



HAL
open science

**Théorie du Mouvement du Satellite
Artificiel : Développement des Equations du Mouvement
Moyen - Application à l'Etude des Longues Périodes -
Gilles Metris**

► **To cite this version:**

Gilles Metris. Théorie du Mouvement du Satellite Artificiel : Développement des Equations du Mouvement Moyen - Application à l'Etude des Longues Périodes -. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1991. Français. NNT: . tel-00011585

HAL Id: tel-00011585

<https://theses.hal.science/tel-00011585>

Submitted on 10 Feb 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat
de l'Observatoire de Paris

(Nouveau Régime)

en

Astronomie Fondamentale
Mécanique Céleste et Géodésie

présentée par

Gilles METRIS

Sujet :

Théorie du Mouvement du Satellite Artificiel
– Développement des Equations du Mouvement Moyen –
– Application à l'Etude des Longues Périodes –

Soutenue à l'Observatoire de Paris le 17 Décembre 1991, devant le jury composé de :

M. Kovalevsky	Président
M. Balmino	Rapporteur
Mme Moons	Rapporteur
M. Barlier	Directeur de thèse
Mme Capitaine	
M. Exertier	

Remerciements

J'adresse mes plus profonds remerciements à Monsieur François Barlier, mon directeur de thèse. Son expérience et son intuition m'ont toujours secouru lorsqu'une difficulté obscurcissait mon horizon avec un peu trop d'insistance. Ses qualités humaines m'ont fait apprécier au plus haut point chaque occasion de travailler avec lui.

J'ai eu le plaisir de travailler avec Monsieur Pierre Exertier dont la compétence en mécanique spatiale a largement facilité mes débuts dans ce domaine. Ce travail n'a été possible que grâce à une interaction continue avec lui puisqu'il a développé les parties filtrage des observations, intégration numérique et correction différentielle dans le cadre de la méthode de centrage. Son ouverture d'esprit a rendu chaque conversation passionnante et fructueuse. Ses conseils ont été déterminants pour l'orientation de cette thèse puis pour sa rédaction. J'ai également collaboré avec Monsieur Yves Boudon dont la minutie et l'art de poser des questions constructives ont souvent contribué à me rendre songeur. Il a effectué de nombreux tests pour le développement de ce projet, dans une atmosphère de sérénité réconfortante.

Je suis heureux de remercier Monsieur Georges Balmino, Directeur du Bureau Gravimétrique International, dont les conseils toujours chaleureux m'ont permis d'améliorer ce travail. La rapidité et la justesse de son jugement m'ont inspiré une grande confiance. Chaque échange a été un enrichissement.

Je suis redevable aux membres du groupe de mécanique céleste du département de mathématiques de l'Université de Namur qui ont mis à ma disposition les manipulateurs de séries de Poisson indispensables dans ce travail. Mademoiselle Fabienne Delhaise a guidé mes premiers pas d'utilisateur et a répondu avec une grande patience à mes nombreuses requêtes. Je suis reconnaissant à Madame Michèle Moons qui n'a pas ménagé son temps pour m'aider à me servir de ces logiciels d'une façon plus optimale, et pour me suggérer des modifications utiles à la clarté de cet exposé.

Je remercie Monsieur Jean Kovalevsky de l'Académie des Sciences et Madame Nicole Capitaine, Directrice de la formation doctorale de l'Observatoire de Paris, d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie les membres de l'équipe Dynamique Spatiale qui m'ont si aimablement accueilli ainsi que mes compagnons de travail qui ont su maintenir une ambiance chaleureuse.

Enfin, je n'oublie pas tous ceux qui ont rendu ma vie à l'Observatoire de la Côte d'Azur plus agréable, soit par des services, soit par des encouragements ou tout simplement par leur présence.

Je remercie le Centre National d'Etudes Spatiales qui m'a attribué une bourse doctorale pour ces travaux.

INTRODUCTION

En géodésie spatiale, le mouvement du satellite artificiel peut être considéré sous deux aspects différents et complémentaires :

- il peut tout d'abord être utilisé comme une cible servant à relier deux points terrestres très éloignés par l'intermédiaire de mesures (par exemple des distances entre des stations au sol et le satellite). Pour exploiter pleinement cette cible se déplaçant très rapidement, il faut connaître sa position à chaque instant, c'est-à-dire sa loi de mouvement. On est donc conduit à étudier les forces qui agissent sur le satellite,
- inversement le satellite peut être considéré comme un détecteur de forces que l'on étudie grâce à l'information issue de l'observation du mouvement. Ces forces ont un intérêt au-delà des effets qu'elles produisent ; elles constituent un outil possible pour mieux comprendre l'environnement terrestre. L'étude des perturbations dues au champ de gravité de la Terre permet de recueillir des informations précieuses sur la physique interne de notre globe. Les marées terrestres font intervenir la rhéologie de notre planète. Le freinage atmosphérique est un témoin des variations de densité des différents éléments chimiques dans l'atmosphère.

Ces deux facettes du problème du mouvement du satellite artificiel ont connu des progrès spectaculaires en 30 ans. Les moyens et les méthodes ont beaucoup évolué aussi. Comme toutes les sciences physiques, la géodésie spatiale comporte un aspect observationnel et un aspect modélisation. Un véritable progrès ne peut se faire que grâce à une évolution cohérente (mais non nécessairement simultanée) dans les deux domaines.

Depuis les débuts de la géodésie spatiale, l'amélioration de la précision des observations a été considérable ; on mesure aujourd'hui des distances station-satellite avec une précision centimétrique tandis que les premières observations angulaires n'étaient fiables qu'à quelques secondes d'arc près. La précision sur les positions des stations d'observation était de quelques décamètres, elle est maintenant centimétrique. Ces stations sont en même temps plus nombreuses. La distribution dans le temps des observations est devenue plus régulière.

Des progrès importants dans la modélisation du mouvement des satellites ont accompagné cette amélioration des observations. Les systèmes de référence sont mieux

définis et mieux matérialisés. Les modèles de forces agissant sur le satellite sont plus précis mais aussi plus complexes : alors que l'on tenait seulement compte des premiers harmoniques zonaux du potentiel, des perturbations luni-solaires et d'un modèle simple de freinage atmosphérique, on utilise aujourd'hui des modèles incluant plusieurs milliers d'harmoniques zonaux et tesséraux (jusqu'aux degrés et ordres 50), des forces de marées, plusieurs petits effets d'origine non gravitationnelle...

Les progrès de la géodésie spatiale se sont donc faits au prix d'une augmentation de la quantité d'information traitée et d'un alourdissement des traitements. Cela n'a été possible que grâce à l'apport fondamental de l'informatique. Cette technique a permis non seulement d'exploiter une plus grande masse d'informations mais elle a aussi permis de l'utiliser différemment. La différence essentielle a porté sur l'intégration du système différentiel gouvernant le mouvement : les méthodes numériques ont aujourd'hui supplanté les méthodes analytiques dans la plupart des cas. Il est vrai que les méthodes numériques permettent d'intégrer avec une grande précision à peu près tout modèle de force quelle que soit sa complexité. De plus, leur mise en œuvre est très rapide. Elles ne permettent pas une analyse aisée du mouvement mais c'est un critère non décisif lorsqu'il s'agit de déterminer la valeur de paramètres physiques.

L'amélioration de la précision des observations et du modèle est une source de progrès très riche qui a prouvé son utilité. Cependant ce n'est pas la seule source de progrès possible ; la durée est un autre paramètre très important. Les mouvements que nous observons ne sont pas purement périodiques mais comportent des effets qui croissent avec le temps. De ce point de vue, un accroissement de la longueur de l'intervalle d'observation induit une plus grande sensibilité et donc une amélioration de la précision. C'est aussi un moyen de décorrélérer des effets petits et cumulatifs. Ensuite, on peut espérer comprendre le comportement moyen de phénomènes dont l'analyse détaillée semble hors d'atteinte. Enfin, le satellite subit des forces dépendant de certaines propriétés lentement variables de la Terre et de son environnement; par exemple, la variation de l'aplatissement dynamique de la Terre due au rebond post-glaciaire est souvent évoquée. On ne peut espérer appréhender en détail ce type de mécanisme que sur de longs intervalles de temps.

Certains satellites tels que Starlette ou Lageos sont observés avec une excellente précision depuis plus de 15 ans. Cette durée est faible à l'échelle des phénomènes géologiques, pourtant elle a déjà permis de mettre en évidence certains mouvements de la croûte terrestre et des variations saisonnières et à plus longue période du potentiel terrestre.

Mais cette information très riche est difficile à exploiter pleinement. En effet, pour faire ressortir des évolutions lentes, l'idéal est de traiter des arcs continus sur de longues périodes de temps. Or l'intégration numérique d'un modèle de force complexe sur 10 ou 15 ans n'est pas triviale ; avec un pas de calcul de 3 minutes (ceci est typique pour le satellite Lageos) cela représente plusieurs millions de pas de calcul. Il faut donc évaluer

plusieurs millions de fois le second membre du système différentiel qui peut comprendre une dizaine de perturbations d'expression plus ou moins compliquée. Malgré les progrès de l'informatique (ordinateurs plus rapides, calcul vectoriel) les temps de calculs induits font que ce type d'orbite ne peut être réalisé très couramment. Mais le facteur le plus grave est l'accumulation des erreurs d'arrondi et de troncature. Pour intégrer de très longs arcs, il faut donc disposer d'un très grand nombre de chiffres significatifs sur les variables. Il faudrait aussi disposer d'algorithmes d'intégration plus exacts. Tous les problèmes numériques cités sont très liés au rapport des longueurs du pas de calcul et de l'intervalle d'intégration. Or nous allons disposer d'intervalles d'observation de plus en plus longs ayant une grande richesse potentielle. Quant à la longueur du pas d'intégration, elle dépend de la rapidité avec laquelle les paramètres étudiés évoluent ; elle est donc reliée aux plus courtes périodes présentes dans le mouvement.

Pour contourner ces difficultés, l'une des solutions possibles est l'application de la méthode de centrage. Le principe de la méthode de centrage est d'utiliser exclusivement l'information issue de la partie à longue période du mouvement c'est-à-dire d'intégrer numériquement un mouvement dans lequel on a d'abord éliminé les variations à courtes périodes. Si les plus courtes périodes restantes sont 100 fois plus longues que celles du mouvement réel, on peut espérer pouvoir utiliser un pas d'intégration 100 fois plus long. Cette technique est déjà utilisée avec succès dans d'autres problèmes tels que l'étude de l'évolution du système solaire [Laskar 1988]. La spécificité de notre problème est que nous voulons continuer à utiliser l'information contenue dans les observations sur toute la durée de l'intervalle d'étude. Il faudra donc effectuer un prétraitement des observations de manière qu'elles représentent un mouvement moyen de même nature que celui généré par le modèle.

Cette méthode implique par définition que l'on renonce à toute information sur les causes des variations à courtes périodes. Mais ceci paraît naturel dans la mesure où l'information à courtes périodes est bien restituée par les méthodes classiques fonctionnant sur des arcs plus courts. D'autre part à une époque où le stockage et l'exploitation directe de toutes les observations existantes deviennent très lourds, il semble raisonnable de synthétiser celles-ci sous forme de points moyens dans le cadre des études à long terme.

L'objet de notre travail est l'élaboration et l'application d'une méthode de construction d'un système différentiel décrivant l'évolution à long terme des paramètres du mouvement du satellite. Cette construction devra être essentiellement analytique afin d'éviter les problèmes liés à l'évaluation numérique des variations à courtes périodes que nous avons évoqués ci-dessus.

Dans une première partie introductive, nous décrivons les principales méthodes utilisées historiquement en orbitographie des satellites artificiels. Nous montrons en particulier comment avant l'utilisation presque exclusive de l'intégration numérique, des progrès importants ont été réalisés grâce à la notion de mouvement moyen. Nous

résumons les résultats obtenus par différents auteurs ayant entrepris la mise en œuvre de la méthode de centrage.

Dans la deuxième partie, nous décrivons l'analyse du problème qui conduit à la définition précise du mouvement moyen que nous voulons étudier et nous proposons des algorithmes permettant de l'obtenir aussi bien à partir des observations qu'à partir d'un modèle de mouvement réel. Le mouvement moyen ne correspondant à aucune réalité physique, il doit être défini à la fois en fonction du but à atteindre et des possibilités de le réaliser. Nous avons été conduit à introduire la distinction entre les mouvements moyens (mouvements sans variations à courtes périodes pouvant ne pas comprendre toutes les variations à longues périodes du mouvement initial) et le mouvement moyen centré (mouvement moyen ayant en outre le même comportement séculaire et à longues périodes que le mouvement réel). Cette distinction est nécessaire pour utiliser à bon escient les outils très puissants que constituent les changements de variables par transformations canoniques : l'élimination de l'angle rapide (l'anomalie moyenne) à l'aide des transformées de Lie permet d'obtenir un système différentiel moyen mais ce nouveau système génère des variables dont les variations à longues périodes sont différentes de celles des variables initiales. Nous montrons comment un choix particulier de la fonction génératrice de la transformation peut permettre de repousser ces différences au second ordre et nous proposons un moyen de rétablir les termes manquants.

Dans la troisième partie nous décrivons la construction analytique du système différentiel gouvernant le mouvement moyen pour les principales perturbations agissant sur un satellite artificiel. Les perturbations ne peuvent être toutes traitées de la même manière ; elles n'engendrent pas les mêmes difficultés de calcul, ne nécessitent pas les mêmes hypothèses simplificatrices et se situent différemment dans la hiérarchie des effets sur le mouvement. Les calculs sont effectués généralement jusqu'au troisième ordre par rapport au petit paramètre J_2 . Selon les perturbations, les deux ou trois premiers ordres sont disponibles sans développement en excentricité et les ordres suivants ne sont calculés que sous forme développée.

La perturbation due à l'aplatissement terrestre (représenté par le second harmonique zonal du potentiel) étant d'une importance particulière, elle a été moyennée jusqu'au quatrième ordre (avec calcul des effets séculaires du cinquième ordre). Les calculs sans développement en excentricité ne sont pas très différents de ceux de Brouwer et Kozai [**Brouwer 1959, Kozai 1962**] avec cependant une attention particulière sur le choix de la fonction génératrice.

La moyennisation des perturbations dues aux autres harmoniques du potentiel terrestre se fait suivant les mêmes techniques. Dans ce cas la difficulté provient du nombre d'harmoniques à prendre en compte (jusqu'au degré 30 ou plus selon les satellites).

Les harmoniques tesséraux ne génèrent pas de variations dont la période est supérieure à un jour, sauf en cas de résonance. L'hamiltonien moyen correspondant est donc l'hamiltonien contenant seulement les termes résonnants. Ceux-ci sont nombreux

lorsque l'on considère un degré élevé du développement du potentiel. Ils dépendent du satellite étudié. Leur sélection ne peut donc être analytique et générale mais se fait pour chaque orbite à l'aide d'une étude semi-numérique.

Les perturbations dues à la Lune, au Soleil et aux planètes posent des difficultés d'une autre nature : les corps à l'origine de ces perturbations sont en mouvement et on doit alors moyenner un hamiltonien dépendant du temps. La description de la position de la Lune à l'aide d'une théorie analytique simplifiée complique fortement la fonction perturbatrice sans pour autant apporter une précision suffisante. Nous proposons un algorithme qui, moyennant des approximations justifiées, simplifie les calculs et donne des résultats satisfaisants dans le cadre de la méthode de centrage.

Les perturbations dues aux marées terrestres et océaniques sont assimilables à des modifications du potentiel terrestre. Pour la partie zonale, les fonctions à moyenner sont de même nature que celles rencontrées dans le cas du potentiel. Les marées océaniques peuvent faire apparaître des résonances qui peuvent être traitées comme les résonances dues aux harmoniques tesséraux. Cependant la présence d'angles supplémentaires (arguments de Doodson) induit une plus grande complexité.

La moyennisation des forces d'origine non gravitationnelle présente des difficultés spécifiques : discontinuités lors des passages du satellite à l'ombre de la Terre dans le cas de la pression de radiation solaire, impossibilité d'une formulation analytique très précise dans le cas du freinage atmosphérique, problèmes de repères et forces d'inertie.

Le calcul des hamiltoniens est l'étape la plus délicate du développement de la partie analytique mais ce n'est pas suffisant : il est de plus nécessaire de calculer leurs dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport aux variables canoniques. Les dérivées partielles d'ordre 1 interviennent dans le second membre du système différentiel à intégrer numériquement pour extrapoler le mouvement. Les dérivées d'ordre 2 servent pour la correction différentielle. La quantité très importante de développements algébriques nécessaires à la mise en œuvre complète de la théorie rendait de manière évidente impossible la réalisation de ces calculs à la main. Les calculs symboliques sur ordinateur à l'aide de logiciels mis à notre disposition par le département de mathématiques de l'Université de Namur ont donné une orientation particulière à notre travail.

Pour chaque perturbation traitée, les résultats de l'intégration numérique du nouveau système différentiel sont comparés à des pseudo-observations obtenues par un filtrage d'observations simulées. Ces tests permettent de démontrer la cohérence des deux descriptions du mouvement moyen centré.

PREMIÈRE PARTIE :
LA MÉTHODE DE CENTRAGE
ET SON CONTEXTE

I.A. Généralités sur le mouvement du satellite artificiel

Le mouvement principal du satellite artificiel obéit aux lois de Kepler et est donc commodément décrit par les éléments orbitaux du problème des deux corps a , e , I , h , g et l avec :

- a : demi-grand axe,
- e : excentricité,
- I : inclinaison,
- h : ascension droite du nœud,
- g : argument du périégée,
- l : anomalie moyenne.

Comme les forces agissant sur le satellite ne se réduisent pas à l'attraction newtonienne d'une masse ponctuelle, a , e , i , h , g et $n = dl/dt$ ne sont pas constants mais varient au cours du temps en réponse à différentes perturbations. La perturbation la plus importante provient de la non sphéricité et de la non homogénéité de la Terre. Cette force due au champ de gravité terrestre est décrite par le développement en harmoniques sphériques de son potentiel Laplacien :

$$\mathcal{R}(r, \phi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \quad (\text{I1})$$

$\mu = GM$: constante géocentrique de la gravitation,

R_e : rayon équatorial de l'ellipsoïde de référence,

C_{nm} , S_{nm} : séries de coefficients décrivant le potentiel terrestre,

r , ϕ , λ : coordonnées sphériques géocentriques du satellite dans un repère fixe par rapport à la Terre,

P_{nm} : fonctions de Legendre associées.

Dans les cas où $m = 0$, la perturbation correspondante est indépendante de la longitude λ . S_{n0} est nul et C_{n0} est appelé coefficient de l'harmonique zonal de degré n du potentiel. On utilise également très souvent les coefficients $J_n = -C_{n0}$. Dans les cas où $m \neq 0$, C_{nm} et S_{nm} représentent les harmoniques tesséraux de degré n et d'ordre m .

La formule (I1) peut être développée en fonction des éléments orbitaux du satellite [Kaula 1966] :

$$\mathcal{R} = \frac{\mu}{a} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{R_e}{a} \right)^n \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n F_{nmp}(I) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{npq}(e) \mathcal{S}_{nmpq}(l, g, h, \theta) \quad (\text{I2})$$

F_{nmp} sont des fonctions de l'inclinaison et G_{npq} sont des séries infinies dépendant de l'excentricité. θ est le temps sidéral.

Les fonctions \mathcal{S}_{nmpq} sont définies par :

$$\mathcal{S}_{nmpq} = \begin{bmatrix} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{bmatrix} \begin{matrix} (n-m) \text{ pair} \\ (n-m) \text{ impair} \end{matrix} \cos \psi_{nmpq} + \begin{bmatrix} S_{nm} \\ C_{nm} \end{bmatrix} \begin{matrix} (n-m) \text{ pair} \\ (n-m) \text{ impair} \end{matrix} \sin \psi_{nmpq}$$

$$\text{avec } \psi_{nmpq} = (n - 2p)g + (n - 2p + q)l + m(h - \theta)$$

On constate que dans le cas des harmoniques zonaux ($m = 0$), la perturbation est indépendante de l'ascension droite du nœud h et du temps sidéral θ . Cette formulation du potentiel peut être utilisée dans les équations de Lagrange pour décrire l'évolution correspondante des éléments orbitaux :

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial l} \\ \dot{e} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial g} + \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial l} \\ \dot{I} = \frac{-1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial h} + \frac{\cos I}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial g} \\ \dot{h} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \\ \dot{g} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cos I}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \\ \dot{l} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \end{cases} \quad (\text{I3})$$

$$\text{avec } n^2 a^3 = \mu.$$

Les périodes reliées aux angles sont de 1 jour pour θ , quelques heures pour l , quelques dizaines à quelques milliers de jours pour g et h suivant les valeurs de a , e et I .

On montre que l'on peut différencier plusieurs effets suivant les harmoniques considérés :

- Les harmoniques zonaux de degré pair engendrent des variations à courtes périodes (arguments $jl + kg$) et à longues périodes (arguments kg) sur tous les éléments. On constate aussi des effets séculaires sur les angles l , g et h de plusieurs dizaines de kilomètres par jour.
- Les harmoniques zonaux de degré impair engendrent des variations à courtes périodes (arguments $jl + kg$) et à longues périodes (arguments kg) et des effets séculaires très faibles sur les angles.
- Les harmoniques tesséraux engendrent des variations à courtes périodes (arguments $jl + kg + ih + s\theta$) sauf en cas de résonance ($m \neq 0$ et $\dot{\psi}_{nmpq} < \dot{\theta}$) où les périodes correspondantes peuvent atteindre plusieurs années.

Le satellite subit d'autres perturbations telles que l'attraction par le Soleil et la Lune qui induit de faibles variations à courtes périodes mais des effets à longues périodes importants. Ces corps provoquent également des déplacements de masses à l'intérieur de la Terre qui se répercutent sur le mouvement du satellite ; ce sont les effets de marées.

Les forces d'origine non gravitationnelle sont délicates à modéliser précisément. Parmi elles, les deux plus importantes sont le freinage atmosphérique et la pression de radiation solaire directe. L'effet principal du freinage est une décroissance séculaire du demi-grand axe. La pression de radiation solaire produit essentiellement des variations à courtes et longues périodes.

P. Exertier a donné une revue de ces différentes perturbations et de leur formulation [**Exertier 1988**].

I.B. Méthodes utilisées pour intégrer le mouvement du satellite

On ne peut dissocier les efforts qui ont été faits pour décrire l'évolution du satellite artificiel, du travail visant à mieux déterminer les forces qui perturbent son mouvement. Historiquement l'utilisation de modèles de forces de plus en plus complets se retrouve dans les projets visant à calculer les coefficients du potentiel terrestre. Cela n'empêche pas qu'une modélisation précise du mouvement ait d'autres applications (positionnement terrestre et analyse de missions par exemple). On peut regrouper les méthodes d'intégration en trois grandes catégories : les méthodes analytiques, les méthodes numériques et les méthodes mixtes analytiques-numériques.

1. Méthodes analytiques

Ce sont les premières méthodes qui ont été utilisées et qui ont produit les meilleurs modèles de potentiel terrestre jusqu'en 1973 [**Kozai 1961a, 1969, Lundquist et Veis 1966, Gaposchkin et Lambeck 1969, Gaposchkin 1973**]. Elles reposent essentiellement sur les travaux de Brouwer et de Kozai pour le traitement des perturbations dues aux harmoniques zonaux [**Brouwer 1959, Kozai 1962a**], des perturbations luni-solaires [**Kozai 1966**] et de la pression de radiation solaire directe [**Kozai 1961b**]. Le développement de Kaula permet d'intégrer l'effet des harmoniques tesséraux non résonnants au premier ordre [**Kaula 1966**].

Avantages :

- on obtient une information très riche sur l'influence des différentes perturbations et sur les effets des différents paramètres sur le comportement du mouvement,
- une fois la théorie établie, les calculs pour obtenir une position à une date donnée à partir de conditions initiales sont très rapides,
- une théorie analytique peut être valable sur une très longue durée.

Inconvénients :

- la construction d'une théorie analytique est très lourde,
- beaucoup de perturbations sont très difficiles ou même impossibles à prendre en compte avec une bonne précision : résonances, perturbations luni-solaires (effets à longues périodes), pression de radiation solaire (dans le cas où le satellite passe à l'ombre de la Terre), freinage atmosphérique...
- aucune théorie n'est valable pour toutes les configurations : faibles et fortes excentricités, faibles et fortes inclinaisons, inclinaison critique...

2. Méthodes numériques

L'intégration purement numérique a été utilisée depuis le milieu des années 1960 mais ne s'est imposée complètement qu'environ 10 ans plus tard. Depuis, tous les modèles géodynamiques (détermination globale des coefficients du potentiel et des coordonnées de stations) ont utilisé exclusivement cette méthode : modèles GRIM (GRGS/France et DGF/Allemagne), GEM (Goddard Space Flight Center/USA) et TEG (Université du Texas/USA).

Avantages :

- la mise en œuvre est moins lourde que pour les méthodes analytiques,
- on peut traiter toutes les perturbations avec une grande précision presque indépendamment de leurs complexité mathématique,
- il existe des formulations efficaces pour toutes les configurations, (coordonnées rectangulaires ou éléments orbitaux non singuliers).

Inconvénients :

- ces méthodes ne permettent pas d'obtenir directement des informations qualitatives sur le comportement du système,
- elles sont très coûteuses en temps de calcul, ce coût dépendant de la longueur de l'intervalle d'intégration,
- la précision obtenue dépend fortement de la longueur de l'intervalle d'intégration et se dégrade rapidement lorsque cette longueur croît. L'utilisation de l'intégration numérique est donc délicate sur de longues durées.

3. Méthodes mixtes analytiques-numériques

Dans ces méthodes, on intègre numériquement un système différentiel ne générant plus aucune variation à courtes périodes. Ce système différentiel est construit à partir du système différentiel initial à l'aide d'une théorie analytique éventuellement complétée par des quadratures numériques pour certaines perturbations. Historiquement les méthodes mixtes ont été introduites pour combler la déficience des méthodes analytiques dans le cas des résonances profondes [**Gedeon, Douglas et Palmiter 1967**]. Aujourd'hui on les considère plutôt comme des remèdes à certaines faiblesses de l'intégration numérique dans le cas des études sur de longs intervalles de temps. En effet, l'élimination des courtes périodes permet d'utiliser un long pas de calcul lors de l'intégration numérique. Cela réduit à la fois le coût en temps de calcul et les effets des erreurs d'arrondis et de troncatures.

Suivant le soin que l'on apporte à leur mise en œuvre et le contexte dans lequel on les utilise, ces méthodes peuvent combiner les avantages des méthodes analytiques et numériques. Nous avons dit qu'elles peuvent remédier à une grande partie des inconvénients du numérique pur. Elles conservent cependant une partie de la lourdeur de

construction liée aux méthodes analytiques. Quant au problème de la précision, il faut remarquer que les méthodes analytiques échouent essentiellement pour l'intégration des effets à longues périodes (résonances, perturbations luni-solaires). Or il s'agit justement ici d'intégrer numériquement ces effets.

Après quelques succès au début des années 1970 [**Wagner 1973**], cette méthode n'a pas suivi les progrès accomplis dans la précision des observations. Cependant elle n'a pas été vraiment remplacée pour les analyses à longues périodes qui deviennent pourtant de plus en plus prometteuses. En France, les travaux de G. Balmino, N. Borderies, P. Exertier et F. Barlier [**Borderies 1976, Exertier 1988, 1990**] ont permis de faire nettement progresser cette méthode et ont prouvé son fort potentiel.

I.C. La méthode de centrage

1. Principe

La méthode de centrage reprend le principe des méthodes mixtes décrites ci-dessus : on ne veut intégrer numériquement que les variations séculaires et à longues périodes. Autrement dit, il faut construire un système différentiel ne générant plus de variations à courtes périodes. Cette contrainte peut être suffisante lorsque l'on veut étudier le comportement à long terme d'un système dans la mesure où le système sans les courtes périodes produit des résultats qui ne divergent pas trop des résultats qu'aurait généré le système initial. Sur ce sujet de nombreux résultats sont rassemblés dans la thèse de N. Borderies [**Borderies 1976**].

Notre objectif est plus exigeant : nous voulons obtenir par ailleurs des variations séculaires et à longues périodes provenant des observations de satellites et les comparer aux résultats de notre modèle afin de l'améliorer et de déterminer certains paramètres physiques. Cela fait apparaître une contrainte supplémentaire ; il faut que les algorithmes qui éliminent les variations à courtes périodes des observations d'une part et du système différentiel d'autre part soient parfaitement cohérents. Dans le cas contraire, on attribuerait au modèle ou à des paramètres des écarts dus à des transformations différentes. Le principe de la méthode est illustré par la figure (I1).

Cette méthode ne permet pas seulement d'obtenir une intégration numérique mieux conditionnée. Elle permet aussi de décorrélérer de manière très naturelle les effets de différentes perturbations : en particulier pour le potentiel terrestre, seuls les harmoniques zonaux et les harmoniques tesséraux résonnants ont des effets séculaires ou à longues périodes. Or cette information très importante n'est pas exploitée de manière optimale dans les méthodes classiques qui utilisent des orbites calculées sur des intervalles de temps relativement courts (quelques jours ou semaines) : la détermination des coefficients se fait implicitement en grande partie à partir des effets à courtes périodes ce qui peut induire de fortes corrélations.

2. Historique de la méthode

Le premier programme relativement complet intégrant le mouvement du satellite artificiel affranchi des courtes périodes a été le programme ROAD développé au Goddard Space Flight Center au début des années 1970 [**Wagner, Douglas et Williamson 1974**]. Les éléments moyens observés étaient obtenus à partir d'éléments osculateurs résultant de l'ajustement d'orbites intégrés numériquement sur les observations. L'élimination des courtes périodes correspondant aux principales perturbations d'origine gravitationnelle était réalisée par les moyens suivants :

Potentiel terrestre :

Un développement de Kaula (formule I2) était utilisé pour mettre en évidence les

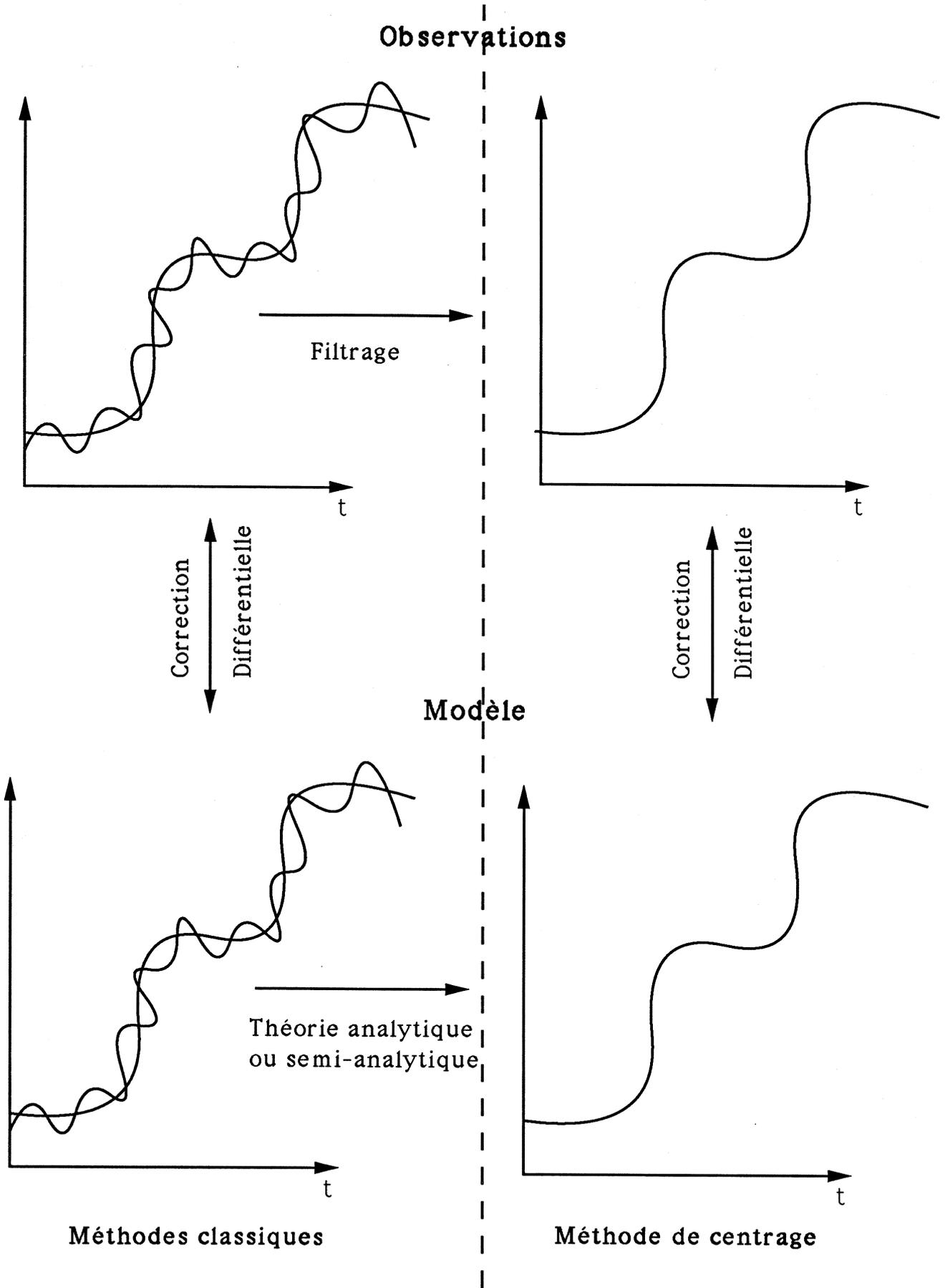


Figure I1 : Principe de la méthode de centrage

différentes fréquences impliquées. Seuls les termes indépendants des angles rapides l et θ ou résonnants étaient sélectionnés pour l'intégration numérique. La perturbation due à l'harmonique de degré 2, J_2 , étant beaucoup plus importante que les autres, des termes en J_2^2 provenant de la théorie de Brouwer étaient rajoutés.

Perturbation due à un troisième corps :

De la même manière, un développement de Kaula [Kaula 1962] était utilisé pour faire apparaître les angles l , g et h . Tous les termes faisant intervenir l'anomalie moyenne du satellite étaient éliminés.

Les marées terrestres étaient traitées d'une manière analogue.

Enfin, les perturbations dues au freinage atmosphérique et à la pression de radiation solaire étaient moyennées numériquement ou semi-numériquement sur une révolution.

Calcul des éléments moyens à partir des éléments osculateurs :

Une partie des courtes périodes était éliminée analytiquement en utilisant un développement de Kaula du potentiel terrestre. Une orbite décrivant une ellipse en mouvement (a , e , I constants et l , g , h linéaires par rapport au temps) était ensuite ajustée sur les éléments osculateurs obtenus. Cette ellipse permettait le calcul des éléments moyens au milieu de l'intervalle sur lequel elle avait été ajustée.

Le programme ROAD a concrétisé le concept de l'intégration d'un mouvement moyen. Cependant les algorithmes proposés présentaient plusieurs faiblesses :

- L'utilisation de développements de Kaula pour la moyennisation du système différentiel dans le cas des perturbations d'origine gravitationnelle donne des résultats trop limités. En effet cela impose des développements tronqués en excentricité qui dégradent la précision dès que l'excentricité n'est plus faible. De plus des couplages tels que $J_2 * J_3$ pouvant induire des effets à longues périodes de plusieurs décimètres d'amplitude étaient négligés.
- La cohérence des algorithmes utilisés pour la moyennisation du système différentiel et la moyennisation des observations n'est pas claire. Les différences étaient en partie absorbées grâce à l'ajustement de paramètres supplémentaires : sur chacun des éléments orbitaux des polynômes du temps de degré 5 pouvaient être ajustés, ce qui absorbait probablement une grande partie des biais et en particulier les variations séculaires. Il restait malgré tout de grosses différences périodiques d'argument $2g$ entre les observations simulées et une orbite moyenne modélisée par ROAD : les amplitudes des résidus étaient de plusieurs dizaines de mètres.

En 1976, N. Borderies et G. Balmino ont développé cette technique en France. Ils ont étudié plus en détail les fondements mathématiques de la méthode et amélioré la technique de calcul des éléments moyens issus des observations [Borderies 1976]. Mais il restait encore des différences entre les éléments moyens intégrés et les éléments moyens issus d'observations simulées. G. Balmino et son équipe ont poursuivi le perfectionnement des algorithmes.

En 1988, P. Exertier a encore obtenu des progrès substantiels. Il a amélioré le filtrage des observations, lui procurant une efficacité cohérente avec la précision actuelle des mesures de distances par télémétrie laser [**Exertier 1990**]. D'autre part il a affiné la construction du système différentiel moyen en ajoutant des variations à longues périodes manquantes en J_2^3 (théorie de Kozai) et en J_2^4 (théorie de Kinoshita). Il a également souligné le fait qu'une transformation canonique visant à éliminer des variations à courtes périodes pouvait aussi supprimer des variations à longues périodes. L'adéquation entre observations et modèle a été nettement améliorée puisque les différences étaient réduites à quelques mètres sur 6 mois pour les perturbations J_2 à J_4 [**Exertier 1988**].

Malgré tous ces progrès, la précision atteinte n'était pas encore suffisante pour que la technique soit vraiment concurrentielle. Mais une conclusion s'imposait : on ne devait pas se contenter de construire le système différentiel moyen en ajoutant différentes théories plus ou moins homogènes pour chaque perturbation ; une théorie la plus globale possible devait être développée spécialement dans le cadre de la méthode.

DEUXIÈME PARTIE :

ANALYSE DU PROBLÈME

II.A. Description générale de la méthode

Les principaux résultats mathématiques justifiant que le mouvement d'un satellite généré par un système moyen ne diverge pas du mouvement réel sont synthétisés dans la thèse de N. Borderies [**Borderies 1976**]. En pratique nous ramènerons la méthode à un problème très simple à définir : étant donné le mouvement réel d'un satellite on désire définir un mouvement moyen tel :

- que ce mouvement ne contienne plus de variations périodiques de période plus courte qu'une période de coupure T_c , mais conserve toutes les autres variations,
- qu'on puisse avoir accès à ce mouvement d'une part à l'aide des observations et d'autre part par l'intermédiaire d'un modèle relié à des paramètres physiques que l'on peut chercher à déterminer. Comme on ne considère pas le mouvement réel du satellite, les observations auront forcément subi une réduction pour représenter le mouvement moyen ; les observations ainsi réduites seront appelées pseudo-observations.

Cette définition de la méthode de centrage est encore vague mais elle contient toutes les contraintes nécessaires à la réalisation du but fixé : utiliser pleinement l'information à long terme issue de l'observation des satellites artificiels afin d'améliorer notre connaissance des forces qui agissent sur eux. Tout ce qui n'est pas encore précisé à ce stade (choix des variables décrivant le mouvement, de la période de coupure, de la réduction à appliquer aux observations) le sera par des contraintes inhérentes à la mise en œuvre de la méthode.

On voit apparaître trois grandes phases qui sont :

- le prétraitement des observations pour obtenir les pseudo-observations,
- l'élaboration d'un modèle décrivant le mouvement moyen : il s'agira de transformer le système différentiel générant le mouvement complet pour obtenir un système différentiel moyen,
- l'intégration numérique du système moyen, la comparaison des résultats avec les pseudo-observations et la correction différentielle permettant d'ajuster certains paramètres (conditions initiales du mouvement et paramètres physiques).

II.B. Méthode d'élimination des courtes périodes

1. Aspect général du mouvement du satellite

L'orbite d'un satellite et sa position sur cette orbite peuvent être décrites par six variables. De plus la partie du mouvement générée par la perturbation due aux harmoniques zonaux du potentiel terrestre (c'est-à-dire 99 pour cent de la perturbation totale pour la plupart des satellites) peut être représentée avec une très bonne approximation sous forme de somme périodique de l'anomalie moyenne et de l'argument du périhélie plus des variations séculaires sur les angles [**Brouwer 1959, Kozai 1962b, Deprit et Rom 1970...**]. C'est pourquoi, pour un raisonnement général, nous considérerons que l'orbite du satellite affranchie des variations séculaires peut être décrite par six signaux multipériodiques. Pour certaines perturbations de faible amplitude (pression de radiation solaire directe par exemple), cette description ne sera valable que localement dans le temps. Pour simplifier l'écriture, nous étudierons un signal de la forme :

$$s(t) = \sum_{k=0}^n a_k e^{i\omega_k t} \quad (\text{II1})$$

où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$, $\omega_0 = 0$, et pour tout k , $\frac{d\omega_k}{dt} = 0$.

2. Elimination des courtes périodes

Supposons que l'on veuille éliminer du signal s défini par (II1) toute variation de période inférieure à une période de coupure T_c c'est-à-dire de fréquence supérieure à $\omega_c = \frac{2\pi}{T_c}$. Il faut considérer les différentes formes sous lesquelles on peut avoir accès au signal pour envisager différentes techniques de filtrage donnant des résultats comparables.

Dans le cas des pseudo-observations, on connaît les valeurs numériques prises par le signal à différentes dates à l'intérieur d'un intervalle de temps. Nous sommes alors conduits à effectuer un filtrage numérique.

Dans le cas où le signal s est connu analytiquement sous une forme du type (II1), le filtrage analytique est immédiat. Supposons $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{n'} < \omega_c < \omega_{n'+1} < \dots < \omega_n$: les fréquences sont classées en ordre croissant et n' est l'entier tel que $\omega_{n'} < \omega_c < \omega_{n'+1}$. Le signal filtré s'écrit :

$$\bar{s}(t) = \sum_{k=0}^{n'} a_k e^{i\omega_k t} = \langle s(t) \rangle_{\theta_{n'+1}, \dots, \theta_n} \quad (\text{II2})$$

avec $\theta_k = \omega_k t$ et la notation $\langle . \rangle_{\theta_k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} . d\theta_k$. Mais en général on ne dispose pas d'une forme analytique telle que (II1) : les variables du mouvement sont gouvernées

par un système différentiel dont le second membre est périodique. On peut appliquer un filtrage de la forme (II2) au second membre du système mais cet algorithme n'est valable qu'au premier ordre. Ce problème sera approfondi au paragraphe II.D.

Enfin certaines perturbations assez faibles dérivent d'un système différentiel dont le second membre est presque périodique mais dépend aussi de paramètres dont les variations temporelles ne sont pas connues sous forme algébrique. C'est par exemple le cas du freinage atmosphérique dont la modélisation utilise les observations de l'activité solaire. Cette forme exclut tout filtrage analytique. On a recours à un calcul de moyenne par quadrature numérique :

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{T_M} \int_{t-\frac{T_M}{2}}^{t+\frac{T_M}{2}} s(\tau) d\tau \quad (\text{II3})$$

où T_M est une période qu'il faut choisir.

Si on applique ce calcul au signal périodique défini par (II1) on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= \frac{1}{T_M} \int_{t-\frac{T_M}{2}}^{t+\frac{T_M}{2}} \sum_{k=0}^n a_k e^{i\omega_k \tau} d\tau \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\sin \lambda_k}{\lambda_k} a_k e^{i\omega_k t} \end{aligned} \quad (\text{II4})$$

avec $\lambda_k = \omega_k T_M / 2 = \pi T_M / T_k$

\tilde{s} est évidemment différent de \bar{s} . En effet \tilde{s} ne représente pas un vrai signal filtré puisque toutes les fréquences ont encore une contribution. D'autre part les variations à longues périodes (c'est-à-dire de période supérieure à T_c) sont altérées.

$$\begin{aligned} \bar{s}(t) - \tilde{s}(t) &= \sum_{k=1}^{n'} \left[1 - \frac{\sin \lambda_k}{\lambda_k} \right] a_k e^{i\omega_k t} - \sum_{k=n'+1}^n \frac{\sin \lambda_k}{\lambda_k} a_k e^{i\omega_k t} \\ &= R_{LP} - R_{CP} \end{aligned}$$

- Comme $1 - \frac{\sin \lambda_k}{\lambda_k} \sim \lambda_k^2 / 6$ au voisinage de 0, l'altération R_{LP} des longues périodes sera d'autant plus faible que T_M / T_k sera faible.
- Le reste à courtes périodes R_{CP} tend vers 0 pour une période T_M tendant vers l'infini mais ce choix n'est pas réaliste. Cependant ce reste s'annule rigoureusement dans le cas particulier où le rapport T_M / T_k prend des valeurs entières. Ceci est difficile à réaliser s'il existe plusieurs périodes à éliminer. En pratique, pour les perturbations concernées une seule courte période est clairement identifiée ; c'est la période de révolution du satellite. Sachant que les longues périodes (correspondant à l'argument du périégée et à la longitude du nœud) sont plusieurs centaines de fois plus grandes que la période de révolution, on peut évaluer l'erreur relative commise

sur les contributions correspondantes : $1 - \frac{\sin \lambda_k}{\lambda_k}$. L'erreur est 1.610^{-4} pour un rapport 100 et 6.610^{-6} pour un rapport 500.

On peut conclure qu'un calcul de moyenne du système différentiel sur une révolution donne un résultat suffisamment proche d'un vrai filtrage dans le cas de perturbations pour lesquelles la courte période dominante est la période de révolution du satellite : les variations à longues périodes sont peu altérées tandis que les variations à courtes périodes autres que la période de révolution seront mal filtrées et agiront comme un bruit lors de la comparaison du modèle avec les observations.

On voit apparaître la principale difficulté de réalisation pratique de la suppression des courtes périodes : il n'est pas simple d'obtenir des filtrages des observations et du modèle qui soient cohérents.

3. Choix d'une période de coupure

Le choix de la période de coupure est évidemment lié au spectre des variations du mouvement du satellite. Le traitement fait intervenir un filtrage numérique des observations ; une nette séparation entre les fréquences existantes à conserver et à éliminer favorise cette opération. Il existe une séparation naturelle entre les périodes inférieures à 1 jour reliées aux perturbations dues aux harmoniques tesséraux non résonnants du potentiel terrestre et les périodes de quelques jours générées par les résonances. On optera donc pour une période seuil comprise entre 1 et 2 jours. Ce choix a en outre l'avantage d'éviter l'élimination des contributions reliées aux résonances entre le mouvement du satellite et la rotation de la Terre. Cette élimination serait très difficile à réaliser avec une précision acceptable dans le modèle analytique et laisserait subsister un fort bruit résiduel.

Le choix d'une période de coupure comprise entre 1 et 2 jours implique que, hormis les cas de résonances, on élimine toutes les contributions dépendant de l'anomalie moyenne du satellite ou du temps sidéral.

4. Vocabulaire utilisé

Les géodésiens et les mécaniciens célestes n'utilisant pas toujours un vocabulaire identique, il est utile de préciser la terminologie que nous adopterons.

- Pour reprendre le vocabulaire utilisé en géodésie spatiale, nous désignerons par *éléments moyens* (ou encore *variables moyennes*), des éléments ne comportant plus de variations à courtes périodes (les courtes périodes sont les périodes inférieures à la période de coupure). Cette définition est différente de celle des mécaniciens célestes qui désignent par éléments moyens des éléments ne comportant plus aucune variation périodique.

- Par opposition nous appellerons *éléments instantanés*, les variables décrivant le mouvement réel du satellite avec l'ensemble de ses variations.
- Les éléments moyens tels que nous les avons définis, sont déterminés à des variations à longues périodes près. Nous appellerons éléments moyens centrés ou plus simplement *éléments centrés*, des variables contenant exactement les mêmes variations séculaires et à longues périodes que les éléments instantanés : le mouvement centré est un mouvement moyen passant "au centre" du mouvement instantané (d'où le nom de la méthode). Dans la théorie du traitement du signal, ces variables correspondent à des variables filtrées.
- En reprenant les définitions ci-dessus, on associera les mouvements respectivement instantanés, moyens et centrés aux éléments respectivement instantanés, moyens et centrés. Seul le mouvement instantané est un mouvement physique, les mouvements moyens et centrés étant des notions mathématiques.
- Les systèmes différentiels moyens et centrés décrivent l'évolution des variables moyennes et centrées. Le *système différentiel complet* ou *initial* (sous-entendu non transformé) décrit l'évolution des éléments instantanés.

5. Non unicité du mouvement centré

Il existe de nombreux ensembles de variables souvent utilisés pour décrire le mouvement du satellite : position et vitesse en coordonnées rectangulaires, coordonnées sphériques, éléments orbitaux, variables de Delaunay... Si on se limite à la perturbation due à l'harmonique J_2 du potentiel terrestre, on peut décrire l'évolution temporelle de chacune des variables x_j ($j = 1, 6$) du mouvement instantané par une série tronquée de la forme :

$$x_j = x_{j,0} + n_j t + \sum_{k,p} \alpha_{j,k,p} e^{i(kl^* + pg^*)} \quad (\text{II5})$$

- $x_{j,0}$ est la valeur initiale,
- n_j est un moyen mouvement qui peut être nul,
- k et p sont des entiers
- $\alpha_{j,k,p}$ est un complexe
- l^* et g^* sont des angles linéaires par rapport au temps : ce sont les composantes séculaires de l'anomalie moyenne et de l'argument du périhélie.

La variable centrée \bar{x}_j correspondant à x_j s'écrit :

$$\bar{x}_j = x_{j,0} + n_j t + \sum_p \alpha_{j,0,p} e^{i(pg^*)} \quad (\text{II6})$$

Considérons deux jeux de variables représentés par les vecteurs X et Y . Il existe toujours une transformation les reliant :

$$Y = K(X, \mu) \quad (\text{II7})$$

μ étant la constante géocentrique de la gravitation.

Si l'on note,

$$\begin{aligned} X &= X_0 + n_X t + \sum_{k,p} \alpha_{k,p} e^{i(kl^* + pg^*)} \\ Y &= Y_0 + n_Y t + \sum_{k,p} \beta_{k,p} e^{i(kl^* + pg^*)} \end{aligned} \quad (\text{II8})$$

on a en général :

$$\begin{aligned} n_Y &\neq K(n_X, \mu) \\ \beta_{k,p} &\neq K(\alpha_{k,p}, \mu) \text{ et en particulier } \beta_{0,p} \neq K(\alpha_{0,p}, \mu) \end{aligned}$$

En effet, les égalités ne sont satisfaites que si K est une fonction linéaire de X . Ce n'est pas le cas lorsque les ensembles de variables X et Y sont fondamentalement différents. On en conclut d'après (II6) que les variables centrées \bar{X} et \bar{Y} ne satisfont généralement plus la relation (II7). Autrement dit la notion de mouvement centré n'est pas intrinsèque mais dépend du jeu de variables choisi pour décrire le mouvement.

Exemple : supposons que la variable de Delaunay L varie de la manière suivante :

$$L = A \sin l^* + B \sin g^* + C \sin(l^* + g^*)$$

A , B et C étant des réels. La variable centrée correspondante s'écrit :

$$\bar{L} = B \sin g^*$$

Le demi-grand axe \tilde{a} équivalent a pour expression

$$\mu \tilde{a}(\bar{L}) = \bar{L}^2 = \frac{B^2}{2} (1 - \cos 2g^*)$$

Mais si on repart de l'expression de a en fonction de L on obtient :

$$\begin{aligned} \mu a(L) &= L^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[A^2 (1 - \cos 2l^*) + B^2 (1 - \cos 2g^*) + C^2 (1 - \cos(2l^* + 2g^*)) \right] \\ &\quad + AB \left[\cos(l^* - g^*) - \cos(l^* + g^*) \right] + AC \left[\cos g^* - \cos(2l^* + g^*) \right] \\ &\quad + BC \left[\cos l^* - \cos(l^* + 2g^*) \right] \\ \mu \bar{a}(L) &= \frac{1}{2} (A^2 + B^2 + C^2 - B^2 \cos 2g^*) + AC \cos g^* \end{aligned}$$

Il est clair que le demi-grand axe centré \bar{a} diffère de la projection \tilde{a} de \bar{L} :

$$\mu\bar{a}(L) - \mu\tilde{a}(\bar{L}) = \frac{A^2 + C^2}{2} + AC \cos g^*$$

Il manque à \tilde{a} aussi bien des termes constants que des variations à longues périodes. Ces termes proviennent du produit ($\mu a = L * L$) de variations à courtes périodes. De ce fait ils sont au moins du second ordre.

Ce caractère non intrinsèque du mouvement centré peut apparaître comme une entrave sérieuse à la viabilité de la méthode de centrage. Celle-ci perd effectivement de sa généralité. Mais sa faculté à restituer de l'information à long terme sur la dynamique du système n'est pas diminuée. Cela nous rappelle que nous n'étudions pas directement le mouvement d'un objet réel mais que nous utilisons comme intermédiaire un objet mathématique qui peut être défini de différentes manières.

D'un point de vue pratique, la non unicité du mouvement centré crée des contraintes (il faudrait dire mouvement centré dans un certain jeu de variables). En particulier une théorie analytique transformant le système différentiel initial en système différentiel centré ne sera utilisable que pour un paramétrage fixé lors de son élaboration. On ne peut changer le paramétrage sans refaire la théorie. De plus pour une comparaison licite entre modèle et observations, ces dernières devront résulter d'un filtrage des variables du même type que celles utilisées pour construire le système différentiel centré.

II.C. Filtrage des observations

Il s'agit ici de transformer les observations provenant de la poursuite des satellites (angles ou vitesses radiales ou distances mesurées depuis certaines stations terrestres) en pseudo-observations équivalentes aux éléments moyens issus du modèle. Pour des raisons de mise en œuvre qui seront précisées plus loin, les variables utilisées dans le modèle sont les variables de Delaunay :

$$\begin{aligned} l &= M & L &= \sqrt{\mu a} \\ g &= \omega & G &= \sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2} \\ h &= \Omega & H &= \sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2} \cos I \end{aligned}$$

a , e , I , Ω , ω et M étant les notations habituelles pour les éléments orbitaux.

Les différentes étapes conduisant des observations brutes aux pseudo-observations sont les suivantes :

- (1) La première phase consiste à représenter les observations liant des stations terrestres au satellite par les coordonnées successives du satellite. Plus précisément, on ajuste une orbite qui restitue le mieux possible les observations. Pour un modèle dynamique donné, les six paramètres indépendants ajustés sont les conditions initiales du mouvement. Ce type de calcul très lourd est maintenant courant en géodésie spatiale. Le Groupe de Recherches en Géodésie Spatiale (GRGS) a développé le logiciel "GIN" qui peut prendre en compte la plupart des types de mesures faites sur les satellites artificiels. Les coordonnées du satellite ainsi calculées sur des arcs de quelques jours permettent par exemple de restituer les distances mesurées par télémétrie laser avec une précision d'environ 10 cm (1σ). Disposant d'une éphéméride décrivant bien les observations, il est alors possible de calculer les coordonnées du satellite à toute date de la période d'observation ; en pratique les points sont tabulés avec un pas de quelques minutes. Remarquons qu'à ce stade la nature des variables utilisées pour décrire le mouvement n'est pas importante.
- (2) Si les coordonnées utilisées lors de la phase (1) ne correspondent pas au type de variables centrées que l'on a choisi (en l'occurrence les variables de Delaunay) il faut les transformer.
- (3) On procède au filtrage proprement dit. Dans ce but, une procédure semi-analytique très efficace a été développée initialement par N. Borderies et G. Balmino puis reprise par P. Exertier [**Exertier, 1990**]. Elle comprend une phase analytique et une phase numérique.

La phase analytique consiste à retirer une partie des courtes périodes à l'aide d'une théorie analytique. Il n'existe pas de bonne théorie pour toutes les perturbations mais on peut cependant filtrer ainsi une grande partie des variations à courtes périodes dues aux perturbations du potentiel terrestre, de la Lune et du Soleil. A ce stade, les théories choisies doivent absolument considérer le type de variables adoptées pour décrire le

mouvement moyen centré. Au besoin une théorie peut plus ou moins facilement être transformée analytiquement pour fonctionner avec les variables voulues. Les théories actuellement utilisées pour le filtrage des observations sont celles de Berger [**Berger 1975**] pour les harmoniques zonaux de J_2 à J_7 et de Kaula [**Kaula 1966**] pour les autres harmoniques zonaux, les harmoniques tesséraux et les perturbations luni-solaires. Ces développements ont été créés par leurs auteurs pour fonctionner en éléments orbitaux mais nous les avons transformés pour pouvoir filtrer des variables de Delaunay [**Appendice 4**]. Cette première phase analytique permet de réduire les amplitudes des courtes périodes de quelques kilomètres à quelques décimètres. Cela facilite largement le filtrage numérique qui suit.

Le filtrage numérique se fait sur des intervalles (ou fenêtres) dont la longueur est de un ou quelques jours. Sur chacune des fenêtres on ajuste d'abord un terme polynomial par rapport au temps qui est retiré avant le filtrage numérique et sera rajouté après. Le signal filtré s'obtient alors par un produit de convolution avec une fonction dont la transformée de Fourier est une fonction porte :

$$\bar{s}(t) = \int_{-\frac{F}{2}}^{+\frac{F}{2}} h_R(\tau) s(t - \tau) d\tau \quad (\text{II9})$$

- F est la taille de la fenêtre choisie,
- s est le signal à filtrer,
- $h_R = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t}$

L'intégrale est calculée numériquement en utilisant des valeurs discrètes de h_R et de s . N valeurs de \bar{s} équidistantes sont ainsi calculées sur le quart central de la fenêtre ($[t_0 - F/8; t_0 + F/8]$) et on ne retient que la valeur en t_0 obtenue par moyenne arithmétique :

$$\bar{s}(t_0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{s}(t_i) \quad (\text{II10})$$

II.D. Filtrage du système différentiel

Le problème est ici d'obtenir un modèle générant un mouvement centré c'est-à-dire des paramètres contenant exactement les variations séculaires et à longues périodes des variables choisies pour décrire le mouvement. Le point de départ dont nous disposons est le système différentiel décrivant le mouvement complet avec ses courtes et ses longues périodes. La solution qui a souvent été appliquée par divers auteurs est la moyennisation numérique du second membre du système complet : un second membre moyen est calculé par quadrature numérique du second membre complet sur une révolution. Cette méthode a l'avantage d'être assez simple à développer. Cependant elle est coûteuse en temps de calcul et insuffisamment précise pour les perturbations importantes. Son coût en temps de calcul provient du fait que le second membre initial est calculé presque aussi souvent que lors d'une intégration numérique classique. Son imprécision est due au fait que (comme nous le montrerons plus loin) cet algorithme n'est valable qu'au premier ordre. Au contraire la construction analytique d'un système différentiel moyen générant directement les variables centrées nécessite des calculs algébriques très importants mais doit conduire à une intégration numérique plus rapide, plus précise et contrôlable.

1. Méthode générale de moyennisation analytique

Considérons un satellite soumis à une perturbation simple telle que la partie zonale du potentiel terrestre. La perturbation ne dépend pas explicitement du temps et il existe une seule variable rapide à éliminer : l'anomalie moyenne. D'autre part il n'existe pas de résonances (sauf à l'inclinaison critique). Si on choisit comme variables les éléments orbitaux $[a, e, I, h, g, l] = [E_i (i = 1, 5), l]$ le système perturbé s'écrit (**Exertier 1988**)

$$\begin{cases} \dot{E}_i = \varepsilon \mathcal{R}_i(E, l) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & (i = 1, 5) \\ \dot{l} = n(E) + \varepsilon \mathcal{R}_6(E, l) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (\text{III11})$$

ε étant un petit paramètre (J_2 par exemple) et \mathcal{R}_i des fonctions 2π périodiques en l .

On veut obtenir des éléments moyens (\bar{E}, \bar{l}) ne contenant plus de courtes périodes. Ceci est réalisé si le second membre du système différentiel ne contient plus la variable l :

$$\begin{cases} \dot{\bar{E}}_i = \varepsilon \langle \mathcal{R}_i(E, l) \rangle_l + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & (i = 1, 5) \\ \dot{\bar{l}} = \langle n(E) \rangle_l + \varepsilon \langle \mathcal{R}_6(E, l) \rangle_l + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases}$$

Mais cette définition n'est pas utilisable d'un point de vue pratique car les membres de gauche et de droite du système ne sont pas exprimés dans les mêmes variables. On ne rencontre pas ce problème en utilisant un changement de variables définissant implicitement les éléments centrés (\bar{E}, \bar{l}) .

$$\begin{cases} E_i = \bar{E}_i + \varepsilon C_i(\bar{E}, \bar{l}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & (i = 1, 5) \\ l = \bar{l} + \varepsilon C_6(\bar{E}, \bar{l}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (\text{II12})$$

Les fonctions C_i contiennent exactement les variations à courtes périodes de (E_i, l) .

Les variables centrées (\bar{E}_i, \bar{l}) vérifient un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{\bar{E}}_i = \varepsilon G_i(\bar{E}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & (i = 1, 5) \\ \dot{\bar{l}} = n(\bar{E}) + \varepsilon G_6(\bar{E}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (\text{II13})$$

les fonctions G_i ne devant plus contenir de courtes périodes. On obtient les relations entre \mathcal{R}_i , C_i et G_i en dérivant (II12) par rapport au temps et en utilisant les expressions de (\dot{E}_i, \dot{l}) et $(\dot{\bar{E}}_i, \dot{\bar{l}})$ données par (II11) et (II13). Pour cela il faut développer les fonctions \mathcal{R}_i en fonction de (\bar{E}_i, \bar{l}) à l'aide de l'expression (II12). L'identification des termes du premier ordre conduit à

$$\begin{cases} G_i(\bar{E}) + \frac{\partial C_i}{\partial \bar{l}} n(\bar{E}) = \mathcal{R}_i(\bar{E}, \bar{l}) & (i = 1, 5) \\ G_6(\bar{E}) + \frac{\partial C_6}{\partial \bar{l}} n(\bar{E}) = \mathcal{R}_6(\bar{E}, \bar{l}) + \frac{\partial n}{\partial \bar{E}_j} C_j(\bar{E}, \bar{l}) \end{cases} \quad (\text{II14})$$

On dispose de 6 équations avec 12 inconnues (les fonctions C_i et G_i). Les seconds membres du nouveau système (II13) ne doivent plus contenir l'anomalie moyenne ; on choisit pour les 5 premières équations

$$\begin{cases} G_i(\bar{E}) = \langle \mathcal{R}_i(\bar{E}, \bar{l}) \rangle_{\bar{l}} & (i = 1, 5) \\ \frac{\partial C_i}{\partial \bar{l}} = \frac{1}{n(\bar{E})} \{ \mathcal{R}_i(\bar{E}, \bar{l}) - G_i(\bar{E}) \} \end{cases} \quad (\text{II15})$$

Les C_i s'obtiennent après intégration par rapport à l et peuvent être utilisés dans la dernière équation :

$$\begin{cases} G_6(\bar{E}) = \langle \mathcal{R}_6(\bar{E}, \bar{l}) \rangle_{\bar{l}} + \frac{\partial n}{\partial \bar{E}_j} \langle C_j(\bar{E}, \bar{l}) \rangle_{\bar{l}} \\ \frac{\partial C_6}{\partial \bar{l}} = \frac{1}{n(\bar{E})} \left\{ \mathcal{R}_6(\bar{E}, \bar{l}) - G_6(\bar{E}) + \frac{\partial n}{\partial \bar{E}_j} C_j(\bar{E}, \bar{l}) \right\} \end{cases} \quad (\text{II16})$$

On peut trouver les calculs du second ordre dans [Exertier 1988] ou [Morisson 1966]. On peut y constater qu'au-delà du premier ordre les fonctions G_i ne sont plus les simples moyennes des seconds membres initiaux. C'est pour cette raison qu'un algorithme visant simplement à moyenner les seconds membres n'est valable qu'au premier ordre.

La méthode de moyennisation présentée ci-dessus est la méthode de Bogoliubov et Mitropolsky. Comme l'a signalé Morisson, il existe un arbitraire dans le choix des fonctions C_i : elles résultent d'une intégration par rapport à \bar{l} et sont donc définies à une fonction à longues périodes près. Mais cet auteur ne donne pas de choix privilégié pour la constante d'intégration. Dans notre cas, on doit choisir les constantes d'intégration de façon à obtenir des fonctions C_i ne conservant aucune longue période donc de moyenne nulle par rapport à \bar{l} :

$$C_i^*(\bar{E}, \bar{l}) = C_i(\bar{E}, \bar{l}) - \langle C_i(\bar{E}, \bar{l}) \rangle_{\bar{l}} \quad (\text{II17})$$

Nous disposons donc d'une procédure pour éliminer exactement les variations dépendant de l'anomalie moyenne. Cependant cela n'assure pas forcément une bonne cohérence avec le filtrage numérique des observations. En effet cette opération se fait en considérant la variable temps et filtre donc implicitement des termes reliés à une variable l^* telle que $\dot{l}^* = n^*$ soit constante. Or, lorsque le mouvement n'est pas képlérien, ni \dot{l} ni $\dot{\bar{l}}$ ne sont constantes. Une étude approfondie est donc nécessaire.

2. Choix de la variable rapide à éliminer

On se pose ici le problème de choisir quelle variable rapide ($l, \bar{l}, l + \omega \dots$) on doit éliminer analytiquement pour être cohérent avec le filtrage numérique des observations.

Considérons le mouvement du satellite perturbé par les harmoniques zonaux tel que l'on sait le modéliser analytiquement. En variables de Delaunay l'hamiltonien perturbé $\mathcal{H}(l, g, -, L, G, H)$ est indépendant de la longitude du nœud h . On effectue deux changements de variables canoniques destinés à éliminer successivement les deux angles l et g de l'hamiltonien [**Brouwer 1959**] :

$$\begin{aligned} (l, g, h, L, G, H) &\longrightarrow (l', g', h', L', G', H') \longrightarrow (l'', g'', h'', L'', G'', H'') \\ \mathcal{H}(l, g, -, L, G, H) &\longrightarrow \mathcal{H}'(-, g', -, L', G', H') \longrightarrow \mathcal{H}''(-, -, -, L'', G'', H'') \end{aligned} \quad (\text{II18})$$

De sorte que le nouveau système différentiel s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dV_i''}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}''}{\partial v_i''} = 0 \\ \frac{dv_i''}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}''}{\partial V_i''} = n_i \end{cases} \quad (\text{II19})$$

avec les notations

$$v = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l \\ g \\ h \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L \\ G \\ H \end{vmatrix}$$

L'intégration est alors immédiate :

$$\begin{cases} V_i''(t) = V_i''(t_0) \\ v_i''(t) = v_i''(t_0) + n_i t \end{cases} \quad (\text{II20})$$

Pour g'' et h'' , les variations séculaires sont nulles lorsque le mouvement n'est pas perturbé mais ce n'est pas le cas pour la variable rapide l'' :

$$\begin{cases} n_1 = n_1^0 + \varepsilon n_1^1 \\ n_2 = \varepsilon n_2^1 \\ n_3 = \varepsilon n_3^1 \end{cases} \quad (\text{II21})$$

Puis on peut revenir aux variables initiales par des changements de variables dépendant du petit paramètre :

$$\begin{cases} V_i'(t) = V_i''(t) + \varepsilon R_i''(-, g'', -, L'', G'', H'', \varepsilon) \\ v_i'(t) = v_i''(t) + \varepsilon r_i''(-, g'', -, L'', G'', H'', \varepsilon) \end{cases} \quad (\text{II22})$$

R_i'' et r_i'' sont des fonctions 2π périodiques en g'' , certaines pouvant être nulles.

Enfin :

$$\begin{cases} V_i(t) = V_i'(t) + \varepsilon R_i'(l', g', -, L', G', H', \varepsilon) \\ v_i(t) = v_i'(t) + \varepsilon r_i'(l', g', -, L', G', H', \varepsilon) \end{cases} \quad (\text{II23})$$

R_i' et r_i' sont 2π périodiques en l' et g' .

On peut finalement exprimer V_i et v_i en fonction de V_i'' et v_i'' .

$$\begin{cases} V_i(t) = V_i''(t) + \varepsilon \tilde{R}_i''(l'', g'', -, L'', G'', H'', \varepsilon) \\ v_i(t) = v_i''(t) + \varepsilon \tilde{r}_i''(l'', g'', -, L'', G'', H'', \varepsilon) \end{cases} \quad (\text{II24})$$

Si on augmente les angles v_i'' de 2π , les moments V_i' sont inchangées et les angles v_i' augmentent de 2π (d'après (II22)). Comme R_i' et r_i' sont 2π périodiques en l' et g' , on en conclut que les V_i sont inchangés et que les angles v_i croissent aussi de 2π . Toutes les différences $(V_i - V_i'')$ et $(v_i - v_i'')$ sont donc 2π périodiques en l'' et g'' .

Soit s l'une des variables (l, g, h, L, G, H) . En vertu de la relation (II24), on peut exprimer s sous la forme :

$$s(t) = s''(t) + \sum_{i,j} a_{i,j}''(L'', G'', H'') e^{\sqrt{-1}(il'' + jg'')} \quad (\text{II25})$$

Ici les angles l'' et g'' sont linéaires par rapport au temps, (d'après II20) donc l'expression de s donnée sous la forme (II25) est propice à un filtrage par élimination

des termes comportant l'' . Ce filtrage sera cohérent avec un filtrage numérique du même signal connu sous la forme d'un échantillonnage temporel.

$$\begin{aligned}\bar{s}(t) &= s''(t) + \sum_j a''_{0,j}(L'', G'', H'') e^{\sqrt{-1}jg''} \\ &= s''(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (s(t) - s''(t)) dl''\end{aligned}\quad (\text{II26})$$

Malheureusement, nous ne possédons pas toujours la forme analytique (II25) du signal. Si cela était le cas on aurait une solution analytique complète et toute méthode semi-numérique serait inutile. En revanche, certaines perturbations peuvent donner lieu à une bonne solution analytique partielle qui donne accès à s en fonction de (v', V') :

$$s(t) = s'(t) + \sum_{i,j} a'_{i,j}(L', G', H') e^{\sqrt{-1}(il' + jg')} \quad (\text{II27})$$

C'est pourquoi il est important de savoir s'il est licite de moyenner par rapport à l ou l' plutôt que par rapport à l'' . On peut écrire

$$\begin{aligned}s &= s'' + (s' - s'') + (s - s') \\ \text{donc } \bar{s} &= s'' + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ((s - s') + (s' - s'')) dl''\end{aligned}$$

Or $s' - s''$ est indépendant de l'' (formule II22) ; on en déduit :

$$\begin{aligned}\bar{s} &= s'' + (s' - s'') + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (s - s') dl'' \\ &= s' + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (s - s') dl''\end{aligned}\quad (\text{II28})$$

La relation (II22) permet d'écrire :

$$\begin{cases} l' = l'' + \tilde{l}'' \\ g' = g'' + \tilde{g}'' \end{cases} \quad (\text{II29})$$

\tilde{l}'' et \tilde{g}'' étant indépendants de l'' . On reporte (II29) dans (II27) :

$$s - s' = \sum_{i,j} a'_{i,j}(L', G', H') e^{\sqrt{-1}(il'' + jg'')} e^{\sqrt{-1}(i\tilde{l}'' + j\tilde{g}'')} \quad (\text{II30})$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\bar{s} &= s' + \sum_{i,j} a'_{i,j} e^{\sqrt{-1}(i\tilde{l}'' + j\tilde{g}'')} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\sqrt{-1}(il'' + jg'')} dl'' \\
&= s' + \sum_j a'_{0,j} e^{\sqrt{-1}j\tilde{g}''} e^{\sqrt{-1}jg''} \\
&= s' + \sum_j a'_{0,j} e^{\sqrt{-1}jg'} \\
\bar{s} &= s' + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (s - s') dl'
\end{aligned} \tag{II31}$$

Il est donc équivalent de moyenniser $(s - s'')$ par rapport à l'' ou $(s - s')$ par rapport à l' . Pour le montrer nous avons écrit $(s - s')$ en fonction de la variable rapide $l' = l'' + \tilde{l}''$, l'hypothèse importante étant que \tilde{l}'' soit indépendant de l'' . On peut généraliser ce résultat à toute variable $\theta = l'' + \alpha$ pourvu que α soit indépendant de l'' .

On peut en particulier utiliser les variables

$$\begin{aligned}
\varpi' &= l' + g' = l'' + (l' - l'') + g'' + (g' - g'') \\
\lambda' &= l' + g' + h'
\end{aligned}$$

En revanche il n'est pas correct d'adopter directement l'anomalie moyenne instantanée $l = l'' + \varepsilon \tilde{r}_1''(l'', g'', L'', G'', H'', \varepsilon)$ ou l'anomalie vraie.

Ceci répond à la question de la fin du paragraphe (II.D.1).

3. Moyennisation par transformations canoniques

La méthode de moyennisation de Bogoliudov et Mitropolsky permet d'éliminer la variable rapide de systèmes différentiels non hamiltoniens tel que que le système des équations de Lagrange. Cependant dans le cas du satellite artificiel perturbé par des forces d'origine gravitationnelle, le système peut s'écrire sous forme hamiltonienne. Cela permet d'utiliser des changements de variables par transformations canoniques à l'aide de fonctions génératrices. Cette formulation très intéressante allège considérablement les calculs. Dans ce cas le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}(x, X)}{\partial X_i} \\ \dot{X}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}(x, X)}{\partial x_i} \end{cases} \quad (i = 1, 3) \tag{II32}$$

Les variables $x_i (i = 1, 3)$ sont les variables de configuration et $X_i (i = 1, 3)$ sont les moments conjugués. \mathcal{H} est l'hamiltonien du système. Cette formulation apporte une contrainte supplémentaire sur le choix des variables : les éléments orbitaux ne conviennent

pas car ce ne sont pas des variables canoniques. Il existe plusieurs systèmes classiques de variables canoniques. Nous fixerons notre choix sur les variables de Delaunay l, g, h , $L = \sqrt{\mu a}$, $G = L\sqrt{1 - e^2}$, $H = G \cos I$ qui présentent plusieurs avantages :

- Ce sont des variables actions-angles ce qui a pour conséquence la séparation des variables trigonométriques et polynomiales (en particulier l'anomalie moyenne que nous voulons éliminer est l'une de ces variables).
- L'hamiltonien du système non perturbé s'exprime très simplement ($\mathcal{H}_0 = -\mu^2/2L^2$)
- Elles sont proches des éléments orbitaux auxquels nous avons l'habitude de nous référer dans le problème des deux corps.

Dans le cas où le système est perturbé, on développe \mathcal{H} en série de Taylor du petit paramètre :

$$\mathcal{H}(v, V) = \mathcal{H}_0(L) + \varepsilon \mathcal{H}_1(v, V) + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2(v, V) + \dots \quad (\text{II33})$$

avec les notations précédentes (II19).

Dans la méthode de Poincaré-Von Zeipel, on définit un changement de variables canoniques de (v, V) vers (v', V') par l'intermédiaire d'une fonction génératrice S dépendant des anciens angles v et des nouvelles actions V' :

$$S(v, V') = S_0(v, V') + \varepsilon S_1(v, V') + \varepsilon^2 S_2(v, V') + \dots \quad (\text{II34})$$

Le changement de variables est donné par :

$$\begin{aligned} v'_i &= \frac{\partial S}{\partial V'_i} \\ V_i &= \frac{\partial S}{\partial v_i} \end{aligned} \quad (\text{II35})$$

Le choix $S_0 = \sum_{i=1}^3 v_i V'_i$ assure un changement de variables proche de l'identité. Les autres termes du développement $S_1, S_2 \dots$ sont choisis ordre par ordre selon les critères à satisfaire. Le changement de variables produit un nouvel hamiltonien \mathcal{H}' :

$$\mathcal{H}'(v', V') = \mathcal{H}'_0(L') + \varepsilon \mathcal{H}'_1(v', V') + \varepsilon^2 \mathcal{H}'_2(v', V') + \dots \quad (\text{II36})$$

La conservation de l'hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}'(v', V') = \mathcal{H}(v, V) \quad (\text{II37})$$

Cette relation est explicitée en développant à la fois \mathcal{H}' et \mathcal{H} en fonction des variables mixtes (v, V') à l'aide de la relation (II35).

Ensuite l'identification ordre par ordre permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_0(L') &= \mathcal{H}_0(L') && \text{à l'ordre 0} \\ \mathcal{H}'_1(v, V') &= \mathcal{H}_1(v, V') + \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L'} \frac{\partial S_1}{\partial l} && \text{à l'ordre 1} \end{aligned} \quad (\text{II38})$$

Pour chaque ordre (sauf l'ordre 0) on a 1 équation et 2 inconnues au lieu de 6 équations et 12 inconnues pour la méthode précédente ; le progrès est net. Dans le but d'éliminer l'anomalie moyenne du nouvel hamiltonien, on choisit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_1(v, V') &= \langle \mathcal{H}_1(v, V') \rangle_l \\ \frac{\partial S_1}{\partial l} &= \frac{L'^3}{\mu^2} \{ \mathcal{H}'_1(v, V') - \mathcal{H}_1(v, V') \} \end{aligned} \quad (\text{II39})$$

Tout comme Brouwer [**Brouwer 1959**] nous avons choisi une fonction génératrice S dépendant de (v, V') . Ceci nous conduit naturellement à moyennner par rapport à l'ancienne variable l . Pour moyennner par rapport à l' , il suffit de refaire les développements avec une fonction génératrice dépendant des variables (v', V) .

S_1 s'obtient par intégration par rapport à l'anomalie moyenne et est donc également définie à une fonction à longues périodes près. Les calculs peuvent se poursuivre de la même manière ordre après ordre, leur complexité croissant très rapidement. Brouwer a ainsi calculé un hamiltonien d'ordre 2 ne contenant plus aucun angle pour le problème du satellite artificiel perturbé par les harmoniques zonaux J_2 à J_5 du potentiel terrestre. L'élimination du deuxième angle g nécessite un second changement de variables du même type que le premier mais nous ne nous y intéresserons pas ici.

La méthode de Poincaré-Von Zeipel décrite ci-dessus a deux inconvénients :

- au-delà du second ordre l'algorithme est lourd et malaisé à utiliser dans le cadre d'un calcul automatique,
- le changement de variables est mixte (chaque fonction transformée est exprimée à la fois avec des anciennes et des nouvelles variables) ; en particulier il ne donne pas directement l'expression des anciennes variables (v, V) en fonction des nouvelles (v', V') . Or cette expression est très importante puisque le filtrage consiste à assurer que les différences $v-v'$ et $V-V'$ ne contiennent aucune longue période (en effet ceci n'est pas réalisé à priori par la transformation qui garantit seulement l'élimination des courtes périodes).

Fonctionnant sur le même principe de transformation canonique avec fonction génératrice, la formulation de Deprit [**Deprit 1969, Deprit et Rom 1970, Henrard 1970**] est moins directe à introduire mais ne présente pas les deux inconvénients cités.

4. Algorithme de Deprit utilisant les transformées de Lie

a. Transformation canonique

On considère un changement de variables proche de l'identité dépendant d'un petit paramètre ε :

$$x = \begin{pmatrix} v \\ V \end{pmatrix} \longrightarrow y = \begin{pmatrix} v' \\ V' \end{pmatrix}$$

défini par :

$$x = X(y, \varepsilon) = y + \varepsilon X_1(y) + \frac{\varepsilon^2}{2!} X_2(y) + \dots \quad (\text{II40})$$

On a en particulier $X(y, 0) = y$.

Etant donnée une fonction $f(x, \varepsilon)$ infiniment différentiable, on cherche à l'exprimer en fonction des nouvelles variables y :

$$f(x, \varepsilon) = f(X(y, \varepsilon), \varepsilon) = g(y, \varepsilon) \quad (\text{II41})$$

On obtient par développement de Taylor en fonction de la variable indépendante ε :

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(\frac{d^n f}{d\varepsilon^n}(x, \varepsilon) \right)_{x=y, \varepsilon=0} \quad (\text{II42})$$

La dérivée totale de f par rapport à ε vaut :

$$\frac{df}{d\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial v_k} \frac{dv_k}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial V_k} \frac{dV_k}{d\varepsilon} \right) \quad (\text{II43})$$

On s'intéresse aux transformations définies par :

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_k}{d\varepsilon} \\ \frac{dV_k}{d\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial V_k} \\ -\frac{\partial W}{\partial v_k} \end{pmatrix} \quad (\text{II44})$$

$x = (v, V)$ est alors défini comme la solution du système différentiel (II44) avec les conditions initiales $x(\varepsilon = 0) = y$. $W(x, \varepsilon)$ est appelée fonction génératrice ou générateur de la transformation.

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\varepsilon} &= \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial v_k} \frac{\partial W}{\partial V_k} - \frac{\partial f}{\partial V_k} \frac{\partial W}{\partial v_k} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \{f; W\} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + L_W f \end{aligned} \quad (\text{II45})$$

$\{f; W\}$ désigne le crochet de Poisson de f et W ; $L_W f$ est la dérivée de Lie de f engendrée par le générateur W . On définit plus généralement les opérateurs :

$$\begin{aligned} L_W^0 f &= f & L_W^1 f &= L_W f & L_W^{n+1} f &= L_W L_W^n f \\ \Delta_W^0 f &= f & \Delta_W^1 f &= \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + L_W^1 f & \Delta_W^{n+1} f &= \Delta_W^1 \Delta_W^n f \end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left((\Delta_W^n f(x, \varepsilon))_{x=y, \varepsilon=0} \right) = g(y, \varepsilon) \quad (\text{II46})$$

On note $g = E_W f$; $E_W f$ est la transformée de Lie de f engendrée par W .

Considérons les développements de f et W en puissances de ε :

$$\begin{aligned} f(x, \varepsilon) &= \sum_{i \geq 0} \frac{\varepsilon^i}{i!} f_i(x) \\ W(x, \varepsilon) &= \sum_{i \geq 0} \frac{\varepsilon^i}{i!} W_{i+1}(x) \end{aligned} \quad (\text{II47})$$

On introduit les fonctions $f_i^{(l)}$ définies par récurrence [Deprit 1969] :

$$\begin{aligned} f_i^{(0)} &= f_i \\ f_i^{(l)} &= f_{i+1}^{(l-1)} + \sum_{k=0}^i C_i^k L_{k+1} f_{i-k}^{(l-1)} \end{aligned} \quad (\text{II48})$$

avec $L_m \phi = L_{W_m} \phi = \{\phi; W_m\}$.

On peut montrer par récurrence que :

$$\Delta_W^n f = \sum_{i \geq 0} \frac{\varepsilon^i}{i!} f_i^{(n)} \quad (\text{II49})$$

Si on applique cette relation en $\varepsilon = 0$:

$$\left(\Delta_W^n f(x, \varepsilon) \right)_{\varepsilon=0} = \left(f_0^{(n)}(x) \right)_{x=y}$$

ce qui donne pour la transformée de Lie de f , d'après (II46) :

$$E_W f(y, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(f_0^{(n)}(x) \right)_{x=y} \quad (\text{II50})$$

Le changement de variables (II40) s'écrit :

$$X(y, \varepsilon) = E_W x \quad (\text{II51})$$

Il est canonique car la transformée de Lie conserve les crochets de Poisson :

$$\{E_W \phi; E_W \psi\} = E_W \{\phi; \psi\} \quad (\text{II52})$$

En appliquant cette relation aux fonctions $\phi = v_i$ et $\psi = V_i$, on voit que les critères de canonicité sont conservés ($[v'_i; v'_j] = [V'_i; V'_j] = 0$, $[v'_i, V'_j] = \delta_i^j$).

En toute rigueur, toutes les fonctions $f_i^{(l)}$ définies par (II48) sont des fonctions des anciennes variables $x = (v, V)$; cependant, ces fonctions étant évaluées en $x(\varepsilon = 0) = y$, nous utiliserons souvent la notation (non rigoureuse) $f_i^{(l)}(v', V')$ au lieu de $f_i^{(n)}(v, V)$.

b. Application à l'élimination de l'anomalie moyenne

On considère un changement de variables défini par (II51) et un hamiltonien indépendant du temps défini par :

$$\mathcal{H}(x, \varepsilon) = \mathcal{H}_0(L) + \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathcal{H}_n(x)$$

Toujours avec

$$x = \begin{pmatrix} v \\ - \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ g \\ h \\ - \\ L \\ G \\ H \end{pmatrix}$$

Dans les nouvelles variables, l'hamiltonien transformé s'écrit $\mathcal{H}' = E_W \mathcal{H}$. Comme dans la méthode de Poincaré-Von Zeipel, le choix du générateur se fait au cours des calculs. D'après (II50) on obtient :

$$\mathcal{H}' = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathcal{H}_0^n$$

les fonctions \mathcal{H}_0^n étant calculées à l'aide des formules (II48) (On a omis les parenthèses pour l'indice supérieur de \mathcal{H} pour alléger l'écriture).

A l'ordre 0 :

$$\mathcal{H}_0^0 = \mathcal{H}_0$$

A l'ordre 1 :

$$\mathcal{H}_0^1 = \mathcal{H}_1^0 + \{\mathcal{H}_0^0; W_1\}$$

A l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^1 &= \mathcal{H}_2^0 + \{\mathcal{H}_1^0; W_1\} + \{\mathcal{H}_0^0; W_2\} \\ \mathcal{H}_0^2 &= \mathcal{H}_1^1 + \{\mathcal{H}_0^1; W_1\} \end{aligned}$$

Remarque : les crochets de Poisson étant invariants par transformation canonique, leur calcul peut être effectué avec n'importe quel ensemble de variables canoniques : (v, V) , (v', V') ou tout autre ensemble.

On résout ordre après ordre et à chaque fois on dispose d'une équation à deux inconnues : le nouvel hamiltonien \mathcal{H}_0^n et le générateur W_n . On sépare encore courtes et longues périodes. Comme $\mathcal{H}_0^0 = -\mu^2/2L'^2$,

$$\{\mathcal{H}_0^0; W_n\} = -\frac{\mu^2}{L'^3} \frac{\partial W_n}{\partial l'}$$

On choisit à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^1 &= \langle \mathcal{H}_1^0 \rangle_{l'} \\ \frac{\partial W_1}{\partial l'} &= \frac{L'^3}{\mu^2} (\mathcal{H}_1^0 - \mathcal{H}_0^1) \end{aligned} \tag{II53}$$

et à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^2 &= \langle \mathcal{H}_2^0 + \{\mathcal{H}_1^0; W_1\} + \{\mathcal{H}_0^1; W_1\} \rangle_{l'} \\ \frac{\partial W_2}{\partial l'} &= \frac{L'^3}{\mu^2} (\mathcal{H}_2^0 - \mathcal{H}_0^2 + \{\mathcal{H}_1^0; W_1\} + \{\mathcal{H}_0^1; W_1\}) \end{aligned} \tag{II54}$$

Rappelons que l'apparition des nouvelles variables (l', g', h', L', G', H') est un raccourci de notation : en toute rigueur, hormis W , il n'existe que des fonctions des anciennes variables évaluées en $(l = l', g = g', h = h', L = L', G = G', H = H')$.

Le générateur résulte toujours d'une intégration par rapport à l'anomalie moyenne et est donc défini à une constante d'intégration $w(-, g', h', L', G', H')$ près. Cela signifie qu'il existe une infinité de transformations permettant l'élimination de l'anomalie moyenne (les éléments moyens sont définis à des variations à longue période près). Si on considère deux de ces transformations, l'une de générateur W_1 et l'autre de générateur

$W_1^* = W_1 + w(-, g', -, L', G', H')$ à l'ordre 1, il n'en résultera pas le même hamiltonien aux ordres suivants (calculs en appendice 1) :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0^{2*} - \mathcal{H}_0^2 &= 2\{\mathcal{H}_0^1; w\} \\ W_2^* - W_2 &= \{W_1; w\} \\ \mathcal{H}_0^{3*} - \mathcal{H}_0^3 &= 3\left\{\mathcal{H}_0^2 + \{\mathcal{H}_0^1; w\}; w\right\}\end{aligned}\tag{II55}$$

\mathcal{H}_0^1 , \mathcal{H}_0^2 et w étant des fonctions à longues périodes, les différences $\mathcal{H}_0^{2*} - \mathcal{H}_0^2$ et $\mathcal{H}_0^{3*} - \mathcal{H}_0^3$ le seront aussi. Cela implique que, suivant le choix du générateur, certaines longues périodes seront soit conservées dans le nouveau système différentiel (donc dans les nouvelles variables) soit abandonnées dans le changement de variables. Lorsque l'intégration est entièrement analytique ce fait est peu important puisque d'autres transformations suivront la première afin d'éliminer tous les angles : selon le générateur, certains termes seront inclus dans un changement de variables ou dans un autre mais l'hamiltonien normalisé final sera le même à une constante polynomiale près. Mais dans le cadre d'une méthode semi-analytique, notre but n'est pas une intégration analytique complète mais un filtrage des courtes périodes sans perte d'information à longues périodes : la différence entre nouvelles et anciennes variables ne doit contenir que des termes à courtes périodes. Cette différence s'exprime d'après (II40) et (II51) $x - y = E_W x - y$; explicitée jusqu'à l'ordre 2, elle s'écrit :

$$\begin{cases} v_i - v'_i = \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial V'_i} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial V'_i} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial V'_i}; W_1 \right\} \right) \\ V_i - V'_i = -\varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial v'_i} - \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial v'_i} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial v'_i}; W_1 \right\} \right) \end{cases}\tag{II56}$$

La partie d'ordre 3 est plus compliquée ; elle s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon^3}{6} \left(\frac{\partial W_3}{\partial V'_i} + \left\{ \frac{\partial W_2}{\partial V'_i}; W_1 \right\} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial V'_i}; W_2 \right\} + \left\{ \frac{\partial W_2}{\partial V'_i} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial V'_i}; W_1 \right\}; W_1 \right) \\ -\frac{\varepsilon^3}{6} \left(\frac{\partial W_3}{\partial v'_i} + \left\{ \frac{\partial W_2}{\partial v'_i}; W_1 \right\} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial v'_i}; W_2 \right\} + \left\{ \frac{\partial W_2}{\partial v'_i} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial v'_i}; W_1 \right\}; W_1 \right) \end{cases}$$

Il faut obtenir le générateur de manière à ne pas abandonner de variations à longues périodes dans le changement de variables :

$$\langle v_i - v'_i \rangle_{\nu} = \langle V_i - V'_i \rangle_{\nu} = 0$$

A l'ordre 1, il suffit de choisir W_1^* tel que $\langle W_1^* \rangle_{\nu} = 0$ qui peut s'obtenir à partir de tout générateur W_1 par $W_1^* = W_1 - \langle W_1 \rangle_{\nu}$

A l'ordre 2, on a les 6 conditions :

$$\begin{cases} \langle \frac{\partial W_2}{\partial V'_i} \rangle_{l'} = - \langle \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial V'_i}; W_1 \right\} \rangle_{l'} & (i = 1, 3) \\ \langle \frac{\partial W_2}{\partial v'_i} \rangle_{l'} = - \langle \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial v'_i}; W_1 \right\} \rangle_{l'} & (i = 1, 3) \end{cases} \quad (\text{II57})$$

Mais ceci est impossible à réaliser. En effet, considérons la quatrième condition. Elle s'écrit :

$$\langle \frac{\partial W_2}{\partial l'} \rangle_{l'} = - \langle \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial l'}; W_1 \right\} \rangle_{l'}$$

Or :

- quelle que soit la constante d'intégration, $\frac{\partial W_2}{\partial l'}$ est de moyenne nulle (d'après (II54)),
- même si W_1 est de moyenne nulle, le crochet $\left\{ \frac{\partial W_1}{\partial l'}; W_1 \right\}$ n'est pas en général de moyenne nulle (par exemple pour $W_1 = L' \sin l'$, $\left\{ \frac{\partial W_1}{\partial l'}; W_1 \right\} = -L'$).

La condition (II57) n'est donc pas satisfaite. Cela n'est pas choquant : ayant éliminé l'anomalie moyenne de l'hamiltonien, la variable conjuguée L' est constante ($\frac{dL'}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial l'} = 0$). Donc les variations à longues périodes de L ne peuvent que se retrouver dans la différence $L - L'$.

On en arrive à la conclusion qu'il n'existe aucun système hamiltonien décrivant exactement l'évolution à longues périodes des paramètres du mouvement. Cela signifie en particulier que les variables centrées que nous recherchons ne peuvent être des variables canoniques et que par exemple il n'existe aucun équivalent à la troisième loi de Kepler.

c. Obtention des variables centrées

Après l'élimination de l'anomalie moyenne de l'hamiltonien par transformation canonique, il faut récupérer les variations à longues périodes restant encore dans le changement de variables $x - x'$. Les variables centrées (\bar{v}', \bar{V}') qui nous intéressent s'obtiennent par un nouveau changement de variables qui cette fois n'est pas canonique (on ne cherchera donc pas à calculer un nouvel hamiltonien) :

$$\begin{cases} \bar{v}' = v' + \langle v - v' \rangle_{l'} = v' + \tilde{v}' \\ \bar{V}' = V' + \langle V - V' \rangle_{l'} = V' + \tilde{V}' \end{cases} \quad (\text{II58})$$

les expressions $v - v'$ et $V - V'$ à moyenner étant données par la formule (II56).

Dans la mesure où on effectue ce changement de variables (II58), nous avons toute liberté de choisir un générateur quelconque. En particulier W_1 ne doit plus être obligatoirement de moyenne nulle.

C'est le changement de variables (II58) qui introduit l'influence du choix des variables sur le résultat du filtrage évoquée au paragraphe II.B.4. En effet, toutes les opérations précédentes sont des transformations canoniques qui restent indépendantes des variables utilisées pourvu qu'on utilise un critère figeant la fonction génératrice (moyenne nulle par exemple). On peut donc relier le caractère non intrinsèque du filtrage au fait que les variables centrées ne peuvent pas être décrites par un système hamiltonien.

On peut aussi obtenir un système différentiel dont l'intégration donnera directement les variables (\bar{v}', \bar{V}') . Il suffit pour cela de dériver l'expression (II58) par rapport au temps.

$$\begin{cases} \frac{d\bar{v}'_i}{dt} = \frac{dv'_i}{dt} + \frac{d\tilde{v}'_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial V'_i} + \frac{d\tilde{v}'_i}{dt} \\ \frac{d\bar{V}'_i}{dt} = \frac{dV'_i}{dt} + \frac{d\tilde{V}'_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial v'_i} + \frac{d\tilde{V}'_i}{dt} \end{cases} \quad (\text{II59})$$

Avec

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{v}'_i}{dt} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tilde{v}'_i}{\partial v'_j} \frac{dv'_j}{dt} + \frac{\partial \tilde{v}'_i}{\partial V'_j} \frac{dV'_j}{dt} \\ &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tilde{v}'_i}{\partial v'_j} \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial V'_j} - \frac{\partial \tilde{v}'_i}{\partial V'_j} \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial v'_j} \\ &= \{\tilde{v}'_i; \mathcal{H}'\} \end{aligned}$$

On a aussi $\frac{d\tilde{V}'_i}{dt} = \{\tilde{V}'_i; \mathcal{H}'\}$. Donc

$$\begin{cases} \frac{d\bar{v}'_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial V'_i} + \{\tilde{v}'_i; \mathcal{H}'\} \\ \frac{d\bar{V}'_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial v'_i} + \{\tilde{V}'_i; \mathcal{H}'\} \end{cases} \quad (\text{II60})$$

Pour que le système (II60) puisse avoir un intérêt pratique, il faut encore exprimer son second membre en fonction de (\bar{v}', \bar{V}') . Dans ce but, effectuons un développement à l'ordre 3, en supposant que les corrections (\tilde{v}', \tilde{V}') sont d'ordre 2 c'est-à-dire que l'on a choisi un générateur W_1 de moyenne nulle.

En tenant compte du fait que \mathcal{H}'_0 ne contient que la variable L' et que \mathcal{H}'_1 (qui contient seulement la perturbation en J_2) ne contient pas d'angle on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{l}'}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \tilde{L}'} + 3\frac{\mu^2}{\tilde{L}'^4} \tilde{L}' - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathcal{H}'_1}{\partial \tilde{L}' \partial \tilde{V}'_j} \tilde{V}'_j + \{\tilde{l}'; \mathcal{H}'_1\} \\ \frac{d\tilde{v}'_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \tilde{V}'_i} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathcal{H}'_1}{\partial \tilde{V}'_i \partial \tilde{V}'_j} \tilde{V}'_j + \{\tilde{v}'_i; \mathcal{H}'_1\} \quad (i = 2, 3) \\ \frac{d\tilde{V}'_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \tilde{v}'_i} + \{\tilde{V}'_i; \mathcal{H}'_1\} \quad (i = 1, 3) \end{array} \right. \quad (\text{II61})$$

Cela revient à ajouter une correction non hamiltonienne au système générant les variables (v', V') . L'intégration numérique de ce système permet d'obtenir directement les variables centrées (\bar{v}', \bar{V}') . Cette méthode est donc conceptuellement plus simple que l'intégration du système hamiltonien moyen suivie du changement de variables (II58), mais elle présente plusieurs inconvénients :

- elle n'est pas économique en temps de calcul ; la partie non hamiltonienne rajoutée au second membre est plus compliquée que le changement de variables (II58). De plus, ce second membre sera évalué plus souvent que le changement de variables : une fois par pas d'intégration contre une fois par pas de tabulation de l'éphéméride,
- elle est un peu moins précise ; connaissant explicitement le changement de variables, il est dommage de perdre de la précision (même peu), d'une part en établissant (II61) à l'aide d'un développement tronqué et d'autre part dans l'intégration numérique.

II.E. Synthèse

La figure II.1 schématise l'ensemble de la méthode. On distingue trois parties : obtention des observations filtrées ou pseudo-observations, calculs des éléments théoriques comparables, enfin comparaison des éléments observés et modélisés conduisant à l'ajustement de paramètres (conditions initiales et paramètres extérieurs). Nous ne reviendrons pas sur l'obtention des pseudo-observations qui a été décrite dans II.C. Résumons la manière dont les éléments centrés théoriques peuvent être calculés lorsque les calculs algébriques décrits en II.D.4 sont réalisés.

1. Calcul des éléments centrés théoriques en variables de Delaunay

Possédant une formulation de l'hamiltonien moyen \mathcal{H}' on commence par intégrer numériquement le système :

$$\begin{cases} \frac{dv'_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial V'_i} \\ \frac{dV'_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial v'_i} \end{cases} \quad (\text{II62})$$

On obtient alors les valeurs de v'_i et V'_i à des dates t_k choisies dans l'intervalle d'intégration. Suivant la terminologie que nous avons adoptée (paragraphe IIB4), ces éléments sont des éléments moyens (ils n'ont plus de variations à courtes périodes) mais ce ne sont pas les éléments centrés que nous voulons obtenir (ils n'ont pas exactement les mêmes variations à longues périodes que les éléments instantanés (v_i, V_i)). Les éléments centrés sont obtenus après l'intégration numérique du système différentiel moyen (II62) grâce au changement de variables (II58) :

$$\begin{cases} \bar{v}'(t_k) = v'(t_k) + \tilde{v}'(v'(t_k), V'(t_k)) \\ \bar{V}'(t_k) = V'(t_k) + \tilde{V}'(v'(t_k), V'(t_k)) \end{cases} \quad (\text{II63})$$

Nous appellerons ce changement de variables, changement de variables post-intégration.

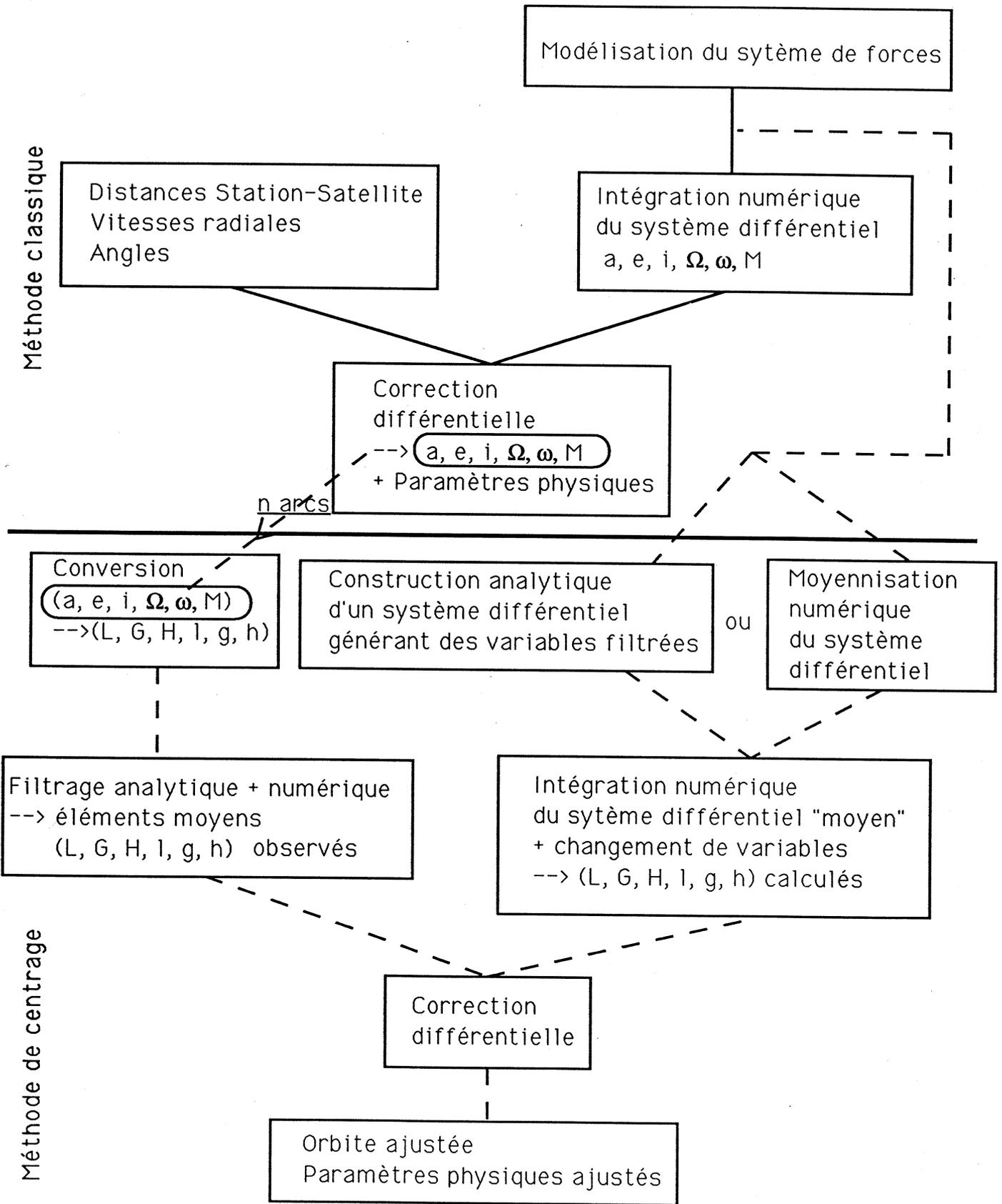


Figure III : Principe de la méthode de centrage

2. Calcul des éléments moyens théoriques en éléments orbitaux

On peut aussi vouloir établir le système différentiel gouvernant les éléments orbitaux moyens. Comme cela a été montré en II.B.4 ce ne seront pas des éléments orbitaux filtrés mais seulement la projection en éléments orbitaux des variables de Delaunay filtrées. L'intégration de ces éléments peut présenter plusieurs intérêts :

- (i) en géodésie spatiale les éléments orbitaux sont plus usuels car ils ont une interprétation géométrique simple. De ce fait nous appréhenderons mieux le problème de la pondération des observations que nous aborderons plus loin,
- (ii) nous avons constaté que le second membre du système différentiel correspondant compte 0 à 30 pour cent de termes en moins,

Notons

. $x' = (v', V')$ les variables de Delaunay issues de l'intégration numérique du système hamiltonien dérivant de \mathcal{H}' ,

. $\bar{x}' = (\bar{v}', \bar{V}')$ les variables de Delaunay centrées obtenues à partir de x' par un changement de variables. $\bar{x}' = x' + \tilde{x}'$,

. K la fonction qui transforme les variables de Delaunay en éléments orbitaux,

. E' le vecteur des éléments orbitaux correspondant à x' : $E' = K(x', \mu)$,

. \bar{E}' le vecteur des éléments orbitaux correspondant à \bar{x}' : $\bar{E}' = K(\bar{x}', \mu) = K(x' + \tilde{x}', \mu)$.

Comme $x' = K^{-1}(E', \mu)$, on a :

$$\bar{E}' = K\left(K^{-1}(E', \mu) + \tilde{x}', \mu\right) \quad (\text{II64})$$

E' peut être issu directement de l'intégration des équations de Lagrange (formule I3) correspondant aux équations de Hamilton dérivant de \mathcal{H}' :

$$\begin{pmatrix} \dot{a}' \\ \dot{e}' \\ \dot{I}' \\ \dot{h}' \\ \dot{g}' \\ \dot{j}' - n' \end{pmatrix} = \mathcal{L}' \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial a'} \\ \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial e'} \\ \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial I'} \\ \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial h'} \\ \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial g'} \\ \frac{\partial \mathcal{R}'}{\partial l'} \end{pmatrix} \quad (\text{II65})$$

\mathcal{L}' étant une matrice dépendant des éléments E'_i .

Il existe une relation simple entre l'hamiltonien et la fonction perturbatrice \mathcal{R}' utilisée dans le second membre des équations de Lagrange :

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}'_0 - \mathcal{R}' \quad (\text{II66})$$

Pour obtenir le vecteur \bar{x}' on appliquera donc l'algorithme suivant :

Calculs algébriques :

- . à partir de \mathcal{H}' calcul de $\mathcal{R}' = \mathcal{H}'_0 - \mathcal{H}'$ et des séries formelles de ses dérivées par rapport aux éléments orbitaux,
- . calcul des expressions formelles de \tilde{x}' en fonction de E' .

Calculs numériques :

- . intégration numérique des équations de Lagrange pour obtenir les valeurs de E' ,
- . calcul de \bar{E}' par

$$\begin{aligned} x' &= K^{-1}(E', \mu) \\ \tilde{x}' &= \tilde{x}'(E') \\ \bar{x}' &= x' + \tilde{x}' \\ \bar{E}' &= K(\bar{x}', \mu) \end{aligned} \quad (\text{II67})$$

3. Comparaison aux observations et correction différentielle

Nous nous sommes attachés à obtenir des éléments centrés observés et théoriques cohérents afin que toute comparaison ultérieure soit licite et puisse donner lieu à une interprétation significative des écarts : modification des conditions initiales de l'orbite et ajustement de paramètres physiques (constante géocentrique de la gravitation, $J_2 \dots$). Ces ajustements seront réalisés par correction différentielle.

a. Construction du système nécessaire à la correction différentielle

Le principe de la correction différentielle en utilisant la méthode des moindres carrés est bien connu : considérons les éléments théoriques x_c et les éléments observés correspondant x_o (nous supprimons les signes $(')$ et les $(\hat{})$ pour alléger l'écriture). On pose $x_o - x_c = \Delta x$. x_c dépendant de paramètres P_j , on veut interpréter l'écart Δx comme une modification des P_j :

$$F(\Delta P_j) = \Delta x \quad (\text{II68})$$

ΔP_j et Δx étant supposés petits on linéarise :

$$\sum_j \frac{\partial F}{\partial P_j} \Delta P_j = \Delta x \quad (\text{II69})$$

F et Δx sont des vecteurs comptant autant d'éléments qu'il y a d'observations. Soient ΔP le vecteur des éléments ΔP_j et A la matrice définie par :

$$A\Delta P = \Delta x \quad (\text{II70})$$

A partir de cette relation (éventuellement pondérée), la méthode d'inversion par moindres carrés permet d'extraire une estimation des paramètres ΔP_j . Le problème est ramené à la construction de la matrice A . Elle est composée des dérivées de F par rapport aux paramètres P_j c'est-à-dire de x_c par rapport à P_j . Dans notre cas, on a $x^T = (x_1^T, x_2^T, \dots, x_k^T, \dots, x_N^T)$ avec $x_k^T = (l(t_k), g(t_k), h(t_k), L(t_k), G(t_k), H(t_k))$ lorsqu'on utilise les variables de Delaunay. Il nous faut donc calculer $\frac{\partial l}{\partial P_j}, \frac{\partial g}{\partial P_j}, \frac{\partial h}{\partial P_j}, \frac{\partial L}{\partial P_j}, \frac{\partial G}{\partial P_j}, \frac{\partial H}{\partial P_j}$ à chaque date où il existe des pseudo-observations.

Ces dérivées partielles pourraient être calculées numériquement en étudiant les différences entre des orbites décalées. Mais ceci est coûteux en temps de calcul (il faut intégrer deux systèmes différentiels supplémentaires pour chaque paramètre ajusté) et délicat à réaliser (le décalage des orbites doit être assez faible pour ne pas trop s'éloigner d'un comportement linéaire et assez important pour obtenir des écarts numériquement significatifs). C'est pourquoi nous avons préféré une approche analytique bien que celle-ci nécessite d'importants calculs algébriques préparatoires.

Nous considérerons d'abord un système hamiltonien. L'influence des corrections non hamiltoniennes sera traitée ensuite. L'hamiltonien dépend de 6 variables canoniques $(v_i, V_i ; i = 1, 3)$ et d'un certain nombre de paramètres dynamiques P_j : $\mathcal{H} = \mathcal{H}(v_i, V_i, P_j)$. Le système différentiel s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial V_i} \\ \frac{dV_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_i} \end{cases}$$

C'est notre point de départ pour calculer les sensibilités $\frac{\partial v_i}{\partial v_{j0}}, \frac{\partial v_i}{\partial V_{j0}}, \frac{\partial V_i}{\partial v_{j0}}, \frac{\partial V_i}{\partial V_{j0}}$, (v_{j0}, V_{j0}) étant les conditions initiales de l'orbite. La dérivation du système par rapport aux conditions initiales conduit à :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v_i}{\partial v_{j0}} \right) = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial V_i \partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial v_{j0}} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial V_i \partial V_k} \frac{\partial V_k}{\partial v_{j0}} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_i}{\partial v_{j0}} \right) = -\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial v_i \partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial v_{j0}} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial v_i \partial V_k} \frac{\partial V_k}{\partial v_{j0}} \right) \end{cases} \quad (\text{II71})$$

Les équations sont similaires pour les sensibilités aux V_{j0} . Les 36 sensibilités résultent de l'intégration numérique d'un système d'ordre 36 dont les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial v_{j0}}(t_0) = \frac{\partial V_i}{\partial V_{j0}}(t_0) = \delta_i^j \\ \frac{\partial v_i}{\partial V_{j0}}(t_0) = \frac{\partial V_i}{\partial v_{j0}}(t_0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II72})$$

car à t_0 , $V_i = V_{i0}$ et $v_i = v_{i0}$.

Le calcul des dérivées par rapport aux paramètres dynamiques se fait de la même manière en tenant compte du fait que l'hamiltonien dépend explicitement de ces paramètres :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v_i}{\partial P_j} \right) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial V_i \partial P_j} + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial V_i \partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial P_j} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial V_i \partial V_k} \frac{\partial V_k}{\partial P_j} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_i}{\partial P_j} \right) = -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial v_i \partial P_j} - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial v_i \partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial P_j} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial v_i \partial V_k} \frac{\partial V_k}{\partial P_j} \right) \end{cases} \quad (\text{II73})$$

avec les conditions initiales :

$$\frac{\partial v_i}{\partial P_j}(t_0) = \frac{\partial V_i}{\partial P_j}(t_0) = 0$$

On constate que le calcul des sensibilités nécessite le calcul analytique préalable des dérivées partielles du type $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial v_i \partial v_k}$ et $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial v_i \partial P_j}$ en plus des dérivées $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_i}$ nécessaires à l'extrapolation de l'orbite.

Pour être complète, la correction différentielle doit aussi tenir compte du changement de variables post-intégration indiqué par la formule (II58). La dérivation de cette formule permet de calculer une correction aux sensibilités résultant de (II71) et (II73). Mais des tests nous ont montré que si le changement de variables (II58) est du deuxième ordre, ces corrections sur les sensibilités sont sans effet sur le résultat final ; au mieux elles permettent d'accélérer légèrement la convergence de la correction différentielle.

Dans le cas où l'intégration se fait en éléments orbitaux, on peut également déduire des équations de Lagrange un système différentiel générant les sensibilités $\frac{\partial a}{\partial P_j}$, $\frac{\partial e}{\partial P_j}$, $\frac{\partial I}{\partial P_j}$, $\frac{\partial h}{\partial P_j}$, $\frac{\partial g}{\partial P_j}$, $\frac{\partial l}{\partial P_j}$. Dans ce cas, les observations doivent être converties en éléments orbitaux.

b. Pondération des pseudo-observations

Nous voulons comparer six catégories d'observations différentes correspondant aux six variables considérées : les actions L , G , H et les angles l , g , h . Ces variables n'ont ni les mêmes unités ni les mêmes ordres de grandeur et on ne peut comparer directement leurs résidus. Il faut se définir une métrique c'est-à-dire le calcul d'une

distance prenant en compte les résidus sur chacun des types d'observations. Ce peut être un écart en position (donc une distance physique), un écart en vitesse, une combinaison des deux... La métrique doit être reliée à la nature des observations. Dans notre cas les pseudo-observations sont des variables de Delaunay filtrées, éventuellement converties en éléments orbitaux. C'est pourquoi nous avons choisi les deux définitions de distance suivantes :

$$(ds_1)^2 = (da)^2 + a^2 [(de)^2 + (dI)^2 + (dh)^2 + (dg)^2 + (dl)^2] \quad (\text{II74})$$

pour des pseudo-observations converties en éléments orbitaux et

$$(ds_2)^2 = \left(\frac{L^2}{\mu}\right)^2 \left[\left(\frac{dL}{L}\right)^2 + \left(\frac{dG}{G}\right)^2 + \left(\frac{dH}{H}\right)^2 \right] + a^2 [(dl)^2 + (dg)^2 + (dh)^2] \quad (\text{II75})$$

lorsque les observations sont conservées en variables de Delaunay.

Dans les deux cas la distance est homogène à une longueur mais les deux formes ne sont pas équivalentes ; en effet ds_2 s'écrit en fonction de a , e et I :

$$\begin{aligned} (ds_2)^2 = & \frac{3}{4}(da)^2 + \frac{2}{\eta^4}a^2e^2(de)^2 + a^2\tan^2 I(dI)^2 \\ & - \frac{2}{\eta^2}ae(dade) - a\tan I(dadI) + \frac{2}{\eta^2}a^2e\tan I(dedI) \\ & + a^2 [(dl)^2 + (dg)^2 + (dh)^2] \end{aligned} \quad (\text{II76})$$

Outre le fait que les coefficients de $(da)^2$, $(de)^2$ et $(dI)^2$ sont différents, on note la présence de termes en $dade$, $dadI$ et $dedI$. On remarque que comme de est toujours multiplié par ae , les observations sur l'excentricité ont peu de poids lorsque celle-ci est faible.

Si le choix du système de pondération est très important et délicat pour des applications pratiques, dans le cadre des tests il est intéressant d'utiliser des combinaisons différentes pour vérifier la robustesse de la méthode. Il est vrai que si l'on décide de visualiser les résidus, par exemple en éléments orbitaux, la définition ds_1 permet mieux d'interpréter les résultats.

Ayant choisi des métriques de base, on peut les moduler en utilisant des coefficients scalaires. Ce sont ces coefficients que nous désignerons désormais par poids des observations :

$$(ds_1)^2 = p_a(da)^2 + a^2 [p_e(de)^2 + p_I(dI)^2 + p_h(dh)^2 + p_g(dg)^2 + p_l(dl)^2] \quad (\text{II77})$$

On définit de la même manière les poids relatifs aux variables de Delaunay en utilisant la distance ds_2 .

Conclusion de la deuxième partie

Dans cette partie, nous avons d'une part mis en évidence certaines précautions à prendre pour obtenir un modèle et des pseudo-observations cohérents. D'autre part nous avons décrit les méthodes qui semblent les plus efficaces pour respecter les contraintes imposées.

Nous nous sommes d'abord attachés à définir le mouvement centré : c'est un mouvement ne comportant plus de variations à courtes périodes (périodes inférieures à 1 jour) et ayant exactement les mêmes variations séculaires et à longues périodes que le mouvement initial. Il est très important de retenir que le mouvement centré dépend des variables utilisées pour le décrire. C'est pourquoi il est préférable d'utiliser la notion de variables centrées plutôt que de mouvement centré. Par conséquent, les filtrages des observations et du système différentiel modélisant le mouvement doivent être réalisés avec le même ensemble de variables pour donner lieu à une correction différentielle licite. Par ailleurs, l'élimination des variations à courtes périodes doit être faite avec précaution : il ne faut pas altérer les variations à plus longues périodes.

Le filtrage numérique des observations redéveloppé par P. Exertier a été résumé. Le fait important est que l'on filtre indépendamment six signaux (les six variables du mouvement) dont l'évolution est décrite directement en fonction du temps.

Différentes techniques de filtrage du système différentiel ont été exposées. Pour les perturbations où elle est utilisable, la technique d'élimination de l'anomalie moyenne par transformation canonique de Lie est la plus avantageuse. Cependant, si cette transformation canonique permet d'obtenir un système moyen (système sans courtes périodes), nous avons montré qu'elle ne peut générer directement le système centré. En effet, les longues périodes sont également modifiées par cette transformation et un changement de variables non canonique doit être ajouté pour les rétablir.

TROISIÈME PARTIE :

MISE EN ŒUVRE DU FILTRAGE

DU SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

Ayant défini les principes de la méthode de filtrage et choisi les moyens pour sa mise en œuvre, nous allons dans cette partie présenter le calcul du système différentiel moyen ainsi que les tests de la théorie obtenue.

Pour la mise en œuvre, trois catégories de problèmes seront rencontrés. Tout d'abord, des problèmes de stratégie : pour chaque perturbation, il faudra choisir une formulation adaptée aux calculs, se fixer un niveau de précision souhaité, définir des hypothèses simplificatrices mais acceptables. Ensuite, surviendront les problèmes techniques : l'algorithme de calcul implique des intégrations qui ne sont pas toujours simples. Enfin, le dernier problème est celui de la masse des calculs algébriques à réaliser. La théorie au deuxième ordre du mouvement du satellite artificiel perturbé par l'harmonique J_2 du potentiel terrestre [Kozai 1962] représente déjà un travail très important (des dizaines de pages de développements). Nous ne voulons pas refaire une théorie complète (nous ne voulons pas intégrer analytiquement les longues périodes) mais nous désirons une plus grande précision : ordre 3 et ordre 4 pour certaines perturbations. Nous voulons aussi traiter un mouvement plus complet incluant les effets des harmoniques zonaux du potentiel jusqu'à un ordre élevé (ordre 30 ou plus), de certains harmoniques tesséraux, des perturbations luni-solaires, et des marées terrestres et océaniques. Il faut enfin calculer les dérivées premières et secondes des nouveaux hamiltoniens, par rapport aux variables de Delaunay pour obtenir les seconds membres des équations de Hamilton, et par rapport aux éléments orbitaux pour obtenir les équations de Lagrange. Cela représente la manipulation de centaines de milliers de termes. Il est clair que seul un calcul symbolique informatisé permet d'atteindre ce but.

Chaque perturbation moyennée fera l'objet de tests numériques : on extrapolera par intégration numérique une orbite osculatrice qui sera ensuite filtrée pour générer des pseudo-observations. Ces pseudo-observations seront comparées aux résultats obtenus à partir de notre modèle de mouvement moyen centré. L'ajustement des conditions initiales sera réalisé grâce à la correction différentielle. Ce processus ne teste pas seulement le modèle, mais l'ensemble de la méthode de centrage : qualité du filtrage des observations d'une part, validité du modèle d'autre part, et enfin l'efficacité de la correction différentielle. L'utilisation d'observations simulées par intégration numérique présente deux avantages : tout d'abord cela permet de choisir les perturbations prises en compte et donc de réaliser les tests cas par cas et non globalement ; ensuite on s'affranchit ainsi des bruits de mesure et les signaux résiduels sont directement imputables au modèle ou au processus de filtrage des observations (hormis les erreurs numériques qui ont une signature les rendant en général aisément identifiables).

III.A. Stratégie générale pour la moyennisation analytique

1. Hiérarchie des perturbations

L'algorithme que nous voulons utiliser fait intervenir le développement de la fonction perturbatrice par rapport à un petit paramètre. Cela ne nécessite pas que ce petit paramètre apparaisse explicitement dans toutes les perturbations mais implique un classement des perturbations par ordre de grandeur. Il est impossible de définir une hiérarchie valable pour tous les satellites : pour un objet très bas le potentiel terrestre et le frottement atmosphérique sont prépondérants mais pour un satellite haut ces perturbations diminuent tandis que l'influence de la Lune s'accroît. L'inclinaison et l'excentricité de l'orbite modulent aussi les différents effets. Cependant le classement suivant semble être un bon compromis :

Ordre 1 : harmonique J_2 du potentiel terrestre.

Ordre 2 : harmoniques J_3 à J_5 du potentiel terrestre, perturbations luni-solaires.

Ordre 3 : harmoniques J_6 à J_{20} du potentiel terrestre, harmoniques tesséraux résonnants, marées, frottement atmosphérique, pression de radiation solaire.

Ordre 4 : autres harmoniques zonaux du potentiel terrestre, autres forces non gravitationnelles, effets relativistes.

Nous choisirons J_2 comme petit paramètre. Si on se réfère à l'algorithme de Deprit, une fonction d'ordre donné (générateur ou hamiltonien) contient toutes les combinaisons de perturbations pouvant donner cet ordre ; par exemple :

$$\begin{aligned} W_1 &= W_1(J_2) \\ W_2 &= W_2(J_2^2) + W_2(J_3) + W_2(J_4) + \dots \\ W_3 &= W_3(J_2^3) + W_3(J_2J_3) + W_3(J_2J_4) + \dots + W_3(J_6) + \dots \end{aligned}$$

Toutes les perturbations ne peuvent pas se traiter indépendamment les unes des autres ; une forme telle que $W_3(J_2J_3)$ est l'expression mathématique des termes de couplage. A chaque ordre on trouvera l'ensemble des combinaisons suivantes :

- Ordre 1 : $\mathcal{O}(1)$

- Ordre 2 : $\mathcal{O}(2) + \mathcal{O}(1)\mathcal{O}(1)$

- Ordre 3 : $\mathcal{O}(3) + \mathcal{O}(2)\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)\mathcal{O}(1)\mathcal{O}(1)$
- Ordre 4 : $\mathcal{O}(4) + \mathcal{O}(3)\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(2)\mathcal{O}(2) + \mathcal{O}(2)\mathcal{O}(1)\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)\mathcal{O}(1)\mathcal{O}(1)\mathcal{O}(1)$
où $\mathcal{O}(n)$ contient l'ensemble des perturbations d'ordre n .

Ceci est réalisé automatiquement si on applique l'algorithme à la lettre et que l'on injecte toutes les perturbations dans l'hamiltonien de départ qui est alors traité globalement. Nous avons préféré moyenner les perturbations successivement jusqu'à l'ordre 3 pour des questions de clarté et de techniques de calcul : on ne rencontre pas les mêmes problèmes dans le traitement du potentiel terrestre que dans celui des perturbations luni-solaires. A l'ordre 4 nous avons regroupé certaines perturbations car les couplages sont nombreux et il serait fastidieux de les calculer un par un.

2. Variables canoniques et variables explicites

Ayant choisi les variables de Delaunay pour paramétrer le mouvement, il faudra effectuer un certain nombre d'opérations reliées à ces variables : calcul des crochets de Poisson et intégration par rapport à l'anomalie moyenne. Mais on ne peut pas toujours exprimer directement la fonction perturbatrice uniquement avec ces variables. En particulier l'angle rapide qui apparaît explicitement est l'anomalie vraie f et non l'anomalie moyenne l . Les intégrations par rapport à l'anomalie moyenne peuvent souvent être réalisées grâce à la relation

$$\frac{df}{dl} = \frac{G}{L} \frac{a^2}{r^2} \quad (\text{III1})$$

Parfois seule la moyenne est nécessaire et on a par exemple [**Kozai 1962b**]

$$\langle \cos kf \rangle_l = (-\beta)^k (1 + k\eta) \quad (\text{III2})$$

avec $\eta = G/L$ et $\beta = (1 - \eta)/e = e/(1 + \eta)$.

Mais à partir d'un certain ordre, ces calculs deviennent très compliqués sinon impossibles. Le nombre de termes augmente très vite pour un apport de plus en plus faible. On peut même être confronté à des intégrations sans solution connue, par exemple

$$\int (f - l) \sin k f dl \quad \text{pour } k > 1$$

C'est pourquoi dans le problème perturbé par J_2 , il semble difficile d'aller au-delà du calcul de l'hamiltonien moyen du troisième ordre avec la méthode de Brouwer.

Deprit a contourné le problème en développant une très belle méthode qui consiste à éliminer l'anomalie moyenne grâce à deux transformations successives [**Deprit 1980**,

Coffey et Deprit 1980]. La première transformation est appelée élimination de la parallaxe tandis que la seconde est la transformation classique que nous avons développée au paragraphe II.D.4. Les calculs sont très simplifiés et sont possibles aussi loin que l'exige la pratique : Coffey et Deprit ont calculé l'ordre 4 et Healy a même atteint l'ordre 6 ! Mais si cette méthode est très bien adaptée pour traiter les perturbations relatives aux harmoniques zonaux, son emploi pour les autres perturbations est moins évident.

Une autre alternative consiste à faire apparaître explicitement l'anomalie moyenne dans la fonction perturbatrice en la développant en puissances de l'excentricité. Tous les calculs deviennent alors triviaux puisqu'il s'agit d'intégrer par rapport à l des fonctions en $\cos l$ ou $\sin l$. L'utilisation de développements tronqués peut être pénalisante aux ordres 1 et 2 dans le cas de satellites dont l'excentricité n'est pas faible. Cependant ce choix devient intéressant à partir du troisième ordre car alors des développements tronqués assez bas permettent d'atteindre une précision intéressante avec un nombre limité de termes. Il existe donc en général une solution raisonnable qui consiste à utiliser des calculs sous forme non développée pour les premiers ordres et à compléter avec des séries développées aux ordres suivants. C'est pourquoi nous avons réalisé les calculs sous les deux formes.

3. Calculs avec un manipulateur algébrique

La masse de calculs nécessaires à la moyennisation analytique des perturbations a déjà été évoquée. L'utilisation de calculs formels par informatique était indispensable. Nous avons utilisé les logiciels MS [**Claes et al. 1988**] et MINIMS [**Moons 1991**] développés à l'Université de Namur. Ces logiciels permettent la composition linéaire, le produit, la dérivation par rapport à une variable, de séries composées d'une somme de termes de la forme :

$$T = \alpha \prod_{i=1}^{NVP} P_i^{Exp(i)} \left\{ \begin{array}{c} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \left(\sum_{j=1}^{NVT} Arg(j) A_j \right) \quad (\text{III3})$$

α est un réel,

P_i sont les variables polynomiales,

A_j sont les variables trigonométriques,

NVP et NVT représentent les nombres de variables polynomiales et trigonométriques,

$Exp(i)$ et $Arg(j)$ sont des entiers.

Les variables P_i et A_j sont les variables qui apparaissent explicitement dans les séries mais les quantités traitées par le logiciel sont les coefficients réels α , les exposants $Exp(i)$ et les coefficients entiers des angles $Arg(j)$.

L'utilisation de ces logiciels impose des contraintes. En particulier les séries manipulées ne font intervenir que des polynômes et on ne peut pas coder directement un

terme de la forme $1/(1 + P_j)$; il faut faire intervenir une nouvelle variable $P_{j'} = 1 + P_j$ ou $P_{j'} = 1/(1 + P_j)$. Nous avons donc dû coder des variables telles que $e = \sqrt{1 - \eta^2}$ ou $\nu = 1/(1 + \eta)$ qui ne sont pas indépendantes des variables L et G déjà existantes. Le tribut à payer est l'apparition de combinaisons de variables redondantes pouvant cacher des expressions très simples (par exemple, $e^2 + \frac{G^2}{L^2} = 1$). Il est absolument indispensable d'écrire des sous-programmes de simplification sous peine d'obtenir rapidement une masse de termes ingérable.

Suivant ces contraintes, les variables utilisées pour les calculs sans développement en excentricité sont :

- l, g, h, f et u (anomalie excentrique) comme variables trigonométriques,
- $L, G, e, s = \sin I, c = \cos I, a/r, \Phi = f-l$ et $\nu = \frac{1}{1+G/L}$ comme variables polynomiales.

Dans le cas où on développe en excentricité, les variables sont moins nombreuses car toutes les variables redondantes ci-dessus apparaissent implicitement sous forme de développements :

- l, g, h sont les variables trigonométriques,
- L, e, s et c sont les variables polynomiales.

Pour chaque perturbation à moyenner analytiquement, il faut choisir une formulation adaptée au codage du manipulateur de séries, appliquer l'algorithme d'élimination de l'anomalie moyenne pour obtenir un hamiltonien sans courtes périodes, calculer le changement de variables donné par les formules (II40) et (II42) et enfin obtenir les dérivées premières et secondes du nouvel hamiltonien qui servent à construire le système différentiel pour l'extrapolation et la correction différentielle. Ces différentes étapes induisent la gestion d'opérations algébriques élémentaires réalisées par le manipulateur. Plusieurs macro-opérations dépendant du lien entre les variables canoniques utilisées et les variables effectivement codées ont dû être définies ; ce sont essentiellement les développements en excentricité de la fonction perturbatrice, la dérivation par rapport aux variables canoniques et l'intégration ou la moyennisation par rapport à l'anomalie moyenne. Lorsqu'on cherche des expressions non développées en excentricité, ces deux dernières opérations sont de loin les plus délicates.

4. Développements en excentricité

Dans le cas où on développe la fonction perturbatrice, nous avons vu que les variables $G, a/r$ ou f ne sont pas codées. Elles entrent pourtant dans l'expression de l'hamiltonien de départ. N'étant pas guidés par des soucis d'économie de calcul, nous avons choisi des formules simples à programmer :

$$\frac{G}{L} = \sqrt{1 - e^2} = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1.1}{2.4}e^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}e^6 - \dots \quad (\text{III4})$$

$$\frac{L}{G} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1.3}{2.4}e^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}e^6 + \dots \quad (\text{III5})$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos u = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{J'_s(se)}{s} \cos sl \quad (\text{III6})$$

$$\frac{a}{r} = \frac{du}{dl} = 1 + 2 \sum_{s=1}^{+\infty} J_s(se) \cos sl \quad (\text{III7})$$

$$\cos f = -\frac{1}{e} \left[1 - (1 - e^2) \frac{a}{r} \right] \quad (\text{III8})$$

$$\sin f = \frac{G}{eL} \frac{d}{dl} \left(\frac{r}{a} \right) \quad (\text{III9})$$

$J_s(x)$ et $J'_s(x)$ sont les fonctions de Bessel et leurs dérivées par rapport à x :

$$J_s(x) = \frac{1}{s!} \left(\frac{x}{2} \right)^s \sum_{\beta=0}^{+\infty} (-1)^\beta \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^{2\beta}}{\beta!(s+1)(s+2)\cdots(s+\beta)}$$

$$J'_s(se) = \frac{1}{s} \frac{d}{de} \left(J(se) \right)$$

On peut ensuite en déduire les développements de $(r/a)^n$, $(a/r)^n$, $\cos kf$ ou $\sin kf$ par récurrence. Un moyen de contrôler les calculs est de vérifier que $(a/r)(r/a) = \cos^2 f + \sin^2 f = 1$ au degré de troncature souhaité.

5. Dérivation par rapport aux variables canoniques

Etant donnée une fonction ϕ dépendant explicitement des variables codées z_j ($j = 1, nc$), nc étant le nombre total de variables codées, la dérivée de ϕ par rapport à une des variables canonique x_i (pas forcément codée) s'obtient par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{nc} \frac{\partial \phi}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial x_i}$$

Les expressions $\frac{\partial z_j}{\partial x_i}$ se déduisent des relations différentielles :

$$\begin{aligned}
df &= \frac{G}{L} \frac{a^2}{r^2} dl + \frac{1}{e} (2 \sin f + \frac{1}{2} e \sin 2f) \left(\frac{dL}{L} - \frac{dG}{G} \right) \\
du &= \frac{a}{r} dl + \frac{G^2}{eL^2} \frac{a}{r} \sin u \left(\frac{dL}{L} - \frac{dG}{G} \right) \\
de &= \frac{G^2}{eL^2} \left(\frac{dL}{L} - \frac{dG}{G} \right) \\
ds &= \frac{c^2}{s} \left(\frac{dG}{G} - \frac{dH}{H} \right) \\
dc &= -c \left(\frac{dG}{G} - \frac{dH}{H} \right) \\
d\left(\frac{a}{r}\right) &= -\frac{a^2}{r^2} \frac{L}{G} e \sin f dl + \frac{a^2}{r^2} \frac{G^2}{eL^2} \cos f \left(\frac{dL}{L} - \frac{dG}{G} \right) \\
d\Phi &= \left(\frac{G}{L} \frac{a^2}{r^2} - 1 \right) dl + \frac{1}{e} (2 \sin f + \frac{1}{2} e \sin 2f) \left(\frac{dL}{L} - \frac{dG}{G} \right) \\
d\nu &= \nu^2 \frac{G}{L} \left(\frac{dL}{L} - \frac{dG}{G} \right)
\end{aligned} \tag{III10}$$

Il bien sûr indispensable de pouvoir exprimer ces dérivées uniquement avec les variables codées.

6. Intégration par rapport à l'anomalie moyenne

Comme le montrent les formules (II53) et (II54), à chaque ordre n le nouvel hamiltonien \mathcal{H}_0^n et le générateur W_n sont définis par :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0^n = \langle \tilde{\mathcal{H}}_0^n \rangle_l \\ W_n = \frac{L^3}{\mu^2} \int (\tilde{\mathcal{H}}_0^n - \mathcal{H}_0^n) dl \end{cases}$$

Dans le cas où toutes les fonctions sont développées en excentricité, l n'apparaît qu'à travers les fonctions $\cos kl$ et $\sin kl$, k entier. Le calcul est alors immédiat :

$$\begin{aligned}
\langle \cos kl \rangle_l &= \langle \sin kl \rangle_l = 0 \\
\int (\cos kl - 0) dl &= \frac{1}{k} \sin kl + C \\
\int (\sin kl - 0) dl &= -\frac{1}{k} \cos kl + C
\end{aligned}$$

Il en va différemment lorsqu'on réalise les calculs sous forme non développée. Des fonctions contenant $(a/r)^n$, $(r/a)^n$, $\cos kf$, $\sin kf$ ou $(f-l)^n$ doivent être intégrées. Il

n'existe pas d'algorithme général pour intégrer n'importe quelle combinaison de toutes ces fonctions. En particulier l'équation du centre $f - l$ pose beaucoup de difficultés. C'est pourquoi nous exposerons les solutions cas par cas, dans leur contexte. Disons simplement que lorsque nous rencontrerons des fonctions contenant l'anomalie vraie ou $(a/r)^n$, $n > 0$, nous essayerons de les mettre sous la forme $T(f)(a/r)^2$, $T(f)$ étant une fonction trigonométrique. Par exemple on développera $(a/r)^n \cos kf$ en utilisant

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{n-2} = \left[\frac{L^2}{G^2}(1 + e \cos f)\right]^{n-2} \quad (\text{III11})$$

puis on appliquera

$$\int T(f) \frac{a^2}{r^2} dl + C_1 = \frac{L}{G} \int T(f) df + C_2 \quad (\text{III12})$$

en vertu de la loi des aires.

Dans le cas de fonctions contenant $(r/a)^n$, $n > 0$ on cherchera à utiliser

$$\int T(u) \frac{a}{r} dl + C_3 = \int T(u) du + C_4 \quad (\text{III13})$$

pour cela on substituera $(a/r)(1 - e \cos u)^{n+1}$ à $(r/a)^n$.

Ces algorithmes sont bien adaptés aux calculs par manipulateur car ils permettent des formulations par récurrence et une programmation simple.

Dans tout ce qui précède, C , $C_1 \dots C_4$ sont indépendants de l'anomalie moyenne. Si il suffit de choisir $C = 0$ pour obtenir une primitive de moyenne nulle, il peut en être autrement dans les relations (III12) et (III13) où l'anomalie moyenne n'apparaît pas explicitement : la primitive sans constante d'intégration n'est pas forcément de moyenne nulle.

7. Tests numériques

Les tests numériques permettent de contrôler globalement le degré de validité de la méthode, la qualité du filtrage des observations et l'exactitude des développements analytiques. Dans la mesure où on a pu vérifier les calculs algébriques par un autre moyen, les tests numériques jugent directement la cohérence de la méthode.

Dans le cas d'une théorie complètement analytique, on peut comparer directement les résultats de la théorie à ceux d'une intégration numérique. Dans le cas de notre méthode semi-analytique, il s'agit de comparer l'intégration numérique d'un système différentiel moyen obtenu avec une théorie analytique à des pseudo-observations. On juge donc simultanément la qualité de la théorie, la qualité du filtrage ayant généré les pseudo-observations et surtout la cohérence des deux.

Les séries représentant les dérivées partielles de l'hamiltonien moyen (pour l'extrapolation des variables moyennes) et les séries représentant les dérivées secondes (pour l'ajustement de paramètres par correction différentielle) sont utilisées par le programme "CODIOR" : COrrrection Différentielle d'ORbites. Ce logiciel développé essentiellement par P. Exertier est conçu pour intégrer différentes perturbations (pourvu que l'on dispose de fichiers contenant les séries représentant le système moyen correspondant) en éléments orbitaux ou en variables de Delaunay. Il peut fonctionner en mode extrapolation ou en mode restitution de conditions initiales et de paramètres physiques. Ce programme constitue le nœud de la méthode et un travail très important lui a été consacré.

Pour simuler les pseudo-observations, on procède en trois phases :

- on génère par intégration numérique une orbite s'étendant sur toute la période de test choisie. Cette période peut être assez longue (un an ou plus), c'est pourquoi on utilise une méthode d'intégration très stable : l'algorithme de Bulirsch et Stoer [**Stoer et Bulirsch 1980, Balmino 1969**] offre cette stabilité mais génère des résultats très espacés dans le temps ce qui ne permet pas un filtrage numérique,
- les résultats précédents servent de conditions initiales pour des intégrations numériques sur des intervalles de temps plus courts (10 jours en moyenne) avec un algorithme moins stable mais plus souple : la méthode d'Adams [**Stoer et Bulirsch 1980**] produit la densité de points souhaitée dans l'éphéméride,
- chacun de ces intervalles est ensuite utilisé pour un filtrage qui génère typiquement une pseudo-observation par jour pour chaque variable.

Les intervalles utilisés lors de la deuxième phase ne sont pas nécessairement choisis jointifs, ce qui explique les zones sans pseudo-observations que nous retrouverons lors des tests.

Les pseudo-observations étant simulées, elles ne sont pas altérées par le bruit inhérent aux observations réelles. En revanche, elles sont affectées par les erreurs de troncature et d'arrondi qui perturbent toujours l'intégration numérique. Le principal effet est une dérive parabolique de l'anomalie moyenne correspondant à une légère dérive linéaire du demi-grand axe. Ce phénomène doit être pris en compte pour la pondération : les pseudo-observations sur l'anomalie moyenne seront sous-pondérées. On choisira par exemple $p_a = p_e = p_I = p_h = p_g = 1$ et $p_l = 10^{-4}$.

Précisons enfin que ces tests ont été réalisés sur un ordinateur CDC 992 en simple précision avec 14 chiffres significatifs (le dernier chiffre est obtenu par troncature et non par arrondi).

III.B Perturbation due au second harmonique zonal du potentiel terrestre

Cette perturbation a été beaucoup étudiée et on en possède aujourd'hui une intégration analytique satisfaisante. Brouwer a réalisé une théorie au premier ordre (avec termes séculaires du second ordre) par la méthode de Poincaré-Von Zeipel décrite au chapitre II [**Brouwer 1959**]. Kozai a obtenu un ordre de plus par la même méthode [**Kozai 1962**]. Ces deux calculs ont été réalisés sans développements en excentricité et sans recours à un manipulateur de séries. Deprit et Rom ont atteint le troisième ordre (termes séculaires du quatrième ordre) en utilisant l'algorithme de Deprit avec développements en excentricité ; les calculs ont été réalisés informatiquement [**Deprit et Rom 1970**]. Berger a développé une théorie au deuxième ordre (avec termes séculaires du troisième ordre) pour les harmoniques J_2 à J_7 en intégrant les équations de Lagrange par une méthode itérative [**Berger 1975**]. Deprit a encore créé la méthode d'élimination de la parallaxe déjà citée qui permet de pousser très loin les calculs sans développements en excentricité [**Deprit 1980**].

Des premiers résultats sur la méthode de centrage ont été obtenus en reprenant les théories existantes : N. Borderies a utilisé le premier ordre de Brouwer et P. Exertier a ajouté le deuxième ordre de Kozai et le troisième ordre de Kinoshita [**Kinoshita 1977**]. Cependant plusieurs raisons nous ont poussé à refaire notre propre théorie pour l'appliquer à cette méthode :

- les théories de Brouwer et de Kozai n'utilisent pas des fonctions génératrices de moyenne nulle et l'emploi de la méthode de Poincaré-Von Zeipel complique la récupération des longues périodes perdues lors de l'élimination de l'anomalie moyenne,
- nous désirions une théorie non développée en excentricité pour les deux premiers ordres ce que n'offraient pas les résultats de Deprit et Rom ou de Kinoshita,
- nous ne voulions pas nous contenter d'une théorie comprenant J_2 et quelques autres harmoniques mais il fallait inclure des harmoniques zonaux d'ordre élevé ainsi que les perturbations luni-solaires. Or, à partir d'un certain degré de précision, il n'est plus satisfaisant d'additionner plusieurs théories distinctes, chacune traitant une perturbation particulière : on doit développer une théorie homogène comprenant l'ensemble des perturbations souhaitées avec leurs couplages.

1. Théorie analytique

L'hamiltonien est du premier ordre et s'écrit

$$\mathcal{H}_1^0(J_2) = \frac{1}{2} J_2 \frac{R_e^2 \mu^4}{L^6} \frac{a^3}{r^3} \left[-1 + \frac{3}{2} s^2 - \frac{3}{2} s^2 \cos(2f + 2g) \right] \quad (\text{III18})$$

R_e : rayon équatorial terrestre,

μ : constante géocentrique de la gravitation.

Comme nous l'avons dit précédemment on calcule la moyenne en isolant $(a/r)^2$:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \frac{a^2}{r^2} \frac{L^2}{G^2} (1 + e \cos f) \quad (\text{III19})$$

et on obtient le résultat classique :

$$\mathcal{H}_0^1(J_2) = \langle \mathcal{H}_1^0 \rangle_l = \frac{1}{2} J_2 \frac{R_e^2 \mu^4}{L^3 G^3} \left[-1 + \frac{3}{2} s^2 \right] \quad (\text{III20})$$

Pour calculer W_1 , il faut intégrer $\mathcal{H}_1^0 - \mathcal{H}_0^1$ (formule II53) qui contient des termes en $a^2/r^2 - \langle a^2/r^2 \rangle = a^2/r^2 - L/G$. Il en résulte l'introduction de l'équation du centre $f-l$. Après avoir ajouté une constante d'intégration de manière à obtenir un générateur de moyenne nulle on trouve :

$$W_1 = -\frac{J_2}{8} \frac{R_e^2 \mu^2}{G^3} \left\{ (4 - 6s^2)(f - l + e \sin f) + s^2 \left[e^2(1 - \eta^2 \nu^2) \sin 2g \right. \right. \\ \left. \left. + 3e \sin(f + 2g) + 3 \sin(2g + 2f) + e \sin(2g + 3f) \right] \right\} \quad (\text{III21})$$

Ce résultat est un peu différent de celui de Brouwer qui n'a pas choisi un générateur de moyenne nulle. Cela aura pour conséquence de générer des hamiltoniens différents aux ordres suivants comme nous l'avons signalé au paragraphe II.4.b et développé en annexe 1.

A l'ordre 2, le calcul des fonctions intermédiaires $\tilde{\mathcal{H}}_1^1$ et $\tilde{\mathcal{H}}_0^2$ (voir annexe 1) ne présente pas de difficulté. Puis il faut calculer le nouvel hamiltonien et le générateur par :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0^2 = \langle \tilde{\mathcal{H}}_0^2 \rangle_l \\ W_2 = \frac{L^3}{\mu^2} \int (\tilde{\mathcal{H}}_0^2 - \mathcal{H}_0^2) dl \end{cases}$$

Après avoir développé $\tilde{\mathcal{H}}_0^2$ de manière que a/r n'apparaisse que sous la forme $(a/r)^2$, trois sortes de termes sont à moyenner :

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{a^2}{r^2} T(f) \\ T_2 &= \cos(kf + 2g) \\ T_3 &= (f - l) \frac{a^2}{r^2} \sin(kf + 2g) \end{aligned}$$

Nous avons déjà évoqué le premier type de termes et leur traitement est simple (formule III12). D'autre part il se trouve que les deux autres types de termes peuvent se regrouper et se mettre exactement sous la forme $T_2 + k \frac{G}{L} T_3$. Il s'ensuit l'intégration :

$$\begin{aligned} & \int k \frac{G}{L} (f-l) \frac{a^2}{r^2} \sin(kf + 2g) + \cos(kf + 2g) dl \\ & = - (f-l) \cos(kf + 2g) + \frac{1}{k} \sin(kf + 2g) \end{aligned} \quad (\text{III22})$$

On obtient de cette manière un générateur W_2 qui n'est pas de moyenne nulle. Il est nécessaire de calculer la moyenne de W_2 soit pour en déduire un nouveau générateur $W_2^* = W_2 - \langle W_2 \rangle_l$ de moyenne nulle avant le calcul de l'hamiltonien moyen \mathcal{H}_0^3 , soit pour calculer la moyenne du changement de variables défini par (II56). Or W_2 contient des termes de la forme $(f-l) \sin kf$ dont nous avons vainement cherché la moyenne dans la littérature. Nous avons développé ce calcul en appendice 2. Le résultat est [Metris 1991] :

$$\begin{aligned} \langle (f-l) \sin kf \rangle &= (1 - k\eta) \left[\ln(1 - \beta^2) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\beta^{2j}}{j} \right] (-\beta)^{-k} \\ &\quad - (1 + k\eta) \left[\ln(1 - \beta^2) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \right] (-\beta)^k \\ &\quad + \eta \left[\frac{k}{2}(1 - k\eta) - 2 \right] (-\beta)^k \quad \text{pour } k \geq 2 \\ \langle (f-l) \sin f \rangle &= \frac{\eta}{e} - \frac{\eta^2}{e} + \eta \frac{e}{2} = \eta e \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \eta} \right) \end{aligned} \quad (\text{III23})$$

$$\text{avec } \beta = \frac{1 - \eta}{e} = \frac{e}{1 + \eta}$$

Comme $\beta \simeq e/2$, le premier terme présente une singularité pour les excentricités nulles. Cette singularité disparaît lorsqu'on le développe en puissances de β :

$$\ln(1 - \beta^2) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\beta^{2j}}{j} = - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\beta^{2j}}{j} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\beta^{2j}}{j} = - \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{\beta^{2j}}{j} \quad (\text{III24})$$

On aura intérêt à utiliser cette formulation pour les excentricités faibles tandis que la forme non développée sera adaptée pour les excentricités moyennes et fortes.

Pour obtenir \mathcal{H}_0^3 il faut encore moyenner deux nouvelles formes :

- des termes en $-(f-l)$ et en $\frac{G}{L}(f-l)\frac{a^2}{r^2}$ peuvent être regroupés tels que :

$$\int (f-l) \left(\frac{G a^2}{L r^2} - 1 \right) dl = \frac{1}{2} (f-l)^2 \quad (\text{III25})$$

- des termes en $(f-l) \frac{a^2}{r^2} \sin kf$ ou en $(f-l) \frac{a^2}{r^2} \cos kf$ peuvent être moyennés en utilisant la relation :

$$\frac{d}{dl} \left[(f-l) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (kf) \right] = \left[\frac{G a^2}{L r^2} - 1 \right] \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (kf) + k(f-l) \frac{G a^2}{L r^2} \begin{Bmatrix} -\sin \\ \cos \end{Bmatrix} (kf)$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \left\langle (f-l) \frac{a^2}{r^2} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (kf) \right\rangle &= \frac{1}{k} \left[\frac{L}{G} (f-l) \begin{Bmatrix} -\cos \\ \sin \end{Bmatrix} (kf) \right]_{l=0}^{2\pi} \\ &- \frac{1}{k} \left\langle \left(\frac{a^2}{r^2} - \frac{L}{G} \right) \begin{Bmatrix} -\cos \\ \sin \end{Bmatrix} (kf) \right\rangle \\ &= \begin{Bmatrix} -\frac{1}{k} \frac{L}{G} \langle \cos(kf) \rangle \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III26})$$

avec $\langle \cos kf \rangle = (-\beta)^k (1 + j\eta)$ [**Kozai 1962b**]

Les tableaux (III1), (III2) et (III3) représentent les séries \mathcal{H}_0^2 et \mathcal{H}_0^3 , ce dernier hamiltonien étant obtenu soit avec la formule (III23), soit en utilisant la forme développée de cette même formule (III23).

Nous avons renoncé à mener plus loin les calculs sous forme non développée pour deux raisons : tout d'abord les manipulations deviennent très compliquées et ensuite on obtiendrait des séries dont la taille nous dissuaderait de les utiliser comme second membre d'un système intégré numériquement. Et ceci pour un apport très limité : \mathcal{H}_0^4 a une contribution de quelques décimètres et contiendrait sans doute plus de 1000 termes. Au contraire, à cet ordre les développements en excentricité peuvent être tronqués très bas tout en fournissant une précision satisfaisante pour la plupart des satellites utilisés en géodésie spatiale.

Les calculs développés en excentricité ne posent aucune difficulté : l'hamiltonien de départ est développé en utilisant les formules (III4) à (III9) et les intégrations sont triviales puisque l'anomalie moyenne apparaît explicitement à travers $\cos kl$ ou $\sin kl$. Nous avons ainsi exprimé \mathcal{H}_0^1 , \mathcal{H}_0^2 , \mathcal{H}_0^3 , \mathcal{H}_0^4 et \mathcal{H}_0^5 . Rien n'empêchait d'aller plus loin mais la précision ne l'exigeait pas.

Tableau III1 : Hamiltonien moyenné du second ordre obtenu avec un générateur W_1 de moyenne nulle

$$\mathcal{H}_0^2 = \mu^6 R_c^4 J_2^2 \sum_{i=1}^{13} \alpha_i L^{n_2(i)} G^{n_3(i)} e^{n_4(i)} s^{n_5(i)} \nu^{n_6(i)} \cos(n_1(i)g)$$

i : numéro du terme

α_i : coefficient réel donné dans la première colonne

$n_j(i)$: entier donné dans la colonne ($j + 1$)

SERIE : H02

NOMBRE DE TERMES : 13

	T PTG	P GRL	P GRG	P e	P s	P NU
-1.125000000000D+00	.	-5	-5	.	.	.
-1.125000000000D+00	.	-3	-7	2	.	.
1.875000000000D-01	.	-3	-7	4	.	2
2.812500000000D+00	.	-5	-5	.	2	.
2.437500000000D+00	.	-3	-7	2	2	.
-5.625000000000D-01	.	-3	-7	4	2	2
-1.781250000000D+00	.	-5	-5	.	4	.
-1.242187500000D+00	.	-3	-7	2	4	.
4.218750000000D-01	.	-3	-7	4	4	2
1.406250000000D+00	2	-3	-7	2	2	.
-7.500000000000D-01	2	-5	-5	2	2	2
-1.640625000000D+00	2	-3	-7	2	4	.
9.375000000000D-01	2	-5	-5	2	4	2

Tableau III2 : Hamiltonien moyenné du troisième ordre obtenu avec des générateurs W_1 et W_2 de moyenne nulle.

$$\mathcal{H}_0^3 = -\mu^8 R_e^6 J_2^3 \sum_{i=1}^{86} \alpha_i L^{n_2(i)} G^{n_3(i)} e^{n_4(i)} s^{n_5(i)} \nu^{n_6(i)} (\ln(1 - \beta^2))^{n_7(i)} \cos(n_1(i)g)$$

i : numéro du terme

α_i : coefficient réel donné dans la première colonne

$n_j(i)$: entier donné dans la colonne ($j + 1$)

SERIE : H03

NOMBRE DE TERMES : 86

	T	P	P	P	P	P	P
	PTG	GRL	GRG	e	s	NU	LNB
4.556250000000D+01	.	-5	-9	2	.	.	.
-1.698750000000D+02	.	-5	-9	2	2	.	.
2.295000000000D+02	.	-5	-9	2	4	.	.
-1.017421875000D+02	.	-5	-9	2	6	.	.
-2.812500000000D+00	.	-5	-9	4	.	2	.
1.546875000000D+01	.	-5	-9	4	2	2	.
-3.410156250000D+01	.	-5	-9	4	4	2	.
2.285156250000D+01	.	-5	-9	4	6	2	.
-4.500000000000D+00	.	-9	-5	.	2	2	.
1.743750000000D+01	.	-9	-5	.	4	2	.
-1.406250000000D+01	.	-9	-5	.	6	2	.
-1.125000000000D+00	.	-9	-5	2	4	4	.
1.406250000000D+00	.	-9	-5	2	6	4	.
2.390625000000D+01	.	-3	-11	4	.	.	.
-9.351562500000D+01	.	-3	-11	4	2	.	.
1.443164062500D+02	.	-3	-11	4	4	.	.
-7.321289062500D+01	.	-3	-11	4	6	.	.
-4.218750000000D+00	.	-3	-11	6	.	2	.
1.476562500000D+01	.	-3	-11	6	2	2	.
-1.634765625000D+01	.	-3	-11	6	4	2	.
5.537109375000D+00	.	-3	-11	6	6	2	.
2.025000000000D+01	.	-7	-7
-7.481250000000D+01	.	-7	-7	.	2	.	.
9.365625000000D+01	.	-7	-7	.	4	.	.
-3.810937500000D+01	.	-7	-7	.	6	.	.
-2.250000000000D+00	.	-7	-7	2	2	2	.
9.281250000000D+00	.	-7	-7	2	4	2	.
-7.734375000000D+00	.	-7	-7	2	6	2	.
-4.050000000000D+01	2	-6	-8	.	2	-1	.
1.012500000000D+02	2	-6	-8	.	4	-1	.
-6.328125000000D+01	2	-6	-8	.	6	-1	.
-2.700000000000D+01	2	-5	-9	.	2	.	1
6.750000000000D+01	2	-5	-9	.	4	.	1
-4.218750000000D+01	2	-5	-9	.	6	.	1
-3.515625000000D+01	2	-5	-9	2	2	.	.
1.350000000000D+01	2	-5	-9	2	2	2	1
9.035156250000D+01	2	-5	-9	2	4	.	.
-3.375000000000D+01	2	-5	-9	2	4	2	1

-5.774414062500D+01	2	-5	-9	2	6	.	.
2.109375000000D+01	2	-5	-9	2	6	2	1
4.893750000000D+01	2	-5	-9	4	2	2	.
-1.113750000000D+02	2	-5	-9	4	4	2	.
6.275390625000D+01	2	-5	-9	4	6	2	.
-4.500000000000D+00	2	-9	-5	.	2	2	.
1.237500000000D+01	2	-9	-5	.	4	2	.
-8.437500000000D+00	2	-9	-5	.	6	2	.
-6.750000000000D+01	2	-4	-10	-2	2	-3	1
1.215000000000D+02	2	-4	-10	-2	2	-2	1
1.687500000000D+02	2	-4	-10	-2	4	-3	1
-3.037500000000D+02	2	-4	-10	-2	4	-2	1
-1.054687500000D+02	2	-4	-10	-2	6	-3	1
1.898437500000D+02	2	-4	-10	-2	6	-2	1
5.400000000000D+01	2	-4	-10	.	2	1	.
-1.350000000000D+02	2	-4	-10	.	4	1	.
8.437500000000D+01	2	-4	-10	.	6	1	.
-2.700000000000D+01	2	-3	-11	.	2	-2	1
1.350000000000D+01	2	-3	-11	.	2	-1	.
2.700000000000D+01	2	-3	-11	.	2	.	1
6.750000000000D+01	2	-3	-11	.	4	-2	1
-3.375000000000D+01	2	-3	-11	.	4	-1	.
-6.750000000000D+01	2	-3	-11	.	4	.	1
-4.218750000000D+01	2	-3	-11	.	6	-2	1
2.109375000000D+01	2	-3	-11	.	6	-1	.
4.218750000000D+01	2	-3	-11	.	6	.	1
-1.814062500000D+01	2	-3	-11	4	2	.	.
4.197656250000D+01	2	-3	-11	4	4	.	.
-2.399414062500D+01	2	-3	-11	4	6	.	.
4.007812500000D+01	2	-3	-11	6	2	2	.
-1.012500000000D+02	2	-3	-11	6	4	2	.
6.380859375000D+01	2	-3	-11	6	6	2	.
1.462500000000D+01	2	-7	-7	.	2	.	.
-3.684375000000D+01	2	-7	-7	.	4	.	.
2.320312500000D+01	2	-7	-7	.	6	.	.
-4.500000000000D+00	2	-7	-7	2	2	2	.
1.828125000000D+01	2	-7	-7	2	4	2	.
-1.582031250000D+01	2	-7	-7	2	6	2	.
9.140625000000D-01	4	-5	-9	2	4	.	.
-1.054687500000D+00	4	-5	-9	2	6	.	.
-9.843750000000D+00	4	-5	-9	4	4	2	.
1.107421875000D+01	4	-5	-9	4	6	2	.
7.312500000000D+00	4	-9	-5	.	4	2	.
-8.437500000000D+00	4	-9	-5	.	6	2	.
5.273437500000D+00	4	-3	-11	4	4	.	.
-5.800781250000D+00	4	-3	-11	4	6	.	.
-1.828125000000D+00	4	-7	-7	.	4	.	.
2.109375000000D+00	4	-7	-7	.	6	.	.

Tableau III3 : Hamiltonien moyenné du troisième ordre obtenu avec des générateurs W_1 et W_2 de moyenne nulle (dans W_2 les termes en $\ln(1 - \beta^2)$ ont été développés en e^{12}).

$$\mathcal{H}_0^3 = -\mu^8 R_e^6 J_2^3 \sum_{i=1}^{92} \alpha_i L^{n_2(i)} G^{n_3(i)} e^{n_4(i)} s^{n_5(i)} \nu^{n_6(i)} \cos(n_1(i)g)$$

i : numéro du terme

α_i : coefficient réel donné dans la première colonne

$n_j(i)$: entier donné dans la colonne ($j + 1$)

SERIE : H03

NOMBRE DE TERMES : 92

	T	P	P	P	P	P
	PTG	GRL	GRG	e	s	NU
-2.831250000000D+01	.	-5	-9	2	2	.
-1.558593750000D+01	.	-3	-11	4	2	.
-1.246875000000D+01	.	-7	-7	.	2	.
-7.500000000000D-01	.	-9	-5	.	2	2
2.578125000000D+00	.	-5	-9	4	2	2
2.460937500000D+00	.	-3	-11	6	2	2
-3.750000000000D-01	.	-7	-7	2	2	2
3.825000000000D+01	.	-5	-9	2	4	.
2.405273437500D+01	.	-3	-11	4	4	.
1.560937500000D+01	.	-7	-7	.	4	.
2.906250000000D+00	.	-9	-5	.	4	2
-5.683593750000D+00	.	-5	-9	4	4	2
-2.724609375000D+00	.	-3	-11	6	4	2
1.546875000000D+00	.	-7	-7	2	4	2
-1.875000000000D-01	.	-9	-5	2	4	4
-1.695703125000D+01	.	-5	-9	2	6	.
-1.220214843750D+01	.	-3	-11	4	6	.
-6.351562500000D+00	.	-7	-7	.	6	.
-2.343750000000D+00	.	-9	-5	.	6	2
3.808593750000D+00	.	-5	-9	4	6	2
9.228515625000D-01	.	-3	-11	6	6	2
-1.289062500000D+00	.	-7	-7	2	6	2
2.343750000000D-01	.	-9	-5	2	6	4
7.593750000000D+00	.	-5	-9	2	.	.
3.984375000000D+00	.	-3	-11	4	.	.
3.375000000000D+00	.	-7	-7	.	.	.
-4.687500000000D-01	.	-5	-9	4	.	2
-7.031250000000D-01	.	-3	-11	6	.	2
-1.181250000000D+01	2	-6	-8	.	2	.
1.123593750000D+02	2	-13	-1	2	2	.
2.268435058594D+01	2	-5	-9	10	2	.
2.381250000000D+01	2	-5	-9	4	2	.
-6.093750000000D+00	2	-9	-5	.	2	.
2.237431640625D+02	2	-9	-5	6	2	.
-1.223437500000D+01	2	-4	-10	2	2	.
2.303437500000D+02	2	-11	-3	4	2	.
2.303691755022D+00	2	-3	-11	12	2	.
5.906250000000D+00	2	-3	-11	6	2	.

2.109375000000D+01	2	-15	1	.	2	.
1.048069335938D+02	2	-7	-7	8	2	.
-1.439062500000D+01	2	-7	-7	2	2	.
-1.500000000000D+00	2	-11	-3	.	2	.
-1.500000000000D+00	2	-13	-1	.	2	.
-7.500000000000D-01	2	-11	-3	.	2	2
-1.500000000000D+00	2	-9	-5	2	2	2
-7.500000000000D-01	2	-7	-7	4	2	2
2.587500000000D+01	2	-6	-8	.	4	.
-2.952773437500D+02	2	-13	-1	2	4	.
-5.671087646484D+01	2	-5	-9	10	4	.
-5.838281250000D+01	2	-5	-9	4	4	.
2.186718750000D+01	2	-9	-5	.	4	.
-5.681821289063D+02	2	-9	-5	6	4	.
3.093750000000D+01	2	-4	-10	2	4	.
-5.918554687500D+02	2	-11	-3	4	4	.
-5.759229387556D+00	2	-3	-11	12	4	.
-1.550390625000D+01	2	-3	-11	6	4	.
-5.800781250000D+01	2	-15	1	.	4	.
-2.639509277344D+02	2	-7	-7	8	4	.
4.340625000000D+01	2	-7	-7	2	4	.
4.875000000000D+00	2	-11	-3	.	4	.
4.875000000000D+00	2	-13	-1	.	4	.
2.062500000000D+00	2	-11	-3	.	4	2
5.109375000000D+00	2	-9	-5	2	4	2
3.046875000000D+00	2	-7	-7	4	4	2
-1.388671875000D+01	2	-6	-8	.	6	.
1.935351562500D+02	2	-13	-1	2	6	.
3.544429779053D+01	2	-5	-9	10	6	.
3.577148437500D+01	2	-5	-9	4	6	.
-1.781250000000D+01	2	-9	-5	.	6	.
3.606289672852D+02	2	-9	-5	6	6	.
-1.951171875000D+01	2	-4	-10	2	6	.
3.799072265625D+02	2	-11	-3	4	6	.
3.599518367222D+00	2	-3	-11	12	6	.
1.015136718750D+01	2	-3	-11	6	6	.
3.955078125000D+01	2	-15	1	.	6	.
1.661778259277D+02	2	-7	-7	8	6	.
-3.177246093750D+01	2	-7	-7	2	6	.
-3.750000000000D+00	2	-11	-3	.	6	.
-3.750000000000D+00	2	-13	-1	.	6	.
-1.406250000000D+00	2	-11	-3	.	6	2
-4.042968750000D+00	2	-9	-5	2	6	2
-2.636718750000D+00	2	-7	-7	4	6	2
1.523437500000D-01	4	-5	-9	2	4	.
8.789062500000D-01	4	-3	-11	4	4	.
-3.046875000000D-01	4	-7	-7	.	4	.
1.218750000000D+00	4	-9	-5	.	4	2
-1.640625000000D+00	4	-5	-9	4	4	2
-1.757812500000D-01	4	-5	-9	2	6	.
-9.667968750000D-01	4	-3	-11	4	6	.
3.515625000000D-01	4	-7	-7	.	6	.
-1.406250000000D+00	4	-9	-5	.	6	2
1.845703125000D+00	4	-5	-9	4	6	2

Tableau III4 : Problème en J_2 . Hamiltoniens et changements de variables calculés et nombre de termes correspondants.

Hamiltoniens	Dév.	$\langle W_1 \rangle_l$	$\langle W_2 \rangle_l$	Termes
<i>Ordre 1</i>	<i>Non</i>	--	--	2
"	e^{11}	--	--	12
<i>Ordre 2</i>	<i>Non</i>	$\neq 0$	--	11
"	<i>Non</i>	$= 0$	--	13
"	e^{11}	$= 0$	--	29
<i>Ordre 3</i>	<i>Non</i>	$\neq 0$	$\neq 0$	27
"	<i>Non</i>	$= 0$	$\neq 0$	63
"	<i>Non</i> + e^{12} †	$= 0$	$= 0$	92
"	e^8	$= 0$	$= 0$	39
<i>Ordre 4</i>	e^5	$= 0$	$= 0$	26
<i>Ordre 5</i>	e^3	$= 0$	$= 0$	29
Changements de variables				
<i>Ordre 2</i>	<i>Non</i> + e^{12} †	$= 0$	$= 0$	122
"	e^6	$= 0$	$= 0$	86
<i>Ordre 3</i>	e^3	$= 0$	$= 0$	95
<i>Ordre 4</i>	e^0	$= 0$	$= 0$	53

† Seuls les termes correspondant à $\langle (f - l) \sin kf \rangle_l$ sont développés pour éviter des singularités apparentes.

Nous avons enfin calculé les moyennes des changements de variables destinés à restaurer les variations à longues périodes éliminées du nouveau système (formules II40 et II42). L'ordre 2 a été exprimé sous forme développée et non développée et les ordres 3 et 4 ont été obtenus seulement sous forme développée.

Le tableau (III4) récapitule les calculs effectués et donne le nombre de termes obtenus dans chaque cas. Sous forme non développée, le nombre de termes dépend de la combinaison des variables redondantes : par exemple $1 - G^2/L^2 = e^2$. Nous avons donné des expressions qui excluent les singularités apparentes en excentricité : on remplace par exemple $(1 - \eta)/e$ par $e/(1 + \eta) = \nu e$. Pour les changements de variables on indique le nombre de termes nécessaires à l'ensemble des 6 changements de variables.

2. Tests analytiques

Nous avons comparé nos hamiltoniens débarrassés de l'anomalie moyenne à ceux de plusieurs autres théories. Dans ce qui suit, les égalités n'auront pas toujours un sens strict mais pourront simplement signifier une équivalence. En effet, selon le choix de l'ordre des variables (l, g, h, L, G, H ou L, G, H, l, g, h), du petit paramètre (C_{20} ou $J_2 = -C_{20}$), du développement en fonction de ce paramètre (division ou non par $n!$), et de l'algorithme (Poincaré-Von Zeipel, Deprit, Hori), deux transformations pourront être équivalentes sans que les fonctions génératrices et les hamiltoniens soient rigoureusement égaux. Nous avons tenu compte de ces différentes possibilités dans nos comparaisons mais elles ne seront pas toujours détaillées.

- A l'ordre 1, notre hamiltonien est identique à celui de Brouwer mais la fonction génératrice est différente puisque nous l'avons choisie de moyenne nulle.
- A l'ordre 2, notre hamiltonien diffère de celui de Brouwer par des termes en $\cos 2g$. Ceci est une conséquence du choix des fonctions génératrices d'ordre 1. Nous avons vérifié que l'on retrouvait l'égalité des hamiltoniens avec des générateurs identiques.
- A l'ordre 3, nous avons retrouvé le résultat de Kozai à condition de prendre $W_1 = S_1$ (S_1 étant la fonction génératrice de Kozai) et de choisir une constante d'intégration ad hoc pour W_2 . Lorsque W_1 et W_2 sont choisis de moyenne nulle, les hamiltoniens diffèrent par des termes en $\cos 2g$ et $\cos 4g$ mais aussi en $\cos 0g$.
- Les hamiltoniens d'ordre 1, 2, 3 et 4 développés en excentricité ont été comparés à ceux de Kinoshita. L'égalité est vérifiée aux trois premiers ordres mais à l'ordre 4 nous avons trouvé une différence que nous n'avons pas pu expliquer complètement : une part est due aux choix des algorithmes (Kinoshita a utilisé le formalisme de Hori) et n'existe pas si on a $S_3 = W_3 - 1/2\{W_1; W_2\}$ [Campbell et Jefferys 1970]. Mais en l'occurrence on a seulement $S_3 = W_3 - 1/2[\{W_1; W_2\} - \langle \{W_1; W_2\} \rangle_l]$. Cette différence disparaît lorsque nous appliquons la correction $-\frac{1}{2} \langle \{S_1; S_2\} \rangle_l = -\frac{1}{2} \langle \{W_1; W_2\} \rangle_l$ à W_3 . Le reste de la différence comprend des termes en $\cos 2g$ et en $\cos 0g$ et peut s'écrire exactement

$$\Delta\mathcal{H}_0^4 = 3 \langle \{\mathcal{H}_2^1; W_1\} \rangle_l$$

\mathcal{H}_2^1 étant une des fonctions intermédiaires de notre algorithme et qui apparaît aussi implicitement dans celui de Kinoshita.

3. Tests numériques

Rappelons que pour les tests numériques, on utilise des pseudo-observations simulées résultant de deux intégrations numériques (paragraphe III.A.7). Ce processus permet d'expliquer la forme des résidus que l'on retrouve souvent sur l'anomalie moyenne : une parabole parcourant tout l'intervalle de test sur laquelle viennent s'appuyer plusieurs autres petites paraboles couvrant les intervalles de filtrage (Figure III1). La première est due aux erreurs d'arrondis de la méthode d'intégration numérique de Bulirsch et Stoer tandis que la seconde provient des erreurs d'arrondis de la méthode d'Adams.

Précisons enfin que ces tests ont été réalisés sur un ordinateur CDC 992 avec 14 chiffres significatifs (le dernier chiffre est obtenu par troncature et non par arrondi).

- **Test No 1** : Satellite $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$.

Comparaison d'une extrapolation avec des fonctions sous forme développée en excentricité et d'une extrapolation avec des fonctions sous forme non développée. Les différences sont de l'ordre de la précision numérique.

- **Test No 2** : Satellite $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$ (figure III1).

Intervalle d'intégration : 1 an.

Observations : 9 périodes de 6 jours regroupées en 3 périodes de 26 jours avec 1 point par jour.

Théorie : hamiltoniens d'ordre 1 et 2 non développés en excentricité, d'ordre 3 et 4 développés et changements de variables d'ordre 2 et 3 après intégration.

Variables d'intégration : variables de Delaunay.

Pondération : poids 1 sur L , G , H , g et h et 10^{-4} sur l .

- . La cohérence est suffisamment bonne pour voir les défauts de l'intégration numérique ayant généré les observations : on voit nettement la dérive parabolique sur l .
- . Il n'y a plus de signal net sur les 5 variables a , e , I , g et h : les résidus sont inférieurs au mm sur a , e et I et de quelques mm sur g et h .
- . Il est intéressant de noter que les résidus sont bien centrés sur 0 pour toutes les variables, sans qu'il ait été nécessaire d'ajuster autre chose que les conditions initiales. Cela prouve l'homogénéité de l'ensemble.

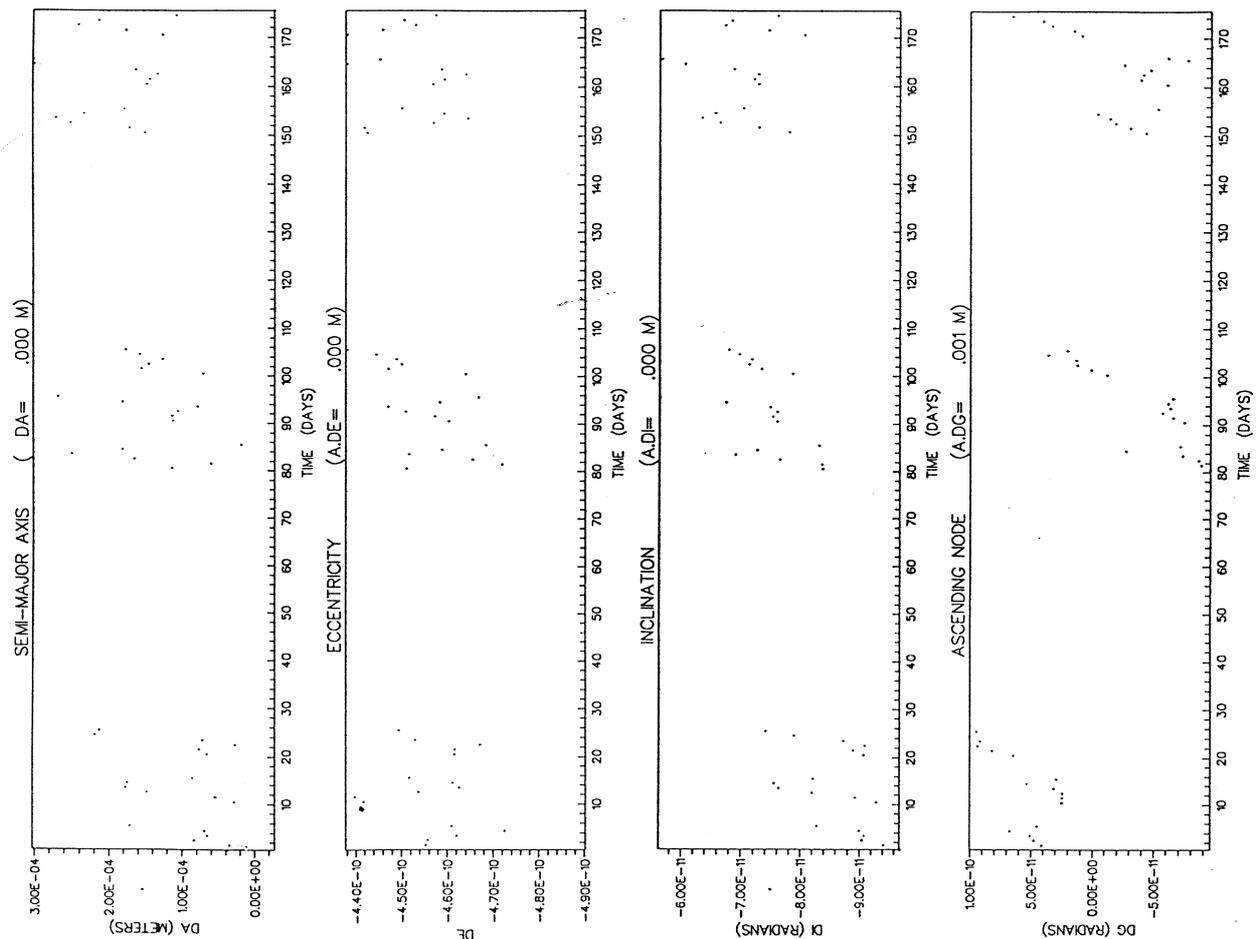
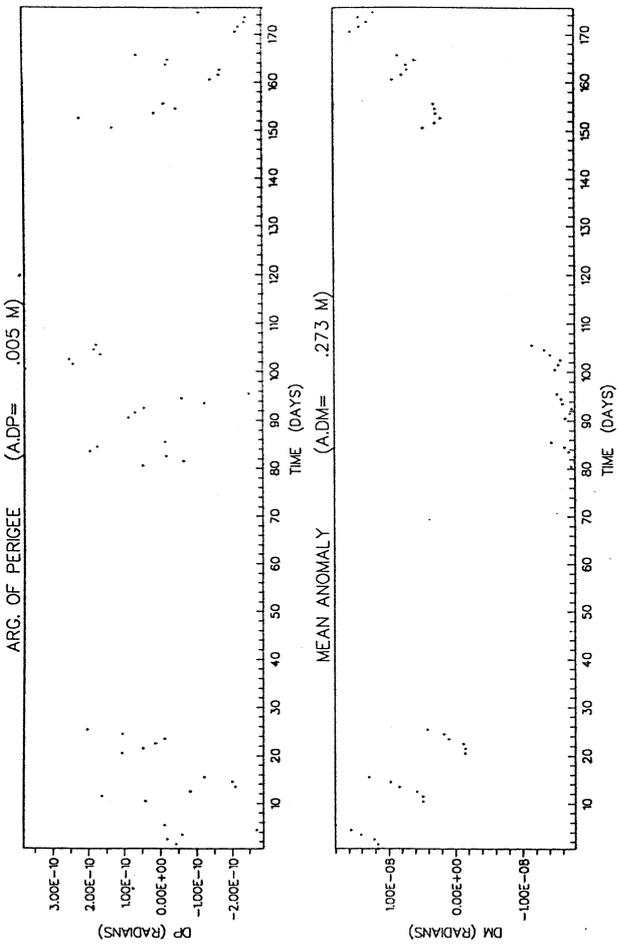


Figure IIII : Résidus sur les variables centrées après ajustement des conditions initiales. Pseudo-observations simulées à partir d'une orbite perturbée par J_2 . Poids : 1 sur L, G, H, g, h et 10^{-4} sur l . Satellite : $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$.

- **Test No 3** : Satellite $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$.
 Nous avons repris le test No 2 en utilisant l'hamiltonien d'ordre 4 de la théorie de Kinoshita à la place de celui que nous avons calculé. Le comportement est moins bon sur le nœud ascendant (effet séculaire de 1cm/an) et sur l'argument du périégée (effet séculaire de quelques mm/an).
- **Test No 4** : Satellite $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$.
 Nous avons repris le test No 2 en utilisant une pondération beaucoup moins naturelle : en effet nous avons sous-pondéré h au lieu de l .
 Pondération : poids 1 sur L , G , H , g et l et 10^{-4} sur h .
 La stabilité est presque parfaite : on introduit seulement un petit effet séculaire de 1cm/an sur le nœud ascendant.
- **Test No 5** : Satellite $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$.
 Différence entre le résultat d'une intégration du système hamiltonien moyen suivie d'un changement de variables du type (II58) et le résultat de l'intégration du système non hamiltonien (II51). Ce dernier système est tronqué à l'ordre 3. On a utilisé les mêmes conditions initiales dans les deux cas. Les résidus obtenus (Figure III2) sont du même ordre de grandeur que l'apport de l'hamiltonien du quatrième ordre et du changement de variable du troisième ordre. La cohérence est donc satisfaisante.

Pour ce satellite, les résultats sont donc parfaitement satisfaisants. Il semble que la différence à l'ordre 4 entre notre théorie et celle de Kinoshita provienne d'une erreur dans la théorie de Kinoshita. Mais son influence est à la limite du seuil de détection sur une période d'un an.

Le tableau (III5) résume l'influence de chaque ordre de l'hamiltonien et du changement de variables.

- **Test No 6** : Satellite $a_0 = 7200$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 89.5^\circ$.
 Intervalle d'intégration : 6 mois.
 Observations : 3 périodes de 26 jours, chaque période étant subdivisée en 3 fenêtres de 6 jours.
 Théorie : hamiltoniens d'ordre 1 et 2 non développés en excentricité, d'ordre 3 et 4 développés et changements de variables post intégration d'ordre 2 et 3.
 Variables d'intégration : variables de Delaunay.
 Pondération : poids 1 sur L , G , H , g et h et 10^{-4} sur l .
 La valeur de J_2 a été faussée de $0.5 \cdot 10^{-6}$ (en relatif) et ce paramètre a été libéré.
 Résultats : on retrouve la valeur de J_2 utilisée pour la simulation des observations avec 13 chiffres significatifs exacts.
- **Test No 7** : Satellite $a_0 = 7200$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 10^\circ$.
 Test et résultats similaires au test No 2.

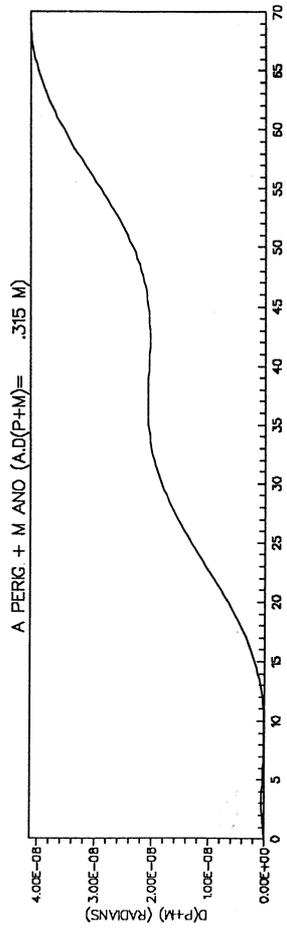
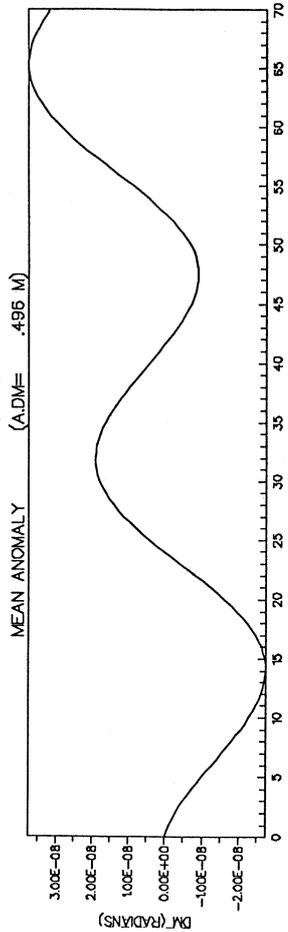
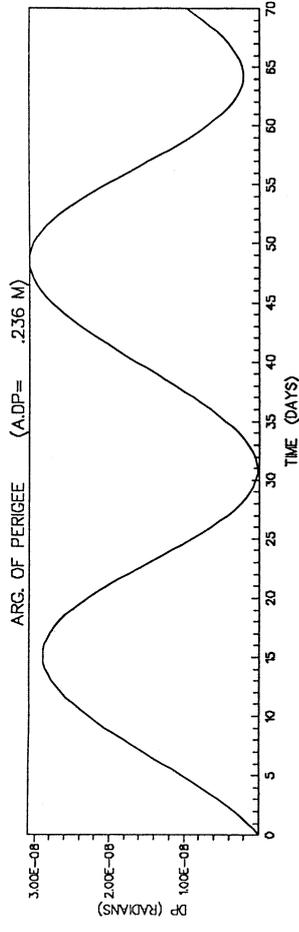
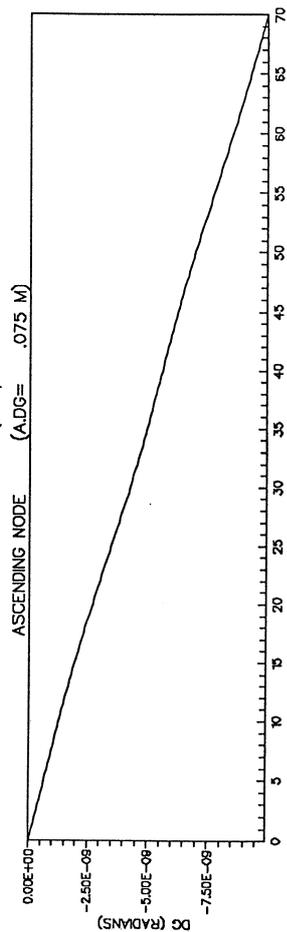
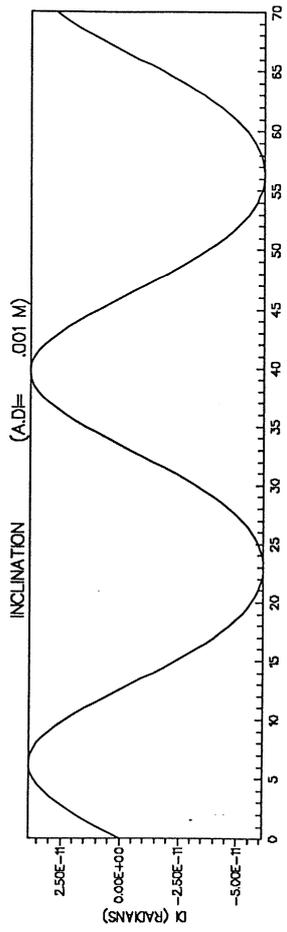
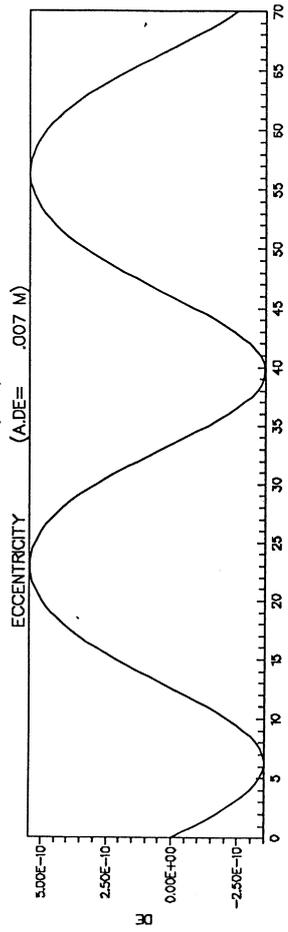
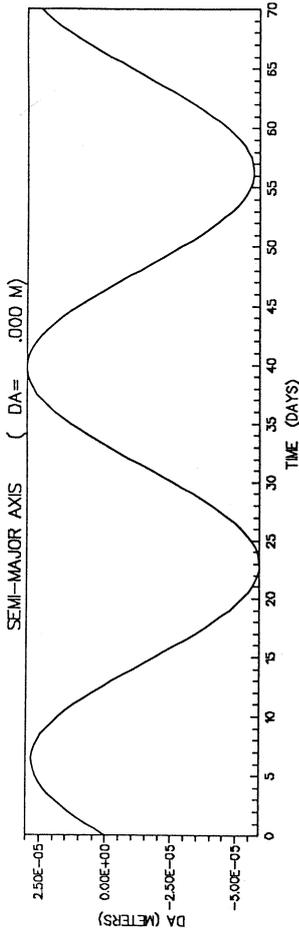


Figure III2 : Différence entre deux jeux de variables centrées obtenus de manière différente. L'un résulte de l'intégration numérique d'un système hamiltonien suivie d'un changement de variables non canonique. L'autre est directement généré par l'intégration d'un système non hamiltonien tronqué à l'ordre 3.

Tableau III5 : Apport de chaque ordre de la théorie analytique pour un satellite de paramètres $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$ perturbé par J_2 .

Hamiltonien	Δa L. P. (m)	$a\Delta e$ L. P. (m)	$a\Delta I$ L. P. (m)
<i>Ordre 1</i>	0	0	0
<i>Ordre 2</i>	0	174	18
<i>Ordre 3</i>	0	0.5	0.05
<i>Ordre 4</i>	0	0.001	0
Changement de variables	cte. / L. P.	cte. / L. P.	cte. / L. P.
<i>Ordre 2</i>	3.18 / 0.001	1.34 / 0.126	0.54 / 0.013
<i>Ordre 3</i>	0.007 / 0	0.038 / 0.002	0 / 0

Hamiltonien	$a\Delta h$ séc. / L. P. (m/j) / (m)	$a\Delta g$ séc. / L. P. (m/j) / (m)	$a\Delta l$ séc. / L. P. (m/j) / (m)
<i>Ordre 1</i>	qlq. 100 km / 0	qlq. 100 km / 0	qlq. 100 km / 0
<i>Ordre 2</i>	786 / 34	1400 / 2100	260 / 2100
<i>Ordre 3</i>	1.6 / 0.012	2.6 / 5.8	0.2 / 5.8
<i>Ordre 4</i>	0.003 / 0	0.004 / 0.006	0.001 / 0
Changement de variables	L. P.	L. P.	L. P.
<i>Ordre 2</i>	0.044	117	117
<i>Ordre 3</i>	0.001	0.297	0.293

L. P. = variations à longues périodes,
séc. = variations séculaires,
cte. = écart constant.

- **Test No 8** : Satellite $a_0 = 7200$ km, $e_0 = 0.01$, $I_0 = 39.4^\circ$.
 Intervalle d'intégration : 6 mois.
 Observations : 3 périodes de 26 jours, chaque période étant subdivisée en 3 fenêtres de 6 jours.
 Théorie : hamiltoniens d'ordre 1 et 2 non développés en excentricité, d'ordre 3, 4 et 5 développés et changements de variables post-intégration d'ordre 2, 3 et 4 développés.
 Variables d'intégration : variables de Delaunay.
 Pondération : poids 1 sur L , G , H et h et 10^{-4} sur l et g .
 Avec ce satellite plus bas que le précédent (800 km d'altitude au lieu de 1200) les résidus restent faibles : résidus inférieurs à 1 mm sur a et i , de 8 mm sur e et 3 mm sur h . Cependant, l'excentricité est faible et l'argument du périhélie ainsi que l'anomalie moyenne sont mal définis. De ce fait les résidus sur ces angles sont importants (environ 1.5 m). Mais les résidus sur la somme $l + g$ sont au niveau des erreurs numériques (20 cm). Notons que si dans le cas des excentricités moyennes ou fortes ($e > 0.05$) les apports de l'hamiltonien d'ordre 5 et du changement de variables d'ordre 4 sont complètement négligeables, il n'en est pas de même ici : ces termes génèrent des variations périodiques et séculaires supérieures d'environ 10 m sur l et g et une variation séculaire de presque 2 m sur la somme $l + g$. Ce phénomène était prévisible car certaines de ces séries contiennent des termes en e^{-4} .
- **Test No 9** : Satellite Lageos : $a_0 = 12215$ km, $e_0 = 0.005$, $I_0 = 110^\circ$ (Figure III3).
 Intervalle d'intégration : 2 ans.
 Observations : 12 périodes de 5 jours comprenant chacune 2 points.
 Théorie : hamiltoniens d'ordre 1 et 2 non développés en excentricité, d'ordre 3, 4 et 5 développés et changements de variables post-intégration d'ordre 2, 3 et 4 développés.
 Variables d'intégration : variables de Delaunay.
 Pondération : poids 1 sur L , G , H et h et 10^{-4} sur l et g .
 Il ne reste plus aucun signal sur a , e et i . Etant donné la faible excentricité les résidus sur l et g sont encore importants. Le signal restant sur l'ascension droite du nœud a pour origine les erreurs numériques survenues lors de la simulation des observations : celles-ci résultent de l'intégration numérique du système complet sur un intervalle de 2 ans. Cette origine est confirmée en faisant la différence de deux intégrations, l'une avec un temps croissant de t_1 à t_2 et l'autre avec un temps décroissant de t_2 à t_1 (Figure III4). On retrouve bien un signal de même forme à une rotation près et d'une amplitude environ double (on cumule les erreurs des intégrations aller et retour). Sur cette figure III4 on constate aussi une dérive numérique d'environ 80 m sur l . Lors de la correction différentielle, cette dérive

presque linéaire est absorbée par une modification de 1 mm du demi-grand axe initial.

4. Conclusion

Ces premiers tests nous permettent d'évaluer les performances de la méthode. Les deux critères importants sont la précision et le coût en temps de calcul.

En ce qui concerne la perturbation due à J_2 , la précision obtenue nous donne entière satisfaction pour des satellites dont l'excentricité n'est pas très faible. Les résultats sont convaincants pour toutes les inclinaisons. Aucun test n'a été effectué dans le cas de l'inclinaison critique ($I \simeq 63.2^\circ$). En effet pour cette configuration il faudrait utiliser une théorie analytique adaptée pour filtrer les observations (le filtrage numérique seul n'assure pas une précision suffisante). Mais il n'existe aucune raison pour que notre intégration semi-numérique fonctionne moins bien pour cette inclinaison particulière : l'élimination de l'argument du périégée qui pose problème dans les théories purement analytiques n'a pas été traitée analytiquement dans notre théorie.

Les résidus inexplicables d'argument $2g$ et d'une amplitude de plusieurs décimètres obtenus indépendamment par Borderies et par Wagner [**Wagner 1974**], puis réduits à quelques mètres par Exertier ont ici disparus. Cela est dû à trois facteurs :

- nous avons construit une théorie analytique du quatrième ordre avec les effets séculaires du cinquième ordre alors que Borderies et Wagner n'avaient que le premier ordre avec des effets séculaires du deuxième ordre,
- à la transformation canonique du système différentiel hamiltonien, nous avons ajouté un changement de variables non canonique qui assure la présence de toutes les variations à longues périodes jusqu'au quatrième ordre,
- nous avons mis en évidence le fait qu'il fallait réaliser le filtrage des observations et du modèle dans le même jeu de variables.

Notons que Exertier avait partiellement appliqué les deux premiers points, ce qui lui avait déjà permis d'obtenir des résultats meilleurs que ceux de Borderies et Wagner.

Lorsque l'excentricité est inférieure à 0.01, les variables utilisées ne sont plus adaptées. Cependant, la somme des angles $l + g$ reste bien définie et les autres variables ne sont pas altérées. Notre projet est d'étendre la théorie aux cas d'excentricité très faible ou nulle.

Par ailleurs, l'intégration numérique du système moyen nous a permis de mettre en évidence les erreurs numériques survenues lors de la simulation des pseudo-observations : malgré l'emploi d'un intégrateur très stable (mais coûteux en temps de calcul) la dérive parabolique sur l'anomalie moyenne devient importante au bout d'un an. Grâce à la possibilité d'utiliser un grand pas d'intégration (12 heures au lieu de quelques minutes), ce phénomène ne se produit pas lors de l'intégration du système moyen. Les calculs peuvent se faire sur 10 ans ou plus sans difficulté.

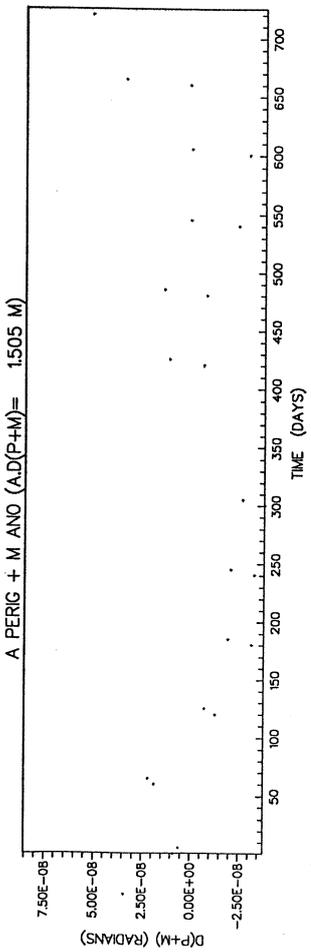
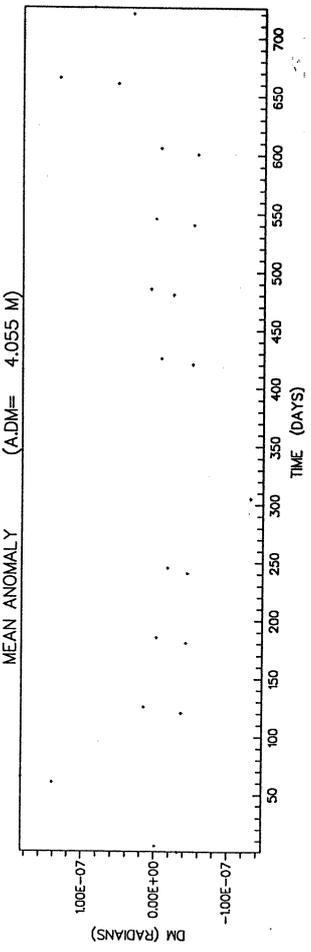
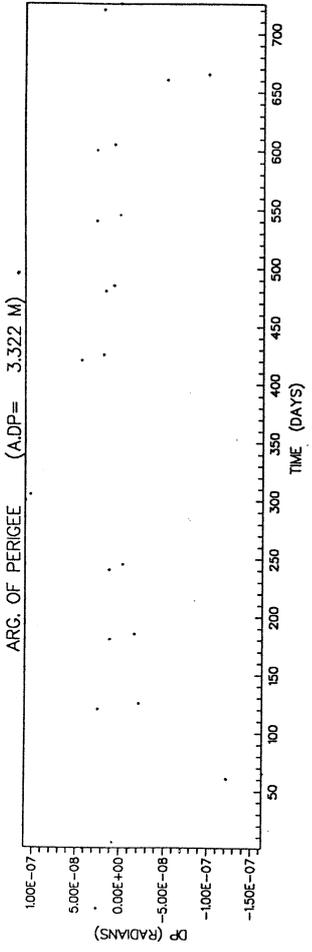
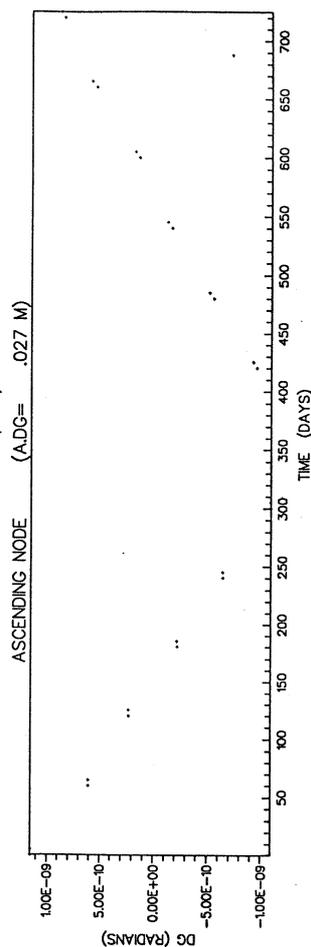
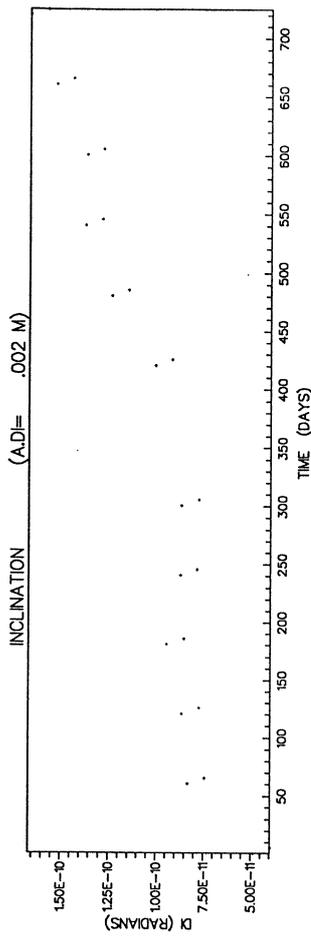
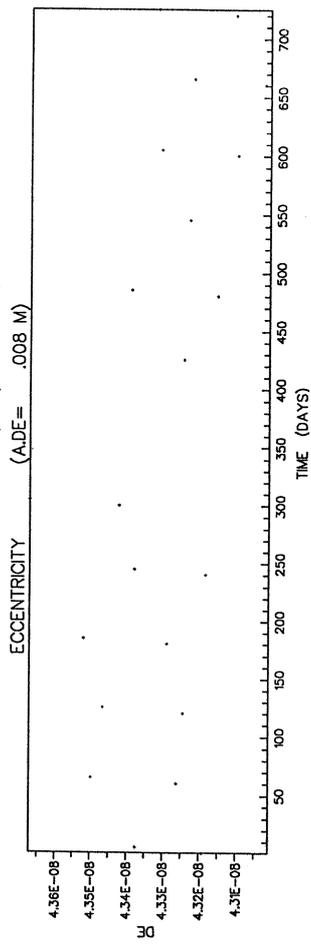
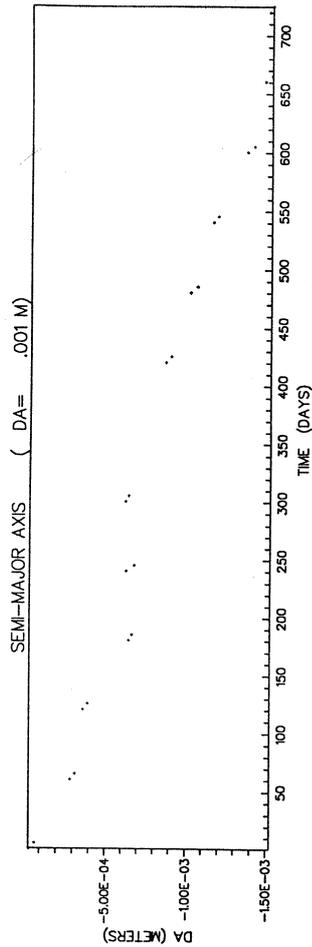


Figure III3 : Résidus sur les variables centrées après ajustement des conditions initiales. Pseudo-observations simulées à partir d'une orbite perturbée par J_2 . Poids : 1 sur L, G, H, h , et 10^{-4} sur l et g . Satellite : $a_0 = 12215$ km, $e_0 = 0.005$, $I_0 = 110^\circ$.

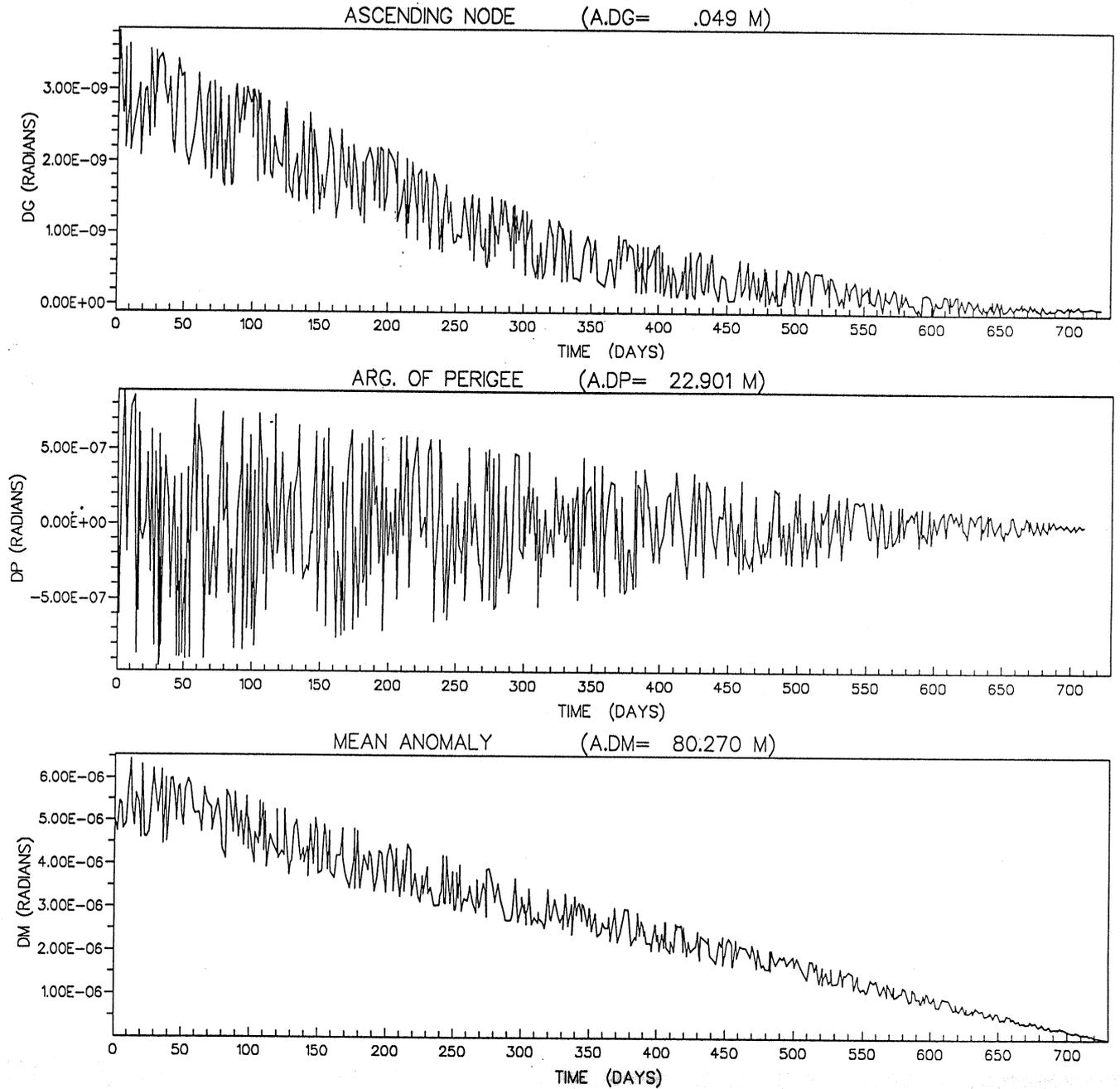


Figure III4 : différence entre deux intégrations aller et retour d'une orbite perturbée par J_2 . Satellite : $a_0 = 12215$ km, $e_0 = 0.005$, $I_0 = 110^\circ$.

L'autre avantage qui découle aussi de l'utilisation d'un grand pas d'intégration est le faible coût en temps de calcul. Le second membre du système différentiel moyen est compliqué mais il est calculé peu fréquemment. Pour cette perturbation, le gain est d'environ un facteur 200 ; des arcs de quelques mois à quelques années qui nécessitent un temps de calcul prohibitif avec les méthodes classiques deviennent accessibles de manière courante.

L'application de l'algorithme de filtrage à la perturbation due à l'aplatissement terrestre nous permet donc de prouver la viabilité et l'efficacité de la méthode de centrage telle qu'elle est appliquée ici.

III.C. Perturbations dues aux autres harmoniques zonaux du potentiel terrestre

Dans son principe, le traitement des harmoniques zonaux de degré supérieur à 2 n'est pas différent du traitement de J_2 . On rencontrera les mêmes formes de fonctions à moyenner ou à intégrer et on adoptera les mêmes techniques de calcul. Les différences viennent d'une part d'une situation différente dans la hiérarchie des perturbations et d'autre part de la complexité de la fonction perturbatrice à moyenner qui croît avec le degré des harmoniques. La première caractéristique est une source de simplification qui compense en partie l'inconvénient de la seconde. Par exemple, l'harmonique de degré 15 induit une fonction perturbatrice compliquée (elle comprend 36 termes contre 3 dans la perturbation en J_2) mais comme ses effets sont faibles, on se contente d'un hamiltonien moyen comprenant les termes en J_{15} et $J_2 J_{15}$.

1. Calculs analytiques

L'hamiltonien correspondant à l'harmonique de degré n s'écrit :

$$\mathcal{H}_2^0(J_n) = 2! \frac{\mu}{r} \left(\frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \phi) \quad (\text{III26})$$

R_e : rayon équatorial terrestre,

ϕ : latitude géocentrique du satellite,

$P_n(x)$: polynôme de Legendre de degré n .

Selon la valeur de n , cette perturbation pourra être intégrée dans les hamiltoniens d'ordre 2, 3 ou 4. Nous avons utilisé une forme un peu différente :

$$\mathcal{H}_2^0(J_n) = 2! \mu^{n+2} R_e^n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \frac{1}{L^{2(n+1)}} J_n P_n(\sin \phi) \quad (\text{III27})$$

Il faut être capable de calculer l'expression analytique de $P_n(\sin \phi)$ pour tout n . Dans la mesure où on fait les calculs successivement pour un grand nombre d'harmoniques zonaux, des formules de récurrence sont indiquées :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(\sin \phi) = 1 \\ P_1(\sin \phi) = \sin \phi = \sin I \sin(f + g) \\ P_{n+1}(\sin \phi) = \frac{2n+1}{n+1} \sin \phi P_n(\sin \phi) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(\sin \phi) \end{array} \right. \quad (\text{III28})$$

La complexité de l'hamiltonien est conditionnée par celle de $P_n(\sin \phi)$. On constate que le nombre de termes générés par l'harmonique de degré n dans la fonction perturbatrice est $N(N-1)/2$ avec $N = E(n/2) + 2$. Ce nombre augmente malheureusement avec n^2 . On obtient ainsi 6 termes pour le degré 4 et 36 termes pour le degré 10.

Les hamiltoniens non développés en excentricité se moyennent et s'intègrent suivant les techniques déjà évoquées pour J_2 : on développe des fonctions telles que $(a/r)^n T_1(f)$ en $(a/r)^2 T_2(f)$ puis on utilise la loi des aires (T_1 et T_2 sont des fonctions périodiques de f).

Pour une fonction perturbatrice $\mathcal{H}_2^0(J_n)$, l'hamiltonien moyen d'ordre 3 provient uniquement des couplages avec J_2 qui interviennent sous les formes $\{\mathcal{H}_2^0(J_n); W_1(J_2)\}$, $\{\mathcal{H}_1^0(J_2); W_2(J_n)\}$, $\{\mathcal{H}_1^1(J_n); W_1(J_2)\}$, $\{\mathcal{H}_0^1(J_2); W_2(J_n)\}$ et $\{\mathcal{H}_0^2(J_n); W_1(J_2)\}$. La moyennisation de ces termes ne pose pas de nouvelle difficulté.

Nous avons utilisé des fonctions génératrices $W_1(J_2)$ et $W_2(J_2)$ de moyenne nulle par rapport à l'anomalie moyenne. De ce fait aucun changement de variables supplémentaire n'est nécessaire pour obtenir des variables centrées à l'ordre 2. Les hamiltoniens moyens d'ordre 4 et les changements de variables d'ordre 3 n'ont été calculés que sous forme développée en excentricité.

Le tableau (III6) résume les calculs effectués et le nombre de termes obtenus dans les séries résultantes. Ce tableau n'est donné qu'à titre indicatif car ces calculs ne sont pas limitatifs : aucune limite théorique ne nous empêche de traiter des harmoniques de degré plus élevé ou de pousser les calculs un ordre plus loin. Nous avons l'intention de le faire dès que des applications l'exigeront. Des limites pratiques existent sans doute mais l'algorithme étant complètement automatisé nous ne les avons pas atteintes.

Dans ce tableau il apparaît clairement qu'il est plus intéressant d'utiliser des séries non développées à l'ordre 2 et des séries développées à l'ordre 4. A l'ordre 3 le choix est moins évident (et donc moins important) : pour les faibles excentricités on peut tronquer plus bas les séries développées et pour les plus fortes excentricités les formes exactes sont plus avantageuses.

2. Tests analytiques

Nous avons comparé nos résultats avec différentes théories :

- A l'ordre 2 nos résultats sont identiques à ceux de Brouwer.
- A l'ordre 3 les calculs non développés sont conformes à ceux de Kozai qui a seulement traité $J_2 J_3$ et $J_2 J_4$.
- Aux ordres 2 et 3 nos résultats sous forme développée englobent ceux de Kinoshita qui n'a pas inclu les harmoniques de degré supérieur à 4.
- A l'ordre 4 nous sommes en accord avec Kinoshita pour les termes en J_3^2 , J_4^2 , $J_3 J_4$ et $J_2^2 J_4$. On trouve des différences en $\sin g$ pour les termes en $J_2^2 J_4$ qui sont dues aux algorithmes. Enfin Kinoshita a des termes en $J_2^2 J_4 \sin 3g$ dont la présence est étonnante ; au contraire il n'a pas de termes en $J_2^2 J_3 \sin 3g$. Il s'agit sans doute d'une erreur d'impression. En effet, un harmonique de degré n génère un hamiltonien contenant g seulement par l'intermédiaire de $P_n(\sin I \sin(f + g))$. Si

Tableau III6 : Harmoniques zonaux du potentiel terrestre. Hamiltoniens et changements de variables calculés et nombre de termes correspondants.

	Perturbations	Hamilt. Non Dév.	Hamilt. Dév.
<i>Ordre 2</i>	J_3 à J_5	18	56 en e^9
<i>Ordre 3</i>	J_2J_3 à J_2J_5	115	78 en e^7
	J_6 à J_7	40	58 en e^7
	J_8 à J_{10}	150	130 en e^7
	J_{11} à J_{15}	Non calculé	244 en e^6
	J_{16} à J_{17}	Non calculé	100 en e^5
<i>Ordre 4</i>	J_3^2, J_4^2, J_5^2	Non calculé	78 en e^5
	$J_2^2J_3, J_2^2J_4, J_2^2J_5$	Non calculé	75 en e^5
	J_3J_4, J_3J_5, J_4J_5	Non calculé	75 en e^5
	J_2J_6 et J_2J_7	257	54 en e^5
	J_2J_8 à J_2J_{10}	Non calculé	109 en e^5
	J_2J_{11} à J_2J_{15}	Non calculé	358 en e^5
	J_2J_{16} à J_2J_{17}	Non calculé	158 en e^4
			Changements de variables non dév.
<i>Ordre 3</i>	J_2J_3 à J_2J_5	Non calculé	206 en e^3
	J_2J_6 à J_2J_7	Non calculé	102 en e^1

n est pair on aura $\sin(f + g)$ à des puissances paires et si n est impair, $\sin(f + g)$ interviendra avec des puissances impaires : ceci découle directement de la formule (III28).

3. Tests numériques

Pour réaliser ces tests, nous avons adopté la même procédure que dans le cas de J_2 : simulation d'une orbite sur 6 mois ou un an par intégration numérique classique puis filtrage des éléments instantanés obtenus pour générer des éléments moyens représentant nos pseudo-observations. Les éléments moyens théoriques obtenus par intégration numérique du système moyenné sont ensuite comparés à ces pseudo-observations en ajustant les conditions initiales par correction différentielle. Nous nous intéresserons essentiellement aux premiers harmoniques (J_3 à J_5) sachant que ce sont ceux qui ont les effets les plus importants et donc les plus délicats à prendre en compte avec précision.

- **Test No 1** : Satellite $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$.

Perturbations : J_2, J_3, J_4, J_5 .

Différence de deux extrapolations sur 6 mois avec uniquement l'hamiltonien d'ordre 2 (donc sans couplages). Dans la première intégration numérique l'hamiltonien moyen résulte du calcul numérique direct des moyennes $(a/r)^n \exp im f$ à l'aide des fonctions $G_{npq}(e)$ de Kaula. La seconde extrapolation utilise les expressions résultant de nos calculs analytiques. Les différences obtenues sont de l'ordre de la précision numérique.

- **Test No 2** : Satellite $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$.

Perturbations : J_2 et J_3 .

Intervalle d'intégration : 6 mois.

Observations : 14 périodes de 6 jours avec 1 point par jour regroupées en 1 période de 106 jours et une période de 26 jours.

Théorie : hamiltoniens d'ordre 1 (en J_2), d'ordre 2 (en J_2^2 et J_3), d'ordre 3 (en J_2^3 et J_2J_3) et d'ordre 4 (en J_2^4 , $J_2^2J_3$ et J_3^2). Changements de variables post-intégration d'ordre 2 (en J_2^2) et d'ordre 3 (en J_2^3 et J_2J_3). Les séries d'ordre 1 et 2 sont non développées en excentricité, les séries d'ordre 3 et 4 sont développées.

Variables d'intégration : variables de Delaunay.

Pondération : poids 1 sur L, G, H, g et h et 10^{-4} sur l .

Là encore il est difficile de voir des signaux résiduels exceptées les erreurs d'intégration sur l'anomalie moyenne. Sur les autres variables les résidus sont inférieurs à 3 mm avec toutefois une amplitude de 16 mm sur l'argument du périégée. Il faut dire que le signal initial dû à J_3 a une amplitude d'environ 10 km sur cette variable !

- **Test No 3** : Satellite $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$ (figure III5).

Test identique au test No 2 avec les perturbations J_2, J_3, J_4 et J_5 .

Théorie : hamiltoniens d'ordre 1 (en J_2), d'ordre 2 (en J_2^2 , J_3 , J_4 et J_5), d'ordre 3 (en J_2^3 , J_2J_3 , J_2J_4 et J_2J_5) et d'ordre 4 (en J_2^4 , $J_2^2J_3$, $J_2^2J_4$, $J_2^2J_5$, J_3^2 , J_4^2 , J_5^2 , J_3J_4 , J_3J_5 et J_4J_5). Changements de variables post-intégration d'ordre 2 (en J_2^2) et d'ordre 3 (en J_2^3 , J_2J_3 , J_2J_4 et J_2J_5). Les séries d'ordre 1 et 2 sont non développées en excentricité, les séries d'ordre 3 et 4 sont développées.

Les résultats sont très semblables à ceux du test No 2, c'est-à-dire que l'ajout des nouvelles perturbations J_4 et J_5 n'entraîne aucune perte de précision.

- **Test No 4** : Satellite $a_0 = 12215$ km, $e_0 = 0.005$, $I_0 = 110^\circ$ (figure III6).

Test identique au test No 3 avec le satellite Lageos.

La durée est de 2 ans au lieu de 6 mois.

Comme dans le cas de la perturbation par J_2 on retrouve la signature des erreurs numériques générées lors de la simulation des observations, sur a , l , g et h . Il subsiste en outre un terme séculaire sur la somme $l + g$ provenant de l'absence de l'ordre 5 en J_3 , J_4 et J_5 . Nous envisageons d'ajouter ces termes à la théorie, tout en sachant que cela n'est pas capital pour des applications géophysiques dans lesquelles l'information sur l et g a un faible poids.

4. Conclusion

Les résultats sont d'aussi bonne qualité que dans le cas de J_2 , ce qui est logique dans la mesure où la méthode est applicable de la même manière dans les deux cas. Même les énormes variations à longue période dues à J_3 (Tableau III7) sont prises en compte à quelques mm près. Par ailleurs, la hiérarchie des perturbations telle que nous l'avons utilisée semble cohérente.

En ce qui concerne les coûts en temps de calcul, le bilan reste très favorable : l'intégration du système moyen est réalisée avec un pas de 12 heures contre 1 minute lors de l'intégration du système complet. Le gain qui en résulte avoisine un facteur 30 pour les harmoniques J_2 à J_7 .

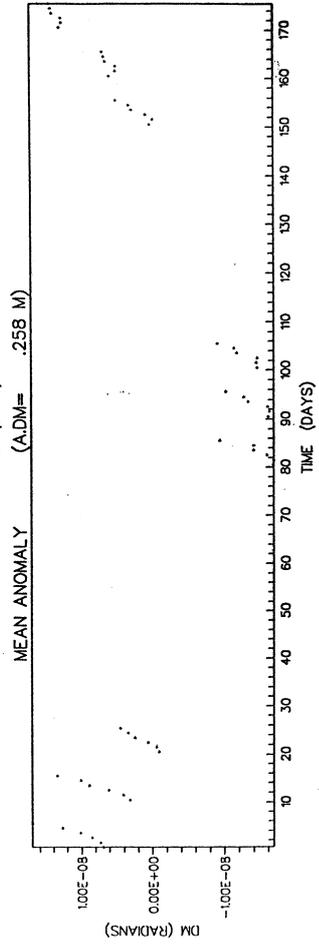
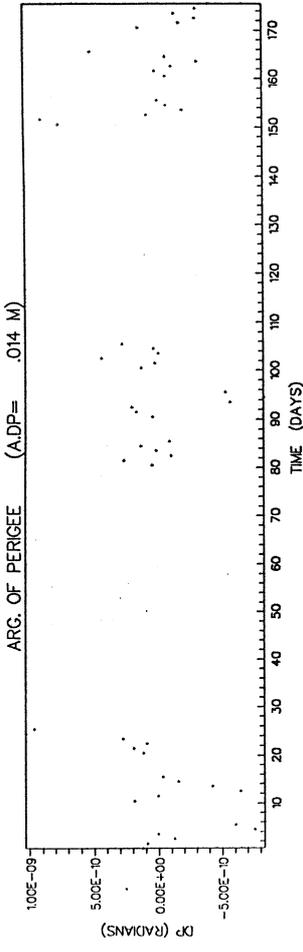
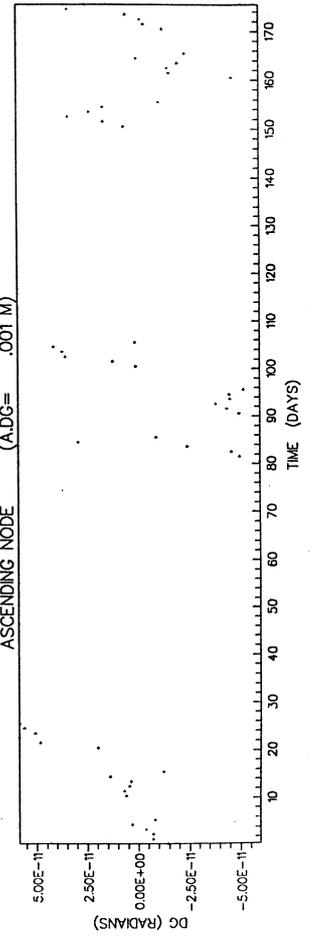
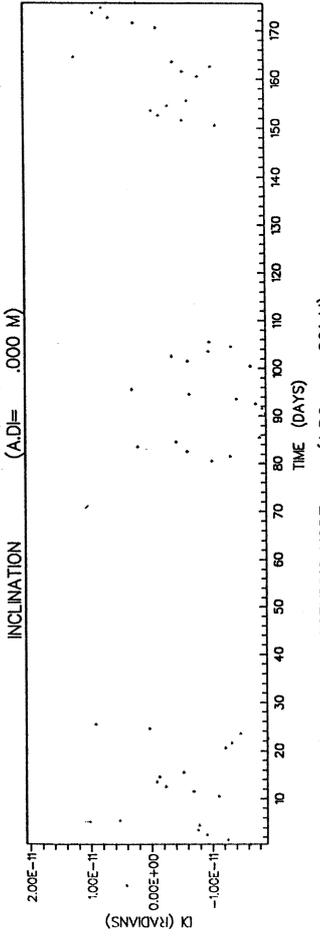
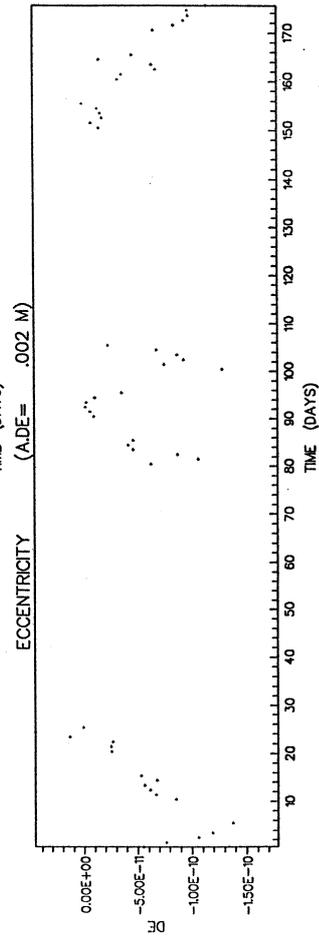
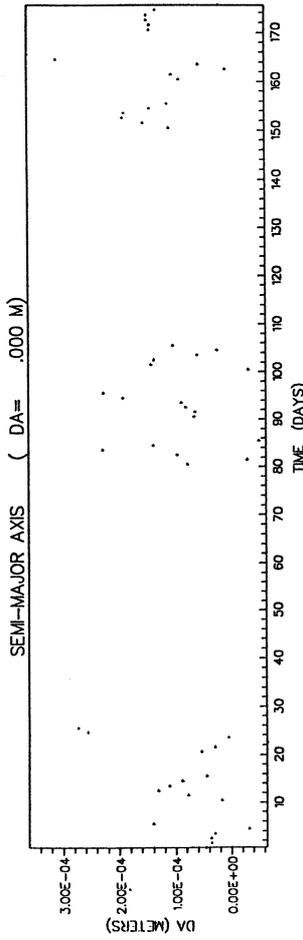


Figure III5 : Résidus sur les variables centrées après ajustement des conditions initiales. Pseudo-observations simulées à partir d'une orbite perturbée par J_2, J_3, J_4 et J_5 . Poids : 1 sur L , G, H, g, h et 10^{-4} sur l . Satellite : $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$.

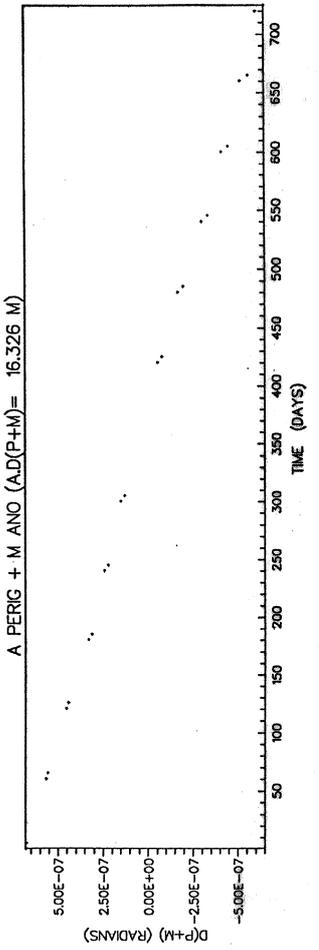
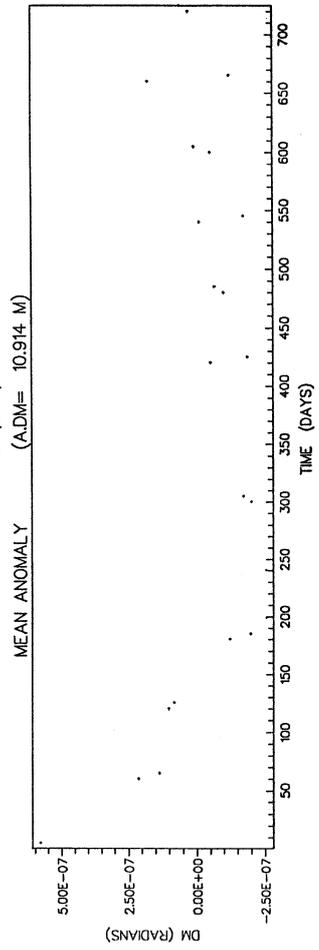
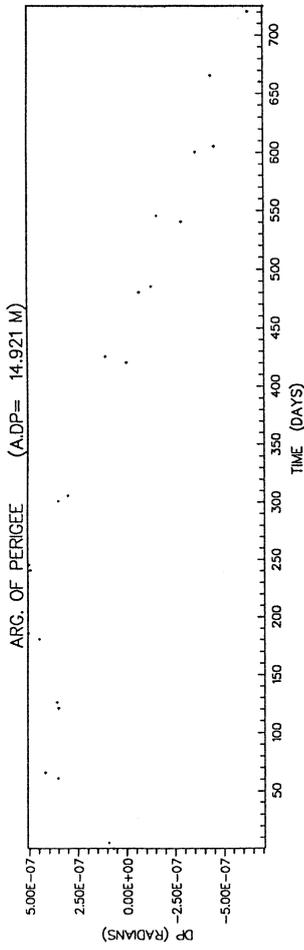
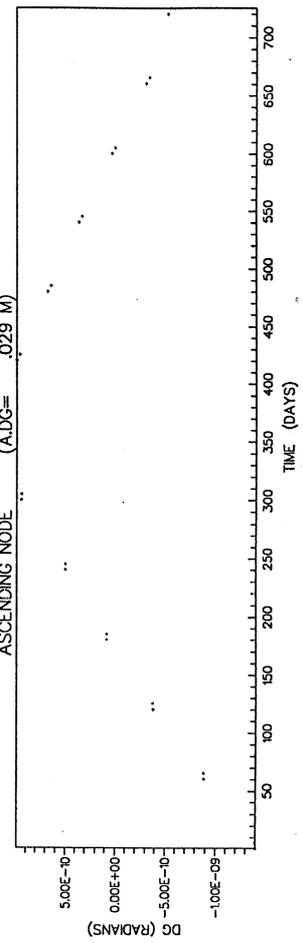
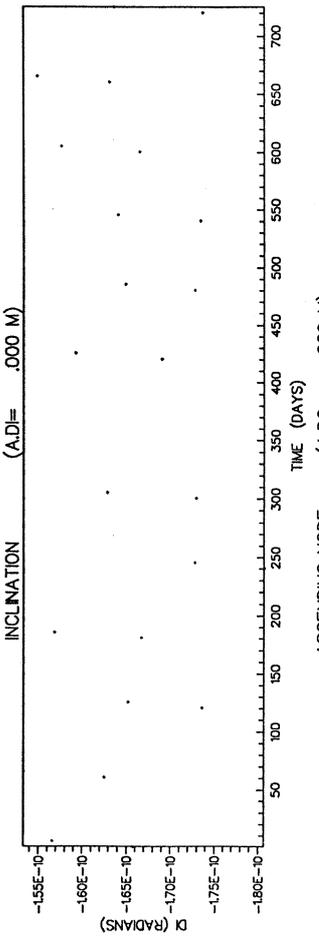
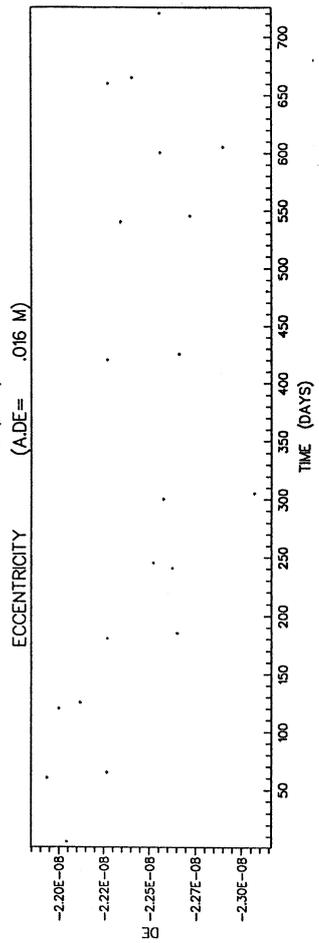
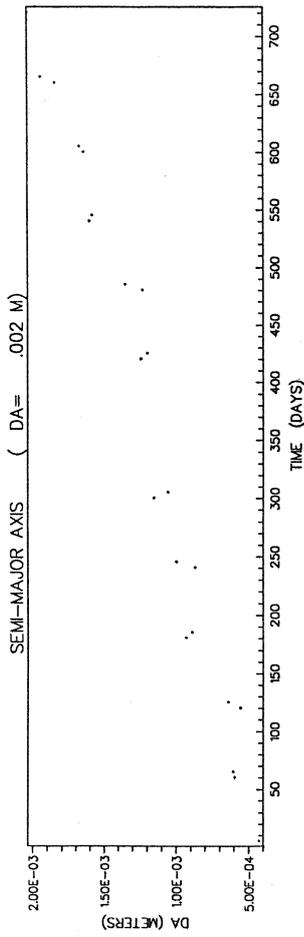


Figure III6 : Résidus sur les variables centrées après ajustement des conditions initiales. Pseudo-observations simulées à partir d'une orbite perturbée par J_2, J_3, J_4 et J_5 . Poids : 1 sur L, G, H, h et 10^{-6} sur l et g . Satellite : $a_0 = 12215$ km, $e_0 \simeq 0.005, I_0 \simeq 110^\circ$.

Tableau III7 : Apport de chaque ordre de la théorie analytique pour un satellite de paramètres $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$ perturbé par J_3 .

Hamiltonien	Δa	$a\Delta e$	$a\Delta I$
<i>Ordre 2 (J_3)</i>	<i>3 mm</i>	<i>10 km</i>	<i>1 km</i>
<i>Ordre 3 (J_2J_3)</i>	<i>< 1 mm</i>	<i>12 m</i>	<i>1 m</i>
<i>Ordre 4 ($J_2^2J_3$ et J_3^2)</i>	<i>< 1 mm</i>	<i>4 mm</i>	<i>< 1 mm</i>
Changement de variables			
<i>Ordre 3 (J_2J_3)</i>	<i>3 mm</i>	<i>3 cm</i>	<i>2 mm</i>

Hamiltonien	$a\Delta h$	$a\Delta g$	$a\Delta l$
<i>Ordre 2 (J_3)</i>	<i>2 km</i>	<i>> 10 km</i>	<i>> 10 km</i>
<i>Ordre 3 (J_2J_3)</i>	<i>20 m</i>	<i>170 m</i>	<i>160 m</i>
<i>Ordre 4 ($J_2^2J_3$ et J_3^2)</i>	<i>5 cm</i>	<i>1 m</i>	<i>10cm</i>
Changement de variables			
<i>Ordre 3 (J_2J_3)</i>	<i>1 mm</i>	<i>15 cm</i>	<i>15 cm</i>

III.D. Perturbations dues aux harmoniques tesséraux du potentiel terrestre

Les perturbations dues aux harmoniques tesséraux du potentiel terrestre dépendent toujours de la longitude du satellite : leur expression est donnée par la formule (II) dans laquelle on a alors $m \neq 0$. Par conséquent, le temps sidéral θ sera toujours un des arguments de la fonction perturbatrice. Hormis les cas de résonance, les périodes impliquées seront donc toutes inférieures ou égales à un jour. Rappelons le développement de Kaula :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_{nmpq} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_e}{a} \right)^n F_{nmp}(I) G_{npq}(e) \mathcal{S}_{nmpq}(l, g, h, \theta) \end{aligned} \quad (\text{III29})$$

$F_{nmp}(i)$ et $G_{npq}(e)$ étant les fonctions de Kaula et \mathcal{S}_{nmpq} étant définie par :

$$\mathcal{S}_{nmpq} = \begin{bmatrix} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{bmatrix} \begin{matrix} (n-m) \text{ pair} \\ (n-m) \text{ impair} \end{matrix} \cos \psi_{nmpq} + \begin{bmatrix} S_{nm} \\ C_{nm} \end{bmatrix} \begin{matrix} (n-m) \text{ pair} \\ (n-m) \text{ impair} \end{matrix} \sin \psi_{nmpq}$$

avec $\psi_{nmpq} = (n - 2p)g + (n - 2p + q)l + m(h - \theta)$

Comme nous avons choisi l'ordre des variables (l, g, h, L, G, H) et non l'ordre (L, G, H, l, g, h) , l'hamiltonien correspondant est de signe opposé (ceci afin de pouvoir utiliser la relation (II62) sans modification). Il est considéré dans la partie du troisième ordre : $\mathcal{H}_3^0(n, m, p, q) = -3! \mathcal{R}_{nmpq}$ (avec $m \neq 0$ dans le cas des harmoniques tesséraux).

Comme $\dot{\theta} = 1 \text{ rev/j}$, on a en général $\dot{\psi}_{nmpq} \leq 1 \text{ rev/j}$. Dans ce cas, il n'existe que des variations à courtes périodes et la perturbation correspondante n'est pas à prendre en compte lors de l'intégration numérique du système moyenné :

$$\mathcal{H}_0^3(n, m, p, q) = 0 \quad (\text{III30})$$

Cependant, pour une orbite donnée (a_0, e_0, i_0 fixés), il peut exister des combinaisons d'entiers n^*, m^*, p^*, q^* telles que $\dot{\psi}_{n^*m^*p^*q^*} > 1 \text{ rev/j}$: ce sont les cas de résonance. Les variations induites ont des périodes supérieures à la période de coupure choisie et la perturbation correspondante est à prendre en compte entièrement dans le système moyen :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^3(n^*, m^*, p^*, q^*) &= \mathcal{H}_3^0(n^*, m^*, p^*, q^*) \\ W_3(n^*, m^*, p^*, q^*) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III31})$$

On en déduit les fonctions intermédiaires pour la suite des calculs :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1^2(n^*, m^*, p^*, q^*) &= \mathcal{H}_0^3(n^*, m^*, p^*, q^*) \\ \mathcal{H}_2^1(n^*, m^*, p^*, q^*) &= \mathcal{H}_0^3(n^*, m^*, p^*, q^*)\end{aligned}\tag{III32}$$

Le filtrage de la perturbation due aux harmoniques tesséraux est donc simple dans son principe puisqu'il suffit de :

- 1) développer la fonction perturbatrice sous la forme de Kaula,
- 2) sélectionner les jeux d'entiers n^*, m^*, p^*, q^* pour lesquels il y a résonance.

Mais il existe des difficultés pratiques :

- 1) si les calculs algébriques nécessaires à la mise en œuvre du développement de Kaula sont simples à programmer à l'aide d'un manipulateur tel que MS, ils restent très longs à exécuter et il en résulte des séries gigantesques pour un modèle de potentiel relativement complet (modèle 36*36 ou 50*50),
- 2) les combinaisons (n^*, m^*, p^*, q^*) résonnantes changent d'un satellite à l'autre puisqu'elles dépendent des fréquences \dot{l}, \dot{g} et \dot{h} .

D'après ce dernier point, on ne peut pas obtenir la perturbation moyennée sous forme d'un résultat explicite général : pour un satellite et une époque donnés, il faut calculer approximativement \dot{l}, \dot{g} et \dot{h} d'après les valeurs moyennes des paramètres a, e, i et en déduire toutes les combinaisons (n^*, m^*, p^*, q^*) engendrant des variations ayant à la fois une période et une amplitude dépassant les seuils fixés (par exemple période supérieure à 1 jour et amplitude supérieure à 10 cm). Ces calculs peuvent se faire en utilisant la théorie de Kaula. Les perturbations correspondant aux jeux (n^*, m^*, p^*, q^*) sélectionnés peuvent ensuite être calculées directement numériquement : il existe plusieurs algorithmes efficaces pour l'évaluation numérique des fonctions $F_{nmp}(I)$ et $G_{npq}(e)$.

Cette méthode de prise en compte des résonances ne nécessitant aucun calcul algébrique a été mise en œuvre avec succès par G. Balmino et N. Borderies. L'algorithme a été adapté par P. Exertier et donne satisfaction.

Couplages avec J_2 :

Dans le cas de combinaisons n^*, m^*, p^*, q^* correspondant à des résonances, le générateur W_3 est nul (équation III31). De ce fait, les seuls termes à moyenner sont $\{\mathcal{H}_3^0(n^*, m^*, p^*, q^*); W_1(J_2)\}$, $\{\mathcal{H}_2^1(n^*, m^*, p^*, q^*); W_1(J_2)\}$, $\{\mathcal{H}_1^2(n^*, m^*, p^*, q^*); W_1(J_2)\}$ et $\{\mathcal{H}_0^3(n^*, m^*, p^*, q^*); W_1(J_2)\}$. D'après les formules (III31) et (III32), tous ces crochets de Poisson sont égaux à $\{\mathcal{H}_0^3(n^*, m^*, p^*, q^*); W_1(J_2)\}$. Remarquant que par définition,

- \mathcal{H}_0^3 et toutes ses dérivées partielles ne contiennent aucun terme à courte période,
 - W_1 et toutes ses dérivées partielles ne contiennent que des termes à courtes périodes,
- on peut conclure que $\{\mathcal{H}_0^3(n^*, m^*, p^*, q^*); W_1(J_2)\}$ ne contient que des courtes

périodes. Par conséquent, les termes résonnants n'apportent aucune longue période supplémentaire par couplage avec J_2 †.

En revanche, on ne peut exclure l'apport de résonances secondaires par le couplage avec J_2 de perturbations $\mathcal{H}_0^3(n, m, p, q)$ non résonnantes. A notre connaissance, ce phénomène n'a jamais été identifié sur des cas réels, sans doute en raison de la faible ampleur des effets induits. Quoiqu'il en soit, le calcul analytique systématique de ces effets semble hors d'atteinte.

† *Alors que la rédaction du manuscrit était achevée, nous avons constaté que le couplage des harmoniques tesséraux entre eux, pouvait induire des termes séculaires et à longues périodes de taille non négligeable (amplitude de quelques décimètres à quelques mètres). L'appendice 5 présente une étude plus complète de cette perturbation, incluant le calcul des termes de couplage.*

Cet appendice ne figurait pas dans le manuscrit original qui a été soumis pour la soutenance de la thèse.

III.E. Perturbations dues à un troisième corps

Du point de vue des calculs algébriques, il existe deux différences importantes entre la moyennisation des perturbations dues aux harmoniques zonaux du potentiel terrestre et la moyennisation des perturbations dues à un troisième corps. D'une part, le corps perturbateur est extérieur à l'orbite du satellite ce qui fait que le rayon vecteur r du satellite intervient dans ce cas avec des puissances positives. D'autre part, il faut décrire la position du troisième corps qui varie avec le temps. Ceci implique l'ajout de paramètres dépendant du temps dans l'hamiltonien. L'algorithme de la transformation canonique s'en trouve modifié.

Dans l'hamiltonien moyen, la position du corps perturbateur sera toujours décrite par ses coordonnées instantanées et non moyennées. En effet, nous cherchons seulement à éliminer les variations dont la période est inférieure à 1 jour. Or les périodes les plus courtes intervenant dans les mouvements des corps perturbateurs sont des sous-multiples de 28 jours (période de révolution de la Lune) : il n'existe pas d'effet conséquent avec une période inférieure au jour. Notre problème reste donc uniquement l'élimination de l'anomalie moyenne du satellite.

1. Calculs analytiques

a. Formulation de la perturbation

La perturbation due à un corps extérieur à l'orbite du satellite (Lune, Soleil, planètes) est incluse dans l'hamiltonien d'ordre 2 :

$$\mathcal{H}_0^2(E) = \sum_{n \geq 2} \mathcal{H}_0^2(E_n) = -2! \frac{\mu_c}{r_c} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{r}{r_c} \right)^n P_n(\cos \psi) \quad (\text{III34})$$

$\mu_c = GM_c$: produit de la constante de la gravitation par la masse du troisième corps,

r : distance géocentrique du satellite,

r_c : distance géocentrique du corps perturbateur,

ψ : angle géocentrique entre le satellite et le corps perturbateur,

P_n : polynôme de Legendre de degré n .

Rappelons que le signe - devant la perturbation assure la cohérence des équations de Hamilton suite au choix de l'ordre (l, g, h, L, G, H) des variables. Nous dirons que $\mathcal{H}_0^2(E_n)$ est la perturbation de degré n due au troisième corps.

On utilise la relation $\cos \psi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_c}{r r_c}$ et on définit $\frac{\vec{r}_c}{r_c}$ par ses cosinus directeurs (A_c, B_c, C_c) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\cos \psi = & A_c \left[\cos h \cos(f + g) - \sin h \sin(f + g) \cos I \right] \\ & + B_c \left[\sin h \cos(f + g) + \cos h \sin(f + g) \cos I \right] \\ & + C_c \sin(f + g) \sin I\end{aligned}\quad (\text{III35})$$

D'autre part,

$$\frac{\mu_c}{r_c} \left(\frac{r}{r_c} \right)^n = \frac{\mu_c}{r_c^{n+1}} \frac{L^{2n}}{\mu^n} \left(\frac{r}{a} \right)^n \quad (\text{III36})$$

Ayant défini $P_0(\cos \psi) = 1$ et $P_1(\cos \psi) = \cos \psi$, les polynômes de degré plus élevé peuvent être calculés par récurrence grâce à la relation (III28).

On obtient finalement des expressions de la forme :

$$\mathcal{H}_0^2(E_n) = \frac{\mu_c}{r_c^{n+1}} \frac{L^{2n}}{\mu^n} \left(\frac{r}{a} \right)^n \sum_{j=1}^{NBT} T_j(f, g, h) P_j(\cos I, \sin I, A_c, B_c, C_c) \quad (\text{III37})$$

avec NBT : nombre de termes obtenus,

T_j : fonction périodique par rapport à f , g et h ,

P_j : polynôme.

La particularité de cette formulation réside dans la prise en compte de la position du troisième corps par sa distance géocentrique r_c et ses cosinus directeurs (A_c, B_c, C_c) . On y trouve deux avantages : d'une part l'expression obtenue est très compacte ce qui est un critère de première importance dans la mesure où on construit des séries qui seront évaluées à chaque pas de l'intégration numérique. D'autre part, les paramètres choisis s'obtiennent assez directement à partir d'autres jeux de variables (coordonnées équatoriales ou écliptiques) ce qui permet l'utilisation simple de toute éphéméride d'origine numérique ou analytique.

b. Elimination de l'anomalie moyenne au premier ordre

Le nouvel hamiltonien $\mathcal{H}_0^2(E_n)$ correspondant au degré n de la perturbation du satellite par un corps extérieur s'obtient par moyennisation de l'hamiltonien initial par rapport à l'anomalie moyenne :

$$\mathcal{H}_0^2(E_n) = \frac{\mu_c}{r_c^{n+1}} \frac{L^{2n}}{\mu^n} \sum_{j=1}^{NBT} P_j(\cos I, \sin I, A_c, B_c, C_c) \langle \left(\frac{r}{a} \right)^n T_j(f, g, h) \rangle_l \quad (\text{III38})$$

Les fonctions à moyenner sont de la forme $\left(\frac{r}{a} \right)^n \cos kf$ ou $\left(\frac{r}{a} \right)^n \sin kf$ avec $n \geq 0$, $k \geq 0$ et $n \geq k$. On a :

$$\int \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos kf \, dl = \int \left(\frac{r}{a} \right)^{n+1} \cos kf \, du \quad (\text{III39})$$

Les relations

$$\begin{cases} \frac{r}{a} = 1 - e \cos u \\ \cos f = \frac{a}{r}(\cos u - e) \\ \sin f = \frac{a}{r} \frac{G}{L} \sin u \end{cases} \quad (\text{III40})$$

permettent d'exprimer toutes les fonctions impliquées en fonction de u . Comme les développements de $\cos kf$ et $\sin kf$ en fonction de $\sin u$ et $\cos u$ font intervenir $(a/r)^k$, dans (III39) il suffit de développer $(a/r)^{n+1-k}$ en fonction u .

Tous les calculs se ramènent finalement à l'intégration de fonctions de la forme $P + QT(u)$ par rapport à u . Q et P sont des fonctions indépendantes de u tandis que T est purement périodique par rapport à u :

$$\int_0^{2\pi} (P + QT(u)) du = P \quad (\text{III41})$$

Par ailleurs, les calculs à partir d'une fonction perturbatrice développée en excentricité et faisant intervenir explicitement l'anomalie moyenne ne posent aucune difficulté particulière.

c. Calcul du générateur $W_2(E_n)$

Dans l'algorithme de Deprit appliqué à l'ordre 2 (formule II54), on ne retient que la partie dépendant du corps perturbateur. Si la perturbation était indépendante du temps, on aurait simplement :

$$\frac{\mu^2}{L^3} \frac{\partial W_2(E_n)}{\partial l} = (\mathcal{H}_2^0(E_n) - \mathcal{H}_0^2(E_n)) \quad (\text{III42})$$

Mais la masse perturbatrice n'étant pas immobile, l'hamiltonien dépend du temps et l'algorithme devient d'après [Deprit 1969] :

$$\frac{\mu^2}{L^3} \frac{\partial W_2(E_n)}{\partial l} + \frac{\partial W_2(E_n)}{\partial t} = (\mathcal{H}_2^0(E_n) - \mathcal{H}_0^2(E_n)) \quad (\text{III43})$$

Si l'orbite du troisième corps est représentée par des variables d'actions et des variables angulaires l_c , g_c et h_c choisies de manière qu'en première approximation les actions soient constantes et les angles linéaires par rapport au temps, on peut écrire :

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} = \frac{\partial W_2}{\partial l_c} \dot{l}_c + \frac{\partial W_2}{\partial g_c} \dot{g}_c + \frac{\partial W_2}{\partial h_c} \dot{h}_c \quad (\text{III44})$$

Par ailleurs, la différence $\mathcal{H}_2^0(E_n) - \mathcal{H}_0^2(E_n)$ est une somme de fonctions périodiques par rapport à l , l_c , g_c et h_c de la forme $\mathcal{A} \cos(\alpha l + \beta_1 l_c + \beta_2 g_c + \beta_3 h_c + \kappa)$, α , β_1 , β_2 et β_3 étant des entiers ($\alpha \neq 0$) et κ un angle indépendant de l , l_c , g_c et h_c .

W_2 sera finalement déterminé par une équation du type :

$$\frac{\mu^2}{L^3} \frac{\partial W_2}{\partial l} + \frac{\partial W_2}{\partial l_c} \dot{l}_c + \frac{\partial W_2}{\partial g_c} \dot{g}_c + \frac{\partial W_2}{\partial h_c} \dot{h}_c = \mathcal{A} \cos(\alpha l + \beta_1 l_c + \beta_2 g_c + \beta_3 h_c + \kappa) \quad (\text{III45})$$

On en déduit :

$$W_2 = \frac{\mathcal{A}}{\alpha \dot{l} + \beta_1 \dot{l}_c + \beta_2 \dot{g}_c + \beta_3 \dot{h}_c} \sin(\alpha l + \beta_1 l_c + \beta_2 g_c + \beta_3 h_c + \kappa) \quad (\text{III46})$$

Cet algorithme a pour inconvénient de nécessiter la formulation de la perturbation en fonction d'angles quasi-linéaires par rapport au temps. En particulier dans le cas de la Lune, il faut utiliser une orbite elliptique repérée par rapport à l'écliptique. On doit alors introduire des rotations pour revenir au repère usuel dont le plan de base est l'équateur. L'expression de la fonction perturbatrice s'en trouve très nettement alourdie [Kozai 1966].

Afin de pouvoir conserver la forme compacte utilisant les cosinus directeurs A_c , B_c et C_c , nous avons préféré faire l'approximation qui consiste à utiliser un algorithme de transformation s'appliquant à des hamiltoniens indépendants du temps. L'annulation de \dot{l}_c , \dot{g}_c et \dot{h}_c dans (III46) conduit à :

$$W_2 = \frac{\mathcal{A}}{\alpha \dot{l}} \sin(\alpha l + \beta_1 l_c + \beta_2 g_c + \beta_3 h_c + \kappa) \quad (\text{III47})$$

C'est le résultat que l'on obtiendrait en appliquant la relation (III42) au lieu de (III43). L'effet de cette approximation est de modifier les amplitudes des termes figurant dans W_2 . Pour chaque terme, l'erreur relative est :

$$\begin{aligned} ER &= \frac{\beta_1 \dot{l}_c + \beta_2 \dot{g}_c + \beta_3 \dot{h}_c}{\alpha \dot{l} + \beta_1 \dot{l}_c + \beta_2 \dot{g}_c + \beta_3 \dot{h}_c} \\ &\simeq \frac{\beta_1 \dot{l}_c}{\alpha \dot{l}} \end{aligned} \quad (\text{III48})$$

en effet, $\dot{l} \gg \dot{l}_c$, $\dot{l}_c \gg \dot{g}_c$ et $\dot{l}_c \gg \dot{h}_c$.

Pour un satellite géostationnaire :

$$\frac{\dot{l}_c}{\dot{l}} \simeq \frac{\frac{1}{28} \text{rev/j}}{1 \text{rev/j}} \simeq \frac{1}{28} \simeq 4\%$$

et pour les satellites plus bas :

$$\frac{\dot{l}_c}{\dot{l}} \simeq \frac{\frac{1}{28}\text{rev/j}}{10\text{rev/j}} \simeq \frac{1}{280} \simeq 0.4\%$$

De plus, $|\alpha| \geq 1$ et au degré 2 $|\beta_1| \leq 2$; il s'ensuit $|\beta_1/\alpha| \leq 2$.

On en conclut que l'erreur relative commise sur les amplitudes des termes en négligeant $\partial W_2/\partial t$ dans l'algorithme de transformation est en général inférieure à 1% et ne dépasse pas 8% même pour les satellites élevés. Encore cette erreur porte-t-elle sur des termes de l'hamiltonien d'ordre 3 (termes de couplage entre J_2 et le troisième corps) dont nous montrerons lors des tests qu'ils ont des effets très faibles.

L'immense bénéfice issu de cette approximation réside dans la possibilité de ne pas introduire les angles l_c , g_c et h_c mais de conserver l'expression compacte (III37) de la perturbation dans laquelle on considère que \dot{r}_c , \dot{A}_c , \dot{B}_c et \dot{C}_c sont nulles : nous n'avons pas appliqué les formules (III43) à (III46) mais simplement la formule (III42). En outre, aucune hypothèse n'étant faite sur la géométrie de l'orbite du corps perturbateur, les mêmes expressions seront valables pour tous les corps : Lune, Soleil, planètes. Il suffira d'utiliser l'éphéméride correspondante pour obtenir les valeurs de r_c , A_c , B_c et C_c en fonction du temps. Il en résulte des gains appréciables en temps de calcul et en place, aussi bien du point de vue algébrique que du point de vue numérique.

L'intégration de W_2 à partir de (III42) ne présente pas de difficulté théorique. On choisit la constante d'intégration de manière à obtenir $\langle W_2 \rangle_l = 0$. De ce fait, aucun changement de variables post-intégration n'est nécessaire à l'ordre 2. En effet cette perturbation étant d'ordre 2, elle ne crée pas de crochets de Poisson de la forme $\{\frac{\partial W_1}{\partial v_j}; W_1\}$ dont il faudrait retrancher la moyenne.

d. Effets dûs aux couplages avec J_2

La perturbation due à l'aplatissement dynamique de la Terre (terme relié à J_2 dans le développement du potentiel) étant d'ordre 1 et la perturbation par un troisième corps étant d'ordre 2, ces deux effets interfèrent à l'ordre 3 :

$$\mathcal{H}_0^3 = \tilde{\mathcal{H}}_0^3 + \{\mathcal{H}_0^0; W_3\} \quad (\text{III49})$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_0^3(J_2, E_n) = & \{\mathcal{H}_2^0(E_n) + \mathcal{H}_1^1(E_n) + \mathcal{H}_0^2(E_n); W_1(J_2)\} \\ & + \{2\mathcal{H}_1^0(J_2) + \mathcal{H}_0^1(J_2); W_2(E_n)\} \end{aligned} \quad (\text{III50})$$

Et on choisit toujours $\mathcal{H}_0^3 = \langle \tilde{\mathcal{H}}_0^3 \rangle_l$.

Lorsqu'on utilise des expressions non développées en excentricité, $\tilde{\mathcal{H}}_0^3$ comprend plusieurs dizaines de milliers de termes dans lesquels on retrouve à la fois les fonctions f , u , a/r et r/a dépendant de l'anomalie moyenne. Etant donné le faible apport de ces

termes de couplages (quelques mètres au plus), un calcul exact au prix d'une telle complexité n'est pas rentable. Nous avons décidé d'utiliser uniquement des développements en excentricité faisant apparaître explicitement l'anomalie moyenne et permettant des troncatures. Les expressions obtenues sont suffisamment précises pour des excentricités pas trop élevées (inférieures à 0.5) et beaucoup plus compactes que des expressions exactes.

e. Récapitulation des calculs effectués

Les effets étant proportionnels à $(r/r_c)^n$ (n étant le degré), ils décroissent très vite avec le degré pour les satellites bas type Starlette ($r/r_c \simeq 7000/380000 \simeq 1.8 * 10^{-2}$ donc $(r/r_c)^5 \simeq 2 * 10^{-9}$) mais beaucoup moins vite pour les satellites élevés type géostationnaires ($r/r_c \simeq 42000/380000 \simeq 1.1 * 10^{-1}$ donc $(r/r_c)^5 \simeq 1.6 * 10^{-5}$).

Les hamiltoniens du deuxième ordre ont été calculés pour les degrés 2 à 5. Les couplages avec J_2 ayant des effets beaucoup plus faibles n'ont été calculés que pour les degrés 2 et 3 en ce qui concerne les hamiltoniens et pour le degré 2 en ce qui concerne les changements de variables post-intégration. Le tableau (III8) synthétise les calculs réalisés et les nombres de termes obtenus.

Tableau III8 : Perturbation due à un troisième corps. Hamiltoniens calculés et nombre de termes correspondants.

Perturbations	Hamilt. Non Dév.	Hamilt. Dév.
Degré 2	59	59
Degré 2 * J_2	Non calculé	465 en e^7
Degré 3	303	303
Degré 3 * J_2	Non calculé	804 en e^3
Degré 4	Non calculé	771 en e^4
Degré 5	Non calculé	1509 en e^3
Perturbations	Chgt. de Var. Non Dév.	Chgt. de Var. Dév.
Degré 2 * J_2	Non calculé	1257 en e^3

Remarques :

- en ce qui concerne les effets directs (ordre 2), les hamiltoniens moyens développés en excentricité donnent des résultats exacts dans la mesure où ils ne sont pas tronqués trop bas : on obtient en effet des termes jusqu'à e^n , n étant le degré considéré.
- l'hamiltonien moyen résultant du couplage du degré 2 avec J_2 est indépendant de la variable L, donc du demi-grand axe.

Pour tous les hamiltoniens moyens calculés, nous avons calculé les dérivées premières, d'une part par rapport aux variables de Delaunay pour obtenir le second

membre du système des équations de Hamilton et d'autre part par rapport aux éléments orbitaux pour obtenir le second membre des équations de Lagrange. En outre, les dérivées secondes ont été calculées pour l'ordre 2 du degré 2 en vue de la correction différentielle.

2. Tests numériques

Pour ces tests, il convient de distinguer les effets dûs à Lune des effets dûs au Soleil. Si les deux perturbations sont de même nature, elles ne posent pas les mêmes difficultés de calcul : la Lune tournant beaucoup plus vite que le Soleil, l'hypothèse d'un hamiltonien indépendant du temps est plus sensible dans le cas du premier corps (tout en restant raisonnable, comme nous l'avons montré). D'autre part, la Lune étant relativement proche, l'amplitude de la perturbation correspondante est très sensible à l'altitude du satellite et ne décroît pas très vite lorsque le degré augmente.

Le tableau (III9) montre les effets des différents degrés et ordres de la théorie dans le cas d'un satellite à 1200 km d'altitude perturbé par la Lune. Nous n'avons pas distingué ici effets séculaires et périodiques. On remarque tout d'abord que les effets de couplage restent assez faibles. Par conséquent, une erreur de quelques pourcent sur ces termes due à l'utilisation d'un algorithme s'appliquant à des systèmes indépendants du temps est tolérable. Par ailleurs, la décroissance des effets avec l'augmentation du degré s'avère relativement rapide : la prise en compte du degré 4 est nécessaire mais le degré 5 ne serait pas utile.

Le tableau (III10) montre les mêmes effets sur un satellite beaucoup plus élevé (7200 km d'altitude). La contribution du degré 4 atteint plusieurs décimètres et le degré 5 est indispensable.

La figure (III7) montre l'évolution du mouvement à longues périodes modélisé dans le cas de la Lune. On note une forme bien plus complexe que dans le cas du potentiel terrestre.

La figure (III8) présente une restitution d'un arc de 6 mois avec des observations simulées (la procédure de simulation est identique à celle utilisée dans le cas du potentiel terrestre). Les perturbations incluses dans la simulation sont J_2 à J_5 ainsi que l'attraction de la Lune. Pour J_2 à J_5 le modèle comprend les hamiltoniens jusqu'à l'ordre 4 et les changements de variables post-intégration jusqu'à l'ordre 3. Pour la Lune nous avons pris en compte les hamiltoniens de degrés 2 et 3 avec leurs couplages avec J_2 et de degré 4 sans couplage ; on a en outre utilisé le changement de variables post-intégration correspondant au couplage du degré 2 avec J_2 . Tant pour la simulation des observations que pour l'intégration du mouvement moyen, les positions de la Lune sont issues de l'interpolation de l'éphéméride numérique DE200 calculée par le JPL. L'amplitude des résidus reste inférieure au cm sur a , e , I et h . Un signal périodique de quelques centimètres d'amplitude et dont la période est reliée à la longitude de la

Tableau III9 : Apport de chaque degré et ordre de la théorie semi-analytique pour un satellite de paramètres $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$ perturbé par la Lune : effets de $(J_2 \text{ à } J_5 + \text{Lune}) - (J_2 \text{ à } J_5)$ sur 3 mois.

	Δa	$a\Delta e$	$a\Delta I$
Degré 2	1 mm	200 m	500 m
Degré 3	0	12 m	2 m
Degré 4	0	10 cm	10 cm
Degré 2 * J_2	0	10 cm	50 cm
Degré 3 * J_2	0	1 cm	2 mm
Chgt. de Var. Degré 2 * J_2	1 mm	8 mm	0
	$a\Delta h$	$a\Delta g$	$a\Delta l$
Degré 2	2 km	6 km	> 10 km
Degré 3	6 m	140 m	140 m
Degré 4	40 cm	1 m	1 m
Degré 2 * J_2	6 m	4 m	9 m
Degré 3 * J_2	1 cm	15 cm	15 cm
Chgt. de Var. Degré 2 * J_2	0	20 cm	20 cm

Tableau III10 : Apport de chaque degré et ordre de la théorie semi-analytique pour un satellite de paramètres $a_0 = 12270$ km, $e_0 = 0.005$, $I_0 = 110^\circ$ perturbé par la Lune : effets de $(J_2 \text{ à } J_5 + \text{Lune}) - (J_2 \text{ à } J_5)$ sur 3 mois.

	Δa	$a\Delta e$	$a\Delta I$
Degré 2	0	110 m	3 km
Degré 3	0	40 m	40 cm
Degré 4	0	5 cm	2 m
Degré 5	0	2 cm	1 mm
Degré 2 * J_2	0	1 cm	1 m
Degré 3 * J_2	0	1 cm	0
Chgt. de Var. Degré 2 * J_2	4 mm	50 cm	0
	$a\Delta h$	$a\Delta g$	$a\Delta l$
Degré 2	8 km	8 km	19 km
Degré 3	40 cm	12 km	12 km
Degré 4	4 m	16 m	19 m
Degré 5	1 mm	7 m	7 m
Degré 2 * J_2	4 m	4 m	1 m
Degré 3 * J_2	0	5 m	5 m
Chgt. de Var. Degré 2 * J_2	0	140 m	140 m

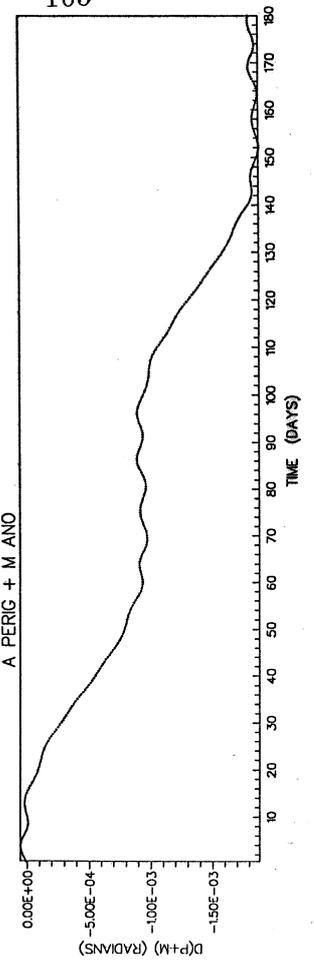
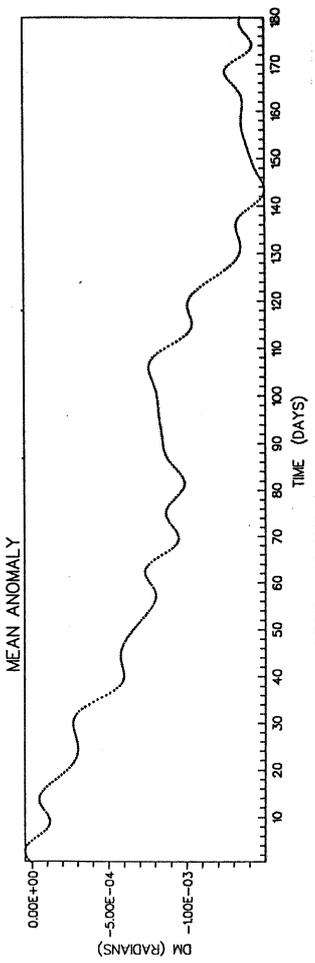
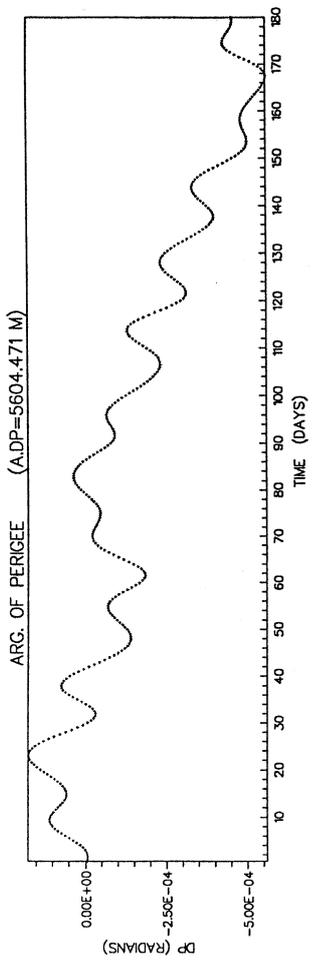
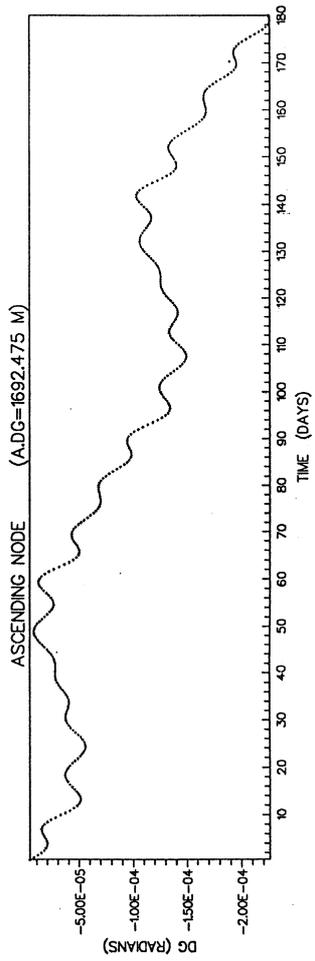
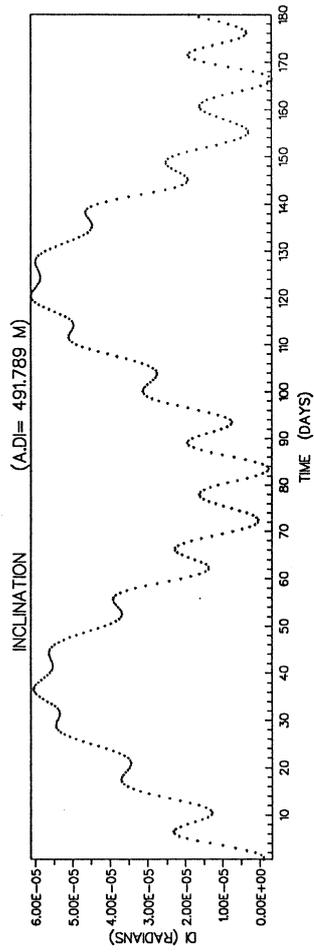
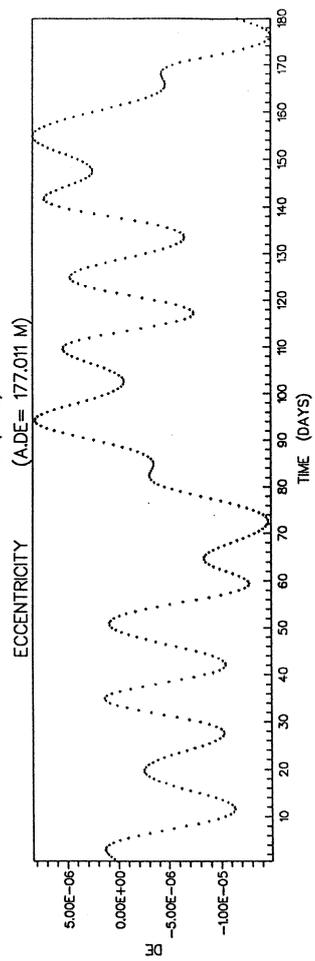
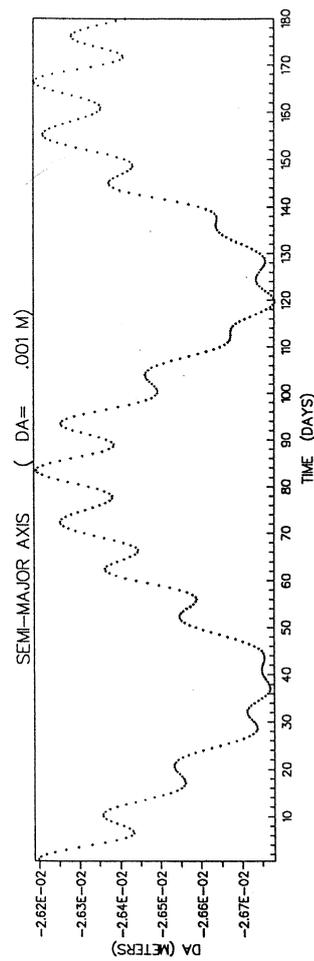


Figure III7 : Effets à longues périodes de la Lune sur l'orbite d'un satellite de paramètres $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$. Ces courbes représentent la différence entre les effets dûs à (J_2, J_3, J_4, J_5 , Lune) et les effets dûs à (J_2, J_3, J_4, J_5).

Lune subsiste sur l et g . Mais il disparaît lorsque l'on considère la somme $l + g$ pour ne laisser que la signature des erreurs numériques. Cette légère imprécision sur l et g a peu d'effet sur la position (car $l + g$ est plus précis) et n'est pas pénalisante pour une exploitation de la méthode à but géophysique : en effet, la détermination des coefficients du potentiel utilise essentiellement l'information issue de e , I et h et les périodes en jeu sont très différentes.

En ce qui concerne la perturbation due au Soleil, seul le degré 2 est à prendre en compte quelle que soit l'altitude du satellite. Le couplage degré 2 * J_2 ayant une contribution centimétrique, son inclusion n'est pas absolument nécessaire.

La figure (III9) montre le résultat d'un test sur le satellite Lageos, portant sur une période d'un an. Les perturbations sont les mêmes que pour la figure (III8) avec le Soleil en plus. Il s'agit d'un satellite élevé dont le mouvement est fortement perturbé par la Lune. Ceci explique sans doute les résidus un peu plus forts sur l'excentricité (6 cm). De plus, en raison de la très faible excentricité de Lageos, on obtient de forts résidus sur l et g . Etant donné la contribution importante du changement de variables correspondant au couplage du degré 2 avec J_2 , on peut penser qu'une grande part de ces résidus est due à la non prise en compte du changement de variables correspondant au couplage du degré 3 avec J_2 .

3. Conclusion

La modélisation des effets moyennés des perturbations dues à l'attraction d'un corps (Lune, Soleil, planètes) extérieur à l'orbite du satellite artificiel est une matérialisation probante des avantages d'une méthode semi-analytique. En effet les calculs sont à la fois plus rapides que ceux des méthodes entièrement numériques et nettement plus précis que ceux des méthodes complètement analytiques.

Entre l'intégration du système complet et l'intégration du système moyen le temps de calcul est divisé par 10. En outre, il est peut-être possible d'augmenter encore la rapidité d'évaluation des séries issues de la théorie analytique.

Contrairement au problème des harmoniques zonaux, le problème des perturbations luni-solaires n'a pas encore de solution analytique très précise ; les précisions des théories existantes sont limitées par la nécessité d'utiliser un mouvement simplifié de la Lune. Dans ces théories, il est difficile d'utiliser un mouvement de la Lune plus précis que le mouvement décrit par une ellipse en précession car cela induirait une trop grande complexité. P. Exertier a montré que l'utilisation d'un tel mouvement pouvait entraîner des erreurs de plusieurs centaines de mètres sur la position d'un satellite bas ($a_0 = 7600$ km) au bout de 6 mois [Exertier, 1988 p54]. L'utilisation de quelques termes de la théorie de Brown pourrait réduire ces erreurs à quelques mètres. L'un des avantages de notre théorie semi-numérique réside dans la possibilité de pouvoir utiliser n'importe quelle éphéméride et en particulier des éphémérides numériques qui sont les plus précises.

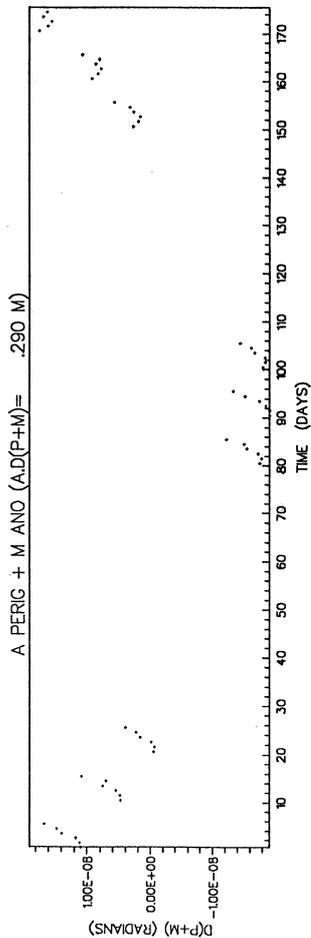
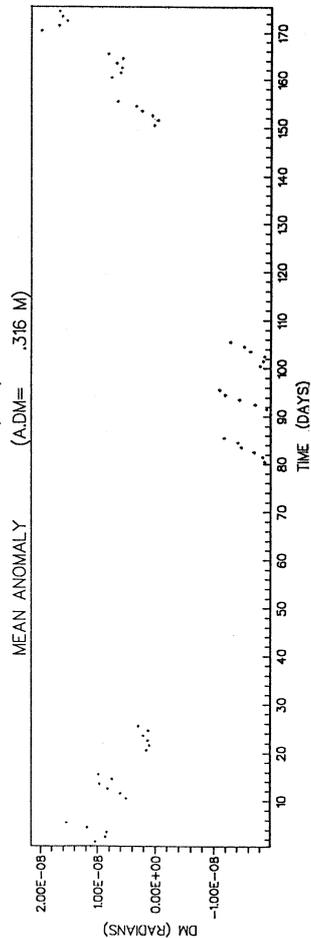
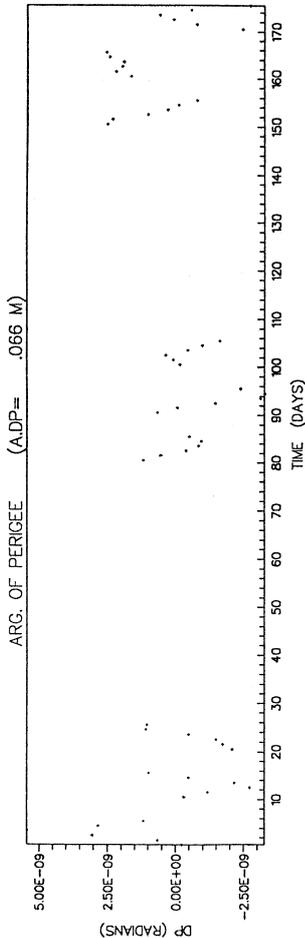
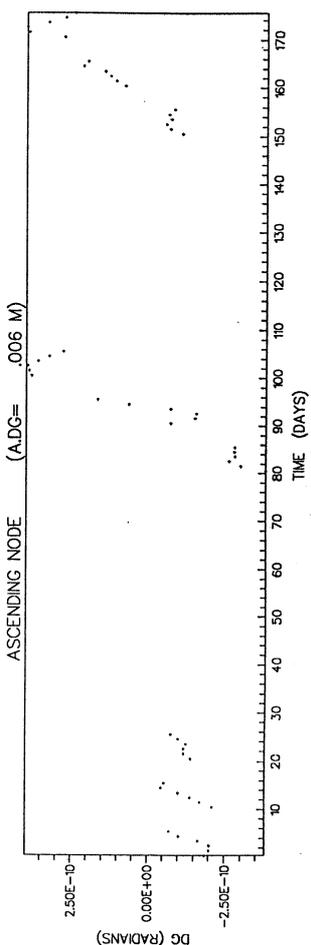
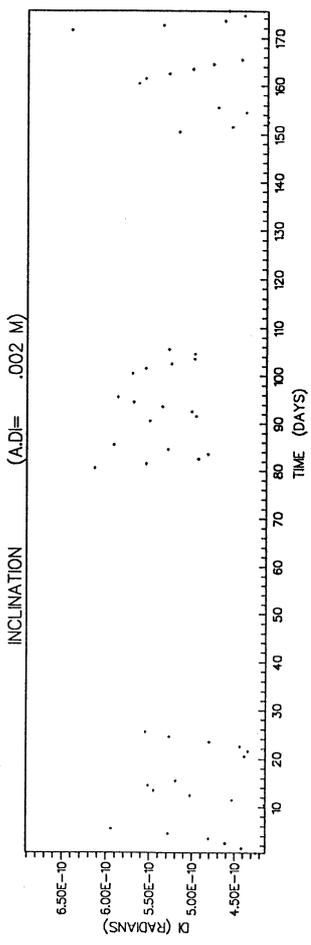
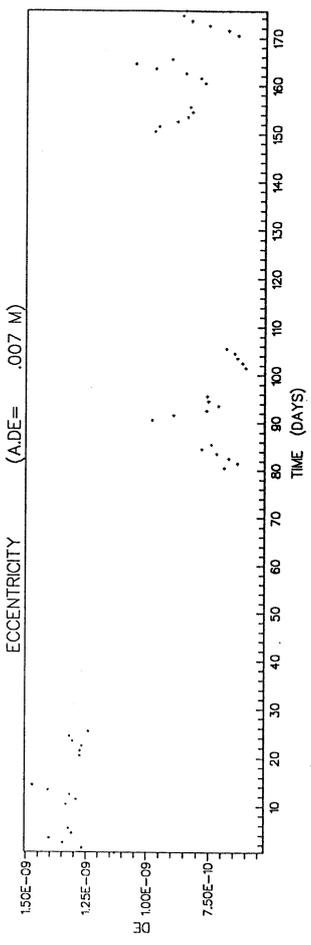
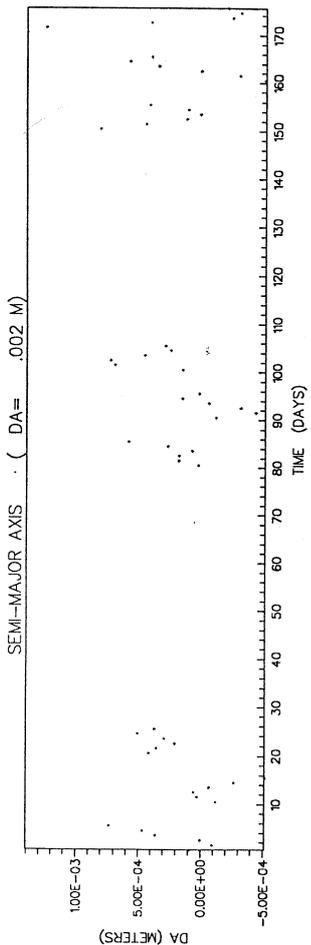


Figure III8 : Résidus sur les variables centrées après ajustement des conditions initiales. Pseudo-observations simulées à partir d'une orbite perturbée par les harmoniques J_2 à J_5 et la Lune. Poids : 1 sur L, G, H, g, h et 10^{-4} sur l . Satellite : $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$.

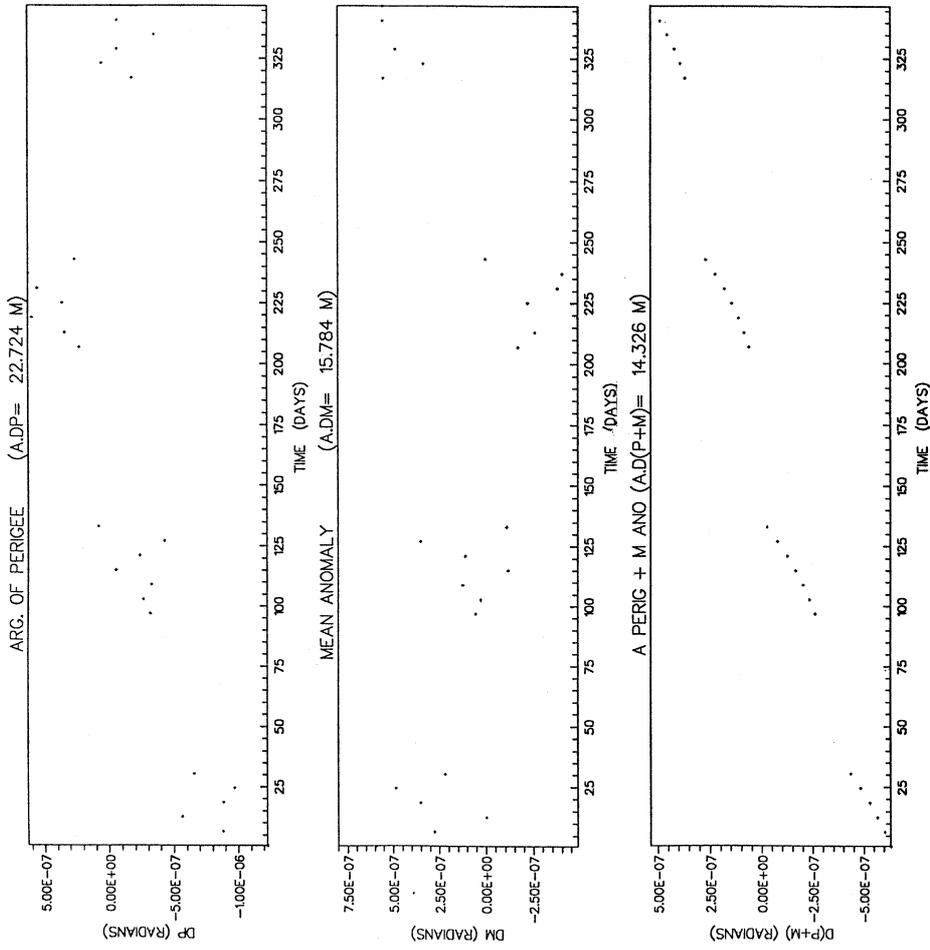
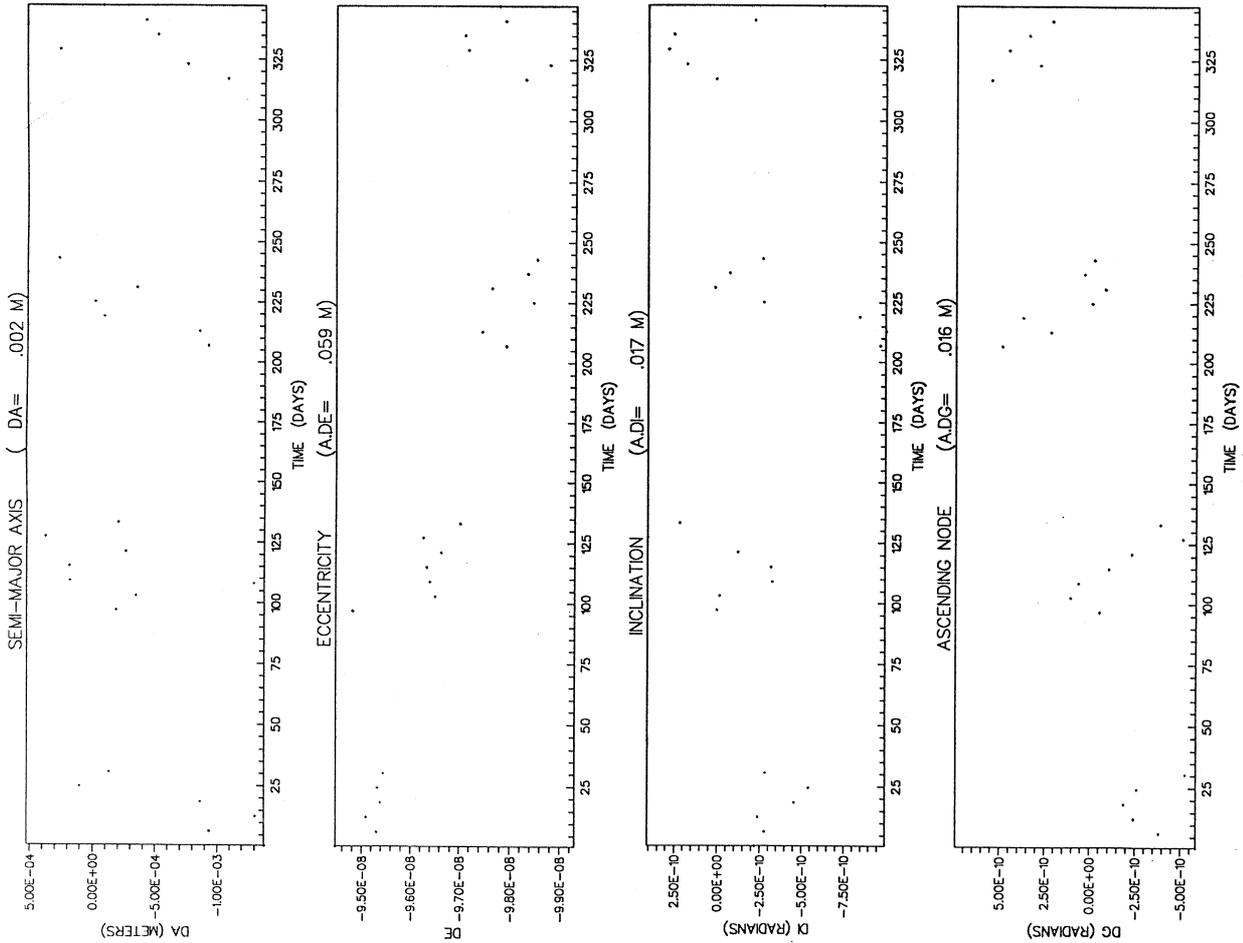


Figure III9 : Résidus sur les variables centrées après ajustement des conditions initiales. Pseudo-observations simulées à partir d'une orbite perturbée par les harmoniques J_2 à J_5 , la Lune et le Soleil. Poids : 1 sur $L, G, H, h, 10^{-4}$ sur l et g . Satellite : $a_0 = 12215$ km, $e_0 \simeq 0.005$, $I_0 \simeq 110^\circ$.

III.F. Perturbations dues aux marées terrestres et océaniques

Un corps tel que le Soleil ou la Lune exerce une attraction différentielle entre la Terre et le satellite ; cette perturbation a été étudiée au paragraphe précédent. Mais ce corps exerce également des attractions différentielles sur les différents points de la Terre se traduisant par des déformations de celle-ci. Il existe donc des mouvements de masses (solides et liquides) et donc une modification du potentiel gravitationnel exercé par la Terre qui comprend alors une partie dépendant de la position du corps perturbateur. Les réactions d'un fluide et d'un solide à ces excitations ne sont pas identiques. C'est pourquoi on distingue les marées solides (ou marées terrestres) qui décrivent les déformations de la croûte terrestre et les marées océaniques qui modélisent les effets induits par les mouvements de masses d'eau.

1. Marées terrestres

La perturbation due aux marées terrestres peut être scindée en deux parties : une partie principale dont la formulation s'appuie sur l'hypothèse de Love (réponse d'une Terre élastique) et une partie corrective appelée correction de Wahr introduisant le fait que l'intensité de la réponse dépend de la fréquence de l'excitation.

a. Partie principale

L'hypothèse de Love consiste à supposer que la déformation verticale de la croûte terrestre répondant à la perturbation d'une masse extérieure à la Terre est proportionnelle à l'excitation subie. La modification du potentiel de gravité terrestre à la surface de la Terre est alors proportionnelle au potentiel perturbateur, le coefficient de proportionnalité étant le nombre de Love. Cette modification peut être extrapolée à des points extérieurs à la Terre :

$$\Delta U = \frac{\mu_c}{r_c} \sum_{n \geq 2} k_n \left(\frac{R_e}{r_c} \right)^n \left(\frac{R_e}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \quad (\text{III51})$$

k_n étant les nombres de Love et ψ l'angle géocentrique entre le satellite et le corps perturbateur. On rappelle les notations :

$\mu_c = GM_c$: produit de la constante de la gravitation par la masse du troisième corps,

r : distance géocentrique du satellite,

r_c : distance géocentrique du corps perturbateur,

R_e : rayon équatorial terrestre,

P_n : polynôme de Legendre de degré n .

$\cos \psi$ est exprimé dans la formule (III35) en fonction des coordonnées du satellite et des cosinus directeurs (A_c, B_c, C_c) du corps perturbateur.

Comme cette perturbation a pour effet de changer le potentiel terrestre, il est possible de l'exprimer directement sous forme de modifications des coefficients du développement en harmoniques sphériques de ce potentiel. Ces modifications dépendent alors de la position du troisième corps par rapport à la Terre. Mais pour le but que nous visons la formulation (III51) est plus adaptée car elle met mieux en évidence les fréquences impliquées.

La perturbation étant proportionnelle à $(R_e/r_c)^n$ et à $(R_e/r)^{n+1}$, son amplitude décroît très vite lorsque le degré n augmente. C'est pourquoi seuls les degrés 2 et 3 sont à prendre en compte dans la formule (III51). En introduisant la variable de Delaunay L , et un signe $-3!$ pour être homogène avec nos conventions, l'hamiltonien décrivant cette perturbation d'ordre 3 devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3^0 &= \mathcal{H}_3^0(k_2) + \mathcal{H}_3^0(k_3) \\ &= -3! \mu_c \frac{R_e^5}{r_c^3} \frac{\mu^3}{L^6} \left[k_2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 P_2(\cos \psi) + k_3 \frac{R_e^2}{r_c} \frac{\mu}{L^2} \left(\frac{a}{r} \right)^4 P_3(\cos \psi) \right] \end{aligned} \quad (\text{III52})$$

$P_2(\cos \psi)$ et $P_3(\cos \psi)$ font intervenir les variables L , G , $\sin i$, et $\cos i$, les cosinus directeurs A_c , B_c , C_c et les fonctions \sin et \cos des arguments $\alpha(f + g) + \beta h$. Pour moyenner \mathcal{H}_3^0 il suffit donc de moyenner les formes $(a/r)^3 \sin kf$, $(a/r)^3 \cos kf$, $(a/r)^4 \sin kf$ et $(a/r)^4 \cos kf$. Ce type de calcul a déjà été rencontré lors du traitement des harmoniques zonaux. La série $\mathcal{H}_0^3(k_2)$ obtenue sans développement en excentricité contient 14 termes. On a également pris en compte les couplages $k_2 * J_2$, ces calculs n'induisant pas de difficulté supplémentaire (Tableaux III11 et III12).

b. Correction de Wahr

La correction de Wahr est formulée dans les standards IERS comme une modification des coefficients du potentiel :

$$\Delta C_{nm} - i \Delta S_{nm} = A_m \sum_{s(n,m)} \delta k_s \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \begin{matrix} (n-m) \text{ pair} \\ (n-m) \text{ impair} \end{matrix} \exp i \Theta_s \quad (\text{III53})$$

avec $A_m = \frac{(-1)^m}{R_e \sqrt{4\pi(2 - \delta_{0m})}}$,

δk_s : différence entre la valeur de Wahr pour le nombre de Love k_s et la valeur nominale dans le sens $k_s - k_2$,

H_s : amplitude,

$\Theta_s = \sum_{j=1}^6 n_j \beta_j$: arguments de Doodson, combinaisons linéaires de 6 angles reliés aux positions de la Lune et du Soleil. β_2 à β_6 ont de longues périodes tandis que $\beta_1 = \theta + \pi - s$ (s longitude moyenne de la Lune) contient le temps sidéral θ .

Tableau III11 : Hamiltonien moyenné représentant la partie principale des effets de marées terrestres.

$$\mathcal{H}_0^3(k_2) = k_2 \mu^3 R_e^5 \frac{\mu_c}{r_c^3} \sum_{i=1}^{14} \alpha_i L^{n_2(i)} G^{n_3(i)} e^{n_4(i)} s^{n_5(i)} H^{n_6(i)} A_c^{n_7(i)} B_c^{n_8(i)} C_c^{n_9(i)} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} (n_1(i)h)$$

i : numéro du terme

α_i : coefficient réel donné dans la première colonne

$n_j(i)$: entier donné dans la colonne ($j + 2$)

NOMBRE DE TERMES : 14

		T	P	P	P	P	P	P	P	P
		PTH	GRL	GRG	e	s	GRH	Ac	Bc	Cc
5.0000000000000D-01	COS	.	-3	-3
-3.7500000000000D-01	COS	.	-3	-3	2	.
-3.7500000000000D-01	COS	.	-3	-3	.	.	.	2	.	.
-3.7500000000000D-01	COS	.	-3	-5	.	.	2	.	2	.
-3.7500000000000D-01	COS	.	-3	-5	.	.	2	2	.	.
-7.5000000000000D-01	COS	.	-3	-3	.	2	.	.	.	2
-1.5000000000000D+00	COS	1	-3	-4	.	1	1	.	1	1
1.5000000000000D+00	SIN	1	-3	-4	.	1	1	1	.	1
3.7500000000000D-01	COS	2	-3	-3	2	.
-3.7500000000000D-01	COS	2	-3	-3	.	.	.	2	.	.
-3.7500000000000D-01	COS	2	-3	-5	.	.	2	.	2	.
3.7500000000000D-01	COS	2	-3	-5	.	.	2	2	.	.
-7.5000000000000D-01	SIN	2	-3	-3	.	.	.	1	1	.
7.5000000000000D-01	SIN	2	-3	-5	.	.	2	1	1	.

Tableau III12 : Perturbations dues aux marées terrestres. Hamiltoniens calculés et nombre de termes correspondants.

Perturbations	Hamilt. Non Dév.	Hamilt. Dév.
k_2	14	56 en e^6
$k_2 * J_2$	204	210 en e^4
k_3	104	208 en e^3

La prise en compte de 6 arguments différents $\Theta_{s(2,1)}$ (ondes diurnes) pour $m = 1$ et de 2 arguments $\Theta_{s(2,2)}$ (ondes semi-diurnes) pour $m = 2$ assure une précision suffisante (standards IERS 1989).

Tout comme S_{20} , δS_{20} est nul. En revanche, δC_{20} ne varie pas avec les positions de la Lune et du Soleil. C'est pourquoi on nomme cet effet marée permanente. L'effet de marée sur C_{20} ne peut être distingué de la valeur nominale de ce coefficient. Logiquement la correction δC_{20} devrait être incluse dans la valeur de C_{20} lors de sa détermination. En pratique cela n'est pas toujours réalisé ; quoi qu'il en soit cet effet est moyenné exactement de la même manière que la perturbation due à $J_2 = -C_{20}$.

La modification du potentiel résultant de la correction de Wahr peut s'obtenir en utilisant (III53) dans un développement de Kaula tel que (I2) :

$$\Delta \mathcal{R}_{nm} = \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_e}{a} \right)^n (-1)^{n-m} F_{nmp}(I) G_{npq}(e) \quad (\text{III54})$$

$$A_m \sum_{s(n,m)} \delta k_s H_s \cos(\psi_{nmpq} + \Theta_s)$$

Avec $\psi_{nmpq} = (n - 2p + q)l + (n - 2p)g + m(h - \theta)$.

De plus dans la définition de $\Theta_{s(n,m)}$, on a $n_1 = m$ donc, $\Theta_{s(n,m)} = m(\theta + \pi - s) + \sum_{j=2}^6 n_j \beta_j$.

On en déduit : $\psi_{nmpq} + \Theta_s = (n - 2p + q)l + (n - 2p)g + mh + m(\pi - s) + \sum_{j=2}^6 n_j \beta_j$.

Le temps sidéral n'intervient pas. Le seul angle rapide impliqué est l'anomalie moyenne l . Les seuls arguments donnant lieu à des longues périodes sont ceux pour lesquels $n - 2p + q = 0$. On remarque que cette condition est indépendante de Θ_s .

Comme $n = 2$ et $0 \leq p \leq 2$, les seules solutions à considérer sont ($p = 0, q = -2$), ($p = 1, q = 0$) et ($p = 2, q = 2$) ceci pour m valant 1 ou 2.

Or les fonctions $G_{npq}(e)$ ont pour expression :

$$G_{20-2}(e) = 0$$

$$G_{210}(e) = (1 - e^2)^{-3/2} = \frac{L^3}{G^3}$$

$$G_{222}(e) = 0$$

Il ne reste donc que le couple ($p = 1, q = 0$) à prendre en compte. De plus

$$F_{211}(I) = -\frac{3}{2} \sin I \cos I$$

$$F_{221}(I) = \frac{3}{2} \sin^2 I$$

On en déduit que les seuls termes à longues périodes sont donnés par l'hamiltonien suivant (on a introduit un facteur $-3!$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^3 = & -\frac{1}{2} \frac{\mu^4 R_e^2}{L^3 G^3} \\ & * \left[\frac{1}{2} \sin 2IA_1 \sum_{s(2,1)} \delta k_s H_s \cos(h - \theta + \Theta_s) \right. \\ & \left. + \sin^2 IA_2 \sum_{s(2,2)} \delta k_s H_s \cos(2h - 2\theta + \Theta_s) \right] \end{aligned} \quad (\text{III55})$$

Comme 6 ondes sont à considérer pour $m = 1$ (l'indice $s(2,1)$ prend 6 valeurs) et 2 pour $m=2$, le nombre de termes est de 8.

2. Marées océaniques

a. Formulation de la perturbation

Les modifications des coefficients dénormalisés du potentiel dues aux marées océaniques peuvent se mettre sous la forme [**Standards IERS 1989**] :

$$\begin{aligned} \Delta C_{nm} &= \mathcal{F}_n \sum_{s(n,m)} \left((C_{snm}^+ + C_{snm}^-) \cos \Theta_s + (S_{snm}^+ + S_{snm}^-) \sin \Theta_s \right) \\ \Delta S_{nm} &= \mathcal{F}_n \sum_{s(n,m)} \left((S_{snm}^+ - S_{snm}^-) \cos \Theta_s - (C_{snm}^+ - C_{snm}^-) \sin \Theta_s \right) \end{aligned} \quad (\text{III56})$$

avec $\mathcal{F}_n = \frac{4\pi G \rho_w}{g} \frac{1 + k'_n}{2n + 1}$,

k'_n : coefficient de déformation de charge,

Θ_s : arguments de Doodson,

C_{snm}^+ , C_{snm}^- , S_{snm}^+ , S_{snm}^- : coefficients de marées reliés aux amplitudes \hat{C}_{snm}^\pm et aux phases ε_{snm}^\pm de Schwiderski par : $C_{snm}^\pm - iS_{snm}^\pm = -i\hat{C}_{snm}^\pm \exp i(\varepsilon_{snm}^\pm + \chi_s)$, χ_s valant 0, $\pi/2$ ou $-\pi/2$ selon les ondes.

La modification du potentiel correspondant à ces écarts est :

$$\begin{aligned} \Delta R = & \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \phi) \mathcal{F}_n \sum_{s(n,m)} \\ & \mathcal{R}e \left\{ (C_{snm}^+ - iS_{snm}^+) \exp i(m\lambda + \Theta_s) + (C_{snm}^- + iS_{snm}^-) \exp i(m\lambda - \Theta_s) \right\} \end{aligned} \quad (\text{III57})$$

Les fonctions d'inclinaison $F_{nmp}(I)$ de Kaula permettent d'écrire :

$$F_{nm}(\sin \phi) \exp i(m\lambda + \Theta_s) = \sum_{p=0}^n F_{nmp}(I) * \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \begin{matrix} (n-m) \text{ pair} \\ (n-m) \text{ impair} \end{matrix} \\ * \exp i[(n-2p)(f+g) + m(h-\theta) + \Theta_s] \quad (\text{III58})$$

On en déduit :

$$\Delta R = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r}\right)^n \sum_{p=0}^n F_{nmp}(I) \mathcal{F}_n \sum_{s(n,m)} \\ \mathcal{R}e \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \begin{matrix} (n-m) \text{ pair} \\ (n-m) \text{ impair} \end{matrix} \left[(C_{snm}^+ - iS_{snm}^+) \exp i(\psi_{nmp} + \Theta_s) \right. \right. \\ \left. \left. + (C_{snm}^- + iS_{snm}^-) \exp i(\psi_{nmp} - \Theta_s) \right] \right\} \quad (\text{III59})$$

ψ_{nmp} et Θ_s sont définis par :

$$\psi_{nmp} = (n-2p)(f+g) + m(h-\theta) \\ \Theta_s = \sum_{j=1}^6 n_{sj} \beta_j = n_{s1}(\theta + \pi - s) + \sum_{j=2}^6 n_{sj} \beta_j$$

s et β_j ($j=2,6$) étant des angles circulant lentement reliés aux mouvements de la Lune et du Soleil. n_{sj} sont des entiers positifs ou nuls.

On doit distinguer deux cas selon que le temps sidéral intervient ou non. Il existe des ondes progrades (Θ_s intervient avec le signe +) pour lesquelles $n_{s1} = m$ et dans ce cas :

$$\psi_{nmp} + \Theta_s = (n-2p)(f+g) + mh + n_{s1}(\pi - s) + \sum_{j=2}^6 n_{sj} \beta_j \quad (\text{III60})$$

Le seul angle rapide est l'anomalie vraie et les variations à longues périodes sont obtenues en calculant la moyenne des fonctions $\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} * \exp i(n-2p)f$.

En ce qui concerne les autres ondes progrades et toutes les ondes rétrogrades, le temps sidéral intervient toujours ($n_{s1} - m \neq 0$ et $n_{s1} + m \neq 0$) et des longues périodes ne peuvent apparaître qu'en cas de résonances.

On sépare donc ΔR en deux parties :

$$\begin{aligned}
\Delta R &= \Delta R_1 + \Delta R_2 \\
\Delta R_1 &= \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r}\right)^n \sum_{p=0}^n F_{nmp}(I) \mathcal{F}_n \\
&\quad * \mathcal{R}e \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \sum_{\substack{(n-m) \text{ pair} \\ (n-m) \text{ impair} \\ s^*(n,m)}} (C_{s^*nm}^+ - iS_{s^*nm}^+) \exp i(\psi_{nmp} + \Theta_{s^*}) \right\} \\
\Delta R_2 &= \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_e}{r}\right)^n \sum_{p=0}^n F_{nmp}(I) \mathcal{F}_n \\
&\quad * \mathcal{R}e \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \sum_{\substack{(n-m) \text{ pair} \\ (n-m) \text{ impair} \\ \tilde{s}(n,m)}} (C_{\tilde{s}nm}^+ - iS_{\tilde{s}nm}^+) \exp i(\psi_{nmp} + \Theta_{\tilde{s}}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s(n,m)} (C_{snm}^- + iS_{snm}^-) \exp i(\psi_{nmp} - \Theta_s) \right\}
\end{aligned} \tag{III61}$$

Les indices $s^*(n, m)$ et $\tilde{s}(n, m)$ étant choisis parmi les indices $s(n, m)$ tels que $n_{s^*1} = m$ et $n_{\tilde{s}1} \neq m$.

b. Moyennisation de ΔR_1

A partir de la relation (III60), posons $\psi_{nmp} + \Theta_{s^*} = (n - 2p)f + \tau_{s^*nmp}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta R_1 \rangle_l &= \frac{\mu}{a} \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s^*(n,m)} \sum_{p=0}^n F_{nmp}(I) \mathcal{F}_n \left(\frac{R_e}{a}\right)^n \\
&\quad * \mathcal{R}e \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \sum_{\substack{(n-m) \text{ pair} \\ (n-m) \text{ impair}}} (C_{s^*nm}^+ - iS_{s^*nm}^+) \right. \\
&\quad \left. * \left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \exp i[(n - 2p)f + \tau_{s^*nmp}] \right\rangle_l \right\}
\end{aligned} \tag{III62}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \exp i[(n - 2p)f + \tau_{s^*nmp}] \right\rangle_l &= \left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cos(n - 2p)f \right\rangle_l \exp i\tau_{s^*nmp} \\
&\quad + \left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sin(n - 2p)f \right\rangle_l * i * \exp i\tau_{s^*nmp} \\
&= \left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cos(n - 2p)f \right\rangle_l \exp i\tau_{s^*nmp}
\end{aligned}$$

On est ramené au problème classique du calcul des moyennes $\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cos kf \rangle_l$ qui a été rencontré dans le cas des harmoniques zonaux du potentiel terrestre. En pratique, $0 \leq p \leq n$; il suffit donc d'utiliser k compris entre 0 et n .

c. Moyennisation de ΔR_2

ΔR_2 contient toujours le temps sidéral et ne peut donc générer des variations à longues périodes qu'en cas de résonances. Un développement en excentricité est nécessaire pour faire apparaître l'anomalie moyenne au lieu de l'anomalie vraie. En utilisant les fonctions $G_{npq}(e)$ de Kaula on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta R_2 = & \frac{\mu}{a} \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{R_e}{a}\right)^n \mathcal{F}_n F_{nmp}(I) G_{npq}(e) \\ & * \mathcal{R}e \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 1 \\ i \end{array} \right] \\ (n-m) \text{ pair} \\ (n-m) \text{ impair} \end{array} \right. \sum_{\bar{s}(n,m)} (C_{snm}^+ - iS_{snm}^+) \exp i\psi_{\bar{s}nmp}^+ \\ & \left. + \sum_{s(n,m)} (C_{snm}^- + iS_{snm}^-) \exp i\psi_{snmp}^- \right\} \end{aligned} \quad (\text{III63})$$

Avec :

$$\begin{cases} \psi_{\bar{s}nmp}^+ = (n - 2p + q)l + (n - 2p)g + mh + (n_{\bar{s}1} - m)\theta + n_{\bar{s}1}(\pi - s) + \sum_{j=2}^6 n_{\bar{s}j}\beta_j \\ \psi_{snmp}^- = (n - 2p + q)l + (n - 2p)g + mh - (n_{s1} + m)\theta - n_{s1}(\pi - s) - \sum_{j=2}^6 n_{sj}\beta_j \end{cases}$$

La recherche des combinaisons d'indices (n, m, p, q, s) générant des arguments résonnants se fait par la même technique que dans le cas des harmoniques tesséraux du potentiel terrestre : étant donné un satellite et une telle combinaison d'entiers, des éphémérides approximatives du satellite, de la Lune et du Soleil permettent de calculer $\dot{\psi}_{\bar{s}nmp}^+$ et $\dot{\psi}_{snmp}^-$. Seules les combinaisons conduisant à des périodes supérieures à un jour avec des amplitudes non négligeables (supérieures à 0.1 m par exemple) sont retenues pour l'intégration numérique.

3. Tests numériques

Les ordres de grandeur des effets dus aux marées terrestres sont résumés dans les tableaux (III13) et (III14). Ces chiffres ont été obtenus en faisant les différences d'orbites résultant de l'intégration du système référentiel moyen.

	Δa	$a\Delta e$	$a\Delta I$
k_2	0	18 <i>cm</i>	95 <i>m</i>
k_3	0	15 <i>cm</i>	4 <i>cm</i>
$k_2 * J_2$	0	1 <i>cm</i>	12 <i>cm</i>
Corr. de Wahr	0	40 <i>cm</i>	11 <i>m</i>
	$a\Delta h$	$a\Delta g$	$a\Delta l$
k_2	1 <i>km</i>	180 <i>m</i>	450 <i>m</i>
k_3	30 <i>cm</i>	2 <i>m</i>	2 <i>m</i>
$k_2 * J_2$	4 <i>m</i>	4 <i>m</i>	1 <i>m</i>
Corr. de Wahr	90 <i>m</i>	350 <i>m</i>	210 <i>m</i>

Tableau III13 : Effets moyens des marées terrestres obtenus par intégration numérique du système différentiel moyenné analytiquement. Satellite de paramètres $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$ perturbé par les marées terrestres : effets de $(J_2 \text{ à } J_5 + \text{marées}) - (J_2 \text{ à } J_5)$ sur 1 an. On a utilisé les valeurs $k_2 = 0.3$ et $k_3 = 0.1$.

	Δa	$a\Delta e$	$a\Delta I$
k_2	0	2 <i>mm</i>	100 <i>m</i>
k_3	0	2 <i>cm</i>	0
$k_2 * J_2$	0	0	4 <i>cm</i>
Corr. de Wahr	0	0	13 <i>m</i>
	$a\Delta h$	$a\Delta g$	$a\Delta l$
k_2	52 <i>m</i>	160 <i>m</i>	150 <i>m</i>
k_3	0	5 <i>m</i>	5 <i>m</i>
$k_2 * J_2$	3 <i>cm</i>	20 <i>cm</i>	8 <i>cm</i>
Corr. de Wahr	2 <i>m</i>	5 <i>m</i>	2 <i>m</i>

Tableau III14 : Effets moyens des marées terrestres obtenus par intégration numérique du système différentiel moyenné analytiquement. Satellite de paramètres $a_0 = 12270$ km, $e_0 = 0.005$, $I_0 = 110^\circ$ perturbé par les marées terrestres : effets de $(J_2 \text{ à } J_5 + \text{marées}) - (J_2 \text{ à } J_5)$ sur 1 an. On a utilisé les valeurs $k_2 = 0.3$ et $k_3 = 0.1$.

La figure (III10) montre le résultat d'une correction différentielle d'orbite effectuée sur un an avec un satellite de paramètres $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$. Les pseudo-observations simulées ont été obtenues à partir de l'intégration numérique des effets des harmoniques J_2 à J_5 du potentiel et de k_2 ($k_2 = 0.3$). Les éléments moyens centrés résultent de l'intégration numérique du système moyen centré comprenant les effets de J_2 à J_5 , et des marées terrestres de degré 2 (termes en k_2 et en $k_2 * J_2$). Hormis la signature des erreurs numériques sur l'anomalie moyenne, issues de la simulation des observations, il ne reste aucun signal significatif.

La figure (III11) présente un test similaire, avec en outre les effets issus des corrections de Wahr. Il reste un faible signal non expliqué sur I ($a\Delta I = 13mm$) et sur h ($a\Delta h = 4mm$).

4. Conclusion

Le développement de la perturbation reliée à la partie principale des marées terrestre est assez semblable à ceux des perturbations provenant des harmoniques zonaux du potentiel terrestre ou d'un troisième corps. C'est pourquoi les mêmes méthodes de moyennisation ont pu être appliquées avec succès. Une théorie semi-analytique est particulièrement adaptée dans le cas des corrections de Wahr : leur formulation étant relativement complexe il semble très difficile de décrire avec précision leurs effets à l'aide d'une théorie purement analytique. En revanche l'intégration purement numérique de cette perturbation est très coûteuse en temps de calcul (environ 900 secondes sur 6 mois contre 1 seconde dans le cas de notre théorie semi-analytique).

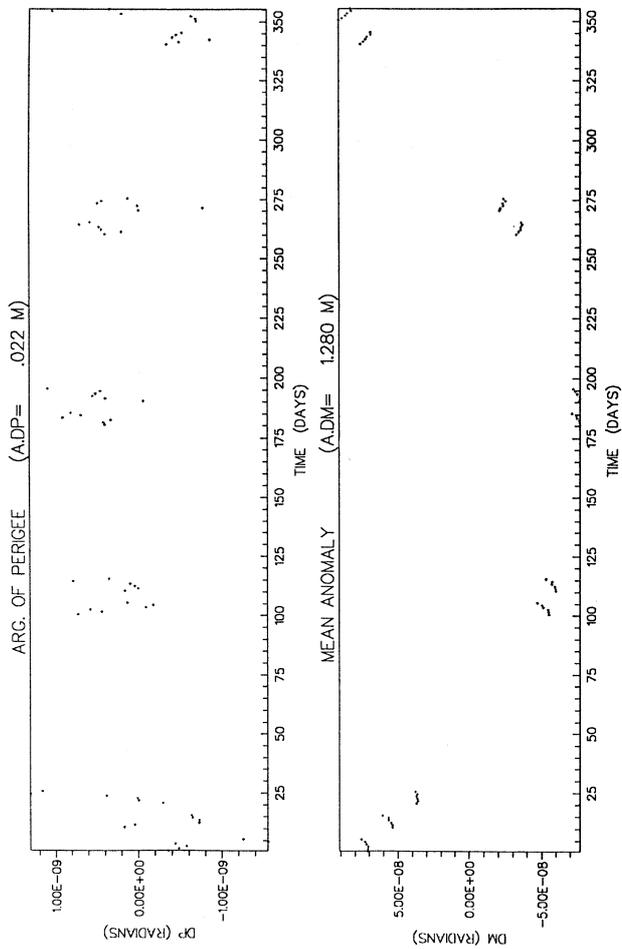
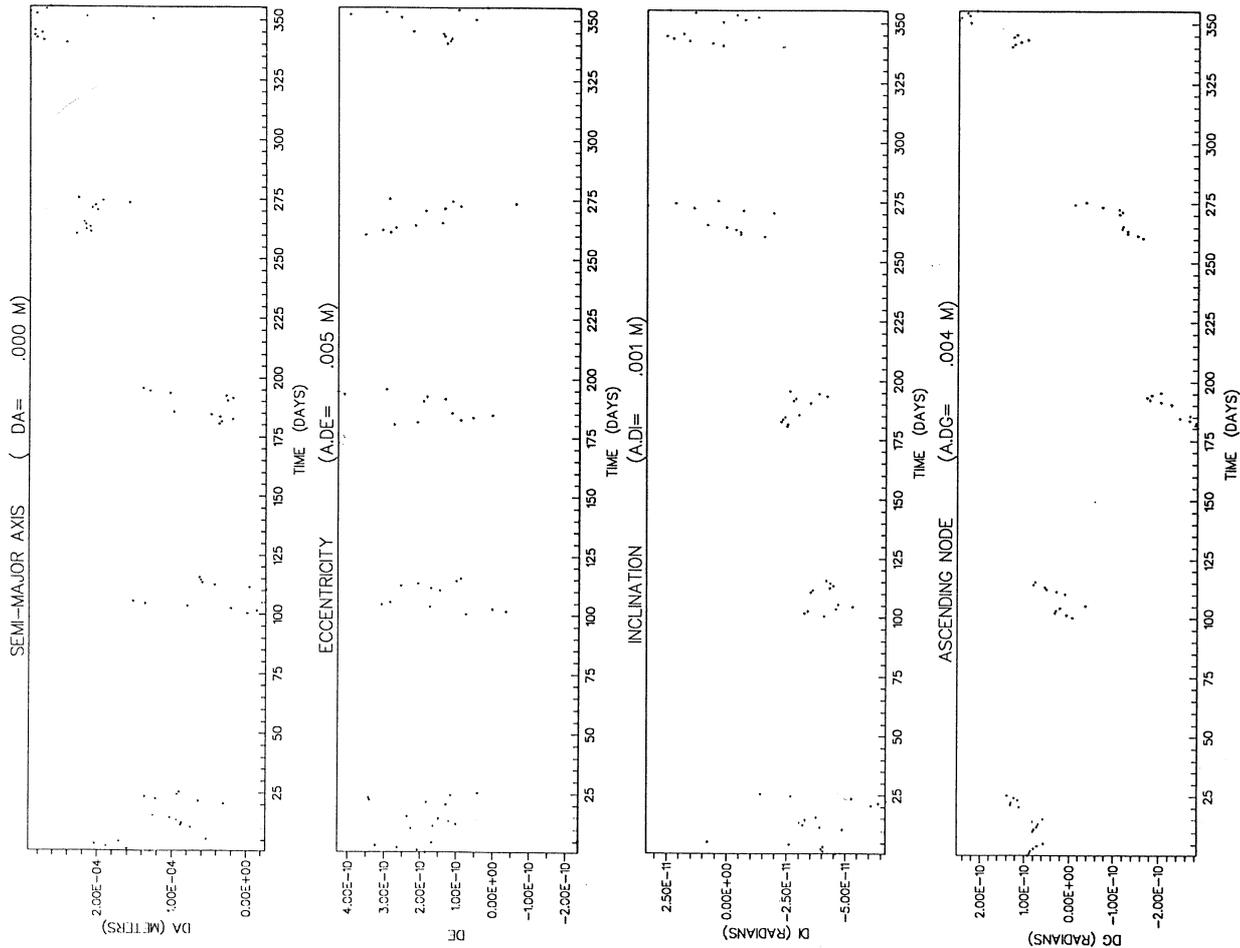


Figure III10 : Différences entre une orbite issue de la théorie et des observations simulées dans le cas d'un satellite perturbé par les harmoniques J_2 à J_5 du potentiel terrestre et par les marées terrestres d'ordre 2 (termes en k_2).
 $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$.

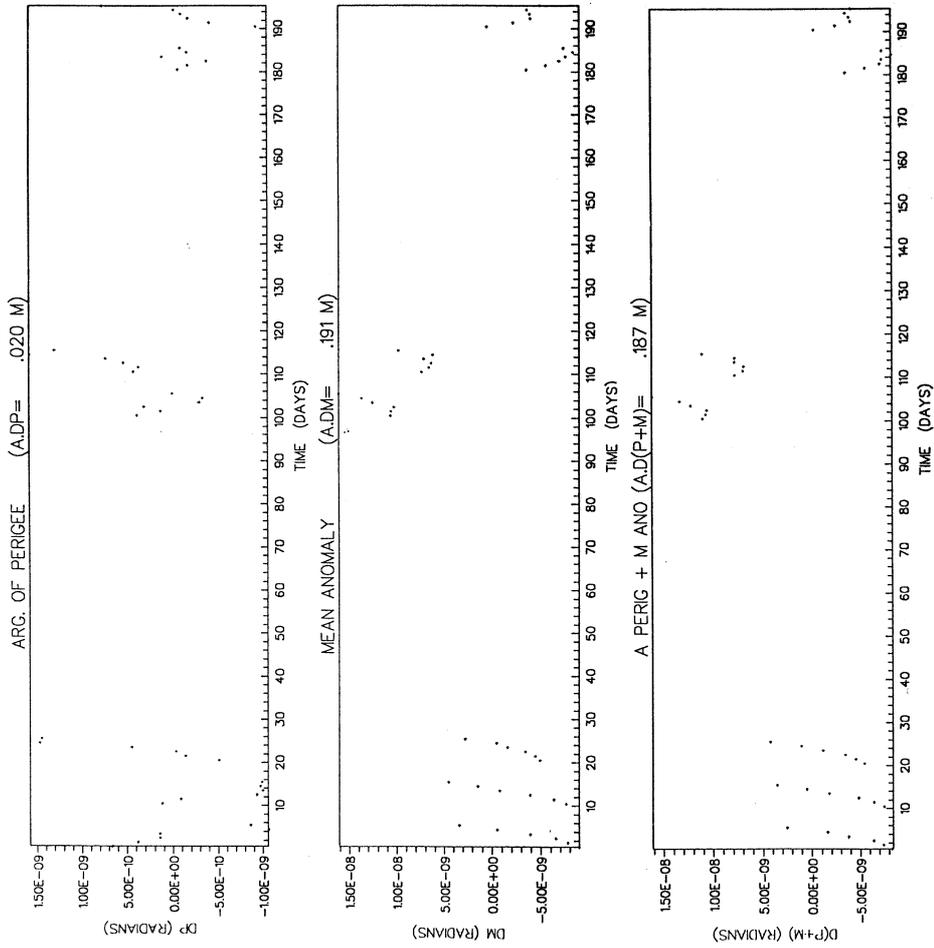
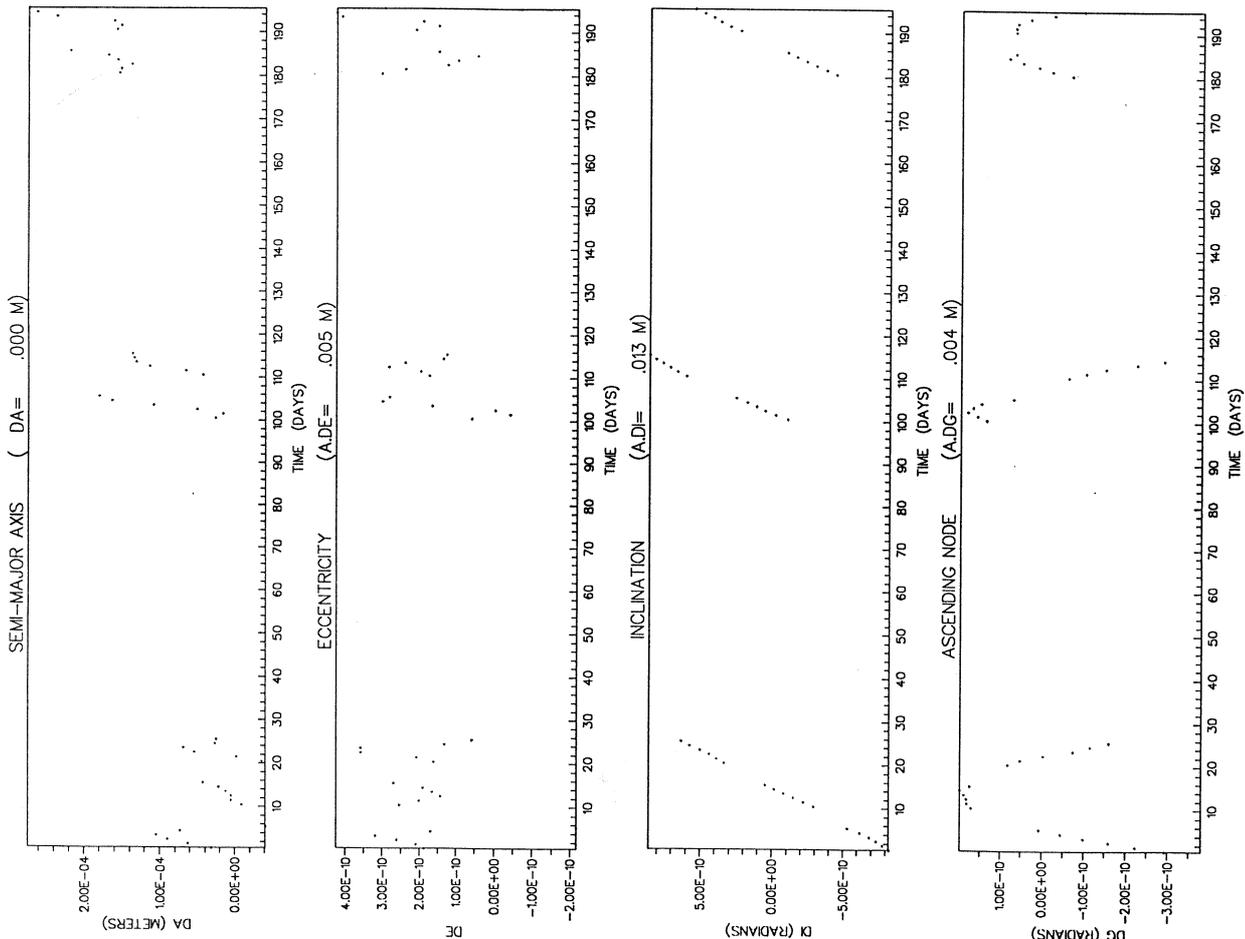


Figure III11 : Différences entre une orbite issue de la théorie et des observations simulées dans le cas d'un satellite perturbé par les harmoniques J_2 à J_5 du potentiel terrestre et par les marées terrestres d'ordre 2 (termes en k_2 et corrections de Wahr).
 $a_0 = 7600$ km, $e_0 = 0.084$, $I_0 = 39.4^\circ$.

III.G. Perturbations dues à la pression de radiation solaire

La pression de radiation solaire directe est une perturbation dont la formulation est relativement simple, surtout dans le cas des satellites de forme sphérique avec une qualité de surface uniforme. Cependant, les passages du satellite dans le cône d'ombre formé par la Terre provoquent des interruptions et réapparitions très brusques (les transitions durent quelques dizaines de secondes) de cette force. C'est une source de difficulté aussi bien dans les méthodes numériques que dans les méthodes analytiques. Dans ce dernier cas, les passages à l'ombre nous empêchent d'exprimer l'accélération comme le gradient d'un potentiel. En revanche, lorsque le satellite est continuellement éclairé, il est possible d'utiliser une fonction potentiel à condition de faire de faibles approximations. C'est pourquoi nous distinguerons ce cas avant de traiter le problème plus délicat des passages à l'ombre.

1. Théorie analytique sans ombre

On fait l'hypothèse que tous les photons rencontrant la paroi du satellite subissent une réflexion spéculaire et que le satellite est assimilable à une sphère. Dans ce cas, l'accélération due à la pression de radiation solaire a pour expression :

$$\vec{\gamma} = \alpha \frac{\Sigma \chi}{m c} \left(\frac{a_s}{\Delta} \right)^2 \vec{u} \quad (\text{III64})$$

α : coefficient de réflectivité,

Σ : surface efficace perpendiculaire au rayonnement exprimée en m^2 ,

m : masse du satellite en kg ,

χ : constante solaire en W/m^2 ,

c : vitesse de la lumière en m/s ,

a_s : distance de référence égale à une unité astronomique,

Δ : distance Soleil-satellite,

\vec{u} : vecteur unitaire Soleil-satellite.

On pose $\sigma = \alpha \frac{\Sigma \chi}{m c}$.

On fait ensuite deux approximations : on assimile la distance Soleil-satellite Δ à la distance Soleil-Terre r_s et le vecteur Soleil-satellite \vec{u} au vecteur Soleil-Terre $-\vec{r}_s$. Cela implique une erreur relative maximum de l'ordre de 10^{-4} sur le module de l'accélération et une erreur maximum de l'ordre de 10^{-4} rad sur sa direction. De plus ces erreurs ont la période du satellite et sont quasiment de moyenne nulle sur une révolution. Dans tous les cas elles sont faibles par rapport aux incertitudes sur d'autres paramètres (coefficient de spécularité, constante solaire). Pour absorber une partie de ces incertitudes, on a l'habitude dans les méthodes classiques, d'ajuster un coefficient de proportionnalité k_p lors de la correction différentielle.

Moyennant ces approximations, la force dérive du potentiel $-\sigma \left(\frac{a_s}{r_s}\right)^2 \vec{r} \cdot \vec{r}_s$.
L'hamiltonien est l'opposé du potentiel et s'écrit :

$$\mathcal{H}_{pr} = \sigma \left(\frac{a_s}{r_s}\right)^2 \vec{r} \cdot \vec{r}_s \quad (\text{III65})$$

On a $\vec{r} \cdot \vec{r}_s = r \cos \psi$ où ψ est défini par la formule (III35). En utilisant cette formule, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{pr} = & \sigma \left(\frac{a_s}{r_s}\right)^2 r \\ & * \left(A_s \left[\cos h \cos(f+g) - \sin h \sin(f+g) \cos I \right] \right. \\ & + B_s \left[\sin h \cos(f+g) + \cos h \sin(f+g) \cos I \right] \\ & \left. + C_s \sin(f+g) \sin I \right) \end{aligned} \quad (\text{III66})$$

A_s , B_s et C_s représentant les cosinus directeurs du Soleil dans le même repère que celui utilisé pour le satellite. Pour moyennner cet hamiltonien, il suffit d'utiliser les formules :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{r}{a} \cos f \right\rangle_l &= -\frac{3}{2}e \\ \left\langle \frac{r}{a} \sin f \right\rangle_l &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III67})$$

On en déduit l'expression de l'hamiltonien moyen :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_{pr} = & -\frac{3}{2}\sigma \left(\frac{a_s}{r_s}\right)^2 ae \\ & * \left(A_s \left[\cos h \cos g - \sin h \sin g \cos I \right] \right. \\ & + B_s \left[\sin h \cos g + \cos h \sin g \cos I \right] \\ & \left. + C_s \sin g \sin I \right) \end{aligned} \quad (\text{III68})$$

La perturbation étant très faible, il n'est pas nécessaire de calculer les effets du couplage avec J_2 . Le calcul des dérivées partielles de \mathcal{H}'_{pr} par rapport à l , g , h , L , G et H pour obtenir le second membre du système différentiel moyen ne pose aucune difficulté.

2. Cas d'une orbite partiellement dans l'ombre

Lorsque l'orbite est partiellement dans l'ombre, l'accélération due à la pression de radiation solaire directe s'annule. Le second membre du système différentiel n'est pas sous la forme d'une fonction presque périodique et il n'est pas possible de définir directement un algorithme de filtrage des courtes périodes. On peut, en première approximation, faire la moyenne du second membre sur une révolution. Mais l'existence de sauts brusques dans le signal induit la présence d'une multitude de fréquences dans son spectre (considérons par exemple le développement en série de Fourier de la fonction de Heaviside). Or, comme nous l'avons montré au paragraphe (IIB2), le résultat d'une moyenne temporelle diffère sensiblement de celui d'un filtrage dans le cas d'un signal présentant des réponses à de nombreuses fréquences. Pour éviter ce type de problème, nous nous attacherons tout d'abord à mettre le second membre du système différentiel sous forme presque périodique en utilisant un développement en série de Fourier par rapport à l'anomalie vraie. De cette manière la variable rapide apparaît explicitement et son élimination du second membre assure le filtrage. Il est bien connu que le développement en série de Fourier de ce type de fonction converge très lentement, cependant, nous verrons qu'après moyennisation, la convergence est nettement plus rapide.

a. Formulation du problème

Pour écrire le second membre du système différentiel nous sommes conduits à distinguer deux configurations :

- lorsque le satellite est éclairé, on peut utiliser l'hamiltonien \mathcal{H}_{pr} défini par la formule (III66) :

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{\partial \mathcal{H}_{pr}}{\partial V} \\ \dot{V} = - \frac{\partial \mathcal{H}_{pr}}{\partial v} \end{cases} \quad (\text{III69})$$

- lorsque le satellite est dans l'ombre le second membre est nul :

$$\begin{cases} \dot{v} = 0 \\ \dot{V} = 0 \end{cases} \quad (\text{III70})$$

On peut regrouper les deux configurations en introduisant une fonction d'ombre $\Upsilon(t)$, prenant la valeur 0 lorsque le satellite est à l'ombre et la valeur 1 lorsqu'il est éclairé.

On obtient alors un système unique :

$$\begin{cases} \dot{v} = \Upsilon(t) \frac{\partial \mathcal{H}_{pr}}{\partial V} \\ \dot{V} = -\Upsilon(t) \frac{\partial \mathcal{H}_{pr}}{\partial v} \end{cases} \quad (\text{III71})$$

b. Développement de la fonction d'ombre en série de Fourier

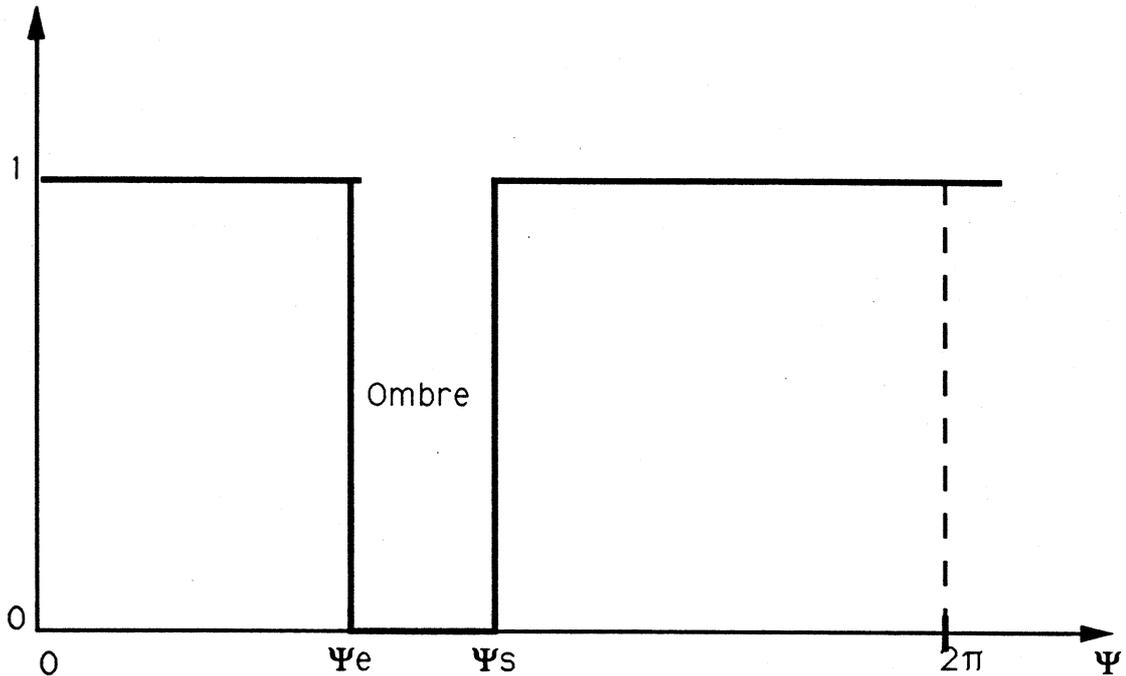


Figure III12 : Fonction d'ombre

La fonction d'ombre est schématisée par la figure (III12). Les dates d'entrée et de sortie d'ombre dépendent des positions relatives des orbites du satellite et du Soleil et des positions de ces corps sur leur orbite. Elles dépendent donc de l'anomalie vraie f du satellite et d'autres variables dont l'évolution est beaucoup plus lente. Si on se place dans le plan (variable) contenant le satellite, la Terre et le Soleil, on constate que la fonction d'ombre est quasiment périodique par rapport à l'angle ψ formé par les directions Terre-satellite et Terre-Soleil (Figure III13). Soient ψ_e et ψ_s les valeurs prises par ψ lorsque le satellite passe en limite d'ombre (entrée et sortie) :

$$\begin{cases} \sin \psi_e = \frac{R_T}{r} \\ \sin \psi_s = -\frac{R_T}{r} \end{cases} \quad (\text{III72})$$

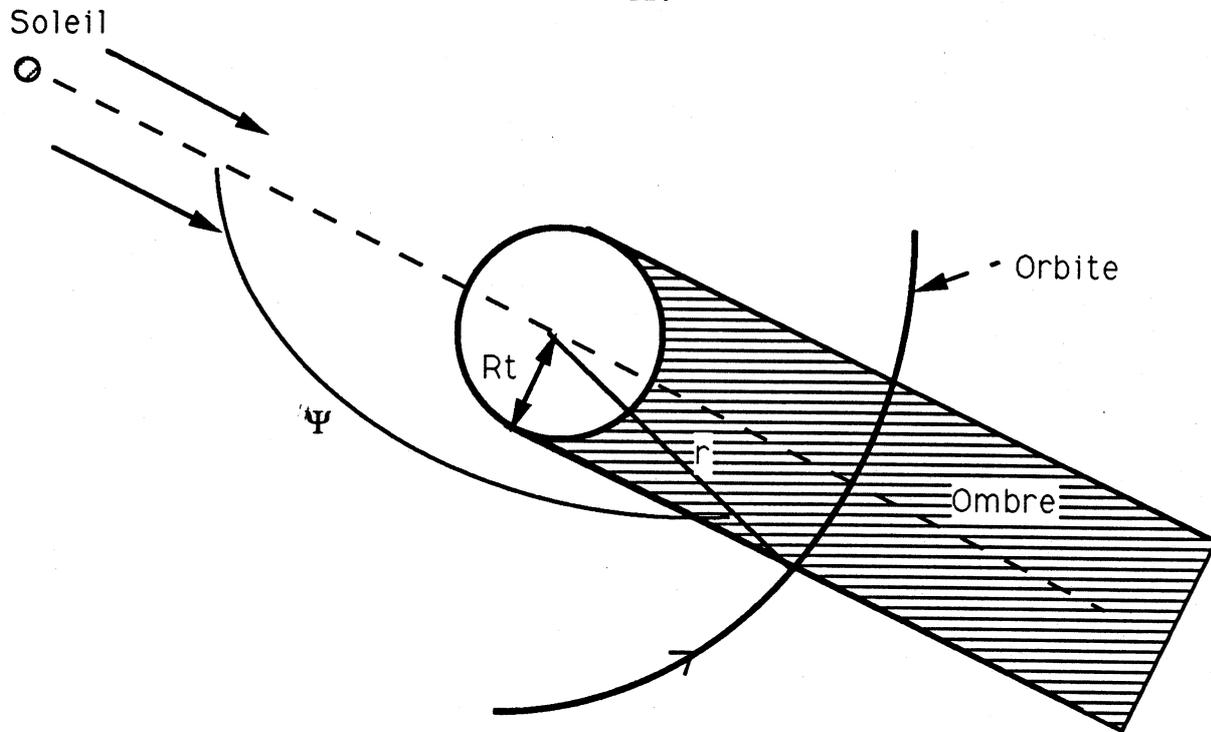


Figure III13 : Angles de limite d'ombre

Si on considère que les valeurs de r lors des passages en limites d'ombre varient peu, la fonction d'ombre est périodique par rapport à ψ et on peut la développer en série de Fourier [Ferraz Mello, 1964] :

$$\Upsilon = \frac{2\psi_e}{\pi} + \sum_{k \geq 1} \frac{2}{k\pi} \sin k\psi_e \cos k\psi \quad (\text{III73})$$

On a utilisé le fait que $\psi_e + \psi_s \simeq 2\pi$. La relation (III35) montre que :

$$\cos \psi = \alpha_1 \cos f + \alpha_2 \sin f \quad (\text{III74})$$

On peut ainsi exprimer Υ en fonction de l'anomalie vraie. Malheureusement les expressions obtenues sont très lourdes et le développement converge très lentement.

Lala et Sehnal [1969] ont utilisé la fonction d'ombre :

$$\Upsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin(\psi - \psi_e)}{\sqrt{1 - \cos^2(\psi - \psi_e)}} \right) \quad (\text{III75})$$

Un développement en série de Taylor les a conduit à :

$$\Upsilon = \frac{1}{2} \sum_{Q \geq 0} \sum_{R \geq 0} C P_{Q,R} \cos^Q \psi \sin^R \psi_e \quad (\text{III76})$$

La convergence est encore assez lente et les expressions restent compliquées.

Comme nous ne désirons pas une solution entièrement analytique, mais que notre but est seulement de faire apparaître explicitement les angles rapides liés au satellite, nous proposons d'utiliser un développement en série de Fourier par rapport à un angle $\tilde{f} = f + \tau$, τ étant un angle à variation lente tenant compte des mouvements à longues périodes de l'orbite du satellite et du Soleil.

$$\Upsilon = \frac{A_0}{2} + \sum_{k \geq 1} A_k \cos k\tilde{f} + B_k \sin k\tilde{f} \quad (\text{III77})$$

Avec

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Upsilon d\tilde{f} = \frac{1}{\pi} (\tilde{f}_e + 2\pi - \tilde{f}_s) \\ A_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Upsilon \cos k\tilde{f} d\tilde{f} = \frac{1}{k\pi} (\sin k\tilde{f}_e - \sin k\tilde{f}_s) \\ B_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Upsilon \sin k\tilde{f} d\tilde{f} = -\frac{1}{k\pi} (\cos k\tilde{f}_e - \cos k\tilde{f}_s) \end{aligned} \quad (\text{III78})$$

\tilde{f}_e et \tilde{f}_s étant les valeurs prises par \tilde{f} lors des entrées et de sorties d'ombre. On en déduit :

$$\Upsilon = 1 - \frac{\tilde{f}_s - \tilde{f}_e}{2\pi} + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k\pi} \left[\sin k(\tilde{f}_e - \tilde{f}) + \sin k(\tilde{f} - \tilde{f}_s) \right] \quad (\text{III79})$$

Or, comme τ varie beaucoup plus lentement que f , lorsque l'on considère deux dates (indices 1 et 2) séparées de moins d'une révolution, on peut écrire :

$$\tilde{f}_2 - \tilde{f}_1 = (f_2 + \tau_2) - (f_1 + \tau_1) = (f_2 - f_1) + (\tau_2 - \tau_1) \simeq f_2 - f_1 \quad (\text{III80})$$

L'approximation est très faible : elle ne consiste pas à éliminer des variations à longues périodes mais seulement leur effet différentiel sur moins d'une révolution. Finalement, en posant :

$$\begin{aligned} Q &= 1 - \frac{f_s - f_e}{2\pi} \\ C_k &= \frac{1}{k\pi} (\sin kf_e - \sin kf_s) \\ S_k &= -\frac{1}{k\pi} (\cos kf_e - \cos kf_s) \end{aligned} \quad (\text{III81})$$

On obtient :

$$\Upsilon = Q + \sum_{k \geq 1} \left[C_k \cos kf + S_k \sin kf \right] \quad (\text{III82})$$

c. Calcul des angles d'entrée et de sortie d'ombre

Les angles d'entrée et de sortie d'ombre représentés par les valeurs de f_e et f_s sont nécessaires au calcul des coefficients Q , C_k et S_k de la formule (III82). Seule une étude numérique détaillée peut permettre de fixer la précision nécessaire sur la détermination de ces angles et de choisir les algorithmes les plus efficaces. N'ayant pas encore réalisé cette étude, nous nous contenterons de proposer des solutions possibles.

Un certain nombre de phénomènes physiques étant difficiles ou impossibles à prendre en compte (effets de l'atmosphère et de la topographie terrestres), il est illusoire de vouloir déterminer les limites de la zone d'ombre avec une erreur inférieure à quelques kilomètres. Ces limites ne sont d'ailleurs pas des limites nettes mais des transitions rapides mais continues entre les zones d'éclairement minimum et maximum.

Le calcul des dates où le satellite franchit ces limites ne peut se faire qu'en se référant au mouvement réel du satellite et non à son mouvement moyen. Il est donc nécessaire de rajouter les variations à courtes périodes au mouvement moyen pour obtenir le mouvement instantané. Compte tenu des incertitudes énoncées ci-dessus, il semble suffisant de rajouter les courtes périodes des premier et deuxième ordres dues à l'aplatissement terrestre. Ce calcul n'est heureusement pas très lourd.

Dans une première étape, nous supposons que le Soleil est ponctuel et à l'infini et que la Terre est une sphère de rayon R_T dépourvue d'atmosphère. Dans ces conditions, la zone d'ombre est un cylindre de rayon R_T dont l'axe passe par les centres de la Terre et du Soleil (Figure III13). Le calcul des limites de la zone d'ombre conduit alors à une équation classique [**Abalakin 1974, Borderies 1976**]. Considérons l'angle géocentrique entre le satellite et le Soleil, ψ . A l'entrée et à la sortie de la zone d'ombre on a :

$$\sin \psi = \pm \frac{R_T}{r} = \pm \frac{R_T a}{a r} \quad (\text{III83})$$

D'autre part, l'expression de $\cos \psi$ est donnée par la relation (III35) en fonction des cosinus directeurs A_s , B_s , et C_s de la direction Terre-Soleil et des coordonnées du satellite. Elle peut s'écrire sous la forme :

$$\cos \psi = \alpha_1 \cos f + \alpha_2 \sin f \quad (\text{III84})$$

α_1 et α_2 étant des angles à variation lente. Lors des passages aux limites d'ombre les angles ψ_l vérifient la relation :

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 \psi_l + \sin^2 \psi_l \\ &= \left(\frac{R_T}{a} \right)^2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + (\alpha_1 \cos f_l + \alpha_2 \sin f_l)^2 \\ &= \left(\frac{R_T}{a \eta^2} \right)^2 (1 + e \cos f_l)^2 + (\alpha_1 \cos f_l + \alpha_2 \sin f_l)^2 \end{aligned} \quad (\text{III85})$$

On peut également écrire cette relation en utilisant l'anomalie excentrique u :

$$(1 - e \cos u_l)^2 = \left(\frac{R_T}{a}\right)^2 + \left[\alpha_1(\cos u_l - e) + \alpha_2 \eta \sin u_l\right]^2 \quad (\text{III86})$$

Cette équation peut être résolue soit par une méthode itérative, soit en la transformant en équation du quatrième degré [Abalakiné 1974, Borderies 1976]. Pour obtenir un modèle plus réaliste, il faut aussi tenir compte de la conicité de la zone d'ombre (le Soleil n'est pas à l'infini), de l'aplatissement terrestre qui induit une variation du rayon R_T en fonction de la latitude, des zones de pénombre dues à la non ponctualité du Soleil [Balmino 1988] et éventuellement d'une atmosphère moyenne.

A ce stade, deux constatations peuvent être faites :

- le processus de calcul des angles de limites d'ombre est assez compliqué puisqu'il faut d'abord revenir au mouvement instantané, puis calculer les angles f_l ou u_l avec un algorithme qui peut s'alourdir dans le cas de modèles réalistes,
- ces angles dépendant des positions relatives du Soleil et de l'orbite du satellite, ils évoluent peu à l'échelle d'une révolution.

Compte tenu de ces deux remarques et du fait que la plupart des perturbations à longues périodes permettent l'utilisation d'un pas d'intégration supérieur à la période de révolution, on peut se proposer de ne pas calculer les angles de limites d'ombre par cette méthode à chaque révolution. En effet, la dérivation par rapport au temps des relations (III85) ou (III86) peut permettre une extrapolation linéaire sur quelques révolutions. L'efficacité de cette technique reste à vérifier.

d. Moyennisation du système différentiel

La forme du second membre du système différentiel à moyenner est donnée par la formule (III71). Pour l'exprimer il faut calculer les dérivées partielles de l'hamiltonien \mathcal{H}_{pr} explicité dans la formule (III66). On utilise :

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} \cos f &= \cos u - e \\ \frac{r}{a} \sin f &= \eta \sin u \end{aligned} \quad (\text{III87})$$

Pour obtenir :

$$\mathcal{H}_{pr} = K_0 + K_1 \cos u + K_2 \sin u \quad (\text{III88})$$

Avec :

$$\begin{aligned}
K_1 &= \tilde{\sigma} L^2 \left\{ A_s \left[\cos h \cos g - \sin h \sin g \cos I \right] \right. \\
&\quad \left. + B_s \left[\sin h \cos g + \cos h \sin g \cos I \right] \right. \\
&\quad \left. + C_s \sin g \sin I \right\} \\
K_2 &= \tilde{\sigma} L G \left\{ -A_s \left[\cos h \sin g + \sin h \cos g \cos I \right] \right. \\
&\quad \left. - B_s \left[\sin h \sin g - \cos h \cos g \cos I \right] \right. \\
&\quad \left. + C_s \cos g \sin I \right\} \\
K_0 &= -e K_1
\end{aligned} \tag{III89}$$

On a posé $\tilde{\sigma} = \sigma \left(\frac{a_s}{r_s} \right)^2 \frac{1}{\mu}$. K_0 , K_1 et K_2 ne dépendent pas de l'anomalie moyenne.

En utilisant les dérivées partielles de \mathcal{H}_{pr} exprimé sous la forme (III88) et l'expression (III82) de la fonction d'ombre, on obtient l'expression du système différentiel à moyenner :

$$\begin{aligned}
i = & \quad Q * \left[\frac{\partial K_0}{\partial L} + \frac{\partial K_1}{\partial L} \cos u + \frac{\partial K_2}{\partial L} \sin u \right. \\
& \quad \left. - K_1 \frac{\eta}{eL} \sin u \sin f + K_2 \frac{\eta}{eL} \cos u \sin f \right] \\
& + \sum_{k \geq 1} C_k \left[\frac{\partial K_0}{\partial L} \cos kf + \frac{\partial K_1}{\partial L} \cos u \cos kf + \frac{\partial K_2}{\partial L} \sin u \cos kf \right. \\
& \quad \left. - K_1 \frac{\eta}{eL} \sin u \sin f \cos kf + K_2 \frac{\eta}{eL} \cos u \sin f \cos kf \right] \\
& + \sum_{k \geq 1} S_k \left[\frac{\partial K_0}{\partial L} \sin kf + \frac{\partial K_1}{\partial L} \cos u \sin kf + \frac{\partial K_2}{\partial L} \sin u \sin kf \right. \\
& \quad \left. - K_1 \frac{\eta}{eL} \sin u \sin f \sin kf + K_2 \frac{\eta}{eL} \cos u \sin f \sin kf \right]
\end{aligned} \tag{III90a}$$

$$\begin{aligned}
\dot{g} = & \quad Q * \left[\frac{\partial K_0}{\partial G} + \frac{\partial K_1}{\partial G} \cos u + \frac{\partial K_2}{\partial G} \sin u \right. \\
& \quad \left. + K_1 \frac{1}{eL} \sin u \sin f - K_2 \frac{1}{eL} \cos u \sin f \right] \\
& + \sum_{k \geq 1} C_k \left[\frac{\partial K_0}{\partial G} \cos kf + \frac{\partial K_1}{\partial G} \cos u \cos kf + \frac{\partial K_2}{\partial G} \sin u \cos kf \right. \\
& \quad \left. + K_1 \frac{1}{eL} \sin u \sin f \cos kf - K_2 \frac{1}{eL} \cos u \sin f \cos kf \right] \\
& + \sum_{k \geq 1} S_k \left[\frac{\partial K_0}{\partial G} \sin kf + \frac{\partial K_1}{\partial G} \cos u \sin kf + \frac{\partial K_2}{\partial G} \sin u \sin kf \right. \\
& \quad \left. + K_1 \frac{1}{eL} \sin u \sin f \sin kf - K_2 \frac{1}{eL} \cos u \sin f \sin kf \right]
\end{aligned} \tag{III90b}$$

$$\begin{aligned}
\dot{h} = & \quad Q * \left[\frac{\partial K_0}{\partial H} + \frac{\partial K_1}{\partial H} \cos u + \frac{\partial K_2}{\partial H} \sin u \right] \\
& + \sum_{k \geq 1} C_k \left[\frac{\partial K_0}{\partial H} \cos kf + \frac{\partial K_1}{\partial H} \cos u \cos kf + \frac{\partial K_2}{\partial H} \sin u \cos kf \right] \\
& + \sum_{k \geq 1} S_k \left[\frac{\partial K_0}{\partial H} \sin kf + \frac{\partial K_1}{\partial H} \cos u \sin kf + \frac{\partial K_2}{\partial H} \sin u \sin kf \right]
\end{aligned} \tag{III90c}$$

$$\begin{aligned}
\dot{L} = & \quad -Q * \left[-K_1 \frac{a}{r} \sin u + K_2 \frac{a}{r} \cos u \right] \\
& - \sum_{k \geq 1} C_k \left[-K_1 \frac{a}{r} \sin u \cos kf + K_2 \frac{a}{r} \cos u \cos kf \right] \\
& - \sum_{k \geq 1} S_k \left[-K_1 \frac{a}{r} \sin u \sin kf + K_2 \frac{a}{r} \cos u \sin kf \right]
\end{aligned} \tag{III90d}$$

$$\begin{aligned}
\dot{G} = & \quad -Q * \left[\frac{\partial K_0}{\partial g} + \frac{\partial K_1}{\partial g} \cos u + \frac{\partial K_2}{\partial g} \sin u \right] \\
& - \sum_{k \geq 1} C_k \left[\frac{\partial K_0}{\partial g} \cos kf + \frac{\partial K_1}{\partial g} \cos u \cos kf + \frac{\partial K_2}{\partial g} \sin u \cos kf \right] \\
& - \sum_{k \geq 1} S_k \left[\frac{\partial K_0}{\partial g} \sin kf + \frac{\partial K_1}{\partial g} \cos u \sin kf + \frac{\partial K_2}{\partial g} \sin u \sin kf \right]
\end{aligned} \tag{III90e}$$

$$\begin{aligned}
\dot{H} = & \quad -Q * \left[\frac{\partial K_0}{\partial h} + \frac{\partial K_1}{\partial h} \cos u + \frac{\partial K_2}{\partial h} \sin u \right] \\
& - \sum_{k \geq 1} C_k \left[\frac{\partial K_0}{\partial h} \cos kf + \frac{\partial K_1}{\partial h} \cos u \cos kf + \frac{\partial K_2}{\partial h} \sin u \cos kf \right] \\
& - \sum_{k \geq 1} S_k \left[\frac{\partial K_0}{\partial h} \sin kf + \frac{\partial K_1}{\partial h} \cos u \sin kf + \frac{\partial K_2}{\partial h} \sin u \sin kf \right]
\end{aligned} \tag{III90f}$$

La moyennisation du second membre est réalisée en utilisant le formulaire présenté en annexe 3. Il en résulte :

$$\begin{aligned}
\dot{l} = & Q * \left[\frac{\partial K_0}{\partial L} - \frac{e}{2} \frac{\partial K_1}{\partial L} - \frac{\eta^2}{2eL} K_1 \right] \\
& + C_1 * \left[-e \frac{\partial K_0}{\partial L} + \frac{1}{2} \frac{\partial K_1}{\partial L} + \frac{\eta^2(1+2\eta)}{2L(1+\eta)^2} K_1 \right] \\
& + S_1 * \left[\frac{\eta}{2} \frac{\partial K_2}{\partial L} + \frac{\eta^3}{2L(1+\eta)^2} K_2 \right] \\
& + \sum_{k \geq 2} C_k \frac{(-\beta)^{k-1}}{1+\eta} * \left[-e(1+k\eta) \frac{\partial K_0}{\partial L} + \frac{1}{2} \{k\eta(1+k\eta) + e^2\} \frac{\partial K_1}{\partial L} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\eta^2}{2e^2 L} \{k\eta(k\eta - 1) - e^2\} K_1 \right] \tag{III91a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k \geq 2} S_k \frac{(-\beta)^{k-1}}{1+\eta} * \left[\frac{1}{2} k\eta(1+k\eta) \frac{\partial K_2}{\partial L} - \frac{1}{2e^2 L} k\eta^3(k\eta - 1) K_2 \right] \\
\dot{g} = & Q * \left[\frac{\partial K_0}{\partial G} - \frac{e}{2} \frac{\partial K_1}{\partial G} + \frac{\eta}{2eL} K_1 \right] \\
& + C_1 * \left[-e \frac{\partial K_0}{\partial G} + \frac{1}{2} \frac{\partial K_1}{\partial G} - \frac{\eta(1+2\eta)}{2L(1+\eta)^2} K_1 \right] \\
& + S_1 * \left[\frac{\eta}{2} \frac{\partial K_2}{\partial G} - \frac{\eta^2}{2L(1+\eta)^2} K_2 \right] \\
& + \sum_{k \geq 2} C_k \frac{(-\beta)^{k-1}}{1+\eta} * \left[-e(1+k\eta) \frac{\partial K_0}{\partial G} + \frac{1}{2} \{k\eta(1+k\eta) + e^2\} \frac{\partial K_1}{\partial G} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\eta}{2e^2 L} \{k\eta(k\eta - 1) - e^2\} K_1 \right] \tag{III91b}
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{k \geq 2} S_k \frac{(-\beta)^{k-1}}{1+\eta} * \left[\frac{1}{2} k\eta(1+k\eta) \frac{\partial K_2}{\partial G} + \frac{1}{2e^2 L} k\eta^2(k\eta - 1) K_2 \right]$$

$$\begin{aligned}
\dot{h} = & Q * \left[\frac{\partial K_0}{\partial H} - \frac{e}{2} \frac{\partial K_1}{\partial H} \right] \\
& + \sum_{k \geq 1} C_k \frac{(-\beta)^{k-1}}{1+\eta} * \left[-e(1+k\eta) \frac{\partial K_0}{\partial H} + \frac{1}{2} \{k\eta(1+k\eta) + e^2\} \frac{\partial K_1}{\partial H} \right] \\
& + \sum_{k \geq 1} S_k \frac{(-\beta)^{k-1}}{1+\eta} * \left[\frac{1}{2} k\eta(1+k\eta) \frac{\partial K_2}{\partial H} \right] \tag{III91c}
\end{aligned}$$

$$\dot{L} = + \sum_{k \geq 1} (-\beta)^{k-1} \frac{k\eta}{1+\eta} * \left[-C_k K_2 + S_k K_1 \right] \tag{III91d}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{G}} = & -Q * \left[\frac{\partial K_0}{\partial g} - \frac{e}{2} \frac{\partial K_1}{\partial g} \right] \\
& - \sum_{k \geq 1} C_k \frac{(-\beta)^{k-1}}{1+\eta} * \left[-e(1+k\eta) \frac{\partial K_0}{\partial g} + \frac{1}{2} \{k\eta(1+k\eta) + e^2\} \frac{\partial K_1}{\partial g} \right] \\
& - \sum_{k \geq 1} S_k \frac{(-\beta)^{k-1}}{1+\eta} * \left[\frac{1}{2} k\eta(1+k\eta) \frac{\partial K_2}{\partial g} \right] \tag{III91e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{H}} = & -Q * \left[\frac{\partial K_0}{\partial h} - \frac{e}{2} \frac{\partial K_1}{\partial h} \right] \\
& - \sum_{k \geq 1} C_k \frac{(-\beta)^{k-1}}{1+\eta} * \left[-e(1+k\eta) \frac{\partial K_0}{\partial h} + \frac{1}{2} \{k\eta(1+k\eta) + e^2\} \frac{\partial K_1}{\partial h} \right] \\
& - \sum_{k \geq 1} S_k \frac{(-\beta)^{k-1}}{1+\eta} * \left[\frac{1}{2} k\eta(1+k\eta) \frac{\partial K_2}{\partial h} \right] \tag{III91f}
\end{aligned}$$

Rappelons que nous avons posé $\eta = \frac{G}{L}$ et $\beta = \frac{e}{1+\eta} \simeq \frac{e}{2}$.

Remarques :

- Les coefficients C_k et S_k sont toujours en facteur de e à une puissance supérieure ou égale à $k-3$. Si l'excentricité n'est pas trop importante, la sommation peut être tronquée assez bas et le nombre de termes à prendre en compte est très raisonnable : moins d'une centaine contre des milliers pour le potentiel terrestre ou un troisième corps. C'est un avantage propre à cette formulation : on ne rencontre pas ce phénomène d'accélération de la convergence par la moyennisation lorsqu'on utilise les développements plus rigoureux de Ferraz Mello ou de Lala et Sehnal.
- La validité locale du développement (III82) est prise en compte par la remise à jour des coefficients du développement, c'est-à-dire des angles de limites d'ombre.
- Nous avons écrit le second membre du système moyen en fonction des anciennes variables, mais à l'ordre où sont réalisés les calculs, il est équivalent d'utiliser directement les variables centrées (\bar{v}_i, \bar{V}_i) . En effet, nous avons négligé ici les couplages avec J_2 .

III.H. Perturbation due au frottement

Le freinage atmosphérique est certainement la perturbation dont la modélisation est la plus difficile et la plus complexe. Plusieurs paramètres nécessaires à l'évaluation de cette perturbation sont connus avec une incertitude non négligeable : le coefficient aérodynamique C_X , la vitesse de l'atmosphère (importance des vents en altitude ?) et la densité atmosphérique. Les modèles de densité les plus précis sont des fonctions dépendant de la position et de la date mais aussi de certains paramètres physiques (flux solaire par exemple) que l'on ne peut connaître que par la mesure.

Il existe des théories analytiques très poussées permettant le calcul des effets du freinage atmosphérique (par exemple [Delhaise 1991]). Les modèles de densité utilisés sont alors des fonctions explicites de l'altitude (lois de puissance). Ces théories sont utiles dans le cadre d'analyses de missions par exemple. Cependant, dans le cadre de notre étude, il est indispensable d'utiliser un modèle le plus réaliste possible faisant intervenir les paramètres physiques évoqués ci-dessus. Dans ce cas, l'utilisation de paramètres observés ne permet pas de formuler explicitement la perturbation en fonction du temps et des coordonnées du satellite. Nous devons donc renoncer à l'emploi de la moyennisation analytique que nous avons utilisée pour les autres perturbations.

Nous ne décrirons pas ici les détails du calcul de la perturbation due au frottement, mais il est nécessaire d'examiner quelles courtes périodes peuvent être rencontrées.

1. Formulation de la perturbation

L'accélération induite par le freinage atmosphérique a pour expression :

$$\vec{\gamma} = -\frac{1}{2}C_X \frac{S}{m} \rho V_r^2 \frac{\vec{V}_r}{V_r} \quad (\text{III92})$$

C_X : coefficient aérodynamique,

$\frac{S}{m}$: rapport section efficace sur masse du satellite en m^2/kg ,

ρ : densité atmosphérique exprimée en kg/m^3 ,

\vec{V}_r : vitesse relative du satellite par rapport à l'atmosphère en m/s .

En outre, on introduit généralement un facteur multiplicatif k_f , ajusté lors de la correction différentielle d'orbite classique et destiné à absorber l'incertitude sur les différents paramètres dont dépend $\vec{\gamma}$.

Coefficient aérodynamique C_X :

C_X est fonction de l'altitude du satellite. Celle-ci dépend des positions relatives du satellite et de la surface terrestre. Les courtes périodes induites sont donc la période orbitale du satellite et la période de rotation sidérale de la Terre.

Vitesse du satellite par rapport à l'atmosphère V_r :

Le calcul de V_r fait intervenir la vitesse du satellite et la vitesse de l'atmosphère qui est supposée tourner à la même vitesse angulaire que la Terre. Là encore, les courtes périodes qui interviennent sont la période orbitale et le jour sidéral.

Densité atmosphérique ρ :

La densité atmosphérique est modélisée comme une fonction des positions par rapport à la Terre et au Soleil, du flux Solaire et de l'activité géomagnétique [Barlier et al 1977].

- Le flux solaire ne comprend pas de variations conséquentes de période inférieure à un jour.
- L'activité géomagnétique est mesurée toute les trois heures et peut subir de fortes fluctuations à l'échelle de quelques heures en cas d'orage magnétique. Ces événements ne présentent pas de périodicité évidente. En dehors des orages, l'activité magnétique ne présente pas de variations à courtes périodes conséquentes.
- La position du satellite fait intervenir des courtes périodes reliées à la période orbitale et le temps sidéral.

Nous pouvons conclure que les courtes périodes induites par le freinage atmosphérique sont des sous-multiples de la période orbitale et du jour sidéral.

2. Moyennisation

La perturbation due au frottement atmosphérique ne dérive pas d'un potentiel et le calcul des dérivées temporelles des coordonnées du satellite se fait à partir des équations de Gauss. Ce sont les seconds membres de ces équations qui seront moyennés par quadrature numérique.

a. Calcul du second membre des équations de Gauss

Comme nos variables de base sont les variables de Delaunay, nous devons modifier trois des équations de Gauss afin de calculer $(\dot{L}, \dot{G}, \dot{H})$ plutôt que $(\dot{a}, \dot{e}, \dot{I})$. Les équations pour les angles sont inchangées. Soient R, S, W les composantes de la force suivant le rayon vecteur du satellite, la perpendiculaire au rayon vecteur située dans le plan de l'orbite et la perpendiculaire au plan de l'orbite. On obtient simplement :

$$\begin{cases} \dot{l} = n + \frac{1-e^2}{nae} \left[\left(\frac{-2e}{1+e\cos f} + \cos f \right) Q - \left(1 + \frac{1}{1+e\cos f} \right) \sin f S \right] \\ \dot{g} = \frac{\eta}{nae} \left[-\cos f Q + \left(1 + \frac{1}{1+e\cos f} \right) \sin f S \right] - \frac{\cos I}{na\eta \sin I} \frac{r}{a} \sin(f+g)W \\ \dot{h} = \frac{1}{na\eta \sin I} \frac{r}{a} \sin(f+g)W \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{L} = \frac{a}{\eta} [e \sin f R + (1 + e \cos f) S] \\ \dot{G} = r S \\ \dot{H} = r [\cos I S - \sin I \cos (f + g) W] \end{cases} \quad (\text{III93})$$

avec $n = \frac{\mu^2}{L^3}$.

b. Calcul du second membre moyen

Etant en mesure de calculer à tout instant la dérivée $\dot{x}(t)$ du vecteur d'état correspondant à l'influence du freinage atmosphérique, nous devons éliminer les variations à courtes périodes. Pour filtrer les courtes périodes liées à la période orbitale du satellite, nous avons montré en (IID2) qu'il faut moyenner par rapport à l'anomalie moyenne et non par rapport à l'anomalie vraie. L'autre variable rapide à éliminer est le temps sidéral θ . Pour simplifier l'écriture, écrivons \dot{x} sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(k\dot{t}) + \alpha_2 \cos(p\dot{\theta}) + \alpha_3 \cos(\nu t) \quad (\text{III94})$$

α_i sont des coefficients réels, k et p des entiers strictement positifs et ν est une fréquence inférieure à un cycle par jour. Une première quadrature effectuée sur la période orbitale nous permet d'obtenir d'après la formule (II4) :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \frac{\dot{i}}{2\pi} \int_{t-\frac{\pi}{\dot{i}}}^{t+\frac{\pi}{\dot{i}}} \dot{x}(\tau) d\tau \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \frac{\sin\left(\frac{k\dot{i}\pi}{\dot{i}}\right)}{\frac{k\dot{i}\pi}{\dot{i}}} \cos(k\dot{t}) + \alpha_2 \frac{\sin\left(\frac{k\dot{\theta}\pi}{\dot{i}}\right)}{\frac{k\dot{\theta}\pi}{\dot{i}}} \cos(k\dot{\theta}) + \alpha_3 \frac{\sin\left(\frac{\nu\pi}{\dot{i}}\right)}{\frac{\nu\pi}{\dot{i}}} \cos(\nu t) \\ &= \alpha_0 + \alpha_2 \frac{\sin\left(\frac{k\dot{\theta}\pi}{\dot{i}}\right)}{\frac{k\dot{\theta}\pi}{\dot{i}}} \cos(k\dot{\theta}) + \alpha_3 \frac{\sin\left(\frac{\nu\pi}{\dot{i}}\right)}{\frac{\nu\pi}{\dot{i}}} \cos(\nu t) \end{aligned} \quad (\text{III95})$$

Une seconde quadrature sur un jour sidéral permet d'éliminer le temps sidéral :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \frac{\dot{\theta}}{2\pi} \int_{t-\frac{\pi}{\dot{\theta}}}^{t+\frac{\pi}{\dot{\theta}}} \dot{x}(\tau) d\tau \\ &= \alpha_0 + \alpha_3 \frac{\sin\left(\frac{\nu\pi}{\dot{i}}\right)}{\frac{\nu\pi}{\dot{i}}} \frac{\sin\left(\frac{\nu\pi}{\dot{\theta}}\right)}{\frac{\nu\pi}{\dot{\theta}}} \cos(\nu t) \end{aligned} \quad (\text{III96})$$

Ces quadratures sont réalisées numériquement, à l'aide d'une méthode de Gauss par exemple.

Comme nous l'avons signalé au paragraphe (IID2), le signal moyen résiduel est altéré : les très longues périodes liées à g et h qui ont le plus grand intérêt

géodynamique sont très peu modifiées tandis que le signal à moyenne période sera un peu plus bruité.

c. Difficultés

Nous pensons que la méthode exposée ci-dessus peut théoriquement donner des résultats satisfaisants. Cependant, son application complète semble délicate. En effet, chaque quadrature exigeant le calcul du second membre en N points ($N \simeq 16$), les deux quadratures successives nécessitent N^2 évaluations. Or, le freinage est une perturbation complexe et cet algorithme pourrait être assez coûteux en temps de calcul. Pour alléger le calcul, deux solutions moins précises sont envisageables :

- choisir N assez petit en contrepartie d'une précision moindre sur le résultat des quadratures,
- renoncer à la seconde quadrature en acceptant un signal résiduel à courtes périodes reliées au temps sidéral.

Seuls des tests pourront nous indiquer la meilleure voie. Des tests pourront également nous renseigner sur l'intérêt d'utiliser le mouvement instantané du satellite (obtenu en rajoutant les courtes périodes du premier ordre au mouvement moyen) pour le calcul du second membre des équations de Gauss à moyenner.

III.I. Les repères

Plusieurs repères terrestres et célestes interviennent dans l'étude du mouvement du satellite artificiel. Les perturbations d'origine terrestre ne sont pas développées dans un repère inertiel. Il est donc important d'étudier les relations entre les différents repères, de définir précisément le repère dans lequel sont écrites les équations du mouvement et de prendre en compte les forces d'inertie éventuelles.

1. Les repères dans la dynamique du satellite

L'étude du mouvement du satellite artificiel de la Terre fait intervenir trois repères fondamentaux :

- Un repère inertiel dans lequel on peut appliquer les lois fondamentales de la dynamique. Ce repère est idéalement un repère centré sur le barycentre du système solaire et dont les axes sont fixes par rapport aux plus lointaines galaxies. Il est approximé par le repère céleste moyen d'une époque donnée (par exemple J2000).
- Un repère lié à la Terre dans lequel sont données les coordonnées des stations d'observation. Le repère le plus courant est le repère ITRF (International Terrestrial Reference Frame) de l'IERS-IGN.
- Un repère dans lequel est construit le modèle de potentiel utilisé. Il correspond généralement au repère moyen d'inertie d'une époque donnée.

Il faut encore y ajouter deux repères intermédiaires nécessaires au passage du repère ITRF au repère inertiel :

- Le repère terrestre instantané de rotation,
- le repère céleste vrai.

Tous les axes Gz (axes des pôles) sont très proches les uns des autres.

- On passe du repère ITRF au repère instantané de rotation par deux petites rotations autour des axes Gx et Gy .
- On passe du repère terrestre instantané de rotation au repère céleste vrai de la date par une rotation d'angle $(-\theta)$ (θ est le temps sidéral vrai) autour de l'axe instantané de rotation.
- On passe du repère céleste vrai de la date au repère moyen de l'époque de référence à l'aide des matrices de précession et de nutation.

2. Choix du repère d'intégration

Le développement des perturbations dues au potentiel terrestre fait intervenir le passage d'un repère céleste dans lequel on écrit les équations du mouvement à un repère terrestre dans lequel est développé le potentiel. Il serait très complexe d'introduire le

mouvement du pôle et la précession-nutation dans ce développement. C'est pourquoi on fait intervenir seulement le passage du repère céleste vrai de la date au repère terrestre instantané de rotation par une rotation du temps sidéral (formule I2). Les équations du mouvement correspondant au potentiel terrestre sont donc implicitement écrites dans le repère céleste vrai de la date. Il en sera de même pour les autres perturbations pourvu que l'on utilise les coordonnées de la Lune, du Soleil et des planètes dans ce repère. Le repère céleste vrai est donc le repère naturel pour intégrer les équations du mouvement centré. C'est d'ailleurs le repère le plus souvent utilisé pour le calcul des éphémérides de satellites. Comme le repère céleste vrai n'est pas exactement inertiel, il faudra rajouter dans les perturbations, des accélérations complémentaires.

D'autre part, les coefficients du potentiel utilisés dans l'écriture des perturbations doivent correspondre à un développement dans le repère terrestre instantané de rotation. Les modèles de potentiel ne sont évidemment pas construits dans ce repère (dont l'évolution exacte n'est pas prévisible) et il faudra donc les transformer.

3. Développement du potentiel dans le repère instantané de rotation

En toute rigueur, il faut transformer tout le développement en harmoniques sphériques du potentiel, par rotation du repère terrestre moyen d'inertie au repère terrestre instantané de rotation. Cette transformation est très lourde à développer mais comme il s'agit de rotations d'angles très faibles on utilise habituellement le fait que seuls les coefficients C_{21} et S_{21} sont notablement affectés. Soient x et $-y$ les angles de rotation exprimés en radians ; dans le cas d'une Terre rigide, on a le résultat classique :

$$\begin{cases} \Delta C_{21} = -xC_{20} \\ \Delta S_{21} = yC_{20} \end{cases} \quad (\text{III97})$$

Or, comme C_{21} et S_{21} correspondent à des harmoniques tesséraux en général non résonnants, ils n'introduisent que des effets à courtes périodes et leur modification n'a aucune incidence sur le mouvement à longues périodes que nous étudions. Cela signifierait que le mouvement centré est indépendant des mouvements relatifs des différents pôles. Il peut paraître contradictoire d'étudier le potentiel d'un corps tout en étant insensible au repère dans lequel il est développé. Mais il ne s'agit que d'une approximation valable seulement sous l'hypothèse que les repères restent très proches. Nous devons vérifier précisément que l'approximation qui consiste à négliger la modification par le mouvement du pôle des coefficients autres que C_{21} et S_{21} , n'est pas gênante dans le cas d'une étude fine sur de longues périodes de temps.

4. Principe de la moyennisation des accélérations complémentaires

Pour tenir compte du fait que les équations du mouvement ne sont pas écrites dans un repère inertiel, il faut faire intervenir des accélérations complémentaires d'entraînement et de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_c = -2\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{r}} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) - \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{r} \quad (\text{III98})$$

\vec{r} représente le vecteur position du satellite dans le repère d'intégration et $\dot{\vec{r}}$ son vecteur vitesse. $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation du repère céleste vrai au repère inertiel. $\vec{\Omega}$ comprend la rotation due à la nutation et la rotation due à la précession. On peut trouver le calcul détaillé de $\vec{\Omega}$ et $\dot{\vec{\Omega}}$ dans [Balmino 1974] ou [Zarrouati 1987]. Contrairement à \vec{r} et $\dot{\vec{r}}$, $\vec{\Omega}$ et $\dot{\vec{\Omega}}$ n'ont pas de variations à courtes périodes. On note :

$$\vec{\Omega} \begin{vmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{vmatrix} \quad \dot{\vec{\Omega}} \begin{vmatrix} \dot{\Omega}_x \\ \dot{\Omega}_y \\ \dot{\Omega}_z \end{vmatrix} \quad \vec{\gamma}_c \begin{vmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{vmatrix}$$

En utilisant les expressions de \vec{r} et $\dot{\vec{r}}$ en fonction des éléments orbitaux, on obtient :

$$\begin{cases} \gamma_x = A_x(\cos u - e) + B_x \sin u + C_x \frac{a}{r} \cos u + D_x \frac{a}{r} \sin u \\ \gamma_y = A_y(\cos u - e) + B_y \sin u + C_y \frac{a}{r} \cos u + D_y \frac{a}{r} \sin u \\ \gamma_z = A_z(\cos u - e) + B_z \sin u + C_z \frac{a}{r} \cos u + D_z \frac{a}{r} \sin u \end{cases} \quad (\text{III99})$$

Avec :

$$\begin{cases} A_x = a \left[-\Omega_x(\Omega_y P_y + \Omega_z P_z) + (\Omega_y^2 + \Omega_z^2) P_x - \dot{\Omega}_y P_z + \dot{\Omega}_z P_y \right] \\ A_y = a \left[-\Omega_y(\Omega_z P_z + \Omega_x P_x) + (\Omega_z^2 + \Omega_x^2) P_y - \dot{\Omega}_z P_x + \dot{\Omega}_x P_z \right] \\ A_z = a \left[-\Omega_z(\Omega_x P_x + \Omega_y P_y) + (\Omega_x^2 + \Omega_y^2) P_z - \dot{\Omega}_x P_y + \dot{\Omega}_y P_x \right] \\ B_x = a\eta \left[-\Omega_x(\Omega_y Q_y + \Omega_z Q_z) + (\Omega_y^2 + \Omega_z^2) Q_x - \dot{\Omega}_y Q_z + \dot{\Omega}_z Q_y \right] \\ B_y = a\eta \left[-\Omega_y(\Omega_z Q_z + \Omega_x Q_x) + (\Omega_z^2 + \Omega_x^2) Q_y - \dot{\Omega}_z Q_x + \dot{\Omega}_x Q_z \right] \\ B_z = a\eta \left[-\Omega_z(\Omega_x Q_x + \Omega_y Q_y) + (\Omega_x^2 + \Omega_y^2) Q_z - \dot{\Omega}_x Q_y + \dot{\Omega}_y Q_x \right] \\ C_x = -2na\eta \left[\Omega_y Q_z - \Omega_z Q_y \right] \\ C_y = -2na\eta \left[\Omega_z Q_x - \Omega_x Q_z \right] \\ C_z = -2na\eta \left[\Omega_x Q_y - \Omega_y Q_x \right] \\ D_x = -2na \left[-\Omega_y P_z + \Omega_z P_y \right] \\ D_y = -2na \left[-\Omega_z P_x + \Omega_x P_z \right] \\ D_z = -2na \left[-\Omega_x P_y + \Omega_y P_x \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_x = \cos g \cos h - \sin g \sin h \cos I \\ P_y = \cos g \sin h + \sin g \cos h \cos I \\ P_z = \sin g \sin I \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_x = -\sin g \cos h - \cos g \sin h \cos I \\ Q_y = -\sin g \sin h + \cos g \cos h \cos I \\ Q_z = \cos g \sin I \end{cases}$$

Il faut ensuite projeter ces expressions dans le repère local du satellite défini en (III.H.2.a) pour obtenir les composantes R , S , W de $\vec{\gamma}_c$ nécessaires au calcul des seconds membres des équations de Gauss. On obtient ainsi six seconds membres correspondant à $(\dot{l}, \dot{g}, \dot{h}, \dot{L}, \dot{G}, \dot{H})$, exprimés en fonction des coordonnées du satellite. Nous pensons moyenner analytiquement ces seconds membres pour obtenir la contribution des accélérations complémentaires au mouvement moyen.

Conclusion de la troisième partie

Dans cette troisième partie, le système différentiel moyen et le changement de variables post-intégration ont été obtenus pour les perturbations d'origine gravitationnelle. Les calculs ont été effectués jusqu'aux ordres 2, 3 ou 4 (termes séculaires d'ordre 3, 4 ou 5) selon les perturbations. Ces ordres de troncature différents sont dus à des vitesses de "convergence" très variables selon les perturbations. Il est en effet frappant de constater comment certaines perturbations ayant des effets très importants, peuvent être presque parfaitement prises en compte avec le calcul d'un seul ordre. C'est par exemple le cas des perturbations luni-solaires qui bien qu'ayant des effets séculaires et à longues périodes de plusieurs kilomètres d'amplitude, voient leur couplage avec J_2 n'apporter qu'une contribution de quelques décimètres. On constate le même phénomène dans le cas des marées.

Le développement des perturbations en puissance de l'excentricité à partir des ordres 3 ou 4 a simplifié les calculs et permis de réduire la taille des séries pour les ordres supérieurs tout en conservant une très bonne précision pour des excentricités relativement fortes (1/10 et plus).

Les perturbations d'origine non gravitationnelle (pression de radiation solaire directe, freinage atmosphérique, forces d'inertie) ont été abordées d'une manière théorique. Il reste à affectuer des tests pour s'assurer que les algorithmes proposés sont satisfaisants. Il semble néanmoins peu probable que ces dernières perturbations constituent une entrave à l'efficacité de l'ensemble de la méthode.

CONCLUSION

Un des objectifs de la géodésie spatiale est l'obtention d'informations concernant l'environnement terrestre grâce à l'étude du mouvement des satellites artificiels. L'un des points clés dans la réalisation de cet objectif est l'intégration du système des équations du mouvement. L'intégration par des méthodes analytiques a rendu de grands services mais elle fournit une précision insuffisante pour certaines applications. Aussi utilise-t-on actuellement presque exclusivement l'intégration numérique plus souple et beaucoup plus précise à court et moyen terme. Cependant, compte tenu des périodes de temps de plus en plus longues durant lesquelles on dispose d'observations d'un même satellite, de la précision croissante des mesures et de la complexité des modèles de forces, les limites des méthodes purement numériques apparaissent.

Notre travail était motivé par le fait que pour certaines applications géodynamiques, les parties séculaires et à longues périodes du mouvement contiennent l'essentiel de l'information intéressante. Par définition, l'utilisation de cette information nécessite l'étude du mouvement sur de longues périodes de temps. Pour ces applications, il est inutile et bien souvent pénalisant de restituer l'information contenue dans les variations à courtes périodes du mouvement. La présence des courtes périodes peut être gênante pour des raisons liées aux capacités de calcul dont on dispose, mais aussi pour des raisons plus fondamentales dues à la quasi impossibilité de modéliser précisément tous les phénomènes locaux affectant le satellite. Une réponse possible à ces problèmes réside dans l'étude d'un mouvement fictif affranchi de toute variation à courte période. C'est ce que l'on se propose de réaliser avec la méthode de centrage.

L'idée d'étudier un mouvement moyen n'est pas nouvelle ; toute la difficulté réside dans la construction d'un modèle de ce mouvement dont la précision soit compatible avec la qualité des observations. En géodésie spatiale, les premiers développements remontent à une vingtaine d'années, mais la précision obtenue n'a jamais vraiment permis d'exploiter la qualité des observations disponibles. On se heurtait à deux difficultés : d'une part établir un algorithme permettant de décrire le même mouvement moyen à partir d'observations et à partir d'un modèle, d'autre part appliquer cet algorithme à l'ensemble des forces très diverses qui perturbent le mouvement du satellite artificiel. C'est pourquoi l'étude de ces deux problèmes constitue les deux parties principales de cette thèse.

Notre point de départ consistait à définir le mouvement moyen. Il s'agit bien d'une définition puisque, renonçant à étudier le mouvement instantané du satellite, nous introduisons une séparation artificielle entre les variations à courtes périodes et les variations à longues périodes de variables décrivant ce mouvement. La séparation entre mouvement du centre de gravité et rotation autour du centre de gravité peut offrir une vision intéressante dans la dynamique du solide ; de la même façon, la distinction mathématique entre courtes et longues périodes du mouvement du satellite peut permettre d'étudier des modèles physiques dans des conditions plus favorables. Il n'est pas choquant qu'il existe plusieurs définitions possibles du mouvement moyen. Insistons sur le fait que seule la notion de variables moyennes centrées (variables décrivant le mouvement instantané auxquelles on a retiré exactement les variations à courtes périodes) conduit à une définition sans ambiguïté.

Notre seconde préoccupation a été le choix d'une méthode permettant d'obtenir un modèle de ce mouvement. Il s'agissait de transformer le système différentiel décrivant le mouvement instantané en un système différentiel gouvernant l'évolution des variables moyennes centrées. On en a conclu que la quadrature numérique ("numerical averaging") doit être utilisée avec de grandes précautions et n'est de toutes façons valable qu'au premier ordre. Pour les perturbations importantes, une transformation par méthode analytique était plus indiquée. Heureusement, si la plupart des perturbations affectant le mouvement du satellite artificiel ne permettent pas un traitement entièrement analytique très précis, on peut en général calculer leurs effets à courtes périodes avec une précision suffisante et les éliminer du système différentiel (perturbations luni-solaires, marées). Dans certains cas, une moyennisation analytique qui permet d'éliminer les courtes périodes du système différentiel sans les calculer, conduit à un résultat au premier ordre satisfaisant (harmoniques tesséraux du potentiel). Pour moyenniser les systèmes différentiels correspondant à toutes ces perturbations, nous avons choisi d'utiliser le formalisme hamiltonien et d'appliquer des transformations canoniques visant à éliminer de la fonction perturbatrice les variables responsables des courtes périodes. Ceci a été réalisé à l'aide des transformées de Lie, en utilisant les variables de Delaunay. Nous avons montré qu'à partir du second ordre, les variables moyennes centrées que nous cherchions à obtenir ne pouvaient résulter directement d'une transformation canonique : celle-ci génère un nouveau système différentiel dont l'intégration numérique donne accès à des variables moyennes (mais non centrées) ne contenant pas la totalité de l'information à longues périodes. C'est pourquoi, après cette intégration, un changement de variables non canonique est nécessaire pour obtenir des variables centrées contenant exactement les variations à longues périodes des éléments instantanés.

La dernière partie de ce travail a consisté à appliquer les algorithmes que nous avons conçu, aux principales perturbations affectant le mouvement du satellite artificiel. Les calculs algébriques étant très volumineux, il était impensable de les mener à bien sans recourir à des logiciels de calcul formel. Ces outils nous ont été très précieux.

Nous avons pu ainsi traiter des cas aussi divers que les perturbations dues au potentiel terrestre, à un troisième corps ou aux marées terrestres et océaniques. Des tests à l'aide de simulations numériques ont permis de valider la théorie obtenue et plus largement toute la méthode de centrage (filtrage des observations, modèle du mouvement centré, ajustement des conditions initiales par correction différentielle d'orbite). On obtient une précision décimétrique sur de très longues périodes de temps : les simulations peuvent difficilement dépasser une durée de un an, mais la forme des résidus montre que la précision dépend peu de la durée. Les grands pas d'intégration utilisables dans l'intégration numérique du système moyen rendent insignifiantes les erreurs numériques de troncature et d'arrondi. Enfin les temps de calcul sont considérablement réduits (d'un facteur 10 au minimum), ce qui rend plus praticables des intégrations sur des durées de quelques dizaines d'années. D'autres perturbations telles que la pression de radiation solaire directe, le frottement atmosphérique et les forces d'inerties ont été abordées d'une manière théorique mais ne sont pas encore implantées : "il faut bien conclure une thèse" [Oberti 1988, p 74].

Dans son état actuel, la théorie utilise les variables de Delaunay et seuls les ordres supérieurs sont développés en excentricité. Elle donne de très bons résultats pour des satellites dont l'excentricité est comprise entre 0.01 et 0.1. La précision reste correcte entre 0.005 et 0.01. S'il ne semble pas fondamental de chercher à étendre la théorie aux excentricités élevées, il faut absolument l'adapter aux très faibles excentricités car beaucoup de satellites géodésiques ont des orbites quasi-circulaires.

On peut penser utiliser cette théorie dans le cadre d'analyses fines de missions ou pour l'étude de l'évolution d'orbites à très long terme. Une autre application possible est le contrôle de la continuité d'orbites ajustées sur des arcs courts successifs avec des méthodes classiques. Cependant, la théorie a été construite dans le cadre plus ambitieux de la méthode de centrage développée au GRGS. En effet, au-delà de ses applications directes en orbitographie, cette méthode est destinée à des études géodynamiques. Un des premiers objectifs est une redétermination de certains coefficients du développement en harmoniques sphériques du potentiel terrestre et l'étude de leur variabilité temporelle. L'isolement des effets séculaires et à longues périodes permet de s'affranchir des harmoniques tesséraux non résonnants qui peuvent gêner la détermination des harmoniques zonales. Par ailleurs, l'utilisation d'arcs très longs comprenant une ou plusieurs rotations du périhélie procure une sensibilité incomparable. Cet outil peut aussi être très adapté à l'étude fine des effets à long terme de diverses perturbations d'origine non gravitationnelle. Enfin, la méthode de centrage pourrait être utilisée avantageusement pour l'étude des champs de gravité d'autres planètes : la faible diversité des objets orbitant autour de ces corps et le manque de mesures sont peu favorables à la détermination globale de leur potentiel. Dans ce contexte, l'étude des variations à longues périodes de leurs satellites artificiels pourrait permettre de mieux déterminer leurs harmoniques zonales.

APPENDICES

APPENDICE 1

Influence du choix de la fonction génératrice dans l'algorithme de Deprit appliqué au problème du satellite artificiel

A. Transformation de référence

On considère un hamiltonien s'écrivant :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0^0(L) + \varepsilon \mathcal{H}_1^0(l, g, -, L, G, H) + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{H}_2^0(l, g, -, L, G, H) + \dots$$

On applique deux transformations canoniques successives aux variables (l, g, h, L, G, H) dans le but d'éliminer les angles l et g de l'hamiltonien [Brouwer 1959] :

$$\begin{aligned} (l, g, h, L, G, H) &\xrightarrow{W} (l', g', h', L', G', H') \xrightarrow{V} (l'', g'', h'', L'', G'', H'') \\ \mathcal{H}(l, g, -, L, G, H) &\longrightarrow \mathcal{F}(-, g', -, L', G', H') \longrightarrow \mathcal{K}(-, -, -, L'', G'', H'') \end{aligned} \quad (1)$$

Selon l'algorithme de Deprit ces transformations sont engendrées par deux fonctions génératrices W et V telles que :

$$\begin{aligned} W &= W_1 + \varepsilon W_2 + \dots \\ V &= V_1 + \varepsilon V_2 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

On note encore :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{H}_0^0(L) + \varepsilon \mathcal{H}_0^1(-, g, -, L, G, H) + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{H}_0^2(-, g, -, L, G, H) + \dots \\ &= \mathcal{F}_0^0(L') + \varepsilon \mathcal{F}_1^0(-, g', -, L', G', H') + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{F}_2^0(-, g', -, L', G', H') + \dots \\ \mathcal{K} &= \mathcal{F}_0^0(L') + \varepsilon \mathcal{F}_0^1(-, -, -, L', G', H') + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{F}_0^2(-, -, -, L', G', H') + \dots \\ &= \mathcal{K}_0^0(L'') + \varepsilon \mathcal{K}_1^0(-, -, -, L'', G'', H'') + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{K}_2^0(-, -, -, L'', G'', H'') + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Comme toutes les fonctions à droite des signes d'égalité sont évaluées en $\varepsilon = 0$ où $l = l' = l''$, $g = g' = g''$..., nous utiliserons parfois les raccourcis de notation faisant directement apparaître \mathcal{H}_i^j en fonction de (l', g', h', L', G', H') et \mathcal{F}_i^j en fonction de $(l'', g'', h'', L'', G'', H'')$.

Il est bien connu que dans le problème du satellite artificiel, l'hamiltonien du premier ordre ne contient pas de longues périodes. Cela se traduit par le fait que \mathcal{H}_0^1 et \mathcal{F}_1^0 sont indépendants de g (voir paragraphe III.B). Nous utiliserons ceci plus loin.

Les nouveaux hamiltoniens et les générateurs sont calculés ordre par ordre de la manière suivante [Deprit et Rom 1970] :

Première transformation (élimination de l)

Ordre 1

$$\mathcal{H}_0^1 = \mathcal{H}_1^0 + \{\mathcal{H}_0^0; W_1\}$$

on choisit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^1 &= \langle \mathcal{H}_1^0 \rangle_{\nu} \\ \{\mathcal{H}_0^0; W_1\} &= \mathcal{H}_0^1 - \mathcal{H}_1^0 \end{aligned} \tag{4}$$

Ordre 2

$$\mathcal{H}_1^1 = \mathcal{H}_2^0 + \{\mathcal{H}_1^0; W_1\} + \{\mathcal{H}_0^0; W_2\}$$

$$\mathcal{H}_0^2 = \mathcal{H}_1^1 + \{\mathcal{H}_0^1; W_1\}$$

on pose

$$\tilde{\mathcal{H}}_1^1 = \mathcal{H}_2^0 + \{\mathcal{H}_1^0; W_1\}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_0^2 = \tilde{\mathcal{H}}_1^1 + \{\mathcal{H}_0^1; W_1\}$$

on obtient

$$\mathcal{H}_1^1 = \tilde{\mathcal{H}}_1^1 + \{\mathcal{H}_0^0; W_2\}$$

$$\mathcal{H}_0^2 = \tilde{\mathcal{H}}_0^2 + \{\mathcal{H}_0^0; W_2\}$$

on choisit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^2 &= \langle \tilde{\mathcal{H}}_0^2 \rangle_{\nu} \\ \{\mathcal{H}_0^0; W_2\} &= \mathcal{H}_0^2 - \tilde{\mathcal{H}}_0^2 \end{aligned} \tag{5}$$

et on en déduit

$$\mathcal{H}_1^1 = \tilde{\mathcal{H}}_1^1 + \{\mathcal{H}_0^0; W_2\} = \tilde{\mathcal{H}}_1^1 + \mathcal{H}_0^2 - \tilde{\mathcal{H}}_0^2 = \mathcal{H}_0^2 - \{\mathcal{H}_0^1; W_1\}$$

Ordre 3

$$\mathcal{H}_2^1 = \mathcal{H}_3^0 + \{\mathcal{H}_2^0; W_1\} + 2\{\mathcal{H}_1^0; W_2\} + \{\mathcal{H}_0^0; W_3\}$$

$$\mathcal{H}_1^2 = \mathcal{H}_2^1 + \{\mathcal{H}_1^1; W_1\} + \{\mathcal{H}_0^1; W_2\}$$

$$\mathcal{H}_0^3 = \mathcal{H}_1^2 + \{\mathcal{H}_0^2; W_1\}$$

on pose

$$\tilde{\mathcal{H}}_2^1 = \mathcal{H}_3^0 + \{\mathcal{H}_2^0; W_1\} + 2\{\mathcal{H}_1^0; W_2\}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_1^2 = \tilde{\mathcal{H}}_2^1 + \{\mathcal{H}_1^1; W_1\} + \{\mathcal{H}_0^1; W_2\}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_0^3 = \tilde{\mathcal{H}}_1^2 + \{\mathcal{H}_0^2; W_1\}$$

on obtient

$$\mathcal{H}_2^1 = \tilde{\mathcal{H}}_2^1 + \{\mathcal{H}_0^0; W_3\}$$

$$\mathcal{H}_1^2 = \tilde{\mathcal{H}}_1^2 + \{\mathcal{H}_0^0; W_3\}$$

$$\mathcal{H}_0^3 = \tilde{\mathcal{H}}_0^3 + \{\mathcal{H}_0^0; W_3\}$$

on choisit

$$\mathcal{H}_0^3 = \langle \tilde{\mathcal{H}}_0^3 \rangle_{\nu'} \tag{6}$$

$$\{\mathcal{H}_0^0; W_3\} = \mathcal{H}_0^3 - \tilde{\mathcal{H}}_0^3$$

nous n'utiliserons pas W_3

Deuxième transformation (élimination de g)

Les équations sont les mêmes que pour la première transformation en remplaçant \mathcal{H} par \mathcal{F} et W par V . Comme V ne contient pas l'' , les crochets de Poisson $\{\mathcal{F}_0^0; V_n\}$ seront tous nuls. De ce fait le générateur V_n ne sera pas déterminé à l'ordre n à travers $\{\mathcal{F}_0^0; V_n\}$ mais à l'ordre $n+1$ par $\{\mathcal{F}_1^0; V_n\}$. Ceci est relié au fait que les longues périodes d'ordre n sont obtenues à l'ordre $n+1$.

Ordre 1

$$\mathcal{F}_0^1 = \mathcal{F}_1^0 \quad (7)$$

Ordre 2

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^1 &= \mathcal{F}_2^0 + \{\mathcal{F}_1^0; V_1\} + \{\mathcal{F}_0^0; V_2\} = \mathcal{F}_2^0 + \{\mathcal{F}_1^0; V_1\} \\ \mathcal{F}_0^2 &= \mathcal{F}_1^1 + \{\mathcal{F}_0^1; V_1\} = \mathcal{F}_2^0 + 2\{\mathcal{F}_1^0; V_1\} \end{aligned}$$

on choisit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0^2 &= \langle \mathcal{F}_2^0 \rangle_{g''} \\ \{\mathcal{F}_1^0; V_1\} &= \frac{1}{2}(\mathcal{F}_0^2 - \mathcal{F}_2^0) \end{aligned} \quad (8)$$

Ordre 3

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2^1 &= \mathcal{F}_3^0 + \{\mathcal{F}_2^0; V_1\} + 2\{\mathcal{F}_1^0; V_2\} \\ \mathcal{F}_1^2 &= \mathcal{F}_2^1 + \{\mathcal{F}_1^1; V_1\} + \{\mathcal{F}_0^1; V_2\} \\ \mathcal{F}_0^3 &= \mathcal{F}_1^2 + \{\mathcal{F}_0^2; V_1\} \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_2^1 &= \mathcal{F}_3^0 + \{\mathcal{F}_2^0; V_1\} \\ \tilde{\mathcal{F}}_1^2 &= \tilde{\mathcal{F}}_2^1 + \{\mathcal{F}_1^1; V_1\} \\ \tilde{\mathcal{F}}_0^3 &= \tilde{\mathcal{F}}_1^2 + \{\mathcal{F}_0^2; V_1\} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2^1 &= \tilde{\mathcal{F}}_2^1 + 2\{\mathcal{F}_1^0; V_2\} \\ \mathcal{F}_1^2 &= \tilde{\mathcal{F}}_1^2 + 3\{\mathcal{F}_1^0; V_2\} \\ \mathcal{F}_0^3 &= \tilde{\mathcal{F}}_0^3 + 3\{\mathcal{F}_1^0; V_2\} \end{aligned}$$

on choisit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0^3 &= \langle \tilde{\mathcal{F}}_0^3 \rangle_{g''} \\ \{\mathcal{F}_1^0; V_2\} &= \frac{1}{3}(\mathcal{F}_0^3 - \tilde{\mathcal{F}}_0^3) \end{aligned} \quad (9)$$

B. Effet d'une modification de la fonction génératrice W_1

Comme $\{\mathcal{H}_0^0; W\} = -\frac{\mu^2}{L^3} \frac{\partial W}{\partial l'}$, le générateur W résulte d'une intégration par rapport à l' et est donc défini à une fonction $w(-, g', -, L', G', H')$ près, w étant 2π périodique en g' . On se propose d'étudier les effets de l'addition d'une telle fonction au générateur W_1 .

$$\begin{aligned} W_1^*(l', g', -, L', G', H') &= W_1(l', g', -, L', G', H') + w(-, g', -, L', G', H') \\ &= W_1(l', g', -, L', G', H') + \Delta W_1 \end{aligned} \quad (10)$$

Les calculs aux ordres suivants seront modifiés :

$$\begin{aligned} W_2^* &= W_2 + \Delta W_2 \\ V_1^* &= V_1 + \Delta V_1 \\ \mathcal{F}^* &= \mathcal{F} + \Delta \mathcal{F} \\ \mathcal{K}^* &= \mathcal{K} + \Delta \mathcal{K} \end{aligned} \quad (11)$$

Modifications dans la première transformation

Modification de $\mathcal{H}_0^2 = \mathcal{F}_2^0$

La relation (5) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H}_0^2 &= \langle \Delta \mathcal{H}_2^0 + \{\mathcal{H}_1^0; \Delta W_1\} + \{\mathcal{H}_0^1; \Delta W_1\} \rangle_{\nu} \\ &= \langle \{\mathcal{H}_1^0; w\} + \{\mathcal{H}_0^1; w\} \rangle_{\nu} \\ &= \langle \{\mathcal{H}_1^0 + \mathcal{H}_0^1\} \rangle_{\nu}; w \rangle \\ \Delta \mathcal{H}_0^2 &= 2\{\mathcal{H}_0^1; w\} \end{aligned} \quad (12)$$

Modification de W_2

On a toujours d'après (5)

$$\{\mathcal{H}_0^0; W_2\} = \mathcal{H}_2^0 - (\mathcal{H}_2^0 + \{\mathcal{H}_1^0; W_1\} + \{\mathcal{H}_0^1; W_1\})$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}_0^0; \Delta W_2\} &= \Delta \mathcal{H}_0^2 - (\Delta \mathcal{H}_2^0 + \{\mathcal{H}_1^0; \Delta W_1\} + \{\mathcal{H}_0^1; \Delta W_1\}) \\
&= 2\{\mathcal{H}_0^1; w\} - \{\mathcal{H}_1^0 + \mathcal{H}_0^1; w\} \\
&= 2\{\mathcal{H}_0^1; w\} - \left\{ \mathcal{H}_0^1 - \{\mathcal{H}_0^0; W_1\} + \mathcal{H}_0^1; w \right\} \\
&= \left\{ \{\mathcal{H}_0^0; W_1\}; w \right\} \\
&= -\left\{ \{w; \mathcal{H}_0^0\}; W_1 \right\} - \left\{ \{W_1; w\}; \mathcal{H}_0^0 \right\} \quad (\text{identité de Jacobi}) \\
&= \left\{ \mathcal{H}_0^0; \{W_1; w\} \right\}
\end{aligned}$$

Ce qui conduit à

$$\Delta W_2 = \{W_1; w\} + C(g', L', G', H') \quad (13)$$

Comme seule l'influence de w nous intéresse nous supposons la constante d'intégration $C(g', L', G', H')$ nulle.

Modification de $\mathcal{H}_0^3 = \mathcal{F}_3^0$

D'après (6) :

$$\mathcal{H}_0^3 = \langle \mathcal{H}_3^0 + \{2\mathcal{H}_1^0 + \mathcal{H}_0^1; W_2\} + \{\mathcal{H}_2^0 + \mathcal{H}_1^1 + \mathcal{H}_0^2; W_1\} \rangle_\nu$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{H}_0^3 &= \langle \Delta \mathcal{H}_3^0 + \{2\mathcal{H}_1^0 + \mathcal{H}_0^1; \Delta W_2\} + \{\Delta \mathcal{H}_2^0 + \Delta \mathcal{H}_1^1 + \Delta \mathcal{H}_0^2; W_1\} \\
&\quad + \{\mathcal{H}_2^0 + \mathcal{H}_1^1 + \mathcal{H}_0^2; \Delta W_1\} + \{\Delta \mathcal{H}_2^0 + \Delta \mathcal{H}_1^1 + \Delta \mathcal{H}_0^2; \Delta W_1\} \rangle_\nu
\end{aligned}$$

Or

$$\Delta \mathcal{H}_3^0 = 0 \quad (\text{la perturbation initiale n'est pas modifiée}),$$

$$2\mathcal{H}_1^0 + \mathcal{H}_0^1 = 3\mathcal{H}_0^1 - 2\{\mathcal{H}_0^0; W_1\},$$

$$\Delta W_2 = \{W_1; w\} \quad (\text{formule 13}),$$

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{H}_2^0 + \Delta\mathcal{H}_1^1 + \Delta\mathcal{H}_0^2 &= 0 + \Delta(\mathcal{H}_0^2 - \{\mathcal{H}_0^1; W_1\}) + \Delta\mathcal{H}_0^2 \\
&= 2\Delta\mathcal{H}_0^2 - \{\mathcal{H}_0^1; \Delta W_1\} \\
&= 4\{\mathcal{H}_0^1; w\} - \{\mathcal{H}_0^1; w\} \quad (\text{formule 12}), \\
&= 3\{\mathcal{H}_0^1; w\} \\
\langle \mathcal{H}_2^0 + \mathcal{H}_1^1 + \mathcal{H}_0^2 \rangle_\nu &= 3\mathcal{H}_0^2 - \langle 2\{\mathcal{H}_0^1; W_1\} + \{\mathcal{H}_1^0; W_1\} \rangle_\nu \\
&= 3\mathcal{H}_0^2 - \langle \{3\mathcal{H}_0^1 - \{\mathcal{H}_0^0; W_1\}; W_1\} \rangle_\nu
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{H}_0^3 &= \langle \{3\mathcal{H}_0^1 - 2\{\mathcal{H}_0^0; W_1\}; \{W_1; w\}\} \rangle_\nu \\
&\quad + \langle \{3\{\mathcal{H}_0^1; w\}; W_1\} \rangle_\nu \\
&\quad + \left\langle 3\mathcal{H}_0^2 - \langle \{3\mathcal{H}_0^1 - \{\mathcal{H}_0^0; W_1\}; W_1\} \rangle_\nu; w \right\rangle \\
&\quad + \langle \{3\{\mathcal{H}_0^1; w\}; w\} \rangle_\nu
\end{aligned}$$

En regroupant différemment :

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{H}_0^3 &= \langle 3\{\mathcal{H}_0^1; \{W_1; w\}\} + 3\{w; \{\mathcal{H}_0^1; W_1\}\} + 3\{W_1; \{w; \mathcal{H}_0^1\}\} \rangle_\nu \\
&\quad - \langle \{2\{\mathcal{H}_0^0; W_1\}; \{W_1; w\}\} + \{w; \{\{\mathcal{H}_0^0; W_1\}; W_1\}\} \rangle_\nu \\
&\quad + 3\{\mathcal{H}_0^2; w\} + 3\{\{\mathcal{H}_0^1; w\}; w\}
\end{aligned}$$

D'après l'identité de Jacobi, la première ligne du second membre a une contribution nulle. Cette même identité permet de réécrire la seconde ligne que nous appellerons T :

$$\begin{aligned}
T &= -\left\{2\{\mathcal{H}_0^0; W_1\}; \{W_1; w\}\right\} - \left\{w; \{\{\mathcal{H}_0^0; W_1\}; W_1\}\right\} \\
&= -\left\{\{\mathcal{H}_0^0; W_1\}; \{W_1; w\}\right\} + \left\{W_1; \{w; \{\mathcal{H}_0^0; W_1\}\}\right\} \\
&= \left\{\frac{\mu^2}{L^3} \frac{\partial W_1}{\partial l'}; \{W_1; w\}\right\} - \left\{W_1; \{w; \frac{\mu^2}{L^3} \frac{\partial W_1}{\partial l'}\}\right\} \\
&= \frac{\mu^2}{L^3} \left\{\frac{\partial W_1}{\partial l'}; \{W_1; w\}\right\} + 3 \frac{\mu^2}{L^4} \frac{\partial W_1}{\partial l'} \frac{\partial}{\partial l'} \{W_1; w\} \\
&\quad - \frac{\mu^2}{L^3} \left\{W_1; \frac{\partial}{\partial l'} \{w; W_1\}\right\} + 3 \frac{\mu^2}{L^4} \frac{\partial W_1}{\partial l'} \frac{\partial}{\partial l'} \{w; W_1\} \\
&= \frac{\mu^2}{L^3} \frac{\partial}{\partial l'} \left\{W_1; \{W_1; w\}\right\}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\langle T \rangle_{l'} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu^2}{L^3} \left[\left\{ W_1; \{W_1; w\} \right\} \right]_{l'=0}^{2\pi} = 0$$

car W_1 et w sont 2π périodiques en l' .

On en conclut finalement :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{H}_0^3 &= 3\{\mathcal{H}_0^2; w\} + 3\left\{ \{\mathcal{H}_0^1; w\}; w \right\} \\ &= 3\left\{ \mathcal{H}_0^2 + \{\mathcal{H}_0^1; w\}; w \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

Modifications dans la deuxième transformation

Modification de $\mathcal{F}_0^2 = \mathcal{K}_2^0$

D'après (8) :

$$\mathcal{F}_0^2 = \langle \mathcal{F}_2^0 \rangle_{g''} = \langle \mathcal{H}_0^2 \rangle_{g''}$$

Considérant l'expression de $\Delta \mathcal{H}_0^2$ on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{F}_0^2 &= \langle \Delta \mathcal{H}_0^2 \rangle_{g''} \\ &= \langle 2\{\mathcal{H}_0^1; w\} \rangle_{g''} \\ &= \left\langle -2 \frac{\partial \mathcal{H}_0^1}{\partial G''} \frac{\partial w}{\partial g''} \right\rangle_{g''} \\ &= -2 \frac{\partial \mathcal{H}_0^1}{\partial G''} \frac{1}{2\pi} \left[w \right]_{g''=0}^{2\pi} \\ \Delta \mathcal{F}_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

car w est 2π périodique en g .

Modification de V_1

On utilise les équations (8) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0^2 &= \mathcal{F}_2^0 + 2\{\mathcal{F}_1^0; V_1\} \\ &= \mathcal{H}_0^2 + 2\{\mathcal{H}_0^1; V_1\} \end{aligned}$$

Ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{F}_0^2 &= \Delta \mathcal{H}_0^2 + 2\{\mathcal{H}_0^1; \Delta V_1\} \\ &= 2\{\mathcal{H}_0^1; w\} + 2\{\mathcal{H}_0^1; \Delta V_1\} \end{aligned}$$

Et comme $\Delta\mathcal{F}_0^2 = 0$ on en conclut :

$$\Delta V_1 = -w = -\Delta W_1 \quad (15)$$

Modification de $\mathcal{F}_0^3 = \mathcal{K}_3^0$

On part de la formule (9) :

$$\mathcal{F}_0^3 = \langle \mathcal{F}_3^0 + \{\mathcal{F}_2^0 + \mathcal{F}_1^1 + \mathcal{F}_0^2; V_1\} \rangle_{g''}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{F}_0^3 = & \langle \Delta\mathcal{F}_3^0 + \{\Delta\mathcal{F}_2^0 + \Delta\mathcal{F}_1^1 + \Delta\mathcal{F}_0^2; V_1\} + \{\mathcal{F}_2^0 + \mathcal{F}_1^1 + \mathcal{F}_0^2; \Delta V_1\} \\ & + \{\Delta\mathcal{F}_2^0 + \Delta\mathcal{F}_1^1 + \Delta\mathcal{F}_0^2; \Delta V_1\} \rangle_{g''} \end{aligned}$$

On connaît toutes les composantes :

$$(15) \quad \Delta V_1 = -w$$

$$(16) \quad \Delta\mathcal{F}_3^0 = \Delta\mathcal{H}_0^3 = 3\{\mathcal{H}_0^2 + \{\mathcal{H}_0^1; w\}; w\}$$

$$(12) \quad \Delta\mathcal{F}_2^0 = \Delta\mathcal{H}_0^2 = 2\{\mathcal{H}_0^1; w\}$$

$$(14) \quad \Delta\mathcal{F}_0^2 = 0$$

$$\Delta\mathcal{F}_1^1 = \Delta\mathcal{F}_2^0 + \{\mathcal{F}_1^0; \Delta V_1\} = 2\{\mathcal{H}_0^1; w\} + \{\mathcal{H}_0^1; -w\} = \{\mathcal{H}_0^1; w\}$$

$$\mathcal{F}_2^0 + \mathcal{F}_1^1 + \mathcal{F}_0^2 = 3\mathcal{F}_2^0 + 3\{\mathcal{F}_1^0; V_1\} = 3\mathcal{H}_0^2 + 3\{\mathcal{H}_0^1; V_1\}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{F}_0^3 = & \langle 3\{\mathcal{H}_0^2 + \{\mathcal{H}_0^1; w\}; w\} + 3\{\{\mathcal{H}_0^1; w\}; V_1\} \\ & + 3\{\{\mathcal{H}_0^1; w\}; -w\} + 3\{\mathcal{H}_0^2 + \{\mathcal{H}_0^1; V_1\}; -w\} \rangle_{g''} \\ = & 3 \langle \{\mathcal{H}_0^2 - \mathcal{H}_0^2; w\} + \{\{\mathcal{H}_0^1; w\}; w - w\} \\ & + \left\{ V_1; \frac{\partial\mathcal{H}_0^1}{\partial G''} \frac{\partial w}{\partial g''} \right\} + \left\{ \frac{\partial\mathcal{H}_0^1}{\partial G''} \frac{\partial V_1}{\partial g''}; w \right\} \rangle_{g''} \\ = & 3 \langle \frac{\partial\mathcal{H}_0^1}{\partial G''} \left\{ V_1; \frac{\partial w}{\partial g''} \right\} + \frac{\partial V_1}{\partial g''} \frac{\partial^2\mathcal{H}_0^1}{\partial G''^2} \frac{\partial w}{\partial g''} \\ & + \frac{\partial\mathcal{H}_0^1}{\partial G''} \left\{ \frac{\partial V_1}{\partial g''}; w \right\} - \frac{\partial^2\mathcal{H}_0^1}{\partial G''^2} \frac{\partial V_1}{\partial g''} \frac{\partial w}{\partial g''} \rangle_{g''} \\ = & 3 \frac{\partial\mathcal{H}_0^1}{\partial G''} \langle \frac{\partial}{\partial g''} \{V_1; w\} \rangle_{g''} \\ = & 3 \frac{\partial\mathcal{H}_0^1}{\partial G''} \frac{1}{2\pi} \left[\{V_1; w\} \right]_{g''=0}^{2\pi} \end{aligned}$$

$$\Delta\mathcal{F}_0^3 = 0 \quad (17)$$

Modification de V_2

$$\{\mathcal{F}_1^0; V_2\} = \frac{1}{3}(\mathcal{F}_0^3 - \tilde{\mathcal{F}}_0^3)$$

Donc

$$\{\mathcal{H}_0^1; \Delta V_2\} = \frac{1}{3}(\Delta\mathcal{F}_0^3 - \Delta\tilde{\mathcal{F}}_0^3)$$

Pour obtenir $\Delta\tilde{\mathcal{F}}_0^3$ il suffit de reprendre le calcul de $\Delta\mathcal{F}_0^3$ en supprimant la moyennisation par rapport à g'' :

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\mathcal{F}}_0^3 &= 3 \frac{\partial \mathcal{H}_0^1}{\partial G''} \frac{\partial}{\partial g''} \{V_1; w\} \\ &= -3 \left\{ \mathcal{H}_0^1; \{V_1; w\} \right\} \end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\Delta V_2 = \{V_1; w\} \quad (18)$$

Résumé des modifications :

$$\begin{array}{ll} \Delta W_1 = w & \Delta V_1 = -w \\ \Delta W_2 = \{W_1; w\} & \Delta V_2 = \{V_1; w\} \\ \Delta \mathcal{H}_0^2 = 2\{\mathcal{H}_0^1; w\} & \Delta \mathcal{F}_0^2 = 0 \\ \Delta \mathcal{H}_0^3 = 3\left\{ \mathcal{H}_0^2 + \{\mathcal{H}_0^1; w\}; w \right\} & \Delta \mathcal{F}_0^3 = 0 \end{array}$$

Interprétation :

Première transformation :

- Les hamiltoniens intermédiaires \mathcal{H}_0^2 et \mathcal{H}_0^3 sont modifiés en fonction de w : cela traduit la balance des longues périodes entre le changement de variable et le système différentiel moyen.
- $\Delta\mathcal{H}_0^2$ ne peut contenir que des variations à courtes périodes car \mathcal{H}_0^1 ne contient pas d'angle. En revanche, \mathcal{H}_0^2 et $\{\mathcal{H}_0^1; w\}$ contiennent l'angle g ce qui fait que le crochet de Poisson avec w peut contenir des termes sans angle. Cela signifie que l'on ne peut pas comparer deux hamiltoniens à longues périodes, même du point de vue des termes non périodiques, sans étudier aussi les générateurs des transformations.

Deuxième transformation :

Cette transformation absorbe les termes périodiques de l'hamiltonien intermédiaire.

- L'hamiltonien qui en résulte n'est pas affecté par la modification de W_1 : le système différentiel final reste le même.
- Le changement de variables total n'est pas modifié à l'ordre 1 : ΔW_1 est compensé par ΔV_1 . Mais le changement de variables est modifié à l'ordre 2. Ceci implique que les conditions initiales du système normalisé issu de W_1 et du système normalisé issu de $W_1 + w$ ne seront pas identiques.

APPENDICE 2

Calcul des moyennes $\langle (f - l) \cos kf \rangle_l$ et $\langle (f - l) \sin kf \rangle_l$: article accepté à "Celestial Mechanics".

Mean values of particular functions in the elliptic motion

G. METRIS

Observatoire de la Côte d'Azur, 06130, Grasse, France

Keywords : elliptic motion, closed form, mean values.

Abstract : The mean values $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f-l) \cos k f dl$ and $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f-l) \sin k f dl$ (where f and l are respectively the true anomaly and the mean anomaly in the elliptic motion and k is an integer) are given in closed form.

1. Introduction

In the perturbed keplerian problem, the removal of the mean anomaly l requires computing the quadrature, or the mean value of functions depending implicitly on this variable through the true anomaly f (Brouwer 1959). Here, we consider the case where no development in eccentricity is performed. The mean values $\langle \cos k f \rangle$ and $\langle \cos k u \rangle$ (where u is the eccentric anomaly and k is an integer) were given by Kozai. The notation $\langle F \rangle$ means $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(l) dl$. More recently, Kelly published the quadratures $\int \cos k f dl$, $\int \sin k f dl$, $\int \cos k u dl$ and $\int \sin k u dl$. We can also have to deal with the mean values $\langle (f-l) \cos k f \rangle$ and $\langle (f-l) \sin k f \rangle$.

In order to give an example of application the forms $(f-l) \sin k f$ appear in the generating function W which allows the removal of the mean anomaly in the main problem of the artificial satellite (Deprit and Rom 1970, Asknes 1971, Claes 1980). W determines a canonical transformation from the Delaunay set of variables (l, g, h, L, G, H) to the new one (l', g', h', L', G', H') (Deprit 1969) :

$$\begin{cases} l_i = l'_i + J_2 \frac{\partial W_1}{\partial L'_i} + \frac{J_2^2}{2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial L'_i} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial L'_i}; W_1 \right\} \right) + \dots & (i = 1, 3) \\ L_i = L'_i - J_2 \frac{\partial W_1}{\partial l'_i} - \frac{J_2^2}{2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial l'_i} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial l'_i}; W_1 \right\} \right) + \dots & (i = 1, 3) \end{cases}$$

where J_2 is the second zonal harmonic of the earth potential and $W = \sum_{k \geq 0} J_2^k \frac{W_{k+1}}{k!}$.

The notation $\{\phi; \psi\}$ designs the Poisson brackets : $\{\phi; \psi\} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial l'_i} \frac{\partial \psi}{\partial L'_i} - \frac{\partial \phi}{\partial L'_i} \frac{\partial \psi}{\partial l'_i}$. W is

constructed so that the new variables (l'_i, L'_i) no longer have any short period variations (Deprit and Rom 1970).

We are interested in some variables (\bar{l}'_i, \bar{L}'_i) containing exactly the secular and long-period variations of (l_i, L_i) :

$$\begin{cases} \bar{l}'_i = l'_i + \left\langle J_2 \frac{\partial W_1}{\partial L'_i} + \frac{J_2^2}{2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial L'_i} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial L'_i}; W_1 \right\} \right) + \dots \right\rangle_{l'} & (i = 1, 3) \\ \bar{L}'_i = L'_i - \left\langle J_2 \frac{\partial W_1}{\partial l'_i} + \frac{J_2^2}{2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial l'_i} + \left\{ \frac{\partial W_1}{\partial l'_i}; W_1 \right\} \right) + \dots \right\rangle_{l'} & (i = 1, 3) \end{cases}$$

We just removed from the initial variables (l_i, L_i) , the periodic variations involving the fast angle l' . The construction of (\bar{l}'_i, \bar{L}'_i) involves the averaging of W_1 and W_2 . Now W_2 contains the forms $(f - l)\cos kf$.

2. Expression of $\langle (f - l)\sin kf \rangle$ and $\langle (f - l)\cos kf \rangle$ in function of f

We choose $k > 0$, changing the sign of the sine if necessary. We begin with the well known formula (see eg Brouwer and Clemence 1961) :

$$f - l = -2 \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{A_j}{j} \sin jf \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{where} \quad A_j &= (-\beta)^j (1 + j\eta), & \beta &= \frac{1 - \eta}{e} = \frac{e}{1 + \eta}, \\ \eta &= \frac{G}{L} = \sqrt{1 - e^2}, & L &= \sqrt{\mu a} \end{aligned}$$

Hence,

$$(f - l)\cos kf = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{A_j}{j} [\sin(k - j)f - \sin(k + j)f] \quad (2)$$

$$(f - l)\sin kf = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{A_j}{j} [\cos(j + k)f - \cos(j - k)f] \quad (3)$$

For every integer m , $\langle \sin mf \rangle = 0$ then,

$$\langle (f - l)\cos kf \rangle = 0$$

For every positive integer m (Kozai 1962) :

$$\langle \cos mf \rangle = A_m \quad (4)$$

This formula is applicable to average the equation (3) only if we use a decomposition in which the coefficient of f is always positive or zero :

$$\langle (f - l)\sin kf \rangle = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{A_j}{j} A_{k+j} - \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{A_j}{j} A_{k-j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{A_j}{j} A_{j-k} \right) \quad (5)$$

When m is negative, the formula (4) is not valid ($A_{-m} \neq A_m$ unless $m=1$), but the coefficient A_{-m} exists and we can add and subtract the sum $\sum_{j=1}^{k-1} \frac{A_j}{j} A_{j-k}$.

We find :

$$\langle (f - l)\sin kf \rangle = S - T \quad (6)$$

where

$$S = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{A_j}{j} (A_{j+k} - A_{j-k}), \quad T = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{A_j}{j} (A_{k-j} - A_{j-k})$$

3. Evaluation of S and T

Using the expression of A_m , we get :

$$\begin{aligned} S &= [(1 + k\eta)(-\beta)^k - (1 - k\eta)(-\beta)^{-k}] S_1 \\ &+ [\eta(2 + k\eta)(-\beta)^k - \eta(2 - k\eta)(-\beta)^{-k}] S_2 \\ &+ \eta^2 [(-\beta)^k - (-\beta)^{-k}] S_3 \end{aligned} \quad (7)$$

where

$$S_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\beta^{2j}}{j}, \quad S_2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta^{2j}, \quad S_3 = \sum_{j=1}^{+\infty} j\beta^{2j}$$

Since $\beta^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$ is strictly smaller than 1, the series S_1 , S_2 and S_3 are absolutely convergent and their sums are :

$$S_1 = -\ln(1 - \beta^2), \quad S_2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}, \quad S_3 = \frac{\beta^2}{(1 - \beta^2)^2} \quad (8)$$

T must be taken into account only for $k \geq 2$

$$\begin{aligned} T &= [(1 + k\eta)T_1 - \eta^2 T_2 + k(k-1)\eta^2] (-\beta)^k \\ &- [(1 - k\eta)T_3 + \eta(2 - k\eta)T_4 + \eta^2 T_5] (-\beta)^{-k} \end{aligned} \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} & T_2 &= \sum_{j=1}^{k-1} j = \frac{k(k-1)}{2} \\
 T_3 &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\beta^{2j}}{j} & T_4 &= \sum_{j=1}^{k-1} \beta^{2j} = \beta^2 \frac{\beta^{2(k-1)} - 1}{\beta^2 - 1} \\
 T_5 &= \sum_{j=1}^{k-1} j \beta^{2j} = \frac{(1-k)\beta^{2k}}{1-\beta^2} + \frac{\beta^2(1-\beta^{2(k-1)})}{(1-\beta^2)^2}
 \end{aligned} \tag{10}$$

4. Finite form of $\langle (f-l) \sin kf \rangle$

After some algebraic manipulations using (6)-(10), we finally get :

$$\begin{aligned}
 \langle (f-l) \sin kf \rangle &= (1-k\eta) \left[\ln(1-\beta^2) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\beta^{2j}}{j} \right] (-\beta)^{-k} \\
 &\quad - (1+k\eta) \left[\ln(1-\beta^2) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \right] (-\beta)^k \\
 &\quad + \eta \left[\frac{k}{2}(1-k\eta) - 2 \right] (-\beta)^k \quad \text{for } k \geq 2
 \end{aligned} \tag{11}$$

For $k=1$, only the contribution of S has to be considered ($T=0$) :

$$\langle (f-l) \sin f \rangle = \frac{\eta}{e} - \frac{\eta^2}{e} + \eta \frac{e}{2} = \eta e \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\eta} \right) \tag{12}$$

Since $\int \sin f dl = \frac{\eta r}{e a}$, the particular case (12) can be more directly solved using an integration by parts.

5. Case of small eccentricity

Since $\beta \simeq e/2$, the first term of (11) exhibits a singularity for the small eccentricities. But if this term is expanded in powers of β the singularity disappears ; indeed :

$$\ln(1-\beta^2) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\beta^{2j}}{j} = - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\beta^{2j}}{j} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\beta^{2j}}{j} = - \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{\beta^{2j}}{j}$$

This sum is of order $2k$ in e , then $\langle (f-l) \sin kf \rangle$ is of order k .

However, when the eccentricity is too small or k is too large, the numerical evaluation of the right-hand member of (11) is not accurate. In that case, it is better to use an expansion in powers of e which then quickly converges.

6. Conclusion

The mean values of $(f - l) \cos kf$ and $(f - l) \sin kf$ are required in some problems of the perturbed keplerian motion. The first is zero and we obtained the second in closed form, necessary for large eccentricities. For small eccentricities, the numerical evaluation of the found expression is not accurate and a development in eccentricity is more appropriate.

We are using these results in a work devoted to generate analytically a set of variables describing the secular and long period parts of the artificial satellite motion.

Acknowledgments

The software packages "MS" and "MINIMS" were used for the algebraic manipulations. They allowed me to check that my result expanded in powers of e is consistent with the classical development. These programs were provided by J. Henrard and M. Moons (Facultés Universitaires de Namur, Belgium). We thank F. Barlier and P. Exertier for helpful discussions.

References

- Asknes, K. : 1971, 'A note on "The main problem of satellite theory for small eccentricities, by A. Deprit and A. Rom, 1970"', *Celest. Mech.* 4, 119-121.
- Brouwer, D. : 1959, "Solution of the problem of artificial satellite theory without drag", *Astron. J.* 64, 378-397.
- Brouwer, D. and Clemence, G. M. : 1961 "Methods of celestial mechanics", Academic Press.
- Claes, H. : 1980, "Analytical theory of Earth's artificial satellites", *Celest. Mech.* 21, 193-198.
- Claes, H., Henrard, J., Zune, J. M., Moons, M. and Lemaitre, A. : 1988, "Guide d'utilisation du manipulateur de séries [MS]", Internal publication. Departement of Mathematics, FUNDP, Namur.
- Deprit, A. : 1969, "Canonical transformations depending on a small parameter", *Celest. Mech.* 1, 12-30.
- Deprit, A. and Rom, A. : 1970, "The main problem of artificial satellite theory for small and moderate eccentricities", *Celest. Mech.* 2, 166-206.
- Kelly, T. J. : 1989, "A note on first-order normalizations of perturbed keplerian systems", *Celest. Mech.* 46, 19-25.
- Kozai, Y. : 1962, "Mean values of cosine functions in elliptic motion", *Astron. J.* 67, 311-312.

APPENDICE 3

Moyennes de certaines fonctions intervenant dans le mouvement elliptique.

Nous avons rassemblé ici des formules donnant l'expression de la moyenne par rapport à l'anomalie moyenne de certaines fonctions que nous avons utilisé dans ce travail :

$$\langle F(l) \rangle_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(l) dl$$

Nous ne présentons pas tous les résultats existant mais seulement ceux que nous avons utilisés. Il s'agit de formules ne contenant pas de développements en puissance de l'excentricité tronqués. Les résultats sans référence sont soit des résultats triviaux (cas particuliers) soit des formules que nous avons développées faute de les avoir trouvées dans d'autres travaux publiés. Dans ce dernier cas, nous avons vérifié la validité de nos résultats pour différentes configurations particulières à l'aide du manipulateur de séries "MS" [Claes et al 1988].

Dans ce qui suit, k désigne un entier strictement positif, e l'excentricité, f l'anomalie vraie et u l'anomalie excentrique. η et β sont définis par :

$$\eta = \frac{G}{L} = \sqrt{1 - e^2} \text{ et } \beta = \frac{e}{1 + \eta} = \frac{1 - \eta}{e}.$$

Fonction	Moyenne	Référence
$\cos u$	$-\frac{e}{2}$	
$\cos ku \ (k > 1)$	0	
$\cos f$	$-e$	
$\cos kf \ (k > 0)$	$(-\beta)^k(1 + k\eta)$	Kozai 1962b
$\frac{a}{r}$	1	
$\frac{a^2}{r^2}$	$\frac{1}{\eta}$	
$\sin u \sin f$	$\frac{\eta}{2}$	
$\sin u \sin kf \ (k > 0)$	$\frac{k\eta(1 + k\eta)}{2(1 + \eta)}(-\beta)^{k-1}$	
$\cos u \cos f$	$\frac{1}{2}$	
$\cos u \cos kf \ (k > 0)$	$\frac{k\eta(1 + k\eta) + e^2}{2(1 + \eta)}(-\beta)^{k-1}$	
$\frac{a}{r} \sin u \sin kf \ (k > 0)$	$\frac{k\eta}{1 + \eta}(-\beta)^{k-1}$	
$\frac{a}{r} \cos u$	0	
$\frac{a}{r} \cos u \cos kf \ (k > 0)$	$\frac{k\eta}{1 + \eta}(-\beta)^{k-1}$	
$\frac{a}{r} \cos f \cos kf \ (k > 0)$	$\frac{1}{1 + \eta}(-\beta)^{k-1}$	
$\frac{a}{r} \sin f \sin kf \ (k > 0)$	$\frac{\eta}{1 + \eta}(-\beta)^{k-1}$	

Fonction	Moyenne	Référence
$\cos u \sin f \sin f$	$\frac{\eta^2 e}{2(1 + \eta)^2}$	
$\cos u \sin f \sin 2f$	$\frac{\eta^2(2\eta - 1)}{(1 + \eta)^2}$	
$\cos u \sin f \sin kf \ (k > 1)$	$\frac{k\eta^2(k\eta - 1)}{2(1 + \eta)^2} (-\beta)^{k-2}$	
$\sin u \sin f \cos f$	$\frac{-\eta e(1 + 2\eta)}{2(1 + \eta)^2}$	
$\sin u \sin f \cos 2f$	$\frac{-\eta(5\eta^2 - 2\eta - 1)}{2(1 + \eta)^2}$	
$\sin u \sin f \cos kf \ (k > 1)$	$\frac{\eta[k\eta(1 - k\eta) + e^2]}{2(1 + \eta)^2} (-\beta)^{k-2}$	

Les fonctions suivantes sont de moyennes nulles car ce sont des fonctions impaires, 2π périodiques par rapport à l'anomalie moyenne :

$\sin ku$, $\sin kf$, $\cos u \sin kf$, $\sin u \cos kf$, $\frac{a}{r} \cos u \sin kf$, $\frac{a}{r} \sin u \cos kf$, $\frac{a}{r} \cos f \sin kf$, $\frac{a}{r} \sin f \cos kf$, $\cos u \sin f \cos kf$, $\sin u \sin f \sin kf$.

APPENDICE 4

Formulation de la théorie de Berger en variables de Delaunay

La théorie de Berger exprime les variations des éléments orbitaux (a, e, I, h, g, l) dues aux harmoniques zonaux J_2 à J_7 , sous forme de séries trigonométriques dont les arguments sont les angles $\tilde{g} = g_0 + \dot{g}_0 t$ et $\tilde{l} = l_0 + \dot{l}_0 t$, \dot{g}_0 et \dot{l}_0 étant des effets séculaires calculés à partir des conditions initiales. Il est ainsi très commode d'isoler les variations séculaires et à longues périodes. Etant données les relations non linéaires liant (a, e, I) et (L, G, H) , les variations à longues périodes des variables de Delaunay ne sont pas simplement les projections des variations à longues périodes des éléments orbitaux : il est nécessaire de calculer toutes les variations des variables de Delaunay avant de procéder au filtrage. Cette conversion n'est pas à effectuer pour les angles qui sont les mêmes dans les deux jeux de variables.

Dans la théorie de Berger, les variations d'un élément E_i pris dans (a, e, I) sont exprimées sous la forme :

$$E_i = E_{i,0} + \sum_{k=-3}^7 \sum_{p=0}^9 \left[CC(i, k, p) \cos(p\tilde{l} + k\tilde{g}) + CS(i, k, p) \sin(p\tilde{l} + k\tilde{g}) \right] \quad (i = 1, 3) \quad (1)$$

p et k étant des entiers. Les angles sont représentés de la même manière en ajoutant toutefois un terme séculaire. On pose :

$$\begin{cases} a = a_0(1 + \varepsilon_1) \\ E_i = E_{i,0} + \varepsilon_i \quad \text{si } 2 \leq i \leq 3 \end{cases} \quad (2)$$

Ainsi $\varepsilon_i \ll 1$. On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{a} = \sqrt{a_0} \left[1 + \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\varepsilon_1^2}{8} + \mathcal{O}(\varepsilon_1^3) \right] \\ \sqrt{a(1-e^2)} = \sqrt{a_0(1-e_0^2)} \left[1 + \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{e_0}{1-e_0^2} \varepsilon_2 - \frac{e_0}{2(1-e_0^2)} \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{8} \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2(1-e_0^2)} \varepsilon_2^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right] \\ \sqrt{a(1-e^2)} \cos I = \sqrt{a_0(1-e_0^2)} \left\{ \cos I_0 \left[1 + \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{e_0}{1-e_0^2} \varepsilon_2 - \frac{e_0}{2(1-e_0^2)} \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1^2}{8} \right. \right. \\ \quad \left. \left. - \frac{1}{2(1-e_0^2)} \varepsilon_2^2 - \frac{\varepsilon_3^2}{2} \right] - \varepsilon_3 \sin I_0 \left[1 + \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{e_0}{1-e_0^2} \varepsilon_2 \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right\} \end{array} \right. \quad (3)$$

Les relations (1) et (2) définissent les variations des ε_i et permettent d'écrire tout produit $\varepsilon_i \varepsilon_j$ sous la forme :

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{K,P} \left[DC(i, j, K, P) \cos(P\tilde{l} + K\tilde{g}) + DS(i, j, k, p) \sin(P\tilde{l} + K\tilde{g}) \right] \quad (4)$$

En tenant compte des bornes de k et p dans la relation (1) et de la parité des fonctions sinus et cosinus on obtient : $-14 \leq K \leq 14$ et $0 \leq P \leq 18$. Mais la relation (1) ne permet de calculer totalement que les contributions correspondant à $-3 \leq K \leq 7$ et $0 \leq P \leq 9$.

Les formules (1) à (4) permettent enfin d'écrire :

$$\frac{L_i}{\mu} = \frac{L_{i,0}}{\mu} + \sum_{K,P} \left[BC(i, K, P) \cos(P\tilde{l} + K\tilde{g}) + BS(i, k, p) \sin(P\tilde{l} + K\tilde{g}) \right] \quad (i = 1, 3) \quad (5)$$

Avec :

$$\begin{cases} L_{1,0} = L_0 = \sqrt{\mu a_0} \\ L_{2,0} = G_0 = \sqrt{\mu a_0 (1 - e_0^2)} \\ L_{3,0} = H_0 = \sqrt{\mu a_0 (1 - e_0^2)} \cos I_0 \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} BC(1, K, P) &= \frac{a_0}{8} \left[4CC(1, K, P) - DC(1, 1, K, P) \right] \\ BC(2, K, P) &= \eta_0 * BC(1, K, P) \\ &\quad - \frac{a_0}{2\eta_0} \left[2e_0 CC(2, K, P) + e_0 DC(1, 2, K, P) + \frac{1}{\eta_0^2} DC(2, 2, K, P) \right] \\ BC(3, K, P) &= \cos I_0 * BC(2, K, P) - \frac{H_0}{2\sqrt{\mu}} \left[DC(3, 3, K, P) + \operatorname{tg} I_0 \{ 2CC(3, K, P) \right. \\ &\quad \left. + DC(1, 3, K, P) - \frac{2e_0}{\eta_0^2} DC(2, 3, K, P) \} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

avec $\eta_0 = \sqrt{1 - e_0^2} = \frac{G_0}{L_0}$. Des relations similaires permettent de calculer les coefficients BS en fonction des coefficients CS et DS .

La formule (5) exprime les variations des variables de Delaunay sous une forme permettant de séparer les différentes fréquences. La troncature du développement (3) induit des erreurs inférieures à la précision initiale de la théorie de Berger.

APPENDICE 5

Perturbations à longues périodes dues aux harmoniques tesséraux : couplages

Nous présentons un algorithme de construction de l'hamiltonien générant les termes à longues périodes dus aux effets de couplage des harmoniques tesséraux du potentiel terrestre entre eux, ou avec les harmoniques zonaux.

1) Effets directs des harmoniques tesséraux

Des tests nous ont montré que la perturbation due aux harmoniques tesséraux était à considérer plutôt dans le deuxième ordre que dans le troisième ordre comme cela a été fait dans le paragraphe III.D. La formule (III.29) nous permet d'écrire l'hamiltonien sous la forme :

$$\mathcal{K}_2^0 = -2! \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=1}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} k_2^0(nmpq) \quad (1)$$

Avec

$$k_2^0(nmpq) = \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_e}{a} \right)^n \mathcal{F}_{nmp}(I) \mathcal{G}_{npq}(e) \mathcal{S}_{nmpq}(l, g, h, \theta) \quad (2)$$

$\mathcal{F}_{nmp}(I)$ et $\mathcal{G}_{npq}(e)$ étant les fonctions de Kaula et \mathcal{S}_{nmpq} étant définie par :

$$\mathcal{S}_{nmpq} = \begin{bmatrix} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{bmatrix} \begin{matrix} (n-m) \text{ pair} \\ (n-m) \text{ impair} \end{matrix} \cos \psi_{nmpq} + \begin{bmatrix} S_{nm} \\ C_{nm} \end{bmatrix} \begin{matrix} (n-m) \text{ pair} \\ (n-m) \text{ impair} \end{matrix} \sin \psi_{nmpq}$$

avec $\psi_{nmpq} = (n - 2p)g + (n - 2p + q)l + m(h - \theta)$

Pour un satellite donné, il peut exister des jeux d'indices n, m, p, q dits résonnants, tels que l'angle ψ_{nmpq} correspondant décrive moins d'un cycle par jour. Ces combinaisons seront notées n^*, m^*, p^*, q^* tandis que les jeux non résonnants seront notés $n^\circ, m^\circ, p^\circ, q^\circ$. Il s'ensuit :

$$\mathcal{K}_2^0 = -2! \left(\sum_{n^* m^* p^* q^*} k_2^0(n^* m^* p^* q^*) + \sum_{n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ} k_2^0(n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ) \right) \quad (3)$$

Seuls les termes résonnants contribuent à l'hamiltonien à longues périodes du deuxième ordre :

$$\mathcal{K}_0^2 = -2! \sum_{n^* m^* p^* q^*} k_2^0(n^* m^* p^* q^*) \quad (4)$$

En vue des ordres suivants, on calcule :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1^1 &= \mathcal{K}_2^0 + \{\mathcal{K}_0^0; W_2\} \\ &= \mathcal{K}_2^0 + \mathcal{K}_0^2 - \mathcal{K}_2^0 \\ &= -2! \sum_{n^*m^*p^*q^*} k_2^0(n^*m^*p^*q^*)\end{aligned}\quad (5)$$

Il est également nécessaire de déterminer le générateur W_2 . Pour cela, il faut tenir compte de la présence du temps sidéral θ qui induit un hamiltonien dépendant explicitement du temps. On peut remédier à cette dépendance temporelle par le procédé classique qui consiste à étendre l'espace des phases en ajoutant θ et son conjugué Θ parmi les variables, et à additionner le terme $\dot{\theta}\Theta$ à l'hamiltonien non perturbé \mathcal{K}_0^0 .

Ainsi :

$$\{\mathcal{K}_0^0; W\} = -\frac{\mu^2}{L^3} \frac{\partial W}{\partial l} - \dot{\theta} \frac{\partial W}{\partial \theta} \quad (6)$$

L'équation permettant le calcul de W_2 s'écrit :

$$\begin{aligned}\{\mathcal{K}_0^0; W_2\} &= \mathcal{K}_0^2 - \mathcal{K}_2^0 \\ &= 2! \sum_{n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ} k_2^0(n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ)\end{aligned}\quad (7)$$

En notant $N = \frac{\mu^2}{L^3}$ et $W_2 = -2! \sum_{n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ} w_2(n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ)$, et en utilisant l'expression (2)

de k_2^0 , on obtient des équations de la forme :

$$\left[N \frac{\partial w_2}{\partial l} + \dot{\theta} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} \right] (n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ) = \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_e}{a} \right)^{n^\circ} \mathcal{F}_{n^\circ m^\circ p^\circ}(I) \mathcal{G}_{n^\circ p^\circ q^\circ}(e) \mathcal{S}_{n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ}(l, g, h, \theta) \quad (8)$$

Dans le membre de droite, seule $\mathcal{S}_{n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ}(l, g, h, \theta)$ dépend de l et θ ; on en déduit :

$$w_2(n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ) = \frac{\mu}{a} \left(\frac{R_e}{a} \right)^{n^\circ} \mathcal{F}_{n^\circ m^\circ p^\circ}(I) \mathcal{G}_{n^\circ p^\circ q^\circ}(e) \mathcal{P}_{n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ}(L, \theta) \bar{\mathcal{S}}_{n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ}(l, g, h, \theta) \quad (9)$$

On a noté

$$\begin{aligned}Q^\circ &= n^\circ - 2p^\circ + q^\circ \\ \mathcal{P}_{n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ}(L, \theta) &= \frac{1}{Q^\circ N - m^\circ \dot{\theta}} \\ \bar{\mathcal{S}}_{n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ}(l, g, h, \theta) &= \int \mathcal{S}_{n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ}(l, g, h, \theta) d\psi_{n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ} \\ &= \begin{bmatrix} -S_{nm} \\ -C_{nm} \end{bmatrix}_{(n-m) \text{ impair}}^{(n-m) \text{ pair}} \cos \psi_{nmpq} + \begin{bmatrix} C_{nm} \\ -S_{nm} \end{bmatrix}_{(n-m) \text{ impair}}^{(n-m) \text{ pair}} \sin \psi_{nmpq}\end{aligned}$$

W_2 est ainsi défini à une fonction indépendante de l et de θ près ; on choisit cette fonction nulle afin d'obtenir $\langle W_2 \rangle_l = \langle W_2 \rangle_\theta = 0$.

2) Couplage des harmoniques tesséraux entre eux

On se propose de calculer l'hamiltonien à longues périodes d'ordre 4 comprenant uniquement les couplages entre harmoniques tesséraux. Dans l'application de l'algorithme de construction, on omettra donc toutes les fonctions non relatives à cette perturbation. On a directement :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{K}}_0^4 &= 3\{\mathcal{K}_2^0; W_2\} + \{\mathcal{K}_0^2; W_2\} + 2\{\mathcal{K}_1^1; W_2\} \\ &= 4\left\{6 \sum_{n^*m^*p^*q^*} k_2^0(n^*m^*p^*q^*) + 3 \sum_{n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ} k_2^0(n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ); \sum_{n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ} w_2(n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ)\right\} \quad (10)\end{aligned}$$

Dans \mathcal{K}_0^4 , on ne retiendra que les termes à longues périodes. Sachant que les termes d'indices $n^*m^*p^*q^*$ sont toujours à longues périodes et que les termes d'indices $n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ$ sont à courtes périodes, il s'ensuit que :

- $\{k_2^0(n_1^*m_1^*p_1^*q_1^*); w_2(n_2^\circ m_2^\circ p_2^\circ q_2^\circ)\}$ ne peut générer que des termes à courtes périodes,
- $\{k_2^0(n_1^\circ m_1^\circ p_1^\circ q_1^\circ); w_2(n_2^\circ m_2^\circ p_2^\circ q_2^\circ)\}$ peut générer des termes à longues périodes soit par élimination complète des angles rapides l et θ lors des produits (nous parlerons alors de termes à longues périodes pures), soit par combinaison résonnante de ces angles (termes résonnants). Nous traiterons successivement ces deux cas après avoir explicité les crochets de Poisson du type $CP = \{k_2^0(n_1^\circ m_1^\circ p_1^\circ q_1^\circ); w_2(n_2^\circ m_2^\circ p_2^\circ q_2^\circ)\}$. Nous développerons aussi leurs dérivées partielles par rapport aux variables de Delaunay.

a. Calcul des crochets de Poisson $CP = \{k_2^0; w_2\}$ et de leurs dérivées

Dans tout ce qui suit, on ne considérera que des indices du type $n^\circ m^\circ p^\circ q^\circ$ qui pourront donc être notés sans ambiguïté $nmpq$, afin d'alléger les notations. Pour calculer les crochets de Poisson, on utilise l'expression (2) de k_2^0 avec les indices $n_1 m_1 p_1 q_1$ et l'expression (9) de w_2 avec les indices $n_2 m_2 p_2 q_2$. Lorsque cela ne peut créer de confusion, toute fonction $\phi_{n_1 m_1 p_1 q_1}$ se référant aux indices $n_1 m_1 p_1 q_1$ sera simplement notée ϕ_1 .

On note $\mathcal{F}'(I)$ et $\mathcal{F}''(I)$ les dérivées premières et secondes de $\mathcal{F}(I)$ par rapport à I , $\mathcal{G}'(e)$ et $\mathcal{G}''(e)$ les dérivées premières et secondes de $\mathcal{G}(e)$ par rapport à e .

Les calculs exempts de difficultés mais fastidieux ne seront pas exposés en détail. On obtient le formulaire :

$$\begin{aligned}P_1 &= n_1 - 2p_1 \\ P_2 &= n_2 - 2p_2 \\ Q_1 &= n_1 - 2p_1 + q_1 \\ Q_2 &= n_2 - 2p_2 + q_2 \\ \mathcal{P}_2 &= \frac{1}{Q_2 N - m_2 \dot{\theta}} \\ R_2 &= Q_2 N \mathcal{P}_2 \\ \eta &= \frac{G}{L}\end{aligned} \quad (11.1)$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{\mu}{a}\right)^2 \left(\frac{R_e}{a}\right)^{n_1+n_2} \mathcal{P}_2 \quad (11.2)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\eta^2}{e} \mathcal{G}'_1(e) - 2(n_1 + 1) \mathcal{G}_1(e) \\ A_2 &= \frac{\eta^2}{e} \mathcal{G}'_2(e) - [2(n_2 + 1) - 3R_2] \mathcal{G}_2(e) \\ B_1 &= \frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_1(I) \mathcal{G}_1(e) - \frac{\eta^2}{e} \mathcal{F}_1(I) \mathcal{G}'_1(e) \\ B_2 &= \frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_2(I) \mathcal{G}_2(e) - \frac{\eta^2}{e} \mathcal{F}_2(I) \mathcal{G}'_2(e) \\ C_1 &= \frac{1}{\sin I} \mathcal{F}'_1(I) \mathcal{G}_1(e) \\ C_2 &= \frac{1}{\sin I} \mathcal{F}'_2(I) \mathcal{G}_2(e) \\ T_1 &= \frac{1}{G} [Q_2 \eta \mathcal{F}_1(I) A_1 + P_2 B_1 - m_2 C_1] \\ T_2 &= \frac{1}{G} [Q_1 \eta \mathcal{F}_2(I) A_2 + P_1 B_2 - m_1 C_2] \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= -AT_2 \mathcal{F}_1(I) \mathcal{G}_1(e) \\ \lambda &= -AT_1 \mathcal{F}_2(I) \mathcal{G}_2(e) \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} \psi^+ &= \psi_1 + \psi_2 = (Q_1 + Q_2)l + (P_1 + P_2)g + (m_1 + m_2)(h - \theta) \\ \psi^- &= \psi_1 - \psi_2 = (Q_1 - Q_2)l + (P_1 - P_2)g + (m_1 - m_2)(h - \theta) \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\begin{aligned} C^+ &= C_{n_1 m_1} C_{n_2 m_2} + S_{n_1 m_1} S_{n_2 m_2} \\ C^- &= C_{n_1 m_1} C_{n_2 m_2} - S_{n_1 m_1} S_{n_2 m_2} \\ S^+ &= C_{n_1 m_1} S_{n_2 m_2} + S_{n_1 m_1} C_{n_2 m_2} \\ S^- &= C_{n_1 m_1} S_{n_2 m_2} - S_{n_1 m_1} C_{n_2 m_2} \end{aligned} \quad (11.6)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} +C^- \\ -S^+ \\ -S^+ \\ -C^- \end{bmatrix} ; & \alpha_2 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} +S^+ \\ +C^- \\ +C^- \\ -S^+ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{si } (n_1 - m_1) \text{ pair et } (n_2 - m_2) \text{ pair} \\ \text{si } (n_1 - m_1) \text{ pair et } (n_2 - m_2) \text{ impair} \\ \text{si } (n_1 - m_1) \text{ impair et } (n_2 - m_2) \text{ pair} \\ \text{si } (n_1 - m_1) \text{ impair et } (n_2 - m_2) \text{ impair} \end{array} \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} +C^+ \\ -S^- \\ +S^- \\ +C^+ \end{bmatrix} ; & \alpha_4 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -S^- \\ -C^+ \\ +C^+ \\ -S^- \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{si } (n_1 - m_1) \text{ pair et } (n_2 - m_2) \text{ pair} \\ \text{si } (n_1 - m_1) \text{ pair et } (n_2 - m_2) \text{ impair} \\ \text{si } (n_1 - m_1) \text{ impair et } (n_2 - m_2) \text{ pair} \\ \text{si } (n_1 - m_1) \text{ impair et } (n_2 - m_2) \text{ impair} \end{array} \end{aligned} \quad (11.7)$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} CP &= \{k_2^0(n_1 m_1 p_1 q_1); w_2(n_2 m_2 p_2 q_2)\} \\ &= \alpha_1(\lambda - \bar{\lambda}) \cos \psi^+ + \alpha_2(\lambda - \bar{\lambda}) \sin \psi^+ + \alpha_3(\lambda + \bar{\lambda}) \cos \psi^- + \alpha_4(\lambda + \bar{\lambda}) \sin \psi^- \end{aligned} \quad (11.8)$$

Les dérivées partielles par rapport aux variables de Delaunay, de ces crochets de Poisson, seront nécessaires pour passer de l'hamiltonien \mathcal{K}_0^4 au second membre du système différentiel moyen.

Seuls ψ^+ et ψ^- doivent être dérivés par rapport aux variables angulaires :

$$\begin{aligned} \frac{\partial CP}{\partial l} &= (Q_1 + Q_2)\alpha_2(\lambda - \bar{\lambda}) \cos \psi^+ - (Q_1 + Q_2)\alpha_1(\lambda - \bar{\lambda}) \sin \psi^+ \\ &\quad + (Q_1 - Q_2)\alpha_4(\lambda + \bar{\lambda}) \cos \psi^- - (Q_1 - Q_2)\alpha_3(\lambda + \bar{\lambda}) \sin \psi^- \\ \frac{\partial CP}{\partial g} &= (P_1 + P_2)\alpha_2(\lambda - \bar{\lambda}) \cos \psi^+ - (P_1 + P_2)\alpha_1(\lambda - \bar{\lambda}) \sin \psi^+ \\ &\quad + (P_1 - P_2)\alpha_4(\lambda + \bar{\lambda}) \cos \psi^- - (P_1 - P_2)\alpha_3(\lambda + \bar{\lambda}) \sin \psi^- \\ \frac{\partial CP}{\partial h} &= (m_1 + m_2)\alpha_2(\lambda - \bar{\lambda}) \cos \psi^+ - (m_1 + m_2)\alpha_1(\lambda - \bar{\lambda}) \sin \psi^+ \\ &\quad + (m_1 - m_2)\alpha_4(\lambda + \bar{\lambda}) \cos \psi^- - (m_1 - m_2)\alpha_3(\lambda + \bar{\lambda}) \sin \psi^- \end{aligned} \quad (12)$$

Les dérivées par rapport aux actions se calculent par le formulaire suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial L} &= \frac{1}{L} \left[- \left(2(n_1 + 2) + \frac{\eta^2}{e^2} \right) \frac{\eta^2}{e} \mathcal{G}'_1(e) + \frac{\eta^4}{e^2} \mathcal{G}''_1(e) \right] \\ \frac{\partial A_2}{\partial L} &= \frac{1}{L} \left[9R_2(R_2 - 1)\mathcal{G}_2(e) + \left(3R_2 - 2(n_2 + 2) - \frac{\eta^2}{e^2} \right) \frac{\eta^2}{e} \mathcal{G}'_2(e) + \frac{\eta^4}{e^2} \mathcal{G}''_2(e) \right] \\ \frac{\partial B_1}{\partial L} &= \frac{\eta^2}{eL} \left[\frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_1(I)\mathcal{G}'_1(e) + \left(2 + \frac{\eta^2}{e^2} \right) \mathcal{F}_1(I)\mathcal{G}'_1(e) - \frac{\eta^2}{e} \mathcal{F}_1(I)\mathcal{G}''_1(e) \right] \\ \frac{\partial B_2}{\partial L} &= \frac{\eta^2}{eL} \left[\frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_2(I)\mathcal{G}'_2(e) + \left(2 + \frac{\eta^2}{e^2} \right) \mathcal{F}_2(I)\mathcal{G}'_2(e) - \frac{\eta^2}{e} \mathcal{F}_2(I)\mathcal{G}''_2(e) \right] \\ \frac{\partial C_1}{\partial L} &= \frac{1}{G \sin I} \frac{\eta^3}{e} \mathcal{F}'_1(I)\mathcal{G}'_1(e) \\ \frac{\partial C_2}{\partial L} &= \frac{1}{G \sin I} \frac{\eta^3}{e} \mathcal{F}'_2(I)\mathcal{G}'_2(e) \\ \frac{\partial T_1}{\partial L} &= \frac{1}{G} \left[Q_2 \eta \mathcal{F}_1(I) \left(\frac{\partial A_1}{\partial L} - \frac{A_1}{L} \right) + P_2 \frac{\partial B_1}{\partial L} - m_2 \frac{\partial C_1}{\partial L} \right] \\ \frac{\partial T_2}{\partial L} &= \frac{1}{G} \left[Q_1 \eta \mathcal{F}_2(I) \left(\frac{\partial A_2}{\partial L} - \frac{A_2}{L} \right) + P_1 \frac{\partial B_2}{\partial L} - m_1 \frac{\partial C_2}{\partial L} \right] \\ \frac{\partial \lambda}{\partial L} &= \frac{\lambda}{L} \left[3N Q_2 \mathcal{P}_2 - 2(n_1 + n_2 + 2) \right] - \mathcal{A} \mathcal{F}_2(I) \left[\frac{\eta^2}{eL} \mathcal{G}'_2(e) T_1 + \mathcal{G}_2(e) \frac{\partial T_1}{\partial L} \right] \\ \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial L} &= \frac{\bar{\lambda}}{L} \left[3N Q_2 \mathcal{P}_2 - 2(n_1 + n_2 + 2) \right] - \mathcal{A} \mathcal{F}_1(I) \left[\frac{\eta^2}{eL} \mathcal{G}'_1(e) T_2 + \mathcal{G}_1(e) \frac{\partial T_2}{\partial L} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_1}{\partial G} &= \frac{\eta}{eL} \left[\left(2(n_1 + 2) + \frac{\eta^2}{e^2} \right) \mathcal{G}'_1(e) - \frac{\eta^2}{e} \mathcal{G}''_1(e) \right] \\
\frac{\partial A_2}{\partial G} &= -\frac{\eta}{eL} \left[\left(3R_2 - 2(n_2 + 2) - \frac{\eta^2}{e^2} \right) \mathcal{G}'_2(e) + \frac{\eta^2}{e} \mathcal{G}''_2(e) \right] \\
\frac{\partial B_1}{\partial G} &= \frac{1}{G} \left\{ \frac{\cos I}{\sin I} \left(\frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}''_1(I) - \frac{1}{\sin^2 I} \mathcal{F}'_1(I) \right) \mathcal{G}_1(e) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\eta^2}{e} \left[2 \frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_1(I) + \left(2 + \frac{\eta^2}{e^2} \right) \mathcal{F}_1(I) \right] \mathcal{G}'_1(e) + \frac{\eta^4}{e^2} \mathcal{F}_1(I) \mathcal{G}''_1(e) \right\} \\
\frac{\partial B_2}{\partial G} &= \frac{1}{G} \left\{ \frac{\cos I}{\sin I} \left(\frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}''_2(I) - \frac{1}{\sin^2 I} \mathcal{F}'_2(I) \right) \mathcal{G}_2(e) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\eta^2}{e} \left[2 \frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_2(I) + \left(2 + \frac{\eta^2}{e^2} \right) \mathcal{F}_2(I) \right] \mathcal{G}'_2(e) + \frac{\eta^4}{e^2} \mathcal{F}_2(I) \mathcal{G}''_2(e) \right\} \\
\frac{\partial C_1}{\partial G} &= \frac{1}{G \sin I} \left[\left(\mathcal{F}''_1(I) - \frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_1(I) \right) \frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{G}_1(e) - \frac{\eta^2}{e} \mathcal{F}'_1(I) \mathcal{G}'_1(e) \right] \\
\frac{\partial C_2}{\partial G} &= \frac{1}{G \sin I} \left[\left(\mathcal{F}''_2(I) - \frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_2(I) \right) \frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{G}_2(e) - \frac{\eta^2}{e} \mathcal{F}'_2(I) \mathcal{G}'_2(e) \right] \\
\frac{\partial T_1}{\partial G} &= \frac{1}{G} \left[Q_2 \eta \left(\mathcal{F}_1(I) \frac{\partial A_1}{\partial G} + \frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_1(I) \frac{A_1}{G} \right) + P_2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial G} - \frac{B_1}{G} \right) - m_2 \left(\frac{\partial C_1}{\partial G} - \frac{C_1}{G} \right) \right] \\
\frac{\partial T_2}{\partial G} &= \frac{1}{G} \left[Q_1 \eta \left(\mathcal{F}_2(I) \frac{\partial A_2}{\partial G} + \frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_2(I) \frac{A_2}{G} \right) + P_1 \left(\frac{\partial B_2}{\partial G} - \frac{B_2}{G} \right) - m_1 \left(\frac{\partial C_2}{\partial G} - \frac{C_2}{G} \right) \right] \\
\frac{\partial \lambda}{\partial G} &= -\mathcal{A} \left[\left(\frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_2(I) \mathcal{G}_2(e) - \frac{\eta^2}{e} \mathcal{F}_2(I) \mathcal{G}'_2(e) \right) \frac{T_1}{G} + \mathcal{F}_2(I) \mathcal{G}_2(e) \frac{\partial T_1}{\partial G} \right] \\
\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial G} &= -\mathcal{A} \left[\left(\frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_1(I) \mathcal{G}_1(e) - \frac{\eta^2}{e} \mathcal{F}_1(I) \mathcal{G}'_1(e) \right) \frac{T_2}{G} + \mathcal{F}_1(I) \mathcal{G}_1(e) \frac{\partial T_2}{\partial G} \right]
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_1}{\partial H} &= -\frac{1}{G \sin I} \left[\left(-\frac{\mathcal{F}'_1(I)}{\sin^2 I} + \frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}''_1(I) \right) \mathcal{G}_1(e) - \frac{\eta^2}{e} \mathcal{F}'_1(I) \mathcal{G}'_1(e) \right] \\
\frac{\partial B_2}{\partial H} &= -\frac{1}{G \sin I} \left[\left(-\frac{\mathcal{F}'_2(I)}{\sin^2 I} + \frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}''_2(I) \right) \mathcal{G}_2(e) - \frac{\eta^2}{e} \mathcal{F}'_2(I) \mathcal{G}'_2(e) \right] \\
\frac{\partial C_1}{\partial H} &= -\frac{1}{G \sin^2 I} \left(-\frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_1(I) + \mathcal{F}''_1(I) \right) \mathcal{G}_1(e) \\
\frac{\partial C_2}{\partial H} &= -\frac{1}{G \sin^2 I} \left(-\frac{\cos I}{\sin I} \mathcal{F}'_2(I) + \mathcal{F}''_2(I) \right) \mathcal{G}_2(e) \\
\frac{\partial T_1}{\partial H} &= \frac{1}{G} \left[-Q_2 \eta \frac{1}{G \sin I} \mathcal{F}'_1(I) A_1 + P_2 \frac{\partial B_1}{\partial H} - m_2 \frac{\partial C_1}{\partial H} \right] \\
\frac{\partial T_2}{\partial H} &= \frac{1}{G} \left[-Q_1 \eta \frac{1}{G \sin I} \mathcal{F}'_2(I) A_2 + P_1 \frac{\partial B_2}{\partial H} - m_1 \frac{\partial C_2}{\partial H} \right]
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial H} &= \mathcal{A} \left[\frac{1}{G \sin I} \mathcal{F}'_2(I) T_1 - \mathcal{F}_2(I) \frac{\partial T_1}{\partial H} \right] \mathcal{G}_2(e) \\ \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial H} &= \mathcal{A} \left[\frac{1}{G \sin I} \mathcal{F}'_1(I) T_2 - \mathcal{F}_1(I) \frac{\partial T_2}{\partial H} \right] \mathcal{G}_1(e)\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial CP}{\partial L} &= \alpha_1 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial L} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial L} \right) \cos \psi^+ + \alpha_2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial L} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial L} \right) \sin \psi^+ \\ &\quad + \alpha_3 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial L} + \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial L} \right) \cos \psi^- + \alpha_4 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial L} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial L} \right) \sin \psi^- \\ \frac{\partial CP}{\partial G} &= \alpha_1 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial G} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial G} \right) \cos \psi^+ + \alpha_2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial G} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial G} \right) \sin \psi^+ \\ &\quad + \alpha_3 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial G} + \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial G} \right) \cos \psi^- + \alpha_4 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial G} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial G} \right) \sin \psi^- \\ \frac{\partial CP}{\partial H} &= \alpha_1 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial H} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial H} \right) \cos \psi^+ + \alpha_2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial H} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial H} \right) \sin \psi^+ \\ &\quad + \alpha_3 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial H} + \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial H} \right) \cos \psi^- + \alpha_4 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial H} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial H} \right) \sin \psi^-\end{aligned} \tag{16}$$

b. Calcul des termes à longues périodes pures

Nous voulons calculer les termes dont les arguments ne contiennent plus les angles rapides l et θ . L'expression (11.5) des arguments ψ^+ et ψ^- nous indique que l'angle θ ne peut jamais être absent de ψ^+ ; en effet, son coefficient, $m_1 + m_2$, ne peut pas être nul puisque m_1 et m_2 sont strictement positifs. En ce qui concerne ψ^- une condition nécessaire pour obtenir des longues périodes est que $m_1 = m_2$. L'autre condition porte sur le coefficient de l et s'écrit :

$$n_1 - 2p_1 + q_1 = n_2 - 2p_2 + q_2 \tag{17}$$

Comme dans le développement (1), les indices q ne sont pas bornés, l'équation (17) admet une infinité de solutions. Cependant, $|q_1|$ et $|q_2|$ représentent respectivement les ordres de développement en excentricité des fonctions k_2^0 et w_2 . En pratique, ces développements seront tronqués à un ordre q_M et on ne considérera donc que les solutions telles que $|q_1| \leq q_M$ et $|q_2| \leq q_M$. Dans ces conditions l'équation (17) admet un nombre fini de solutions que l'on peut trouver avec un calculateur, en décrivant de manière exhaustive toutes les combinaisons $n_1 p_1 q_1 n_2 p_2$ possibles, puis en calculant $q_2 = (n_1 - 2p_1 + q_1) - (n_2 - 2p_2)$. La combinaison n'est retenue que si $|q_2| \leq q_M$. On aura alors :

$$\psi^- = (n_1 - n_2 - 2p_1 + 2p_2)g = P_{12}g \tag{18}$$

Les solutions sont indépendantes du satellite considéré, mais rappelons qu'il faut en outre délaissier les combinaisons telles que $(n_1 m_1 p_1 q_1)$ ou $(n_2 m_2 p_2 q_2)$ soient des jeux résonnants pour les effets directs. Ces derniers sont dépendants du satellite.

Pour chaque combinaison $(n_1 m p_1 q_1 ; n_2 m p_2 q_2)$ sélectionnée, il faut encore calculer les dérivées temporelles des variables. On a :

$$\begin{cases} \dot{v}'_i = \frac{1}{4!} \frac{\partial \mathcal{K}_0^4}{\partial V'_i} \\ \dot{V}'_i = -\frac{1}{4!} \frac{\partial \mathcal{K}_0^4}{\partial v'_i} \end{cases}$$

D'après la formule (10), la contribution à l'hamiltonien moyen de chaque combinaison sélectionnée vaut $12\{k_2^0(n_1 m p_1 q_1); w_2(n_2 m p_2 q_2)\}$. On en déduit que le second membre correspondant à chaque combinaison s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{v}'_i = \frac{1}{2} \frac{\partial CP}{\partial V'_i} \\ \dot{V}'_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial CP}{\partial v'_i} \end{cases} \quad (19)$$

Dans les expressions des dérivées partielles de CP données au paragraphe 2.a, il faut utiliser les nouvelles variables (v'_i, V'_i) . Dans les formules (12) et (16), on ne retiendra que les parties d'argument ψ^- . Ces expressions étant compliquées (elles incluent les fonctions d'excentricité et d'inclinaison et leurs dérivées premières et secondes) et les combinaisons sélectionnées étant nombreuses (plusieurs milliers en se limitant à $q_M = 3$), il est impensable de les calculer à chaque pas d'une intégration numérique. Cependant, les effets concernés sont très faibles ; on peut donc les calculer une fois pour toutes pour un satellite donné en utilisant des éléments a_0, e_0, I_0 constants (valeurs moyennes de a, e et I sur l'intervalle considéré). Ainsi, pour chaque combinaison on obtient un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{v}'_i = c_i \cos(P_{12})g' + s_i \sin(P_{12})g' \\ \dot{V}'_i = C_i \cos(P_{12})g' + S_i \sin(P_{12})g' \end{cases} \quad (20)$$

où les c_i, s_i, C_i, S_i sont des coefficients numériques. On peut ensuite effectuer une

sommation sur toutes les contributions pour obtenir la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{l}' = \sum_{j \geq 0} \left(\tilde{c}_{1j} \cos jg' + \tilde{s}_{1j} \sin jg' \right) \\ \dot{g}' = \sum_{j \geq 0} \left(\tilde{c}_{2j} \cos jg' + \tilde{s}_{2j} \sin jg' \right) \\ \dot{h}' = \sum_{j \geq 0} \left(\tilde{c}_{3j} \cos jg' + \tilde{s}_{3j} \sin jg' \right) \\ \dot{L}' = 0 \\ \dot{G}' = \sum_{j \geq 1} \left(\tilde{C}_{2j} \cos jg' + \tilde{S}_{2j} \sin jg' \right) \\ \dot{H}' = 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

\tilde{c}_{ij} , \tilde{s}_{ij} , \tilde{C}_{2j} et \tilde{S}_{2j} étant des coefficients numériques.

Les variations de L' et G' sont nulles car leurs variables conjuguées l' et g' sont absentes de l'hamiltonien. Les amplitudes des effets décroissent très vite lorsque j augmente, si bien qu'elles deviennent négligeables pour $j > 2$. Ce système très compact est ensuite directement additionné aux autres effets perturbateurs pour être intégré numériquement.

Cette démarche a été adoptée et testée avec succès dans le cas du satellite Lageos (voir paragraphe 4). Une intégration analytique approximative du système trouvé en utilisant $\dot{g}' = C^{te} = -4.332 \cdot 10^{-7} rd/s$, donne un très bon ordre de grandeur des effets à longues périodes issus des couplages des harmoniques tesséraux. Ici, le calcul a été fait en se limitant à $n \leq 10$, $m \leq 10$ et $q_M = 4$ (en fait l'orbite de Lageos étant élevée et peu excentrique, on constate que l'on obtient tous les effets pour $n \leq 6$, $m \leq 6$ et $q_M = 2$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 * \Delta e' \simeq \quad \quad \quad + 0.06m \cos g' - 0.12m \sin g' \\ a_0 * \Delta h' \simeq -0.79m/an \\ a_0 * \Delta(l' + g') \simeq -1.15m/an + 0.01m \cos g' \end{array} \right. \quad (22)$$

Dans le cas d'un satellite relativement bas tel que Starlette on trouve des effets plus conséquents ($n \leq 15$, $m \leq 15$ et $q_M = 4$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 * \Delta e' \simeq \quad \quad \quad + 0.09m \cos g' + 0.68m \sin g' - 0.01m \sin 2g' \\ a_0 * \Delta I' \simeq \quad \quad \quad - 0.01m \sin g' \\ a_0 * \Delta h' \simeq +19.86m/an - 0.15m \cos g' - 0.06m \sin g' \\ a_0 * \Delta(l' + g') \simeq +23.49m/an + 0.38m \cos g' + 0.01m \sin g' \end{array} \right. \quad (23)$$

c. Termes résonnants d'ordre 4

Il s'agit de mettre en évidence les combinaisons d'indices $(n_1 m_1 p_1 q_1)$ et $(n_2 m_2 p_2 q_2)$ telles que l'un au moins des angles ψ^+ et ψ^- explicité dans la formule (11.5)

- contienne au moins une des variables rapides l et θ (dans le cas contraire on obtient une longue période pure),
- ait une fréquence inférieure à 1 cycle par jour (condition de résonance).

Malheureusement, cette recherche nécessite l'étude systématique de toutes les combinaisons (on ne se limite plus à des combinaisons d'entiers satisfaisant une condition telle que (17)) incluant le calcul explicite des angles ψ^+ et ψ^- . Le nombre des solutions peut augmenter très vite lorsque les bornes de variations des indices n , m et q sont étendues. Par exemple, pour le cas du satellite Starlette, en se limitant à $n \leq 10$, $m \leq 10$ et $q_M = 2$, il existe plus de 20000 combinaisons induisant des périodes comprises entre 1.4 et 3.1 jours. Il serait encore nécessaire de calculer chaque contribution au système différentiel en utilisant (11) à (16). Contrairement aux cas des longues périodes, il y a un très grand nombre de fréquences différentes et on ne peut obtenir une forme compacte par sommation. La conclusion pourrait être très pessimiste. Cependant plusieurs arguments peuvent être mis en avant :

- à amplitude fixée, les effets trouvés pour une fréquence donnée dans l'hamiltonien sont approximativement inversement proportionnels à cette fréquence (en effet, lors de l'intégration on divise par la fréquence),
- les effets à longues périodes pures mis en évidence sont de taille modérée (quelques mètres au plus),
- hormis les cas de résonance profonde, les arguments résonnants induisent des fréquences nettement plus élevées que les arguments à longues périodes pures (fréquence correspondant à l'argument du périégée) : périodes de quelques jours contre quelques centaines à quelques milliers de jours.

L'ensemble de ces considérations nous permet de penser que la non prise en compte des résonances d'ordre 4 issues du couplage des harmoniques tesséraux est sans aucune conséquence dans le cas des satellites qui ne sont pas en résonance profonde.

3) Couplages entre harmoniques tesséraux et harmoniques zonaux

Pour traiter ces couplages, il est possible de considérer les harmoniques zonaux comme des harmoniques tesséraux particuliers et de reprendre les développements déjà effectués. Il faut prendre en compte deux différences par rapport au cas où $m \neq 0$ traité précédemment :

- dans le calcul des effets directs (paragraphe 1), les longues périodes (indices avec *) sont des longues périodes pures (coefficients de l et de θ nuls) et non des résonances,
- dans le cas de J_2 , les couplages obtenus sont du troisième ordre et il faudrait encore considérer des termes en J_2^2 pour obtenir l'ordre 4 complet ; ceci n'a pas été réalisé.

Moyennant ces précautions, on peut donc utiliser les formules (10) à (16) en utilisant successivement $m_1 = 0$ et $m_2 \neq 0$ puis $m_1 \neq 0$ et $m_2 = 0$. En reprenant la formule (10) et l'argumentation qui suit, on observe que :

- $\{k_2^0(n_1^*m_1^*p_1^*q_1^*); w_2(n_2^{\circ}m_2^{\circ}p_2^{\circ}q_2^{\circ})\}$ ne peut générer que des termes à courtes périodes,
- $\{k_2^0(n_1^{\circ}m_1^{\circ}p_1^{\circ}q_1^{\circ}); w_2(n_2^{\circ}m_2^{\circ}p_2^{\circ}q_2^{\circ})\}$ ne peut générer des termes à longues périodes que par combinaison résonnante. En effet, comme le temps sidéral n'apparaît que dans l'un des deux termes du crochet de Poisson, cette variable ne peut être purement éliminée dans les produits et on ne peut pas obtenir de longues périodes pures.

C'est pourquoi l'algorithme utilisé est le même que celui qui est décrit en 2.c. Les résultats sont également similaires :

- On ne trouve aucune résonance impliquant J_2 , ni pour Starlette, ni pour Lageos.
- Pour Lageos, aucune combinaison résonnante impliquant des harmoniques zonaux n'a été mise en évidence (nous avons testé jusqu'au degré 7)
- Pour Starlette, on trouve des combinaisons résonnantes impliquant les zonaux à partir du degré 3, avec des périodes comprises entre 1.4 et 3.5 jours, mais les amplitudes calculées sont toujours inférieures au millimètre.

4) Tests

Une simulation a été effectuée (Pierre Exertier et Yves Boudon) en utilisant les paramètres du satellite Lageos, suivant le schéma décrit dans la partie III, avec les spécifications suivantes :

- Période de test : 2 ans.
- Perturbations pour le mouvement instantané : potentiel complet jusqu'aux degré et ordre 10.
- Taille des fenêtres pour le filtrage : 24 jours.
- Périodes éliminées : périodes inférieures à 3 jours (on élimine ainsi les résonances ; en effet, des tests complémentaires nous ont montré que cette solution était finalement préférable à une coupure située entre 1 et 2 jours. Il en résulte à la fois une meilleure stabilité et la possibilité d'utiliser un pas de calcul plus grand).
- Perturbations pour le mouvement moyen : termes à longues périodes issues des harmoniques zonaux de degré 2 à 10 et du couplage des harmoniques tesséraux jusqu'à (10,10) tels qu'ils sont calculés au paragraphe (3).

Résultats de la comparaison : les résidus sont inférieurs à 1 cm sur a , $a * e$ et $a * I$ sans signal apparent, et de 4 cm sur $a * h$ (le signal obtenu est exactement le signal des erreurs numériques du mouvement instantané). Les résultats sur l et g sont beaucoup moins bons (plusieurs mètres) en raison de la faible excentricité de l'orbite et les résidus sur la somme $l + g$ font encore nettement apparaître les erreurs numériques issues de l'intégration numérique servant d'orbite de référence dans ces tests.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Abalakine, V. : 1974, "Theory of the artificial satellite motion", La géodynamique spatiale, 33-273, Ecole d'été CNES. Lannion, France.

Balmino, G. : 1969, "Méthode d'intégration numérique de Bulirsch et Stoer. Cas du satellite artificiel", Note Technique GRGS.

Balmino, G. : 1974, "Coriolis forces in numerical integration of satellite orbits, and absolute reference system", *Celestial Mechanics* **10**, 423-436.

Balmino, G. : 1974, "Détermination du potentiel de la Terre par les méthodes spatiales", La géodynamique spatiale, 276-471, Ecole d'été CNES. Lannion, France.

Balmino, G. : 1988, "Sur la caractérisation géométrique des éclipses en géodésie spatiale", Note Technique du Bureau Gravimétrique International.

Barlier, F., Berger, C., Falin, J.L., Kockarts, G., Thuillier, G. : 1977, "A thermospheric model based on satellite drag data", *Aeronomica Acta* **185**.

Berger, X. : 1975, "Théorie analytique programmée du mouvement des satellites artificiels sous l'action gravitationnelle de la Terre", *Celestial Mechanics* **11**, 281-300.

Borderies, N. : 1976, "La méthode de centrage en géodésie spatiale", Thèse de l'université Paul Sabatier, Toulouse.

Brouwer, D. : 1959, "Solution of the problem of artificial satellite theory without drag", *Astronomical Journal* **64**, 378-397.

Campbell, J.A., Jefferys, W.H. : 1970, "Equivalence of the perturbation theories of Hori and Deprit", *Celestial Mechanics* **2**, 467-473.

Claes, H., Henrard, J., Zune, J.M., Moons, M. and Lemaitre, A. : 1988, "Guide d'utilisation du manipulateur de séries [MS]", Internal publication. Department of Mathematics, FUNDP, Namur.

Coffey, S., Deprit, A. : 1980, "Short period elimination in satellite theory", AIAA/AAS Astrodynamics conference, Denvers, Massachussets.

Delhaise, F. : 1991, "Analytical treatment of air drag and Earth oblateness effects upon an artificial satellite", *Celstial Mechanics*, sous presse.

Deprit, A. : 1969, "Canonical transformations depending on a small parameter", *Celestial Mechanics* **1**, 12-30.

- Deprit, A. and Rom, A.** : 1970, "The main problem of artificial satellite theory for small and moderate eccentricities", *Celestial Mechanics* **2**, 166-206.
- Deprit, A.** : 1980, "The elimination of the parallax in satellite theory", *Celestial Mechanics* **24**, 111-153.
- Exertier, P.** : 1988, "Orbitographie des satellites artificiels sur de grandes périodes de temps. Possibilités d'applications", Thèse de doctorat de l'Observatoire de Paris.
- Exertier, P.** : 1990, "Precise determination of mean orbital elements from osculating elements, by semi-analytical filtering", *Manuscripta Geodaetica* **15**, 115-123.
- Ferraz Mello, S.** : 1964, "Sur le problème de la pression de radiation dans la théorie des satellites artificiels", *Compte rendu à l'Académie des Sciences de Paris* **258**, 463-466.
- Gaposchkin, E.M., Lambeck, K.** : 1969, "1969 Smithsonian standard Earth (II)", *Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report* **315**.
- Gaposchkin, E.M.** : 1973, "1973 Smithsonian standard Earth (III)", *Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report* **353**.
- Gedeon, G.S., Douglas, B.C., Palmiter, M.T.** : 1967, "Resonance effects on eccentric satellite orbits", *The Journal of the Astronautical Sciences* **14**, 147-157.
- Henrard, J.** : 1970, "Perturbation technique in the theory of nonlinear oscillations and in celestial mechanics", *Boing Scientific Research Laboratories. Mathematical and Information Sciences Report* **No 44**.
- IERS standards (1989)** : 1989, IERS technical note 3, D.D. McCarthy éditeur.
- Jacchia, L.G.** : 1964, "Static diffusion models of the upper atmosphere with empirical temperature profiles", *Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report* **170**.
- Kaula, W.M.** : 1962, "Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite", *Astronomical Journal* **67-5** 300-303.
- Kaula, W.M.** : 1966, "Theory of satellite geodesy", Blaisdell publ. Co., Walthman, Mass.
- Kinoshita, H.** : 1977, "Third-order solution of an artificial satellite theory", *Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report* **379**.
- Kozai, Y.** : 1961a, "The gravitational field of the Earth derived from motions of three satellites", *Astronomical Journal* **66-1**, 8-10.
- Kozai, Y.** : 1961b, "Effects of solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite", *Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report* **56**.

- Kozai, Y.** : 1962a, "Second-order solution of artificial satellite theory without air drag", *Astronomical Journal* **67-7**, 446-461.
- Kozai, Y.** : 1962b, "Mean values of cosine functions in elliptic motion", *Astronomical Journal* **67**, 311.
- Kozai, Y.** : 1966, "Lunisolar perturbations with short periods", *Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report* **235**.
- Kozai, Y.** : 1969, "Revised values for coefficients of zonal spherical harmonics in the geopotential", *Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report* **295**.
- Lala, P. et Sehna, L.** : 1969, "The Earth's shadowing effects in the short-periodic perturbations of satellite orbits", XIIth Plenary Meeting Cospar, Prague.
- Laskar, J.** : 1988, "Secular evolution of the solar system over 10 million years", *Astronomy and Astrophysics* **198**, 341-362.
- Lundquist, C.A., Veis, G.** : 1966 "Geodetic parameters for a 1966 Smithsonian institution standard Earth", *Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report* **200**.
- Metris, G.** : 1991, "Mean values of particular functions in the elliptic motion", *Celestial Mechanics*, sous presse.
- Moons, M.** : 1991, "MINIMS : User's Guide", Rapport interne du département de mathématiques, F.N.D.P. Namur, Belgique.
- Morisson, J.A.** : 1966, "Generalized method of averaging and the Von Zeipel method", *Methods in Astrodynamics and Celestial Mechanics. Progress in Astronautics and Aeronautics. Volume 17*, 117-138.
- Oberti, P.** : 1988, "Satellites Lagrangiens de Téthys et Dioné. Réduction d'observations et théorie du mouvement", Thèse de doctorat de l'observatoire de Paris.
- Stoer, J., Bulirsch, R.** : 1980, "Introduction to numerical analysis", Springer Verlag.
- Wagner, C.A.** : 1973, "Zonal gravity harmonics from long satellite arcs by seminumeric method", *Journal of Geophysical Research* **78-17**, 3271-3280.
- Wagner, C.A., Douglas, B.C., Williamson, R.G.** : 1974, "The ROAD program", *Goddard Space Flight Center Report* X-921-74-144.

BIBLIOGRAPHIE

Ahmed, A.H., Tapley, D. : 1984, "Equivalence of the generalized Lie-Hori method and the method of averaging", *Celestial Mechanics* **33**, 1-20.

Balmino, G., Barriot, J.B. : 1990, "Numerical integration techniques revisited", *Manuscripta Geodaetica* **15**, 1-10.

Brouwer, D. and Clemence, G.M. : 1961 "Methods of celestial mechanics", Academic Press.

Exertier, P. : 1986, "LAGRAN2 : logiciel d'intégration numérique du mouvement d'un satellite artificiel", Rapport Technique GRGS No 8.

Hori, G.I., Kozai, Y. : 1975, "Analytical theories of the motion of artificial satellites", in *Stellite Dynamics* edited by G.E.O. Giacaglia, Springer Verlag, pp 1-15.

Kovalevsky, J. : 1963, "Introduction à la mécanique céleste", Armand Colin.

Mersman, W.A. : 1970, "Explicit recursive algorithms for the construction of equivalent canonical transformations", *Celestial Mechanics* **3**, 384-389.

Morando, B. : 1974, "Mouvement d'un satellite artificiel de la Terre", Gordon and Breach.

Oberti, P. : 1990, "An accurate solution for Nereid's motion", *Astronomy and Astrophysics* **239**, 381-386.

Tisserand, F. : 1888, "Traité de mécanique céleste", Gauthier-Villars.

Zarrouati, O. : 1987, "Trajectoires spatiales", Centre National d'Etudes Spatiales.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS	2
INTRODUCTION	4
PREMIERE PARTIE : LA METHODE DE CENTRAGE ET SON CONTEXTE	10
I.A Généralités sur le mouvement du satellite artificiel	11
I.B Méthodes utilisées pour intégrer le mouvement du satellite	14
1. Méthodes analytiques	14
2. Méthodes numériques	15
3. Méthodes mixtes analytiques-numériques	15
I.C La méthode de centrage	17
1. Principe	17
2. Historique de la méthode	17
DEUXIEME PARTIE : ANALYSE DU PROBLEME	21
II.A. Description générale de la méthode	22
II.B. Méthodes d'élimination des courtes périodes	23
1. Aspect général du mouvement du satellite	23
2. Elimination des courtes périodes	23
3. Choix d'une période de coupure	25
4. Vocabulaire utilisé	25
5. Non unicité du mouvement centré	26

II.C. Filtrage des observations	29
II.D. Filtrage du système différentiel	31
1. Méthode générale de moyennisation analytique.....	31
2. Choix de la variable rapide à éliminer.....	33
3. Moyennisation par transformations canoniques.....	36
4. Algorithme de Deprit utilisant les transformées de Lie.....	39
a. Transformation canonique.....	39
b. Application à l'élimination de l'anomalie moyenne.....	41
c. Obtention des variables centrées.....	44
II.E. Synthèse	47
1. Calcul des éléments centrés théoriques en variables de Delaunay.....	47
2. Calcul des éléments centrés théoriques en éléments orbitaux.....	49
3. Comparaison aux observations et correction différentielle.....	50
a. Construction du système nécessaire à la correction différentielle.....	50
b. Pondération des pseudo-observations.....	52
Conclusion de la deuxième partie	54

TROISIEME PARTIE : MISE EN ŒUVRE DU FILTRAGE DU SYSTEME DIFFERENTIEL..... 55

III.A. Stratégie générale pour la moyennisation analytique	57
1. Hiérarchie des perturbations.....	57
2. Variables canoniques et variables explicites.....	58
3. Calculs avec un manipulateur algébrique.....	59
4. Développements en excentricité.....	60
5. Dérivation par rapport aux variables canoniques.....	61
6. Intégration par rapport à l'anomalie moyenne.....	62
7. Tests numériques.....	63

III.B. Perturbations dues au second harmonique zonal du potentiel terrestre	65
1. Calculs analytiques	65
2. Tests analytiques	75
3. Tests numériques	76
4. Conclusion	82
III.C. Perturbations dues aux autres harmoniques zonaux du potentiel terrestre	86
1. Calculs analytiques	86
2. Tests analytiques	87
3. Tests numériques	89
4. Conclusion	90
III.D. Perturbations dues aux harmoniques tesséraux du potentiel terrestre	94
III.E. Perturbations dues à un troisième corps	97
1. Calculs analytiques	97
a. Formulation de la perturbation	97
b. Elimination de l'anomalie moyenne au premier ordre	98
c. Calcul du générateur $W_2(E_n)$	99
d. Effets dus aux couplages avec J_2	101
e. Récapitulation des calculs effectués	102
2. Tests numériques	103
3. Conclusion	106
III.F. Perturbations dues aux marées terrestres et océaniques	109
1. Marées terrestres	109
a. Partie principale	109
b. Corrections de Wahr	110
2. Marées océaniques	113
a. Formulation de la perturbation	113
b. Moyennisation de ΔR_1	115

<i>c. Moyennisation de ΔR_2</i>	116
3. Tests numériques	116
4. Conclusion	118
III.G. Perturbations dues à la pression de radiation solaire	121
1. Théorie analytique sans ombre	121
2. Cas d'une orbite partiellement dans l'ombre	123
<i>a. Formulation du problème</i>	123
<i>b. Développement de la fonction d'ombre en série de Fourier</i>	124
<i>c. Calcul des angles d'entrée et de sortie d'ombre</i>	127
<i>d. Moyennisation du système différentiel</i>	128
III.H. Perturbations dues au frottement	133
1. Formulation de la perturbation	133
2. Moyennisation	134
<i>a. Calcul du second membre des équations de Gauss</i>	134
<i>b. Calcul du second membre moyen</i>	135
<i>c. Difficultés</i>	136
III.I. Les repères	137
1. Les repères dans la dynamique du satellite	137
2. Choix du repère d'intégration	137
3. Développement du potentiel dans le repère instantané de rotation	138
4. Principe de la moyennisation des accélérations complémentaires	139
Conclusion de la troisième partie	141
CONCLUSION	142

APPENDICE 1 : INFLUENCE DU CHOIX DE LA FONCTION GENERATRICE DANS L'ALGORITHME DE DEPRIT APPLIQUE AU PROBLEME DU SATELLITE ARTIFICIEL.....	147
APPENDICE 2 : "MEAN VALUES OF PARTICULAR FUNCTIONS IN THE ELLIPTIC MOTION"	158
APPENDICE 3 : MOYENNE DE CERTAINES FONCTIONS INTERVENANT DANS LE MOUVEMENT ELLIPTIQUE.....	164
APPENDICE 4 : FORMULATION DE LA THEORIE DE BERGER EN VARIABLES DE DELAUNAY.....	167
APPENDICE 5 : PERTURBATIONS A LONGUES PERIODES DUES AUX HARMONIQUES TESSERAUX : COUPLAGES	169
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	180
TABLE DES MATIERES	184