



HAL
open science

Contrôle frontière par modèle interne de systèmes hyperboliques : application à la régulation de canaux d'irrigation

Valérie dos Santos Martins

► **To cite this version:**

Valérie dos Santos Martins. Contrôle frontière par modèle interne de systèmes hyperboliques : application à la régulation de canaux d'irrigation. Mathématiques [math]. Université d'Orléans, 2004. Français. NNT : . tel-00011627

HAL Id: tel-00011627

<https://theses.hal.science/tel-00011627>

Submitted on 16 Feb 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

présentée

À L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

Discipline : MATHÉMATIQUE ET AUTOMATIQUE

par

Valérie DOS SANTOS MARTINS

Titre de la thèse :

Contrôle Frontière par Modèle Interne de Systèmes Hyperboliques : Application à la Régulation de Canaux d'Irrigation

Soutenue le 14 Décembre 2004

MEMBRES DU JURY :

M. Michel FLIESS	DR CNRS Polytech. Paris	Président du Jury
Mme. Brigitte d'ANDRÉA-NOVEL	Professeur ENSMP de Paris	Rapporteur
M. Didier GEORGES	Professeur INP de Grenoble	Rapporteur
M. Eduardo MENDES	Professeur INP de Grenoble	Examineur
M. Stéphane CORDIER	Professeur Université d'Orléans	Examineur
M. Youssoufi TOURÉ	Professeur Université d'Orléans	Dir. de thèse

"Le temps présent se réduit à un point mathématique, et même ce point mathématique périt mille fois avant que nous ayons pu affirmer sa naissance."

Extrait des *Paradis Artificiels*,
Charles BAUDELAIRE, écrivain français, 1821-1867.

Pour mes parents sans qui je ne serais pas là.

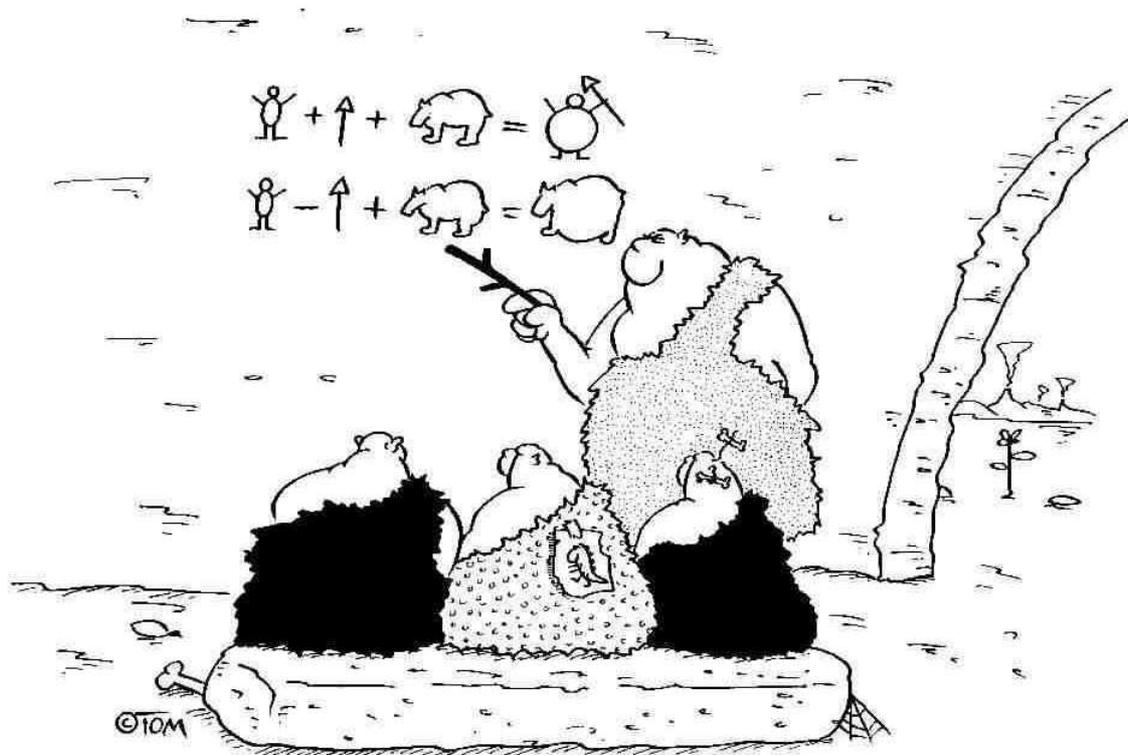


Table des Matières

Table des Matières	v
Liste des Figures	ix
Liste des Tableaux	xi
Résumé	xiii
Résumé en anglais	xv
Remerciements	xvii
Introduction	1
1 Contexte et État de l'Art	5
1.1 Introduction	7
1.2 Contexte	7
1.2.1 <i>Le contrôle de systèmes décrits par des EDP</i>	7
1.2.2 <i>Le contrôle frontière par modèle interne</i>	8
1.2.3 <i>Contrôle de systèmes d'écoulement fluide : canaux d'irrigation</i>	9
1.2.4 <i>Modèle d'écoulement à surface libre</i>	11
1.3 Sur la régulation des canaux d'irrigation : État de l'Art	18
1.3.1 <i>Les méthodes dans le cadre général</i>	18
1.3.2 <i>Les méthodes utilisant les équations de Saint-Venant</i>	20
1.4 Conclusion	21
2 La structure de commande et le modèle	23
2.1 Introduction	25
2.2 La structure de commande IMBC	25
2.2.1 <i>Rappels sur la structure CMI</i>	25
2.2.2 <i>Structure de commande IMBC</i>	28
2.3 Le système du canal en boucle ouverte : un système de commande frontière	30
2.3.1 <i>Le modèle physique</i>	31
2.3.2 <i>Le modèle de régulation dans un bief</i>	31
2.3.3 <i>Le modèle de régulation pour des biefs en cascade</i>	34
2.4 Conclusion	36

3	Étude de la Boucle Ouverte	37
3.1	Introduction	39
3.2	Système abstrait de contrôle frontière	39
3.2.1	<i>Système d'état abstrait en boucle ouverte</i>	39
3.2.2	<i>Semigroupe du système d'état en boucle ouverte</i>	42
3.3	Etude de la stabilité du système en boucle ouverte	45
3.3.1	<i>Etude du spectre de $A_e(x)\partial_x$</i>	45
3.3.2	<i>Etude du spectre de $A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$</i>	47
3.4	Application au modèle linéarisé du canal	49
3.4.1	<i>Propriétés de l'opérateur du canal</i>	49
3.4.2	<i>Caractérisation du spectre en boucle ouverte</i>	50
3.4.3	<i>Remarque : condition de fluvialité</i>	57
3.5	Conclusion	57
4	Étude de la Boucle Fermée	59
4.1	Introduction	61
4.2	Le système en boucle fermée	61
4.2.1	<i>Contrôle de type intégral</i>	62
4.2.2	<i>Contrôle de type proportionnel intégral</i>	63
4.3	Stabilité de la boucle fermée	65
4.3.1	<i>Contrôle de type intégral</i>	65
4.3.2	<i>Contrôle de type proportionnel intégral</i>	68
4.3.3	<i>Résolvantes</i>	71
4.4	Régulation	75
4.5	Conclusion	77
5	Simulations et Expérimentations	79
5.1	Introduction	81
5.2	Simulations numérique	81
5.2.1	<i>Aspect numérique</i>	81
5.2.2	<i>Résultats des simulations</i>	83
5.3	Expérimentations	94
5.3.1	<i>Description du banc d'essais</i>	94
5.3.2	<i>Résultats expérimentaux</i>	97
5.4	Conclusion	116
	Conclusion	117
A	Calcul de la norme de A_2	119
B	Démonstration du rang de l'opérateur CD	125
B.0.1	<i>Dans le cas d'un bief, $p = 1$</i>	128
B.0.2	<i>Dans le cas de deux biefs $p = 2$</i>	128
B.0.3	<i>Dans le cas de $p + 1$ biefs</i>	129
C	Définitions et théorèmes	131
C.1	Rappel de topologie	133
C.2	Théorie des semigroupes en dimension infinie	133
C.2.1	<i>Quelques définitions</i>	133

C.2.2	<i>Théorèmes généraux</i>	137
C.3	Rappels	139
D	Exemples d'équations hyperboliques	143
D.1	Définition	145
D.2	Exemples	146
D.2.1	<i>Équation des cordes vibrantes : problème hyperbolique</i>	146
D.2.2	<i>Équations de Navier-Stokes</i>	146
	Publications de l'auteur	149
	Bibliographie	151

Liste des Figures

1.1	Réseau de canaux d'irrigation	13
1.2	Schéma d'un Canal : un bief déversoir	14
1.3	Schéma d'un Canal : deux biefs en cascade	14
1.4	Coupe transversale d'un canal rectangulaire	15
1.5	Coupe d'un déversoir dénoyé	16
1.6	Coupe d'une vanne noyée	17
2.1	Structures de commande	26
2.2	Structure MCI modifiée	28
2.3	La structure IMBC	28
4.1	La structure IMBC	62
4.2	Spectre de l'opérateur A_e	66
4.3	Perturbation du spectre	67
5.1	Déversoir : hauteurs et ouverture de la vanne amont	85
5.2	Bief avec deux vannes ; Hauteurs et ouverture des vannes	87
5.3	Un bief deux vannes ; variation des pentes de la consigne	88
5.4	Le modèle de référence	88
5.5	Trois biefs avec quatre vannes : hauteurs	90
5.6	Trois biefs avec quatre vannes : ouverture des vannes	90
5.7	Perturbation : phénomène de pluie	92
5.8	Perturbation : jonction d'un canal secondaire	93
5.9	Canal de Valence et coupe d'un capteur	95
5.10	Schéma de la maquette de micro-canal de Valence	95
5.11	Interface dSPACE	96
5.12	Interface Simulink	96
5.13	Un bief déversoir ; ouverture de la vanne et hauteurs d'eau	98
5.14	Un bief déversoir ; $\alpha_i = 2$	98
5.15	Un bief déversoir ; variation de 50%	99
5.16	Un bief déversoir ; perturbations	100
5.17	Un bief déversoir ; zoom	101
5.18	Un bief deux vannes ; ouverture des vannes et hauteurs d'eau	103
5.19	Un bief deux vannes ; Hauteurs	105
5.20	Un bief deux vannes ; Ouverture des vannes	106
5.21	Hauteurs variant du niveau d'eau minimum au niveau maximum	108

5.22	Hauteur aval dans les 2 biefs (dm) et ouvertures des 3 vannes (mm) . . .	109
5.23	Hauteurs	111
5.24	Deux biefs, trois vannes	112
5.25	Deux biefs, trois vannes	113
5.26	Deux biefs, trois vannes ; perturbations (manuelles)	114
5.27	Deux biefs, trois vannes ; perturbations (retraits d'eau et obstacles) . . .	115
C.1	Décomposition spectrale	136
C.2	Déferlement glissant	140
C.3	Déferlement plongeant	140
C.4	Déferlement frontal	140

Liste des tableaux

1.1	Le choix du coefficient de Manning et Strickler en fonction du milieu . . .	15
1.2	Description des différents cas traités pour un canal	17
5.1	Déversoir ; commande et consigne	84
5.2	Bief avec deux vannes : commande et consigne	86
5.3	Trois biefs avec quatre vannes ; commande et consigne	89
5.4	Paramètres du canal de Valence	94
5.5	Valeurs des paramètres de contrôle et variations de la consigne	104
5.6	Multi-modèles : Consignes de références	107
5.7	Deux biefs trois vannes : consignes de références	109
5.8	Deux biefs trois vannes : consignes de références	110
5.9	Perturbations : consignes de références	114
5.10	Perturbations : consignes de références	115

Résumé

Ce travail s'inscrit, d'un point de vue théorique, dans le domaine du contrôle des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP). Il s'agit d'étendre l'utilisation de la structure de Commande par Modèle Interne (CMI) aux systèmes de dimension infinie, en la généralisant au cas du contrôle frontière de systèmes hyperboliques.

Réalisé également dans le cadre de l'Action Spécifique "Canaux d'Irrigation : automatisation et mise en oeuvre" au département STIC CNRS, les EDP hyperboliques considérées sont les équations non linéaires de Saint-Venant, qui décrivent les écoulements à surface libre.

Le modèle utilisé est une linéarisation autour d'un écoulement permanent dont les coefficients sont non constants vis-à-vis de la variable d'espace. Les pentes et les frottements ne sont pas pris nuls, les phénomènes variables le long du canal sont ainsi pris en compte.

La technique utilisée pour l'analyse et la synthèse du contrôle est celle qui consiste à considérer le système en boucle fermée comme une perturbation (additive principalement) du système en boucle ouverte. Les perturbations portent sur les opérateurs, les semigroupes et le spectre (ou la résolvante) dans un espace de Hilbert approprié. Ce travail consiste alors à caractériser le plus explicitement et directement possible l'opérateur hyperbolique du type $A_e(x)\partial_x + B_e(x)$, en une dimension spatiale x , où les opérateurs $A_e(x)$ et $B_e(x)$, sont bornés. Cela est établi sans transformation préalable (symétrisation ou diagonalisation) et sans considérer que les coefficients sont constants.

Pour la synthèse de commande, une structure de contrôle frontière par modèle interne est utilisée après avoir ramené le contrôle frontière classique en une forme Kalmanienne abstraite par une transformation due à Fattorini dans les années 60. L'analyse de la stabilité en boucle fermée, par la théorie de la perturbation en dimension infinie (Kato), permet de donner des conditions suffisantes de réglage des paramètres d'une loi de commande du type intégral et proportionnel intégral.

En ce qui concerne les résultats tant en simulation qu'expérimentaux sur le micro canal de Valence, ils montrent la faisabilité de l'approche. Cette faisabilité a été testée dans les cas monobief et multibiefs, notamment en ce qui concerne la validité du modèle interne utilisé.

Mots-Clés

Commande de systèmes en dimension infinie, contrôle frontière multivariables de systèmes décrits par des EDP hyperboliques, théorie de la Perturbation d'opérateurs et de semigroupes, équations de Saint-Venant (écoulements à surface libre), commande par Modèle Interne, canaux d'irrigation, multibiefs.

Abstract

From a theoretical point of view, this work deals with the control of systems described by partial derivative equations (PDE). The generalization of Internal Model Control (IMC) structure is extended to infinite dimension systems, especially for boundary control of hyperbolic systems.

Also carried out in the framework of the Specific Action "Irrigation Channels : automatization and implementation" of STIC department (CNRS), the hyperbolic PDE considered in this work are the nonlinear equations of Saint-Venant which describe the free face water flows. The model used is a linearization around a permanent flow whose coefficients are nonconstant with respect to the space variable. The slopes and frictions are taken different from zero, the variable phenomena along the channel are thus taken into account.

The technic used for the analysis and the control synthesis considers the closed loop system as an additive perturbation, mainly of the open loop system. The perturbations are related to the operators, the semigroups and the spectrum (resolvent) in a suitable Hilbert space. This work then consists in characterizing the most explicitly and directly as possible the hyperbolic operator written as $A_e(x)\partial_x + B_e(x)$, in a one dimension space x , where operators $A_e(x)$ and $B_e(x)$, are bounded. It is established without preliminary transformations (symmetrization or diagonalization) and without considering that the coefficients are constant.

For the control synthesis, an internal model boundary control structure is used, after writing the traditional boundary control into an abstract Kalmanian form by a transformation given by Fattorini in the Sixties. The stability analysis of the closed loop, by the perturbation theory in infinite dimension (Kato), gives sufficient conditions to adjust the law parameters in case of an integral law and a proportional integral one.

The experimental results, in simulation as on the micro channel of Valence, show the feasibility of this approach. This feasibility was tested in the mono-reach and multi-reaches cases, especially with regard to the validity of the internal model used.

Key–Words

Infinite dimension systems control, multivariable boundary control of systems described by hyperbolic PDE, perturbation theory of operators and semigroups, Shallow water equation, Internal Model Control, irrigation channels, multi-reaches.

Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Youssef TOURÉ, pour ces trois années passées au sein de son laboratoire, le LVR (Laboratoire de Vision et Robotique).

Je le remercie chaleureusement pour ses qualités humaines et pour ses qualités scientifiques, qui m'ont permis de réaliser cette thèse dans d'excellentes conditions.

Qu'il trouve dans ce travail toute ma gratitude pour sa patience, pour m'avoir formé à l'Automatique, et introduit et initié à ce monde privilégié de la Recherche.

Je souhaite également remercier très chaleureusement Nathalie CISLO, pour son encadrement officieux puis officiel lors de ces quinze derniers mois, pour son soutien moral et tout simplement d'avoir été présente chaque fois que nécessaire.

Je suis aussi très reconnaissante à Messieurs Didier GEORGES, Eduardo MENDES et Laurent LEFEVRE, pour m'avoir accueilli au sein de l'école ESISAR à Valence, me permettant ainsi de réaliser mes expérimentations.

Je remercie vivement Monsieur Didier GEORGES d'avoir, en outre, accepté de rapporter sur mon travail de thèse.

Je remercie spécialement Monsieur Eduardo MENDES pour son encadrement lors de mes séjours sur Valence, pour nos discussions, ses remarques et ses idées très pertinentes, ainsi que d'avoir accepté de faire parti de mon jury.

Ma gratitude va également à Madame Brigitte d'ANDRÉA-NOVEL pour avoir accepté d'être rapporteur sur cette thèse, ainsi qu'à Messieurs Michel FLIESS et Stéphane CORDIER, qui me font l'honneur de faire partie de mon jury thèse.

Mes remerciements s'adressent également à Mesdames Estelle COURTIAL et Sylvie CHAUSSINAND pour leur soutien scientifique, théorique pour la première, expérimental pour la seconde.

Merci à tous les membres du Groupe de Recherche et de l'Action Spécifique Canaux d'Irrigation pour m'avoir accueillie aussi chaleureusement parmi eux.

Je tiens à remercier tout spécialement Lama AL BASSIT, Guillaume GRATON, Tahar SLAMA, Claude CASSIER, thésards et docteur, pour leur amitié, les soirées passées ensembles, leur aide et leur générosité, en somme pour tout ce que nous avons partagé au

cours de ces trois dernières années.

Je souhaite remercier Laure SPINA, notre secrétaire pour son dévouement au laboratoire, sa grande efficacité, et sérénité.

Je remercie également les membres de l'IUT de Bourges, le personnel de l'accueil, de la bibliothèque et de la reprographie, pour leur sympathie.

Merci à tous les professeurs et maîtres de conférences (et autres) qui m'ont reçue dans leurs équipes tant de recherches que d'enseignements, et plus particulièrement les membres du LVR de l'IUT pour leur aide et les discussions animées aux pauses cafés, ainsi que les membres du LVR situés à l'ENSIB, Châteauroux, Orléans, Chartres, les membres du LEES, en espérant ainsi, n'oublier personnes.

Je remercie tout particulièrement Frédéric KRATZ, Didier AUBRY, Yves PARMANTIER.

A mes compagnons de thèse Elodie, Hervé, et à tous mes amis de France et Navarre : merci pour votre amitié.

Je dédie ce travail à mes parents, mon frère Israël, sa femme Cristelle et à mon amour de neveu Ilan, à Laurent (& Bill) et sa famille.

Je vous remercie pour votre soutien, votre amour et votre confiance.

Introduction

La recherche dans le domaine du contrôle des systèmes à paramètres distribués, décrits par des Equations aux Dérivées Partielles (EDP) est un champ d'investigation constant depuis plusieurs décennies.

Pendant longtemps, les résultats théoriques les plus avancés ont concerné des cas plutôt académiques, mais avec un aspect générique non négligeable.

Ces dernières années, beaucoup de classes d'EDP étudiées concernent des problèmes décrivant une finesse ou une exigence de fonctionnement de systèmes réels.

Parallèlement, le développement de la théorie du contrôle en dimension infinie, i.e. dans des espaces fonctionnels de Banach (ou Hilbert), permet d'appréhender beaucoup plus de problèmes en gardant cette description relativement fine que constitue la description par des EDP.

Dans le domaine de l'automatique, les problèmes de stabilisation, de poursuite de trajectoire, de régulation, etc.. se posent formellement de la même façon quelle que soit la description adoptée dans un modèle. L'analyse du système, à travers ce modèle, introduit une distinction dans les différentes approches pour traiter les problèmes précisés. Ainsi, il est possible de garder les concepts formels simples pour traiter des problèmes relativement complexes.

Cette thèse se situe dans le cadre de l'extension de la structure de Commande par Modèle Interne (CMI ou IMC pour Internal Model Control) aux systèmes décrits par des EDP. Ces systèmes, où le contrôle est pris frontière, sont représentés dans des espaces de dimension infinie.

Cette extension a déjà été réalisée pour des systèmes décrits par des EDP paraboliques dans le cas linéaire [40] et dans le cas non linéaire [15].

L'objectif du présent travail est de contribuer à cette extension pour des EDP hyperboliques décrivant des écoulements fluides. On considérera ainsi des systèmes hyperboliques en une dimension de la variable d'espace, mais dont les coefficients dépendent de cette variable. Cela permet de tenir compte des phénomènes répartis non seulement dans les variables d'état mais aussi pour les paramètres du modèle.

Dans cette approche directe, l'idée générale adoptée dans cette extension est d'analyser et de régler le système en boucle fermée en le considérant comme une variation du système en boucle ouverte. La théorie de la perturbation d'opérateurs, de spectres et de

semigroupes dans un espace de Hilbert est l'outil technique principal de la réalisation de l'étude. Dans le cas des systèmes paraboliques, à coefficients constants qui plus est, la caractérisation du système en boucle ouverte est relativement facile [40], [42], [66].

Pour les systèmes hyperboliques à paramètres variables, il en va tout autrement et le principal objectif de ce travail est de mener cette caractérisation en amont, concernant le spectre et le semigroupe de manière la plus explicite possible.

Le modèle considéré généralise les équations de Saint-Venant linéarisées autour d'un état d'équilibre quelconque. Ainsi, la régulation des canaux d'irrigation est le cadre applicatif tout au long de ce travail. L'application concrète a été effectuée sur un canal expérimental pour conforter la validité technique de l'approche.

Ce mémoire est présenté sous la forme de cinq chapitres.

Dans le premier chapitre est défini le cadre scientifique qu'est le contrôle des EDP en général, et le cadre applicatif de la régulation des canaux d'irrigation en particulier, le système étant décrit par les équations de Saint-Venant.

Un bref rappel des méthodes employées dans le domaine du contrôle en dimension infinie est donné permettant de classer le travail parmi les méthodes directes. De même, le système représentatif des écoulements dans des canaux à surface libre est explicité.

Les divers travaux sur ce thème tant d'un point de vue global que national sont présentés succinctement.

Le second chapitre présente les deux principales spécificités de cette thèse.

L'utilisation de la structure particulière de commande IMBC, qui est décrite, est le premier point. Le second point est l'application de cette méthode à des EDP hyperboliques à coefficients spatiaux variables tels que le système des canaux d'irrigation décrits par les équations de Saint-Venant dans le cas d'un ou de plusieurs biefs (tronçon de canal situé entre deux ouvrages).

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la stabilité d'EDP hyperboliques à paramètres spatiaux variables, généralisant le système linéarisé des équations de Saint-Venant, par la théorie de la perturbation des opérateurs et des semigroupes.

Dans un second temps, l'application de cette étude de stabilité sur le cas concret du canal, par le calcul explicite de ces diverses propriétés est menée.

Le passage au système en boucle fermée est l'objet du quatrième chapitre. La structure de commande IMBC permet d'utiliser un correcteur simple, tel qu'un correcteur intégral ou proportionnel intégral, ce qui permet de caractériser aisément l'opérateur et le semigroupe en boucle fermée à partir de l'opérateur et du semigroupe en boucle ouverte.

Les propriétés du système en boucle ouverte sont conservées par la structure de commande IMBC, sous des conditions (paramètres de synthèse) fixées en utilisant à nouveau la théorie de la perturbation.

Ce chapitre se conclut par l'application de ces résultats au cas du canal. Elle est réalisée également au travers de calculs explicites.

Le chapitre suivant est consacré à l'ensemble des résultats obtenus que ce soit en simulation ou expérimentalement sur le micro canal expérimental de Valence.

Dans les deux cas, les résultats présentés ont été réalisés aussi bien dans le cas monobief que multibiefs, que ce soit en monovisible ou en multivisible, avec ou sans perturbations.

Chapitre 1

Contexte et État de l'Art

"Il faut avoir déjà beaucoup appris de choses pour savoir
demander ce qu'on ne sait pas."
Extrait de Julie ou La nouvelle Héloïse.
Jean-Jacques Rousseau, philosophe français, 1712-1778.

Sommaire

1.1	Introduction	7
1.2	Contexte	7
1.2.1	<i>Le contrôle de systèmes décrits par des EDP</i>	7
1.2.2	<i>Le contrôle frontière par modèle interne</i>	8
1.2.3	<i>Contrôle de systèmes d'écoulement fluide : canaux d'irrigation</i>	9
1.2.4	<i>Modèle d'écoulement à surface libre</i>	11
1.3	Sur la régulation des canaux d'irrigation : État de l'Art	18
1.3.1	<i>Les méthodes dans le cadre général</i>	18
1.3.2	<i>Les méthodes utilisant les équations de Saint-Venant</i>	20
1.4	Conclusion	21

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de situer ce travail dans son contexte scientifique qu'est le contrôle des EDP en général, et dans le cadre particulier qu'est la régulation des canaux d'irrigation en utilisant les équations de Saint-Venant.

Un rapide rappel sur la classification méthodologique dans le domaine du contrôle en dimension infinie permet de situer ce travail parmi les méthodes directes (analyse directe dans les espaces fonctionnels des EDP).

Le contrôle frontière par modèle interne est étendu à une classe d'EDP hyperboliques à paramètres spatiaux variables, dans le domaine des écoulements fluides.

L'application ciblée est la régulation des canaux d'irrigation à surface libre. Ces écoulements sont décrits par les équations hyperboliques de Saint-Venant.

Ainsi sera présenté l'état des travaux sur le thème du contrôle des canaux d'irrigation au niveau général, comme au niveau national qui forme un cadre privilégié de ce travail.

1.2 Contexte

1.2.1 *Le contrôle de systèmes décrits par des EDP*

L'étude des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles (EDP) est un champ de recherche très large et, étudié depuis plusieurs siècles d'un point de vue mathématique et théorique. Cette étude des systèmes décrits par des EDP est toujours d'actualité, en particulier dans le domaine du contrôle d'un point de vue théorique, mais aussi dans le domaine des applications. Ce domaine prend en effet une importance croissante avec la description fine des phénomènes physiques au sein des procédés qui devient de plus en plus nécessaire.

On conçoit de ce fait que plusieurs approches existent, que ce soit au niveau méthodologique, ou au niveau synthèse de contrôle (synthèse de contrôle est à prendre au sens large du terme, i.e. identification, synthèse de la commande proprement dite, synthèse d'observateurs, étude de stabilité, etc...).

Un résumé peut être consulté à ce propos dans [75], [82] par exemple. Il est juste rappelé ici une classification succincte afin de situer ce travail.

a. *Classification méthodologique*

Les systèmes à paramètres distribués sont des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles, en association possible avec des équations différentielles ordinaires (EDO) ou des équations algébriques. Les variables indépendantes sont le temps et l'espace, cet espace pouvant être représenté par une, deux ou trois dimensions. Ces équations peuvent être linéaires ou non linéaires en général.

La démarche méthodologique de l'étude de ces systèmes, en terme de théorie du contrôle, peut être classifiée en deux optiques :

- **les méthodes indirectes** : le système d'EDP est d'abord ramené en un système d'EDO, soit par une approximation des équations par différenciation finie (discrétisation par des schémas de différences finies), soit par une approximation des solutions du système (par des fonctions orthogonales des variables spatiales essentiellement). Dans tous les cas, le système obtenu est représentable dans \mathbb{R}^n et donc la théorie de contrôle en dimension finie (au sens large) peut être utilisée.
- **les méthodes directes** : dans toute la phase d'étude théorique et de synthèse, le système d'EDP est représenté dans les espaces fonctionnels appropriés, donc de dimension infinie, et ce n'est qu'en simulation ou lors de l'implémentation finale que les méthodes d'approximation, de ce fait de résolution numérique, sont utilisées.

Ce travail se situe dans le cadre des méthodes directes d'études des systèmes d'EDP.

b. Classification en dimension infinie

En terme de domaine d'étude, les EDP étant gardées en l'état, la classification globale est similaire à celle en dimension finie.

En linéaire, il s'agit des techniques fréquentielles ou des techniques qui conservent la description temporelle.

Plus généralement, il y a la représentation Kalmanienne, représentation d'état avec toutes les techniques inhérentes (système d'état, boucle ouverte, boucle fermée, stabilisation, etc...).

Il existe enfin le calcul opérationnel lié à l'optimisation fonctionnelle en dimension infinie.

Cette thèse se situe dans l'approche temporelle par la représentation d'état et la résolution par semigroupe d'opérateurs.

1.2.2 Le contrôle frontière par modèle interne

Dans les différents cas de description de contrôle des procédés, celui où les actionneurs sont situés sur un ou sur plusieurs bords géométriques du système sont les plus répandus. Il s'agit du contrôle frontière (par opposition au contrôle distribué).

L'approche Kalmannienne permet d'utiliser formellement la plupart des techniques de synthèse de contrôle connues en dimension finie. De plus, les actionneurs et capteurs sont toujours en nombre fini, de sorte qu'en terme d'entrée-sortie le problème de contrôle frontière d'un système, bien que décrits par des EDP, peut être vu comme un problème

"classique" de régulation.

La commande par modèle interne (CMI) introduite dans les années 70, est étendue au cas des systèmes décrits par des EDP dans le cas des méthodes directes et ceci depuis les années 90, d'abord en linéaire [42], [41] puis en non linéaire [15], [17], [18].

Dans cette approche, pour le cas linéaire, la théorie de la perturbation d'opérateurs et de semigroupes a été utilisée, que ce soit pour mener à bien les études de synthèse ou les études de stabilité basée sur la conservation de certaines propriétés. Cette théorie est établie de manière générale depuis les travaux de KATO dans les années 60 [44].

Les travaux, cités précédemment, ont traité le cas des systèmes dissipatifs décrits par des EDP paraboliques à coefficients constants, où plusieurs conditions requises ou suffisantes pour la stabilité des propriétés post-perturbations sont vérifiées (croissance spectrale, décomposition spectrale, holomorphie de semigroupe, etc...).

Le terme "perturbation" s'entend ici comme le fait que le système en boucle fermée (où le contrôle est obtenu au travers d'opérateurs linéaires sur la sortie ou l'état) est décrit par un opérateur obtenu à partir de celui de la boucle ouverte, auquel sont ajoutés des termes dont l'étude permet de caractériser le système global.

Ce travail concerne l'extension de cette approche de commande par modèle interne aux systèmes décrits par des EDP hyperboliques à coefficients dépendant de la variable d'espace.

1.2.3 *Contrôle de systèmes d'écoulement fluide : canaux d'irrigation*

Un cas typique de systèmes d'EDP hyperboliques est celui des écoulements fluides où le transport est prépondérant devant la diffusion. C'est le cas des écoulements en surface libre dans les canaux d'irrigation. Ces derniers ont constitué le cadre générique de ce travail d'extension de la structure CMI aux systèmes hyperboliques. L'objectif est d'aboutir à des résultats dont l'adéquation avec des systèmes réels est maximisée.

Ci-après, le type d'EDP concerné par ce travail est défini ainsi que le contexte national et le problème sous-jacent de la régulation des canaux.

a. *Les systèmes hyperboliques*

Une définition globale des équations aux dérivées partielles hyperboliques est donnée en Annexe D, ainsi que des exemples académiques (équations des cordes vibrantes et de Navier-Stokes). Une forme particulière est définie ci-après :

Soit n un entier strictement positif. Soit M_n l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , soit $T > 0$ et soit \mathcal{Y} un ouvert connexe non vide de \mathbb{R}^n . On se donne une application $A : [0, L] \times [0, T] \times \mathcal{Y} \longrightarrow M_n$ et une application $f : [0, L] \times [0, T] \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

On considère le système :

$$\frac{\partial y}{\partial t} + A(x, t, y) \frac{\partial y}{\partial x} = f(x, t, y) \quad (1.1)$$

avec $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$. La condition de Cauchy :

$$y(x, 0) = y_0(x) \quad \forall x \in [0, L], \quad (1.2)$$

où $y_0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée.

Définition 1.2.1 ([46], [32]). On dit que le système (1.1) est strictement hyperbolique si, pour tout $x \in [0, L]$, pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $y \in \mathcal{Y}$, les valeurs propres de l'application linéaire $A(x, t, y)$ sont distinctes et réelles. Le système est dit simplement hyperbolique si toutes ces valeurs propres ne sont pas distinctes.

Le système considéré dans ce travail se retrouve dans la forme (1.1) précédente avec les notations suivantes :

$$\partial_t \xi = A(\xi) \partial_x \xi + B(\xi), \quad (1.3)$$

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x), \quad (1.4)$$

$$F_1(\xi(0, t), u(t)) = 0, F_2(\xi(L, t), u(t)) = 0. \quad (1.5)$$

b. *Contexte National : Action Spécifique Canaux d'irrigation*

Plusieurs chercheurs travaillant dans ce domaine du contrôle en dimension infinie, ou directement sur le contrôle de canaux d'irrigation se sont mis en réseau pour confronter les approches et partager leur expérience. Un micro canal expérimental existe dans ce cadre.

L'objectif est de contribuer à augmenter l'efficacité de la gestion de l'eau dans le domaine de l'irrigation et de l'industrie, en diminuant les pertes sur la commande des canaux en manuel (pertes estimées à plus de 70% en manuel et de moins de 30% en automatique et semi-automatique [32]).

Un bilan de leurs travaux a été réalisé en 2003 et est donné dans [33].

c. *Le problème de régulation des canaux d'irrigation : les équations de Saint-Venant*

Dans le cas de la régulation des canaux d'irrigation, le problème a été d'obtenir un modèle qui prenne en compte l'aspect distribué du système. Les équations aux dérivées partielles dites de Saint-Venant intègrent cet aspect avec un contrôle frontière tant sur un bief (tronçon de canal situé entre deux vannes de régulation) que sur plusieurs biefs (en série ou cascade). Elles sont couramment employées depuis plus d'un siècle [8].

Le problème de régulation concerne alors la stabilisation du débit et/ou de la hauteur d'eau, autour d'un point de fonctionnement dans un bief.

Après une brève présentation des travaux de Saint-Venant sur les mouvements des eaux dans un canal rectangulaire, le problème de régulation tel que nous l'avons abordé est présenté.

1.2.4 *Modèle d'écoulement à surface libre*

Les équations de l'hydrodynamique qui nous intéressent ici sont tirées des travaux de Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) dans lesquels il analyse les mouvements non permanents des eaux dans un canal.

Ces équations ont été généralisées pour l'étude d'un réseau de canaux d'irrigation. Elles sont données pour des canaux à base rectangulaire en particulier.

a. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [8]*

On trouve principalement deux articles de Saint-Venant sur la théorie du mouvement non permanent des eaux, avec applications aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit [8].

Tout d'abord, plongé dans l'étude des marées puis des crues dans un canal, il élabore à partir des travaux de M. PARTIOT et de l'équation des ondes, l'équation du profil instantané de la marée **fluviale** (écoulement sub-critique).

Pour écrire ces équations, plusieurs hypothèses sont émises, à savoir :

- [H1] la pente I est supposée constante et faible, pour que l'approximation $\sin I = I$ soit réalisée,
- [H2] la longueur L est suffisamment longue pour considérer un mouvement uniforme dans le sens transversal, l'écoulement est mono-dimensionnel,
- [H3] la masse volumique ρ de l'eau est supposée constante,
- [H4] la répartition des pressions est hydrostatique,
- [H5] les effets de la viscosité interne sont négligeables, compte tenu des frottements extérieurs.

La généralisation aux mouvements non permanents des eaux courantes en est alors déduite, avec d'une part la condition de continuité ou de conservation du volume :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega U)}{\partial s} = 0, \quad (1.6)$$

où U est la vitesse moyenne des eaux à travers une section transversale ω , dont s est l'abscisse, t le temps.

D'autre part, le bilan des diverses quantités de mouvement dues à la pesanteur, aux pressions sur deux faces opposées d'une tranche, aux frottements, et la quantité de mouvement effective, conduit à la deuxième équation sur la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial s} = \frac{I}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\chi}{\omega} \frac{F}{\rho g}, \quad (1.7)$$

où :

- g est l'accélération due à la gravité,
- I la pente du canal.

Pour cette section ω , on définit :

- ζ est l'ordonnée verticale de la superficie au-dessous d'un plan horizontal,
- χ le périmètre mouillé,
- ρ la densité, ou ρg le poids de l'unité de volume,
- $\rho g F$ le frottement du fond par unité superficielle.

Il détermine également les limites des formules précédentes, en excluant le cas torrentiel (comme les déferlements et mascarets, définitions C.3.1 et C.3.2).

En reprenant les travaux de J.-M. HERVOUET [38], on obtient l'existence de courbes caractéristiques réelles (définition D.1) pour les équations de Saint-Venant, ce qui place ces dernières dans la famille des équations différentielles hyperboliques.

Ces équations ont été généralisées, des termes de diffusion et sources y apparaissent, prenant en compte des phénomènes comme la pluie, les apports internes et externes d'eau [32].

b. Généralisation des équations d'écoulement

Les écoulements dans un bief à surface libre sont modélisés par les équations suivantes, par généralisation de celle de Saint-Venant [32] :

$$\partial_t S + \partial_x Q = q_l, \quad (1.8)$$

$$\partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{S} \right) + gS \partial_x Z + gbJZ = kq_l V, \quad (1.9)$$

avec :

- t la variable de temps (s),
- x la variable d'espace (m), orientée dans le sens de l'écoulement,
- Q le débit ($m^3.s^{-1}$),
- Z la côte absolue de l'eau (m),
- q_l le débit latéral par unité de longueur ($m^2.s^{-1}$) ; $q_l > 0$ pour des apports ; $q_l < 0$ pour des pertes,
- V la vitesse de l'écoulement ($m.s^{-1}$),
- S la section mouillée (m^2),
- g la constante de gravité ($m.s^{-2}$),
- J la pente de frottement ($m.m^{-1}$).

De plus $k = 0$ si $q_l > 0$, et $k = 1$ si $q_l < 0$, en considérant que les apports sont perpendiculaires au sens de l'écoulement et qu'ils n'apportent pas de quantité de mouvement

(équation 1.9), la pluie par exemple. Les pertes sont parallèles au sens de l'écoulement et diminuent cette quantité de mouvement, comme les infiltrations et l'évaporation.

Un système d'irrigation est un réseau de canaux, généralement constitué d'un canal principal et de canaux secondaires (Fig. 1.1). Ces prises d'eau latérales sont modélisées de

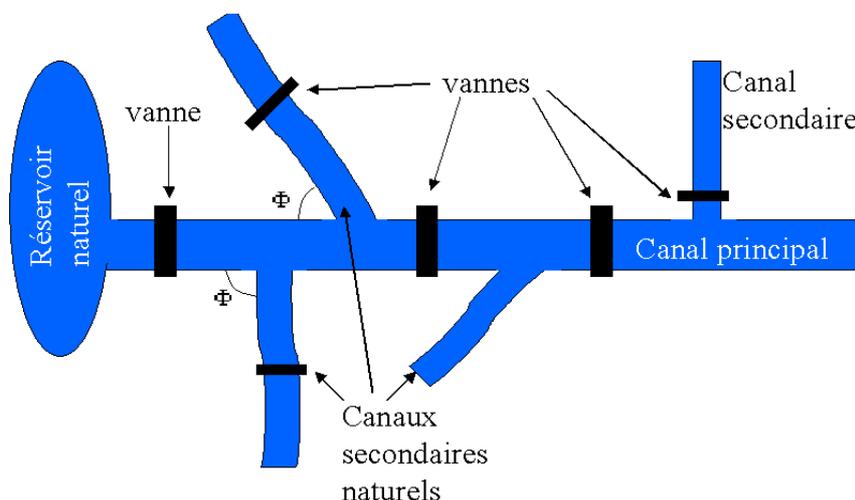


Figure 1.1 : Réseau de canaux d'irrigation

deux façons :

1. Une condition limite interne est ajoutée, le système d'équations est ainsi séparé en deux morceaux. Les deux équations sont alors additionnées au point de prise.
2. Un terme similaire aux infiltrations multiplié par une fonction delta de Dirac est ajoutée aux équations de Saint Venant, de sorte que la valeur soit prise en compte uniquement au point de prise. Les équations de Saint Venant sont dans ces conditions pour un canal rectangulaire :

$$b\partial_t Z + \partial_x Q = q_l + \sum \delta(x - x_p)q_p, \quad (1.10)$$

$$\partial_t Q + \frac{1}{b}\partial_x\left(\frac{Q^2}{Z}\right) + gbZ(\partial_x Z + J - I) = k_l V + \sum k_p \delta(x - x_p)q_p V, \quad (1.11)$$

où b est la largeur du canal, Z le tirant d'eau ($S = bZ$), I la pente du fond.

- k_p est un facteur fonction de l'angle d'arrivée (ϕ) ou sortie de l'apport latéral (0 pour des apports perpendiculaires, 1 pour des apports parallèles et -1 pour des pertes parallèles); $k_p = \cos \phi$ (Fig. 1.1),
- x_p est la position de la prise sur le bief,
- $\delta(x - x_p)$ est la fonction qui vaut 1 si $x = x_p$, 0 sinon.

Dans la plupart des cas, l'angle d'arrivée de l'eau est de 90° donc $k_p = 0$.

Les cinq hypothèses (**H1-H5**) ont donc été adoptées dans le cadre de notre travail, et le cas fluvial est uniquement traité (c'est à dire que des événements comme les déferlements (C.3.1) et les mascarets (C.3.2) sont exclus).

Remarque 1.2.1.

De plus, les équations (1.10-1.11) fonction du débit Q et de la hauteur Z sont celles choisies dans ce mémoire avec $q_l = 0$ et $q_p = 0$. En effet, des études [61] montrent que le modèle hauteur-débit est plus performant que le modèle hauteur-vitesse, numériquement.

c. Présentation du modèle de régulation

Les équations de Saint-Venant, décrites précédemment, sont appliquées à des canaux à base rectangulaire (Fig. 1.2, 1.3).

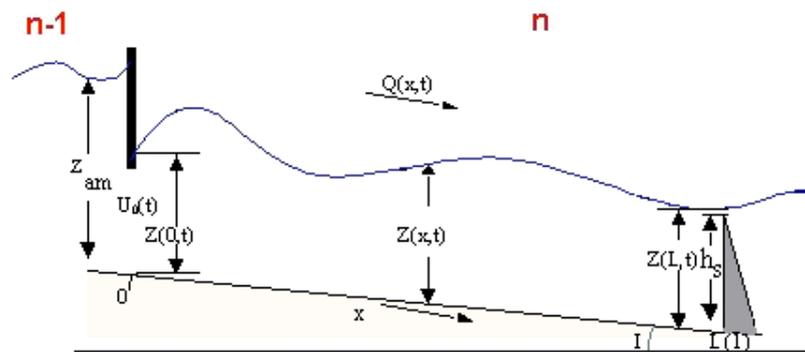


Figure 1.2 : Schéma d'un Canal : un bief déversoir

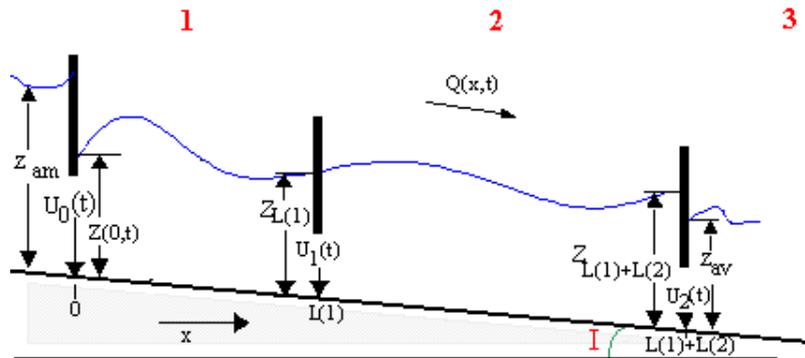


Figure 1.3 : Schéma d'un Canal : deux biefs en cascade

Les notations de l'état, du contrôle ainsi que des divers paramètres du canal sont les suivantes :

- $Q(x, t)$ est le débit ($m^3 \cdot s^{-1}$),
- $Z(x, t)$ est la hauteur d'eau du canal (m),
- $U_i(t)$ est l'ouverture (m) de $(i + 1)^{th}$ vanne, $U_0(t)$ est la première,
- $L(i)$ est la longueur (m) du i^{th} bief, à contrôler entre l'amont $x = x_{am} = 0$ et l'aval $x = x_{av} = L(i)$,

- I est la pente du fond ($m.m^{-1}$) (Fig. 1.3,1.6), elle vérifie l'hypothèses **[H1]**,
- b la largeur du canal (m) (Fig. 1.4),
- g la constante de gravité ($m.s^{-2}$),
- $S(Z)$ la surface mouillée (m^2) et $P(Z)$ le périmètre mouillé (m) :

$$S(Z) = bZ, P(Z) = b + 2Z,$$

- $R(Z)$ le rayon hydraulique (m),

$$R(Z) = \frac{S(Z)}{P(Z)} = \frac{bZ}{b + 2Z},$$

- $J(Z)$ la pente de frottement ($m.m^{-1}$), exprimée à partir de la formule de Manning-Strickler (n est le coefficient de Manning qui est fonction de la rugosité des parois ($s.m^{-1/3}$) et le coefficient de Strickler est $K = \frac{1}{n}$ ($m^{1/3}.s^{-1}$), tableau 1.1),

$$J(Z) = \frac{n^2 Q^2}{(S)^2 R^{4/3}}.$$

Remarque 1.2.2.

Pour les essais réalisés dans ce travail, le coefficient de Manning-Strickler est posé égal à $n = 0.01s.m^{-1/3}$ ($K = 97m^{1/3}.s^{-1}$), i.e. que l'on considère le cas d'une structure en verre ou PVC.

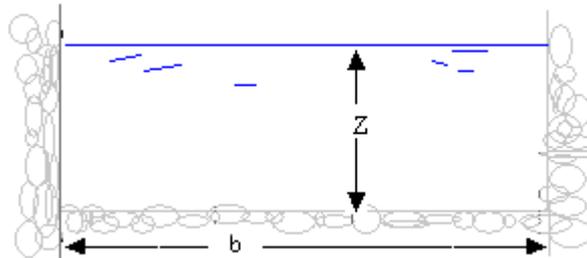


Figure 1.4 : Coupe transversale d'un canal rectangulaire

Matériel des parois du canal	Coeff. de Manning : n	Coeff. de Strickler : K
Terre	0.05	20
Galets ou herbes	0.025 à 0.040	25 à 40
Graviers	0.022 à 0.035	28 à 35
Béton lisse	0.011 à 0.013	77 à 91
Béton brut	0.013 à 0.016	62 à 77
Moellons	0.020 à 0.030	33 à 50
Verre, PVC	0.0103	97

Tableau 1.1 : Le choix du coefficient de Manning et Strickler en fonction du milieu [9]

On suppose que chaque bief (tronçon de canal situé entre deux ouvrages) a une longueur $L(i)$ suffisante, de telle sorte qu'on puisse considérer un mouvement uniforme dans la direction latérale (hypothèse **[H2]**).

Les équations aux dérivées partielles non linéaires de Saint-Venant [8], qui décrivent les écoulements dans un canal rectangulaire en fonction de la hauteur $Z \in X = L^2(x_{am}, x_{av})$ et du débit $Q \in X = L^2(x_{am}, x_{av})$, sont alors les suivantes ([32, 55]) avec :

- l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\partial_t Q = -\partial_x \left(\frac{Q^2}{bZ} + \frac{1}{2}gbZ^2 \right) + gbZ(I - J), \quad (1.12)$$

- l'équation de conservation de la masse :

$$\partial_t Z = -\partial_x \frac{Q}{b}, \quad (1.13)$$

- les conditions initiales :

$$Z(x, 0) = Z_0(x), \quad Q(x, 0) = Q_0(x). \quad (1.14)$$

Il s'agit là d'un système d'équations hyperboliques (définition 1.2.1).

Plusieurs types d'ouvrages existent sur un canal, comme par exemple [20], [32] :

- les vannes noyées ou dénoyées,
- les déversoirs ou seuils à pelle importante ou faible, noyés ou dénoyés,
- les orifices,
- les vannes de fond,
- les surverses.

Remarque 1.2.3.

Dans le cadre de cette étude, deux cas sont considérés d'un point de vue théorique (cas A et B, Tableau 1.2), le dernier cas n'est abordé qu'en simulation.

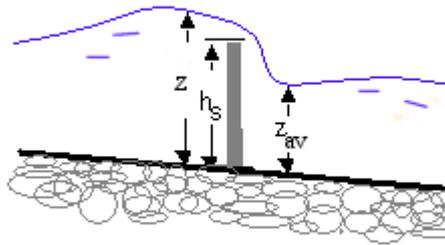
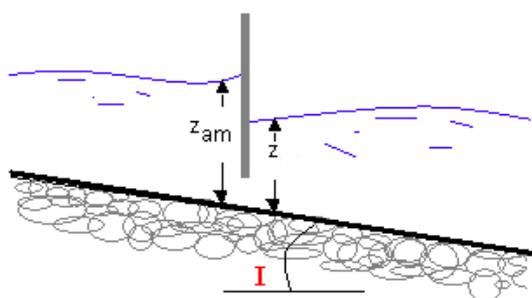


Figure 1.5 : Coupe d'un déversoir dénoyé

Les cas A et B sont traités parallèlement tout au long de ce mémoire. Les conditions aux limites peuvent s'écrire sous les formes suivantes selon qu'on se place dans l'une ou l'autre situation.

Tableau 1.2 : Description des différents cas traités pour un canal

Cas A	- un bief avec une vanne noyée en amont et un déversoir dénoyé (Fig. 1.5) en aval, nous sommes alors dans le cas d'un contrôle monovarié (Fig. 1.2),
Cas B	- un ou plusieurs biefs en cascade avec des vannes noyées (Fig. 1.6) tout le long, il s'agit d'un contrôle multivarié (Fig. 1.3),
Cas C	- le cas de canaux secondaires (Fig. 1.1) n'est abordé qu'en simulation.


Figure 1.6 : Coupe d'une vanne noyée

c.1 - Cas A Contrôle monovarié, bief avec déversoir (Fig. 1.2)

L'équation de la condition en amont du i^{th} bief ($x = x_{am}$) est donnée par :

$$Q(x_{am}, t) = U_{am}(t)\Psi_1(Z(x_{am}, t)). \quad (1.15)$$

La condition en aval du bief ($x = x_{av}$) est :

$$Z(x_{av}, t) = \Psi_2(Q(x_{av}, t)), \quad (1.16)$$

où : $\Psi_1(Z) = K_1\sqrt{2g(z_{am} - Z)}$, $\Psi_2(Q) = (\frac{Q^2}{2gK_2^2})^{1/3} + h_s$.

- z_{am} est le tirant d'eau en amont de la vanne,
- $K_1 = b_{de}\mu_1$ (respectivement $K_2 = b_{va}\mu_2$) est le produit de la largeur du déversoir b_{de} (respectivement de la vanne b_{va}) avec le coefficient de débit μ_i de la vanne n^0i ($0.6 \leq \mu_i \leq 0.7$),
- $h(s)$ est la hauteur du déversoir à l'aval,
- $U_{am}(t)$ est la commande amont.

Notons que la variable à contrôler est la hauteur en x_{av} .

c.2 - Cas B Contrôle multivariable, biefs en cascade (Fig. 1.3)

L'équation de la condition amont est toujours (1.15) :

$$Q(x_{am}, t) = U_{am}(t)\Psi_1(Z(x_{am}, t)).$$

Une autre commande apparaît en aval de chaque bief, i.e. en $x = x_{av}$:

$$Q(x_{av}, t) = U_{av}(t)\Psi_3(Z(x_{av}, t)), \text{ où } \Psi_3(Z) = K_2\sqrt{2g(Z - z_{av})} \quad (1.17)$$

et - $U_{av}(t)$ est la commande aval du bief,

- z_{av} est le tirant d'eau en aval de la vanne.

Remarque 1.2.4.

L'amont et l'aval dépendent du bief considéré, il en est de même pour les abscisses et les vannes.

Indépendamment du type d'ouvrage installé sur le canal (déversoir pelle, orifice, vanne de fond, surverse), les équations des conditions limites ont pour caractéristique d'avoir une dérivée avec un signe identique pour un bief considéré, à savoir négatif en amont $\partial_Z\Psi_1 < 0$ et positif en aval $\partial_Z\Psi_{2,3} > 0$.

Il en va de même pour la forme de base du canal, rectangulaire dans notre cas. Les propriétés qui vont suivre s'appliquent de façon identique quelque soit le type de la base du canal, avec une démonstration plus ou moins simple.

Le modèle non linéaire en dimension infinie ainsi défini, le problème de contrôle est posé comme un problème de contrôle frontière d'un système linéarisé, tout en restant dans une approche directe du problème de régulation, c'est à dire en dimension infinie.

D'autres approches pour l'étude de ce problème ont été et sont étudiées.

1.3 Sur la régulation des canaux d'irrigation : État de l'Art

La gestion de l'eau et en particulier l'eau pour l'irrigation a interpellé les hommes de tout temps, de l'Égypte Antique [23] jusqu'à nos jours.

La recherche dans ce domaine a pris un essor dû à l'importance socio-économique du sujet, la maîtrise de l'eau, mais aussi au développement de la théorie du contrôle.

Ainsi est d'abord présenté l'état des travaux dans ce domaine au niveau général puis un aperçu des différentes approches développées au sein du réseau sur ce thème de la régulation au niveau national

1.3.1 Les méthodes dans le cadre général

Les travaux menés sur les système d'irrigation et notamment sur les canaux à surface libre emploient des méthodes basées un modèle linéaire monovariable entrée-sortie comme sur un modèle non linéaire construit à partir des équations de Saint-Venant, en mono ou multivariables. Un état de l'art intéressant est réalisé dans [32], [55].

Les grandes lignes sont ici reprises pour distinguer les deux classes de méthodes : monovariables et multivariables.

a. Les méthodes monovariables [58], [77]

Par rapport aux canaux, les méthodes monovariables se placent dans le cadre d'un déversoir, c'est à dire un bief avec une vanne en amont et un déversoir en aval (obstacle de hauteur variable). On commande une vanne pour obtenir une sortie (système SISO).

Les premières commandes de type monovariables usitées ont été :

- * méthodes heuristiques monovariables du type Zimbelman, CARDD, Littleman,
- * les contrôleurs monovariables en boucle fermée du type proportionnel (P : AMIL, AVIS, AVIO), intégrateur (PI : ELFLO, BIVAL, Régulation dynamique, Sogreah), dérivateur (PID : UMA Ingénierie).

Dans ce type de méthode, le retard naturel des écoulements n'est pas pris en compte, d'où l'adaptation des méthodes suivantes :

- * intégration d'un prédicteur de Smith (PIR= PI+ prédicteur, R=retard) [77],
- * placement de pôle,
- * commande prédictive (horizon unitaire, horizon étendue) [78],
- * commande neuronale et commande floue (contrôleur non linéaire).

Dans le cas où le canal est constitué de plusieurs biefs, des méthodes monovariables ont été étendues. Toutefois, l'interaction des biefs entre eux est trop importante, et les négliger amène des erreurs de représentation trop importantes, d'où la nécessité d'avoir une approche plus globale avec les méthodes multivariables.

b. Les méthodes multivariables

Le premier pas dans l'approche multivariable a été l'extension de la commande d'un bief avec déversoir à un bief avec deux vannes, donc deux entrées pour une sortie (MISO : multi-input, single-output).

Puis, la généralisation de la commande à plusieurs biefs en cascade, avec des méthodes multivariables, a été introduite; plusieurs vannes sont alors traitées simultanément et l'interaction entre biefs est prise en compte de façon plus réaliste (MIMO : multi-input, multi-output).

Certaines de ces méthodes multivariables sont :

- * PID multivariables [52],
- * placement de pôle dans l'espace d'état [47], [72],
- * commande prédictive [14], [56],
- * inversion de modèle, basée sur un modèle non linéaire d'ordre fini (en boucle ouverte généralement, ou en boucle fermée),
- * commande robuste [3], [51], [88]
- * méthodes d'optimisation; commande LQG, commande H_∞ [54], [53], [48], [10] H_2 [80], l_1

[57], commande LQR [79], commande non linéaire [4], optimisation linéaire et non linéaire, commande prédictive multivariable [78], [56], méthode de collocation [31], platitude [64], [91], optimisation convexe [65], système à retard [50], [49] ...

L'étude des canaux d'irrigation ne se borne pas qu'à leur modélisation ni au contrôle de leurs systèmes. La stabilité de tels systèmes est également un difficile problème et de nombreux travaux ont également été menés sur cette stabilité et sur ses différentes formes, par l'étude du système linéarisé [28], en dimension finie ou infinie [13] ou par d'autres approches [27], [36], [59], [71], [89], [87], [86].

1.3.2 Les méthodes utilisant les équations de Saint-Venant

L'exposé est ici limité aux travaux menés dans le cadre des activités d'automatisation des canaux d'irrigation par les équations de Saint-Venant linéarisées ou non, au niveau national [33].

a. Approches par représentation d'état Kalmanienne

La démarche par représentation d'état Kalmanienne est la plus proche de celle de l'automatique dans \mathbb{R}^n . Les analyses de stabilité (de type Lyapunov par exemple) de la régulation ou de poursuite sont établies en adoptant la description des EDP sous forme d'opérateurs et leur résolution par semigroupe dans les espaces de type L^2 . La stabilisation et le contrôle frontière sont les aspects théoriques prépondérants.

Techniques de type Lyapunov [4], [84], [36], [5], [37]

Le contrôle frontière est utilisé pour stabiliser le système autour d'un équilibre en utilisant des fonctions d'entropie comme fonction de Lyapunov [4], [84]. Les canaux mono et multibiefs sont traités [36], [5], [37], [35].

Techniques de contrôle frontière par modèle interne [11], [12], [13]

Il s'agit de l'objet de ce travail. L'analyse et la synthèse de contrôle stable sont menées par les techniques de perturbations de semigroupes et de perturbations spectrales.

b. Approches par le contrôle optimal

Il s'agit de formuler le problème de commande comme un problème d'optimisation fonctionnelle. L'objet des recherches concerne ici les stratégies de :

- formulation : calcul des variations en dimension infinie ou approximation préalable en dimension finie (du critère d'optimisation ou des EDP),
- résolution : commande prédictive linéaire ou non linéaire, sur horizon glissant en boucle fermée ou en boucle ouverte.

Différentes techniques sont utilisées :

Techniques à la formulation en dimension infinie ou à l'approximation préalable

Il s'agit là :

* de la réduction des équations aux dérivées partielles de Saint-Venant en utilisant les résidus pondérés en non linéaire [32], [21] ou en linéaire [60],

* de la commande optimale robuste vis à vis des erreurs de réduction [60].

Techniques de commande prédictive linéaire ou non linéaire

Pour ce qui est de la commande prédictive, deux types de commande ont été étudiées en linéaire (commande optimale) et en non linéaire (commande prédictive par modèle interne).

* *Commande optimale des EDP de Saint-Venant* [32], [30] : application à la commande prédictive non linéaire en dimension finie et en dimension infinie et à la commande optimale LQ par approche semigroupe.

* *Commande prédictive non linéaire par modèle interne* [17] [16], [19], [22] Il s'agit ici d'étendre la technique de commande prédictive, par modèle interne et par optimisation sur un horizon glissant, au problème du canal, en tenant compte des contraintes de fonctionnement. Cette technique ayant donné des résultats intéressants sur des procédés réels, en Génie des Procédés [17] [16], [19], elle est utilisée ici directement sur les EDP de St Venant non linéaires en simulation [22].

c. Approche par l'extension de la notion de la platitude

L'extension de la notion de platitude aux systèmes de dimension infinie qui en possèdent la propriété, a déjà été entamée [26], [25], [45] [64], [74], [82]. Il s'agit ici de l'application au cas particulier de la régulation des canaux, sur la base du modèle d'EDP linéarisées de Saint-Venant [92].

1.4 Conclusion

L'objet de ce chapitre a été de situer la problématique du contrôle des EDP hyperboliques décrivant les écoulements fluides, comme ceux des canaux d'irrigation.

La plupart des approches et méthodes exposées ici l'ont été pour montrer l'intérêt scientifique du sujet, mais en aucun cas dans un aspect comparatif.

L'objet du chapitre suivant est la présentation de la structure de commande IMBC (IMBC pour Internal Model Boundary Control) et de poser les équations représentatives des écoulements peu profonds dans un canal d'irrigation, sur lesquelles la structure de commande sera appliquée.

La structure de commande et le modèle

"Il n'est point d'impasse là où on peut faire marche arrière."
Extrait des Nouvelles pensées échevelées.
Stanislaw Jerzy Lec, écrivain polonais, 1909-1966

Sommaire

2.1	Introduction	25
2.2	La structure de commande IMBC	25
2.2.1	<i>Rappels sur la structure CMI</i>	25
2.2.2	<i>Structure de commande IMBC</i>	28
2.3	Le système du canal en boucle ouverte : un système de commande frontière	30
2.3.1	<i>Le modèle physique</i>	31
2.3.2	<i>Le modèle de régulation dans un bief</i>	31
2.3.3	<i>Le modèle de régulation pour des biefs en cascade</i>	34
2.4	Conclusion	36

2.1 Introduction

Les deux principales spécificités de ce travail de thèse sont d'une part l'utilisation de la structure particulière de commande IMBC, et d'autre part l'application de cette méthode à des EDP hyperboliques à coefficients dépendants de la variable d'espace.

L'objet de ce chapitre est de présenter ces deux spécificités.

La première est l'utilisation de la structure de commande frontière par modèle interne. La structure de commande par modèle interne (CMI) est répandue pour le contrôle de systèmes de dimension finie. Elle est ici rappelée.

Cette structure étendue (structure IMBC) au cas de la dimension infinie est ensuite décrite.

La deuxième spécificité porte sur le système étudié, ici les canaux d'irrigation, décrits par les équations de Saint-Venant, dans le cas d'un ou plusieurs biefs en cascade. Le modèle issu de ce système d'EDP hyperboliques est le linéarisé autour d'un point de fonctionnement. Il s'agit ici d'un état d'équilibre définissant deux fonctions : une hauteur et un débit d'équilibre.

Le modèle de régulation obtenu, dans un premier temps, pour un bief, se différencie selon le type d'ouvrage situé à l'aval du bief.

Dans un second temps, ce modèle est généralisé au cas de biefs en cascade.

2.2 La structure de commande IMBC

La structure de Commande par Modèle Interne, plus simplement notée CMI, est une structure couramment exploitée pour ses performances en asservissement et en régulation. Largement employée dans le cas de la dimension finie pour des systèmes linéaires et non linéaires, elle a été étendue à des systèmes décrits directement en dimension infinie, que ce soit pour des systèmes linéaires [40], ou non linéaires [15], [17].

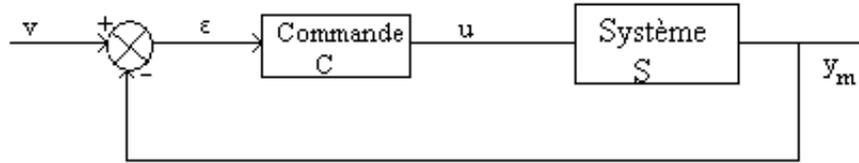
2.2.1 *Rappels sur la structure CMI*

La notion de commande par modèle interne (CMI) est apparue de manière structurée, sous cette forme, depuis les travaux de Richalet [73] et Morari [29]. Mais l'idée est plus ancienne puisqu'on la trouve dans les travaux de Propoi en 1963, notamment pour la commande prédictive [70].

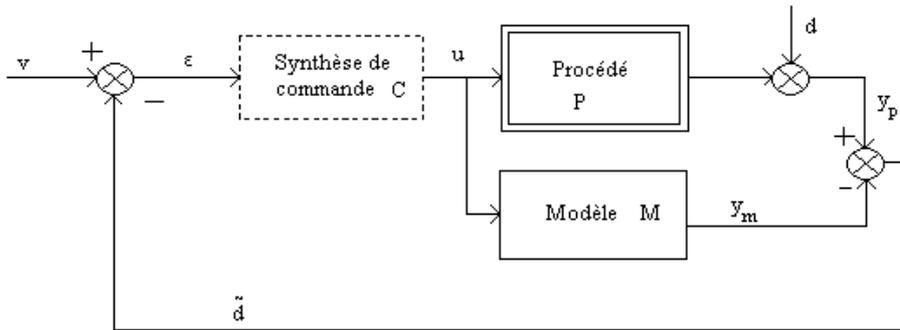
a. *Principe de base*

L'idée de base de la CMI est de concevoir une synthèse de commande qui agit en parallèle sur le procédé modélisé et son modèle en temps réel, comme on peut le remarquer sur le schéma de base (Figure 2.1 b.), en regard de la structure de commande en boucle

fermée classique (Figure 2.1 a.), en incluant un bruit additif en sortie. où v est la consigne,



a. Structure de commande en boucle fermée



b. La structure de commande IMC

Figure 2.1 : Structures de commande

ε l'écart, u la commande, y_p la sortie du procédé, y_m la sortie du modèle, le système représentant le modèle ou le procédé selon.

Si on pose formellement C le transfert de la partie commande, M le modèle et P le procédé, on a toujours formellement (dans le domaine linéaire) :

* pour la Figure 2.1 a. :

$$\left. \begin{array}{l} u = C\varepsilon \\ \varepsilon = v - y_m \\ y_m = Mu \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{C}{I+CM}v \\ y_m = \frac{M}{I+CM}Cv \\ y_p = \frac{P}{I+CM}Cv \end{array} \right. \quad (2.1)$$

* pour la Figure 2.1 b. :

$$\left. \begin{array}{l} u = C\varepsilon \\ \varepsilon = v - \tilde{d} \\ \tilde{d} = (P - M)u + d \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{C}{I+C(P-M)}v - \frac{C}{I+C(P-M)}d \\ y_p = \frac{CP}{I+C(P-M)}v + \frac{I-CM}{I+C(P-M)}d \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Remarque 2.2.1.

* Avec les relations (2.1), on peut :

- procéder à une stabilisation si le système en boucle ouverte n'est pas stable (par un retour non unitaire),

- avoir des performances supérieures en boucle fermée par rapport à la boucle ouverte.
- * Avec les relations (2.2), on peut :
 - avoir la stabilité de l'ensemble quand M (P) et C sont stables,
 - pour un modèle idéal ($M = P$), $C = M^{-1}$ et ainsi avoir :
 - \Leftrightarrow une poursuite parfaite de trajectoire, $y_p = v, \forall d$,
 - \Leftrightarrow une estimation en ligne des perturbations non mesurées, $\tilde{d} = d$.

Il est bien évident que cela exclut beaucoup de cas et c'est ainsi que la mise en oeuvre effective de la structure CMI passe par des techniques qui concourent à deux principes généraux :

- minimiser la sensibilité de la structure CMI pour un rejet de perturbation maximal :

$$S = \frac{y_p}{d} = \frac{I - CM}{I + C(P - M)},$$

- maximiser la sensibilité complémentaire pour une meilleure poursuite :

$$T = \frac{y_p}{v} = \frac{CP}{I + C(P - M)}.$$

C est donc choisie de telle sorte que $\|S\|$ soit minimal et $\|T\| \leq 1$. Les normes habituellement utilisées sont les normes H_2 ou H_∞ [29].

b. *Modèle interne et correcteur en boucle fermée*

Dans le principe de base de la commande par modèle interne, plus le modèle est proche de la réalité plus la structure s'approche d'une structure en boucle ouverte.

Un correcteur de type boucle fermée peut donc compenser ce handicap tout en élargissant la classe des systèmes pour lesquelles la structure est applicable.

D'autre part, l'écart e entre le procédé et son modèle peut être dû à de multiples raisons, de sorte qu'il est plus raisonnable de considérer ce signal comme exogène par rapport à la commande. La structure de la Figure 2.1 b. est modifiée comme suit (Figure 2.2).

On retrouve des relations similaires à celles de (2.1), où le rôle de v est joué par $x = v - e$:

$$\begin{cases} u = \frac{C}{I+CM}x \\ y_m = \frac{M}{I+CM}Cx, \quad y_p = \frac{P}{I+CM}Cx \end{cases} \quad (2.3)$$

Le correcteur peut alors être choisi le plus simple possible en garantissant les performances de la structure CMI. En effet, le correcteur agit toujours sur l'écart entre la consigne et la sortie réelle du procédé y_p :

- si le procédé et son modèle sont identiques : $e \equiv 0$ et $x = v$,
- en général : $\varepsilon = x - y_m = v - e - y_m = v - y_p$.

L'autre avantage est qu'en commande prédictive (linéaire ou non linéaire) la sortie modèle y_m sera utilisée pour prédire l'évolution du système en tenant compte de l'écart e , voire

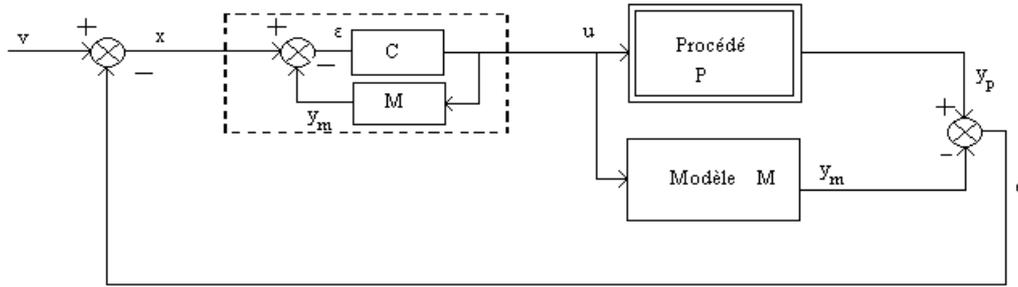


Figure 2.2 : Structure MCI modifiée

de son évolution [40], [15].

La structure finale de modèle interne utilisée dans ce mémoire tient compte de cela, en incluant un modèle de référence en ce qui concerne la consigne et un modèle de filtrage pour ce qui est de l'écart de sortie observé.

2.2.2 Structure de commande IMBC

Les procédés décrits par un modèle d'EDP sont généralement contrôlés et observés en des endroits déterminés et en nombre fini. De sorte que tout ce qui précède peut être conservé comme en dimension finie sauf le modèle qui est bien entendu représenté dans des espaces fonctionnels de dimension infinie.

La structure devient alors une structure de contrôle frontière par modèle interne (Internal Model Boundary Control : IMBC) [81], représentée Figure 2.3.

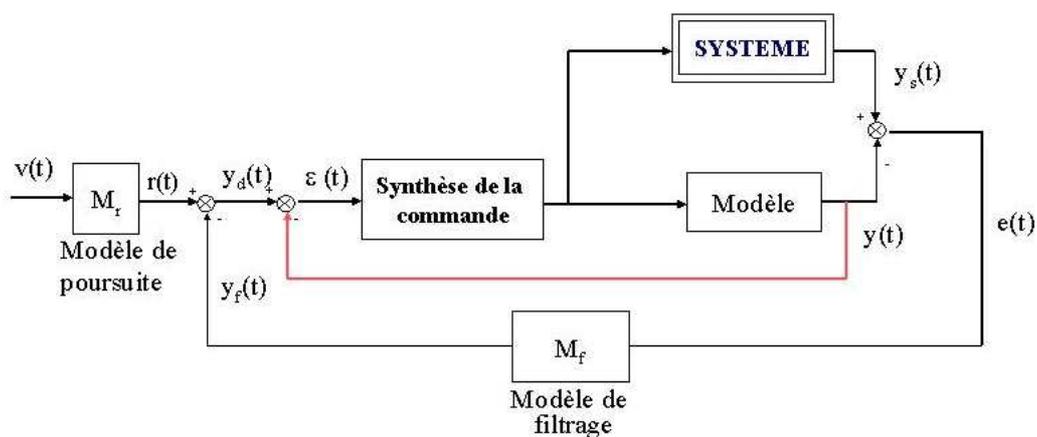


Figure 2.3 : La structure IMBC

Les caractéristiques des principales composants de ces structures sont les suivantes :

*** Le système ou procédé.**

Il est supposé stable et uniquement contrôlé sur ses frontières par un nombre fini de commandes. Les mesures disponibles sont en nombre fini également et susceptibles d'être soumises à des perturbations.

Remarque 2.2.2.

Le système est supposé stable pour satisfaire l'hypothèse classique de stabilité du modèle interne.

Dans le cas d'un système instable, le bouclage de retour peut être rendue stabilisant au préalable, afin de se ramener à un système stable.

* Les modèles de poursuite M_r et de filtrage M_f sont des systèmes stables dont les entrées et sorties sont définies sur des espaces de dimension finie p , pour tout t fixé. Plus précisément :

Le filtre (M_r) de référence

Le modèle de poursuite M_r est un système stable de dimension finie permettant, dans le cas classique d'une consigne constante, d'imposer une certaine dynamique de poursuite par rapport à cette consigne fixée. Il reçoit le plus couramment le nom de générateur de trajectoires ou filtre de consignes.

Ce comportement de référence peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r v(t), & v(t) \in \mathbb{R}^p, r(t) \in \mathbb{R}^p, \\ r(t) &= C_r x_r(t) \\ x_r(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le cas d'une consigne variable est ici considéré. La consigne v est ici considérée variable, le nombre de sorties mesurées est $p \geq 1$.

Le filtre (M_f)

Le filtre M_f est un système linéaire de dimension finie, qui sert à filtrer le signal d'erreur $e(t) = y_s(t) - y(t)$, écart entre les sorties du procédé et celles de son modèle. Ce signal supposé **non persistant et borné** est représentatif des perturbations non mesurées ajoutées en sortie du procédé, ainsi que des erreurs de paramètres et/ou de modélisation. On l'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_f(t) &= A_f x_f(t) + B_f e(t), & e(t) \in \mathbb{R}^p, y_f(t) \in \mathbb{R}^p, \\ y_f(t) &= C_f x_f(t) \\ x_f(0) &= x_{f0}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

La structure de commande par modèle interne est connue pour ses qualités propres de robustesse et d'asservissement. Le filtre de retour (M_f) permet d'imposer une dynamique de rejet de perturbation par rapport soit aux bruits directs de mesure, soit à des incertitudes de modèle représentés par $e(t)$, ou les deux, afin d'atténuer leurs influences sur la commande.

De part sa construction, la commande CMI se comporte comme un intégrateur par rapport à la sortie "réelle" mesurée, tout en y utilisant le modèle.

En effet :

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= y_d(t) - y(t) \\ &= r(t) - y(t) - y_f(t)\end{aligned}$$

pour un comportement stable, et une fois les transitoires terminés, avec $r(t)$ et $e(t)$ supposés non persistants, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) - y(t) - y_f(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) - y(t) - (y_s(t) - y(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) - y_s(t).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Ainsi, le fait de travailler sur $y_d(t) - y(t)$ revient à travailler sur $y_f(t) - y_s(t)$ et donc sur $r(t) - y_s(t)$ en régime permanent. Cela signifie qu'en régime permanent, asservir $y(t)$ à $y_d(t)$ revient à asservir $y_s(t)$ à $v(t)$.

En résumé, le principe de la structure CMI consiste à trouver la commande $u(t)$ telle que :

- le système résultant en boucle fermée soit stable,
- la sortie commandée du système réel $y_s(t)$ soit réglée de telle sorte qu'elle tende vers une trajectoire de référence choisie $v(t)$.

Le dernier élément de la structure précédente est le modèle interne du système. Dans ce qui suit, le modèle est défini dans deux cas, tout d'abord dans le cas monobief avec deux sous catégories déterminées par le type d'ouvrage en amont et à l'aval du bief. Puis il est généralisé au cas multibiefs, i.e. des biefs en cascade, avec des vannes en amont et à l'aval de chaque bief.

2.3 Le système du canal en boucle ouverte : un système de commande frontière

L'objectif de cette partie est d'écrire explicitement le modèle du canal, comme un système de commande frontière. Le modèle physique non linéaire décrit au chapitre 1 est rappelé avec les deux conditions limites dans le cas d'un bief. Ces conditions limites dépendent du type d'ouvrage considéré en amont et à l'aval de chaque bief.

Le problème de régulation est alors traité autour d'un point de fonctionnement, et le modèle linéarisé en est déduit. Selon les conditions limites, le contrôle est alors soit monovarié s'il y a un déversoir et une vanne sur le bief considéré, soit multivarié s'il y a deux vannes.

Le modèle linéarisé est ensuite généralisé au cas multibiefs, le contrôle est alors multivarié dans tous les cas.

2.3.1 Le modèle physique

L'écoulement mono-dimensionnel dans un canal est décrit par les équations de Saint-Venant avec deux états, la hauteur d'eau et son débit.

La notation choisie est la suivante $\xi = \begin{pmatrix} Z \\ Q \end{pmatrix} \in L^2(x_{am}, x_{av}) \times L^2(x_{am}, x_{av})$.

Le système (1.12-1.14) s'écrit comme suit :

$$\partial_t Z = -\partial_x \frac{Q}{b}, \quad (2.7)$$

$$\partial_t Q = -\partial_x \left(\frac{Q^2}{bZ} + \frac{1}{2}gbZ^2 \right) + gbZ(I - J), \quad (2.8)$$

$$Z(x, 0) = Z_0(x), \quad Q(x, 0) = Q_0(x), \quad (2.9)$$

et les conditions limites dépendent du type d'ouvrage considéré. Deux ouvrages sont traités ici :

- **un déversoir noyé** (Figure 1.5), les conditions frontières sont alors données par les équations (1.15)-(1.16) :

$$\begin{aligned} Q(x_{am}, t) &= U_{am}(t)\Psi_1(Z(x_{am}, t)), \\ Z(x_{av}, t) &= \Psi_2(Q(x_{av}, t)), \end{aligned}$$

- **une vanne noyée** (Figure 1.6), les conditions frontières sont alors données par les équations (1.15)-(1.17) :

$$\begin{aligned} Q(x_{am}, t) &= U_{am}(t)\Psi_1(Z(x_{am}, t)), \\ Q(x_{av}, t) &= U_{av}(t)\Psi_3(Z(x_{av}, t)). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Un bief est un tronçon de canal délimité en amont par une vanne, et à l'aval soit par une vanne, soit par un déversoir. Dans un premier temps, le modèle de régulation dans un bief autour d'un point de fonctionnement est décrit, avant d'être généralisé au cas multibiefs dans un second temps.

2.3.2 Le modèle de régulation dans un bief autour d'un point de fonctionnement

Le problème de régulation concerne la stabilisation du tirant d'eau, autour d'un point de fonctionnement, qui est ici un niveau d'équilibre, à l'aval d'un bief, noté $(z_e(x), q_e(x))$. Un modèle linéaire à coefficients variables peut donc être utilisé pour décrire les variations autour de ce comportement d'équilibre.

Cet état d'équilibre du système (2.7-2.9) vérifie les équations suivantes :

$$\partial_t \xi_e = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x z_e = gbz_e \frac{I+J_e+\frac{4}{3}J_e\frac{1}{1+2z_e/b}}{gbz_e-q_e^2/bz_e^2}, \\ \partial_x q_e = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

où

$$J_e(z) = \frac{n^2 Q_e^2}{S(z_e(x))^2 R(z_e(x))^{4/3}}, \quad R_e(z) = \frac{bz_e(x)}{b+2z_e(x)}.$$

Notons que q_e est constant mais que z_e dépend de la variable d'espace. Cela traduit le fait qu'un niveau d'eau est horizontal même si le canal est en pente (pour une pente raisonnable, dans le cadre de l'étude la pente est de 1.60/00).

Le système linéarisé autour d'un niveau d'équilibre $\partial_t \xi(t) = (\partial_t z(t) \quad \partial_t q(t))^t$ s'écrit :

$$\partial_t \xi(t) = A_1(x) \partial_x \xi(x) + A_2(x) \xi(x) \quad (2.12)$$

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x) \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} F_{am}(\xi(x_{am}, t), u_{am,e}) = G_{am}(u_{am}(t)) \\ F_{av}(\xi(x_{av}, t), u_{av,e}) = G_{av}(u_{av}(t)) \end{cases} \quad (2.14)$$

où chaque élément est donné par (un niveau d'équilibre différent par bief) :

* la condition initiale est donnée par

$$\xi_0(x) = (z_0(t) \quad q_0(t))^t$$

* les opérateurs définissant l'état sont

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & -a_1(x) \\ -a_2(x) & -a_3(x) \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_4(x) & -a_5(x) \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

avec

$$a_1(x) = 1/b, \quad a_2(x) = gbz_e(x) - \frac{q_e^2}{bz_e^2(x)}, \quad a_3(x) = \frac{2q_e}{bz_e(x)},$$

$$a_4(x) = gb(I + J_e(x) + \frac{4}{3}J_e(x)), \quad a_5(x) = \frac{2gbJ_e(x)z_e(x)}{q_e}.$$

* Les conditions frontières se différencient selon le type d'ouvrage en amont et à l'aval.

Elles sont alors :

- en amont pour une vanne noyée

$$\begin{aligned} F_{am}(\xi(x_{am}, t), u_{am,e}) &= q(x_{am}, t) - u_{am,e} \partial_z \Psi_1(z_e(x_{am})) z(x_{am}, t) \\ &= u_{am}(t) \Psi_1(z_e(x_{am})) = G_{am}(u_{am}(t)) \end{aligned} \quad (2.17)$$

- à l'aval dans le cas d'un déversoir noyé

$$F_{av}(\xi(x_{av}, t), u_{av,e}) = z(x_{av}, t) - \partial_q \Psi_2(q_e) q(x_{av}, t) = 0 = G_{av}(u_{av}(t)) \quad (2.18)$$

- à l'aval dans le cas d'une vanne noyée

$$\begin{aligned} F_{av}(\xi(x_{av}, t), u_{av,e}) &= q(x_{av}, t) - u_{av,e} \partial_z \Psi_3(z_e(x_{av})) z(x_{av}, t) \\ &= u_{av}(t) \Psi_3(z_e(x_{av})) = G_{av}(u_{av}(t)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

où $u_{am,e}$, $u_{av,e}$ sont les ouvertures de vannes pour les points d'équilibre amont et aval d'un bief et u_{am} , u_{av} sont les variations de ces ouvertures.

Remarque 2.3.1.

Comme pour l'équation des ondes, on distingue trois comportements caractéristiques des écoulements selon le signe du produit des valeurs propres de l'opérateur associé [61], [32], [38] :

- torrentiel ou super-critique (produit des valeurs propres positif), les ondes vont moins vite que le courant. L'écoulement en un point ne dépend que des conditions aux limites amont, il n'influe que sur l'aval.

- dans le cas nul, l'écoulement est dit critique.

- fluvial ou sub-critique (produit négatif), les ondes vont plus vite que le courant. L'écoulement en un point dépend des conditions aux limites amont et aval.

Cela correspond physiquement à une hauteur critique z_c . Cela est également rattaché au nombre de Froude et à sa position par rapport à 1 (dans le cas sub-critique, $Z > z_c$, $F < 1$). Le nombre de Froude est un nombre adimensionnel défini par :

$$F = \sqrt{\frac{Q^2 L}{g S^3}}.$$

Remarque 2.3.2.

Dans le cadre de la thèse, le cas fluvial a été choisi puisque représentatif de la plupart des écoulements. Cela se traduit par la condition suivante :

$$z_e > \sqrt[3]{q_e^2 / (g b^2)} = z_c. \quad (2.20)$$

Cela a pour effet d'avoir une hauteur d'eau minimale (hauteur critique z_c).

Cette condition ajoutée à la hauteur maximum z_{am} pouvant être atteinte dans un bief bornent tous les termes des opérateurs A_1 et A_2 définis précédemment.

Les domaines de définition des différents opérateurs sont dans le cas d'un bief avec en amont une vanne et à l'aval :

* un déversoir, le contrôle est alors monovarié et $u(t) \in U$, $U = \mathbb{R}$:

$$D(A_d) = \left\{ \xi \in X : \xi \text{ a.c.}, \frac{d\xi}{dx} \in X \text{ et } z(L) = \partial_q \Psi_2(q_e) q(L) \right\},$$

* une vanne, le contrôle est alors multivarié et $U = \mathbb{R}^2$:

$$D(A_d) = \left\{ \xi \in X : \xi \text{ a.c.}, \frac{d\xi}{dx} \in X \right\}$$

Remarque 2.3.3.

Deux remarques peuvent être faites sur les domaines :

1. L'opérateur ∂_x est à domaine dense sur l'espace $L^p(a, b)$ pour tout $1 \leq p < \infty$, où (a, b) est un intervalle fini (cf. [44], pp. 145). De plus, son inverse existe, et est un opérateur intégral, s'il existe une relation du type : $\xi(0) = 0$, $\xi(L) = 0$ ou $\xi(0) = k\xi(L)$, $k \neq 0$ et $k \neq 1$.

2. En associant cette première remarque au théorème de Baire , les opérateurs $A_1(x)\partial_x$ et $A_2(x)$ sont à domaine dense, puisque les opérateurs $A_1(x)$ et $A_2(x)$ sont bornés. L'opérateur $A(x) = A_1(x)\partial_x + A_2(x)$ est donc à domaine dense. En effet, le domaine $D(A(x))$ est défini comme suit :

$$D(A(x)) = D(A_1(x)\partial_x + A_2(x)) = D(A_1(x)\partial_x) \cap D(A_2(x)),$$

il est donc dense dans $X = L^2(x_{am}, x_{av}) \times L^2(x_{am}, x_{av})$.

La variable de sortie, y , est la hauteur d'eau à l'aval du bief,

$$y(t) = C\xi(t), \quad t \geq 0, \quad y(t) \in Y = \mathbb{R} \quad (2.21)$$

où C est un opérateur borné (représentation de la mesure en un point avec $\mathbf{1}_{x \pm \mu}(y) = \mathbf{1}_{[x-\mu, x+\mu]}(y)$ la fonction qui vaut 1 si $y \in [x - \mu, x + \mu]$, 0 sinon, et $\mu > 0$) :

$$C\xi = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2\mu} \int_{x_1-\mu}^{x_1+\mu} \mathbf{1}_{x_1 \pm \mu} & 0 \end{array} \right) \xi dx, \quad \mu > 0$$

Le problème de régulation d'un canal rectangulaire est donc posé sous la forme d'un système à commande frontière, ainsi que les objectifs de régulation.

Le problème de commande pour un bief est alors le suivant selon qu'il y ait une vanne et un déversoir, ou deux vannes :

* **une vanne et un déversoir** : trouver les variations de $u_{am}(t)$ à l'extrémité $x = x_{am}$, pour que la variable de sortie à l'aval, $x = x_{av}$, suive un signal de référence $r(t)$.

* **deux vannes** : trouver les variations de $u_{am}(t)$ à l'extrémité $x = x_{am}$, et $u_{av}(t)$ à l'extrémité $x = x_{av}$ du bief telles que la variable de sortie à l'aval, $x = x_{av}$ suive un signal de référence $r(t)$.

Le cas d'un bief se généralise à plusieurs biefs en cascade (Figure 1.3). La forme du système reste identique au cas monobief décrits par les équations (2.12)-(2.14), seuls les opérateurs de l'état, de commande et de sorties sont modifiés. C'est l'objet de la section suivante.

La notation suivante est adoptée dans ce qui suit : l'indice " i " désigne un élément du $i^{\text{ème}}$ bief. Par exemple $z_{e,i}(x)$ désigne la hauteur d'eau à l'équilibre dans le $i^{\text{ème}}$ bief.

2.3.3 Le modèle de régulation pour des biefs en cascade

On se place dans le cas où p biefs sont mis en cascade avec uniquement des vannes comme ouvrages en amont et à l'aval, comme décrit dans la Figure 1.3 où $p = 2$. Afin de simplifier les notations, on suppose que les biefs ont une longueur $L(i)$ et par conséquent écrire $x \in [0, L(i)]$ signifie que l'on se situe au niveau du $i^{\text{ème}}$ bief. De plus, on suppose que les p biefs ont une longueur totale $L = \sum_1^p L(i)$, donc la variable d'espace x appartient à l'ensemble $[0, L]$.

Un état d'équilibre du système est défini par la notation suivante :

$$\xi_e \text{ tel que } \partial_t \xi_e = 0, \quad (2.22)$$

où

$$\xi_e = (z_{e,1} \ q_{e,1} \ z_{e,2} \ q_{e,2} \ \dots \ z_{e,p} \ q_{e,p})^t \in X = (L^2(0, L(1)))^2 \times (L^2(0, L(2)))^2 \times \dots \times (L^2(0, L(p)))^2.$$

Notons que ξ_e dépend a priori de la variable d'espace.

Le système linéarisé autour d'un niveau d'équilibre, différent pour les p biefs, s'écrit alors :

$$\partial_t \xi(t) = A_e(x) \partial_x \xi(x) + B_e(x) \xi(x) \quad (2.23)$$

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x) \quad (2.24)$$

$$\tilde{F}(\xi, u_e) = \tilde{G}(u(t)), \quad (2.25)$$

où

$$\xi = (z_1 \ q_1 \ z_2 \ q_2 \ \dots \ z_p \ q_p)^t \in X = (L^2(0, L(1)))^2 \times (L^2(0, L(2)))^2 \times \dots \times (L^2(0, L(p)))^2,$$

et \tilde{F} et \tilde{G} sont les généralisations de F_{am} , F_{av} , G_{am} et G_{av} , leurs coefficients étant adaptés selon le type d'ouvrages des biefs en question.

Les opérateurs $A_e(x)$ et $B_e(x)$ sont des généralisations des opérateurs $A_1(x)$ et $A_2(x)$ respectivement, en effet ils prennent la forme suivante :

$$A_e = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0_{2 \times 2} & \dots & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & A_{1,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \dots & 0_{2 \times 2} & A_{1,p} \end{pmatrix} \text{ et } B_e = \begin{pmatrix} A_{2,1} & 0_{2 \times 2} & \dots & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \dots & 0_{2 \times 2} & A_{2,p} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

avec les notations suivantes :

$$0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_{1,i}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,i}(x) \\ -a_{2,i}(x) & -a_{2,i}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in [0, L(i)], \quad \forall 1 \leq i \leq p,$$

pour la matrice $A_{1,i}(x)$ représentative de l'état $\xi_i(x) = (z_i(x) \ q_i(x))^t$ du $i^{\text{ème}}$ bief. Il en est de même pour $B_e(x)$, $x \in [0, L]$. Les coefficients $a_{j,i}(x)$, $1 \leq j \leq 5$ dépendent de l'état d'équilibre $\xi_{e,i}(x) = (z_{e,i}(x) \ q_{e,i}(x))^t$, $x \in [0, L(i)]$, $\forall 1 \leq i \leq p$.

Le modèle linéarisé à commande frontière en boucle ouverte peut alors être formulé comme suit :

$$\partial_t \xi(t) = A_d(x) \xi(t), \quad x \in \Omega = \bigcup_{i=1}^p]0, L(i)[, \quad t > 0 \quad (2.27)$$

$$F_b \xi(t) = B_b u(t), \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \quad t > 0$$

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x) \text{ sur } \overline{\Omega} \quad (2.28)$$

où $A_d(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$.

Le domaine de l'opérateur A_d est (*a.c.* = absolument continue) :

$$D(A_d) = \left\{ \xi \in X : \xi \text{ a.c.}, \frac{d\xi}{dx} \in X \right\} \quad (2.29)$$

Le domaine de définition est dense dans X . La remarque 2.3.3 reste vrai.

On définit le contrôle multivariable tel que $U = \mathbb{R}^n$, où n est donc la dimension de l'espace de contrôle, cela représente le nombre de vannes à contrôler.

Dans le cadre traité de p biefs, la dimension de la sortie p correspond aux nombres de hauteurs que l'on souhaite contrôlées. La variable de sortie, y est mesurée en $x_j = L(j)$, $1 \leq j \leq p$:

$$y(t) = C\xi(t), \quad t \geq 0, \quad y(t) \in Y = \mathbb{R}^p, \quad (2.30)$$

où $C : X \rightarrow Y$ est un opérateur borné (représentation de la mesure en un point avec $\mathbf{1}_{x_i \pm \mu}(x) = \mathbf{1}_{[x_i - \mu, x_i + \mu]}(x)$ est la fonction qui vaut 1 si $x \in [x_i - \mu, x_i + \mu]$, 0 sinon, et $\mu > 0$) :

$$C\xi = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_p \end{pmatrix} \xi dx, \quad \mu > 0,$$

$$\text{avec } C_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\mu} \int_{x_i - \mu}^{x_i + \mu} \mathbf{1}_{x_i \pm \mu} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le problème de régulation d'un canal rectangulaire composé de p biefs en cascade et de $n = p + 1$ vannes est donc posé sous la forme d'un système à commande frontière, ainsi que les objectifs de régulation.

Le problème de commande pour p biefs est alors le suivant : trouver les variations de $u_{L(i-1)}(t)$ à l'extrémité $x = x_{L(i-1)}$, et $u_{L(i)}(t)$ à l'extrémité $x = x_{L(i)}$ du $i^{\text{ème}}$ bifief telles que la variable de sortie à l'aval, $x = x_{L(i)}$ suive un signal de référence $r_i(t)$, $\forall 1 \leq i \leq p$.

2.4 Conclusion

La structure de commande par modèle interne étendue est posé. L'ensemble des paramètres et l'opérateur du système du canal en boucle ouverte sont définis ainsi que le modèle de régulation selon les divers cas traités : du monobief avec une vanne et un déversoir au cas multibiefs avec des ouvrages hydrauliques quelconques.

D'après les travaux de Russel [75], les systèmes précédent peuvent être rendus symétriques par un changement de variables, la caractérisation en est facilitée.

Cependant, dans les techniques de perturbations, il est nécessaire de garder le système en boucle ouverte intact pour sa caractérisation, de manière à poser la boucle fermée comme une perturbation additive relativement bornée.

C'est l'objet du chapitre suivant.

Étude du Système en Boucle Ouverte

"Le mental intuitif est un don sacré et le mental rationnel est un serviteur fidèle.
 Nous avons créé une société qui honore le serviteur et a oublié le don."
 Albert Einstein, physicien allemand, 1879-1955.

Sommaire

3.1	Introduction	39
3.2	Système abstrait de contrôle frontière	39
3.2.1	<i>Système d'état abstrait en boucle ouverte</i>	39
3.2.2	<i>Semigroupe du système d'état en boucle ouverte</i>	42
3.3	Etude de la stabilité du système en boucle ouverte	45
3.3.1	<i>Etude du spectre de $A_e(x)\partial_x$</i>	45
3.3.2	<i>Etude du spectre de $A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$</i>	47
3.4	Application au modèle linéarisé du canal	49
3.4.1	<i>Propriétés de l'opérateur du canal</i>	49
3.4.2	<i>Caractérisation du spectre en boucle ouverte</i>	50
3.4.3	<i>Remarque : condition de fluvialité</i>	57
3.5	Conclusion	57

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, le système abstrait de contrôle frontière en boucle ouverte est étudié pour une classe d'EDP hyperboliques, généralisant le système décrit par les équations de Saint-Venant.

Dans un premier temps, on se ramène à une structure plus connue, en introduisant l'opérateur et le semigroupe du système d'état abstrait en boucle ouverte.

L'étude des propriétés de l'opérateur et du semigroupe en boucle ouverte est ensuite réalisée : on vérifie que le système d'état abstrait en boucle ouverte est bien posé, i.e. que l'opérateur défini est bien générateur d'un C_0 -semigroupe.

Dans un second temps, cette étude permet de caractériser la stabilité du système en boucle ouverte d'une telle classe d'équations hyperboliques. Le point essentiel de ce chapitre est l'étude de cette stabilité en boucle ouverte.

Elle est réalisée en utilisant d'ores et déjà la théorie de la perturbation des opérateurs et des semigroupes en dimension infinie.

La principale difficulté dans le cadre des applications provient des coefficients non constants par rapport à la variable d'espace de l'opérateur en boucle ouverte. Ceci ne permet pas d'utiliser directement les raisonnements jusqu'ici utilisés pour les EDP paraboliques, dont entre autres, la dissipativité de l'opérateur pour de tels systèmes.

Dans un troisième temps, ces résultats de caractérisation en boucle ouverte sont vérifiés et établis sur le cas du canal en explicitant les calculs.

3.2 Système abstrait de contrôle frontière

Le système d'équations (2.23-2.25) est d'abord écrit comme un système de contrôle frontière classique. Le système d'état, écrit sous la forme de Fattorini, est ramené sous la forme d'une représentation d'état de type Kalman par changement de variable : c'est le système d'état abstrait de contrôle frontière.

La condition de fermeture de l'opérateur de ce système habituellement considérée comme acquise, doit être ici calculée du fait des coefficients variables du modèle.

Enfin, on montre que le système est bien posé, i.e. que son opérateur est générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe .

Les définitions et théorèmes sont en Annexe C.

3.2.1 Système d'état abstrait en boucle ouverte

Les notations du chapitre précédent sont rappelées. Les biefs ont une longueur $L(i)$ et $x \in [0, L(i)]$ signifie qu'on se situe au niveau $i^{\text{ème}}$ bief. De plus, les p biefs ont une longueur totale $L = \sum_1^p L(i)$, donc la variable d'espace x appartient à l'ensemble $[0, L]$.

Après un bref rappel de l'opérateur en boucle ouverte et de son domaine de définition, le système d'état abstrait est posé.

a. Opérateur d'état en boucle ouverte

Le modèle linéarisé à commande frontière en boucle ouverte est formulé comme suit (éq. (2.27)-(2.28)) :

$$\partial_t \xi(t) = A_d(x)\xi(t), \quad x \in \Omega = \bigcup_1^p]0, L(i)[, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

$$F_b \xi(t) = B_b u(t), \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, t > 0 \quad (3.2)$$

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x) \text{ sur } \bar{\Omega} \quad (3.3)$$

où $A_d(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$, et

$$\xi \in X = (L^2(0, L(1)))^2 \times (L^2(0, L(2)))^2 \times \dots \times (L^2(0, L(p)))^2).$$

Les domaines de définition des différents opérateurs pour un bief, tel que $x \in [0, L]$, sont :

* **dans le cas d'un bief avec un déversoir à l'aval** (Figure 1.2), le contrôle est alors monovarié, $u(t) \in U$, $U = \mathbb{R}$ et :

$$D(A_d) = \left\{ \xi \in X : \xi \text{ a.c.}, \frac{d\xi}{dx} \in X \text{ et } z(L) = \partial_q \Psi_2(q_e)q(L) \right\}, \quad (3.4)$$

$$\ker(F_b) = \left\{ \xi \in X : \xi \text{ a.c.}, \frac{d\xi}{dx} \in X \text{ et } q(0) = u_{0,e} \partial_z \Psi_1(z_e(0))z(0) \right\}. \quad (3.5)$$

* **Dans le cas d'un bief avec une vanne à l'aval** (Figure 1.3), le contrôle est alors multivarié i.e. $U = \mathbb{R}^2$ et :

$$D(A_d) = \left\{ \xi \in X : \xi \text{ a.c.}, \frac{d\xi}{dx} \in X \right\}, \quad (3.6)$$

$$\ker(F_b) = \left\{ \xi \in X : \xi \text{ a.c.}, \frac{d\xi}{dx} \in X, \quad q(0) = u_{0,e} \partial_z \Psi_1(z_e(0))z(0), \right. \\ \left. q(L) = u_{L,e} \partial_z \Psi_3(z_e(L))z(L) \right\}. \quad (3.7)$$

* **Dans le cas de biefs en cascade**, le domaine de l'opérateur global est l'union des domaines de chaque bief, il en est de même pour les noyaux, en adaptant les notations et les coefficients pour chaque bief.

Le système abstrait équivalent de contrôle frontière est obtenu par changement d'opérateurs et de variable, cette approche est due à H.O. Fattorini [24], [81] pour le contrôle comme fonction continue et E. Washburn [85] dans le cas L^p , $p \geq 1$.

b. Système d'état abstrait en boucle ouverte

On cherche à se ramener sous une forme plus connue du type Kalmanien, c'est à dire :

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx.$$

Pour cela, considérons le changement de variables suivant :

$$\xi(t) = \varphi(t) + Du(t) \quad \forall t \geq 0 \tag{3.8}$$

où $u(t) \in U$, D est un opérateur borné de $C^\alpha([0, \infty], U)$ dans X ($u \in C^\alpha([0, \infty], U)$), tel que :

$$\begin{aligned} Du &\in D(A_d) \\ F_b(Du(t)) &= B_b u(t) \quad \forall u(t) \in U \end{aligned}$$

Remarque 3.2.1. Le degré de continuité α de l'application u sera déterminé ultérieurement, il est a priori au moins égal à 2, sa dérivée intervenant ci-après de façon continue.

L'opérateur D est appelé opérateur de **distribution** du contrôle frontière [76], [82], [81].

En effet, la commande n'agit que sur le bord du domaine (3.2). Le fait de répartir son action sur l'état ne doit pas modifier cette propriété, et l'opérateur A_d n'agit lui que dans le domaine ouvert (3.1). Il apparaît alors logique que l'opérateur D s'annule dans le domaine de A_d , pour n'agir que sur la frontière du domaine. Ainsi, sans perdre en généralité, l'opérateur D peut être choisi tel que l'opérateur A_d reste inchangé [43], i.e.

$$Im(D) \subset Ker(A_d).$$

Le système (3.1)-(3.3) devient équivalent à :

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) - D\dot{u}(t), \quad \varphi(t) \in D(A), \quad t > 0 \tag{3.9}$$

$$\varphi(0) = \xi(0) - Du(0) \tag{3.10}$$

qui a pour solution classique :

$$\varphi(t) = T_A(t)\varphi_0 - \int_0^t T_A(t-s)D\dot{u}(s)ds$$

où \dot{u} est prise continue et A doit être un générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $T_A(t)$ tel que la solution $\varphi(t) = T_A(t)\varphi_0$ existe et appartienne à $D(A)$.

Remarque 3.2.2. Nous souhaitons attirer l'attention du lecteur sur l'apparition de la dérivée de la commande \dot{u} au lieu de u . Cela conditionnera le choix de la commande en boucle fermée, ultérieurement.

Dans tout ce qui précède, on a supposé que :

A est à domaine dense.

*A est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $T_A(t)$
tel que la solution $\varphi(t) = T_A(t)\varphi_0$ existe et appartienne à $D(A)$.*

D'après les définitions et théorèmes en annexe C, pour montrer que A est générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $T_A(t)$, il faut dans un premier temps montrer que A est un opérateur fermé, à domaine dense, puis montrer dans un second temps qu'il est générateur d'un semigroupe.

C'est le propos de ce qui suit.

3.2.2 Semigroupe du système d'état en boucle ouverte

L'opérateur A du système abstrait est construit à partir du système (3.1)-(3.3). Il est défini sur le noyau de $\ker(F_b)$ (3.5)-(3.7) de telle sorte que $F_b\xi = 0$, et son domaine de définition est alors :

$$D(A) = \{\xi \in D(A_d) : F_b\xi = 0\} = D(A_d) \cap \ker(F_b)$$

et $A\xi = A_d\xi$, $\forall \xi \in D(A)$ dans $X = (L^2(0, L(1)))^2 \times (L^2(0, L(2)))^2 \times \dots \times (L^2(0, L(p)))^2$.

C'est sur cet opérateur que les propriétés suivantes sont à vérifier :

- * d'une part le fait que A est opérateur fermé à domaine dense,
- * d'autre part qu'il est générateur d'un C_0 -semigroupe.

a. A est opérateur fermé à domaine dense

En se plaçant dans le cas non homogène (i.e. que l'opérateur global du système dépend de la variable espace), il est nécessaire de montrer que cet opérateur est fermé. Dans le cas constant (opérateur à composantes constantes), ceci est habituellement admis.

Proposition 3.2.1. *L'opérateur $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_e(\mathbf{x})\partial_x + \mathbf{B}_e(\mathbf{x})$ du système*

$$\partial_t \xi(t) = A_e(x)\partial_x \xi(x) + B_e(x)\xi(x), \quad t \geq 0, \quad x \in \Omega = \cup_{i=1}^p]0, L(i)[\quad (3.11)$$

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x) \quad x \in \bar{\Omega} \quad (3.12)$$

$$\tilde{F}(\xi, u_e) = \tilde{G}(u(t)), \quad (3.13)$$

où

$$\xi = (\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{z}_2 \quad \mathbf{q}_2 \dots \mathbf{z}_p \quad \mathbf{q}_p)^t \in \mathbf{X} = (\mathbf{L}^2(\mathbf{0}, \mathbf{L}(1)))^2 \times (\mathbf{L}^2(\mathbf{0}, \mathbf{L}(2)))^2 \times \dots \times (\mathbf{L}^2(\mathbf{0}, \mathbf{L}(p)))^2,$$

est un opérateur fermé si $\mathbf{A}_e(\mathbf{x})\partial_x$ et $\mathbf{B}_e(\mathbf{x})$ sont des opérateurs linéaires tels que $\mathbf{B}_e(\mathbf{x})$ borné et $\mathbf{A}_e(\mathbf{x})\partial_x$ soit un opérateur fermé.

L'opérateur $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est de plus à domaine dense si $\mathbf{A}_e(\mathbf{x})\partial_x$ et $\mathbf{B}_e(\mathbf{x})$ sont des opérateurs à domaine dense.

Démonstration :

$A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$, A est un opérateur linéaire.

D'après la proposition (C.2.1) (Annexe C), si $B_e(x)$ est borné, et tel que $D(B_e(x)) \supset D(A_e(x)\partial_x)$ alors $A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$ est un opérateur fermé.

L'inclusion est vérifiée, puisque les deux opérateurs $A_e(x)\partial_x$ et $B_e(x)$ sont supposés à domaine dense.

Il en découle également, d'après le point 2 de la remarque 2.3.3, que l'opérateur A est à domaine dense.

D'où $A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$ est un opérateur linéaire, fermé, à domaine dense.

□

Les propriétés de l'opérateur dérivé peuvent être exploitées, on obtient ainsi une proposition dérivée de la précédente :

Proposition 3.2.2. *L'opérateur $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_e(\mathbf{x})\partial_{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_e(\mathbf{x})$ du système (3.11)-(3.13) est un opérateur fermé à domaine dense si*

1. $\mathbf{A}_e(\mathbf{x})$ et $\mathbf{B}_e(\mathbf{x})$ sont des opérateurs linéaires, bornés,
2. l'une des 3 conditions suivantes est réalisée : $\xi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\xi(\mathbf{L}) = \mathbf{0}$ ou $\xi(\mathbf{0}) = \mathbf{k}\xi(\mathbf{L})$, $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$,
3. $\mathbf{B}_e(\mathbf{x})$ est à domaine dense,
4. $\mathbf{A}_e(\mathbf{x})$ inversible, pour tout $\mathbf{x} \in (\mathbf{0}, \mathbf{L})$. Dans le cas $\xi(\mathbf{0}) = \mathbf{k}\xi(\mathbf{L})$, cela revient à supposer que $\mathbf{k} \neq \mathbf{1}$.

Démonstration :

$A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$, A est un opérateur linéaire et à domaine dense (d'après la remarque 2.3.3, l'opérateur dérivé est à domaine dense, donc multiplié par un opérateur borné il le reste). En appliquant la proposition précédente 3.2.1, il suffit de montrer que $A_e(x)\partial_x$ est un opérateur fermé, puisque l'opérateur $B_e(x)$ est borné.

D'après la remarque 2.3.3 et l'hypothèse 2 ($\xi(0) = 0$, $\xi(L) = 0$ ou $\xi(0) = k\xi(L)$), on peut alors définir l'inverse de l'opérateur $A_e(x)\partial_x$ comme étant un opérateur de type intégral.

Montrer que c'est un opérateur fermé (définition C.2.2) peut alors se faire comme suit :

Pour $A_e(x)\partial_x$, définissons f , tel que $A_e(x)\partial_x f = y$ i.e. $f(x) = (A_e(x)\partial_x)^{-1}y$, où y, z et z_n appartiennent à X , avec $y = (y_1 \dots y_m)^t$, $z = (z_1 \dots z_m)^t$, $z_n = (z_{1,n} \dots z_{m,n})^t$. Ainsi, avec la notation $A_e^{-1}(x) = (a_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq m}$, on peut écrire dans le cas où $\xi(0) = 0$:

$$f(x) = (A_e(x)\partial_x)^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i \int_0^x a_{1,i}(s)y_i(s)ds \\ \vdots \\ \sum_i \int_0^x a_{m,i}(s)y_i(s)ds \end{pmatrix} = \int_0^x A_e^{-1}(s)y(s)ds.$$

Pour les autres conditions frontières, l'inverse est du même type :

$$(A_e(x)\partial_x)^{-1}y(x) = - \int_x^L A_e^{-1}(s)y(s)ds \text{ pour } \xi(L) = 0,$$

et un arrangement des deux précédentes intégrales dans le cas $\xi(0) = k\xi(L)$, $k \neq 1$:

$$(A_e(x)\partial_x)^{-1}y(x) = \frac{1}{1-k} \left[\int_0^x A_e^{-1}(s)y(s)ds + k \int_x^L A_e^{-1}(s)y(s)ds \right].$$

Nous nous plaçons dans le premier cas, $\xi(0) = 0$, les deux autres se traitant de façon similaire.

En utilisant le produit propre à X (éq. (C.1), définition C.1.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \|f - z\|_{L^2(0,L)} &= \|f - z_n + z_n - z\| \leq \|f - z_n\| + \|z_n - z\| \\
 &\leq \|z_n - z\| + \left[\int_0^L \left| \int_0^x A_e^{-1}(s)y(s)ds - z_n(x) \right|^2 dx \right]^{1/2} \\
 &\leq \|z_n - z\| + \left[\int_0^L \left| \int_0^x A_e^{-1}(s)y(s) - \frac{dz_n}{ds}(s)ds \right|^2 dx \right]^{1/2} \\
 &\leq \|z_n - z\| + \left[\int_0^L \|1_{[0,x]}\|_{L^2}^2 \|A_e^{-1}y - \frac{dz_n}{ds}\|_{L^2}^2 dx \right]^{1/2} \\
 &\leq \|z_n - z\| + \frac{1}{3} \|A_e^{-1}y - \frac{dz_n}{ds}\|
 \end{aligned}$$

puisque $\frac{dz_n}{ds} \rightarrow A_e^{-1}y$ et $z_n(x) \rightarrow z(x)$, la dernière inégalité peut être rendue arbitrairement petite. Donc $f = z$, et l'opérateur est fermé d'après l'implication (C.3). \square

L'opérateur A du système abstrait en boucle ouverte étant un opérateur fermé à domaine dense, l'opérateur A_d du système à commande frontière en boucle ouverte est également un opérateur fermé à domaine dense.

La vérification du fait que A est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe peut maintenant être menée.

b. A est générateur d'un C_0 -semigroupe

Proposition 3.2.3. *Le système en boucle ouverte est bien posé, i.e. générateur d'un C_0 -semigroupe si $A_e(x)$ et $B_e(x)$ sont bornés et $A_e(x)$ inversible, pour tout $x \in (0, L)$.*

Démonstration :

$A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$ est un opérateur linéaire, fermé et à domaine dense.

D'après les hypothèses, les opérateurs $A_e(x)$ et $B_e(x)$ sont bornés et $A_e(x)$ est inversible pour tout $x \in [0, L]$, donc l'opérateur

$$B(x) = A_e^{-1}(x)A(x) = \partial_x + A_e(x)^{-1}B_e(x)$$

est une transformation bornée inversible de A pour tout $x \in [0, L]$. De ce fait, $B(x)$ est une perturbation bornée de l'opérateur $T = \partial_x$, qui est générateur d'un C_0 -semigroupe ([44, 63]). \square

Le système en boucle ouverte est maintenant bien posé. Il s'agit maintenant de caractériser le système en boucle ouverte en terme de stabilité.

Dans un premier temps, nous montrons que sous certaines hypothèses l'opérateur $A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$ est générateur d'un C_0 -semigroupe exponentiellement stable, puis dans un second temps, nous montrerons que dans le cas du canal ces hypothèses sont toutes vérifiées et donc que le semigroupe du système linéarisé des équations de Saint-Venant, sous l'hypothèse de fluvialité, possède une stabilité exponentielle.

3.3 Etude de la stabilité du système en boucle ouverte

La démarche est de caractériser l'opérateur $A(x)$ comme une perturbation de $A_e(x)\partial_x$ par un opérateur borné $B_e(x)$. En effet, le modèle interne de système en boucle ouverte, sans commande s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= A\varphi(t) \quad t > 0, \quad x \in \Omega \\ \varphi(0) &= \varphi_0 \in D(A(x))\end{aligned}$$

et $\varphi(t) = T_A(t)\varphi_0$ (selon la proposition 3.2.3), où $T_A(t)$ est le C_0 -semigroupe généré par l'opérateur $A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$.

3.3.1 Etude du spectre de $A_e(x)\partial_x$

Dans un premier temps, seul l'opérateur $A_e(x)\partial_x$ est donc traité. Cela peut se faire en étudiant son spectre et sa résolvante pour conclure sur la stabilité du semigroupe associé.

A partir de l'hypothèse suivante :

$$\Re(\sigma(A_e(x)\partial_x)) < 0,$$

on souhaite démontrer l'implication

$$\Re(\sigma(A_e(x)\partial_x)) < 0 \Rightarrow \langle A_e(x)\partial_x\varphi, \varphi \rangle \leq 0. \quad (3.14)$$

Pour cela, on démontre que l'opérateur $A_e(x)\partial_x$ est générateur d'un C_0 -semigroupe exponentiellement stable. De cette stabilité exponentielle, la dissipativité est obtenue et donc l'implication (3.14) est vérifiée.

Remarque 3.3.1.

L'une des différences par rapport aux équations paraboliques se situe à ce niveau, la dissipativité de l'opérateur est très facile à démontrer et on s'en sert pour montrer la stabilité du C_0 -semigroupe.

En dimension finie, l'inégalité $\Re(\sigma(A_e(x)\partial_x)) < 0$ implique la stabilité exponentielle, mais il n'en est pas de même en dimension infinie, puisque l'implication (3.14) n'est pas forcément réalisée [24], [91].

Proposition 3.3.1. *Supposons que le spectre de $A_e(x)\partial_x$ soit tel que*

$$\Re(\sigma(A_e(x)\partial_x)) < 0, \quad \forall x \in \Omega = \cup_{i=1}^p]0, L(i)[. \quad (3.15)$$

Alors, l'opérateur $A_e(x)\partial_x$ est générateur d'un C_0 -semigroupe exponentiellement stable.

De plus,

$$\langle A_e(x)\partial_x \varphi, \varphi \rangle \leq 0, \quad \forall \varphi \in X. \quad (3.16)$$

Démonstration :

L'opérateur $A_e(x)\partial_x$ est à résolvante compacte. En effet l'opérateur ∂_x est à résolvante compacte et $A_e(x)$ est borné ([44], pp 187), donc $A_e(x)\partial_x$ est à résolvante compacte.

Rappelons deux résultats de base sur les semigroupes, dans un espace de Hilbert :

Théorème 3.3.2. ([6], p223, théorème 5.1.6)

Soit A le générateur infinitésimal du C_0 -semigroupe $T(t)$ sur l'espace de Hilbert Z et définissons

$$w_\sigma := \sup\{\Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Alors $T(t)$ satisfait la propriété de croissance spectrale si et seulement si pour $\omega > w_\sigma$, $((s + \omega)I - A)^{-1} \in H_\infty(L(Z))$.

Théorème 3.3.3. ([6], p222, théorème 5.1.5)

Soit A le générateur infinitésimal du C_0 -semigroupe $T(t)$ sur l'espace de Hilbert Z . Alors $T(t)$ est exponentiellement stable si et seulement si $(sI - A)^{-1} \in H_\infty(L(Z))$.

$A_e(x)\partial_x$ étant à résolvante compacte, il vérifie la propriété de croissance spectrale (Définition C.2.9, [81], [83]), et donc l'ordre du système réduit $A_e(x)\partial_x$ (Définition C.2.8) vérifie :

$$w_0 = w_\sigma = \sup\{\Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A_e(x)\partial_x)\}.$$

Puisque l'on a supposé que :

$$\Re(\sigma(A_e(x)\partial_x)) < 0,$$

on obtient :

$$w_0 < 0.$$

D'où, pour $\omega = 0 > w_\sigma = w_0$, $(sI - A)^{-1} \in H_\infty(L(X))$ par le théorème 3.3.2, et le semigroupe $T_{A_e(x)\partial_x}(t)$ généré par l'opérateur $A_e(x)\partial_x$ est exponentiellement stable par le théorème 3.3.3.

La démonstration de l'inégalité (3.16) s'en suit, en posant $\omega = 0$ dans (3.17) :

$$\|T_{A_e(x)\partial_x}(t)\| \leq e^{-\omega t}, \quad \forall \omega > w_0 \Rightarrow \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\Re(\lambda) - \omega} \quad \forall \Re(\lambda) > \omega. \quad (3.17)$$

L'inégalité suivante est alors obtenue :

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\Re(\lambda)} \quad \forall \Re(\lambda) > 0, \quad (3.18)$$

et

$$\lambda \|\xi\| \leq \|(\lambda I - A)\xi\| \quad \forall \lambda > 0 \Rightarrow \langle A\xi, \xi \rangle < 0, \quad (3.19)$$

puisque l'inégalité de gauche donne la dissipativité ([6], théorème C.2.6, corollaire C.2.7 et [63] théorème C.2.8).

En résumé, l'inégalité $\Re(\sigma(A_e(x)\partial_x)) < 0$ implique sous les hypothèses émises :

$$\langle A_e(x)\partial_x \varphi, \varphi \rangle < 0, \quad \forall \varphi \in X \quad (3.20)$$

et

$$\|T_{A_e(x)\partial_x}(t)\| < e^{-wt}, \quad \forall w > 0. \quad (3.21)$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 3.3.1. \square

3.3.2 Etude du spectre de $A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$

La première propriété que l'opérateur global conserve de l'opérateur $A_e(x)\partial_x$ est la compacité de sa résolvante. En effet, rappelons le théorème suivant dû à Kato [44].

Théorème 3.3.4. ([44], théorème 3.17, p.214)

Soit T un opérateur fermé de X et soit A un opérateur de X qui T -borné, tels que $D(A) \supset D(T)$ et l'inégalité

$$\|Au\| \leq a\|u\| + b\|Tu\|, \quad u \in D(T)$$

soit réalisée. S'il existe un point ξ de $D(T)$ tel que

$$a\|R(\xi, T)\| + b\|TR(\xi, T)\| < 1, \quad (3.22)$$

alors $S = T + A$ est fermé et $\xi \in D(S)$, avec

$$\|R(\xi, S)\| \leq \|R(\xi, T)\|(1 - a\|R(\xi, T)\| - b\|TR(\xi, T)\|)^{-1}. \quad (3.23)$$

Si en particulier T est à résolvante compacte, alors S est à résolvante compacte.

En posant $T = A_e(x)\partial_x$, $A = B_e(x)$ et $S = A(x)$, on constate d'abord que $A = B_e(x)$ vérifie la première inégalité du théorème, avec $a = M_{B_e}$, $b = 0$, puisque $B_e(x)$ borné, $\|B_e(x)\| = M_{B_e}$. De plus, $T = A_e(x)\partial_x$ est à résolvante compacte et exponentiellement stable. Donc la relation (3.22) est vérifiée, pour tout ξ , tel que $\Re(\xi) > M_{B_e}$, en utilisant l'identité (3.18)

$$\|R(\xi, A_e(x)\partial_x)\| < \frac{1}{\Re(\xi)}, \quad \forall \Re(\xi) > 0,$$

puisque (3.22) devient avec $a = M_{B_e}$, $b = 0$:

$$\|R(\xi, T)\| < \frac{1}{M_{B_e}}.$$

Donc $A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$ est à résolvante compacte, d'après le théorème 3.3.4. Par conséquent, l'opérateur $A(x)$ vérifie la propriété de croissance spectrale.

Proposition 3.3.5. *Considérons l'opérateur $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_e(\mathbf{x})\partial_{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_e(\mathbf{x})$, $x \in \Omega = \cup_{i=1}^p]0, L(i)[$ tel que $\mathbf{A}_e(\mathbf{x})\partial_{\mathbf{x}}$ vérifie $\Re(\sigma(\mathbf{A}_e(\mathbf{x})\partial_{\mathbf{x}})) < 0$ et $\mathbf{B}_e(\mathbf{x})$ borné, i.e. $\mathbf{B}_e(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(x)$, $\forall x \in \Omega$.*

Supposons que :

i) $\mathbf{B}_e(\mathbf{x})$ est semi-définie négative,

ii) 0 n'est pas une valeur propre de l'opérateur $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_e(\mathbf{x})\partial_{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_e(\mathbf{x})$.

Alors, l'opérateur $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est générateur d'un \mathbf{C}_0 -semigroupe exponentiellement stable.

Démonstration :

La première hypothèse, $B_e(x)$ semi-définie négative implique la relation suivante :

$$\langle B_e(x)\varphi, \varphi \rangle \leq 0.$$

Pour tout $\varphi \in X$, on a :

$$\langle A(x)\varphi, \varphi \rangle = \langle B_e(x)\varphi, \varphi \rangle + \langle A_e(x)\partial_x\varphi, \varphi \rangle,$$

d'où d'après la proposition 3.3.1 et i) :

$$\langle A(x)\varphi, \varphi \rangle < 0, \quad \forall \varphi \in X \text{ et } \forall x \in \Omega,$$

et si $0 \in \rho(A(x))$ alors $\Re(\sigma(A(x))) < 0$.

Associé à la compacité de la résolvante de $A(x)$, on a :

$$w_0 = \sup\{\Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A_e(x)\partial_x + B_e(x))\} < 0.$$

Par conséquent, le semigroupe $T(t)$ généré par l'opérateur $A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$, est exponentiellement stable par les théorèmes 3.3.2 et 3.3.3.

Ceci achève la démonstration de l'exponentielle stabilité de l'opérateur en boucle ouverte $A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$. □

Remarque 3.3.2. On peut voir cette stabilité plus explicitement.

Rappelons que :

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) & t > 0, \quad x \in \Omega \\ \varphi(0) = \varphi_0 \in D(A(x)) \\ \text{et } \varphi(t) = T_A(t)\varphi_0 \end{cases}$$

Soit $V(t)$ la fonction suivante,

$$V(t) = \frac{1}{2}\|\varphi(t)\|^2 = \frac{1}{2}\|T_A(t)\varphi_0\|^2,$$

sa dérivée est semi définie négative :

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2}\|T_A(t)\varphi_0\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^L (T_A(t)\varphi_0)^2 dx \\ \dot{V}(t) &= \langle \dot{T}_A(t)\varphi_0, \varphi(t) \rangle = \langle A(x)T_A(t)\varphi_0, \varphi(t) \rangle \\ &= \langle A(x)\varphi(t), \varphi(t) \rangle \\ &= \langle A_e(x)\partial_x\varphi(t), \varphi(t) \rangle + \langle B_e(x)\varphi(t), \varphi(t) \rangle. \end{aligned}$$

Les deux opérateurs $A_e(x)$ et $B_e(x)$, sous les hypothèses des propositions précédentes, sont respectivement exponentiellement stable et semi-défini négatif, donc il existe deux constantes $M(A_e) < 0$ et $M(B_e) \leq 0$ telles que :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq (M(A_e) + M(B_e))\|\varphi(t)\|^2 < 0 \\ \text{i.e. } \dot{V}(t) &= \frac{1}{2} \frac{d(\|\varphi(t)\|^2)}{dt} < -\rho\|\varphi(t)\|_X^2 < 0, \quad \rho > 0 \\ \text{donc} &\|\varphi(t)\|_X < C \exp(-\rho t) \\ &\|T_A(t)\varphi_0\|_X < \|\varphi_0\| \exp(-\rho t) \\ &\|T_A(t)\|_X < \exp(-\rho t). \end{aligned}$$

Ceci signifie l'exponentielle stabilité de $A(x)$.

3.4 Application au modèle linéarisé du canal

L'objet de cette partie est de mener le calcul explicite du spectre de l'opérateur $A(x)$, $x \in [0, L]$, du modèle linéarisé des équations de Saint-Venant décrivant le canal.

3.4.1 Propriétés de l'opérateur du canal

En appliquant les propositions 3.2.1 ou 3.2.2 et 3.2.3 à l'opérateur $A(x) = A_1(x)\partial_x + A_2(x)$ du système (2.15)-(2.19), dans le cas du canal, on montre que cet opérateur est fermé, à domaine dense, générateur d'un C_0 -semigroupe.

a. L'opérateur du canal est un opérateur fermé

On applique la première proposition 3.2.1, cela permet de développer une démonstration similaire à la seconde proposition 3.2.2, et donc de mieux la saisir.

Proposition 3.4.1. *L'opérateur du canal $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x})\partial_{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})$ est un opérateur fermé, à domaine dense, $\forall \mathbf{x} \in [0, L]$.*

Démonstration :

$A(x) = A_1(x)\partial_x + A_2(x)$, A est un opérateur linéaire : la linéarité de $A(x)$ est claire, étant donnée la structure des opérateurs ∂_x , $A_1(x)$ et $A_2(x)$.

A est un opérateur à domaine dense, c'est une conséquence de la remarque 2.3.3. Dans le cas présent, les opérateurs $A_1(x)\partial_x$ et $A_2(x)$ sont à domaines denses, puisque l'opérateur ∂_x est dense dans $L^2(0, L)$. Le domaine

$$D(A(x)) = D(A_1(x)\partial_x + A_2(x)) = D(A_1(x)\partial_x) \cap D(A_2(x))$$

est donc également dense.

A est un opérateur fermé. Pour cela, les hypothèses de la proposition (3.2.1) doivent être vérifiées :

- D'après l'hypothèse (2.20) l'opérateur $A_2(x)$ est compact, ainsi que $A_1(x)$. En effet, cette condition implique que $z_e(x)$ est compris entre

$$z_c < z_e(x) < z_{am}, \quad \forall x \in (x_{am}, x_{av}) = (0, L).$$

Les coefficients $a_i(x)$, $1 \leq i \leq 5$, des opérateurs $A_1(x)$ et $A_2(x)$ dépendent continûment de l'état d'équilibre $z_e(x)$ et $q_e(=\text{constant})$, ce sont donc des fonctions continues bornées sur l'intervalle fini $[0, L]$.

Donc A_1 et A_2 vérifient les hypothèses 1,3 et 4 de la proposition 3.2.1.

- Vérifions l'hypothèse 2 de la proposition 3.2.1 :

Dans le cas fluvial, d'après la remarque (2.3.1), l'écoulement en un point dépend des conditions aux limites amont et aval. Nous pouvons donc en déduire, ainsi que des conditions aux limites (2.17)-(2.19), qu'il existe un $k \neq 0$ tel que $\xi(0) = k\xi(L)$, en réécrivant ces conditions.

Remarquons que l'inverse de $A_1(x)\partial_x$ s'écrit alors :

$$(A_1(x)\partial_x)^{-1}y(x) = \frac{1}{1-k} \left[\int_0^x A_1^{-1}(s)y(s)ds + k \int_x^L A_1^{-1}(s)y(s)ds \right].$$

De plus, k est différent de 1, puisque les conditions frontières ont des signes opposés. Donc dire que $k = 1$ impliquerait que les constantes liant respectivement $z(0)$ et $q(0)$, et $z(L)$ et $q(L)$ sont identiques et de signes opposés donc nulles. Cela signifierait que soit $Q_e = 0$ soit $z_e \equiv 0$, ce qui est exclu donc $k \neq 1$.

Ceci conclut la preuve puisque toutes les hypothèses de la proposition (3.2.1) sont vérifiées.

□

b. *L'opérateur du canal est générateur d'un C_0 -semigroupe*

La proposition 3.2.3 s'applique directement au cas du canal, puisque $A(x) = A_1(x)\partial_x + A_2(x)$ est un opérateur linéaire, fermé et à domaine dense.

De plus, les opérateurs $A_1(x)$ et $A_2(x)$ (2.15) sont bornés pour tout $x \in [0, L]$ par la condition de fluvialité (2.20), et $A_1(x)$ est inversible puisque $a_2(x) \neq 0 \forall x \in [0, L]$, son inverse est

$$A_1^{-1}(x) = \frac{1}{a_1(x)a_2(x)} \begin{pmatrix} -a_3(x) & a_1(x) \\ a_2(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $A(x) = A_1(x)\partial_x + A_2(x)$ est générateur d'un C_0 -semigroupe.

3.4.2 *Caractérisation du spectre en boucle ouverte*

Comme le système est bien posé, l'étude de sa stabilité peut être menée.

Proposition 3.4.2. *Le système abstrait en boucle ouverte, défini à partir du système (3.9)-(3.10), a un C_0 -semigroupe exponentiellement stable.*

Démonstration :

Les trois conditions de la proposition (3.3.5) doivent donc être vérifiées :

1. $A_2(x)$ est semi-définie négative,
2. Le spectre de $A_1(x)\partial_x$ vérifie : $\Re(\sigma(A_1(x)\partial_x)) < 0$,
3. 0 n'est pas une valeur propre de l'opérateur $A(x) = A_1(x)\partial_x + A_2(x)$,

où (2.15) :

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & -a_1(x) = -\frac{1}{b} \\ -a_2(x) = -gbz_e(x) + \frac{q_e^2}{bz_e^2(x)} & -a_3(x) = -\frac{2q_e}{bz_e(x)} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

$$A_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_4(x) = gb(I + J_e(x) + \frac{\frac{4}{3}J_e(x)}{1+2z_e(x)/b}) & -a_5(x) = -\frac{2gbJ_e(x)z_e(x)}{q_e} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

1. Calcul du spectre de $A_2(x)$

L'opérateur $A_2(x)$ n'offre aucune difficulté quant à l'étude de son spectre, nous allons donc le caractériser en premier lieu.

$A_2(x)$ est semi-défini négatif, puisque son spectre est :

$$\begin{aligned} \sigma(A_2(x)) &= \{0\} \cup \{-a_5(x) \text{ tq } a_5(x) > 0 \ \forall \ 0 \leq x \leq L\}, \\ \langle A_2(x)\varphi, \varphi \rangle &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

C.Q.F.D Δ

2. Calcul du spectre de $A_1(x)\partial_x$

Le spectre de $A_1(x)\partial_x$ est difficile à caractériser à cause de la présence de l'opérateur dérivé. Définir son spectre est l'objet de la première étape, la seconde est de montrer que $\Re(\sigma(A_1(x)\partial_x)) < 0$.

Forme du spectre :

Le but est ici de donner la forme des valeurs propres de cet opérateur. L'idée est de généraliser la forme du spectre de l'opérateur dérivé ∂_x , donnée ci-dessous [44] :

$$\sigma(\partial_x) = \sigma_d(\partial_x) = \{\mu_n : \mu_n(x) = \mu(x) + \frac{2i\pi n}{L}, n \in Z\}, \quad (3.27)$$

où σ_d est le spectre discret (définition C.2.7), pour obtenir que le spectre de $A_1(x)\partial_x$ est défini par :

$$\sigma(A_1(x)\partial_x) = \sigma_d(A_1(x)\partial_x) = \{\mu_n : \mu_n(x) = \mu(x) + \frac{2i\pi n}{L\theta(x)}, n \in Z, \forall x \in [0, L]\}.$$

Montrons l'égalité 3.33 :

Proposition 3.4.3. *Le spectre de l'opérateur ∂_x est défini comme suit, sous la condition limite $\exists k \neq 1 \ \xi(0) = k\xi(L)$, $\xi \in L^2(0, L)$:*

$$\sigma(\partial_x) = \sigma_d(\partial_x) = \{\mu_n : \mu_n(x) = \mu(x) + \frac{2i\pi n}{L}, n \in Z\}. \quad (3.28)$$

Démonstration :

Soit λ une valeur propre de ∂_x alors :

$$\begin{aligned} \partial_x \phi(x) &= \lambda(x)\phi(x) \\ \phi' &= \lambda\phi \Leftrightarrow \phi'\phi^{-1} = \lambda \\ \log\left(\left|\frac{\phi(L)}{\phi(0)}\right|\right) &= \int_0^L |\lambda(x)|dx \\ \text{si } k > 0 \quad \log\left(\frac{1}{k}\right) &= \int_0^L \lambda(x)dx \Leftrightarrow \frac{1}{k} = \exp^{\int_0^L \lambda(x)dx} \\ \text{si } k < 0 \quad \log\left(\frac{-1}{k}\right) &= \int_0^L -\lambda(x)dx \Leftrightarrow k = \exp^{\int_0^L -\lambda(x)dx} \end{aligned}$$

Si μ est une autre valeur propre, distincte de λ , elle vérifie les mêmes équations. Donc, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{aligned} \int_0^L \mu(x)dx &= 2in\pi + \int_0^L \lambda(x)dx \\ \Leftrightarrow \int_0^L \mu(x)dx &= \int_0^L \frac{2in\pi}{L} + \lambda(x)dx \Leftrightarrow \text{p.p. } \mu(x) = \frac{2in\pi}{L} + \lambda(x). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.4.4. *Le spectre de l'opérateur $A_1(x)\partial_x$ est défini comme suit :*

$$\sigma(A_1(x)\partial_x) = \sigma_d(A_1(x)\partial_x) = \{\mu_n : \mu_n(x) = \mu(x) + \frac{2i\pi n}{L\theta(x)}, n \in \mathbb{Z}, \forall x \in [0, L]\}. \quad (3.29)$$

Démonstration :

Cette preuve est divisée en deux points ; le premier point montre qu'effectivement le spectre de $A_1(x)\partial_x$ prend la forme suivante :

$$\sigma(A_1(x)\partial_x) = \{\mu_n : \mu_n(x) = \mu(x) + \frac{2i\pi n}{L\theta(x)}, n \in \mathbb{Z}, \forall x \in [0, L]\}.$$

Le second point montre que le spectre de $A_1(x)\partial_x$ se réduit à son spectre discret, i.e. :

$$\sigma(A_1(x)\partial_x) = \sigma_d(A_1(x)\partial_x).$$

i) Montrons que $\sigma(A_1(x)\partial_x) = \{\mu_n : \mu_n(x) = \mu(x) + \frac{2i\pi n}{L\theta(x)}, n \in \mathbb{Z}, \forall x \in [0, L]\}$.

D'une part, si λ est une valeur propre de $A_1(x)\partial_x$ alors :

$$\begin{aligned} A_1(x)\partial_x \phi(x) &= \lambda(x)\phi(x) \\ A_1\phi' = \lambda\phi \Leftrightarrow \phi' &= \lambda A_1^{-1}\phi \Leftrightarrow \phi'\phi^{-1} = \lambda A_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z'/z \\ q'/q \end{pmatrix} &= -\lambda \begin{pmatrix} \frac{a_1 - a_3}{a_1 a_2} \\ \frac{1}{a_1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } q'(x)/q(x) &= -\frac{\lambda(x)}{a_1} \Rightarrow \log\left|\frac{q(L)}{q(0)}\right| = \int_0^L -\frac{\lambda(x)}{a_1} dx \\ \text{et } z'(x)/z(x) &= -\lambda(x)\frac{a_1 - a_3}{a_1 a_2} \Rightarrow \log\left|\frac{z(L)}{z(0)}\right| = \int_0^L -\lambda(x)\frac{a_1 - a_3}{a_1 a_2} dx. \end{aligned}$$

D'autre part, les conditions frontières (2.18, 2.19) peuvent s'exprimer comme suit :

$$z(L) = \alpha_L q(L), \quad z(0) = \alpha_0 q(0), \quad \text{et } \alpha_i \text{ constants non nulles.}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{z(L)}{z(0)} \right| &= \log \left| \frac{q(L)}{q(0)} \right| + \log \left| \frac{\alpha_L}{\alpha_0} \right| \\ \int_0^L -\lambda(x) \frac{a_1 - a_3}{a_1 a_2} dx &= \int_0^L -\frac{\lambda(x)}{a_1} dx + \log \left| \frac{\alpha_L}{\alpha_0} \right| \\ \int_0^L -\lambda(x) \frac{a_1 - a_3 - a_2}{a_1 a_2} dx &= \log \left| \frac{\alpha_L}{\alpha_0} \right| = C \\ \int_0^L \lambda(x) \theta(x) dx &= C \end{aligned} \tag{3.30}$$

D'ou si μ est une autre valeur propre de $A_1(x)\partial_x$, different de λ , elle vérifie (3.30), et

$$\exp \int_0^L \lambda(x) \theta(x) dx = \exp \int_0^L \mu(x) \theta(x) dx,$$

$$\text{donc } \exists n \in \mathbb{Z} : \int_0^L \lambda(x) \theta(x) dx = \int_0^L \mu(x) \theta(x) dx + 2in\pi = \int_0^L (\mu(x) \theta(x) + \frac{2in\pi}{L}) dx.$$

Alors

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \lambda(x) = \mu(x) + \frac{2in\pi}{L\theta(x)} \text{ p.p.} \tag{3.31}$$

C.Q.F.D. \triangle

ii) Montrons qu'il n'existe aucun point exceptionnel,

i.e. $\lambda(x) < \mu(x)$, ou $\lambda(x) > \mu(x) \quad \forall x \in (0, L)$.

Si un $\alpha \in (0, L)$ existe tel que $\lambda(\alpha) = \mu(\alpha)$ alors il existe un ϕ tel que

$$A_1(x)\partial_x \phi(\alpha) = \lambda(\alpha)\phi(\alpha) = \mu(\alpha)\phi(\alpha)$$

i.e. $\phi \in \ker(A_1(x)\partial_x - \lambda) \cap \ker(A_1(x)\partial_x - \mu)$.

Le lemme (3.4.5) nous donne alors que les valeurs propres sont isolées et de multiplicité finie. De plus, la théorie développée dans Kato ([44], ch. III) nous permet de conclure que dans le cas de valeurs propres isolées et de multiplicité finie, l'espace spectral peut être décomposé en somme orthogonale des espaces propres.

D'où, si

$$\phi \in \ker(A_1(x)\partial_x - \lambda) \cap \ker(A_1(x)\partial_x - \mu)$$

cela implique $\phi = 0$.

Lemme 3.4.5. ([6], p.616 lemma A.4.19, [44], p.140, théorème III.6.29)

Soit A un opérateur linéaire fermé, avec $0 \in \rho(A)$, et A^{-1} compact. Le spectre de A est constitué uniquement de valeurs propres isolées et de multiplicité finie.

Le lemme s'applique à l'opérateur $A_1(x)\partial_x$ puisqu'il s'agit d'un opérateur fermé et :

- $(A_1(x)\partial_x)^{-1}$ existe et est compact puisque composé d'opérateurs intégraux et tout ces coefficients $a_i(x)$ sont non nuls et bornés selon l'hypothèse (2.20). L'inverse de $A_1(x)\partial_x$ est :

$$(A_1(x)\partial_x)^{-1}y(x) = \frac{1}{1-k} \left[\int_0^x A_1^{-1}(s)y(s)ds + k \int_x^L A_1^{-1}(s)y(s)ds \right] ,$$

$$\forall y \in D(A_1(x)\partial_x) . \quad (3.32)$$

- De plus $0 \in \rho(A_1(x)\partial_x)$.

Rappelons que les conditions aux bords sont de signe opposé en $x = x_{am} = 0$ et $x = x_{av} = L$, donc il existe au moins un point β de l'intervalle pour lequel la fonction s'annule.

Supposons que 0 est une valeur propre, les égalités (3.34) donnent :

$$q' = 0 \Rightarrow q(x) = c, \quad c = \text{constante}, \quad \text{et} \quad q(\beta) = 0 \Rightarrow q \equiv 0$$

$$\Rightarrow z' = 0 \Rightarrow z(x) = d, \quad d = \text{constante}, \quad \text{et} \quad z(\beta) = 0 \Rightarrow z \equiv 0,$$

donc z et q sont nuls, et $(0 \ 0)^t$ est l'unique solution. Le vecteur nul n'est pas un vecteur propre, il y a contradiction.

Les hypothèses du lemme s'appliquent, donc $A_1(x)\partial_x$ a son spectre constitué de valeurs propres isolées et de multiplicité finie.

Cela permet de conclure qu'il n'existe pas de point exceptionnel dans le spectre de $A_1(x)\partial_x$.

C.Q.F.D. \triangle

Finalement l'inégalité (3.31) est donc vérifiée, et le spectre de $A_1(x)\partial_x$ s'écrit :

$$\sigma(A_1(x)\partial_x) = \sigma_d(A_1(x)\partial_x) = \left\{ \mu_n : \mu_n(x) = \mu(x) + \frac{2i\pi n}{L\theta(x)} , \right.$$

$$\left. n \in Z, \forall x \in [0, L] \right\} . \quad (3.33)$$

□

Le spectre de l'opérateur $A_1(x)\partial_x$ étant caractérisé, sa position dans \mathbb{C} est essentielle pour définir une quelconque stabilité.

Stabilité

Dans cette deuxième partie, montrons que la partie réelle des valeurs propres de l'opérateur $A_1(x)\partial_x$ est strictement négative, c'est à dire

$$\Re(\sigma(A_1(x)\partial_x)) < 0.$$

i) Montrons que ces valeurs propres ne peuvent être nulles.

Il a été montré précédemment que 0 est dans la résolvante de $A_1(x)\partial_x$, c'est à dire $0 \in \rho(A_1(x)\partial_x)$.

Maintenant supposons qu'il existe un $x = \alpha \in]0, L[$, tel que $\mu(\alpha)$ soit nul, alors c'est un extremum de μ et donc $\mu'(\alpha) = 0$.

Comme $A_1(x)\partial_x$ est inversible pour tout $\xi \in D(A_1(x)\partial_x) = D$ (D est dense dans X),

$$A_1(x)\partial_x\xi(\alpha) = \mu(\alpha)\xi(\alpha) = 0 \Rightarrow \xi(\alpha) = 0.$$

D'où, d'une part : $\mu(\alpha) = 0$,

et d'autre part : $\xi(\alpha) = \frac{d\xi}{dx}(\alpha)$.

De plus, $\xi_1^{(n)}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \xi_2^{(n)}(\alpha) = 0, \forall n \geq 2$.

En se servant de ces relations dans la première égalité de (3.34)

$$\frac{\mu(x)\xi_1(x)}{a_1(x)} = -\xi_2'(x),$$

une contradiction apparaît, puisque à gauche de l'égalité, α est un zéro d'ordre supérieur à $n + 1$, et à droite, cet ordre est plus petit que $n - 1$.

C.Q.F.D. \triangle

Donc $\mu(x)$ ne peut prendre la valeur zéro, $\forall x \in [0, L]$, et par conséquent $\mu(x)$ est soit strictement positif soit strictement négatif.

ii) Montrons que la partie réelle des valeurs propres de $A_1(x)\partial_x$ est négative.

La partie réelle de chaque valeur propre vérifie les deux égalités suivantes, d'après la relation (3.33) :

$$-a_1q' = \mu z, \quad -a_2z' - a_3q' = \mu q. \quad (3.34)$$

La première donne :

$$-(q(x) - q(x')) = \int_{x'}^x \frac{\mu(s)z(s)}{a_1(s)} ds, \forall x, x' \in (0, L), a_1(x) > 0 \quad (3.35)$$

D'après les conditions de bords dans $D(A)$, z et q ont le même signe en $x = L$.

Soit $\alpha \in (0, L)$ le plus grand x , différent de L , tel que $q(\alpha) = 0$. Supposons que $q(L)$ et $z(L)$ soient positifs, deux possibilités peuvent être considérées :

1. $z(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[\alpha, L]$.

Cela implique par (3.35) et l'hypothèse $q(L) > 0$:

$$0 \geq -q(L) = \int_{\alpha}^L \frac{\mu(s)z(s)}{a_1(s)} ds \Rightarrow \mu < 0 \text{ sur } [\alpha, L],$$

et donc $\mu < 0$ sur $[0, L]$. Notons que, si $q(L)$ et $z(L)$ sont supposés négatifs, alors $z(x) \leq 0$ sur l'intervalle $[\alpha, L]$, et le résultat demeure identique.

2. Soit α' le plus grand $x \in]\alpha, L[$, tel que z change de signe en ce point, alors $z(\alpha') = 0$. Comme $z(L)$ est supposé positif, alors

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ tel que } z(x) \leq 0, \forall x \in [\alpha' - \varepsilon, \alpha'[, \text{ et } z(x) \geq 0, \forall x \in]\alpha', L].$$

Cela implique alors que $z'(\alpha') > 0$.

En utilisant la première égalité de (3.34), on obtient que $q'(\alpha') = 0$, et en utilisant

la seconde :

$$\begin{aligned}
 -a_2(\alpha')z'(\alpha') - a_3(\alpha')q'(\alpha') &= \mu(\alpha')q(\alpha') \\
 -a_2(\alpha')z'(\alpha') &= \mu(\alpha')q(\alpha') \\
 \frac{-a_2(\alpha')z'(\alpha')}{q(\alpha')} &= \mu(\alpha') \\
 \text{et } q(\alpha') > 0, z'(\alpha') > 0 &\Rightarrow \mu(\alpha') < 0 \Leftrightarrow \mu(x) < 0, \forall x \in [0, L] \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

Donc, $\mu(x) < 0, \forall x \in [0, L]$, et le spectre de $A_1(x)\partial_x$ vérifie l'inégalité souhaitée, i.e. :

$$\Re(\sigma(A_1(x)\partial_x)) < 0.$$

C.Q.F.D. \triangle

3. 0 n'est pas une valeur propre de l'opérateur $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x})\partial_x + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})$.

Supposons que 0 est une valeur propre du système, alors $\exists f \neq 0$ tel que :

$$A_1(x)\partial_x f(x) + A_2(x)f(x) = 0, \forall x \in]0, L[\quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow f'(x) &= A_1^{-1}(x)A_2(x)f(x) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} f'_1(x) &= \frac{a_4(x)}{a_2(x)}f_1(x) - \frac{a_5(x)}{a_2(x)}f_2(x) \\ f'_2(x) &= 0 \end{cases} \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

La seconde équation de (3.38) donne que $f_2(x)$ est constante. Or les conditions aux bords sont de signe opposé en $x = x_{am} = 0$ et $x = x_{av} = L$, donc la fonction f s'annule en au moins un point de l'intervalle. Il existe alors un $\beta \in]0, L[$ tels que $f_2(\beta) = 0$, donc :

$$f_2(x) \equiv 0, \forall x \in [0, L].$$

En utilisant ce résultat dans la première équation de (3.38), et en remarquant que :

$$\frac{a_4(x)}{a_2(x)} = \frac{z'_e(x)}{z_e(x)}$$

d'après (2.11), $f_1(x)$ se réécrit comme suit :

$$\exists c \text{ constante, tel que } f_1(x) = c \frac{z_e(x)}{z_e(0)}.$$

Mais, les conditions aux bords donnent $f_1(\beta) = 0$, et $z_e(x) \neq 0, \forall x \in [0, L]$. Donc

$$c = 0, \Rightarrow f_1(x) \equiv 0, \forall x \in [0, L] \Rightarrow f(x) \equiv 0 \forall x \in [0, L].$$

Il y a contradiction.

C.Q.F.D. \triangle

Toutes les conditions de la proposition 3.4.2 sont vérifiées, l'opérateur $A(x), x \in [0, L]$, du modèle linéarisé du canal est donc exponentiellement stable.

C.Q.F.D. □

La principale distinction entre les EDP hyperboliques traitées de façon générale et dans le cas particulier des canaux, est l'utilisation répétée de la condition de fluvialité dans le second cas. Qu'implique cette condition dans un cadre plus générale ?

3.4.3 Remarque : condition de fluvialité

Il a été rappelé au chapitre 2, remarque 2.3.1 que comme pour l'équation des ondes, trois comportements caractéristiques des écoulements se distinguaient selon le signe du produit des valeurs propres de l'opérateur associé, i.e. l'opérateur $A(x, t, y)$ si l'on reprend la définition (1.2.1). Le cas fluvial appelé aussi régime sub-critique est défini lorsque ce produit des valeurs propres est strictement négatif. Cela se traduit physiquement par le fait que les ondes vont plus vite que le courant. L'écoulement en un point dépend des conditions aux limites amont et aval.

Mathématiquement, nous avons donc deux conditions sur l'opérateur associé $A(x, t, y)$ de la définition (1.2.1) :

1. l'hyperbolicité des équations implique que les valeurs propres de l'opérateur $A(x, t, y)$ sont distinctes et réelles, donc son déterminant est positif ou nul,
2. la condition de fluvialité implique que le produit de ses valeurs propres est strictement négatif, donc le déterminant de $A(x, t, y)$ est strictement positif.

Ces deux conditions, en étant associées impliquent que l'opérateur $A(x, t, y)$ a un déterminant non nul, donc il est *inversible*.

Les propositions (3.2.2) et (3.2.3) se réécrivent sous cette **condition de fluvialité** :

Proposition 3.4.6. *L'opérateur $A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$ du système (3.11)-(3.13) est un opérateur fermé à domaine dense si*

1. $A_e(x)$ et $B_e(x)$ sont des opérateurs linéaires, bornés,
2. l'une des 3 conditions suivantes est réalisée : $\xi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\xi(\mathbf{L}) = \mathbf{0}$ ou $\xi(\mathbf{0}) = \mathbf{k}\xi(\mathbf{L})$, $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$,
3. $B_e(x)$ est à domaine dense,

Proposition 3.4.7. *Le système en boucle ouverte est bien posé, i.e. générateur d'un C_0 -semigroupe si $A_e(x)$ et $B_e(x)$ sont bornés pour tout $x \in (0, L)$.*

Remarque 3.4.1.

Dans le cas du canal, la condition de fluvialité implique également que tous les coefficients sont bornés. En effet, la majoration naturelle par les conditions physique (hauteur maximum) ajoutée à la minoration engendrée par cette condition de fluvialité, bornent l'état d'équilibre et de ce fait, les coefficients des opérateurs $A_1(x)$ et $A_2(x)$.

3.5 Conclusion

Les propriétés d'existence et de stabilité sont établies pour la classe d'EDP hyperboliques considérées (système (3.11)-(3.13)).

Deux points se dégagent de cette étude :

1. Contrairement au cas des EDP paraboliques, la dissipativité est ici une conséquence de l'exponentielle stabilité (elle ne l'implique pas comme pour les équations paraboliques). C'est sur ce point que porte la principale différence, mais aussi la principale difficulté dans le cas des EDP hyperboliques dont le paramètre d'espace est variable.
2. La théorie de la perturbation est utilisée pour généraliser les propriétés de l'opérateur dérivé $T = \partial_x$: deux types de perturbations sont considérées, additives (perturbation par l'opérateur $B_\epsilon(x)$) et multiplicatives (perturbation par l'opérateur $A_\epsilon(x)$).

Ce deuxième point permet de démontrer que dans le cas explicite du canal, sous la condition de fluvialité, l'exponentielle stabilité de l'opérateur en boucle ouverte est intrinsèque au système des canaux d'irrigation.

L'étude du système en boucle ouverte ainsi effectuée, celle du système en boucle fermée au travers de la structure de commande IMBC est abordée, avec pour objectif la régulation. Cet objectif est atteint en utilisant une loi de commande simple dans la structure de contrôle IMBC.

Chapitre 4

Étude de la Boucle Fermée

"Everything should be made as simple as possible, but not simpler."
Albert Einstein, physicien allemand, 1879-1955.

Sommaire

4.1	Introduction	61
4.2	Le système en boucle fermée	61
4.2.1	<i>Contrôle de type intégral</i>	62
4.2.2	<i>Contrôle de type proportionnel intégral</i>	63
4.3	Stabilité de la boucle fermée	65
4.3.1	<i>Contrôle de type intégral</i>	65
4.3.2	<i>Contrôle de type proportionnel intégral</i>	68
4.3.3	<i>Résolvantes</i>	71
4.4	Régulation	75
4.5	Conclusion	77

4.1 Introduction

Les différents éléments de la structure IMBC (Chapitre 2) ont été détaillés, sauf la synthèse de la commande qui prend toute son importance dans l'étude du système en boucle fermée (Figure 4.1).

C'est l'objet de ce chapitre.

Dans une première partie, on cherche à caractériser le système en boucle fermée à partir du système en boucle ouverte.

Comme la structure IMBC permet d'utiliser un correcteur simple, une commande de type intégral est d'abord choisie. Deux raisons justifient ce choix :

1. l'apparition de la dérivée de la commande dans le système d'état (remarque 3.2.2),
2. la structure de commande IMBC se comporte intrinsèquement comme un intégrateur.

Un correcteur proportionnel est également implémenté, avec pour objectif l'amélioration de la rapidité de réponse du système.

L'étude du système d'état en boucle fermée peut alors être réalisée par la théorie de la perturbation des opérateurs et des semigroupes, en considérant que :

- l'opérateur du système en boucle fermée est une perturbation de l'opérateur du système en boucle ouverte,
- le semigroupe du système en boucle fermée est une perturbation du semigroupe en boucle ouverte.

Dans un second temps, la théorie de la perturbation conditionne les paramètres de synthèse, afin de préserver la stabilité du système en boucle ouverte, que ce soit pour une commande intégrale ou proportionnelle intégrale.

L'application sur le cas du canal est réalisée en parallèle, par calculs explicites.

Dans un troisième temps, le comportement asymptotique du système au regard d'une consigne variable est étudié (régulation).

4.2 Le système en boucle fermée

Rappelons que pour la structure CMI choisie (Figure 4.1), le correcteur peut être pris le plus simple possible en agissant sur l'écart entre la trajectoire de référence et la sortie observée. Dans un premier temps, le correcteur intégral est choisie à cause de la présence de la dérivée de la commande frontière (remarque (3.2.2) du chapitre 3) et, dans un second temps, un correcteur proportionnel intégral est choisi pour en améliorer la rapidité.

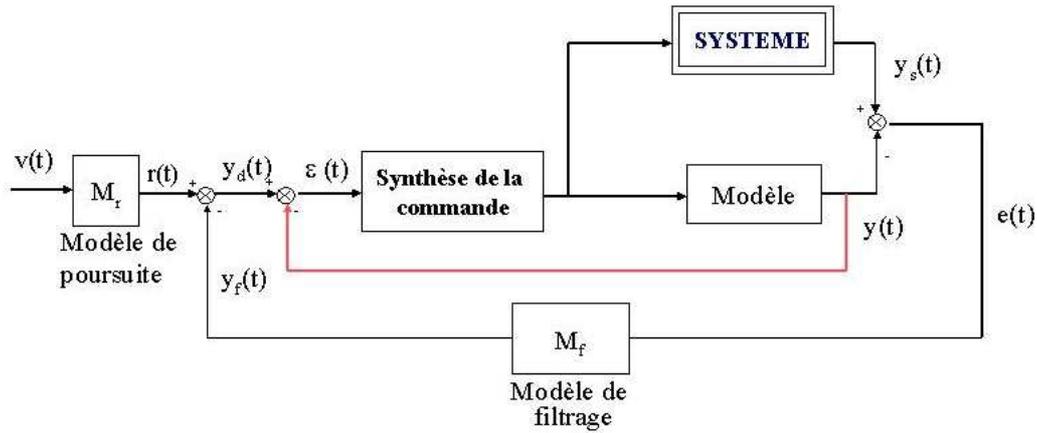


Figure 4.1 : La structure IMBC

4.2.1 Contrôle de type intégral

Pour une régulation, la loi de commande peut être choisie sous la forme d'un feedback de type intégral, avec $\zeta(t) = \varepsilon(t)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha_i \kappa_i \zeta(t) \\ &= \alpha_i \kappa_i \int \varepsilon(s) ds, \end{aligned} \quad (4.1)$$

où α_i est une constante et κ_i une matrice de $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, tous deux à définir pour garantir la stabilité de la boucle fermée.

Remarque 4.2.1.

Pour appliquer la relation (2.6) au système de contrôle en boucle fermée, il est nécessaire de considérer la relation entrées-sorties dans les deux cas mono et multibiefs :

$$\begin{aligned} C &: X \rightarrow \mathbb{R}^p \\ D &: C^k([0, \infty], \mathbb{R}^n) \rightarrow X, \end{aligned}$$

où p est le nombre de hauteurs contrôlées (= nombre de biefs), et n est le nombre de vannes contrôlées.

L'objet de la remarque est l'existence de l'opérateur CD : la solution du système peut être re-formulée comme suit [82]

$$\xi(t) = T_A(t)\xi(0) - \int_0^t T_A(t-s)D \dot{u}(s) ds,$$

donc

$$\xi(t) - Du(t) = T_A(t)(\xi(0) - Du(0)) - \int_0^t T_A(t-s)D \dot{u}(s) ds$$

et pour des entrées constantes, $u(t) = \tilde{u}$, on obtient alors $\dot{u}(t) \equiv 0$, et $u(0) = 0$. Avec $y(t) = Cx(t)$, on a :

$$y(t \rightarrow \infty) = y_{ref} \rightarrow CD\tilde{u} \neq 0. \quad (4.2)$$

Ce raisonnement permet d'affirmer l'existence de l'opérateur CD tel que :

$$CD : C^k([0, \infty], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^p. \quad \square$$

Donc on obtient $\zeta(t) = \int r(s) - y(s)ds$ d'où $\dot{\zeta}(t) = r(t) - y(t)$.

La relation (3.8) donne alors $\dot{\zeta}(t) = r(t) - C\varphi(t) - CDu(t)$.

En remplaçant et en développant ceci dans les équations d'état, le système en boucle fermée est obtenu.

Si la majeure partie du travail sur la boucle fermée s'est effectuée avec une commande intégrale, ainsi que les simulations, nous développons les équations du système en boucle fermée à partir d'une commande proportionnelle intégrale (pour éviter de répéter deux fois des équations similaires, à un $\alpha_p = 0$ près pour obtenir les équations dans le cas intégral).

4.2.2 Contrôle de type proportionnel intégral

Comme nous l'avons fait remarqué (remarque 3.2.2), la commande intégrale dans ce cas d'étude joue un rôle de commande proportionnelle. Cela s'est confirmé lors des expérimentations, où une erreur statique non nulle apparaissait. Une commande proportionnelle a alors été ajoutée pour accélérer la convergence du système.

La loi de contrôle s'écrit alors comme suit :

$$u(t) = \alpha_i \kappa_i \zeta(t) + \alpha_p \kappa_p \dot{\zeta}(t),$$

où α_i , α_p sont des constantes et κ_i , κ_p des matrices de $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, toutes à définir pour garantir la stabilité de la boucle fermée.

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} u(t) &= \alpha_i \kappa_i \zeta(t) + \alpha_p \kappa_p \dot{\zeta}(t) \\ &= \alpha_i \kappa_i \zeta(t) - \alpha_p \kappa_p C\varphi(t) - \alpha_p \kappa_p CDu(t) + \alpha_p \kappa_p r(t) \\ (I + \alpha_p \kappa_p CD)u(t) &= \alpha_i \kappa_i \zeta(t) - \alpha_p \kappa_p C\varphi(t) + \alpha_p \kappa_p r(t). \end{aligned}$$

Pour pouvoir continuer, une première condition est à poser, tout du moins dans le cas de la commande PI :

Condition 1 : $(I + \alpha_p \kappa_p CD) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est inversible, et $W = (I + \alpha_p \kappa_p CD)^\ddagger$ est sa pseudo inverse à gauche, i.e. tel que $W(I + \alpha_p \kappa_p CD) = I$ (\ddagger représente la pseudo inverse à gauche).

Sous cette condition, on obtient alors

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \alpha_i W \kappa_i \zeta(t) - \alpha_p W \kappa_p C \varphi(t) + \alpha_p W \kappa_p r(t) \\
 \text{et } \dot{u}(t) &= \alpha_i W \kappa_i \dot{\zeta}(t) - \alpha_p W \kappa_p C \dot{\varphi}(t) + \alpha_p W \kappa_p \dot{r}(t) \\
 \dot{u}(t) &= -\alpha_p \kappa_p C A \varphi(t) + \alpha_i \kappa_i (I - \alpha_p C D W \kappa_p)(r(t) - C \varphi(t)) \\
 &\quad - \alpha_i^2 \kappa_i C D W \kappa_i \zeta(t) + \alpha_p \kappa_p \dot{r}(t)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

De la même façon, l'application $\dot{\zeta}(t)$ s'exprime :

$$\begin{aligned}
 \dot{\zeta}(t) &= r(t) - C \varphi(t) - C D u(t) \\
 &= (I - \alpha_p C D W \kappa_p)(r(t) - C \varphi(t)) - \alpha_i C D W \kappa_i \zeta(t)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Par conséquent, le système (3.9) peut se réécrire :

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi} &= A \varphi - D \dot{u} \\
 &= (I + \alpha_p D \kappa_p C) A \varphi(t) - \alpha_i D \kappa_i (I - \alpha_p C D W \kappa_p)(r(t) - C \varphi(t)) \\
 &\quad - \alpha_p D \kappa_p \dot{r}(t) + \alpha_i^2 D \kappa_i C D W \kappa_i \zeta(t)
 \end{aligned}$$

et, en posant $x_a(t) = (\varphi(t) \ \zeta(t))^t$, le système d'état étendu de la structure IMBC devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = A(\alpha)x_a(t) + B(\alpha)r(t) + C(\alpha)\dot{r}(t) \\ x_a(0) = x_{a0}, \end{cases} \tag{4.5}$$

où

$$\begin{aligned}
 A(\alpha) &= \begin{pmatrix} (I + D \alpha_p \kappa_p C) A & 0 \\ -(I - C D W \alpha_p \kappa_p) C & 0 \end{pmatrix} + \alpha_i^2 \begin{pmatrix} 0 & D \kappa_i C D W \kappa_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \alpha_i \begin{pmatrix} D \kappa_i (I - C D W \alpha_p \kappa_p) C & 0 \\ 0 & -C D W \kappa_i \end{pmatrix}, \\
 B(\alpha) &= \begin{pmatrix} -D \alpha_i \kappa_i (I - C D W \alpha_p \kappa_p) \\ (I - C D W \alpha_p \kappa_p) \end{pmatrix}, \quad C(\alpha) = \begin{pmatrix} -D \alpha_p \kappa_p \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$A(\alpha)$ peut être vu comme une perturbation de A , où :

$$A(\alpha) = A_e + \alpha_i A_e^{(1)} + \alpha_i^2 A_e^{(2)},$$

et $A_e^{(1)}$ et $A_e^{(2)}$ sont des opérateurs bornés. En effet, C , D et CD sont des opérateurs bornés. Il en va de même pour les opérateurs $B(\alpha)$ et $C(\alpha)$.

La présence de \dot{r} dans (4.5) est artificiel, en toute rigueur il faudrait exprimer r et \dot{r} en fonction de l'entrée $v(t)$ et de l'erreur $e(t)$ avec les relations (2.4) et (2.5). En étendant l'état x_a , le système peut se réécrire sous la forme suivante, avec X_a le nouvel état donné par $X_a(t) = (x_r(t) \ x_f(t) \ x_a(t))^t$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_a(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_r(t) \\ \dot{x}_f(t) \\ \dot{x}_a(t) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} A_r & 0 & 0 \\ 0 & A_f & 0 \\ B(\alpha)C_r + C(\alpha)C_rA_r & 0 & A(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_r & 0 \\ 0 & B_f \\ C(\alpha)C_rB_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \\ X_a(0) = \begin{pmatrix} x_r(0) \\ x_f(0) \\ x_a(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{f0} \\ x_{a0} \end{pmatrix} = X_{a0}, \end{array} \right. \quad (4.7)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_a(t) = \tilde{A}(\alpha)X_a(t) + \tilde{B} \begin{pmatrix} v(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \\ X_a(0) = X_{a0}, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Cela n'apportant rien par rapport à l'étude de la stabilité, nous laisserons l'écriture (4.5) en place, en notant par ailleurs que dans le cas d'une commande intégrale cette matrice $C(\alpha)$ disparaît.

D'après les travaux de Pohjolainen ([66, 67]), si la condition de contrôlabilité du système est respectée, la stabilité est obtenue par un choix convenable des paramètres de commande α_i , α_p , κ_i et κ_p .

L'opérateur en boucle fermée est donc maintenant écrit (ci-dessus) en fonction de l'opérateur en boucle ouverte (éq. 4.5), au travers de la structure IMBC.

Reste à savoir de quel façon se transforme le spectre de l'opérateur en boucle ouverte lors du passage en boucle fermée, ainsi que le semigroupe.

4.3 Stabilité de la boucle fermée

Nous cherchons à définir dans un premier temps les paramètres de perturbation α_i et κ_i dans le cas d'une commande intégrale, en faisant un parallèle avec la théorie développée par Pohjolainen [66, 67, 68, 69] entre autres dans le cas d'équations paraboliques.

Dans un second temps, l'adaptation du cas intégral au cas proportionnel intégral est traité toujours dans l'esprit de la démonstration de Pohjolainen.

On constate alors que seules les propriétés même du système interviennent et non pas le fait qu'il s'agisse d'équations hyperboliques ou paraboliques.

4.3.1 Contrôle de type intégral

Supposons que $\kappa_p = 0$ et $\alpha_p = 0$, seule la partie intégrale est alors considérée, i.e. :

$$u(t) = \alpha_i \kappa_i \int_t^r (r(s) - y(s)) ds, \text{ et } W = I.$$

Le coefficient $A(\alpha)$ du système (4.5) est le suivant, en utilisant (4.6) :

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} + \alpha_i \begin{pmatrix} D\kappa_i C & 0 \\ 0 & -CD\kappa_i \end{pmatrix} + \alpha_i^2 \begin{pmatrix} 0 & D\kappa_i CD\kappa_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Donc, il existe une série de la forme :

$$A(\alpha) = A_e + \alpha_i A_e^{(1)} + \alpha_i^2 A_e^{(2)}.$$

Des conditions sont alors nécessaires pour assurer la convergence de cette série, donc la stabilité du système en boucle fermée.

Le problème est centré sur le spectre de A_e , qui est composé du spectre de l'opérateur A en boucle ouverte et de 0, Figure 4.2 :

$$\sigma(A(\alpha)) \cong \sigma(A_e) + \text{perturbation, et } \sigma(A_e) = \sigma(A) \cup \{0\}.$$

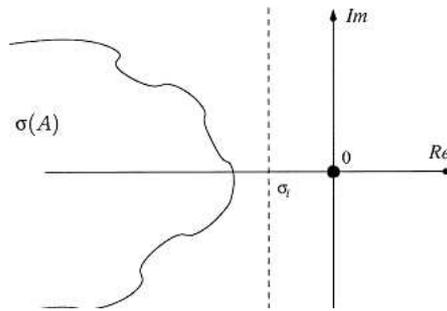


Figure 4.2 : Spectre de l'opérateur A_e

Les autres opérateurs $A_e^{(n)}$, $n = 1, 2$ sont alors considérés comme des perturbations bornées. Il nous faut donc déterminer quelles sont les limites dans lesquelles on peut perturber ce spectre sans le rendre instable.

Deux des principaux résultats des travaux de Pohjolainen, dont nous nous servons dans ce cadre, sont rappelés :

Théorème 4.3.1 ([67]). *Il existe une solution au problème (3.9) si et seulement si $\text{rg}(\mathbf{CD}) = p$.*

Théorème 4.3.2 ([67]). *Soit CD tel que $\text{rg}(CD) = p$ et $\kappa_i = -[CD]^\dagger$. Un $\alpha_{i,max} > 0$ existe tel que $\sigma(A) \in \mathbb{C}^-$, pour tout $\alpha_i \in (0, \alpha_{i,max})$. Si $\text{rg}(CD) < p$, le système ne peut être rendu stable par aucun α_i , κ_i (\dagger représente la pseudo inverse à droite).*

Pour appliquer ces théorèmes tels quels, deux conditions doivent être vérifiées :

- la première porte sur la commande $u(t)$ que l'on suppose être au moins $C^2(0, \infty)$,
- la seconde est de vérifier qu'il s'agit d'une famille holomorphe de type **(A)**. Le critère d'une famille de type **(A)** est donné par le théorème suivant (définition C.2.5) :

Théorème 4.3.3 ([44], Theorem 2.6 p378). *Soit T un opérateur fermé de X dans Y avec $D(T) = D$. Soit $T^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, des opérateurs de X dans Y dont le domaine contient D , et soient les constantes $a, b, c \geq 0$ telles que*

$$\|T^{(n)}u\| \leq c^{n-1}(a\|u\| + b\|Tu\|), u \in D, n = 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

*Alors la série définit un opérateur $T(k) = T + kT^{(1)} + k^2T^{(2)} + \dots$ de domaine D défini pour $|k| \leq 1/c$. Si $|k| \leq (b+c)^{-1}$, $T(k)$ est fermé et sa fermeture $\tilde{T}(k)$ pour ces k forme une famille holomorphe de type **(A)**.*

Pour le système décrit par l'opérateur $A(\alpha)$, les opérateurs sont bornés, donc ce théorème s'applique avec $b = 0$, $c = 1$, $a = \sup(\|A_e^{(1)}\|, \|A_e^{(2)}\|)$. De plus, cela implique que $k \leq 1$, c'est à dire $\alpha_i \leq 1$.

La valeur limite suffisante de $\alpha_{i,max}$ est le résultat de l'application de la théorie des perturbations à l'opérateur résolvant perturbé :

Proposition 4.3.4 ([67], [40]). *Une condition suffisante de la stabilité du système en boucle fermée est donnée par :*

$$0 < \alpha_i < \min_{\lambda \in \Gamma} (a\|R(\lambda, A_e)\| + 1)^{-1}$$

avec $a = \max(\|A_e^{(1)}\|, \|A_e^{(2)}\|)$, $\Gamma \in \rho(A_e)$, (Fig. 4.3)

$$\operatorname{Re}(\sigma(CD\kappa_i)) < 0. \quad (4.11)$$

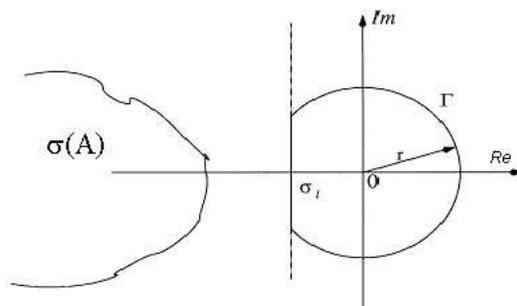


Figure 4.3 : Perturbation du spectre

Ce résultat s'applique ici, puisque la démonstration de cette proposition n'a besoin que de la propriété de croissance spectrale et de l'exponentielle stabilité [67].

La preuve du rang de CD ($\operatorname{rg}(-CD) = p$) est réalisée par récurrence dans l'annexe B, avec $p = n$ dans le cas d'un canal aboutissant sur un déversoir (Figure 1.2), $p = n - 1$

dans le cas d'un canal uniquement constitué de vannes (Figure 1.3), donc $p \leq n$.

D'où en posant $\kappa_i = -\theta(CD)^\dagger$, $0 < \theta < 1$, et $0 < \alpha_i < \min_{\lambda \in \Gamma} (a\|R(\lambda, A_e)\| + 1)^{-1}$, la condition (4.11) est réalisée, et les théorèmes 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 et la proposition 4.3.4 ci-dessus sont vérifiés.

Le domaine d'existence des paramètres de réglage étant fixé dans le cas d'une commande intégrale, il est intéressant alors de comprendre comment est perturbé ce domaine sous l'influence d'une commande proportionnelle. L'action proportionnelle permettant habituellement de gagner en rapidité de réponse par rapport à l'action intégrale.

4.3.2 Contrôle de type proportionnel intégral

Comme dans le premier cas, nous nous sommes fortement inspiré de la théorie développée par Pohjolainen [66], et Josserand [40], la démonstration de ce qui suit y est produite (travaux menés d'après Kato [44]). La condition d'un semigroupe holomorphe peut être remplacée par celle d'un C_0 -semigroupe exponentiellement stable, la condition essentielle est celle de la stabilité et de la propriété de croissance spectrale.

Une partie proportionnelle est ajoutée à la commande intégrale, i.e :

$$u(t) = \alpha_i \kappa_i \int_t^{\infty} (r(s) - y(s)) ds + \alpha_p \kappa_p (r(t) - y(t)).$$

L'opérateur en boucle fermée (4.5) se réécrit alors :

$$\begin{aligned} A(\alpha) = & \begin{pmatrix} (I + D\alpha_p \kappa_p C)A & 0 \\ -(I - CDW\alpha_p \kappa_p)C & 0 \end{pmatrix} + \alpha_i^2 \begin{pmatrix} 0 & D\kappa_i CDW\kappa_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + \alpha_i \begin{pmatrix} D\kappa_i(I - CDW\alpha_p \kappa_p)C & 0 \\ 0 & -CDW\kappa_i \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

Selon la théorie de la perturbation, trois conditions sont nécessaires pour assurer la stabilité du système avec ce type de contrôle :

- **Condition 1** : $(I + \alpha_p \kappa_p CD)$ est inversible.
Le problème est ainsi bien posé. (Si $\|\alpha_p \kappa_p\| < \|CD\|^{-1}$ alors cette condition est vérifiée.)
- **Condition 2** : D'après le théorème 3.6 (théorème C.2.9) de Pohjolainen [67] repris dans [40], un bon choix de κ_p est donné : $\kappa_p = [CD]^\dagger$
et l'opérateur $(I + \alpha_p D\kappa_p C)A$ reste stable pour des valeurs assez petites de α_p , i.e. :

$$|\alpha_p| < \left(\sup_{\lambda \in \Gamma} a\|R(\lambda; A)\| + b\|AR(\lambda; A)\| \right)^{-1}$$

où a et b sont des nombres positifs, qui vérifient $\|D\kappa_p Cx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\|$ pour tout $x \in D(A)$.

- **Condition 3** : la stabilité de la série $\sum_n \alpha_i^n A_e^n$ est assurée par les conditions suivantes [40] [81] (théorème C.2.10),

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha_i < \min_{\lambda \in \Gamma} (a \|R(\lambda; A_e)\| + 1)^{-1} < 1 \\ rg(CDW) = p \\ \mathcal{R}e(\sigma(CDW\kappa_i)) < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

L'opérateur $I + \alpha_p \kappa_p CD$ est supposé inversible, d'inverse W (condition 1). Pour cela l'opérateur CD doit être inversible également. Or ce n'est pas toujours le cas, puisque cet opérateur de rang complet peut n'avoir qu'un inverse à droite selon le type d'ouvrage à l'aval des p biefs en cascade (Annexe B) :

- * si le dernier ouvrage est un déversoir, l'opérateur CD est une "matrice" carrée $p \times p$ de rang p , W est l'inverse à droite et à gauche, la condition 1 est vérifiée,
- * si le dernier ouvrage est une vanne, l'opérateur CD possède une pseudo inverse à droite, c'est une "matrice" $(p + 1) \times p$ de rang p , W est alors la pseudo inverse à gauche de l'opérateur $I + \alpha_p \kappa_p CD$.

Pour la commande intégrale définie précédemment, W est l'identité.

Cette différenciation selon le type d'ouvrage à l'aval du canal conduit à étudier les deux cas ci-dessus séparément :

- * le premier est le cas d'un canal dont le dernier ouvrage est un déversoir **(1)**,
- * le second cas est celui d'un canal dont les ouvrages ne sont que des vannes **(2)**.
On pose comme précédemment $\kappa_i = -\theta[CD]^\dagger$, $1 > \theta > 0$ et α_i vérifie la première inégalité de la condition 3.

a. Un canal avec un déversoir final

On considère un canal constitué de n biefs, et $p = n$ vannes. La matrice CD est alors une matrice $n \times n$ inversible de rang n (Annexe B). De plus, κ_p est posé de tel sorte à vérifier la condition 2, i.e. $\kappa_p = [CD]^{-1}$. Le coefficient α_p est alors choisi de sorte à vérifier les conditions 1, 2 et 3.

Le premier point est de montrer que W est inversible et d'éventuellement de définir explicitement cet inverse : l'idée est de montrer qu'il existe un $k > 0$ tel que W puisse s'écrire, $W = k(I - \alpha_p \kappa_p CD)$. Alors, k et W doivent vérifier l'équation suivante :

$$\begin{aligned} W(I + \alpha_p \kappa_p CD) &= I \\ k(I - \alpha_p^2 I) &= I \Leftrightarrow k(1 - \alpha_p^2) = 1 \\ \Leftrightarrow \alpha_p^2 &= \frac{(k-1)}{k} \Leftrightarrow \alpha_p = \sqrt{\frac{(k-1)}{k}} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

La condition 1 est alors vérifiée, $(I + \alpha_p \kappa_p CD)$ est inversible et son inverse est donné explicitement :

$W = k(I - \alpha_p \kappa_p CD)$, avec $\alpha_p = \sqrt{\frac{(k-1)}{k}} \geq 0$, $k \geq 1$ ou $k \leq 0$.

Remarque 4.3.1.

On notera que α_p n'est pas restreint par cette condition, car si $k \geq 1$ alors $0 \leq \alpha_p < 1$, et si $k < 0$ alors $1 \leq \alpha_p < \infty$.

Sous ces conditions, la condition 3 est vérifiée, puisqu'on a supposé que α_i vérifie le premier point. Les deux autres sont également vérifiées, en effet :

$$\begin{aligned} rg(CDW) &= rg(CDk(I - \alpha_p \kappa_p CD)) \\ &= rg(k(1 - \alpha_p)CD) = rg(CD) = p \\ \mathcal{R}e(\sigma(CDW\kappa_i)) &= \mathcal{R}e(\sigma(k(1 - \alpha_p)CD\kappa_i)) = \mathcal{R}e(\sigma(CD\kappa_i)) < 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

puisque si

$$k > 1 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha_p < 1 \text{ alors } k(1 - \alpha_p) > 0 \text{ et si } k < 0 \Leftrightarrow \alpha_p > 1 \text{ alors } k(1 - \alpha_p) > 0.$$

De plus, la dernière inégalité est vérifiée d'après la proposition (4.3.4).

Finalement, la condition 2 donne la condition sur α_p :

$$|\alpha_p| < \left(\sup_{\lambda \in \Gamma} a \|R(\lambda; A)\| + b \|AR(\lambda; A)\| \right)^{-1}$$

où les nombres positifs a et b doivent vérifier $\|D\kappa_p Cx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\|$ pour tout $x \in D(A)$. Déterminons ces coefficients a et b . Notons que

$$D\kappa_p C : X \rightarrow X,$$

et qu'il s'agit là d'opérateurs bornés, donc $b = 0$, et

$$|\alpha_p| < \left(\sup_{\lambda \in \Gamma} a \|R(\lambda; A)\| \right)^{-1} \quad (4.16)$$

$$\Leftrightarrow k < \frac{1}{1 - \left(\sup_{\lambda \in \Gamma} a \|R(\lambda; A)\| \right)^{-2}} \text{ avec } a = \|D\kappa_p C\|. \quad (4.17)$$

b. Un canal : tous les ouvrages sont des vannes

Soit un canal constitué de $n = p + 1$ biefs, et p vannes. La matrice CD est alors une matrice $(p + 1) \times p$, avec une pseudo inverse à droite, de rang p . De plus, κ_p est choisie de sorte à vérifier la condition 2, i.e. $\kappa_p = [CD]^\dagger$, la pseudo inverse à droite de CD . Le raisonnement est le même, les conclusions le sont donc également, i.e. α_p et k sont choisies tel qu'ils vérifient (4.16)-(4.17). En effet, si on vérifie que W est bien le pseudo inverse à

gauche de $(1 + \alpha_p \kappa_p CD)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & k(1 - \alpha_p \kappa_p CD)(1 + \alpha_p \kappa_p CD) = I \\
 \Leftrightarrow & 1 - \alpha_p^2 \kappa_p CD = k^{-1} I \\
 \Leftrightarrow & \frac{k-1}{k} I = \alpha_p^2 \kappa_p CD \\
 \Leftrightarrow & \frac{k-1}{k} CD = \alpha_p^2 CD \kappa_p CD = \alpha_p^2 CD \\
 \Leftrightarrow & \frac{k-1}{k} = \alpha_p^2 \Leftrightarrow \alpha_p = \sqrt{\frac{(k-1)}{k}}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.3.3 Résolvantes

Dans ce qui précède, la résolvante de l'opérateur en boucle ouverte tient un rôle important, puisqu'elle permet d'estimer les paramètres de perturbation afin de préserver la stabilité en boucle fermée. Nous proposons ici de calculer cette résolvante explicitement, ce qui permettra par la suite de donner une estimation numérique des coefficients de perturbation α_i, α_p .

a. Calcul des résolvantes

Dans un premier temps, relierons la résolvante de l'opérateur A_e à celui de la boucle ouverte A . Un simple calcul d'inverse nous donne :

$$\begin{aligned}
 R(\lambda, A_e) &= R\left(\lambda, \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}\right) \\
 &= \begin{pmatrix} R(\lambda, A) & 0 \\ -\frac{C}{\lambda} R(\lambda, A) & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Dans un second temps, l'idée est de généraliser le résultat donné par Kato [44] sur l'opérateur dérivée. Dans le cas où la condition frontière est décrite par $k v(a) = v(b)$, $k \neq 1$, la résolvante de l'opérateur ∂_x est donnée par l'opérateur intégral sur le domaine $[a, b]$, avec $L = b - a$ et $v \in \rho(\partial_x)$:

$$\begin{aligned}
 R(\lambda, \partial_y)v(y) &= (\partial_y - \lambda I)^{-1}v(y) \\
 &= \frac{e^{\lambda y}}{k - e^{\lambda L}} \left[k \int_a^y e^{-\lambda x} v(x) dx + e^{\lambda L} \int_y^b e^{-\lambda x} v(x) dx \right].
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

La résolvante de l'opérateur en boucle ouverte $A(x) = A_1(x)\partial_x + A_2(x)$ peut se réécrire :

$$\begin{aligned}
 R(\lambda, A(x)) &= (A_1(x)\partial_x + A_2(x) - \lambda I)^{-1} \\
 &= A_1^{-1}(x)[\partial_x + A_1^{-1}(x)(A_2(x) - \lambda I)]^{-1} \\
 &= A_1^{-1}(x)[\partial_x - \mu(x)]^{-1},
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

avec $\mu(x) = A_1^{-1}(x)(\lambda I - A_2(x))$.

On se ramène donc au calcul de la résolvante de l'opérateur $\partial_x - \mu(x)$ où μ est une fonction non constante. Pour simplifier la partie calculatoire, on se place dans le cas où la condition frontière est $v(a) = 0$, avec $[a, b]$ le domaine de définition et L sa longueur.

Proposition 4.3.5. *La résolvante de l'opérateur ∂_x , dans le cas où la condition frontière est $v(a) = 0$, avec $[a, b]$ le domaine de définition et L sa longueur, est donné par :*

$$\begin{aligned} R(\mu(x), \partial_x)v(x) &= (\partial_x - \mu(x)I)^{-1}v(x) \\ &= e^{\mu(a)x} e^{\int_a^x \mu(s)ds} \int_a^x e^{-\mu(a)y} e^{-\int_a^y \mu(s)ds} v(y) dy. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Démonstration :

Déterminer la résolvante de ∂_x équivaut à trouver la solution de l'équation différentielle suivante, avec $R = R(\mu(x), \partial_x)$:

$$\partial_x(Rv) - \mu Rv = v \quad (4.23)$$

Dans un premier temps, on résout l'équation homogène, puis dans un second temps la méthode de variation de la constante est appliquée (la notation prime "'" est utilisée pour définir la dérivée par rapport à la variable x).

Equation homogène de l'équation (4.23) :

$$\begin{aligned} \partial_x(Rv(x)) &= \mu(x)Rv(x) \\ \frac{(Rv)'}{Rv} &= \mu \\ Rv(x) &= B e^{\int_a^x \mu(s)ds} \end{aligned}$$

Variation de la constante sur l'équation (4.23) :

$$\begin{aligned} Rv(x) &= B(x) e^{\int_a^x \mu(s)ds} \\ (Rv)'(x) &= B'(x) e^{\int_a^x \mu(s)ds} + (\mu(x) - \mu(0))Rv(x) \\ (Rv)'(x) - \mu(x)Rv(x) &= (B'(x) - \mu(0)B(x)) e^{\int_a^x \mu(s)ds} = v(x) \end{aligned}$$

Pour résoudre l'équation (4.23), l'équation (4.24) doit être résolue :

$$B'(x) - \mu(0)B(x) = v(x) e^{-\int_a^x \mu(s)ds} \quad (4.24)$$

Equation homogène de l'équation (4.24) :

$$\begin{aligned} B'(x) - \mu(0)B(x) &= 0 \\ B(x) &= C e^{\mu(0)x} \end{aligned}$$

Variation de la constante sur l'équation (4.24) :

$$\begin{aligned} B(x) &= C(x) e^{\mu(0)x} \\ B'(x) - \mu(0)B(x) &= C'(x) e^{\mu(0)x} = v(x) e^{-\int_a^x \mu(s)ds} \\ \text{donc } C'(x) &= v(x) e^{-\mu(0)x} e^{-\int_a^x \mu(s)ds} \end{aligned}$$

Finalement, en remontant le raisonnement précédent avec :

$$\begin{aligned} C'(x) &= v(x)e^{-\mu(0)x}e^{-\int_a^x \mu(s)ds} \\ C(x) &= \theta + \int_a^x e^{-\mu(0)y}e^{-\int_a^y \mu(s)ds}v(y)dy \end{aligned}$$

on pose $\theta = 0$, et :

$$C(x) = \int_a^x e^{-\mu(0)y}e^{-\int_a^y \mu(s)ds}v(y)dy \quad (4.25)$$

on obtient alors :

$$B(x) = e^{\mu(0)x} \int_a^x e^{-\mu(0)y}e^{-\int_a^y \mu(s)ds}v(y)dy$$

et la résolvante obtenue est :

$$Rv(x) = e^{\mu(0)x}e^{\int_a^x \mu(s)ds} \int_a^x e^{-\mu(0)y}e^{-\int_a^y \mu(s)ds}v(y)dy. \quad (4.26)$$

C.Q.F.D. □

En faisant un parallèle avec le cas où les valeurs propres sont constantes et le résultat précédent, et en se rappelant que $\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{x})(\lambda(\mathbf{x})\mathbf{I} - \mathbf{A}_2(\mathbf{x}))$, la résolvante de l'opérateur en boucle ouverte $A(x) = A_1(x)\partial_x + A_2(x)$, avec $kv(a) = v(b)$, $k \neq 1$, comme condition frontière sur le domaine $[a, b]$, s'écrit :

$$\begin{aligned} R(\lambda(x), A(x))v(x) &= \frac{e^{\mu(a)x}e^{\int_a^x \mu(s)ds}}{k - e^{\mu(0)L}e^{\int_a^b \mu(s)ds}} \left[k \int_a^x e^{-\mu(a)y}e^{-\int_a^y \mu(s)ds}v(y)dy \right. \\ &\quad \left. + e^{\mu(a)L}e^{\int_a^b \mu(s)ds} \int_x^b e^{-\mu(a)y}e^{-\int_a^y \mu(s)ds}v(y)dy \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Vérifions cela en l'appliquant à $A(x)v(x) - \lambda(x)v(x)$, $v \in \rho(A)$:

$$\begin{aligned} \partial_x (R(\lambda(x), A(x))v(x)) &= \mu(0)R(\lambda(x), A(x))v(x) \\ &+ [\mu(x) - \mu(0)]R(\lambda(x), A(x))v(x) \\ &+ \frac{e^{\mu(a)x}e^{\int_a^x \mu(s)ds}}{k - e^{\mu(0)L}e^{\int_a^b \mu(s)ds}} \left[(k - e^{\mu(a)L}e^{\int_a^b \mu(s)ds})e^{-\mu(a)x}e^{-\int_a^x \mu(s)ds}v(x) \right. \\ &\quad \left. - ke^{-\mu(a)a}v(a) + e^{\mu(a)L}e^{\int_a^b \mu(s)ds}e^{-\mu(a)b}e^{-\int_a^b \mu(s)ds}v(b) \right] \\ &= \mu(x)R(\lambda(x), A(x))v(x) + v(x) + e^{-\mu(a)a}(v(b) - kv(a)) \\ &= A_1^{-1}(x)(\lambda(x)I - A_2(x))R(\lambda(x), A(x))v(x) + v(x) \\ \Leftrightarrow (A_1(x)\partial_x + A_2(x) - \lambda(x)I)R(\lambda(x), A(x))v(x) &= v(x) \\ \Leftrightarrow (A(x) - \lambda(x)I)R(\lambda(x), A(x))v(x) &= v(x). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Le résultat est le même, en intégrant par parties, si l'on calcule :

$$R(\lambda(x), A(x))(A_1(x)\partial_x + A_2(x) - \lambda(x)I)(v(x)).$$

La résolvante est bien définie.

b. Calcul des normes

Les maxima imposés sur les coefficients α_i et α_p sont fonction de la norme de la résolvante de l'opérateur en boucle ouverte.

Pour la résolvante de la boucle ouverte, on utilise la propriété de stabilité exponentielle qui implique que :

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)\| &= \sup_{\|v\|=1} \|R(\lambda, A)v\| \\ &\leq \sup_{\|v\|=1} \frac{\|v\|}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Le coefficient α_p est alors majoré par (éq. (4.16)) :

$$|\alpha_p| < \inf_{\lambda \in \Gamma} \frac{|\lambda|}{a} = \frac{r_{BO}}{a} \leq (\sup_{\lambda \in \Gamma} a \|R(\lambda; A)\|)^{-1}, \quad (4.30)$$

où r_{BO} est tel que (Fig. 4.3) :

$$r_{BO} > |w_0| = |\sup\{Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A(x))\} < 0|.$$

Remarque 4.3.2.

Supposer que le sup est atteint en $\frac{\|v\|}{|\lambda|}$ n'est pas abhèrent, puisque c'est le cas pour l'opérateur dérivé ∂_x . En effet, la résolvante est alors donnée par l'expression (4.31) :

$$R(\lambda, \partial_x)v(x) = \frac{e^{\lambda x}}{k - e^{\lambda L}} \left[k \int_a^x e^{-\lambda s} v(s) ds + e^{\lambda L} \int_x^b e^{-\lambda s} v(s) ds \right].$$

Calculer sa norme revient à déterminer son maximum pour $\|v\| = 1$. En dérivant $R(\lambda, \partial_y)$ par rapport à v , on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_v(R(\lambda, \partial_x)v(x)) &= \lambda R(\lambda, \partial_x)v(x) + x(x) \\ &= \partial_x(R(\lambda, \partial_x)v(x)) = 0 \\ \Rightarrow R(\lambda, \partial_x)v(x) &= \frac{-v(x)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

On en déduit que :

$$\|R(\lambda, \partial_x)\| = \sup_{\|v\|=1} \frac{\|v(x)\|}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|}.$$

Il est fait de même pour la résolvante en boucle fermée, la propriété de stabilité exponentielle implique que :

$$\begin{aligned} \|R(\mu, A_e(x))\| &= \sup_{\|v\|=1} \|R(\mu, A_e(x))v\| \\ &\leq \sup_{\|v\|=1} \frac{\|v\|}{|\mu|} = \frac{1}{|\mu|}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Le coefficient α_i est alors majoré par (éq. (4.13)) :

$$\begin{aligned} |\alpha_i| &< \sup_{\mu \in \Gamma} a \|R(\mu, A_e)\| + 1)^{-1} \\ \text{d'où si } |\alpha_i| &\leq \inf_{\lambda \in \Gamma} \frac{|\lambda|}{a} = \frac{r_{BF}}{a}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

alors α_i vérifie (4.32), où r_{BF} est tel que (Figure 4.3) :

$$r_{BF} > |\omega_0| = |\sup\{Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A_e(x))\}| < 0|.$$

On peut donc supposer d'après cette remarque que poser :

$$\alpha_{i,max} = \frac{r_{BO}}{\sup(\|A_e^{(1)}\|, \|A_e^{(2)}\|)} \text{ et } \alpha_{p,max} = \frac{r_{BF}}{\sup\|D\kappa C\|}$$

sont optimaux d'un point de vue théorique.

4.4 Régulation

Il s'agit d'étudier le comportement asymptotique du système vis-à-vis d'une consigne variable c'est-à-dire de vérifier les qualités de poursuite de trajectoire de la structure en dépit d'une certaine classe de perturbations non mesurées ajoutées en sortie du procédé et d'erreurs de modélisation pouvant exister au sein du modèle. L'hypothèse de non persistance de la fonction $e(t)$ précise cette classe d'écart modèle-procédé. La propriété globale de régulation de la structure se traduit par la proposition suivante :

Proposition 4.4.1. *On suppose que le système et son modèle vérifient l'hypothèse de non persistance (pour la fonction $e(t) = y_s(t) - y(t)$). Le système en boucle fermée \tilde{A} étant générateur d'un semigroupe holomorphe exponentiellement stable, le système commandé a le comportement asymptotique suivant :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y_s(t) - v(t)] = 0.$$

Démonstration :

Il s'agit d'exprimer le régime permanent du système en boucle fermée, on étudie pour cela la valeur finale de la solution du système (4.7) terme à terme :

$$x_a(t) = T_{A(\alpha)}(t)x_a(0) + \int_0^t T_{A(\alpha)}(t-s)\tilde{B}v(s)ds. \quad (4.34)$$

– L'exponentielle stabilité du C_0 -semigroupe implique :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|T_{A(\alpha)}(t)x_a(0)\| \rightarrow 0.$$

– Par le théorème de Hille-Yosida (C.2.5) [63], [90], $A(\alpha)^{-1}$ existe et est borné, une intégration est donc possible, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^t T_{A(\alpha)}(t-s)\tilde{B}v(s)ds &= \int_0^t T_{A(\alpha)}(t-s)\tilde{B}[v(s) - v(t)]ds \\ &\quad + \int_0^t T_{A(\alpha)}(t-s)\tilde{B}v(t)ds \\ &= \int_0^t T_{A(\alpha)}(t-s) \tilde{B} [v(s) - v(t)]ds \\ &\quad - A(\alpha)^{-1}T_{A(\alpha)}(0) \tilde{B} v(t) + A(\alpha)^{-1}T_{A(\alpha)}(t)\tilde{B}v(t) \\ &= \int_0^t T_{A(\alpha)}(t-s) \tilde{B} [v(s) - v(t)]ds \\ &\quad - A(\alpha)^{-1}\tilde{B}v(t) + A(\alpha)^{-1}T_{A(\alpha)}(t)\tilde{B}v(t). \end{aligned} \quad (4.35)$$

- Le terme $A(\alpha)^{-1}T_{A(\alpha)}(t)\tilde{B}v(t)$ est asymptotiquement nul par la stabilité de $T_{A(\alpha)}(t)$.
- Le terme intégral peut être majoré par une variable devenant nulle quand $t \rightarrow \infty$.
En effet :

- \tilde{B} est borné puisque composé d'éléments bornés, donc il existe une constante N positive telle que :

$$\|\tilde{B}\| < N.$$

- La consigne $v(t)$ étant également supposé non persistant, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $T > 0$ tel que :

$$\|v(t) - v(s)\| < \frac{\epsilon\omega}{2MN}, \text{ pour } s, t \geq T,$$

où M et ω sont donnés par la stabilité exponentielle, i.e. :

$$\|T_{A(\alpha)}(t)\| \leq M \exp^{-\omega t}.$$

De ce fait, les inégalités précédentes impliquent :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t T_{A(\alpha)}(t-s) \tilde{B} [v(s) - v(t)] ds \right\| &\leq N \int_0^t \|T_{A(\alpha)}(t-s)\| \|v(t) - v(s)\| \\ &\leq N \int_0^T \|T_{A(\alpha)}(t-s)\| \|v(t) - v(s)\| ds \\ &\quad + N \int_T^t \|T_{A(\alpha)}(t-s)\| \|v(t) - v(s)\| ds \\ &\leq MN \int_0^T \exp^{-\omega(t-s)} 2\|v\|_{max} ds \\ &\quad + MN \int_T^t \exp^{-\omega(t-s)} \frac{\epsilon\omega}{2MN} ds \\ &\leq 2\|v\|_{max} MN \frac{\exp^{-\omega(t-T)} - \exp^{-\omega(t)}}{\omega} \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2}(1 - \exp^{-\omega(t-T)}) \\ &\leq 2\|v\|_{max} \frac{MN}{\omega} \exp^{-\omega(t)} (\exp^{-\omega(T)} - 1) \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2}(1 - \exp^{-\omega(t-T)}) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

L'équation (4.35) se réduit au seul terme $A(\alpha)^{-1}\tilde{B}v(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Donc, on en conclut que la limite quand $t \rightarrow \infty$ de l'état du système commandé est :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_a(t) = - \lim_{t \rightarrow \infty} A(\alpha)^{-1}\tilde{B}v(t),$$

ce qui revient à écrire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(\alpha)x_a(t) + \tilde{B}v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_a(t) = 0.$$

De ce fait, chaque composante de $\dot{x}_a(t)$ tends vers 0, i.e. :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\zeta}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0.$$

Or, ce dernier par définition s'écrit :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) - y(t) - y_f(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) - y(t) - e(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) - y_s(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) - y_s(t) = 0,\end{aligned}\tag{4.36}$$

on garantie ainsi, par la structure IMC, la régulation de la sortie du procédé $y_s(t)$ à la consigne variable $v(t)$. □

4.5 Conclusion

L'originalité de ce chapitre n'est pas basée sur l'application de la théorie de la perturbation en elle même, celle-ci étant réalisée sans difficultés apparentes.

Un point intéressant est la détermination explicite des caractéristiques de certains opérateurs (comme l'opérateur CD ou la pseudo inverse W) et de la résolvante de l'opérateur en boucle ouverte du canal, ce qui permet de caractériser la résolvante de l'opérateur en boucle fermée.

Cela permet d'appliquer les résultats de la théorie de la perturbation en pratique. Ils permettent de préserver la stabilité de la boucle ouverte en boucle fermée (par exemple les conditions sur les paramètres de commande) par un correcteur simple, du type I ou PI.

Par ailleurs, les calculs menés ici peuvent être repris aisément pour des opérateurs similaires.

Chapitre 5

Simulations et Expérimentations

"En théorie, il n'y a pas de différence entre la théorie et la pratique,
mais en pratique, il y a une différence."
Yogi Berra, joueur de base-ball américain, 1925-...

Sommaire

5.1	Introduction	81
5.2	Simulations numérique	81
5.2.1	<i>Aspect numérique</i>	81
5.2.2	<i>Résultats des simulations</i>	83
5.3	Expérimentations	94
5.3.1	<i>Description du banc d'essais</i>	94
5.3.2	<i>Résultats expérimentaux</i>	97
5.4	Conclusion	116

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'ensemble des résultats obtenus à partir des simulations d'un ou plusieurs biefs et à partir des expérimentations effectuées sur le micro canal expérimental de Valence.

Dans une première partie, le choix du schéma de modélisation numérique est présenté ainsi que celui des paramètres.

La partie simulation s'en suit, les simulations ont été effectuées sous Matlab et Simulink.

Trois sections se distinguent,

- le contrôle de niveau pour un bief tant avec une vanne et un déversoir que deux vannes,
- le contrôle multibiefs,
- enfin le contrôle de niveau soumis à des perturbations.

La seconde partie est consacrée aux expérimentations avec en premier lieu une présentation du micro canal. Elle se découpe également en trois points :

- le contrôle de niveau pour un bief avec ou sans perturbations,
- le contrôle par l'approche multi-modèles,
- le contrôle multibiefs.

5.2 Simulations numérique

5.2.1 Aspect numérique

La structure de modèle interne utilisée dans ce mémoire nécessite dans la phase de mise au point, la résolution numérique en parallèle du modèle interne de commande (linéarisé) et du modèle complet du système (non linéaire).

Quand on connaît les difficultés numériques intrinsèques à la résolution des équations de Saint-Venant [34], [38], [61], on comprend la nécessité de l'attention à donner à cette étape. Par ailleurs, même en temps réel la structure calcule le modèle en parallèle, pour l'évaluation de la commande.

a. *Discrétisation des EDP*

La méthode de semi-discrétisation est choisie pour l'intérêt que cela donne à utiliser les routines d'intégration numérique d'équations différentielles ordinaires contenues dans la plupart des bibliothèques de logiciels. Donc, seules les dérivées spatiales sont approchées par différence finie.

Cette discrétisation s'est effectuée sur la base d'un θ schéma amont aval, $\theta = 1/2$, c'est à dire que la valeur à l'instant i est calculée à partir de $i - 1/2$ et $i + 1/2$, tous deux avec

le même poids :

$$f(i) = \frac{1}{2}f(i - 1/2) + \frac{1}{2}f(i + 1/2).$$

Ce choix est la conséquence de la condition de fluvialité (2.20), cette dernière implique que l'une des valeurs propres est positive, l'autre négative. Donc l'information monte et descend le long du canal.

Le logiciel Matlab est utilisé pour la résolution du système final.

b. Les valeurs numériques

Les conditions de simulations sont très importantes pour les conclusions sur la validité des résultats et des conclusions à tirer. A ce niveau il faut définir :

- les paramètres constants du modèle,
- les valeurs plausibles des grandeurs de fonctionnement,
- les valeurs "optimales" des paramètres de commande, car les valeurs théoriques sont des valeurs garantissant à coup sûr la propriété de stabilité sans aucune autre performance.

Les travaux menés extérieurement ou en parallèle par les autres membres de l'AS Canaux d'irrigation, cités dans ce mémoire, ont largement contribué à "caler" un modèle non aberrant dans cette phase de simulation (et par la suite pour le canal expérimental). Ainsi, les travaux de M.L. Chen [3] et S. Chaussinand [2] ont permis d'avoir une très bonne initialisation de tous les paramètres sans la phase habituelle d'identification (coefficients de vannes, etc..). Cela comprend également les valeurs de fonctionnement plausibles, i.e. des états d'équilibre non aberrants.

L'échelle des hauteurs est le décimètre, ce choix se justifie par le fait que d'une part la profondeur du canal est de l'ordre du décimètre, d'autre part les simulations en mètre créent des erreurs numériques (les calculs sont alors de l'ordre de 10^{-15} , ils ne sont pas gérés par Matlab). L'unité de temps est la seconde.

Notons d'ores et déjà que le système des écoulements peu profonds à surface libre est un système lent, ainsi que la propagation d'informations. Cela se traduit par des simulations, et surtout des expérimentations qui se comptent en minutes.

La simulation en boucle ouverte a permis de valider le schéma numérique utilisé en l'appliquant au système non linéaire. Elle a également permis d'obtenir les coefficients de la matrice CD , pour réaliser les simulations en boucle fermée, par la relation (4.2). Les essais en boucle ouverte n'apportant rien de spécifique, seuls des résultats en boucle fermée sont donnés.

5.2.2 Résultats des simulations

- Trois types de simulations ont été réalisés représentant les cas étudiés dans ce travail :
- contrôle du niveau dans un bief,
 - contrôle du niveau dans le cas multibiefs,
 - contrôle sous l'effet de perturbations.

Dans les trois cas, on suppose que **la pente I est non nulle**, sa valeur est prise dans la plage des grandeurs du micro-canal de Valence (de l'ordre de 1.60/00). Il en est de même pour **la pente de frottement $\mathbf{J}(\mathbf{z}_e(\mathbf{x}))$** .

Dans le chapitre 4, une majoration des termes α_i et α_p est donnée pour assurer la stabilité exponentielle du C_0 -semigroupe en boucle fermée.

Par exemple, la première équation de (4.13) implique que $\alpha_i < 1$,

$$0 \leq \alpha_i < \min_{\lambda \in \Gamma} (a \|R(\lambda; A_e)\| + 1)^{-1}$$

cette condition est suffisante pour garantir la stabilité, mais pas nécessaire.

Ces valeurs dépendent du point de fonctionnement.

Dans le cas d'une commande proportionnelle intégrale, la valeur maximale de α_i dépend de la valeur du paramètre α_p par les équations (4.13), puisque l'opérateur A_e s'écrit en fonction de α_p .

a. Contrôle de niveau dans le cas monobief

Deux cas se distinguent dans l'étude d'un bief : le cas d'un bief avec déversoir et celui d'un bief avec deux vannes. Ce dernier cas a été plus facile à traiter, en effet le réglage des différentes valeurs ayant déjà été effectué dans le cas du déversoir.

Les simulations ont donné des résultats cohérents du fait que les paramètres du canal (entre autre les coefficients de vannes et de déversoir) ont été définis auparavant [2].

a.1 Le cas du déversoir : variations des paramètres commande

Trois essais sont présentés, ils ont tous les mêmes conditions initiales et ne se différencient que par les valeurs des coefficients de la commande intégrale α_i et de la commande proportionnelle α_p :

$$u(t) = \alpha_i \kappa_i \zeta(t) + \alpha_p \kappa_p \dot{\zeta}(t).$$

Les conditions initiales sont :

$$z_e(0) = 1.017dm, \quad q_e = 1dm^3.s^{-1},$$

La hauteur de l'obstacle à l'aval, dans le cadre des simulations, ne peut être réglé de façon quelconque. Pour une hauteur d'eau donnée en amont, il faut régler l'ouverture de la vanne amont pour que les conditions aux limites aient un sens.

Explicitons ceci sur l'exemple suivant ; d'après les conditions initiales la hauteur d'eau à l'aval du bief est donnée par l'état d'équilibre, et est égale à $z_e(L) = 1.146dm$. La condition limite amont établit que l'ouverture de la vanne :

$$u_e = \frac{q_e}{K_1 \sqrt{2g(z_{am} - z_e(0))}} = 0.097dm,$$

et la condition aval donne la hauteur de l'obstacle à l'aval :

$$h_s = z_e(L) - \frac{q_e^{2/3}}{(2gK_2^2)^{1/3}} = 0.919dm.$$

Les paramètres de commande prennent respectivement, dans les trois cas, les valeurs décrites dans le Tableau 5.1, les valeurs théoriques y sont également citées.

COEFFICIENTS DE LA COMMANDE

VARIATIONS DE LA CONSIGNE

	α_i	α_p	$\alpha_{i,max}$	$\alpha_{p,max}$	temps	$r(t)$
essai 1	0.5	0	2.10^{-3}	2.10^{-3}	$0 \leq t \leq 130$	$r(t) = r_0 = 1.146dm$
essai 2	1	0	2.10^{-3}	2.10^{-3}	$130 \leq t \leq 650$	$r(t) = 1.14 * r_0 = 1.306dm$
essai 3	1	0.5	3.10^{-3}	2.10^{-3}	$650 \leq t \leq 1000$	$r(t) = 0.95 * r_0 = 1.09dm$

Tableau 5.1 : Déversoir ; commande et consigne

La consigne imposée dans tous les essais est décrite dans le Tableau 5.1, il s'agit du niveau d'eau souhaité à l'aval du bief. On pose $r_0 = z_e(L) = 1.146dm$.

Le but est ici de mesurer la sensibilité du système à ces paramètres de commande, Tableau 5.1 :

- pour les deux premiers essais, $\alpha_p = 0$, il s'agit d'une commande de type intégral, avec des réglages différents,
- et d'une commande proportionnelle intégrale pour le troisième essai.

Les résultats de ces simulations correspondent à la Figure (5.1).

L'erreur entre le modèle et le système n'est pas nulle, et varie selon que l'on s'éloigne (moins de 5% en moyenne pour des variations inférieures à $\pm 20\%$ en hauteur) ou que l'on se rapproche de l'état d'équilibre. Pour les exemples donnés ci-dessus, l'erreur maximum est inférieure à 4%.

Remarque 5.2.1.

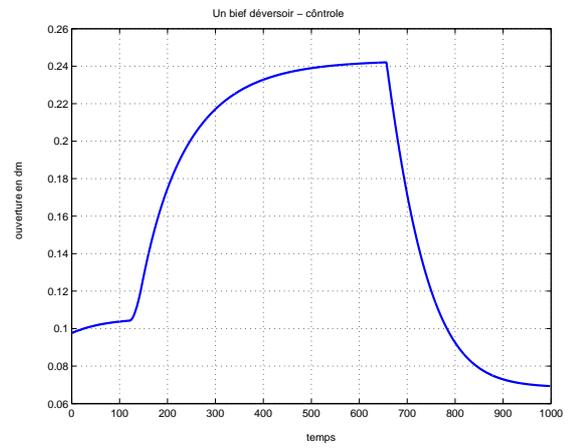
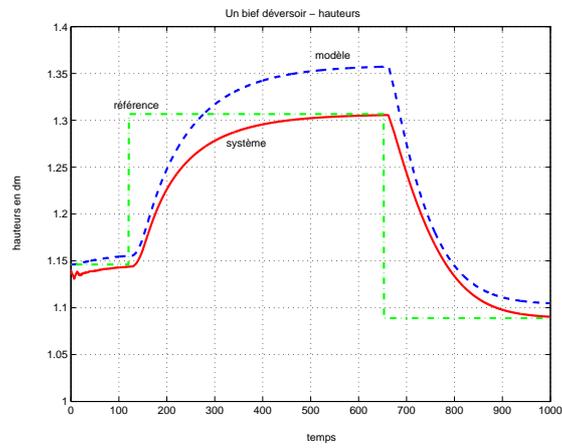
Toutes les hauteurs ne sont pas accessibles à cause de l'obstacle à l'aval, puisqu'il a été supposé que le déversoir est noyé (Chapitre 2). Un niveau minimum à l'aval du bief, en plus de la hauteur critique (condition de fluvialité), doit donc être garanti pour respecter cette hypothèse (n'oublions pas que du point de vue des simulations, la hauteur de l'obstacle h_s peut être nulle, et qu'il en va de même sur le micro canal).

Les résultats sont concluants, mais on constate déjà que le choix des paramètres de commande influe sur la convergence et la rapidité du système.

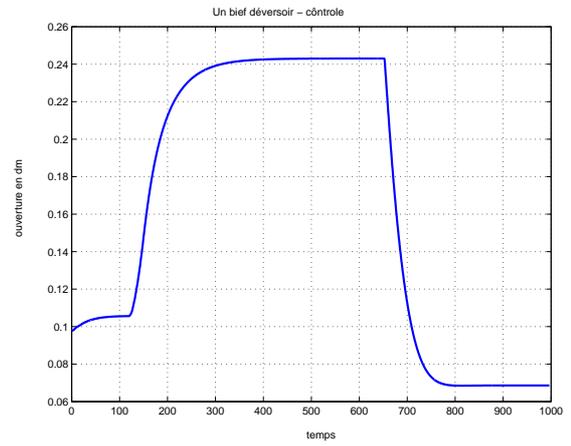
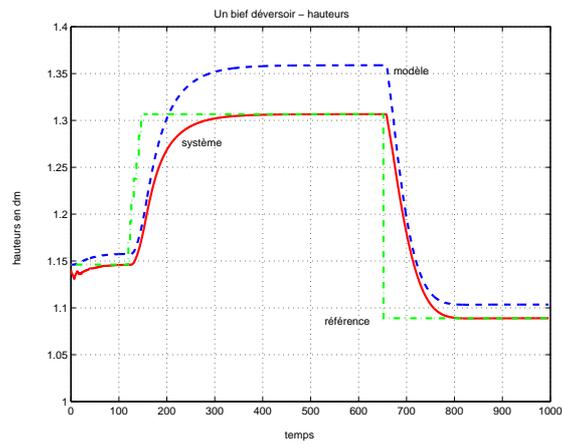
Notons qu'une commande prédictive a fait l'objet d'un stage de DEA [22] cette année, avec des résultats concluants.

Le passage au cas un bief deux vannes a pu se faire alors très rapidement, les principales difficultés ayant été éliminées après le cas déversoir.

Essai 1 :



Essai 2 :



Essai 3 :

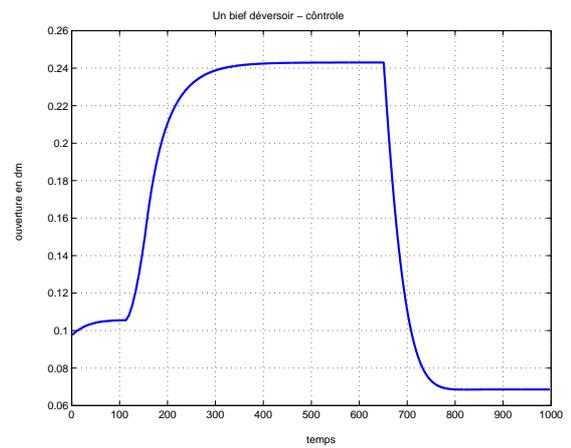
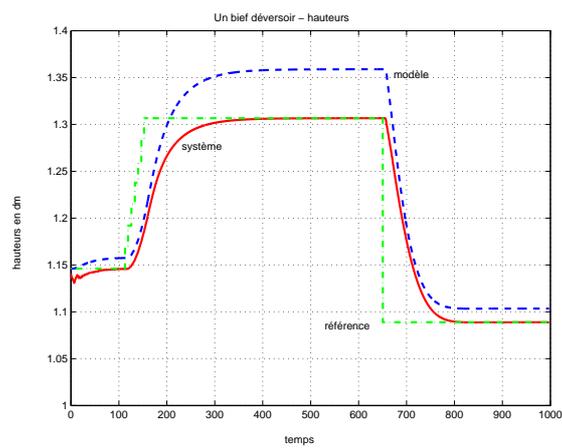


Figure 5.1 : Déversoir : hauteurs et ouverture de la vanne amont

a.2 Le cas d'un bief à deux vannes

Deux types d'essais sont réalisés, le premier a pour but de mesurer l'influence des paramètres de la commande comme pour le cas déversoir, l'objectif du second est de mesurer l'influence sur le système des variations et des temps de réponse de la consigne.

* TROIS PREMIERS ESSAIS : VARIATION DES PARAMÈTRES DE LA COMMANDE

Comme précédemment, nous allons donner trois résultats de simulations, à peu près similaires au cas du déversoir, afin de comparer leur dynamique :

- pour les deux premiers essais, $\alpha_p = 0$, il s'agit d'une commande de type intégral, avec des réglages différents,
- et d'une commande proportionnelle intégrale pour le troisième essai.

Les coefficients de la commande α_i , α_p sont donnés dans le Tableau 5.2, ainsi que leurs valeurs maximales théoriques.

COEFFICIENTS DE COMMANDE

VARIATIONS DE LA CONSIGNE

	α_i	α_p	$\alpha_{i,max}$	$\alpha_{p,max}$	temps	$r(t)$
essai 1	0.5	0	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$0 \leq t \leq 130$	$r(t) = r_0 = 1.022dm$
essai 2	1	0	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$130 \leq t \leq 650$	$r(t) = 1.16 * r_0 = 1.185dm$
essai 3	1	1	$3 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$650 \leq t \leq 1000$	$r(t) = 0.9 * r_0 = 0.92dm$

Tableau 5.2 : Bief avec deux vannes : commande et consigne

Les conditions initiales sont les suivantes; le débit, la hauteur amont, les ouvertures des vannes amont et aval à l'équilibre sont donnés :

$$Q_e = 2dm^3.s^{-1}, \quad z_e(0) = 0.843dm, \quad u_{0,e} = 0.35dm, \quad u_{L,e} = 0.18dm.$$

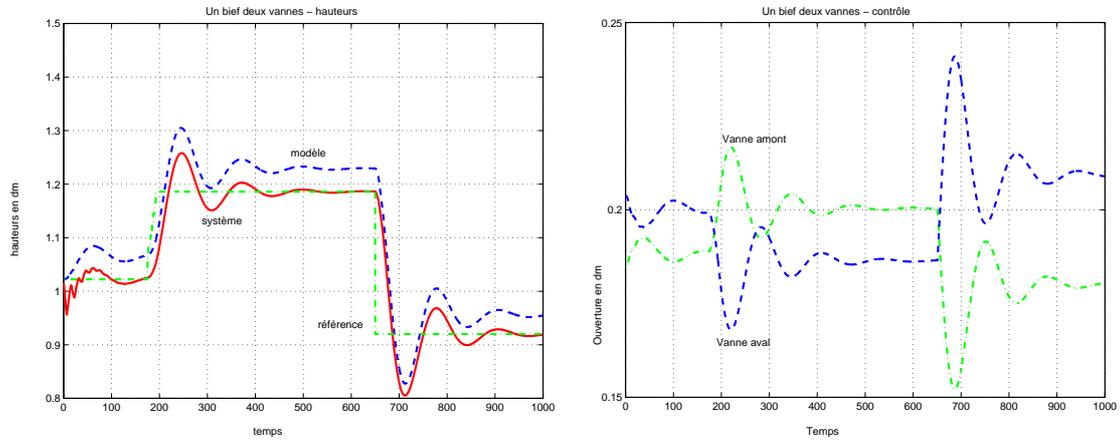
Les ouvertures de vannes et les hauteurs d'eau du système et du modèle en sortie sont représentées Figure 5.2, les variations de la consigne étant décrites dans le Tableau 5.2.

La hauteur d'eau minimale de simulation est la hauteur critique z_c .

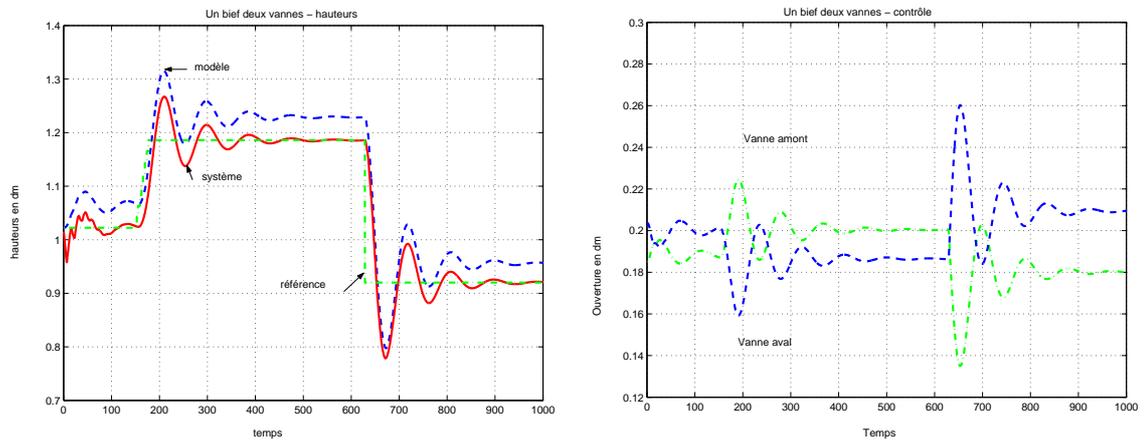
La dynamique d'un bief avec deux vannes est plus rapide que celle d'un bief avec déversoir. De ce fait, le système est plus sensible aux paramètres de commande, et donc à l'instabilité.

Il en est de même pour l'erreur de modélisation, qui reste toutefois inférieure à 5%.

Essai 1 :



Essai 2 :



Essai 3 :

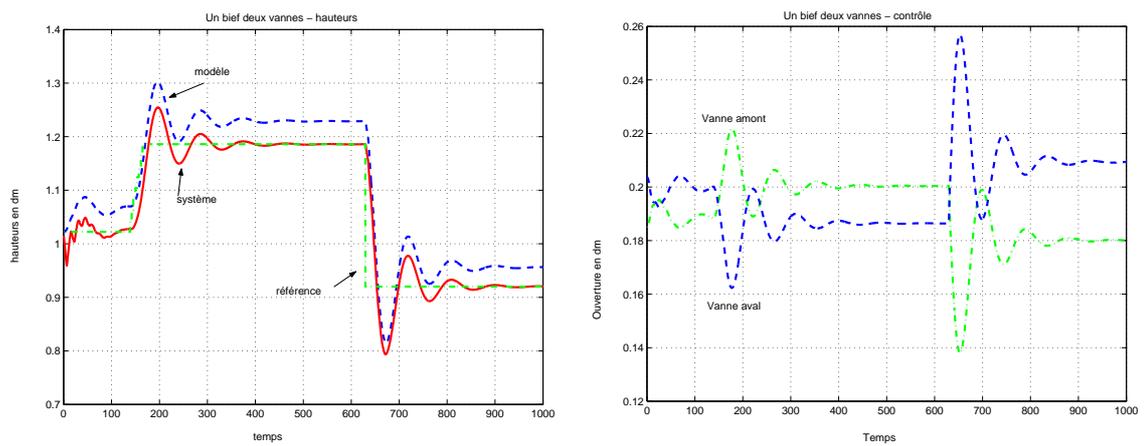


Figure 5.2 : Bief avec deux vannes ; Hauteurs et ouverture des vannes

* QUATRIÈME SIMULATION : VARIATION DE LA CONSIGNE

La simulation qui suit a pour objectif de montrer que le dépassement dépend du type de consigne, et est plus ou moins important même pour des grandes amplitudes, Figure 5.3. Sur la Figure 5.4, le modèle de référence est redonné à part.

Les données sont celles de l'essai n°3, cité précédemment.

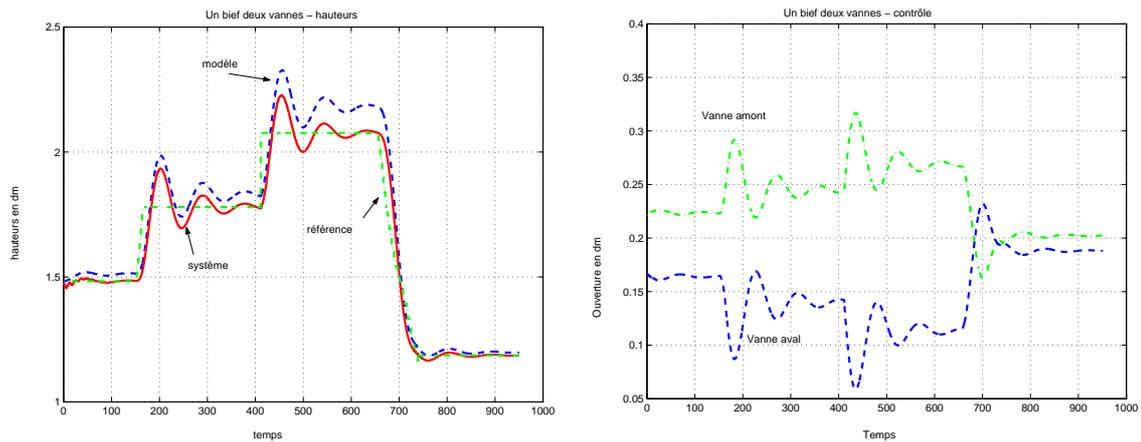


Figure 5.3 : Un bief deux vannes ; variation des pentes de la consigne

- + 20% par rapport à l'état initial, la pente est moyenne,
- + 40% par rapport à l'état initial, la pente est verticale,
- - 20% par rapport à l'état initial, la pente est faible.

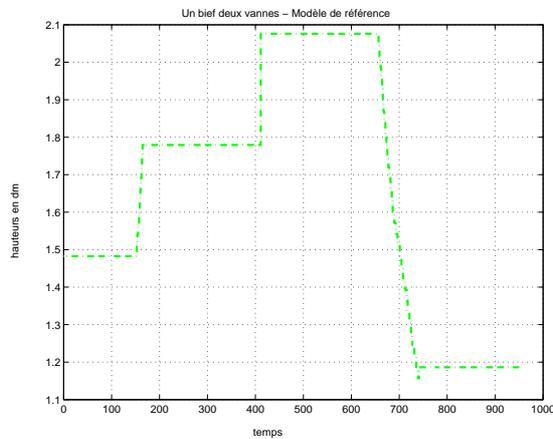


Figure 5.4 : Le modèle de référence

A nouveau, on constate qu'un choix approprié des paramètres de commande α_i et α_p est nécessaire, et que ces derniers doivent a priori varier selon le type de consigne demandée, pas seulement dans l'amplitude de cette consigne, mais également vis à vis du temps de réponse de la référence.

Les résultats sur un bief sont concluants, l'étude du cas multibiefs a donc été mise en place.

b. Contrôle de niveau dans le cas multibiefs

Les simulations ont porté successivement sur deux biefs avec trois vannes jusqu'à quatre biefs cinq vannes, ainsi qu'avec un déversoir. Pour ne pas alourdir, seul un résultat (trois biefs quatre vannes) est donné. Les consignes sont constantes, et les données initiales sont les suivantes :

$$Q_e = 2dm^3 \cdot s^{-1},$$

$$z_{e,1}(0) = 1.544dm, \quad z_{e,2}(0) = 1.424dm, \quad z_{e,3}(0) = 1.064dm,$$

$$u_{0,e} = 0.352dm, \quad u_{L,e} = 0.621dm, \quad u_{2L,e} = 0.323dm, \quad u_{4L,e} = 0.198.$$

COEFFICIENTS DE COMMANDE

VARIATION DE LA CONSIGNE

Bief	α_i	$\alpha_{i,max}$ = $\alpha_{p,max}$	Bief	Niveau d'équi- -libre (dm)	Hauteurs à atteindre
$n^\circ 1$	0.5	7.10^{-2}	$n^\circ 1$	$r_{0,L} = 1.3944$	$r_L(t) = 0.9 * r_{0,L} = 1.3944$
$n^\circ 2$	0.5	0.147	$n^\circ 2$	$r_{0,2L} = 1.2865$	$r_{2L}(t) = 0.9 * r_{0,2L} = 1.2865$
$n^\circ 3$	0.5	$7.8.10^{-2}$	$n^\circ 3$	$r_{0,3L} = 1.1238$	$r_{3L}(t) = 1.05 * r_{0,3L} = 1.1238$

Tableau 5.3 : Trois biefs avec quatre vannes ; commande et consigne

Les hauteurs d'eau du système et du modèle en sortie et les ouvertures des vannes sont représentées Figures 5.5 et 5.6 respectivement, les variations de la consigne étant décrites dans le Tableau 5.3.

Quelques difficultés sont apparues par rapport aux temps de calcul et pour définir les conditions initiales. Ces dernières doivent être réglées en tenant compte des lois physiques, comme par exemple : le niveau d'eau à l'aval d'un bief i ne peut être inférieur au niveau d'eau à l'amont du bief $i + 1$, du moins à l'équilibre, ceci indépendamment de la pente des biefs.

Les résultats en monobief comme en multibiefs donnent des résultats satisfaisant dans le cas le plus simple, i.e. non perturbé.

Reste donc à étudier le comportement du système lorsqu'il soumis à des perturbations raisonnables. Deux types de perturbation sont étudiées.

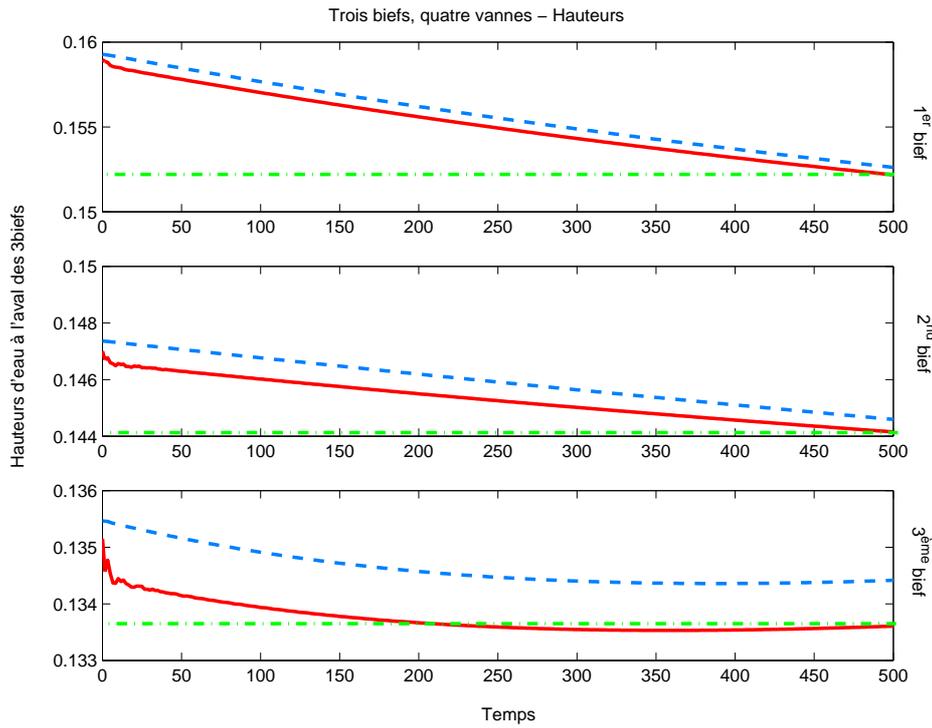


Figure 5.5 : Trois biefs avec quatre vannes : hauteurs

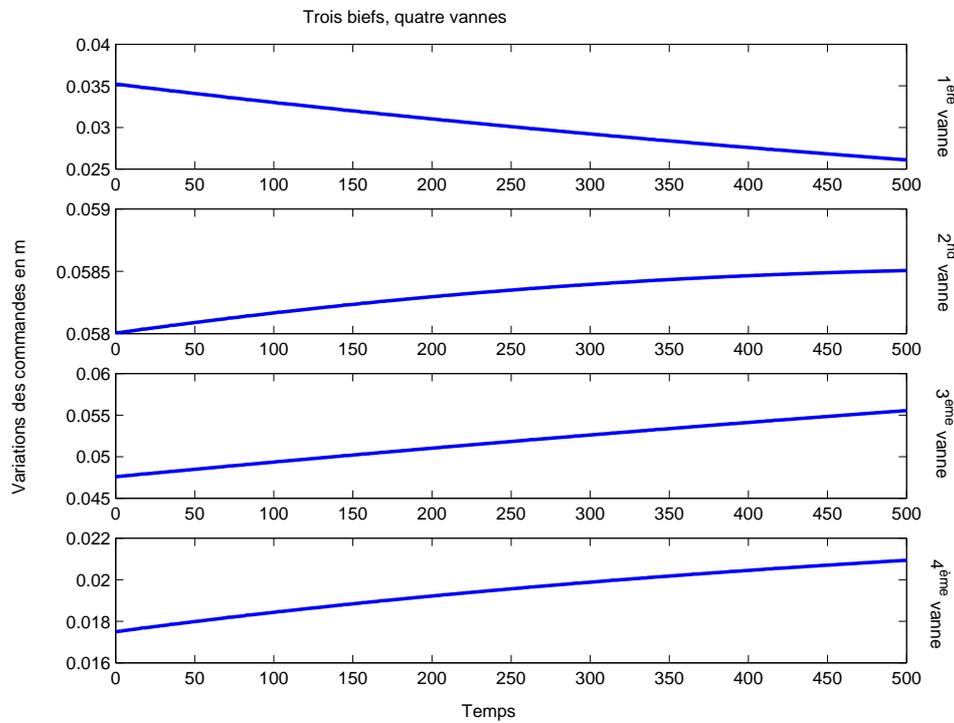


Figure 5.6 : Trois biefs avec quatre vannes : ouverture des vannes

c. Simulations de perturbations

Rappelons les équations (1.8)-(1.9) de Saint-Venant généralisées décrites au chapitre 1 :

$$\partial_t S + \partial_x Q = q_l, \quad (5.1)$$

$$\partial_t Q + \partial_x \left(\frac{Q^2}{S} \right) + gS \partial_x Z + gbJZ = kq_l V. \quad (5.2)$$

Ces équations représentent le système dans la structure CMI, tandis que le modèle interne reste le modèle linéarisé **dans les deux cas étudiés ici**.

En effet, pour les deux résultats de simulation présentés, on considère que les perturbations ne modifient pas la quantité de mouvement, i.e. $k = 0$ et $q_l > 0$ comme :

- la pluie,
- des apports d'eau en un point du type branchement avec un canal secondaire transverse.

* PREMIÈRE SIMULATION : LA PLUIE

La première perturbation simulée est le phénomène de pluie, ce qui correspond vis à vis des équations à poser $k = 0$. Le cadre de la simulation est le suivant : un bief avec deux vannes est considéré et on pose $q_l = 0.0014 dm^3 \cdot s^{-1}$ pour ce qui est de la perturbation. Cela correspond à la Figure 5.7, avec les données initiales suivantes :

$$Q_e = 1 dm^3 \cdot s^{-1}, \quad z_e(0) = 1.32 dm,$$

$$\alpha_i = 1, \quad \alpha_p = 0, \quad \alpha_{i,max} = \alpha_{p,max} = 1.2 \cdot 10^{-3}.$$

La consigne est la suivante :

- $r_0 = 1.334 dm$,
- $r(t) = r_0$ pour $0 \leq t \leq 150$,
- $r(t) = 1.1 * r_0 = 1.468 dm$ pour $150 < t \leq 600$.

La prise en compte du phénomène de pluie est flagrante sur la 4^{ème} figure représentant l'ouverture des vannes.

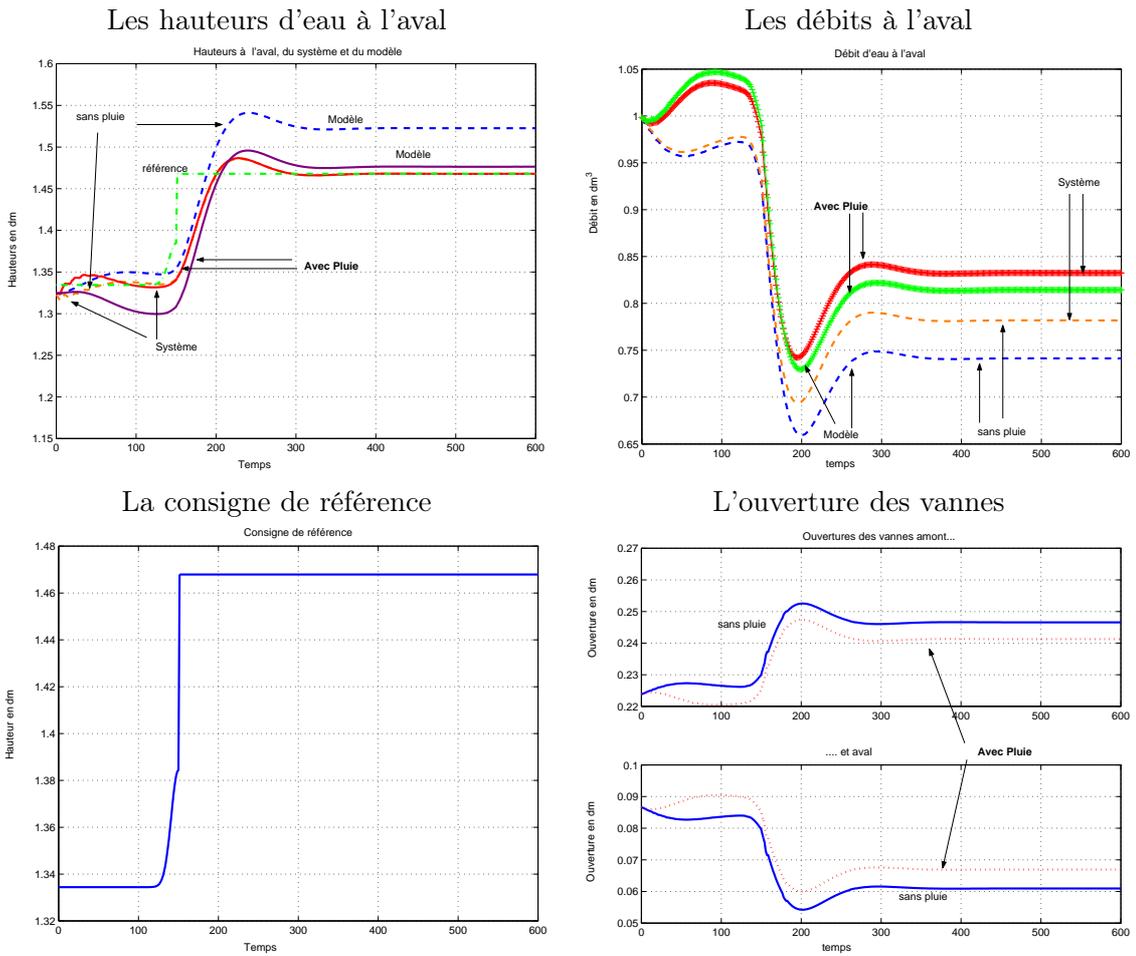


Figure 5.7 : Perturbation : phénomène de pluie

* DEUXIÈME SIMULATION : JONCTION D'UN CANAL SECONDAIRE

La deuxième simulation présente un apport d'eau en un point du canal, type branchement d'un bief secondaire (Figure 1.1). Cette perturbation a un impact plus ou moins important selon que le branchement se situe en amont ou pas du bief, en somme si la perturbation est absorbée par le canal.

On se place dans le cadre d'un bief avec déversoir. Les conditions initiales sont :

$$Q_e = 1dm^3.s^{-1}, z_e(0) = 1.017dm,$$

$$\alpha_i = 1, \alpha_p = 0, \alpha_{i,max} = \alpha_{p,max} = 2.10^{-3}.$$

L'ouverture de vanne à l'équilibre et la hauteur de l'obstacle en sortie sont :

$$u_e = 0.098dm, h_s = 0.9191dm,$$

la consigne est de rester à l'équilibre, i.e. $r(t) = r_0 = 1.146dm$.

Deux perturbations sont produites telles que $q_l = 0.1dm^3.s^{-1}$, une en amont du bief, la seconde au milieu du bief. Sur la Figure 5.8 sont représentées les réponses du système, et les ouvertures de la vanne.

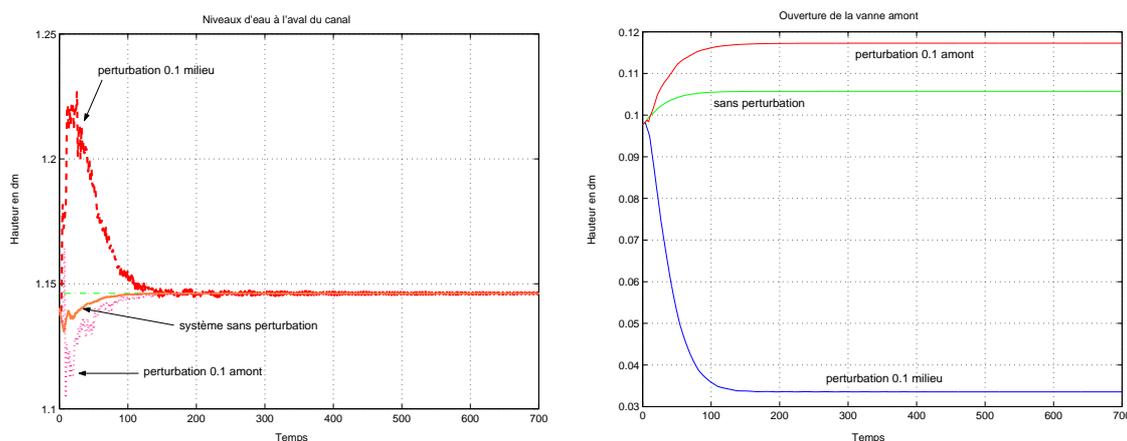


Figure 5.8 : Perturbation : jonction d'un canal secondaire

Selon l'endroit de l'apport d'eau, la réaction est totalement différente :

- lorsque la perturbation a lieu en amont du bief, sa propagation est absorbée le long du bief. La perturbation apparaît bien sur le relevé du capteur aval, mais de façon atténuée,
- lorsque la perturbation est située au milieu du bief, les répercussions sur l'aval du bief sont plus importantes, la perturbation n'étant pas absorbée en totalité.

Considérant que les résultats tant sur un bief qu'en multibiefs sont encourageants, les premières expérimentations sont réalisées sur le micro-canal de Valence.

5.3 Expérimentations

Le micro canal expérimental de l'ESISAR¹ /INPG² à Valence est utilisé comme système pilote dans le cadre de l'Action Spécifique Canaux d'Irrigation du CNRS. Il a été en grande partie construit par l'équipe GSYS³ du LAG⁴, et son fonctionnement a été finalisé et est maintenant sous la responsabilité du laboratoire LCIS⁵ à l'ESISAR.

5.3.1 Description du banc d'essais

a. La maquette

Le canal est constitué de deux biefs d'une longueur de 3,5m et d'une partie amont et aval de 0,5m chacune. Les parois sont en polycarbonate (Figure 5.9 a.). A la partie canal, vient s'ajouter un réservoir amont qui fait office de source et dont le niveau est constant, un réservoir aval et un réservoir intermédiaire qui sert de cuve de stockage. La structure est supportée par une poutre en treillis métallique. La circulation d'eau entre les réservoirs aval, intermédiaire et amont se fait dans des tuyaux fermés en PVC. La partie canal peut être inclinée grâce à un vérin.

La hauteur du déversoir à l'aval est variable et dans le cas du canal il s'agit d'un morceau de plexiglass qui se glisse dans une encoche prévue à cette effet. Il en existe deux, d'une hauteur de 5.2cm et 7.7cm respectivement.

Un schéma complet de la maquette a été réalisé avec l'ensemble des capteurs actionneurs (Fig. 5.10).

Les paramètres caractéristiques de ce canal ont été déterminés par S. Chaussinand [2], ainsi que les protocoles d'expérimentations menés et les résultats obtenus. Les valeurs de ces paramètres sont reportées dans le tableau 5.4.

paramètres	B (m)	L (m)	K ($m^{1/3}s^{-1}$)	μ_{van1}	μ_{van2}	μ_{van3}	μ_{dev}	penne ‰	Q_{max} (m^3s^{-1})
valeurs	0.1	7	97	0.6	0.65	0.73	0.66	1.6	0.009

Tableau 5.4 : Paramètres du canal de Valence

b. Instrumentation

Les capteurs de niveaux sont des capteurs à ultrasons (Figure 5.9b.) qui délivrent après traitement une tension de 0-10V correspondant à une hauteur d'eau de 0 à 20cm. Les vannes sont actionnées par des moteurs à courant continu asservis qui à la mise sous tension vont chercher leurs butées et ensuite ouvrent la vanne de manière linéaire de 0 à 20

¹École Supérieure d'Ingénieurs en Systèmes industriels Avancés Rhône-Alpes

²Institut National Polytechnique de Grenoble

³Automatique Grands Systèmes

⁴Laboratoire d'Automatique de Grenoble

⁵Laboratoire de Conception et d'Intégration des Systèmes

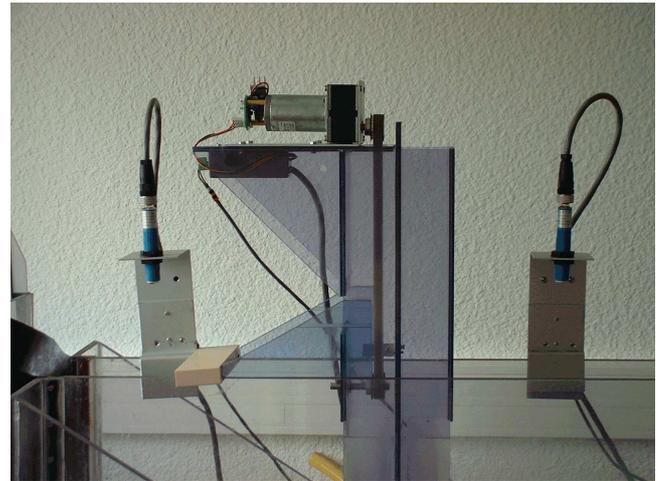


Figure 5.9 : a. Canal de Valence

b. Coupe d'un capteur

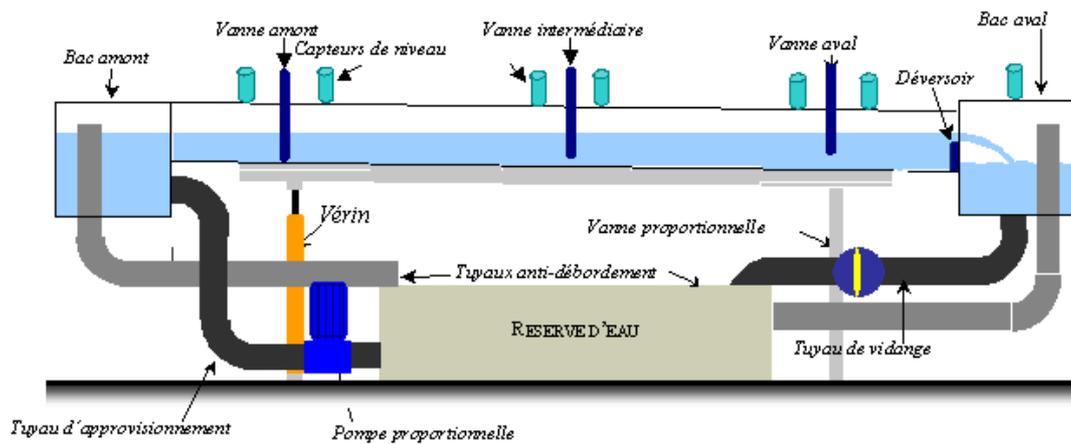


Figure 5.10 : Schéma de la maquette de micro-canal de Valence

5.3. Expérimentations

cm en fonction de leur tension d'entrée 0-10V. La vanne et la pompe proportionnelles sont destinées à assurer un niveau constant respectivement à l'aval et à l'amont du canal. Elles font l'objet d'une régulation externe assurée par un automate Crouzet de type Millénium II. Un PC de supervision récupère toutes les données issues des capteurs et gère tous les actionneurs via une interface dSPACE (Fig. 5.11).

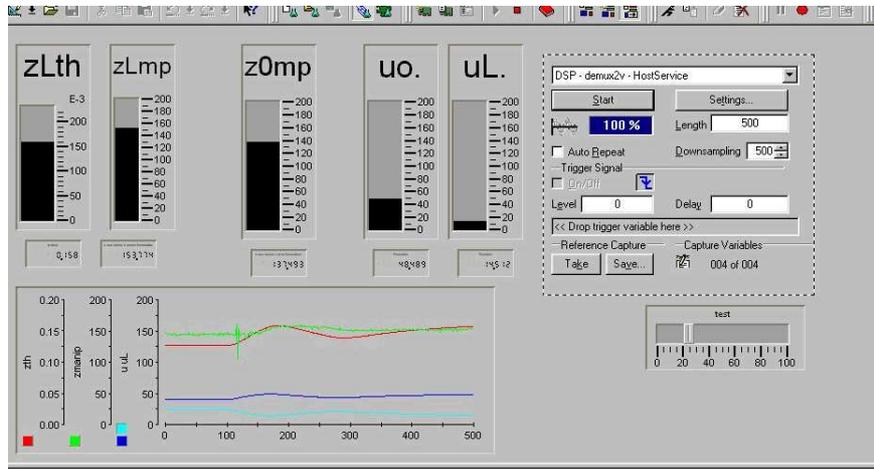


Figure 5.11 : Interface dSPACE

L'interface de communication avec la carte dSPACE s'effectue par Simulink (Figure 5.12). Elle est la même pour tous les utilisateurs de la maquette.

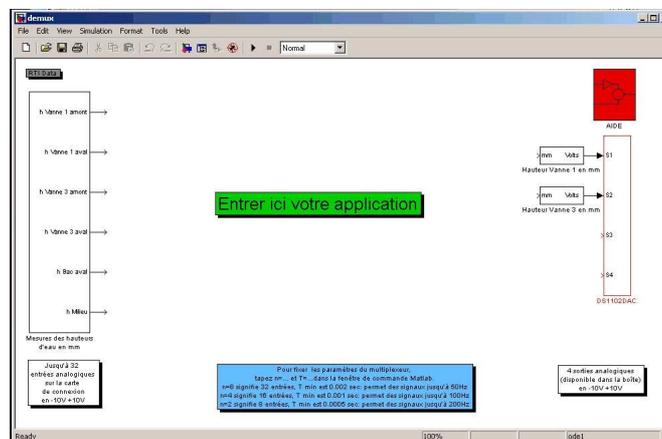


Figure 5.12 : Interface Simulink

Le pas de temps est fixé par les propriétés de la carte dSPACE (ses entrées sorties). Deux paramètres sont fixés :

$$n = 8, \quad T = 0.02 \Rightarrow dt = T/n = 0.0025s,$$

où n est le nombre d'entrées de la carte dSPACE, et T la période d'échantillonnage.

5.3.2 Résultats expérimentaux

Quatre types d'expérimentations ont été réalisées, représentant les trois cas d'études dans ce travail : le contrôle du niveau dans un ou plusieurs biefs, puis sous l'effet de perturbations dans les deux cas.

La quatrième expérimentation est une solution proposée afin de résoudre le problème de restriction autour d'un état d'équilibre : contrôle du niveau par l'approche multi-modèles.

Des perturbations sont réalisées lors des expérimentations dans le cas mono et multi-biefs.

Cette section se décompose en trois points :

- contrôle du niveau dans un bief, avec et sans perturbations,
- contrôle du niveau par l'approche multi-modèles,
- contrôle du niveau dans le cas multibiefs, avec et sans perturbations.

a. Contrôle du niveau dans un bief

a.1 Le cas du déversoir

Quatre expériences sont décrites ci-dessous :

1. un exemple témoin,
2. sa sensibilité aux paramètres de la commande,
3. sa robustesse par rapport aux variations de niveau de la consigne à atteindre (vis à vis de l'équilibre),
4. sa sensibilité aux perturbations.

Dans ces quatre cas, nous nous sommes limités à effectuer de la régulation.

Les échelles des premières expérimentations sont en seconde pour le temps, et en mètre pour les hauteurs. Notons que l'interface est, elle, programmée en millimètres. Ces côtes sont gardées, les deux échelles apparaissent donc sur les figures suivantes.

De même, seule la commande intégrale a été implémentée à ce stade, donc $\alpha_p = 0$ dans ce qui suit. La valeur maximale théorique de α_i est de l'ordre de 5.10^{-3} .

5.3. Expérimentations

* PREMIÈRE SIMULATION

Pour la première simulation, le débit, la hauteur amont, l'ouverture de la vanne amont à l'équilibre sont donnés, ainsi que la vitesse de simulation :

$$q_e = 0.001m^3.s^{-1}, \quad z_e(0) = 0.082m, \quad u_e = 0.014m, \quad \alpha_i = 0.05.$$

La consigne est d'atteindre +20% par rapport à l'état d'équilibre $r_0 = 0.095m$, soit un niveau de $rdL = 1.2 * r_0 = 0.114m$ à l'aval (Figure 5.13).

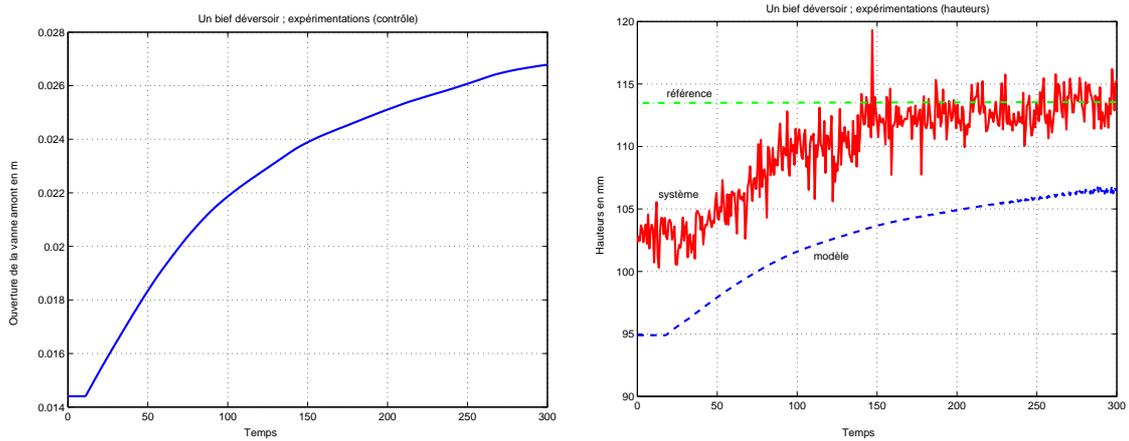


Figure 5.13 : Un bief déversoir ; ouverture de la vanne et hauteurs d'eau

L'erreur initiale est conservée tout le long, tout comme lors des simulations.

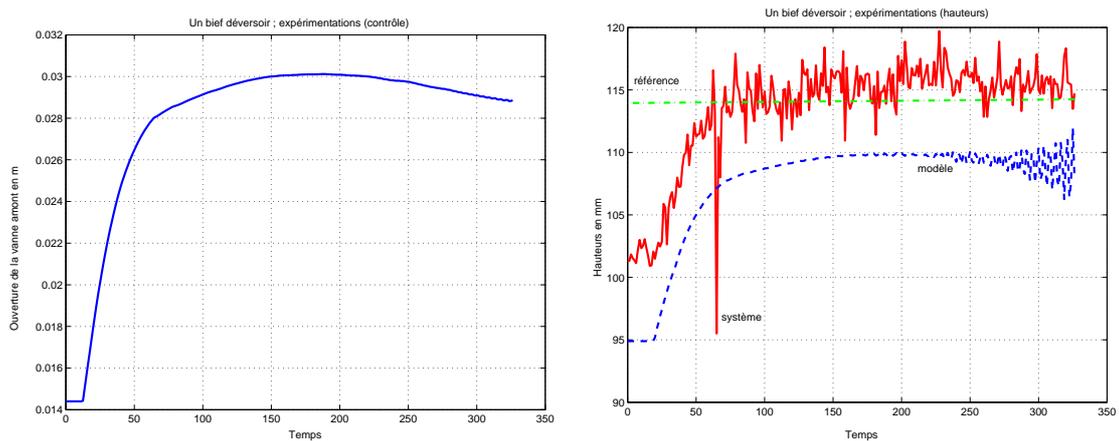


Figure 5.14 : Un bief déversoir ; $\alpha_i = 2$

* DEUXIÈME SIMULATION : PARAMÈTRE DE COMMANDE

La seconde simulation est quasi-identique, seul le paramètre de la commande de simulation a été augmenté ($\alpha_i = 2$), pour tester le seuil de stabilité vis-à-vis du paramètre de la commande α_i (Figure 5.14).

Une instabilité apparaît, tout comme lors des simulations théoriques. Elle est due a priori au fait que le seuil de stabilité $\alpha_i < 1$ est dépassé.

Des irrégularités du relevé capteurs apparaissent également (pics inopinés sur les courbes "systèmes" des différentes figures), elles sont provoquées par une ré-initialisation des moteurs des vannes.

* TROISIÈME SIMULATION : VARIATION DE LA CONSIGNE

Dans la troisième simulation, la consigne envoyée est d'atteindre un niveau de +50% par rapport à l'état d'équilibre $r_0 = 0.095m$, soit une hauteur $rdL = 1.5 * r_0 = 0.142m$ (Figure 5.15).

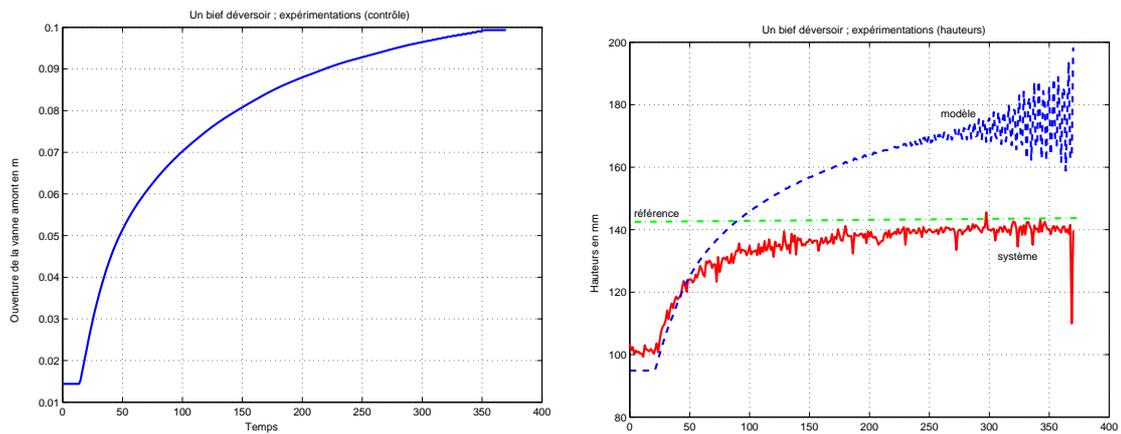


Figure 5.15 : *Un bief déversoir ; variation de 50%*

La conclusion vient clairement, les résultats pour des variations supérieures à 20% ne sont pas bons, voire conduisent à des instabilités du modèle, sans que le système ne converge pour autant.

* QUATRIÈME SIMULATION : PERTURBATIONS

Dans un quatrième temps, la robustesse de la commande est testée, pour voir comment elle réagit à de fortes perturbations : pour cette simulation, la hauteur du déversoir est de $0.13m$ (Les deux plaques de plexiglass formant les deux déversoirs sont placées l'une sur l'autre).

La perturbation consiste à enlever un des deux morceaux lors de la simulation aux temps $t = 15s$ et $t = 220s$. Parallèlement, une variation de -10% par rapport à l'état d'équilibre $r_0 = 0.173m$ est demandée, soit un niveau final de $rdL = 0.9 * r_0 = 0.155m$.

$$z_e(L) = 0.1727m, \quad h_s = 0.15m, \quad \alpha_i = 1.$$

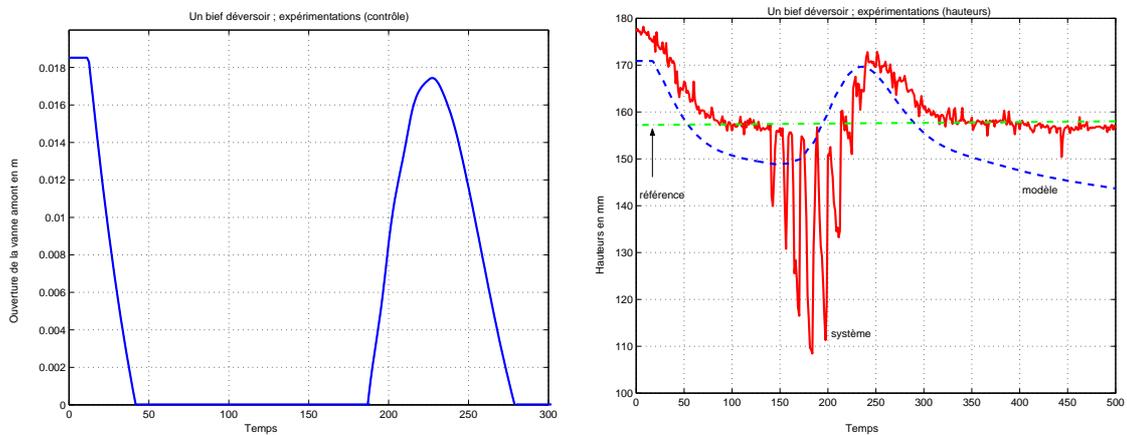


Figure 5.16 : Un bief déversoir ; perturbations

Les diverses ré-initialisations de la vanne amont ont provoqué d'autres perturbations. Malgré tout, le système et le modèle semblent cohérents l'un par rapport à l'autre. Une certaine robustesse peut donc être attribuée à l'ensemble.

Remarque 5.3.1. Sur les figures présentées, le système (ligne continue) semble avoir des oscillations importantes. Hormis celles attribuées aux ré-initialisations brutales des vannes, il s'avère que ces "oscillations" ne sont dues qu'à un problème d'échelle. En effet, il ne s'agit pas d'interférences possibles entre les moteurs électriques des vannes, le moteur de la pompe (et tous les appareils susceptibles d'être interférés sur les mesures) et les capteurs de niveaux. Il s'agit d'un mouvement d'ondulation (phénomène de "vagues") de la surface de l'eau. Ramené à une échelle 1 : 1, ces oscillations disparaissent au profit d'une courbe légèrement ondulante (Figure 5.17).

Les premières constatations et conclusions apparaissent :

- régler les problèmes d'initialisation,
- changer l'échelle des hauteurs car pour des petites hauteurs cela pose problème comme pour les simulations,

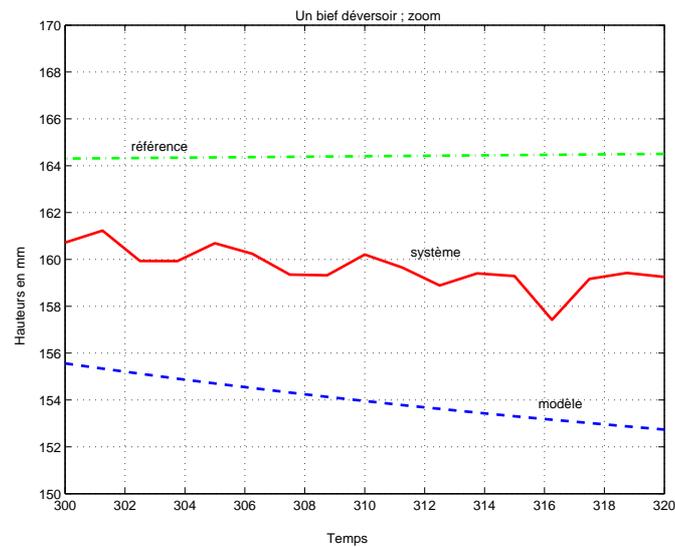


Figure 5.17 : *Un bief déversoir ; zoom*

- puisque la régulation donne de bons résultats, l’asservissement peut être envisagé,
- implémenter les filtres M_f et M_r , qui n’apparaissent pas lors des premiers essais,
- les résultats sont encourageants pour essayer le multibiefs, donc programmer sous Simulink ces expérimentations,
- trouver une solution pour ne plus être restreint à un niveau d’équilibre.

Jusqu’à maintenant, la consigne est lancée une fois l’équilibre demandé atteint. Le temps des expérimentations n’étant pas déterminé à l’avance, la consigne demandée est manuelle, à savoir qu’elle est modifiée en temps réel au travers de l’interface dSPACE. C’est donc ainsi que les premiers essais en asservissement sont effectués.

a.2 Le cas d'un bief deux vannes

Deux vagues d'expérimentations sont présentées, la première porte sur un essai réalisé auquel une perturbation inopinée s'est ajoutée.

La seconde introduit la commande proportionnelle intégrale. Elle comporte quatre essais qui se différencient par le choix des paramètres de commande α_i et α_p .

* PREMIÈRE EXPÉRIMENTATION : PERTURBATION

Les conditions initiales de la première expérimentation sont :

$$q_e = 2dm^3 \cdot s^{-1}, \quad z_e(0) = 1.14dm, \quad r_0 = 1.275dm,$$

$$u_{0,e} = 0.39dm, \quad u_{L,e} = 0.24dm \quad \alpha_i = 1 \text{ et } \alpha_{i,max} = \alpha_{p,max} = 10^{-2}.$$

La consigne est d'atteindre un niveau de +20% soit

$$rdL = 1.2 * r_0 = 1.2 * 1.275 = 1.53dm.$$

Lors de cette expérimentation une perturbation manuelle, au temps $t = 600s$, est effectuée, une main est mise sous le capteur amont de la vanne aval. Le capteur indique que le niveau d'eau augmente. La commande réagit en ouvrant les vannes dans le sens inverse (Figure 5.18).

La réaction de l'ensemble est immédiate, le modèle agit correctement puisque le niveau d'eau simulé diminue comme le niveau réel (on rappelle que le capteur indique un niveau d'eau croissant car une main est placée sous le capteur).

Cela pose le problème de la fiabilité des capteurs, et de leur gestion.

Les premiers essais sur l'asservissement sont réalisés.

Le problème de ré-initialisation des vannes est résolu.

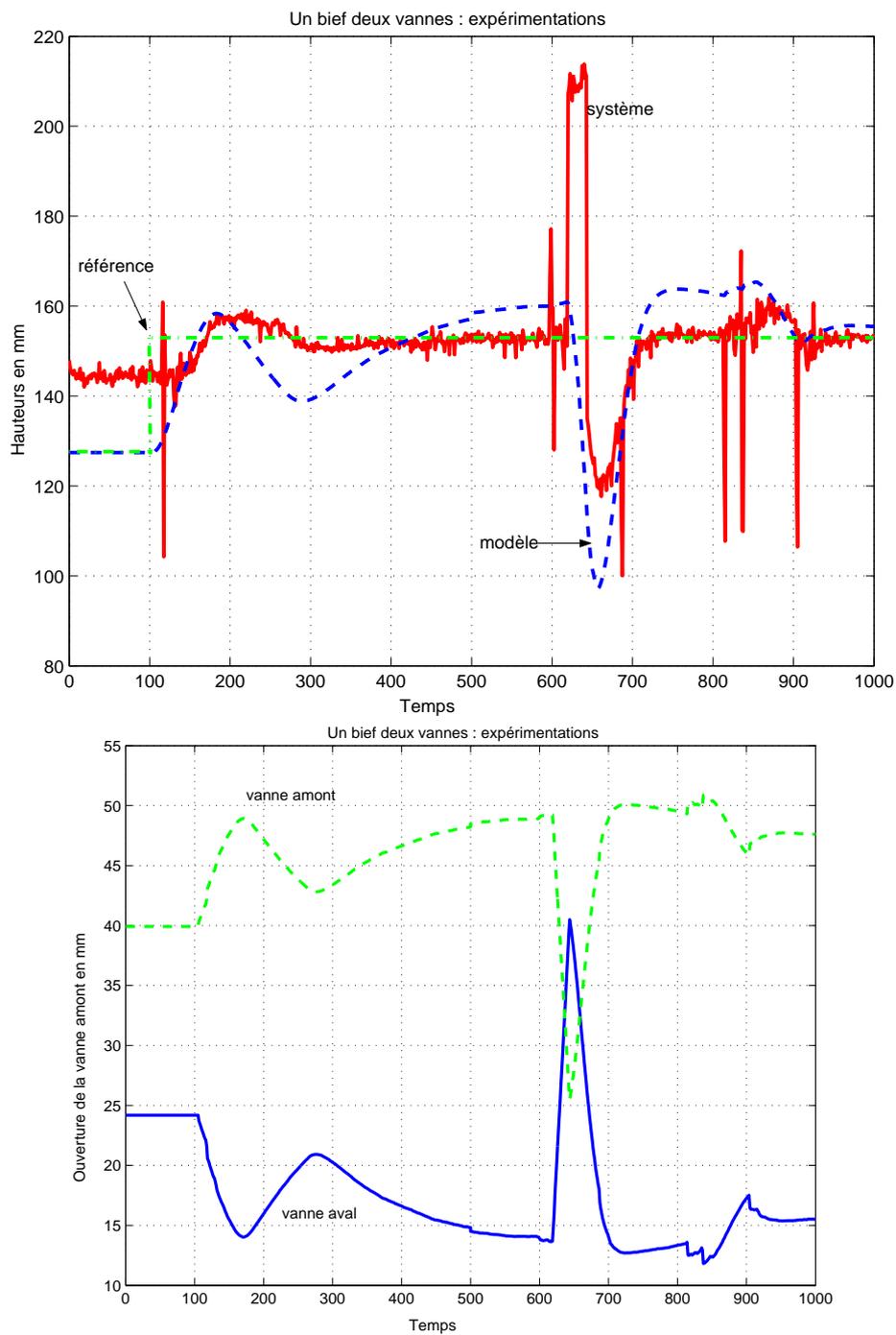


Figure 5.18 : Un bief deux vannes; ouverture des vannes et hauteurs d'eau

* DEUXIÈME EXPÉRIENCE : PARAMÈTRE DE COMMANDE

Une série d'essais est effectuée sur le cas d'un bief avec deux vannes, en asservissement, avec une commande proportionnelle intégrale, sur une échelle de hauteurs en décimètre.

Dans les quatre cas présentés, les conditions initiales sont :

$$Q_e = 2dm^3.s^{-1}, \quad z_e(0) = 1.344dm.$$

Les quatre essais suivants sont effectués avec des valeurs croissantes des coefficients de la commande α_i , et l'ajout du coefficient α_p pour la commande proportionnelle sur les deux derniers essais ($\alpha_{p,max} = 7.4.10^{-3}$). Leurs valeurs sont décrites Tableau 5.5), ainsi que les variations de la consigne par rapport à l'équilibre.

COEFFICIENTS DE COMMANDE

VARIATION DE LA CONSIGNE

	α_i	α_p	$\alpha_{i,max}$		Variation 1	Variation 2
essai 1	2	0	$7.4.10^{-3}$	essai 1	$r(t) = 1.2 * z_e(L)$	$r(t) = 0.9 * z_e(L)$
essai 2	4	0	$7.4.10^{-3}$	essai 2	$r(t) = 1.2 * z_e(L)$	$r(t) = 0.9 * z_e(L)$
essai 3	2	1	$1.5.10^{-2}$	essai 3	$r(t) = 1.2 * z_e(L)$	$r(t) = 0.9 * z_e(L)$
essai 4	2	1	$1.5.10^{-2}$	essai 4	$r(t) = 1.5 * z_e(L)$	$r(t) = 0.5 * z_e(L)$

Tableau 5.5 : Valeurs des paramètres de contrôle et variations de la consigne

Les résultats obtenus sont satisfaisants (Figure 5.19 pour les hauteurs, 5.20 pour les ouvertures de vannes).

De plus, l'amorce d'une instabilité est constatée. Elle est produite par un choix des coefficients de commande trop élevés.

Un autre problème apparaît, à savoir que pour des variations supérieures à $\pm 25\%$ autour d'un état d'équilibre, l'erreur est trop importante. La question de pallier à ce phénomène s'est donc posée.

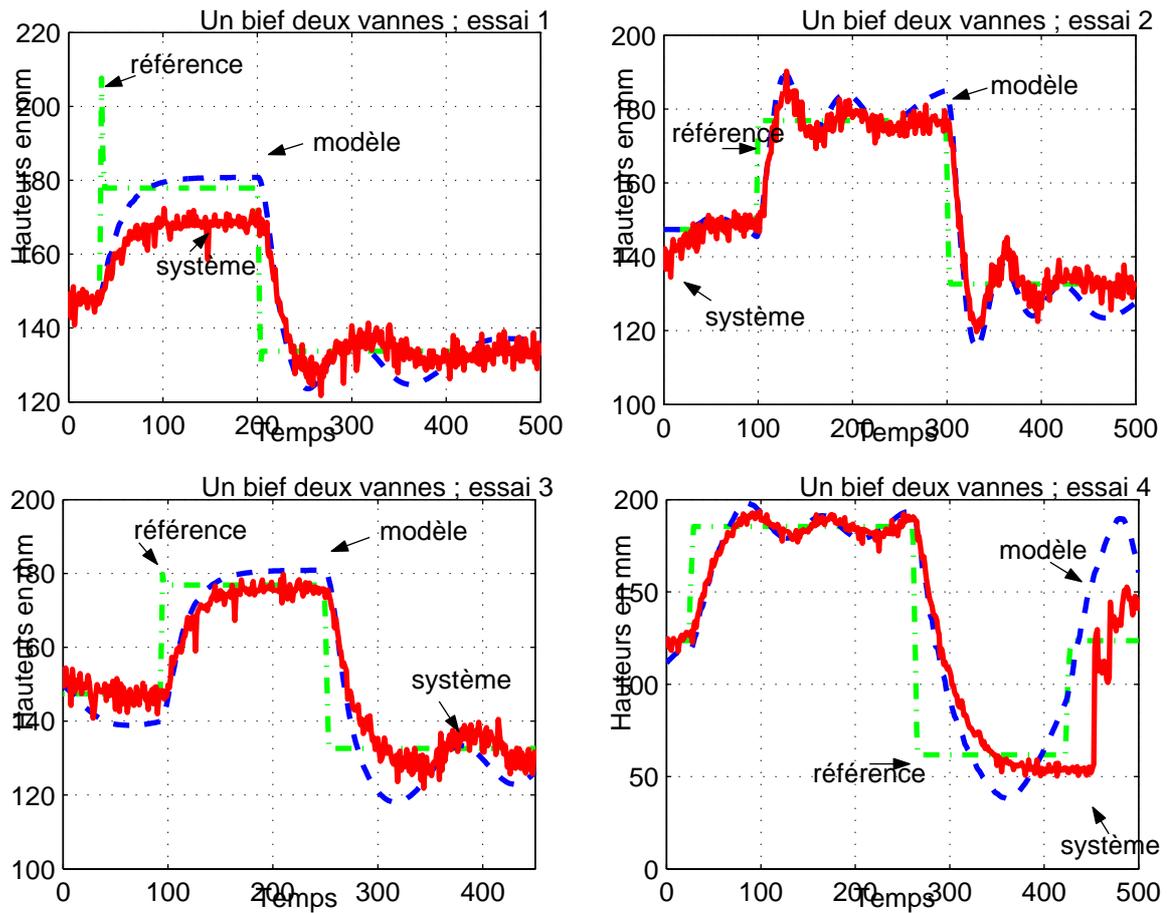


Figure 5.19 : Un bief deux vannes ; Hauteurs

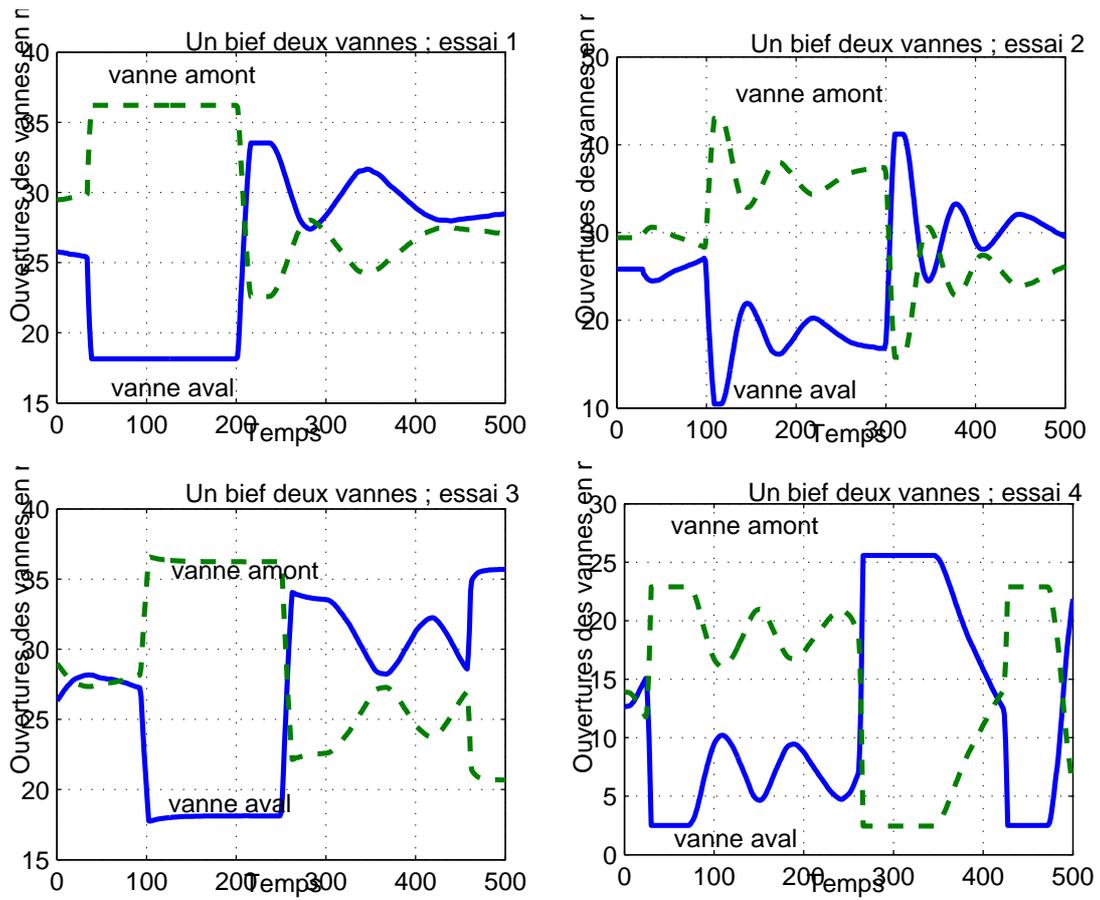


Figure 5.20 : Un bief deux vannes ; Ouverture des vannes

b. Contrôle multi-modèles

L'idée est de considérer non plus un, mais plusieurs états d'équilibre, et de passer selon la demande de l'un à l'autre. Les difficultés sont multiples : la principale est de savoir si l'interface a le temps d'assimiler les calculs, et si ces derniers peuvent être appliqués en temps réel.

Même si l'interface de calcul n'a pas posé de problème, à partir d'un certain nombre d'états d'équilibre, les calculs ne se font plus en temps réel et un décalage apparaît lors de l'expérimentation.

Deux expérimentations sont présentées, les débits et les paramètres de commande sont identiques. Le débit est à l'origine de $q_e = 1dm^3.s^{-1}$, et les paramètres de la commande

$$\alpha_i = 2, \alpha_p = 1, \alpha_{i,max} \simeq \alpha_{p,max} = 10^{-3}.$$

Le niveau d'équilibre dépend du niveau d'eau réel dans le micro canal.

Dans le cadre des expérimentations, le déversoir d'une hauteur de $5.2cm$ a été placé, de ce fait la hauteur d'eau minimum dans le canal est de $+7cm$. Pour des mesures de sécurité, l'arrêt d'urgence se déclenche lorsque le niveau d'eau dépasse $2dm$ sur les $2.5dm$ du canal. Les niveaux d'eau demandés lors de ces expériences varient donc entre $7.5cm$ et $19cm$. On ne parle plus en terme de variation par rapport à un état d'équilibre, mais en terme de commande globale (Tableau 5.6).

LES COMMANDES POUR ...
L'EXPÉRIMENTATION 1 L'EXPÉRIMENTATION 2

Temps	Variation	Temps	Variation
$t \leq 100s$	$r(t) = 1.92dm$	$t \leq 140s$	$r(t) = 0.7dm$
$105s \leq t \leq 290s$	$r(t) = 0.68dm$	$150s \leq t \leq 320s$	$r(t) = 1.3dm$
$295s \leq t$	$r(t) = 1dm$	$330s \leq t$	$r(t) = 1.8dm$

Tableau 5.6 : Multi-modèles : Consignes de références

Les résultats sont affichés cf. Figure 5.21.

Les essais sont plus que concluants, même s'il aurait été intéressant d'en faire d'autres, avec des paramètres de contrôle différents, une consigne plus douce, et sur un temps plus long.

L'approche multi-modèles fonctionnant, le cas multibiefs est traité.

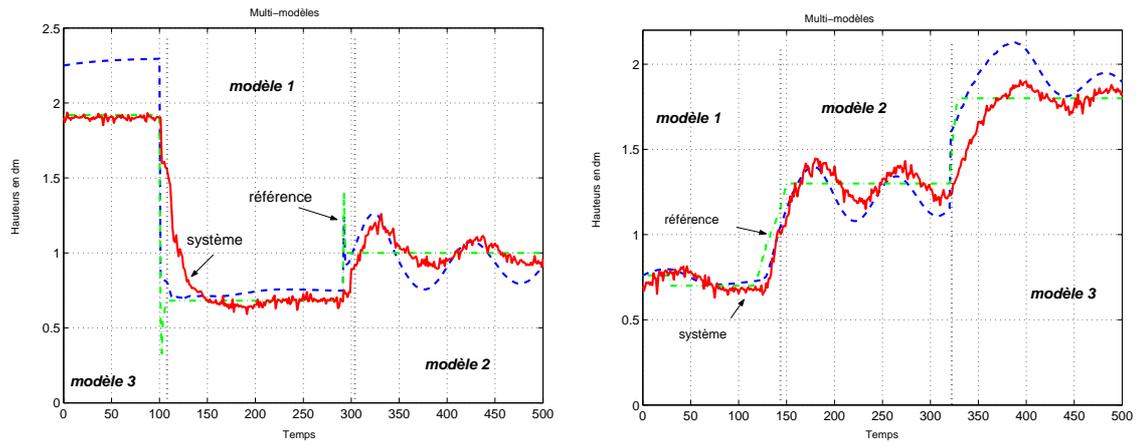


Figure 5.21 : Hauteurs variant du niveau d'eau minimum au niveau maximum

c. Contrôle du niveau dans le cas multibiefs

On se place dans le cas de deux biefs, trois vannes.

Dans la configuration en place sur le micro canal, le déversoir est placé trop près de la troisième vanne et donc, il provoque des perturbations non prises en compte par les équations.

En effet, une des hypothèses (hypothèse **H2**) des équations de Saint-Venant, est de supposer que la longueur L du bief est suffisante pour considérer un mouvement uniforme dans la direction latérale, ici ce n'est pas le cas. De plus, l'ajustement des paramètres est un point sensible pour obtenir une bonne précision lors des expérimentations.

Quatre expérimentations sont proposées ci-après :

1. un exemple témoin,
2. la sensibilité vis à vis des variations de la consigne,
3. les limites physiques inhérentes au modèle,
4. la robustesse aux perturbations.

c.1 Exemple témoin

L'expérimentation, Figure 5.22, est effectuée sans que tous les paramètres soient bien réglés.

Les conditions initiales sont :

$$q_e = 1 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}, \quad z_{e1}(0) = 1.217 \text{ dm}, \quad z_{e2}(0) = 1.017 \text{ dm}, \quad z_{av} = 0.73 \text{ dm}, \quad \alpha_i = 2,$$

pour des valeurs théoriques $\alpha_{i,max} \simeq 10^{-2}$, $\alpha_{p,max} \simeq 10^{-3}$.

La consigne est décrite Tableau 5.7.

Malgré un coefficient α_i élevé et des variations hors des limites fixées ($\pm 20\%$), l'erreur entre le modèle et le système reste inférieure à 10%. Globalement, le système suit la référence imposée, même si le modèle n'est pas aussi précis.

LES VARIATIONS DE LA CONSIGNE

PREMIER BIEF

SECOND BIEF

Temps	Variation $r_0 = 1.28dm$	Temps	Variation $r_L = 1.077dm$
$t \leq 85s$	$r(t) = r_0dm$	$t \leq 160s$	$r(t) = r_Ldm$
$90s \leq t \leq 330s$	$r(t) = 1.2 * r_0$	$160s \leq t \leq 320s$	$r(t) = 0.76 * r_L$
$330s \leq t \leq 475s$	$r(t) = 0.9 * r_0$	$325s \leq t$	$r(t) = 0.9 * r_L$
$480s \leq t$	$r(t) = 1.1 * r_0$		

Tableau 5.7 : Deux biefs trois vannes : consignes de références

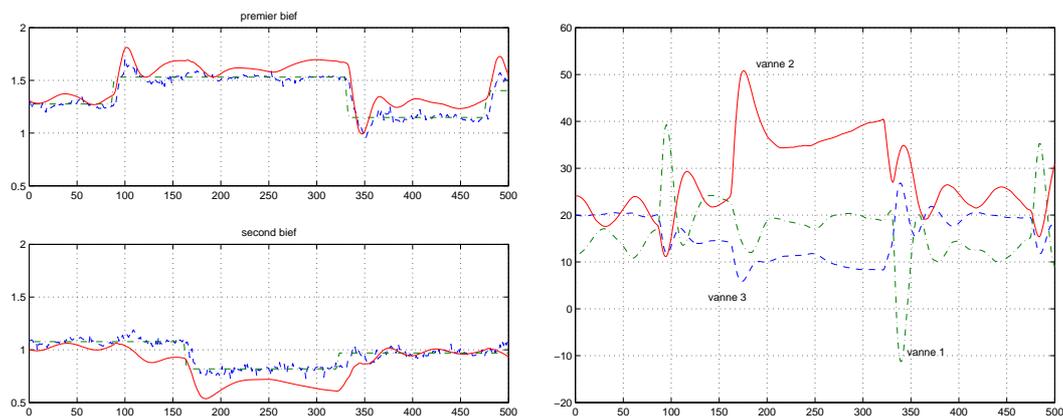


Figure 5.22 : Hauteur aval dans les 2 biefs (dm) et ouvertures des 3 vannes (mm)

c.2 Sensibilité aux variations de la consigne

On s'intéresse ici aux répercussions dues à des variations de consigne trop importantes. Les conditions initiales sont les suivantes :

$$q_e = 1dm^3.s^{-1}, z_{e1}(0) = 1.017dm, z_{e2}(0) = 0.817dm, z_{av} = 0.73dm, \alpha_i = 2,$$

pour des valeurs théoriques $\alpha_{i,max} \simeq 10^{-2}$, $\alpha_{p,max} \simeq 10^{-3}$.

La consigne demandée est donnée dans le tableau 5.8.

LES VARIATIONS DE LA CONSIGNE											
PREMIER BIEF	SECOND BIEF										
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <th style="width: 20%; text-align: center;">Temps</th> <th style="text-align: center;">Variation $r_0 = 1.08dm$</th> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$t \leq 295s$</td> <td style="text-align: center;">$r(t) = r_0dm$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$300s \leq t$</td> <td style="text-align: center;">$r(t) = 1.3 * r_0$</td> </tr> </table>	Temps	Variation $r_0 = 1.08dm$	$t \leq 295s$	$r(t) = r_0dm$	$300s \leq t$	$r(t) = 1.3 * r_0$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <th style="width: 20%; text-align: center;">Temps</th> <th style="text-align: center;">Variation $r_L = 0.88dm$</th> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$0 \leq t$</td> <td style="text-align: center;">$r(t) = r_Ldm$</td> </tr> </table>	Temps	Variation $r_L = 0.88dm$	$0 \leq t$	$r(t) = r_Ldm$
Temps	Variation $r_0 = 1.08dm$										
$t \leq 295s$	$r(t) = r_0dm$										
$300s \leq t$	$r(t) = 1.3 * r_0$										
Temps	Variation $r_L = 0.88dm$										
$0 \leq t$	$r(t) = r_Ldm$										

Tableau 5.8 : Deux biefs trois vannes : consignes de références

La figure suivante (Figure 5.23) confirme l'expérimentation précédente à savoir que des variations trop importante (variation de $\simeq 30\%$ dans le premier bief) associées à des paramètres de commande trop élevés peuvent rendre instable le modèle. Toutefois, on constate que le système réel suit la consigne.

On peut remarquer également que les événements qui se produisent sur le premier bief ont des répercussions sur le second. La variation demandée dans le premier bief au temps $t = 300s$, et donc l'ouverture des vannes 1 et 2, se retrouve au niveau du second bief au temps $t = 335s$.

Les interactions entre les biefs existent bien, et sont non négligeables, que ce soit vis-à-vis des niveaux d'eau à atteindre ou vis à vis des répercussions des perturbations, produites dans un bief, sur l'autre.

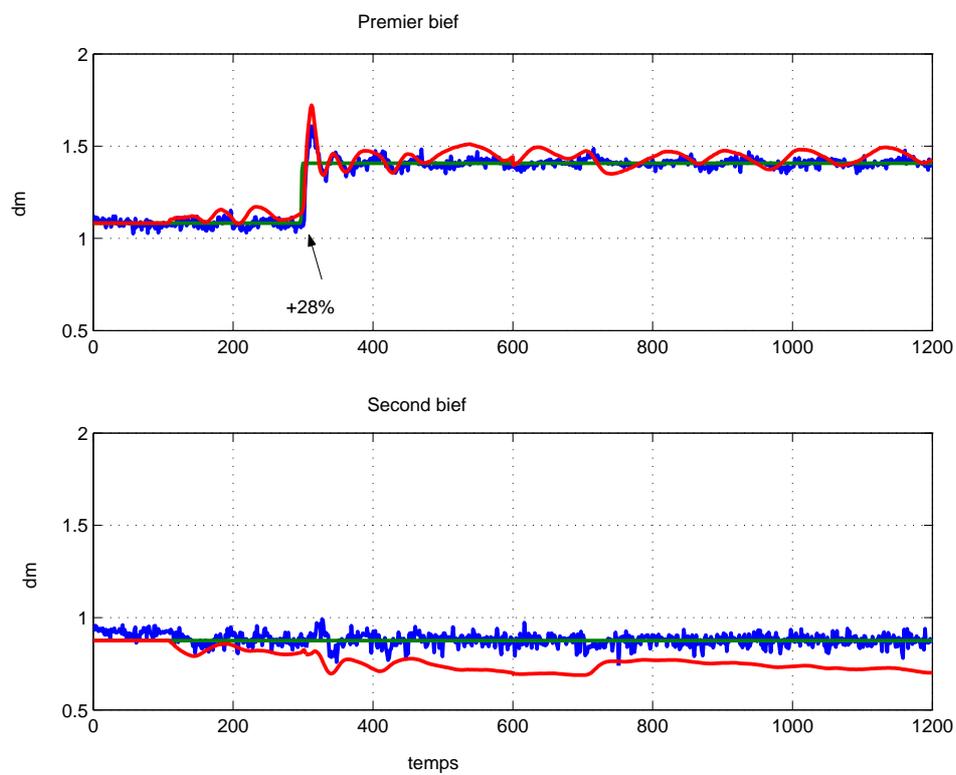


Figure 5.23 : Hauteurs

c.3 Limites physiques

Ces limites physiques sont inhérentes aux modèles, et plus précisément aux équations représentatives des ouvrages, i.e. le lien entre deux biefs.

Les équations des conditions limites sont telles qu'elles dépendent de la racine carrée de la différence de niveaux avant et après chaque vanne. De ce fait, on peut supposer que demander un niveau avant la vanne plus petit que celui après la vanne pose problème.

C'est ce qui est montré avec cette expérience.

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$q_e = 1 \text{ dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}, \quad z_{e1}(0) = 1.017 \text{ dm}, \quad z_{e2}(0) = 0.817 \text{ dm}, \quad z_{av} = 0.73 \text{ dm}, \quad \alpha_i = 1,$$

pour des valeurs théoriques $\alpha_{i,max} \simeq 10^{-2}$, $\alpha_{p,max} \simeq 10^{-3}$.

Les Figures 5.24 et 5.25 ont pour but de voir comment se comporte le système quand la consigne pour le premier bief est d'atteindre la même hauteur qu'en amont du second bief (Figure 5.24). Ou réciproquement, on donne une consigne dans le second bief de telle sorte que sa hauteur amont soit égale à la hauteur aval du premier (Figure 5.25).

Les consignes n'apportant rien dans ce cas d'études, elle ne sont pas décrites.

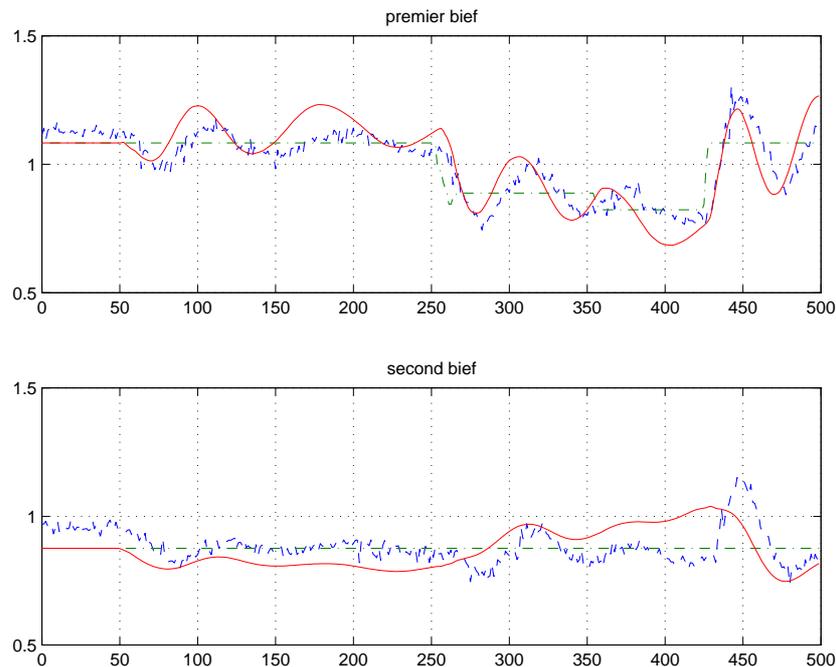


Figure 5.24 : Deux biefs, trois vannes

Le système devient instable dans les deux cas.

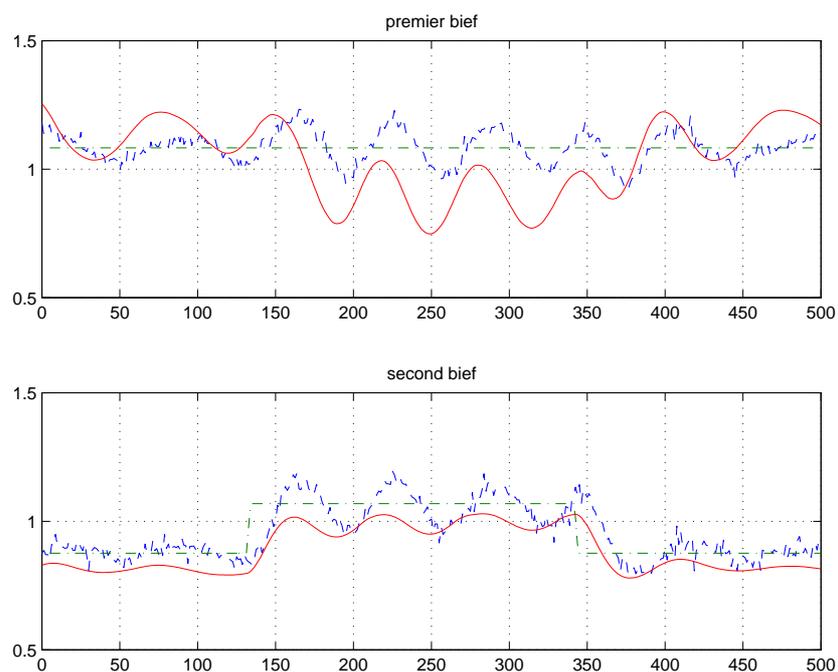


Figure 5.25 : Deux biefs, trois vannes

c.4 Sensibilité aux perturbations

Finalement, des perturbations manuelles sont appliquées avec dans un premier cas (Figure 5.26) avec un simple retrait d'eau manuel sur le premier bief et dans le second cas (Figure 5.27), un retrait d'eau puis un obstacle sur le premier bief.

Les conditions initiales sont les mêmes que précédemment :

$$q_e = 1dm^3.s^{-1}, z_{e1}(0) = 1.017dm, z_{e2}(0) = 0.817dm, z_{av} = 0.73dm, \alpha_i = 1,$$

pour des valeurs théoriques $\alpha_{i,max} \simeq 10^{-2}$, $\alpha_{p,max} \simeq 10^{-3}$.

Les consignes demandées sont données dans les tableaux 5.9 et 5.10.

LES VARIATIONS DE LA CONSIGNE : FIGURE 5.26

PREMIER BIEF

SECOND BIEF

Variation $r_0 = 1.32dm$		Variation $r_L = 0.88dm$	
Temps		Temps	
$t \leq 50s$	$r(t) = 0.88 * r_0 dm$	$t \leq 75s$	$r(t) = r_L dm$
$72s \leq t$	$r(t) = r_0$	$85s \leq t \leq 190s$	$r(t) = 1.125 * r_L dm$
		$215s \leq t \leq 245s$	$r(t) = 0.8 * r_L dm$
		$265s \leq t \leq 245s$	$r(t) = 0.8 * r_L dm$

Tableau 5.9 : Perturbations : consignes de références

Dans le second cas, les perturbations sont plus importantes, et de ce fait leurs répercussions dans le second bief sont plus visibles, au niveau du capteur aval du second bief. L'information a mis +15 secondes pour se propager, soit $+2s.m^{-1}$.

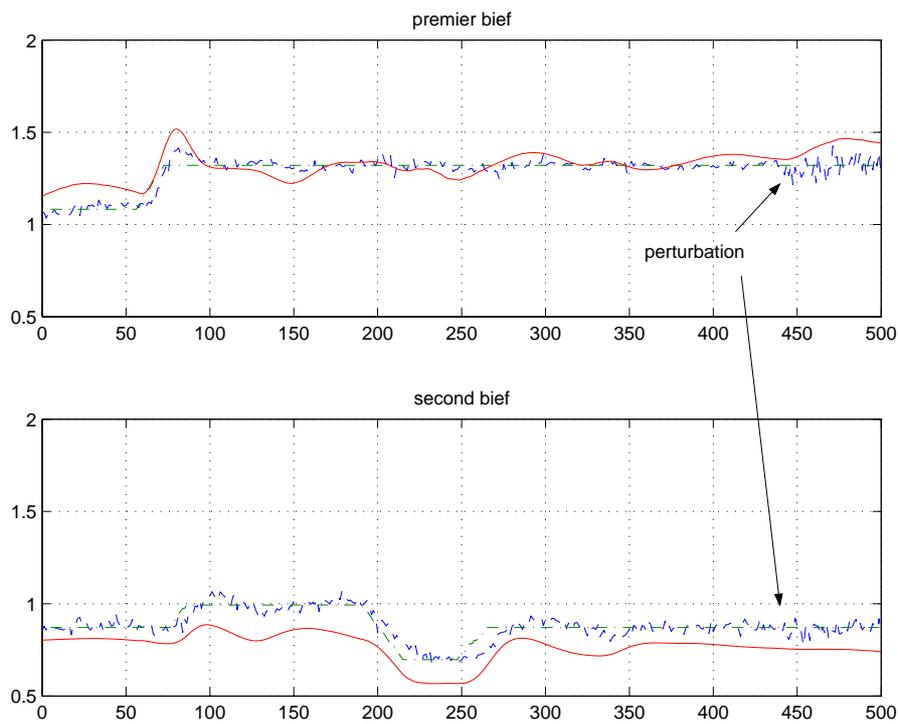


Figure 5.26 : Deux biefs, trois vannes ; perturbations (manuelles)

Malgré les perturbations effectuées sur le micro canal, le système suit la référence imposée dans tous les cas.

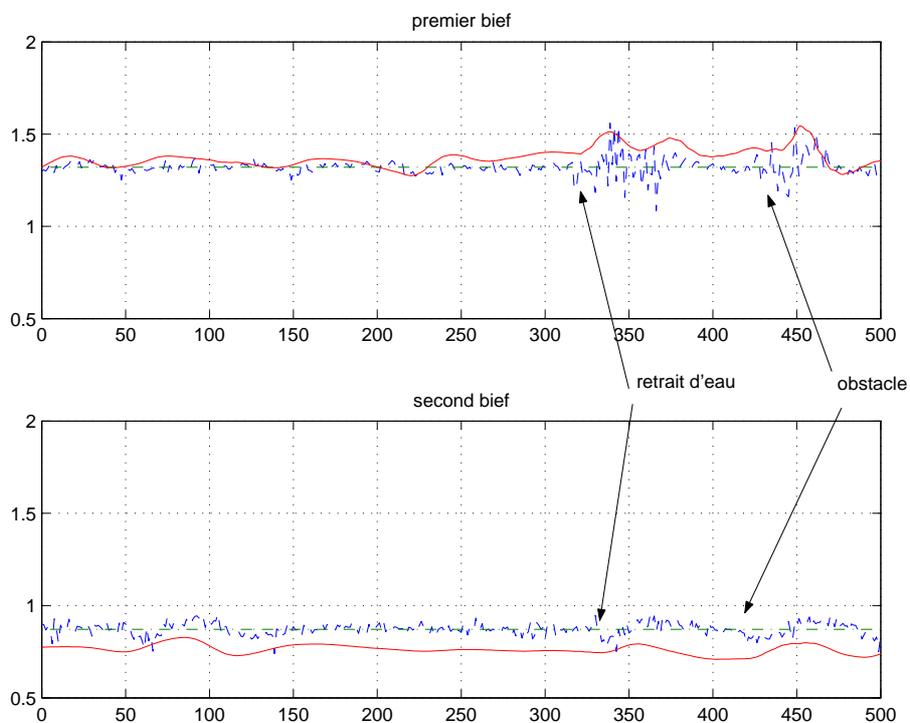


Figure 5.27 : Deux biefs, trois vannes ; perturbations (retraits d'eau et obstacles)

LES VARIATIONS DE LA CONSIGNE : FIGURE 5.27

PREMIER BIEF $r(t) = r_0, \forall t$

SECOND BIEF $r(t) = r_L, \forall t$

Tableau 5.10 : Perturbations : consignes de références

5.4 Conclusion

Tant au niveau des simulations que des expérimentations, les résultats présentés valident l'approche employée, qui est adaptée à ce type de système. Ils montrent de plus la cohérence des résultats théoriques, que ce soit en régulation ou en asservissement, pour un ou plusieurs biefs en cascade.

Pour ce qui est des simulations, une fois bien ajustés les coefficients (autant du canal que des coefficients de la commande), les échelles de mesures (une échelle adaptée à la maquette ; le passage des mètres au décimètre ici) et le logiciel d'exploitation (passage de Matlab à Simulink), les résultats obtenus correspondent à nos attentes.

Dès lors, il est facilement envisageable de pouvoir simuler n'importe quel type de canal, le nombre de biefs étant limité uniquement par les temps de calculs donc par la capacité de l'ordinateur utilisé.

Des essais avec deux biefs en cascade ayant chacun sa pente propre (une pente différente pour chaque bief) ont également été menés.

Du point de vue des simulations, seul un point n'a pas été réellement abordé, il s'agit des canaux secondaires sortants, i.e. une perte d'eau se produit, ce qui se traduit par $q_l < 0$ et $k = 1$ dans le système généralisé (1.8)-(1.9). Ce cas particulier modifie l'équation de quantité de mouvement, et donc l'état du système. En somme, l'état d'équilibre est modifié. D'un point de vue théorique, il suffit de s'assurer que le raisonnement proposé reste valable pour ce nouvel état, les opérateurs qui en découlent, etc...

Généraliser le travail aux équations globales traduisant les écoulements serait intéressant, autant sur le plan numérique que sur le plan expérimental.

Pour ce qui est des expérimentations, les résultats sont encourageants, mais les essais menés ne sont pas suffisants pour tirer des conclusions définitives. Les résultats obtenus sont néanmoins concluants et prometteurs pour une application sur site réel.

Conclusion

L'objectif principal de ce travail a été d'étendre la structure de Commande par Modèle Interne à des systèmes décrits par des EDP hyperboliques.

Dans cette approche, la technique consiste à caractériser le système en boucle ouverte et à poser le système en boucle fermée comme une perturbation additive de cette boucle ouverte.

Dans ce travail, nous avons proposé d'appliquer cette technique à une classe de systèmes hyperboliques en une dimension d'espace, mais dont les coefficients sont variables selon cette dimension d'espace.

On pourra ainsi tenir compte de phénomènes physiques distribués ou répartis le long du système, y compris dans le cas linéaire.

Les canaux d'irrigation sont l'exemple générique à cet égard.

Dans les techniques de perturbation, il est nécessaire de conserver la boucle ouverte sous une forme qui permette de poser la boucle fermée comme une perturbation additive du système initial.

Une des spécificités de ce travail est de mener cette caractérisation sans passer par les techniques habituelles de symétrisation et de diagonalisation.

Les différentes propositions énoncées au troisième chapitre sont les principales contributions de ce travail.

Ces résultats sont généraux en ce qui concerne la classe des EDP hyperboliques décrits par des opérateurs du type $A(x) = A_e(x)\partial_x + B_e(x)$. Ces propositions 3.2.2, 3.2.3, 3.3.1 et 3.3.5 permettent de définir les propriétés, le spectre et la stabilité de ce type d'opérateur.

Ces résultats explicités dans le cas du canal d'irrigation sont une autre contribution de ce travail.

Un résultat notable à ce niveau est aussi que ce calcul explicite permet, sous la condition de fluvialité, de démontrer l'exponentielle stabilité du système en boucle ouverte pour le modèle de régulation des canaux d'irrigation.

De plus, le calcul effectué est applicable à des systèmes d'EDP similaires.

Ce travail de caractérisation a permis la détermination des paramètres de synthèse du système en boucle fermée par l'utilisation directe de la théorie de la perturbation.

En ce qui concerne les résultats tant en simulation qu'expérimentaux sur le micro canal de Valence, ils montrent la faisabilité de l'approche.

Cette faisabilité a été testée dans le cas monobief et multibiefs, notamment en ce qui concerne la validité du modèle interne utilisé.

Perspectives :

Sur le plan théorique, les résultats portent principalement sur des conditions suffisantes. Ceci pose 2 problèmes :

- l'évaluation quantitative pour les applications,*
- les conditions d'optimalité des paramètres de synthèse.*

En utilisant la théorie de la perturbation de l'opérateur et du semigroupe, et le calcul explicite du spectre pour une telle classe d'EDP hyperboliques, une perspective est de définir les conditions nécessaires pour ces paramètres de synthèse.

Annexe A

Calcul de la norme de A_2

"Nous sommes automates dans les trois quarts de nos actions."
Leibniz, philosophe et mathématicien allemand, 1646-1716.

L'objectif de cette annexe est de calculer implicitement la norme de l'opérateur $A_2(x)$. A cette fin, on utilisera la méthode d'optimisation de Kuhn Karush Tucker [1].

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
 \|A_2(x)\|^2 &= \sup_{\|f(x)\|=1} \|A_2(x)f(x)\|^2 \\
 &= \sup_{\|z^2(x)+q^2(x)\|=1} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ a_4(x)z(x) - a_5(x)q(x) \end{pmatrix} \right\|^2 \\
 &= \sup_{\|z^2(x)+q^2(x)\|=1} \int_0^L (a_4(x)z(x) - a_5(x)q(x))^2 dx \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

Pour ne pas alourdir les notations, le terme intégral est omis par la suite et sera restituer en temps voulu.

Calculer la norme de $A_2(x)$ est donc un problème de minimisation sous contraintes. La méthode de minimisation de Kuhn Karush Tucker est appliquée à (A.1), avec :

$$\left. \begin{aligned}
 f(x) &= -(a_4(x)z(x) - a_5(x)q(x))^2 \\
 g(x) &= z^2(x) + q^2(x) - 1
 \end{aligned} \right\} \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) = 0$$

on obtient alors le système d'équations suivant :

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a_4(a_4z - a_5q) + 2\lambda z = 0 & (1) \\ +2a_5(a_4z - a_5q) + 2\lambda q = 0 & (2) \\ z^2 + q^2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Pour le résoudre, (1) est multiplié par q , et (2) par z , puis leur différence donne

$$\left. \begin{aligned}
 \Rightarrow \lambda z q &= a_4 q (a_4 z - a_5 q) \\
 \Rightarrow -\lambda z q &= a_5 z (a_4 z - a_5 q)
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_4^2 z q - a_5^2 z q - a_4 a_5 q^2 + a_4 a_5 z^2 = 0 \quad (A.2)$$

On se sert de l'équation (3) dans (A.2), et le raisonnement suivant permet d'expliciter la norme $\|A_2(x)\|$:

$$\begin{aligned}
 a_4^2 z q - a_5^2 z q - a_4 a_5 q^2 + a_4 a_5 z^2 &= 0 \\
 (a_4^2 - a_5^2) z q - a_4 a_5 (q^2 - z^2) &= 0 \\
 \pm (a_4^2 - a_5^2) q \sqrt{1 - q^2} - a_4 a_5 (2q^2 - 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (2q^2 - 1)C = \pm q \sqrt{1 - q^2}, &\text{ avec } C = \frac{a_4 a_5}{a_4^2 - a_5^2} \\
 (4q^4 - 4q^2 + 1)C^2 = (1 - q^2)q^2 = q^2 - q^4 &\Leftrightarrow \\
 q^4(1 + 4C^2) - q^2(1 + 4C^2) + C^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Le déterminant est :

$$\Delta = (1 + 4C^2)^2 - 4C^2(1 + 4C^2) = (1 + 4C^2) > 0$$

$$\text{donc } q^2 = \frac{(1 + 4C^2) \pm \sqrt{(1 + 4C^2)}}{2(1 + 4C^2)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{(1 + 4C^2)}}$$

$$\text{et } q = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{(1 + 4C^2)}} \right)}$$

Développons $(1 + 4C^2)$:

$$\begin{aligned} 1 + 4C^2 &= 1 + 4 \frac{a_4^2 a_5^2}{(a_4^2 - a_5^2)^2} \\ &= \frac{a_4^4 + a_5^4 - 2a_4^2 a_5^2 + 4a_4^2 a_5^2}{(a_4^2 - a_5^2)^2} = \frac{(a_4^2 + a_5^2)^2}{(a_4^2 - a_5^2)^2} \\ \sqrt{1 + 4C^2} &= \pm \frac{(a_4^2 + a_5^2)}{(a_4^2 - a_5^2)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(1 + 4C^2)}} = \pm \frac{(a_4^2 - a_5^2)}{(a_4^2 + a_5^2)} \\ 1 \pm \frac{1}{\sqrt{(1 + 4C^2)}} &= 1 \pm \frac{(a_4^2 - a_5^2)}{(a_4^2 + a_5^2)} = \left\{ \frac{2a_4^2}{(a_4^2 + a_5^2)}, \frac{2a_5^2}{(a_4^2 + a_5^2)} \right\} \end{aligned}$$

Par conséquent, q a pour solutions :

$$q = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{(1 + 4C^2)}} \right)} = \left\{ \frac{\pm a_4}{\sqrt{a_4^2 + a_5^2}}, \frac{\pm a_5}{\sqrt{a_4^2 + a_5^2}} \right\}$$

et pour chaque débit q , la hauteur z correspondante est :

$$z = \left\{ \frac{\pm a_5}{\sqrt{a_4^2 + a_5^2}}, \frac{\pm a_4}{\sqrt{a_4^2 + a_5^2}} \right\}$$

1. Si $q = \pm a_4$, $z = \pm a_5$, et z & q ont le même signe, alors :

$$f(x) = -(a_4(x)z(x) - a_5(x)q(x))^2 = -\frac{(a_4 a_5 - a_5 a_4)^2}{a_4^2 + a_5^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

2. Si $q = \pm a_5$, $z = \pm a_4$, et z & q ont le même signe, alors :

$$f(x) = -(a_4(x)z(x) - a_5(x)q(x))^2 = -\frac{(a_4^2 - a_5^2)^2}{a_4^2 + a_5^2} \quad (\text{A.4})$$

3. Si $q = \pm a_5$, $z = \pm a_4$, et z & q ont des signes opposés, alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= -(a_4(x)z(x) - a_5(x)q(x))^2 \\ &= -\frac{(a_4^2 + a_5^2)^2}{a_4^2 + a_5^2} = -(a_4^2 + a_5^2) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

4. Si $q = \pm a_4$, $z = \pm a_5$, et z & q ont des signes opposés, alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= -(a_4(x)z(x) - a_5(x)q(x))^2 = -\frac{(a_4 a_5 + a_5 a_4)^2}{a_4^2 + a_5^2} \\ &= -\frac{4a_4^2 a_5^2}{a_4^2 + a_5^2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

La méthode de Kuhn Karush Tucker permet de calculer le minimum d'une fonction, donc le maximum de $-f(x)$ est égal à :

$$\max_{x \in [0, L]} \left\{ \frac{4a_4^2(x)a_5^2(x)}{a_4^2(x) + a_5^2(x)}, a_4^2(x) + a_5^2(x), \frac{(a_4^2(x) - a_5^2(x))^2}{a_4^2(x) + a_5^2(x)} \right\} = \max_{x \in [0, L]} \{a_4^2(x) + a_5^2(x)\}.$$

En effet,

$$\frac{4a_4^2a_5^2}{a_4^2 + a_5^2} \leq a_4^2 + a_5^2 \Leftrightarrow 0 \leq 4a_4^2a_5^2$$
$$\text{et } a_4^2 + a_5^2 \geq \frac{(a_4^2 - a_5^2)^2}{a_4^2 + a_5^2} \Leftrightarrow (a_4^2 - a_5^2)^2 \geq 0.$$

Par l'hypothèse de fluvialité (2.20), $a_4(x)$ et $a_5(x)$ sont bornés, et continus sur $[0, L]$, il existe donc une constante $M_{A_2} < \infty$ telle que

$$\|A_2\| = \int_0^L a_4^2(x) + a_5^2(x) dx = M_{A_2}.$$

Annexe **B**

Démonstration du rang de l'opérateur CD

"C'est souvent l'évidence qui exige le plus de démonstrations."

Extrait de *Le prix du souvenir*.

Jean-Marie Poirier, romancier québécois, 1922-2000.

Le but est ici de déterminer le rang de l'opérateur CD , et de montrer que son rang est maximum. Cet opérateur est défini sur

$$CD : C^k([0, \infty], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^p,$$

où $k \geq 2$ et p est la dimension de Y , $y(t) \in Y$, n est la dimension de l'espace de commande. On a donc

$$\begin{aligned} C & : X \rightarrow Y = \mathbb{R}^p \\ D & : C^k([0, \infty], \mathbb{R}^n) \rightarrow X \\ \text{et } CD & : C^k([0, \infty], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

De plus

$$C\xi = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_p \end{pmatrix} \xi dx, \quad \mu > 0, \text{ avec } C_i = (c_i \quad 0), \quad (\text{B.1})$$

$$\text{où } c_i = \frac{1}{2\mu} \int_{x_i-\mu}^{x_i+\mu} \mathbf{1}_{x_i \pm \mu}$$

$$\text{et } D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{(2p)1} & \dots & d_{(2p)n} \end{pmatrix} \Rightarrow CD = \begin{pmatrix} c_1 d_{11} & \dots & c_1 d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_i d_{(2i-1)1} & \dots & c_i d_{(2i-1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_p d_{(2p-1)1} & \dots & c_p d_{(2p-1)n} \end{pmatrix}$$

où p est le nombre de hauteurs contrôlées (généralement une hauteur par bief, donc p est le nombre de biefs), et n est le nombre de vannes contrôlées.

Dans le cas du déversoir Figure (1.2), p égale n , dans l'autre cas Figure (1.3), p égale $n-1$, donc $p \leq n$.

On cherche donc à démontrer que $\text{rg}(CD) = p$ quelque soit p .

Une remarque a été émise au Chapitre 4 : l'objet de la remarque est l'existence de l'opérateur CD : la solution du système peut être re-formulée comme suit [82]

$$\xi(t) = T_A(t)\xi(0) - \int_0^t T_A(t-s)D \dot{u}(s)ds,$$

donc

$$\xi(t) - Du(t) = T_A(t)(\xi(0) - Du(0)) - \int_0^t T_A(t-s)D \dot{u}(s)ds$$

et pour des entrées constantes, $u(t) = \tilde{u}$, on obtient alors $\dot{u}(t) \equiv 0$, et $u(0) = 0$.

Avec $y(t) = C\xi(t)$, on a :

$$y(t \rightarrow \infty) = y_{ref} \rightarrow CD\tilde{u} \neq 0. \quad (\text{B.2})$$

Ce raisonnement permet d'affirmer l'existence de l'opérateur CD tel que :

$$CD : C^k([0, \infty], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^p. \quad \square$$

La démonstration du rang est effectuée par récurrence sur la dimension p , avec pour point de mire le rang de CD .

B.0.1 Dans le cas d'un bief, $p = 1$

a. Pour un bief avec déversoir

Supposons que la matrice CD n'est pas de rang 1, alors

$$CD = c_1 d_{11} = d_{11}(L) = 0,$$

cela implique $y(t) = 0$ donc il y a le même niveau d'eau à l'aval du bief (nous rappelons que nous sommes en variations) par la relation (B.2) quelle que soit l'ouverture de la vanne en amont. Il y a contradiction, $CD \neq 0 \Rightarrow rg(CD) = 1$.

b. Pour un bief avec deux vannes

Supposons que la matrice CD n'est pas de rang 1, alors $CD = (c_1 d_{11} \ c_1 d_{12}) = (d_{11}(L) \ d_{12}(L))$ n'est pas de rang 1, cela implique que $d_{11}(L) = 0$ et $d_{12}(L) = 0$, donc $y(t) = 0$ et le niveau d'eau est le même à l'aval du bief par la relation (B.2) quelles que soient les ouvertures des vannes amont et aval. Il y a contradiction, les déterminants partiels de CD ne sont pas tous nuls, donc $rg(CD) = 1$.

B.0.2 Dans le cas de deux biefs $p = 2$

a. Pour deux biefs avec un déversoir

Supposons que la matrice CD n'est pas de rang 2, alors $\det(CD) = (d_{11}(L)d_{32}(2L) - d_{12}(L)d_{31}(2L)) = 0$, cela implique que

$$d_{11}(L)d_{32}(2L) = d_{12}(L)d_{31}(2L).$$

La relation (B.2) donne

$$\begin{aligned} (1) \quad & d_{11}(L)u_1 + d_{12}(L)u_2 = y_{ref,1} = \tilde{z}_L, \\ (2) \quad & d_{31}(2L)u_1 + d_{32}(2L)u_2 = y_{ref,2} = \tilde{z}_{2L}, \end{aligned}$$

et en multipliant (1) par $d_{31}(2L)$, (2) par $d_{12}(L)$, leur différence associée au déterminant nul implique

$$\Rightarrow d_{31}(2L)\tilde{z}_L = d_{12}(L)\tilde{z}_{2L}$$

pour tout $(\tilde{z}_L, \tilde{z}_{2L})^t$, indépendamment des ouvertures des vannes. Une contradiction apparaît, $\det(CD) \neq 0 \Rightarrow rg(CD) = 2$.

b. Pour deux biefs avec trois vannes

Le raisonnement appliqué au trois déterminants partiels est identique à celui exposé dans le cas de deux biefs avec déversoir, ils ne sont pas nuls car cela impliquerait que l'on peut régler le niveaux d'eau indépendamment des ouvertures des vannes. Donc, le rang de CD est de 2, avec respectivement CD de la forme suivante pour pour deux biefs avec un déversoir et avec trois vannes :

$$CD = \begin{pmatrix} c_1 d_{11} & c_1 d_{12} \\ c_2 d_{31} & c_2 d_{32} \end{pmatrix}, CD = \begin{pmatrix} c_1 d_{11} & c_1 d_{12} & c_1 d_{13} \\ c_2 d_{31} & c_2 d_{32} & c_2 d_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

B.0.3 Dans le cas de $p + 1$ biefs

a. Pour $p + 1$ biefs avec déversoir

Le rang de CD est supposé égal à p , pour p biefs, i.e. $\det(CD_p) \neq 0$ (où (CD_j) est une matrice $j \times j$).

Si $\det(CD_{p+1}) = 0$, on a

$$\det(CD_{p+1}) = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} d_{(2p+1)j}((p+1)L) \det(CD_j)_p = 0$$

où $(CD_j)_p$ est la co-matrice d'ordre p associée à la fonction $d_{(2p+1)j}((p+1)L)$, et par l'hypothèse de récurrence $\det((CD_j)_p) \neq 0$.

Si on suppose que le rang n'est pas égal à $p + 1$ (déterminant nul), alors la relation (B.2) nous permet d'écrire que :

$$\forall 1 \leq i \leq p + 1, \sum_{j=1}^{p+1} d_{(2i-1)j}(iL) u_j(\infty) = \tilde{z}_{iL}.$$

Il existe donc un i , $1 \leq i \leq p + 1$ tel que pour ce problème du type : $Ax = B$, avec $A_{i,j} = d_{(2i-1)j}(iL)$, $B = \tilde{z}_{iL}$, il existe une constante $c \neq 0$ telle que

$$\tilde{z}_{iL} = c \tilde{z}_{(i+1)L}.$$

Donc deux hauteurs sont réglées indépendamment des ouvertures des vannes. Il y a contradiction, $CD \neq 0 \Rightarrow rg(CD) = p + 1$.

Remarquons que l'on peut également se ramener au cas de deux biefs avec deux vannes et un déversoir, en considérant que le tronçon de canal constitué de p biefs est soit ouvragé seulement avec des vannes (ce serait donc le premier bief dans le sens de l'écoulement avec deux vannes), soit ouvragé avec un déversoir en final (ce serait donc le second bief avec déversoir). La démonstration se ramène à celle produite dans le cas $p = 2$.

b. Pour $p + 1$ biefs avec que des vannes

Le raisonnement est similaire, puisque les $p+2$ déterminants partiels sont d'ordre $p+1$, et donc ne s'annulent pas. Le rang de CD est alors $rg(CD) = p + 1$.

Définitions et théorèmes

"La définition du possible est qu'il peut ne pas avoir lieu."
Extrait de Joyce et Paris.
Jacques Lacan, médecin et psychanalyste français, 1901-1981.

Sommaire

C.1	Rappel de topologie	133
C.2	Théorie des semigroupes en dimension infinie	133
	C.2.1 <i>Quelques définitions</i>	133
	C.2.2 <i>Théorèmes généraux</i>	137
C.3	Rappels	139

C.1 Rappel de topologie

* ESPACE DE BANACH

Définition C.1.1 ([44]).

Un espace normé pour lequel toute suite de Cauchy a une limite est dit complet.

Un espace normé complet est appelé espace de Banach.

Un espace X est dit séparable, s'il contient un sous-espace S tel que \bar{S} soit dense dans X .

Si un espace de Banach est séparable, il est appelé espace de Hilbert.

Remarque C.1.1.

- Les espaces $L^p(a, b)$, $p \geq 1$, sont des espaces de Banach, mais ce ne sont des espaces de Hilbert que pour $1 \leq p < \infty$ (démonstration dans KATO [44]).
- On définit la norme $L^p(\Omega)$ sur $\Omega = \cup_{i=1}^p]0, L(i)[$ comme étant :

$$\|u\| = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^p \int_0^{L(i)} |u(x)|^p \right)^{1/p}, p \geq 1. \quad (\text{C.1})$$

- Le produit scalaire est défini comme suit, pour tout $u, v \in L^2(a, b)$:

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b |u(x)v(x)| \right)^{1/2}. \quad (\text{C.2})$$

C.2 Théorie des semigroupes en dimension infinie

Dans ce qui suit, $X, Y, Z..$ sont des espaces de Banach, à moins qu'une autre définition soit spécifiée.

C.2.1 Quelques définitions

a. Opérateur

Définition C.2.1 ([44]). Un opérateur T de X dans Y est une fonction qui envoie tous vecteurs u d'un sous-espace linéaire D de X sur un vecteur $v = Tu \in Y$ et qui vérifie la condition de linéarité pour tout $u_1, u_2 \in D$. D est appelé le domaine de définition, ou simplement domaine de T , et est noté $D(T)$.

Si $D(T)$ est dense dans X , on dit que T est à domaine dense.

* OPÉRATEUR FERMÉ

Définition C.2.2 ([6]). Un opérateur $T : X \rightarrow Y$ est dit fermé si pour toute suite $(z_n)_n \in X$, $z \in X$ telle que $z_n \rightarrow z$, alors

$$Tz_n \rightarrow y, \Rightarrow z \in D(T) \text{ et } Tz = y. \quad (\text{C.3})$$

* RELATIVEMENT BORNÉ

Définition C.2.3 ([44]). Soient A et T deux opérateurs dans X tels que $D(T) \subset D(A)$. A est relativement borné par rapport à T (A est T -borné) s'il existe a et b non négatifs tels que :

$$\|A(x)\| \leq a\|x\| + b\|Tx\|, \quad x \in D(T)$$

* OPÉRATEUR ADJOINT

Définition C.2.4 ([6]). Soit A un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert Z . Supposons que le domaine $D(A)$ de A est dense dans Z . Alors l'opérateur adjoint $A^* : D(A^*) \subset Z \rightarrow Z$ de A est définie comme suit. Le domaine $D(A^*)$ de A^* est constitué de tous les éléments $y \in Z$ tel qu'il existe un $y^* \in Z$ qui vérifie

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle \text{ pour tout } x \in D(A).$$

Pour chaque $y \in D(A^*)$, l'opérateur adjoint de A^* est alors définie par

$$A^*y = y^*.$$

De plus, si A est un opérateur fermé, à domaine dense, alors $D(A^*)$ est dense dans Z , et A^* est un opérateur fermé.

* FAMILLE HOLOMORPHE DE TYPE (A)

Définition C.2.5 ([44]). Une famille d'opérateurs $T(x)$ définie sur un espace de Banach X pour tout x sur un domaine D_0 du plan complexe, est dite holomorphe de type (A) si

- i) $D(T(x)) = D$ est indépendant de x ,
- ii) $T(x)u$ est holomorphe pour $x \in D_0$ pour tout $u \in D$.

Dans ce cas, $T(x)u$ a une série de Taylor pour tout $x \in D_0$.

Par exemple, si $x = 0$ appartient à D_0 , on peut écrire :

$$T(x)u = Tu + xT^{(1)}u + x^2T^{(2)}u + \dots, \quad u \in D,$$

série convergente sur le disque de rayon r , indépendamment de u .
 $T = T(0)$ et $T^{(n)}$ sont des opérateurs linéaires de X qui ont le même domaine.

b. Résolvante et spectre

* RÉSOLVANTE

Définition C.2.6 ([44]). Soit T un opérateur fermé dans un espace de Banach X , soit ξ un nombre complexe. Si $T - \xi$ est inversible avec

$$R(\xi) = R(\xi, T) = (T - \xi)^{-1} \in \mathcal{B}(X),$$

alors ξ appartient à l'ensemble résolvant de T . La fonction de l'opérateur ξ , $R(\xi)$, ainsi définie sur l'ensemble résolvant $\rho(T)$ (ou $P(T)$ selon les notations) est appelée résolvante de T .

De plus, $R(\xi)$ définie de X dans $D(T)$ pour tout $\xi \in \rho(T)$, est borné à domaine dense.

* SPECTRE

Définition C.2.7 ([44]). Le complémentaire $\sigma(T)$ de $\rho(T)$ dans le plan complexe est appelé le spectre de T .

D'où :

- l'ensemble des valeurs ξ pour lesquelles $R(\xi, T)$ n'existe pas est appelé le spectre discret de T . Il est noté $\sigma_d(T)$. Les éléments de $\sigma_d(T)$ sont appelés valeurs propres de T .
- L'ensemble des valeurs ξ pour lesquelles $R(\xi, T)$ existe et est à domaine dense mais n'est pas borné, est appelé le spectre continu de T . Il est noté $\sigma_c(T)$.
- L'ensemble des valeurs ξ pour lesquelles $R(\xi, T)$ existe mais n'est pas à domaine dense, est appelé le spectre résiduel de T . Il est noté $\sigma_r(T)$.

Le spectre de T est alors défini par :

$$\sigma(T) = \sigma_d(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

* ORDRE DU SYSTÈME

Définition C.2.8 ([7]). Pour un générateur A d'un semigroupe $T_A(t)$, on appelle ordre du système ou type du système, la valeur ω_0 définie par :

$$\omega_0 = \omega_0(A) = \inf_{t>0} \frac{\ln \|T_A(t)\|}{t}.$$

* CROISSANCE SPECTRALE

Définition C.2.9 ([40]). Un opérateur A générateur d'un C_0 -semigroupe $T_A(t)$, satisfait la propriété de croissance spectrale si :

$$\sup\{\Re e(\lambda); \lambda \in \sigma(A)\} = \omega_0(A).$$

De plus, R. Triggiani [83] montre qu'elle est vérifiée pour les systèmes dont :

- l'opérateur A est borné,
- le semigroupe engendré par A est holomorphe,
- le semigroupe engendré par A est compact.

* PROPRIÉTÉ DE DÉCOMPOSITION SPECTRALE

Définition C.2.10 ([44]). On dira que T , un opérateur fermé dans un espace de Banach X , possède la propriété de décomposition spectrale si son spectre $\sigma(T)$ contient une partie σ' et une autre σ'' telles que l'on puisse tracer une courbe fermée Γ autour d'un ensemble ouvert contenant σ' et laissant σ'' à l'extérieur (Figure C.1).

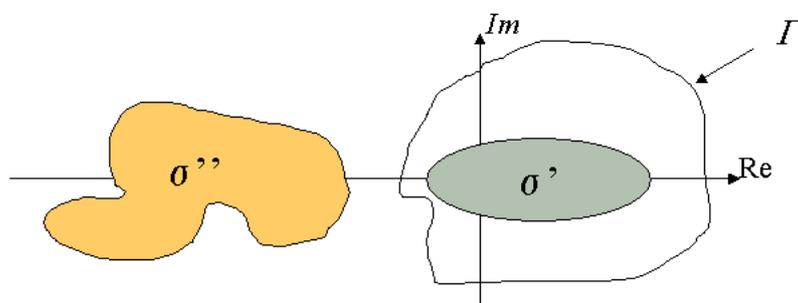


Figure C.1 : Décomposition spectrale

c. Semigroupe

* DÉFINITION D'UN SEMIGROUPE

Définition C.2.11 ([6]). Un semigroupe fortement continue est une fonction d'opérateur, $T(t)$ de \mathbb{R}^+ dans $\mathcal{L}(Z)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$T(t + s) = T(t)T(s) \text{ pour } t, s \geq 0, \tag{C.4}$$

$$T(0) = I, \tag{C.5}$$

$$\|T(t)z_0 - z_0\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0^+, \forall z_0 \in Z. \tag{C.6}$$

La notation abrégée C_0 -semigroupe est couramment employé pour parler d'un semigroupe fortement continue.

* SEMIGROUPE DE CONTRACTION

Définition C.2.12 ([6]). $T(t)$ est un semigroupe de contraction si c'est un C_0 -semigroupe qui satisfait l'inégalité suivante : $\|T(t)\| \leq 1$, pour tout $t \geq 0$.

C.2.2 Théorèmes généraux

a. Perturbations

* OPÉRATEUR FERMÉ

Proposition C.2.1 ([44]). *Si A et B sont deux opérateurs tel que A fermé et B borné et :*

$$D(A) \supset D(B)$$

alors $A + B$ est un opérateur fermé.

Théorème C.2.2 ([44]). *Soient A et T deux opérateurs dans X tels que A est T -borné avec $b < 1$ (Définition C.2.3), alors :*

$$S = T + A \text{ est fermé si et seulement si } T \text{ est fermé.}$$

* PERTURBATION DE L'OPÉRATEUR

Théorème C.2.3 ([63]). *Soit X un espace de Banach et soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $T(t)$ sur X , tel que $\|T(t)\| \leq M \exp^{wt}$. Si B est un opérateur linéaire borné sur X alors $A + B$ est générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $S(t)$ sur X , tel que $\|S(t)\| \leq M \exp^{(w+M\|B\|)t}$.*

* PERTURBATION DU SPECTRE

Théorème C.2.4 ([44]). *Soit A un opérateur fermé de X et soit B un opérateur de X qui est A -borné (i.e. il existe deux constantes positives a et b telles que $\|B(x)\| \leq a\|x\| + b\|Ax\|$, $x \in D(A) \subset D(B)$). Si*

$$\sup_{\xi \in \Gamma} (a\|R(\xi, A)\| + b\|AR(\xi, A)\|) < 1$$

où Γ est une courbe qui sépare le spectre de A , alors le spectre de $S = A + B$ est séparé par Γ de la même façon.

b. Semigroupe

* THÉORÈME DE HILLE-YOSIDA

Théorème C.2.5. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire, fermé à domaine dense A , sur un espace de Hilbert Z soit générateur d'un C_0 -semigroupe est qu'il existe des nombres réels M, w tels que pour tout réel $\alpha > w$, $\alpha \in \rho(A)$ l'ensemble*

résolvant de A , alors :

$$\|R(\alpha, A)^r\| \leq \frac{M}{(\alpha - w)^r} \text{ pour tout } r \geq 1, \quad (\text{C.7})$$

où $R(\alpha, A) = (\alpha I - A)^{-1}$ est l'opérateur résolvante, ou résolvante. Dans ce cas, on a de plus :

$$\|T(r)\| \leq M \exp^{wt}. \quad (\text{C.8})$$

* SEMIGROUPE DE CONTRACTION

Théorème C.2.6 ([6]). *Soit A un opérateur linéaire, fermé à domaine $D(A)$ dense dans un espace de Hilbert Z . Alors $A - wI$ est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe de contraction $T(t)$ sur Z si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées pour tout réel $\alpha > w$:*

$$\|(\alpha I - A)z\| \geq (\alpha - w)\|z\| \text{ pour tout } z \in D(A), \quad (\text{C.9})$$

$$\|(\alpha I - A^*)z\| \geq (\alpha - w)\|z\| \text{ pour tout } z \in D(A^*), \quad (\text{C.10})$$

où A^* désigne l'adjoint de A .

Corollaire C.2.7 ([6]). *Soit A un opérateur linéaire, fermé à domaine $D(A)$ dense dans un espace de Hilbert Z . Des conditions suffisantes pour qu'il soit générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe de contraction $T(t)$ sur Z vérifiant $\|T(t)\| \leq \exp^{wt}$ sont :*

$$\operatorname{Re}(\langle Az, z \rangle) \leq w\|z\|^2 \text{ pour tout } z \in D(A), \quad (\text{C.11})$$

$$\operatorname{Re}(\langle A^*z, z \rangle) \leq w\|z\|^2 \text{ pour tout } z \in D(A^*). \quad (\text{C.12})$$

Théorème C.2.8 ([62]). *Soit A un opérateur linéaire, A est dissipatif si et seulement si :*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\| \text{ pour tout } x \in D(A) \text{ et } \lambda > 0. \quad (\text{C.13})$$

c. *Contrôle*

Théorème C.2.9 ([67]). *Considérons le système suivant :*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w, \quad x(0) = x_0 \in D(A) \\ y &= Cx, \quad t > 0, \\ u(t) &= \alpha_p \kappa_p(y(t) - y_r) + \int_0^t \alpha_i \kappa_i(y(s) - y_r) ds. \end{aligned}$$

Soit Γ une courbe orientée positivement, fermée, simple, rectifiable, entourant les p premières valeurs propres de A avec les parties réelles les plus proches de 0 dans son intérieur

et l'autre partie du spectre à l'extérieur de telle sorte que l'on puisse tracer une ligne verticale qui sépare les deux parties du spectre. Les valeurs propres sont supposées de dimension un. Soit P le projecteur

$$P = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda, A) d\lambda \quad \text{et} \quad PB = \begin{bmatrix} B^+ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad CP = \begin{bmatrix} C^+ & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.14})$$

Supposons que les lignes des matrices, $p \times p$, B^+ et C^+ sont linéairement indépendant, respectivement. Alors toutes les valeurs propres de A contenues dans Γ peuvent être déplacées vers la gauche en utilisant un feedback externe.

Un bon choix de κ_p est

$$\kappa_p = -[C^+ B^+]^{-1},$$

et α_p doit être choisie tel que

$$0 \leq \alpha_p < \left(\sup_{\lambda \in \Gamma} a \|R(\lambda; A)\| + b \|AR(\lambda; A)\| \right)^{-1}$$

où les nombres positifs a et b doivent vérifier $\|B\kappa_p Cx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\|$ pour tout $x \in D(A)$.

Théorème C.2.10 ([40]). *Supposons que :*

$$rg(CDW) = p,$$

si $\kappa_i \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^m)$ est choisie tel que :

$$\mathcal{R}e(\sigma(CDW\kappa_i)) < 0$$

alors le système en boucle fermée est stable pour tout α_i tel que :

$$0 \leq \alpha_i < \min_{\lambda \in \Gamma} (a \|R(\lambda; A_e)\| + 1)^{-1}$$

C.3 Rappels

* DÉFERLEMENT

Définition C.3.1. Le déferlement est un processus dissipatif de l'énergie de la houle. Il est conditionné par la cambrure, rapport de la hauteur sur la longueur d'onde de la houle. La cambrure des vagues augmente, au fur et à mesure que la houle se rapproche du rivage, jusqu'à une valeur maximale. Il y a apparition du déferlement lorsque la cambrure atteint cette valeur limite. Le déferlement engendre un écoulement complexe turbulent. Au large sous l'action du vent, on l'appelle plutôt moutonnement. Près des côtes, on distingue 3 grands types de déferlements, correspondant à des pentes de plages de plus en plus fortes :

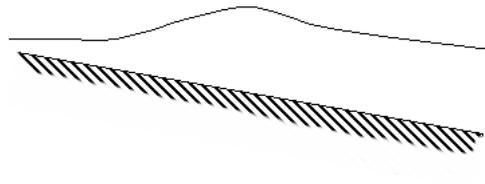


Figure C.2 : Déferlement glissant

- le déferlement glissant (spilling) qui ressemble au moutonnement observé en grande profondeur, la vague s'éroule progressivement sur sa face avant (Fig C.2),

- le déferlement plongeant (plunging) sur des pentes un peu plus fortes, la vague forme alors des rouleaux, bien connus des surfeurs (Fig C.3),

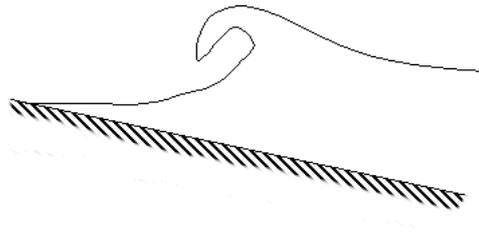


Figure C.3 : Déferlement plongeant

- le déferlement frontal (surging), caractéristique des houles longues et des plages très pentues, correspond à une augmentation très importante de la hauteur par shoaling jusqu'à un éroulement brutal formant un front d'onde (Fig C.4).

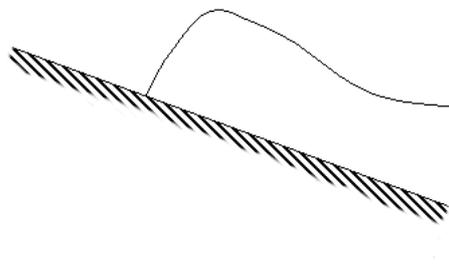


Figure C.4 : Déferlement frontal

* MASCARET

Définition C.3.2. Le mascaret est un phénomène exceptionnel qui se produit dans certains estuaires aux époques des grandes marées (on a répertorié environ 60 sites dans le monde).

Dans des conditions très particulières (fort coefficient de marée, fleuve à gros débit et très faible niveau d'eau), la marée montante qui est freinée par les flots de la rivière constitue une série de bourrelets qui peuvent atteindre 3 m de hauteur dans les meilleures conditions. Cet ensemble de vagues (une dizaine séparées d'une distance d'une dizaine de mètres) emportant avec lui près de la moitié de la marée montante remonte l'estuaire avec une vitesse de 15 à 30 km/h. Il se propage ainsi sur plus de 150 km de distance puis disparaît dans les zones où le courant de marées est complètement affaibli.

La vitesse de propagation du MASCARET : Comme la houle, la vitesse de propagation du mascaret dépend essentiellement de la hauteur d'eau. Si h est la hauteur d'eau et $g = 9.81m.s^{-2}$ l'accélération de la pesanteur, la vitesse est soit $3m.s^{-1} = 10km.h^{-1}$ avec $h = 1m$ et $6m.s^{-1} = 20km.h^{-1}$ avec $h = 4m$.

Exemples d'équations hyperboliques

"Sans exemple, on ne peut rien enseigner correctement."
Lucius Columelle, agriculteur et auteur romain, 1^{er} siècle après JC.

Sommaire

D.1 Définition	145
D.2 Exemples	146
D.2.1 <i>Équation des cordes vibrantes : problème hyperbolique</i>	146
D.2.2 <i>Équations de Navier-Stokes</i>	146

D.1 Définition [39]

Une équation aux dérivées partielles (EDP) peut être définie comme étant une relation liant une fonction et ses dérivées partielles. Dans le cas d'une fonction $u = u(x, y)$ des deux variables x et y , cette relation peut s'écrire sous la forme :

$$F(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots) = 0. \quad (\text{D.1})$$

L'ordre d'une EDP est l'ordre maximal de dérivation dans l'équation.

On s'intéresse ici aux équations aux dérivées partielles du premier ordre, donc du type

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c = 0. \quad (\text{D.2})$$

Le terme quasi-linéaire signifie que les équations sont linéaires par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé, ce qui veut dire que a , b et c sont des fonctions des variables indépendantes x , y et de la fonction inconnue u . Une EDP devient linéaire lorsque les fonctions a , b , c ne dépendent que de x et y , et elle est dite à coefficients constants lorsque a , b et c sont ... des constantes.

Trois comportements de ces équations se distinguent selon les valeurs propres [39] :

- si l'équation (D.2) admet des racines complexes, on parle de problèmes **elliptiques** (ex. type : équation de Laplace),
- si l'équation (D.2) admet une racine multiple, le problème est dit **parabolique** (ex : équation de la chaleur),
- si l'équation (D.2) admet des racines réelles, il s'agit du cas **hyperbolique** (ex : équation des cordes vibrantes). Les directions sont appelées caractéristiques.

La forme d'équations généralement usitée pour le premier ordre est décrite par l'équation (D.3) avec $c = 0$, et pour le second ordre par l'équation (D.4) avec $d = 0$:

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c = 0, \quad (\text{D.3})$$

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d = 0. \quad (\text{D.4})$$

Deux exemples connus de systèmes hyperboliques sont ici énoncés. Le premier exemple, l'équation des cordes vibrantes est traitée dans [39] avec sa solution explicite et son schéma de discrétisation. Les équations de Navier-Stokes sont également abordées ici, les équations de Saint-Venant en étant un cas particulier.

D.2 Exemples

D.2.1 Équation des cordes vibrantes : problème hyperbolique

Les vibrations transversales d'une corde homogène tendue peuvent être représentées, dans le cas de petites perturbations et si l'on néglige les effets de la pesanteur, par l'équation :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

où la célérité des ondes propagées est $c = \left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2}$, T étant la tension et ρ la masse linéique.

En acoustique, l'équation des ondes dans un tuyau sonore prend exactement la même forme, u étant dans ce cas la pression p , et $c = \frac{\partial p}{\partial r}$, dérivée partielle de la pression par rapport à la masse volumique. Pour un gaz parfait dont les chaleurs spécifiques sont constantes, on a $c = (\gamma RT)^{1/2}$, où $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ est le rapport des chaleurs spécifiques, R la constante des gaz parfaits, et T la température.

Le problème de Cauchy associé à l'équation des cordes vibrantes consiste à fixer deux conditions initiales : $u(x, 0)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ pour tout x dans le domaine. Les conditions aux limites sont du type $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

On peut remplacer l'équation des cordes vibrantes du deuxième ordre par un système d'équations du premier ordre en posant $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $w = \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}$. On a alors :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = cv \frac{\partial v}{\partial x}.$$

D.2.2 Équations de Navier-Stokes

Dans le cas d'un fluide incompressible (donc où seuls le vecteur vitesse u et la pression p jouent un rôle) et newtonien (le tenseur des contraintes est une fonction affine de celui des taux de déformation), on a la loi de comportement

$$s_{ij} = 2\mu D_{ij},$$

où $D_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$ et μ est le coefficient de viscosité dynamique. Le p.f.d et la conservation de la masse nous permettent alors d'écrire :

$$du/dt + \frac{(\text{grad}p)}{\rho} = \nu \text{Lap}(u), \quad \nu = \frac{\mu}{\rho},$$

$$\text{div}u = 0$$

où ρ est la masse volumique et d/dt représente une dérivée particulière, c'est-à-dire que $du_i/dt = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial j}$.

Le nombre de Reynolds $Re = \frac{\nu}{(V.L)}$ mesure le rapport des forces d'inertie aux forces de frottement. Il est basé sur une longueur caractéristique L (la longueur d'un conduit,

par exemple) et une vitesse caractéristique V (vitesse moyenne de l'écoulement). Deux écoulements ne peuvent se comparer que s'ils ont même nombre de Reynolds. Dans le cas d'une maquette à échelle réduite, comme L change, les résultats obtenus ne sont pas parfaitement transposables. Dans la pratique, μ est petit et Re est grand. L'équation est donc du type "perturbation singulière". Ceci se traduit par les phénomènes de couche limite le long des parois. C'est dans ces zones que la viscosité joue vraiment un rôle. Ailleurs, l'approximation du fluide parfait est suffisante.

Lorsque Re dépasse un seuil critique, on passe à un écoulement turbulent. L'étude des turbulences est délicate pour deux raisons essentielles :

- le spectre est large, c'est-à-dire que différentes échelles interviennent, et que les phénomènes à petite échelle finissent par influencer sur ceux à grande échelle.

- les équations de Navier-Stokes en 3D : pour Re assez grand, la solution n'est pas forcément unique ... On considère alors des équations faisant intervenir des moments, i.e des moyennes des fluctuations par rapport à la moyenne. Le système comportant dans ce cas davantage d'équations que d'inconnues, il est nécessaire de le "fermer" en ajoutant des relations empiriques.

Publications et Travaux de l'auteur

- [1] CORDIER S., BUET C., DOS SANTOS V.
"A Conservative and Entropy Scheme for a Simplified Model of Granular Media", journal Transport Theory and Statistical Physics, Volume **33**, Issue **2**, pp. 125-156, Avril 2004.
- [2] DOS SANTOS V., TOURÉ Y.,
"On the regulation of irrigation canals : multivariable boundary control approach by internal model", accepté pour publication dans le journal SAMS, Systems, Analysis, Modeling Simulations, 2004.
- [3] DOS SANTOS V., TOURÉ Y.,
"On the Regulation of Irrigation Canals : Internal Model and Boundary Control Approach", Second International Conference on Signals, Decision and Information Technology (SSD'03), IEEE, n° SSD-03-A-MD-50, Tunisie, 26-28 Mars 2003.
- [4] DOS SANTOS V., TOURÉ Y.,
"Regulation of Irrigation Canals : Multivariable Boundary Control Approach by Internal Model",
Second IFAC Conference on Control Systems Design (CSD'03), International Federation of Automatic Control, n° abs-056-35-35., Pologne, 7-10 Septembre 2003.
- [5] DOS SANTOS V., TOURÉ Y., CISLO N.,
"Régulation de Canaux d'irrigation : Approche par Contrôle Frontière Multivariable, et Modèle Interne d'EDP", CIFA 2004, Conférence IEEE, n° 105, Tunisie novembre 2004.
- [6] DOS SANTOS V., TOURÉ Y.,
"Commande d'Écoulement Fluide et Détection", Automatique des systèmes de dimension infinie : méthodologie d'approximation, GDR CNRS Automatique, Journées bilan, Nantes 29-30 Novembre 2001.
- [7] TOURÉ Y., DOS SANTOS V., JOSSERAND L., DUFOUR P.,
"Internal Model Boundary Control", Journée bilan, Valence février 2003.

[8] DOS SANTOS V., TOURÉ Y.,
"Régulation des Canaux d'Irrigation : Approche Multivariable", GT : "Théorie et applications des systèmes à paramètres répartis", Journée bilan, Paris 3 Juillet 2003.

[9] TOURÉ Y., DOS SANTOS V.,
"La théorie des Perturbations au Service du Contrôle Frontière par Modèle Interne", Journée EDP, GDR ISIS & MACS, Paris Janvier 2004.

[10] DOS SANTOS V., TOURÉ Y.,
"Sur la Régulation des Canaux d'Irrigation : Commande par Modèle Interne et Equations aux Dérivées Partielles", Journée : Le Capteur à Travers la Région Centre, Bourges 16 Octobre 2003.

[11] DOS SANTOS V.,
"Régulation des Canaux d'Irrigation : Approche par Modèle Interne et Contrôle Frontière", Journées Jeunes Chercheurs, Bourges 29-30 Janvier 2003.

[12] DOS SANTOS V.,
"Commande d'Écoulement Fluide", Journées Jeunes Chercheurs, Bourges 19 Février 2004.

[13] DOS SANTOS V.,
Poster : "Commande de systèmes d'écoulement Fluides et Détection", Sciences en Sologne, Orléans 12-13 mai 2004.

[14] DOS SANTOS V.,
"Sur la régulation des canaux d'Irrigation : étude de la stabilité et résultats expérimentaux", Journée EDP, Paris 27 mai 2004.

[15] DOS SANTOS V.,
"Rapport sur les Expérimentations Faites sur le Micro Canal de Valence", 30 juin 2003 au 04 juillet 2003, Valence.

[16] DOS SANTOS V.,
"Rapport sur les Expérimentations Réalisées sur le Micro Canal de Valence ", 24-27 novembre 2003, Valence.

[17] DOS SANTOS V., TOURÉ Y., MENDES E. COURTIAL E.,
"Multivariable Internal Model Boundary Control Approach of Multi-reach Irrigation Canal", PRAHA'05, IFAC 16th World Congress, Prague, Czech Republic, from July 4 to July 8, 2005.

Bibliographie

- [1] J.M. BONNISEAU, *Introduction à l'optimisation, cours de dea : Modélisation et méthodes mathématiques en économie*, Rapport technique, CERMSEM, Université Paris 1, Panthéon-Sorbonne, 2002.
- [2] S. CHAUSSINAND, *Comparaison de lois de commande pour la régulation d'un micro-canal*, Mémoire de D.E.A., Automatique - Productique INPG, 2003.
- [3] M.-L. CHEN, *Commande optimale et robuste des équations aux dérivées partielles*, Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.
- [4] J.M. CORON, B. ANDREA-NOVEL, and G. BASTIN, *A Lyapunov approach to control irrigation canals modeled by saint venant equations*, ECC 99, Karlsruhe, Germany (1999).
- [5] J.M. CORON, J. de HALLEUX, B. ANDREA-NOVEL, and G. BASTIN, *On boundary control design for quasilinear hyperbolic systems with entropies as Lyapunov functions*, 41th IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, USA (2002), 3010–3014.
- [6] R.F. CURTAIN and H. ZWART, *An introduction to infinite dimensional linear systems*, Springer Verlag, 1995.
- [7] R. DAUTRAY and J.L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, vol. Tome 8 et 9, Masson, Paris, 1988.
- [8] A.J.C. BARRÉ de SAINT VENANT, *Théorie du mouvement non permanent des eaux avec applications aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris **73** (1871), 148–154, 237–240.
- [9] Centre d'Études Techniques Maritimes et Fluviales (CETMEF), <http://www.cetmef.equipement.gouv.fr/projets/hydraulique/reflux/glossaire/glossaire/manning.html>.
- [10] M. DINH, G. SCORLETTI, V. FROMION, and E. MAGAROTTO, *Parameterized H_∞ controller design for adaptative trade-off finite dimensional LMI optimization*, In European Control Conference, Cambridge, UK (2003).
- [11] V. DOS-SANTOS and Y. TOURÉ, *On the regulation of irrigation canals : Internal model and boundary control approach*, Second International Conference on Signals, Decision and Information Technology (SSD'03), IEEE, Tunisie (2003), SSD-03-A-MD-50.
- [12] ———, *Regulation of irrigation canals : Multivariable boundary control approach by internal model*, Second IFAC Conference on Control Systems Design (CSD'03), IFAC, Pologne (2003), abs-056-35-35.

- [13] V. DOS-SANTOS, Y. TOURÉ, and N. CISLO, *Régulation de canaux d'irrigation : Approche par contrôle frontière multivariable, et modèle interne d'edp*, Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2004), IEEE, Tunisie (2004), 105.
- [14] S. DUCHESNE, A. MAILHOT, E. DEQUIDT, and J.P. VILLENEUVE, *Mathematical modeling of sewers under surcharge for real time control of combined sewer overflows*, Urban Water (2001), 241–252, 3 (4).
- [15] P. DUFOUR, *Contribution à la commande prédictive des systèmes à paramètres répartis non linéaires*, Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard - Lyon I, 2000.
- [16] P. DUFOUR, F. COUENNE, and Y. TOURE, *Model predictive control of a catalytic flow reactor*, IEEE Trans. On Control Systems Technology **11** (2003), 705–715, 5.
- [17] P. DUFOUR and Y. TOURE, *Multivariable model predictive control of a catalytic reverse flow reactor*, Computers and Chemical Engineering **28** (2004), 2259–2270.
- [18] P. DUFOUR, Y. TOURE, D. BLANC, and P. LAURENT, *Infrared drying process of an experimental water painting : Model predictive control*, Drying Technology **22** (2004), 269–284, Nos. 1 & 2.
- [19] P. DUFOUR, Y. TOURE, M.D.J. ICHAUD, and P.S. DHURJATI, *Optimal trajectory determination and tracking of an autoclave curing process : A model based approach*, ECC' 99 (1999), F1033-6.
- [20] J.-F. DULHOSTE, *Commande non linéaire de systèmes d'irrigation de grande taille, Chapitre I : Systèmes de distribution d'eau*, Rapport technique, Equipe GSYS, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, 2000.
- [21] J.F. DULHOSTE, D. GEORGES, and G. BESANÇON, *Nonlinear control of open-channel water flow based on a collocation control model*, ASCE (American Society of Civil Engineers) Journal of Hydraulic Engineering (2004).
- [22] R. ERROUISSI, *Commande prédictive sur un canal d'irrigation à surface libre*, Mémoire de D.E.A., LAGEP, Lyon, 2004.
- [23] L'Égypte Eternelle, <http://www.eternalegypt.org/eternalegyptwebsiteweb/homeservlet>.
- [24] H.O. FATTORINI, *Boundary control systems*, SIAM J. Control **6** (1968), 3.
- [25] M. FLIESS, J. LEVINE, P. MARTIN, and P. ROUCHON, *A Lie-Backlund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems*, IEEE Trans. Automat. Control **44** (1999), 922–937.
- [26] M. FLIESS and H. MOUNIER, *Tracking control and pi-freeness of infinite dimensional linear systems*, G. Picci, D.S. Gilliam, Eds, Birkhäuser, Bâle, 1999.
- [27] V. FROMION, M.G. SAFONOV, and G. SCORLETTI, *Necessary and sufficient conditions for luré system incremental stability*, In European Control Conference, Cambridge, UK (2003).
- [28] V. FROMION and G. SCORLETTI, *Characterization of nonlinear systems by their linearizations*, In Proc. IEEE Conf. on Decision and Control (2002).
- [29] C. GARCIA and M. MORARI, *Internal model control. I.a. unifying review and some new results*, Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev. **21** (1982), 308–323, 2.
- [30] D. GEORGES, *Commande optimale non linéaire des systèmes hydrauliques a surface libre : application a la commande prédictive et algorithmes associés*, Journée de l'AS 68, CNRS, Paris (2003).

- [31] D. GEORGES, J.-F. DULHOSTE, and G. BESANCON, *Modelling and control of water flow dynamics via a collocation method*, Fourteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, MTNS 2000 (2000).
- [32] D. GEORGES and X. LITRICO, *Automatique pour la gestion des ressources en eau*, IC2, Systèmes automatisés, Hermès, 2002.
- [33] D. GEORGES and Y. TOURE, *Rapport d'activités 2003 de l'AS canaux d'irrigation*, Rapport technique, Département STIC, RTP 24, 2003.
- [34] J.F. GERBEAU and B. PERTHAME, *Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; numerical validation*, Ecoles CEA-EDF-INRIA, Ecoulement Peu Profonds à Surface Libre, INRIA (2002).
- [35] J. HALLEUX, C. PRIEUR, J.M. CORON, and B. ANDREA-NOVEL, *Boundary feedback control in networks of open channels*, Automatica **39** (2003), 1365–1376.
- [36] J. HALLEUX, C. PRIEUR, J.M. CORON, B. ANDREA-NOVEL, and G. BASTIN, *Boundary feedback control in networks of open channels*, Dynamical Systems and Control : Computation, Identification and Modelling, IAP V News (2002), Issue 50.
- [37] J. HALLEUX, C. PRIEUR, J.M. CORON, and G. BASTIN, *A Lyapunov approach for the control of multi reach channels modeled by saint-venant equations*, NOLCOS'01, St. Petersburg, Russia (2001), 1515–1520.
- [38] J.M. HERVOUET, *Les équations de Navier-Stokes à surface libre et leurs formes simplifiées en eau peu profonde*, Ecoles CEA-EDF-INRIA, Ecoulement Peu Profonds à Surface Libre, INRIA (2002).
- [39] A. EL JAI, *éléments d'analyse numérique*, presse universitaire de perpignan ed., Collection Études, 2003.
- [40] L. JOSSERAND, *Commande frontière par modèle interne de systèmes à paramètres distribués. Application à un double échangeur de chaleur*, Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard - Lyon I, 1996.
- [41] L. JOSSERAND and Y. TOURE, *PI-controller in IMC structure for distributed parameter systems*, Computational Engineering in Systems Applications IMACS/IEEE-SMC Multiconference **2** (1996), 980–985.
- [42] ———, *IMC to boundary control of DPS : an application result*, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, CCS **3** (1997), 2426–2431.
- [43] ———, *PI-controller in IMC structure for distributed parameter system*, Proc. of the CESA IMACS/IEEE-SMC Multiconference **2** (2000), 1168–1172.
- [44] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, 1966.
- [45] B. LAROCHE, *Extension de la notion de platitude à des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles linéaires*, Thèse de Doctorat, École des Mines de Paris, 2000.
- [46] T.-T. LI and L. B. WANG, *Global existence of classical solutions to the Cauchy problem on a semi-bounded initial axis for quasilinear hyperbolic systems*, Nonlinear Analysis **56** (2004), 961–974.
- [47] X. LITRICO and V. FROMION, *Infinite dimensional modelling of open-channel hydraulic systems for control purpose*, Decision and Control, Proceedings of the 41st IEEE Conference **2** (2002).
- [48] ———, *Real-time management of multi-reservoir hydraulic systems using H-infinity optimization*, IFAC World Congress, Barcelona, Spain (2002).

- [49] ———, *Advanced control politics and optimal performance for an irrigation canal*, In European Control Conference, Cambridge, UK (2003).
- [50] ———, *Variations autour de la performance optimale de systèmes hydrauliques à surface libre*, In Colloque Auto-Agro, Montpellier (2003), 197–207.
- [51] X. LITRICO, V. FROMION, J.-P. BAUME, and P.O. MALATERRE, *Modélisation et commande robuste de systèmes hydrauliques à surface libre : Application aux rivières et canaux d'irrigation*, Journées Automatique et Environnement (2000).
- [52] X. LITRICO, V. FROMION, J.P. BAUME, and M. RIJO, *Modelling and PI-controller design for an irrigation canal*, In European Control Conference, Cambridge, UK (2003).
- [53] X. LITRICO and D. GEORGES, *Robust optimal control of a dam-river system with intermediate measurements*, ECC'99, European Control Conference, Karlsruhe (1999).
- [54] X. LITRICO, D. GEORGES, and J.-L. TROUVAT, *Modelling and robust control of a dam-river system*, IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC98) (1998).
- [55] P.O. MALATERRE, *Le contrôle automatique des canaux d'irrigation : Etat de l'art et perspectives*, Colloque Automatique et Agronomie, Montpellier (2003).
- [56] P.O. MALATERRE and J.P. BAUME, *Sic 3.0, a simulation model for canal automation design*, International Workshop on the Regulation of Irrigation Canals : State of the Art of Research and Applications, RIC97 (1997).
- [57] P.O. MALATERRE and M. KHAMMASH, *l1 controller design for a high-order 5-pool irrigation canal system*, IEEE-CDC conference (2000).
- [58] P.O. MALATERRE, D.C. ROGERS, and J. SCHUURMANS, *Classification of canal control algorithms*, ASCE Journal of Irrigation and Drainage Engineering **124**, ISSN **0733-9437** (1998), 3–10, 1.
- [59] S. MOTTELET, *Non-dissipative boundary stabilization of a canal with wave generators*, Preprint de la DMA (1997), 97.2.
- [60] H. OUARIT, L. LEFEVRE, and D. GEORGES, *Robust optimal control of one-reach open channels*, European Control Conference 03, Cambridge, UK (2003).
- [61] A. PAQUIER, *Traitement des régimes fluvial et torrentiel dans la résolution des équations de Saint-Venant unidimensionnelles en milieu naturel*, Ecoles CEA-EDF-INRIA, Ecoulement Peu Profonds à Surface Libre, INRIA (2002).
- [62] A. PAZY, *On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert space*, SIAM J. Math. Anal. **3** (1972), 2.
- [63] ———, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44, Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag, 1983.
- [64] N. PETIT and P. ROUCHON, *Dynamics and solution to some control problems for water-tanks systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, **47** (2002), 4.
- [65] P. POGNANT-GROS, L. ROSSIGNOL, G. SCORLETTI, and V. FROMION, *Approche directe pour la réduction de modèles sur de gammes de fréquences : Application aux canaux d'irrigation*, In JDA'01 (2001).
- [66] S.A. POHJOLAINEN, *Robust multivariables PI-controller for infinite dimensional systems*, IEEE Trans. Automat. Contr. **AC(27)** (1982), 17–30.

- [67] ———, *Robust controller for systems with exponentially stable strongly continuous semigroups*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **111** (1985), 622–636.
- [68] ———, *On the optimal tuning of a robust controller for parabolic distributed parameter systems*, Automatica **23** (1987), 719–728, 6.
- [69] S.A. POHJOLAINEN and I. LÄTTI, *Robust controller for boundary control systems*, Int. J. Control **38** (1983), 1189–1197, 6.
- [70] A.I. PROPOÏ, *Use of a linear programming methods for synthesizing sampled data automatic systems*, Automation and Remote Control **24** (1963), 837–844, 7.
- [71] S.E. REBIAI, *Boundary stabilization of the wave equation with variable coefficients*, ECC 2003 Conference papers, Technical Session 8 (2003).
- [72] J.M. REDDY, *Kalman filtering in the control of irrigation canals*, Appl. Math. Modelling **19** (1995).
- [73] J. RICHALET, A. RAULT, J.L. TESTUD, and J. PAPON, *Model predictive heuristic control : Applications to industrial processes*, Automatica **14** (1978), 413–428, Issue 5.
- [74] R. ROTHFUß, U. BECKER, and J. RUDOLPH, *Controlling a solenoid valve - a distributed parameter approach*, Fourteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, MTNS 2000 (2000).
- [75] D. L. RUSSELL, *Distributed parameter systems ; an overview*, Encyclopedia of LIFE Support on Control Systems, Robotics and Automation **I** (2002), 933–979.
- [76] Y. SAKAWA and T. MATSUSHITA, *Feedback stabilization of a class of distributed systems and construction of a state estimator*, IEEE Transactions on Automatic Control **AC-20** (1975), 6.
- [77] F. SANFILIPPO and J.L. DELTOUR, *Application of automation to canal control : Comparison between a monovariable and multivariable approach*, Société Canal de Provence (1995).
- [78] S. SAWADOGO, *Modélisation, commande prédictive et supervision d'un système d'irrigation*, Thèse du Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du C.N.R.S. (1992).
- [79] C. SEATZU, *Decentralized controllers design for open-channel hydraulic systems via eigenstructure assignment*, Applied Mathematical Modelling (2000), 915–930, 12.
- [80] C. SEATZU, A. GIUA, and G.USAI, *Decentralized volume control of open-channel using H_2 norm minimization*, Proceeding of the International Conference on System, Man, Cybernetics (SMC'98) (1998), 3891–3896.
- [81] Y. TOURE and L. JOSSERAND, *An extension of imc to boundary control of distributed parameter systems*, Proc. of the IEEE SMC-CCS **3** (1997), 2426–2431.
- [82] Y. TOURÉ and J. RUDOLPH, *Controller design for distributed parameter systems*, Encyclopedia of LIFE Support on Control Systems, Robotics and Automation **I** (2002), 933–979.
- [83] R. TRIGGIANI, *On the stability problem in banach space*, J. of Math. Anal. and Appl. **52** (1975), 383–403.
- [84] L.-T. TSIEN, *Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems*, Research applied mathematics, 1994.

- [85] DON WASHBURN, *A bound on the boundary input map for parabolic equations with application to time optimal control*, SIAM J. Control and Optimization **17** (1979), 652–671, 5.
- [86] C.Z. XU, P. ANIN, and D.X. FENG, *On the principle of linearized for nonlinear hyperbolic systems*, ECC 2003, Conference papers, Technical Session 8 (2003).
- [87] C.Z. XU and D-X. FENG, *Linearization method to stability analysis for nonlinear hyperbolic systems*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series I Mathematics (2001), 809–814.
- [88] C.Z. XU and H. JERBI, *A robust PI-controller for infinite dimensional systems*, Int. J. Contr. (1995).
- [89] J.X. XU and D.X. Feng, *Symmetric hyperbolic systems and applications to exponential stability of heat exchangers and irrigation canal*, Mathematical Theory of Networks and Systmes, MTNS 2000, Perpignan, France (2000).
- [90] K. YOSIDA, *Functional analysis*, Springer Verlag, Berlin, 1965.
- [91] J. ZABCZYK, *On decomposition of generators*, SIAM J. Control and Optimization **16** (1978), 4.
- [92] I. ZAMBETTAKIS and F. ROTELLA, *Vers la commande par platitude d'un canal d'irrigation*, Journées Nationales d'Automatique, Autrans (2001).

"La bibliographie se fait après et non avant d'aborder un sujet de recherche."

Extrait de La recherche passionnément
Jean Perrin, grand reporter et écrivain français.