

(In-)validation de modèles de systèmes incertains

Omar Mouhib

▶ **To cite this version:**

Omar Mouhib. (In-)validation de modèles de systèmes incertains. Automatique / Robotique. Université Paris Sud - Paris XI, 2004. Français. NNT : . tel-00011597

HAL Id: tel-00011597
https://theses.hal.science/tel-00011597

Submitted on 13 Feb 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 7636

UNIVERSITE PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

Ecole doctorale STITS

Spécialité automatique et traitement du signal

Par

Omar MOUHIB

Sujet :

(In-)validation de modèles de systèmes incertains

Soutenue publiquement le 1er Octobre 2004 devant la commission d'examen :

M.	**Dominique BEAUVOIS**	
MM.	**Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE**	
M.	**Mohamed M'SAAD**	*(Rapporteur)*
M.	**Jean-Claude TRIGEASSOU**	
M.	**Michel ZASADZINSKI**	(*Rapporteur*)

Thèse effectuée au sein du service Automatique de Supélec – EA 1399

A Mariam et Tétém

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein du Service Automatique de Supélec. Nombreux sont ceux que je voudrais remercier pour m'avoir aidé, soutenu ou accompagné durant ces trois années de thèse. C'est pour leur montrer toute ma gratitude et reconnaissance que je leur dédie cette page.

Je tiens à exprimer ma plus vive reconnaissance à Madame Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE, Directeur de recherche à LSS-CNRS qui a voulu me faire l'honneur de présider le jury.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Mohamed M'SAAD Professeur de l'université à Caen ainsi que Monsieur Michel ZASADZINSKI Professeur de l'université à Nancy, pour avoir accepté de se pencher sur ma thèse et d'en être les rapporteurs.

Je remercie également Monsieur Jean-Claude TRIGEASSOU Professeur de l'université de Poitiers pour avoir accepté d'être dans ce jury malgré son emploi du temps très chargé.

Je tiens à remercier très chaleureusement Monsieur D. BEAUVOIS, enseignant au service Automatique de SUPELEC qui a assuré la direction de cette thèse. Qu'il trouve ici ma sincère reconnaissance pour ses conseils et ses critiques.

Que Monsieur Patrick Boucher, Chef du service Automatique de SUPELEC, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour m'avoir accueilli au sein de son service et m'avoir encouragé tout au long de ces recherches.

Merci également à Madame Josiane Dartron, secrétaire du service Automatique, pour sa disponibilité, son efficacité et son sourire en toutes circonstances.

Une mention toute particulière pour mes collègues de bureau : Assia, Thibaut, Joël, Farag, Sorin, Mara, Mohamed, Bilal, Boubakeur, Jean, Sébastien et Farah pour la bonne ambiance et les nombreuses discussions enrichissantes que nous avons menées.

Ainsi que tous les gens que j'ai côtoyés durant ces années notamment mes amis de la résidence de Bures et l'ensemble du personnel du Service automatique de Supélec.

Je n'oublie pas ma famille, à qui je dois en grande partie l'accomplissement de ce travail par l'espoir et confiance en moi qu'ils ont toujours su me donner. Qu'ils trouvent avec ceci un modeste geste de reconnaissance et de remerciement.

Merci a tous pour votre soutien et votre compréhension sans limite.

A toi, maman, mille et un mercis.

Résumé

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire porte sur l'analyse théorique de l'approche fréquentielle d'(in-)validation de modèle de systèmes incertains qui consiste à caractériser les écarts objet/modèle par l'introduction non seulement de bruits perturbateurs, mais aussi d'opérateurs d'incertitude dans la relation fonctionnelle associée au modèle choisi. En supposant que les incertitudes et le bruit sont de norme bornée nous avons défini la notion de l'ensemble de modèles. Ceux que nous avons considérés sont formés à partir d'une représentation linéaire fractionnaire. La question générique du problème de validation de modèle de systèmes incertains ainsi étudiée dans cette thèse est la suivante : Etant données des mesures expérimentales et un ensemble de modèles, existe t il un modèle dans l'ensemble de modèles qui pourrait produire les données entrées/sorties observées? Ceci a demandé simplement de trouver un élément de l'ensemble de modèles et un élément de l'ensemble signal d'entrée inconnu tels que les informations observées sont produites exactement.

Le problème de trouver un tel membre de l'ensemble de modèles a été formulé selon deux stratégies. La première est de déterminer un signal de bruit de norme minimale tel que les données observées soient générées par le modèle entaché d'une incertitude de norme inférieure à 1. L'inconvénient de cette méthode est que le problème d'optimisation posé ne peut être résolu par le formalisme LMI que pour des cas spéciaux de l'ensemble de modèles. La deuxième stratégie étudiée est de déterminer simultanément la plus petite norme d'incertitude et la plus petite norme du signal de bruit telles que le modèle obtenu génère les données observées. Nous avons mené une étude comparative de ces deux problématiques et nous avons montré que la solution apportée par la valeur singulière structurée généralisée permet non seulement de répondre à la question générique pour une classe plus générale des ensembles de modèles mais aussi de prendre en compte la nature structurée du bloc d'incertitude.

Le procédé expérimental de trois cuves ainsi qu'un exemple académique de simulation ont fourni une excellente validation des méthodologies étudiées.

Mots clés :

Identification, validation de modèle, valeur singulière structurée généralisée, inégalité matricielle affine, ensemble de modèles, représentation linéaire fractionnaire.

Abstract

The work presented in this dissertation deals with the theoretical analysis of the frequency domain model validation for uncertain systems which considers that the gap between the actual system and the nominal model results not only from disturbing noise but also from model uncertainty. By assuming that both of uncertainty and additive noise are norm bounded we defined the notion of the model-set. Those which we considered are described by a fractional linear representation. The generic question of model validation problem studied in this thesis is as follows: given experimental measurements and a model-set, does a model exist in the model-set which could produce the observed inputs/outputs data? It is simply required to find an element of models-set and an element of unknown of input signal set such that the information observed is produced exactly.

The problem of finding such a member of a model-set was formulated according to two strategies. First a noise signal of minimal norm is determined such that the data observed are generated by the model with an uncertainty of norm less than 1. The disadvantage of this method is that the optimization problem posed can be solved by LMI formalism only for special cases of model-set. The second strategy studied is to determine simultaneously the smallest norm of uncertainty and the smallest norm of the noise such that the model obtained generates the data observed. We have make a comparative study of these two problems and we have showed that the solution given with the help of generalized structured singular value not only makes it possible to answer the generic question for a more general class of the models-sets but also to take into account the structured nature of the uncertainty block.

The experimental process of 3Tanks as well as an academic example of simulation provided an excellent validation of the studied methods.

Keywords:

Identification, model validation, generalized structured singular value, linear matrices inequalities, models-set, linear fractional transformation

Liste des publications

Mouhib O., D. Beauvois, « Validation de modèle de systèmes incertains » *Journées Doctorales d'Automatique*, Valenciennes 25-27 Juin 2003.

Mouhib O., D. Beauvois, « Model (In-)Validation for uncertain systems with Generalized μ » *9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics* 25 - 28 August 2003, Miedzyzdroje, Poland.

Mouhib O., D. Beauvois, « Model Validation for mixed parametric uncertainty» *Third International Conference on System Identification and Control Problems (SICPRO '04)* 28-30 January 2004, Moscow, Russia.

Table des matières

Remerciement...……...…iii

Résumé……..v

Abstract…...……...…….vi

Liste des publications……vii

Chapitre 1 – Introduction générale…….……...1

1.1. Introduction…….……3

1.2. Contexte de la thèse……..…….....3

1.3. Problématique…….…….……5

1.4. Objectif de la thèse…….…….6

1.5. Validation ou invalidation ?……..……..8

1.6. Organisation de la thèse…….……9

Chapitre 2 – Notations et définitions……...13

2.1. Introduction……..…….....15

2.2. Notations Algébriques……..……15

2.3. Acronymes…….....……17

2.4. Normes des signaux et des systèmes……..……...17

2.4.1. Norme 2…….……...17

2.4.2. Norme ∞ …….……19

2.5. Structure générique du problème de validation de modèle……..……20

2.6. Conclusion……..……...22

Chapitre 3 – Modélisation des systèmes incertains……23

3.1. Introduction……...……..….....25

3.2. Systèmes incertains……..…….25

3.3. Ensemble de modèles pour les systèmes incertains……..……26

3.4. Exemple illustratif…….…….…..27

3.5. Exemples d'ensemble de modèles……..…...29

3.6. Modélisation des systèmes incertains par transformation linéaire fractionnaire……..…….31

3.6.1 Définition d'une Transformation fractionnaire linéaire……...32

3.6.2 Algèbre des LFT's……34

3.7. Modélisation des incertitudes paramétriques……..…..36

3.8. Modélisation des incertitudes non structurées……...…40

3.8.1 Incertitudes non structurées additives……..41

3.8.2 Incertitudes non structurées multiplicatives…….43

3.8.3 Incertitudes scalaires complexes……..45

3.8.4 Incertitudes multiformes……...45

3.9. Matrice d'incertitude générale Δ ……..……...…46

3.10. Modèle général pour le problème de validation de modèle……..……47

3.11. Conclusion……..……...47

Chapitre 4 – Etat de l'art……..49

4.1. Introduction……..…….51

4.2. Identification……..……51

4.3. Problème de la commande……..……...52

4.4. Interaction entre l'identification et la commande……..……54

4.5. Validation de modèle……..…….....55

4.5.1. Domaine fréquentiel…….56

4.5.2. Domaine temporel……59

4.6. Conclusion……..…….....61

Chapitre 5 – Validation de modèle de systèmes incertains…….……...63

5.1. Introduction……..…….....65

5.2. Etude préliminaire……..……...65

5.3. Normalisation du problème……..……67

5.4. Validation de modèle pour la structure LFT……..……...…68

5.5. Problème générique de validation de modèle…….…….……..69

5.6. Première approche du problème de validation de modèle…….74

5.7. Optimisation convexes : Les Inégalités Matricielles Affines……..……..77

5.8. Résolution du problème par le formalisme LMI……...81

5.9. Deuxième approche du problème de validation de modèle ……..83

5.10. Généralisation des valeurs singulières structurées……88
5.10.1 Définition équivalente de la valeur singulière structurée…….88
5.10.2 Définition de la valeur singulière structurée généralisée…….92
5.11. Application de μ_g au problème de validation de modèle…….94
5.11.1 Construction de la matrice complexe……...94
5.11.2 Application au problème de validation de modèle……...96
5.12. Evaluation de la fonction μ_g ……....99
5.12.1 Formulation de la borne supérieure de μ_g comme un LMI…….....99
5.12.2 Valeurs singulières structurées généralisées en présence des incertitudes paramétriques réelles.....102
5.12.3 Borne inférieure pour μ_g ……..……104
5.12.4 Formulation comme un problème μ standard……..105
5.13. Récapitulatif……106
5.14. Extension à la structure générale du modèle générique……..108
5.15. Conclusion……...……110
Chapitre 6 – Applications…….…….…….113
6.1. Introduction…….115
6.2. Exemple illustratif……...115
6.3. Application au système de trois cuves…….121
6.3.1. Description du procédé……...121
6.3.2. Modélisation……...125
6.3.3. Identification par l'expérience ……...126
6.3.4. Système à un seul réservoir……129
6.3.5. Système à trois réservoirs……...138
6.4. Conclusion…….…..…144
Conclusion générale…….…….……...145
Annexes…….149
Annexe A – Stabilité robuste……....……151
Annexe B – Choix du signal d'excitation……..……..153
Références……155

Chapitre 1

Introduction générale

1.1. Introduction 3
1.2. Contexte de la thèse 3
1.3. Problématique 5
1.4. Objectif de la thèse 6
1.5. Validation ou Invalidation ? 8
1.6. Organisation de la thèse 9

1.1. Introduction

Cette thèse s'occupe de la relation entre un système physique et son modèle mathématique. Cette relation est examinée par tester si un modèle mathématique pourrait produire les données du système physique. Tester les modèles mathématiques dans ce sens s'appelle (in/)validation de modèle.

1.2. Contexte de la thèse

La réalité physique d'un système est toujours complexe, avec en général des comportements non linéaires et non stationnaires. Dans le cas où il peut être décrit par des équations dynamiques, ces dernières dépendent de paramètres dont la valeur est souvent mal connue ou évolue au cours du temps.

La plupart des méthodes d'analyse des systèmes et de synthèse de lois de commande permettant de lui assurer de « bonnes » propriétés sont fondées sur l'exploitation d'un modèle mathématique. Celui-ci peut être issu, soit des équations physiques reflétant notre compréhension des mécanismes mis en jeu, soit d'une procédure d'identification du comportement entrée/sortie du système. Cependant, un système physique ne pourrait jamais être modélisé exactement par un modèle mathématique; nous avons toujours quelques incertitudes sur le comportement du système physique et celles ci ne peuvent pas être capturées dans notre modèle. L'écart entre le système et son modèle nominal peut provenir de deux sources : les *incertitudes du modèle*, et entrées inconnues que l'on désigne tout simplement par un bruit. Ces deux sources d'écart peuvent être incluses dans le modèle mathématique.

Les *incertitudes du modèle* sur le système physique seront représentées dans un composant inconnu noté Δ. Plusieurs hypothèses sur ce bloc d'incertitude sont possibles. Dans le cas le plus général, Δ est un opérateur borné. Alternativement Δ peut être considéré comme un multiplicateur linéaire variant dans le temps. Cette hypothèse peut être utilisé pour capturer les effets non linéaires qui déplacent l'énergie entre les fréquences. L'analyse et la synthèse sont possibles avec cette hypothèse; Doyle et Packard [DoyP87] discutent les implications de cette hypothèse sur la théorie de commande. Dans cette thèse nous nous limiterons à l'hypothèse que Δ est un système inconnu, borné en norme, linéaire–invariant dans le temps. D'un point de vue fréquentiel, Δ sera caractérisé par une matrice complexe constante inconnue à chaque fréquence d'une norme bornée.

Les *incertitudes de modèle* sont de provenances multiples, on peut notamment citer :

- Les dynamiques non modélisées à cause d'une difficulté pour les identifier. Par exemple les dynamiques hautes fréquences.
- Les dynamiques connues mais elles sont volontairement négligées dans l'écriture du modèle afin de le simplifier. En effet, comme la complexité du contrôleur dépend de l'ordre du modèle nominal, l'ingénieur peut ne pas

souhaiter inclure explicitement toutes les dynamiques connues alors il les introduit dans Δ.

- Les incertitudes sur la valeur des paramètres physiques dans les équations différentielles du modèle. Par exemple, les constantes de linéarisation qui peuvent varier au delà de la plage de fonctionnement.

Elles seront évoquées sous les appellations respectives de : incertitudes non paramétriques et incertitudes paramétriques.

Chaque perturbation différente Δ, donne un modèle de système légèrement différent. Le modèle complet de système incertain est donc une description de l'ensemble et nous espérons que quelques membres de cet ensemble décrivent la réalité de notre système physique. Donc, un modèle d'étude unique est en général trop restrictif : il est plus raisonnable de considérer un ensemble de modèles permettant d'englober les éléments incertains et non stationnaires. Utiliser l'ensemble de modèles, plutôt qu'un seul modèle nominal, permet la procédure de (in-)validation de modèle étudiée dans cette thèse, de sélectionner le meilleur modèle dans l'ensemble de modèles, celui qui présente la plus petite perturbation et donc concevoir un contrôleur robuste aux erreurs de modélisation.

Les ensembles de modèles que nous allons considérer dans cette thèse sont ceux formés à partir d'une représentation linéaire fractionnaire notée LFT. En effet, cette représentation LFT permet de décrire les écarts entre le comportement nominal et le comportement réel du procédé, en considérant que l'ensemble de modèles associé peut être décrit par un modèle nominal noté $P_{nom}(s)$ et une matrice $\Delta(s)$ supposée bornée. Où $\Delta(s)$ rassemble toutes les incertitudes prises en compte dans le modèle. Bien que la structure LFT soit plus générale (certaines non linéarités peuvent en effet être incorporées dans le bloc d'incertitude [EiSc96]), nous nous restreindrons dans ce mémoire au cas particulier des systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI).

D'une façon générale, en automatique, un modèle nominal est une représentation approchée de la réalité physique des systèmes, à partir de laquelle on peut aborder un certain nombre de problèmes pratiques. Le but de toute procédure d'identification est, à partir d'un ensemble de données issues d'observations, la recherche du meilleur modèle, résultat d'un compromis entre sa précision et sa simplicité, compte tenu de l'utilisation finale qui en sera faite. D'autre part, l'utilisateur aura pleine confiance en son modèle si celui-ci présente de façon adéquate la réalité physique, c'est-à-dire si les propriétés démontrées sur le modèle restent vraies pour le système réel. Cependant, la qualité d'un modèle n'est pas simplement fonction de sa capacité à décrire de manière plus ou moins parfaite le système qu'il représente. Il doit également être suffisamment simple pour pouvoir être exploitable aux techniques d'analyse et de synthèse du modèle.

La théorie de la commande robuste donne maintenant à l'ingénieur la puissance de décrire les systèmes physiques avec un modèle qui inclut les deux types d'incertitude, bruit additif et bloc d'incertitude, de norme bornée entrant dans le modèle d'une façon fractionnaire linéaire, tandis que l'identification classique [Lju99] suppose que toutes les sources d'incertitudes sont relatives aux entrées inconnues. Or, d'un point de vue de la commande, les entrées inconnues ne peuvent pas déstabiliser une boucle fermée alors

que les dynamiques inconnues le peuvent. Ceci a gêné l'application des méthodes de la commande robuste aux problèmes pratiques. Les modèles de la commande robuste peuvent capturer cette caractéristique, essentiellement étant capable d'inclure les dynamiques non modélisées mais bornées. D'où la nécessité d'avoir un modèle de cette source d'erreur lors de la synthèse d'un régulateur.

La robustesse est devenue une qualité souhaitable des solutions pour les problèmes de la commande. Dans ce contexte la robustesse signifie la préservation des caractéristiques de système, telles que stabilité ou performance en présence des perturbations inconnues et du bruit.

Afin de poser un problème significatif, les perturbations et le bruit seront supposés de norme bornée menant à une description d'ensemble comme un modèle de système. Le choix de la norme est un compromis entre ceux qui décrivent mieux le système et ceux qui mènent aux problèmes mathématiquement traitables. En supposant une borne de puissance ou d'énergie sur les signaux inconnus mène aux problèmes de norme induits qui peuvent être résolus en utilisant les résultats récents dans la théorie de H_∞. Avant que les méthodes de commande robuste puissent être appliquées, une borne sur l'incertitude doit être mesurée et l'ingénieur doit être confiant que le modèle décrira tous les comportements entrée-sortie observés du système. C'est simplement la question de validation de modèle considérée ici. Nous choisissons dans cette thèse la norme H_∞ comme mesure de l'incertitude.

1.3. Problématique

Cette thèse se situe dans le cadre de l'écart entre les modèles utilisés pour la commande et ceux obtenus à partir des expériences de l'identification en considérant la connexion entre les modèles incertains et les données. Un ingénieur ayant un système physique et souhaitant appliquer les théories d'analyse et de synthèse est immédiatement confronté à un problème: comment choisir le bon modèle nominal, borné sur les perturbations et pondéré sur les ensembles d'entrée sortie.

Une méthodologie d'identification est exigée de sorte que, à l'aide des entrées-sorties expérimentales et quelques hypothèses sur le système, l'identification donne un modèle pondéré qui mènera à une conception satisfaisante de commande. Dans le cas où l'incertitude serait attribuée au bruit additif, les procédures pour produire des modèles sont relativement bien développées. Ljung [Lju99] fournit un traitement complet des méthodes disponibles pour l'identification des systèmes où on suppose que le bruit est stochastique. De telles méthodes sont de valeur ici pour identifier les modèles nominaux.

Le problème d'identification "de boîte noire", étant donné u et y trouver le « meilleur » modèle est incorrectement posé. Un grand ensemble de modèles pourra produire les données observées et la mesure de convenance de ces derniers dépendra fortement des objectifs de performance de conception. Par exemple, considérons le système illustré sur le schéma de la figure 1.1.

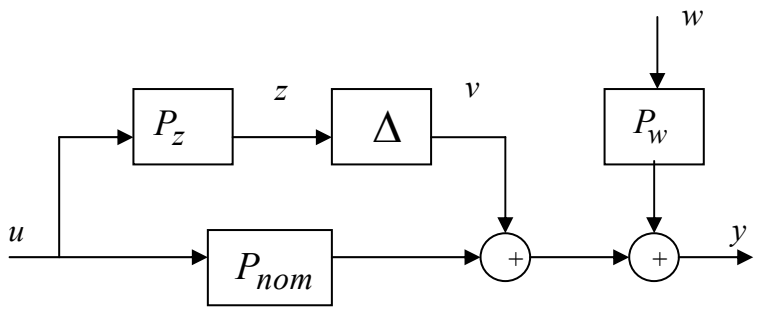


Fig. 1.1 – Exemple de problème d'identification

Soit n'importe quelle donnée entrée sortie u et y, les effets non décrits par le modèle nominal peuvent être attribués soit aux signaux inconnus qui sont les composants de l'entrée du modèle, soit au bloc d'incertitude Δ. En effet, il est possible d'attribuer l'écart entre le comportement nominal $y_{nom} = P_{nom} u$ et le comportement observé y entièrement à $P_w w$. De même, ces résiduels peuvent également être attribués entièrement à ΔP_z. Dans ce contexte le terme ambiguïté sera introduit; l'ambiguïté est l'incertitude sur l'incertitude. Les effets non modélisés qui peuvent déstabiliser un système devraient être expliqués dans Δ. Dans la pratique, une expérience avec $u = 0$ pourrait être utilisée pour estimer P_w, et une autre expérience tels que $P_{nom} u \gg P_w w$ pourrait donner une bonne estimation de ΔP_z. Le but de la bonne identification expérimentale est de réduire l'ambiguïté dans le processus de modélisation.

Une condition nécessaire pour l'acceptation d'un modèle donné est sa capacité à expliquer toutes les données passées. Dans le cadre de commande robuste ceci signifie que pour chaque donnée entrée-sortie observée, il existe un modèle dans l'ensemble de modèles capable de produire cette donnée. La théorie d'(in-)validation de modèle présentée dans cette thèse est un test de cette condition sur un ensemble de modèles.

1.4. Objectif de la thèse

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à l'approche fréquentielle pour aborder le problème d'(in-)validation de modèle de systèmes incertains. La démarche d'(in-) validation consiste à conclure sur la cohérence entre l'ensemble de modèles représenté sous forme d'une représentation linéaire fractionnaire et un jeu de données expérimentales (u, y) prélevé sur le système lors d'un cycle de fonctionnement. L'objectif d'(in-)validation de modèle dans cette thèse sera donc de développer des techniques qui permettent de sélectionner le meilleur modèle dans l'ensemble de modèles, celui qui considère des perturbations de norme la plus faible et donc est le plus proche du système réel. Tester si un système physique peut être modélisé exactement par un élément de l'ensemble de modèles est le sujet de la thèse, dont la contribution principale est :

> *Mener une étude comparative et établir les liens entre différentes méthodes de résolution du problème d'(in-)validation de modèle de systèmes incertains dans le domaine fréquentiel.*

L'approche d'(in-)validation de modèle étudiée sera illustrée dans un premier temps par un exemple académique, le cas d'un système monovariable, avant d'être testée sur un procédé expérimental hydraulique de laboratoire, le procédé 3 Cuves.

En supposant que les incertitudes et le bruit sont de norme bornée nous avons défini une description de l'ensemble de modèles et la question générique du problème de validation de modèle de système incertain étudiée dans cette thèse, que l'on nomme problème de décision de validation de modèle PDVM, est la suivante :

Etant donné un ensemble de modèles et un ensemble de données entrées-sorties, existe-t-il un modèle dans l'ensemble de modèles considéré qui pourrait produire les données entrées/sorties observées?

Ceci demande simplement s'il y a un élément de l'ensemble de modèles et un élément de l'ensemble signal d'entrée inconnu tels que les informations observées sont produites exactement. Si, cependant, pour n'importe quelle donnée expérimentale (u, y) aucune paire, bruit et incertitude (w, Δ), n'existe, alors le modèle ne peut pas expliquer tout le comportement observé et il sera considéré comme insatisfaisant dans sa capacité de décrire le système physique. Un tel outil est utile dans le recueil des modèles inadéquats dans un groupe de modèles candidats.

Le test de (in-)validation de modèle est donc une condition nécessaire pour que n'importe quel modèle décrive un système physique. La validation de modèle est une expression fallacieuse; il n'est jamais possible de valider un modèle, on ne peut que l'invalider. Le fait que chaque expérience peut être expliquée de cette façon fournit peu d'informations sur le modèle et le système. Il peut y avoir des expériences, non effectuées jusqu'ici, qui invalideront le modèle.

La théorie présentée ici permet, en général, de déterminer les tailles de l'incertitude Δ et du bruit w nécessaires à l'explication des observations expérimentales et donc de répondre au problème de décision de validation de modèle (PDVM)

Pour pouvoir répondre à ce PDVM une approche alternative est de poser la question suivante :

Soit un ensemble de modèles un ensemble de données d'entrée-sortie, quelle est la plus petite perturbation Δ et la plus petite taille de bruit w tel que le modèle de l'ensemble de modèles associé à cette paire (w, Δ) peut produire les données ?

Ce type de problème est dénommé problème d'optimisation de la validation de modèle (POVM). La réponse à la question générique du problème de validation de modèle peut être remplacée par une recherche d'un membre de l'ensemble de modèles qui explique les entrées/sorties observées. Ensuite le problème (POVM) sera décomposé en une série de problèmes d'optimisation à chaque fréquence dont chaque résolution donne une solution globale du POVM. Nous allons montrer que la solution d'un POVM fournit une réponse au PDVM correspondant. Par conséquent, d'un point de vue informatique, un PDVM est équivalent à un POVM, puisque pouvoir résoudre un permet à l'autre d'être résolu.

Le problème de trouver un tel membre de l'ensemble de modèles sera formulé donc comme un problème d'optimisation. Le premier problème qui va être étudié dans cette thèse est celui de la détermination d'un signal de bruit de norme minimale tel que les données entrées/sorties observées soient générées par le modèle entaché d'une incertitude de norme inférieure à un niveau admissible choisi. Si la norme minimale trouvée est inférieure à un seuil donné (1 après normalisation), le modèle sera considéré comme expliquant convenablement les résultats expérimentaux. Nous allons montrer que le problème d'optimisation posé ne peut être résolu par le formalisme LMI que dans le cas de certaines structures LFT c'est-à-dire pour des cas spéciaux de l'ensemble de modèles. Dans le cas de structure LFT générale, Nous allons montrer que le problème d'optimisation précédent, qui n'a pas de propriétés particulières, est difficile à résoudre. La problématique d'(in-)validation d'un modèle choisi sera alors modifiée en envisageant de déterminer simultanément la plus petite norme d'incertitude et la plus petite norme du signal de bruit telles que le modèle obtenu génère les données observées. La solution de ce problème sera apportée par une grandeur notée μ_g, en généralisant la notion de valeur singulière structurée. Nous allons montrer que si μ_g est supérieure à une certaine valeur sur tout l'espace des fréquences, alors le modèle n'est pas invalidé. La fonction μ_g calculée à chaque fréquence nous permet non seulement de répondre au problème de validation de modèle mais aussi de prendre en compte la nature structurée du bloc d'incertitude. L'amplitude de cette fonction nous donne une indication sur le niveau de bruit et d'incertitude nécessaire pour atteindre la consistance des données, nous renseigne également sur les domaines fréquentiels où le modèle choisi est pertinent ou non.

1.5. Validation ou Invalidation ?

Le test de validation de modèle est une condition nécessaire pour l'acceptation d'un modèle pour un système physique. En disant qu'un système physique peut être modelé exactement par un élément de l'ensemble de modèles, on signifie que pour chaque entrée possible, la sortie correspondante du modèle est identique à la sortie réelle du système. Si le bruit est présent alors l'entrée et la sortie "réelle" ne peuvent pas être mesurées exactement, ainsi nous pouvons seulement exiger la sortie du modèle d'être proche de la sortie mesurée.

Par exemple, prenons un système physique modélisé par un ensemble de modèles sous la même forme que celle de la figure 1.1 donné par :

$$A\left(P,\Delta,\gamma\right)=\left\{P+\Delta\,\middle|\,\|\Delta\|\le\gamma\right\}$$

Et soit (u,y) l'ensemble de données observées. Donc on dit que le système physique peut être modelé exactement par un élément de l'ensemble de modèles s'il existe

$$P_1\in A(P,\Delta,\gamma),\ \text{avec}\ \|w\|\le\gamma\ \text{tel que}\ y=P_1u+P_ww\ .$$

Il est évident qu'il n'est pas possible de vérifier qu'un système physique peut être modelé exactement par un élément de l'ensemble de modèles, puisqu'il n'est pas possible de mesurer toutes les entrées-sorties possibles du système physique. Cependant, il est possible de vérifier si quelques données d'un système physique peuvent être générées exactement par un élément de l'ensemble de modèles. Si un élément de l'ensemble de modèles génère exactement des données mesurées, alors notre confiance dans l'ensemble de modèles augmente. Si aucun élément de l'ensemble de modèles ne peut expliquer les données, alors l'ensemble de modèles doit être modifié. Donc la validation de modèle est une expression trompeuse. Un terme plus correct que la validation de modèle devrait être «non invalidation» puisque un ensemble de données, récoltées sur la base d'un nombre fini d'expériences, ne peut jamais valider un modèle, seulement l'invalider puisqu'il peut y avoir des expériences, non effectuées jusqu'ici, qui invalideront le modèle. Par conséquent un modèle est soit invalidé soit non invalidé. Cependant, l'expression de validation de modèle est largement répandue dans la communauté scientifique. Donc pour se conformer avec le terme généralement admis "validation de modèle" sera utilisé, mais devrait être interprété en tant que signification "non invalidation de modèle".

1.6. Organisation de la thèse

Cette thèse est divisée en six chapitres, nous en donnons ici un résumé.

Chapitre 2 : Notations et définitions

La notion de norme joue un rôle très important dans la théorie de la validation de modèle pour les systèmes incertains. En effet, la capacité d'un modèle à décrire exactement le comportement d'un système physique dépend de la taille de l'incertitude et du signal du bruit nécessaire pour expliquer les données entrées sorties observées. Et donc la norme n'est qu'une mesure de cette taille.

Dans ce chapitre, après une présentation des notations mathématiques utilisées dans ce mémoire nous introduisons les normes de signaux et de systèmes ainsi que les espaces fonctionnels correspondants. Le chapitre s'achèvera sur une présentation de la structure générique du problème de validation de modèle pour les systèmes incertains qui sera l'objet étudié dans cette thèse.

Chapitre 3 : Modélisation des incertitudes

Ce chapitre est dédié à la modélisation des incertitudes. On y introduit dans un premier temps la notion de l'ensemble de modèles pour les systèmes incertains. Un exemple simple sera utilisé dans le plan de Nyquist pour illustrer l'idée d'un ensemble de modèles pour un système incertain. Ensuite un cadre général pour la modélisation des systèmes incertains qui est celui formé à partir d'une transformation linéaire

fractionnaire sera présenté. Cette représentation permet de décrire les écarts entre le comportement nominal et le comportement réel du procédé, en considérant que l'ensemble de modèles associé peut être décrit par un modèle nominal et des incertitudes de modèle représentées dans un composant inconnu du modèle que nous supposons linéaire et invariant dans le temps. Finalement, on donnera la structure du bloc d'incertitude générale qui regroupe toute les formes d'incertitudes : structurées et non structurées, réelles et complexes, après avoir fait un bilan des différentes formes non structurées que peuvent prendre les incertitudes de modèle et déterminé pour chaque forme la matrice de transfert $P(s)$ associée.

Chapitre 4 : Etat de l'art

Très récemment les travaux qui ont été publiés sur la validation de modèle pour les ensembles de modèles utilisés pour la commande robuste. Cependant il y a deux approches principales qui peuvent être distinguées par la nature de leur domaine; une est dans le domaine de temps et l'autre dans le domaine de fréquence. L'approche dans domaine temporel est fondée sur des résultats dans la théorie d'interpolation de Carathéodory-Fejér. L'approche dans domaine fréquentiel contient des résultats pour une classe générale des problèmes de validation de modèle et est celle qui fait l'objet de notre étude dans ce manuscrit.

Chapitre 5 : Validation de modèle de systèmes incertains

Nous commençons dans ce cinquième chapitre par une présentation du problème de validation de modèle de système incertain dans le domaine fréquentiel ce qui présume la disponibilité d'un jeu de données dans le domaine de fréquence pour l'usage de la validation, qui sont la TFD des mesures des entrées et des sorties du système réel, et les échantillons de la réponse fréquentielle du modèle sur l'étude. L'approche qui consiste à conclure sur la cohérence entre un jeu de données expérimentales prélevé sur le système et un ensemble de modèles est abordée par deux voies, la première est de chercher le plus petit bruit en contraignant que l'incertitude est inférieure de 1 et que le modèle génère bien les données expérimentales observées. Ce problème n'admet de solution que pour certaine classe d'ensemble de modèles et repose sur la résolution d'un problème d'optimisation convexe converti en un problème d'inégalité matricielle affine (LMI). La méthode envisagée consiste à chercher simultanément le plus petit bruit et la plus petite taille d'incertitude telles que les données seront expliquées par le modèle. Ce problème sera résolu à l'aide de la notion de valeur singulière structurée généralisée μ_g. Celle-ci sera définie et le domaine de son existence. Cependant, La définition de la valeur singulière structurée généralisée ne permettant pas d'évaluer sa valeur, nous allons présenter une façon de la caractériser par encadrement. Nous allons voir qu'un minorant pouvait être calculé à l'aide d'un algorithme de la famille des "Power algorithm", et qu'une borne supérieure peut être estimée en résolvant un problème d'optimisation convexe posé en termes de LMIs. Les incertitudes dynamiques structurées et non structurées vont être considérées.

Les outils, les définitions et les théorèmes nécessaires pour la résolution du problème de validation de modèle par les deux façons vont être présentés.

Chapitre 6 : Applications

Dans ce chapitre nous allons tester les résultats théoriques du problème de validation de modèle. Ces méthodes seront validées d'abord en simulation sur un exemple simple académique d'un système monovariable. Dans un premier temps, le modèle va être invalidé par un jeu de données lorsque les incertitudes sur les paramètres ne seront pas prises en compte. Ensuite, une modification sur la structure de l'ensemble de modèles permet de le rendre non invalidé.

Un procédé expérimental de laboratoire, disponible au service automatique de Supélec, le procédé hydraulique composé de 3 Cuves en communication, sera utilisé comme exemple d'application réelle de l'approche de validation de modèle. Ce système sera décrit en quelque détail. Un modèle théorique est développé et utilisé comme modèle nominal non linéaire. L'ensemble de modèles incluant une description des incertitudes est présenté. Les résultats vont être discutés.

Conclusion générale

Pour finir, nous allons donner quelques conclusions et perspectives de ce travail.

Chapitre 2

Notations et définitions

2.1. Introduction 15
2.2. Notations algébriques 15
2.3. Acronymes 17
2.4. Normes des signaux et des systèmes 17
2.5. Structure générique du problème de validation de modèle. 20
2.6. Conclusion 22

2.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les notations mathématiques sur lesquelles la thèse est établie. Une fois la notation énoncée, nous définissons une classe des signaux et des systèmes. Tous les signaux et systèmes vont être exprimés dans le domaine fréquentiel puisque nos travaux s'inscrivent dans l'approche fréquentielle du problème de validation de modèle. La structure générique du problème de validation de modèle de système incertain est ainsi présentée.

2.2. Notations algébriques

Nous allons utiliser au long de ce mémoire quelques notations assez classiques que nous donnons ici pour la référence. D'autres symboles et notations pourront être définis au fur et à mesure des besoins.

$\mathbf{N}$: Ensemble des nombres entiers naturel.

$\mathbf{R}$: Ensemble des nombres réels

$\mathbf{R}^{n\times m}$: Ensemble des matrices à coefficients réels de dimension $n\times m$

$\mathbf{C}$: Ensemble des nombres complexes

$\mathbf{C}^{n\times m}$: Ensemble des matrices à coefficients complexes de dimension $n\times m$

$\mathbf{I}_n$: Matrice identité de dimension $n\times n$

$0_n, 0_{n\times m}$: Matrice nulle de dimension $n\times n$, $n\times m$

M^T : Transposée de la matrice M

M^* : Transposée conjuguée de la matrice M

$\mathrm{Re}\{M\}$: Partie réelle de la matrice M

$\mathrm{Im}\{M\}$: Partie imaginaire de la matrice M

$\dim\{M\}$: Dimension de la matrice M

$\bar{\sigma}(\mathrm{M})$: Valeur singulière maximale de M

$\underline{\sigma}(\mathrm{M})$: Valeur singulière minimale de la matrice M

M_{ij} : Elément de M de ligne i et de colonne j

(aussi utilisé pour la partition i , j de M)

$\|M\|$: Norme de la matrice M

$|M|$: Valeur absolue de chaque élément de M

$abs(x)$: Valeur absolue de x

$x[k]$: k^{ème} échantillon du signal de longueur finie N

$\mathrm{Trace}(M)$: Trace de la matrice $M = \left(\sum_{i=1}^{n} M_{ii}\right)$

$\ker(M)$: Noyau de la matrice M

$sgn(x)$: Signe de x

:= Egale par définition

j : Imaginaire pur $(j^2=-1)$

ω : Pulsation (rad/s).

s : Variable de Laplace

$\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_n)$: $\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_n \end{bmatrix}$

$M > 0$ $(\text{resp. } M < 0)$: M matrice définie positive (resp. définie négative) c'est-à-dire vérifiant $\forall u \neq 0, u \in \mathbf{R}^n, u^T Mu > 0 \quad (resp. \quad u^T Mu < 0)$

$M \geq 0$ $(\text{resp. } M \leq 0)$: M matrice semi définie positive (resp. semi définie négative)

$\mathcal{F}_u(P,\Delta)$: Représentation linéaire fractionnaire du fonction P sur la matrice Δ.

$\mathcal{LFT}_u(P,\Delta,\gamma)$ Ensemble de modèle $\mathcal{F}_u(P,\Delta)$ avec Δ borné par γ. L'omission de γ dans l'écriture à pour signification Δ borné par 1.

$\mathcal{M}(P,\Delta,\gamma)$ Ensemble de modèle multiplicatif.

$\mathcal{A}(P,\Delta,\gamma)$ Ensemble de modèle additif.

On emploie des lettres en majuscule pour désigner la valeur de la TFD d'un signal à une fréquence donnée.

2.3. Acronymes

FFT Transformée de Fourier Rapide - *Fast Fourier Transform*.

TFD Transformée de Fourier Discrète.

LFT Transformation Linéaire Fractionnaire - *Linear Fractional Transformation*

LMI Inégalité Matricielle Affine - *Linear Matrix Inequality*

BMI Inégalité Matricielle - *Biaffine Bilinear Matrix inequality*

LPV Système Linéaire à Paramètres Variants - *Linear Parameter Variying*

LTI Système Linéaire Invariant dans le Temps - *Linear Time Invariant*

MIMO Système Multivariable *Multi-Input Multi-Output*

PDVM Problème de Décision de la Validation de Modèle.

POVM Problème d'Optimisation de la Validation de Modèle

SBPA Suite Binaire Pseudo Aléatoire.

SISO Mono variable *Single-Input Single-Output*

2.4. Normes des signaux et des systèmes

Une norme est simplement une mesure de la taille d'un vecteur, une matrice, un signal, ou un système. Ici on s'intéressera à des normes particulières pour chacune de ces entités.

2.4.1. Norme 2

Sauf indication contraire, on signifie par la taille d'un vecteur sa norme euclidienne.

Soit :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La norme euclidienne de x , noté $\|x\|$, est définie par :

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^{1/2} \tag{2.1}$$

Soit un signal $x(t)$. La norme 2 de ce signal dans le domaine du temps est définie par :

$$\|x(t)\|_2 := \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2} \tag{2.2}$$

C'est simplement l'énergie du signal.

La relation de Parseval montre qu'on peut aussi exprimer cette norme dans le domaine de Laplace. Soit $\hat{x}$ la transformée de Laplace de x, nous avons :

$$\|\hat{x}(s)\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{x}(j\omega)\|^2 \, d\omega \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2} \tag{2.3}$$

Lorsque la norme précédente est non bornée, on peut définir la norme de puissance par :

$$\|x(t)\|_{\mathcal{P}} := \left(\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|x(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2} \tag{2.4}$$

L'ensemble des signaux $x(t)$ d'énergie finie, c'est à dire $\|x(t)\|_2 < \infty$, définit l'espace de Lebesque [Fra87], noté $\mathcal{L}_2$ et donné par :

$$\mathcal{L}_2 = \left\{ x(t) \,\middle|\, \|x(t)\|_2 < \infty \right\} \tag{2.5}$$

Pour un signal discret sous forme d'une séquence $\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$ la norme 2 est donnée par :

$$\|x(k)\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|x(k)\|^2 \right)^{1/2} \tag{2.6}$$

Et l'ensemble des signaux, avec $\|x(k)\|_2$ finie, est ainsi noté :

$$l_2 = \left\{ x(k), k = 1, ..., \infty \,\middle|\, \|x(k)\|_2 < \infty \right\} \tag{2.7}$$

Si x est un signal de longueur finie N, alors sa norme 2 devient :

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \|x[k]\|^2 \right]^{1/2} \tag{2.8}$$

En s'exprimant dans le domaine fréquentiel, nous avons :

$$\|x\|_2 = \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|X[n]\|^2 \right]^{1/2} \tag{2.9}$$

Avec $X[n]$ est le n^{ème} point de la TFD de x donnée par :

$$X[n]=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]\ e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}\ \text{pour}\ n\in[0,...,N-1] \tag{2.10}$$

L'espace $\mathcal{L}_2$ peut être divisé en deux sous espaces orthogonaux H_2 et $H_2^{\perp}$. H_2 est l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}_2$ qui sont dans le demi plan droite c'est-à-dire tous les signaux stables. De même, $H_2^{\perp}$ est l'ensemble de tous les signaux avec leur pôles dans le demi plan gauche.

L'ensemble des fonctions rationnelles réelles strictement propres n'ayant pas de pôles sur l'axe imaginaire est noté par $\mathbf{R}\mathcal{L}_2$. Soit $\mathbf{R}H_2$ l'ensemble de ces fonctions qui sont stables.

Pour l'ensemble des signaux (vecteurs, matrices ou systèmes) avec une norme inférieure ou égale à 1, on parle d'une boule d'unité. La boule unité de $\mathcal{L}_2$, noté $\mathbf{B}\mathcal{L}_2$, est définie par :

$$\mathbf{B}\mathcal{L}_2=\left\{x(t)\,\middle|\,\|x(t)\|_2<1\right\} \tag{2.11}$$

2.4.2. Norme ∞

Maintenant on considère une matrice M et les vecteurs u et y, avec

$$y=M\,u$$

La norme de M, notée $\|M\|$, est définie par :

$$\|M\|=\max_{\|u\|<\infty}\frac{\|y\|}{\|u\|} \tag{2.12}$$

Et comme une matrice M est bien linéaire, sa norme est équivalente à :

$$\|M\|=\max_{\|u\|=1}\|y\| \tag{2.13}$$

Si par défaut la norme des vecteurs u et y est Euclidienne alors on définit la norme induite par cette norme par :

$$\|M\|=\bar{\sigma}(M) \tag{2.14}$$

où $\bar{\sigma}$ est la valeur singulière maximale.

Pour le cas d'un système dynamique $P(s)$, avec $u(s)$ et $y(s)$ comme entrée et sortie de ce système, la norme induite de $\mathcal{L}_2$ vers $\mathcal{L}_2$ est définie par :

$$\left\|P(s)\right\| = \max_{u(s)\in\mathcal{L}_2} \frac{\left\|y(s)\right\|_2}{\left\|u(s)\right\|_2} \tag{2.15}$$

Aussi, pour un système linéaire :

$$\left\|P(s)\right\| = \max_{u(s)\in\mathbf{B}\mathcal{L}_2} \left\|y(s)\right\|_2 \tag{2.16}$$

Cette norme est appelée la norme infinie, notée par $\left\|P(s)\right\|_\infty$. L'ensemble de tous les systèmes avec la norme infinie bornée est noté par $\mathcal{L}_\infty$.

$$\mathcal{L}_\infty = \left\{M(s) \,\middle|\, \left\|M(s)\right\|_\infty < \infty\right\}$$

L'ensemble $\mathcal{L}_\infty$ peut être aussi divisé en sous ensemble stable et sous ensemble instable. L'ensemble stable, noté H_∞, est tel que les systèmes $\left|P(s)\right|$ sont finis pour toute $\mathrm{Re}(s) > 0$. D'où l'origine de l'appellation « théorie de la commande H_∞ ». Encore pouvons-nous nous limiter à des fonctions réelles rationnelles, soit $\mathbf{R}\mathcal{L}_\infty$ l'ensemble des fonctions de transferts propre avec aucun pôle sur l'axe imaginaire, $\mathbf{R}H_\infty$ est l'ensemble de ces fonctions de transferts stables et propres.

Pour toute matrice ou système multivariable $P(s)$ dans H_∞, on définit la norme H_∞, notée $\left\|P(s)\right\|_\infty$, de la manière suivante :

$$\left\|P(s)\right\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}\left[P(j\omega)\right] \tag{2.17}$$

$\left\|P(s)\right\|_\infty$ est donc la valeur la plus élevée du gain du système sur l'ensemble des pulsations (pour un système monovariable, c'est la valeur la plus élevée de $\left|P(j\omega)\right|$) [DuS99].

2.5. Structure générique du problème de validation de modèle.

Dans le but de l'identification et de la validation de modèle, le schéma 2.1 montre la structure générique du problème de validation de modèle de système incertain. Dans les expériences d'identification certaines entrées du système sont connues. L'entrée est maintenant divisée en u et d où u représente les entrées de système qui sont connues et d représente les entrées inconnues d'un ensemble de $\mathbf{B}\mathcal{L}_2$. La sortie du système va être notée par y, et elle est supposée corrompue par un signal de bruit w aussi de l'ensemble $\mathbf{B}\mathcal{L}_2$, elle représente les sorties mesurées et elle est supposée connue.

Il est convenable de définir un ensemble $\underline{\boldsymbol{\Delta}}$ avec une structure de bloc appropriée représentant tous les blocs possibles d'incertitude (matrices complexes, matrices réelles, opérateurs,..), et qui sont de dimension appropriée.

On définit $\underline{\boldsymbol{\Delta}}$ comme :

$$\underline{\boldsymbol{\Delta}} = \left\{ \mathrm{diag}\left(\Delta_1, ..., \Delta_m\right) \middle| \dim\left(\Delta_i\right) = k_i \times k_i \right\} \tag{2.18}$$

On note la boule d'unité de $\underline{\boldsymbol{\Delta}}$, un sous-ensemble de $\underline{\boldsymbol{\Delta}}$ de norme bornée par 1, par $\mathbf{B}\underline{\boldsymbol{\Delta}}$ donnée par :

$$\mathbf{B}\underline{\boldsymbol{\Delta}} := \left\{ \Delta \in \underline{\boldsymbol{\Delta}} \middle| \|\Delta\| \le 1 \right\} \tag{2.19}$$

L'entrée de bloc d'incertitude Δ sera notée z et sa sortie par v. Dans la modélisation du système sous la forme de LFT, P_{23} définit le modèle nominal.

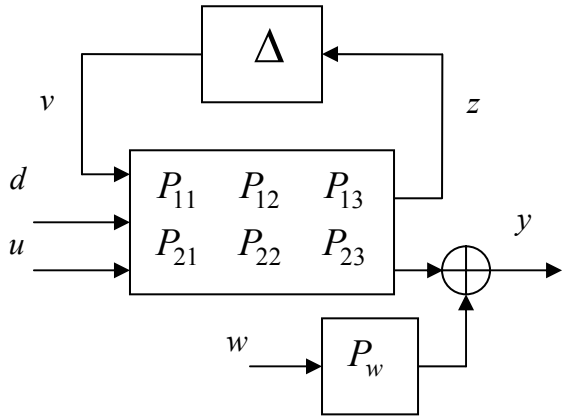


Fig. 2. 1 – Structure générique du problème de validation de modèle.

Le système P est partitionné alors en 6 parties, et les équations du bouclage que la figure 2.1 présente sont données par :

$$\begin{aligned} z &= P_{11}v + P_{12}d + P_{13}u \\ y &= P_{21}v + P_{22}d + P_{23}u + P_w w \\ v &= \Delta z \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ce type de diagramme et les équations associées seront utilisés quand les objets P, z, y etc., sont bien définis et compatibles. Par exemple P pourrait être une matrice et z, y etc., devrait être des vecteurs. Si P représente un système dynamique alors z, y etc. devront être des signaux et

$$z = P_{11}v + P_{12}d + P_{13}u \tag{2.21}$$

signifie que le signal z est la somme de la réponse du système P_{11} du signal d'entrée v et du système P_{12} du signal d'entrée d et du système P_{13} du signal u.

On supposera que les éléments de P sont soit des matrices de fonction de transfert ou des matrices à valeurs complexes. Le second cas résulte d'une analyse fréquentielle du système.

On emploie la notation $P(s)$ pour indiquer la représentation Laplace du système P, et $P\left(e^{j\omega_n}\right)$ pour le n^{ème} élément de sa réponse fréquentielle.

Dans le cas où le système est écrit sous la forme d'une représentation d'espace d'état :

$$\begin{aligned} sx(s) &= Ax(s) + Bu(s) \\ y(s) &= Cx(s) + Du(s) \end{aligned} \tag{2.22}$$

La notation suivante sera utilisée :

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \tag{2.23}$$

2.6. Conclusion

Il faut noter que la même notation est utilisée pour des structures d'interconnexion de l'identification, de la synthèse, et de l'analyse, les éléments de la structure d'interconnexion vont changer selon l'utilisation de la structure. Pour l'identification, P ressemblera le plus étroitement à la notion habituelle d'un modèle du système. Pour poser le problème de synthèse, les sorties de système seraient comparées à une certaine réponse idéale ou à un signal d'entrée de consigne. Les sorties additives ou autres variables internes, seraient ajoutées pour rendre le problème de synthèse plus significatif. Les pondérations reflétant la performance désirée, seraient factorisés dans les entrées et les sorties. Pour le problème d'analyse, un contrôleur serait également factorisé dans la structure d'interconnexion pour former le système de boucle fermé. Dans le chapitre suivant, le style de notation $F_u(P,\Delta)$ sera utilisé pour que chacun de ces problèmes soit considéré sous sa forme plus générale.

Chapitre 3

Modélisation des systèmes incertains

3.1. Introduction 25
3.2. Systèmes incertains 25
3.3. Ensemble de modèles pour les systèmes incertains 26
3.4. Exemple illustratif 27
3.5. Exemples d'ensemble de modèles : 29
3.6. Modélisation des systèmes incertains par transformation linéaire fractionnaire. 31
3.7. Modélisation des incertitudes paramétriques 36
3.8. Modélisation des incertitudes non structurées 40
3.9. Matrice d'incertitude générale Δ 46
3.10. Modèle général pour le problème de validation de modèle 47
3.11. Conclusion 47

3.1. Introduction

Ce chapitre présentera et étudiera la structure de modélisation des systèmes incertains par un ensemble de modèles. Un exemple simple sera présenté dans le plan de Nyquist pour illustrer l'idée d'un ensemble de modèles du système incertain. Les ensembles de modèles considérés pour la validation de modèle dans cette thèse seront ceux utilisés pour la commande H_∞, c'est à dire ceux qui peuvent être exprimés à l'aide d'une transformation linéaire fractionnaire (LFT pour Linear Fractional Transformation) sur un opérateur Δ inconnu mais de norme bornée [DGKF89], nous détaillerons la modélisation des incertitudes structurées et non structurées dans un ensemble de modèles LFT. Cet ensemble de modèles LFT, qui sera modifié par l'introduction d'un bruit, caractérisera par la suite la structure générique du problème de validation de modèle.

3.2. Systèmes incertains

Le calcul de la commande d'un processus physique passe nécessairement par l'utilisation d'un modèle qui ne peut jamais être une représentation parfaite de la réalité : il y a toujours des incertitudes de modélisation, dont la conséquence est qu'on ne peut pas décrire exactement par un modèle mathématique le comportement d'un système physique. En effet, le modèle mathématique qui peut être issu, soit des équations physiques reflétant notre compréhension des mécanismes mis en jeu, soit d'une procédure d'identification du comportement entrée/sortie du système, dépend de paramètres dont la valeur est souvent mal connue ou évolue au cours du temps. Donc un système physique ne peut jamais être caractérisé exactement par un modèle mathématique, cependant dans certain cas nous avons une estimation de l'exactitude de notre modèle qui pourrait être plutôt imprécise. Par exemple, le modèle est bon à 25% environ jusqu'à 30 Hertz et au delà de 100 Hertz le modèle est trop imprécis pour l'utiliser pour la conception. Donc il se peut que nous ne voulions pas investir du temps et de l'effort pour obtenir un modèle plus précis, ou il se peut que le comportement change légèrement entre les expériences et nous ne pouvons pas déterminer un modèle plus précis. Dans la pratique, les deux aspects contribueront à l'incertitude. Nous voulons donc des moyens d'incorporer cette incertitude dans le modèle pour la procédure de validation de modèle.

L'approche de ces problèmes consiste alors à utiliser un modèle incluant une perturbation (incertitudes, bruit) inconnue mais bornée. La borne sur cette perturbation sera déterminée dans la suite de cette thèse afin de refléter la quantité d'incertitude. Le modèle incertain qui présente la plus petite perturbation en norme est celui qui décrit au mieux le système et donc celui qu'il est préférable d'utiliser pour la conception de la commande.

L'incertitude sur le modèle décrite précédemment par une perturbation résulte en général de deux sources; entrées inconnues et dynamique inconnue (par exemple dynamique en haute fréquence). Les entrées inconnues seront les entrées dans le modèle

intervenant de façon additive sur la sortie de modèle ou/et des entrées du modèle expliquant le bruit de mesure, elles seront d'une énergie bornée. Tandis que la dynamique inconnue sera regroupée dans un composant inconnu du modèle, noté Δ, représentant alors les incertitudes de modélisation telles que les dynamiques hautes fréquences qui sont mal connues ou volontairement négligées dans l'écriture du modèle, les retards purs, les incertitudes sur la valeur des paramètres physiques, les effets d'une linéarisation autour d'un point de fonctionnement, l'utilisation de modèles simplifiés pour les actionneurs et les capteurs. Cet opérateur inconnu Δ sera supposé linéaire et invariant dans le temps de norme bornée.

3.3. Ensemble de modèles pour les systèmes incertains

Les systèmes incertains forment la base des techniques de validation de modèle présentées dans ce travail. La structure de base de ces modèles peut être considérée comme l'association d'un système nominal et d'une perturbation inconnue bornée de taille spécifiée. Conceptuellement, ceci peut être regardé comme indiqué dans la figure 3.1.

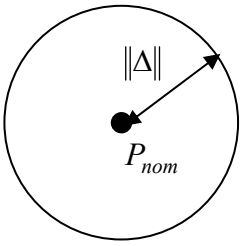


Fig. 3.1 - L'ensemble de modèles $\{P_{nom} + \Delta\}$

Ici P_{nom} représente le modèle nominal du système et Δ est la perturbation. La taille de l'ensemble de modèles est contrainte en mettant une borne sur la taille de cette perturbation.

Chaque perturbation différente Δ, donne un modèle de système légèrement différent. Le modèle complet de système incertain est donc une description de l'ensemble et nous espérons que certains membres de cet ensemble décrivent une partie des aspects incertains ou non modélisés de notre système physique. Donc, un modèle d'étude unique est en général trop restrictif : il est plus raisonnable de considérer un ensemble de modèles permettant d'englober les éléments incertains et non stationnaires.

Par exemple, considérons un modèle décrit par un opérateur linéaire P_{nom}, avec une incertitude additive et un bruit sur la sortie, comme présenté sur la figure 3.2. Une hypothèse sur l'incertitude Δ est que Δ est un opérateur linéaire de norme bornée par un nombre positif γ, une hypothèse sur le signal de bruit w est qu'il est un signal de norme inférieure à un certain nombre positif. Soit l'équation entrée-sortie du système :

$$y = \left(P_{nom} + \Delta P_z\right)u + P_w w = P_{nom}u + v + P_w w \tag{3.1}$$

Donc la sortie y, ne dépend pas seulement de l'entrée connue u, mais aussi de signal de bruit w et du signal d'incertitude v. Par conséquent, pour une seule entrée il y a un ensemble de sorties possibles, donc il est plus précis de parler d'un ensemble de modèles.

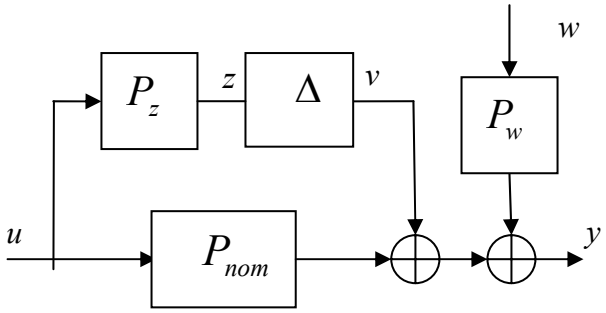


Fig. 3.2 – Modèle avec perturbation additive et bruit en sortie.

Nous sommes intéressés en décrivant un système par un ensemble de modèles, plutôt que par un seul modèle nominal. L'approche de système incertain donne alors des moyens de décrire cet ensemble de modèles et nous espérons que quelques membres de cet ensemble capturent une partie des aspects incertains ou non modélisés de notre système physique pour que les méthodologies de conception de la commande robuste puissent être alors utilisées d'une manière satisfaisante. Utiliser l'ensemble de modèles, plutôt qu'un seul modèle nominal, permet la procédure de validation de modèle étudiée dans cette thèse, de sélectionner le meilleur modèle dans l'ensemble de modèles qui a la plus petite perturbation et donc de concevoir une loi de commande robuste aux erreurs de modélisation.

3.4. Exemple illustratif

Afin d'illustrer la notion d'un ensemble de modèle pour les systèmes incertains, on considère l'exemple d'un modèle donné par le schéma de la figure 3.3.

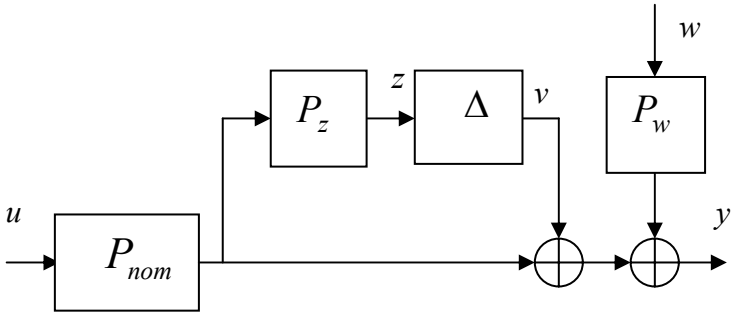


Fig. 3.3 – Modèles avec perturbation multiplicative et bruit en sortie

Cette figure est équivalente à la relation entrée sortie suivante :

$$y = P_w w + \left[(I + \Delta P_z) P_{nom} \right] u \tag{3.2}$$

où Δ, P_z, P_w et P_{nom} sont des systèmes dynamiques.

Le système P_w est une pondération dépendant de fréquence sur le signal de bruit w. Pour cet exemple nous la considérons de valeur nulle, ceci nous permet de comprendre la région d'incertitude.

La seule chose que nous savons sur la perturbation Δ est que $\|\Delta\|_\infty \leq 1$. Chaque Δ, avec $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ donne une fonction de transfert différente entre u et y. Dans cet exemple, l'ensemble de toutes les fonctions de transfert possible, généré de cette manière, est appelé ensemble de modèles multiplicatif noté $\mathcal{M}$. Plus formellement :

$$\mathcal{M} = \left\{ \left(\mathrm{I} + \Delta P_z \right) P_{nom} \;\middle|\; \|\Delta\|_\infty \leq 1 \right\} \tag{3.3}$$

Donc maintenant nous sommes devant un ensemble de fonctions de transfert possibles :

$$y(s) = P(s) u(s) \tag{3.4}$$

Où

$$P(s) \in \mathcal{M} \tag{3.5}$$

Δ peut être considéré comme un pourcentage de l'erreur maximum entre le modèle nominal et le système réel.

Le système $P_{nom}(s)$ est l'élément de $\mathcal{M}$ qui vient du $\Delta = 0$ et il s'appelle le modèle nominal. Dans ce cas la relation entre entrée et sortie est $y(s) = P_{nom}(s) u(s)$. Ce cas trivial ne sera pas considéré dans cette thèse puisqu'il y a toujours un écart inévitable entre n'importe quel modèle et les comportements d'un système physique.

Comme Δ s'éloigne de 0 (mais reste borné en taille), le modèle nominal est multiplié par $\left(I + \Delta P_z(s) \right)$. $P_z(s)$ est une fonction de pondération en fréquence qui nous indique l'effet maximum de perturbation à chaque fréquence. L'introduction de $P_z(s)$ nous permet de modéliser $\mathcal{M}$ avec un Δ borné par 1. Toute normalisation de Δ est simplement incluse dans $P_z(s)$.

On suppose toujours que Δ est aussi linéaire et invariant dans le temps (LTI), ce qui veut dire tout simplement que c'est une matrice de valeur complexe inconnue a chaque pulsation ω. De plus si $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, alors à chaque fréquence $\left\| \Delta(j\omega) \right\| = \sigma_{\max}\left(\Delta(j\omega) \right) \leq 1$.

Afin de faciliter la compréhension de cette approche on considère un exemple d'un point de vue Nyquist.

Prenons pour cet exemple un système monovariable de 1er ordre :

$$y(s) = \left[\left(I + \Delta P_z(s) \right) P_{nom}(s) \right] u(s) \tag{3.6}$$

Avec les fonctions de transferts suivants :

$$P_{nom}(s)=\frac{1+0.05s}{1+s} \tag{3.7}$$

et

$$P_z(s)=\frac{0.1+0.2s}{1+0.05s} \tag{3.8}$$

La figure 4 illustre l'ensemble de modèles généré par un opérateur Δ, de norme $\|\Delta\|_\infty \leq 1$.

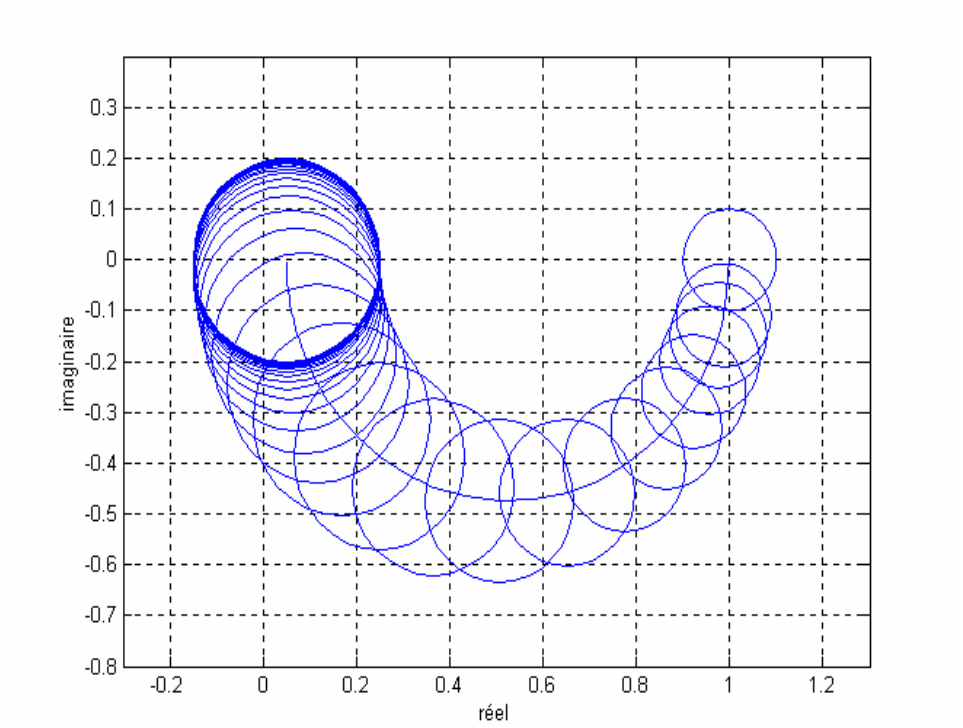


Fig. 3.4 – Diagramme de Nyquist de l'ensemble de modèles

A chaque fréquence ω, la fonction de transfert de tout élément de $\mathcal{M}$ se trouve à l'intérieur d'un cercle, centré au $P_{nom}\left(e^{j\omega}\right)$, de rayon $\left|P_{nom}\left(e^{j\omega}\right)P_z\left(e^{j\omega}\right)\right|$.

On peut noter que l'ensemble de modèles $\mathcal{M}$ se traduit dans le plan de Nyquist par un ensemble des régions et donc il peut décrire un ensemble plus large de comportement de système qu'un modèle nominal seul.

3.5. Exemples d'ensemble de modèles

Comme nous avons vu, les incertitudes de modèle peuvent se mettre soit sous une forme additive avec le modèle nominal selon la figure 3.2, soit sous une forme multiplicative avec le modèle nominal comme le système indiqué dans la figure 3.3, les

ensembles de modèles formés par ces deux structures sont les plus connues et sont donnés par :

$$\mathcal{A}(P,\underline{\Delta}) := \left\{ P_{nom} + \Delta P_z \;\middle|\; \|\Delta\|_\infty \le \gamma \right\} \tag{3.9}$$

$$\mathcal{M}(P,\underline{\Delta}) := \left\{ (I + \Delta P_z) P_{nom} \;\middle|\; \|\Delta\|_\infty \le \gamma \right\} \tag{3.10}$$

Où $\underline{\Delta}$ est l'ensemble de fonctions de transferts stables et rationnelles.

Une autre forme de l'ensemble de modèles est celle qui s'exprime par une factorisation première normalisée du modèle :

Avant de définir cet ensemble de modèles, on donne une définition du facteur premier.

Définition des facteurs premiers :

Soit $G(s)$ la matrice de transfert d'un système. La factorisation première à droite normalisée de $G(s)$ (fig. 3.5) est constituée des deux matrices de transfert $M(s)$ et $N(s) \in \mathbf{R}H_\infty$ telles que :

$$\begin{cases} G(s) = N(s) M(s)^{-1} \\ \forall s \in \mathbf{C} \quad N(-s)^T N(s) + M(-s)^T M(s) = I \end{cases} \tag{3.11}$$

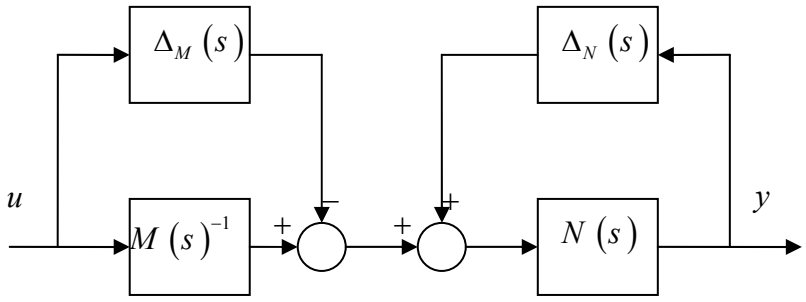


Fig. 3.5 – Modèle de facteur premier normalisé à droite

De même la factorisation première à gauche normalisée (fig.3.6) est constituée des deux matrices $\tilde{M}(s)$ et $\tilde{N}(s) \in \mathbf{R}H_\infty$ telles que :

$$\begin{cases} G(s) = \tilde{M}(s)^{-1} \tilde{N}(s) \\ \forall s \in \mathbf{C} \quad \tilde{N}(s)\tilde{N}(-s)^T + \tilde{M}(s)\tilde{M}(-s)^T = I \end{cases} \tag{3.12}$$

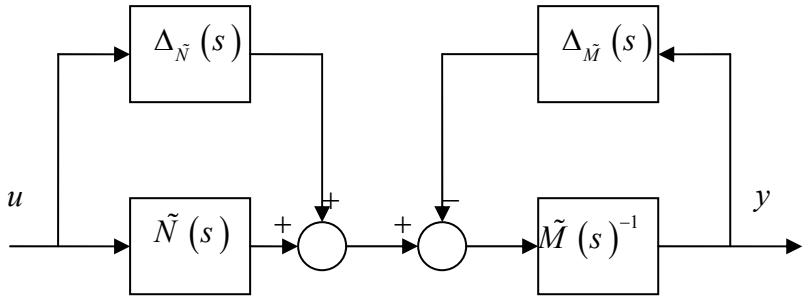


Fig. 3.6 – Modèle de facteur premier normalisé à gauche.

Donc soit un système P avec la factorisation première à droite normalisée (N, M), (resp. $(\tilde{N}, \tilde{M})$ pour la factorisation première à gauche normalisée) et $\gamma \in \mathbf{R}$. Donc les ensembles de modèle de facteur premier normalisé à droite (resp. à gauche), notés $\mathcal{NCF}(N, M, \underline{\Delta}, \gamma)$ (resp. $\mathcal{NCF}(\tilde{N}, \tilde{M}, \underline{\Delta}, \gamma)$), sont donnés par :

$$\mathcal{NCF}(N, M, \underline{\Delta}, \gamma) := \left\{ (N + \Delta_N)(M + \Delta_M)^{-1} : \begin{bmatrix} \Delta_N \\ \Delta_M \end{bmatrix} \in \underline{\Delta}, \left\| \begin{bmatrix} \Delta_N \\ \Delta_M \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \right\} \tag{3.13}$$

$$\mathcal{NCF}(\tilde{N}, \tilde{M}, \underline{\Delta}, \gamma) := \left\{ (\tilde{M} + \Delta_{\tilde{M}})^{-1} (\tilde{N} + \Delta_{\tilde{N}}) : \begin{bmatrix} \Delta_{\tilde{N}} & \Delta_{\tilde{M}} \end{bmatrix} \in \underline{\Delta}, \left\| \begin{bmatrix} \Delta_{\tilde{N}} & \Delta_{\tilde{M}} \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \right\}$$

(3.14)

Les ensembles de modèles les plus générales peuvent être obtenus en utilisant la transformation linéaire fractionnaire LFT qu'on détaillera dans la section suivante.

3.6. Modélisation des systèmes incertains par transformation linéaire fractionnaire.

Le but initial de l'introduction de la transformation linéaire fractionnaire fut de représenter de manière simple les fonctions de transfert en boucle fermée. Son intérêt s'est vu élargi avec l'apparition de nouvelles techniques de commande robuste en stabilité et en performances. Donc elle est devenue intrinsèquement liée à la modélisation sous forme standard d'un système [Fon95]. Cette modélisation par transformation fractionnaire linéaire (LFT) fournit un cadre général de modélisation et d'étude pour la plupart des systèmes, en particulier les systèmes linéaires dépendant de paramètres incertains, variant ou invariant dans le temps. Elle apparaît dans nos problèmes lorsque l'on est amené à isoler un bloc d'incertitude entachant un modèle nominal connu a priori.

Dans cette thèse on se limitera au cas particulier des systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI).

3.6.1. Définition d'une transformation fractionnaire linéaire

La représentation LFT est une représentation des systèmes pouvant s'écrire sous la forme d'une matrice d'interconnexion P (matrice de transfert ou représentation d'état) connectée par un retour Δ dont les éléments peuvent être de nature diverse : intégrateurs, non linéarités, systèmes linéaires, paramètres dépendant du temps, dynamiques négligées…

Soit les deux structures générales des figures 3.7a et 3.7b, où P est partitionné comme l'indique la formule ci-dessous :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

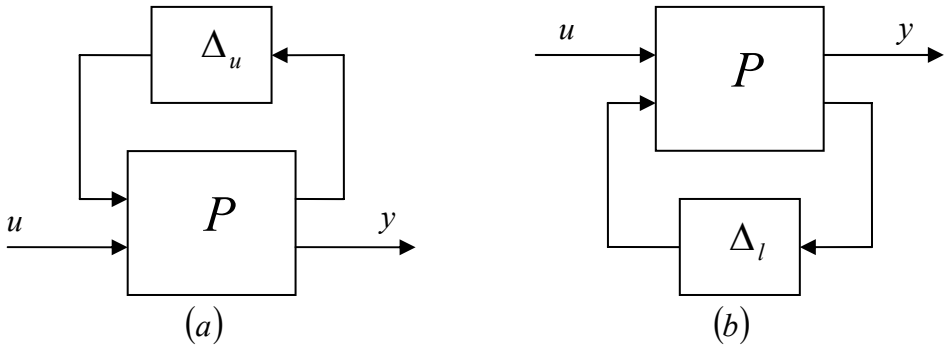


Fig. 3.7 – Représentation LFT : a) supérieure b) inférieure.

En supposons que $\det(I - P_{11}\Delta_u) \neq 0$ le transfert entre u vers y obtenu après fermeture de la boucle par Δ_u, est donné par :

$$y = \left[P_{22} + P_{21}\Delta_u \left(I - P_{11}\Delta \right)^{-1} P_{12} \right] u \tag{3.15}$$

Cette équation sera abrégée par cette notation :

$$y = F_u \left(P, \Delta_u \right) u \tag{3.16}$$

avec $F_u(P, \Delta_u)$ désigne la LFT supérieure donnée par:

$$F_u(P, \Delta) = P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1} P_{12} \tag{3.17}$$

De même si $\det(I - P_{22}\Delta_l) \neq 0$ alors la LFT inférieure est définie d'une manière similaire et le transfert de u vers y, noté par $F_l(P, \Delta)$ est donné par :

$$F_l(P, \Delta) = P_{11} + P_{12}\Delta(I - P_{22}\Delta)^{-1} P_{21} \tag{3.18}$$

L'indice 'u' indique que le bloc Δ est connecté en boucle supérieure, on trouve aussi la notation 'l' lorsque Δ est bouclé inférieure.

L'interconnexion de deux LFT selon la figure 3.8 peut être décrite par le produit étoile de Redheffer (star produit) $R(Q,P)=Q*P$, où la matrice partitionnée

$$\begin{aligned} R_{11} &= Q_{11} + Q_{12}P_{11}\left(I - Q_{22}P_{11}\right)^{-1} Q_{21} \\ R_{12} &= Q_{12}\left(I - P_{11}Q_{22}\right)^{-1} P_{12} \\ R_{21} &= P_{21}\left(I - Q_{22}P_{11}\right)^{-1} Q_{21} \\ R_{22} &= P_{22} + P_{21}Q_{22}\left(I - P_{11}Q_{22}\right)^{-1} P_{12} \end{aligned} \tag{3.19}$$

correspondant à la LFT supérieure $F_u(R,\Delta')$.

Le produit de Redheffer est associatif, ce qui peut s'avérer utile lorsque :

- Une LFT $F_u(P,\Delta)$ a été créée sans normaliser les incertitudes. La normalisation peut facilement être mise sous une forme de LFT $F_u(Q,\Delta')$ en combinant deux LFTs selon l'équation (3.19)
- Une LFT $F_u(P,\Delta)$ est d'abord déterminée en ignorant que les paramètres sont soumis à des contraintes supplémentaires. Ces contraintes sont prises en compte en exprimant que certains paramètres sont en réalité une fonction de paramètres complémentaires. Cette dépendance ne représente rien d'autre qu'une LFT $F_u(Q,\Delta')$.

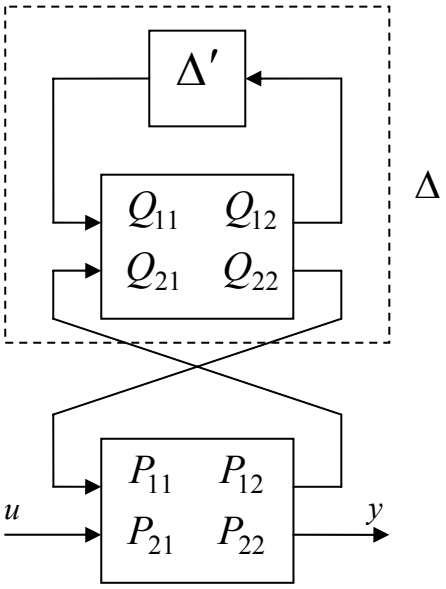


Fig. 3.8 – Produit étoile de Redheffer

On peut clairement retrouver les deux LFT's supérieure et inférieure à partir de ce produit étoile de Redheffer tel que

$$F_u(P,Q_{22}) = R(Q_{22},P) \tag{3.20}$$

et

$$F_l\left(Q,P_{11}\right)=R\left(Q,P_{11}\right) \tag{3.21}$$

Remarque 3.1:

L'ensemble de modèles sous la forme de LFT est défini par :

$$\mathcal{LFT}\left(P,\mathbf{\Delta},\gamma\right)=\left\{F_u\left(P,\mathbf{\Delta}\right):\Delta\in\underline{\mathbf{\Delta}},\left\|\Delta\right\|_\infty\le\gamma\right\} \tag{3.22}$$

3.6.2. Algèbre des LFT's

Avec une boite à outils pour Matlab décrite initialement par Terlouw et Lambrechts [TeL93] puis par Magni [Mag01], on peut manipuler des objets LFT's, en particulier mettre en parallèle (addition), mettre en série (multiplication), inverser et concaténer des objets LFT's.

Nous allons ici expliciter le mécanisme associé à ces manipulations en considérant l'addition, la multiplication et l'inversion

Soit deux LFT's $F_u\left(P^{(1)},\Delta^{(1)}\right)$ et $F_u\left(P^{(2)},\Delta^{(2)}\right)$ données par :

$$F_u\left(P^{(1)},\Delta^{(1)}\right)=P_{21}^{(1)}\Delta^{(1)}\left(I-P_{11}^{(1)}\Delta^{(1)}\right)^{-1}P_{12}^{(1)}+P_{22}^{(1)} \tag{3.23}$$

$$F_u\left(P^{(2)},\Delta^{(2)}\right)=P_{21}^{(2)}\Delta^{(2)}\left(I-P_{11}^{(2)}\Delta^{(2)}\right)^{-1}P_{12}^{(2)}+P_{22}^{(2)} \tag{3.24}$$

3.6.2.1. *Sommation*

La LFT issue de la somme des deux LFT's $F_u\left(P^{(1)},\Delta^{(1)}\right)$ et $F_u\left(P^{(2)},\Delta^{(2)}\right)$ est donnée par :

$$F_u\left(P^{(1)},\Delta^{(1)}\right)+F_u\left(P^{(2)},\Delta^{(2)}\right)=F_u\left(\Sigma\left(P^{(1)},P^{(2)}\right),\begin{bmatrix}\Delta^{(1)} & 0\\ 0 & \Delta^{(2)}\end{bmatrix}\right) \tag{3.25}$$

avec

$$\Sigma\left(P^{(1)},P^{(2)}\right)=\begin{bmatrix}P_{11}^{(1)} & 0 & P_{12}^{(1)}\\ 0 & P_{11}^{(2)} & P_{12}^{(2)}\\ P_{21}^{(1)} & P_{21}^{(2)} & P_{22}^{(1)}+P_{22}^{(2)}\end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Pour une addition d'une LFT avec une matrice M la LFT résultante est :

$$F_u\left(P,\Delta\right)+M=F_u\left(\begin{bmatrix}P_{11} & P_{21}\\ P_{12} & P_{22}+M\end{bmatrix},\Delta\right) \tag{3.27}$$

Il faut noter que cette addition est commutative c'est à dire :

$$F_u(P,\Delta)+M=M+F_u(P,\Delta)=F_u\left(\begin{bmatrix}P_{11} & P_{21}\\ P_{12} & P_{22}+M\end{bmatrix},\Delta\right) \tag{3.28}$$

3.6.2.2. *Produit*

La réalisation issue du produit de deux LFT's $F_u\left(P^{(1)},\Delta^{(1)}\right)$ et $F_u\left(P^{(2)},\Delta^{(2)}\right)$ est donnée par :

$$F_u\left(P^{(1)},\Delta^{(1)}\right)\times F_u\left(P^{(2)},\Delta^{(2)}\right)=F_u\left(\Pi\left(P^{(1)},P^{(2)}\right),\begin{bmatrix}\Delta^{(1)} & 0\\ 0 & \Delta^{(2)}\end{bmatrix}\right) \tag{3.29}$$

avec :

$$\Pi\left(P^{(1)},P^{(2)}\right)=\begin{bmatrix}P_{11}^{(1)} & P_{12}^{(1)}P_{21}^{(2)} & P_{12}^{(1)}P_{22}^{(2)}\\ 0 & P_{11}^{(2)} & P_{12}^{(2)}\\ P_{21}^{(1)} & P_{22}^{(1)}P_{21}^{(2)} & P_{22}^{(1)}P_{22}^{(2)}\end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Pour le produit d'une LFT $F_u(P,\Delta)$ avec une matrice M :

$$F_u(P,\Delta)\times M=F_u\left(\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}M\\ P_{21} & P_{22}M\end{bmatrix},\Delta\right) \tag{3.31}$$

Et d'une matrice M par une LFT $F_u(P,\Delta)$:

$$M\times F_u(P,\Delta)=F_u\left(\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ MP_{21} & MP_{22}\end{bmatrix},\Delta\right) \tag{3.32}$$

3.6.2.3. *Inversion*

L'inverse d'une LFT $F_u(P,\Delta)$ est une LFT $F_u(Q,\Delta)$ comme illustré dans la figure 3.9

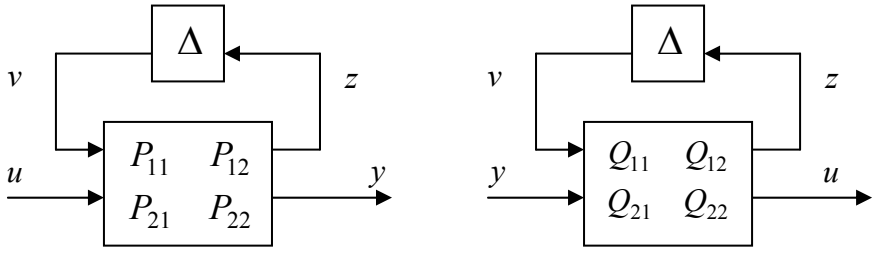


Fig. 3.9 – Exemple d'une LFT et son Inverse

Et on a :

$$\left[F_u\left(\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},\Delta\right)\right]^{-1} = F_u\left(\begin{bmatrix} P_{11}-P_{12}P_{22}^{-1}P_{21} & P_{12}P_{22}^{-1} \\ -P_{22}^{-1}P_{21} & P_{22}^{-1} \end{bmatrix},\Delta\right) \tag{3.33}$$

3.6.2.4. *Permutation de deux éléments de* Δ

Afin de ranger les éléments de Δ résultant après une opération comme l'addition et la multiplication, par exemple si $\Delta^1 = diag(\delta_1,\delta_1,\delta_2)$ et $\Delta^2 = diag(\delta_1,\delta_2,\delta_2)$ alors le bloc obtenu par concaténation de Δ^1 et Δ^2 est $\Delta = diag(\delta_1,\delta_1,\delta_2,\delta_1,\delta_2,\delta_2)$, il faut appliquer une permutation à Δ pour avoir $\Delta = diag(\delta_1,\delta_1,\delta_1,\delta_2,\delta_2,\delta_2)$ en utilisant l'algorithme suivant :

- Permutations de lignes et colonnes de P_{11},
- Echange les lignes de P_{12},
- Echange les colonnes de P_{21}.

3.7. Modélisation des incertitudes paramétriques

Ce premier type d'incertitudes concerne les incertitudes sur la valeur des paramètres physiques du modèle du processus. Elles sont dues au fait que des paramètres n'ont pas pu être modélisés ou mesurés avec précision. L'idée consiste là alors à mettre le système incertain sous forme d'une LFT. Pour le faire on considère un système linéaire classique donné par la représentation d'état (A,B,C,D). Ce système peut être représenté sous forme d'un objet LFT par l'extraction de toutes les intégrations comme indiqué dans la Figure 3.10.

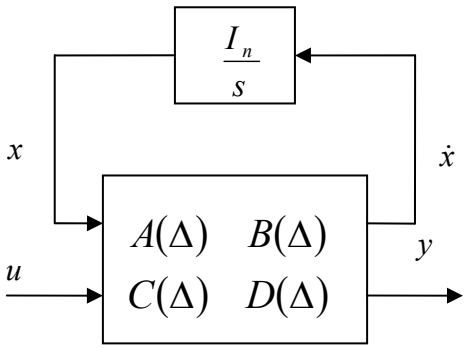


Fig. 3.10 – Représentation LFT d'un système linéaire

Lorsque des incertitudes paramétriques apparaissent dans le modèle, il est plus facile de les exprimer lorsque le système est sous forme d'état. Le système où les matrices $A(\Delta), B(\Delta), C(\Delta)$ et $D(\Delta)$ dépendent de façon rationnelle d'un vecteur de paramètres incertains δ^r, peut être modélisé par une LFT où les paramètres incertains du système sont extraits et placés dans un bloc diagonal noté Δ^r, tel que la matrice restante M décrive un système linéaire invariant dans le temps [ZDG96].

La modélisation sous forme LFT de tels systèmes peut être abordée, en particulier dans le cas où les paramètres interviennent dans le modèle de façon affine, par la méthode suivante de Morton [Mor85].

Soit un système incertain écrit sous forme d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\Delta)\,x + B(\Delta)\,u \\ y &= C(\Delta)\,x + D(\Delta)\,u \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(A_0 + \Delta_A\right)x + \left(B_0 + \Delta_B\right)u \\ y &= \left(C_0 + \Delta_C\right)x + \left(D_0 + \Delta_D\right)u \end{aligned} \tag{3.35}$$

Où $\left(A_0, B_0, C_0, D_0\right)$ est la représentation d'un système nominal et $\Delta_A ; \Delta_B ; \Delta_C ; \Delta_D$ sont des perturbations linéaires des modèles dûs à des incertitudes paramétriques qui définissent une matrice $S(\Delta)$ de la façon suivante :

$$S\left(\Delta\right) = \begin{bmatrix} \Delta_A & \Delta_B \\ \Delta_C & \Delta_D \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

On suppose que la matrice d'incertitude $S(\Delta)$ peut se décomposer selon le développement affine suivant :

$$S\left(\Delta\right) = \begin{bmatrix} \Delta_A & \Delta_B \\ \Delta_C & \Delta_D \end{bmatrix} = \delta_1^r \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} + \cdots + \delta_f^r \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{f} \delta_i^r \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Pour chaque quadruplet $\left(A_i ; B_i ; C_i ; D_i\right)$ on peut trouver deux matrices K_i et H_i par décomposition en valeurs singulières telles que :

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} = K_i \; H_i \tag{3.38}$$

En partitionnant ces matrices selon les dimensions de la représentation d'état :

$$K_i = \begin{bmatrix} K_{i_1} \\ K_{i_2} \end{bmatrix} \text{ et } H_i = \begin{bmatrix} H_{i_1} & H_{i_2} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

Donc :

$$S\left(\Delta\right) = \delta_1^r \begin{bmatrix} K_{1_1} \\ K_{1_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{1_1} & H_{1_2} \end{bmatrix} + \cdots + \delta_f^r \begin{bmatrix} K_{f_1} \\ K_{f_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{f_1} & H_{f_2} \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

$$S\left(\Delta\right) = \begin{bmatrix} K_{1_1} \cdots K_{f_1} \\ K_{1_2} \cdots K_{f_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^r I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_f^r I_{n_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{1_1} & H_{1_2} \\ \vdots & \vdots \\ H_{f_2} & H_{f_2} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

On note :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{l_1} \cdots K_{f_1} \\ K_{l_2} \cdots K_{f_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{K}_1 \\ \hdashline \mathrm{K}_2 \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{l_1} & H_{l_2} \\ \vdots & \vdots \\ H_{f_1} & H_{f_2} \end{bmatrix} = \left[\mathrm{H}_1 \mid \mathrm{H}_2 \right] \tag{3.43}$$

et

$$\Delta^r = \begin{bmatrix} \delta_1^r I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_f^r I_{n_f} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

Donc les incertitudes paramétriques s'écrivent :

$$S(\Delta) = \mathbf{K}\Delta^r \mathbf{H} \tag{3.45}$$

On introduit les signaux z^r et v^r qui présentent des entrées et sorties fictives du système définies par :

$$\begin{aligned} z^r &= \left[\mathrm{H}_1 \mid \mathrm{H}_2 \right] \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ v^r &= \Delta^r z^r \end{aligned} \tag{3.46}$$

La représentation d'état du système perturbé s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0 x + \mathrm{K}_1 v^r + B_0 u \\ z^r &= \mathrm{H}_1 x + 0 v^r + \mathrm{H}_2 u \\ y &= C_0 x + \mathrm{K}_2 v^r + D_0 u \end{aligned} \tag{3.47}$$

La méthode de Morton permet donc de séparer les parties connues des parties inconnues du transfert $u \to y$. Et donc la matrice

$$M = \begin{bmatrix} A_0 & \mathrm{K}_1 & B_0 \\ \mathrm{H}_1 & 0 & \mathrm{H}_2 \\ C_0 & \mathrm{K}_2 & D_0 \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

représente le modèle ne contenant que les paramètres nominaux, par exemple leurs valeurs moyennes déterminées lors d'une identification. Δ^r est la matrice de perturbation dans laquelle toutes les incertitudes, ici les variations paramétriques, sont stockées. Ces deux matrices sont connectées via des entrées v^r et des sorties z^r

artificielles du modèle nominal M, de sorte que le modèle $\left(M,\Delta^r\right)$ couvre l'ensemble de toutes les configurations imaginables du système réel quand Δ^r balaie l'espace paramétrique.

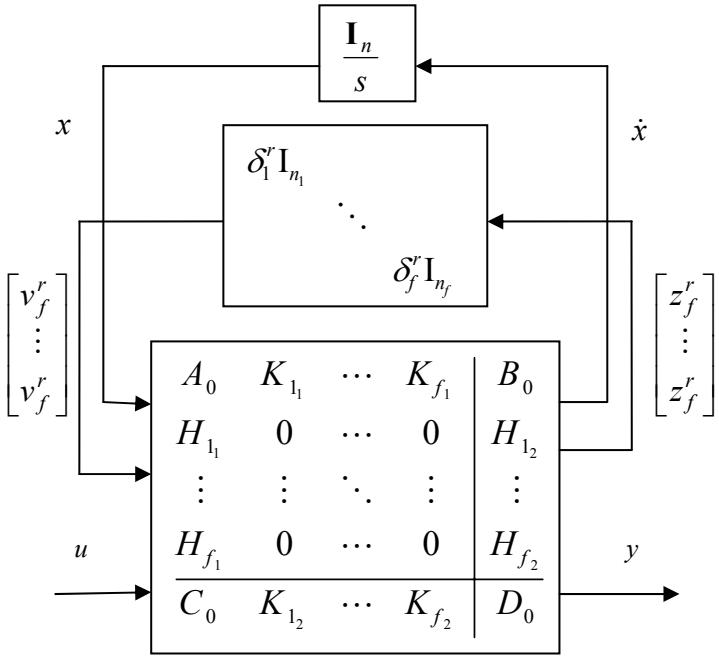


Fig. 3.11 – Représentation LFT d'un système linéaire incertain

L'obtention d'une représentation pour un système incertain consiste donc à extraire tous les paramètres et intégrations de sa représentation symbolique. Cela signifie en d'autres termes que identifier le système $M(s,\Delta)$ revient à identifier les matrices $\left(A_0,B_0,C_0,D_0,\mathbf{K},\mathbf{H}\right)$ de la figure 3.11.

Pour une représentation LFT du système dans le domaine fréquentiel, alors la boucle de retour I/s est réduite et on établit le schéma de la figure 3.12 suivante :

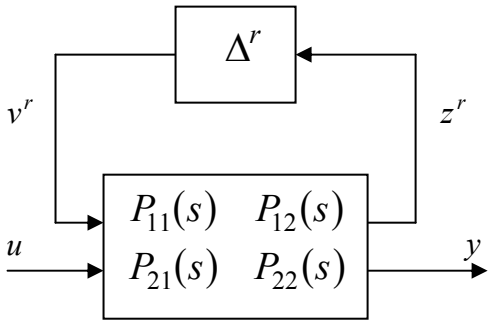


Fig. 3.12 – LFT supérieure de P sur Δ

Où les matrices de fonction de transfert P_{ij} sont données par :

$$
\begin{aligned}
P_{11}(s) &= \mathrm{H}_1 (sI - A_0)^{-1} \mathrm{K}_1 \\
P_{12}(s) &= \mathrm{H}_1 (sI - A_0)^{-1} B_0 + \mathrm{H}_2 \\
P_{21}(s) &= C_0 (sI - A_0)^{-1} \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 \\
P_{22}(s) &= C_0 (sI - A_0)^{-1} B_0 + D_0
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

La méthode de Morton décrite précédemment a l'avantage, en plus de sa simplicité, de donner une forme LFT dont la matrice d'interconnexion est de dimension raisonnable. Cependant, elle n'est applicable que pour une famille très limitée de systèmes du point de vue de la dépendance paramétrique. Pour obtenir une forme LFT d'un modèle paramétrique quelconque, il faut se référer à d'autres approches, on peut citer :

- La méthode de factorisation de Horner [VaL99]

- La décomposition en arbre [BAH89]

- La technique matricielle de Belcastro [Bel98]

- La décomposition manuelle [ZDG96, TLBS92]

Il faut noter qu'après une réalisation d'une LFT d'un modèle paramétrique incertain, il convient de réduire la taille de Δ^r afin d'arriver à une forme LFT équivalente de taille minimale puisqu'une très grande répétition d'un seul paramètre rend le calcul de la borne supérieure de μ–généralisées par résolution des problèmes LMI très lent ou impossible (problème de saturation de la mémoire de l'ordinateur). De nombreuses méthodes existent pour réduire les formes LFT's [Döl01]. Citons l'approche 1–D introduite dans [TLBS92] qui généralise les techniques classiques de réduction en considérant que les incertitudes paramétriques jouent un rôle équivalent à celui des intégrateurs des modèles dynamiques. [WBDG91] et [Hir99] proposent des approximations des représentations LF'Ts en introduisant les gramiens généralisés.

3.8. Modélisation des incertitudes non structurées

En pratique, le modèle d'état $(A_0, B_0, C_0, D_0, \mathbf{K}, \mathbf{H})$, auquel on a abouti après l'extraction des incertitudes paramétrique (figure 3.11), ne peut pas suffire pour traduire le comportement dynamique du système réel. Pour prendre en compte tous les phénomènes négligés, le modèle LFT de la figure 3.12 est souvent augmenté de formes non structurées.

En effet, les formes additives (directes ou indirectes) sont particulièrement bien adaptées pour la modélisation des non linéarités présentes dans le système. Tandis que les formes multiplicatives (directes ou inverses) en entrée sont bien adaptées pour prendre en compte les erreurs de modélisation concernant les actionneurs ainsi que les dynamiques négligées. Les formes multiplicatives (directes ou inverses) en sortie sont quant à elles, utilisées pour tenir compte des erreurs de modélisations liées aux capteurs.

La modélisation d'incertitudes complexes est assez souvent rencontrée dans la pratique, le cas le plus naturel où elles apparaissent est la prise en compte des dynamiques non modélisées ou négligées, typiquement des dynamiques hautes fréquences. Ce type d'incertitudes de modèle est dit aussi incertitudes non structurées, au sens où la seule information dont on dispose pour caractériser ce type d'incertitudes est une borne sur la norme de sa réponse fréquentielle.

Le traitement d'incertitudes complexes est complètement différent de celui d'incertitudes réelles pour deux raisons. La normalisation est d'abord effectuée par rapport à des fonctions de pondération, qui dépendent de la fréquence. D'autre part, le problème de minimalité d'une forme standard ne se pose pas, car les incertitudes complexes sont normalement bien localisées et non–répétées dans le schéma bloc LFT, contrairement aux incertitudes paramétriques qui apparaissent souvent à différents lieux dans différentes équations différentielles.

Le problème de minimalité est donc à résoudre avant l'introduction des incertitudes dynamiques. Autrement dit, il faut tout d'abord déterminer le bloc des incertitudes paramétriques Δ^r avec une des méthodes mentionnées dans la section précédente. La matrice Δ globale est de type bloc diagonal qui prend la forme générale donnée dans le paragraphe 3.9.

La représentation des incertitudes complexes peut se faire de différentes manières selon la façon dont elles interviennent dans le système. Elles peuvent être modélisées sous forme :

- Additive directe : $y = \left(P\left(\Delta^r\right) + W_c \Delta_a^c\right) u$
- Additive inverse : $y = \left(I + P\left(\Delta^r\right) W_c \Delta_a^c\right)^{-1} P\left(\Delta^r\right) u$
- Multiplicative directe en entrée : $y = P\left(\Delta^r\right)\left(I + W_c \Delta_m^c\right) u$
- Multiplicative inverse en entrée : $y = P\left(\Delta^r\right)\left(I + W_c \Delta_m^c\right)^{-1} u$
- Multiplicative directe en sortie : $y = \left(I + W_c \Delta_m^c\right) P\left(\Delta^r\right) u$
- Multiplicative inverse en sortie : $y = \left(I + W_c \Delta_m^c\right)^{-1} P\left(\Delta^r\right) u$

Ces formes peuvent être exprimées sous une forme LFT comme on le montre dans la section suivante.

3.8.1. Incertitudes non structurées additives.

Il s'agit d'erreurs absolues sur le modèle. Ils se mettent sur le modèle nominal sous forme directe ou inverse selon les deux schémas blocs de la figure suivante :

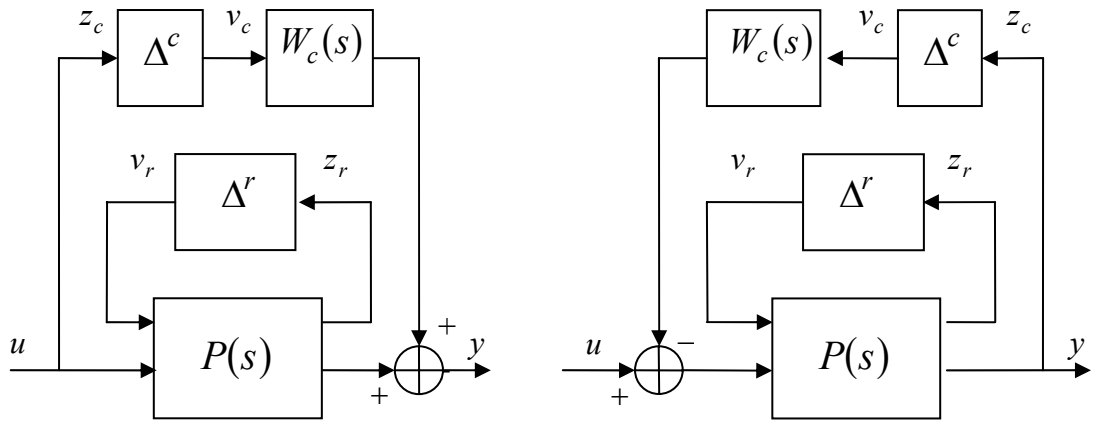


Fig. 3 13 – Incertitude non structurée additive directe et indirecte

Ceux ci peuvent être mis sous la forme suivante :

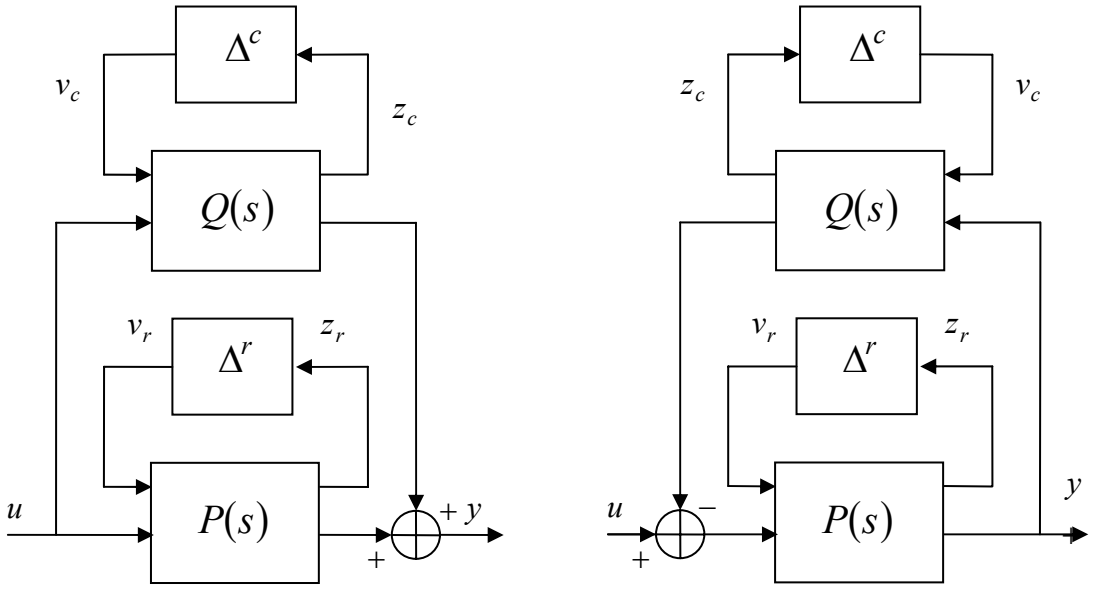


Fig. 3.14 - Structure équivalente

Avec :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & I \\ W_c & 0 \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

Donc on trouve la forme LFT résultante de la forme additive directe par une simple sommation :

$$F_u\left(P,\Delta^r\right) + F_u\left(Q,\Delta^c\right) = F_u\left(\begin{bmatrix} P_{11} & 0 & P_{12} \\ 0 & 0 & I \\ P_{21} & W_c & P_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Delta^r & 0 \\ 0 & \Delta^c \end{bmatrix}\right) \tag{3.51}$$

Pour la forme additive inverse la LFT résultante sera déduite après l'opération suivante :

$$\left[\left[F_u\left(P,\Delta^r\right)\right]^{-1}+F_u\left(Q,\Delta^c\right)\right]^{-1}=F_u\left(\begin{bmatrix}P_{11} & -P_{12}W_c & P_{12}\\ P_{21} & -P_{22}W_c & P_{22}\\ P_{21} & -P_{22}W_c & P_{22}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\Delta^r & 0\\ 0 & \Delta^c\end{bmatrix}\right) \tag{3.52}$$

Les représentations additives directes et inverses sont utilisées en particulier pour prendre en compte les erreurs liées aux faibles non–linéarités négligées pour simplifier la modélisation, ou à la troncature du modèle linéaire (modes haute fréquence éliminés ou non identifiés).

Cependant elles ne peuvent pas englober l'ensemble de toutes les incertitudes. Les formes multiplicatives sont bien adaptées pour résoudre ce type de problème.

3.8.2. Incertitudes non structurées multiplicatives

Il s'agit cette fois d'erreurs relatives vis à vis du modèle nominal. Les formes multiplicatives, directes ou inverses, peuvent se placer soit en entrée soit en sortie.

3.8.2.1. *Les formes multiplicatives en entrée.*

Les formes multiplicatives directes et inverses en entrée sont bien adaptées pour prendre en considération les erreurs de modélisation concernant les actionneurs ainsi que les dynamiques négligées (figure 3.15 et 3.16)

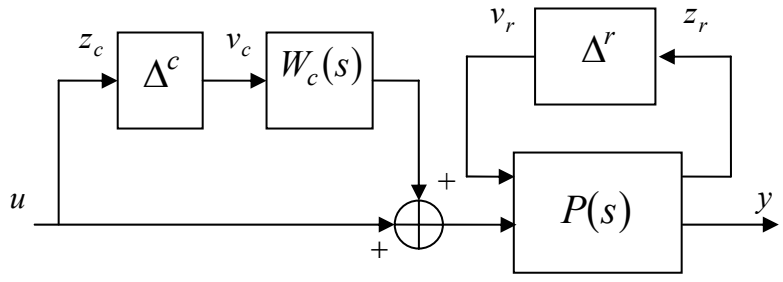


Fig. 3.15 – Incertitude non structurée multiplicative directe en entrée

Sa forme LFT

$$F_u\left(P,\Delta^r\right)\times\left(I+F_u\left(Q,\Delta^c\right)\right)=F_u\left(\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}W_c & P_{12}\\ 0 & 0 & I\\ P_{21} & P_{22}W_c & P_{22}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\Delta^r & 0\\ 0 & \Delta^c\end{bmatrix}\right) \tag{3.53}$$

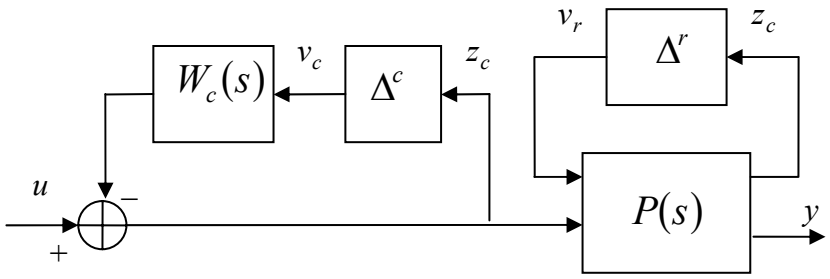


Fig. 3.16 – Incertitude non structurée multiplicative inverse en entrée

De même on trouve la LFT équivalente :

$$F_u\left(P,\Delta^r\right)\times F_u\left(\begin{bmatrix}-W_c & I\\ -W_c & I\end{bmatrix},\Delta^c\right)=F_u\left(\begin{bmatrix}P_{11} & -P_{12}W_c & P_{12}\\ 0 & -W_c & I\\ P_{12} & -P_{22}W_c & P_{22}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\Delta^r & 0\\ 0 & \Delta^c\end{bmatrix}\right) \tag{3.54}$$

3.8.2.2. *Les formes multiplicatives en sortie.*

Leurs homologues en sortie définissent les erreurs relatives vis à vis de la sortie du modèle nominal. Cette représentation permet de prendre en compte des erreurs de modélisation des capteurs ou les retards faibles. On schématise les deux formes directe et inverse par les figures 3.17 et 3.18.

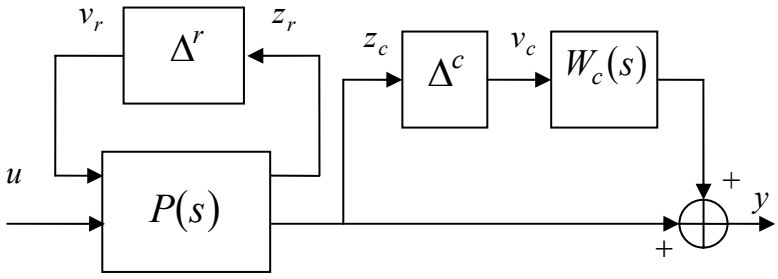


Fig. 3.17 – Incertitude non structurée multiplicative directe en sortie

On trouve la LFT après calcul :

$$\left(I+F_u\left(Q,\Delta^c\right)\right)\times F_u\left(P,\Delta^r\right)=F_u\left(\begin{bmatrix}P_{11} & 0 & P_{12}\\ P_{21} & 0 & P_{22}\\ P_{21} & W_c & P_{22}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\Delta^r & 0\\ 0 & \Delta^c\end{bmatrix}\right) \tag{3.55}$$

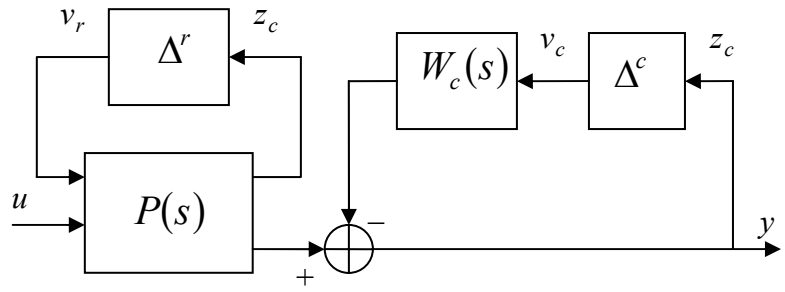


Fig. 3.18 – Incertitude non structurée multiplicative inverse en sortie

La LFT globale de la figure 3.18 après calcul :

$$F_u\left(\begin{bmatrix} -W_c & I \\ -W_c & I \end{bmatrix}, \Delta^c\right) \times F_u\left(P, \Delta^r\right) = F_u\left(\begin{bmatrix} P_{11} & 0 & P_{12} \\ P_{21} & -W_c & P_{22} \\ P_{21} & -W_c & P_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Delta^r & 0 \\ 0 & \Delta^c \end{bmatrix}\right) \tag{3.56}$$

3.8.3. Incertitudes scalaires complexes

Les incertitudes scalaires complexes $\delta_i^c(s)$ représentent un cas spécial des blocs complexes pleins et/ou des incertitudes réelles.

1. ces incertitudes sont souvent introduites pour adapter la μ-analyse à l'analyse des performances….
2. les scalaires complexes sont également utilisés pour améliorer la convergence des algorithmes existants de μ-analyse. Dans ce cas, on traite les variations paramétriques (incertitudes réelles) comme des incertitudes complexes, c'est-à-dire le problème de minimalité se présente à travers la modélisation des variations paramétriques à remplacer par la suite par des scalaires complexes.

3.8.4. Incertitudes multiformes.

On peut modéliser plusieurs formes d'incertitudes non structurées à la fois dans une réalisation LFT par une structuration en blocs diagonaux de la matrice d'incertitude globale $\Delta(s)$. Chaque bloc correspond alors à la matrice d'incertitudes associée à la forme considérée.

Par exemple, on peut imaginer un modèle qui fait apparaître un bloc delta modélisant les incertitudes sur les paramètres réels, un bloc d'incertitude sous forme additive concernant la non linéarité, dynamiques négligées propres au systèmes, les erreurs de modélisation des capteurs étant aussi prises en compte à travers un bloc d'incertitude multiplicative en sortie selon le schéma donné dans la figure suivante :

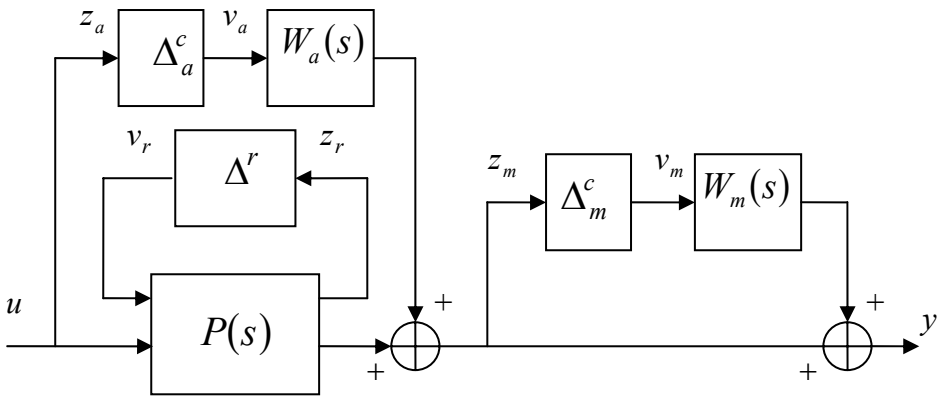


Fig. 3.19 – Exemple d'une LFT multiforme.

Ceci nous permet de considérer les différents blocs de perturbation dans un système complexe interconnecté. C'est à dire que si nous interconnectons deux systèmes LFT, chacun avec un bloc de perturbation, alors le résultat peut toujours être exprimé comme LFT avec un seul bloc perturbation structuré. C'est une formulation très générale comme nous pouvons toujours réarranger les entrées et les sorties de P pour faire Δ un bloc diagonal.

3.9. Matrice d'incertitude générale Δ

La prise en compte de plusieurs formes (structurées et non structurées) conduit à la structuration de la matrice d'incertitudes Δ en blocs diagonaux, chaque élément étant alors relatif à l'une des formes. La matrice Δ ainsi obtenue appartient alors à la structure $\underline{\mathbf{\Delta}}$ donnée par :

$$\underline{\mathbf{\Delta}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{diag}\left\{ \delta_1^r I_{r_1}, ..., \delta_{m_r}^r I_{r_{m_r}}, \delta_1^c I_{c_1}, ..., \delta_{m_c}^c I_{c_{m_c}}, \Delta_1^C, ..., \Delta_{m_C}^C \right\}; \\ \delta_i^r \in \mathbf{R};\ \delta_j^c \in \mathbf{C};\ \Delta_p^C \in \mathbf{C}^{k_p \times k_p};\ 1 \le i \le m_r;\ 1 \le j \le m_c;\ 1 \le p \le m_C \end{array} \right\} \quad (3.57)$$

Où δ_i^r représente une variation paramétrique, dite incertitude réelle, $\delta_j^c(s)$ une incertitude scalaire complexe et $\Delta_k^c(s)$ un bloc complexe plein exprimant les dynamiques négligées.

Remarque 3.2 :

L'application la plus évidente d'une structure de bloc scalaire répété se produit quand des incertitudes se produisant dans plusieurs endroits dans un système sont identiques ou seulement corrélées.

3.10. Modèle général pour le problème de validation de modèle

Soit des données expérimentales observées concernant commande, sortie d'un système. L'explication de ces données pourra se faire à partir de :

- Un modèle nominal
- Une structure d'incertitude
- La présence éventuelle de signaux de perturbation
- L'introduction d'un signal d'écart entre données observées et sorties du modèle nominal (bruit de mesure)

Ceci est accompli en considérant une entrée supplémentaire d , et l'existence d'un bruit sur la sortie du modèle. Ceci conduit à la forme suivante le schéma LFT montré dans la figure suivante :

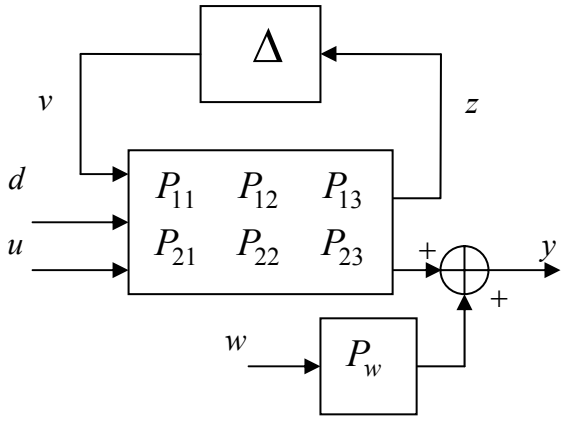


Fig. 3.20 – LFT avec un bruit en entrée et en sortie

Les deux bruits à l'entrée et sur la sortie, d et w successivement, vont être considérés comme deux entrées inconnues mais bornées.

3.11. Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre la notion de l'ensemble de modèles pour les systèmes incertains. Les ensembles de modèles que nous avons considérés sont ceux formés à partir d'une représentation linéaire fractionnaire LFT. En effet, cette représentation permet de décrire les écarts entre le comportement nominal et le comportement réel du procédé, en considérant que l'ensemble de modèles associé peut être décrit par un modèle nominal et des incertitudes de modèle représentées dans un composant inconnu supposé borné. Ensuite nous avons présenté les méthodes de modélisation des systèmes incertains sous les différentes formes que peuvent prendre

les incertitudes de modèle en déterminant pour chaque forme la matrice de transfert associée pour le rendre sous forme de représentation linéaire fractionnaire.

Avant d'aborder le problème de validation de modèle nous allons rappeler dans le chapitre suivant les travaux déjà effectués dans ce domaine.

Chapitre 4

Etat de l'art

4.1. Introduction 51
4.2. Identification 51
4.3. Problème de la commande 52
4.4. Interaction entre l'identification et la commande 54
4.5. Validation de modèle 55
4.6. Conclusion 61

4.1. Introduction

Dans ce chapitre nous rappelons les diverses approches de problème de validation de modèle de systèmes incertains dans la littérature et nous présentons les résultats déjà proposés dans ce domaine qui sont en rapport avec nos travaux. Qu'il s'agisse d'une connexion entre l'identification et la commande, on fait un petit rappel sur chacune de ces entités.

4.2. Identification

L'identification de systèmes désigne l'ensemble des méthodologies pour la modélisation mathématique de systèmes à partir de données expérimentales. En des termes plus techniques, l'identification a été définie comme la détermination, à partir des signaux d'entrée et de sortie, d'un modèle mathématique du système parmi une classe de modèles pré–spécifiée.

Elle est habituellement composée de trois phases :

- Obtention des données (signaux d'entrées et de sorties).
- Sélection d'un ensemble de modèles à partir duquel le modèle du système doit être choisi.
- L'identification du meilleur modèle dans l'ensemble de modèles.

Les données peuvent être enregistrées par des observations passives du système à identifier, ou par des expérimentations conçues pour réaliser l'identification dans de bonnes conditions. La classe de modèles est spécifiée par une structure ou par des propriétés communes des modèles. Cette spécification peut être basée sur des connaissances physiques fournissant des équations mathématiques.

Quand les données sont disponibles et la classe de modèle est spécifiée, il ne reste qu'à déterminer le « meilleur » modèle parmi cette classe. La signification du « meilleur » est au sens d'un critère choisi, qui évalue quantitativement l'adéquation entre les données et chaque modèle de la classe spécifiée. Le problème de validation que nous considérons, est clairement associé à la phase 3 de ce processus, puisque lorsqu'on veut valider un ensemble de modèles LFT, on suppose que les données sont établies et l'ensemble de modèles est le $\mathcal{LFT}(P,\mathbf{\Delta},\gamma)$. Pour cet ensemble de modèles trouver le "meilleur" modèle dans l'ensemble de modèles, c'est-à-dire celui qui a la plus petite taille d'incertitude γ correspond à résoudre le POVM.

L'identification comme une branche de la théorie de l'automatique a été développée depuis un demi siècle et a connu des applications bien au delà du domaine de l'automatique. Beaucoup de papiers ont été publiés sur l'identification des systèmes et sont énoncés dans [AsE71]. Nous distinguons différentes approches fondées sur des hypothèses sur le bruit dans le système physique. L'hypothèse typique [Lju87, Hja93] sur un système physique mono-variable est qu'il est un système linéaire avec une sortie

corrompue par un bruit additif. Cela peut être décrit par l'équation d'entrée–sortie suivante :

$$y(t) = P_{nom}(z)u(t) + v(t) \tag{4.1}$$

Où $u(t)$ est l'entrée, $y(t)$ est la sortie, $P_{nom}(z)$ le modèle nominal et $v(t)$ le bruit.

On appelle « identification standard» l'approche probabiliste de l'identification où le modèle est considéré comme un élément aléatoire qui appartient à une classe paramétrique de distributions probabilistes et l'objectif est d'identifier asymptotiquement le vrai système considéré comme un élément de cette classe [Lju87, GGN92]. Dans cette approche, l'erreur du modèle $v(t)$ est considérée une réalisation d'un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle et de spectre donné. Les techniques standard d'identification [Lju87, VdB93, Cor89, WaL92, GGN92] ne sont pas convenables pour la validation des ensembles de modèles que nous considérons dans cette thèse en raison des hypothèses stochastiques sur le bruit. Dans l'ensemble de modèles sous la forme LFT, une nouvelle approche de l'identification nommée "Identification en H_∞" suppose que le vrai système appartient à un ensemble connu de modèles et que le bruit est borné en une certaine norme, c'est-à-dire $\|v(t)\| \le \gamma$. On peut trouver plus de détail sur la relation entre les hypothèses stochastiques et non stochastiques dans [Hja93].

Beaucoup d'articles sont apparus sur l'identification en H_∞ [HJN91, Mak91, Par91, RuL92, GuK92] avec l'approche principale basée sur le problème présenté dans [HJN91]. Dans cette approche les modèles sont identifiés et fondés sur un certain nombre de points dans la réponse fréquentielle, qui sont corrompus par le bruit additif bornée en amplitude. Avec le modèle vient une norme H_∞ sur l'erreur entre le modèle identifié et le « vrai » système, ainsi "l'identification H_∞" peut être considérée comme méthode d'identification de l'ensemble de modèles de la forme additive $\mathcal{A}(P, \Delta, \gamma)$.

L'identification des structures générales LFT est aussi étudiée dans [SmD90, Smi92]. Ici les paramètres d'une structure LFT sont identifiés de telle manière que cette structure soit non falsifiée par rapport aux données expérimentales. Les résultats sont présentés dans la topologie H_∞. L'identification des paramètres de la structure LFT est transformée en problème de la validation du modèle formulé et résolu indépendamment dans chacun de ses travaux [SmD92] et [NeS98]. Dans cette approche les paramètres optimaux ne sont pas nécessairement uniques et la distance du problème d'optimisation est grande. De plus, l'identification n'est pas au sens du pire–des–cas. Néanmoins, l'avantage de cette méthode est qu'on ne suppose aucune hypothèse sur le vrai système.

4.3. Problème de la commande

Un procédé réel est sous l'influence de plusieurs sources de signaux comme le bruit, le signal de commande, le signal de consigne, etc. L'objectif d'une loi de commande est de produire un signal de commande, en utilisant des signaux de mesure pour obtenir une certaine performance désirée comme par exemple le rejet de perturbations ou la

poursuite désirée. Ces performances sont souvent représentées par des signaux d'erreur et l'objectif de la loi de commande est décrit comme la minimisation d'une certaine norme du signal d'erreur. Des exemples de normes sont l'énergie de l'erreur, l'amplitude de l'erreur ou la variance de l'erreur. En résumé, en se référant à figure 4.1, l'objectif est de trouver une loi de commande stabilisante qui minimise l'effet du bruit $e(t)$ ou de la consigne $r(t)$ dans le signal d'erreur $z(t)$. Cette loi de commande utilise évidemment le signal de mesure $y(t)$ pour produire le signal de commande $u(t)$.

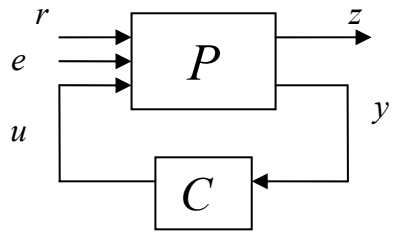


Fig. 4.1 – Le procédé réel dans la boucle de commande

Alors que la majorité des méthodes nécessitent un modèle pour construire la loi de commande, trouver un modèle exact pour un procédé non linéaire ou variant dans le temps est rarement possible. Pour obtenir un modèle du procédé on a besoin de données expérimentales et d'un algorithme d'identification. Bien qu'un grand nombre de lois de commande utilisent des modèles linéaires et invariants dans le temps (LTI), une description exacte d'un procédé non linéaire ou variant dans le temps par un modèle LTI n'est pas possible. De plus, la présence du bruit dans les signaux de mesure est une autre raison pour l'absence d'un modèle exact du procédé.

On peut donc considérer une classe de systèmes incertains contenant le procédé réel. Dans cette classe l'incertitude est souvent exprimée par une certaine classe de perturbations. Deux types de perturbations peuvent être considérées :

- perturbation non paramétrique : il s'agit des opérateurs bornés en une certaine norme. Ces opérateurs sont soit linéaires invariants dans le temps (LTI), représentants la sous-estimation de l'ordre de la fonction de transfert, soit non linéaires ou variants dans le temps, représentant la non linéarité ou la variation dans le temps du système.

- perturbation paramétrique qui exprime l'existence d'incertitudes sur les paramètres du modèle.

Le schéma général pour une classe de modèles incertains est montré dans la figure 4.2. La loi de commande utilise donc la connaissance d'un modèle nominal P et d'une borne connue de l'incertitude Δ afin d'assurer la stabilité du système incertain (stabilité robuste) et de minimiser l'effet du bruit $e(t)$ ou de signal de consigne $r(t)$ dans le signal d'erreur $z(t)$ en présence de l'incertitude (performance robuste). C'est pour cette raison que les modèles de systèmes incertains utilisés pour la commande doivent garantir que la taille des incertitudes et du bruit expliquant l'écart entre le système réel et le modèle identifié soit bien compatible avec l'application des lois de commande (théorème du petit gain !). Voir [YoD95] et [KhP91] pour l'analyse des problèmes de stabilité et de performance robuste.

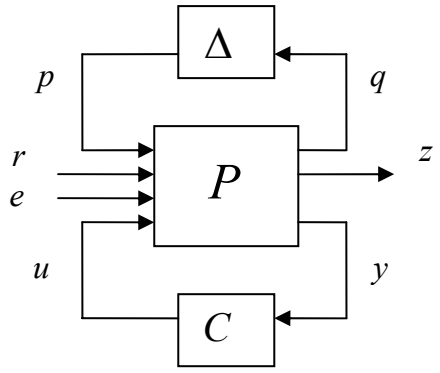


Fig.4.2 – Ensemble de modèles incertain

4.4. Interaction entre l'identification et la commande

L'identification pour la commande consiste à trouver dans un ensemble de modèles un modèle qui a une distance minimale avec le vrai système et à quantifier l'incertitude du modèle dans une norme compatible avec celle de la commande.

Pour aborder un problème global de commande, souvent on se focalise sur une méthode particulière qui peut résoudre juste une partie du problème et pour le reste on utilise des solutions ad hoc qui ne sont pas nécessairement les meilleures.

On peut mentionner des exemples de la fin des années 80 :

- la commande robuste qui ignorait l'identification,
- l'identification qui était principalement focalisée sur la recherche du "vrai modèle" plus que des modèles pour la commande.

L'interaction entre l'identification et la commande robuste a commencé à attirer une attention importante au début des années 90 [HJN91, Hak94, GMT97]. On a déjà vu apparaître des contributions "majeures" et même si tous les problèmes ne sont pas encore résolus et toutes les questions solutionnées, quelques résultats disponibles ont un impact pratique considérable [NaB00, BeN00, Nam01, ChG00].

La synthèse d'algorithmes de commande robuste pour des systèmes complexes nécessite généralement d'abord une phase d'identification qui permet d'établir un modèle dynamique des relations entre les variables qui constituent ce système. Cette phase d'identification est alors suivie d'une phase de construction de lois de commande à partir du modèle qui a été identifié.

Jusqu'à la fin des années 80, les méthodes de l'identification et de synthèse de commande robuste s'étaient développées de manière parallèle et non interactive. Les méthodes d'identification tendaient à estimer le "meilleur modèle possible" sans prendre en compte le fait que le modèle devait servir uniquement à la synthèse de lois de commande. Les méthodes de commande robuste, développées principalement dans les années 80, avaient quant à elles abouti à des méthodes de synthèse de lois de commande

qui tenaient en compte l'incertitude existant sur le modèle nominal du système dynamique. Cependant les modèles utilisés pour décrire cette incertitude n'étaient pas compatibles avec le type d'incertitude qui résulte d'une expérience d'identification.

Depuis le début des années 1990, et suite à la prise de conscience du fossé qui séparait ces deux domaines importants de l'automatique et de la théorie des systèmes, d'importants progrès ont été accomplis dans la compréhension de l'interaction entre les phases d'identification et de synthèse de lois de commande robuste. L'objectif vers lequel on tend n'est pas seulement de rendre compatible la modélisation de l'incertitude qui résulte d'une phase d'identification avec la modélisation de l'incertitude qui sert à la synthèse des lois de commande robuste, mais surtout de faire en sorte que la conception de la méthode d'identification aboutisse à une distribution de cette incertitude (dans le domaine fréquentiel typiquement) qui soit favorable à la construction de lois de commande robuste. L'identification est alors vue non pas comme la recherche d'un modèle exact, mais comme la recherche d'un modèle simplifié (parfois même très simplifié) du vrai système, ce qui engendre nécessairement des erreurs importantes. La stratégie revient alors à faire en sorte que la distribution de ces erreurs ne soit pas pénalisante pour le calcul d'un régulateur, permettant ainsi d'atteindre des performances très élevées avec cependant des modèles parfois très simplifiés.

La compréhension du domaine de recherche sur l'interaction entre l'identification et la commande robuste nécessite donc un assez large éventail de connaissances, méthodes d'identification, description de modèles d'incertitude, méthodes de calcul de lois de commande basées sur des modèles incertains. Ainsi l'approche de validation de modèle étudiée dans ce mémoire peut être considérée comme un outil pour combler la lacune qui existe entre les modèles utilisés dans la synthèse de commande et ceux obtenus à partir des expériences d'identification en considérant la connexion entre les modèles incertains et les données.

4.5. Validation de modèle

L'approche principale de validation de modèle dans la littérature est issue d'un point de vue identification. La validation de modèle est une étape dans le processus d'identification. Dans le cadre statistique, elle a été étudiée dans [LeP96, Lju99, LjG97, ZWS02, GBC+03]. Cependant, les méthodes d'identification ne conviennent pas pour valider les ensembles de modèles.

Plusieurs articles ont été publiés sur la validation de modèle, dans des domaines s'étendant de la technologie [MFM94] à la médecine [Bai94] et à l'agriculture [WAK94]. Les approches adoptées changent avec le domaine, selon le type de modèles utilisés et les données physiques disponibles. Par exemple, l'approche adoptée dans [BT86a, BT86b] est de déformer des paramètres dans le modèle jusqu'à ce que les données simulées égalent les données réelles. Si la déformation nécessaire est petite alors le modèle est considéré valide. Ceci est semblable à l'approche que nous adoptons, où l'on cherche un élément de l'ensemble de modèles qui génère les données

exactement. Nous considérons comme travaux dans le domaine fréquentiel les publications suivantes [Smi90, SmD92a, SmD92b] et dans le domaine temporel les publications [PKT+92, ZhK93, PKT+94]. Ces deux approches fournissent des résultats pour valider des cas spéciaux de l'ensemble de modèles tel $\mathcal{A}(P,\Delta,\gamma)$, $\mathcal{M}(P,\Delta,\gamma)$, et $\mathcal{NCF}(\tilde{N},\tilde{M},\Delta,\gamma)$. On donne ici un résumé de quelques travaux déjà faits dans les deux domaines.

4.5.1. Domaine fréquentiel

L'approche de validation de modèle dans le domaine fréquentiel développée dans ce mémoire a ses racines dans le travail de Smith et Doyle [Smi90, SmD92a, SmD92b] qui ont formulé un problème de validation pour des matrices LFT dites « constantes ». Leurs résultats ne concernent que des cas spéciaux de l'ensemble de modèles $\mathcal{LFT}_u(P,\Delta,\gamma)$ incluant le bruit et un bloc d'incertitude non structuré tel que les ensembles $\mathcal{A}(P,\Delta,\gamma)$ et $\mathcal{M}(P,\Delta,\gamma)$

Le problème de validation de modèle a été donc décomposé en une série de problèmes de validation menant à des problèmes "de matrice constante" à chaque fréquence. Chaque problème de matrice constante a été formulé comme un problème d'optimisation en minimisant la norme du bruit, sous la contrainte qu'un élément de l'ensemble de modèles génère les données entrées–sorties expérimentales. Pour un nombre restreint de blocs d'incertitudes, l'optimisation a été résolue en utilisant des techniques de multiplicateur de Lagrange. Pour un plus grand nombre de blocs d'incertitudes, des bornes supérieures et inférieures ont été obtenues en utilisant une généralisation de la valeur singulière structurée μ [NeS98].

Le problème de validation de modèle étudié dans [Smi90] a la structure d'interconnexion montrée dans le schéma de la figure 4.3, où les bornes sur l'incertitude et sur le bruit sont normalisés à 1.

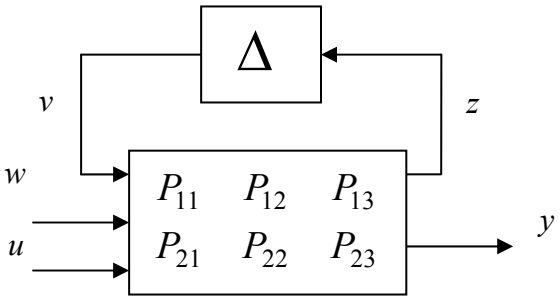


Fig. 4.3. – Structure générique du problème de validation de modèle avec bruit en entrée seulement

Ce problème est formulé selon l'énoncé suivant:

Problème 4.1 [Smi90]

Soit P avec, $\mu(P_{11}) \leq 1$ alors étant donné un modèle $F_u(P,\Delta)$, et une donnée entrée sortie (u,y), existe il une paire (w,Δ), avec $w \in \mathbf{B}\mathcal{L}_2$ et $\Delta \in \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}$ telle que $y = F_u(P,\Delta)\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$

Toute paire (w,Δ) vérifiant les conditions de ce problème est dite admissible.

Smith a exprimé le problème 4.1 comme un problème de faisabilité en montrant qu'une paire admissible (w,Δ) existe si et seulement s'il existe un signal de bruit w, et un signal v, sortie de Δ, tel que le modèle explique les données. En définissant la matrice de projection R_i, compatible avec la structure du bloc Δ, par :

$$R_i := \begin{bmatrix} 0_{k_1} & \cdots & 0_{k_{i-1}} & I_{k_i} & 0_{k_{i+1}} & \cdots & 0_{k_{m_C}} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Le résultat principal de validation dans [SmD92b] est donné dans le théorème suivant:

Théorème 4.1:

Il existe une paire (w,Δ) admissible pour le problème de validation de modèle telle que:

$$\|w\|_2 \leq 1,\ \Delta \in \mathbf{B}\boldsymbol{\Delta} \text{ et } y = F_u(P,\Delta)\begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

Si et seulement s'il existe un $x = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$ tels que:

$$\begin{aligned} &1.\ \ \left\| \begin{bmatrix} R_i & 0 \end{bmatrix} x \right\|^2 \leq \left\| \begin{bmatrix} R_i & 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right\|^2, \quad i = 1,\ldots,m. \\ &2.\ \ \left\| \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} x \right\|^2 \leq 1 \\ &3.\ \ y = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Il est facile de voir que la condition 1 correspond aux contraintes induites par la structure d'incertitude, et que la condition 2 vient de la contrainte sur la norme du bruit, et que la condition 3 contraint que les entrées produisent la sortie.

Tout problème de faisabilité peut s'exprimer comme un problème d'optimisation en utilisant une contrainte comme la fonction critère. Dans [SmD92b] la norme du bruit a été prise pour être la fonction critère. Le théorème 4.1 peut ainsi être converti au problème d'optimisation suivant :

Problème 4.2

$$\min_x f(x) \text{ sous } \begin{cases} g_i(x) \le 0, & i = 1, \cdots, m \\ g_e(x) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Où

$$f(x) = \left\| \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} x \right\|^2 \tag{4.5}$$

$$g_i(x) = \left\| \begin{bmatrix} R_i & 0 \end{bmatrix} x \right\|^2 - \left\| \begin{bmatrix} R_i & 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right\|^2 \tag{4.6}$$

$$g_e(x) = y - \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Pour un seul bloc d'incertitude $m = 1$ le problème d'optimisation est résolu en utilisant les techniques de multiplieur de Lagrange. Pour $m > 1$ le problème d'optimisation n'est pas nécessairement convexe et les techniques de multiplieur de Lagrange ne sont pas garanties pour trouver le point optimal. Les conditions nécessaires pour garantir qu'un point optimal peut être trouvé sont étroitement liées à une généralisation de μ, initialement appelée par μ skewed définie par : [SmD92b].

$$\mu_s(P) := \sup_{\gamma, \|x\|=1} \left\{ \gamma : \begin{matrix} \|R_i x\| \le \|R_i P x\|, & i \in I_s \\ \|R_i x\| \gamma \le \|R_i P x\|, & i \in \bar{I}_s \end{matrix} \right\} \tag{4.8}$$

où les ensembles I_s et $\bar{I}_s$ sont donnés tels que $I_s \cup \bar{I}_s = \{1, 2, \cdots, m\}$ et $I_s \cap \bar{I}_s = \varnothing$.

Smith a montré que le calcul de μ_s, pour des cas spécifiques de l'ensemble de modèles $\mathcal{LFT}_u(P, \Delta)$ résout le problème de validation de modèle LFT exposé dans le théorème 4.1.

Il est clair qu'il est difficile de calculer la valeur singulière structurée à moins qu'il y ait un nombre restreint de blocs d'incertitude, mais des bornes supérieures et inférieures peuvent être calculées. Ceci a motivé Newlin et Smith [NeS91, NeS98] pour essayer une méthode semblable pour la fonction μ_s, une généralisation de μ notée μ_g. La borne supérieure étant exprimable comme un problème d'optimisation d'inégalité matricielle affine LMI.

Chen [Chen96, ChW96, ChF+96] et Boulet et Francis [BoF98] dans leur travaux ont considéré le problème de validation de modèle dans le domaine fréquentiel comme étant un problème d'interpolation de borne de Nevanlinna-Pick afin de garantir la stabilité et la causalité. Le premier a considéré les modèles LFT généraux, tandis que le dernier s'est concentré principalement sur des modèles à factorisation première.

4.5.2. Domaine temporel

Une approche du domaine temporel pour le problème de validation de modèle a été initialement étudiée par Poolla et al [PKT+92, PKT+94], et indépendamment par Zhou et Kimura [ZhK93, ZhK94, ZhK95]. Dans cette approche, les résultats de la théorie d'interpolation de Carathéodory-Fejer sont utilisés pour valider les ensembles de modèles de la forme additive $\mathcal{A}(P,\mathbf{\Delta},\gamma)$, multiplicative $\mathcal{M}(P,\mathbf{\Delta},\gamma)$ et facteur premier normalisé $\mathcal{NCF}(\tilde{N},\tilde{M},\mathbf{\Delta},\gamma)$. En absence de bruit, les conditions nécessaires et suffisantes pour la validation ont été exprimées comme un test sur le caractère défini positif d'une matrice formée à partir des données. Quand le bruit est inclus, les conditions impliquent la solution d'un problème convexe de faisabilité.

On rappelle ici les principaux résultats de cette approche.

Théorème 4.2: [PKT+92]

Soit les séquences $u=(u_0,u_1,\cdots,u_{l-1})$ et $y=(y_1,y_2,\cdots,y_{l-1})$, et un nombre positif γ, il existe un opérateur LTI stable et causal satisfaisant :

$$\|\Delta\|_\infty \le \gamma \tag{4.9}$$

et

$$\pi_l \Delta \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{l-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{l-1} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Si et seulement si :

$$T_y^T T_y \le \gamma^2 T_u^T T_u \tag{4.11}$$

Avec π_l est l'opérateur de troncation défini par :

$$\pi_l (u_0,u_1,\cdots,u_{l-1}) = (u_0,u_1,\cdots,u_{l-1},0,0,\cdots) \tag{4.12}$$

T_u et T_y sont les matrices de Toplitz associées au séquences u et y respectivement données par :

$$T_u = \begin{bmatrix} u_0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 & u_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ u_{l-1} & u_{l-2} & \cdots & u_0 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$$T_y = \begin{bmatrix} y_0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & y_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ y_{l-1} & y_{l-2} & \cdots & y_0 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Pour des incertitudes variants dans le temps, un résultat analogue est donné par :

Théorème 4.3 : [PKT+92, PKT+94].

Soit les séquences $u = (u_0, u_1, \cdots, u_{l-1})$ et $y = (y_1, y_2, \cdots, y_{l-1})$, et un nombre positif γ, il existe un opérateur LTI stable et causal satisfaisant :

$$\|\Delta\|_\infty \le \gamma \tag{4.15}$$

et

$$\pi_l \Delta \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{l-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{l-1} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Si et seulement si :

$$\|\pi_k y\|_2 \le \gamma \|\pi_k u\|_2, \text{ pour tout } k = 1, \cdots, l. \tag{4.17}$$

Ce résultat est valable aussi pour les opérateurs non linéaires.

Les résultats d'interpolation Carathéodory-Fejer dans les théorèmes 4.2 et 4.3 sont appliqués dans [PKT+92, PKT+94, ZhK93, ZhK94] aux ensembles de modèles additifs, multiplicatifs et facteurs premiers normalisés. Le bruit additif est aussi considéré, et le problème de validation de modèle devient alors équivalent à un problème convexe de faisabilité. Le résultat pour $\mathcal{A}(P, \Delta, \gamma)$ est exposé dans le théorème suivant :

Théorème 4.3 : [PKT+92]

Soit un ensemble de modèles $\mathcal{A}(P, \Delta, \gamma)$ et un ensemble de données entrées–sorties $u = (u_0, u_1, \cdots, u_{l-1})$ et $y = (y_1, y_2, \cdots, y_{l-1})$, où la sortie est corrompue par un bruit additif w appartenant à un ensemble convexe N, soit :

$$\begin{aligned} \hat{u} &= (\hat{u}_0, \hat{u}_1, \cdots, \hat{u}_{l-1}) := \pi_l u \\ \hat{y} &= (\hat{y}_0, \hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_{l-1}) := y - \pi_l P u \end{aligned} \tag{4.18}$$

Alors, il existe un $P_1 \in \mathcal{A}(P, \Delta, \gamma)$ satisfaisant :

$$y = \pi_l P_1 u \tag{4.19}$$

si et seulement s'il existe $w = (w_0, w_1, \cdots, w_l)$ tel que :

$$\overline{\sigma}\left[\left(T_{\hat{y}}-T_w\right)\left(T_{\hat{u}}^T T_{\hat{u}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\leq\gamma \tag{4.20}$$

L'extension de l'approche de domaine temporel aux modèles de LFT a été faite par Chen et Wang [ChW96], et ils ont montré que le problème de validation de modèle peut être reformulé comme inégalité matricielle biaffine BMI. Le problème est beaucoup plus difficile et il est partiellement résolu. Davis [Dav95] a examiné une formulation un peu plus générale et a obtenu un test similaire. Toker et Chen [ToC98] sont allés plus loin pour montrer que pour des incertitudes variantes dans le temps, le problème reste NP difficile. Ensuite, le problème de validation de modèle de temps continu est indépendamment étudié par Rangan et Poolla [RaP95, RaP98], et Smith et Dullerud [SmD96, DuS96]. Ces derniers ont fait une extension de ces méthodes vers certaines classes des modèles non linéaires [SmD99, DuS02]. Des méthodes récentes pour la validation de modèle des systèmes non linéaires en temps continu avec des paramètres incertains sont présentées dans [Pra03, EPP+03], et dans [SzM03] pour des modèles avec des paramètres linéaires variants. Quant au problème de validation de modèle avec des données mixtes du domaine fréquentiel et du domaine temporel, il a été auparavant étudié dans [XRGC99].

4.6. Conclusion

Il est difficile de comparer l'approche du domaine fréquentiel avec celle du domaine temporel puisqu'ils traitent des problèmes différents. L'approche du domaine fréquentiel de Newlin et Smith [NeS98] étudie le problème de validation de modèle pour les ensembles de modèles LFT, tandis que les approches du domaine temporel considèrent seulement les ensembles de modèles additifs, multiplicatives et facteurs premiers. La différence fondamentale entre les approches du domaine temporel et du domaine fréquentiel est la causalité de l'incertitude Δ. Dans l'approche de domaine de fréquence, un Δ admissible n'a pas besoin d'être causale. Il est donc possible pour un ensemble de modèles d'être validé lorsque aucun Δ causal n'est admissible. Ceci ne peut pas se produire dans l'approche de domaine temporel puisque la causalité est assurée. En fait, à moins que des hypothèses additionnelles soient faites sur des entrées futures, la causalité est nécessaire dans l'approche de domaine de temps.

Dans le chapitre qui va suivre, nous allons nous focaliser sur une étude approfondie du problème de validation de modèle dans l'approche fréquentielle. Cette étude va nous conduire à faire le lien entre les deux méthodes de résolution existantes.

Chapitre 5

Validation de modèle de systèmes incertains

5.1. Introduction 65
5.2. Etude préliminaire 65
5.3. Normalisation du problème 67
5.4. Validation de modèle pour la structure LFT 68
5.5. Problème générique de validation de modèle. 69
5.6. Première approche du problème de validation de modèle 74
5.7. Optimisation convexes : Les Inégalités Matricielles Affines 77
5.8. Résolution du problème par le formalisme LMI 81
5.9. Deuxième approche du problème de validation de modèle : 83
5.10. Généralisation des valeurs singulières structurées 88
5.11. Application de μ_g au problème de validation de modèle 94
5.12. Evaluation de la fonction μ_g 99
5.13. Récapitulatif 106
5.14. Extension à la structure générale du modèle générique 108
5.15. Conclusion : 110

5.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les deux différentes méthodes permettant de résoudre dans le domaine fréquentiel le problème de validation de modèle de systèmes incertains. Dans cette approche, la classe de systèmes considérée concerne les systèmes LTIs incertains. La méthode de validation consiste à conclure sur la cohérence entre un jeu de données expérimentales (u, y) prélevé sur le système et un ensemble de modèles présentés sous forme linéaire fractionnaire LFT.

La formulation dans le domaine fréquentiel présume la disponibilité d'un jeu de données dans le domaine de fréquence pour l'usage de la validation. Ces dernières sont obtenues par TFD des mesures des entrées et des sorties du système réel, et les échantillons de la réponse fréquentielle du modèle discret aux fréquences concernées sont également considérés.

Nous partons du problème générique de validation de modèle pour faire le lien entre l'approche de validation de modèle dans le domaine fréquentiel décrite dans le chapitre 4 section 4.5.1 de ce mémoire, et une approche basée sur la valeur singulière structurée généralisée qu'on va détailler dans ce chapitre. Nous allons proposer de transposer au calcul de la borne supérieure μ_g les améliorations suggérées dans le calcul de μ dans le cas où le bloc d'incertitude Δ incorpore des incertitudes paramétriques réelles.

5.2. Etude préliminaire

Les méthodes d'identification classiques [Lju87] décrivent l'incertitude du système par la présence d'un bruit additif. Dans ce cas, la validation du modèle a pour but de vérifier cette hypothèse en testant si les résidus sont une réalisation de ce bruit non corrélée avec l'entrée. L'approche de validation de modèle exposée ici considère que l'écart entre le système et son modèle nominal provient de deux sources : une erreur de modèle (paramètres incertains, dynamiques négligées) et des entrées inconnues.

Afin de comprendre l'approche suivie, on considère un jeu de données entrées sorties observées (y, u). Supposons que l'expérience de l'identification du système réel P_{sys} nous a délivré un modèle que l'on note par P_{nom}. Donc la sortie simulée y_{nom} est donnée donc par :

$$y_{nom}(t) = P_{nom}(q)u(t) \tag{5.1}$$

La sortie réelle mesurée est normalement obtenue par :

$$y(t) = P_{sys}(q)u(t) \tag{5.2}$$

Supposons dans un premier temps que l'ensemble de phénomènes incertains pouvant affecter le modèle, peut être représenté par un signal de perturbation exogène que l'on désigne par le résiduel du modèle donné par :

$$r(t) = y(t) - y_{nom}(t) = \left(P_{sys}(q) - P_{nom}(q)\right)u(t) \tag{5.3}$$

Il existe différents tests de validation de modèle dans le cas où la seule source d'incertitude est attribuée à r. Nous proposons ici d'étudier le problème de validation de modèle dans le cas général où on ne peut pas attribuer l'ensemble des incertitudes de modèle uniquement à r.

L'approche de validation de modèle exposée ici considère que l'écart entre le système et son modèle nominal provient de deux sources : une source originaire de l'entrée du système et une source indépendante. Le résiduel du modèle qui traduit l'erreur entre les données mesurées et les données simulées est donc expliqué par un signal de bruit w_0 et un modèle d'erreur Δ_0 représentant des dynamiques non modélisées.

En supposant que ces deux sources sont additives et que celle qui est originaire de l'entrée est linéaire on peut écrire :

$$r(t) = \Delta_0(q)u(t) + w_0(t) \tag{5.4}$$

Cela peut être schématisé dans la figure 5.1.

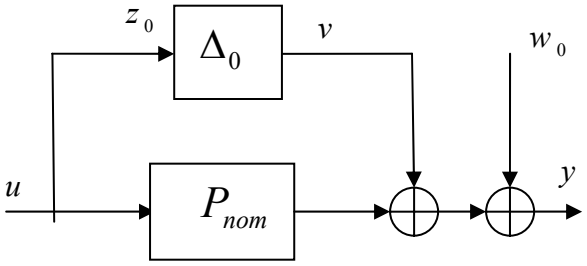


Fig. 5.1 – Modélisation de l'écart entre le système réel et modèle nominal

Dans cette approche, on émet l'hypothèse de la « bornitude » sur le signal w_0 qui présente le bruit additif sur le système (i.e. $\|w_0\|_2 \le \gamma$). Le bloc d'incertitude Δ_0 est également supposé borné $\|\Delta_0\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}\left(\Delta_0(j\omega)\right) \le \gamma$ et appartenir à une structure $\underline{\Delta}$ diagonale par blocs.

Donc :

$$y(t) = P_{sys}(q)u(t) + \Delta_0(q)u(t) + w_0(t) \tag{5.5}$$

Et la question clé est de savoir s'il existe une paire (w_0, Δ_0), suffisamment petite, qui peut produire les données mesurées.

5.3. Normalisation du problème

Les informations a priori sur le profil fréquentiel des signaux w_0 et v intervenant dans le système de la figure 5.1 permettent de définir des fonctions de pondération P_w et P_z. Ces dernières permettent également la mise à l'échelle des normes $\|w_0\|_2$ et $\|\Delta_0\|_\infty$.

Donc, on définit la matrice de pondération P_w permettant de prendre en compte le contenu fréquentiel du signal w_0 et telle que w soit dans la boule unité $\mathbf{B}\mathcal{L}_2$.

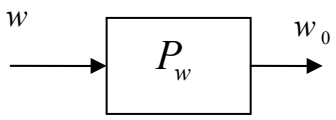


Fig. 5.2 – Normalisation du signal du bruit

C'est-à-dire :

$$w_0 = P_w w \quad \text{tel que} \quad \|w\|_2 = \left\|P_w^{-1} w_0\right\| \le 1$$

Le même procédé est appliqué aux entrées et aux sorties du bloc d'incertitudes afin de ramener le majorant de leurs normes à 1. C'est-à-dire pour que Δ appartient à $\mathbf{B}\underline{\Delta}$

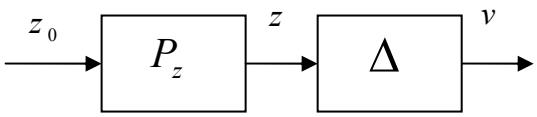


Fig. 5.3 – Normalisation de la perturbation

$$v = \Delta_0 z_0 = \Delta P_z \, z_0 = \Delta z \quad \text{tel que} \quad \|\Delta P_z\|_\infty = \|\Delta_0\|_\infty \le \gamma$$

Donc en ajustant P_z, on obtient :

$$\|\Delta\|_\infty \le 1$$

Et on trouve le schéma de la figure 5.4 suivante :

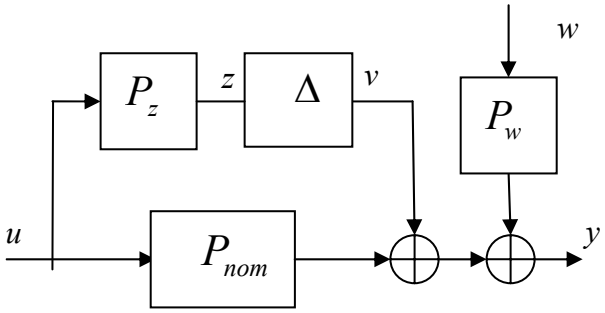


Fig. 5.4 – Modèle incertain avec pondération

Le système P_w est une pondération dépendante de fréquence sur le signal de bruit w. Ceci nous permet d'utiliser une représentation normalisée pour w, $\left(\|w\|_2 \le 1\right)$. De même, on suppose que $\|\Delta\|_\infty \le 1$, P_z est une pondération dépendante de fréquence qui indique la contribution de l'incertitude à chaque fréquence. Dans un modèle typique P_w sera petite (En supposant que le bruit est petit par rapport à la sortie nominale) et P_z augmentera dans les hautes fréquences (afin de compenser les caractéristiques négligées sur le modèle en hautes fréquences).

5.4. Validation de modèle pour la structure LFT

Comme nous l'avons défini dans le chapitre 3, l'ensemble de modèles se définit par un modèle nominal P_{nom} et des incertitudes de modèle Δ. La prise en compte de plusieurs types d'incertitudes (structurées et non structurées) conduit à exprimer l'ensemble de modèles sous un cadre général, celui qui est formé à partir d'une transformation linéaire fractionnaire LFT, où une matrice de transfert P contenant un modèle nominal est bouclée par une matrice des incertitudes représentée par l'opérateur Δ (Figure 5.5). Les pondérations liées à la mise à l'échelle de la matrice d'incertitude Δ, sont implicitement contenues dans le modèle augmenté P. Dans un tel ensemble de modèles, le modèle nominal et la structure d'incertitudes sont supposés obtenus par un processus antérieur d'identification et/ou de modélisation de système.

Un jeu de données expérimentales entrées-sorties enregistré à partir du système physique réel est disponible, ces données sont supposées corrompues par un bruit correspondant aux erreurs de mesures et au bruit de capteur lors l'expérience. Afin de faciliter la compréhension de la démarche suivie, seul un bruit en sortie est considéré [ChW96]. Dans un cadre plus général, une perturbation en entrée du système peut être introduite.(voir paragraphe 5.14)

La structure générique du problème de validation de modèle que l'on va étudier est représentée dans le schéma de la figure 5.5.

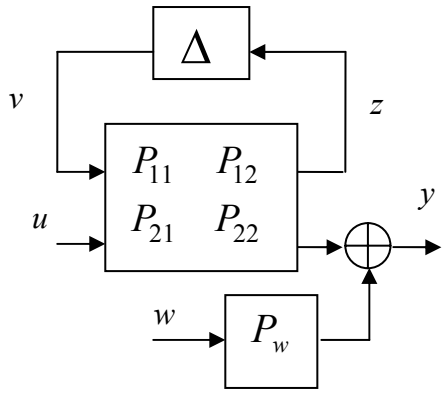


Fig. 5.5 – Schéma générique du problème de validation de modèle.

Avec $\Delta = \left\{ diag\left(...\Delta_i ...\right) \mid i \in I \right\}$, où chaque Δ_i caractérise une incertitude (dynamique négligée, paramètre incertain).

Le résidu de ce modèle LFT est donnée par :

$$r = y - P_{22}u \tag{5.6}$$

Comme chaque sortie est supposée bruitée, la matrice de pondération P_w est diagonale et bien inversible.

Le schéma de la figure 5.5 représente les équations de bouclage suivantes :

$$\begin{aligned} v &= \Delta z \\ z &= P_{11}v + P_{12}u \\ y &= P_{21}v + P_{22}u + P_w w \end{aligned} \tag{5.7}$$

Le problème à l'étude consiste alors à tester si les données peuvent être expliquées à partir d'un élément de l'ensemble de modèles. Un modèle est dit non invalidé par les données expérimentales si le test réussit, c'est-à-dire qu'il existe bien un élément de l'ensemble de modèles vérifiant les équations de bouclage (5.7) telles que les normes de perturbations Δ et de bruit w sont inférieures à 1. Dans le cas contraire le modèle est dit invalidé, c'est-à-dire que tous les éléments de l'ensemble de modèles auront besoin d'une perturbation Δ ou d'un bruit w de taille plus grande que 1 pour que les équations de bouclage restent vérifiées.

Nous adoptons l'approche de domaine fréquentiel pour le problème de validation de modèle, en utilisant la Transformée de Fourier Discrète DFT sur les diverses séquences considérées. Cette approche a ses origines d'une part dans les travaux de Smith et al [Smi95, SDRP97] fondés sur la résolution d'un problème d'optimisation convexe et d'autre part dans les travaux de Newlin et Smith [NeS98] fondés sur les valeurs singulières structurées généralisées. Le lien entre ces deux méthodes de résolution est explicité dans ce chapitre, une extension du calcul de la borne supérieure de mu généralisée pour un bloc d'incertitude structurée et non structurée est proposée.

5.5. Problème générique de validation de modèle.

La question générique du problème de validation de modèle de systèmes incertains donnée par Smith et Doyle [SmD92b] est la suivante :

Enoncé du problème générique :

Etant donné un ensemble de modèles et un ensemble de données entrées-sorties observées, existe-t-il un modèle dans l'ensemble de modèles qui pourrait expliquer les données observées?

En terme d'équations, le problème générique qui présente un problème de décision « *PDVM* » peut se formuler de la façon suivante :

Problème 5.1 : « PDVM »

Soit un ensemble de modèles $\mathcal{F}_u(P,\Delta)$ *(figure5.5) robustement stable* $\left(\sup_{\omega}\mu\left(P_{11}\left(e^{j\omega}\right)\right)<1\right)$, *et un jeu de données expérimentales* $(y[k],u[k])\ k=0,..,N-1$, *existent-ils un* Δ, $\Delta\in\mathbf{B}\underline{\mathbf{\Delta}}$, *et un* $w, w\in\mathbf{B}\mathcal{L}_2$ *tel que* $y=\mathcal{F}_u(P,\Delta)u+P_w w$.

Si aucune paire (Δ,w) de $\mathbf{B}\underline{\mathbf{\Delta}}\times\mathbf{B}\mathcal{L}_2$ ne satisfait les conditions du problème, alors le modèle est dit invalidé par les données, les données expérimentales ne peuvent être expliquées par un élément de la l'ensemble de modèle considérés.

Remarque 5.1:

Due à l'hypothèse de stabilité robuste, $(I-P_{11}\Delta)^{-1}$ existe toujours et est parfaitement définie. De plus, dans le problème de validation de modèle, on ne considère pas le cas trivial $y=P_{22}u$ qui conduit à la solution évidente de la paire (Δ,w) identiquement nulle. En effet, par hypothèse les sorties mesurées sont bruitées.

Afin de comprendre la démarche de validation suivie dans ce chapitre nous allons définir les ensembles suivants :

- E_{coh}, l'ensemble des (Δ,w) qui permettent de vérifier les équations de bouclage (5.7)

$$E_{coh}=\left\{(\Delta,w)\in(\mathcal{L}_\infty,\mathcal{L}_2)\ \text{tel que}\ y=\mathcal{F}_u(\Delta,P)u+P_w w\right\} \tag{5.8}$$

- $E_{\|\Delta\|}$, l'ensemble des (Δ,w), avec Δ de norme infinie inférieure à 1, qui permettent de vérifier les équations de bouclage (5.7)

$$E_{\|\Delta\|}=\left\{(\Delta,w)\in(\mathbf{B}\underline{\mathbf{\Delta}},\ \mathcal{L}_2)\ \text{tel que}\ y=\mathcal{F}_u(\Delta,P)u+P_w w\right\} \tag{5.9}$$

- $E_{\|w\|}$, l'ensemble des (Δ,w), avec w de norme deux inférieure à 1, qui permettent de vérifier les équations de bouclage (5.7)

$$E_{\|w\|}=\left\{(\Delta,w)\in(\mathcal{L}_\infty,\ \mathbf{B}\mathcal{L}_2)\ \text{tel que}\ y=\mathcal{F}_u(\Delta,P)u+P_w w\right\} \tag{5.10}$$

- E_V l'ensemble des (Δ,w), avec Δ de norme infinie inférieure à 1 et w de norme deux inférieure à 1, qui permettent de vérifier les équations de bouclage (5.7).

$$E_V=\left\{(\Delta,w)\in(\mathbf{B}\underline{\mathbf{\Delta}},\mathbf{B}\mathcal{L}_2)\ \text{tel que}\ y=\mathcal{F}_u(\Delta,P)u+P_w w\right\} \tag{5.11}$$

La relation entre ces ensembles est donnée par :

$$E_{\|\Delta\|}\subset E_{coh},\ E_{\|w\|}\subset E_{coh},\ E_V=E_{\|\Delta\|}\bigcap E_{\|w\|}$$

Ces ensembles peuvent être illustrés par des rectangles comme indiqués dans la figure 5.6 suivante:

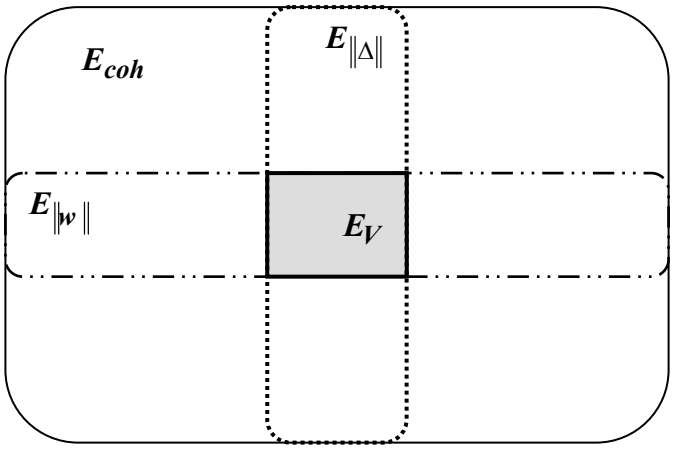


Fig. 5.6 – Relation entre les différents ensembles

Déterminer si les données expérimentales peuvent être expliquées par un élément de la classe de modèle, solution du problème de décision 5.1, revient à déterminer si E_V est un ensemble non vide ou pas. Trois approches sont possibles pour déterminer si E_V est vide.

Approche 1 :

Chercher parmi les éléments de $E_{\|\Delta\|}$, celui qui correspond à $\|w\|_2$ minimal (figure5.7). Soit $\gamma_{\min}$ cette norme minimale.

Si $\gamma_{\min} < 1$, E_V est non vide, les données expérimentales peuvent être expliquées par un élément de la classe de modèle. Le modèle n'est pas invalide.

Si $\gamma_{\min} > 1$, E_V est vide, les données expérimentales ne peuvent pas être expliquées par un élément de la classe de modèle. Le modèle est invalide

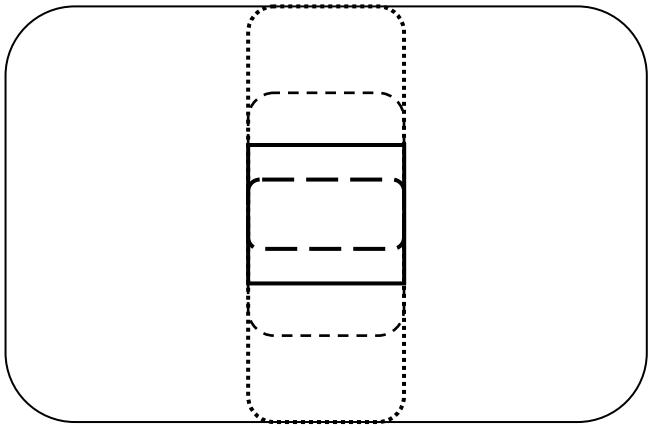


Fig. 5.7 – Illustration de la première approche

Légende

——— $E_{Coh} = \left\{ \|\Delta\|_\infty < \infty, \|w\|_2 < \infty, \ y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

..... $E_{\|\Delta\|} = \left\{ \|\Delta\|_\infty < 1, \|w\|_2 < \infty, \ y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

- - - - - - $E_\gamma = \left\{ \|\Delta\|_\infty < 1, \|w\|_2 < \gamma, \ y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

——— $E_V = \left\{ \|\Delta\|_\infty < 1, \|w\|_2 < 1, \ y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

— — - $E_{\gamma_{\min}} = \left\{ \|\Delta\|_\infty < 1, \|w\|_2 < \gamma_{\min}, \ y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

Approche 2 :

Chercher parmi les éléments de $E_{\|w\|}$, celui qui correspond à $\|\Delta\|_\infty$ minimal (Fig 5.8). Soit α cette norme minimale.

Si $\alpha_{\min} < 1$, E_V est non vide, les données expérimentales peuvent être expliquées par un élément de la classe de modèle. Le modèle n'est pas invalide.

Si $\alpha_{\min} > 1$, E_V est vide, les données expérimentales ne peuvent pas être expliquées par un élément de la classe de modèle. Le modèle est invalide.

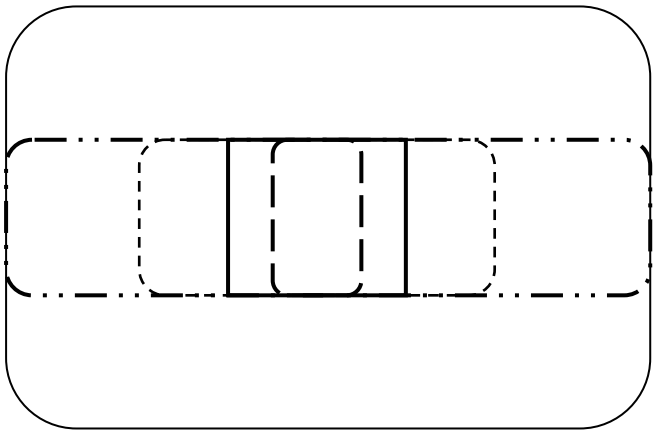


Fig. 5.8 – Illustration du deuxième approche

Légende

——— $E_{Coh} = \left\{ \|\Delta\|_\infty < \infty, \|w\|_2 < \infty, \ y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

— · — $E_{\|w\|} = \left\{ \|\Delta\|_\infty < \infty, \|w\|_2 < 1, \ y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

- - - - - - $E_\alpha = \left\{ \|\Delta\|_\infty < \alpha, \|w\|_2 < 1, \ y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

——— $E_V = \left\{ \|\Delta\|_\infty < 1, \|w\|_2 < 1, \ y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

— — - $E_{\alpha_{\min}} = \left\{ \|\Delta\|_\infty < \alpha_{\min}, \|w\|_2 < 1, \ y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

Approche 3 :

Chercher parmi les éléments de E_{coh}, celui qui correspond à $\|\Delta\|_\infty$ et $\|w\|_2$ inférieurs au même minimum (figure 5.9). Soit β_{min} ce minimum.

Si $\beta_{min} < 1$, E_V est non vide, les données expérimentales peuvent être expliquées par un élément de la classe de modèle. Et on n'invalide pas le modèle.

Si $\beta_{min} > 1$, E_V est vide, les données expérimentales ne peuvent pas être expliquées par un élément de la classe de modèle on invalide le modèle.

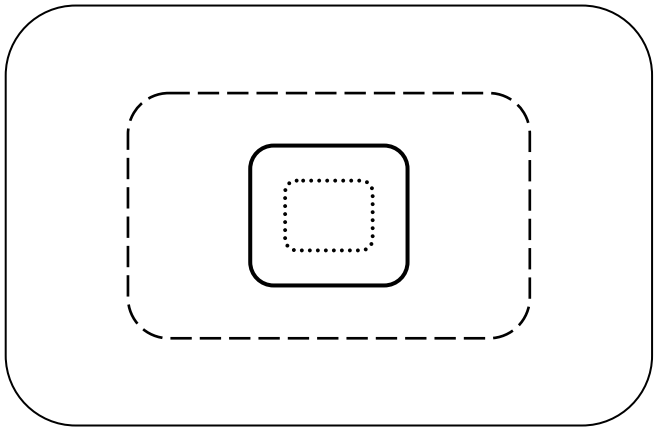


Fig.5.9 – Illustration de la troisième approche

Légende

——— $E_{Coh} = \left\{ \|\Delta\|_\infty < \infty, \|w\|_2 < \infty, \; y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

– – – $E_\beta = \left\{ \|\Delta\|_\infty < \beta, \|w\|_2 < \beta, \; y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

——— $E_V = \left\{ \|\Delta\|_\infty < 1, \|w\|_2 < 1, \; y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

..... $E_{\beta_{min}} = \left\{ \|\Delta\|_\infty < \beta_{min}, \|w\|_2 < \beta_{min}, \; y = \mathcal{F}_u(\Delta, P)u + P_w w \right\}$

Smith *et al* dans leurs travaux [SDRP97] sont partis initialement de la première approche pour résoudre le problème générique de validation de modèle. Dans le paragraphe suivant nous montrons que cette démarche conduit à un problème d'optimisation qui n'a pas de propriétés particulières et donc difficile à résoudre, sauf pour un cas particulier de modèles LFT où la solution sera apportée par le formalisme LMI. Pour le cas général des LFT, nous envisageons de résoudre le problème de validation de modèle à partir de la troisième approche. Celle ci sera résolue par le formalisme de valeur singulière structurée généralisée [NeS98].

5.6. Première approche du problème de validation de modèle

Il s'agit dans cette approche de chercher la plus petite norme de bruit w en gardant la norme de Δ inférieure à 1 et en imposant que les données observées soient bien générées par le modèle. Le problème d'optimisation qui correspond à cette approche peut être exposé sous la forme suivante :

Problème 5.2 :« POVM »

Quelle est la plus petite valeur de $\|w\|_2$ *telle qu'il existe un* $\Delta : \|\Delta\|_\infty \le 1$ *qui vérifie* $y = \mathcal{F}_u(P,\Delta)u + P_w w$

Sous forme d'une écriture standard d'un problème d'optimisation :

$$\|w\|_2^{opt} = \min_{w,\Delta} \|w\|_2 \text{ sous } \begin{cases} y = \mathcal{F}_u(P,\Delta)u + P_w w \\ \|\Delta\|_\infty \le 1 \end{cases} \tag{5.12}$$

Une réponse au problème de décision 5.1 est donnée selon la valeur de $\|w\|_2^{opt}$ par rapport à 1 suivant la proposition suivante :

Proposition 5.1 :

Les données expérimentales $(y[k],u[k])\ k = 0,..,N-1$, sont inexpliquées par le modèle $\mathcal{F}_u(P,\Delta)$ si et seulement s'il existe un Δ, $\Delta \in \mathbf{B\Delta}$, quelque soit w tel que $y = \mathcal{F}_u(P,\Delta)u + P_w w$ alors $\|w\|_2 > 1$.

Afin de résoudre le problème d'optimisation 5.2, nous allons formuler le problème dans le domaine fréquentiel où les données expérimentales entrées–sorties composées de N échantillons prélevés sur le système $(y,u) = \{(y[k],u[k]); k = 0,..,N-1\}$ seront caractérisées par leur transformées de Fourier discrètes TFD $(Y,U) = \{(Y_n,U_n); n = 0,..,N-1\}$. A chaque fréquence n, le modèle P sera donné par sa réponse fréquentielle et on désigne par Δ_n la matrice complexe de la structure bloc appropriée à la fréquence n donnée .

Donc les équations de bouclage (5.7) à chaque fréquence n seront données par :

$$\begin{aligned} V_n &= \Delta_n\left(e^{j\omega_n}\right)Z_n \\ Z_n &= P_{11}\left(e^{j\omega_n}\right)V_n + P_{12}\left(e^{j\omega_n}\right)U_n \\ Y_n &= P_{21}\left(e^{j\omega_n}\right)V_n + P_{22}\left(e^{j\omega_n}\right)U_n + P_w\left(e^{j\omega_n}\right)W_n \end{aligned} \tag{5.13}$$

avec $\omega_n = \dfrac{2\pi n}{N}$ la pulsation liée à la fréquence n

Le problème d'optimisation 5.2, celui de chercher $\|w\|_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|W_n\|^2 \right)^{1/2}$ minimale peut se ramener à une série de problème d'optimisation où on cherche la plus petite $\|W_n\|$ à chaque fréquence. La norme $\mathcal{L}_2$ sera remplacée par la norme euclidienne et on utilise le lemme suivant pour transformer la contrainte sur la matrice Δ_n à des contraintes sur les vecteurs V_n et Z_n.

Lemme 5.1 :

Soit le transfert $v = \Delta z$ indiqué par le schéma suivant :

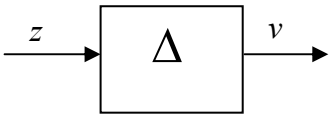


Fig. 5.10 – Transfert d'un signal

Soit les TFD de v et z : $V = \{V_n ; n = 0,..., N-1\}$ et $Z = \{Z_n ; n = 0,..., N-1\}$

$$\forall n = 0,..., N-1;\ V_n^* V_n \le Z_n^* Z_n \Leftrightarrow \exists \Delta_n, \|\Delta_n\| = \bar{\sigma}\left(\Delta\left(e^{j\omega_n}\right)\right) \le 1 \tag{5.14}$$

Donc à une fréquence donnée, le problème d'optimisation associé à celui du problème d'optimisation 5.2 sera exposé comme suivant :

Problème 5.3. « POVM à une fréquence»

Quelle est la plus petite valeur de $\|W_n\|$ *telle qu'il existe un* $V_n : \|V_n\|^2 \le \|Z_n\|^2$ *qui vérifie*

$$Y_n = P_{21}\left(e^{j\omega_n}\right) V_n + P_{22}\left(e^{j\omega_n}\right) U_n + P_w\left(e^{j\omega_n}\right) W_n \tag{5.15}$$

Le résidu défini par l'équation (5.6) est ainsi donné pour toute fréquence $n = 0,.., N-1$:

$$R_n = Y_n - P_{22}\left(e^{j\omega_n}\right) U_n \tag{5.16}$$

Donc nous résolvons le problème d'optimisation 5.3 pour chaque fréquence $n \in [0,..., N-1]$ et la solution globale du problème d'optimisation 5.2 nous donne une solution au problème de décision 5.1 reformulé par la proposition 5.1 selon le théorème suivant :

Théorème 5.1 :

Soit l'ensemble de modèles $\mathcal{F}_u(P, \Delta)$ et les TFD des mesures entrées-sorties expérimentales $(U, Y) = \{(U_n, Y_n); n = 0,..., N-1\}$. Le modèle sera dit non invalidé par

les données si, étant donné les séquences $W=\{W_n;n=0,...,N-1\}$ et $V=\{V_n;n=0,...,N-1\}$ solutions du problème d'optimisation 5.3 dont les éléments vérifient $R_n=P_{21}V_n+P_wW_n$ et $V_n^*V_n\le Z_n^*Z_n\ \ \forall n\in[0,...,N-1]$ alors :

$$\|w\|_2=\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}W_n^*W_n\right)^{1/2}\le 1 \tag{5.17}$$

De même, le modèle sera invalidé si quelque soit les deux séquences $W=\{W_n;n=0,...,N-1\}$ et $V=\{V_n;n=0,...,N-1\}$ satisfaisant les deux contraintes $R_n=P_{21}V_n+P_wW_n$ et $V_n^*V_n\le Z_n^*Z_n\ \ \forall n\in[0,...,N-1]$ on trouve :

$$\|w\|_2=\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}W_n^*W_n\right)^{1/2}>1 \tag{5.18}$$

Démonstration

On met le problème d'optimisation 5.3 à une fréquence $n\in[0,\cdots,N-1]$ sous la forme standard, c'est à dire:

$$\gamma_n^{opt}=\min_{\gamma_n,W_n,V_n}\gamma_n \text{ sous } \begin{cases}R_n=P_{21}V_n+P_wW_n\\ V_n^*V_n\le Z_n^*Z_n\\ W_n^*W_n\le\gamma_n^2\end{cases} \tag{5.19}$$

A partir de la solution γ_n^{opt} de ce problème à une fréquence n, les deux propriétés suivantes peuvent être énoncées :

1. Il existe un $V_n: V_n^*V_n\le Z_n^*Z_n$ et il existe un $W_n:\|W_n\|\le\gamma_n^{opt}$ tel que $R_n=P_{21}V_n+P_wW_n$

Donc d'après le lemme 5.1 :

$$\forall n\in[0,\cdots,N-1],\ V_n^*V_n\le Z_n^*Z_n\Leftrightarrow\exists\Delta_n,V_n=\Delta_nZ_n \text{ tel que } \|\Delta_n\|\le 1;$$

Et puisqu' à chaque fréquence on impose sur Δ_n qu'il soit inférieur ou égale à 1 alors on peut construire un opérateur Δ avec $v=\Delta z$ tel que $\|\Delta\|_\infty\le 1$.

De plus :

$$\forall n\in[0,\cdots,N-1];W_n^*W_n\le\left(\gamma_n^{opt}\right)^2\Rightarrow\|w\|_2=\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}W_n^*W_n\right)^{1/2}\le\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\gamma_n^{opt}\right)^2\right]^{1/2}$$

On pose :

$$\gamma^{opt} := \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\gamma_n^{opt} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{5.20}$$

Donc la plus petite norme de w tel qu'il existe un $\Delta : \|\Delta\|_\infty \le 1$, vérifiant $y = \mathcal{F}_u(P, \Delta)u + P_w w$ est inférieure où égale à γ^{opt}.

Si $\gamma^{opt} \le 1$, alors les données n'invalident pas le modèle.

2. Quelque soit W_n tel qu'il existe un $V_n : \|V_n\| \le \|Z_n\|$ vérifiant $R_n = P_{21} V_n + P_w W_n$ on a $\|W_n\| \ge \gamma_n^{opt}$

De même

$$\forall n \in [0, \cdots, N-1];\ W_n^* W_n \ge \left(\gamma_n^{opt} \right)^2 \Rightarrow \|w\|_2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_n^* W_n \right)^{1/2} \ge \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\gamma_n^{opt} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Donc quelque soit w tel qu'il existe un $\Delta : \|\Delta\|_\infty \le 1$, vérifiant $y = \mathcal{F}_u(P, \Delta)u + P_w w$ on a : $\|w\|_2 \ge \gamma^{opt}$

Si $\gamma^{opt} > 1$ alors les données invalident le modèle.

Donc selon la valeur de γ^{opt} calculée par (5.20) nous avons une réponse au problème de décision 5.1. Et pour trouver la solution γ_n^{opt} du problème d'optimisation (5.19) nous nous appuyons sur le formalisme des Inégalités Matricielles Linéaires dont nous rappellerons la définition dans le paragraphe suivant. Quelques propriétés nécessaires à l'utilisation de ce formalisme avec la LMI Control Toolbox de Matlab [GNLC95] y seront également évoquées.

5.7. Optimisation convexe : Les Inégalités Matricielles Affines

De nombreux problèmes en automatique peuvent se formuler comme des problèmes d'optimisation convexe. Une telle formulation est très avantageuse parce qu'elle permet de résoudre numériquement le problème initial de façon fiable et rapide, même pour des problèmes qui n'ont pas de solution analytique. De récents algorithmes (méthodes dites de point intérieur ou de faisceaux [NeN93]) permettent de calculer ainsi le minimum global d'une large classe de problèmes convexes, en un temps de calcul réduit.

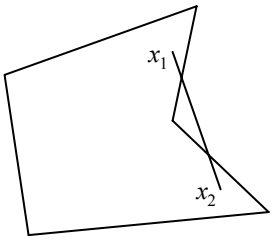
5.7.1. Convexité :

La convexité est une notion à la fois ensembliste et fonctionnelle, voici les définitions dans chacun des cas

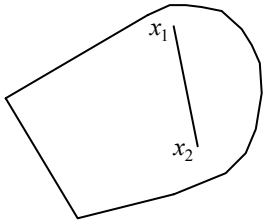
Définition d'un ensemble convexe

Un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbf{R}^n$ est convexe si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{E}, \forall \theta \in [0,1], x = \theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in \mathcal{E}$$



Ensemble non convexe



Ensemble convexe

Définition d'une fonction convexe

Une fonction $f : \mathcal{E} \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est convexe si son domaine de définition $\mathcal{E}$ est convexe et si on a de plus :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{E}, \forall \theta \in [0,1],\ f\left(\theta x_1 + (1-\theta) x_2\right) \leq \theta f\left(x_1\right) + (1-\theta) f\left(x_2\right)$$

Un problème d'optimisation convexe s'énonce donc comme suit :

$$\min_{x \in \mathcal{E}} f(x)$$

où $\mathcal{E}$ est un ensemble convexe et f est une fonction convexe.

La fonction convexe $f(x)$ n'admet qu'un seul minimum global dans l'ensemble convexe $\mathcal{E}$.

Remarque 5.2

On dit qu'une fonction f est quasi convexe lorsque :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{E}, \forall \theta \in [0,1],\ f\left(\theta x_1 + (1-\theta) x_2\right) \leq \sup\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right)$$

Ce qui justifie l'intérêt d'un problème d'optimisation convexe, est qu'il existe des algorithmes performants [BEFB94] permettant d'atteindre une solution numérique de bonne qualité.

5.7.2. Notion générale sur Les LMI

Un grand nombre de problèmes d'optimisation convexe peuvent s'exprimer sous forme de contraintes de type Inégalité matricielle Linéaire (en anglais Linear Matrix inequality d'où le sigle LMI utilisé dans la littérature). Ce formalisme mathématique, introduit par

Lyapunov à la fin du 19eme siècle [Lya88], connut un essor particulier durant les années 90 car il permet de formuler des problèmes d'automatique de plus en plus complexes et de plus en plus divers dans un cadre unifié et de simplifier la résolution des problèmes ainsi obtenus. L'utilisation de cet outil a été favorisée par l'apparition d'un certain nombre de solveurs numériques capables de donner des résultats en un temps raisonnable.

L'optimisation sous contraintes LMI est l'outil de base utilisé dans la résolution des problèmes posés dans ce mémoire.

Définition d'une LMI:

Une Inégalité Matricielle Linéaire est une contrainte du type :

$$A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n < 0 \tag{5.21}$$

où $x = \left[x_1 \cdots x_n\right]^T \in \mathbf{R}^n$ est un vecteur de n scalaires inconnus (variables de décision) et $A_0, A_1, \cdots, A_n$ sont des matrices symétriques données appartenant à $\mathbf{R}^{n\times n}$. « < 0 » signifie que la matrice $A(x)$ est définie négative.

Il existe également des LMI non strictes de la forme $A(x) \leq 0$ où « ≤ » signifie que la matrice $A(x)$ est semi définie négative.

Les contraintes $A(x) > 0$ et $A(x) < B(x)$ sont des cas particuliers de (5.21) puisqu'elles peuvent être écrites comme : $-A(x) < 0$ et $A(x) - B(x) < 0$

Plusieurs LMI sous la forme :

$$A_1(x) < 0, \cdots, A_n(x) < 0$$

peuvent se regrouper en une seule LMI :

$$A(x) := \mathrm{diag}\left(A_1(x), \cdots, A_n(x)\right) < 0$$

L'ensemble C défini par $C = \left\{x \in \mathbf{R}^n \,/\, A(x) < 0\right\}$ est convexe. Par conséquent une contrainte LMI est une contrainte convexe.

5.7.3. Problèmes génériques LMI

Il existe trois grandes classes de problèmes d'optimisation avec des contraintes qui peuvent être exprimées au moyen de LMI

Problème de faisabilité :

Trouver une solution $x \in \mathbf{R}^n$ *à la LMI* $A(x) < 0$

Problème de minimisation d'un objectif linéaire :

$$\min_{x\in\mathbf{R}^n} c^T x \ \textit{sous la contrainte}\ A(x)<0$$

Problème de valeur propre généralisée :

$$\min_{\lambda\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}^n} \lambda \ \textit{sous les contraintes}\ \begin{cases}\lambda A(x)<B(x)\\ A(x)>0\\ C(x)<0\end{cases}$$

Il convient de remarquer que les deux premiers problèmes sont convexes et que le dernier est quasi convexe. Ces propriétés de convexité font que les trois types de problèmes LMI peuvent être résolus numériquement par des algorithmes d'optimisation efficaces dont le temps de calcul est une fonction polynomiale de nombre de variables [BEFB94, NeN93, NeG94].

Dans ce mémoire, les deux premiers types de problèmes seront rencontrés et seront résolus par utilisation de la boite à outil Matlab *LMI Control Toolbox* [GNLC95].

Afin de ramener un problème d'inégalités matricielles quelconque à un problème LMI équivalent, on dispose d'un certain nombre d'outils permettant d'effectuer des transformations sur le problème initial. En effet la mise sous forme LMI d'un problème d'optimisation consiste dans un premier temps à traduire les contraintes par des inégalités matricielles que l'on tente ensuite de rendre affine en fonction des variables d'optimisation. Le complément de Schur ou lemme de Schur que nous allons utiliser en particulier pour notre problème est un outil fondamental dans le maniement des inégalités matricielles ; en effet il permet dans certains cas de mettre sous forme LMI des contraintes non linéaires. Le lemme est démontré dans [HoJ85].

Lemme de Schur :

Soit $Q(x)=Q(x)^T\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $R(x)=R(x)^T\in\mathbf{R}^{n\times m}$ et $S(x)\in\mathbf{R}^{n\times m}$ des matrices affines en x. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

$$(i)\quad \begin{bmatrix} Q(x) & S(x)\\ S(x)^T & R(x)\end{bmatrix}>0 \tag{5.22}$$

$$(ii)\quad \begin{cases} R(x)>0\\ Q(x)-S(x)R(x)^{-1}S(x)^T>0\end{cases} \tag{5.23}$$

$$(iii)\quad \begin{cases} Q(x)>0\\ R(x)-S(x)^T Q(x)^{-1} S(x)>0\end{cases} \tag{5.24}$$

Remarque 5.3 :

Le lemme est encore valide en changeant le sens des inégalités.

5.7.4. Cas des complexes

Les solveurs de LMI sont écrits pour des matrices réelles et ne peuvent pas directement manipuler des problèmes impliquant des complexes. Cependant les LMIs complexes peuvent être transformées en matrices réelles en observant qu'une matrice Hermitienne complexe satisfait $F(x)<0$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(F(x)) & \mathrm{Im}(F(x)) \\ -\mathrm{Im}(F(x)) & \mathrm{Re}(F(x)) \end{pmatrix} < 0 \tag{5.25}$$

Donc la procédure pour ramener une LMI complexe vers une LMI réelle est la suivante:

- Remplacer chaque variable complexe X par $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ -X_2 & X_1 \end{pmatrix}$, où X_1 et X_2 représentent la partie réelle et la partie imaginaire respectivement de X.
- Remplacer chaque matrice complexe A par $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{pmatrix}$, où A_1 et A_2 représentent la partie réelle et la partie imaginaire respectivement de A.

5.8. Résolution du problème par le formalisme LMI

Réécrivons le problème d'optimisation de l'équation (5.19):

$$\gamma_n^{opt} = \min_{\gamma_n, W_n, V_n} \gamma_n \text{ sous } \begin{cases} R_n = P_{21}V_n + P_w W_n \\ V_n^* V_n \le Z_n^* Z_n \\ W_n^* W_n \le \gamma_n^2 \end{cases}$$

Ce problème d'optimisation a un critère convexe sous contraintes quadratiques convexes et une contrainte linéaire donc nous pouvons le mettre sous forme d'un problème générique LMI. Pour le faire, on pose :

$$\mu_n = \gamma_n^2 \tag{5.26}$$

et on incorpore la contrainte égalité linéaire $R_n = P_{21}V_n + P_w W_n$ dans les autres contraintes inégalités, le problème d'optimisation devient :

$$\mu_n^{opt} = \min_{V_n, \mu_n} \mu_n \text{ sous } \begin{cases} V_n^* V_n \le Z_n^* Z_n \\ \left(P_w^{-1}R_n - P_w^{-1}P_{21}V_n\right)^* \left(P_w^{-1}R_n - P_w^{-1}P_{21}V_n\right) \le \mu_n \end{cases} \tag{5.27}$$

On applique le lemme du Schur pour mettre les contraintes qui sont non linéaires sous forme LMI :

La première contrainte de (5.27) peut être écrite sous la forme suivante :

$$V_n{}^* V_n \le Z_n{}^* Z_n = \left(P_{11}V_n + P_{12}U_n\right)^* \left(P_{11}V_n + P_{12}U_n\right)$$

$$U_n^* P_{12}^* P_{11} V_n + V_n^* P_{11}^* P_{12} U_n + U_n^* P_{12}^* P_{12} U_n - V_n^* \left(I - P_{11}^* P_{11}\right) V_n \ge 0 \tag{5.28}$$

Afin de ramener l'inégalité non linéaire (5.28) à une inégalité linéaire par l'application de lemme de Schur, il faut s'assurer que la matrice $I - P_{11}^* P_{11}$ est définie positive. Dans le cas où on considère des ensembles de modèles avec incertitudes non structurées additives ou multiplicatives, $P_{11} = 0$ la mise sous forme LMI de la contrainte (5.28) est alors donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} I & V_n \\ V_n{}^* & U_n^* P_{12}^* P_{12} U_n \end{pmatrix} \ge 0 \tag{5.29}$$

Et pour la deuxième contrainte du (5.27) c'est-à-dire :

$$\left(P_w^{-1}R_n - P_w^{-1}P_{21}V_n\right)^* \left(P_w^{-1}R_n - P_w^{-1}P_{21}V_n\right) \le \mu_n$$

elle peut être écrite, par l'application du lemme de Schur, sous forme de la LMI équivalente suivante :

$$B = \begin{pmatrix} I & P_w^{-1}R_n - P_w^{-1}P_{21}V_n \\ \left(P_w^{-1}R_n - P_w^{-1}P_{21}V_n\right)^* & \mu_n \end{pmatrix} \ge 0 \tag{5.30}$$

Ainsi la mise sous la forme générique du problème d'optimisation (5.27) pour le cas particulier $P_{11} = 0$ se fait en ramenant toutes matrices complexes à des matrices réelles suivant la procédure décrite dans le Paragraphe 5.7.4. Nous obtenons :

$$\min_X C^T X \text{ sous } D(X) \ge 0 \tag{5.31}$$

Avec :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,\ X = \begin{bmatrix} \mu_n & \mathrm{Re}(V_n)^T & \mathrm{Im}(V_n)^T \end{bmatrix}^T,\ D(X) = diag\left(\hat{A}(X), \hat{B}(X)\right)$$

$$\hat{A}(X) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(A) & \mathrm{Im}(A) \\ -\mathrm{Im}(A) & \mathrm{Re}(A) \end{pmatrix},\ \hat{B}(X) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(B) & \mathrm{Im}(B) \\ -\mathrm{Im}(B) & \mathrm{Re}(B) \end{pmatrix}$$

Ainsi la solution du problème d'optimisation (5.19) est donnée par :

$$\gamma_n^{opt} = \left(\mu_n^{opt}\right)^{1/2}$$

Donc $\gamma^{opt} = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\gamma_n^{opt} \right)^2 \right)^{1/2}$ est la valeur minimale de la norme des signaux w vérifiant les contraintes du problème $y = \mathcal{F}_u(P, \Delta)u + P_w w$ et $\|\Delta\|_\infty \leq 1$. Si cette valeur est inférieure à 1 alors les données ne permettent pas d'invalider le modèle. Réciproquement si $\gamma^{opt} > 1$ alors le modèle est invalidé.

5.9. Deuxième approche du problème de validation de modèle :

Nous avons vu que la résolution du problème générique de validation de modèle par la première approche nous conduit à un problème d'optimisation qui n'est pas envisageable par le formalisme LMI lorsque la matrice $P_{11} \neq 0$. Dans ce paragraphe, nous partons de la troisième approche pour résoudre le problème de décision de validation de modèle. Il s'agit de chercher simultanément la plus petite norme de bruit w et la plus petite norme de perturbation Δ telle que les équations de bouclages (5.7) soient vérifiées. Ceci correspond bien à un problème d'optimisation que l'on peut l'exposer sous la forme suivante :

Problème 5.4. « POVM »

Quelle est la plus petite valeur de β telle qu'ils existent un w, $\|w\|_2 \leq \beta$ et un Δ, $\|\Delta\|_\infty \leq \beta$ et que $y = \mathcal{F}_u(P, \Delta)u + P_w w$

Sous forme d'une écriture standard d'un problème d'optimisation :

$$\beta^{opt} = \min_{w,\Delta} \beta \text{ sous } \begin{cases} y = \mathcal{F}_u(P, \Delta)u + P_w w \\ \|\Delta\|_\infty \leq \beta \\ \|w\|_2 \leq \beta \end{cases} \tag{5.32}$$

Donc selon la valeur de β^{opt} par rapport à 1 nous pouvons donner une réponse au problème de décision 5.1. c'est à dire que si $\beta^{opt} \leq 1$ alors le modèle n'est pas invalide et inversement si $\beta^{opt} > 1$ le modèle est invalide.

Donc une autre réponse au problème de décision 5.1 est donnée selon la valeur de β^{opt} par rapport à 1 suivant la proposition suivante :

Proposition 5.2 :

Les données expérimentales $\left(y[k],u[k]\right)$ $k=0,..,N-1$, *invalident le modèle* $\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\left(P,\Delta\right)$ *si et seulement si quelque soit* Δ, *quelque soit* w *tel que* $y=\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\left(P,\Delta\right)u+P_w w$ *alors* $\|w\|_2>1$ *ou* $\|\Delta\|_\infty>1$

La solution à ce problème va être obtenue ici encore à partir de solution du problème d'optimisation posés fréquence par fréquence.

Lemme 5.2 :

Pour tout $n=0,..,N-1$,

$$\underline{\lambda}_n \le \left\|W(n)\right\| \le \bar{\lambda}_n \Rightarrow \min_n\left(\underline{\lambda}_n\right) \le \left\|w(t)\right\|_2 \le \max_n\left(\bar{\lambda}_n\right) \tag{5.33}$$

Lemme 5.3 :

Soit le transfert $v=\Delta z$ indiqué dans la figure 5.10. Soit les TFD de v et z : $V=\{V_n;n=0,...,N-1\}$ et $Z=\{Z_n;n=0,...,N-1\}$

$$\forall n=0,...,N-1;\ V_n^* V_n \le \eta_n Z_n^* Z_n \Leftrightarrow \exists\Delta_n, V_n=\Delta_n Z_n \text{ tel que } \|\Delta_n\|=\bar{\sigma}\left(\Delta_n\right)\le\eta_n \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}\forall n=0,...,N-1;\ V_n^* V_n \ge \eta_n Z_n^* Z_n &\Leftrightarrow \exists\Delta_n, V_n=\Delta_n Z_n \text{ tel que } \underline{\sigma}\left(\Delta_n\right)\ge\eta_n \\ &\Rightarrow \exists\Delta_n, V_n=\Delta_n Z_n \text{ tel que } \bar{\sigma}\left(\Delta_n\right)\ge\eta_n\end{aligned} \tag{5.35}$$

Donc nous résolvons fréquence par fréquence pour N échantillons d'entrées–sorties le problème d'optimisation suivant :

Problème 5.5 : « POVM à une fréquence »

Quelle est la plus petite valeur de β_n telle qu'ils existent un W_n, $\|W_n\|\le\beta_n$ et un Δ_n, $\|\Delta_n\|\le\beta_n$ et que W_n et Δ_n vérifient $R_n=P_{21}V_n+P_w W_n$.

La solution de ce problème à chaque fréquence $n\in[0,...,N-1]$ va apporter une solution pour le problème d'optimisation 5.4. et donc on peut conclure une réponse au problème de décision 5.1, reformulé par la proposition 5.2, à l'aide du théorème suivant :

Théorème 5.2 :

Soit le modèle $\mathcal{F}_{\mathrm{u}}\left(P,\Delta\right)$ *et les données d'entrées-sorties dans le domaine fréquentiel.* $(Y,U)=\{(Y_n,U_n);n=0,...,N-1\}$. *Le modèle n'est pas invalidé par les données expérimentales si et seulement si pour chaque élément de la séquences de*

$W=\{W_n;n=0,...,N-1\}$ *et de* $V=\{V_n;n=0,...,N-1\}$ *satisfaisant* $R_n=P_{21}V_n+P_{22}W_n$ $V_n^*V_n\le\beta_n^2$ $Z_n^*Z_n$ *et* $W_n^*W_n\le\beta_n^2$ $\forall n\in[0,\cdots N-1]$ *alors*

$$\max_n(\beta_n)\le 1 \tag{5.36}$$

De même le modèle est invalide si :

$$\min_n(\beta_n)>1 \tag{5.37}$$

Démonstration : [MoD03a, MoD03b]

Le problème d'optimisation (5.32) à une fréquence $n\in[0,\cdots,N-1]$ peut se mettre sous la forme suivante:

$$\beta_n^{opt}=\min_{V_n,W_n,\beta_n}\beta_n \text{ sous } \begin{cases}R_n=P_{21}V_n+P_wW_n\\ V_n^*V_n\le\beta_n^2Z_n^*Z_n\\ W_n^*W_n\le\beta_n^2\end{cases} \tag{5.38}$$

La solution β_n^{opt} de ce problème à la fréquence n, vérifie les deux propriétés suivantes :

1. Pour chaque fréquence $n\in[0,\cdots N-1]$, il existe un $V_n:\|V_n\|\le\beta_n^{opt}\|Z_n\|$ et il existe un $W_n:\|W_n\|\le\beta_n^{opt}$ tels que $R_n=P_{21}V_n+P_wW_n$

On applique le lemme 5.3 :

$$V_n^*V_n\le\left(\beta_n^{opt}\right)^2Z_n^*Z_n\Leftrightarrow\exists\Delta_n,V_n=\Delta_nZ_n:\|\Delta_n\|\le\beta_n^{opt}$$

Puisque à chaque fréquence on peut trouver une matrice Δ_n telle que $\|\Delta_n\|\le\beta_n^{opt}$ alors l'opérateur Δ avec $v=\Delta z$ peut être construit tel que $\|\Delta\|_\infty\le\max_n\left(\beta_n^{opt}\right)$.

Aussi du lemme 5.2 nous avons:

$$\forall n\in[0,...,N-1]\,\exists W_n:W_n^*W_n\le\left(\beta_n^{opt}\right)^2\Rightarrow\exists w:\|w\|_2=\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}W_n^*W_n\right)^{1/2}\le\max_n\left(\beta_n^{opt}\right)$$

Donc la plus petite norme qui existe de Δ et de w, vérifiant $y=\mathcal{F}_u(P,\Delta)u+P_ww$ est inférieure ou égale au $\max_n\left(\beta_n^{opt}\right)$

De plus si $\max_n\left(\beta_n^{opt}\right)\le 1$ alors on a déterminé un $\Delta:\|\Delta\|_\infty\le 1$, et un $w:\|w\|_2\le 1$ tel que $y=\mathcal{F}_u(P,\Delta)u+P_ww$, ce qui conduit à dire que le modèle n'est pas invalidé par les données expérimentales.

2. Quelque soit V_n et quelque soit W_n vérifiant $R_n = P_{21}V_n + P_w W_n$ alors $\|V_n\| \geq \beta_n^{opt} \|Z_n\|$ ou $\|W_n\| \geq \beta_n^{opt}$

Donc d'après le lemme 5.3:

$V_n^* V_n \geq \left(\beta_n^{opt}\right)^2 Z_n^* Z_n \Rightarrow \|\Delta_n\| \geq \beta_n^{opt}$ ce qui donne :

$$\forall n \in [0,..,N-1] \ \|\Delta_n\| \geq \beta_n^{opt} \Rightarrow \|\Delta\|_\infty \geq \min_n\left(\beta_n^{opt}\right)$$

et du lemme 5.2:

$$\forall n \in [0,...,N-1] W_n^* W_n \geq \left(\beta_n^{opt}\right)^2 \Rightarrow \|w\|_2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} W_n^* W_n\right)^{1/2} \geq \min_n\left(\beta_n^{opt}\right)$$

Par conséquent, $\forall\, \Delta$ et $\forall\, w$ vérifiant $y = \mathcal{F}_u(P,\Delta)u + P_w w$, alors $\|\Delta\|_\infty \geq \min_n\left(\beta_n^{opt}\right)$ ou $\|w\|_2 \geq \min_n\left(\beta_n^{opt}\right)$.

Si $\min_n\left(\beta_n^{opt}\right) > 1$, on a $\|\Delta\|_\infty > 1$ ou $\|w\|_2 > 1$, ce qui conduit à dire que les données invalident le modèle.

D'où le théorème !

Nous pouvons imaginer que le calcul d'optimisation de problème de validation pour un modèle donné avec un jeu de données expérimentales sur une bande de fréquence Ω a donné le tracé dans la figure 5.11.

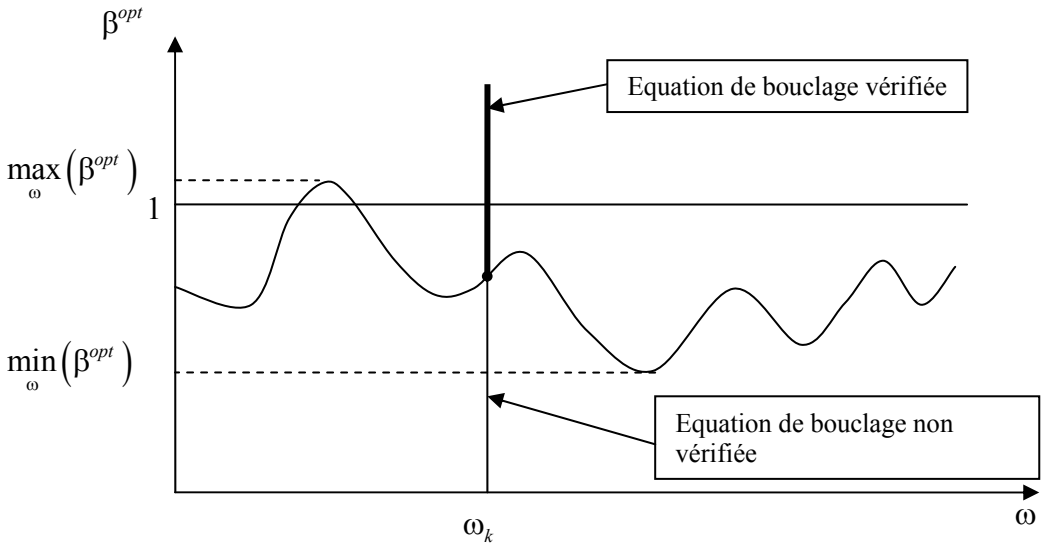


Fig. 5.11 – Evolution de $\beta_{\min}$ *en fonction de la fréquence*

A une pulsation ω_k , pour tout $\beta_k > \beta_k^{opt}$ nous pouvons trouver un $\|\Delta_k\| \leq \beta_k$ et un $\|W_k\| \leq \beta_k$ tel que $R_k = P_{21}V_k + P_w W_k$ (la zone illustrée par le demi droite $\left[\beta^{opt}, +\infty\right)$

dans la figure 5.11). Aussi pour tout $\beta_k < \beta_k^{opt}$, si on trouve $\|\Delta_k\| \le \beta_k < \beta_k^{opt}$ et un $\|W_k\| < \beta_k \le \beta_k^{opt}$ alors $R_k \neq P_{21}V_k + P_w W_k$ (la zone illustrée par le segment $]0,\ \beta^{opt}]$ dans la figure 5.11).

Comme β_k^{opt} est la plus petite valeur qui permet d'avoir $\|\Delta_k\| \le \beta_k^{opt}$ et un $\|W_k\| \le \beta_k^{opt}$ avec $R_k = P_{21}V_k + P_w W_k$ alors le $\max_{\omega}\left(\beta^{opt}\right)$ va être la plus petite valeur qui permet d'avoir $y = \mathcal{F}_u(P,\Delta)u + P_w w$ et $\|\Delta\|_\infty \le \max_{\omega}\left(\beta^{opt}\right)$ et $\|w\|_2 \le \max_{\omega}\left(\beta^{opt}\right)$.

Remarque 5.4 :

Il est facile de montrer que le formalisme LMI peut être utilisé pour résoudre le problème d'optimisation (5.38) dans le cas particulier où $P_{11} = 0$. La démarche est la même que celle décrite dans le paragraphe 5.8, il suffit d'appliquer le lemme de Schur pour ramener les contraintes non linéaires à des contraintes LMI, et nous obtenons pour ce cas la forme générique LMI suivante :

$$\min_X C^T X \text{ sous } \operatorname{diag}\left(\hat{A}'(X), \hat{B}'(X)\right) \ge 0$$

Avec : $C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$; $X = \begin{bmatrix}\rho_n & \operatorname{Re}(V_n)^T & \operatorname{Im}(V_n)^T\end{bmatrix}^T$; $A' = \begin{pmatrix} I & V_n \\ V_n^* & \rho_n U_n^* P_{12}^* P_{12} U_n \end{pmatrix}$

$$B' = \begin{pmatrix} I & P_w^{-1}R_n - P_w^{-1}P_{21}V_n \\ \left(P_w^{-1}R_n - P_w^{-1}P_{21}V_n\right)^* & \rho_n \end{pmatrix}$$

et la notation $\hat{\bullet}$ represente $\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\bullet) & \operatorname{Im}(\bullet) \\ -\operatorname{Im}(\bullet) & \operatorname{Re}(\bullet) \end{pmatrix}$.

La solution du problème d'optimisation (5.19) est donnée par :

$$\beta_n^{opt} = \left(\rho_n^{opt}\right)^{1/2}$$

Pour le cas plus général, c'est à dire pour $P_{11} \neq 0$, l'inégalité :

$$V_n^* V_n \le \rho_n Z_n^* Z_n = \rho_n \left(P_{11}V_n + P_{12}U_n\right)^* \left(P_{11}V_n + P_{12}U_n\right)$$

définit une contrainte non convexe qui ne peut être abordé par le formalisme LMI. Le problème d'optimisation (5.38) peut alors être résolu à l'aide du formalisme de la valeur singulière structurée généralisée. Dans le paragraphe suivant nous définissons ce formalisme à partir de la définition équivalente de la valeur singulière structurée standard.

5.10. Généralisation des valeurs singulières structurées

5.10.1. Définition équivalente de la valeur singulière structurée.

On considère le schéma bouclé de la figure 5.12 décrit par les équations de bouclage :

$$\begin{cases} z = M\ v \\ v = \Delta\ z \end{cases} \tag{5.39}$$

où Δ est une matrice complexe appartenant à la structure $\underline{\mathbf{\Delta}}$ définie par :

$$\underline{\mathbf{\Delta}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{diag}\left\{ \delta_1^r I_{k_1}, ..., \delta_{m_r}^r I_{k_{m_r}}, \delta_1^c I_{k_{m_r+1}}, ..., \delta_{m_c}^c I_{k_{m_r+m_c}}, \Delta_1^C, ..., \Delta_{m_C}^C \right\} \\ \delta_i^r \in \mathbf{R}; \delta_j^c \in \mathbf{C}\ ; \Delta_p^C \in \mathbf{C}^{k_{m_r+m_c+p} \times k_{m_r+m_c+p}}; 1 \le i \le m_r; 1 \le j \le m_c; 1 \le p \le m_C \end{array} \right\}$$

On pose :

$$m_\Delta = m_r + m_c + m_C$$

$$\sum_{i=1}^{m_\Delta} k_i = n$$

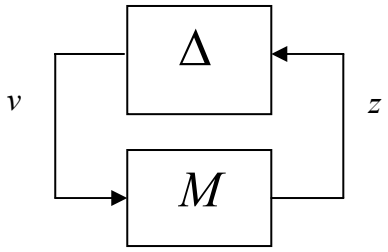


Fig. 5.12 – Structure $M - \Delta$

Par définition, la valeur singulière structurée $\mu_{\underline{\mathbf{\Delta}}}(M)$ de la matrice M par rapport à la structure de bloc de perturbation Δ est une fonction positive réelle définie par l'inverse de la valeur minimale de la norme de la matrice complexe et constante Δ appartenant à la structure $\underline{\mathbf{\Delta}}$ qui rend $I - M\Delta$ singulière [Doy82]; Soit :

$$\mu_\Delta(M) = \begin{cases} 0 \quad \text{s'il n'existe aucun } \Delta \text{ qui résout } \det(I - M\Delta) = 0 \\ \left(\min \left\{ \bar{\sigma}(\Delta) \middle| \det(I - M\Delta) = 0 \right\} \right)^{-1} \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{5.40}$$

Fan et al. [FTD91] ont donné une définition équivalente de $\mu_\Delta(M)$ dont nous rappelons la démonstration qui nous permet de bien comprendre la définition de la généralisation de la valeur singulière structurée.

Théorème 5.3 :

La valeur singulière structurée $\mu_\Delta(M)$ *de la matrice* M *par rapport à la structure* Δ *est égale à :*

$$\mu_\Delta(M) = \max_{\|v\|=1} \left\{ \gamma \mid \|v_i\| \gamma \le \|z_i\|, \forall i = 1, \cdots, m_\Delta; m_C > 0 \right\} \tag{5.41}$$

Démonstration

Fan et al. sont partis de la définition (5.40) pour suggérer qu'on peut considérer des matrices $\Delta \in \underline{\mathbf{\Delta}}$ telles que, pour un certain vecteur v appartenant à une sphère de rayon unité c'est à dire

$$v \in \partial \mathbf{B} := \left\{ v \in \mathbf{C}^n : \|v\| = 1 \right\}, \tag{5.42}$$

la relation :

$$\Delta M v = v \tag{5.43}$$

est vérifiée.

afin de faciliter la compréhension de la démonstration, on considère dans un premier temps le cas d'une incertitude constituée d'un seul bloc de scalaire réel répété et un seul bloc de scalaire complexe répété et un seul bloc complexe plein.

$$\Delta' = \left\{ \mathrm{diag}\left(\delta^r I_{k_r}, \delta^c I_{k_c}, \Delta^c \right) : \delta^r \in \mathbf{R},\ \delta^c \in \mathbf{C},\ \Delta^C \in \mathbf{C}^{k_C \times k_C} \right\}$$

Soit $Q_r \in \mathbf{R}^{k_r \times n}$, $Q_c \in \mathbf{R}^{k_c \times n}$ et $Q_C \in \mathbf{R}^{k_C \times n}$ les matrices de projections définies par :

$$Q_r = \begin{bmatrix} I_{k_r} & 0 & 0 \end{bmatrix},\ Q_c = \begin{bmatrix} 0 & I_{k_c} & 0 \end{bmatrix} \text{ et } Q_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_{k_C} \end{bmatrix}$$

Donc l'égalité (5.43) est équivalente à :

$$\delta^r Q_r M v = Q_r v \tag{5.44}$$

$$\delta^c Q_c M v = Q_c v \tag{5.45}$$

$$\Delta^C Q_C M v = Q_C v \tag{5.46}$$

Afin que (5.46) soit vérifiée pour un Δ^C, $\overline{\sigma}\left(\Delta^C\right) \le \theta$, il est nécessaire et suffisant que

$$\|Q_C v\| \le \theta \|Q_C M v\| \tag{5.47}$$

De même (5.45) ne peut être réalisée pour un δ^c, $\left|\delta^c\right| \le \theta$ que si

$$\|Q_c v\| \le \theta \|Q_c M v\| \tag{5.48}$$

Plus une contrainte supplémentaire indiquant la répétition du scalaire complexe δ^c.

$$\frac{(Mv)_i}{v_i} = \frac{(Mv)_j}{v_j},\ i,j = 1,\cdots,k_c \tag{5.49}$$

Enfin il existe un δ^r, tel que $\left|\delta^r\right| \le \theta$ solution de (5.44) si et seulement si

$$\|Q_r v\| \le \theta \|Q_r M v\| \tag{5.50}$$

et

$$\frac{(Mv)_i}{v_i} = \frac{\left(\overline{Mv}\right)_j}{\bar{v}_j},\quad i,j = 1,\cdots,k_r \tag{5.51}$$

qui traduit la répétition de l'élément incertain réel δ^r.

Donc de la définition de la valeur singulière structurée (5.40), il vient $\mu_{\Delta'}(M) = (\theta_{\min})^{-1}$ avec $\theta_{\min}$ est le plus petit θ pour lequel il existe un v non nul satisfaisant toutes les contraintes (5.47), (5.48), (5.49), (5.50) et (5.51). On pose $\gamma = \theta^{-1}$ alors pour ce cas particulier

$$\mu_{\Delta'} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } E_{\Delta'}(M) = \varnothing \\ \max\left\{ \gamma \;\middle|\; \begin{array}{l} \|Q_r Mv\| \ge \gamma \|Q_r v\|, \|Q_c Mv\| \ge \gamma \|Q_c v\| \\ \|Q_C Mv\| \ge \gamma \|Q_C v\| \end{array} \right\} & \text{si } \exists v \in E_{\Delta'}(M) \end{array} \right\} \tag{5.52}$$

Avec :

$$E_{\Delta'}(M) = \left\{ v \in \partial\mathbf{B} \;\middle|\; \begin{array}{l} \bar{v}_j (Mv)_i = v_i \left(\overline{Mv}\right)_j, (i,j) = 1,\ldots,k_r; \\ v_j (Mv)_i = v_i (Mv)_j, (i,j) = 1,\ldots,k_c \end{array} \right\} \tag{5.53}$$

Pour le cas général, c'est à dire $m_r \ge 1, m_c \ge 1, m_C \ge 1$, les matrices de projection $Q_q,\ q = 1,\cdots,m_\Delta$ seront données par :

$$Q_q = \text{bloc ligne}\left(0_{k_q \times k_1},\cdots,0_{k_q \times k_{q-1}}, I_{k_q}, 0_{k_q \times k_{q+1}},\cdots,0_{k_q \times k_{m_\Delta}}\right), q = 1,\cdots,m_\Delta \tag{5.54}$$

La valeur singulière structurée aura la définition suivante donnée par Fan et al.

$$\mu_\Delta(M) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } E_\Delta(M) = \varnothing \\ \max\left\{ \gamma \;\middle|\; \|Q_q Mv\| \ge \gamma \|Q_q v\|, q = 1,\cdots,m_\Delta \right\} & \text{si } \exists v \in E_\Delta(M) \end{array} \right\} \tag{5.55}$$

Avec

$$E_\Delta(M)=\left\{ v\in\partial\mathbf{B} \;\middle|\; \begin{array}{l} \bar{v}_j(Mv)_i = v_i\left(\overline{Mv}\right)_j, (i,j)\in\bigcup_{q=1}^{m_r} J_q\times J_q \\ v_j(Mv)_i = v_i(Mv)_j, (i,j)\in\bigcup_{q=m_r}^{m_r+m_c} J_q\times J_q \end{array} \right\} \tag{5.56}$$

$$\text{et } J_q=\left\{\sum_{p=1}^{q-1}k_p+1,\sum_{p=1}^{q-1}k_p+2,\cdots,\sum_{p=1}^{q}k_p\right\}\ q=1,\cdots,m_r+m_c. \tag{5.57}$$

La définition (5.55) se pose en terme d'un problème d'optimisation sur $\gamma\in\mathbf{R}$ et sur $v\in\mathbf{C}^n$. Elle possède quelques avantages informatiques par rapport à la définition initiale (5.40), c'est que le nombre de variables est limité, la fonction critère et les contraintes sont coûteuses à évaluer et, après élévation au carré de toutes les normes, la fonction critère et les contraintes deviennent lisses. Cependant, encore la définition (5.55) peut avoir des maxima locaux qui ne sont pas globaux et il n'est pas clair si le maximum global puisse être facilement obtenu. Donc trouver un vecteur $v\in E_\Delta(M)$ n'est pas toujours facile. Fan a montré que pour les deux cas suivants un tel vecteur existe toujours :

- si $m_C>0$, ce vecteur est tel que $\forall i\in J_q, q=1,\cdots,m_r+m_c \quad v_i=0$
- si M a une valeur propre réelle.

Lorsque $m_C>0$, les contraintes $\bar{v}_j(Mv)_i=v_i\left(\overline{Mv}\right)_j,(i,j)\in\bigcup_{q=1}^{m_r}J_q\times J_q$ et $v_j(Mv)_i=v_i(Mv)_j,(i,j)\in\bigcup_{q=m_r}^{m_r+m_c}J_q\times J_q$ sont toujours vérifiées. Et donc l'ensemble $E_\Delta(M)$ devient :

$$E_\Delta(M)=\left\{v\in\partial\mathbf{B}=\left\{v\in\mathbf{C}:\|v\|=1\right\},m_C\neq 0\right\} \tag{5.58}$$

puisque $\mu_\Delta(M)$ nous donne une mesure de l'inverse de la norme de Δ qui cause l'instabilité du système bouclé $M-\Delta$, le cas stable qui correspond à $\mu_\Delta(M)=0$ est toujours écarté car il ne présente aucun intérêt pratique. Donc on peut réécrire la définition de la fonction à valeur réelle positive $\mu_\Delta(M)$ par

$$\mu_\Delta(M)=\max_{\|v\|=1}\left\{\gamma \;\middle|\; \left\|Q_qMv\right\|\geq\gamma\left\|Q_qv\right\|, q=1,\cdots,m_\Delta, m_C\neq 0\right\} \tag{5.59}$$

d'où la définition équivalente (5.41).

5.10.2. Définition de la valeur singulière structurée généralisée

Sur la base de la définition équivalente de μ standard, Newlin et Smith [NeS98] ont proposé une généralisation de la valeur singulière structurée, noté par μ_g, qui va nous permettre à résoudre le problème d'optimisation et donc le problème de validation de modèle.

Cette généralisation est fondée sur le cas où le bloc d'incertitude $\tilde{\Delta}$ de la structure bouclée $\tilde{M} - \tilde{\Delta}$ illustrée dans le schéma de la figure 5.13 est partitionné en deux sous blocs $\tilde{\Delta}_J$ et $\tilde{\Delta}_K$ qui satisfont respectivement une contrainte de norme maximale $\bar{\sigma}\left(\tilde{\Delta}_J\right) \le 1/\gamma$ (comme dans le cas de μ) et une contrainte de gain minimum $\underline{\sigma}\left(\tilde{\Delta}_K\right) \ge \gamma$. La matrice complexe constante $\tilde{M}$ est partitionnée conformément à $\tilde{\Delta}$ de la façon suivante : $\tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{M}_{JJ} & \tilde{M}_{JK} \\ \tilde{M}_{KJ} & \tilde{M}_{KK} \end{pmatrix}$. Le bloc $\tilde{\Delta}$ appartient à la structure. $\underline{\tilde{\mathbf{\Delta}}} = \mathrm{diag}\left(\underline{\tilde{\mathbf{\Delta}}}_J, \underline{\tilde{\mathbf{\Delta}}}_K\right)$ où :

$$\underline{\mathbf{\Delta}}_J = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{diag}\left\{ \delta_1^{\,r} I_{k_1}, ..., \delta_{m_r}^{\,r} I_{k_{m_r}}, \delta_1^{\,c} I_{k_{m_r+1}}, ..., \delta_{m_c}^{\,c} I_{k_{m_r+m_c}}, \Delta_{J1}^C, ..., \Delta_{Jm_{CJ}}^C \right\} \\ \delta_i^{\,r} \in \mathbf{R}; \delta_j^{\,c} \in \mathbf{C}; \Delta_{Jp}^C \in \mathbf{C}^{k_{m_r+m_c+\mathrm{p}} \times k_{m_r+m_c+\mathrm{p}}}; 1 \le i \le m_r; 1 \le j \le m_c; 1 \le p \le m_{JC} \end{array} \right\}$$

$$\underline{\mathbf{\Delta}}_K = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{diag}\left\{ \Delta_{K1}^C, ..., \Delta_{Km_{CK}}^C \right\} \\ \text{avec } \Delta_{Kp}^C \in \mathbf{C}^{k_{\mathrm{P}} \times k_{\mathrm{P}}};\ 1 \le p \le m_{CK} \end{array} \right\}$$

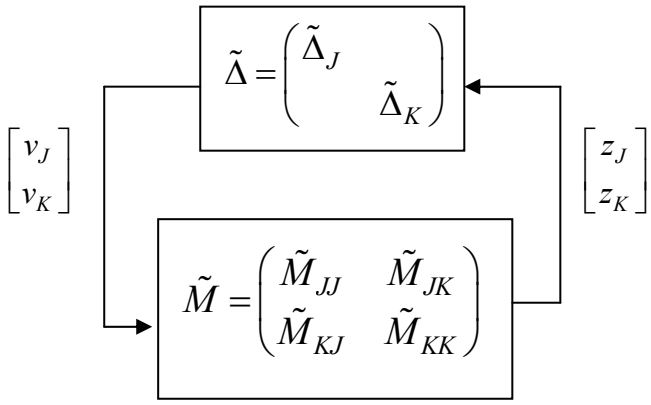


Fig. 5.13 – Structure $\tilde{M} - \tilde{\Delta}$

Les équations de bouclage seront données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_J = \tilde{M}_{JJ}\, v_J + \tilde{M}_{JK}\, v_K \\ z_K = \tilde{M}_{KJ}\, v_J + \tilde{M}_{KK}\, v_K \\ v_J = \tilde{\Delta}_J z_J \\ v_K = \tilde{\Delta}_K z_K \end{array} \right. \tag{5.60}$$

Newlin a introduit la notion de valeur singulière structurée généralisée qui permet de «mesurer» les matrices $\tilde{\Delta}_J$ et $\tilde{\Delta}_K$ telles qu'il existe une solution aux équations bouclées (5.60). Sa définition est la suivante :

Définition de la valeur singulière structurée généralisée :

La valeur singulière structurée généralisée $\mu_{g\mathbf{\Delta}}\left(\tilde{M}\right)$ est une fonction à valeur réelle positive définie par:

$$\mu_{g\mathbf{\Delta}}\left(\tilde{M}\right)=\max_{\|v\|=1}\left\{\gamma\left|\begin{array}{l}\|v_j\|\gamma\le\|z_j\|,\forall j\in 1,\cdots,m_r+m_c+m_{CJ}\ \text{où}\ m_{CJ}>0\\ \|z_k\|\gamma\le\|v_k\|,\forall k\in 1,\cdots,m_{CK}\end{array}\right.\right\} \tag{5.61}$$

Remarque 5.5:

Il est clair que la contrainte $\|z_k\|\gamma\le\|v_k\|$ traduit tout simplement l'existence du bloc $\tilde{\Delta}_K$ qui subit à une contrainte de norme minimale $\underline{\sigma}\left(\tilde{\Delta}_K\right)\ge\gamma$. Et donc lorsque $m_{CK}=0$, on retrouve bien la définition (5.41) de la valeur singulière structurée standard et on a dans ce cas : $\mu_{g\tilde{\mathbf{\Delta}}}\left(\tilde{M}\right)=\mu_{g\tilde{\mathbf{\Delta}}_J}\left(\tilde{M}_{JJ}\right)=\mu_{\tilde{\mathbf{\Delta}}}\left(\tilde{M}_{JJ}\right)$.

Remarque 5.6 :

La fonction $\mu_{g\tilde{\mathbf{\Delta}}}\left(\tilde{M}\right)$ prend une valeur finie si et seulement si $\ker\left(\tilde{M}_{kk}\right)=\{0\}$. En effet si $\ker\left(\tilde{M}_{kk}\right)\neq\{0\}$, considérons $v_K\in\ker\left(\tilde{M}_{KK}\right)$ et en choisissant $v_J=0$ alors $\|v_K\|=1$. On écrit les équations de bouclage :

$$z_K=\tilde{M}_{KJ}v_J+\tilde{M}_{KK}v_K=0 \tag{5.62}$$

$$z_J=\tilde{M}_{JJ}v_J+\tilde{M}_{JK}v_K=\tilde{M}_{JK}v_K \tag{5.63}$$

Donc :

$$\mu_{g\mathbf{\Delta}}\left(\tilde{M}\right)=\max_{\|v\|=1}\left\{\gamma\left|\begin{array}{l}0.\gamma\le\|z_J\|\\ 0.\gamma\le\|v_K\|\end{array}\right.\right\}=\infty \tag{5.64}$$

Donc pour que le maximum soit fini il faut que le $\ker\left(\tilde{M}_{kk}\right)=0$.

5.11. Application de μ_g au problème de validation de modèle

5.11.1. Construction de la matrice complexe

Nous allons montrer que le problème d'optimisation 5.5 « POVM à une fréquence » pourrait se formuler comme un problème μ_g [NeS98] en introduisant un bloc d'incertitude non structurée fictive Δ_w dans la structure LFT du problème tel que Δ_w satisfait une contrainte de gain minimum $\underline{\sigma}(\Delta_w) \geq 1/\beta_n$ sachant que Δ_n satisfait $\overline{\sigma}(\Delta_n) \leq \beta_n$. Pour le faire, on revient à la structure générique décrite dans la figure 5.5. A une fréquence donnée n, la structure équivalente est donnée par la figure 5.14 suivante :

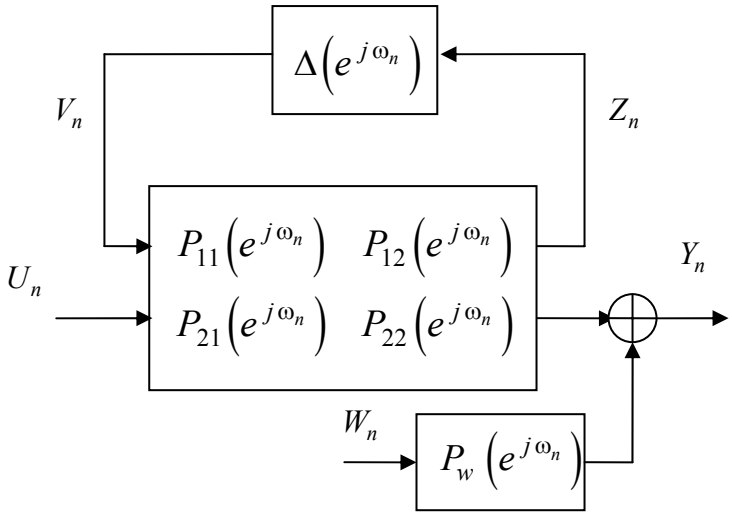


Fig. 5.14 – Structure de la matrice constante

Les équations de bouclage pour chaque fréquence sont :

$$\begin{aligned} V_n &= \Delta_n Z_n \\ Z_n &= P_{11} V_n + P_{12} U_n \\ Y_n &= P_{21} V_n + P_{22} U_n + P_w W_n \end{aligned} \tag{5.65}$$

En écrivant W_n en fonction de Y_n, V_n et U_n puisque, par hypothèse, P_w^{-1} existe :

$$-W_n = P_w^{-1} P_{21} V_n + P_w^{-1}\left(P_{22} U_n - Y_n\right) \tag{5.66}$$

Alors on peut représenter cette relation par la structure équivalente illustrée dans la figure 5.15 après avoir absorbé les grandeurs connues U_n et Y_n dans la matrice P

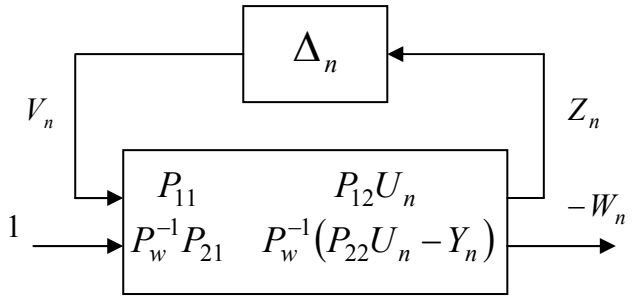


Fig. 5.15 – Structure équivalente de la matrice constante

En introduisant un bloc d'incertitude fictive $\Delta_w \in \mathbf{C}^{1\times\dim(y)}$ tel que :

$$1 = \Delta_w \cdot (-W_n) \tag{5.67}$$

Le système représenté sur la figure 5.14 est alors équivalent au système bouclé de la figure 5.16 suivante

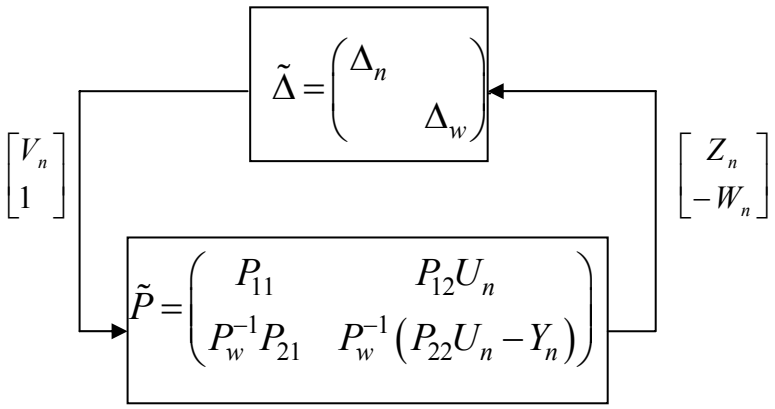


Fig. 5.16 – Structure $\tilde{P} - \tilde{\Delta}$

Donc les équations de bouclage (5.65) seront remplacées dans le problème par les équations de bouclage suivantes :

$$\begin{bmatrix} V_n \\ 1 \end{bmatrix} = \tilde{\Delta}\begin{bmatrix} Z_n \\ -W_n \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} Z_n \\ -W_n \end{bmatrix} = \tilde{P}\begin{bmatrix} V_n \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.68}$$

avec :

$$\tilde{\Delta} = diag(\Delta, \Delta_w) \tag{5.69}$$

et

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12}U_n \\ P_w^{-1}P_{21} & P_w^{-1}(P_{22}U_n - Y_n) \end{pmatrix} \tag{5.70}$$

Ainsi, compte tenu de la définition (5.67) du bloc Δ_w, la contrainte sur la norme de W_n, $\|W_n\| \le \beta_n$ sera remplacée par une contrainte sur la norme de la matrice Δ_w, telle que $\|\Delta_w\| \ge 1/\beta_n$, vu leur équivalence donnée par le lemme suivant :

Lemme 5.4:

$$\|W_n\| \le \beta_n \Leftrightarrow \exists \Delta_w : \Delta_w W_n = 1,\ \underline{\sigma}(\Delta_w) \ge 1/\beta_n \tag{5.71}$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le lemme 5.3 sur le transfert indiqué par l'équation (5.67).

Le problème d'optimisation de validation de modèle devient maintenant équivalent à un problème d'optimisation min–max suivant :

Problème 5.6 : « POVM »

Soit le schéma de la figure 5.16 :

Quelle est la plus petite β_n *telle qu'il existe un* $\Delta, \|\Delta\| \le \beta_n$ *et un* $\Delta_w, \underline{\sigma}(\Delta_w) \ge 1/\beta_n$ *vérifiant les équations bouclées* (5.68)*.*

Ce problème, dit « de matrice constante » puisqu'il est défini fréquence par fréquence, correspond donc à la recherche d'une solution aux équations bouclées (5.68) telles que certains éléments du $\tilde{\Delta}$ satisfont une contrainte de norme max $\left(\overline{\sigma}(\Delta_n) \le \beta_n\right)$ et d'autres éléments satisfont une contrainte de norme min $\left(\underline{\sigma}(\Delta_w) \ge 1/\beta_n\right)$. C'est typiquement un problème μ_g décrit dans le paragraphe 5.10.2. Donc on utilise le formalisme de μ_g pour résoudre le problème 5.6.

5.11.2. Application au problème de validation de modèle

Newlin et Smith ont donné une preuve du théorème suivant qui résout le problème de validation de modèle par le formalisme μ_g :

Théorème 5.4 :

Soit la matrice $\widetilde{P}$ *définie par l'équation* (5.70) *:*

$$\mu_{g\tilde{\Delta}}\left(\tilde{P}\right) \ge 1/\beta_n \Leftrightarrow \exists \|\Delta_n\| \le \beta_n \text{ et } \exists \|W_n\| \le \beta_n \text{ tel que } Y_n = P_w W_n + \mathcal{F}_u\left(P, \Delta_n\right) U_n \tag{5.72}$$

Démonstration :

Par définition, la fonction μ_g de la matrice complexe constante $\tilde{M}$ bouclée sur $\tilde{\Delta}$ avec $\bar{\sigma}\left(\tilde{\Delta}_J\right) \le 1/\gamma$ et $\underline{\sigma}\left(\tilde{\Delta}_K\right) \ge \gamma$, est donnée par :

$$\mu_{g_{\tilde{\Delta}}}\left(\tilde{M}\right) = \max_{\|v\|=1} \left\{ \gamma \;\middle|\; \begin{array}{l} \|v_j\|\gamma \le \|z_j\|, \forall j \in J \\ \|z_k\|\gamma \le \|v_k\|, \forall k \in K \end{array} \right\} \tag{5.73}$$

Si $\mu_{g_{\tilde{\Delta}}}\left(\tilde{M}\right) < \gamma^o$ alors il n'existe aucun quadruplet $\left(z_j, z_k, v_j, v_k\right)$ avec $\begin{bmatrix} z_j \\ z_k \end{bmatrix} = \tilde{M}\begin{bmatrix} v_j \\ v_k \end{bmatrix}$ tel que $\|v_j\|\gamma^o \le \|z_j\|$ et $\|z_k\|\gamma^o \le \|v_k\|$. C'est à dire $\forall\left(z_j, z_k, v_j, v_k\right)$ tel que $\begin{bmatrix} z_j \\ z_k \end{bmatrix} = \tilde{M}\begin{bmatrix} v_j \\ v_k \end{bmatrix}$ alors $\|v_j\|\gamma^o > \|z_j\|$ ou $\|z_k\|\gamma^o > \|v_k\|$. Donc :

$$\mu_{g_{\tilde{\Delta}}}\left(\tilde{M}\right) < \gamma^o \Leftrightarrow \forall \tilde{\Delta}_J \in \underline{\tilde{\mathbf{\Delta}}}_J, \forall \tilde{\Delta}_K \in \underline{\tilde{\mathbf{\Delta}}}_K \text{ tel que } \begin{pmatrix} z = \tilde{M}v \\ v = \tilde{\Delta}z \end{pmatrix} \text{ alors } \bar{\sigma}\left(\tilde{\Delta}_j\right) > 1/\gamma^o \text{ ou } \underline{\sigma}\left(\tilde{\Delta}_k\right) < \gamma^o \tag{5.74}$$

En faisant les correspondances avec le problème de la matrice constante selon les équations suivantes:

$$\tilde{\Delta}_j = \{\Delta_n\};\ \tilde{\Delta}_k = \{\Delta_w\};\ z_J = Z_n;\ z_K = -W_n;\ v_J = V_n;\ v_K = 1;\ \beta_n = 1/\gamma^o$$

On trouve:

$$\mu_{g_{\tilde{\Delta}}}\left(\tilde{P}\right) < 1/\beta_n \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall\left(\Delta_n, W_n\right) \text{ tel que } Y_n = P_w W_n + \mathcal{F}_u\left(P\left(e^{j\omega_n}\right), \Delta_n\right)U_n \\ \text{alors } \|\Delta_n\| > \beta_n \text{ ou } \|W_n\| > \beta_n \end{array} \right) \tag{5.75}$$

La contraposition de (5.75) donne le résultat (5.72) du théorème 5.4.

Nous montrons dans le théorème suivant le lien entre le problème d'optimisation 5.5 et le théorème 5.4 :

Théorème 5.5:

La solution β_n^{opt} du problème d'optimisation (5.38) est égale à l'inverse de $\mu_{g_{\tilde{\Delta}}}\left(\tilde{P}\left(j\omega_n\right)\right)$:

$$\beta_n^{opt} = 1/\mu_g\left(\tilde{P}\left(j\omega_n\right)\right) \tag{5.76}$$

Démonstration :

On sait que, d'après le théorème 5.4 :

$$\mu_g\left(\tilde{P}\left(j\omega_n\right)\right) \geq 1/\beta_n \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \Delta_n \ \|\Delta_n\| \leq \beta_n \\ \exists W_n \ \|W_n\| \leq \beta_n \\ Y_n = P_w W_n + \mathcal{F}_u\left(P, \Delta_n\right) U_n \end{cases} \quad (5.77)$$

Soit $1/\beta_n^*$ la valeur exacte de $\mu_g\left(\tilde{P}\left(j\omega_n\right)\right)$ à la fréquence n Donc :

$$\mu_g\left(\tilde{P}\left(j\omega_n\right)\right) = 1/\beta_n^* \geq 1/\beta_n \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \Delta_n \ \|\Delta_n\| \leq \beta_n^* \leq \beta_n \\ \exists W_n \ \|W_n\| \leq \beta_n^* \leq \beta_n \\ Y_n = P_w W_n + \mathcal{F}_u\left(P, \Delta_n\right) U_n \end{cases} \quad (5.78)$$

Donc β_n^* est la plus petite valeur par la quelle les contraintes du problème restent vérifiées.

$$\beta_n^* = \beta_n^{opt} = \min_{W_n, \Delta_n} \beta_n \text{ sous } \begin{cases} \|\Delta_n\| \leq \beta_n \\ \|W_n\| \leq \beta_n \\ Y_n = P_w W_n + \mathcal{F}_u\left(P, \Delta_n\right) U_n \end{cases} \quad (5.79)$$

et on trouve bien $\beta_n^* = \beta_n^{opt}$.

Donc on peut tirer les deux équivalences suivantes :

$$\max_n\left(\beta_n^{opt}\right) \leq 1 \Leftrightarrow \min_{\omega_n} \mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) \geq 1 \quad (5.80)$$

$$\min_n\left(\beta_n^{opt}\right) > 1 \Leftrightarrow \max_{\omega_n} \mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) < 1 \quad (5.81)$$

Cela nous donne le théorème suivant:

Théorème 5.6 :

Les données expérimentales n'invalident pas le modèle si et seulement si :

$$\min_{\omega_n} \mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) \geq 1 \quad (5.82)$$

De même le modèle est dit invalide si et seulement si

$$\max_{\omega_n} \mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) < 1 \quad (5.83)$$

5.12. Evaluation de la fonction μ_g

En pratique, le calcul de μ_g est un problème très difficile, sa valeur peut être approchée par une borne supérieure et une borne inférieure comme pour le cas de μ standard.

La recherche de la borne supérieure de μ_g peut être formulée comme un problème d'inégalité matricielle linéaire LMI. Tandis que la borne inférieure peut être calculée à l'aide d'algorithme de puissance « Power Algorithm ».

5.12.1. Formulation de la borne supérieure de μ_g comme un LMI

Reprenons la figure 5.13 :

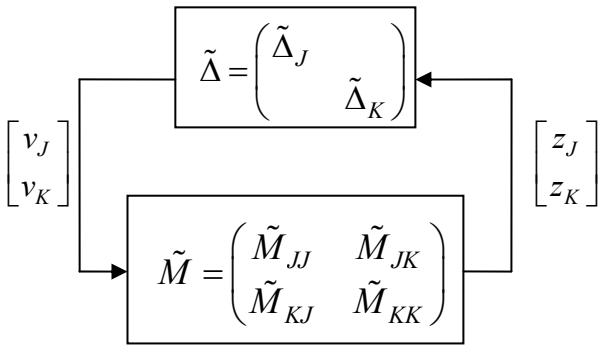


Fig 5.13 – Structure $\tilde{M} - \tilde{\Delta}$

Avec $\tilde{\Delta}$ appartenant à la structure $\underline{\tilde{\mathbf{\Delta}}}$ partitionnée en Δ_j et Δ_k tel que $\|\Delta_j\| \le 1/\gamma$ et $\|\Delta_k\| \ge \gamma$

Selon l'équivalence (5.72) du théorème 5.4 :

$$\mu_g\left(\tilde{M}\right) \ge \gamma \Leftrightarrow \exists\, v \ne 0 \text{ tel que } \begin{cases} v_j^* v_j \gamma^2 \le z_j^* z_j, \forall j = 1, \cdots, m_J \\ z_k^* z_k \gamma^2 \le v_k^* v_k, \forall k = 1, \cdots, m_K \end{cases} \tag{5.84}$$

En introduisant des scalaires d_j, d_k appartenant à l'ensemble **d** tel que :

$$\mathbf{d} = \left\{ \left(d_j, d_k\right) \middle|\ \forall \left(j,k\right) = (1,1), \cdots, \left(m_J, m_K\right)\ d_j > 0; d_k < 0 \right\}$$

nous aurions :

$$\begin{cases} v_j^* d_j v_j \gamma^2 \le z_j^* d_j z_j \ \ \forall j = 1, \cdots, m_J \\ v_k^* d_k v_k \gamma^{-2} \le z_k^* d_k z_k \ \ \forall k = 1, \cdots, m_K \end{cases} \tag{5.85}$$

On définit $Q_{j,z}$, $Q_{k,z}$, $Q_{j,v}$ et $Q_{k,v}$ les matrices de projections relatives à z_J, z_K, v_J et v_K respectivement, données par :

$$\begin{aligned}
Q_{j,z} &= \text{bloc ligne } \left(0_{k_1,z},\cdots,0_{k_{j-1}},I_{k_j,z},0_{k_{j+1},z},\cdots,0_{k_{m_J},z}\right),\ j=1,\cdots,m_J \\
Q_{k,z} &= \text{bloc ligne } \left(0_{k_1,z},\cdots,0_{k_{k-1},z},I_{k_k,z},0_{k_{k+1},z},\cdots,0_{k_{m_K},z}\right),\ k=1,\cdots,m_K \\
Q_{j,v} &= \text{bloc ligne } \left(0_{k_1,v},\cdots,0_{k_{j-1},v},I_{k_j,v},0_{k_{j+1},v},\cdots,0_{k_{m_J},v}\right),\ j=1,\cdots,m_J \\
Q_{k,v} &= \text{bloc ligne } \left(0_{k_1,v},\cdots,0_{k_{k-1},v},I_{k_k,v},0_{k_{k+1},v},\cdots,0_{k_{m_K},v}\right),\ k=1,\cdots,m_K
\end{aligned} \tag{5.86}$$

Donc chaque sous vecteur de z_J, z_K, v_J et v_K, est donné par :

$$\begin{cases}
z_j = Q_{j,z}\tilde{M}v \\
z_k = Q_{k,z}\tilde{M}v \\
v_j = Q_{j,v}v \\
v_k = Q_{k,v}v
\end{cases} \tag{5.87}$$

On remplace (5.87) dans (5.85) on obtient:

$$\begin{cases}
\left(Q_{j,v}v\right)^* d_j\left(Q_{j,v}v\right)\gamma^{2} \le \left(Q_{j,z}\tilde{M}v\right)^* d_j\left(Q_{j,z}\tilde{M}v\right) \quad j=1,\cdots,m_J \\
\left(Q_{k,v}v\right)^* d_k\left(Q_{k,v}v\right)\gamma^{-2} \le \left(Q_{k,z}\tilde{M}v\right)^* d_k\left(Q_{k,z}\tilde{M}v\right) \quad k=1,\cdots,m_K
\end{cases} \tag{5.88}$$

$$\begin{cases}
v^*\left(\tilde{M}^*Q_{j,z}^* d_j Q_{j,z}\tilde{M} - Q_{j,v}^* d_j Q_{j,v}\gamma^2\right)v \ge 0 \quad j=1,\cdots,m_J \\
v^*\left(\tilde{M}^*Q_{k,z}^* d_k Q_{k,z}\tilde{M} - Q_{k,v}^* d_k Q_{k,v}\gamma^{-2}\right)v \ge 0 \quad k=1,\cdots,m_K
\end{cases} \tag{5.89}$$

Soit les matrices $D_{Z,J}$, $D_{V,J}$, $D_{Z,K}$ et $D_{V,K}$ données par:

$$\begin{aligned}
D_{Z,J} &= \sum_{j=1}^{m_J} Q_{j,z}^* d_j Q_{j,z} \\
D_{V,J} &= \sum_{j=1}^{m_J} Q_{j,v}^* d_j Q_{j,v} \\
D_{Z,K} &= \sum_{k=1}^{m_K} Q_{k,z}^* d_k Q_{k,z} \\
D_{V,K} &= \sum_{k=1}^{m_K} Q_{k,v}^* d_k Q_{k,v}
\end{aligned} \tag{5.90}$$

L'équation (5.89) devient:

$$v^*\left(\tilde{M}^*\begin{bmatrix} D_{J,Z} & \\ & D_{K,Z}\end{bmatrix}\tilde{M} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{m_J} & \\ & \gamma^{-2}I_{m_K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{J,V} & \\ & D_{K,V}\end{bmatrix}\right)v \ge 0 \tag{5.91}$$

On pose :

$$\begin{aligned} D_Z &= \mathrm{diag}\left(D_{J,Z}, D_{K,Z}\right) \\ D_V &= \mathrm{diag}\left(D_{J,V}, D_{K,V}\right) \\ I(\gamma) &= \mathrm{diag}\left(\gamma I_{m_J}, \gamma^{-1} I_{m_K}\right) \end{aligned} \tag{5.92}$$

On trouve:

$$v^*\left(\tilde{M}^* D_Z \tilde{M} - I^2(\gamma) D_V\right) v \geq 0 \tag{5.93}$$

Donc, si $\mu_g\left(\tilde{M}\right) \geq \gamma$, alors pour tout $d \in \mathbf{d}$ avec les matrices correspondantes $D_V(d)$ et $D_Z(d)$, il existe $v \neq 0$ tel que :

$$\tilde{M}^* D_Z \tilde{M} - I^2(\gamma) D_V \geq 0 \tag{5.94}$$

La contraposition de ce résultat nous donne le théorème suivant :

Théorème 5.7 :

S'il existe un $d \in \mathbf{d}$ tel que :

$$\tilde{M}^* D_Z \tilde{M} - I^2(\gamma) D_V < 0 \tag{5.95}$$

alors:

$$\mu_g\left(\tilde{M}\right) < \gamma \tag{5.96}$$

Donc la recherche de la borne supérieure de μ_g se fait en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\gamma^{ub} = \min_{D_Z, D_V, \gamma} \gamma \text{ sous } \tilde{M}^* D_Z \tilde{M} - I^2(\gamma) D_V < 0 \tag{5.97}$$

Donc pour γ fixé, la contrainte inégalité (5.95) est une LMI en D_V et D_Z et la détermination de la plus petite des valeurs de γ telle que la faisabilité de la LMI est vérifiée sera déterminée par itération dichotomique sur γ.

Remarque 5.7:

Contrairement au problème de μ standard, dans la démonstration précédente nous avons considéré que chaque bloc de l'ensemble d'incertitude $\tilde{\Delta}$ n'est pas carré. Dans le cas contraire on aura $D_V = D_Z$.

5.12.2. Valeurs singulières structurées généralisées en présence des incertitudes paramétriques réelles

La démonstration faite dans la recherche d'une borne supérieure de μ_g a considéré que tous les blocs d'incertitudes dans la structure de $\tilde{\underline{\Delta}}$ sont des blocs complexes et donc la borne supérieure de μ_g est de mauvaise qualité puisque les blocs réels sont assimilés à des blocs complexes. Pour remédier à ce problème nous utilisons conjointement des matrices D_V, D_Z et G, où D_V et D_Z comme dans les ensembles $\mathcal{D}$ scaling pour le problème de μ standard, où la seule différence entre D_V et D_Z est leur dimension qui corresponde à la dimension de la ligne et du colonne de l'ensemble d'incertitude $\tilde{\underline{\Delta}}$ respectivement. G est définie comme dans les ensembles $\mathcal{G}$ scaling pour le problème de μ standard mixte de même dimension que $\tilde{\underline{\Delta}}$.

Théorème 5.8 :

La borne supérieure de μ_g deviendra : $\mu_g(\tilde{M}) \le \gamma^{opt}$ avec

$$\gamma^{opt} = \min_{D_Z, D_V, G} \gamma \text{ sous } \tilde{M}^* D_Z \tilde{M} + j\left(G\tilde{M} - \tilde{M}^* G^*\right) - I^2(\gamma) D_V < 0 \tag{5.98}$$

avec $D_V \in \underline{\mathbf{D}}_V$, $D_Z \in \underline{\mathbf{D}}_Z$, $G \in \underline{\mathbf{G}}$. Et les ensembles $\underline{\mathbf{D}}_Z$, $\underline{\mathbf{D}}_V$, et $\underline{\mathbf{G}}$ sont données respectivement par :

$$\underline{\mathbf{D}}_{\mathbf{Z}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{diag}\left\{ \begin{array}{l} D_{z_1}, .., D_{z_{m_r}}; D_{z_{m_r+1}}, .., D_{z_{m_r+m_c}}; \\ d_{1J} I_{z_{mC1J}}, .., d_{m_C J} I_{z_{mCJ}};\ d_{1K} I_{z_{mC1K}}, .., d_{m_C K} I_{z_{mCK}} \end{array} \right\} \\ D_{z_i} \in \mathbf{C}^{k_{z_i} \times k_{z_i}}; D_{z_i} = D_{z_i}^* > 0; d_J > 0; d_K < 0 \end{array} \right\} \tag{5.99}$$

$$\underline{\mathbf{D}}_{\mathbf{V}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{diag}\left\{ \begin{array}{l} D_{v_1}, .., D_{v_{m_r}}; D_{v_{m_r+1}}, .., D_{v_{m_r+m_c}}; \\ d_{1J} I_{v_{mC1J}}, .., d_{m_C J} I_{v_{mCJ}}; d_{1K} I_{v_{mC1J}}, .., d_{m_C K} I_{v_{mCK}} \end{array} \right\} \\ D_{v_i} \in \mathbf{C}^{k_{v_i} \times k_{v_i}}; D_{v_i} = D_{v_i}^* > 0; d_J > 0; d_K < 0 \end{array} \right\} \tag{5.100}$$

$$\underline{\mathbf{G}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{diag}\left\{ \begin{array}{l} G_1, ..., G_{m_r}; 0_{(m_r+1)\times(m_r+1)}, ..., 0_{(m_r+m_c)\times(m_r+m_c)}; \\ 0_{m_{CJ1}\times m_{CJ1}}, ..., 0_{m_{CJ}\times m_{CJ}}; 0_{m_{CK1}\times m_{CK1}}, ..., 0_{m_{CK}\times m_{CK}} \end{array} \right\} \\ G_i \in \mathbf{C}^{r_i \times r_i};\ G_i = G_i^* \end{array} \right\} \tag{5.101}$$

$$\mathbf{I}(\gamma) = diag\left(\gamma I_{m_J}, \gamma^{-1} I_{m_K}\right) \tag{5.102}$$

Remarque 5.8:

Dans le cas où $m_r = m_c = 0$, Newlin et Smith [NeS98] ont montré que lorsque $\tilde{\Delta}$ contient au plus trois blocs alors la borne supérieure est exacte.

Remarque 5.9 :

Il faut noter que pour un ensemble de modèle $\mathcal{F}_u(P,\Delta)$ dont la matrice d'incertitude Δ et le modèle P ont respectivement les tailles suivantes :

$$\left(\sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} n_p \; ; \sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} m_p\right) \tag{5.103}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} m_p + n_y \; ; \sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} n_p + n_u\right) \tag{5.104}$$

Alors les matrices $\widetilde{\Delta}$ et $\widetilde{P}$ auront les tailles respectives suivantes :

$$\left(\sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} n_p + 1 \; ; \sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} m_p + n_y\right) \tag{5.105}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} m_p + n_y \; ; \sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} n_p + 1\right) \tag{5.106}$$

Les matrices D_Z et D_V sont de tailles différentes mais carrées, respectivement :

$$\left(\sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} m_p + n_y \; ; \; \sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} m_p + n_y\right) \tag{5.107}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} n_p + 1; \sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} n_p + 1\right) \tag{5.108}$$

G aura la taille suivante qui n'est pas forcément carrée :

$$\left(\sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} n_p + 1; \sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} m_p + n_y\right) \tag{5.109}$$

et $I(\gamma)$ de taille :

$$\left(\sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} n_p + 1; \sum_{i=1}^{r} r_i + \sum_{j=1}^{c} c_j + \sum_{p=1}^{q} n_p + 1\right) \tag{5.110}$$

5.12.3. Borne inférieure pour μ_g

L'algorithme de puissance pour calculer la borne inférieure de la fonction μ_g est en général similaire à celui pour calculer la borne inférieure de μ standard. Il a été initialement proposé par Newlin [New96], et ensuite développé par Morris [Mor96]. La procédure de calcul est faite sur la base d'un calcul bloc par bloc et consiste en plusieurs étapes qui sont pratiquement identiques aux itérations de puissance de μ mixte standard. Le bloc $\tilde{\Delta}_K$ cependant, est différent, ayant pour résultat un ensemble d'équations implicites qui doivent être résolues à chaque étape de l'algorithme standard de puissance.

La borne inférieure de μ mixte standard, définie par Young et Doyle [YoD90], est donnée par la formule suivante :

$$\max_{Q\in\mathbf{Q}} \rho_R\left(QM\right) \le \mu\left(M\right) = \max_{\Delta\in\mathbf{B\Delta}} \rho_R\left(\Delta M\right) \tag{5.111}$$

Où $\rho_R\left(QM\right)$ est le rayon spectral réel défini comme le module de la plus grande valeur propre réelle de QM donné par :

$$\rho_R\left(QM\right) = \sup\left[\left|\lambda\right| : \det\left(QM - \lambda I\right) = 0 \text{ et } \lambda \in \mathbf{R}\right] \tag{5.112}$$

et Q est une matrice de forme :

$$Q \in \mathbf{Q} = \left\{Q \in \underline{\mathbf{\Delta}}, \delta_i^r \in \left[-1,1\right], \delta_j^{c*}\delta_j^c = 1, \Delta_o^{C*}\Delta_o^C = I\right\} \tag{5.113}$$

Pour μ_g, la borne inférieure est donnée par [NeS91] :

$$\max_{Q\in\mathbf{Q}} \left\{\alpha : \rho\left(I\left(\alpha\right)^{-1} Q\tilde{M}\right) = 1\right\} \le \mu_g\left(\tilde{M}\right) = \max_{\tilde{\Delta}\in\mathbf{B\Delta}} \rho_R\left(I\left(\alpha\right)^{-1}\tilde{\Delta}\tilde{M}\right) = 1 \tag{5.114}$$

$$I\left(\alpha\right) = \begin{pmatrix} \alpha I_{m_J} & \\ & \alpha^{-1} I_{m_K} \end{pmatrix} \tag{5.115}$$

Comme pour μ standard, les propriétés de convergence de l'algorithme pour obtenir la borne inférieure sont fondées sur des observations empiriques en utilisant des interconnections diverses, incluant des blocs d'incertitudes complexes pleins, des incertitudes scalaires répétées réelles et complexes. Pour les systèmes monovariables la borne inférieure converge toujours. Et il apparaît que la borne inférieure converge généralement à 99% lorsque l'incertitude est limitée à des blocs pleins complexes. Mais en présence d'incertitudes scalaires réelles répétées, la borne inférieure converge mal. Dans tout les cas lorsque la borne inférieure n'a pas convergé, on ne peut parler que d'invalidation du modèle.

5.12.4. Formulation comme un problème μ standard

Dans le cas où $\dim(z_K) = \dim(v_K)$, $\tilde{M} \in dom(\mu_g)$ est équivalent à $\tilde{M}_{KK}$ est inversible

Dans ce cas on peut formuler $\mu_g(\tilde{M})$ comme un μ standard sur une autre matrice $\hat{M}$:

Théorème 5.9 :

Si $\tilde{M} \in dom(\mu_g)$ et $\tilde{M}_{KK}$ est inversible alors

$$\mu_{g\tilde{\Delta}}(\tilde{M}) = \mu_{\hat{\Delta}}(\hat{M}) \tag{5.116}$$

Où :

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{JJ} - \tilde{M}_{JK}\tilde{M}_{KK}^{-1}\tilde{M}_{KJ} & \tilde{M}_{JK}\tilde{M}_{KK}^{-1} \\ -\tilde{M}_{KK}^{-1}\tilde{M}_{KJ} & \tilde{M}_{KK}^{-1} \end{bmatrix} \tag{5.117}$$

Et la structure bloc:

$$\hat{\Delta} = \mathrm{diag}(\tilde{\Delta}_J, \tilde{\Delta}_K^T) \tag{5.118}$$

Démonstration :

$\tilde{M} \in \mathrm{dom}(\mu_g)$ et $\tilde{M}_{KK}$ est carrée ceci implique que $\tilde{M}_{KK}^{-1}$ existe :

$$\begin{cases} z_J = \tilde{M}_{JJ}v_J + \tilde{M}_{JK}v_K \\ z_K = \tilde{M}_{KJ}v_J + \tilde{M}_{KK}v_K \end{cases} \tag{5.119}$$

$$\begin{cases} z_J = \tilde{M}_{JJ}v_J - \tilde{M}_{JK}\tilde{M}_{KK}^{-1}\tilde{M}_{KJ}v_J + \tilde{M}_{JK}\tilde{M}_{KK}^{-1}z_K \\ v_K = -\tilde{M}_{KK}^{-1}\tilde{M}_{KJ}v_J + \tilde{M}_{KK}^{-1}z_K \end{cases} \tag{5.120}$$

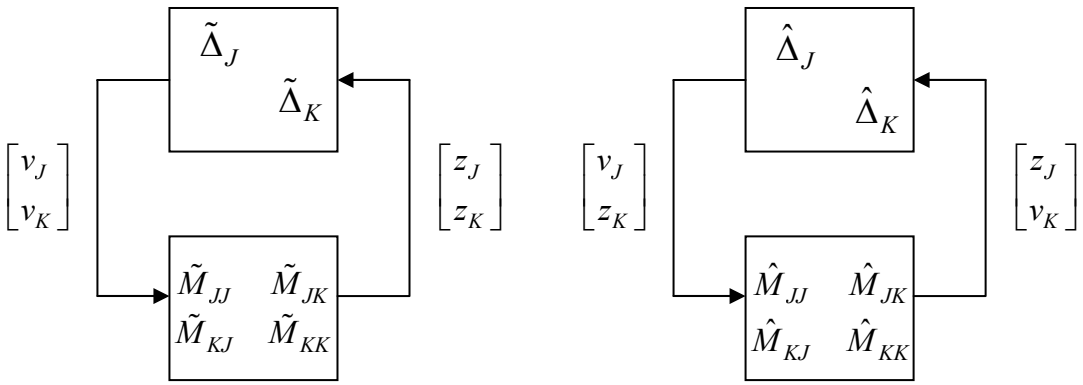


Fig.5.17 – Cas d'équivalence entre les deux structures

On voit que les contraintes :

$$\begin{bmatrix} z_J \\ z_K \end{bmatrix} = \tilde{M} \begin{bmatrix} v_J \\ v_K \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \|v_J\| \gamma \le \|z_J\| \\ \|z_K\| \gamma \le \|v_K\| \end{cases} \tag{5.121}$$

et les contraintes

$$\begin{bmatrix} z_J \\ v_K \end{bmatrix} = \hat{M} \begin{bmatrix} v_J \\ z_K \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \|v_J\| \gamma \le \|z_J\| \\ \|z_K\| \gamma \le \|v_K\| \end{cases} \tag{5.122}$$

sont équivalentes, donc :

$$\begin{aligned} \mu_g\left(\tilde{M}\right) &= \max_{\|v\|} \left\{ \gamma \begin{vmatrix} \|v_J\| \gamma \le \|z_J\| \\ \|z_K\| \gamma \le \|v_K\| \end{vmatrix} \text{ pour } \begin{bmatrix} z_J \\ z_K \end{bmatrix} = \tilde{M} \begin{bmatrix} v_J \\ v_K \end{bmatrix} \right\} \\ &= \max_{\|v\|} \left\{ \gamma \begin{vmatrix} \|v_J\| \gamma \le \|z_J\| \\ \|z_K\| \gamma \le \|v_K\| \end{vmatrix} \text{ pour } \begin{bmatrix} z_J \\ v_K \end{bmatrix} = \hat{M} \begin{bmatrix} v_J \\ z_K \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mu\left(\hat{M}\right) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque 5.10

Pour le problème de validation de modèle, on trouve $\hat{M}_{KK}$ est inversible dans le cas où la sortie *y* est scalaire.

5.13. Récapitulatif

A chaque fréquence nous calculons une borne supérieure et une borne inférieure de mug

$$\underline{\mu}_g\left(\widetilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) \le \mu_g\left(\widetilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) \le \overline{\mu}_g\left(\widetilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$$

D'après le théorème 5.4 il existe Δ_n avec $\|\Delta_n\| \le 1 \Big/ \underline{\mu}_g\left(\widetilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ et il existe un W_n avec $\|W_n\| \le 1 \Big/ \underline{\mu}_g\left(\widetilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ tel que $Y_n = P_w W_n + \mathcal{F}_u\left(P\left(e^{j\omega_n}\right), \Delta_n\right) U_n$

De même on peut dire selon la formule (5.75) que quelque soit Δ_n et quelque soit W_n tel que $Y_n = P_w W_n + \mathcal{F}_u\left(P\left(e^{j\omega_n}\right), \Delta_n\right) U_n$ nous avons $\|\Delta_n\| \ge 1 \Big/ \overline{\mu}\left(\widetilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ et/ou $\|W_n\| \ge 1 \Big/ \overline{\mu}\left(\widetilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$

Un raisonnement analogue à celui de la démonstration du théorème 5.2 pour revenir aux signaux donne :

Il existe un Δ avec $\|\Delta\|_\infty \le 1 \Big/ \min_\omega \underline{\mu}_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ et il existe un w avec $\|w\|_2 \le 1 \Big/ \min_\omega \underline{\mu}_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ tel que $y = \mathcal{F}_u(P,\Delta)u + P_w w$. De plus, si $\min_\omega \underline{\mu}_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) \ge 1$ alors le modèle n'est pas invalidé par le jeu de données expérimentales

Quelque soit Δ et quelque soit w tel que $y = \mathcal{F}_u(P,\Delta)u + P_w w$ alors $\|\Delta\|_\infty \ge 1 \Big/ \max_\omega \overline{\mu}_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ ou $\|w\|_2 \le 1 \Big/ \max_\omega \overline{\mu}_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$. De plus, si $\max_\omega \overline{\mu}_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) < 1$ alors le modèle est invalidé par le jeu de données expérimentales

Prenons la figure 5.18 ci-dessous qui illustre l'exemple du tracé des courbes d'évolution de la valeur singulière structurées généralisées, de sa borne supérieure et inférieure

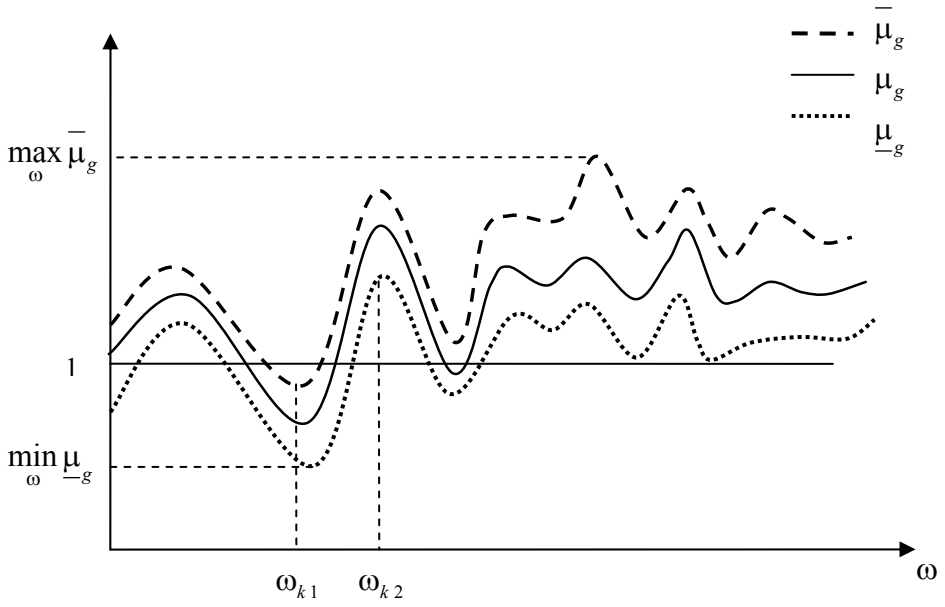


Fig. 5.18 – Tracé de μ_g et de ces bornes

A la pulsation ω_{k1} nous avons $\overline{\mu}_g\left(\widetilde{P}\left(e^{j\omega_{k1}}\right)\right) < 1$ donc quelque soit Δ_{k1} et quelque soit W_{k1} qui vérifient les équations de bouclage nous avons $\|\Delta_{k1}\| \ge 1$ ou $\|W_{k1}\| \ge 1$. Le modèle ne peut pas expliquer les données à la fréquence ω_{k1}.

A la pulsation ω_{k2} nous avons $\underline{\mu}_g\left(\widetilde{P}\left(e^{j\omega_{k2}}\right)\right) > 1$ donc il existe Δ_{k2} avec $\|\Delta_{k2}\| \le 1$ et il existe W_{k2} avec $\|W_k\| \le 1$ tout en ayant les équations de bouclages vérifiées. Le modèle peut expliquer les données à la fréquence ω_{k2}.

La borne inférieure servira alors pour non invalider globalement un modèle et la borne supérieure pour l'invalider. Dans certaine condition, l'algorithme de calcul de la borne inférieure ne converge pas et donc on ne dispose que de la borne supérieure. Dans ce cas, on ne peut conclure que sur l'invalidité du modèle. En effet, le fait d'avoir $\min_{\omega} \underline{\mu}_g \geq 1$ ne nous permet pas de dire que le modèle est non invalidé puisqu'il se peut que le minimum sur la bande de fréquence considérée de la valeur exacte de μ_g soit inférieure à 1.

5.14. Extension à la structure générale du modèle générique

La démarche de validation de modèle par les valeurs singulières structurées généralisées peut être facilement adaptée au cas général de la structure générique de validation de modèle donnée par le schéma de la figure 5.19 suivante : où d de dimension appropriée, représente les effets des perturbations exogènes agissant sur le système.

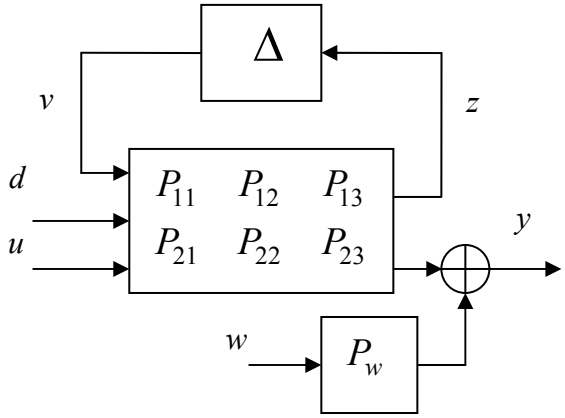


Fig. 5.19 – Structure générique générale de validation de modèle.

Les équations de bouclage liées à cette structure sont données par :

$$\begin{aligned} v &= \Delta z \\ z &= P_{11}v + P_{12}d + P_{13}u \\ y &= P_{21}v + P_{22}d + P_{23}u + P_w w \end{aligned} \tag{5.123}$$

Le problème générique pour la structure générale s'énonce comme suivant :

L'énoncé du problème :

Soit un ensemble de modèles $\mathcal{F}_{\mathrm{u}}(P,\Delta)$ comme indiqué dans la figure 5.19. On suppose que $\sup_{\omega} \mu\left(P_{11}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) < 1$, et soit $(y[k],u[k])\ k = 0,..,N-1$ un jeu de données expérimentales, existent-ils un Δ : $\Delta \in \mathbf{B}\underline{\mathbf{\Delta}}$, un w : $w \in \mathbf{BL_2}$ et un d : $d \in \mathbf{BL}_2$ tel que $y = \mathcal{F}_{\mathrm{u}}(P,\Delta)\begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix} + P_w w$

Donc si aucun triplet (Δ, d, w) satisfaisant les conditions du problème n'existe, alors le modèle est dit invalidé par le jeu de données expérimentales, en particulier, le modèle sera invalidé si pour tout triplet (Δ, d, w) vérifiant les équations de bouclage (5.123) alors : $\|\Delta\|_\infty > 1$ ou $\|d\|_2 > 1$ ou $\|w\|_2 > 1$.

On traite ce problème de la même manière que la proposition 5.2, c'est-à-dire, on définit fréquence par fréquence un problème d'optimisation de matrice constante en rajoutant à la structure $\tilde{P} - \tilde{\Delta}$ de la figure 5.13 le bloc d'incertitude fictive complexe plein $\Delta_d \in \mathbf{C}^{\dim(d)\times 1}$ tel que :

$$D_n = \Delta_d . 1 \tag{5.124}$$

Donc le système bouclé équivalent à une fréquence n au système représenté sur la figure 5.19 est illustré dans le schéma de la figure 5.20.

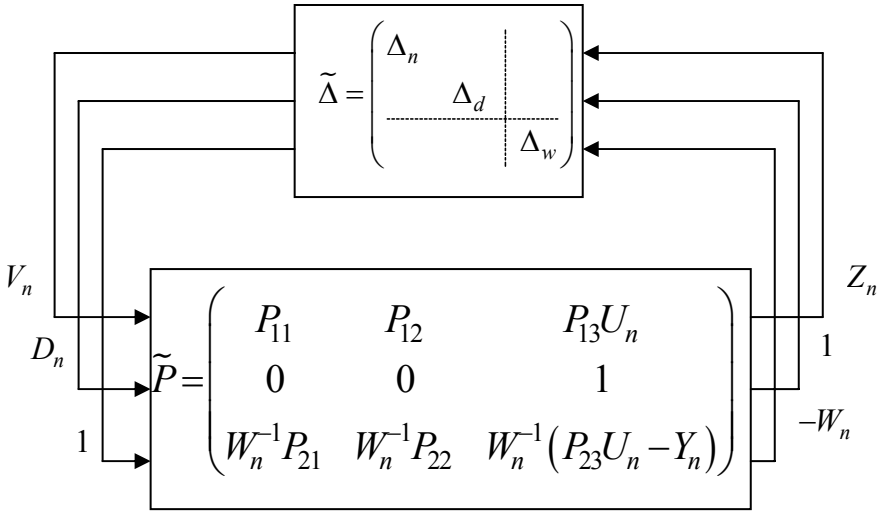


Fig.5.20 – Structure $\tilde{P} - \tilde{\Delta}$

Les équations de bouclage sont données par :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_n & D_n & 1 \end{pmatrix}^T &= \tilde{\Delta}.\begin{pmatrix} Z_n & 1 & -W_n \end{pmatrix}^T \\ \begin{pmatrix} Z_n & 1 & -W_n \end{pmatrix}^T &= \tilde{P}.\begin{pmatrix} V_n & D_n & 1 \end{pmatrix}^T \end{aligned} \tag{5.125}$$

Compte tenu de la définition (5.124), et en appliquant le lemme 5.3 nous avons l'équivalence suivante :

$$\|D_n\| \le \beta \Leftrightarrow \exists \Delta_d \,,\ \|\Delta_d\| \le \beta \text{ tel que } D_n = \Delta_d . 1 \tag{5.126}$$

Donc la nouvelle formulation de problème d'optimisation de matrice constante qui prend en compte l'élément d dans le système générique de validation de modèle :

Problème 5.7 :

Quelle est la plus petite β_n *telle qu'il existe un* $\Delta_n, \|\Delta_n\| \le \beta_n$, *un* $\Delta_d, \|\Delta_d\| \le \beta_n$ *et un* $\Delta_w, \|\Delta_w\| \ge 1/\beta_n$ *vérifiant les équations bouclées (5.125)*

Ce problème peut être résolu à l'aide de la valeur singulière structure généralisée en mettant les grandeurs en accord avec les notations de la définitions de μ_g de la façon suivante :

$$\tilde{\Delta}_j = \left\{\text{diag}\left(\Delta_n, \Delta_d\right)\right\};\ \tilde{\Delta}_k = \left\{\Delta_w\right\};\ z_J = \begin{bmatrix} Z_n \\ 1 \end{bmatrix};\ z_K = -W_n\ ;\ v_K = 1\ ;\ v_J = \begin{bmatrix} V_n \\ D_n \end{bmatrix}$$

et donc la solution sera donnée par le théorème suivant :

Théorème 5.10 :

$$\mu_{g\tilde{\Delta}}\left(\tilde{P}\right) \ge 1/\beta_n \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists \|\Delta_n\| \le \beta_n, \exists \|D_n\| \le \beta_n \text{ et } \exists \|W_n\| \le \beta_n \\ \text{tel que } Y_n = P_w W_n + \mathcal{F}_u\left(P, \Delta_n\right) \begin{bmatrix} D_n \\ U_n \end{bmatrix} \end{array} \right) \tag{5.127}$$

$$\mu_{g\tilde{\Delta}}\left(\tilde{P}\right) < 1/\beta_n \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall \left(\Delta_n, D_n, W_n\right) \text{ tel que } Y_n = P_w W_n + \mathcal{F}_u\left(P, \Delta_n\right) \begin{bmatrix} D_n \\ U_n \end{bmatrix} \\ \text{alors } \|\Delta_n\| > \beta_n \text{ ou } \|D_n\| > \beta_n \text{ ou } \|W_n\| > \beta_n \end{array} \right) \tag{5.128}$$

Donc le modèle est non invalide si et seulement si :

$$\min_{\omega} \mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) \ge 1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists \|\Delta\|_\infty \le 1 \text{ et } \exists \|d\|_2 \le 1 \text{ et } \exists \|w\|_2 \le 1 \\ \text{tel que } y = P_w w + \mathcal{F}_u\left(P, \Delta\right) \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix} \end{array} \right) \tag{5.129}$$

et il est invalide si et seulement si :

$$\max_{\omega} \mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) < 1 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall \left(\Delta, d, w\right) \text{ tel que } y = P_w w_n + \mathcal{F}_u\left(P, \Delta\right) \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix} \\ \text{alors } \|\Delta\|_\infty > 1 \text{ ou } \|d\|_2 > 1 \text{ ou } \|w\|_2 > 1 \end{array} \right) \tag{5.130}$$

5.15. Conclusion

Nous avons mené une étude comparative entre les deux problématiques de l'approche fréquentielle du problème de validation de modèle. L'introduction du formalisme de la

valeur singulière structurée généralisée permet de résoudre le problème d'invalidation de modèle pour une classe plus générale d'ensembles de modèles et de prendre en considération la nature structurée des incertitudes. La définition de la valeur singulière structurée généralisée ne permettant pas d'évaluer sa valeur, nous avons présenté une méthode d'évaluation de celle-ci par encadrement. Nous avons alors vu qu'une borne inférieure pouvait être calculée à l'aide d'un algorithme de la famille des "Power algorithm". Malheureusement la convergence de celui-ci n'est assurée que sous certaines conditions. Cependant, une borne supérieure est calculable via un problème d'optimisation convexe posé en termes de LMIs.

Dans le chapitre qui va suivre, nous allons tester ces méthodes sur un exemple académique et sur un procédé réel de 3 cuves.

Chapitre 6

Applications

6.1. Introduction 115
6.2. Exemple illustratif 115
6.3. Application au système de trois cuves *[MoD04]* 121
6.4. Conclusion 144

6.1. Introduction

Ce chapitre illustre l'application de l'approche fréquentielle de validation de modèle. Dans un premier temps nous testons les méthodologies étudiées sur un exemple académique monovariable en simulation. Ensuite, le système de benchmark de "Three-Tank-System", disponible au service automatique de Supélec est utilisé comme exemple expérimental. Le système sera décrit en détail, un modèle théorique est représenté et utilisé comme un modèle nominal non linéaire. Afin d'appliquer les procédures de validation de modèle étudiées dans le chapitre précédent, un point de fonctionnement est choisi et un modèle linéaire est dérivé autour de ce point de fonctionnement. Des techniques adéquates ont été utilisées pour quantifier l'incertitude. Un ensemble de modèles LFT du système, incluant une description d'incertitude est présenté.

6.2. Exemple illustratif

Prenons comme exemple de simulation, un système réel de fonction de transfert :

$$P_{reel}(s) = \frac{5}{\left(1+1/(2\pi 10)s\right)\left(1+1/(2\pi 50)s\right)} \tag{6.1}$$

Ce système est excité par une SBPA d'amplitude 5 et de longueur $N = 1023$. Les mesures sont enregistrées tous les 1 millisecondes et la durée d'essai est de $10230ms$. Nous utilisons les 1023 derniers échantillons qui seront transformés en DFT par un algorithme de FFT afin de les utiliser dans la procédure de validation de modèle.

Supposons qu'une identification ait fourni un modèle nominal de fonction de transfert :

$$P_{nom}(s) = \frac{2}{1+(1/2\pi 8)s} = \frac{k_0}{1+t_0 s} \tag{6.2}$$

L'explication des données expérimentales observées peut être menée en introduisant un bruit en sortie et une incertitude non structurée sous forme multiplicative qui traduit la dynamique négligée du système. On illustre le modèle incertain résultant par le schéma de la figure 6.1.

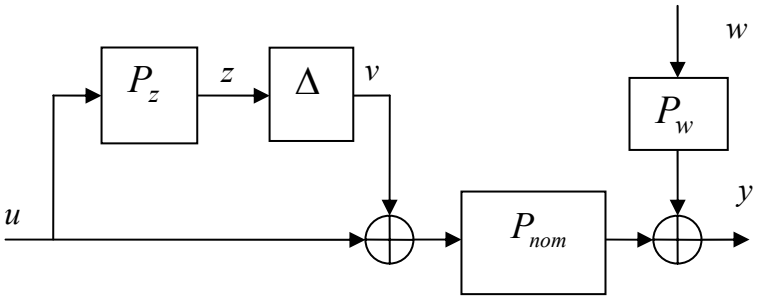


Fig. 6.1 – Modélisation du système

L'équation du modèle est donnée par :

$$y = \left(P_{nom} + P_{nom}\Delta P_z\right)u + P_w w \tag{6.3}$$

On modélise le système sous la forme générique du problème de validation de modèle :

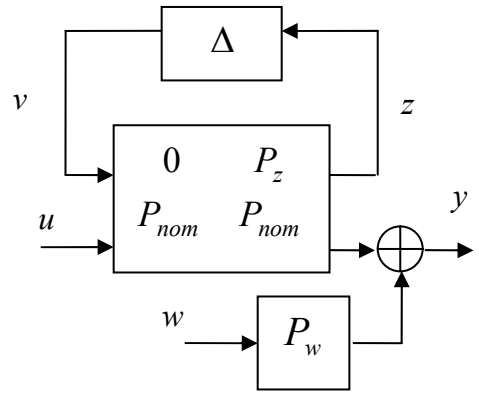


Fig. 6.2 – Modèle du système sous la forme générique

On suppose que la composante fréquentielle du bruit à la fréquence $\nu = \frac{nf_e}{N}$ est très faible par rapport à la composante fréquentielle de la sortie nominale, la fonction de pondération choisie est donc :

$$P_w(n) = 10^{-5}\left|Y(n)\right|. \tag{6.4}$$

Le choix de la pondération P_z reflète l'erreur relative tolérée sur la réponse fréquentielle du système. En effet, si l'erreur relative tolérée sur P_{nom} est de $\sqrt{2}$, alors il convient donc de choisir la pondération $P_z = \sqrt{2}$ puisque :

$$\left|\frac{P_{sys} - P_{nom}}{P_{nom}}\right| = \left|\Delta P_z\right| = \left|\Delta\right|\left|P_z\right| \le \sqrt{2} \tag{6.5}$$

Le modèle incertain de la figure 6.2 va être discrétisé à travers un bloqueur d'ordre zéro avec une période d'échantillonnage égale à $T_e = 1ms$.

L'objectif de validation (PDVM) est alors de bien voir si les données observées peuvent être expliquées par le modèle nominal entaché d'une incertitude non structurée relative. Pour répondre à la question, on formule le problème en une matrice constante et on résout le problème d'optimisation (POVM) associé à chaque fréquence, celui de chercher la plus petite taille d'incertitude et la plus petite taille de bruit nécessaires pour expliquer les données entrées-sorties observées. Cela se traduit par les équations suivantes :

$$\beta_n^{opt} = \min_{V_n, W_n, \beta_n} \beta_n \text{ sous } \begin{cases} R_n = P_{nom} V_n + P_w W_n \\ V_n^* V_n \le \beta_n^2 \left(P_z U_n\right)^* \left(P_z U_n\right) \\ W_n^* W_n \le \beta_n^2 \end{cases} \quad (6.6)$$

avec : $R_n = Y_n - P_{nom}\left(e^{j\omega_n}\right)U_n$

Comme nous l'avons développé dans le chapitre précédent, le calcul de ce problème d'optimisation peut se faire soit:

1. Via le formalisme LMI en appliquant les transformations décrites dans §5.8. Dans ce cas on calcule la solution de :

$$\min_X C^T X \text{ sous } \operatorname{diag}\left(A(X), B(X)\right) \ge 0 \quad (6.7)$$

Avec : $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$; $X = \begin{bmatrix} \rho_n & V_n \end{bmatrix}^T$; $A = \begin{pmatrix} I & V_n \\ V_n^* & \rho_n U_n^* P_z^* P_z U_n \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} I & P_w^{-1} R_n - P_w^{-1} P_{nom} V_n \\ \left(P_w^{-1} R_n - P_w^{-1} P_{nom} V_n\right)^* & \rho_n \end{pmatrix}$$

Et β_n^{opt} sera donnée en prenant la racine carrée de la solution trouvée ρ_n^{opt} c'est-à-dire :

$$\beta_n^{opt} = \left(\rho_n^{opt}\right)^{1/2} \quad (6.8)$$

2. En calculant la valeur singulière structurée généralisée de la matrice constante $\tilde{P}\left(j\omega_n\right)$ donnée par :

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & P_z U_n \\ P_w^{-1} P_{nom} & P_w^{-1}\left(P_{nom} U_n - Y_n\right) \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Et la solution est donnée selon le théorème 5.5 par :

$$\beta_n^{opt} = 1 \Big/ \mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) \quad (6.10)$$

Les résultats de calcul pour chaque fréquence de β_n^{opt} ont donné la même valeur par chacune des méthodes. On trace dans la figure 6.3 la courbe de la valeur singulière structurée généralisée.

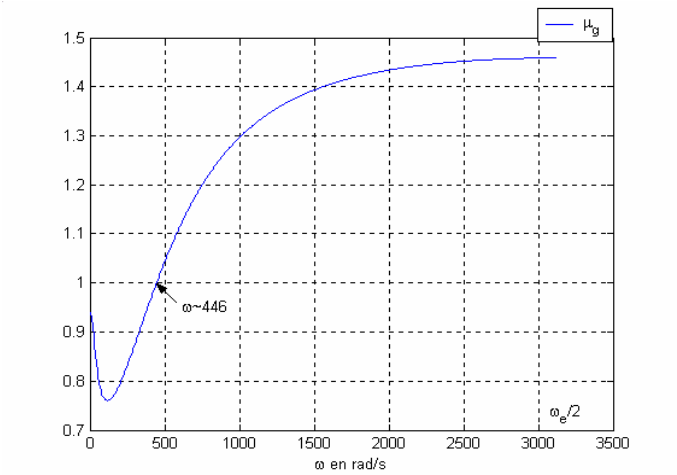


Fig. 6.3 Tracé de $\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$

A partir du tracé, on peut constater que $\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ est inférieure à 1 dans la bande de fréquence $\omega \in [0,446\, rad/s]$. Dans cette bande, les données ne peuvent pas être expliquées à partir du modèle entaché d'une incertitude relative égale à $\sqrt{2}$. Cette bande de fréquence correspond bien à celle où $\left|\frac{P_{sys}-P_{nom}}{P_{nom}}\right| \geq \sqrt{2}$ comme l'atteste le tracé de $\left|\frac{P_{sys}-P_{nom}}{P_{nom}}\right|_{dB}$ à la figure 6.4.

Remarque 6.1 :

On note que la figure 6.3 représente les deux courbes de la borne supérieure et de la borne inférieure de $\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ qui sont bien confondues, ce qui confirme la remarque 5.8 qui dit que pour un bloc d'incertitude de dimension inférieure ou égale à 3, la borne supérieure coïncide avec la valeur réelle de μ_g.

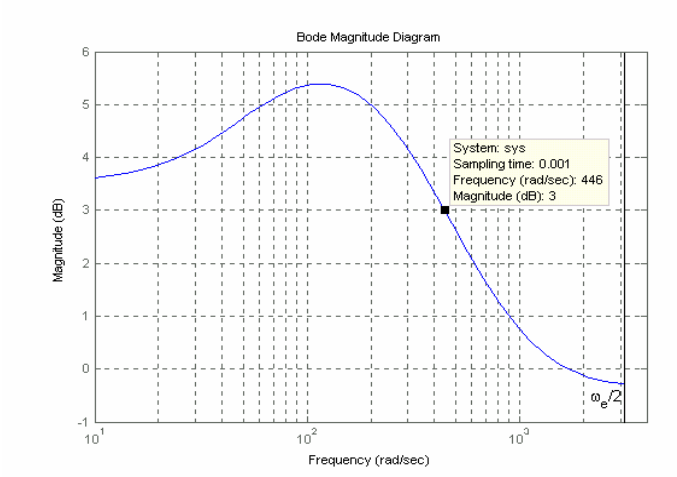


Fig. 6.4 – Tracé de Bode de l'erreur relative

Prenons maintenant une erreur relative ‘‘réaliste’’ sur P_{nom} de 0.5, donc $P_z = 0.5$. Comme $\left|\frac{P_{sys} - P_{nom}}{P_{nom}}\right|_{dB}$ est toujours supérieur à -6dB, il faut s'attendre à ce que la valeur de $\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ pour le modèle modifié soit toujours inférieure à 1. Ceci est confirmé dans la courbe de μ_g donnée dans la figure 6.5. où $\max_{\omega_n} \mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) < 1$. Donc on ne peut pas valider le modèle avec une incertitude tolérée de 50% seulement.

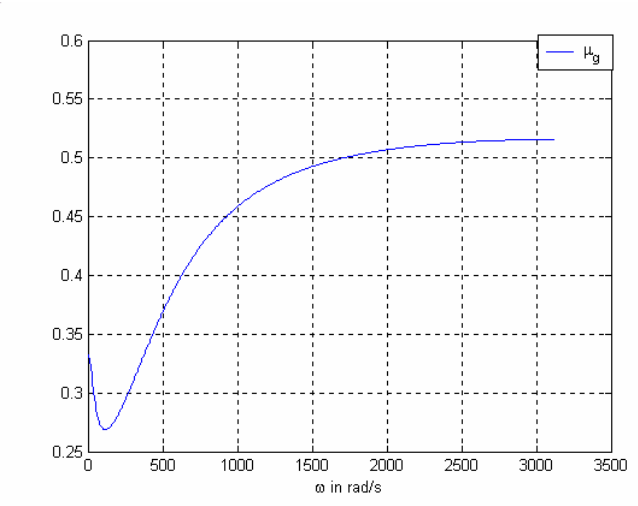


Fig. 6.5 - Tracé de $\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$

Si pour ce système toujours avec la pondération $P_z = 0.5$, on prend en compte des incertitudes sur les paramètres constituant la fonction de transfert c'est-à-dire :

$$P_{nom} = \frac{K}{1+Ts} = \frac{k_0 + \delta_k k_1}{1 + (t_0 + \delta_t t_1)s} \tag{6.11}$$

avec $k_1 = 3$ et $t_1 = 0.004$.

L'extraction des incertitudes paramétriques conduit à la forme générique illustrée dans la figure 6.6. On remarque à partir de la forme du système augmenté P que la composante P_{11} n'est pas nulle, le calcul de β_n^{opt} solution de l'équation d'optimisation (6.6) pour l'ensemble de modèles LFT de la figure 6.6, n'est envisageable qu'avec l'aide de la valeur singulière structurée généralisée. Celle-ci est obtenue par encadrement avec une borne supérieure et une borne inférieure. Après calcul nous trouvons leurs tracés donnés par la figure 6.7 :

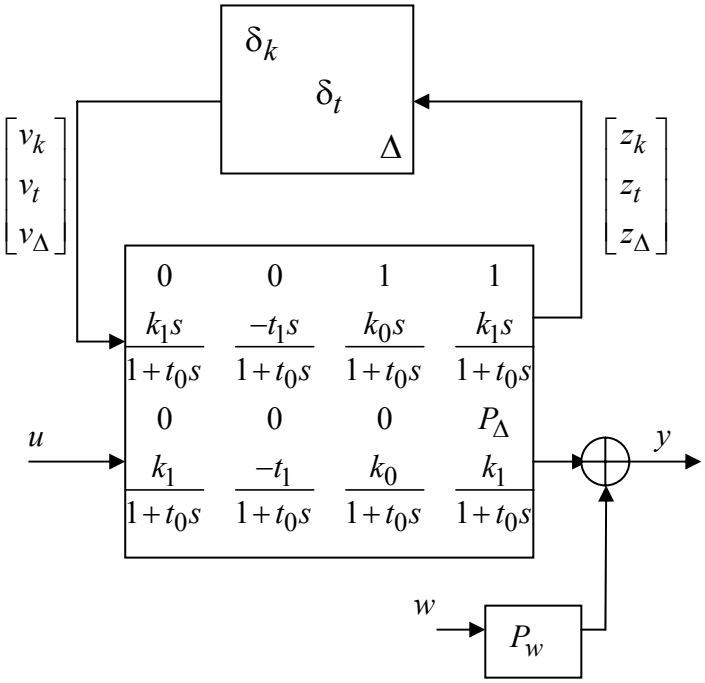


Fig. 6.6 – LFT de la validation du modèle avec des incertitudes paramétriques réelles.

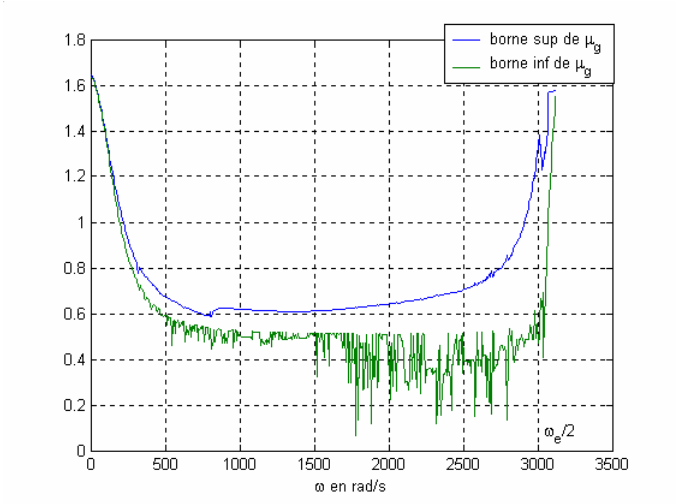


Fig. 6.7 – Borne supérieure et inférieure de μ_g

On sait que le modèle est invalidé par le jeu de données expérimentales si et seulement si $\max_{\omega} \bar{\mu}_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) < 1$ et qu'il n'est pas invalidé si et seulement si $\min_{\omega}\left(\underline{\mu}\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)\right) > 1$ et comme ce n'est pas le cas d'après la courbe de la figure 6.7 puisque $\min_{\omega}\left(\underline{\mu}\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)\right) = 0.0657$ et $\max_{\omega}\left(\bar{\mu}\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)\right) = 1.6476$ alors nous ne pouvons pas conclure sur l'ensemble des fréquences $[0, \omega_e/2]$. Cependant dans la bande de fréquence [0, 200rad/s] nous avons $\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) > 1$, les données sont cohérentes avec le modèle incertain adopté pour le système dans la bande de fréquence considérée.

On a pour toute fréquence : $0.0657 < \mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right) < 1.6476$, donc $\exists\|\Delta\|_\infty \le 15.22$; $\exists\|\delta_k\|_\infty \le 15.22$; $\exists\|\delta_t\|_\infty \le 15.22$ et $\exists\|w\|_2 \le 15.22$ tel que $y = F_u(P,\Delta)U + P_w w$ et aussi $\forall\Delta$, $\forall\delta_k$, $\forall\delta_t$ et $\forall w$ tel que $y = F_u(P,\Delta)U + P_w w$ nous avons $\|\Delta\|_\infty > 0.6$; ou $\|\delta_k\|_\infty > 0.6$ ou $\|\delta_t\|_\infty > 0.6$ ou $\|w\|_2 > 0.6$.

Donc l'algorithme de μ_g nous donne un domaine dans lequel se trouvent les incertitudes. On note que l'ajustement de la pondération permet de déterminer une plage d'incertitude telle que données et modèle incertain soient cohérents

6.3. Application au système de trois cuves *[MoD04]*

Le système multivariable non linéaire choisi comme support de notre étude est représenté par le schéma 6.8. Il est issu d'un benchmark conçu par Amira GmbH [Ami96], et schématise un procédé hydraulique 3TANKS constitué de trois réservoirs cylindriques couplés identiques alimentés par deux pompes actionnées indépendamment.

Ce système non linéaire de deux entrées–trois sorties se veut pédagogique, il offre de multiples usages dans des projets de recherche tels que la commande non linéaire, le découplage, le diagnostic des défauts... Celle qui nous intéresse ici a pour objectif l'identification du système. Cette identification nous permet de tester les diverses méthodologies de validation de modèle étudiées dans cette thèse.

6.3.1. Description du procédé

L'équipement physique sur lequel nous allons manipuler pour cette application se compose d'un système hydraulique à trois réservoirs, d'une interface numérique analogique et d'un ordinateur; ce dernier étant utilisé comme unité d'entrée et de sortie. Nous allons détailler chacune de ces entités.

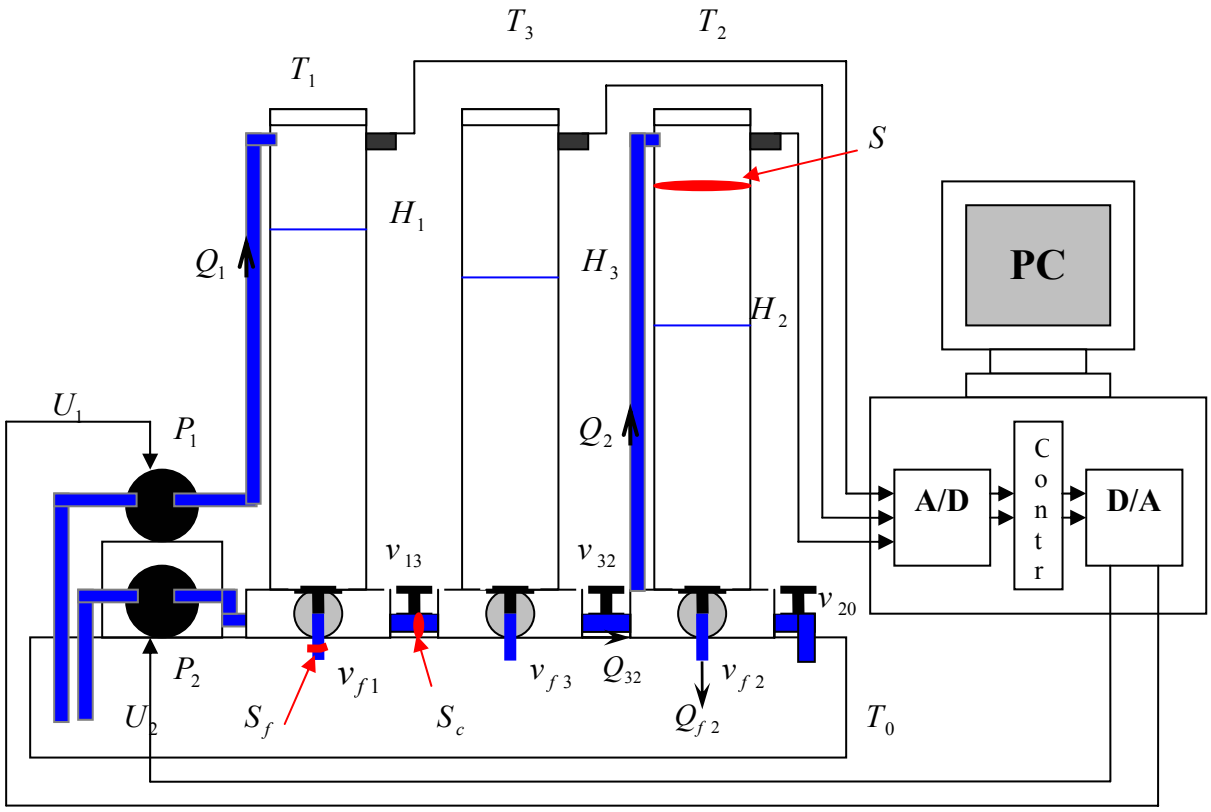


Fig. 6.8 - Schéma du processus de trois réservoirs d'Amira

Légende

T_0 Réservoir tampon

T_i Réservoir i

P_i Pompe d'alimentation du réservoir i [0...100] [ml/s]

H_i Hauteur d'eau dans le réservoir i [cm]

v_{fi} Vannes de fuite du réservoir i vers le réservoir tampon

v_{ij} Vannes de communication entre le réservoir i et le réservoir j

Q_i Débit de la pompe i

Q_{fi} Débit de fuite dans la vannes v_{fi}

Q_{ij} Débit circulant dans la vannes v_{ij}

S Section du Réservoir cylindrique [cm^2]

S_c Section de vannes de communication [cm^2]

S_f Section de vannes de fuite [cm^2]

U_i Tension appliquée sur la pompe P_i

6.3.1.1. *Le système hydraulique*

Le dispositif, représenté sur la Figure 6.8, se compose de trois réservoirs cylindriques verticaux identiques de plexiglas de section S numérotés de gauche à droite par réservoir 1 noté T_1, réservoir 3 noté T_3 et réservoir 2 noté T_2, et d'un réservoir tampon noté T_0, qui constitue le socle de l'appareil.

Deux pompes indépendantes P_1 et P_2, chacune entraînée par un moteur à courant continu, sont utilisées dans cet appareil. Ces deux pompes sont conçues pour donner un écoulement bien défini par rotation. Le liquide (eau distillée) rassemblé dans le réservoir tampon par les flux de sortie est injecté par ces deux pompes avec un débit Q_1 dans le réservoir T_1, et avec un débit Q_2 dans le réservoir T_2. Les deux pompes sont contrôlées par deux actionneurs dont la tension d'entrée contrôle le débit d'eau dans les cuves. En effet, le débit fourni par chaque pompe est proportionnel à la tension appliquée sur son moteur à courant continu (-10Volts correspond à 0% de débit et +10Volts correspond à 100% de débit, noté $Q_{1\max}$ pour la pompe 1 et $Q_{2\max}$ pour la pompes 2).

Les trois réservoirs sont reliés entre eux par des tuyaux de communication de sections identiques S_c. En plus, ces tuyaux de communication entre les réservoirs sont équipés par un système de vannes à billes v_{13} et v_{32} manuellement réglables qui autorise le remplissage du troisième réservoir T_3. L'écoulement de l'eau en dehors des réservoirs cylindriques sera assuré par la sortie nominale contrôlée par la vanne v_{20} située à l'extrémité du réservoir T_2.

On trouve aussi les vannes v_{f1}, v_{f2} et v_{f3} pour simuler des fuites dans les réservoirs correspondants. Ces vannes de fuites peuvent être utilisées pour introduire des perturbations ou produire des défauts. L'ensemble des six vannes peut être utilisé pour changer la configuration du processus ce qui nous permet donc de travailler avec un dispositif formé d'un, deux, ou trois réservoirs. Dans le cadre de notre application, on ne travaillera dans un premier temps qu'avec le premier réservoir, puis les trois réservoirs cylindriques seront utilisés, ce qui implique l'ouverture complète des vannes v_{13} et v_{32}.

Chacun des réservoirs cylindriques est équipé, en son sommet, d'un capteur de pression différentielle à résistance piézo-électrique, qui donne comme sortie une tension proportionnelle au niveau du liquide dans le réservoir (+10Volts pour un niveau d'eau de 0 cm et -10 Volts pour un niveau d'eau de 60 cm). Les informations transmises vers l'ordinateur seront converties en hauteur d'eau (cm) dans les réservoirs T_1, T_2 et T_3, respectivement notés H_1, H_2 et H_3

6.3.1.2. *Le coffret d'interface*

Les échanges d'informations entre l'ordinateur et le système hydraulique s'effectuent par l'intermédiaire d'un coffret d'interface. Cette boîte noire remplit les trois missions importantes suivantes : -alimentation électrique;-commande des pompes; -mise en forme des signaux issus des capteurs.

6.3.1.3. *La station serveur :*

La carte d'acquisition permet d'accéder aux entrées et sorties analogiques du système afin de le commander de manière numérique.

Remarque 6.3:

Il faut bien noter que le système est muni d'une sécurité contre tout débordement possible. Cette sécurité consiste à arrêter les pompes dès qu'une mesure de hauteur dépasse 60cm. Ce dispositif évitera alors de noyer les capteurs de pression et donc de les détruire.

6.3.2. Modélisation

Les trois réservoirs sont des cylindres de révolution, de section S =153.936 cm². Selon la loi fondamentale de conservation de la matière, la variation de volume d'eau emmagasiné par unité de temps par un réservoir est donnée par la différence entre le débit de la pompe et le débit sortant, soit :

$$Débit = Section \times \frac{d}{dt}(hauteur)$$

En explicitant le fonctionnement de chaque réservoir, on obtient alors un modèle analytique du système représenté par trois équations non linéaires couplées différentielles de premier ordre selon les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} S\frac{dH_1}{dt} &= Q_1(t) - Q_{13}(t) - Q_{f1}(t) \\ S\frac{dH_2}{dt} &= Q_2(t) + Q_{32}(t) - Q_{20}(t) - Q_{f2}(t) \\ S\frac{dH_3}{dt} &= Q_{13}(t) - Q_{32}(t) - Q_{f3}(t) \end{aligned} \tag{6.12}$$

Où : les hauteurs H_1, H_2 et H_3 présentent les variables d'état du système. Q_{fi}, $i = \{1,2,3\}$ désignent les écoulements supplémentaires dans les réservoirs provoqués par des fuites.

Le procédé peut être décrit par le schéma bloc de la figure 6.9 suivante :

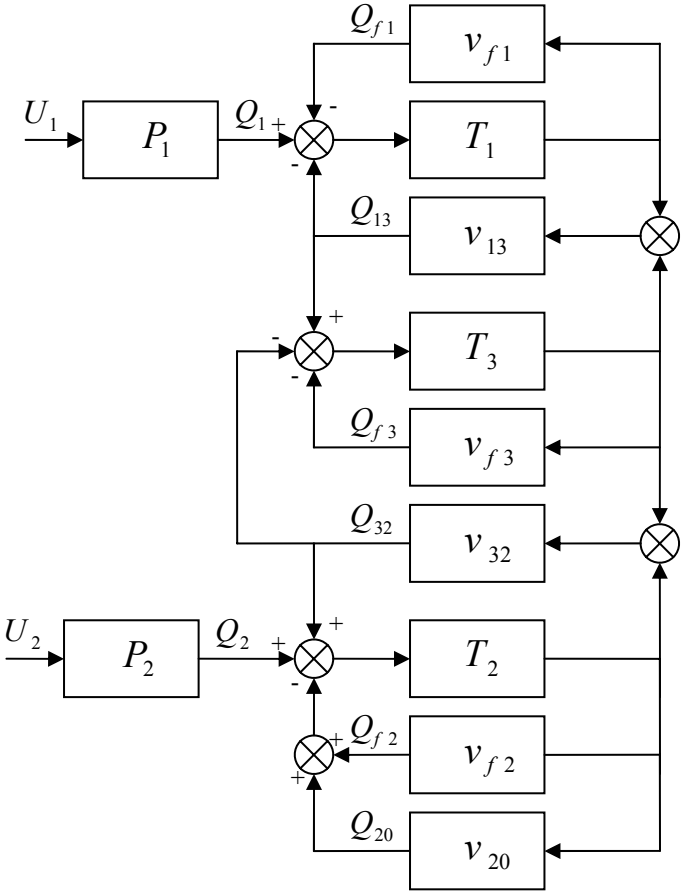


Fig.6.9 – Schéma bloc du procédé

Les grandeurs Q_{13}, Q_{32}, Q_{20}, Q_{f1}, Q_{f2} et Q_{f3} peuvent être déterminées en utilisant la règle de Torricelli généralisée et sont données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
Q_{13}(t) &= \lambda_{13} \times S_c \times sgn\left(H_1(t) - H_3(t)\right) \times \sqrt{abs\left(2 \times g \times \left(H_1(t) - H_3(t)\right)\right)} \\
Q_{32}(t) &= \lambda_{32} \times S_c \times sgn\left(H_3(t) - H_2(t)\right) \times \sqrt{abs\left(2 \times g \times \left(H_3(t) - H_2(t)\right)\right)} \\
Q_{20}(t) &= \lambda_{20} \times S_c \times \sqrt{2 \times g \times H_2(t)} \\
Q_{f1}(t) &= \lambda_1 \times S_f \times \sqrt{2 \times g \times H_1(t)} \\
Q_{f2}(t) &= \lambda_2 \times S_f \times \sqrt{2 \times g \times H_2(t)} \\
Q_{f3}(t) &= \lambda_3 \times S_f \times \sqrt{2 \times g \times H_3(t)}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Où :

- λ_{13}, λ_{32} et λ_{20} représentent les coefficients d'écoulement dans les vannes de communication v_{13}, v_{32} .et v_{20} respectivement.
- λ_1, λ_2 et λ_3 représentent les coefficients de flux sortant dans les vannes de fuite v_{f1}, v_{f2} .et v_{f3} respectivement. La valeur de chaque coefficient dépend de la

géométrie de la vanne, de la densité du fluide et du pourcentage d'ouverture de vannes.

- g est la constante de gravitation, et t représente la variable du temps.

Ici, On procède à la détermination du modèle du système par l'identification expérimentale décrite dans la section suivante.

6.3.3. Identification par l'expérience :

6.3.3.1. *Les capteurs de niveau*

Les capteurs de niveau mesurent la différence de pression entre le bas de la colonne d'eau dans la cuve et la pression atmosphérique. Leur valeurs de sortie varient entre +10Volt et -10Volt. L'étalonnage des capteurs a donné les résultats suivants : l'évolution est linéaire et on obtient ainsi la relation entre la tension exprimée en Volt délivrée par chaque capteur et la hauteur exprimée en centimètre :

$$\begin{aligned} V_1 &= 10 - 0.2773 H_1 \\ V_2 &= 10 - 0.2715 H_2 \\ V_3 &= 10 - 0.2789 H_3 \end{aligned} \qquad (6.14)$$

6.3.3.2. *Les pompes :*

Afin d'identifier chacune des pompes, on a mesuré leur débit en fonction de la tension d'alimentation. En raison de frottements secs, les pompes ne commencent à tourner qu'à partir de tensions respectives de -8.5Volt pour la pompe 1 et -8Volt pour la pompe 2. Les 2 schémas de la figure 6.10 représentent les caractéristiques statiques débits de sortie, tensions de commande.

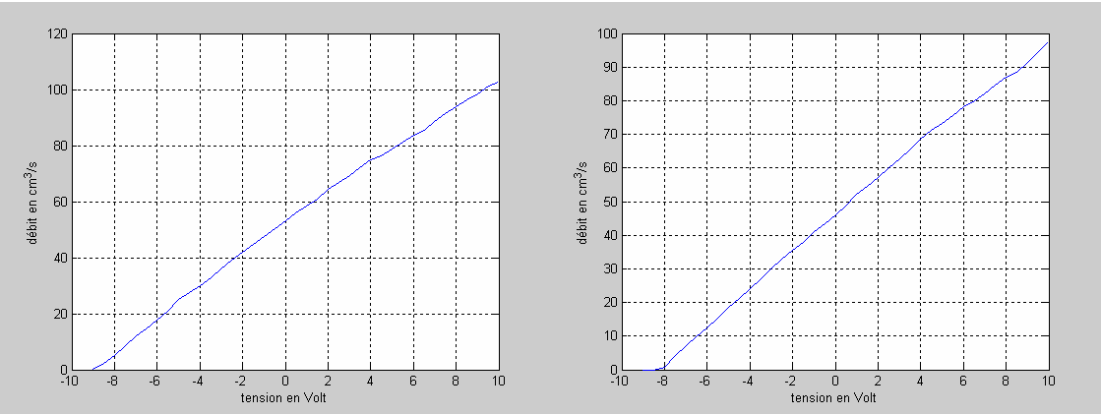


Fig. 6.10 – Débit des pompes 1 et 2 en fonction de la tension

On remarque que ces caractéristiques sont presque linéaires, et selon les différentes expériences on n'obtient pas des caractéristiques rigoureusement identiques. D'après les

résultats comparés de diverses identifications successives, on a choisi de modéliser le fonctionnement des pompes par des caractéristiques linéaires statiques.

$$\begin{aligned} Q_1 &= a_{q1}U_1 + b_{q1} \\ Q_2 &= a_{q2}U_2 + b_{q2} \end{aligned} \tag{6.15}$$

Soit :

$$a_{q1} = 5.45 cm^3/sVolt \; ; \; b_{q1} = 51.4 cm^3/s \; ; \; a_{q2} = 5.3 cm^3/sVolt \; ; \; b_{q2} = 48.4 cm^3/s$$

En réalité, du fait de l'arrivée des alimentations en eau en haut du réservoir, le débit de chaque pompe pour une tension donnée met un retard τ avant d'être efficace, et ceci est dû au temps de remplissage des tuyaux par le liquide avant qu'il soit éjecté dans le réservoir. D'autre part les moteurs des pompes ont eux même une dynamique propre qui conduit au modèle dynamique de débit suivant:

$$Q_1(s) = \frac{a_{q1}e^{-\tau s}}{1+\tau_1 s} U_1(s) \tag{6.16}$$

L'expérience montre que le retard τ est d'autant plus faible que la tension des pompes est grande. Ces éléments dynamiques peuvent être négligés devant la dynamique propre d'une cuve avec fuite dans l'établissement d'un modèle nominal.

6.3.3.3. *Les vannes de fuite*

Afin d'identifier la fonction de transfert de chacune des vannes de fuite pour une ouverture à 100%, on a procédé à la vidange de chaque cuve et mesuré la hauteur dans la cuve en fonction du temps. Après dérivation et remplacement on obtient l'évolution de la variation de hauteur, image du débit, en fonction de la hauteur dans le réservoir.

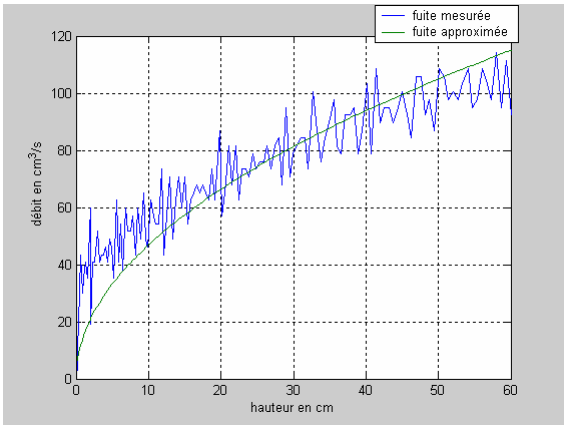


Fig. 6.11 – Fuite du réservoir 1 en fonction de la hauteur

Cette caractéristique débit de fuite/hauteur peut être modélisée par une fonction de la forme $a\sqrt{H}$. L'identification de a par la méthode des moindres carrés conduit à:

$$\begin{aligned} Q_{f\,1} &= a_{f\,1}\sqrt{H_1} \\ Q_{f\,2} &= a_{f\,2}\sqrt{H_2} \\ Q_{f\,3} &= a_{f\,3}\sqrt{H_3} \end{aligned} \tag{6.17}$$

avec :

$$a_{f\,1} = 14.4cm^{5/2}/s\,; \quad a_{f\,2} = 15cm^{5/2}/s\,; \quad a_{f\,3} = 14.2cm^{5/2}/s$$

6.3.3.4. *Les vannes de communication*

Quatre essais ont été réalisés afin d'identifier les débits de communication d'un réservoir à l'autre pour une ouverture à 100%. En effet, un essai du réservoir 1 vers le réservoir 3, suivi d'un essai du réservoir 3 vers le réservoir 1 afin de s'assurer que le comportement est symétrique, puis du réservoir 2 vers le réservoir 3 et du réservoir 3 vers le réservoir 2. Ainsi le débit obtenu en fonction de la différence de hauteur entre les réservoirs est tracé dans la figure 6.12. De la même façon qu'avec les débits de fuite nous pouvons modéliser ces débits par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Q_{13} &= a_{13}\sqrt{H_1 - H_3} \\ Q_{32} &= a_{32}\sqrt{H_3 - H_2} \\ Q_{20} &= a_{20}\sqrt{H_2} \end{aligned} \tag{6.18}$$

Avec :

$$a_{13} = 10.1cm^{5/2}/s\,; \quad a_{32} = 10.3cm^{5/2}/s\,; \quad a_{20} = 14.4cm^{5/2}/s$$

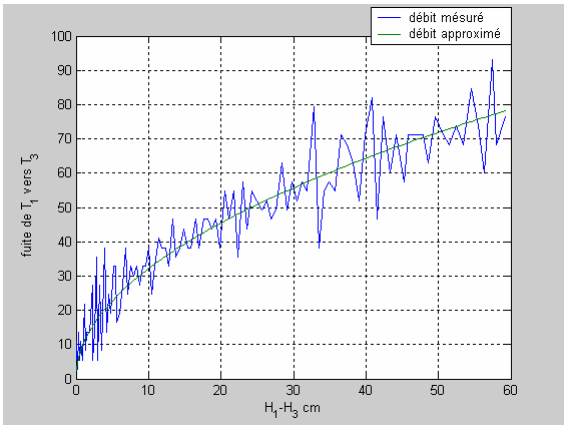


Fig. 6.12 – Débit de communication en fonction de la différence de hauteur

Remarque

Bien que la modélisation dynamique du système considéré soit relativement simple, le modèle analytique non linéaire résultant est une approximation limitée.

6.3.4. Système à un seul réservoir :

Avant de travailler avec le système entier, prenons le cas d'un seul réservoir qui présente un système monovariable. Ce réservoir sera isolé du reste du système en fermant la vanne de communication v_{13} et en utilisant la vanne de fuite v_{1f} ouverte à 100% comme illustré dans la figure 6.13 suivante.

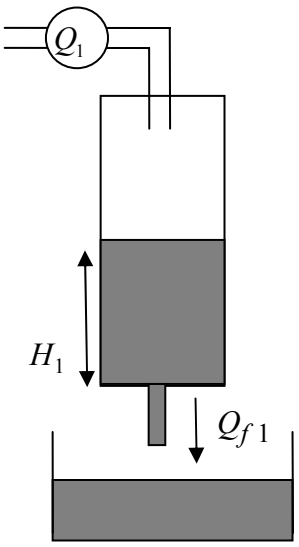


Fig.6.13 – Système à un seul réservoir

L'équation du système est donnée alors par :

$$S\frac{dH_1}{dt} = Q_1(t) - Q_{f1}(t) \tag{6.19}$$

Donc en exprimant chaque grandeur par sa valeur nominale (H_{eq}, U_{eq}) augmentée d'une petite variation autour de cette valeur nominale, on peut écrire :

$$H_1 = H_{1eq} + h_1$$
$$U_1 = U_{1eq} + u_1$$

L'équation (6.19) peut s'écrire :

$$S\frac{d(H_{1eq} + h_1)}{dt} = -a_{f1}\sqrt{H_{1eq} + h_1} + a_{q1}(U_{1eq} + u_1) + b_{q1}$$
$$= -a_{f1}\sqrt{H_{1eq}} - \frac{a_{f1}}{2\sqrt{H_{1eq}}}h_1 + a_{q1}U_{1eq} + a_{q1}u_1 + b_{q1}$$

A l'état d'équilibre nous avons :

$$-a_{f1}\sqrt{H_{1eq}} + a_{q1}U_{1eq} + b_{q1} = 0$$

On pose :

$$\alpha = \frac{a_{f1}}{2\sqrt{H_{1eq}}} \tag{6.20}$$

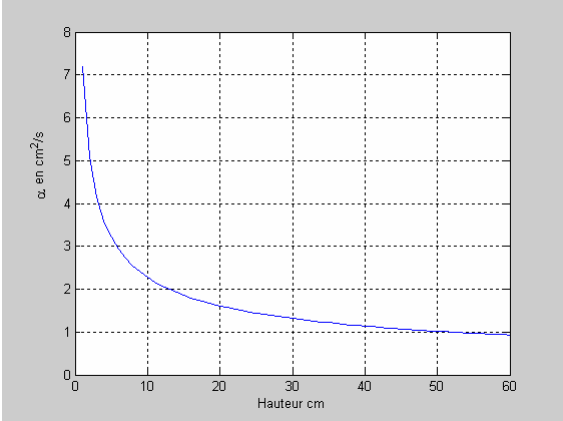


Fig. 6.14 – Tracé de α *en fonction de* H_{1eq}

Ce qui donne :

$$S\dot{h}_1 = -\alpha h_1(t) + a_{q1}u_1(t) \tag{6.21}$$

Soit le transfert :

$$h_1(s) = \frac{a_{q1}}{\alpha + S\,s}u_1(s)$$

On pose :

$$P_{nom} = \frac{a_{q1}}{\alpha + S\,s} \tag{6.22}$$

L'objectif de cette manipulation est d'essayer d'expliquer dans un premier temps des mesures expérimentales recueillies autour du point d'équilibre $H_{1eq}^{(1)} = 10cm$ à l'aide d'un ensemble de modèle formé par le modèle nominal (6.21) établi à partir d'une linéarisation du modèle non linéaire (6.19) autour de ce point d'équilibre, et une incertitude multiplicative en sortie qui prendra en compte la dynamique négligée en haute fréquence. Et on rajoute à cet ensemble de modèle un bruit additif en sortie (figure 6.15).

Ensuite nous allons tester si cet ensemble de modèle reste capable d'expliquer le comportement du système pour des données recueillies au-delà du point d'équilibre de linéarisation $H_{1eq}^{(1)}$

Pour chaque point d'équilibre, une expérience a été faite en utilisant comme entrée une séquence binaire pseudo aléatoire de longueur 1023 et d'amplitude 1Volt. Du fait de la dynamique lente du système, les mesures ont été prélevées toutes les 5 secondes. La période d'essai est de deux fois la longueur de la SBPA c'est-à-dire $2 \times 1023 \times 5\,\text{sec}$. Comme le modèle linéaire représente des variations autour du point de fonctionnement,

la valeur moyenne de chaque signal a été soustraite avant d'exécuter la DFT dans le programme de validation de modèle par μ_g. Soit $\left(u_1[k], h_1[k], k \in [0, N-1]\right)^{(i)}$ le jeu de donnée pour l'expérience i

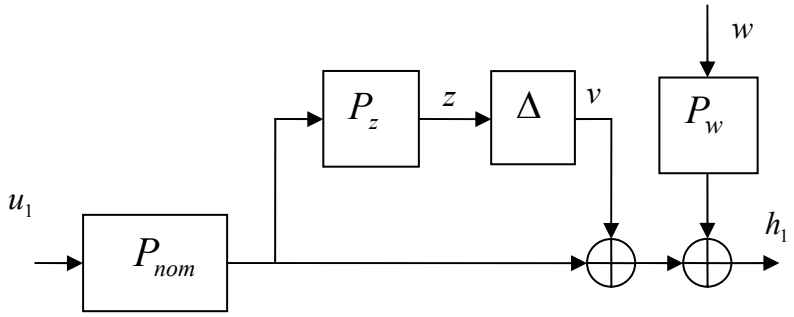


Fig. 6.15 – Ensemble de modèles pour le système d'un seul réservoir

La forme générique du problème de validation de modèle pour cette structure est alors donnée par le schéma de la figure 6.16

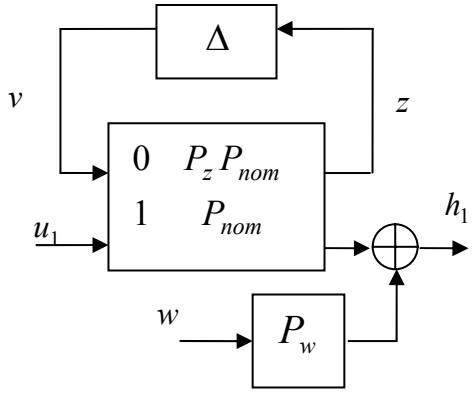


Fig. 6.16 – Forme générique

La pondération P_w est déterminée à partir d'une expérience où on ne met aucune excitation sur l'entrée c'est à dire $u_1 = 0$. Le signal des mesures données par le capteur a une moyenne presque nulle et une densité spectrale à peu près constante, donc on peut l'assimiler à un bruit blanc discret $w[k]$ dont la variance est σ_w^2. La variance de la transformée de Fourier du signal $w[k]$ est donnée par :

$$E\left[\left|W(l)\right|^2\right] = E\left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} w[n] e^{-2\pi jkl/N}\right)\left(\sum_{n=0}^{N-1} w[k] e^{+2\pi jnl/N}\right)\right] = \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_w^2 = N\sigma_w^2$$

La pondération choisie sera :

$$P_w = \sigma_w \sqrt{N} \tag{6.23}$$

Avec N est la longueur de la séquence.

Pour notre expérience où $N = 1023$ et $\sigma_w = 0.00073$ on trouve $P_w = 0.864$. Cette pondération devrait avoir un effet sur la sortie du modèle dans les hautes fréquences, ce qui est confirmé après chaque calcul de μ_g avec des différentes valeurs de P_w.

Expérience 1 : Données recueillies autour de 10cm

Dans cette expérience, les données expérimentales $\left(u_1[k], h_1[k]\right)^{(1)}$ sont recueillies autour du point d'équilibre $H_{1eq}^{(1)} = 10cm$ et le but est de déterminer l'ensemble de modèle $F_u\left(P, \Delta\right)$ capable d'expliquer ces données expérimentales en choisissant une pondération P_z telle que l'incertitude Δ soit dans la boule unité.

En traçant la réponse fréquentielle du modèle nominal et le rapport des TFD des mesures de sortie et d'entrée obtenues (figure 6.17), nous devrons choisir une pondération telle que le cercle de centre $P_{nom}\left(e^{j\omega_n}\right)$ et de rayon $\left|P_{nom}\left(e^{j\omega_n}\right)P_z\left(e^{j\omega_n}\right)\right|$ à chaque fréquence contienne le système réel (figure 6.18)

La pondération P_z aura la fonction de transfert suivante :

$$P_z = \frac{5\left(0.05 + 2s\right)}{0.3 + 8s} \tag{6.24}$$

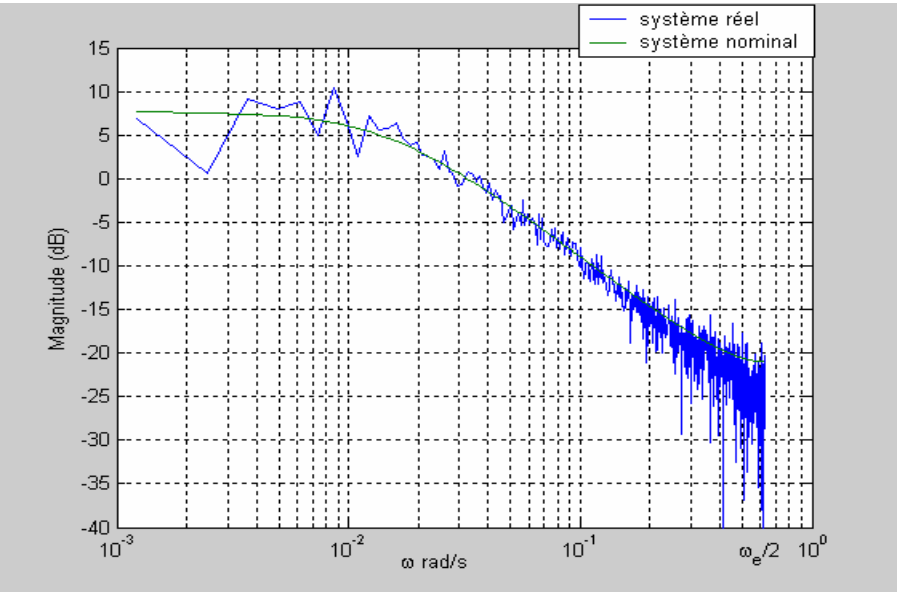


Fig. 6.17 – Réponse fréquentielle du système réel et du modèle nominal

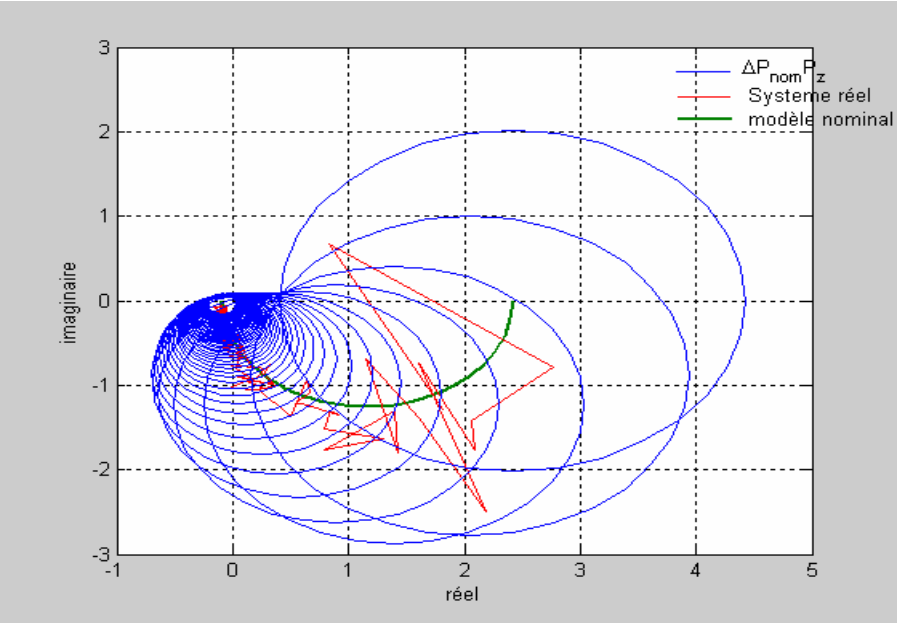


Fig. 6.18 – Nyquist du système réel et du modèle nominal avec la région d'incertitude

L'ensemble de modèles $F_u\left(P,\Delta\right)$ ainsi obtenu va être discrétisé par un bloqueur d'ordre 0 à la cadence d'échantillonnage $T_e = 5s$. Le calcul de la valeur singulière structurée généralisée de la matrice constante $\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)$ à chaque pulsation ω_n a donné le tracé dans la figure 6.19

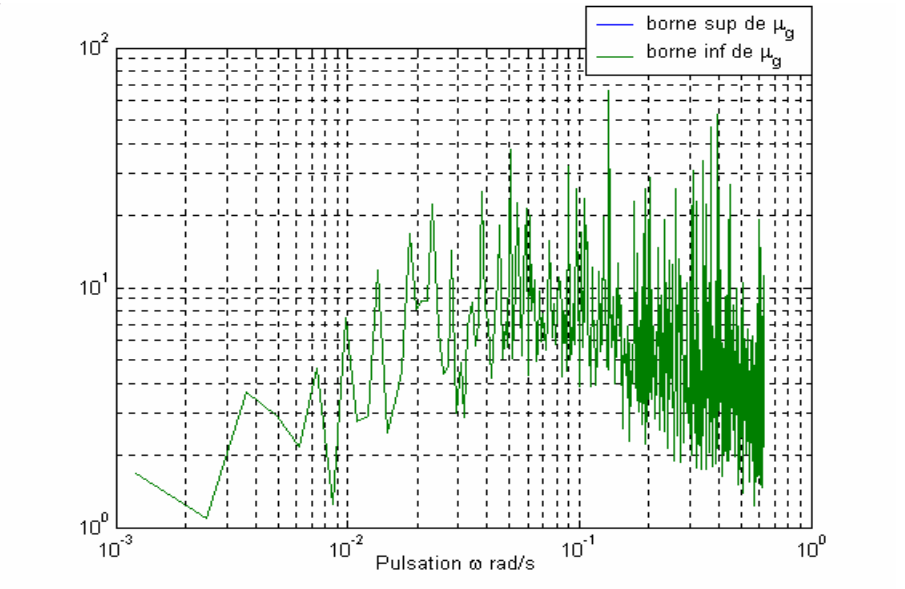


Fig. 6.19 – Evolution de $\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ avec des données enregistrées autour de 10 cm.

La courbe de la figure 6.16 représente la valeur exacte de $\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ puisque sa borne supérieure et sa borne inférieure sont confondues. Nous trouvons que

$\forall \omega = [0, \omega_e/2]$ $\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega}\right)\right) \geq 1$. Le $\min_{\omega} \mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega}\right)\right) = 1.0893 \geq 1$, signifie qu'il existe un Δ, $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ et il existe un w, $\|w\|_2 \leq 1$ tel que $y = \mathcal{F}_u(P, \Delta)u + P_w w$. Donc nous pouvons expliquer le jeu de données expérimentales $\left(u_1[k], h_1[k]\right)^{(1)}$ par un élément de l'ensemble de modèle $F_u(P, \Delta)$.

Expérience 2 : Données recueillies autour de 30cm

Maintenant, nous allons tester s'il existe dans l'ensemble de modèle $F_u(P, \Delta)$ établi dans la première expérience un élément qui pourrait expliquer les données $\left(u_1[k], h_1[k]\right)^{(2)}$ recueillies à partir d'une expérience autour du point d'équilibre $H_{1eq}^{(2)} = 30cm$.

Si on trace le diagramme de Bode du modèle obtenu par linéarisation autour du point d'équilibre $H_{eq1} = 10cm$ et celui obtenu par linéarisation autour du point d'équilibre $H_{eq2} = 30cm$, on peut remarquer que le gain est différent en basse fréquence (figure 6.20), donc on doit s'attendre à ce que la valeur singulière structurée généralisée $\left(\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right),\ \omega_n = [0, \omega_e/2]\right)$ pour les mesures $\left(u_1[k], h_1[k]\right)^{(2)}$ soit inférieure à celle pour les mesures $\left(u_1[k], h_1[k]\right)^{(1)}$ dans les basses fréquences, et de même valeur en haute fréquence.

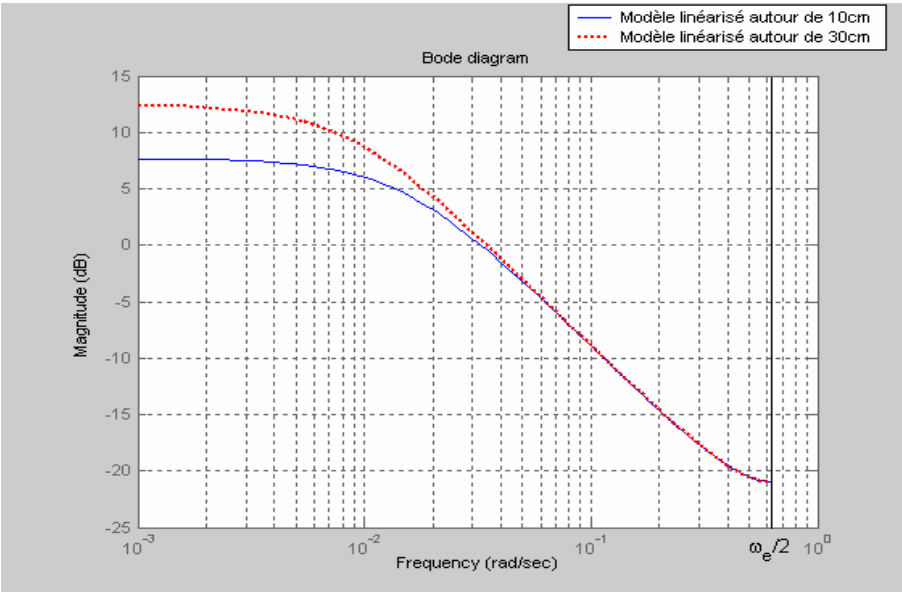


Fig. 6.20 – Bode des modèles linéarisés

Ceci est bien confirmé dans le tracé de μ_g dans la figure suivante:

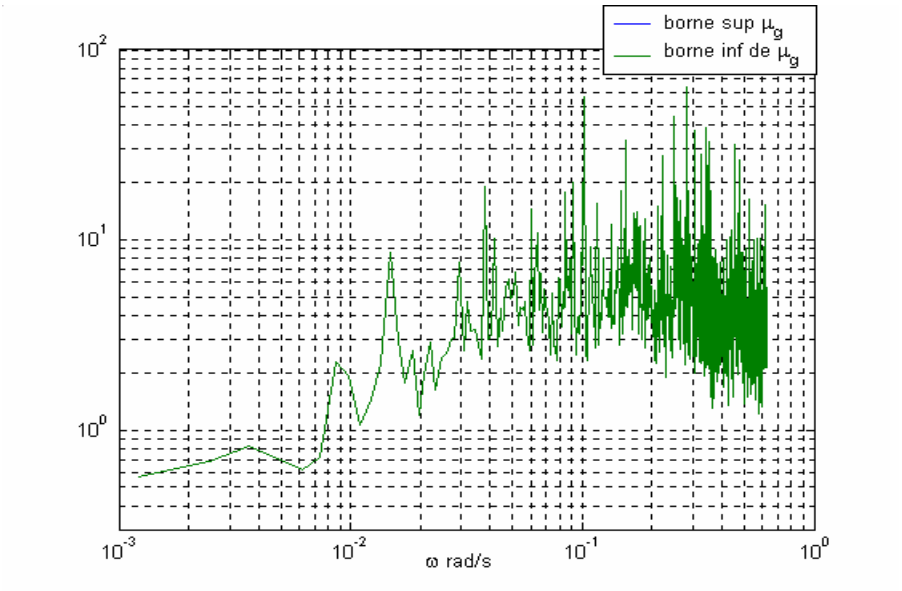


Fig. 6.21 - Evolution de μ_g avec des données enregistrées autour de 30 cm

On voit bien que $\forall \omega = [0, 0.0076\, rad/s]$ $\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega}\right)\right) \leq 1$ et donc il va falloir pour chaque pulsation de $[0, 0.0076\, rad/s]$ une incertitude de taille plus grande à $1/\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega}\right)\right)$ afin d'expliquer les données $\left(u_1[k], h_1[k]\right)^{(2)}$. Le modèle est jugé invalide pour expliquer le jeu de données considéré.

Expérience 2 : Autre modèle incertain

Envisageons à présent un nouvel ensemble de modèles en considérant que le paramètre α, résultant de la linéarisation du débit de fuite, est incertain. Ce nouvel ensemble de modèles est caractérisé par la LFT $F_u\left(P', \Delta'\right)$ obtenue par la transformation suivante :

$$S\dot{h}_1 = -\alpha h_1(t) + a_{q1} u_1(t)$$

Le paramètre incertain α peut être écrit par :

$$\alpha = \alpha_0 + p_\alpha \delta_\alpha \tag{6.25}$$

Donc l'équation devient :

$$S\dot{h}_1 = -\alpha_0 h_1(t) - p_\alpha \delta_\alpha h_1(t) + a_{q1} u_1(t)$$

En passant à des fonctions de transfert :

$$h_1(s) = \frac{1}{\alpha_0 + S\,s} v_\alpha + \frac{a_{q1}}{\alpha_0 + S\,s} u_1(s) \tag{6.26}$$

Avec :

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \delta_\alpha z_\alpha \\ z_\alpha &= -p_\alpha h_1 \end{aligned} \tag{6.27}$$

La forme LFT du modèle est donnée par la figure suivante :

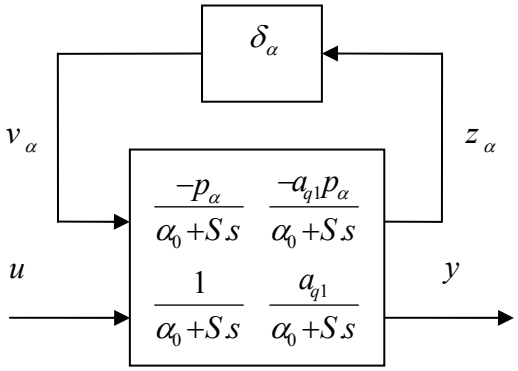


Fig. 6.22. – Mise sous forme LFT des incertitudes paramétriques

En introduisant une incertitude non structurée et un bruit additif en sortie, on obtient la forme générique du problème de validation de modèle :

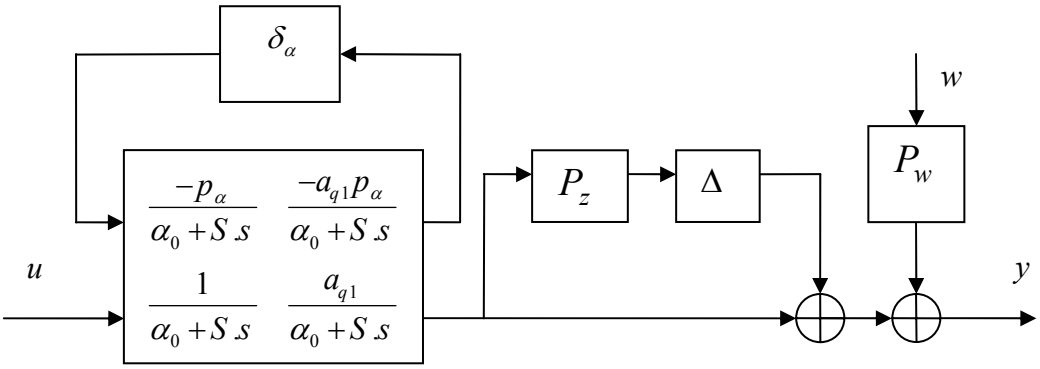


Fig. 6.23 - Structure pour le problème de validation de modèle

La pondération sur l'incertitude paramétrique peut être choisie en calculant la différence entre les paramètres α caractéristiques des points d'équilibre envisagés. On donne :

$$p_\alpha = a_{f1}\left(1/2\sqrt{H_{eq1}} - 1/2\sqrt{H_{eq2}}\right) \tag{6.28}$$

soit :

$$p_\alpha = 0.96 cm^2/s \tag{6.29}$$

Donc le nouvel ensemble de modèles $F_u(P',\Delta')$ formé par le modèle nominal, une incertitude paramétrique et une incertitude non paramétrique va être testé avec le jeu de données expérimentales $\left(u_1[k], h_1[k]\right)^{(2)}$. Le programme de calcul de $\mu_g\left(\widetilde{P'}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ a donné la courbe illustrée dans la figure 6.24 suivante :

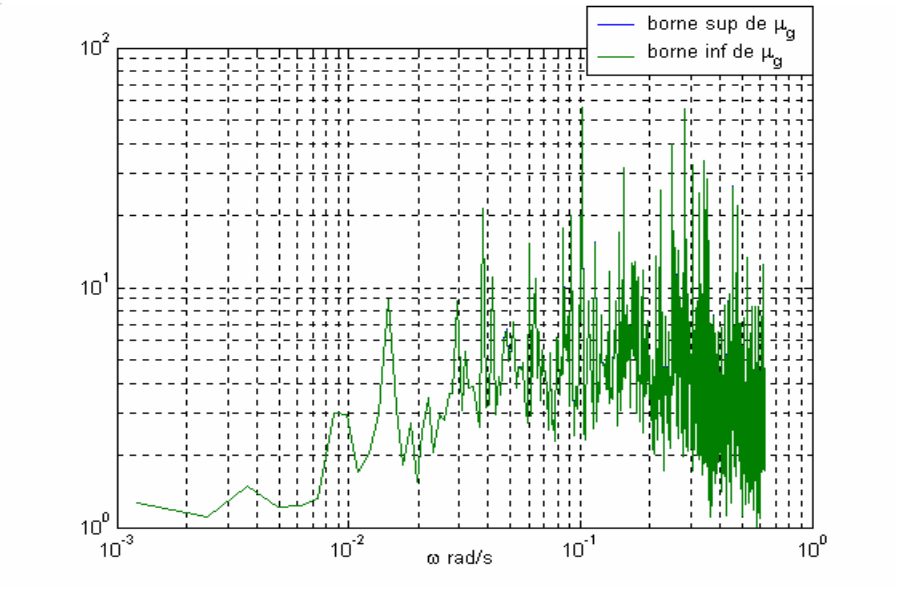


Fig. 6.24 - Evolution de $\mu_g\left(\widetilde{P}'\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ *avec des* $\left(u_1[k],h_1[k]\right)^{(2)}$

$\min\left(\tilde{P}'\left(e^{j\omega}\right)\right)$ est au dessus de 1. Il existe donc bien un élément de l'ensemble $F_u^{\omega}(P',\Delta')$ qui explique les données $\left(u_1[k],h_1[k]\right)^{(2)}$. L'introduction d'une incertitude paramétrique suffisamment grande sur le paramètre α a permis de prendre en compte dans la classe de modèle des éléments dont le comportement fréquentiel basse fréquence peut expliquer les données observées.

Expérience 3 : données expérimentales autour d'un point d'équilibre inconnu

Si nous imaginons que nous sommes devant un jeu de données expérimentales $\left(u_1[k],h_1[k]\right)^{(3)}$ recueillies lors d'une expérience et caractérisant des variations autour d'un point d'équilibre inconnu. Supposons que le test de ces données avec l'ensemble de modèles $F_u\left(P',\Delta'\right)$ a donné la courbe de μ_g suivante.

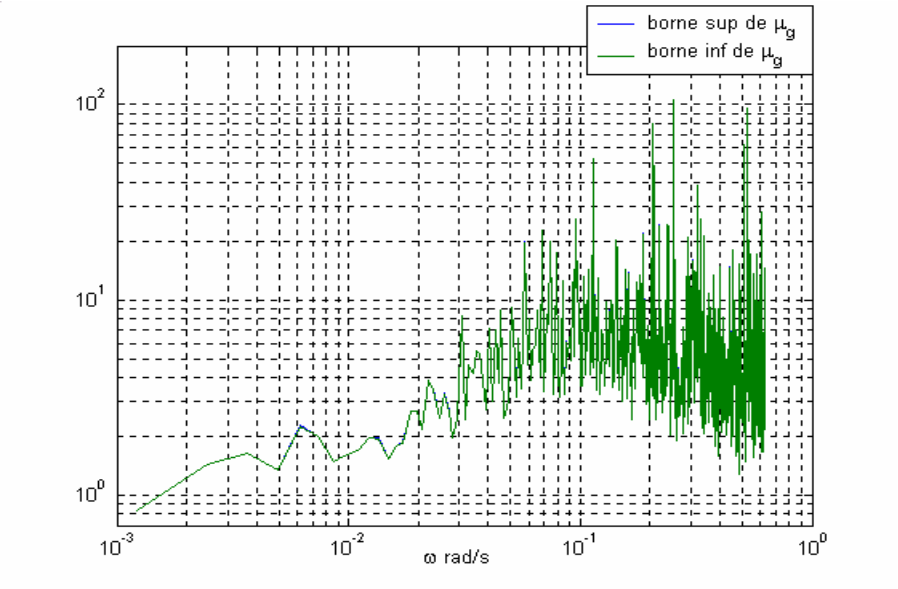


Fig. 6.25 - Evolution de $\mu_g\left(\widetilde{P}'\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ *avec des* $\left(u_1[k],h_1[k]\right)^{(3)}$

Nous trouvons que $\min_{\omega}\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)=0.82$. Donc une incertitude $\|\delta_\alpha\|_\infty \geq 1/\min_{\omega}\mu_g\left(\widetilde{P}'\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ et $\|\Delta\|_\infty \geq 1/\min_{\omega}\mu_g\left(\widetilde{P}'\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ est nécessaire pour expliquer les données $\left(u_1[k],h_1[k]\right)^{(3)}$.

Nous avons : $\alpha=\alpha_0+p_\alpha\delta_\alpha$ et $\|\delta_\alpha\|_\infty \geq 1/\min_{\omega}\mu_g\left(\widetilde{P}'\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$, donc :

$$\alpha\in\left]0,\alpha_0-p'_\alpha\right]\cup\left[\alpha_0+p'_\alpha,+\infty\right[\text{ avec } p'_\alpha=p_\alpha/\min_{\omega}\mu_g\left(\widetilde{P}'\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$$

Application numérique :

De la figure 6.14, $\alpha=0$ correspond à la hauteur $H_{1eq}^{(3)}=60cm$ et $\alpha=+\infty$ correspond à $H_{1eq}^{(3)}=0cm$. Et de la relation (6.20), on trouve :

$$H_{1eq}^{(3)}\in\left]0cm,4.3cm\right]\cup\left[42cm,60cm\right[\tag{6.30}$$

On donne le point autour duquel les données ont été recueillies $H_{1eq}^{(3)}=43cm$.

6.3.5. Système à trois réservoirs

La démarche d'invalidation pour le système monovariable à un seul réservoir effectuée dans le paragraphe précédent va être généralisée au cas multivariable avec le système complet formé des 3 réservoirs. On adopte une configuration telle que les vannes de fuite v_{f1}, v_{f2} .et v_{f3} seront entièrement fermées et les vannes de communication v_{13}, v_{32}, v_{20} sont entièrement ouvertes.

Le choix d'un point de fonctionnement est tel que les trois niveaux du liquide sont régis par $H_1>H_3>H_2$ (Fig. 6.26), de sorte que le système peut être modélisé par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} S\frac{dH_1}{dt}&=Q_1(t)-Q_{13}(t)\\ S\frac{dH_2}{dt}&=Q_2(t)+Q_{32}(t)-Q_{20}(t)\\ S\frac{dH_3}{dt}&=Q_{13}(t)-Q_{32}(t)\end{aligned} \tag{6.31}$$

Où les débits Q_{13}, Q_{32} et Q_{20} sont donnés par :

$$
\begin{aligned}
Q_{20} &= a_{20}\sqrt{H_2} \\
Q_{13} &= a_{13}\sqrt{H_1 - H_3} \\
Q_{32} &= a_{32}\sqrt{H_3 - H_2} \\
Q_1 &= a_{q1}U_1 + b_{q1} \\
Q_2 &= a_{q2}U_2 + b_{q2}
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

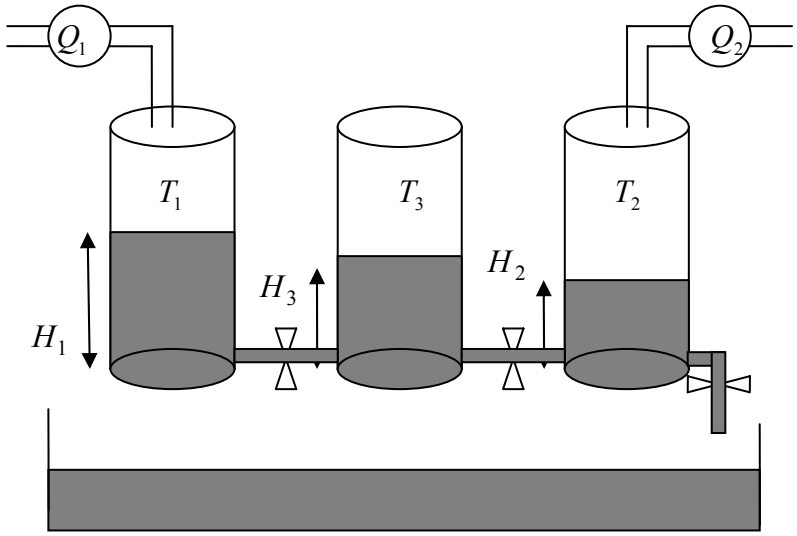


Fig. 6.26 - Système à trois cuves

Sur la base du modèle non linéaire (6.31) du système 3Cuves, on déduit le modèle linéaire en utilisant une approximation du premier ordre autour du point d'équilibre: $H_{1eq}^{(1)} = 40cm,\ H_{2eq}^{(1)} = 20cm,\ H_{3eq}^{(1)} = 30cm$, c'est-à-dire.

$$
\begin{aligned}
H_i(t) &= H_{ieq} + h_i(t) \\
U_i(t) &= U_{ieq} + u_i(t)
\end{aligned}
\tag{6.33}
$$

Une représentation par variables d'état pour le modèle linéaire est donnée par :

$$
\begin{aligned}
S\dot{h}_1 &= -\alpha_{13}h_1 + \alpha_{13}h_3 + a_{q1}u_1 \\
S\dot{h}_2 &= (-\alpha_{20} - \alpha_{32})h_2 + \alpha_{32}h_3 + a_{q2}u_2 \\
S\dot{h}_3 &= \alpha_{13}h_1 + \alpha_{32}h_2 - (\alpha_{13} + \alpha_{32})h_3
\end{aligned}
\tag{6.34}
$$

Avec :

$$
\alpha_{13} = \frac{a_{13}}{2\sqrt{H_{1eq} - H_{3eq}}},\ \alpha_{32} = \frac{a_{32}}{2\sqrt{H_{3eq} - H_{2eq}}} \text{ et } \alpha_{20} = \frac{a_{20}}{2\sqrt{H_{2eq}}}
$$

On procède à une étude similaire à celle effectuée pour le système à un seul réservoir c'est-à-dire que l'on va essayer dans un premier temps de former un ensemble de modèles $F_u^{(1)}\left(P^{(1)}, \Delta^{(1)}\right)$ à partir du modèle nominal (6.34) et d'incertitude non

structurée additive en sortie tel qu' il existe un élément dans cet ensemble capable d'expliquer le jeu de données expérimentales $\left(u[k],h[k]\right)^{(1)}$ recueilli par une expérience autour de point d'équilibre linéarisant $H_{1eq}^{(1)}, H_{2eq}^{(1)}, H_{3eq}^{(1)}$. Ce modèle sera ensuite utilisé pour essayer d'expliquer un autre jeu de données $\left(u[k],h[k]\right)^{(2)}$ recueilli lors d'une expérience autour d'un point d'équilibre différent $H_{1eq}^{(2)},\ H_{2eq}^{(2)},\ H_{3eq}^{(2)}$.

La structure du problème de validation de modèle $F_u^{(1)}\left(P^{(1)},\Delta^{(1)}\right)$ est donnée par :

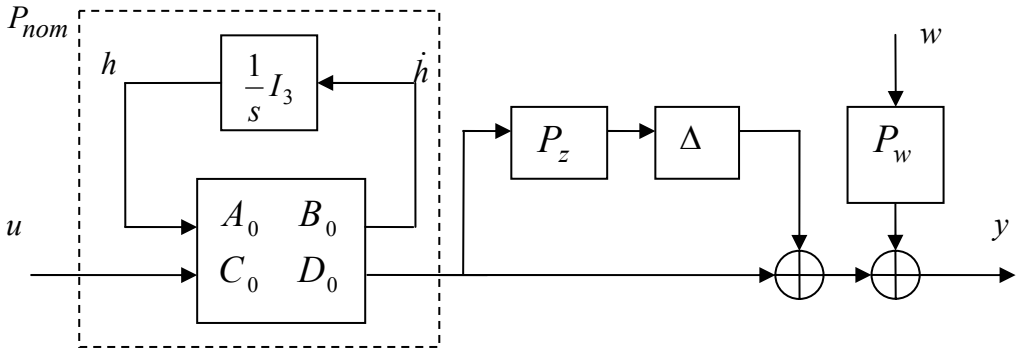


Fig. 6.27 - Structure pour le problème de validation de modèle

Avec :

$$F_u^{(1)}\left(P^{(1)},\Delta^{(1)}\right)=F_u\left(\begin{bmatrix}0 & P_z P_{nom}\\ I_3 & P_{nom}\end{bmatrix},\Delta^{(1)}\right)\ \text{et}\ \Delta^{(1)}=\left\{\Delta,\Delta\in \mathrm{C}^{3\times 3}\right\} \tag{6.35}$$

Nous gardons les mêmes fonctions de pondérations utilisées dans l'étude de validation d'un seul réservoir étudié précédemment :

$$P_z=\frac{5\left(0.05+2s\right)}{0.3+8s}I_3 \tag{6.36}$$

$$P_w=\sigma_w\sqrt{N}\,I_3 \tag{6.37}$$

Pour cette expérience, la tension appliquée sur chacune des deux pompes est une séquence binaire pseudo aléatoire non corrélées de longueur 1023 et d'amplitude 1Volt. On prélève les mesures toutes les 5 secondes sur une période de deux fois la longueur de la SBPA c'est-à-dire $2\times 1023\times 5\,\text{sec}$.

Le calcul de la valeur singulière structurée généralisée de la matrice constante $\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)$ correspondante à la structure de la figure 6.23, à chaque pulsation ω_n a donné le tracé dans la figure 6.28 suivante

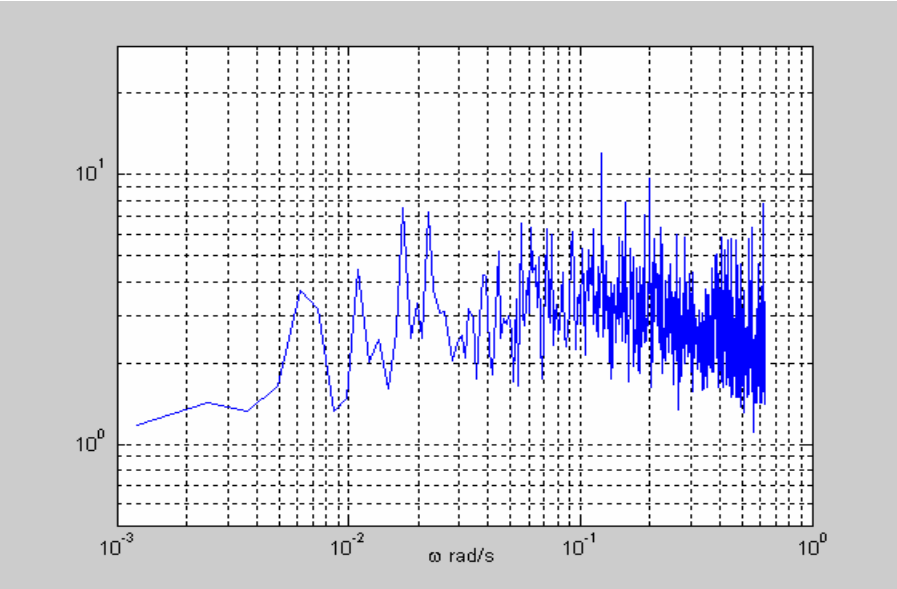


Fig. 6.28 - Borne supérieure de μ_g *avec* $\left(u[k],h[k]\right)^{(1)}$

La courbe de la figure 6.28 représente la borne supérieure de $\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$. Puisqu'on ne dispose pas de sa borne inférieure nous ne pouvons pas conclure sur la validité du modèle. On sait d'après la discussion du paragraphe (5.13) pour qu'un modèle soit invalide il faut que le $\max_{\omega}\bar{\mu}_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega}\right)\right)$ soit inférieure à 1, ce n'est pas le cas pour notre modèle puisque $\forall\omega=[0,\omega_e/2]\ \ \bar{\mu}_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega}\right)\right)\geq 1$. Cependant nous utiliserons l'information délivrée par la borne supérieure de $\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ pour juger de sa convenance avec d'autres données recueillies par une expérience autour d'un autre point d'équilibre.

Nous avons Quelque soit Δ, et quelque soit w tel que $y=\mathcal{F}_u\left(P,\Delta\right)u+P_w w$ alors $\|\Delta\|_\infty > 1\Big/\max_{\omega}\bar{\mu}_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega}\right)\right)=0.08$ ou $\|w\|_2 > 1\Big/\max_{\omega}\bar{\mu}_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega}\right)\right)=0.08$.

Maintenant, nous allons tester s'il existe dans cet ensemble de modèle $F_u^{(1)}\left(P^{(1)},\Delta^{(1)}\right)$ un élément qui pourrait expliquer les données $\left(u_1[k],h_1[k]\right)^{(2)}$ recueillies à partir d'une expérience autour du point d'équilibre $H_{1eq}^{(2)}=50cm$, $H_{2eq}^{(2)}=10cm$, $H_{3eq}^{(2)}=30cm$.

Le calcul de $\mu_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega_n}\right)\right)$ pour cette expérience a donné la courbe 6.29 suivante :

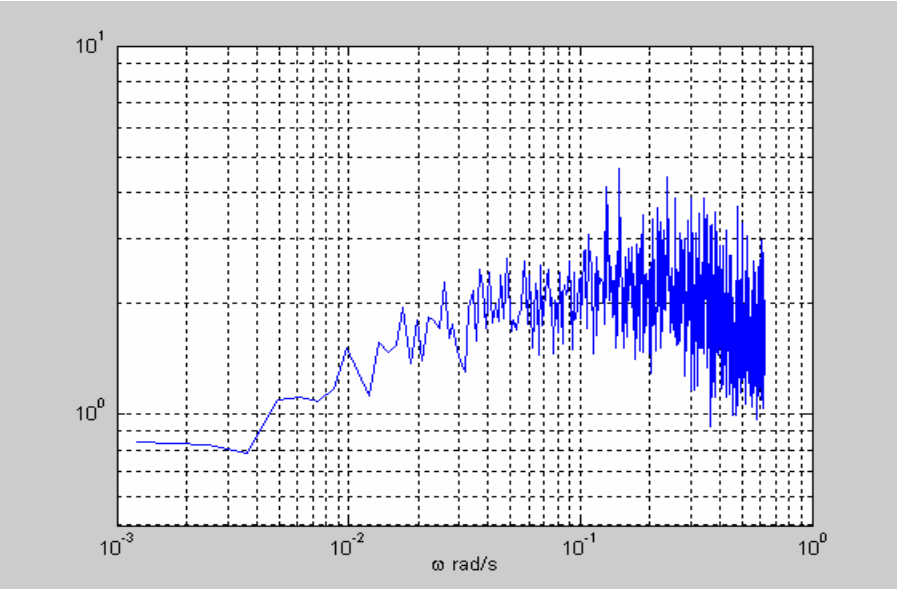


Fig. 6.29 - Borne supérieure de μ_g *avec des* $\left(u[k], h[k]\right)^{(2)}$

Comme $\bar{\mu}_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega}\right)\right)$ est au dessous de 1 pour la bande de pulsation $[0, 0.0046\, rad/s]$, nous sommes sûr qu'aucun modèle de l'ensemble de modèles considérés ne peut expliquer les données dans cette bande de fréquence. Il faut donc modifier l'ensemble de modèles en introduisant une plus grande incertitude sur le comportement basse fréquence de ceux-ci. Ceci est réalisé en introduisant des incertitude paramétriques sur les paramètres α_{ij} .

En posant :

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^{(0)} + p_{\alpha_{ij}} \delta_{\alpha_{ij}} \,,\ \delta_{a_{ij}} \in \mathrm{R}$$

avec :

$$p_{\alpha_{ij}} = a_{fi}\left(1/2\sqrt{H_i^{(2)}} - 1/2\sqrt{H_i^{(1)}}\right)$$

L'ensemble de modèles $F_u^{(1)}\left(P^{(1)}, \Delta^{(1)}\right)$ va subir alors à une modification afin de décrire ces variations paramétriques. Nous utilisons la méthode de Morton décrite dans le paragraphe (3.7) pour extraire les incertitudes paramétriques du modèle (6.16). La représentation d'état pour le modèle incertain est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{S}\begin{pmatrix} -\alpha_{13}^{(0)} & 0 & \alpha_{13}^{(0)} \\ 0 & -\alpha_{20}^{(0)} - \alpha_{32}^{(0)} & \alpha_{32}^{(0)} \\ \alpha_{13}^{(0)} & \alpha_{32}^{(0)} & -\alpha_{13}^{(0)} - \alpha_{32}^{(0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{S}\begin{pmatrix} a_{q1_0} & 0 \\ 0 & a_{q2_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{S}\begin{pmatrix} p_{a_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & p_{a_{20}} & p_{a_{32}} \\ -p_{a_{13}} & 0 & -p_{a_{32}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_{\alpha_{13}} & & \\ & \delta_{\alpha_{20}} & \\ & & \delta_{\alpha_{32}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + B_0 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} v_{\alpha_1} \\ v_{\alpha_2} \\ v_{\alpha_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_{\alpha_1} \\ v_{\alpha_2} \\ v_{\alpha_3} \end{pmatrix} = \Delta_\alpha \begin{bmatrix} z_{\alpha_1} \\ z_{\alpha_2} \\ z_{\alpha_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_{\alpha_1} \\ z_{\alpha_2} \\ z_{\alpha_3} \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$A_0 = \frac{1}{S} \begin{pmatrix} -\alpha_{13}^{(0)} & 0 & \alpha_{13}^{(0)} \\ 0 & -\alpha_{20}^{(0)} - \alpha_{32}^{(0)} & \alpha_{32}^{(0)} \\ \alpha_{13}^{(0)} & \alpha_{32}^{(0)} & -\alpha_{13}^{(0)} - \alpha_{32}^{(0)} \end{pmatrix},\ B_0 = \frac{1}{S} \begin{pmatrix} a_{q1_0} & 0 \\ 0 & a_{q2_0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} p_{\alpha_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\alpha_{20}} & p_{\alpha_{32}} \\ -p_{\alpha_{13}} & 0 & -p_{\alpha_{32}} \end{pmatrix},\ \Delta_\alpha = diag\left\{\delta_{\alpha_{13}}, \delta_{\alpha_{20}}, \delta_{\alpha_{32}}\right\}\ \Delta_\alpha \in \mathrm{R}^{3\times 3}.$$

Sur la base de ce modèle nous construisons l'ensemble de modèles $F_u^{(2)}\left(P^{(2)}, \Delta^{(2)}\right)$ par l'introduction des incertitudes multiplicatives en sortie. avec $\Delta^{(2)} = \left\{diag\left(\Delta_\alpha, \Delta\right), \Delta_\alpha \in R^{3\times 3}, \Delta \in C^{3\times 3}\right\}$

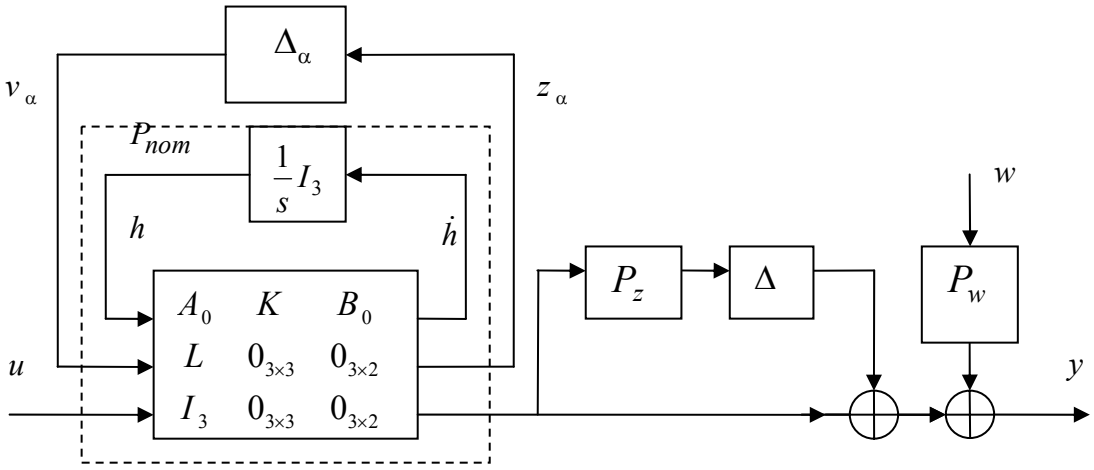


Fig. 6.30 - Structure de modèle

Nous traçons la borne supérieure de la valeur singulière structurée généralisée

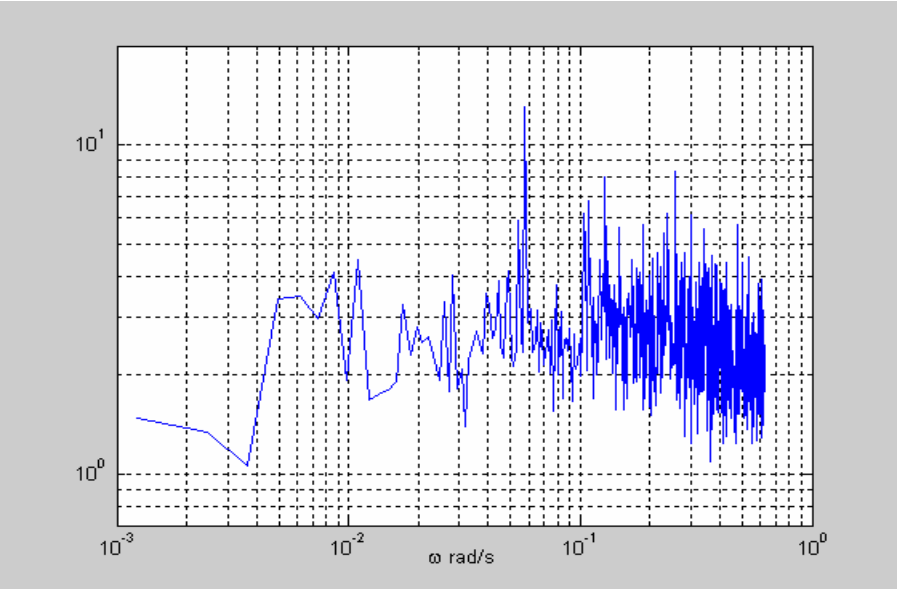


Fig. 6.31 - Borne supérieure de μ_g *pour* $F_u^{(2)}\left(P^{(2)},\Delta^{(2)}\right)$ *avec* $\left(u[k],h[k]\right)^{(2)}$

Nous avons pu nous ramener à la situation où $\forall\omega=[0,\omega_e/2]\ \ \bar{\mu}_g\left(\tilde{P}\left(e^{j\omega}\right)\right)\geq 1$ en considérant les incertitudes sur les paramètres.

6.4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons testé les résultats théoriques de l'approche fréquentielle du problème de validation de modèle.

Avec l'exemple académique où l'on dispose de la connaissance du système réel, nous avons pu vérifier que, en l'absence de bruit significatif, l'incertitude de modèle donnée par l'approche de validation de modèle dans le domaine fréquentiel correspond exactement à l'erreur relative entre modèle nominal et système réel.

Ensuite l'étude du système de 3Cuves pour un seul réservoir puis pour les 3 réservoirs nous a permis de valider ou non un ensemble de modèle avec des données expérimentales autres que celles recueillies autour d'un point d'équilibre autre que celui ayant permis la construction du modèle nominal. L'information fournie par la valeur singulière structurée, peut dans le cas monovariable, permettre de retrouver le point d'équilibre autour duquel seules des variations ont été observées.

Conclusion générale

Les méthodes de la commande robuste visent à conférer certaines performances à un système en dépit de la présence de bruits et d'incertitudes dans la modélisation de celui-ci. D'autre part la plupart des méthodes d'identification classiques prennent en compte l'écart modèle/système uniquement en termes de bruit additif. Le travail de recherche effectué dans le cadre de ce mémoire a porté sur l'analyse théorique d'une approche de validation de modèle de systèmes incertains consistant à caractériser les écarts objet/modèle par l'introduction non seulement de bruits perturbateurs, mais aussi d'opérateurs d'incertitude dans la relation fonctionnelle associée au modèle choisi.

En supposant que les incertitudes et le bruit sont de norme bornée nous avons défini la notion d'ensemble de modèles pour les systèmes incertains. Les ensembles de modèles que nous avons considéré dans cette thèse sont ceux formés à partir d'une représentation linéaire fractionnaire LFT. Nous avons présenté les méthodes de modélisation des systèmes incertains selon les différentes formes que peuvent prendre les incertitudes de modèle en déterminant pour chaque forme la matrice de transfert associée pour la rendre sous la forme générale LFT.

La question générique du problème de validation de modèle de systèmes incertains ainsi étudié dans cette thèse est la suivante : Etant données des mesures expérimentales, un ensemble de modèles, est il possible de déterminer paramètres, bruits et incertitudes qui fassent que les données aient pues être récoltées avec le modèle proposé. Ceci a demandé simplement de trouver un élément de l'ensemble de modèles et un élément de l'ensemble signal d'entrée inconnu tels que les informations observées sont produites exactement.

Cette problématique de validation de modèle, partie intégrante de l'automatique, a été considérée dans le domaine fréquentiel ce qui présume la disponibilité d'un jeu de données dans le domaine de fréquence pour l'usage de la validation, qui sont la TFD des mesures des entrées et des sorties du système réel, et les échantillons de la réponse fréquentielle du modèle sur l'étude.

Le problème de trouver un tel membre de l'ensemble de modèles a été formulé comme un problème d'optimisation. Nous avons adopté deux stratégies générales pour le résoudre. La première est la détermination d'un signal de bruit de norme minimale tel que les données entrées/sorties observées soient générées par le modèle entaché d'une incertitude de norme inférieure à 1. L'inconvénient de cette méthode est que le problème d'optimisation posé ne peut être résolu par le formalisme LMI que pour des cas spéciaux de l'ensemble de modèles. C'est pour cette raison que nous avons choisi de modifier la problématique de validation de modèle en envisageant la détermination simultanée de la plus petite norme d'incertitude et la plus petite norme du signal de bruit telles que le modèle obtenu génère les données observées. La solution de ce problème est apportée par la valeur singulière structurée généralisée μ_g. Après avoir donné sa définition, Nous avons montré que si μ_g est supérieure à 1 sur tout l'espace des fréquences, alors le modèle n'est pas invalidé. La valeur exacte de la valeur singulière structurée généralisée étant difficile à évaluer, nous avons présenté une méthode d'évaluation de celle-ci par encadrement. Nous avons alors vu qu'un minorant pouvait être calculé à l'aide d'un algorithme de la famille des "Power algorithm". Malheureusement la convergence de celui-ci n'est assurée que sous certaines conditions.

Au contraire une borne supérieure peut être estimée facilement en résolvant un problème d'optimisation convexe posé en termes de LMIs.

Contributions

L'étude approfondie des deux méthodes de résolution nous a conduit à mettre en évidence l'existence de relations entre les deux problématiques de l'approche fréquentielle de validation de modèle. Nous avons mené donc dans ce mémoire une étude comparative de ces méthodes qui ont vu le jour pendant la réalisation de cette thèse, et nous avons montré les avantages de passer par la deuxième stratégie. En effet, la fonction μ_g calculée à chaque fréquence nous a permis non seulement de répondre à la question générique posée du problème de validation de modèle pour une classe plus générale des ensembles de modèles mais aussi de prendre en compte la nature structurée du bloc d'incertitude. L'amplitude de cette fonction nous donne une indication sur le niveau de bruit et d'incertitude nécessaire pour atteindre la consistance des données, nous renseigne également sur les domaines fréquentiels où le modèle choisi est pertinent ou non.

Notre étude comparative de ces deux méthodes portera principalement sur les différents critères suivants :

1) facilité de mise en œuvre
2) prise en compte des incertitudes paramétriques et non paramétriques
3) une classe plus générale de l'ensemble de modèle

Le procédé expérimental de 3Cuves que nous avons étudiés ainsi que l'exemple académique de simulation ont fourni des excellents exemples de validation de l'approche fréquentielle de validation de modèle adopté dans cette thèse en raison de la présence des incertitudes sur les paramètres et de dynamiques négligées.

La théorie de validation de modèle a aussi un double avantage. En effet, les grands systèmes avec beaucoup de composants peuvent être modélisés par des modèles avec un grand nombre de blocs d'incertitudes Δ. Cependant, ce modèle peut être simplifié si un modèle approprié avec peu de blocs d'incertitudes Δ a pu être trouvé. La validation de modèle donne alors les moyens d'examiner de tels modèles réduits contre les données expérimentales. Cette approche peut aussi s'avérer utile dans les problèmes de détection de défauts; étant donné un modèle de système incertain avec un contrôleur en état de fonctionnement, l'outil de la fonction μ_g peut servir comme signal indicateur de défauts, donner des moyens d'évaluation de la cohérence entre la réalité du système et un modèle de fonctionnement normal. Henry et al [Hen99, HZMY02] se sont investis dans cette voie. La détérioration progressive dans un système peut se manifester sous forme d'une augmentation de l'incertitude Δ et du bruit w nécessaire pour l'explication des données. Une défaillance soudaine peut être identifié par une chute soudaine de la valeur de μ_g, c'est-à-dire une augmentation soudaine dans la taille d'incertitude Δ et du bruit w.

Annexes

Annexe A Stabilité robuste 151
Annexe B Choix du signal d'excitation 153

Annexe A

Stabilité robuste

Soit un système incertain décrit par la structure d'interconnexion de la figure A-1. Il sera supposé que P se compose des matrices de fonction de transfert stables, où la stabilité signifie que le système n'a strictement aucun pôle dans le demi plan droite. Dans la pratique, ceci revient à supposer que P_{22} (le modèle nominal) est stable comme les autres éléments P_{11}, P_{12}, et P_{21} sont des fonctions de pondération et ils peuvent être choisis stables.

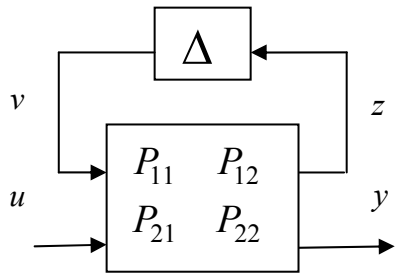


Fig. A-1 système LFT

On considère le cas où le modèle a seulement un seul bloc Δ non structuré $(m=1)$. Le résultat de stabilité robuste est donné dans le lemme suivant :

Lemme A–1

Si $P(s)$ et $\Delta(s)$ ont tous leurs pôles à partie réelle strictement négative, Le modèle $\mathcal{F}_u(P,\Delta)$ est stable pour toute matrice $\Delta(s)$ satisfaisant :

$$\bar{\sigma}(\Delta) \le 1$$

Si et seulement si :

$$\|P_{11}\|_\infty \le 1$$

Une généralisation de ce lemme à des modèles $\mathcal{F}_u(P,\Delta)$ avec plus qu'un seul bloc Δ $(m>1)$ demande l'utilisation de la fonction réelle positive μ qu'on rappelle sa définition donnée par :

$$\mu(P)=\begin{cases}0 \quad \text{s'il n'existe aucun } \Delta \text{ qui résoud } \det(I-P\Delta)=0\\ \left(\min\left\{\delta \,\middle|\, \exists\Delta, \bar{\sigma}(\Delta)\le\delta \text{ tel que} \det(I-P\Delta)=0\right\}\right)^{-1} \quad \text{sinon}\end{cases}$$

La valeur singulière structurée μ est définie essentiellement pour donner une réponse au problème de stabilité robuste suivant :

Lemme A–2

Le modèle $\mathcal{F}_u(P,\Delta)$ est stable pour tout $\Delta \in \mathbf{B\Delta}$ si et seulement si :

$$\left\|\mu(P_{11})\right\|_\infty < 1$$

où

$$\left\|\mu(P_{11})\right\|_\infty := \sup_\omega \mu\left(P_{11}(j\omega)\right)$$

Annexe B

Choix du signal d'excitation

B.1. Choix du signal d'excitation (signal de test)

On applique comme signal d'entrée les séquences binaires pseudo aléatoires (SBPA) qui sont des successions d'impulsions rectangulaires caractérisées par une longueur de séquence à l'intérieur de laquelle la largeur des impulsions varie aléatoirement et donc ils ont un contenu riche en fréquences, mais sur un grand horizon de temps elles sont périodiques. La période étant définie par la longueur de la séquence. La longueur maximale d'une séquence est $2^N - 1$, où N est le nombre de cellules du registres à décalage.

On note parmi les caractéristiques des SBPA, la durée maximale d'une impulsion t_{im} qui égale à $N.T$ (où N est le nombre de cellules et T_e est la période d'échantillonnage). Cette propriété intervient dans le choix des SBPA pour l'identification.

Pour bien identifier le gain statique du procédé, il faut que la durée d'au moins un des créneaux (par exemple celui de durée maximale) soit supérieure au temps de montée t_M du procédé : $t_{im} = N.T_e > t_M$ cette condition nous donne la détermination de N et donc la longueur de la séquence $2^N - 1$. D'autre part, pour balayer tout le spectre de fréquences, il faut que la longueur d'un essai soit au moins égale à la longueur de la séquence. Il faut donc s'assurer que : $\left(2^N - 1\right)T_e < L$. On choisit en général la durée de l'essai L égale à la durée de la séquence $(2^N - 1).T_e = L$.

Si par exemple le temps de montée du système est t_M et le temps d'échantillonnage t_e le nombre N de cellules de registre = t_M / t_e ce qui peut conduire à des valeurs prohibitivement élevées (on ne doit pas dépasser 16). On choisit alors une fréquence d'horloge pour la SBPA sous-multiple de la fréquence d'échantillonnage :

Si $f_{SBPA} = \dfrac{f_e}{p}; \quad p = 1,2,3,..$ alors la condition $t_{im} = N.T_e > t_M$ devient : $t_{im} = p.N.T_e > t_M$

Cette approche de division de fréquence permet d'obtenir une impulsion de durée plus grande pour une durée identique de la séquence et donc de l'essai. En pratique on utilise un bloqueur qui travaille à la fréquence f_{SBPA} et on acquiert les données à la cadence f_e

B.2. Choix de l'amplitude de SBPA

L'amplitude de la SBPA peut être très faible, mais elle doit être supérieure au niveau du bruit résiduel. Si le rapport signal / bruit est trop faible, il faut allonger la longueur de l'essai pour pouvoir obtenir une bonne estimation des paramètres.

Notons que, dans de nombreuses applications, l'augmentation significative du niveau de la SBPA n'est pas souhaitable à cause du caractère non linéaire des procédés à identifier.

Typiquement, l'amplitude choisie est de quelques unités pour cent par rapport à la valeur de commande stationnaire. Une fois les données acquises, il faut les centrer car on s'intéresse uniquement aux variations de la commande et de la sortie.

B.3. Elimination de la composante continue

Une fois les données acquises, il faut les centrer car on s'intéresse uniquement au variations de la sortie en fonctions des variations de l'entrée autour d'un point de fonctionnement, il convient donc, pour une identification correcte, d'éliminer dans les données entrées-sorties les composantes continue (point de fonctionnement) et ceci se fait en créant des nouveaux données entrées-sorties après avoir retranché leurs valeurs moyennes :

$$y'(t) = y(t) - Y_{moy} = y(t) - 1/N \sum_{t=0}^{N-1} y(t)$$

$$u'(t) = u(t) - U_{moy} = u(t) - 1/N \sum_{t=0}^{N-1} u(t)$$

Références bibliographiques

[Ami96] Amira-DTS200 Laboratory Setup Three Tank System, Amira GmbH, Bismarckstra. D-47057 Duisburg, Germany, 1996.

[AsE71] Astrom K J and P Eykhoff ”System identification – a survey” Automatica N7, pp 123-162, 1971.

[BAH89] Barmish B.R., J. Ackermann, and H.Z. Hu. “The Tree Structured Decomposition”. Proc Conference on Information Sciences and Systems, Baltimore, Maryland, USA, 1989.

[Bai94] Bailey N. T. J.. “Prediction and validation in the public–health modeling of HIV/AIDS”. Statistics in Medicine, N 13 pp 1933–1943. 1994

[BEFB94] Boyd S., L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balaskrishnan “Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory”, SIAM Publications, Vol 15, June 1994

[Bel98] Belcastro, C., “Parametric Uncertainty Modelling: An Overview”. Proc. American Control Conference, pages 992-996, Philadelphia; Pennsylvania, USA, June 1998.

[BeN00] Besançon-Voda A. et M Namvar “Interaction entre identification et commande”, chapitre 6 dans “ identification des systèmes” Hermes, Paris 2000.

[BoF98] Boulet B. and B. A. Francis “Consistency of open loop experimental frequency response data with coprime factor plant models” IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 43, pp 748-760, 1998.

[BuT86a] Butterfield M. H. and P J Thomas. “Methods of quantitative validation for dynamic simulation models – Part 1: Theory” Transactions of the Institute of Measurement and Control 8 (4): pp 182–200, October 1986

[BuT86b] Butterfield M. H. and P J Thomas. “Methods of quantitative validation for dynamic simulation models – Part 2: Examples” Transactions of the Institute of Measurement and Control 8 (4): pp 201–219, October 1986

[ChF+96] Chen J., J. A. Farrell, C. N. Nett, and K. Zhou “H_∞ identification of multivariable systems by Tangential interpolation methods” IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 41, pp. 1822–1828. 1996

[Chen96] Chen J. “Frequency domain tests for validation of linear fractional uncertain models” Proc. IFAC Congress, Vol. 40, pp. 1260 – 1265. 1996.

[ChG00] Chen J. and G. Gu “Control-oriented system identification: An H_∞ approach” Wiley Interscience New York. 2000.

[ChW96] Chen J. and S. Wang “Validation of Linear Fractional Uncertain Models: Solutions via Matrix Inequalities” IEEE Trans Automat Contr. Vol. 41 No 6 pp 844-849 1996.

[Cor89] Correa G. O. “A system identification problem motivated by robust control” Int. J. Control 50 (2) pp 575-602, 1989

[Dav95] Davis R. A. “Model validation for robust control” Ph.D. Dissertation, University of Cambridge, UK. 1995

[DGKF89] Doyle J.C., K. Golver, P.Khargonekar, and B.A. Francis. “State Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems”. IEEE Transactions on Automatic Control, 34 (8): 831–845, August 1989.

[Döl01] Döll C. “La Robustesse de Lois de Commande pour des Structures Flexibles en Aéronautique et en Espace”. Thèse de Doctorat, ENSAE, 2001.

[Doy82] Doyle J.C. “Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties” Proceeding of Inst. Elec. Eng. IEE Vol.129, pp.242-250 1982.

[DoP87] Doyle J. and A.K. Packard, « Uncertain multivariable systems from a state space perspective, » in Proc. Amer. Control Conf., Vol 3, pp. 2147-2152, 1987.

[DuS99] Duc G. et S. Font “Commande H_∞ et μ-analyse : des outils pour la robustesse ”Hermes. 1999

[DuS96] Dullerud G. and R. Smith “A continuous–time extension condition” IEEE Trans. Automat. Control., Vol 41, pp. 738–742. 1996.

[DuS02] Dullerud G. and R. Smith “A nonlinear functional approach to LFT model validation” Systems and Control letters, Vol 47, pp 1–11, 2002

[EiSc96] El Ghaoui, L. Scorletti G. “Control of rational systems using linear fractional representations and linear matrix inequalities” Automatica, Vol. 32, n° 9, pp. 1273–1284, 1996.

[EPP+03] El-Samad H., S. Prajna, A. Papachristodoulou, M. H. Khammash, J. C. Doyle. “Model Validation and Robustness Analysis of the Bacterial Heat Shock Response using SOSTOOLS.” Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Maui, HI. 2003.

[FaT86] Fan M.K.H. and A.L. Tits “Characterization and Efficient Computation of the Structured Singular value” IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 31, pp. 734-743, 1986.

[Fon95] Font S. “Méthodologie pour Prendre en Compte la Robustesse des Systèmes Asservis : Optimisation H_∞ et Approche Symbolique de la Forme Standard” Thèse de Doctorat, université Paris–Sud et Supélec , 1995.

[Fra87] Francis B. A. “A course in H_∞ control theory” Lecture notes in control and information sciences, Springer Verlag, 1987

[FTD91] Fan M.K.H., A.L. Tits, J. C. Doyle “Robustness in the Presence of Mixed Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics” IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 36, pp. 25-38, 1991.

[GBC+03] Gevers M., X. Bombois, B. Codrons, G. Scorletti, and B. D. O. Anderson. “Model validation for control and controller validation in a prediction error identification framework — Part I: theory” Automatica, 39(3):403–415, 2003.

[GGN92] Goodwin G. C., M. Gevers, and B. Ninnes. “Quantifynig the error in estimated transfer functions with application to model order selection” IEEE Trans. Automa. Control., 37 (7) pp 913 – 928, 1992.

[GMT97] Giarré L., M. Milanese and M. Taragna “H_∞ Identification and model quality evaluation”. IEEE Trans. Autom. Contr. Vol. 42, pp 188-199, 1997

[GNLC95] Gahinet, P., A. Nemirowski, A. J. Laub,M. Chilali “LMI Control Toolbox for Use with Matlab, The MathWorks Inc., 1995.

[GTSP94] Goh K. C., L. Turan, M. G. Safanov, G. P. Papavassilopoulos, J. H. Ly “Beaffine Matrix Inequality Properties and Computation Methods” American Control Conference, pp. 850-855, 1994

[GuK92] Gu G. and P. P. Khargonekar. Linear and nonlinear algorithms for identification in H_∞ with error bounds. IEEE Trans. Automat. Contr., 37(7) pp.953–963, 1992.

[Hak94] Hakvoort R. “system identification for robust process control: Nominal models and error bounds”. PhD dissertation, Delf. Univ. Tech.,1994.

[Hel94] Helmelsson A.“Model Reduction using LMIs”, 33rd IEEE Conf on Decision and Control, pp. 3217-3222, 1994.

[Hen99] Henry D. “Diagnostic et contrôle de cohérence des systèmes multivariables incertains” thèse de Doctorat 1999.

[Hja93] Hjalmarsson H. “Aspects on Incomplete modeling in system identification” Phd thesis, Linkoping University, 1993.

[HJN91] Helmicki A. J., C. A. Jacobsen, and C. N. Nett. “Control oriented system identification: A worst-case/deterministic approach in H_∞ ” . IEEE Trans. Automat. Contr., 36(10) pp. 1163–1176, 1991.

[Hir99] Hiret A. “Pilotage Robuste d’un Missile sur un Large Domaine de Vol. Synthèse et Analyse dans le Cadre H_∞ et LPV” Thèse de Doctorat, Université Paris–Sud et Supélec, 1999.

[HoJ85] Horn R. A. and C. R. Johnson “Matrix Analysis” Cambridge University Press 1985.

[HZMY02] Henry D., A. Zolghadri, M. Monsion, S. Ygorra “Off-line Robust Fault Diagnosis Using the Generalized Structured Singular Value” Automatica 38, 1347-1358, 2002.

[KhP91] Khammash M. and J. Pearson. “Performance robustness of discrete–time systems with structured uncertainty” IEEE Trans. Autom. Control Vol 36, pp 398–412, 1991.

[LjG97] Ljung L.and L. Guo. “The role of model validation for assessing the size of the unmodeled dynamics”. IEEE Transactions on Automatic Control, 42(9):1230–1239, 1997.

[Lju87] Ljung L. “System Identification : Theory for the User” Practice Hall. 1987

[Lju99] Ljung. L. “System Identification: Theory for the User”. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, second edition, 1999.

[Lju99] Ljung L. “Model validation and model error modelling” Report n. Li TH-ISY-R-2125. Department of Electrical Engineering. Linkoping University, Sweden. 1999

[LeP96] Lee L. H. and K. Poolla. “On statistical model validation” Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 118(2):226–236, 1996.

[Lya88] Lyapunov A. “Problème Général de la Stabilité du Mouvement” éditions Jacques Gabay, 1988.

[Mag01] Magni J.F., “Linear Fractional Representations with a Toolbox for Use with Matlab”. Technical Report N° 204/01 DCSD, ONERA. 2001.

[Mak91] Makila P. M. “Laguerre methods and H1 identification of continuous time systems” Int. J. Control, 53(3) pp. 689–707, 1991.

[MFM94] Malewski R., M. A. Franchek and V. T. McWhirter. “Experimental validation of a computer model simulating an impulse voltage distribution in HV transformer windings” IEEE Trans. Power Delv. N 9 pp 1789–1798, 1994

[MoD03a] Mouhib O. and D. Beauvois “Model (In-)Validation for Uncertain Systems with Generalized μ” Proceeding of the 9th IEEE International Conference on Models in Automation and Robotics, Polond, pp. 671-676, 2003.

[MoD03b] Mouhib O. and D. Beauvois “Validation de Modèle de Systèmes Incertains” Journées Doctorales d’Automatique, pp 353-358 Valenciennes, 2003.

[MoD04] Mouhib O. and D. Beauvois “Model validation for mixed parametric uncertainty” Third International Conference on System Identification and Control Problems (SICPRO '04) 28-30 January 2004, Moscow, Russia.

[Mor85] Morton B.G., “New Applications of μ to Real Parameter Variation Problems.” Proc. 24th IEEE Conference on Decision and Control, pages 233-238, Fort Lauderale, Florida, USA, December 1985.

[Mor96] Morris J.C “Experimental Control and Model Validation: A Helicopter Case Study” PhD Thesis. California Institute of Technology 1996.

[Nam01] Namvar M. “Interaction entre identification et commande: Identification pour la commande robuste” thèse de Doctorat, INP Grenoble, 2001

[NaB00] Namvar M. and Besançon-Voda A. “Approaches to control-oriented H_∞ identification” Proceeding of IFAC symposium on system identification (Sysid2000), Santa Barbara, 2000.

[NeG94] Nemirovsky A., P. Gahinet “The Projective Method for Solving Linear Matrix Inequalities” American Control Conference pp 840-844, June 1994.

[NeN93] Nesterov Y., A. Nemirovsky “Interior Point Polynimial Methods in Convex Programming” SIAM Vol 13, 1993

[NeS91] Newlin M.P. and R. S. Smith “Model Validation and a Generalization of μ” Proceeding of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, Brighton England, pp. 1257-1258, 1991.

[NeS98] Newlin M.P. and R. S. Smith. “A Generalization of the Structured Singular Value and its Applications to Model Validation”. IEEE Trans. Automat. Contr. 43, 901-907. 1998

[New96] Newlin M.P “Model Validation, Control and Computation” PhD Thesis California Institute of Technology 1996.

[Par91] Partington J. R. “Robust identification and interpolation in H_∞” Int. J. Control, 54(5): pp. 1281–1290, 1991.

[PFD88] Packard A, M.K.H. Fan, J.C. Doyle “A Power Method for the Structured Singular Value” Proceeding of the 27th IEEE Conference on Decision and Control, Texas, pp. 2132-2137, 1988

[PKT+92] Poolla, K., PP Khargonekar, A. Tikku, J. Krause, and K. M. Nagpal. “A time domain approach to model validation” Proc. Amer. Cont. Conf. pp. 313–317, 1992.

[PKT+94] Poolla, K., PP Khargonekar, A. Tikku, J. Krause, and K. M. Nagpal. “A time domain approach to model validation”. IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 39, N 5. pp 951–959, 1994.

[Pra03] Prajna S. “Barrier Certificates for Nonlinear Model Validation” Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Maui, 2003.

[RaP95] Rangan S. and Poolla K. “Time domain sampled data model validation” Proc. Amer. Contr. Conf. pp 1140–1144. 1995.

[RaP98] Rangan S., K. Poolla, “Model validation for structured uncertainty models” Proceedings of the American Control Conference, pp. 629–633. 1998

[RuL92] Rubin N. P. and D. J. N. Limebeer. “System identification for H_∞ control” In Proc. IEEE Conf. Dec. and Cont., pp. 1694–1695, 1992.

[SaP94] Safanov M.G. and G.P. Papavassilopoulos “The diameter of an Intersection of Ellipsoids and BMI Robust Synthesis” In Proc. IFAC Symposium on Robust Contol Design, pp.313-317, Rio de Janeiro, Brazil, 1994.

[SDRP97] Smith R.S., G. Dullerud, S. Rangan, K. Poolla “Model Validation for Dynamically Uncertain Systems’ Mathematical modelling of systems Vol 3 N°1, 43-58. 1997.

[SmD92a] Smith R.S. and J.C. Doyle “Model Validation: A Connection between Robust Control and Identification” IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. 37, N 7 pp 942-952. 1992

[SmD92b] Smith R.S. and J. C. Doyle “Towards a methodology for robust parameter identification”. IEEE Tans. Autom. Control Vol. 37; pp 942–952, 1992.

[SmD96] Smith R. and G. Dullerud “Continuous–time control model validation using finite experimental data” IEEE Trans. Automat. Control, Vol 41, pp. 1094–1105. 1996.

[SmD99] Smith R. and G. Dullerud “Modelling and validation of nonlinear feedback systems” Robustness in identification and control, pp 87–101. Springer, London, 1999.

[Smi90] Smith R. S. Model Validation for Uncertain Systems. PhD thesis, California Institute of Technology, 1990

[Smi92] Smith R. S. “Model validation and parameter identification in H_∞ and l_1” Proc. American Cont. Conf. pp. 2852–2856, 1992

[Smi95] Smith R.S. “Model Validation for Robust Control: An Experimental Process Control Application” Automatica 31, 1637-1647. 1995

[SzM03] Sznaier M. and M. C. Mazzaro. An LMI approach to control-oriented identification and model (in)validation of LPV systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 48(9):1619–1624, 2003.

[TeL93] Terlouw J.C., P. Lambrechts, “A Matlab Toolbox for Parametric Uncertainty Modelling” Closing Report CR-93455-L, National Aerospace Laboratory NLR, Amsterdam, NL, 1993.

[TLBS92] Terlouw J.C., P. Lambrechts, S. Bennani, M. Steinbuch, “Parametric Uncertainty Modelling Using LFTs” Proc. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, South Carolina, United States, 19p., 1992.

[ToC98] Toker O. and J. Chen “on computational complexity of invalidating structured uncertainty models” System and Control Latter Vol. 33, pp. 199–207. 1998.

[VaL99] Varga A. and G. Looye. “Symbolic and Numerical Software Tools for LFT-Based Low Order Uncertainty Modelling”. Proc. IEEE International Symposium on Computed Aided Control System Design, pages 1-6, Kohala Coast, Hawaii Island, USA August 1999

[VDB93] T van den Boom “MIMO system identification for H_∞ robust control” Phd Thesis, Technical University of Delft, 1993

[WAK94] Wall G. W., J S Amthor, and B A Kimball. “Cotco2 – a cotton growth simulation – model for global change”. Agricultural and forest meteorology 1994.

[WaL92] Wahlberg B and L Ljung. “Hard frequency-domain model error bounds from least squares like identification techniques” IEEE Trans. Automat. Control 37 (7) 900–912, 1992.

[WBDG91] Wang W., J. Doyle, C. Beck, K. Golver, “Model Reduction of LFT Systems”. Proc. 30th IEEE Conference on Decision and Control, pages 1233-1238, 1991.

[XRGC99] Xu D., Z. Ren, G. Gu and J. Chen “LFT Uncertain Model Validation with Time and Frequency Domain Measurements” IEEE Trans. Automat Contr. Vol.44, N 7, JULY 1999.

[YoD90] Young P.M and J.C. Doyle “Computation of μ with Real and Complex Uncertainties” Proceeding of the 29th IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, pp. 1230-1235, 1990

[YoD95] Young P. and M. Dahleh “Robust l_p stability and performance” Systems and control letters (26), pp 305–312, 1995.

[ZDG96] Zhou K., J.C. Doyle, K. Glover, “Robust and Optimal Control”, Prentice-Hall, 1996.

[ZhK93] Zhou T and H Kimura. “Time domain identification for robust control” Systems and Control Letters, Vol. 20 pp.167–178, 1993.

[ZhK94] Zhou T. and H. Kimura “Simultaneous identification of nominal model, parametric uncertainty and unstructured uncertainty for robust control” Automatica, Vol. 30 (3), pp. 391–402. 1994.

[ZhK95] Zhou T. and H. Kimura “Structure of model uncertainty for a weakly corrupted plant” IEEE Trans. Autom. Contr. Vol. 40, pp. 639–655. 1995.

[ZWS02] Zhou T., L. Wang, and Z. Sun. “Closed-loop model set validation under a stochastic framework” Automatica, 38(9):1449–1461, 2002.

Résumé :
Le travail de recherche présenté dans ce mémoire porte sur l'analyse théorique de l'approche fréquentielle d'(in-)validation de modèle de systèmes incertains qui consiste à caractériser les écarts objet/modèle par l'introduction non seulement de bruits perturbateurs, mais aussi d'opérateurs d'incertitude dans la relation fonctionnelle associée au modèle choisi. En supposant que les incertitudes et le bruit sont de norme bornée nous avons défini la notion de l'ensemble de modèles. Ceux que nous avons considérés sont formés à partir d'une représentation linéaire fractionnaire. La question générique du problème de validation de modèle de systèmes incertains ainsi étudiée dans cette thèse est la suivante : Etant données des mesures expérimentales et un ensemble de modèles, existe-t-il un modèle dans l'ensemble de modèles qui pourrait produire les données entrées/sorties observées? Ceci a demandé simplement de trouver un élément de l'ensemble de modèles et un élément de l'ensemble signal d'entrée inconnu tels que les informations observées sont produites exactement.
Le problème de trouver un tel membre de l'ensemble de modèles a été formulé selon deux stratégies. La première est de déterminer un signal de bruit de norme minimale tel que les données observées soient générées par le modèle entaché d'une incertitude de norme inférieure à 1. L'inconvénient de cette méthode est que le problème d'optimisation posé ne peut être résolu par le formalisme LMI que pour des cas spéciaux de l'ensemble de modèles. La deuxième stratégie étudiée est de déterminer simultanément la plus petite norme d'incertitude et la plus petite norme du signal de bruit telles que le modèle obtenu génère les données observées. Nous avons mené une étude comparative de ces deux problématiques et nous avons montré que la solution apportée par la valeur singulière structurée généralisée permet non seulement de répondre à la question générique pour une classe plus générale des ensembles de modèles mais aussi de prendre en compte la nature structurée du bloc d'incertitude.
Le procédé expérimental de trois cuves ainsi qu'un exemple académique de simulation ont fourni une excellente validation des méthodologies étudiées.
Mots clés : Identification, validation de modèle, valeur singulière structurée généralisée, inégalité matricielle affine, ensemble de modèles, représentation linéaire fractionnaire.

Abstract:
The work presented in this dissertation deals with the theoretical analysis of the frequency domain model validation for uncertain systems which considers that the gap between the actual system and the nominal model results not only from disturbing noise but also from model uncertainty. By assuming that both of uncertainty and additive noise are norm bounded we defined the notion of the model-set. Those which we considered are described by a fractional linear representation. The generic question of model validation problem studied in this thesis is as follows: given experimental measurements and a model-set, does a model exist in the model-set which could produce the observed inputs/outputs data? It is simply required to find an element of models-set and an element of unknown of input signal set such that the information observed is produced exactly.
The problem of finding such a member of a model-set was formulated according to two strategies. First a noise signal of minimal norm is determined such that the data observed are generated by the model with an uncertainty of norm less than 1. The disadvantage of this method is that the optimization problem posed can be solved by LMI formalism only for special cases of model-set. The second strategy studied is to determine simultaneously the smallest norm of uncertainty and the smallest norm of the noise such that the model obtained generates the data observed. We have make a comparative study of these two problems and we have showed that the solution given with the help of generalized structured singular value not only makes it possible to answer the generic question for a more general class of the models-sets but also to take into account the structured nature of the uncertainty block.
The experimental process of 3Tanks as well as an academic example of simulation provided an excellent validation of the studied methods.
Keywords**:** Identification, model validation, generalized structured singular value, linear matrices inequalities, models-set, linear fractional transformation