Méthode algorithmique d'implicitisation et d'inversion - Application au lancer de rayons

Luc Biard

▶ **To cite this version:**

Luc Biard. Méthode algorithmique d'implicitisation et d'inversion - Application au lancer de rayons. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1990. Français. NNT : 1990GRE10122 . tel-00011480

HAL Id: tel-00011480
https://theses.hal.science/tel-00011480

Submitted on 27 Jan 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Luc BIARD

pour obtenir le titre de

DOCTEUR
DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1
(arrêté ministériel du 5 Juillet 1984)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Méthode algorithmique d'implicitisation et d'inversion
Application au lancer de rayons

Date de soutenance : 26 Novembre 1990

Composition du jury :

P.-J. LAURENT	Président
K. BOUATOUCH	Rapporteurs
J.-J. RISLER	
M. ATTEIA	Examinateurs
P. CHENIN	
J. DELLA DORA	

Thèse préparée au sein du laboratoire LMC-IMAG

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe de Géométrie Algorithmique du Laboratoire de Modélisation et de Calcul (LMC-IMAG).

Je remercie Monsieur Pierre-Jean Laurent, Professeur à l'U.J.F., de l'honneur qu'il me fait de présider le jury.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Patrick Chenin qui a dirigé cette thèse avec compétence, patience et disponibilité. Ses nombreux conseils ont contribués à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie Messieurs Kadi Bouatouch et Jean-Jacques Risler d'avoir accepté d'être mes rapporteurs.

Monsieur Kadi Bouatouch a contribué à clarifier ma rédaction sur les aspects concernant le lancer de rayons. Je le remercie de sa gentillesse et pour son aide en tout point.

Je remercie Monsieur Jean-Jacques Risler, qui par ses remarques a contribué à améliorer la rédaction de cette thèse.

Je remercie Monsieur Jean Della Dora, directeur du laboratoire LMC, pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie Monsieur Marc Attéia de l'équipe d'Analyse Numérique de Toulouse (où j'ai fait une partie de mes études) pour avoir accepté de faire partie du jury et pour m'avoir encouragé dans cette voie de recherche.

J'adresse de la même manière des remerciements tout particuliers aux autres toulousains : Jean Gaches, Jean-Pierre Dedieu, Jean-Claude Yakoubsohn et André Legrand pour leur soutien.

Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe de Géométrie Algorithmique de LMC pour leur aide et leur accueil. Plus généralement je remercie l'ensemble des personnes de "la tour" qui ont su créer un environnement de travail chaleureux.

Je remercie tout particulièrement André Eberhard, Madelaine Eberhard et Marc Duc-Jacquet qui par leur amitié et leur aide m'ont permis une meilleure intégration aux équipes de Grenoble.

Je remercie également Maribel Chenin pour ses bons petits plats et sa gentillesse, en m'excusant d'avoir accaparé son cher et tendre époux jusqu'à des heures parfois indues !

Je remercie Denis Marchepoil pour sa bonne humeur, son aide (et ses bonnes racines !).

J'adresse également mes remerciements à Marc Barret pour son aide sur les aspects graphiques ainsi qu'à Anestis Antoniadis qui m'a initié à TeX.

à Lila

Luc BIARD

TITRE DE LA THESE

Méthode algorithmique d'implicitisation et d'inversion
Application au lancer de rayons

RESUME DE LA THESE

Le travail présenté ici a pour thème le développement et la mise en oeuvre d'une méthode d'implicitisation et d'inversion ainsi que son application à la visualisation de surfaces polynomiales et rationnelles paramétrées par la technique du lancer de rayons. L'implicitisation est un problème d'élimination pour lequel les méthodes de résultant s'avèrent mieux adaptées à notre application. La méthode de Dixon (1908) pour les surfaces obtenues par produit tensoriel (surfaces de bi-degré) est particulièrement bien adaptée. Nous proposons une extension algorithmique de cette méthode qui conserve ses propriétés de simplicité et de compacité. La programmation en Langage Reduce a permis une expérimentation sur de nombreux exemples : elle montre que l'équation implicite est obtenue, et ceci de façon efficace, bien que la justification théorique de l'algorithme reste incomplète. L'étude de cette dernière nous a amené à considérer les problèmes des paramétrisations non fidèles et de l'apparition de facteurs parasites. Ensuite le problème de l'inversion (identification et détermination des paramètres d'un point de la surface rationnelle) est résolu complètement. Nous proposons enfin une application numérique de ces algorithmes (en Langage C) au problème de l'intersection d'une Bézier rationnelle et d'une demi-droite (rayon). Les aspects de stabilité numérique et d'optimisation sont mis en avant : à chaque surface est associée une table pré-calculée, permettant d'obtenir simplement l'équation d'intersection en le paramètre rayon. Les images données attestent des qualités numériques de cette méthode d'implicitisation-inversion.

MOTS CLES

Implicitisation
Inversion
Lancer de rayons
Surfaces paramétrées
Intersection
Résultant
Elimination.

ABSTRACT

The object of the work presented here is concerned with the implementation and the development of an implicitization and inversion method as well as its application to the ray tracing of rational parametric surfaces. Implicitization is an elimination probem for which the resultant methods appear to be better suited to our application. Dixon method (1908) for surfaces obtained by tensorial product (bi-degree surfaces) is particularly well adapted. We propose an algorithmic extension of this method which preserves its properties of simplicity and compactness. The implementation in Reduce language allowed experiments on numerous examples : it shows that the implicit equation is obtained in an efficient way, although the theoritical justification of the algorithm is still incomplete. The study of this justification made us consider the problems of unfaithful parametrizations and the appearance of extraneous factors. Then, the inversion problem (identification and determination of the parameters associated to a point of the rational surface) is thoroughly studied. Finally, we present a numerical application of these algorithms (in C language) to the intersection problem of a rational Bézier patch and a line (ray). The questions of numerical stability and optimization are addressed and discussed : each surface is associated with a precomputed table allowing an easier way to obtain the intersection equation in the ray parameter. The resulting pictures show the numerical quality of this implicitization-inversion method.

KEYWORDS

Implicitization
Inversion
Ray Tracing
Parametric Surfaces
Intersection
Resultant
Elimination.

Méthode algorithmique d'implicitisation et d'inversion
Application au lancer de rayons

INTRODUCTION GENERALE

Le travail présenté ici a pour thème le développement et la mise en oeuvre d'une méthode d'implicitisation et d'inversion ainsi que son application à la visualisation de surfaces polynomiales et rationnelles paramétrées par la technique du lancer de rayons.

L'utilisation de ces surfaces (*Bézier*, *Splines*) s'avèrent indispensable dans les domaines de la CAO, de l'approximation, et plus généralement de la modélisation géométrique. Quant à la méthode de synthèse d'image par lancer de rayons, elle consiste à reproduire le plus fidèlement possible la propagation de la lumière pour rendre des effets réalistes.

Cette méthode est extrèmement coûteuse en temps de calculs. Elle conduit par ailleurs, pour les surfaces complexes auxquelles nous nous intéressons, à des difficultés algorithmiques et à des problèmes de précision numérique : le problème essentiel étant celui de l'intersection d'une surface rationnelle et d'un rayon, c'est-à-dire d'une demi-droite (en fait d'une famille de rayons), pour lequel nous cherchons la *première intersection* sur le trajet du rayon.

Les méthodes classiques d'intersection sont basées soit sur une *facettisation préalable de la surface* (tessellation), soit sur des *techniques de subdivision* (Bézier, B-splines), ou bien font appel à des *méthodes numériques itératives* (Newton). Pour les surfaces paramétrées, l'approche numérique conduit, après substitution, à résoudre un système algébrique de deux équations $\lambda(u,v) = 0$, $\mu(u,v) = 0$ en les paramètres de la surface. Cependant, la nécessité d'une initialisation suffisamment proche de la solution (dans l'espace des paramètres de la surface) conduit à des phases de prétraitement très lourdes qui rendent ces méthodes itératives non satisfaisantes. Notons par ailleurs, que ces méthodes étant totalement dépendantes de l'initialisation, la localisation de la première intersection est confiée à la phase de prétraitement. Ces méthodes sont décrites rapidement dans le chapitre 8.

Notons que le problème d'intersection est plus facile à résoudre si la surface est définie par une équation implicite $f(x,y,z) = 0$ et si le rayon est défini paramétriquement par $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ $(t > 0)$. Après substitution des équations du rayon dans

l'équation de la surface, le problème d'intersection revient à résoudre une équation polynomiale en le paramètre rayon t. Dans ce cas il est alors facile de trier les différentes solutions en t sur le trajet du rayon.

Pour les surfaces paramétrées rationnelles, nous proposons une méthode algébrique basée sur *l'implicitisation et l'inversion*, consistant à nous ramener au cas précédent de la manière suivante.

Considérons un carreau de surface S, image du carré $[0,1]\times[0,1]$, par une représentation paramétrique de la forme :

$$\begin{cases} x &= \varphi_1(u,v) \\ y &= \varphi_2(u,v) \\ z &= \varphi_3(u,v) \end{cases} \tag{1}$$

où chaque fonction φ_i est rationnelle.
La méthode consiste alors à :

1. éliminer les paramètres u et v de la surface dans les équations (1) afin d'obtenir une équation de la forme $f(x,y,z)=0$ (*implicitisation*),

2. résoudre l'équation $f(x(t),y(t),z(t))=0$, où $(x(t),y(t),z(t))$ est une paramétrisation du rayon,

3. pour chaque point d'intersection $M(x,y,z)$ obtenu, calculer ses paramètres u et v en fonction de x, y et z (*inversion*), afin de déterminer si le point M appartient ou non au carreau S.

Les facteurs à prendre en compte dans l'algorithme sont les notions de pré-calcul et de stabilité numérique. Par ailleurs, il est souhaitable que les solutions algorithmiques proposées aient un caractère de généralité : traitement uniforme des cas polynomial et rationnel pour des degrés quelconques.

La première approche algébrique, dans le contexte du lancer de rayons, a été réalisée par Kajiya en 1982 [43], qui traite le système $\lambda(u,v)=0$, $\mu(u,v)=0$ par des techniques de résultants (Sylvester). Cependant cette approche conduit à déterminer toutes les solutions du système afin de localiser l'intersection souhaitée.

Puis, Sederberg et Anderson [63,65] ont réalisé en 1984 l'implicitisation des surfaces de Steiner (surfaces paramétrées de degré total 2 définies sur un triangle) et proposé une solution algorithmique au problème d'intersection dans le contexte du lancer de rayons. Cependant, leur méthode, spécifique pour ce type de surfaces (de degré total 4), ne se généralise pas. Par la suite, Sederberg *et al* [62], ont remis à jour un certain nombre de méthodes d'élimination, dont la méthode de Dixon [30]. Cependant, tant la mise en oeuvre des méthodes que leur justification théorique étaient peu abordées, hormis récemment par Chionh en 1990, dans un contexte de géométrie complexe projective [21].

La première partie a pour objet :

1. de rappeler quelques définitions et d'introduire le type de surfaces auxquelles nous nous intéressons : les surfaces paramétrées polynomiales généralisées qui généralisent les surfaces rationnelles,

2. d'illustrer, au moyen d'exemples, les difficultés auxquelles une justification complète de notre méthode serait confrontée,

3. présenter le problème d'élimination (implicitisation) et discuter les principales méthodes par rapport à notre application.

Les problèmes abordés concernent la géométrie réelle effective. L'implicitisation est un problème d'élimination qui, dans un contexte de géométrie algébrique, peut être résolu par des techniques d'idéaux (bases de Gröbner). Cependant, ces techniques s'adaptent mal pour des applications numériques. Les techniques de résultant conviennent alors mieux.

Cependant, les méthodes classiques de résultant conduisent à manipuler plusieurs matrices non compactes : l'élimination successive par les méthodes à une variable (Sylvester) conduit à calculer trois résultants et introduit souvent des facteurs parasites; la méthode des quotients de Macaulay nécessite le calcul de deux déterminants (non compacts), puis la division des deux polynômes obtenus.

En revanche, la méthode de Dixon pour les surfaces obtenues par produit tensoriel (surfaces de bi-degré) est particulièrement bien adaptée pour notre application : elle

nécessite le calcul d'un seul déterminant compact. Néanmoins, cette méthode tombe en défaut lorsqu'on sort du cadre spécifique des surfaces de bi-degré. La méthode doit alors être adaptée par la construction formelle d'une matrice dont la composition est liée à la nature de la paramétrisation de la surface (Dixon 1908). Dès lors, la méthode devient inapplicable du fait de sa complexité et de son particularisme.

Dans la deuxième partie nous proposons une extension algorithmique de cette méthode qui conserve les propriétés de simplicité et de compacité de la méthode du bi-degré, et qui nous a qui permis de traiter de manière uniforme un très grand nombre de cas. Cette méthode a été implémentée en *langage Reduce*. De nombreux exemples sont donnés et discutés. Cependant, la justification totale de cette méthode est encore incomplète et concerne la géométrie algébrique. Néanmoins, sur tous les exemples traités expérimentalement, nous avons pu vérifier que cet algorithme founissait bien l'équation implicite (ou un multiple de celle-ci).

Plus précisément, la deuxième partie est organisée de la manière suivante.

- Dans le chapitre 4, nous proposons une analyse détaillée (algorithmique et ensembliste) de la méthode de Dixon dans le cadre des surfaces de bi-degré. Ceci nous a permis d'évaluer très précisément les termes de la matrice fournissant l'équation implicite et de développer la notion de table formelle. Ces résultats seront indispensables pour la mise en oeuvre dans le contexte numérique de la dernière partie.

- Dans le chapitre 5, nous donnons tout d'abord (dans un langage moderne) la preuve de Dixon que son résultant pour le bi-degré coïncide bien avec le résultant théorique. Nous utilisons ensuite l'implèmentation en langage *Reduce* de cette méthode spécifique pour le bi-degré, ainsi que les tables formelles décrites au chapitre 4 afin d'analyser un grand nombre de cas particuliers (dont ceux proposés par Dixon). Cette étude nous a conduit à développer une méthode générale qui s'appuie, entre autre, sur la méthode du bi-degré et sur la généralisation de l'algorithme de Bareiss au cas des matrices non inversibles. Cet algorithme nous a permis d'effectuer des comparaisons avec d'autres méthodes

(Sylvester, bases de Gröbner). Nous avons pu ainsi constater l'efficacité de la méthode, tant au niveau des temps de calcul que de la minimalité de l'équation implicite obtenue (absence de facteurs parasites). Nous avons pu vérifier par ailleurs, que cette méthode permettait de traiter convenablement le cas des paramétrisations non fidèles.

- Dans le chapitre 6, nous montrons que l'approche matricielle choisie permet de résoudre la question de l'inversion et de discuter les questions de réciprocité. En particulier, l'algorithme proposé permet de décider si un point de la surface algébrique implicite associée à une surface rationnelle appartient ou non à cette surface rationnelle.

Dans la troisième partie, après un rappel de la méthode du lancer de rayons, nous posons le problème d'intersection d'une surface de Bézier rationnelle et d'une demi-droite, dans le contexte spécifique de synthèse d'image par lancer de rayons.

Nous proposons ensuite une mise en oeuvre des algorithmes d'implicitisation et d'inversion développés dans la deuxième partie. Dans ce contexte numérique, nous montrons (cf. paragraphe 4.6) que le recours à un système de calcul formel n'est pas envisageable. L'implémentation proposée (en *langage C*) utilise l'approche matricielle développée dans les chapitres précédents et les résultats du chapitre 4.

Nous insistons sur la notion de pré-calcul. A chaque surface de Bézier, polynomiale ou rationnelle, peut être associée une table numérique pré-calculée, permettant ensuite, pour chaque rayon, de construire simplement l'équation d'intersection $g(t) = 0$, où t est le paramètre rayon. Des exemples et des images montreront la stabilité de la méthode.

Table des matières

I **11**

1 Préliminaires **13**

1.1 Ensembles algébriques 13

1.2 Ensembles paramétrés 17

2 Surfaces et SPPG **19**

2.1 Surfaces algébriques 19

2.2 Surfaces rationnelles 20

2.3 Représentation implicite et paramétrique 21

2.3.1 Implicitisation 22

2.3.2 Quelques exemples de difficultés 23

2.4 Courbes et surfaces de Bézier 26

2.5 Surfaces SPPG 28

2.5.1 Définitions 28

2.5.2 Quelques remarques 30

2.5.3 Degré d'une SPPG : définitions 31

2.5.4 SPPG de type 1 : notations 32

3 Elimination et implicitisation **35**

3.1 Méthodes à une variable 35

3.1.1 Méthode de Sylvester 35

3.1.2 La méthode de Cayley 39

3.2 Méthodes à plusieurs variables 42

3.2.1 Résultant théorique 42
3.2.2 Méthode de Macaulay 43
3.2.3 Autre méthode 45
3.3 Implicitisation 45
3.3.1 Problème d'élimination 45
3.3.2 Elimination successive 47
3.3.3 Le cas particuliers des surfaces de Steiner 47
3.3.4 Méthode des résultants à plusieurs variables 49
3.3.5 Choix du résultant 50

II **51**

4 Description algorithmique **55**
4.1 Les fonctions Δ et δ 55
4.2 Equation implicite 57
4.3 Evaluation des coefficients T_{ij}^{kl} 61
4.4 Degré de l'équation implicite 63
4.5 Implémentation en calcul formel 65
4.6 Implémentation en calcul numérique 73
4.6.1 Table formelle 74

5 Vers un algorithme général **81**
5.1 Méthode du bi-degré 85
5.1.1 Résultant de Dixon 85
5.1.2 Limites de la méthode 87
5.2 Bi-degrés (n_1, m_1), (n_2, m_2), (n_3, m_3) 90
5.2.1 Analyse 90
5.2.2 Etude de quelques exemples 91
5.3 Degré total N 96
5.3.1 Analyse 96
5.3.2 Etude de quelques exemples 97

5.4 Degré total (N_1, N_2, N_3) 101
5.4.1 Remarque 101
5.4.2 Etude de quelques exemples 101
5.5 Paramétrisations non fidèles 104
5.6 Facteurs parasites et points de base 109
5.7 Algorithme généralisé 112
5.7.1 Etude d'un exemple 114
5.7.2 Rappel : méthode de Bareiss 115
5.7.3 Algorithme Généralisé 117
5.7.4 Programme Reduce 120
5.7.5 Remarque importante 123
5.8 Comparaison avec d'autres méthodes 124

6 Le problème de l'inversion **127**
6.1 Réciproque ensembliste 127
6.2 Quelques exemples 132
6.3 Méthode d'inversion en calcul numérique 134

III **137**

7 Lancer de Rayons **139**
7.1 Méthodes en synthèse d'images 139
7.1.1 Modélisation géométrique 139
7.1.2 Algorithmes de visualisation 140
7.2 Lancer de Rayons 143
7.2.1 Définition d'une scène 144
7.2.2 Principe de l'algorithme 144
7.2.3 Modèle lumineux 146
7.2.4 Complexité et optimisation 150

8 Le problème d'intersection **155**
8.1 Intersection avec un rayon 156

8.1.1 Position du problème 156
8.1.2 Les méthodes 157
8.2 Notre approche 159

9 Algorithme d'intersection **161**
9.1 Description de la méthode 161
9.2 Pré-calculs pour chaque surface 162
9.2.1 Cas polynomial 163
9.2.2 Cas rationnel 164
9.3 Traitement pour chaque rayon 167
9.3.1 Evaluation des matrices A et B 167
9.3.2 Traitement de l'équation d'intersection 168
9.3.3 Inversion 170
9.4 Discussion et Résultats 172

Partie I

Chapitre 1

Préliminaires

Nous précisons les propriétés fondamentales et les notations qui seront utilisées par la suite. Dans toute cette thèse, K désignera ou bien le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou bien le corps C des nombres complexes.

1.1 Ensembles algébriques

Un polynôme P de $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ s'identifie à la fonction polynôme

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \to P(x_1, x_2, ..., x_n)$$

définie sur l'ensemble K^n, à valeurs dans K, dont la valeur s'obtient en substituant x_j à X_j dans P pour $j = 1, 2, ..., n$. On dit que le polynôme P s'annule en un point $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de K^n si $P(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, le point $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est dit *zéro* du polynôme P.

On appelle *ensemble algébrique* une partie d'un ensemble K^n qui est l'ensemble des zéros communs d'une famille de polynômes (P_α) de $K[X_1, X_2, ..., X_n]$, autrement dit l'ensemble des points $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de K^n vérifiant le système d'équations :

$$P_\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad \textit{pour tout indice } \alpha.$$

L'ensemble algébrique défini par la famille des (P_α) n'est pas modifié si l'on rajoute à cette famille n'importe quelle combinaison linéaire des P_α à coefficients dans

$K[X_1, X_2, ..., X_n]$, autrement dit, un polynôme quelconque de l'idéal I de $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ engendré par les P_α. On notera $V(I)$ cet ensemble algébrique. Cependant, $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ étant noethérien, tout ensemble algébrique $V(I)$ est défini par un nombre fini d'équations :

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \quad ... \\ \quad ... \\ P_r(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Un tel système est appelé *système d'équations algébriques.* On note $I = (P_1, ..., P_r)$ cet idéal. Une *hypersurface* de K^n est un ensemble algébrique de dimension $n-1$. Une hypersurface est l'ensemble des zéros communs d'un idéal principal. Réciproquement, on notera que l'ensemble des zéros communs d'un idéal principal n'est pas nécessairement une hypersurface si K n'est pas algébriquement clos.

Le *degré* d'un monôme $\lambda X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} ... X_n^{\alpha_n}$ de $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ est $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. Le degré d'un polynôme est celui de l'un de ses monômes de plus haut degré. Le nombre de monômes distincts en n indéterminées de degré p est $\binom{p+n-1}{p}$.

Un polynôme est *homogène* de degré p si tous ses monômes sont de même degré p.

Espace projectif - Coordonnées homogènes

L'espace affine K^n n'est pas géométriquement "complet". Aussi, afin d'inclure les points à l'infini l'espace affine K^n est remplacé par l'espace projectif $P(K^n)$ (ou $P^n(K)$) qui s'identifie à l'ensemble des droites de K^{n+1} passant par l'origine.

Un point de $P(K^n)$ est représenté par les coordonnées projectives (ou homogènes) $(X_0, X_1, X_2, ..., X_n)$, où l'un au moins des X_i est non nul. Si $X_0 \neq 0$, ce point correspond au point de K^n de coordonnées affines $(\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}, ..., \frac{X_n}{X_0})$. Les points de coordonnées projectives $(X_0, X_1, ..., X_n)$ et $(\alpha X_0, \alpha X_1, ..., \alpha X_n)$ avec $\alpha \neq 0$ représentent le même point de $P(K^n)$. Généralement la valeur de x_0 est choisi à 1. Le point $(0, X_1, X_2, ..., X_n)$ est le point à l'infini dans la direction affine $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

On notera généralement en majuscule les coordonnées projectives et en miniscule les coordonnées affines.

Homogénéisation d'un polynôme.

Etant donné un polynôme f de $K[x_1, ..., x_n]$ de degré d, on lui associe le polynôme homogène F de $K[X_0, X_1, ..., X_n]$ de même degré d défini par

$$F(X_0, X_1, ..., X_n) \equiv X_0^d f(\frac{X_1}{X_0}, ..., \frac{X_n}{X_0}).$$

Ainsi, à une hypersurface de l'espace affine K^n définie par l'équation $f(x_1, ..., x_n) = 0$ est associée l'hypersurface de l'espace projectif $P(K^n)$ définie par l'équation

$$F(X_0, X_1, ..., X_n) = 0.$$

• *Exemple*

A la courbe plane de $\mathbb{R}^2$ définie par l'équation $f(x, y) = y - x^2 - 1 = 0$ est associée l'hypersurface de $P^2(\mathbb{R})$ définie par l'équation homogène

$$F(W, X, Y) = WY - X^2 - W^2 = 0\,.$$

Le théorème de Bezout

Considérons le système d'équations algébriques :

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \quad ... \\ \quad ... \\ P_r(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

où pour $i = 1, ..., r$, les P_i sont des polynômes de $C[X_1, X_2, ..., X_n]$.

Le théorème de Bezout (Van der Waerden 1950 ou Shafarevich 1974 p.198) fournit des informations sur le nombre de solutions de ce système lorsque le nombre d'équations est égal au nombre de variables *affines.*

THÉORÈME 1.1 *(Bezout) Le nombre de zéros communs de n polynômes à n indéterminées dans l'espace projectif complexe est soit infini, soit égal au produit des degrés de chacun des polynômes pourvu que la multiplicité de chaque solution soit comptée.*

• *Exemple*

Considérons l'intersection des deux courbes planes (paraboles) définies par le système d'équations algébriques :

$$f_1(x,y) = y - x^2 - 1 = 0$$

$$f_2(x,y) = y + x^2 + 1 = 0$$

Ce système n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}^2$, admet deux solutions $(i,0)$ et $(-i,0)$ dans C^2 et enfin admet quatre solutions comme attendu dans $P^2(C)$, obtenues par résolution du système homogène :

$$F_1(W,X,Y) = YW - X^2 - W^2 = 0$$

$$F_2(W,X,Y) = YW + X^2 + W^2 = 0$$

A savoir, les points $(1,i,0)$, $(1,-i,0)$ et le point double à l'infini $(0,0,1)$ dans la direction affine $(0,1)$.

Factorisation et divisibilité des polynômes

Soit K un corps. Tout polynôme f de $K[X_1,...,X_n]$ s'écrit $f = f_1^{\alpha_1},...,f_r^{\alpha_r}$, où les f_i sont deux à deux distincts et irréductibles dans $K[X_1,...,X_n]$. Cette décomposition est unique à association près. Chacun des f_i pour $i = 1,...,n$, est un facteur de f de multiplicité α_i. Si $\alpha_i > 1$, f_i est un *facteur multiple* de f.

Remarquons par ailleurs que si $f(x_1,...,x_n) = 0$ pour un point $(x_1,...,x_n)$ de K^n alors, puisque K est intègre, il existe un j tel que $f_j(x_1,...,x_n) = 0$. Ainsi, l'ensemble des zéros du polynôme f est la réunion de l'ensemble des zéros des polynômes f_i.

Le théorème suivant (Walker 1950) permet de décider si un polynôme est divisible par un autre.

THÉORÈME 1.2 *Soit K un corps algébriquement clos et f, g deux polynômes de $K[X_1,...,X_n]$ tels que f n'ait pas de facteurs multiples. Si g s'annule chaque fois que f s'annule, alors f divise g.*

1.2 Ensembles paramétrés

Nous introduisons la notion d'Ensemble Paramétré Polynomial Généralisé qui sera utilisé tout au long de ce travail.

Un *ensemble paramétré* (E) de l'espace affine K^n est l'ensemble des points $(x_1, x_2, ..., x_n)$ définis par un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, ..., t_m) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t_1, ..., t_m) \end{cases}$$

où les φ_i sont des fonctions quelconques des variables $t_1, ..., t_m$ (incluant les fonctions non algébriques). Un ensemble paramétré s'identifie donc à une application $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de l'espace des paramètres K^m dans l'espace affine K^n. Les variables $t_1, ..., t_m$ sont appelées les *paramètres* de cet ensemble.

En particulier, si $n = 2$ et $m = 1$, l'ensemble (E) est une courbe de K^2 et si $n = 3$ et $m = 2$, l'ensemble (E) est une surface de K^3.

• *Exemple*

Ainsi, le système d'équations

$$\begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \cos u \sin v \\ z = \sin u \end{cases}$$

définit paramétriquement la sphère de $\mathbb{R}^3$ tandis que le système d'équations

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

définit le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ privé du point $(-1, 0)$.

Cependant, une telle définition ne peut être utilisée simplement puisqu'elle autorise les fonctions non algébriques.

DÉFINITION 1.1 *Un Ensemble Paramétré Polynomial Généralisé de K^n est l'ensemble*

des points $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *définis par un système d'équations de la forme :*

$$\begin{cases} P_1(x_1, t_1, ..., t_m) = 0 \\ P_2(x_2, t_1, ..., t_m) = 0 \\ \vdots \\ P_n(x_n, t_1, ..., t_m) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

où chaque fonction P_i *est un polynôme de* $K[x_i, t_1, ..., t_m]$.

Les surfaces paramétrées polynomiales et rationnelles notamment peuvent être décrites de la sorte. Nous étudierons plus précisément ces ensembles dans le cas des surfaces paramétrées polynomiales généralisées (SPPG) (cf. chapitre 2).

Chapitre 2

Surfaces et SPPG

Nous présentons ici les principales définitions et propriétés des surfaces qui nous concernerons par la suite. Notre intérêt portera essentiellement sur les surfaces de $\mathbb{R}^3$, et plus particulièrement sur les surfaces rationnelles, c'est-à-dire les surfaces paramétrées définies par des fonctions rationnelles.

Nous discuterons ensuite du lien et des différences existant entre représentation paramétrique et représentation implicite.

Les coordonnées d'un point de l'espace affine K^3 sont représentées par (x, y, z). Les coordonnées projectives sont représentées par (W, X, Y, Z) avec la relation habituelle

$$x = \frac{X}{W} \qquad y = \frac{Y}{W} \qquad z = \frac{Z}{W} \qquad \text{lorsque } W \neq 0.$$

2.1 Surfaces algébriques

Définition

Une *surface algébrique* est l'ensemble des points (x, y, z) de K^3 vérifiant une équation $f(x, y, z) = 0$, où f est un polynôme non nul de $K[x, y, z]$. L'équation $f(x, y, z) = 0$ est appelée *équation implicite* de la surface algébrique. On dit que la surface admet une *représentation implicite.*

Composantes irréductibles

Une surface algébrique (S) définie par une équation $f(x,y,z) = 0$, sera dite *irréductible* si f est irréductible. Sinon, si f s'écrit $f = f_1^{\alpha_1}, ..., f_r^{\alpha_r}$, où les f_i sont deux à deux distincts et irréductibles dans $K[x,y,z]$, (S) est l'union des surfaces algébriques irréductibles (S_i) définies par les équations $f_i = 0$. Chacune des surfaces (S_i) est une *composante* irréductible de (S) de *multiplicité* α_i.

2.2 Surfaces rationnelles

Les surfaces rationnelles nous intéressent particulièrement. Pour les questions d'élimination (implicitisation) qui seront abordées par la suite, le cas polynomial ne se distingue pas du cas rationnel. Néanmoins, pour des questions algorithmiques, nous serons parfois amené à distinguer les deux cas.

DÉFINITION 2.1 *Une surface rationnelle est l'ensemble des points (x,y,z) de K^3 qui vérifient un système d'équations paramétriques :*

$$x = \frac{\varphi_1(u,v)}{\theta(u,v)} \quad y = \frac{\varphi_2(u,v)}{\theta(u,v)} \quad z = \frac{\varphi_3(u,v)}{\theta(u,v)} \tag{4}$$

où φ_1, φ_2, φ_3 et θ sont des polynômes de $K[u,v]$. Les indéterminées u et v sont les paramètres de la surface.

Le système d'équations (4) est appelé une *représentation paramétrique* de la surface rationnelle. On dit aussi que la surface rationnelle est définie par la paramétrisation $(\theta, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Nous parlerons parfois de surface rationnelle réelle (resp. complexe) si $K = \mathbb{R}$ (resp. si $K = C$). Notons enfin, que la notion de surface rationnelle est indépendante des repères choisis.

L'ensemble de K^3 défini par la paramétrisation (4) peut être dégénéré. Nous supposerons donc que ces équations définissent une "vraie surface" de dimension 2. En particulier, pour certaines valeurs des paramètres l'application paramétrisation peut ne pas être définie.

Points de base d'une paramétrisation

Afin d'autoriser les valeurs à l'infini pour les paramètres affines (u, v), on peut substituer à ceux ci les paramètres homogènes (T, U, V), de telle sorte qu'une surface rationnelle s'identifie donc maintenant à une fonction du plan projectif (T, U, V) dans l'espace projectif (W, X, Y, Z) définie par la représentation paramétrique homogène :

$$\begin{cases} W = \Theta(T, U, V) \\ X = \Phi_1(T, U, V) \\ Y = \Phi_2(T, U, V) \\ Z = \Phi_3(T, U, V) \end{cases}$$

où Θ, Φ_1, Φ_2 et Φ_3 sont des polynômes *homogènes* de *même degré*. Notons, comme dans Fiorot [31], $Rad_K(\Theta, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ l'ensemble des points (T, U, V) qui annulent simultanément ces quatres polynômes homogènes. La surface rationnelle est donc définie en dehors de cet ensemble.

Lorsque $K = C$, les points (T, U, V) de l'ensemble $Rad_C(\Theta, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ sont appelés les *points de base* de la paramétrisation $(\theta, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. La signification des points de base a été étudiée dans [21,75].

Surface paramétrée polynomiale

Une *surface paramétrée polynomiale* est un cas particulier d'une surface rationnelle obtenue lorsque $\theta(u, v)$ est un polynôme constant. Une surface paramétrée polynomiale s'exprime donc par :

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, v) \\ y = \varphi_2(u, v) \\ z = \varphi_3(u, v) \end{cases}$$

où les φ_i sont des polynômes de $K[u, v]$.

2.3 Représentation implicite et paramétrique

Nous abordons maintenant la question essentielle qui nous préoccupe. A savoir, quel est le lien entre représentation implicite et représentation paramétrique d'une

surface. Plus précisément, nous nous intéressons à l'existence et aux propriétés d'une représentation implicite pour une représentation paramétrique donnée. Nous ne traitons pas de la question de la paramétrisation d'un ensemble algébrique.

Nous donnons ici des éléments de réponse théorique qui seront développés par la suite. La partie suivante consistera à fournir des solutions algorithmiques cohérentes pour résoudre pratiquement les problèmes abordés, notamment dans les cas critiques. En particulier, une implémentation numérique robuste sera proposée dans la dernière partie.

2.3.1 Implicitisation

Une représentation paramétrique d'une surface rationnelle satisfait toujours identiquement une équation polynomiale non nulle *irréductible* à coefficients complexes [21]. Autrement dit, il existe toujours un polynôme non nul *irréductible* $f(x,y,z)$ de $C[x,y,z]$ tel que :

$$f(\frac{\varphi_1(u,v)}{\theta(u,v)}, \frac{\varphi_2(u,v)}{\theta(u,v)}, \frac{\varphi_3(u,v)}{\theta(u,v)}) \equiv 0 \, .$$

En d'autres termes, *toute surface rationnelle est contenue dans une surface algébrique complexe.* L'équation $f(x,y,z) = 0$ est appelée *l'équation implicite* ou *représentation implicite* de la surface rationnelle.

Cependant, il peut sembler génant d'obtenir une équation implicite à coefficients *complexes* pour une surface rationnelle réelle par exemple. En fait, on peut montrer qu'une paramétrisation d'une surface rationnelle et son équation implicite ont le *même corps de coefficients* (voir par exemple le paragraphe 3.3.4).

En conclusion, *toute surface rationnelle à coefficients dans un corps $K \subset C$ admet une équation implicite irréductible $f(x,y,z) = 0$ avec $f \in K[x,y,z]$.*

La détermination de l'équation implicite d'une surface rationnelle est appelée *implicitisation* de la surface rationnelle.

Unicité et irréductibilité de l'équation implicite

L'irréductibilité de l'équation implicite d'une surface rationnelle a été signalée ci-dessus. Par ailleurs, l'équation implicite d'une surface rationnelle est *unique* à

un facteur scalaire près. En effet, si une surface rationnelle admet deux équations implicites irréductibles distinctes $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, elle est contenue dans l'intersection des deux surfaces algébriques correspondantes, c'est-à-dire dans au plus une courbe de l'espace, ce qui n'est pas possible. En revanche, la représentation paramétrique d'une surface rationnelle *n'est pas unique.*

Nombre de composantes

Une surface algébrique a généralement plus d'une composante. Cependant une surface algébrique irréductible n'a qu'une composante. Ainsi, *une surface rationnelle ne peut avoir plus d'une composante* puisque toute surface rationnelle est contenue dans une surface algébrique irréductible.

2.3.2 Quelques exemples de difficultés

Nous donnons quelques exemples illustrant le type de problèmes auxquels nous nous intéressons.

Exemple 1

La surface rationnelle S de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$x = \frac{2u}{u^2+v^2+1} \qquad y = \frac{2v}{u^2+v^2+1} \qquad z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$$

est la sphère unité privée du point $(1,0,0)$. La surface rationnelle réelle S est donc contenue dans la surface algébrique réelle $\bar{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2-1=0$, avec $S \neq \bar{S}$.

Ce phénomène est pris en compte en considérant la *topologie de Zariski.* Dans le cas général, toute surface rationnelle S est contenue, au sens strict, dans une surface algébrique irréductible unique $\bar{S}$. La réciproque est généralement difficile à établir et concerne la géométrie algébrique. Donnons néanmoins le résultat suivant. Dans [21], Chionh conjecture qu'*une surface rationnelle définie par une paramétrisation est incomplète (c'est-à-dire $S \neq \bar{S}$) si et seulement si cette paramétrisation a des points de base.*

Cette question est d'autant plus délicate pour une surface rationnelle réelle (c'est-à-dire à paramètres réels non projectifs). Cette question nous concernera particulièrement dans la dernière partie de cette thèse, où, pour des problèmes d'intersection, nous substituerons à une surface rationnelle sa surface implicite telle qu'elle est définie ci-dessus.

Exemple 2

Considérons les représentations paramétriques polynomiales suivantes :

$$(1)\begin{cases} x = 1+u^2 \\ y = 1-v^2 \\ z = 1+u^2-v^2-u^2v^2 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x = u^3 \\ y = v^3 \\ z = u^3v^3 \end{cases} \qquad (3)\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = uv \end{cases} .$$

Toutes trois définissent la même surface d'équation implicite $z - xy = 0$. Cependant, la surface est parcourue *quatre* fois dans le premier cas, *neuf* fois dans le second et *une seule* fois dans le dernier cas. Le corps K étant ici supposé algébriquement clos. Par exemple, avec la seconde paramétrisation, le point $(1,1,1)$ de la surface est l'image des neufs points $(1,1)$, $(1,j)$, $(1,\bar{j})$, $(j,1)$, (j,j), $(j,\bar{j})$, $(\bar{j},1)$, $(\bar{j},j)$, $(\bar{j},\bar{j})$ de l'espace des paramètres C^2.

Plus généralement, étant donnée une représentation paramétrique d'une surface rationnelle complexe, il existe un entier $l \geq 1$ tel que tout point de la surface corresponde à l valeurs des paramètres (Zariski 1971) [80]. Ce nombre l est appelé le *degré de l'application paramétrisation.* Ainsi, sur les exemples donnés ci-dessus, ce nombre l vaut respectivement 4, 9 et 1.

Une représentation paramétrique d'une surface rationnelle est dite *fidèle* si $l = 1$, sinon elle est dite *infidèle.*

Exemple 3

Etant donnée une paramétrisation d'une surface rationnelle, celle-ci n'est pas toujours prolongeable par continuité en ses points de base (si elle en possède), contrairement à ce qui se passe pour les courbes rationnelles. Considérons pour cela l'exemple

donné par Fiorot ([31], p 160) :

$$x = \frac{v}{u+v} \qquad y = \frac{u^2+2u}{u+v} \qquad z = \frac{u}{u+v}\,.$$

La paramétrisation homogène associée

$$W = TU + TV \qquad X = TV \qquad Y = U^2 + 2TU \qquad Z = TU$$

admet le point de base $(1,0,0)$, c'est-à-dire le point de coordonnées affines $(0,0)$. Si le point (u,v) de l'espace des paramètres tend vers $(0,0)$ de sorte que $v = \lambda u$, avec $\lambda \neq -1$, le point (x,y,z) tend vers le point $(\frac{\lambda}{1+\lambda}, \frac{2}{1+\lambda}, \frac{2}{1+\lambda})$ qui dépend de λ. D'où l'impossibilité d'un prolongement par continuité.

Exemple 4

Considérons l'exemple suivant ($K = C$) :

$$\begin{cases} x = uv \\ y = uv^2 \\ z = u^2 \end{cases} \tag{5}$$

L'équation implicite de cette surface paramétrée polynomiale (Buchberger 1988) est $x^4 - y^2z = 0$. Cependant, la surface algébrique $x^4 - y^2z = 0$ contient l'axe des y alors que la surface paramétrée ne le contient pas. Clairement, les points manquants correspondent à des valeurs à l'infini des paramètres u et v. En effet, il est possible de récupérer ces points en considérant les paramètres homogènes (T,U,V). On obtient alors la représentation paramétrique homogène :

$$x = TUV \qquad y = UV^2 \qquad z = TU^2$$

et l'axe des y est maintenant obtenu pour les valeurs correspondant à $T = 0$. Il est cependant possible dans cet exemple de récupérer les points manquants sans avoir recours aux paramètres homogènes. Pour cela, Sturmfels (1987) propose la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x = uv \\ y = v^2 \\ z = u^4 \end{cases}$$

La surface ainsi définie contient l'axe des y et a à nouveau $x^4 - y^2 z = 0$ pour équation implicite.

2.4 Courbes et surfaces de Bézier

En approximation et CAO, les polynômes sont souvent exprimés dans la base de *Bernstein* pour des raisons de facilité de manipulation et de stabilité numérique. Les courbes et surfaces ainsi définies sont connues sous l'appellation de *courbes et surfaces de Bézier*. Ce paragraphe propose une description rapide de ces courbes et surfaces. Nous renvoyons à [50] pour une description des propriétés géométriques de ces objets. Notons que dans ces contextes, les surfaces sont traditionnellement paramétrées sur le carré $[0,1]^2$ (par *produit tensoriel*), ou sur le triangle $\{(u,v); u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1\}$ (*Bézier sur les triangles*).

Base de Bernstein et produit tensoriel

Les polynômes :

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \qquad 0 \leq i \leq n$$

forment une base de l'espace vectoriel des polynômes en t de degré $\leq n$. Cette base est la *base de Bernstein*. De la même manière, les polynômes :

$$B_{i,j}^n(u,v) = \binom{n}{i,j} u^i v^i (1-u-v)^{n-i-j} \qquad 0 \leq i+j \leq n,$$

avec

$$\binom{n}{i,j} = \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!}$$

forment une base (*base de Bernstein*) de l'espace vectoriel des polynômes en u, v de degré $\leq n$. Ces bases possèdent de nombreuses propriétés qui en font un outil privilégié pour les applications géométriques de la CAO [50]. Les courbes et surfaces exprimées dans ces bases sont appelées courbes et surfaces de *Bézier*.

Une courbe *Bézier* polynomiale de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, de degré n est définie par une application polynomiale P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$, telle que :

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \; B_i^n(t),$$

où les P_i sont des points de $\mathbb{R}^d$. Ces points sont appelés les *points de contrôle* de la courbe de Bézier.

Les surfaces de Bézier sont définies soit par produit tensoriel des bases de Bernstein à une variable, soit directement au moyen de la base de Bernstein à deux variables.

Une surface de *Bézier* polynomiale de $\mathbb{R}^3$, définie par *produit tensoriel* s'exprime sous la forme :

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} P_{i,j} \; B_i^n(u) \; B_j^m(v),$$

où les $P_{i,j}$ sont des points de $\mathbb{R}^3$. Une telle surface est dite de bi-degré (n, m) en les paramètres (u, v).

Ces surfaces sont parmi les plus utilisées en CAO. Néanmoins, on peut aussi définir une surface de Bézier polynomiale par :

$$P(u, v) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} P_{i,j} \; B_{i,j}^n(u, v),$$

où les $P_{i,j}$ sont à nouveau des points de $\mathbb{R}^3$, et les $B_{i,j}^n$ sont les polynômes de Bernstein à deux variables. Une telle surface est dite de degré (total) n. Les points $P_{i,j}$ sont les *points de contrôle* de la surface de Bézier.

Surfaces de Bézier rationnelles

Les surfaces de Bézier rationnelles se définissent exactement de la même manière. Une surface de *Bézier rationnelle* de $\mathbb{R}^3$, définie par *produit tensoriel* s'exprime sous la forme :

$$\begin{cases} W = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} d_{ij} \; B_i^n(u) \; B_j^m(v) \\ X = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} \; B_i^n(u) \; B_j^m(v) \\ Y = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \; B_i^n(u) \; B_j^m(v) \\ Z = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_{ij} \; B_i^n(u) \; B_j^m(v) \end{cases}$$

tandis qu'une surface de *Bézier rationnelle* définie à partir des bases de Bernstein à deux variables s'exprime sous la forme :

$$\begin{cases} W = \sum\limits_{0\leq i+j\leq n} d_{ij}\ B^n_{i,j}(u,v) \\ X = \sum\limits_{0\leq i+j\leq n} a_{ij}\ B^n_{i,j}(u,v) \\ Y = \sum\limits_{0\leq i+j\leq n} b_{ij}\ B^n_{i,j}(u,v) \\ Z = \sum\limits_{0\leq i+j\leq n} c_{ij}\ B^n_{i,j}(u,v) \end{cases}$$

2.5 Surfaces SPPG

La notion de Surface Paramétrée Polynomiale Généralisée (SPPG) généralise la notion de surface rationnelle. Les techniques d'implicitisation étudiées par la suite s'appliquent à ce type de surfaces. Les notions de degré total et de bi-degré sont précisées. Le traitement des surfaces de Bézier définies par produit tensoriel explique l'intérêt porté aux surfaces de bi-degré. Les coordonnées d'un point seront généralement notées (x, y, z).

2.5.1 Définitions

DÉFINITION 2.2 *Une Surface Paramétrée Polynomiale Généralisée (SPPG) de type* 3 *est l'ensemble des points* (x, y, z) *de* K^3 *définis par un système d'équations de la forme :*

$$\begin{cases} P_1(x,y,z,u,v) = 0 \\ P_2(x,y,z,u,v) = 0 \\ P_3(x,y,z,u,v) = 0 \end{cases}$$

où les fonctions P_i *sont des polynômes de* $K[x, y, z, u, v]$.

Une SPPG est dite de type 2 *si* $P_1 \in K[x, u, v]$, $P_2 \in K[y, u, v]$ *et* $P_3 \in K[z, u, v]$.

Si de plus, pour une SPPG de type 2, *les polynômes* P_1, P_2 *et* P_3 *sont respectivement linéaires en* x, y *et* z, *la SPPG est dite de type* 1.

Une SPPG de type 1 *ou* 2 *est donc définie par un système :*

$$\begin{cases} P_1(x,u,v) = 0 \\ P_2(y,u,v) = 0 \\ P_3(z,u,v) = 0 \end{cases}.$$

Les polynômes P_i s'écrivent donc en notations simplifiées :

$$P_1 = \sum_{i,j} A_{ij}\, u^i v^j \quad P_2 = \sum_{i,j} B_{ij}\, u^i v^j \quad P_3 = \sum_{i,j} C_{ij}\, u^i v^j$$

où les A_{ij}, B_{ij} et C_{ij} sont des polynômes en x, y et z.

Notons $Rad_K(P_1, P_2, P_3)$ l'ensemble des points (u, v) de K^2 tels que les polynômes $P_i(x, y, z, u, v)$ soient simultanément identiquement nuls en x, y, z. *La surface SPPG est définie en dehors de cet ensemble.* En effet, pour les valeurs de $Rad_K(P_1, P_2, P_3)$, tout point $M(x, y, z)$ de K^3 appartiendrait à la surface.

• *Exemple*

Considérons la paramétrisation suivante d'une SPPG de type 3.

$$\begin{cases} 2u^2x + vy - uxz & = 0 \\ uv^2x + vyz - uxz^2 & = 0 \\ v^2z + uvy^2 + 2u^2x & = 0 \end{cases} .$$

On montre ici que $Rad_K(P_1, P_2, P_3) = Rad_C(P_1, P_2, P_3) = \{(0, 0)\}$. Pour $u = 0$ et $v = 0$ la surface ainsi définie serait *dégénérée*, c'est-à-dire égale à K^3.

Notons qu'en particulier, les polynômes P_i doivent effectivement dépendre explicitement des indéterminées x, y et z. Par ailleurs, le PGCD des trois polynômes P_1, P_2, P_3 de $K[x, y, z, u, v]$ est supposé constant.

Homogénéisation

L'utilisation des paramètres homogènes pour une SPPG conduit à homogénéiser en u, v les polynômes P_i par

$$\tilde{P}_i(x, y, z, T, U, V) = T^{d_i}\, P_i(x, y, z, \frac{U}{T}, \frac{V}{T}) \tag{6}$$

où d_i est le degré total en u, v du polynôme P_i.

De la même manière, nous noterons $Rad_K(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3)$ l'ensemble des points (T, U, V) de $P^2(K)$ tels que les polynômes $\tilde{P}_i(x, y, z, T, U, V)$ soient simultanément identiquement nuls en x, y, z. *La surface SPPG homogène sera définie en dehors de cet ensemble.*

• *Exemple*

$$\begin{cases} u^2x + y - vz = 0 \\ uxy + 2vz^2 - 1 = 0 \\ vz + uvy^2 - u^2 = 0 \end{cases}$$

On montre ici que $Rad_K(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3) = Rad_C(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3) = \{(0,0,1)\}$.

2.5.2 Quelques remarques

Donnons tout d'abord le résultat élémentaire suivant.

REMARQUE 2.1 *Les surfaces SPPG de type* 1 *sont les surfaces rationnelles.*

Les paramétrisations SPPG de type 2 permettent parfois de "*complèter*" certaines paramétrisations rationnelles incomplètes. Par exemple, la paramétrisation suivante de type 2

$$\begin{cases} x - uv & = 0 \\ y^2 - u^2(1 - v^2) & = 0 \\ z^2 - 1 + u^2 & = 0 \end{cases} \tag{7}$$

décrit complètement la sphère unité en paramètres affines [17].

Plus généralement, considérons une SPPG de type 3. Pour chaque couple de valeurs $(\bar{u}, \bar{v})$, les points de la SPPG sont les points (x, y, z) solutions du système

$$\begin{cases} P_1(x, y, z, \bar{u}, \bar{v}) = 0 \\ P_2(x, y, z, \bar{u}, \bar{v}) = 0 \\ P_3(x, y, z, \bar{u}, \bar{v}) = 0 \end{cases}.$$

Dans le cas général, si d_i est le degré total en x, y, z du polynôme P_i, ce système admet $d = d_1\, d_2\, d_3$ solutions dans $P^3(C)$ (théorème de Bezout), et donc au plus d solutions dans K^3 ou $P^3(K)$, ce qui montre que, généralement, x, y et z ne s'expriment pas en fonction des paramètres u et v. Si ce dernier système admet une infinité de solutions, l'ensemble de ces solutions est réunion de surfaces et de courbes algébriques de K^3. En effet, ces solutions sont l'intersection des trois surfaces algébriques d'équation

$P_i(x, y, z, \bar{u}, \bar{v}) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Ces remarques restent bien évidemment valables si l'on considère les paramètres homogènes (T, U, V).

Autrement dit, une surface SPPG n'est pas définie, dans le cas général, en tant qu'application de K^2 ou $P^2(K)$ à valeurs dans K^3.

REMARQUE 2.2 *En particulier, une surface SPPG de type* 2 *ou* 3 *aura, dans le cas général, plusieurs composantes.*

Points de base d'une SPPG

Si (T, U, V) est un point de base d'une paramétrisation d'une surface rationnelle, les polynômes homogènes en T, U, V

$$\Phi_1(T, U, V) - x\,\Theta(T, U, V)$$

$$\Phi_2(T, U, V) - y\,\Theta(T, U, V)$$

$$\Phi_3(T, U, V) - z\,\Theta(T, U, V)$$

sont identiquement nuls en x y et z.

Par analogie, nous définissons les points de base d'une paramétrisation d'une SPPG de la manière suivante.

DÉFINITION 2.3 *Considérons une paramétrisation (P_1, P_2, P_3) d'une SPPG de K^3 de type* 1, 2 *ou* 3. *Les points de base de cette paramétrisation sont les points (T, U, V) de l'espace projectif des paramètres complexes tels que les polynômes*

$$\tilde{P}_1(x, y, z, T, U, V), \quad \tilde{P}_2(x, y, z, T, U, V), \quad \tilde{P}_3(x, y, z, T, U, V)$$

soient simultanément identiquement nuls en x, y, z.

Autrement dit, les points de base sont les points de l'ensemble $Rad_C(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3)$

2.5.3 Degré d'une SPPG : définitions

Nous précisons les sommations sur i et j, c'est-à-dire les degrés en u et v d'une SPPG. Les définitions sont données dans le cas des SPPG de type 1 ou 2, mais elles s'appliquent aux SPPG de type 3.

Première forme : bi-degré

$$\begin{cases} P_1(x,u,v) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{m_1} A_{ij}(x) u^i v^j \\ P_2(y,u,v) = \sum_{i=0}^{n_2} \sum_{j=0}^{m_2} B_{ij}(y) u^i v^j \\ P_3(z,u,v) = \sum_{i=0}^{n_3} \sum_{j=0}^{m_3} C_{ij}(z) u^i v^j \end{cases} \tag{8}$$

REMARQUE 2.3 *Une telle SPPG est dite de bi-degrés* (n_1, m_1), (n_2, m_2), (n_2, m_2) *(en u et v). Si* $n_1 = n_2 = n_3 = n$ *et* $m_1 = m_2 = m_3 = m$, *la SPPG est dite de bi-degré* (n, m).

Deuxième forme : degré total

$$\begin{cases} P_1(x,u,v) = \sum_{0 \le i+j \le N_1} A_{ij}(x) u^i v^j \\ P_2(y,u,v) = \sum_{0 \le i+j \le N_2} B_{ij}(y) u^i v^j \\ P_3(z,u,v) = \sum_{0 \le i+j \le N_3} C_{ij}(z) u^i v^j \end{cases} \tag{9}$$

REMARQUE 2.4 *Une telle SPPG est dite de degré* N_1, N_2, N_3 *(en u et v). Si* $N_1 = N_2 = N_3 = N$, *la SPPG est dite de degré (total)* N.

Rappelons que le nombre de termes d'un polynôme de degré total N est $C^3_{N+3} = (N+1)(N+2)(N+3)/6$.

2.5.4 SPPG de type 1 : notations

Les notations introduites ici seront utilisées dans le chapitre 9. Les sommations sur i et j ne sont pas précisées car seules nous intéressent les relations entre les coefficients d'une surface rationnelle et ceux de son écriture sous forme d'une SPPG de type 1 (cf. remarque 2.1).

Nous sommes amenés à distinguer le cas polynomial du cas purement rationnel pour des raisons algorithmiques intervenant par la suite.

Surfaces paramétrées polynomiales

Considérons la surface paramétrée polynomiale (S_P) :

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u,v) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} u^i v^j \\ y = \varphi_2(u,v) = \sum\limits_{i,j} b_{ij} u^i v^j \\ z = \varphi_3(u,v) = \sum\limits_{i,j} c_{ij} u^i v^j \end{cases} \tag{10}$$

où les a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} sont des scalaires de K.

En posant $P_1(x,u,v) = \varphi_1(u,v) - x$, $P_2(y,u,v) = \varphi_2(u,v) - y$ et $P_3(z,u,v) = \varphi_3(u,v) - z$, cette surface s'écrit comme une SPPG de type 1 avec les relations :

$$\begin{cases} A_{00}(x) = a_{00} - x \\ B_{00}(y) = b_{00} - y \\ C_{00}(z) = c_{00} - z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A_{ij}(x) = a_{ij} \\ B_{ij}(y) = b_{ij} \\ C_{ij}(z) = c_{ij} \end{cases} \quad \text{pour } (i,j) \neq (0,0). \tag{11}$$

Surfaces rationnelles

Considérons la surface rationnelle (S_R) :

$$x = \frac{\varphi_1(u,v)}{\theta(u,v)} \qquad y = \frac{\varphi_2(u,v)}{\theta(u,v)} \qquad z = \frac{\varphi_3(u,v)}{\theta(u,v)}$$

avec :

$$\begin{cases} \theta(u,v) = \sum\limits_{i,j} d_{ij}\, u^i v^j \\ \varphi_1(u,v) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}\, u^i v^j \\ \varphi_2(u,v) = \sum\limits_{i,j} b_{ij}\, u^i v^j \\ \varphi_3(u,v) = \sum\limits_{i,j} c_{ij}\, u^i v^j \end{cases} \tag{12}$$

où les a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} et d_{ij} sont des scalaires de K.

En posant $P_1(x,u,v) = \varphi_1(u,v) - x\ \theta(u,v)$, $P_2(y,u,v) = \varphi_2(u,v) - y\ \theta(u,v)$ et $P_3(z,u,v) = \varphi_3(u,v) - z\ \theta(u,v)$ cette surface s'écrit comme une SPPG de type 1 avec les relations :

$$\begin{cases} A_{ij}(x) = a_{ij} - x\, d_{ij} \\ B_{ij}(y) = b_{ij} - y\, d_{ij} \\ C_{ij}(z) = c_{ij} - z\, d_{ij} \end{cases} \quad \text{pour tout } (i,j). \tag{13}$$

Chapitre 3

Elimination et implicitisation

La théorie de l'élimination est à la base de la théorie des systèmes d'équations algébriques. Le problème général est le suivant : étant donné un système d'équations algébriques $f_i = 0$, $(1 \leq i \leq p)$, où les f_i sont des polynômes à n variables, à coefficients dans un corps K, trouver des conditions nécessaires et suffisantes liant les coefficients des f_i, pour que le système admette au moins une solution.

La théorie de l'élimination s'appuie fortement sur l'algèbre linéaire et notamment sur la notion d'indépendance linéaire et de déterminant.

3.1 Méthodes à une variable

La méthode la plus connue est celle de Sylvester. Il existe plusieurs présentations de cette méthode. Nous donnons ici l'approche classique [53].

3.1.1 Méthode de Sylvester

Considérons les deux polynômes suivants à coefficients dans K :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + a_0 \qquad a_m \neq 0 \\ g(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_0 \qquad b_n \neq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

et formons les $m + n$ polynômes :

$$x^{n-1} f(x),\ ...,\ x^2 f(x),\ x f(x),\ f(x),\ x^{m-1} g(x),\ ...,\ x^2 g(x),\ x g(x),\ g(x)$$

de degrés au plus égal à $m+n-1$. Ecrivons ces polynômes sous forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} a_m & \cdots & a_1 & a_0 & & & \\ & a_m & \cdots & a_1 & a_0 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & a_m & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_n & \cdots & b_1 & b_0 & & & \\ & b_n & \cdots & b_1 & b_0 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & b_n & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{m+n-1} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n-1}f(x) \\ . \\ . \\ xf(x) \\ f(x) \\ x^{m-1}g(x) \\ . \\ . \\ xg(x) \\ g(x) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Notons $M.X = \binom{f}{g}$ ce système. La matrice M est appelée *matrice de Sylvester* des polynômes f et g. Son déterminant est appelé le *résultant* (de Sylvester) des polynômes f et g. On le note $R_{f,g}$. La propriété essentielle du résultant de Sylvester est la suivante.

Le résultant $R_{f,g}$ est nul si et seulement si les deux polynômes f et g ont un facteur commun non trivial, autrement dit, si et seulement si les polynômes f et g ont une racine commune dans une extension de K.

En effet, si les polyômes f et g admettent une racine commune, alors, pour cette racine, le vecteur $\binom{f}{g}$ est nul tandis que le vecteur X ne l'est pas. Autrement dit, si les polynômes f et g ont une racine commune, le déterminant de la matrice M doit s'annuler. Pour la réciproque de cette proposition nous renvoyons à [46].

REMARQUE 3.1 *Cette méthode est parfois connue sous le nom de méthode "dialytique" de Sylvester [53,30].*

Cependant, pour notre application, nous sommes intéressé par une réciproque plus précise, permettant (si possible) de déterminer, lorsque f et g sont dans $\mathbb{R}[x]$, si les deux polynômes f et g ont au moins une racine commune *dans* $\mathbb{R}$.

Tentative de réciproque ensembliste dans le cas réel

La réciproque est moins évidente avec cette approche. Si pour des valeurs des coefficients, le déterminant $R_{f,g}$ est nul, alors le noyau de la matrice M est non nul. *Si un élément du noyau de M peut s'écrire sous la forme* $(\alpha^{m+n-1}, ..., \alpha^2, \alpha, 1)$, *alors on montre aisément que les polynômes f et g ont la racine commune* α. En effet, si $(\alpha^{m+n-1}, ..., \alpha^2, \alpha, 1)$ est solution du système (15), celui-ci conduit à :

$$\begin{aligned} a_m\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1} + \cdots + a_0 &= 0 \quad = f(\alpha) \\ b_n\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + b_0 &= 0 \quad = g(\alpha) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. La question délicate est donc de voir si pour $R_{f,g} = 0$, une solution au moins du système $M.X = 0$ peut se mettre sous la forme $(\alpha^{m+n-1}, ..., \alpha^2, \alpha, 1)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$?

• *Exemple*

Considérons les équations suivantes à coefficients réels :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0 \qquad a_2 \neq 0 \\ g(x) &= b_1\,x + b_0 \qquad\qquad\quad b_1 \neq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

pour lesquelles on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 & . \\ . & b_1 & b_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_{f,g} = det\,(M) = a_0b_1^2 - a_1b_0b_1 + a_2b_0^2\,.$$

Puisque $b_1 \neq 0$, le rang de M est ≥ 2. Ainsi, si $R_{f,g} = 0$, et si par exemple $a_2b_0 - a_1b_1 \neq 0$, le système admet des solutions $(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)$ qui vérifient :

$$\alpha_1 = \frac{a_0b_1}{a_2b_0 - a_1b_1}\,\alpha_0 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{-a_0b_0}{a_2b_0 - a_1b_1}\,\alpha_0\,,$$

de sorte que, dans le cas général $(a_2b_0 - a_1b_1 \neq 0)$, le noyau de la matrice M est la droite vectorielle :

$$\alpha_0\,(\frac{-a_0b_0}{a_2b_0 - a_1b_1}\,,\ \frac{a_0b_1}{a_2b_0 - a_1b_1}\,,\ 1)\,, \quad \alpha_0 \in \mathbb{R}\,.$$

On vérifie ensuite, grâce à la relation $R_{f,g} = 0$ que :

$$\frac{-a_0 b_0}{a_2 b_0 - a_1 b_1} = (\frac{a_0 b_1}{a_2 b_0 - a_1 b_1})^2$$

ce qui donne le résultat escompté.

Plus généralement, si $R_{f,g} = 0$ et si le rang de la matrice de Sylvester est $m+n-1$, alors les polynômes f et g ont un facteur commun de degré 1, c'est-à-dire une racine commune dans $\mathbb{R}$. En revanche, si le rang de la matrice de Sylvester des polynômes f et g est strictement inférieur à $m+n-1$, il n'est pas évident de déterminer si les racines communes sont réelles ou non. Considérons pour celà les exemples suivants.

Exemple 1

Considérons les polynômes $f(x) = x^3-x^2-x+1$ et $g(x) = x^2-2x+1$ qui admettent le facteur commun $(x-1)^2$. Leur matrice de Sylvester s'écrit (après réduction de Gauss) :

$$M_{f,g} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & . \\ . & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & . & . \\ . & 1 & -2 & 1 & . \\ . & . & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & . \\ . & 1 & -1 & -1 & 1 \\ . & . & 1 & -2 & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Exemple 2

Considérons maintenant les polynômes $f(x) = x^3-x^2+x-1$ et $g(x) = x^3+x^2+x+1$ qui admettent le facteur commun x^2+1. Leur matrice de Sylvester s'écrit (après réduction de Gauss) :

$$M_{f,g} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & . & . \\ . & 1 & -1 & 1 & -1 & . \\ . & . & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & . & . \\ . & 1 & 1 & 1 & 1 & . \\ . & . & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & . & . \\ . & 1 & -1 & 1 & -1 & . \\ . & . & 1 & -1 & 1 & -1 \\ . & . & . & 1 & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Notre propriété doit résulter du fait qu'une élimination de Gauss sur la matrice de Sylvester de deux polynômes est équivalente à la recherche de leur pgcd par l'algorithme d'Euclide (Davenport [27]).

Quelques propriétés du résultant de Sylvester

1. Si f_1, f_2 et g sont trois polynômes de $K[x]$, alors :

$$R_{f_1 f_2, g} = R_{f_1, g} R_{f_2, g}$$

2. Si K est algébriquement clos, désignons par $\alpha_1, ..., \alpha_m$ les racines de f et par $\beta_1, ..., \beta_n$ celles de g. On a alors :

$$R_{f,g} = (a_m)^n (b_n)^m \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (\alpha_i - \beta_j) \tag{17}$$

$$= (a_m)^n \prod_{i=1}^{m} g(\alpha_i) = (-1)^{mn} (b_n)^m \prod_{i=1}^{n} f(\beta_i) \tag{18}$$

$$= (-1)^{mn} R_{g,f} \tag{19}$$

On peut trouver les démonstrations de ces propriétés dans [27].

Remarquons enfin que la méthode de Sylvester conduit à évaluer le déterminant d'une matrice comportant de nombreux zéros. En fait, le résultant de deux polynômes en une variable peut s'exprimer comme le déterminant d'une matrice plus compacte, et donc plus aisée à manipuler (cf. résultant de Cayley).

3.1.2 La méthode de Cayley

Etant donnés les deux polynômes f et g définis comme ci-dessus, considérons l'expression $\Delta(x, \alpha) = f(x)\, g(\alpha) - f(\alpha)\, g(x)$ qui se factorise par $x - \alpha$. Notons $\delta(x, \alpha)$ le quotient de $\Delta(x, \alpha)$ par $x - \alpha$ qui s'écrit donc :

$$\delta(x, \alpha) = \frac{\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f(\alpha) & g(\alpha) \end{vmatrix}}{x - \alpha}.$$

Clairement, δ est un polynôme symétrique en x et α, de degré $N-1$ en chacune de ces variables, où $N = max\,(m,n)$. Ainsi :

$$\delta(x,\alpha) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i(x)\,\alpha^i = (\,\alpha^{N-1},\ \ \ldots\ \ \alpha,\ \ 1\,)\,B \begin{pmatrix} x^{N-1} \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La méthode de Cayley repose essentiellement sur la remarque suivante. Si les polynômes f et g ont une racine commune $\bar{x}$, alors le polynôme $\delta(\bar{x},\alpha)$ est identiquement nul en α et par suite, $h_i(\bar{x}) = 0$ pour $i = 0,1,...,N-1$. Ainsi, la relation matricielle

$$B\,.\begin{pmatrix} x^{N-1} \\ \vdots \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{N-1}(x) \\ \vdots \\ h_1(x) \\ h_0(x) \end{pmatrix}$$

montre comme précédemment que le déterminant R de la matrice B doit s'annuler. R est le *résultant de Cayley* et s'annule si et seulement si les polynômes f et g ont un facteur commun non trivial.

Néanmoins, comme dans la méthode de Sylvester, nous sommes intéressés par une réciproque directe (ensembliste) afin d'obtenir des informations sur l'inversion.

Tentative de réciproque directe

Montrons d'abord la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1 *Considérons deux polynômes f et g de $K[x]$. Si ces deux polynômes sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel $K[x]$, alors $\delta(\bar{x},\alpha) = 0$ pour tout α si et seulement si $f(\bar{x}) = g(\bar{x}) = 0$.*

Le sens direct est clair. Réciproquement, si $\delta(\bar{x},\alpha) = 0$ pour tout α, alors on déduit de $\Delta(x,\alpha) = (x-\alpha)\,\delta(x,\alpha)$ que $\Delta(\bar{x},\alpha) = f(\bar{x})\,g(\alpha) - f(\alpha)\,g(\bar{x}) = 0$ pour tout α. Posons $\mu = f(\bar{x})$ et $\lambda = -g(\bar{x})$. Ainsi, si $\delta(\bar{x},\alpha) = 0$ pour tout α, il existe $\lambda,\mu \in K$ tels que $\lambda f + \mu g = 0$ dans $K[\alpha]$. Autrement dit, ou bien les polynômes f et g sont liés dans $K[\alpha]$, ou bien $\lambda = \mu = 0$, ce qui démontre la proposition. □

On en déduit la suite d'équivalences ensemblistes suivante pour des polynômes linéairement indépendants dans l'espace vectoriel $K[x]$.

$$\begin{pmatrix} \exists\, \bar{x} \in K, \\ f(\bar{x}) = g(\bar{x}) = 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \exists\, \bar{x} \in K,\ \delta(\bar{x}, \alpha) \equiv 0 \ \text{ en } \alpha \\ \Updownarrow \\ h_i(\bar{x}) = 0 \ \text{ pour } \ i = 0, 1, ..., N-1 \\ \Updownarrow \\ B \,.\, \begin{pmatrix} \bar{x}^{N-1} \\ \vdots \\ \bar{x} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (\ det\,(B) = R = 0\ )$$

Nous faisons ici la même remarque que pour la méthode de Sylvester. Si le déterminant R s'annule, alors le système correspondant admet au moins une droite vectorielle de K^N solution. Si un vecteur de cette droite peut s'écrire sous la forme :

$$(\alpha^{N-1}, \alpha^{N-2}, ..., \alpha, 1) \qquad \alpha \in K$$

alors α est une racine commune des polynômes f et g dans K.

Exemple

Considérons les deux polynômes :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_3 x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0 \qquad & a_2 \neq 0 \\ g(x) &= b_3 x^3 + b_2\, x^2 + b_1\, x + b_0 \qquad & b_2 \neq 0 \end{aligned}$$

On a alors :

$$\delta(x, \alpha) \;=\; (\alpha^2, \alpha, 1) \begin{pmatrix} (a_3, b_2) & (a_3, b_1) & (a_3, b_0) \\ (a_3, b_1) & (a_3, b_0) + (a_2, b_1) & (a_2, b_0) \\ (a_3, b_0) & (a_2, b_0) & (a_1, b_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

en notant $(a_i, b_j) = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$.

3.2 Méthodes à plusieurs variables

Nous introduisons ici la notion générale de résultant pour un système d'équations polynomiales à plusieurs variables. Pour plus de détails nous renvoyons à (Van der Waerden 1970 [73]) et (Macaulay 1916 [51]).

Considérons f_1, f_2, ..., f_r des polynômes en $n-1$ variables affines x_i et F_1, F_2, ..., F_r les polynômes homogènes associés de $K[x_1, ..., x_n]$, de degrés respectifs $l_1, ..., l_r$.

3.2.1 Résultant théorique

Considérons chaque F_i comme un polynôme homogène général à coefficients indéterminés a_{ij}. Notons par ailleurs $Z[a_1, a_2, ..., a_r] = Z[a_{11}, a_{12}, ...; a_{21}, a_{22}, ...; a_{r1}, a_{r2}, ...]$, l'anneau des polynômes en les coefficients des F_i et à coefficients entiers. Si K est algébriquement clos, on a alors le résultat suivant [73].

THÉORÈME 3.1 *Il existe un nombre fini de polynômes homogènes de* $Z[a_1, a_2, ..., a_r]$,

$$R_1(a_1, ..., a_r), ..., R_m(a_1, ..., a_r),$$

qui s'annulent si et seulement si les polynômes homogènes F_1, ..., F_r *ont un zéro commun non trivial.*

Un ensemble de polynômes homogènes $R_1, ..., R_m$, ayant cette propriété est appelé un *système résultant* pour les polynômes homogènes F_1, ..., F_r (ou pour les polynômes f_1, f_2, ..., f_r).

La construction effective d'un système résultant dans le cas général est difficile. Cependant, dans le cas où $r = n$, c'est-à-dire dans le cas d'un système de n équations homogènes en n variables, le système résultant est réduit à un seul polynôme R que l'on appelle *résultant des polynômes* $F_1, ..., F_r$ *(ou bien résultant des polynômes* f_1, f_2,..., f_r*)*.

Ce cas particulier est celui qui nous intéresse désormais. Plusieurs constructions de ce résultant existent. La méthode générale est celle de Macaulay.

3.2.2 Méthode de Macaulay

Nous reprenons les notations précédentes avec $r = n$. Le résultant de Macaulay s'exprime comme le rapport de deux déterminants D_1/D_2, celui du dénominateur étant un sous déterminant du numérateur.

Posons $q = 1+l_1+\cdots+l_n-n$. Le nombre de monômes de degré q est $N = \binom{q+n-1}{q}$. Notons Ω_1 l'ensemble des monômes de degré $q - l_1$ et pour $i = 2, ..., n$, notons Ω_i l'ensemble des monômes de degré $q - l_i$ non divisibles par $x_1^{l_1}, x_2^{l_2}, ..., x_{i-1}^{l_{i-1}}$. On vérifie que le cardinal de la réunion des Ω_i est N. Par ailleurs, pour $i = 1, ..., n-1$, notons $\tilde{\Omega}_i$ l'ensemble des éléments de Ω_i divisibles par au moins l'un des monômes $x_{i+1}^{l_{i+1}}, ..., x_n^{l_n}$. Considérons enfin la matrice M dont les colonnes sont indicées par les N monômes de degré q et dont les lignes correspondent aux N polynômes ωF_i, où pour chaque i, ω parcourt Ω_i.

D_1 est alors le déterminant (d'ordre N) de la matrice M.

D_2 est le mineur de D_1 dont les colonnes sont indicées par les éléments $\tilde{\omega} x_i^{l_i}$, et dont les lignes correspondent aux polynômes $\tilde{\omega} F_i$, où dans les deux cas, pour chaque $i = 1, ..., n-1$, $\tilde{\omega}$ parcourt $\tilde{\Omega}_i$.

• *Exemple*

Considérons le système homogène :

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_1x_3 + a_4x_2^2 + a_5x_2x_3 + a_6x_3^2 \qquad (l_1 = 2)$$
$$F_2(x_1, x_2, x_3) = b_1x_1^2 + b_2x_1x_2 + b_3x_1x_3 + b_4x_2^2 + b_5x_2x_3 + b_6x_3^2 \qquad (l_2 = 2)$$
$$F_3(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \qquad (l_3 = 1)$$

On a $q = 1 + l_1 + l_2 + l_3 - 3 = 3$ et $N = 10$. On vérifie aisément que $\Omega_1 = \Omega_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\Omega_3 = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2\}$ et que $\tilde{\Omega}_1 = \tilde{\Omega}_2 = \{x_3\}$. Ainsi, D_1 est le déterminant de la matrice suivante, tandis que D_2 est le déterminant de la sous

matrice correspondant aux lignes et aux colonnes notées par $(\star)$.

				$(\star)$					$(\star)$		
		x_1^3	$x_1^2x_2$	$x_1^2x_3$	$x_1x_2^2$	$x_1x_2x_3$	$x_1x_3^2$	x_2^3	$x_2^2x_3$	$x_2x_3^2$	x_3^2
	x_1F_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	.	.	.	.
	x_2F_1	.	a_1	.	a_2	a_3	.	a_4	a_5	a_6	.
$(\star)$	x_3F_1	.	.	a_1	.	a_2	a_3	.	a_4	a_5	a_6
	x_1F_2	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	.	.	.	.
	x_2F_2	.	b_1	.	b_2	b_3	.	b_4	b_5	b_6	.
$(\star)$	x_3F_2	.	.	b_1	.	b_2	b_3	.	b_4	b_5	b_6
	$x_1x_2F_3$	.	c_1	.	c_2	c_3	.	.	.	.	.
	$x_1x_3F_3$	.	.	c_1	.	c_2	c_3	.	.	.	.
	$x_2x_3F_3$	.	.	.	.	c_1	.	.	c_2	c_3	.
	$x_3^2F_3$	.	.	.	.	.	c_1	.	.	c_2	c_3

(20)

Remarques

1. Les déterminants D_1 et D_2 dépendent de l'ordre choisi pour les polynômes F_i et les variables x_i. On peut ainsi évaluer les déterminants D_1 et D_2 de $(n!)^2$ façons différentes. Cependant, le quotient de Macaulay D_1/D_2, c'est-à-dire le résultant R est toujours le même au signe près (voir [21,51]).

2. Dans le cas d'un système de *deux* équations homogènes en *deux* variables et dans le cas où *toutes* les équations sont *linéaires*, le dénominateur D_2 est réduit à l'unité. Ainsi, le cas d'un *système linéaire homogène* et *la méthode de Sylvester* sont des cas particuliers de la méthode de Macaulay.

3. Dans la pratique, pour des valeurs des coefficients, l'évaluation du résultant peut conduire à des formes 0/0 pour certains quotients de Macaulay, mais aussi parfois pour tous les quotients. Des solutions sont proposées dans [21].

3.2.3 Autre méthode

Comme pour la méthode de Sylvester, nous remarquons que la méthode de Macaulay conduit à manipuler une matrice comportant de nombreux zéros. Dans le cas général, cette méthode nécessite par ailleurs la division de deux polynômes. Nous verrons que dans le cas particulier de trois équations polynomiales en deux variables affines, il existe une méthode plus compacte (méthode de Dixon) qui généralise la méthode de Cayley (cf. chapitre 4).

3.3 Implicitisation

Le problème de l'implicitisation a déjà été abordée dans le cas des surfaces rationnelles. Nous nous intéressons ici aux méthodes pratiques d'implicitisation.

3.3.1 Problème d'élimination

La question de l'implicitisation est un problème d'élimination. En effet, il s'agit d'éliminer les paramètres u et v de la surface dans les équations qui la définissent afin d'obtenir une équation polynomiale en les coordonnées cartésiennes x, y, et z d'un point de la surface.

Précisons le problème d'implicitisation dans les cas suivants.

SPPG de type 1

Considérons une SPPG de type 1, c'est-à-dire une surface rationnelle S définie par une paramétrisation $(\theta, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Nous cherchons un polynôme *irréductible* f de $K[x, y, z]$ tel que

$$f(\frac{\varphi_1(u,v)}{\theta(u,v)}, \frac{\varphi_2(u,v)}{\theta(u,v)}, \frac{\varphi_3(u,v)}{\theta(u,v)}) \equiv 0 \quad \text{dans } K[u,v].$$

Ainsi, dans le cas d'une surface rationnelle (et donc polynomiale), la surface algébrique implicite cherchée sera irréductible. On remarque que dans ce cas les coordonnées x, y et z d'un point de la surface s'expriment (rationnellement) en fonction des paramètres u et v.

SPPG de type 2 et 3

Considérons maintenant une surface SPPG de type 2 ou 3 définie par

$$\begin{cases} P_1(x,u,v) = 0 \\ P_2(y,u,v) = 0 \\ P_3(z,u,v) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} P_1(x,y,z,u,v) = 0 \\ P_2(x,y,z,u,v) = 0 \\ P_3(x,y,z,u,v) = 0 \end{cases}$$

où les P_i sont des polynômes de $K[x,y,z,u,v]$.

Dans le cas général, une telle surface n'est pas contenue dans une surface algébrique irréductible.

- *Exemple*

La courbe (type 2)

$$\begin{cases} x^2 - t = 0 \\ y^2 - t = 0 \end{cases}$$

admet pour représentation implicite l'équation $(x-y)(x+y) = 0$.

Facteurs parasites

Lors du processus d'implicitisation, l'équation implicite obtenue peut comporter des facteurs qui ne correspondent à aucune composante de la surface paramétrée initiale. Ces facteurs seront appelés des *facteurs parasites*. En particulier, si l'équation implicite obtenue pour une surface rationnelle n'est pas irréductible, elle comportera au moins un facteur parasite. Les facteurs parasites peuvent être introduits par la méthode d'implicitisation. Il sont également liés à la paramétrisation de la surface.

Les différentes approches

La méthode générale consiste à utiliser des outils de géométrie algébrique basés sur la théorie des idéaux. En particulier, les méthodes utilisant les bases de Gröbner (théorème de Trinks) permettent de résoudre le problème. Voir en particulier les résultats de Bronstein [17] et Buchberger [20].

Cependant, une telle approche fournit l'équation implicite sous forme développée (voir les exemples du chapitre 4, non utilisables pour des applications de type CAO).

Un autre type d'approche consiste à utiliser la théorie des résultants à une variable (élimination successive) ou à plusieurs variables.

Par ailleurs, dans certains cas, il est parfois possible de développer des méthodes spécifiques plus simples que la méthode générale. Il en est ainsi des surfaces de Steiner [63,65].

3.3.2 Elimination successive

L'élimination successive consiste tout d'abord à éliminer le paramètre u entre les polynômes P_1 et P_2, ce qui fournit un polynôme R_1 de $K[x,y,z,v]$, et de la même manière, à éliminer le paramètre u entre P_2 et P_3, ce qui fournit un deuxième polynôme R_2 de $K[x,y,z,v]$. Ensuite, l'élimination de v entre R_1 et R_2 fournit un polynôme R de $K[x,y,z]$.

On montre aisément que la SPPG initiale est contenue dans la surface d'équation $R(x,y,z) = 0$.

Il est possible aussi d'éliminer en premier lieu le paramètre v puis le paramètre u. Ces deux méthodes duales ne fournissent généralement pas la même équation. En fait, ces deux méthodes rajoutent souvent des *facteurs parasites. Néanmoins, dans tous les cas, les équations obtenues par cette approche contiennent en facteur l'équation implicite cherchée.*

Par ailleurs, cette méthode est de mise en oeuvre très simple car la méthode du résultant de Sylvester est implémenté dans la plupart des systèmes de calcul formel. Les deux méthodes duales d'implicitisation par les résultants de Sylvester seront appelées *Sylvest1* et *Sylvest2* et ont été testées dans le paragraphe 5.8.

3.3.3 Le cas particuliers des surfaces de Steiner

Etant donnés 6 points de $\mathbb{R}^3$, $(P_{ij})_{0\leq i+j\leq 2}$, affectés de poids w_{ij} :

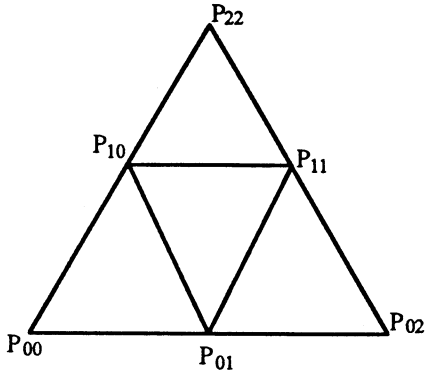


FIGURE 3.1

une surface de Steiner est définie par :

$$P(T,U,V) = \frac{\sum\limits_{0\leq i+j\leq 2} \binom{2}{ij} U^i V^j (T-U-V)^{2-i-j} w_{ij} P_{ij}}{\sum\limits_{0\leq i+j\leq 2} \binom{2}{ij} U^i V^j (T-U-V)^{2-i-j} w_{ij}}$$

où

$$\binom{2}{ij} = \frac{2!}{i!j!(2-i-j)!} = \begin{cases} 2 & \text{si } i=1 \text{ ou } j=1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

sont les coefficients multinomiaux.

T, U, V sont les paramètres homogènes (il est pratique de poser $T = 1$ pour des applications numériques). Il est à noter que les points P_{00}, P_{02}, P_{20} sont sur la surface, tandis que les autres points ne le sont généralement pas. De plus, si tous les poids w_{ij} sont égaux, le dénominateur se réduit à une constante après simplification. La restriction de la surface au domaine ($\frac{U}{T} \geq 0, \frac{V}{T} \geq 0, \frac{U}{T} + \frac{V}{T} \leq 1$) est appelé carreau de Steiner. Il s'agit d'une surface de Bézier (définie sur un triangle) de degré 4, mais qui n'est pas le produit tensoriel de deux courbes de Bézier. La propriété essentielle pour notre propos est que la surface de Steiner définie ci dessus est une surface de degré 4 comportant :

- un point triple T (à coordonnées rationnelles si les P_{ij} le sont),
- trois droites doubles passant par T .

Ainsi, d'après le théorème de Bezout toute droite passant par T recoupera la surface en au plus un seul autre point (ou bien sera contenue dans la surface). Il est alors possible, de ce fait, de reparamétriser la surface à partir de son point triple T. Sederberg et Anderson [63] ont utilisé cette "astuce" pour obtenir assez simplement l'équation implicite de la surface. La méthode consiste d'abord à déterminer le point triple. Nous renvoyons à [63] pour une description de la méthode.

3.3.4 Méthode des résultants à plusieurs variables

Considérons une SPPG définie par les équations $P_1 = P_2 = P_3 = 0$, où les $P_i \in K[x, y, z, u, v]$. Considérons par ailleurs les coefficients de P_1, P_2, P_3 comme des indéterminées $a_1, ..., a_p$, $b_1, ..., b_q$, $c_1, ..., c_r$ où p, q et r sont respectivement le nombre de termes de P_1, P_2 et P_3. Homogénéisons en u et v ces polynômes par :

$$\tilde{P}_i(T, U, V) = \tilde{P}_i(x, y, z, T, U, V) = T^{d_i} P_i(x, y, z, \frac{U}{T}, \frac{V}{T}) ,$$

où d_i est le degré total en u, v du polynôme P_i.

Soit R le résultant théorique de $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3)$ par rapport aux variables T, U, V. Le résultant R existe et est un polynôme irréductible de l'anneau $Z[a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q; c_1, ..., c_r; x, y, z]$. Lorsque les indéterminées $a_1, ..., a_p$, $b_1, ..., b_q$, $c_1, ..., c_r$ sont spécifiées dans un corps K, R devient un polynôme $R(x, y, z)$ de $K[x, y, z]$ tel que :

1) ou bien $R(x, y, z) \equiv 0$ dans $K[x, y, z]$,

2) sinon, soit $M(x, y, z)$ un point de la SPPG, alors, par définition, il existe $(\bar{u}, \bar{v}) \in K^2$ tel que $P_i(x, y, z, \bar{u}, \bar{v}) = 0$ pour $i = 1, 2, 3$; autrement dit, les polynômes $\tilde{P}_i$ ont une racine commune non triviale et ainsi le résultant $R(x, y, z)$ doit s'annuler; ce qui prouve que la SPPG est contenue dans l'hypersurface d'équation $R(x, y, z) = 0$.

D'où le résultat suivant.

PROPOSITION 3.2 *Soit S une SPPG de type 1, 2 ou 3 et $R(x, y, z)$ son résultant associé comme ci-dessus. Si $R(x, y, z)$ n'est pas identiquement nul, notons S' la surface de K^3 d'équation $R(x, y, z) = 0$. Alors,*

(i) $S \subset S'$

(ii) S et S' ont même corps de coefficients.

Le résultant R défini ci-dessus sera appelé le *résultant associé à la paramétrisation* (P_1, P_2, P_3) ou parfois le résultant associé à la SPPG.

3.3.5 Choix du résultant

La méthode générale de Macaulay et la méthode de Dixon permettent toutes les deux d'éliminer simultanément les paramètres u et v de la surface. Cependant, la méthode des quotients de Macaulay présente plusieurs inconvénients par rapport à la méthode de Dixon. Tout d'abord, elle nécessite le calcul de *deux* déterminants, chacun d'eux étant *non compact* (c'est-à-dire, ayant de nombreux zéros). Par ailleurs, la méthode de Macaulay requiert ensuite la *division formelle* des deux polynômes obtenus, ce qui n'est pas envisageable pour des applications de type CAO.

La méthode de Dixon, quant à elle, requiert le calcul *d'un seul* déterminant, *compact* et donc d'ordre *moins élevé* que ceux de Macaulay. Par ailleurs, la méthode de Dixon ne nécessite *aucune division formelle.*

Cependant, il faut noter que si la méthode de Dixon est particulièrement simple et efficace dans le cas de polynômes de bi-degré lorsque tous les monômes sont présents (cf. définitions du paragraphe 2.5.3), elle devient d'emploi plus délicat dans le cas général. Néanmoins, nous proposerons une extension de cette méthode au chapitre 5 permettant de traiter la plupart des cas (en fait tous les cas étudiés) de manière simple et uniforme.

Auparavant, au chapitre 4, nous donnons une description algorithmique complète et précise de la méthode dans le cas du bi-degré, qui permettra d'une part une implémentation numérique dans la dernière partie et d'autre part l'étude de nombreux cas particuliers qui nous a conduit à développer l'algorithme général du chapitre 5.

Partie II

Cette partie concerne l'implicitisation des surfaces paramétrées de type SPPG. L'objectif est de fournir des algorithmes robustes, tant en calcul formel qu'en calcul numérique. En accord avec le paragraphe 3.3.5, la méthode de base fait appel au résultant de Dixon.

Les problèmes abordés sont les suivants.

1. *Facteurs parasites*

   Toute surface rationnelle est contenue dans une surface algébrique irréductible. Néanmoins, l'équation implicite obtenue peut ne pas être irréductible. Les facteurs parasites peuvent provenir soit de la méthode d'implicitisation soit de la paramétrisation de la surface qui, en un certain sens, n'est pas optimale. En particulier, les techniques classiques utilisant les résultants de Sylvester fournissent très souvent un multiple de l'équation implicite (des exemples sont donnés au paragraphe 5.8).

   Les SPPG de type 2 et 3 peuvent avoir plusieurs composantes. Il sera donc plus délicat dans ce cas de trier les facteurs parasites des différentes composantes de la surface paramétrée.

2. *Résultant identiquement nul*

   Le résultant permettant d'obtenir l'équation implicite peut être identiquement nul. Celui-ci est obtenu comme le déterminant d'une matrice carrée construite à partir des coefficients des trois polynômes P_i définissant la surface. Or, pour des valeurs particulières de ces coefficients, ce déterminant peut être identiquement nul. Ainsi par exemple, si dans une paramétrisation de bi-degré les monômes de tête sont absents ou si les polynômes P_i ne sont pas de même degré, le résultant de Dixon est généralement identiquement nul. Par ailleurs, pour une paramétrisation de degré total strictement supérieur à deux, la méthode générale de Dixon [30] ne s'applique pas directement. Nous étudierons des solutions au chapitre 5.

3. *Inversion*

   Etant donné un point de la surface algébrique obtenue, c'est-à-dire un point $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation implicite $f(x, y, z) = 0$, ce point est-il sur la surface paramétrée initialement donnée, et si oui, quels sont les paramètres u et v correspondants ?

4. *Géométrie réelle*

   Nous nous plaçons dans un contexte de géométrie réelle. En particulier, le problème de l'inversion sera abordé dans cette optique.

5. *Aspects numériques*

   Pour des applications numériques, une équation implicite donnée sous une forme développée n'est pas utilisable. La méthode d'implicitisation développée dans cette partie associe à chaque surface une matrice carrée dont le déterminant fournit l'équation implicite cherchée. Nous verrons que cette approche s'adapte facilement dans un contexte numérique.

Dans un premier temps, la méthode est décrite très précisément d'un point de vue algorithmique pour une SPPG de bi-degré (n, m). Par la suite, des améliorations et des extensions seront proposées. La discussion et l'étude des problèmes cités ci-dessus sera faite au chapitre 5.

Chapitre 4

Description algorithmique

Dixon [30] a proposé plusieurs méthodes pour résoudre le problème de l'élimination à deux variables en généralisant la méthode de Cayley. Dans ce chapitre, nous reprenons la méthode de Dixon, remise à jour par Sederberg *et al* [62] pour le bi-degré dans le contexte de l'implicitisation. Pour une description simple de la méthode nous considérons une SPPG de bi-degré (n, m) (cf. remarque 2.3 du chapitre 2). Par ailleurs, nous supposerons que tous les monômes sont réellement présents dans la paramétrisation (P_1, P_2, P_3).

Nous décrivons avec précision les termes de la matrice du système linéaire introduit par cette méthode. Ceci permet :

1. une description algorithmique de la méthode,
2. une analyse plus fine des cas particuliers qui nous amènerons au chapitre suivant à une méthode adaptée à des cas plus généraux que ceux annoncés par Dixon et Sederberg,
3. la prise en compte du problème de l'inversion.

4.1 Les fonctions Δ et δ

Nous considérons les notations suivantes : K est un sous-corps de C (le cas $K = \mathbb{R}$ nous intéresse plus particulièrement), x, y, z sont les coordonnées cartésiennes d'un

point M de l'espace affine K^3 et u, v sont les paramètres de la surface. On notera souvent M pour (x, y, z).

Etant donnée une Surface Paramétrée Polynomiale Généralisée (S) définie par la paramétrisation (P_1, P_2, P_3), considérons la fonction Δ_0 introduite par Dixon dans [30].

$$\Delta_0(u,v,\lambda,M,\mu,a,b) = \begin{vmatrix} P_1(M,u,v) & \lambda P_1(M,u,b) + \mu P_1(M,a,v) & P_1(M,a,b) \\ P_2(M,u,v) & \lambda P_2(M,u,b) + \mu P_2(M,a,v) & P_2(M,a,b) \\ P_3(M,u,v) & \lambda P_3(M,u,b) + \mu P_3(M,a,v) & P_3(M,a,b) \end{vmatrix} \tag{21}$$

où tous les polynômes concernés sont à coefficients dans K. On peut donc écrire

$$\Delta_0(u,v,\lambda,M,\mu,a,b) = \lambda\ \Delta_1(u,v,M,a,b) + \mu\ \Delta_2(u,v,M,a,b) \tag{22}$$

avec

$$\Delta_1(u,v,M,a,b) = \begin{vmatrix} P_1(M,u,v) & P_1(M,u,b) & P_1(M,a,b) \\ P_2(M,u,v) & P_2(M,u,b) & P_2(M,a,b) \\ P_3(M,u,v) & P_3(M,u,b) & P_3(M,a,b) \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta_2(u,v,M,a,b) = \begin{vmatrix} P_1(M,u,v) & P_1(M,a,v) & P_1(M,a,b) \\ P_2(M,u,v) & P_2(M,a,v) & P_2(M,a,b) \\ P_3(M,u,v) & P_3(M,a,v) & P_3(M,a,b) \end{vmatrix}.$$

Soient u, v, M, a, b fixés. Le polynôme $\Delta_0(u, v, \lambda, M, \mu, a, b)$ est identiquement nul en λ, μ si et seulement si $\Delta_1(u, v, M, a, b) = 0$ et $\Delta_2(u, v, M, a, b) = 0$. Cette remarque justifie le fait que l'on ne considère plus désormais que les deux déterminants Δ_1 et Δ_2.

En remarquant que les deux polynômes Δ_1 et Δ_2 se factorisent par $(u - a)$ et $(v - b)$, posons :

$$\delta_1(u,v,M,a,b) = \frac{\Delta_1(u,v,M,a,b)}{(u-a)(v-b)} \quad \text{et} \quad \delta_2(u,v,M,a,b) = \frac{\Delta_2(u,v,M,a,b)}{(u-a)(v-b)}.$$

LEMME 4.1 *Les polynômes Δ_i et δ_i $(i = 1, 2)$ vérifient les relations :*

(i) $\Delta_1(a,b,M,u,v) = -\Delta_2(u,v,M,a,b)$,

(ii) $\delta_1(a,b,M,u,v) = -\delta_2(u,v,M,a,b)$.

Les polynômes δ_1 et δ_2 sont respectivement de degré :

δ_1	δ_2	degré
$2n-1$	$n-1$	en u
$m-1$	$2m-1$	en v
$n-1$	$2n-1$	en a
$2m-1$	$m-1$	en b

de sorte que :

$$\delta_1(u,v,M,a,b) = \sum_{i=0}^{2n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{2m-1} T_{1\,ij}^{kl}(M)u^i v^j a^k b^l. \tag{23}$$

et

$$\delta_2(u,v,M,a,b) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2m-1}\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{l=0}^{m-1} T_{2\,ij}^{kl}(M)u^i v^j a^k b^l. \tag{24}$$

Il sera montré grâce au lemme 4.1 (cf. proposition 4.2) que la méthode est indépendante du choix de δ_1 ou de δ_2. Nous poursuivons donc la description de la méthode avec δ_1 que l'on note δ. Considérons le polynôme δ comme un polynôme en a, b dont les coefficients sont des polynômes en u, v et $M(x,y,z)$

$$\delta(u,v,M,a,b) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{2m-1} h_{kl}(u,v,M)a^k b^l \ .$$

Ce polynôme s'écrit encore sous forme matricielle

$$\delta_1(u,v,M,a,b) = (1,\ldots,a^{n-1}b^{2m-1})\ T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ u^{2n-1}v^{m-1} \end{pmatrix} \tag{25}$$

où $T = T(M)$ est une matrice à coefficients dans $K[x,y,z]$.

Remarquons que ce polynôme comporte $2nm$ termes en $u^i v^j$ et $2nm$ termes en $a^k b^l$, de sorte que la matrice $T(M)$ est carrée d'ordre $N = 2nm$.

4.2 Equation implicite

La remarque suivante, analogue à celle faite dans la description de la méthode de Cayley, est la clé de la méthode.

Si le point M appartient à la surface paramétrée (S), il existe des paramètres u et v tels que $P_i(M,u,v) = 0$ pour $i = 1,2,3$. Autrement dit, pour ces valeurs de M, u et v, la première colonne des déterminants Δ_1 et Δ_2 est nulle, et ainsi les polynômes $\delta_1(u,v,M,a,b)$ et $\delta_2(u,v,M,a,b)$ sont identiquement nuls en a et b.

Plus précisément, on montre la proposition suivante.

PROPOSITION 4.1 *Considérons un point $\bar{M}$ et les propositions suivantes :*

(i) $\bar{M} \in (S)$

(ii) $\exists(\bar{u},\bar{v}) \in K^2$ *tel que* $P_i(\bar{M},\bar{u},\bar{v}) = 0$ *pour* $i = 1,2,3$

(iii) $\exists(\bar{u},\bar{v}) \in K^2$ *tel que* $\Delta_i(\bar{M},\bar{u},\bar{v},a,b) = 0$ *pour tout* a *et* b, *pour* $i = 1,2$

(iv) $\exists(\bar{u},\bar{v}) \in K^2$ *tel que* $\delta_i(\bar{M},\bar{u},\bar{v},a,b) = 0$ *pour tout* a *et* b, *pour* $i = 1,2$

On a alors : (i) $\Longleftrightarrow$ *(ii), (ii)* $\Longrightarrow$ *(iii) et (iii)* $\Longleftrightarrow$ *(iv)* .

Autrement dit, si le point M appartient à la surface (S), il existe des paramètres u et v tels que

$$h_{kl}(u,v,M) = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 0 \le k \le n-1 \\ 0 \le l \le 2m-1 \end{cases}$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} T_{00}^{00} & \cdots & T_{ij}^{00} & \cdots & T_{2n-1,m-1}^{00} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ T_{00}^{kl} & \cdots & T_{ij}^{kl} & \cdots & T_{2n-1,m-1}^{kl} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ T_{00}^{n-1,2m-1} & \cdots & T_{ij}^{n-1,2m-1} & \cdots & T_{2n-1,m-1}^{n-1,2m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0v^0 \\ \vdots \\ u^iv^j \\ \vdots \\ u^{2n-1}v^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où les T_{ij}^{kl} sont des polynômes en x, y and z. Ce système sera noté

$$T.\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{(n,m)} = 0 \tag{26}$$

avec $T = T(x,y,z) = \left(T_{ij}^{kl}(x,y,z)\right)$ et

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{(n,m)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ u^iv^j \\ \vdots \\ u^{2n-1}v^{m-1} \end{pmatrix}$$

où l'ordre des lignes (c'est-à-dire l'ordre des monômes $a^k b^l$) et l'ordre des colonnes (c'est-à-dire l'ordre des monômes $u^i v^j$) de la matrice T est celui des sommations sur i, j, k, l défini par (23). Plus précisément, l'ordre des lignes est défini par :

$$\{(k,l)\} = \{(0,0),(0,1),(0,2),\ldots,(0,2m-1),(1,0),\ldots,(1,2m-1),\ldots,(n-1,2m-1)\},$$

et celui des colonnes par :

$$\{(i,j)\} = \{(0,0),(0,1),(0,2),\ldots,(0,m-1),(1,0),\ldots,(1,m-1),\ldots,(2n-1,m-1)\}.$$

Autrement dit, la matrice T s'écrit comme une matrice, indicée par p, q et définie par :

$$T[p,q] = T_{ij}^{kl} \qquad \text{avec} \begin{cases} p = 2m.k + l + 1 \\ q = m.i + j + 1 \end{cases}.$$

Mais le plus souvent, nous conserverons la notation T_{ij}^{kl} qui rappelle que ce terme est le coefficient du monôme $u^i v^j a^k b^l$ dans le polynôme δ. Par ailleurs, dans la pratique, nous considérerons parfois un ordre différent afin de regrouper certains termes (voir la remarque 4.3). Nous préciserons alors l'ordre choisi en indiçant les lignes et les colonnes de la matrice T.

Ainsi, pour chaque point $M(x,y,z)$, il existe des paramètres u et v tels que le système homogène (26) a une solution non triviale, à savoir le vecteur $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{(n,m)}$. Par conséquent, le déterminant de la matrice T doit s'annuler, fournissant ainsi l'équation implicite cherchée :

$$f(x,y,z) = det(T) = 0\,.$$

PROPOSITION 4.2 *Si l'on note T_1 (resp. T_2) la matrice obtenue à partir de δ_1 (resp. δ_2), on a $T_2 = -{}^tT_1$, de sorte que $det(T_1) = det(T_2)$. Autrement dit, la méthode décrite ci-dessus est indépendante du choix de δ_1 ou de δ_2.*

Démonstration

$$\begin{aligned} \delta_2(u,v,M,a,b) &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2m-1}\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{l=0}^{m-1} T_{2\,ij}^{kl}(M) u^i v^j a^k b^l \quad \text{d'après (24)}, \\ &= -\delta_1(a,b,M,u,v) \quad \text{d'après le lemme 4.1}, \end{aligned}$$

$$= -\sum_{i=0}^{2n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{2m-1} T_{1_{ij}}^{kl}(M)a^i b^j u^k v^l \quad \text{d'après (23),}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{2m-1}\sum_{i=0}^{2n-1}\sum_{j=0}^{m-1} T_{1_{ij}}^{kl}(M)u^k v^l a^i b^j$$

$$= -\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2m-1}\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{l=0}^{m-1} T_{1_{kl}}^{ij}(M)u^i v^j a^k b^l \quad \text{en renommant les indices.}$$

D'où : $T_{2_{ij}}^{kl}(M) = -T_{1_{ij}}^{kl}(M)$ pour $\begin{cases} 0 \le i \le n-1 \\ 0 \le j \le 2m-1 \\ 0 \le k \le 2n-1 \\ 0 \le l \le m-1 \end{cases}$, ce qui démontre la proposition si l'on considère pour chacune des matrices T_1 et T_2 l'ordre des sommations défini comme ci-dessus. □

En conclusion, si l'on note (S') la surface algébrique d'équation implicite $f(x,y,z) = 0$, on a montré que $(S) \subset (S')$.

Plus précisément, nous avons montré la proposition suivante.

PROPOSITION 4.3

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (S) \iff \begin{pmatrix} \exists (u,v) \in K^2, \text{ tel que} \\ P_i(M,u,v) = 0 \text{ pour } i = 1,2,3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \exists (u,v) \in K^2, \text{ tel que} \\ \delta_i(u,v,M,a,b) = 0 \\ \text{pour } i = 1,2 \text{ et pour tout } a,b \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \exists (u,v) \in K^2, \text{ tel que} \\ T_i(M).\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{i(n,m)} = 0 \\ \text{pour } i = 1,2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(det(T_1) = det(T_2) = f(x,y,z) = 0) \iff M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (S')$$

Pour une description simple de cette méthode nous avons considéré trois polynômes P_i de bi-degré (n, m) et, par ailleurs, nous avons supposé que tous les monômes concernés étaient réellement présents dans la paramétrisation. Nous donnerons néanmoins, au chapitre 5, une extension de cette méthode valable pour des cas plus généraux.

Cependant, pour une implémentation en calcul numérique, la construction de la matrice T nécessite l'évaluation de chacun des coefficients T_{ij}^{kl} en fonction des coefficients de la SPPG.

4.3 Evaluation des coefficients T_{ij}^{kl}

Chaque coefficient T_{ij}^{kl} de la matrice T est le coefficient du monôme $u^i v^j a^k b^l$ dans le polynôme $\delta(u, v, M, a, b)$.

On notera indifféremment :

$$\begin{vmatrix} A_{pq} & A_{rs} & A_{tu} \\ B_{pq} & B_{rs} & B_{tu} \\ C_{pq} & C_{rs} & C_{tu} \end{vmatrix} = (A_{pq} , \quad A_{rs} , \quad A_{tu})$$

$$= (pq, rs, tu) = (\vec{pq}, \vec{rs}, \vec{tu})$$

$$= \begin{bmatrix} p & r & t \\ ; & ; & \\ q & s & u \end{bmatrix} \text{ lorsque les indices sont composés,}$$

et où les A_{pq}, B_{rs} et C_{tu} sont les coefficients de la SPPG et sont notés pour $A_{pq}(M)$, $B_{rs}(M)$ et $C_{tu}(M)$.

Une expression des coefficients T_{ij}^{kl} peut être trouvée dans [30]. Cependant, le calcul direct suivant permet d'obtenir une formule plus précise.

Considérons le déterminant Δ_1 et effectuons la factorisation par $(u-a)(v-b)$. Pour cela, nous retranchons la deuxième colonne à la première et à la troisième :

$$\Delta_1(u, v, M, a, b) = \begin{vmatrix} P_1(M,u,v) & P_1(M,u,b) & P_1(M,a,b) \\ P_2(M,u,v) & P_2(M,u,b) & P_2(M,a,b) \\ P_3(M,u,v) & P_3(M,u,b) & P_3(M,a,b) \end{vmatrix}$$

$$= (P_1(M,u,v) , \quad P_1(M,u,b) , \quad P_1(M,a,b))$$

$$= (P_1(M,u,v) - P_1(M,u,b) , P_1(M,u,b) , P_1(M,a,b) - P_1(M,u,b))$$

en notant uniquement la première ligne. Puis :

$$\begin{aligned} P_1(M,u,v) - P_1(M,u,b) &= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} A_{ij} v^j - \sum_{j=0}^{m} A_{ij} b^j \right) u^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} A_{ij} (v-b) \left(\sum_{p=0}^{j-1} v^{j-1-p} b^p \right) \right) u^i \\ &= (v-b) \sum_{j=1}^{m} \left(\left(\sum_{i=0}^{n} A_{ij} u^i \right) \left(\sum_{p=0}^{j-1} v^{j-1-p} b^p \right) \right) \\ &= (v-b) \sum_{\substack{i=0\ldots n \\ j=1\ldots m \\ p=0\ldots j-1}} A_{ij} u^i v^{j-1-p} b^p \end{aligned}$$

et de même :

$$P_1(M,a,b) - P_1(M,u,b) = (a-u) \sum_{\substack{i=1\ldots n \\ j=0\ldots m \\ q=0\ldots i-1}} A_{ij} u^q a^{i-1-q} b^j .$$

Ainsi :

$$\delta_1(u,v,M,a,b) = - \left(\sum_{\substack{i=0\ldots n \\ j=1\ldots m \\ p=0\ldots j-1}} A_{ij} u^i v^{j-1-p} b^p \; ; \sum_{\substack{r=0\ldots n \\ s=0\ldots m}} A_{rs} u^r b^s \; ; \sum_{\substack{\alpha=1\ldots n \\ \beta=0\ldots m \\ q=0\ldots \alpha-1}} A_{\alpha\beta} u^q a^{\alpha-1-q} b^\beta \right) .$$

ce qui donne en développant :

$$\delta_1(u,v,M,a,b) = \sum_{I,J,K,L \geq 0} \left(\sum_{i,j,r,s,\alpha,\beta,p,q} -(A_{ij}, A_{rs}, A_{\alpha\beta}) \right) u^I v^J a^K b^L$$

$$\text{avec : } \begin{cases} I = i+r+q \\ K = \alpha-1-q \\ 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq r \leq n \\ 1 \leq \alpha \leq n \\ 0 \leq q \leq \alpha-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} L = \beta+s+p \\ J = j-1-p \\ 1 \leq j \leq m \\ 0 \leq s \leq m \\ 0 \leq \beta \leq m \\ 0 \leq p \leq j-1 \end{cases} .$$

Puis, avec les notations précédentes, on obtient :

$$T_{IJ}^{KL} = \sum_{i,r,s,\beta} - \begin{bmatrix} i & r & 1+I+K-(i+r) \\ 1+J+L-(s+\beta) & s & \beta \end{bmatrix}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq r \leq n \\ 1+I+K-n \leq i+r \leq I\ cr \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 \leq s \leq m \\ 0 \leq \beta \leq m \\ 1+J+L-m \leq s+\beta \leq L \end{cases}.$$

Soit finalement, en changeant les notations :

$$T_{IJ}^{KL} = \sum_{r,r',s,s'} \begin{bmatrix} r & r' & 1+I+K-(r+r') \\ s & 1+J+L-(s+s') & s' \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} 0 \leq r, r' \leq n \\ 1+I+K-n \leq r+r' \leq I \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 \leq s, s' \leq m \\ 1+J+L-m \leq s+s' \leq L \end{cases}. \tag{28}$$

Ainsi, chaque coefficient T_{ij}^{kl} de la matrice T est somme de déterminants (pq, rs, tu) définie par la formule (27) avec les relations (28).

4.4 Degré de l'équation implicite

Nous nous référons ici aux notations et définitions de 2.5.4. Les résultats sont donnés pour une SPPG de bi-degré (n, m).

Cas polynomial

Les relations (11), montrent que chaque coefficient A_{pq}, B_{rs} et C_{tu} est un scalaire de K, sauf pour A_{00}, B_{00} and C_{00}, qui sont respectivement des expressions linéaires en x, y et z.

Par ailleurs, les relations (28) montrent que :

$$s+s' \leq L \text{ et } 0 \leq J \Longrightarrow s+s' \leq J+L \Longrightarrow 1+J+L-(s+s') \geq 1$$

$$r+r' \leq I \text{ et } 0 \leq K \Longrightarrow r+r' \leq I+K \Longrightarrow 1+I+K-(r+r') \geq 1$$

de sorte que seul le premier couple d'indices (r, s) peut être égal à $(0, 0)$ dans la formule (27). Ainsi, chaque coefficient de la matrice $T(x, y, z)$ est au plus une expression linéaire en x, y et z. La matrice $T(x, y, z)$ étant d'ordre $2nm$, son déterminant sera au plus de degré **2nm** :

$$f(x, y, z) = det(T) = \sum_{i+j+k \leq 2nm} \lambda_{ijk}\, x^i y^j z^k \ .$$

Cas rationnel

Dans ce cas, les relations (13) montrent que chaque coefficient A_{pq}, B_{rs} et C_{tu} est respectivement une expression linéaire en x, y et z.

Néanmoins, chacun des déterminants (pq, rs, tu) constitutif des coefficients T_{ij}^{kl} reste linéaire en x, y et z. Pour voir celà, développons (pq, rs, tu) en utilisant les relations (13) et la multilinéarité de la fonction déterminant :

$$\begin{aligned}
(pq, rs, tu) &= \begin{vmatrix} a_{pq} - x\, d_{pq} & a_{rs} - x\, d_{rs} & a_{tu} - x\, d_{tu} \\ b_{pq} - y\, d_{pq} & b_{rs} - y\, d_{rs} & b_{tu} - y\, d_{tu} \\ c_{pq} - z\, d_{pq} & c_{rs} - z\, d_{rs} & c_{tu} - z\, d_{tu} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -x\, d_{pq} & -x\, d_{rs} & -x\, d_{tu} \\ -y\, d_{pq} & -y\, d_{rs} & -y\, d_{tu} \\ -z\, d_{pq} & -z\, d_{rs} & -z\, d_{tu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x\, d_{pq} & -x\, d_{rs} & a_{tu} \\ -y\, d_{pq} & -y\, d_{rs} & b_{tu} \\ -z\, d_{pq} & -z\, d_{rs} & c_{tu} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{rs} & a_{tu} \\ b_{pq} & b_{rs} & b_{tu} \\ c_{pq} & c_{rs} & c_{tu} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Chacun des déterminants de la somme ci-dessus ayant plus d'une colonne contenant x, y ou z sera nul puisque ces deux colonnes seront alors linéairement dépendantes. Par suite, chaque déterminant (pq, rs, tu) est linéaire en x, y et z.

Ainsi, chaque coefficient de la matrice T est au plus linéaire en x, y, z, de sorte que l'équation implicite d'une surface rationnelle de bi-degré (n, m), est au plus de degré **2nm**, comme dans le cas polynomial.

SPPG de type 2 et 3

Etant donnée une SPPG de type 2 tel que P_1, P_2, P_3 soient respectivement de degrés d_1 en x, d_2 en y et d_3 en z, on montre comme ci-dessus que son équation implicite est au plus de degré total $2nm(d_1 + d_2 + d_3)$ en x, y, z. Plus précisément, son équation implicite est au plus de degré $2nmd_1$ en x, $2nmd_2$ en y et $2nmd_3$ en z.

Etant donnée une SPPG de type 3 tel que P_1, P_2, P_3 soient respectivement de degré total d_1, d_2 et d_3 en x, y, z, son équation implicite est au plus de degré total $2nm(d_1 + d_2 + d_3)$ en x, y, z.

4.5 Implémentation en calcul formel

Nous avons implémenté cette méthode en *Langage Reduce.* Nous avons utilisé les fonctions *coeffn( )*, *det( )* et *factorize( )* de la bibliothèque de *Reduce.* Les équations implicites données sont factorisées en composantes irréductibles dans $Q[x, y, z]$.

REMARQUE 4.1 *Les exemples traités seront choisis à coefficients rationnels de sorte que l'équation implicite sera elle aussi à coefficients rationnels d'après la proposition 3.2.*

Dans le cas polynomial et rationnel, les résultats ont bien sûr été contrôlés par vérification de la relation

$$f(\frac{\varphi_1(u,v)}{\theta(u,v)}, \frac{\varphi_2(u,v)}{\theta(u,v)}, \frac{\varphi_3(u,v)}{\theta(u,v)}) \equiv 0 \, .$$

Dans tous les cas, nous avons comparé les résultats avec ceux obtenus par les méthodes *Sylvest1* et *Sylvest2.*

Donnons quelques exemples de l'application directe de la méthode décrite ci-dessus.

Exemples

- *Surface polynomiale de bi-degré* $(2, 2)$

$$\begin{cases} x = & 1 - u + uv - 3v^2 + u^2v \\ y = & 2 - u - uv^2 + u^2v^2 \\ z = & -1 + 6u - uv - u^2 - 2v^2 \end{cases} . \tag{29}$$

La matrice $T(x, y, z)$ est alors donnée par :

	1	v	u	uv	u^2	u^2v	u^3	u^3v
1	0	-2x+20y +3z-35	-x-5y -z+10	-6x-3y -z+11	-5y-z+9	7x+z-6	y-2	-x+1
a	0	-3y+6	y-2	x-4	y-1	-x+2	1	-1
b	-2x+20y +3z-35	-5y+10	-6x-3y -z+11	x-2y +z+4	7x+z-6	-x+1	-x+1	-z-1
ab	-3y+6	-2y+4	x-y-2	z-1	-x+1	-z-8	-1	7
b^2	-5y+10	-2x+3z +5	-2y-1	2x-3z -25	-2	23	0	-3
ab^2	-2y+4	2x-3z-5	x+2z-1	20	-11	-2	2	-1
b^3	-2x+3z +5	0	2x-3z -25	5	23	-3	-3	-2
ab^3	2x-3z-5	0	20	-5	-3	-2	0	0

FIGURE 4.1 EXEMPLE (29)

L'équation implicite est ainsi de degré total 8.

$$f(x,y,z) = 16x^8 - 96x^7z + 316x^7 + 32x^6yz - 1216x^6y + 216x^6z^2 - 1236x^6z - 3220x^6 + 688x^5y^2 - 192x^5yz^2 + 6100x^5yz + 9804x^5y - 216x^5z^3 + 979x^5z^2 + 21502x^5z - 68877x^5 + 48x^4y^3 + 16x^4y^2z^2 - 3744x^4y^2z + 4451x^4y^2 + 432x^4yz^3 - 11324x^4yz^2 - 40652x^4yz + 389660x^4y + 81x^4z^4 + 1756x^4z^3 - 48502x^4z^2 + 174536x^4z + 30641x^4 + 304x^3y^3z - 15980x^3y^3 - 96x^3y^2z^3 + 5900x^3y^2z^2 + 31639x^3y^2z - 1139988x^3y^2 - 432x^3yz^4 + 8241x^3yz^3 + 68909x^3yz^2 - 759545x^3yz - 2910245x^3y - 3093x^3z^4 + 38959x^3z^3 - 41784x^3z^2 - 1026977x^3z + 6905603x^3 + 64x^2y^4z + 8912x^2y^4 - 2232x^2y^3z^2 + 12270x^2y^3z + 1543421x^2y^3 + 216x^2y^2z^4 - 1072x^2y^2z^3 - 123359x^2y^2z^2 + 2503381x^2y^2z + 9018419x^2y^2 + 162x^2yz^5 + 144x^2yz^4 - 43539x^2yz^3 + 72645x^2yz^2 + 5930889x^2yz - 22933477x^2y + 1134x^2z^5 + 119x^2z^4 - 176714x^2z^3 + 2437025x^2z^2 - 12642954x^2z + 2672354x^2 + 352xy^5 - 192xy^4z^2 - 33212xy^4z - 654629xy^4 + 3996xy^3z^3 + 44741xy^3z^2 - 2204967xy^3z - 19351794xy^3 - 216xy^2z^5 - 3480xy^2z^4 + 88013xy^2z^3 - 803775xy^2z^2 - 8594971xy^2z + 30442493xy^2 - 2187xyz^5 - 3483xyz^4 + 211754xyz^3 - 4249235xyz^2 + 3848807xyz + 104780584xy + 108xz^6 - 8592xz^5 + 107393xz^4 - 1114714xz^3 + 3857150xz^2 + 34147470xz - 165329343x + 64y^6 + 320y^5z - 39999y^5 + 144y^4z^3 + 33835y^4z^2 + 810871y^4z + 13821569y^4 - 2241y^3z^4 - 32439y^3z^3 - 251170y^3z^2 + 13425176y^3z - 38880372y^3 + 81y^2z^6 + 1449y^2z^5 + 22425y^2z^4 - 181374y^2z^3 + 2949691y^2z^2 + 1134168y^2z - 110839359y^2 + 1971yz^5 + 22119yz^4 - 354789yz^3 + 16931131yz^2 - 160744146yz + 440481174y + 81z^7 + 72z^6 + 20085z^5 - 291847z^4 + 3407357z^3 - 38526940z^2 + 196772281z - 352151693 .$$

• *Surface rationnelle de bi-degré* $(2,2)$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(u,v) &= 2-u+v+u^2-uv^2-u^2v^2\\
\varphi_2(u,v) &= -1+2u+v-v^2+u^2v+u^2v^2\\
\varphi_3(u,v) &= 1-u-v+u^2-v^2-uv^2+2u^2v+u^2v^2\\
\theta(u,v) &= 2+u-2v+2v^2+uv^2+u^2v^2
\end{aligned}$$

La matrice $T(x,y,z)$ de cette surface rationnelle est d'ordre 8, à coefficients linéaires en x,y,z.

$$\begin{pmatrix}
3(3y+5z-1) & 2(5x+y-5z-2) & -3(2y+1) & 2(3x-4z-1)\\
2(5x+y-5z-2) & -5(2x+y+z+1) & 6x-12y-2z-11 & -2x+14y-2z+1\\
3(3y+z+1) & 2(x+y-z) & -2x+5y+7z-8 & 4x+14y-12z+1\\
2(x+y-z) & -2x-5y-z-3 & 2(4x+5y-5z) & -6x-y-3z-2\\
-3(2y+1) & 0 & 5x-2y-5z+4 & -2(2x-2z-1)\\
-3(4y-2z+3) & 4x+14y-4z+5 & 9x+2y+3z+10 & -7x+6y-z\\
4x+5y+5z-4 & 2x+14y-8z+3 & x+6y-z+4 & -9x+2y-5z-6\\
2(3x+5y-3z+1) & -6x-y-3z-2 & -2(2x-2y+3z+1) & -5x-2y+z-4
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
-13x-8y+4z+7 & -6x-7y-5z+5 & 2x+4y-2z+1 & 3x+5y-3z+1\\
7x-5y-6z+13 & 11x+12y-2z+5 & x+y-z-3 & 2x+6y-z-3\\
-5x+4z+3 & -13x-5y-2z-7 & -x+2y+z-3) & -2x+3y-2z-3\\
-8x-3y-3z-3 & 3x+4y-2z+1 & 3x+5y-3z+1 & 3x+4y-2z+1\\
2x+4y-2z+1 & x+5y-z+1 & x+2y-z-4 & -x+2y+z-4\\
-x+y+z-3 & -2x+6y-z-7 & -x+2y+z-4 & -4(x+1)\\
-5x+2y+z-7 & -6x+3y-2z-7 & x+2y-z & x+2y-z\\
-x+5y-3z-3 & 3x+4y-2z+1 & x+2y-z & 0
\end{pmatrix}$$

L'équation implicite est donc là aussi de degré total 8.

$f(x,y,z) =$ $13980028x^8+71768338x^7y-27152274x^7z+1306114x^7+146504405x^6y^2-112988816x^6yz+39791304x^6y+42531435x^6z^2-69216894x^6z-17732441x^6+255714233x^5y^3-227207121x^5y^2z+125326841x^5y^2+154792527x^5yz^2-341322226x^5yz-103617637x^5y-42311543x^5z^3+99691561x^5z^2+39562669x^5z-7378491x^5+597858308x^4y^4-688251546x^4y^3z+111274027x^4y^3+399597118x^4y^2z^2-685235397x^4y^2z-117012070x^4y^2-99199674x^4yz^3+489792393x^4yz^2+34161128x^4yz-45909401x^4y+16781662x^4z^4-182673411x^4z^3+58911564x^4z^2+64786123x^4z-34304x^4+1105344719x^3y^5-1545484250x^3y^4z-277094982x^3y^4+945379496x^3y^3z^2-$

$$844131976x^3y^3z + 54891358x^3y^3 - 238816384x^3y^2z^3 + 1030160738x^3y^2z^2 - 64678761x^3y^2z - 124912687x^3y^2 + 35403711x^3yz^4 - 537798088x^3yz^3 + 335723040x^3yz^2 + 271783426x^3yz + 31786346x^3y - 6077452x^3z^5 + 92042374x^3z^4 - 141677273x^3z^3 - 119558909x^3z^2 + 12321738x^3z + 4900184x^3 + 1343469835x^2y^6 - 1799667550x^2y^5z - 664733113x^2y^5 + 1081866879x^2y^4z^2 - 945353130x^2y^4z + 105461447x^2y^4 - 348155926x^2y^3z^3 + 1297821250x^2y^3z^2 - 60373446x^2y^3z - 158971696x^2y^3 + 85916178x^2y^2z^4 - 544694268x^2y^2z^3 + 839068224x^2y^2z^2 + 415302367x^2y^2z + 24611667x^2y^2 - 12559488x^2yz^5 + 64551963x^2yz^4 - 630711452x^2yz^3 - 181281530x^2yz^2 + 19212116x^2yz + 11731706x^2y + 2381344x^2z^6 - 22862044x^2z^5 + 188963802x^2z^4 - 41437933x^2z^3 - 64933438x^2z^2 + 8010192x^2z + 3557881x^2 + 890220632xy^7 - 1119604943xy^6z - 281805261xy^6 + 556036069xy^5z^2 - 640461028xy^5z - 100770788xy^5 - 139291669xy^4z^3 + 696042475xy^4z^2 - 349202696xy^4z + 45088116xy^4 + 44399175xy^3z^4 - 211214678xy^3z^3 + 902673818xy^3z^2 + 399551382xy^3z - 20805544xy^3 - 9463244xy^2z^5 - 6799012xy^2z^4 - 421313491xy^2z^3 - 187929395xy^2z^2 + 34804400xy^2z - 8812268xy^2 + 1157484xyz^6 - 17984156xyz^5 + 80012705xyz^4 - 111161388xyz^3 - 64591902xyz^2 - 31298580xyz + 2858828xy - 243856xz^7 + 8025656xz^6 - 9321240xz^5 + 49847522xz^4 + 28630728xz^3 - 12636620xz^2 - 3489438xz - 572272x + 233393189y^8 - 297596994y^7z + 36655630y^7 + 127147350y^6z^2 - 223331685y^6z - 40423936y^6 + 4249932y^5z^3 + 76890843y^5z^2 - 210507576y^5z + 53323800y^5 - 13433591y^4z^4 + 14272629y^4z^3 + 376691790y^4z^2 + 5346140y^4z + 37633384y^4 + 101758y^3z^5 + 330595y^3z^4 - 38765642y^3z^3 - 86193438y^3z^2 + 47457244y^3z - 6038128y^3 + 2988108y^2z^6 - 10099408y^2z^5 - 66122204y^2z^4 + 32783931y^2z^3 - 60375547y^2z^2 - 15290492y^2z - 7369324y^2 - 757432yz^7 + 957340yz^6 + 3211444yz^5 + 6147837yz^4 + 10651092yz^3 + 8207258yz^2 - 14917940yz - 1144544y + 110656z^8 - 1586656z^7 + 16604544z^6 - 26485424z^5 + 17924308z^4 + 8629436z^3 - 5330503z^2 - 572272z .$$

- *Surface SPPG de type 2*

La surface SPPG de type 2 suivante est de bi-degré $(2,1)$.

$$\begin{aligned} P_1(x,u,v) &= x^3 - 1 + 2u + v - uv - 2u^2 + u^2v \\ P_2(y,u,v) &= y^2 - 2 + u - v - uv + 2u^2 + 2u^2v \\ P_3(z,u,v) &= z - 3 - u + 2v - uv + u^2 + 3u^2v \end{aligned}$$

Sa matrice $T(x,y,z)$ associée est donc d'ordre 4 à coefficients non linéaires.

$$\begin{pmatrix} -x^3 + 5y^2 + 3z - 18 & -3x^3 - 8y^2 + z + 16 & -3x^3 - 8y^2 + z + 16 & -4x^3 - 7y^2 + 6z) \\ 3x^3 - y^2 - 2z + 5 & -7x^3 - y^2 + 3z + 7 & -28 & 15 \\ -5(x^3 + y^2 - 3) & x^3 + 3y^2 - 4z - 10 & -4x^3 - 7y^2 + 6z + 9 & -21 \\ -7x^3 - y^2 + 3z & -x^3 + 2y^2 - z - 18 & 16 & 5 \end{pmatrix}$$

Puis, les polynômes P_1, P_2, P_3 étant respectivement de degré $3, 2, 1$ en x, y, z, l'équation implicite est au plus de degré 12 en x, 8 en y et 4 en z.

$f(x,y,z) = 832x^{12} + 3024x^9y^2 - 3152x^9z - 1088x^9 + 2988x^6y^4 - 7048x^6y^2z + 23232x^6y^2 + 3952x^6z^2 - 13800x^6z + 3284x^6 + 511x^3y^6 - 2909x^3y^4z + 10408x^3y^4 + 4232x^3y^2z^2 - 24402x^3y^2z + 59431x^3y^2 - 1812x^3z^3 + 10124x^3z^2 + 30211x^3z - 220450x^3 + 147y^8 - 399y^6z - 965y^6 + 703y^4z^2 - 3616y^4z + 22127y^4 - 696y^2z^3 + 5796y^2z^2 - 7855y^2z - 57289y^2 + 252z^4 - 1589z^3 - 7328z^2 + 52703z - 11911$.

• *Surface SPPG de type* 3

La surface SPPG de type 3 suivante est de bi-degré $(2,1)$.

$$\begin{aligned} P_1(x,y,z,u,v) &= -x + 2 - uz - v - uv + u^2 + 2u^2v \\ P_2(x,y,z,u,v) &= y + 1 + u - v - uv - u^2yz + u^2v \\ P_3(x,y,z,u,v) &= -1 - u + v - vz^2 + 2uvx - u^2v \end{aligned}$$

Sa matrice $T(x,y,z)$ est d'ordre 4.

$$\begin{pmatrix} -xz^2 + yz^3 - yz & 2x^2 + xyz^3 - 3xyz & -2x^2yz + 4xyz & y(xz-1) \\ -y + z^3 + 2z^2 & -2xz - 5x - 2yz^3 - yz^2 & +2xy + 2x + 2y - 1 & \\ & +yz - z^2 + z + 2 & & \\ 2x^2 + 2xy + xz^2 - 3x & -xz^2 + 2xz + 2x - 2yz^2 & -2xyz - 2x - yz^3 + yz & z(2yz^2 - y + z) \\ +yz^2 - y - z^2 + 1 & +y + z^3 + z^2 - z - 1 & -z^3 - 3z^2 + 1 & \\ xyz^3 - xyz - 2yz^3 & -2x^2yz + 4xyz & -2xyz^2 + xyz + 2x & yz(z+2) \\ -yz^2 + yz + y - z^2 & +2xy + 2x + yz^4 - yz^2 & -yz - y - 1 & \\ & -2yz - z^2 - 1 & & \\ -xz^2 - 2yz^2 + y & 2x^2 + 4xy - x - y & 2xz + 4x + 2yz^3 & -4xyz - 2x + yz + 1 \\ & -z^3 - 2z^2 & -yz + z^2 - z - 2 & \end{pmatrix}$$

Puis, les polynômes P_1, P_2, P_3 étant respectivement de degré total $3, 2, 1$ en x, y, z, l'équation implicite est au plus de degré total 24 en x, y, z.

$f(x,y,z) = 32x^7y^3z^3 + 16x^7y^2z^2 + 32x^6y^4z^3 + 16x^6y^3z^5 - 184x^6y^3z^3 - 48x^6y^3z^2 + 8x^6y^2z^4 + 24x^6y^2z^3 - 212x^6y^2z^2 - 32x^6y^2z + 16x^6yz^2 - 80x^6yz - 16x^6 + 16x^5y^4z^5 - 152x^5y^4z^3 - 64x^5y^4z^2 - 8x^5y^3z^7 + 16x^5y^3z^6 - 84x^5y^3z^5 - 72x^5y^3z^4 + 472x^5y^3z^3 -$

$$28x^5y^3z^2-4x^5y^2z^6+20x^5y^2z^5-134x^5y^2z^4-112x^5y^2z^3+836x^5y^2z^2+152x^5y^2z+16x^5y^2+8x^5yz^4-64x^5yz^3-48x^5yz^2+424x^5yz+32x^5y-8x^5z^2+16x^5z+96x^5-8x^4y^4z^8-16x^4y^4z^7+16x^4y^4z^6-68x^4y^4z^5-72x^4y^4z^4+304x^4y^4z^3+104x^4y^4z^2+32x^4y^4z+8x^4y^3z^8+18x^4y^3z^7-92x^4y^3z^6+188x^4y^3z^5+26x^4y^3z^4-606x^4y^3z^3+546x^4y^3z^2+224x^4y^3z+16x^4y^3-2x^4y^2z^7+37x^4y^2z^6-126x^4y^2z^5+405x^4y^2z^4+202x^4y^2z^3-1297x^4y^2z^2-56x^4y^2z+28x^4y^2-4x^4yz^6+16x^4yz^5-48x^4yz^4+268x^4yz^3+144x^4yz^2-748x^4yz-64x^4y+4x^4z^4+36x^4z^2-48x^4z-200x^4-4x^3y^4z^{10}+46x^3y^4z^8+72x^3y^4z^7-48x^3y^4z^6+84x^3y^4z^5+50x^3y^4z^4-252x^3y^4z^3+6x^3y^4z^2+56x^3y^4z-4x^3y^3z^{10}-10x^3y^3z^9-32x^3y^3z^8-4x^3y^3z^7+236x^3y^3z^6-182x^3y^3z^5+154x^3y^3z^4+470x^3y^3z^3-736x^3y^3z^2-300x^3y^3z-12x^3y^3-2x^3y^2z^9+10x^3y^2z^8-60x^3y^2z^7-87x^3y^2z^6+340x^3y^2z^5-310x^3y^2z^4-140x^3y^2z^3+945x^3y^2z^2-210x^3y^2z-108x^3y^2+10x^3yz^7-26x^3yz^6-34x^3yz^5+186x^3yz^4-304x^3yz^3-252x^3yz^2+578x^3yz+32x^3y-8x^3z^5-8x^3z^4+24x^3z^3-42x^3z^2+56x^3z+200x^3+4x^2y^4z^{12}+5x^2y^4z^{10}+24x^2y^4z^9-54x^2y^4z^8-162x^2y^4z^7+9x^2y^4z^6+50x^2y^4z^5+9x^2y^4z^4+96x^2y^4z^3-52x^2y^4z^2-28x^2y^4z-8x^2y^4+4x^2y^3z^{11}+10x^2y^3z^{10}+46x^2y^3z^9+130x^2y^3z^8-66x^2y^3z^7-482x^2y^3z^6-12x^2y^3z^5+190x^2y^3z^4-96x^2y^3z^3+280x^2y^3z^2+26x^2y^3z+2x^2y^3-2x^2y^2z^{10}+4x^2y^2z^9+52x^2y^2z^8+179x^2y^2z^7+10x^2y^2z^6-536x^2y^2z^5-17x^2y^2z^4+166x^2y^2z^3-358x^2y^2z^2+190x^2y^2z+79x^2y^2-2x^2yz^9-3x^2yz^8+13x^2yz^7+84x^2yz^6+29x^2yz^5-212x^2yz^4+151x^2yz^3+243x^2yz^2-200x^2yz+8x^2y+2x^2z^7+10x^2z^6+20x^2z^5+x^2z^4-36x^2z^3+19x^2z^2-32x^2z-105x^2-16xy^4z^{12}-4xy^4z^{11}+20xy^4z^{10}-32xy^4z^9+2xy^4z^8+126xy^4z^7-36xy^4z^6-144xy^4z^5+28xy^4z^4+76xy^4z^3+8xy^4z^2-24xy^4z+6xy^4+4xy^3z^{12}-16xy^3z^{11}-xy^3z^{10}-32xy^3z^9-124xy^3z^8+9xy^3z^7+333xy^3z^6+23xy^3z^5-224xy^3z^4-48xy^3z^3-20xy^3z^2+38xy^3z+8xy^2z^{11}-2xy^2z^{10}-32xy^2z^9-141xy^2z^8-188xy^2z^7-27xy^2z^6+359xy^2z^5+150xy^2z^4-71xy^2z^3+63xy^2z^2-46xy^2z-17xy^2+4xyz^{10}+4xyz^9-10xyz^8-58xyz^7-59xyz^6-6xyz^5+117xyz^4-37xyz^3-114xyz^2+23xyz-10xy-3xz^8-13xz^7-25xz^6-14xz^5+3xz^4+18xz^3-3xz^2+9xz+28x-4y^4z^{13}+16y^4z^{12}+27y^4z^{11}-16y^4z^{10}-46y^4z^9+15y^4z^8+41y^4z^7-y^4z^6-31y^4z^5-2y^4z^4+12y^4z^3-3y^4z^2-4y^3z^{13}-12y^3z^{12}+45y^3z^{11}+36y^3z^{10}-92y^3z^9-101y^3z^8+61y^3z^7+43y^3z^6-9y^3z^5+9y^3z^4+2y^3z^2-2y^3z-4y^2z^{12}-4y^2z^{11}+44y^2z^{10}+15y^2z^9-35y^2z^8+23y^2z^7+91y^2z^6-25y^2z^5-58y^2z^4+2y^2z^3-2y^2z^2+y^2z-2yz^{11}-6yz^{10}-7yz^9-28yz^8-8yz^7+11yz^6-yz^5-26yz^4+4yz^3+20yz^2+yz+2y+z^9+4z^8+6z^7+10z^6+3z^5-z^4-3z^3-z-3.$$

Insuffisance de la méthode

Néanmoins, une application directe de la méthode de Dixon conduit pour les exemples suivants à un déterminant identiquement nul.

Absence de monômes en u^2	Polynômes P_i de bi-degrés différents
$x = 1+u+v+u^2v+u^2v^2$	$x = 1+u+v-uv$
$y = uv-v^2-2u^2v$	$y = 2-u+v-3uv$
$z = 3-u^2v+uv^2$	$z = -2+u-v-2uv-u^2+u^2v$

Par ailleurs, les surfaces de degré total nécessitent souvent un traitement spécifique.

En particulier, la surface de degré total 3 donnée ci-dessous ne pourra être traitée que par l'algorithme général du chapitre 5.

Degré total 2 (Surface de *Steiner*)	Degré total 3
$x = 1 - u + v + u^2 - 2uv - v^2$	$x = -2 + u - v + u^2 + uv + 2u^3 + u^2v - v^3$
$y = -1 + 2u - v + 2u^2 + uv + v^2$	$y = 1 + u + 2u^2 - uv - u^3 + 2uv^2 + v^3$
$z = 3 - u - v - u^2 + 2uv + 2v^2$	$z = -1 - u + 3v + 2u^2 + uv - u^2v + 2uv^2 + 2v^3$

Pour remédier à ces insuffisances, nous proposerons un algorithme général qui sera décrit au chapitre suivant.

Algorithme

Nous donnons le programme *Reduce* correspondant à la méthode de Dixon décrite dans ce chapitre.

```
%*********************************************
% R1,R2,R3 sont des expressions rationnelles
%  en les parametres u et v de la surface
%*********************************************
PROCEDURE INITRATIO(R1,R2,R3);
BEGIN
  PP1 := NUM(R1);  QQ1 := DEN(R1);
  PP2 := NUM(R2);  QQ2 := DEN(R2);
  PP3 := NUM(R3);  QQ3 := DEN(R3);

  P1 := X * QQ1 - PP1;
  P2 := Y * QQ2 - PP2;
  P3 := Z * QQ3 - PP3;
END;


%*****************************************
%  P1,P2,P3 sont des polynomes en X,Y,Z,u,v
%*****************************************
```

```
PROCEDURE IMPLICIT(P1,P2,P3);
BEGIN
  n := MAX(DEG(P1,u),DEG(P2,u),DEG(P3,u));
  m := MAX(DEG(P1,v),DEG(P2,v),DEG(P3,v));

%-----------------------------------
% 1) Determinant delta = F(u,v,u0,v0)
%-----------------------------------
  matrix F(3,3)$
  F(1,1) := P1;
  F(1,2) := P2;
  F(1,3) := P3;

  for j := 1 : 3 do
    F(2,j) := sub(v=v0,F(1,j));
  for j := 1 : 3 do
    F(3,j) := sub(u=u0,F(2,j));
  dt := det(F)/((u-u0)*(v-v0));

%---------------------------------
% 2) Remplissage de la matrice TT
%---------------------------------
  Ord := 2*n*m;
  matrix TT(Ord,Ord)$

  for i := 0 : (2*n-1) do
  begin
    factu := coeffn(dt,u,i);
    for j:= 0 :(m-1) do
    begin
      factv := coeffn(factu,v,j);
      for k := 0 : (n-1) do
      begin
        factu0 := coeffn(factv,u0,k);
        for l:=0 :(2*m-1) do
        begin
          factv0 := coeffn(factu0,v0,l);
```

```
          ii := 2*m*k + l + 1;
          jj := m*i + j + 1;
          TT(ii,jj) := factv0;
        end;
       end;
     end;
   end;


%------------------------
% 3) Equation implicite
%------------------------
  Equa := det(TT);
  Eqf  := factorize(Equa);
  return(Eqf);
END;
```

4.6 Implémentation en calcul numérique

Les exemples donnés ci dessus montrent clairement que, pour des applications numériques, l'évaluation de l'équation implicite sous forme développée par un système formel n'est pas réaliste et conduirait à des problèmes d'évaluation numérique.

Il est préférable de considérer l'équation implicite sous la forme matricielle $T(x, y, z)$. Les opérations à effectuer sur la surface seront ensuite converties en opérations sur la matrice T et traitées par des techniques numériques matricielles.

En particulier, ces matrices T permettront de résoudre simplement le problème de l'inversion.

Place mémoire

Considérons une surface rationnelle de bi-degré (n, m). Son équation implicite sera au plus de degré total $N = 2nm$ et aura donc au plus $C^3_{N+3} = (N+1)(N+2)(N+3)/6$ termes en $x^i y^j z^k$. Le stockage de l'équation implicite sous cette forme conduit à un

encombrement mémoire en N^3.

Chaque élément de la matrice T associée à cette surface rationnelle est linéaire en x, y, z. Le nombre total de termes de la matrice T sera donc de $4N^2$, ce qui conduit à un encombrement mémoire en N^2 pour le stockage de l'équation implicite sous cette forme.

Néanmoins, pour les surfaces de bi-degré peu élevé ((2,2), (2,3)), l'encombrement mémoire est inférieur sous forme développée, comme le montre le tableau suivant :

(n,m)	N	C^3_{N+3}	$4N^2$	Cas polynomial
(2,2)	8	165	256	184
(2,3)	12	455	576	405
(3,3)	18	1330	1296	894
(3,4)	24	2925	2304	.
(4,4)	32	6545	4096	.

La dernière colonne correspond au nombre de termes de la matrice $T(x,y,z)$ à stocker dans le cas polynomial. Nous verrons en effet, grâce au *tables formelles*, que dans ce cas, nous pouvons réaliser une économie non négligeable en coût mémoire et calcul (en moyenne 38 % dans les cas étudiés).

L'inversion

L'équation implicite sous forme développée ne donne aucune information sur la question de l'inversion. Cependant, nous verrons au chapitre 6 que la matrice $T(x,y,z)$ associée à une surface permet de résoudre simplement le problème de l'inversion par résolution du système

$$T.\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{(n,m)} = 0$$

4.6.1 Table formelle

Pour des applications de type CAO, la matrice T doit donc être construite à partir des coefficients A_{ij}, B_{ij} et C_{ij} de la SPPG. Chaque coefficient T^{kl}_{ij} de la matrice T est

une somme de déterminants (pq, rs, tu) (cf. notations du paragraphe 4.3) définie par la formule (27) et les relations (28).

Nous construisons donc, pour chaque bi-degré (n, m), une *table formelle* qui fournit la liste des déterminants (pq, rs, tu) concernés.

Ces tables seront utilisées pour les applications numériques de la dernière partie ainsi que pour les discussions concernant les cas dégénérés (déterminants identiquement nuls) du chapitre suivant.

Algorithme de calcul de la table des (pq, rs, tu)

◇ Algorithme simplifié

POUR chaque I, J, K, L *FAIRE*
DEBUT
Détermination de tous les sextuplets (pq, rs, tu) *définis par la formule (27)*
Réduction des sextuplets obtenus :
Réduction1 : SI deux colonnes d'un sextuplet sont égales ALORS
Suppression de ce sextuplet
Réduction2 : SI deux sextuplets sont égaux à permutation près ALORS
SI permutation paire ALORS
Suppression des deux sextuplets
SINON
Addition des deux sextuplets
FIN

◇ Structures de données utilisées (language C)

```
typedef struct DET {
        int indic;
        unsigned char d[3][2];      /* determinant (pq,rs,tu) */
        DET *suiv;
        } DET;

typedef struct COEF {
```

```
        int eff;
        DET *pt det;
        } COEF;
    N = 2nm      /* Surface de bi-degré (n,m) */
    COEF table[N][N];
```

◇ **Algorithme complet**

(Variables locales :)

DET tabdet[Max]; (calcul et mise a jour de chaque element de la table)

int eff, effreel; (effectifs du tableau tabdet)

(Algorithme :)

```
POUR  L=0  JUSQU'A  2m-1
  POUR  K=0  JUSQU'A  n-1
    POUR  J=0  JUSQU'A  m-1
      POUR  I=0  JUSQU'A  2n-1  FAIRE { calcul de table[2n*J+I,n*L+K] }
      DEBUT1
        eff  <-- 0
        R0 = 1+I+K
        POUR  R=R0-n  JUSQU'A  I  FAIRE { R=r+r' }
        DEBUT2
          val1 <-- MAX (0,R-n) { r >= 0  et  r' = R-r <= n ==> r >= R-n }
          val2 <-- MIN (n,R)   { r <= n  et  r <=R  }
          POUR  r=val1  JUSQU'A  val2  FAIRE
          DEBUT3
            S0 = 1+J+L
            POUR  S=S0-m  JUSQU'A  L  FAIRE { S=s+s' }
            DEBUT4
              val3 <-- MAX (0,S-m) { s>=0  et  s'=S-s <=m ==> s >=S-m }
              val4 <-- MIN (m,S)  { s<=m  et  s<=S  }
              POUR  s=val3  JUSQU'A  val4  FAIRE
              DEBUT5
                SI "les colonnes sont 2 a 2 distinctes" ALORS { sinon ne rien faire }
                  DEBUT6   { remplissage de tabdet[ ] }
                    tabdet[eff].d[1][1] <-- r
                    tabdet[eff].d[1][2] <-- s
```

```
                tabdet[eff].d[2][1] <-- R - r {= r' }
                tabdet[eff].d[2][2] <-- S0-S {= 1+J+L-(s+s') }
                tabdet[eff].d[3][1] <-- R0-R {= 1+I+K-(r+r') }
                tabdet[eff].d[3][2] <-- S-s   {= s' }
                  { initialisation pour Reduction_2 : }
                test <-- 0
                trouve <-- false
                TANT QUE  (test < eff)  ET (trouve = false)  FAIRE { Reduction_2 }
                DEBUT7
                  SI  (tabdet[test].indic > 0) ET
                      (tabdet[test] = tabdet[eff] a une permutation pres) ALORS
                  DEBUT8
                    SI  "permutation paire"  ALORS
                      tabdet[test].indic <--  tabdet[test].indic +1
                    SINON  { "permutation impaire" }
                      tabdet[test].indic <--  tabdet[test].indic -1
                      trouve <-- true
                  FIN8
                  test <--  test +1
                FIN7
                SI trouve = false ALORS
                DEBUT9
                  tabdet[ eff].indic  <-- 1
                  eff  <-- eff + 1
                FIN9
              FIN6
          FIN5
        FIN4
      FIN3
    FIN2

    effreel <-- 0
    POUR  test=0  JUSQU'A eff  FAIRE  { recherche de l'effectif reel }
      SI tabdet[test].indic > 0 ALORS  effreel <-- effreel +1

    { Recopie de tabdet[]  dans table[2n*J+I,n*L+K]  i.e. }
    { creation d'une zone memoire de taille:  effreel * sizeof(DET) }
```

```
  { sauvegarde de tabdet dans cette zone m\'emoire }
  { mise a jour des champs de :  table[2n*J+I , n*L+K] }
FIN1
```

Nous présentons en figure 4.2 la table formelle obtenue pour $n = m = 2$.

	1	v	u	uv	u^2	u^2v	u^3	u^3v
1	00 01 10	00 02 10	00 01 20 00 11 10	00 02 20 00 12 10	00 11 20 00 21 10	00 12 20 00 22 10	00 21 20	00 22 20
a	00 01 20	00 02 20	00 11 20 10 01 20	00 12 20 10 02 20	00 21 20 10 11 20	00 22 20 10 12 20	10 21 20	10 22 20
b	00 02 10 00 01 11	00 02 11 01 02 10	00 02 20 00 01 21 00 12 10 01 11 10	00 02 21 01 02 20 00 12 11 01 12 10	00 12 20 01 11 20 00 22 10 01 21 10	00 12 21 01 12 20 00 22 11 01 22 10	00 22 20 01 21 20	00 22 21 01 22 20
ab	00 02 20 00 01 21	00 02 21 01 02 20	00 12 20 00 11 21 10 02 20 10 01 21	00 12 21 01 12 20 10 02 21 11 02 20	00 22 20 01 21 20 10 12 20 10 11 21	00 22 21 01 22 20 10 12 21 11 12 20	10 22 20 11 21 20	10 22 21 11 22 20
b^2	00 02 11 00 01 12	00 02 12 01 02 11	00 02 21 00 01 22 01 12 10 02 11 10	00 02 22 01 02 21 01 12 11 02 12 10	01 12 20 02 11 20 01 22 10 02 21 10	01 12 21 02 12 20 01 22 11 02 22 10	01 22 20 02 21 20	01 22 21 02 22 20
ab^2	00 02 21 00 01 22	00 02 22 01 02 21	00 12 21 00 11 22 10 02 21 10 01 22	00 12 22 01 12 21 10 02 22 11 02 21	01 22 20 02 21 20 10 12 21 10 11 22	01 22 21 02 22 20 10 12 22 11 12 21	11 22 20 12 21 20	11 22 21 12 22 20
b^3	00 02 12	01 02 12	00 02 22 02 12 10	01 02 22 02 12 11	02 12 20 02 22 10	02 12 21 02 22 11	02 22 20	02 22 21
ab^3	00 02 22	01 02 22	00 12 22 10 02 22	01 12 22 11 02 22	02 22 20 10 12 22	02 22 21 11 12 22	12 22 20	12 22 21

FIGURE 4.2 TABLE FORMELLE POUR $n = m = 2$.

De l'observation de ces tables, on déduit les deux remarques importantes suivantes.

REMARQUE 4.2 *Une table formelle de bi-degré (n', m') peut être considérée comme une sous table d'une table formelle de bi-degré (n, m) avec $n' \leq n$ et $m' \leq m$.*

REMARQUE 4.3 *De nombreux éléments de ces tables formelles ne contiennent aucun déterminants (pq, rs, tu) avec $(p, q) = (0, 0)$, de sorte que, dans le cas polynomial, les coefficients T_{ij}^{kl} correspondants ne dépendront pas de x, y, z et seront des scalaires uniquement déterminés par les coefficients de la surface (voir par exemple la figure 4.1).*

Par exemple, pour $n = m = 2$, nous avons hachuré tous les éléments concernés par la remarque 4.3 sur la matrice donnée en figure 4.3, où l'ordre des lignes et des colonnes est celui des figures 4.1 et 4.2.

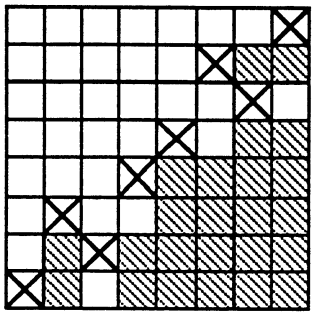


FIGURE 4.3

Remarquons enfin, que malgré le nombre important de termes constants, le degré 8 est atteint. Il suffit pour celà de considérer les termes marqués d'une croix.

Chapitre 5

Vers un algorithme général

La méthode proposée au chapitre 4 permet d'éliminer deux variables affines entre trois polynômes de bi-degré (n, m). Cette méthode sera parfois appelée *méthode du bi-degré*. Pour la description de la méthode, il a été supposé que tous les monômes étaient présents dans la paramétrisation.

Dans la pratique, ceci n'est pas forcément le cas. Considérons par exemple la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x = & uv^2 + u - v + 1 \\ y = & uv + v - 2u + 3 \\ z = & u^3 + uv - 2u + v - 2 \end{cases}$$

bi-degré	degré total
$(1,2)$	3
$(1,1)$	2
$(3,1)$	3
$(3,2)$	3

• Avec les définitions du paragraphe 2.5.3, cette paramétrisation peut être considérée soit comme une paramétrisation de bi-degrés $(1,2),(1,1),(3,1)$, soit comme une paramétrisation de degré total $3,2,3$, avec, dans les deux cas, l'absence de plusieurs monômes.

• Par ailleurs, l'application de la méthode du bi-degré à cette paramétrisation, considérée comme une paramétrisation de bi-degré $(3,2)$, où de nombreux monômes sont donc absents, conduit à un résultant identiquement nul.

Pour pallier à ces inconvénients, Dixon a étudié dans [30] des méthodes d'élimination permettant de traiter les cas suivants :

- degré total N
- degré total N_1, N_2, N_3
- bi-degrés (n_1, m_1), (n_2, m_2), (n_3, m_3).

Cependant :

- la méthode consiste à construire le résultant à partir d'équations provenant d'une part de la fonction $\delta(u, v, a, b)$ et d'autre part obtenues comme dans la méthode de Sylvester en multipliant les polynômes concernés par des monômes $u^i v^j$ bien choisis; autrement dit, la méthode doit s'adapter à chaque cas particulier et perd le caractère de généralité de la méthode du bi-degré décrite au chapitre 4;

- là encore, l'absence de certains monômes dans de telles paramétrisations peut conduire à un résultant identiquement nul; en particulier, l'absence des monômes de tête (cf. paragraphe 5.1.2) conduit à un résultant identiquement nul.

Dans ce chapitre, nous proposons une extension de la méthode du bi-degré à des cas beaucoup plus généraux. Nous conduirons notre étude de la manière suivante.

1. Tout d'abord, nous vérifions que le résultant obtenu par la méthode du bi-degré (lorsqu'il n'est pas identiquement nul) coïncide bien avec le résultant théorique. Nous donnons pour celà la preuve géométrique de Dixon.

2. Nous reprenons ensuite l'étude des cas traités par Dixon, ainsi que d'autres. Pour celà, chaque paramétrisation étudiée sera considérée comme étant de bi-degré (n, m), où n est le *sup* des degrés en u et m est le *sup* des degrés en v intervenant dans les trois polynômes définissant la paramétrisation. De nombreux monômes seront donc absents de cette paramétrisation de bi-degré (n, m).

3. Nous appliquons ensuite à chacune de ces paramétrisations la méthode du bi-degré, de sorte que, le résultant obtenu sera souvent identiquement nul. Nous examinerons ensuite la matrice $T(x,y,z)$ associée ainsi que les tables formelles introduites au chapitre 4 et chercherons à comprendre les raisons de la nullité du résultant.

   Des lignes ou des colonnes de la matrice $T(x,y,z)$ seront dites liées si elles sont liées dans l'espace vectoriel $K[x,y,z]^N$, où N est l'ordre de la matrice $T(x,y,z)$.

4. Par ailleurs, nous discuterons des paramétrisations *non fidèles*, de leurs conséquences sur la forme des matrices $T(x,y,z)$ associées et sur l'équation implicite obtenue. Nous vérifierons également que les points de base ne contribuent pas à l'apparition de *facteurs parasites* dans l'équation implicite.

5. Enfin, nous proposerons un algorithme général permettant de traiter tous les cas étudiés de manière uniforme.

Rappel des notations

Nous considérons dans tout ce chapitre une paramétrisation P_1, P_2, P_3 définie par le système affine suivant et son système homogène en u, v associé :

$$\begin{cases} P_1(M,u,v) = 0 \\ P_2(M,u,v) = 0 \\ P_3(M,u,v) = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \tilde{P}_1(M,T,U,V) = 0 \\ \tilde{P}_2(M,T,U,V) = 0 \\ \tilde{P}_3(M,T,U,V) = 0 \end{cases}$$

où M est noté pour (x,y,z) et où les P_i sont des polynômes de $K[x,y,z,u,v]$. Les spécifications de degré ou de bi-degré sur ces polynômes concerneront les variables affines u et v.

La variable M sera parfois omise et les coefficients des polynômes $P_i(u,v)$ seront considérés comme des indéterminées que l'on appellera respectivement A_{ij} pour P_1, B_{ij} pour P_2 et C_{ij} pour P_3. On notera $Z[A;B;C]$ l'anneau $Z[\{A_{ij}\};\{B_{ij}\};\{C_{ij}\}]$, c'est-à-dire l'anneau des polynômes à coefficients entiers dont les indéterminées sont les A_{ij}, B_{ij} et C_{ij}.

La fonction générale de Dixon δ_0 est définie par

$$\delta_0 = \frac{1}{(u-a)(v-b)}\,\Delta_0$$

où Δ_0 est le déterminant donné par l'équation (21) dans le chapitre 4. De δ_0 on déduit deux fonctions duales δ_1 et δ_2. La plupart du temps nous utiliserons la fonction $\delta = \delta_1$ définie par :

$$\delta(u,v,a,b) = \frac{1}{(u-a)(v-b)} \begin{vmatrix} P_1(u,v) & P_1(u,b) & P_1(a,b) \\ P_2(u,v) & P_2(u,b) & P_2(a,b) \\ P_3(u,v) & P_3(u,b) & P_3(a,b) \end{vmatrix}.$$

Plus généralement, nous reprenons toutes les notations et définitions du chapitre précédent. Rappelons maintenant un résultat utile pour le paragraphe suivant.

Courbes de bi-degré et points multiples

Considérons une courbe plane algébrique de bi-degré (n,m), c'est-à-dire définie par une équation

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha_{i,j}\, x^i\, y^j = 0 \quad \text{avec } \alpha_{n,m} \neq 0.$$

L'équation homogène associée, de degré $n+m$, est donnée par :

$$F(W,X,Y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \alpha_{i,j}\, X^i\, Y^j W^{n+m-i-j} = 0.$$

Les points à l'infini $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ sont solutions de cette équation homogène. En effet, $W=0$ conduit à $F(0,X,Y) = \alpha_{n,m} X^n Y^m$. On a donc le résultat suivant.

PROPOSITION 5.1 *Toute courbe algébrique plane de bi-degré (n,m) admet deux points multiples à l'infini : un point de multiplicité m en $(0,1,0)$ et un point de multiplicité n en $(0,0,1)$.*

Ainsi, les courbes planes algébriques de bi-degré s'intersectent en les points à l'infini $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$. De telles intersections seront dites *triviales*. On montre aisément le résultat suivant.

PROPOSITION 5.2 *Deux courbes algébriques $f=0$ et $g=0$, de bi-degrés respectifs (n,m) et (n',m') ont $n\,n' + m\,m'$ intersections triviales.*

5.1 Méthode du bi-degré

Nous reprenons la méthode du bi-degré et vérifions que le résultant de Dixon coïncide avec le résultant théorique lorsqu'il n'est pas identiquement nul. Nous donnerons et analyserons ensuite des exemples montrant les limites de cette méthode, même lorsque les polynômes P_i sont tous trois de même bi-degré (n, m).

5.1.1 Résultant de Dixon

Dans ce paragraphe nous supposons que le corps K est algébriquement clos. Si les polynômes P_i sont tous trois de bi-degré (n, m), la fonction δ s'exprime sous forme matricielle par :

$$\delta(u, v, a, b) = (1, \ldots, a^{n-1}b^{2m-1})\, T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ u^{2n-1}v^{m-1} \end{pmatrix} \tag{30}$$

où T est une matrice carrée d'ordre $2nm$ à coefficients dans l'anneau $Z[A; B; C]$. Le *résultant de Dixon* R_D est le déterminant de la matrice T. Supposons que R_D ne soit pas identiquement nul.

Le résultant de Dixon est un multiple du résultant théorique

Chaque coefficient de cette matrice T est somme de déterminants

$$\begin{vmatrix} A_{pq} & A_{rs} & A_{tu} \\ B_{pq} & B_{rs} & B_{tu} \\ C_{pq} & C_{rs} & C_{tu} \end{vmatrix}$$

(cf. paragraphe 4.3), de sorte que chacun de ces coefficients est homogène de degré *un* en les coefficients de chacun des polynômes P_1, P_2 et P_3. Par suite, le déterminant R_D de la matrice T est homogène de degré $2nm$ en les coefficients de chacun des polynômes P_1, P_2 et P_3.

Il a été montré au chapitre 4 que si les polynômes P_i ont une racine commune en u, v, alors $R_D = 0$. Ainsi, R_D est un polynôme homogène de degré $2nm$ de $Z[A; B; C]$ qui s'annule chaque fois que les polynômes P_i ont une racine commune en

u, v, autrement dit, chaque fois que le *résultant théorique* R des polynômes P_1, P_2, P_3 s'annule. Ainsi, R étant irréductible dans $Z[A;B;C]$, le résultant de Dixon R_D est un multiple du résultant théorique R d'après le théorème 1.2.

Le résultant de Dixon et le résultant théorique coïncident

Dans [30], Dixon montre que R_D est effectivement le résultant en vérifiant que R_D et R sont tous deux homogènes de même degré $2nm$. Nous savons déjà que R_D est homogène de degré $2nm$ en les coefficients de chacun des polynômes P_i. Montrons que R est lui aussi homogène de degré $2nm$ en les coefficients de chacun des polynômes P_i.

Pour celà, considérons deux quelconques des courbes planes algébriques de bi-degré (n,m) définies par $P_i(u,v) = 0$, $i = 1,2,3$. Ces deux courbes de degré total $(n+m)$, s'intersectent dans le cas général en $(n+m)^2$ points d'après le théorème de Bezout. Or, si l'on retire les $n^2 + m^2$ intersections triviales en les points à l'infini $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ (cf. proposition 5.2), ces deux courbes ont, dans le cas général, $2nm$ intersections non triviales $(T_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)$.

Si par exemple, $P_3(u,v) = 0$ est la troisième courbe, considérons l'expression

$$r_3 = \prod_{\alpha=1}^{2nm} \tilde{P}_3(T_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)$$

qui est nulle si et seulement si le système $\tilde{P}_1 = \tilde{P}_2 = \tilde{P}_3 = 0$ admet une solution commune non triviale.

En effet, r_3 est un élément de $K[C] = K[\{C_{ij}\}]$. Après spécification des coefficients C_{ij} dans K, l'expression r_3 s'annule si l'une des intersections $(T_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)$ est zéro de $\tilde{P}_3$. Réciproquement, si $r_3 = 0$, l'un au moins des $\tilde{P}_3(T_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)$ est nul puisque K est intègre. D'où le résultat.

Autrement dit, $r_3(C) \in K[C]$ est le résultant $R = R(A,B,C)$, après spécification des coefficients A_{ij} et B_{ij} dans le corps K, d'après la minimalité du degré du résultant en les coefficients des P_i.

L'expression r_3 est homogène de degré $2nm$ en les coefficients du polynôme P_3. Un raisonnement analogue pour les polynômes P_1 et P_2 montre que le résultant R est

homogène de degré $2nm$ en les coefficients de chacun des polynômes P_i, ce qui prouve que R_D est bien le résultant du système (P_1, P_2, P_3).

5.1.2 Limites de la méthode

La méthode du bi-degré peut conduire dans de nombreux cas à un résultant identiquement nul. En particulier, si le nombre d'intersection aux points à l'infini $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ est supérieur n^2+m^2, le résultant de Dixon sera identiquement nul [30,21]. Si les polynômes P_i sont de bi-degrés différents, s'il manque des monômes dans la paramétrisation, la méthode de Dixon ne s'applique pas directement, car elle conduirait à un résultant identiquement nul.

Absence des monômes de tête

L'absence des *monômes de tête* u^n, v^m et $u^n v^m$ produit un résultant identiquement nul.

REMARQUE 5.1 *Un monôme $u^p v^q$ est dit absent de la paramétrisation P_1, P_2, P_3 si le vecteur $\vec{pq}$ défini par*

$$\vec{pq} = \begin{pmatrix} A_{pq} \\ B_{pq} \\ C_{pq} \end{pmatrix}$$

est nul.

Considérons par exemple une SPPG de bi-degré $(2,2)$. Sa matrice $T(x,y,z)$ associée doit être d'ordre 8. Cependant, l'observation de la table formelle donnée en figure 4.2 montre que l'absence d'un et d'un seul des monômes u^2, v^2 ou u^2v^2 dans la paramétrisation conduit à une matrice T pour laquelle une ligne et une colonne sont identiquement nulles. Après suppression de cette ligne et de cette colonne, nous obtenons une matrice carrée d'ordre 7 qui fournit une équation implicite de degré au plus 7. Ensuite, si deux de ces monômes (resp. ces trois monômes) sont absents, on obtient une matrice T d'ordre 6 (resp. d'ordre 5), fournissant une équation implicite de degré 6 (resp. de degré 5).

Donnons l'exemple suivant d'une surface biquadratique dont la paramétrisation n'a pas de termes en u^2.

• *Exemple : absence de monômes en u^2*

$$\begin{cases} x = & u^2v^2 + uv^2 + u + v + 1 \\ y = & -2u^2v + uv - v^2 \\ z = & -u^2v + uv^2 + 3 \end{cases}$$

Sa matrice $T(x, y, z)$ est donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & z-3 & -(z-3) & y & -y+2z-6 & 0 & 0 & 0 \\ 2(z-3) & 0 & 2(y-z+3) & z-3 & 0 & 2x+y-z+1 & 0 & y-2z+6 \\ -y & -x+z-2 & x-1 & z-2 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -x+z-2 & 1 & z-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y-2z+6 & x-1 & -x+1 & 2x+y-2z+3 & 1 & y-2z+4 & 0 & 0 \\ x-1 & z-4 & 2x+y-3z+6 & y-2 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ z-3 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et son équation implicite est de degré 7.

$$f(x,y,z) = 16x^5y - 32x^5z + 96x^5 + 24x^4y^2 - 96x^4yz + 208x^4y + 96x^4z^2 - 400x^4z + 336x^4 + 12x^3y^3 - 100x^3y^2z + 220x^3y^2 + 248x^3yz^2 - 1048x^3yz + 1072x^3y - 192x^3z^3 + 1168x^3z^2 - 2208x^3z + 1296x^3 - x^2y^5 + 6x^2y^4z - 4x^2y^4 - 12x^2y^3z^2 - 26x^2y^3z + 126x^2y^3 + 8x^2y^2z^3 + 206x^2y^2z^2 - 972x^2y^2z + 1006x^2y^2 - 384x^2yz^3 + 2236x^2yz^2 - 4016x^2yz + 2132x^2y + 216x^2z^4 - 1600x^2z^3 + 4160x^2z^2 - 4672x^2z + 2280x^2 + 2xy^5z - 4xy^5 - 14xy^4z^2 + 41xy^4z - 13xy^4 + 36xy^3z^3 - 96xy^3z^2 - 114xy^3z + 318xy^3 - 40xy^2z^4 - 37xy^2z^3 + 1275xy^2z^2 - 3247xy^2z + 2329xy^2 + 16xyz^5 + 309xyz^4 - 3088xyz^3 + 9466xyz^2 - 12080xyz + 5585xy - 230xz^5 +$$

$2202xz^4 - 8076xz^3 + 13940xz^2 - 10478xz + 1554x - y^6 - y^5z^2 + 10y^5z - 8y^5 + 8y^4z^3 - 55y^4z^2 + 77y^4z + 2y^4 - 25y^3z^4 + 165y^3z^3 - 289y^3z^2 + 3y^3z + 190y^3 + 38y^2z^5 - 242y^2z^4 + 305y^2z^3 + 855y^2z^2 - 2275y^2z + 1335y^2 - 28yz^6 + 140yz^5 + 378yz^4 - 4132yz^3 + 11288yz^2 - 13432yz + 6026y + 8z^7 - 8z^6 - 639z^5 + 4731z^4 - 15718z^3 + 28518z^2 - 27987z + 12087$.

Faux bi-degré (n, m)

- *Faux bi-degré* $(2, 1)$

Considérons la paramétrisation suivante de bi-degré $(2, 1)$ d'une SPPG de type 3.

$$\begin{aligned} P1 &= -u^2v + u^2 - 8uv - 3u + 5v - x - 3y + z + 9 \\ P2 &= 2u^2v - 2u^2 - 7uv + u - v - y - 2z - 2 \\ P3 &= u^2v - u^2 - 2uv + u - v - z - 2 \end{aligned}$$

La méthode du bi-degré conduit pour cet exemple à un déterminant identiquement nul. En fait, on peut observer que la paramétrisation donnée s'écrit :

$$\begin{aligned} P_1 &= Q_1 + 3Q_2 - Q_3 \\ P_2 &= Q_2 + 2Q_3 \\ P_3 &= Q_3 \end{aligned} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} Q_1 = -uv + u + v - x + 1 \\ Q_2 = -3uv - u + v - y + 2 \\ Q_3 = u^2v - u^2 - 2uv + u - v - z - 2 \end{cases}$$

où les Q_i sont linéairement indépendants.

Ainsi, la paramétrisation initiale est en réalité une paramétrisation de bi-degrés $(1, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ qui sera étudiée au paragraphe suivant. Les deux paramétrisations (P_1, P_2, P_3) et (Q_1, Q_2, Q_3) définissent le même ensemble paramétré et conduisent toutes deux à la même équation implicite :

$$f(x, y, z) = 7x^3 - 6x^2y + 3x^2z - 15x^2 + xy^2 - xyz + 16xy + 2xz + 9x - y^2 - 3yz - 26y + 4z^2 + 11z + 31 .$$

Plus généralement, si (P_1, P_2, P_3) est une paramétrisation d'une SPPG, toute paramétrisation de la forme

$$\begin{aligned} &P_1 \\ &\alpha\, P_1 + P_2 \\ &\lambda\, P_1 + \mu\, P_2 + P_3 \end{aligned}$$

définit la même surface SPPG. Ainsi, les équations implicites correspondantes seront donc égales (à un facteur multiplicatif près).

5.2 Bi-degrés (n_1, m_1), (n_2, m_2), (n_3, m_3)

5.2.1 Analyse

Supposons maintenant que les trois polynômes $P_i(u, v)$, $i = 1, 2, 3$, soient respectivement de bi-degrés (n_1, m_1), (n_2, m_2), (n_3, m_3). Le polynôme $\delta(u, v, a, b)$ sera donc de degré :

degré de δ	
$Max(n_1 + n_2 - 1, n_1 + n_3 - 1, n_2 + n_3 - 1)$	en u
$Max(m_1 - 1, m_2 - 1, m_3 - 1)$	en v
$Max(n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1)$	en a
$Max(m_1 + m_2 - 1, m_1 + m_3 - 1, m_2 + m_3 - 1)$	en b

de sorte que le nombre de lignes et de colonnes non identiquement nulles de la matrice T sera tel que :

$$Nblig \leq Max(n_1, n_2, n_3) \times Max(m_1 + m_2, m_1 + m_3, m_2 + m_3) \quad (31)$$

$$Nbcol \leq Max(n_1 + n_2, n_1 + n_3, n_2 + n_3) \times Max(m_1, m_2, m_3) \quad (32)$$

REMARQUE 5.2 *Les inégalités s'expliquent par le fait que chacun des coefficients T_{ij}^{kl} de la matrice T est somme de déterminants (pq, rs, tu), comme il a été vu au paragraphe 4.3, pourvu qu'aucun des vecteurs concernés $\vec{pq}$, $\vec{rs}$ et $\vec{tu}$ ne soit nul. Cependant, si deux quelconques de ces trois vecteurs ont deux mêmes composantes nulles, le déterminant (pq, rs, tu) sera nul (cf. exemples ci-dessous).*

Remarquons par ailleurs que, dans le cas général, la matrice T ne sera pas carrée. Il suffit par exemple de considérer une surface de bi-degrés $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$ pour laquelle on obtient :

$$Nblig \leq 3 \times 4 = 12 \qquad \text{et} \qquad Nbcol \leq 5 \times 3 = 15 .$$

Le nombre de lignes $Nblig$ est en fait le nombre d'équations, tandis que le nombre de colonnes $Nbcol$ est le nombre d'inconnues. Pour de telles surfaces on peut donc

s'attendre à ce qu'un certain nombre de lignes ou (et) de colonnes ne soient pas linéairement indépendantes (voir l'exemple 2 ci-dessous).
Autrement dit, la méthode du bi- degré telle quelle n'est pas applicable.

Par ailleurs, un raisonnement analogue à celui décrit au paragraphe 5.1.1 permet de voir que le résultant théorique R du système (P_1, P_2, P_3) est homogène de degré

$n_2\, m_3 + n_3\, m_2$ en les coefficients A_{ij} de P_1,
$n_1\, m_3 + n_3\, m_1$ en les coefficients B_{ij} de P_2,
$n_1\, m_2 + n_2\, m_1$ en les coefficients C_{ij} de P_3.

Ainsi, puisque chaque élément de la matrice T reste au plus linéaire homogène en les coefficients de chacun des P_i, le rang r de cette matrice vérifiera :

$$r \geq Max(n_i\, m_j + n_j\, m_i) \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq 3 \text{ et } i \neq j\,. \tag{33}$$

5.2.2 Etude de quelques exemples

• *Bi-degrés différents. Exemple 1*

Considérons la paramétrisation suivante de bi-degrés $(1,1)$, $(1,1)$, $(2,1)$.

$$\begin{cases} x = & -uv + u + v + 1 \\ y = & -3uv - u + v + 2 \\ z = & u^2v - u^2 - 2uv + u - v - 2 \end{cases}$$

Sa matrice $T(x, y, z)$ associée comporte 4 lignes et 3 colonnes non identiquement nulles.

$$\begin{pmatrix} -2(y+z) & -2(3x-2z-7) & 4(x-1) & 0 \\ -5x+3y-2z-5 & x-y+11 & -4 & 0 \\ -x+y-1 & 3x-y+1 & -4 & 0 \\ x-y+1 & -3x+y-1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Cependant, un examen rapide de cette matrice montre que les lignes 3 et 4 sont opposées, ce qui signifie que les équations correspondantes issues de δ sont liées. Nous pouvons expliquer la dépendance de ces deux équations, grâce à la table formelle associée à une SPPG de bi-degré $(2,1)$:

	1	u	u^2	u^3
1	00 01 10	00 01 20 00 11 10	00 11 20 00 21 10	00 21 20
b	00 01 11	00 01 21 01 11 10	01 11 20 01 21 10	01 21 20
a	00 01 20	00 11 20 10 01 20	00 21 20 10 11 20	10 21 20
ab	00 01 21	00 11 21 10 01 21	01 21 20 10 11 21	11 21 20

Chacun des déterminants $(pq, 21, 20)$ est nul d'après la remarque 5.2, ce qui permet de vérifier que la dernière colonne est identiquement nulle.

Comparons ensuite les deux dernières équations. On vérifie que, d'une part les coefficients C_{20} et C_{21} se mettent respectivement en facteur dans la troisième et la quatrième ligne, et que d'autre part, après simplification par C_{20} et C_{21}, les équations restantes sont égales. Détaillons par exemple la première colonne :

$$(00,01,20) = \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ B_{00} & B_{01} & 0 \\ C_{00} & C_{01} & C_{20} \end{vmatrix} = C_{20} \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} \\ B_{00} & B_{01} \end{vmatrix}$$

$$(00,01,21) = \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ B_{00} & B_{01} & 0 \\ C_{00} & C_{01} & C_{21} \end{vmatrix} = C_{21} \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} \\ B_{00} & B_{01} \end{vmatrix}$$

Autrement dit, on a la relation :

$$C_{21} \,.\, L_3 - C_{20} \,.\, L_4 = 0$$

où L_3 et L_4 sont les lignes 3 et 4 considérées comme des éléments de l'espace vectoriel $K[x,y,z]^3$.

Ainsi, le rang de la matrice T est ≤ 3. Par ailleurs, la relation (33) montre que le rang de la matrice T est ≥ 3. D'où le résultat suivant.

PROPOSITION 5.3 *L'équation implicite de toute surface rationnelle de bi-degrés* $(1,1)$, $(1,1)$, $(2,1)$ *est de degré* 3. *Ce résultat est identique pour n'importe quelle position de l'indice* 2 *parmi* 5 *indices* 1.

Pour l'exemple traité, nous obtenons l'équation implicite de degré 3 :

$f(x,y,z) = 7x^3 - 6x^2y + 3x^2z - 15x^2 + xy^2 - xyz + 16xy + 2xz + 9x - y^2 - 3yz - 26y + 4z^2 + 11z + 31$

• *Bi-degrés différents. Exemple 2*

Considérons maintenant un exemple plus compliqué. La paramétrisation donnée est de bi-degré $(2,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$.

$$\begin{cases} x = & u^2 + uv - u - v + 1 \\ y = & uv^3 - uv + u - v^2 + 2 \\ z = & 2u^3v - u^2 - uv + v - 1 \end{cases}$$

Les relations ci-dessus donnent $Nblig \leq 12$ et $Nbcol \leq 15$. En fait, la matrice $T(x,y,z)$ associée comporte 11 lignes et 12 colonnes non identiquements nulles (pour des raisons analogues à celles données précédemment).

$$\begin{pmatrix}
-x-y & -z-1 & x+y & x+z & z+1 & x+z & 0 & -(x+z) & -2(x+y & 0 & 0 & 2(y-2) \\
-z+2 & & -3 & & & & & & -3) & & & \\
x-1 & x+z & x+z & z+1 & -(x+z & 2(y-2) & -(3x+z & 0 & -2 & 0 & 2(x-1) & 0 \\
 & +1 & +1 & & +1) & & -2) & & & & & \\
x+z & 0 & z+2 & -(x+z & 0 & -(3x+z & -2 & 0 & -2 & 2(x-1) & 2 & 2 \\
 & & & +1) & & -2) & & & & & & \\
-(x+z) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & x+z & x+z & 1 & -(x+z) & 1 & 0 & -1 & 2(y-2) & 0 & 0 & -2 \\
x+z & 0 & 2y-3 & -(3x+z & 0 & -2(x+y & -3 & 2(x-1) & 0 & 0 & 2 & 2 \\
 & & & -2) & & -2) & & & & & & \\
0 & 0 & -(3x+z & -2 & 0 & -3 & 2x & 2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\
 & & -2) & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(x-1) & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\
2(y-2) & -2(x-1) & -2(x+y & -2 & 2(x-1) & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\
 & & -2) & & & & & & & & & \\
-2(x-1) & -2 & -2 & 2x & 2 & 2 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2(x-1) & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

L'observation de cette matrice montre que les colonnes 2 et 6 sont liées, de sorte que le rang de la matrice T est ≤ 11. Par ailleurs, la relation (33) montre que le rang ≥ 10, ce qui ne permet pas de conclure. En fait, le rang de cette matrice T est 11 et nous fournit une équation implicite de degré 11.

$$f(x,y,z) = 64x^{10} - 64x^9y^2 + 256x^9y + 64x^9z - 1232x^9 - 64x^8y^2z + 896x^8y^2 + 192x^8yz - 3664x^8y - 1328x^8z + 9104x^8 + 1152x^7y^2z - 4160x^7y^2 - 64x^7yz^2 - 3904x^7yz + 17000x^7y - 112x^7z^2 + 10392x^7z - 32937x^7 + 576x^6y^3 + 256x^6y^2z^2 - 6016x^6y^2z + 6064x^6y^2 + 21704x^6yz - 31612x^6y - 16x^6z^3 + 1152x^6z^2 - 40803x^6z + 62372x^6 + 640x^5y^3z - 2144x^5y^3 - 2112x^5y^2z^2 + 10672x^5y^2z + 104x^5y^2 + 256x^5yz^3 + 4472x^5yz^2 - 46532x^5yz + 23584x^5y - 112x^5z^3 - 8301x^5z^2 + 82851x^5z - 64445x^5 + 64x^4y^3z^2 - 2272x^4y^3z + 4912x^4y^3 - 320x^4y^2z^3 + 5728x^4y^2z^2 - 6216x^4y^2z - 18332x^4y^2 + 16x^4yz^4 - 152x^4yz^3 - 16828x^4yz^2 + 47360x^4yz + 21230x^4y - 32x^4z^4 - 947x^4z^3 + 23999x^4z^2 - 93319x^4z + 20948x^4 - 528x^3y^4 - 192x^3y^3z^2 + 5072x^3y^3z - 2000x^3y^3 + 1632x^3y^2z^3 - 7664x^3y^2z^2 - 14044x^3y^2z + 18096x^3y^2 - 272x^3yz^4 - 3572x^3yz^3 + 27696x^3yz^2 + 2218x^3yz - 41599x^3y + 8x^3z^5 + 453x^3z^4 + 7110x^3z^3 - 34667x^3z^2 + 41383x^3z + 16740x^3 - 304x^2y^4z + 848x^2y^4 - 128x^2y^3z^3 - 128x^2y^3z^2 - 3600x^2y^3z - 2352x^2y^3 + 128x^2y^2z^4 - 2240x^2y^2z^3 + 6756x^2y^2z^2 + 20900x^2y^2z - 3096x^2y^2 - 32x^2yz^5 + 312x^2yz^4 + 7964x^2yz^3 - 25246x^2yz^2 - 38579x^2yz + 21611x^2y + 55x^2z^5 - 698x^2z^4 - 14249x^2z^3 +$$

$$26153x^2z^2+12322x^2z-17205x^2+208xy^4z^2+512xy^4z-1008xy^4+64xy^3z^3-896xy^3z^2-272xy^3z+6288xy^3-280xy^2z^4+1788xy^2z^3-880xy^2z^2-8308xy^2z-15304xy^2+128xyz^5+212xyz^4-7758xyz^3+9659xyz^2+25138xyz+14175xy-15xz^6-217xz^5+188xz^4+13520xz^3-7854xz^2-17774xz-3834x+128y^5-16y^4z^3-272y^4z^2-464y^4z-848y^4+32y^3z^4+352y^3z^3+1984y^3z^2+2864y^3z+2080y^3-24y^2z^5-184y^2z^4-2484y^2z^3-5828y^2z^2-6716y^2z-1588y^2+8yz^6+56yz^5+820yz^4+6923yz^3+7323yz^2+6219yz-629y-z^7-9z^6-76z^5-1054z^4-8332z^3-5162z^2-2220z+857$$

• *Bi-degrés différents. Exemple 3*

La paramétrisation suivante est de bi-degré $(2,2)$, $(1,2)$, $(1,1)$

$$\begin{cases} x = & u^2v^2-2u^2v+u^2+uv-u+2v^2+v+1 \\ y = & uv^2-2uv+u-2v^2-2v-2 \\ z = & 2uv+u-v-1 \end{cases}$$

de sorte que $Nblig = 8$ et $Nbcol = 6$.

$$\begin{pmatrix} -x-z & -2(x+y+1) & -4x-4y+z-3 & x+3z+2 & 4(y+2) & -y-2 & 0 & 0 \\ -8x-5y-2 & -2(2x+2y+z+4) & x+2y-z-1 & 2x-5z-5 & -y+6 & -2(y+3) & 0 & 0 \\ -3x-4y-z-6 & 2(z-2) & -y-2z-2 & 2z-7 & 6 & -6 & 0 & 0 \\ 2(z+1) & 2 & 2z & -2 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ -y+2z & 2(z+1) & 2y+2z+5 & -z-3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2(y-z+1) & -2(2z+1) & -4y-5z-13 & 2z+1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ -y-2z-4 & 2(z-1) & 2y+4z+11 & -z+7 & -6 & -3 & 0 & 0 \\ 2(z+1) & 2 & -z-3 & -5 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $T(x,y,z)$ associée comporte effectivement 8 lignes et 6 colonnes non identiquement nulles. Il n'apparait aucune liaison apparente à priori entre les différentes lignes. Cet exemple sera convenablement traité par l'algorithme général donné plus loin.

• *Faux Bi-degrés* (n_i, m_i)

Nous ne donnons pas d'exemple, mais les remarques concernant le faux bi-degré (n,m) faites dans la section précédente, s'appliquent bien sûr encore ici.

5.3 Degré total N

5.3.1 Analyse

Considérons maintenant le cas où les polynômes P_i sont tous trois de degré total N. Le résultant de ces trois polynômes est donc de degré N^2 en les coefficients de chacun des polynômes P_i.

L'application de la méthode générale (c'est-à-dire en utilisant la fonction δ_0) conduit à une matrice T carrée d'ordre $2N^2 - N$. Cependant pour $N \geq 3$, les $2N^2 - N$ équations issues de δ_0 ne sont pas linéairement indépendantes. Dixon propose donc de construire le résultant par formation de $\frac{3}{2}N(N-1)$ équations obtenues en multipliant les polynômes P_1, P_2 et P_3 par les $\frac{1}{2}N(N-1)$ monômes en u, v de degré $\leq N-2$ (voir méthode de Sylvester) et en ajoutant à ces équations les $\frac{1}{2}N(N+1)$ équations provenant de δ_0 et correspondant aux coefficients de $a^k b^l$ tel que $k + l \leq N - 1$, les autres équations provenant de δ_0 n'étant pas linéairement indépendantes des équations précédemment formées.

L'utilisation de δ_1 ou δ_2 simplifie la méthode et conduit à une matrice carée d'ordre $\frac{1}{2}N(3N-1)$ au lieu de $2N^2 - N$. Néanmoins, le problème des équations liées reste pour $N \geq 3$.

Par ailleurs, l'équation implicite d'une surface rationnelle de degré total N est N^2 [21]. Il suffit pour voir celà de compter le nombre d'intersections d'une droite avec la surface grâce au théorème de Bezout. Si la droite est définie comme intersection de deux plans d'équations $\alpha_i X + \beta_i Y + \gamma_i Z + \delta_i W = 0$ pour $i = 1, 2$, l'intersection de cette droite avec la surface conduit après substitution au système

$$\begin{cases} \alpha_1 \varphi_1(u,v) + \beta_1 \varphi_2(u,v) + \gamma_1 \varphi_3(u,v) + \delta_1 \theta(u,v) = 0 \\ \alpha_2 \varphi_1(u,v) + \beta_2 \varphi_2(u,v) + \gamma_2 \varphi_3(u,v) + \delta_2 \theta(u,v) = 0 \end{cases}$$

qui admet N^2 solutions dans le cas général. Ainsi, dans le cas général, l'équation implicite $f(x,y,z) = 0$ de cette surface rationnelle devra être de degré N^2.

5.3.2 Etude de quelques exemples

Nous donnons l'exemple d'une paramétrisation de degré total 2 (surface de Steiner) et d'une paramétrisation de degré total 3.

Degré total $N \leq 2$

Une surface de Steiner (cf. paragraphe 3.3.3) admet une représentation paramétrique de degré total 2. On peut considérer une telle surface comme une biquadratique dont les monômes u^2v, uv^2 et u^2v^2 sont absents. Comme ci-dessus, l'observation de la table formelle donnée en figure 4.2 montre que trois lignes et trois colonnes de la matrice T sont identiquement nulles, de sorte que nous obtenons une matrice carrée d'ordre 5. Nous donnons la table formelle correspondante ci-dessous. Par ailleurs, cette même table montre que dans le *cas polynomial* (cf. Steiner polynomiale) le degré de l'équation implicite sera au plus 4, comme attendu [65]. En effet, rappelons que dans le cas polynomial, seuls les déterminants (pq, rs, tu) tels que $(p, q) = (0, 0)$ dépendent (linéairement) de x, y, z.

	1	v	u	uv	u^2
1	00 01 10	00 02 10	00 01 20 00 11 10	00 02 20	00 11 20
a	00 01 20	00 02 20	00 11 20 10 01 20	10 02 20	10 11 20
b	00 02 10 00 01 11	00 02 11 01 02 10	00 02 20 01 11 10	01 02 20	01 11 20
ab	00 02 20	01 02 20	10 02 20	11 02 20	
b^2	00 02 11	01 02 11	02 11 10		02 11 20

Pour les deux exemples suivants (Steiner polynomiale et Steiner rationnelle), l'ordre des lignes et des colonnes de la matrice T est celui du tableau ci-dessus, c'est-à-dire celui de la figure 4.2.

- *Surface de Steiner polynomiale*

$$\begin{cases} x = & u^2 - 2uv - u - v^2 + v + 1 \\ y = & -2u^2 - uv + 2u - v^2 - v - 1 \\ z = & -u^2 + 2uv - u + 2v^2 - v + 3 \end{cases}$$

Pour cette paramétrisation de degré total 2 on obtient la matrice T suivante :

$$\begin{pmatrix}
3x+2y & -3(x+y & -2(2x+2y & 5x+y & 5(x+z & 0 & 0 & 0 \\
+z-4 & +z-3) & +3z-9) & +3z-13 & -4) & & & \\
-x-z & 5x+y & 5x+5z & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\
+4 & +3z-13 & -22 & & & & & \\
-3(2x+y & -2y-z & 5x+y & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+2z-7) & -2 & +3z-19 & & & & & \\
5x+y & -1 & 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+3z-13 & & & & & & & \\
-2y-z & -3 & 3 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
+1 & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Son équation implicite est de degré 4.

$f(x,y,z) = 625x^4+1000x^3y+1750x^3z-6800x^3+450x^2y^2+2200x^2yz-7870x^2y+1925x^2z^2-13910x^2z+26889x^2+40xy^3+710xy^2z-1761xy^2+1680xyz^2-10906xyz+19796xy+980xz^3-10094xz^2+36230xz-45885x+y^4+32y^3z+258y^3+284y^2z^2-1227y^2z+1514y^2+448yz^3-4068yz^2+13008yz-15326y+196z^4-2620z^3+13417z^2-31595z+29213$

• *Surface de Steiner rationnelle*

Considérons maintenant la surface de Steiner rationnelle :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(u,v) &= u^2-2uv-u-v^2+v+1 \\
\varphi_2(u,v) &= -2u^2-uv+2u-v^2-v-1 \\
\varphi_3(u,v) &= -u^2+2uv-u+2v^2-v+3 \\
\theta(u,v) &= 2u^2+uv-3u-v^2+v-2
\end{aligned}$$

pour laquelle nous obtenons la matrice $T(x,y,z)$ d'ordre 5 suivante :

$$\begin{pmatrix}
\begin{matrix}-13x-14y\\-3z-4\end{matrix} & \begin{matrix}-2x+19y\\+13z+9\end{matrix} & \begin{matrix}11x+38y\\+21z+18\end{matrix} & \begin{matrix}-x-8y\\-11z-13\end{matrix} & \begin{matrix}-5(3x+4y\\+3z+4)\end{matrix} \\
\begin{matrix}3x+4y\\+3z+4\end{matrix} & \begin{matrix}-x-8y\\-11z-13\end{matrix} & \begin{matrix}-2(7x+11y\\+7z+11)\end{matrix} & \begin{matrix}-13x+y\\-3z+6\end{matrix} & \begin{matrix}-5(x-2y\\+z-2)\end{matrix} \\
\begin{matrix}7x+31y\\+22z+21\end{matrix} & \begin{matrix}11x-7y\\+z-2\end{matrix} & \begin{matrix}2x-14y\\-8z-19\end{matrix} & \begin{matrix}-2x-y\\-2z-1\end{matrix} & 0 \\
\begin{matrix}-x-8y\\-11z-13\end{matrix} & \begin{matrix}-2x-y\\-2z-1\end{matrix} & \begin{matrix}-13x+y\\-3z+6\end{matrix} & \begin{matrix}5(2x+y\\+2z+1)\end{matrix} & 0 \\
\begin{matrix}2x-9y\\-3z+1\end{matrix} & \begin{matrix}-3(2x+y\\+2z+1)\end{matrix} & \begin{matrix}6x+13y\\+11z+3\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}-5(2x+y\\+2z+1)\end{matrix}
\end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice fournira à priori une équation de degré 5, alors que l'équation implicite d'une surface de Steiner rationnelle est de degré 4 [65]. L'équation implicite obtenue contient donc un facteur parasite linéaire.

$$f(x,y,z) = (2x+y+2z+1)\,(73478x^4+171766x^3y+195452x^3z+133871x^3+367082x^2y^2+752283x^2yz+584784x^2y+353863x^2z^2+583623x^2z+279677x^2+251559xy^3+825994xy^2z+504937xy^2+892643xyz^2+1245253xyz+457422xy+294407xz^3+689258xz^2+571084xz+166169x+29403y^4+218889y^3z+126522y^3+418037y^2z^2+472777y^2z+165173y^2+321376yz^3+596969yz^2+415362yz+90392y+85018z^4+236256z^3+266907z^2+142349z+29213)\,.$$

Degré total $N \geq 3$

Considérons une paramétrisation de degré total 3. La méthode issue de $\delta = 0$ conduit à un résultant identiquement nul car un certain nombre d'équations sont linéairement dépendantes.

- *Exemple : degré total* 3

$$\begin{cases} x = & 2u^3 + u^2v + u^2 + uv + u - v^3 - v - 2 \\ y = & -u^3 + 2u^2 + 2uv^2 - uv + u + v^3 + 1 \\ z = & -u^2v + 2u^2 + 2uv^2 + uv - u + 2v^3 + 3v - 1 \end{cases}$$

La matrice $T(x, y, z)$ associée à cette paramétrisation, considérée comme une bicubique, comporte 12 lignes et 12 colonnes non identiquement nulles. Cependant les lignes L_5 et L_{10} sont liées tandis qu'il n'apparait aucune liaison entre les colonnes. En fait, on peut montrer que la dernière colonne (par exemple) n'est pas linéairement indépendante des autres. L'équation implicite de cette surface a ainsi pu être calculée par l'algorithme général donné plus loin.

$$f(x,y,z) = x^9-36x^8y-9x^8z+18166x^8+171x^7y^2+450x^7yz+311153x^7y-212265x^7z-568160x^7+4182x^6y^3-4923x^6y^2z+2249796x^6y^2-1296x^6yz^2-2817213x^6yz-8930928x^6y+201x^6z^3+822157x^6z^2+6380481x^6z+5013450x^6-6381x^5y^4-33840x^5y^3z+9082390x^5y^3+36207x^5y^2z^2-15362442x^5y^2z-49231295x^5y^2-4338x^5yz^3+7827759x^5yz^2+57004436x^5yz+88991375x^5y-396x^5z^4-1012819x^5z^3-14109947x^5z^2-64858776x^5z-31423939x^5-261864x^4y^5+327069x^4y^4z+24066119x^4y^4-47142x^4y^3z^2-48508866x^4y^3z-133655697x^4y^3-73341x^4y^2z^3+31852749x^4y^2z^2+171803406x^4y^2z+277633658x^4y^2+26712x^4yz^4-6636902x^4yz^3-39175523x^4yz^2-202049767x^4yz-245087831x^4y-1323x^4z^5-146619x^4z^4-11314299x^4z^3-17330753x^4z^2+70755437x^4z+324277047x^4-1355883x^3y^6+3032442x^3y^5z+45836421x^3y^5-2614518x^3y^4z^2-109605399x^3y^4z-231524634x^3y^4+1068204x^3y^3z^3+92695267x^3y^3z^2+294900483x^3y^3z+228879794x^3y^3-163071x^3y^2z^4-32132196x^3y^2z^3-32801143x^3y^2z^2+341867703x^3y^2z+1047262319x^3y^2-18846x^3yz^5+4333158x^3yz^4-61331802x^3yz^3-727612287x^3yz^2-2655123810x^3yz-2472270135x^3y+4287x^3z^6-489241x^3z^5+13519003x^3z^4+246465440x^3z^3+1280605257x^3z^2+2941342750x^3z+2292784809x^3-3180690x^2y^7+9078795x^2y^6z+57507634x^2y^6-11111904x^2y^5z^2-162875115x^2y^5z-269250718x^2y^5+7750071x^2y^4z^3+183571578x^2y^4z^2+393057268x^2y^4z+97702487x^2y^4-3351222x^2y^3z^4-108933221x^2y^3z^3-182643547x^2y^3z^2+478111411x^2y^3z+1818139140x^2y^3+853983x^2y^2z^5+40123278x^2y^2z^4+135082423x^2y^2z^3-48954529x^2y^2z^2-24157926555x^2y^2z-3700365099x^2y^2-99072x^2yz^6-10507068x^2yz^5-138916753x^2yz^4-821420877x^2yz^3-1639088202x^2yz^2-536687768x^2yz+3079034637x^2y+990x^2z^7+1582633x^2z^6+44976436x^2z^5+399564131x^2z^4+1730753768x^2z^3+3924404198x^2z^2+3912041425x^2z+216746961x^2-3634164xy^8+11943252xy^7z+33582116xy^7-17786385xy^6z^2-96310638xy^6z-35926555xy^6+16181190xy^5z^3+115420758xy^5z^2-315446823xy^5z-1129400505xy^5-9933903xy^4z^4-83912185xy^4z^3+863923889xy^4z^2+4374013773xy^4z+5608665330xy^4+4180032xy^3z^5+48077514xy^3z^4-834990361xy^3z^3-5526394739xy^3z^2-13154443965xy^3z-9527905020xy^3-1175112xy^2z^6-20544333xy^2z^5+455418078xy^2z^4+3565626680xy^2z^3+11258161653xy^2z^2+12959770937xy^2z+3338709573xy^2+198792xyz^7+3843728xyz^6-185219894xyz^5-1609990624xyz^4-6088710226xyz^3-8834984878xyz^2-516767001xyz+8122295142xy-13068xz^8+160884xz^7+41909117xz^6+396811611xz^5+1914136302xz^4+4303221964xz^3+3742379962xz^2-3146196192xz-5456768328x-1643032y^9+5889852y^8z+7345053y^8-10045458y^7z^2-6466974y^7z-3059349y^7+10909821y^6z^3-$$

$$27449468y^6z^2 - 206558523y^6z - 96482175y^6 - 8325648y^5z^4 + 67174779y^5z^3 + 547097053y^5z^2 + 537824686y^5z - 1268470614y^5 + 4626450y^4z^5 - 70683381y^4z^4 - 571947249y^4z^3 - 77392318y^4z^2 + 5508432136y^4z + 10634038422y^4 - 1884648y^3z^6 + 43760707y^3z^5 + 300272570y^3z^4 - 1003720252y^3z^3 - 10419239240y^3z^2 - 29143703367y^3z - 29322477729y^3 + 546876y^2z^7 - 16274640y^2z^6 - 61514182y^2z^5 + 1181454064y^2z^4 + 9157310977y^2z^3 + 30642592105y^2z^2 + 50247205089y^2z + 37389471642y^2 - 104544yz^8 + 2934708yz^7 - 17607228yz^6 - 639610016yz^5 - 4275335489yz^4 - 15186140029yz^3 - 29960174138yz^2 - 34272766092yz - 21442241160y + 10648z^9 - 81260z^8 + 9004090z^7 + 145146655z^6 + 933861463z^5 + 3502264229z^4 + 7306473208z^3 + 9162142568z^2 + 6888112944z + 4861559376 .$$

5.4 Degré total (N_1, N_2, N_3)

5.4.1 Remarque

Dans le cas de trois polynômes de degrés respectifs N_1, N_2 et N_3, la méthode proposée par Dixon est analogue et consiste encore à former un certain nombre d'équations en multipliant les polynômes P_i par des monômes $u^i v^j$ bien choisis et à en choisir d'autres issues de δ, linéairement indépendantes des premières [30].

Le résultant peut être identiquement nul du fait de la présence de points multiples en $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ pour les polynômes P_i [30].

5.4.2 Etude de quelques exemples

Considérons les deux exemples suivants de degrés total $1,2,3$. Dans le premier exemple tous les monômes sont présents, tandis que dans le second nous avons supprimé le monôme en u^2 dans y et les monômes en v^2 et v^3 dans z.

- *Degrés total* $1,2,3$ *: tous les monômes sont présents*

$$\begin{cases} x = & u - v + 2 \\ y = & u^2 + uv - u + 2v^2 + v + 1 \\ z = & 2u^3 - u^2v + u^2 + uv^2 - uv + u + 2v^3 - v^2 - 2v + 2 \end{cases}$$

La matrice associée comporte 8 lignes et 9 colonnes.

$$\begin{pmatrix}
-x-y+3 & x-y-2z+3 & 2(x+y-3) & 3x-2z-2 & 4x+y-9 & -2(x-2) & 3x+y-7 & 3(x-2) & 3(x-2) \\
2x-2y-3z+4 & x+2y-6 & -2(x-2) & 3x-7 & -(5x-13) & -2 & 3x-4 & 3 & 3 \\
2x+3y-7 & -1 & -6 & -(4x-9) & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3x+y-z-5 & 3(x-2) & -2(x-2) & 4x+2y-11 & 3(x-3) & 2 & 3x-8 & -3 & -3 \\
2x-y-3 & -(4x-11) & -2 & 2x-7 & 7 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-4(x-2) & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2(x+y-3) & 4(x-2) & 0 & 2(x-2) & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\
4(x-2) & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Cependant, les lignes L_6 et L_8 sont opposées, tandis que les colonnes C_6, C_8 et C_9 sont égales à un facteur scalaire près, ce qui nous permet d'extraire une matrice carrée d'ordre 7 dont le déterminant fournit l'équation implicite suivante de degré 6.

$f(x,y,z) = 16x^6 - 180x^5 - 14x^4y + 832x^4 + 45x^3y - 18x^3z - 1907x^3 - 18x^2y^2 + 65x^2y + 85x^2z + 2143x^2 + 45xy^2 - 4xyz - 269xy - 156xz - 972x - 4y^3 + 3y^2 + 16yz + 92y + 16z^2 + 44z + 149$

• *Degrés total* $1,2,3$ *: absence de certains monômes*

$$\begin{cases} x = & u - v + 2 \\ y = & uv - u + 2v^2 + v + 1 \\ z = & 2u^3 - u^2v + u^2 - uv + u - 2v + 2 \end{cases}$$

L'étude des polynômes homogènes associés montre que le polynôme P_2 admet un point multiple d'ordre 1 en $(0,1,0)$ et le polynôme P_3 admet un point multiple d'ordre 2 en $(0,0,1)$. La matrice associée comporte 8 lignes et 7 colonnes. Deux lignes et deux colonnes sont linéairement dépendantes. Après réduction, nous obtenons la matrice suivante comportant 7 lignes et 6 colonnes.

$$\begin{pmatrix}
-(x+y-3) & 2(x-z) & x-z & 2(x-2) & 2x+y-5 & 4(x-2) \\
3x-y-3z+1 & -2(x-1) & x-y-2 & -2(x-3) & 4x-7 & 4 \\
-2(x-2) & -2 & -2(x-3) & -2 & 2 & 0 \\
x+y-3 & 2(x-2) & 3x+2y-8 & 2(2x-5) & 2x-5 & -4 \\
x-y-1 & -2(x-3) & 3x-8 & 6 & -3 & 0 \\
-2(x-2) & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
2(x+y-3) & 4(x-2) & 2(x-2) & -4 & -2 & 0
\end{pmatrix}$$

Cet exemple sera repris plus en détail dans le paragraphe 5.7.

• *Surface d'Enneper*

Considérons maintenant l'exemple suivant d'une paramétrisation de degré total 3, 3, 2.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2) \\ y = \frac{1}{2}(-v + \frac{1}{3}v^3 - u^2v) \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases}$$

La matrice T associée comporte 11 lignes et 11 colonnes.

$$\begin{pmatrix} 18z & -18y & -6z & -18x & 0 & 6x & 12z & -12y & 2z & -18x & -6z \\ -18y & -6z-9 & 0 & 0 & -12x & 0 & -12y & -16z-6 & 0 & 0 & 0 \\ 12z & -18y & -6z-3 & -12x & 0 & 0 & 2z & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -18y & -6z-9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ -6z & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -18x & 0 & 6x & -6z+9 & -12y & 2z-3 & -18x & 0 & 0 & -6z+9 & 0 \\ 0 & -12x & 0 & -12y & -16z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12x & 0 & 0 & -16z+6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ -6z & 6y & 2z & 0 & 0 & 0 & -6z+3 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 6y & 2z+3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2z & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un examen rapide de cette matrice montre les relations suivantes entre les lignes et les colonnes :

$$L_4 = -3 \,.\, L_{10} \quad , \quad L_5 = -3 \,.\, L_{11} \quad , \quad C_{10} = -3 \,.\, C_6 \quad , \quad C_{11} = -3 \,.\, C_9 \,.$$

Par suite, nous obtenons une matrice d'ordre 9 où les lignes et les colonnes sont linéairement indépendantes, fournissant une équation implicite de degré 9.

$$f(x,y,z) = 1458x^6 - 4374x^4y^2 + 4860x^4z^3 + 8748x^4z^2 - 729x^4z + 4374x^2y^4 + 25272x^2y^2z^3 + 1458x^2y^2z + 3456x^2z^6 + 15552x^2z^5 + 12960x^2z^4 - 3888x^2z^3 - 1458y^6 + 4860y^4z^3 - 8748y^4z^2 - 729y^4z - 3456y^2z^6 + 15552y^2z^5 - 12960y^2z^4 - 3888y^2z^3 - 1024z^9 + 4608z^7 - 5184z^5$$

5.5 Paramétrisations non fidèles

Nous rappelons qu'une paramétrisation est *non fidèle* si le degré de l'application paramétrisation l, défini au chapitre 2, est > 1, ce qui revient à dire que la surface est parcourue plusieurs fois. Nous reprenons les exemples du chapitre 2 et donnons les conséquences d'une paramétrisation non fidèle sur :

1) la matrice $T(x, y, z)$,

2) l'équation implicite obtenue par la méthode des résultants.

- *Exemple 1 :* $l = 1$

$$\begin{cases} x = & u \\ y = & v \\ z = & uv \end{cases}$$

Cette paramétrisation est fidèle ($l = 1$). La matrice T_1 associée est d'ordre 2, fournissant ainsi une équation implicite de degré 2.

$$\begin{pmatrix} -z & y \\ x & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_1(x, y, z) = xy - z \ .$$

- *Exemple 2 :* $l = 4$

Considérons maintenant la paramétrisation non fidèle suivante pour laquelle $l = 4$.

$$\begin{cases} x = & u^2 \\ y = & v^2 \\ z = & u^2v^2 \end{cases}$$

La matrice T_2 associée est d'ordre 8 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -z & 0 & 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ -z & 0 & 0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et fournit l'équation implicite suivante de degré 8 :

$$f_2(x,y,z) = (xy - z)^4$$

Ainsi :

1) la matrice T_2 est formée de 4 matrices T_1 décalées les unes par rapport aux autres,

2) l'équation implicite f_2 vérifie $f_2 = {f_1}^4$.

DÉFINITION 5.1 *Considérons deux matrices carrées T et T_1 d'ordres respectifs n et n_1, avec $n = l\,n_1$. S'il existe un ensemble de permutations de lignes et de colonnes de T tel que T puisse s'écrire (après permutation) sous la forme :*

$$\begin{bmatrix} [T_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T_1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T_1] \end{bmatrix}$$

nous dirons que la matrice T a une structure de l sous matrices T_1 décalées.

On déduit aussitôt que :

$$det(T) = \pm det(T_1)^l$$

Nous reviendrons sur cet exemple 2 au chapitre de l'inversion. Néanmoins, remarquons dès à présent, que chacune des sous matrices décalées de la matrice T_2 conduit après simplification au même système :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & u^2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ b^2 \end{array} & \begin{pmatrix} -z & y \\ x & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nous donnons sans commentaire un autre exemple correspondant à $l = 6$.

• *Exemple 3 : $l = 6$*

$$\begin{cases} x = & 1 + u^2 \\ y = & 1 - v^3 \\ z = & 1 + u^2 - v^3 - u^2v^3 \end{cases}$$

Matrice T :

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x-y+z+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(y+1) \\
0 & 0 & 0 & 0 & -x-y+z+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(y+1) & 0 \\
0 & 0 & 0 & -x-y+z+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(y+1) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & x-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -x-y+z+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(y+1) & 0 & 0 & 0 \\
0 & -x-y+z+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(y+1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-x-y+z+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(y+1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & x-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Equation implicite :

$$f_3(x,y,z) = (xy - z)^6$$

• *Exemples 4*

Nous considérons maintenant quelques exemples rationnels. Pour chacun d'eux nous donnons la matrice $T(x,y,z)$ après suppression des lignes et colonnes identiquement nulles et l'équation implicite obtenue.

Exemple rationnel : $l = 4$

$$x = \frac{v^2+1}{u^2+v^2+1} \qquad y = \frac{u^2+v^2}{u^2+v^2+1} \qquad z = \frac{u^2+1}{u^2+v^2+1}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & x+y+z-2 \\
0 & 0 & x+y+z-2 & 0 \\
0 & x+y+z-2 & 0 & 0 \\
x+y+z-2 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = (x+y+z-2)^4$$

Exemple rationnel : $l = 2$

$$x = \frac{v+1}{u^2+v^2+1} \qquad y = \frac{u^2+v}{u^2+v^2+1} \qquad z = \frac{u^2+1}{u^2+v^2+1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2(z-1) & x+y-z \\ 0 & 0 & x+y-z & -(x-y+z) \\ 2(z-1) & x+y-z & 0 & 0 \\ x+y-z & -(x-y+z) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = (x^2+2xy-2x+y^2-4yz+2y+3z^2-2z)^2$$

Exemple rationnel : $l = 4$

$$x = \frac{v^2+1}{u^2+v^2+1} \qquad y = \frac{u^2v^2+u^2+v^2}{u^2+v^2+1} \qquad z = \frac{u^2+1}{u^2+v^2+1}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & x+y+z-2 & 0 & 0 & 0 & z-1 \\
0 & 0 & x+y+z-2 & 0 & 0 & 0 & z-1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x-1 & 0 & 0 & 0 & x+z-1 \\
0 & 0 & x-1 & 0 & 0 & 0 & x+z-1 & 0 \\
0 & x+y+z-2 & 0 & 0 & 0 & z-1 & 0 & 0 \\
x+y+z-2 & 0 & 0 & 0 & z-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x-1 & 0 & 0 & 0 & x+z-1 & 0 & 0 \\
x-1 & 0 & 0 & 0 & x+z-1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = (x^2 + xy + xz - 2x + yz - y + z^2 - 2z + 1)^4$$

L'étude des exemples précédents conduit à poser la question suivante.

QUESTION : Etant donnée une paramétrisation non fidèle, dont le degré de l'application paramétrisation est l ($l > 1$), lui correspond t-il toujours une matrice T ayant une structure de l sous matrices décalées ?

REMARQUE 5.3 *Si une matrice carrée à coefficients polynomiaux $T = T(x,y,z)$ est telle que son déterminant est de la forme $g(x,y,z)^l$, elle n'a pas systématiquement une structure de l sous matrices décalées T_1 pour une matrice $T_1 = T_1(x,y,z)$ avec $det(T_1) = g(x,y,z)$. Il suffit pour celà de considérer la première paramétrisation de la sphère donnée ci-dessous.*

Notons enfin que pour des applications numériques, il est bien évidemment souhaitable de pouvoir disposer d'une paramétrisation fidèle afin d'économiser des calculs inutiles. Cependant, nous verrons que la question de l'inversion, si elle devient plus onéreuse, reste néanmoins réalisable.

5.6 Facteurs parasites et points de base

L'influence des points de base sur une paramétrisation est multiple [21,75]. Nous montrons sur des exemples que l'apparition de facteurs parasites lors de l'implicitisation n'est pas liée à la présence de points de base dans la paramétrisation. Pour celà, nous considérons trois paramétrisations de la sphère de K^3.

• *Sphère 1*

$$x = \frac{1-u^2}{1+u^2}\frac{1-v^2}{1+v^2} \qquad y = \frac{1-u^2}{1+u^2}\frac{2v}{1+v^2} \qquad z = \frac{2u}{1+u^2}$$

Cette paramétrisation est la plus classique. Elle admet les points de base :

T	U	V
1	1	i
1	1	$-i$
1	-1	i
1	-1	$-i$
0	1	0
0	0	1

On notera en particulier la présence de quatre points de base *affines*. Cette paramétrisation est de bi-degré $(2,2)$, sa matrice $T(x,y,z)$ associée est donc d'ordre 8.

$$\begin{pmatrix}
4(x-1) & 4y & 4z & 0 & -4(x-1) & -4y & -4z & 0 \\
4y & -4(x+1) & 0 & 4z & -4y & 4(x+1) & 0 & -4z \\
4(x-1) & 4y & 4z & 0 & -4(x-1) & -4y & -4z & 0 \\
4y & -4(x+1) & 0 & 4z & -4y & 4(x+1) & 0 & -4z \\
4z & 0 & -4(x+1) & -4y & -4z & 0 & 4(x+1) & 4y \\
0 & 4z & -4y & 4(x-1) & 0 & -4z & 4y & -4(x-1) \\
4z & 0 & -4(x+1) & -4y & -4z & 0 & 4(x+1) & 4y \\
0 & 4z & -4y & 4(x-1) & 0 & -4z & 4y & -4(x-1)
\end{pmatrix}$$

Après suppression des lignes et des colonnes liées on obtient la matrice d'ordre 4

$$\begin{pmatrix} 4(x-1) & 4y & 4z & 0 \\ 4y & -4(x+1) & 0 & 4z \\ 4z & 0 & -4(x+1) & -4y \\ 0 & 4z & -4y & 4(x-1) \end{pmatrix}$$

qui fournit l'équation implicite suivante *sans facteurs parasites.*

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-1)^2$$

REMARQUE 5.4 *Dans l'exemple précédent la paramétrisation de la sphère a été réduite au même dénominateur (normalisation) de sorte que les simplifications données au paragraphe 4.4 (cas rationnel) ont pu s'appliquer. Cette normalisation est nécessaire, sinon des facteurs parasites se trouvent arbitrairement rajoutés lors de l'implicitisation. Considérons en effet l'exemple précédent sans réduction au même dénominateur. Nous donnons la matrice T et l'équation implicite obtenue.*

$$\begin{pmatrix} 4(x-1) & 4y & 4z & -2yz & -4(x-1) & 0 & -4z & -2yz \\ 4y & -4(x+1) & -2yz & 4z(x+1) & 0 & -4(x-1) & -2yz & 4z(x-1) \\ 0 & 0 & 4xz & 2yz & -8x & -4y & 4xz & 2yz \\ 0 & 0 & 2yz & 0 & -4y & 0 & 2yz & 0 \\ 4z & -2yz & -4(x+1) & 0 & -4z & -2yz & 4(x+1) & 4y \\ -2yz & 4z(x+1) & 0 & -4(x+1) & -2yz & 4z(x-1) & 4y & -4(x-1) \\ 4xz & 2yz & -8x & -4y & 4xz & 2yz & 0 & 0 \\ 2yz & 0 & -4y & 0 & 2yz & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = 65536\, y^4 (z-1)^2 (z+1)^2 (x^2+y^2+z^2-1)^2$$

On remarque en particulier que les termes de la matrice T ne sont pas linéaires et qu'ainsi l'équation implicite obtenue est de degré 12 et comporte les 3 facteurs parasites y^4, $(z-1)^2$ et $(z+1)^2$.

- *Sphère 2*

$$x = \frac{2u}{u^2+v^2+1} \qquad y = \frac{2v}{u^2+v^2+1} \qquad z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$$

Nous donnons les points de base de cette paramétrisation. On notera en particulier qu'elle ne comporte aucun point de base *affine.*

T	U	V
0	1	i
0	1	$-i$

Sa matrice $T(x, y, z)$ comporte seulement 3 lignes et 3 colonnes non identiquement nulles.

$$\begin{pmatrix} -4(z+1) & 4y & 4x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4y & 4(z-1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4x & 0 & 4(z-1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et son équation implicite comporte le facteur parasite $(z-1)$:

$$f(x, y, z) = -64\,(z-1)\,(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

• *Sphère 3*

Considérons maintenant la paramétrisation SPPG de type 2 de la sphère proposée dans [17].

$$\begin{aligned} P_1(x, u, v) &= -uv + x \\ P_2(y, u, v) &= u^2v^2 - u^2 + y^2 \\ P_3(z, u, v) &= u^2 + z^2 - 1 \end{aligned}$$

Cette paramétrisation admet le seul point de base à l'infini : $(0, 0, 1)$. Sa matrice $T(x, y, z)$ est de rang 5, mais ses coefficients sont de degré 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & y^2+z^2-1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^2-1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y^2+z^2-1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -(z^2-1) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Son équation implicite comporte les facteurs parasites $(z-1)$ et $(z+1)$:

$$f(x,y,z) = -(z-1)(z+1)(x^2+y^2+z^2-1)^2$$

Ainsi, la première paramétrisation de la sphère contient de nombreux points de base dont plusieurs affines, et pourtant l'équation implicite obtenue ne comporte aucun facteur parasite. A l'inverse, la dernière paramétrisation ne possède qu'un seul point de base non affine et l'équation implicite obtenue comporte deux facteurs parasites. Autrement dit, ces exemples montrent que l'apparition de facteurs parasites n'est pas directement liée à la présence de points de base dans la paramétrisation.

Les facteurs parasites sont souvent introduits par la technique d'implicitisation utilisée. Nous avons donné un tel exemple ci-dessus. Nous verrons plus loin que les méthodes d'élimination successive *Sylvest1* et *Sylvest2* rajoutent quasi-systématiquement de tels facteurs parasites.

5.7 Algorithme généralisé

Nous avons montré sur tous les exemples étudiés qu'à toute surface paramétrée de bi-degrés (n_1, m_1), (n_2, m_2), (n_3, m_3) ou de degré total N_1, N_2, N_3, on pouvait lui associer une matrice carrée dont le déterminant fournissait l'équation implicite cherchée.

Nous proposons donc un algorithme général basé sur les idées suivantes.

1. Chaque SPPG de bi-degrés (n_1, m_1), (n_2, m_2), (n_3, m_3) est considérée comme une SPPG de bi-degré (n, m), où $n = Max(n_1, n_2, n_3)$ et $m = Max(m_1, m_2, m_3)$.

   De la même manière, chaque SPPG de degré total N_1, N_2, N_3 est considérée comme une SPPG de bi-degré (n, n) où $n = Max(N_1, N_2, N_3)$.

   Toutes les surfaces SPPG sont donc considérées comme des surfaces de bi-degré (n, m), conduisant ainsi à une matrice $T(x, y, z)$ d'ordre $2nm$. Cependant, la paramétrisation aura de nombreux monômes absents, de sorte que de nombreuses lignes et colonnes seront identiquement nulles ou linéairement dépendantes.

2. Notre algorithme consiste alors à extraire de cette matrice un mineur de rang r maximum. Cet algorithme sera décrit dans les paragraphes suivants.

La justification correcte de la méthode consisterait ensuite à montrer le résultat suivant (ce travail n'a pas encore été abordé).

PROPOSITION 5.4 *Etant donnée une matrice T définie comme ci-dessus, le PGCD de tous les mineurs non nuls de rang r de cette matrice est non constant et contient en facteur l'équation implicite cherchée.*

En fait, notre expérimentation nous a conduit à proposer la conjecture suivante.

CONJECTURE 5.1 *Etant donnée une matrice T définie comme ci-dessus, tous les mineurs non nuls de rang r de cette matrice sont égaux à un facteur scalaire multiplicatif près.*

REMARQUE 5.5 *Cet algorithme reste valable pour des applications numériques. En effet, l'inspection des coefficients de la matrice T fournira le rang de T et la sous matrice correspondante.*

Avant de décrire l'algorithme général considérons un exemple significatif.

5.7.1 Etude d'un exemple

Reprenons la paramétrisation suivante de degré total $1, 2, 3$.

$$\begin{cases} x = & u - v + 2 \\ y = & uv - u + 2v^2 + v + 1 \\ z = & 2u^3 - u^2v + u^2 - uv + u - 2v + 2 \end{cases}$$

dont la matrice, après réduction, comporte 7 lignes et 6 colonnes non dépendantes deux à deux.

$$\begin{pmatrix} -(x+y-3) & 2(x-z) & x-z & 2(x-2) & 2x+y-5 & 4(x-2) \\ 3x-y-3z+1 & -2(x-1) & x-y-2 & -2(x-3) & 4x-7 & 4 \\ -2(x-2) & -2 & -2(x-3) & -2 & 2 & 0 \\ x+y-3 & 2(x-2) & 3x+2y-8 & 2(2x-5) & 2x-5 & -4 \\ x-y-1 & -2(x-3) & 3x-8 & 6 & -3 & 0 \\ -2(x-2) & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2(x+y-3) & 4(x-2) & 2(x-2) & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cependant, un examen approfondi de cette matrice nous a permis de constater que les lignes (L_3), (L_5), (L_6) et (L_7) étaient liées entre elles.

Plus précisément, on montre que

$$4L_3 + 2L_5 - 2L_6 + L_7 = 0\,.$$

Les 4 déterminants d'ordre 6 obtenus après suppression de l'une de ces 4 lignes sont non identiquement nuls et égaux entre eux à un facteur scalaire près. Nous avons pu vérifier que ces déterminants définissent bien l'équation implicite cherchée :

$$f(x,y,z) = 40x^6 - 468x^5 - 44x^4y + 2432x^4 + 364x^3y - 74x^3z - 6820x^3 + 14x^2y^2 - 1038x^2y + 336x^2z + 10564x^2 - 65xy^2 - 63xyz + 1366xy - 456xz - 8528x - y^3 + 83y^2 + 126yz - 812y + 27z^2 + 52z + 2988\,.$$

Autrement dit, *tous les mineurs non nuls d'ordre* 6 *de cette matrice sont égaux à une constante multiplicative près.*

5.7.2 Rappel : méthode de Bareiss

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un anneau intègre commutatif unitaire R. Dans notre cas $R = \mathbb{R}[x, y, z]$.

Supposons la matrice A inversible, et appliquons lui une réduction de Gauss sans division par le pivot afin de conserver les éléments dans R. Appelons $A^{(k)}$ la matrice obtenue après l'étape k de l'élimination et $A^{(0)} = A$.

1) Etudions les premières étapes

• $k = 1$

A la première étape, la première ligne de $A^{(0)} = A$ reste inchangée.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \dots & \dots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & a_{i,j}^{(1)} & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & \dots & \dots & a_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix}$$

avec :

$$a_{i,j}^{(1)} = a_{1,1}\, a_{i,j} - a_{i,1}\, a_{1,j} \quad \text{pour} \quad 2 \leq i, j \leq n\ .$$

• $k = 2$

A la deuxième étape, les deux premières lignes de $A^{(1)}$ restent inchangées.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & a_{2,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{3,3}^{(2)} & \dots & \dots & a_{3,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & a_{i,j}^{(2)} & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(2)} & \dots & \dots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix}$$

avec :

$$a_{i,j}^{(2)} = a_{2,2}^{(1)}\, a_{i,j}^{(1)} - a_{i,2}^{(1)}\, a_{2,j}^{(1)} \quad \text{pour} \quad 3 \leq i, j \leq n\ .$$

Plus précisément, on montre que :

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(2)} &= (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2})(a_{1,1}a_{i,j} - a_{i,1}a_{1,j}) - (a_{1,1}a_{i,2} - a_{i,1}a_{1,2})(a_{1,1}a_{2,j} - a_{2,1}a_{1,j}) \\ &= a_{1,1}\,(a_{1,1}a_{2,2}a_{i,j} - a_{2,2}a_{i,1}a_{1,j} - a_{2,1}a_{1,2}a_{i,j} - a_{1,1}a_{i,2}a_{2,j} + a_{2,1}a_{i,2}a_{1,j} + a_{i,1}a_{1,2}a_{2,j}), \end{aligned}$$

de sorte que, pour $3 \leq i, j \leq n$, tous les coefficients $a_{i,j}^{(2)}$ de la matrice $A^{(2)}$ sont divisibles dans R par le premier pivot $a_{1,1} = a_{1,1}^{(0)}$.

• $k = 3$

A la troisième étape, les trois premières lignes de $A^{(2)}$ restent inchangées.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2,n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{3,3}^{(2)} & \dots & \dots & \dots & a_{3,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,4}^{(3)} & \dots & \dots & a_{4,n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & a_{i,j}^{(3)} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,4}^{(3)} & \dots & \dots & a_{n,n}^{(3)} \end{pmatrix}$$

avec :

$$a_{i,j}^{(3)} = a_{3,3}^{(2)} a_{i,j}^{(2)} - a_{i,3}^{(2)} a_{3,j}^{(2)} \quad \text{pour} \quad 4 \leq i,j \leq n \ .$$

Puis, en utilisant les relations précédentes, on montre que :

$$a_{i,j}^{(3)} = a_{1,1}^{(0)} a_{2,2}^{(1)} \tilde{a}_{i,j}^{(3)} \quad \text{pour} \quad 4 \leq i,j \leq n \ ,$$

de sorte que, pour $4 \leq i,j \leq n$, tous les coefficients $a_{i,j}^{(3)}$ de la matrice $A^{(3)}$ sont divisibles dans R par les deux premiers pivots $a_{1,1}^{(0)}$ et $a_{2,2}^{(1)}$.

2) Propriété générale

PROPOSITION 5.5 *Après l'étape k ($k > 1$), tous les termes $a_{i,j}^{(k)}$ pour $k+1 \leq i,j \leq n$, sont divisibles dans R par les $k-1$ premiers pivots $a_{1,1}^{(0)}$, $a_{2,2}^{(1)}$,..., $a_{k-1,k-1}^{(k-2)}$.*

Preuve. Nous avons vérifié cette propriété pour $k = 2,3$. Supposons cette propriété vraie au rang k ($k > 2$). Ainsi, pour $k+1 \leq i,j \leq n$, chaque $a_{i,j}^{(k)}$ est divisible par $a_{1,1}^{(0)}$, $a_{2,2}^{(1)}$,..., $a_{k-1,k-1}^{(k-2)}$.

Explicitons l'élimination à l'étape $k+1$:

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{k+1,k+1}^{(k)} a_{i,j}^{(k)} - a_{i,k+1}^{(k)} a_{k+1,j}^{(k)} \quad \text{pour} \quad k+2 \leq i,j \leq n \ .$$

Ces termes $a_{i,j}^{(k+1)}$ sont divisibles dans R par chacun des $k-1$ premiers pivots car les $a_{i,j}^{(k)}$ le sont pour $k+1 \leq i,j \leq n$ d'après l'hypothèse de récurrence. Il reste à vérifier la divisibilité par le pivot $a_{k,k}^{(k-1)}$.

En utilisant les relations à l'ordre précédent, on montre que :

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(k+1)} &= a_{k+1,k+1}^{(k)} a_{i,j}^{(k)} - a_{i,k+1}^{(k)} a_{k+1,j}^{(k)} \\ &= (a_{k,k}^{(k-1)} a_{k+1,k+1}^{(k-1)} - a_{k+1,k}^{(k-1)} a_{k,k+1}^{(k-1)})(a_{k,k}^{(k-1)} a_{i,j}^{(k-1)} - a_{i,k}^{(k-1)} a_{k,j}^{(k-1)}) \\ &\quad -(a_{k,k}^{(k-1)} a_{i,k+1}^{(k-1)} - a_{i,k}^{(k-1)} a_{k,k+1}^{(k-1)})(a_{k,k}^{(k-1)} a_{k+1,j}^{(k-1)} - a_{k+1,k}^{(k-1)} a_{k,j}^{(k-1)}) \end{aligned}$$

et on vérifie que les termes ne contenant pas $a_{k,k}^{(k-1)}$ s'annulent entre eux, ce qui permet d'écrire :

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{1,1}^{(0)}\, a_{2,2}^{(1)} \ldots a_{k-1,k-1}^{(k-2)}\, a_{k,k}^{(k-1)}\, \tilde{a}_{i,j}^{(k+1)} \quad \text{pour} \quad k+2 \leq i,j \leq n\,.$$

□

3) Algorithme

La méthode de Bareiss consiste à diviser à chaque étape k de l'élimination ($k \geq 2$), tous les termes $a_{i,j}^{(k)}$, ($k+1 \leq i,j \leq n$), par le pivot précédent $a_{k,k}^{(k-1)}$, de sorte que la matrice finale s'écrit avec les notations précédentes :

$$A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & 0 & \tilde{a}_{3,3}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & \tilde{a}_{3,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & 0 & \tilde{a}_{4,4}^{(3)} & \cdots & \cdots & \tilde{a}_{4,n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{n,n}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 5.6 *La matrice A étant inversible, on a : $det(A) = \tilde{a}_{n,n}^{(n-1)}$. Autrement dit, le dernier pivot obtenu par cette méthode d'élimination est égal au déterminant de la matrice initiale A.*

La preuve de cette proposition peut être trouvée dans Bareiss [7].

5.7.3 Algorithme Généralisé

La paramétrisation donnée est considérée comme une paramétrisation de bi-degré (n,m), de sorte que l'on obtient une matrice carrée T d'ordre $N = 2nm$ (comme indiqué au chapitre 4), à coefficients polynomiaux dans $K[x,y,z]$.

Dans le cas général, la matrice T n'est pas inversible. L'algorithme proposé est une adaptation de celui de Bareiss au cas où la matrice est non inversible, pour le calcul d'un mineur de rang maximal.

L'algorithme consiste à ignorer les lignes et colonnes identiquement nulles et à effectuer une réduction de Gauss par la méthode de Bareiss sur la sous matrice $A(k)$ restant à traiter à chaque étape k. Autrement dit, à chaque étape k, il s'agit de déterminer un pivot non nul par permutation de lignes ou de colonnes. Si celà n'est pas possible, on passe à l'étape $k+1$. Si un pivot non nul a pu être trouvé, la sous matrice $A(k)$ subira une réduction de Gauss avec division par le dernier pivot non nul. Cette division par le pivot précédent n'a pas lieu lors de la première étape de réduction (c'est-à-dire, lorsque le premier pivot non nul est trouvé). L'indice de ligne du dernier pivot est stocké dans la variable Num. Chaque fois qu'un pivot non nul a été trouvé, la variable Num est mise à jour.

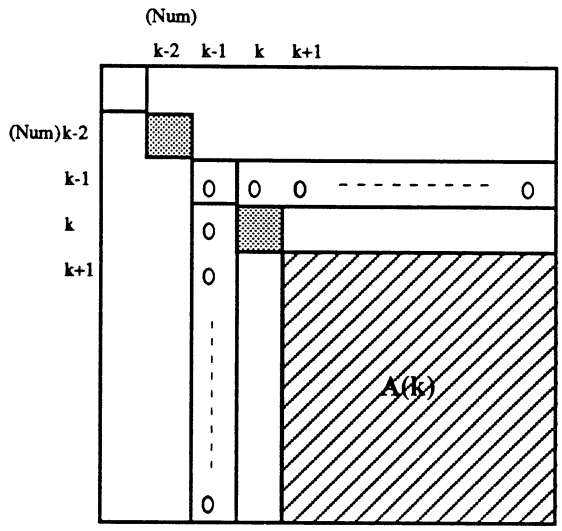


FIGURE 5.1

Nous donnons maintenant l'algorithme.

ENTREE : Trois polynômes $P_i(x, y, z, u, v)$, $i = 1, 2, 3$.

Construction de la matrice $T(x, y, z)$ *avec :*

n = MAX des degrés en u des P_i

m = MAX des degrés en v des P_i

$N \leftarrow 2nm$

Réduction : extraction d'un mineur de T de rang maximal

$Num \leftarrow 0$

POUR $k = 1$ JUSQU'A N FAIRE

DEBUT

Si le pivot courant est nul **Alors**

Début *(recherche pivot)*

Recherche d'un pivot non nul sous la diagonale

Si Pivot non nul trouvé **Alors**

Permutation des lignes correspondantes

Sinon

Recherche d'un pivot non nul à droite de la diagonale

Si Pivot non nul trouvé **Alors**

Permutation des colonnes correspondantes

Fin *(recherche pivot)*

Si Pivot non nul trouvé **Alors**

Début *(réduction)*

Pour $k + 1 \leq i, j \leq N$ **Faire**

Début

$T_{i,j} \leftarrow T_{k,k} T_{i,j} - T_{i,k} T_{k,j}$

Si $Num > 0$ **Alors**

$T_{i,j} \leftarrow T_{i,j} / T_{Num,Num}$

Fin

$Num \leftarrow k$

Fin *(réduction)*

Sinon *(ligne et colonne identiquement nulle)*

Passage à l'étape suivante (i.e., k suivant)

FIN

Equation implicite : contenue en facteur dans le dernier pivot non nul (a) (b)

SORTIE : $T_{Num,Num}$

(a) l'expérimentation montre, qu'en général, on obtient l'équation implicite,

(b) l'inversion (cf. chapitre 6) peut permettre d'identifier le bon facteur.

5.7.4 Programme Reduce

Nous donnons le programme *Reduce* complet correspondant à l'algorithme décrit ci-dessus.

```
%*****************************************
%  P1,P2,P3 sont des polynomes en X,Y,Z,u,v.
%*****************************************
PROCEDURE IMPLICITGENERAL(P1,P2,P3);
BEGIN
  n := MAX(DEG(P1,u),DEG(P2,u),DEG(P3,u));
  m := MAX(DEG(P1,v),DEG(P2,v),DEG(P3,v));

%-----------------------------------
% 1) Determinant delta = F(u,v,u0,v0)
%-----------------------------------
  matrix F(3,3)$
  F(1,1) := P1;
  F(1,2) := P2;
  F(1,3) := P3;

  for j := 1 : 3 do
    F(2,j) := sub(v=v0,F(1,j));
  for j := 1 : 3 do
    F(3,j) := sub(u=u0,F(2,j));
  dt := det(F)/((u-u0)*(v-v0));

%--------------------------------
% 2) Remplissage de la matrice TT
%--------------------------------
  Ord := 2*n*m;
  matrix TT(Ord+1,Ord+1)$
  matrix TTR(1,1)$

  for i:=0 :(2*n-1) do
  begin
    factu := coeffn(dt,u,i);
    for j:=0 :(m-1) do
```

```
    begin
      factv := coeffn(factu,v,j);
      for k:=0 :(n-1) do
      begin
        factu0 := coeffn(factv,u0,k);
        for l:=0 :(2*m-1) do
       begin
      factv0 := coeffn(factu0,v0,l);
      ii := 2*m*k + l + 1;
      jj := m*i + j + 1;
         TT(ii,jj) := factv0;
    end;
      end;
    end;
  end;

%--------------
% 3) Reduction
%--------------
Num := 0;

for k:=1 :Ord do
begin
  pivot := 1;
  if TT(k,k) = 0 then
  begin
    pivot := 0;
    %% Recherche d'un pivot (non nul) sous la diagonale
    ii := k+1;
    while (TT(ii,k) = 0) and (ii <= Ord) do
      ii := ii+1;
    if ii <= Ord then
    begin
      pivot := 1;
      %% Permutation des lignes k et ii
      for jj:=k :Ord do
      begin
```

```
        aux := TT(k,jj);
        TT(k,jj) := TT(ii,jj);
        TT(ii,jj) := aux;
      end;
    end;
    %% Recherche d'un pivot (non nul) a droite de la diagonale
    if pivot = 0 then
    begin
      jj := k+1;
      while (TT(k,jj) = 0) and (jj <= Ord) do
        jj := jj+1;
      if jj <= Ord then
      begin
        pivot := 1;
        %% Permutation des colonnes k et jj
        for ii:=k :Ord do
        begin
          aux := TT(ii,k);
          TT(ii,k) := TT(ii,jj);
          TT(ii,jj) := aux;
        end;
      end;
    end;
  end;
  %% Reduction si pivot non nul
  if pivot = 1 then
  begin
    for ii:=(k+1) :Ord do
      for jj :=(k+1) :Ord do
      begin
        TT(ii,jj) := - TT(ii,k) * TT(k,jj) + TT(k,k) * TT(ii,jj);
        if Num > 0 then
          TT(ii,jj) := TT(ii,jj) / TT(Num,Num);
      end;
    Num := k;
  end;
end;
```

```
%-----------------------
% 4) Equation implicite
%-----------------------
  Equa := TT(Num,Num);
  Eqf  := factorize(Equa);
  return(Eqf);
END;

END;
```

5.7.5 Remarque importante

Il est à noter que l'algorithme général donné ci dessus devient très vite coûteux lorsque les degrés augmentent. En effet, cet algorithme ne fait pas appel à la fonction *déterminant* de la bibliothèque *Reduce*. Le sous déterminant recherché est calculé itérativement. Or, à chaque étape de la réduction, la complexité des coefficients croît très rapidement.

Pour pallier momentanément à cet inconvénient nous avons mis au point trois algorithmes.

- Le premier algorithme est celui de Dixon donné au paragraphe 4.5 qui fonctionne correctement pour une paramétrisation de bi-degré (n, m) où (presque) tous les monômes sont présents.

- Le deuxième algorithme est un intermédiaire entre le premier algorithme et l'algorithme général. Dans cet algorithme nous construisons la matrice $T(x, y, z)$ comme dans l'algorithme général, c'est-à-dire en considérant la paramétrisation donnée comme une bi-degré. Puis, nous recherchons les lignes et colonnes identiquement nulles ainsi que les dépendances *deux à deux* entre les lignes et les colonnes. Si après suppression des lignes et colonnes inutiles la sous matrice obtenue est carrée, nous calculons son déterminant. Celui ci peut néanmoins être identiquement nul. S'il ne l'est pas, il nous fournit alors l'équation implicite.

Bien qu'incomplet, cet algorithme est très utile car il permet d'obtenir l'équation implicite dans de très nombreux cas. Par ailleurs, cet algorithme est très rapide car il utilise la fonction *déterminant* de la bibliothèque *Reduce*.

- Le troisième algorithme est l'algorithme général donné dans cette section. Nous ne sommes pas encore en mesure de justifier complètement cet algorithme. Néanmoins, sur tous les exemples traités, il nous a fournit l'équation implicite cherchée.

5.8 Comparaison avec d'autres méthodes

Nous avons comparé les résultats avec ceux obtenus par les deux méthodes duales de Sylvester : *Sylvest1* et *Sylvest2* (cf. chapitre 3) et ceux obtenus par les bases de Gröbner. Pour la comparaison avec les bases de Gröbner nous avons repris les exemples donnés par Buchberger et Bronstein (sphère).

Nous nous sommes principalement intéressé à l'apparition de facteurs parasites lors du processus d'implicitisation.

- *Méthode de Sylvester*

Les résultats sont présentés dans la table suivante où les équations algébriques obtenues ont été factorisées dans $Q[x, y, z]$. L'équation implicite cherchée de la surface est notée $F_d = F_d(x, y, z)$, où d est le degré total du polynôme $F_d(x, y, z)$. Les facteurs parasites sont notés $P_r = P_r(x, y, z)$ où r est le degré du polynôme $P_r(x, y, z)$.

Lorsqu'ils fonctionnent, les deux premiers algorithmes de la remarque 5.7.5 sont en général trois fois plus rapides que celui de Sylvester. Cependant, lorsqu'il est nécessaire d'avoirs recours à l'algorithme général, les temps deviennent alors comparables.

Les exemples donnés ont été traités avec *Reduce* sur une station Sun3. Dans certains cas nous n'avons pu obtenir l'équation implicite par la méthode de Sylvester (Head Space Low : *HSL*).

Surface Paramétrée	Bi-degree	*Dixon*	*Sylvest1*	*Sylvest2*
$1-u+uv-3v^2+u^2v$ $2-u-uv^2+u^2v^2$ $-1+6u-uv-u^2-2v^2$	$(2,2)$	F_8	*HSL*	*HSL*
$1+u+v+uv$ $2+uv+u^2$ $-1+uv^2$	$(2,2)$	F_5	P_6F_5	$(y-2)^2F_5$
$1+u+v+uv^2+u^2v^2$ $uv-v^2-2u^2v$ $3+uv^2-u^2v$	$(2,2)$	F_7	*HSL*	*HSL*
$1-u+v-2uv+u^2-v^2$ $-1+2u-v+uv+2u^2+v^2$ $3-u-v+2uv-u^2+2v^2$	$(2,2)$	F_4	F_4P_4	F_4P_4
$1+u+2uv-v^3$ $-2+uv^3$ $5-u-uv+uv^2+v^3$	$(1,3)$	F_6	$(y+2)^3F_6$	*HSL*
$1+u^3$ $1+v^3$ $(1+u^3)(1+v^3)$	$(3,3)$	$(xy-z)^9$	*HSL*	$(xy-z)^{27}$
$1+u+v^3$ $1+u^3+v$ $-1+u^2v^2$	$(3,3)$	F_{12}	*HSL*	*HSL*

Plus généralement, sur tous les exemples considérés, les paramétrisations polynomiales traitées par l'algorithme général conduisent à une équation implicite sans facteur parasite. Le cas des paramétrisations non fidèles étant bien sûr particulier.

• *Bases de Gröbner*

Considérons l'exemple proposé par Buchberger [20].

$$\begin{cases} x = & uv \\ y = & uv^2 \\ z = & u^2 \end{cases}$$

L'évaluation des bases de Gröbner fournit l'équation implicite : x^4-y^2z. Par ailleurs nous obtenons :

Gröbner	*Dixon*	*Sylvest1*	*Sylvest2*
$x^4 - y^2z$	$x^4 - y^2z$	$-y^4(x^4 - y^2z)$	$-z^2(x^4 - y^2z)^2$

• *Exemple rationnel*

Considérons maintenant la paramétrisation suivante de la sphère :

$$x = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,\frac{1-v^2}{1+v^2} \qquad y = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,\frac{2v}{1+v^2} \qquad z = \frac{2u}{1+u^2}$$

pour laquelle nous obtenons :

Gröbner	*Dixon*	*Sylvest1*	*Sylvest2*
$(z-1)(z+1)$ $(x^2+y^2+z^2-1)$	$(x^2+y^2+z^2-1)^2$	$y^8(z-1)^4(z+1)^4$ $(x^2+y^2+z^2-1)^4$	$(z-1)^4(z+1)^4$ $(x^2+y^2+z^2-1)^4$

Chapitre 6

Le problème de l'inversion

Dans ce chapitre, nous considérons le problème de l'inversion. La méthode d'implicitisation est celle décrite au chapitre 5. Etant donnée une surface paramétrée rationnelle (S), nous appellerons $f(x,y,z) = 0$ son équation implicite et (S') la surface algébrique ainsi définie. On rappelle que $S \subset S'$. L'équation implicite $f = 0$ est obtenue comme le déterminant d'une matrice carrée $T(x,y,z)$.

Nous nous plaçons dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, nous considérons une surface paramétrée à paramètres réels non projectifs. Dans le cas général nous aurons donc $S \neq S'$. Dans un premier temps, nous cherchons à établir des critères permettant de décider si un point de la surface implicite (S') appartient ou non à la surface rationnelle (S). Cette étude est purement ensembliste et s'appuie sur le système homogène associé à la matrice T. Nous proposons ensuite une méthode d'inversion qui sera reprise dans le contexte numérique du chapitre 9.

6.1 Réciproque ensembliste

Nous nous intéressons à la réciproque ensembliste de la proposition 4.3 du chapitre 4 dont nous rappelons ci-dessous le résultat avec $K = \mathbb{R}$. Nous reprenons par ailleurs

toutes les notations du chapitre 4.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (S) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \exists (u,v) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que} \\ P_i(M,u,v) = 0 \text{ pour } i = 1,2,3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \quad (a)$$

$$\begin{pmatrix} \exists (u,v) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que} \\ \delta_i(u,v,M,a,b) = 0 \\ \text{pour } i = 1,2 \text{ et pour tout } a,b \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \exists (u,v) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que} \\ T_i(M).\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{i(n,m)} = 0 \\ \text{pour } i = 1,2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \quad (b)$$

$$(det(T_1) = det(T_2) = f(x,y,z) = 0) \quad \Longleftrightarrow \quad M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (S')$$

Autrement dit, étant donné un point $M(x,y,z)$ de la surface (S'), peut-on déterminer si ce point appartient ou non à la surface rationnelle (S) donnée initialement.

D'un point de vue ensembliste, ce problème consiste donc à examiner les deux implications de cette proposition. Considérons donc un point de la surface implicite (S') et regardons s'il est possible de déterminer des critères permettant de décider si ce point est élément de la surface rationnelle (S).

- *Etape 1 : implication (b)*

Soit $\overline{M}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ un point de la surface algébrique (S'). Nous raisonnons sur la matrice T_1 (c'est-à-dire sur δ_1) que l'on appelle T. Le raisonnement est analogue pour la matrice T_2. Notons $\overline{T}$ la matrice numérique $T(\overline{M})$. On a alors $det(\overline{T}) = 0$, autrement dit, le système homogène, $\overline{T}X = 0$, avec $X \in \mathbb{R}^N$ admet au moins une droite vectorielle solution. Si l'une de ces solutions peut s'écrire sous la forme $\begin{bmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{bmatrix}_{(n,m)}$ pour des valeurs $\overline{u}$ et $\overline{v}$ réelles des paramètres de la surface, alors le point $\overline{M}$ est susceptible d'appartenir à la surface rationnelle (S). Sinon, il ne peut pas appartenir à (S).

Bien évidemment, la question posée par cette réciproque est à rapprocher de celles posées dans le paragraphe 3.2 à propos des méthodes de Sylvester et de Cayley.

Regardons maintenant l'implication suivante (dans le sens de la réciproque).

• *Etape 2 : implication (a)*

Soit $\overline{M}$ un point de la surface (S') pour lequel il existe des réels $\overline{u}$ et $\overline{v}$ tel que l'on ait :

$$T_i(M).\begin{bmatrix}\overline{u}\\ \overline{v}\end{bmatrix}_{i(n,m)} = 0 \quad \text{pour } i = 1,2.$$

Ce point appartient-il à la surface paramétrée (S) ?

Ainsi, à l'aide de la proposition 4.3, nous pouvons poser la réciproque de cette implication de la manière suivante.

Soit $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{M}$ tels que

$$\delta_i(\overline{u},\overline{v},\overline{M},a,b) = 0 \ \textit{pour tout } a,b \quad (i = 1,2)\ .$$

Peut-on en déduire que

$$P_1(\overline{M},\overline{u},\overline{v}) = P_2(\overline{M},\overline{u},\overline{v}) = P_3(\overline{M},\overline{u},\overline{v}) = 0$$

c'est-à-dire que le point $\overline{M}$ appartient à la surface rationnelle (S) ?

La réponse à cette réciproque dépend de la paramétrisation de la surface rationnelle donnée. Autrement dit, si la paramétrisation considérée n'est pas *minimale* (dans un sens à préciser!), cette réciproque peut être fausse.

Considérons par exemple la paramétrisation suivante :

$$x = uv\ , \quad y = uv^2\ , \quad z = u^2v^3\ . \tag{34}$$

La surface ainsi définie admet l'équation implicite $z - xy = 0$ et peut être reparamétrée plus simplement par $x = u$, $y = v$ et $z = uv$.

La paramétrisation (34) conduit aux expressions suivantes :

$$\Delta_1(u,v,M,a,b) = (a-u)(b-v)\begin{vmatrix} uv-x & uv^2-y & u^2v^3-z \\ u & u(b+v) & u^2(b^2+bv+v^2) \\ b & b^2 & b^3(a+u)\end{vmatrix},$$

et

$$\Delta_2(u,v,M,a,b) = (a-u)(b-v)\begin{vmatrix} uv-x & uv^2-y & u^2v^3-z \\ v & v^2 & v^3(a+u) \\ a & a(b+v) & a^2(b^2+bv+v^2)\end{vmatrix},$$

de sorte que, pour $\overline{u} = \overline{v} = 0$, et pour n'importe quel point $\overline{M}$ de $\mathbb{R}^3$ les polynômes $\delta_1(0,0,\overline{M},a,b)$ et $\delta_2(0,0,\overline{M},a,b)$ sont identiquement nuls en a et b. Ce qui montre que la réciproque de l'implication (a), telle que nous l'avons établi ci-dessus, est fausse.

Un exemple

Considérons la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x = & uv - u \\ y = & uv^2 - 2uv + u \\ z = & v^2 - 2v + 1 \end{cases}, \tag{35}$$

pour laquelle nous obtenons la matrice $T(x,y,z)$ d'ordre 4 suivante :

$$\begin{pmatrix} 2x+2y & -x-y & -z+1 & z-1 \\ -5x-3y & 2x+y & z-3 & -z+3 \\ 4x+y & -x & 3 & -3 \\ -x & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux dernières colonnes de cette matrice sont opposées. Par ailleurs, on peut remarquer que la somme des 4 lignes est nulle. Cette matrice est en fait de rang 3, et fournit l'équation implicite

$$x^2z - y^2 = 0\,.$$

Appelons (S') la surface algébrique d'équation $x^2z - y^2 = 0$. Cette équation est le déterminant de la sous matrice d'ordre 3, obtenue par suppression de la dernière ligne et dernière colonne, de sorte que, l'inversion consiste ensuite à résoudre le système suivant, pour des points $M(x,y,z)$ de la surface (S').

$$\begin{pmatrix} 2x+2y & -x-y & -z+1 \\ -5x-3y & 2x+y & z-3 \\ 4x+y & -x & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ u \end{pmatrix} = 0\,.$$

La surface implicite (S') d'équation $x^2z - y^2 = 0$ contient l'axe des x, tandis que la surface paramétrée (S) définie par (35) ne le contient pas. Nous considérons ici que des paramètres réels non projectifs.

Considérons par exemple le point $A(1,0,0)$. Ce point appartient à (S') et n'appartient pas à (S). Cherchons néanmoins à résoudre le problème de l'inversion pour ce point A. Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ u \end{pmatrix} = 0 .$$

Ce système fournit la solution $\overline{u} = -1$ et $\overline{v} = 1$. Autrement dit, l'étape 1 (*implication (a)*), c'est-à-dire l'inversion, n'a pas permis de déceler que le point A n'appartenait pas à la surface (S). Cependant, il est toujours possible d'évaluer les fonctions $x(u,v)$, $y(u,v)$ et $z(u,v)$ pour les valeurs trouvées $\overline{u}$ et $\overline{v}$ des paramètres, afin de comparer les valeurs obtenues avec les coordonnées du point initial.

Dans notre cas, cette vérification conduit à :

$$x(-1,1) = 0 , \quad y(-1,1) = 0 , \quad z(-1,1) = 0 ,$$

qui ne redonne pas le point initial A.

Résumé

Etant donné un point de la surface algébrique (S'), il est toujours possible de déterminer si ce point appartient ou non à la surface rationnelle (S) donnée initialement. Pour celà, nous cherchons d'abord à résoudre la question de l'inversion pour ce point. Si aucune solution du système homogène $\overline{T}.X = 0$ ne peut s'écrire sous la forme $\begin{bmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{bmatrix}_{(n,m)}$ pour des valeurs $\overline{u}$ et $\overline{v}$ réelles des paramètres de la surface, alors le point n'appartient pas à (S). Sinon, si de telles valeurs $\overline{u}$ et $\overline{v}$ existent, nous évaluons les fonctions $x(u,v)$, $y(u,v)$ et $z(u,v)$ pour ces valeurs des paramètres afin de conclure si le point appartient ou non à (S).

6.2 Quelques exemples

Considérons la définition suivante.

DÉFINITION 6.1 *Considérons une surface SPPG (S) définie par une paramétrisation (P_1, P_2, P_3) et soit $f(x,y,z) = 0$ son équation implicite. Si pour tout point $M(x,y,z)$ de la surface algébrique de K^3 définie par l'équation $f = 0$, il existe $(u,v) \in K^2$ tel que $P_i(M,u,v) = 0$ pour $i = 1,2,3$, la surface (S) est dite K-complète.*

Nous étudions quelques exemples pour lesquels nous cherchons à résoudre le problème de l'inversion en paramètres affines.

L'exemple de la sphère

• Considérons la deuxième paramétrisation de la sphère donnée au paragraphe 5.6. Sa matrice T correspond au système :

$$\begin{pmatrix} z+1 & y & x \\ y & z-1 & 0 \\ x & 0 & z-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ u \end{pmatrix} = 0$$

qui pour $z \neq 1$ conduit à :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ u = \frac{x}{1-z} \\ v = \frac{y}{1-z} \end{cases}$$

Pour $z = 1$, (ce qui correspond au point $(0,0,1)$ de la sphère) on obtient le système :

$$\begin{cases} xu + yv + 2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

qui n'admet aucune solution. Ainsi, le problème de l'inversion n'est pas résoluble et la paramétrisation donnée n'est ni $\mathbb{R}$-complète, ni C-complète.

• Considérons maintenant la paramétrisation SPPG de type 2 de la sphère donnée dans ce même paragraphe 5.6. Sa matrice T est associée au système suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & y^2+z^2-1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & z^2-1 & x & 0 \\ y^2+z^2-1 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & -1 \\ -(z^2-1) & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ u^2v \\ u^3 \\ u^3v \end{pmatrix} = 0$$

qui conduit pour $z^2 \neq 1$ aux solutions en u et v :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1-z^2} \\ v &= \frac{x}{\sqrt{1-z^2}} \end{aligned}$$

compatibles avec le système pourvu que x, y, z vérifient l'équation $x^2+y^2+z^2=1$.

Pour $z^2 = 1$, c'est-à-dire pour les points $(0,0,1)$ et $(0,0,-1)$ de la sphère, nous obtenons la solution $u = 0$, alors que v n'est pas déterminé. Le système admet donc des solutions, ce qui nous fait dire que cette paramétrisation est $\mathbb{R}$-complète (et donc C-complète).

Le cas des paramétrisation non fidèles

• *Exemple 1*

Reprenons la paramétrisation non fidèle :

$$x = u^2 \qquad y = v^2 \qquad z = u^2v^2$$

Sa matrice T associée est de rang 8 et conduit après simplification au système

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ b^2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & u^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -z & y \\ x & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

pour lequel des solutions existent dans C pourvu que le système

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} -z & y \\ x & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

issu de la paramétrisation fidèle $x = u,\ y = v,\ z = uv$ en ait.

REMARQUE 6.1 *Pour les paramétrisations de bi-degré* $(1,1)$ *ou de degré total* 1, *conduisant ainsi à une matrice* $T(x,y,z)$ *d'ordre* 2, *il est nécessaire de considérer les deux expressions* δ_1 *et* δ_2 *pour résoudre le problème de l'inversion par la méthode des matrices.*

• *Exemple 2*

Considérons maintenant la paramétrisation rationnelle non fidèle suivante :

$$x = \frac{v+1}{u^2+v^2+1} \qquad y = \frac{u^2+v}{u^2+v^2+1} \qquad z = \frac{u^2+1}{u^2+v^2+1}$$

Montrons que *cette surface n'est pas* $\mathbb{R}$*-complète.*

La matrice T associée à cette paramétrisation est d'ordre 8 et conduit après simplification au système

$$\begin{pmatrix} 2(z-1) & x+y-z \\ x+y-z & -x+y-z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = 0$$

qui pour $x+y-z \neq 0$ et $-x+y-z \neq 0$ admet les solutions :

$$u = \frac{-2(z-1)}{x+y-z}$$
$$v = \frac{-(x+y-z)}{-x+y-z}$$

pourvu que x, y, z vérifient l'équation

$$f(x,y,z) = (x^2+2xy-2x+y^2-4yz+2y+3z^2-2z)^2 .$$

Puis, pour les points $M(x,y,z)$ appartenant simultanément à la surface algébrique (S) d'équation $f(x,y,z)=0$, et à la droite Δ définie par $x+y-z=0$ et $-x+y-z=0$, (définie aussi par $x=0$ et $y=z$), le sytème n'admet pas de solution en u, v.

On peut vérifier que la droite Δ est contenue dans la surface algébrique *réelle* (S) alors qu'elle ne l'est pas dans la surface rationnelle *réelle.*

6.3 Méthode d'inversion en calcul numérique

Nous conservons les notations précédentes. Soit $\overline{M}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ un point de la surface algébrique (S'). Notons $\overline{T}$ la matrice numérique définie par $\overline{T} = T(\overline{M})$. On a ainsi

$rang(\overline{T}) \leq N-1$, où N est l'ordre de la matrice $\overline{T}$, de sorte que le noyau de la matrice $\overline{T}$ contient au moins une droite vectorielle.

Considérons maintenant plus précisément le cas où $rang(\overline{T}) = N-1$ et supposons que le système homogène $\overline{T}.X = 0$ admette une solution de la forme $\begin{bmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{bmatrix}_{(n,m)}$, pour des valeurs $\overline{u}$ et $\overline{v}$ réelles. Dans ce cas nous nous référerons au système $\overline{T}.\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{(n,m)} = 0$, où les inconnues sont les paramètres u et v. Nous appliquons une élimination de Gauss avec permutation des lignes, mais sans permutation des colonnes, afin de trianguliariser la matrice $\overline{T}$. Le vecteur inconnu $\begin{bmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{bmatrix}_{(n,m)}$ restera ainsi inchangé.

PROPOSITION 6.1 *Avec les hypothèses ci-dessus, si* $rang(\overline{T}) = N-1$, *alors le système* $\overline{T}.\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{(n,m)} = 0$, *où l'ordre des colonnes a été renversé, se triangularise sous la forme suivante :*

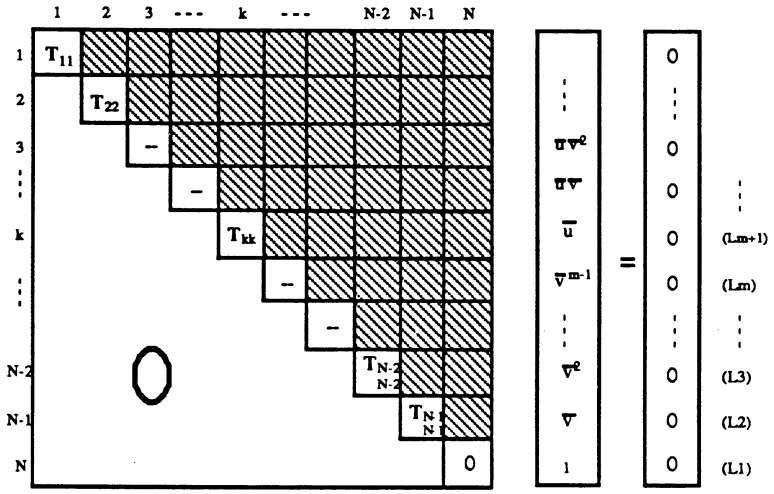


FIGURE 6.1

où $T_{kk} \neq 0$ *pour* $k = 1, 2, ..., N-1$ *(*$N = 2nm$*).*

En d'autres termes, dans une élimination de Gauss sans permutation des colonnes, le pivot nul est repoussé en dernière position.

Preuve. Soit k $(1 \leq k \leq N)$ l'indice du premier pivot nul rencontré dans l'élimination de Gauss sans permutation des colonnes. Nous voulons montrer que $k = N$. Supposons que $k < N$. Après l'étape $k-1$, le système initial est donc équivalent au système de la figure 6.2. Notons F la sous matrice d'ordre $f = N-k+1$, non encore traitée par l'élimination de Gauss à ce stade de l'élimination. La première colonne de cette matrice est identiquement nulle.

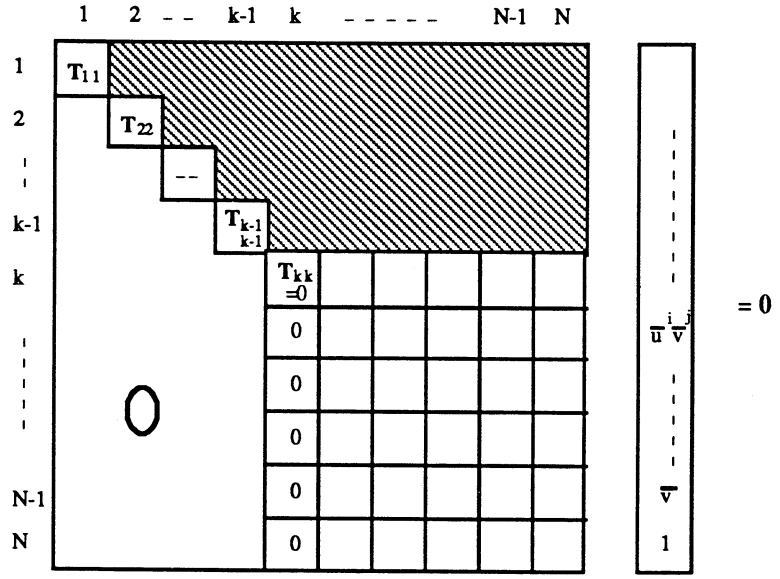


FIGURE 6.2

Puis, puisque $rang(\overline{T}) = N-1$, la matrice F est de rang $f-1 = N-k$. Ainsi, on peut extraire de F une sous matrice E de rang maximal par suppression d'une ligne de F. A la matrice E correspond le système homogène :

$$E. \begin{pmatrix} \vdots \\ \overline{v} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{avec} \quad det(E) \neq 0 \,,$$

ce qui est impossible. □

Partie III

Chapitre 7

Lancer de Rayons

7.1 Méthodes en synthèse d'images

La visualisation réaliste d'objets tridimensionnels implique le choix d'un modèle de représentation d'objets et d'un processus de visualisation (ensemble des algorithmes permettant de générer l'image proprement dite).

7.1.1 Modélisation géométrique

On peut globalement classer les différentes méthodes de modélisation de solides en quatre types principaux [18] :

1. Modélisation par énumération spatiale (voxels).

   Le solide est représenté par subdivision hiérarchique de l'espace en éléments cubiques de taille décroissante qui définissent l'intérieur du solide.

2. Modélisation C.S.G. (Constructive Solid Geometry).

   Les solides sont modélisés par union, intersection ou différence de solides primitifs (cube, sphère, cylindre, tore, etc ...).

3. Modèles frontières (Boundary Representation).

   Le solide est défini par l'ensemble de ses surfaces frontières, celles ci pouvant être des facettes planes ou des surfaces plus complexes (Bezier, B-spline, ...).

4. Modélisation par déplacement de contour et extrusion.

   Le solide est représenté par une primitive (contour) et une trajectoire sur laquelle est déplacé ce contour, les déplacements principaux étant la translation et la rotation.

Une autre classification consiste à distinguer les modèles volumiques des modèles surfaciques.

7.1.2 Algorithmes de visualisation

Nous distinguons trois classes d'algorithmes de visualisation en fonction du réalisme recherché.

- Le premier type de visualisation est le plus classique. Il s'applique aux scènes polyédriques et ne tient compte que de l'éclairage direct par les sources lumineuses. Ces algorithmes ne manipulent que des facettes planes. Ils sont donc très simples et par là même très rapides (simulation de vol,...).

- Le deuxième type d'algorithme de visualisation est le *lancer de rayons* qui permet un réalisme plus important. Le modèle d'éclairement est proche de la physique et permet de prendre en compte les réfractions et réflexions multiples. Ce modèle introduit un terme *ambiant* qui représente une approximation de la composante diffuse globale.

- Dans la troisième classe d'algorithmes sont les modèles globaux qui permettent de prendre en compte toutes les interactions entre les objets d'une scène. Ces algorithmes permettent donc de calculer la composante diffuse globale en chaque point de la scène.

Nous nous intéresserons plus particulièrement au lancer de rayons dans le paragraphe suivant. Les modèles globaux ne sont pas l'objet de notre travail. Précisons maintenant comment structurer les algorithmes du premier type. On distingue généralement deux parties : l'élimination des parties cachées et la procédure d'éclairage.

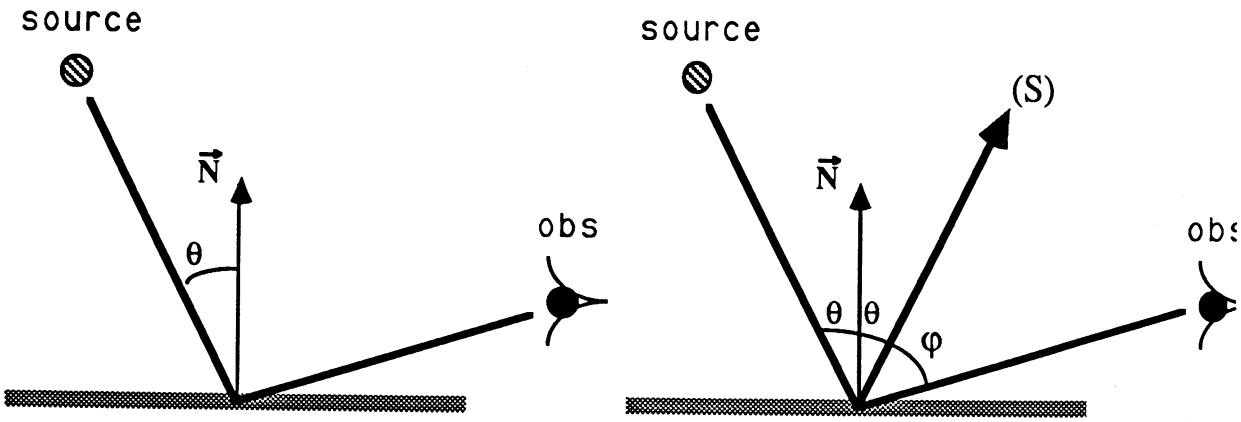
L'élimination des parties cachées

Les méthodes sont déjà anciennes. Les différents algorithmes s'assimilent à un tri des facettes [69]. Nous citons :

- Le Z-Buffer : Une mémoire tampon (le Depth-Buffer) de taille identique à la mémoire image stocke pour chaque pixel les informations de profondeur.
- Scan-line (cohérence) : L'écran est balayé ligne par ligne. L'intersection du plan de balayage avec les facettes de la scène définit un ensemble de segments. Plusieurs méthodes existent pour trier les segments visibles [15,76] dont certaines utilisent la cohérence entre les plans successifs de balayage.

La procédure d'éclairage

Cette procédure doit simuler les effets de la lumière. Les modèles les plus courants ne prennent en compte que la diffusion (loi de Lambert) qui caractérise les surfaces mates, et la spécularité qui caractérise les surfaces brillantes. Nous présentons les modèles photométriques corespondants.



$Id = Kd * \cos\theta * IE$

$Is = Ks * (\cos\varphi)^{ns} * IE$

$I = Ia + Id + Is$

$I = Ia + Kd * \mathbf{D} + Ks * \mathbf{S}$

FIGURE 7.1

IE : intensité lumineuse émise par la source

I : intensité lumineuse reçue par l'observateur

Ia : composante due à la lumière ambiante

Id : composante diffuse

Is : composante spéculaire

D : énergie diffuse

S : énergie spéculaire

Kd : coefficient de diffusion

Ks : coefficient spéculaire

ns : exposant spéculaire

Le calcul d'une couleur par facette produira un effet de pavage à l'écran. La procédure d'éclairage consiste donc ensuite à effectuer un lissage des couleurs. Les deux algorithmes principaux pour celà sont ceux de Gouraud et de Phong. A chaque sommet de chaque facette est associée une normale qui est la moyenne arithmétique des normales des facettes contenant ce sommet.

Le modèle de Gouraud [38] est le plus simple. Seule la diffusion est prise en compte. Une couleur est calculée en chaque sommet par la loi de Lambert à partir des normales précédentes. Puis ces couleurs sont interpolées en chaque point de la facette.

Le modèle de Phong [55] est une amélioration du modèle de Gouraud. Le lissage n'est pas effectué sur les couleurs mais sur les normales. Autrement dit, en chaque point de la facette une normale est calculée par interpolation des normales aux sommets. La couleur est ensuite calculée à partir de cette normale. De plus le modèle de Phong prend en compte la spécularité. Nous citons également : [12,26].

7.2 Lancer de Rayons

L'algorithme du lancer de rayons permet de visualiser des images avec un haut degré de réalisme. Il s'appuie pour cela sur les lois physiques de propagation de la lumière et procède par échantillonnage spatial afin de collecter diverses informations lumineuses selon un principe algorithmique régi par le modèle lumineux choisi.

Les caractéristiques principales de la méthode sont les suivantes :

- traite directement l'élimination des parties cachées,
- ne nécessite aucune approximation préalable (facettisation) de la scène,
- permet d'exploiter des modèles photométriques très élaborés dont :
- les réflexions multiples,
- les ombres portées,
- la transparence avec réfraction,
- cependant, temps de calcul prohibitifs dûs essentiellement aux calculs d'intersection.

7.2.1 Définition d'une scène

Outre la modélisation géométrique des objets, la création d'une scène consiste à définir :

- les propriétés photométriques des objets (couleur, coefficients de diffusion, de réflexion, de transparence, etc),
- les conditions d'observation,
- l'éclairage (sources lumineuses).

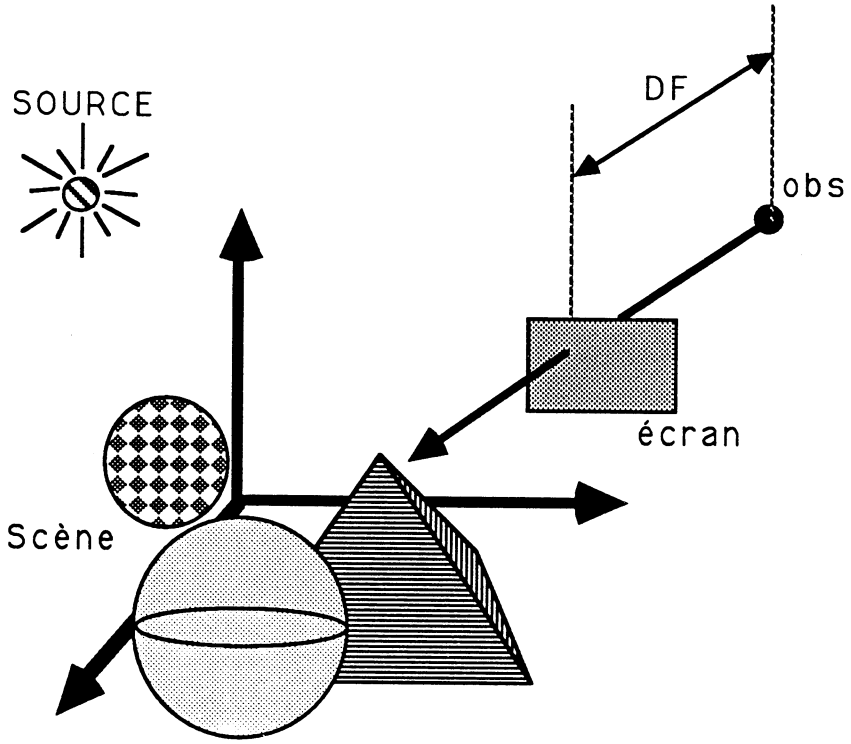


FIGURE 7.2

7.2.2 Principe de l'algorithme

Il s'agit d'évaluer le flux lumineux parvenant à l'oeil de l'observateur par échantillonnage spatial. Dans une direction donnée ce flux lumineux est caractérisé par la luminance de la première surface rencontrée.

L'algorithme consiste alors en le lancer d'un rayon primaire dont l'origine est l'oeil de l'observateur (cf. figure 7.3). Ce rayon passe par le centre du pixel considéré et se prolonge dans la scène. Pour ce rayon, la première surface intersectée sera la surface visible au pixel considéré. Il suffit alors de calculer la luminance au point d'intersection visible et d'afficher l'information au pixel. En fait, ce calcul nécessite lui même, le lancer de nouveaux rayons (de réflexion , de réfraction et d'illumination) à l'intérieur de la scène. Ces rayons secondaires en arrivant sur une surface vont eux aussi se réfléchir et se réfracter. Ce processus se poursuivra jusqu'à ce que les rayons ne rencontrent plus d'objet dans la scène. En pratique on fixera un seuil de récursivité.

L'algorithme revient donc à reproduire le trajet inverse des rayons lumineux en n'envisageant que les rayons "utiles", c'est-à-dire ceux qui arrivent à l'oeil de l'observateur.

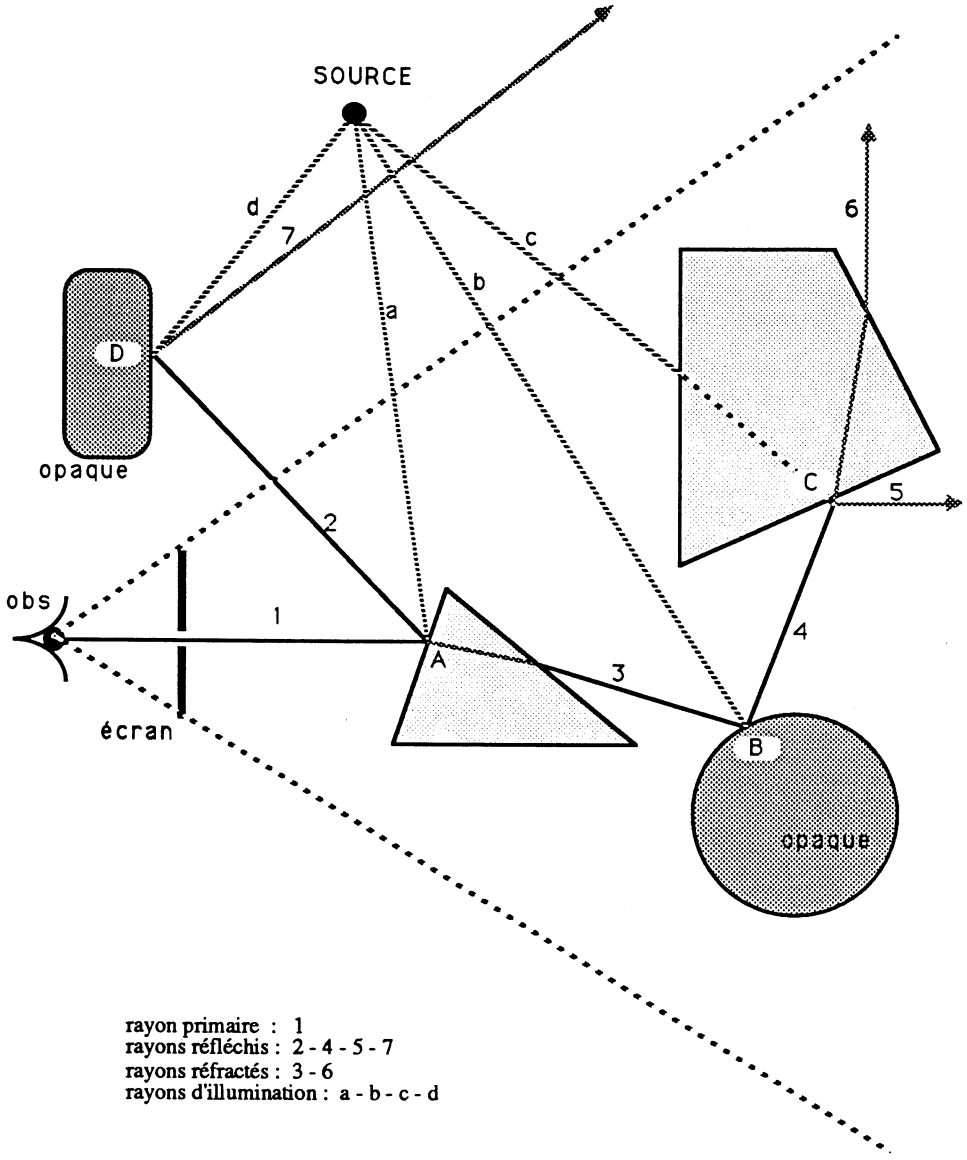


FIGURE 7.3

7.2.3 Modèle lumineux

Pour un point donné d'une surface, le flux renvoyé dans une direction donnée, par exemple celle de l'observateur, dépend de :

1. l'aspect local de la surface,

2. l'énergie reçue par la surface en ce point, à savoir :

   - l'énergie des sources lumineuses de la scène,
   - l'énergie de l'ensemble des autres objets de la scène se comportant comme des sources lumineuses secondaires.

Autrement dit, un modèle photométrique est la synthèse :

1. d'un modèle global qui "collecte" les différentes énergies reçues au point considéré.

2. d'un modèle local qui redistribue les énergies incidentes. Ce modèle prend en compte les qualités microscopiques de la surface, c'est à dire sa rugosité, sa couleur, son absorption, sa texture, etc.

Réflexion

La lumière réfléchie est l'addition de deux composantes différentes :

1. une composante diffuse (satisfaisant à la loi de Lambert) dont la luminance est indépendante de la direction d'observation. Cette composante caractérise les surfaces mates sans aucun reflet. Le flux lumineux reçu par la surface est réfléchi dans toutes les directions (par les pigments colorés de la surface) produisant ainsi la composante diffuse dont la couleur est proche de celle de l'objet.

2. une composante spéculaire dont le flux lumineux est concentré autour d'une direction privilégiée (direction réfléchie de la source). La spécularité caractérise les surfaces lisses et brillantes. La couleur de cette composante est proche de celle de la source.

Ces deux composantes sont représentées par :

$$R_f = d\ R_{fd} + s\ R_{fs} \qquad \text{avec } d + s = 1\ ,$$

où d et s sont respectivement les proportions de la lumière incidente qui donne naissance à la réflexion diffuse et à la réflexion spéculaire. R_{fd} et R_{fs} sont les coefficients

de réflexion bidirectionnel caractérisant les composantes diffuse et spéculaire du flux lumineux. R_{fd} est constant pour un matériau donné d'aprés la loi de Lambert tandis que R_{fs} dépend de l'état de surface du matériau considéré ainsi que de sa réflectivité.

Nous donnons une interprétation physique de la diffusion et de la spécularité dans le cas de certains matériaux comme les matières plastiques (Bouville, Cohen : [41]).

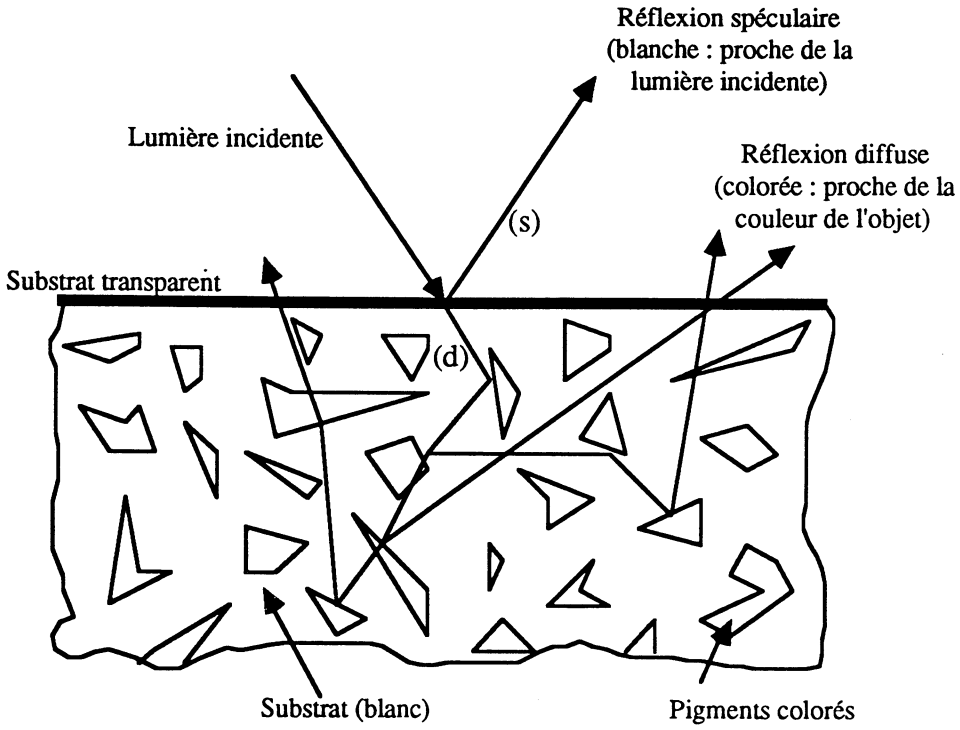


FIGURE 7.4

Transmission

Nous nous limitons au cas des surfaces lisses et des milieux homogènes ce qui exclut les effets de dispersion de la lumière transmise. Dans ces conditions le flux transmis est essentiellement concentré dans la direction réfractée définie par la loi de Snell (Descartes).

Pour traverser un objet transparent un rayon est toujours soumis à deux réfractions. Le flux lumineux transmis subit alors une atténuation qui est décrite par la loi de

Bouguer.

Le modèle lumineux de Whitted

Le modèle lumineux de Whitted [78] est à l'origine du développement de la méthode du lancer de rayons.

Son principe consiste à sommer les différentes composantes lumineuses dont l'influence est maximale au point étudié P, à savoir l'illumination directe par les sources lumineuses, les composantes réfléchie et réfractée. Cependant il faut aussi tenir compte d'une composante qui est l'intégration statistique du flux global incident en P et renvoyé uniformément dans toutes les directions par diffusion. Cette composante est nommée *diffusion ambiante*, elle est nulle si le coefficient de diffusion de la surface en P est nul (effet de miroir). Il est à noter que la couleur de la surface n'est prise en compte que par les composantes dues à la diffusion ambiante et celle de la source. Les autres composantes (spécularité, réflexion et réfraction) donnent la couleur des sources lumineuses principales et secondaires (c'est-à-dire, les objets de la scène).

Nous considérons ici une seule source lumineuse ponctuelle. Pour chaque composante RVB, l'intensité lumineuse I_L reçue du point P par l'observateur s'écrit :

$$I_L = I_A\, K_d\, C_{obj} + K_t^{ill}\, C_{srce}\, [C_{obj}\, K_d\, cos\,\theta + K_s\, (cos\,\varphi)^{n_s}] + K_r\, I_R + K_t\, I_T$$

avec :

C_{obj} : couleur de l'objet

C_{srce} : couleur de la source

I_A : intensité ambiante

I_R : intensité réfléchie

I_T : intensité transmise

n_s : exposant spéculaire

K_d : coefficient de diffusion

K_s : coefficient de spécularité

K_r : coefficient de réflexion

K_t : coefficient de transmission

K_t^{ill} : coefficient de transmission d'un éventuel objet sur le trajet du rayon

d'illumination.

7.2.4 Complexité et optimisation

Les idées générales

Pour chaque rayon, l'algorithme du lancer de rayons peut appeler la procédure d'intersection rayon-objet de très nombreuses fois, conduisant à tester l'intersection de milliers (de millions) de rayons avec les objets de la scène. Ces calculs sont extrèmement coûteux, pouvant prendre jusqu'à 90% du temps total [78]. De plus, dès que les objets deviennent complexes (surfaces paramétrées, Bézier, etc) il est difficile d'obtenir des procédures robustes et rapides d'intersection. Ainsi, les deux voies principales pour accélérer le lancer de rayons sont [79] :

- mettre au point une procédure de calcul d'intersection rayon-objet plus rapide et plus fiable,
- réduire les calculs inutiles (nous ne considérons pas ici les architectures particulières de machine).

Plus précisément, les temps de calculs dépendent des paramètres suivants (Excoffier, [5]).

1. Nombre de pixels à étudier.
2. Nombre de rayons secondaires par pixel (profondeur de récursivité).
3. Complexité de la scène (type des objets et nombre d'objets).
4. Temps de calcul pour l'intersection rayon-objet.
5. Nombre d'intersections à évaluer par rayon.

Les critères 2 et 3 ne peuvent être réduits.

Critère 1

Il est à noter que pour des questions d'anti-crénelage, il est souvent utile de sur-échantillonner chaque pixel de l'écran physique conduisant à augmenter le nombre de pixels "théoriques". Néanmoins il est possible de réduire le nombre de pixels à étudier en sélectionnant les pixels "utiles" par projection cônique de la scène sur l'écran. Il s'agit en fait de projeter séparément des volumes simples (parallélépipède, ...) contenant chaque objet de la scène (à moins que les objets ne soient eux-même très simples).

Critère 4

Pour des objets simples (facettes, sphères, modéles de type C.S.G., etc) les calculs d'intersections sont élémentaires et ne peuvent être améliorés. Cependant, les modèles surfaciques utilisant des surfaces paramétrées (Bézier, etc) sont de plus en plus employés en CAO, en approximation, etc. Pour de telles surfaces, il n'existe généralement pas de solution explicite au problème d'intersection. Des méthodes numériques (en général itératives) sont donc indispensables. Ces méthodes s'avèrent pénalisantes car elles sont coûteuses et totalement dépendantes de l'initialisation, tant au niveau de la précision de la solution obtenue que de la rapidité de convergence. Ces méthodes requièrent donc des phases de pré-traitement très lourdes mais néanmoins indispensables.

Critère 5

Il s'agit là du critère le plus important pour la réduction des calculs inutiles sans altérer la qualité de l'image. En effet, il est bien évident que suivant la complexité et la dispersion de la scène, chaque rayon a une probabilité non négligeable de ne rencontrer aucun objet. Autrement dit, dès que les calculs d'intersection rayon-objet deviennent complexes, ou bien, dès que le nombre d'objets est suffisament important il est indispensable de développer des outils spécifiques permettant de réduire les calculs inutiles en sélectionnant les objets candidats à l'intersection. Les méthodes devant s'orienter rapidement vers la recherche de la "première" intersection.

Les méthodes "d'accélération"

a) Diminution du nombre d'intersections à évaluer par rayon

Nous distinguons les deux types de méthodes suivantes.

1. Recherche de volumes englogants (Bounding Volume) [77,45,18].

2. Partitionnement de l'espace [54,34,33,44,79,4].

b) La cohérence

Il s'agit d'exploiter le fait que deux rayons voisins ont une probabilité importante de rencontrer la même surface en des points voisins [68,42].

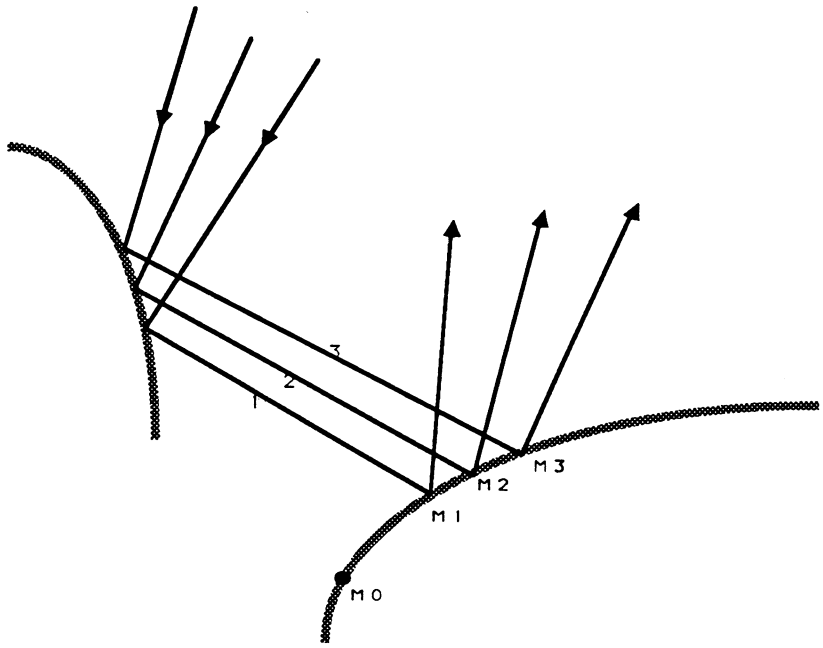


FIGURE 7.5

Par exemple, si pour le rayon 1, une intersection M_1 a été calculée par une méthode itérative, il est possible d'initialiser les calculs pour le rayon 2 à partir des valeurs des paramètres du point M_1, et ainsi de suite. Cette méthode permet effectivement d'accélérer les calculs mais peut s'avérer dangereuse. Ainsi, dans l'exemple suivant, si nous initialisons les calculs d'intersection pour le rayon 3 à partir des valeurs des paramètres du point M_2, nous trouverons une *"mauvaise"* intersection en M_3.

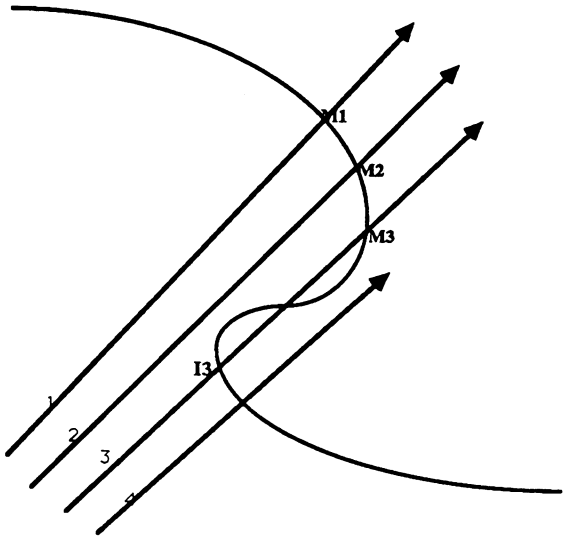


FIGURE 7.6

c) Architectures spécialisées

Les méthodes d'accélération précédentes bénéficient des améliorations au niveau :

- des circuits spécialisés,
- des machines parallèles.

Le lancer de rayons se prête tout naturellement à de telles architectures, tant au niveau du traitement de chaque pixel qu'au niveau de la gestion globale des rayons. Nous citons : [3,6,16,19,32,56,57].

Chapitre 8

Le problème d'intersection

En CAO, les courbes et surfaces sont classiquement représentées soit paramétriquement, soit par une équation implicite. Les représentations paramétriques sont issues des techniques de lissage et d'interpolation (Coons, Bézier, B-splines), et sont particulièrement adaptées pour générer des points sur la surface, tandis que les représentations implicites permettent de déterminer simplement si un point donné appartient ou non à la surface et sont par ailleurs mieux adaptées aux problèmes d'intersection courbe-surface et surface-surface.

L'utilisation croissante des surfaces paramétrées en modélisation conduit à développer des outils spécifiques. En particulier, la visualisation de ces surfaces par la méthode du lancer de rayons nécessite des procédures d'intersection droite-surface performantes, tant au niveau des coûts que de la précision obtenue.

Nous nous intéressons à ce problème d'intersection en privilégiant les aspects de précision. Néanmoins, chaque surface devant être testée un grand nombre de fois pour l'intersection avec une droite, nous insisterons sur la notion de pré-calcul (sans toutefois perdre en précision).

8.1 Intersection avec un rayon

8.1.1 Position du problème

Etant donnée une surface rationnelle (S) définie par une paramétrisation θ, φ_1, φ_2, φ_3, on notera (S_0) la restriction de cette surface correspondant au domaine $[0,1]^2$ des paramètres u et v.

Généralement, (S_0) sera appelé un *carreau* de surface (patch). Dans la pratique nous considérerons des carreaux de Bézier.

Considérons par ailleurs un rayon (R), c'est-à-dire une demi droite, défini par :

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,x_1 \\ y = y_0 + t\,y_1 \qquad (t > 0) \\ z = z_0 + t\,z_1 \end{cases} \tag{36}$$

où $\vec{R_0}(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{R_1}(x_1, y_1, z_1)$ sont respectivement l'origine et la direction du rayon et où t est le paramètre rayon.

Le rayon (R) peut aussi être défini par l'intersection de deux plans $(Q1)$ et $(Q2)$ d'équations :

$$\begin{aligned} (Q1) &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ (Q2) &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

Le *problème d'intersection* consiste alors à déterminer la *première intersection* du rayon (R) avec (S_0). On entend par là, la première intersection dans le sens du parcours du rayon à partir de l'origine, autrement dit, celle correspondant à la plus petite valeur de t strictement positive.

Plus précisément, cette intersection sera toujours recherchée dans un intervalle $[t_{min}, t_{max}]$, avec $0 < t_{min} < t_{max}$. En effet, chaque carreau de surface est placé dans une boite min-max (cf. paragraphe 7.2.4), de sorte que chaque rayon est préalablement testé pour l'intersection avec cette boite. Cette procédure préalable permet d'économiser de nombreux calculs d'intersection inutiles.

8.1.2 Les méthodes

Remarquons tout d'abord que ce problème d'intersection est généralement non linéaire (sauf dans les cas simples) et n'a pas de solution explicite. Ainsi, toutes les méthodes nécessitent une étape de linéarisation. Par ailleurs, puisque chaque carreau de surface doit être intersecté avec un grand nombre de rayons, des phases de pré-calcul (conditionnement) sont souvent indispensables. Nous citons les principales approches.

Tessellation. Puisqu'il est facile d'obtenir des points sur une surface paramétrée, la première idée consiste à substituer une collection de facettes planes à la surface. Ainsi, pour chaque facette, le problème d'intersection devient linéaire, mais la topologie de la surface peut être perdue. Plus précisément, la tessellation consiste en les trois phases suivantes.

- Echantillonnage de points sur la surface.
- Compression des données afin de ne conserver que les points les plus significatifs.
- Triangulation.

Méthodes numériques. Ces méthodes consistent à résoudre "directement" le problème d'intersection par des méthodes numériques itératives (telles que les méthodes de Newton et Laguerre).

Si le rayon est défini par l'intersection de deux plans $(Q1)$ et $(Q2)$, l'équation d'intersection est obtenue par substitution des équations de la surface dans celles des plans $(Q1)$ et $(Q2)$:

$$\begin{aligned} A_1\varphi_1(u,v) + B_1\varphi_2(u,v) + C_1\varphi_3(u,v) + D_1\theta(u,v) &= 0 \\ A_2\varphi_1(u,v) + B_2\varphi_2(u,v) + C_2\varphi_3(u,v) + D_2\theta(u,v) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui conduit à un système algébrique de la forme :

$$\begin{cases} \lambda(u,v) &= 0 \\ \mu(u,v) &= 0 \end{cases} \tag{37}$$

Le problème est alors celui de l'intersection de deux courbes algébriques planes, chacune d'elle étant la section de la surface par l'un des plans définisant le rayon. Si le rayon est défini paramétriquement par les équations (36), l'équation d'intersection est obtenue par identification des équations de la surface et celles du rayon, et conduit à un système algébrique analogue.

La résolution de ce système par des techniques itératives nécessite une localisation préalable de l'intersection (suffisamment précise). Cette phase d'initialisation est primordiale dans ce type d'approche, tant au niveau de la vitesse de convergence que l'obtention de l'intersection recherchée. En particulier, si deux intersections sont proches l'une de l'autre (par exemple, si le rayon est proche d'une zone de "tangence"), il sera toujours difficile d'obtenir l'intersection souhaitée. Notons par ailleurs, que l'inspection seule des solutions en les paramètres u et v de la surface ne permet pas de sélectionner la première intersection sur le trajet du rayon.

Ces méthodes sont donc totalement tributaires de l'étape d'initialisation et ont donc conduit à développer des méthodes spécifiques en vue de localiser les intersections (phases de pré-traitement) [8,70,79].

En particulier, les techniques issues de "l'analyse des intervalles" permettent de déterminer des zones d'initialisation sûres dans l'espace des paramètres [72,14].

Ces méthodes ont néanmoins l'avantage de rechercher l'intersection directement dans l'espace des paramètres de la surface, ce qui permet d'éliminer rapidemment les solutions en u, v qui ne sont pas dans le domaine $[0,1] \times [0,1]$.

Méthodes de subdivision. Il est toujours possible d'exprimer une surface paramétrée rationnelle comme une surface Bézier [50,31]. Les méthodes de subdivision reposent sur les techniques de subdivision et les propriétés d'enveloppe convexe de ces surfaces. Le carreau de surface est assimilé à son polyèdre de contrôle qui est récursivement subdivisé jusqu'à la précision souhaitée. Ces méthodes de subdivision sont souvent utilisées en tant que phase d'initialisation pour d'autres méthodes.

Méthodes algébriques. Le premier exemple d'approche algébrique est du à Kajiya [43] qui traite les équations algébriques (37) par des techniques d'élimination (Sylvester, Bezout) afin de se ramener à une équation à une seule variable. Cette approche conduit à déterminer toutes les solutions en u, v et donc à les trier par la suite.

Un autre exemple de ces méthodes vient de Sederberg et Anderson [65], qui ont réalisé l'implicitisation des surfaces de Steiner par une technique spécifique à ces surfaces. Nous décrirons et généraliserons ce type d'approche dans le chapitre suivant.

8.2 Notre approche

Remarquons que pour des problèmes d'intersection surface-surface ou courbe-surface, il est préférable d'avoir une surface définie par une équation implicite $f(x, y, z) = 0$, et l'autre surface (resp. la courbe) définie paramétriquement par un système $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ (resp. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$), de sorte que, après substitution l'équation d'intersection est donnée par $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$ (resp. $g(t) = f(x(t), y(t), z(t)) = 0$). Le problème de l'intersection de deux surfaces de $\mathbb{R}^3$ est ainsi ramené à celui de la localisation d'une courbe algébrique plane dans l'espace des paramètres (u, v). De la même manière, le problème de l'intersection d'une surface et d'une courbe de $\mathbb{R}^3$ est ramené à celui de la recherche des zéros d'un polynôme à une variable (paramètre de la courbe).

Nous nous sommes donc ramené à cette situation plus favorable. L'intersection de la surface et du rayon conduit à résoudre une équation polynomiale en le paramètre rayon t, ce qui permet de sélectionner facilement les différentes racines sur le trajet du rayon (dans l'intervalle donné).

Cette approche conduit donc à considérer les deux problèmes de *l'implicitisation* et de *l'inversion*. En effet, étant donnée une surface paramétrée (rationnelle) nous aurons à déterminer son équation implicite. Cette première étape est effectuée en amont du traitement général. Nous insisterons en particulier sur la notion de pré-calculs. Par ailleurs, la connaissance des paramètres u, v (de la surface) d'un point

d'intersection est indispensable, d'une part pour vérifier si l'intersection a bien lieu avec le carreau (S_0), et d'autre part pour les calculs photométriques qui s'appuient sur la connaissance de la normale. L'inversion sera donc effectuée chaque fois qu'une intersection aura été déterminée avec la surface.

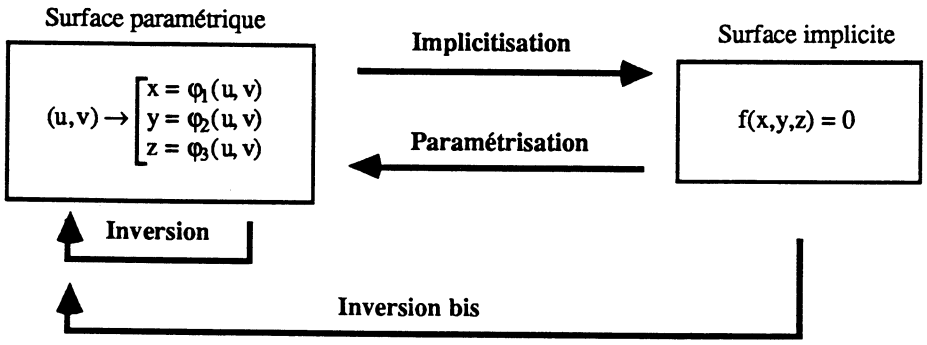


FIGURE 8.1

Ainsi, la méthode est décrite par l'algorithme suivant.

(Pré-traitement)
Pour chaque surface **Faire**
Implicitisation
(Traitement)
Pour chaque rayon **Faire**
(s'il y'a un carreau de surface candidat)
Détermination de l'équation d'intersection
(qui conduit à une équation polynomiale en la variable t)
Résolution de cette équation dans un intervalle donné
Inversion

On entend par résolution dans un intervalle donné, la recherche de la plus petite racine (si elle existe) dans cet intervalle.

Chapitre 9

Algorithme d'intersection

Nous considérons le problème d'intersection décrit au chapitre 8 et nous appliquons la méthode d'implicitisation-inversion proposée au paragraphe 8.2.

En accord avec le chapitre 5, nous associons à chaque surface rationnelle une matrice carrée $T(x, y, z)$ (c'est-à-dire, une matrice dont les éléments sont des polynômes en les coordonnées cartésiennes x, y et z) et dont le déterminant fournit l'équation implicite de la surface. Le rayon est défini paramétriquement par les équations (36).

La méthode est décrite pour une surface rationnelle de bi-degré (n, m) où tous les monômes sont présents (cf. chapitre 4). La matrice $T(x, y, z)$ obtenue est alors d'ordre $N = 2nm$ et tous ses coefficients sont au plus linéaires en x, y et z. Pour une surface rationnelle quelconque, il faut préalablement appliquer les idées du chapitre 5 afin de déterminer la (sous) matrice T associée. La méthode est ensuite totalement identique. Pour une SPPG de type 2 ou 3 la méthode ne s'applique pas directement, puisque alors les coefficients de la matrice $T(x, y, z)$ associée ne sont généralement pas linéaires.

9.1 Description de la méthode

Puisque chaque coefficient de la matrice T est une expression linéaire en x, y, et z, nous substituons directement les équations du rayon $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ dans la matrice $T(x, y, z)$, de sorte que chaque coefficient de la matrice T devient une expression

linéaire en le paramètre rayon t. On peut donc écrire :

$$T = A - t\,B,$$

où A et B sont des matrices numériques qui dépendent à la fois des coefficients du rayon et de ceux de la surface. Ainsi, l'équation d'intersection est donnée par :

$$g(t) = det(A - t\,B) = 0\,.$$

Nous traiterons l'équation d'intersection sous cete forme matricielle en séparant les calculs liés à la surface et ceux liés au rayon. Nous pouvons donc maintenant établir plus précisément l'algorithme donné dans le paragraphe 8.2 (voir aussi la figure 9.1).

Pré-traitement pour chaque surface

Associer à chaque surface une matrice numérique $\tilde{T}$ qui préparera l'évaluation des matrices A et B

Traitement pour chaque rayon

Evaluation des matrices A et B

Traitement de l'équation d'intersection $g(t) = det(A - t\,B) = 0$ avec :

- des phases algébriques pour reconnaitre des cas de non intersection
- des phases numériques (Gauss, Subdivision) pour calculer les racines

Inversion pour chaque intersection trouvée

Nous précisons maintenant chaque étape.

9.2 Pré-calculs pour chaque surface

Dans ce paragraphe, nous considérons les notations plus précises suivantes :

$$(pq, rs, tu) = \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{rs} & a_{tu} \\ b_{pq} & b_{rs} & b_{tu} \\ c_{pq} & c_{rs} & c_{tu} \end{vmatrix} \text{ et } (PQ, RS, TU) = \begin{vmatrix} A_{PQ} & A_{RS} & A_{TU} \\ B_{PQ} & B_{RS} & B_{TU} \\ C_{PQ} & C_{RS} & C_{TU} \end{vmatrix}$$

où les a_{pq}, b_{rs} et c_{tu} sont les coefficients scalaires de la surface polynomiale ou rationnelle considérée, définis par les relations (10) et (12), tandis que les A_{PQ}, B_{RS}

et C_{TU} sont les coefficients de la SPPG correspondante, définis par les relations (11) et (13). Le vecteur $\vec{M}$ sera noté pour (x,y,z) ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

9.2.1 Cas polynomial

Dans le cas polynomial, chaque coefficient T_{ij}^{kl} de la matrice T est somme de déterminants (PQ,RS,TU) (cf. paragraphe 4.3), où seul le premier couple d'indices (P,Q) peut être égal à $(0,0)$ (cf. paragraphe 4.4).

En utilisant les relations (11) du chapitre 2, nous précisons chacun des déterminants (PQ,RS,TU), suivant que (P,Q) soit égal ou non à $(0,0)$, après substitution de $M(x,y,z)$ par $\vec{R}_0 + t.\vec{R}_1$.

- *Premier cas :* $(P,Q) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} (PQ,RS,TU) &= (pq,rs,tu), \\ &= \vec{pq}.(\vec{rs} \wedge \vec{tu}), \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

où le scalaire α dépend uniquement de la surface.

- *Deuxième cas :* $(P,Q) = (0,0)$

$$\begin{aligned} (PQ,RS,TU) &= (\vec{pq} - \vec{R}_0 - t\,\vec{R}_1, \vec{rs}, \vec{tu}) \\ &= (\vec{pq} - \vec{R}_0 - t\,\vec{R}_1).(\vec{rs} \wedge \vec{tu}) \\ &= (\vec{pq} - \vec{R}_0 - t\,\vec{R}_1).\vec{\beta} \\ &= \vec{pq}.\vec{\beta} - \vec{R}_0.\vec{\beta} - t\,\vec{R}_1.\vec{\beta} \\ &= \alpha - \vec{R}_0.\vec{\beta} - t\,\vec{R}_1.\vec{\beta} \\ &= a - t\,b, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{\beta} = \vec{rs} \wedge \vec{tu} \\ \alpha = \vec{pq}.\vec{\beta} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a = \alpha - \vec{R}_0.\vec{\beta} \\ b = \vec{R}_1.\vec{\beta} \end{cases} . \tag{38}$$

Dans les deux cas, le scalaire α et le vecteur $\vec{\beta}$ dépendent uniquement de la surface, tandis que les scalaires a et b dépendent également du rayon. Ainsi, grâce aux relations (27) et (28), on peut évaluer chaque coefficient T_{ij}^{kl} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} T_{ij}^{kl} &= \sum(PQ, RS, TU) \\ &= \sum_{PQ \neq 00}(PQ, RS, TU) + \sum_{PQ=00}(PQ, RS, TU) \\ &= \sum_g \alpha_g + \sum_h \left(\alpha_h - \vec{R}_0.\vec{\beta}_h - t\vec{R}_1.\vec{\beta}_h\right) \\ &= \sum_g \alpha_g + \sum_h \alpha_h - \vec{R}_0.\sum_h \vec{\beta}_h - t\vec{R}_1.\sum_h \vec{\beta}_h \\ &= \alpha_{ij}^{kl} - \vec{R}_0.\vec{\beta}_{ij}^{kl} - t\,\vec{R}_1.\vec{\beta}_{ij}^{kl}\ . \end{aligned}$$

De sorte que :

$$T_{ij}^{kl} = a_{ij}^{kl} - t\ b_{ij}^{kl} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{ij}^{kl} = & \alpha_{ij}^{kl} - \vec{R}_0.\vec{\beta}_{ij}^{kl} \\ b_{ij}^{kl} = & \vec{R}_1.\vec{\beta}_{ij}^{kl} \end{cases} \tag{39}$$

où les scalaires α_{ij}^{kl} et les vecteurs $\vec{\beta}_{ij}^{kl}$ sont uniquement déterminés par la surface.

Ainsi, nous associons à chaque surface paramétrée polynomiale de bi-degré (n, m) une matrice carrée numérique $\tilde{T}$, d'ordre $2nm$, dont chaque élément $\tilde{T}_{ij}^{kl}$ consiste en le scalaire α_{ij}^{kl} et le vecteur $\vec{\beta}_{ij}^{kl}$ définis ci-dessus.

Pour chaque rayon $(\vec{R}_0, \vec{R}_1)$, les matrices A et B sont ensuite obtenues à partir de la matrice $\tilde{T}$ grâce aux relations (39).

9.2.2 Cas rationnel

De la même manière, chaque coefficient T_{ij}^{kl} de la matrice T est somme de déterminants (PQ, RS, TU). Cependant, dans le cas rationnel, chacun des coefficients A_{PQ}, B_{RS} et C_{TU} dépend linéairement des variables x, y et z (cf. relations (13) du chapitre 2). Nous précisons donc maintenant le calcul de chacun des déterminants (PQ, RS, TU) en nous référant aux notations (12) du chapitre 2.

$$
\begin{aligned}
(PQ,RS,TU) &= \begin{vmatrix} a_{pq}-x\,d_{pq} & a_{rs}-x\,d_{rs} & a_{tu}-x\,d_{tu} \\ b_{pq}-y\,d_{pq} & b_{rs}-y\,d_{rs} & b_{tu}-y\,d_{tu} \\ c_{pq}-z\,d_{pq} & c_{rs}-z\,d_{rs} & c_{tu}-z\,d_{tu} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{rs} & a_{tu} \\ b_{pq} & b_{rs} & b_{tu} \\ c_{pq} & c_{rs} & c_{tu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{rs} & -x\,d_{tu} \\ b_{pq} & b_{rs} & -y\,d_{tu} \\ c_{pq} & c_{rs} & -z\,d_{tu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{pq} & -x\,d_{rs} & a_{tu} \\ b_{pq} & -y\,d_{rs} & b_{tu} \\ c_{pq} & -z\,d_{rs} & c_{tu} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x\,d_{pq} & a_{rs} & a_{tu} \\ -y\,d_{pq} & b_{rs} & b_{tu} \\ -z\,d_{pq} & c_{rs} & c_{tu} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

De sorte que, après substitution de $\vec{M} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par $\vec{R}_0 + t\,\vec{R}_1$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
(PQ,RS,TU) &= \vec{pq}.(\vec{rs} \wedge \vec{tu}) - d_{tu}\,\vec{M}.(\vec{pq} \wedge \vec{rs}) - d_{rs}\,\vec{M}.(\vec{tu} \wedge \vec{pq}) - d_{pq}\,\vec{M}.(\vec{rs} \wedge \vec{tu}) \\
&= \alpha - \vec{M}.(d_{tu}\,\vec{\beta}_{tu} + d_{rs}\,\vec{\beta}_{rs} + d_{pq}\,\vec{\beta}_{pq}) \\
&= \alpha - \vec{M}.\vec{\beta} \\
&= \alpha - (\vec{R}_0 + t\vec{R}_1).\vec{\beta} \\
&= \alpha - \vec{R}_0.\vec{\beta} - t\,\vec{R}_1.\vec{\beta} \\
&= a - t\,b\,,
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\begin{cases} \vec{\beta}_{tu} = \vec{pq} \wedge \vec{rs} \\ \vec{\beta}_{rs} = \vec{tu} \wedge \vec{pq} \\ \vec{\beta}_{pq} = \vec{rs} \wedge \vec{tu} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \alpha = \vec{pq}.\vec{\beta}_{pq} = (pq,rs,tu) \\ \vec{\beta} = d_{tu}\,\vec{\beta}_{tu} + d_{rs}\,\vec{\beta}_{rs} + d_{pq}\,\vec{\beta}_{pq} \end{cases} \tag{40}
$$

et

$$
\begin{cases} a = \alpha - \vec{R}_0.\vec{\beta} \\ b = \vec{R}_1.\vec{\beta} \end{cases} . \tag{41}
$$

Le scalaire α et le vecteur $\vec{\beta}$ ne dépendent que de la surface, tandis que les scalaires a et b dépendent également du rayon. Ainsi, comme dans le cas polynomial, après substitution de $\vec{M}$ par $\vec{R}_0 + t\vec{R}_1$ dans la matrice $T(x,y,z)$, on peut évaluer chaque coefficient T_{ij}^{kl} de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
T_{ij}^{kl} &= \sum(PQ,RS,TU) \\
&= \alpha_{ij}^{kl} - \vec{M}.\vec{\beta}_{ij}^{kl} \\
&= \alpha_{ij}^{kl} - \vec{R}_0\vec{\beta}_{ij}^{kl} - t\,\vec{R}_1\vec{\beta}_{ij}^{kl}\,.
\end{aligned}
$$

De sorte que :

$$T_{ij}^{kl} = a_{ij}^{kl} - t\, b_{ij}^{kl} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{ij}^{kl} = & \alpha_{ij}^{kl} - \vec{R}_0.\vec{\beta}_{ij}^{kl} \\ b_{ij}^{kl} = & \vec{R}_1.\vec{\beta}_{ij}^{kl} \end{cases} \tag{42}$$

où les scalaires α_{ij}^{kl} et les vecteurs $\vec{\beta}_{ij}^{kl}$ sont uniquement déterminés par la surface.

Ainsi, comme dans le cas polynomial, nous associons à chaque surface rationnelle de bi-degré (n, m) une matrice carrée numérique $\tilde{T}$, d'ordre $N = 2nm$, dont chaque élément $\tilde{T}_{ij}^{kl}$ consiste en le scalaire α_{ij}^{kl} et le vecteur $\vec{\beta}_{ij}^{kl}$ définis ci-dessus.

Pour chaque rayon $(\vec{R}_0, \vec{R}_1)$, les matrices A et B sont ensuite obtenues à partir de la matrice $\tilde{T}$ grâce aux relations (42).

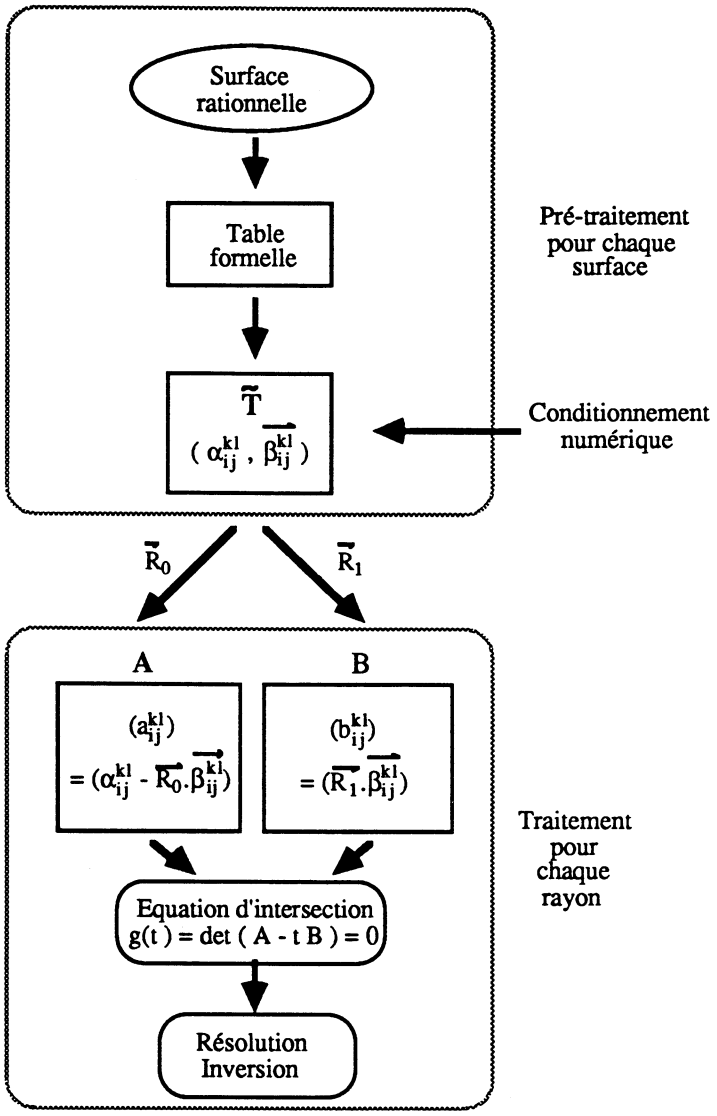


FIGURE 9.1 ALGORITHME GENERAL

9.3 Traitement pour chaque rayon

9.3.1 Evaluation des matrices A et B

Pour chaque rayon, les matrices numériques A et B sont obtenues à partir de la matrice $\tilde{T}$ associée à la surface considérée, grâce aux relations (42). Leur évaluation

nécessite :

$2.N.N$ produits scalaires,

$N.N$ additions (avec $N = 2nm$),

dans le cas général, c'est-à-dire dans le cas rationnel.

Cependant, il est possible de réduire notablement le nombre d'opérations (en particulier dans le cas polynomial) en considérant les deux remarques suivantes, très importantes pour les questions d'optimisation.

REMARQUE 9.1 *La matrice A (resp. la matrice B) dépend uniquement de l'origine R_0 (resp. de la direction R_1) du rayon et bien sûr de la surface. Ainsi, pour tous les rayons issues d'une même origine (en particulier, pour tous les rayons primaires) la matrice A sera commune.*

REMARQUE 9.2 *D'après la remarque 4.3 du paragraphe 4.6, de nombreux coefficients T_{ij}^{kl} de la matrice $T(x,y,z)$ associée à une surface paramétrée polynomiale ne dépendent pas de x, y, z. Ainsi, les vecteurs $\vec{\beta}_{ij}^{kl}$ associés à ces coefficients seront nuls, de sorte que les termes correspondants des matrices A et B seront directement donnés par :*

$$a_{ij}^{kl} = \alpha_{ij}^{kl} \text{ et } b_{ij}^{kl} = 0.$$

Cette dernière remarque ne s'applique pas dans le cas rationnel.

9.3.2 Traitement de l'équation d'intersection

La forme matricielle de l'équation d'intersection permet d'envisager des pré-traitements algébriques [28,40]. Cependant, pour des questions de stabilité numérique, nous avons préféré procéder de la manière suivante.

- Puisque $g(t) = det(A - t\,B)$ est un polynôme de degré $N = 2nm$, nous l'évaluons en $N+1$ valeurs uniformément réparties dans l'intervalle $[t_{min}, t_{max}]$ et nous exprimons g comme une courbe Bézier.

- La seconde étape consiste à résoudre l'équation d'intersection $g(t) = 0$. Pour celà nous appliquons l'algorithme suivant qui a été développé par D. Marchepoil dans [52]. Cet algorithme est basé sur les techniques de subdivision Bézier pour

lesquelles les proportions de la subdivision sont faites en fonction des noeuds encadrant l'intersection du polygone de contrôle avec l'axe des t.

Par des propriétés d'enveloppe convexe, cette méthode permet de déterminer rapidement des cas de non-intersection. En outre, ce type d'approche a de bonnes qualités de stabilité. D'autres algorithmes de résolution d'une équation $g(t) = 0$ sont discutés dans [52] (voir aussi [47,61]).

Si $g(t)$ est exprimé dans la base de Bernstein par $\sum_{i=0}^{N} p_i B_i^N(t)$ l'algorithme récursif suivant *Racines*() calcule toutes les racines de $g(t)$ dans l'intervalle $[a, b]$, dans l'ordre croissant, ce qui permet de sélectionner facilement la racine cherchée.

Procédure $Racines(\{p_0, p_1, ..., p_N\}, a, b, coté)$
Début
  $k = Min_{i \in \{0,1,...,N-1\}} \{i / p_i p_{i+1} \leq 0\}$;
  Si k n'existe pas **Alors** Eliminer l'intervalle $[a, b]$;
  Sinon
    Début
      Si $(b - a) < \varepsilon$ **Alors**
        Début
          $r = \frac{k p_{k+1} - (k+1) p_k}{N(p_{k+1} - p_k)}(b - a) + a$;
          Donner la racine r ;
        Fin
      Sinon
        Début
          Si coté droit **Alors** $k = k + 1$;
          Si $k = 0$ **Alors** $k = 1$;
          Si $k = N$ **Alors** $k = N - 1$;
          Subdiviser $\{p_0, p_1, ..., p_N\}$ selon k/N;
          $t = a + k(b - a)/N$;
          $Racines(\{p_0^0, p_0^1, ..., p_0^i, ..., p_0^N\}, a, t, gauche)$;
          $Racines(\{p_0^N, p_1^{N-1}, ..., p_i^{N-i}, ..., p_N^0\}, t, b, droit)$;
        Fin
    Fin
Fin

9.3.3 Inversion

Etant donnée $\overline{t}$ une racine de l'équation d'intersection $g(t) = det(A - t\,B) = 0$, nous cherchons les paramètres correspondants $\overline{u}$ et $\overline{v}$ du point d'intersection.

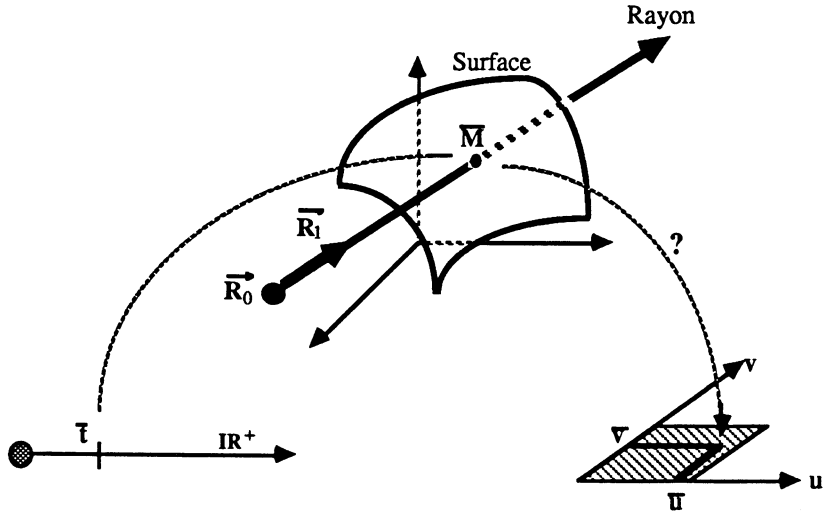


FIGURE 9.2

Cette étape permet par ailleurs de vérifier si le point d'intersection obtenu entre le rayon et la surface algébrique (surface implicite) associée à la surface paramétrée (S) donnée initialement, appartient bien à cette surface paramétrée (S) (cf. paragraphe 6.1).

Notons $\overline{T}$ la matrice numérique définie par $A - \overline{t}\,B$. On a donc $rang(\overline{T}) \leq N - 1$, de sorte que le noyau de la matrice $\overline{T}$ contient (au moins) une droite vectorielle engendrée par un vecteur que l'on espère être de la forme $\begin{bmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{bmatrix}_{(n,m)}$, pour des valeurs $\overline{u}$ et $\overline{v}$ des paramètres (cf. paragraphe 4.2). Dans notre pratique, ceci s'est toujours vérifié pour une paramétrisation convenable.

Considérons maintenant plus précisément le cas où $rang(\overline{T}) = N - 1$ et supposons que le système homogène $\overline{T}.X = 0$ admette une solution de la forme $\begin{bmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{bmatrix}_{(n,m)}$, pour

des valeurs $\overline{u}$ et $\overline{v}$ réelles. Dans ce cas nous nous référerons au système $\overline{T}.\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{(n,m)} = 0$, où les inconnues sont les paramètres u et v.

Nous appliquons une élimination de Gauss avec permutation des lignes, mais sans permutation des colonnes, afin de triangulariser la matrice $\overline{T}$. Le vecteur inconnu $\begin{bmatrix} \overline{u} \\ \overline{v} \end{bmatrix}_{(n,m)}$ restera ainsi inchangé.

PROPOSITION 9.1 *Avec les hypothèses ci-dessus, si* $rang(\overline{T}) = 2nm - 1$, *alors le système* $\overline{T}.\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{(n,m)} = 0$, *où l'ordre des colonnes a été renversé, se triangularise sous la forme suivante :*

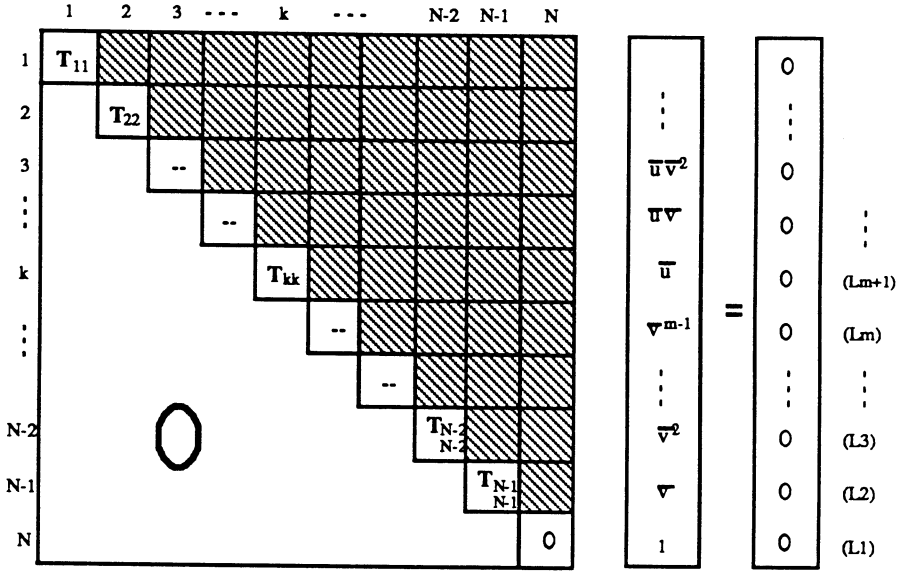


FIGURE 9.3

où $T_{kk} \neq 0$ *pour* $k = 1, 2, ..., N-1$ *(*$N = 2nm$*).*

En d'autres termes, dans une élimination de Gauss sans permutation des colonnes, le pivot nul est repoussé en dernière position.

Ainsi, les m dernières équations (L_2) à (L_{m+1}) conduisent à un système en les paramètres $\overline{u}$ et $\overline{v}$ cherchés, simple à résoudre.

Dans la pratique, nous procédons de la manière suivante. Chaque colonne est associée à une inconnue $u^i v^j$. Si p est l'indice de la colonne correspondant à l'inconnue u,les colonnes p et $N-2$ sont permutées, de sorte que, après triangularisation, on obtient le système donné par la figure 9.4.

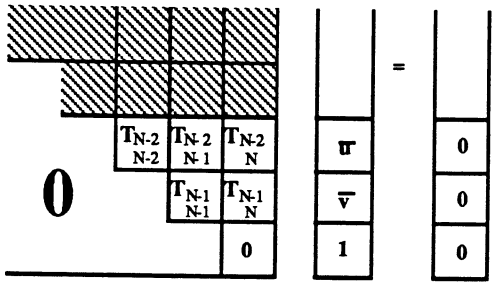


FIGURE 9.4

qui donne immédiatement les paramètres $\overline{u}$ et $\overline{v}$ cherchés.

9.4 Discussion et Résultats

Cette méthode comporte comme les autres une étape itérative. Le procédé itératif est ici utilisé pour résoudre une équation à une seule variable par des méthodes de subdivision Bézier.

- Conditionnement numérique

  Précisons tout d'abord que notre expérimentation montre que la matrice $\tilde{T}$ est bien calculée en terme de stabilité numérique. Par ailleurs, la plupart des calculs numériques s'appuient sur l'algorithme de Gauss. Aussi, afin d'assurer la stabilité de ces calculs, une normalisation des termes peut être effectuée directement sur la matrice numérique $\tilde{T}$ associée à chaque surface, pendant la phase de pré-traitement.

- Optimisation

En accord avec la remarque 9.1, nous conservons en mémoire la matrice numérique *origine* A pour tous les rayons issus d'un même point. De plus, dans le cas polynomial, d'après la remarque 9.2 l'évaluation des matrices *origines* A et *direction* B est simplifiée.

- Traitement de l'équation d'intersection

  Dans cette situation, l'approche classique consiste tout d'abord à isoler les racines dans l'intervalle donné, par diverses méthodes basées la plupart du temps sur des outils algébriques (Sturm, Collins et Loos, ...). Le but essentiel de cette étape étant de détecter des cas de non intersection et de fournir une bonne valeur initiale pour une méthode itérative. Cependant, ces méthodes conduisent à des problèmes de stabilité.

  L'algorithme de subdivision utilisé dans notre méthode permet de détecter efficacement les cas de non-intersection par les propriétés d'enveloppe convexe et s'avère être très stable. Ceci peut s'expliquer par le fait que les subdivisions sont effectuées selon les noeuds. Avec cet algorithme, une précision de d digits binaires nécessite au plus $d\,N(N+1)/2$ combinaisons (c'est-à-dire, une addition et une multiplication), où N est le degré de la courbe Bézier.

- Inversion

  Nous n'avons pas renconté dans notre expérimentation le cas $rang(\overline{T}) < 2nm - 1$. Le rang de la matrice numérique $\overline{T}$ n'est pas liè à la multiplicité de la racine $\bar{t}$ de l'équation d'intersection $g(t) = 0$. En fait, *si $\bar{t}$ est racine multiple de l'équation d'intersection, alors, ou bien le rayon est tangent à la surface au point d'intersection $\overline{M}$, ou bien la surface admet un point singulier en $\overline{M}$.*

Bibliographie

[1] A.G. AKRITAS, S.D. DANIELOPOULOS. On the Forgotten Theorem of Mr Vincent, *Historia Mathematica*, 427-435, 1978

[2] A.G. AKRITAS, S.D. DANIELOPOULOS. An unknown Theorem for the Isolation of the Roots of Polynomials, *Indian Society for History of Mathematics*, Vol 2, n^o 3-4, 41-49, 1980

[3] B. ARNALDI, T. PRIOL, K. BOUATOUCH. Subdividion Spatiale et lancer de Rayon, IRISA, *Rapport de Recherche*, n^o 589, Décembre 1986

[4] J. ARVO, D. KIRK. Fast Ray Tracing by Ray Classification, *ACM Computer Graphics*, Volume 21, n^o 4, pp. 55 - 64, July 1987

[5] A.T.P. du C.N.R.S. Modèles Géométriques et Images Numériques, Lyon 26 et 27 Avril 1988, Organisateurs : D. VANDORPE (Lyon 1), J. AZENCOT (Lyon 1), Y. GARDAN (Metz), M. LUCAS (Nantes)

[6] D. BADOUEL, F. BODIN, T. PRIOL. Lancer de rayon : Approches parallèles, IRISA, *Publication Interne* n^o 452, Janvier 1989

[7] E.H. BAREISS. Sylvester's Identity and Multistep Integer Preserving Gaussian Elimination *Math. Comput. 22*, 565-578, 1968

[8] A.H. BARR. Ray Tracing Deformed Surfaces, *Computer Graphics*, Volume 20, n^o 4, pp. 287 - 297, August 1986

[9] BENEDETTI, J.J. RISLER. Real Algebraic and Semi-Algebraic Set, *Hermann* 1990

[10] L. BIARD, P. CHENIN. Méthode d'intersection en lancer de rayons pour les surfaces complexes, *Rapport de Recherche*, L.M.C. IMAG Grenoble, Novembre 1990

[11] L. BIARD, P. CHENIN. Méthode algorithmique d'implicitisation pour les surfaces rationnelles, *Rapport de Recherche*, L.M.C. IMAG Grenoble, à paraître, Décembre 1990

[12] J.F. BLINN. Modelsoft Light Reflection for Computer Synthesized Pictures, *Computer Graphics*, Volume 11, n^o 3, pp. 192 - 198, 1977

[13] J.F. BLINN. A Generalization of Algebraic Surface Drawing, *ACM Trans. on Graphics*, Volume 1, n^o 3, pp. 236 - 256, July 1982

[14] K. BOUATOUCH. Theoritical Development on Polygonal Approximation of Parametric Surfaces for Ray Tracing, *Computer Graphics Forum*, Eurographics, December 88

[15] W. BOUKNIGHT. A Procedure for Generation of Three Dimensional Half-Toned Computer Graphics Representations, *Communication of the ACM*, 13 (9), pp. 527 - 536, 1970

[16] C. BOUVILLE, R. BRUSQ, J.L. DUBOIS and I. MARCHAL (CCETT). Synthèse d'Images par Lancer de Rayons : Algorithmes et architecture, *ACTA ELECTRONICA* - Volume 26, n^o 3-4, pp.249 - 259, 1984

[17] M. BRONSTEIN. The elimination property of Gröbner bases and applications to Computer Aided Design, *Computer Science Division*, Department of Electrical Engineering and Computer Science. University of California, Berkeley 94720,1986

[18] W.F. BRONSVOORT, J.J. VAN WIJK, F.W. JANSEN. Two Methods for Improving the Efficiency of Ray Casting in Solid Modeling, *Computer Aided Design*, Volume 16, n^o 1, pp. 51 - 55, 1984

[19] R. BRUSQ. Synthèse d'images par Lancer de Rayons (Ray-Tracing) : La Machine Cristal, Résultats et Perspectives, CCETT, Semaine Internationale de l'Image Electronique, Nice, Avril 1986

[20] B. BUCHBERGER. Applications of Gröbner Bases in Non-Linear Computational Geometry, *Mathematical Aspects Scientific Software*, Springer-Verlag, Editor: J.R. Rice,1988

[21] E.W. CHIONH. Base Points, Resultants, and the Implicit Representation of Rational Surfaces, *Thesis*, Universite of Waterloo, Ontario, Janvier 1990

[22] M.F. COHEN. A Radiosity Method for the Realistic Image Synthesis of Complex Diffuse Environments, M.S. *Thesis*, Cornell University, 1985

[23] M.F. COHEN, D.P. GREENBERG. The Hemi-Cube : Radiosity Solution for Complex Environments, *Computer Graphics*, Volume 19, n^o 3, pp. 31 - 40, 1985

[24] M.F. COHEN, D.P. GREENBERG, D. IMMEL, P. BROCK. An Efficient Radiosity Approach for Realistic Image Synthesis, *I.E.E.E. Computer Graphics and Applications*, Volume 6, n^o 2, pp. 26 - 35, March 1986

[25] G.E. COLLINS, R LOOS. Real Zeros of Polynomials, *Computing, Suppl.*,4, 83-94, by Springer Verlag, 1982

[26] R.L. COOK, K.L. TORRENCE. A Reflectance Model for computer Graphics, *ACM Trans. Graphics*, Volume 1, n^o 1, pp. 7 - 24, 1982

[27] J. DAVENPORT, Y. SIRET, E. TOURNIER. Calcul Formel, *Edition Masson*, 1986

[28] E.D. DENMAN, A. BEAVERS, Jr. The Matrix Sign Function and Computation in Systems, *Appl. Math. Comput.*, 2:63-94, 1976

[29] J. DIEUDONNE. Cours de Géométrie Algébrique, *Presses Universitaires de France*, Collection sup., 1974

[30] A.L. DIXON. The Eliminant of Three Quantics in Two Independent Variables, *Proc. London Math Soc.*, (2), 76, 49 - 69, 1908

[31] J.C. FIOROT, P. JEANNIN. Courbes et Surfaces Rationnelles. Applications la CAO. *Edition Masson, Collection Recherches en Mathématiques Appliquées*, 1989

[32] M.C. FORGUE. Parallélisation du Lancer de Rayons sur un Calculateur de type SIMD/SPMD, *Thèse de L'Université de Nice*, Septembre 1988

[33] A. FUJIMOTO, T. TANAKA, K. IWATA. ARTS : Accelerated Ray Tracing System, *I.E.E.E. Computer Graphics and Applications*, Volume 6, n^o 4, pp. 16 - 26, April 1986

[34] A. GLASSNER. Space Subdivision for Fast Ray Tracing, *I.E.E.E. Computer Graphics and Applications*, pp. 15 - 22, October 1984

[35] R.N. GOLDMAN, T.W. SEDERBERG, D.C. ANDERSON. Vector elimination : A technique for the implicitization, inversion, and intersection of planar rational polynomial curves, *Computer Aided Geometric Design 1* North-Holland, 327-356, 1984

[36] R.N. GOLDMAN and T.W. SEDERBERG. Analytic approach to intersection of all piecewise parametric rational cubic curves, *Computer-aided design*, pp. 282-292, august 1987

[37] C.M. GORAL, K.E. TORRENCE, D.P. GREENBERG. Modeling The Interaction of Light Between Diffuse Surfaces, *Computer Graphics*, Volume 18, n^o 3, pp. 213 - 222, 1984

[38] H. GOURAUD. Computer Display of Curved Surfaces, Ph. F. *Thesis*, University of Utah, 1971

[39] P. HANRAHAN. Ray Tracing Algebraic Surfaces, *Computer Graphics*, Volume 17, no 3, pp. 83 - 90, July 1983

[40] J.L. HOWLAND. The Sign Matrix and the Separation of Matrix Eigenvalues, Linear Algebra and its applications 49: 221-232 *Elsevier Science Publishing Co., Inc*, 1983

[41] I.N.R.I.A. Infographie 3D, *Cours et Séminaires*, 15 - 19 Juin 1987, Bandol (Var), Responsables Scientifiques : A. GAGALOWICZ (INRIA-Rocquencourt), M. GRAVE (XCOM-Paris)

[42] K.I. JOY, M.N. BHETANABHOTLA. Ray Tracing Parametric Surface Patches Utilizing Numerical Techniques and Ray Coherence, *Computer Graphics*, Volume 20, n^o 4, pp. 279 - 284, August 1986

[43] J.T. KAJIYA. Ray Tracing Parametric Patches, *Computer Graphics*, Volume 16, n^o 3, pp. 245 - 254, July 1982

[44] M.R. KAPLAN. Space Tracing : A Constant Time Ray Tracer, *SIGGRAPH Tutorial on State of Art in Image Synthesis*, July 1985

[45] T.L. KAY, J.T. KAJIYA. Ray Tracing Complex Scenes, *Computer Graphics*, Volume 20, n^o 4, pp. 269 - 276, August 1986

[46] A. KOSTRIKIN. Introduction à l'algèbre. *Edition MIR. Moscou*, 1977

[47] J.M. LANE and R.F. RIESENFELD. Bounds on a Polynomial, *BIT*, pp. 112-119, September 1980

[48] D. LAZARD. Résolution des systèmes d'équations algébriques, *Rapport de Recherche* n^o 2, Laboratoire d'informatique, Université de Poitiers, Octobre 1979

[49] D. LAZARD. Resolution of algebraic systems, *Computer Sciences, Springer Verlag*, Proceeding EUROSAM 79

[50] A. LE MEHAUTE et P. SABLONNIERE. Courbes et Surfaces Bézier/B-Splines, Colloque de l'A.T.P. du C.N.R.S. sur le thème "Outils Mathématiques et Informatiques des Modèles Géométriques", I.N.S.A. de Rennes, 11, 12, 13 Mai 1987

[51] F.S. MACAULAY. The Algebraic Theory of Modular Systems, *Cambridge University Press*, Stechert-Hafner Service Agency, New York and London, 1964-(1916)

[52] D. MARCHEPOIL et P. CHENIN. Algorithmes de Recherche de Zéros d'une Fonction de Bézier, *Rapport de Recherche*, L.M.C. IMAG Grenoble, 1990

[53] T. MUIR. Treatise on the Theory of Determinants, *Dover*, ISBN 0-486-60670-8, (s.d.)

[54] H. MULLER. Ray Tracing Complex Scenes by Grids, *Research Report* 22/85, Fakultat fur Informatik, Uni Karlsruhe, RFA

[55] B.T. PHONG. Illumination Model for Computer Generated Images, *Communication of the ACM*, Volume 18, pp. 311 - 317, June 1975

[56] T. PRIOL, K. BOUATOUCH. Synthèse d'Image par Lancer de Rayon sur un Hypercube, INRIA-Rennes, *Rapport de Recherche* n^o 752, Novembre 1987

[57] T. PRIOL, K. BOUATOUCH. Lancer de rayons sur des architectures parallèles : une étude de performance, IRISA, *Publication Interne* n^o 451, Janvier 1989

[58] Lee-Hian QUEK, D.D. HEARN. Efficient Space-Subdivision Methods In Ray-Tracing Algorithms, *Department Of Computer Science*, University of Illinois (Urbana), November 1988

[59] J.J. RISLER. Calcul Formel et Géométrie, Séminaire Calcul Formel et Outils Algébriques pour la Modélisation Géométrique, ATP du CNRS, 9-10 Mars 1988

[60] J. ROBERGE. A Data Reduction Algorithm for Planar Curves, *Computer Vision Graphics and Image Processing*, Volume 29, pp. 168 - 195, 1985

[61] Alyn ROCKWOOD. Constant Component Intersections of Parametrically Defined Curves, *Silicon Graphics Computer Systems*, 1989

[62] T.W. SEDERBERG, D.C. ANDERSON and R.N. GOLDMAN. Implicit Representation of Parametric Curves and Surfaces, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Volume 28, pp. 72 - 84, 1984

[63] T.W. SEDERBERG and D.C. ANDERSON Ray Tracing of Steiner Patches, *Computer Graphics*, Volume 18, n^o 3, pp. 159 - 165, July 1984

[64] T.W. SEDERBERG, D.C. ANDERSON, R.N. GOLDMAN. Implicitization, Inversion, and Intersection of Planar Rational Cubic Curves, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 31, pp. 89-102, March 1985

[65] T.W. SEDERBERG and D.C. ANDERSON. Steiner Surface Patches, *I.E.E.E. Computer Graphics and Applications*, pp. 23 - 36, May 1985

[66] I.R. SHAFAREVITCH. Basic Algebraic Geometry, *Springer Verlag*, Berlin Heidelberg New York, 1974

[67] F. SILLION. Simulation de l'éclairage pour la synthèse d'images: réalisme et interactivité, *Thèse*, Université de Paris Sud, Centre d'Orsay, Juin 1989

[68] L.R. SPEER, T.D. DE ROSE, B.A. BARSKY. A Theoretical and Empirical Analysis of Coherent Ray Tracing, Berkeley Computer Graphics Laboratory, University of California, *Computer Generated Images*, 1985

[69] I.E. SUTHERLAND, R.F. SPROULL , R.A. SCHUMACKER. A Characterisation of Ten Hidden Surface Algorithms, *Computing Survey*, 6 (1), pp. 1 - 55, 1974

[70] M.A.J. SWEENEY and R.H. BARTELS. Ray Tracing Free Form B-Spline Surfaces, *I.E.E.E. Computer Graphics and Applications*, Volume 6, n^o 2, pp. 41 - 49, February 1986

[71] P. TELLIER et K. BOUATOUCH. Vers un modèle d'éclairement réaliste, *Publication interne* n^o 464, IRISA, Rennes, Avril 1989

[72] D.L. TOTH. On Ray Tracing Parametric Surfaces, *Computer Graphics*, Volume 19, n^o 3, pp. 171 - 179, July 1985

[73] B.L. Van Der WAERDEN. Algebra, Volume 2, *Frederich Ungar Publishing Co*, New York, 1970

[74] R.J. WALKER Algebraic Curves, *Springer-Verlag*, 1950

[75] J. WARREN. The effect of Base Points on Rational Bézier Surfaces, *Rapport de Rice University*, 1990

[76] G.S. WATKINS. A Real Time Visible Surface Algorithm, University of Utah, UTEC-CSC, pp. 70 - 101, 1977

[77] H. WEGHORST, G. HOOPER, D.P. GREENBERG. Improved Computational Methods for Ray Tracing, *ACM Trans. Graphics*, Volume 3, n^o 1, pp. 52 - 69, January 1984

[78] T. WHITTED. An Improved Illumination Model for Shaded Display, *Communication of the ACM*, Volume 23, n^o 6, pp. 343 - 349, June 1980

[79] C.G. YANG. On Speeding Up Ray Tracing of B-Spline Surfaces, *Computer Aided Design*, Volume 19, n^o 3, pp. 122 - 130, April 1987

[80] O. ZARISKI. Algebraic Surfaces, *Springer-Verlag*, Second Supplemented Edition, 1971

Luc BIARD

TITRE DE LA THESE

Méthode algorithmique d'implicitisation et d'inversion
Application au lancer de rayons

RESUME DE LA THESE

Le travail présenté ici a pour thème le développement et la mise en oeuvre d'une méthode d'implicitisation et d'inversion ainsi que son application à la visualisation de surfaces polynomiales et rationnelles paramétrées par la technique du lancer de rayons. L'implicitisation est un problème d'élimination pour lequel les méthodes de résultant s'avèrent mieux adaptées à notre application. La méthode de Dixon (1908) pour les surfaces obtenues par produit tensoriel (surfaces de bi-degré) est particulièrement bien adaptée. Nous proposons une extension algorithmique de cette méthode qui conserve ses propriétés de simplicité et de compacité. La programmation en Langage Reduce a permis une expérimentation sur de nombreux exemples : elle montre que l'équation implicite est obtenue, et ceci de façon efficace, bien que la justification théorique de l'algorithme reste incomplète. L'étude de cette dernière nous a amené à considérer les problèmes des paramétrisations non fidèles et de l'apparition de facteurs parasites. Ensuite le problème de l'inversion (identification et détermination des paramètres d'un point de la surface rationnelle) est résolu complètement. Nous proposons enfin une application numérique de ces algorithmes (en Langage C) au problème de l'intersection d'une Bézier rationnelle et d'une demi-droite (rayon). Les aspects de stabilité numérique et d'optimisation sont mis en avant : à chaque surface est associée une table pré-calculée, permettant d'obtenir simplement l'équation d'intersection en le paramètre rayon. Les images données attestent des qualités numériques de cette méthode d'implicitisation-inversion.

MOTS CLES

Implicitisation
Inversion
Lancer de rayons
Surfaces paramétrées
Intersection
Résultant
Elimination.