Déformations de métriques Einstein sur desvariétés à singularités coniques

Grégoire Montcouquiol

Université Paul Sabatier — Toulouse III

Institut de Mathématiques de Toulouse
UFR Mathématiques Informatique Gestion
Ecole Doctorale Mathématiques et Applications
Laboratoire Emile Picard

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Toulouse III
Mention Mathématiques et Applications

par

Grégoire MONTCOUQUIOL

Déformations de métriques Einstein sur des variétés à singularités coniques

Soutenue le mardi 6 décembre 2005 devant le jury composé de :

M.	O. Biquard	professeur, université Strasbourg I	examinateur
M.	M. Boileau	professeur, université Toulouse III	examinateur
M.	G. Carron	professeur, université de Nantes	rapporteur
M.	M. Herzlich	professeur, université Montpellier II	examinateur
M.	F. Pacard	professeur, université Paris XII	président du jury
M.	J.-M. Schlenker	professeur, université Toulouse III	directeur de thèse

au vu des rapports de :

M.	G. Besson	directeur de recherches, université Grenoble I
M.	G. Carron	professeur, université de Nantes

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Jean-Marc Schlenker, qui a accepté de m'encadrer pendant cette thèse. Il a su être présent et disponible, toujours prêt à m'écouter et à me relancer quand j'en avais besoin. Il m'a témoigné une grande confiance, me laissant la liberté que je souhaitais dans l'orientation de mes recherches. Le sujet qu'il m'a proposé, situé à l'intersection de plusieurs branches des mathématiques, m'a permis d'étendre mes connaissances à des domaines que je ne connaissais pas avant de le rencontrer.

Je voudrais remercier ensuite Gilles Carron et Gérard Besson, qui se sont intéressés à mes travaux bien avant que je leur demande d'être mes rapporteurs. Leurs commentaires m'ont été très précieux pour la rédaction de cette thèse et les discussions que j'ai eues avec eux ont toujours été très enrichissantes, tant sur le plan humain que mathématique.

Je remercie sincèrement Olivier Biquard, Marc Herzlich et Frank Pacard d'avoir accepté de faire partie du jury, ainsi que Michel Boileau, dont l'étendue des connaissances m'a toujours impressionné, notamment lors des séances du séminaire Groupes et Géométrie du mardi matin.

Merci aussi à tout le personnel du laboratoire Emile Picard, grâce à qui ces années à Toulouse se sont si bien passées, et en particulier à Rita Gomes, Agnès Requis et Marie-Line Chemin, sans qui j'aurais eu du mal à terminer ma thèse à distance.

Merci enfin à tous les gens que j'ai rencontré pendant cette thèse et qui sont devenus des amis, depuis les anciens de salle six (Arnaud, Nicolas, Sonia,...) jusqu'aux plus récents (Yohann et Johanna, Cécile, Julien, Anne) en passant par Manu, Guy, Julien, Mathieu et son appareil photo, Laurent, Guillaume, Nicolas, Erwan, et j'en oublie sûrement. Merci à tous ceux qui m'ont aidé pour la soutenance, et particulièrement à Philippe et Marie-Hélène. Merci à ma famille, à mes parents, qui j'espère sont fiers de moi aujourd'hui.

Et surtout, merci à Vanessa, qui attendait ce moment avec impatience, et qui a su me donner la motivation et l'énergie au moment où c'était nécessaire.

Introduction

L'étude des variétés Einstein, un domaine de recherche actif depuis plusieurs dizaines d'années, est récemment revenue au coeur de l'actualité mathématique, grâce notamment aux travaux de G. Perelman [20] sur la conjecture de géométrisation de Thurston via le flot de Ricci. Les exemples de variétés admettant des métriques Einstein sont plus en plus nombreux, mais restent souvent cantonnés à des familles bien particulières. Ainsi, on connaît de nombreux exemples de variétés Einstein à courbure négative, mais très peu sont non homogènes. Le problème de trouver de telles variétés est rendu plus difficile par le fait qu'elles sont rigides dans le cas compact : on ne peut pas les déformer pour obtenir d'autres variétés Einstein. Ces résultats de rigidité sont connus depuis longtemps pour les variétés hyperboliques et pour les espaces symétriques en général [18]. Mais la situation n'est plus la même dès que l'on quitte les variétés fermées : la rigidité est alors en général subordonnée à d'autres paramètres, comme par exemple la structure conforme du bord à l'infini pour les variétés hyperboliques.

Dans leur célèbre article [13], Hodgson et Kerckhoff montrent que contrairement au cas compact, il est possible de déformer des variétés hyperboliques à singularités coniques. Plus précisément, pour une large classe de cônes-variétés hyperboliques de dimension 3, l'espace des structures coniques hyperboliques au voisinage d'une cône-variété donnée est paramétré par les angles coniques. Si l'on se donne une petite variation des angles, il existe donc une unique structure de cônes-variétés hyperboliques proche de la structure de départ et réalisant la variation donnée des angles coniques. Leur résultat principal est le théorème de rigidité infinitésimale suivant : si M est une cône-variété hyperbolique de dimension 3 de volume fini, dont le lieu singulier forme un entrelacs et dont tous les angles coniques sont inférieurs à 2π, alors il est impossible de la déformer sans modifier ses angles. Cet article, complété par des travaux plus récents (voir notamment [14], [16] et [26]), a été le point de départ de nombreux développements dans l'étude de la géométrie des variétés hyperboliques de dimension 3, tels que la géométrisation des petites orbifolds ou l'étude des groupes kleiniens ([5], [7]).

Le principe de la démonstration du théorème de rigidité infinitésimale de Hodgson et Kerckhoff est de réussir à appliquer la méthode de Calabi-Weil (cf [8], [12], [25]) aux cônes-variétés : on montre que la représentation d'holonomie n'admet pas de déformations non triviales de la forme voulue. Cela nécessite d'établir des formules d'intégration par parties ainsi qu'un résultat du type théorème de Hodge. Ce genre de difficultés est inhérent à l'étude des cônes-variétés ; nous verrons dans cette thèse comment les aborder.

Dans le cas des variétés fermées, Koiso [15] a donné un analogue de la méthode de Calabi-Weil, qui n'utilise plus la représentation d'holonomie mais étudie directement les déformations de la métrique (cf aussi [2], §12.H). Cette deuxième méthode présente l'avantage de s'appliquer, en dimension supérieure, à une classe de variétés plus vaste, et en particulier aux variétés Einstein (vérifiant de bonnes conditions de courbure).

Il est intéressant de regarder si ces techniques s'appliquent aux variétés à singularités coniques, et permettent d'obtenir une généralisation du théorème de Hodgson et Kerckhoff. Il devrait être alors possible de construire, à partir d'une variété hyperbolique à cusps (que l'on peut considérer comme une cône-variété d'angles coniques nuls), des cônes-variétés Einstein proches, dont les angles coniques (suffisamment petits) sont donnés. On peut choisir ces angles de la forme $2\pi/n$; en prenant ensuite un revêtement approprié, on obtient une variété compacte non singulière, dont la métrique a priori non homogène est Einstein, à courbure sectionnelle négative. Comme il a été mentionné, on connaît actuellement très peu d'exemples de telles variétés riemanniennes ; la construction ci-dessus en donnerait toute une famille.

Le but de cette thèse est d'utiliser ces techniques pour montrer qu'infinitésimalement, la situation en dimension supérieure à 3 est la même qu'en dimension 3. Dans un premier temps, une adaptation de la méthode de Koiso permet de démontrer que, sous des hypothèses voisines de celles du théorème de Hodgson et Kerckhoff, on ne peut pas déformer une cône-variété hyperbolique en des cônes-variétés Einstein sans en modifier les angles coniques. En particulier, on redémontre dans le cas de la dimension trois le théorème de rigidité infinitésimale ci-dessus. Dans un deuxième temps, une étude plus poussée de l'équation d'Einstein linéarisée permet de construire, pour toute variation donnée des angles, une déformation Einstein infinitésimale réalisant au premier ordre la variation voulue des angles coniques.

Présentation des résultats et plan de la thèse

Dans le premier chapitre, on met en place le cadre et les différents outils utilisés dans la suite de cette thèse. On commence par donner dans la section 1.1 la définition précise des cônes-variétés envisagées, et on remarque alors que les déformations infinitésimales d'une telle structure peuvent toujours se mettre sous une forme standard (i.e. appartenant à une certaine famille de déformations) au voisinage du lieu singulier. En particulier, une déformation ne modifiant pas les angles a la propriété d'être L^2, à dérivée covariante L^2 ; c'est entre autres pour cette raison que l'on sera amené ensuite à travailler principalement dans le cadre L^2. Notons que contrairement au cas hyperbolique, les déformation standards forment ici une famille de dimension infinie.

La section suivante rappelle la définition des métriques et déformations infinitésimales Einstein et expose le problème des déformations triviales. Afin de s'acquitter de ce dernier, on cherche à imposer la condition de jauge de Bianchi, ce qui revient à pouvoir résoudre une équation de normalisation. On trouve ensuite dans la section 1.3 quelques résultats de la théorie des opérateurs non bornés d'un espace de Hilbert qui nous seront utiles pour résoudre cette équation.

La fin des préliminaires est consacré aux problèmes d'intégrations par parties, et en particulier à la démonstration du théorème suivant :

Théorème (1.4.3)**.** *Soient $u \in C^\infty(T^{(r,s)}M)$, $v \in C^\infty(T^{(r+1,s)}M)$ tels que u, ∇u, v, $\nabla^* v$ soient dans L^2. Alors $\langle u, \nabla^* v\rangle = \langle \nabla u, v\rangle$.*

Les résultats de cette section 1.4 seront d'usage constant dans la suite de la thèse. Ici encore, on verra qu'il est naturel de travailler avec des objets appartenant à des espaces L^2. En plus des théorèmes d'intégrations par partie, on donne leur interprétation en termes d'opérateurs non bornés ainsi que d'autres résultats utilisant les mêmes techniques.

Le but du deuxième chapitre est d'arriver à démontrer le résultat suivant :

Théorème (2.2.1)**.** *Soit M une cône-variété hyperbolique compacte, dont le lieu singulier forme une sous-variété fermée de codimension 2, et dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à 2π. Alors toute déformation Einstein infinitésimale ne modifiant pas les angles coniques est triviale.*

Les restrictions imposées à la géométrie des cônes-variétés sont essentiellement les mêmes que dans l'article de Hodgson et Kerckhoff [13] (on aurait pu remplacer l'hypothèse "M compacte" par l'hypothèse "M de volume fini", mais les choses sont quand même plus simples dans le cas compact). La condition sur la géométrie du lieu singulier est plus cruciale : c'est elle qui permet d'avoir un bon modèle local et qui permet ainsi de faire les calculs. De manière générale, le lieu singulier d'une cône-variété peut être beaucoup plus compliqué. Enfin, la condition sur les angles coniques est une hypothèse technique qui paraît de prime abord assez mystérieuse. En fait, on verra dans la section 2.1.4 que les angles coniques régissent en partie la croissance au voisinage du lieu singulier des solutions d'un laplacien ; plus les angles sont petits, plus on contrôle ces solutions.

L'outil principal dans la démonstration de la rigidité infinitésimale est connu sous le nom de *technique de Bochner*. En partant d'une équation du type $Pu = 0$ où P est un opérateur différentiel du deuxième ordre de type Laplacien, on exprime P comme somme d'un opérateur auto-adjoint positif Q^*Q de degré 2 et d'un opérateur R de degré 0 faisant intervenir la courbure. Une telle décomposition

$$P = Q^*Q + R$$

s'appelle une *formule de Weitzenböck* ; on en rencontrera à de nombreuses reprises dans cette thèse. Ensuite, si elle est valide, une intégration par parties donne

$$0 = \langle Pu, u\rangle = ||Qu||^2 + \langle Ru, u\rangle.$$

Si l'opérateur R est tel que $\langle Ru, u\rangle \geq c||u||^2$ avec $c > 0$, on trouve alors $u = 0$. Le lecteur intéressé par le sujet pourra se référer à [2], §1.I.

La première partie du deuxième chapitre consiste en une étude détaillée de l'équation de normalisation et de l'opérateur correspondant

$$L = \nabla^*\nabla + (n-1)Id = \Delta + 2(n-1)Id$$

agissant sur les 1-formes. Le but est de trouver des bons domaines sur lesquels L est auto-adjoint et donc inversible. Pour ce faire, et après avoir préalablement exhibé une décomposition adaptée en séries de Fourier généralisées (§2.1.3), on étudiera le comportement des solutions de l'équation homogène au voisinage de la singularité. On montrera que ce comportement est étroitement lié aux angles coniques ; par exemple, la norme ponctuelle d'une solution donnée au voisinage d'une composante connexe du lieu singulier d'angle conique α est en r^k avec $k \in \{\pm 1 \pm 2p\pi\alpha^{-1}, \pm 2p\pi\alpha^{-1} / p \in \mathbb{Z}\}$. Les restrictions imposées sur les angles coniques permettent de contrôler suffisamment les solutions de l'équation homogène, et finalement les solutions de l'équation de normalisation tout court. On aboutit ainsi au théorème suivant :

Théorème (2.1.6)**.** *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à 2π. Soit ϕ une forme lisse appartenant à $L^2(T^*M)$. Alors il existe une unique forme $\eta \in C^\infty(T^*M)$ solution de l'équation $L\eta = \phi$ telle que η, $\nabla\eta$, $d\delta\eta$, et $\nabla d\eta$ soient dans L^2.*

Une fois ce résultat établi, il est relativement facile de faire fonctionner la méthode de Koiso pour démontrer le théorème 2.2.1 ; c'est l'objet de la section 2.2. Partant d'une déformation infinitésimale Einstein h_0 préservant les angles (donc à dérivée covariante L^2) d'une cône-variété hyperbolique, dont tous les angles coniques sont inférieurs à 2π, la démonstration de sa trivialité se fait en deux temps. On a d'abord besoin de se débarrasser des déformations triviales, on utilise donc le résultat mentionné ci-dessus pour résoudre l'équation de normalisation. On applique ensuite une technique de Bochner à la déformation normalisée $h = h_0 - \delta^*\eta$. En utilisant la formule de Weitzenböck idoine et le premier résultat d'intégration par parties, on obtient

$$\delta^\nabla d^\nabla h + (n-2)h = 0.$$

Une deuxième intégration par parties, un peu plus compliquée, permet de conclure que $h_0 = \delta^*\eta$, et donc que l'on a bien rigidité infinitésimale relativement aux angles coniques au sein des cônes-variétés Einstein.

Le troisième chapitre de la thèse est principalement consacré à la démonstration du résultat suivant :

Théorème (3.3.4)**.** *Soit M une cône-variété hyperbolique dont les angles coniques $\alpha_1, \dots \alpha_p$ sont tous strictement inférieurs à π. Soit $\dot\alpha = (\dot{\alpha_1}, \dots \dot{\alpha_p})$ une variation donnée du p-uplet des angles coniques. Alors il existe une déformation Einstein infinitésimale normalisée h (i.e. telle que $E'(h) = 0$ et $\beta h = 0$) induisant la variation des angles coniques donnée.*

La restriction sur les angles provient encore une fois de l'équation de normalisation. En effet, on utilisera le résultat suivant, version plus précise du théorème 2.1.6 :

Théorème (3.1.1)**.** *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à π. Soit ϕ une section de $L^2(T^*M)$. Alors l'opérateur*

$$L = \nabla^*\nabla + (n-1)Id \ : \ L^{2,2}(T^*M) \to L^2(T^*M)$$

est un isomorphisme.

Ici aussi, la morale est que pour avoir plus de contrôle sur les solutions de l'équation il est nécessaire de restreindre les angles coniques. Dans la suite de la section 3.1, on montre une version au contraire plus générale de ces résultats de normalisation, s'appliquant à toute déformation L^2.

La construction des déformations Einstein infinitésimales nécessite aussi d'étudier en détail l'opérateur $\nabla^*\nabla - 2\mathring{R}$, qui correspond à l'opérateur d'Einstein linéarisé pour des déformations normalisées. C'est l'objet de la section 3.2, qui est en plusieurs aspects analogue à la section 2.1. On y démontre le résultat suivant, première étape d'un théorème d'inversion locale :

Théorème (3.2.4)**.** *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$. Alors l'opérateur*

$$P = \nabla^*\nabla - 2\mathring{R} \ : \ L^{2,2}(S^2M) \to L^2(S^2M)$$

est un isomorphisme.

On peut alors passer à la démonstration du théorème 3.3.4, dans la dernière partie du troisième chapitre. La méthode de construction est la suivante : on part d'une déformation infinitésimale h_0, Einstein au voisinage du lieu singulier, et induisant la variation voulue des angles. On cherche alors à lui rajouter une déformation $L^{1,2}$ (donc ne modifiant pas les angles) de telle sorte que la somme vérifie l'équation d'Einstein linéarisée. Cela revient à résoudre une équation de la forme

$$(\nabla^*\nabla - 2\mathring{R})h = \phi,$$

où $\phi = E'(h_0)$ est un 2-tenseur vérifiant la condition de jauge de Bianchi, et à s'assurer que la solution trouvée vérifie aussi cette condition. La déformation $h - h_0$ est alors Einstein et a les propriétés voulues, et les résultats de la section 3.2.6 permettent de bien comprendre le comportement au voisinage du lieu singulier de la déformation Einstein ainsi construites.

Enfin, l'appendice regroupe quelques lemmes techniques, dont on a jugé préférable de mettre la démonstration dans une section à part du reste du texte.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Les cônes-variétés et leurs déformations

Nous allons maintenant préciser le cadre dans lequel on se place. La notion de cône-variété, plus générale que celle d'orbifold, a été introduite par Thurston [22] pour l'étude des déformations des variétés hyperboliques à cusps en dimension 3. Le cas le plus fréquemment rencontré est celui des cônes-variétés à courbure constante. Celles-ci sont relativement simples à définir, soit géométriquement comme un recollement de simplexes géodésiques, soit en explicitant la métrique en coordonnées ; c'est cette dernière approche qui sera utilisée ici. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [23] pour une définition par récurrence des cônes-variétés modelées sur une géométrie.

La géométrie du lieu singulier d'une cône-variété arbitraire peut être très compliquée. Dans le cadre de notre étude nous nous limiterons au cas où il forme une sous-variété de codimension deux, ce qui permet de parler d'angle conique le long de chaque composante connexe du lieu singulier et d'avoir des bons modèles locaux pour mener à bien les calculs.

Enfin, comme notre but est de s'intéresser à des variétés Einstein, on s'autorise une classe assez large de métriques à singularités : on demande juste que la métrique conique ressemble asymptotiquement au produit de la métrique du lieu singulier avec la métrique d'un cône (de dimension deux).

Soit M une variété compacte de dimension $n \geq 3$, et $\Sigma = \coprod_{i=1}^{p} \Sigma_i$ une sous-variété fermée plongée de codimension 2, dont les Σ_i sont les composantes connexes. Dans la suite de ce texte on emploiera souvent la notation M pour désigner improprement $M \setminus \Sigma$.

Définition 1.1.1. *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des réels positifs. La variété M est munie d'une structure de* cône-variété, *de lieu singulier $\Sigma = \coprod_{i=1}^{p} \Sigma_i$ et d'angles coniques les α_i, si :*

- *$M \setminus \Sigma$ est munie d'une métrique riemannienne g, non complète ;*
- *pour tout i, Σ_i est munie d'une métrique riemannienne g_i ;*
- *pour tout i, tout point x de Σ_i a un voisinage V dans M difféomorphe à $D^2 \times U$, avec $U = V \cap \Sigma_i$ un voisinage de x dans Σ_i, dans lequel g s'exprime en coordonnées cylindriques*

locales sous la forme

$$g = dr^2 + (\frac{\alpha_i}{2\pi})^2 r^2 d\theta^2 + g_i + q,$$

où q est un 2-tenseur symétrique vérifiant $g(q,q) = o(r^2)$ et $g(\nabla q, \nabla q) = o(1)$.

Dans la suite on exprimera souvent la métrique g sous la forme légèrement différente

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + g_i + q,$$

où la coordonnée d'angle θ est définie non plus modulo 2π mais modulo l'angle conique α_i.

Une cône-variété hyperbolique est alors une cône-variété telle que les métriques g et g_i sont hyperboliques. On a dans ce cas, en reprenant les notations de la définition,

$$q = (\frac{\alpha_i}{2\pi})^2 (\mathrm{sh}(r)^2 - r^2) d\theta^2 + (\mathrm{ch}(r)^2 - 1) g_i.$$

Pour démontrer un certain nombre de résultats, nous aurons besoin d'un contrôle sur les angles coniques ; par exemple, la preuve de la rigidité infinitésimale à partir de la fin de la section 2.1 nécessite que tous les angles soient inférieurs à 2π. Ces conditions seront explicitées quand elles apparaîtront.

Le caractère singulier des cônes-variétés pose problème pour adapter certaines méthodes d'analyse, comme une technique de Bochner. Il faut toujours vérifier si les choses marchent de la même manière que dans le cas compact.

La première difficulté va venir des intégrations par parties. Premièrement, pour garantir que les expressions manipulées ont un sens, nous serons obligés de travailler avec des objets L^2. Deuxièmement, il va falloir démontrer qu'on peut effectivement appliquer des formules de type Stokes : ce sera l'objet de la partie 1.4. Au final nous serons en mesure d'effectuer des intégrations par parties pour les opérateurs d et δ, et ∇ et ∇^*. Mais un tel résultat n'existe pas (à notre connaissance) pour les opérateurs d^∇ et δ^∇ ; nous devrons donc contourner cette difficulté quand nous en aurons besoin (section 2.2).

La plus grande difficulté va venir de l'équation correspondant à l'opérateur d'Einstein linéarisé et de l'équation de normalisation, étudiées dans les sections 2.1 et 3.2. Bien qu'en présence de sympathiques opérateurs elliptiques de la forme $\nabla^*\nabla$ plus un terme borné d'ordre 0, on ne peut pas appliquer la théorie classique sur une cône-variété, dont la métrique est singulière. Les équations admettront encore des solutions, mais celles-ci ne seront plus uniques, et on aura quoi qu'il arrive une perte de régularité. Cependant, en imposant que les angles coniques soient assez petits, nous arriverons à avoir suffisamment de contrôle sur les solutions et la norme de certaines combinaisons linéaires de leurs dérivées pour faire fonctionner les démonstrations.

Soit (M, g) une cône-variété au sens ci-dessus, de lieu singulier Σ. Soit maintenant g_t une famille de métriques singulières, dérivable, telle que $g_0 = g$ et que pour tout t, (M, g_t) soit une cône-variété de lieu singulier Σ.

Si x est un point de Σ, pour tout t il existe par définition un voisinage de x dans M dans lequel on a l'expression ci-dessus pour la métrique en coordonnées cylindriques. Quitte à les restreindre, ces voisinages sont tous difféomorphes, et on peut donc faire agir une famille ϕ_t de difféomorphismes de telles façons que les coordonnées cylindriques locales pour l'expression de $\phi_t^* g_t$ soient les mêmes pour tout t.

Dit d'une autre manière, il existe un voisinage V de x dans M, difféomorphe à $D^2 \times U$ où $U = V \cap \Sigma$ est un voisinage de x dans Σ, dans lequel on peut trouver des coordonnées cylindriques telles que pour tout t, on ait :

$$\phi_t^* g_t = dr^2 + (\frac{\alpha_t}{2\pi})^2 r^2 d\theta^2 + h_t + q_t.$$

Dans cette expression, h_t désigne une métrique sur U et q_t est un 2-tenseur symétrique qui vérifie les conditions de la définition 1.1.1.

Finalement, quitte à modifier la famille g_t par des difféomorphismes, ce qui revient à modifier la déformation infinitésimale par une déformation géométriquement triviale, on peut montrer que $h = \frac{dg_t}{dt}|_{t=0}$ est au voisinage du lieu singulier combinaison linéaire des quatre types de déformations suivants, modifiant :

- l'angle,
- la métrique du lieu singulier,
- le reste,
- et enfin, la façon de "recoller" la variable d'angle quand on passe d'un système de coordonnées à un autre.

Au voisinage du lieu singulier, une déformation h modifiant le reste vérifie $|h| = o(r)$ et $|\nabla h| = o(1)$. Les autres déformations sont de la forme (à une déformation modifiant le reste près) $\lambda r^2 d\theta^2$ pour celle modifiant l'angle, h_Σ, extension d'un 2-tenseur symétrique défini sur Σ pour celle modifiant la métrique du lieu singulier, et $r^2 d\theta.\omega$, où ω est l'extension d'une 1-forme définie sur Σ, pour celle modifiant la variable d'angle.

Il est important de noter que les toutes ces déformations infinitésimales sont L^2. Par contre seules les trois dernières ont leur dérivée covariante dans L^2. En effet, on peut constater que sur les expressions donnée ci-dessus, $|\nabla h|$ est en $o(1)$, $|\nabla h_\Sigma|$ et $|\nabla r^2 d\theta.\omega|$ sont en $O(1)$, alors que $|\nabla r^2 d\theta^2|$ est en r^{-1}, et n'est donc pas L^2. Ainsi, c'est au niveau du caractère L^2 ou non de la dérivée covariante de la déformation que l'on voit si celle-ci préserve ou non les angles coniques.

1.2 Les métriques Einstein, leurs déformations et l'équation de normalisation

Par définition, une *métrique Einstein* est une métrique riemannienne g vérifiant l'équation

$$ric(g) = cg,$$

où le terme de gauche est le tenseur de courbure de Ricci et où c est une constante. Notons que si on remplace g par λg, avec λ une constante strictement positive, alors la nouvelle métrique vérifie l'équation ci-dessus en remplaçant c par $\lambda^{-1}c$; donc en fait c'est principalement le signe et non la valeur exacte de la constante c qui compte. On peut ainsi distinguer trois grandes classes de métriques Einstein suivant que c est négatif, positif ou nul.

Les métriques à courbure sectionnelle constante sont toujours Einstein ; en dimension 3 ce sont les seules. Par contre dès la dimension 4 il y a beaucoup plus de métriques Einstein que de métriques à courbure sectionnelle constante ; on peut donc considérer la condition Einstein comme un affaiblissement ou une généralisation de la condition de courbure sectionnelle constante.

Puisque l'on s'intéresse principalement aux cônes-variétés hyperboliques, on ne considèrera que des métriques Einstein vérifiant $E(g) = 0$, avec

$$E(g) = ric(g) + (n-1)g.$$

La constante $(n-1)$ est choisie de telle sorte que les métriques hyperboliques vérifient cette équation.

Soit g_t une famille lisse de métriques Einstein (c'est-à-dire vérifiant $E(g_t) = 0$) sur une variété donnée M, avec $g_0 = g$. Le 2-tenseur symétrique $h = \frac{d}{dt}g_t|_{t=0}$ vérifie alors l'équation d'Einstein linéarisée

$$E'_g(h) = 0.$$

Le calcul de E'_g est classique, voir par exemple [2] §1.K :

$$E'_g(h) = \nabla_g^*\nabla_g h - 2\mathring{R}_g h - \delta_g^*(2\delta_g h + d\mathrm{tr}\,_g h). \tag{1.1}$$

Les opérateurs utilisés ici nécessitent un peu d'explication. La notation ∇_g, ou ∇ pour simplifier, désigne la dérivée covariante ou connexion de Levi-Cività associée à la métrique riemannienne g. Elle admet un adjoint formel noté ∇_g^* : si $(e_i)_{i=1\ldots n}$ est une base orthonormée, on a

$$\nabla_g^*\eta(X_1, \ldots, X_p) = -\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}\eta)(e_i, X_1, \ldots, X_p).$$

Pour les tenseurs symétriques, on définit $\delta_g^* : \mathcal{S}^p M \to \mathcal{S}^{p+1}M$ comme étant la composée de la dérivée covariante et de la symétrisation. En particulier, si $\eta \in \Omega^1 M = \mathcal{S}^1 M$, alors

$$\begin{aligned}
\delta_g^*\eta(x,y) &= \frac{1}{2}((\nabla_x\eta)(y) + (\nabla_y\eta)(x)) \\
&= \frac{1}{2}(g(\nabla_x\eta^\sharp, y) + g(\nabla_y\eta^\sharp, x)) \\
&= \frac{1}{2}L_{\eta^\sharp}g(x,y),
\end{aligned}$$

où $L_{\eta^\sharp}$ désigne la dérivée de Lie le long du champ de vecteur $\eta^\sharp$ dual (pour la métrique g) à la forme η. L'adjoint formel de l'opérateur δ_g^* se note δ_g ; c'est juste la restriction de ∇_g^* à $S^{p+1}M$.

Ensuite, $\mathring{R}_g$ désigne l'action du tenseur de courbure R_g sur les 2-tenseurs symétriques : si h est une section de S^2M, on pose

$$\mathring{R}_g h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} h(R_g(x,e_i)y, e_i),$$

où (e_i) est une base orthonormale pour TM ; c'est encore un 2-tenseur symétrique. Si g est hyperbolique, on a alors

$$\mathring{R}_g h = h - (\mathrm{tr}\,_g h)g. \tag{1.2}$$

L'opérateur $\mathring{R}_g$ apparaît souvent dans les problèmes de déformations de métriques ; la propriété suivante ([2], §1.132) met l'accent sur son lien avec les métriques Einstein.

Proposition 1.2.1. *Une métrique riemannienne g est Einstein si et seulement si l'opérateur $\mathring{R}_g$ envoie l'espace S^2_0 des 2-tenseurs symétriques sans trace dans lui-même.*

Enfin, la notation $\mathrm{tr}\,_g$ désigne juste la trace par rapport à g : si h est un 2-tenseur,

$$\mathrm{tr}\,_g h = \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i).$$

Dans la suite et pour alléger les notations, on omettra le plus fréquemment l'indice g.

Par définition, une *déformation Einstein infinitésimale* de la variété Einstein (M,g) est un 2-tenseur symétrique h vérifiant l'équation $E'_g(h) = 0$.

Maintenant, si g est Einstein et si ϕ est un difféomorphisme de M, alors la métrique tirée en arrière $\phi^* g$ est aussi Einstein. Par conséquent, si ϕ_t est une famille lisse de difféomorphismes telle que ϕ_0 soit l'identité, alors la déformation infinitésimale associée $\frac{d}{dt}\phi_t^* g|_{t=0}$ est naturellement Einstein. Une telle déformation est qualifiée de *triviale*. Soit X le champ de vecteurs sur M défini par $X(x) = \frac{d}{dt}(\phi_t(x))|_{t=0}$, et soit $\eta = X^\flat$ la 1-forme duale, c'est-à-dire vérifiant $\eta(Y) = g(X,Y)$ pour tout vecteur Y. On a les relations

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^* g)|_{t=0} = L_X g = 2\delta_g^* \eta;$$

l'espace des déformations infinitésimales triviales est donc égal à $\mathrm{Im}\,\delta_g^*$.

La façon habituelle de se débarrasser des déformations triviales est d'imposer une condition de jauge, c'est-à-dire de ne considérer que des déformations infinitésimales vérifiant une certaine équation. On en trouve plusieurs dans la littérature, on utilisera ici la jauge de Bianchi (voir [4] §I.1.C, [1] §2.3). On veut donc que nos déformations infinitésimales h vérifient

$$\beta_g(h) = 0,$$

où $\beta_g : \mathcal{S}^2M \to \Omega^1 M$ est l'opérateur de Bianchi (associé à la métrique g) défini par

$$\beta_g(h) = \delta_g h + \frac{1}{2} d\mathrm{tr}\,_g h.$$

D'un point de vue géométrique, d'autres conditions de normalisation sont plus naturelle ; par exemple la condition $\delta_g h = 0$, qui correspond à regarder des déformations L^2-orthogonales aux déformations triviales, ou la condition d'être infinitésimalement harmonique, voir [2] §12.C, cf aussi [14]. Mais en général ces conditions coïncident sur les déformations infinitésimales Einstein. La condition de jauge de Bianchi est plus naturelle d'un point de vue analytique, pour rendre les opérateurs elliptiques ; cf par exemple [10].

Ainsi, étant donnée une déformation infinitésimale h_0, on veut pouvoir la modifier par une déformation triviale, de façon essentiellement unique, de telle sorte que le résultat vérifie la condition de jauge. Dit plus précisément, on veut trouver une 1-forme η telle que la déformation normalisée $h = h_0 - \delta^*\eta$ satisfasse $\beta(h) = 0$; de façon équivalente, on cherche à résoudre *l'équation de normalisation* (on omet les indices)

$$\beta \circ \delta^*\eta = \beta(h_0). \tag{1.3}$$

L'étude de cette équation et de l'opérateur $\beta \circ \delta^*$ est l'objet de la section 2.1. On se placera entre autre dans le cadre de la théorie des opérateurs non bornés entre espace de Hilbert, dont les résultats principaux sont cités dans la section suivante.

1.3 Quelques rappels sur les opérateurs non bornés

Nous allons annoncer un certain nombre de définitions et propriétés concernant les opérateurs non bornés ; le lecteur intéressé pourra consulter [19], chapitre 8, ou [21], chapitre 13.

Soient E et F deux espaces de Hilbert. Un *opérateur non borné* est une application linéaire

$$A : D(A) \to F$$

où $D(A)$ (le domaine de A) est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, toute application linéaire (continue ou non) de E dans F est un opérateur non borné.

Soit A et B deux opérateurs non bornés. On dit que B est un *prolongement* de A, noté $A \subset B$, si $D(A) \subset D(B)$ et $B_{|D(A)} = A$.

Un opérateur non borné A est *fermé* si son graphe $G(A) = \{(u, A(u)) | u \in D(A)\}$ est fermé dans $E \times F$, ce qui revient à dire que pour toute suite (u_n) de $D(A)$ telle que $u_n \to u \in E$ et $A(u_n) \to v \in F$, on a $u \in D(A)$ et $v = A(u)$.

Si A est à domaine dense dans E, on peut définir son *adjoint* $A^* : D(A^*) \subset F \to E$ de la façon suivante :

$$v \in D(A^*) \Longleftrightarrow \exists w \in E \text{ tel que } \forall u \in D(A),\ \langle u, w \rangle_E = \langle A(u), v \rangle_F.$$

Comme $D(A)$ est dense dans E, l'élément w (si il existe) est unique ; on pose $w = A^*(v)$. Remarquons que l'adjoint d'un opérateur est toujours fermé. On a aussi la propriété évidente (si les opérateurs considérés sont à domaine dense) $A \subset B \implies B^* \subset A^*$.

Pour définir A^{**}, il faut vérifier que A^* est à domaine dense, ce qui n'est pas toujours le cas. Mais on a la propriété suivante (voir [19] §117) :

Proposition 1.3.1. *Soit A un opérateur non borné de E dans F, à domaine dense. Alors A^* est à domaine dense si et seulement si A admet un prolongement fermé. Dans ce cas, A^{**} est le plus petit prolongement fermé de A, i.e. si on a $A \subset B$ avec B fermé, alors $A^{**} \subset B$.*

On remarque aussi que le graphe de A^{**} n'est autre que l'adhérence dans $E \times F$ du graphe de A. D'autre part, si A est fermé, on a $A^{**} = A$. En particulier, dès que cela a un sens, on a toujours $A^{***} = A^*$ (notons au passage que l'on a bien $(A^*)^{**} = (A^{**})^*$).

Si A est injectif, on peut définir son inverse A^{-1} : son domaine n'est autre que l'image de A.

Pour pouvoir définir la composition de deux opérateurs non bornés $A : D(A) \subset E \to F$ et $B : D(B) \subset F \to G$, on pose, par définition,

$$D(B \circ A) = \{x \in D(A) | A(x) \in D(B)\}.$$

De même, la somme se définit naturellement sur le domaine

$$D(A + A') = D(A) \cap D(A').$$

Il se peut évidemment que ces domaines soient réduits à l'élément nul. Cependant, on a le théorème relativement surprenant suivant ([19], §118, ou [21], théorème 13.13), et son corollaire :

Théorème 1.3.2. *Si l'opérateur non borné $A : E \to F$ est fermé et de domaine dense, alors les opérateurs*

$$B = (A^* \circ A + Id)^{-1},\ C = A \circ (A^* \circ A + Id)^{-1}$$

sont des applications linéaires continues *de E dans E et de E dans F ; de plus $||B|| \leq 1$, $||C|| \leq 1$, et B est auto-adjointe positive.*

Corollaire 1.3.3. *Si l'opérateur non borné $A : E \to F$ est fermé et de domaine dense, et si $B : E \to E$ est une application linéaire continue et auto-adjointe, alors l'opérateur $A^* \circ A + B$ est auto-adjoint.*

Maintenant, soit M une variété riemannienne, et soient E et F deux fibrés vectoriels sur M, munis de métriques riemanniennes $(.,.)_E$ et $(.,.)_F$. On note $C_0^\infty(E)$ (resp. $C^\infty(E)$, resp. $L^2(E)$) l'espace des sections de E qui sont C^∞ à support compact (resp. C^∞, resp. L^2) ; de même pour F. La métrique sur E et la forme volume sur M font de $L^2(E)$ un espace de Hilbert (pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle_E = \int_M (f,g)_E dvol_M$) dont $C_0^\infty(E)$ est un sous-espace dense ; de même pour F.

Soit A un opérateur différentiel agissant sur les sections de E. On le considère comme un opérateur non borné de domaine les sections C^∞ à support compact, i.e.

$$A : C_0^\infty(E) \to C_0^\infty(F) \subset L^2(F),$$

et on suppose que A admet un *adjoint formel* $A^t : C_0^\infty(F) \to C_0^\infty(E)$, i.e. tel que

$$\langle Au, v\rangle_F = \langle u, A^t v\rangle_E \ \forall u \in C_0^\infty(E) \text{ et } \forall v \in C_0^\infty(F).$$

On a clairement $A^t \subset A^*$ donc A^* est à domaine dense.

On pose alors $A_{min} = A^{**}$, c'est, on l'a vu, le plus petit prolongement fermé de A. Le graphe de A^{**} est l'adhérence du graphe de A, donc (et on peut prendre ça comme définition)

$$u \in D(A_{min}) \Leftrightarrow \exists (u_n) \in C_0^\infty(E) \text{ telle que } \lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ et que la suite } (Au_n) \text{ converge dans } L^2,$$

$A_{min}u$ est alors la valeur de cette limite.

On pose aussi $A_{max} = (A^t)^*$; comme $A^t \subset A^*$, on a $A^{**} \subset A_{max}$ et donc $A \subset A_{max}$. De plus $A^t \subset (A^t)^{**} = (A_{max})^*$, et, vu la propriété de minimalité de **, on en déduit que A_{max} est le plus grand prolongement de A dont l'adjoint prolonge aussi A^t. Plus précisément,

$$u \in D(A_{max}) \Longleftrightarrow \exists v \in L^2(F) \text{ tel que } \forall \phi \in C_0^\infty(F),\ \langle u, A^t\phi\rangle_E = \langle v, \phi\rangle_F,$$

ce qui signifie exactement que $v = Au$ "au sens des distributions". En utilisant des techniques standards d'analyse (convolution), on montre qu'on peut approcher $u \in D(A_{max})$ par des sections lisses, i.e. (et on peut prendre ça comme définition)

$$u \in D(A_{max}) \Leftrightarrow \exists (u_n) \in C^\infty(E) \text{ telle que } \lim_{n\to\infty} u_n = u \text{ et que la suite } (Au_n) \text{ converge dans } L^2$$

($A_{max}u$ est alors la valeur de cette limite).

1.4 Intégration par parties sur les cônes-variétés et applications

Pour faire fonctionner la technique de Bochner nous avons besoin de procéder à des intégrations par parties. Les deux résultats suivants ainsi que leur interprétation en termes d'opérateurs non bornés sont à notre disposition. Le premier théorème d'intégration par parties sur une cône-variété est le suivant, dû à Cheeger [9] :

Théorème 1.4.1. *Soient $\eta \in \Omega^p M$ et $\sigma \in \Omega^{p+1}M$ deux formes C^∞ sur M telles que η, $d\eta$, σ, et $\delta\sigma$ soient dans L^2. Alors*

$$\langle \eta, \delta\sigma\rangle = \langle d\eta, \sigma\rangle.$$

En fait il faut adapter un tout petit peu la démonstration, ou combiner deux résultats de l'article cité (cf aussi [13], appendice).

Par passage à la limite, il est clair que l'on a encore

$$\langle \eta, \delta_{max}\sigma\rangle = \langle d_{max}\eta, \sigma\rangle$$

quel que soit $\eta \in D(d_{max})$ et $\sigma \in D(\delta_{max})$. On en déduit immédiatement (cf aussi [11]) que :

Corollaire 1.4.2. *Les opérateurs d_{max} et δ_{max} sont adjoints l'un de l'autre ; on a $d_{max} = d_{min}$ et $\delta_{max} = \delta_{min}$.*

Démonstration. En effet, l'égalité $\langle \eta, \delta_{max}\sigma\rangle = \langle d_{max}\eta, \sigma\rangle$ quel que soit $\eta \in D(d_{max})$ et $\sigma \in D(\delta_{max})$ implique que $\delta_{max} \subset d^*_{max}$. Or $d^*_{max} = \delta_{min} \subset \delta_{max}$. Donc $\delta_{max} = \delta_{min} = d^*_{max}$. Le même argument montre que $d_{max} = d_{min} = \delta^*_{max}$. □

Le deuxième résultat concerne les tenseurs et non plus les formes différentielles :

Théorème 1.4.3. *Soient $u \in C^\infty(T^{(r,s)}M)$, $v \in C^\infty(T^{(r+1,s)}M)$ tels que u, ∇u, v, $\nabla^* v$ soient dans L^2. Alors*

$$\langle u, \nabla^* v\rangle = \langle \nabla u, v\rangle.$$

Démonstration. On va démontrer ce résultat en utilisant une méthode similaire à celle de Cheeger [9]. Pour simplifier, nous supposerons que la métrique au voisinage de Σ est exactement, en coordonnées locales, de la forme $g = dr^2 + r^2 d\theta^2 + g_{|\Sigma_i}$, où θ est définie modulo l'angle conique α. Le cas général se traite exactement de la même façon, les expressions sont juste un peu plus compliquées.

Soit a un réel positif suffisamment petit pour que le a-voisinage fermé de Σ dans M soit tubulaire. Pour $t \leq a$, on note U_t le t-voisinage de Σ dans M, $\Sigma_t = \partial U_t$, et $M_t = M \setminus U_t$. Le vecteur $\frac{\partial}{\partial r} = e_r$ est une normale unitaire en tout point de Σ_t. Avec ces notations, une intégration par parties (c'est-à-dire la formule de Stokes) nous donne :

$$\int_{M_t} (g(u, \nabla^* v) - g(\nabla u, v)) = \int_{\Sigma_t} g_{|\Sigma_t}(u, i_{e_r} v) \tag{1.4}$$

où $i_{e_r} v = v(e_r, .)$. Le terme de gauche converge vers $\langle u, \nabla^* v\rangle - \langle \nabla u, v\rangle$ quand t tend vers 0. Notons I_t le terme de droite de l'égalité, qui correspond au terme de bord. On a alors les inégalités suivantes (la notation $|.|$ désigne la valeur absolue aussi bien que la norme ponctuelle pour la métrique g) :

$$\begin{aligned} |I_t| &\leq \int_{\Sigma_t} |u||i_{e_r} v| \\ &\leq \left(\int_{\Sigma_t} |u|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\Sigma_t} |i_{e_r} v|^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

On va montrer que le fait que ∇u soit L^2 permet d'avoir une bonne majoration de $\int_{\Sigma_t} |u|^2$. Et comme $i_{e_r} v$ est L^2 (car v l'est aussi), $\int_{\Sigma_t} |i_{e_r} v|^2$ ne peut pas croître trop vite quand t tend vers 0. Ce deux résultats nous permettront d'affirmer que I_{t_n} tend vers 0 pour une suite t_n tendant vers 0.

En tout point où $|u| \neq 0$, la fonction $|u|$ est dérivable, et $d|u|(x) = g(\nabla_x u, \frac{u}{|u|})$. On pose

$$\frac{\partial |u|}{\partial r} = g(\nabla_{e_r} u, \frac{u}{|u|})$$

si $|u| \neq 0$, et $\frac{\partial |u|}{\partial r} = 0$ sinon. Il s'agit de la dérivée partielle distributionnelle de $|u|$, au sens où l'on a, si les coordonnées autres que r restent fixées,

$$|u(t)| - |u(a)| = \int_a^t \frac{\partial |u|}{\partial r}(r) dr.$$

Or $|\frac{\partial |u|}{\partial r}| \leq |\nabla_{e_r} u|$, et donc, si $t \leq a$,

$$|u(t)| \leq |u(a)| + \int_t^a |\nabla_{e_r} u| dr$$

et

$$|u(t)|^2 \leq 2|u(a)|^2 + 2(\int_t^a |\nabla_{e_r} u| dr)^2.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient

$$\begin{aligned} \left(\int_t^a |\nabla_{e_r} u| dr \right)^2 &\leq \int_t^a \frac{dr}{r} \int_t^a r |\nabla_{e_r} u|^2 dr \\ &\leq |\ln(\frac{t}{a})| \int_t^a r |\nabla u|^2 dr \end{aligned}$$

En intégrant sur Σ_t on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} |u|^2 &\leq \int_{\Sigma_t} 2|u(a)|^2 + \int_{\Sigma_t} \left(2\ln(\frac{t}{a}) \int_t^a r|\nabla_{e_r} u|^2 dr \right) \\ &\leq 2\int_{\Sigma_t} |u(a)|^2 + 2|\ln(\frac{t}{a})| \int_{\Sigma_t} \int_t^a r|\nabla_{e_r} u|^2 dr \\ &\leq 2\int_{\Sigma} \int_{\theta=0}^{\alpha} |u(a)|^2 t d\theta dvol_\Sigma + 2|\ln(\frac{t}{a})| \int_{\Sigma} \int_{\theta=0}^{\alpha} \left(\int_t^a r|\nabla_{e_r} u|^2 dr \right) t d\theta dvol_\Sigma \\ &\leq 2\frac{t}{a} \int_{\Sigma_a} |u|^2 + 2t|\ln(\frac{t}{a})| \int_{\Sigma} \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_t^a |\nabla_{e_r} u|^2 r dr d\theta dvol_\Sigma \\ &\leq 2\frac{t}{a} \int_{\Sigma_a} |u|^2 + 2t|\ln(\frac{t}{a})| \int_{U_a} |\nabla_{e_r} u|^2 \\ &\leq 2\frac{t}{a} \int_{\Sigma_a} |u|^2 + 2t|\ln(\frac{t}{a})| \int_{U_a} |\nabla u|^2 \\ &= O(t|\ln(t)|) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Il reste à contrôler le terme $\int_{\Sigma_t} |i_{e_r} v|^2 \leq \int_{\Sigma_t} |v|^2$. Comme v est L^2,

$$\int_0^a (\int_{\Sigma_t} |v|^2) dt = \int_{U_a} |v|^2 < +\infty,$$

et donc la fonction $t \mapsto \int_{\Sigma_t} |v|^2$ est intégrable sur $]0, a]$. Or la fonction $(t \ln(t))^{-1}$ n'est pas intégrable en 0. On en déduit donc qu'il existe une suite t_n tendant vers 0 pour laquelle

$$\int_{\Sigma_{t_n}} |v|^2 = o((t_n \ln(t_n))^{-1}).$$

En combinant avec la majoration (1.5) pour $\int_{\Sigma_t} |u|^2$, on en déduit immédiatement que

$$\lim_{n \to +\infty} I_{t_n} = 0.$$

Or $I_t \to \langle u, \nabla^* v \rangle - \langle \nabla u, v \rangle$ quand $t \to 0$; on a donc bien $\langle u, \nabla^* v \rangle = \langle \nabla u, v \rangle$. □

Corollaire 1.4.4. *On considère ∇ comme un opérateur non borné $\nabla : C_0^\infty(T^{(r,s)}M) \to C_0^\infty(T^{(r+1,s)}M)$. Alors pour tout $u \in D(\nabla_{max})$, pour tout $v \in D(\nabla^*)$, on a l'égalité*

$$\langle \nabla_{max} u, v\rangle = \langle u, \nabla^* v\rangle.$$

Ceci implique en particulier que $\nabla_{min} = \nabla_{max}$ et que $\nabla_{min}^t = \nabla_{max}^t = \nabla^*$.

Démonstration. La première égalité se démontre directement en prenant des suites régularisantes pour u et pour v : en effet on a vu dans la section précédente que si $u \in D(\nabla_{max})$ (resp. $v \in D(\nabla^*)$), il existe une suite $u_n \in C^\infty(T^{(r,s)}M)$ (resp. $v_n \in C^\infty(T^{(r+1,s)}M)$) telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ et $\lim_{n\to\infty} \nabla u_n = \nabla_{max} u$ dans L^2 (resp. $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ et $\lim_{n\to\infty} \nabla^* v_n = \nabla^* v$). Alors

$$\langle u, \nabla^* v\rangle = \lim\langle u_n, \nabla^* v_n\rangle = \lim\langle \nabla u_n, v_n\rangle = \langle \nabla_{max} u, v\rangle.$$

La suite se démontre comme le corollaire 1.4.2. □

Dans la suite les notations ∇ et ∇^* désigneront donc (sauf exception) les opérateurs $\nabla_{max}(= \nabla_{min})$ et $\nabla_{max}^t(= \nabla_{min}^t = \nabla^*)$. Puisqu'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, on utilisera épisodiquement la notation $L^{1,2}$ (resp. $L^{2,2}$) à la place de $D(\nabla)$ (resp. $D(\nabla \circ \nabla)$).

On emploiera fréquemment le corollaire suivant, simple reformulation du précédent :

Corollaire 1.4.5. *Soit u appartenant à $D(\nabla)$, c'est-à-dire tel que u et ∇u sont L^2. Alors il existe une suite (u_n), C^∞ à support compact, telle que $u_n \to u$ et $\nabla u_n \to \nabla u$ dans L^2 quand $n \to \infty$.*

Démonstration. C'est juste la définition de $u \in D(\nabla_{min})$. □

Remarque : dans les théorèmes ci-dessus, la condition L^2 paraît naturelle, ne serait-ce que pour s'assurer de l'existence des termes du type $\langle \nabla u, v\rangle$. Cependant il est intéressant de noter que la démonstration donnée du théorème 1.4.3 ne fonctionne pas avec des hypothèses du type u, $\nabla u \in L^p$ et v, $\nabla^* v \in L^q$, avec p et q des exposants conjugués. La condition L^2 est donc plus importante qu'il n'y paraît.

Les techniques développées dans la démonstration du théorème 1.4.3, et en particulier la majoration (1.5), vont nous permettre de montrer deux autres résultats dans la même lignée. Commençons par la proposition suivante, qui simplifiera plusieurs preuves par la suite :

Proposition 1.4.6. *Soit u une section de $T^{(r,s)}M$ telle que u, $\nabla_{e_r} u$ et $\nabla^*\nabla u$ soient dans L^2. Alors ∇u appartient à $L^2(T^{(r+1,s)}M)$.*

Démonstration. La preuve est juste une relecture de la démonstration du théorème 1.4.3. Plus précisément, on constate que pour démontrer l'existence d'une suite t_n tendant vers 0 telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Sigma_{t_n}} g_{|\Sigma_{t_n}}(u, i_{e_r}(v)) = 0,$$

il suffit que $\nabla_{e_r} u$ et $i_{e_r}(v)$ soient L^2. Quand $v = \nabla u$ comme c'est le cas ici, ces deux conditions reviennent à une seule, à savoir $\nabla_{e_r} u \in L^2$.

On applique cela à l'égalité (1.4)

$$\int_{M_{t_n}} g(\nabla u, \nabla u) = \int_{M_{t_n}} g(u, \nabla^* \nabla u) - \int_{\Sigma_{t_n}} g_{|\Sigma_{t_n}}(u, \nabla_{e_r} u).$$

Comme u et $\nabla^*\nabla u$ sont L^2, le terme $\int_{M_{t_n}} g(u, \nabla^*\nabla u)$ converge vers $\langle u, \nabla^*\nabla u\rangle$ quand t_n tend vers 0, et comme le deuxième terme de droite tend vers 0, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M_{t_n}} g(\nabla u, \nabla u) = \langle u, \nabla^*\nabla u\rangle.$$

L'existence de cette limite, plus le fait que $g(\nabla u, \nabla u)$ est partout positif, montre que ∇u appartient à L^2 et que $||\nabla u||^2 = \langle u, \nabla^*\nabla u\rangle$. □

Le résultat suivant, moins anecdotique, nous renseigne encore sur la dérivée covariante (je remercie chaleureusement Gilles Carron pour m'avoir donné l'idée de la preuve) :

Théorème 1.4.7. *L'image de l'opérateur $\nabla : L^{1,2}(T^{(r,s)}M) \to L^2(T^{(r+1,s)})$ est fermée.*

Démonstration. On va procéder en deux temps : on va regarder ce qu'il se passe en dehors du lieu singulier, puis au voisinage du lieu singulier. On reprend les notations de la démonstration du théorème 1.4.3. Soit a un réel positif suffisamment petit pour que le a-voisinage fermé du lieu singulier Σ dans M soit tubulaire, et on suppose donné un réel b tel que $0 < b < a$ (on verra ensuite comment choisir b). Pour $t \leq a$, on note U_t le t-voisinage de Σ dans M, $\Sigma_t = \partial U_t$, et $M_t = M \setminus U_t$. On pose aussi $\Omega = M_b = M \setminus U_b$.

Commençons par regarder ce qui se passe sur Ω. C'est un domaine de M, à bord lisse. On va montrer que l'image de ∇ (ou plutôt de son extension maximale) y est fermée.

Sur Ω, les extensions minimales et maximales de la dérivée covariante sont distinctes. On considère alors l'opérateur $L_N = \nabla^*_{min|\Omega} \circ \nabla_{max|\Omega}$; il s'agit de l'extension de Neumann du laplacien de connexion $\nabla^*\nabla$ sur Ω. Il est auto-adjoint (corollaire 1.3.3), positif, de spectre discret. Pour tout v appartenant à $D(L_N)$, on a

$$\int_\Omega g(L_N v, v) = \int_\Omega g(\nabla_{max|\Omega}\, v, \nabla_{max|\Omega}\, v);$$

le noyau de L_N coïncide donc avec celui de $\nabla_{max|\Omega}$, c'est exactement l'ensemble des sections parallèles sur Ω. Notons λ la première valeur propre non nulle de L_N. D'après la classique formule du minimax,

$$\lambda = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega g(\nabla_{max|\Omega}\, v, \nabla_{max|\Omega}\, v)}{\int_\Omega g(v,v)} \mid v \in D(\nabla_{max|\Omega}) \cap (\ker \nabla_{max|\Omega})^\perp,\ v \neq 0 \right\}.$$

En particulier, si v appartient à $D(\nabla_{max|\Omega}) \cap (\ker \nabla_{max|\Omega})^{\perp}$, alors

$$||v|| \leq (\lambda)^{1/2} ||\nabla_{max|\Omega}\, v|| \tag{1.6}$$

(il s'agit des normes L^2 sur Ω). Cette inégalité suffit à montrer que l'image de $\nabla_{max|\Omega}$ est fermée. En effet, soit (v_n) une suite de $D(\nabla_{max|\Omega})$ telle que la suite $(\nabla_{max|\Omega}\, v_n)$ converge en norme L^2 vers une limite l. On note p_n le projeté orthogonal de v_n sur $(\ker \nabla_{max|\Omega})^{\perp}$. Alors $\nabla_{max|\Omega}\, p_n = \nabla_{max|\Omega}\, v_n$, et la suite des $\nabla_{max|\Omega}\, p_n$ est donc de Cauchy. En appliquant l'inégalité (1.6) à $p_{n+k} - p_n$, on montre directement que la suite (p_n) est de Cauchy, donc converge vers une limite p. Maintenant, comme $\nabla_{max|\Omega}$ est un opérateur fermé, la limite p appartient à $D(\nabla_{max|\Omega})$ et $\nabla_{max|\Omega}\, p = l$, ce qui termine de montrer que l'image de $\nabla_{max|\Omega}$ est fermée.

On va maintenant montrer que sur U_a, l'image de l'extension minimale de la dérivée covariante est fermée. On utilise pour cela la même majoration (1.5) que pour la démonstration du théorème 1.4.3, qui donne, pour toute section u lisse, L^2, à dérivée covariante L^2,

$$\int_{\Sigma_t} |u(t)|^2 \leq 2\frac{t}{a} \int_{\Sigma_a} |u|^2 + 2t |\ln(\frac{t}{a})| \int_{U_a} |\nabla u|^2.$$

En fait cette inégalité est pour une métrique plate sur le cône. Dans le cas général la même majoration est vraie, à un facteur multiplicatif c^2 près. Si u est à support compact dans U_a, alors u est nul sur Σ_a, et en intégrant ce qu'il reste entre 0 et a, on obtient $||u|| \leq \frac{ac}{\sqrt{2}} ||\nabla u||$, où $||.||$ désigne la norme L^2 sur U_a. Par passage à la limite, on a

$$||u|| \leq \frac{ac}{\sqrt{2}} ||\nabla_{min|U_a}\, u|| \tag{1.7}$$

pour tout u appartenant à $D(\nabla_{min|U_a})$. Cette inégalité (une sorte de lemme de Poincaré) implique, comme précédemment, que l'image de $\nabla_{min|U_a}$ est fermée. En effet, soit (v_n) une suite de $D(\nabla_{min|U_a})$ telle que la suite $(\nabla_{min|U_a}\, v_n)$ converge en norme L^2 vers une limite l. La suite $(\nabla_{min|U_a}\, v_n)$ est donc de Cauchy, et en appliquant l'inégalité (1.7) à $v_{n+k} - v_n$, on montre directement que la suite (v_n) est de Cauchy, donc converge vers une limite v, qui vérifie (l'opérateur $\nabla_{min|U_a}$) étant fermé) $v \in D(\nabla_{min|U_a})$ et $\nabla_{min|U_a}\, v = l$, ce qui termine de montrer que l'image de $\nabla_{min|U_a}$ est fermée.

Voyons maintenant comment en déduire un résultat sur tout M. Soit w un point de l'adhérence de l'image de ∇. Il existe alors une suite (u_n) d'éléments de $D(\nabla)$, que l'on peut tous choisir C^∞, telle que la suite ∇u_n converge vers w. On regarde alors la restriction de u_n à Ω : $u_{n|\Omega}$ appartient à $D(\nabla_{max|\Omega})$, et $\nabla_{max|\Omega}\, u_{n|\Omega}$ converge vers $w_{|\Omega}$. Alors on a vu que la suite des projections orthogonales des $u_{n|\Omega}$ sur $(\ker \nabla_{max|\Omega})^{\perp}$ était convergente, c'est-à-dire qu'il existe une suite h_n de sections parallèles sur Ω telle que la suite $(u_{n|\Omega} - h_n)$ converge en norme L^2 sur Ω.

Si tous les h_n sont nuls (par exemple si le fibré n'admet pas de sections parallèles locales), ou si tous les h_n se prolongent en des sections parallèles sur tout M, on peut terminer la preuve facilement. A la place de la suite (u_n), on s'intéresse à la suite des $v_n = u_n - h_n$, et on vient de voir que cette suite converge en norme L^2 sur Ω.

On choisit ensuite une fonction de coupure ρ, telle que ρ soit lisse, à support dans U_a, et identiquement égale à 1 sur U_b. Alors pour tout n, ρv_n appartient à $D(\nabla_{min|U_a})$, et

$$\nabla_{min|U_a} \rho v_n = \nabla \rho v_n = \rho \nabla v_n + d\rho \otimes v_n = \rho \nabla u_n + d\rho \otimes v_n.$$

Comme ∇u_n converge vers w et que ρ est bornée, la suite $(\rho \nabla u_n)$ converge en norme L^2 sur U_a vers ρw. D'autre part $d\rho$ est bornée, à support dans $U_a \setminus U_b$ qui est inclus dans Ω ; et comme la suite (v_n) est convergente sur Ω, donc sur $U_a \setminus U_b$, la suite $(d\rho \otimes v_n)$ est aussi convergente en norme L^2 sur U_a. La suite $(\nabla_{min|U_a} \rho v_n)$ est donc convergente sur U_a, ce qui implique directement à l'aide de l'inégalité (1.7) la convergence de la suite ρv_n sur U_a. Comme ρ est identiquement égale à 1 sur U_b, on en déduit la convergence de la suite $(v_{n|U_b})$ en norme L^2 sur U_b. Or on a vu qu'en plus $(v_{n|\Omega})$ converge sur $\Omega = M \setminus U_b$. La suite (v_n) converge donc en norme L^2 sur M entier vers une limite v. Et comme l'opérateur ∇ est fermé, v appartient à $D(\nabla)$ et vérifie $\nabla v = w$, ce qui termine de montrer dans ce cas que $\operatorname{Im} \nabla$ est fermée.

Pour conclure, il suffit de montrer que l'on peut toujours choisir b tel que toute section parallèle sur $\Omega = M \setminus U_b$ se prolonge en section parallèle sur tout M. Pour cela, on utilise les deux faits suivants. D'une part, l'espace des sections parallèles sur $M_t = M \setminus U_t$ est un espace vectoriel de dimension finie. En effet, une section parallèle sur (une composante connexe d') un ouvert est entièrement déterminée par sa valeur en un point. D'autre part, si $0 < t < t' < a$, alors $M_{t'} \subset M_t$, et l'espace des sections parallèles sur M_t est inclus dans l'espace des sections parallèles sur $M_{t'}$ (plus formellement, s'injecte via l'application de restriction dans...). Ainsi quand t tend en décroissant vers 0, l'espace des sections parallèles sur M_t, qui est de dimension finie, décroît aussi, donc finit par être constant. C'est-à-dire qu'il existe un réel t_0, $0 < t_0 < a$, tel que pour tout t inférieur à t_0, l'espace des sections parallèles sur M_t et sur M_{t_0} coïncide : toute section parallèle sur M_{t_0} se prolonge en section parallèle sur M_t. Et comme cette dernière propriété est vraie pour tout $t \in]0, t_0]$, on en déduit que toute section parallèle sur M_{t_0} se prolonge en une section parallèle de M. On choisit alors $b = t_0$ pour terminer la démonstration. $\square$

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1.4.8. *On considère l'opérateur $\nabla : L^{1,2}(T^{(r,s)}M) \to L^2(T^{(r+1,s)})$. Il existe une constante c telle que pour tout élément $\xi \in \operatorname{Im} \nabla$, il existe une section $\zeta \in L^{1,2}(T^{(r,s)}M)$ vérifiant $\nabla \zeta = \xi$ et $||\zeta|| \leq c||\xi||$.*

Démonstration. L'espace $L^{1,2}(T^{(r,s)}M)$ est un Hilbert pour le produit scalaire $\langle u, v\rangle_2 = \langle u, v\rangle + \langle \nabla u, \nabla v\rangle$. L'application ∇ est alors continue pour la norme $||.||_2$ associée. Sa restriction à $(\ker \nabla)^\perp$ (où l'orthogonalité est au sens du produit scalaire sus-cité) est une application linéaire, continue, bijective ; c'est donc un isomorphisme d'après le théorème de l'image ouverte. Il existe alors une constante c' telle que $||\zeta||_2 \leq c'||\nabla \zeta||$ pour tout $\zeta \in (\ker \nabla)^\perp$. Comme $||\zeta||_2^2 = ||\zeta||^2 + ||\nabla \zeta||^2$, on en déduit immédiatement que $||\zeta|| \leq c||\nabla \zeta||$ pour tout $u \in (\ker \nabla)^\perp$, avec $c^2 = c'^2 - 1$. Pour conclure, étant donné $\xi \in \operatorname{Im} \nabla$, il suffit de prendre pour ζ son unique antécédent dans $(\ker \nabla)^\perp$. $\square$

Chapitre 2

Rigidité infinitésimale

2.1 Etude de l'équation de normalisation

Dans toute cette section, nous supposerons que la métrique conique g est *hyperbolique*.

Comme on l'a vu dans la section 1.2, pour se débarrasser des déformations triviales on cherche à imposer la condition de jauge de Bianchi. Montrer qu'une déformation infinitésimale peut se mettre sous une forme normalisée vérifiant la condition de jauge revient à résoudre l'équation de normalisation (1.3) :

$$\beta \circ \delta^* \eta = \beta h_0.$$

Cette équation peut se mettre sous une forme plus lisible. Pour cela, on utilise le fait que

$$\nabla \eta = \delta^* \eta + \frac{1}{2} d\eta$$

(il s'agit juste de la décomposition du 2-tenseur $\nabla \eta$ en partie symétrique et anti-symétrique), que δ est toujours la restriction de ∇^* au sous-fibré correspondant, et donc que

$$\delta \eta = \nabla^* \eta = -\mathrm{tr}\, \nabla \eta = -\mathrm{tr}\, \delta^* \eta,$$

la trace de $d\eta$ étant nulle puisque $d\eta$ est anti-symétrique. On obtient alors

$$\begin{aligned} 2\beta(\delta^* \eta) &= 2\delta\delta^* \eta + d\mathrm{tr}\, \delta^* \eta \\ &= 2\nabla^*(\nabla \eta - \frac{1}{2} d\eta) - d\delta\eta \\ &= 2\nabla^* \nabla \eta - \delta d\eta - d\delta\eta \\ &= 2\nabla^* \nabla \eta - \Delta \eta. \end{aligned}$$

Ici $\Delta = d\delta + \delta d$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les 1-formes. Or Δ et $\nabla^* \nabla$ (parfois nommé *laplacien de connexion*) sont reliés par la classique formule de Weitzenböck

$$\Delta \eta = \nabla^* \nabla \eta + ric(\eta), \tag{2.1}$$

voir [2] §1.155. En utilisant cette formule, on trouve

$$\begin{aligned} 2\beta(\delta^*\eta) &= \Delta\eta - 2ric(\eta) \\ &= \nabla^*\nabla\eta - ric(\eta). \end{aligned}$$

Pour une métrique Einstein, $ric(\eta) = c\eta$, et l'expression ci-dessus se simplifie encore. Dans le cas qui nous intéresse, la métrique g est hyperbolique, et

$$2\beta(\delta^*\eta) = \nabla^*\nabla\eta + (n-1)\eta. \tag{2.2}$$

On est donc amener à étudier l'opérateur $L : \eta \mapsto \nabla^*\nabla\eta + (n-1)\eta$.

2.1.1 Premières propriétés

La première chose à remarquer sur L est qu'il est *elliptique*. En particulier, si ϕ est C^∞ et que $Lu = \phi$ au sens des distributions, alors u est C^∞. Malheureusement, le caractère singulier d'une cône-variété nous empêche d'utiliser directement les inégalités de type Schauder ou Gårding. Par exemple, on peut montrer qu'il existe des 1-formes u appartenant à L^2 telles que $Lu = 0$ au sens des distributions avec ∇u qui n'est pas dans L^2.

Il est clair que L, vu comme un opérateur non borné $C_0^\infty(T^*M) \to C_0^\infty(T^*M)$, est formellement symétrique : avec les notations de la section 1.3, $L^t = L$. Malheureusement, il est possible de montrer que dès que la dimension de notre cône-variété est supérieure à 2, l'opérateur L n'est pas essentiellement auto-adjoint, i.e. $L_{min} \neq L_{max}$ (ou si l'on préfère, $L^{**} \neq L^*$). On va donc étudier des extensions auto-adjointes $\bar{L}$ de L, avec $L_{min} \subset \bar{L} \subset L_{max}$.

Le théorème 1.3.2 nous donne une première telle extension : toujours avec les conventions de la section 1.3, l'opérateur $\nabla^* \circ \nabla + (n-1)Id$ est auto-adjoint et inversible. Son domaine est par définition

$$D = \{u \in D(\nabla) \mid \nabla u \in D(\nabla^*)\} = \left\{u \in L^2 \mid \nabla u,\ \nabla^*\nabla u \in L^2\right\}$$

(dans la deuxième définition, il faut considérer ∇ et $\nabla^*\nabla$ au sens des distributions). Il s'agit en fait de l'extension de Friedrichs de L.

On va maintenant introduire une deuxième extension auto-adjointe. On doit à Gaffney [11] le résultat général suivant : les opérateurs $d_{min}\delta_{max} + \delta_{max}d_{min}$ et $d_{max}\delta_{min} + \delta_{min}d_{max}$ (encore avec les conventions de la section 1.3) sont toujours auto-adjoints. Or d'après le corollaire 1.4.2, on a $d_{min} = d_{max}$ et $\delta_{min} = \delta_{max}$; les deux opérateurs ci-dessus sont donc les mêmes sur une cône-variété. On en déduit que l'opérateur $d_{max}\delta_{max} + \delta_{max}d_{max} + 2(n-1)Id$, défini sur le domaine

$$\begin{aligned} D' &= \{u \in D(d_{max}) \cap D(\delta_{max}) \mid d_{max}u \in D(\delta_{max}) \text{ et } \delta_{max}u \in D(d_{max})\} \\ &= \left\{u \in L^2 \mid du,\ \delta u,\ d\delta u,\ \delta du \in L^2\right\}, \end{aligned}$$

est positif auto-adjoint et donc inversible (encore une fois dans la deuxième définition, il faut considérer les opérateurs au sens des distributions). Nous montrerons plus loin que ces deux domaines D et D' sont en fait confondus quand tous les angles coniques sont inférieurs à 2π.

2.1.2 Expression du laplacien de connexion en coordonnées cylindriques

On va maintenant sauter à pieds joints dans les calculs. Soit a un réel positif suffisamment petit pour que le a-voisinage fermé de Σ dans M soit un voisinage tubulaire. Si r est plus petit que a, on note U_r le r-voisinage de Σ dans M et Σ_r le bord de U_r.

Par définition, si x est un point de Σ, il existe un voisinage V de x dans U_a et un voisinage U de x dans Σ, tels que $U = V \cap \Sigma$ et $V \simeq U \times D^2$, et dans les coordonnées cylindriques locales adaptées à la décomposition $V \simeq U \times D^2$, la métrique est de la forme

$$g = dr^2 + \mathrm{sh}(r)^2 d\theta^2 + \mathrm{ch}(r)^2 g_\Sigma,$$

où θ est défini non pas modulo 2π mais modulo l'angle conique u. On utilisera les notations suivantes : $e^r = dr$, $e^\theta = \mathrm{sh}(r)d\theta$, $e_r = (e^r)^\sharp = \frac{\partial}{\partial r}$, et $e_\theta = (e^\theta)^\sharp = \frac{1}{\mathrm{sh}(r)}\frac{\partial}{\partial \theta}$.

Soit u une section de T^*M. Au voisinage de Σ on peut faire une décomposition orthogonale et on écrit

$$u = fe^r + ge^\theta + \omega,$$

avec f, g, deux fonctions de M dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$, on sera souvent amené dans la suite à complexifier les fibrés sur lesquels on travaille), et ω une 1-forme. On remarque que bien que les coordonnées ne soient que locales, les formes e^r et e^θ sont bien définies sur tout U_a, ainsi que la décomposition orthogonale précédente.

Au vu de la forme de notre voisinage tubulaire, sur tout ouvert V de U_a du type ci-dessus et suffisamment petit, on peut définir localement des champs de vecteurs $e_1, \dots e_{n-2}$ de telle sorte que $(e_r, e_\theta, e_1, \dots e_{n-2})$ forme un repère mobile orthonormé (local), vérifiant

$$\nabla_{e_r} e_k = \nabla_{e_\theta} e_k = 0$$

pour tout k dans $1 \dots n-2$. On définit de même des 1-formes locales $e^1, \dots e^{n-2}$ telles que $(e^r, e^\theta, e^1, \dots e^{n-2})$ soit le repère mobile dual du précédent.

Avant de commencer les calculs, introduisons encore quelques notations. On note N le (sous-)fibré vectoriel au-dessus de U_a, dont la fibre au-dessus de $x \in U_a$ est le sous-espace vectoriel de $T^*_x M$ orthogonal à e^θ et e^r, et N^* le (sous-)fibré vectoriel au-dessus de U_a, dont la fibre au-dessus de $x \in U_a$ est le sous-espace vectoriel de $T_x M$ orthogonal à e_θ et e_r. La 1-forme ω introduite plus haut est naturellement une section de N. Les sections $(e_1, \dots, e_{n-2})$ forment localement une base de N^*, de même pour $(e^1, \dots, e^{n-2})$ et N. Si s est une section de N^*, et t une section de N ou de N^*, on note $\nabla_{\Sigma s} t$, ou de façon plus lisible $(\nabla_\Sigma)(s,t)$, la projection orthogonale sur N ou sur N^* de $\nabla_s t$.

Si f est une fonction de U_a, on pose

$$d_\Sigma f = \sum_{k=1}^{n-2} (e_k.f) e^k,$$

et

$$\Delta_\Sigma f = \mathrm{ch}^2 r \sum_{k=1}^{n-2} (\nabla_\Sigma)(e_k, e_k).f - e_k.e_k.f$$

(c'est à un facteur près l'opposé de la trace de la hessienne de f restreinte à N^*). Ces deux opérateurs sont indépendants du choix des e_k. En fait, avec les notations ci-dessus, dans V on a une identification, à r et θ fixé, de $U \times \{r,\theta\}$ à $U \subset \Sigma$, et N^* et N restreints à $U \times \{r,\theta\}$ s'identifient de la même façon à TU et T^*U. Les opérateurs ci-dessus correspondent via ces identifications à la différentielle et au laplacien de $U \subset \Sigma$ (en fait la métrique g_Σ sur U et la métrique $\mathrm{ch}(r)^2 g_\sigma$ sur $U \times \{r,\theta\}$ diffèrent d'un facteur $\mathrm{ch}(r)^2$, qui se retrouve dans l'expression de Δ_Σ).

Il en est de même pour ∇_Σ, et pour les deux opérateurs suivants. Si ω est une section de N, on pose

$$\begin{aligned} \delta_\Sigma(\omega) &= -\mathrm{ch}^2 r \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_\Sigma(e_k,\omega)(e_k) \\ &= \mathrm{ch}^2 r \sum_{k=1}^{n-2} \omega(\nabla_\Sigma(e_k,e_k)) - e_k.\omega(e_k), \end{aligned}$$

et

$$(\nabla^*\nabla)_\Sigma \omega = \mathrm{ch}^2 r \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_\Sigma(\nabla_\Sigma(e_k,e_k),\omega) - \nabla_\Sigma(e_k,\nabla_\Sigma(e_k,\omega)),$$

qui correspondent à la codifférentielle et au laplacien de connexion pour les 1-formes de Σ.

On est maintenant armé pour le calcul explicite de $\nabla^*\nabla u$. En utilisant notre repère mobile, on a

$$\nabla^*\nabla u = -\nabla_{e_r}\nabla_{e_r} u - \nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta} u + \nabla_{\nabla_{e_r}e_r} u + \nabla_{\nabla_{e_\theta}e_\theta} u + \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{\nabla_{e_k}e_k} u - \nabla_{e_k}\nabla_{e_k} u.$$

Comme la métrique conique est hyperbolique, on a les expressions suivantes :

$$\nabla_{e_r} e_r = 0,\ \nabla_{e_\theta} e_\theta = -\frac{1}{\mathrm{th}(r)} e_r,\ \text{ et } \nabla_{e_k} e_k = \nabla_\Sigma(e_k,e_k) - \mathrm{th}(r)\, e_r.$$

On vérifie aussi que

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{e_r} e^r = 0 & \nabla_{e_r} e^\theta = 0 & \nabla_{e_r} e^j = 0 \\ \nabla_{e_\theta} e^r = \frac{1}{\mathrm{th}(r)} e^\theta & \nabla_{e_\theta} e^\theta = -\frac{1}{\mathrm{th}(r)} e^r & \nabla_{e_\theta} e^j = 0 \\ \nabla_{e_i} e^r = \mathrm{th}(r) e^i & \nabla_{e_i} e^\theta = 0 & \nabla_{e_i} e^j = -\mathrm{th}(r)\delta_{ij} e^r + \nabla_\Sigma(e_i,e^j). \end{array}$$

On trouve alors que

$$\nabla^*\nabla u = -\nabla_{e_r}\nabla_{e_r} u - \nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta} u - (\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r))\nabla_{e_r} u + \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{\nabla_\Sigma(e_k,e_k)} u - \nabla_{e_k}\nabla_{e_k} u.$$

En remplaçant u par $fe^r + ge^\theta + \omega$, un calcul explicite nous donne l'expression suivante pour les composantes de $\nabla^*\nabla u$; selon e^r :

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-\frac{1}{\mathrm{sh}(r)^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}-\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)}+(n-2)\mathrm{th}(r)\right)\frac{\partial f}{\partial r}+\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2}+(n-2)\mathrm{th}(r)^2\right)f$$
$$+\frac{1}{\mathrm{ch}(r)^2}\Delta_\Sigma f+\frac{2}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}\frac{\partial g}{\partial\theta}-\frac{2\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)^2}\delta_\Sigma\omega,$$

selon e^θ :

$$-\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}-\frac{1}{\mathrm{sh}(r)^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}-\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)}+(n-2)\mathrm{th}(r)\right)\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{g}{\mathrm{th}(r)^2}+\frac{1}{\mathrm{ch}(r)^2}\Delta_\Sigma g-\frac{2}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}\frac{\partial f}{\partial\theta},$$

et selon la composante incluse dans N :

$$-\nabla_{e_r}\nabla_{e_r}\omega-\nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}\omega-\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)}+(n-2)\mathrm{th}(r)\right)\nabla_{e_r}\omega+\mathrm{th}(r)^2\omega+\frac{1}{\mathrm{ch}(r)^2}(\nabla^*\nabla)_\Sigma\omega-2\mathrm{th}(r)\,d_\Sigma f$$

Pour pouvoir manipuler cette expression, nous allons effectuer dans la section suivante une sorte de décomposition en séries de Fourier généralisées.

2.1.3 Décomposition en série de Fourier généralisée

On sait qu'au voisinage du lieu singulier, la métrique g se met localement sous la forme

$$g=dr^2+\mathrm{sh}(r)^2d\theta^2+\mathrm{ch}(r)^2g_\Sigma.$$

Si la coordonnée θ était définie (toujours modulo l'angle conique u) sur tout un voisinage du lieu singulier, on pourrait faire des décompositions en séries de Fourier, du type

$$f(r,\theta,z)=\sum f_n(r,z)\exp(2i\pi n\theta/\alpha).$$

Mais en général la coordonnée d'angle θ n'est définie que localement, ce qui empêche d'écrire de telles décompositions. On va donc procéder à une autre sorte de décomposition ; on obtiendra finalement des écritures du type

$$f(r,\theta,z)=\sum f_n(r)\psi_n(\theta,z)$$

où les (ψ_n) forment une base hilbertienne bien choisie du bord d'un voisinage tubulaire du lieu singulier.

Une base hilbertienne adaptée

On se place maintenant au voisinage d'une composante connexe du lieu singulier. Pour simplifier les notations, la notation Σ désigne ici la composante connexe en question du lieu singulier, et α l'angle conique correspondant.

Comme précédemment, on choisit un réel positif a suffisamment petit pour que le a-voisinage fermé de Σ dans M soit un voisinage tubulaire. Si r est inférieur ou égal à a, on note U_r le r-voisinage de Σ dans M et Σ_r le bord de U_r.

On va particulièrement s'intéresser à la sous-variété Σ_a. Pour pouvoir faire les décompositions voulues, on veut trouver une “bonne” base hilbertienne sur Σ_a, pour les fonctions comme pour les 1-formes, ou plus précisément pour les sections du sous-fibré N défini précédemment (pour mémoire, N est le (sous-)fibré vectoriel au-dessus de U_a, dont la fibre au-dessus de $x \in U_a$ est le sous-espace vectoriel de T_x^*M orthogonal à e^θ et e^r). Pour faciliter les calculs, nous serons amener à considérer plutôt les complexifiés de ces fibrés.

Tout point x de Σ_a admet un voisinage $\mathcal{V}$ de la forme $U \times S^1$, où U est un ouvert de Σ. Dans ce voisinage, la métrique de Σ_a, induite par celle de M, s'exprime comme une métrique produit ; plus précisement on a, dans les coordonnées adaptées,

$$g_a = \mathrm{sh}(a)^2 d\theta^2 + \mathrm{ch}(a)^2 g_\Sigma,$$

où la variable θ est définie modulo l'angle conique α. La variété Σ_a est donc localement un produit, avec la métrique correspondante. C'est un cas simple de submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques, la base étant Σ, munie de la métrique $\mathrm{ch}(a)^2 g_\Sigma$, et la fibre S^1, muni de la métrique $\mathrm{sh}(a)^2 d\theta^2$. Le spectre de telles variétés a déjà été étudié, voir par exemple [3], [6] ; le résultat que l'on se propose de démontrer ici met plus l'accent sur les liens entre les fonctions propres et les 1-formes propres du laplacien.

Dans cette sous-section, et seulement dans celle-ci, les notations ∇, ∇^*, Δ, etc. désigneront les opérateurs correspondants pour la métrique g_a. On pose aussi $\gamma = \frac{2\pi}{\alpha}$; cette quantité interviendra très fréquemment dans la suite.

Proposition 2.1.1. *Il existe une base hilbertienne $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ du complexifié de $L^2(\Sigma_a)$, telle que pour tout indice j, il existe un réel $\lambda_j \geq 0$ et un entier relatif p_j, pour lesquels*

$$\begin{cases} \Delta_\Sigma \psi_j = \lambda_j \psi_j \\ e_\theta . \psi_j = \frac{i p_j \gamma}{\mathrm{sh}(a)} \psi_j . \end{cases}$$

Soit J l'ensemble des j pour lesquels $\lambda_j > 0$. Il existe une base hilbertienne $(\phi_j)_{j\in J} \cup (\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ du complexifié de $L^2(N)$, telle que :

– *pour tout indice j appartenant à J, $\phi_j = \frac{\mathrm{ch}(a)}{(\lambda_j)^{1/2}} d_\Sigma \psi_j$, et donc*

$$\begin{cases} (\nabla^*\nabla)_\Sigma \phi_j = (\lambda_j + n - 3)\phi_j \\ \nabla_{e_\theta} \phi_j = \frac{i p_j \gamma}{\mathrm{sh}(a)} \phi_j \\ \delta_\Sigma \phi_j = \mathrm{ch}(a)(\lambda_j)^{1/2} \psi_j ; \end{cases}$$

– *pour tout indice $j \in \mathbb{N}$, il existe un réel μ_j et un entier relatif p'_j, pour lesquels*

$$\begin{cases} (\nabla^*\nabla)_\Sigma \varphi_j = \mu_j \varphi_j \\ \nabla_{e_\theta}\varphi_j = \frac{ip'_j\gamma}{\mathrm{sh}(a)}\varphi_j, \end{cases}$$

et on a de plus $\delta_\Sigma \varphi_j = 0$.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-2})$ un repère mobile orthonormé de $U \simeq U \times \{\theta\}$, pour la métrique $\mathrm{ch}(a)^2 g_\Sigma$. C'est la restriction à Σ_a du repère mobile local défini dans la section précédente. Alors $(e_\theta, e_1, \ldots, e_{n-2})$ est un repère mobile orthonormé de $\mathcal{V}$, vérifiant

$$\nabla_{e_\theta} e_k = \nabla_{e_k} e_\theta = 0$$

pour $k = 1 \ldots n-2$ (rappelons qu'ici et dans la suite de la preuve, on réemploie pour simplifier la notation ∇ pour la connexion de Levi-Cività pour la métrique g_a de Σ_a, à ne pas confondre avec la connexion de Levi-Cività de la métrique g).

Intéressons-nous maintenant au laplacien Δ sur (Σ_a, g_a). La sous-variété Σ_a étant compacte, on peut utiliser le théorème de décomposition spectrale des opérateurs elliptiques auto-adjoints pour montrer qu'il existe une base hilbertienne de $L^2(\Sigma_a)$, formée de fonctions propres du laplacien. De plus chaque sous-espace propre est de dimension finie, et chaque fonction propre est C^∞.

On sait aussi (voir [6]) que le laplacien Δ se décompose en somme d'un "laplacien vertical" Δ_v et d'un "laplacien horizontal" Δ_h, tous ces opérateurs commutant entre eux. On peut alors choisir une base hilbertienne de $L^2(\Sigma_a)$, formée de fonctions propres de ces trois opérateurs. Si f est une fonction sur Σ_a, en utilisant le repère mobile ci-dessus, on obtient les expressions

$$\Delta f = -e_\theta.e_\theta.f + \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{e_k} e_k.f - e_k.e_k.f,$$

$$\Delta_v f = -e_\theta.e_\theta.f, \quad \text{et} \quad \Delta_h f = \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{e_k} e_k.f - e_k.e_k.f\,.$$

On peut aller encore un peu plus loin. Le fait que (Σ_a, g_a) soit localement un produit de $(\Sigma, \mathrm{ch}(a)^2 g_\Sigma)$ par $(S^1, \mathrm{sh}(a)^2 d\theta^2)$ montre que non seulement $\Delta_v = -(e_\theta.)^2 = -\frac{1}{\mathrm{sh}(a)^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ commute avec Δ, mais que c'est aussi le cas de la dérivation par e_θ et de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial\theta}$. De plus une intégration par parties évidente donne, si f et g sont deux fonctions C^1 sur Σ_a,

$$\int_{\Sigma_a} \frac{\partial f}{\partial\theta} g = -\int_{\Sigma_a} f \frac{\partial g}{\partial\theta}.$$

Soit donc ℓ une valeur propre du laplacien et E_ℓ le sous-espace propre associé. On a vu que E_ℓ était de dimension finie et composé de fonctions C^∞. Comme Δ et $\frac{\partial}{\partial\theta}$ commutent, la restriction de ce dernier à E_ℓ est un endomorphisme de E_ℓ ; et d'après ce qui précède cet endomorphisme est anti-symétrique pour le produit scalaire L^2. Comme E_ℓ est de dimension finie, on peut donc (en passant dans les complexes) trouver une base orthonormée (ψ_j) de E_ℓ, formée de fonctions propres de $\frac{\partial}{\partial\theta}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\begin{cases} \Delta\psi_j = \ell\psi_j \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\psi_j = i\mu_j\psi_j. \end{cases}$$

Cette dernière équation implique que, dans les coordonnées (z,θ) adaptées à $\mathcal{V} \simeq U \times S^1$,

$$\psi_j(z,\theta) = \exp(i\mu_j\theta)\phi_j(z),$$

où ϕ_j est une fonction ne dépendant pas de la variable θ. Comme θ est définie modulo l'angle conique α, on en déduit que $\mu_j \in \frac{2\pi}{\alpha}\mathbb{Z}$, c'est-à-dire qu'il existe un entier p_j tel que

$$\psi_j(z,\theta) = \exp(\frac{2i\pi p_j}{\alpha}\theta)\phi_j(z),$$

et donc en particulier

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_j = \frac{2i\pi p_j}{\alpha}\psi_j.$$

Si on exprime à nouveau le laplacien comme somme du laplacien vertical et du laplacien horizontal, on obtient

$$\begin{aligned} \ell\psi_j &= \Delta\psi_j \\ &= \Delta_v\psi_j + \Delta_h\psi_j \\ &= -e_\theta.e_\theta.\psi_j + \Delta_h\psi_j \\ &= -\frac{1}{\mathrm{sh}(a)^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\psi_j + \Delta_h\psi_j \\ &= \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(a)^2}\psi_j + \Delta_h\psi_j \end{aligned}$$

avec la notation $\gamma = \frac{2\pi}{\alpha}$. Désignons, comme dans la section précédente, par Δ_Σ l'opérateur

$$f \mapsto \mathrm{ch}(a)^2\sum_{k=1}^{n-2}(\nabla_{e_k}e_k.f - e_k.e_k.f);$$

on a $\Delta_\Sigma = \mathrm{ch}(a)^2\Delta_h$. Si f est une fonction définie sur $U \times \{\theta\}$, la quantité $\Delta_\Sigma f$ s'interprète comme le laplacien de f pour la métrique obtenue en identifiant $U \times \{\theta\}$ à $U \subset \Sigma$. On a alors

$$\Delta_\Sigma(\psi_j) = \mathrm{ch}(a)^2\left(\ell - \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(a)^2}\right)\psi_j.$$

Pour clarifier, on introduit les notations suivantes. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$E_\lambda = \{f \in L^2(\Sigma_a) \mid \Delta f = \lambda f\},$$

et

$$E_{\lambda,p} = \{f \in E_{\lambda + \frac{p^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(a)^2}} \mid \frac{\partial}{\partial\theta} f = ip\gamma\, f\}.$$

Chacun de ces sous-espaces vectoriels est de dimension finie, composé de fonctions C^∞. Les $E_{\lambda,p}$ sont deux à deux orthogonaux, ainsi que les E_λ. On a

$$E_\lambda = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E_{\lambda - \frac{p^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(a)^2}, p},$$

et la somme est en fait finie car E_λ est de dimension finie. Notons S le spectre du laplacien sur les fonctions, i.e. l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles E_λ est non réduit à 0. C'est un ensemble discret, minoré, avec $+\infty$ comme seul point d'accumulation, et

$$\bigoplus_{\lambda\in S} E_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in S}\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E_{\lambda - \frac{p^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(a)^2}, p}$$

est dense dans $L^2(\Sigma_a)$. Pour démontrer la première partie de la démonstration, il suffit de prendre comme base hilbertienne de $L^2(\Sigma_a)$ la réunion de bases orthonormées des $E_{\lambda,p}$.

Passons maintenant aux 1-formes sur Σ_a. Rappelons qu'ici les notations ∇ et ∇^* désignent la connexion de Levi-Cività et son adjoint pour la métrique g_a de Σ_a. Cette métrique est localement un produit ; en particulier ∇e_θ et ∇e^θ sont nuls. Le laplacien de connexion $\nabla^*\nabla$ s'exprime alors à l'aide du repère mobile de la façon suivante :

$$\nabla^*\nabla\eta = -\nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}\eta + \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{\nabla_{e_k}e_k}\eta - \nabla e_k \nabla e_k \eta.$$

Si on décompose η orthogonalement, $\eta = fe^\theta + \omega$, alors

$$\nabla^*\nabla\eta = (\Delta f)e^\theta + \nabla^*\nabla\omega,$$

et cette décomposition est à nouveau orthogonale. Dit autrement, si ω est une 1-forme sur Σ_a, en tout point perpendiculaire à e^θ, alors $\nabla^*\nabla\omega$ est aussi en tout point perpendiculaire à e^θ. On va donc considérer le sous-fibré vectoriel $N \subset T^*\Sigma_a$, dont la fibre au-dessus de $x \in \Sigma_a$ est le sous-espace vectoriel de $T_x^*\Sigma_a$ orthogonal à e^θ ; c'est la restriction à Σ_a du fibré N défini à la section précédente. L'opérateur $\nabla^*\nabla$ se restreint ainsi à un opérateur non borné de $L^2(N)$ dans lui-même, et se décompose en

$$\nabla^*\nabla = -\nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta} + \frac{1}{\mathrm{ch}(a)^2}\nabla^*\nabla_\Sigma.$$

On retrouve la décomposition en laplacien vertical et laplacien horizontal. On peut alors appliquer le même raisonnement que pour les fonctions, et montrer qu'il existe un base hilbertienne de $L^2(N)$, formées de sections C^∞, vecteurs propres des opérateurs $\nabla^*\nabla$ et $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}$ (et donc aussi de $\nabla^*\nabla_\Sigma$).

Pour $k = 1 \dots n-2$, on note comme précédemment e^k la forme duale de e_k. Les sections locales $e^1, \dots, e^{n-2}$ forment alors une base de N sur $\mathcal{V}$. Soit maintentant ω un vecteur propre de l'opérateur $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}$, c'est-à-dire tel que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\omega = \mu\omega$. En décomposant dans cette base

$$\omega = \sum_{k=1}^{n-2} a_k(z,\theta)e^k,$$

l'équation ci-dessus donne

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial}{\partial\theta}(a_k(z,\theta))e^k = \mu \sum_{k=1}^{n-2} a_k(z,\theta)e^k,$$

qui s'intègre en

$$a_k(z,\theta) = b_k(z)\exp(\mu\theta)$$

pour $k = 1 \dots n-2$. La coordonnée θ étant définie modulo l'angle conique α, on en déduit encore une fois que $\mu \in \frac{2i\pi}{\alpha}\mathbb{Z}$, c'est-à-dire qu'il existe un entier p_j tel que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\omega_j = ip_j\gamma\omega_j$ (avec toujours $\gamma = \frac{2\pi}{\alpha}$).

On introduit alors les espaces propres suivants, en continuant l'analogie avec les fonctions. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$F_\lambda = \{\omega \in L^2(N) \mid \nabla^*\nabla\omega = \lambda\omega\},$$

et

$$F_{\lambda,p} = \{\omega \in F_{\lambda + \frac{p^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(a)^2}} \mid \nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\omega = ip\gamma\,\omega\}.$$

Ici encore, chacun de ces sous-espaces vectoriels est de dimension finie, composé de 1-formes C^∞ ; les $F_{\lambda,p}$ sont deux à deux orthogonaux, ainsi que les F_λ ; on a

$$F_\lambda = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} F_{\lambda - \frac{p^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(a)^2},p},$$

et la somme est finie car F_λ est de dimension finie. Si on note S' le spectre de $\nabla^*\nabla$ sur les sections de N, la somme directe

$$\bigoplus_{\lambda\in S'} F_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in S'}\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} F_{\lambda - \frac{p^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(a)^2},p}$$

est dense dans $L^2(N)$. On va maintenant étudier comment passer d'une base hilbertienne de $L^2(\Sigma_a)$ à une base hilbertienne de $L^2(N)$.

Rappelons quelques notations. Si f est une fonction sur Σ_a, on a

$$d_\Sigma f = \sum_{k=1}^{n-2}(e_k.f)e^k,$$

c'est une section de N. Il s'agit en chaque point $(x,\theta) \in U \times S^1 \simeq \mathcal{V} \subset \Sigma_a$ de la différentielle de la restriction de f à $U \times \{\theta\}$. Ensuite, si ω est une section de N, on a

$$\begin{aligned}
\delta_\Sigma(\omega) &= -\mathrm{ch}(a)^2 \sum_{k=1}^{n-2} (\nabla_{e_k}\omega)(e_k) \\
&= \mathrm{ch}(a)^2 \sum_{k=1}^{n-2} \omega(\nabla_{e_k} e_k) - e_k.\omega(e_k),
\end{aligned}$$

et

$$(\nabla^*\nabla)_\Sigma \omega = \mathrm{ch}(a)^2 \sum_{k=1}^{n-2} \nabla_{\nabla_{e_k} e_k}\omega - \nabla_{e_k}\nabla_{e_k}\omega.$$

Si l'on se restreint à $U \times \{\theta\}$, il s'agit de la codifférentielle et du laplacien de connexion sur les 1-formes, pour la métrique obtenue en identifiant $U \times \{\theta\}$ à $U \subset \Sigma$.

Soit f une fonction sur Σ_a, et intéressons-nous à la forme $d_\Sigma f$. On constate facilement d'une part que

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}(d_\Sigma f) &= \nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta} \sum_{k=1}^{n-2} (e_k.f)e^k \\
&= \sum_{k=1}^{n-2} (e_\theta.e_\theta.(e_k.f))e^k \\
&= \sum_{k=1}^{n-2} e_k.(e_\theta.e_\theta.f)e^k \\
&= d_\Sigma(e_\theta.e_\theta.f).
\end{aligned}$$

D'autre part, comme la métrique de $U \subset \Sigma$ est hyperbolique, on peut utiliser la formule de Weitzenböck suivante, valable pour les 1-formes :

$$(\nabla^*\nabla)_\Sigma = \Delta_\Sigma + (n-3)Id = d_\Sigma\delta_\Sigma + \delta_\Sigma d_\Sigma + (n-3)Id.$$

C'est la même formule qu'au début de cette section, voir [2] §1.155. On en déduit que

$$(\nabla^*\nabla)_\Sigma \circ d_\Sigma = (\Delta_\Sigma + (n-3)Id) \circ d_\Sigma = d_\Sigma \circ (\Delta_\Sigma + (n-3)Id),$$

et donc

$$(\nabla^*\nabla)_\Sigma(d_\Sigma f) = d_\Sigma(\Delta_\Sigma(f)) + (n-3)d_\Sigma(f).$$

Par conséquent, si ψ appartient à l'espace $E_{\lambda,p}$ défini plus haut (c'est-à-dire que ψ vérifie $\Delta_\Sigma\psi = \lambda\psi$ et $\frac{\partial}{\partial\theta}\psi = ip\gamma\psi$), on obtient

$$\begin{cases} \nabla^*\nabla_\Sigma(d_\Sigma\psi) = (\lambda+n-3)d_\Sigma\psi \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}(d_\Sigma\psi) = ip\gamma\, d_\Sigma\psi. \end{cases}.$$

La forme $d_\Sigma\psi$ appartient donc à $F_{\lambda+n-3,p}$, c'est-à-dire que d_Σ envoie $E_{\lambda,p}$ sur $F_{\lambda+n-3,p}$.

De plus, si ψ, ψ' appartiennent à $E_{\lambda,p}$, alors, comme l'adjoint de d_Σ est $\mathrm{ch}(a)^{-2}\delta_\Sigma$, en intégrant par parties on trouve

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_a} g_a(d_\Sigma\psi, d_\Sigma\psi') &= \int_{\Sigma_a} \frac{1}{\mathrm{ch}(a)^2}\,\psi\,\delta_\Sigma d_\Sigma\psi' \\ &= \int_{\Sigma_a} \frac{1}{\mathrm{ch}(a)^2}\,\psi\,\Delta_\Sigma\psi' \\ &= \int_{\Sigma_a} \frac{1}{\mathrm{ch}(a)^2}\,\psi\,\lambda\psi' \\ &= \frac{\lambda}{\mathrm{ch}(a)^2}\int_{\Sigma_a} \psi\psi'.\end{aligned}$$

On en déduit que, pour le produit scalaire L^2, d_Σ est une homothétie de $E_{\lambda,p}$ sur son image, de rapport $\frac{\sqrt{\lambda}}{\mathrm{ch}(a)}$. En particulier, l'image est nulle si $\lambda = 0$.

Par ailleurs, du fait que l'adjoint de d_Σ est $\mathrm{ch}(a)^{-2}\delta_\Sigma$, si un élément ϕ de $F_{\lambda,p}$ est dans l'orthogonal de l'image de $E_{\lambda-(n-3),p}$ par d_Σ (ce qui est en particulier le cas dès que $E_{\lambda-(n-3)/\mathrm{ch}(a)^2,p} = \{0\}$), alors nécessairement $\delta_\Sigma\phi = 0$. Cela incite à définir

$$F^1_{\lambda,p} = F_{\lambda,p} \cap \mathrm{Im}\, d_\Sigma = d_\Sigma(E_{\lambda-(n-3),p})$$

et

$$F^2_{\lambda,p} = F_{\lambda,p} \cap (\mathrm{Im}\, d_\Sigma)^\perp = F_{\lambda,p} \cap \ker \delta_\Sigma.$$

On a maintenant tout ce qu'il faut pour obtenir les bases hilbertiennes désirées. On choisit pour chaque $E_{\lambda,p}$ une base orthonormale, leur réunion $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\Sigma_a)$. Ensuite, sur chaque $F^1_{\lambda,p}$, on a déjà une base orthonormale, à savoir l'image par $(\lambda)^{-1/2}\, d_\Sigma$ de la base orthonormale de $E_{\lambda-(n-3),p}$ (cela évidemment dans le cas où l'on a $\lambda > 0$ et $E_{\lambda-(n-3),p} \neq \{0\}$). La réunion de ces familles orthonormales nous donne les $(\phi_j)_{j\in J}$ de la proposition. Enfin, on complète ce dernier système en une base hilbertienne de $L^2(N)$ en ajoutant l'union de bases orthonormées des $F^2_{\lambda,p}$; les éléments ainsi rajoutés constitue les $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de la proposition. □

Maintenant, on va utiliser les résultats précédents pour procéder à la décomposition de $u = fe^r + ge^\theta + \omega$ sur tout U_a.

Pour passer de Σ_a à Σ_r, on utilise le transport parallèle et le flot le long des géodésiques, intégrales du champ de vecteur e_r. Cela revient à étendre à tout U_a les fonctions ψ_j et les formes ϕ_j, φ_j, en demandant seulement que $e_r.\psi_j = 0$, et que $\nabla_{e_r}\phi_j = \nabla_{e_r}\varphi_j = 0$. On note encore ψ_j, ϕ_j et φ_j ces extensions.

En procédant à de simples changement d'échelle, on montre que ces fonctions et formes étendues se comportent de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\psi_j = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta}\psi_j = ip_j\gamma\,\psi_j \\ \Delta_\Sigma\psi_j = \lambda_j\psi_j \\ d_\Sigma\psi_j = \dfrac{(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}\phi_j, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\phi_j = 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}}\phi_j = ip_j\gamma\,\phi_j \\ (\nabla^*\nabla)_\Sigma\phi_j = (\lambda_j + n - 3)\phi_j \\ \delta_\Sigma\phi_j = \mathrm{ch}(r)(\lambda_j)^{1/2}\psi_j, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\varphi_j = 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}}\varphi_j = ip'_j\gamma\,\varphi_j \\ (\nabla^*\nabla)_\Sigma\varphi_j = \mu_j\varphi_j \\ \delta_\Sigma\varphi_j = 0 \end{cases}.$$

Pour un r fixé, on note f_r la restriction de f à Σ_r. On peut de même étendre f_r en une fonction $\tilde{f}_r$ définie sur tout U_a en utilisant le flot du champ de vecteur e_r, c'est-à-dire en demandant seulement que $e_r.\tilde{f}_r$ soit identiquement nul (et évidemment que $\tilde{f}_r = f_r$ sur Σ_r). En particulier, on peut regarder la restriction à Σ_a de $\tilde{f}_r$, notée $\tilde{f}_r|_{\Sigma_a}$. On peut maintenant utiliser les résultats de la proposition 2.1.1 pour décomposer $\tilde{f}_r|_{\Sigma_a}$ sous la forme d'une série : $\tilde{f}_r|_{\Sigma_a} = \sum f_r^j\psi_j$. Finalement, en réutilisant le flot pour se ramener à Σ_r, on obtient la décomposition suivante, valable sur Σ_r : $f_r = \sum f_r^j\psi_j$. En faisant cette manipulation pour tout r, et en posant $f_j(r) = f_r^j$, on obtient

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(r)\psi_j.$$

On effectue évidemment une décomposition similaire pour la fonction g. Pour la section ω, le même procédé fonctionne, en remplaçant le flot par le transport parallèle, et on obtient une décomposition

$$\omega = \sum_{j\in J}\omega_j(r)\phi_j + \sum_{j\in\mathbb{N}}\varpi_j(r)\varphi_j.$$

On peut vérifier facilement que si u est C^∞ alors les coefficients f_j, g_j, ω_j et ϖ_j le sont aussi (en effet, $f_j(r) = \int_{\Sigma_a}\overline{\psi_j}\tilde{f}_r$ et on peut dériver sous l'intégrale ; il en est de même pour les autres coefficients).

On a finalement obtenu l'expression suivante pour u :

$$\begin{aligned} u \;&=\; \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(r)\psi_j\,e^r + \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j(r)\psi_j\,e^\theta \\ &+\; \sum_{j\in J}\omega_j(r)\phi_j + \sum_{j\in\mathbb{N}}\varpi_j(r)\varphi_j. \end{aligned}$$

Il est plus judicieux de regrouper les termes de cette décomposition de la façon suivante, faisant apparaître des “blocs élémentaires” de même fréquence :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j\in J} \big(f_j(r)\psi_j\, e^r + g_j(r)\psi_j\, e^\theta + \omega_j(r)\phi_j\big) \\ &+ \sum_{j\in \mathbb{N}\setminus J} \big(f_j(r)\psi_j\, e^r + g_j(r)\psi_j\, e^\theta\big) \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}} \varpi_j(r)\varphi_j. \end{aligned} \tag{2.3}$$

La norme L^2 de u sur U_a s'exprime bien dans cette décomposition : on a

$$||u_{|U_a}||^2 = \sum_j \int_0^a \big(|f_j|^2 + |g_j|^2 + |\omega_j|^2 + |\varpi_j|^2\big) \frac{\mathrm{sh}(r)}{\mathrm{sh}(a)} \left(\frac{\mathrm{ch}(r)}{\mathrm{ch}(a)}\right)^{n-2} dr.$$

Expression du laplacien dans cette décomposition

En partant de cette expression pour u, on va effectuer la même décomposition pour $\nabla^*\nabla u + (n-1)u$. On note toujours γ pour $\frac{2\pi}{\alpha}$.

On obtient alors, pour la composante de $\nabla^*\nabla u + (n-1)u$ en $\psi_j e^r$, si $j \in J$:

$$\begin{aligned} &- f_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right) f_j' + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2 + \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right) f_j \\ &\qquad + \frac{2ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)} g_j - \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}\omega_j, \end{aligned} \tag{2.4}$$

si $j \notin J$:

$$\begin{aligned} &- f_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right) f_j' + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2 + \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + n - 1\right) f_j \\ &\qquad + \frac{2ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)} g_j, \end{aligned} \tag{2.5}$$

pour la composante en $\psi_j e^\theta$:

$$\begin{aligned} &- g_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right) g_j' + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right) g_j \\ &\qquad - \frac{2ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)} f_j, \end{aligned} \tag{2.6}$$

pour la composante en ϕ_j :

$$-\omega_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right)\omega_j' + \left(\mathrm{th}(r)^2 + \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}^2(r)} + \frac{\lambda_j + n - 3}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right)\omega_j$$
$$- \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)} f_j, \quad (2.7)$$

et pour la composante en φ_j :

$$-\varpi_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right)\varpi_j' + \left(\mathrm{th}(r)^2 + \frac{{p_j'}^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + \frac{\mu_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right)\varpi_j. \quad (2.8)$$

2.1.4 Comportement des solutions de l'équation homogène au voisinage de la singularité

On va maintenant chercher à résoudre l'équation $Lu = 0$ au voisinage de Σ. Si la 1-forme u vérifie $Lu = 0$ au voisinage du lieu singulier, alors par régularité elliptique u est localement C^∞ ; cela justifie la décomposition en série (2.3), qui converge uniformément sur tout compact du voisinage du lieu singulier.

La décomposition de Lu ci-dessus permet alors de passer d'une équation aux dérivées partielles à une infinité d'équations différentielles ordinaires. Résoudre l'équation $Lu = 0$ au voisinage du lieu singulier revient donc à résoudre une équation différentielle linéaire pour chaque coefficient de la décomposition. On peut ainsi étudier le comportement de chacun des termes du développement de u, et il est ensuite relativement aisé d'en déduire des propriétés du type L^2 pour u et ses dérivées au voisinage du lieu singulier.

Pour chaque indice j, l'équation (ou plutôt le système) que l'on obtient présente une singularité "régulière" en $r = 0$. On sait (voir [24], cf aussi [17]) que les solutions d'une telle équation sont des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $r^k f(r)$ avec f une fonction analytique, où les exposants k s'obtiennent comme racines de l'équation indicielle (en cas de racines multiples ou séparées par des entiers, il faut éventuellement rajouter des termes en $\ln r$ dans l'expression des solutions).

On pose donc, pour un entier j donné,

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_j(r) &=& r^k(f_0 + f_1 r + f_2 r^2 + \cdots), \\ g_j(r) &=& r^k(g_0 + g_1 r + g_2 r^2 + \cdots), \\ \omega_j(r) &=& r^k(\omega_0 + \omega_1 r + \omega_2 r^2 + \cdots), \\ \varpi_j(r) &=& r^k(\varpi_0 + \varpi_1 r + \varpi_2 r^2 + \cdots). \end{array}\right.$$

A partir des expressions (2.4) à (2.8), on obtient les systèmes d'équations indicielles suivants : si $j \in J$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} (-k^2 + 1 + p_j^2\gamma^2) f_0 &+& 2ip_j\gamma g_0 &=& 0 \\ -2ip_j\gamma f_0 &+& (-k^2 + 1 + p_j^2\gamma^2) g_0 &=& 0 \\ && (-k^2 + p_j^2\gamma^2)\omega_0 &=& 0, \end{array}\right.$$

si $j \notin J$,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} (-k^2+1+p_j^2\gamma^2)f_0 & + & 2ip_j\gamma g_0 & = & 0 \\ -2ip_j\gamma f_0 & + & (-k^2+1+p_j^2\gamma^2)g_0 & = & 0, \end{array} \right.$$

et enfin

$$(-k^2+{p'_j}^2\gamma^2)\varpi_0 = 0.$$

Commençons par étudier le premier système, le plus compliqué. Son déterminant vaut (au signe près) $(k^2-p_j^2\gamma^2)(k^2-(p_j\gamma+1)^2)(k^2-(p_j\gamma-1)^2)$. Les valeurs de l'exposant k pour lesquelles le système admet des solutions non triviales (racines indicielles) sont donc $\pm p_j\gamma \pm 1$ et $\pm p_j\gamma$. Plus précisément, pour $k = \pm(p_j\gamma+1)$, les coefficients dominants (f_0, g_0, ω_0) sont engendrés par $(1, -i, 0)$, pour $k = \pm(p_j\gamma-1)$, par $(1, i, 0)$, et pour $k = \pm p_j\gamma$, par $(0, 0, 1)$. On remarque que l'on a toujours des racines séparées par des entiers, ce qui peut rajouter des termes logarithmiques, mais nous n'aurons pas à en tenir compte car seul l'exposant dominant va nous intéresser.

Le cas des racines doubles est un peu plus compliqué. Elles apparaissent si $p_j = 0$, $p_j\gamma = \pm 1$, ou $p_j\gamma = \pm\frac{1}{2}$. En fait si $p_j\gamma = \frac{1}{2}$, les solutions correspondant à $k = p_j\gamma$ et à $k = 1 - p_j\gamma$ sont linéairement indépendantes, on n'a donc pas besoin de termes logarithmiques ; même chose pour $p_j\gamma = -\frac{1}{2}$.

Pour $p_j\gamma = 1$, les solutions pour $k = p_j\gamma - 1$ et $k = -(p_j\gamma - 1)$ sont les mêmes. On a donc besoin d'un terme logarithmique. Même chose si $p_j\gamma = -1$.

Enfin, pour $p_j = 0$, il y a trois dégénérescence. Cependant pour $k = 1$ ou $k = -1$, on n'a pas de perte de dimension et donc pas besoin de termes logarithmiques. Par contre, pour $k = 0$, le terme en logarithme est nécessaire.

On remarque que les deux premiers cas de racines doubles ne se rencontrent que pour des valeurs particulières de l'angle conique. Par contre le dernier cas se rencontre quel que soit l'angle. C'est l'existence de ces solutions logarithmiques, qui sont dans L^2 mais dont la dérivée covariante ne l'est pas, qui fait que l'opérateur L n'est jamais essentiellement auto-adjoint dans notre cadre.

Les deux systèmes restant sont plus simples à étudier et ne présentent rien de nouveau par rapport à ce qui précède. La proposition suivante regroupe tous ces résultats :

Proposition 2.1.2. *Soit u une solution de l'équation $Lu = 0$ sur un voisinage d'une composante connexe de Σ, d'angle conique α. Alors chacun des termes apparaissant dans la décomposition*

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j\in J}\big(f_j(r)\psi_j\, e^r + g_j(r)\psi_j\, e^\theta + \omega_j(r)\phi_j\big) \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus J}\big(f_j(r)\psi_j\, e^r + g_j(r)\psi_j\, e^\theta\big) \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}}\varpi_j(r)\varphi_j. \end{aligned}$$

est solution de l'équation $Lu = 0$ au voisinage de la composante connexe du lieu singulier.

Soit j un indice appartenant à J. L'ensemble des solutions du type

$$f_j(r)\psi_j\, e^r + g_j(r)\psi_j\, e^\theta + \omega_j(r)\phi_j$$

forme un espace vectoriel (de dimension 6). Si $p_j\gamma \notin \{-1, 0, 1\}$, alors on dispose d'une base constituée de solutions élémentaires pour lesquelles $v(r) = (f_j(r), g_j(r), \omega_j(r))$ est de la forme $r^k(v_0 + v_1 r + \cdots)$, avec $k \in \{\pm p_j\gamma \pm 1, \pm p_j\gamma\}$. Pour $k = \pm(p_j\gamma + 1)$, on peut prendre $v_0 = (1, -i, 0)$, pour $k = \pm(p_j\gamma - 1)$, $(1, i, 0)$, et pour $k = \pm p_j\gamma$, $(0, 0, 1)$. Si $p_j\gamma = -1$, resp. 1, resp. 0, les deux solutions élémentaires ci-dessus correspondant à $k = 0$ sont identiques, il faut donc rajouter une solution de la forme $\ln(r)(v_0 + v_1 r + \cdots)$ avec $v_0 = (1, -i, 0)$, resp. $(1, i, 0)$, resp. $(0, 0, 1)$.

Maintenant si l'indice j n'appartient pas à J, l'ensemble des solutions du type

$$f_j(r)\psi_j\, e^r + g_j(r)\psi_j\, e^\theta$$

forme un espace vectoriel (de dimension 4). Si $p_j\gamma \notin \{-1, 1\}$, alors on dispose d'une base constituée de solutions élémentaires pour lesquelles $v'(r) = (f_j(r), g_j(r))$ est de la forme $r^k(v'_0 + v'_1 r + \cdots)$, avec $k = \pm p_j\gamma \pm 1$. Pour $k = \pm(p_j\gamma + 1)$, on peut prendre $v'_0 = (1, -i)$, et pour $k = \pm(p_j\gamma - 1)$, $v'_0 = (1, i)$. Si $p_j\gamma = -1$, resp. 1, les deux solutions élémentaires ci-dessus correspondant à $k = 0$ sont identiques, il faut donc rajouter une solution de la forme $\ln(r)(v'_0 + v'_1 r + \cdots)$ avec $v'_0 = (1, -i)$, resp. $(1, i)$.

Enfin, pour tout indice j, l'ensemble des solutions du type $\varpi_j(r)\varphi_j$ forme un espace vectoriel (de dimension 2). Si $p'_j \neq 0$, alors on dispose d'une base constituée de deux solutions élémentaires pour lesquelles $\varpi_j(r) = r^k(1 + \varpi_1 r + \cdots)$, avec $k = \pm p_j\gamma$. Si $p' = 0$ les deux solutions élémentaires ci-dessus sont identiques, il faut donc rajouter une solution pour laquelle $\varpi_j(r) = \ln(r)(1 + \varpi_1 r + \cdots)$.

Dans la suite, on supposera toujours que p_j et p'_j sont **positifs** ; en effet une simple conjugaison permet de passer de p_j à $-p_j$.

Dès la section suivante on aura besoin d'avoir plus de renseignements sur les solutions élémentaires de l'équation dont l'exposant dominant est positif. Pour pouvoir les identifier on va d'abord introduire quelques notations.

Si $j \in J$ et si $p_j \neq 0$, en accord avec la proposition ci-dessus, on note f_j^1, g_j^1, ω_j^1 la solution élémentaire ayant pour exposant dominant $p_j\gamma + 1$, i.e. telle que $f_j^1/r^{p_j\gamma+1}$, $g_j^1/r^{p_j\gamma+1}$, $\omega_j^1/r^{p_j\gamma+1}$ soient développables en séries entières et que $f_j^1/r^{p_j\gamma+1}(0) = 1$.

On note f_j^0, g_j^0, ω_j^0 la solution élémentaire ayant pour exposant dominant $p_j\gamma$, i.e. telle que $f_j^0/r^{p_j\gamma}$, $g_j^0/r^{p_j\gamma}$, $\omega_j^0/r^{p_j\gamma}$ soient développables en séries entières et que $\omega_j^0/r^{p_j\gamma}(0) = 1$. En fait ces conditions ne suffisent pas à déterminer la solution (à cause de la solution en $r^{p_j\gamma+1}$), on choisit donc celle telle que $f_j^0 = O(r^{p_j\gamma+3})$ et $g_j^0 = O(r^{p_j\gamma+3})$.

On note f_j^{-1}, g_j^{-1}, ω_j^{-1} la solution élémentaire ayant pour exposant dominant $p_j\gamma - 1$, i.e. telle que $f_j^{-1}/r^{p_j\gamma-1}$, $g_j^{-1}/r^{p_j\gamma-1}$, $\omega_j^{-1}/r^{p_j\gamma-1}$ soient développables en séries entières et que

$f_j^{-1}/r^{p_j\gamma-1}(0) = 1$. Ces conditions ne suffisent pas à déterminer la solution (à cause des solutions en $r^{p_j\gamma}$ et $r^{p_j\gamma+1}$), on choisit donc celle telle que $\omega_j^{-1} = O(r^{p_j\gamma+2})$ et $f_j^{-1} + ig_j^{-1} = O(r^{p_j\gamma+3})$.

On prend les mêmes notations quand $j \notin J$ (i.e. quand λ_j est nul) ; remarquons juste qu'alors il n'y a pas de solutions en $r^{p_j\gamma}$ et que ω_j n'est pas définie.

Si $p_j = 0$, les exposants dominants $p_j\gamma+1$ et $-(p_j\gamma-1)$deviennent identiques, les équations pour f_j et ω_j d'une part et g_j d'autre part deviennent indépendantes. On note alors f_j^1, ω_j^1 la solution pour laquelle g_j est nulle, telle que f_j^1/r et ω_j^1/r soient développables en séries entières et que $f_j^1/r\,(0) = 1$. On note g_j^1 la solution pour laquelle f_j, ω_j sont nulles, telle que g_j^1/r soient développables en séries entières et que $g_j^1 = r + O(r^2)$. On garde par contre la notation précédente pour la solution correspondant à l'exposant $p_j\gamma$.

Enfin, on désigne par ϖ_j^0 la solution élémentaire de la forme $\varpi_j^0(r) = r^{p'_j\gamma}\,(1 + rf(r))$ où f est développable en séries entières.

L'énoncé suivant décrit partiellement le comportement de ces solutions au voisinage d'une composante connexe du lieu singulier. Pour la définition de a, voir p.32.

Lemme 2.1.3. *Les fonctions définies ci-dessus vérifient les propriétés suivantes, sauf éventuellement pour un nombre fini d'indices j.*

Il existe un polynôme P à deux variables tel que

$$||f_j^k\psi_{j_{|U_a}}||^2 \leq P(\lambda_j, p_j)\left(|f_j^k(a)|^2 + |\omega_j^k(a)|^2\right).$$

La majoration est encore valable si on remplace $f_j^k\psi_j$ dans le terme de gauche par $\omega_j^k\phi_j$, ${\omega_j^k}'\phi_j$, $g_j^k\phi_j$ (si $p_j \neq 0$). C'est encore le cas pour $g_j^1\psi_j$ (si $p_j = 0$), $\varpi_j^0\varphi_j$ et ${\varpi_j^0}'\varphi_j$ en remplaçant le terme de droite par respectivement $P(\lambda_j, p_j)|g_j^1(a)|^2$ et $P(\lambda_j, p'_j)|\varpi_j^0(a)|^2$

La majoration est encore valable (avec le cas échéant les modifications appropriées du terme de droite) en remplaçant $f_j^k\psi_j$ dans le terme de gauche :

par $(f_j^k/\mathrm{th}(r))\psi_j$, $(g_j^k/\mathrm{th}(r))\psi_j$, ${f_j^k}'\psi_j$ ou ${g_j^k}'\psi_j$, sauf si $k = -1$ et $0 < p_j\gamma \leq 1$;

par $(\omega_j^k/\mathrm{th}(r))\phi_j$ ou $(\varpi_j^0/\mathrm{th}(r))\varphi_j$, sauf si $p_j = 0$, resp. $p'_j = 0$;

par $({\omega_j^k}'/\mathrm{th}(r))\phi_j$, ${\omega_j^k}''\phi_j$, $({\varpi_j^0}'/\mathrm{th}(r))\varphi_j$ ou ${\varpi_j^0}''\varphi_j$, sauf si $0 < p_j\gamma \leq 1$;

par $(f_j^k/\mathrm{th}(r)^2)\psi_j$, $(g_j^k/\mathrm{th}(r)^2)\psi_j$, $({f_j^k}'/\mathrm{th}(r))\psi_j$ ou $({g_j^k}'/\mathrm{th}(r))\psi_j$, sauf si $p_j\gamma \leq 1$, ou si $p_j\gamma \leq 2$ et $k = -1$;

par $(\omega_j^k/\mathrm{th}(r)^2)\phi_j$ ou $(\varpi_j^0/\mathrm{th}(r)^2)\varphi_j$, sauf si $p_j\gamma \leq 1$;

par $({f_j^k}'/\mathrm{th}(r) - f_j^k/\mathrm{th}(r)^2)\psi_j$, $({g_j^k}'/\mathrm{th}(r) - g_j^k/\mathrm{th}(r)^2)\psi_j$, ${f_j^k}''\psi_j$ ou ${g_j^k}''\psi_j$, sauf si $0 < p_j\gamma \leq 1$, ou si $0 < p_j\gamma \leq 2$ et $k = -1$;

enfin, par $(p_j^2\gamma^2 g_j^k/\mathrm{sh}(r)^2 - ip_j\gamma {f_j^k}'/\mathrm{sh}(r) - p_j\gamma f_j^k/sinh(r)\mathrm{th}(r))\psi_j^k$, sauf si $0 < p_j\gamma \leq 1$.

La démonstration de ce lemme ne présente pas d'intérêt particulier et est relativement longue, à cause du nombre de cas différent à traiter. Pour ces raisons, la preuve se trouve en appendice (p.91 et suiv.).

2.1.5 Résolution de l'équation

Dans cette sous-section ainsi que dans toute la suite de ce papier, **tous les angles coniques seront supposés strictement inférieurs à** 2π. En particulier, si p est un entier, alors soit $p\gamma = 0$, soit $|p\gamma| > 1$.

On va étudier maintenant quels sont les exposants dominants possibles pour une solution de l'équation $Lu = 0$ au voisinage du lieu singulier, en fonction des différentes conditions imposées à u.

Le premier résultat est le lemme suivant :

Lemme 2.1.4. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à 2π. Soit u une 1-forme telle que Lu soit égal à 0 au voisinage du lieu singulier et que u et du soient dans L^2. Alors ∇u et ∇du sont dans L^2.*

Démonstration. D'après la proposition 1.4.6, comme u et $\nabla^*\nabla u$ sont L^2, il suffit de montrer que $\nabla_{e_r} u$ est dans L^2 pour prouver que ∇u est dans L^2. On veut procéder de même pour ∇du. Pour cela on utilise la formule de Weitzenböck suivante, valable pour une métrique hyperbolique, qui est un analogue de la formule (2.1) pour les 1-formes que l'on a déjà utilisée à plusieurs reprises (voir [2] §1.I) :

$$\forall \omega \in \Omega^2 M,\ \nabla^*\nabla\omega = \Delta\omega + 2(n-2)\omega.$$

En particulier,

$$\nabla^*\nabla du = \Delta du + 2(n-2)du = d\Delta u + 2(n-2)u = d(Lu) + -2du.$$

Au voisinage du lieu singulier, on a alors $\nabla^*\nabla du = -2du$, et donc $\nabla^*\nabla du$ est dans L^2. Il suffit donc de montrer que $\nabla_{e_r} u$ et $\nabla_{e_r} du$ sont dans L^2.

On commence par regarder comment les conditions $u \in L^2$, $du \in L^2$ se traduisent sur la développement de u. On choisit un réel a suffisamment petit pour que Lu soit nul sur U_a ; c'est ce a que l'on utilise pour la décomposition de u (voir proposition 2.1.1). On écrit alors

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j\in J} \big(f_j(r)\psi_j\, e^r + g_j(r)\psi_j\, e^\theta + \omega_j(r)\phi_j\big) \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus J} \big(f_j(r)\psi_j\, e^r + g_j(r)\psi_j\, e^\theta\big) \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}} \varpi_j(r)\varphi_j. \end{aligned}$$

La norme L^2 de u sur U_a est donnée par

$$||u_{|U_a}||^2 = \sum_j \int_0^a \big(|f_j|^2 + |g_j|^2 + |\omega_j|^2 + |\varpi_j|^2\big)\,\frac{\mathrm{sh}(r)}{\mathrm{sh}(a)}\left(\frac{\mathrm{ch}(r)}{\mathrm{ch}(a)}\right)^{n-2} dr.$$

Comme $Lu = 0$ au voisinage du lieu singulier, les fonctions f_j, g_j etc. sont équivalentes à $c\,r^{k_j}$ (ou $c\,r^{k_j}\ln(r)$) quand r tend vers 0. Pour que la quantité ci-dessus soit finie, tous les exposants dominants apparaissant dans la décomposition de u (donné par la proposition 2.1.2) doivent être strictement plus grand que -1. Or on a vu que k est de la forme $\pm p_j\gamma \pm 1$ ou $\pm p_j\gamma$, où p_j est un entier que l'on peut supposer positif, et γ vaut 2π divisé par l'angle conique de la composante connexe du lieu singulier. Par conséquent le fait que u soit dans L^2 élimine d'emblée les solutions avec $k = -p_j\gamma - 1$, avec $k = -p_j\gamma$ pour $p_j \neq 0$, et avec $k = -p_j\gamma + 1$ pour $p_j > 1$ (et aussi $p_j = 1$ si $\gamma \geq 2$, c'est-à-dire si l'angle conique est inférieur ou égal à π).

Le fait que du soit dans L^2 impose aussi des conditions sur les exposants possibles.

Pour $j \in J$, on note u_j la composante de u en

$$f_j(r)\psi_j e^r + g_j(r)\psi_j e^\theta + \omega_j(r)\phi_j.$$

Alors du_j est de la forme

$$a_j(r)\psi_j e^r \wedge e^\theta + b_j(r) e^r \wedge \phi_j + c_j(r) e^\theta \wedge \phi_j,$$

avec

$$\begin{aligned}
a_j(r) &= g_j' + \frac{1}{\mathrm{th}(r)} g_j - \frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)} f_j,\\
b_j(r) &= \omega_j' + \mathrm{th}(r)\omega_j - \frac{(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)} f_j,\\
c_j(r) &= \frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)}\omega_j - \frac{(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)} g_j.
\end{aligned}$$

Comme $Lu = 0$ au voisinage d'une composante connexe de Σ, on sait que u_j est une combinaison linéaire de solutions élémentaires (voir prop. 2.1.2), pour lesquelles $(f_j(r), g_j(r), \omega_j(r))$ sont de la forme $r^k(v_0 + v_1 r + \cdots)$. Dans ce cas $(a_j(r), b_j(r), c_j(r))$ est de la forme $r^{k-1}(w_0 + w_1 r + \cdots)$, et, si on note $v_0 = (f_0, g_0, \omega_0)$, alors

$$w_0 = ((k+1)g_0 - ip_j\gamma\, f_0,\ k\omega_0,\ ip_j\gamma\,\omega_0).$$

On constate que si $k = \pm p_j\gamma - 1$, ou si $k = p_j\gamma$ avec $p_j = 0$, alors $w_0 = 0$, c'est-à-dire que dans ces deux cas (et seulement dans ces deux cas-là) u et du ont le même exposant dominant. Et si on est dans le cas d'un terme logarithmique dû à une racine indicielle multiple ($p_j\gamma = -1$, 0, ou 1), avec $(f_j(r), g_j(r), \omega_j(r))$ de la forme $\ln(r)(v_0 + v_1 r + \cdots)$, alors l'expression de du comprend toujours des termes non nuls en r^{-1}.

Maintenant pour $j \notin J$, si u_j est la composante de u en

$$f_j(r)\psi_j e^r + g_j(r)\psi_j e^\theta,$$

l'expression de du_j est assez simple puisqu'on trouve

$$du_j = \left(g_j' + \frac{1}{\mathrm{th}(r)} g_j - \frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)} f_j\right)\psi_j e^r \wedge e^\theta.$$

Si on prend une solution élémentaire de l'équation $Lu = 0$ du type ci-dessus, $(f_j(r), g_j(r))$ est de la forme $r^k(v'_0 + v_1 r + \cdots)$ (voir proposition 2.1.2), et alors $a_j(r) = g'_j + \frac{1}{\mathrm{th}(r)} g_j - \frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)} f_j$ est de la forme $r^{k-1}(a_0 + a_1 r + \cdots)$, et, si on note $v'_0 = (f_0, g_0)$, alors

$$a_0 = (k+1)g_0 - ip_j\gamma\, f_0.$$

On constate, de la même façon que dans le cas $j \in J$, que si $k = \pm p_j\gamma - 1$ alors $w_0 = 0$, c'est-à-dire que dans ce cas (et seulement dans ce cas-là) u_j et du_j ont le même exposant dominant. Et si on est dans le cas d'un terme logarithmique dû à une racine indicielle multiple ($p_j\gamma = -1$ ou 1), avec $(f_j(r), g_j(r))$ de la forme $\ln(r)(v'_0 + v_1 r + \cdots)$, alors l'expression de du_j comprend toujours des termes non nuls en r^{-1}.

Il reste à voir ce qu'il se passe pour les solutions élémentaires de la forme $\varpi(r)\varphi_j$. On trouve, de la même façon, que si l'exposant dominant de u_j vaut k, alors l'exposant dominant de du_j vaut $k-1$, sauf pour la solution non logarithmique quand $k = 0$.

Récapitulons tout cela. Soit u_j une solution élémentaire de l'équation $Lu = 0$ au voisinage d'une composante connexe de Σ, d'exposant dominant k. On note k' l'exposant dominant pour du_j. Alors $k' = k - 1$, sauf pour k de la forme $\pm p\gamma - 1$ et pour $k = 0$. Donc si u_j et du_j sont toutes les deux dans L^2, alors les seules valeurs possibles pour k sont 0, 1, $p\gamma - 1$, $p\gamma$ et $p\gamma + 1$ (les autres valeurs pour lesquelles u_j était L^2, à savoir $k = -p\gamma + 1$ et la solution logarithmique pour $k = 0$, donnent $k' \leq -1$). En particulier, on a alors $k \geq 0$ et $k' \geq 0$.

Par conséquent, pour que $u \in L^2$, solution de l'équation $Lu = 0$ au voisinage du lieu singulier, vérifie $du \in L^2$, tous les exposants k apparaissant dans la décomposition de u (donné par la proposition 2.1.2) doivent être supérieurs ou égaux à 0 : les seules valeurs possibles pour k sont donc 0, 1, $p_j\gamma - 1$, $p_j\gamma$, $p'_j\gamma$ et $p_j\gamma + 1$. Cela revient à dire que les fonctions f_j, g_j, etc. sont des combinaisons linéaires des seules solutions élémentaires f_j^1, f_j^{-1}, f_j^0, etc. définies à la section précédente. On peut alors préciser la décomposition de u : si on écrit $u = fe^r + ge^\theta + \omega$, il existe des coefficients c_j^k, d_j, c'_j tels que

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ p_j\neq 0}} \sum_{k\in\{-1,0,1\}} c_j^k\, f_j^k(r)\psi_j + \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ p_j=0}} \sum_{k\in\{0,1\}} c_j^k\, f_j^k(r)\psi_j\\
g &= \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ p_j\neq 0}} \sum_{k\in\{-1,0,1\}} c_j^k\, g_j^k(r)\psi_j + \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ p_j=0}} d_j^1\, g_j^1(r)\psi_j\\
\omega &= \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\setminus J\\ p_j\neq 0}} \sum_{k\in\{-1,0,1\}} c_j^k\, \omega_j^k(r)\phi_j + \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\setminus J\\ p_j=0}} \sum_{k\in\{0,1\}} c_j^k\, \omega_j^k(r)\phi_j + \sum_{j\in\mathbb{N}} c'_j \varpi_j^0(r)\varphi_j
\end{aligned}$$

Chacun des termes apparaissant dans cette somme est L^2, à dérivée L^2, mais il faut encore montrer que la somme des dérivées converge dans L^2.

Comme l'opérateur L est elliptique, la section u est C^∞ au voisinage du lieu singulier. En particulier, comme Σ_a est compacte, toutes les dérivées u sont de norme L^2 finie sur Σ_a. On en déduit que pour tout polynôme (ou fonction majorée par un polynôme) à deux variables P, la série

$$\sum_{j,k} |P(p_j\gamma, \lambda_j)c_j^k f_j^k(a)|^2$$

converge, et qu'il en est de même en remplaçant $f_j^k(a)$ par $g_j^k(a)$, $\omega_j^k(a)$ ou $\varpi_j^0(a)$.

Ce résultat, combiné aux estimations du lemme 2.1.3, montre directement que la série

$$\sum_{j,k} c_j^k f_j^{k'}(r)\psi_j$$

converge en norme L^2 sur U_a, et donc que $\frac{\partial f}{\partial r}$ est L^2 sur U_a, et il en est de même pour $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\nabla_{e_r}\omega$. Cela termine de montrer que $\nabla_{e_r}u = \frac{\partial f}{\partial r}e^r + \frac{\partial g}{\partial r}e^\theta + \nabla_{e_r}\omega$ appartient à L^2.

On va démontrer de la même façon que $\nabla_{e_r}du \in L^2$. On a la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_r}du &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(g_j'' + \frac{1}{\mathrm{th}(r)}g_j' + (1 - \frac{1}{\mathrm{th}(r)^2})g_j - \frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)}f_j' + \frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}f_j \right) \psi_j e^r \wedge e^\theta \\
&+ \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus J} \left(\omega_j'' + \mathrm{th}(r)\omega_j' + (1-\mathrm{th}(r)^2)\omega_j - \frac{(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}f_j' + \frac{(\lambda_j)^{1/2}\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)}f_j \right) e^r \wedge \phi_j \\
&+ \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus J} \left(\frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)}\omega_j' - \frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}\omega_j - \frac{(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}g_j' + \frac{(\lambda_j)^{1/2}\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)}g_j \right) e^\theta \wedge \phi_j \\
&+ \sum_{j\in\mathbb{N}} \Bigg(\left(\varpi_j'' + \mathrm{th}(r)\varpi_j' + (1-\mathrm{th}(r)^2)\varpi_j\right) e^r \wedge \varphi_j \\
&\qquad + \left(\frac{ip_j'\gamma}{\mathrm{sh}(r)}\varpi_j' - \frac{ip_j'\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}\varpi_j \right) e^\theta \wedge \varphi_j + (\varpi_j' - \mathrm{th}(r)\varpi_j)d_\Sigma\varphi_j \Bigg)
\end{aligned}$$

Dans cette somme, seules des combinaisons de solutions élémentaires dont les exposants dominants sont positifs apparaissent. Le fait que pour tout polynôme (ou fonction majorée par un polynôme) à deux variables P, la série

$$\sum_{j,k} |P(p_j\gamma, \lambda_j)c_j^k f_j^k(a)|^2$$

converge, et qu'il en est de même en remplaçant $f_j^k(a)$ par $g_j^k(a)$, $\omega_j^k(a)$ ou $\varpi_j^0(a)$, combinée aux estimations du lemme 2.1.3, nous assure alors la convergence de la série en norme L^2.

Récapitulons : si u est une solution de l'équation $Lu = 0$ au voisinage de Σ, telle que u et du soient dans L^2, on a vu que seuls les solutions élémentaires ayant un exposant dominant supérieur ou égal à 0 apparaissent dans la décomposition de u. Par conséquent les termes apparaissant dans la décomposition de ∇u et de ∇du ont tous des exposants dominants strictement supérieurs à -1. Ce fait, et la caractère C^∞ de u près du lieu singulier, suffit à prouver que ∇u et ∇du sont tous les deux dans L^2. □

L'intérêt de ce lemme réside principalement dans la démonstration des deux résultats suivants, qui nous font passer de l'étude des solutions de l'équation $Lu = 0$ au voisinage du lieu singulier à celle des solutions de l'équation $Lu = f$ sur M entière.

Théorème 2.1.5. *Si M est une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à 2π, alors $D = D'$.*

Démonstration. Supposons que les deux domaines D et D' soient différents ; par exemple, $D \not\subseteq D'$. Alors il existe $u \in D \backslash D'$. Comme $L|_{D'}$ est bijectif, il existe aussi $u' \in D'$ tel que $Lu' = Lu$. Donc $u - u' \in \ker L$, et on connaît le comportement de $u - u'$ au voisinage du lieu singulier.

Par définition de D et D' (voir 2.1.1), on sait que u, u', ∇u et du' sont dans L^2, et donc aussi du. Par conséquent $u - u'$ et $d(u - u')$ sont dans L^2. D'après le lemme précédent ceci implique que $\nabla(u - u')$ est dans L^2.

On peut alors appliquer le théorème 1.4.3 pour procéder à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L(u-u'), u-u' \rangle \\ &= \langle \nabla^*\nabla(u-u') + (n-1)(u-u'), u-u' \rangle \\ &= ||\nabla(u-u')||^2 + (n-1)||u-u'||^2 \end{aligned}$$

et on trouve finalement $u - u' = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $u \in D \backslash D'$. On démontre de la même façon que $D' \backslash D = \emptyset$. □

Remarque : Bien que nous ne le montrions pas ici, il est intéressant de noter que dès qu'un angle conique est plus grand que 2π, les deux domaines ci-dessus ne coïncident plus. Il devient donc beaucoup plus difficile de trouver un "bon" domaine pour résoudre l'équation de normalisation, cf [14] et [7] pour des résultats dans cette direction.

Nous allons maintenant montrer un résultat complémentaire pour les solutions de l'équation de normalisation.

Théorème 2.1.6. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à 2π. Soit ϕ une section de $L^2(T^*M)$. Alors il existe une unique section u de $L^2(T^*M)$, solution de l'équation $Lu = \phi$, telle que u, ∇u, $d\delta u$, et ∇du (au sens des distributions) soient dans L^2.*

Démonstration. On sait depuis la section 2.1.1 que l'on peut résoudre de façon unique l'équation $Lu = \phi$ avec $u \in D$. Maintenant, le théorème 2.1.5 ci-dessus nous assure que l'on a aussi $u \in D'$; finalement u, ∇u (et donc aussi du et δu), $d\delta u$ et δdu (et donc aussi $\nabla^*\nabla u$) sont dans L^2. Le seul point qui reste à montrer est que ∇du est aussi L^2.

Les formes C^∞ à support compact étant dense dans L^2, on peut trouver une suite (ϕ_k) de 1-formes C^∞ à support compact telle que $\phi_k \to \phi$ dans L^2 quand $k \to \infty$. Soit (u_k) la suite d'éléments de D telle que pour tout entier k, $Lu_k = \phi_k$. On applique alors le théorème 1.3.2 (avec, à un facteur près, $A = \nabla$ et $A^* = \nabla^*$) : les transformations $(\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}$ et $\nabla(\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}$ sont continues, donc

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} (\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}(\phi_k) = (\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}(\phi) = u$$

et

$$\lim_{k\to\infty} \nabla u_k = \lim_{k\to\infty} \nabla((\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}(\phi_k)) = \nabla((\nabla^*\nabla + (n-1)Id)^{-1}(\phi)) = \nabla u,$$

les limites étant au sens L^2. Comme du_k est la partie antisymétrique de ∇u_k, la suite (du_k) est aussi convergente, avec $\lim_{k\to\infty} du_k = du$. Maintenant, comme ϕ_k est à support compact, Lu_k est identiquement nul au voisinage du lieu singulier, et u_k rentre donc dans le cadre de la proposition 2.1.2. Comme u_k appartient à $D(= D')$, u_k ainsi que du_k sont dans L^2, et on a vu au lemme 2.1.4 qu'alors $\nabla du_k \in L^2$. On va maintenant montrer que (∇du_k), suite de sections du fibré $T^*M \otimes \Lambda^2 M$, est *bornée* dans L^2.

Pour cela, on considère ξ, section C^∞ à support compact de $T^*M \otimes \Lambda^2 M$ ("section test"), et on s'intéresse au produit scalaire $\langle \nabla du_k, \xi \rangle$. Le but est d'arriver à monter que

$$|\langle \nabla du_k, \xi \rangle| \leq M||\xi||,$$

où M ne dépend pas de k ni de ξ.

La restriction de la dérivée covariante à $\Omega^2 M$ nous donne un opérateur (non borné) ∇ : $L^2(\Lambda^2 M) \to L^2(T^*M \otimes \Lambda^2 M)$; son adjoint est la restriction de ∇^* à $L^2(T^*M \otimes \Lambda^2 M)$, et les résultats de la section 1.4 s'appliquent. Maintenant, en utilisant la définition de l'adjoint d'un opérateur, on a l'égalité $\ker \nabla^* = (\operatorname{Im} \nabla)^\perp$. Le théorème 1.4.7 nous garantie que l'image de ∇ est fermée, et on a donc la décomposition orthogonale suivante :

$$L^2(T^*M \otimes \Lambda^2 M) = \ker \nabla^* \oplus \operatorname{Im} \nabla.$$

On peut donc écrire $\xi = k + \nabla\zeta$ dans cette décomposition, et d'après le corollaire 1.4.8 on peut même choisir ζ de telle sorte que

$$||\zeta|| \leq c\,||\nabla\zeta|| \leq c\,||\xi||$$

pour une constante c donnée ne dépendant pas de ξ.

Retournons au produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle \nabla du_k, \xi \rangle &= \langle \nabla du_k, \nabla\zeta + k \rangle \\ &= \langle \nabla du_k, \nabla\zeta \rangle. \end{aligned}$$

Pour pouvoir faire une intégration par parties, il faut vérifier que tous les termes impliqués sont L^2. On sait déjà que ζ, $\nabla\zeta$, ∇du_k le sont, reste à montrer que c'est aussi le cas de $\nabla^*\nabla du_k$. Pour cela on utilise la formule de Weitzenböck suivante, valable pour une métrique hyperbolique, qui est un analogue de la formule pour les 1-formes que l'on a déjà utilisée à plusieurs reprises (voir [2] §1.I) :

$$\forall \omega \in \Omega^2 M, \ \nabla^*\nabla\omega = \Delta\omega + 2(n-2)\omega. \tag{2.9}$$

En l'appliquant à u_k, on trouve

$$\nabla^*\nabla du_k = \Delta du_k + 2(n-2)du_k = d\Delta u_k + 2(n-2)du_k,$$

car d et $\Delta = d\delta + \delta d$ commutent. D'autre part

$$\Delta u_k = Lu_k - 2(n-1)u_k = \phi_k - 2(n-1)u_k.$$

Finalement,

$$\nabla^*\nabla du_k = d\phi_k - 2du_k.$$

Comme ϕ_k est à support compact et que $u_k \in D$, les formes $d\phi_k$ et du_k sont L^2, donc $\nabla^*\nabla du_k$ est L^2, donc on peut donc intégrer par parties (théorème 1.4.3) :

$$\begin{aligned}\langle \nabla du_k, \xi\rangle &= \langle \nabla du_k, \nabla\zeta\rangle \\ &= \langle \nabla^*\nabla du_k, \zeta\rangle \\ &= \langle d\phi_k - 2du_k, \zeta\rangle.\end{aligned}$$

Comme $\nabla\zeta$ est L^2, $\delta\zeta = -\mathrm{tr}_g\nabla\zeta$ est aussi L^2, on a même $||\delta\zeta|| \leq \sqrt{n}||\nabla\zeta||$. D'autre part ϕ_k, $d\phi_k$ et ζ sont L^2, on peut encore intégrer par parties :

$$\begin{aligned}\langle \nabla du_k, \xi\rangle &= \langle d\phi_k - 2du_k, \zeta\rangle \\ &= \langle \phi_k, \delta\zeta\rangle - 2\langle du_k, \zeta\rangle.\end{aligned}$$

Pour finir on majore avec Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}|\langle \nabla du_k, \xi\rangle| &\leq ||\phi_k||\,||\delta\zeta|| + 2||du_k||\,||\zeta|| \\ &\leq (\sqrt{n}||\phi_k|| + 2c||du_k||)\,||\nabla\zeta|| \\ &\leq M||\xi||\end{aligned}$$

car les suites (ϕ_k) et (du_k) sont convergentes, donc bornées, dans L^2. Cette majoration, valable pour toute section test ξ, implique directement que la suite (∇du_k) est bornée dans L^2.

Par conséquent, on peut extraire une sous-suite, encore notée (∇du_k), qui converge faiblement vers une limite $l \in L^2$: c'est-à-dire que quel que soit $\xi \in L^2(T^*M \otimes \Lambda^2 M)$,

$$\lim_{k\to\infty} \langle \nabla du_k, \xi\rangle = \langle l, \xi\rangle.$$

Mais alors, si ξ est C^∞ à support compact,

$$\langle \nabla du_k, \xi\rangle = \langle du_k, \nabla^*\xi\rangle,$$

et

$$\lim_{k\to\infty} \langle du_k, \nabla^*\xi\rangle = \langle du, \nabla^*\xi\rangle$$

car (du_k) converge dans L^2 vers du. Par conséquent, on a

$$\langle du, \nabla^*\xi\rangle = \langle l, \xi\rangle$$

pour tout $\xi \in C_0^\infty$, ce qui signifie exactement que

$$l = \nabla_{max} du = \nabla du,$$

et par suite ∇du appartient à L^2. □

Notons que si en plus ϕ est C^∞, alors par régularité elliptique la solution u ci-dessus est aussi de classe C^∞.

2.2 Rigidité infinitésimale des cône-variétés

Nous avons maintenant en main tous les outils pour montrer le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à 2π. Soit h_0 une déformation Einstein infinitésimale (i.e. vérifiant l'équation $E'_g(h_0) = 0$) telle que h_0 et ∇h_0 soient dans L^2. Alors la déformation h_0 est triviale, i.e. il existe une forme $u \in \Omega^1 M$ telle que $h_0 = \delta^* u$.*

Dans toute cette section nous supposerons donc que les angles coniques sont toujours inférieurs à 2π.

Démonstration. La première étape de la démonstration consiste à normaliser h_0, c'est-à-dire à chercher u tel que $h = h_0 - \delta^* u$ vérifie la condition de jauge $\beta(h) = 0$, ce qui revient à résoudre l'équation $\beta \circ \delta^* u = \beta h_0$. Comme ∇h_0 est dans L^2, βh_0 l'est aussi, et d'après le théorème 2.1.6 cette équation admet une unique solution u telle que u, ∇u, $d\delta u$ et ∇du soient dans L^2. On pose $h = h_0 - \delta^* u$. Notons que l'on a perdu des informations en normalisant : en effet, rien ne garantit que la déformation normalisée h vérifie encore $\nabla h \in L^2$, puisqu'on ne connaît rien pour l'instant sur $\nabla \delta^* u$.

La déformation h vérifie alors :

$$\begin{cases} \nabla^* \nabla h - 2\mathring{R} h = 0 \\ \delta h + d\mathrm{tr}\, h = 0 \end{cases}$$

En prenant la trace par rapport à g de la première équation, on obtient

$$\Delta(\mathrm{tr}\, h) + 2(n-1)\mathrm{tr}\, h = 0,$$

ce qui incite à intégrer par parties, mais pour le faire il faut d'abord vérifier que les termes impliqués sont L^2, avant de pouvoir appliquer le théorème 1.4.1. Comme h_0 et $\delta^* u$ sont L^2, h est bien L^2, donc $\mathrm{tr}\, h$ aussi, et donc $\Delta \mathrm{tr}\, h$ aussi. Maintenant,

$$d\mathrm{tr}\, h = d\mathrm{tr}\, h_0 + d\mathrm{tr}\, \delta^* u = d\mathrm{tr}\, h_0 - d\delta u,$$

donc $d\mathrm{tr}\, h$ est L^2 ($d\mathrm{tr}\, h_0$ est L^2 car ∇h_0 l'est). Par suite, on trouve en intégrant contre $\mathrm{tr}\, h$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathrm{tr}\, h, \Delta(\mathrm{tr}\, h) + 2(n-1)\mathrm{tr}\, h \rangle \\ &= ||d\mathrm{tr}\, h||^2 + 2(n-1)||\mathrm{tr}\, h||^2 \end{aligned}$$

et donc $\operatorname{tr} h = 0$, ce qui, avec $\beta(h) = 0$, implique aussi $\delta h = 0$. Finalement, on a

$$\begin{cases} \nabla^*\nabla h - 2\mathring{R}h = 0 \\ \delta h = 0 \\ \operatorname{tr} h = 0 \end{cases}$$

La deuxième étape de la démonstration consiste à utiliser une autre formule de Weitzenböck (cf [2], §12.69). Un 2-tenseur peut toujours se voir comme une 1-forme à valeur dans le fibré cotangent T^*M. Ce fibré étant muni de la connexion de Levi-Cività ∇, on note d^∇ la différentielle extérieure associée sur les formes à valeurs dans T^*M. L'opérateur adjoint est la codifférentielle notée δ^∇. Notons que si u est une 0-forme à valeurs dans T^*M (c'est-à-dire une 1-forme usuelle), alors $d^\nabla u = \nabla u$; de même pour une 1-forme à valeurs dans T^*M, $\delta^\nabla h = \nabla^* h$. On a alors la formule suivante, valable pour tout 2-tenseur symétrique :

$$\nabla^*\nabla h = (\delta^\nabla d^\nabla + d^\nabla \delta^\nabla)h + \mathring{R}h - h \circ ric. \tag{2.10}$$

Pour une métrique hyperbolique, cela se simplifie en

$$\nabla^*\nabla h = (\delta^\nabla d^\nabla + d^\nabla \delta^\nabla)h + nh - (\operatorname{tr} h)g.$$

En combinant avec ce qui précède, on obtient

$$\begin{cases} \delta^\nabla d^\nabla h + (n-2)h = 0 \\ \delta h = 0 \\ \operatorname{tr} h = 0 \end{cases}$$

Pour conclure, "il suffit" d'une intégration par parties contre h. Comme h est dans L^2, $\delta^\nabla d^\nabla h$ est aussi dans L^2 ; si ∇h, ou même seulement $\nabla_{e_r} h$, était L^2 on pourrait conclure en utilisant une méthode analogue à celle employée dans la démonstration du théorème 1.4.3. Malheureusement on ne sait rien sur le caractère L^2 ou non de $\nabla \delta^* u$. On va donc devoir contourner cette difficulté pour montrer qu'on a bien $\langle \delta^\nabla d^\nabla h, h\rangle = ||d^\nabla h||^2$.

Avant toutes choses, il faut montrer que $d^\nabla h$ est bien L^2. Comme ∇h_0 est L^2, $d^\nabla h_0$ est L^2 ; il ne reste qu'à regarder $d^\nabla \delta^* u$. Or

$$\delta^* u = \nabla u - \frac{1}{2} du = d^\nabla u - \frac{1}{2} du,$$

donc

$$d^\nabla \delta^* u = (d^\nabla)^2 u - \frac{1}{2} d^\nabla du.$$

L'opérateur $(d^\nabla)^2$ est bien connu, ce n'est rien d'autre que l'opposé de la courbure, i.e.

$$(d^\nabla)^2 u(x,y) = -R(x,y)u = \nabla_x \nabla_y u - \nabla_y \nabla_x u - \nabla_{[x,y]} u.$$

C'est un opérateur borné, c'est-à-dire continu, pour les normes L^2 ; par conséquent $(d^\nabla)^2 u$ est L^2. Il ne nous reste donc que la terme $d^\nabla du$; or le théorème 2.1.6 nous garantit que ∇du, et donc $d^\nabla du$, sont bien L^2.

Le tenseur $d^\nabla h$ est donc bien dans L^2. Malheureusement, on n'a pas d'analogue du résultat de Cheeger (théorème 1.4.1) pour les formes à valeurs dans un fibré, du fait que $d^\nabla \circ d^\nabla$ ne s'annule pas nécessairement, à la différence de $d \circ d$. Cependant, en écrivant

$$h = h_0 - \delta^* u = h_0 + \frac{1}{2} du - d^\nabla u,$$

on a

$$\langle h, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle h_0 + \frac{1}{2} du, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle - \langle d^\nabla u, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle. \tag{2.11}$$

Le théorème 2.1.6 nous assure que $\nabla(h_0 + \frac{1}{2} du)$ est dans L^2. Ceci nous permet de montrer, exactement de la même façon que dans la démonstration du théorème 1.4.3, qu'on a bien

$$\langle h_0 + \frac{1}{2} du, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle d^\nabla (h_0 + \frac{1}{2} du), d^\nabla h \rangle. \tag{2.12}$$

Pour le terme qui reste, comme u et ∇u sont L^2, on peut trouver d'après le corollaire 1.4.5 une suite (u_k), C^∞ à support compact, telle que $\lim_{k\to\infty} u_k = u$ et $\lim_{k\to\infty} \nabla u_k = \nabla u$. On a alors

$$\lim_{k\to\infty} \langle d^\nabla u_k, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle d^\nabla u, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle.$$

On peut faire l'intégration par parties avec u_k :

$$\langle d^\nabla u_k, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle (d^\nabla)^2 u_k, d^\nabla h \rangle.$$

Mais comme $(d^\nabla)^2$ est continue, on a

$$\lim_{k\to\infty} (d^\nabla)^2 u_k = (d^\nabla)^2 u,$$

et donc

$$\lim_{k\to\infty} \langle (d^\nabla)^2 u_k, d^\nabla h \rangle = \langle (d^\nabla)^2 u, d^\nabla h \rangle.$$

On en déduit que

$$\langle d^\nabla u, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = \langle (d^\nabla)^2 u, d^\nabla h \rangle,$$

et avec (2.11) et (2.12) on a établi l'égalité

$$\langle h, \delta^\nabla d^\nabla h \rangle = ||d^\nabla h||^2.$$

Par conséquent, comme $\delta^\nabla d^\nabla h + (n-2)h = 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h, \delta^\nabla d^\nabla h + (n-2)h \rangle \\ &= ||d^\nabla h||^2 + (n-2)||h||^2 \end{aligned}$$

et donc le tenseur h est identiquement nul. Par suite $h_0 = \delta^* u$, la déformation est triviale. □

Corollaire 2.2.2. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à 2π. Alors M est infinitésimalement rigide parmi les cônes-variétés Einstein à angles coniques fixés.*

Démonstration. En effet, on a vu que toute déformation infinitésimale de la structure de cône-variété préservant les angles pouvait se mettre sous la forme d'un 2-tenseur symétrique h_0 appartenant à L^2, dont la dérivée covariante ∇h_0 est aussi dans L^2. On peut alors appliquer le théorème ci-dessus pour montrer que toutes les déformations Einstein de ce type sont triviales. □

Chapitre 3

Construction de déformations Einstein

3.1 Retour à l'équation de normalisation

On va montrer dans cette section deux résultats supplémentaires, concernant l'équation de normalisation et la normalisation par la jauge de Bianchi. Un résultat plus précis, permettant d'avoir plus d'informations sur la déformation normalisée, au prix de plus de contrainte sur les angles, et un résultat plus général, montrant que toute déformation L^2 (et plus seulement $L^{1,2}$) peut être normalisée en un certain sens.

Ces deux résultats serviront à construire des déformations Einstein infinitésimale modifiant les angles coniques.

3.1.1 Un résultat plus précis

On commence par montrer le théorème suivant, valable seulement si les angles coniques sont strictement plus petits que π.

Théorème 3.1.1. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à π. Alors l'opérateur*

$$L = \nabla^*\nabla + (n-1)Id \ : \ L^{2,2}(T^*M) \to L^2(T^*M)$$

est un isomorphisme.

On retrouve donc quand les angles sont suffisamment petits une propriété toujours valable sur une variété compacte. La démonstration dépend en grande partie du lemme suivant, que l'on démontrera ensuite :

Lemme 3.1.2. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont strictement inférieurs à π. Soit u une 1-forme telle que Lu soit égal à 0 au voisinage du lieu singulier et que u et ∇u soient dans L^2. Alors $\nabla\nabla u$ appartient à L^2.*

Démonstration du théorème. On a vu dans la section précédente que l'équation $Lu = \phi$ avait une unique solution telle que u, ∇u, $d\delta u$, et ∇du (au sens des distributions) soient dans L^2. Comme $\nabla u = \delta^* u + \frac{1}{2} du$, il ne reste plus qu'à démontrer que, dans le cas où tous les angles coniques sont strictement inférieurs à π, on a aussi $\nabla\delta^* u \in L^2$. La démonstration suit de très près la preuve du fait que ∇du est dans L^2 quand les angles sont inférieurs à 2π (théorème 2.1.6). Le plan est le suivante : on part du fait que le résultat est vrai quand le second membre de l'équation est identiquement nul au voisinage du lieu singulier. On approxime donc ϕ par une suite ϕ_k de formes à support compact, ce qui nous donne une suite de solutions u_k, ayant la propriété voulue (à savoir $\nabla\delta^* u_k \in L^2$), et convergeant vers u. On cherche ensuite à montrer que la suite $\nabla\delta^* u_k$ est bornée dans L^2, en prenant son produit scalaire avec une section test. L'ingrédient principal de la démonstration est encore une relation de commutation, ici entre $\nabla^*\nabla$ et δ^*.

Soit donc une suite (ϕ_k) de 1-formes C^∞ à support compact telle que $\phi_k \to \phi$ dans L^2 quand $k \to \infty$. Soit (u_k) la suite de 1-formes vérifiant $Lu_k = \phi_k$ pour tout entier k, et telle que u_k, ∇u_k, $d\delta u_k$, et ∇du_k (au sens des distributions) sont dans L^2. On sait que u_k et ∇u_k convergent au sens L^2 vers u et ∇u respectivement.

Maintenant, comme ϕ_k est à support compact, Lu_k est identiquement nul au voisinage du lieu singulier. Tout les angles coniques étant strictement inférieurs à π, on déduit du lemme 3.1.2 que $\nabla\delta^* u_k \in L^2$. Comme annoncé, on va montrer que $(\nabla\delta^* u_k)$, suite de sections du fibré $T^*M \otimes S^2M$, est bornée dans L^2. Pour cela, on forme le produit scalaire $\langle \nabla\delta^* u_k, \xi\rangle$ avec une section test (i.e. C^∞ à support compact) ξ de $T^*M \otimes S^2M$. Le but est d'arriver à monter que

$$|\langle \nabla\delta^* u_k, \xi\rangle| \leq M||\xi||,$$

où M ne dépend ni de k ni de ξ.

La restriction de la dérivée covariante à S^2M donne un opérateur (non borné)

$$\nabla : L^2(S^2M) \to L^2(T^*M \otimes S^2M);$$

son adjoint est la restriction de ∇^* à $L^2(T^*M \otimes S^2M)$, et les résultats de la section 1.4 s'appliquent. En particulier, comme $\operatorname{Im}\nabla$ est fermée d'après le théorème 1.4.7, on a la décomposition orthogonale suivante :

$$L^2(T^*M \otimes S^2M) = \ker\nabla^* \oplus \operatorname{Im}\nabla.$$

Cela permet d'écrire $\xi = k + \nabla\zeta$, où $k \in \ker\nabla^*$ et $\zeta \in D(\nabla)$, et d'après le corollaire 1.4.8, on peut choisir ζ de telle sorte que $||\zeta|| \leq c\,||\nabla\zeta|| \leq c\,||\xi||$ pour une certaine constante c ne dépendant pas de ξ.

La suite de la preuve repose sur une relation de commutation entre $\nabla^*\nabla$ et δ^*. Soit η une 1-forme (lisse). On sait que la déformation $\delta^*\eta$ est triviale, c'est-à-dire que l'on a toujours $E'(\delta^*\eta) = 0$, soit

$$\nabla^*\nabla\delta^*\eta - 2\mathring{R}\delta^*\eta - 2\delta^*\beta\delta^*\eta = 0,$$

voir (1.1). La métrique étant hyperbolique, on peut utiliser les relations (1.2) et (2.2) pour simplifier cette expression. On obtient alors la relation suivante :

$$\nabla^*\nabla(\delta^*\eta) = 2\delta^*\eta + 2(\delta\eta)g + \delta^*(\nabla^*\nabla\eta + (n-1)\eta). \tag{3.1}$$

En appliquant cette formule à u_k, on obtient

$$\nabla^*\nabla(\delta^* u_k) = 2\delta^* u_k + 2(\delta u_k)g + \delta^*\phi_k.$$

En particulier, $\nabla^*\nabla(\delta^* u_k)$ appartient à $L^2(S^2M)$.

On retourne au produit scalaire $\langle \nabla\delta^* u_k, \xi\rangle$. On a

$$\begin{aligned} \langle \nabla\delta^* u_k, \xi\rangle &= \langle \nabla\delta^* u_k, \nabla\zeta + k\rangle \\ &= \langle \nabla\delta^* u_k, \nabla\zeta\rangle. \end{aligned}$$

On vient de voir que $\nabla^*\nabla(\delta^* u_k)$ est L^2, et on sait que c'est aussi le cas pour $\nabla\delta^* u_k$, $\nabla\zeta$ et ζ. On peut donc intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \langle \nabla\delta^* u_k, \xi\rangle &= \langle \nabla\delta^* u_k, \nabla\zeta\rangle \\ &= \langle \nabla^*\nabla\delta^* u_k, \zeta\rangle \\ &= \langle 2\delta^* u_k + 2(\delta u_k)g + \delta^*\phi_k, \zeta\rangle. \end{aligned}$$

On peut à nouveau intégrer par partie (tous les termes concernés sont bien L^2) pour obtenir

$$\begin{aligned} \langle \nabla\delta^* u_k, \xi\rangle &= \langle 2\delta^* u_k + 2(\delta u_k)g + \delta^*\phi_k, \zeta\rangle \\ &= \langle 2u_k + \phi_k, \delta\zeta\rangle + 2\langle u_k, d\mathrm{tr}\,\zeta\rangle. \end{aligned}$$

Pour finir on majore avec Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |\langle \nabla\delta^* u_k, \xi\rangle| &\leq (||\phi_k|| + 2||u_k||)\,||\delta\zeta|| + 2||u_k||\,||d\mathrm{tr}\,\zeta|| \\ &\leq (\sqrt{n}||\phi_k|| + (2\sqrt{n}+2)||u_k||)\,||\nabla\zeta|| \\ &\leq M||\xi|| \end{aligned}$$

car les suites (ϕ_k) et (u_k) sont convergentes, donc bornées, dans L^2. Cette majoration, valable pour toute section test ξ, implique directement que la suite $(\nabla\delta^* u_k)$ est bornée dans L^2.

Par conséquent, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement vers une limite $l \in L^2$. Comme dans le cas de ∇du, on vérifie facilement que cette limite est bien égale à $\nabla\delta^* u$ (distributionnellement), et donc que $\nabla\delta^* u$ est bien dans L^2. □

Avant de commencer la preuve du lemme, on introduit quelques notations (qui réapparaîtront plus tard, à la section 3.2.3). Si a et b sont deux 1-formes, on note $a.b$ pour $\frac{1}{2}(a\otimes b + b\otimes a)$. En particulier, $x.x = x \otimes x$.

On rappelle (voir section 2.1.2) que la notation N désigne le (sous-)fibré vectoriel au-dessus de U_a, dont la fibre au-dessus de $x \in U_a$ est le sous-espace vectoriel de T^*_xM orthogonal à e^θ et e^r. Si ω est une section de N, on définit $\delta^*_\Sigma\omega$ par

$$\delta^*_\Sigma\omega = \sum_{i=1}^{n-2} e^i.\nabla_\Sigma(e_i, \omega).$$

Démonstration du lemme 3.1.2. On procède comme pour la preuve du lemme 2.1.4. Ici aussi, il ne reste qu'à démontrer que, dans le cas où tous les angles coniques sont strictement inférieurs à π, on a aussi $\nabla\delta^* u \in L^2$. En accord avec la proposition 1.4.6, on va d'abord montrer que $\nabla^*\nabla\delta^* u$ est dans L^2 ; il suffira ensuite de montrer que $\nabla_{e_r}\delta^* u$ est dans L^2. Pour cela, on utilise la relation (3.1) :

$$\nabla^*\nabla(\delta^* u) = 2\delta^* u + 2(\delta u)g + \delta^*(\nabla^*\nabla u + (n-1)u).$$

Au voisinage du lieu singulier, on a alors

$$\nabla^*\nabla(\delta^* u) = 2\delta^* u + 2(\delta u)g.$$

Cela nous assure que $\nabla^*\nabla(\delta^* u)$ est dans L^2.

Ensuite, on utilise la décomposition de u vue en (2.3) :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j\in J}\big(f_j(r)\psi_j\, e^r + g_j(r)\psi_j\, e^\theta + \omega_j(r)\phi_j\big) \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus J}\big(f_j(r)\psi_j\, e^r + g_j(r)\psi_j\, e^\theta\big) \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}}\varpi_j(r)\varphi_j. \end{aligned}$$

Le fait que u et ∇u soient dans L^2 impose que seules les solutions élémentaires d'exposant dominant supérieur ou égal à 0 apparaissent dans cette décomposition. On décompose ensuite

$$\begin{aligned} \delta^* u &= \sum_{j\in\mathbb{N}}\left(f_j{}'\psi_j e^r.e^r + \left(g_j' - \frac{g_j}{\mathrm{th}(r)} + \frac{ip_j\gamma f_j}{\mathrm{sh}(r)}\right)\psi_j e^r.e^\theta + \left(\frac{ip_j\gamma g_j}{\mathrm{sh}(r)} + \frac{f_j}{\mathrm{th}(r)}\right)\psi_j e^\theta.e^\theta\right. \\ &\quad \left. + f_j \mathrm{th}(r)\mathrm{ch}(r)^2 g_\Sigma\right) \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus J}\left(\left(\omega_j' - \mathrm{th}(r)\omega_j + \frac{(\lambda)^{1/2}f_j}{\mathrm{ch}(r)}\right)\phi_j.e^r + \left(\frac{ip_j\gamma\omega_j}{\mathrm{sh}(r)} + \frac{(\lambda)^{1/2}g_j}{\mathrm{ch}(r)}\right)\phi_j.e^\theta + \omega_j\delta^*_\Sigma\phi_j\right) \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\left(\varpi_j' - \mathrm{th}(r)\varpi_j\right)\varphi_j.e^r + \frac{ip_j\gamma\varpi_j}{\mathrm{sh}(r)}\varphi_j.e^\theta + \varpi_j\delta^*_\Sigma\varphi_j\right) \end{aligned}$$

et donc

$$
\begin{aligned}
\nabla_{e_r}\delta^* u &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \Bigg(f_j''\psi_j e^r.e^r + \left(g_j'' - \frac{g_j'}{\mathrm{th}(r)} + \frac{g_j}{\mathrm{sh}(r)^2} + \frac{ip_j\gamma f_j'}{\mathrm{sh}(r)} - \frac{ip_j\gamma f_j}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)} \right) \psi_j e^r.e^\theta \\
&\quad + \left(\frac{ip_j\gamma g_j'}{\mathrm{sh}(r)} - \frac{ip_j\gamma g_j}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)} + \frac{f_j'}{\mathrm{th}(r)} - \frac{f_j}{\mathrm{sh}(r)^2} \right) \psi_j e^\theta.e^\theta \\
&\quad + \left(f_j'\mathrm{th}(r) + \frac{f_j}{\mathrm{ch}(r)^2} \right) \mathrm{ch}(r)^2 g_\Sigma \Bigg) \\
&+ \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus J} \Bigg(\left(\omega_j'' - \mathrm{th}(r)\omega_j' - \frac{\omega_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + \frac{(\lambda)^{1/2} f_j'}{\mathrm{ch}(r)} - \frac{(\lambda)^{1/2} f_j \mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)} \right) \phi_j.e^r \\
&\quad + \left(\frac{ip_j\gamma\omega_j'}{\mathrm{sh}(r)} - \frac{ip_j\gamma\omega_j}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)} + \frac{(\lambda)^{1/2} g_j'}{\mathrm{ch}(r)} - \frac{(\lambda)^{1/2} g_j \mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)} \right) \phi_j.e^\theta \\
&\quad + (\omega_j' - \mathrm{th}(r)\omega_j)\delta_\Sigma^*\phi_j \Bigg) \\
&+ \sum_{j\in\mathbb{N}} \Bigg(\left(\varpi_j'' - \mathrm{th}(r)\varpi_j' - \frac{\varpi_j}{\mathrm{ch}(r)^2} \right) \varphi_j.e^r + \left(\frac{ip_j\gamma\varpi_j'}{\mathrm{sh}(r)} - \frac{ip_j\gamma\varpi_j}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)} \right) \varphi_j.e^\theta \\
&\quad + \left(\varpi_j' - \mathrm{th}(r)\varpi_j \right) \delta_\Sigma^*\varphi_j \Bigg)
\end{aligned}
$$

Comme tous les angles coniques sont supposés plus petits que π, γ est plus grand que 2, et donc $|p_j\gamma|$ est soit nul soit strictement plus grand que 2. Par conséquent les majorations du lemme 2.1.3 s'appliquent à tous les termes apparaissant dans la formule ci-dessus. Pour conclure, on utilise la même remarque que dans la démonstration du lemme 2.1.4, à savoir : comme l'opérateur L est elliptique, la section u est localement C^∞. En particulier, comme Σ_a est compacte, toutes les dérivées u sont de norme L^2 finie sur Σ_a. On en déduit que pour tout polynôme (ou fonction majorée par un polynôme) à deux variables P, la série

$$\sum_{j,k} |P(p_j\gamma, \lambda_j) c_j^k f_j^k(a)|^2$$

converge, et qu'il en est de même en remplaçant $f_j^k(a)$ par $g_j^k(a)$, $\omega_j^k(a)$ ou $\varpi_j^0(a)$. Cela assure la convergence en norme L^2 de la série, et donc le caractère L^2 de $\nabla_{e_r}\delta^* u$. $\square$

3.1.2 Un résultat plus général

Le théorème suivant montre que toute déformation infinitésimale $h \in L^2(S^2M)$, il existe une (unique) 1-forme $u \in D(\delta^*_{min})$ telle que $h - \delta^* u$ vérifie (distributionnellement) la condition de jauge de Bianchi $\beta(h - \delta^* u) = 0$. On peut donc normaliser en un certain sens toute déformation infinitésimale L^2, de façon unique. Ce résultat est assez général puisqu'on suppose juste que la métrique conique est Einstein à courbure de Ricci négative ; il n'y a pas de limitations à la valeur des angles coniques.

Théorème 3.1.3. *Soit M une cône-variété Einstein à courbure de Ricci négative. On a la décomposition suivante*

$$L^2(S^2M) = \ker\beta_{max} \oplus \operatorname{Im}\delta^*_{min}$$

Quitte à multiplier la métrique g par une constante (voir section 1.2), on va supposer dans la suite qu'elle vérifie $E(g) = ric(g) + (n-1)g = 0$. La démonstration de ce théorème nécessite plusieurs résultats intermédiaires, regroupés dans la proposition suivante.

Proposition 3.1.4.

1. *Le sous-espace* $\operatorname{Im}\delta^*_{min}$ *est fermé dans* $L^2(S^2M)$.
2. *Les domaines* $D(\delta^*_{min})$, $D(\nabla)$ *et* $D(\beta^t_{min})$ *sont égaux.*
3. *Les deux sous-espaces* $\operatorname{Im}\delta^*_{min}$ *et* $\ker\beta_{max}$ *sont en somme directe (i.e.* $\operatorname{Im}\delta^*_{min} \cap \ker\beta_{max} = \{0\}$*), et la projection canonique de* $\ker\beta_{max} \oplus \operatorname{Im}\delta^*_{min}$ *sur le deuxième facteur est une application linéaire continue.*

Démonstration du 1. Si a appartient à C^∞_0, alors

$$\begin{aligned} ||\delta^* a||^2 &= \langle \delta^* a, \delta^* a\rangle \\ &= \langle \delta\delta^* a, a\rangle \\ &= \langle \nabla^*(\nabla a - \frac{1}{2}da), a\rangle \\ &= \langle \nabla^*\nabla a - \frac{1}{2}\delta da, a\rangle. \end{aligned}$$

On utilise la formule de Weitzenböck (2.1) $\Delta a = d\delta a + \delta da = \nabla^*\nabla a - (n-1)a$:

$$\begin{aligned} ||\delta^* a||^2 &= \langle \nabla^*\nabla a - \frac{1}{2}\delta da, a\rangle \\ &= \langle d\delta a + \delta da + (n-1)a - \frac{1}{2}\delta da, a\rangle \\ &= \langle d\delta a + \frac{1}{2}\delta da + (n-1)a, a\rangle \\ &= ||\delta a||^2 + \frac{1}{2}||da||^2 + (n-1)||a||^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

et donc

$$||\delta^* a||^2 \geq (n-1)||a||^2.$$

Cette inégalité est encore vraie si $a \in D(\delta^*_{min})$; il suffit de considérer une suite a_n d'éléments C^∞_0 avec $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} \delta^* a_n = \delta^*_{min} a$.

Cette inégalité implique immédiatement que $\operatorname{Im}\delta^*_{min}$ est fermée dans L^2. En effet, si $x_n \in \operatorname{Im}\delta^*_{min}$ converge vers x dans L^2, alors il existe une suite a_n dans $D(\delta^*_{min})$ telle que $x_n = \delta^*_{min} a_n$; la suite (x_n) est de Cauchy, et comme pour tout n, p on a

$$||x_p - x_n|| = ||\delta^*_{min}(a_p - a_n)|| \geq \sqrt{n-1}||a_p - a_n||,$$

la suite (a_n) est aussi de Cauchy, donc converge vers un élément a de L^2. On a alors $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} \delta^*_{min} a_n = x$; comme l'opérateur δ^*_{min} est fermé, on en déduit que $a \in D(\delta^*_{min})$ et que $x = \delta^*_{min} a$, donc que x appartient à $\operatorname{Im} \delta^*_{min}$, ce qui montre que $\operatorname{Im} \delta^*_{min}$ est fermée.

Démonstration du 2. Revenons au calcul (3.2) : si on utilise différemment la formule de Weitzenböck, on trouve

$$\begin{aligned}
||\delta^* a||^2 &= \langle \nabla^*\nabla a - \frac{1}{2}\delta d a, a\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \nabla^*\nabla a + \Delta a + (n-1)a - \delta d a, a\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \nabla^*\nabla a + (n-1)a + d\delta a, a\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(||\nabla a||^2 + (n-1)||a||^2 + ||\delta a||^2\right),
\end{aligned}$$

et donc $||\delta^* a||^2 \geq \frac{1}{2}||\nabla a||^2$, ceci étant valable pour $a \in C_0^\infty$. Si $a \in D(\delta^*_{min})$, on prend une suite a_n d'éléments C_0^∞ avec $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} \delta^* a_n = \delta^*_{min} a$. La suite $(\delta^* a_n)$ est donc de Cauchy, et l'inégalité ci-dessus implique que la suite (∇a_n) est aussi de Cauchy, donc converge vers un élément x dans L^2. Comme $a_n \in C_0^\infty \subset D(\nabla)$ et que l'opérateur ∇ est fermé, on en déduit que $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ appartient à $D(\nabla)$, et donc que $D(\nabla) \subset D(\delta^*_{min})$. On en déduit aussi que l'inégalité $||\delta^* a||^2 \geq \frac{1}{2}||\nabla a||^2$ est vraie pour tout $a \in D(\delta^*_{min})$.

Maintenant, $\delta^* a$ étant la partie symétrique de ∇a, on a aussi $||\delta^* a|| \leq ||\nabla a||$, et le même argument montre que $D(\delta^*_{min}) \subset D(\nabla)$, et donc $D(\delta^*_{min}) = D(\nabla)$. Au passage on a aussi

$$\frac{1}{2}||\nabla a||^2 \leq ||\delta^*_{min} a||^2 \leq ||\nabla a||^2$$

pour tout $a \in D(\nabla) = D(\delta^*_{min})$.

Montrons ensuite que $D(\delta^*_{min}) = D(\beta^t_{min})$. On rappelle que β^t est l'adjoint formel de β, c'est-à-dire que pour $a \in C_0^\infty$, $\beta^t a = \delta^* a + \frac{1}{2}(\delta a) g$. Maintenant si $a \in D(\delta^*_{min})$, on prend une suite a_n d'éléments C_0^∞ avec $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} \delta^* a_n = \delta^*_{min} a$. Comme $(\delta a_n) g = -(\operatorname{tr}(\delta^* a_n)) g$, la suite $((\delta a_n) g)$ est aussi convergente, donc $\beta^t a_n = \delta^* a_n + \frac{1}{2}(\delta a_n) g$ converge dans L^2. Ceci implique que $a \in D(\beta^t_{min})$ par définition de l'extension minimale β^t_{min}, et donc $D(\delta^*_{min}) \subset D(\beta^t_{min})$.

Réciproquement, si $a \in D(\beta^t_{min})$, on prend une suite a_n d'éléments C_0^∞ avec $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to\infty} \beta^t a_n = \beta^t_{min} a$. Comme $\operatorname{tr} \beta^t a_n = \frac{n-2}{2}\delta a_n$ et que $n > 2$, on en déduit que la suite (δa_n) est aussi convergente, ainsi donc que $\delta^* a_n = \beta^t a_n - \frac{1}{2}(\delta a_n) g$. Par suite, l'opérateur δ^*_{min} étant fermé, a appartient bien à $D(\delta^*_{min})$, et $D(\beta^t_{min}) \subset D(\delta^*_{min})$.

Remarque : On peut démontrer exactement de la même façon que $D(\delta^*_{max}) = D(\beta^t_{max})$; il suffit juste de remplacer C_0^∞ par C^∞ dans les deux derniers paragraphes.

Démonstration du 3. Soit $a \in D(\delta^*_{min})$ tel que $\delta^*_{min} a \in \ker \beta_{max}$. Alors on a (au sens des distributions au moins)

$$0 = \beta\delta^* a = \frac{1}{2}(\nabla^*\nabla a + (n-1)a).$$

Comme a est L^2, $\nabla^*\nabla a$ est aussi L^2 ; et comme $a \in D(\delta^*_{min}) = D(\nabla)$, ∇a est aussi L^2. On peut alors faire une intégration par partie contre a pour trouver

$$||\nabla a||^2 + (n-1)||a||^2 = 0$$

et donc $a = 0$ et $\delta^*_{min} a = 0$. Cela montre que $\mathrm{Im}\,\delta^*_{min}$ et $\ker\beta_{max}$ sont en somme directe.

Pour démontrer la deuxième partie de ce point on aura besoin du lemme technique suivant :

Lemme 3.1.5. *Il existe une constante $c > 0$ telle que quel que soit a appartenant à $D(\delta^*_{min})$, on a*

$$\langle \delta^*_{min} a, \beta^t_{min} a\rangle \geq c||\delta^*_{min} a||.||\beta^t_{min} a||.$$

Démonstration du lemme. On commence par une majoration : si a est C^∞_0, alors

$$\begin{aligned} ||\beta^t a|| &= ||\delta^* a + \frac{1}{2}(\delta a)g|| \\ &\leq ||\delta^* a|| + \frac{n}{2}||\frac{1}{n}(\delta a)g||. \end{aligned}$$

Comme $\delta^* a$ et $\frac{1}{n}(\delta a)g$ sont respectivement la partie symétrique et la partie en trace de ∇a, on a $||\delta^* a|| \leq ||\nabla a||$ et $||\frac{1}{n}(\delta a)g|| \leq ||\nabla a||$, donc

$$||\beta^t a|| \leq \frac{n+2}{2}||\nabla a||.$$

Ensuite, toujours pour $a \in C^\infty_0$, on a

$$\begin{aligned} \langle \delta^* a, \beta^t a\rangle &= \langle \beta \circ \delta^* a, a\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \nabla^*\nabla a + (n-1)a, a\rangle \\ &= \frac{1}{2}||\nabla a||^2 + \frac{n-1}{2}||a||^2 \\ &\geq \frac{1}{2}||\nabla a||^2. \end{aligned}$$

Comme $||\nabla a|| \geq ||\delta^* a||$ et $||\nabla a|| \geq \frac{2}{n+2}||\beta^t a||$, on a

$$\langle \delta^* a, \beta^t a\rangle \geq \frac{1}{n+2}||\delta^* a||.||\beta^t a||.$$

Maintenant si a appartient à $D(\delta^*_{min}) = D(\nabla)$, on prend une suite $a_n \in C^\infty_0$ telle que a_n tend vers a et ∇a_n tend vers ∇a ; alors $\delta^* a_n$ et $\beta^t a_n$ convergent respectivement vers $\delta^*_{min} a$ et $\beta^t_{min} a$, et en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus on trouve le résultat voulu avec $c = \frac{1}{n+2}$. □

Revenons à la démonstration de la continuité de la projection canonique de $\ker\beta_{max} \oplus \mathrm{Im}\,\delta^*_{min}$ sur le deuxième facteur. Ce que le lemme précédent nous montre, c'est que pour tout élément de $\mathrm{Im}\,\delta^*_{min}$, il existe un élément de $\mathrm{Im}\,\beta^t_{min} \subset (\ker\beta_{max})^\perp$ tel que l'angle entre les deux reste éloigné de $\pi/2$. Cette propriété va permettre d'estimer la norme du projeté sur $\mathrm{Im}\,\delta^*_{min}$ à partir de la norme du projeté orthogonal sur $(\ker\beta_{max})^\perp$. C'est ce qui va assurer la continuité.

Soit $x = h + \delta^*_{min}a \in \ker\beta_{max} \oplus \mathrm{Im}\,\delta^*_{min}$ (avec $h \in \ker\beta_{max}$), on veut montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que $||\delta^*_{min}a|| \leq C||x||$. Notons p le projeté orthogonal de $\delta^*_{min}a$ sur $(\ker\beta_{max})^\perp$: on a $\delta^*_{min}a = p+k$ avec $k \in \ker(\beta_{max})$. Par définition de la projection orthogonale, $||k||^2 = \inf\{||\delta^*_{min}a - y||^2 \mid y \in \ker(\beta_{max})^\perp\}$.

Pour majorer $||k||^2$ on va choisir un bon y. On sait que $\ker(\beta_{max})^\perp = \overline{\mathrm{Im}\,\beta^t_{min}}$; en particulier $\beta^t_{min}a \in \ker(\beta_{max})^\perp$. Si $\beta^t_{min}a = 0$, alors en prenant la trace on trouve $\delta a = 0$ puis $\delta^*_{min}a = 0$, et dans ce cas on a bien $||\delta^*_{min}a|| \leq C||x||$.

Si $\beta^t_{min}a \neq 0$, on note p' le projeté orthogonal de $\delta^*_{min}a$ sur $\mathrm{Vect}(\beta^t_{min}a)$; on a

$$p' = \langle\delta^*_{min}a, \frac{\beta^t_{min}a}{||\beta^t_{min}a||}\rangle\,\frac{\beta^t_{min}a}{||\beta^t_{min}a||},$$

et $||\delta^*_{min}a||^2 = ||p'||^2 + ||\delta^*_{min}a - p'||^2$. Comme $p' \in (\ker\beta_{max})^\perp$, d'après la définition de la projection orthogonale on a

$$\begin{aligned} ||k||^2 &\leq ||\delta^*_{min}a - p'||^2 \\ &\leq ||\delta^*_{min}a||^2 - ||p'||^2 \\ &\leq ||\delta^*_{min}a||^2 - \langle\delta^*_{min}a, \frac{\beta^t_{min}a}{||\beta^t_{min}a||}\rangle^2. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme précédent, on trouve

$$\begin{aligned} ||k||^2 &\leq ||\delta^*_{min}a||^2 - \frac{1}{(n+2)^2}||\delta^*_{min}a||^2 \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)||\delta^*_{min}a||^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} ||p||^2 &= ||\delta^*_{min}a||^2 - ||k||^2 \\ &\geq \left(1 - (1 - \frac{1}{(n+2)^2})\right)||\delta^*_{min}a||^2 \\ &\geq \frac{1}{(n+2)^2}||\delta^*_{min}a||^2. \end{aligned}$$

Ensuite, comme $x = h + \delta^*_{min}a = h + k + p$, avec h et k dans $\ker\beta_{max}$ et p dans $(\ker\beta_{max})^\perp$, on a

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= ||h+k||^2 + ||p||^2 \\ &\geq ||p||^2 \\ &\geq \frac{1}{(n+2)^2}||\delta^*_{min}a||^2, \end{aligned}$$

soit $||\delta^*_{min}a|| \leq (n+2)||x||$, et on a bien montré ce qu'on voulait, à savoir la continuité de la projection canonique de $\ker\beta_{max} \oplus \mathrm{Im}\,\delta^*_{min}$ sur $\mathrm{Im}\,\delta^*_{min}$. $\square$

Démonstration du théorème 3.1.3. La démonstration se fait en deux étapes. On montre d'abord que C_0^∞ est un sous-espace de $\ker\beta_{max}\oplus\operatorname{Im}\delta^*_{min}$, puis que $\ker\beta_{max}\oplus\operatorname{Im}\delta^*_{min}$ est un sous-espace vectoriel fermé de L^2. La densité de C_0^∞ dans L^2 permet ensuite de conclure.

Montrons que $C_0^\infty\subset\ker\beta_{max}\oplus\operatorname{Im}\delta^*_{min}$:
Soit $\phi\in C_0^\infty$. On cherche à écrire $\phi=k+\delta^*_{min}a$ avec $k\in\ker\beta_{max}$. Or comme $2\beta\circ\delta^*=\nabla^*\nabla+(n-1)Id$, on peut trouver une solution de l'équation $\beta(\phi)=\beta(\delta^*a)$ avec a, ∇a, $\nabla^*\nabla a$ dans L^2. Mais si a et ∇a sont L^2, alors $a\in D(\nabla)=D(\delta^*_{min})$, et on a alors la décomposition voulue en écrivant $\phi=(\phi-\delta^*_{min}a)+\delta^*_{min}a$.

Avec tout le travail préparatoire qui a été fait dans la proposition 3.1.4, il est maintenant facile de montrer que $\ker\beta_{max}\oplus\operatorname{Im}\delta^*_{min}$ est un sous-espace vectoriel fermé de L^2. En effet, si $x_n=h_n+\delta^*_{min}a_n$ est une suite de $\ker\beta_{max}\oplus\operatorname{Im}\delta^*_{min}$ convergeant vers $x\in L^2$, alors la suite $\delta^*_{min}a_n$ converge aussi par continuité, ainsi par conséquent que la suit $h_n=x_n-\delta^*_{min}a_n$. Or $\operatorname{Im}\delta^*_{min}$ et $\ker\beta_{max}$ sont des sous-espaces vectoriels fermés de L^2 (pour $\operatorname{Im}\delta^*_{min}$, c'est le *1.* de la proposition 3.1.4 ci-dessus ; et pour $\ker\beta_{max}$, c'est parce que par définition $\ker\beta_{max}=(\operatorname{Im}\beta^t_{min})^\perp$). Donc les limites des suites $(\delta^*_{min}a_n)$ et (h_n) sont respectivement dans $\operatorname{Im}\delta^*_{min}$ et $\ker\beta_{max}$, et par suite $x=\lim x_n=\lim h_n+\lim\delta^*_{min}a_n$ appartient à $\ker\beta_{max}\oplus\operatorname{Im}\delta^*_{min}$ qui est par conséquent fermé.

Pour conclure, comme $\ker\beta_{max}\oplus\operatorname{Im}\delta^*_{min}$ est fermé et contient C_0^∞, il contient aussi son adhérence qui est l'espace L^2 tout entier, donc $\ker\beta_{max}\oplus\operatorname{Im}\delta^*_{min}=L^2$. □

Dans le cas où la métrique est hyperbolique, on peut encore raffiner un peu ce résultat.

Proposition 3.1.6. *Si M est une cône-variété hyperbolique, alors $\beta_{max}=\beta_{min}$, $\delta^*_{max}=\delta^*_{min}$. On note ces opérateurs simplement β et δ^*, et le théorème précédent devient $L^2(S^2M)=\ker\beta\oplus\operatorname{Im}\delta^*$.*

Démonstration. Prenons $\eta\in D(\delta^*_{max})$. D'après le théorème précédent, il existe $k\in\ker\beta_{max}$ et $\eta'\in D(\delta^*_{min})$ tels que $\delta^*_{max}\eta=k+\delta^*_{min}\eta'=k$. La section $u=\eta-\eta'$ vérifie $\beta_{max}(\delta^*_{max}(u))=0$, et donc (au sens des distributions)

$$\nabla^*\nabla u+(n-1)u=0.$$

La section u admet alors un développement du type donné à la proposition 2.1.2. Le fait que u et $\delta^*_{max}u$ soient dans L^2 impose que seuls les termes ayant un exposant dominant supérieur ou égal à 0 apparaissent dans cette décomposition. On peut alors appliquer le raisonnement utilisé dans les preuves des lemmes 2.1.4 et 3.1.2 pour montrer que ∇u est dans L^2, et donc que u appartient à $L^{1,2}$. Or le noyau de $\nabla^*\nabla+(n-1)Id$ dans $L^{1,2}$ est réduit à $\{0\}$; par conséquent $u=0$, et $\eta=\eta'$ appartient à $D(\delta^*_{min})$. Cela montre que $D(\delta^*_{max})=D(\delta^*_{min})$, et donc que $\delta^*_{max}=\delta^*_{min}$

D'autre part on a vu (proposition 3.1.4 et la remarque p.63) que $D(\beta^t_{min})=D(\delta^*_{min})$ et que $D(\beta^t_{max})=D(\delta^*_{max})$. Alors $D(\beta^t_{min})=D(\beta^t_{max})$, soit $\beta^t_{min}=\beta^t_{max}$. En passant à l'adjoint, on trouve directement que $\beta_{max}=\beta_{min}$. □

3.2 Etude de l'opérateur linéarisé

Soit h une déformation infinitésimale Einstein. Si elle est normalisée (c'est-à-dire si elle vérifie la condition de jauge de Bianchi $\beta(h) = 0$), elle vérifie l'équation

$$\nabla^*\nabla h - 2\mathring{R}h = 0.$$

L'étude des déformations Einstein est donc fortement reliée à l'étude de l'opérateur $P = \nabla^*\nabla - 2\mathring{R}$, le linéarisé de l'équation d'Einstein pour une déformation normalisée. Dans le cas général, son étude peut être assez compliquée. Cependant si la forme quadratique $\langle \mathring{R}h, h\rangle$ n'est pas trop positive, l'opérateur P est coercif, ce qui permet d'obtenir des résultats intéressants. Et les propriétés voulues de $\mathring{R}$ peuvent se déduire de certaines hypothèses de courbure sur la métrique (voir [2] §12.67 et 12.71). Dans le cas qui nous intéresse ici, la métrique est hyperbolique, et on a l'expression plus simple

$$Pu = \nabla^*\nabla u - 2u + 2(\operatorname{tr} u)g.$$

L'opérateur P présente de nombreuses similarités avec l'opérateur $L = \nabla^*\nabla + (n-1)Id$ agissant sur les 1-formes, dont l'étude approfondie était l'objet de la section 2.1. Il y a donc de nombreuses ressemblances dans le plan, les résultats et les formulations entre les deux sections.

3.2.1 Premières propriétés

La première chose à remarquer sur P est qu'il est *elliptique*. En particulier, si ϕ est C^∞ et que $Pu = \phi$ au sens des distributions, alors u est C^∞ ; cette propriété nous servira par la suite. Malheureusement, le caractère singulier d'une cône-variété complique considérablement l'étude de cette opérateur, et la difficulté est de comprendre le comportement des solutions au voisinage du lieu singulier.

Il est clair que P, vu comme un opérateur non borné $C_0^\infty(T^*M) \to C_0^\infty(T^*M)$, est formellement symétrique : avec les notations de la section 1.3, $P^t = P$. Malheureusement, il est possible de montrer que dès que la dimension de notre cône-variété est supérieure à 2, l'opérateur P n'est pas essentiellement auto-adjoint, i.e. $P_{min} \neq P_{max}$ (ou si l'on préfère, $P^{**} \neq P^*$). On va surtout s'intéresser au domaine

$$D = \{u \in D(\nabla) |\ \nabla u \in D(\nabla^*)\} = \left\{u \in L^2 |\ \nabla u,\ \nabla^*\nabla u \in L^2\right\}$$

(dans la deuxième définition, il faut considérer ∇ et $\nabla^*\nabla$ au sens des distributions). Ce domaine, D, est inclus dans $D(\nabla) = L^{1,2}$ (l'extension de P à D est en fait l'extension de Friedrichs de P).

3.2.2 Résolution dans des espaces de Sobolev

Il n'est pas immédiatement évident que P, vu comme opérateur non borné de D dans L^2, est inversible. C'est ce que montre le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. *Soit ϕ appartenant à $L^2(S^2M)$. Alors il existe une unique solution $u \in L^{1,2}(S^2M)$ de l'équation $\nabla^*\nabla u - 2\mathring{R}u = \phi$*

Démonstration. La preuve est très classique. Le point important à démontrer est la coercivité de l'opérateur P. Tout découle de la formule suivante ((2.10), p. 53) : si u est un 2-tenseur symétrique suffisamment différentiable,

$$\nabla^*\nabla u = d^\nabla \delta^\nabla u + \delta^\nabla d^\nabla u - u \circ r + \mathring{R}u.$$

Si la métrique est hyperbolique, cela donne

$$\nabla^*\nabla u = d^\nabla \delta^\nabla u + \delta^\nabla d^\nabla u + nu - (\operatorname{tr} u)g.$$

On a alors

$$\begin{aligned} Pu &= \nabla^*\nabla u - 2u + 2(\operatorname{tr} u)g \\ &= \frac{1}{4}\nabla^*\nabla u + \frac{3}{4}(d^\nabla \delta^\nabla u + \delta^\nabla d^\nabla u) + \frac{3n-8}{4}u + \frac{5}{4}(\operatorname{tr} u)g. \end{aligned}$$

Si u est C^∞ à support compact, on peut intégrer par partie, et on trouve

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, \nabla u\rangle - 2\langle \mathring{R}u, u\rangle &= \langle Pu, u\rangle \\ &= \langle \frac{1}{4}\nabla^*\nabla u + \frac{3}{4}(d^\nabla \delta^\nabla u + \delta^\nabla d^\nabla u) + \frac{3n-8}{4}u + \frac{5}{4}(\operatorname{tr} u)g, u\rangle \\ &= \frac{1}{4}||\nabla u||^2 + \frac{3}{4}(||\delta^\nabla u||^2 + ||d^\nabla u||^2) + \frac{3n-8}{4}||u||^2 + \frac{5}{4}||\operatorname{tr} u||^2 \\ &\geq c(n)(||\nabla u||^2 + ||u||^2), \end{aligned}$$

où $c(n)$ est une constante ne dépendant que de n, strictement positive pour $n \geq 3$. Par ailleurs, on obtient trivialement l'inégalité dans l'autre sens

$$\langle \nabla u, \nabla u\rangle - 2\langle \mathring{R}u, u\rangle \leq c'(n)(||\nabla u||^2 + ||u||^2).$$

Tout cela permet de montrer que le produit scalaire $L^{1,2}$ standard $\langle \nabla u, \nabla v\rangle + \langle u, v\rangle$ et le produit scalaire $\langle u, v\rangle_H = \langle \nabla u, \nabla v\rangle - 2\langle \mathring{R}u, v\rangle$ sont équivalents sur C_0^∞ et donc sur $L^{1,2}$.

Par conséquent, si ϕ appartient à $L^2(S^2M)$, comme la forme linéaire $v \mapsto \langle \phi, v\rangle$ est continue sur $L^{1,2}(S^2M)$, il existe un unique élément $u \in L^{1,2}(S^2M)$ tel que

$$\langle u, v\rangle_H = \langle \phi, v\rangle$$

pour tout v dans $L^{1,2}(S^2M)$. On a ainsi construit une solution faible de l'équation : $\nabla^*\nabla u - 2\mathring{R}u = \phi$ au sens des distributions. Mais comme ϕ et u sont dans L^2, on en déduit que la distribution $\nabla^*\nabla u = \phi - 2\mathring{R}u$ est en fait une vraie fonction de L^2. La solution u est donc un élément du domaine $D = D(\nabla^* \circ \nabla)$. $\square$

3.2.3 Expression de l'opérateur en coordonnées cylindriques

On voudrait maintenant avoir plus de précisions sur les solutions de l'équation $Pu = 0$ au voisinage du lieu singulier. Pour cela, on est obligé de se plonger dans les calculs. L'expression de la métrique invite à travailler en coordonnées cylindriques au voisinage d'une composante connexe du lieu singulier.

Si a et b sont deux 1-formes, on note $a \odot b$, ou plus simplement s'il n'y a pas de risque de confusion, $a.b$ ou ab pour $\frac{1}{2}(a \otimes b + b \otimes a)$. En particulier, $x \odot x = x \otimes x$.

On utilisera les mêmes notations que dans la section 2.1.2. Pour rappel, les notations $e_1, \dots e_{n-2}$ désignent des champs de vecteurs locaux tels que $(e_r, e_\theta, e_1, \dots e_{n-2})$ forme un repère mobile orthonormé (local), vérifiant $\nabla_{e_r} e_k = \nabla_{e_\theta} e_k = 0$ pour tout k dans $1 \dots n-2$. On définit de même des 1-formes locales $e^1, \dots e^{n-2}$ telles que $(e^r, e^\theta, e^1, \dots e^{n-2})$ soit le repère mobile dual du précédent. La notation N désigne le (sous-)fibré vectoriel au-dessus de U_a, dont la fibre au-dessus de $x \in U_a$ est le sous-espace vectoriel de T_x^*M orthogonal à e^θ et e^r, et N^* désigne le (sous-)fibré vectoriel au-dessus de U_a, dont la fibre au-dessus de $x \in U_a$ est le sous-espace vectoriel de T_xM orthogonal à e_θ et e_r. Les sections $(e_1, \dots, e_{n-2})$ forment localement une base de N^*, de même pour $(e^1, \dots, e^{n-2})$ et N. Si s est une section de N^*, et t une section de N ou de N^*, on note $\nabla_{\Sigma s} t$, ou de façon plus lisible $(\nabla_\Sigma)(s,t)$, la projection orthogonale sur N ou sur N^* de $\nabla_s t$.

On introduit en plus le sous-fibré $S^2 N$, engendré par les $e_i \odot e_j$, $1 \leq i \leq n-2$, $0 \leq j \leq n-2$. Si k est une section de $S^2 N$ et s est une section de N^*, on définit de même $\nabla_\Sigma(s,k)$ comme étant la projection orthogonale sur $S^2 N$ de la dérivée covariante $\nabla_s k$ prise dans $S^2(M)$.

Si ω est une section de N, on définit $\delta_\Sigma^* \omega$, section de $S^2 N$, par

$$\delta_\Sigma^* \omega = \sum_{i=1}^{n-2} e^i \odot \nabla_\Sigma(e_i, \omega).$$

Enfin, si k est une section de $S^2 M$, on définit $\delta_\Sigma k$, section de N, et $\mathrm{tr}_\Sigma k$ par

$$\delta_\Sigma k = -\mathrm{ch}(r)^2 \sum_{i=1}^{n-2} \nabla_\Sigma(e_i, k)(e_i)$$

et

$$\mathrm{tr}_\Sigma k = \mathrm{ch}(r)^2 \sum_{i=1}^{n-2} k(e_i, e_i).$$

On rappelle les résultats suivants :

$$\begin{array}{ccc}
\nabla_{e_r} e^r = 0 & \nabla_{e_r} e^\theta = 0 & \nabla_{e_r} e^j = 0 \\
\nabla_{e_\theta} e^r = \frac{1}{\mathrm{th}(r)} e^\theta & \nabla_{e_\theta} e^\theta = -\frac{1}{\mathrm{th}(r)} e^r & \nabla_{e_\theta} e^j = 0 \\
\nabla_{e_i} e^r = \mathrm{th}(r) e^i & \nabla_{e_i} e^\theta = 0 & \nabla_{e_i} e^j = -\mathrm{th}(r)\delta_{ij} e^r + \nabla_\Sigma(e_i, e^j).
\end{array}$$

On peut écrire la même chose de façon plus concise :

$$\begin{array}{rcl}\nabla e^r &=& \frac{1}{\mathrm{th}(r)} e^\theta \otimes e^\theta + \mathrm{sh}(r)\mathrm{ch}(r) g_\Sigma \\ \nabla e^\theta &=& -\frac{1}{\mathrm{th}(r)} e^\theta \otimes e^r \\ \nabla e^j &=& -\mathrm{th}(r) e^j \otimes e^r + \nabla_\Sigma e^j.\end{array}$$

On rappelle encore que

$$\begin{array}{rcl}\nabla^*\nabla\, e^r &=& \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2\right) e^r, \\ \nabla^*\nabla\, e^\theta &=& \frac{1}{\mathrm{th}(r)^2}\, e^\theta,\end{array}$$

et si ω est une section de N (c'est-à-dire si ω est orthogonal à e^r et e^θ),

$$\nabla^*\nabla\,\omega = -\nabla_{e_r}\nabla_{e_r}\omega - \nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}\omega - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right)\nabla_{e_r}\omega + \mathrm{th}(r)^2\omega + \frac{1}{\mathrm{ch}(r)^2}(\nabla^*\nabla)_\Sigma\omega - \frac{2\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)^2}(\delta_\Sigma\omega)e^r.$$

Si u est une section de S^2M, on peut la décomposer orthogonalement au-dessus de U_a en

$$u = fe^r.e^r + +ge^\theta.e^\theta + he^r.e^\theta + \sigma.e^r + \eta.e^\theta + k$$

où σ et η sont des sections de N. Avant de pouvoir appliquer la même décomposition à Pu, on va calculer ce que devient chacun des termes quand on lui applique le laplacien de connexion $\nabla^*\nabla$.

On a alors, pour le terme en $e^r.e^r$:

$$\begin{array}{rcl}\nabla^*\nabla f e^r \otimes e^r &=& \left(\Delta f + 2(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2)f\right) e^r \otimes e^r - 2f(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} e^\theta \otimes e^\theta + \mathrm{sh}(r)^2 g_\Sigma) \\ &-& 2e_\theta.f\frac{1}{\mathrm{th}(r)}(e^\theta \otimes e^r + e^r \otimes e^\theta) - 2\mathrm{th}(r)(d_\Sigma f \otimes e^r + e^r \otimes d_\Sigma f),\end{array}$$

soit

$$\begin{array}{rcl}\nabla^*\nabla f e^r.e^r &=& \left(\Delta f + 2(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2)f\right) e^r.e^r - 2f(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} e^\theta.e^\theta + \mathrm{sh}(r)^2 g_\Sigma) \\ &-& 4\frac{e_\theta.f}{\mathrm{th}(r)} e^\theta.e^r - 4\mathrm{th}(r) d_\Sigma f.e^r.\end{array}$$

Pour le terme en $e^\theta.e^\theta$:

$$\nabla^*\nabla g e^\theta \otimes e^\theta = (\Delta g + \frac{2}{\mathrm{th}(r)^2} g) e^\theta \otimes e^\theta - \frac{2}{\mathrm{th}(r)^2} g e^r \otimes e^r + 2e_\theta.g\frac{1}{\mathrm{th}(r)}(e^\theta \otimes e^r + e^r \otimes e^\theta),$$

soit

$$\nabla^*\nabla g e^\theta.e^\theta = (\Delta g + \frac{2}{\mathrm{th}(r)^2} g) e^\theta.e^\theta - \frac{2}{\mathrm{th}(r)^2} g e^r.e^r + 4e_\theta.g\frac{1}{\mathrm{th}(r)} e^\theta.e^r.$$

Pour le terme en $e^r.e^\theta$:

$$\begin{aligned}\nabla^*\nabla h e^\theta \otimes e^r &= \left(\Delta h + (\frac{2}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2)h\right) e^\theta \otimes e^r + \frac{2}{\mathrm{th}(r)^2} h e^r \otimes e^\theta \\ &+ 2e_\theta.h\frac{1}{\mathrm{th}(r)}(e^r \otimes e^r - e^\theta \otimes e^\theta) - 2\mathrm{th}(r) e^\theta \otimes d_\Sigma h,\end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}\nabla^*\nabla h e^\theta.e^r &= \left(\Delta h + (\frac{4}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2)h\right) e^\theta.e^r \\ &+ \frac{2e_\theta.h}{\mathrm{th}(r)}(e^r.e^r - e^\theta.e^\theta) - 2\mathrm{th}(r) e^\theta.d_\Sigma h.\end{aligned}$$

Pour le terme en $\sigma.e^r$:

$$\begin{aligned}\nabla^*\nabla \sigma \otimes e^r &= (\nabla^*\nabla\sigma) \otimes e^r + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2\right) \sigma \otimes e^r - \frac{2}{\mathrm{th}(r)}(\nabla_{e_\theta}\sigma) \otimes e^\theta \\ &+ 2\mathrm{th}(r)^2 e^r \otimes \sigma - 2\mathrm{th}(r) \sum \nabla_\Sigma(e_i, \sigma) \otimes e^i,\end{aligned}$$

et donc,

$$\nabla^*\nabla\sigma.e^r = (\nabla^*\nabla\sigma).e^r + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + n\mathrm{th}(r)^2\right)\sigma.e^r - \frac{2}{\mathrm{th}(r)}(\nabla_{e_\theta}\sigma).e^\theta - 2\mathrm{th}(r)\delta_\Sigma^*\sigma.$$

Et si on remplace $\nabla^*\nabla\sigma$ par son expression, on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla^*\nabla\sigma.e^r &= \left(-\nabla_{e_r}\nabla_{e_r}\sigma - \nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}\sigma - (\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r))\nabla_{e_r}\sigma + \frac{1}{\mathrm{ch}(r)^2}(\nabla^*\nabla)_\Sigma\sigma\right).e^r \\ &+ \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n+1)\mathrm{th}(r)^2\right)\sigma.e^r - \frac{2\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)^2}(\delta_\Sigma\sigma)e^r.e^r \\ &- \frac{2}{\mathrm{th}(r)}(\nabla_{e_\theta}\sigma).e^\theta - 2\mathrm{th}(r)\delta_\Sigma^*\sigma.\end{aligned}$$

Pour le terme en $\eta.e^\theta$:

$$\nabla^*\nabla\eta \otimes e^\theta = (\nabla^*\nabla\eta) \otimes e^\theta + \frac{1}{\mathrm{th}(r)^2}\eta \otimes e^\theta + \frac{2}{\mathrm{th}(r)}(\nabla_{e_\theta}\eta) \otimes e^r$$

et donc,

$$\nabla^*\nabla\eta.e^\theta = (\nabla^*\nabla\eta).e^\theta + \frac{1}{\mathrm{th}(r)^2}\eta.e^\theta + \frac{2}{\mathrm{th}(r)}(\nabla_{e_\theta}\eta).e^r.$$

Et si on remplace $\nabla^*\nabla\eta$ par son expression, on obtient :

$$\begin{aligned}\nabla^*\nabla\eta.e^\theta &= \left(-\nabla_{e_r}\nabla_{e_r}\eta - \nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}\eta - (\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r))\nabla_{e_r}\eta + \frac{1}{\mathrm{ch}(r)^2}(\nabla^*\nabla)_\Sigma\eta\right).e^\theta \\ &+ (\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + \mathrm{th}(r)^2)\eta.e^\theta - \frac{2\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)^2}(\delta_\Sigma\eta)e^r.e^\theta + \frac{2}{\mathrm{th}(r)}(\nabla_{e_\theta}\eta).e^r.\end{aligned}$$

Enfin si k est une section de S^2N,

$$\begin{aligned}\nabla^*\nabla k &= -\nabla_{e_r}\nabla_{e_r}k - \nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}k - (\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r))\nabla_{e_r}k \\ &+ 2\mathrm{th}(r)^2k + \frac{1}{\mathrm{ch}(r)^2}(\nabla^*\nabla)_\Sigma k - \frac{2\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)^2}(\mathrm{tr}_\Sigma\, k)e^r.e^r - \frac{4\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)^2}e^r.\delta_\Sigma k.\end{aligned}$$

Regroupons tous ces résultats. Le 2-tenseur symétrique u se décompose orthogonalement en

$$u = fe^r.e^r + ge^\theta.e^\theta + he^r.e^\theta + \sigma.e^r + \eta.e^\theta + k$$

où σ et η sont des sections de N. On peut maintenant appliquer la même décomposition à $\nabla^*\nabla u - 2\mathring{R}u = \nabla^*\nabla u - 2u + 2(\mathrm{tr}\, u)g$. On obtient alors, pour la composante suivant $e^r.e^r$:

$$\begin{aligned}\Delta f + 2\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2\right)f - \frac{2}{\mathrm{th}(r)^2}g + \frac{2e_\theta.h}{\mathrm{th}(r)} - \frac{2\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)^2}(\delta_\Sigma\sigma) \\ - \frac{2\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)^2}(\mathrm{tr}_\Sigma\, k) - 2f + 2(f + g + \frac{1}{\mathrm{ch}(r)^2}\mathrm{tr}_\Sigma\, k)\end{aligned}$$

pour la composante suivant $e^\theta.e^\theta$:

$$-\frac{2f}{\mathrm{th}(r)^2} + \Delta g + \frac{2}{\mathrm{th}(r)^2}g - \frac{2e_\theta.h}{\mathrm{th}(r)} - 2g + 2(f + g + \frac{1}{\mathrm{ch}(r)^2}\mathrm{tr}_\Sigma\, k)$$

pour la composante suivant $e^r.e^\theta$:

$$-4\frac{e_\theta.f}{\mathrm{th}(r)} + 4e_\theta.g\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + \Delta h + \left(\frac{4}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2\right)h - \frac{2\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)^2}(\delta_\Sigma\eta) - 2h$$

pour la composante incluse dans $N.e^r$:

$$\begin{aligned}-4\mathrm{th}(r)d_\Sigma f - \nabla_{e_r}\nabla_{e_r}\sigma - \nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}\sigma - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right)\nabla_{e_r}\sigma + \frac{1}{\mathrm{ch}(r)^2}(\nabla^*\nabla)_\Sigma\sigma \\ + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n+1)\mathrm{th}(r)^2\right)\sigma + \frac{2}{\mathrm{th}(r)}(\nabla_{e_\theta}\eta) - \frac{4\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)^2}\delta_\Sigma k - 2\sigma\end{aligned}$$

pour la composante incluse dans $N.e^\theta$:

$$-2\mathrm{th}(r)d_\Sigma h - \nabla_{e_r}\nabla_{e_r}\eta - \nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}\eta - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right)\nabla_{e_r}\eta + \frac{1}{\mathrm{ch}(r)^2}(\nabla^*\nabla)_\Sigma\eta$$

$$+\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2}+\mathrm{th}(r)^2\right)\eta-\frac{2}{\mathrm{th}(r)}(\nabla_{e_\theta}\sigma)-2\eta$$

et enfin pour la composante incluse dans S^2N :

$$-2f\mathrm{sh}(r)^2g_\Sigma-2\mathrm{th}(r)\delta^*_\Sigma\sigma-\nabla_{e_r}\nabla_{e_r}k-\nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}k-(\frac{1}{\mathrm{th}(r)}+(n-2)\mathrm{th}(r))\nabla_{e_r}k$$
$$+\frac{1}{\mathrm{ch}(r)^2}(\nabla^*\nabla)_\Sigma k+2\mathrm{th}(r)^2k-2k+2(f+g+\frac{1}{\mathrm{ch}(r)^2}\mathrm{tr}_\Sigma\, k)\mathrm{ch}(r)^2g_\Sigma$$

Pour pouvoir manipuler cette expression, nous allons effectuer dans la suite une sorte de décomposition en séries de Fourier généralisées, c'est-à-dire une décomposition sur des vecteurs propres d'opérateurs elliptiques du second degré. Mais il faut une décomposition suffisamment astucieuse pour qu'elle se comporte bien avec les opérateurs d_Σ, δ^*_Σ, etc. qui apparaissent dans les expressions ci-dessus.

3.2.4 Une base hilbertienne appropriée

Lors de l'étude de l'opérateur $\nabla^*\nabla+(n-1)Id$ agissant sur les 1-formes, nous avons déjà eu besoin d'une décomposition bien choisie des espace $L^2(M)$ et $L^2(N)$. Ce qu'il nous faut maintenant est une base hilbertienne de $L^2(S^2N)$, dans laquelle le comportement des opérateurs δ^*_Σ, tr_Σ etc. se comprennent bien.

On va démontrer la proposition suivante, qui complète la proposition 2.1.1 (voir la section 2.1.3 pour certaines notations).

Proposition 3.2.2. *Il existe une base hilbertienne $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ du complexifié de $L^2(\Sigma_a)$, telle que pour tout indice j, il existe un réel $\lambda_j\geq 0$ et un entier relatif p_j, pour lesquels*

$$\begin{cases}\Delta_\Sigma\psi_j=\lambda_j\psi_j\\ e_\theta.\psi_j=\frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(a)}\psi_j.\end{cases}$$

Soit J l'ensemble des j pour lesquels $\lambda_j>0$. Il existe une base hilbertienne $(\phi_j)_{j\in J}\cup(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ du complexifié de $L^2(N)$, telle que :

- *pour tout indice j appartenant à J, $\phi_j=\frac{\mathrm{ch}(a)}{(\lambda_j)^{1/2}}d_\Sigma\psi_j$, et donc*

$$\begin{cases}(\nabla^*\nabla)_\Sigma\phi_j=(\lambda_j+n-3)\phi_j\\ \nabla_{e_\theta}\phi_j=\frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(a)}\phi_j\\ \delta_\Sigma\phi_j=\mathrm{ch}(a)(\lambda_j)^{1/2}\psi_j;\end{cases}$$

- *pour tout indice $j\in\mathbb{N}$, il existe un réel μ_j et un entier relatif p'_j, pour lesquels*

$$\begin{cases}(\nabla^*\nabla)_\Sigma\varphi_j=\mu_j\varphi_j\\ \nabla_{e_\theta}\varphi_j=\frac{ip'_j\gamma}{\mathrm{sh}(a)}\varphi_j,\end{cases}$$

et on a de plus $\delta_\Sigma\varphi_j=0$.

Il existe une base hilbertienne $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\cup(b_j)_{j\in J}\cup(c_j)_{j\in\mathbb{N}}\cup(d_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *du complexifié de* $L^2(S^2N)$*, telle que :*

– *pour tout indice* $j\in\mathbb{N}$*,* $a_j=\frac{\psi_j}{\sqrt{n-2}}\mathrm{ch}(a)^2g_\Sigma$*, et donc*

$$\begin{cases}(\nabla^*\nabla)_\Sigma a_j=\lambda_j a_j\\ \nabla_{e_\theta}a_j=\frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(a)}a_j\\ \mathrm{tr}_\Sigma\ a_j=\sqrt{n-2}\,\mathrm{ch}(a)^2\psi_j\\ \delta_\Sigma a_j=-\frac{\mathrm{ch}(a)^2}{\sqrt{n-2}}d_\Sigma\psi_j\ \ (=-\mathrm{ch}(a)(\frac{\lambda_j}{n-2})^{1/2}\phi_j\ \text{si}\ \lambda_j\neq 0);\end{cases}$$

– *pour tout indice* $j\in J$*,* $b_j=\frac{\mathrm{ch}(a)}{\sqrt{n-3}}(\frac{\lambda_j}{n-2}+1)^{-1/2}\left(\delta_\Sigma^*\phi_j+\frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma\phi_j)g_\Sigma\right)$*, et donc*

$$\begin{cases}(\nabla^*\nabla)_\Sigma b_j=(\lambda_j+2(n-2))b_j\\ \nabla_{e_\theta}b_j=\frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(a)}b_j\\ \mathrm{tr}_\Sigma\ b_j=0\\ \delta_\Sigma b_j=\mathrm{ch}(a)\sqrt{n-3}(\frac{\lambda_j}{n-2}+1)^{1/2}\phi_j;\end{cases}$$

– *pour tout indice* $j\in\mathbb{N}$*,* $c_j=\mathrm{ch}(a)(\frac{\mu_j+n-3}{2})^{-1/2}\,\delta_\Sigma^*\varphi_j$*, et donc*

$$\begin{cases}(\nabla^*\nabla)_\Sigma c_j=(\mu_j+n-1)c_j\\ \nabla_{e_\theta}c_j=\frac{ip'_j\gamma}{\mathrm{sh}(a)}c_j\\ \mathrm{tr}_\Sigma\ c_j=0\\ \delta_\Sigma c_j=\mathrm{ch}(a)(\frac{\mu_j+n-3}{2})^{1/2}\varphi_j;\end{cases}$$

– *pour tout indice* $j\in\mathbb{N}$*, il existe un réel* $\nu_j\geq 0$ *et un entier relatif* p''_j*, pour lesquels*

$$\begin{cases}(\nabla^*\nabla)_\Sigma d_j=\nu_j d_j\\ \nabla_{e_\theta}\varphi_j=\frac{ip''_j\gamma}{\mathrm{sh}(a)}d_j,\end{cases}$$

et on a de plus

$$\begin{cases}\delta_\Sigma d_j=0\\ \mathrm{tr}_\Sigma\ d_j=0.\end{cases}$$

Démonstration. La démonstration ne fait que compléter celle de la proposition 2.1.1. Ici aussi, les notations ∇, ∇^*, Δ etc. désigneront les opérateurs correspondants pour la métrique g_a, trace sur Σ_a de la métrique hyperbolique g de M. On rappelle les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
E_\lambda &= \{f\in L^2(\Sigma_a)\mid \Delta f=\lambda f\},\\
E_{\lambda,p} &= \{f\in E_{\lambda+\frac{p^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(a)^2}}\mid \frac{\partial}{\partial\theta}f=ip\gamma\, f\}=\{f\in L^2(\Sigma_a)\mid \Delta_\Sigma f=\lambda f\ \text{et}\ \frac{\partial}{\partial\theta}f=ip\gamma\, f\},\\
F_\lambda &= \{\omega\in L^2(N)\mid \nabla^*\nabla\omega=\lambda\omega\},\\
F_{\lambda,p} &= \{\omega\in F_{\lambda+\frac{p^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(a)^2}}\mid \nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\omega=ip\gamma\,\omega\}=\{\omega\in L^2(N)\mid \nabla^*\nabla_\Sigma\omega=\lambda\omega\ \text{et}\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}\omega=ip\gamma\,\omega\},\\
F^1_{\lambda,p} &= F_{\lambda,p}\cap\mathrm{Im}\,d_\Sigma=d_\Sigma(E_{\lambda-(n-3),p}),\\
\text{et } F^2_{\lambda,p} &= F_{\lambda,p}\cap(\mathrm{Im}\,d_\Sigma)^\perp=F_{\lambda,p}\cap\ker\delta_\Sigma.
\end{aligned}$$

Passons maintenant aux 2-tenseurs sur Σ_a. Le laplacien de connexion $\nabla^*\nabla$ s'exprime à l'aide du repère mobile de la façon suivante :

$$\nabla^*\nabla h = -\nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}h + \sum_{k=1}^{n-2}\nabla_{\nabla_{e_k}e_k}h - \nabla e_k\nabla e_k h.$$

On constate aisément que le fibré S^2N (ou plus exactement sa restriction à Σ_a) est stable par $\nabla^*\nabla$: si k est une section (lisse) de S^2N, alors $\nabla^*\nabla k$ est encore une section de S^2N. L'opérateur $\nabla^*\nabla$ se restreint ainsi à un opérateur non borné de $L^2(S^2N)$ dans lui-même, et se décompose en somme d'un laplacien vertical et d'un laplacien horizontal :

$$\nabla^*\nabla = -\nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta} + \frac{1}{\mathrm{ch}(a)^2}\nabla^*\nabla_\Sigma.$$

On montre alors, comme dans le cas des fonctions et des 1-formes, qu'il existe un base hilbertienne (du complexifié) de $L^2(S^2N)$, formées de sections C^∞, vecteurs propres des opérateurs $\nabla^*\nabla$ et $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}$ (et donc aussi de $\nabla^*\nabla_\Sigma$). Et on peut montrer, en complète analogie avec le cas des 1-formes, que les valeurs propres de $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}$ sont de la forme $\frac{2ip\pi}{\alpha} = ip\gamma$, $p \in \mathbb{Z}$.

On introduit alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$,

$$G_\lambda = \{k \in L^2(S^2N) \mid \nabla^*\nabla k = \lambda k\},$$

et

$$G_{\lambda,p} = \{k \in G_{\lambda+\frac{p^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(a)^2}} \mid \nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}k = ip\gamma\, k\} = \{k \in L^2(S^2N) \mid \nabla^*\nabla_\Sigma k = \lambda k \text{ et } \nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}}k = ip\gamma\, k\}$$

Etudions maintenant comment passer des fonctions et 1-formes aux 2-tenseurs symétriques. Les premières choses à constater sont que

$$\nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}(\delta^*_\Sigma\omega) = \delta^*_\Sigma(\nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}\omega)$$

et

$$\nabla_{e_\theta}\nabla_{e_\theta}(fg_\Sigma) = (e_\theta.e_\theta.f)g_\Sigma.$$

D'autre part, on a les deux relations de commutation suivantes :

$$\nabla^*\nabla_\Sigma(\delta^*_\Sigma\omega) = (n-1)\delta^*_\Sigma\omega + 2(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma + \delta^*_\Sigma(\nabla^*\nabla_\Sigma\omega)$$

et

$$\begin{aligned}\nabla^*\nabla_\Sigma((\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma) &= \Delta_\Sigma(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma\\ &= (\delta_\Sigma(\nabla^*\nabla_\Sigma\omega) - (n-3)(\delta_\Sigma\omega))g_\Sigma.\end{aligned}$$

La première est la relation (3.1) vue p.58, appliquée à la métrique g_Σ. Elle découle directement de l'invariance par difféomorphisme du tenseur de Ricci. Dans la deuxième relation, la première égalité est élémentaire, et la deuxième utilise le fait que Δ_Σ et δ_Σ commutent ainsi que la formule de Weitzenböck (2.1). De cette deuxième relation on déduit que si ω appartient à $F_{\lambda+n-3,p}$, alors $(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma$ appartient à $G_{\lambda,p}$. Cependant cela n'est intéressant que si $\delta_\Sigma\omega \neq 0$, c'est-à-dire si ω n'est pas dans $F^2_{\lambda+n-3,p}$. Et si $\omega \in F^1_{\lambda+n-3,p}$, alors il existe $f \in E_{\lambda,p}$ tel que $\omega = d_\Sigma f$, et donc $(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma = (\Delta_\Sigma f)g_\Sigma = \lambda f g_\Sigma$.

Notons $m_{g_\Sigma} : L^2(M) \to L^2(S^2N)$ la multiplication par le tenseur g_Σ. C'est trivialement une homothétie de rapport $\frac{\sqrt{n-2}}{\mathrm{ch}(a)^2}$ sur son image. La discussion ci-dessus incite à poser

$$G^1_{\lambda,p} = G_{\lambda,p} \cap \mathrm{Im}\, m_{g_\Sigma} = m_{g_\Sigma}(E_{\lambda,p}).$$

En combinant les deux relations de commutations on trouve :

$$\begin{aligned}
\nabla^*\nabla_\Sigma(\delta^*_\Sigma\omega + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma) &= (n-1)\delta^*_\Sigma\omega + 2(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma + \delta^*_\Sigma(\nabla^*\nabla_\Sigma\omega) \\
&\quad + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma(\nabla^*\nabla_\Sigma\omega) - (n-3)(\delta_\Sigma\omega))g_\Sigma \\
&= (n-1)(\delta^*_\Sigma\omega + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma) + \delta^*_\Sigma(\nabla^*\nabla_\Sigma\omega) \\
&\quad + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma(\nabla^*\nabla_\Sigma\omega))g_\Sigma.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si ω appartient à $F_{\lambda,p}$, alors $\delta^*_\Sigma\omega + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma$ appartient à $G_{\lambda+n-1,p}$. Cela incite à poser

$$G^2_{\lambda,p} = \{\delta^*_\Sigma\omega + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma \mid \omega \in F^1_{\lambda-(n-1),p}\}$$

et, puisque $\delta_\Sigma\omega = 0$ si $\omega \in F^2_{\lambda-(n-1),p}$,

$$G^3_{\lambda,p} = \{\delta^*_\Sigma\omega \mid \omega \in F^2_{\lambda-(n-1),p}\}.$$

Dans les deux cas, le fait que $\mathrm{tr}_\Sigma(\delta^*_\Sigma\omega + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma) = 0$ montre que $G^i_{\lambda,p} \perp G^1_{\lambda,p}$, $i = 2, 3$. D'autre part, en intégrant par partie, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\langle \delta^*_\Sigma\omega + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma, \delta^*_\Sigma\varpi + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma\varpi)g_\Sigma\rangle \\
&= \frac{1}{\mathrm{ch}(a)^2}\langle\delta(\delta^*_\Sigma\omega + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma), \varpi\rangle \\
&= \frac{1}{\mathrm{ch}(a)^2}\langle\nabla^*\nabla_\Sigma\omega - \frac{1}{2}\delta_\Sigma d_\Sigma\omega - \frac{1}{n-2}d_\Sigma\delta_\Sigma\omega, \varpi\rangle \\
&= \frac{1}{\mathrm{ch}(a)^2}\langle\frac{1}{2}(\nabla^*\nabla_\Sigma\omega + (n-3)\omega) + \frac{n-4}{2(n-2)}d_\Sigma\delta_\Sigma\omega, \varpi\rangle \\
&= \frac{1}{\mathrm{ch}(a)^2}\langle\frac{n-3}{n-2}(\nabla^*\nabla_\Sigma\omega + \omega) - \frac{n-4}{2(n-2)}\delta_\Sigma d_\Sigma\omega, \varpi\rangle.
\end{aligned}$$

Pour la première égalité, on utilise le fait que l'adjoint de δ^*_Σ est $\delta/\mathrm{ch}(a)^2 = \nabla^*/\mathrm{ch}(a)^2$ et que la trace de $\delta^*_\Sigma\omega + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma$ est nulle. La deuxième égalité provient des formules $\nabla_\Sigma\omega =$

$\delta_\Sigma^*\omega + d_\Sigma\omega/2$ et $\delta_\Sigma(fg_\Sigma) = -d_\Sigma f$. Les deux égalités suivantes sont deux applications différentes de la formule de Weitzenböck (voir (2.1)) $\nabla^*\nabla_\Sigma = (d_\Sigma\delta_\Sigma + \delta_\Sigma d_\Sigma) + (n-3)Id_N$.

Si ω appartient à $F^2_{\lambda-(n-1),p}$, $\delta_\Sigma\omega = 0$, et l'expression se simplifie en

$$\langle \delta_\Sigma^*\omega, \delta_\Sigma^*\varpi + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma\varpi)g_\Sigma\rangle = \frac{1}{\mathrm{ch}(a)^2}\langle\frac{1}{2}(\nabla^*\nabla_\Sigma\omega + (n-3)\omega), \varpi\rangle = \frac{1}{\mathrm{ch}(a)^2}\frac{\lambda-2}{2}\langle\omega,\varpi\rangle.$$

Cela montre à la fois que $G^2_{\lambda,p} \perp G^3_{\lambda,p}$, et que δ_Σ^* est une homothétie de rapport $\mathrm{ch}(a)^{-1}\sqrt{\frac{\lambda-2}{2}}$ de $F^2_{\lambda-(n-1),p}$ sur $G^3_{\lambda,p}$.

Et si ω, ϖ appartiennent à $F^1_{\lambda-(n-1),p}$, alors $d_\Sigma\omega = 0$, et

$$\begin{aligned}\langle \delta_\Sigma^*\omega + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma\omega)g_\Sigma, \delta_\Sigma^*\varpi + \frac{1}{n-2}(\delta_\Sigma\varpi)g_\Sigma\rangle &= \frac{1}{\mathrm{ch}(a)^2}\langle\frac{n-3}{n-2}(\nabla^*\nabla_\Sigma\omega + \omega), \varpi\rangle \\ &= \frac{1}{\mathrm{ch}(a)^2}\frac{(n-3)(\lambda-(n-2))}{n-2}\langle\omega,\varpi\rangle,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\delta_\Sigma^* + \frac{1}{n-2}m_{g_\Sigma}\circ\delta_\Sigma$ est une homothétie de rapport $\mathrm{ch}(a)^{-1}\sqrt{\frac{(n-3)(\lambda-n+2)}{n-2}}$ de $F^1_{\lambda-(n-1),p}$ sur $G^2_{\lambda,p}$.

Finalement, on pose

$$G^4_{\lambda,p} = G_{\lambda,p} \cap (G^1_{\lambda,p} \oplus G^2_{\lambda,p} \oplus G^3_{\lambda,p})^\perp.$$

Les éléments de $G^4_{\lambda,p}$, orthogonaux aux images de m_{g_Σ} et de δ_Σ^*, sont donc dans les noyaux de tr_Σ et de δ_Σ.

On alors tout ce qu'il faut pour construire la base hilbertienne de $L^2(S^2N)$ qui nous convienne. Sur chaque $G^i_{\lambda,p}$ non réduit à 0, $i = 1$ (resp. 2, resp. 3), on prend comme base orthonormée l'image par $\frac{\mathrm{ch}(a)^2}{\sqrt{n-2}}m_{g_\Sigma}$ (resp. $\mathrm{ch}(a)\sqrt{\frac{n-2}{(n-3)(\lambda-n+2)}}(\delta_\Sigma^* + \frac{1}{n-2}m_{g_\Sigma}\circ\delta_\Sigma)$, resp. $\mathrm{ch}(a)\sqrt{\frac{2}{\lambda-2}}\delta_\Sigma^*$) de la base orthonormée de $E_{\lambda,p}$ (resp. $F^1_{\lambda,p}$, resp. $F^2_{\lambda,p}$) constituée de ψ_j (resp. ϕ_j, resp. φ_j). Cela donne les a_j, b_j et c_j de la proposition.

On complète en une base hilbertienne de $L^2(S^2N)$ en prenant une réunion de bases orthonormées des $G^4_{\lambda,p}$: ce sont les d_j de la proposition.

$\square$

Maintenant, comme dans la section 2.1.3, on prolonge ces sections à tout U_a par transport parallèle le long des géodésiques intégrales du champ de vecteurs e_r. Par simple changement d'échelle, on observe que les tenseurs prolongés se comportent de la façon suivante sur U_a, voisinage de Σ :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\psi_j = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta}\psi_j = ip_j\gamma\,\psi_j \\ \Delta_\Sigma \psi_j = \lambda_j \psi_j \\ d_\Sigma \psi_j = \dfrac{(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}\phi_j \text{ (ou 0 si } \lambda_j = 0) \\ \psi_j g_\Sigma = \dfrac{(n-2)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)^2} a_j, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\phi_j = 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}}\phi_j = ip_j\gamma\,\phi_j \\ (\nabla^*\nabla)_\Sigma \phi_j = (\lambda_j + n - 3)\phi_j \\ \delta_\Sigma \phi_j = \mathrm{ch}(r)(\lambda_j)^{1/2}\psi_j \\ \delta_\Sigma^* \phi_j = \mathrm{ch}(r)^{-1}(n-3)^{1/2}(\dfrac{\lambda_j}{n-2}+1)^{1/2} b_j - \mathrm{ch}(r)^{-1}(\dfrac{\lambda_j}{n-2})^{1/2} a_j, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\varphi_j = 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}}\varphi_j = ip_j'\gamma\,\varphi_j \\ (\nabla^*\nabla)_\Sigma \varphi_j = \mu_j \varphi_j \\ \delta_\Sigma \varphi_j = 0 \\ \delta_\Sigma^* \varphi_j = \mathrm{ch}(r)^{-1}(\dfrac{\mu_j + n - 3}{2})^{1/2}\, c_j, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} a_j = 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} a_j = ip_j\gamma\, a_j \\ (\nabla^*\nabla)_\Sigma a_j = \lambda_j a_j \\ \delta_\Sigma a_j = -\mathrm{ch}(r)(\dfrac{\lambda_j}{n-2})^{1/2}\phi_j \text{ (ou 0 si } \lambda_j = 0) \\ \mathrm{tr}_\Sigma\ a_j = \sqrt{n-2}\,\mathrm{ch}(r)^2\psi_j, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} b_j = 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} b_j = ip_j\gamma\, b_j \\ (\nabla^*\nabla)_\Sigma b_j = (\lambda_j + 2(n-2)) b_j \\ \delta_\Sigma b_j = \mathrm{ch}(r)\sqrt{n-3}(\dfrac{\lambda_j}{n-2}+1)^{1/2}\phi_j \\ \mathrm{tr}_\Sigma\ b_j = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} c_j = 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} c_j = ip_j'\gamma\, c_j \\ (\nabla^*\nabla)_\Sigma c_j = (\mu_j + n - 1) c_j \\ \delta_\Sigma c_j = \mathrm{ch}(r)(\dfrac{\mu_j + n - 3}{2})^{1/2}\varphi_j \\ \mathrm{tr}_\Sigma\ c_j = 0, \end{cases}$$

et enfin

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} d_j = 0 \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} d_j = ip_j''\gamma\, d_j \\ (\nabla^*\nabla)_\Sigma d_j = \nu_j d_j \\ \delta_\Sigma d_j = 0 \\ \mathrm{tr}_\Sigma\ d_j = 0 \end{cases} .$$

3.2.5 Décomposition de l'opérateur

L'existence de ces bases hilbertiennes va permettre de réduire l'équation aux dérivées partielles $Pu = 0$ en une infinité d'équations différentielles ordinaires. On rappelle la décomposition orthogonale d'un 2-tenseur symétrique u au voisinage d'une composante connexe du lieu singulier :

$$u = fe^r.e^r + +ge^\theta.e^\theta + he^r.e^\theta + \sigma.e^r + \eta.e^\theta + k$$

où σ et η sont des sections de N. En utilisant les résultats de la section précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j\in\mathbb{N}} f_j(r)\psi_j e^r.e^r + \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j(r)\psi_j e^\theta.e^\theta + \sum_{j\in\mathbb{N}} h_j(r)\psi_j e^r.e^\theta \\ &+ \sum_{j\in J} \sigma_j(r)\phi_j.e^r + \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\sigma}_j(r)\varphi_j.e^r \\ &+ \sum_{j\in J} \eta_j(r)\phi_j.e^\theta + \sum_{j\in\mathbb{N}} \overline{\eta}_j(r)\varphi_j.e^\theta \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}} k_j^1(r)a_j + \sum_{j\in J} k_j^2(r)b_j + \sum_{j\in\mathbb{N}} k_j^3(r)c_j + \sum_{j\in\mathbb{N}} k_j^4(r)d_j. \end{aligned}$$

Il est plus judicieux de regrouper les termes de cette décomposition de la façon suivante, faisant apparaître des “blocs élémentaires” de même fréquence :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j\in J} \big(f_j(r)\psi_j e^r.e^r + g_j(r)\psi_j e^\theta.e^\theta + h_j(r)\psi_j e^r.e^\theta + \sigma_j(r)\phi_j.e^r + \eta_j(r)\phi_j.e^\theta \\ &\quad + k_j^1(r)a_j + k_j^2(r)b_j\big) \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus J} \big(f_j(r)\psi_j e^r.e^r + g_j(r)\psi_j e^\theta.e^\theta + h_j(r)\psi_j e^r.e^\theta + k_j^1(r)a_j\big) \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}} \big(\overline{\sigma}_j(r)\varphi_j.e^r + \overline{\eta}_j(r)\varphi_j.e^\theta + k_j^3(r)c_j\big) \\ &+ \sum_{j\in\mathbb{N}} k_j^4(r)d_j. \end{aligned}$$

Maintenant, on fait la même décomposition pour $\nabla^*\nabla u - 2u + 2(\mathrm{tr}\, u)g$, dont l'expression en coordonnées cylindriques est donnée à la section 3.2.3. On obtient alors, pour la composante en $\psi_j e^r.e^r$, si $j \in J$:

$$-f_j''-\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)}+(n-2)\mathrm{th}(r)\right)f_j'+\left(\frac{2}{\mathrm{th}(r)^2}+2(n-2)\mathrm{th}(r)^2+\frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2}+\frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2}\right)f_j$$
$$+(2-\frac{2}{\mathrm{th}(r)^2})g_j+\frac{2ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}h_j-\frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}\sigma_j+(2-2\mathrm{th}(r)^2)(n-2)^{1/2}k_j^1,$$

si $j \notin J$:

$$-f_j''-\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)}+(n-2)\mathrm{th}(r)\right)f_j'+\left(\frac{2}{\mathrm{th}(r)^2}+2(n-2)\mathrm{th}(r)^2+\frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2}\right)f_j$$
$$+(2-\frac{2}{\mathrm{th}(r)^2})g_j+\frac{2ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}h_j+(2-2\mathrm{th}(r)^2)(n-2)^{1/2}k_j^1,$$

pour la composante en $\psi_j e^\theta.e^\theta$:

$$-g_j''-\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)}+(n-2)\mathrm{th}(r)\right)g_j'+\left(\frac{2}{\mathrm{th}(r)^2}+\frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2}+\frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2}\right)g_j$$
$$+(2-\frac{2}{\mathrm{th}(r)^2})f_j-\frac{2ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}h_j+2(n-2)^{1/2}k_j^1,$$

pour la composante en $\psi_j e^r.e^\theta$, si $j \in J$:

$$-h_j''-\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)}+(n-2)\mathrm{th}(r)\right)h_j'+\left(\frac{4}{\mathrm{th}(r)^2}+(n-2)\mathrm{th}(r)^2+\frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2}+\frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2}-2\right)h_j$$
$$-\frac{4ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}f_j+\frac{4ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}g_j-\frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}\eta_j,$$

si $j \notin J$:

$$-h_j''-\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)}+(n-2)\mathrm{th}(r)\right)h_j'+\left(\frac{4}{\mathrm{th}(r)^2}+(n-2)\mathrm{th}(r)^2+\frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2}-2\right)h_j$$
$$-\frac{4ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}f_j+\frac{4ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}g_j,$$

pour la composante en $\phi_j.e^r$:

$$-\sigma_j''-\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)}+(n-2)\mathrm{th}(r)\right)\sigma_j'+\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2}+(n+1)\mathrm{th}(r)^2+\frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2}+\frac{\lambda_j+n-3}{\mathrm{ch}(r)^2}-2\right)\sigma_j$$
$$-\frac{4\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}f_j+\frac{2ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}\eta_j+\frac{4\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)}(\frac{\lambda_j}{n-2})^{1/2}k_j^1-\frac{4\mathrm{th}(r)(n-3)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}(\frac{\lambda_j}{n-2}+1)^{1/2}k_j^2,$$

pour la composante en $\phi_j.e^\theta$:

$$-\eta_j''-\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)}+(n-2)\mathrm{th}(r)\right)\eta_j'+\left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2}+\mathrm{th}(r)^2+\frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2}+\frac{\lambda_j+n-3}{\mathrm{ch}(r)^2}-2\right)\eta_j$$

$$-\frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}h_j - \frac{2ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}\sigma_j,$$

pour la composante en $\varphi_j.e^r$:

$$-\overline{\sigma}_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right)\overline{\sigma}_j' + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n+1)\mathrm{th}(r)^2 + \frac{{p'_j}^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + \frac{\mu_j}{\mathrm{ch}(r)^2} - 2\right)\overline{\sigma}_j$$
$$+\frac{2ip'_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}\overline{\eta}_j - \frac{4\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)}(\frac{\mu_j+n-3}{2})^{1/2}k_j^3,$$

pour la composante en $\varphi_j.e^\theta$:

$$-\overline{\eta}_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right)\overline{\eta}_j' + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + \mathrm{th}(r)^2 + \frac{{p'_j}^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + \frac{\mu_j}{\mathrm{ch}(r)^2} - 2\right)\overline{\eta}_j$$
$$-\frac{2ip'_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}\overline{\sigma}_j,$$

pour la composante en a_j, si $j \in J$:

$$-k_j^{1''} - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right)k_j^{1'} + \left(2\mathrm{th}(r)^2 + \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} - 2 + 2(n-2)\right)k_j^1$$
$$+2(n-2)^{1/2}(1-\mathrm{th}(r)^2)f_j + 2(n-2)^{1/2}g_j + \frac{2\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)}(\frac{\lambda_j}{n-2})^{1/2}\sigma_j,$$

si $j \notin J$:

$$-k_j^{1''} - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right)k_j^{1'} + \left(2\mathrm{th}(r)^2 + \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} - 2 + 2(n-2)\right)k_j^1$$
$$+2(n-2)^{1/2}(1-\mathrm{th}(r)^2)f_j + 2(n-2)^{1/2}g_j,$$

pour la composante en b_j :

$$-k_j^{2''} - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right)k_j^{2'} + \left(2\mathrm{th}(r)^2 + \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j + 2(n-2)}{\mathrm{ch}(r)^2} - 2\right)k_j^2$$
$$-\frac{2\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)}(n-3)^{1/2}(\frac{\lambda_j}{n-2}+1)^{1/2}\sigma_j,$$

pour la composante en c_j :

$$-k_j^{3''} - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right)k_j^{3'} + \left(2\mathrm{th}(r)^2 + \frac{{p'_j}^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + \frac{\mu_j+n-1}{\mathrm{ch}(r)^2} - 2\right)k_j^3$$
$$-\frac{2\mathrm{th}(r)}{\mathrm{ch}(r)}(\frac{\mu_j+n-3}{2})^{1/2}\overline{\sigma}_j,$$

et pour la composante en d_j :

$$-k_j^{4\prime\prime} - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right) k_j^{4\prime} + \left(2\mathrm{th}(r)^2 + \frac{p_j^{\prime\prime 2}\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + \frac{\nu_j}{\mathrm{ch}(r)^2} - 2\right) k_j^4.$$

3.2.6 Solutions de l'équation homogène

Comme à la section 2.1.4, on constate que pour chaque indice j, l'équation (ou plutôt le système) que l'on obtient présente une singularité "régulière" en $r = 0$. Les solutions de ces équations sont donc des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $r^k f(r)$ avec f une fonction analytique, où les exposants k s'obtiennent comme racines de l'équation indicielle (en cas de racines multiples ou séparées par des entiers, il faut éventuellement rajouter des termes en $\ln r$ dans l'expression des solutions).

On pose donc, pour un indice j donné,

$$\begin{aligned} f_j(r) &= r^k(f_0 + f_1 r + f_2 r^2 + \cdots), \\ g_j(r) &= r^k(g_0 + g_1 r + g_2 r^2 + \cdots), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

On aboutit alors aux systèmes d'équations indicielles suivants (on omet les j en indice) : si $j \in J$,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (-\kappa^2+2+p^2\gamma^2)f_0 & - & 2g_0 & + & 2ip\gamma h_0 & = & 0 \\ -2f_0 & + & (-\kappa^2+2+p^2\gamma^2)g_0 & - & 2ip\gamma h_0 & = & 0 \\ -4ip\gamma f_0 & + & 4ip\gamma g_0 & + & (-\kappa^2+4+p^2\gamma^2)h_0 & = & 0 \\ & & (-\kappa^2+1+p^2\gamma^2)\sigma_0 & + & 2ip\gamma\eta_0 & = & 0 \\ & & -2ip\gamma\sigma_0 & + & (-\kappa^2+1+p^2\gamma^2)\eta_0 & = & 0 \\ & & & & (-\kappa^2+p^2\gamma^2)k_0^1 & = & 0 \\ & & & & (-\kappa^2+p^2\gamma^2)k_0^2 & = & 0, \end{array} \right.$$

si $j \notin J$,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (-\kappa^2+2+p^2\gamma^2)f_0 & - & 2g_0 & + & 2ip\gamma h_0 & = & 0 \\ -2f_0 & + & (-\kappa^2+2+p^2\gamma^2)g_0 & - & 2ip\gamma h_0 & = & 0 \\ -4ip\gamma f_0 & + & 4ip\gamma g_0 & + & (-\kappa^2+4+p^2\gamma^2)h_0 & = & 0 \\ & & & & (-\kappa^2+p^2\gamma^2)k_0^1 & = & 0, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} (-\kappa^2+1+p'^2\gamma^2)\overline{\sigma}_0 & + & 2ip'\gamma\overline{\eta}_0 & = & 0 \\ -2ip'\gamma\overline{\sigma}_0 & + & (-\kappa^2+1+p'^2\gamma^2)\overline{\eta}_0 & = & 0 \\ & & (-\kappa^2+p'^2\gamma^2)k_0^3 & = & 0, \end{array} \right.$$

et enfin,

$$(-\kappa^2 + p''^2\gamma^2)k_0^4 = 0.$$

Les exposants dominants sont donc $\pm p\gamma$, $\pm p\gamma \pm 1$ et $\pm p\gamma \pm 2$. La seule racine multiple posant problème est en 0 (uniquement) si $p = 0$ (ce qui arrive toujours) ou si $p\gamma \in \{-2, -1, 1, 2\}$ (ce qui n'arrivera jamais avec nos conditions d'angles). Il faut dans ces cas rajouter une solution logarithmique.

Si $\kappa = \pm(p\gamma + 2)$, alors (f_0, g_0, h_0) est multiple de $(-1, 1, 2i)$. Si $\kappa = \pm(p\gamma - 2)$, alors (f_0, g_0, h_0) est multiple de $(1, -1, 2i)$. Si $\kappa = \pm p\gamma$, alors $(f_0, g_0, h_0, k_0^1, k_0^2)$ est combinaison linéaire de $(1, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 0, 1)$. Si $\kappa = \pm(p\gamma + 1)$, alors (σ_0, η_0) est multiple de $(1, -i)$. Si $\kappa = \pm(p\gamma - 1)$, alors (σ_0, η_0) est multiple de $(1, i)$.

Si $\kappa = \pm(p'\gamma + 1)$, alors $(\overline{\sigma}_0, \overline{\eta}_0, k_0^3)$ est multiple de $(1, -i, 0)$. Si $\kappa = \pm(p'\gamma - 1)$, alors $(\overline{\sigma}_0, \overline{\eta}_0, k_0^3)$ est multiple de $(1, i, 0)$. Si $\kappa = \pm p'\gamma$, alors $(\overline{\sigma}_0, \overline{\eta}_0, k_0^3)$ est multiple de $(0, 0, 1)$.

Enfin, l'équation pour k^4 donne deux solutions d'exposants dominants $\kappa = \pm p''\gamma$.

L'existence des exposants en $p_j\gamma - 2$ oblige à réduire encore les angles coniques pour pouvoir démontrer des résultats analogues au lemme 3.1.2 et au théorème 3.1.1. On supposera donc dans la suite que tous les angles coniques sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Lemme 3.2.3. *Soit ϕ un 2-tenseur symétrique C^∞ à support compact, et soit u l'unique solution dans $L^{1,2}$ de l'équation $Pu = \phi$. Alors $\nabla\nabla u$ est L^2, c'est-à-dire que u appartient à $L^{2,2}(S^2M)$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle des lemmes 2.1.4 et 3.1.2. On commence par montrer que $\nabla^*\nabla\nabla u$ est L^2 par une formule de Weitzenbock, puis que $\nabla_{e_r}\nabla u$ est L^2, ce qui permet de conclure grâce à la proposition 1.4.6.

La formule de Weitzenbock utilisé est la suivante , que l'on verra plus en détail dans la prochaine section ((3.3), p.85) : pour tout 2-tenseur symétrique u sur une variété hyperbolique, on a

$$\nabla^*\nabla\nabla u(x, y, z) = \nabla\nabla^*\nabla u(x, y, z) + (n-1)\nabla u(x, y, z) + 2\nabla u(y, x, z) + 2\nabla u(z, y, x) + 2g(x, y)\nabla^* u(z) + 2g(x, z)\nabla^* u(y).$$

Alors au voisinage du lieu singulier

$$\nabla^*\nabla\nabla u(x, y, z) = (n-1)\nabla u(x, y, z) + 2\nabla u(y, x, z) + 2\nabla u(z, y, x) + 2g(x, y)\nabla^* u(z) + 2g(x, z)\nabla^* u(y).$$

Comme ∇u est dans L^2, cela suffit à prouver que $\nabla^*\nabla\nabla u$ est dans L^2.

On ne donnera pas la preuve détaillée du fait que $\nabla_{e_r}\nabla u$ est dans L^2. Les techniques utilisées sont les mêmes que pour l'opérateur $\nabla^*\nabla + (n-1)Id$ dans le cas des 1-formes, voir l'appendice (p. 91 et suiv.). L'idée est la suivante : le fait que u appartient à $L^{1,2}$ impose que seules les solutions élémentaires d'exposant dominant positif apparaissent dans la décomposition de u. Et comme tous les angles coniques sont supposés plus petits que $2\pi/3$, les exposants dominants positifs sont soit nuls, soit plus grands que 1. Cela donne suffisamment de contrôle sur les solutions élémentaires pour montrer que tous les termes apparaissant dans la décomposition de $\nabla_{e_r}\nabla u$ sont non seulement dans L^2, mais admettent des bonnes majorations du type donnée dans le lemme 2.1.3. On utilise ensuite le fait que P est elliptique, donc que u est C^∞ près du lieu singulier, pour assurer la convergence en norme L^2 de la décomposition en série sur un voisinage du lieu singulier de $\nabla_{e_r}\nabla u$. □

3.2.7 Résolution dans des espaces de Sobolev, bis

Le résultat suivant est l'analogue du théorème 3.1.1. Pour avoir un résultat comparable à ce qu'on obtient sur une variété compacte, il est encore nécessaire de restreindre les angles coniques. Ce théorème n'est pas indispensable pour la construction des déformations modifiant les angles, même s'il simplifie fortement la preuve quand les angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$. Mais il montre que pour être en mesure d'avoir un théorème d'inversion locale, qui assurerait l'existence de cônes-variétés réalisant les variations des angles, il n'est pas suffisant de demander que les angles coniques soit inférieur à π ; il faut une condition un peu plus forte.

Théorème 3.2.4. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$. Alors l'opérateur $P = \nabla^*\nabla - 2\mathring{R} \ : \ L^{2,2}(S^2M) \to L^2(S^2M)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. L'opérateur

$$P = \nabla^*\nabla - 2\mathring{R} : L^{2,2}(S^2M) \longrightarrow L^2(S^2M)$$

est linéaire et continu. D'après le théorème de l'application ouverte, il suffit de montrer qu'il est bijectif pour conclure. Pour cela, on va utiliser le même principe de démonstration que dans les preuves des théorèmes 2.1.6 et 3.1.1.

On sait déjà que si $\phi \in L^2(S^2M)$, il existe une unique solution $u \in L^{1,2}(S^2M)$ de l'équation $Pu = \phi$. On va montrer que quand les angles coniques sont suffisamment petits, cette solution est en fait dans $L^{2,2}$. Le point clé est le fait que si ϕ est à support compact, alors $u \in L^{2,2}$. On va donc approcher ϕ par des tenseurs C_0^∞.

Les 2-tenseurs C^∞ à support compact étant dense dans L^2, on peut trouver une suite (ϕ_n) de sections C^∞ à support compact telle que $\phi_n \to \phi$ dans L^2 quand $n \to \infty$. Soit (u_n) la suite d'éléments de $L^{1,2}$ telle que pour tout entier n, $Pu_n = \phi_n$. Le fait que ϕ_n converge vers ϕ nous assure que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \nabla u_n = \nabla u,$$

les limites étant au sens L^2.

Maintenant, comme ϕ_n est à support compact, Pu_n est identiquement nul au voisinage du lieu singulier, et u_n rentre donc dans le cadre de la proposition 3.2.3, c'est-à-dire que u_n appartient à $L^{2,2}(S^2M)$. On va maintenant montrer que $\nabla\nabla u_n$, suite de sections du fibré $T^{(2,0)}M \otimes S^2M$, est *bornée* dans L^2.

Pour cela, on considère ξ, section C^∞ à support compact de $T^{(2,0)}M \otimes S^2M$ ("section test"), et on s'intéresse au produit scalaire $\langle \nabla\nabla u_n, \xi\rangle$. Le but est d'arriver à monter que

$$|\langle \nabla\nabla u_n, \xi\rangle| \leq M||\xi||,$$

où M est une constante ne dépend ni de ξ ni de n.

La restriction de la dérivée covariante à $T^*M \otimes S^2M$ nous donne un opérateur (non borné) $\nabla : L^2(T^*M \otimes S^2M) \to L^2(T^{(2,0)}M \otimes S^2M)$; son adjoint est la restriction de ∇^* à $T^{(2,0)}M \otimes S^2M$, et les résultats de la section 1.4 s'appliquent. Maintenant, en utilisant la définition de l'adjoint d'un opérateur, on a l'égalité $\ker \nabla^* = (\mathrm{Im}\,\nabla)^\perp$ et donc on a aussi la décomposition orthogonale suivante :

$$\begin{aligned} L^2(T^{(2,0)}M \otimes S^2M) &= \ker \nabla^* \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}\,\nabla} \\ &= \ker \nabla^* \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\,\nabla \end{aligned}$$

d'après le théorème 1.4.7. On peut écrire dans cette décomposition $\xi = k + \nabla\zeta$, où $k \in (\mathrm{Im}\,\nabla)^\perp$, et ζ est choisie d'après le corollaire 1.4.8 telle que $||\zeta|| \leq c||\nabla\zeta|| \leq c||\xi||$ pour une certaine constante c ne dépendant pas de ξ. On a alors :

$$\begin{aligned} \langle \nabla\nabla u_n, \xi\rangle &= \langle \nabla\nabla u_n, \nabla\zeta + k\rangle \\ &= \langle \nabla\nabla u_n, \nabla\zeta\rangle. \end{aligned}$$

On voudrait pouvoir faire une intégration par partie, et il faut donc vérifier que tous les termes impliqués sont L^2. On sait déjà que ζ, $\nabla\zeta$, $\nabla\nabla u_n$ le sont, reste à le vérifier pour $\nabla^*\nabla\nabla u_n$. Pour cela, ainsi que pour la suite de la démonstration, on utilise la relation de commutation suivante, valable pour toute section u d'un fibré tensoriel T :

$$\nabla^*\nabla\nabla u = \nabla\nabla^*\nabla u + \nabla u \circ Ric - (\nabla^* R)u + 2S(\nabla u). \tag{3.3}$$

La notation Ric désigne le tenseur de Ricci vu comme application linéaire $TM \to TM$, et la composition est à comprendre au sens où $\nabla u \circ Ric(x) = \nabla_{Ric(x)} u$. La notation S désigne l'opérateur qui à une section ϕ de $T^*M \otimes T$ associe

$$S\phi(x) = \mathrm{tr}_g(R(\_, x)\phi(\_)) = \sum_i R(e_i, x)s(e_i).$$

Et R désigne le tenseur de courbure, section de $\Lambda^2 M \otimes End(T)$.

Dans le cas où la métrique est hyperbolique, cette formule se simplifie. Comme R est parallèle (i.e. $\nabla R = 0$), $\nabla^* R$ est nul, on a aussi $\nabla u \circ Ric = -(n-1)\nabla u$, et donc

$$\nabla^*\nabla\nabla u = \nabla\nabla^*\nabla u - (n-1)\nabla u + 2S(\nabla u).$$

De plus, si u est une section de S^2M, on a (toujours dans le cas hyperbolique)

$$S(\nabla u)(x,y,z) = (n-1)\nabla u(x,y,z) + \nabla u(y,x,z) + \nabla u(z,y,x) + g(x,y)\nabla^* u(z) + g(x,z)\nabla^* u(y).$$

Finalement, pour tout 2-tenseur symétrique u, on a

$$\nabla^*\nabla\nabla u(x,y,z) = \nabla\nabla^*\nabla u(x,y,z) + (n-1)\nabla u(x,y,z) + 2\nabla u(y,x,z) + 2\nabla u(z,y,x) + 2g(x,y)\nabla^* u(z) + 2g(x,z)\nabla^* u(y).$$

Maintenant, comme u_n vérifie $Pu_n = \phi_n$,

$$\begin{aligned} \nabla\nabla^*\nabla u_n &= \nabla\left(2\mathring{R}u_n + \phi_n\right) \\ &= 2\nabla u_n - 2(d\mathrm{tr}\, u_n)\otimes g + \nabla\phi_n. \end{aligned}$$

Le tenseur ϕ_n est C_0^∞, donc $\nabla\phi_n$ appartient à L^2, et il est alors clair que $\nabla^*\nabla\nabla u_n$ appartient à L^2, sachant que $u_n \in L^{(1,2)}$.

On peut alors intégrer par partie :

$$\begin{aligned} \langle\nabla\nabla u_n, \xi\rangle &= \langle\nabla\nabla u_n, \nabla\zeta\rangle \\ &= \langle\nabla^*\nabla\nabla u_n, \zeta\rangle \\ &= \langle\nabla\nabla^*\nabla u_n - (n-1)\nabla u_n + 2S(\nabla u_n), \zeta\rangle \\ &= \langle\nabla\phi_n - (n-3)\nabla u_n - 2(d\mathrm{tr}\, u_n)\otimes g + 2S(\nabla u_n), \zeta\rangle. \end{aligned}$$

Comme $\nabla\zeta$ est L^2, $\nabla^*\zeta = -\mathrm{tr}_g\nabla\zeta$ est aussi L^2, on a même $||\nabla^*\zeta|| \leq \sqrt{n}||\nabla\zeta||$. D'autre part ϕ_n, $\nabla\phi_n$ et ζ sont L^2, on peut encore intégrer par parties :

$$\langle\nabla\nabla u_n, \xi\rangle = \langle-(n-3)\nabla u_n - 2(d\mathrm{tr}\, u_n)\otimes g + 2S(\nabla u_n), \zeta\rangle + \langle\phi_n, \nabla^*\zeta\rangle$$

Pour finir on majore avec Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |\langle\nabla\nabla u_n, \xi\rangle| &\leq ||\phi_n||\,||\nabla^*\zeta|| + ||-(n-3)\nabla u_n - 2(d\mathrm{tr}\, u_n)\otimes g + 2S(\nabla u_n)||\,||\zeta|| \\ &\leq \left(\sqrt{n}||\phi_n|| + c||-(n-3)\nabla u_n - 2(d\mathrm{tr}\, u_n)\otimes g + 2S(\nabla u_n)||\right)||\nabla\zeta|| \\ &\leq M||\xi||. \end{aligned}$$

La dernière majoration est due au fait que les suites ϕ_n, u_n et ∇u_n sont convergentes, donc bornées, dans L^2, et qu'il en est de même pour le terme $-(n-3)\nabla u_n - 2(d\mathrm{tr}\, u_n)\otimes g + 2S(\nabla u_n)$ qui dépend continûment de u_n et de ∇u_n. Cette majoration, valable pour toute section test ξ, implique directement que la suite $(\nabla\nabla u_n)$ est bornée dans L^2.

Par conséquent, on peut extraire une sous-suite, encore notée $\nabla\nabla u_n$, qui converge faiblement vers une limite $l \in L^2$: c'est-à-dire que quel que soit $\xi \in L^2(T^{(2,0)}M \otimes S^2M)$,

$$\lim_{n\to\infty}\langle\nabla\nabla u_n, \xi\rangle = \langle l, \xi\rangle.$$

Mais alors, si ξ est C^∞ à support compact,

$$\langle\nabla\nabla u_n, \xi\rangle = \langle\nabla u_n, \nabla^*\xi\rangle,$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\langle\nabla u_n, \nabla^*\xi\rangle = \langle\nabla u, \nabla^*\xi\rangle$$

car ∇u_n converge dans L^2 vers ∇u. Par conséquent, on a

$$\langle \nabla u, \nabla^* \xi \rangle = \langle l, \xi \rangle$$

pour tout $\xi \in C_0^\infty$, ce qui signifie exactement que

$$l = \nabla_{max} \nabla u = \nabla \nabla u,$$

et par suite $\nabla\nabla u$ appartient à L^2. □

3.3 Constructions de déformations non triviales

On a besoin que les angles coniques soient plus petits que π. Ici M est une cône-variété hyperbolique, donc la notation β (resp. δ^*) désigne la seule extension fermée de cette opérateur, voir proposition 3.1.6. En particulier, $\ker \beta$ désigne l'espace des sections $h \in L^2$, telle que $\beta h = 0$ au sens des distributions. La proposition suivante complète l'étude de l'opérateur $P = \nabla^*\nabla - 2\mathring{R}$.

Proposition 3.3.1. *Soit $D(P) = \{h \in \ker \beta \mid \nabla h \in L^2$ et $\nabla^*\nabla h \in L^2\}$. L'opérateur*

$$\begin{array}{rcl} P : D(P) \subset \ker \beta & \to & \ker \beta \\ h & \mapsto & \nabla^*\nabla h - 2h + 2(\operatorname{tr} h) g \end{array}$$

est auto-adjoint et positif, et donc inversible.

Démonstration. Vérifions avant toute autre chose que l'image de P est bien incluse dans $\ker \beta$. On sait que pour toute section lisse u de S^2M,

$$\beta(E'(u)) = \beta(\nabla^*\nabla u - 2\mathring{R}u - 2\delta^*\beta u) = 0.$$

Donc $\beta(\nabla^*\nabla u - 2\mathring{R}u) = 2\beta\delta^*\beta u$, et si $\beta u = 0$, on a immédiatement $\beta(\nabla^*\nabla u - 2\mathring{R}u) = 0$. On va montrer que c'est aussi le cas (au moins au sens des distributions) si u appartient à $D(P)$.

Soit ξ une section test de S^2M, C^∞ à support compact, et u un élément de $D(P)$. Alors

$$\langle Pu, \beta^t \xi \rangle = \langle u, (\nabla^*\nabla - 2\mathring{R})(\beta^t \xi) \rangle = \langle u, 2\beta^t \delta \beta^t \xi \rangle = 0$$

car u appartient à $\ker \beta$. Cela montre que $Pu \in \ker \beta$ pour tout $u \in D(P)$.

Dans le cas où les angles sont inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$, le fait que $P : D(P) \subset \ker \beta \to \ker \beta$ est inversible découle directement du théorème 3.2.4. En effet, si on prend $\phi \in \ker \beta$, il existe un unique $u \in L^{2,2}(S^2M)$ tel que $\nabla^*\nabla u - 2\mathring{R}u = \phi$, et la solution u vérifie

$$2\beta\delta^*\beta u = \beta(\nabla^*\nabla u - 2\mathring{R}u) = \beta\phi = 0.$$

La forme βu est dans l'intersection de $L^{1,2}(T^*M)$ et du noyau de $2\beta\delta^* = \nabla^*\nabla + (n-1)Id = L$, elle est donc nulle, ce qui montre l'inversibilité de P.

On pourrait d'ailleurs raffiner les résultats de la section précédente pour montrer que cette démonstration fonctionne encore quand les angles coniques sont juste inférieurs à π, mais ce n'est pas la méthode que l'on va utiliser ici.

On aura ensuite besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3.2. *Le domaine de l'opérateur ∇, restreint à $\ker\beta$, est dense dans $\ker\beta$ pour la norme L^2 : $\overline{D(\nabla|_{\ker\beta})} = \ker\beta$.*

Démonstration du lemme. Ce résultat découle des deux théorèmes 3.1.3 et 3.1.1. On utilise la décomposition $L^2 = \ker\beta \oplus \operatorname{Im}\delta^*$ et le fait que la projection p_1 sur le premier facteur est continue. Comme C_0^∞ est un sous-espace dense de L^2, son image $p_1(C_0^\infty)$ est dense dans $\ker\beta$.

Maintenant soit $k \in p_1(C_0^\infty)$. Il existe $\phi \in C_0^\infty$ et $u \in D(\delta^*)$ tels que $k = p_1(\phi)$ et $\phi = k + \delta^* u$. On alors $\beta(\phi) = \beta(\delta^* u)$. Or $\beta(\phi)$ est à support compact, donc dans L^2. D'après le théorème 3.1.1, $\nabla\nabla u$ est L^2, et par conséquent $\delta^* u \in D(\nabla)$. Comme ϕ est C^∞ à support compact, elle est aussi dans $D(\nabla)$, et donc $k = \phi - \delta^* u \in D(\nabla)$. Par suite $p_1(C_0^\infty) \subset D(\nabla)$, et $D(\nabla) \cap \ker\beta = D(\nabla|_{\ker\beta})$ est dense dans $\ker\beta$. □

Le fait que le domaine de $\nabla|_{\ker\beta}$ soit dense permet de considérer son adjoint $(\nabla|_{\ker\beta})^*$. On note i l'inclusion $\ker\beta \hookrightarrow L^2$; on a évidemment $\nabla|_{\ker\beta} = \nabla \circ i$. Son adjoint est donc $p \circ \nabla^*$, où p est la projection orthogonal de L^2 sur $\ker\beta$. De plus on déduit facilement que l'opérateur $\nabla|_{\ker\beta}$ est fermé du fait que ∇ et $\ker\beta$ sont fermés. Cela implique que $(\nabla|_{\ker\beta})^* \circ \nabla|_{\ker\beta} = p \circ \nabla^* \circ \nabla|_{\ker\beta}$ est auto-adjoint.

Maintenant, l'opérateur $p \circ \mathring{R}|_{\ker\beta} : h \mapsto p(h - (\operatorname{tr} h)g)$ est un endomorphisme borné (i.e. continue) et auto-adjoint de $\ker\beta$, donc $p \circ \nabla^* \circ \nabla|_{\ker\beta} - 2p \circ \mathring{R}|_{\ker\beta}$ est encore auto-adjoint. Or

$$\begin{aligned} p \circ \nabla^* \circ \nabla|_{\ker\beta} - 2p \circ \mathring{R}|_{\ker\beta} &= p \circ (\nabla^* \circ \nabla|_{\ker\beta} - 2\mathring{R}|_{\ker\beta}) \\ &= p \circ P \\ &= P \end{aligned}$$

puisque l'image de P est incluse dans $\ker\beta$. On a ainsi montré que P était auto-adjoint.

La positivité découle de la formule de Weitzenböck déjà utilisée à de nombreuses reprises :

$$\forall h \in \mathcal{S}^2 M,\ \nabla^*\nabla h = d^\nabla \delta^\nabla h + \delta^\nabla d^\nabla h + nh - (\operatorname{tr} h)g.$$

Si h est C_0^∞, on a

$$\begin{aligned} ||\nabla h||^2 &= \langle \nabla^*\nabla h, h\rangle \\ &= \langle d^\nabla \delta^\nabla h + \delta^\nabla d^\nabla h + nh - (\operatorname{tr} h)g, h\rangle \\ &= ||\delta^\nabla h||^2 + ||d^\nabla h||^2 + n||h||^2 - ||\operatorname{tr} h||^2. \end{aligned}$$

Cette égalité est encore vraie si $h \in D(\nabla)$; il suffit de considérer une suite h_n de 2-tenseurs symétriques C_0^∞ telle que pour la norme L^2, h_n converge vers h et ∇h_n vers ∇h.

Soit $h \in D(P)$. Comme h, ∇h, et $\nabla^*\nabla h$ sont dans L^2, on peut intégrer par partie :

$$\begin{aligned}\langle Ph, h\rangle &= \langle \nabla^*\nabla h - 2h + 2(\operatorname{tr} h)g, h\rangle \\ &= ||\nabla h||^2 - 2||h||^2 + 2||\operatorname{tr} h||^2 \\ &= ||\delta^\nabla h||^2 + ||d^\nabla h||^2 + (n-2)||h||^2 + ||\operatorname{tr} h||^2,\end{aligned}$$

et donc $\langle Ph, h\rangle \geq (n-2)||h||^2$. □

Corollaire 3.3.3. *Soit h_0 une déformation infinitésimale telle que $E'(h_0)$ soit dans L^2. Alors il existe un unique 2-tenseur symétrique $h \in D(P)$ tel que la déformation $h_0 + h$ soit Einstein, i.e. $E'(h_0 + h) = 0$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $E'(h_0) \in \ker \beta$ et de résoudre $Ph = -E'(h_0)$ dans $D(P)$. Et comme $h \in \ker \beta$, $E'(h) = \nabla^*\nabla h - 2\mathring{R}h(-2\delta^*\beta h) = Ph$. □

Ce corollaire n'a d'intérêt que si la déformation h_0 n'est pas $L^{1,2}$. Sinon, d'après le théorème de rigidité infinitésimale, $h + h_0$ est une déformation triviale, c'est-à-dire que h est (au signe près) la composante dans $\ker \beta$ de h_0. Mais si h_0 est bien choisi, on peut montrer ainsi le théorème suivant :

Théorème 3.3.4. *Soit M une cône-variété hyperbolique dont tous les angles coniques $\alpha_1, \dots \alpha_p$ sont strictement inférieurs à π. Soit $\dot\alpha = (\dot\alpha_1, \dots \dot\alpha_p)$ une variation donnée du p-uplet des angles coniques. Alors il existe une déformation Einstein infinitésimale normalisée h (i.e. telle que $E'(h) = 0$ et $\beta h = 0$) induisant la variation des angles coniques donnée.*

Démonstration. Sans perdre de généralités, on peut se limiter au cas où un seul des $\dot\alpha_i$ est non nul, ce qui revient à ne considérer qu'une seule composante connexe Σ_k du lieu singulier.

Soit h_0 une déformation infinitésimale telle que h_0 soit égal à $\operatorname{sh}(r)^2 d\theta^2$ près de Σ_k, et que h_0 soit nul en dehors d'un voisinage de cette composante connexe. C'est le modèle de déformation conique modifiant un (seul) angle conique. C'est aussi une déformation hyperbolique (donc Einstein) près du lieu singulier : en particulier, $E'(h_0)$ est C^∞ à support compact. Par contre h_0 n'est pas normalisée, et même pire que ça puisque $\beta h_0 \notin L^2$.

En vue d'applications futures, on va commencer par normaliser localement h_0, c'est-à-dire que l'on cherche une 1-forme η telle que $\beta(h_0 - \delta^*\eta)$ soit nul près du lieu singulier. Si on prend η de la forme $f(r)e^r$, alors la fonction f vérifie l'équation différentielle (ordinaire)

$$-f''(r) - (\frac{1}{\operatorname{th}(r)} + (n-2)\operatorname{th}(r))f'(r) + (\frac{1}{\operatorname{th}(r)^2} + (n-2)\operatorname{th}(r)^2 + n - 1)f(r) = \frac{2}{\operatorname{th}(r)}.$$

Cette équation différentielle est à singularité régulière (selon la terminologie de [24]) ; elle admet au voisinage de $r = 0$ une solution de la forme $f(r) = -r\ln(r) + r^3(f_1(r) + \ln(r)f_2(r))$, où f_1 et f_2 sont développables en séries entières. On définit alors $\chi(r)$ comme étant un fonction lisse égale à $-r\ln(r) + r^3(f_1(r) + \ln(r)f_2(r))$ près de Σ_k, et nulle en dehors d'un certain voisinage de Σ_k.

On note maintenant $h_1 = h_0 - \delta^*(\chi(r)e^r)$; près du lieu singulier, on a encore $E'(h_1) = 0$, et en plus $\beta h_1 = 0$. Au premier ordre, $h_1 = (1 + \ln(r))(dr^2 + \mathrm{sh}(r)^2 d\theta^2) + O(r^2\ln(r))$, c'est-à-dire que h_1 ressemble asymptotiquement à une déformation conforme de la métrique du cône, et h_1 appartient à L^2. Par contre ∇h_1 n'est pas L^2.

On va maintenant normaliser globalement h_1, c'est-à-dire que l'on va résoudre l'équation $\beta\delta^*\eta = \beta h_1$ sur tout M et non plus seulement sur un voisinage du lieu singulier. Comme βh_1 est C^∞ à support compact et que les angles coniques sont inférieurs à π, d'après le lemme 3.1.2 l'équation admet une unique solution η dans $L^{2,2}(T^*M)$ (et son comportement au voisinage du lieu singulier est assez bien compris).

On pose alors $h_2 = h_1 - \delta^*\eta$. Cette déformation est dans L^2, mais ∇h_2 n'est pas dans L^2 (puisque $\nabla\delta^*\eta \in L^2$ et $\nabla h_1 \notin L^2$). On a aussi $E'(h_2) \in C_0^\infty(S^2M)$ et $\beta h_2 = 0$.

On peut maintenant appliquer le corollaire. On construit ainsi une déformation Einstein infinitésimale $h_{\dot\alpha}$, normalisée, et qui ne diffère de h_2 que par un élément de $D(P) \subset L^{1,2}$. Cette déformation $h_{\dot\alpha}$ modifie donc les angles coniques de la même façon que h_2 et que h_0 ; elle induit donc bien la variation voulue des angles coniques. $\square$

Il est intéressant de voir comment la déformation construite se comporte près du lieu singulier. La déformation Einstein $h_{\dot\alpha}$ est de la forme $h_1 - \delta^*\eta - h$, où h vérifie $P(h) = 0$ près du lieu singulier. On connaît le terme h_1 : il ressemble asymptotiquement à un certain changement conforme de la métrique du cône. Le terme en $\delta^*\eta$ n'est pas très intéressant, c'est une déformation triviale correspondant à la normalisation. Le comportement du terme h est connu en partie (voir section 3.2.5) : il est asymptotique à un changement de la métrique du lieu singulier. Comme on pouvait s'y attendre, la déformation $h_{\dot\alpha}$ ne se contente donc pas de changer les angles coniques : le fait de rester Einstein impose de modifier aussi la métrique du lieu singulier.

Appendice

Démonstration du lemme 2.1.3

Le lemme 2.1.3 découle presque intégralement des majorations données par le lemme ci-dessous, qu'il suffit d'intégrer entre 0 et a. Pour la définition des fonctions f_j^k etc., voir proposition 2.1.2 et la discussion qui suit.

Lemme. *Les fonctions f_j^k, g_j^k, ω_j^k et ϖ_j^0 vérifient les inégalités suivantes pour r compris entre 0 et a, sauf éventuellement pour un nombre fini d'indices j.*

Si $p_j\gamma > 1$, alors, pour $k = 0$ ou 1,

$$|f_j^k(r)| \leq \frac{|f_j^k(a)|}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma},\ |g_j^k(r)| \leq |f_j^k(r)|,\ |\omega_j^k(r)| \leq \frac{|\omega_j^k(a)|}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma}$$

$$\begin{aligned}
|f_j^{k\prime}(r)| &\leq \frac{(1+p_j\gamma)^2+2n-3+\lambda_j}{p_j\gamma-1}\,\frac{|f_j^k(a)|\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma-1}\\
&\quad+\frac{2(\lambda_j)^{1/2}}{p_j\gamma+2}\,\frac{|\omega_j^k(a)|\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma+2}\\
|g_j^{k\prime}(r)| &\leq |f_j^{k\prime}(r)|\\
|\omega_j^{k\prime}(r)| &\leq \frac{p_j^2\gamma^2+n-2+\lambda_j}{p_j\gamma-1}\,\frac{|\omega_j^k(a)|\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma-1}+\frac{2(\lambda_j)^{1/2}}{p_j\gamma+2}\,\frac{|f_j^k(a)|\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma+2}
\end{aligned}$$

et

$$|f_j^{-1}(r)| \leq \frac{|f_j^{-1}(a)|}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma-1}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma-1},\ |g_j^{-1}(r)| \leq |f_j^{-1}(r)|,\ |\omega_j^{-1}(r)| \leq \frac{|\omega_j^{-1}(a)|}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma},$$

$$|f_j^{-1}(r)+ig_j^{-1}(r)| \leq \frac{2|f_j^{-1}(a)|}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma+1}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma+1}$$

$$\begin{aligned}
|f_j^{-1\prime}(r)| &\leq \frac{(1+p_j\gamma)^2+2n-3+\lambda_j}{p_j\gamma-2}\,\frac{|f_j^{-1}(a)|\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma-1}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma-2}\\
&\quad+\frac{2(\lambda_j)^{1/2}}{p_j\gamma+2}\,\frac{|\omega_j^{-1}(a)|\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma+2}\\
|g_j^{-1\prime}(r)| &\leq |f_j^{-1\prime}(r)|\\
|\omega_j^{-1\prime}(r)| &\leq \frac{p_j^2\gamma^2+n-2+\lambda_j}{p_j\gamma-1}\,\frac{|\omega_j^{-1}(a)|\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma-1}+\frac{2(\lambda_j)^{1/2}}{p_j\gamma+1}\,\frac{|f_j^{-1}(a)|\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma-1}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f_j^{-1}(r)+ig_j^{-1}(r)|' &\leq \frac{2(1+p_j\gamma)^2+3n-4+2\lambda_j}{p_j\gamma}\frac{|f_j^{-1}(a)|\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma+1}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma}\\ &+\frac{2(\lambda_j)^{1/2}}{p_j\gamma+2}\frac{|\omega_j^{-1}(a)|\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma+2}\end{aligned}$$

Si $p_j=0$, alors, pour $k=0$ ou 1,

$$|f_j^k(r)|\leq\frac{|f_j^k(a)|}{\mathrm{th}(a)}\mathrm{th}(r),\ \ |\omega_j^k(r)|\leq|\omega_j^k(a)|$$

$$\begin{aligned}|f_j^{k\prime}(r)| &\leq (2n-2+\lambda_j)\frac{|f_j^k(a)|}{\mathrm{th}(a)}+2(\lambda_j)^{1/2}|\omega_j^k(a)|\mathrm{th}(r)^2\\ |\omega_j^{k\prime}(r)| &\leq (\lambda_j+2n-3)|\omega_j^k(a)|\,r+\frac{2(\lambda_j)^{1/2}}{3}\frac{|f_j^k(a)|\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)}\mathrm{th}(r)^3\end{aligned}$$

et

$$|g_j^1(r)|\leq\frac{|g_j^1(a)|}{\mathrm{th}(a)}\mathrm{th}(r),\ \ |g_j^{1\prime}(r)|\leq(n+\lambda_j)\frac{|g_j^1(a)|}{\mathrm{th}(a)}$$

Si $p_j'\gamma>1$, alors

$$|\varpi_j^0(r)|\leq\frac{|\varpi_j^0(a)|}{\mathrm{th}(a)^{p_j'\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j'\gamma},\ \ |\varpi_j^{0\prime}(r)|\leq\frac{n+p_j'^2\gamma^2+\mu_j}{p_j'\gamma-1}\frac{|\varpi_j^0(a)|}{\mathrm{th}(a)^{p_j'\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j'\gamma-1}\mathrm{ch}(a)^2$$

Si $p_j'=0$, alors

$$|\varpi_j^0(r)|\leq|\varpi_j^0(a)|,\ \ |\varpi_j^{0\prime}(r)|\leq(n+\mu_j)|\varpi_j^0(a)|\,r$$

Démonstration. On regarde d'abord les fonctions ϖ_j^0. Elles vérifient l'équation $Q_j(\varpi_j)=0$, où

$$Q_j: f\mapsto -f''-(\frac{1}{\mathrm{th}(r)}+(n-2)\mathrm{th}(r))f'+(\mathrm{th}(r)^2+\frac{p_j'^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2}+(1-\mathrm{th}(r)^2)\mu_j+n-1)f.$$

Les premiers termes du développement de ϖ_j^0 sont

$$\varpi_j^0(r)=r^{p_j'\gamma}+\left(\frac{\mu_j+2n-3}{4(p_j'\gamma+1)}-\frac{n-2}{4}-\frac{p_j'\gamma}{12}\right)r^{p_j'\gamma+2}+O(r^{p_j'\gamma+4}).$$

On veut montrer que, sauf éventuellement pour un nombre fini d'indice j, pour r compris entre 0 et a, on a l'inégalité

$$|\varpi_j^0(r)|\leq\frac{|\varpi_j^0(a)|}{\mathrm{th}(a)^{p_j'\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j'\gamma}.$$

Un calcul élémentaire montre que

$$Q_j(\mathrm{th}(r)^{p'_j\gamma}) = \left(n + \frac{\mu_j + p'^2_j\gamma^2 - (n-3)p'_j\gamma - 1}{\mathrm{ch}(r)^2}\right)\mathrm{th}(r)^{p'_j\gamma}.$$

En particulier, $Q_j(\mathrm{th}(r)^{p'_j\gamma}) \geq 0$ (avec inégalité stricte si r est différent de 0) sauf éventuellement pour un nombre fini d'indice j, que l'on exclura dans la suite.

Pour tout c réel positif, on pose

$$h_c(r) = \varpi^0_j(r) - c\,\mathrm{th}(r)^{p'_j\gamma}.$$

Cette fonction vérifie l'équation différentielle $Q_j(h_c) = -c\,Q_j(\mathrm{th}(r)^{p'_j\gamma})$. Supposons qu'il existe r_0, $0 \leq r_0 \leq a$, tel que $h_c(r_0) \geq 0$ et $h'_c(r_0) > 0$. Alors pour tout $r \in]r_0, a]$, on a $h'_c(r_0) > 0$, et donc $h_c(r_0) > 0$. La preuve est la suivante : supposons par l'absurde que h'_c s'annule sur $[r_0, a]$, et notons r_1 le minimum de ces points d'annulation. Alors

$$h''_c(r_1) = (\mathrm{th}(r_1)^2 + \frac{p'^2_j\gamma^2}{\mathrm{sh}(r_1)^2} + (1 - \mathrm{th}(r_1)^2)\mu_j + n - 1)h_c(r_1) + c\,Q_j(\mathrm{th}(r_1)^{p'_j\gamma}) > 0,$$

ce qui contredit le fait que $h'_c(r)$ soit positive pour $r_0 \leq r \leq r_1$.

Appliquons cela pour c valant 1 ou $\varpi^0_j(a)/\mathrm{th}(a)^{p'_j\gamma}$. Si $c = 1$, on regarde en 0 : on sait que

$$\varpi^0_j(r) = r^{p'_j\gamma} + \left(\frac{\mu_j + 2n - 3}{4(p'_j\gamma + 1)} - \frac{n-2}{4} - \frac{p'_j\gamma}{12}\right) r^{p'_j\gamma+2} + O(r^{p'_j\gamma+4})$$

et

$$\mathrm{th}(r)^{p'_j\gamma} = r^{p'_j\gamma} - \frac{p'_j\gamma}{3} r^{p'_j\gamma+2} + O(r^{p'_j\gamma+4}),$$

donc

$$h_1(r) = \left(\frac{\mu_j + 2n - 3}{4(p'_j\gamma + 1)} - \frac{n-2}{4} + \frac{p'_j\gamma}{4}\right) r^{p'_j\gamma+2} + o(r^{p'_j\gamma+2})$$

On constate donc qu'au voisinage de 0, sauf éventuellement pour un nombre fini d'indice j, $h_1(r) \geq 0$ et $h'_1(r) \geq 0$, avec inégalité stricte si $r > 0$. Par conséquent $h_1(r) \geq 0$ pour tout $r \leq a$, ce qui montre que $\mathrm{th}(r)^{p'_j\gamma} \leq \varpi^0_j(r)$ pour tout $r \leq a$.

Si $c = \varpi^0_j(a)/\mathrm{th}(a)^{p'_j\gamma}$: évidemment $h_c(a) = 0$, et d'après ce qui précède $c > 1$, donc $h_c(r)$ est négative (strictement si $r \neq 0$) au voisinage de $r = 0$. Si jamais h_c n'est pas constamment négative sur $[0, a]$, alors il existe un point $r_0 < a$ où $h_c(r_0) \geq 0$ et $h'_c(r_0) > 0$, ce qui implique $h_c(a) > 0$, contradiction. Donc $h_c(r)$ est négative sur $[0, a]$, ce qui montre l'inégalité voulue.

On établit ensuite un encadrement similaire pour la dérivée $\varpi^{0\prime}_j$. On a vu que $h'_1(r)$ était positive sur $[0, a]$, d'où on obtient immédiatement que

$$\frac{p'_j\gamma}{\mathrm{ch}(r)^2}\mathrm{th}(r)^{p'_j\gamma-1} \leq \varpi^{0\prime}_j(r).$$

En particulier, ${\varpi_j^0}'(r) \geq 0$. D'autre part, les inégalités précédentes permettent d'établir que (sauf éventuellement pour un nombre fini d'indices)

$$\begin{aligned}{\varpi_j^0}''(r) &= -(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)){\varpi_j^0}'(r) + (\mathrm{th}(r)^2 + \frac{p_j'^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + (1-\mathrm{th}(r)^2)\mu_j + n - 1)\varpi_j^0(r) \\ &\leq (\mathrm{th}(r)^2 + \frac{p_j'^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + (1-\mathrm{th}(r)^2)\mu_j + n - 1)\frac{\varpi_j^0(a)}{\mathrm{th}(a)^{p_j'\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j'\gamma}.\end{aligned}$$

Si $p_j'\gamma$ est strictement positif, on majore encore par

$${\varpi_j^0}''(r) \leq (n + p_j'^2\gamma^2 + \mu_j)\frac{\varpi_j^0(a)}{\mathrm{th}(a)^{p_j'\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j'\gamma-2}$$

et on intègre entre 0 et r pour obtenir la majoration

$${\varpi_j^0}'(r) \leq \frac{n + p_j'^2\gamma^2 + \mu_j}{p_j'\gamma - 1}\frac{\varpi_j^0(a)}{\mathrm{th}(a)^{p_j'\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j'\gamma-1}\mathrm{ch}(a)^2.$$

(En fait ceci n'est valable que si $p_j'\gamma > 1$ – qui est le cas qui nous intéresse ici – pour que le terme de droite soit intégrable en 0. Cependant il est possible d'obtenir une majoration similaire quand $0 < p_j'\gamma < 1$ par une méthode un peu plus compliquée, voir (A-1)).

Sinon, si $p_j' = 0$, on a ${\varpi_j^0}''(r) \leq (n+\mu_j)\varpi_j^0(a)$, ce qui donne en intégrant

$${\varpi_j^0}'(r) \leq (n+\mu_j)\varpi_j^0(a)\, r.$$

Les mêmes techniques s'appliquent aux termes en $f_j^k\psi_j e^r + g_j^k\psi_j e^\theta + \omega_j^k\phi_j$. Les fonctions f_j^k, g_j^k et ω_j^k vérifient le système

$$-{f_j}'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right){f_j}' + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2 + \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right)f_j + \frac{2ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}g_j - \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}\omega_j^k = 0$$

$$-{g_j}'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right){g_j}' + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right)g_j - \frac{2ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}f_j = 0$$

$$-{\omega_j}'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right){\omega_j}' + \left(\mathrm{th}(r)^2 + \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}^2(r)} + \frac{\lambda_j + n - 3}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right)\omega_j - \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}f_j = 0$$

Si $j \notin J$ (i.e. $\lambda_j = 0$), le système se ramène à deux équations sur f_j et g_j (la fonction ω_j n'étant pas définie), mais cela ne modifie pas les estimations suivantes. Il faut juste laisser de côté les solutions en $r^{p_j\gamma}$. Le cas $p_j = 0$ est plus particulier puisque les équations pour f_j et g_j deviennent indépendantes ; on traitera ce cas à la fin.

Introduisons les deux fonctions auxiliaires $h_j = f_j + ig_j$ et $k_j = f_j - ig_j$. Les fonctions f_j, h_j, k_j et ω_j vérifient les équations

$$-f_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right) f_j' + \left((\frac{1}{\mathrm{th}(r)} - \frac{p_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)})^2 + (n-2)\mathrm{th}(r)^2 + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right) f_j$$
$$+ \frac{2p_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)} h_j - \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}\omega_j = 0$$

$$-h_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right) h_j' + \left((\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + \frac{p_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)})^2 + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right) h_j$$
$$+ (n-2)\mathrm{th}(r)^2 f_j - \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}\omega_j = 0$$

$$-k_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right) k_j' + \left((\frac{1}{\mathrm{th}(r)} - \frac{p_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)})^2 + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right) k_j$$
$$+ (n-2)\mathrm{th}(r)^2 f_j - \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}\omega_j = 0$$

$$-\omega_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right) \omega_j' + \left(\mathrm{th}(r)^2 + \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}^2(r)} + \frac{\lambda_j + n - 3}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right) \omega_j$$
$$- \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)} f_j = 0$$

Commençons par la solution f_j^1, g_j^1, ω_j^1. On pose aussi $h_j^1 = f_j^1 + ig_j^1$ et $k_j^1 = f_j^1 - ig_j^1$. Les premiers termes du développement sont

$$f_j^1(r) = r^{p_j\gamma+1}\left(1 + r^2(\frac{\lambda_j + 2(n-2)}{4(p_j\gamma+2)} - \frac{n-3}{4} - \frac{p_j\gamma+1}{12}) + O(r^4)\right),$$

$$g_j^1(r) = r^{p_j\gamma+1}\left(-i - ir^2(\frac{\lambda_j + 2(n-2)}{4(p_j\gamma+2)} - \frac{n-3}{4} - \frac{p_j\gamma+1}{12}) + O(r^4)\right),$$

$$\omega_j^1(r) = r^{p_j\gamma+1}\left(-\frac{(\lambda_j)^{1/2}}{4(p_j\gamma+2)}r^3 + O(r^5)\right),$$

$$h_j^1(r) = r^{p_j\gamma+1}\left(2 + O(r^2)\right),$$

$$k_j^1(r) = r^{p_j\gamma+1}\left(\frac{n-2}{12(p_j\gamma+2)}r^4 + O(r^6)\right).$$

Les fonctions f_j^1, h_j^1 et $-\omega_j^1$ sont donc positives et (strictement) croissantes près de $r = 0$. On va montrer par l'absurde que c'est le cas sur tout $[0, a]$.

Supposons donc qu'au moins une des fonctions f_j^1, h_j^1 et $-\omega_j^1$ admettent des maximums locaux sur $]0, a[$. Notons r_0 le plus petit réel de $]0, a[$ en lequel une des trois fonctions f_j^1, h_j^1 et $-\omega_j^1$ admettent un maximum local. Comme ces trois fonctions sont positives et strictement croissantes près de $r = 0$, elles sont strictement positives en r_0. Supposons que ce soit f_j^1 qui admet un maximum local en r_0 (le cas des autres fonctions est similaire). Alors $f_j^{1\prime}(r_0) = 0$ et

$$\begin{aligned} f_j^{1\prime\prime}(r_0) &= \left((\frac{1}{\mathrm{th}(r_0)} - \frac{p_j\gamma}{\mathrm{sh}(r_0)})^2 + (n-2)\mathrm{th}(r_0)^2 + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r_0)^2} + n - 1 \right) f_j^1(r_0) \\ &+ \frac{2p_j\gamma}{\mathrm{sh}(r_0)\mathrm{th}(r_0)} h_j^1(r_0) - \frac{2\mathrm{th}(r_0)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r_0)} \omega_j^1(r_0) \\ &> 0 \end{aligned}$$

ce qui contredit la possibilité d'un maximum local en r_0.

La même technique permet de montrer de ig_j^1 et k_j^1 sont aussi positives et croissantes sur $[0, a]$. On en déduit immédiatement que $|g_j^1| \leq f_j^1$ et que $|g_j^{1\prime}| \leq f_j^{1\prime}$.

Posons maintenant $d_j^1(r) = f_j^1(r) - \frac{f_j^1(a)}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}} \mathrm{th}(r)^{p_j\gamma}$. Cette fonction vérifie l'équation

$$\begin{aligned} -d_j^{1\prime\prime} - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r) \right) d_j^{1\prime} + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2 + \frac{p_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2} + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1 \right) d_j^1 \\ + \frac{2ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)} g_j^1 - \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)} \omega_j^1 + \frac{f_j^1(a)}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}} Q(r) = 0 \end{aligned}$$

où

$$Q(r) = \left(\frac{p_j^2\gamma^2 - (n-3)p_j\gamma + \lambda}{\mathrm{ch}(r)^2} + \frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2 + n - 1 \right) \mathrm{th}(r)^{p_j\gamma}.$$

La quantité $Q(r)$ est positive sur $[0, a]$ sauf éventuellement pour un nombre fini d'indices j. La même technique que précédemment permet alors de montrer que si il existe r_0 pour lequel $d_j^1(r_0) \geq 0$ et $d_j^{1\prime}(r_0) > 0$, alors $d_j^1(r) > 0$ et $d_j^{1\prime}(r) \leq 0$ pour tout $r \in]r_0, a]$. Comme $d_j^1(a)$ est nulle et que d_j^1 est négative et décroissante au voisinage de 0, on en déduit d_j^1 ne change pas de signe sur $[0, a]$, et donc que

$$f_j^1(r) \leq \frac{f_j^1(a)}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}} \mathrm{th}(r)^{p_j\gamma}.$$

Le même genre d'argument montre que $|\omega_j^1(r)| \leq \frac{|\omega_j^1(a)|}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}} \mathrm{th}(r)^{p_j\gamma}$ sauf éventuellement pour un nombre fini d'indices.

On déduit de ces majorations une majoration de $f_j^{1\prime}(r)$. En effet, comme $f_j^{1\prime}(r) \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} f_j^{1\prime\prime}(r) &\leq \left((\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + \frac{p_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)})^2 + (n-2)\mathrm{th}(r)^2 + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1 \right) f_j^1 - \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)} \omega_j^1 \\ &\leq \left((\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + \frac{p_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)})^2 + (n-2)\mathrm{th}(r)^2 + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1 \right) \frac{f_j^1(a)}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}} \mathrm{th}(r)^{p_j\gamma} \\ &+ \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)} \frac{|\omega_j^1(a)|}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}} \mathrm{th}(r)^{p_j\gamma} \\ &\leq \left((1 + p_j\gamma)^2 + 2n - 3 + \lambda_j \right) \frac{f_j^1(a)}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}} \mathrm{th}(r)^{p_j\gamma - 2} + 2(\lambda_j)^{1/2} \frac{|\omega_j^1(a)|}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}} \mathrm{th}(r)^{p_j\gamma + 1}. \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et r on obtient

$$f_j^{1\prime}(r) \leq \frac{(1+p_j\gamma)^2+2n-3+\lambda_j}{p_j\gamma-1}\frac{f_j^1(a)\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma-1}+\frac{2(\lambda_j)^{1/2}}{p_j\gamma+2}\frac{|\omega_j^1(a)|\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma+2}.$$

De la même manière on démontre que

$$\omega_j^{1\prime}(r) \leq \frac{p_j^2\gamma^2+n-2+\lambda_j}{p_j\gamma-1}\frac{|\omega_j^1(a)\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma-1}+\frac{2(\lambda_j)^{1/2}}{p_j\gamma+2}\frac{f_j^1(a)\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)^{p_j\gamma}}\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma+2}.$$

On procède de la même manière pour les autres solutions du système. Si $\lambda_j \neq 0$, les premiers termes du développement de f_j^0, g_j^0 et ω_j^0 sont

$$f_j^0(r) = r^{p_j\gamma}\left(-\frac{(\lambda_j)^{1/2}(3+4p_j\gamma)}{8(p_j\gamma+2)(p_j\gamma+1)}r^3+O(r^5)\right),$$

$$g_j^0(r) = r^{p_j\gamma}\left(\frac{ip_j\gamma(\lambda_j)^{1/2}}{8(p_j\gamma+2)(p_j\gamma+1)}r^3+O(r^5)\right),$$

$$\omega_j^0(r) = r^{p_j\gamma}\left(1+r^2(\frac{\lambda_j+3(n-2)}{4(p_j\gamma+1)}-\frac{n-2}{4}-\frac{p_j\gamma}{12})+O(r^4)\right).$$

On a alors

$$h_j^0(r) = f_j^0(r)+ig_j^0(r) = r^{p_j\gamma}\left(-\frac{(\lambda_j)^{1/2}}{2(p_j\gamma+2)}r^3+O(r^5)\right),$$

$$k_j^0(r) = f_j^0(r)-ig_j^0(r) = r^{p_j\gamma}\left(-\frac{(\lambda_j)^{1/2}}{4(p_j\gamma+1)}r^3+O(r^5)\right).$$

Et pour la solution f_j^{-1}, g_j^{-1}, ω_j^{-1}, on a

$$f_j^{-1}(r) = r^{p_j\gamma-1}\left(1+r^2(\frac{\lambda_j+2(n-1)}{4(p_j\gamma)}-\frac{n-1}{4}-\frac{p_j\gamma-1}{12})+O(r^4)\right),$$

$$g_j^{-1}(r) = r^{p_j\gamma-1}\left(i+ir^2(\frac{\lambda_j+2(n-1)}{4(p_j\gamma)}-\frac{n-1}{4}-\frac{p_j\gamma-1}{12})+O(r^4)\right),$$

$$\omega_j^{-1}(r) = r^{p_j\gamma-1}\left(-\frac{(\lambda_j)^{1/2}}{2(p_j\gamma+1)}r^3+O(r^5)\right).$$

On a alors

$$h_j^{-1}(r) = f_j^{-1}(r)+ig_j^{-1}(r) = r^{p_j\gamma-1}\left(\frac{n-2}{4(p_j\gamma+2)}r^4+O(r^6)\right),$$

$$k_j^{-1}(r) = f_j^{-1}(r)-ig_j^{-1}(r) = r^{p_j\gamma-1}\left(2+O(r^2)\right).$$

Les mêmes techniques que précédemment permettent alors de montrer les inégalités voulues, y compris celles sur h_j^{-1}.

Traitons enfin le cas où $p_j = 0$. Le système se scinde en deux :

$$-f_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right) f_j' + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2 + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right) f_j - \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}\omega_j = 0$$

$$-\omega_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right)\omega_j' + \left(\mathrm{th}(r)^2 + \frac{\lambda_j + n - 3}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right)\omega_j - \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)} f_j = 0$$

d'une part, et

$$-g_j'' - \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right) g_j' + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right) g_j = 0$$

d'autre part.

Les techniques précédentes s'appliquent encore pour donner les majorations suivantes, pour $k = 0$ ou 1 :

$$\begin{aligned}
|f_j^k(r)| &\leq \frac{|f_j^k(a)|}{\mathrm{th}(a)}\mathrm{th}(r) \\
|\omega_j^k(r)| &\leq |\omega_j^k(a)| \\
|\omega_j^{k\prime}(r)| &\leq (\lambda_j + 2n - 3)|\omega_j^k(a)|, r + \frac{2(\lambda_j)^{1/2}}{3}\frac{|f_j^k(a)|\mathrm{ch}(a)^2}{\mathrm{th}(a)}\mathrm{th}(r)^3
\end{aligned}$$

La majoration de $f_j^{k\prime}$ est par contre un peu plus compliquée. En effet, l'inégalité

$$f_j^{k\prime\prime} \leq \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2 + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right) f_j^k - \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}\omega_j^k$$

n'est plus suffisante, le terme de droite n'étant pas intégrable en 0. On utilise alors le fait que pour toute fonction f,

$$f'' + \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)} + (n-2)\mathrm{th}(r)\right) f' = \frac{1}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{ch}(r)^{n-2}}\left(\mathrm{sh}(r)\mathrm{ch}(r)^{n-2} f'\right)'$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{sh}(r)\mathrm{ch}(r)^{n-2} f_j^{k\prime}\right)' &= \left(\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2 + \frac{\lambda_j}{\mathrm{ch}(r)^2} + n - 1\right)\mathrm{sh}(r)\mathrm{ch}(r)^{n-2} f_j^k \\
&\quad - \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda_j)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)}\mathrm{sh}(r)\mathrm{ch}(r)^{n-2}\omega_j^k \\
&\leq (2n - 2 + \lambda_j)\frac{|f_j^k(a)|}{\mathrm{th}(a)}\mathrm{ch}(r)^{n-1} + 2(\lambda_j)^{1/2}|\omega_j^k(a)|\mathrm{sh}(r)^2\mathrm{ch}(r)^{n-4}
\end{aligned}$$

Et en intégrant entre 0 et r on trouve la majoration voulue

$$|f_j^{k\prime}(r)| \leq (2n - 2 + \lambda_j)\frac{|f_j^k(a)|}{\mathrm{th}(a)} + 2(\lambda_j)^{1/2}|\omega_j^1(a)|\mathrm{th}(r)^2. \qquad \text{(A-1)}$$

On obtient de la même façon les majorations voulues pour g_j^1. □

On rappelle l'énoncé du lemme 2.1.3 :

Lemme. *Les fonctions f_j^k, g_j^k, ω_j^k, ϖ_j^0 vérifient les propriétés suivantes, sauf éventuellement pour un nombre fini d'indices j.*

Il existe un polynôme P à deux variables tel que

$$||f_j^k \psi_{j_{|U_a}}||^2 \leq P(\lambda_j, p_j) \left(|f_j^k(a)|^2 + |\omega_j^k(a)|^2\right).$$

La majoration est encore valable si on remplace $f_j^k\psi_j$ dans le terme de gauche par $\omega_j^k\phi_j$, $\omega_j^{k\prime}\phi_j$, $g_j^k\phi_j$ (si $p_j \neq 0$). C'est encore le cas pour $g_j^1\psi_j$ (si $p_j = 0$), $\varpi_j^0\varphi_j$ et $\varpi_j^{0\prime}\varphi_j$ en remplaçant le terme de droite par respectivement $P(\lambda_j, p_j)|g_j^1(a)|^2$ et $P(\lambda_j, p_j')|\varpi_j^0(a)|^2$

La majoration est encore valable (avec le cas échéant les modifications appropriées du terme de droite) en remplaçant $f_j^k\psi_j$ dans le terme de gauche :
par $(f_j^k/\mathrm{th}(r))\psi_j$, $(g_j^k/\mathrm{th}(r))\psi_j$, $f_j^{k\prime}\psi_j$ ou $g_j^{k\prime}\psi_j$, sauf si $k = -1$ et $0 < p_j\gamma \leq 1$; par $(\omega_j^k/\mathrm{th}(r))\phi_j$ ou $(\varpi_j^0/\mathrm{th}(r))\varphi_j$, sauf si $p_j = 0$, resp. $p_j' = 0$;

par $(\omega_j^{k\prime}/\mathrm{th}(r))\phi_j$, $\omega_j^{k\prime\prime}\phi_j$, $(\varpi_j^{0\prime}/\mathrm{th}(r))\varphi_j$ ou $\varpi_j^{0\prime\prime}\varphi_j$, sauf si $0 < p_j\gamma \leq 1$;

par $(f_j^k/\mathrm{th}(r)^2)\psi_j$, $(g_j^k/\mathrm{th}(r)^2)\psi_j$, $(f_j^{k\prime}/\mathrm{th}(r))\psi_j$ ou $(g_j^{k\prime}/\mathrm{th}(r))\psi_j$, sauf si $p_j\gamma \leq 1$, ou si $p_j\gamma \leq 2$ et $k = -1$;

par $(\omega_j^k/\mathrm{th}(r)^2)\phi_j$ ou $(\varpi_j^0/\mathrm{th}(r)^2)\varphi_j$, sauf si $p_j\gamma \leq 1$;

par $(f_j^{k\prime}/\mathrm{th}(r) - f_j^k/\mathrm{th}(r)^2)\psi_j$, $(g_j^{k\prime}/\mathrm{th}(r) - g_j^k/\mathrm{th}(r)^2)\psi_j$, $f_j^{k\prime\prime}\psi_j$ ou $g_j^{k\prime\prime}\psi_j$, sauf si $0 < p_j\gamma \leq 1$, ou si $0 < p_j\gamma \leq 2$ et $k = -1$;

enfin, par $(p_j^2\gamma^2 g_j^k/\mathrm{sh}(r)^2 - ip_j\gamma f_j^{k\prime}/\mathrm{sh}(r) - p_j\gamma f_j^k/\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r))\psi_j^k$, sauf si $0 < p_j\gamma \leq 1$.

Démonstration. Les seules majorations qui ne découlent pas immédiatement du lemme précédent sont celles des deux dernières lignes.

Commençons par le terme $(f_j^{k\prime}/\mathrm{th}(r) - f_j^k/\mathrm{th}(r)^2)\psi_j$. Le seul cas où la majoration n'est pas immédiate est quand $p_j = 0$. Posons alors

$$q_j = f_j^{k\prime} - \frac{1}{\mathrm{th}(r)} f_j^k.$$

On a

$$\begin{aligned} q_j' + \frac{2}{\mathrm{th}(r)} q_j &= f_j^{k\prime\prime} + \frac{1}{\mathrm{th}(r)} f_j^{k\prime} - (\frac{1}{\mathrm{th}(r)^2} + 1) f_j^k \\ &= -(n-2)\mathrm{th}(r) f_j^{k\prime} + \left(\frac{\lambda}{\mathrm{ch}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2 + n - 2\right) f_j^k - \frac{2\mathrm{th}(r)(\lambda)^{1/2}}{\mathrm{ch}(r)} \omega_j^k \end{aligned}$$

soit

$$(q_j \mathrm{sh}(r)^2)' = \mathrm{sh}(r)^2 \left(-(n-2)\mathrm{th}(r) f_j^{k\prime} + \left(\frac{\lambda}{\mathrm{ch}(r)^2} + (n-2)\mathrm{th}(r)^2 + n - 2\right) f_j^k\right.$$

$$-\frac{2\text{th}(r)(\lambda)^{1/2}}{\text{ch}(r)}\omega_j^k\Bigg).$$

Avec les majorations du lemme précédent, on trouve de suite le résultat voulu en intégrant entre 0 et r puis en prenant la norme entre 0 et a. Le termes en $f_j^{k\prime\prime}\psi_j$ suit directement de l'égalité

$$f_j^{k\prime\prime} = -\left(\frac{1}{\text{th}(r)} + (n-2)\text{th}(r)\right) f_j^{k\prime} + \left(\frac{1}{\text{th}(r)^2} + (n-2)\text{th}(r)^2 + \frac{p_j^2\gamma^2}{\text{th}(r)^2} + \frac{\lambda}{\text{ch}(r)^2} + n - 1\right) f_j^k$$
$$+\frac{2ip_j\gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)}g_j^k - \frac{2\text{th}(r)(\lambda)^{1/2}}{\text{ch}(r)}\omega_j^k$$

Les termes en $(g_j^{k\prime}/\text{th}(r) - g_j^k/\text{th}(r)^2)\psi_j$ et $g_j^{k\prime\prime}\psi_j$ se traitent identiquement.

Enfin, la majoration pour le terme en $(p_j^2\gamma^2 g_j^k/\text{sh}(r)^2 - ip_j\gamma f_j^{k\prime}/\text{sh}(r) - p_j\gamma f_j^k/\text{sh}(r)\text{th}(r))\psi_j^k$ est immédiate sauf quand $k=-1$ et $p_j\gamma \leq 2$. Dans ce cas, on pose

$$w = g_j^{-1\prime} + \frac{g_j^{-1}}{\text{th}(r)} - \frac{ip_j\gamma f_j^{-1}}{\text{sh}(r)}.$$

On réintroduit la fonction auxiliaire $h_j^{-1} = f_j^{-1} + ig_j^{-1}$. Alors

$$w = g_j^{-1\prime} + \frac{g_j^{-1}}{\text{th}(r)} - \frac{p_j\gamma g_j^{-1}}{\text{sh}(r)} - \frac{ip_j\gamma h_j^{-1}}{\text{sh}(r)},$$

et

$$\begin{aligned}
w' &= g_j^{-1\prime\prime} + \left(\frac{1}{\text{th}(r)} - \frac{p_j\gamma}{\text{sh}(r)}\right) g_j^{-1\prime} + \left(1 - \frac{1}{\text{th}(r)^2} + \frac{p_j\gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)}\right) g_j^{-1} \\
&\quad - \frac{ip_j\gamma h_j^{-1\prime}}{\text{sh}(r)} + \frac{ip_j\gamma h_j^{-1}}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} \\
&= \left(-(n-2)\text{th}(r) - \frac{p_j\gamma}{\text{sh}(r)}\right) g_j^{-1\prime} + \left(n + \frac{p_j^2\gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\lambda}{\text{ch}(r)^2} + \frac{p_j\gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)}\right) g_j^{-1} \\
&\quad - \frac{2ip_j\gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} f_j^{-1} - \frac{ip_j\gamma h_j^{-1\prime}}{\text{sh}(r)} + \frac{ip_j\gamma h_j^{-1}}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} \\
&= \left(-(n-2)\text{th}(r) - \frac{p_j\gamma}{\text{sh}(r)}\right) g_j^{-1\prime} + \left(n + \frac{p_j^2\gamma^2}{\text{sh}(r)^2} + \frac{\lambda}{\text{ch}(r)^2} - \frac{p_j\gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)}\right) g_j^{-1} \\
&\quad - \frac{ip_j\gamma h_j^{-1\prime}}{\text{sh}(r)} - \frac{ip_j\gamma h_j^{-1}}{\text{sh}(r)\text{th}(r)}
\end{aligned}$$

On a alors

$$w' + \frac{p_j\gamma}{\text{sh}(r)}w = -(n-2)\text{th}(r)g_j^{-1\prime} + \left(n + \frac{\lambda}{\text{ch}(r)^2}\right) g_j^{-1} - \frac{ip_j\gamma h_j^{-1\prime}}{\text{sh}(r)} - \left(\frac{ip_j\gamma}{\text{sh}(r)\text{th}(r)} + \frac{ip_j^2\gamma^2}{\text{sh}(r)^2}\right) h_j^{-1}$$

soit

$$(w\,\text{th}(\frac{r}{2})^{p_j\gamma})' = \text{th}(\frac{r}{2})^{p_j\gamma}\Bigg(-(n-2)\text{th}(r)g_j^{-1\prime} + (n + \frac{\lambda}{\text{ch}(r)^2})g_j^{-1} - \frac{ip_j\gamma h_j^{-1\prime}}{\text{sh}(r)}$$

$$-(\frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)}+\frac{ip_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2})h_j^{-1}\Big)$$

En intégrant entre 0 et r, et à l'aide des majorations du lemme précédent, on trouve

$$|w(r)| \leq Q(\lambda, p_j)\left(|f_j^{-1}(a)| + |\omega_j^{-1}|\right)\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma}$$

puis en introduisant cette majoration dans l'égalité

$$w' + \frac{p_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)}w = -(n-2)\mathrm{th}(r)g_j^{-1\prime} + \left(n + \frac{\lambda}{\mathrm{ch}(r)^2}\right)g_j^{-1} - \frac{ip_j\gamma h_j^{-1\prime}}{\mathrm{sh}(r)} - \left(\frac{ip_j\gamma}{\mathrm{sh}(r)\mathrm{th}(r)} + \frac{ip_j^2\gamma^2}{\mathrm{sh}(r)^2}\right)h_j^{-1},$$

on trouve

$$|w'(r)| \leq Q'(\lambda, p_j)\left(|f_j^{-1}(a)| + |\omega_j^{-1}|\right)\mathrm{th}(r)^{p_j\gamma-1},$$

où Q et Q' sont deux polynômes à deux variables. En prenant la norme entre 0 et a dans la dernière inégalité on obtient finalement la majoration voulue. □

Bibliographie

[1] M. Anderson. Dehn filling and Einstein metrics in higher dimensions. arXiv :math.DG/0303260, 2003.

[2] A. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[3] G. Besson and M. Bordoni. On the spectrum of Riemannian submersions with totally geodesic fibres. *Rend. Mat. Acc. Lincei*, 9(1) :335–340, 1990.

[4] O. Biquard. Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques. *Astérisque*, 265 :vi+109, 2000.

[5] M. Boileau, B. Leeb, and J. Porti. Uniformization of small 3-orbifolds. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332(1) :57–62, 2001.

[6] J. P. Bourguignon and L. Bérard Bergery. Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesic fibres. *Illinois J. Math.*, 26 :181–200, 1982.

[7] J. Brock and K. Bromberg. On the density of geometrically finite Kleinian groups. *Acta Math.*, 192(1) :33–93, 2004.

[8] E. Calabi. On compact riemannian manifolds with constant curvature, I. *Amer. Math. Soc. Proc. Sympos. Pure Math.*, 3 :155–180, 1961.

[9] J. Cheeger. On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds. In *Geometry of the Laplace operator*, volume 36 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 91–146. Amer.Math.Soc., 1980.

[10] D. DeTurck. Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors. *J. Diff. Geom.*, 18 :157–162, 1983.

[11] M. Gaffney. The heat equation method of Milgram and Rosenbloom for open Riemannian manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 60 :458–466, 1954.

[12] H. Garland. A rigidity theorem for discrete subgroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 129 :1–25, 1967.

[13] C. Hodgson and S. Kerckhoff. Rigidity of hyperbolic cone-manifolds and hyperbolic Dehn surgery. *J. Diff. Geom.*, 48 :1–59, 1998.

[14] C. Hodgson and S. Kerckhoff. Harmonic deformations of hyperbolic 3-manifolds. In *Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Warwick, 2001)*, volume 299 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 41–73. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[15] N. Koiso. A decomposition of the space of Riemannian metrics on a manifold. *Osaka J. Math.*, 16 :423–429, 1979.

[16] S. Kojima. Deformations of hyperbolic 3-cone-manifolds. *J. Differential Geom.*, 49(3) :469–516, 1998.

[17] R. Mazzeo. Elliptic theory of differential edge operators I. *Comm. Partial Diff. Eq.*, 16(10) :1615–1664, 1991.

[18] G. Mostow. Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms. *Publ. IHES*, 34 :53–104, 1968.

[19] B. Nagy and F. Riesz. *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Académie des sciences de Hongrie. Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[20] G. Perel'man. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. arXiv :math.DG/0211159, 2002.

[21] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGrawHill Book Co., New York-Dusseldorf-Johannesburg, 1973.

[22] W. Thurston. *The geometry and topology of three-manifolds.* Princeton University, 1979.

[23] W. Thurston. Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere. In *The Epstein birthday schrift*, volume 1 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 511–549 (electronic). Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.

[24] W. Wasow. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations.* Robert E.Krieger Publishing Co., Huntington, New York, 1976.

[25] A. Weil. On discrete subgroups of Lie groups. *Ann. of Math.*, 72 :369–384, 1960.

[26] H. Weiß. *Local rigidity of 3-dimensional cone-manifolds.* PhD thesis, Eberhard-Karls Universität Tübingen, 2002.