Invariants de classes pour les variétés abéliennes à réduction semi-stable

Jean Gillibert

Université de Caen/Basse-Normandie
U.F.R. de Sciences
École doctorale SIMEM

T H È S E

présentée par

M. **Jean GILLIBERT**

et soutenue le vendredi 10 décembre 2004

en vue de l'obtention du

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ de CAEN

Spécialité : mathématiques et leurs applications
(Arrêté du 25 avril 2002)

Invariants de classes pour les variétés abéliennes à réduction semi-stable

MEMBRES du JURY

M. John BOXALL, professeur à l'université de Caen *(directeur de la thèse)*.
M. Philippe CASSOU-NOGUÈS, professeur à l'université de Bordeaux I *(rapporteur)*.
M. Laurent MORET-BAILLY, professeur à l'université de Rennes I *(rapporteur)*.
M. Martin J. TAYLOR, professeur à l'université de Manchester *(rapporteur)*.
M. Philippe SATGÉ, professeur à l'université de Caen.
M. Jean COUGNARD, professeur à l'université de Caen.

Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles que nous n'osons pas,
c'est parce que nous n'osons pas qu'elles sont difficiles.

Lucius Annaeus SENECA, dit SÉNÈQUE

C'est une maladie naturelle à l'homme de croire qu'il possède la vérité.

Blaise PASCAL

C'est dire que le rôle de l'écriture n'est pas de consigner les résultats d'une recherche,
mais bien le processus même de la recherche –
les travaux de l'amour et des oeuvres de nos amours avec Notre Mère le Monde, l'Inconnue,
qui sans relâche nous appelle en elle pour la connaître encore en son Corps inépuisable,
partout en elle où nous portent les voies mystérieuses du désir.

Alexander GROTHENDIECK

Dire des idioties, de nos jours où tout le monde réfléchit profondément,
c'est le seul moyen de prouver qu'on a une pensée libre et indépendante.

Boris VIAN

Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer toute ma reconnaissance envers mon directeur de thèse John Boxall : j'ai pu bénéficier durant ces trois années de toute son expérience mathématique. Après m'avoir proposé un sujet de thèse adapté à mes goûts, il a su me conseiller et me guider efficacement lors de mes errements dans l'inconnu, tout en me laissant assez de liberté pour mener à bien ce projet de la façon dont je l'entendais.

Je suis également redevable envers Martin Taylor. Son article fondateur de 1988, dans lequel il construit le *class-invariant homomorphism* et conjecture son annulation sur les points de torsion, fut le point de départ de nombreux travaux auxquels cette thèse tente d'apporter sa contribution. Mais je tiens plus particulièrement à remercier sincèrement Martin pour l'intérêt qu'il a prêté à mes recherches pendant ces trois années, et pour l'accueil chaleureux qu'il m'a réservé. Grâce à lui, Manchester est devenu pour moi un lieu privilégié d'échanges mathématiques.

J'adresse à Philippe Cassou-Noguès, qui m'a soutenu et encouragé tout au long de mon travail, mes remerciements les plus sincères. À travers de pertinentes questions, il m'a également fourni de nouvelles pistes de recherche.

Je souhaite également faire part à Laurent Moret-Bailly de toute ma gratitude à son égard. D'abord, son livre *Pinceaux de variétés abéliennes* a été pour moi une source précieuse de résultats, ainsi qu'un point de repère essentiel. L'influence de cet ouvrage sur la présente thèse est indéniable. Je souhaite également remercier Laurent Moret-Bailly pour son aide. Il a accepté de relire une première version du chapitre 3, ce qui m'a permis de corriger plusieurs erreurs. En tant que rapporteur, son efficacité m'a impressionné. Grâce à lui, de nombreuses imperfections ont été détectées. Enfin, je tiens à le remercier pour m'avoir fourni une démonstration du lemme 2.3 du chapitre 4 : à la lumière de ce résultat, ledit chapitre a été nettement amélioré.

Merci à Martin Taylor, Philippe Cassou-Noguès et Laurent Moret-Bailly, qui ont accepté de cumuler les fonctions de rapporteur et de membre du jury.

Je suis très reconnaissant envers Philippe Satgé. Ce dernier, faisant preuve d'une grande disponibilité, s'est toujours efforcé de répondre à mes questions schématiques et/ou faisceautiques. J'ai également participé à plusieurs groupes de travail animés par Philippe, ses interventions et ses remarques ont beaucoup contribué à l'élargissement de ma culture mathématique. Je suis donc très heureux que Philippe fasse partie de mon jury, et je l'en remercie sincèrement.

Jean Cougnard, chercheur connu et reconnu dans le milieu des structures galoisiennes, a accepté de faire partie de mon jury. J'en suis très flatté.

J'adresse un grand merci à tous les membres du laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme. J'ai bénéficié d'excellentes conditions de travail au sein de cette équipe, qui m'a réservé un accueil très chaleureux.

Je salue au passage tous mes collègues doctorants (et ATER) du LMNO, avec lesquels j'ai partagé des mathématiques, et beaucoup d'autres choses, à commencer par les repas ! Merci donc à Corentin, Damien, Erwan, Fabien, Franck, Maja, Marc, Thomas, Xavier, sans oublier Blanche et Emmanuel.

J'ai une pensée toute particulière pour Corentin, mon collègue de bureau, qui a partagé plusieurs enseignements avec moi. Cette façon de travailler m'a beaucoup apporté, je tiens à l'en remercier sincèrement.

Je remercie ma mère et ma grand-mère, qui ont su me transmettre leur goût pour les mathématiques, et plus particulièrement pour l'algèbre et la géométrie, depuis mon plus jeune âge. Je remercie également mon père, ainsi que mes frères et sœurs pour leur soutien moral tout au long de mes études. Je n'oublie pas mes deux grand-pères, qui m'ont fait découvrir en la musique une alliée fidèle.

Enfin je remercie Adeline ; sa bonne humeur inébranlable et son enthousiasme m'ont été d'un grand secours dans les moments difficiles.

Table des matières

Introduction

L'objectif du travail présenté ici est l'étude de certains problèmes de structure galoisienne à l'aide d'outils géométriques. Afin de mieux comprendre pourquoi ces outils ont été introduits, nous allons procéder à un rappel historique, qui, bien que lacunaire, nous semble pouvoir se révéler utile au lecteur.

0.1. Structures galoisiennes. Soit E/K une extension galoisienne de corps de nombres, et soit Γ son groupe de Galois. L'action de Γ sur E donne naissance à une structure de $K[\Gamma]$-module[1] sur E. Le théorème de la base normale affirme que E est libre de rang 1 en tant $K[\Gamma]$-module. En d'autres termes, il existe $x \in E$ tel que l'ensemble des conjugués de x soit une base de E en tant que K-espace vectoriel.

Soit à présent $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_E$) l'anneau des entiers de K (resp. E). On constate que Γ agit encore sur $\mathcal{O}_E$, ce qui munit $\mathcal{O}_E$ d'une structure de $\mathcal{O}_K[\Gamma]$-module. L'étude de cette structure a été initiée par D. Hilbert dans son *Zahlbericht* [**Hil**].

Le critère de Noether affirme que $\mathcal{O}_E$ est un $\mathcal{O}_K[\Gamma]$-module localement libre[2] de rang un si et seulement si l'extension E/K est modérément ramifiée. Dans ce cas, on peut étudier la classe de $\mathcal{O}_E$ dans le groupe des classes localement libres $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K[\Gamma])$. La conjecture de Fröhlich, montrée par Taylor [**T81**], est le point culminant de cette théorie. Pour plus de détails, nous renvoyons au livre de Fröhlich [**Fr**].

Par contre, lorsque l'extension est sauvagement ramifiée, la situation est moins claire (voir [**Fr**], Appendix, C). Une approche alternative au problème initial consiste à remplacer $\mathcal{O}_K[\Gamma]$ par une certaine algèbre de Hopf. A ce sujet, nous renvoyons au livre de L. N. Childs [**Ch**], et plus particulièrement à l'introduction de celui-ci.

0.2. Torseurs sous un schéma en groupes. Soit R un anneau commutatif, et soit Δ un groupe fini. Auslander et Goldman [**A-G**] définissent en premier la notion de R-algèbre galoisienne de groupe Δ (voir également les travaux de Chase, Harrison et Rosenberg [**CHR**]). On constate alors que $\mathcal{O}_E$ est une $\mathcal{O}_K$-algèbre galoisienne de groupe Γ si et seulement si l'extension E/K est partout non ramifiée.

[1]Pour tout anneau R, on note $R[\Gamma]$ l'algèbre du groupe Γ sur R.

[2]Soit M un $R[\Gamma]$-module. On dit que M est localement libre si, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R, le $R_\mathfrak{p}[\Gamma]$-module $M_\mathfrak{p} := M \otimes_R R_\mathfrak{p}$ est libre. Nous ne nous servirons pas de cette définition. Dans la suite du texte, le mot « localement libre » désignera la notion classique d'algèbre commutative.

La nécessité de remplacer le groupe Γ par une autre structure s'impose. Chase et Sweedler [**C-S**] répondent à cette attente à l'aide des algèbres de Hopf. Plus précisément, étant donné une R-algèbre de Hopf commutative H (projective et de type fini en tant que R-module), ils définissent la notion de H-objet galoisien. Dans le cas où $H = R^{\Delta}$, les H-objets galoisiens sont exactement les R-algèbres galoisiennes de groupe Δ.

Cette théorie admet une traduction naturelle dans le langage de la géométrie algébrique. Soient $S = \mathit{Spec}(R)$ et $G = \mathit{Spec}(H)$, alors G est un S-schéma en groupes fini et plat. De plus, les spectres des H-objets galoisiens sont exactement les G-torseurs (aussi appelés G-espaces principaux homogènes) pour la topologie fppf sur S. L'ensemble des classes d'isomorphie de H-objets galoisiens s'identifie donc à l'ensemble $H^1(S, G)$, d'où une interprétation cohomologique de la théorie.

Vue sous cet angle, la généralisation apportée par Chase et Sweedler consistait tout simplement à remplacer le groupe Δ utilisé dans [**CHR**] par le schéma en groupes G. D'ailleurs, dans le cas où $H = R^{\Delta}$, on constate que G est le S-schéma en groupes constant associé à Δ.

0.3. Structure galoisienne des torseurs. Nous supposons à présent que G est un schéma en groupes commutatif (en plus d'être fini et plat[3] sur S), ce qui revient à dire que l'algèbre de Hopf H est cocommutative. Sous cette hypothèse, l'ensemble $H^1(S, G)$ est naturellement muni d'une structure de groupe.

Si l'on considère que les éléments de $H^1(S, G)$ représentent les H-objets galoisiens, on peut se demander comment étudier la structure galoisienne de ces objets.

Soit H^* l'algèbre duale de H, et soit $G^D = \mathit{Spec}(H^*)$ le dual de Cartier de G. Si $X = \mathit{Spec}(C)$ est un G-torseur, alors C est un H-comodule, donc un H^*-module. On définit alors une application

$$\pi : H^1(S, G) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G^D)$$

qui envoie la classe de X sur la classe de $C \otimes_{H^*} (H)^{-1}$ dans le groupe $\mathrm{Pic}(G^D)$. Cette application π, introduite en premier par Waterhouse (voir [**W**], Theorem 5), se révèle être un homomorphisme de groupes.

Nous dirons que π mesure la structure galoisienne des G-torseurs, le groupe $\mathrm{Pic}(G^D)$ pouvant être identifié au groupe de classes $\mathrm{Cl}(H^*)$. Nous dirons qu'un G-torseur a une structure galoisienne triviale, ou, de façon équivalente, qu'il admet une base normale, si son image par π est nulle.

Une façon plus conceptuelle de définir π est la suivante. Soient F_1 et F_2 deux faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur S. On dispose alors d'une suite exacte

$$0 \to H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}(F_1, F_2)) \to \mathrm{Ext}^1(F_1, F_2) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(F_1, F_2)(S) \to \cdots$$

déduite de la suite spectrale « locale-globale » pour les Ext (voir [**SGA 4**], exposé V, proposition 6.3, 3)). Posons $F_1 = G^D$ et $F_2 = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, où $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ désigne le groupe multiplicatif sur S. Alors le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_S(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est représentable par G, et le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est nul (voir [**SGA 7**], exposé VIII, 3.3.1). Par suite, on dispose d'un isomorphisme

$$H^1(S, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \tag{1}$$

[3] Par convention, tous nos schémas en groupes sont localement de présentation finie. En particulier, G est fini localement libre sur S.

que nous allons détailler un peu. Tout d'abord, le foncteur des sections globales s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, -)$, d'où un isomorphisme $H^1(S, G) \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, G)$ par passage aux foncteurs dérivés.

Soit à présent $X \to S$ un G-torseur, alors X correspond à une extension

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Pour être plus précis, E est isomorphe en tant que S-schéma à la réunion disjointe des $X^{\vee k} := X \vee_G \cdots \vee_G X$, pour $k \in \mathbb{Z}$. Ici, $\vee_G$ désigne le produit contracté des G-torseurs[4], et $X^{\vee 0} := G$ est le G-torseur trivial par convention.

On peut tensoriser l'extension E avec G^D (produit tensoriel de $\mathbb{Z}$-modules dans la catégorie des S-faisceaux abéliens), ce qui donne lieu à une autre extension

$$0 \longrightarrow G \otimes_{\mathbb{Z}} G^D \longrightarrow E \otimes_{\mathbb{Z}} G^D \longrightarrow G^D \longrightarrow 0\,.$$

On effectue le push-out de cette extension par le morphisme $G \otimes_{\mathbb{Z}} G^D \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ fourni par la dualité de Cartier, et on obtient l'extension de G^D par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ associée au torseur X sous l'isomorphisme (1). On constate que cette extension obtenue par push-out est isomorphe à l'extension

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow (X \times_S G^D \times_S \mathbf{G}_{\mathrm{m}})/G \longrightarrow G^D \longrightarrow 0\,.$$

Ici, le faisceau du milieu est le quotient de $X \times_S G^D \times_S \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ par l'action de G, laquelle action se décrit en termes de points de la façon suivante :

$$\sigma.(z, \tau, u) = (\sigma.z, \tau, <\sigma, \tau>^{-1} u)$$

où $<\sigma, \tau>$ désigne l'accouplement défini par la dualité de Cartier. Cette description est apparue en premier dans [**W**], section 2.

D'autre part, soit Ω une extension de G^D par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, alors nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow \Omega \longrightarrow G^D \longrightarrow 0$$

pour la topologie fppf sur S. Par suite, Ω est muni d'une structure de $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur sur G^D (pour la topologie fppf), donc définit un élément de $H^1(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$. Or ce groupe est isomorphe à $\mathrm{Pic}(G^D)$ (rappelons que, pour tout schéma X, les groupes $H^1_{\mathrm{zar}}(X, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$, $H^1_{\mathrm{\acute{e}t}}(X, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ et $H^1_{\mathrm{fppf}}(X, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ sont isomorphes à $\mathrm{Pic}(X)$).

Ainsi nous obtenons un morphisme naturel $\mathrm{Ext}^1(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \mathrm{Pic}(G^D)$. On définit alors π comme étant la composée des flèches suivantes

$$\pi : H^1(S, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G^D)\,.$$

Ceci permet de décrire le noyau de π. En effet, $\ker \pi$ s'assimile à l'ensemble des extensions de G^D par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ dont l'espace sous-jacent est isomorphe, en tant que schéma, au produit $G^D \times_S \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. Cet ensemble n'est autre que le groupe $\mathrm{Ext}^1_P(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ des extensions de G^D par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ calculé dans la catégorie des préfaisceaux abéliens sur S. Pour plus de détails sur cette question nous renvoyons à [**A3**].

Une autre description est la suivante : la donnée d'une structure d'extension (commutative) de G^D par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ sur le schéma $G^D \times_S \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ équivaut à la donnée d'un 2-cocycle symétrique $G^D \times G^D \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. Ainsi $\ker \pi$ est isomorphe au groupe de cohomologie de Hochschild symétrique $H^2_s(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$. Cette remarque apparaît dans [**W**].

[4]Cette opération correspond à la loi de composition du groupe $H^1(S, G)$.

0.4. Un exemple : la théorie de Kummer. Soit $n > 0$ un entier naturel. Soit $\alpha \in K$, et soit $E = K(\sqrt[n]{\alpha})$. En général, l'extension E/K est sauvagement ramifiée. Nous allons voir comment les outils que nous avons introduits permettent d'étudier la structure galoisienne de cette extension au niveau entier.

On pose $S = Spec(\mathcal{O}_K)$. Nous avons alors une suite exacte (de faisceaux fppf sur S)

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \xrightarrow{[n]} \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow 0\,.$$

Cette suite exacte, appelée suite de Kummer, donne lieu, par application du foncteur des sections globales, à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_K^\times/(\mathcal{O}_K^\times)^n \xrightarrow{d} H^1(S,\mu_n) \xrightarrow{s} \mathrm{Pic}(S)[n] \longrightarrow 0\,.$$

On suppose à présent que α appartient à $\mathcal{O}_K^\times$. On peut alors décrire explicitement $d(\alpha)$ de la façon suivante :

$$d(\alpha) = Spec(\mathcal{O}_K[X]/(X^n - \alpha))\,.$$

Supposons de plus que α ne soit pas dans $(\mathcal{O}_K^\times)^q$ pour tout diviseur strict q de n. Alors l'algèbre $\mathcal{O}_K[X]/(X^n - \alpha)$ est un $\mathcal{O}_K$-ordre dans l'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ de E.

Le dual de Cartier de μ_n est le S-schéma en groupes constant $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$. Donc nous pouvons effectuer les identifications suivantes

$$\mathrm{Pic}(\mu_n^D) = \mathrm{Pic}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S) = \mathrm{Pic}(S)^n\,.$$

On constate alors que le noyau de s est égal au noyau de π (chapitre 1, proposition 3.1) ; ceci montre que le μ_n-torseur $d(\alpha)$ a une structure galoisienne triviale.

Autrement dit, nous avons exhibé un certain ordre de $\mathcal{O}_E$ qui est libre en tant que module sur une certaine algèbre de Hopf.

0.5. Problème central. Considérons une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow N(f) \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f} F_2 \longrightarrow 0 \tag{2}$$

où F_1 et F_2 sont deux faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur S, tels que le faisceau noyau $N(f)$ soit représenté par un S-schéma en groupes fini et plat. Grâce au foncteur des sections globales, on en déduit un morphisme cobord $\delta : F_2(S) \to H^1(S, N(f))$. Par analogie avec la théorie de Kummer, on souhaite étudier la structure galoisienne des torseurs ainsi obtenus.

Plus formellement, on définit un homomorphisme ψ_f comme étant obtenu par composition du cobord δ et de l'homomorphisme π, c'est-à-dire

$$\psi_f : F_2(S) \xrightarrow{\delta} H^1(S, N(f)) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}(N(f)^D)\,.$$

L'homomorphisme ψ_f étudie donc la structure galoisienne des torseurs construits grâce au cobord. On dit que ψ_f est l'homomorphisme de classes associé à la suite exacte (2).

Notations. Dans le cas particulier où f est l'endomorphisme de multiplication par un entier n, nous noterons ψ_n au lieu de ψ_f.

Remarque 0.1. La théorie de Kummer (cf. le paragraphe précédent) fournit un exemple dans lequel l'homomorphisme ψ_n est nul.

0.6. État de l'art. Le problème de l'annulation de ψ_f a été soulevé en premier par Martin Taylor dans [**T88**]. Taylor considère le cas suivant : K est un corps de nombres, $S = Spec(\mathcal{O}_K)$, $\mathcal{A}$ est le modèle de Néron d'une K-variété abélienne ayant partout bonne réduction, et f est un endomorphisme de $\mathcal{A}$. On considère alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}[f] \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{A}[f]$ est un S-schéma en groupes fini et plat. Taylor conjecture alors :

Conjecture (M. J. Taylor, 1988). *Si A_K est une courbe elliptique (à multiplication complexe), alors les points de torsion de $\mathcal{A}(S)$ sont dans le noyau de ψ_f.*

En 1990, Srivastav et Taylor [**S-T**] démontrent cette conjecture sous l'hypothèse suivante : A_K est une courbe elliptique à multiplication complexe par l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire k, et f est de degré premier au nombre de racines de l'unité contenues dans k.

En 1996, Agboola [**A2**] démontre la conjecture de Taylor pour une courbe elliptique sans multiplication complexe, en supposant que f est l'endomorphisme de multiplication par un entier n premier à 6.

En 1998, Pappas [**P1**] généralise le résultat précédent en considérant un schéma abélien de dimension relative 1 sur une base S quelconque.

Dans le même article [**P1**], Pappas étudie le problème en dimension supérieure. Plus précisément, pour tout choix de deux nombres premiers $r \neq \ell$, il construit une courbe affine lisse S sur un corps fini de caractéristique r, et un S-schéma abélien A de dimension relative 2, possédant un point de torsion d'ordre ℓ sur lequel l'homomorphisme ψ_ℓ ne s'annule pas (ici f est la multiplication par ℓ).[5]

La même année, Bley et Klebel [**B-K**] construisent une famille de courbes elliptiques sans multiplication complexe, possédant un point de torsion d'ordre 2 sur lequel l'homomorphisme ψ_2 ne s'annule pas (ici f est la multiplication par 2).

En 2001, Cassou-Noguès et Jehanne [**CN-J**] construisent, pour certains corps quadratiques imaginaires k, une courbe elliptique à multiplication complexe par l'anneau des entiers de k possédant un point de torsion d'ordre 2 sur lequel l'homomorphisme ψ_2 ne s'annule pas.

0.7. Contenu de la Thèse. Notre travail est découpé en quatre chapitres, dont nous décrivons brièvement le contenu.

Dans le **chapitre 1**, nous énonçons quelques propriétés fonctorielles de π, qui nous permettent de déduire du résultat d'annulation de ψ_n pour les courbes elliptiques de nouveaux résultats d'annulation pour certaines variétés abéliennes. En particulier, nous montrons le résultat suivant :

Théorème. *Supposons que A soit un S-schéma abélien isogène[6] à un produit de S-courbes elliptiques par le biais d'une isogénie de degré N. Alors, pour tout entier n premier à $6N$, l'homomorphisme ψ_n s'annule sur $A(S)_{\mathrm{Tors}}$.*

[5] Aucun résultat semblable n'est connu dans le cas où S est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres.

[6] Voir la définition 2.1 du chapitre 1.

Ici, ψ_n est l'homomorphisme de classes associé à la multiplication par n dans A. Notre démonstration s'appuie sur le résultat d'annulation de [**P1**].

Dans le **chapitre 2**, nous considérons une extension V d'un S-schéma abélien par un S-tore. Soit ψ_n l'homomorphisme de classes associé à la multiplication par n dans V, et soit M un S-1-motif de la forme $M = [u : \mathbb{Z} \to V]$. Nous réinterprétons l'invariant $\psi_n(u(1))$ à l'aide de la réalisation plate de M à valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Dans le **chapitre 3**, S est un schéma noethérien, excellent, intègre, normal. On considère un S-schéma en groupes semi-stable A dont la fibre générique est une variété abélienne, ainsi qu'un sous-groupe fini et plat G de A. Soit $B := A/G$ le quotient pour la topologie fppf sur S. Nous avons une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$$

pour la topologie fppf sur S. En travaillant avec le petit site fppf des S-schémas plats, nous en déduisons une suite exacte

$$0 \longrightarrow G^D \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(B, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \xrightarrow{\phi^*} \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow 0\,.$$

Appliquons alors la construction de 0.5 en prenant pour (2) cette suite exacte. Soit

$$\psi_{\phi^*} : \mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G)$$

l'homomorphisme de classes correspondant. Nous n'étudions pas directement ψ_{ϕ^*}, mais plutôt sa composée avec une autre flèche.

Plus précisément, soit A' un second S-schéma en groupes semi-stable. Nous supposons que les fibres génériques de A et de A' sont des variétés abéliennes duales l'une de l'autre, et que A ou A' est à fibres connexes. Alors il existe une biextension W sur (A, A') qui prolonge la biextension de Weil sur les fibres génériques. Nous noterons ψ l'application obtenue par composition des flèches

$$A'(S) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \xrightarrow{\psi_{\phi^*}} \mathrm{Pic}(G)\,,$$

où γ est définie à l'aide de la biextension W. On montre alors le résultat suivant :

Théorème. *Supposons que A_η soit une courbe elliptique, et que l'ordre de G soit premier à 6. Alors $A'(S)_{\mathrm{Tors}}$ est contenu dans* $\ker\psi$.

Dans le cas où A est un S-schéma abélien, alors A' est le schéma abélien dual de A, et nous retrouvons le résultat d'annulation de [**P1**] (pour un schéma de base S vérifiant nos hypothèses).

Remarque 0.2. Soit U un ouvert de S tel que A_U soit un U-schéma abélien. Alors la suite exacte de S-faisceaux

$$0 \longrightarrow G^D \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(B, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \xrightarrow{\phi^*} \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow 0$$

est un prolongement de la suite exacte de U-faisceaux

$$0 \longrightarrow G_U^D \longrightarrow B_U^t \xrightarrow{\phi_U^t} A_U^t \longrightarrow 0\,.$$

Ici A_U^t (resp. B_U^t) désigne le schéma abélien dual de A_U (resp. B_U), et $\phi_U^t : B_U^t \to A_U^t$ désigne l'isogénie duale de $\phi_U : A_U \to B_U$. Ceci ouvre de nouvelles perspectives vers une future « théorie de la dualité » pour les schémas semi-stables.

Dans le **chapitre 4**, S est le spectre d'un anneau de Dedekind excellent, de corps de fractions K. Nous considérons une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow N(f) \longrightarrow \mathcal{A}^{\Gamma} \xrightarrow{\ f\ } \mathcal{B}^{\Lambda} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{A}^{\Gamma}$ (resp. $\mathcal{B}^{\Lambda}$) est un sous-groupe ouvert du modèle de Néron d'une K-variété abélienne semi-stable, et où l'application f est le prolongement[7] d'une isogénie entre K-variétés abéliennes. On constate alors que $N(f)$ n'est pas nécessairement fini (il est seulement quasi-fini en général).

Notre but est alors d'étendre la définition de l'homomorphisme π de Waterhouse, afin de construire un nouvel homomorphisme de classes. L'absence de dual de Cartier naturel pour $N(f)$ pose un problème. Cependant, une fois l'annulation du faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1(N(f), \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ établie (voir le lemme 2.3 du chapitre 4), les constructions précédentes se généralisent naturellement.

Cette construction a plusieurs avantages par rapport à celle du chapitre 3. En effet, $\mathcal{A}^{\Gamma}[n]$ est un sous-groupe quasi-fini et plat de $\mathcal{A}^{\Gamma}$ pour tout $n > 0$, mais il n'est fini que pour un nombre fini de n possibles. Nous pouvons ainsi généraliser la théorie de Kummer, et passer à la limite dans l'étude de l'homomorphisme ψ_n.

Dépendance logique entre les chapitres. Les chapitres 1 et 2 sont étroitement liés. De plus, les résultats du chapitre 1 s'appuient sur les résultats de [**P1**].

Au contraire, le chapitre 3 est indépendant de tout le reste, y compris des travaux des auteurs précédents dont il s'inspire. En revanche, les références à [**SGA 4**], [**SGA 7**] et [**MB**] sont essentielles ici.

Le chapitre 4, quant à lui, peut être vu comme un prolongement, dans une direction différente, des investigations du chapitre 3.

[7]Dont l'existence et l'unicité est assurée par la propriété universelle du modèle de Néron.

Chapitre 1

Aspects fonctoriels

Dans une première partie de ce chapitre, nous énonçons quelques propriétés fonctorielles (comportement par changement de base, par produit) de π et de ψ_f (voir les paragraphes 0.3 et 0.5 de l'introduction pour les définitions).

Ces propriétés nous permettent, dans une deuxième partie, de déduire du résultat d'annulation de ψ_n pour les courbes elliptiques, de nouveaux résultats d'annulation pour certaines variétés abéliennes de dimension supérieure (variétés isogènes à un produit de courbes elliptiques).

Les notations introduites ici seront en vigueur tout au long de ce chapitre. Nous désignons par S un schéma. Nous noterons $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ le groupe multiplicatif sur S. De plus, pour tout entier naturel n, nous noterons μ_n le schéma en groupes des racines n-ièmes de l'unité sur S.

Enfin, G désigne un S-schéma en groupes commutatif, fini et plat, et G^D désigne son dual de Cartier. Nous noterons $\mathrm{ord}(G)$ l'ordre de G.

1. Propriétés catégoriques

1.1. Comportement par changement de base. Dans toute la suite, nous adopterons la convention suivante : un revêtement est un morphisme fini localement libre de rang constant. Soit à présent $h : S' \to S$ un revêtement de rang $[S' : S]$.

Si H' est un S'-schéma en groupes affine, le faisceau h_*H' est représentable par un S-schéma en groupes également affine, que l'on appelle la restriction de Weil de H', et que l'on note $\Re_{S'/S}(H')$. Pour les détails, voir [**BLR**], §7.6.

Soit à présent H un S-schéma en groupes affine commutatif. Soit

$$N_{S'/S} : \Re_{S'/S}(H_{S'}) \to H$$

le morphisme « trace » ([**SGA 4**], exposé XVII, 6.3.13). Rappelons que la composée

$$H \longrightarrow \Re_{S'/S}(H_{S'}) \xrightarrow{N_{S'/S}} H$$

est la multiplication par $[S' : S]$ dans le groupe H ([**SGA 4**], exposé XVII, 6.3.15). Supposons que H soit lisse sur S, on dispose alors d'un isomorphisme

$$H^1(S, \Re_{S'/S}(H_{S'})) \simeq H^1(S', H_{S'})\,.$$

En effet, les groupes $H_{S'}$ et $\mathfrak{R}_{S'/S}(H_{S'})$ étant lisses, les deux H^1 sont les mêmes pour la topologie étale ou la topologie fppf. On se sert alors du fait que $R^1h_*(H_{S'}) = 0$ en topologie étale, le morphisme h étant fini (voir [**SGA 4**], exposé VIII, 5.5 et 5.3).

Dans le cas particulier où $H = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, le morphisme « trace » $\mathfrak{R}_{S'/S}(\mathbf{G}_{\mathrm{m},S'}) \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ donne ainsi naissance à un morphisme

$$\mathbf{N}_{S'/S} : \mathrm{Pic}(S') \longrightarrow \mathrm{Pic}(S)$$

que nous appellerons morphisme « norme ». Pour une autre définition de ce morphisme, on pourra consulter [**EGA II**], §6.5.

Par fonctorialité du morphisme π, on constate la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(S', G_{S'}) & \xrightarrow{\pi'} & \mathrm{Pic}(G^D_{S'}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^1(S, G) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Pic}(G^D) \end{array} \tag{3}$$

où les flèches verticales sont obtenues par changement de base.

Signalons le résultat suivant, dont nous ne nous servirons pas dans la suite, mais qui présente un intérêt en lui-même.

Lemme 1.1. *Supposons que $[S' : S]$ soit premier à l'ordre de G. Alors la flèche de changement de base*

$$H^1(S, G) \longrightarrow H^1(S', G_{S'})$$

est injective. En d'autres termes, aucun G-torseur n'est trivialisé par un revêtement de degré premier à l'ordre de G.

Démonstration. Nous avons une suite spectrale

$$H^p(S, R^qh_*(G_{S'})) \Longrightarrow H^{p+q}(S', G_{S'})$$

dont on déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(S, \mathfrak{R}_{S'/S}(G_{S'})) \longrightarrow H^1(S', G_{S'}) \longrightarrow H^0(S, R^1h_*(G_{S'}))\,.$$

D'autre part, nous avons une flèche $H^1(S, G) \to H^1(S, \mathfrak{R}_{S'/S}(G_{S'}))$ induite par l'application canonique $G \to \mathfrak{R}_{S'/S}(G_{S'})$. Cette flèche est injective. En effet, la composée

$$H^1(S, G) \longrightarrow H^1(S, \mathfrak{R}_{S'/S}(G_{S'})) \longrightarrow H^1(S, G)$$

est égale à la multiplication par $[S' : S]$ dans $H^1(S, G)$, laquelle est un automorphisme de $H^1(S, G)$, puisque $[S' : S]$ est premier à l'ordre de G.

Au final, le morphisme de changement de base $H^1(S, G) \to H^1(S', G_{S'})$, qui s'écrit comme la composée des flèches

$$H^1(S, G) \longrightarrow H^1(S, \mathfrak{R}_{S'/S}(G_{S'})) \longrightarrow H^1(S', G_{S'})$$

est injectif. Ce qu'on voulait. □

Proposition 1.2. *Soit $Z \in H^1(S, G)$ un G-torseur, et soit $Z_{S'} \in H^1(S', G_{S'})$ le torseur obtenu par changement de base.*

(*i*) *La relation $\pi'(Z_{S'}) = 0$ implique $\pi(Z)^{[S':S]} = 0$.*

(*ii*) *Supposons que $[S' : S]$ soit premier à l'ordre de G. Alors $\pi(Z)$ est nul si et seulement si $\pi'(Z_{S'})$ l'est.*

Démonstration. (i) Considérons le morphisme « norme »

$$\mathbf{N}_{S'/S} : \mathrm{Pic}(G^D_{S'}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G^D)$$

et rappelons que, pour tout $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(G^D)$, nous avons $\mathbf{N}_{S'/S}(\mathcal{L}_{S'}) = \mathcal{L}^{[S':S]}$. Supposons à présent que Z satisfasse $\pi'(Z_{S'}) = 0$. Alors, par commutativité du diagramme (3), nous avons $\pi(Z)_{S'} = 0$. Par suite, $\mathbf{N}_{S'/S}(\pi(Z)_{S'}) = \pi(Z)^{[S':S]} = 0$, ce qu'on voulait.

(ii) La condition est nécessaire par commutativité du diagramme (3). Etablissons à présent la suffisance. Le groupe $H^1(S, G)$ étant tué par l'entier $\mathrm{ord}(G)$, nous avons $\pi(Z)^{\mathrm{ord}(G)} = 0$. De plus, on sait que $\pi(Z)^{[S':S]} = 0$ d'après le point (i). Les entiers $[S' : S]$ et $\mathrm{ord}(G)$ étant premiers entre eux, il en résulte que $\pi(Z) = 0$, ce qu'on voulait. □

Soit à présent une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f} X_2 \longrightarrow 0$$

dans laquelle X_1 et X_2 sont deux S-schémas en groupes. Soit $\psi_f : X_2(S) \to \mathrm{Pic}(G^D)$ l'homomorphisme associé à cette suite. Soit également $\psi_{f'} : X_2(S') \to \mathrm{Pic}(G^D_{S'})$ l'homomorphisme associé à la suite

$$0 \longrightarrow G_{S'} \longrightarrow X_{1,S'} \xrightarrow{f'} X_{2,S'} \longrightarrow 0$$

déduite de la précédente par changement de base $S' \to S$.

Proposition 1.3. *Soit $x \in X_2(S)$, et soit $x' \in X_2(S')$ le S'-point associé.*

(i) *La relation $\psi_{f'}(x') = 0$ implique $\psi_f(x)^{[S':S]} = 0$.*

(ii) *Supposons que $[S' : S]$ soit premier à l'ordre de G. Alors $\psi_f(x)$ est nul si et seulement si $\psi_{f'}(x')$ l'est.*

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} X_2(S') & \xrightarrow{\delta'} & H^1(S', G_{S'}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_2(S) & \xrightarrow{\delta} & H^1(S, G) \end{array}$$

où δ (resp. δ') désigne le cobord associé à la suite exacte de départ (resp. à la suite exacte obtenue par changement de base), et où les flèches verticales sont obtenues par changement de base. La proposition 1.2 permet d'en déduire le résultat. □

1.2. Comportement fonctoriel. Considérons un diagramme commutatif à lignes exactes de la forme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N(f) & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{f} & F_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & {\scriptstyle \nu_1}\downarrow & & {\scriptstyle \nu_2}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N(g) & \longrightarrow & H_1 & \xrightarrow{g} & H_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où F_1, F_2, H_1 et H_2 sont des faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur S. Alors la flèche ν_1 induit une flèche $\nu_0 : N(f) \to N(g)$. Supposons que $N(f)$ et $N(g)$ soient représentés par des schémas en groupes finis et plats sur S. On peut alors énoncer la proposition suivante.

Proposition 1.4. *Soit $\nu_0^D : N(g)^D \to N(f)^D$ la flèche déduite de ν_0 par dualité de Cartier. Alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} F_2(S) & \xrightarrow{\psi_f} & \mathrm{Pic}(N(f)^D) \\ {\scriptstyle \nu_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\nu_0^D)^*} \\ H_2(S) & \xrightarrow{\psi_g} & \mathrm{Pic}(N(g)^D) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Tout d'abord, le diagramme suivant (obtenu par passage à la cohomologie dans les deux suites exactes de départ)

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & F_1(S) & \xrightarrow{f} & F_2(S) & \xrightarrow{\delta_f} & H^1(S,N(f)) & \longrightarrow & \cdots \\ & {\scriptstyle \nu_1}\downarrow & & {\scriptstyle \nu_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\nu_0)_*} & & \\ \longrightarrow & H_1(S) & \xrightarrow{g} & H_2(S) & \xrightarrow{\delta_g} & H^1(S,N(g)) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

est commutatif. De plus, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H^1(S,N(f)) & \simeq & \mathrm{Ext}^1(N(f)^D,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) & \xrightarrow{\pi_f} & \mathrm{Pic}(N(f)^D) \\ \downarrow{\scriptstyle (\nu_0)_*} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\nu_0^D)^*} \\ H^1(S,N(g)) & \simeq & \mathrm{Ext}^1(N(g)^D,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) & \xrightarrow{\pi_g} & \mathrm{Pic}(N(g)^D) \end{array}$$

est également commutatif. D'où le résultat. □

1.3. Comportement par produit. Considérons deux suites exactes

$$0 \longrightarrow N(f) \longrightarrow F_1 \xrightarrow{f} F_2 \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow N(g) \longrightarrow H_1 \xrightarrow{g} H_2 \longrightarrow 0$$

où F_1, F_2, H_1 et H_2 sont des faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur S. On suppose que $N(f)$ et $N(g)$ sont représentés par des schémas en groupes finis et plats sur S.

Soit ψ_f (resp. ψ_g) l'homomorphisme associé à la première (resp. deuxième) suite, et soit $\psi_{f\times g}$ l'homomorphisme associé à la suite exacte produit

$$0 \longrightarrow N(f)\times_S N(g) \longrightarrow F_1\times_S H_1 \xrightarrow{f\times g} F_2\times_S H_2 \longrightarrow 0\,.$$

Nous avons alors la propriété suivante :

Proposition 1.5. *Avec les notations précédentes,* $\ker\psi_{f\times g} = \ker\psi_f \times \ker\psi_g$.

Démonstration. Considérons le diagramme (commutatif) suivant

$$\begin{array}{ccccc} F_2(S)\times H_2(S) & \xrightarrow{\delta_f\times\delta_g} & H^1(S,N(f))\times H^1(S,N(g)) & \xrightarrow{\pi_f\times\pi_g} & \mathrm{Pic}(N(f)^D)\times \mathrm{Pic}(N(g)^D) \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ (F_2\times_S H_2)(S) & \xrightarrow{\delta_{f\times g}} & H^1(S,N(f)\times_S N(g)) & \xrightarrow{\pi_{f\times g}} & \mathrm{Pic}(N(f)^D\times_S N(g)^D) \end{array}$$

Ici, la flèche verticale du milieu est un isomorphisme, que l'on peut décrire comme étant obtenu en composant les isomorphismes qui suivent

$$\begin{aligned} H^1(S,N(f)) \times H^1(S,N(g)) &\simeq \mathrm{Ext}^1(N(f)^D,\mathbf{G}_\mathrm{m}) \times \mathrm{Ext}^1(N(g)^D,\mathbf{G}_\mathrm{m}) \\ &\simeq \mathrm{Ext}^1(N(f)^D \times_S N(g)^D,\mathbf{G}_\mathrm{m}) \\ &\simeq H^1(S,N(f)\times_S N(g)) \end{aligned}$$

Il apparaît alors que, sous cet isomorphisme, $\ker \pi_f \times \ker \pi_g$ s'identifie à $\ker \pi_{f\times g}$. On en déduit aisément le résultat annoncé. □

2. Le cas des schémas abéliens

Nous commençons par rappeler deux définitions dont nous ferons constamment usage dans la suite. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [**BLR**].

Définition 2.1. (1) Un S-schéma abélien est un S-schéma en groupes lisse, propre, à fibres connexes.

(2) Soient A et B deux S-schémas abéliens, et soit $f : A \to B$ un morphisme de S-schémas en groupes. On dit que f est une isogénie si f est un épimorphisme (pour la topologie fppf) et si $\ker f$ est un S-schéma en groupes fini et plat. On définit alors le degré de f comme étant l'ordre de $\ker f$.

Remarque 2.2. Soit A un S-schéma abélien. Alors A est un S-schéma en groupes commutatif. De plus, pour tout entier $n > 0$, la multiplication par n dans A définit une isogénie, que nous noterons $[n] : A \to A$.

Une variété abélienne définie sur un corps de nombres K a partout bonne réduction si et seulement si son modèle de Néron est un schéma abélien sur le spectre de l'anneau des entiers de K.

Soit A un S-schéma abélien et soit $n > 0$ un entier naturel, alors nous avons une suite exacte (pour la topologie fppf sur S)

$$0 \longrightarrow A[n] \longrightarrow A \xrightarrow{[n]} A \longrightarrow 0$$

et $A[n]$ est un S-schéma en groupes fini et plat. Dans tout ce paragraphe, nous noterons ψ_n l'homomorphisme de classes associé à cette suite exacte.

2.1. Description géométrique de ψ_n. Soit A^t le schéma abélien dual de A. Rappelons que A^t représente (dans la catégorie des S-schémas) le foncteur $S' \mapsto \mathrm{Pic}^0_r(A_{S'})$, où $\mathrm{Pic}^0_r(A_{S'})$ est le groupe des classes d'isomorphie de $\mathbf{G}_\mathrm{m}$-torseurs rigidifiés[1] sur $A_{S'}$, qui sont algébriquement équivalents à 0 sur toutes les fibres de $A_{S'} \to S'$.

On notera $\mathcal{P}$ le fibré de Poincaré sur $A \times_S A^t$. Par définition, $\mathcal{P}$ est l'image du morphisme $\mathrm{id} : A^t \to A^t$ par l'isomorphisme $A^t(A^t) \simeq \mathrm{Pic}^0_r(A \times_S A^t)$ (obtenu en prenant $S' = A^t$). On dit aussi que $\mathcal{P}$ est le fibré universel.

Par bidualité, nous avons $(A^t)^t \simeq A$, ce qui nous procure un isomorphisme canonique $A(S) \simeq \mathrm{Pic}^0_r(A^t)$ donné par $p \mapsto (p \times \mathrm{id}_{A^t})^*(\mathcal{P})$.

Grâce à l'accouplement de Weil, $A^t[n]$ est isomorphe au dual de Cartier de $A[n]$. Nous avons alors la proposition suivante, démontrée en premier par Agboola [**A1**] dans le cas

[1] Voir le paragraphe 4.1 du chapitre 3.

où S est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres, puis généralisée par Pappas dans [**P1**].

Proposition 2.3. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A(S) & \xrightarrow{\psi_n} & \mathrm{Pic}(A[n]^D) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\sim} & & \Big\| \\ \mathrm{Pic}^0_r(A^t) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(A^t[n]) \end{array}$$

est commutatif, la flèche horizontale du bas étant obtenue par restriction.

Nous pouvons traduire ce résultat de la façon suivante : pour tout point $p \in A(S)$, $\psi_n(p)$ est donné par

$$\psi_n(p) = (p \times \mathrm{id}_{A^t})^*(\mathcal{P})|_{A^t[n]}\,.$$

Supposons à présent que p soit un point de torsion. Alors il existe un entier m tel que p se factorise à travers $A[m]$. Par compatibilité mutuelle des divers morphismes de restriction, on peut donc écrire :

$$\psi_n(p) = (p \times \mathrm{id}_{A^t[n]})^*(\mathcal{P}|_{A[m]\times_S A^t[n]})\,.$$

Ainsi étudier les valeurs de ψ_n sur les points de torsion revient à étudier la restriction du fibré de Poincaré $\mathcal{P}$ aux sous-groupes finis de $A \times_S A^t$.

2.2. Résultat d'annulation de ψ_n. Nous dirons que le S-schéma abélien A est une S-courbe elliptique si A est de dimension relative 1 sur S. Comme nous l'avons déja signalé dans l'introduction, le résultat suivant a été montré en premier par Taylor et Srivastav, puis a été généralisé par Agboola, et enfin par Pappas (voir [**P1**] pour une démonstration purement géométrique de ce résultat) :

Théorème 2.4. *Supposons que A soit une S-courbe elliptique, et que l'entier n soit premier à 6. Alors*

(*i*) *Pour tout entier m, le fibré $\mathcal{P}|_{A[m]\times_S A^t[n]}$ est trivial.*

(*ii*) *L'homomorphisme ψ_n s'annule sur $A(S)_{\mathrm{Tors}}$.*

Il est clair que (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*), d'après la discussion précédente. De plus, on peut déduire du théorème 2.4 et de la proposition 1.5 le résultat suivant.

Proposition 2.5. *Supposons que A soit un produit de S-courbes elliptiques, et que n soit premier à 6. Alors l'homomorphisme ψ_n s'annule sur $A(S)_{\mathrm{Tors}}$.*

Ainsi les produits de courbes elliptiques sont des exemples de schémas abéliens de dimension supérieure qui satisfont la conjecture de Taylor.

Grâce à la proposition 1.4, on peut également considérer le cas d'une variété abélienne qui est isogène à un produit de courbes elliptiques.

Soit C un autre S-schéma abélien, et soit ψ'_n l'homomorphisme attaché à la multiplication par n dans C.

Théorème 2.6. *Soit $\nu : A \to C$ une isogénie de degré N.*

(*i*) *Soit $p \in A(S)$ un point de torsion d'ordre premier à N. Alors $\psi_n(p) = 0$ si et seulement si $\psi'_n(\nu(p)) = 0$.*

(*ii*) *Supposons que C soit un produit de S-courbes elliptiques, et que n soit premier à $6N$. Alors l'homomorphisme ψ_n s'annule sur $A(S)_{\mathrm{Tors}}$.*

Démonstration. Tout d'abord, on sait que $\nu : A(S) \to C(S)$ induit un isomorphisme sur les points de torsion d'ordre premier à N. Soit $k > 0$ un entier, alors, d'après la proposition 1.4, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A(S) \arrow[r, "\psi_k"] \arrow[d, "\nu"'] & \mathrm{Pic}(A[k]^D) \arrow[d] \arrow[r, phantom, "="] & \mathrm{Pic}(A^t[k]) \arrow[d, "(\nu_k^t)^*"] \\ C(S) \arrow[r, "\psi'_k"] & \mathrm{Pic}(C[k]^D) \arrow[r, phantom, "="] & \mathrm{Pic}(C^t[k]) \end{tikzcd} \tag{4}$$

est commutatif. Ici, $\nu^t : C^t \to A^t$ désigne l'isogénie duale de ν, et ν_k^t désigne sa restriction aux schémas en groupes des points de k-torsion.

(*i*) Soit $p \in A(S)$ un point de torsion d'ordre m premier à N. On peut écrire $n = uv$, avec $v = pgcd(m, n)$. Alors $\psi_n(p) = 0$ si et seulement si $\psi_n(u.p) = 0$, car u et m sont premiers entre eux. De plus, nous pouvons écrire

$$\psi_n(u.p) = u.(p \times \mathrm{id})^*(\mathcal{P}|_{A \times A^t[n]}) = (p \times \mathrm{id})^*(\mathcal{P}|_{A \times [u]A^t[n]})$$

où $[u]A^t[n]$ est l'image de la multiplication par u dans le groupe $A^t[n]$. On constate que $[u]A^t[n] = A^t[v]$, on en déduit que $\psi_n(u.p) = 0$ si et seulement si $\psi_v(p) = 0$.

D'autre part, v étant premier à N, il est clair que $\nu_v^t : C^t[v] \to A^t[v]$ est un isomorphisme, donc $(\nu_v^t)^*$ en est également un. Ainsi, par commutativité du diagramme (4), en prenant $k = v$, on en déduit que $\psi_v(p) = 0$ si et seulement si $\psi'_v(\nu(p)) = 0$. D'où le résultat, d'après ce qui précède.

(*ii*) Soit $p \in A(S)$ un point de torsion d'ordre m. Alors on peut écrire $m = kv$ avec $v = pgcd(m, n)$. Il vient

$$\psi_n(k.p) = (p \times \mathrm{id})^*(\mathcal{P}|_{A \times [k]A^t[n]})$$

et l'on constate que $[k]A^t[n] = A^t[n]$, on en déduit que $\psi_n(p) = 0$ si et seulement si $\psi_n(k.p) = 0$. Or $k.p$ est un point d'ordre premier à N. Le résultat annoncé découle alors de (*i*) et de la proposition 2.5. □

3. Le cas du groupe multiplicatif

Soit $n > 0$ un entier naturel fixé. Nous avons une suite exacte de faisceaux abéliens (pour la topologie fppf sur S)

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \xrightarrow{[n]} \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow 0\,.$$

Cette suite exacte, appelée suite de Kummer, donne lieu, par application du foncteur des sections globales, à la suite exacte :

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(S) \xrightarrow{d} H^1(S, \mu_n) \xrightarrow{s} H^1(S, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow \cdots$$

On vérifie aisément le résultat suivant :

Proposition 3.1. *Avec les notations précédentes,* $\mathrm{Im}\, d = \ker \pi$.

DÉMONSTRATION. On peut donner une description explicite de $H^1(S, \mu_n)$ (voir [**Mi80**], page 125). Plus précisément, $H^1(S, \mu_n)$ s'identifie à l'ensemble des (classes d'isomorphie de) couples $(\mathcal{L}, \sigma)$, où $\mathcal{L}$ est un $\mathbf{G}_\mathrm{m}$-torseur sur S, et $\sigma : \mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{O}_S$ est un isomorphisme.

Avec cette description, d est l'application qui à un élément $\alpha \in \mathbf{G}_\mathrm{m}(S) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$ associe le couple $(\mathcal{O}_S, \sigma)$, où $\sigma : \mathcal{O}_S^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S$ est la multiplication par α. De plus, s est l'application qui au couple $(\mathcal{L}, \sigma)$ associe $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S)$.

Soit $\mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma)$ la $\mathcal{O}_S$-algèbre dont le spectre est le μ_n-torseur correspondant au couple $(\mathcal{L}, \sigma)$. En tant que $\mathcal{O}_S$-module, on peut décrire $\mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma)$ de la façon suivante

$$\mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma) = \oplus_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes k}$$

où l'on a posé $\mathcal{L}^{\otimes 0} = \mathcal{O}_S$ par convention. La loi de multiplication de $\mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma)$ est induite par le produit tensoriel et par l'application σ.

Soit à présent C_n un groupe (abstrait) cyclique d'ordre n, de générateur g et d'élément neutre e. Alors μ_n est le spectre de l'algèbre de groupe $\mathcal{O}_S[C_n]$. L'action de μ_n sur le torseur $(\mathcal{L}, \sigma)$ correspond à une coaction de $\mathcal{O}_S[C_n]$ sur $\mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma)$, que l'on peut décrire explicitement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \oplus_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes k} &\longrightarrow \mathcal{O}_S[C_n] \otimes_{\mathcal{O}_S} (\oplus_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes k}) \\ (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) &\longmapsto (e \otimes s_0, g \otimes s_1, \ldots, g^{n-1} \otimes s_{n-1}) \end{aligned}$$

Soit $Map(C_n, \mathcal{O}_S)$ l'algèbre duale de $\mathcal{O}_S[C_n]$, dont le spectre est le S-schéma en groupes constant $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$. Alors l'action de $Map(C_n, \mathcal{O}_S)$ sur $\mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma)$ induite par la coaction qui précède est tout simplement la multiplication composante par composante. En d'autres termes, pour tout $f \in Map(C_n, \mathcal{O}_S)$ et pour tout $(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) \in \mathcal{M}(\mathcal{L}, \sigma)$,

$$f \cdot (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) = (f(e)s_0, f(g)s_1, \ldots, f(g^{n-1})s_{n-1}) .$$

On peut en déduire que le morphisme de Waterhouse

$$\pi : H^1(S, \mu_n) \longrightarrow \mathrm{Pic}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S) \simeq \mathrm{Pic}(S)^n$$

est l'application qui au couple $(\mathcal{L}, \sigma)$ associe le n-uplet $(\mathcal{O}_S, \mathcal{L}, \mathcal{L}^{\otimes 2}, \ldots, \mathcal{L}^{\otimes (n-1)})$ dans le groupe $\mathrm{Pic}(S)^n$. Il est donc clair que $\pi((\mathcal{L}, \sigma)) = 0$ si et seulement si $\mathcal{L}$ est nul dans $\mathrm{Pic}(S)$, d'où le résultat. $\square$

REMARQUE 3.2. La proposition 3.1 implique que l'homomorphisme de classes associé à la multiplication par n dans $\mathbf{G}_\mathrm{m}$ est nul. Le même résultat est donc également valable pour n'importe quelle puissance de $\mathbf{G}_\mathrm{m}$, en vertu de la proposition 1.5.

REMARQUE 3.3. Soit T un S-tore de dimension r, c'est-à-dire que T est un S-schéma en groupes qui est localement isomorphe, pour la topologie étale sur S, au schéma en groupes $\mathbf{G}_\mathrm{m}^r$. Supposons que le schéma S soit connexe normal. Il existe alors un revêtement étale et galoisien sur lequel T se trivialise. Nous noterons $S' \to S$ le plus petit revêtement ayant cette propriété, et $N = [S' : S]$ le degré de ce revêtement. La proposition 1.3 combinée à la remarque précédente implique alors le résultat suivant : pour tout n premier à N, l'homomorphisme de classes associé à la multiplication par n dans T est nul.

REMARQUE 3.4. Supposons que n soit inversible sur S, et que $\mathcal{O}_S(S)$ contienne une racine primitive n-ième de l'unité. Alors μ_n est isomorphe, en tant que S-schéma en groupes, au schéma en groupes constant $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S$. Dans ce cadre, la proposition 6.5 du chapitre 0 de [**Gr**] est un corollaire de notre proposition 3.1.

Chapitre 2

Interprétation motivique

Dans ce chapitre, nous montrons comment l'homomorphisme ψ admet une interprétation dans le langage des 1-motifs.

Comme dans le chapitre précédent, S est un schéma, et G est un S-schéma en groupes commutatif, fini et plat. Nous noterons $\mathrm{ord}(G)$ l'ordre de G.

1. $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseurs versus μ_n-torseurs

Dans ce paragraphe, nous fixons un entier naturel $n > 0$, qui de plus est un multiple de $\mathrm{ord}(G)$. Ainsi nous avons $G[n] = G$.

Notations. Nous noterons $l : \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \mathrm{Pic}(G)$ le morphisme naturel.

Il est clair que le diagramme suivant (dans lequel toutes les flèches sont des applications naturelles évidentes)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1(G,\mu_n) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow l \\ H^1(G,\mu_n) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(G) \end{array} \tag{5}$$

est commutatif. Ceci nous amène à poser la définition suivante.

Définition 1.1. On note $l_n : \mathrm{Ext}^1(G, \mu_n) \to \mathrm{Pic}(G)$ l'application obtenue par composition des flèches dans le diagramme (5).

On note $\mathcal{K}_n : \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \mathrm{Ext}^1(G, \mu_n)$ l'application qui à une suite exacte associe la suite de ses noyaux pour la multiplication par n.

Proposition 1.2. *L'application $\mathcal{K}_n$ est un morphisme de groupes, section du morphisme naturel $\mathrm{Ext}^1(G, \mu_n) \to \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$. En particulier, $l_n \circ \mathcal{K}_n = l$.*

Démonstration. Soit E une extension de G par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. Alors $\mathcal{K}_n(E)$ est représenté par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow E[n] \longrightarrow G \longrightarrow 0\,.$$

Par suite, le push-out de cette suite $\mathcal{K}_n(E)$ par l'inclusion $\mu_n \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ s'écrit

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow E[n] \sqcup_{\mu_n} \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow G \longrightarrow 0\,.$$

On peut alors définir une flèche $E[n] \sqcup_{\mu_n} \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to E$ qui envoie $x \sqcup y$ sur $x + y$ (le symbole $+$ désigne ici la loi de E). On vérifie que cette flèche est un morphisme d'extensions, donc est un isomorphisme. Ceci montre que $\mathcal{K}_n$ est une section (au sens ensembliste) de l'application $\mathrm{Ext}^1(G, \mu_n) \to \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$.

En se servant d'une description explicite du produit de deux extensions, on montre que $\mathcal{K}_n$ est un morphisme de groupes. □

Remarque 1.3. Le groupe G étant tué par n, l'inclusion

$$\mathrm{Hom}(G, \mu_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$$

est un isomorphisme. On déduit alors de la suite exacte de Kummer (multiplication par n dans le groupe $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$) une suite exacte (de groupes abéliens)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(G, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(G, \mu_n) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow 0\,.$$

La proposition 1.2 montre que $\mathcal{K}_n$ est une section de cette suite exacte.

Proposition 1.4. *Soit $\Theta \in \mathrm{Ext}^1(G, \mu_n)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *L'invariant $l_n(\Theta)$ est nul.*

(2) *Il existe $\alpha \in \Gamma(G, \mathcal{O}_G)^\times$ tel que $\Theta = Spec(\mathcal{O}_G[X]/(X^n - \alpha))$ en tant que G-schéma.*

Démonstration. Ce critère découle de la description du groupe $H^1(G, \mu_n)$ donnée dans la démonstration de la proposition 3.1 du chapitre 1. □

2. Autre interprétation de ψ

Tout d'abord, on vérifie que π est égal à la composée des applications suivantes

$$H^1(S, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G^D)\,.$$

Ici, le premier isomorphisme est bien connu (le foncteur des sections globales est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, -)$, d'où le résultat par passage aux foncteurs dérivés), et le deuxième est induit par la dualité de Cartier.

Considérons à nouveau une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f} X_2 \longrightarrow 0$$

dans laquelle X_1 et X_2 sont deux S-schémas en groupes. Nous noterons comme d'habitude $\delta : X_2(S) \to H^1(S, G)$ le morphisme cobord qui s'en déduit.

On sait que la donnée d'un point $x \in X_2(S)$ équivaut à la donnée d'un morphisme de faisceaux en groupes $m_x : \mathbb{Z} \to X_2$. On considère alors la suite exacte $\omega(x)$ définie par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \omega(x) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m_x} & & \\
0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où la suite exacte du haut est le pull-back via m_x de la suite exacte du bas. On définit ainsi une application $\omega : X_2(S) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, G)$ qui est un morphisme de groupes. On vérifie que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X_2(S) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, equal] & H^1(S,G) \arrow[d, "\sim"] \\ X_2(S) \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, G)\,. \end{tikzcd}$$

Par suite, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X_2(S) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\omega"'] & H^1(S,G) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\sim"] & \mathrm{Pic}(G^D) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, G) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Ext}^1(G^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(G^D)\,. \end{tikzcd}$$

De tous ces constats on peut déduire le résultat suivant :

LEMME 2.1. *Pour tout $x \in X_2(S)$, le torseur $\delta(x)$ correspond à l'extension*

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow \omega(x)^D \longrightarrow G^D \longrightarrow 0$$

et $\psi_f(x)$ est le $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur associé à cette dernière.

3. Réalisations de 1-motifs et invariants de classes

Dans tout ce paragraphe, n désigne un entier naturel strictement positif. Rappelons la définition suivante, introduite en premier par P. Deligne (voir [**De**], 10.1).

DÉFINITION 3.1. Un S-1-motif est un complexe $[u : Y \to V]$ de S-schémas en groupes commutatifs (avec Y en degré -1 et V en degré 0), tel que

(1) Y est localement isomorphe (pour la topologie étale sur S) à un S-schéma en groupes constant de la forme $\mathbb{Z}^r$.

(2) V est extension d'un S-schéma abélien A par un S-tore T.

On appelle Y le cran étale, A le cran abélien, et T le cran torique, du motif considéré.

Soit $M = [u : \mathbb{Z} \to V]$ un S-1-motif dont le cran étale est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et soit ψ_n l'homomorphisme de classes associé à la multiplication par n dans V. Nous allons voir que la valeur de l'homomorphisme ψ_n sur le point $u(1) \in V(S)$ peut s'exprimer en fonction de la réalisation du motif M à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

REMARQUE 3.2. Supposons que V soit une extension d'un schéma abélien par un tore. Alors la donnée d'un motif $M = [u : \mathbb{Z} \to V]$ équivaut à la donnée d'un point dans $V(S)$. En effet, un morphisme de faisceaux en groupes $\mathbb{Z} \to V$ est entièrement déterminé par sa valeur en 1.

Nous commençons par effectuer quelques rappels.

DÉFINITION 3.3. Soit $M = [u : Y \to V]$ un S-1-motif. On note $T_n(M)$ le conoyau de l'homomorphisme

$$([n]_Y, u) : Y \longrightarrow Y \times_V V$$

où le produit fibré est pris relativement aux flèches $u : Y \to V$ et $[n]_V : V \to V$. Alors $T_n(M)$ est un S-schéma en groupes fini et plat, et s'insère dans une suite exacte

$$\xi(n,u) \qquad 0 \longrightarrow V[n] \longrightarrow T_n(M) \longrightarrow Y/nY \longrightarrow 0$$

REMARQUE 3.4. On dit que $T_n(M)$ est la réalisation plate de M à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si de plus n est premier aux caractéristiques résiduelles de S, on dit que $T_n(M)$ est la réalisation étale de M à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour de plus amples détails sur cette définition, nous renvoyons à [**De**] ainsi qu'à [**R**].

PROPOSITION 3.5. (1) *Considérons le diagramme suivant, dans lequel la suite du bas est obtenue par push-out de la suite du haut*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "{[n]_Y}"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Y/nY \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & V \arrow[r] & Y \sqcup_Y V \arrow[r] & Y/nY \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Alors la suite exacte $\xi(n,u)$ est isomorphe à la suite des noyaux pour la multiplication par n dans la suite du bas.

(2) *Considérons le diagramme suivant, dans lequel la suite du haut est obtenue par pull-back de la suite du bas*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V[n] \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \times_V V \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
0 \arrow[r] & V[n] \arrow[r] & V \arrow[r, "{[n]_V}"] & V \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Alors la suite exacte $\xi(n,u)$ est isomorphe à la suite des conoyaux pour la multiplication par n dans la suite du haut.

PROPOSITION 3.6. *Soit $M = [u : \mathbb{Z} \to V]$ un S-1-motif dont le cran étale est isomorphe à $\mathbb{Z}$. De plus, soit*

$$\xi(n,u)^D \qquad 0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow T_n(M)^D \longrightarrow V[n]^D \longrightarrow 0$$

la suite exacte déduite de $\xi(n,u)$ par dualité de Cartier. Alors $\xi(n,u)^D = \mathcal{K}_n(\omega(u(1))^D)$, et $\psi_n(u(1))$ est le $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur associé à $\xi(n,u)^D$ via le morphisme l_n (cf. déf. 1.1).

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 2.1, le torseur $\delta(u(1))$ correspond à l'extension duale de l'extension suivante, notée $\omega(u(1))$,

$$0 \longrightarrow V[n] \longrightarrow \mathbb{Z} \times_V V \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,.$$

De plus, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}, V[n]) \arrow[r, "\mathcal{CK}_n"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, V[n]) \arrow[d] \\
\mathrm{Ext}^1(V[n]^D, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \arrow[r, "\mathcal{K}_n"] & \mathrm{Ext}^1(V[n]^D, \mu_n)
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{CK}_n$ est l'application qui à une suite exacte associe la suite de ses conoyaux pour la multiplication par n, et où les flèches verticales sont obtenues par dualité de Cartier.

D'autre part, d'après le (2) de la proposition 3.5, l'image de l'extension $\omega(u(1))$ par l'application $\mathcal{CK}_n$ est isomorphe à $\xi(n,u)$. On peut alors écrire

$$\mathcal{K}_n(\omega(u(1))^D) = \mathcal{CK}_n(\omega(u(1)))^D = \xi(n,u)^D$$

où la première égalité est déduite du diagramme commutatif ci-dessus.

Enfin nous avons

$$\psi_n(u(1)) = l(\omega(u(1))^D) = l_n(\mathcal{K}_n(\omega(u(1))^D)) = l_n(\xi(n,u)^D)$$

où la première égalité découle du lemme 2.1, et la deuxième de la proposition 1.2. □

REMARQUE 3.7. L'annulation de $\psi_n(u(1))$ équivaut donc à l'affirmation des assertions (1) et (2) de la proposition 1.4 pour $T_n(M)^D \in \mathrm{Ext}^1(V[n]^D, \mu_n)$.

Chapitre 3

Invariants de classes : le cas semi-stable

Ce chapitre, à l'exception de la dernière section, reproduit l'article [**G**] (Compositio Mathematica **141** (2005), 887–901).

1. Introduction

Soit S un schéma, et soit $G \to S$ un S-schéma en groupes commutatif, fini et plat. Soit G^D le dual de Cartier de G. Nous disposons d'un homomorphisme

$$\pi : H^1(S, G^D) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G)$$

explicité en premier par Waterhouse (voir [**W**], Theorem 5). Supposons que $S = Spec(R)$ soit affine. Alors on peut écrire $G = Spec(H)$, où H est une R-algèbre de Hopf, et $G^D = Spec(H^*)$, où H^* est l'algèbre duale de H. Si $X = Spec(C)$ est un G^D-torseur, alors C est un H^*-comodule, donc un H-module. L'image de X par π est alors donnée par la classe de $C \otimes_H (H^*)^{-1}$ dans le groupe $\mathrm{Pic}(H) = \mathrm{Pic}(G)$.

Nous nous intéressons ici à un moyen de construction de G^D-torseurs dont l'image par π est triviale, c'est-à-dire de torseurs dont la structure galoisienne est triviale.

Plus précisément, supposons que S soit un schéma noethérien, excellent, intègre, normal, de point générique η. Soient A et A' deux S-schémas en groupes semi-stables, dont l'un des deux est à fibres connexes, et tels que A_η et A'_η soient deux variétés abéliennes duales l'une de l'autre. Supposons que G soit un sous-groupe de A. On construit alors des G^D-torseurs grâce à la théorie de Kummer, puis on en déduit un homomorphisme

$$\psi : A'(S) \longrightarrow H^1(S, G^D) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G)\,.$$

Le résultat principal de cet article est le suivant :

Théorème 1.1. *Supposons que A_η soit une courbe elliptique, et que l'ordre de G soit premier à* 6. *Alors $A'(S)_{\mathrm{Tors}}$ est contenu dans* $\ker\psi$.

Dans le cas particulier où A est un S-schéma abélien de dimension 1 (*i.e.* une S-courbe elliptique), et où $G = A[m]$ (sous-groupe des points de m-torsion de A), ce résultat était déja connu. D'abord montré par Srivastav et Taylor dans [**S-T**] pour une courbe elliptique à multiplication complexe sur un corps de nombres (en prenant m égal à une puissance d'un nombre premier $\ell > 3$), puis même sans l'hypothèse de multiplication complexe par

Agboola dans [**A2**], il a été finalement prouvé par Pappas dans [**P1**] (pour un schéma abélien de dimension 1 sur une base quelconque).

Dans le cas où S est le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres K, le théorème 1.1 admet une interprétation arithmétique. Plus précisément, il implique que les anneaux d'entiers de certaines extensions de K, engendrées par des valeurs de fonctions elliptiques, sont libres en tant que modules sur l'algèbre de Hopf de G. Le lecteur trouvera dans [**CN-T**] de plus amples détails sur cette question, qui constitue la motivation initiale pour l'étude de ce problème.

Dans le cas où A est une S-courbe elliptique et où l'ordre de G est une puissance de 2, Cassou-Noguès et Jehanne ont donné dans [**CN-J**] des exemples de non-annulation de ψ sur les points de torsion. De plus, pour tout nombre premier ℓ, Pappas a construit dans [**P1**] une courbe affine lisse S sur un corps fini et un S-schéma abélien A de dimension 2, tels que, si l'on pose $G = A[\ell]$, alors l'homomorphisme ψ correspondant ne s'annule pas sur au moins un point de ℓ-torsion.

Cependant la question reste ouverte pour un schéma abélien de dimension ≥ 2 sur le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Nous nous contentons de signaler que ψ s'annule toujours sur les points de torsion d'ordre premier à celui de G, quelle que soit la dimension de A_η (voir la proposition 3.4).

Le premier objectif de notre travail est la construction de ψ. Pour cela, nous avons dû adopter une approche différente de celle des auteurs précédents. Nous sommes amenés à utiliser (dans la section 2) une théorie de la dualité pour les schémas semi-stables qui s'énonce de la façon suivante : supposons à nouveau que $G \subseteq A$ soit un sous-groupe fini et plat de A (pour des exemples, voir le paragraphe 3.4), et considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} A/G \longrightarrow 0$$

de faisceaux pour la topologie fppf sur S. En travaillant dans le petit site fppf des S-schémas plats (cf. paragraphe 2.1), nous vérifions l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow G^D \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A/G, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \xrightarrow{\phi^*} \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \longrightarrow 0\,.$$

Quand on restreint tous ces faisceaux à l'ouvert de bonne réduction de A, on retrouve un couple d'isogénies duales entre schémas abéliens.

Par application du foncteur des sections globales, on déduit de la suite précédente un morphisme cobord $\delta : \mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \to H^1(S, G^D)$. On définit alors ψ comme le composé des morphismes

$$A'(S) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \xrightarrow{\delta} H^1(S, G^D) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}(G)\,,$$

la flèche γ étant donnée par une biextension (voir le paragraphe 2.3). Si A est un schéma abélien, et si $G = A[m]$, alors A' est le schéma abélien dual de A, et ψ est le *class-invariant homomorphism* de [**P1**] (généralisant lui-même celui de Taylor [**T88**]). Cette approche nous permet également, à travers quelques dévissages, de donner une preuve différente de la « description géométrique » de ψ, généralisant celle de [**P1**] (ce résultat apparaît en premier dans [**A1**] dans le cas d'un schéma abélien sur le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres). Les précédents auteurs s'appuyaient sur des descriptions explicites de fibrés en droites sur les variétés abéliennes, tandis que notre construction permet de se ramener à l'étude de δ. Ceci fait l'objet de la section 3.

Enfin, le but de la section 4 est de présenter une preuve du théorème 1.1, que nous obtenons par des arguments analogues à ceux de Pappas [**P1**]. Nous donnons ensuite deux applications de ce résultat.

2. Extension de l'isogénie duale

Rappelons les notations qui seront en vigueur tout au long de cet article : S est un schéma noethérien, excellent, intègre, normal, de point générique $\eta = Spec(K)$. Nous noterons $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ le groupe multiplicatif sur S.

Définition 2.1. On dit qu'un S-schéma en groupes est semi-stable s'il est commutatif, lisse, séparé, et si les composantes neutres de ses fibres sont extensions de variétés abéliennes par des tores.

On dit qu'un S-schéma en groupes semi-stable $\mathcal{A}$ est néronien s'il vérifie la propriété universelle suivante : pour tout S-schéma lisse Y et tout morphisme $\alpha_K : Y_\eta \to \mathcal{A}_\eta$, il existe un unique morphisme $\alpha : Y \to \mathcal{A}$ prolongeant α_K.

On fixe une fois pour toutes un S-schéma en groupes semi-stable A dont la fibre générique A_η est une variété abélienne. On notera $U \subseteq S$ l'ouvert de bonne réduction de A, de sorte que A_U est un U-schéma abélien.

2.1. Faisceaux sur le « petit site fppf ». Soit $j : U \to S$ l'inclusion. On munit la catégorie des schémas plats sur S (resp. sur U) d'une structure de site pour la topologie fppf (on obtient ce qu'on appelle un « petit site fppf », la catégorie sous-jacente étant la catégorie des S-schémas plats). Le choix de ce petit site nous permettra de démontrer le lemme 2.4.

Soit j^* le foncteur « image inverse », qui à un faisceau sur S associe sa restriction à l'ouvert U. Comme $j : U \to S$ est un objet du petit site fppf sur S, j^* est un « foncteur de localisation » (voir [**SGA 4**], exposé IV, paragraphes 5.1 à 5.4). En particulier, l'image par j^* d'un faisceau représentable (disons par un S-schéma plat X) est représenté par le U-schéma $X_U := X \times_S U$.

D'autre part, si F_1 et F_2 sont deux faisceaux abéliens sur S, la flèche canonique

$$j^*(\underline{\mathrm{Hom}}_S(F_1, F_2)) \to \underline{\mathrm{Hom}}_U(j^*F_1, j^*F_2)$$

est un isomorphisme (voir [**SGA 4**], exposé IV, prop. 12.3, b), p. 502). De plus, j^* est exact et admet un adjoint à gauche $j_!$ exact. Par suite, j^* envoie les injectifs sur des injectifs (voir [**SGA 4**], exposé V, paragraphe 2.2). Nous dérivons alors des deux côtés de la flèche et obtenons un isomorphisme $j^*(\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(F_1, F_2)) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^1_U(j^*F_1, j^*F_2)$. En particulier, soit X un S-schéma en groupes plat tel que X_U soit un U-schéma abélien, alors nous obtenons un isomorphisme

$$j^*(\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(X, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})) \simeq X_U^t \tag{6}$$

où $X_U^t = \underline{\mathrm{Pic}}^0_{X_U/U}$ est le schéma abélien dual de X_U (voir [**FC**], chap. I, §1). On se sert ici du fait que $\underline{\mathrm{Ext}}^1_U(X_U, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est isomorphe à X_U^t (voir [**SGA 7**], exposé VII, 2.9.5 et 2.9.6).

Remarque 2.2. Soit H un S-schéma en groupes commutatif affine, plat et localement de type fini (donc localement de présentation finie, S étant noethérien). Alors les H-torseurs pour la topologie fpqc sont représentables. Un argument de descente fidèlement plate (voir [**EGA IV**], prop. 2.7.1) montre que les H-torseurs fpqc sont des torseurs fppf, d'où l'égalité $H^1_{\mathrm{fpqc}}(S,H) = H^1_{\mathrm{fppf}}(S,H)$. Un raisonnement analogue montre que, si H' est un autre S-schéma en groupes commutatif, alors $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{fpqc}}(H',H) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{fppf}}(H',H)$.

2.2. Isogénies duales. Soit G_η un sous-groupe algébrique fini de A_η, et soit B_η la variété abélienne quotient A_η/G_η, nous obtenons une isogénie $A_\eta \to B_\eta$ dont le noyau est égal à G_η. Alors le noyau de l'isogénie duale $B^t_\eta \to A^t_\eta$ s'identifie au dual de Cartier G^D_η de G_η.

Ce résultat, classique sur un corps, s'étend au cas des schémas abéliens, pour lesquels on dispose d'une notion de schéma dual (voir [**FC**], chap. I, §1).

On fixe à présent un sous-S-schéma en groupes fini et plat G de A. Nous noterons B le faisceau quotient A/G pour la topologie fppf sur S.

Remarque 2.3. Si S est de dimension ≤ 1, alors B est représentable par un S-schéma en groupes, également semi-stable (voir [**An**], chap. IV, théorème 4.C).

Nous avons (par définition) une suite exacte

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B \longrightarrow 0$$

de faisceaux abéliens (sur le petit site fppf de S), prolongeant la suite exacte

$$0 \longrightarrow G_U \longrightarrow A_U \xrightarrow{\phi_U} j^*B \longrightarrow 0$$

dans laquelle A_U est un U-schéma abélien. On en déduit que j^*B est le quotient A_U/G_U, donc est représentable par un U-schéma abélien, que nous noterons B_U.

Nous obtenons alors, en appliquant le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(-,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ à la première suite, une (longue) suite exacte de cohomologie

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(A,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \underline{\mathrm{Hom}}_S(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(B,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$$

dont les termes sont des faisceaux abéliens sur S.

D'autre part, G étant fini et plat sur S, le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_S(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est représentable par G^D (le dual de Cartier de G). Pour les mêmes raisons, le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est nul (voir [**SGA 7**], exposé VIII, 3.3.1). Enfin nous avons le lemme qui suit :

Lemme 2.4. *Soit X un S-schéma en groupes plat, dont la fibre générique X_K est une variété abélienne. Alors $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est nul.*

Démonstration. Nous devons montrer, pour tout schéma $S' \to S$ plat, la trivialité du groupe $\mathrm{Hom}_{S'-gr}(X_{S'},\mathbf{G}_{\mathrm{m},S'})$. Pour cela, il suffit de se limiter au cas où S et S' sont affines. Soient donc $S = \mathit{Spec}(R)$ et $S' = \mathit{Spec}(R')$ où R' est une R-algèbre plate. Cette hypothèse de platitude permet d'affirmer que $\mathcal{O}_{X_{S'}}(X_{S'}) = \mathcal{O}_X(X)\otimes_R R'$. On en déduit que $\mathcal{O}_{X_{S'}}(X_{S'})$ est R'-plat, sachant que $\mathcal{O}_X(X)$ est R-plat. D'autre part, soit $K' = R' \otimes_R K$, alors K' est une K-algèbre, et la flèche $R' \to K'$ est injective par R-platitude de R'. Finalement, on trouve que la flèche

$$\mathcal{O}_{X_{S'}}(X_{S'}) \to \mathcal{O}_{X_{S'}}(X_{S'}) \otimes_{R'} K' = \mathcal{O}_{X_{K'}}(X_{K'})$$

est un morphisme injectif d'anneaux. Sa restriction $\mathcal{O}_{X_{S'}}(X_{S'})^\times \to \mathcal{O}_{X_{K'}}(X_{K'})^\times$ est donc injective. En d'autres termes, l'application

$$\mathrm{Hom}_{S'}(X_{S'},\mathbf{G}_{\mathrm{m},S'}) \to \mathrm{Hom}_{K'}(X_{K'},\mathbf{G}_{\mathrm{m},K'})$$

obtenue par changement de base $Spec(K') \to S'$, est injective. On en déduit que l'application $\mathrm{Hom}_{S'-gr}(X_{S'}, \mathbf{G}_{\mathrm{m},S'}) \to \mathrm{Hom}_{K'-gr}(X_{K'}, \mathbf{G}_{\mathrm{m},K'})$ est également injective, en ne considérant que les morphismes de groupes.

Montrons à présent la trivialité de $\mathrm{Hom}_{K'-gr}(X_{K'}, \mathbf{G}_{\mathrm{m},K'})$. Soit $f : X_{K'} \to \mathbf{G}_{\mathrm{m},K'}$ un morphisme de K'-schémas en groupes, f est entièrement déterminé par la donnée du morphisme de K'-algèbres de Hopf $f^\sharp : K'[x, x^{-1}] \to \mathcal{O}_{X_{K'}}(X_{K'})$. D'autre part, $\mathcal{O}_{X_{K'}}(X_{K'}) \simeq \mathcal{O}_{X_K}(X_K) \otimes_K K'$ et $\mathcal{O}_{X_K}(X_K) \simeq K$ (car X_K est propre et géométriquement intègre), donc $\mathcal{O}_{X_{K'}}(X_{K'}) \simeq K'$ en tant que K'-algèbres de Hopf. La counité étant l'unique morphisme de K'-algèbres de Hopf $K'[x, x^{-1}] \to K'$, ceci prouve que $f^\sharp$ se factorise par la counité. Au final, f est le morphisme trivial. □

En appliquant le lemme 2.4 au schéma A, nous obtenons une suite exacte

$$0 \longrightarrow G^D \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(B, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \xrightarrow{\phi^*} \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \longrightarrow 0\,. \tag{7}$$

D'après ce qui précède (voir (6)), son image par le foncteur j^* est la suite

$$0 \longrightarrow G_U^D \longrightarrow B_U^t \xrightarrow{\phi_U^t} A_U^t \longrightarrow 0\,.$$

Cette dernière admet donc un « prolongement » sur S en termes de faisceaux.

2.3. Liens avec la théorie des biextensions. Soit A_η^t la variété abélienne duale de A_η, et soit A' un S-schéma en groupes semi-stable prolongeant A_η^t. On sait qu'il existe un unique tel prolongement à fibres connexes (voir [**MB**], chap. IV, th. 7.1 (i)).

L'ouvert de bonne réduction de A' est le même que celui de A, donc $(A')_U$ coïncide avec le schéma abélien dual A_U^t de A_U.

Nous voudrions établir une dualité entre A et A' prolongeant celle qui existe déjà sur les fibres génériques. On sait que la dualité entre A_η et A_η^t découle de l'existence d'un fibré en droites $\mathcal{P}_\eta$ sur $A_\eta \times_K A_\eta^t$, que l'on appelle fibré de Poincaré. Cependant nous allons envisager ici la dualité dans un cadre plus général à l'aide de la notion de biextension, imaginée par Mumford dans [**Mu**]. Nous introduisons brièvement ici cet outil. Pour les détails nous renvoyons le lecteur à l'exposé de Grothendieck ([**SGA 7**], exposé VII). Mentionnons également Milne ([**Mi86**], Appendix C).

Définition 2.5. Soient P et Q deux S-schémas en groupes commutatifs. On peut considérer sur $P \times_S Q$, en plus de sa structure naturelle de S-schéma en groupes, sa structure de P-schéma en groupes et celle de Q-schéma en groupes. Ces deux schémas en groupes seront notés respectivement Q_P et P_Q. Une *biextension* de (P, Q) par $\mathbf{G}_\mathrm{m}$ est un $\mathbf{G}_\mathrm{m}$-torseur Y sur $P \times_S Q$, muni de lois de composition partielles, qui fassent du P-schéma Y_P une extension de Q_P par $\mathbf{G}_{\mathrm{m},P}$, et du Q-schéma Y_Q une extension de P_Q par $\mathbf{G}_{\mathrm{m},Q}$. En outre, nous demandons que ces deux structures d'extensions soient compatibles en un certain sens (voir [**SGA 7**], exposé VII, §2 ou [**Mi86**], Appendix C).

On note $\mathrm{BIEXT}(P, Q; \mathbf{G}_\mathrm{m})$ la catégorie des biextensions de (P, Q) par $\mathbf{G}_\mathrm{m}$. Soit Y une telle biextension, alors Y définit un morphisme de groupes

$$Q(S) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(P, \mathbf{G}_\mathrm{m})$$

que nous explicitons : soit $f : S \to Q$ une section de Q, alors $(\mathrm{id}_P \times f)^*(Y)$ est une biextension de (P, e) par $\mathbf{G}_\mathrm{m}$ (où e est le S-groupe trivial), c'est-à-dire une extension de P par $\mathbf{G}_\mathrm{m}$.

D'autre part, on note $\mathrm{Biext}^1(P,Q;\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ le groupe constitué par l'ensemble des classes d'isomorphie de biextensions de (P,Q) par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. On dispose d'un homomorphisme de groupes

$$t : \mathrm{Biext}^1(P,Q;\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \mathrm{Pic}(P \times_S Q)$$

qui à toute biextension associe son $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur sous-jacent. On constate que t est une transformation naturelle entre (bi)foncteurs.

Retournons à notre question de dualité. Grâce au théorème du carré, on peut munir le fibré de Poincaré $\mathcal{P}_\eta$ d'une unique structure de biextension, que l'on appelle la biextension de Weil, et que l'on note W_η. Le problème se reformule alors de la façon suivante : peut-on prolonger la biextension $W_\eta \in \mathrm{BIEXT}(A_\eta, A_\eta^t; \mathbf{G}_{\mathrm{m},K})$ en une biextension qui vive dans $\mathrm{BIEXT}(A, A'; \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$? Toujours d'après Grothendieck, il existe une obstruction à ce prolongement (voir [**SGA 7**], exposé VIII, théorème 7.1, b)), qui s'incarne sous la forme d'un accouplement (dit de monodromie) entre les groupes de composantes de A et A'. Si A ou A' est à fibres connexes, cette obstruction disparaît :

Proposition 2.6. *Supposons que A ou A' soit à fibres connexes. Alors il existe une unique biextension W de (A, A') par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ prolongeant la biextension de Weil W_η sur (A_η, A_η^t).*

Démonstration. Considérons le foncteur de restriction à la fibre générique

$$\mathrm{BIEXT}(A, A'; \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow \mathrm{BIEXT}(A_\eta, A_\eta^t; \mathbf{G}_{\mathrm{m},K})\,.$$

D'après ([**MB**], chap. II, th. 3.6), ce foncteur est une équivalence de catégories. On en déduit le résultat voulu. □

Nous supposons à partir d'ici, et dans toute la suite de ce travail, que A ou A' est à fibres connexes. Nous noterons W la biextension dont l'existence est assurée par la proposition 2.6 ainsi que $\gamma : A'(S) \to \mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ le morphisme défini par W.

Remarque 2.7. Dans le cas où A est un schéma abélien, alors A' est le dual de A et γ est un isomorphisme. Dans le cas général, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A'(S) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_\eta^t(K) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1(A_\eta, \mathbf{G}_{\mathrm{m},K})\,. \end{array}$$

D'après ([**SGA 7**], exposé VIII, théorème 7.1 et remarque 7.2), la flèche de droite est injective. Il est clair que la flèche de gauche est injective (car A' est séparé sur S) et que celle du bas est bijective. Ainsi γ est toujours injective. Si de plus A est à fibres connexes et A' est néronien (déf. 2.1), alors les flèches verticales sont bijectives (celle de gauche d'après la propriété universelle de Néron, celle de droite d'après *loc. cit.*), donc γ est un isomorphisme.

3. L'homomorphisme ψ et sa géométrie

Reprenons les notations et hypothèses du début de la section 2. En appliquant à la suite exacte (7) le foncteur des sections sur S, nous obtenons une suite exacte de cohomologie

$$\cdots \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})(S) \xrightarrow{\delta} H^1(S, G^D) \longrightarrow \cdots$$

Ce cobord δ va jouer un rôle essentiel dans la définition de notre homomorphisme. Tout d'abord, il convient de mieux connaître les objets en jeu, ce qui va nous permettre de donner une autre description (dite « géométrique ») de $\pi \circ \delta$.

3.1. Description du cobord. Commençons par énoncer un lemme de comparaison entre Ext locaux et globaux.

LEMME 3.1. *Soit X un S-schéma en groupes plat, dont la fibre générique X_K est une variété abélienne. Alors le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(X, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est canoniquement isomorphe au faisceau $T \mapsto \mathrm{Ext}^1(X_T, \mathbf{G}_{\mathrm{m},T})$.*

DÉMONSTRATION. Soient F et F' deux faisceaux abéliens sur S. Nous avons alors une suite exacte de groupes abéliens, déduite de la suite spectrale locale-globale pour les Ext (voir [**SGA 4**], exposé V, proposition 6.3, 3))

$$H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(F, F')) \to \mathrm{Ext}^1(F, F') \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(F, F')(S) \to H^2(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(F, F'))\,.$$

En particulier, si $\underline{\mathrm{Hom}}_S(F, F')$ est nul, alors $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(F, F')(S) \simeq \mathrm{Ext}^1(F, F')$. Par suite, le raisonnement étant encore valable après changement de base plat $T \to S$, on trouve que $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(F, F')(T) \simeq \mathrm{Ext}^1(F|_T, F'|_T)$ fonctoriellement en T. Enfin le lemme 2.4 nous permet d'appliquer ce raisonnement à la situation présente. $\square$

L'application δ peut être explicitée : soit $\Gamma \in \mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$. Alors on peut associer à Γ, via l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})(S)$, un élément de $H^1(S, G^D)$, que nous noterons $\delta(\Gamma)$ par abus de langage. Le lemme 3.1 permet de décrire $\delta(\Gamma)$ comme étant le faisceau

$$[\phi^*]^{-1}(\Gamma) : T \longmapsto \{\Theta \in \mathrm{Ext}^1(B_T, \mathbf{G}_{\mathrm{m},T}) \mid \phi^*\Theta = \Gamma_T\}\,.$$

En résumé, on peut caractériser $\delta(\Gamma)$ comme étant le faisceau des extensions Θ de B par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ telles que $\phi^*\Theta = \Gamma$, ce qui justifie l'écriture $\delta(\Gamma) = [\phi^*]^{-1}(\Gamma)$.

3.2. L'homomorphisme de Waterhouse. Nous rappelons ici une construction, due à Waterhouse (voir [**W**], section 2), qui permet d'associer à toute extension Ω de G par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ un G^D-torseur. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \longrightarrow \Omega \longrightarrow G \longrightarrow 0\,.$$

Elle donne lieu, par application du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(G, -)$, à une suite exacte

$$0 \longrightarrow G^D \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \Omega) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, G) \longrightarrow 0$$

(rappelons que $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(G, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) = 0$ d'après [**SGA 7**], exposé VIII, 3.3.1). Par application du foncteur des sections, on obtient un morphisme $\underline{\delta} : \mathrm{Hom}(G, G) \to H^1(S, G^D)$. On note alors $\rho(\Omega)$ le G^D-torseur $\underline{\delta}(\mathrm{id})$. Autrement dit, $\rho(\Omega)$ est le faisceau des sections $s : G \to \Omega$, au sens de la théorie des extensions. On définit ainsi un morphisme $\rho : \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to H^1(S, G^D)$, et Waterhouse a montré que ρ est un isomorphisme (voir [**W**], Theorem 2′). Ainsi, en composant les morphismes suivants (où l est le morphisme naturel)

$$H^1(S, G^D) \xrightarrow{\rho^{-1}} \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \xrightarrow{l} \mathrm{Pic}(G)$$

on obtient l'homomorphisme π de Waterhouse, qui admet une interprétation galoisienne, comme nous l'avons précisé dans l'introduction.

Lemme 3.2. *Soit $i : G \to A$ l'inclusion. Alors le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Pic}(A) & \longleftarrow & \mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_\mathrm{m}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(S, G^D) \\ \downarrow & & {\scriptstyle i^*}\downarrow & & \| \\ \mathrm{Pic}(G) & \xleftarrow{l} & \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_\mathrm{m}) & \xrightarrow{\rho} & H^1(S, G^D) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. La commutativité du carré de gauche est claire par fonctorialité. Soit Γ dans $\mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_\mathrm{m})$, on veut montrer que les torseurs $\delta(\Gamma)$ et $\rho(i^*\Gamma)$ sont isomorphes. D'après ce qui précède (lemme 3.1), on peut transposer le problème dans la catégorie des groupes abéliens. Dans ce cadre, il est bien connu qu'étant donnés un groupe $\breve{\mathrm{Z}}$, une suite exacte (de groupes abéliens)

$$0 \longrightarrow \breve{\mathrm{G}} \xrightarrow{i} \breve{\mathrm{A}} \xrightarrow{\phi} \breve{\mathrm{B}} \longrightarrow 0\,,$$

et une extension Γ de $\breve{\mathrm{A}}$ par $\breve{\mathrm{Z}}$, alors il y a bijection entre les sections de $i^*\Gamma$ et les extensions Θ de $\breve{\mathrm{B}}$ par $\breve{\mathrm{Z}}$ telles que $\phi^*\Theta = \Gamma$. Le résultat découle alors des descriptions de δ et de ρ que nous avons données précédemment. □

3.3. Définition de l'homomorphisme. Nous sommes maintenant en mesure de généraliser la construction de Taylor. Reprenons les notations et hypothèses introduites dans le paragraphe 2.3.

On déduit du lemme 3.2 le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A'(S) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_\mathrm{m}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(S, G^D) \\ & & {\scriptstyle l^1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & \mathrm{Pic}(A) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(G) \end{array}$$

et on définit $\psi : A'(S) \to \mathrm{Pic}(G)$ comme étant le composé de ces morphismes. Dans le cas où A est un S-schéma abélien, alors A' est le schéma abélien dual de A, la flèche γ est un isomorphisme, et on retrouve le *class-invariant homomorphism*, dont la première construction est due à M. J. Taylor (voir [**T88**]).

Remarque 3.3. Notons $\mathcal{D} : A'(S) \to \mathrm{Pic}(A)$ la composée $l^1 \circ \gamma$. Alors le diagramme précédent montre que, pour tout $p \in A'(S)$, $\psi(p)$ est la restriction de $\mathcal{D}(p)$ à G. Ceci généralise la « description géométrique » de ψ (obtenue par Agboola [**A1**] dans le cas où A est un schéma abélien).

Nous pouvons donner une autre écriture de ψ : soit $p \in A'(S)$, alors on a l'égalité

$$\mathcal{D}(p) = l^1((\mathrm{id}_A \times p)^*(W)) = (\mathrm{id}_A \times p)^*(t(W))\,.$$

On en déduit que $\psi(p) = (i \times p)^*(t(W))$, où $i : G \to A$ est l'inclusion.

Proposition 3.4. *Soit* $\mathrm{ord}(G)$ *l'ordre de G. Alors* $\mathrm{ord}(G).\psi = 0$. *En particulier, ψ s'annule sur les points de torsion d'ordre premier à* $\mathrm{ord}(G)$.

Démonstration. Le groupe G étant fini et plat, la multiplication par l'entier $\mathrm{ord}(G)$ est l'application nulle dans G, donc est également l'application nulle dans le groupe $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})$. Or ψ se factorise à travers ce dernier, d'où le résultat. □

Remarque 3.5. Soit $p \in A'(S)$ un point de m-torsion. On peut écrire $m = nN$ où N est premier à $\mathrm{ord}(G)$, et l'ensemble des facteurs premiers de n est un sous-ensemble de l'ensemble des facteurs premiers de $\mathrm{ord}(G)$. Alors Np est un point de n-torsion, et il découle de la proposition 3.4 que la nullité de $\psi(Np)$ implique celle de $\psi(p)$.

Quitte à changer n en un multiple, dont les facteurs premiers sont ceux de G, on peut supposer que G est un sous-groupe de $A[n]$. Sachant que Np se factorise à travers $A'[n]$, on peut alors écrire (cf. la remarque 3.3)

$$\psi(Np) = (i \times Np)^*(t(W)|_{A[n]\times_S A'[n]})\,.$$

Ainsi, pour montrer que $\psi(p)$ est nul, il suffit de montrer que la restriction de $t(W)$ à $A[n] \times_S A'[n]$ est triviale.

3.4. Constructions d'exemples. Pour engendrer un exemple, on doit trouver un sous-S-schéma en groupes fini et plat G de A. Une idée naturelle est de regarder ce qui arrive si les points de N-torsion de A_η sont rationnels sur K. Fixons une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. Nous avons le résultat suivant (voir [**MB**], chap. IV, cor. 8.2) :

Proposition 3.6. *Soient N un entier naturel, F_1 le corps $K(A_\eta(\overline{K})[N])$, et $v : S_1 \to S$ le normalisé de S dans F_1. Alors S_1 est intègre normal, et v est fini surjectif de rang divisant le cardinal de $\mathbf{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, où g est la dimension de A_η. En outre, il existe un S_1-schéma en groupes semi-stable $A_1^\sharp$, contenant $A_1 := A\times_S S_1$ comme sous-groupe ouvert et ayant même fibre générique que lui, tel que le noyau de la multiplication par N dans $A_1^\sharp$ soit fini et plat sur S_1. Le groupe $A_1^\sharp(S_1)[N]$ est isomorphe à $A_\eta(\overline{K})[N]$.*

Notre énoncé diffère légèrement de celui de [**MB**] ; les détails que nous avons rajoutés découlent naturellement de la démonstration de ce dernier. Remarquons également que l'hypothèse d'excellence de S est utilisée dans ladite démonstration. Pour notre part, c'est le seul endroit où nous en ferons usage.

De façon analogue, tout point de torsion pris dans $A(S)$ engendre un sous-groupe fini et plat de A, comme l'affirme la proposition suivante :

Proposition 3.7. *Soit $x \in A(S)$ un point d'ordre fini m. Alors x définit un morphisme $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_S \to A$ dont l'image est un sous-schéma en groupes fini et plat de A.*

Démonstration. Soit $f : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_S \to A$ un morphisme. Alors l'image de f est un sous-groupe quasi-fini et plat de A. De plus, d'après [**EGA II**], corollaire 5.4.3 (ii), l'image de f est propre (car A est séparé sur S, et $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_S$ est propre sur S), donc l'image de f est finie d'après le Main Theorem de Zariski (quasi-fini et propre impliquent fini). $\square$

Pour les courbes elliptiques, nous avons le critère suivant (voir [**Ma72**], prop. 9.1) :

Proposition 3.8. *Supposons que K soit un corps de nombres, et que $S = Spec(\mathcal{O}_K)$ soit le spectre de l'anneau des entiers de K. Soit $E \to S$ le modèle de Néron d'une courbe elliptique à réduction semi-stable définie sur K, de discriminant minimal (Δ), et soit N un nombre premier. Alors le groupe $E[N]$ est fini et plat sur S si et seulement si, pour toute place $\mathfrak{p}$ de K, $v_{\mathfrak{p}}(\Delta)$ est un multiple de N.*

4. Cas des courbes elliptiques

Dans cette section, nous donnons plusieurs applications de notre construction, dans lesquelles les variétés abéliennes en jeu sont des courbes elliptiques semi-stables.

4.1. Torseurs rigidifiés. Soit $f : X \to S$ un S-schéma en groupes. Soit 0_X la section unité de X, et soit $\mathcal{L}$ un $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur sur X. Une *rigidification* de $\mathcal{L}$ est la donnée d'une section du $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur $0_X^*\mathcal{L}$ sur S. On note $\mathrm{TORSRIG}(X, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ la catégorie des $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseurs rigidifiés sur X. C'est une catégorie de Picard strictement commutative (au sens de [**SGA 4**], exposé XVIII, 1.4.2), la loi étant le produit tensoriel. On note $\mathrm{Pic}_r(X)$ le groupe des classes d'isomorphie d'objets de $\mathrm{TORSRIG}(X, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$.

Si $\mathcal{N}$ est un $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur sur X, on note

$$\mathbf{r}(\mathcal{N}) := \mathcal{N} \otimes (f^*0^*\mathcal{N})^{-1}$$

le $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur rigidifié associé à $\mathcal{N}$ (muni de sa rigidification naturelle).

Soient $g : Y \to S$ un autre S-schéma en groupes, 0_Y la section unité de Y, et $\mathcal{L}$ un $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur sur $X \times_S Y$. Une *birigidification* de $\mathcal{L}$ est la donnée de deux sections : une pour le torseur $(0_X \times \mathrm{id}_Y)^*\mathcal{L}$ sur Y et une autre pour le torseur $(\mathrm{id}_X \times 0_Y)^*\mathcal{L}$ sur X, qui soient compatibles entre elles (c'est-à-dire qui induisent la même section pour le torseur $(0_X \times 0_Y)^*\mathcal{L}$ sur S). On note $\mathrm{TORSBIRIG}(X, Y; \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ la catégorie des $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseurs birigidifiés sur $X \times Y$.

Si $\mathcal{N}$ est un $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur sur $X \times_S Y$, on note

$$\mathbf{bir}(\mathcal{N}) := \mathcal{N} \otimes (((0_X \circ f) \times \mathrm{id}_Y)^*\mathcal{N})^{-1} \otimes ((\mathrm{id}_X \times (0_Y \circ g))^*\mathcal{N})^{-1} \otimes (f \times g)^*(0_X \times 0_Y)^*\mathcal{N}$$

le $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur birigidifié associé à $\mathcal{N}$ (muni de sa birigidification naturelle).

4.2. Démonstration du théorème 1.1. D'après la remarque 3.5, pour montrer le théorème 1.1, il suffit de montrer le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Supposons que A_η soit une courbe elliptique, et soit n un entier premier à 6. Alors le $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur $t(W)|_{A[n]\times_S A'[n]} \in \mathrm{Pic}(A[n] \times_S A'[n])$ est trivial.*

Pour démontrer ce résultat, nous allons utiliser une méthode analogue à celle de Pappas dans [**P1**].

Lemme 4.2. *Le $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur $(t(W)|_{A[n]\times_S A'[n]})^{\otimes n}$ est trivial.*

Démonstration. Il suffit de montrer que le groupe $\mathrm{Biext}^1(A[n], A'[n]; \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est tué par n. D'après ([**SGA 7**], exposé VIII, 1.1.2), on a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Biext}^1(A[n], A'[n]; \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \simeq \mathrm{Ext}^1(A[n], \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}(A'[n], \mathbf{G}_{\mathrm{m}}))\,.$$

Par suite, la multiplication par n étant nulle dans $A[n]$, elle est également nulle dans le groupe $\mathrm{Biext}^1(A[n], A'[n]; \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$. Ce qu'on voulait. $\square$

Lemme 4.3. *Pour démontrer le théorème 4.1, on peut supposer que A' est à fibres connexes, et que le groupe $A(S)[6]$ est isomorphe à $A_\eta(\overline{K})[6]$, où $\overline{K}$ désigne une clôture algébrique de K.*

Démonstration. Quitte à remplacer W par sa biextension symétrique W^s, on peut supposer que A' est à fibres connexes. Appliquons la proposition 3.6 au schéma A en prenant $N = 6$. Alors $v : S_1 \to S$ est de rang k divisant $2^5 3^2$ et il existe un S_1-schéma en groupes semi-stable $A_1^\sharp$, contenant $A_1 := A \times_S S_1$ comme sous-groupe ouvert et ayant même fibre générique que lui, tel que $A_1^\sharp(S_1)[6]$ soit isomorphe à $A_\eta(\overline{K})[6]$. Soit $A'_1 = A' \times_S S_1$, alors A'_1 est à fibres connexes. On note $W_1^\sharp \in \mathrm{Biext}^1(A_1^\sharp, A'_1; \mathbf{G}_\mathrm{m})$ l'unique biextension dont l'existence est énoncée dans la proposition 2.6. Alors la restriction de $W_1^\sharp$ à (A_1, A'_1) est égale à $W_1 := W \times_S S_1$, par unicité du prolongement.

Pour simplifier, on pose $X := A[n] \times_S A'[n]$, donc $X \times_S S_1 = A_1[n] \times_{S_1} A'_1[n]$. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que la trivialité du $\mathbf{G}_\mathrm{m}$-torseur

$$t(W_1^\sharp)|_{X \times_S S_1} = t(W_1)|_{X \times_S S_1} = (t(W)|_X)_{S_1}$$

implique la trivialité du $\mathbf{G}_\mathrm{m}$-torseur $t(W)|_X$.

Le schéma S étant normal, il existe un gros ouvert V de S tel que $S_1 \to S$ soit plat au-dessus de V. Nous adoptons ici la terminologie de ([**MB**], chap. II, déf. 3.1) : un gros ouvert V de S est un ouvert tel que, pour tout $x \in S \backslash V$, l'anneau local $\mathcal{O}_{S,x}$ soit de profondeur ≥ 2. Soit $V_1 := S_1 \times_S V$, alors $V_1 \to V$ est fini localement libre de rang k.

Comme X est un S-schéma plat, X_V est un gros ouvert de X. Par suite, la flèche $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_V)$ est injective, d'après [**EGA IV**], 21.13.3 et 21.13.4. Nous avons alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(X)[n] & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X \times_S S_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Pic}(X_V)[n] & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X_V \times_V V_1) \end{array}$$

où la flèche de gauche est injective. En se servant de la norme associée au morphisme $X_V \times_V V_1 \to X_V$ qui est fini localement libre de rang k, ainsi que du fait que k divise $2^5 3^2$, donc est premier à n, on montre que le flèche du bas est injective. On en déduit que la flèche du haut est injective. Or, d'après le lemme 4.2, $t(W)|_X$ est annulé par n. On en déduit le résultat voulu. $\square$

Notations. Soit X un S-schéma. Pour tout sous-schéma fermé $z : Z \subseteq X$ on note $I(Z)$ le faisceau d'idéaux définissant Z. Lorsque $I(Z)$ est inversible on note $I^{-1}(Z)$ son inverse. De plus, si $p : S \to X$ est un S-point de X, on note $\{p\}$ l'image de p dans X, qui est sous-schéma fermé de X. Enfin, si X est un S-schéma en groupes commutatif, on note $Z + p$ l'image du morphisme

$$Z \times_S S \xrightarrow{z \times p} X \times_S X \xrightarrow{+} X$$

où $+$ désigne la loi de X. On vérifie que $Z + p$ est un sous-schéma fermé de X.

Lemme 4.4. *Soit E un S-schéma en groupes semi-stable dont la fibre générique E_η est une courbe elliptique, et soit E° la composante neutre de E. On pose $A = E$ et $A' = E^\circ$, alors les hypothèses du paragraphe 2.3 sont satisfaites, par auto-dualité de E_η.*

D'autre part, soit Δ la diagonale de $E \times_S E$, et soit $(q_1, q_2) \in E(S)^2$. On note $\mathfrak{P}(q_1, q_2)$ le $\mathbf{G}_\mathrm{m}$-torseur birigidifié sur $E \times_S E$ défini par

$$\mathfrak{P}(q_1, q_2) = \mathbf{bir}\left(I^{-1}(\Delta + (q_1, q_2)) \otimes I(E \times \{q_2\}) \otimes I(\{q_1\} \times E)\right) .$$

Alors la biextension W sur (E, E°) satisfait : $t(W) = \mathfrak{P}(q_1, q_2)|_{E \times_S E^\circ}$.

Démonstration. D'après la théorie classique des courbes elliptiques, le fibré de Poincaré $\mathcal{P}_\eta = t(W_\eta)$ sur $E_\eta \times_K E_\eta$ s'écrit

$$t(W_\eta) = I^{-1}(\Delta_\eta) \otimes I(E_\eta \times \{0\}) \otimes I(\{0\} \times E_\eta)$$

où Δ_η est la diagonale de $E_\eta \times_K E_\eta$. De plus, nous avons l'égalité

$$\mathfrak{P}(q_1, q_2)_\eta = \mathbf{bir}\left(I^{-1}(\Delta_\eta + (q_1, q_2)) \otimes I(E_\eta \times \{q_2\}) \otimes I(\{q_1\} \times E_\eta)\right) = \mathcal{P}_\eta\,.$$

Il en résulte que $\mathfrak{P}(q_1, q_2)$ est un $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur birigidifié sur $E \times_S E$ qui prolonge $t(W_\eta)$. D'autre part le foncteur

$$\mathrm{BIEXT}(E, E^\circ; \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow \mathrm{TORSBIRIG}(E, E^\circ; \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$$

de la catégorie des biextensions de (E, E°) par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ dans la catégorie des $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseurs birigidifiés sur $E \times_S E^\circ$, est pleinement fidèle (voir [**SGA 7**], exposé VIII, prop. 7.4, b)). De plus, E° est à fibres connexes, et S est intègre normal, donc (*loc. cit.*) un objet Z du second membre appartient à l'image (essentielle) du foncteur si et seulement si Z_η provient d'une biextension de (E_η, E_η) par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$.

Soit $\mathfrak{P}(q_1, q_2)|_{E \times_S E^\circ} \in \mathrm{TORSBIRIG}(E, E^\circ; \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ la restriction de $\mathfrak{P}(q_1, q_2)$ à $E \times_S E^\circ$. D'après ce qui précède, $\mathfrak{P}(q_1, q_2)|_{E \times_S E^\circ}$ provient d'une biextension de (E, E°) par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, laquelle prolonge W_η, donc est égale à W en vertu de la proposition 2.6. Au final, $t(W)$ est égal à $\mathfrak{P}(q_1, q_2)|_{E \times_S E^\circ}$ en tant que $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$-torseur birigidifié sur $E \times_S E^\circ$. $\square$

Démonstration du théorème 4.1. On suppose ici que A_η est une courbe elliptique, et l'on note $A = E$ pour le confort du lecteur. D'après le lemme 4.3, on peut supposer que A' est à fibres connexes. Par auto-dualité des courbes elliptiques, la fibre générique de A' est isomorphe à E_η. Or il existe (au plus) un unique prolongement de E_η en un S-schéma en groupes semi-stable à fibres connexes. Par suite, A' est isomorphe à la composante neutre E° de E. On retrouve la situation du lemme 4.4.

D'après le lemme 4.4, pour montrer le théorème 4.1, il suffit de trouver $(q_1, q_2) \in E(S)^2$ tel que la restriction de $\mathfrak{P}(q_1, q_2)$ à $E[n] \times_S E[n]$ soit triviale. D'après le lemme 4.3, on peut supposer que $E(S)[6]$ est isomorphe à $E_\eta(\overline{K})[6]$.

Supposons que la caractéristique de K soit première à 6. Alors $E_\eta(\overline{K})[6]$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$. On peut donc choisir deux points q_1 et q_2 d'ordre 6 dans $E(S)$ tels que $q_1 - q_2$ soit d'ordre 6.

Montrons, en raisonnant fibre par fibre, que $\{q_1\} \times E$ est disjoint de $E[n] \times_S E[n]$. Soit x un point de S, de corps résiduel $k(x)$; alors l'application de réduction $E(S) \to E(k(x))$ est injective sur les points d'ordre premier à la caractéristique de $k(x)$. Ainsi, q_1 peut se réduire selon les cas en un point d'ordre 2, 3 ou 6. L'entier n étant premier à 6, on en déduit que $\{q_1\}$ ne rencontre pas $E[n]$, d'où le résultat.

Un raisonnement analogue montre que $\Delta + (q_1, q_2)$ et $E \times \{q_2\}$ sont égalements disjoints du sous-schéma $E[n] \times_S E[n]$. On en déduit aussiôt que la restriction de $\mathfrak{P}(q_1, q_2)$ à $E[n] \times_S E[n]$ est triviale.

Supposons que la caractéristique de K soit égale à 2. Alors $E_\eta(\overline{K})[3]$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. On peut donc choisir deux points q_1 et q_2 d'ordre 3 dans $E(S)$ tels que $q_1 - q_2$ soit d'ordre 3. En outre, S étant intègre, les caractéristiques résiduelles des points de S

sont toutes égales à 2, donc l'argument utilisé précédemment permet de montrer que la restriction de $\mathfrak{P}(q_1, q_2)$ à $E[n] \times_S E[n]$ est triviale.

Enfin, si la caractéristique de K est égale à 3, on effectue un raisonnement analogue en considérant les points d'ordre 2. $\square$

REMARQUE 4.5. Dans les hypothèses du paragraphe 2.3, A ou A' est à fibres connexes. Si l'on se contente de supposer que les groupes de composantes de A et A' sont orthogonaux sous l'accouplement de monodromie, alors W_η admet à nouveau un (unique) prolongement en une biextension W de (A, A') par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. Nous ignorons si le théorème 4.1 est encore vrai dans ce cadre plus général. Signalons simplement que le lemme 4.4 ne se généralise pas si l'on supprime l'hypothèse de connexité.

4.3. Un exemple elliptique. Donnons un exemple d'application du théorème 1.1. Supposons que K soit un corps de nombres, que S soit le spectre de l'anneau des entiers de K, et que $A = E$ soit le modèle de Néron sur S de la courbe elliptique $E_\eta := X_0(11)$ (notée A1(B) par Cremona [**Cr**]) définie sur K par l'équation

$$y^2 + y = x^3 - x^2 - 10x - 20\,.$$

Le discriminant de cette courbe est -11^5, et E est un S-schéma en groupes semi-stable. Dans le cas présent, on constate (voir [**Ma72**], p. 258) que E° contient un sous-groupe isomorphe à $\boldsymbol{\mu}_{5/S}$. Soit à présent

$$\psi : E(S) \to \mathrm{Pic}(\boldsymbol{\mu}_{5/S})$$

l'homomorphisme de classes correspondant à $G = \boldsymbol{\mu}_{5/S} \subseteq E^\circ$ et $A' = E$. Le théorème 1.1 affirme que ψ s'annule sur les points de torsion.

Du point de vue de la structure galoisienne, ce résultat peut s'interpréter de la façon suivante : à tout point $p \in E(S)_{\mathrm{Tors}}$ nous avons associé un $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})_S$-torseur qui a une structure galoisienne triviale. En fait, si p est d'ordre premier à 5, le torseur associé est lui-même trivial. Les exemples intéressants sont donc fournis par des points p d'ordre une puissance de 5 : on pourra prendre $K = \mathbb{Q}(E_\eta[5^n])$ avec $n \geq 1$ dans cet exemple.

D'autre part, la proposition 3.7 permet de construire d'autres exemples de sous-groupes de E°, lesquels engendrent à leur tour d'autres torseurs.

4.4. Dualité. Nous allons donner une interprétation de notre résultat en termes de fibrés en droites. Tout d'abord, on note $\mathrm{Pic}^0_r(A_\eta)$ le sous-groupe de $\mathrm{Pic}_r(A_\eta)$ constitué par les classes des torseurs qui sont algébriquement équivalents à 0.

D'autre part, on note $\mathrm{Pic}^0_r(A)$ l'image réciproque de $\mathrm{Pic}^0_r(A_\eta)$ par le morphisme de restriction à la fibre générique $\mathcal{R} : \mathrm{Pic}_r(A) \to \mathrm{Pic}_r(A_\eta)$.

La théorie habituelle de la dualité pour les variétés abéliennes affirme que l'application

$$\begin{array}{rcl} A^t_\eta(K) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0_r(A_\eta) \\ (p : Spec(K) \to A^t_\eta) & \longmapsto & (\mathrm{id}_{A_\eta} \times p)^*(\mathcal{P}_\eta) \end{array} \tag{8}$$

est un isomorphisme de groupes.

Nous allons voir que, sous certaines hypothèses, la biextension W permet d'établir une dualité du même type entre A et A'.

Proposition 4.6. *Supposons que A soit à fibres connexes, et que A' soit néronien (déf. 2.1). Alors l'application*

$$(9)\qquad \begin{aligned} A'(S) &\longrightarrow \mathrm{Pic}_r^0(A) \\ (p : S \to A') &\longmapsto \mathcal{D}(p) = l^1((\mathrm{id}_A \times p)^*(W)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. Rappelons que $\mathcal{D} = l^1 \circ \gamma$ (voir le paragraphe 2.3). D'après la remarque 2.7, les hypothèses que nous avons faites impliquent que l'application γ est un isomorphisme de groupes. D'autre part, le foncteur

$$L^1 : \mathrm{EXT}(A, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \longrightarrow \mathrm{TORSRIG}(A, \mathbf{G}_\mathrm{m})$$

(où $\mathrm{EXT}(A, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ désigne la catégorie des extensions de A par $\mathbf{G}_\mathrm{m}$) est pleinement fidèle (voir [**SGA 7**], exposé VIII, prop. 7.4, a)). De plus, A est à fibres connexes, et S est intègre normal, donc (*loc. cit.*) un objet Z du second membre appartient à l'image (essentielle) du foncteur L^1 si et seulement si Z_η provient d'une extension de A_η par $\mathbf{G}_{\mathrm{m},K}$.

Considérons alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} A'(S) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \arrow[r, "l^1"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}_r(A) \arrow[d, "\mathcal{R}"] \\ A_\eta^t(K) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Ext}^1(A_\eta, \mathbf{G}_{\mathrm{m},K}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}_r(A_\eta) \end{tikzcd}$$

dans lequel l^1 est l'application induite par le foncteur L^1, et $\mathcal{R}$ est l'application de restriction à la fibre générique. Alors, d'après ce qui précède, l^1 est injective, et son image est égale à l'image réciproque par $\mathcal{R}$ de l'image de l'application (8). Or cette image est égale à $\mathrm{Pic}_r^0(A_\eta)$, d'où le résultat. □

En combinant la proposition 4.6 et le théorème 4.1, nous obtenons le résultat suivant, qui généralise le Theorem A de Pappas [**P1**] :

Corollaire 4.7. *Supposons que A soit à fibres connexes, et que A_η soit une courbe elliptique. Soit m un entier premier à* 6*. Alors, pour tout $\mathcal{L}$ dans $\mathrm{Pic}_r^0(A)_{\mathrm{Tors}}$, la restriction de $\mathcal{L}$ à $A[m]$ est triviale.*

Remarque 4.8. En général, le schéma en groupes $A[m]$ est quasi-fini et plat sur S, mais n'est pas nécessairement fini. Cependant, dans le cas particulier où S est le spectre d'un anneau de Dedekind, le corollaire 4.7 admet encore une interprétation en termes de structure galoisienne de torseurs (voir le chapitre 4 de la présente thèse).

4.5. Application aux caractéristiques d'Euler. Comme l'a montré Pappas dans [**P2**], l'homomorphisme ψ admet une interprétation en termes de caractéristiques d'Euler. Ainsi deux problèmes de structure galoisienne, *a priori* distincts, se retrouvent liés — la connexion étant établie par le biais de la théorie des biextensions.

Plus précisément, dans les paragraphes 3.*b* et 3.*c* de [**P2**], l'auteur étudie les caractéristiques d'Euler dans un cadre général. Puis, sous l'hypothèse de bonne réduction, il établit un lien entre caractéristiques d'Euler et valeurs de l'homomorphisme ψ. Dans ce cadre, son Theorem 6.4 (voir la section 6 de [**P2**]) découle de l'annulation de l'homomorphisme

ψ. On vérifie que les arguments de Pappas s'appliquent *mutatis mutandis* à notre situation. On peut alors déduire du théorème 1.1 le résultat suivant, généralisant le Theorem 6.4 de Pappas :

Corollaire 4.9. *Soit S le spectre d'un anneau de Dedekind, et soit G un S-schéma en groupes commutatif, fini et plat.*

Soit $Y \to S$ un modèle minimal, régulier et projectif d'une courbe elliptique à réduction semi-stable sur K, et soit $X \to Y$ un G-torseur. Alors

$$pgcd(12m, 2^7\,3^2) \cdot \chi_R^P(\mathcal{O}_X) = 0$$

où m est l'ordre de G, et où χ_R^P désigne la caractéristique d'Euler projective équivariante. De plus, si m est premier à 6 et si R est principal, alors $\chi_R^P(\mathcal{O}_X) = 0$.

Pour une définition de la caractéristique d'Euler projective χ_R^P, nous renvoyons le lecteur à l'article de Pappas (voir [**P2**], paragraphes 2.b et 2.c).

5. Compléments

Le but de cette section est d'exposer plus en détail notre construction dans le cas particulier où les schémas semi-stables considérés sont des modèles de Néron. Dans ce cadre, nous sommes naturellement amenés à nous poser de nouvelles questions.

Dans toute cette section, nous supposons que K est un corps de nombres, et que $S = Spec(\mathcal{O}_K)$ est le spectre de l'anneau des entiers de K. Soit A_η une K-variété abélienne, et soit $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}^t$) le modèle de Néron de A_η (resp. de A_η^t).

Dans le cas où la K-variété A_η est à réduction semi-stable, il est clair que les couples $(A, A') = (\mathcal{A}^\circ, \mathcal{A}^t)$ et $(A, A') = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^{t,\circ})$ satisfont nos hypothèses.

5.1. Faisceaux $\underline{\mathrm{Ext}}^1$ et modèles de Néron. Nous supposons ici que A_η est à réduction semi-stable, et que (A, A') est l'un des couples précédemment cités.

On sait que la biextension W induit un morphisme de groupes $\gamma : A' \to \mathrm{Ext}^1(A, \mathbf{G}_\mathrm{m})$. Ceci reste vrai si l'on fait subir aux données un changement de base $S' \to S$. Ainsi W permet de définir un morphisme de faisceaux abéliens

$$\alpha : A' \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A, \mathbf{G}_\mathrm{m})$$

qui nous sera utile par la suite.

Soit G un sous-S-schéma en groupes fini et plat de A. Le quotient $B := A/G$ est représentable par un S-schéma en groupes semi-stable, d'après la remarque 2.3. Ainsi nous avons une flèche $\xi : B \to \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est le modèle de Néron de B_η. De plus, $\mathcal{B}$ étant semi-stable, la flèche ξ est une immersion ouverte (voir [**BLR**], §7.4, prop. 3).

L'isogénie $\phi_\eta : A_\eta \to B_\eta$ donne naissance à une isogénie duale $\phi_\eta^t : B_\eta^t \to A_\eta^t$, puis à un morphisme $\phi^t : \mathcal{B}^t \to \mathcal{A}^t$ (par la propriété universelle du modèle de Néron).

Supposons à présent que $(A, A') = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^{t,\circ})$. Alors B est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{B}$ (mais n'est pas isomorphe à $\mathcal{B}$ en général).

Grâce à la proposition 2.6, on peut définir un morphisme $\beta : \mathcal{B}^{t,\circ} \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(B, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$, analogue à α. On vérifie alors que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{B}^{t,\circ} \arrow[r, "\phi^{t,\circ}"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathcal{A}^{t,\circ} \arrow[d, "\alpha"'] & \\ 0 \arrow[r] & G^D \arrow[r] & \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(B, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \arrow[r, "\phi^*"] & \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(\mathcal{A}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est commutatif. En outre, la flèche $\phi^{t,\circ}$ est surjective, de sorte que nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker \phi^{t,\circ} \longrightarrow \mathcal{B}^{t,\circ} \xrightarrow{\phi^{t,\circ}} \mathcal{A}^{t,\circ} \longrightarrow 0$$

de faisceaux (représentables) sur le petit site fppf de S.

Considérons un point $p \in \mathcal{A}^{t,\circ}(S)$. Le diagramme précédent montre que le $\ker \phi^{t,\circ}$-torseur associé à p par le cobord de la suite qui précède a pour image le G^D-torseur $\delta(\gamma(p))$ par le morphisme naturel

$$H^1(S, \ker \phi^{t,\circ}) \longrightarrow H^1(S, G^D)\,.$$

Ainsi nous obtenons une interprétation de $\delta(\gamma(p))$ en termes de points de $\mathcal{B}^t$.

Remarque 5.1. On peut donner une interprétation analogue du cobord δ dans le cas où $(A, A') = (\mathcal{A}^\circ, \mathcal{A}^t)$.

5.2. Propriétés fonctorielles. Plaçons-nous dans le cas où $(A, A') = (\mathcal{A}^\circ, \mathcal{A}^t)$. Comme nous l'avons vu dans la remarque 2.7, la flèche γ est alors un isomorphisme. Ceci soulève le problème suivant : se pourrait-il que la flèche

$$\alpha : \mathcal{A}^t \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(\mathcal{A}^\circ, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$$

induite par la biextension W, soit un isomorphisme ? Dès que $\mathcal{A}$ n'a pas partout bonne réduction, la réponse à cette question est négative, comme nous allons le voir.

On suppose à présent que $\mathcal{A}$ a mauvaise réduction semi-stable en au moins une place. Soit K' une extension de K, de degré fini, et soit $T = Spec(\mathcal{O}_{K'})$. Soient respectivement $\mathcal{A}_{/T}$ et $\mathcal{A}^t_{/T}$ les modèles de Néron (sur T) de la K'-variété $\mathcal{A}_\eta \times_K Spec(K')$ et de sa duale. Alors (voir [**BLR**], §7.4, cor. 4), la composante neutre de $\mathcal{A}_{/T}$ est égale à $\mathcal{A}^\circ \times_S T$. De plus, la flèche $\mathcal{A}^t_T \to \mathcal{A}^t_{/T}$ induite par la propriété de Néron est une immersion ouverte (voir [**BLR**], §7.4, prop. 3). Résumons la situation par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^t_T(T) = \mathcal{A}^t(T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{A}^\circ \times_S T, \mathbf{G}_{\mathrm{m},T}) \arrow[d, equal] \\ \mathcal{A}^t_{/T}(T) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Ext}^1((\mathcal{A}_{/T})^\circ, \mathbf{G}_{\mathrm{m},T}) \end{tikzcd}$$

Ici, la flèche verticale de gauche est injective d'après ce qui précède. De plus, la flèche du bas est un isomorphisme d'après la remarque 2.7 appliquée à la K'-variété abélienne $\mathcal{A}_\eta \times_K Spec(K')$. Pour montrer que α n'est pas un isomorphisme, il suffit de donner un exemple où la flèche horizontale du haut n'est pas bijective, *i.e.* trouver un T tel que l'injection $\mathcal{A}^t_T(T) \to \mathcal{A}^t_{/T}(T)$ soit stricte. Pour cela, on prend une extension K'/K suffisamment ramifiée en une place de mauvaise réduction de $\mathcal{A}^t$, ce qui a pour effet d'augmenter le nombre de composantes du modèle de Néron en cette place. Par exemple, on peut prendre $K' = K(A_\eta[n])$ avec n suffisamment grand, ce qui a pour effet de rajouter des éléments d'ordre n dans les groupes de composantes.

En résumé, si α était un isomorphisme, cela signifierait que le comportement de $\mathcal{A}^t$ serait le même que celui de $\mathcal{A}^\circ$ par changement de base fidèlement plat. Or ce n'est pas le cas si $\mathcal{A}$ a mauvaise réduction semi-stable.

Remarque 5.2. Comme nous l'a fait remarquer L. Moret-Bailly, α est un monomorphisme de faisceaux. En effet, soit T un S-schéma plat, et soit U l'ouvert de bonne réduction de $\mathcal{A}$. Nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^t(T) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(\mathcal{A}^\circ, \mathbf{G}_\mathrm{m})(T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}^t(T \times_S U) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ext}}^1_U(\mathcal{A}_U, \mathbf{G}_\mathrm{m})(T \times_S U) \end{array}$$

dans lequel la flèche du bas est un isomorphisme (par dualité des schémas abéliens), et où celle de gauche est injective par densité de U dans S (donc de $T \times_S U$ dans T). Ainsi la flèche du haut est injective.

Ce raisonnement est encore valable dans le cadre (plus général) du paragraphe 2.3.

Remarque 5.3. Par contraste, la formation du modèle de Néron commute au changement de base étale. D'ailleurs, si l'on remplace le petit site fppf par le site lisse sur S (*i.e.* la catégorie des S-schémas lisses, munie de la topologie étale) alors l'analogue de α est bien un isomorphisme (voir [**Mi86**], Proposition C.14).

5.3. Auto-dualité des courbes elliptiques. Dans ce paragraphe, on suppose que A_η est une courbe elliptique, et on note $\mathcal{A} = \mathcal{E}$ pour le confort du lecteur. Considérons le couple $(A, A') = (\mathcal{E}^\circ, \mathcal{E})$, de sorte que A est à fibres connexes et A' est néronien. La proposition 4.6 implique alors le résultat suivant, qui nous a semblé mériter d'apparaître ici pour éclaircir la situation :

Proposition 5.4. *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(S) &\longrightarrow \mathrm{Pic}^0_r(\mathcal{E}^\circ) \\ (p : S \to \mathcal{E}) &\longmapsto \mathbf{r}(I^{-1}(p) \otimes I(0)) \end{aligned} \tag{10}$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. D'après le lemme 4.4, la biextension W sur $(\mathcal{E}^\circ, \mathcal{E})$ satisfait

$$t(W) = \mathbf{bir}\left(I^{-1}(\Delta) \otimes I(\mathcal{E} \times \{0\}) \otimes I(\{0\} \times \mathcal{E})\right)|_{\mathcal{E}^\circ \times \mathcal{E}}$$

Ainsi, pour tout point $p \in \mathcal{E}(S)$, nous avons

$$\begin{aligned} l^1((\mathrm{id}_{\mathcal{E}^\circ} \times p)^*(W)) &= (\mathrm{id}_{\mathcal{E}^\circ} \times p)^* \left(\mathbf{bir}\left(I^{-1}(\Delta) \otimes I(\mathcal{E} \times \{0\}) \otimes I(\{0\} \times \mathcal{E})\right)\right) \\ &= \mathbf{r}(I^{-1}(p) \otimes I(0)) \end{aligned}$$

Donc l'application (10) coïncide avec l'application $\mathcal{D}$. Le résultat découle alors de la proposition 4.6. $\square$

5.4. Autres cas d'annulation. Dans ce paragraphe, on considère deux courbes elliptiques E_η et F_η à réduction semi-stable sur K, et l'on note respectivement $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ leurs modèles de Néron.

Soit G un sous-schéma en groupes fini et plat de $\mathcal{E} \times_S \mathcal{F}^\circ$, et soit B le faisceau quotient $(\mathcal{E} \times_S \mathcal{F}^\circ)/G$. D'après la section 2 du présent chapitre, nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow G^D \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(B, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \xrightarrow{\phi^*} \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(\mathcal{E} \times \mathcal{F}^\circ, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \longrightarrow 0$$

Comme précédemment, on note δ le cobord qui s'en déduit.

Soit W_1 (resp. W_2) la biextension sur $(\mathcal{E}^\circ, \mathcal{E})$ (resp. sur $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\circ)$) dont l'existence est assurée par la proposition 2.6. Soit W' l'image de la biextension produit $W_1 \times_S W_2$ par le morphisme naturel

$$\mathrm{Biext}^1(\mathcal{E}^\circ \times_S \mathcal{F}, \mathcal{E} \times_S \mathcal{F}^\circ; \mathbf{G}_\mathrm{m}^2) \longrightarrow \mathrm{Biext}^1(\mathcal{E}^\circ \times_S \mathcal{F}, \mathcal{E} \times_S \mathcal{F}^\circ, \mathbf{G}_\mathrm{m})$$

induit par la loi de multiplication de $\mathbf{G}_\mathrm{m}$. Alors W' est une biextension qui prolonge la biextension de Weil, ce qui donne naissance, comme nous l'avons noté dans le paragraphe 2.3, à une flèche

$$(\mathcal{E}^\circ \times_S \mathcal{F})(S) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E} \times_S \mathcal{F}^\circ, \mathbf{G}_\mathrm{m})\,.$$

Soit alors ψ' l'homomorphisme obtenu par composition des applications suivantes

$$(\mathcal{E}^\circ \times \mathcal{F})(S) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E} \times_S \mathcal{F}^\circ, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \xrightarrow{\delta} H^1(S, G^D) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}(G)$$

Proposition 5.5. *Supposons que l'ordre de G soit premier à 6. Alors l'homomorphisme ψ' défini ci-dessus s'annule sur $(\mathcal{E}^\circ \times_S \mathcal{F})(S)_{\mathrm{Tors}}$.*

Démonstration. Le théorème 4.1 implique que, pour tout entier n premier à 6, la restriction de $t(W_1)$ (resp. $t(W_2)$) au sous-groupe $\mathcal{E}^\circ[n] \times_S \mathcal{E}[n]$ (resp. $\mathcal{F}[n] \times_S \mathcal{F}^\circ[n]$)) est triviale. Ainsi, la restriction de $t(W')$ au sous-groupe $(\mathcal{E}^\circ \times_S \mathcal{F})[n] \times_S (\mathcal{E} \times_S \mathcal{F}^\circ)[n]$ est triviale. Ceci implique le résultat, la remarque 3.5 étant valable en toute dimension. □

Remarque 5.6. Ainsi $(\mathcal{E}^\circ \times_S \mathcal{F}, \mathcal{E} \times_S \mathcal{F}^\circ)$ est un couple de S-schémas en groupes semi-stables de dimension 2, dont (en général) aucun des deux n'est à fibres connexes, mais pour lesquels la conclusion du théorème 4.1 est encore vraie.

5.5. Cas de réduction additive. A présent, nous ne faisons plus aucune hypothèse sur le type de réduction de A_η. Comme précédemment, nous prenons $(A, A') = (\mathcal{A}^\circ, \mathcal{A}^t)$ ou $(A, A') = (\mathcal{A}, \mathcal{A}^{t,\circ})$. On constate alors que tous les résultats des sections 2 et 3 du présent chapitre sont encore valables pour un tel couple. On peut donc définir dans ce cadre un homomorphisme ψ, qui s'annule (comme précédemment) sur les points de torsion d'ordre premier à celui de G. De plus, le lemme 4.4 est encore vrai dans ce cadre. Cependant, la démonstration du lemme 4.3 ne fonctionne plus avec ces nouvelles hypothèses. En effet, dans le cas de mauvaise réduction additive, la composante neutre du modèle de Néron n'est plus stable par changement de base. On peut récupérer quand même un résultat d'annulation dans le cas d'une courbe elliptique E_η, en supposant que les points d'ordre 6 de E_η sont déja rationnels sur K (ce qui évite d'avoir à changer de base).

Un tel résultat donne lieu à un nombre restreint d'exemples. En effet, en appliquant le critère de Raynaud de réduction semi-stable (voir [**SGA 7**], exposé IX, prop. 4.7), on constate que la courbe E_η acquiert réduction semi-stable sur le corps $K(E_\eta[12])$.

Chapitre 4

Variétés abéliennes et invariants arithmétiques

Ce chapitre reproduit un article accepté pour publication dans les *Annales de l'Institut Fourier*. Nous rappelons au lecteur que l'article [**G**] constitue l'essentiel du chapitre 3 de la présente thèse.

1. Introduction

Soient R un anneau de Dedekind excellent, de corps de fractions K, et $S = Spec(R)$. On considère un S-schéma en groupes commutatif G, fini et plat sur S, et l'on note G^D le dual de Cartier de G. Nous disposons d'un homomorphisme

$$\pi : H^1(S, G^D) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G)$$

explicité en premier par Waterhouse (voir [**W**], Theorem 5). Si l'on considère que la notion de torseur (sous un schéma en groupes fini) généralise celle d'extension galoisienne, alors on peut dire que π mesure la structure galoisienne des G^D-torseurs, le groupe $\mathrm{Pic}(G)$ étant identifié à un groupe de classes (voir [**CN-T**]).

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la construction de G^D-torseurs dont l'image par π est triviale, c'est-à-dire de torseurs dont la structure galoisienne est triviale. Plus précisément, supposons que G soit un sous-groupe d'un S-schéma abélien A. Soit $B := A/G$ le schéma abélien quotient, et soit A^t (resp. B^t) le schéma abélien dual de A (resp. B). Alors (par dualité) nous avons une suite exacte (de faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur S)

$$0 \longrightarrow G^D \longrightarrow B^t \longrightarrow A^t \longrightarrow 0$$

qui donne lieu, par application du foncteur des sections globales, à un morphisme cobord $\partial : A^t(S) \to H^1(S, G^D)$. Nous obtenons ainsi un homomorphisme $\psi := \pi \circ \partial$, introduit en premier (dans le cas où $G = A[n]$ et où R est l'anneau des entiers d'un corps de nombres) par M. J. Taylor [**T88**], et que l'on appelle usuellement *class-invariant homomorphism*. Srivastav et Taylor [**S-T**], puis Agboola [**A2**], et enfin Pappas [**P1**] ont montré que, si A est une courbe elliptique et si l'ordre de G est premier à 6, alors les points de torsion de $A^t(S)$ appartiennent au noyau de ψ.

Dans [**G**], l'auteur a généralisé la construction de ψ dans le cas où G est un sous-groupe fini et plat d'un S-schéma en groupes semi-stable, ainsi que le résultat d'annulation sur les points de torsion (dans le cas d'une courbe elliptique semi-stable, en supposant l'ordre de G premier à 6).

Notre but est d'étendre cette construction dans le cadre suivant : soient $\mathcal{A}$ le modèle de Néron d'une K-variété abélienne semi-stable, $\mathcal{A}^\circ$ la composante neutre de $\mathcal{A}$, Γ un sous-groupe (*i.e.* un sous-schéma en groupes ouvert) de $\Phi := \mathcal{A}/\mathcal{A}^\circ$ (quotient pour la topologie fppf sur S) et G un sous-groupe fermé, quasi-fini et plat de $\mathcal{A}^\Gamma$ (où $\mathcal{A}^\Gamma$ désigne l'image réciproque de Γ dans $\mathcal{A}$). Nous définissons (paragraphe 3.2) un homomorphisme ψ (associé à l'inclusion $G \subseteq \mathcal{A}^\Gamma$) qui se factorise de la façon suivante

$$\mathcal{A}^{t,\Gamma'}(S) \longrightarrow H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})) \xrightarrow{\ \pi\ } \mathrm{Pic}(G)\,,$$

où Γ' est l'orthogonal de Γ sous l'accouplement de monodromie défini par Grothendieck (voir le paragraphe 2.2), et où π est un homomorphisme qui généralise celui de Waterhouse (voir le paragraphe 3.1).

Signalons ici que l'application $\Gamma \mapsto \mathcal{A}^\Gamma$ réalise une bijection entre l'ensemble des sous-groupes ouverts de Φ et l'ensemble des modèles semi-stables de $\mathcal{A}_K$.

Du point de vue technique, la principale différence avec la situation considérée dans [**G**] est l'absence de dual de Cartier naturel pour le schéma en groupes G. Cependant, on donne ici une preuve de la nullité du faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ pour la topologie fppf (voir le lemme 2.3). Ce résultat, qui nous a été communiqué par L. Moret-Bailly, nous permet de généraliser de façon naturelle les constructions précédentes.

Travailler avec des groupes quasi-finis permet de reformuler le résultat d'annulation de ψ démontré dans [**G**]. Ainsi on peut énoncer, comme corollaire du théorème 4.1 de [**G**], le résultat suivant (voir le paragraphe 5.1) :

Théorème 1.1. *Soit $\mathcal{E}$ le modèle de Néron d'une courbe elliptique à réduction semi-stable sur K, et soit $m > 0$ un entier naturel premier à 6. Alors les homomorphismes*

$$\mathcal{E}^t(S) \longrightarrow H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{E}^\circ[m], \mathbf{G}_\mathrm{m})) \xrightarrow{\ \pi\ } \mathrm{Pic}(\mathcal{E}^\circ[m])$$

(associé à $\mathcal{E}^\circ[m] \subseteq \mathcal{E}^\circ$), et

$$\mathcal{E}^{t,\circ}(S) \longrightarrow H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{E}[m], \mathbf{G}_\mathrm{m})) \xrightarrow{\ \pi\ } \mathrm{Pic}(\mathcal{E}[m])$$

(associé à $\mathcal{E}[m] \subseteq \mathcal{E}$) s'annulent sur les points de torsion.

Remarque 1.2. On constate que les groupes $\mathcal{E}^\circ[m]$ et $\mathcal{E}[m]$ sont affines (paragraphe 2.3). D'autre part, si les points de m-torsion de $\mathcal{E}_\eta$ sont tous K-rationnels, alors le groupe $\mathcal{E}[m]$ est fini et plat sur S ([**G**], prop. 3.6), donc $\underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{E}[m], \mathbf{G}_\mathrm{m}) = \mathcal{E}[m]^D$ est le dual de Cartier de $\mathcal{E}[m]$. Par contre, si $\mathcal{E}$ n'a pas partout bonne réduction, $\mathcal{E}^\circ[m]$ n'est jamais un groupe fini, sauf pour $m = 1$, valeur pour laquelle il est nul (voir la remarque 3.10).

L'un des objectifs de ce travail est de « passer à la limite » dans l'étude de ψ. Supposons que K soit un corps de nombres, et que R soit l'anneau des entiers de K. Sous ces hypothèses, nous introduisons (cf. section 4) une version arakélovienne $\hat{\psi}$ de notre homomorphisme (généralisant celle introduite par Agboola et Pappas dans [**A-P**]) : soit ℓ un nombre premier, on note alors

$$\hat{\Psi}_\ell = \varprojlim \hat{\psi}_{\ell^n} : \mathcal{A}^t(S) \otimes \mathbf{Z}_\ell \longrightarrow \varprojlim \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n])$$

la flèche obtenue par passage à la limite projective de l'homomorphisme $\hat{\psi}_{\ell^n}$ associé à l'inclusion $\mathcal{A}^\circ[\ell^n] \subseteq \mathcal{A}^\circ$ (cf. paragraphe 5.2). Soient $\operatorname{disc}(K/\mathbb{Q})$ le discriminant de $K/\mathbb{Q}$, et $U \subseteq S$ l'ouvert de bonne réduction de $\mathcal{A}$. Les résultats de [**A-P**] impliquent alors le résultat qui suit :

Théorème 1.3. *L'homomorphisme $\hat{\Psi}_\ell$ est injectif modulo les points de torsion. En outre, si tous les points de S de caractéristique ℓ sont contenus dans U, et si ℓ ne divise pas* $6 \cdot \operatorname{disc}(K/\mathbb{Q})$*, alors $\hat{\Psi}_\ell$ est injectif.*

Remarque 1.4. Supposons que, pour toute place v de mauvaise réduction de $\mathcal{A}$, ℓ ne divise pas l'ordre de Φ_v. Alors nous avons $\mathcal{A}^\circ[\ell^n] = \mathcal{A}[\ell^n]$ pour tout entier n, ce qui permet d'exprimer plus simplement l'ensemble d'arrivée de $\hat{\Psi}_\ell$.

Remarque 1.5. Philippe Cassou-Noguès et Martin Taylor ont remarqué une analogie entre l'annulation de ψ sur les points de torsion et la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (voir la remarque 5.8 de [**T91**] ainsi que les commentaires qui suivent le théorème 4 de [**CN-T**]). Soit à présent $\Psi_\ell : \mathcal{A}^t(S) \otimes \mathbf{Z}_\ell \to \varprojlim \operatorname{Pic}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n])$ le morphisme déduit de $\hat{\Psi}_\ell$ par oubli des métriques. Les remarques précédentes suggèrent un lien entre l'injectivité de Ψ_ℓ sur les points d'ordre infini et la conjecture de Birch et Swinerton-Dyer ℓ-adique.

Remarquons que, si $\mathcal{A}$ est une courbe elliptique à multiplication complexe, ayant partout bonne réduction sur K et réduction ordinaire en ℓ, alors l'injectivité de Ψ_ℓ modulo les points de torsion a été démontrée (sous certaines hypothèses) par Agboola et Taylor (voir [**A-T**] ou le théorème 6 de [**CN-T**]).

2. Problèmes d'exactitude

Rappelons les notations qui seront en vigueur tout au long de cet article : R est un anneau de Dedekind excellent, de corps de fractions K. Soit $S = Spec(R)$ et soit η le point générique de S. Nous noterons $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ le groupe multiplicatif sur S.

On dit qu'un S-schéma en groupes est semi-stable s'il est commutatif, lisse, séparé, et si les composantes neutres de ses fibres sont extensions de variétés abéliennes par des tores.

On fixe une fois pour toutes un S-schéma en groupes semi-stable A dont la fibre générique A_η est une variété abélienne. On notera $U \subseteq S$ l'ouvert de bonne réduction de A, de sorte que A_U est un U-schéma abélien.

2.1. Isogénies duales sur le petit site fppf. Supposons que l'on se donne un épimorphisme (fppf) $f : A \to B$ entre S-schémas en groupes semi-stables, tel que $f_\eta : A_\eta \to B_\eta$ soit une isogénie. Alors $\ker f$ est un S-schéma en groupes plat et quasi-fini (voir [**BLR**], §7.3, lemma 1). De plus, nous avons un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \ker f & \longrightarrow & A \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ S & \xrightarrow{e} & B \end{array}$$

où $e : S \to B$ désigne la section unité, qui est une immersion fermée car B est séparé. Par suite, $\ker f \to A$ est une immersion fermée.

Réciproquement, soit G un sous-S-schéma en groupes fermé, quasi-fini et plat de A. Le lemme suivant montre que G s'inscrit dans une suite exacte.

LEMME 2.1. *Le faisceau quotient A/G, pour la topologie fppf sur S, est représentable par un S-schéma en groupes semi-stable.*

DÉMONSTRATION. Le faisceau quotient A/G est représentable ([**An**], chap. IV, théorème 4.C) par un S-schéma en groupes, que nous noterons B (on se sert du fait que A est de type fini sur S, et S régulier de dimension ≤ 1). La projection canonique $\varphi : A \to B$ est fidèlement plate, et A est un S-schéma plat, donc B est un S-schéma plat. De plus B est lisse sur S grâce au critère de lissité par fibres ([**BLR**], §2.4, prop. 8). Enfin, les composantes neutres des fibres de B sont extensions de variétés abéliennes par des tores. □

Ainsi nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$$

de faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur S. De plus, la restriction $\varphi_U : A_U \to B_U$ est une isogénie entre U-schémas abéliens. Il existe alors une isogénie duale $\varphi_U^t : B_U^t \to A_U^t$, dont le noyau est le dual de Cartier G_U^D de G_U. Ici, A_U^t et B_U^t désignent les U-schémas abéliens duaux de A_U et B_U respectivement.

Nous voulons prolonger l'isogénie duale φ_U^t en un morphisme de faisceaux sur S, pour cela nous allons nous servir du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(-, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ et de ses dérivés. Dans cette optique, le gros site fppf ne nous convient pas, car le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ n'est pas nul. Nous allons donc utiliser un autre site, qui nous permettra d'énoncer le lemme 2.2.

Plus précisément, nous considérons le « petit site fppf » sur S (resp. sur U), c'est-à-dire la catégorie des schémas plats sur S (resp. sur U) munie d'une structure de site pour la topologie fppf. Nous appellerons faisceau (pour la topologie fppf) sur S (resp. sur U) un faisceau sur ce site.

Nous noterons $\underline{\mathrm{Hom}}_S$ (resp. $\underline{\mathrm{Hom}}_U$) le faisceau des homomorphismes de faisceaux abéliens, restreint au petit site fppf sur S (resp. sur U).

Soit $j : U \to S$ l'inclusion, et soit j^* le foncteur « image inverse » de faisceaux correspondant. La flèche $j : U \to S$ étant un objet du petit site fppf sur S, le foncteur j^* est un « foncteur de localisation » (voir [**SGA 4**], exposé IV, paragraphes 5.1 à 5.4).

En particulier, il en résulte que l'image par j^* d'un faisceau représentable (disons par un S-schéma plat Y) est représenté par le U-schéma $Y_U := Y \times_S U$. D'autre part, si F_1 et F_2 sont deux faisceaux abéliens sur S, la flèche canonique

$$j^*(\underline{\mathrm{Hom}}_S(F_1, F_2)) \to \underline{\mathrm{Hom}}_U(j^*F_1, j^*F_2)$$

est un isomorphisme (voir [**SGA 4**], exposé IV, prop. 12.3, b), p. 502). De plus, j^* est exact et admet un adjoint à gauche $j_!$ exact. Par suite, j^* envoie les injectifs sur des injectifs (voir [**SGA 4**], exposé V, paragraphe 2.2). Nous dérivons alors des deux côtés de la flèche et obtenons un isomorphisme $j^*(\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(F_1, F_2)) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^1_U(j^*F_1, j^*F_2)$. En particulier, soit Y un S-schéma en groupes plat tel que Y_U soit un U-schéma abélien, alors nous obtenons un isomorphisme

$$j^*(\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(Y, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})) \simeq Y_U^t \tag{11}$$

où Y_U^t est le schéma abélien dual de Y_U. On se sert ici du fait que $\underline{\mathrm{Ext}}^1_U(Y_U, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est isomorphe à Y_U^t (voir [**SGA 7**], exposé VII, 2.9.5 et 2.9.6).

Nous avons le résultat suivant (voir [**G**], lemme 2.2) :

LEMME 2.2. *Soit Y un S-schéma en groupes plat, dont la fibre générique Y_η est une variété abélienne. Alors $\underline{\mathrm{Hom}}_S(Y, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ est nul.*

D'autre part, nous devons à L. Moret-Bailly la démonstration du lemme qui suit (laquelle dépend du fait que S est régulier de dimension ≤ 1).

LEMME 2.3 (L. Moret-Bailly). *Soit G un schéma en groupes (commutatif) plat, séparé et quasi-fini sur S. Alors $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ est nul.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer S local hensélien. Le groupe G étant quasi-fini et séparé sur S, il admet un plus grand sous-groupe ouvert et fermé H fini sur S (voir [**SGA 7**], exposé IX, 2.2.3). De plus, la platitude de G entraîne celle de H. Le quotient G/H est alors étale sur S (sa section unité est ouverte), de fibre spéciale nulle. Sa fibre générique est donc un K-schéma en groupes (automatiquement séparé) fini étale. On en déduit que G/H est lui-même plat, quasi-fini et séparé sur S. Le groupe H étant fini et plat sur S, nous avons $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(H, \mathbf{G}_\mathrm{m}) = 0$ (voir [**SGA 7**], exposé VIII, 3.3.1). Ainsi on se ramène au cas où G est étale, à fibre spéciale nulle.

Soit Ω une extension de G par $\mathbf{G}_\mathrm{m}$. On remarque que G_K et la section unité de G forment un recouvrement ouvert de G. Donc trivialiser l'extension Ω équivaut à trivialiser sa fibre générique (extension de G_K par $\mathbf{G}_{\mathrm{m},K}$). Une telle trivialisation existe après extension finie de K, donc après revêtement fini et plat de S, d'où le résultat. $\square$

A présent, nous considérons la suite

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$$

comme étant une suite exacte de faisceaux sur le petit site fppf de S.

Nous obtenons, en appliquant le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(-, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ à cette suite, une (longue) suite exacte de cohomologie

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(A, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \to \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(B, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})$$

dont les termes sont des faisceaux abéliens sur S. Le premier terme est nul, d'après le lemme 2.2, ainsi que le dernier terme, d'après le lemme 2.3. Ainsi nous obtenons une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(B, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \xrightarrow{\varphi^*} \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \longrightarrow 0\,. \tag{12}$$

D'après ce qui précède (voir (11)), son image par le foncteur j^* est la suite

$$0 \longrightarrow G_U^D \longrightarrow B_U^t \xrightarrow{\varphi_U^t} A_U^t \longrightarrow 0\,.$$

Cette dernière admet donc un « prolongement » sur S.

Par application du foncteur des sections globales, nous pouvons déduire de la suite (12) un morphisme cobord

$$\delta : \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \to H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m}))\,.$$

Nous allons voir à présent comment la théorie des biextensions permet d'éclaircir les choses en construisant explicitement des sections du faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A, \mathbf{G}_\mathrm{m})$.

2.2. Biextensions et faisceau image. Soit $\mathcal{A}$ le modèle de Néron de A_η. Alors, A étant semi-stable, la flèche $A \to \mathcal{A}$ prolongeant l'application identique $A_\eta \to A_\eta$ est une immersion ouverte, et induit un isomorphisme entre les composantes neutres (voir [**BLR**], §7.4, prop. 3). Par suite, nous identifierons A à un sous-groupe ouvert de $\mathcal{A}$. Soit $\Phi := \mathcal{A}/\mathcal{A}^\circ$ le groupe des composantes de $\mathcal{A}$. Alors il existe un sous-faisceau Γ de Φ tel que A soit l'image réciproque de Γ par la surjection canonique $\mathcal{A} \to \Phi$. Nous adopterons donc la notation usuelle $A = \mathcal{A}^\Gamma$.

Soit à présent A^t_η la variété abélienne duale de A_η, et soit $\mathcal{A}^t$ son modèle de Néron, alors $(\mathcal{A}^t)_U = A^t_U$ est le schéma abélien dual de A_U, ce qui est consistant avec les notations précédentes. Nous allons voir comment la théorie des biextensions permet d'établir un lien entre le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(A, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ et le schéma $\mathcal{A}^t$.

On sait que la dualité entre A_η et A^t_η découle de l'existence d'un fibré en droites $\mathcal{P}_\eta$ sur $A_\eta \times_K A^t_\eta$, que l'on appelle fibré de Poincaré. Cependant nous envisageons ici la dualité dans un cadre plus général à l'aide de la notion de biextension, introduite par Mumford dans [**Mu**]. Pour une définition précise de cette notion nous renvoyons le lecteur aux exposés de Grothendieck ([**SGA 7**], exposé VII) et de Milne ([**Mi86**], Appendix C).

Grâce au théorème du carré, on peut munir le fibré de Poincaré $\mathcal{P}_\eta$ d'une unique structure de biextension de (A_η, A^t_η) par $\mathbf{G}_{\mathrm{m},K}$, que l'on appelle la biextension de Weil, et que l'on note W_η. Une question naturelle se pose : W_η se prolonge-t-elle en une biextension sur les modèles de Néron ?

L'accouplement (dit « de monodromie ») introduit par Grothendieck dans [**SGA 7**] nous donne la réponse.

Plus précisément, soit Φ' le groupe des composantes de $\mathcal{A}^t$. On déduit de la lecture de ([**SGA 7**], exposé VIII, théorème 7.1, b)) un accouplement (associé à W_η)

$$\Phi \times_S \Phi' \longrightarrow (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_S \,.$$

Signalons ici que, $\mathcal{A}$ étant semi-stable, cet accouplement est non dégénéré (voir [**SGA 7**], exposé IX, théorème 11.5 ; on pourra également consulter [**We**] pour la propriété de compatibilité laissée au lecteur par Grothendieck). Le problème de prolongement est alors résumé par la proposition qui suit.

Proposition 2.4. *Soit M (resp. M') un sous-groupe de Φ (resp. Φ'). Alors il existe une (unique) biextension W de $(\mathcal{A}^M, \mathcal{A}^{t,M'})$ par $\mathbf{G}_\mathrm{m}$ prolongeant la biextension de Weil W_η sur (A_η, A^t_η) si et seulement si M et M' sont orthogonaux sous l'accouplement.*

Démonstration. Le résultat découle de ([**SGA 7**], exposé VIII, théorème 7.1, b)) dans le cas particulier où la base est un trait. En outre, après lecture de ([**SGA 7**], exposé VIII, remarque 7.2), on voit que ce résultat s'étend au spectre d'un anneau de Dedekind, ce qui est bien le cas ici. □

Notations. Soit X une biextension de $(\mathcal{A}^M, \mathcal{A}^{t,M'})$ par $\mathbf{G}_\mathrm{m}$. Nous noterons $t(X)$ le $\mathbf{G}_\mathrm{m}$-torseur sous-jacent à la biextension X.

Nous noterons Γ' l'orthogonal de Γ sous l'accouplement de monodromie, et W l'unique biextension de $(\mathcal{A}^\Gamma, \mathcal{A}^{t,\Gamma'})$ par $\mathbf{G}_\mathrm{m}$ prolongeant W_η. Alors W définit un morphisme de faisceaux

$$\alpha : \mathcal{A}^{t,\Gamma'} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \,.$$

Nous noterons γ le morphisme induit par α sur les S-sections.

On note $\mathcal{B}$ le modèle de Néron de la variété abélienne B_η, et Ψ le groupe des composantes de $\mathcal{B}$. Alors (voir [**BLR**], §7.4, prop. 3) B s'identifie à un sous-groupe ouvert de $\mathcal{B}$. Nous noterons donc $B = \mathcal{B}^\Lambda$, où Λ est le groupe des composantes de B, identifié à un sous-faisceau de Ψ. Soit B^t_η la variété abélienne duale de B_η, soit $\mathcal{B}^t$ son modèle de Néron, et soit $\varphi^t : \mathcal{B}^t \to \mathcal{A}^t$ l'unique morphisme prolongeant l'isogénie duale de φ_η.

Soit W'_η la biextension de Weil sur (B_η, B^t_η). Alors les biextensions $(\varphi_\eta \times \mathrm{id}_{B^t_\eta})^*(W'_\eta)$ et $(\mathrm{id}_{A_\eta} \times \varphi^t_\eta)^*(W_\eta)$ sont isomorphes sur (A_η, B^t_η).

Notons à présent $\overline{\varphi} : \Phi \to \Psi$ (resp. $\overline{\varphi}^t : \Psi' \to \Phi'$) le morphisme induit par φ (resp. φ^t) sur les groupes de composantes respectifs. On constate que Λ n'est autre que $\Gamma/\overline{G}$, où $\overline{G}$ est l'image de G dans Φ. Par suite, nous avons $\Lambda = \overline{\varphi}(\Gamma)$. Soit le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\Phi \times_S \Phi' & \longrightarrow & (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_S \\
{\scriptstyle\overline{\varphi}}\big\downarrow \quad \big\uparrow{\scriptstyle\overline{\varphi}^t} & & \big\| \\
\Psi \times_S \Psi' & \longrightarrow & (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_S
\end{array}$$

dans lequel on note $<,>_\mathcal{A}$ l'accouplement du haut (associé à W_η), et $<,>_\mathcal{B}$ l'accouplement du bas (associé à W'_η). Il résulte alors de ([**SGA 7**], exposé VIII, 7.3.1) et de l'identité $(\varphi_\eta \times \mathrm{id}_{B^t_\eta})^*(W'_\eta) = (\mathrm{id}_{A_\eta} \times \varphi^t_\eta)^*(W_\eta)$ que le diagramme précédent est commutatif, c'est-à-dire que nous avons, pour tout $x \in \Phi$ et tout $y \in \Psi'$, l'égalité

$$< \overline{\varphi}(x), y >_\mathcal{B} = < x, \overline{\varphi}^t(y) >_\mathcal{A} \ .$$

On rappelle que Γ' est l'orthogonal de Γ sous l'accouplement $<,>_\mathcal{A}$. L'identité précédente permet alors de montrer que l'orthogonal de $\overline{\varphi}(\Gamma)$ sous l'accouplement $<,>_\mathcal{B}$ est égal à $(\overline{\varphi}^t)^{-1}(\Gamma')$. Ainsi, l'orthogonal Λ' de Λ est donné par : $\Lambda' = (\overline{\varphi}^t)^{-1}(\Gamma')$. Il est alors commode d'introduire les notations suivantes :

Notations. On note ${}^\varphi\Gamma'$ le sous-groupe de Φ' défini par

$${}^\varphi\Gamma' = \overline{\varphi}^t((\overline{\varphi}^t)^{-1}(\Gamma')) = \overline{\varphi}^t(\Lambda')$$

de sorte que $\mathcal{A}^{t,{}^\varphi\Gamma'}$ est l'image de $\mathcal{B}^{t,\Lambda'}$ par φ^t.

Remarque 2.5. Il est clair que ${}^\varphi\Gamma'$ est un sous-groupe de Γ', donc Γ et ${}^\varphi\Gamma'$ sont orthogonaux. Dans le cas particulier où $\ker(\varphi^t)$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}^{t,\circ}$, on a l'égalité ${}^\varphi\Gamma' = \Gamma'$. Dans le cas où Γ' est nul, il est clair que ${}^\varphi\Gamma'$ l'est également. Pour un exemple où ${}^\varphi\Gamma' \neq \Gamma'$, nous renvoyons à la remarque 3.7.

Soit W' la biextension sur $(\mathcal{B}^\Lambda, \mathcal{B}^{t,\Lambda'})$ prolongeant W'_η dont l'existence est assurée par la proposition 2.4, et soit $\beta : \mathcal{B}^{t,\Lambda'} \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(\mathcal{B}^\Lambda, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ le morphisme de faisceaux correspondant. Pour résumer la situation, nous avons un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker\varphi^t & \longrightarrow & \mathcal{B}^{t,\Lambda'} & \xrightarrow{\varphi^t} & \mathcal{A}^{t,{}^\varphi\Gamma'} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m}) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(\mathcal{B}^\Lambda, \mathbf{G}_\mathrm{m}) & \xrightarrow{\varphi^*} & \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_\mathrm{m}) & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{13}$$

dans lequel la suite du bas n'est autre que la suite (12), et où $\ker \varphi^t$ est le noyau de $\varphi^t : \mathcal{B}^t \to \mathcal{A}^t$, en plus d'être le noyau de la restriction de φ^t à $\mathcal{B}^{t,\Lambda'}$. Ce dernier fait découle aisément de l'égalité $\Lambda' = (\overline{\varphi}^t)^{-1}(\Gamma')$ combinée au lemme du serpent.

2.3. Sur les groupes quasi-finis. En fait, notre groupe G est affine. De façon plus générale, nous pouvons énoncer la proposition suivante, annoncée en premier par Raynaud (voir [**An**], chap. II, prop. 2.3.1). La démonstration dépend crucialement du fait que la base S est un schéma nœthérien de dimension ≤ 1.

Proposition 2.6. *Soit G un S-schéma en groupes, de type fini, plat, séparé sur S, à fibre générique affine. Alors G est affine.*

Sous les hypothèses précédentes, nous pouvons donc écrire $G = Spec(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est une R-algèbre de Hopf fidèlement plate. Il est clair que $\mathcal{H}$ est de type fini en tant que R-algèbre. Par contre, il est faux en général que $\mathcal{H}$ soit de type fini en tant que R-module. En effet, cette propriété équivaut au fait que G soit fini sur S.

3. Invariant de Picard et homomorphisme de classes

Nous commençons par généraliser une construction due à W. Waterhouse (voir [**W**], section 2). Puis nous définissons un homomorphisme de classes ψ qui généralise les constructions précédentes ([**T88**], [**P1**], [**G**]). Nous suivons ici une démarche semblable à celle de [**G**], en abrégeant certains détails.

3.1. L'invariant de Picard. Soit G un S-schéma en groupes commutatif. Nous disposons d'une suite exacte de groupes abéliens (déduite de la suite spectrale locale-globale pour les Ext (voir [**SGA 4**], exposé V, proposition 6.3, 3))

(14) $$H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})) \xrightarrow{\ \nu\ } \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})(S)$$

où le morphisme ν est injectif. Si l'on suppose en outre que G est quasi-fini, plat et séparé sur S, alors $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m}) = 0$ d'après le lemme 2.3, donc ν est bijectif. Nous donnons alors la construction explicite d'une flèche

$$\rho : \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \to H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m}))$$

telle que $\rho \circ \nu = \mathrm{id}$. Nous obtiendrons ainsi (voir le théorème 3.1) un analogue, dans le cas quasi-fini, du Theorem 2' de [**W**].

On suppose à présent que G est quasi-fini, plat et séparé sur S. Définissons ρ : soit une extension $\Omega \in \mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})$. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_\mathrm{m} \longrightarrow \Omega \xrightarrow{\ g\ } G \longrightarrow 0\,.$$

Elle donne lieu, par application du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_S(G, -)$, à une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \Omega) \xrightarrow{\ g\circ -\ } \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, G) \longrightarrow 0\,.$$

On obtient ainsi un morphisme

$$\underline{\delta} : \mathrm{Hom}(G, G) \to H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m}))\,.$$

On note alors $\rho(\Omega)$ le $\underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})$-torseur $\underline{\delta}(\mathrm{id}_G)$. Autrement dit, $\rho(\Omega)$ est le faisceau des sections $s : G \to \Omega$, au sens de la théorie des extensions. On vérifie qu'on définit ainsi un morphisme de groupes ρ. En résumé, nous avons :

THÉORÈME 3.1. *On suppose que G est quasi-fini, plat et séparé sur S. Alors l'application ρ définie ci-dessus induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \simeq H^1(S,\underline{\mathrm{Hom}}_S(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}))\,.$$

L'isomorphisme inverse ρ^{-1} est égal à la flèche ν de la suite (14).

En composant ν avec le morphisme naturel $l : \mathrm{Ext}^1(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \mathrm{Pic}(G)$, on obtient un homomorphisme

$$\pi : H^1(S,\underline{\mathrm{Hom}}_S(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G)\,.$$

Dans le cas où G est fini et plat, notre π coïncide avec l'homomorphisme défini par Waterhouse (voir [**W**], Theorem 5). En effet, dans ce cadre, $\underline{\mathrm{Hom}}_S(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est le dual de Cartier G^D de G. D'autre part, G^D étant fini et plat, un argument de descente montre que le groupe $H^1(S,G^D)$ reste inchangé, qu'il soit calculé dans le petit site fppf, le gros site fppf, ou le gros site fpqc.

3.2. Définition et propriétés de l'homomorphisme. Le résultat qui suit est démontré dans [**G**] comme application du lemme 2.2.

LEMME 3.2. *Soit Y un S-schéma en groupes plat, dont la fibre générique Y_η est une variété abélienne. Alors $\underline{\mathrm{Ext}}^1_S(Y,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est isomorphe au faisceau $T \mapsto \mathrm{Ext}^1(Y_T,\mathbf{G}_{\mathrm{m},T})$.*

Reprenons les notations du paragraphe 2.2. Soit E une extension de $\mathcal{A}^\Gamma$ par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. On associe à E le $\underline{\mathrm{Hom}}_S(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$-torseur $\delta(E)$. Le lemme 3.2 permet de décrire $\delta(E)$ comme étant le faisceau des extensions Θ de $\mathcal{B}^\Lambda$ par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ telles que $\varphi^*\Theta = E$.

D'autre part, en considérant le morphisme $i : G \to \mathcal{A}^\Gamma$, on peut associer à E une extension i^*E de G par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, puis un $\underline{\mathrm{Hom}}_S(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})$-torseur $\rho(i^*E)$. On peut décrire $\rho(i^*E)$ comme étant le faisceau des sections de i^*E.

Or la donnée d'une section de i^*E équivaut à la donnée d'une extension Θ de $\mathcal{A}^\Gamma$ par $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ telle que $\varphi^*\Theta = E$. On en déduit le résultat suivant :

LEMME 3.3. *Le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(\mathcal{A}^\Gamma) \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{A}^\Gamma,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \arrow[l, "l^1"'] \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i^*"'] & H^1(S,\underline{\mathrm{Hom}}_S(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Pic}(G) & \mathrm{Ext}^1(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \arrow[l, "l"'] \arrow[r, "\rho"] & H^1(S,\underline{\mathrm{Hom}}_S(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}))
\end{tikzcd}$$

est commutatif, où l^1 est le morphisme naturel $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{A}^\Gamma,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{A}^\Gamma)$.

On déduit du lemme 3.3 le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{t,\Gamma'}(S) \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{A}^\Gamma,\mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "l^1"'] & H^1(S,\underline{\mathrm{Hom}}_S(G,\mathbf{G}_{\mathrm{m}})) \arrow[d, "\pi"] \\
& \mathrm{Pic}(\mathcal{A}^\Gamma) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(G)
\end{tikzcd} \tag{15}$$

et on définit l'homomorphisme $\psi : \mathcal{A}^{t,\Gamma'}(S) \to \mathrm{Pic}(G)$ (associé à l'inclusion $G \subseteq \mathcal{A}^\Gamma$) comme étant le composé de ces morphismes.

REMARQUE 3.4. Soit $\mathcal{D}$ l'application obtenue en composant les flèches suivantes

$$\mathcal{D} : \mathcal{A}^{t,\Gamma'}(S) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \xrightarrow{l^1} \mathrm{Pic}(\mathcal{A}^\Gamma)\,.$$

Le diagramme (15) montre que, pour tout p, $\psi(p)$ est la restriction de $\mathcal{D}(p)$ à G, que nous noterons $\mathcal{D}(p)|_G$. Ceci généralise la description géométrique de ψ (obtenue par Agboola [**A1**] dans le cas où $\mathcal{A}$ est un schéma abélien).

D'autre part, soit $p \in \mathcal{A}^{t,\Gamma'}(S)$, nous avons alors

$$\mathcal{D}(p) = l^1((\mathrm{id}_{\mathcal{A}^\Gamma} \times p)^*(W)) = (\mathrm{id}_{\mathcal{A}^\Gamma} \times p)^*(t(W))\,,$$

d'où, en notant $i : G \to \mathcal{A}^\Gamma$ l'inclusion,

$$\mathcal{D}(p)|_G = (i \times p)^*(t(W))\,.$$

REMARQUE 3.5. Supposons que G soit un S-schéma en groupes fini et plat. Alors l'homomorphisme ψ associé à l'inclusion $G \subseteq \mathcal{A}$ coïncide avec l'homomorphisme de classes de [**G**], en considérant (avec les notations de [**G**]) les schémas en groupes semi-stables $A = \mathcal{A}$ et $A' = \mathcal{A}^{t,\circ}$. Si de plus G est contenu dans $\mathcal{A}^\circ$, alors l'homomorphisme ψ associé à l'inclusion $G \subseteq \mathcal{A}^\circ$ est l'homomorphisme de [**G**] pour $A = \mathcal{A}^\circ$ et $A' = \mathcal{A}^t$.

PROPOSITION 3.6. *Soit $p \in \mathcal{A}^{t,\Gamma'}(S)$ et soit N un entier premier à l'ordre de G_η. Alors $\mathcal{D}(p)|_G = 0$ si et seulement si $\mathcal{D}(Np)|_G = 0$. En particulier, $\mathcal{D}(p)|_G = 0$ si p est un point de N-torsion.*

DÉMONSTRATION. Soit m l'ordre de G_η, alors G_η est tué par m. De même le groupe G, qui est l'adhérence schématique de G_η dans $\mathcal{A}^\Gamma$, est tué par m. Par suite, la multiplication par m dans le groupe $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})$, induite par la multiplication par m dans G, est l'application nulle. Les entiers m et N étant premiers entre eux, la multiplication par N est donc un automorphisme du groupe $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})$. Or nous pouvons écrire

$$\mathcal{D}(p)|_G = l((i \times p)^*(W))\,.$$

Autrement dit, l'homomorphisme $p \mapsto \mathcal{D}(p)|_G$ se factorise à travers le groupe $\mathrm{Ext}^1(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})$. On en déduit aisément le résultat. $\square$

3.3. Cas particulier : suite de Kummer. Un premier avantage de notre construction est de pouvoir traiter le cas kummérien, qui était l'approche originale dans [**T88**].

On fixe à présent un entier naturel $n > 0$, et on note $n\Gamma$ l'image de la multiplication par n dans le groupe Γ. Alors (voir [**SGA 7**], exposé IX, 2.2.1), $\mathcal{A}$ étant semi-stable, le morphisme $[n] : \mathcal{A}^\circ \to \mathcal{A}^\circ$ est plat, surjectif, et quasi-fini. En appliquant le lemme du serpent nous en déduisons une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^\Gamma[n] \longrightarrow \mathcal{A}^\Gamma \xrightarrow{[n]} \mathcal{A}^{n\Gamma} \longrightarrow 0$$

de faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur S. Il s'ensuit, d'après les considérations faites au début du paragraphe 2.1, que $\mathcal{A}^\Gamma[n]$ est un sous-S-schéma en groupes fermé, quasi-fini et plat de $\mathcal{A}^\Gamma$.

D'autre part, l'accouplement de monodromie étant non dégénéré, l'orthogonal de $n\Gamma$ n'est autre que $n^{-1}\Gamma'$, c'est-à-dire l'image réciproque par la multiplication par n du sous-groupe Γ' de Φ'. On peut résumer la situation par le diagramme (à lignes exactes) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A}^t[n] \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{A}^{t,n^{-1}\Gamma'} \arrow[r, "{[n]}"] \arrow[d] & \mathcal{A}^{t,{}^n\Gamma'} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{A}^\Gamma[n], \mathbf{G}_\mathrm{m}) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(\mathcal{A}^{n\Gamma}, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \arrow[r, "{[n]}"] & \underline{\mathrm{Ext}}^1_S(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(voir le paragraphe 2.2). Ici nous avons noté ${}^n\Gamma'$ le groupe $n(n^{-1}\Gamma')$, en accord avec les notations 2.2. Les lignes horizontales de ce diagramme sont deux prolongements de la suite exacte de Kummer pour le U-schéma abélien A^t_U.

Remarque 3.7. Supposons que le groupe Φ' soit non nul et tué par l'entier n. Posons $\Gamma = 0$, alors $\Gamma' = \Phi'$ donc ${}^n\Gamma' = {}^n\Phi' = n\Phi' = 0$. Par suite, ${}^n\Gamma'$ est distinct de Γ'. Dans l'exemple 5.3 on explicite également un cas pour lequel $\mathcal{A}^{t,n\Phi'}(S) \neq \mathcal{A}^t(S)$.

Par application du foncteur des sections globales, on obtient un diagramme commutatif entre les (longues) suites exactes de cohomologie associées, qui s'écrit

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathcal{A}^{t,n^{-1}\Gamma'} \arrow[r, "{[n]}"] \arrow[d] & \mathcal{A}^{t,{}^n\Gamma'}(S) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\gamma"] & H^1(S, \mathcal{A}^t[n]) \arrow[r] \arrow[d, "h_*"] & {} \\
{} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{A}^{n\Gamma}, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \arrow[r, "{[n]}"] & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \arrow[r, "\delta"] & H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{A}^\Gamma[n], \mathbf{G}_\mathrm{m})) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

où ∂ est l'homomorphisme cobord.

La commutativité du carré à droite se traduit alors de la façon suivante : soit p dans $\mathcal{A}^{t,{}^n\Gamma'}(S)$, notons $[n]^{-1}(p) := \partial(p)$ le $\mathcal{A}^t[n]$-torseur obtenu en divisant le point p par $[n]$ dans le faisceau $\mathcal{A}^t$. Alors le torseur $(\delta \circ \gamma)(p)$ est le torseur $[n]^{-1}(p)$ auquel on a fait subir un changement de groupe structural via la flèche $h : \mathcal{A}^t[n] \to \underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{A}^\Gamma[n], \mathbf{G}_\mathrm{m})$.

Remarque 3.8. Si les groupes $\mathcal{A}^\Gamma[n]$ et $\mathcal{A}^t[n]$ sont tous les deux finis sur S, alors ils sont duaux l'un de l'autre au sens de Cartier, donc $h : \mathcal{A}^t[n] \to \underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{A}^\Gamma[n], \mathbf{G}_\mathrm{m})$ est un isomorphisme. On peut alors identifier les torseurs $[n]^{-1}(p)$ et $(\delta \circ \gamma)(p)$. Ceci se produit en particulier lorsque $\mathcal{A}$ a partout bonne réduction.

Soit ψ_n l'homomorphisme de classes associé à l'inclusion $\mathcal{A}^\Gamma[n] \subseteq \mathcal{A}^\Gamma$. La discussion précédente montre que la restriction de ψ_n au sous-groupe $\mathcal{A}^{t,{}^n\Gamma'}(S)$ de $\mathcal{A}^{t,\Gamma'}(S)$ coïncide avec le morphisme obtenu par composition des flèches suivantes :

$$\mathcal{A}^{t,{}^n\Gamma'}(S) \xrightarrow{\partial} H^1(S, \mathcal{A}^t[n]) \xrightarrow{h_*} H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{A}^\Gamma[n], \mathbf{G}_\mathrm{m})) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Pic}(\mathcal{A}^\Gamma[n])\,.$$

Autrement dit, pour tout $p \in \mathcal{A}^{t,{}^n\Gamma'}(S)$, l'invariant $\psi_n(p)$ étudie la structure galoisienne du $\mathcal{A}^t[n]$-torseur $[n]^{-1}(p)$ dans le groupe $\mathrm{Pic}(\mathcal{A}^\Gamma[n])$. La seule différence avec l'approche originale est que l'on fait d'abord subir au torseur $[n]^{-1}(p)$ un changement de groupe structural.

Remarque 3.9. Dans le cas général, la suite exacte (13) permet de donner une interprétation analogue de ψ. Nous avons préféré nous limiter ici au cas kummérien afin d'expliciter un peu mieux les objets entrant en jeu.

Remarque 3.10. Supposons que $\mathcal{E}$ soit le modèle de Néron d'une courbe elliptique semi-stable, n'ayant pas partout bonne réduction, et soit $m > 1$ un entier naturel. Si v est une place de bonne réduction, alors $\mathcal{E}_v^\circ$ est une courbe elliptique, donc $\mathcal{E}_v^\circ[m]$ est un k_v-schéma en groupes fini de rang m^2. Par contre, si v est une place de mauvaise réduction, alors $\mathcal{E}_v^\circ$ est une forme tordue de $\mathbf{G}_\mathrm{m}$ sur k_v, donc $\mathcal{E}_v^\circ[m]$ est un k_v-schéma en groupes fini de rang m. Par suite, $\mathcal{E}^\circ[m]$ n'est pas de rang constant sur S, donc n'est pas fini sur S.

De plus, si m est premier aux ordres des groupes des composantes des fibres de $\mathcal{E}$, alors $\mathcal{E}^\circ[m] = \mathcal{E}[m]$, donc $\mathcal{E}[m]$ n'est pas fini non plus. Sous cet éclairage, les entiers m tels que $\mathcal{E}[m]$ soit fini sont exceptionnels. Signalons cependant que deux critères de finitude pour $\mathcal{E}[m]$ sont rappelés dans le paragraphe 3.4 de [**G**].

4. Raffinement par la théorie d'Arakelov

Dans toute cette section, nous supposons que K est un corps de nombres et que R est l'anneau des entiers de K. Nous fixons en outre un ensemble fini $\mathfrak{S}$ de places de K, contenant toutes les places infinies de K.

Soit X un S-schéma. Un fibré inversible métrisé sur X (relativement à $\mathfrak{S}$) est un fibré en droites $\mathcal{L}$ muni d'une métrique en chacune des places de $\mathfrak{S}$. L'ensemble des classes d'isomorphie de tels objets forme un groupe (l'opération étant induite par le produit tensoriel), noté $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$. On dispose bien sûr d'un homomorphisme naturel

$$\widehat{\mathrm{Pic}}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$$

qui consiste à oublier les métriques sur $\mathcal{L}$.

Soit H un S-schéma en groupes, tel que, pour toute place $v \in \mathfrak{S}$, le groupe $H(\overline{K}_v)$ soit réunion filtrante de sous-groupes compacts. Fixons une extension $\Omega \in \mathrm{Ext}^1(H, \mathbf{G}_\mathrm{m})$. Nous avons une suite exacte (pour la topologie fppf) :

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_\mathrm{m} \longrightarrow \Omega \longrightarrow H \longrightarrow 0\,.$$

Soit $v \in \mathfrak{S}$. Le corps $\overline{K}_v$ étant algébriquement clos, il en résulte une suite exacte de groupes abéliens ordinaires

$$0 \longrightarrow \overline{K}_v^* \longrightarrow \Omega(\overline{K}_v) \longrightarrow H(\overline{K}_v) \longrightarrow 0\,.$$

La valeur absolue v-adique peut-être vue comme un homomorphisme continu $\overline{K}_v^* \to \mathbb{R}$ (ici $\mathbb{R}$ est considéré en tant que groupe additif). On déduit donc de notre extension une extension (de groupes topologiques) de $H(\overline{K}_v)$ par $\mathbb{R}$. Une métrique sur (le fibré inversible associé à) $\Omega_{\overline{K}_v}$ est la même chose qu'une trivialisation du torseur sous-jacent à cette extension. Mais on sait que $\mathrm{Hom}(H(\overline{K}_v), \mathbb{R}) = \mathrm{Ext}^1(H(\overline{K}_v), \mathbb{R}) = 0$, le groupe $H(\overline{K}_v)$ étant réunion filtrante de sous-groupes compacts. On en déduit donc une trivialisation canonique de l'extension en question, d'où une métrique canonique sur $\Omega_{\overline{K}_v}$.

Ainsi le fibré naturellement associé à Ω se retrouve muni d'une métrique. On définit ainsi un morphisme

$$\mathrm{Ext}^1(H, \mathbf{G}_\mathrm{m}) \to \widehat{\mathrm{Pic}}(H)$$

qui relève l'homomorphisme naturel (nous le noterons $\hat{l}$ dans le cas où $H = G$, et $\hat{l}^1$ dans le cas où $H = \mathcal{A}^\Gamma$). On obtient, en composant ν avec $\hat{l}$, un morphisme

$$\hat{\pi} : H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})) \to \widehat{\mathrm{Pic}}(G)$$

qui relève l'homomorphisme π (défini dans le paragraphe 3.1). On pourra consulter ([**A-P**], section 2) pour plus de détails.

A l'aide du lemme 3.3, on vérifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}^{t,\Gamma'}(S) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{A}^\Gamma, \mathbf{G}_\mathrm{m}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(S, \underline{\mathrm{Hom}}_S(G, \mathbf{G}_\mathrm{m})) \\ & & \Big\downarrow \hat{\iota}^1 & & \Big\downarrow \hat{\pi} \\ & & \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{A}^\Gamma) & \longrightarrow & \widehat{\mathrm{Pic}}(G) \end{array}$$

et on définit l'homomorphisme $\hat{\psi} : \mathcal{A}^{t,\Gamma'}(S) \to \widehat{\mathrm{Pic}}(G)$ (associé à l'inclusion $G \subseteq \mathcal{A}^\Gamma$) comme étant le composé de ces morphismes. Il est clair que $\hat{\psi}$ est un relèvement de ψ.

5. Applications

En guise d'applications de notre construction, nous allons à présent démontrer les théorèmes 1.1 et 1.3 de l'introduction.

5.1. Résultat d'annulation sur les points de torsion. Le résultat suivant est une reformulation du théorème 4.1 de [**G**]. Signalons au passage que sa démonstration utilise l'hypothèse d'excellence de R.

Théorème 5.1. *Supposons que $\mathcal{E} \to S$ soit le modèle de Néron d'une courbe elliptique à réduction semi-stable sur K. Soit n un entier premier à 6. Alors la restriction du $\mathbf{G}_\mathrm{m}$-torseur $t(W)$ au sous-groupe $\mathcal{E}^\circ[n] \times_S \mathcal{E}^t[n]$ est triviale.*

Nous pouvons en déduire le corollaire suivant (généralisant les théorèmes d'annulation précédemment obtenus) :

Corollaire 5.2. *Soit $\mathcal{E}$ soit le modèle de Néron d'une courbe elliptique à réduction semi-stable sur K. Soit G (resp. H) un sous-groupe quasi-fini et fermé de $\mathcal{E}^\circ$ (resp. $\mathcal{E}$). Soit*

$$\psi : \mathcal{E}^t(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G)$$

$$\textit{resp. } \psi' : \mathcal{E}^{t,\circ}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(H)$$

le morphisme associé à l'inclusion $G \subseteq \mathcal{E}^\circ$ (resp. $H \subseteq \mathcal{E}$). Si l'ordre de G_η (resp. de H_η) est premier à 6, alors ψ (resp. ψ') s'annule sur les points de torsion.

Démonstration. Soit $p \in \mathcal{E}^t(S)$ un point de m-torsion. On peut écrire $m = nN$ où N est premier à l'ordre de G_η, et l'ensemble des facteurs premiers de n est un sous-ensemble de l'ensemble des facteurs premiers de l'ordre de G_η. Alors Np est un point de n-torsion et, d'après la proposition 3.6, il suffit de montrer la nullité de $\mathcal{D}(Np)|_G$ pour en déduire celle de $\mathcal{D}(p)|_G$.

D'autre part, G est un sous-groupe de $\mathcal{E}^\circ[n]$ (car G est tué par l'ordre de G_η), et Np se factorise à travers $\mathcal{E}^t[n]$. On peut alors écrire (cf. la remarque 3.4)

$$\mathcal{D}(Np)|_G = (i \times Np)^*(t(W)|_{\mathcal{E}^\circ[n] \times_S \mathcal{E}^t[n]}) .$$

Ainsi, pour montrer que $\mathcal{D}(p)|_G$ est nul, il suffit de montrer que la restriction de $t(W)$ à $\mathcal{E}^\circ[n] \times_S \mathcal{E}^t[n]$ est triviale, ce qui est bien le cas d'après le théorème 5.1. On en déduit le résultat d'annulation de ψ, sachant que $\psi(p) = \mathcal{D}(p)|_G$ pour tout $p \in \mathcal{E}^t(S)$. Le résultat d'annulation de ψ' se démontre de la même façon. $\square$

Il est clair que le corollaire 5.2 implique le théorème 1.1.

EXEMPLE 5.3. Soit E_L une courbe elliptique semi-stable sur un corps de nombres L, on suppose que E_L a réduction torique en au moins une place v_L de $\mathcal{O}_L$. On fixe un nombre premier $N \neq 2, 3$ ne divisant pas l'ordre du groupe des composantes de la fibre en v_L du modèle de Néron de E_L, et tel que v_L ne divise pas N.

Soit $K = L(E_L[N])$, soit $\mathcal{E} \to S = Spec(\mathcal{O}_K)$ le modèle de Néron de la K-courbe elliptique $E_L \times_L K$, et soit v une place de K divisant v_L. Alors $\mathcal{E}[N]$ est fini et plat de rang N^2 sur S, donc le groupe Φ_v des composantes de $\mathcal{E}_v$ est cyclique d'ordre divisible par N, d'après la remarque 3.10.

Soit j le j-invariant de la courbe E_L. Alors l'ordre du groupe des composantes de la fibre en v_L du modèle de Néron de E_L est égal à $-v_L(j)$ (ici, la valuation v_L est normalisée de façon à prendre la valeur 1 sur une uniformisante). De même, l'ordre du groupe des composantes de la fibre de $\mathcal{E}$ en v est égal à $-v(j)$. De plus, $v(j) = e(K/L)v_L(j)$ où $e(K/L)$ est l'indice de ramification de K/L. Sachant que $e(K/L)$ divise l'ordre du groupe de Galois de K/L, lequel est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, on en déduit que N^2 ne divise pas $e(K/L)$.

Ainsi le groupe Φ_v est cyclique d'ordre Nk, avec k premier à N. On peut alors choisir un point $p_1 \in \mathcal{E}(S)$ d'ordre N qui ne se réduise pas dans $\mathcal{E}_v^\circ(k_v)$. Il est alors clair que le point p_1 n'appartient pas à $\mathcal{E}^{N\Phi}(S)$.

Rappelons que, par auto-dualité des courbes elliptiques, on dispose d'un isomorphisme canonique $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}^t$. Soit $\psi_N : \mathcal{E}(S) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{E}^\circ[N])$ l'homomorphisme associé à l'inclusion $\mathcal{E}^\circ[N] \subseteq \mathcal{E}^\circ$. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}[N] \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{[N]} \mathcal{E}^{N\Phi} \longrightarrow 0\,.$$

D'après le paragraphe 3.3, la restriction de l'homomorphisme ψ_N à $\mathcal{E}^{N\Phi}(S)$ étudie la structure galoisienne des $\mathcal{E}[N]$-torseurs obtenus grâce au cobord de cette suite exacte.

Cependant, on constate ici que notre construction de ψ_N permet également l'étude de torseurs qui ne proviennent pas du cobord cette suite exacte. En effet, le point p_1 donne naissance à un $\underline{\mathrm{Hom}}_S(\mathcal{E}^\circ[N], \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$-torseur $\delta(p_1)$, dont la structure galoisienne est triviale d'après le corollaire 5.2, et pourtant $p_1 \notin \mathcal{E}^{N\Phi}(S)$.

5.2. Résultat d'injectivité. On suppose à présent que K est un corps de nombres, et que R est l'anneau des entiers de K.

Dans la suite, le groupe $\widehat{\mathrm{Pic}}$ sera relatif à l'ensemble $\mathfrak{S}$ formé des places de mauvaise réduction de $\mathcal{A}$ ainsi que les places infinies de K.

Soit ℓ un nombre premier. Alors, pour tout entier n, nous disposons d'un homomorphisme $\hat{\psi}_{\ell^n} : \mathcal{A}^t(S) \to \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n])$. D'autre part, l'inclusion $\mathcal{A}^\circ[\ell^n] \to \mathcal{A}^\circ[\ell^{n+1}]$ donne lieu à une flèche de restriction $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^{n+1}]) \to \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n])$, qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^t(S) & \xrightarrow{\hat{\psi}_{\ell^{n+1}}} & \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^{n+1}]) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{A}^t(S) & \xrightarrow{\hat{\psi}_{\ell^n}} & \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n])\,. \end{array}$$

On obtient ainsi, par passage à la limite (projective), un homomorphisme

$$\hat{\Psi}_\ell = \varprojlim \hat{\psi}_{\ell^n} : \mathcal{A}^t(S) \otimes \mathbf{Z}_\ell \longrightarrow \varprojlim \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n])\,.$$

On peut de même définir, pour le U-schéma abélien A_U, un morphisme analogue, que nous noterons $\hat{\Psi}_{U,\ell}$. Ce dernier coïncide avec le morphisme défini par Agboola et Pappas dans [**A-P**]. Nous pouvons énoncer pour $\hat{\Psi}_{U,\ell}$ le résultat suivant (voir [**A-P**], Theorem 6.4 et Theorem 1.2) :

Théorème 5.4. *(Agboola-Pappas). L'homomorphisme $\hat{\Psi}_{U,\ell}$ est injectif modulo les points de torsion. En outre, si tous les points de S de caractéristique ℓ sont contenus dans U, et si ℓ ne divise pas $6 \cdot \mathrm{disc}(K/\mathbb{Q})$, alors $\hat{\Psi}_{U,\ell}$ est injectif.*

Démonstration du théorème 1.3. Nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}^t(S) & \xrightarrow{\hat{\psi}_{\ell^n}} & \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n]) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle j^*} \\
A_U^t(U) & \xrightarrow{\hat{\psi}_{U,\ell^n}} & \widehat{\mathrm{Pic}}(A_U[\ell^n])\,.
\end{array}$$

Ainsi, par passage à la limite, la composée de $\hat{\Psi}_\ell$ avec le morphisme naturel

$$\varprojlim \widehat{\mathrm{Pic}}(\mathcal{A}^\circ[\ell^n]) \longrightarrow \varprojlim \widehat{\mathrm{Pic}}(A_U[\ell^n])$$

est égale au morphisme $\hat{\Psi}_{U,\ell}$ défini plus haut. En particulier, tout résultat d'injectivité portant sur $\hat{\Psi}_{U,\ell}$ donne lieu au même résultat pour $\hat{\Psi}_\ell$. Ainsi le théorème 5.4 entraîne le théorème 1.3. $\square$

Bibliographie

[A1] A. Agboola, *A geometric description of the class invariant homomorphism*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 273–280.

[A2] ———, *Torsion points on elliptic curves and Galois module structure*, Invent. Math. **123** (1996), 105–122.

[A3] ———, *On primitive and realisable classes*, Compositio Math. **126** (2001), 113–122.

[A-P] A. Agboola and G. Pappas, *On arithmetic class invariants*, Math. Ann. **320** (2001), 339–365.

[A-T] A. Agboola and M. J. Taylor, *Class invariants of Mordell-Weil groups*, J. Reine Angew. Math. **447** (1994), 23-61.

[An] S. Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1*, Bull. Soc. Math. France, Suppl., Mém. **33** (1973), 5–79.

[A-G] M. Auslander and O. Goldman, *The Brauer group of a commutative ring*, Trans. Amer. Math. Soc. **97** (1960), 367–409.

[B-K] W. Bley and M. Klebel, *An infinite family of elliptic curves and Galois module structure*, Pacific J. of Math. **185** (1998), 221–235.

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert and M. Raynaud, *Néron Models*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 21 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1990).

[CN-J] P. Cassou-Noguès et A. Jehanne, *Espaces homogènes principaux et points de 2-division de courbes elliptiques*, J. London Math. Soc. (2) **63** (2001), 257–287.

[CN-T] P. Cassou-Noguès et M. J. Taylor, *Structures galoisiennes et courbes elliptiques*, J. Théor. Nombres Bordeaux **7** (1995), 307–331.

[CHR] S. U. Chase , D. K. Harrison and A. Rosenberg, *Galois theory and Galois cohomology of commutative rings*, Memoirs Amer. Math. Soc. **52** (1965), 15–33.

[C-S] S. U. Chase and M. E. Sweedler, *Hopf algebras and Galois theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 97 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1969).

[Ch] L. N. Childs, *Taming wild extensions : Hopf algebras and local Galois module theory*, AMS Math. Surveys and Monographs, vol. 80 (2000).

[Cr] J. Cremona, *Algorithms for modular elliptic curves* (Cambridge University Press, 1992).

[De] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **44** (1975), 6-77.

[FC] G. Faltings and C.-L. Chai, *Degeneration of abelian varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 22 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1990).

[Fr] A. Fröhlich, *Galois module structure of algebraic integers*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 1 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1983).

[G] J. Gillibert, *Invariants de classes : le cas semi-stable*, Compositio Math. **141** (2005), 887–901.

[Gr] C. Greither, *Cyclic Galois extensions of commutative rings*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1534 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1992).

[EGA II] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique, chapitre II : Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **8** (1961).

[EGA IV] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique, chapitre IV : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **20** (*Première partie*, 1964), **24** (*Seconde partie*, 1965), **28** (*Troisième partie*, 1966), **32** (*Quatrième partie*, 1967).

[SGA 4] A. Grothendieck, M. Artin et J. L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics, vols. 269, 270 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972).

[SGA 7] A. Grothendieck, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 288 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972).

[Hil] D. Hilbert, *Die Theorie der Algebraischen Zalhkörper*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **4** (1897), 175–546.

[KM] N. Katz and B. Mazur, *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Mathematics Studies, vol. 108 (Princeton University Press, 1985).

[Ma72] B. Mazur, *Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields*, Invent. Math. **18** (1972), 183–266.

[Ma78] B. Mazur, *Rational isogenies of prime degree*, Invent. Math. **44** (1978), 129–162.

[Mi80] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton Math. Ser., vol. 33 (Princeton University Press, 1980).

[Mi86] J. S. Milne, *Arithmetic Duality Theorems*, Perspectives in Mathematics, vol. 1 (Academic Press, Boston, MA, 1986).

[MB] L. Moret-Bailly, *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque **129** (1985).

[Mu] D. Mumford, *Bi-extensions of formal groups*, in *Algebraic Geometry* (Bombay, 1986) (Oxford University Press, 1969), 307-322.

[P1] G. Pappas, *On torsion line bundles and torsion points on abelian varieties*, Duke Math. J. **91** (1998), 215–224.

[P2] ———, *Galois modules and the theorem of the cube*, Invent. Math. **133** (1998), 193–225.

[R] M. Raynaud, 1-*motifs et monodromie géométrique*, Astérisque **223** (1994), 259–319.

[S-T] A. Srivastav and M. J. Taylor, *Elliptic curves with complex multiplication and Galois module structure*, Invent. Math. **99** (1990), 165–184.

[T81] M. J. Taylor, *On Fröhlich's conjecture for rings of integers of tame extensions*, Invent. Math. **63** (1981), 41–79.

[T88] M. J. Taylor, *Mordell-Weil groups and the Galois module structure of rings of integers*, Illinois J. Math. **32** (1988), 428–452.

[T91] M. J. Taylor, *L-functions and Galois modules : Explicit Galois Modules*, in *L-functions and Arithmetic*, LMS Lecture Notes, vol. 153 (Cambridge University Press, 1991).

[W] W. C. Waterhouse, *Principal homogeneous spaces and group scheme extensions*, Trans. Am. Math. Soc. **153** (1971), 181–189.

[We] A. Werner, *On Grothendieck's pairing of component groups in the semistable reduction case*, J. Reine Angew. Math. **486** (1997), 205–215.