussi l'opérateur de Spencer $\delta : S(W) \rightarrow W \otimes S(W)$ que nous pouvons définir de la manière suivante

Définition I.5.3 (Opérateur de Spencer) Soient W un K -espace vectoriel et $k \in \mathbb{N}^*$. On définit $\delta : W^{\odot k} \rightarrow W \otimes W^{\odot(k-1)}$ l'opérateur tel que pour tout élément décomposable w de $W^{\odot k}$ (i.e. $w = w_1 \odot \cdots \odot w_k$ avec $w_j \in W$ pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$) on ait

$$\delta(w_1 \odot \cdots \odot w_k) := \sum_{\alpha=1}^k w_\alpha \otimes (w_1 \odot \cdots \odot w_{\alpha-1} \odot w_{\alpha+1} \odot \cdots \odot w_k)$$

Pour $k = 0$, on pose $\delta W^{\odot 0} \equiv 0$. On peut alors étendre δ en un opérateur $\delta : S(W) \rightarrow W \otimes S(W)$ par K -linéarité. L'opérateur δ est appelé l'opérateur de Spencer.

¹ $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$ et $\forall (w_1, \dots, w_k) \in W^k$ nous posons $\sigma \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_k) := w_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes w_{\sigma(k)}$.

Exemple I.5.1

On a par exemple pour w_1, w_2 et w_3 des éléments d'un espace vectoriel W

$$\delta(w_1 \odot w_2 \odot w_3) = w_1 \otimes (w_2 \odot w_3) + w_2 \otimes (w_1 \odot w_3) + w_3 \otimes (w_1 \odot w_2)$$

On peut montrer directement à partir de la définition I.5.3 de l'opérateur de Spencer que celui-ci vérifie la propriété suivante

Propriété I.5.1 Soit W un K -espace vectoriel alors nous notons $R : W \otimes W \rightarrow W \otimes W$ l'opérateur K -linéaire tel que pour tout $(x, y) \in W^2$ on ait $R(x \otimes y) = y \otimes x$. Alors nous avons

$$(R \otimes id) \circ (id \otimes \delta) \circ \delta = (id \otimes \delta) \circ \delta$$

c'est à dire que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} S(W) & \xrightarrow{\delta} & W \otimes S(W) & \xrightarrow{id \otimes \delta} & W \otimes W \otimes S(W) \\ & \searrow \delta & & & \downarrow R \otimes id \\ & & W \otimes S(W) & \xrightarrow{id \otimes \delta} & W \otimes W \otimes S(W) \end{array}$$

I.5.3 Représentation de \mathcal{V}

Considérons tout d'abord les complexifiés $\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}}, \mathcal{V}_X^{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ respectifs de $\mathcal{V}_\phi, \mathcal{V}_X$ et \mathcal{V} c'est-à-dire les espaces $\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes \mathcal{V}_\phi, \mathcal{V}_X^{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes \mathcal{V}_X$ et $\mathcal{V}^{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes \mathcal{V} = \mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}} \oplus_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_X^{\mathbb{C}}$. On considère alors l'algèbre commutative librement engendrée par $\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}}$ c'est-à-dire d'après la définition I.5.2 l'algèbre

$$S(\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{k \geq 0} (\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}})^{\odot k}$$

Structure Hermitienne sur $S(\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}})$

D'après la proposition I.5.1, pour tout $\zeta_X \in \mathcal{V}_X$ l'application $[\zeta_X, \bullet] : \mathcal{V}_\phi \rightarrow \mathcal{V}_\phi$ qui à $\zeta_\phi \in \mathcal{V}_\phi$ associe $[\zeta_X, \zeta_\phi]$ est bien définie. On étend alors $[\zeta_X, \bullet]$ à $\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}}$ par linéarité.

On suppose alors que l'on dispose d'un produit scalaire Hermitien $(\bullet | \bullet)$ sur $\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}}$ tel que pour tout $\zeta_X \in \mathcal{V}_X$ réel l'application $i[\zeta_X, \bullet]$ soit auto-adjointe c'est-à-dire telle que l'on ait

$$\forall \zeta_X \in \mathcal{V}_X ; \forall (v, w) \in (\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}})^2 ; (i[\zeta_X, v] | w) = (v | i[\zeta_X, w]) \quad (\text{I.5.1})$$

Il existe une unique façon d'étendre le produit scalaire $(\bullet | \bullet)$ à $S(\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}})$ de manière à ce qu'il vérifie $(1|1) = 1$ et

$$(v_1 \odot \cdots \odot v_k | w_1 \odot \cdots \odot w_l) := \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \prod_{p=1}^k (v_p | w_{\sigma(p)}) & \text{si } k = l \end{cases} \quad (\text{I.5.2})$$

pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et tout $(v_1, \dots, v_k) \in (\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}})^k$ et $(w_1, \dots, w_l) \in (\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}})^l$.

Exemple I.5.2

On obtiendra par exemple pour $v_1, v_2, w_1, w_2, z_1, z_2$ et z_3 des éléments de $S(\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}})$

$$(1 + v_1 \odot v_2 \mid w_1 \odot w_2 + z_1 \odot z_2 \odot z_3) = (v_1 \mid w_1)(v_2 \mid w_2) + (v_1 \mid w_2)(v_2 \mid w_1)$$

Remarque I.5.2

L'application $(\bullet \mid \bullet) : S(\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}}) \otimes S(\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ que nous avons ainsi définie est bien un produit scalaire sur $S(\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}})$. Pour s'en convaincre il suffit de considérer $S(P)$ comme un sous espace de $\mathcal{T}(P)$ via l'application S de la remarque I.5.1.

Exemple I.5.3

Plaçons nous dans le cas où l'espace \mathcal{X} est l'espace de Minkowski \mathcal{X}_0 c'est-à-dire \mathbb{R}^n plat muni de la métrique diagonale $\text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. Nous notons $E : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \longrightarrow \mathcal{V}_\phi$ l'application définie par $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ et $\forall x \in \mathcal{X}_0$

$$Ef(x) := \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d^{n-1}k}{\omega_k} \left(f(k)e^{ik \cdot x} + \overline{f(k)}e^{-ik \cdot x} \right)$$

où pour tout $x = (x^0, \vec{x}) \in \mathcal{X}_0$ nous avons noté $x \cdot k$ la quantité $\omega_k x^0 - k \cdot \vec{x}$ avec $k \cdot \vec{x}$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^{n-1} . On montre alors facilement que E est injective et nous noterons \mathcal{V}_ϕ^0 l'image de E i.e. $\mathcal{V}_\phi^0 := E(\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}))$ que nous identifierons avec $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$. Nous obtenons alors un sous-espace de \mathcal{V}_ϕ . Nous introduisons alors le produit scalaire (\bullet, \bullet) sur \mathcal{V}_ϕ^0 défini par

$$(Ef, Eg) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d^{n-1}k}{\omega_k} f(k)\overline{g(k)}$$

Remarquons que \mathcal{V}_ϕ^0 est aussi l'espace des solutions de l'équation de Klein-Gordon à conditions initiales dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ i.e.

$$\mathcal{V}_\phi^0 = \left\{ \psi : \mathcal{X}_0 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } (\square + m^2)\psi = 0 \text{ et } \left(\psi(0, \bullet), \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, \bullet) \right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})^2 \right\}$$

Nous voyons donc que \mathcal{V}_ϕ^0 est un idéal de \mathcal{V}_ϕ .

Les symétries correspondant aux champs de vecteurs appartenant à $\mathcal{V}_\mathcal{X}$ correspondent au groupe de Lorentz c'est-à-dire le produit semi-direct des rotations de l'espace-temps et les translations i.e. $SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ où le produit de deux éléments (Λ, a) et (Γ, b) est donné par

$$(\Lambda, a)(\Gamma, b) := (\Lambda\Gamma, a + \Lambda^{-1}b)$$

Ce groupe agit alors sur l'espace des solutions de l'équation de Klein-Gordon via l'opérateur $U(\Lambda, a)$ défini par

$$[U(\Lambda, a)\psi](x) := \psi(\Lambda^{-1}(x - a))$$

On montre alors que $U(\Lambda, a)$ est un opérateur unitaire c'est-à-dire que pour tout éléments ψ et φ de \mathcal{V}_ϕ^0 nous avons

$$(U(\Lambda, a)\psi, U(\Lambda, a)\varphi) = (\psi, \varphi)$$

De cette dernière identité nous pouvons déduire que le produit scalaire (\bullet, \bullet) sur \mathcal{V}_ϕ^0 vérifie la condition (I.5.1) i.e. pour tout ψ, φ appartenant à \mathcal{V}_ϕ^0 nous avons

$$([X, \psi], \varphi) = -(\psi, [X, \varphi])$$

Représentation

Nous pouvons alors définir l'application \mathcal{Q} de $\mathcal{V}^{\mathbb{C}} = \mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{V}_{\chi}^{\mathbb{C}}$ sur $\mathcal{L}(S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}))$ l'espace des endomorphisme de $S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})$ comme suit

Définition I.5.4 Soit \mathcal{Q} l'application \mathbb{C} -linéaire $\mathcal{Q} : \mathcal{V}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{L}(S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}))$ définie par $\forall \zeta \in \mathcal{V}^{\mathbb{C}}$

$$\mathcal{Q}(\zeta) := p^{\phi}(\zeta) \odot \bullet + \odot \circ \left(\left\{ i [p^{\chi}(\zeta), \bullet] + \left(\bullet \middle| p^{\phi}(\zeta)^* \right) \right\} \otimes id \right) \circ \delta$$

où p^{ϕ} et p^{χ} désignent les projecteurs associés à la décomposition $\mathcal{V}^{\mathbb{C}} = \mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{V}_{\chi}^{\mathbb{C}}$ et où $\delta : S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}} \otimes S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})$ désigne l'opérateur de Spencer. On a ainsi pour tout $\zeta_{\phi} \in \mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}} \subset S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})$ et $\zeta_{\chi} \in \mathcal{V}_{\chi}^{\mathbb{C}}$

$$\mathcal{Q}(\zeta_{\chi}) := \odot \circ (i[\zeta_{\chi}, \bullet] \otimes id) \circ \delta \quad (\text{I.5.3})$$

$$\forall v \in S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}); \mathcal{Q}(\zeta_{\phi})(v) := \zeta_{\phi} \odot v + \left\{ \left(\bullet \middle| \zeta_{\phi}^* \right) \otimes id \right\} \circ \delta(v) \quad (\text{I.5.4})$$

Exemple I.5.4

Soient w_1, w_2 et w_3 des éléments de $\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}$ et $\zeta_{\chi} \in \mathcal{V}_{\chi}^{\mathbb{C}}$ alors d'après la définition I.5.4 de \mathcal{Q} et en reprenant le calcul de l'exemple I.5.1 on obtient

$$\mathcal{Q}(\zeta_{\chi})(w_1 \odot w_2 \odot w_3) = i[\zeta_{\chi}, w_1] \odot w_2 \odot w_3 + i[\zeta_{\chi}, w_2] \odot w_1 \odot w_3 + i[\zeta_{\chi}, w_3] \odot w_1 \odot w_2$$

et pour $\zeta_{\phi} \in \mathcal{V}_{\phi}$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\zeta_{\phi})(w_1 \odot w_2 \odot w_3) &:= \zeta_{\phi} \odot w_1 \odot w_2 \odot w_3 + \\ &\quad (w_1 \middle| \zeta_{\phi}^*) w_2 \odot w_3 + (w_2 \middle| \zeta_{\phi}^*) w_1 \odot w_3 + (w_3 \middle| \zeta_{\phi}^*) w_1 \odot w_2 \end{aligned}$$

Remarque I.5.3

On peut interpréter la définition (I.5.4) comme suit. On peut voir l'espace $S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})$ comme un *espace de Fock*, chaque $(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})^{\odot k}$ représentant l'état à k particules. Soit $\zeta_{\phi} \in \mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}$, si on note $A_{\zeta_{\phi}}$ et $A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}$ les opérateurs agissant sur $S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})$ de la manière suivante, $\forall v \in S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})$

$$A_{\zeta_{\phi}}(v) := \zeta \odot v \quad \text{et} \quad A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}(v) := \sum (v_{(1)} \middle| \zeta_{\phi}^*) v_{(2)}$$

où on a noté $\delta(v) = \sum v_{(1)} \otimes v_{(2)}$ avec $v_{(1)} \in \mathcal{V}_{\phi}$ et $v_{(2)} \in S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})$. On vérifie facilement (voir la preuve du théorème I.5.1 qui suit) que les opérateurs $A_{\zeta_{\phi}}$ et $A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}$ sont adjoints l'un de l'autre, c'est à dire que l'on a $A_{\zeta_{\phi}}^* = A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}$.

On voit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ les opérateurs $A_{\zeta_{\phi}}$ et $A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}$ envoient l'espace $\mathcal{V}_{\phi}^{\odot k}$ respectivement sur les espaces $\mathcal{V}_{\phi}^{\odot(k+1)}$ et $\mathcal{V}_{\phi}^{\odot(k-1)}$. On peut ainsi voir $A_{\zeta_{\phi}}$ comme un *opérateur de création* de particule et $A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}$ comme un *opérateur de destruction* et d'après la définition I.5.4 on remarque que pour $\zeta_{\phi} \in \mathcal{V}_{\phi}$, l'opérateur $\mathcal{Q}(\zeta_{\phi})$ est donné par

$$\mathcal{Q}(\zeta_{\phi}) = A_{\zeta_{\phi}} + A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}$$

On retrouve ainsi la description habituelle de la théorie des champs (voir [48], [52] ou [31] pour une étude complète).

Théorème I.5.1 *L'application $\mathcal{Q} : \mathcal{V}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{L}(S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}))$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *\mathcal{Q} est un morphisme de Lie c'est-à-dire que pour tout ζ et ζ' appartenant à $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ nous avons*

$$\mathcal{Q}([\zeta, \zeta']) = i[\mathcal{Q}(\zeta), \mathcal{Q}(\zeta')] \quad (\text{I.5.5})$$

où le crochet du membre de gauche désigne le crochet dans $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ et celui du membre de droite le commutateur de $\mathcal{L}(S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}))$ ($\forall (A, B) \in \mathcal{L}(S(\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}))$ on a $[A, B] := A \circ B - B \circ A$).

2. *pour tout $\zeta \in \mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ on a l'identité suivante*

$$\mathcal{Q}(\zeta^*) = \mathcal{Q}(\zeta)^* \quad (\text{I.5.6})$$

où l'astérisque du membre de gauche désigne la conjugaison complexe et celui de droite l'opérateur adjoint.

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe B.2 pour la preuve du théorème I.5.1.

D'après le théorème I.5.1 et en reprenant le langage de la théorie de la quantification géométrique (voir le texte très clair de Kirillov dans [2] pour une présentation de la théorie) on peut voir l'application \mathcal{Q} comme une *préquantification* de \mathcal{V} . Notons que nous n'avons pas considéré de structure symplectique de dimension infinie dans ce qui précède. Pour compléter cette étude il faudrait pouvoir étendre \mathcal{Q} en une représentation \mathcal{R} de l'*algèbre* des observables, ce qui correspond ici à une représentation de $S(\mathcal{V})$, vérifiant $\mathcal{R}(1) = id$ et les relations (I.5.5) et (I.5.6).

I.6 Quantification par déformation

La quantification par déformation a été introduite par F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer dans leur article fondateur [5]. Dans cette théorie, on voit la quantification plus comme une déformation de la structure des observables classiques que comme un changement radical de la nature des observables (passage de fonctionnelles classiques à des opérateurs quantiques agissant sur un espace de Hilbert). Cette démarche permet de faire une quantification directement à l'aide des observables classiques de manière intrinsèque.

Etant donnée une algèbre de Poisson $(\mathcal{A}, \times, \{\bullet, \bullet\})$ la quantification par déformation consiste à rechercher un produit associatif \times_{\hbar} sur l'espace $\mathcal{A}[[\hbar]]$ des séries formelles à coefficients dans \mathcal{A} tel que la projection naturelle $\pi : \mathcal{A}[[\hbar]] \rightarrow \mathcal{A}$ soit un morphisme d'algèbre vérifiant le *principe de correspondance*

$$\frac{1}{\hbar}[A, B]_{\hbar} \bmod \hbar = \{A \bmod \hbar, B \bmod \hbar\} \quad (\text{I.6.1})$$

où $[\bullet, \bullet]_{\hbar}$ désigne le commutateur dans l'algèbre associative (mais pas nécessairement commutative) $\mathcal{A}[[\hbar]]$ muni du produit \times_{\hbar} i.e. $[A, B]_{\hbar} = A \times_{\hbar} B - B \times_{\hbar} A$.

Récemment cette théorie a fait l'objet d'une intense activité et de nombreuses avancées ont été réalisées. Nous pouvons citer notamment le résultat de Maxim Kontsevitch montrant l'existence d'un produit étoile sur une algèbre de Poisson (en dimension finie) à l'aide d'un résultat plus général, le théorème de formalité [37]. Par ailleurs Alberto S. Cattaneo et Giovanni Felder ont montré que le résultat de Kontsevitch était relié à l'intégrale de chemin dans une certaine théorie des champs [14].

En ce qui concerne les champs (le cas qui nous intéresse ici), nous n'avons aucun résultat général. Il faut traiter au cas par cas. Pour le cas du champ libre, nous pouvons citer les articles [17] et [18] de J. Dito qui définit un produit étoile correspondant à la quantification canonique des champs.

Nous nous proposons ici de donner une quantification par déformation de l'algèbre de Poisson engendrée par les fonctionnelles du type $\int_{\Sigma} G_{\psi}$. Nous voyons ensuite comment notre produit étoile se traduit dans le cadre de la théorie quantique du champ libre issue de la quantification canonique. Nous nous rendons alors compte que celui-ci ne correspond pas à l'ordre normal utilisé par les physiciens. Enfin nous voyons à quel produit étoile correspond l'ordre normal.

I.6.1 Préalables

Plaçons nous dans l'espace de Minkowski plat \mathcal{X}_0 muni de sa métrique $(\eta_{\mu\nu})_{\mu\nu}$. Nous allons nous intéresser aux fonctionnelles observables du type $\int_{\Sigma} G_{\psi}$ telles qu'elles ont été définies dans la section I.4 page 30. Nous avons vu que ces fonctionnelles correspondent aux valeurs locales des champs. Les $(n-1)$ -formes G_{ψ} correspondantes étant des $(n-1)$ -formes observables *dynamiques* (voir la proposition I.4.2) les fonctionnelles $\int_{\Sigma} G_{\psi}$ ne dépendent que de la classe de cobordisme de Σ

On fixe ainsi Σ une tranche de codimension 1. On suppose de plus que Σ est de la forme $\Sigma = (f \circ \pi^{\mathcal{X}_0})^{-1}(0)$ où $\pi^{\mathcal{X}_0}$ désigne la projection naturelle $\pi^{\mathcal{X}_0} : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{X}_0$ et où $f : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse sans point critique telle que $f^{-1}(0) \neq \emptyset$.

Considérons les espaces P et \mathcal{P} définis par

$$P := \left\{ \psi \in C^{\infty}(\mathcal{X}_0) ; \eta^{\beta\alpha} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} + m^2 \psi = 0 \right\}$$

$$\mathcal{P} := \left\{ \int_{\Sigma} G_{\psi} ; \psi \in P \right\}$$

Enfin nous noterons \mathcal{G} l'espace des fonctionnelles réelles sur P . Muni de la multiplication point par point ($\forall A, B \in \mathcal{G}, (A \cdot B)(\varphi) := A(\varphi)B(\varphi)$) \mathcal{G} est une algèbre commutative unitaire d'élément neutre \mathbb{I} la fonction constante égale à 1. Un élément \mathcal{F} de \mathcal{P} peut alors être vu comme une fonctionnelle de \mathcal{G} via

$$\varphi \in P \longmapsto \int_{\Sigma \cap \Gamma_{\varphi, h}} G_{\psi} \tag{I.6.2}$$

on peut faire remarquer que cette identification est cohérente car d'après la proposition I.4.3 cette dernière expression ne dépend pas de $h \in \mathbb{R}$.

Considérons $S(P)$ l'algèbre librement engendrée par P (voir la définition I.5.2 page 35) on introduit alors la définition suivante

Définition I.6.1 On note $I : S(P) \mapsto \mathcal{A}$ l'unique morphisme d'algèbre tel que pour tout $\psi \in P$

$$I(\psi) := \int_{\Sigma} G_{\psi}$$

Nous noterons \mathcal{A} l'image de I , c'est la sous-algèbre engendrée par les expressions du type (I.6.2).

Nous allons maintenant munir $S(P)$ d'une structure d'algèbre de Poisson. Pour ce faire il nous faut définir un crochet sur $S(P)$

Proposition–Définition I.6.1 On note $\{\bullet, \bullet\}_0 : S(P) \otimes S(P) \rightarrow S(P)$ l'unique application linéaire telle que pour tout $(\psi_1, \psi_2) \in P^2$

$$\{\psi_1, \psi_2\}_0 := I(\psi_1)(\psi_2)$$

et vérifiant la règle de Leibniz i.e. $\forall(A, B, C) \in S(P)^3$

$$\{A \cdot B, C\}_0 = A \odot \{B, C\}_0 + \{A, B\}_0 \odot C$$

On a alors la proposition suivante dont on trouvera la preuve dans l'annexe B.3.1

Proposition I.6.1 L'algèbre commutative $S(P)$ munie du crochet $\{\bullet, \bullet\}_0$ est une algèbre de Poisson c'est-à-dire que c'est une algèbre unitaire et le crochet vérifie l'identité de Jacobi et la règle de Leibniz, $\forall(A, B, C) \in S(P)^3$

$$\{A, \{B, C\}_0\}_0 + \{C, \{A, B\}_0\}_0 + \{B, \{C, A\}_0\}_0 = 0 \quad (\text{I.6.3})$$

$$\{A \cdot B, C\}_0 = A \cdot \{B, C\}_0 + \{A, B\}_0 \cdot C \quad (\text{I.6.4})$$

Nous verrons dans la section I.6.3 comment ce crochet est relié aux crochets de la théorie des champs.

Nous avons ainsi une structure d'algèbre de Poisson sur une algèbre d'observables classiques, nous sommes ainsi dans le cadre de la quantification par déformation.

I.6.2 Déformation

Nous allons définir dans un premier temps une déformation de l'algèbre $S(P)$ c'est-à-dire que nous allons définir un produit associatif \star_{\hbar} sur $S(P)[[\hbar]]$ tel que la projection naturelle $\pi : S(P)[[\hbar]] \rightarrow S(P)$ soit un morphisme d'algèbre.

Définition I.6.2 – Soient $\beta \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $z \in \mathcal{X}_0$. On note alors $i(z)$ et $\partial_\beta(z)$ les endomorphismes linéaires de $S(P)$ définis par

$$i(z) := (\phi(z) \otimes id) \circ \delta \quad \text{et} \quad \partial_\beta(z) := \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\beta}(z) \otimes id \right) \circ \delta$$

où $\delta : S(P) \rightarrow P \otimes S(P)$ désigne l'opérateur de Spencer et où pour tout $z \in \mathcal{X}_0$ et tout $\beta \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les opérateurs $\phi(z) : P \rightarrow \mathbb{R}$ et $\frac{\partial \phi}{\partial x^\beta}(z) : P \rightarrow \mathbb{R}$ sont définis par $\forall \psi \in P$

$$\phi(z)(\psi) := \psi(z) \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta}(z)(\psi) := \frac{\partial \psi}{\partial x^\beta}(z) \in \mathbb{R}$$

Nous avons donc pour tout $z \in \mathcal{X}_0$, $i(z)P^{\odot k} \subset P^{\odot(k-1)}$ et $\partial_\beta(z)P^{\odot k} \subset P^{\odot(k-1)}$.

– Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^p$ et $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathcal{X}_0^p$, on définit alors les opérateurs $i^p(z)$ et $\partial_\beta^p(z)$ sur $S(P)$ par

$$\begin{cases} i^p(z) := i(z_p) \circ \dots \circ i(z_1) \\ \partial_\beta^p(z) := \partial_{\beta_p}(z_p) \circ \dots \circ \partial_{\beta_1}(z_1) \end{cases}$$

Par convention on pose $i^0 = \partial^0 = Id_P$.

Remarque I.6.1

Nous voyons alors facilement que pour tout $(k, p) \in \mathbb{N}$ nous avons $i^p(z)P^{\odot k} \subset P^{\odot(k-p)}$ et $\partial_\beta^p(z)P^{\odot k} \subset P^{\odot(k-p)}$ avec par convention $P^{\odot l} = 0$ si $l < 0$.

Considérons $S(P)[[\hbar]]$ l'espace des polynômes en \hbar à coefficients dans $S(P)$. On définit alors le produit étoile \star_\hbar sur $S(P)[[\hbar]]$ comme suit

Définition I.6.3 On note \star_\hbar le morphisme de $\mathbb{R}[[\hbar]]$ -module $\star_\hbar : S(P)[[\hbar]] \otimes S(P)[[\hbar]] \rightarrow S(P)[[\hbar]]$ tel que pour tout $\Psi \in S(P)$ et $\Phi \in S(P)$,

$$\Psi \star_\hbar \Phi := \sum_{p \geq 0} \hbar^p \frac{1}{p!} (\Psi M_\Sigma^p \Phi)$$

avec pour $p = 0$, $\Psi M_\Sigma^0 \Phi := \Psi \odot \Phi$ et pour $p \in \mathbb{N}^*$

$$\Psi M_\Sigma^p \Phi := \sum_{\substack{\beta \in \llbracket 0, n \rrbracket^p \\ \alpha \in \llbracket 0, n \rrbracket^p}} \eta^{\alpha\beta} \int_{\pi^{-1}x_0(\Sigma)^p} \left(\partial_\beta^p(z) \Psi \right) \odot \left(i^p(z) \Phi \right) \omega_\alpha(z)$$

où pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ éléments de $\llbracket 0, n \rrbracket^p$, on a noté $\eta^{\beta\alpha}$ pour $\eta^{\beta_1\alpha_1} \dots \eta^{\beta_p\alpha_p}$ et ω_α pour $\omega_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \omega_{\alpha_p}$ (nous rappelons que pour tout $\mu \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ω_μ désigne la $(n-1)$ -forme $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \lrcorner \omega$).

On a alors la proposition suivante

Proposition I.6.2 $(S(P)[[\hbar]], \star_{\hbar})$ est une algèbre associative et cette algèbre est une quantification par déformation de l'algèbre de Poisson $(S(P), \odot, \{\bullet, \bullet\}_0)$ i.e. la projection naturelle $\pi : S(P)[[\hbar]] \rightarrow S(P)$ est un morphisme d'algèbre et le principe de correspondance (I.6.1) est valide.

Nous renvoyons le lecteur à l'appendice B.3.1 pour la preuve de la proposition I.6.2.

Remarques I.6.1

- Directement à partir de la définition du produit \star_{\hbar} on peut montrer que le sous-espace $S(P)[\hbar]$ des expressions polynomiales en \hbar à coefficients dans $S(P)$ est une sous-algèbre de $(S(P)[[\hbar]], \star_{\hbar})$. En effet d'après la définition I.6.3 on voit que pour p assez grand nous avons $\Psi M_{\Sigma}^p \Phi = 0$.
- Notons ce résultat se retrouve en utilisant les *paires de Laplace* comme le font Ch. Brouder et R. Oeckl dans leur article [12]. Plus précisément on peut montrer que la paire de Laplace

$$\forall (\psi_1, \psi_2) \in P^2 ; (\psi_1 | \psi_2) := \eta^{\alpha\beta} \int_{\pi x_0(\Sigma)} \frac{\partial \psi_1}{\partial x^{\beta}} \psi_2 \omega_{\alpha}$$

donne un produit twisté [12] correspondant à notre produit \star_{\hbar} . L'associativité de \star_{\hbar} est alors une conséquence directe des résultats exposés dans [12].

Nous allons maintenant voir comment la construction précédente peut être reliée à la théorie quantique des champs.

I.6.3 Lien avec la théorie du champ libre

Plaçons nous dans un système de coordonnées tel que la matrice de la métrique soit donnée par la matrice diagonale $\text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. Nous noterons alors la première variable t .

Nous supposons à partir de maintenant que Σ est la tranche de temps $\Sigma = \Sigma_0 := \{t = 0\}$ et pour ne pas alourdir les notations, nous noterons toujours Σ l'hypersurface $\pi^{\mathcal{X}_0}(\Sigma) \subset \mathcal{X}_0$. Nous considérons l'espace P défini par

$$P = \left\{ \psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{X}_0) ; (\square + m^2)\psi = 0 \text{ et } \psi|_{t=0}, \frac{\partial \psi}{\partial t}|_{t=0} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \right\}$$

Remarquons qu'un élément $\varphi \in P$ peut être spécifié par les conditions initiales (ou conditions de Cauchy) $[\varphi|_{t=0}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}|_{t=0}]$. Alors on peut définir une structure d'algèbre de Poisson sur $\mathcal{G} = \mathcal{F}(P, \mathbb{R})$ à la manière des physiciens de la théorie des champs (voir par exemple [31] ou [52]) en définissant le crochet par la formule

$$\{F, G\} := \int_{\Sigma} dx \left(\frac{\delta F}{\delta \varphi(x)} \frac{\delta G}{\delta \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x) \right\}} - \frac{\delta G}{\delta \varphi(x)} \frac{\delta F}{\delta \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x) \right\}} \right) \quad (\text{I.6.5})$$

Les expressions $\frac{\delta F}{\delta \varphi(x)}$ et $\frac{\delta F}{\delta \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x) \right\}}$ désignent les dérivées fonctionnelles de F par rapport respectivement à $\varphi(x)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x)$. Comme nous n'utiliserons pas cette notion nous resterons vague sur sa définition précise.

On peut alors montrer que l'application $I : S(P) \longrightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de Poisson entre les algèbres de Poisson $(S(P), \odot, \{\cdot, \cdot\}_0)$ et $(\mathcal{A}, \cdot, \{\cdot, \cdot\})$ i.e. I est un morphisme d'algèbre et pour tout $A, B \in S(P)$

$$I(\{A, B\}_0) = \{I(A), I(B)\}$$

où le crochet de gauche (resp. droite) désigne le crochet dans $S(P)$ (resp. dans \mathcal{G}). Ainsi nous pouvons voir la quantification par déformation de $S(P)$ que l'on a défini précédemment comme une quantification par déformation de la sous-algèbre de Poisson \mathcal{A} munie du crochet de Poisson habituel (I.6.5) de la théorie des champs.

Ordre d'opérateur correspondant

Donnons nous $\Psi^k = \psi_1 \odot \cdots \odot \psi_k$ un élément décomposable de $P^{\odot k}$. Alors en utilisant les les résultats de la section I.4.2 p.32 nous voyons que la fonctionnelle $I(\Psi^k)$ prise en φ s'exprime de la manière suivante

$$I(\Psi^k)(\varphi) = \prod_{j=1}^k \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \varphi - \psi_j \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \sum_{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket} (-1)^{|I|} \left[\prod_{i \in I} \int_{\Sigma} \psi_i \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \left[\prod_{j \notin I} \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \varphi \right] \quad (\text{I.6.6})$$

Si l'on suit K. Fredenhagen et M. Dütsch [19], la quantification des observables classiques (I.6.6) consiste à remplacer les champs classiques $\varphi(x)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(y)$ par des opérateurs $\phi(x)$ et $\pi(y)$ agissant sur un espace de Hilbert \mathcal{H} et vérifiant les relations de commutation dites *relations de commutation à temps égal*

$$\begin{cases} [\pi(x), \pi(y)] = [\phi(x), \phi(y)] = 0 \\ [\pi(x), \phi(y)] = i\delta(x - y) \end{cases} \quad (\text{I.6.7})$$

Plus précisément en reprenant la construction de l'annexe A quantifier la fonctionnelle observable (I.6.6) revient à remplacer chacune des intégrales $\int_{\Sigma} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \varphi$ et $\int_{\Sigma} \psi_j \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ respectivement par les opérateurs $\varphi_m \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \Big|_{t=0} \right)$ et $\pi_m((\psi_j)|_{t=0})$ agissant sur l'espace de Fock symétrique \mathcal{F}_s et de domaine F_0

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \varphi &\longleftarrow \varphi_m \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) \\ \int_{\Sigma} \psi_j \frac{\partial \varphi}{\partial t} &\longleftarrow \pi_m((\psi_j)|_{t=0}) \end{aligned} \quad (\text{I.6.8})$$

Nous voyons alors que se pose la question de l'ordre dans lequel écrire ces opérateurs car ceux-ci ne commutent pas. D'après J. Dito [18],[17] ou K. Fredenhagen et M. Dütsch [19], à chaque quantification par déformation correspond une façon d'ordonner les opérateurs. Nous allons vérifier cette propriété en définissant un ordre correspondant au produit \star_{\hbar}

que nous avons défini. Nous verrons que cet ordre diffère de l'*ordre de Wick* (encore appelé *ordre normal*) utilisé habituellement en théorie quantique des champs (voir [31], [52], [50] ou [49] pour plus de détails). Nous verrons ensuite comment la quantification par déformation présentée par J. Dito dans ses articles [17] et [18] (qui correspond à l'ordre normal) se transcrit dans notre cas.

Choisissons d'ordonner les opérateurs en mettant tous les opérateurs $\pi_m(f)$ à gauche des opérateurs $\varphi_m(g)$. Plus précisément nous définissons l'application \mathbb{R} -linéaire $\Theta : S(P) \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}$ de $S(P)$ sur l'espace $\hat{\mathcal{O}}$ des opérateurs agissant sur \mathcal{F}_s de la manière suivante. Nous posons $\Theta(1) := 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \psi_1 \odot \cdots \odot \psi_k \in P^{\odot k}$

$$\Theta(\psi_1 \odot \cdots \odot \psi_k) := \sum_{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket} (-1)^{|I|} \left[\prod_{i \in I} \pi_m((\psi_i)|_{t=0}) \right] \left[\prod_{j \notin I} \varphi_m \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) \right] \quad (\text{I.6.9})$$

Remarquons que cette dernière expression a bien un sens car les opérateurs $\varphi_m(f)$ commutent entre eux de même que les opérateurs $\pi_m(g)$. De plus ces opérateurs ont tous comme domaine F_0 et envoient F_0 dans F_0 , nous pouvons donc les composer, obtenant ainsi un opérateur non-borné de domaine F_0 . Nous étendons alors Θ à $S(P)[\hbar]$ en un morphisme de $\mathbb{R}[\hbar]$ -module par linéarité en posant $\Theta(\hbar \cdot 1) := -i$. Nous avons alors le résultat suivant dont nous donnons la preuve dans l'annexe B.3.2

Théorème I.6.1 *Pour tout A et B appartenant à $S(P)[\hbar]$ nous avons*

$$\Theta(A)\Theta(B) = \Theta(A \star_{\hbar} B)$$

Le théorème I.6.1 montre que cette manière d'ordonner les opérateurs correspond bien au produit étoile \star_{\hbar} que nous avons défini.

Nous pouvons remarquer que cet ordre ne correspond pas à l'ordre habituel de la théorie quantique des champs : l'ordre normal ou ordre de Wick (voir [52] ou [31]). Or le choix de cet ordre par les physiciens a des motivations physiques profondes reliés à la nécessité d'avoir une énergie finie.

Nous allons maintenant rechercher la quantification par déformation correspondant à l'ordre normal.

I.6.4 Ordre de Wick

La manière d'ordonner les opérateurs que nous avons défini ne correspond pas à l'ordre habituellement utilisé par les physiciens de la théorie des champs, qui est l'ordre de Wick. Celui-ci consiste à exprimer les opérateurs $\varphi_m(f)$ et $\pi_m(f)$ à l'aide des opérateurs de création et de destruction $\mathbf{a}^\dagger(f)$ et $\mathbf{a}(f)$, puis de placer tous les opérateurs de créations $\mathbf{a}^\dagger(f)$ à gauche des opérateurs $\mathbf{a}(f)$. Nous allons voir à quel produit étoile correspond cette façon d'ordonner les opérateurs.

Nous avons vu que quantifier revient à effectuer la substitution (I.6.8) dans l'expression (I.6.6) et à définir la manière dont on ordonne les opérateurs. Pour pouvoir ordonner

les opérateurs suivant l'ordre de Wick nous devons exprimer le quantifié de la fonctionnelle $\int_{\Sigma} \psi \overleftarrow{\partial} \varphi$ à l'aide des opérateurs $\mathbf{a}^{\dagger}(f)$ et $\mathbf{a}(f)$. Plus précisément en vertu de la correspondance (I.6.8) nous avons

$$\int_{\Sigma} \psi \overleftarrow{\partial} \varphi \longleftarrow \varphi_m \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) - \pi_m((\psi_j)|_{t=0})$$

Alors en utilisant l'identité (A.2.3) de l'annexe A nous obtenons finalement que l'opérateur correspondant à la fonctionnelle $\int_{\Sigma} \psi \overleftarrow{\partial} \varphi$ est donné par

$$\int_{\Sigma} \psi \overleftarrow{\partial} \varphi \longleftarrow \mathbf{a}(F\psi) + \mathbf{a}^{\dagger}(G\psi)$$

où nous avons noté $F\psi$ et $G\psi$ les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ définies par

$$\begin{aligned} F\psi &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1/\mu \frac{\widehat{\partial \psi}}{\partial t} - i\widehat{\psi} \right) \\ G\psi &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1/\mu \frac{\widehat{\partial \psi}}{\partial t} + i\widehat{\psi} \right) \end{aligned}$$

Pour alléger les notations nous avons noté $\widehat{\psi}$ pour $\widehat{\psi}|_{t=0}$ de même que pour $\frac{\widehat{\partial \psi}}{\partial t}$ dans les expressions précédentes. Nous pouvons dès lors quantifier les fonctionnelles $I(\Psi^k)$ données par (I.6.6) en utilisant l'ordre de Wick.

Nous définissons le morphisme de $\mathbb{R}[\hbar]$ -module $\Theta_W : S(P)[\hbar] \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ de $S(P)$ sur l'espace $\tilde{\mathcal{O}}$ des opérateurs agissant sur \mathcal{F}_s de la manière suivante. Nous posons $\Theta(\hbar.1) = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \psi_1 \odot \cdots \odot \psi_k \in P^{\odot k}$

$$\Theta_W(\psi_1 \odot \cdots \odot \psi_k) := \sum_{I \subset [1, k]} \left[\prod_{i \in I} \mathbf{a}^{\dagger}(G\psi_i) \right] \left[\prod_{j \notin I} \mathbf{a}(F\psi_j) \right]$$

Il nous reste à voir à quel produit étoile sur $S(P)$ correspond cet ordre d'opérateur i.e. quel produit \star_W peut-on définir sur $S(P)[[\hbar]]$ pour que Θ_W soit un morphisme d'algèbre de $(S(P)[[\hbar]], \star_W)$ vers l'algèbre des opérateurs non-bornés sur \mathcal{F}_s de domaine F_0 et stabilisant F_0 .

Définissons les opérateurs $\mathcal{G}(\vec{k})$ et $\mathcal{G}(\vec{k})^*$ de manière analogue aux opérateurs $\partial_{\beta}(z)$ et $i(z)$

Définition I.6.4 Soit $\vec{k} \in \mathbb{R}^{n-1}$, alors on note $\mathcal{G}(\vec{k})$ et $\mathcal{G}(\vec{k})^*$ les applications \mathbb{R} -linéaires $\mathcal{G}(\vec{k}), \mathcal{G}^*(\vec{k}) : S(P) \longrightarrow S(P) \otimes \mathbb{C}$ définies par

$$\mathcal{G}(\vec{k}) := \left(\sqrt{\mu} G(\vec{k}) \otimes id \right) \circ \delta \quad \text{et} \quad \mathcal{G}(\vec{k})^* := \left(\sqrt{\mu} \overline{G(\vec{k})} \otimes id \right) \circ \delta$$

où pour tout $\vec{k} \in \mathbb{R}^{n-1}$ l'opérateur $\sqrt{\mu}G(\vec{k}) : P \rightarrow \mathbb{C}$ est défini par $\forall \psi \in P$

$$\sqrt{\mu}G(\vec{k})(\psi) := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1/\mu \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\widehat{\psi} \right) (\vec{k})$$

On étend alors la définition de $\mathcal{G}(\vec{k})$ et $\mathcal{G}(\vec{k})^*$ à $S(P)[[\hbar]] \otimes \mathbb{C}$ par $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -linéarité et pour $p \in \mathbb{N}$ et $\vec{k} \in (\mathbb{R}^{n-1})^p$, on définit $\mathcal{G}^p(\vec{k})$ et $\mathcal{G}^p(\vec{k})^*$ par $\mathcal{G}^0 = \mathcal{G}^{0*} = Id$ et si $p \geq 1$

$$\begin{cases} \mathcal{G}^p(\vec{k}) := \mathcal{G}(\vec{k}_p) \circ \cdots \circ \mathcal{G}(\vec{k}_1) \\ \mathcal{G}^p(\vec{k})^* := \mathcal{G}(\vec{k}_p)^* \circ \cdots \circ \mathcal{G}(\vec{k}_1)^* \end{cases}$$

On peut alors facilement adapter la preuve de la proposition I.6 de manière à prouver la proposition suivante

Proposition I.6.3 Notons $\star_W : S(P)[[\hbar]] \otimes S(P)[[\hbar]] \rightarrow S(P)[[\hbar]]$ le morphisme de $\mathbb{R}[[\hbar]]$ -module tel que pour tout $(P, Q) \in S(P)[[\hbar]]^2$

$$P \star_W Q := \sum_k \frac{1}{p!} \int_{(\mathbb{R}^{n-1})^p} dk \mathcal{G}^p(\vec{k}) P \odot \mathcal{G}^p(\vec{k})^* Q$$

Alors $(S(P)[[\hbar]], \star_W)$ est une algèbre associative unitaire. De plus $(S(P)[[\hbar]], \star_W)$ est une quantification par déformation de $(S(P), \odot, \{\cdot, \cdot\})$.

Remarque I.6.2

Remarquons que encore une fois le sous-espace $S(P)[\hbar]$ est une sous-algèbre de $S(P)[[\hbar]]$ muni du produit \star_W .

Nous avons d'autre part le théorème suivant nous assurant que cette quantification par déformation correspond à l'ordre normal

Théorème I.6.2 L'opérateur $\Theta_W : S(P)[\hbar] \rightarrow \mathcal{W}$ est un morphisme d'algèbre de $(S(P)[\hbar], \star_W)$ dans \mathcal{W} i.e. $\widehat{I}(1) = 1$ et pour tout P, Q appartenant à $S(P)[[\hbar]]$

$$\Theta_W(P)\Theta_W(Q) = \Theta_W(P \star_W Q)$$

Nous renvoyons le lecteur à l'appendice B.3.3 pour une preuve de ce dernier résultat.

I.7 Quantification Géométrique

Nous allons montrer comment mettre en oeuvre une procédure de quantification géométrique dans le cadre multisymplectique. Nous présenterons tout d'abord la méthode de préquantification de A. A. Kirillov [2], B. Kostant et J.M. Souriau [39], [55] généralisant les constructions de B.O. Koopman [38], L. Van Hove [58] et I.E. Segal [54] (voir aussi l'excellent texte de Kirillov dans [2]).

Nous verrons comment étendre cette méthode pour quantifier les champs libres. Nous nous placerons tout d'abord dans le cadre général puis nous étudierons le cas où \mathcal{X} est l'espace de Minkowski plat \mathcal{X}_0 . Ce travail est en cours effectué avec Frédéric Hélein. Il reste donc encore des imprécisions, notamment sur les hypothèses de régularité et sur les espaces fonctionnels considérés.

I.7.1 Préquantification de Kostant–Souriau–Kirillov

Donnons-nous une variété symplectique (\mathcal{P}, β) . Nous supposons pour simplifier que la forme symplectique β est exacte $\beta = d\theta$ pour une certaine 1-forme θ (Par exemple $\mathcal{P} = T^*\mathcal{Y}$ muni de sa forme symplectique canonique).

Considérons alors le fibré trivial $\mathcal{L} := \mathcal{P} \times \mathbb{C}$ sur \mathcal{P} et l'ensemble $\Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ des sections lisses de \mathcal{L} . En utilisant θ nous pouvons définir une connection ∇ agissant sur $\Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ de la manière suivante

$$\forall \xi \in \Gamma(\mathcal{P}, T\mathcal{P}), \forall \psi \in \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{L}), \nabla_{\xi} \psi := \xi \cdot \psi - \frac{i}{\hbar} \theta(\xi) \psi \quad (\text{I.7.1})$$

Cette connection va permettre d'associer à toute fonction $F \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{P})$ un opérateur \widehat{F} agissant sur $\Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{L})$.

Définition I.7.1 - préquantification de (\mathcal{P}, β) - Soit $F \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{P})$, nous notons alors \widehat{F} l'application linéaire $\widehat{F} : \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ telle que pour tout $\psi \in \Gamma(\mathcal{P}, \mathcal{L})$

$$\widehat{F}\psi := F\psi + \frac{\hbar}{i} \nabla_{\xi_F} \psi = (F - \theta(\xi_F)) \psi + \frac{\hbar}{i} \xi_F \cdot \psi \quad (\text{I.7.2})$$

où $\xi_F \in \Gamma(\mathcal{P}, T\mathcal{P})$ est le champ de vecteurs hamiltonien associé à F i.e. tel que $dF + \xi_F \lrcorner \beta = 0$.

Exemple I.7.1

Nous prenons $(\mathcal{P}, \beta) = (\mathbb{R}^{2n}, dp_j \wedge dq^j)$ où $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ sont les coordonnées canonique sur \mathbb{R}^{2n} . Alors nous avons $dp^j \wedge dq_j = d\theta$ avec $\theta := p_j dq^j$. Alors en utilisant la construction précédente nous avons $\widehat{q}^j = q^j + i\hbar \frac{\partial}{\partial p_j}$ et $\widehat{p}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^j}$. Nous voyons dans cet exemple que cette représentation n'est pas irréductible, par exemple $\frac{\partial}{\partial p_k}$ commute avec les \widehat{p}_j et les \widehat{q}^j . C'est pourquoi elle est appelée préquantification et non quantification. Un moyen pour remédier à ce défaut est d'introduire une polarisation.

I.7.2 Préquantification du champ libre

Nous allons nous inspirer de la construction précédente pour quantifier les champs libres dans le cadre multisymplectique. Nous allons présenter la construction dans le cadre général puis nous nous spécialiserons au cas de l'espace de Minkowski plat pour montrer que nous retrouvons effectivement la théorie quantique du champ libre telle qu'elle est présentée dans la littérature (voir [52], [31], [48]).

Nous reprenons les notations des sections précédentes, c'est-à-dire que nous considérons l'espace multisymplectique $\mathcal{M} := \Lambda^n T^*(\mathcal{X} \times \mathbb{R})$ muni de la forme multisymplectique Ω donnée en coordonnées par

$$\Omega := de \wedge \omega + dp^{\mu} \wedge d\phi \wedge \omega_{\mu} - \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} p^{\mu} d\phi \wedge \omega$$

Comme nous l'avons noté dans la remarque I.1.1 page 25 nous avons $\Omega = d\theta^{(s)}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ où $\theta^{(s)}$ est donné par

$$d\theta^{(s)} := \left(e - (1-s) \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} \phi p^\mu \right) \omega + (s p^\mu d\phi - (1-s)\phi dp^\mu) \wedge \omega_\mu$$

Enfin \mathcal{M} est muni d'un hamiltonien $\mathcal{H} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{H}(q, e, p) = e + \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2)$$

Nous noterons $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}$ le complexifié de l'ensemble des n -courbes \mathcal{H} -hamiltonienne. Considérons le fibré trivial $\mathcal{L} := \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}} \times \mathbb{C}$ sur $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}$, enfin nous noterons $\Gamma(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}, \mathcal{L})$ l'ensemble des sections "lisses" de \mathcal{L} . Nous resterons vague sur cette notion. Pour faire une construction analogue à I.7.1, il nous faut principalement trouver une notion d'observables analogue à $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ et définir ce que peut être la connection (I.7.1).

Nous avons défini dans la section I.2 la notion de $(n-1)$ -forme observable dynamique et les fonctionnelles observables correspondantes qui semble être la notion d'observable adéquate. Nous noterons toujours $\mathcal{O}^{\mathcal{H}}$ l'ensemble des observables dynamiques

$$\mathcal{O}^{\mathcal{H}} := \{F \in \Lambda^{n-1} T^* \mathcal{M} \text{ telle que } \exists \zeta_F \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M}) | dF + \zeta_F \lrcorner \Omega = 0 \text{ et } d\mathcal{H} = 0\}$$

Nous considérons $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}$ le complexifié de $\mathcal{O}^{\mathcal{H}}$ c'est-à-dire $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}} := \mathcal{O}^{\mathcal{H}} \otimes \mathbb{C}$.

Intéressons nous maintenant à l'extension de (I.7.1). Nous avons la proposition suivante

Proposition I.7.1 *Soit $F \in \mathcal{O}^{\mathcal{H}}$, alors par définition il existe $\zeta_F \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ tel que $dF + \zeta_F \lrcorner \Omega = 0$ et $d\mathcal{H} = 0$. Supposons alors qu'il existe $\epsilon > 0$ et une fonction lisse U telle que*

$$\begin{aligned} U : (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (\tau, m) &\longmapsto U(\tau, m) \end{aligned}$$

tel que pour tout $m \in \mathcal{M}$ nous ayons $U(0, m) = m$ et pour tout $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(\tau, m) = \zeta_F(U(\tau, m))$$

c'est-à-dire que le flot de ζ_F a un temps d'existence minimal uniforme non nul. Alors U induit une application

$$\begin{aligned} (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{E}^{\mathcal{H}} &\longrightarrow \mathcal{E}^{\mathcal{H}} \\ (\tau, \Gamma) &\longmapsto \Gamma_\tau := U(\tau, \Gamma) \end{aligned}$$

où $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ désigne toujours l'ensemble des n -courbes \mathcal{H} -hamiltoniennes.

Preuve: (de la proposition I.7.1)

Nous nous donnons $F \in \mathcal{O}^{\mathcal{H}}$ et nous notons alors $\zeta_F \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ son champ de vecteurs hamiltonien. Soit $m \in \Gamma$ et $X \in \Lambda^n T\Gamma$ tel que $X \lrcorner \Omega|_m = (-1)^n d\mathcal{H}$. En notant $m' =$

$U(\tau, m)$ nous avons alors pour $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$ fixé $U(-\tau)^* d\mathcal{H} = d\mathcal{H}$ par définition de $\mathcal{O}^{\mathcal{H}}$. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} (-1)^n d\mathcal{H}|_{m'} &= (-1)^n U(-\tau)^* d\mathcal{H}|_m \\ &= (-1)^n U(-\tau)^* (X \lrcorner \Omega|_m) = (U(\tau)_* X)_{m'} \lrcorner U(-\tau)^* \Omega|_{m'} \end{aligned}$$

Or toujours par définition de $\mathcal{O}^{\mathcal{H}}$ nous avons $U(-\tau)^* \Omega = \Omega$, ainsi la dernière égalité nous donne au final $(-1)^n d\mathcal{H}|_{m'} = (U(\tau)_* X)_{m'} \lrcorner \Omega|_{m'}$ ce qui nous assure que Γ_τ est une n -courbe \mathcal{H} -hamiltonienne.

■

La proposition I.7.1 nous permet alors de définir pour tout $F \in \mathcal{O}^{\mathcal{H}}$ vérifiant les hypothèses de la proposition I.7.1 un champ de vecteurs sur $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ de la manière suivante, pour tout $\Gamma \in \mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ nous posons

$$\Xi_F(\Gamma) := \left. \frac{d\Gamma_\tau}{d\tau} \right|_{\tau=0} \in T_\Gamma \mathcal{E}^{\mathcal{H}} \quad (\text{I.7.3})$$

Ce qui nous permet de définir ∇_{Ξ_F} de la manière suivante

$$\forall A \in \Gamma(\mathcal{E}_C^{\mathcal{H}}, \mathcal{L}) \quad ; \quad \nabla_{\Xi_F} A := \Xi_F \cdot A - \frac{i}{\hbar} \left(\int_\Sigma \zeta_F \lrcorner \theta^{(s)} \right) A$$

où s est ici fixé. Remarquons que ∇_{Ξ_F} dépend de s . Nous pouvons alors donner un équivalent de la définition I.7.1

Définition I.7.2 Soit $F \in \mathcal{O}^{\mathcal{H}}$ vérifiant les hypothèses de la proposition I.7.1 alors nous définissons l'opérateur \widehat{F} agissant sur $\Gamma(\mathcal{E}_C^{\mathcal{H}}, \mathcal{L})$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} \forall A \in \Gamma(\mathcal{E}_C^{\mathcal{H}}, \mathcal{L}) \quad ; \quad \widehat{F}A &:= \left(\int_\Sigma F \right) A + \frac{\hbar}{i} \nabla_{\Xi_F} A \\ &= \frac{\hbar}{i} \Xi_F \cdot A + \left(\int_\Sigma (F - \zeta_F \lrcorner \theta^{(s)}) \right) A \end{aligned}$$

Remarque I.7.1

Notons que la construction précédente peut se mener quel que soit l'espace-temps \mathcal{X} . C'est une procédure générale qui peut s'appliquer à tout problème dérivant d'un Lagrangien.

I.7.3 Cas de l'espace de Minkowski plat

Nous allons étudier plus en détail le cas où \mathcal{X} est l'espace de Minkowski plat \mathcal{X}_0 c'est-à-dire $\mathcal{X}_0 = \mathbb{R}^n$ muni d'une métrique constante $(\eta_{\mu\nu})_{\mu\nu}$ de signature $(n-1, 1)$. L'hamiltonien \mathcal{H} est alors \mathcal{H}_0 donné par (I.4.3) page 31

$$\mathcal{H}_0(x, \phi, e, p) = e + \frac{1}{2} (\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + m^2 \phi^2)$$

Nous nous donnons alors des coordonnées $(x^\mu)_\mu$ sur \mathcal{X}_0 telles que la forme volume ω induite par la métrique s'écrive $\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

Nous identifierons alors dans ce cas l'ensemble $\mathcal{E}^{\mathcal{H}_0}$ des n -courbes \mathcal{H}_0 -hamiltonienne aux solutions de l'équation de Klein–Gordon

$$(\square + m^2)\varphi = 0 \quad (\text{I.7.4})$$

Ceci va nous permettre de définir des coordonnées sur $\mathcal{E}^{\mathcal{H}_0}$. En effet nous avons la proposition suivante

Proposition I.7.2 *Notons \mathcal{C}^+ l'hypersurface de \mathcal{X}_0 définie par*

$$\mathcal{C}^+ := \{k \in \mathcal{X}_0 \text{ tel que } \eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu - m^2 = 0 \text{ et } k^1 > 0\}$$

Alors toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{X}_0) \cap L^2(\mathcal{X}_0)$ solution de (I.7.4) s'écrit de manière unique

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathcal{C}^+} d\tilde{k} \left(u_k e^{-ik \cdot x} + u_k^* e^{ik \cdot x} \right)$$

où $d\tilde{k}$ est la mesure invariante sur \mathcal{C}^+ et où $k \mapsto u_k$ et $k \mapsto u_k^$ appartiennent à $\mathcal{C}^2(\mathcal{C}^+) \cap L^2(\mathcal{C}^+)$.*

Nous allons maintenant appliquer la construction décrite précédemment dans notre cas. Dans cette optique nous allons décrire plus précisément les observables et nous introduisons les définitions suivantes :

Définition I.7.3 1. *Soit $f \in L^2(\mathcal{C}^+)$ alors nous notons α_f la $(n-1)$ -forme complexe définie par*

$$\alpha_f := \left(p^\mu \psi_f - g^{\mu\nu} \phi \frac{\partial \psi_f}{\partial x^\nu} \right) \omega_\mu$$

où ψ_f est la fonction définie par $\psi_f : x \in \mathcal{X} \mapsto \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathcal{C}^+} d\tilde{k} f(k) e^{ik \cdot x}$. Nous noterons alors a_f la fonctionnelle $\int_\Sigma \alpha_f$ associée à α_f .

2. *Soit $g \in L^2(\mathcal{C}^+)$ alors nous notons α_g^\dagger la $(n-1)$ -forme complexe définie par*

$$\alpha_g^\dagger := \left(p^\mu \psi_g^\dagger - g^{\mu\nu} \phi \frac{\partial \psi_g^\dagger}{\partial x^\nu} \right) \omega_\mu$$

où ψ_g^\dagger est la fonction définie par $\psi_g^\dagger : x \in \mathcal{X} \mapsto \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathcal{C}^+} d\tilde{k} g(k) e^{-ik \cdot x}$. De la même façon, nous noterons a_f^\dagger la fonctionnelle $\int_\Sigma \alpha_g^\dagger$.

3. *Enfin pour $s \in \mathbb{R}$ nous noterons $\mathcal{K}^{(s)}$ l'espace des $(n-1)$ -formes défini par*

$$\mathcal{K}^{(s)} := \left\{ F_X = \xi_X \lrcorner \theta^{(s)} \text{ avec } \xi_X \in \Gamma(\mathcal{X}, T\mathcal{X}) \text{ champ de Killing} \right\}$$

et nous posons $\mathcal{K}_\mathbb{C}^{(s)}$ le complexifié de $\mathcal{K}^{(s)}$ i.e. $\mathcal{K}_\mathbb{C}^{(s)} := \mathcal{K}^{(s)} \otimes \mathbb{C}$.

Nous noterons alors \mathbb{A} et \mathbb{A}^\dagger les espaces respectivement définis par $\mathbb{A} := \{\alpha_f | f \in L^2(\mathcal{C}^+)\}$ et $\mathbb{A}^\dagger := \{\alpha_g^\dagger | g \in L^2(\mathcal{C}^+)\}$.

Nous avons alors la proposition suivante qui est un corollaire direct des propositions I.2.2 et I.7.2 qui décrit complètement les $(n - 1)$ -formes observables

Proposition I.7.3 *L'ensemble des observables $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}$ se décompose pour tout $s \in \mathbb{R}$ comme suit*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}} = \mathbb{A} \oplus \mathbb{A}^{\dagger} \oplus \mathcal{K}_{\mathbb{C}}^{(s)} \oplus C$$

où $C := \{F \in \Gamma(\mathcal{M}_0, \Lambda^{n-1}T^*\mathcal{M}_0) \text{ telles que } dF = 0\}$ désigne l'ensemble des $(n - 1)$ -formes fermée.

Nous avons alors le résultat suivant en appliquant la construction décrite précédemment

Théorème I.7.1 *Pour f et g appartenant à $L^2(\mathcal{C}^+)$ et $A \in \Gamma(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{\mathcal{H}}, \mathcal{L})$ nous avons*

$$\widehat{a}_f A := \hbar \int f(k) \frac{\partial A}{\partial u_k^*} + \left(\int_{\mathcal{C}^+} d\tilde{k} \frac{f(k)}{2} u_k \right) A \quad (\text{I.7.5})$$

$$\widehat{a}_g^{\dagger} A := -\hbar \int g(k) \frac{\partial A}{\partial u_k^*} + \left(\int_{\mathcal{C}^+} d\tilde{k} \frac{g(k)}{2} u_k^* \right) A \quad (\text{I.7.6})$$

Et enfin pour $X^{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ constants, nous avons

$$\left(\widehat{\int_{\Sigma} F_X} \right) A = -\eta_{\mu\nu} X^{\mu} \hbar \int k^{\nu} \left(u_k \frac{\partial A}{\partial u_k} - u_k^* \frac{\partial A}{\partial u_k^*} \right) \quad (\text{I.7.7})$$

Chapitre II

Etude de l'équation de Klein–Gordon avec interaction

Plaçons nous sur l'espace de Minkowski plat \mathcal{X}_0 de la section I.4 c'est-à-dire $\mathcal{X}_0 = \mathbb{R}^{1,n-1}$ où $\mathbb{R}^{1,n-1}$ désigne l'espace \mathbb{R}^n muni d'une métrique constante $(\eta_{\mu\nu})_{\mu\nu}$ de signature $(n-1, 1)$. On se donne $(x^\mu)_{\mu \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ un système de coordonnées sur \mathcal{X}_0 tel que la forme volume ω induite par la métrique s'écrive $\omega = dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$. Donnons nous $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ et considérons l'équation

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + m^2 \varphi + \lambda \varphi^p = 0 \quad (E_\lambda)$$

Dans ce chapitre nous étudions l'équation de Klein–Gordon (K-G) couplée avec une non-linéarité d'ordre $p \in \mathbb{N}$. Comme dans le cas de l'équation linéaire nous commençons par donner la formulation multisymplectique du problème. Mais comme I. Kanatchikov l'a remarqué [34] le nombre de formes observables dynamiques est considérablement réduit. Il ne reste que les observables correspondant aux symétries de l'espace-temps.

Suivant une idée de Frédéric Hélein [27] nous montrons que nous pouvons contourner le problème de manière perturbative. Nous montrons que nous pouvons définir des observables perturbativement sous la forme de séries indexées par les *arbres plans* et nous montrons la convergence de ces séries.

Suite à une discussion avec Christian Brouder nous nous sommes rendu compte que ces observables étaient étroitement liées aux *séries de Butcher* permettant de donner explicitement les termes du développement perturbatif d'une solution de l'équation de Klein–Gordon couplée avec une non-linéarité analytique. Nous montrons encore une fois un résultat de convergence et nous voyons comment retrouver les observables précédentes à partir des séries de Butcher.

Nous voyons ensuite comment ce calcul perturbatif réalisé dans un cadre classique peut formellement être relié aux calculs perturbatifs quantiques effectués par les physiciens [31],

[48]. Plus précisément nous montrons que formellement les séries de Butcher permettent de retrouver la formulation d'Heisenberg du champ quantique en interaction [48] p. 83.

Enfin nous présentons une application de ces calculs perturbatifs en théorie du contrôle c'est-à-dire que nous voyons comment nous pouvons définir perturbativement un contrôle pour une équation différentielle ordinaire à l'aide des arbres plans.

II.1 Etude multisymplectique de la théorie ϕ^p

Nous allons faire l'étude analogue à celle effectuée dans la section I.1 du chapitre I pour l'étude de l'équation (E_λ) .

Comme nous travaillons avec les mêmes objets (c'est-à-dire les champs scalaires $\varphi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$) l'espace multisymplectique ne diffère pas de celui défini dans la section I.4 du chapitre I. Il est donné par $(\mathcal{M}_0, \Omega_0)$ défini par $\mathcal{M}_0 := \Lambda^n T^* \mathbb{R}^{n+1}$ que l'on peut identifier à $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ via les coordonnées (x^μ, ϕ, e, p^μ) telles que pour tout $(x, \phi) \in \mathcal{X}_0 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$, un élément de $\pi \in \Lambda^n T^*_{(x, \phi)} \mathbb{R}^{n+1}$ est repéré par $\pi = e\omega + p^\mu d\phi \wedge \omega_\mu$ et Ω_0 est défini par

$$\Omega_0 := de \wedge \omega + dp^\mu \wedge d\phi \wedge \omega_\mu$$

avec $\omega_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lrcorner \omega$.

Il ne reste plus qu'à expliciter l'hamiltonien correspondant au problème. L'équation (E_λ) dérive du lagrangien \mathcal{L}_λ défini par

$$\mathcal{L}_\lambda[\varphi] := \int_{\mathcal{X}_0} \left(\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{p+1} \varphi^{p+1} \right) \omega$$

Nous pouvons alors effectuer une transformée de Legendre obtenant ainsi l'hamiltonien $\mathcal{H}_\lambda : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\mathcal{H}_\lambda(x, \phi, e, p) := e + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{p+1} \phi^{p+1}$$

Comme dans le cas linéaire, à une solution $\varphi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de (E_λ) correspond une n -courbe \mathcal{H}_λ -hamiltonienne $\Gamma_\varphi^{(\lambda)}$ définie par $\Gamma_\varphi^{(\lambda)} := f_\varphi^{(\lambda)}(\mathcal{X}_0)$ où $f_\varphi^{(\lambda)}$ désigne l'application $f_\varphi^{(\lambda)} : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{M}_0$ définie par $\forall x \in \mathcal{X}_0$

$$f_\varphi^{(\lambda)}(x) := \left(x, \varphi(x), E_\varphi^{(\lambda)}(x)\omega + \Pi(x, \varphi(x), d\varphi(x)) \right) \in \mathcal{M}_0$$

où Π a été défini par (I.1.1) page 24 et où $E_\varphi^{(\lambda)}$ est donné par

$$E_\varphi^{(\lambda)}(x) := -\mathcal{H}_\lambda(x, \varphi(x), 0, \Pi(x, \varphi(x), d\varphi(x)))$$

Etudions maintenant les $(n-1)$ -formes observables. Comme nous l'avons remarqué dans le chapitre précédent les formes observables algébriques ne dépendent que de l'espace

multisymplectique. Ainsi d'après la proposition I.4.1 p.31 les $(n-1)$ -formes observables algébriques s'écrivent sous la forme $F = F_X + F_{\psi, \Pi} + F_0$ avec F_0 fermée ($dF_0 = 0$)

$$F_X := eX^\alpha \omega_\alpha - p^\alpha X^\beta d\phi \wedge \omega_{\beta\alpha} \quad (\text{II.1.1})$$

$$F_{\psi, \pi} := p^\alpha \psi \omega_\alpha + \pi^\mu \omega_\mu \quad (\text{II.1.2})$$

avec $X^\alpha : \mathcal{X}_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : \mathcal{X}_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\pi^\mu : \mathcal{X}_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions lisses quelconques. Nous obtenons donc les mêmes observables algébriques. Par contre en ce qui concerne les $(n-1)$ -formes observables dynamiques la situation est radicalement différente. En effet nous avons la proposition suivante

Proposition II.1.1 Notons \mathcal{Z}_0 l'espace des $(n-1)$ -formes fermées sur \mathcal{M}_0 et \mathcal{F}_λ l'espace des $(n-1)$ -formes observables dynamiques correspondant à l'hamiltonien \mathcal{H}_λ i.e. $\mathcal{Z}_0 := \{F \in \Gamma(\mathcal{M}_0, \Lambda^{n-1}T^*\mathcal{M}_0) \mid dF = 0\}$ et

$$\mathcal{F}_\lambda := \{F \in \Gamma(\mathcal{M}_0, \Lambda^{n-1}T^*\mathcal{M}_0) \text{ telle que} \\ \exists \zeta_F \in \Gamma(\mathcal{M}_0, T\mathcal{M}_0) \mid dF + \zeta_F \lrcorner \Omega_0 = 0 \text{ et } d\mathcal{H}_\lambda(\zeta_F) = 0\}$$

Alors si $\lambda \neq 0$ on a $\dim(\mathcal{F}_\lambda/\mathcal{Z}_0) < \infty$, plus précisément nous avons $\mathcal{F}_\lambda = \{F_X; \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\nu} + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} = 0\} \oplus \mathcal{Z}_0$ où F_X est défini par (II.1.1).

Remarque II.1.1

On voit ainsi que seul le tenseur d'énergie-impulsion est observable dès qu'une non-linéarité apparaît. Nous n'avons pas assez d'observables pour quantifier.

Preuve: (de la proposition II.1.1)

Donnons nous $F \in \Gamma(\mathcal{M}_0, \Lambda^{n-1}T^*\mathcal{M}_0)$ une $(n-1)$ -forme observable dynamique. Alors F est en particulier une observable algébrique. Ainsi d'après la proposition I.4.1 dont nous avons rappelé les résultats, F s'écrit $F = F_X + F_{\psi, \Pi} + F_0$ où F_0 est fermée et F_X et $F_{\psi, \Pi}$ sont données par (II.1.1) et (II.1.2). D'après la proposition I.4.1, les champs de vecteurs hamiltoniens correspondant sont donnés par

$$\zeta_X := X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - e \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial e} - \left(e \frac{\partial X^\alpha}{\partial \phi} + p^\alpha \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\beta} - p^\beta \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \quad (\text{II.1.3})$$

$$\zeta_{\psi, \pi} := \psi \frac{\partial}{\partial \phi} - \left(p^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \pi^\alpha}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial e} - \left(p^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{\partial \pi^\alpha}{\partial \phi} \right) \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \quad (\text{II.1.4})$$

Etudions alors l'équation $d\mathcal{H}_\lambda(\zeta_X + \zeta_{\psi, \phi}) = 0$. Tout d'abord nous avons

$$d\mathcal{H}_\lambda = de + \eta_{\mu\nu} p^\mu dp^\nu + (m^2 \phi + \lambda \phi^p) d\phi$$

Ainsi introduisant les expressions (II.1.3) et (II.1.4) dans l'équation $d\mathcal{H}_\lambda(\zeta_X + \zeta_{\psi, \phi}) = 0$ nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} -e \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha} - p^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \pi^\alpha}{\partial x^\alpha} - \eta_{\mu\nu} p^\mu e \frac{\partial X^\nu}{\partial \phi} - \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\beta} + \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\beta \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta} \\ - \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - \eta_{\mu\nu} p^\mu \frac{\partial \pi^\nu}{\partial \phi} + (m^2 \phi + \lambda \phi^p) \psi = 0 \end{aligned}$$

On peut alors voir cette dernière expression, à $x \in \mathcal{X}_0$ fixé comme une expression polynomiale en ϕ, e, p . Le coefficient en ϕ^p nous donne alors directement $\psi = 0$, et ceux en $e, p^\mu e$ et $p^\mu p^\nu$ imposent la condition $\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\nu} + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} = 0$. Enfin le terme constant et le terme en p^μ nous donne que $\pi^\mu = \pi^\mu(x)$ et vérifie $\frac{\partial \pi^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$. Mais alors $F_{\psi, \pi}$ est réduit à $F_{\psi, \pi} = \pi^\mu \omega_\mu$ qui est une forme fermée : $dF_{\psi, \pi} = \frac{\partial \pi^\mu}{\partial x^\mu} \omega = 0$. On en conclut que $F = F_X + F'_0$ avec F'_0 fermée et $X \in \mathbb{R}^n$ constant.

Réciproquement il est évident que toute $(n-1)$ -forme s'écrivant $F = F_X + F_0$ avec F_0 fermée et X champ de Killing est une observable dynamique.

■

II.2 Introduction au calcul perturbatif

Nous avons vu que l'espace des observables dynamiques est considérablement réduit dès qu'une non linéarité apparaît, ce qui est problématique pour la quantification : nous n'avons pas assez d'observables pour obtenir une théorie intéressante.

Étudions plus précisément le problème. Prenons F une forme observable dynamique pour l'hamiltonien libre \mathcal{H}_0 , d'après les résultats du premier chapitre nous savons qu'elle s'écrit $F = F_X + F_\psi$ où F_X est donné par (II.1.1) avec la condition $\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\nu} + \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} = 0$ et

$$F_\psi := \left(p^\mu \psi - \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \phi \right) \omega_\mu \quad (\text{II.2.1})$$

Le champ de vecteurs hamiltonien correspondant à F_ψ étant donné par

$$\zeta_\psi := \psi(x) \frac{\partial}{\partial \phi} - \left(m^2 \phi \psi(x) + p^\alpha \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial e} + \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial p^\alpha}$$

où $\psi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $(\square + m^2)\psi = 0$.

La proposition II.1.1 nous assure que F_X est aussi une observable dynamique pour \mathcal{H}_λ avec $\lambda \neq 0$. Concentrons nous ainsi sur F_ψ et voyons pourquoi elle n'est plus une observable dynamique pour l'hamiltonien \mathcal{H}_λ dès que $\lambda \neq 0$. En calculant $d\mathcal{H}_\lambda(\zeta_\psi)$, nous obtenons facilement

$$d\mathcal{H}_\lambda(\zeta_\psi) = \lambda \psi \phi^p \neq 0 \quad (\text{II.2.2})$$

qui est effectivement non nul si ψ n'est pas identiquement nul. Mais nous pouvons faire remarquer que d'après cette dernière expression $d\mathcal{H}_\lambda(\zeta_\psi)$ est d'ordre 1 en λ . Ainsi, si nous prenons λ "petit" nous aurons $d\mathcal{H}_\lambda(\zeta_\psi)$ "petit". Nous pouvons ainsi tenter de mettre en oeuvre un calcul perturbatif.

Avant d'aller plus en avant il est nécessaire de bien comprendre ce que nous recherchons et en particulier de comprendre pourquoi la notion d'observable dynamique a été introduite. Nous rappelons ici rapidement les résultats des sections I.2 page 25 et I.3 page 28. La définition I.2.1 des formes observables algébriques nous a permis de définir le crochet de Poisson entre deux formes observables algébriques F et G de la manière suivante

$$\{F, G\} := \zeta_F \lrcorner dG = -\zeta_G \lrcorner dF = (\zeta_F \wedge \zeta_G) \lrcorner \Omega$$

Par ailleurs nous avons vu comment à partir d'une *tranche de codimension 1* (voir la définition I.3.1) Σ et d'une $(n-1)$ -forme F nous pouvons construire une *fonctionnelle* $\int_{\Sigma} F$ sur l'espace des n -courbes hamiltoniennes (voir la définition I.3.2). Alors étant donné une tranche de temps Σ et deux $(n-1)$ -formes observables algébriques F et G nous sommes en mesure de définir le crochet de Poisson des deux *fonctionnelles* $\int_{\Sigma} F$ et $\int_{\Sigma} G$ en posant

$$\left\{ \int_{\Sigma} F, \int_{\Sigma} G \right\} := \int_{\Sigma} \{F, G\} \quad (\text{II.2.3})$$

et il s'avère que ce crochet de Poisson coïncide avec le crochet de Poisson (I.6.5) qu'utilisent habituellement les physiciens en théorie des champs.

Maintenant se pose le problème de la définition du crochet de Poisson entre deux fonctionnelles $\int_{\Sigma} F$ et $\int_{\tilde{\Sigma}} G$ lorsque $\Sigma \neq \tilde{\Sigma}$. C'est alors que la notion d'observable dynamique intervient : en effet si l'une des deux formes, disons F , est une $(n-1)$ -forme observable dynamique, c'est-à-dire vérifiant $d\mathcal{H}(\zeta_F) = 0$, alors la fonctionnelle $\int_{\Sigma} F$ ne dépend que de la classe de cobordisme de Σ (voir la section I.3). Ainsi si $\tilde{\Sigma}$ et Σ sont dans la même classe de cobordisme alors nous avons $\int_{\Sigma} F = \int_{\tilde{\Sigma}} F$ ce qui nous permet de définir le crochet de $\int_{\Sigma} F$ et $\int_{\tilde{\Sigma}} G$ de la manière suivante

$$\left\{ \int_{\Sigma} F, \int_{\tilde{\Sigma}} G \right\} := \left\{ \int_{\tilde{\Sigma}} F, \int_{\tilde{\Sigma}} G \right\}$$

où le crochet du membre de droite est défini par (II.2.3). C'est dans cette dernière définition que réside l'intérêt des formes observables dynamiques.

Nous pouvons alors faire remarquer que pour définir le crochet de Poisson entre les deux fonctionnelles $\int_{\Sigma} F$ et $\int_{\tilde{\Sigma}} G$ avec F et G des observables algébriques, il suffit d'être en mesure d'exprimer $\int_{\Sigma} F$ en fonction de fonctionnelles du type $\int_{\tilde{\Sigma}} \tilde{F}$ et de produits de fonctionnelles de ce type. Dans le cas où F est une observable dynamique, nous avons vu que c'était particulièrement simple : il suffit de prendre $\tilde{F} = F$. Mais nous venons de voir que la condition pour être une observable dynamique était trop forte dans le cas non-linéaire, essayons donc de procéder autrement.

Nous allons nous placer dans un cadre simplifié pour pouvoir mener à bien les calculs c'est-à-dire que nous nous donnons un système de coordonnées $(x^{\mu})_{\mu \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ dans lequel la métrique est donnée par la matrice diagonale $\text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ et nous n'allons considérer que des hypersurface Σ du type *tranches de temps* (voir la définition I.4.1) c'est-à-dire des surfaces du type

$$\Sigma_s := \{(x, \phi, e, p) \in \mathcal{M}_0 | x^0 = s\}$$

où $s \in \mathbb{R}$ est un temps fixé. Dans ce cas les fonctionnelles $\int_{\Sigma_s} F_{\psi}$ avec F_{ψ} de la forme (II.2.1) s'écrivent de manière très simple, en effet nous avons la propriété suivante

Propriété II.2.1 *Soient F_{ψ} une $(n-1)$ -forme sur \mathcal{M}_0 du type (II.2.1) et $s \in \mathbb{R}$ un temps fixé. Alors pour toute solution $\varphi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation (E_{λ}) $(\square + m^2)\varphi + \lambda\varphi^p = 0$ nous avons*

$$\int_{\Sigma_s \cap \Gamma_{\varphi}^{(\lambda)}} F_{\psi} = \int_{\Sigma_s} \psi \overleftrightarrow{\partial} \varphi$$

où $\Gamma_\varphi^{(\lambda)}$ désigne la n -courbe \mathcal{H}_λ -hamiltonienne correspondant à φ (voir la section II.1) et où pour $f, g : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ nous avons noté $f \overleftrightarrow{\partial} g$ la fonction

$$f \overleftrightarrow{\partial} g := \frac{\partial f}{\partial t} g - f \frac{\partial g}{\partial t}$$

Nous pouvons alors formuler simplement le problème qui nous intéresse. Donnons-nous deux temps s et s' : comment exprimer la fonctionnelle $\int_{\Sigma_s} F_\psi$ en fonction de fonctionnelles du type $\int_{\Sigma_{s'}} F'$ et de produits de fonctionnelles de ce type ?

Nous pouvons supposer sans nuire à la généralité que $s' = 0$ et nous supposons également que $s > 0$, le cas $s < 0$ étant similaire. Soit $\varphi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ solution de $(\square + m^2)\varphi + \lambda\varphi^p = 0$, calculons la différence $\int_{\Sigma_s \cap \Gamma_\varphi^{(\lambda)}} F_\psi - \int_{\Sigma_0 \cap \Gamma_\varphi^{(\lambda)}} F_\psi$. Nous obtenons alors

$$\int_{\Sigma_s} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \varphi - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] - \int_{\Sigma_0} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \varphi - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = \int_D \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \varphi - \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] \quad (\text{II.2.4})$$

où D désigne l'ensemble $D := [0, s] \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathcal{X}_0$. Nous supposons ici qu'il n'y a pas de termes de bords c'est-à-dire que φ et ses dérivées s'annulent à l'infini en espace, nous ferons une étude plus précise par la suite. Comme φ satisfait l'équation (E_λ) nous pouvons remplacer $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ par $\sum_\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^\mu)^2} - m^2 \varphi - \lambda \varphi^p$ dans l'identité précédente. Alors en effectuant deux intégrations par parties successives de manière à transférer les dérivées spatiales de φ sur ψ nous obtenons

$$\int_{\Sigma_s \cap \Gamma_\varphi^{(\lambda)}} F_\psi - \int_{\Sigma_0 \cap \Gamma_\varphi^{(\lambda)}} F_\psi = \int_D \varphi (\square + m^2) \psi + \lambda \int_D \psi \varphi^p \quad (\text{II.2.5})$$

et puisque nous avons supposé que ψ vérifiait l'équation $(\square + m^2)\psi = 0$ cette dernière égalité se réduit à

$$\int_{\Sigma_s \cap \Gamma_\varphi^{(\lambda)}} F_\psi - \int_{\Sigma_0 \cap \Gamma_\varphi^{(\lambda)}} F_\psi = \lambda \int_D \psi \varphi^p \quad (\text{II.2.6})$$

qui est une conséquence directe du calcul (II.2.2). Nous retrouvons ainsi que si la différence n'est plus nulle comme c'était le cas pour $\lambda = 0$, elle est d'ordre 1 en λ . Nous pouvons alors essayer de trouver un contre-terme agréable qui remplace le membre de droite de (II.2.6) par un terme d'ordre supérieur en λ .

De manière à simplifier les calculs, nous nous plaçons dans le cas d'une non-linéarité quadratique c'est-à-dire $p = 2$. Néanmoins notre étude peut se généraliser à tout p entier, $p \geq 2$. Nous allons chercher le contre-terme sous la forme

$$\int_{\Sigma_s \cap \Gamma_\varphi^{(\lambda)}} F_{\Psi^{(1)}}^{(2)} := \int_{\Sigma_s \times \Sigma_s} \Psi^{(1)} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial t_1}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial t_1}} \right) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial t_2}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial t_2}} \right) \varphi \otimes \varphi \quad (\text{II.2.7})$$

où $\Psi^{(1)}$ désigne une fonction lisse $\Psi^{(1)} : \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ et où pour A un opérateur donné, \overleftarrow{A} (resp. \overrightarrow{A}) indique que l'opérateur A agit à gauche (resp. à droite). Nous avons par exemple

$$f \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial t}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \right) g = \frac{\partial f}{\partial t} g - f \frac{\partial g}{\partial t} = f \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial t}} g$$

Nous voyons ainsi que d'après la propriété II.2.1, la fonctionnelle (II.2.7) est une observable de type (II.2.1) sur deux copies de l'espace. C'est une généralisation du produit point par point de deux fonctionnelles de type (II.2.1).

Remarque II.2.1

Pour le cas général ($p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$) il suffit de chercher un contre terme de la forme

$$\int_{(\Sigma_s)^p} \Psi^{(1)} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial t}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \right)^{\otimes p} \varphi^{\otimes p}$$

avec $\Psi^{(1)}$ une fonction sur p copies de l'espace $\Psi^{(1)} : \mathcal{X}_0^p \longrightarrow \mathbb{R}$. Les calculs se mènent alors de façon similaire.

Si nous supposons que $\Psi^{(1)}$ ainsi que ses dérivées premières par rapport au temps s'annulent sur les ensembles $D \times \Sigma_0$ et $\Sigma_0 \times D$, nous pouvons suivre les étapes (II.2.4) à (II.2.5) sur la première et la deuxième variable successivement. En supposant qu'il n'y a pas de termes de bord dans les intégrations par parties, nous obtenons alors l'égalité suivante

$$\int_{\Sigma_s \cap \Gamma_\varphi^{(\lambda)}} F_{\Psi^{(1)}}^{(2)} = \int_{D \times D} dx_1 dx_2 \prod_{i=1}^2 (\varphi(x_i) P_i + \lambda \varphi^2(x_i)) \Psi^{(1)}(x_1, x_2)$$

où P_i désigne l'opérateur $P := \square + m^2$ agissant sur la i -ième variable, $i \in \{1, 2\}$. Alors en développant cette dernière identité et d'après (II.2.6) nous avons

$$\int_{\Sigma_s \cap \Gamma_\varphi^{(\lambda)}} F_\psi + \lambda \int_{\Sigma_s \cap \Gamma_\varphi^{(\lambda)}} F_{\Psi^{(1)}}^{(2)} - \int_{\Sigma_0 \cap \Gamma_\varphi^{(\lambda)}} F_\psi = \lambda \left(\int_D \psi \varphi^p + \int_{D^2} \varphi^{\otimes 2} P_1 P_2 \Psi^{(1)} \right) + \lambda^2 \dots \quad (\text{II.2.8})$$

Nous voyons ainsi que si nous prenons $\Psi^{(1)}$ telle que

$$P_1 P_2 \Psi^{(1)}(x_1, x_2) = -\delta(x_1 - x_2) \psi(x_1) \quad (\text{II.2.9})$$

où δ désigne l'opérateur de Dirac, alors le terme d'ordre 1 en λ dans (II.2.8) disparaît. Nous avons donc une condition pour que la fonctionnelle (II.2.7) soit un contreterme. Il s'agira ensuite de supprimer les termes d'ordre 2, puis 3 etc..

II.3 Arbres Plans

Pour organiser les contre-terme intervenant dans le développement perturbatif il est commode d'introduire la notion d'*arbre plan*. Nous allons ainsi donner une définition de

ces objets ainsi que quelques propriétés élémentaires de ceux-ci. Cette partie est largement inspirée de l'excellent livre de Robert Sedgewick et Philippe Flajolet [53] et des articles de Loïc Foissy [21] et [22].

Nous pouvons faire remarquer que les arbres font l'objet d'un intérêt accru ces dernières années, voir par exemple les travaux de Jean-Louis Loday et Maria Ronco [44], [43], Loïc Foissy [21], [22], Pepijn Van Der Lann [57] ou encore les travaux de Michèle Schatzman (Communication privée) pour n'en citer que quelques uns. Ils interviennent dans de nombreux sujets de recherches récents autre que l'analyse numérique ou l'informatique théorique où ces structures sont utilisées depuis longtemps. Nous pouvons citer par exemple les travaux d'Alain Connes et Dirk Kreimer [15] sur la renormalisation, les travaux de Jean-François Le Gall et Pascal Duquesne sur l'analyse des équations différentielles non-linéaires du point de vue probabiliste [41], [20] ou les travaux de Christian Brouder et Alessandra Frabetti en électrodynamique quantique [7], [11].

II.3.1 Définitions et Notations

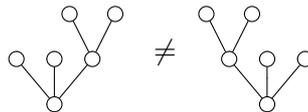
Nous reprenons ici la définition des arbres plans donné par Loïc Foissy dans [21].

Définition II.3.1 *Un arbre plan est la donnée d'un graphe fini orienté connexe et sans boucles muni d'un plongement dans le plan ; on suppose que l'un des sommets de ce graphe n'est l'arrivée d'aucune arête, ce sommet est appelé la racine de l'arbre. Les arbres plans seront dessinés avec la racine en bas. Nous noterons \mathbb{T} l'ensemble des arbres plans.*

Un arbre plan est représenté par un graphe.

Exemple II.3.1

Les arbres plans diffèrent des arbres enracinés en ce sens que l'on ne peut pas en général permuter ses arêtes. On a ainsi



en tant qu'arbres plans. Ces deux arbres représentent pourtant le même arbre enraciné.

Introduisons quelques notations sur les arbres plans.

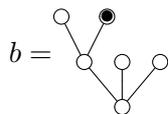
Définition–Notations II.3.1 *Soit $b \in \mathbb{T}$ un arbre plan, on note alors $\|b\|$ et $|b|$ respectivement le nombre de feuilles et le nombre de noeuds internes de b . On note aussi $N(b)$ le nombre total de noeuds de b , on a ainsi*

$$N(b) := \|b\| + |b|$$

Enfin pour ν un noeud de b , on appelle la profondeur de ν le nombre d'arêtes qu'il faut parcourir pour rejoindre la racine à partir de ν en suivant les arêtes de b .

Exemple II.3.2

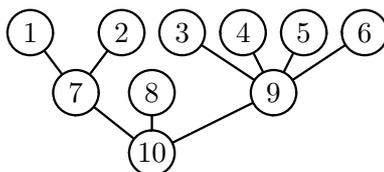
Considérons l'arbre b donné par



Alors on a $\|b\| = 4$ et $|b| = 2$ donc $N(b) = 2 + 4 = 6$. D'autre part dans b la racine a une profondeur de 0 et le noeud marqué a une profondeur de 2.

Remarque II.3.1

Soit $b \in \mathbb{T}$, alors b étant orienté nous pouvons numéroter les noeuds de b . Nous choisirons pour la suite de numéroter les noeuds de b de gauche à droite et par ordre décroissant de profondeur. On a ainsi



C'est une *décoration* particulière de l'arbre - voir les articles [21], [22] de Loïc Foissy pour plus de précisions.

Notation II.3.1

Nous noterons \circ l'unique arbre plan réduit à une racine et nous utiliserons aussi le symbole \vee pour désigner l'unique arbre plan ayant deux feuilles et un noeud interne.

Définition II.3.2 Nous allons définir deux sous-ensembles d'arbres plans : les p -arbres et l'ensemble $\mathbb{T}(2, \infty)$.

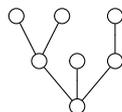
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p -arbre plan ou tout simplement p -arbre tout arbre plan dont chaque noeud a soit 0 fils (et c'est alors une feuille) soit exactement p fils. On notera $\mathbb{T}(p)$ l'ensemble des p -arbres plans. Enfin pour $N \in \mathbb{N}$, on notera $\mathbb{T}(p)_N$ l'ensemble des p -arbres plans ayant exactement N noeuds internes

$$\mathbb{T}(p)_N = \{b \in \mathbb{T}(p) \text{ tel que } |b| = N\}$$

- Nous noterons aussi $\mathbb{T}(2, \infty)$ l'ensemble des arbres plans dont chaque noeuds a soit 0 fils (c'est alors une feuille) soit au moins 2 fils.

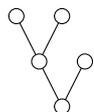
Exemples II.3.1

- Les arbres des exemples précédents ne sont pas des p -arbres mais appartiennent à $\mathbb{T}(2, \infty)$ contrairement à l'arbre plan suivant



qui n'appartient ni à $\mathbb{T}(p)$ ni à $\mathbb{T}(2, \infty)$ car le noeud le plus à droite a un seul fils.

- L'arbre défini par le graphe suivant est un 2-arbre plan



Les 2–arbres plans sont aussi appelés les arbres binaires plans.

Nous pouvons alors démontrer sans aucune difficulté la propriété suivante reliant le nombre de feuilles au nombre de noeuds internes

Propriété II.3.1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ alors nous

- $\forall b \in \mathbb{T}(p)$, $\|b\| = (p-1)|b| + 1$.
- $\forall b \in \mathbb{T}(2, \infty)$, $\|b\| \geq |b| + 1$ donc $N(b) \geq 2|b| + 1$.

Remarque II.3.2

Nous n’avons pas de propriété équivalente pour les arbres plans généraux pour lesquels le nombre de noeuds internes et de feuilles sont complètement indépendants.

Définition II.3.3 Nous noterons \mathbb{A} le \mathbb{R} –espace vectoriel librement engendré par \mathbb{T} et \mathbb{F} l’algèbre librement engendrée par \mathbb{A} i.e.

$$\mathbb{A} := \left\{ \sum_{b \in \mathbb{T}} \lambda_b b ; \lambda_b \in \mathbb{R} \text{ presque tous nuls} \right\}$$

$$\mathbb{F} := \mathcal{T}(\mathbb{A}) := \bigoplus_{p \geq 0} \mathbb{A}^{\otimes p}$$

Nous noterons \bullet la multiplication sur \mathbb{F} plutôt que \otimes et $\mathbb{I} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{F}$ l’unité. Pour $b = b_1 \bullet \dots \bullet b_p \in \mathbb{T}^{\otimes p}$ on note $|b|$ la somme du nombre de noeuds internes des b_i i.e. $|b| := \sum_i |b_i|$ et nous posons $|1| := 0$. Nous pouvons alors choisir de graduer \mathbb{F} avec le nombre de noeuds internes $\mathbb{F} := \bigoplus_{p \geq 0} \mathbb{F}_p$ avec

$$\mathbb{F}_p := \text{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ b \in \mathbb{T}^{\otimes k} ; k \in \mathbb{N} ; |b| := p \right\}$$

ce qui confère à \mathbb{F} une structure d’algèbre graduée.

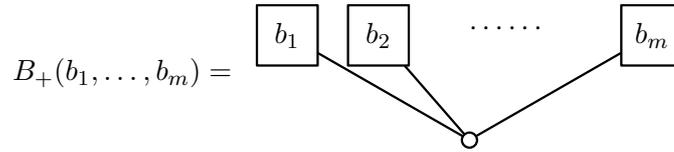
Remarque II.3.3

Remarquons qu’avec la graduation choisie \mathbb{F} n’est pas une algèbre graduée connexe c’est–à–dire que \mathbb{I} n’est pas un isomorphisme entre \mathbb{R} et \mathbb{F}_0 . Ceci provient du fait que \mathbb{F}_0 contient tous les éléments de type $\circ \bullet \circ \bullet \dots \bullet \circ$.

II.3.2 Propriétés élémentaires

Nous pouvons remarquer que l’on peut construire les arbres plans de façon récursive, c’est d’ailleurs la définition retenue en informatique théorique (voir [53]). Nous utiliserons très souvent cette propriété c’est pourquoi nous introduisons la définition suivante

Définition II.3.4 Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{T}^m$, on note alors $B_+(b_1, \dots, b_m)$ l’arbre plan obtenu en connectant une nouvelle racine aux racines de b_1, b_2, \dots, b_m dans cet ordre.



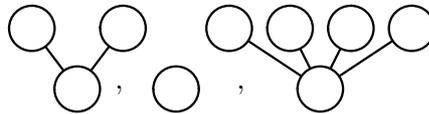
Remarque II.3.4

Directement à partir de la définition II.3.4 de $B_+(b_1, \dots, b_m)$ nous obtenons que nous avons pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{T}^m$

$$\|B_+(b_1, \dots, b_m)\| = \sum_{i=1}^m \|b_i\| \quad \text{et} \quad |B_+(b_1, \dots, b_m)| = 1 + \sum_{i=1}^m |b_i|$$

Exemple II.3.3

Ainsi l'arbre plan de la remarque II.3.1 est obtenu à partir des trois arbres plans suivant



Nous avons alors la proposition fondamentale suivante qui nous permettra de travailler de manière récursive sur les arbres plans

Proposition II.3.1 Soit b un arbre plan tel que $|b| \neq 0$, alors il existe un unique entier $m \in \mathbb{N}^*$ et un unique m -uplet d'arbres plans $(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{T}^m$ tel que $b = B_+(b_1, \dots, b_m)$. Nous définissons alors $B_- : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{F}$ l'application linéaire telle que pour tout $b \in \mathbb{T}$, $B_-(b) := b_1 \bullet \dots \bullet b_m$ où (b_1, \dots, b_m) est l'unique m -uplet tel que $b = B_+(b_1, \dots, b_m)$.

Corollaire II.3.1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout p -arbre $b \in \mathbb{T}(p)$ tel que $|b| \neq 0$, il existe une unique p -uplet de p -arbres plans $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{T}(p)^p$ tel que $b = B_+(b_1, \dots, b_p)$.

Nous avons d'autre part des résultats combinatoires sur le nombre de p -arbres plans ayant un nombre de noeud internes fixé. Nous renvoyons le lecteur au livre de Robert Sedgewick et Phillippe Flajolet [53] p. 288 pour la preuve des résultats suivants

Proposition II.3.2 Pour $N \in \mathbb{N}$ notons $C(p)_N$ le nombre de p -arbres plans ayant N noeuds internes. Nous avons alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N \neq 0$

$$C(p)_N := \text{Card} [\mathbb{T}(p)_N] = \frac{1}{(p-1)N+1} C_{pN}^N \sim c_p (\alpha_p)^N / N^{3/2}$$

où C_k^l désigne le coefficient binomial $C_k^l := \frac{k!}{(k-l)!l!}$ et où c_p et α_p sont définis par

$$\begin{cases} \alpha_p := \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}} \\ c_p := \frac{1}{p-1} \sqrt{\frac{p}{2\pi(p-1)}} \end{cases}$$

Remarque II.3.5

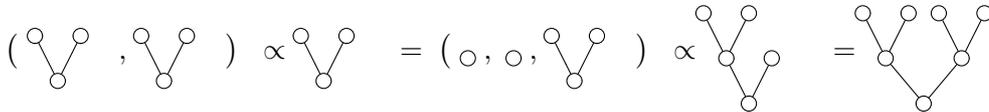
Si $p = 2$, on retrouve le résultat classique $C(2)_N = \frac{(2N)!}{(N+1)!N!}$ le N -ième nombre de Catalan.

Proposition II.3.3 Soit $N \in \mathbb{N}^*$, si on note C_N le nombre d'arbres plans ayant exactement N noeuds alors on a l'estimation suivante

$$C_N := \text{Card}\{b \in \mathbb{T} \text{ tel que } N(b) = N\} \leq 16^N$$

II.3.3 Greffes

Nous allons introduire la notion d'excroissance sur les arbres plans. Soient b un arbre binaire plan ayant k feuilles et $E = (E_1, \dots, E_k)$ un k -uplet d'arbres plans $E \in \mathbb{T}^k$ alors nous appelons *greffe de E sur b* et nous noterons $E \propto b$ l'arbre plan obtenu en remplaçant la i -ième feuille de b par E_i ceci pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Par exemple nous avons



Nous introduisons $\tilde{\Delta} : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{F}$ le coproduit suivant

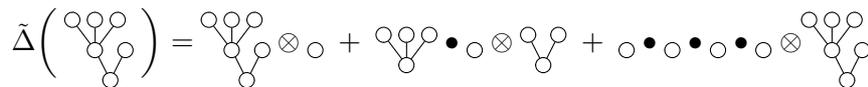
Définition II.3.5 Nous notons $\tilde{\Delta} : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{F}$ l'unique morphisme d'algèbre tel que pour tout $b \in \mathbb{T}$

$$\tilde{\Delta}(b) := \sum_{c \in \mathbb{T}} \sum_{\substack{E=(E_1, \dots, E_{\|c\|}) \in \mathbb{T}^{\|c\|} \\ E \propto c = b}} (E_1 \bullet \dots \bullet E_{\|c\|}) \otimes c$$

Nous avons muni $\mathbb{F} \otimes \mathbb{F}$ de la structure d'algèbre héritée de \mathbb{F} .

Exemple II.3.4

Nous avons par exemple $\tilde{\Delta}(1) = 1 \otimes 1$ car $\tilde{\Delta}$ est un morphisme d'algèbre et par définition $\tilde{\Delta}(\circ) = \circ \otimes \circ$ et



On a alors la propriété suivante qui se démontre très facilement

Propriété II.3.2 Notons $\epsilon : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ le morphisme d'algèbre tel que $\epsilon(\circ) = 1$ et $\forall b \in \mathbb{T}$, $b \neq \circ$, $\epsilon(b) := 0$. Alors le quintuplet $(\mathbb{F}, \bullet, \mathbb{I}, \tilde{\Delta}, \epsilon)$ est une bigèbre graduée c'est-à-dire

- $(\mathbb{F}, \bullet, \mathbb{I})$ est une algèbre graduée associative dont l'unité est \mathbb{I} .
- $(\mathbb{F}, \tilde{\Delta}, \epsilon)$ est une co-gèbre graduée co-associative de co-unité ϵ .
- $\tilde{\Delta} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \otimes \mathbb{F}$ et $\epsilon : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des morphismes d'algèbres graduées.

Remarques II.3.1

1. Nous pouvons remarquer que $(\mathbb{F}, \bullet, \mathbb{I}, \tilde{\Delta}, \epsilon)$ est une bigèbre non-commutative et non-co-commutative.

2. La bigèbre $(\mathbb{F}, \bullet, \mathbb{I}, \tilde{\Delta}, \epsilon)$ n'étant pas connexe nous ne pouvons pas appliquer le lemme de Milnor–Moore [46] pour montrer que nous avons une structure d'algèbre de Hopf. Ceci d'autant moins que $(\mathbb{F}, \bullet, \mathbb{I}, \tilde{\Delta}, \epsilon)$ n'est *pas* une algèbre de Hopf. En effet il n'existe pas d'antipode, pour s'en convaincre il suffit de considérer l'équation

$$\circ \bullet x = 1$$

qui n'a pas de solution dans \mathbb{F} .

II.4 Calcul perturbatif

Pour mener à bien le calcul perturbatif introduit dans la section précédente, il faut tout d'abord pouvoir définir des fonctionnelles de type (II.2.7) pour des fonctions $\Psi^{(1)}$ plus générales. En effet l'opérateur P étant hyperbolique, il est difficile de contrôler la régularité de la solution de (II.2.9). Nous définirons ainsi les espaces fonctionnels dont nous aurons besoin et nous serons alors en mesure de donner le développement perturbatif complet.

II.4.1 Espaces fonctionnels

Nous nous donnons un temps $T > 0$ que nous fixerons pour le reste du chapitre.

Définition II.4.1 Pour $q \in \mathbb{Z}$ nous noterons de manière conventionnelle $H^q(\mathbb{R}^{n-1})$ (ou simplement H^q) l'espace de Sobolev

$$H^q(\mathbb{R}^{n-1}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \mid (1 + |\xi|^2)^{q/2} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \right\}$$

Il est alors bien connu (voir par exemple [6], [51], [1]) que H^q muni du produit scalaire

$$(f \mid g)_{H^q} := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\xi|^2)^q \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi$$

est un espace de Hilbert.

Comme nous souhaitons donner un sens au produit φ^p il est agréable de travailler dans une algèbre. Or nous pouvons trouver dans les ouvrages classiques d'analyse fonctionnelle (voir par exemple [1]) le résultat suivant :

Proposition II.4.1 Si $q > (n - 1)/2$ alors H^q est une algèbre de Banach i.e. il existe une constante $C_q > 0$ ne dépendant que de q telle que pour tout $(f, g) \in (H^q)^2$ le produit point par point $fg : x \mapsto f(x)g(x)$ appartient à H^q et

$$\|fg\|_{H^q} \leq C_q \|f\|_{H^q} \|g\|_{H^q}$$

Nous fixons alors un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que $q > (n - 1)/2$ pour le reste du chapitre.

Occupons nous tout d'abord de l'espace des solutions de l'équation (E_λ) , nous donnons la définition suivante

Définition II.4.2 Nous noterons \mathcal{E} l'espace défini par $\mathcal{E} := \mathcal{C}^2([0, T], H^q)$. \mathcal{E} est alors naturellement un espace de Banach.

Introduisons maintenant les espaces \mathcal{E}^{k*} qui nous permettrons de définir les termes successifs du développement perturbatif.

Propriété–Définition II.4.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul, alors nous notons \mathcal{E}^{k*} l'espace défini par

$$\mathcal{E}^{k*} := \mathcal{C}^1 \left([0, T]^k, \widehat{\otimes}^k H^{-q} \right)$$

où pour tout espace de Banach \mathcal{B} et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous notons $\widehat{\otimes}^k \mathcal{B}^*$ l'espace de formes k -linéaires sur \mathcal{B} . Alors \mathcal{E}^{k*} muni de la norme $\|\cdot\|_{k*}$ définie par

$$\|U\|_{k*} := \max_{\alpha \in \{0, 1\}^k} \left(\sup_{\substack{t \in [0, T]^k \\ (f_1, \dots, f_k) \in (H^q)^k \\ \|f_j\|_{H^q} \leq 1}} \left| \left\langle \frac{\partial^{|\alpha|} U}{\partial t^\alpha}(t), (f_1, \dots, f_k) \right\rangle \right| \right)$$

est un espace de Banach, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne ici le crochet de dualité¹.

Il est très utile pour la suite de définir le sous espace $(\mathcal{E}^{1*})^{\otimes k}$ des éléments décomposables de \mathcal{E}^{k*}

Définition II.4.3 Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle élément décomposable de \mathcal{E}^{k*} tout élément $U \in \mathcal{E}^{k*}$ s'écrivant $U = U_1 \otimes \dots \otimes U_k$ avec $(U_1, \dots, U_k) \in (\mathcal{E}^{1*})^k$ i.e. pour tout $(f_1, \dots, f_k) \in (H^q)^k$ et pour tout $t = (t_1, \dots, t_k) \in [0, T]^k$

$$\langle U(t), (f_1, \dots, f_k) \rangle = \langle U(t_1), f_1 \rangle \cdots \langle U(t_k), f_k \rangle$$

On note alors $(\mathcal{E}^{1*})^{\otimes k}$ le sous espace vectoriel de \mathcal{E}^{k*} engendré par les éléments décomposables.

Alors en utilisant la densité des fonctions lisses à support compact dans $H^q(\mathbb{R}^{n-1})$ on peut facilement montrer la propriété suivante

Propriété II.4.1 Pour tout k appartenant à \mathbb{N}^* , le sous espace $(\mathcal{E}^{1*})^{\otimes k}$ est dense dans \mathcal{E}^{k*} .

Remarque II.4.1

Nous pouvons voir \mathcal{E}^{k*} comme un sous-espace de $\widehat{\otimes}^k \mathcal{E}^*$ l'espace des formes k -linéaires continues sur \mathcal{E} en posant pour tout U élément de \mathcal{E}^{k*} et pour tout $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in \mathcal{E}^k$

$$\langle U, \varphi \rangle := \int_0^T dt_1 \cdots \int_0^T dt_k \langle U(t_1, \dots, t_k), (\varphi_1(t_1), \dots, \varphi_k(t_k)) \rangle$$

Nous utiliserons cette notation par la suite.

¹ $\forall f \in \mathcal{B}^*, \forall z \in \mathcal{B}$ nous avons par définition $\langle f, z \rangle := f(z)$.

Il ne nous reste plus qu'à généraliser les fonctionnelles observables (II.2.7) pour ψ appartenant à \mathcal{E}^{1*} , nous introduisons ainsi la définition suivante

Définition II.4.4 Soit U un élément de \mathcal{E}^{1*} et $s \in [0, T]$, nous notons alors $U \overleftrightarrow{\partial}_s$ la forme linéaire continue sur \mathcal{E} définie par

$$\varphi \in \mathcal{E} ; \left\langle U \overleftrightarrow{\partial}_s, \varphi \right\rangle := \left\langle \frac{\partial U}{\partial t}(s), \varphi(s) \right\rangle - \left\langle U(s), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s) \right\rangle \quad (\text{II.4.1})$$

Alors en utilisant la propriété de densité II.4.1, on peut facilement démontrer la proposition suivante

Proposition II.4.2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $s \in [0, T]$ alors il existe un unique opérateur $\mathcal{E}^{k*} \longrightarrow \widehat{\otimes}^k \mathcal{E}$, $U^{(k)} \longmapsto U^{(k)} \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes k}$ tel que pour tout élément décomposable $U = U_1 \otimes \dots \otimes U_k \in (\mathcal{E}^{1*})^{\otimes k}$ et pour tout $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in \mathcal{E}^k$

$$\left\langle U^{(k)} \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes k}, \varphi \right\rangle := \prod_{j=1}^k \left\langle U_j \overleftrightarrow{\partial}_s, \varphi_j \right\rangle$$

Remarque II.4.2

La proposition II.4.2 permet d'introduire des fonctionnelles de type (II.2.7) pour des fonctions $\Psi^{(1)}$ plus générales et sur un nombre de copies d'espaces plus élevé.

II.4.2 Calcul perturbatif d'observables

Nous sommes maintenant en mesure de mener à bien le calcul perturbatif amorcé dans la section II.2. Les résultats de cette partie ont fait l'objet d'un article [26] accepté pour publication par le journal *les annales de l'IHP*.

Nous rappelons que nous nous sommes restreint au cas $p = 2$ c'est-à-dire à l'étude de l'équation

$$(\square + m^2)\varphi + \lambda\varphi^2 = 0 \quad (E_2)$$

Néanmoins notre approche peut facilement se généraliser à tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Nous donnerons quelques indications pour cette généralisation.

Nous allons définir une famille de fonctionnelles $(\Psi(b))_{b \in \mathbb{T}(2)}$ indexée sur les arbres binaires plans telle que $\Psi(b)$ appartienne à l'espace $\mathcal{E}^{\|b\|^*}$ pour tout $b \in \mathbb{T}(2)$ et vérifie l'identité

$$\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \varphi - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \sum_{b \in \mathbb{T}(2)} (-\lambda)^{|b|} \left\langle \Psi(b) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\|b\|}, \varphi^{\otimes \|b\|} \right\rangle$$

pour toute solution φ de l'équation (E_2) .

Proposition–Définition II.4.1 Soit $\Upsilon : \mathcal{E}^{1*} \longrightarrow \mathcal{E}^{2*}$ l'opérateur² défini pour tout $\psi \in \mathcal{E}^{1*}$, $\forall t = (t_1, t_2) \in [0, T]^2$ et $\forall (f_1, f_2) \in (H^q)^2$ par

$$\langle \Upsilon\psi(t_1, t_2), (f_1, f_2) \rangle := \int_0^T d\tau \langle \psi(\tau), (G * f_1)(t_1 - \tau) (G * f_2)(t_2 - \tau) \rangle$$

où pour tout $f \in H^q$, $t \in [0, T]$, on a noté $(G * f)(t)$ l'élément de H^q défini par $\forall k \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$(\widehat{G * f})(t)(k) := \theta(t) \frac{\sin(t\omega_k)}{\omega_k} \widehat{f}(k) \quad (\text{II.4.2})$$

où θ désigne la fonction seuil $\theta(t) = 0$ si $t < 0$ et 1 sinon et où $\omega_k := (m^2 + |k|^2)^{1/2}$ pour tout $k \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Remarque II.4.3

On peut voir $\Upsilon\psi$ comme une distribution $\Upsilon\psi \in \widehat{\otimes}^2 \mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R}^{n-1})$ et $\Upsilon\psi$ s'exprime alors

$$\Upsilon\psi(x_1, x_2) = \int_{P_+} dy G_{ret}(x_1 - y) G_{ret}(x_2 - y) \psi(y) \quad (\text{II.4.3})$$

où $P_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x^0 > 0\}$ et où $G_{ret}(z)$ désigne la fonction de Green retardée de l'opérateur $(\square + m^2)$ de Klein–Gordon

$$G_{ret}(z) := \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \theta(z^0) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d^{n-1}k \frac{\sin(z^0 \omega_k)}{\omega_k} e^{ik \cdot \vec{z}}$$

ici nous avons noté \vec{z} la partie spatiale de $z \in \mathbb{R}^n$ i.e. $z = (z^0, \vec{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

On peut vérifier facilement que l'opérateur Υ est bien défini, et il nous permet d'introduire la définition suivante dont on trouvera la preuve dans l'annexe C.1.1.

Proposition–Définition II.4.2 Il existe une unique famille $(\Upsilon(b))_{b \in \mathbb{T}(2)}$ d'opérateurs $\Upsilon(b) : \mathcal{E}^{1*} \longrightarrow \mathcal{E}^{\|b\|*}$ indexée par les arbres binaires plans telle que

$$\begin{cases} \Upsilon(\circ) := id \\ \forall (b_1, b_2) \in \mathbb{T}(2)^2; \Upsilon(B_+(b_1, b_2)) := (\Upsilon(b_1) \otimes \Upsilon(b_2)) \circ \Upsilon \end{cases} \quad (\text{II.4.4})$$

où pour $\mathcal{U} : \mathcal{E}^{1*} \rightarrow \mathcal{E}^{k*}$ et $\mathcal{V} : \mathcal{E}^{1*} \rightarrow \mathcal{E}^{l*}$, on a noté $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ l'unique fonctionnelle $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} : \mathcal{E}^{2*} \longrightarrow \mathcal{E}^{(k+l)*}$ telle que pour tout $U = U_1 \otimes U_2 \in (\mathcal{E}^{1*})^{\otimes 2}$, $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}(U) = \mathcal{U}(U_1) \otimes \mathcal{V}(U_2)$.

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe C.1.1 p.110 pour les preuves de cette section.

Soit ψ un élément de \mathcal{E}^{1*} , nous définissons alors la famille $(\Psi(b))_{b \in \mathbb{T}(2)}$ par

$$\forall \Psi(b) \in \mathcal{E}^{\|b\|*}; \Psi(b) := \Upsilon(b)(\psi) \in \mathcal{E}^{\|b\|*}$$

En utilisant la remarque II.4.3 nous pouvons voir que les fonctionnelles $\Psi(b)$, $b \in \mathbb{T}(2)$ peuvent être construites en utilisant les règles suivantes : On se donne un arbre binaire plan $b \in \mathbb{T}(2)$ alors

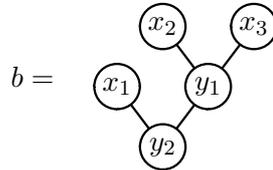
²on peut voir Υ comme $\Upsilon\psi = (G \otimes G) * \Delta_0\psi$ où Δ_0 est un coproduit généralisé sur \mathcal{E}^{1*} .

1. Attachons à chaque feuille de b une variable d'espace-temps $x_1, x_2, \dots, x_{\|b\|} \in \mathcal{X}_0$ en respectant l'ordre des feuilles.
2. Pour chaque noeud interne nous attachons une variable d'intégration $y_i \in \mathbb{R}^n$ que nous intégrons sur P_+ avec

$$P_+ = \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \mid t > 0\}$$

3. Pour chaque ligne entre les noeuds v et w où la profondeur de v est plus petite que celle de w , nous multiplions l'intégrande par un facteur $G_{ret}(a_v - a_w)$ où a_v (resp. a_w) est la variable associée à v (resp. w).
4. Enfin nous multiplions par $\psi(a_r)$ où a_r est la variable associée à la racine de b .

Pour fixer les idées nous allons traiter un exemple. Considérons l'arbre plan $b \in \mathbb{T}(2)$ décrit par le graphe suivant



Alors en utilisant la définition II.4.2 nous avons $\Psi(b) = (id \otimes \Upsilon) \circ \Upsilon\psi$ et pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in ([0, T] \times \mathbb{R}^{n-1})^3$, l'élément $\Psi(b)(x)$ de \mathcal{E}^{3*} est donné par

$$\Psi(b)(x) = \iint_{P_+} dy_1 dy_2 G_{ret}(x_1 - y_2) G_{ret}(y_1 - y_2) G_{ret}(x_2 - y_1) G_{ret}(x_3 - y_1) \psi(y_2)$$

Nous avons alors le résultat suivant dont on trouvera la preuve dans l'annexe C.1

Théorème II.4.1 *i. Soient $\psi \in \mathcal{E}^{1*}$, $\varphi \in \mathcal{E}$ et $s \in [0, T]$ fixés. Alors la série entière*

$$\sum_{b \in \mathbb{T}(2)} (-\lambda)^{|b|} \left\langle \Psi(b) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes \|b\|}, (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle \quad (*)$$

a un rayon de convergence R non nul, plus précisément nous avons

$$R \geq \left(4C_q M^2 T \left[\|\varphi(s)\|_{H^q} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s) \right\|_{H^q} > 0 \right] \right)^{-1}$$

où M est définie par $M := \max(\frac{1}{m}, 1)$ et C_q est la constante apparaissant dans la proposition II.4.1.

- ii. *Soient $\varphi \in \mathcal{E}$ solution de l'équation (E_2) , $(\square + m^2)\varphi + \lambda\varphi^2 = 0$, et ψ appartenant à $\mathcal{C}^2([0, T], H^{-q+2}) \subset \mathcal{E}^{1*}$ telle que $(\square + m^2)\psi = 0$ dans H^{-q} . Si la condition*

$$8|\lambda|C_q M^2 T \|\varphi\|_{\mathcal{E}} (1 + |\lambda|C_q T \|\varphi\|_{\mathcal{E}}) < 1 \quad (\text{II.4.5})$$

est vérifiée alors la série entière $()$ converge pour tout $s \in [0, T]$ et de plus, quelque soit $s \in [0, T]$ nous avons*

$$\sum_{b \in \mathbb{T}(2)} (-\lambda)^{|b|} \left\langle \Psi(b) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes \|b\|}, (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle = \left\langle \psi \overleftrightarrow{\partial}_0, \varphi \right\rangle \quad (\text{II.4.6})$$

Nous avons ainsi défini une quantité conservée sous forme d'une série entière en λ . Tout d'abord remarquons que par la définition II.4.4 de l'opérateur $\overleftarrow{\partial}_s$, la série entière (*) ne dépend que des valeurs de φ et $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ au voisinage de la surface Σ_s et la fonctionnelle $\Psi(b) \overleftarrow{\partial}_s^{\otimes \|b\|}$ se présente comme une fonctionnelle de type (II.2.7) sur $\|b\|$ copies de l'espace, c'est ainsi une sorte de généralisation du produit de fonctionnelles observables.

Remarques II.4.1

1. Nous n'avons traité que le cas $s \geq 0$ mais nous avons exactement le même résultat pour s négatif.
2. Dans le cas de la théorie ϕ^p , $p \geq 2$ quelconque, il faut considérer une famille $(\Psi(b))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ indexée par les p -arbres plans. Cette famille est construite en utilisant exactement les règles 1 à 4 décrites précédemment. Nous avons alors un résultat tout à fait similaire au théorème II.4.1 c'est-à-dire qu'en adaptant la condition de convergence (II.4.5) nous avons l'égalité suivante

$$\sum_{b \in \mathbb{T}(p)} (-\lambda)^{|b|} \left\langle \Psi(b) \overleftarrow{\partial}_s^{\otimes \|b\|}, (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle = \left\langle \psi \overleftarrow{\partial}_0, \varphi \right\rangle$$

Remarquons que l'on peut généraliser ce calcul à une non linéarité polynomiale ou même analytique. Nous renvoyons le lecteur à la section suivante pour plus de précisions.

3. Nous pouvons faire observer que les arbres binaires plans apparaissent dans d'autres travaux sur des équations aux dérivées partielles analogues bien que le point de vue diffère du notre (voir par exemple [7], [10], [11], [41], [20], [4]).
4. Par ailleurs il est possible de contrôler la norme $\|\varphi\|_{\mathcal{E}}$ à l'aide des données initiales par une méthode perturbative analogue à celle effectuée ici. Nous renvoyons le lecteur à la section suivante pour plus d'informations.

II.5 Séries de Butcher

Les séries de Butcher sont les séries indexées par les arbres (non nécessairement plans). Elles ont été introduites par J.C. Butcher [13] pour étudier les méthodes de Runge–Kutta de résolution numérique des équations différentielles ordinaires.

En utilisant le développement en séries indexée par les arbres des solutions d'une équation différentielle ordinaire (EDO) non-linéaire J.C. Butcher a montré que les méthodes Runge–Kutta de résolution numérique des EDO avaient une structure de groupe et a permis de classifier celles-ci. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages [13] ou [25] pour des informations plus précises. Indépendamment, D. Kreimer a défini une structure d'algèbre de Hopf et a montré comment celle-ci était relié aux calculs de la renormalisations [40]. Christian Brouder a alors montré que cette algèbre de Hopf était sous-jacente dans les calculs de J. C. Butcher et qu'on pouvait voir la renormalisation comme une méthode Runge–Kutta [9], [8], [10].

Dans son article [10] Christian Brouder a fait remarquer que les séries de Butcher pouvaient être utilisées pour étudier les équations aux dérivées partielles. Nous nous proposons ici de compléter cette idée en donnant un résultat de convergence.

Soient \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}_0 trois espaces de Banach tels que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}'$ avec injections continues. On note alors \mathcal{K} l'espace défini par

$$\mathcal{K} := \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{B}')$$

qui est naturellement un espace de Banach. On se donne enfin $T > 0$ un réel strictement positif et $x^0 \in \mathcal{B}$.

Considérons le problème (\mathcal{P}_F) suivant

$$\begin{cases} x \in \mathcal{K} \\ x' = Lx + f + \lambda F(x) \text{ sur } [0, T] \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (\mathcal{P}_F)$$

où $f \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}')$, L est une application linéaire $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ et $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0$ est de la forme

$$F(x) = \sum_{p \geq 2} F_p(x, \dots, x)$$

où pour tout $p \geq 2$, F_p désigne une application p -linéaire symétrique continue de \mathcal{B} dans \mathcal{B}_0 . Enfin nous noterons \mathcal{I} l'espace des "conditions initiales et des sources" c'est-à-dire

$$\mathcal{I} := \mathcal{B} \times \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}_0)$$

qui est naturellement un espace de Banach muni de la norme $\|\bullet\|_{\mathcal{I}} := \|\bullet\|_{\mathcal{B}} + \|\bullet\|_{\infty, \mathcal{B}_0}$. Nous noterons alors \mathcal{I}_f le sous espace de \mathcal{I} défini par $\mathcal{I}_f := \{0\} \times \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}_0)$ qu'on identifiera à $\mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}_0)$.

On fait alors les hypothèses supplémentaires suivantes sur L et F

(H1). On suppose que la série entière

$$|F|(z) := \sum_{p \geq 2} \|F_p\| z^p \quad (\text{II.5.1})$$

a un rayon de convergence infini.

(H2). On suppose que le problème linéaire (\mathcal{P}_0) obtenu en prenant : $\lambda = 0$ dans (\mathcal{P}_F) se résoud facilement. Plus précisément on suppose que pour tout $u = (x^0, f) \in \mathcal{I}$ il existe une unique solution $\phi_0(u)$ au problème (\mathcal{P}_0) et que l'application $\phi_0 : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{K}$ est continue. Nous noterons alors μ l'application ϕ_0 restreinte à \mathcal{I}_f i.e. $\forall f \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}_0) \cong \mathcal{I}_f, \mu(f) := \phi_0(0, f)$.

Remarque II.5.1

La condition **(H1)** peut être remplacée par la condition : $|F|$ a un rayon de convergence non nul. La formulation du théorème II.5.1 est alors plus complexe.

Théorème II.5.1 *On suppose les deux hypothèses **(H1)** et **(H2)** vérifiées. On considère alors la famille $(\Phi(b))_{b \in \mathbb{T}}$ d'applications linéaires $\Phi : \mathcal{I}^{\otimes \|b\|} \rightarrow \mathcal{K}$ récursivement par $\Phi(\circ) := \phi_0$ et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et $(b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{T}(2, \infty)^r$*

$$\Phi[B_+(b_1, \dots, b_r)] := \mu \circ F_r \circ (\Phi(b_1) \otimes \dots \otimes \Phi(b_r)) \quad (\text{II.5.2})$$

avec la convention $F_1 := 0$.

Soit $u = (x^0, f) \in \mathcal{I}$ nous considérons la famille $(\phi(b))_{b \in \mathbb{T}}$ d'éléments de \mathcal{K} définie par $\phi(b) := \Phi(b)(u^{\otimes \|b\|})$ pour tout $b \in \mathbb{T}$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x^0, f) \in \mathcal{I}$ vérifient la condition

$$|\lambda| < \frac{\|\phi_0(u)\|}{\|\mu\| \|F\| (16\|\phi_0(u)\|)} \quad (\text{II.5.3})$$

alors la famille $(\lambda^{|b|}\phi(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ est sommable dans \mathcal{K} et la somme

$$x := \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \lambda^{|b|}\phi(b)$$

est solution du problème (\mathcal{P}_F) .

Nous renvoyons le lecteur à l'appendice C.2 pour la preuve de ce résultat. Dans le cas où la fonction F est réduite à $F := F_p$ c'est-à-dire quand la fonction F est p -linéaire, la condition (II.5.3) peut être améliorée. Plus précisément on a le résultat suivant dont la preuve (que l'on trouvera en appendice) est très proche de celle du théorème II.5.1

Théorème II.5.2 *Soient $p \geq 2$ et F_p une application p -linéaire symétrique continue et nous supposons la condition **(H2)** satisfaite. On définit $\phi : \mathbb{T}(p) \rightarrow \mathcal{K}$ récursivement en posant $\phi(\circ) := \phi_0(x^0, f)$ et pour tout $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{T}(p)^p$*

$$\phi[B_+(b_1, \dots, b_p)] := \mu[F_p(\phi(b_1), \dots, \phi(b_p))] \quad (\text{II.5.4})$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifie la condition

$$\frac{p^p}{(p-1)^{p-1}} |\lambda| \|\mu\| \|F_p\| \|\phi_0(x^0, f)\|^{p-1} < 1 \quad (\text{II.5.5})$$

alors la famille $(\lambda^{|b|}\phi(b))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ est sommable dans \mathcal{K} et la somme $x := \sum_{b \in \mathbb{T}(p)} \lambda^{|b|}\phi(b)$ est solution du problème

$$\begin{cases} x \in \mathcal{K} \\ x' = Lx + f + \lambda F_p(x, \dots, x) \text{ sur } [0, T] \\ x(0) = x^0 \end{cases} \quad (\text{II.5.6})$$

II.5.1 Lien avec le coproduit $\tilde{\Delta}$

Nous pouvons nous demander comment s'exprime la solution du problème (\mathcal{P}_F) quand $u = (x^0, f) \in \mathcal{I}$ est une série du type $u = \sum_p \lambda^p u_p$ ou de manière équivalente quand u s'écrit $u = \sum_{b \in \mathbb{T}} \lambda^{|b|} u(b)$ avec $u(b) \in \mathcal{I}$ pour tout $b \in \mathbb{T}$. Cette question intervient naturellement quand on cherche à contrôler la solution de l'équation à l'aide d'une source f ou de la condition initiale x^0 (voir l'application à la théorie du contrôle II.6 page 84).

Nous reprenons les notations de la section précédente. Nous considérons tout d'abord l'algèbre $\mathcal{T}(\mathcal{I}) := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^{\otimes p}$ librement engendré par \mathcal{I} . l'espace $\mathcal{T}(\mathcal{I})$ est naturellement un espace vectoriel normé muni de la norme $\|\bullet\| := \sum_p \|\bullet\|_{\mathcal{I}^{\otimes p}}$ (mais il n'est pas complet, ce n'est donc pas un espace de Banach). Nous pouvons alors considérer la famille $(\Phi(b))_{b \in \mathbb{T}}$ que nous avons défini dans le théorème II.5.1 comme une application linéaire $\Phi : \mathbb{A} \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{T}(\mathcal{I}), \mathcal{K})$ de l'espace vectoriel \mathbb{A} librement engendré par \mathbb{T} vers l'espace des applications linéaires de $\mathcal{T}(\mathcal{I})$ dans \mathcal{K} .

Donnons nous $(u(b))_{b \in \mathbb{T}}$ une famille d'éléments de \mathcal{I} . Comme précédemment nous pouvons voir cette famille comme une application linéaire $u : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{I}$ qui admet un unique prolongement $\tilde{u} : \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{I})$ qui soit un morphisme d'algèbre (propriété universelle de l'algèbre librement engendrée par un espace vectoriel). Nous noterons toujours u ce prolongement.

D'après la définition II.3.5 de $\tilde{\Delta}$, nous voyons que pour tout $b \in \mathbb{A}$, si nous notons $\tilde{\Delta}(b) = \sum b_{(1)} \otimes b_{(2)}$ nous avons $b_{(2)} \in \mathbb{A} \subset \mathbb{F}$ et $b_{(1)} \in \mathbb{A}^{\otimes \|b_{(2)}\|}$, ce qui nous assure que $u(b_{(2)}) \in \mathcal{I}^{\otimes \|b_{(2)}\|}$. Nous pouvons ainsi considérer l'application $\Phi * u : \mathbb{A} \rightarrow \mathcal{K}$ définie par $\forall b \in \mathbb{A}$

$$\Phi * u(b) := \sum \Phi(b_{(2)}) (u(b_{(1)})) \quad (\text{II.5.7})$$

Nous avons donc $\Phi * u = \langle \bullet, \bullet \rangle \circ (u \otimes \Phi) \circ \tilde{\Delta}$ avec pour tout $A \in \text{Hom}(\mathcal{T}(\mathcal{I}), \mathcal{K})$ et tout $v \in \mathcal{T}(\mathcal{I})$, $\langle v, A \rangle := A(v) \in \mathcal{K}$. C'est en quelque sorte le produit de convolution de Φ et u , d'où la notation $\Phi * u$. Nous avons alors le résultat suivant qui se déduit du théorème II.5.1.

Théorème II.5.3 *Nous supposons les hypothèses (H1) et (H2) vérifiées.*

Soient $(u(b))_{b \in \mathbb{T}}$ une famille d'éléments de \mathcal{I} et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $(\lambda^{|b|} u(b))_{b \in \mathbb{T}}$ soit sommable dans \mathcal{I} . Nous noterons alors $u = (x^0, f) \in \mathcal{I}$ et $|u|$ les sommes

$$u := \sum_{b \in \mathbb{T}} \lambda^{|b|} u(b) \quad \text{et} \quad |u| := \sum_{b \in \mathbb{T}} |\lambda|^{|b|} \|u(b)\|_{\mathcal{I}}$$

Si u et λ vérifient la condition

$$|\lambda| < \frac{\|\phi_0\| \|u\|}{\|\mu\| |F| (16 \|\phi_0\| \|u\|)} \quad (\text{II.5.8})$$

*alors la famille $(\lambda^{|b|} (\Phi * u)(b))_{b \in \mathbb{T}}$ est sommable dans \mathcal{K} et la somme $x = \sum_{b \in \mathbb{T}} \lambda^{|b|} (\Phi * u)(b)$ est solution du problème (\mathcal{P}_F) .*

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe C.2 p.127 pour la preuve de ce résultat.

II.5.2 Exemples

Pour illustrer les résultats précédents nous allons traiter deux exemples, l'équation de sin-Gordon et la théorie ϕ^p . Nous allons tout d'abord définir les espaces \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}_0 dans lequel nous allons travailler puis nous étudierons le problème linéaire pour pouvoir enfin appliquer les résultats précédents. Nous verrons ensuite comment relier ces résultats au calcul perturbatif mené dans la section II.4.2.

Définissons les espaces \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}_0 comme suit

$$\begin{aligned}\mathcal{B}' &:= H^{q-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \times H^{q-2}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ \mathcal{B} &:= H^q(\mathbb{R}^{n-1}) \times H^{q-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \subset \mathcal{B}' \\ \mathcal{B}_0 &:= \{0\} \times H^{q-1}(\mathbb{R}^{n-1}) \subset \mathcal{B}'\end{aligned}$$

Nous identifierons de manière évidente \mathcal{B}_0 à l'espace $H^{q-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Nous munissons alors ces espaces des normes $\|\bullet\|_{\mathcal{B}'}$, $\|\bullet\|_{\mathcal{B}}$ et $\|\bullet\|_{\mathcal{B}_0}$ définies par

$$\begin{aligned}\forall u' = (\varphi'_0, \varphi'_1) \in \mathcal{B}' , \quad \|u'\|_{\mathcal{B}'} &:= \max(\|\varphi'_0\|_{H^{q-1}}, \|\varphi'_1\|_{H^{q-2}}) \\ \forall u = (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{B} , \quad \|u\|_{\mathcal{B}} &:= \max(\|\varphi_0\|_{H^q}, \|\varphi_1\|_{H^{q-1}}) \\ \forall v = (0, \phi) \in \mathcal{B}_0 , \quad \|v\|_{\mathcal{B}_0} &:= \|\phi\|_{H^{q-1}}\end{aligned}$$

Alors \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}_0 sont bien des espaces de Banach et ils vérifient bien les hypothèses $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}'$ avec injections continues. Comme précédemment nous noterons \mathcal{K} l'espace

$$\mathcal{K} := \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{B}')$$

Considérons l'opérateur $L_{KG} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ défini pour tout $u = (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{B}$ par

$$L_{KG}(u) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}' \quad (\text{II.5.9})$$

En utilisant cette notation, l'équation $(\square + m^2)\varphi = 0$ est équivalente à $\frac{du}{dt} = L_{KG}(u)$ avec $u(t) = (\varphi(t, \bullet), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \bullet))$. Nous avons alors la propriété suivante qui se démontre sans difficulté

Propriété II.5.1 *Donnons nous un réel $T > 0$ fixé. Soient $u^0 \in \mathcal{B}$ et f appartenant à $\mathcal{C}^0([0, T], H^{q-1}(\mathbb{R}^{n-1}))$ alors il existe une unique fonction $\phi_0(u^0, f) \in \mathcal{K} = \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}^1([0, T], \mathcal{B}')$ telle que*

$$\forall t \in [0, T] ; \quad \frac{d}{dt} \phi_0(u^0, f)(t) = L_{KG}(\phi_0(u^0, f)(t)) + f(t)$$

et $\phi_0(u^0, f)(0) = u^0$. De plus $\phi_0(u^0, f)$ vérifie l'inégalité

$$\|\phi_0(u^0, f)\|_{\mathcal{K}} \leq 2A^2 \|u^0\|_{\mathcal{B}} + (1 + AT) \|f\|_{\mathcal{C}^0([0, T], H^{q-1})}$$

où A désigne la constante $A := \max(m, \frac{1}{m})$.

Suivant les notations de la section précédente nous noterons $\mu : \mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}_0) \rightarrow \mathcal{K}$ la fonction définie par $\mu(f) := \phi_0(0, f)$. La propriété II.5.1 nous assure alors que la condition **(H2)** est satisfaite.

Exemple : l'équation de sin-Gordon

Nous prenons juste pour cet exemple $m = 1$, nous avons alors $A = \max(m, 1/m) = 1$. considérons l'application $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0$ définie pour tout $u = (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{B}$ par

$$F(u) := (0, \varphi_0 - \sin(\varphi_0)) \in \mathcal{B}_0$$

Pour montrer que F est bien définie il suffit de montrer que $\sin(\varphi_0) - \varphi_0$ appartient effectivement à $H^{q-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ ce qui est évident car nous avons choisit q tel que H^q soit une algèbre de Banach (voir la proposition II.4.1). La fonction F s'écrit alors de manière évidente $F(u) = \sum_{p \geq 1} F_{2p+1}(u, \dots, u)$ où F_{2p+1} est la forme $(2p+1)$ -linéaire symétrique définie par

$$F_{2p+1}(u^{(1)}, \dots, u^{(2p+1)}) := -\frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \prod_{j=1}^{2p+1} u_0^{(j)} \in \mathcal{B}_0 \simeq H^{q-1} \quad (\text{II.5.10})$$

où $\forall j, u^{(j)} = (u_0^{(j)}, u_1^{(j)}) \in \mathcal{B}$. Nous voyons alors immédiatement que la condition **(H1)** est vérifiée. Nous pouvons alors appliquer le théorème II.5.1 avec $\lambda = 1$ à ce cas particulier de manière à obtenir le résultat suivant

Proposition II.5.1 Soit $u^0 = (\varphi_0, \varphi_1) \in \mathcal{B}$ alors nous définissons la famille $(\phi(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ d'éléments $\phi(b) = (\phi(b)_0, \phi(b)_1)$ de \mathcal{K} indexée par les arbres plans $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$ de la manière suivante $\phi(\circ) := \phi_0(u^0, 0)$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (b_1, \dots, b_{2p}) \in \mathbb{T}(2, \infty)^{2p}$,

$$\phi(B_+(b_1, \dots, b_{2p})) := 0$$

et $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (b_1, \dots, b_{2p+1}) \in \mathbb{T}(2, \infty)^{2p+1}$

$$\phi(B_+(b_1, \dots, b_{2p+1})) := -\frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \mu [\phi(b_1)_0 \cdots \phi(b_{2p+1})_0]$$

Si $T > 0$ et $u^0 \in \mathcal{B}$ vérifient la condition

$$(1 + T) \left[\frac{\sinh(32C_q \|u^0\|_{\mathcal{B}})}{C_q \|u^0\|_{\mathcal{B}}} - 32 \right] < 1 \quad (\text{II.5.11})$$

alors la famille $(\phi(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ est sommable dans \mathcal{K} et de plus φ définie par

$$\varphi := \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \phi(b)_0$$

est solution de l'équation $\square \varphi + \sin(\varphi) = 0$ et $(\varphi(0, \bullet), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, \bullet)) = (\varphi_0, \varphi_1)$.

Preuve: (de la proposition II.5.1)

Il suffit d'appliquer le théorème II.5.1. Nous obtenons directement à partir de la proposition

II.4.1 et de (II.5.10) que pour tout $\varphi_0 \in H^q$, $\|\varphi^p\|_{H^{q-1}} \leq C_q^{p-1} \|\varphi\|_{H^q}^p$ ce qui nous donne directement pour tout $r > 0$

$$|F|(r) := \sum_{p \geq 1} \|F_{2p+1}\| r^{2p+1} \leq \frac{1}{C_q} \sinh(rC_q) - r$$

Nous appliquons alors directement le théorème II.5.1 et en utilisant cette dernière égalité ainsi que les résultats précédents nous voyons que si (II.5.11) est vérifiée la condition de convergence (II.5.3) est satisfaite pour $\lambda = 1$, ainsi la famille $(\phi(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ est sommable dans \mathcal{K} et la somme $v := \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \phi(b)$ vérifie $v(0) = u_0$ est $v'(t) = L_{KG} + F(u)$ ce qui est équivalent à $\square \varphi + \sin(\varphi) = 0$ où φ désigne la première composante v_0 et $(\varphi(0, \bullet), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, \bullet)) = (\varphi_0, \varphi_1)$.

■

Exemple : théorie ϕ^{p+1}

Nous revenons ici au cas où $m > 0$ est quelconque. Nous nous donnons un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$. Pour le cas de l'équation sur les champs scalaires $\varphi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\square + m^2)\varphi + \lambda\varphi^p = 0 \quad (\text{II.5.12})$$

il suffit d'appliquer la proposition II.5.2 avec les espaces \mathcal{B} , \mathcal{B}' et \mathcal{B}_0 décrit précédemment et avec $L = L_{KG}$ et avec F_p l'application p -linéaire symétrique $F_p : \mathcal{B}^p \rightarrow \mathcal{B}_0$ telle que pour tout $(v^{(1)}, \dots, v^{(p)}) = \left((v_0^{(1)}, v_1^{(1)}), \dots, (v_0^{(p)}, v_1^{(p)}) \right) \in \mathcal{B}^p$

$$F_p(v^{(1)}, \dots, v^{(p)}) := \prod_{j=1}^p v_0^{(j)}$$

Alors nous pouvons appliquer directement la proposition II.5.2 pour obtenir le résultat suivant.

Proposition II.5.2 Soient $u^0 \in \mathcal{B}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors si la condition

$$2 \frac{p^{p/(p-1)}}{(p-1)} A^2 C_q (1 + AT)^{1/(p-1)} |\lambda|^{1/(p-1)} \|u^0\|_{\mathcal{B}} < 1 \quad (\text{II.5.13})$$

est satisfaite alors la famille $(\lambda^{|b|} \phi(b))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ définie par $\phi(\circ) := \phi_0(u^0, 0)$ et pour tout $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{T}(p)^p$

$$\phi(B_+(b_1, \dots, b_p)) := -\mu [\phi(b_1)_0 \cdots \phi(b_p)_0]$$

est sommable dans \mathcal{K} et

$$\varphi := \sum_{b \in \mathbb{T}(p)} \lambda^{|b|} \phi(b)_0 \quad (\text{II.5.14})$$

est solution de l'équation (II.5.12).

Preuve: (de la proposition II.5.2)

Nous voyons directement à l'aide de la propriété II.5.1 que si la condition (II.5.13) est satisfaite alors il en est de même pour (II.5.5) ce qui permet de conclure grâce à la proposition II.5.2.

■

II.5.3 Lien avec le calcul perturbatif d'observable

Comme nous l'a fait remarquer Christian Brouder, le calcul perturbatif que nous avons effectué dans la section II.4.2 est lié aux séries de Butcher. C'est ce que nous allons essayer de mettre en relief dans cette section. Nous ne nous attarderons pas à étudier précisément la convergence des séries en jeu et nous admettrons que les intégrales considérées convergent. Nous mènerons ainsi les calculs de façon plus formelle que précédemment sachant que la partie analytique a déjà été traitée.

Pour bien comprendre le lien entre les séries de Butcher et le théorème II.4.1 il est nécessaire de revenir au problème initial. Nous nous donnons deux tranches de temps Σ_0 et Σ_s et une solution φ de l'équation

$$(\square + m^2)\varphi + \lambda\varphi^p = 0$$

Comment pour $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $(\square + m^2)\psi = 0$ pouvons nous exprimer la quantité³

$$\int_{\Sigma_0} \psi \overleftarrow{\partial} \varphi \quad (\text{II.5.15})$$

en fonction de $\varphi(s, \bullet)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, \bullet)$?

Une réponse possible est d'utiliser les séries de Butcher, c'est à dire considérer la surface Σ_s comme une surface de Cauchy et $(\varphi(s, \bullet), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, \bullet))$ comme les données de Cauchy correspondantes. Alors le théorème II.5.2 nous permet⁴ d'exprimer φ au voisinage de Σ_0 sous la forme d'une série

$$\varphi = \sum_{b \in \mathbb{T}(p)} \lambda^{|b|} \phi(b) \quad (\text{II.5.16})$$

où $\phi(\circ)$ est la solution de l'équation $(\square + m^2)\phi = 0$ telle que

$$\left(\phi(s, \bullet), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, \bullet) \right) = \left(\varphi(s, \bullet), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, \bullet) \right)$$

et où $\phi(B_+(b_1, \dots, b_p))$ vérifie l'équation

$$(\square + m^2)\phi(B_+(b_1, \dots, b_p)) = -\phi(b_1) \cdots \phi(b_p)$$

avec pour condition initiale $\phi(B_+(b_1, \dots, b_p))(s, \bullet) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial t}\phi(B_+(b_1, \dots, b_p))(s, \bullet) = 0$.

³Nous rappelons que pour $f, g : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ la notation $f \overleftarrow{\partial} g$ désigne la fonction $f \overleftarrow{\partial} g := \frac{\partial f}{\partial t} g - f \frac{\partial g}{\partial t}$, nous avons déjà utilisé cette notation dans la section II.2

⁴à condition que s ne soit pas trop grand.

En introduisant l'expression (II.5.16) dans (II.5.15), nous obtenons alors l'égalité suivante

$$\int_{\Sigma_0} \psi \overleftrightarrow{\partial} \varphi = \sum_{b \in \mathbb{T}(p)} \lambda^{|b|} \int_{\Sigma_0} \psi \overleftrightarrow{\partial} \phi(b) \quad (\text{II.5.17})$$

égalité qu'il nous faut comparer à (II.4.6) du théorème II.4.1. Pour aller plus en avant il est nécessaire de comprendre comment sont construites les fonctions $\phi(b)$. Nous avons le lemme suivant

Lemme II.5.1 *Pour tout $x = (x^0, \vec{x}) \in [0, s] \times \mathbb{R}^{n-1}$ et tout $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{T}(p)^p$ nous avons*

$$\phi(\circ)(x) = \int_{\Sigma_s} dy G_{ret}(y-x) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y^0}} \right) \varphi \quad (\text{II.5.18})$$

$$\phi(B_+(b_1, \dots, b_p))(x) = - \int_{x^0}^s dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} G_{ret}(y-x) \phi(b_1)(y) \cdots \phi(b_p)(y) \quad (\text{II.5.19})$$

où comme dans la remarque II.4.3 de la page 68, nous avons noté G_{ret} la fonction de Green retardé de l'opérateur de Klein–Gordon

$$G_{ret}(z) := \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \theta(z^0) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d^{n-1}k \frac{\sin(z^0 \omega_k)}{\omega_k} e^{ik \cdot \vec{z}} \quad (\text{II.5.20})$$

enfin si $\psi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $(\square + m^2)\psi = 0$ alors pour tout $y \in [0, s] \times \mathbb{R}^{n-1}$ nous avons

$$\psi(y) = \int_{\Sigma_0} d\vec{x} \psi(x) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} \right) G_{ret}(y-x) \quad (\text{II.5.21})$$

En utilisant ce lemme nous pouvons voir que les développements perturbatifs (II.4.6) et (II.5.17) sont en réalité les mêmes. Nous allons vérifier ceci sur les premiers termes.

Commençons par le terme d'ordre 0 dans (II.5.17), il est donné par $\int_{\Sigma_0} \psi \overleftrightarrow{\partial} \phi(\circ)$. Or d'après l'égalité (II.5.18) du lemme II.5.1 nous avons

$$\int_{\Sigma_0} \psi \overleftrightarrow{\partial} \phi(\circ) = \int_{\Sigma_0} \psi(x) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} \right) \left[\int_{\Sigma_s} dy G_{ret}(y-x) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y^0}} \right) \varphi(y) \right]$$

En utilisant le théorème de Fubini nous voyons que cette dernière égalité peut se mettre sous la forme

$$\int_{\Sigma_0} \psi \overleftrightarrow{\partial} \phi(\circ) = \int_{\Sigma_s} \psi(y) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y^0}} \right) \varphi(y)$$

où ψ désigne

$$\psi : y \mapsto \int_{\Sigma_0} \psi(x) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} \right) G_{ret}(y-x) \quad (\text{II.5.22})$$

Alors en réutilisant le lemme II.5.1 pour ψ cette fois nous voyons que nous avons finalement $\psi = \psi$ puisque ces deux fonctions sont solutions de $(\square + m^2)f = 0$ et coïncident (ainsi que

leurs dérivée première par rapport au temps) sur la surface Σ_0 . Finalement nous obtenons donc bien

$$\int_{\Sigma_0} \psi \overleftrightarrow{\partial} \phi(\circ) = \int_{\Sigma_s} \psi(y) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y^0}} \right) \varphi(y) = \left\langle \Psi(\circ) \overleftrightarrow{\partial}_s, \varphi \right\rangle$$

Voyons maintenant le terme d'ordre 1 dans (II.5.17) c'est-à-dire la quantité

$$\int_{\Sigma_0} \psi \overleftrightarrow{\partial} \phi(B_+(\circ^{\bullet p}))$$

où $B_+(\circ^{\bullet p})$ est l'unique p -arbre ayant un seul noeud interne. Pour simplifier les calculs nous nous placerons encore une fois dans le cas $p = 2$, mais le résultat reste vrai pour tout $p \geq 2$. Dans ce cas nous avons $B_+(\circ^{\bullet 2}) = \gamma = B_+(\circ, \circ)$ alors en utilisant le lemme II.5.1 nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_0} \psi \overleftrightarrow{\partial} \phi(\gamma) &= \int_{\Sigma_0} \psi(x) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} \right) \left[- \int_{x^0}^s dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} G_{ret}(y-x) \right. \\ &\quad \left. \int_{\Sigma_s} dz_1 G_{ret}(z_1-y) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial z_1^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_1^0}} \right) \varphi(z_1) \int_{\Sigma_s} dz_2 G_{ret}(z_2-y) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial z_2^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_2^0}} \right) \varphi(z_2) \right] \end{aligned}$$

Encore une fois en utilisant Fubini nous pouvons réécrire cette dernière égalité sous la forme

$$\int_{\Sigma_0} \psi \overleftrightarrow{\partial} \phi(\gamma) = \int_{\Sigma_s} dz_1 \int_{\Sigma_s} dz_2 \psi(z_1, z_2) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial z_1^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_1^0}} \right) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial z_2^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial z_2^0}} \right) \varphi(z_1) \varphi(z_2) \quad (\text{II.5.23})$$

où $\psi(z_1, z_2)$ désigne la quantité

$$\psi(z_1, z_2) := - \int_{x^0}^s dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} \int_{\Sigma_0} \psi(x) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} \right) G_{ret}(y-x) G_{ret}(z_1-y) G_{ret}(z_2-y)$$

où nous voyons apparaître l'expression (II.5.22) de ψ . Ainsi d'après ce que nous venons de voir nous obtenons au finalement

$$\psi(z_1, z_2) = - \int_{x^0}^s dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} \psi(y) G_{ret}(z_1-y) G_{ret}(z_2-y)$$

Nous reconnaissons alors l'expression (II.4.3) page 68 de $\Psi(\gamma)$ et avec les notations du théorème II.4.1 et l'identité (II.5.23) devient alors

$$\int_{\Sigma_0} \psi \overleftrightarrow{\partial} \phi(\gamma) = \left\langle \Psi(\gamma) \overleftrightarrow{\partial}^{(2)}, \varphi \otimes \varphi \right\rangle$$

Les termes d'ordre 1 dans les deux développements coïncident donc. Les termes d'ordre supérieurs se traitent de manière similaire.

Remarque II.5.2

Pour le cas général il suffit de montrer par récurrence sur le nombre de noeuds internes que nous avons l'égalité $\int_{\Sigma_0} \psi \overleftarrow{\partial} \phi(b) = \langle \Psi(b) \overleftarrow{\partial}^{\otimes \|b\|}, \varphi^{\otimes \|b\|} \rangle$.

Nous allons donner maintenant la preuve du lemme II.5.1.

Preuve: (du lemme II.5.1)

D'après la définition de $(\phi(b))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ nous avons $(\square + m^2)\phi(\circ) = 0$ et $(\phi(s, \bullet), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, \bullet)) = (\varphi(s, \bullet), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, \bullet))$. On en déduit pour tout $(t, k) \in [0, s] \times \mathbb{R}^{n-1}$ l'expression suivante pour la transformée de Fourier spatiale⁵ $\widehat{\phi(\circ)}(t, k)$ de $\phi(\circ)$

$$\widehat{\phi(\circ)}(t, k) = \cos((s-t)\omega_k) \widehat{\varphi}(s, k) - \frac{\sin((s-t)\omega_k)}{\omega_k} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial t}(s, k)$$

qui peut se réécrire en utilisant la transformée de Fourier inverse pour tout $x \in [0, s] \times \mathbb{R}^{n-1}$

$$\phi(\circ)(x) = \int_{\Sigma_s} dy G_{ret}(y-x) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y^0}} \right) \varphi$$

D'autre part la solution de l'équation $(\square + m^2)u = f$ telle que $u(s, \bullet) = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(s, \bullet) = 0$ s'écrit en transformée de Fourier spatiale pour tout $(t, k) \in [0, s] \times \mathbb{R}^{n-1}$

$$\widehat{u}(t, k) = \int_s^t d\tau \frac{\sin((t-\tau)\omega_k)}{\omega_k} \widehat{f}(\tau, k)$$

ce qui nous donne en prenant la transformée de Fourier inverse que pour tout $x = (x^0, \vec{x}) \in [0, s] \times \mathbb{R}^{n-1}$

$$u(x^0, \vec{x}) = \int_{x^0}^s dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} G_{ret}(y-x) f(y)$$

Ainsi d'après la définition de $(\phi(b))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ nous avons pour tout $x = (x^0, \vec{x}) \in [0, s] \times \mathbb{R}^{n-1}$ et tout $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{T}(p)^p$

$$\phi(B_+(b_1, \dots, b_p))(x) = - \int_{x^0}^s dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} G_{ret}(y-x) \phi(b_1)(y) \cdots \phi(b_p)(y)$$

Enfin comme nous avons pris $\psi : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ solution de $(\square + m^2)\psi = 0$, nous avons de la même manière que nous avons obtenu l'identité (II.5.18), pour tout $y \in [0, s] \times \mathbb{R}^{n-1}$

$$\psi(y) = \int_{\Sigma_0} d\vec{x} \psi(x) \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} - \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} \right) G_{ret}(y-x)$$

Le lemme se trouve ainsi démontré.

■

⁵c'est-à-dire $\widehat{\phi(\circ)}(t, k) = (2\pi)^{-(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{x} \phi(\circ)(t, \vec{x}) e^{-ik \cdot \vec{x}}$.

II.5.4 Lien avec le calcul perturbatif quantique

Nous avons vu que comment les séries de Butcher permettent de faire un développement perturbatif des solutions de l'équation

$$(\square + m^2)\varphi + \lambda\varphi^p = 0 \quad (E_p)$$

sous la forme d'une série $\sum_{b \in \mathbb{T}(p)} \lambda^{|b|} \phi(b)$ indexée par les arbres plans.

Par ailleurs les physiciens ont développé des théories perturbatives pour l'étude des champs *quantiques* vérifiant (E_p) . Malheureusement la formulation mathématique de ces théories pose d'énormes difficultés et n'est pour l'instant pas achevée.

Nous pouvons tout de même légitimement nous demander s'il existe un rapport entre la série de Butcher décrivant le développement perturbatif d'une solution classique de l'équation (E_p) et les calculs perturbatifs de la théorie quantique des champs tel qu'il est présenté dans la littérature (voir par exemple [48], [31] ou [52]).

Comme nous l'avons précisé, les calculs perturbatifs quantiques effectués par les physiciens n'ont pas encore de cadre mathématiques adaptés. Ainsi les calculs que nous effectuons dans cette section seront purement formels en ce sens que les objets manipulés n'ont aucun sens mathématiques. Néanmoins ce sont des objets que les physiciens manipulent sans complexes, obtenant ainsi des résultats remarquables.

Nous allons montrer que le développement effectué à l'aide des séries de Butcher permet de retrouver formellement la formulation du champ en interaction utilisée par les physiciens. Plus précisément nous montrerons que en partant de la "quantification" de la série de Butcher et en utilisant les règles de commutation du champ libre dans l'espace-temps nous pouvons retrouver la formulation d'Heisenberg de la théorie quantique des champs.

Rappelons brièvement comment se présente la théorie quantique du champ libre dans l'espace temps telle qu'elle est présentée dans les ouvrages classiques de théorie quantique des champs, voir par exemple le livre de Michael E. Peskin et Daniel V. Schroeder [48], de Claude Itzykson et Jean-Benoît Zuber [31] ou encore celui de Lewis H. Ryder [52]. Comme nous n'introduisons ces objets que pour effectuer des calculs formels, nous ne chercherons pas à donner une formulation mathématique précise des objets considérés. Remarquons que cette formulation existe (voir par exemple [50] et [49]) puisque nous ne parlons ici que du champ libre.

Nous manipulerons des opérateurs agissant sur un espace de Hilbert \mathcal{F}_s , l'espace de Fock que nous avons défini dans l'annexe A. Deux opérateurs jouent des rôles particuliers, les opérateurs \mathbf{a}_k^\dagger de *création* de particule de moment $k \in \mathbb{R}^{n-1}$ et les opérateurs \mathbf{a}_k d'*annihilation* d'une particule de moment $k \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ un temps que nous fixons pour le reste de cette partie. Suivant M. Peskin et D. Schroeder [48] p. 83 nous définissons pour $x = (t, \vec{x}) \in \mathcal{X}_0$ l'opérateur $\phi_I(x)$ agissant sur l'espace de Fock par

$$\phi_I(x) = \phi_I(t, \vec{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dk}{\sqrt{2\omega_k}} \left(\mathbf{a}_k e^{-ik \cdot x} + \mathbf{a}_k^\dagger e^{ik \cdot x} \right) \Big|_{x^0=t-t_0}$$

avec $k \cdot x := \omega_k t - k \cdot \vec{x}$ où $k \cdot \vec{x}$ désignant le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^{n-1} et où ω_k désigne la quantité $\omega_k := (|k|^2 + m^2)^{1/2}$. Nous savons alors (voir [48] p.28) que nous avons la relation de commutation suivante pour tout $x, y \in \mathcal{X}_0$

$$[\phi_I(x), \phi_I(y)] = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dk}{2\omega_k} \left(e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)} \right) \quad (\text{II.5.24})$$

Pour $z = (\tau, \vec{z}) \in \mathcal{X}_0$ nous noterons $\Delta(z)$ la quantité

$$\Delta(z) := -\frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dk}{2\omega_k} \left(e^{i\omega_k \tau} - e^{-i\omega_k \tau} \right) e^{ik \cdot \vec{z}} \quad (\text{II.5.25})$$

Nous avons alors de manière évidente $[\phi_I(x), \phi_I(y)] = \Delta(x - y)$.

Remarque II.5.3

Le commutateur des opérateurs $\phi_I(x)$ et $\phi_I(y)$ est ce qu'on appelle un c -nombre (voir [48]), il commute ainsi avec les opérateurs $\phi_I(z)$ pour $z \in \mathcal{X}_0$.

Nous définissons alors formellement une famille $(\Phi(b))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ d'opérateurs agissant sur l'espace de Fock.

Définition II.5.1 *Pour tout $x = (t, \vec{x}) \in \mathcal{X}_0$ nous notons $(\Phi(b)(x))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ la famille d'opérateur définie récursivement par $\Phi(o)(x) := \phi_I(x)$ et pour tout $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{T}(p)^p$*

$$\Phi(B_+(b_1, \dots, b_p))(t, \vec{x}) := -i \int_{t_0}^t dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} \Delta(x - y) \Phi(b_1)(y) \cdots \Phi(b_p)(y) \quad (\text{II.5.26})$$

Considérons alors la série formelle $\Phi(x)$ en la variable λ à coefficient dans les opérateurs agissant sur l'espace de Fock définie par

$$\Phi(x) := \sum_{b \in \mathbb{T}(p)} \lambda^{|b|} \Phi(b)(x) \quad (\text{II.5.27})$$

Remarques II.5.1

- La définition de $\Phi(x)$ est purement formelle car nous n'avons pas tenu compte des problèmes de définition du produit d'opérateur sur la diagonale dans (II.5.26).
- Attardons nous un instant sur cette série et sur la définition II.5.1. Si nous comparons les expressions (II.5.25) de $\Delta(z)$ et (II.5.20) de $G_{ret}(z)$, nous nous rendons compte que nous avons

$$G_{ret}(z) = -i\theta(\tau)\Delta(z) \quad (\text{II.5.28})$$

Prenons alors $t \geq t_0$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$. En revenant alors à l'expression II.5.26 de $\Phi(B_+(b_1 \dots b_p))$ nous obtenons en tenant compte de (II.5.28)

$$\Phi(B_+(b_1, \dots, b_p))(t, \vec{x}) := \int_{t_0}^t dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} G_{ret}(x - y) \Phi(b_1)(y) \cdots \Phi(b_p)(y)$$

expression qu'il faut comparer à l'expression (II.5.19) du lemme II.5.1 définissant la série de Butcher *classique* pour l'équation $(\square + m^2)\varphi + m^2\varphi + \lambda\varphi^p = 0$

$$\tilde{\phi}(B_+(b_1, \dots, b_p))(x) = - \int_{x^0}^s dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} G_{ret}(y-x) \tilde{\phi}(b_1)(y) \cdots \tilde{\phi}(b_p)(y)$$

Nous voyons ainsi que la famille $(\tilde{\phi}(b))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ de *fonctions* $\tilde{\phi}(b) : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ et la famille $(\Phi(b))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ d'*opérateurs* agissant sur l'espace de Fock sont construites suivant exactement le même principe. La seule différence réside dans l'initialisation de cette récursion, dans le premier cas nous posons $\phi(o)(x)$ comme étant la *fonction* satisfaisant $(\square + m^2)u = 0$ ayant des conditions initiales fixées et dans le deuxième cas $\Phi(o)(x)$ est définie comme étant le champs libre de référence $\phi_I(x)$.

Nous pouvons ainsi voir la série (II.5.27) comme le quantifiée de la série de Butcher que nous avons introduite dans la section II.5.2.

Nous avons alors le résultat suivant dont on trouvera la preuve dans l'annexe C.3

Théorème II.5.4 Soient $t > t_0$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Nous avons alors formellement l'égalité suivante

$$\Phi(t, \vec{x}) := \sum_{b \in \mathbb{T}(p)} \lambda^{|b|} \Phi(b)(x) = U^\dagger(t) \phi_I(t, \vec{x}) U(t) \quad (\text{II.5.29})$$

où $U(t)$ est désigne l'opérateur

$$U(t) := \sum_{\alpha \geq 0} (-i\lambda)^\alpha \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{\alpha-1}} d\tau_\alpha H_I(\tau_1) H_I(\tau_2) \cdots H_I(\tau_\alpha) \quad (\text{II.5.30})$$

avec $H_I(\tau)$ donné formellement par

$$H_I(\tau) := \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} \phi_I^{p+1}(\tau, \vec{y})$$

Remarque II.5.4

L'opérateur U défini par (II.5.30) peut se réécrire en utilisant le produit ordonné dans le temps (voir [48] p.85)

$$U(t) = T \left\{ \exp \left(-i\lambda \int_{t_0}^t d\tau H_I(\tau) \right) \right\}$$

L'égalité (II.5.29) est exactement l'*égalité d'Heisenberg* bien connue en théorie quantique des champs. Cette égalité peut être le point de départ de la théorie perturbative quantique (voir par exemple [48] p.77-87). Elle est obtenue en étudiant la dynamique des champs quantiques.

Ce qui nous paraît intéressant dans le résultat (II.5.29) c'est qu'elle permet de faire le lien entre le calcul perturbatif classique que nous avons introduit dans les sections précédentes et le calcul perturbatif quantique tel qu'il est exposé dans les ouvrages de référence.

De plus nous pouvons faire remarquer qu'au niveau classique (c'est-à-dire que l'on remplace tous les $\phi_I(x)$ par une solution de l'équation $(\square + m^2)\phi = 0$) le membre de droite de (II.5.29) n'a pas de signification, contrairement au membre de gauche qui est exactement la série de Butcher, vérifiant ainsi d'après le théorème II.5.1 l'équation $(\square + m^2)\varphi + \lambda\varphi^p = 0$. Nous pouvons ainsi voir les séries de Butcher exactement comme l'analogie classique de l'expansion perturbative du champs quantique en interaction défini par $U^\dagger(t) \phi_I(t, \vec{x}) U(t)$. Pour être tout à fait complet il serait intéressant de trouver une série génératrice pour les séries de Butcher.

II.6 Applications à la théorie du contrôle

Dans le chapitre II nous avons vu comment définir une quantité conservée analogue aux courants de Noether dans le cas d'une équation d'évolution non-linéaire. Or les fonctionnelles $\int_\Sigma \psi \overleftrightarrow{\partial} \varphi$ sont très utilisées en théorie du contrôle. Il nous semble ainsi naturel d'essayer de voir si notre démarche peut avoir des applications dans ce domaine.

Nous traiterons un exemple en dimension finie où les calculs peuvent se faire explicitement. Nous ferons quelques rappels concernant la théorie du contrôle optimal essentiellement repris de l'excellente revue de Sorin Micu et Enrique Zuazua [45]. puis nous verrons comment utiliser les séries de Butcher pour trouver un contrôle dans le cas non-linéaire.

II.6.1 Problème en dimension finie : cas linéaire

Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $T > 0$. Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} x \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^n) \cap H^1([0, T], \mathbb{R}^n) \\ x' = Ax + Bv + \lambda F(x) \\ x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\mathcal{P}_F)$$

où $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $v \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ et F une application

$$F : \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^n) \cap H^1([0, T], \mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2([0, T], \mathbb{R}^n)$$

La question que l'on se pose est la suivante, étant donné $x^0 \in \mathbb{R}^n$ est-il possible de trouver $v \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ telle que la solution x du problème (\mathcal{P}_F) vérifie $x(T) = 0$? Si elle existe, la fonction v est appelé *contrôle*.

Dans le cas linéaire, c'est à dire $\lambda = 0$, la réponse est bien connue, il suffit d'appliquer la méthode du *contrôle optimal*. Rappelons rapidement le principe de cette méthode. Considérons l'équation duale donnée par

$$\begin{cases} y \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^n) \cap H^1([0, T], \mathbb{R}^n) \\ -y' = A^*y \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\mathcal{P}')$$

Alors pour y solution de (\mathcal{P}') et x solution de (\mathcal{P}_F) avec $\lambda = 0$, nous considérons la quantité $\int_0^T (y'(t), x(t)) dt$ où (\bullet, \bullet) désigne le produit scalaire habituel sur \mathbb{R}^n . La fonction y étant solution de (\mathcal{P}') nous avons

$$\int_0^T (y'(t), x(t)) dt = - \int_0^T (A^* y(t), x(t)) dt = - \int_0^T (y(t), Ax(t)) dt$$

D'autre part en faisant une intégration par partie et en utilisant le fait que x est solution de (\mathcal{P}_F) avec $\lambda = 0$ nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T (y'(t), x(t)) dt &= (y(T), x(T)) - (y^0, x^0) - \int_0^T (y(t), x'(t)) dt \\ &= (y(T), x(T)) - (y^0, x^0) - \int_0^T (y(t), Ax(t)) - \int_0^T (y(t), Bv(t)) \end{aligned}$$

Regroupant ces deux dernière identité nous obtenons finalement que pour tout y solution de (\mathcal{P}')

$$(y(T), x(T)) = (y^0, x^0) + \int_0^T (y(t), Bv(t)) \quad (\text{II.6.1})$$

Nous pouvons remarquer que d'après la forme du problème (\mathcal{P}') nous pouvons choisir $y(T)$ arbitrairement dans \mathbb{R}^n c'est-à-dire que pour tout $y_T \in \mathbb{R}^n$ il existe $y^0 \in \mathbb{R}^n$ tel que la solution correspondante de (\mathcal{P}') vérifie $y(T) = y_T$. Ainsi nous obtenons que $x(T) = 0$ si, et seulement si pour tout y solution de (\mathcal{P}')

$$(y^0, x^0) + \int_0^T (y(t), Bv(t)) = 0$$

Il suffit donc de choisir v telle que cette dernière égalité soit vérifiée pour tout y^0 . Une manière de réaliser ceci est de prendre $v := B^* \tilde{y}$ où \tilde{y} est la solution de (\mathcal{P}') avec comme condition initiale \tilde{y}_T minimisant la fonctionnelle $J_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$J_0(y^0) := \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \tilde{y}(t)|^2 dt + \langle x^0, y^0 \rangle \quad (\text{II.6.2})$$

où \tilde{y} désigne la solution de (\mathcal{P}') correspondant à la condition initiale y^0 . On montre alors que le contrôle ainsi obtenu a une norme L^2 minimale parmi tous les contrôles possibles, on l'appelle ainsi *contrôle optimal*.

Il ne reste alors qu'à rechercher un minimiseur (s'il existe) de J_0 . Or on montre que si B vérifie la *condition de Kalman*

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n \quad (\text{II.6.3})$$

alors pour tout temps $T > 0$ il existe $c_T > 0$ tel que toute solution y de (\mathcal{P}') vérifie

$$\int_0^T |B^* y|^2 dt \geq c_T |y^0|^2 \quad (\text{II.6.4})$$

ceci assure alors l'existence d'un minimum pour J_0 et donc l'existence d'un contrôle optimal. Nous avons en réalité le résultat plus fort suivant (voir [42])

Théorème II.6.1 *Le système (\mathcal{P}_F) avec $\lambda = 0$ est exactement contrôlable en temps $T > 0$ quelconque c'est-à-dire que pour tout $T > 0$ et $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$ il existe $v_{T,x^0} \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ tel que la solution x du problème (\mathcal{P}_F) avec $\lambda = 0$ et $v = v_{T,x^0}$ vérifie $x(T) = 0$ si, et seulement si B vérifie la condition de Kalman (II.6.3).*

II.6.2 Cas non linéaire : Principe

Nous nous plaçons maintenant dans le cas $\lambda \neq 0$. Essayons de suivre les étapes précédentes. Nous nous donnons ainsi y solution de (\mathcal{P}') et x solution de (\mathcal{P}_F) , alors en étudiant la quantité $\int_0^T (y'(t), x(t)) dt$ nous voyons qu'au lieu de (II.6.1) nous obtenons

$$(y(T), x(T)) = (y^0, x^0) + \int_0^T (y(t), Bv(t)) dt + \lambda \int_0^T (y(t), F(x(t))) dt \quad (\text{II.6.5})$$

En suivant le même raisonnement que pour le cas linéaire nous obtenons que $x(T) = 0$ si, et seulement si nous avons pour toute solution y de (\mathcal{P}')

$$(y^0, x^0) + \int_0^T (y(t), Bv(t)) dt + \lambda \int_0^T (y(t), F(x(t))) dt = 0 \quad (\text{II.6.6})$$

Nous pouvons alors prendre $v \in L^2((0, T), \mathbb{R}^m)$ sous la forme d'une série $v = \sum_{p \in \mathbb{N}} \lambda^p v_p$ où les v_p sont choisis tels que l'égalité (II.6.6) soit vérifiée à l'ordre p en λ (rappelons ici que x étant solution de (\mathcal{P}_F) , x dépend de λ).

Voyons comment nous pouvons trouver les v_p . Plaçons nous dans le cadre de la section II.5 avec $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = \mathcal{B}_0 = \mathbb{R}^n$. Nous supposons que F est de la forme $F(x) = \sum_{p \geq 2} F_p(x, \dots, x)$ avec $F_p : (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application p -linéaire et supposons la condition **(H2)** vérifiée. Nous pouvons alors voir F comme une forme linéaire sur $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{p \geq 0} (\mathbb{R}^n)^{\otimes p}$.

Prenons v sous la forme d'une série

$$v = \sum_{b \in \mathbb{T}} \lambda^{|b|} v(b)$$

Nous notons $u := (x^0, v)$ qui s'écrit naturellement $u = \sum_{b \in \mathbb{T}} \lambda^{|b|} u(b)$ avec $u(\circ) := (x^0, Bv(\circ))$ et $\forall b \in \mathbb{T}, b \neq \circ, u(b) = (0, Bv(b))$. D'après le théorème II.5.3 p.73 nous savons que sous certaines conditions la solution x de (\mathcal{P}_F) s'écrit sous la forme

$$x = \sum_{b \in \mathbb{T}} \lambda^{|b|} (\Phi * u)(b) \quad (\text{II.6.7})$$

où Φ a été définie dans la section II.5.1. Nous avons ainsi une expression de la solution de (\mathcal{P}_F) en fonction de λ . Ceci va nous permettre d'analyser la condition (II.6.6).

D'après ce qui précède nous avons sous réserve de convergence

$$\begin{aligned}\lambda F(x) &= \sum_{r \geq 1} \sum_{(b^1, \dots, b^r) \in \mathbb{T}^r} \lambda^{1+|b^1|+\dots+|b^r|} F_r((\Phi * u)(b^1) \otimes \dots \otimes (\Phi * u)(b^r)) \\ &= \sum_{b \in \mathbb{T}} \lambda^{|b|} F[(\Phi * u)(B_-(b))]\end{aligned}$$

où nous avons étendu $\Phi * u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ en un morphisme d'algèbre $\Phi * u : \mathbb{F} \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ de manière naturelle et où F est vue comme une forme linéaire sur $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi la condition (II.6.6) s'écrit

$$\begin{aligned}(y^0, x^0) + \int_0^T (y(t), Bv(\circ)(t)) \\ + \sum_{\substack{b \in \mathbb{T} \\ b \neq \circ}} \lambda^{|b|} \left(\int_0^T (y(t), Bv(b)(t)) + \int_0^T (y(t), F[(\Phi * u)(B_-(b))]) dt \right) = 0\end{aligned}$$

Nous voyons ainsi qu'il suffit de prendre la famille $(v(b))_{b \in \mathbb{T}}$ telle que

$$(y^0, x^0) + \int_0^T (y(t), Bv(\circ)(t)) = 0 \quad (\text{II.6.8})$$

$$\forall b \neq \circ ; \int_0^T (y(t), Bv(b)(t)) + \int_0^T (y(t), F[(\Phi * u)(B_-(b))]) dt = 0 \quad (\text{II.6.9})$$

Nous retrouvons ainsi dans (II.6.8) la condition (II.6.1) du contrôle linéaire et nous pouvons faire remarquer que pour tout $b \in \mathbb{T} \setminus \{\circ\}$ seul le premier terme de (II.6.9) fait intervenir $v(b)$, tous les autres $v(c)$ apparaissant dans cette expression vérifient $|c| < |b|$ car ils proviennent de $B_-(b)$. Nous voyons ainsi la possibilité de définir récursivement les $v(b)$. Nous savons de plus que pour trouver une fonction $v(\circ)$ vérifiant (II.6.8) il suffit de minimiser la fonctionnelle J_0 . De la même manière nous voyons que pour trouver $v(b)$ connaissant les $v(c)$ pour $|c| < |b|$ il suffit de de minimiser la fonctionnelle

$$J(b)(y^0) := \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \tilde{y}(t)|^2 dt + \int_0^T (\tilde{y}(t), F[(\Phi * u)(B_-(b))]) dt$$

où \tilde{y} désigne toujours la solution de (\mathcal{P}') correspondant à la condition initiale y^0 . Voyons maintenant plus précisément comment nous pouvons trouver le contrôle.

II.6.3 Calcul perturbatif du contrôle

Tout d'abord nous voyons que nous sortons un petit peu du cadre de la section II.5, en effet nous ne cherchons plus les solutions dans un espace du type $\mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^n)$. Cependant les choses se passent de manière tout à fait similaires.

Considérons \mathcal{I} l'espace $\mathcal{I} := \mathbb{R}^n \times L^2((0, T), \mathbb{R}^n)$ et \mathcal{I}_0 le sous-espace de \mathcal{I} défini par $\mathcal{I}_0 := \{0\} \times L^2((0, T), \mathbb{R}^n) \cong L^2((0, T), \mathbb{R}^n)$. Nous notons \mathcal{K} l'espace $\mathcal{K} := C^0([0, T], \mathbb{R}^n) \cap H^1([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Alors nous considérons ϕ_0 l'application linéaire continue $\phi_0 : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{K}$ qui à $u = (x^0, f) \in \mathcal{I}$ associe $\phi_0(x^0, f)$ solution du problème

$$\begin{cases} x \in \mathcal{K} \\ x' = Ax + f \\ x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\mathcal{P}_0)$$

Nous noterons alors $\mu : \mathcal{I}_0 \cong L^2((0, T), \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{K}$ l'application ϕ_0 restreinte à \mathcal{I}_0 .

Nous nous donnons alors une application $F : \mathcal{K} \longrightarrow L^2((0, T), \mathbb{R}^n)$ s'écrivant sous la forme $F(x) = \sum_{p \geq 2} F_p(x, \dots, x)$ où pour tout $p \geq 2$; F_p est une application linéaire continue $F_p : \mathcal{K}^{\otimes p} \longrightarrow L^2((0, T), \mathbb{R}^n)$. Nous supposons de plus que la série entière $|F|$ définie par

$$|F|(z) := \sum_{p \geq 0} \|F_p\| z^p$$

a un rayon de convergence infini. Nous avons ainsi supposé l'analogie des conditions **(H1)** et **(H2)** vérifiées.

Définition II.6.1 Nous définissons la famille $(\Phi(b))_{b \in \mathbb{T}}$ d'applications $\Phi(b) : \mathcal{I}^{\otimes \|b\|} \longrightarrow \mathcal{K}$ récursivement en posant $\Phi(\circ) := \phi_0$ et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{T}^r$

$$\Phi(B_+(b_1, \dots, b_r)) := \mu \circ F[\Phi(b_1) \otimes \dots \otimes \Phi(b_r)]$$

avec la convention $F_1 \equiv 0$.

Définition II.6.2 Soit $(u(b))_{b \in \mathbb{T}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}(\mathcal{I})$ telle que $\forall b \in \mathbb{T}; u(b) \in \mathcal{I}^{\otimes \|b\|}$. Nous pouvons alors voir u comme une application linéaire $u : \mathbb{A} \longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{I})$ que nous pouvons étendre de manière unique en un morphisme d'algèbre $u : \mathbb{F} \longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{I})$. Alors nous définissons $\Phi * u$ l'application $\Phi * u : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{K}$ définie par $\forall b \in \mathbb{T}$

$$(\Phi * u)(b) := \sum \Phi(b_{(2)}) (u(b_{(1)}))$$

où nous avons noté $\tilde{\Delta}(b) = \sum b_{(1)} \otimes b_{(2)} \in \mathbb{F} \otimes \mathbb{A}$.

Nous avons alors le théorème suivant dont on trouvera la preuve dans l'annexe D.

Théorème II.6.2 Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ fixé. Nous supposons que B vérifie la condition de Kalman (II.6.3) alors il existe une famille $(v(b))_{b \in \mathbb{T}}$ d'éléments de $L^2((0, T), \mathbb{R}^m)$ telle que pour tout $b \in \mathbb{T}$; $v(b) := B^* \tilde{y}(b)$ où $\tilde{y}(b)$ est la solution de (\mathcal{P}') correspondant à la condition initiale $\tilde{y}^{(b)}$ minimisant la fonctionnelle $J(b) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ où les $J(b)$ sont définies par

$$\begin{aligned} J(\circ)(y^0) &:= J_0(y^0) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \tilde{y}(t)|^2 dt + \langle x^0, y^0 \rangle \\ J(b)(y^0) &:= \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \tilde{y}(t)|^2 dt + \int_0^T (\tilde{y}(t), F[(\Phi * u)(B_-(b))]) dt \end{aligned}$$

où \tilde{y} désigne la solution de (\mathcal{P}') correspondant à la condition initiale y^0 et où $(u(b))_{b \in \mathbb{T}}$ désigne la famille d'éléments de $\mathcal{T}(\mathcal{I})$ définie par $u(\circ) := (x^0, Bv(b))$ et pour tout $b \in \mathbb{T}$, $b \neq \circ$; $u(b) := (0, Bu(b))$.

1. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et x^0 vérifient la condition

$$\frac{|\lambda| \|B\|}{\|u(\circ)\|} |F|(16C \|u(\circ)\|) < 1$$

avec $C := \frac{\|\mu\| \sqrt{c_T} + \|B\| \|\phi_0^*\| \|\phi_0\|}{\|B\| \|\phi_0^*\|}$ alors la famille $(\lambda^{|b|} v(b))_{b \in \mathbb{T}}$ est sommable dans $L^2((0, T), \mathbb{R}^m)$

et la série $|u|$ définie par $|u| := \sum_{b \in \mathbb{T}} |\lambda|^{|b|} \|u(b)\|$ vérifie

$$|u| \leq \frac{16 \|u(\circ)\|}{1 - \frac{|\lambda| \|B\|}{\|u(\circ)\|} |F|(16A \|u(\circ)\|)}$$

2. Si en plus nous avons

$$|\lambda| < \frac{\|\phi_0\| |u|}{\|\mu\| |F|(16 \| \phi_0 \| |u|)} \quad (\text{II.6.10})$$

alors la fonction $v = \sum_{b \in \mathbb{T}} \lambda^{|b|} v(b)$ conduit la solution du problème (\mathcal{P}_F) de x^0 à 0.

Remarque II.6.1

Si nous cherchons à généraliser ce résultat à d'autres équations, notamment en dimension infinie, nous nous rendons compte que s'il est relativement simple de définir la suite de fonction $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ il est bien plus difficile de montrer que la série $\sum_p \lambda^p u_p$ converge dans l'espace voulu.

Annexe A

Théorie quantique du champ libre

Dans cette annexe nous allons exposer la théorie quantique du champ libre. Cet exposé est entièrement repris des livres très clairs de Michael Reed et Barry Simon [50] et [49]. Nous renvoyons le lecteur à ces ouvrages pour les preuves des résultats et pour plus d'informations sur la construction.

A.1 Espace de Fock

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, nous notons $L_s^2((\mathbb{R}^{n-1})^p)$ le sous-espace des fonctions de $L^2((\mathbb{R}^{n-1})^p)$ invariantes sous l'action du groupe \mathfrak{S}_p des permutations sur p éléments c'est à dire

$$L_s^2((\mathbb{R}^{n-1})^p) := \left\{ f^{(p)} \in L^2((\mathbb{R}^{n-1})^p) \mid \forall (g_1, \dots, g_p) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}); \forall \sigma \in \mathfrak{S}_p ; \right. \\ \left. \int_{(\mathbb{R}^{n-1})^p} f^{(p)} \overline{g_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes g_{\sigma(p)}} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f^{(p)} \overline{g_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes g_{\sigma(p)}} \right\}$$

Nous définissons alors l'espace vectoriel F_0 comme étant la somme directe (algébrique) des espaces $L_s^2((\mathbb{R}^{n-1})^p)$

$$F_0 := \bigoplus_{p \geq 0} L_s^2((\mathbb{R}^{n-1})^p)$$

avec par convention $F_0 := \mathbb{C}$. L'espace F_0 hérite naturellement de la structure hermitienne des espaces $L_s^2((\mathbb{R}^{n-1})^p)$ via le produit scalaire

$$\left(\sum_{finie} v^{(p)} \mid \sum_{finie} w^{(q)} \right) := \sum_r \int_{(\mathbb{R}^{n-1})^r} v^{(r)} \overline{w^{(r)}} \quad (\text{A.1.1})$$

Alors nous notons $\mathcal{F}_s(L_s^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ (ou plus simplement \mathcal{F}_s s'il n'y a pas d'ambiguïté) le complété de F_0 muni de la norme induite par le produit scalaire (A.1.1) c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_s(L^2(\mathbb{R}^{n-1})) := \widehat{\bigoplus_{p \geq 0} L_s^2((\mathbb{R}^{n-1})^p)}$$

Nous obtenons ainsi un espace de Hilbert séparable qu'on appelle *espace de Fock symétrique* ou *espace de Fock bosonique* dans la littérature. Nous pouvons voir les éléments de \mathcal{F}_s (c'est-à-dire les *états* pour les physiciens) comme une famille de fonctions $(f^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ avec $f^{(0)} \in \mathbb{C}$ et $\forall p \geq 1, f^{(p)} \in L_s^2((\mathbb{R}^{n-1})^p)$ telle que

$$|f^{(0)}|^2 + \sum_{p \geq 1} \int_{(\mathbb{R}^{n-1})^p} |f^{(p)}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)|^2 d\vec{x}_1 \cdots d\vec{x}_p < +\infty$$

Nous renvoyons le lecteur à [50] p.53 pour plus des précisions sur la définition de l'espace de Fock sur un Hilbert quelconque.

A.2 Théorie Quantique du champ libre

Soit f une fonction de $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ alors nous notons $a^-(f)$ et $a^-(f)^*$ les opérateurs non bornés sur \mathcal{F}_s de domaine F_0 tels que pour tout $v = \sum v^{(p)} \in F_0$ avec $v^{(p)} \in L_s^2((\mathbb{R}^{n-1})^p)$ pour tout p nous ayons $a^-(f)v := \sum_p (a^-(f)v)^{(p)}$ et $a^-(f)^*v := \sum_p (a^-(f)^*v)^{(p)}$ où pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$(a^-(f)v)^{(p)}(m_1, \dots, m_p) := \sqrt{p+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \bar{f}(m)v^{(p+1)}(m, m_1, \dots, m_p)$$

$$(a^-(f)^*v)^{(p)}(m_1, \dots, m_p) := \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j=1}^p f(m_j)v^{(p-1)}(m^{\vee j})$$

avec $m^{\vee j} := (m_1, \dots, m_{j-1}, m_{j+1}, \dots, m_p)$. Nous pouvons tout d'abord remarquer que l'application $f \mapsto a^-(f)$ est \mathbb{C} -antilinéaire alors que $f \mapsto a^-(f)^*$ est \mathbb{C} -linéaire. Ensuite pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ les opérateurs $a^-(f)$ et $a^-(g)^*$ envoient tous deux l'espace F_0 dans lui-même. Nous pouvons donc composer ces opérateurs obtenant ainsi un opérateur non-borné de domaine F_0 envoyant son domaine dans lui-même.

Introduisons quelques notations. Tout d'abord nous noterons μ la fonction $\mu : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$ définie par

$$\mu(\vec{k}) := \left(|\vec{k}|^2 + m^2 \right)^{1/2} > 0$$

et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ nous notons Cf la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ définie par $\forall \vec{k} \in \mathbb{R}^{n-1}, Cf(\vec{k}) := f(-\vec{k})$. Enfin pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ nous noterons $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ la transformée de Fourier de f c'est-à-dire

$$\hat{f}(\vec{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{(n-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, nous définissons alors les opérateurs $\varphi_m(f)$ et $\pi_m(f)$ non-bornés sur \mathcal{F}_s de domaine F_0 par

$$\begin{aligned}\varphi_m(f) &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[a^- \left(C\hat{f}/\sqrt{\mu} \right) + a^- \left(\hat{f}/\sqrt{\mu} \right)^* \right] \\ \pi_m(f) &:= \frac{i}{\sqrt{2}} \left[a^- \left(\sqrt{\mu}\hat{f} \right)^* - a^- \left(\sqrt{\mu}C\hat{f} \right) \right]\end{aligned}\tag{A.2.1}$$

On peut alors montrer (voir [49] p.213-218) que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ à valeurs réelles, les opérateurs $\varphi_m(f)$ et $\pi_m(f)$ sont essentiellement autoadjoint sur F_0 . Remarquons que les applications $f \mapsto \varphi_m(f)$ et $f \mapsto \pi_m(f)$ de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ sur l'espace des opérateurs de domaine F_0 sont \mathbb{C} -linéaires. On appelle ces applications les *champs à temps constant*. On peut vérifier (voir [49] p.218) que pour f et g appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ et à valeurs réelles, les opérateurs $\varphi_m(f)$ et $\pi_m(g)$ vérifient la relation de commutation dite *relation de commutation canonique* (CCR)

$$[\varphi_m(f), \pi_m(g)] = i \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} fg \right) id\tag{A.2.2}$$

Remarque A.2.1

Nous avons utilisé la transformée de Fourier pour définir les opérateurs $\varphi_m(f)$ et $\pi_m(g)$ mais ce n'est pas nécessaire. Nous renvoyons le lecteur au livre de M. Reed et B. Simon [49] p.210 pour la construction générale.

On peut voir l'opérateur $\varphi_m(f)$ comme la quantification du champ classique $\varphi|_{t=0}$ et $\pi_m(f)$ comme la quantification de $\frac{\partial \varphi}{\partial t}|_{t=0}$. Nous renvoyons le lecteur encore une fois au livre de M. Reed et B. Simon [50], [49] pour des explications plus approfondies sur la construction précédente.

Enfin pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ nous définissons les opérateurs $\mathbf{a}(f)$ et $\mathbf{a}^\dagger(f)$ non bornés de domaine F_0 par

$$\mathbf{a}^\dagger(f) := a^- (\sqrt{\mu}f)^* \quad \text{et} \quad \mathbf{a}(f) := a^- (\sqrt{\mu}Cf)$$

alors directement d'après cette définition et (A.2.1) nous obtenons que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ nous avons

$$\begin{aligned}\varphi_m(f) &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mathbf{a}(\hat{f}/\mu) + \mathbf{a}^\dagger(\hat{f}/\mu) \right] \\ \pi_m(f) &:= \frac{i}{\sqrt{2}} \left[\mathbf{a}^\dagger(\hat{f}) - \mathbf{a}(\hat{f}) \right]\end{aligned}\tag{A.2.3}$$

D'autre part on peut montrer (voir [49] p.210) que pour tout $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ à valeurs réelles les opérateurs $\mathbf{a}(f)$ et $\mathbf{a}^\dagger(g)$ vérifient la relation de commutation suivante

$$\left[\mathbf{a}(f), \mathbf{a}^\dagger(g) \right] = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mu(\vec{k}) f(-\vec{k}) g(\vec{k}) d\vec{k} \right) id\tag{A.2.4}$$

Annexe B

Preuves du chapitre I

B.1 Formes Observables

Nous prouverons ici les résultats de la section I.2 du chapitre I. Nous nous donnons une variété pseudo-Riemannienne (\mathcal{X}, g) orientable de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ munie d'une forme volume ω et un système de coordonnées $(x^\mu)_{\mu \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ sur \mathcal{X} .

Considérons \mathcal{M} le fibré $\mathcal{M} := \Lambda^n T^*(\mathcal{X} \times \mathbb{R})$ sur $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$ sur lequel nous avons les coordonnées $((x^\mu)_\mu, \phi, e, (p^\alpha)_\alpha)$ où pour tout $(x, \phi) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}$ un élément $\pi \in \Lambda^n T^*_{(x, \phi)}(\mathcal{X} \times \mathbb{R})$ est repéré par $\pi = e\omega + p^\alpha d\phi \wedge \omega_\alpha$. On munit alors \mathcal{M} d'une *forme multisymplectique* Ω définie en coordonnées par

$$\Omega := de \wedge \omega + dp^\mu \wedge d\phi \wedge \omega_\mu - \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} p^\mu d\phi \wedge \omega$$

où ω_μ désigne la $(n-1)$ -forme $\omega_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lrcorner \Omega$. On définit de plus l'hamiltonien $\mathcal{H} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$d\mathcal{H} := e + \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu + m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2) \quad (\text{B.1.1})$$

Nous rappelons alors l'énoncé de la proposition I.2.1

Proposition B.1.1 *Soit $\zeta \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ alors ζ vérifie $d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0$ si, et seulement si ζ s'écrit $\zeta = \chi + \bar{\zeta}$ où $\bar{\zeta}$ est de la forme*

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} := & X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \psi \frac{\partial}{\partial \phi} - \left[e \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [gX^\mu] + p^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \right] \frac{\partial}{\partial e} \\ & + \left[p^\beta \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} - \delta_\beta^\alpha \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [gX^\mu] \right) \right) - e \frac{\partial X^\alpha}{\partial \phi} \right] \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

avec $X^\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ quelconques et où χ est de la forme $\chi := E \frac{\partial}{\partial e} + \Pi^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu}$ avec $E : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Pi^\mu : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation

$$\frac{\partial E}{\partial \phi} - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [g\Pi^\mu] = 0 \quad (\text{B.1.3})$$

De plus on a $d(\bar{\zeta} \lrcorner \Omega) = d(\chi \lrcorner \Omega) = 0$.

Preuve: (proposition B.1.1)

Soit $\zeta \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ tel que $d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0$. Sans perte de généralité nous pouvons écrire ζ sous la forme $\zeta = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \psi \frac{\partial}{\partial \phi} + E \frac{\partial}{\partial e} + \Pi^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu}$ où X^α , ψ , E et Π^μ sont des fonctions lisses de \mathcal{M} dans \mathbb{R} . La n -forme $\zeta \lrcorner \Omega$ est alors donnée par

$$\begin{aligned} \zeta \lrcorner \Omega &= -X^\alpha de \wedge \omega_\alpha + X^\alpha dp^\mu \wedge d\phi \wedge \omega_{\alpha\mu} - \psi dp^\mu \wedge \omega_\mu \\ &\quad + \left(E - p^\alpha \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} \psi \right) \omega + \left(\Pi^\alpha + p^\mu \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} X^\alpha \right) d\phi \wedge \omega_\alpha \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant d'analyser l'équation $d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0$. Les termes en $dp^\beta \wedge dp^\mu \wedge \omega_\mu$, $dp^\beta \wedge dp^\mu \wedge d\phi \wedge \omega_{\alpha\mu}$, $de \wedge dp^\mu \wedge \omega_\mu$ et $dp^\beta \wedge de \wedge \omega_\mu$ nous donnent directement que les fonctions X^α et ψ ne dépendent que des variables x et ϕ . Dés lors l'analyse des termes en $de \wedge d\phi \wedge \omega_\alpha$, $dp^\mu \wedge \omega$, $de \wedge \omega$, $dp^\beta \wedge d\phi \wedge \omega_\mu$ et $d\phi \wedge \omega$ nous donne respectivement les équations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^\alpha}{\partial e} + \frac{\partial X^\alpha}{\partial \phi} &= 0 && (de \wedge d\phi \wedge \omega_\alpha) \\ \frac{\partial E}{\partial p^\mu} + \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} &= 0 && (dp^\mu \wedge \omega) \\ \frac{\partial E}{\partial e} + \frac{1}{g} \frac{\partial g X^\alpha}{\partial x^\alpha} &= 0 && (de \wedge \omega) \\ \frac{\partial \Pi^\mu}{\partial p^\beta} + \delta_\beta^\mu \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{1}{g} \frac{\partial g X^\alpha}{\partial x^\alpha} \right) - \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\beta} &= 0 && (dp^\beta \wedge d\phi \wedge \omega_\mu) \\ \frac{\partial E}{\partial \phi} - \frac{1}{g} \frac{\partial g P^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} p^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} X^\beta \right) p^\alpha &= 0 && (d\phi \wedge \omega) \end{aligned}$$

Les quatre premières équations impliquent que si ζ vérifie l'équation $d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0$ alors ζ s'écrit $\zeta = \bar{\zeta} + \mathcal{U}'$ où $\bar{\zeta}$ est donné par (B.1.2) et où $\mathcal{U}' := \zeta - \bar{\zeta}$ est de la forme

$$\mathcal{U}' = E' \frac{\partial}{\partial e} + \Pi'^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu}$$

où $E' : \mathcal{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Pi'^\mu : \mathcal{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions lisses. Réciproquement tout champ de vecteurs de la forme $\bar{\zeta} + \mathcal{U}'$ vérifie les quatre premières équations. Il nous suffit donc d'étudier la dernière équation ($d\phi \wedge \omega$) pour $\zeta = \bar{\zeta} + \mathcal{U}'$. Un calcul direct nous donne alors que celle-ci est équivalente à l'équation suivante sur E' et Π'^μ

$$\frac{\partial E'}{\partial \phi} - \frac{1}{g} \frac{\partial (g \Pi'^\mu)}{\partial x^\mu} = 0$$

c'est-à-dire (B.1.3). La proposition B.1.1 se trouve ainsi démontrée.

■

Corollaire B.1.1 *Les formes observables algébriques (voir définition (I.2.1) page 26) s'écrivent $F = F_X + F_\psi + F_\chi$ avec F_X et F_ψ de la forme*

$$\begin{aligned} F_X &:= e X^\alpha \omega_\alpha - p^\alpha X^\beta d\phi \wedge \omega_{\beta\alpha} \\ F_\psi &:= p^\alpha \psi \omega_\alpha \end{aligned}$$

où $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et $X^\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions lisses et où F_χ est une $(n-1)$ -forme sur \mathcal{M} telle que

$$dF_\chi = E\omega + \Pi^\mu d\phi \wedge \omega_\mu$$

où $E : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Pi^\mu : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient alors l'équation (B.1.3).

Preuve: (corollaire B.1.1)

Soit F une $(n-1)$ -forme observable algébrique. Par définition il existe $\zeta \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ tel que $\zeta \lrcorner \Omega = -dF$. Nous avons donc $d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0$. Alors d'après la proposition B.1.1 ζ s'écrit $\zeta = \bar{\zeta} + \chi$ avec $\bar{\zeta}$ de la forme (B.1.2) et χ de la forme $\chi = E(q)\frac{\partial}{\partial e} + \Pi^\mu(q)\frac{\partial}{\partial p^\mu}$ avec E et Π^μ vérifiant (B.1.3). On vérifie alors aisément que les formes F_X et F_ψ définies à partir des fonctions X^α et ψ intervenant dans (B.1.2) vérifient $d(F_X + F_\psi) + \bar{\zeta} \lrcorner \Omega = 0$. Nous obtenons donc $d(F - F_X - F_\psi) = (\zeta - \bar{\zeta}) \lrcorner \Omega = \chi \lrcorner \Omega$ ce qui prouve le corollaire. ■

Intéressons nous maintenant aux observables dynamiques. Nous rappelons ici l'énoncé de la proposition I.2.2

Proposition B.1.2 Soit $\zeta \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ un champ de vecteurs tel que $d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0$ et vérifiant $d\mathcal{H}(\zeta) = 0$ alors ζ s'écrit de manière unique $\zeta = \zeta_X + \zeta_\psi$ où ζ_ψ est donné par

$$\zeta_\psi := \psi(x)\frac{\partial}{\partial \phi} - \left(\phi(m^2 + \xi R)\psi(x) + p^\alpha \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial e} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \quad (\text{B.1.4})$$

avec $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation (K-G) et où ζ_X est un champ de vecteurs de Killing i.e. vérifiant l'équation

$$L_{\zeta_X}(g_{\mu\nu}) = 0 \quad (\text{B.1.5})$$

$L_{\zeta_X}(g_{\mu\nu})$ désigne la dérivée de Lie de la métrique.

Preuve: (proposition B.1.2)

Soit $\zeta \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$ un champ de vecteurs vérifiant $d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0$, alors d'après la proposition B.1.1 ζ s'écrit $\zeta = \bar{\zeta} + \chi$ où $\bar{\zeta}$ est donné par (B.1.2) et χ est de la forme $\chi = E(q)\frac{\partial}{\partial e} + \Pi^\mu(q)\frac{\partial}{\partial p^\mu}$ avec $E : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\Pi^\mu : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (B.1.3). Il nous faut maintenant analyser l'équation $d\mathcal{H}(\zeta) = 0$.

D'après la définition (B.1.1) de \mathcal{H} , la forme $d\mathcal{H}$ est donnée en coordonnées locales par

$$d\mathcal{H} = de + g_{\alpha\beta} p^\beta dp^\alpha + (m^2 + \xi R)\phi d\phi + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} p^\alpha p^\beta + \xi \frac{\partial R}{\partial x^\mu} \phi^2 \right] dx^\mu$$

Nous pouvons alors remarquer que $d\mathcal{H}(\zeta)$ est une expression polynomiale en les variables (e, p^μ) , ainsi l'équation $d\mathcal{H}(\zeta) = 0$ est équivalente à l'annulation des coefficients des

monômes correspondants. On obtient ainsi les équations suivantes

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial \phi} = 0 \quad (E_e)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [gX^\alpha] = 0 \quad (E_{ep})$$

$$\forall \alpha ; \Pi^\alpha = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x^\beta} \quad (E_p)$$

$$\forall \alpha, \beta ; g_{\mu\alpha} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\beta} + g_{\mu\beta} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} - 2g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \phi} + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [gX^\mu] \right) + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} X^\mu = 0 \quad (E_{p^2})$$

$$E + (m^2 + \xi R)\phi\psi + \frac{1}{2}\phi^2\xi \frac{\partial R}{\partial x^\mu} X^\mu \quad (E_1)$$

auxquelles il faut ajouter l'équation (B.1.3).

Considérons tout d'abord le système d'équations (E_{p^2}). En utilisant (E_{ep}) nous voyons qu'elles se réduisent à

$$\forall \alpha, \beta ; g_{\mu\alpha} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\beta} + g_{\mu\beta} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} X^\mu - 2g_{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0 \quad (B.1.6)$$

Nous obtenons à partir de ces équations l'expression suivante pour $\frac{\partial \psi}{\partial \phi}$

$$2n \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 2 \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} X^\mu$$

et nous reconnaissons alors dans le second membre de cette dernière égalité exactement l'expression de $\frac{2}{g} \frac{\partial (gX^\mu)}{\partial x^\mu}$. En effet comme par définition $g = |\det(g_{\mu\nu})|^{1/2}$ nous avons

$$\frac{1}{g} \frac{\partial (gX^\mu)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\mu} X^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{1}{g} \frac{1}{2g} g^2 \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} g^{\alpha\beta} X^\mu$$

Ainsi en utilisant (E_{ep}) nous obtenons finalement que $\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0$ ce qui nous assure que ψ ne dépend que de x i.e. $\psi = \psi(x)$ et le système d'équations (B.1.6) se réduit alors à l'équation de Killing c'est-à-dire

$$L_{\zeta_X}(g_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} = g_{\mu\alpha} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\beta} + g_{\mu\beta} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} X^\mu = 0$$

et nous avons alors $X \cdot R = X^\mu \frac{\partial R}{\partial x^\mu} = 0$ ce qui nous permet de simplifier l'équation (E_1).

Nous avons obtenu que ψ ne dépendait que de x ; alors en utilisant l'équation (E_e) et en dérivant deux fois l'équation (E_1) par rapport à ϕ nous obtenons que $\frac{\partial^2 E}{\partial \phi^2} = 0$ ainsi E s'écrit $E = E_0(x) + \phi E_1(x)$ avec $E_0, E_1 : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, des fonctions lisses. Nous remarquons alors que le terme de gauche de l'équation (E_1) est une expression polynomiale en ϕ et en considérant le coefficient de chaque monôme de cette expression, nous obtenons que $E_0 \equiv 0$ et

$$E_1(x) + (m^2 + \xi R)\psi(x) = 0 \quad (E_\phi)$$

Mais d'après (B.1.3) et (E_p) nous avons

$$E_1(x) = \frac{\partial E}{\partial \phi} = \frac{1}{g} \frac{\partial (g\Pi^\alpha)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(gg^{\alpha\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x^\beta} \right)$$

et l'équation (E_ϕ) devient alors exactement l'équation de Klein–Gordon pour ψ .

Réciproquement il est très facile de vérifier que les champs de vecteurs de la forme ζ_X et ζ_ψ vérifient les équations $d(\zeta \lrcorner \Omega) = 0$ et $d\mathcal{H}(\zeta) = 0$. La proposition B.1.2 se trouve ainsi démontrée.

■

B.2 Représentation

Nous reprendrons les notations de la section I.5.3 page 36. Nous allons donner la preuve du théorème I.5.1 dont nous rappelons l'énoncé

Théorème B.2.1 *L'application $\mathcal{Q} : \mathcal{V}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{L}(S(\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}}))$ (voir la définition I.5.4 page 38) vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout ζ et ζ' appartenant à $\mathcal{V}^{\mathbb{C}} \cong \mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{V}_\chi^{\mathbb{C}}$ nous avons*

$$\mathcal{Q}([\zeta, \zeta']) = i [\mathcal{Q}(\zeta), \mathcal{Q}(\zeta')] \quad (\text{B.2.1})$$

où le crochet du membre de gauche désigne le crochet dans $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ et celui du membre de droite le commutateur de $\mathcal{L}(S(\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}}))$ ($\forall (A, B) \in \mathcal{L}(S(\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}}))$ on a $[A, B] := A \circ B - B \circ A$).

2. *pour tout $\zeta \in \mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ nous avons l'identité suivante*

$$\mathcal{Q}(\zeta^*) = \mathcal{Q}(\zeta)^* \quad (\text{B.2.2})$$

où l'astérisque du membre de gauche désigne la conjugaison complexe et celui de droite l'opérateur adjoint.

Preuve: (théorème B.2.1)

Commençons par le point 1. Il suffit de démontrer l'identité (B.2.1) pour (ζ, ζ') appartenant successivement à \mathcal{V}_ϕ^2 , \mathcal{V}_χ^2 et $\mathcal{V}_\phi \times \mathcal{V}_\chi$.

De manière à alléger les expressions nous noterons V l'algèbre commutative librement engendrée par $\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}}$ i.e. $V := S(\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}})$.

Soient $(\zeta, \zeta') \in \mathcal{V}_\phi^2$ et $v \in V$, il s'agit de montrer l'égalité (B.2.1) en v . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que v est un élément décomposable de $(\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}})^{\odot k}$ avec $k \in \mathbb{N}$, le cas général s'obtenant alors par linéarité. Si $k = 0$ il n'y a rien à montrer, supposons maintenant $k \geq 1$.

Notons $v = v_1 \odot \cdots \odot v_k$ avec $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $v_i \in \mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}}$. Alors d'après la définition (I.5.4) de $\mathcal{Q}(\zeta_\phi)$ et $\mathcal{Q}(\zeta'_\phi)$ nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\zeta_\phi) (\mathcal{Q}(\zeta'_\phi)(v)) &= \zeta_\phi \odot \zeta'_\phi \odot v + (\zeta'_\phi | \zeta_\phi^*) v + \sum (v_{(1)} | \zeta_\phi^*) \zeta'_\phi \odot v_{(2)} \\ &+ \sum (v_{(1)} | \zeta_\phi^{*'}) \zeta_\phi \odot v_{(2)} + \sum \sum (v_{(1)} | \zeta_\phi^*) (v_{(2)(1)} | \zeta_\phi^{*'}) \odot v_{(2)(2)} \end{aligned} \quad (\text{B.2.3})$$

où nous avons noté $\delta(v) = \sum v_{(1)} \otimes v_{(2)} \in \mathcal{V}_\phi \otimes V$ et de la même façon $\delta(v_{(2)}) = \sum v_{(2)(1)} \otimes v_{(2)(2)}$. En utilisant la propriété I.5.1 de l'opérateur de Spencer le dernier terme du membre de droite de l'égalité (B.2.3) peut s'écrire

$$(v_{(1)}|\zeta_\phi^*) (v_{(2)(1)}|\zeta_\phi'^*) \odot v_{(2)(2)} = \sum_{i \neq j} (v_i|\zeta_\phi^*) (v_j|\zeta_\phi'^*) \odot v^{\vee i,j} \quad (\text{B.2.4})$$

où $v^{\vee i,j}$ désigne l'élément $v_1 \odot \cdots \odot v_{i-1} \odot v_{i+1} \odot \cdots \odot v_{j-1} \odot v_{j+1} \odot \cdots \odot v_k$ de $\mathcal{V}_\phi^{\odot k-2}$. Nous voyons alors que l'expression (B.2.3) est symétrique en ζ_ϕ et ζ_ϕ' et nous obtenons finalement

$$\mathcal{Q}(\zeta_\phi) (\mathcal{Q}(\zeta_\phi')(v)) - \mathcal{Q}(\zeta_\phi') (\mathcal{Q}(\zeta_\phi)(v)) = 0 = \mathcal{Q}([\zeta_\phi, \zeta_\phi'])(v)$$

car $[\zeta_\phi, \zeta_\phi'] = 0$. Nous avons donc (B.2.1) pour $(\zeta, \zeta') \in (\mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}})^2$.

Considérons maintenant le cas $(\zeta, \zeta') \in (\mathcal{V}_\chi^{\mathbb{C}})^2$. Nous nous donnons ainsi $(\zeta_\chi, \zeta_\chi') \in \mathcal{V}_\chi^2$ et $v \in V$. Nous avons alors d'après (I.5.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\zeta_\chi) \circ \mathcal{Q}(\zeta_\chi')(v) &= i \sum \mathcal{Q}(\zeta_\chi) ([\zeta_\chi', v_{(1)}] \odot v_{(2)}) \\ &= - \sum [\zeta_\chi, [\zeta_\chi', v_{(1)}]] \odot v_{(2)} - \sum \sum [\zeta_\chi', v_{(1)}] \odot [\zeta_\chi, v_{(2)(1)}] \odot v_{(2)(2)} \end{aligned} \quad (\text{B.2.5})$$

toujours avec $\delta(v) = \sum v_{(1)} \otimes v_{(2)} \in \mathcal{V}_\phi \otimes V$ et $\delta(v_{(2)}) = \sum v_{(2)(1)} \otimes v_{(2)(2)}$. Occupons nous tout d'abord du premier terme du membre de droite c'est à dire $\sum [\zeta_\chi, [\zeta_\chi', v_{(1)}]] \odot v_{(2)}$. En utilisant l'identité de Jacobi $[\zeta_\chi, [\zeta_\chi', v_{(1)}]] = -[v_{(1)}, [\zeta_\chi, \zeta_\chi']] - [\zeta_\chi', [v_{(1)}, \zeta_\chi]]$ nous obtenons

$$\begin{aligned} - \sum [\zeta_\chi, [\zeta_\chi', v_{(1)}]] \odot v_{(2)} &= - \sum [[\zeta_\chi, \zeta_\chi'], v_{(1)}] \odot v_{(2)} - \sum [\zeta_\chi', [\zeta_\chi, v_{(1)}]] \odot v_{(2)} \\ &= i \mathcal{Q}([\zeta_\chi, \zeta_\chi'])(v) - \sum [\zeta_\chi', [\zeta_\chi, v_{(1)}]] \odot v_{(2)} \end{aligned} \quad (\text{B.2.6})$$

D'autre part toujours en utilisant la propriété I.5.1 de l'opérateur de Spencer, le deuxième terme de (B.2.5) s'écrit

$$\sum \sum [\zeta_\chi', v_{(1)}] \odot [\zeta_\chi, v_{(2)(1)}] \odot v_{(2)(2)} = \sum \sum [\zeta_\chi, v_{(1)}] \odot [\zeta_\chi', v_{(2)(1)}] \odot v_{(2)(2)} \quad (\text{B.2.7})$$

En regroupant (B.2.6) et (B.2.7) nous voyons apparaître l'expression de $\sum \mathcal{Q}(\zeta_\chi') ([\zeta_\chi, v_{(1)}] \odot v_{(2)})$ et nous obtenons finalement

$$\mathcal{Q}(\zeta_\chi) \circ \mathcal{Q}(\zeta_\chi')(v) = i \mathcal{Q}([\zeta_\chi, \zeta_\chi'])(v) + i \mathcal{Q}(\zeta_\chi') \circ \mathcal{Q}(\zeta_\chi)(v)$$

c'est à dire l'identité (B.2.1) pour $(\zeta_\chi, \zeta_\chi') \in (\mathcal{V}_\chi^{\mathbb{C}})^2$.

Il ne nous reste plus qu'à considérer le cas $(\zeta_\phi, \zeta_\chi) \in \mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}} \times \mathcal{V}_\chi^{\mathbb{C}}$. Soient $(\zeta_\phi, \zeta_\chi) \in \mathcal{V}_\phi^{\mathbb{C}} \times \mathcal{V}_\chi^{\mathbb{C}}$ et $v \in V$ alors d'après les définitions (I.5.3), (I.5.4) et la définition de l'opérateur de Spencer nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\zeta_\phi) \circ \mathcal{Q}(\zeta_\chi)(v) &= i \sum \zeta_\phi \odot [\zeta_\chi, v_{(1)}] \odot v_{(2)} + i \sum ([\zeta_\chi, v_{(1)}] |\zeta_\phi^*) v_{(2)} \\ &\quad + i \sum \sum (v_{(2)(1)} |\zeta_\phi^*) [\zeta_\chi, v_{(1)}] \odot v_{(2)(2)} \end{aligned}$$

d'une part et d'autre part

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{X}}) \circ \mathcal{Q}(\zeta_{\phi})(v) &= i [\zeta_{\mathcal{X}}, \zeta_{\phi}] \odot v + i \sum \zeta_{\phi} \odot [\zeta_{\mathcal{X}}, v_{(1)}] \odot v_{(2)} \\ &\quad + i \sum \sum (v_{(1)} | \zeta_{\phi}^*) [\zeta_{\mathcal{X}}, v_{(2)(1)}] \odot v_{(2)(2)} \end{aligned}$$

Regroupant ces deux derniers résultats et en utilisant la propriété I.5.1 nous obtenons

$$[\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{X}}), \mathcal{Q}(\zeta_{\phi})](v) = i [\zeta_{\mathcal{X}}, \zeta_{\phi}] \odot v - i \sum ([\zeta_{\mathcal{X}}, v_{(1)}] | \zeta_{\phi}^*) v_{(2)} \quad (\text{B.2.8})$$

Alors en utilisant l'hypothèse (I.5.1) de la page 36 il est facile de montrer que nous avons l'identité suivante pour tout $v \in \mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}$

$$i ([\zeta_{\mathcal{X}}, v] | \zeta_{\phi}^*) = -i (v | [\zeta_{\mathcal{X}}, \zeta_{\phi}]^*)$$

Alors en insérant cette dernière égalité dans (B.2.8) nous obtenons finalement

$$[\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{X}}), \mathcal{Q}(\zeta_{\phi})](v) = i [\zeta_{\mathcal{X}}, \zeta_{\phi}] \odot v + i \sum (v_{(1)} | [\zeta_{\mathcal{X}}, \zeta_{\phi}]^*) v_{(2)} = i \mathcal{Q}([\zeta_{\mathcal{X}}, \zeta_{\phi}])$$

c'est à dire (B.2.1). La première partie du théorème se trouve ainsi démontrée.

Voyons maintenant le second point. Il suffit de montrer que pour tout $\zeta \in \mathcal{V}$ réel l'opérateur correspondant est autoadjoint c'est-à-dire il s'agit de montrer que pour tout $(v, w) \in V^2$ nous avons

$$(\mathcal{Q}(\zeta)(v) | w) = (v | \mathcal{Q}(\zeta)(w)) \quad (\text{B.2.9})$$

Pour ce faire il suffit de montrer l'égalité (B.2.9) pour v et w décomposables, le cas général se déduisant par linéarité.

Nous nous donnons ainsi $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ et $v^{(k)} = v_1 \odot \dots \odot v_k \in (\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})^{\odot k}$ et $w^{(l)} = w_1 \odot \dots \odot w_l \in (\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})^{\odot l}$ décomposables.

Soit $\zeta_{\mathcal{X}} \in \mathcal{V}_{\mathcal{X}}$ alors d'après la définition (I.5.3) nous avons

$$\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{X}})(v^{(k)}) \in (\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})^{\odot k} \text{ et } \mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{X}})(w^{(l)}) \in (\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})^{\odot l}$$

Ainsi d'après (I.5.2), si $k \neq l$ alors nous avons $(\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{X}})(v^{(k)}) | w^{(l)}) = 0$ et $(v^{(k)} | \mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{X}})(w^{(l)})) = 0$. Supposons maintenant $k = l$ alors nous avons par définition

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{X}})(v) | w) &= \sum_{j=1}^k \left(i [\zeta_{\mathcal{X}}, v_j] \odot v^{\vee j} \mid w^{(k)} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j=1}^k (i [\zeta_{\mathcal{X}}, v_j] \mid w_{\sigma(j)}) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^k (v_p \mid w_{\sigma(p)}) \end{aligned}$$

Nous utilisons alors l'hypothèse (I.5.1) ce qui nous donne

$$(i [\zeta_{\mathcal{X}}, v_j] \mid w_{\sigma(j)}) = (v_j \mid i [\zeta_{\mathcal{X}}, w_{\sigma(j)}])$$

En remplaçant dans l'égalité précédente nous obtenons finalement

$$(\mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{X}})(v)|w) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j=1}^k (v_j | i[\zeta_{\mathcal{X}}, w_{\sigma(j)}]) \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq j}}^k (v_p | w_{\sigma(p)})$$

où nous reconnaissons l'expression de $(v^{(k)} | \mathcal{Q}(\zeta_{\mathcal{X}})(w^{(k)}))$. L'identité (B.2.9) est ainsi vérifiée pour $\zeta \in \mathcal{V}_{\mathcal{X}}$.

Prenons maintenant $\zeta_{\phi} \in \mathcal{V}_{\phi}$ réel. Notons $A_{\zeta_{\phi}}$ et $A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}$ les éléments de $\mathcal{L}(V)$ tels que pour tout $v \in V$

$$\begin{aligned} A_{\zeta_{\phi}}(v) &:= \{(\bullet | \zeta_{\phi}) \otimes id\} \circ \delta(v) \\ A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}(v) &:= \zeta_{\phi} \odot v \end{aligned}$$

Alors nous avons

$$A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}(v^{(k)}) \in (\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})^{\odot(k+1)} \text{ et } A_{\zeta_{\phi}}(w^{(l)}) \in (\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})^{\odot(l-1)}$$

Ainsi si $l \neq k+1$ nous avons $(A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}(v^{(k)})|w^{(l)}) = 0 = (v^{(k)}|A_{\zeta_{\phi}}(w^{(l)}))$. Supposons maintenant que $l = k+1$ alors d'après (I.5.2) nous avons

$$(A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}(v^{(k)})|w^{(k+1)}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} (\zeta_{\phi} | w_{\sigma(k+1)}) \prod_{p=1}^k (v_p | w_{\sigma(p)}) = \sum_{j=1}^{k+1} (\zeta_{\phi} | w_j) \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1} \\ \sigma(k+1)=j}} \prod_{p=1}^k (v_p | w_{\sigma(p)})$$

En utilisant alors la définition (I.5.3) de l'opérateur de Spencer et (I.5.2) cette dernière égalité nous donne

$$\begin{aligned} (A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}(v^{(k)})|w^{(k+1)}) &= \sum (\zeta_{\phi} | w_{(1)}^{(k+1)}) (v^{(k)} | w_{(2)}^{(k+1)}) \\ &= \sum \overline{(w_{(1)}^{(k+1)} | \zeta_{\phi})} (v^{(k)} | w_{(2)}^{(k+1)}) = (v^{(k)} | A_{\zeta_{\phi}}(w^{(k+1)})) \end{aligned} \quad (\text{B.2.10})$$

où nous avons noté $\delta(w^{(k+1)}) = \sum w_{(1)}^{(k+1)} \otimes w_{(2)}^{(k+1)}$ avec $w_{(1)}^{(k+1)} \in \mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}}$ et $w_{(2)}^{(k+1)} \in (\mathcal{V}_{\phi}^{\mathbb{C}})^{\odot k}$.

En remarquant que d'après la définition (I.5.4) de $\mathcal{Q}(\zeta_{\phi})$ nous avons $\mathcal{Q}(\zeta_{\phi}) = A_{\zeta_{\phi}} + A_{\zeta_{\phi}}^{\dagger}$, le calcul (B.2.10) nous assure que l'identité (B.2.9) est vérifiée pour $\zeta = \zeta_{\phi} \in \mathcal{V}_{\phi}$.

L'identité (B.2.9) étant valide pour tout $\zeta_{\mathcal{X}} \in \mathcal{V}_{\mathcal{X}}$ et tout $\zeta_{\phi} \in \mathcal{V}_{\phi}$ réel, elle l'est pour tout $\zeta \in \mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathcal{X}} \oplus \mathcal{V}_{\phi}$. Le théorème B.2.1 se trouve ainsi démontré.

■

B.3 Quantification par déformation

B.3.1 Associativité

Dans cette section nous allons prouver les propositions I.6.1 et I.6.2. Nous allons principalement montrer l'associativité du produit \star_{\hbar} c'est-à-dire la proposition

Proposition B.3.1 $(S(P)[[\hbar]], \star_{\hbar})$ est une algèbre associative.

Les autres assertions des propositions I.6.1 et I.6.2 en découlent alors facilement. En effet nous avons la proposition suivante qui se prouve très facilement à partir de la définition du produit \star_{\hbar} .

Proposition B.3.2 La projection naturelle $\pi : S(P)[[\hbar]] \longrightarrow S(P)$ est un morphisme d'algèbre entre $(S(P)[[\hbar]], \star_{\hbar})$ et $(S(P), \odot)$ et de plus nous avons pour tout A, B éléments de $S(P)[[\hbar]]$

$$\pi \left(\frac{1}{\hbar} [A, B]_{\hbar} \right) = \{\pi(A), \pi(B)\}_0 \quad (\text{B.3.1})$$

La proposition I.6.1 est alors une conséquence directe de ces deux propositions. En effet il s'agit de montrer que l'algèbre $(S(P), \odot)$ munie du crochet $\{\bullet, \bullet\}_0$ est une algèbre de Poisson. Il suffit ainsi de montrer que le crochet $\{\bullet, \bullet\}_0$ vérifie la règle de Leibniz (I.6.4) et l'identité de Jacobi (I.6.3). Nous avons défini le crochet $\{\bullet, \bullet\}_0$ de manière à ce qu'il satisfasse Leibniz donc seule l'identité de Jacobi est à montrer. Or l'algèbre $(S(P)[\hbar], \star_{\hbar})$ est associative d'après la proposition B.3.1 donc nous savons que le crochet $[\bullet, \bullet]_{\hbar}$ vérifie l'identité de Jacobi, ainsi d'après l'égalité (B.3.1) de la proposition B.3.2 il en est de même pour le crochet $\{\bullet, \bullet\}_0$ sur $S(P)$. La proposition I.6.1 se trouve ainsi démontrée.

Il ne nous reste ainsi qu'à prouver la proposition B.3.1 qui est essentiellement un résultat combinatoire

Preuve: (proposition B.3.1)

Tout d'abord il est clair que $1 \in P \subset S(P)[\hbar]$ est un neutre pour \star_{\hbar} . Concentrons nous sur l'associativité du produit \star_{\hbar} . Pour la vérifier il est suffisant de montrer que pour tout $(k, l, m) \in \mathbb{N}^3$ et $(\Psi^k, \Phi^l, \Xi^m) \in P^{\odot k} \times P^{\odot l} \times P^{\odot m}$ l'identité suivante est vérifiée

$$\Psi^k \star_{\hbar} (\Phi^l \star_{\hbar} \Xi^m) = (\Psi^k \star_{\hbar} \Phi^l) \star_{\hbar} \Xi^m$$

or par définition du produit \star_{\hbar} nous avons

$$\Psi^k \star_{\hbar} (\Phi^l \star_{\hbar} \Xi^m) = \sum_{\alpha \geq 0} \frac{\hbar^{\alpha}}{\alpha!} \left(\sum_{p+q=\alpha} C_{\alpha}^p \Psi^k M^p (\Phi^l M^q \Xi^m) \right) \quad (\text{B.3.2})$$

où C_{β}^{α} désigne le coefficient binomial $C_{\beta}^{\alpha} = \frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!}$.

Soit A un entier, nous allons nous intéresser au terme d'ordre A en \hbar dans B.3.2. Nous nous donnons ainsi $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p + q = A$ et nous noterons N l'entier $N := k + l + m - 2A$. Alors d'après la définition I.6.3 nous avons

$$\begin{aligned} \Psi^k M^p (\Phi^l M^q \Xi^m) &= \sum_{\substack{\beta, \alpha \in [0, n-1]^p \\ \alpha, \beta \in [0, n-1]^q}} \int_{\Sigma^p} \left[\eta^{\beta\alpha} \partial_{\alpha}(z_{1,p}) \Psi^k \right. \\ &\quad \left. \odot i^p(z_{1,p}) \left(\int_{\Sigma^q} \eta^{\alpha\beta} \partial_{\beta}(z_{p+1,A}) \Phi^l \odot i^q(z_{p+1,A}) \Xi^m \omega_{\alpha}(z_{p+1,A}) \right) \right] \omega_{\beta}(z_{1,p}) \quad (\text{B.3.3}) \end{aligned}$$

Il est nécessaire ici de préciser les notations utilisées. Pour tout $\rho \in \mathcal{X}_0^k$ et $1 \leq a \leq b \leq k$, $\rho_{a,b}$ désigne le $(b - a + 1)$ -uplet $\rho_{a,b} := (\rho_a, \rho_{a+1}, \dots, \rho_b) \in \mathcal{X}_0^{b-a+1}$.

En revenant à la définition de l'opérateur de Spencer on peut montrer très facilement le lemme combinatoire suivant

Lemme B.3.1 1. Les opérateurs $(i(z))_{z \in \mathcal{X}_0}$ commutent deux à deux ainsi que les opérateurs $(\partial_\beta(\xi))_{\xi \in \mathcal{X}_0}$. De plus Pour tout $(z, \xi) \in \mathcal{X}_0^2$ et tout $\beta \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ les opérateurs $i(z)$ et $\partial_\beta(\xi)$ commutent.

2. Soient $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{\Psi} \in P^{\circ a}$, $\tilde{\Phi} \in P^{\circ b}$ et $z \in \mathcal{X}_0^k$ alors nous avons

$$i^k(z)(\tilde{\Psi} \odot \tilde{\Phi}) = \sum_{j=0}^k \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, k \rrbracket \\ |J|=j}} i^j(z_J) \tilde{\Psi} \odot i^{k-j}(z_{\llbracket 1, k \rrbracket \setminus J}) \tilde{\Phi} \quad (\text{B.3.4})$$

où pour tout $J = \{a_1, \dots, a_j\} \subset \llbracket 1, k \rrbracket$ tel que $|J| = j$ nous avons noté z_J le j -uplet $z_J := (z_{a_1}, \dots, z_{a_j})$ d'éléments de \mathcal{X}_0 . Notons que d'après le point précédent l'opérateur $i^j(z_J)$ est bien défini.

3. L'égalité (B.3.4) est vérifiée avec ∂_β à la place de l'opérateur i .

Alors si nous insérons l'identité (B.3.4) dans l'expression (B.3.3) nous obtenons

$$\begin{aligned} \Psi^k M^p \left(\Phi^l M^q \Xi^r \right) &= \sum_{j=0}^p \sum_{\beta, \alpha \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^A} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, p \rrbracket \\ |J|=j}} \int_{\Sigma^A} \eta^{\beta\alpha} \partial_{\alpha_{1,p}}^p(z_{1,p}) \Psi^k \odot \\ &\quad \left(i^{p-j}(z_{\llbracket 1, p \rrbracket \setminus J}) \odot \partial_{\alpha_{p+1,A}}^q(z_{p+1,A}) \right) \Phi^l \odot i^{q+j}(z_J, z_{p+1,A}) \Xi^m \omega_\beta(z) \end{aligned}$$

Enfin en utilisant le théorème de Fubini nous pouvons réorganiser les intégrations sur Σ de façon à obtenir

$$\begin{aligned} \Psi^k M^p \left(\Phi^l M^q \Xi^r \right) &= \sum_{j=0}^p \sum_{\beta, \alpha \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^A} C_p^j \int_{\Sigma^A} \eta^{\beta\alpha} \partial_{\alpha_{A-p+1,A}}^p(z_{A-p+1,A}) \Psi^k \odot \\ &\quad i^{p-j}(z_{A-p+j+1,A}) \odot \partial_{\alpha_{1,A-p}}^{A-p}(z_{1,A-p}) \Psi^l \odot i^{A-p+j}(z_{1,A-p+j}) \Xi^m \omega_\beta(z) \end{aligned}$$

Ainsi le terme d'ordre A de (B.3.2) est finalement donné par

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^A \sum_{j=0}^p \sum_{\beta, \alpha \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^A} C_A^p C_p^j \int_{\Sigma^A} \eta^{\beta\alpha} \partial_{\alpha_{A-p+1,A}}^p(z_{A-p+1,A}) \Psi^k \odot \\ i^{p-j}(z_{A-p+j+1,A}) \odot \partial_{\alpha_{1,A-p}}^{A-p}(z_{1,A-p}) \Psi^l \odot i^{A-p+j}(z_{1,A-p+j}) \Xi^m \omega_\beta(z) \end{aligned}$$

Alors en effectuant le changement de variable $j \leftarrow A - p + j$ puis en inversant l'ordre des sommes sur p et j et en effectuant un dernier changement de variable $p \leftarrow A - j + p$

l'expression précédente devient

$$\sum_{j=0}^A \sum_{p=0}^j \sum_{\beta, \alpha \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^A} C_A^{A-j+p} C_{A-j+p}^p \int_{\Sigma^A} \eta^{\beta\alpha} \partial_{\alpha_{j-p+1, A}}^{A-j+p} (z_{j-p+1, A}) \Psi^k \odot i^{A-j} (z_{j+1, A}) \circ \partial_{\alpha_{1, j-p}}^{j-p} (z_{1, j-p}) \Phi^l \odot i^j (z_{1, j}) \Xi^m \omega_\beta(z)$$

Or un calcul simple nous montre que $C_A^{p+A-j} C_{p+A-j}^p = C_j^p C_A^j$. Alors nous pouvons faire les opérations précédentes dans l'autre sens c'est-à-dire qu'en utilisant le théorème de Fubini la dernière expression peut s'écrire

$$\sum_{j=0}^A C_A^j \sum_{p=0}^j \sum_{\beta, \alpha \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^A} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1 \dots j \rrbracket \\ |J|=p}} \int_{\Sigma^A} \eta^{\beta\alpha} \partial_{\alpha_J}^p (z_J) \left[\partial_{\alpha_{j+1, A}}^{A-j} (z_{j+1, A}) \Psi^k \right] \odot \partial_{\alpha_{\llbracket 1, j \rrbracket \setminus J}}^{j-p} (z_{\llbracket 1, j \rrbracket \setminus J}) \left[i^{A-j} (z_{j+1, A}) \Phi^l \right] \odot i^j (z_{1, j}) \Psi^m \omega_\beta(z)$$

Alors en utilisant le lemme B.3.1 nous obtenons finalement que le terme d'ordre A de (B.3.2) est donné par

$$\sum_{j=0}^A C_A^j \left(\Psi^k M^{A-j} \Phi^l \right) M^j \Xi^m$$

ce qui en revenant à l'égalité (B.3.2) prouve l'associativité de \star_{\hbar} .

■

B.3.2 Ordre d'opérateur

Nous allons maintenant prouver le théorème I.6.1. Nous reprenons ici les notations de l'annexe A. Nous allons dans un premier temps prouver le lemme suivant qui est un analogue du lemme de Wick bien connu en théorie des champs (voir par exemple e.g. [52]) puis nous verrons comment celui-ci permet de montrer facilement le théorème I.6.1.

Lemme B.3.2 Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ et $f^{(a)}, f^{(b)}, f^{(c)}$ et $f^{(d)}$ des fonctions à valeurs réelles appartenant respectivement à $\mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^a$, $\mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^b$, $\mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^c$ et $\mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^d$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $f^{(p)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})^p$, nous notons $\pi_m^{\otimes p}(f^{(p)}) := \prod_{j=1}^p \pi_m(f_j^{(p)})$ ce qui a un sens car les $\pi_m(f)$ commutent deux à deux. De la même façon nous posons $\varphi_m^{\otimes p}(f^{(p)}) := \prod_{j=1}^p \varphi_m(f_j^{(p)})$. Nous obtenons toujours de cette manière des opérateurs non-bornés sur \mathcal{F}_s de domaine F_0 et laissant stable ce domaine.

Alors le produit d'opérateur $\pi_m^{\otimes a}(f^{(a)}) \varphi_m^{\otimes b}(f^{(b)}) \cdot \pi_m^{\otimes c}(f^{(c)}) \varphi_m^{\otimes d}(f^{(d)})$ est donné par

$$\sum_{I \subset \llbracket 1, b \rrbracket} \sum_{\substack{\sigma: I \hookrightarrow \llbracket 1, c \rrbracket \\ \sigma \text{ injective}}} i^{|I|} \left(\prod_{j \in I} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j^{(b)} f_{\sigma(j)}^{(c)} \right) \pi_m^{\otimes (a+c-|I|)} \left(f^{(a)}, f_{\llbracket 1, c \rrbracket \setminus \sigma(I)}^{(c)} \right) \varphi_m^{\otimes (d+b-|I|)} \left(f^{(d)}, f_{\llbracket 1, b \rrbracket \setminus I}^{(b)} \right) \quad (\text{B.3.5})$$

où pour $p = c$ ou d et pour tout $J \subset \llbracket 1, p \rrbracket$ nous avons noté $f_J^{(p)} := (f_j^{(c)})_{j \in J} \in \mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^{|J|}$.

Preuve: (lemme B.3.2)

Nous allons effectuer une récurrence sur c . Pour $c = 0$, il n'y a rien à montrer. Considérons maintenant le cas $c = 1$. Donnons nous $(a, b, d) \in \mathbb{N}^3$ et $(f^{(a)}, f^{(b)}, f^{(d)}) \in \mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^a \times \mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^b \times \mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^d$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ à valeurs réelles. Il suffit de montrer l'identité suivante

$$\begin{aligned} \pi_m^{\otimes a}(f^{(a)})\varphi_m^{\otimes b}(f^{(b)}) \cdot \pi_m(g)\varphi_m^{\otimes d}(f^{(d)}) &= \pi_m^{\otimes(a+1)}(f^{(a)}, g)\varphi_m^{\otimes(d+b)}(f^{(d)}, f^{(b)}) \\ &+ i \sum_{k=1}^b \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_k^{(b)} g \right) \pi_m^{\otimes(a)}(f^{(a)})\varphi_m^{\otimes(d+b-1)}(f^{(d)}, f_{\llbracket 1, b \rrbracket \setminus \{k\}}^{(b)}) \end{aligned} \quad (\text{B.3.6})$$

Pour démontrer (B.3.6), nous allons faire une récurrence sur b cette fois. Pour $b = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons maintenant que pour $b \in \mathbb{N}$ fixé et pour tout $(a, d) \in \mathbb{N}$ l'égalité (B.3.6) soit vérifiée. En utilisant alors les relations de commutation canonique (CCR) (A.2.2) nous avons

$$\begin{aligned} \pi_m^{\otimes a}(f^{(a)})\varphi_m^{\otimes(b+1)}(f^{(b+1)}) \cdot \pi_m(g)\varphi_m^{\otimes d}(f^{(d)}) &= \\ \pi_m^{\otimes a}(f^{(a)})\varphi_m^{\otimes(b)}(f_{\llbracket 1, b \rrbracket}^{(b+1)}) \pi_m(g)\varphi_m^{\otimes(d+1)}(f_{b+1}^{(b+1)}, f^{(d)}) & \\ + i \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{b+1}^{(b+1)} g \right] \pi_m^{\otimes a}(f^{(a)})\varphi_m^{\otimes b}(f_{\llbracket 1, b \rrbracket}^{(b+1)}) \varphi_m^{\otimes d}(f^{(d)}) & \end{aligned} \quad (\text{B.3.7})$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence au premier terme de cette dernière expression et on obtient finalement que l'opérateur $\pi_m^{\otimes a}(f^{(a)})\varphi_m^{\otimes(b+1)}(f^{(b+1)}) \cdot \pi_m(g)\varphi_m^{\otimes d}(f^{(d)})$ est donné par l'expression

$$\begin{aligned} \pi_m^{\otimes(a+1)}(f^{(a)}, g) \varphi_m^{\otimes(d+b+1)}(f^{(d)}, f^{(b+1)}) &+ \\ i \sum_{k=1}^b \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_k^{(b+1)} g \right] \pi_m^{\otimes a}(f^{(a)}) \varphi_m^{\otimes(d+b+1-1)}(f^{(d)}, f_{\llbracket 1, b \rrbracket \setminus \{k\}}^{(b+1)}) &+ \\ i \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{b+1}^{(b+1)} g \right] \pi_m^{\otimes a}(f^{(a)}) \varphi_m^{\otimes(b+d)}(f_{\llbracket 1, b \rrbracket}^{(b+1)}, f^{(d)}) & \end{aligned}$$

c'est à dire que l'on obtient (B.3.6) au rang $b + 1$. L'identité (B.3.5) du lemme est donc vrai pour $c = 1$.

Supposons maintenant le lemme démontré pour $c \in \mathbb{N}$ fixé et pour tout $(a, b, d) \in \mathbb{N}^3$. Soit $(f^{(a)}, f^{(b)}, f^{(c+1)}, f^{(d)}) \in \mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^a \times \mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^b \times \mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^{c+1} \times \mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^d$ à valeurs réelles. En utilisant l'égalité (B.3.5) pour $c = 1$ nous obtenons que l'opérateur $\pi_m^{\otimes a}(f^{(a)})\varphi_m^{\otimes b}(f^{(b)}) \cdot \pi_m^{\otimes(c+1)}(f^{(c+1)})\varphi_m^{\otimes d}(f^{(d)})$ est donné par l'expression

$$\begin{aligned} \pi_m^{\otimes(a+1)}(f^{(a)}, f_1^{(c+1)}) \varphi_m^{\otimes b}(f^{(b)}) \cdot \pi_m^{\otimes c}(f_{\llbracket 2, c+1 \rrbracket}^{(c+1)}) \varphi_m^{\otimes d}(f^{(d)}) & \\ + i \sum_{k=1}^b \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j^{(b)} f_1^{(c+1)} \right] \pi_m^{\otimes a}(f^{(a)}) \varphi_m^{\otimes(b-1)}(f_{\llbracket 1, b \rrbracket \setminus \{k\}}^{(b)}) \pi_m^{\otimes c}(f_{\llbracket 2, c+1 \rrbracket}^{(c+1)}) \varphi_m^{\otimes d}(f^{(d)}) & \end{aligned} \quad (\text{B.3.8})$$

Nous utilisons alors l'hypothèse de récurrence dans chaque terme de l'expression (B.3.8) et nous obtenons alors deux composantes, l'une correspondant au premier terme de (B.3.8) est donnée par

$$\sum_{J \subset \llbracket 1, b \rrbracket} \sum_{\sigma: J \hookrightarrow \llbracket 2, c+1 \rrbracket} i^{|J|} \left[\prod_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j^{(b)} f_{\sigma(j)}^{(c+1)} \right] \pi_m^{\otimes(a+c+1-|J|)} \left(f^{(a)}, f_1^{(c+1)}, f_{\llbracket 2, c+1 \rrbracket \setminus \sigma(J)}^{(c+1)} \right) \varphi_m^{\otimes(d+b-|J|)} \left(f_{\llbracket 1, b \rrbracket \setminus J}^{(b)} f^{(d)} \right) \quad (\text{B.3.9})$$

et l'autre, correspondant à la somme dans (B.3.8) est donnée par

$$\sum_{j=1}^b \sum_{K \subset \llbracket 1, b \rrbracket \setminus \{j\}} \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \llbracket 2, c+1 \rrbracket} i^{|K|+1} \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j^{(b)} f_1^{(c+1)} \prod_{j \in K} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_j^{(b)} f_{\sigma(j)}^{(c+1)} \right] \pi_m^{\otimes(a+c+1-(|K|+1))} \left(f^{(a)}, f_{\llbracket 2, c+1 \rrbracket \setminus \sigma(K)}^{(c+1)} \right) \varphi_m^{\otimes(d+b-(|K|+1))} \left(f_{\llbracket 1, b \rrbracket \setminus (\{j\} \cup K)}^{(b)} f^{(d)} \right) \quad (\text{B.3.10})$$

On se rend alors compte que l'on retrouve ces deux termes à partir de l'expression (B.3.5) pour $c = c+1$ en séparant les cas où σ n'atteint pas $1 \in \llbracket 1, c+1 \rrbracket$ et les cas où $1 \in \llbracket 1, c+1 \rrbracket$ est atteint par σ . Nous obtenons ainsi l'expression (B.3.5) au rang $c+1$, ce qui termine la preuve du lemme B.3.2.

■

Nous reprenons maintenant les notations de la section I.6.3 et nous allons voir comment le lemme B.3.2 permet de démontrer le théorème I.6.1 dont nous rappelons ici l'énoncé

Théorème B.3.1 *Nous notons Θ l'application linéaire définie par (I.6.9) p.45. Pour tout A et B appartenant à $S(P)[\hbar]$ nous avons*

$$\Theta(A)\Theta(B) = \Theta(A \star_{\hbar} B)$$

Preuve: (du théorème B.3.1)

Pour prouver le théorème B.3.1 il suffit de montrer que pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, $\Psi^k \in P^{\odot k}$ et tout $\Phi^l \in P^{\odot l}$ décomposables nous avons l'identité suivante

$$\Theta(\Psi^k)\Theta(\Phi^l) = \Theta(\Psi^k \star_{\hbar} \Phi^l) \quad (\text{B.3.11})$$

Soient $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, $\Psi^k = \psi_1 \odot \cdots \odot \psi_k \in P^{\odot k}$ et $\Phi^l = \phi_1 \odot \cdots \odot \phi_l \in P^{\odot l}$. Alors par définition de Θ nous avons

$$\Theta(\Psi^k)\Theta(\Phi^l) = \sum_{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket} \sum_{J \subset \llbracket 1, l \rrbracket} (-1)^{k-|I|+|J|} \pi_m(\psi_{\llbracket 1, k \rrbracket \setminus I}) \varphi_m \left(\frac{\partial \psi_I}{\partial t} \right) \pi_m(\phi_J) \varphi_m \left(\frac{\partial \phi_{\llbracket 1, l \rrbracket \setminus J}}{\partial t} \right) \quad (\text{B.3.12})$$

où pour tout $v = v_1 \odot \cdots \odot v_q \in P^{\odot q}$ et tout $I \subset \llbracket 1, q \rrbracket$ nous avons noté v_I l'élément de $P^{\odot |I|}$ défini par $v_I := \bigodot_{i \in I} v_i$ et où pour tout $w = w_1 \odot \cdots \odot w_q \in P^{\odot q}$ nous avons posé

$\pi_m(w) := \prod_{i=1}^q \pi_m((w_i)|_{t=0})$ et $\varphi_m\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) := \prod_{i=1}^q \pi_m\left(\frac{\partial w_i}{\partial t}|_{t=0}\right)$ ce qui a un sens car les $\pi_m(f)$ commutent deux à deux de même que les $\varphi_m(f)$.

Nous pouvons alors utiliser le lemme B.3.2 pour calculer le second membre de (B.3.12) qui devient alors

$$\sum_{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket} \sum_{J \subset \llbracket 1, l \rrbracket} \sum_{K \subset I} \sum_{\sigma: I \hookrightarrow J} i^{|K|} (-1)^{k-|I|+|J|} \left[\prod_{j \in K} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \phi_{\sigma(j)} \right] \pi_m\left(\psi_{\llbracket 1, k \rrbracket \setminus I} \odot \phi_{J \setminus \sigma(K)}\right) \varphi_m\left(\frac{\partial \psi_{I \setminus K}}{\partial t} \odot \frac{\partial \phi_{\llbracket 1, l \rrbracket \setminus J}}{\partial t}\right)$$

Alors en inversant l'ordre des sommations sur K, σ et I, J nous obtenons finalement

$$\sum_{K \subset \llbracket 1, k \rrbracket} \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \llbracket 1, l \rrbracket} (-i)^{|K|} \left[\prod_{j \in K} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \phi_{\sigma(j)} \right] \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket \setminus K \\ J \subset \llbracket 1, l \rrbracket \setminus \sigma(K)}} (-1)^{|I|+l-|J|-|K|} \pi_m\left(\psi_I \odot \phi_{(\llbracket 1, l \rrbracket \setminus \sigma(K)) \setminus J}\right) \varphi_m\left(\frac{\partial \psi_{(\llbracket 1, k \rrbracket \setminus K) \setminus I}}{\partial t} \odot \frac{\partial \phi_J}{\partial t}\right)$$

où nous reconnaissons exactement l'expression de $\Theta(\psi_{\llbracket 1, k \rrbracket \setminus I} \odot \phi_{\llbracket 1, l \rrbracket \setminus \sigma(K)})$. Finalement nous obtenons l'identité suivante

$$\Theta(\Psi^k) \Theta(\Phi^l) = \sum_{K \subset \llbracket 1, k \rrbracket} \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \llbracket 1, l \rrbracket} (-i)^{|K|} \left[\prod_{j \in K} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \phi_{\sigma(j)} \right] \Theta\left(\psi_{\llbracket 1, k \rrbracket \setminus K} \odot \phi_{\llbracket 1, l \rrbracket \setminus \sigma(K)}\right) \quad (\text{B.3.13})$$

Voyons maintenant l'expression de $\Psi^k \star_{\hbar} \Phi^l$ avec $\Psi^k = \psi_1 \odot \dots \odot \psi_k$ et $\Phi^l = \phi_1 \odot \dots \odot \phi_l$. Tout d'abord d'après la définition I.6.2 p.42 des opérateurs $\partial^p(z)$ et $i^p(z)$ nous avons pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathcal{X}_0^p$

$$\begin{aligned} \partial^p(z) \Psi^k &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \left[\prod_{\alpha=1}^p \frac{\partial \psi_{i_{\sigma(\alpha)}}}{\partial t}(z_{\alpha}) \right] \psi_{\llbracket 1, k \rrbracket \setminus I} \\ i^p(z) \Phi^l &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq l} \sum_{\gamma \in \mathfrak{S}_p} \left[\prod_{\beta=1}^p \phi_{j_{\gamma(\beta)}}(z_{\beta}) \right] \phi_{\llbracket 1, l \rrbracket \setminus J} \end{aligned}$$

où nous avons noté $\partial(z)$ l'opérateur $\partial_{(0, \dots, 0)}^p(z)$. Alors en insérant ces dernières expressions dans la définition I.6.3 p.42 du produit \star_{\hbar} nous obtenons

$$\Psi^k \star_{\hbar} \Phi^l = \sum_{p \geq 0} \hbar^p \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, k \rrbracket \\ |J|=p}} \sum_{\sigma: J \hookrightarrow \llbracket 1, l \rrbracket} \left[\prod_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial \psi_j}{\partial t} \phi_{\sigma(j)} \right] \psi_{\llbracket 1, k \rrbracket \setminus J} \odot \phi_{\llbracket 1, l \rrbracket \setminus \sigma(J)} \quad (\text{B.3.14})$$

Alors en comparant cette dernière identité à (B.3.13) nous obtenons exactement (B.3.11). \blacksquare

B.3.3 Produit Normal

Nous allons donner la preuve du théorème I.6.2 relatif à l'ordre de Wick. Ce théorème se montre de manière tout à fait similaire au théorème I.6.1, nous nous bornerons donc à expliquer les modifications à apporter à la preuve.

Tout d'abord nous avons le lemme de Wick suivant qui est l'analogie du lemme B.3.2

Lemme B.3.3 Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ et $f^{(a)}, f^{(b)}, f^{(c)}$ et $f^{(d)}$ des fonctions à valeurs réelles appartenant respectivement à $\mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^a$, $\mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^b$, $\mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^c$ et $\mathcal{S}((\mathbb{R}^{n-1}))^d$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})^p$, nous notons $\mathbf{a}^{\dagger \otimes p}(f^{(p)}) := \prod_{j=1}^p \mathbf{a}^\dagger(f_j^{(p)})$ ce qui a un sens car les $\mathbf{a}^\dagger(f)$ commutent deux à deux et de la même façon nous posons $\mathbf{a}^{\otimes p}(f^{(p)}) := \prod_{j=1}^p \mathbf{a}(f_j^{(p)})$.

Alors le produit d'opérateur $\mathbf{a}^{\dagger \otimes a}(f^{(a)}) \mathbf{a}^{\otimes b}(f^{(b)}) \cdot \mathbf{a}^{\dagger \otimes c}(f^{(c)}) \mathbf{a}^{\otimes d}(f^{(d)})$ est donné par

$$\sum_{I \subset \llbracket 1, b \rrbracket} \sum_{\substack{\sigma: I \hookrightarrow \llbracket 1, c \rrbracket \\ \sigma \text{ injective}}} \left(\prod_{j \in I} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mu(\vec{k}) f_j^{(b)}(-\vec{k}) f_{\sigma(j)}^{(c)}(\vec{k}) d\vec{k} \right) \mathbf{a}^{\dagger \otimes (a+c-|I|)} \left(f^{(a)}, f_{\llbracket 1, c \rrbracket \setminus \sigma(I)}^{(c)} \right) \mathbf{a}^{\otimes (d+b-|I|)} \left(f^{(d)}, f_{\llbracket 1, b \rrbracket \setminus I}^{(b)} \right) \quad (\text{B.3.15})$$

Preuve: (du lemme B.3.3)

Ce lemme se démontre exactement de la même façon que le lemme B.3.2. Il suffit de remplacer les opérateurs $\pi_m(f)$ par $\mathbf{a}^\dagger(f)$ et les opérateurs $\varphi_m(f)$ par $\mathbf{a}(f)$, et alors en utilisant l'expression (A.2.4) du commutateur de $\mathbf{a}^\dagger(f)$ et $\mathbf{a}(g)$ nous obtenons exactement (B.3.15).

■

Nous considérons le produit \star_W et l'application Θ_W que nous avons définis dans la section I.6.4. Nous avons alors le théorème I.6.2 dont nous rappelons l'énoncé

Théorème B.3.2 Pour tout P, Q appartenant à $S(P)[[\hbar]]$ nous avons

$$\Theta_W(P) \Theta_W(Q) = \Theta_W(P \star_W Q)$$

Preuve: (du théorème B.3.2)

Ce théorème se montre de la même façon que le théorème B.3.1. Donnons nous $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, $\Psi^k = \psi_1 \odot \dots \odot \psi_k \in P^{\odot k}$ et $\Phi^l = \phi_1 \odot \dots \odot \phi_l \in P^{\odot l}$. Alors en suivant les mêmes étapes que pour obtenir (B.3.13) dans la preuve du théorème B.3.1 et en remarquant que nous avons

$$\left[\mathbf{a}(G\psi), \mathbf{a}^\dagger(F\phi) \right] = \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mu(\vec{k}) \widehat{\psi}(\vec{k}) \widehat{\phi}(\vec{k}) d\vec{k} \right) id$$

nous obtenons

$$\Theta_W(\Psi^k)\Theta_W(\Phi^l) = \sum_{K \subset \llbracket 1, k \rrbracket} \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \llbracket 1, l \rrbracket} \left[\prod_{j \in K} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mu(\vec{k}) \widehat{\psi}_j(\vec{k}) \overline{\widehat{\phi}_{\sigma(j)}(\vec{k})} d\vec{k} \right] \Theta_W(\psi_{\llbracket 1, k \rrbracket \setminus K} \odot \phi_{\llbracket 1, l \rrbracket \setminus \sigma(K)}) \quad (\text{B.3.16})$$

Et de la même façon que nous avons obtenu (B.3.14) nous avons

$$\Psi^k \star_W \Phi^l = \sum_{p \geq 0} \hbar^p \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, k \rrbracket \\ |J|=p}} \sum_{\sigma: J \hookrightarrow \llbracket 1, l \rrbracket} \left[\prod_{j \in J} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mu(\vec{k}) \widehat{\psi}_j(\vec{k}) \overline{\widehat{\phi}_{\sigma(j)}(\vec{k})} d\vec{k} \right] \psi_{\llbracket 1, k \rrbracket \setminus J} \odot \phi_{\llbracket 1, l \rrbracket \setminus \sigma(J)}$$

ce qui avec (B.3.16) nous donne le résultat.

■

Annexe C

Preuves du chapitre II

Dans cet annexe, nous allons donner les preuves des résultats du second chapitre, c'est-à-dire essentiellement la preuve du théorème II.4.1 relatif au calcul perturbatif d'observable ainsi que la preuve du théorème II.5.1 d'existence de solutions obtenu en utilisant les séries de Butcher. Nous expliquerons ensuite comment nous avons pu retrouver la formulation d'Heisenberg à partir des séries de Butcher.

C.1 Calcul perturbatif d'observables

Dans cette section nous allons prouver le théorème II.4.1. Nous rappelons que nous avons défini une famille de fonctionnelle $(\Psi(b))_{b \in \mathbb{T}(2)}$ (voir la proposition-définition II.4.2 page 68). Une première étape consiste à montrer la proposition-définition II.4.2 assurant que la famille $(\Psi(b))_{b \in \mathbb{T}(2)}$ est bien définie.

Nous montrerons alors le théorème II.4.1 dont nous rappelons l'énoncé

Théorème C.1.1 *i. Soient $\psi \in \mathcal{E}^{1*}$, $\varphi \in \mathcal{E}$ et $s \in [0, T]$ fixés. Alors la série entière*

$$\sum_{b \in \mathbb{T}(2)} (-\lambda)^{|b|} \left\langle \Psi(b) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes \|b\|}, (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle \quad (\text{C.1.1})$$

a un rayon de convergence R non nul, plus précisément nous avons

$$R \geq \left(4C_q M^2 T \left[\|\varphi(s)\|_{H^q} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s) \right\|_{H^q} \right] \right)^{-1}$$

où M est la constante définie par $M := \max(\frac{1}{m}, 1)$ et C_q est celle apparaissant dans la proposition II.4.1.

ii. Soient $\varphi \in \mathcal{E}$ une solution de l'équation (E_2) , $(\square + m^2)\varphi + \lambda\varphi^2 = 0$, et $\psi \in \mathcal{C}^2([0, T], H^{-q+2}) \subset \mathcal{E}^{1}$ telle que $(\square + m^2)\psi = 0$ dans H^{-q} . Alors si la condition*

$$8|\lambda|C_q M^2 T \|\varphi\|_{\mathcal{E}} (1 + |\lambda|C_q T \|\varphi\|_{\mathcal{E}}) < 1 \quad (\text{C.1.2})$$

est vérifiée, la série entière (*) converge pour tout $s \in [0, T]$ et de plus pour tout $s \in [0, T]$ nous avons l'égalité suivante

$$\sum_{b \in \mathbb{T}(2)} (-\lambda)^{|b|} \left\langle \Psi(b) \overleftarrow{\partial}_s^{\otimes \|b\|}, (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle = \left\langle \psi \overleftarrow{\partial}_0, \varphi \right\rangle \quad (\text{C.1.3})$$

Tout d'abord nous montrerons la première partie du théorème c'est-à-dire la partie concernant le rayon de convergence de la série (C.1.1). Puis nous nous attaquerons à la preuve de la deuxième partie en effectuant dans un premier temps des calculs algébriques avant de montrer l'égalité (C.1.3) elle-même.

C.1.1 Rayon de convergence

Nous allons tout d'abord montrer la proposition-définition II.4.2. Nous prouverons ensuite que le rayon de convergence de la série (C.1.1) est non nul.

Introduisons quelques notations. Tout d'abord deux arbres binaires plans jouent des rôles particuliers dans la construction de la famille $(\Psi(b))_{b \in \mathbb{T}(2)}$: l'arbre binaire \circ réduit à une racine et Υ l'unique arbre binaire ayant un seul noeud interne.

$$\circ = \circ \quad \text{et} \quad \Upsilon = \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \end{array}$$

Nous allons maintenant introduire pour $b \in \mathbb{T}(2)$, $b \neq \circ$, $\alpha \in \{0, 1\}^{\|b\|}$, $t \in [0, T]^{\|b\|}$ et $f \in (H^q)^{\|b\|}$ les fonctions $\mathcal{G}^\alpha(b)(t, f) \in \mathcal{C}_m^0([0, T], H^q)$ continues par morceaux sur $[0, T]$ à valeurs dans H^q .

Soit $b \in \mathbb{T}(2)$, $b \neq \circ$ alors il existe b_1 et b_2 des arbres binaires plans tels que $b = B_+(b_1, b_2)$. Soient $\alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) \in \{0, 1\}^{\|b_1\|} \times \{0, 1\}^{\|b_2\|}$, $t = (t^{(1)}, t^{(2)}) \in [0, T]^{\|b_1\|} \times [0, T]^{\|b_2\|}$ et $f = (f^{(1)}, f^{(2)}) \in (H^q)^{\|b_1\|} \times (H^q)^{\|b_2\|}$. Alors si $b_1 \neq \circ$ et $b_2 \neq \circ$ nous définissons $\mathcal{G}^\alpha(b)(t, f)$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^\alpha(b)(t, f)(\tau) := & \int_0^T d\eta_1 \left[G * \left(\mathcal{G}^{\alpha^{(1)}}(b_1)(t^{(1)}, f^{(1)})(\eta_1) \right) \right] (\eta_1 - \tau) \\ & \int_0^T d\eta_2 \left[G * \left(\mathcal{G}^{\alpha^{(2)}}(b_2)(t^{(2)}, f^{(2)})(\eta_2) \right) \right] (\eta_2 - \tau) \end{aligned} \quad (\text{C.1.4})$$

où $G * f$ a été défini p.67. Considérons maintenant les cas $(b_1 = \circ, b_2 \neq \circ)$ et $(b_1 \neq \circ, b_2 = \circ)$. Nous nous donnons $b \neq \circ$, $\alpha \in \{0, 1\}^{\|b\|}$, $t \in [0, T]^{\|b\|}$ et $f \in (H^q)^{\|b\|}$, $\tilde{\alpha} \in \{0, 1\}$, $\tilde{t} \in [0, T]$, $g \in H^q$. Alors nous posons

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(\tilde{\alpha}, \alpha)}(B_+(\circ, b))(\tilde{t}, t, (\tilde{f}, f))(\tau) = & \mathcal{G}^{(\alpha, \tilde{\alpha})}(B_+(b, \circ))((t, \tilde{t}), (f, \tilde{f}))(\tau) := \\ & (G^{\tilde{\alpha}} * \tilde{f})(\tilde{t} - \tau) \int_0^T d\eta \left[G * \left(\mathcal{G}^\alpha(b)(t, f)(\eta) \right) \right] (\eta - \tau) \end{aligned} \quad (\text{C.1.5})$$

où $G^0 * f := G * f$ et où pour tout $f \in H^q$, $t \in [0, T]$, nous avons noté $(G^1 * f)(t)$ l'élément de H^q tel que $\forall k \in \mathbb{R}^n$

$$(G^1 * f)(t)(k) := \theta(t) \cos(t\omega_k) \overline{\tilde{f}}(k) \quad (\text{C.1.6})$$

Enfin pour $(b_1, b_2) = (\circ, \circ)$ nous posons pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \{0, 1\}^2$, $f = (f_1, f_2) \in (H^q)^2$ et $t = (t_1, t_2) \in [0, T]^2$

$$\mathcal{G}^\alpha(\gamma)(t, f)(\tau) := (G^{\alpha_1} * f_1)(t_1 - \tau) (G^{\alpha_2} * f_2)(t_2 - \tau) \quad (\text{C.1.7})$$

Nous avons alors le lemme suivant

Lemme C.1.1 *Pour tout $b \in \mathbb{T}(2)$, $b \neq \circ$, $\alpha \in \{0, 1\}^{\|b\|}$, $t \in [0, T]^{\|b\|}$ et $f \in (H^q)^{\|b\|}$, la fonction $\mathcal{G}^\alpha(b)(t, f)$ est bien définie et est continue par morceau de $[0, T]$ dans H^q . De plus pour tout $\tau \in [0, T]$ nous avons*

$$\|\mathcal{G}^\alpha(b)(t, f)(\tau)\|_{H^q} \leq \frac{1}{T} (C_q M^2 T)^{|b|} \|f_1\| \cdots \|f_{\|b\|}\| \quad (\text{C.1.8})$$

Preuve: (du lemme C.1.1)

Nous allons montrer le lemme C.1.1 par récurrence sur le nombre de noeuds internes $|b|$ de b .

Si $b = \gamma$ alors $\mathcal{G}^\alpha(\gamma)(t, f)$ est donné par (C.1.7). Alors en utilisant les définition (II.4.2) et (C.1.6) de $G^0 * f$ et $G^1 * f$ nous obtenons facilement que $\mathcal{G}^\alpha(\gamma)(t, f)$ appartient à $\mathcal{C}_m^0([0, T], H^q)$. Soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \{0, 1\}^2$, $f = (f_1, f_2) \in (H^q)^2$ et $t = (t_1, t_2) \in [0, T]^2$, $\tau \in [0, T]$. Alors d'après la proposition II.4.1 nous obtenons

$$\|\mathcal{G}^\alpha(\gamma)(t, f)(\tau)\|_{H^q} \leq C_q \|(G^{\alpha_1} * f_1)(t_1 - \tau)\|_{H^q} \|(G^{\alpha_2} * f_2)(t_2 - \tau)\|_{H^q}$$

Or d'après la définition de $G^0 * f$ et $G^1 * f$ nous pouvons facilement voir que $\|(G^{\alpha_j} * f_j)(t_j - \tau)\|_{H^q} \leq M \theta(t_j - \tau) \|f_j\|_{H^q}$ où $M = \max(1, \frac{1}{m})$ ceci pour tout $j \in \{1, 2\}$ ce qui montre que le lemme est valide pour $b = \gamma$.

Supposons maintenant le lemme vrai pour tous les arbres binaires plans $b \in \mathbb{T}(2)$ tels que $1 \leq |b| \leq N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ fixé. Nous nous donnons alors $b \in \mathbb{T}(2)$ tel que $|b| = N + 1 \geq 2$. Il existe alors $(b_1, b_2) \in \mathbb{T}(2)^2$ tel que $b = B_+(b_1, b_2)$ et nous avons nécessairement $|b_1| \leq N$ et $|b_2| \leq N$. Soient $\alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) \in \{0, 1\}^{\|b_1\|} \times \{0, 1\}^{\|b_2\|}$, $t = (t^{(1)}, t^{(2)}) \in [0, T]^{\|b_1\|} \times [0, T]^{\|b_2\|}$ et $f = (f^{(1)}, f^{(2)}) \in (H^q)^{\|b_1\|} \times (H^q)^{\|b_2\|}$.

Si $b_1 \neq \circ$ et $b_2 \neq \circ$ alors $\mathcal{G}^\alpha(b)(t, f)(\tau)$ est défini par (C.1.4). Or par hypothèse le lemme C.1.1 est vrai pour b_1 et b_2 . Ainsi $\forall j \in \{1, 2\}$ l'application

$$\tau \longmapsto \int_0^T d\eta \left[G * \left(\mathcal{G}^{\alpha^{(j)}}(b_j)(t^{(j)}, f^{(j)})(\eta) \right) \right] (\eta - \tau)$$

est bien définie et appartient à $\mathcal{C}_m^0([0, T], H^q)$. Alors d'après la proposition II.4.1 la fonction $\mathcal{G}^\alpha(b)(t, f)$ est bien définie par (C.1.4), appartient à $\mathcal{C}_m^0([0, T], H^q)$ et nous avons de plus

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}^\alpha(b)(t, f)(\tau)\|_{H^q} &\leq C_q \int_0^T d\eta_1 \left\| \left[G * \left(\mathcal{G}^{\alpha^{(1)}}(b_1)(t^{(1)}, f^{(1)})(\eta_1) \right) \right] (\eta_1 - \tau) \right\|_{H^q} \\ &\quad \int_0^T d\eta_2 \left\| \left[G * \left(\mathcal{G}^{\alpha^{(2)}}(b_2)(t^{(2)}, f^{(2)})(\eta_2) \right) \right] (\eta_2 - \tau) \right\|_{H^q} \end{aligned}$$

Alors d'après la définition II.4.2 de $G * f$ nous avons en utilisant l'inégalité C.1.8 vérifiée par b_1 et b_2

$$\|\mathcal{G}^\alpha(b)(t, f)(\tau)\|_{H^q} \leq C_q M^2 (C_q M^2 T)^{|b_1|+|b_2|} \|f\|$$

où par abus de notations nous avons noté $\|f\|$ le produit $\|f_1^{(1)}\| \cdots \|f_{\|b_1\|}^{(1)}\| \|f_1^{(2)}\| \cdots \|f_{\|b_2\|}^{(2)}\|$. L'inégalité (C.1.8) est donc vérifiée pour $b = B_+(b_1, b_2)$.

Il ne nous reste plus qu'à traiter les cas $(b_1 = \circ, b_2 \neq \circ)$ et $(b_1 \neq \circ, b_2 = \circ)$. Si $b_1 \neq \circ$ et $b_2 = \circ$ alors $\mathcal{G}^\alpha(b)(t, f)(\tau)$ est donné (C.1.5) et par hypothèse le lemme C.1.1 est valide pour b_1 . Alors en utilisant les définitions de $G * f$, $G^1 * f$ et la proposition II.4.1 nous obtenons facilement que $\mathcal{G}^\alpha(b)(t, f) \in \mathcal{C}_m^0([0, T], H^q)$ et

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}^\alpha(b)(t, f)(\tau)\|_{H^q} &\leq C_q \left\| \left(G^{\alpha(2)} * f^{(2)} \right) (t^{(2)} - \tau) \right\|_{H^q} \\ &\quad \int_0^T d\eta_1 \left\| \left[G * \left(\mathcal{G}^{\alpha(1)}(b_1)(t^{(1)}, f^{(1)})(\eta_1) \right) \right] (\eta_1 - \tau) \right\|_{H^q} \end{aligned}$$

Alors en utilisant le même raisonnement que pour le cas précédent nous obtenons finalement

$$\|\mathcal{G}^\alpha(b)(t, f)(\tau)\|_{H^q} \leq \frac{C_q M^2}{T} (C_q M^2 T)^{|b_1|} \|f\| \int_0^T d\eta_1 \theta(\eta_1 - \tau) \leq \frac{1}{T} (C_q M^2 T)^{|b_1|+1} \|f\|$$

Ainsi l'inégalité (C.1.8) est vraie pour $b = B_+(b_1, \circ)$. Pour traiter le cas $b_1 = \circ, b_2 \neq \circ$ il suffit d'échanger les rôles de b_1 et b_2 dans ce qui précède.

■

Nous sommes maintenant en mesure de donner la preuve de la proposition II.4.2. Nous allons en fait prouver un résultat plus précis dont voici l'énoncé

Proposition C.1.1 *Pour tout $b \in \mathbb{T}(2)$ l'opérateur $\Upsilon(b) : \mathcal{E}^{1*} \longrightarrow \mathcal{E}^{\|b\|*}$ est bien défini par (II.4.4) page 68 et pour tout $b \in \mathbb{T}(2)$ et $b \neq \circ$, nous avons $\forall \psi \in \mathcal{E}^{1*}$, $\alpha \in \{0, 1\}^{\|b\|}$, $\forall t \in [0, T]^{\|b\|}$ et $\forall f \in (H^q)^{\|b\|}$*

$$\left\langle \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t^\alpha} (\Upsilon(b)\psi)(t), f \right\rangle = \int_0^T d\tau \langle \psi(\tau), \mathcal{G}^\alpha(b)(t, f)(\tau) \rangle \quad (\text{C.1.9})$$

Preuve: (de la proposition C.1.1)

Nous allons encore une fois effectuer une récurrence sur le nombre $|b|$ de noeuds internes de b .

Si $b = \gamma$ alors la définition (II.4.4) nous donne $\Upsilon(\gamma) = \Upsilon$ ainsi en comparant la définition (II.4.1) p.67 de Υ et l'expression (C.1.7) de $\mathcal{G}^\alpha(\gamma)(t, f)$ nous voyons que l'égalité (C.1.9) est vérifiée.

Supposons maintenant que la proposition C.1.1 est vraie pour tous les arbres binaires $b \in \mathbb{T}(2)$ tels que $|b| \leq N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $b \in \mathbb{T}(2)_{N+1}$ alors il existe $(b_1, b_2) \in \mathbb{T}(2)^2$ tel que $b = B_+(b_1, b_2)$. Alors soient $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \{0, 1\}^2$, $f = (f_1, f_2) \in (H^q)^2$,

$t = (t_1, t_2) \in [0, T]^2$ et enfin $U = \sum_j U_j^{(1)} \otimes U_j^{(2)}$ appartenant à $(\mathcal{E}^{1*})^{\otimes 2}$ alors par définition nous avons

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial^{|\alpha|} (\Upsilon(b_1) \otimes \Upsilon(b_2)) U}{\partial t^\alpha}(t), f \right\rangle \\ &= \sum_j \left\langle \frac{\partial^{|\alpha^{(1)}|} \Upsilon(b_1) U_j^{(1)}}{\partial (t^{(1)})^{\alpha^{(1)}}}(t^{(1)}), f^{(1)} \right\rangle \left\langle \frac{\partial^{|\alpha^{(2)}|} \Upsilon(b_2) U_j^{(2)}}{\partial (t^{(2)})^{\alpha^{(2)}}}(t^{(2)}), f^{(2)} \right\rangle \quad (\text{C.1.10}) \end{aligned}$$

Si $b_1 \neq \circ$ et $b_2 \neq \circ$ alors par hypothèse (C.1.9) est vraie pour b_1 et b_2 . Ainsi le second membre de (C.1.10) devient

$$\int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \left\langle \sum_j U(\tau_1, \tau_2) \left(\left(\mathcal{G}^{\alpha^{(1)}}(b_1)(t^{(1)}, f^{(1)})(\tau_1) \right), \left(\mathcal{G}^{\alpha^{(2)}}(b_2)(t^{(2)}, f^{(2)})(\tau_2) \right) \right) \right\rangle \quad (\text{C.1.11})$$

Alors en utilisant cette dernière expression et l'inégalité (C.1.8) du lemme C.1.1 nous obtenons finalement

$$\left| \left\langle \frac{\partial^{|\alpha|} (\Upsilon(b_1) \otimes \Upsilon(b_2)) U}{\partial t^\alpha}(t), f \right\rangle \right| \leq (C_q M^2 T)^{|b_1|+|b_2|} \|U\| \|f\|$$

Ainsi puisque $(\mathcal{E}^{1*})^{\otimes 2}$ est un sous-espace dense de $\mathcal{E}^{2*} \ni \Upsilon(\psi)$, la dernière inégalité nous assure que $(\Upsilon(b_1) \otimes \Upsilon(b_2))$ est bien défini comme opérateur allant de \mathcal{E}^{2*} vers $\mathcal{E}^{|b|*}$. Nous pouvons donc bien considérer la composition $(\Upsilon(b_1) \otimes \Upsilon(b_2)) \circ \Upsilon$. Enfin soit $\psi \in \mathcal{E}^{1*}$ alors $\Upsilon(\psi) \in \mathcal{E}^{2*}$. Donnons nous une suite $(U_n)_n$ d'éléments de $(\mathcal{E}^{1*})^{\otimes 2}$ convergeant vers $\Upsilon(\psi)$ dans \mathcal{E}^{2*} (une telle suite existe par densité). Alors pour tout n l'expression (C.1.11) devient

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial^{|\alpha|} (\Upsilon(b_1) \otimes \Upsilon(b_2)) U_n}{\partial t^\alpha}(t), f \right\rangle \\ &= \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 \left\langle U_n(\tau_1, \tau_2), \left(\left(\mathcal{G}^{\alpha^{(1)}}(t^{(1)}, f^{(1)})(\tau_1) \right), \left(\mathcal{G}^{\alpha^{(2)}}(t^{(2)}, f^{(2)})(\tau_2) \right) \right) \right\rangle \end{aligned}$$

En faisant alors tendre n vers $+\infty$ dans cette dernière expression et en utilisant les définitions (II.4.1) et (C.1.4) de Υ et $\mathcal{G}^\alpha(B_+(b_1, b_2))(t, f)$ respectivement, nous obtenons finalement l'égalité (C.1.9).

Enfin les cas $b_1 \neq \circ, b_2 = \circ$ et $b_1 = \circ, b_2 \neq \circ$ se traitent suivant le même procédé.

■

Nous pouvons faire remarquer que si nous utilisons l'inégalité (C.1.8) du lemme C.1.1 dans l'identité (C.1.9) nous obtenons l'inégalité suivante

$$\forall b \in \mathbb{T}(2) \setminus \{\circ\}; \quad \|\Upsilon(b)\| \leq (C_q M^2 T)^{|b|} \quad (\text{C.1.12})$$

qui va nous permettre de montrer facilement la première partie du théorème C.1.1.

En effet donnons nous φ appartenant à \mathcal{E} alors la proposition C.1.1 nous assure que pour tout $s \in [0, T]$ et pour tout $b \in \mathbb{T}(2)$ nous avons

$$\left| \left\langle \Psi(b) \overleftrightarrow{\partial}_s, (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle \right| \leq (C_q M^2 T)^{|b|} \|\psi\|_{*1} \left[\|\varphi(s)\|_{H^q} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s) \right\|_{H^q} \right]^{\|b\|}$$

alors en utilisant le fait que le nombre d'arbres binaires plans b tels que $|b| = N$ est majoré par 4^N (voir l'excellent livre de Robert Sedgewick et Phillipe Flajolet [53] pour une preuve de ce résultat) nous obtenons finalement la première partie du théorème C.1.1 i.e. la série entière $\sum_{b \in \mathbb{T}(2)} (-\lambda)^{|b|} \left\langle \Psi(b) \overleftrightarrow{\partial}_s, (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle$ a un rayon de R vérifiant

$$R \geq \left(4C_q M^2 T \left[\|\varphi(s)\|_{H^q} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s) \right\|_{H^q} \right] \right)^{-1} > 0$$

Remarque C.1.1

Nous avons utilisé ici le fait que pour tout $b \in \mathbb{T}(2)$, $\|b\| = |b| + 1$. Dans le cas des p -arbres, cette propriété est remplacée par $\|p\| = (p-1)|b| + 1$. Notons que nous n'avons pas de propriété analogue pour les arbres plans généraux.

C.1.2 Calculs algébriques

Nous allons maintenant nous pencher sur la deuxième partie du théorème C.1.1. Nous fixons donc $\varphi \in \mathcal{E}$ solution de l'équation (E_2) i.e. telle que $(\square + m^2)\varphi + \lambda\varphi^2 = 0$ et $\psi \in \mathcal{C}^2([0, T], H^{-q+2}) \subset \mathcal{E}^{1*}$ telle que $(\square + m^2)\psi = 0$ dans H^{-q} . Donnons nous $N \in \mathbb{N}$, nous allons étudier Δ_N défini par

$$\Delta_N := \sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2) \\ |b| \leq N}} (-\lambda)^{|b|} \left\langle \Psi(b) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes \|b\|}, (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle - \left\langle \psi \overleftrightarrow{\partial}_0, \varphi \right\rangle \quad (\text{C.1.13})$$

Nous devons maintenant montrer que Δ_N tend vers 0 lorsque N tends vers $+\infty$.

Fixons un temps s dans l'intervalle $[0, T]$. Considérons l'espace $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ défini par

$$\mathcal{F} := \mathcal{C}^2([0, T], H^q) \cap \mathcal{C}^0([0, T], H^{q+2})$$

et l'opérateur $P : \mathcal{E}^{1*} \longrightarrow \mathcal{F}^*$ tel que pour tout $U \in \mathcal{E}^{1*}$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{F}$

$$\langle PU, \varphi \rangle := \left\langle U \overleftrightarrow{\partial}_s, \varphi \right\rangle - \left\langle U \overleftrightarrow{\partial}_0, \varphi \right\rangle + \int_0^s d\tau \langle U(\tau), (\square + m^2)\varphi(\tau) \rangle \quad (\text{C.1.14})$$

ici $\square + m^2$ est l'opérateur $\square + m^2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0([0, T], H^q)$ défini par $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$. Soit k un entier $k \in \mathbb{N}^2$ alors pour tout $I \subset \llbracket 1, k \rrbracket$ nous notons P_I^k l'unique opérateur $P_I^k : \mathcal{E}^{k*} \longrightarrow \widehat{\otimes}^k \mathcal{F}$ tel que pour tout élément décomposable $U = U_1 \otimes \dots \otimes U_k$ de $(\mathcal{E}^{1*})^{\otimes k}$ et pour tout $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in \mathcal{F}^k$

$$\left\langle P_I^k U, \varphi \right\rangle = \prod_{i \in I} \langle P U_i, \varphi_i \rangle \prod_{j \notin I} \int_0^s \langle U_j(\tau_j), \varphi_j(\tau_j) \rangle d\tau_j$$

Il est facile de voir que P_I^k est bien défini par densité de $(\mathcal{E}^{1*})^{\otimes k}$ dans \mathcal{E}^{k*} .

La fonction $\varphi \in \mathcal{E}$ est une solution de (E_2) ainsi d'après la proposition II.4.1 φ appartient à \mathcal{F} . Nous pouvons donc considérer $\langle PU, \varphi \rangle$ pour $U \in \mathcal{E}^{1*}$.

Soit b un arbre binaire plan tel que $b \neq \circ$. Nous notons alors k le nombre de feuilles de b , $k := \|b\|$. Alors d'après la définition II.4.2 p.68 de $\Upsilon(b)$ (et donc de $\Psi(b) = \Upsilon(b)\psi$) nous obtenons facilement que $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\forall \alpha \in \{0, 1\}^k$ nous avons $\frac{\partial^{|\alpha|} \Psi(b)}{\partial t^\alpha} \Big|_{t_j=0} = 0$ et d'autre part $(\square + m^2)\varphi = -\lambda\varphi^2$. Ainsi d'après la définition (C.1.14) de P nous avons l'égalité

$$\left\langle \Psi(b) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes k}, (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle = \sum_{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket} \lambda^{k-|I|} \left\langle P_I^k \Psi(b), (\varphi^{\alpha_1}, \dots, \varphi^{\alpha_k}) \right\rangle \quad (\text{C.1.15})$$

où $\alpha_j^I = 2$ si $j \notin I$ et $\alpha_j^I = 1$ sinon.

Pour le cas $b = \circ$ nous avons le lemme suivant

Lemme C.1.2 *Pour tout $\psi \in \mathcal{C}^2([0, T], H^{-q+2})$ tel que $(\square + m^2)\psi = 0$ dans H^{-q} et pour tout $\varphi \in \mathcal{E}$ solution de l'équation (E_2) nous avons $\forall s \in [0, T]$*

$$\left\langle \psi \overleftrightarrow{\partial}_s, \varphi \right\rangle - \left\langle \psi \overleftrightarrow{\partial}_0, \varphi \right\rangle = \lambda \int_0^s \langle \psi(\tau), \varphi^2(\tau) \rangle d\tau \quad (\text{C.1.16})$$

c'est-à-dire $\langle P\psi, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{E}$ solution de l'équation (E_2) .

Preuve: (du lemme C.1.2)

Soient $\psi \in \mathcal{C}^2([0, T], H^{-q+2})$ telle que $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta\psi + m^2\psi = 0$ dans H^{-q} et $\varphi \in \mathcal{E}$ solution de (E_2) . Alors puisque ψ et φ sont des fonctions \mathcal{C}^2 la fonction $f : t \mapsto \left\langle \psi \overleftrightarrow{\partial}_t, \varphi \right\rangle$ est dérivable sur $[0, T]$ et pour tout $t \in [0, T]$

$$f'(t) = \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(t), \varphi(t) \right\rangle - \left\langle \psi(t), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t) \right\rangle$$

Or ψ et φ vérifient $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta\psi + m^2\psi = 0$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi + m^2\varphi = -\lambda\varphi^2$. Nous avons donc

$$f'(t) = \langle \psi(t), (\Delta - m^2)\varphi(t) \rangle - \left\langle \psi(t), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t) \right\rangle = \lambda \langle \psi(t), \varphi^2(t) \rangle$$

ce qui nous donne en intégrant sur $[0, s]$

$$\left\langle \psi \overleftrightarrow{\partial}_s, \varphi \right\rangle - \left\langle \psi \overleftrightarrow{\partial}_0, \varphi \right\rangle = f(s) - f(0) = \lambda \int_0^s \langle \psi(\tau), \varphi^2(\tau) \rangle d\tau \quad (\text{C.1.17})$$

c'est-à-dire (C.1.16).

■

Revenons maintenant à la somme Δ_N définie par (C.1.13). D'après (C.1.16) et (C.1.15) nous avons

$$\Delta_N = \sum_{\beta=1}^{2N-1} \lambda^{\beta-1} \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ 0 \leq l \leq k \\ k+l=\beta}} \sum_{b \in \mathbb{T}(2)} \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket \\ \|b\|=k \\ |I|=k-l}} (-1)^{|b|} \left\langle P_I^k \Psi(b), (\varphi^{\alpha_1}, \dots, \varphi^{\alpha_k}) \right\rangle \quad (\text{C.1.18})$$

avec $\alpha_j^I = 2$ si $j \notin I$ et $\alpha_j^I = 1$ sinon.

Soit $\beta \in \mathbb{N}^*$ tel que $\beta \leq N$. Considérons Δ_N^β le terme d'ordre β par rapport à λ dans le membre de droite de (C.1.18), il est donné par

$$\begin{aligned} \Delta_N^\beta := & \sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2) \\ \|b\| = \beta}} (-1)^{|b|} \left\langle P_{[[1, \beta]]}^\beta \Psi(b), (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle \\ & + \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \leq \beta \\ k+l = \beta}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{T}(2) \\ \|a\| = k}} \sum_{\substack{I \subset [[1, k]] \\ |I| = k-l}} (-1)^{|a|} \left\langle P_I^k \Psi(a), (\varphi^{\alpha_1^I}, \dots, \varphi^{\alpha_k^I}) \right\rangle \quad (\text{C.1.19}) \end{aligned}$$

Étudions la première somme dans (C.1.19).

Pour tout $E \in \{\circ, \gamma\}^k$ nous noterons $n_\gamma(E)$ le nombre d'occurrences de γ dans E c'est-à-dire

$$n_\gamma(E) := \text{Card}\{i | E_i = \gamma\}$$

Nous avons alors le lemme suivant qui est en quelque sorte la clef de la démonstration.

Lemme C.1.3 1. Soit b un arbre binaire plan ayant β feuilles avec $\beta \geq 2$. Alors nous avons

$$- \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \leq \beta \\ k+l = \beta}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{T}(2) ; \|a\| = k \\ E \in \{\circ, \gamma\}^k \text{ tel que } \\ n_\gamma(E) = l \text{ et } E \circ a = b}} (-1)^{|a|} = (-1)^{|b|}$$

2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{T}(2)$ tels que $\|a\| = p$ et $E \in \{\circ, \gamma\}^p$ alors nous avons $\|E \circ a\| = p + n_\gamma(E)$ et

$$\left\langle P_{[[1, p+n_\gamma(E)]]}^{p+n_\gamma(E)} \Psi(E \circ a), (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle = \left\langle P_{I_E}^p \Psi(a), (\varphi^{\alpha_1^{I_E}}, \dots, \varphi^{\alpha_p^{I_E}}) \right\rangle$$

où $I_E := \{j \in [[1, p]] \text{ tel que } E_j = \circ\}$ et où $\alpha_j^{I_E} = 2$ si $j \notin I_E$ et 1 sinon.

Nous renvoyons le lecteur à la section C.1.4 pour la preuve de ce dernier lemme.

Le point 1 du lemme C.1.3 nous donne directement l'égalité

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2) \\ \|b\| = \beta}} (-1)^{|b|} \left\langle P_{[[1, \beta]]}^\beta \Psi(b), (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle \\ & = - \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \leq \beta \\ k+l = \beta}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{T}(2) ; \|a\| = k \\ E \in \{\circ, \gamma\}^k | n_\gamma(E) = l}} (-1)^{|a|} \left\langle P_{[[1, \beta]]}^\beta \Psi(E \circ a), (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle \quad (\text{C.1.20}) \end{aligned}$$

Or $E \in \{\circ, \gamma\}^p$ est entièrement déterminé par p et I_E ainsi d'après le deuxième point du lemme C.1.3 et l'égalité (C.1.20) nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2) \\ \|b\| = \beta}} (-1)^{|b|} \left\langle P_{\llbracket 1, \beta \rrbracket}^\beta \Psi(b), (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle \\ = - \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \leq \beta \\ k+l = \beta}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{T}(2) \\ \|a\| = k}} \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket \\ |I| = k-l}} (-1)^{|a|} \left\langle P_I^k \Psi(a), (\varphi^{\alpha_1^I}, \dots, \varphi^{\alpha_k^I}) \right\rangle \end{aligned}$$

alors en insérant cette dernière égalité dans (C.1.19) nous obtenons finalement que pour tout $\beta \leq N$ nous avons $\Delta_\beta^N = 0$. Ainsi le terme d'ordre β dans le membre de droite de (C.1.18) s'annule ce qui montre que Δ_N est d'ordre au moins $N + 1$ par rapport à λ .

Il nous faut maintenant nous occuper des termes d'ordre supérieurs de manière à montrer que $\Delta_N \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$.

C.1.3 Etude analytique

Nous avons vu que tous les termes d'ordre $\beta \leq N$ du membre de droite de l'égalité (C.1.18) s'annulent. Nous avons donc

$$\Delta_N = \sum_{\beta=N+1}^{2N-1} \lambda^{\beta-1} \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \leq N \\ k+l = \beta}} \sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2) \\ \|b\| = k}} \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket \\ |I| = k-l}} (-1)^{|b|} \left\langle P_I^k \Psi(b), (\varphi^{\alpha_1^I}, \dots, \varphi^{\alpha_k^I}) \right\rangle \quad (\text{C.1.21})$$

Pour finir de prouver le théorème C.1.1 il nous suffit ainsi de majorer la valeur absolue du membre de droite de cette dernière inégalité de manière à prouver que Δ_N tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Or nous avons le lemme suivant

Lemme C.1.1 *Soient $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \geq 2$ et $b \in \mathbb{T}(2)$ tel que $\|b\| = k$. Alors pour tout $I \subset \llbracket 1, k \rrbracket$ et $\psi \in \mathcal{E}^{1*}$ et toute solution $\varphi \in \mathcal{E}$ de (E_2) nous avons*

$$\left| \left\langle P_I^k \Psi(b), (\varphi^{\alpha_1^I}, \dots, \varphi^{\alpha_k^I}) \right\rangle \right| \leq \frac{1}{T} (2 + |\lambda| C_q T \|\varphi\|_\mathcal{E})^{|I|} M^{2(k-1)} (C_q T \|\varphi\|_\mathcal{E})^{2k-|I|} \|\psi\|_{1*} \quad (\text{C.1.22})$$

Ce dernier lemme va nous permettre de finir la preuve du théorème. En effet en insérant l'égalité (C.1.22) du lemme dans (C.1.21) et en utilisant le fait que le nombre d'arbres binaires plans vérifiant $|b| = k$ est majoré par 4^k , nous obtenons

$$\begin{aligned} |\Delta_N| &\leq \\ \frac{\|\psi\|_{1*}}{|\lambda| T} \sum_{\beta=N+1}^{2N-1} (|\lambda| C_q T \|\varphi\|_\mathcal{E})^\beta \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \leq N \\ k+l = \beta}} 4^{k-1} C_k^{k-l} (2 + |\lambda| C_q T \|\varphi\|_\mathcal{E})^{k-l} M^{2(k-1)} \quad (\text{C.1.23}) \end{aligned}$$

Notons B la quantité $B := |\lambda|C_q T \|\varphi\|_{\mathcal{E}}$ alors d'après (C.1.23) nous avons

$$|\Delta_N| \leq C_q \|\varphi\|_{\mathcal{E}} \|\psi\|_{1*} \sum_{\substack{1 \leq l \leq k \leq N \\ N+1 \leq k+l \leq 2N-1}} C_k^{k-l} (4M^2 B)^{k-1} B^l (2+B)^{k-l}$$

Or pour tout $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $1 \leq l \leq k \leq N$ et $N+1 \leq k+l \leq 2N-1$ nous avons $k \geq [N/2]$, ainsi l'inégalité précédente implique

$$|\Delta_N| \leq C_q \|\varphi\|_{\mathcal{E}} \|\psi\|_{1*} \sum_{k=[N/2]}^N (4M^2 B)^{k-1} (2+2B)^{k-1} \quad (\text{C.1.24})$$

Mais si la condition (C.1.2) est satisfaite alors nous avons $8M^2 B(1+B) < 1$ et (C.1.24) nous assure ainsi que Δ_N tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

Il ne nous reste plus qu'à prouver les lemmes C.1.1 et C.1.3 pour compléter la preuve du théorème II.4.1.

Preuve: (du lemme C.1.1)

Notons \tilde{P} l'opérateur $\tilde{P} : \mathcal{E}^{1*} \longrightarrow \mathcal{F}'$ défini pour tout $U \in \mathcal{E}^{1*}$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{F}$ par

$$\langle \tilde{P}U, \varphi \rangle := \langle U \overleftrightarrow{\partial}_s, \varphi \rangle + \int_0^s d\tau \langle U(\tau), (\square + m^2)\varphi(\tau) \rangle \quad (\text{C.1.25})$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $I \subset \llbracket 1, k \rrbracket$ nous notons alors \tilde{P}_I^k l'unique opérateur $\tilde{P}_I^k : \mathcal{E}^{k*} \longrightarrow \widehat{\otimes}^k \mathcal{F}$ tel que pour tout élément décomposable $U = U_1 \otimes \dots \otimes U_k$ de $(\mathcal{E}^{1*})^{\otimes k}$ et pour tout $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in \mathcal{F}^k$

$$\langle \tilde{P}_I^k U, \varphi \rangle = \prod_{i \in I} \langle \tilde{P}U_i, \varphi_i \rangle \prod_{j \notin I} \int_0^s \langle U_j(\tau_j), \varphi_j(\tau_j) \rangle d\tau_j$$

En développant l'expression (C.1.25) on montre facilement que \tilde{P}_I^k est bien défini et que pour tout $U \in (\mathcal{E}^{1*})^{\otimes k}$ nous avons

$$\left| \langle \tilde{P}_I^k U, \varphi \rangle \right| \leq \|U\|_{**k} \sum_{J \subset I} \prod_{\alpha \in J} 2 \|\varphi_{\alpha}\|_{\mathcal{E}} \prod_{\beta \in I \setminus J} T \|(\square + m^2)\varphi_{\beta}\|_{\infty, H^q} \prod_{\gamma \in \llbracket 1, k \rrbracket \setminus I} T \|\varphi_{\gamma}\|_{\infty, H^q}$$

De plus comme pour tout $b \neq \circ$, $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\forall \alpha \in \{0, 1\}^k$ nous avons $\frac{\partial^{|\alpha|} \Psi(b)}{\partial t^{\alpha}} \Big|_{t_j=s} = 0$, nous obtenons finalement que pour tout $b \neq \circ$ nous avons $P_I^k \Psi(b) = \tilde{P}_I^k \Psi(b)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{E}$ une solution de (E_2) alors puisque $(\square + m^2)\varphi = -\lambda\varphi^2$, la fonction φ appartient à \mathcal{F} il en est donc de même pour φ^2 d'après la proposition II.4.1. Alors en appliquant l'inégalité précédente à $(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = (\varphi^{\alpha_1^I}, \dots, \varphi^{\alpha_k^I})$ nous obtenons finalement

$$\left| \langle P_I^k \Psi(b), (\varphi^{\alpha_1^I}, \dots, \varphi^{\alpha_k^I}) \rangle \right| \leq (2 + |\lambda|C_q T \|\varphi\|_{\mathcal{E}})^{|I|} (C_q T)^{k-|I|} \|\varphi\|^{2k-|I|} \|\Psi(b)\|_{**k} \quad (\text{C.1.26})$$

ce qui, avec l'inégalité (C.1.12), nous donne l'inégalité (C.1.22) recherchée.

■

C.1.4 Combinatoire sur les arbres binaires plans

Pour finir de prouver le théorème II.4.1 il nous suffit de démontrer le lemme C.1.3. Nous allons tout d'abord montrer la première partie du lemme c'est-à-dire le lemme suivant

Lemma C.1.2 *Soit b un arbre binaire plan tel que $\beta := \|b\| \geq 2$. Nous avons alors*

$$\sum_{\substack{0 \leq l \leq k \leq \beta \\ k+l=\beta}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{T}(2), \|a\|=k \\ E \in \{\circ, \gamma\}^k | n_\gamma(E)=l \\ \text{tel que } E \circ a = b}} (-1)^{|a|} = 0 \quad (\text{C.1.27})$$

Preuve: (du lemme C.1.2)

Soit $b \in \mathbb{T}(2)$ tel que $\beta := \|b\| \geq 2$. Notons L l'entier défini par

$$L := \max\{i \in \mathbb{N} \text{ tel que}$$

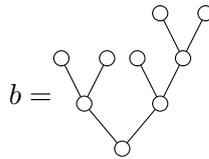
$$\exists a \in \mathbb{T}(2), \|a\| = \beta - i, \exists E \in \{\circ, \gamma\}^{\beta-i} \text{ tel que } n_\gamma(E) = i \text{ et } E \circ a = b\}$$

Puisque $\beta \geq 2$ nous avons $L \geq 1$. Notons par ailleurs K l'entier $K := \beta - L$ et prenons $A \in \mathbb{T}(2)$, $\|A\| = K$ et $\hat{E} \in \{\circ, \gamma\}^K$ tel que $\hat{E} \circ A = b$ (nous avons alors nécessairement $n_\gamma(\hat{E}) = L$). Remarquons que A est alors unique : il est obtenu en supprimant toutes les paires de feuilles de b attachée au même noeud interne. Notons I l'ensemble des indices $1 \leq i \leq K$ tels que $E_i = \gamma$ et pour tout $J \subset I$ nous désignerons E^J le K -uplet $E^J := (E_1^J, \dots, E_K^J) \in \{\gamma, \circ\}$ où pour tout $j \in \llbracket 1, K \rrbracket$, E_j^J est défini par

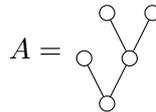
$$E_j^J = \begin{cases} \gamma & \text{si } j \in J \\ \circ & \text{si } j \in \llbracket 1, K \rrbracket \setminus J \end{cases}$$

Exemple C.1.1

Nous allons traiter un exemple pour fixer les idées. Considérons l'arbre $b \in \mathbb{T}(2)$ défini par le graphe suivant



Alors dans ce cas nous avons $L = 2$ et l'arbre A que nous avons construit précédemment est donné par



et avec les notations précédentes $\hat{E} = (\gamma, \circ, \gamma)$ et $I = \{1, 3\}$. Remarquons que nous avons bien dans ce cas $\hat{E} \circ A = b$. Enfin nous avons $E^{\{1\}} = (\gamma, \circ, \circ)$ et $E^{\{3\}} = (\circ, \circ, \gamma)$.

Soient k et l des entiers tels que $1 \leq l \leq k \leq \beta$ et $k + l = \beta$. Alors pour tout $a \in T_k$ tel qu'il existe $E_a \in \{\circ, \gamma\}^k$ vérifiant $b = E \circ a$, il existe un unique sous-ensemble $J \subset I$ de I tel que $a = E^J \circ A$ et nous avons alors $k \geq |J| = l \geq 1$. Par ailleurs pour tout $J \subset I$ tel que $|J| \geq 1$ il existe un unique $(K + |J|)$ -uplet $\tilde{E} \in \{\circ, \gamma\}^{K+|J|}$, $n_\gamma(\tilde{E}) \geq 1$ tel que $\tilde{E} \circ (E^J \circ A) = b$. Nous avons ainsi l'égalité suivante

$$- \sum_{\substack{0 \leq l \leq k \leq \beta \\ k+l=\beta}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{T}(2), \|a\|=k \\ E \in \{\circ, \gamma\}^k | n_\gamma(E)=l \\ \text{tel que } E \circ a = b}} (-1)^{|a|} = 0 - \sum_{\substack{J \subset I \\ |J| \leq L}} (-1)^{|E^J \circ A|}$$

mais $|E^J \circ A| = K + |J| - 1$ ainsi l'égalité précédente se réduit à

$$- \sum_{\substack{0 \leq l \leq k \leq \beta \\ k+l=\beta}} \sum_{\substack{a \in \mathbb{T}(2), \|a\|=k \\ E \in \{\circ, \gamma\}^k | n_\gamma(E)=l \\ \text{tel que } E \circ a = b}} (-1)^{|a|} = - \sum_{l=0}^L C_L^l (-1)^{K+l-1} = (-1)^K (1-1)^L = 0$$

ce qui finit la preuve.

■

Voyons maintenant la seconde partie du lemme C.1.3 c'est-à-dire le lemme suivant

Lemme C.1.4 Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{T}(2)$ tels que $\|a\| = p$ et $E \in \{\circ, \gamma\}^p$ alors nous avons $\|E \circ a\| = p + n_\gamma(E)$ et

$$\left\langle P_{\llbracket 1, p+n_\gamma(E) \rrbracket}^{p+n_\gamma(E)} \Psi(E \circ a), (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle = \left\langle P_{I_E}^p \Psi(a), (\varphi^{\alpha_1^{I_E}}, \dots, \varphi^{\alpha_p^{I_E}}) \right\rangle \quad (\text{C.1.28})$$

où $I_E := \{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \text{ tel que } E_j = \circ\}$ et $\alpha_j^{I_E} = 2$ si $j \notin I_E$ et 1 sinon.

Preuve: (du lemme C.1.4)

Tout d'abord nous allons traiter le cas $n_\gamma(E) = 1$ nous verrons ensuite comment généraliser le résultat. Pour $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ nous définissons $E^{(j,k)} = (E_1^{(j,k)}, \dots, E_k^{(j,k)}) \in \{\circ, \gamma\}^k$ par $E_r^{(j,k)} = \circ$ si $r \neq j$ et $E_j^{(j,k)} = \gamma$. Soient $t \in [0, T]^{k-1}$ et $(f_1, \dots, f_{k-1}) \in (H^q)^k$. Considérons alors l'élément $\Psi(a)^{\vee\{j\}}(t, f)$ de \mathcal{E}^{1*} défini par

$$\left\langle \Psi(a)^{\vee\{j\}}(t, f)(\tau), g \right\rangle := \left\langle \Psi(a)(t_1, \dots, t_{j-1}, \tau, t_{j+1}, \dots, t_{k-1}), (f_1, \dots, f_{j-1}, g, f_j, \dots, f_{k-1}) \right\rangle \quad (\text{C.1.29})$$

Alors par définition de $\Psi(b) = \Upsilon(b)\psi$ nous avons $\Psi(E^{(j,k)} \circ a) = \Upsilon[\Psi(a)^{\vee\{j\}}(t, f)] \in \mathcal{E}^{2*}$. Alors nous avons le lemme suivant

Lemme C.1.5 Soient $\psi \in \mathcal{E}^{1*}$ et $\varphi \in \mathcal{E}$ solution de (E_2) . Alors nous avons

$$\left\langle P^2(\Upsilon\psi), (\varphi, \varphi) \right\rangle = \int_0^s \langle \psi(\tau), \varphi^2(\tau) \rangle d\tau \quad (\text{C.1.30})$$

Preuve: (du lemme C.1.5)

Donnons nous $\psi \in \mathcal{E}^{1*}$ et $\varphi \in \mathcal{E}$ solution de (E_2) . En revenant à la définition II.4.1 de Υ on montre très facilement que l'on a

$$\left\langle (\Upsilon\psi) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes 2}, (\varphi, \varphi) \right\rangle = \int_0^s d\tau \int_{\mathbb{R}^n} dk_1 \int_{\mathbb{R}^n} dk_2 M(s, \tau, k_1) M(s, \tau, k_2) \widehat{\psi}(\tau, k_1 + k_2) \quad (\text{C.1.31})$$

où pour tout $(t, \tau) \in [0, T]^2$ et pour tout $k \in \mathbb{R}^n$ la quantité $M(t, \tau, k)$ est donnée par

$$M(t, \tau, k) := \cos((t - \tau)\omega_k) \overline{\widehat{\varphi}(t)}(k) - \frac{\sin((t - \tau)\omega_k)}{\omega_k} \overline{\frac{\partial \widehat{\varphi}(t)}{\partial t}}(k) \quad (\text{C.1.32})$$

Nous pouvons alors voir l'égalité (C.1.31) comme $\left\langle (\Upsilon\psi) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes 2}, (\varphi, \varphi) \right\rangle = u(s)$ où $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction continue définie par

$$u(t) := \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} dk_1 \int_{\mathbb{R}^n} dk_2 M(t, \tau, k_1) M(s, \tau, k_2) \widehat{\psi}(\tau, k_1 + k_2)$$

D'après la définition (C.1.32) de $M(t, \tau, k)$ nous voyons que u est dérivable sur $[0, T]$ et pour tout $t \in [0, T]$ nous avons

$$\begin{aligned} u'(t) &= \int_{(\mathbb{R}^n)^2} dk_1 dk_2 \overline{\widehat{\varphi}(t)}(k_1) M(s, \tau, k_2) \widehat{\psi}(t)(k_1 + k_2) \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_{(\mathbb{R}^n)^2} dk_1 dk_2 \frac{\sin((t - \tau)\omega_{k_1})}{\omega_{k_1}} \overline{P\widehat{\varphi}(t)}(k_1) M(s, \tau, k_2) \widehat{\psi}(\tau)(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

Alors puisque $u(0) = 0$ nous obtenons par intégration $u(s) = \int_0^s u'(t) dt$ ce qui nous donne en utilisant l'expression de $u'(t)$ précédente

$$\begin{aligned} \left\langle (\Upsilon\psi) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes 2}, (\varphi, \varphi) \right\rangle &= \int_0^s dt \int_{(\mathbb{R}^n)^2} dk_1 dk_2 \overline{\widehat{\varphi}(t)}(k_1) M(s, \tau, k_2) \widehat{\psi}(t)(k_1 + k_2) \\ &\quad - \int_0^s dt \int_0^t d\tau \int_{(\mathbb{R}^n)^2} dk_1 dk_2 \frac{\sin((t - \tau)\omega_{k_1})}{\omega_{k_1}} \overline{P\widehat{\varphi}(t)}(k_1) M(s, \tau, k_2) \widehat{\psi}(\tau)(k_1 + k_2) \quad (\text{C.1.33}) \end{aligned}$$

où P est l'opérateur de Klein–Gordon $P := \square + m^2$.

Décomposons alors l'égalité (C.1.33) comme suit : $\left\langle (\Upsilon\psi) \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes 2}, (\varphi, \varphi) \right\rangle = v(s) + w(s)$ où les fonctions $v, w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t dt_1 \int_{(\mathbb{R}^n)^2} dk_1 dk_2 \overline{\widehat{\varphi}(t_1)}(k_1) M(t, \tau, k_2) \widehat{\psi}(t_1)(k_1 + k_2) \\ w(t) &= - \int_0^t dt_1 \int_0^{\min(t, t_1)} d\tau \int_{(\mathbb{R}^n)^2} dk_1 dk_2 \\ &\quad \frac{\sin((t_1 - \tau)\omega_{k_1})}{\omega_{k_1}} \overline{P\widehat{\varphi}(t_1)}(k_1) M(t, \tau, k_2) \widehat{\psi}(\tau)(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

Nous voyons alors que les fonctions v et w sont dérivables sur $[0, T]$ et pour tout $t \in [0, T]$ nous avons

$$v'(t) = \int_{(\mathbb{R}^n)^2} dk_1 dk_2 \overline{\widehat{\varphi(t)}(k_1)} \overline{\widehat{\varphi(t)}(k_2)} \widehat{\psi(t)}(k_1 + k_2) \\ - \int_0^t dt_1 \int_{(\mathbb{R}^n)^2} dk_1 dk_2 \frac{\sin((t-t_1)\omega_{k_2})}{\omega_{k_2}} \overline{\widehat{\varphi(t_1)}(k_1)} \overline{P\widehat{\varphi(t)}(k_2)} \widehat{\psi(t_1)}(k_1 + k_2)$$

et

$$w'(t) = \int_0^s dt_1 \int_0^{\min(t_1, t)} d\tau \int_{(\mathbb{R}^n)^2} dk_1 dk_2 \\ \frac{\sin((t_1 - \tau)\omega_{k_1})}{\omega_{k_1}} \frac{\sin((t - \tau)\omega_{k_2})}{\omega_{k_2}} \overline{P\widehat{\varphi(t_1)}(k_1)} \overline{P\widehat{\varphi(t)}(k_2)} \widehat{\psi(\tau)}(k_1 + k_2) \\ + \int_t^s dt_1 \int_{(\mathbb{R}^n)^2} dk_1 dk_2 \frac{\sin((t_1 - t)\omega_{k_1})}{\omega_{k_1}} \overline{P\widehat{\varphi(t_1)}(k_1)} \overline{\widehat{\varphi(t)}(k_2)} \widehat{\psi(t_1)}(k_1 + k_2)$$

Alors comme encore une fois $v(0) = w(0) = 0$ et puisque par hypothèse $P\widehat{\varphi(t)} = -\lambda\widehat{\varphi^2(t)}$ nous obtenons en revenant à la définition (II.4.2) de $G * f$

$$\left\langle (\Upsilon\psi) \overleftrightarrow{\partial_s^{\otimes 2}}, (\varphi, \varphi) \right\rangle = \\ \int_0^s d\tau \langle \psi(\tau), \varphi^2(\tau) \rangle + 2\lambda \int_0^s dt \int_0^s d\tau \langle \psi(\tau), (G * (\varphi^2(t)))(t - \tau) \varphi(\tau) \rangle \\ + \lambda^2 \int_0^s dt_1 \int_0^s dt_2 \int_0^s d\tau \langle \psi(\tau), (G * (\varphi^2(t_1)))(t_1 - \tau) (G * (\varphi^2(t_2)))(t_2 - \tau) \rangle$$

Alors d'après la définition (C.1.14) de P et en remarquant que $\frac{\partial \Upsilon \psi}{\partial t^\alpha} = 0$ sur $\{0\} \times [0, T]$ et $[0, T] \times \{0\}$ nous voyons que cette dernière égalité se réduit à (C.1.30).

■

D'après le lemme C.1.5 nous pour tout $\varphi \in \mathcal{E}$ solution de (E_2)

$$\left\langle P_{[[1,2]]}^2 \Upsilon \left[\Psi(a)^{\vee\{j\}}(t, f) \right], (\varphi, \varphi) \right\rangle = \int_0^T \left\langle \Psi(a)^{\vee\{j\}}(t, f)(\tau), \varphi^2(\tau) \right\rangle d\tau \quad (\text{C.1.34})$$

Alors en utilisant la définition (C.1.29) de $\Psi(a)^{\vee\{j\}}(t, f)$ nous trouvons finalement que le lemme C.1.4 que nous cherchons à démontrer est vrai si $E = E^{(j,k)}$ c'est-à-dire si $n_\Upsilon(E) = 1$.

Voyons maintenant le cas général. Soient $M \in \mathbb{N}^*$ et $E \in \{\circ, \Upsilon\}^k$ tels que $n_\Upsilon(E) = M$. Alors nous définissons $J_E \subset [[1, k]]$ comme étant l'ensemble des indices $j \in [[1, k]]$ tels que $E_j = \Upsilon$ alors comme $n_\Upsilon(E) = M$ nous avons $|J_E| = M$. Notons $J_E := \{j_1, \dots, j_M\}$ où $j_M < j_{M-1} < \dots < j_1$. Alors on montre facilement que nous avons

$$b := E \circ a = E^{(j_M, k+M-1)} \circ (E^{(j_{M-1}, k+M-2)} \circ (\dots \circ (E^{(j_1, k)} \circ a) \dots))$$

Ainsi si nous notons a_1 l'arbre binaire plan $a_1 := E^{(j_{M-1}, k+M-2)} \times (\dots \times (E^{(j_1, k)} \times a)) \dots$ nous avons $b = E \times a = E^{(j_M, k+M-1)} \times a_1$. Alors pour tout

$$\begin{aligned} t^{\{j_M\}} &= (t_1, \dots, t_{j_M-1}, t_{j_M+1}, \dots, t_{k+M-1}) \in [0, T]^{k+M-2} \\ f^{\{j_M\}} &= (f_1, \dots, f_{j_M-1}, f_{j_M+1}, \dots, f_{k+M-1}) \in (H^q)^{k+M-2} \end{aligned}$$

nous avons le fait suivant

$$\Upsilon \left[\Psi(a_1)^{\vee j_M} (t^{\{j_M\}}, f^{\{j_M\}}) \right] = \Psi(b)^{\vee \{j_M, j_{M+1}\}} (t^{\{j_M\}}, f^{\{j_M\}}) \quad (\text{C.1.35})$$

où pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $U \in \mathcal{E}^{k*}$ et pour tout $K \subset \llbracket 1, k \rrbracket$, tout $t^{\vee K} \in [0, T]^{k-|K|}$ et tout $f^{\vee K} \in (H^q)^{k-|K|}$ nous avons noté $U^{\vee K}(t^{\vee K}, f^{\vee K})$ l'élément de $\mathcal{E}^{|K|*}$ défini pour tout $\tau \in [0, T]^{|K|}$ et tout $g \in (H^q)^{|K|}$ par

$$\langle U^{\vee K}(t^{\vee K}, f^{\vee K})(\tau), g \rangle := \langle U(\tilde{t}), \tilde{f} \rangle$$

où \tilde{t} et \tilde{f} sont définis par

$$\begin{cases} \tilde{t}_r := t_{v(r)}^{\vee K} & \text{si } r \notin K \\ \tilde{t}_r := \tau_{k(r)} & \text{si } r \in K \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tilde{f}_r := f_{v(r)}^{\vee K} & \text{si } r \notin K \\ \tilde{f}_r := g_{k(r)} & \text{si } r \in K \end{cases}$$

avec

$$v(r) := \text{Card}\{k \leq r \text{ tel que } k \notin K\} \text{ et } k(r) := \text{Card}\{k \leq r \text{ tel que } k \in K\}$$

En utilisant (C.1.34) et (C.1.35) nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \left\langle P_{\llbracket 1, 2 \rrbracket}^2 \Psi(b)^{\vee \{j_M, j_{M+1}\}} (t^{\{j_M\}}, f^{\{j_M\}}), (\varphi, \varphi) \right\rangle = \\ \int_0^T \langle \Psi(a_1)(t), (f_1, \dots, f_{j_M-1}, \varphi^2(t_{j_M}), f_{j_M+1}, \dots, f_{k+M-1}) \rangle dt_{j_M} \end{aligned}$$

où t est le $(k+M-1)$ -uplet $t := (t_1, \dots, t_{j_M-1}, t_{j_M}, t_{j_M+1}, \dots, t_{k+M-1})$. Nous pouvons alors écrire $a_1 = E^{(j_{M-1}, k+M-2)} \times a_2$ et en utilisant les mêmes arguments on peut montrer que l'on a

$$\begin{aligned} \left\langle P_{\llbracket 1, 4 \rrbracket}^4 \Psi(b)^{\vee \{j_M, j_{M+1}, j_{M-1}+1, j_{M-1}+2\}} (t^{\{j_M, j_{M-1}\}}, f^{\{j_M, j_{M-1}\}}), \varphi^{\otimes 4} \right\rangle = \\ \iint_{[0, T]^2} dt_{j_M} dt_{j_{M-1}} \langle \Psi(a_2)(t), (f_1 \dots \varphi^2(t_{j_M}), f_{j_M+1} \dots f_{j_{M-1}-1}, \varphi^2(t_{j_{M-1}}), \dots, f_{k+M-1}) \rangle \end{aligned}$$

Répétant alors la même opération successivement pour j_{M-2}, \dots, j_1 nous obtenons finalement

$$\left\langle P_{\llbracket 1, |K| \rrbracket}^{|K|} \Psi(b)^{\vee K} (t^{\vee K}, f^{\vee K}), (\varphi, \dots, \varphi) \right\rangle = \iint_{[0, T]^M} dt_{j_M} \dots dt_{j_1} \langle \Psi(a)(t), (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_k) \rangle \quad (\text{C.1.36})$$

où $K := \bigcup_{r=1}^M \{j_r + M - r, j_r + M - r + 1\}$ et où $\tilde{g}_r := \varphi^2(t_r)$ si $r \in J_E$ et $\tilde{g}_r := f_{v(r)}$ sinon. Ainsi en considérant l'élément $\langle P_{[[1,|K|]]}^{|K|} \Psi(b)^{\vee K}(\cdot, \cdot), (\varphi, \dots, \varphi) \rangle$ de $\mathcal{E}^{(k+M-2M)^*}$ et en utilisant (C.1.36), nous obtenons finalement

$$\langle P_{[[1, k+M]]}^{k+M} \Psi(b), (\varphi, \dots, \varphi) \rangle = \langle P_{[[1, k]] \setminus J_E}^k \Psi(a), (\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_k) \rangle$$

où $\tilde{g}_r := \varphi^2$ si $r \in J_E$ et $\tilde{h}_r := \varphi$ sinon, c'est-à-dire exactement l'égalité (C.1.28) recherchée.

■

C.2 Séries de Butcher

Nous reprenons dans cette section les notations de la section II.5 et nous allons donner la preuve du théorème II.5.1 de la page 72 dont nous rappelons l'énoncé

Théorème C.2.1 *On suppose les deux hypothèses (H1) et (H2) vérifiées. On considère alors la famille $(\Phi(b))_{b \in \mathbb{T}}$ d'applications linéaires $\Phi : \mathcal{I}^{\otimes \|b\|} \rightarrow \mathcal{K}$ récursivement par $\Phi(\circ) := \phi_0$ et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et $(b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{T}(2, \infty)^r$*

$$\Phi[B_+(b_1, \dots, b_r)] := \mu \circ F_r \circ (\Phi(b_1) \otimes \dots \otimes \Phi(b_r)) \quad (\text{C.2.1})$$

avec la convention $F_1 := 0$.

Soit $u = (x^0, f) \in \mathcal{I}$ nous considérons la famille $(\phi(b))_{b \in \mathbb{T}}$ d'éléments de \mathcal{K} définie par $\phi(b) := \Phi(b)(u^{\otimes \|b\|})$ pour tout $b \in \mathbb{T}$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x^0, f) \in \mathcal{I}$ vérifient la condition

$$|\lambda| < \frac{\|\phi_0(u)\|}{\|\mu\| \|F\| (16 \|\phi_0(u)\|)} \quad (\text{C.2.2})$$

alors la famille $(\lambda^{|b|} \phi(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ est sommable dans \mathcal{K} et la somme

$$x := \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \lambda^{|b|} \phi(b)$$

est solution du problème (\mathcal{P}_F) .

Preuve: (théorème C.2.1)

Introduisons tout d'abord les notations suivantes : pour $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$ on note $I(b)$ l'ensemble des noeuds internes de b et pour $i \in I(b)$ on note $r_b(i)$ le nombre de fils de i . Nous avons alors le lemme suivant

Lemme C.2.1 1. Soit $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$, alors le nombre total de noeuds de b (c'est-à-dire $|b| + \|b\|$) vérifie $|b| + \|b\| - 1 = \sum_{i \in I(b)} r_b(i)$.

2. Soit $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$ on a alors

$$\|\phi(b)\| \leq \|\mu\|^{\|b\|} \|\phi_0(u)\|^{\|b\|} \prod_{i \in I(b)} \|F_{r_b(i)}\| \quad (\text{C.2.3})$$

Preuve: (lemme C.2.1)

La première partie du lemme se montre sans aucune difficulté en effectuant une récurrence sur le nombre de noeuds internes de l'arbre b .

Concentrons nous sur le deuxième point. Nous allons effectuer une récurrence sur $N(b)$ le nombre total de noeuds de b . Si $N(b) = 1$ alors nous avons nécessairement $b = \circ$ et il n'y a rien à montrer. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons l'inégalité (C.2.3) vérifiée pour tous les arbres enracinés plans $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$ satisfaisant $N(b) \leq N$. Soit $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$ tel que $N(b) = N+1 \geq 2$, alors il existe $r \geq 2$ et $(b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{T}(2, \infty)^r$ tels que $b = B_+(b_1, \dots, b_r)$. D'après la définition (C.2.1) nous avons dans ce cas

$$\|\phi(B_+(b_1, \dots, b_r))\| \leq \|\mu\| \|F_r\| \|\phi(b_1)\| \cdots \|\phi(b_r)\|$$

Or nous avons $N(b) = N(b_1) + \cdots + N(b_r) + 1 \leq N+1$ donc tous les b_i , $i = 1 \dots r$ vérifient $N(b_i) \leq N$, l'hypothèse de récurrence s'applique et la dernière inégalité nous donne alors

$$\|\phi(B_+(b_1, \dots, b_r))\| \leq \|\mu\| \|F_r\| \prod_{j=1}^r \left(\|\mu\|^{|b_j|} \|\phi(\circ)\|^{\|b_j\|} \prod_{i \in I(b_j)} \|F_{r_{b_j}(i)}\| \right) \quad (\text{C.2.4})$$

Or on a $|b| = |b_1| + \cdots + |b_r| + 1$, $\|b\| = \|b_1\| + \cdots + \|b_r\|$ et enfin $I(b)$ est l'union disjointe de la racine de b et des $I(b_j)$, $j = 1 \dots r$. Intégrant ceci dans (C.2.4) on obtient que (C.2.3) est vérifiée pour b , ce qui permet de conclure.

■

Nous allons regrouper les termes de la famille $(\lambda^{|b|} \phi(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ suivant $N(b)$ le nombre total de noeuds de b . Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq 2$, d'après le lemme C.2.1 nous avons

$$\sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2, \infty) \\ N(b)=N}} |\lambda|^{|b|} \|\phi(b)\| \leq \sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2, \infty) \\ N(b)=N}} |\lambda|^{|b|} \|\mu\|^{|b|} \|\phi(\circ)\|^{\|b\|} \prod_{i \in I(b)} \|F_{r_b(i)}\| \quad (\text{C.2.5})$$

Soit $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$ tel que $N(b) = |b| + \|b\| = N$, on vérifie facilement que $N(b) = 1 + \sum_{i \in I(b)} r_b(i)$ et nous obtenons ainsi

$$\sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2, \infty) \\ N(b)=N}} |\lambda|^{|b|} \|\phi(b)\| \leq \sum_{p=0}^N \sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2, \infty) \\ |b|=p; \|b\|=N-p}} \sum_{(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{N}^p} \|\phi(\circ)\|^{N-p} \prod_{i=1}^p (|\lambda| \|\mu\| \|F_{r_i}\|) \quad (\text{C.2.6})$$

avec la convention $F_0 = F_1 = 0$. On utilise alors la proposition (II.3.3) assurant que le nombre d'arbres plans ayant N noeuds est inférieur à 16^N . Introduisant ce résultat dans (C.2.6) nous avons finalement $\sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2, \infty) \\ N(b)=N}} |\lambda|^{|b|} \|\phi(b)\| \leq u_N$ avec

$$u_N := 16^N \sum_{p=0}^N \sum_{\substack{(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{N}^p \\ r_1 + \cdots + r_p = N-1}} \|\phi(\circ)\|^{N-p} \prod_{i=1}^p (|\lambda| \|\mu\| \|F_{r_i}\|) \quad (\text{C.2.7})$$

Considérons maintenant la série formelle $U := \sum_{N \geq 1} u_N X^N \in \mathbb{R}[[X]]$. D'après la définition (C.2.7) on a dans $\mathbb{R}[[X]]$

$$\begin{aligned} U &= \sum_{N \geq 1} X^N 16^N \sum_{p=0}^N \sum_{\substack{(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{N}^p \\ r_1 + \dots + r_p = N-1}} \|\phi(\circ)\|^{N-p} \prod_{i=1}^p (\|\lambda\| \|\mu\| \|F_{r_i}\|) \\ &= 16X \|\phi(\circ)\| \sum_{p \geq 0} \sum_{N \geq p} \sum_{\substack{(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{N}^p \\ r_1 + \dots + r_p = N-1}} (16X \|\phi(\circ)\|)^{N-1} \prod_{i=1}^p \left(\frac{\|\lambda\| \|\mu\| \|F_{r_i}\|}{\|\phi(\circ)\|} \right) \end{aligned}$$

Puisque $F_0 = F_1 = 0$ par convention, nous reconnaissons dans le membre de droite de la dernière égalité l'expression de $\left(\frac{\|\lambda\| \|\mu\|}{\|\phi(\circ)\|} \sum_{r \geq 0} \|F_r\| (16X \|\phi(\circ)\|)^r \right)^p$ qui tend vers 0 dans $\mathbb{R}[[X]]$ lorsque $p \rightarrow \infty$ puisque $F_0 = 0$. Nous obtenons ainsi dans $\mathbb{R}[[X]]$

$$U = 16X \|\phi(\circ)\| \sum_{p \geq 0} \left(\frac{\|\lambda\| \|\mu\|}{\|\phi(\circ)\|} |F|(16X \|\phi(\circ)\|) \right)^p = \frac{16X \|\phi(\circ)\|}{1 - \frac{\|\lambda\| \|\mu\|}{\|\phi(\circ)\|} |F|(16X \|\phi(\circ)\|)}$$

Nous voyons ainsi que si la condition (C.2.2) est vérifiée alors le rayon de convergence de U est strictement supérieur à 1, ce qui signifie que la série $\sum_N u_N$ est convergente assurant la sommabilité de la famille $(\|\lambda\|^{|b|} \|\phi(b)\|)_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ et donc la sommabilité de $(\lambda^{|b|} \phi(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ dans \mathcal{K} .

Montrons que la somme $x := \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \lambda^{|b|} \phi(b)$ est solution de (\mathcal{P}_F) . Tout d'abord nous avons bien $x \in \mathcal{K}$ d'après ce qui précède. Il suffit de montrer que x vérifie $x = \phi_0(x^0, f + \lambda F(x))$ c'est-à-dire que x vérifie l'équation

$$x = \phi_0(x^0, f) + \lambda \mu(F(x)) \quad (\text{C.2.8})$$

Calculons la quantité $\lambda \mu(F(x))$. Nous avons par hypothèse $F(x) = \sum_{p \geq 2} F_p(x, \dots, x)$ série convergent normalement dans $\mathcal{C}^0([0, T], \mathcal{B}_0)$, alors par continuité de μ nous obtenons $\mu(F(x)) = \sum_{p \geq 2} \mu(F_p(x, \dots, x))$. D'autre part nous avons $x = \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \lambda^{|b|} \phi(b)$ série convergent normalement dans \mathcal{K} donc dans $\mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{B})$. Ainsi par continuité des F_p et de μ nous avons pour tout $p \geq 2$

$$\mu(F_p(x, \dots, x)) = \sum_{(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{T}(2, \infty)^p} \lambda^{|b_1| + \dots + |b_p|} \mu(F_p(\phi(b_1), \dots, \phi(b_p)))$$

Or nous avons par définition $\mu(F_p(\phi(b_1), \dots, \phi(b_p))) = \phi(B_+(b_1, \dots, b_p))$. Ainsi en utilisant le fait que $|B_+(b_1, \dots, b_p)| = |b_1| + \dots + |b_p| + 1$ nous obtenons finalement

$$\lambda \mu(F(x)) = \sum_{p \geq 2} \sum_{(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{T}(2, \infty)^p} \lambda^{|B_+(b_1, \dots, b_p)|} \phi(B_+(b_1, \dots, b_p))$$

En utilisant alors la proposition II.3.1 nous avons

$$\lambda \mu(F(x)) = \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty) ; b \neq \circ} \lambda^{|b|} \phi(b)$$

Or en revenant à l'expression $x = \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \lambda^{|b|} \phi(b)$ et sachant que par définition $\phi(\circ) = \phi_0(x^0, f)$ nous obtenons exactement (C.2.8).

■

Voyons maintenant la preuve du théorème II.5.2 qui reprend essentiellement les étapes de la démonstration du théorème C.2.1. Nous en rappelons ici l'énoncé.

Théorème C.2.2 Soit $p \geq 2$ alors si $F(x) = F_p(x, \dots, x)$ où F_p est une application p -linéaire symétrique continue, alors on définit $\phi : \mathbb{T}(p) \rightarrow \mathcal{K}$ par

$$\begin{cases} \phi(\circ) := \phi_0(x^0, f) \\ \text{et } \forall (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{T}(p)^p; \phi(B_+(b_1, \dots, b_p)) := \mu(F_p(\phi(b_1), \dots, \phi(b_p))) \end{cases}$$

Alors si $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifie la condition

$$\frac{p^p}{(p-1)^{p-1}} |\lambda| \|\mu\| \|F_p\| \|\phi_0(x^0, f)\|^{p-1} < 1 \quad (\text{C.2.9})$$

alors la famille $(\lambda^{|b|} \phi(b))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ est sommable dans \mathcal{K} et la somme $x := \sum_{b \in \mathbb{T}(p)} \lambda^{|b|} \phi(b)$ est solution du problème (\mathcal{P}_F) .

Preuve: (théorème C.2.2)

De la même manière que pour le lemme C.2.1 on montre que pour tout $b \in \mathbb{T}(p)$ nous avons

$$\|\phi(b)\| \leq \|\mu\|^{|b|} \|F_p\|^{|b|} \|\phi(\circ)\|^{|b|}$$

Or si b est un p -arbre plan, on sait que l'on a $\|b\| = (p-1)|b| + 1$. Nous pouvons dès lors regrouper les termes de la famille $(\lambda^{|b|} \phi(b))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ suivant $|b|$. Sachant que le nombre de p -arbres plans b tel que $|b| = N$ est inférieur à $(p^p / (p-1)^{p-1})^N$ (voir [53]) nous obtenons

$$\sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(p) \\ |b|=N}} |\lambda|^{|b|} \|\phi(b)\| \leq \|\phi(\circ)\| \left(\frac{p^p}{(p-1)^{p-1}} |\lambda| \|F_p\| \|\mu\| \|\phi(\circ)\|^{p-1} \right)^N$$

ce qui nous assure que si la condition (C.2.9) est vérifiée alors la famille $(\lambda^{|b|} \phi(b))_{b \in \mathbb{T}(p)}$ est sommable. La première partie du théorème II.5.2 est ainsi démontrée. On montre alors que la somme $x = \sum_{b \in \mathbb{T}(p)} \lambda^{|b|} \phi(b)$ est solution de (\mathcal{P}_F) avec $F = F_p$ de la même façon que dans la preuve du théorème II.5.1

■

Enfin il ne nous reste plus qu'à prouver le théorème II.5.3 c'est-à-dire en reprenant les notations de la section II.5.1 p.73 le théorème suivant :

Théorème C.2.3 Nous supposons les hypothèses **(H1)** et **(H2)** vérifiées.

Soient $(u(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ une famille d'éléments de \mathcal{I} et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $(\lambda^{|b|} u(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ soit sommable dans \mathcal{I} . Nous noterons alors $u = (x^0, f) \in \mathcal{I}$ la somme de cette famille $u := \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \lambda^{|b|} u(b)$ et $|u|$ la somme

$$|u| := \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} |\lambda|^{|b|} \|u(b)\|_{\mathcal{I}}$$

Si u et λ vérifient la condition

$$|\lambda| < \frac{\|\phi_0\||u|}{\|\mu\|F(16\|\phi_0\||u|)} \quad (\text{C.2.10})$$

alors la famille $(\lambda^{|b|}(\Phi * u)(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ est sommable dans \mathcal{K} et sa somme est solution du problème (\mathcal{P}_F) .

Preuve: (du théorème C.2.3)

Encore une fois les étapes de la preuve sont calquées sur celles de la démonstration du théorème II.5.1.

Considérons la famille $(\lambda^{|b|+|E|}\Phi(b)(u(E)))_{\substack{b \in \mathbb{T}(2, \infty) \\ E \in \mathbb{T}(2, \infty)^{\|b\|}}}$. D'après la définition de $\Phi * u$ la sommabilité de cette famille entraîne la sommabilité de $(\lambda^{|b|}(\Phi * u)(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ (en effet nous avons $(\Phi * u)(b) = \sum \Phi(b_{(2)})(u(b_{(1)}))$ où nous avons noté $\tilde{\Delta}b = \sum b_{(1)} \otimes b_{(2)}$). Nous allons ainsi nous intéresser à la sommabilité de la famille $(\lambda^{|b|+|E|}\Phi(b)(u(E)))_{\substack{b \in \mathbb{T}(2, \infty) \\ E \in \mathbb{T}(2, \infty)^{\|b\|}}}$.

Nous allons regrouper les termes de la famille suivant $N(b)$ et $N(E)$. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathbb{N}^*$. Alors nous avons

$$\sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2, \infty) \\ N(b)=N}} |\lambda|^{|b|} \sum_{\substack{E \in \mathbb{T}(2, \infty)^{\|b\|} \\ N(E) \leq M}} |\lambda|^{|E|} \|\Phi(b)(u(E))\| \leq \sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2, \infty) \\ N(b)=N}} |\lambda|^{|b|} \|\Phi(b)\| \sum_{\substack{E \in \mathbb{T}(2, \infty)^{\|b\|} \\ N(E) \leq M}} |\lambda|^{|E|} \|u(E)\| \quad (\text{C.2.11})$$

Or nous savons par hypothèse que $(\lambda^{|c|}u(c))_{c \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ est sommable donc nous avons

$$\sum_{\substack{E \in \mathbb{T}(2, \infty)^{\|b\|} \\ N(E) \leq M}} |\lambda|^{|E|} \|u(E)\| \leq \|u\|^{\|b\|}$$

D'autre part en suivant pas à pas les étapes de la démonstration du lemme C.2.1 on peut très facilement démontrer l'inégalité suivante

$$\|\Phi(b)\| \leq \|\mu\|^{|b|} \|\phi_0\|^{\|b\|} \prod_{i \in I(b)} \|F_{r_b(i)}\|$$

A la lumière de ces deux résultats, nous voyons que nous pouvons faire tendre M vers l'infini dans (C.2.11) et obtenir l'inégalité suivante

$$\sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2, \infty) \\ N(b)=N}} |\lambda|^{|b|} \sum_{E \in \mathbb{T}(2, \infty)^{\|b\|}} |\lambda|^{|E|} \|\Phi(b)(u(E))\| \leq \sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2, \infty) \\ N(b)=N}} |\lambda|^{|b|} \|\mu\|^{|b|} \|\phi_0\|^{\|b\|} \|u\|^{\|b\|} \prod_{i \in I(b)} \|F_{r_b(i)}\|$$

Nous voyons ainsi apparaître exactement l'inégalité (C.2.5) avec $\|\phi_0\||u|$ à la place de $\|\phi_0(u)\|$. Ainsi en suivant exactement les même étapes que pour la démonstration du théorème C.2.1 nous obtenons que si

$$|\lambda| < \frac{\|\phi_0\||u|}{\|\mu\|F(16\|\phi_0\||u|)}$$

alors la famille $(\lambda^{|b|+|E|}\Phi(b)(u(E)))_{\substack{b \in \mathbb{T}(2,\infty) \\ E \in \mathbb{T}(2,\infty)^{\|b\|}}}$ est sommable dans \mathcal{K} ce qui implique la sommabilité de $(\lambda^{|b|}(\Phi * u)(b))_{b \in \mathbb{T}(2,\infty)}$.

Il reste maintenant à montrer que la somme $x = \sum_{b \in \mathbb{T}(2,\infty)} \lambda^{|b|}(\Phi * u)(b)$ est bien solution du problème (\mathcal{P}_F) . Pour ce faire il suffit de remarquer que comme la famille $(\lambda^{|b|}v(b))_{b \in \mathbb{T}(2,\infty)}$ est sommable, nous avons

$$x = \sum_{b \in \mathbb{T}(2,\infty)} (\Phi * u)(b) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2,\infty) \\ \mathbb{N}(b) \leq N}} \lambda^{|b|} \Phi(b) \sum_{\substack{E=(E_1, \dots, E_{\|b\|}) \in \mathbb{T}(2,\infty)^{\|b\|} \\ \mathbb{N}(E_j) \leq M}} [\lambda^{|E_1|}u(E_1)] \otimes \dots \otimes [\lambda^{|E_{\|b\|}|}u(E_{\|b\|})] \right\}$$

Or nous savons par hypothèse que

$$\sum_{\substack{E=(E_1, \dots, E_{\|b\|}) \in \mathbb{T}(2,\infty)^{\|b\|} \\ \mathbb{N}(E_j) \leq M}} [\lambda^{|E_1|}u(E_1)] \otimes \dots \otimes [\lambda^{|E_{\|b\|}|}u(E_{\|b\|})]$$

tend vers $u^{\otimes \|b\|}$ et en reprenant la preuve du théorème C.2.1 nous voyons que x est effectivement solution du problème (\mathcal{P}_F) .

■

Remarque C.2.1

Nous observons que la preuve du théorème nous donne une majoration de la série des normes :

$$\sum_b \lambda^{|b|} \|\Phi * u(b)\| \leq \frac{16 \|\phi_0\| \|u\|}{1 - \frac{\|\lambda\| \|\mu\|}{\|\phi_0\| \|u\|} |F|(16 \|\phi_0\| \|u\|)}$$

C.3 Lien entre série de Butcher et calcul perturbatif quantique

Nous allons donner la preuve de la proposition II.5.4 de la page 83. Nous reprenons ainsi les notations de la section II.5.4.

Nous introduisons une nouvelle notation qui nous s'avère très utile dans les calculs faisant intervenir les intégrales itérées. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t_0 \leq t$ le symbole $\int_{t_0}^t dy_1 \cdots dy_r$ désignera l'intégrale multiple

$$\int_{t_0}^t dy_1 \cdots dy_r := \int_{t_0}^t dy_1^0 \int_{t_0}^{\tau_1} dy_2^0 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{p-1}} dy_p^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y}_1 \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y}_r$$

Ainsi avec cette notation la définition (II.5.30) de $U(t)$ se réduit à

$$U(t) = \sum_{\alpha \geq 0} \left(\frac{-i\lambda}{p+1} \right)^\alpha \int_{t_0}^t dy_1 \cdots dy_\alpha \phi_I^{p+1}(y_1) \phi_I^{p+1}(y_2) \cdots \phi_I^{p+1}(y_\alpha) \quad (\text{C.3.1})$$

Tout d'abord notons que nous avons le lemme suivant bien connu de la théorie des champs (voir [48] par exemple)

Lemme C.3.1 *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons $U(t)U^\dagger(t) = Id$ ce qui se traduit en regardant le terme d'ordre $m \in \mathbb{N}$ dans cette dernière identité par par*

$$\sum_{\substack{(r,s) \in \mathbb{N} \\ r+s=m}} (-1)^s \int_{t_0}^t dy'_1 \dots dy'_r \int_{t_0}^t dy_1 \dots dy_s \phi_I^{p+1}(y_1) \dots \phi_I^{p+1}(y_s) \phi_I^{p+1}(y'_r) \dots \phi_I^{p+1}(y'_1) = \delta_{0,m}$$

avec $\delta_{0,m} = 0$ si $m \neq 0$ et 1 sinon.

Nous pouvons maintenant donner la preuve de la proposition II.5.4 dont nous donnons ici l'énoncé

Proposition C.3.1 *Nous avons l'égalité suivante pour $\varphi(t, \vec{x})$*

$$\varphi(t, \vec{x}) = U^\dagger(t) \phi_I(t, \vec{x}) U(t) \quad (\text{C.3.2})$$

Preuve: (de la proposition C.3.1)

D'après l'expression (C.3.1) de $U(t)$ nous avons l'égalité suivante

$$U^\dagger(t) \phi_I(t, \vec{x}) U(t) = \sum_{m \geq 0} \left(\frac{i\lambda}{p+1} \right)^m \sum_{\substack{(r,s) \in \mathbb{N} \\ r+s=m}} (-1)^s \int_{t_0}^t dy_1 \dots dy_r \int_{t_0}^t dz_1 \dots dz_s \phi_I^{p+1}(y_r) \dots \phi_I^{p+1}(y_1) \phi_I(x) \phi_I^{p+1}(z_1) \dots \phi_I^{p+1}(z_s)$$

Ainsi pour prouver la proposition C.3.1 il suffit de montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(p) \\ |b|=m}} \Phi(b)(x) = \left(\frac{i}{p+1} \right)^m \sum_{\substack{(r,s) \in \mathbb{N} \\ r+s=m}} (-1)^s \int_{t_0}^t dy_1 \dots dy_r \int_{t_0}^t dz_1 \dots dz_s \phi_I^{p+1}(y_r) \dots \phi_I^{p+1}(y_1) \phi_I(x) \phi_I^{p+1}(z_1) \dots \phi_I^{p+1}(z_s) \quad (\text{C.3.3})$$

Nous allons montrer (C.3.3) par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$.

Pour $m = 0$ le membre de gauche de (C.3.3) est réduit à $\phi_I(x)$ ainsi puisque nous avons posé $\Phi(\circ)(x) = \phi_I(x)$ l'égalité (C.3.3) est vérifiée pour $m = 0$. Donnons nous $N \in \mathbb{N}$ et supposons que (C.3.3) est vérifiée pour tout $m \leq N$. Nous posons alors

$$\varphi_{N+1}(x) := \sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(p) \\ |b|=N+1}} \Phi(b)(x)$$

Alors puisque $N + 1 \geq 1$ nous savons que pour tout $b \in \mathbb{T}(p)$ tel que $|b| = N + 1$ il existe un unique p -uplet $(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{T}(p)^p$ tel que $b = B_+(b_1, \dots, b_p)$. Alors par définition de

$\Phi(b)(x)$ nous avons

$$\varphi_{N+1} = \sum_{\substack{(b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{T}(p)^p \\ |b_1| + \dots + |b_p| = N}} -i \int_{t_0}^t dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} \Delta(x-y) \Phi(b_1)(y) \cdots \Phi(b_p)(y)$$

que nous transformons en regroupant les termes de la somme en

$$\varphi_{N+1} = \sum_{\substack{(q_1, \dots, q_p) \in \mathbb{N}^p \\ q_1 + \dots + q_p = N}} -i \int_{t_0}^t dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} \Delta(x-y) \left(\sum_{\substack{b_1 \in \mathbb{T}(p) \\ |b_1| = q_1}} \Phi(b_1)(y) \right) \cdots \left(\sum_{\substack{b_p \in \mathbb{T}(p) \\ |b_p| = q_p}} \Phi(b_p)(y) \right)$$

En utilisant alors l'hypothèse de récurrence dans l'égalité ci-dessus, nous obtenons finalement l'expression suivante pour φ_{N+1}

$$\begin{aligned} & -i \left(\frac{i}{p+1} \right)^N \sum_{\substack{(q_1, \dots, q_p) \in \mathbb{N}^p \\ q_1 + \dots + q_p = N}} \sum_{\substack{(r_1, s_1) \in \mathbb{N}^2 \\ r_1 + s_1 = q_1}} \cdots \sum_{\substack{(r_p, s_p) \in \mathbb{N}^2 \\ r_p + s_p = q_p}} (-1)^{s_1 + \dots + s_p} \\ & \int_{t_0}^t dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} \Delta(x-y) \int_{t_0}^{y^0} dy_{1,r_1}^{(1)} \int_{t_0}^{y^0} dz_{1,s_1}^{(1)} \cdots \int_{t_0}^{y^0} dy_{1,r_p}^{(p)} \int_{t_0}^{y^0} dz_{1,s_p}^{(p)} \mathbb{P}(y_j^{(k)}, y) \end{aligned} \quad (\text{C.3.4})$$

où $\mathbb{P}(y_j^{(k)}, y)$ est donné par le produit suivant

$$\begin{aligned} & \phi_I^{p+1}(y_{r_1}^{(1)}) \cdots \phi_I^{p+1}(y_1^{(1)}) \phi_I(y) \left[\phi_I^{p+1}(z_1^{(1)}) \cdots \phi_I^{p+1}(z_{s_1}^{(1)}) \phi_I^{p+1}(y_{r_2}^{(2)}) \cdots \phi_I^{p+1}(y_1^{(2)}) \right] \phi_I(y) \\ & \left[\phi_I^{p+1}(z_1^{(2)}) \cdots \phi_I^{p+1}(z_{s_2}^{(2)}) \phi_I^{p+1}(z_{r_3}^{(3)}) \cdots \phi_I^{p+1}(z_1^{(3)}) \right] \phi_I(y) \cdots \phi_I(y) \phi_I^{p+1}(z_1^{(p)}) \cdots \phi_I^{p+1}(z_{s_p}^{(p)}) \end{aligned}$$

Alors en utilisant le lemme C.3.1 nous voyons que les termes entre crochet dans l'expression précédente se simplifient dans la somme (C.3.4) pour donner finalement

$$\begin{aligned} \varphi_{N+1} &= -i \left(\frac{i}{p+1} \right)^N \sum_{\substack{(r,s) \in \mathbb{N}^2 \\ r+s=N}} (-1)^s \int_{t_0}^t dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} \Delta(x-y) \\ & \int_{t_0}^{y^0} dy_1 \cdots dy_r \int_{t_0}^{y^0} dz_1 \cdots dz_s \phi_I^{p+1}(y_r) \cdots \phi_I^{p+1}(y_1) \phi_I^p(y) \phi_I^{p+1}(z_1) \cdots \phi_I^{p+1}(z_s) \end{aligned} \quad (\text{C.3.5})$$

Nous utilisons alors le fait que $\Delta(x-y) = [\phi_I(x), \phi_I(y)]$ et que Δ commute avec les $\phi_I(z)$ de manière à obtenir

$$\begin{aligned} \Delta(x-y) \phi_I^{p+1}(y_r) \cdots \phi_I^{p+1}(y_1) \phi_I^p(y) \phi_I^{p+1}(y_r) \cdots \phi_I^{p+1}(y_1) &= \\ \phi_I^{p+1}(y_r) \cdots \phi_I^{p+1}(y_1) \phi_I(x) \phi_I^{p+1}(y) \phi_I^{p+1}(z_1) \cdots \phi_I^{p+1}(z_s) & \\ - \phi_I^{p+1}(y_r) \cdots \phi_I^{p+1}(y_1) \phi_I(y) \phi_I(x) \phi_I^p(y) \phi_I^{p+1}(z_1) \cdots \phi_I^{p+1}(z_s) & \end{aligned} \quad (\text{C.3.6})$$

Or puisque $\Delta(x-y)$ commute avec les $\phi(z)$ nous avons $\phi_I(x)\phi_I^p(y) = \phi_I^p(y)\phi_I(x) + p\Delta(x-y)\phi_I^{p-1}(y)$. Alors en utilisant cette dernière observation dans (C.3.6) et en injectant le résultat dans (C.3.5) nous obtenons finalement

$$(p+1)\varphi_{N+1} = -i \left(\frac{i}{p+1} \right)^N \sum_{\substack{(r,s) \in \mathbb{N}^2 \\ r+s=N}} (-1)^s \int_{t_0}^t dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} \int_{t_0}^{y^0} dy_1 \cdots dy_r \int_{t_0}^{y^0} dz_1 \cdots dz_s \left[\phi_I^{p+1}(y_r) \cdots \phi_I^{p+1}(y_1) \phi_I(x) \phi_I^{p+1}(y) \phi_I^{p+1}(z_1) \cdots \phi_I^{p+1}(z_s) - \phi_I^{p+1}(y_r) \cdots \phi_I^{p+1}(y_1) \phi_I^{p+1}(y) \phi_I(x) \phi_I^{p+1}(z_1) \cdots \phi_I^{p+1}(z_s) \right] \quad (\text{C.3.7})$$

Considérons alors séparément les deux termes du membre de droite de cette dernière égalité. Le premier terme est donné (modulo le terme multiplicatif $-i(i/(p+1))^N$) par

$$\sum_{\substack{(r,s) \in \mathbb{N}^2 \\ r+s=N}} (-1)^s \int_{t_0}^t dy^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y} \int_{t_0}^{y^0} dy_1 \cdots dy_r \int_{t_0}^{y^0} dz_1 \cdots dz_s \phi_I^{p+1}(y_r) \cdots \phi_I^{p+1}(y_1) \phi_I(x) \phi_I^{p+1}(y) \phi_I^{p+1}(z_1) \cdots \phi_I^{p+1}(z_s) \quad (\text{C.3.8})$$

Nous remarquons alors que pour tout $y \in [0, t] \times \mathbb{R}^{n-1}$ et tout $a \geq 1$ nous avons l'identité suivante

$$\int_{t_0}^{y^0} dy_1 \cdots dy_a = \int_{t_0}^t dt_1 \cdots dt_a - \int_{y^0}^t dy_1^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y}_1 \int_{t_0}^{y_1^0} dy_2 \cdots dy_a$$

Ainsi en utilisant cette dernière identité et en effectuant le changement de variable $s \leftarrow s+1$ l'expression (C.3.8) devient

$$- \sum_{\substack{r \geq 0, s \geq 1 \\ r+s=N+1}} (-1)^s \int_{t_0}^t dy_1 \cdots dy_r \int_{t_0}^t dz_1 \cdots dz_s \mathbb{V}(y_r \dots y_1, x, z_1 \dots z_s) + \sum_{\substack{r \geq 1, s \geq 1 \\ r+s=N+1}} (-1)^s \int_{t_0}^t dz_1^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{z}_1 \int_{z_1^0}^t dy_1^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y}_1 \int_{t_0}^{y_1^0} dy_2 \cdots dy_r \int_{t_0}^{z_1^0} dz_2 \cdots dz_s \mathbb{V}(y_r \dots y_1, x, z_1 \dots z_s) \quad (\text{C.3.9})$$

où nous avons noté $\mathbb{V}(y_r \dots y_1, x, z_1 \dots z_s)$ le produit suivant

$$\mathbb{V}(y_r \dots y_1, x, z_1 \dots z_s) := \phi_I^{p+1}(y_r) \cdots \phi_I^{p+1}(y_1) \phi_I(x) \phi_I^{p+1}(z_1) \cdots \phi_I^{p+1}(z_s)$$

De façon tout à fait analogue (mais en intervertissant les rôle de y et z et de r et s) le deuxième terme du membre de droite de l'égalité (C.3.7) s'écrit modulo le facteur

multiplicatif $-i \left(\frac{i}{p+1}\right)^N$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{r \geq 1; s \geq 0 \\ r+s=N+1}} (-1)^s \int_{t_0}^t dy_1 \cdots dy_r \int_{t_0}^t dz_1 \cdots dz_s \mathbb{V}(y_r \dots y_1, x, z_1 \dots z_s) \\
& + \sum_{\substack{r \geq 1, s \geq 1 \\ r+s=N+1}} (-1)^s \int_{t_0}^t dy_1^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y}_1 \int_{y_1^0}^t dz_1^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{z}_1 \\
& \quad \int_{t_0}^{y_1^0} dy_2 \cdots dy_r \int_{t_0}^{z_1^0} dz_2 \cdots dz_s \mathbb{V}(y_r \dots y_1, x, z_1 \dots z_s) \quad (\text{C.3.10})
\end{aligned}$$

Ainsi en insérant (C.3.9) et (C.3.10) dans l'identité (C.3.7) nous obtenons que l'opérateur $\left(\frac{p+1}{i}\right)^{N+1} \varphi_{N+1}$ est donné par

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{\substack{r \geq 1; s \geq 1 \\ r+s=N+1}} (-1)^s \int_{t_0}^t dy_1 \cdots dy_r \int_{t_0}^t dz_1 \cdots dz_s \mathbb{V}(y_r \dots y_1, x, z_1 \dots z_s) \\
& + \int_{t_0}^t dy_1 \cdots dy_{N+1} \mathbb{V}(y_{N+1} \dots y_1, x) + (-1)^{N+1} \int_{t_0}^t dz_1 \cdots dz_{N+1} - A \quad (\text{C.3.11})
\end{aligned}$$

où A est donné par

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{r \geq 1; s \geq 1 \\ r+s=N+1}} (-1)^s \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{y}_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\vec{z}_1 \left(\int_{t_0}^t dz_1^0 \int_{z_1^0}^t dy_1^0 + \int_{t_0}^t dy_1^0 \int_{y_1^0}^t dz_1^0 \right) \\
& \quad \int_{t_0}^{y_1^0} dy_2 \cdots dy_r \int_{t_0}^{z_1^0} dz_2 \cdots dz_s \mathbb{V}(y_r \dots y_1, x, z_1 \dots z_s) \mathbb{V}(x, z_1 \dots z_{N+1}) \quad (\text{C.3.12})
\end{aligned}$$

Or on a de manière évidente l'identité suivante

$$\int_{t_0}^t dz_1^0 \int_{z_1^0}^t dy_1^0 + \int_{t_0}^t dy_1^0 \int_{y_1^0}^t dz_1^0 = \int_{t_0}^t dz_1^0 \int_{t_0}^t dy_1^0$$

Ainsi utilisant ce dernier résultat dans l'expression (C.3.12) de A , nous obtenons finalement en remplaçant A par l'expression obtenue

$$\left(\frac{p+1}{i}\right)^{N+1} \varphi_{N+1} = \sum_{\substack{r \geq 0; s \geq 0 \\ r+s=N+1}} (-1)^s \int_{t_0}^t dy_1 \cdots dy_r \int_{t_0}^t dz_1 \cdots dz_s \mathbb{V}(y_r \dots y_1, x, z_1 \dots z_s)$$

c'est-à-dire exactement (C.3.3) au rang $N+1$.

■

Annexe D

Preuves de l'application à la théorie du contrôle

D.1 Dimension finie

Nous allons donner ici la preuve du théorème II.6.2 de la page 88. Nous reprenons ainsi les notations de la section II.6.1. Nous allons tout d'abord montrer que la famille $(v(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ est bien définie puis nous étudierons la convergence absolue de la série $\sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \lambda^{|b|} v(b)$ dans $L^2((0, T), \mathbb{R}^m)$ et enfin nous verrons pourquoi la somme de cette série mène la solution du problème (\mathcal{P}_F) de x^0 à 0.

D.1.1 Définition du contrôle

Montrons par récurrence sur $|b|$ que les fonctionnelles $J(b)$, $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$ admettent un minimiseur dans \mathbb{R}^n . Nous avons supposé que la condition de Kalman (II.6.3) était vérifiée, nous savons alors qu'il existe c_T ne dépendant que de T tel que

$$\int_0^T |B^* y|^2 dt \geq c_T |y^0|^2 \quad (\text{D.1.1})$$

pour tout y solution de l'équation (\mathcal{P}') . Alors nous avons

$$J(\circ)(y^0) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \tilde{y}(t)|^2 dt + \langle x^0, y^0 \rangle \geq \frac{c_T}{2} |y^0|^2 - |x^0| |y^0|$$

ce qui nous assure que $J(\circ)(y^0)$ tend vers $+\infty$ quand $y^0 \rightarrow \infty$. Ainsi $J(\circ)$ atteint son minimum.

D'autre part soit $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$, $b \neq \circ$. On suppose déterminés les $u(c)$ pour $|c| < |b|$, alors la fonction $F[(\Phi * u)(B_-(b))]$ est entièrement déterminée. Nous notons alors $\phi_0^* : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2((0, T), \mathbb{R}^n,)$ la fonction qui à y^0 associe la solution y de (\mathcal{P}') . C'est une application

linéaire continue. Alors nous avons

$$\begin{aligned} J(b)(y^0) &= \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \tilde{y}|^2 dt + \int_0^T (\tilde{y}(t), F[(\Phi * u)(B_-(b))]) dt \\ &\geq \frac{c_T}{2} |y^0|^2 - \|F[(\Phi * u)(B_-(b))]\|_{L^2((0,T),\mathbb{R}^n)} \|\tilde{y}\|_{L^2((0,T),\mathbb{R}^n)} \\ &\geq \frac{c_T}{2} |y^0|^2 - \|F[(\Phi * u)(B_-(b))]\|_{L^2((0,T),\mathbb{R}^n)} \|\phi_0\| |y^0| \end{aligned}$$

ce qui nous assure que $J(b)(y^0)$ tend bien vers $+\infty$ quand $|y^0| \rightarrow \infty$. Ainsi $J(b)$ atteint effectivement son minimum en un point \tilde{y}^0 de \mathbb{R}^n donc $v(b) := B^* \tilde{y}$ est bien définie avec \tilde{y} la solution de (\mathcal{P}') correspondant à \tilde{y}^0 .

D.1.2 Sommabilité du contrôle

Intéressons nous à la sommabilité de la famille $\lambda^{|b|} v(b)$. Tout d'abord par définition de $v(b)$ nous avons pour tout $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$; $\left. \frac{\partial J(b)(\tilde{y}^{(b)} + \varepsilon y^0)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$, ce qui nous assure que les identités (II.6.8) et (II.6.9) sont vérifiées, c'est-à-dire que pour tout y solution du problème dual (\mathcal{P}') nous avons

$$(y^0, x^0) + \int_0^T (y(t), Bv(\circ)(t)) dt = 0 \quad (\text{D.1.2})$$

$$\forall b \neq \circ; \int_0^T (y(t), Bv(b)(t)) + \int_0^T (y(t), F[(\Phi * u)(B_-(b))]) dt = 0 \quad (\text{D.1.3})$$

Prenons $y = \tilde{y}(\circ)$ dans (D.1.2), alors compte tenu du fait que $v(\circ) = B^* \tilde{y}(\circ)$ nous obtenons $\|v(\circ)\|_{L^2}^2 = -(\tilde{y}(\circ), x^0) \leq |x^0| |\tilde{y}(\circ)|$. Or nous avons supposé la condition de Kalman (II.6.3) vérifiée, ce qui nous assure qu'il existe $c_T > 0$ tel que (D.1.1) soit vérifiée. En utilisant alors (D.1.1) nous obtenons finalement

$$\|v(\circ)\|_{L^2} \leq \frac{|x^0|}{\sqrt{c_T}} \quad (\text{D.1.4})$$

Remplaçons maintenant y par $\tilde{y}(b)$ dans (D.1.3). Nous obtenons alors en utilisant (D.1.1)

$$\|v(b)\|_{L^2} \leq \frac{\|\phi_0^*\|}{\sqrt{c_T}} \|F[(\Phi * u)(B_-(b))]\|_{L^2} \quad (\text{D.1.5})$$

où ϕ_0^* désigne l'application linéaire qui associe à y^0 la solution $y \in L^2((0,T),\mathbb{R}^n)$ du problème dual (\mathcal{P}') . Il nous faut maintenant étudier la quantité $\|F[(\Phi * u)(B_-(b))]\|_{L^2}$.

Tout d'abord on peut prouver en suivant pas à pas les étapes de la démonstration du lemme C.2.1 le résultat suivant

Lemme D.1.1 *Soit $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$ alors nous avons*

$$\|\Phi(b)\| \leq \|\mu\|^{|b|} \|\phi_0\|^{\|b\|} \prod_{i \in I(b)} \|F_{r_b(i)}\| \quad (\text{D.1.6})$$

D'autre part on peut montrer par un calcul direct que le coproduit $\tilde{\Delta}$ vérifie l'identité

$$\tilde{\Delta} \circ B_- = (id \otimes B_-) \circ \tilde{\Delta} \quad (\text{D.1.7})$$

Soit $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$, $b \neq \circ$. Nous notons r le nombre de fils de la racine de b i.e. l'entier tel que $b = B_+(b_1, \dots, b_r)$. Alors en partant de la définition II.6.1 de $\Phi * u$ et en utilisant (D.1.7) nous avons

$$\|F[(\Phi * u)(B_-(b))]\| \leq \|F_r\| \sum_{\substack{b_{(1)}, b_{(2)} \\ b_{(1)} \alpha b_{(2)} = b}} \|\Phi(B_-(b_{(2)}))\| \|u(b_{(1)})\|$$

et en utilisant le lemme D.1.1 nous obtenons finalement

$$\|F[(\Phi * u)(B_-(b))]\| \leq \sum_{\substack{b_{(1)}, b_{(2)} \neq \circ \\ b_{(1)} \alpha b_{(2)} = b}} \|\mu\|^{|b_{(2)}|-1} \|\phi_0\|^{\|b_{(2)}\|} \left(\|F_r\| \prod_{j \in I(B_-(b_{(2)}))} \|F_{r_{B_-(b_{(2)})}(j)}\| \right) \|u(b_{(1)})\|$$

On remarque alors que si $b_{(1)} \alpha b_{(2)} = b$ avec $b_{(2)} \neq \circ$, r est aussi le nombre de fils de la racine de $b_{(2)}$. Nous avons ainsi

$$\|F_r\| \prod_{j \in I(B_-(b_{(2)}))} \|F_{r_{B_-(b_{(2)})}(j)}\| = \prod_{j \in I(b_{(2)})} \|F_{r_{b_{(2)}}(j)}\|$$

ce qui nous donne finalement

$$\|F[(\Phi * u)(B_-(b))]\| \leq \sum_{\substack{b_{(1)}, b_{(2)} \neq \circ \\ b_{(1)} \alpha b_{(2)} = b}} \|\mu\|^{|b_{(2)}|-1} \|\phi_0\|^{\|b_{(2)}\|} \prod_{j \in I(b_{(2)})} \|F_{r_{b_{(2)}}(j)}\| \|u(b_{(1)})\|$$

En insérant alors cette dernière inégalité dans (D.1.5) nous obtenons enfin

$$\|v(b)\|_{L^2} \leq \frac{\|\phi_0^*\|}{\|\mu\| \sqrt{c_T}} \sum_{\substack{b_{(1)}, b_{(2)} \neq \circ \\ b_{(1)} \alpha b_{(2)} = b}} \|\mu\|^{|b_{(2)}|} \|\phi_0\|^{\|b_{(2)}\|} \prod_{j \in I(b_{(2)})} \|F_{r_{b_{(2)}}(j)}\| \|u(b_{(1)})\| \quad (\text{D.1.8})$$

A partir de cette dernière inégalité nous pouvons effectuer une récurrence sur $|b|$ de manière à prouver le lemme suivant

Lemme D.1.2 *Pour tout $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$ nous avons*

$$\|v(b)\| \leq \frac{1}{\|B\|} A^{N(b)-1} B^{|b|} \|u(\circ)\|^{\|b\|} \prod_{j \in I(b)} \|F_{r_b(j)}\|$$

où A et B désignent les quantités

$$A := \frac{\|\mu\| \sqrt{c_T} + \|B\| \|\phi_0^*\| \|\phi_0\|}{\|B\| \|\phi_0^*\|} \quad \text{et} \quad B := \frac{\|B\| \|\phi_0^*\|}{\sqrt{c_T}} \quad (\text{D.1.9})$$

Preuve: (du lemme D.1.2)

De manière à simplifier les expressions nous noterons β la quantité

$$\beta := \frac{\|B\| \|\phi_0^*\|}{\|\mu\| \sqrt{c_T}}$$

Nous définissons alors récursivement le morphisme d'algèbre $C : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $C(\circ) := \|u(\circ)\|$ et pour tout $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$, $b \neq \circ$

$$C(b) := \beta \sum_{\substack{b_{(1)}, b_{(2)} \neq \circ \\ b_{(1)} \times b_{(2)} = b}} \|\phi_0\|^{b_{(2)}} C(b_{(1)}) \quad (\text{D.1.10})$$

En remarquant que si $b_{(2)} = \circ$ nous avons $b_{(1)} = b$ nous voyons directement à partir la définition précédente que $C(b)$ vérifie l'identité

$$C(b) = \frac{\beta}{1 + \beta \|\phi_0\|} \sum_{\substack{b_{(1)}, b_{(2)} \\ b_{(1)} \times b_{(2)} = b}} \|\phi_0\|^{b_{(2)}} C(b_{(1)}) \quad (\text{D.1.11})$$

pour tout $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$.

Montrons alors par récurrence sur $|b|$ que nous avons pour tout $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$

$$\|u(b)\| \leq C(b) \|\mu\|^{|b|} \prod_{j \in I(b)} \|F_{r_b(j)}\| \quad (\text{D.1.12})$$

Pour $b = \circ$ nous avons par définition de $C(b)$, $\|u(\circ)\| = C(b)$ donc (D.1.12) est bien vérifiée pour $b = \circ$. Soit $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$, $b \neq \circ$. Supposons (D.1.12) vérifiée pour tous les arbres c tels que $|c| < |b|$. Nous avons alors $b \neq \circ$ donc $u(b) = (0, Bv(b))$ donc $\|u(b)\| \leq \|B\| \|v(b)\|$ ainsi en utilisant (D.1.8) nous avons

$$\|u(b)\| \leq \beta \sum_{\substack{b_{(1)}, b_{(2)} \neq \circ \\ b_{(1)} \times b_{(2)} = b}} \|\mu\|^{|b_{(2)}|} \|\phi_0\|^{b_{(2)}} \prod_{j \in I(b_{(2)})} \|F_{r_{b_{(2)}}(j)}\| \|u(b_{(1)})\| \quad (\text{D.1.13})$$

Or tous les arbres c composant $b_{(1)}$ dans la somme du membre de droite de cette dernière inégalité vérifient $|c| < |b|$. L'hypothèse de récurrence s'applique donc et nous obtenons alors

$$\|u(b)\| \leq \beta \sum_{\substack{b_{(1)}, b_{(2)} \neq \circ \\ b_{(1)} \times b_{(2)} = b}} \|\mu\|^{|b_{(2)}|} \|\phi_0\|^{b_{(2)}} \prod_{j \in I(b_{(2)})} \|F_{r_{b_{(2)}}(j)}\| C(b_{(1)}) \|\mu\|^{|b_{(1)}|} \prod_{j \in I(b_{(1)})} \|F_{r_{b_{(1)}}(j)}\|$$

On remarque alors que l'ensemble $I(b)$ des noeuds internes de b est union disjointe de l'ensemble des noeuds internes de $b_{(1)}$ et $b_{(2)}$ si $b = b_{(1)} \times b_{(2)}$ et que nous avons $|b_{(1)}| + |b_{(2)}| = |b|$. La dernière inégalité devient donc

$$\|u(b)\| \leq \|\mu\|^{|b|} \prod_{j \in I(b)} \|F_{r_b(j)}\| \beta \sum_{\substack{b_{(1)}, b_{(2)} \neq \circ \\ b_{(1)} \times b_{(2)} = b}} \|\phi_0\|^{b_{(2)}} C(b_{(1)})$$

où nous reconnaissons la définition (D.1.10) de $C(b)$, nous obtenons ainsi que (D.1.12) est vraie pour b .

Il nous reste maintenant à étudier $C(b)$. Soient $r \in \mathbb{R}^*$ et $(b_1, \dots, b_r) \in \mathbb{T}(2, \infty)^r$. En revenant à la définition de $\tilde{\Delta}$ nous pouvons montrer que nous avons

$$\tilde{\Delta} \circ B_+ = (id \otimes B_+) \circ \tilde{\Delta} + B_+ \otimes \circ$$

ainsi d'après la définition (D.1.10) de C nous avons

$$C(B_+(b_1, \dots, b_r)) = \beta \sum_{\substack{b_{(1)}^1, b_{(2)}^1 \\ b_{(1)}^1 \otimes b_{(2)}^1 = b}} \dots \sum_{\substack{b_{(1)}^r, b_{(2)}^r \\ b_{(1)}^r \otimes b_{(2)}^r = b}} \|\phi_0\|^{\|B_+(b_{(2)}^1, \dots, b_{(2)}^r)\|} C(b_{(1)}^1) \dots C(b_{(1)}^r)$$

Or nous avons $\|B_+(b_{(2)}^1, \dots, b_{(2)}^r)\| = \|b_{(2)}^1\| + \dots + \|b_{(2)}^r\|$. Ainsi en utilisant l'identité (D.1.11) nous obtenons finalement

$$C(B_+(b_1, \dots, b_r)) = \beta \left(\frac{1 + \beta \|\phi_0\|}{\beta} \right)^r \prod_{j=1}^r C(b_j)$$

Une récurrence immédiate nous montre alors que $C(b)$ est donné par la formule

$$C(b) = \beta^{|b|} \left(\frac{1 + \beta \|\phi_0\|}{\beta} \right)^{|b| + \|b\| - 1} \|u(\circ)\|^{\|b\|}$$

En remplaçant alors cette dernière expression de $C(b)$ dans (D.1.12) nous obtenons finalement que pour tout $b \in \mathbb{T}(2, \infty)$

$$\|u(b)\| \leq B^{|b|} A^{|b| + \|b\| - 1} \|u(\circ)\|^{\|b\|} \prod_{j \in I(b)} \|F_{r_b(j)}\|$$

avec B et A donnés par (D.1.9).

Pour conclure il suffit de remarquer que si $b = \circ$ le lemme D.1.2 est trivial et si $b \neq \circ$ nous avons l'inégalité (D.1.8) ainsi

$$\|v(b)\| \leq \frac{\beta}{\|B\|} \sum_{\substack{b_{(1)}, b_{(2)} \neq \circ \\ b_{(1)} \otimes b_{(2)} = b}} \|\mu\|^{|b_{(2)}|} \|\phi_0\|^{\|b_{(2)}\|} \prod_{j \in I(b_{(2)})} \|F_{r_{b_{(2)}}(j)}\| \|u(b_{(1)})\|$$

à comparer avec (D.1.13). Alors en utilisant (D.1.12) nous obtenons de la même manière que ci-dessus

$$\|v(b)\| \leq \frac{1}{\|B\|} C(b) \|\mu\|^{|b|} \prod_{j \in I(b)} \|F_{r_b(j)}\|$$

ce qui nous permet de conclure.

■

Nous voyons que nous avons maintenant une majoration de $\|v(b)\|$ du même type que l'inégalité (C.2.3) de la preuve du théorème II.5.1. Nous pouvons alors suivre exactement

les mêmes étapes pour étudier la sommabilité de $\sum_b \lambda^{|b|} v(b)$.

Nous regroupons ainsi les termes de la famille $(\lambda^{|b|} v(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)(2, \infty)}$ suivant le nombre total de noeuds de b . Soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors d'après le lemme D.1.2 nous avons

$$\sum_{\substack{b \in \mathbb{T}(2, \infty)(2, \infty) \\ N(b) = N}} |\lambda|^{|b|} \|v(b)\| \leq \frac{v_N}{A \|B\|}$$

où v_N est donné par l'expression

$$v_N := (16A)^N \sum_{p=0}^N \sum_{\substack{(r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{N}^p \\ r_1 + \dots + r_p = N-1}} \|u(\circ)\|^{N-p} \prod_{i=1}^p (|\lambda| \|\mu\| \|F_{r_i}\|)$$

Considérons la série formelle $V := \sum_{N \geq 1} v_N X^N$, on montre alors exactement comme dans la section C.2 p.125 que si

$$\frac{|\lambda| \|B\|}{\|u(\circ)\|} |F|(16A \|u(\circ)\|) < 1$$

alors la série formelle V a un rayon de convergence $R \geq 1$ ce qui entraîne la sommabilité de la famille $(\lambda^{|b|} v(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ et de plus nous avons

$$|v| := \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} |\lambda|^{|b|} \|v(b)\| \leq \sum_N v_N = \frac{1}{\|B\|} \frac{16 \|u(\circ)\|}{1 - \frac{|\lambda| \|B\|}{\|u(\circ)\|} |F|(16A \|u(\circ)\|)}$$

Nous obtenons l'estimation de $|u|$ énoncée dans le théorème II.6.2 en effectuant la même étude pour la famille $(\lambda^{|b|} u(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$.

D.1.3 Vérification du contrôle

Concentrons nous maintenant sur la seconde partie du théorème. Nous pouvons reprendre mot à mot la preuve du théorème II.5.3 pour montrer que la somme si la condition (II.6.10) est vérifiée alors la famille $(\lambda^{|b|} (\Phi * u)(b))_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)}$ est sommable et la somme $x = \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \lambda^{|b|} (\Phi * u)(b)$ est solution du problème (\mathcal{P}_F) . Montrons maintenant que la fonction $v = \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \lambda^{|b|} v(b)$ que nous avons défini conduit bien la solution de (\mathcal{P}_F) de x^0 à 0 en temps T i.e. montrons que $x(T) = 0$.

Soit y une solution du problème dual (\mathcal{P}') . Alors en utilisant le fait que x soit solution de (\mathcal{P}_F) nous avons

$$\frac{d(y(t), x(t))}{dt} = (y(t), Bv(t)) + \lambda(y(t), F(x(t)))$$

En intégrant cette dernière expression sur $[0, T]$ nous obtenons exactement (II.6.5) c'est-à-dire

$$(y(T), x(T)) = (y^0, x^0) + \int_0^T (y(t), Bv(t)) dt + \lambda \int_0^T (y(t), F(x(t))) dt \quad (\text{D.1.14})$$

Or nous avons déjà vu que $\lambda F(x)$ pouvait s'écrire comme

$$\lambda F(x) = \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \lambda^{|b|} F[(\Phi * u)(B_-(b))]$$

cette dernière somme convergeant dans $L^2((0, T), \mathbb{R}^n)$. Ainsi nous retrouvons le fait que (D.1.14) est donné par

$$(y(T), x(T)) = (y^0, x^0) + \sum_{b \in \mathbb{T}(2, \infty)} \lambda^{|b|} \left(\int_0^T (y, Bv(b)) + \lambda \int_0^T (y, F[(\Phi * u)(B_-(b))]) \right)$$

Or les identité (D.1.2) et (D.1.3) nous assure que le membre de droite de cette dernière égalité est nul, nous obtenons ainsi que pour tout y solution de l'équation duale (\mathcal{P}')

$$(y(T), x(T)) = 0$$

Comme nous pouvons choisir arbitrairement $y(T)$ cette dernière propriété nous donne $x(T) = 0$. Le théorème II.6.2 se trouve ainsi démontré.

Bibliographie

- [1] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*, first ed. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 111 Fifth Avenue, New York, New York 10003, 1975.
- [2] ARNOLD, V., AND NOVIKOV, S. P., Eds. *Dynamical Systems*, second ed., vol. IV of *Encyclopedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1985.
- [3] ARNOLD, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, second ed. GTM. Springer Verlag NY, 175 fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 1991.
- [4] BAHNS, D. Unitary Quantum Field Theory on the Noncommutative Minkowski space. arXiv :hep-th/0212266v2, 2001.
- [5] BAYEN, F., FLATO, M., FRONSDAL, C., LICHNEROWICZ, A., AND STERNHEIMER, D. Quantum Mechanics as a Deformation of Classical Mechanics. *Letters in Mathematical Physics*, 1 (1977), 521–530.
- [6] BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 1983.
- [7] BROUDER, C. On the trees of quantum fields. *Eur. Phys. J.C 12* (2000), 535–546. arXiv :hep-th/9906111.
- [8] BROUDER, C. On the trees of quantum fields. *Eur. Phys. J. C. 12* (2000), 535–549.
- [9] BROUDER, C. Runge–Kutta methods and renormalization. *Eur. Phys. J. C. 12* (2000), 521–534.
- [10] BROUDER, C. Butcher Series and Renormalization. *B.I.T. 19* (2004), 714–741.
- [11] BROUDER, C., AND FRABETTI, A. Renormalization of QED with planar binary trees. *Eur. Phys. J.C 19* (2001), 714–741. arXiv :hep-th/0003202.
- [12] BROUDER, C., AND OECKL, R. Quantum groups and quantum field theory : The free scalar field. *Mathematical Physics Research on the Leading Edge* (2004), 63–90. hep-th/0208118.
- [13] BUTCHER, J. C. *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations : Runge-Kutta and General Linear Methods*. John Wiley and sons, New York, 1987.
- [14] CATTANEO, A. S., AND FELDER, G. A path integral approach to the kontsevitch quantization formula. arXiv :math.QA/9902090v3 (1999).
- [15] CONNES, A., AND KREIMER, D. Hopf algebras, renormalization and non commutative geometry. *Comm. Math. Phys. 199* (1998), 203–242.
- [16] DE DONDER, T. *Théorie invariante du calcul des variations*. Gauthiers–Villars, Paris, 1930.

- [17] DITO, J. Star-product approach to quantum field theory : the free scalar field. *Lett. in Math. Physics* 20 (1990), 125–134.
- [18] DITO, J. Star-products and nonstandard quantization for K–G equation. *J. of Math. Physics* 33 (1992), 73–80.
- [19] DÜTSCH, M., AND K.FREDENHAGEN. Algebraic Quantum Field Theory, Perturbation Theory and the Loop Expansion. *Commun. Maths. Phys* 219 (2001), 5–30.
- [20] DUQUESNE, T., AND LE GALL, J.-F. Random Trees, Lévy Processes and Spatial Branching Processes. *Astérisque* (2002).
- [21] FOISSY, L. Les algèbres de Hopf des arbres enracinés, I. *Bull. Sci. Math.* 126 (2002), 193–239.
- [22] FOISSY, L. Les algèbres de Hopf des arbres enracinés, II. *Bull. Sci. Math.* 126 (2002), 249–288.
- [23] GAWĘDSKI, K. On the generalization of the canonical formalism in the classical field theory. *Rep. Math. Phys.* 3, 4 (1972), 307–326.
- [24] GOLDSCHMIDT, H., AND STERNBERG, S. The Hamilton–Cartan formalism in the calculus of variations. *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 23, 1 (1973), 203–267.
- [25] HAIRER, E., NORSETT, S. P., AND WANNER, G. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems.*, second ed., vol. 8 of *Springer Series in Comput. Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [26] HARRIVEL, D. Planar Binary Trees and Perturbative Calculus of Observables in Classical Field Theory. *Ann. l’IHP* (2005). à paraître.
- [27] HÉLEIN, F. Hamiltonian formalisms for multidimensional calculus of variations and perturbation theory. *Contemp. Math.* 350 (2004), 127–147.
- [28] HÉLEIN, F., AND KOUNEIHIER, J. Finite dimensional Hamiltonian formalism for gauge and quantum field theory. *J. Math. Physics* 43, 5 (2002).
- [29] HÉLEIN, F., AND KOUNEIHIER, J. Lepage-Dedecker general multisymplectic formalisms. *Advances in Theor. and Math. Physics* (2004). to appear.
- [30] HÉLEIN, F., AND KOUNEIHIER, J. The notion of observable in the covariant Hamiltonian formalism for the calculus of variations with several variables. *Comm. Math. Physics* (2004).
- [31] ITZYKSON, C., AND ZUBER, J.-B. *Quantum Field Theory*. New York, McGraw-Hill International Book Co., 1980.
- [32] KANATCHIKOV, I. On the canonical structure of the De Donder-Weyl covariant Hamiltonian formulation of field theory. hep-th/9312162, 1993.
- [33] KANATCHIKOV, I. Canonical structure of classical field theory in the polymomentum phase space. *Rep. Math. Phys.* 41, 1 (1998). hp-th/9709229.
- [34] KANATCHIKOV, I. Precanonical quantization and the Schrodinger wave functional. *Phys. Letters A*, 283 (2001), 25–36. hp-th/0012084.
- [35] KIJOWSKI, J. A finite dimensional canonical formalism in the classical field theories. *Comm. Math. Phys.* 30 (1973), 99–128.

- [36] KIRILLOV, A. Unitary representation of nilpotent lie group. *Uspehi Mat. Nauk.* 17 (1962), 57–110.
- [37] KONTSEVITCH, M. Operads and motives in deformation quantization. *Lett. Math. Phys.* 48 (1999), 35–72.
- [38] KOOPMAN, B. O. Hamiltonian systems and transformations in Hilbert space. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 17 (1931), 315–318.
- [39] KOSTANT, B. Orbits, symplectic structures and representation theory. *Proc. US-Japan seminar on Diff. Geom.* 77 (1966). Tokyo.
- [40] KREIMER, D. On the hopf algebra structure of perturbative quantum field theories. *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), 303–334.
- [41] LE GALL, J.-F. *Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations*. Birkhauser, Boston, 1999.
- [42] LEE, E., AND MARKUS, L. *Foundations of Optimal Control Theory*. John Wiley and sons, 1967.
- [43] LODAY, J. L. Dialgebras. *Dialgebras and related operads 1763* (2001), 7–66. Springer Lecture Notes in Math.
- [44] LODAY, J. L., AND RONCO, M. Hopf algebra of the planar binary trees. *Adv. in Maths* 139 (1998), 293–309.
- [45] MICU, S., AND ZUAZUA, E. *Quelques questions de theorie du controle*, hermann ed. Collection Travaux en Cours Hermann. 2004. p.69-157.
- [46] MILNOR, J., AND MOORE, J. On the structure of Hopf Algebras. *Ann. Math* 81, 2 (1965), 211–264.
- [47] MOYAL, J. Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 45 (1949), 99–124.
- [48] PESKIN, M. E., AND SCHROEDER, D. V. *An introduction to Quantum Field Theory*, first ed. The Advanced Book Program. Perseus Books Publishing, L.L.C., Cambridge, Massachusetts, 1995.
- [49] REED, M., AND SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics. II Fourier Analysis*, first ed., vol. II. Academic Press, New York, 1975.
- [50] REED, M., AND SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics. I Functional Analysis*, second ed., vol. I. Academic Press, New York, 1980.
- [51] RUDIN, W. *Analyse Fonctionnelle*. Ediscience international, 1995.
- [52] RYDER, L. H. *Quantum Field theory*, first ed. Cambridge University Press, 1985.
- [53] SEDGEWICK, R., AND FLAJOLET, P. *An Introduction to the Analysis of Algorithms*. Addison Wesley Professional, New York, 1995.
- [54] SEGAL, I. E. Quantization of nonlinear system. *J. Maths. Phys.* 1 (1960), 468–488.
- [55] SOURIAU, J. M. *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod, Paris, 1970.
- [56] TULCZYJEW, W. M. Geometry of phase space. seminar in Warsaw, 1968.
- [57] VAN DER LANN, P. Some Hopf Algebras of Trees. arXiv :math.QA/0106244, 2001.

- [58] VAN HOVE, L. Sur certaines représentations unitaires d'un groupe infini de transformations. *Mem. Cl. Sci., Collect. Octavo, Acad. R. Belg.* 26, 6 (1951).
- [59] WEYL, H. Geodesic fields in the calculus of variation for multiple integrals. *Ann. Math.* 6 (1935), 607–629.

Index des notations

\mathbb{A} , 63	$\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$, 26
\mathbb{F} , 63	\mathcal{X}_0 , 32
\mathbb{T} , 61	\mathcal{M}_0 , 32
$B_-(b)$, 64	Ω_0 , 32
$B_+(b_1, \dots, b_m)$, 64	\mathcal{O} , 27
$C(p)_N$, 65	$\mathcal{O}^{\mathcal{H}}$, 28
$\tilde{\Delta}$, 65	G_ψ , 33
$ b , b \in \mathbb{T}$, 62	Ω , 26
$\ b\ , b \in \mathbb{T}$, 62	ω_μ , 25
$N(b), b \in \mathbb{T}$, 62	$G * f$, 69
\circ , 62	$\star_{\tilde{h}}$, 44
Υ , 62	Σ_s , 34
$\mathbb{T}(2, \infty)$, 62	$\mathcal{T}(W)$, 36
$\mathbb{T}(p)$, 62	\bullet , 36
$\mathbb{T}(p)_N$, 62	$S(W)$, 36
Υ , 69	$W^{\odot k}$, 36
$\Upsilon(b)$, 69	\odot , 36
$\{F, G\}$, 28	θ , 26
$\overleftrightarrow{\partial}$, 59	$\theta^{(s)}$, 26
$f \overleftrightarrow{\partial} g$, 35	$X \perp \Omega$, 26
$U \overleftrightarrow{\partial}_s$, 68	
$U^{(k)} \overleftrightarrow{\partial}_s^{\otimes k}$, 68	
δ , 37	
\mathcal{E} , 67	
\mathcal{E}^{k*} , 67	
$\ \bullet\ _{k*}$, 67	
$\widehat{\otimes}^k \mathcal{B}^*$, 67	
$(\mathcal{E}^{1*})^{\otimes k}$, 67	
$\mathbf{a}^\dagger(f)$, 93	
$\mathbf{a}(f)$, 93	
F_0 , 91	
\mathcal{F}_s , 92	
$\varphi_m(f)$, 93	
$\pi_m(f)$, 93	
$\int_\Sigma F$, 30	
\mathcal{H}_λ , 56	