



HAL
open science

Oscillations cohérentes dans un circuit quantique supraconducteur : le SQUID dc

Julien Claudon

► **To cite this version:**

Julien Claudon. Oscillations cohérentes dans un circuit quantique supraconducteur : le SQUID dc. Supraconductivité [cond-mat.supr-con]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT: . tel-00011407

HAL Id: tel-00011407

<https://theses.hal.science/tel-00011407>

Submitted on 18 Jan 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée par

Julien Claudon

pour obtenir le titre de Docteur
de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I
en Physique

Oscillations cohérentes dans un circuit quantique supraconducteur : le SQUID dc

Soutenue publiquement le 27 septembre 2005 devant le jury :

M. VALLADE, Président
H. BOUCHIAT, Rapporteur
B. DOUÇOT, Rapporteur
M. BRUNE, Examineur
J. PEKOLA, Examineur
O. BUISSON, Directeur de thèse

Thèse préparée au
Centre de Recherches sur les Très Basses Températures
(CNRS - Grenoble)

Résumé : Oscillations cohérentes dans un circuit quantique supraconducteur : le SQUID dc

Un SQUID dc polarisé en courant se comporte comme une particule quantique piégée dans un puits de potentiel cubique-quadratique défini par sa fréquence de fond de puits et une barrière d'échappement finie. Le spectre d'énergie du système est quantifié ; la position des niveaux ainsi que leur temps de vie tunnel sont contrôlés par le courant de polarisation et le flux magnétique appliqué.

Au cours de la thèse, l'analyse de l'échappement du fondamental par effet tunnel macroscopique (MQT) a permis de caractériser les bruits sur les paramètres de polarisation. Le MQT est aussi au cœur de la mesure de l'état du SQUID par impulsions de flux de nanosecondes. L'observation d'une dynamique cohérente, excitée par des impulsions micro-onde résonantes, constitue une première étape vers la manipulation de l'état quantique du circuit. Enfin, les processus incohérents sont étudiés quantitativement dans la limite à deux niveaux, à travers des mesures de spectroscopie et de relaxation de l'énergie.

Abstract : *Coherent oscillations in a superconducting quantum circuit : the dc SQUID*

A current-biased dc SQUID behaves as a quantum particle trapped in a cubic-quadratic potential well defined by its bottom well frequency and a finite escape barrier. The energy spectrum of the system is quantified ; both position and tunnel lifetime of energy levels are controlled by the bias current and the applied magnetic flux.

During this PhD, an analysis of the escape of the ground state by macroscopic quantum tunnelling (MQT) leads to a characterization of noises acting on bias parameters. MQT is also fundamental for the measurement of the quantum state of the circuit, realized with nanosecond dc flux pulses. Coherent dynamics, induced by resonant microwave flux pulses, is the first step towards a coherent manipulation of the quantum state of the circuit. Finally, incoherent processes were quantitatively studied in the two level limit, using low power spectroscopy and energy relaxation measurements.

Mots clés

Jonctions Josephson, SQUID dc, qubit, MQT, oscillations cohérentes, décohérence.

Remerciements

Je remercie tout d'abord sincèrement Hélène Bouchiat et Benoît Douçot pour avoir accepté d'être mes rapporteurs et avoir lu ma thèse en plein mois d'août! Thanks very much to Jukka Pekola who accepted to be a member of my thesis committee and travel from Helsinki. Merci aussi à M. Brune d'avoir accepté de faire partie du jury et merci à Marcel Vallade d'en être président.

Ces trois années et demie passées au CRTBT ont été riches et passionnantes, aussi bien sur le plan scientifique qu'humain. Je remercie Henri Godfrin, pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire.

Un gigantesque merci à mon "chef", Olivier Buisson, pour sa disponibilité, son investissement dans les expériences, sa compétence et sa bonne humeur. Il était passionnant de découvrir et de résoudre en équipe les questions soulevées au cours de la thèse. Je te remercie aussi très sincèrement de m'avoir fait confiance et de m'avoir laissé libre de l'organisation de mon travail.

Again, thanks to Jukka who co-directed my master thesis. It was a real pleasure to work with you. Thank you for your dynamism and nice discussions. Thanks also to Jani Kivioja who came two weeks to measure samples during my Ph. D. Je remercie sincèrement Franck Balestro, mon prédécesseur sur ce sujet, pour son fantastique travail de pionnier. Merci également d'avoir "passé le relais" et de m'avoir fait profiter de ton expérience durant mon stage de DEA et au début ma thèse. Merci à Aurélien Fay, que j'ai encadré durant son stage de DEA et avec qui a commencé l'étude sur les problèmes de bruit dans le SQUID. Bonne chance pour la suite! Merci aussi à Sylvain qui a défriché, durant son stage de DEA, une nouvelle méthode de polarisation, riche de promesses pour l'avenir.

Merci aussi aux membres de l'équipe CRTBT-LCMI-LPM²C "Circuits Quantiques Supraconducteurs" : Wiebcke Guichard, Franck Hekking et Laurent Lévy pour leur compétence scientifique et les nombreuses discussions, toujours fructueuses, dans une ambiance détendue. Je remercie également David Schaeffer, Alexandre Ratchov et Frédéric Faure.

Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance aux membres de l'équipe méso : Hervé (merci, en autre, pour la relecture de l'introduction), Klauss (on te ramène ton ampli blindé quand tu veux!), Gérard, Laurent, Cristopher, Vincent, Bernard et Monique qui a gentiment accepté d'être ma tutrice de monitorat. Merci à tous pour votre soutien et vos conseils.

Merci à Pascal Xavier pour son aide sur les logiciels de modélisation hyperfréquence, Philippe Gandit qui m'a souvent remis sur les rails lorsque je débutais en programmation

Lab-View, Philippe Roche avec qui nous avons eu une discussion fort intéressante sur les problèmes liés au bruit et Eddy Collin pour son expérience dans la décohérence des circuits supraconducteurs. Toute ma reconnaissance pour Klaus et Jean-Jacques qui ont assisté aux premières répétitions de ma soutenance de thèse.

Les expériences menées durant ma thèse impliquent un grand nombre de techniques "pointues" (entre autres : cryogénie, électronique bas-bruit et micro-fabrication). Je remercie chaleureusement l'ensemble des services du laboratoire pour leur soutien technique. Sans vous, rien ne serait possible (ou alors infiniment plus lentement).

Gloire au service micro-fabrication : Thierry et Thierry (ils se reconnaîtront) ainsi que Bruno. Vous étiez toujours disponibles lors des inévitables problèmes rencontrés dans la fabrication des échantillons. Merci aussi à Olivier et Christophe qui ont réalisé les capacités planes de filtrage, cruciales pour nos expériences.

Loué soit le service électronique : Jean-Louis, Christophe, Maurice, Guillaume et Gilbert. Merci pour votre disponibilité, votre compétence et votre 6^{ème} sens pour dénicher les boucles de masses sournoises. Un merci particulier pour Julien, avec qui nous avons mis au point une nouvelle électronique de polarisation.

Reconnaissance éternelle aux services cryogénie et mécanique. Merci à Anne et Greg pour les pièces et les conseils, toujours d'une grande qualité.

Même si je m'améliore petit à petit, les tâches administratives ne sont pas encore mon point fort ! Merci à vous Nathalie, Patricia, Martine et Nathalie : heureusement que vous étiez là ! Pour ceci et pour ton aide précieuse sous BibTex, merci Danièle.

Avant de continuer plus avant, ma conscience m'ordonne de m'excuser auprès de toutes les personnes qui m'ont gracieusement fourni en cigarettes... Yannick (qui m'a courageusement remis dans le droit chemin lorsque ma consommation dérapait), Pantxo, Sylvain, Maurice et Bruno : je vous suis reconnaissant pour ces quelques bouffées de fumées qui avaient la saveur inimitable de la gratuité. Plus généralement, merci à l'ensemble des thésards et du personnel du CRTBT dont la bonne humeur fait de ce laboratoire un lieu de travail si agréable. Pantxo, Thomas et Julien : fartez skis et surfs, affûtez crampons et piolets, l'hiver arrive bientôt !

Merci à ma sœur et à mon frère (prudence !), ainsi qu'à mes parents pour leur soutien et une relecture du manuscrit qui n'a pas dû être facile. Merci à mes amis ainsi qu'à mes colloqs éternels (et néanmoins amis) : Nat (remets toi bien) et Vu Hung (cuisinier talentueux et familier du combat de grizzlis sibériens). Merci aussi à la "belle-famille" pour son sens aigü de la fête. Et enfin, *last but not least at all*, merci à mon petit Choupinou qui ensoleille ma vie et mes week-ends depuis bientôt deux ans. C'est promis, nous habiterons un jour ensemble !

Table des matières

Introduction	1
1 Description théorique du SQUID dc	7
1.1 Équations dynamiques	8
1.1.1 La jonction Josephson	8
1.1.2 Dynamique de phase d'une JJ unique - Analogie mécanique	10
1.1.3 Modèle électrique du SQUID dc	11
1.1.4 Équations dynamiques du SQUID - Analogie mécanique	12
1.2 Dynamique de phase du SQUID dc	14
1.2.1 Inductance et nombre de degrés de liberté effectifs	14
1.2.2 États supraconducteurs - Diagramme critique	15
1.2.3 État résistif - hystérésis	17
1.3 Le SQUID : un circuit quantique contrôlable	18
1.3.1 Manipulation et mesure de l'état quantique du SQUID	18
1.3.2 Réduction à un problème unidimensionnel	23
1.3.3 Excitation du SQUID	27
1.4 Caractéristiques du puits de potentiel	29
1.4.1 Développement limité	29
1.4.2 Calcul numérique	30
2 Dispositif expérimental et micro-fabrication	33
2.1 Fabrication des échantillons	34
2.1.1 Lithographie électronique	34
2.1.2 Évaporation sous angle	37
2.1.3 Géométrie des circuits	38
2.1.4 Tests - Connection du circuit	40
2.2 Le dispositif expérimental	41
2.2.1 Principe du montage	41
2.2.2 Génération du signal micro-onde	45
2.3 Blindage et filtrage	47
2.3.1 Blindage	47
2.3.2 Filtrage des lignes	48
2.3.3 Environnement proche du SQUID	49

3	Temps de vie du fondamental, effet tunnel et bruit de flux	55
3.1	Temps de vie du fondamental	56
3.1.1	Effet tunnel et activation thermique	56
3.1.2	Mesure de P_{ech} par impulsions de courant	58
3.1.3	Dépendance en flux - première analyse	60
3.2	Bruit et mesure d'échappement	62
3.2.1	Influence de la fréquence des fluctuations	62
3.2.2	Bruit de flux basse fréquence dans les SQUIDS	66
3.2.3	Discussion : origine et amplitude du bruit de flux	68
3.3	Mesures à deux courants critiques	70
3.3.1	Principe du transfert de puits	70
3.3.2	Résultats expérimentaux	72
4	Spectroscopie et oscillations cohérentes	73
4.1	Niveaux d'énergie et spectroscopie	74
4.1.1	Principe de la spectroscopie de fond de puits	74
4.1.2	Transition $ 0\rangle \rightarrow 1\rangle$: résultats expérimentaux	76
4.1.3	Pompage et transition $ 1\rangle \rightarrow 2\rangle$ - résultats préliminaires	79
4.2	Dynamique cohérente du SQUID couplé à un champ micro-onde	82
4.2.1	La théorie et ses hypothèses	82
4.2.2	Compétition entre anharmonicité et excitation MO	85
4.2.3	Évolution de la fonction d'onde du système	88
4.2.4	Signatures d'un comportement quantique et limite classique	91
4.3	Résultats expérimentaux	94
4.3.1	Le SQUID S_1	94
4.3.2	Vers la limite à deux niveaux : SQUID S_2	98
5	Bruit et processus incohérents	103
5.1	Processus incohérents dans un système à deux niveaux	104
5.1.1	Position du problème	104
5.1.2	La théorie de Bloch-Redfield et ses limites	107
5.1.3	Déphasage adiabatique et fluctuations gaussiennes	109
5.1.4	Généralisation : couplage à plusieurs bains indépendants	111
5.1.5	Bruit et spectroscopie à basse puissance	111
5.2	Les sources de décohérence	112
5.2.1	Bruit sur le courant de polarisation	112
5.2.2	Bruit sur le flux de polarisation	118
5.3	Décohérence : résultats expérimentaux	120
5.3.1	Relaxation de l'état $ 1\rangle$	121
5.3.2	Étude spectroscopique à basse puissance	123
5.3.3	Perspectives d'amélioration	126

6	La mesure nanoseconde	129
6.1	Échappement du fondamental	130
6.1.1	Résultats expérimentaux	130
6.1.2	Bruit sur les paramètres de polarisation	132
6.2	Détection de l'état $ 1\rangle$	134
6.2.1	Optimisation du contraste de la détection	134
6.2.2	Estimation de l'efficacité de la mesure	136
6.2.3	Origines possibles de la perte d'efficacité de la mesure	138
6.3	Mesure des états $ 2\rangle$ et supérieurs (préliminaire)	141
	Conclusions et perspectives	143
A	Paramètres des SQUIDs mesurés	155
B	Programmes d'analyse de données	157
C	Matrice de l'opérateur \tilde{X} dans la base $\{ n\rangle\}$, fonction d'onde des états $n\rangle$	159
D	Passage à la représentation ">*	161
E	Fonctions de corrélation et densités spectrales	165
E.1	Signal aléatoire classique	165
E.2	Signal aléatoire quantique	166
E.3	Environnement décrit par une impédance	167
F	Publications	169

Introduction

Parmi les lois de la mécanique quantique, le principe de superposition est sans doute celle qui heurte le plus l'intuition. Si on considère une grandeur physique observable, un système quantique est en effet susceptible d'exister dans une superposition linéaire d'états propres associés à cette observable. Par exemple, une particule microscopique peut simultanément occuper deux positions. L'opération de mesure donne alors un résultat parmi les diverses possibilités et l'état du système est projeté dans l'état propre correspondant : c'est la réduction du paquet d'onde.

L'application du principe de superposition à un ensemble de particules quantiques conduit à une autre propriété très surprenante : l'intrication ou enchevêtrement d'états. Dans un cadre classique, deux particules peuvent toujours être décrites indépendamment l'une de l'autre, même après qu'elles aient interagi. Par contre, la collision entre deux particules quantiques génère un état intriqué. Il n'est alors plus possible de décrire les particules séparément ; une mesure réalisée sur une particule affecte profondément l'état de l'autre. Cet état enchevêtré ne dépend pas de la séparation spatiale des particules. L'existence de ces corrélations quantiques non locales a été mise en évidence pour la première fois sur des paires photons intriqués [1].

Transposé aux objets macroscopiques qui nous sont familiers, le principe de superposition conduit à des résultats étranges. La situation est stigmatisée par le célèbre paradoxe du chat de Schrödinger, qui décrit un chat suspendu entre la vie et la mort [2]. Or, le bon sens rappelle qu'un chat est vivant *ou* mort. Pourquoi ne peut-il exister dans la superposition " $|\text{vivant}\rangle + |\text{mort}\rangle$ " ? Le monde classique qui nous entoure peut être décrit comme une collection énorme de degrés de libertés. Lorsqu'un système est couplé à ce jeu infini de degrés de libertés, les superpositions quantiques d'états sont rapidement dégradées en mélanges statistiques. Ce mécanisme, nommé décohérence [3], est d'autant plus rapide que le système considéré est fortement couplé à son environnement. Un objet macroscopique comme le chat de Schrödinger est intrinsèquement fortement couplé à son environnement. Le temps de survie d'une superposition d'états " $|\text{vivant}\rangle + |\text{mort}\rangle$ " est alors extrêmement faible. Après une durée si courte qu'elle est inaccessible à l'expérience, le chat est vivant *ou* mort.

L'étude de ces propriétés fondamentales est déjà un objectif passionnant en soi. Dans les années 90, l'intérêt porté à ces phénomènes a été encore renforcé : il est apparu que la mécanique quantique pouvait être utilisée pour traiter efficacement l'information et réaliser certains calculs.

L'architecture d'un processeur quantique tel qu'on la conçoit actuellement repose sur l'association de systèmes à deux niveaux : les qubits (abréviation de *quantum bits*) [4, 5]. Contrairement à un bit classique, qui adopte l'état logique 1 ou 0, un qubit peut être dans une superposition cohérente arbitraire d'états logiques $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. En contrôlant le couplage entre deux qubits, on réalise une porte logique quantique qui intrique l'état des deux qubits. En répétant l'opération, on parvient ainsi à créer des états intriqués à l'échelle du processeur entier. Ces états intriqués complexes permettent de réaliser certains calculs beaucoup plus efficacement qu'avec un ordinateur classique.

A ce jour, quelques algorithmes quantiques d'un réel intérêt pratique ont été découverts. Les principaux concernent la factorisation de nombres entiers [6], la recherche dans une base de données non triées [7] et la simulation efficace de systèmes physiques quantiques [8]. L'algorithme de Shor permet de factoriser des nombres entiers en facteurs premiers en un temps polynomial avec la taille du nombre. Pour les algorithmes classiques connus, cette dépendance est exponentielle, conduisant pour les grands nombres à des calculs irréalisables en pratique. De manière schématique, les algorithmes quantiques exploitent l'existence des superpositions d'états et le fait que les lois de la mécanique quantique sont linéaires. Ceci permet un parallélisme massif des calculs. Les choses sont toutefois plus complexes. En effet, la mesure d'un état quantique est par essence projective : lorsque l'on mesure la superposition d'états en sortie, on obtient uniquement un résultat particulier et la superposition d'états est détruite. Pour conserver les bénéfices du parallélisme quantique, il faut gérer astucieusement l'intrication des qubits et la mesure.

Un processeur quantique utile, c'est à dire dépassant les capacités des ordinateurs classiques actuels, doit comporter plusieurs milliers de qubit, un nombre (très) largement supérieur aux réalisations expérimentales actuelles. Toutefois, le contrôle d'états intriqués moins complexes présente déjà un grand intérêt. Ainsi, l'intrication d'une paire de qubits est suffisante pour permettre un échange parfaitement sûr de clefs cryptographiques [9].

La manipulation d'états intriqués possède donc un enjeu fondamental doublé d'une perspective d'application pratique. D'un point de vue expérimental, la manipulation de l'état quantique d'un système individuel, et plus encore celle de systèmes quantiques intriqués soulève de redoutables difficultés et impose une série de contraintes sévères. Pour limiter la décohérence, ces systèmes doivent être isolés de leur environnement. Par contre, le contrôle de l'intrication (portes logiques) impose une interaction mutuelle forte et contrôlable. Enfin, ils doivent être adressables et mesurables individuellement. Peu de systèmes physiques satisfont, même partiellement, ces conditions.

Parmi les candidats possibles, les systèmes microscopiques constituent un choix naturel, car ils sont relativement peu couplés à leur environnement. Ils conservent ainsi leur cohérence quantique sur des durées T_2 assez longues pour réaliser des opérations logiques élémentaires. Des paires de photons intriqués ont permis l'implémentation de protocoles de cryptographie quantique [10]. En RMN, le nombre 15 ($= 5 \times 3!$) a été factorisé par l'algorithme de Shor en utilisant une molécule comportant sept spins nucléaires [11]. Des expériences d'intrication entre atomes de Rydberg et le champ électromagnétique d'une cavité résonante ont donné une impressionnante série de résultats [12]. Enfin, les expériences

réalisées sur des ions piégés ont connu de récentes et spectaculaires avancées avec, en autres, l'intrication entre quatre ions [13] et le contrôle de trois qubits intriqués [14]. Dans tous ces domaines, le changement d'échelle vers des expériences impliquant plusieurs centaines ou plusieurs milliers de systèmes individuels soulève toutefois de grandes difficultés techniques.

couplage à l'environnement et aux signaux de contrôle	Systèmes microscopiques			
	T_2	T_{op}	T_2 / T_{op}	
	10 s	1 ms	10^4	
	100 ms	1 μ s	10^5	
	1 ms	10 μ s	10^2	
	Circuits supraconducteurs			
	Quantonium	500 ns	10 ns	50

TAB. 1 – Ordres de grandeur des temps de cohérence (T_2) et des temps de manipulation (T_{op}) du système quantique : comparaison entre les systèmes microscopiques et les circuits supraconducteurs. Le rapport T_2/T_{op} donne le nombre typique de manipulations cohérentes réalisables.

Les circuits mésoscopiques supraconducteurs proposent une alternative séduisante aux systèmes microscopiques. En effet, les techniques de lithographie conventionnelles ne posent pas de limite à la fabrication de circuits intégrés complexes. À basse température, les électrons d'un matériau supraconducteur se condensent en paires de Cooper pour former un état quantique macroscopique. L'élément de base des circuits est la jonction Josephson (JJ) réalisée par un lien faible séparant deux condensats supraconducteurs. L'état d'une JJ est caractérisé par deux variables conjuguées : la différence de phase à travers la jonction et la différence de charge entre les deux électrodes. Le comportement d'une JJ est réglé par la compétition entre l'énergie Josephson E_J caractérisant l'intensité du couplage entre les deux phases supraconductrices et l'énergie de charge E_c qui donne le coût électrostatique pour amener une paire de Cooper d'un côté à l'autre de la jonction. Si $E_J \gg E_c$, la phase de la jonction fluctue très peu. À l'inverse, si $E_J \ll E_c$, c'est l'état de charge qui est bien défini. Suivant la balance des énergies E_J et E_c , on peut construire une grande variété de dispositifs. Dans tous les cas, ces circuits mésoscopiques sont fortement couplés à leur environnement (par les fils). Malgré tous les efforts d'optimisation et de filtrage, ils présentent des temps de cohérence largement plus faibles que les systèmes microscopiques. Par contre, ils sont également fortement couplés aux signaux de contrôle, ce qui permet une manipulation rapide de leur état, comme on peut le constater sur le tableau comparatif 1. Finalement, les performances d'un système sont caractérisées par le nombre de manipulations cohérentes réalisables qui est typiquement donné par le rapport T_2/T_{op} . Les expériences comportent en outre une difficulté cryogénique : en raison des faibles éner-

gies caractéristiques mises en jeu, le comportement quantique des circuits n'est observable qu'aux très basses températures atteintes dans les réfrigérateurs à dilution $^3\text{He}/^4\text{He}$ (environ 20 mK).

Une première signature d'un comportement quantique est l'effet tunnel macroscopique (pour un degré de liberté électronique *collectif*). Il a été observé pour la première fois en 1981 dans une jonction dominée par l'énergie Josephson [15], vérifiant ainsi la prédiction théorique de Caldeira et Leggett [16]. Des mesures spectroscopiques ont ensuite démontré que les états de phase d'une JJ similaire possèdent un spectre d'énergie discret [17]. En 1999, Nakamura et al ont réalisé des oscillations cohérentes entre les deux états de charge d'une boîte à paires de Cooper [18]. Un qubit légèrement différent, le "Quantronium" a démontré un temps de cohérence T_2 de l'ordre de 500 ns largement suffisant pour permettre la réalisation d'expériences de cohérence élémentaires (oscillations de Ramsey, écho de spin) [19]. L'analogie entre un spin $\frac{1}{2}$ et un système à deux niveaux permet de transposer les techniques de contrôle issues de la RMN [20]. D'autres qubits ont été développés [21, 22, 23] et le domaine est aujourd'hui soumis à une rude concurrence internationale. Les expériences démontrant l'intrication entre deux qubits, ou entre un Qubit et un résonateur, restent cependant assez rares. La spectroscopie est une première étape pour sonder les effets du couplage entre deux systèmes [24, 25]. L'intrication entre deux circuits a été clairement révélée par l'observation d'oscillations cohérentes dans le domaine temporel [26, 27, 28]. À l'heure actuelle, une seule porte logique contrôlée a été réalisée expérimentalement en utilisant deux qubits de charge [29]. Elle présente toutefois des taux d'erreur assez importants, rédhibitoires pour une utilisation en calcul quantique. En fait, les circuits supraconducteurs restent couplés à de nombreuses sources de décohérence parasites dont l'origine reste souvent un problème ouvert. Leur caractérisation, ainsi que leur effets sur les qubits sont intensivement étudiés [30, 31, 32, 33].

L'objet de ce travail est l'étude de la dynamique quantique d'un circuit supraconducteur : le SQUID dc polarisé en courant. Il est constitué de deux JJs dominées par l'énergie Josephson et couplées au sein d'une boucle supraconductrice (figure 1). Nous verrons que la dynamique de phase d'un tel circuit est analogue aux déplacements d'une particule fictive dans un puits de potentiel à une dimension, également représenté sur la figure 1. Les états vibratoires de la particule fictive conduisent à un spectre d'énergie quantifié. Les états correspondants sont notés $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, ... L'anharmonité du puits de potentiel et l'énergie typique des transitions entre niveaux voisins sont contrôlés à travers deux paramètres : le courant de polarisation et le flux magnétique appliqué à travers la boucle supraconductrice. Le SQUID constitue ainsi un véritable atome artificiel contrôlable. Des impulsions de flux micro-ondes (MO) résonantes induisent des transitions entre les niveaux d'énergie. La mesure de l'état du SQUID est réalisée en abaissant la barrière de potentiel, ce qui induit un échappement sélectif des niveaux excités et donne accès à leur population. Ainsi, système quantique et système de mesure ne font qu'un. Cette simplicité est un atout par rapport à d'autres circuits qui nécessitent un dispositif de mesure auxiliaire.

Ce circuit permet de réaliser une grande variété d'expériences impliquant une physique

très riche. Dans une perspective "information quantique", il peut être vu comme un qubit de phase si on se restreint aux deux premiers niveaux. Mais il autorise également des situations plus exotiques, mettant en jeu trois niveaux ou plus. C'est un système non-linéaire avec une anharmonicité réglable. En changeant les paramètres de polarisation, on passe continuellement d'un système très peu anharmonique, pratiquement équivalent à un oscillateur harmonique, à un système avec des effets non linéaires marqués.

A plus long terme, la caractérisation des propriétés du SQUID (temps de relaxation, de décohérence, fidélité de la mesure) pose les bases d'une expérience manipulant l'intrication entre le SQUID et une boîte à paires de Cooper [34]. Cette situation transpose en matière condensée les expériences d'intrication entre un atome de Rydberg (boîte à paires de Cooper) et un mode résonant d'une cavité électromagnétique (SQUID) [12].

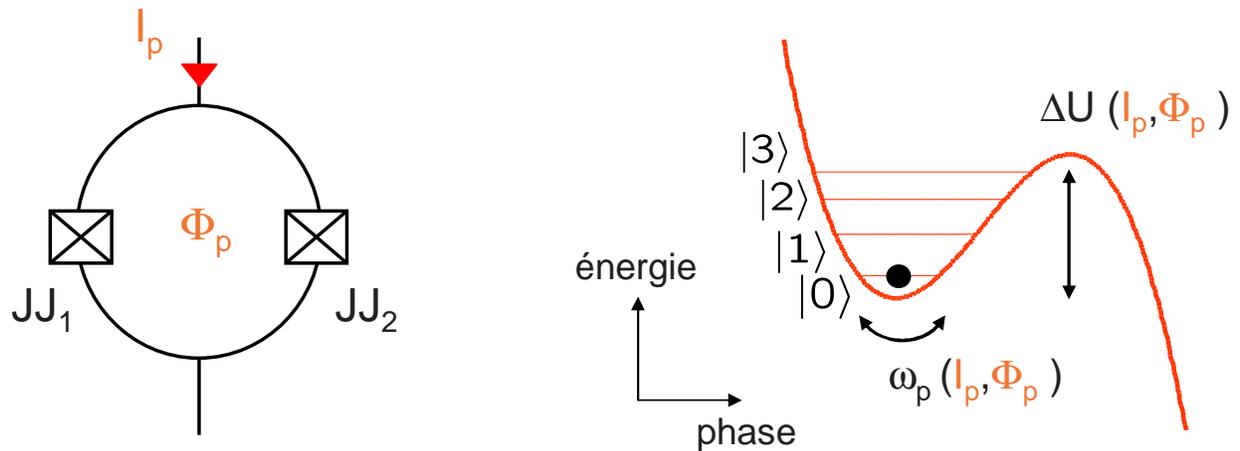


FIG. 1 – **À gauche** : le SQUID dc polarisé par un courant I_p et un flux Φ_p . **À droite** : le système physique équivalent.

Organisation du manuscrit

Le manuscrit est organisé en six chapitres. Le premier décrit la jonction Josephson et le SQUID dc. L'accent est mis sur les analogies mécaniques qui permettent de décrire la dynamique de phase de ces deux systèmes. Il présente également la procédure utilisée pour manipuler l'état quantique du SQUID par impulsions MO et mesurer le résultat de cette manipulation.

Sont développés ensuite les aspects techniques associés aux expériences. Nous aborderons les différentes étapes de la micro-fabrication des échantillons ainsi que les caractéristiques des SQUIDs S_1 et S_2 étudiés. Le dispositif expérimental est présenté en détail en fin de chapitre.

Les chapitres suivants exposent les résultats expérimentaux. L'expérience la plus simple révélant un comportement quantique est l'observation de l'effet tunnel macroscopique. Nous montrerons que ces mesures fournissent en outre un outil sensible pour caractériser les fluc-

tuations basse fréquence des paramètres de polarisation. En particulier, les deux SQUIDs étudiés présentent un bruit de flux basse fréquence dont l'origine reste à déterminer.

Le chapitre quatre est dédié à la dynamique du SQUID excité par des impulsions micro-ondes résonantes. Nous décrivons d'abord les résultats des expériences de spectroscopie, puis la dynamique cohérente du circuit, observée dans un régime de couplage fort aux MO. De manière analogue aux oscillations de Rabi rencontrées dans un système à deux niveaux, l'état du SQUID oscille suite au couplage avec le champ MO. Toutefois, dépendant de l'amplitude de l'excitation, plus de deux niveaux sont susceptibles d'être impliqués (oscillations multi-niveaux). Les résultats expérimentaux sont parfaitement expliqués par la théorie que nous avons développée.

La visibilité des oscillations cohérentes est limitée par les processus incohérents. Pour améliorer les performances du SQUID, nous avons réalisé une étude expérimentale de la décohérence. Par souci de simplicité, le SQUID est opéré dans ce chapitre dans la limite à deux niveaux. Les sources de décohérence possibles sont analysées, pour retenir uniquement celles qui sont dominantes. Cette analyse permet d'interpréter nos résultats expérimentaux (relaxation de l'énergie et étude spectroscopique dans le régime linéaire).

Enfin, le dernier chapitre est consacré à la caractérisation de la mesure de l'état du SQUID par impulsions de flux rapides (temps de montée : 1.6 ns, durée minimale : 1 ns). L'échappement du fondamental est très bien compris. Nous proposons également une expérience qui permet de déterminer le contraste de détection entre les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Enfin, nous présentons des résultats préliminaires concernant la détection des états $|2\rangle$ et supérieurs.

Chapitre 1

Description théorique du SQUID dc

L'objet de toute cette thèse est l'étude d'un circuit supraconducteur à base de jonctions Josephson (JJ) : le SQUID-dc polarisé en courant. Il est composé de deux JJ couplées au sein d'une boucle supraconductrice d'inductance finie. Nous commençons par présenter la JJ, puis nous montrons que sa dynamique de phase est formellement analogue aux déplacements d'une particule fictive se déplaçant sur un potentiel unidimensionnel en forme de tôle ondulée. Nous établissons ensuite les équations qui gouvernent la dynamique de phase du SQUID. Il existe là aussi une analogie mécanique. Cette fois, la particule fictive qui décrit l'état de phase du SQUID se déplace sur un potentiel à deux dimensions.

En nous appuyant sur l'analogie mécanique, nous examinerons successivement les états supraconducteurs du SQUID et son état résistif. Nous montrons également comment l'inductance de la boucle contrôle le caractère bidimensionnel de la dynamique de phase du SQUID. Si cette inductance est très faible, le SQUID est équivalent à une JJ dont le courant critique est modulé par le flux magnétique. Dans le cas opposé, le mouvement de la particule fictive est réellement à deux dimensions. Les SQUIDs étudiés dans cette thèse sont dans un régime intermédiaire. Leur dynamique se décrit à l'aide d'un seul degré de liberté se déplaçant dans un potentiel unidimensionnel. Par contre, ce potentiel conserve une trace de la bidimensionnalité du problème initial.

Lorsque le SQUID est dans un état supraconducteur, la particule fictive qui décrit son état de phase oscille dans un puits de potentiel harmonique perturbé par un terme cubique. Le système possède alors un spectre d'énergie discret. L'écartement entre niveaux d'énergie et le nombre de niveaux piégés dans le puits sont déterminés par deux paramètres de contrôle expérimentaux : le courant de polarisation et le flux magnétique appliqué à travers la boucle supraconductrice. Le SQUID est ainsi un circuit quantique contrôlable. La troisième partie décrit dans le détail les étapes communes à toutes les expériences réalisées sur le SQUID (manipulation de l'état du système à l'aide d'impulsions micro-ondes résonantes, mesure de l'état quantique par impulsion de flux dc, réinitialisation). Elle se termine par une justification plus complète de la réduction du nombre de degrés de liberté effectifs pour un SQUID d'inductance moyenne.

Enfin, l'interprétation précise des expériences nécessite une bonne connaissance des caractéristiques du puits de potentiel. Nous disposons pour cela de deux méthodes, une

analytique et l'autre numérique. Leurs prévisions sont comparées dans la dernière partie du chapitre.

1.1 Équations dynamiques

1.1.1 La jonction Josephson

Il existe plusieurs types de jonction Josephson [35]. Nous nous intéressons ici à une jonction tunnel symétrique, représentée sur la figure 1.1. Elle est composée de deux électrodes supraconductrices constituées d'un matériau identique, qui sont séparées par une couche d'oxyde dont l'épaisseur varie typiquement entre une dizaine et une trentaine de marches atomiques. Plaçons-nous tout d'abord au dessus de la température critique T_c des électrodes. La faible épaisseur de la barrière d'oxyde autorise le passage par effet tunnel d'électrons d'une électrode à l'autre et conduit à une résistance tunnel R_t . En dessous de T_c , dans chaque électrode, les électrons se condensent dans l'état fondamental supraconducteur, qui peut être vu comme une superposition de paires de Cooper. Fait remarquable, les paires de Cooper peuvent traverser la barrière tunnel sans être détruites : c'est l'effet Josephson. Si on néglige le courant de quasiparticules, source de dissipation, une JJ peut être complètement modélisée par l'association en parallèle d'une capacité C_0 et d'un dipôle purement Josephson (figure 1.1).

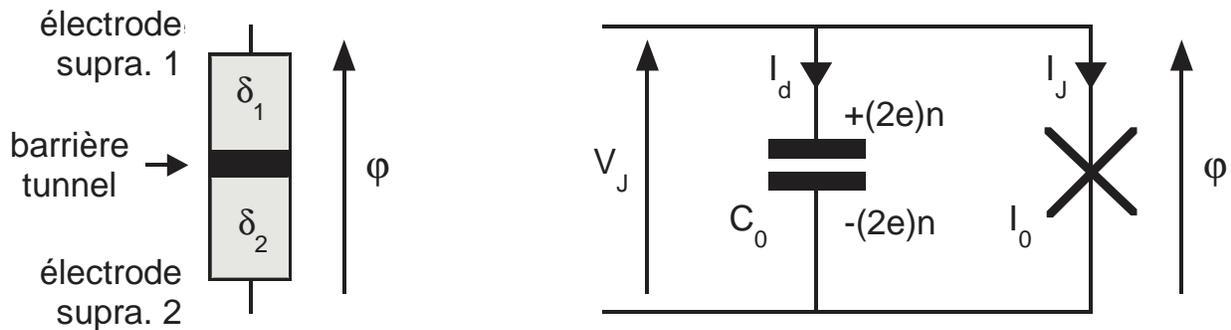


FIG. 1.1 – La jonction Josephson et son modèle électrique.

On note δ_1 et δ_2 la phase des condensats supraconducteurs. On définit la différence de phase $\varphi = \delta_1 - \delta_2$. Le dipôle Josephson rend compte du couplage par effet tunnel des condensats de part et d'autre de la jonction. De manière schématique, le couplage Josephson tend à annuler φ en permettant le transfert de paires de Cooper d'une électrode à l'autre. L'intensité du couplage est caractérisée par l'énergie Josephson E_J :

$$E_J = \frac{\Phi_0}{2\pi} I_0. \quad (1.1)$$

$\Phi_0 = h/2e$ est le quantum de flux et I_0 correspond au courant critique de la jonction. Il s'identifie au courant maximal de paires de Cooper pouvant traverser la jonction lorsque

φ est parfaitement fixée. I_0 est relié à R_t par la relation d'Ambegaokar-Baratov [36, 37] :

$$I_0 R_t = \frac{\pi \Delta}{2e}, \quad (1.2)$$

Δ étant le gap BCS du matériau supraconducteur.

La capacité rend compte du coût électrostatique du passage d'une paire de Cooper d'une armature à l'autre. Si on part de l'équilibre électrostatique, un tel transfert demande l'énergie de charge E_c :

$$E_c = (2e)^2 / 2C_0. \quad (1.3)$$

Dans une description quantique, on introduit les opérateurs $\hat{\varphi}$ et \hat{n} qui mesurent respectivement la différence de phase entre les condensats supraconducteurs et le nombre de paires de Cooper sur une armature en excès par rapport à l'équilibre électrostatique. $\hat{\varphi}$ et \hat{n} sont deux variables conjuguées qui satisfont la relation de commutation et la relation d'incertitude associée [35] :

$$[\hat{\varphi}, \hat{n}] = i \quad (1.4)$$

$$\Delta\varphi\Delta n \geq \frac{1}{2}. \quad (1.5)$$

Pour décrire l'état quantique de la JJ, on a ainsi le choix entre deux représentations : phase et charge. Le choix le plus pertinent dépend du rapport E_J/E_c . Si $E_c \gg E_J, k_B T$, les fluctuations de charges ont un coût énergétique très élevé par rapport aux fluctuations de phase. En d'autres termes, les fluctuations de charges sont gelées : les états de la jonction sont des états quasi-classiques de charge ou de blocage de Coulomb. Inversement, si $E_J \gg E_c, k_B T$, la phase est bien définie et les états de la jonction sont des états quasi-classiques de phase. Enfin, si $E_c \approx E_J \gg k_B T$, charge et phase fluctuent. Le tableau 1.1 donne les énergies caractéristiques E_J et E_c pour les JJs des deux SQUIDS S_1 et S_2 étudiés.

SQUID	I_0 (μA)	C_0 (fF)	E_J/k_B (K)	E_c/k_B (K)
S_1	3.028	760	72.2	0.0049
S_2	1.242	560	29.6	0.0066

TAB. 1.1 – Énergie Josephson et énergie de charge des JJs des SQUIDS S_1 et S_2 .

Les fluctuations de phase sont ici négligeables devant les fluctuations de charge. La représentation "phase" est ainsi le choix le plus naturel pour décrire l'état du système. Dans la suite, nous adoptons une démarche semi-classique. On traite φ comme une variable classique et les JJ comme des dipôles soumis aux lois de l'électrocinétique (loi des mailles et conservation du courant). Le dipôle Josephson est parcouru par un courant de paires de Cooper I_J relié à φ par la première équation Josephson [38] :

$$I_J = I_0 \sin \varphi. \quad (1.6)$$

La seconde équation Josephson [38] fait le lien entre les fluctuations de phase et la tension V_J à travers la jonction :

$$V_J = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \dot{\varphi}. \quad (1.7)$$

La capacité est parcourue par un courant de déplacement I_d relié à φ par :

$$I_d = C_0 \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right) \ddot{\varphi}. \quad (1.8)$$

1.1.2 Dynamique de phase d'une JJ unique - Analogie mécanique

En utilisant les lois de l'électrocinétique, nous établissons dans ce paragraphe l'équation qui régit la dynamique classique de phase φ d'une JJ. La loi de conservation du courant nous donne :

$$I_p = I_J + I_d. \quad (1.9)$$

En exprimant I_J et I_d en fonction de la différence de phase φ grâce aux expressions (1.6) et (1.8), on trouve que la relation précédente se met sous la forme :

$$m\ddot{\varphi} = -\partial_\varphi U(\varphi), \quad (1.10)$$

Ainsi la dynamique de la phase φ est analogue à un problème de mécanique. Formellement, le problème se ramène à l'étude de la dynamique d'une particule fictive de masse $m = C_0 \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2$, dont la position est repérée par la coordonnée φ et qui se déplace dans un espace à une dimension où règne un potentiel $U(\varphi)$ donné par [39, 40] :

$$U(\varphi) = -E_J \left(\cos \varphi + \frac{I_p}{I_0} \varphi \right). \quad (1.11)$$

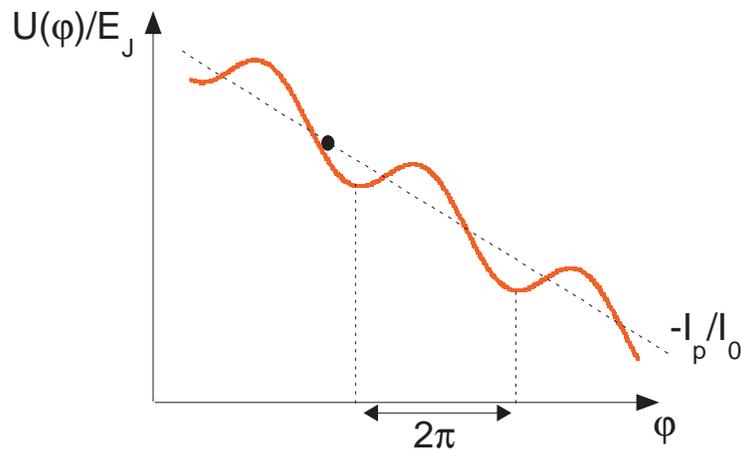


FIG. 1.2 – Potentiel en tôle ondulée.

Ce potentiel, dessiné sur la figure 1.2, présente une forme de tôle ondulée avec une pente moyenne qui est gouvernée par le rapport $-I_p/I_0$. Lorsque $I_p < I_0$, le potentiel présente des minima locaux régulièrement espacés de 2π qui peuvent piéger la particule. Lorsque I_p dépasse la valeur critique I_0 , ces minima disparaissent. Nous reviendrons plus tard sur les différents états de phases possibles dans ce type de potentiel. Nous allons établir par la même méthode l'équation qui gouverne la dynamique de phase du SQUID. Cette dernière est également reliée à une analogie mécanique, plus complexe que dans le cas de la JJ.

1.1.3 Modèle électrique du SQUID dc

Le schéma électrique du SQUID dc est représenté sur la figure 1.3. Il est constitué de deux JJ, notées 1 et 2, couplées au sein d'une boucle supraconductrice. On appelle respectivement φ_1 et φ_2 les différences de phase à travers les jonctions 1 et 2. A priori, chacune de ces jonctions est caractérisée par son courant critique et sa capacité. En pratique, nous avons utilisé des jonctions de grande surface ($\sim 15 \mu\text{m}^2$) réalisées en même temps. On peut donc légitimement supposer que les capacités des deux JJ sont identiques et on note C_0 la valeur commune. Concernant une éventuelle asymétrie des courants critiques, des mesures très récentes montrent qu'elle est de l'ordre de quelques pourcents. Elle sera négligée dans la suite et on note I_0 le courant critique d'une jonction. La boucle du SQUID possède une auto-inductance L_s . Chacun des bras est caractérisé par son auto-inductance, respectivement L_1 et L_2 . L'interaction magnétique entre les deux bras est donnée par le coefficient de mutuelle M . On caractérise la dissymétrie d'inductance par le paramètre $\eta = (L_2 - L_1)/L_s$. Cette asymétrie a une origine purement géométrique : les deux bras du SQUID n'ont pas la même longueur. η est en pratique de l'ordre de 40% et domine largement l'asymétrie en courant critique.

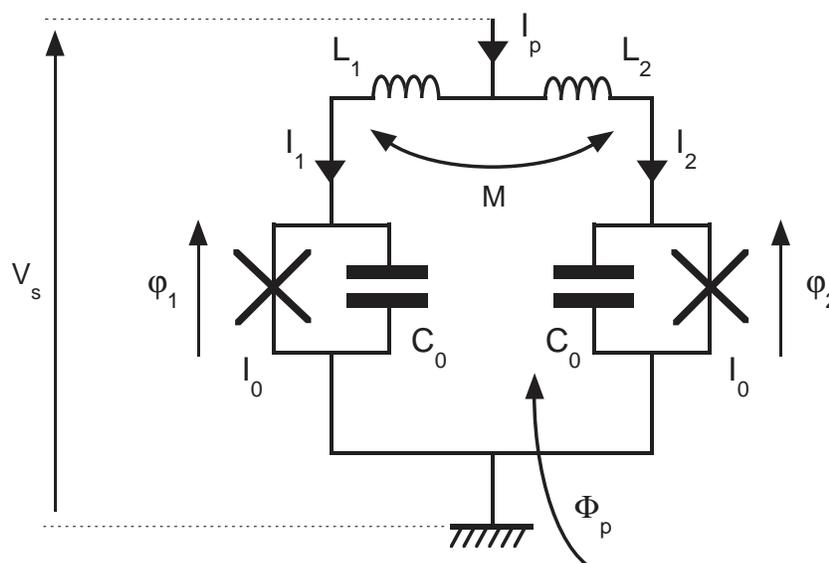


FIG. 1.3 – Modèle électrique du SQUID dc.

Le circuit est polarisé par un courant I_p constant qui se scinde en deux au niveau de la boucle. On note respectivement I_1 et I_2 les courants qui traversent les bras 1 et 2. On applique un flux de polarisation Φ_p à travers la boucle supraconductrice. À cause des phénomènes d'écrantage, le flux total Φ_T qui traverse la boucle est différent de Φ_p . Il est commode d'introduire le courant d'écrantage $J(\varphi_1, \varphi_2)$ défini de telle sorte que

$$\begin{aligned} I_1 &= I_p/2 - J(\varphi_1, \varphi_2) \\ I_2 &= I_p/2 + J(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, l'origine physique de ces courants d'écrantage est double. Une première contribution est donnée par les supercourants qui s'ajustent pour satisfaire la quantification du fluxoïde dans la boucle et l'autre est liée à l'inductance du SQUID.

1.1.4 Équations dynamiques du SQUID - Analogie mécanique

Ce paragraphe résume les calculs de la référence [41] qui aboutissent aux équations classiques gouvernant l'évolution temporelle des phases φ_1 et φ_2 . En utilisant la caractéristique intensité - phase du dipôle Josephson et celle des capacités, données respectivement par (1.6) et (1.8), ainsi que les lois de l'électrostatique, on obtient le système couplé :

$$\begin{cases} C_0 \frac{\Phi_0}{2\pi} \ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{2} I_p - I_0 \sin \varphi_1 - J(\varphi_1, \varphi_2) \\ C_0 \frac{\Phi_0}{2\pi} \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{2} I_p - I_0 \sin \varphi_2 + J(\varphi_1, \varphi_2). \end{cases} \quad (1.13)$$

Ainsi, le couplage entre les jonctions 1 et 2 se fait par l'intermédiaire des courants d'écrantage qui circulent le long de la boucle. Il s'agit maintenant d'exprimer $J(\varphi_1, \varphi_2)$ en fonction des paramètres de polarisation I_p et Φ_p .

Expression du courant d'écrantage. La quantification du fluxoïde piégé dans la boucle supraconductrice impose la condition sur les phases :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \frac{\Phi_T}{\Phi_0}. \quad (1.14)$$

D'après le principe de superposition, le flux total Φ_T qui traverse la boucle est la somme de trois termes : le flux extérieur appliqué Φ_p , auquel s'ajoutent les contributions de chacun des deux bras. Une analyse détaillée de ces contributions montre que Φ_T se met sous la forme :

$$\Phi_T = \Phi_p + L_s J + \frac{1}{2} \eta L_s I_p. \quad (1.15)$$

En reportant l'expression (1.14) dans la relation (1.15), on déduit le courant d'écrantage en fonction des phases φ_1 et φ_2 , ainsi que des paramètres de polarisation :

$$J(\varphi_1, \varphi_2) = b I_0 \left(\varphi_1 - \varphi_2 - 2\pi \frac{\Phi_p}{\Phi_0} \right) - \frac{\eta}{2} I_p. \quad (1.16)$$

Le paramètre adimensionné b compare l'inductance de la boucle à celle d'une jonction et s'écrit $b = \Phi_0 / (2\pi L_s I_0)$.

Analogie mécanique. En substituant l'expression de $J(\varphi_1, \varphi_2)$ donnée par (1.16) dans le système (1.13) et en introduisant les variables x et y définies par :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ y &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

les équations dynamiques prennent une forme analogue à un problème de mécanique [42] :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\partial_x U(x, y) \\ m\ddot{y} = -\partial_y U(x, y). \end{cases} \quad (1.18)$$

La dynamique des phases x et y est identique à celle d'une particule fictive à deux degrés de liberté, de masse $m = 2C_0 \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2$. Sa position est repérée par les coordonnées (x, y) et elle se déplace sur une surface de potentiel $U(x, y)$ s'écrivant :

$$U(x, y) = U_0 [-sx - \cos x \cos y - \eta sy + b(y - y_B)^2]. \quad (1.19)$$

L'échelle d'énergie caractéristique U_0 du potentiel est l'énergie Josephson totale du SQUID, soit $U_0 = 2E_J$ avec E_J l'énergie Josephson d'une jonction, donnée par la relation (1.1). La forme du potentiel est gouvernée par les paramètres de construction du SQUID b et η . Elle dépend également du point de polarisation (I_p, Φ_p) par l'intermédiaire des paramètres de polarisation réduits : $s = I_p / 2I_0$ et $y_B = \pi(\Phi_p / \Phi_0)$. Le tableau suivant résume les éléments gouvernant la dynamique du SQUID en la comparant à celle d'une jonction Josephson unique.

	Jonction Josephson	SQUID
Masse de la particule fictive	$C_0 \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2$	$2C_0 \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2$
Nombre de degrés de liberté	1	2
Coordonnée(s) de la particule	φ	$\begin{cases} x = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 \\ y = (\varphi_1 - \varphi_2)/2 \end{cases}$
Forme du potentiel	$U(\varphi) = -E_J \left(\cos \varphi + \frac{I_p}{I_0} \varphi \right)$	$U(x, y)$
Paramètres de contrôle	I_p	I_p et Φ_p

TAB. 1.2 – Comparaison entre une JJ et un SQUID.

1.2 Dynamique de phase du SQUID dc

L'analogie mécanique introduite à la partie précédente permet de discuter la dynamique de phase du SQUID. L'examen de l'allure du potentiel du SQUID donne beaucoup d'informations sur la dynamique de phase de ce système.

1.2.1 Inductance et nombre de degrés de liberté effectifs

Le SQUID est un système qui possède intrinsèquement deux degrés de liberté. Sont-ils toujours nécessaires dans la description de la dynamique de phase ? Nous donnons ici une réponse qualitative en considérant l'allure de la surface de potentiel $U(x, y)$, représenté sur la figure 1.4. En moyenne, $U(x, y)$ décroît linéairement suivant l'axe des (x) avec une pente $-s$ directement proportionnelle au courant de polarisation. Toujours en moyenne, le potentiel est quadratique suivant l'axe des (y) . Le fond de la parabole se situe à $y = y_B$ et sa courbure est donnée par le paramètre de couplage b . Ce paramètre contrôle le caractère bidimensionnel du problème. En effet, plus la courbure est faible, et plus y est libre de fluctuer autour de y_B , ce qui revient à dire que les phases φ_1 et φ_2 peuvent fluctuer l'une par rapport à l'autre.

Lorsque l'inductance du SQUID est très faible ($b \gg 1$), la courbure du potentiel le long de (y) est si forte que la particule reste confinée en fond de puits. La différence de phase $\varphi_1 - \varphi_2$ reste constante, fixée à $2y_B$. Un seul degré de liberté est alors suffisant pour décrire le SQUID (par exemple φ_1). Le potentiel dans lequel se déplace la particule fictive se réduit à :

$$U(\varphi_1) = -\frac{\Phi_0}{2\pi} I_c \left(\cos \varphi_1 + \frac{I_p}{I_c} \varphi_1 \right). \quad (1.20)$$

Le SQUID se comporte alors exactement comme une jonction Josephson de capacité $2C_0$ dont le courant critique I_c est modulé par le flux magnétique appliqué selon :

$$I_c(\Phi_p) = 2I_0 |\cos(\pi\Phi_p/\Phi_0)|. \quad (1.21)$$

Dans le cas contraire ($b \ll 1$), la courbure le long de (y) est faible. Les fluctuations de φ_1 par rapport à φ_2 sont importantes. La dynamique de phase dans ce régime de couplage est bidimensionnelle et son étude est un problème complexe.

Les SQUIDS étudiés dans cette thèse ont en fait un comportement intermédiaire. Le paramètre b des circuits S_1 et S_2 est de l'ordre de l'unité. Nous verrons dans la partie suivante que dans ce cas, un seul degré de liberté est suffisant pour décrire la dynamique du système. Par contre, le potentiel unidimensionnel dans lequel se déplace la particule fictive n'est pas simplement celui d'une JJ et porte une trace du caractère 2D du potentiel initial.

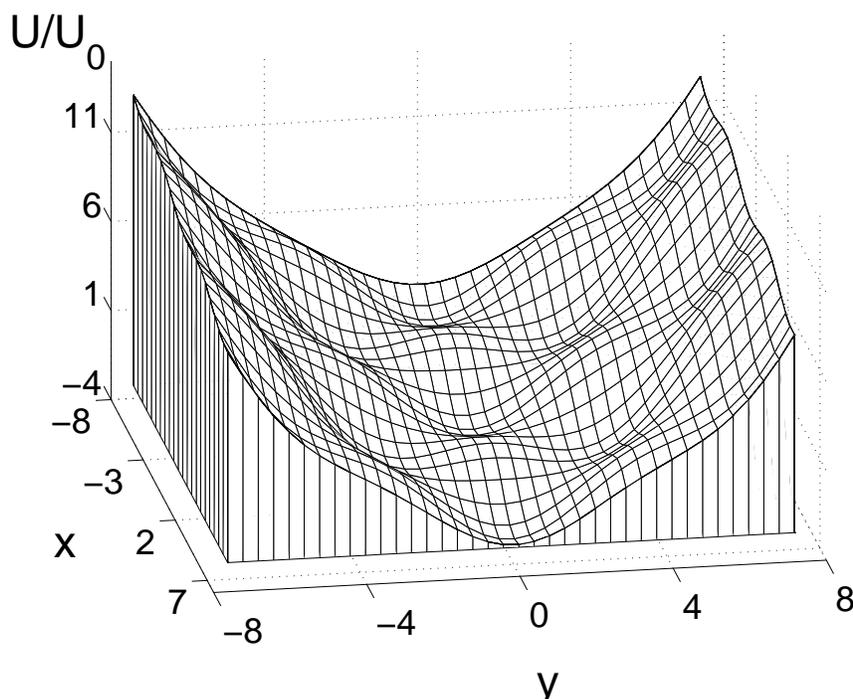


FIG. 1.4 – Forme de la surface de potentiel au point de polarisation $s = 0.3$, $y_B = 0$ (paramètres du SQUID : $b = 0.2$, $\eta = 0$).

1.2.2 États supraconducteurs - Diagramme critique

États supraconducteurs. Les termes en cosinus présents dans l'expression de $U(x, y)$ sont responsables d'une modulation spatiale du potentiel. Si la pente n'est pas trop importante, cette modulation est suffisante pour que la surface de potentiel présente une série de minima locaux régulièrement espacés. On peut classer ces minima par familles de puits localement équivalents. Imaginons que la particule fictive soit piégée dans un de ces puits. Les phases φ_1 et φ_2 oscillent alors autour d'une valeur moyenne. D'après la seconde équation Josephson (1.7), la tension moyenne⁽¹⁾ \overline{V}_s aux bornes du SQUID est nulle. Les états piégés de la particule correspondent ainsi à des états supraconducteurs. On peut associer à chaque famille de puits le nombre $[f]$ de quanta de flux piégés dans la boucle du SQUID. Les chemins les moins coûteux en énergie pour passer d'un puits à l'autre empruntent un col. De manière générale, plus la pente $-s$ augmente, moins les puits sont profonds. Pour une famille de puits $[f]$ donnée, on définit la pente critique $s_c[f]$ et le courant critique $I_c[f]$ associé qui correspondent à la disparition du minimum local.

⁽¹⁾Les oscillations Josephson sont trop rapides (fréquence de 10 GHz ou plus) pour être détectées par des mesures de tension standard (bande passante des lignes de notre dispositif : 500 kHz). $\overline{V}_s(t)$ correspond à la tension mesurée grâce au dispositif expérimental.

Diagramme critique. Le calcul du courant critique $I_c[f]$ associé à la famille de puits de potentiel $[f]$ permet d'établir le domaine d'existence de l'état supraconducteur $[f]$ dans le plan de polarisation (I_p, Φ_p) . Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, $I_c[f]$ est défini par un critère purement géométrique : c'est le courant de polarisation qui correspond à la disparition du minimum local. A ce point particulier, le minimum en question et le(s) col(s) voisin(s) fusionnent.

Les extrema sur la surface de potentiel $U(x, y)$ sont caractérisés par la condition :

$$\begin{cases} \partial_x U = 0 \\ \partial_y U = 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Leur position dépend de s et y_B ainsi que des paramètres de construction du SQUID (I_0 , b et η). Au courant critique s_c , un minimum fusionne avec le point col voisin aux coordonnées (x_c, y_c) . La courbure le long de la direction (minimum-col) s'annule tandis qu'elle reste positive le long de la direction transverse. Ceci impose la condition :

$$\begin{cases} \partial_x^2 U \cdot \partial_y^2 U - (\partial_x \partial_y U)^2 = 0 \\ \partial_x^2 U + \partial_y^2 U \geq 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

Les systèmes (1.22) et (1.23) forment le système fermé qui doit être résolu numériquement :

$$\begin{cases} \sin x_c \cos y_c - s_c = 0 \\ \cos x_c \sin y_c - \eta s_c + 2b(y_c - y_B) = 0 \\ (\cos x_c \cos y_c)(\cos x_c \cos y_c + 2b) - (\sin x_c \sin y_c)^2 = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

En général, le système précédent admet plusieurs familles de solutions. On fait le lien entre une famille de solutions et une famille de puits $[f]$ en remarquant que $s_c[f] = 1$ au voisinage de $\Phi_p/\Phi_0 = f$. Les courants critiques dépendent des paramètres de construction (I_0 , b et η) et sont fortement modulés par le flux de polarisation. Pour obtenir toutes les solutions, il suffit en fait de calculer la branche critique $s_c[0] > 0$ en fonction de Φ_p . La branche $s_c[0] < 0$ s'en déduit par une symétrie centrale par rapport au point $(s = 0, \Phi_p = 0)$. Les lignes critiques associées aux valeurs de f non nulles sont données par la condition de périodicité : $s_c[f](\Phi_p) = s_c[0](\Phi_p - f\Phi_0)$.

Le tracé des courbes $I_c[f](\Phi_p)$ dans le plan de polarisation (I_p, Φ_p) constitue le diagramme critique du SQUID, représenté sur la figure 1.5 pour le circuit S_2 . Il peut être interprété comme un véritable diagramme de phase. Le domaine d'existence de l'état supraconducteur $[f]$ est délimité par la frontière $I_c[f]$. Plusieurs états supraconducteurs peuvent coexister. De manière générale, plus le point de polarisation est loin d'une frontière critique, plus les puits correspondants sont profonds.

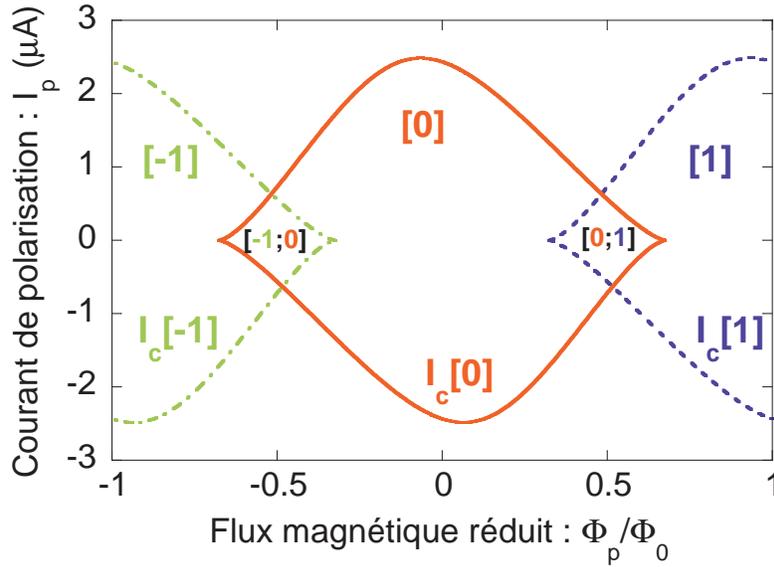


FIG. 1.5 – Diagramme critique du SQUID S_2 (calculé numériquement). Le nombre entre crochets $[f]$ désigne le nombre f de quantum de flux piégés, lui-même associé à une famille de puits équivalents sur la surface de potentiel. Le domaine d'existence de la famille de puits $[f]$ est délimité par la frontière critique $I_c[f]$. Plusieurs familles de puits peuvent coexister. Dans cette thèse, nous travaillerons avec la partie supérieure du diagramme ($I_p \geq 0$).

1.2.3 État résistif - hystérésis

Pour simplifier la discussion, nous supposons qu'une seule famille de puits de potentiel $[f]$ existe. La particule fictive est initialement piégée dans un puits de potentiel. Lorsque I_p se rapproche du courant critique $I_c[f]$, la profondeur du puits diminue. La particule fictive peut alors s'échapper du puits par effet tunnel ou grâce aux fluctuations thermiques (cf chap. 3). Elle commence à dévaler la surface de potentiel suivant la direction des (x) et arrive au niveau du puits suivant. Deux situations sont alors possibles, dépendant de l'importance des frottements comparée à l'énergie cinétique accumulée par la particule.

Si les frottements sont les plus forts, la particule se repiège dans le puits de potentiel. Suite à l'action des fluctuations, elle finit par s'en échapper pour être piégée dans le puits suivant et le processus se poursuit. La dynamique de phase est alors diffusive. En moyenne, les phases φ_1 et φ_2 augmentent de manière monotone dans le temps. En vertu de la seconde équation Josephson, ceci se traduit par l'apparition d'une tension moyenne \overline{V}_s non nulle aux bornes du SQUID.

Les SQUIDS étudiés dans la thèse sont dans l'autre limite. Les frottements sont faibles (on dit que le SQUID est sous-amorti) et la particule a accumulé trop d'énergie cinétique pour être repiégée. Elle dévale la surface de potentiel en prenant de la vitesse. Elle finit par atteindre une vitesse limite à laquelle est associée la tension $\overline{V}_s = 2\Delta/e$ aux bornes du SQUID. Cette situation correspond à un état résistif.

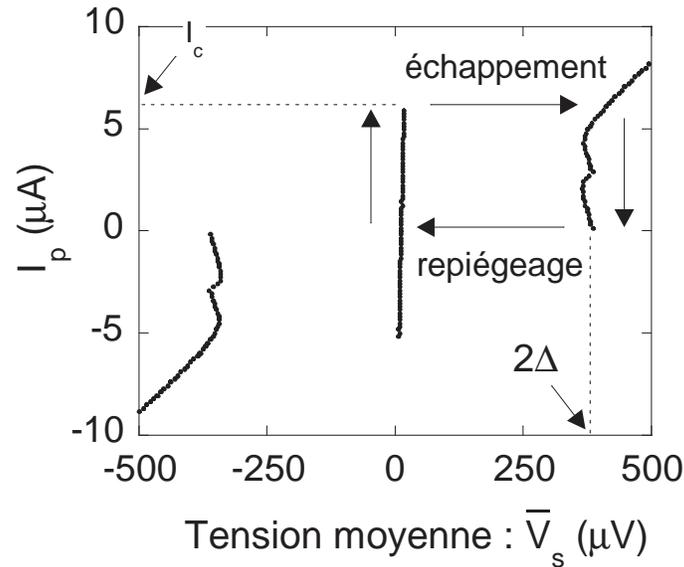


FIG. 1.6 – Caractéristique Intensité-Tension typique d'un SQUID hystérétique.

Si maintenant on part de l'état résistif et que l'on diminue le courant de polarisation, la particule ne se repiège pas lorsque I_p passe légèrement en dessous de $I_c[f]$. Il y a hystérésis, comme on peut le constater sur la figure 1.6 qui présente une caractéristique $I_p-\bar{V}_s$ du SQUID. La particule se repiège pour un courant inférieur au courant de repiégeage I_r . Considérons le passage d'un puits de potentiel au suivant. Le courant de repiégeage correspond à l'équilibre entre l'action des forces de friction et l'énergie cinétique accumulée. Pour les SQUIDS considérés, I_r est de l'ordre de quelques nanoampères. Ceci signifie que tant que le courant est maintenu au-dessus de I_r , l'état résistif est stable. Cette propriété importante sera mise à profit dans la mesure de l'état quantique du SQUID.

1.3 Le SQUID : un circuit quantique contrôlable

Cette partie montre que le SQUID est un circuit quantique contrôlable. Elle donne le principe de la manipulation de l'état quantique du circuit, ainsi que la mesure de cet état. Nous commençons par admettre qu'une seule variable de phase est suffisante pour décrire la dynamique du circuit. Cette affirmation est justifiée dans les deux derniers paragraphes de cette partie.

1.3.1 Manipulation et mesure de l'état quantique du SQUID

On s'intéresse à un état supraconducteur : la particule fictive décrivant l'état de phase du SQUID est piégée dans un puits de potentiel. Lorsque l'inductance L_s de la boucle n'est pas trop importante ($b \sim 1$), nous montrerons dans la suite du chapitre qu'un seul degré de liberté est suffisant pour décrire la dynamique du SQUID. De manière schématique, la

particule fictive se déplace selon la direction de courbure minimale du potentiel notée (x_{\parallel}) . On introduit l'opérateur adimensionné \tilde{X}_{\parallel} qui mesure la phase le long de (x_{\parallel}) ainsi que son conjugué \tilde{P}_{\parallel} . Le long de (x_{\parallel}) , le potentiel est caractérisé par sa pulsation de fond de puits ω_p , encore appelée pulsation plasma et présente une barrière de hauteur finie. En poussant la description jusqu'à l'ordre cubique, l'hamiltonien \hat{H}_{\parallel} du système prend la forme :

$$\hat{H}_{\parallel} = \frac{1}{2} \hbar \omega_p (\tilde{P}_{\parallel}^2 + \tilde{X}_{\parallel}^2) - \hbar \omega_p \sigma \tilde{X}_{\parallel}^3. \quad (1.25)$$

On note $|n\rangle$ ses états propres et E_n les énergies propres correspondantes. En notant N le nombre de niveaux piégés dans le puits, l'indice n prend les valeurs entières de 0 à $N-1$. Les paramètres ω_p et σ dépendent explicitement du point de polarisation (I_p, Φ_p) . À travers ω_p qui varie typiquement de 7 à 12 GHz, on contrôle l'écart en énergie des différents niveaux. Le terme non linéaire conditionne la hauteur de barrière et donc le nombre de niveaux piégés dans le puits. Le SQUID se comporte ainsi comme un atome artificiel contrôlable.

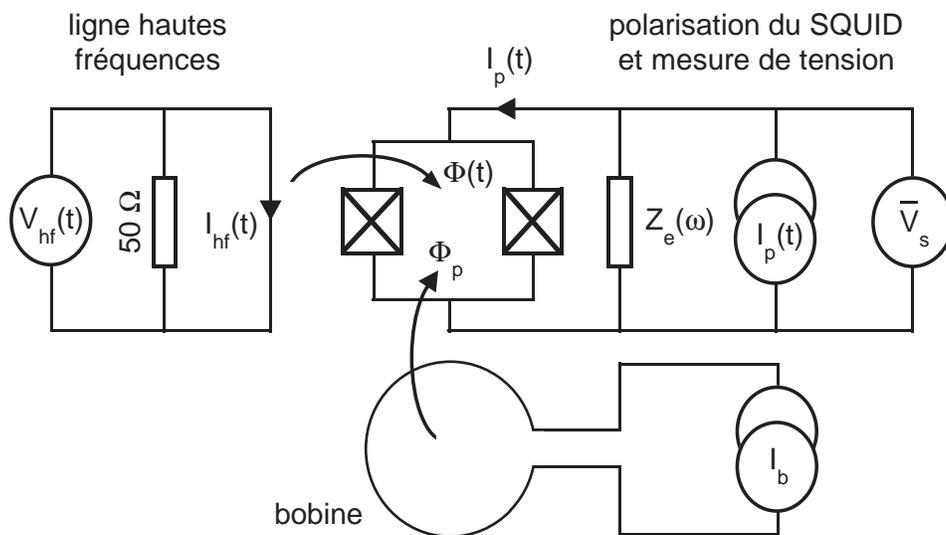


FIG. 1.7 – Schéma de principe du dispositif expérimental.

Le schéma de principe du dispositif expérimental est porté sur la figure 1.7. Toutes les expériences qui sondent la dynamique du système (étude spectroscopie, mesure de relaxation ou encore mesure d'oscillations cohérentes de l'état quantique du SQUID) se déroulent de la même manière. Les quantités mesurées sont en général des probabilités, on doit donc répéter un grand nombre de fois la même expérience élémentaire, décrite à la figure 1.8. Cette dernière comporte quatre étapes :

- (0) initialisation du potentiel
- (1) manipulation de l'état quantique du SQUID
- (2) mesure et détection du résultat de la mesure
- (3) réinitialisation.

Les différentes étapes sont réalisées avec des échelles de temps très différentes. L'initialisation du circuit et la détection du résultat de la mesure se font à travers des lignes filtrées à faible bande passante caractérisées par des temps de montée de l'ordre de $10 \mu\text{s}$. Par contre, la manipulation et la mesure de l'état quantique sont réalisées à l'aide d'une séquence de flux comportant au moins une impulsion micro-onde (fréquence typique 10 GHz) suivie d'une impulsion dc. Les impulsions ont des temps de montée de l'ordre de la nanoseconde.

Initialisation du potentiel. La première étape consiste à polariser le circuit en flux et en courant, ce qui fixe la forme du potentiel. Vu la fréquence propre du circuit, les fluctuations thermiques ne sont négligeables qu'à très basse température. C'est pourquoi les circuits ont été mesurés dans un cryostat à dilution dont la température de base se situe à environ 30 mK . Toujours pour éviter une excitation parasite et non contrôlée du circuit, il faut atténuer au maximum le bruit thermique conduit par les lignes d'amenées de courant. Le dispositif expérimental, décrit dans le chapitre suivant, est fortement blindé et filtré. Dans ces conditions, le système repose initialement dans l'état fondamental.

Excitation. Pour induire des transitions entre niveaux d'énergie, on applique une impulsion de flux micro-onde résonante sur la boucle du SQUID. Cette dernière est caractérisée par sa pulsation ω et par son amplitude Φ_{mo} . Ce signal de flux est acheminé via un câble coaxial à large bande passante jusqu'à une antenne *on-chip* couplée par mutuelle à la boucle du SQUID. Il introduit une perturbation dépendant du temps dans l'hamiltonien qui couple les niveaux voisins. À un facteur numérique dépendant du point de polarisation près, elle s'écrit :

$$\widehat{W}_{\parallel,\Phi}(t) \propto \Phi_{mo} \cos(\omega t) \widetilde{X}_{\parallel}. \quad (1.26)$$

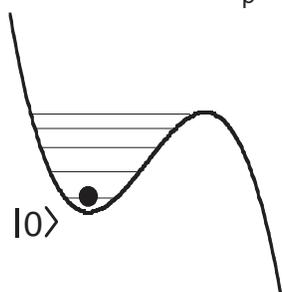
Avec une bonne approximation, $\widehat{W}_{\parallel,\Phi}(t)$ ne couple que des niveaux voisins. À la fin de l'impulsion micro-onde, le système est dans un état excité⁽²⁾. On note p_n la population du $n^{\text{ème}}$ niveau.

Mesure et lecture de son résultat. La mesure de l'état du SQUID est réalisée avec une impulsion de flux dc d'amplitude Φ_m et de durée Δt [34]. Elle rapproche le point de polarisation de la frontière critique et rend possible l'échappement par effet tunnel de la particule fictive. Soit Γ_n le taux d'échappement moyen du niveau $|n\rangle$ lorsque le flux vaut $\Phi_p + \Phi_m$, la probabilité d'échappement P_{ech} s'écrit alors :

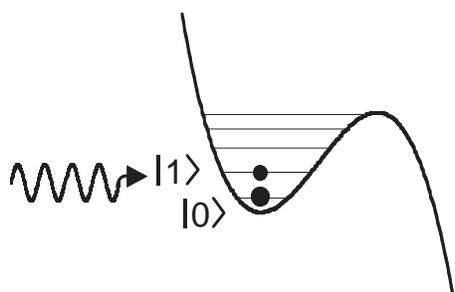
$$P_{ech} = 1 - \sum_{n=0}^{N-1} p_n \exp(-\Gamma_n \Delta t). \quad (1.27)$$

⁽²⁾Nous ne faisons pas ici de distinction entre une superposition cohérente et un mélange statistique : la mesure est sensible à la population des différents niveaux.

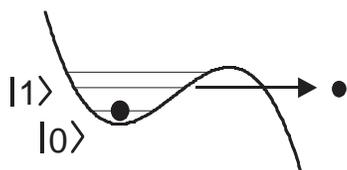
① Initialisation du potentiel
polarisation au point (I_p, Φ_p)



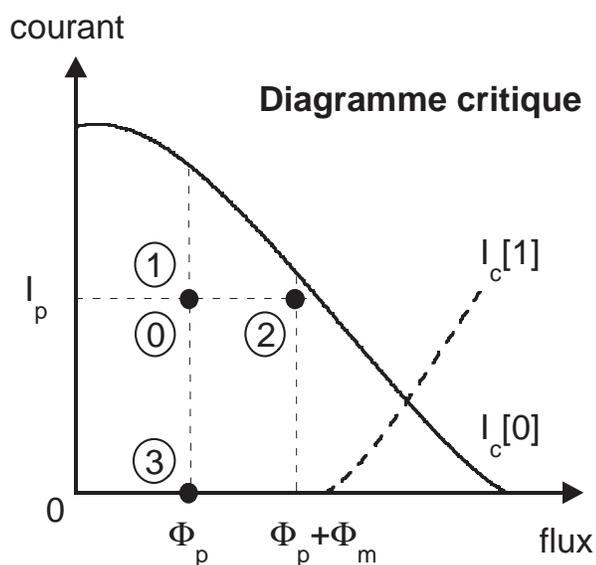
② Excitation résonante
pulse de flux MO



③ Mesure par échappement
pulse de flux dc



④ Repiégeage de la particule
 $I_p = 0$



Signaux de commande

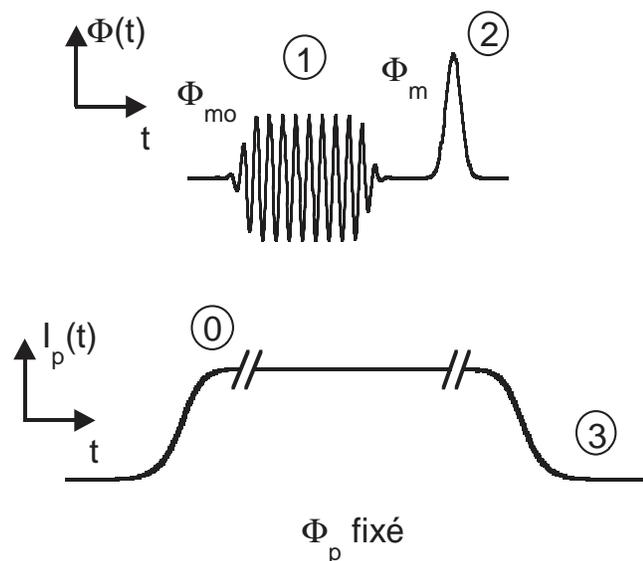


FIG. 1.8 – Déroulement typique d'une expérience.

Comme l'effet tunnel est exponentiellement sensible à la hauteur de barrière, deux niveaux voisins ont des fréquences d'échappement très différentes. Pour un puits de potentiel profond, les théories semi-classiques [43] prévoient $\Gamma_{n+1}/\Gamma_n \approx \exp(2\pi) \approx 535$. Toutefois, les mesures sont réalisées en pratique avec des puits très peu profonds. Dans ces conditions, le résultat précédent n'est plus valable. Nous retenons dans la suite la valeur de 150 pour le rapport des taux d'échappement [31]. Il est alors possible de choisir la durée de l'impulsion de telle manière que :

$$\Gamma_{n+1}^{-1} \ll \Delta t \ll \Gamma_n^{-1}. \quad (1.28)$$

Le niveau $n+1$ s'échappe alors de manière quasi certaine alors que le niveau n reste piégé. Le contraste maximum entre les probabilités d'échappement de deux niveaux voisins est estimé à 96%. La mesure est donc pratiquement réalisée en un coup. De manière schématique, les paramètres de l'impulsion de mesure déterminent un seuil en énergie dans le puits de potentiel. L'échappement des niveaux situés au-dessus de ce seuil est certain tandis que les niveaux en dessous du seuil restent piégés. Si on indexe par k le plus haut niveau peuplé du puits, en abaissant progressivement le seuil de mesure, on a d'abord accès à p_k puis $p_k + p_{k-1}$, etc... Il est ainsi théoriquement possible de déduire la population de chaque niveau. Dans le cas où seuls $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont occupés, P_{ech} est directement une fonction affine de l'occupation du premier état excité :

$$P_{ech} = (1 - e^{-\Gamma_0 \Delta t}) + (e^{-\Gamma_0 \Delta t} - e^{-\Gamma_1 \Delta t}) p_1. \quad (1.29)$$

Les caractéristiques temporelles de l'impulsion de mesure doivent satisfaire deux exigences contraires. D'un côté, la mesure doit être plus rapide que les phénomènes de relaxation. De l'autre, la variation de la forme du puits de potentiel doit rester adiabatique, sous peine d'exciter des transitions et donc de fausser la mesure. Les impulsions utilisées dans cette thèse ont des temps de montée égaux à 1.6 ns bien supérieurs à ω_p^{-1} et une durée Δt de quelques nanosecondes.

Il faut bien distinguer la mesure, effectuée en quelques nanosecondes, de la lecture de son résultat réalisée beaucoup plus lentement. La lecture du résultat d'une mesure élémentaire (échappement ou non) est réalisée en mesurant la tension $\overline{V}_s(t)$ aux bornes du SQUID et tire profit de sa caractéristique fortement hystérétique (*cf* figure 1.6). Si la particule est restée piégée, la tension est nulle tandis que l'échappement s'accompagne d'un saut vers la branche résistive, caractérisée par l'apparition d'une tension $2\Delta/e \approx 420 \mu\text{V}$. Ce saut de tension est facilement détectable après amplification à température ambiante. Pour avoir accès à P_{ech} , il suffit de répéter l'expérience quelques milliers de fois.

Réinitialisation. Pour recommencer l'expérience, il faut repiéger la particule en polarisant le circuit en dessous du courant de repiégeage. Les cadences de répétition sont limitées par le temps de repiégeage (typiquement $200 \mu\text{s}$) et surtout par le temps de refroidissement du circuit. En effet, l'échappement vers le régime résistif s'accompagne d'effet Joule qui chauffe le circuit et son voisinage. En conséquence, la cadence de répétition se situe aux alentours de 500 Hz. Dans son principe, la mesure de l'état du SQUID proposée ici est très

brutale, au sens où elle détruit complètement l'état supraconducteur. Récemment, d'autres procédés de mesure de l'état de phase d'une jonction sans échappement vers la branche résistive ont été mis au point [44, 45].

1.3.2 Réduction à un problème unidimensionnel

Dans cette partie, nous justifions que les SQUIDs dont l'inductance n'est pas trop forte peuvent être considérés comme des systèmes unidimensionnels.

Hamiltonien du SQUID. L'hamiltonien exact \hat{H}_{2D} du SQUID s'obtient directement des équations dynamiques (1.18) et (1.19) en utilisant le principe de correspondance. On introduit les opérateurs de phase \hat{X} et \hat{Y} associés aux variables x et y :

$$\hat{X} = \frac{\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2}{2} \quad \hat{Y} = \frac{\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2}{2}, \quad (1.30)$$

$\hat{\varphi}_1$ (respectivement $\hat{\varphi}_2$) étant l'opérateur qui mesure la phase aux bornes de la jonction 1 (respectivement 2). On introduit également les conjugués de \hat{X} et \hat{Y} , respectivement notés \hat{P}_X et \hat{P}_Y qui satisfont aux lois de commutations suivantes :

$$[\hat{X}, \hat{P}_X] = i \quad [\hat{Y}, \hat{P}_Y] = i. \quad (1.31)$$

\hat{H}_{2D} est la somme d'un terme cinétique \hat{T} et d'un terme potentiel \hat{U} :

$$\hat{H}_{2D} = \hat{T} + \hat{U}. \quad (1.32)$$

Le terme cinétique est isotrope :

$$\hat{T} = \frac{1}{2m} [\hat{P}_X^2 + \hat{P}_Y^2]. \quad (1.33)$$

Les degrés de liberté \hat{X} et \hat{Y} sont couplés par \hat{U} à travers des termes croisés en cosinus :

$$\hat{U} = U_0 \left[-s\hat{X} - \cos \hat{X} \cos \hat{Y} - s\eta\hat{Y} + b(\hat{Y} - y_B)^2 \right]. \quad (1.34)$$

Séparation des variables. Supposons que la particule fictive est piégée dans un puits de potentiel centré sur son minimum M de coordonnées (x_0, y_0) . Le chemin le moins coûteux en énergie pour s'échapper du puits emprunte un col C de coordonnées (x_1, y_1) . On définit la profondeur ΔU du puits par $\Delta U = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0)$. La situation est représentée sur la figure 1.9. Pour étudier la dynamique autour du fond de puits, on introduit les opérateurs \hat{X}_0 et \hat{Y}_0 définis par :

$$\hat{X}_0 = \hat{X} - x_0 \quad (1.35)$$

$$\hat{Y}_0 = \hat{Y} - y_0 \quad (1.36)$$

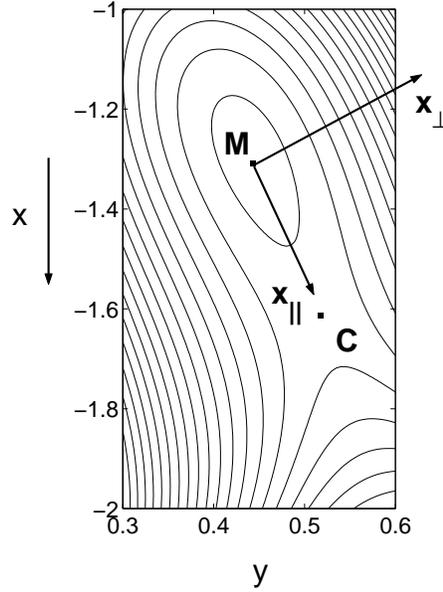


FIG. 1.9 – *Forme du puits de potentiel au point $s = 0.87$, $\Phi_p/\Phi_0 = 0.1$ (paramètres du circuit S_2). Les lignes pleines sont des équipotentielles régulièrement espacées en énergie.*

L'hamiltonien du SQUID se décompose alors formellement en trois termes :

$$\hat{H}_{2D} = \hat{H}_{X_0} + \hat{C}_{X_0 Y_0} + \hat{H}_{Y_0}. \quad (1.37)$$

\hat{H}_{X_0} (respectivement \hat{H}_{Y_0}) ne contient que des puissances de \hat{X}_0 (respectivement \hat{Y}_0). Les termes croisés sont regroupés dans l'hamiltonien de couplage $\hat{C}_{X_0 Y_0}$. Nous allons maintenant éliminer les termes croisés à l'ordre 2 en effectuant une rotation appropriée. Ceci revient à choisir de nouvelles variables qui sont alignées sur les axes de symétrie (x_{\parallel}) et (x_{\perp}) du puits de potentiel développé à l'ordre 2. La direction longitudinale (x_{\parallel}) correspond à la direction de courbure minimale et la direction transverse (x_{\perp}) correspond à la courbure maximale. On introduit les opérateurs longitudinal \hat{X}_{\parallel} et transverse \hat{X}_{\perp} définis par :

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{\parallel} \\ \hat{X}_{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_0 \\ \hat{Y}_0 \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

L'angle de rotation θ entre les axes (x) et (x_{\parallel}) est donné par :

$$\frac{1}{2} \tan(2\theta) = \frac{\partial_{xy}^2 U(x_0, y_0)}{\partial_{xx}^2 U(x_0, y_0) - \partial_{yy}^2 U(x_0, y_0)}. \quad (1.39)$$

Les variations de θ avec le point de polarisation sont représentées sur la figure 1.10. A courant constant, θ est fortement modulé par Φ_p . Si Φ_p est fixé, θ diminue jusqu'à s'annuler lorsque I_p tend vers 0.

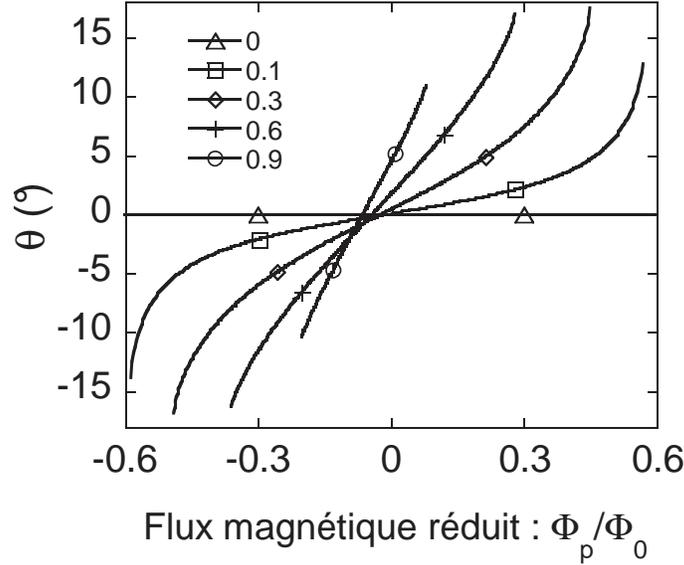


FIG. 1.10 – Variations de l'angle de découplage avec le flux de polarisation (calcul numérique avec les paramètres du circuit S_2). Chaque trace correspond à une valeur du courant de polarisation réduit s .

Comme la partie cinétique de l'hamiltonien est isotrope, sa forme n'est pas affectée par la rotation précédente. Il suffit d'introduire les conjugués \hat{P}_{\parallel} et \hat{P}_{\perp} des opérateurs \hat{X}_{\parallel} et \hat{X}_{\perp} et le terme cinétique s'écrit :

$$\hat{T} = \frac{1}{2m} [\hat{P}_{\parallel}^2 + \hat{P}_{\perp}^2]. \quad (1.40)$$

Avec des notations similaires à celles de l'équation (1.37), \hat{H}_{2D} se réécrit :

$$\hat{H}_{2D} = \hat{H}_{\parallel} + \hat{C}_{\parallel\perp} + \hat{H}_{\perp}. \quad (1.41)$$

Les termes de couplages groupés dans $\hat{C}_{\parallel\perp}$ étant d'ordre 3 au minimum. Ainsi, si on se restreint à l'ordre quadratique, le problème se réduit à l'étude de deux oscillateurs harmoniques indépendants. \hat{H}_{\parallel} est alors caractérisé par la pulsation plasma ω_p et \hat{H}_{\perp} par la pulsation transverse ω_{\perp} . ω_p et ω_{\perp} sont reliés aux courbures du potentiel en fond de puits selon :

$$m\omega_p^2 = \partial_{\parallel}^2 U(x_0, y_0) \quad (1.42)$$

$$m\omega_{\perp}^2 = \partial_{\perp}^2 U(x_0, y_0), \quad (1.43)$$

où $\partial_{\parallel}^2 U$ et $\partial_{\perp}^2 U$ désignent respectivement les dérivées secondes du potentiel dans les directions longitudinale et transverse. Pour faciliter l'évaluation des termes d'ordre supérieur,

on introduit les opérateurs adimensionnés \tilde{X}_{\parallel} , \tilde{X}_{\perp} , \tilde{P}_{\parallel} et \tilde{P}_{\perp} définis par :

$$\tilde{X}_{\parallel} = \sqrt{\frac{m\omega_p}{\hbar}} \hat{X}_{\parallel} \quad \tilde{P}_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega_p}} \hat{P}_{\parallel} \quad (1.44)$$

$$\tilde{X}_{\perp} = \sqrt{\frac{m\omega_{\perp}}{\hbar}} \hat{X}_{\perp} \quad \tilde{P}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega_{\perp}}} \hat{P}_{\perp}. \quad (1.45)$$

En se limitant à l'ordre 3 inclus, les différents termes de (1.41) s'écrivent :

$$\hat{H}_{\parallel} = \frac{1}{2} \hbar\omega_p (\tilde{P}_{\parallel}^2 + \tilde{X}_{\parallel}^2) - \hbar\omega_p \sigma \tilde{X}_{\parallel}^3 \quad (1.46)$$

$$\hat{H}_{\perp} = \frac{1}{2} \hbar\omega_{\perp} (\tilde{P}_{\perp}^2 + \tilde{X}_{\perp}^2) + \hbar\omega_{\perp} \sigma_{\perp} \tilde{X}_{\perp}^3 \quad (1.47)$$

$$\hat{C}_{\parallel\perp} = \hbar\omega_{21} \tilde{X}_{\parallel}^2 \tilde{X}_{\perp} + \hbar\omega_{12} \tilde{X}_{\parallel} \tilde{X}_{\perp}^2. \quad (1.48)$$

Le tableau 1.3 donne les valeurs des différents paramètres pour un point de fonctionnement typique, obtenus numériquement grâce au programme DL_POT (voir annexe B). Les paramètres électriques sont ceux du SQUID S_2 , polarisé au flux $\Phi_p = 0.1 \Phi_0$ et au courant $I_p = 2.00 \mu\text{A}$, soit 190 nA en dessous du courant critique. La profondeur du puits est d'environ 55 GHz.

direction longitudinale		couplage		direction transverse	
$\omega_p/2\pi$	8.245 GHz	$\omega_{12}/2\pi$	-258 MHz	$\omega_{\perp}/2\pi$	20.290 GHz
σ	5.05 %	$\omega_{21}/2\pi$	-392 MHz	σ_{\perp}	0.112 %

TAB. 1.3 – Paramètres typiques du puits de potentiel.

La figure 1.11 présente les coupes du potentiel dans les directions (x_{\parallel}) et (x_{\perp}) , ainsi que les niveaux d'énergie associés. Ils sont notés $|n\rangle_{\perp}$ pour le problème transverse et $|n\rangle_{\parallel}$ pour la direction longitudinale. Selon (x_{\perp}) , le potentiel est pratiquement harmonique. Dans la direction longitudinale, le terme d'ordre 3 perturbe significativement le potentiel. Si le puits est peu profond (près de la frontière critique), le point col s'aligne sur (x_{\parallel}) . Le paramètre σ est alors directement relié à la profondeur du puits par $\Delta U = \hbar\omega_p/(54\sigma^2)$. Ceci n'est plus vrai pour les puits profonds : σ est une caractéristique *locale* du potentiel autour du minimum (x_0, y_0) .

On peut constater que les échelles d'énergie selon les directions transverse et longitudinale sont très différentes : ω_p et ω_{\perp} diffèrent d'au moins un facteur 2. Ainsi, une excitation par micro-onde du système aux alentours de ω_p est fortement hors-résonance pour le degré de liberté transverse. De plus, l'amplitude des termes de couplage est beaucoup plus faible (d'au moins un facteur 20) que la pulsation plasma. Nous pouvons donc supposer que les dynamiques suivant les directions longitudinale et transverse sont découplées. Reste maintenant à savoir lequel de ces degrés de liberté est effectivement étudié. Cela dépend du procédé de mesure qui dans notre cas correspond à l'échappement par effet tunnel du degré de liberté longitudinal.

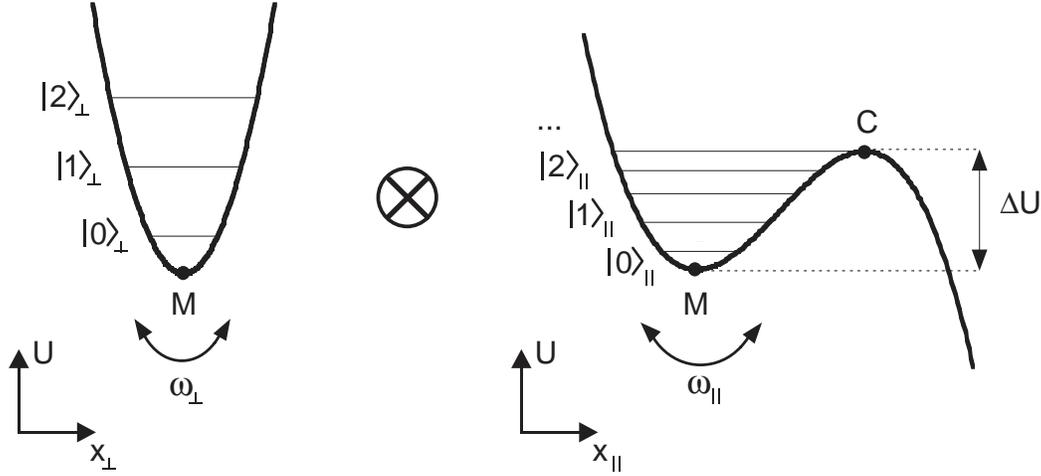


FIG. 1.11 – Représentation du potentiel et des niveaux d'énergie associés dans les directions transverse et longitudinale pour un puits peu profond. La direction (MC) et la direction longitudinale sont alors pratiquement confondues. Ceci n'est plus vrai lorsque les puits deviennent plus profonds (loin du courant critique).

1.3.3 Excitation du SQUID

Au §1.3.1, nous avons admis que l'on peut exciter le SQUID avec un flux micro-onde. Ce paragraphe présente les calculs des perturbations introduites par des fluctuations de flux et de courant. Elles sont importantes pour caractériser le couplage aux micro-ondes mais interviennent aussi dans l'étude des phénomènes incohérents comme la relaxation et le déphasage. En effet, ces derniers sont causés par l'environnement proche du SQUID qui génère un bruit sur les paramètres de polarisation. L'étude de l'impact de ce bruit nécessite la connaissance de l'hamiltonien de couplage. Nous supposons ici que le courant $I_p(t)$ et le flux de polarisation $\Phi_p(t)$ ne sont plus fixés mais évoluent dans le temps autour de leur valeurs moyennes I_p^0 et Φ_p^0 selon :

$$I_p(t) = I_p^0 + \delta I(t) \quad (1.49)$$

$$\Phi_p(t) = \Phi_p^0 + \delta \Phi(t), \quad (1.50)$$

$\delta I(t)$ et $\delta \Phi(t)$ étant des fonctions quelconques du temps.

Perturbation en courant. On considère l'hamiltonien exact du SQUID $\widehat{H}_{2D}(t)$ polarisé par un courant $I_p(t)$. Il est donné par les expressions (1.33) et (1.34) et se met sous la forme :

$$\widehat{H}_{2D}(t) = \widehat{H}_{2D}^0 + \widehat{W}_{2D,I}(t). \quad (1.51)$$

\widehat{H}_{2D}^0 est l'hamiltonien du circuit au point de polarisation fixe (I_p^0, Φ_p^0) et $\widehat{W}_{2D,I}(t)$ la perturbation associée à $\delta I(t)$. Cette dernière s'écrit :

$$\widehat{W}_{2D,I}(t) = -\frac{\Phi_0}{2\pi} (\widehat{X} + \eta \widehat{Y}) \delta I(t). \quad (1.52)$$

On reprend alors la démarche du paragraphe précédent qui décompose l'hamiltonien en une partie longitudinale et une partie transverse faiblement couplées :

$$\widehat{H}_{2D}(t) = \left[\widehat{H}_{\parallel}^0 + \widehat{W}_{\parallel,I}(t) \right] + \widehat{C}_{\parallel\perp} + \left[\widehat{H}_{\perp}^0 + \widehat{W}_{\perp,I}(t) \right]. \quad (1.53)$$

$\widehat{H}_{\parallel}^0$, \widehat{H}_{\perp}^0 et $\widehat{C}_{\parallel\perp}$ sont respectivement donnés par les formules (1.46), (1.47) et (1.48) appliquées au point de polarisation (I_p^0, Φ_p^0) . Les perturbations longitudinale $\widehat{W}_{\parallel,I}(t)$ et transverse $\widehat{W}_{\perp,I}(t)$ associées aux fluctuations de courant s'expriment selon :

$$\widehat{W}_{\parallel,I}(t) = -(\cos\theta + \eta \sin\theta) \left(\frac{\hbar}{2C_0\omega_p} \right)^{1/2} \delta I(t) \widetilde{X}_{\parallel} \quad (1.54)$$

$$\widehat{W}_{\perp,I}(t) = -(\eta \cos\theta - \sin\theta) \left(\frac{\hbar}{2C_0\omega_{\perp}} \right)^{1/2} \delta I(t) \widetilde{X}_{\perp}. \quad (1.55)$$

Perturbation en flux. La perturbation induite par une fluctuation de flux $\delta\Phi(t)$ s'écrit :

$$\widehat{W}_{2D,\Phi}(t) = -2 \frac{\Phi_0}{2\pi L_s} \widehat{Y} \delta\Phi(t). \quad (1.56)$$

Par des calculs similaires, on trouve les perturbations longitudinale $\widehat{W}_{\parallel,\Phi}(t)$ et transverse $\widehat{W}_{\perp,\Phi}(t)$ associées :

$$\widehat{W}_{\parallel,\Phi}(t) = -\sin\theta \frac{1}{L_s} \left(\frac{2\hbar}{C_0\omega_p} \right)^{1/2} \delta\Phi(t) \widetilde{X}_{\parallel} \quad (1.57)$$

$$\widehat{W}_{\perp,\Phi}(t) = -\cos\theta \frac{1}{L_s} \left(\frac{2\hbar}{C_0\omega_{\perp}} \right)^{1/2} \delta\Phi(t) \widetilde{X}_{\perp}. \quad (1.58)$$

Discussion. À travers l'angle θ , la sensibilité du SQUID aux fluctuations de courant et de flux dépend du point de polarisation. On appelle respectivement \vec{x} et \vec{y} les vecteurs directeurs des axes (x) et (y) . De manière imagée, une fluctuation $\delta\Phi(t)$ "secoue" la surface de potentiel suivant \vec{y} tandis qu'une fluctuation $\delta I(t)$ la secoue selon la direction $\vec{x} + \eta\vec{y}$. La situation est représentée sur la figure 1.12. La perturbation longitudinale résultante est alors la projection du mouvement sur (x_{\parallel}) . Les variations de θ en fonction de (I_p^0, Φ_p^0) ont été discutées au paragraphe précédent et sont représentées sur la figure 1.10. Grossièrement, θ varie entre -20° et $+20^\circ$, on a de plus $\eta \sim 0.4$. Comme attendu, la sensibilité du SQUID à une perturbation en flux est fortement modulée par le flux de polarisation. Le facteur "sin θ " s'annule en effet au maximum de courant critique ($\theta = 0$). Par contre, la sensibilité à une perturbation en courant est faiblement modulée par le flux de polarisation. Le facteur "cos $\theta + \eta \sin \theta$ " varie de 30% lorsque Φ_p varie d'un quantum de flux.

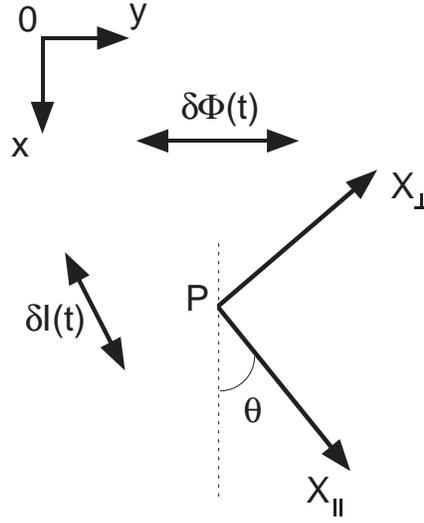


FIG. 1.12 – Représentation schématique des effets d'une perturbation en courant et en flux.

1.4 Caractéristiques du puits de potentiel

Si on se limite à l'ordre 3, l'hamiltonien du SQUID est complètement caractérisé par ω_p et σ . La détermination de ces deux paramètres est donc cruciale pour l'analyse des données expérimentales. Ils dépendent de la masse de la particule fictive, proportionnelle à C_0 , ainsi que de la géométrie de la surface de potentiel au voisinage du fond de puits. Dans cette partie, nous présentons deux méthodes de calcul. La première, analytique, est limitée aux puits peu profonds. La seconde méthode, plus générale, fait appel au calcul numérique.

1.4.1 Développement limité

Les calculs présentés ici reprennent très largement ceux de la référence [42] en les étendant à des SQUIDs dont la dissymétrie d'inductance η est non nulle. Les résultats obtenus ont permis l'analyse précise des effets du facteur η sur les mesures de temps de vie du fondamental de la référence [46]. Ils reposent sur un développement limité à l'ordre 3 inclus autour du point critique (x_c, y_c, s_c) et sont donc intrinsèquement limités à des courants de polarisation proches du courant critique ($s_c - s \ll 1$). En introduisant les variables $\Delta x = x - x_c$ et $\Delta y = y - y_c$ le potentiel du SQUID prend la forme :

$$\begin{aligned}
 U/U_0 &= (s_c - s)(\Delta x + \eta\Delta y) \\
 &+ \frac{1}{2} \cos x_c \cos y_c (\Delta x^2 + \Delta y^2) - \sin x_c \sin y_c \Delta x \Delta y + b\Delta y^2 \\
 &- \frac{1}{6} \sin x_c \cos y_c (\Delta x^2 + 3\Delta y^2) \Delta x - \frac{1}{6} \sin y_c \cos x_c (\Delta y^2 + 3\Delta x^2) \Delta y
 \end{aligned} \tag{1.59}$$

On suppose que la direction (x_{\parallel}) est donnée par la direction de courbure minimale *au point critique*⁽³⁾. L'angle θ_c correspondant est donné par la condition :

$$\tan \theta_c = -\frac{\partial_x^2 U(x_c, y_c)}{\partial_x \partial_y U(x_c, y_c)} = \frac{\cos x_c \cos y_c}{\sin x_c \sin y_c} \quad (1.60)$$

En recherchant les extrema du potentiel le long de (x_{\parallel}) , on trouve un minimum M et un point col C symétriques l'un de l'autre par rapport au point critique. Leurs coordonnées respectives $(\Delta x_0, \Delta y_0)$ et $(\Delta x_1, \Delta y_1) = -(\Delta x_0, \Delta y_0)$ sont données par :

$$\Delta x_0 = -[2(s_c/u_3)(1 + \eta \tan \theta_c) \cos^3 \theta_c]^{1/2} (1 - s/s_c)^{1/2} \quad (1.61)$$

$$\Delta y_0 = \Delta x_0 \tan \theta_c. \quad (1.62)$$

u_3 est la dérivée tierce du potentiel dans la direction d'échappement donnée par :

$$u_3 = \sin x_c \cos y_c \cos \theta_c (1 + 2 \sin^2 \theta_c) + \sin y_c \cos x_c \sin \theta_c (1 + 2 \cos^2 \theta_c) \quad (1.63)$$

On en déduit immédiatement la hauteur de barrière ΔU et la pulsation plasma ω_p :

$$\Delta U = (s_c/u_3)^{1/2} (\cos \theta_c + \eta \sin \theta_c)^{3/2} \Delta U^{JJ}(I_p, I_c) \quad (1.64)$$

$$\omega_p = (u_3/s_c)^{1/4} (\cos \theta_c + \eta \sin \theta_c)^{1/4} \omega_p^{JJ}(I_p, I_c, 2C_0), \quad (1.65)$$

où ΔU^{JJ} et ω_p^{JJ} sont respectivement la hauteur de barrière et la pulsation plasma d'une JJ unique de courant critique I_c et de capacité $2C_0$ polarisée par un courant I_p :

$$\Delta U^{JJ}(I_p, I_c) = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{\Phi_0}{2\pi} I_c \right) \left(1 - \frac{I_p}{I_c} \right)^{3/2} \quad (1.66)$$

$$\omega_p^{JJ}(I_p, I_c, 2C_0) = \left(\sqrt{2} \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{I_c}{2C_0} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{I_p}{I_c} \right)^{1/4} \quad (1.67)$$

Les préfacteurs dans les expressions de ΔU et ω_p montrent qu'en général un SQUID d'inductance finie n'est pas strictement équivalent à une JJ de courant critique I_c . Le maximum de courant critique constitue cependant un cas particulier où les préfacteurs se réduisent à 1 (car $u_3 = s_c = 1$ et $\theta_c = 0$). Physiquement, ceci est dû à l'absence de courant d'écranage à ce point de fonctionnement. Chacune des JJ est alors parcourue par un courant identique $I_p/2$. Le SQUID se comporte alors exactement comme une JJ caractérisée par les paramètres $2I_0$ et $2C_0$.

1.4.2 Calcul numérique

Le principe est simple : en localisant numériquement le minimum (x_0, y_0) sur la surface de potentiel $U(x, y)$, on a accès à tous les ordres du développement du potentiel et ce dans

⁽³⁾ Comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, cette approximation est assez forte.

toutes les directions. Une fois le minimum localisé, on applique la démarche du §1.3.2 pour déterminer les directions longitudinale et transverse et les dérivées du potentiel suivant ces directions. En localisant la position (x_1, y_1) du point col C , on en déduit la profondeur exacte du puits : $\Delta U = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0)$.

La clef du problème est donc la localisation des extrema de la fonction $U(x, y)$. La méthode, commune à tous les programmes développés au cours de ma thèse, s'articule en deux étapes conduites par des routines différentes :

1. La routine **CRITIQUE** fournit les paramètres critiques. Connaissant la polarisation en courant, on en déduit la position approximative des points M et C par les formules analytiques (1.62).
2. Ces positions servent de point initial à **EXTREMUM** qui détermine précisément les coordonnées du fond de puits. Cette routine minimise la quantité $(\partial_x U)^2 + (\partial_y U)^2$ construite pour former des puits de potentiel centrés sur les extrema. La convergence est assurée par une méthode de type gradient 2D à pas variable.

La figure 1.13 compare les résultats des calculs analytiques et numériques pour le circuit S_2 , polarisé à $\Phi_p = 0.1 \Phi_0$. Comme attendu, ils donnent les mêmes résultats au voisinage du courant critique I_c qui vaut ici $2.190 \mu\text{A}$.

Dès que l'on s'écarte de I_c , la principale divergence apparaît entre l'angle θ calculé numériquement et son approximation θ_c . Dans le cas limite d'une polarisation à courant nul, $\theta = 0$, résultat confirmé par un calcul analytique. Ceci a une conséquence limitée sur la pulsation plasma qui correspond à un minimum de la courbure par rapport à la direction de dérivation. En revanche, la correction d'ordre 3 calculée numériquement s'écarte vite des prévisions analytiques pour les puits profonds. Au voisinage de $I_p = 0$, σ devient négligeable et l'anharmonicité du potentiel est dominée par les termes d'ordre 4 (cette situation n'a pas été étudiée expérimentalement).

En conclusion, on peut utiliser les formules analytiques du §1.4.1 pour des puits peu profonds. C'est typiquement le cas lors de l'étude de la métastabilité tunnel du fondamental, abordée dans le chapitre 3. Par contre, dès que l'on travaille à puits profond, comme dans les études spectroscopiques des chapitres 4 et 5, une analyse précise doit être basée sur les paramètres ω_p et σ obtenus numériquement.

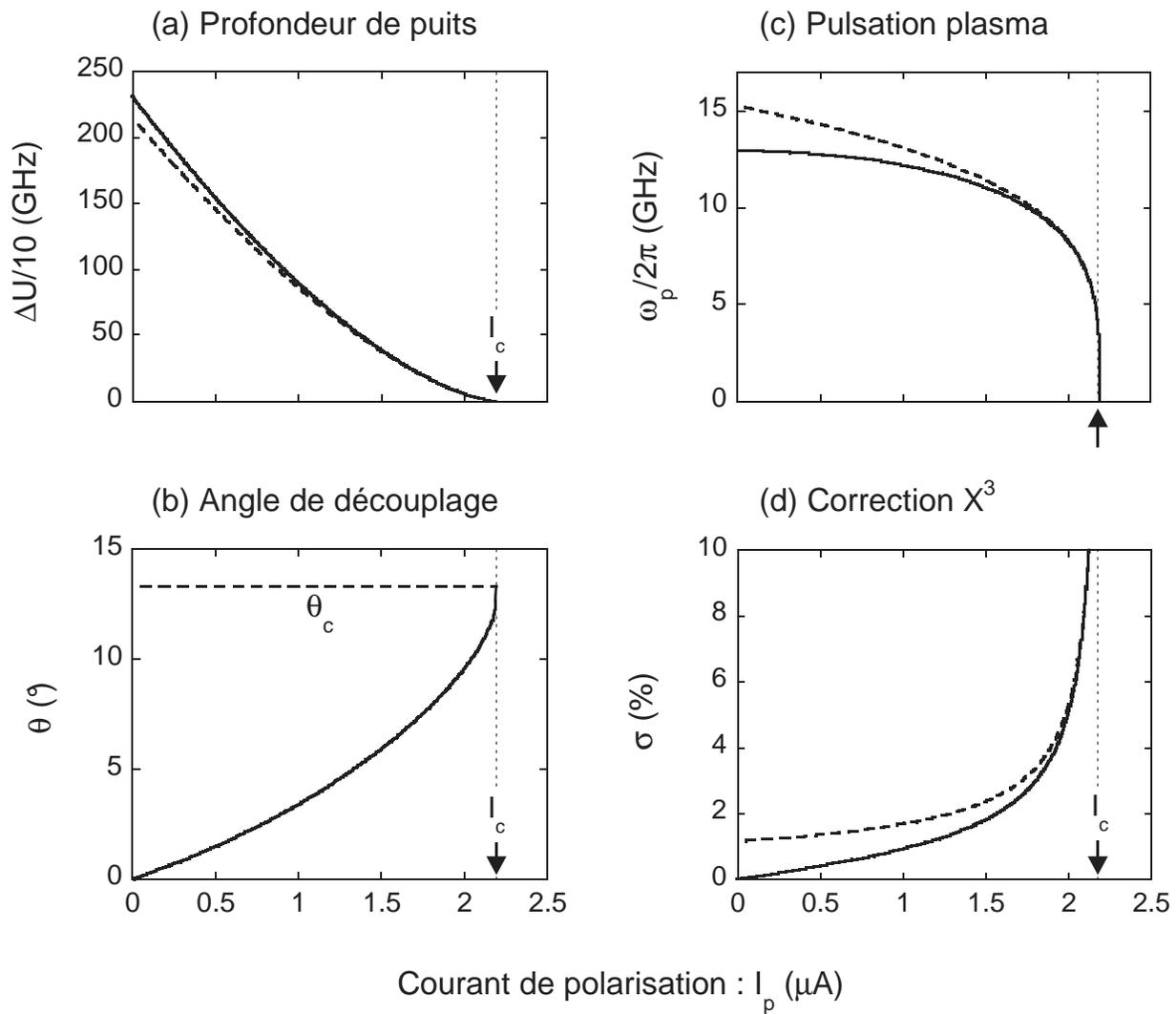


FIG. 1.13 – Comparaison des caractéristiques du potentiel obtenues par développement limité (en tirets) et par calcul numérique (lignes pleines). Les paramètres électriques sont ceux de S_2 , polarisé à $\Phi_p = 0.1 \Phi_0$. Le courant critique I_c vaut $2.190 \mu\text{A}$.

Chapitre 2

Dispositif expérimental et micro-fabrication

Le travail de développement technique réalisé au cours de cette thèse se divise en deux axes. Dans une première partie, nous décrirons la micro-fabrication des SQUIDs étudiés, nommés S_1 et S_2 . Ils ont été fabriqués en utilisant les techniques de lithographie électronique et d'évaporation par ombrage, usuels dans la fabrication de circuits à base de jonctions Josephson [47]. La fabrication a été réalisée dans la salle blanche Nanofab au CRTBT (figure 2.1, page suivante). J'ai repris dans les grandes lignes le procédé développé par mon prédécesseur Franck Balestro en le mettant au point sur un nouveau MEB⁽¹⁾ qui a été opérationnel au début de ma thèse. Certaines parties du circuit ont fait l'objet d'un travail de développement lithographique important. En particulier, nous avons obtenu sur l'échantillon S_1 des lignes d'amenée de courant avec un très fort rapport d'aspect (150 nm de large sur 500 μm de long). De plus, la géométrie des échantillons a été optimisée pour limiter les effets parasites.

La deuxième et la troisième partie présentent le dispositif expérimental. J'ai là aussi bénéficié du travail de Franck qui a câblé la diluette et mis en place un système de filtrage à basse température. Celui-ci a permis d'observer l'effet tunnel macroscopique dans un SQUID [46]. Durant ma thèse, j'ai développé, en étroite collaboration avec le service électronique du CRTBT, une nouvelle électronique bas-bruit gérant la polarisation et la détection d'échappement du SQUID. La génération du signal micro-onde (MO) a été considérablement améliorée. Nous maîtrisons actuellement des séquences de MO impulsionnelles suivies d'impulsions dc avec des temps de montées de l'ordre de la nanoseconde et qui s'enchaînent avec des temps très bien contrôlés. Enfin, l'environnement électrique proche du SQUID, qui constitue un dernier rempart au bruit, a également été optimisé.

⁽¹⁾MEB LEO 1530, LEO Microscopie Électronique



FIG. 2.1 – **À gauche** : le MEB et son électronique. **À droite** : le bâti de dépôt UHV.

2.1 Fabrication des échantillons

L'ensemble des étapes de la micro-fabrication est résumé sur la figure 2.2. Les circuits sont déposés sur une plaquette de silicium de 2 pouces de diamètre, oxydée en surface sur une épaisseur de 500 nm. En utilisant la lithographie électronique, on définit un masque de résine suspendu au-dessus de la plaquette de silicium. On dépose ensuite l'aluminium constituant les SQUIDS suivant la technique d'évaporation par ombrage en utilisant deux angles de dépôt. Nous obtenons par cette méthode des jonctions ayant une grande surface, comprise entre $15 \mu\text{m}^2$ et $20 \mu\text{m}^2$. La géométrie des circuits est détaillée dans le dernier paragraphe de cette partie.

2.1.1 Lithographie électronique

Le masque suspendu est réalisé suivant un procédé bicouche utilisant deux types de résines. Les paramètres techniques de l'étalement et des différents recuits sont résumés sur le tableau 2.1. La couche supérieure, épaisse de 200 nm, est constituée de PMMA, peu sensible aux électrons. Une fois insolée, cette couche supérieure définira le masque à travers lequel sera évaporé le circuit. Elle est séparée du substrat de silicium par une couche d'espacement d'environ 800 nm. Cette dernière couche est réalisée dans un mélange de PMMA et de MAA qui se caractérise par une plus grande sensibilité aux électrons.

Le motif est ensuite dessiné à l'aide d'un microscope électronique à balayage (étape 1). Celui-ci émet un faisceau d'électrons focalisés et accélérés sous une tension typique de 20kV qui balaye la surface de la couche de résine suivant le motif désiré. Les électrons cassent les chaînes de polymère constituant la résine, avec pour conséquence une forte augmentation de leur solubilité. Les zones insolées sont ensuite retirées en utilisant un solvant approprié.

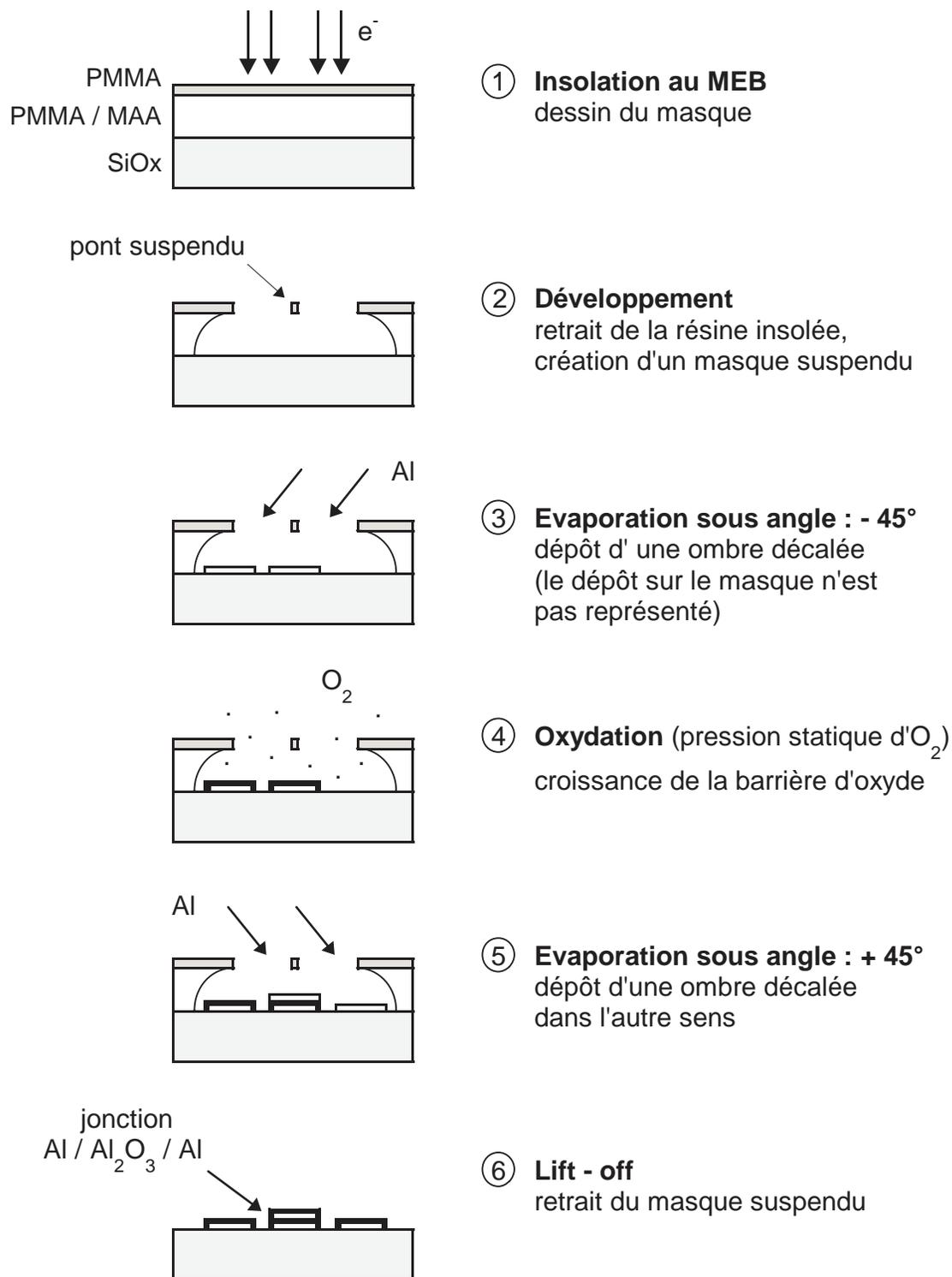


FIG. 2.2 – Les étapes de micro-fabrication du SQUID.

Comme la sensibilité de la couche d'espacement est plus élevée, elle est plus affectée et présente un retrait de l'ordre de $1\ \mu\text{m}$, nettement visible sur la figure 2.3.a.

Les deux points délicats de l'insolation sont le SQUID et plus encore les lignes d'amenées de courant. Ces motifs ont tous deux été insolés avec le diaphragme $10\ \mu\text{m}$ du MEB, qui délivre alors des courants de l'ordre de $40\ \text{pA}$. Comme nous le verrons, la technique d'évaporation sous angle permettant d'obtenir les jonctions requiert des micro-ponts suspendus. Ces ponts de $300\ \text{nm}$ de large apparaissent en clair sur la figure 2.3.a. Les longueurs maximales obtenues durant ma thèse sont de $14\ \mu\text{m}$. Au delà, les ponts s'écroulent, sans doute à cause d'une attraction électrostatique vers le substrat de silicium. Le motif du SQUID est dessiné avec des doses typiques de $300\ \mu\text{C}/\text{cm}^2$. Pour obtenir un retrait suffisant, il a été nécessaire de surdoser localement certaines zones.

Nous avons cherché à augmenter au maximum l'inductance des amenées de courant. À basse température, ces dernières constituent alors un filtre on-chip purement inductif qui limite les fluctuations de courant arrivant sur le SQUID (cf §2.3.3). Dans cette optique, nous avons réduit au maximum la largeur des lignes. La figure 2.4.c présente une photographie prise au MEB des amenées de courant du SQUID S_1 . Séparées de $2\ \mu\text{m}$, elles sont larges de $150\ \text{nm}$ pour une longueur de $500\ \mu\text{m}$ chacune. L'obtention d'un tel rapport d'aspect a nécessité un travail d'optimisation de l'insolation et les doses employées sont de l'ordre de $1000\ \mu\text{C}/\text{cm}^2$. Les motifs fins (SQUID + amenées de courant) ont été réalisés sous un champ de $600 \times 600\ \mu\text{m}^2$.

Pour finir, les plots de contact et l'antenne on-chip ont été réalisés lors d'une passe plus grossière sur un champ de $1.6 \times 1.6\ \text{mm}^2$. Le diaphragme de $60\ \mu\text{m}$ délivrant $1.5\ \text{nA}$ permet d'insoler rapidement de grandes surfaces. Les doses typiques sont aussi de $300\ \mu\text{C}/\text{cm}^2$.

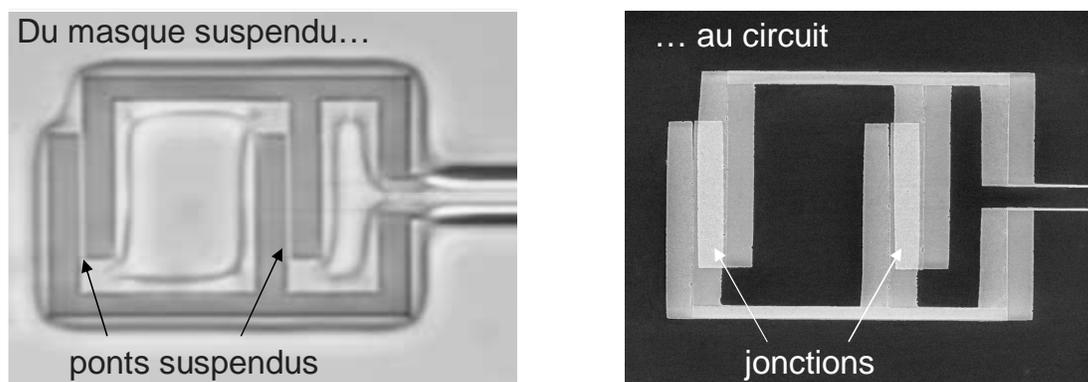


FIG. 2.3 – **À gauche** : photographie en microscopie optique du masque de résine après développement. Les zones les plus foncées correspondent au silicium oxydé mis à nu. Ces zones sont entourées par une frontière claire associée au retrait de la couche inférieure vu à travers la résine supérieure. **À droite** : photographie au MEB du SQUID. On voit nettement les deux images du masque associées aux deux évaporations. Les zones où les deux couches d'aluminium se superposent apparaissent plus claires.

Le développement qui révèle le motif insolé (étape 2) se déroule en trois temps. La puce insolée est d'abord immergée pendant 30s dans un mélange à un volume de MIBK (Methyl-Iso-Butyl-Ketone) pour trois volumes d'IPA (isopropanol) qui attaque la résine supérieure et le copolymère. Elle est ensuite rincée dans un premier bain d'IPA avant d'être immergée durant 1 min 30 s dans un bain propre d'IPA. Cette dernière étape permet d'accroître légèrement le retrait de la couche d'espacement. Pour finir, on sèche la plaquette avec un jet d'azote comprimé : le masque est prêt pour l'étape d'évaporation.

Étalement des résines	
Couche inférieure	PMMA/MAA (33 %) dilué à 6 % dans l'éthyl-lactate
étalement	2000 t/min durant 45 s
recuit	180 °C durant 3 min 30 s
étalement	2000 t/min durant 45 s
recuit	180 °C durant 5 min
	⇒ 2 × 400 nm
Couche supérieure	PMMA (950K) dilué à 4 % dans l'éthyl-lactate
étalement	5000 t/min durant 30 s
recuit	160 °C durant 5 min
	⇒ 200 nm
Insolation	
Insolation	doses de 300 à 1000 $\mu\text{C}/\text{cm}^2$, 20 kV
haute résolution	diaphragme 10 μm (40 pA), champ 600 × 600 μm^2
basse résolution	diaphragme 60 μm (1.5 nA), champ 1.6 × 1.6 mm^2
Développement	
PMMA et PMMA/MAA	MIBK : IPA durant 30 s
rinçage	IPA durant 5 s
PMMA/MAA	IPA durant 1 min30 s

TAB. 2.1 – Paramètres techniques de la fabrication du masque suspendu.

2.1.2 Évaporation sous angle

Le dépôt du circuit se fait selon un procédé d'évaporation sous angles ou évaporation par ombrage à travers le masque suspendu. Les jonctions sont obtenues après deux dépôts entrecoupés d'une phase d'oxydation. L'ensemble du processus se déroule au sein d'un bâti sans que le circuit ne soit exposé à l'atmosphère ambiante.

La puce est placée dans le bâti à une vingtaine de centimètres d'une charge d'aluminium. Cette dernière est chauffée jusqu'à atteindre la température d'évaporation des atomes d'aluminium. Le premier dépôt se fait suivant un angle de l'ordre de -45° avec la normale au substrat (étape 3 de la figure 2.2), créant ainsi une première image décalée du masque sur le substrat. Dans notre cas, le décalage est de l'ordre de 800 nm. On comprend ici l'importance du retrait de la couche d'espacement, qui doit être au moins égal au décalage du dépôt.

Vient ensuite l'oxydation, réalisée sous pression statique d'oxygène pur (étape 4). Elle permet la croissance d'une couche isolante d'alumine (Al_2O_3) sur toute la surface d'aluminium déposée. L'épaisseur de la couche d'oxyde est de l'ordre d'une dizaine d'Angström. Elle fixe la transparence tunnel de la jonction et donc son courant critique. On contrôle l'épaisseur d'oxyde à travers la pression d' O_2 et le temps d'exposition, fixé à 10 min.

Après pompage de l'atmosphère d'oxygène, on réalise enfin la deuxième évaporation, dans une direction symétrique de la première par rapport à la normale au substrat, donc sous un angle opposé (étape 5). Ceci crée une image du masque décalée en sens inverse de la première. La jonction tunnel $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Al}$ correspond au recouvrement des deux images. Les jonctions du SQUID apparaissent nettement en teinte claire sur la photographie MEB représentée à la figure 2.3.b. Leur largeur est d'environ $1.5 \mu\text{m}$. La pression d'oxydation correspondant au courant critique I_0 souhaité est en général déterminée après plusieurs essais. Pour chaque essai, I_0 est estimé grâce à une mesure à température ambiante de la résistance tunnel des jonctions (cf §2.1.4).

Les masques des SQUIDs S_1 et S_2 sont, à quelques détails près, identiques. Par contre, les circuits ont été déposés dans des bâtis différents. S_1 a été déposé dans un bâti ultra-vide et S_2 dans une enceinte où règne seulement un vide secondaire. De plus les épaisseurs déposées sont elles aussi différentes (respectivement 40 nm et 15 nm par évaporation pour S_1 et S_2). Le tableau 2.2 détaille les données techniques des différents dépôts. La dernière étape de la fabrication est le retrait (ou *lift-off*) du masque de résine recouvert d'aluminium (étape 6). Ne subsiste alors que le circuit déposé sur le *wafer* de silicium oxydé. Pour ce faire, on place la puce dans un bain de N-méthyle-pyrrolidone chauffée à 80°C qui dissout la résine. Une fois la dissolution achevée, la puce est rincée dans un bain d'acétone et séchée par un jet d'azote comprimé.

Échantillon	S_1	S_2
Bâti	UHV	vide secondaire
Pression de dépôt	2×10^{-8} mbar	2×10^{-5} mbar
Épaisseur déposée	2×40 nm	2×15 nm
Angle de la 1 ^{ère} évaporation	-45°	-40°
Oxydation (O_2 durant 10 min)	90 mbar (statique) $\Rightarrow I_0 \approx 3 \mu\text{A}$	1.1×10^{-1} mbar (statique) $\Rightarrow I_0 \approx 1.2 \mu\text{A}$
Angle de la 2 ^{ème} évaporation	$+45^\circ$	$+40^\circ$

TAB. 2.2 – Paramètres des dépôts.

2.1.3 Géométrie des circuits

Les circuits S_1 et S_2 ont, à quelques détails près, sensiblement la même géométrie. Celle-ci est présentée sur la série de clichés de la figure 2.4 (page suivante). Outre le SQUID, le circuit comporte les amenées de courant et la ligne micro-onde (MO) ainsi que quatre plots de contact.

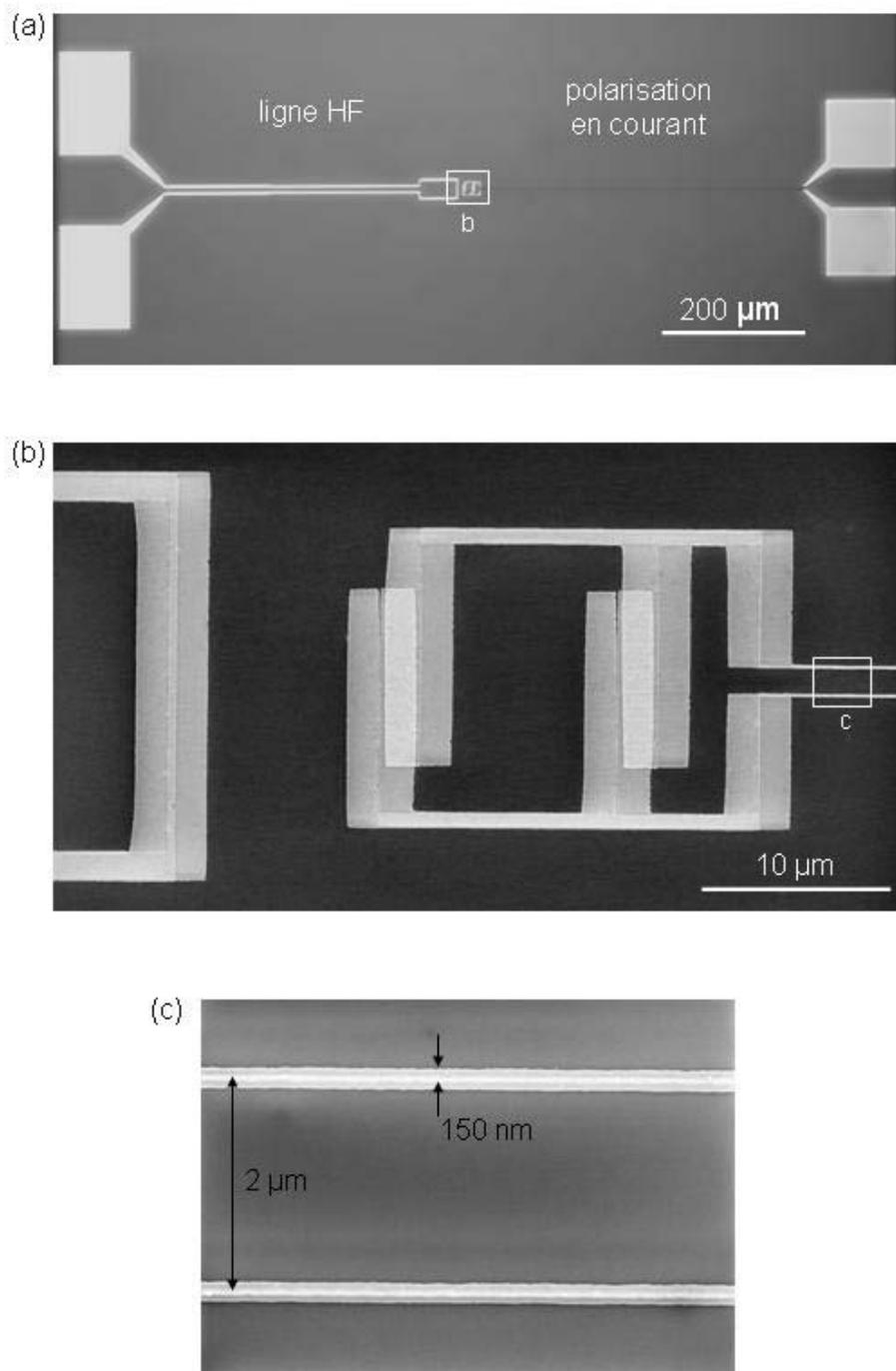


FIG. 2.4 – **En haut** : photographie au microscope optique de l'ensemble du circuit. **Au milieu** : photographie au MEB du SQUID S_1 . On voit à gauche l'antenne on-chip. **En bas** : zoom sur les amenées de courant du circuit S_1 . A cause d'un léger défaut d'alignement lors de l'évaporation, les deux images du circuit sont décalées de 100 nm.

Les jonctions sont larges d'environ $1.5 \mu\text{m}$. Pour S_1 (resp. S_2) elles sont longues de $13 \mu\text{m}$ (resp. $11 \mu\text{m}$), ce qui conduit à des surfaces de $20 \mu\text{m}^2$ (resp. $15 \mu\text{m}^2$). La boucle du SQUID a une surface d'environ $350 \mu\text{m}^2$. De plus, le bras côté amenées de courant est plus court que celui côté MO. Comme nous le verrons au chapitre 3, cette dissymétrie a des conséquences sur la modulation du courant critique par le flux appliqué.

Les amenées de courant constituent un filtre inductif *on-chip*. Elles sont très fines pour S_1 et atteignent 150 nm de large. Par contre, comme S_2 est trois fois moins épais, il n'a pas été nécessaire de faire le même effort de lithographie que pour S_1 . Les amenées de S_2 sont larges d'environ 500 nm pour une inductance sensiblement équivalente. On a de plus minimisé la surface comprise entre les amenées de courant pour éviter un couplage parasite avec la ligne MO (cf §2.3.3).

La ligne hyperfréquence n'est pas adaptée 50Ω . Elle est beaucoup plus large que les amenées de courant pour deux raisons. D'une part on veut minimiser son inductance pour éviter de la rendre trop dispersive. D'autre part, on doit prendre garde à conserver un courant critique suffisant, car les impulsions de flux dc utilisées pour la mesure rapide de l'état du SQUID nécessitent des courants allant jusqu'à $300 \mu\text{A}$. Pour S_1 et S_2 , l'extrémité de la ligne se trouve à environ $10 \mu\text{m}$ du bord du SQUID. Elle présente une géométrie dipolaire pour minimiser les couplages parasites avec le champ induit à longue distance.

La taille des plots de contact, situés à $500 \mu\text{m}$ du SQUID, a été réduite à $100 \times 100 \mu\text{m}$ pour les amenées de courant et à $150 \times 100 \mu\text{m}$ pour la ligne MO. On souhaite d'une part éviter l'apparition de capacités parasites qui introduiraient trop de dispersion dans la ligne hyperfréquence. D'autre part, ces surfaces d'aluminium sont susceptibles de piéger des vortex qui pourraient envoyer un signal de bruit sur le SQUID.

2.1.4 Tests - Connection du circuit

On réalise à chaque fois six à huit circuits en parallèle, régulièrement espacés sur une plaquette de silicium oxydé de forme voisine d'un carré de 1 cm de côté. Pour tester et optimiser la phase d'oxydation, trois jonctions tests de plus faible dimension ($1 \mu\text{m}$ de long) sont aussi présentes sur la puce.

L'avantage du substrat en silicium oxydé est de permettre un test à température ambiante des circuits par mesure de résistance. Par contre, les décharges électrostatiques sont canalisées directement dans le circuit. En raison de la faible épaisseur d'oxyde, les jonctions tunnel du SQUID y sont extrêmement sensibles. On doit être particulièrement vigilant et garder une connection constante du SQUID à la masse lors de chaque manipulation (test, soudure et installation dans le cryostat).

Les mesures test de résistance ont été réalisées grâce à un testeur sous pointe associé à une source de courant flottante délivrant typiquement quelques μA et un microvoltmètre⁽²⁾. En première approche, ces tests permettent de vérifier si les lignes et les jonctions ne sont pas coupées ou en court-circuit. La mesure à température ambiante de la

⁽²⁾2000 Multimeter, Keithley.

résistance tunnel R_t des jonctions permet d'estimer leur courant critique I_0 . D'autre part, la résistance des lignes donne une indication de leur inductance à froid.

On ne mesure pas directement la résistance du SQUID (de l'ordre de la centaine d'ohms), car celui-ci est en série avec les amenées de courant dont la résistance est supérieure à 10 k Ω . Nous recourons à des jonctions tests connectées directement aux plots de contact par des lignes de résistance négligeable. Lorsque la température est très basse devant la température critique des couches minces d'aluminium, la relation d'Ambegaokar-Baratov (1.2) donne : $I_0 R_t = \pi \Delta / 2e$. Le gap Δ des couches minces est mesuré sur une courbe $I - \overline{V}_s$. On en déduit la relation pratique : $I_0 R_t \approx 3.3 \times 10^{-4}$ V, valable quand la résistance est mesurée à basse température. En pratique, la résistance tunnel augmente de 30 à 50 % lorsque la température passe de 300 K à 4 K. Elle est stable en dessous de 4 K.

Il existe une relation entre la résistance normale R_n d'un filament supraconducteur et son inductance L_K (relation (2.4) du §2.3.3). Pour les filaments d'aluminium, on obtient $L_K / R_n = 1.1$ nH/k Ω . Là encore, la résistance doit être mesurée à basse température. Nous avons observé que la résistance des lignes chutait de 50 % de l'ambiante à 4 K.

Si les paramètres sont corrects, la plaquette de silicium est découpée au CIME (Grenoble) en puces de quelques millimètres carrés ne comportant qu'un circuit. Elle est ensuite placée sur le porte échantillon, photographié sur la figure 2.9. Le collage est réalisé avec un vernis *General Electric*. On contacte les amenées de courant et la ligne haute fréquence par des fils d'aluminium de 20 μ m de diamètre soudés par une soudeuse à ultrasons. Pour finir, on monte le porte échantillon sur le cryostat et le circuit est prêt à être mesuré.

2.2 Le dispositif expérimental

Nous utilisons une diluette réalisée au CRTBT qui s'adapte sur un cryostat Orange à bain d'hélium pompé. Complètement câblée (avec la ligne coaxiale), elle atteint 30 mK. L'ensemble de la thermométrie est gérée par une interface TRMC2 également développée au laboratoire. Cette partie montre comment est réalisée en pratique l'expérience type décrite au chapitre 1. Le câblage du cryostat et les principaux systèmes de filtrage seront décrits ultérieurement. Durant ma thèse, nous avons mis au point une nouvelle électronique de mesure en étroite collaboration avec le service électronique et notamment Julien Minet. La génération du signal de flux hyper fréquence est également décrite. Nous contrôlons désormais des impulsions micro-onde et des impulsions dc avec des temps de montée inférieurs à la nanoseconde.

2.2.1 Principe du montage

La figure 2.5 présente le schéma de principe de l'électronique qui permet la génération synchronisée de tous les signaux requis par l'expérience. La figure 2.6 montre le câblage du cryostat et les connections à la puce du SQUID. Par souci de clarté, nous n'avons pas représenté les lignes de mesure des thermomètres ni celles utilisées pour alimenter les résistances de régulation de température.

L'ensemble de l'expérience est contrôlé par un des programmes Lab-View qui tournent sur un PC. La mesure d'un point nécessite la répétition N fois avec une fréquence f_{rep} de la même expérience élémentaire dans laquelle le SQUID est polarisé pendant une durée Δt . La gestion de cette salve de mesure est déléguée à une carte de contrôle programmable⁽³⁾.

Le flux magnétique Φ_p est appliqué par une bobine alimentée en courant par une source de courant continu flottante de haute résolution⁽⁴⁾. Il est gardé constant durant la mesure du point. La carte de contrôle génère un signal TTL de N impulsions de durée Δt répétées à la fréquence f_{rep} qui va hacher⁽⁵⁾ une tension continue V_p , fournie par une source de tension 16 bits⁽⁶⁾. On obtient alors un signal $V_p(t)$. Un amplificateur différentiel entre l'entrée V_p et la sortie $V_p(t)$ permet de s'affranchir du mode commun. $V_p(t)$ va être converti en courant de polarisation $I_p(t)$ par une résistance de 500 k Ω placée à l'entrée du cryostat, à température ambiante.

Au milieu de chaque impulsion de courant, la carte de contrôle génère également un signal de trig qui commande la génération d'un signal de tension hyperfréquence $V_{hf}(t)$ (impulsion micro-onde d'excitation suivi d'une impulsion dc de mesure). L'électronique rapide produisant ce signal sera décrite au §2.2.2. Ce signal est descendu jusqu'au SQUID par une ligne coaxiale à large bande passante dont l'âme est soudée à un des plots de l'antenne *on-chip* de la puce du SQUID, la gaine extérieure étant soudée à la masse du cryostat (notée "Cr"). L'antenne, qui se comporte à peu près comme un court-circuit, est alors traversée par un courant $I_{hf}(t)$ induisant un flux $\Phi(t)$ capté par la boucle du SQUID.

Pour lire le résultat de la mesure de l'état quantique du SQUID, on mesure la tension $\bar{V}_s(t)$ à ses bornes. La mesure est "4 fils" jusqu'à l'environnement proche du SQUID. On s'affranchit ainsi des résistances des lignes. On réalise de plus une mesure différentielle grâce à un amplificateur différentiel $\times 100$ bas bruit⁽⁷⁾ (bloc "D NF"). Pour détecter l'échappement, il suffit de comparer cette tension à un seuil (réglé usuellement à la moitié de la transition supraconducteur - résistif). Cette fonction est intégrée au boîtier qui génère la tension $V_p(t)$. Le dépassement du seuil a deux conséquences. D'un côté, le comparateur envoie une impulsion TTL sur un compteur placé sur la carte de contrôle qui comptabilise le nombre d'échappements. De l'autre, il envoie un signal qui stoppe la polarisation en courant. Ainsi, on évite de chauffer inutilement le système et on peut augmenter les cadences de répétition.

Une fois la salve de N expériences terminée, le PC lit sur le compteur le nombre N_{ech} d'évènements détectés. Le résultat d'un point de mesure est la probabilité d'échappement P_{ech} , associée à l'état du SQUID. Elle est obtenue par $P_{ech} = N_{ech}/N$.

Ce montage a été comparé à celui développé par Frank Balestro durant sa thèse. En terme de bruit, il a des performances similaires. Il permet de décharger le PC du traitement des données et lève les limitations de taille d'acquisition du précédent système. Par contre, pour pouvoir profiter pleinement de la réduction des phénomènes de chauffage, il faudrait

⁽³⁾La carte de contrôle a été réalisée par Julien Minet.

⁽⁴⁾Universal Source 3245A, HP.

⁽⁵⁾Le boîtier dans lequel se fait le hachage a été également mis au point par Julien Minet.

⁽⁶⁾Carte commerciale PCI-DAS1602, ComputerBoards, Inc.

⁽⁷⁾Amplificateur LI-75A, NF electronic instrument.

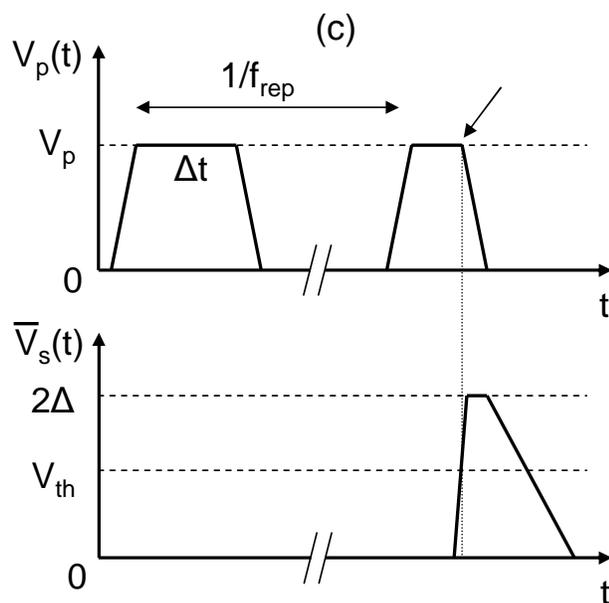
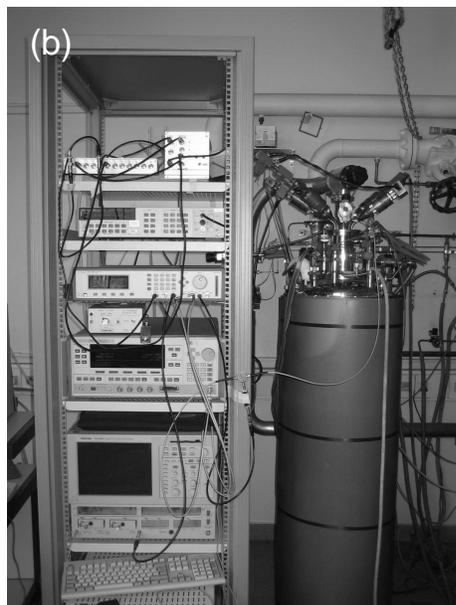
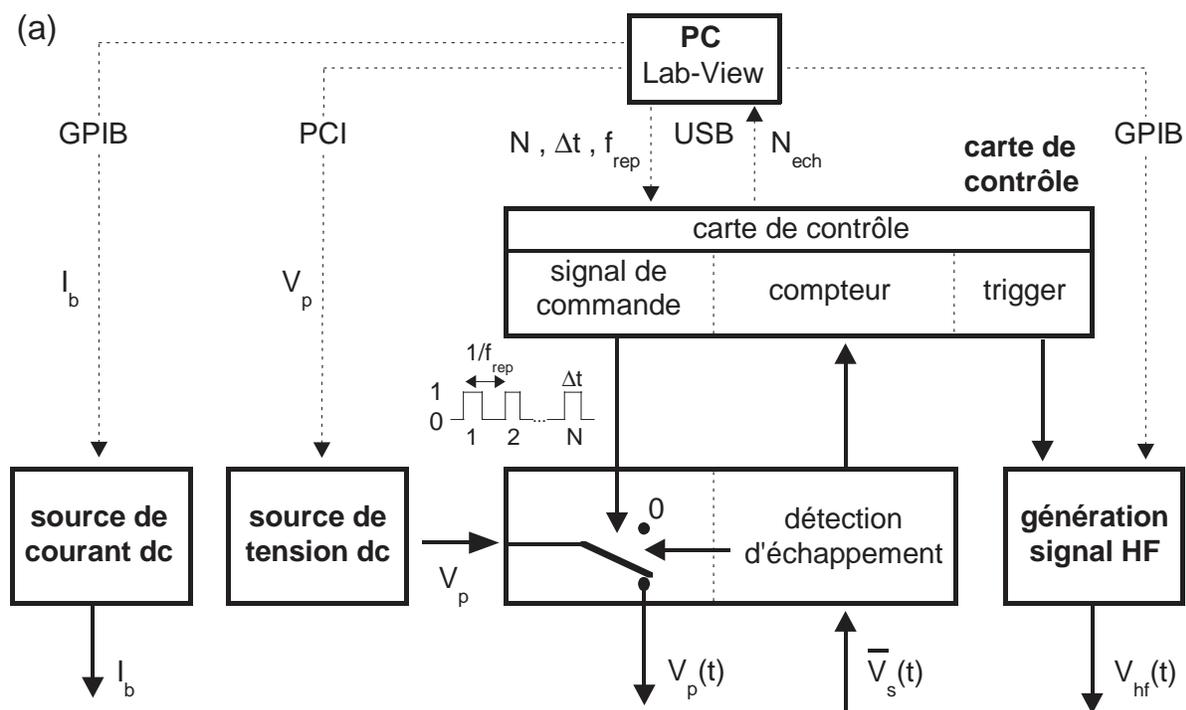


FIG. 2.5 – (a) Schéma de principe de l'électronique. (b) Photographie de l'électronique de commande et du cryostat. (c) Allure du signal de polarisation $V_p(t)$, converti en courant de polarisation par une résistance placée en entrée de cryostat. Pour limiter le chauffage, $V_p(t)$ est remis à zéro dès que l'échappement est détecté (flèche).

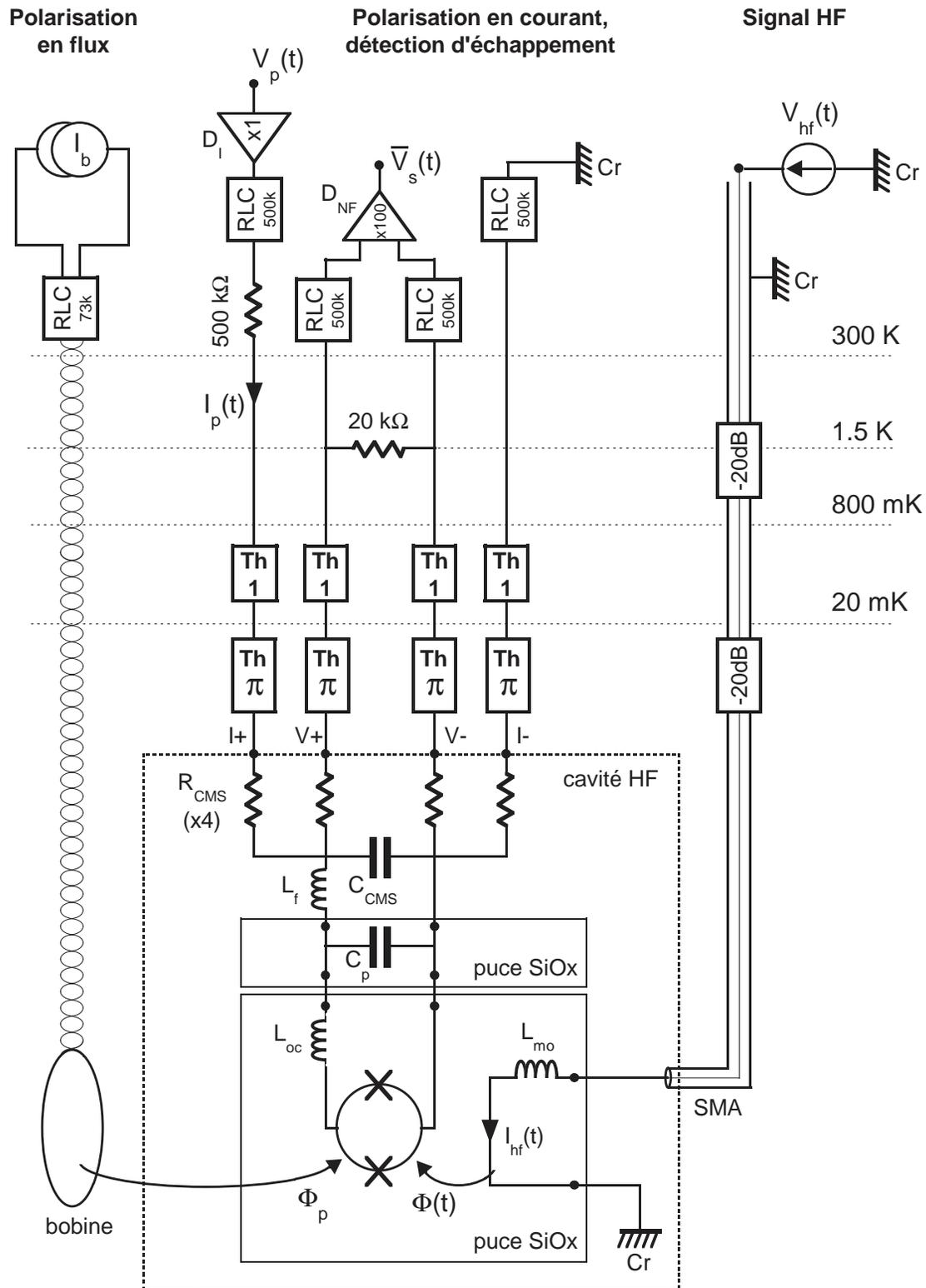


FIG. 2.6 – Câblage du cryostat et filtrage.

augmenter la bande passante des lignes de polarisation et de mesure de tension. En effet, les temps de montée associés à ces lignes sont de l'ordre de $7 \mu\text{s}$, le chauffage a donc lieu durant environ $15 \mu\text{s}$ au minimum. Un boîtier de détection fonctionnant dans une bande passante de 10 MHz est actuellement mis au point dans le service électronique.

2.2.2 Génération du signal micro-onde

Le montage permettant la génération du signal haute fréquence est représenté sur la figure 2.7. Le signal comporte en général deux impulsions : une impulsion micro-onde qui excite le SQUID et une impulsion dc réalisant une mesure de l'état quantique du SQUID. Les caractéristiques temporelles du signal sont définies par un générateur d'impulsions dc⁽⁸⁾. Il délivre des signaux avec des temps de montée réglables à 0.8ns ou 1.6ns et dispose de deux sorties synchronisées par le même signal de trig. Nous utilisons la première (notée "OUT1") pour mettre en forme l'impulsion micro-onde et la seconde ("OUT2") génère directement l'impulsion dc de mesure.

Pour obtenir des impulsions micro-ondes avec des temps de montée rapides, nous utilisons un système à base de multiplieurs⁽⁹⁾. Ils permettent de hacher un signal sinusoïdal émis en continu par un synthétiseur de fréquence⁽¹⁰⁾. Les impulsions ainsi obtenues ont des temps de montée de 0.8 ns. Toutefois, les multiplieurs ne sont pas des dispositifs parfaits. En l'absence de signal de commande, un seul multiplieur laisse passer une proportion du signal micro-onde d'entrée suffisante pour causer une excitation résonante du système. Nous avons donc été amenés à associer en série deux multiplieurs. Le signal de commande émis par "OUT1" est divisé en deux par un diviseur de puissance⁽¹¹⁾. Pour conserver une synchronisation parfaite, les signaux de commande sont acheminés par un câblage identique. Avec ce montage, les "fuites" de micro-ondes n'ont alors plus de conséquence expérimentalement observable. D'autre part, la sortie du multiplieur sature si la puissance du signal micro-onde d'entrée dépasse 5 dBm. Enfin, il existe un léger couplage, sans doute inductif, entre la sortie et la commande. On limite cet effet parasite en utilisant des signaux de commande n'excédant pas 500 mV en entrée du multiplieur.

Les impulsions de mesure ont des temps de montée de 1.6 ns, suffisamment lentes pour rester adiabatiques. L'impulsion micro-onde et l'impulsion dc sont combinées par un diviseur⁽⁹⁾. Nous avons dû utiliser des atténuateurs pour éviter des réflexions parasites. En particulier, la sortie "OUT2" n'est plus adaptée 50Ω autour de 10 GHz. Le signal micro-onde susceptible de revenir vers le cryostat après une réflexion sur "OUT2" est filtré par un filtre passe bas⁽¹²⁾. Ce filtre, fonctionnant par absorption, est adapté 50Ω . Il atténue le signal micro-onde sans affecter l'impulsion de mesure.

On peut visualiser le signal $V_{hf}(t)$ envoyé dans la ligne du cryostat grâce à un os-

⁽⁸⁾Pulse/Pattern Generator 8110A, Agilent.

⁽⁹⁾Mixer M8-0420 LS, Marki Microwave.

⁽¹⁰⁾Synthesized Sweeper 83630A, HP, prêté par Laurent Lévy.

⁽¹¹⁾Power divider 5333, Picosecond Pulse Labs.

⁽¹²⁾Risetime Filter 5915, Picosecond Pulse Labs.

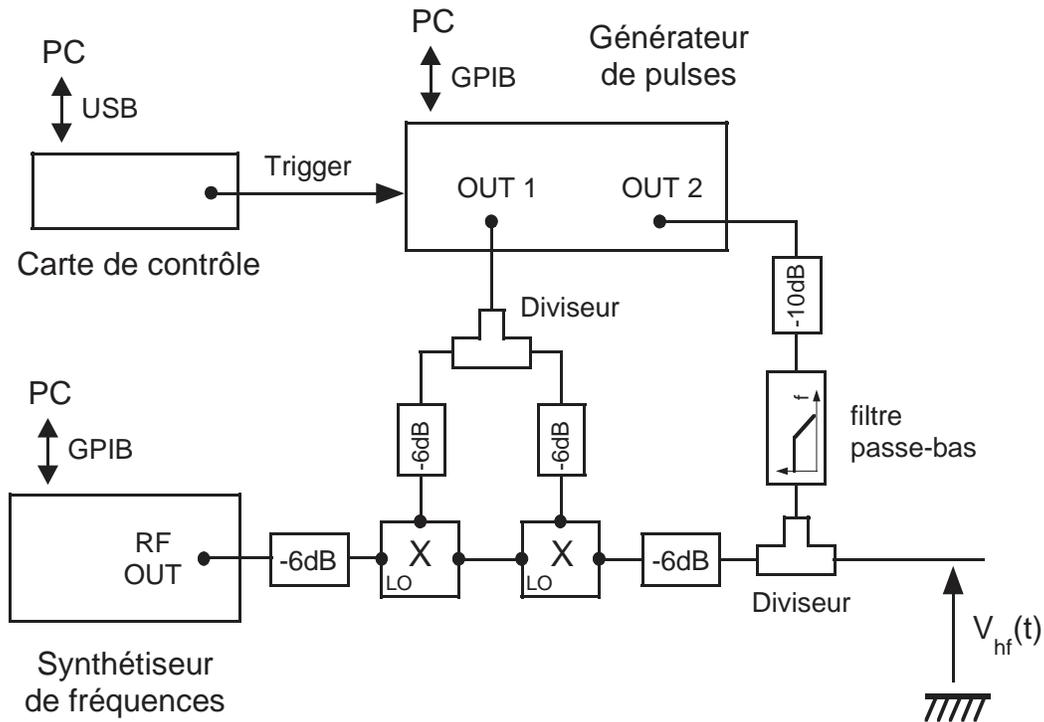


FIG. 2.7 – Partie haute fréquence du dispositif expérimental.

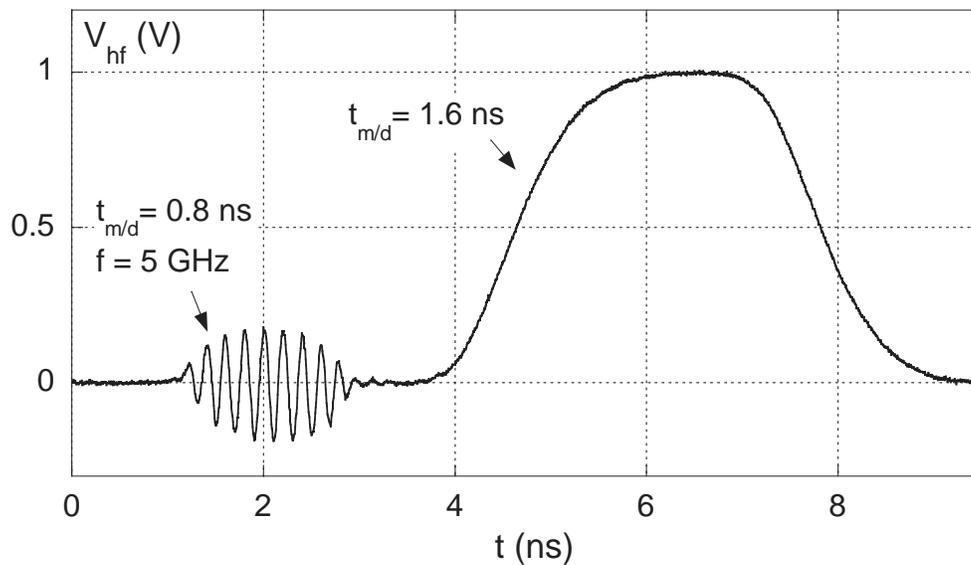


FIG. 2.8 – Exemple de signal haute fréquence (la durée de l'impulsion MO a été réduite au minimum et peut être augmentée).

cilloscope à échantillonnage⁽¹³⁾ dont l'horloge est synchronisée avec celle du synthétiseur de fréquence. La figure 2.8 démontre les performances du système. La séquence impulsion micro-onde - impulsion de mesure, réduite ici au minimum, dure environ 8 ns. Nous avons utilisé une fréquence de 5 GHz. Les deux impulsions sont séparées de moins d'une nanoseconde. On peut constater que le signal est propre, sans réflexions parasites. Le signal hyperfréquence est guidé jusqu'au circuit par des câbles coaxiaux de bande passante [dc, 18 GHz]. Nous utilisons un coax cryogénique de 300 K à 1.5 K et un coax niobium-niobium de 1.5 K à 30 mK.

2.3 Blindage et filtrage

Le SQUID est sensible au bruit en courant passant par les lignes de polarisation ainsi qu'au bruit en flux capté par sa boucle supraconductrice. Nous verrons au chapitre 5 que ces bruits génèrent des processus incohérents qui limitent la visibilité des phénomènes quantiques dans le SQUID. Il est donc crucial d'atténuer au maximum les fluctuations aléatoires des paramètres de polarisation. Cette partie présente le blindage et le filtrage du dispositif expérimental. Au cours de ma thèse, nous avons amélioré l'environnement proche du SQUID qui dresse un dernier rempart au bruit.

2.3.1 Blindage

Le SQUID est protégé des dérives de flux basse fréquence provenant de l'extérieur du cryostat Orange par trois écrans concentriques. Les deux premiers sont placés à l'extérieur du cryostat, à température ambiante. Celui situé le plus à l'extérieur est un enroulement de tôle de fer doux, posé durant mon stage de DEA. Vient ensuite un écran de μ -métal. Ces deux écrans atténuent les fluctuations du champ magnétique. Le dispositif est complété par un écran en plomb thermalisé à 1.5 K qui enserre la partie "calorimètre" de la diluette. Ce dernier écran supraconducteur fige le champ magnétique résiduel. Les flux résiduels mesurés tout au long de ma thèse restent fixes tant que le cryostat est à froid. Par contre, ils ont fluctué légèrement d'une série de manipulations à l'autre avec une amplitude inférieure à $\Phi_0/4$ soit environ $2 \mu\text{T}$. Une bonne preuve de l'efficacité du blindage a été fournie par notre voisin dont le cryostat, situé à environ 6 mètres du nôtre, comportait une bobine de champ montant à 8 T. Nous avons conservé de bonnes relations...

Les fluctuations électromagnétiques haute fréquence venant de l'extérieur sont écran-tées par le cryostat lui-même qui constitue une cage de Faraday. Toutefois, les lignes de mesure peuvent se coupler à des sources de radiations internes, comme par exemple les résistances de chauffage ou les zones chaudes du cryostat qui émettent des photons thermiques. Entre 300 K et 1.5 K, les lignes de polarisation en courant et de mesure de tension sont donc torsadées et blindées par un capillaire en acier (ceci n'a pas été représenté sur la figure 2.6 pour alléger le schéma). En dessous de 1.5 K, le blindage des lignes est assuré

⁽¹³⁾Digital Sampling Oscilloscope TDS 8000, Tektronix.

par les dispositifs de filtrage. Le SQUID est placé au sein d'une cavité en cuivre dont les premiers modes se situent aux alentours de 20 GHz, loin de la fréquence propre du système, inférieure à 13 GHz dans toutes les expériences.

Le blindage est nécessaire mais doit être complété par un soigneux filtrage des lignes de mesure. En effet, celles-ci peuvent conduire du bruit venant de l'électronique à température ambiante jusqu'au SQUID et perturber le système.

2.3.2 Filtrage des lignes

Ligne coaxiale. On ne peut pas filtrer la ligne coaxiale, sous peine de réduire sa bande passante. On limite le bruit thermique descendu par la ligne en utilisant des signaux $V_{hf}(t)$ haut niveau atténués à basse température. La ligne comporte deux atténuateurs de -20 dB. Le premier est thermalisé au point à 1.5 K et le second à 30 mK. Le bruit conduit et produit par les différents étages de la ligne est analysé en détail au chapitre 5. La conclusion de cette étude est que ce bruit est négligeable.

Amenées de courant de la bobine. L'alimentation correspondante est flottante. Les amenées de courant sont tressées et filtrées par des filtres RLC au niveau de l'entrée du cryostat, à température ambiante (bloc "RLC 73k"). Ces filtres passe-bas, développés au laboratoire, comportent notamment des capacités de traversée et coupent les signaux au-dessus de 73 kHz.

Lignes de polarisation en courant et de mesure de tension. Pour éviter des bruits parasites dûs à des boucles de masse, la masse cryostat (notée "Cr") est découplée de la masse du secteur (notée "PC") qui sert de référence à l'électronique de polarisation. Ce découplage est assuré par des amplificateurs différentiels à forte réjection du mode commun. Les lignes de tension sont découplées par l'amplificateur différentiel $\times 100$ "D NF" et les amenées de courant par un amplificateur différentiel $\times 1$ noté "D I".

Ces lignes sont également fortement filtrées. La première série de filtre est placée à température ambiante. Ce sont des filtres RLC analogues à ceux des lignes de polarisation en flux mais avec une bande passante plus large qui s'étend jusqu'à 500 kHz (bloc "RLC 500k"). Pour chaque ligne, viennent ensuite 75 cm de thermocoax bifilaire⁽¹⁴⁾ thermalisés entre 1.5 K et 30 mK (bloc "Th1"). Les thermocoax se comportent comme des filtres RC distribués qui atténuent fortement les signaux de fréquence supérieure au GHz [48]. Surtout, le porte-échantillon thermalisé à 30 mK comporte un dernier filtre composé de 2 m de thermocoax bifilaire en série avec deux filtres π commerciaux (bloc "Th π "). L'atténuation à froid du système a été caractérisée durant la thèse de Franck Balestro [49]. Elle est supérieure à -100 dB à partir de 400 MHz et dépasse -200 dB au-delà de 1 GHz.

⁽¹⁴⁾ Gaine extérieure et âmes centrales en Inconel, diélectrique Al_2O_3 .

2.3.3 Environnement proche du SQUID

Les impédances constituant l'environnement proche du SQUID apparaissent sur la figure 2.9 et le schéma électrique équivalent est représenté sur la figure 2.6 à l'intérieur du rectangle symbolisant la cavité haute fréquence. Les deux éléments les plus importants pour le filtrage sont l'inductance on-chip L_{oc} réalisée en affinant la section des lignes d'amenée de courant et une capacité plane C_p réalisée au laboratoire. Ces composants sont fiables jusqu'à une quinzaine de gigahertz au moins. Cet environnement est complété par des impédances surface montée : une capacité $C_{CMS} = 2 \text{ nF}$ et quatre résistances identiques $R_{CMS} = 500 \Omega$. Les fils de soudure introduisent des inductances supplémentaires dans le circuit, à raison de 0.6 nH par mm de fil.

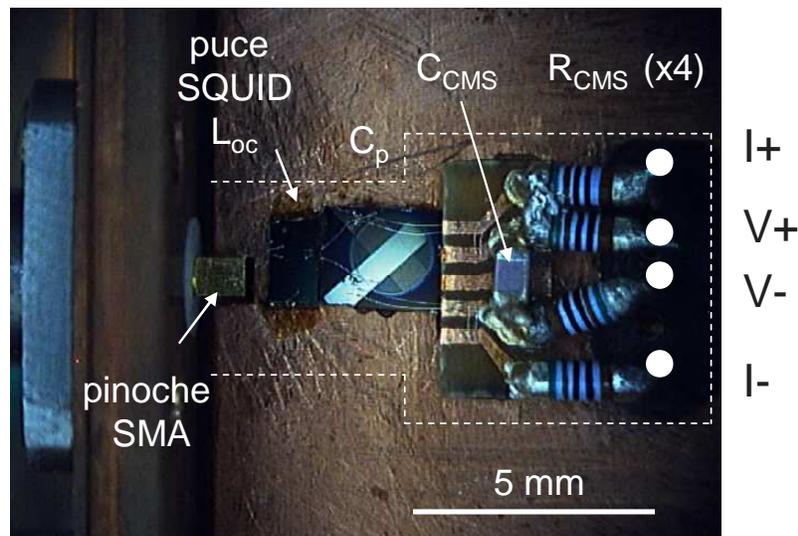


FIG. 2.9 – Photographie sous binoculaire de la plaque porte échantillon. On voit les impédances de filtrages proches du SQUID (exceptée l'inductance on-chip, trop petite). Les traits pointillés représentent les parois de la cavité délimitée par le capot en cuivre vissé sur la plaque porte échantillon.

Capacité plane de filtrage. L'intérêt de ce composant est double. D'une part, il permet de mettre à la masse les fluctuations de courant haute fréquence arrivant sur l'échantillon. D'autre part, il limite l'environnement vu par le SQUID à haute fréquence. Les capacités doivent avoir un bon comportement à basse température ; nous avons pour cela retenu un diélectrique simple : l'alumine. Elles doivent de plus être utilisées à haute fréquence. Elles ont donc une taille réduite pour éviter l'apparition de modes résonants parasites. Les deux capacités utilisées pour les expériences avec les SQUIDs S_1 et S_2 ont été réalisées par le service technique de microfabrication du CRTBT.

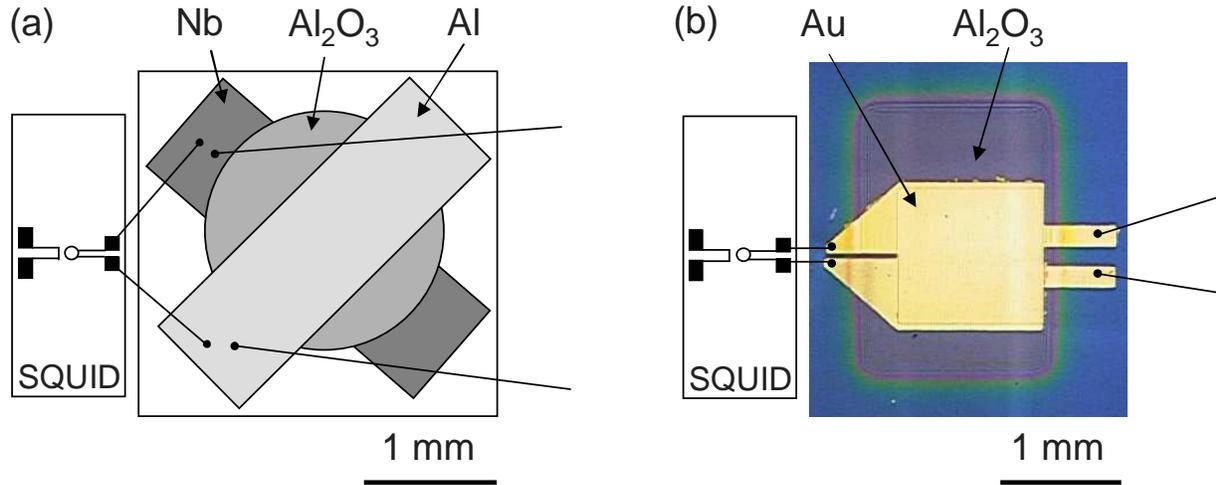


FIG. 2.10 – Géométrie et connexion des capacités de filtrage pour les échantillon S_1 (a) et S_2 (b). La boucle parasite située entre le SQUID et la capacité a été fortement réduite dans le second montage.

Ces deux capacités diffèrent par la nature des armatures et par la géométrie. La première⁽¹⁵⁾ est un sandwich Al/Al₂O₃/Al. Les armatures sont donc supraconductrices à basse température. Sa capacité a été mesurée à chaud et vaut 150 pF. La géométrie retenue, en forme de croix, introduit un couplage parasite avec les micro-ondes. En effet, la surface de la boucle formée par les fils de soudure est importante ($\approx 2.5 \text{ mm}^2$). Par induction, les impulsions de flux génèrent alors des courants non négligeables dans les lignes de polarisation en courant. Ces courants parasites ont été mis en évidence expérimentalement avec le montage du SQUID S_1 . La mutuelle entre la ligne MO et la boucle a été mesurée à 5 pH.

Ce défaut a été corrigé pour la deuxième capacité⁽¹⁶⁾, où cette surface est réduite d'un facteur 20 au moins. Les courants induits parasites ne sont plus détectables expérimentalement. La structure est cette fois du type Au/Al₂O₃/Au. En passant à un matériau non-supraconducteur, nous voulions tester l'origine du bruit de flux très présent dans le SQUID S_1 (cf chapitre 3). En effet, la première capacité comportait de vastes surfaces supraconductrices, susceptibles d'induire un bruit de flux. Nos expériences ont permis de mettre hors de cause cette source potentielle de bruit.

Inductance on-chip. Le filtrage inductif fournit un environnement proche non dissipatif au SQUID. Son rôle, crucial, sera développé en fin de paragraphe. L'inductance on-chip L_{oc} est dominée par l'inductance des lignes d'amenée à laquelle s'ajoute une petite contribution des fils de soudure. L'inductance d'un filament supraconducteur de section S et de longueur l est la somme de deux contributions : l'inductance géométrique L_G et l'inductance cinétique L_K . Comme son nom l'indique, L_K est associée à l'énergie cinétique E_K du supercourant.

⁽¹⁵⁾La capacité Al/Al₂O₃/Al a été réalisée par Olivier Poble

⁽¹⁶⁾La capacité Au/Al₂O₃/Au a été réalisée par Cristophe Lemonias.

Si ce dernier a une intensité I_s , E_K s'écrit :

$$E_K = \frac{1}{2} L_K I_s^2 \quad (2.1)$$

Soit $\lambda_{L,s}$ la longueur de pénétration du champ magnétique dans le matériau. Si $\lambda_{L,s}^2 \gg S$, le supercourant est homogène sur toute la section du fil. En utilisant les équations de London, on exprime alors L_K en fonction de $\lambda_{L,s}$ et des données géométriques du problème :

$$L_K = \mu_0 \lambda_{L,s}^2 \frac{l}{S}, \quad (2.2)$$

μ_0 étant la perméabilité magnétique du vide. On peut remarquer que L_K se comporte comme $1/S$, alors que L_G évolue environ comme $\log(S)$. Ainsi, l'inductance des fils supraconducteurs de faible section est dominée par la contribution cinétique. $\lambda_{L,s}$ prend en compte le libre parcours moyen l^* fini des électrons. Elle s'écrit comme une renormalisation de la longueur de pénétration λ_L du matériau pur, qui donne, dans la limite "sale" :

$$\lambda_{L,s} = \lambda_L \sqrt{\frac{\xi_0}{l^*}}, \quad (2.3)$$

avec ξ_0 la longueur de cohérence du matériau en l'absence d'impuretés. L'introduction du produit constant $k = \rho l^*$ pour le matériau permet de relier L_K à la résistance R_n des lignes dans l'état normal :

$$L_K = (\mu_0 \lambda_L^2 \xi_0 k^{-1}) \times R_n. \quad (2.4)$$

On estime ξ_0 pour les couches d'aluminium utilisées en supposant qu'il suit la théorie BCS. On relie alors ξ_0 à la longueur de cohérence de l'aluminium pur massif, notée $\xi_{0,b}$: $\xi_0/\xi_{0,b} = \Delta_b/\Delta$. Δ_b et Δ sont respectivement les gaps de l'aluminium massif et celui de l'échantillon considéré. Les valeurs $\lambda_L = 16$ nm, $\xi_{0,b} = 1.6$ μ m et $\Delta_b = 170$ μ eV pour l'aluminium massif sont tabulées [50]. Δ est mesuré pour ce circuit à 210 μ eV et le paramètre $k = 4.1 \times 10^{-16}$ Ω m² a été mesuré pour des couches d'aluminium similaires [51]. On obtient ainsi la relation numérique $L_K/R_n = 1.1 \times 10^{-12}$ H/ Ω .

À haute fréquence, on doit prendre en compte des effets propagatifs pour expliquer le comportement des lignes. Elles sont caractérisées par leur inductance linéique totale

Paramètre		S_1	S_2
Inductance totale	L_{oc}	14 nH	9 nH
$L_{oc} = L_K + L_G (+L_f)$		11 + 1 (+2) nH	7.5 + 0.5 (+1) nH
Inductance linéique totale	\mathcal{L}	2.4×10^{-5} H.m ⁻¹	1.6×10^{-5} H.m ⁻¹
Capacité linéique	\mathcal{C}	4.4×10^{-11} F.m ⁻¹	5.7×10^{-11} F.m ⁻¹
Vitesse de la lumière	c	3.1×10^7 m.s ⁻¹	3.3×10^7 m.s ⁻¹
Impédance caractéristique	Z_c	800 Ω	530 Ω

TAB. 2.3 – Caractéristiques des lignes d'amenée de courant des échantillons S_1 et S_2 .

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_G$ et leur capacité linéique \mathcal{C} . \mathcal{L}_G et \mathcal{C} sont calculés p. 265 de la référence [52]. \mathcal{L}_K se déduit facilement des calculs précédents. Le tableau 2.3.3 résume les caractéristiques des lignes des échantillons S_1 et S_2 .

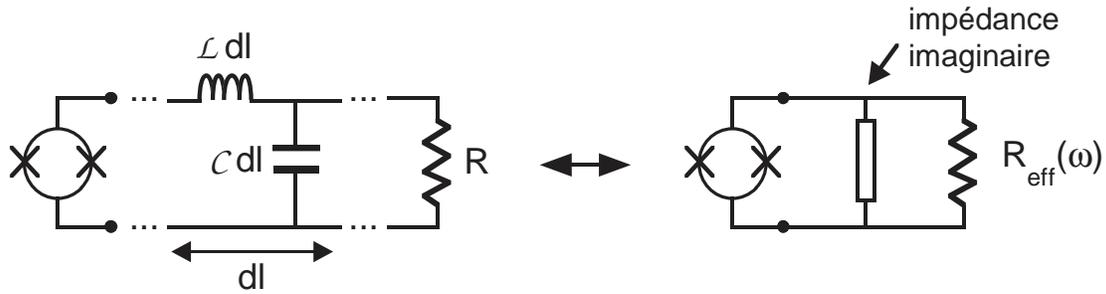


FIG. 2.11 – Environnement résistif vu à travers la ligne inductive, résistance effective.

Intérêts du filtrage inductif. Pour illustrer l'intérêt de cette ligne inductive, nous allons étudier l'environnement simplifié représenté sur la figure 2.12. Une étude détaillée du problème est proposée au chapitre 5. L'environnement après la ligne est supposé se réduire à une résistance $R = 5 \Omega$. Quoique très simple, le modèle représente assez bien l'environnement de S_2 à haute fréquence, la résistance R provenant des armatures en or de la capacité plane de filtrage. Vu depuis le SQUID, l'ensemble de l'environnement a une admittance $Y(\omega)$. Il peut être vu comme l'association en parallèle d'un dipôle d'impédance imaginaire et d'une résistance effective $R_{eff}(\omega) = 1/\text{Re}[Y(\omega)]$. $Y(\omega)$ est l'admittance d'une ligne de longueur l , d'impédance caractéristique Z_c où les ondes électromagnétiques ont une célérité c qui est chargée par une résistance R (p. 232, [53]) :

$$Y(\omega) = \left[\frac{R \cos(\omega l/c) + i Z_c \sin(\omega l/c)}{Z_c \cos(\omega l/c) + i R \sin(\omega l/c)} \right]^{-1} \quad (2.5)$$

Les variations de $R_{eff}(\omega)$ avec la fréquence sont tracées sur la figure 2.11. Les pointillés représentent un calcul non-propagatif qui ne tient pas compte de la capacité de la ligne. On peut constater que pour des fréquences comprises entre 5 et 30 GHz la résistance effective vue par le SQUID est considérablement augmentée. À plus haute fréquence, les résonances liées aux effets propagatifs de la ligne annulent cet effet. Le facteur de qualité Q du SQUID dépend des pertes à la fréquence propre du système (environ $\omega_p/2\pi$ qui varie typiquement de 7GHz à 13GHz). Si on ne tient compte que des pertes liées à l'environnement électrique, on a :

$$Q \approx R_{eff}(\omega_p)(2C_0)\omega_p. \quad (2.6)$$

Q est donc très nettement amélioré par l'inductance de filtrage. Nous verrons de plus, au chapitre 5, que les fluctuations quadratiques moyennes du courant de polarisation varient comme $1/\sqrt{L_{oc}}$. Avec les fluctuations de flux, elles sont responsables d'un élargissement

des raies de résonance du système et limitent son temps de cohérence. Il est donc très important de les réduire au maximum. Pour ce choix d'environnement, l'inductance *on-chip* joue un rôle crucial dans la protection du SQUID contre les fluctuations de courant, que ce soit à haute ou basse fréquence.

Pour finir, la partie non dissipative de l'environnement a également une légère influence sur la dynamique du SQUID. On définit l'inductance Josephson L_J du SQUID par :

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L_J 2C_0}}. \quad (2.7)$$

Dans le cas simple où on néglige les effets propagatifs dans la ligne, la partie non dissipative de l'environnement est simplement l'inductance L_{oc} en parallèle avec le SQUID. Dans le cas où $L_J \ll L_{oc}$, cette inductance renormalise L_J selon :

$$L_J \rightarrow L_J \left(1 - \frac{L_J}{L_{oc}}\right). \quad (2.8)$$

Pour donner un ordre de grandeur, la correction apportée à la fréquence plasma autour de 9 GHz vaut 1.5 %. Nous négligerons cet effet dans la suite.

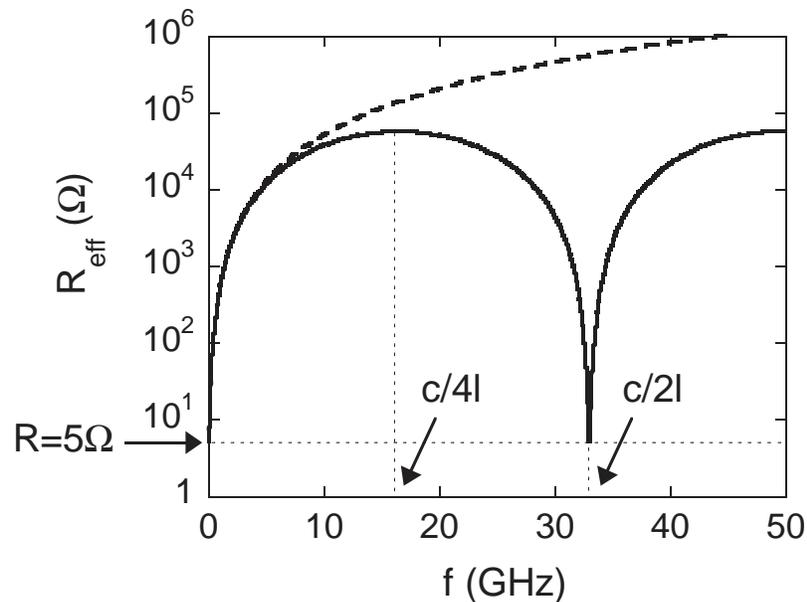


FIG. 2.12 – Évolution de la résistance effective en fonction de la fréquence. La ligne pointillée correspond à un calcul non propagatif où la capacité des lignes est négligée. Les paramètres sont ceux de la ligne S_2 .

Chapitre 3

Temps de vie du fondamental, effet tunnel et bruit de flux

À très basse température, le temps de vie de l'état de tension nulle d'une jonction Josephson polarisée près de son courant critique est fini. Le phénomène responsable peut être interprété comme l'échappement par effet tunnel d'une particule piégée dans un puits de potentiel à une dimension. En d'autres termes, un degré de liberté mettant en jeu un nombre *macroscopique* d'électrons (la différence de phase à travers la JJ) tunnelle à travers une barrière de potentiel. Pour cette raison, le processus est qualifié d'effet tunnel macroscopique (MQT en anglais). Il a été très étudié dans les années 80 [15, 54] et constitue une des premières preuves du comportement quantique d'un degré de liberté macroscopique dans un circuit supraconducteur.

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, le SQUID possède une physique analogue à la jonction Josephson, à la différence que la particule fictive qui décrit l'état de phase du système se déplace sur une surface de potentiel. Cette bidimensionnalité a trois conséquences sur le phénomène d'échappement, de la plus forte à la moins forte :

- (i) si l'inductance est forte ($b \leq 1/\sqrt{2}$), il peut exister plusieurs chemins pour quitter le puits de potentiel dans lequel la particule est initialement piégée [55, 56]. Les circuits S_1 et S_2 étudiés dans cette thèse ont une inductance trop faible ($b \sim 1$) pour présenter ce comportement.
- (ii) même si l'échappement s'effectue le long d'un unique chemin, les caractéristiques de ce chemin portent la trace de la bidimensionnalité du potentiel (renormalisation de ΔU et ω_p par rapport aux expressions bien connues pour la JJ).
- (iii) les lois physiques décrivant les taux d'échappement doivent elles aussi être renormalisées pour tenir compte de corrections bidimensionnelles.

D'un point de vue expérimental, le régime MQT n'a été étudié que récemment dans un SQUID. En 1988, Sharifi et *al.* ont publié des résultats expérimentaux qui ne vérifient ni les lois MQT, ni la loi d'activation thermique [57]. En 2002, le MQT a été clairement mis en évidence par Li et *al.* [58] pour un flux particulier correspondant au maximum

de courant critique. Le SQUID est alors strictement équivalent à une jonction Josephson dont le comportement est unidimensionnel. Dans le cadre de la thèse de Franck Balestro, le MQT a été observé sur une plage de flux correspondant à un quantum de flux. Les résultats expérimentaux ont pu être parfaitement interprétés par une théorie prenant en compte les renormalisations dues au caractère bidimensionnel du potentiel du SQUID [46]. J'ai activement participé à l'analyse des données en précisant notamment l'influence de la dissymétrie d'inductance du SQUID.

La première partie du chapitre présente les résultats des mesures d'échappement pour les circuits S_1 et S_2 à basse température (30 mK). Signalons que ces mesures n'impliquent que la partie basse fréquence du dispositif expérimental. La caractérisation de la mesure par impulsion de flux nanoseconde sera abordée au chapitre 6. Même si S_2 s'en approche, aucun des SQUIDS que j'ai étudiés ne suit la simple loi MQT pour tous les flux de polarisation, contrairement au SQUID qu'avait réalisé F. Balestro.

La deuxième partie étudie en détail comment un bruit sur les paramètres de polarisation I_p et Φ_p affecte les mesures d'échappement. Le principal résultat est que la largeur des courbes d'échappement constitue une quantité sensible pour mesurer les fluctuations à basse fréquence des paramètres de polarisation du SQUID. En particulier, l'analyse démontre la présence d'un bruit de flux basse fréquence dans les SQUIDS S_1 et S_2 .

Enfin, nous étudierons plus en détail les régimes où la surface de potentiel présente deux familles de puits, et donc deux courants critiques. Nous verrons qu'il est possible de mesurer le courant critique des deux puits en transférant la particule d'un puits à l'autre.

3.1 Temps de vie du fondamental

3.1.1 Effet tunnel et activation thermique

Ce paragraphe présente les deux mécanismes responsables du temps de vie fini de l'état fondamental supraconducteur du SQUID. Le minimum local de potentiel, schématisé sur la figure 3.1, est caractérisé par la pulsation de fond de puits ω_p et sa hauteur de barrière ΔU . Ces paramètres dépendent du point de polarisation.

À haute température, les fluctuations thermiques communiquent assez d'énergie à la particule pour lui faire sauter la barrière de potentiel. Ce régime d'activation thermique (AT) a été étudié en détail par Lefèvre-Seguin *et al.* [42] pour des SQUIDS fortement bidimensionnels ($b = 0.02$ à 0.1). Il a été également observé dans la thèse de F. Balestro pour un circuit aux caractéristiques voisines de S_1 et S_2 , où il n'existe qu'un chemin d'échappement. Dans ce cas, la fréquence moyenne d'échappement Γ_0^{AT} est donnée par une loi d'Ahrénus renormalisée [59] :

$$\Gamma_0^{AT}(I_p, \Phi_p, T) = a_{\perp} \left(\frac{\omega_p}{2\pi} \right) \exp \left(- \frac{\Delta U}{k_B T} \right), \quad (3.1)$$

avec k_B la constante de Boltzman. Le préfacteur a_{\perp} est dû au caractère bidimensionnel

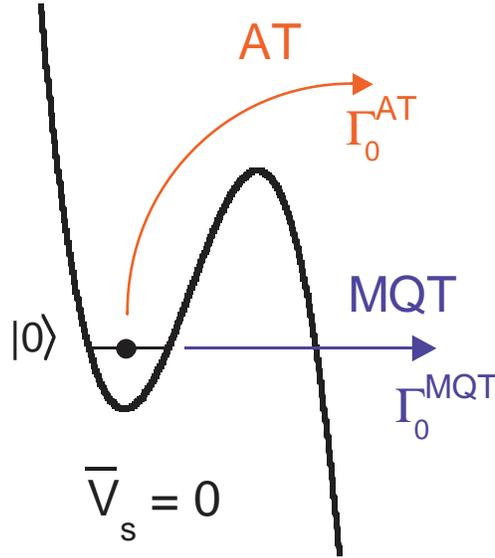


FIG. 3.1 – Échappement par activation thermique (AT) et effet tunnel (MQT) de l'état de tension nulle.

du potentiel. Il est égal au rapport des pulsations transverses en fond de puits et au niveau du point col. Nous l'avons évalué numériquement pour les SQUIDS étudiés : il est voisin de l'unité.

À basse température, l'activation thermique devient inefficace. Elle est relayée par l'échappement tunnel, toujours présent, qui ne dépend que de la géométrie du potentiel. A notre connaissance, il n'existe pas de théorie analytique d'effet tunnel dans un potentiel à deux dimensions. Chen a proposé une théorie MQT pour le SQUID, mais celle-ci est limitée à un SQUID de faible inductance ($b \gg 1$) [60]. Nous allons supposer que le taux d'échappement Γ_0^{MQT} est donné par la loi unidimensionnelle⁽¹⁾ bien connue pour les jonctions Josephson sous-amorties [61] :

$$\Gamma_0^{MQT}(I_p, \Phi_p) = 12 \sqrt{6\pi \Delta U / \hbar \omega_p} \left(\frac{\omega_p}{2\pi} \right) \exp \left(- \frac{36 \Delta U}{5 \hbar \omega_p} \right). \quad (3.2)$$

Toutefois, les paramètres ω_p et ΔU tiennent compte de l'aspect bidimensionnel du potentiel. La transition entre ces deux régimes a lieu pour une température de cross-over T^* donnée par [62] :

$$T^* = \frac{\hbar \omega_p}{2\pi k_B}, \quad (3.3)$$

T^* est estimée⁽²⁾ à respectivement 65 mK et 55 mK pour S_1 et S_2 .

⁽¹⁾Par analogie avec la relation (3.1) où $a_{\perp} \approx 1$, il est sans doute légitime de négliger les effets 2D.

⁽²⁾La pulsation ω_p est calculée pour $I_p = I_{ech}$ (définition au §3.1.2). $\omega_p(I_{ech})$ ne dépend que faiblement du flux de polarisation.

Supposons que la particule est initialement piégée dans le puits. Expérimentalement, nous mesurons la probabilité P_{ech} qu'elle s'échappe du puits au cours d'une durée Δt . À la température de base de la dilution ($30 \text{ mK} < T^*$), P_{ech} est donnée par :

$$P_{ech}(I_p, \Phi_p, \Delta t) = 1 - \exp(-\Gamma_0^{MQT} \Delta t). \quad (3.4)$$

Dans toute la suite, pour alléger les notations, on omettra l'exposant "MQT" qui reste sous-entendu.

3.1.2 Mesure de P_{ech} par impulsions de courant

Le principe de la mesure repose sur le caractère hystérétique des SQUIDs étudiés, bien mis en évidence sur la caractéristique Intensité-Tension portée sur la figure 3.2. Supposons que le système est initialement dans la branche supraconductrice (particule fictive piégée), polarisé par un courant I_p proche du courant critique. Si la particule s'échappe du puits, elle commence à dévaler le potentiel dont la pente moyenne est donnée par $-I_p/2I_0$. Comme la dissipation est faible, elle prend de la vitesse sans être repiégée par les puits suivants. Finalement, elle atteint une vitesse limite qui correspond à l'apparition d'une tension de 2Δ aux bornes du SQUID, avec Δ le gap BCS de la couche mince d'aluminium. Ainsi, l'échappement est accompagné d'une signature expérimentale forte : un pic de tension de l'ordre de $400 \mu\text{V}$, facilement détectable après amplification. Pour repiéger la particule, il suffit de ramener I_p à zéro⁽³⁾, la dissipation finissant par stopper la particule.

Le détail de la procédure expérimentale permettant d'obtenir $P_{ech}(I_p, \Phi_p, \Delta t)$ est schématisé sur la figure 3.2. La mesure est effectuée sous un flux Φ_p constant. On polarise le SQUID avec une série de N impulsions de courant (temps de montée $10 \mu\text{s}$, durée $\Delta t = 50 \mu\text{s}$). Soulignons qu'en comparaison de la technique utilisant une impulsion de flux nanoseconde, ces mesures sont très lentes. L'estimation expérimentale de P_{ech} est simplement le rapport du nombre d'évènements d'échappement divisé par N . La statistique utilisée est $N = 5000$ et la cadence de répétition f_{rep} est voisine de 500 Hz . Cette fréquence est limitée par le temps de repiégeage (typiquement $200 \mu\text{s}$), mais surtout par le temps de refroidissement du circuit car le passage à la branche résistive s'accompagne d'effet Joule.

La figure 3.3 présente les variations typiques de P_{ech} en fonction du courant de polarisation. Lorsque I_p est loin du courant critique, la barrière de potentiel est élevée et les processus d'échappement sont inefficaces. Plus on se rapproche de I_c , plus la barrière diminue et plus l'échappement devient probable, jusqu'à atteindre un point où il devient certain. On définit le courant d'échappement I_{ech} comme le courant de polarisation correspondant à $P_{ech} = 50\%$ et la largeur d'échappement ΔI correspondant à la gamme de courants pour lesquels P_{ech} est compris entre 10% et 90% . La figure 3.4 présente les variations de ces deux quantités avec le flux de polarisation, pour les circuits S_1 et S_2 .

⁽³⁾En fait, il suffit que I_p passe en dessous du courant de repiégeage [63], de l'ordre de quelques nA.

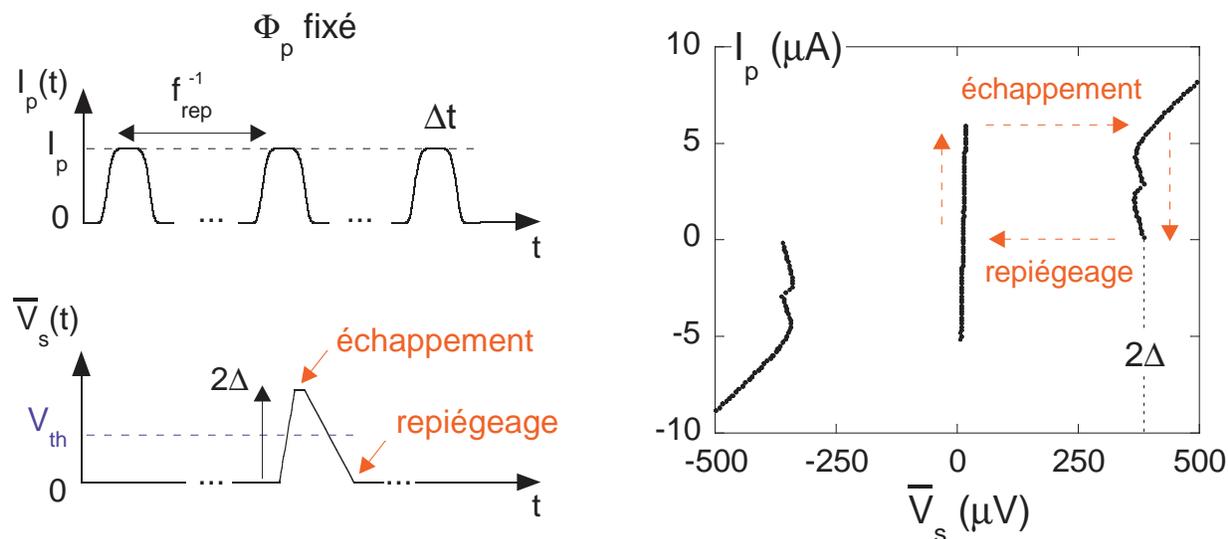


FIG. 3.2 – **À gauche** : mesure de la probabilité d'échappement $P_{ech}(I_p, \Phi_p, \Delta t)$. **À droite** : caractéristique intensité-tension typique (mesurée sur S_1) et cycle d'hystérésis décrit lors d'une mesure d'échappement.

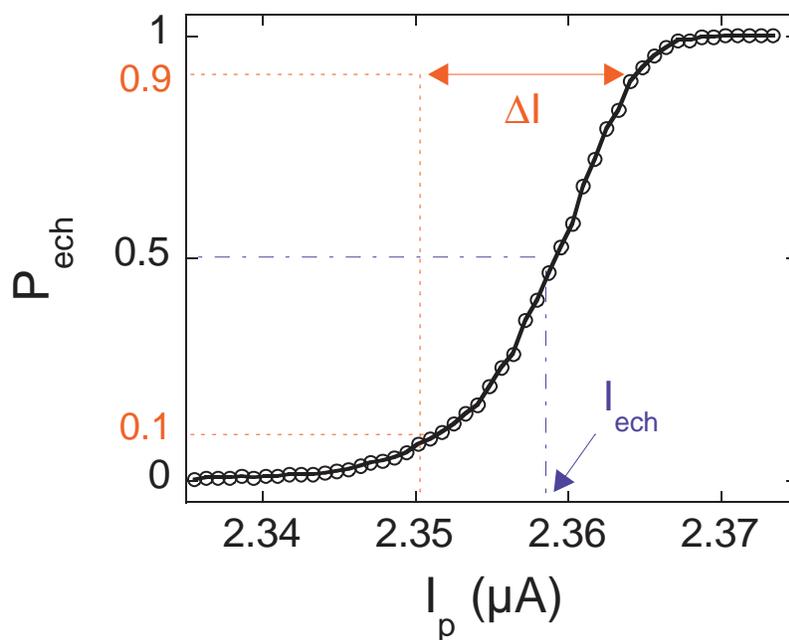


FIG. 3.3 – Variation typique de P_{ech} avec le courant de polarisation (courbe d'échappement). La mesure a été réalisée sous le flux fixé $\Phi_p = -0.011 \Phi_0$ avec le SQUID S_2 . Définition du courant d'échappement I_{ech} et de la largeur d'échappement ΔI .

3.1.3 Dépendance en flux - première analyse

Courant d'échappement. Le courant d'échappement suit de très près les variations du courant critique. La première étape de l'analyse est une calibration du flux magnétique. Le champ résiduel du dispositif expérimental est plus petit qu'un quantum de flux. Ainsi, lorsqu'on applique des courants faibles dans la bobine, on explore l'arche de courant critique pour laquelle aucun quantum de flux n'est piégé dans la boucle du SQUID. La calibration utilise les points remarquables de l'arche [0]. Pour un SQUID symétrique, les pieds seraient placés à $\Phi_p/\Phi_0 = \pm 0.5$ et le maximum de courant critique centré sur $\Phi_p = 0$. En fait, à cause de la dissymétrie d'inductance et en courant critique, les positions de ces points sont légèrement décalées. Dans notre analyse, nous négligeons la dissymétrie en courant critique. Avec une bonne approximation, les croisements entre les arches $[-1]$ et $[0]$ et entre $[0]$ et $[+1]$ sont situés à $\Phi_p/\Phi_0 = \pm 0.5 - (\eta/2\pi b)(I_x/I_{max})$ et le maximum est atteint pour $\Phi_p/\Phi_0 = -\eta/2\pi b$ [42]. I_{max} et I_x désignent respectivement le courant d'échappement maximum et le courant d'échappement au croisement des arches $[-1]$ et $[0]$.

Ensuite, la courbe d'échappement est ajustée avec la théorie MQT en utilisant la relation (3.4). Comme l'échappement se produit au voisinage du courant critique, on peut utiliser les relations analytiques du paragraphe 1.4.1 qui donnent ΔU et ω_p en fonction du point de polarisation. On utilise ensuite le programme `MQT_Flux` qui calcule numériquement $I_{ech}(\Phi_p)$ et $\Delta I(\Phi_p)$. L'ajustement des données expérimentales se fait en utilisant comme paramètres libres uniquement les caractéristiques électriques du SQUID (I_0 , C_0 , L_s et η). Mentionnons que la détermination précise de la capacité C_0 des jonctions nécessite des mesures complémentaires de spectroscopie. Ces dernières seront présentées au chapitre suivant. Les paramètres des circuits S_1 et S_2 sont tabulés dans l'annexe A.

Concernant les zones où il existe deux courants critiques (au voisinage de $\Phi_p/\Phi_0 = \pm 0.5$), on peut remarquer que l'on mesure systématiquement le plus fort courant critique. Ceci s'explique par le processus de repiégeage de la particule. En effet, celle-ci "a le choix" entre deux puits de potentiel dont les profondeurs sont proportionnelles au courant critique. Comme la dissipation est faible, elle a beaucoup plus de chance de s'arrêter dans le puits le plus profond. Pour observer le courant critique le plus faible, on doit "forcer" la particule à aller dans le puits de potentiel le moins profond. Cette méthode sera décrite dans la dernière partie de ce chapitre.

Largeur d'échappement. Sur la figure 3.4, on peut constater que pour S_1 et S_2 , ΔI correspond à la théorie MQT uniquement au voisinage du maximum de courant critique. Ce point correspond précisément à une sensibilité nulle du SQUID vis-à-vis des fluctuations de flux. Dès que l'on s'éloigne du maximum, la sensibilité en flux augmente, comme la largeur d'échappement. Pour S_2 , l'écart au MQT atteint au maximum quelques nanoampères seulement. Le circuit S_1 présente des largeurs d'échappement trois fois plus importantes que dans la théorie. Ceci suggère fortement la présence d'un bruit de flux parasite : une analyse détaillée est proposée dans la suite.

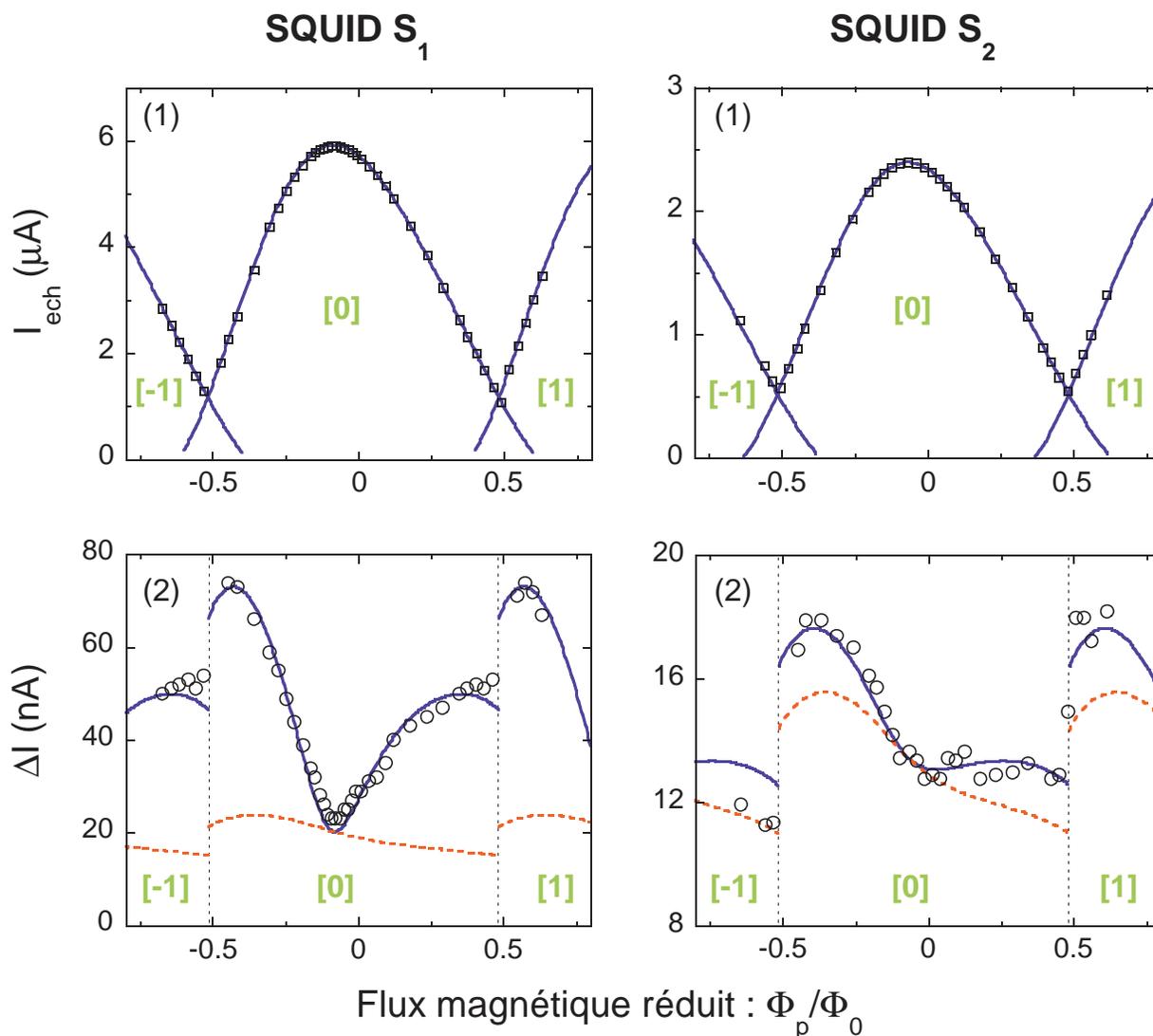


FIG. 3.4 – **Courbes (1)** : courant d'échappement en fonction du flux appliqué pour S_1 et S_2 . Les lignes pleines correspondent à un ajustement par la théorie MQT (la théorie MQT + bruit de flux basse fréquence donne le même résultat au nanoampère près). Les nombres entre crochets désignent le nombre de quanta de flux piégés dans le SQUID. **Courbes (2)** : évolution de la largeur d'échappement. Les pointillés donnent la prédiction MQT et les lignes pleines correspondent à une théorie MQT + bruit de flux basse fréquence. Les discontinuités de la courbe correspondent à un changement brutal du flux piégé dans le SQUID.

3.2 Bruit et mesure d'échappement

Nous supposons dans cette partie que les paramètres de polarisation $I_p(t)$ et $\Phi_p(t)$ ne sont pas fixés précisément dans le temps et fluctuent autour de leur valeur moyenne I_p^0 et Φ_p^0 selon :

$$I_p(t) = I_p^0 + \delta I(t) \quad (3.5)$$

$$\Phi_p(t) = \Phi_p^0 + \delta \Phi(t). \quad (3.6)$$

$\delta I(t)$ et $\delta \Phi(t)$ désignent deux bruits classiques, gaussiens, stationnaires à moyenne nulle. On les supposera de plus décorrélés. Le bruit classique $\delta X(t)$ est caractérisé par la densité spectrale classique $S_X^c(\omega)$ (relation (E.2) de l'annexe E) :

$$S_X^c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle \delta X(\tau) \delta X(0) \rangle e^{-i\omega\tau}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

On fait également l'hypothèse que la fréquence maximale f_c des fluctuations est petite devant $\omega_p/2\pi$: les bruits sont alors des perturbations adiabatiques qui n'induisent pas de transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$. En raison de l'important effort de filtrage, les bruits sont générés par l'environnement proche du SQUID qui est thermalisé à $T = 30$ mK. La fréquence de coupure est alors au maximum de l'ordre de la fréquence thermique $\nu_{th} = k_B T/h = 500$ MHz $\ll \omega_p/2\pi$. La figure 3.5 résume les fréquences caractéristiques intervenant dans une mesure d'échappement.

3.2.1 Influence de la fréquence des fluctuations

Les effets du bruit sur une mesure d'échappement dépendent énormément de la fréquence des fluctuations aléatoires. Celles-ci doivent être comparées aux fréquences qui caractérisent le protocole expérimental, à savoir : f_{rep}/N , la fréquence associée à la mesure d'un point et Δt^{-1} , la fréquence associée à la durée d'une impulsion de courant. Pour simplifier l'étude, on considère que les fréquences typiques du bruit sont toujours éloignées des fréquences caractéristiques du protocole. On peut ainsi distinguer trois cas limites, représentés sur la figure 3.6 :

- les fluctuations très basse fréquence (TBF), ayant des fréquences ν sont plus lentes que f_{rep}/N . Pour une mesure typique, $f_{rep}/N = 100$ mHz.
- les fluctuations basse fréquence (BF), $f_{rep}/N \ll \nu \ll 1/\Delta t$.
- les fluctuations haute fréquence (HF), définies par $1/\Delta t \ll \nu \leq f_c$.

On suppose enfin que seul le courant fluctue, les résultats se transposant sans problème à une fluctuation du flux magnétique.

Fluctuations très basse fréquence. Dans cette limite, les fluctuations sont plus lentes que la durée totale nécessaire pour mesurer un point. Elles induisent donc une non-reproductibilité d'un point à l'autre. Or, on constate expérimentalement que les histogrammes sont reproductibles d'une mesure sur l'autre, aux fluctuations statistiques près. Il semble que ces fluctuations très basse fréquence soient marginales dans notre expérience.

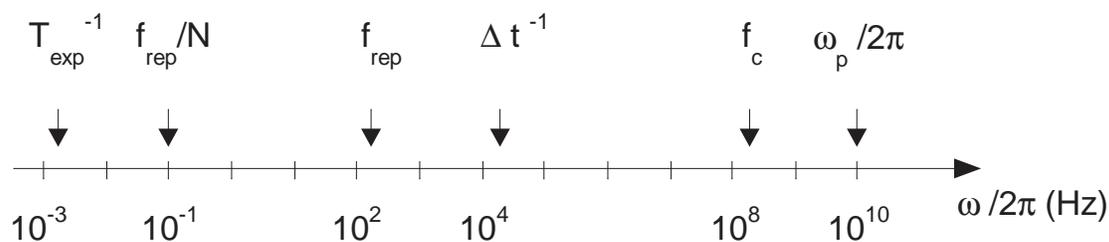


FIG. 3.5 – Les fréquences caractéristiques du problème, échelle logarithmique.

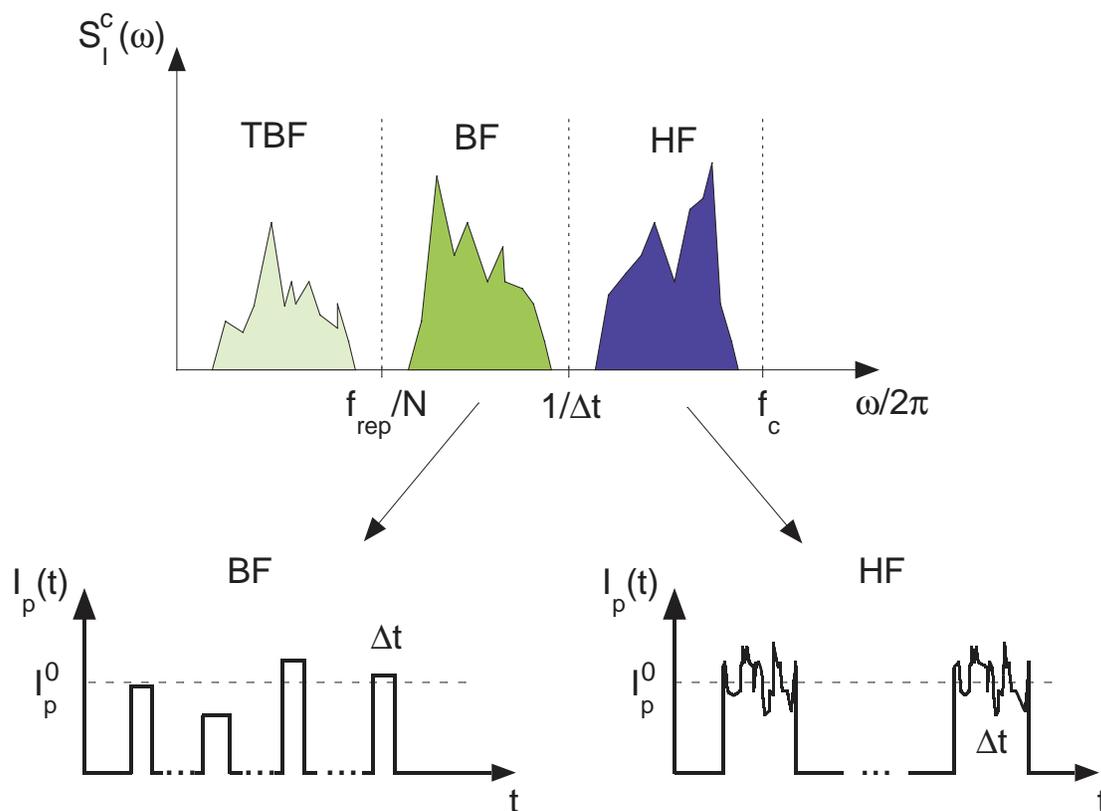


FIG. 3.6 – Définition des limites très basse fréquence (TBF), basse fréquence (BF) et haute fréquence (HF) pour un bruit en courant. Dans le cas de fluctuations BF, le courant de polarisation reste constant durant chaque impulsion, mais varie d'une impulsion à l'autre. Pour des fluctuations HF, le courant fluctue aléatoirement durant chaque impulsion. Ces définitions se transposent à un bruit de flux.

Fluctuations basse fréquence. Dans cette limite, le courant garde une valeur constante durant chaque impulsion mais fluctue d'une impulsion à l'autre. Soit δI_k la valeur du bruit à la $k^{\text{ème}}$ impulsion. La probabilité d'échappement mesurée en présence de fluctuations basse fréquence P_{ech}^{bf} s'écrit :

$$P_{ech}^{bf} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P_{ech}(I_p^0 + \delta I_k, \Phi_p^0, \Delta t). \quad (3.8)$$

Si les fluctuations sont beaucoup plus rapides que la durée d'acquisition d'un point, donnée par Nf_{rep}^{-1} , on peut supposer que le bruit δI réalise toutes ses valeurs possibles (hypothèse ergodique). P_{ech}^{bf} se réécrit alors comme une moyenne d'ensemble :

$$P_{ech}^{bf} = \langle P_{ech}(I_p^0 + \delta I, \Phi_p^0, \Delta t) \rangle. \quad (3.9)$$

On introduit la densité de bruit basse fréquence $\rho_I^{bf}(\delta I)$. C'est une gaussienne caractérisée par sa variance $\langle \delta I^2 \rangle_{bf}$:

$$\rho_I^{bf}(\delta I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \delta I^2 \rangle_{bf}}} e^{-\frac{1}{2} \delta I^2 / \langle \delta I^2 \rangle_{bf}}. \quad (3.10)$$

$\langle \delta I^2 \rangle_{bf}$ mesure l'amplitude quadratique moyenne des fluctuations de fréquences comprises entre f_{rep}/N et Δt^{-1} , il est relié à $S_I^c(\omega)$ par :

$$\langle \delta I^2 \rangle_{bf} = \int_{\frac{|\omega|}{2\pi} \in [f_{rep}/N, \Delta t^{-1}]} S_I^c(\omega) d\omega. \quad (3.11)$$

La probabilité d'échappement en présence de bruit basse fréquence apparaît alors comme le produit de convolution de la probabilité d'échappement sans bruit par la densité de bruit :

$$P_{ech}^{bf}(I_p^0, \Phi_p^0, \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\delta I \left\{ \rho_I^{bf}(\delta I) \times P_{ech}(I_p^0 + \delta I, \Phi_p^0, \Delta t) \right\}. \quad (3.12)$$

Fluctuations haute fréquence. Dans ce cas, le signal de bruit $\delta I(t)$ fluctue rapidement pendant chaque impulsion de courant. Soit $\delta I_k(t)$ la réalisation du signal aléatoire δI à la $k^{\text{ème}}$ impulsion. La probabilité d'échappement mesurée en présence de fluctuations haute fréquence P_{ech}^{hf} s'écrit :

$$P_{ech}^{hf} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \exp \left[- \int_0^{\Delta t} \Gamma_0(I_p^0 + \delta I_k(t), \Phi_p^0) dt \right]. \quad (3.13)$$

Comme le bruit fluctue rapidement pendant la durée Δt , on suppose qu'il a le temps de réaliser toutes ses valeurs possibles (hypothèse ergodique), on a alors l'égalité entre moyenne temporelle et moyenne d'ensemble :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \Gamma_0(I_p^0 + \delta I_k(t), \Phi_p^0) dt = \langle \Gamma_0(I_p^0 + \delta I, \Phi_p^0) \rangle, \quad (3.14)$$

indépendante de la réalisation k . On introduit ensuite la densité de bruit haute fréquence $\rho_I^{hf}(\delta I)$. C'est une gaussienne caractérisée par sa variance $\langle \delta I^2 \rangle_{hf}$ et qui s'écrit :

$$\rho_I^{hf}(\delta I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \delta I^2 \rangle_{hf}}} e^{-\frac{1}{2} \delta I^2 / \langle \delta I^2 \rangle_{hf}}. \quad (3.15)$$

$\langle \delta I^2 \rangle_{hf}$ mesure l'amplitude quadratique moyenne des fluctuations de δI à des fréquences comprises entre Δt^{-1} et f_c :

$$\langle \delta I^2 \rangle_{hf} = \int_{\frac{|\omega|}{2\pi} \in [\Delta t^{-1}, f_c]} S_I^c(\omega) d\omega. \quad (3.16)$$

Finalement, P_{ech}^{hf} est donnée par :

$$P_{ech}^{hf}(I_p^0, \Phi_p^0, \Delta t) = 1 - \exp \left[- \Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} d\delta I \left\{ \rho_I^{hf}(\delta I) \times \Gamma_0(I_p^0 + \delta I, \Phi_p^0) \right\} \right]. \quad (3.17)$$

On retrouve une expression analogue à la théorie MQT (eq. (3.4)), le taux d'échappement tunnel Γ_0 étant moyenné par le bruit. Dans la limite des faibles fluctuations ($\langle \delta I^2 \rangle_{hf}^{1/2} \leq$ largeur d'échappement sans bruit), la formule (3.17) donne le même résultat que l'étude réalisée par Martinis et Grabert dans la référence [64].

Effet sur une courbe d'échappement. Les fluctuations de courant et de flux ont des effets similaires sur une courbe d'échappement. Ceci se justifie assez facilement : l'effet dominant du bruit en flux est d'introduire une fluctuation δI_c du courant critique, donnée au premier ordre par :

$$\delta I_c = \left(\frac{dI_c}{d\Phi_p} \right) \times \delta \Phi. \quad (3.18)$$

Les dépendances fortes vis-à-vis du courant de polarisation et du courant critique dans ΔU et ω_p sont de la forme $(1 - I_p/I_c)^\alpha$, où I_p et I_c jouent des rôles symétriques. Il existe toutefois une différence entre bruit en courant et bruit en flux : la sensibilité au bruit de flux ($dI_c/d\Phi_p$) est fortement modulée par le flux de polarisation.

La figure 3.7 (page suivante) illustre l'impact de fluctuations de courant HF et BF sur une courbe d'échappement. Les courbes bruitées ont été calculées avec les programmes P(I)_I_BF et P(I)_I_HF pour des fluctuations RMS égales : $\langle \delta I^2 \rangle_{bf}^{1/2} = \langle \delta I^2 \rangle_{hf}^{1/2}$. La courbe de référence non bruitée est calculée avec le programme P(I)_MQT. On peut constater qu'un bruit BF ne change pas le courant d'échappement, mais il affecte fortement la forme de la courbe d'échappement ainsi que ΔI . L'augmentation de la largeur d'échappement est de l'ordre de $\langle \delta I^2 \rangle_{bf}^{1/2}$. En revanche, un bruit HF décale en bloc la courbe d'échappement vers les bas courants sans affecter notablement la largeur d'échappement⁽⁴⁾. On retrouve ici un

⁽⁴⁾Ceci n'est plus vrai pour des amplitudes de bruit élevées.

effet similaire à celui prévu par la référence [64]. Le décalage en courant est de l'ordre de $\langle \delta I^2 \rangle_{hf}^{1/2}$.

Ces considérations vont nous permettre d'interpréter les résultats expérimentaux et de déterminer l'origine et le domaine de fréquences du bruit. De plus, nous avons montré que la largeur d'échappement est une grandeur très sensible pour sonder les fluctuations basse fréquence des paramètres de polarisation.

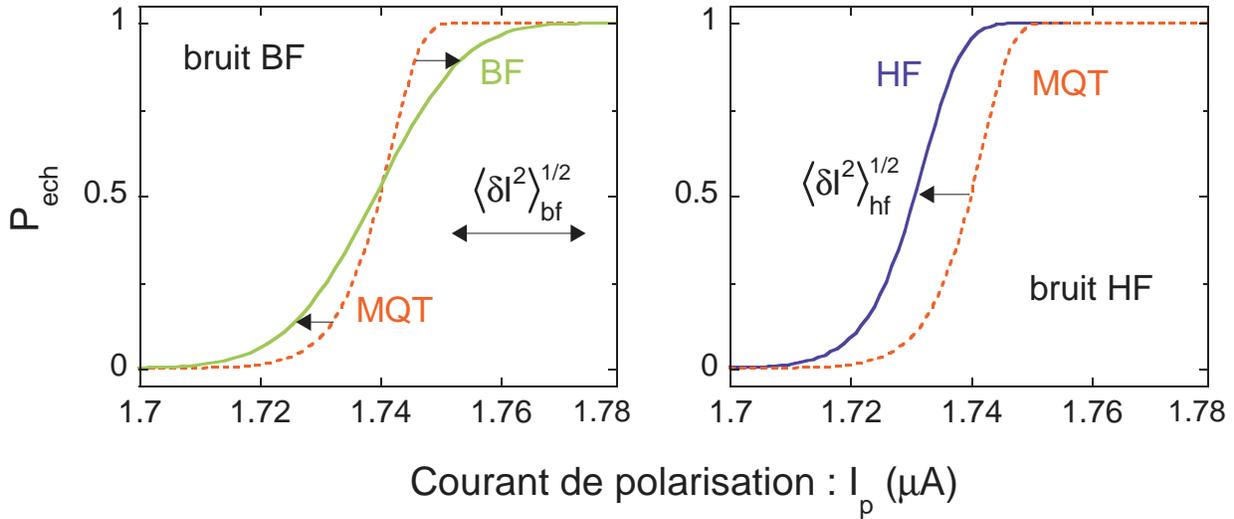


FIG. 3.7 – Effet des fluctuations de courant basse fréquence (BF) et haute fréquence (HF) sur une courbe d'échappement tunnel (MQT). L'amplitude RMS des fluctuations est identique pour les deux courbes. Les fluctuations BF élargissent la courbe d'échappement d'environ $\langle \delta I^2 \rangle_{bf}^{1/2}$ et modifient sa forme. Les fluctuations HF la décalent en bloc vers les courants plus faibles. Le décalage est de l'ordre de $\langle \delta I^2 \rangle_{hf}^{1/2}$.

3.2.2 Bruit de flux basse fréquence dans les SQUIDS

Dans un premier temps, nous cherchons à déterminer le caractère haute ou basse fréquence des fluctuations. La figure 3.8 présente un ajustement d'une courbe d'échappement (mesurée avec S_1) avec les théories HF et BF. Toutes les courbes ont le même courant d'échappement et la même largeur. On peut clairement constater qu'un bruit basse fréquence est nécessaire afin d'expliquer la forme de la courbe d'échappement.

Ensuite, la figure 3.9 présente la dépendance en flux de ΔI en présence d'un bruit de flux ou de courant à basse fréquence, calculée numériquement avec les programmes FLUX_B_BF et FLUX_I_BF (paramètres de S_1). La courbe en pointillé donne la prédiction MQT en l'absence de bruit. Le bruit en courant augmente ΔI indépendamment du flux, tandis que le bruit en flux a un effet proportionnel à $(dI_c/d\Phi_p)(\Phi_p^0)$ qui s'annule au maximum de courant critique.

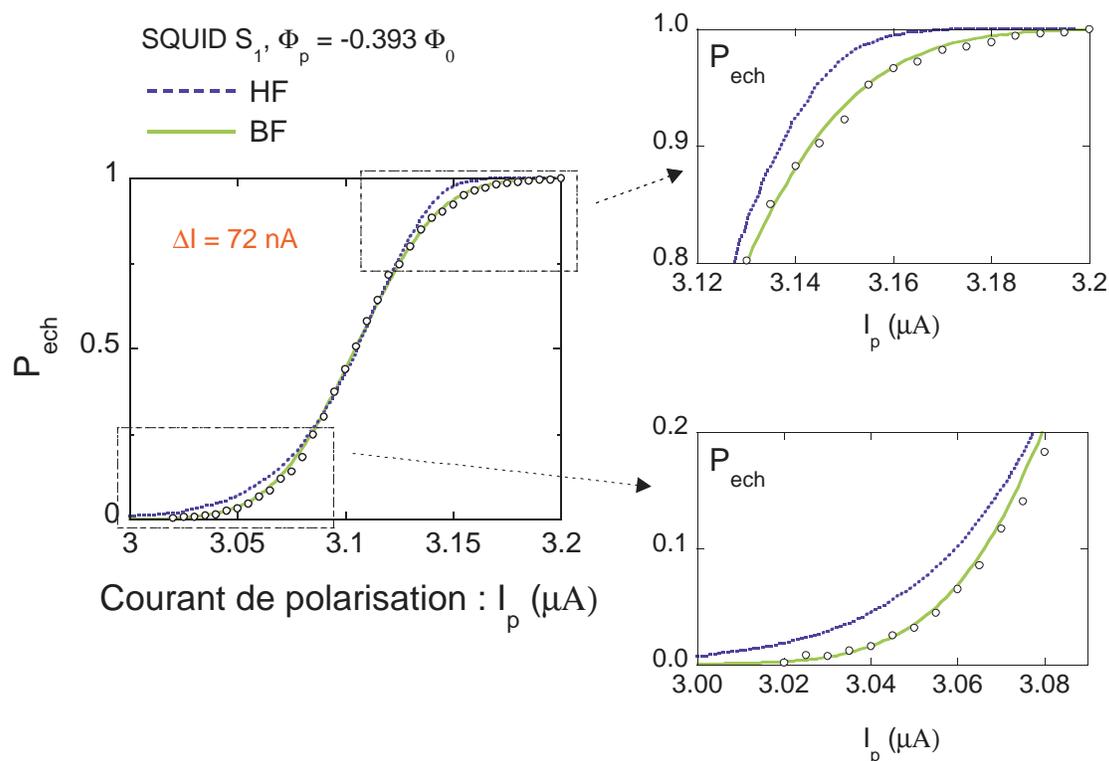


FIG. 3.8 – Ajustement d'une courbe d'échappement expérimentale (ronds) par les théories haute et basse fréquence. Toutes les courbes ont le même courant d'échappement et la même largeur.

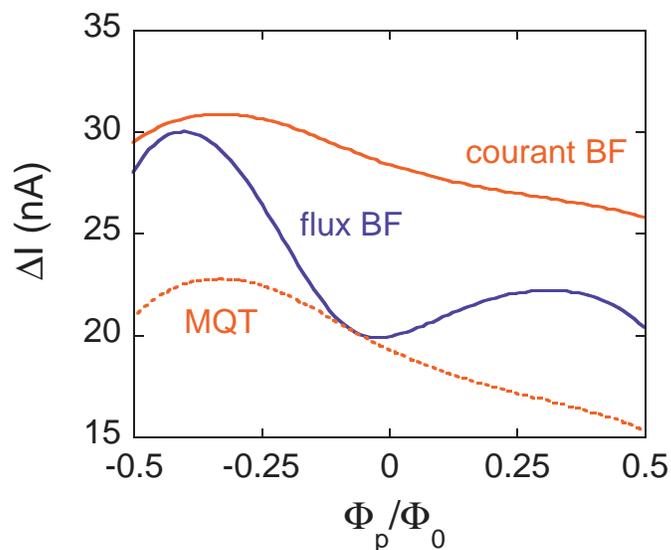


FIG. 3.9 – Effet des fluctuations basse fréquence de courant et de flux sur la largeur d'échappement (calcul). La courbe sans bruit est en pointillés.

On tire ainsi une double conclusion des données expérimentales de la courbe 3.4 :

- (i) le régime MQT est atteint au maximum de courant critique, donc le bruit en courant à basse fréquence a une valeur RMS plus faible que 0.5 nA, l'incertitude de l'ajustement.
- (ii) pour les autres flux, l'écart à la loi MQT s'explique par un bruit de flux basse fréquence. L'ajustement donne accès aux fluctuations RMS de flux, présentées dans le tableau 3.1. À titre de comparaison, nous donnons la valeur maximale du bruit de flux dans le SQUID fabriqué par F. Balestro et qui a démontré le MQT pour tous les flux [46].

SQUID	$\langle \delta\Phi^2 \rangle_{bf}^{1/2}$	$\langle \delta I_c^2 \rangle_{bf}^{1/2}$ (*)
S_1	$1.67 \times 10^{-3} \Phi_0$	26 nA
S_2	$5.5 \times 10^{-4} \Phi_0$	3 nA
S_B	$< 3 \times 10^{-4} \Phi_0$	< 1 nA

TAB. 3.1 – *Bruit de flux dans les SQUIDs S_1 et S_2 comparé au bruit maximum du SQUID S_B . (*) : $\langle \delta I_c^2 \rangle_{bf}^{1/2}$ est estimé au maximum de sensibilité au bruit de flux.*

Revenons pour finir sur l'analyse du courant d'échappement. En première étape, les données avaient été ajustées en utilisant la théorie MQT sans bruit. La présence d'un bruit basse fréquence ne change pas I_{ech} par rapport à la théorie MQT sans bruit.

Pour être complet, mentionnons aussi l'existence d'un bruit en courant généré par les impédances proches du SQUID. Sa densité spectrale sera calculée au chapitre 5 en utilisant le théorème fluctuation-dissipation. Le calcul montre que conformément à la mesure, il n'y a pas de contribution BF du bruit en courant. L'essentiel du bruit est en fait concentré autour de 30 MHz avec une valeur RMS totale de 6 nA. Ce bruit en courant appartient ainsi à la limite HF discutée précédemment. Il abaisse le courant d'échappement de typiquement 6nA. Ce faible déplacement est totalement négligeable devant les incertitudes de l'ajustement (de l'ordre de 1 %) : ce bruit n'est pas détectable par des mesures d'échappement lentes ($\Delta t = 50 \mu s$). Pourtant, nous le rencontrerons à nouveau à deux reprises. Dans le dernier chapitre, nous étudierons la mesure rapide ($\Delta t \approx 2$ ns) par impulsion de flux ; le bruit en courant est dans ce cas détectable car il appartient à la limite BF. Il joue de plus un rôle important dans la largeur des raies de résonances présentées au chapitre 5.

3.2.3 Discussion : origine et amplitude du bruit de flux

L'origine du bruit de flux n'est pas clairement déterminée. Nous avons d'abord pensé qu'il était lié à la capacité plane de filtrage placée à 2 mm du SQUID S_1 . Celle-ci comportait deux vastes surfaces supraconductrices (1 mm \times 3 mm), une en aluminium et l'autre en niobium. Celles-ci auraient pu piéger des vortex dont les déplacements induiraient un signal magnétique capté par la boucle du SQUID. Durant le stage d'Aurélien Fay, nous avons substitué la capacité en aluminium par une en or, magnétiquement inerte. Le SQUID

mesuré avait été fabriqué en même temps que S_1 et présentait des paramètres électriques pratiquement identiques. Nous avons retrouvé la même amplitude de bruit de flux.

Ayant mis hors de cause l'environnement proche du SQUID, la source de bruit est peut-être à chercher sur la puce même du SQUID. Comme le circuit fabriqué par Franck Balestro (qui comportait seulement deux plots et pas de ligne micro-onde) ne présentait pas de bruit significatif, nous avons décidé de revenir à des paramètres de construction similaires. En particulier l'épaisseur des couches d'aluminium a été réduite de 40 nm pour S_1 à 15 nm pour le circuit S_2 , soit une épaisseur identique à celle de S_B . Dans le même temps, le bruit de flux a été diminué d'un facteur 3.

Dans l'hypothèse d'un bruit en $1/f$ avec une densité spectrale de la forme $S_{\Phi}^c(\omega) = S_{\Phi}^*/|\omega|$, la valeur RMS des fluctuations de flux conduit à $S_{\Phi}^* = 1.2 \times 10^{-8} \Phi_0^2$. Cette valeur est très élevée par rapport aux meilleures performances des SQUIDs relevées dans la littérature $S_{\Phi}^* = 0.5 \times 10^{-12} \Phi_0^2$ [65, 66] ou par rapport aux estimations faites récemment sur le Qubit de flux de Delft $S_{\Phi}^* = 1.5 \times 10^{-12} \Phi_0^2$ [32]. Toutefois, nous ne devons pas oublier que la boucle du SQUID est très étendue ($350 \mu\text{m}^2$). En divisant la densité de bruit par $(100)^2$, le carré du rapport entre les surfaces des boucles du SQUID et du Qubit de flux, on tombe sur des densités de bruit en champ magnétique équivalentes pour les deux systèmes.

L'origine physique du bruit de flux est peut-être liée aux quatre plots de contact d'aluminium présents sur la puce. Ces surfaces $100 \mu\text{m} \times 100 \mu\text{m}$ situés à 0.5 mm du SQUID, piègent des vortex (fig. 3.10). L'ordre de grandeur du champ résiduel du dispositif expérimental étant $1.5 \mu\text{T}$, on estime qu'environ 10 vortex pourraient être piégés dans chaque plot. Dans cette hypothèse, S_B présenterait moins de bruit que S_2 parce qu'il a deux fois moins de plots. De plus, les plots de S_B étaient situés à $700 \mu\text{m}$ du SQUID, contre $500 \mu\text{m}$ pour S_1 et S_2 . Par contre, à notre connaissance, la réduction de bruit de S_1 à S_2 reste inexplicable.

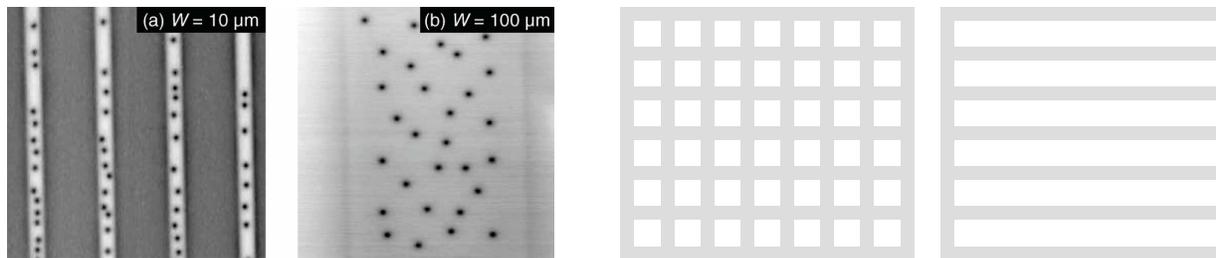


FIG. 3.10 – **À gauche** : vortex piégés dans une couche mince de niobium refroidie sous un champ magnétique de $85 \mu\text{T}$. Image en microscopie à balayage par sonde de Hall (photographie extraite de la référence [67]). **À droite** : proposition de géométries pour les plots supraconducteurs ($100 \times 100 \mu\text{m}^2$).

Plusieurs idées très simples pourraient contribuer à diminuer ce bruit de flux. On peut tout d'abord diminuer la taille de la boucle du SQUID. On pourrait également éloigner les plots de contact du SQUID. Enfin, on pourrait imaginer pour ces derniers une géométrie de type grille, présentée sur la figure 3.10. En effet, il a été récemment montré que le champ magnétique B_m d'expulsion des vortex pour un filament de largeur W s'écrivait [67] :

$$B_m \sim \frac{\Phi_0}{W^2}. \quad (3.19)$$

Appliquée à $W = 100 \mu\text{m}$, on obtient $B_m = 0.2 \mu\text{T}$, une valeur très inférieure au champ magnétique résiduel qui autorise la présence de vortex dans le plot. Pour un plot composé de filaments de $10 \mu\text{m}$, B_m monte à $20 \mu\text{T}$, valeur largement supérieure au champ résiduel. En théorie, un tel plot ne piège plus de vortex. Il existe certes des expériences démontrant un bruit de flux résiduel en $1/f$ pour des géométries où tous les vortex sont piégés [68]. Nos niveaux de bruits sont largement supérieurs à ce dernier, ce qui nous laisse une marge de progression.

3.3 Mesures à deux courants critiques

Nous nous intéressons dans cette partie à la zone proche de $\Phi_p \approx -0.5 \Phi_0$, où deux types de puits coexistent sur la surface de potentiel. Les premiers correspondent à -1 quantum de flux piégé par le SQUID et les seconds à aucun quantum de flux piégé. Ils sont respectivement notés $[-1]$ et $[0]$. Chacun de ces puits a son propre courant critique, notés $I_c[-1]$ et $I_c[0]$. Les lignes critiques sont représentées sur le diagramme de phase du SQUID (fig. 3.11.b). Comme mentionné précédemment, la mesure simple décrite dans la première partie de ce chapitre extrait toujours le plus grand courant critique qui correspond au puits le plus profond. Nous présentons ici une technique de mesure du second courant d'échappement, appliquée dans le cas $\Phi_p/\Phi_0 > -0.5$. La méthode se transpose sans problème à la situation symétrique $\Phi_p/\Phi_0 < -0.5$.

3.3.1 Principe du transfert de puits

L'idée consiste à forcer la particule à se positionner dans le puits le moins profond. Ensuite, la mesure d'échappement de ce puits est réalisée. La procédure est décrite en détail sur la figure 3.11. Le transfert est réalisé à courant de polarisation nul par une impulsion de flux adiabatique appliquée à l'aide de la ligne micro-onde. Par commodité, nous avons utilisé le même type d'impulsion que pour la mesure rapide de l'état quantique du SQUID (1.5 ns de temps de montée et durée totale de 5 ns). Cependant rien n'interdit d'envoyer une impulsion beaucoup plus lente. On part de la situation suivante (notée $\mathbf{0}$ sur la fig. 3.11) : la particule fictive est initialement dans le puits $[0]$. L'impulsion de transfert déplace adiabatiquement le système dans une zone où le puits $[-1]$ est plus stable, la barrière de potentiel séparant les deux puits étant suffisamment faible pour autoriser l'effet tunnel ($\mathbf{1}$). Une fois la particule transférée au puits $[-1]$, elle y reste car la barrière de

potentiel séparant $[-1]$ et $[0]$ est élevée (2). Enfin, on réalise une mesure d'échappement avec la même impulsion de courant que dans le reste du chapitre (3), les données sont donc directement comparables.

Il y a tout de même une différence entre ces mesures et les précédentes : au moment de la mesure (3), la surface du potentiel présente encore des creux très marqués (les puits $[0]$). Si la pente du potentiel n'est pas assez forte (*ie.* I_p trop faible), la particule se piège dans un puits $[0]$ et on ne détecte aucun signal d'échappement. Cette limite nous empêche d'explorer les courbes aux courants faibles ($I_p \leq 300$ nA). De manière générale, la dynamique d'échappement de JJs ou de SQUIDS à faibles courants critiques présente des phénomènes nouveaux par rapport à leurs homologues à plus grand courants critiques. Ces phénomènes ont été étudiés dans le cadre d'une collaboration avec J. Pekola [69] et nous ne les discuterons pas dans le cadre de cette thèse.

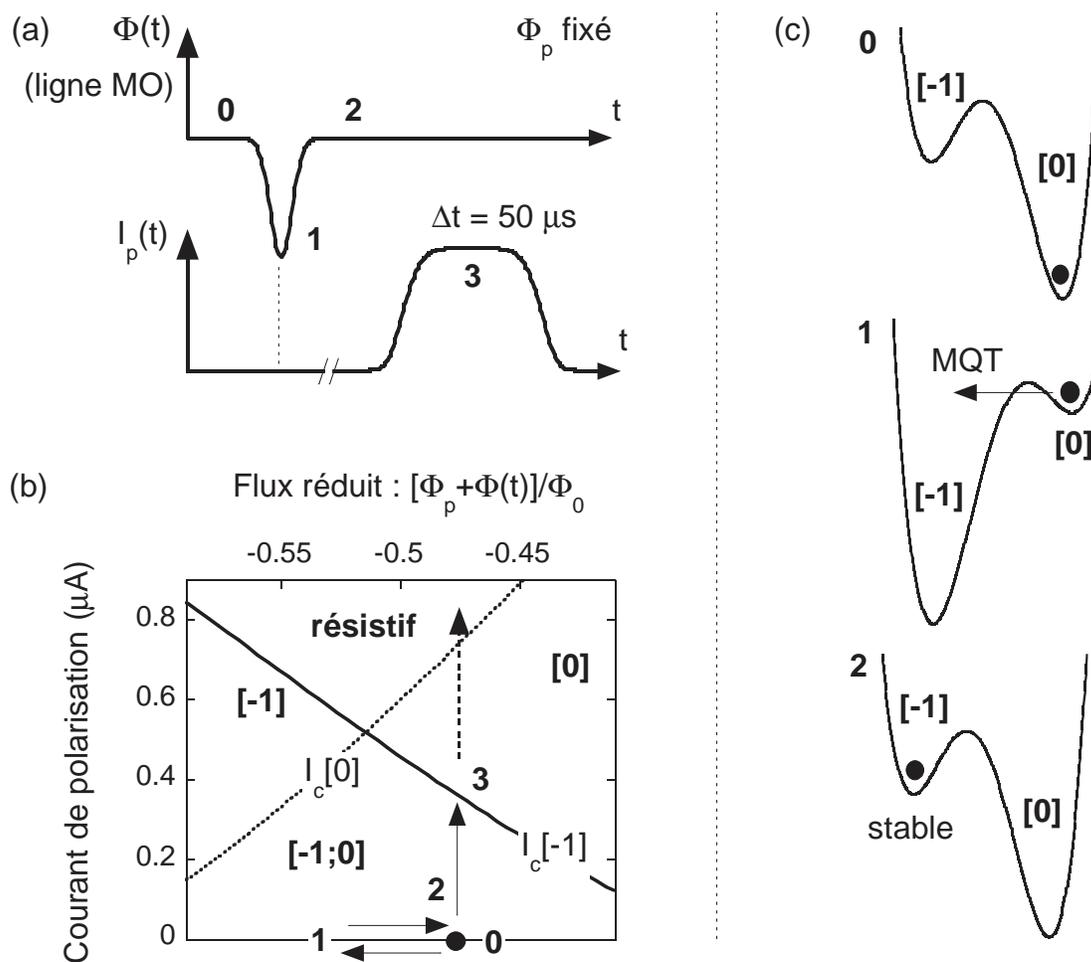


FIG. 3.11 – (a) : transfert de puits par impulsion de flux (1) et mesure du courant d'échappement par impulsion de courant (3). (b) : chemin suivi dans le diagramme critique du SQUID. (c) : Illustration schématique du changement de puits.

3.3.2 Résultats expérimentaux

La figure 3.12 présente trois mises en oeuvre de la séquence transfert et mesure pour des amplitudes croissantes de l'impulsion de transfert. Si l'amplitude est trop faible, la particule reste piégée dans le puits [0] et on mesure l'échappement de ce puits (courbe (1)). La courbe (2) montre la situation intermédiaire où le transfert a été effectué environ une fois sur trois. Enfin, une impulsion de forte amplitude réalise un transfert total : on étudie alors l'échappement du puits [-1]. Pour finir, la figure 3.13 compare les mesures de courant d'échappement avec transfert (triangles) aux mesures de la première partie (carrés). On peut constater que les courants d'échappement s'alignent bien sur la théorie.

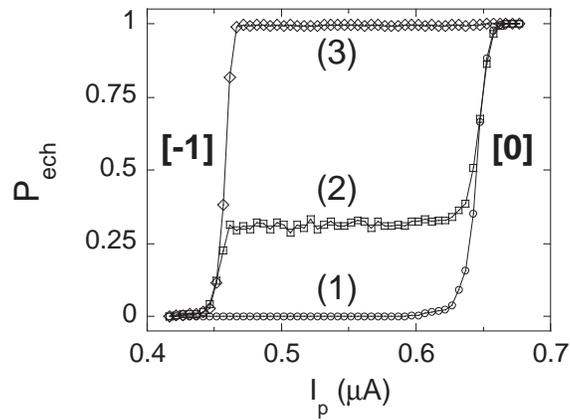


FIG. 3.12 – Illustration du transfert de puits pour des impulsions de flux d'amplitude croissante. Courbe (1) : pas de transfert, (2) : transfert partiel, (3) : transfert total. Mesures réalisées sur S_2 sous le flux $\Phi_p = -0.494 \Phi_0$.

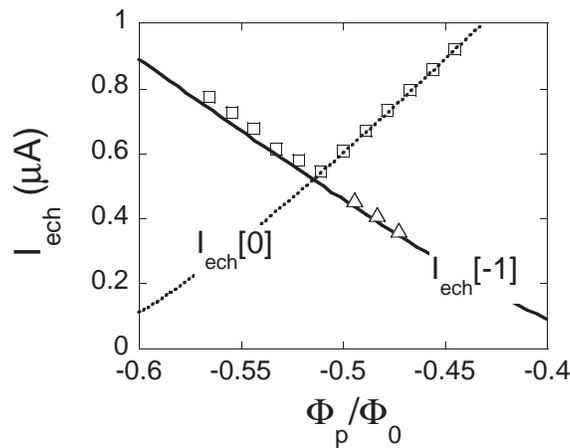


FIG. 3.13 – Mesure des courants d'échappement. Les carrés correspondent aux mesures par impulsions de courant seuls et les triangles à une mesure après transfert de puits. Mesures réalisées sur S_2 sous le flux $\Phi_p = -0.494 \Phi_0$.

Chapitre 4

Spectroscopie et oscillations cohérentes

Ce chapitre présente deux séries de mesures où le SQUID est excité par un champ micro-onde, mais qui sont réalisées dans deux régimes très différents. La première partie est dédiée à une étude spectroscopique à basse puissance des premiers niveaux d'énergie du SQUID. Les mesures sont faites en excitant le système par un champ micro-onde et en effectuant une mesure de la population des états excités en régime permanent, lorsque les effets du champ oscillant sont équilibrés par les phénomènes incohérents. Ces phénomènes, relaxation et déphasage adiabatique, sont responsables d'un élargissement des courbes de résonances. Ils seront étudiés dans le chapitre suivant. Nous ne nous intéresserons ici qu'à la position des pics de résonance, qui permet de sonder la position des niveaux d'énergie dans le puits de potentiel. La spectroscopie est l'étape préliminaire à toute manipulation plus complexe des états quantiques du SQUID. Elle présente également un intérêt pratique puisqu'elle complète les mesures d'échappement pour la détermination des paramètres électriques du SQUID, notamment la capacité C_0 des jonctions.

Dans la suite du chapitre, nous étudierons la dynamique cohérente du SQUID. Les méthodes d'observation d'oscillations cohérentes dans un système quantique sont toutes basées sur une transformation "instantanée" de son hamiltonien. En l'absence de perturbation, le système se trouve dans l'état fondamental, qui est stationnaire. Si la transformation est assez rapide, le système reste dans l'état $|0\rangle$ (approximation instantanée), mais ce dernier n'est plus état propre. L'état quantique du système oscille alors dans le temps. Dans le cas d'un système à deux niveaux, le phénomène est appelé oscillations de Rabi. Ces oscillations constituent la première étape d'un contrôle cohérent du système [5, 20].

Les premières oscillations cohérentes observées dans un circuit supraconducteur [18] ont été générées par changement brusque d'un paramètre de l'hamiltonien. Une telle technique a été étudiée théoriquement pour le SQUID, dans le cas d'une impulsion de flux non adiabatique [70, 49]. Nous utilisons une autre méthode, basée sur l'emploi d'impulsions de flux micro-ondes résonantes. Leurs temps de montée (1 ns) sont suffisamment rapides pour qu'ils puissent être considérés comme des perturbations instantanées. Pour observer

des oscillations cohérentes, on est amené à utiliser de fortes amplitudes MO. En effet, le couplage aux MO doit être dominant par rapport aux effets incohérents. Le SQUID est un système intrinsèquement peu anharmonique. Les fortes amplitudes MO utilisées excitent facilement plusieurs transitions successives dans le puits de potentiel. Ainsi, les oscillations cohérentes observées dans cette thèse présentent un caractère multi-niveaux (plus de deux) qui les démarque de celles observées par les groupes étudiant des Qubits.

La seconde partie du chapitre présente un calcul analytique effectué dans le cadre d'une forte collaboration avec Franck Hekking (LPM²C - Grenoble). Ce calcul décrit les oscillations cohérentes dans un système comportant un nombre arbitraire de niveaux d'énergie. Appliquée au SQUID, elle souligne l'importance de la compétition entre effets anharmoniques et amplitude du couplage MO dans notre système. Nous abordons également la description classique des oscillations, récemment publiée [71], et étudiée indépendamment par Alexandre Ratchov et Frédéric Faure (LPM²C - Grenoble).

Enfin, la dernière partie du chapitre présente les mesures réalisées avec S_1 où le caractère multi-niveaux des oscillations est fortement marqué, puis ceux de S_2 où nous avons approché la limite d'oscillation à deux niveaux. Dans ces deux cas, la théorie analytique rend très bien compte de nos résultats expérimentaux. Nous montrerons en particulier que dans la gamme des faibles excitations MO, les oscillations observées avec S_2 démontrent clairement un comportement quantique.

4.1 Niveaux d'énergie et spectroscopie

4.1.1 Principe de la spectroscopie de fond de puits

Après avoir posé le problème et introduit quelques notations, ce paragraphe décrit les étapes d'une mesure de spectroscopie. L'expérience suit la séquence générale présentée au §1.3.1 du chapitre 1. La description insiste notamment sur la phase d'excitation du système. Le signal de flux rapide utilisé et son effet sur le SQUID sont représentés sur la figure 4.1.

Niveaux d'énergie - anharmonicité du puits de potentiel. L'hamiltonien \hat{H}_0 du SQUID s'écrit :

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_p[\tilde{P}^2 + \tilde{X}^2] - \hbar\omega_p\sigma\tilde{X}^3. \quad (4.1)$$

On note $|n\rangle$ ses états propres et E_n les énergies propres associées. Ils décrivent les états vibratoires de la particule fictive piégée dans un potentiel anharmonique. L'indice n prend les valeurs entières de 0 à $N - 1$, où N est le nombre de niveaux piégés dans le puits de potentiel. Dans la suite, on utilisera la pulsation de Bohr ω_{nk} associée à la transition $|n\rangle \rightarrow |k\rangle$ définie par $\omega_{nk} = (E_k - E_n)/\hbar$ ainsi que la fréquence de Bohr ν_{nk} associée : $\nu_{nk} = \omega_{nk}/2\pi$.

La position des niveaux d'énergie peut être calculée en utilisant une théorie semi-classique. En effet, les fluctuations typiques de l'opérateur adimensionné \tilde{X} sont voisines de l'unité. Ces fluctuations doivent être comparées à la distance adimensionnée typique de

variation du potentiel. Elle est donnée par la distance entre le minimum et le point col, soit environ 10. Par conséquent, nous sommes bien dans le cadre de validité de la théorie semi-classique. Les équations semi-classiques pour un potentiel cubique-quadratique qui sont données dans la référence [43] sont résolues numériquement à l'aide du programme `f01`. Le nombre de niveaux d'énergie piégés et leurs écarts en énergie dépendent des paramètres électriques du SQUID ainsi que du point de polarisation (I_p, Φ_p) .

Considérons la transition de fond de puits ($|0\rangle \rightarrow |1\rangle$) de pulsation ω_{01} et la transition $|n-1\rangle \rightarrow |n\rangle$ de pulsation $\omega_{n-1,n}$. À cause des effets non linéaires, plus n est grand, et plus la transition $|n-1\rangle \rightarrow |n\rangle$ est désaccordée par rapport à la transition de fond de puits. La théorie des perturbations donne une valeur approximative⁽¹⁾ du désaccord $\omega_{01} - \omega_{n-1,n}$:

$$\begin{aligned}\omega_{01} - \omega_{n-1,n} &\approx \frac{15}{2}\sigma^2\omega_p \times (n-1) \\ &\approx (\omega_{01} - \omega_{12}) \times (n-1).\end{aligned}\quad (4.2)$$

L'anharmonicité du puits de potentiel est ainsi complètement caractérisée par $\omega_{01} - \omega_{12}$. Suivant le point de fonctionnement, $\omega_{01} - \omega_{12}$ varie typiquement de $2\pi \times 50\text{MHz}$ à $2\pi \times 400\text{MHz}$.

Excitation. Pour induire des transitions entre niveaux, on applique sur la boucle du SQUID un signal de flux micro-onde $\Phi(t)$ caractérisé par son amplitude Φ_{mo} et sa pulsation ω :

$$\Phi(t) = \Phi_{mo} \cos(\omega t). \quad (4.3)$$

$\Phi(t)$ perturbe l'hamiltonien du système qui s'écrit en présence de micro-ondes :

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{W}_\Phi(t). \quad (4.4)$$

La perturbation $\hat{W}_\Phi(t)$ s'obtient en appliquant les résultats du §1.3.3 et notamment l'expression (1.57) :

$$\hat{W}_\Phi(t) = -\sqrt{2}\hbar\Omega_1 \cos(\omega t)\tilde{X}, \quad (4.5)$$

avec

$$\Omega_1 = \sin\theta \frac{1}{L_s} \frac{1}{\sqrt{C_0\hbar\omega_p}} \Phi_{mo}. \quad (4.6)$$

La matrice de \tilde{X} dans la base propre de \hat{H}_0 peut se calculer de manière approchée en utilisant la théorie des perturbations (*cf* annexe C). À l'ordre zéro en σ (terme dominant), \tilde{X} couple les états $|n\rangle$ et $|n+1\rangle$. À l'ordre linéaire en σ , \tilde{X} couple les états $|n\rangle$ et $|n+2\rangle$ et perturbe les énergies propres du système. Les micro-ondes ont une fréquence voisine de ν_{01} . En utilisant une approximation de type onde tournante, on néglige les effets correspondant au terme linéaire en σ qui induisent des processus non résonants (*cf* annexe D). Ainsi, on

⁽¹⁾La théorie semi-classique montre que $\omega_{01} - \omega_{n-1,n}$ croît en réalité légèrement plus rapidement que $(n-1)$.

peut considérer avec une bonne approximation que \tilde{X} ne couple que des niveaux voisins. Si on adopte la convention $|-1\rangle = |N\rangle = 0$, l'action de \tilde{X} sur un état propre de \tilde{H}_0 s'écrit :

$$\tilde{X} |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{n} |n-1\rangle + \sqrt{n+1} |n+1\rangle]. \quad (4.7)$$

Les considérations précédentes sont communes à n'importe quelle excitation micro-onde. Pour les expériences de spectroscopie en fond de puits, on utilise des signaux de faible amplitude afin d'exciter uniquement la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$. Cette condition se traduit par $\Omega_1 \ll \omega_{01} - \omega_{12}$. De plus, les micro-ondes sont branchées pendant une durée T_{mo} suffisante pour que le régime stationnaire s'installe. La population du niveau $|1\rangle$ atteint alors une valeur constante $p_1(\Omega_1, \omega)$ qui dépend fortement de la fréquence d'irradiation.

Mesure. La mesure de population de l'état $|1\rangle$ est effectuée grâce à une impulsion de flux dc d'amplitude Φ_m et de durée Δt . Dans la limite où seul le premier niveau est excité, il cause l'échappement de la particule fictive avec la probabilité $P_{ech}(\omega)$:

$$P_{ech}(\Omega_1, \omega) = P_{ech}^{(0)} + (P_{ech}^{(1)} - P_{ech}^{(0)}) \times p_1(\Omega_1, \omega), \quad (4.8)$$

$P_{ech}^{(n)}$ étant la probabilité d'échappement de l'état $|n\rangle$ due à l'impulsion de mesure. Dans le cas idéal où l'échappement est dû à l'effet tunnel et pour des paramètres de polarisation parfaitement fixés, il est théoriquement possible d'obtenir un contraste $P_{ech}^{(1)} - P_{ech}^{(0)}$ voisin de 100%. Le bruit en flux étudié au chapitre 3 contribue à réduire ce contraste, notamment pour l'échantillon S_1 où il est grossièrement estimé à 30%. La caractérisation détaillée de l'efficacité de la mesure sera effectuée au chapitre 6.

4.1.2 Transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$: résultats expérimentaux

Les impulsions micro-ondes utilisées ont une durée $T_{mo} = 500$ ns largement suffisante pour atteindre le régime stationnaire⁽²⁾. La population du premier état excité est mesurée avec un délai $D_m = 2$ ns compté à partir de la fin des micro-ondes, pour minimiser les effets de la relaxation⁽³⁾. La durée de l'impulsion est de l'ordre de 1 à 2 ns au sommet. L'amplitude Φ_m de l'impulsion de mesure est réglée de sorte à maximiser l'efficacité de la détection de l'état $|1\rangle$, ce qui correspond grossièrement à une probabilité d'échappement de 1% à 2% pour le fondamental (*cf* chap. 6).

Pour un point de polarisation fixé, lorsque l'on fait varier la fréquence d'excitation, la probabilité d'échappement présente un pic de résonance associé à la condition $\nu = \nu_{01}$. La figure 4.2 présente une courbe de résonance typique mesurée avec S_2 au point de polarisation $I_p = 2.288 \mu\text{A}$, $\Phi_p = -0.368 \Phi_0$. L'étude précise de la forme et de la largeur de raie

⁽²⁾L'étude du régime transitoire (cohérent) effectuée en seconde partie du chapitre montrera que $T_{mo} = 40$ ns pour S_1 et $T_{mo} = 150$ ns pour S_2 suffisent à atteindre le régime stationnaire.

⁽³⁾Le temps de relaxation T_1 du premier état excité varie entre 50 et 100 ns suivant le point de fonctionnement.

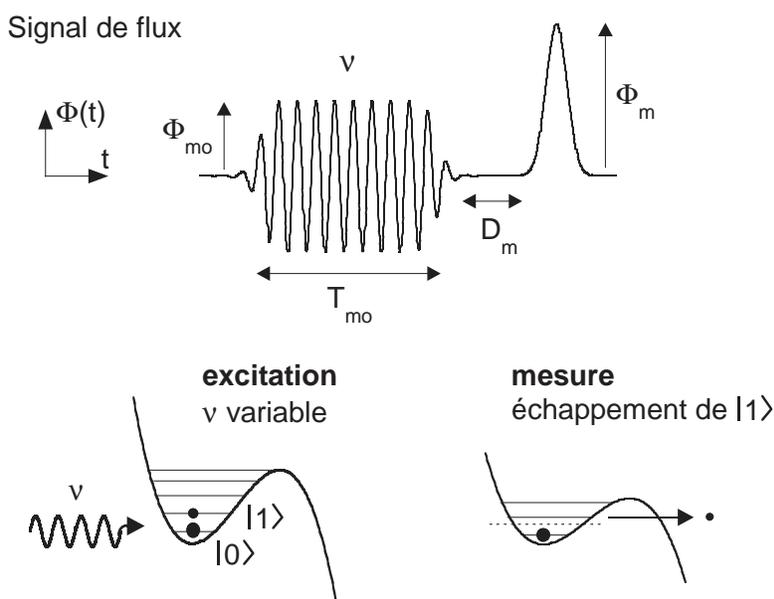


FIG. 4.1 – Représentation schématique du signal de flux haute fréquence pour une étude spectroscopique de la transition de fond de puits. L'impulsion micro-onde de faible amplitude excite sélectivement la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ et l'impulsion dc réalise une mesure de la population du premier état excité.

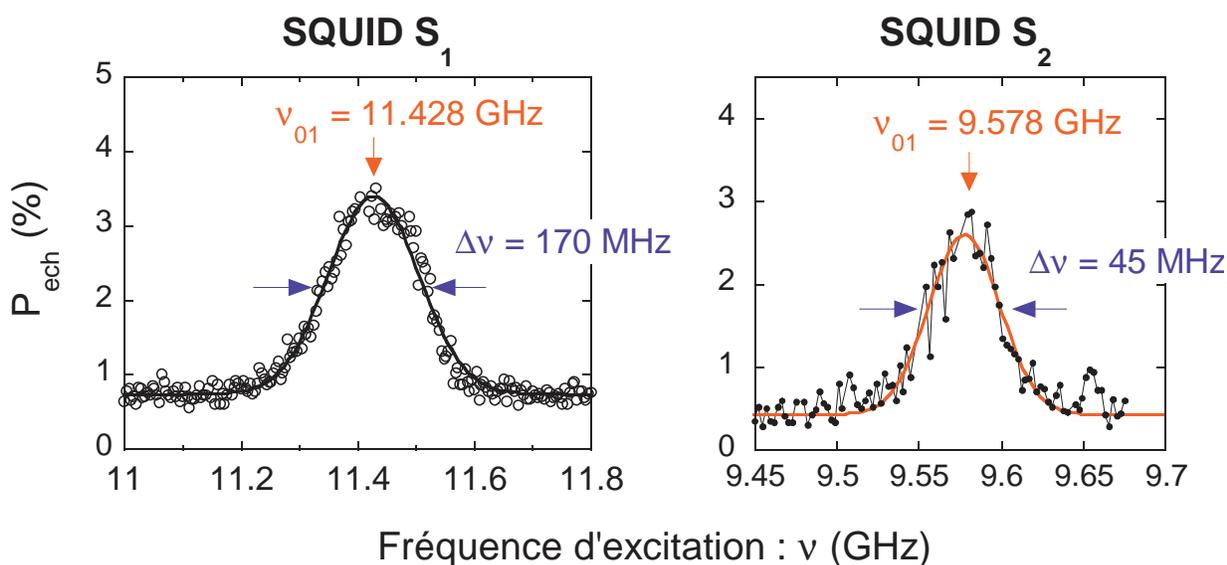


FIG. 4.2 – Exemples de courbes de résonance associées à la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$. Les lignes pleines correspondent à des ajustements par une loi gaussienne. **À gauche** : mesure réalisée au point de fonctionnement $I_p = 4.700 \mu\text{A}$, $\Phi_p = 0.095 \Phi_0$ avec l'échantillon S_1 . **À droite** : mesure réalisée au point de fonctionnement $I_p = 2.288 \mu\text{A}$, $\Phi_p = -0.368 \Phi_0$ avec l'échantillon S_2 .

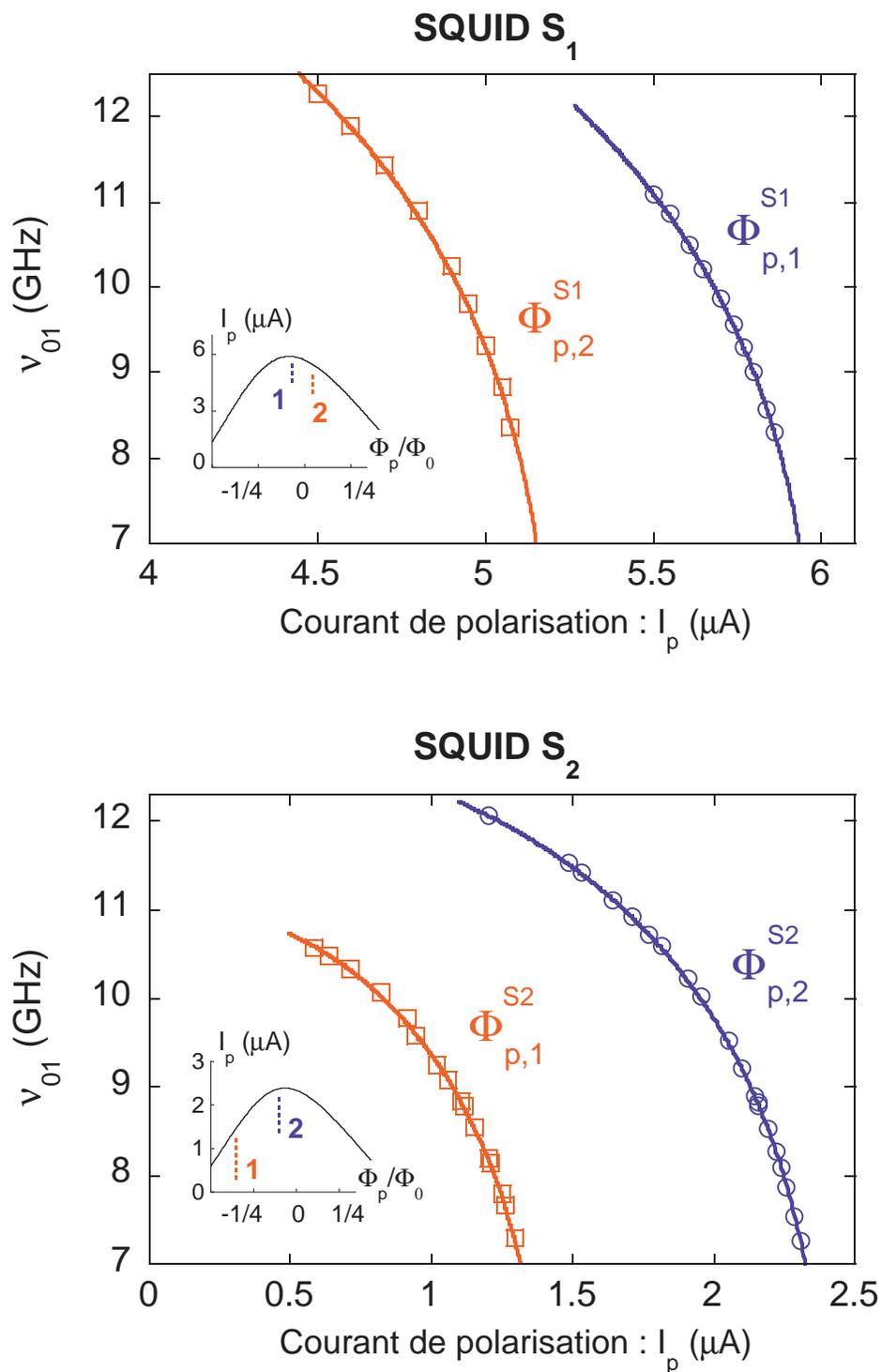


FIG. 4.3 – Fréquence de résonance de la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ pour différentes séries de points de polarisation à flux constant, représentés en insert. Les points correspondent aux résultats expérimentaux et la courbe en trait plein à la théorie. Les données concernant chaque SQUID sont ajustées avec un seul jeu de paramètres électriques.

seront faites au chapitre suivant. Nous nous focalisons pour l'instant sur la fréquence de résonance ν_{01} . Celle-ci a été mesurée pour différents points de fonctionnement pour chacun des SQUIDs S_1 et S_2 . Ces points peuvent être regroupés en séries correspondant à un flux appliqué constant et un courant de polarisation variable. Le tableau 4.1 précise les valeurs de flux utilisées et la figure 4.3 présente les résultats expérimentaux.

échantillon	flux
S_1	$\Phi_{p,1}^{S_1} = -0.085 \Phi_0$
	$\Phi_{p,2}^{S_1} = +0.095 \Phi_0$
S_2	$\Phi_{p,1}^{S_2} = -0.368 \Phi_0$
	$\Phi_{p,2}^{S_2} = -0.117 \Phi_0$

TAB. 4.1 – Flux de polarisation pour les mesures spectroscopiques.

De manière générale, plus on se rapproche du courant critique, plus le potentiel s'évase et plus ν_{01} diminue. L'analyse théorique des données a été réalisée de la manière suivante. Les mesures ayant été faites parfois très loin du courant critique (jusqu'à 50 % de I_c pour S_2), les paramètres du puits de potentiel sont obtenus numériquement par la méthode décrite au paragraphe 1.4.2. Les fréquences de résonance ν_{01} sont ensuite calculées numériquement à l'aide du programme `f01`. On ajuste ensuite les courbes en utilisant les paramètres électriques du SQUID (I_0 , C_0 , L_s et η). Ceci fournit une détermination indépendante et complémentaire des mesures d'échappement du fondamental. Les mesures spectroscopiques permettent notamment de préciser la valeur de la capacité C_0 . Dans ce travail, les mesures d'échappement et de spectroscopie concernant un SQUID donné ont été ajustées avec le même jeu de paramètres. On peut constater sur la figure 4.2 que l'évolution de ν_{01} avec I_p est parfaitement expliquée par la théorie, preuve que nous maîtrisons précisément la description du puits de potentiel.

4.1.3 Pompage et transition $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ - résultats préliminaires

Nous présentons dans ce paragraphe des résultats préliminaires de l'étude spectroscopique de la transition $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$. Pour étudier cette transition, il est nécessaire de peupler au préalable l'état $|1\rangle$, en utilisant une impulsion MO qui "pompe" la population du fondamental vers le niveau $|1\rangle$. Le signal de flux rapide utilisé pour cette mesure est schématisé sur la figure 4.4. Il comporte deux impulsions micro-ondes suivies de l'impulsion de mesure. Idéalement, elles ont l'effet suivant :

1. La première impulsion MO, accordée à ν_{01} , peuple l'état $|1\rangle$. Pour obtenir un signal clair dans la suite de l'expérience, la population de $|1\rangle$ doit être significative (de quelques dizaines de pourcents). On est donc amené à utiliser des signaux MO de forte amplitude, près du régime de saturation de la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$.
2. On attaque ensuite le SQUID avec une seconde impulsion MO de faible amplitude et de fréquence ν variable. Quand ν est voisine de ν_{01} , l'impulsion excite la transition

$|0\rangle \rightarrow |1\rangle$. Vu sa faible amplitude, son effet est alors négligeable par rapport à celui de la première impulsion. Par contre, quand $\nu \approx \nu_{12}$, l'impulsion excite et sonde la transition $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$.

3. Enfin, l'amplitude de l'impulsion de mesure est réglée pour mesurer uniquement la population des niveaux $|2\rangle$ et supérieurs. Cette condition est réalisée en diminuant légèrement l'amplitude de l'impulsion.

L'expérience, réalisée avec le circuit S_1 , nécessite un second synthétiseur de fréquence⁽⁴⁾. Les impulsions micro-ondes utilisées ont une durée identique de 30 ns, pratiquement suffisante pour que le système atteigne le régime permanent. Toutefois cette durée assez faible produit une incertitude sur leur fréquence de l'ordre de 30 MHz. Elles se suivent à environ 2 ns d'intervalle. L'amplitude de l'impulsion de pompage correspond à une amplitude de résonance de la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ mesurée à 20 %. La seconde impulsion a une amplitude identique à celle utilisée au paragraphe précédent pour la spectroscopie de fond de puits. Enfin, l'amplitude de l'impulsion de mesure, notée Φ_{m2} , est fixée pour obtenir une probabilité d'échappement de l'ordre de 1 % après action de la première impulsion.

La figure 4.5 présente les résultats obtenus au point de fonctionnement ($I_p = 4.9 \mu\text{A}$, $\Phi_{p,2}^{S1}$). La courbe (1) est une spectroscopie réalisée par la seconde impulsion MO, sans pompage. La mesure est réglée pour détecter la population de l'état $|1\rangle$ (amplitude Φ_{m1}). Mise à part la durée de l'impulsion, l'expérience est strictement équivalente à celle du paragraphe précédent. La courbe de résonance obtenue est piquée sur ν_{01} . La trace (2) présente la courbe de résonance mesurée en présence de l'impulsion de pompage. La fréquence de résonance, notée pour l'instant ν_r , est décalée vers les basses fréquences, comme attendu pour la seconde transition. La dernière courbe (t) est un témoin. Elle correspond aux mêmes réglages que pour (2), mais sans pompage. On peut constater que la résonance disparaît si le premier niveau n'est pas peuplé. L'expérience a été répétée pour plusieurs courants de polarisation, en conservant le flux fixé à $\Phi_{p,2}^{S1}$. Les fréquences de résonance ν_r correspondantes sont présentées sur la figure 4.6. Les prévisions de la théorie semi-classique [43] sont tracées en traits pleins. À première vue, l'accord expérience-théorie peut sembler satisfaisant. En revanche, si on trace $\nu_{01} - \nu_r$ en fonction de I_p (fig. 4.6), il apparaît clairement que le désaccord mesuré est systématiquement plus grand que la prévision théorique pour $\nu_{01} - \nu_{12}$; $\nu_{01} - \nu_r$ se trouve en fait entre $\nu_{01} - \nu_{12}$ et $\nu_{01} - \nu_{23}$.

Les impulsions de pompage que nous avons utilisées étaient trop puissantes et contaminaient significativement le niveau $|2\rangle$. La résonance mesurée correspond sans doute à une superposition des transitions $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ et $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$, ce qui explique que la fréquence observée soit plus basse que la théorie. Lorsque nous avons réalisé cette mesure au tout début de ma thèse, nous ne disposions pas des paramètres d'anharmonicité du puits de potentiel, calculés par la suite, ni de la calibration obtenue par les mesures d'oscillations cohérentes (deuxième partie du chapitre). De plus, la mesure possède un mauvais contraste en raison

⁽⁴⁾Il nous a été prêté par Wolfgang Wensdorfer.

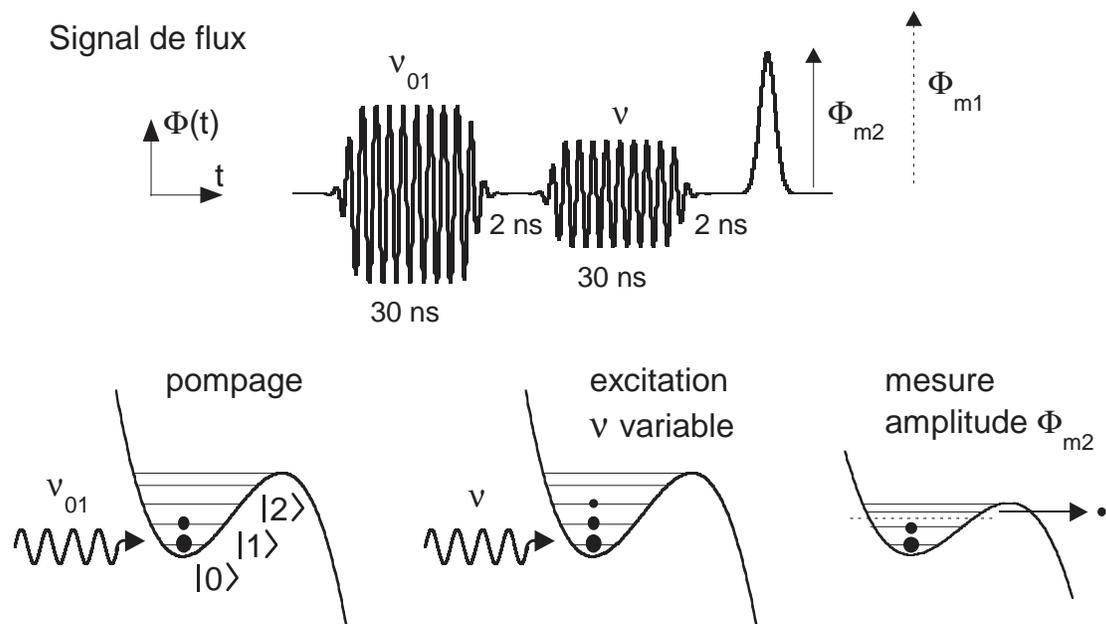


FIG. 4.4 – Signal de flux utilisé pour l'étude spectroscopique de la transition $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$.

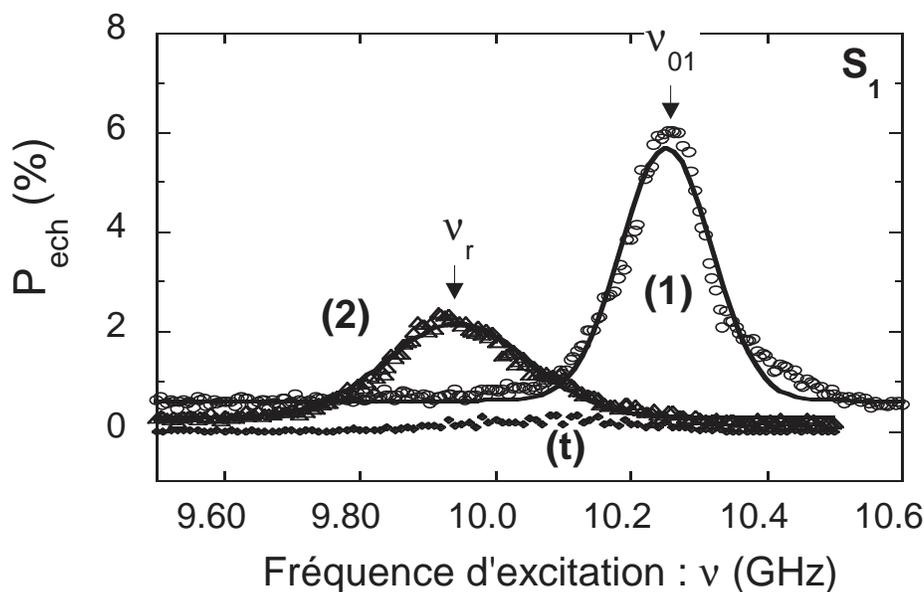


FIG. 4.5 – **Courbe (1)** : spectroscopie réalisée sans impulsion de pompage, l'amplitude de l'impulsion de mesure Φ_{m1} est réglée pour provoquer l'échappement des états $|1\rangle$ et supérieurs. **Courbe (2)** : spectroscopie réalisée avec impulsion de pompage. L'impulsion de mesure, d'amplitude Φ_{m2} , provoque l'échappement des états $|2\rangle$ et supérieurs. **Courbe (t)** : mêmes réglages que (2), mais sans l'impulsion de pompage (courbe témoin).

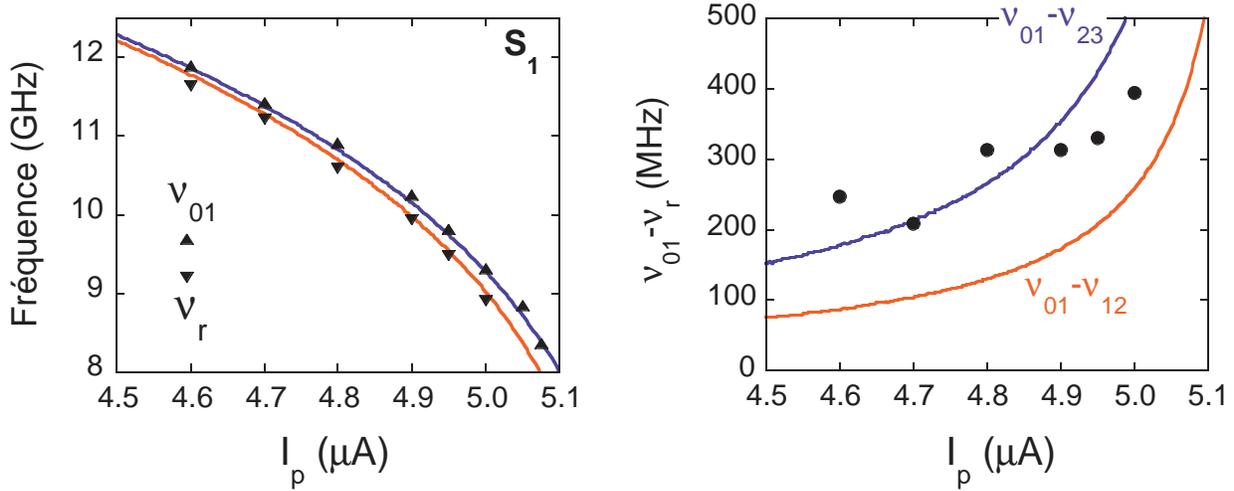


FIG. 4.6 – **À gauche** : évolution de ν_{01} et ν_r avec le courant de polarisation sous un flux fixé à $0.095 \Phi_0$. Les courbes en traits pleins sont les ajustements par la théorie semi-classique. **À droite** : comparaison entre le désaccord $\nu_{01} - \nu_r$ mesuré et la prévision théorique $\nu_{01} - \nu_{12}$ (traits pleins).

du bruit de flux très présent sur le premier SQUID. Une amplitude détectée d'une vingtaine de pourcents correspond déjà à de fortes amplitudes d'excitation. J'ai néanmoins choisi de présenter ces résultats préliminaires pour deux raisons. D'une part, l'expérience est intéressante dans son principe et pourrait à l'avenir être réalisée. D'autre part, le montage utilisé pourrait permettre de réaliser un contrôle cohérent et indépendant des transitions $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ et $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$. Chacune des transitions serait alors adressée par un synthétiseur émettant des impulsions MO accordées respectivement sur ν_{01} et ν_{12} .

4.2 Dynamique cohérente du SQUID couplé à un champ micro-onde

Dans cette partie, nous donnons les outils théoriques nécessaires à l'analyse de la dynamique cohérente du SQUID couplé à un champ micro-onde classique.

4.2.1 La théorie et ses hypothèses

Nous présentons ici la dynamique du SQUID couplé à un champ MO sous les hypothèses suivantes :

- (i) Le champ MO est un champ classique. Ceci correspond à l'expérience, car ce champ est généré par une antenne alimentée par une source monochromatique (synthétiseur de fréquences stable en phase).
- (ii) On néglige dans le SQUID tous les phénomènes incohérents. D'une part, on ne tient pas compte de la relaxation ni du déphasage. Les calculs sont donc valables aux

temps courts, lorsque l'on peut négliger l'impact de ces processus. D'autre part, la théorie ne prend pas en compte l'effet tunnel : les résultats sont donc valables tant que les niveaux impliqués sont stables (en fond de puits). Ceci n'est plus vrai si la dynamique du système implique les niveaux proches de la barrière. Typiquement, les trois derniers niveaux ont un temps de vie tunnel plus court que 50 μs .

Soit $|\varphi(t)\rangle$ l'état quantique du SQUID. Initialement, le système repose dans son état fondamental :

$$|\varphi(0)\rangle = |0\rangle. \quad (4.9)$$

On branche alors instantanément un flux micro-onde d'amplitude Φ_{mo} et de pulsation ω . Le système reste dans l'état $|0\rangle$. $|\varphi(t)\rangle$ évolue dans le temps selon l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\varphi(t)\rangle, \quad (4.10)$$

où $\hat{H}(t)$ dépend explicitement du temps :

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 - \sqrt{2}\hbar\Omega_1 \cos(\omega t) \tilde{X}. \quad (4.11)$$

\hat{H}_0 est défini par (4.1) et Ω_1 est proportionnel à Φ_{mo} avec un coefficient précisé par (4.6). La résolution de (4.10) est un problème compliqué. Elle se simplifie en effectuant une approximation de type onde tournante et en passant de la représentation de Schrödinger à une nouvelle représentation notée * . Ces deux étapes sont explicitées en détail dans l'annexe D. On note $|\varphi^*(t)\rangle$ l'état du SQUID en représentation * . Le changement de représentation est défini par :

$$\langle n | \varphi^*(t) \rangle = e^{+in\omega t} \langle n | \varphi(t) \rangle, \quad n \in [0, N-1]. \quad (4.12)$$

Cette transformation généralise le passage au référentiel tournant pour un système multi-niveaux. $|\varphi^*(t)\rangle$ évolue dans le temps sous l'action de l'hamiltonien *indépendant du temps* \hat{H}^* , qui s'exprime dans la base propre $\{|n\rangle\}$ de \hat{H}_0 selon :

$$\hat{H}^* = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\Omega_1}{2} & \delta_1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \sqrt{N-1} \frac{\Omega_1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{N-1} \frac{\Omega_1}{2} & \sum_{k=1}^{N-1} \delta_k \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Les δ_k sont définis comme le désaccord entre la pulsation d'excitation et la pulsation de Bohr associée à la transition $|k-1\rangle \rightarrow |k\rangle$:

$$\delta_k = \omega_{k-1,k} - \omega, \quad k \in [1, N-1]. \quad (4.14)$$

Pour déterminer l'évolution temporelle de $|\varphi^*(t)\rangle$, il suffit de diagonaliser l'hamiltonien (4.13) avec un logiciel de calcul formel. On note $|e_k^*\rangle$ ses vecteurs propres et λ_k les pulsations

propres associées. Après un temps t , le SQUID est dans l'état :

$$|\varphi^*(t)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \langle e_k^* | 0 \rangle e^{-i\lambda_k t} |e_k^*\rangle. \quad (4.15)$$

La dernière étape du calcul consiste à revenir à la représentation de Schrödinger. Les amplitudes de probabilité de la décomposition de $|\varphi(t)\rangle$ dans la base $\{|n\rangle\}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \langle n | \varphi(t) \rangle &= e^{-in\omega t} \langle n | \varphi^*(t) \rangle \\ &= e^{-in\omega t} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \langle n | e_k^* \rangle \langle e_k^* | 0 \rangle e^{-i\lambda_k t} \right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

La démarche que nous avons adoptée est résumée par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} |0\rangle & \xrightarrow{\hat{H}(t)} & |\varphi(t)\rangle \\ \downarrow (*) & & \uparrow (*)^{-1} \\ |0^*\rangle = |0\rangle & \xrightarrow{\hat{H}^*} & |\varphi^*(t)\rangle \end{array} \quad (4.17)$$

Quelques grandeurs utiles. Toute l'information mesurable du système est contenue dans les amplitudes de probabilité (4.16). Nous allons donner l'évolution de quelques grandeurs qui seront utiles par la suite. La probabilité de trouver le système dans l'état $|n\rangle$ après un temps d'action t des MO est donnée par :

$$p_n(t) = \sum_{k,l=0}^{N-1} \langle n | e_k^* \rangle \langle e_k^* | 0 \rangle \langle 0 | e_l^* \rangle \langle e_l^* | n \rangle \times e^{-i(\lambda_k - \lambda_l)t}. \quad (4.18)$$

En particulier, la probabilité de retrouver le système dans le fondamental après un temps t s'écrit :

$$p_0(t) = \sum_{k=0}^{N-1} |\langle 0 | e_k^* \rangle|^4 + 2 \sum_{\substack{k,l \\ l>k}}^{N-1} |\langle 0 | e_k^* \rangle|^2 |\langle 0 | e_l^* \rangle|^2 \cos[(\lambda_k - \lambda_l)t]. \quad (4.19)$$

On reconnaît la somme d'un terme constant et d'un terme d'interférence oscillant dans le temps. Enfin, l'énergie moyenne stockée dans le SQUID après un temps t vaut :

$$\begin{aligned} \langle E \rangle (t) &= \langle \varphi(t) | \hat{H}_0 | \varphi(t) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} E_n \times p_n(t). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Signalons que les prévisions de cette théorie ont été vérifiées par une intégration numérique de l'équation de Schrödinger (voir la thèse d'Alexandre Ratchov [72]).

4.2.2 Compétition entre anharmonicité et excitation MO

La théorie précédente est générale ; nous allons l'appliquer au SQUID. On suppose que N niveaux sont présents dans le puits de potentiel, avec $N > 2$. Nous nous plaçons dans le cas d'une excitation accordée sur la première transition ($\omega = \omega_{01}$), ce qui correspond aux expériences que nous avons réalisées.

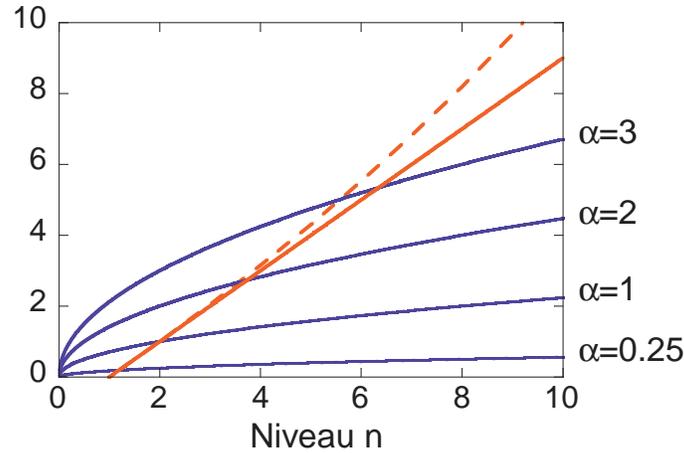


FIG. 4.7 – *Compétition entre les effets anharmoniques $\propto n - 1$ (les prévisions de la théorie semi-classique sont en pointillés) et l'amplitude réduite du couplage MO $\propto \alpha \sqrt{n/2}$ (traits pleins). Quatre valeurs du paramètre α ont été tracées.*

Raisonnement qualitatif. Combien de niveaux sont effectivement impliqués dans la dynamique du système ? Nous allons fournir un argument qualitatif en considérant la compétition entre les effets d'anharmonicité dans le puits de potentiel et le couplage par les MO. Pour savoir si le niveau $|n\rangle$ peut être peuplé par les MO, nous allons considérer la transition $|n-1\rangle \rightarrow |n\rangle$ caractérisée par sa pulsation de Bohr $\omega_{n-1,n}$. Le résultat (4.2) donne directement le désaccord entre la pulsation $\omega_{n-1,n}$ et la pulsation d'excitation (égale à ω_{01}) :

$$\omega_{01} - \omega_{n-1,n} = (\omega_{01} - \omega_{12}) \times (n - 1). \quad (4.21)$$

D'un autre côté, le couplage entre $|n-1\rangle$ et $|n\rangle$ induit par les MO est caractérisé par l'amplitude réduite⁽⁵⁾ :

$$C(\Omega_1, n) = \Omega_1 \sqrt{\frac{n}{2}}. \quad (4.22)$$

De manière qualitative, le niveau $|n\rangle$ peut être excité efficacement par les MO si $C(\Omega_1, n)$ est au moins de l'ordre de $\omega_{01} - \omega_{n-1,n}$. On est ainsi amené à introduire le paramètre

⁽⁵⁾ $C(\Omega_1, n)$ ainsi défini correspond à la moitié de la largeur à mi-hauteur de la raie de résonance associée à la transition $|n-1\rangle \rightarrow |n\rangle$, lorsque l'élargissement par effet de puissance est dominant (p. 352 de la référence [73]).

adimensionné α qui compare le couplage MO aux effets d'anharmonicité :

$$\alpha = \frac{\Omega_1}{\omega_{01} - \omega_{12}}. \quad (4.23)$$

Considérons une excitation pour une valeur de α donnée. Le niveau $|n\rangle$ le plus élevé en énergie susceptible d'être excité vérifie la condition :

$$n - 1 \sim \alpha \sqrt{\frac{n}{2}}. \quad (4.24)$$

Une représentation graphique est présentée sur la figure 4.7 pour différentes valeurs du paramètre α . Lorsque $\alpha \ll 1$, le système est dominé par les effets d'anharmonicité et l'excitation du niveau $|2\rangle$ est très peu probable. Dans ce cas, la dynamique est limitée aux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$: le SQUID peut être considéré comme un Qubit. Par contre, lorsque $\alpha \geq 1$, l'excitation des niveaux supérieurs est possible. On constate également que plus α est grand et plus le nombre d'états mis en jeu est important. Toutefois, rappelons que ceci reste un argument qualitatif. En effet, lorsque $\alpha \gg 1$, le couplage dû aux MO modifie considérablement le spectre du système et l'obtention des populations des différents niveaux passe par la diagonalisation de \hat{H}^* .

Dynamique dans la limite à deux niveaux - oscillations de Rabi. Dans la limite $\Omega_1 \ll \omega_{01} - \omega_{12}$, nous avons vu qualitativement que seul le niveau $|1\rangle$ pouvait être excité par les MO. Si on diagonalise \hat{H}^* dans cette situation, on s'aperçoit que ses vecteurs propres se classent en deux familles :

- deux vecteurs, notés $|e_0^*\rangle$ et $|e_1^*\rangle$ ont des composantes significatives sur $|0\rangle$ et $|1\rangle$ et négligeables sur les états $|n\rangle$, $n \geq 2$.
- à l'inverse, les autres vecteurs propres ont des composantes nulles sur $|0\rangle$ et $|1\rangle$ et significatives sur les états $|n\rangle$, $n \geq 2$.

Physiquement, cela signifie que si l'état initial du système appartient à l'un de ces sous-espaces, il y reste au cours de l'évolution temporelle. Comme l'état initial est $|0\rangle$, l'état du SQUID reste dans le sous-espace généré par $|e_0^*\rangle$ et $|e_1^*\rangle$. Les vecteurs propres $\{|e_0^*\rangle, |e_1^*\rangle\}$ et les valeurs propres associées (λ_0, λ_1) sont donnés par :

$$|e_0^*\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad \lambda_0 = -\frac{\Omega_1}{2} \quad (4.25)$$

$$|e_1^*\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad \lambda_1 = \frac{\Omega_1}{2}. \quad (4.26)$$

La relation (4.19) donne :

$$p_0(t) = \frac{1}{2}[1 + \cos(\Omega_R t)], \quad (4.27)$$

Ω_R étant la pulsation de Rabi, donnée par :

$$\Omega_R = \Omega_1. \quad (4.28)$$

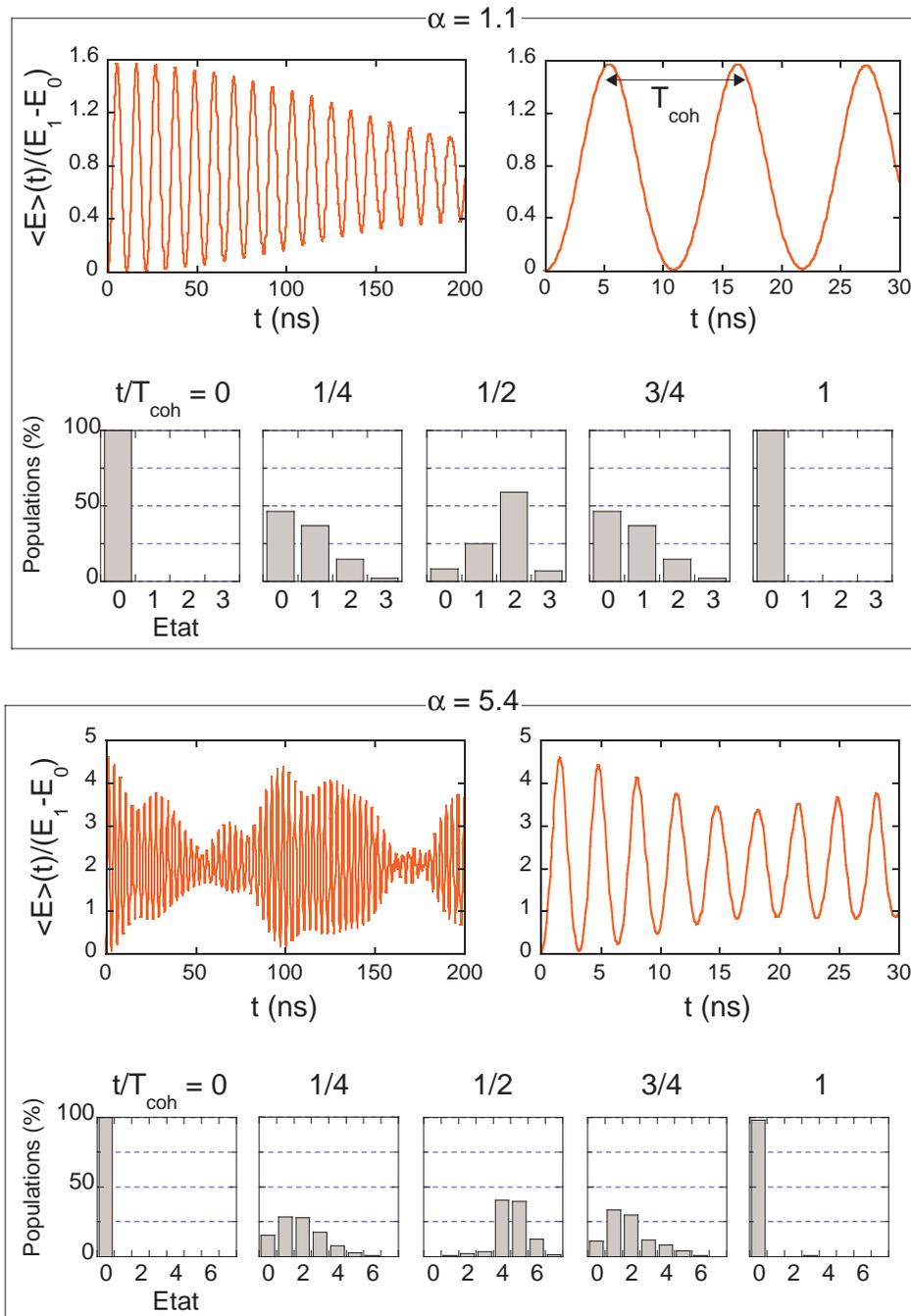


FIG. 4.8 – Évolution de l'énergie moyenne $\langle E \rangle(t)$ stockée dans le SQUID après allumage des MO à l'instant $t = 0$. Deux cas, correspondant à une excitation d'amplitude intermédiaire ($\alpha = 1.1$) et forte ($\alpha = 5.4$), sont présentés. À chaque fois nous présentons $\langle E \rangle(t)$ sur une durée longue (0 à 200 ns), puis sur le domaine accessible expérimentalement (0 à 30 ns pour le SQUID S_1). Enfin, la série d'histogrammes décompose l'évolution des populations des différents niveaux d'énergie sur une période T_{coh} .

Suite au couplage MO, le système oscille de manière cohérente entre $|0\rangle$ et $|1\rangle$ avec la pulsation Ω_R . Ces oscillations sont dénommées oscillations de Rabi [74]. Si les micro-ondes sont désaccordées, une oscillation similaire perdure. Toutefois, les états extrêmes ne sont plus simplement $|0\rangle$ et $|1\rangle$ et la pulsation d'oscillation est donnée par :

$$\Omega_R = \sqrt{\Omega_1^2 + (\omega_{01} - \omega)^2}. \quad (4.29)$$

Description de la dynamique multi-niveaux. Dans le cas où $\Omega_1 \geq \omega_{01} - \omega_{12}$, les niveaux supérieurs peuvent être excités. Plusieurs pulsations interviennent alors dans la dynamique du système. De manière générale, le nombre de pulsations est d'autant plus élevé que le nombre de niveaux impliqués est élevé. En fait, l'énergie dans le SQUID oscille avec une pulsation Ω_{coh} donnée avec une assez bonne approximation par :

$$\Omega_{coh} \approx \min_{k \neq l} |\lambda_k - \lambda_l|. \quad (4.30)$$

Pour plus de précision, la pulsation Ω_{coh} est extraite du calcul de l'évolution temporelle de l'énergie. Ces oscillations sont modulées dans le temps, de manière d'autant plus complexe que le nombre de niveaux impliqués est grand. Ceci est mis en évidence sur la figure 4.8 (page précédente). On y considère un puits de potentiel comportant 18 niveaux, avec un paramètre d'anharmonicité $\nu_{01} - \nu_{12} = 100$ MHz (ces caractéristiques correspondent aux expériences réalisées avec le SQUID S_1). L'évolution de l'énergie du SQUID est calculée pour une excitation MO de moyenne amplitude ($\alpha = 1.1$) et pour une forte amplitude ($\alpha = 5.4$). Il est clair que pour $\alpha = 5.4$, l'évolution est beaucoup moins régulière que pour $\alpha = 1.1$. Nous avons de plus tracé l'évolution des populations de chacun des états au cours d'une période d'oscillation $T_{coh} = 2\pi/\Omega_{coh}$. Ces oscillations de l'énergie proviennent de la non-linéarité du potentiel et n'existeraient pas dans un potentiel harmonique.

4.2.3 Évolution de la fonction d'onde du système

Pour préciser la dynamique dans le cas d'une excitation de forte amplitude, nous allons étudier l'évolution temporelle de la fonction d'onde $\varphi(\tilde{x}, t)$ qui décrit l'état de phase (adimensionnée) du SQUID :

$$\varphi(\tilde{x}, t) = \langle \tilde{x} | \varphi(t) \rangle. \quad (4.31)$$

Nous allons décomposer $\varphi(x, t)$ sur la base des fonctions d'ondes propres de \hat{H}_0 . On note $\varphi_n(\tilde{x})$ la fonction d'onde de l'état $|n\rangle$:

$$\varphi_n(\tilde{x}) = \langle \tilde{x} | n \rangle. \quad (4.32)$$

L'annexe C présente l'allure de quelques fonctions propres, calculées grâce à la théorie des perturbations au premier ordre en σ . En utilisant la relation (4.16), on obtient :

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \langle n | e_k^* \rangle \langle e_k^* | 0 \rangle e^{-i\lambda_k t} \right) e^{-in\omega t} \varphi_n(x). \quad (4.33)$$

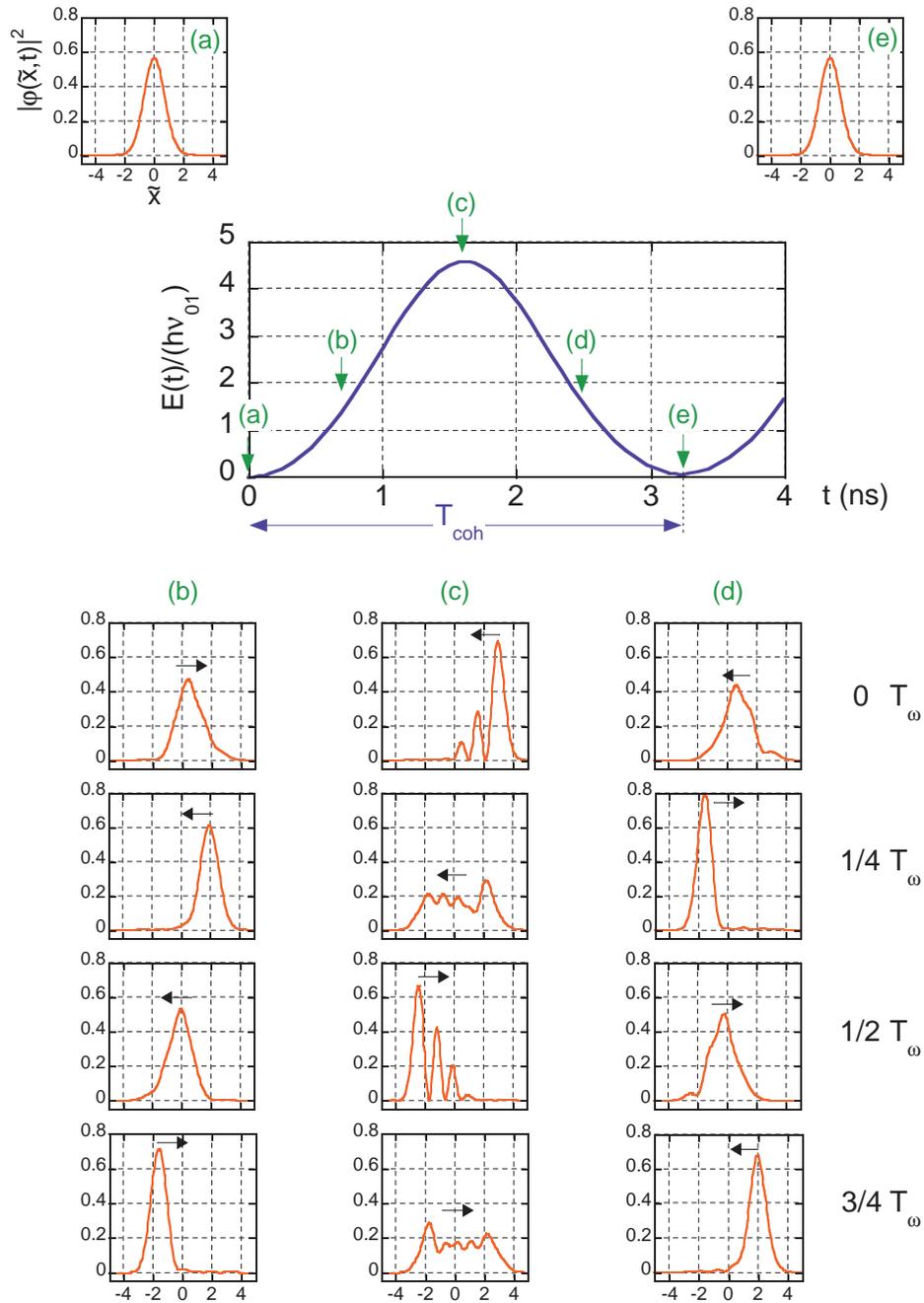


FIG. 4.9 – Décomposition de l'évolution rapide (à la pulsation ω imposée par les MO) de la fonction d'onde du système, pour 5 points particuliers (a), (b), (c), (d) et (e) répartis sur une période T_{coh} de l'évolution de l'énergie moyenne du SQUID (courbe centrale). Dans le cas où l'état est stationnaire (points (a) et (e)), la fonction d'onde n'est représentée qu'une seule fois. Dans le cas contraire (points (b), (c) et (d)), on étudie une oscillation de période $T_\omega = 2\pi/\omega$ en représentant la fonction d'onde au début de l'oscillation, après un quart, une moitié et finalement $3/4$ d'oscillation.

L'évolution temporelle de $\varphi(\tilde{x}, t)$ fait intervenir deux échelles de temps très différentes. La première, liée aux pulsations λ_k , est impliquée dans l'oscillation de l'énergie stockée dans le SQUID. Nous avons discuté cet aspect du problème dans le paragraphe précédent. Ces oscillations ont une période de l'ordre de $2\pi/\Omega_1$, bien supérieure à la nanoseconde en pratique. La seconde dépendance temporelle, en multiples de ω , est liée au forçage du système par les MO. Le forçage est accordé sur $\omega = \omega_{01}$, ce qui correspond à des fréquences de l'ordre de 10 GHz. La dépendance en ω est due au fait que les superpositions excitées par les MO correspondent à des états du SQUID non stationnaires.

L'évolution de $|\varphi(\tilde{x}, t)|^2$ est illustrée sur la figure 4.9 (page 89), dans le cas d'une excitation de forte amplitude ($\alpha = 5.4$). Nous avons représenté la première période de l'oscillation de l'énergie. Nous nous intéressons à 5 points particuliers de cette première période : $t = 0, \frac{1}{4}T_{coh}, \frac{1}{2}T_{coh}, \frac{3}{4}T_{coh}$ et T_{coh} , indexés respectivement par (a), (b), (c), (d) et (e). Pour les points (b), (c) et (d), nous avons représenté la dépendance temporelle rapide de $|\varphi(\tilde{x}, t)|^2$ sur la période $T_\omega = 2\pi/\omega$ en la traçant à intervalles réguliers. Par exemple, pour le point (b), la densité de probabilité est représentée aux 4 instants $t = \frac{1}{4}T_{coh}, \frac{1}{4}T_{coh} + \frac{1}{4}T_\omega, \frac{1}{4}T_{coh} + \frac{1}{2}T_\omega$ et $\frac{1}{4}T_{coh} + \frac{3}{4}T_\omega$.

À l'instant $t = 0$ (a), le SQUID est dans l'état fondamental, qui est stationnaire. La densité de probabilité n'évolue pas et reste piquée au voisinage $\tilde{x} = 0$ (fig. 4.9.a). La densité de probabilité est approximativement de forme gaussienne avec une extension caractéristique voisine de 2.

Pour les temps voisins de $T_{coh}/4$ (b), la densité de probabilité conserve une forme voisine de celle du fondamental. Par contre, comme on peut le constater sur la figure 4.9.b, elle oscille désormais dans le potentiel à la pulsation ω . On note là une analogie très forte avec les états cohérents (ou quasi-classiques) qui se développent dans un oscillateur harmonique excité par un champ classique (p. 590 de la ref. [75]). En fait, pour les temps voisins $T_{coh}/4$, peu de niveaux sont excités dans le puits. Tout se passe comme si la particule n'avait pas encore "senti" la non-linéarité du puits de potentiel. Il est donc logique de retrouver un comportement similaire à celui de l'oscillateur harmonique.

Pour les temps voisins de $T_{coh}/2$ (c), l'énergie stockée dans le SQUID est maximale. Ce point correspond à un équilibre entre l'excitation et les effets anharmoniques. La densité de probabilité présente une forme plus compliquée et présente des fluctuations de position importantes. On s'écarte alors franchement du comportement prédit pour un oscillateur harmonique.

À des temps proches de $3T_{coh}/4$ (d), l'énergie revient à sa valeur de $T_{coh}/4$. L'état du système est à nouveau décrit par un paquet d'onde de forme approximativement gaussienne oscillant à la pulsation ω . On peut de plus remarquer que son mouvement dans le puits de potentiel est déphasé de π par rapport à $T_{coh}/4$. L'interprétation fait appel à une analogie classique : à cause des effets non-linéaires, la particule a accumulé un retard de phase. De ce fait, l'excitation MO "freine" le système et le SQUID perd de l'énergie.

Pour $t = T_{coh}$ (e), le SQUID est à nouveau dans l'état fondamental, et le processus peut recommencer.

Dans le cas d'une excitation de forte amplitude, nous avons ainsi montré que, mis à part les temps proches de $T_{coh}/2$, l'état de phase (adimensionnée) du SQUID est bien décrit par un paquet d'onde d'extension typique voisine de l'unité, qui oscille au fond du puits de potentiel. Pour $\alpha = 5.4$, l'énergie maximale stockée dans le SQUID est de $5\hbar\omega_{01}$ et l'amplitude des oscillations à la pulsation ω est voisine de 2. Nous sommes dans une situation où le SQUID est faiblement excité, et où l'amplitude des oscillations du paquet d'onde est de l'ordre de son extension. Une description complète des propriétés du SQUID est nécessairement quantique. Toutefois, la dynamique de la fonction d'onde du SQUID rappelle le mouvement d'une particule classique au fond d'un puits de potentiel. Dès lors, il est intéressant de comparer les prévisions du modèle quantique avec celles d'une théorie purement classique.

4.2.4 Signatures d'un comportement quantique et limite classique

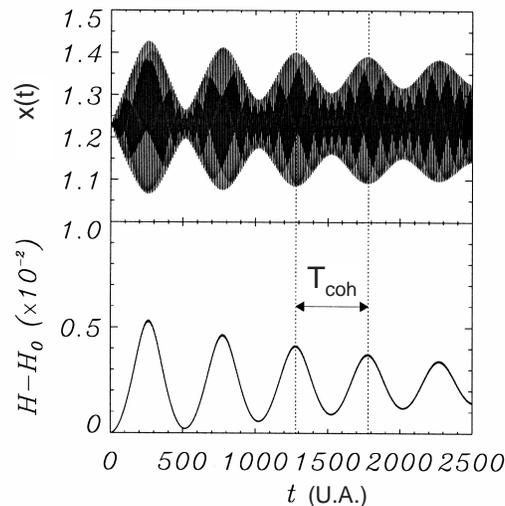


FIG. 4.10 – Modulation de l'amplitude des oscillations de phase (et donc de l'énergie) d'une JJ classique lors du transitoire suivant l'allumage de l'excitation MO (courbe extraite de la référence [71]).

Théorie classique. L'étude d'une jonction Josephson classique excitée par un champ MO classique a été réalisée indépendamment par Gronbech-Jensen et al. [71] et par A. Ratchov [72]. Dans ces deux cas, l'étude comporte une approche analytique et une approche numérique. L'hamiltonien est identique à celui de la théorie quantique, la seule différence est que l'on considère des MO accordées sur ω_p (absence de fluctuations de point zéro). Comme le montre la figure 4.10, la théorie classique prévoit elle aussi des battements de l'énergie

du SQUID lors du transitoire suivant l'allumage des MO. Négligeant les frottements, le mécanisme est le suivant. Sous l'action des MO, la particule fictive, initialement immobile en fond de puits, commence à osciller. L'amplitude des oscillations augmente et la non-linéarité du potentiel commence à induire un retard de phase du mouvement de la particule sur l'excitation. Lorsque ce retard atteint la valeur π , les MO commencent à freiner la particule. L'amplitude décroît jusqu'à ce que la particule s'immobilise, et le cycle peut recommencer. Ces oscillations de l'amplitude sont lentes devant la fréquence d'oscillation de la particule. Les oscillations d'amplitude se traduisent par une oscillation de l'énergie avec une fréquence ν_{coh} .

Comparaison classique-quantique pour la dépendance $\nu_{coh}(\Omega_1)$. Nous allons maintenant comparer les prévisions des théories classiques et quantiques pour une caractéristique particulière des oscillations d'énergie. Nous nous focalisons sur la dépendance de ν_{coh} avec l'amplitude réduite Ω_1 de l'excitation. La comparaison est ici réalisée pour le puits de potentiel comportant 18 niveaux, caractérisé par l'anharmonicité $\nu_{01} - \nu_{12} = 100$ MHz qui, rappelons-le, correspond à l'étude expérimentale réalisée avec S_1 . Sur la figure 4.11, sont tracés les résultats obtenus par A. Ratchov en réalisant des simulations numériques dans les cas classiques et quantiques. On peut constater que les comportements prédits sont similaires à haute amplitude d'excitation. Les deux théories prévoient une dépendance non-linéaire de ν_{coh} . Toutefois, il y a une nette divergence entre les théories classique et quantique pour les faibles amplitudes d'excitation. Dans la limite à deux niveaux, la théorie quantique prévoit $\nu_{coh} = \Omega_1/2\pi$. On peut constater que ce comportement linéaire se poursuit pratiquement jusqu'à $\Omega_1 \sim \omega_{01} - \omega_{12}$, amplitude pour laquelle 3 niveaux d'énergie sont impliqués. Dans la limite des faibles excitations, A. Ratchov a montré par un calcul analytique que la pulsation des battements classiques vérifie $\nu_{coh} \propto \Omega_1^{2/3}$ [72].

La conclusion de cette étude est qu'il y a une signature quantique nette dans le comportement de Ω_{coh} pour les amplitudes d'excitation $\Omega_1 \leq \omega_{01} - \omega_{12}$. Au delà, dans le régime de forte amplitude, les théories classiques et quantiques se rejoignent. La similarité entre prévisions classique et quantique tient au fait que l'excitation par un champ MO classique de forte amplitude développe dans le SQUID des superpositions d'états qui se rapprochent d'un état classique.

Un système classique ? Les résultats précédents ne signifient pas pour autant qu'à haute puissance d'excitation *toutes* les propriétés physiques du SQUID sont régies par la mécanique classique. Revenons sur le cas $\alpha = 5.4$, qui correspond à une forte amplitude d'excitation. L'énergie maximale stockée dans le SQUID est de $5 \times \hbar\omega_{01}$. Nous sommes dans une situation où la quantification de l'énergie, donnée par $\hbar\omega_{01}$, n'est pas négligeable devant l'énergie totale. Pour des temps différents de $\frac{1}{2}T_{coh}$, l'état du système est bien décrit par un paquet d'onde d'extension typique 2 (phase adimensionnée). Ce paquet d'onde oscille au fond du puits avec une amplitude voisine de 2. Pour des temps voisins de $\frac{1}{2}T_{coh}$, le système ressent fortement la non-linéarité du potentiel. Le paquet d'onde décrivant l'état de phase du SQUID est alors très fortement délocalisé (*cf* figure 4.9). Ainsi, les fluctuations

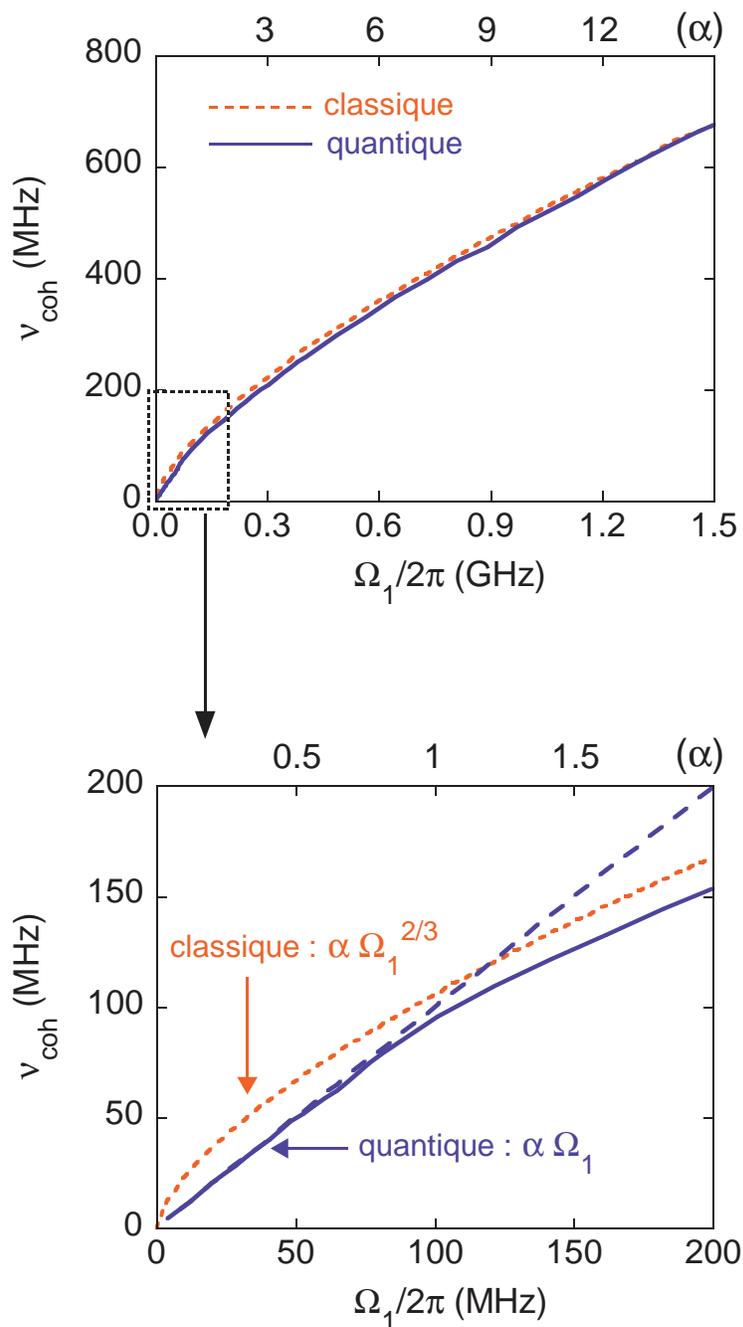


FIG. 4.11 – **En haut** : comparaison entre les prévisions de la théorie classique (calcul numérique) et de la théorie quantique multi-niveaux pour l'évolution de ν_{coh} en fonction de Ω_1 . Les théories donnent le même résultat dans le régime des fortes excitations ($\alpha \gg 1$). **En bas** : zoom sur la zone $\alpha \leq 1$. Dans cette zone, la théorie classique donne $\nu_{\text{coh}} \propto \Omega_1^{2/3}$, tandis que la théorie quantique prévoit un comportement quasi linéaire. Pour $\alpha \ll 1$, les oscillations impliquent uniquement les deux premiers niveaux : le résultat linéaire de la théorie de Rabi correspond aux pointillés.

quantiques ne sont pas négligeables. Soulignons à ce propos que l'observation du régime MQT est une mesure indirecte des fluctuations quantiques du fondamental.

De plus, la théorie quantique prévoit des modulations de l'amplitude des oscillations d'énergie dans le régime des fortes excitations. Ceci constitue une autre signature du comportement quantique. Nous verrons toutefois que la mise en évidence expérimentale de ces battements est difficile. Ainsi, tant que les énergies considérées sont de l'ordre de quelques $\hbar\omega_{01}$, une description complète des propriétés du SQUID est nécessairement quantique.

4.3 Résultats expérimentaux

La séquence de flux employée est de la même forme que celle utilisée en spectroscopie (fig. 4.2). La fréquence de l'impulsion micro-onde est accordée sur la résonance de la transition de fond de puits, à la fréquence ν_{01} . Les expériences d'oscillations cohérentes exploitent pleinement la rapidité du système de génération de flux. Les temps de montée inférieurs à la nanoseconde permettent d'obtenir des impulsions instantanées sur une large plage d'amplitudes (la limite supérieure est grossièrement donnée par la condition $2\pi/\Omega_1 \sim 0.8$ ns). Le temps d'application T_{mo} des micro-ondes est variable et peut atteindre au minimum 2 ns.

Le délai qui sépare la fin des micro-ondes de la mesure est gardé constant à 2 ns, afin de limiter la relaxation. Le temps de relaxation T_R du premier niveau excité varie de 50 ns à 100 ns (chapitre 5). Dans le meilleur des cas, le temps de relaxation du niveau $|n\rangle$ vaut T_R/n [43]. Ainsi, la rapidité de la mesure est un point important lorsqu'on étudie des processus impliquant des niveaux d'énergie élevés.

Enfin, signalons que nous mesurons la probabilité d'échappement P_{ech} et non l'énergie moyenne du SQUID. Toutefois une oscillation de l'énergie se traduit par une oscillation de la fréquence d'échappement. Pour S_1 , nous avons fait le choix d'ajuster l'amplitude Φ_m de l'impulsion de mesure de telle sorte que les oscillations s'effectuent autour de la valeur moyenne $P_{ech} = 50\%$. Pour les mesures réalisées avec S_2 , nous avons préféré ajuster Φ_m de telle sorte que la probabilité d'échappement du fondamental soit de quelques pourcents, ce qui maximise le contraste de détection entre les niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$.

4.3.1 Le SQUID S_1

Les oscillations cohérentes ont été observées pour différents points de fonctionnement du circuit S_1 . Les résultats présentés ici ont été obtenus au point de fonctionnement $I_p = 4.700 \mu\text{A}$, $\Phi_p = 0.095 \Phi_0$. L'étude spectroscopique de la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$, présentée à la figure 4.2, donne $\nu_{01} = 11.428$ GHz. La figure 4.12 présente les résultats expérimentaux pour deux amplitudes réduites Ω_1 des MO : $\Omega_1/2\pi = 108$ MHz (courbe (a)) et $\Omega_1/2\pi = 541$ MHz (courbe (b)). La probabilité d'échappement P_{ech} oscille en fonction du temps d'application des micro-ondes, ce qui reflète une oscillation de l'état du SQUID. Les courbes ont été analysées avec un ajustement par une fonction empirique : un sinus amorti exponentiellement. On extrait de ces ajustements la fréquence d'oscillation ν_{coh} et le temps d'amortissement des oscillations \tilde{T}_2 .

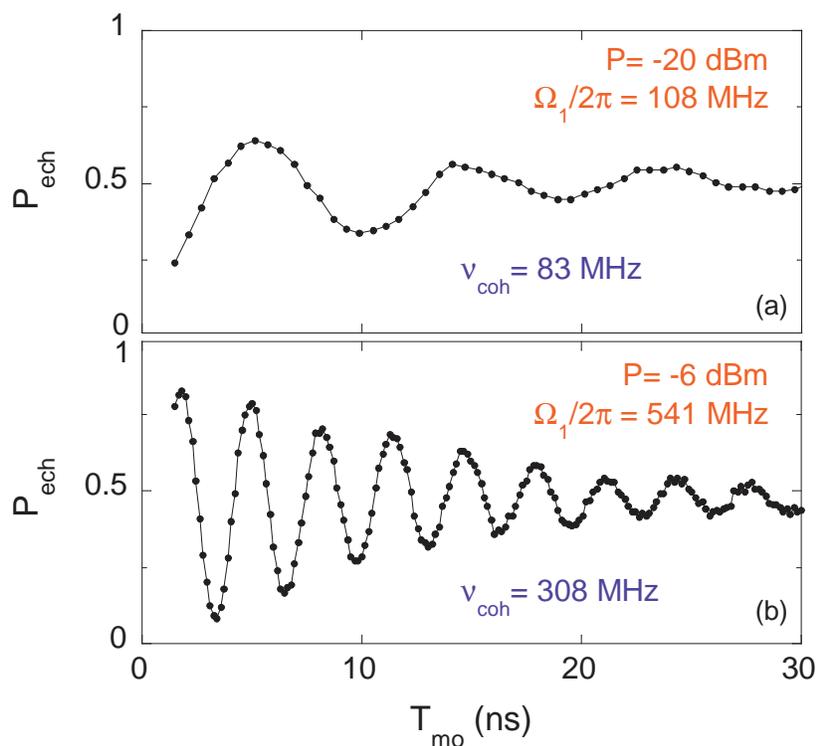


FIG. 4.12 – Oscillations cohérentes pour deux amplitudes MO différentes mesurées avec S_1 au point de polarisation $I_p = 4.700 \mu A$, $\Phi_p = 0.095 \Phi_0$.

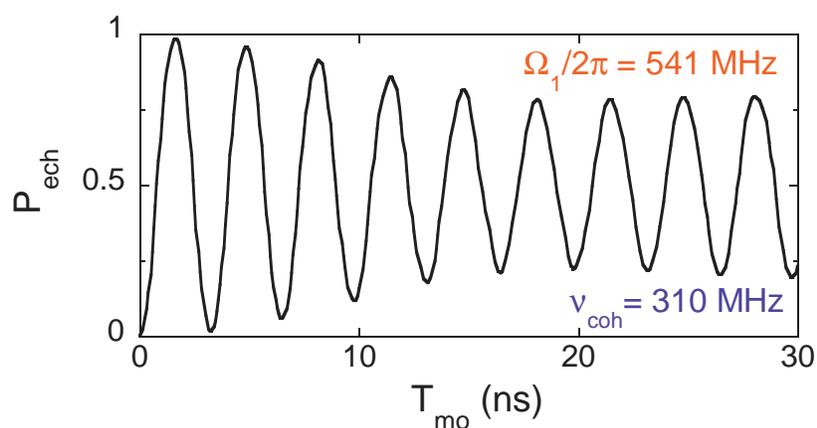


FIG. 4.13 – Oscillations de la probabilité d'échappement prédites par la théorie multi-niveaux pour $\Omega_1/2\pi = 541 \text{ MHz}$ qui correspond à la courbe expérimentale (b). On constate une légère modulation d'amplitude. Elle n'est pas discernable sur la courbe expérimentale en raison de l'amortissement des oscillations, non pris en compte par le modèle.

Nous avons répété ces mesures pour des amplitudes réduites Ω_1 croissantes⁽⁶⁾. L'amplitude et la fréquence d'oscillation augmentent. Nous avons mesuré des amplitudes maximales légèrement supérieures à 80 %. Les variations de ν_{coh} en fonction de Ω_1 sont tracées sur la figure 4.15, avec une dynamique dépassant une décade pour le paramètre Ω_1 . \tilde{T}_2 reste voisin de 12 ns, une discussion plus détaillée sera faite lors de l'analyse des résultats de S_2 .

Analyse par la théorie quantique multi-niveaux. Pour appliquer la théorie développée dans le paragraphe précédent, il nous faut connaître le spectre du système. Il est calculé à partir du point de fonctionnement et des paramètres électriques du circuit. Ce spectre est représenté sur la figure 4.14. Le désaccord en fréquence entre les deux premières transitions vaut $\nu_{01} - \nu_{12} = 100$ MHz. Le puits comporte en tout 18 niveaux⁽⁷⁾ pour une profondeur totale $\Delta U = 180$ GHz.

La théorie multi-niveaux prévoit des oscillations de l'état quantique du SQUID. En fait, les prévisions pour les amplitudes MO correspondant aux courbes expérimentales (a) et (b) ont été présentées et discutées dans la partie théorique (fig. 4.8). Toutefois, nous revenons sur l'analyse en présentant l'évolution de la probabilité d'échappement P_{ech} . Le contraste de la mesure est fortement limité par le bruit de flux basse fréquence caractérisé au chapitre 6. On estime grossièrement que le contraste en probabilité d'échappement de deux niveaux voisins vaut 30 %. La figure 4.13 présente la prévision théorique pour les paramètres de la courbe (b). La modulation de l'amplitude des oscillations est due au fait que plusieurs niveaux (6) sont impliqués dans l'oscillation. Elle n'est pas détectable expérimentalement car elle intervient sur une échelle de temps comparable à l'amortissement des oscillations.

La dépendance non linéaire avec Ω_1 de la fréquence ν_{coh} des oscillations cohérentes est une signature forte du caractère multi-niveaux des oscillations cohérentes. La figure 4.15 montre que les résultats sont parfaitement ajustés par la théorie, avec la calibration de l'amplitude MO réduite comme unique paramètre libre. Ω_1 est directement proportionnelle à l'amplitude Φ_{mo} de l'excitation micro-onde en flux. La relation 4.6 donne ici $\Omega_1/(2\pi\Phi_{mo}) = 1670$ GHz/ Φ_0 . Φ_{mo} est elle-même proportionnelle à l'amplitude A_{mo} du signal de tension délivré par le synthétiseur de fréquences, le facteur de proportionnalité étant la transmission de la ligne MO. L'ajustement des données expérimentales permet d'extraire une transmission en accord, à 20 %, près avec notre estimation.

⁽⁶⁾ Ω_1 est proportionnel à l'amplitude en flux Φ_{mo} de l'excitation, elle-même proportionnelle à l'amplitude en tension A_{mo} du signal délivré par le synthétiseur de fréquences. La puissance P du signal délivré par le synthétiseur est exprimée en dBm, avec la définition suivante : $P[dBm] = 10 \log(P[W]/1mW)$. L'amplitude en tension A_{mo} correspondante s'en déduit par la relation $P[W] = \frac{1}{2}(A_{mo}[V])^2/50[\Omega]$. La calibration de Ω_1 sera détaillée dans la suite.

⁽⁷⁾Signalons au passage une erreur sans conséquence qui s'est glissée dans la publication décrivant les résultats obtenus avec S_1 [76] : il y était dit que le puits comportait 16 niveaux (au lieu de 18). Le reste du spectre est correct et ces deux niveaux n'ont aucun rôle dans les résultats présentés ici.

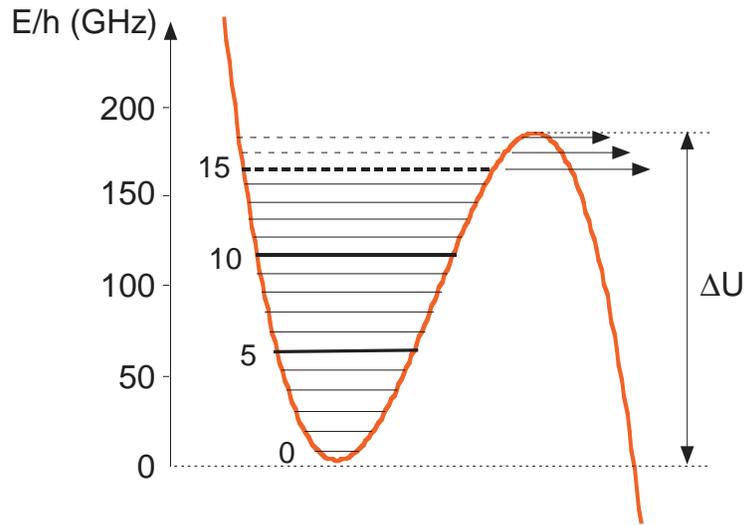


FIG. 4.14 – Spectre calculé du SQUID S_1 au point de fonctionnement $I_p = 4.700 \mu A$, $\Phi_p = 0.095 \Phi_0$. La référence d'énergie est le fond du puits de potentiel. Les niveaux en pointillés ont un temps de vie tunnel trop faible pour être stables durant la polarisation du circuit ($50 \mu s$).

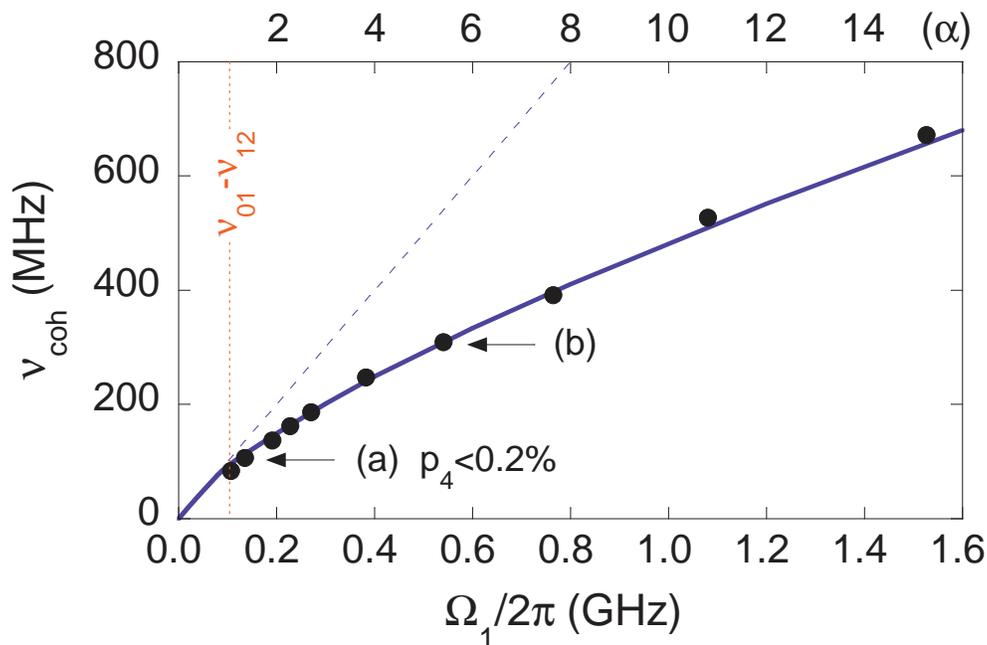


FIG. 4.15 – Fréquence des oscillations cohérentes ν_{coh} en fonction de l'amplitude MO réduite. Les ronds correspondent aux résultats expérimentaux, les pointillés à la théorie de Rabi pour un système à 2 niveaux et la courbe pleine à la théorie multi-niveaux.

Discussion. Pour être visibles, les oscillations cohérentes doivent être plus rapides que le temps d'amortissement \tilde{T}_2 , qui vaut pour S_1 environ 12 ns. Ceci fixe une limite basse fréquence aux alentours de 80 MHz : les oscillations observées dans S_1 impliquent au minimum 3 niveaux. Mis à part les deux points correspondant aux deux plus basses amplitudes, la dépendance de ν_{coh} avec Ω_1 s'interprète alors aussi à l'aide d'une théorie classique (cf §4.2.4, figure 4.11). Il serait intéressant de sonder plus en détail la gamme d'excitation $\Omega_1/2\pi \leq \nu_{01} - \nu_{12}$, où les prévisions des théories quantique et classique concernant $\nu_{coh}(\Omega_1)$ divergent.

4.3.2 Vers la limite à deux niveaux : SQUID S_2

Amélioration de la cohérence du système. Le SQUID S_2 présente une nette amélioration par rapport au circuit S_1 , car le bruit de flux a une amplitude 3 fois moins élevée. La figure 4.16 présente un exemple des oscillations cohérentes mesurées avec S_2 au point de fonctionnement $I_p = 1.815 \mu\text{A}$, $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$ ($\nu_{01} = 10.581 \text{ GHz}$). L'amplitude de l'impulsion de mesure est telle que la probabilité d'échappement du fondamental vaut 1%. Les oscillations sont visibles sur plus de 120 ns, à comparer avec les 30 ns obtenues avec S_1 . Toutefois, l'anharmonicité est faible à ce point de polarisation ($\nu_{01} - \nu_{12} = 40 \text{ MHz}$). Comme au paragraphe précédent, les oscillations associées à cette figure sont dans un régime multi-niveaux et impliquent quatre niveaux.

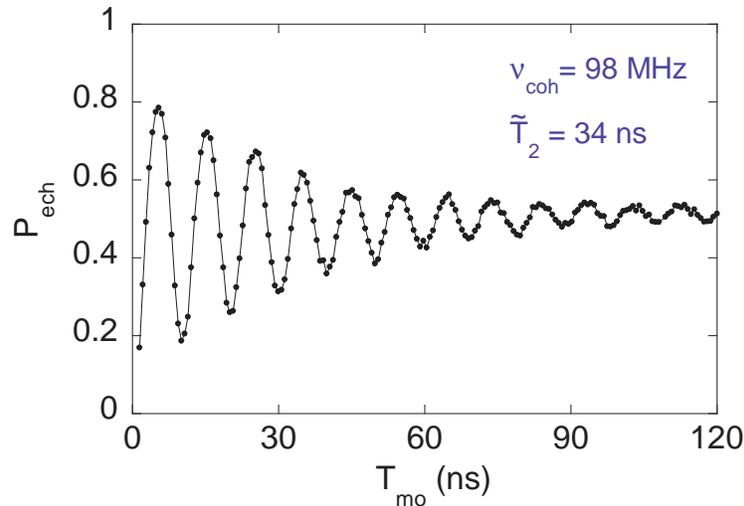


FIG. 4.16 – Oscillations cohérentes mesurées avec le circuit S_2 au point de fonctionnement $I_p = 1.815 \mu\text{A}$, $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$.

Vers la limite à deux niveaux. Pour sonder le régime à deux niveaux, nous avons rapproché le point de polarisation de la frontière critique, en conservant un flux identique : $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$. Ceci augmente l'anharmonicité du puits de potentiel. Au point $I_p = 2.222 \mu\text{A}$, la fréquence de fond de puits ν_{01} est mesurée à 8.273 GHz. Le calcul donne une profondeur de 63 GHz, soit sept niveaux piégés. L'anharmonicité en fond de puits est plus importante qu'au point précédent : $\nu_{01} - \nu_{12} = 160 \text{ MHz}$. Comme précédemment, l'amplitude de l'impulsion de mesure est ajustée de telle sorte que $P_{ech}^{(0)} = 1 \%$. Trois exemples d'oscillations cohérentes mesurées pour différentes amplitudes d'excitation sont présentées à la figure 4.17.

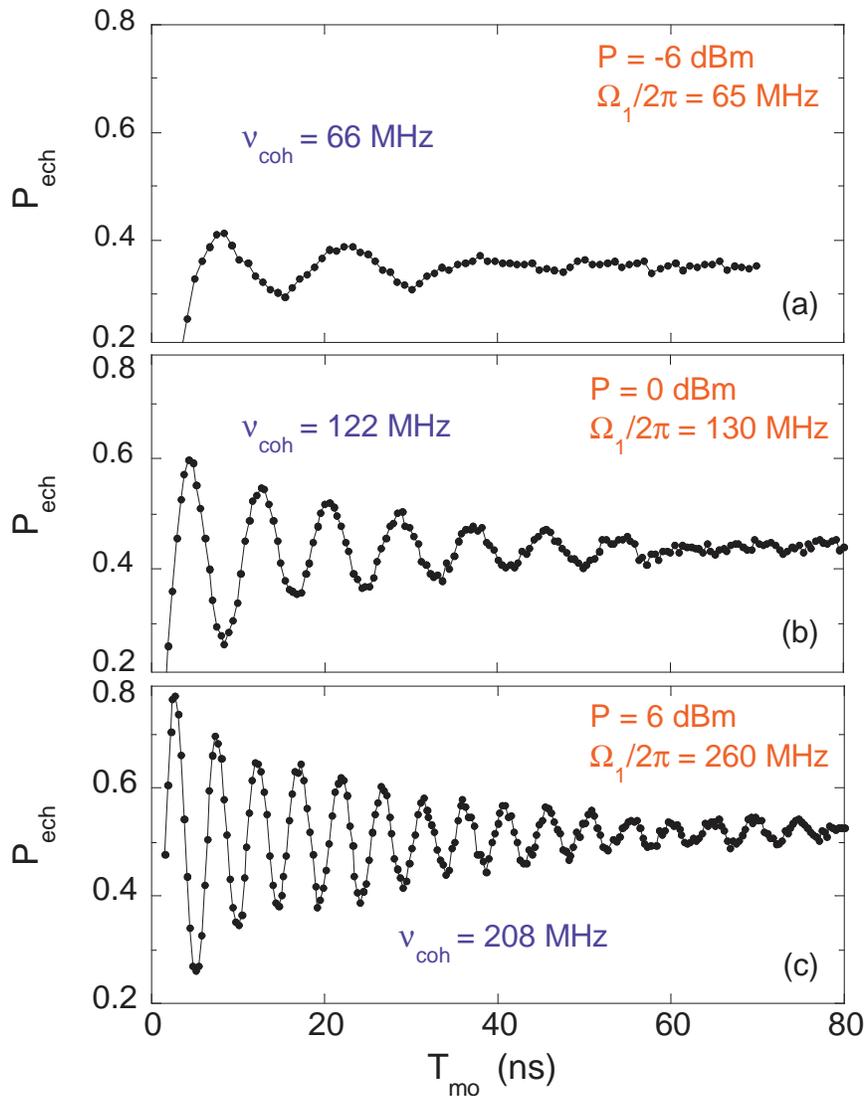


FIG. 4.17 – Oscillations cohérentes observées pour des amplitudes micro-ondes croissantes au point de polarisation $I_p = 2.222 \mu\text{A}$, $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$ avec le SQUID S_2 .

L'évolution de ν_{coh} avec Φ_{mo} est tracée sur la figure 4.18. Comme pour le SQUID S_1 , l'analyse des résultats a été effectuée grâce à la théorie quantique multi-niveaux. L'ajustement théorique est en excellent accord avec l'expérience. Les données expérimentales s'alignent sur le comportement linéaire prévu par la théorie quantique et sont totalement incompatibles avec la description classique en $\Omega_1^{2/3}$. Le domaine d'amplitude d'excitation étudié correspond justement à la transition du régime quantique au régime quasi-classique. D'autre part, pour l'amplitude réduite $\Omega_1/2\pi = 65$ MHz minimale utilisée dans ces mesures, la population de l'état $|2\rangle$ n'excède pas 12%. Nous sommes ainsi très près du régime d'oscillations à deux niveaux.

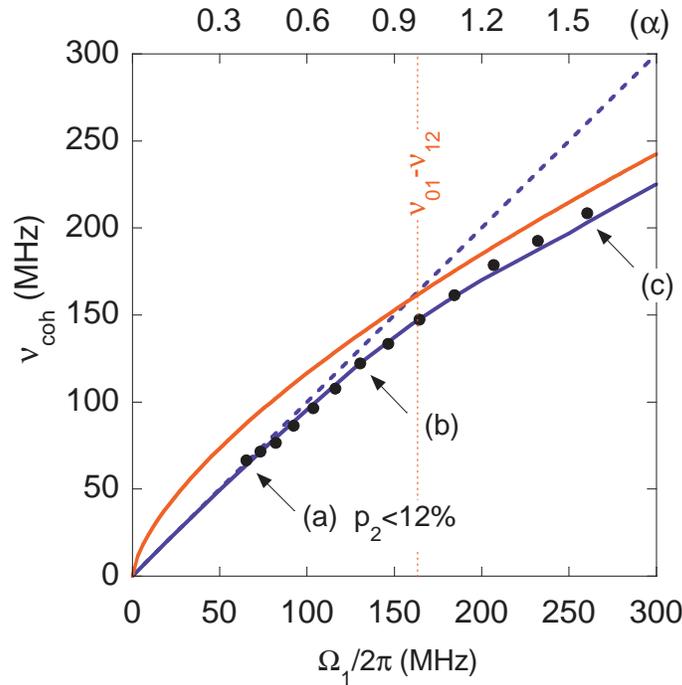


FIG. 4.18 – Dépendance de ν_{coh} avec l'amplitude de l'excitation micro-onde mesurée sur S_2 au point $I_p = 2.222 \mu A$, $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$. Les points expérimentaux sont ronds, la ligne pleine représente la théorie multi-niveaux et les pointillés, la théorie de Rabi pour un système à 2 niveaux.

Temps d'amortissement \tilde{T}_2 . Pour finir, nous allons discuter le temps caractéristique d'amortissement \tilde{T}_2 des oscillations. Celui-ci donne une idée du temps de cohérence du système. Toutefois, une interprétation plus précise est délicate. D'une part, il n'existe pas à notre connaissance de théorie prenant en compte les effets incohérents dans un système anharmonique à plusieurs niveaux d'énergie. D'autre part, même si on se restreint à un système à deux niveaux, les temps d'amortissement des oscillations de Rabi dépendent de l'amplitude du forçage micro-onde [33]. La mesure de \tilde{T}_2 en fonction de Ω_1 est pré-

sentée sur la figure 4.19. \tilde{T}_2 présente de fortes variations, et vaut 26 ns au maximum et 12 ns au minimum. Le premier minimum n'est pour l'instant pas expliqué. Le second, qui correspond à une amplitude $\Omega_1/2\pi = 190$ MHz, pourrait être dû à une modulation de l'amplitude des oscillations d'énergie prévue par la théorie quantique (sans décohérence). Cette modulation conduirait à une diminution apparente de \tilde{T}_2 . Ceci serait une première preuve indirecte de l'existence des modulations dans le régime de forte excitation. Toutefois, une analyse expérimentale plus rigoureuse nécessite des temps de cohérence plus longs.

La décohérence dans le SQUID sera étudiée théoriquement et expérimentalement dans le chapitre suivant. Nous nous placerons pour cela dans le régime à deux niveaux en réalisant des expériences de spectroscopie à basse puissance.

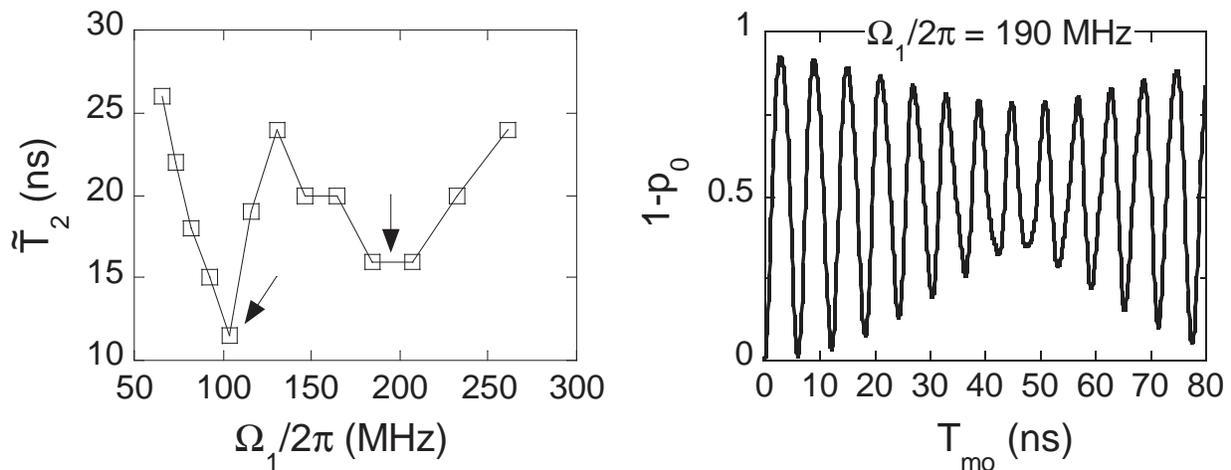


FIG. 4.19 – **À gauche** : évolution du temps d'amortissement des oscillations cohérentes avec l'amplitude MO. **À droite** : modulation de l'amplitude des oscillations temporelles de la population des états excités (calcul réalisé pour $\Omega_1/2\pi = 190$ MHz).

Chapitre 5

Bruit et processus incohérents

En physique atomique, les manifestations quantiques du comportement des degrés de liberté électroniques de l'atome sont connues depuis longtemps. D'un autre côté, l'observation des manifestations quantiques pour les degrés de liberté collectifs des circuits supraconducteurs est très récente. La mise en évidence de l'effet tunnel macroscopique dans les jonctions Josephson date des années 80 [15, 54]. Le contrôle de l'état quantique d'une boîte à paires de Cooper a été réalisé en 1999 par l'équipe de Nakamura [18]. Depuis, les réalisations se succèdent [19, 21, 22], mais ce sont toujours des expériences complexes. Une première difficulté est d'ordre cryogénique : l'écart typique entre les niveaux d'énergie de ces circuits impose de travailler à très basse température, dans des réfrigérateurs à dilution. Mais ce n'est pas tout, car contrairement à un atome, les circuits supraconducteurs sont dans un régime de couplage fort à l'environnement. Le terme environnement désigne ici l'ensemble des degrés de liberté non contrôlés qui sont couplés au système quantique. Ce couplage perturbe la dynamique du système en introduisant des effets incohérents (qui détruisent la cohérence de phase propre au système quantique). Comme nous le verrons dans ce chapitre, les sources de décohérence sont diverses, plus ou moins bien maîtrisables. Leur compréhension est une étape indispensable dans l'amélioration des performances des circuits quantiques. Ceci explique l'effort considérable effectué tant au niveau théorique [77, 78, 79] qu'expérimental [30, 31, 32, 33] pour comprendre et quantifier les sources de décohérence dans les circuits supraconducteurs.

La description des phénomènes incohérents est assez complexe. Pour ne pas introduire de difficultés supplémentaires, tous les calculs et les expériences présentés dans ce chapitre utilisent le SQUID dans un régime de basse énergie. Les deux niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont alors suffisants pour décrire la dynamique du système. Dans cette limite, le SQUID peut être considéré comme un Qubit de phase, très proche de celui du groupe de J.M. Martinis.

Le couplage à l'environnement induit des fluctuations aléatoires des paramètres de contrôle (courant et flux) de l'hamiltonien du SQUID. La première partie de ce chapitre discute l'hamiltonien de couplage à ces fluctuations. Partant de la théorie de Bloch-Redfield développée initialement pour la RMN, nous mettrons ensuite en évidence deux processus

incohérents : la dépolarisation et le déphasage adiabatique. Cependant, les hypothèses requises par cette théorie ne sont pas toujours satisfaites par les sources de bruit rencontrées en matière condensée. En particulier, le déphasage adiabatique doit s'interpréter dans un cadre moins restrictif.

Il s'agit ensuite d'identifier et de caractériser les différentes sources de fluctuations : c'est l'objet de la seconde partie. Nous nous appuyons dans cette démarche sur les références précédemment citées ainsi que sur les mesures d'échappement du chapitre 3.

Enfin, la dernière partie du chapitre détaille l'étude expérimentale de la relaxation et du déphasage adiabatique. La relaxation a été mesurée dans le domaine temporel. Les effets conjoints de la relaxation (souvent négligeable) et du déphasage adiabatique peuvent être étudiés dans le domaine temporel par l'observation de l'amortissement des franges de Ramsey [19, 22]. Malheureusement, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le temps de manipulation cohérente de l'état du SQUID dans le régime à deux niveaux est trop long pour autoriser une telle expérience. Nous avons donc choisi d'étudier les effets du bruit dans le domaine fréquentiel, à travers une étude spectroscopique à basse puissance. Nos résultats expérimentaux sont en très bon accord avec les prévisions théoriques des parties précédentes, signe que la décohérence dans le SQUID est bien comprise. Le chapitre se termine sur les perspectives d'amélioration des performances du SQUID.

5.1 Processus incohérents dans un système à 2 niveaux

5.1.1 Position du problème

Toutes les expériences présentées dans ce chapitre utilisent le SQUID dans un régime de basse énergie, les deux niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$ étant alors suffisants pour décrire la dynamique du système. Dans la base propre $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, son hamiltonien \widehat{H}_0 s'écrit :

$$\widehat{H}_0 = -\frac{1}{2}\hbar\omega_{01}\widehat{\sigma}_z. \quad (5.1)$$

Les notations $\widehat{\sigma}_x$, $\widehat{\sigma}_y$ et $\widehat{\sigma}_z$ désignent les matrices de Pauli. La pulsation propre ω_{01} est déterminée par le point de polarisation (I_p^0, Φ_p^0) . Le SQUID est couplé à des degrés de liberté non contrôlés de l'environnement. Ces derniers se manifestent en induisant des fluctuations aléatoires sur les paramètres de contrôle de l'hamiltonien (5.1) : le courant de polarisation I_p et le flux de polarisation Φ_p . L'origine physique des sources de fluctuations pertinentes pour notre expérience sera précisée dans la seconde partie du chapitre. Dans la suite, on note $\widehat{\delta X}$ les fluctuations autour de la moyenne du courant de polarisation ($X = I$) ou du flux de polarisation ($X = \Phi$). $\widehat{\delta X}$ s'interprète comme un opérateur qui agit sur les degrés de liberté de l'environnement.

Dans un premier temps, nous étudierons le cas le plus simple où un seul des paramètres de polarisation (noté X) est bruité suite au couplage avec une unique source de fluctuations. Cette situation est schématisée sur la figure 5.1. La généralisation au couplage simultané

à plusieurs sources sera faite en fin de partie. L'environnement qui génère les fluctuations de X est caractérisé par son hamiltonien \widehat{H}_X et sa température T . Pour traiter l'effet des fluctuations sur le SQUID, on prend en compte l'hamiltonien total \widehat{H} du système {SQUID + environnement} :

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{W}_X + \widehat{H}_X. \quad (5.2)$$

\widehat{W}_X désigne le terme de couplage entre le SQUID et l'environnement. Toute l'information mesurable relative au SQUID est contenue dans la matrice densité réduite $\widehat{\rho}(t)$ du SQUID. En supposant que la perturbation introduite par l'environnement est faible, la base des états propres de \widehat{H}_0 est un bon choix pour exprimer $\widehat{\rho}(t)$. Elle s'écrit ainsi :

$$\widehat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{00}(t) & \rho_{01}(t) \\ \rho_{01}^\dagger(t) & \rho_{11}(t) \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

L'objet de la première partie de ce chapitre est le calcul de l'évolution des termes de population (termes diagonaux) et de cohérence (termes anti-diagonaux). Les populations caractérisent l'énergie moyenne du SQUID. Les termes de cohérence caractérisent, quant à eux, la survie des superpositions quantiques d'états. Partant d'un état initial donné, les populations relaxent vers un état d'équilibre thermique avec l'environnement et les cohérences s'amortissent à zéro. Pour calculer leur évolution, il faut caractériser les sources de fluctuations ainsi que la manière dont le SQUID y est couplé.

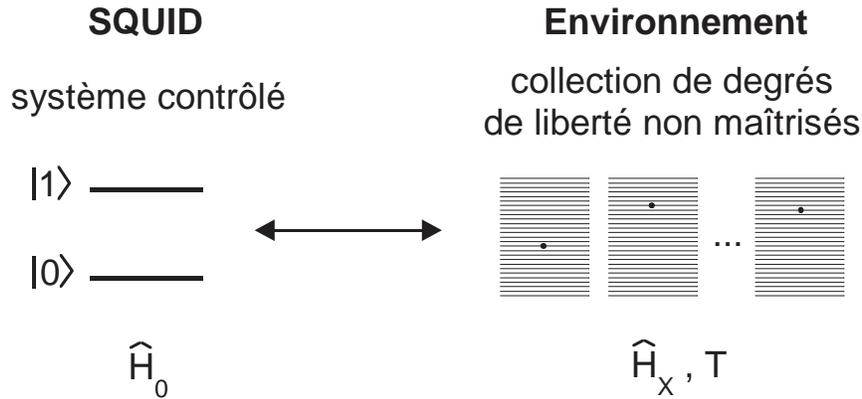


FIG. 5.1 – Le SQUID couplé à son environnement.

Caractérisation des sources de fluctuations : densités spectrales. De manière analogue à un bruit classique, les fluctuations de l'opérateur $\widehat{\delta X}(t)$ générées par l'environnement sont caractérisées par la densité spectrale quantique associée $S_X(\omega)$:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle \widehat{\delta X}(0) \widehat{\delta X}(\tau) \rangle e^{-i\omega\tau}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

Les crochets désignent un moyennage quantique sur les degrés de liberté de l'environnement. La fonction $S_X(\omega)$, définie pour $\omega \in \mathbb{R}$, caractérise la capacité de la source de fluctuations à échanger un photon d'énergie $\hbar|\omega|$. Les pulsations positives caractérisent l'absorption d'un photon par la source, et les pulsations négatives l'émission d'un photon. Conséquence directe de la dissymétrie entre les deux processus, $S_X(\omega)$ n'est pas paire.

On peut définir d'autres densités spectrales, et notamment la densité spectrale symétrisée, qui permet une comparaison directe avec la limite classique, atteinte pour les pulsations faibles vérifiant $\hbar|\omega| \ll k_B T$. Toutes ces notions sont reprises et développées dans l'annexe E. Elles y sont de plus appliquées concrètement aux fluctuations de courant générées par une impédance. Toutefois, pour éviter de trop compliquer les discussions, nous n'emploierons dans ce chapitre que les densités spectrales quantiques, notées $S_X^i(\omega)$. L'indice X désigne le canal de couplage (I =courant, Φ =flux) et l'exposant i précise, si nécessaire, l'origine physique du bruit.

Couplage linéaire. Pour tous les points de polarisation utilisés dans cette thèse, \widehat{W}_X est dominé par l'ordre linéaire en $\widehat{\delta X}$. On néglige dans la suite tous les termes d'ordre supérieur, de sorte que \widehat{W}_X se réduit à :

$$\widehat{W}_X = -\frac{\hbar}{2} (x_X \widehat{\sigma}_x + y_X \widehat{\sigma}_y + z_X \widehat{\sigma}_z) \widehat{\delta X}. \quad (5.5)$$

Par analogie avec la RMN, on distingue deux types de couplages dont nous verrons par la suite qu'ils ont des effets très différents. La contribution contenant les termes en $\widehat{\sigma}_x$ et $\widehat{\sigma}_y$ est dite transverse. Celle proportionnelle à $\widehat{\sigma}_z$ est dite longitudinale. Les coefficients des termes de couplage aux fluctuations de courant et de flux sont résumés dans le tableau 5.1 suivant.

Type de couplage	coefficient	fluctuations de courant ($X = I$)	fluctuations de flux ($X = \Phi$)
Transverse	x_X y_X	$f_I(\theta)/\sqrt{C_0 \hbar \omega_p}$ 0	$2f_\Phi(\theta)/(L_s \sqrt{C_0 \hbar \omega_p})$ 0
Longitudinal	z_X	$(\partial\omega_{01}/\partial I_p)$	$(\partial\omega_{01}/\partial \Phi_p)$

TAB. 5.1 – Les coefficients de l'hamiltonien de couplage linéaire.

On a introduit les fonctions $f_I(\theta) = \cos \theta + \eta \sin \theta$ et $f_\Phi(\theta) = \sin \theta$, θ étant l'angle de découplage (*cf* chapitre 1). De manière générale, les coefficients de couplage dépendent du point de fonctionnement. En particulier, les dérivées partielles $(\partial\omega_{01}/\partial I_p)$ et $(\partial\omega_{01}/\partial \Phi_p)$ caractérisant le couplage longitudinal augmentent très fortement (en valeur absolue) lorsque le point de polarisation se rapproche de la frontière critique.

5.1.2 La théorie de Bloch-Redfield et ses limites

La théorie de Bloch-Redfield, initialement développée dans le cadre de la RMN, décrit la dynamique d'un spin $\frac{1}{2}$ couplé à son environnement [80, 81]. En utilisant l'analogie entre un spin $\frac{1}{2}$ et système à deux niveaux, elle se transpose directement au SQUID. Une discussion très détaillée des hypothèses est donnée dans la référence [82]. La théorie suppose tout d'abord que la dynamique du système à deux niveaux est gouvernée principalement par l'hamiltonien \widehat{H}_0 , l'environnement agissant comme une perturbation. Ceci permet d'effectuer un développement perturbatif de l'équation de Liouville qui contrôle l'évolution temporelle de la matrice densité réduite $\widehat{\rho}(t)$. Ensuite, vient une hypothèse très forte sur la nature de l'environnement. On suppose qu'il génère des fluctuations caractérisées par un temps de corrélation court devant les temps caractéristiques d'évolution de $\widehat{\rho}(t)$. Reformulé en terme de densité spectrale, cela revient à considérer des bruits blancs.

Dans ces conditions, les coefficients de la matrice densité atteignent leur valeur d'équilibre suivant des lois exponentielles. Les populations relaxent vers l'équilibre avec un taux Γ_1 (processus de dépolarisation). Les termes de cohérence s'amortissent à zéro avec un taux Γ_2 (processus de déphasage). Le déphasage est une conséquence du processus de dépolarisation (Γ_1) combiné à un autre processus, dénommé déphasage adiabatique. Ce dernier est caractérisé par le taux Γ_φ ; il est la conséquence de variations lentes de la pulsation propre ω_{01} du système. Le taux de déphasage total s'écrit :

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2}\Gamma_1 + \Gamma_\varphi. \quad (5.6)$$

Dans la suite, nous allons examiner plus en détail les processus de dépolarisation et de déphasage adiabatique, en précisant le domaine de validité des expressions de Γ_1 et Γ_φ données par la théorie de Bloch-Redfield.

Dépolarisation. Le processus de dépolarisation est la résultante de deux processus élémentaires représentés sur la figure 5.2 : la relaxation de $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ avec le taux Γ_R et l'excitation de $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ avec le taux Γ_E . Le taux de dépolarisation est la somme de ces taux élémentaires :

$$\Gamma_1 = \Gamma_R + \Gamma_E. \quad (5.7)$$

Γ_R et Γ_E sont donnés par la règle d'or de Fermi :

$$\Gamma_R = \frac{\pi}{2}(x_X^2 + y_X^2)S_X(\omega_{01}) \quad (5.8)$$

$$\Gamma_E = \frac{\pi}{2}(x_X^2 + y_X^2)S_X(-\omega_{01}). \quad (5.9)$$

Relaxation et excitation s'accompagnent d'un échange de photon avec l'environnement. Par conservation de l'énergie, ces processus impliquent nécessairement les fluctuations de l'environnement à des fréquences voisines de ω_{01} . Cet échange d'énergie est induit par la partie transverse du couplage, qui couple les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Les expressions (5.8) et (5.9), fournies par la règle d'or, sont valables lorsque $S_X(\omega)$ varie peu sur une plage de pulsation

d'extension typique Γ_1 autour de ω_{01} . Le SQUID se thermalise avec son environnement grâce aux processus de relaxation et d'excitation. Les taux associés vérifient la balance détaillée :

$$\frac{\Gamma_E}{\Gamma_R} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{01}}{k_B T}\right). \quad (5.10)$$

Les populations d'équilibre $\rho_{00}(\infty)$ et $\rho_{11}(\infty)$, atteintes avec un temps caractéristique $T_1 = \Gamma_1^{-1}$, sont alors données par :

$$\rho_{00}(\infty) = \frac{\Gamma_R}{\Gamma_R + \Gamma_E} \quad \text{et} \quad \rho_{11}(\infty) = \frac{\Gamma_E}{\Gamma_R + \Gamma_E}. \quad (5.11)$$

Elles vérifient la statistique de Boltzman :

$$\frac{\rho_{11}(\infty)}{\rho_{00}(\infty)} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{01}}{k_B T}\right). \quad (5.12)$$

Pour les situations qui nous intéressent en pratique, la température de l'environnement est faible devant l'énergie du SQUID : $k_B T \ll \hbar\omega_{01}$. Le processus d'excitation est alors négligeable et le système repose à l'équilibre dans l'état fondamental. Le processus de relaxation reste présent à basse température. En effet, même si les modes de l'environnement à la pulsation ω_{01} sont vides, l'environnement peut toujours absorber un photon. La relaxation du circuit est alors induite par les fluctuations quantiques de point zéro de l'environnement.

Déphasage adiabatique. Le taux de déphasage adiabatique Γ_φ est donné par :

$$\Gamma_\varphi = \pi z_X^2 S_X(0). \quad (5.13)$$

Ce processus est la conséquence de variations aléatoires et lentes (pulsations nulles) de la pulsation propre du système, induites par le couplage longitudinal (en $\hat{\sigma}_z$). Partant d'un instant initial $t = 0$, le système accumule dans le temps un déphasage aléatoire, qui varie d'une réalisation de l'expérience à l'autre. Lorsqu'on réalise une moyenne sur toutes ces expériences élémentaires, les termes de cohérence se moyennent à zéro après un temps moyen $T_\varphi = \Gamma_\varphi^{-1}$. Contrairement aux processus inélastiques, le déphasage adiabatique implique la partie basse fréquence du bruit, pour laquelle les densités spectrales classiques et quantiques coïncident.

Le résultat (5.13) est valable à condition que la densité spectrale du bruit varie faiblement sur une plage de pulsations d'extension Γ_φ centrée sur la pulsation nulle. Malheureusement, cette hypothèse est souvent violée par les bruits intervenant en matière condensée. Citons tout d'abord les bruits en '1/f' dont la densité spectrale est singulière en zéro et pour lesquels le résultat (5.13) est évidemment inapplicable. Sans faire intervenir ces bruits "sauvages", nous verrons dans la deuxième partie du chapitre que le bruit en courant généré par la circuiterie proche du SQUID, bien que non singulier au voisinage de zéro, présente une structure à basse fréquence qui interdit l'utilisation de la théorie de Bloch-Redfield. Il est donc nécessaire d'utiliser une théorie du déphasage adiabatique reposant sur des hypothèses moins restrictives : c'est l'objet du paragraphe suivant.

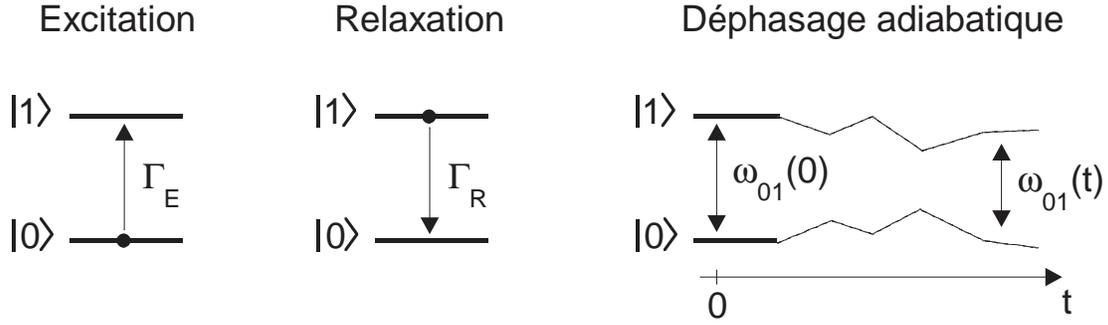


FIG. 5.2 – Représentation schématique des différents processus incohérents.

5.1.3 Déphasage adiabatique et fluctuations gaussiennes

Dans le cadre de la théorie de Bloch-Redfield, l'amortissement de l'amplitude $f_{coh}(t)$ des termes de cohérence se factorise selon :

$$f_{coh}(t) = \exp(-\Gamma_{\varphi}t) \times \exp\left(-\frac{\Gamma_1}{2}t\right). \quad (5.14)$$

On peut montrer que cette factorisation en contribution du déphasage adiabatique et contribution des processus inélastiques est plus générale, pour peu que le bruit à haute fréquence soit régulier [83]. $f_{coh}(t)$ se met ainsi sous la forme :

$$f_{coh}(t) = f_{\varphi}(t) \times \exp\left(-\frac{\Gamma_1}{2}t\right). \quad (5.15)$$

Cependant, $f_{\varphi}(t)$ diffère généralement d'une décroissance exponentielle. Dans ce paragraphe, nous décrivons le déphasage adiabatique causé par un couplage *linéaire* avec une source de fluctuations *gaussiennes*. Dans la mesure où le déphasage adiabatique implique la partie basse fréquence (classique) du bruit, nous allons calculer $f_{\varphi}(t)$ par un argument purement classique, emprunté à la référence [77].

Chaque mesure effectuée sur le SQUID est le résultat d'une moyenne sur un ensemble d'expériences élémentaires. Considérons tout d'abord une réalisation de cette expérience élémentaire et supposons que le système est initialement dans l'état pur :

$$|\psi(0)\rangle = \sqrt{1 - \rho_{11}(0)} |0\rangle + \sqrt{\rho_{11}(0)} e^{-i\varphi_0} |1\rangle. \quad (5.16)$$

Après une durée t , le SQUID est dans l'état :

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{1 - \rho_{11}(0)} |0\rangle + \sqrt{\rho_{11}(0)} e^{-i\varphi(t)} |1\rangle. \quad (5.17)$$

Le déphasage $\varphi(t)$ accumulé pendant cette durée est la somme d'une partie déterministe, liée à l'action de \widehat{H}_0 et d'une partie aléatoire $\delta\varphi(t)$, due au bruit : $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_{01}t + \delta\varphi(t)$. À l'ordre linéaire, $\delta\varphi(t)$ est relié aux fluctuations du paramètre de contrôle $\delta X(t)$ par :

$$\delta\varphi(t) = \left(\frac{\partial\omega_{01}}{\partial X}\right) \int_0^t \delta X(t') dt' = z_X \int_0^t \delta X(t') dt'. \quad (5.18)$$

Lorsque l'on réalise une moyenne sur un ensemble d'expériences élémentaires, on obtient un amortissement des termes de cohérence de la matrice densité caractérisé par la fonction $f_\varphi(t)$:

$$f_\varphi(t) = \left\langle \text{Re} [e^{i\delta\varphi(t)}] \right\rangle. \quad (5.19)$$

Dans le cas d'un bruit gaussien, cette dernière équation se réécrit :

$$f_\varphi(t) = \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \delta\varphi^2(t) \rangle \right]. \quad (5.20)$$

En introduisant la densité spectrale classique $S_X^c(\omega)$, associée au bruit $\delta X(t)$, et définie par la relation (E.2) de l'annexe E, on écrit :

$$\langle \delta\varphi^2(t) \rangle = t^2 z_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{ S_X^c(\omega) \text{sinc}^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right\}. \quad (5.21)$$

D'où :

$$f_\varphi(t) = \exp \left[-\frac{1}{2} t^2 z_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{ S_X^c(\omega) \text{sinc}^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right\} \right]. \quad (5.22)$$

Un calcul plus poussé modélisant l'environnement comme un bain d'oscillateurs harmoniques (modèle spin-boson) donne le même résultat [77], à condition de remplacer $S_X^c(\omega)$ par son homologue quantique $S_X(\omega)$. En fait, les résultats obtenus par les deux calculs sont pratiquement identiques. Le sinus cardinal présent dans la relation (5.22) montre que le déphasage adiabatique a exploré à l'instant t les fluctuations sur une plage de pulsations d'extension $4\pi/t$ centrée sur 0. On définit le temps de décohérence T_2 par :

$$f_\varphi(T_2) = \frac{f_\varphi(0)}{\exp(1)}. \quad (5.23)$$

Le domaine de pulsation typique à prendre en compte pour le déphasage adiabatique est $4\pi/T_2$. Le couplage à l'environnement est faible, le T_2 est au moins égal à quelques nanosecondes. L'environnement est caractérisé par la pulsation thermique $\omega_{th} = k_B T / \hbar$. Pour un environnement thermalisé à 30 mK, $\omega_{th} = 2\pi \times 500$ MHz. Les fluctuations qui causent le déphasage adiabatique ont ainsi des pulsations ω qui vérifient $|\omega| \leq 2\pi/T_2 \leq \omega_{th}$. L'intégrale de la relation (5.22) donne alors le même résultat avec les densités spectrales quantique ou classique. Le déphasage adiabatique s'interprète donc très bien dans un cadre classique.

En considérant le protocole expérimental utilisé pour réaliser les mesures, on peut établir une distinction entre deux types de fluctuations basse fréquence.

Si les fluctuations sont lentes devant la durée d'une expérience élémentaire, alors le paramètre de polarisation est constant durant une expérience élémentaire, mais varie aléatoirement d'une expérience à l'autre. Le déphasage provient d'un moyennage d'expériences réalisées dans des conditions légèrement différentes. Cette situation est l'analogue d'un bruit inhomogène en RMN; on peut s'en affranchir par des expériences de type écho de spin.

Par contre, si les fluctuations sont rapides devant la durée d'une expérience élémentaire, le déphasage intervient durant chaque expérience élémentaire.

Cette distinction est identique à celle que nous avons faite en étudiant les effets du bruit sur les mesures d'échappement (chapitre 3). Notons toutefois que la formule (5.22) prend tous les effets en compte. La dépendance temporelle précise de l'amortissement $f_\varphi(t)$ dépend du contenu fréquentiel du bruit. Dans le cas limite d'un bruit blanc à basse fréquence, on retrouve la décroissance exponentielle prédite par la théorie de Bloch-Redfield, avec le même taux Γ_φ que celui de la relation (5.13).

5.1.4 Généralisation : couplage à plusieurs bains indépendants

Considérons tout d'abord plusieurs sources de fluctuations sur le même paramètre de polarisation X , chacune étant caractérisée par sa densité spectrale. Si ces sources sont indépendantes, les fluctuations qu'elles émettent s'ajoutent de manière incohérente et la densité spectrale totale des fluctuations de X est la somme des densités spectrales de chacune des sources. Sous réserve d'utiliser cette densité spectrale totale, les résultats des paragraphes précédents sont toujours valables. En pratique, nous verrons dans la partie suivante que les fluctuations de courant sont principalement générées par une source de bruit dominante. Il en va de même pour les fluctuations de flux.

La prise en compte simultanée de fluctuations de courant et de flux indépendantes ne pose pas de problème. Supposer l'indépendance revient à dire qu'un même processus physique ne génère pas en même temps un bruit significatif en courant et en flux. Le taux de dépolarisation total Γ_1 s'écrit [84] :

$$\Gamma_1 = \sum_{X=I,\Phi} \Gamma_{1,X}, \quad (5.24)$$

où $\Gamma_{1,X}$ est le taux de dépolarisation due aux fluctuations du paramètre X , donné par les expressions (5.7), (5.8) et (5.9). L'amortissement total $f_\varphi(t)$ des cohérences lié au déphasage adiabatique vérifie :

$$f_\varphi(t) = \prod_{X=I,\Phi} f_{\varphi,X}(t), \quad (5.25)$$

$f_{\varphi,X}(t)$ est l'amortissement des cohérences dû aux fluctuations du paramètre X . Dans le cas d'un couplage linéaire à des fluctuations gaussiennes, $f_{\varphi,X}(t)$ est donné par l'expression (5.22).

5.1.5 Bruit et spectroscopie à basse puissance

Jusqu'à présent, nous avons considéré l'évolution libre du SQUID sous l'action du bruit. On ajoute maintenant une excitation micro-onde d'amplitude réduite Ω_1 à la pulsation ω . La dynamique du système est alors régie par l'hamiltonien :

$$\widehat{H} = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0\widehat{\sigma}_z - \hbar\Omega_1 \cos(\omega t)\widehat{\sigma}_x - \frac{\hbar}{2}(x_X\widehat{\sigma}_x + y_X\widehat{\sigma}_y + z_X\widehat{\sigma}_z)\widehat{\delta X} + \widehat{H}_X. \quad (5.26)$$

Nous nous plaçons en régime permanent, lorsque les mécanismes incohérents ont équilibré le pompage par les micro-ondes. Les populations des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont alors stationnaires et ne dépendent que des caractéristiques de l'excitation (ω, Ω_1) . En pratique, nous mesurons la population $p_1(\omega, \Omega_1)$. Cette quantité nous renseigne directement sur l'énergie absorbée par le SQUID. Lorsque l'on mesure $p_1(\omega, \Omega_1)$ en balayant la pulsation ω , on obtient une courbe de résonance centrée au voisinage de ω_{01} . Dans le cas d'une excitation de faible amplitude, la théorie de la réponse linéaire donne :

$$p_1(\omega, \Omega_1) \propto \Omega_1^2 \times f(\omega). \quad (5.27)$$

Le facteur de forme de la raie $f(\omega)$ est indépendant de l'amplitude d'excitation et s'écrit comme la transformée de Fourier de la fonction caractérisant le déphasage du système en régime libre (sans MO) [82] :

$$f(\omega) = \int_0^\infty f_{coh}(t) \cos(\omega t) dt. \quad (5.28)$$

La réponse du système est linéaire loin de la saturation de la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$. Cette condition est vérifiable expérimentalement : elle correspond à la situation où la largeur à mi-hauteur des raies de résonance est indépendante de l'amplitude d'excitation. Nous utiliserons ce résultat pour l'analyse des données de spectroscopie présentées dans la dernière partie du chapitre.

5.2 Les sources de décohérence

Nous passons ici en revue les différentes sources de décohérence en les divisant en deux catégories suivant qu'elles induisent un bruit sur le courant de polarisation ou le flux. En raison de l'important effort de filtrage et de blindage réalisé sur le dispositif expérimental, les sources de perturbations dominantes sont situées dans l'environnement proche du SQUID.

5.2.1 Bruit sur le courant de polarisation

a) Impédances proches du SQUID

Modélisation de l'environnement électrique. Une première source de fluctuations est la circuiterie proche du SQUID. La partie résistive des impédances génère des fluctuations de courant qui traversent le SQUID. Les impédances sont montées sur l'étage de filtrage à basse température, thermalisé à $T = 30$ mK. Le modèle électrique associé est présenté sur la figure 5.3. Il comporte des composants montés en surface (indice "cms"), fiables jusqu'à des fréquences de l'ordre du gigahertz, et surtout une inductance on-chip (L_{oc}) et une capacité plane (C_p) qui sont fiables jusqu'à une quinzaine de gigahertz au moins. L'inductance est lithographiée en même temps que le SQUID, ses caractéristiques ont été étudiées au chapitre 2. Nous négligerons ici les effets propagatifs. La capacité plane,

qui comporte deux armatures résistives en or, a été réalisée au laboratoire. La résistance des armatures est schématisée par les deux résistances notées $R_p(\omega)$. La résistance série $2R_p(0)$ a été mesurée en dc à froid : $2R_p(0) = 0.1 \Omega$. En raison de l'effet de peau, cette valeur augmente à haute fréquence. Les caractéristiques des composants sont résumées dans le tableau 5.2.

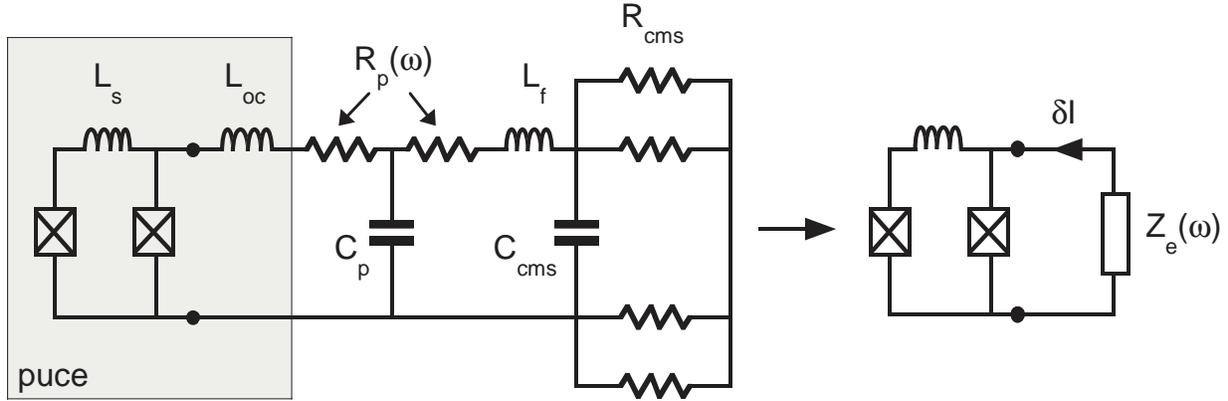


FIG. 5.3 – Environnement électrique proche du SQUID. Le schéma est valable pour des fréquences supérieures à 2 MHz.

L_{oc}	C_p	$2R_p(0)$	L_f	C_{cms}	R_{cms}
9 nH	≈ 150 pF	0.1Ω	3 nH	2 nF	500Ω

TAB. 5.2 – Valeurs des composants de l'environnement électrique du SQUID.

Précisons que le modèle électrique de la figure 5.3 est correct au delà de 2 MHz. L'impédance des 2 mètres de thermocoax vaut environ 100Ω à 2.5 MHz, 50Ω à 5 MHz pour tendre à plus haute fréquence vers 20Ω . On peut ainsi considérer que les lignes sont court-circuitées à la masse après les résistances de 500Ω . Cette description n'est plus valable aux basses fréquences pour lesquelles l'environnement électrique à prendre en compte est plus étendu. Toutefois, les mesures du chapitre 3 montrent qu'il n'y a pas de contribution significative du bruit en courant à basse fréquence. Nous nous contentons ainsi de la description approximative de la figure 5.3, en la supposant valable à toute fréquence. L'impédance $Z_e(\omega)$ vaut alors :

$$Z_e(\omega) = jL_{oc}\omega + R_p(\omega) + \left[jC_p\omega + \frac{1}{R_p(\omega) + jL_f\omega + [jC_{cms}\omega + R_{cms}^{-1}]^{-1}} \right]^{-1}. \quad (5.29)$$

La densité spectrale quantique $S_I(\omega)$ des fluctuations de courant générées par $Z_e(\omega)$ se déduit du théorème de fluctuation-dissipation quantique [85] :

$$S_I^{Z_e}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{2\pi} \left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) + 1 \right] \text{Re}[1/Z_e(\omega)]. \quad (5.30)$$

Précisons la signification physique de ce résultat. L'impédance Z_e peut être décomposée en deux impédances en parallèle : une impédance purement imaginaire et une résistance effective $R_{eff}(\omega)$ (cf. annexe E) :

$$R_{eff}(\omega) = \frac{1}{\text{Re}[1/Z_e(\omega)]}. \quad (5.31)$$

C'est cet élément résistif qui est la source des fluctuations. La dépendance en fréquence de cette résistance, tracée sur la figure 5.4, présente deux résonances. La première, aux alentours de 30 MHz correspond à la résonance de C_{cms} avec l'inductance $L_{oc} + L_f$ et la seconde, située à 275 MHz fait principalement intervenir C_p et L_f .

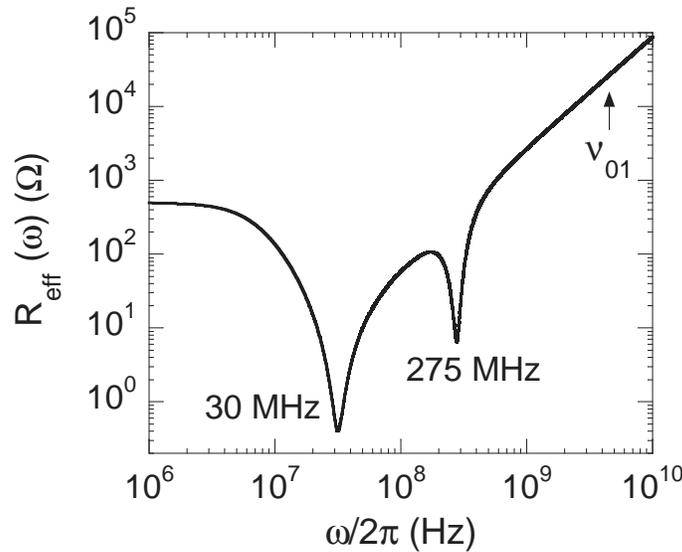


FIG. 5.4 – Variations de la résistance effective de l'environnement avec la fréquence. La courbe, tracée en double échelle logarithmique, a été calculée en utilisant les paramètres donnés ci-dessus. Les fluctuations de courant sont principalement générées par la résonance à 30 MHz.

Mesure des résonances de l'environnement. Une mesure des fréquences de résonance de l'environnement dans les domaines fréquentiels et temporels permet de valider ce modèle d'environnement. Nous présentons dans ce paragraphe des résultats obtenus avec le SQUID S_1 . Celui-ci avait un environnement similaire avec une inductance *on-chip* plus forte et une capacité de filtrage supraconductrice.

Pour réaliser la spectroscopie de l'environnement électrique, on polarise le SQUID près du courant critique, pour que $P_{ech} = 1\%$ à 10% . On applique ensuite un signal oscillant de fréquence ν sur la ligne MO. Ceci a deux effets qui sont représentés sur la figure 5.5. D'une part, on induit un flux oscillant à travers la boucle du SQUID par l'intermédiaire de la mutuelle M_s . Les fréquences ν que nous avons utilisées sont très loin de la fréquence

plasma du SQUID. L'effet de ce flux oscillant est d'induire un léger excès d'échappement, pratiquement indépendant de la fréquence d'excitation. D'autre part, si la mutuelle M_e avec le circuit de polarisation est suffisante, le signal MO induit un sur-courant oscillant à la fréquence ν dans les lignes de polarisation du SQUID. Lorsque ν est voisin des résonances de l'environnement, ce sur-courant dépend fortement de la fréquence d'excitation. Il est maximal quand le module de l'impédance de l'environnement est minimal. La résonance du sur-courant provoque un excès d'échappement que nous détectons.

La figure 5.6 présente les deux résonances observées dans l'environnement de S_1 , situées à 22.6 MHz et 336 MHz. Elles sont pratiquement indépendantes du point de polarisation du SQUID, preuve qu'elles font principalement intervenir les impédances de l'environnement. Les fréquences de résonance sont conformes aux prédictions. Elles correspondent aux résonances prédites pour S_2 , le décalage se justifiant par des composants légèrement différents.

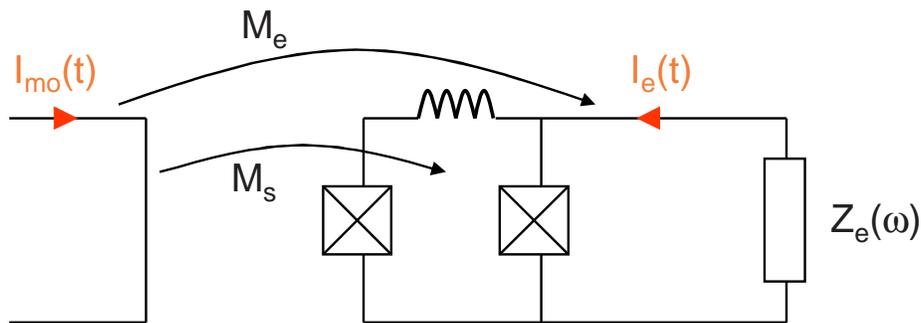


FIG. 5.5 – Excitation de l'environnement grâce à la ligne MO.

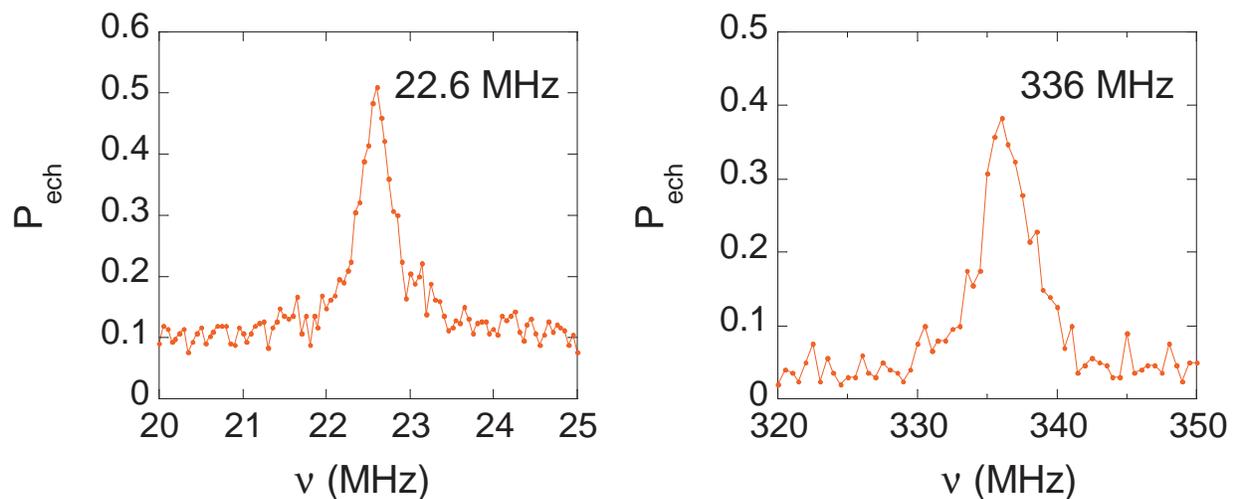


FIG. 5.6 – Résonances de l'environnement du SQUID S_1 excitées par une impulsion de flux oscillant à la fréquence ν .

Il est également possible d'étudier la première résonance dans le domaine temporel. Le régime transitoire est excité avec une impulsion de flux carrée dont les temps de montée et de descente (1 ns) sont instantanés devant la période du mode à 22.6 MHz. Si la durée de l'impulsion est moitié de la période d'oscillation, l'efficacité de l'excitation est maximale. On mesure le sur-courant transitoire avec une impulsion de flux très rapide (3 ns) devant la période des oscillations. La figure 5.7 présente les résultats. On observe les premières oscillations qui confirment la valeur de la première fréquence de résonance.

Ces mesures donnent une assise expérimentale à notre modèle d'environnement. Elles n'étaient pas possibles avec S_2 pour deux raisons. D'une part, le couplage (parasite) par mutuelle entre la ligne MO et l'environnement a été considérablement réduit par rapport à S_1 . D'autre part, l'introduction d'une résistance parasite liée à la capacité en or réduit le facteur de qualité de l'environnement, ce qui rend les résonances plus difficilement détectables.

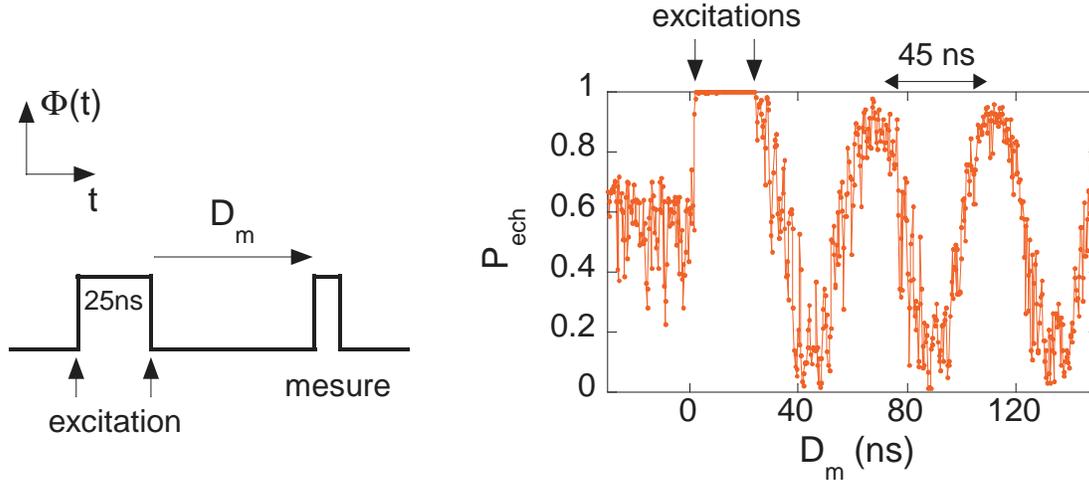


FIG. 5.7 – Excitation et mesure des sur-courants transitoires de l'environnement de S_1 . L'oscillation de P_{ech} est calquée sur l'oscillation du courant transitoire dans l'environnement.

Dépolarisation, bruit haute fréquence. À basse température, le taux d'excitation est négligeable. Le taux de relaxation Γ_R est fourni par la relation (5.8) dans laquelle on injecte (5.29) et (5.30). A haute fréquence (au delà du gigahertz), l'environnement électrique, décrit sur la figure 5.8, est très simple. Il se réduit à l'association en série de L_{oc} et de $R_p(\omega)$, la capacité C_p étant un court-circuit. On obtient alors :

$$\Gamma_R = \frac{f_I(\theta)^2}{2C_0 R_{eff}(\omega_{01})}, \quad (5.32)$$

avec $R_{eff}(\omega_{01}) = (L_{oc}\omega_{01})^2/R_p(\omega_{01})$. Mis à part le facteur $f_I(\theta)^2$, voisin de l'unité, la formule (5.32) est identique au résultat d'un calcul élémentaire assimilant le SQUID à un circuit LC

parallèle résonant à la pulsation ω_{01} et connecté en parallèle à une résistance $R_{eff}(\omega_{01})$. Le calcul souligne également le rôle crucial de l'inductance *on-chip* dans le filtrage des fluctuations hautes fréquences. La valeur de $R_p(\omega_{01})$ est estimée à quelques Ohms pour les fréquences considérées (de 7 à 12 GHz), ce qui conduit à des temps de relaxation de l'ordre de 50 ns. Une valeur plus précise sera donnée lors de l'analyse des résultats expérimentaux.

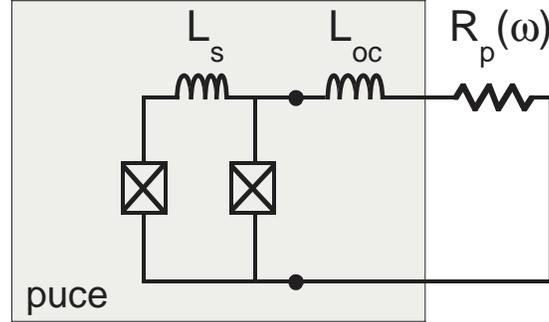


FIG. 5.8 – Environnement électrique du SQUID à haute fréquence (autour de ν_{01}).

Déphasage adiabatique, bruit basse fréquence. Le déphasage adiabatique est lié à la partie basse fréquence du spectre des fluctuations de courant. Pour fixer un ordre de grandeur, nous donnons la valeur RMS $\langle \delta I_{Ze}^2 \rangle^{1/2}$ des fluctuations de courant intégrées de 0 à ω_c la fréquence de coupure du montage, égale à $2\pi \times 500$ MHz :

$$\langle \delta I_{Ze}^2 \rangle = \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} d\omega S_I^{Ze}(\omega). \quad (5.33)$$

On trouve $\sqrt{\langle \delta I_{Ze}^2 \rangle} = 6$ nA. Notons qu'avec une très bonne approximation⁽¹⁾ :

$$\langle \delta I_{Ze}^2 \rangle \approx \frac{k_B T}{L_{oc}}. \quad (5.34)$$

Ainsi, l'inductance *on-chip* joue également un rôle primordial dans le filtrage des fluctuations basse fréquence, responsables du déphasage adiabatique. Toutefois, la structure du spectre du bruit dépend des valeurs des autres impédances. Elle présente deux résonances correspondant aux résonances de $R_{eff}(\omega)$. En fait, la résonance à 30 MHz est responsable de la quasi-totalité des fluctuations de courant à basse fréquence (5 nA de fluctuations RMS pour une intégration entre 20 MHz et 40 MHz).

⁽¹⁾Ce résultat a été démontré par F. Balestro pour un environnement RLC [49]. Nous avons vérifié numériquement que pour l'environnement plus complexe présenté ici, il demeurerait valable sur une large plage de variation des paramètres du circuit.

b) Fluctuateurs de charge

Des expériences réalisées sur des transistors à un électron montrent que les jonctions tunnel produisent un bruit de charge en $1/f$ [86, 87]. La densité spectrale associée $S_q^{BCN}(\omega)$, mesurée pour des fréquences inférieures à 100 kHz, est donnée par :

$$S_q^{BCN}(\omega) = \frac{S_q^*}{|\omega|}. \quad (5.35)$$

S_q^* vaut typiquement $10^{-6} e^2$ pour une jonction de $0.01 \mu\text{m}^2$. La densité spectrale de ce bruit varie comme la surface de la jonction, car la taille des jonctions est plus grande que la distance typique des fluctuations de charges, de l'ordre de quelques Angströms. Ainsi les fluctuations s'ajoutent de manière incohérente quand on augmente la taille de la jonction. On en déduit pour les jonctions du SQUID ($15 \mu\text{m}^2$) : $S_q^* = 1.5 \times 10^{-3} e^2$. En suivant le raisonnement de la référence [78], ces fluctuations de charge induisent un bruit en courant dont la densité spectrale s'écrit :

$$S_I^{BCN}(\omega) = |\omega| \times S_q^*. \quad (5.36)$$

Intégrées de 0 à 500 MHz, les fluctuations du courant dues aux fluctuateurs de charge ont une valeur RMS de l'ordre de quelques centièmes de nA. La caractérisation à haute fréquence de ce type de bruit reste un problème ouvert. Nous donnons un ordre de grandeur très grossier du taux de relaxation en extrapolant la densité spectrale (5.36) jusqu'au domaine de la dizaine de gigahertz. La relation (5.8) donne alors $\Gamma_R^{-1} \approx 1 \mu\text{s}$.

La conclusion de cette analyse est que le bruit sur I_p est largement dominé par le bruit de Johnson-Nyquist produit par les impédances proches du SQUID, aussi bien à haute qu'à basse fréquence.

5.2.2 Bruit sur le flux de polarisation

a) Couplage inductif à la ligne 50 Ω

La ligne MO est représentée sur la figure 5.9. Elle est atténuée deux fois à basse température : -20 dB à 1.5 K, puis à nouveau -20 dB à 30 mK. Les atténuateurs sont adaptés 50 Ω . On distingue ainsi trois sources de fluctuations sur la ligne micro-onde. Ce sont des résistances de $R = 50 \Omega$ thermalisées à 300 K, 1.5 K et 25 mK. Ces résistances génèrent des fluctuations de courant $\widehat{\delta I}_{mo}$ en bout de ligne MO. Elles se couplent inductivement au SQUID par mutuelle et induisent des fluctuations de flux $\widehat{\delta \Phi}_{mo}$:

$$\widehat{\delta \Phi}_{mo} = M_s \times \widehat{\delta I}_{mo}. \quad (5.37)$$

La mutuelle M_s a été mesurée (chap. 6) à 1.3 pH. L'extrémité de la ligne n'est pas un pur court-circuit et présente une inductance $L_{mo} = 2 \text{ nH}$. Elle provient de deux contributions équivalentes : les fils de soudure et l'inductance de l'antenne *on-chip*. Nous allons étudier

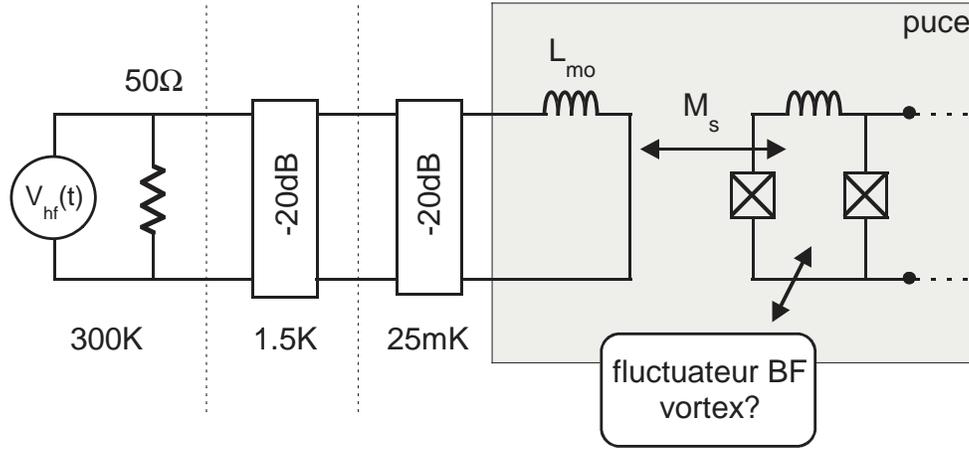


FIG. 5.9 – Environnement du SQUID couplé par le canal de flux.

séparément chacune des sources de fluctuations et détailler leur impact en terme de relaxation et de bruit généré.

Nous commençons par la source de bruit à 30 mK. L'impédance Z_{mo} vue depuis l'extrémité de l'antenne MO vaut dans ce cas $Z_{mo}(\omega) = R + jL_{mo}\omega$. La densité spectrale $S_{I_{mo}}(\omega)$ des fluctuations $\hat{\delta I}_{mo}$ se déduit de (5.30). En utilisant la relation :

$$S_{\Phi}^{mo}(\omega) = M_s^2 \times S_{I_{mo}}(\omega), \quad (5.38)$$

on obtient la densité spectrale $S_{\Phi}^{mo}(\omega)$ des fluctuations de flux :

$$S_{\Phi}^{mo}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{2\pi} \left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) + 1 \right] \frac{M_s^2}{R[1 + (\omega/\omega_c)^2]}. \quad (5.39)$$

La pulsation de coupure $\omega_c = R/L_{mo}$ est liée à l'inductance qui, à haute fréquence, transforme l'extrémité de la ligne en circuit ouvert. Vu les paramètres de la ligne, la fréquence de coupure vaut $\omega_c/2\pi = 4$ GHz.

Comme précédemment, le processus d'excitation est négligeable et le taux de relaxation se déduit de la relation (5.8) :

$$\Gamma_R = 2f_{\Phi}(\theta)^2 \left(\frac{M_s}{L_s}\right)^2 \frac{1}{RC_0[1 + (\omega_{01}/\omega_c)^2]}. \quad (5.40)$$

Nous avons également évalué les fluctuations RMS du flux, notées $\sqrt{\langle \delta\Phi_{mo}^2 \rangle}$. Elles ont été intégrées de 0 à ω_c :

$$\langle \delta\Phi_{mo}^2 \rangle = \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} d\omega S_{\Phi}^{mo}(\omega), \quad (5.41)$$

ce qui donne $\sqrt{\langle \delta\Phi_{mo}^2 \rangle} = 5.1 \times 10^{-6} \Phi_0$. Le calcul est répété pour les autres sources : il suffit de prendre en compte les atténuations de 1/10 et 1/100 pour le bruit provenant

des résistances à 1.5 K et 300 K. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 5.3. Pour résumer, le processus d'excitation est négligeable. La relaxation est dominée par la partie froide (30 mK) de la ligne, avec le temps caractéristique $1/\Gamma_R = 32 \mu\text{s}$. Chacune des parties de la ligne contribue de manière équivalente au bruit de flux avec des valeurs RMS typiques de quelques $10^{-6} \Phi_0$.

Température de la source	T	30 mK	1.5 K	300 K
Fréquence thermique	ν_{th}	520 MHz	30 GHz	6.25 THz
Origine des fluctuations		point zéro	thermique	thermique
Temps de relaxation ^(*)	Γ_R^{-1}	32 μs	1 ms	450 μs
Temps d'excitation ^(*)	Γ_E^{-1}	≈ 0	1 ms	450 μs
Fluctuations de flux	$\sqrt{\langle \delta\Phi_{mo}^2 \rangle}$	$5.1 \times 10^{-6} \Phi_0$ [0, 4 GHz]	$3.9 \times 10^{-6} \Phi_0$ [0, 4 GHz]	$5.5 \times 10^{-6} \Phi_0$ [0, 4 GHz]

TAB. 5.3 – Décohérence due à la ligne MO. ^(*) Les taux de relaxation et d'excitation ont été évalués pour une fréquence typique $\nu_{01} = 9 \text{ GHz}$, dans le cas le plus défavorable où le couplage au bruit de flux est maximal (pour le SQUID S_2 : $f_\Phi(\theta) = 0.4$).

b) Fluctuateurs de flux

Il est clair que la ligne MO n'est pas responsable du bruit de flux mis en évidence par les mesures d'échappement du fondamental. Les fluctuations RMS de flux intégrées de 0.1 Hz à 20 kHz valent $\langle \delta\Phi_{bf}^2 \rangle^{1/2} = 5.5 \times 10^{-4} \Phi_0$ pour le SQUID S_2 . L'origine possible de ce bruit a déjà été discutée au chapitre 3. Dans la suite, une éventuelle contribution au delà de 20 kHz sera négligée, comme les processus de relaxation associés.

La conclusion de l'étude menée dans cette partie est la suivante. La relaxation est dominée par les pertes liées à la résistance parasite de la capacité de filtrage en or. En ce qui concerne les fluctuations à basse fréquence qui sont impliquées dans le déphasage adiabatique, nous retenons deux sources. D'une part, les impédances proches du SQUID génèrent un bruit sur I_p . D'autre part, le bruit de flux est dominé par la source non déterminée mise en évidence par les mesures d'échappement du fondamental. Les résultats expérimentaux de la partie suivante seront interprétés en utilisant ce modèle pour l'environnement.

5.3 Décohérence : résultats expérimentaux

Cette partie présente les résultats expérimentaux et leur interprétation à l'aide des théories développées dans le début du chapitre. Le premier paragraphe détaille les mesures de temps de relaxation. Le second décrit les courbes de résonance obtenues en spectroscopie à basse puissance, en se focalisant sur la largeur de raie.

5.3.1 Relaxation de l'état $|1\rangle$

Une fois le point de polarisation choisi, la première étape est une mesure de spectroscopie basse puissance qui excite sélectivement la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$. En se basant sur la calibration fournie par les oscillations cohérentes décrites au chapitre 4, on trouve que l'amplitude réduite $\Omega_1/2\pi$ des MO utilisées dans cette partie est toujours inférieure à 5 MHz. On travaille ainsi dans un régime de forte anharmonicité, pour lequel $\Omega_1 \ll \omega_{01} - \omega_{12}$. En outre, pour ces amplitudes d'excitation, la population de $|1\rangle$ est de quelques pour cents, une éventuelle contamination du niveau $|2\rangle$ est alors un effet du deuxième ordre, inférieur au pour mille. On déduit de la spectroscopie la fréquence d'excitation ν_{01} qui peuple le plus efficacement l'état $|1\rangle$.

La mesure du temps de relaxation s'effectue dans le domaine temporel. La séquence de mesure est schématiquement représentée dans l'insert de la figure 5.10. Elle comporte une impulsion MO accordée sur ν_{01} , suffisamment longue pour atteindre le régime permanent. Cette impulsion peuple faiblement et sélectivement l'état $|1\rangle$. Elle est suivie de l'impulsion de mesure avec un délai D_m variable. On mesure ainsi la relaxation de la population de l'état $|1\rangle$ vers sa valeur d'équilibre durant la durée D_m . La figure 5.10 présente un résultat typique, obtenu au point de fonctionnement $I_p = 1.815 \mu A$, $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$ pour lequel $\nu_{01} = 10.582$ GHz. La relaxation de P_{ech} a été ajustée par une décroissance exponentielle du type $P_{ech} = A(1 - \exp(-\Gamma_1 D_m)) + P_{ech}^{(0)}$, où A et Γ_1 sont des paramètres libres. On extrait ainsi $T_1 = 1/\Gamma_1 = 98$ ns pour ce point de polarisation. Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, la dépolarisation est due à l'environnement électrique proche du SQUID. Vu sa température, l'excitation est négligeable et $\Gamma_1 = \Gamma_R$.

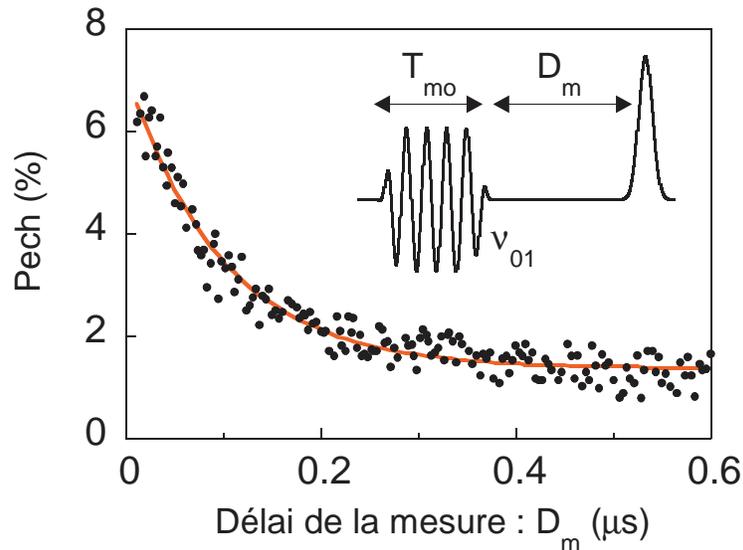


FIG. 5.10 – *Mesure de relaxation des populations au point $I_p = 1.815 \mu A$, $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$. La ligne pleine est un ajustement par une loi exponentielle de la forme $\exp(-\Gamma_1 D_m)$. On extrait ici $T_1 = 1/\Gamma_1 = 98$ ns.*

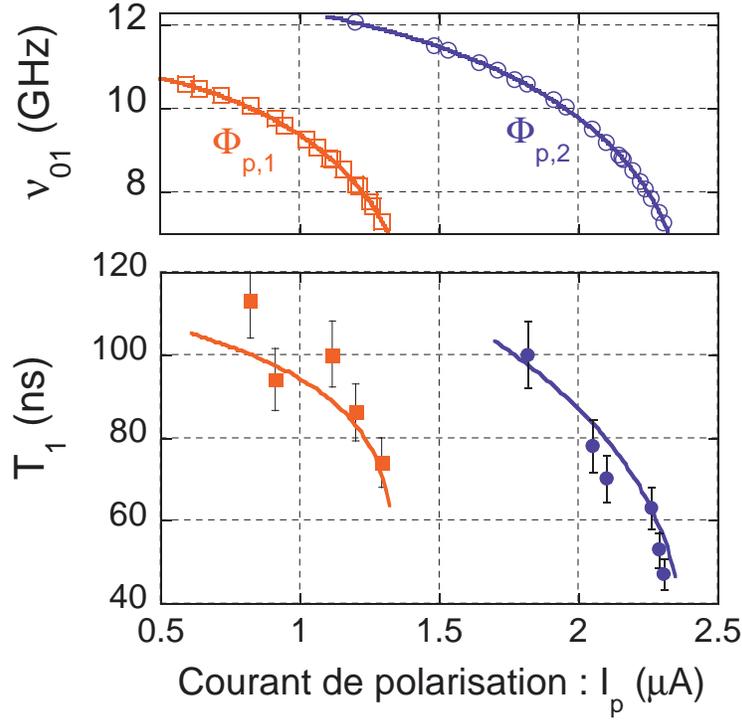


FIG. 5.11 – *Panneau du bas* : dépendance du temps de relaxation avec le point de fonctionnement. Les courbes pleines correspondent à l’ajustement avec théorie, avec des paramètres identiques. Le panneau du haut rappelle les fréquences de résonances ν_{01} , déjà présentées au chapitre 4.

Nous avons répété des mesures de relaxation pour plusieurs points de fonctionnement qui se répartissent en fonction des deux flux appliqués : $\Phi_{p,1} = -0.368 \Phi_0$ et $\Phi_{p,2} = -0.117 \Phi_0$. Les résultats sont présentés sur la figure 5.11. Le panneau supérieur rappelle le comportement de ν_{01} . Le panneau inférieur présente l’évolution du T_1 avec le courant de polarisation. Loin du courant critique, T_1 est de l’ordre de la centaine de nanosecondes. Il va en diminuant lorsque I_p se rapproche de I_c . Pour interpréter ces données, on utilise la formule (5.32). Les paramètres du SQUID sont connus par les mesures d’échappement et de spectroscopie. Connaissant le point de fonctionnement on calcule alors $f_I(\theta)$ (toujours voisin de l’unité). La mesure de L_{oc} a été présentée au chapitre 2. Le seul paramètre libre est donc $R_p(\omega)$. On modélise grossièrement l’effet de peau en supposant une dépendance du type :

$$R_p(\omega) = \alpha\sqrt{\omega}. \quad (5.42)$$

Les courbes correspondant aux deux flux sont ajustées avec le même paramètre α qui correspond à $R_p(9\text{GHz}) = 4.2\Omega$, une valeur tout à fait compatible avec l’effet de peau⁽²⁾. De plus, nous sommes maintenant en mesure d’expliquer la diminution du temps de relaxation

⁽²⁾Nous avons réalisé une estimation en considérant la longueur de pénétration à 9 GHz dans l’or, égale à 800 nm et en prenant en compte la géométrie de la capacité.

lorsque l'on s'approche du courant critique. Elle est principalement due à une diminution de la fréquence de résonance du système. Celle-ci induit une diminution de la résistance effective $R_{eff}(\omega) \propto \omega^{3/2}$ vue par le SQUID, ce qui augmente les pertes.

5.3.2 Étude spectroscopique à basse puissance

Basse puissance sous-entend ici une double condition. Comme précédemment, l'excitation doit être sélective sur la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$, ce qui impose $\Omega_1 \ll \omega_{01} - \omega_{12}$. On se place de plus dans le régime linéaire, loin de la saturation de la transition. On vérifie alors expérimentalement que la largeur totale à mi-hauteur $\Delta\nu$ des courbes de résonance est indépendante de l'amplitude d'excitation.

Deux exemples de courbes de résonance, mesurées pour deux points de fonctionnement notés (a) et (b), sont portées sur la figure 5.12. Les caractéristiques du système pour ces deux points de fonctionnement sont listées dans le tableau 5.4. Les courbes de résonance ont une forme approximativement gaussienne. Le rapport signal sur bruit, nécessairement faible pour ces mesures à basse puissance, nous empêche de discuter plus finement ce problème. Dans toute la suite, nous focalisons l'étude sur la largeur à mi-hauteur. L'évolution de $\Delta\nu$, lorsque le courant de polarisation varie, a été mesurée sous les flux $\Phi_{p,1}$ et $\Phi_{p,2}$ (cf. paragraphe précédent). Elle est présentée sur la figure 5.13. Pour chacun des flux, on constate que la largeur $\Delta\nu$ explose lorsque I_p se rapproche de I_c : de 20 MHz à 30 MHz loin de I_c , elle atteint plusieurs centaines de MHz près de I_c .

Interprétation des données. L'interprétation des données de spectroscopie fait intervenir l'étude théorique menée dans les deux premières parties du chapitre, ainsi que les résultats expérimentaux sur la relaxation. Elle se déroule en deux temps :

1. On calcule $f_{coh}(t)$ la fonction d'amortissement des termes de cohérence en présence de bruit mais sans excitation MO.
2. Puis on utilise la théorie de la réponse linéaire (§5.1.5), qui stipule que la forme de raie théorique, notée $f(\omega)$, est la transformée de Fourier de $f_{coh}(t)$.

La fonction d'amortissement des termes de cohérence s'écrit :

$$f_{coh}(t) = f_{\varphi,I}(t)f_{\varphi,\Phi}(t) \exp(-\Gamma_1 t/2). \quad (5.43)$$

L'effet du déphasage adiabatique dû aux fluctuations de courant est donné par la formule (5.22) où la densité spectrale $S_I(\omega)$ est calculée à partir de (5.30) :

$$f_{\varphi,I}(t) = \exp \left[-\frac{t^2}{2} \left(\frac{\partial \omega_{01}}{\partial I_p} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{ S_I^{Ze}(\omega) \text{sinc}^2(\omega t/2) \right\} \right]. \quad (5.44)$$

$(\partial \omega_{01} / \partial I_p)$ s'obtient en dérivant l'ajustement des données de spectroscopie. $f_{\varphi,I}(t)$ est ainsi complètement caractérisée.

Nous considérons que le bruit de flux dominant est celui qui a été mis en évidence par les mesures d'échappement du fondamental. Nous exprimons $f_{\varphi,\Phi}(t)$ par :

$$f_{\varphi,\Phi}(t) = \exp \left[- \frac{t^2}{2} \left(\frac{\partial \omega_{01}}{\partial \Phi_p} \right)^2 \langle \delta \Phi_{bf}^2 \rangle \right], \quad (5.45)$$

où $\langle \delta \Phi_{bf}^2 \rangle = (5.5 \times 10^{-4} \Phi_0)^2$ est la moyenne quadratique mesurée au chapitre 3. Ceci est légitime à deux conditions. D'une part, les protocoles pour mesurer un point en spectroscopie et en échappement du fondamental sont pratiquement identiques (fréquence de répétition et statistique), ce qui assure que ces mesures sont sensibles au bruit à partir de la même fréquence de coupure en basse fréquence. D'autre part, nous négligeons toutes les fluctuations de flux au-delà de 20 kHz. Connaissant le point de fonctionnement, la dérivée $(\partial \omega_{01}/\partial \Phi_p)$ est calculée numériquement⁽³⁾.

Le dernier terme, dû aux processus inélastiques, est précisé par les mesures de relaxation du paragraphe précédent. Nous avons ainsi complètement caractérisé la décohérence dans le système et tous les paramètres sont fixés.

	Courbe (a)	Courbe (b)
Point de polarisation	$I_p = 2.288 \mu\text{A}$ $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$	$I_p = 0.946 \mu\text{A}$ $\Phi_p = -0.368 \Phi_0$
ν_{01}	7.526 GHz	9.578 GHz
$\partial \nu_{01}/\partial I_p$	12.9 MHz/nA	3.9 MHz/nA
$\partial \nu_{01}/\partial \Phi_p$	15.6 MHz/($10^{-3} \Phi_0$)	25.5 MHz/($10^{-3} \Phi_0$)
$2T_1$	≈ 100 ns	≈ 200 ns

TAB. 5.4 – *Caractéristiques du SQUID aux points de polarisation (a) et (b).*

La sensibilité du système au bruit longitudinal est donnée par les dérivées partielles $(\partial \omega_{01}/\partial I_p)$ et $(\partial \omega_{01}/\partial \Phi_p)$. Celles-ci dépendent énormément du point de polarisation. Nous allons étudier deux cas limites en nous reposant sur l'analyse de la décohérence pour les points de polarisation (a) et (b). Les données nécessaires sont rassemblées dans le tableau 5.4. Le calcul de $f_{coh}(t)$, et des amortissements $f_{\varphi,I}(t)$, $f_{\varphi,\Phi}(t)$ et $\exp(-\Gamma_1 t/2)$, sont présentés sur la figure 5.12 (page suivante). Première remarque, la décohérence par les processus inélastiques est négligeable. Deuxièmement, on peut constater que dans le cas (a), la décohérence est principalement causée par le bruit en courant, tandis que c'est le bruit de flux qui domine la décohérence dans le cas (b). Les oscillations de la fonction $f_{\varphi,I}(t)$ sont directement liées à la résonance de l'environnement à 30 MHz. Tant que le bruit de flux est suffisamment important, elles n'ont pas de répercussion significative sur l'allure de $f_{coh}(t)$. Les courbes du bas de la figure 5.12 sont les transformées de Fourier de $f_{coh}(t)$. Les formes

⁽³⁾Nous aurions pu l'évaluer expérimentalement en effectuant une mesure de spectroscopie pour un flux légèrement différent. Toutefois, la présence d'un léger hystérésis statique en flux (quelques $10^{-3} \Phi_0$) à chaque changement de flux nous a incité à la prudence. Vu l'excellent accord entre la théorie et les fréquences de résonances observées, le calcul donne une estimation fiable.

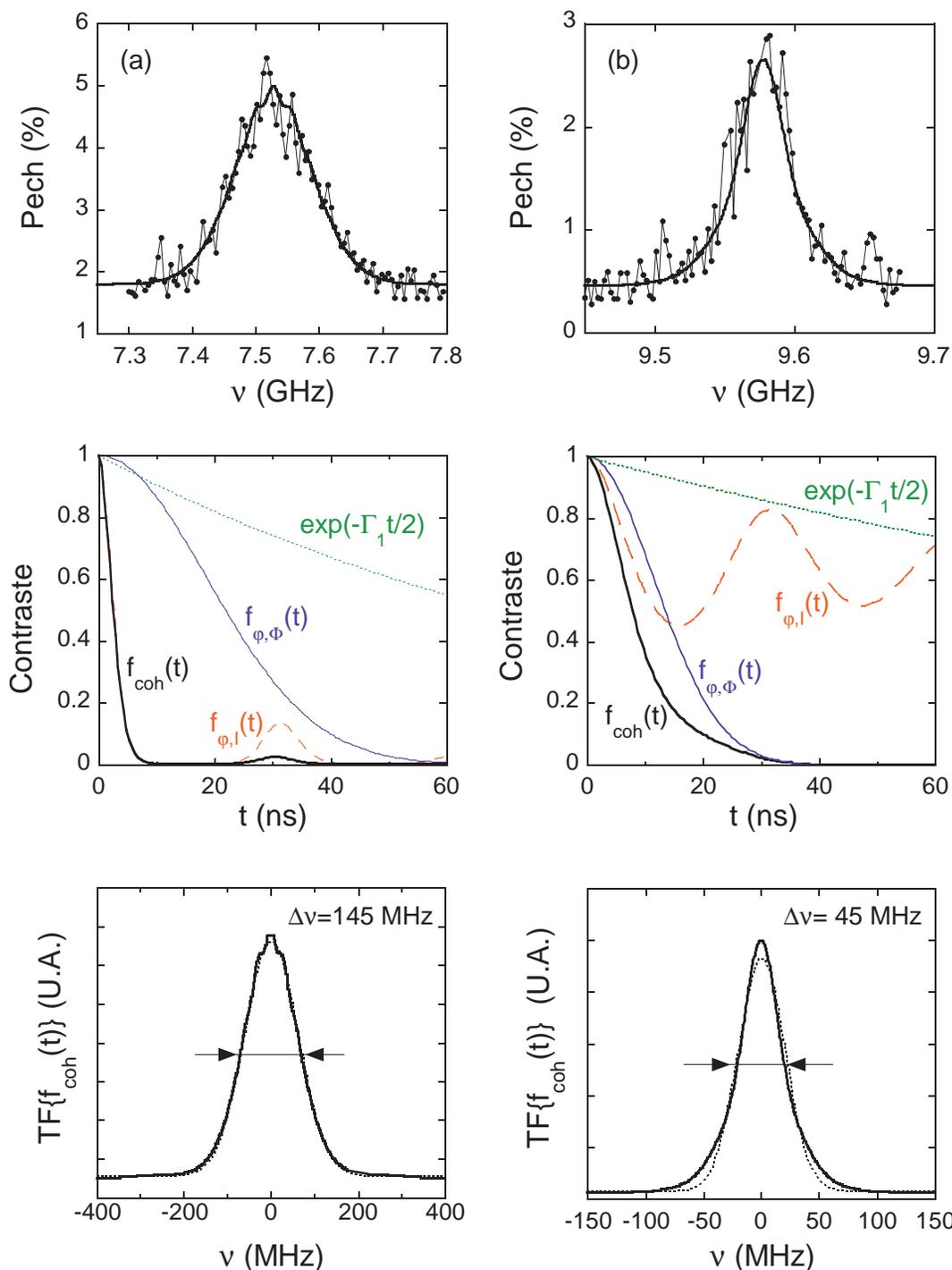


FIG. 5.12 – **En haut** : courbes de résonances expérimentales et ajustement théorique (ligne pleine) pour deux points de fonctionnement (a) et (b) (voir texte). **Au milieu** : amortissement de l'amplitude des cohérences $f_{\text{coh}}(t)$ et ses origines. **En bas** : forme de raie théorique obtenue par la transformée de Fourier de $f_{\text{coh}}(t)$. Les pointillés représentent un ajustement par une loi gaussienne.

de raie obtenues sont approximativement gaussiennes, comme le montrent les ajustements gaussiens représentés en pointillés. Les raies théoriques décrivent très bien les résonances observées, comme en témoigne l'ajustement des courbes expérimentales (panneau du haut).

Nous avons reproduit cette démarche pour l'ensemble des points de polarisation étudiés sur la figure 5.13, en extrayant pour chaque point la largeur à mi-hauteur $\Delta\nu$. La théorie reproduit très bien l'évolution de $\Delta\nu$ avec le courant de polarisation pour les deux flux considérés. La forte augmentation de $\Delta\nu$ au voisinage de I_c s'explique par un accroissement important de la sensibilité au bruit longitudinal, donnée par les dérivées $(\partial\nu_{01}/\partial I_p)$ et $(\partial\nu_{01}/\partial\Phi_p)$.

Il existe toutefois une petite gamme de points ($I_p < 2 \mu\text{A}$, $\Phi_p = \Phi_{p,2}$) pour lesquels notre description est insuffisante. Elle prévoit une forme de raie présentant une collection de pics satellites bien résolus séparés de 30 MHz. Une telle structure n'est pas observée expérimentalement. Ces points de polarisation étant caractérisés par un faible couplage linéaire aux bruits de flux et de courant, il est possible qu'il faille prendre en compte une correction par le couplage quadratique. Il est également possible que pour ces points, le circuit soit sensible à un bruit qui était jusqu'alors négligeable. Ces effets auraient pour conséquence un brouillage de la structure fine prédite par le calcul précédent.

5.3.3 Perspectives d'amélioration

La décohérence dans le SQUID polarisé en courant est donc globalement bien comprise. Ceci permet de dégager deux axes de travail pour améliorer les performances du système. Le premier : optimiser l'environnement du SQUID pour minimiser le bruit. Par exemple, il est sans doute possible d'augmenter encore l'inductance *on-chip* pour limiter les fluctuations de courant. Le bruit de flux pourrait être diminué en diminuant la surface de la boucle et en choisissant une autre géométrie pour les plots de contact. Toutefois, ces améliorations ne changeront pas dramatiquement les temps de cohérence observés. On peut espérer gagner ainsi un facteur deux ou trois, mais guère plus.

La deuxième solution consiste à choisir astucieusement le point de fonctionnement. En effet, si les dérivées $(\partial\nu_{01}/\partial I_p)$ et $(\partial\nu_{01}/\partial\Phi_p)$ sont nulles, le système est découplé du bruit longitudinal à l'ordre linéaire. C'est le concept de "point magique", introduit par l'équipe de Quantronique [19], également mis en oeuvre sur le Qubit de Delft [22]. Il explique les très bons temps de cohérence auxquels sont parvenues ces deux équipes.

Peut-on mettre en oeuvre une stratégie similaire pour le SQUID? Concernant le bruit de flux, on peut limiter fortement la sensibilité en rapprochant le flux de polarisation du flux correspondant au maximum de courant critique. Il est toutefois impossible d'utiliser directement ce point en conservant le mode de fonctionnement actuel. En effet, il correspond à une sensibilité nulle du système au flux, qui rend nos techniques d'excitation micro-onde et de mesure inopérantes. Dans le même ordre d'idée, en éloignant I_p du courant critique, on fait chuter fortement les sensibilités aux bruits en courant et en flux. Malheureusement, dans ce cas, l'anharmonicité du potentiel diminue, et il devient difficile d'exciter sélectivement une transition donnée (*cf* discussion du chapitre 4). Enfin, une solution que nous

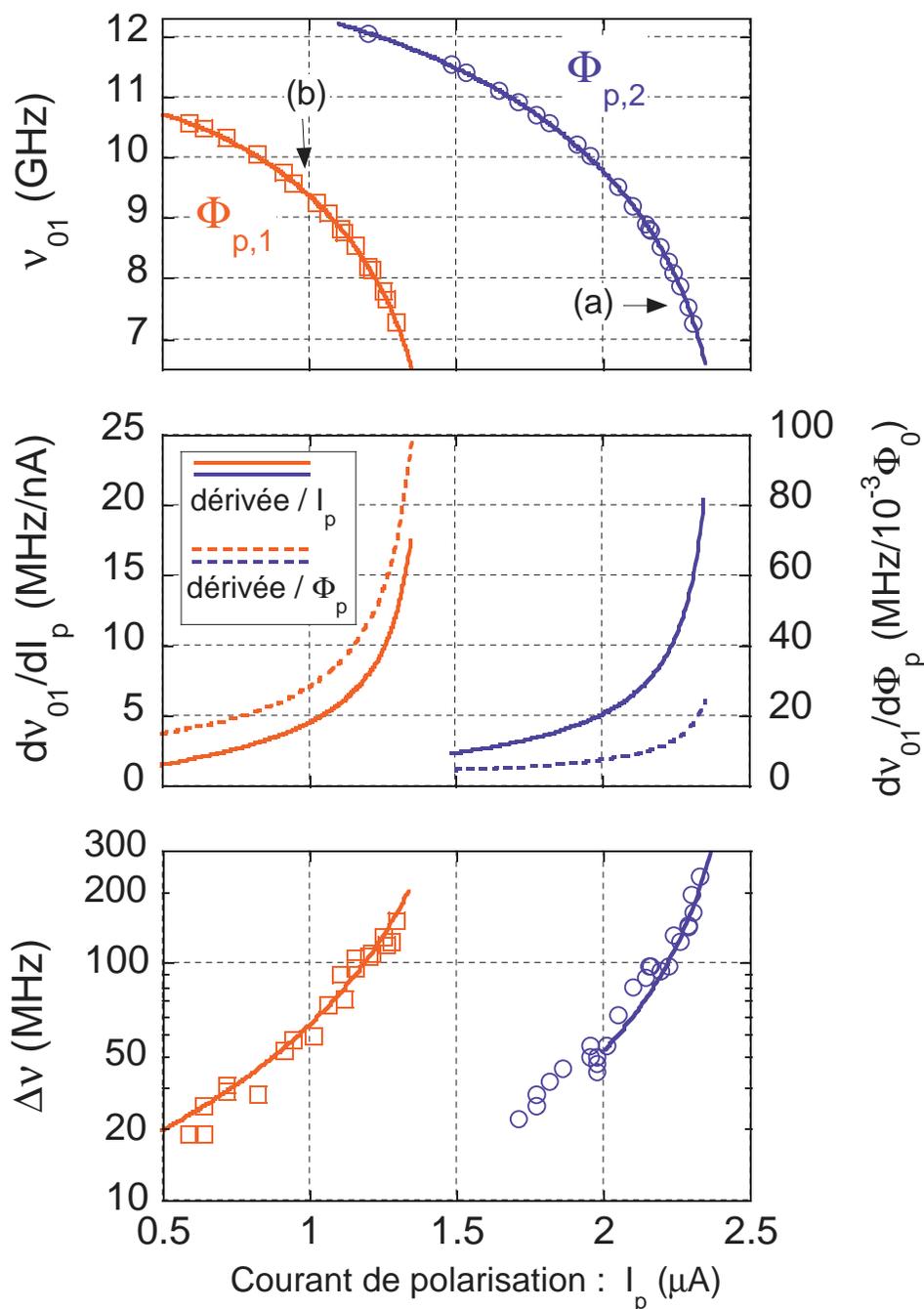


FIG. 5.13 – **En haut** : évolution de ν_{01} en fonction de I_p pour les flux $\Phi_{p,1}$ et $\Phi_{p,2}$ (voir texte). **Au milieu** : évolution des sensibilités au bruit longitudinal en courant (traits pleins) et en flux (pointillés). Les points correspondants à $\Phi_{p,2}$ sont peu sensibles au bruit de flux. **En bas** : mesure de la largeur de raie $\Delta\nu$ (points) et son interprétation théorique (ligne pleine), tracées en échelle semi-logarithmique. L'interprétation avec le modèle décrit dans le texte n'est plus valable pour les points de polarisation $I_p < 2 \mu\text{A}$, $\Phi_p = \Phi_{p,2}$ (interruption de la ligne pleine).

examinons actuellement consisterait à travailler à courant de polarisation nul. Dans ces conditions, $(\partial\nu_{01}/\partial I_p) = 0$. Toutefois, les caractéristiques du potentiel sont très différentes de celle rencontrées dans cette thèse : l'anharmonicité est par exemple dominée par des termes d'ordre 4. De plus, les techniques d'excitation et de mesure doivent être modifiées. Bref, il faut revoir de fond en comble la physique du circuit et les méthodes expérimentales ; une discussion plus détaillée sort du cadre de ce travail.

Chapitre 6

La mesure nanoseconde

La mesure de l'état du SQUID est un des points-clés de la réussite des expériences. D'une part, le contraste de détection entre les différents niveaux conditionne la visibilité des oscillations cohérentes ou des courbes de spectroscopie. D'autre part, le temps de mesure doit être rapide pour résoudre en temps des phénomènes qui s'amortissent rapidement. Sur ces deux points, la mesure par impulsion de flux dc mise en œuvre au cours de cette thèse présente de très bonnes qualités.

Les JJs constituent des détecteurs sensibles, souvent utilisés dans les expériences pour détecter l'état de Qubits supraconducteurs. Au passage, on peut souligner un des avantages du SQUID comme circuit quantique : le système quantique et le dispositif de mesure ne font qu'un. Le domaine est très actif et les innovations se suivent à un rythme soutenu. Globalement, on peut classer les mesures réalisées à base de JJ en deux familles : celles qui reposent sur un échappement vers l'état résistif et celles où la jonction reste constamment dans l'état supraconducteur. La mesure utilisée pour le SQUID appartient à la première catégorie et nous la discuterons dans les détails. Les mesures sans destruction de l'état supraconducteur n'ont été mises en œuvre que très récemment [44, 45]. Elles reposent sur la non-linéarité des oscillations de phase en fond de puits. Leur principal intérêt est d'éviter l'échauffement par effet Joules qui accompagne l'échappement, ce qui autoriserait des cadences de répétition beaucoup plus élevées.

Dans le cas d'un échappement par effet tunnel vers l'état résistif, le contraste de détection entre niveaux est lié à la dépendance exponentielle du temps de vie tunnel avec la hauteur de barrière. Pour ne pas perturber le système quantique durant sa manipulation, l'idée est de provoquer l'effet tunnel uniquement au moment de la mesure. Pour cela, deux approches, ont été développées. Elles sont résumées sur la figure 6.1 (page suivante). Par souci de simplicité, on se limite à la détection des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. La première méthode, développée par le groupe de J. Martinis [21], utilise une impulsion MO qui permet d'exciter sélectivement la transition $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$. Le système est polarisé près du courant critique, de sorte que le temps de vie tunnel de $|2\rangle$ est faible (alors que $|1\rangle$ est stable). La seconde repose sur une diminution adiabatique de la hauteur de barrière du potentiel. Nous avons été les premiers à implémenter cette technique avec des impulsions de flux très rapides (durée 2 ns, temps de montée 1.6 ns) [76], talonnés par le groupe de J. Martinis [31].

Nous abordons la caractérisation de la mesure dans le dernier chapitre de cette thèse car l'analyse précise fait appel à pratiquement tous les thèmes abordés au cours des chapitres précédents. La première partie est dédiée à la mesure de la métastabilité tunnel du fondamental grâce aux impulsions de flux nanosecondes. Une interprétation fine des résultats nécessite la prise en compte du bruit sur les paramètres de polarisation. La seconde partie est dédiée à la détection de l'état $|1\rangle$. Des mesures de spectroscopie permettent de donner une estimation de l'efficacité de cette détection. Nous passerons également en revue les phénomènes susceptibles de limiter le contraste de la mesure. Enfin, la dernière partie présente des résultats préliminaires pour la détection dans le régime multi-niveaux. Tous les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus avec le circuit S_2 . Ceci ne sera plus précisé par la suite.

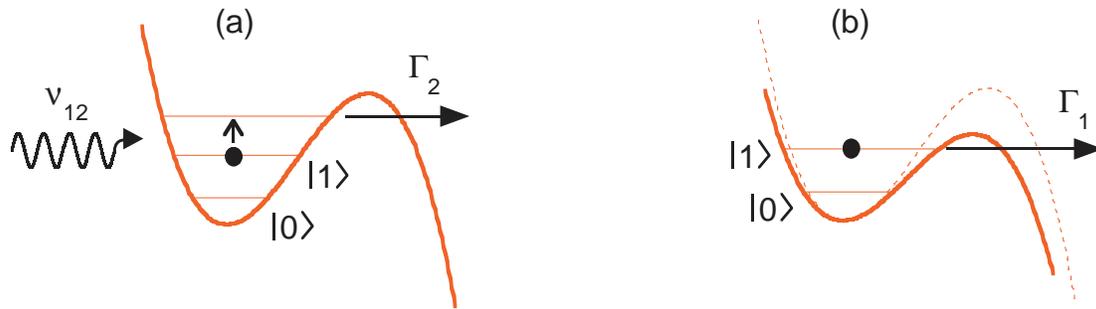


FIG. 6.1 – Principe des mesures par échappement vers l'état résistif. L'échappement sélectif de l'état $|1\rangle$ est obtenu par excitation résonante ou par réduction adiabatique de la barrière de potentiel.

6.1 Échappement du fondamental

6.1.1 Résultats expérimentaux

Les mesures présentées ici sont totalement similaires à celles du chapitre 3. Le principe est résumé sur la figure 6.2. Le flux magnétique de polarisation Φ_p est fixé. On applique sur le SQUID une impulsion de courant d'amplitude I_p , de durée $50 \mu\text{s}$. Au milieu de l'impulsion de courant, on applique une impulsion de flux dc caractérisée par sa durée $\Delta t < 50 \mu\text{s}$ et son amplitude en flux Φ_m . Si l'échappement dû à l'impulsion de courant seule est négligeable, tout se passe comme si on sondait le temps de vie du fondamental pendant la durée Δt , au point de fonctionnement $(I_p, \Phi_p + \Phi_m)$. Nous avons mesuré une série de courbes d'échappement. Pour chaque courbe, seul le courant de polarisation varie et tous les autres paramètres restent fixés.

Les résultats expérimentaux sont présentés sur la figure 6.3. Les mesures ont été réalisées sous le flux de polarisation $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$. Pour garantir l'adiabaticité, les temps de montée et de descente sont réglés à 1.6 ns. L'amplitude de l'impulsion de mesure en entrée de cryostat est fixée à $V_m = 190 \text{ mV}$. Les différentes courbes correspondent à différentes

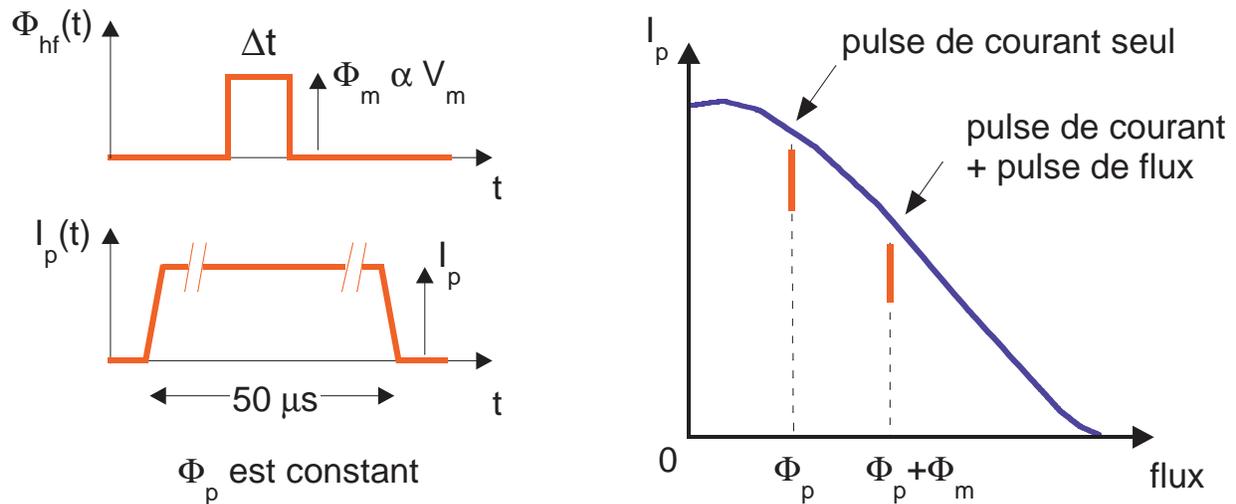


FIG. 6.2 – Principe des mesures d'échappement du fondamental par impulsions de flux adiabatiques. Pour une courbe donnée, l'amplitude Φ_m et la durée Δt de l'impulsion sont fixées. On approche la frontière critique en faisant varier le courant de polarisation.

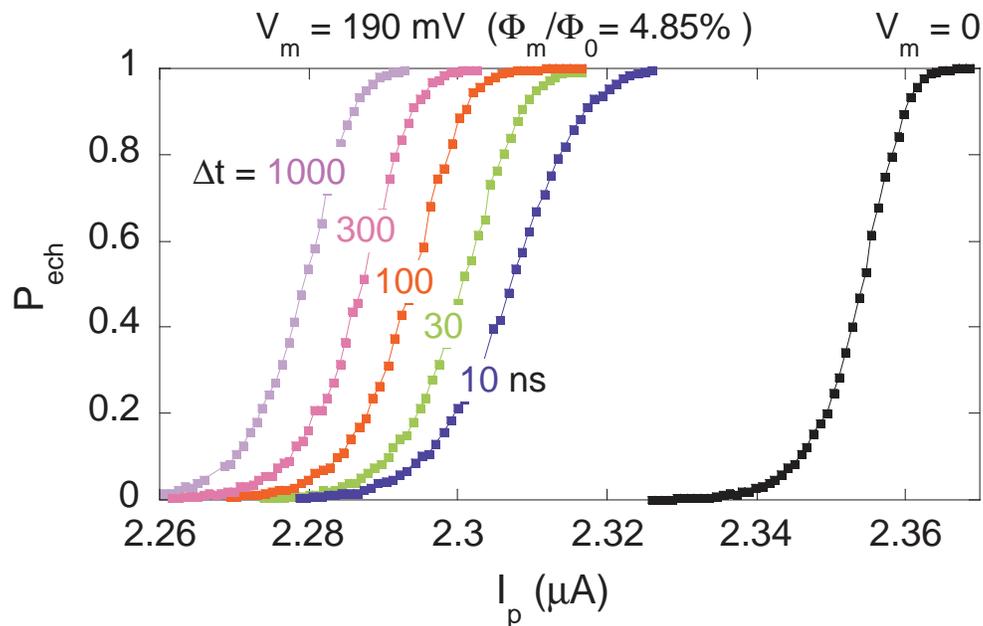


FIG. 6.3 – Courbes d'échappement obtenues pour des impulsions de mesure d'amplitude $V_m = 190 \text{ mV}$ constante et de durée Δt variable entre 10 ns et $1 \mu\text{s}$, pour un flux de polarisation $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$. La courbe noire (à droite) correspond à l'échappement dû à l'impulsion de courant seule.

durées de l'impulsion de flux qui varient sur deux ordres de grandeurs, de 10 ns à 1 μ s. Les durées des impulsions sont longues devant les temps de montée, l'impulsion peut donc être modélisée comme un créneau de flux de durée Δt bien définie.

La présence de l'impulsion de flux diminue nettement le courant d'échappement par rapport à la mesure témoin sans impulsion. Pour les courants mis en jeu dans les courbes d'échappement avec impulsion de flux, on vérifie que la probabilité d'échappement due à l'impulsion de courant seule est nulle (courbe témoin de la figure 6.3). L'échappement se produit uniquement durant l'impulsion de flux. Comme attendu, plus celle-ci est longue, plus l'échappement est probable, intervenant pour des courants de plus en plus faibles. Pour comparer ces mesures, réalisées avec des impulsions de durées différentes, nous avons extrait le taux d'échappement Γ_0 en supposant l'échappement tunnel et en négligeant tout bruit sur les paramètres de polarisation. On a alors la formule simple :

$$\Gamma_0(I_p, \Phi_p + \Phi_m) = -\frac{1}{\Delta t} \ln [1 - P_{ech}(I_p, \Phi_p + \Phi_m, \Delta t)]. \quad (6.1)$$

Les résultats de cette première analyse sont représentés sur la figure 6.4. On constate que les taux d'échappement issus des différentes mesures se prolongent correctement sur une dynamique de 5 ordres de grandeurs. Ce résultat est important : il démontre que la mesure nanoseconde est bien maîtrisée et comprise.

Toutefois, en analysant plus finement les choses, on observe un léger décalage en courant entre les courbes (5 nA), ainsi qu'une saturation pour les fréquences d'échappement élevées. Ces légères distortions par rapport à la loi MQT s'expliquent très bien à condition de tenir compte des bruits sur les paramètres de polarisation, en suivant la démarche du chapitre 3.

6.1.2 Bruit sur les paramètres de polarisation

Le flux de polarisation correspondant aux mesures décrites ci-dessus est proche de celui correspondant au maximum de courant critique. La sensibilité au bruit de flux est donc faible. On estime que les fluctuations RMS du courant critique induites par le bruit de flux valent $\langle I_c^2 \rangle^{1/2} = 1.4$ nA. Dans la suite, le bruit en flux sera négligé. La densité spectrale du bruit en courant, calculée au chapitre 5, est fortement piquée autour de 30 MHz. Intégrée entre 20 MHz et 40 MHz, elle conduit à une valeur RMS des fluctuations égale à 5 nA, soit la quasi-totalité du bruit (6 nA). Comme nous l'avons vu au chapitre 3, l'effet des fluctuations sur la probabilité d'échappement dépend de la durée Δt de l'impulsion de mesure. Pour résumer, si les fluctuations sont rapides devant $1/\Delta t$, il suffit de remplacer Γ_0 par la valeur moyenne $\langle \Gamma_0 \rangle$ dans la formule (6.1). Par contre, dans le cas de fluctuations lentes devant $1/\Delta t$, P_{ech} doit être moyennée en $\langle P_{ech} \rangle$. Dans ce cas, le taux d'échappement extrait des courbes d'échappement par (6.1) doit être interprété comme une grandeur effective, notée dans la suite Γ_0^{eff} .

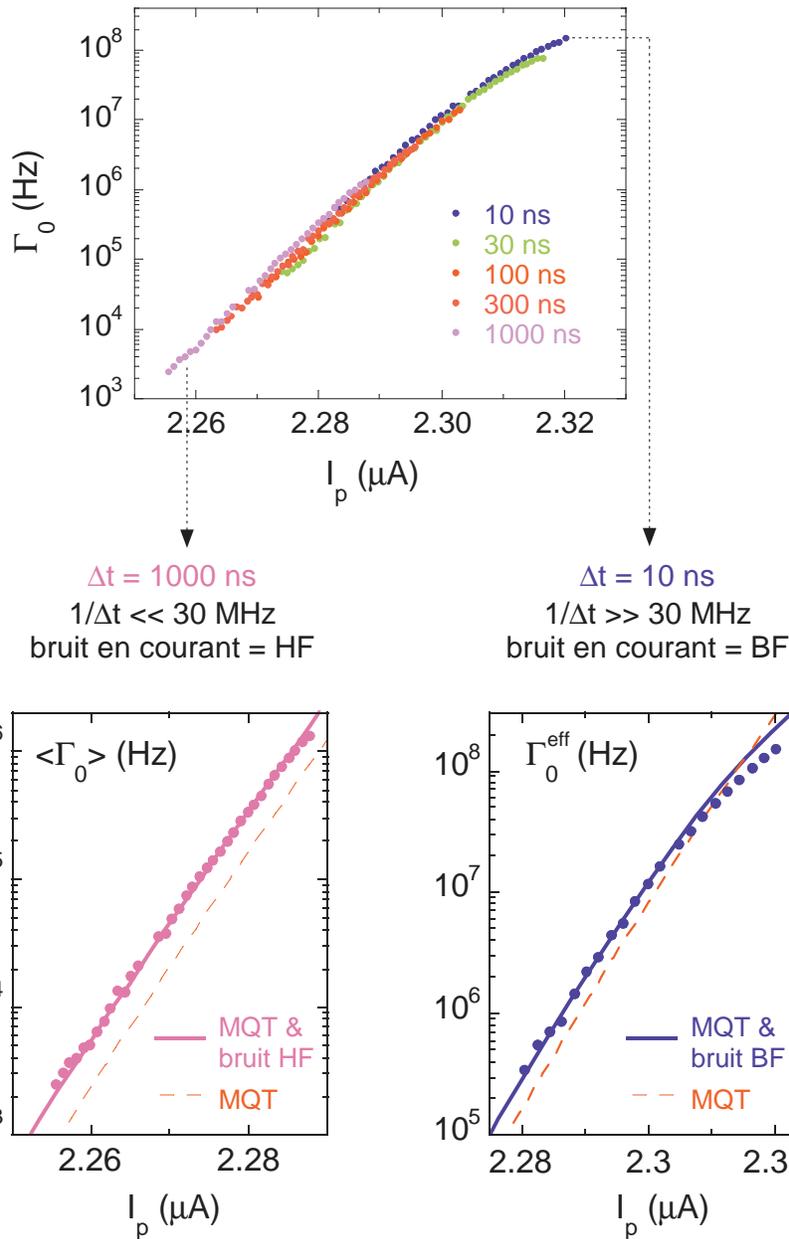


FIG. 6.4 – **En haut** : fréquences d'échappement tunnel du fondamental Γ_0 extraites des mesures d'échappement en supposant un échappement MQT sans bruit. Les données se recoupent sur une dynamique de 5 ordres de grandeurs. **En bas, à gauche** : ajustement de $\langle \Gamma_0 \rangle$ extrait de la mesure $\Delta t = 1 \mu\text{s}$ en présence du bruit en courant, traité comme un bruit HF. La théorie MQT simple est en pointillés. **En bas, à droite** : ajustement de Γ_0^{eff} extrait de la mesure $\Delta t = 10 \text{ ns}$ en présence du bruit en courant, traité comme un bruit BF. (MQT en pointillés). Les ajustements de $\langle \Gamma_0 \rangle$ et Γ_0^{eff} ont été réalisés en utilisant l'amplitude Φ_m de l'impulsion comme unique paramètre libre.

Dans le chapitre 3, les mesures étaient réalisées avec des impulsions de courant de durée $\Delta t = 50 \mu\text{s}$, de sorte que le bruit en courant appartenait à la limite haute fréquence. Dans le cas de la mesure rapide par impulsion de flux, suivant la durée de l'impulsion, les fluctuations de courant doivent être traitées dans la limite haute (HF) ou basse fréquence (BF). Pour illustrer les deux cas limites, les données correspondant à $\Delta t = 1 \mu\text{s}$ (HF) et $\Delta t = 10\text{ns}$ (BF) ont été analysées et sont présentées sur la figure 6.4. L'effet des fluctuations HF est un décalage de l'ordre des fluctuations RMS de courant vers les bas courants de la loi d'échappement par rapport à la loi MQT. Les fluctuations BF modifient la forme de la courbe d'échappement, ce qui explique la saturation observée pour les taux d'échappement élevés. L'ajustement des données expérimentales est très bon. Le bruit étant caractérisé, le seul paramètre libre de ces ajustements est l'amplitude Φ_m de l'impulsion de flux. Ceci permet d'obtenir la calibration entre amplitude V_m de l'impulsion en tension, donnée à l'entrée de cryostat et amplitude en flux Φ_m : $190 \text{ mV} \leftrightarrow 4.85 \times 10^{-2} \Phi_0$. De plus, pour les fréquences impliquées dans la transmission de l'impulsion ($< 1 \text{ GHz}$), la ligne hyper fréquence est bien caractérisée. En prenant en compte l'atténuation totale de -40 dB et en considérant l'extrémité de l'antenne comme un court-circuit, on obtient la mutuelle M_s entre le SQUID et la ligne *on-chip* : $M_s = 1.3 \text{ pH}$.

6.2 Détection de l'état $|1\rangle$

6.2.1 Optimisation du contraste de la détection

Pour étudier la détection de $|1\rangle$, il faut peupler cet état. Actuellement, nous ne pouvons pas créer l'état pur $|1\rangle$. Nous avons donc choisi d'étudier la mesure du mélange statistique :

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1 - p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & p_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Celui-ci est obtenu en soumettant le système à une excitation MO accordée sur ν_{01} et sélective sur la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$. Les amplitudes MO réduites Ω_1 vérifient $\Omega_1 \ll \omega_{01} - \omega_{12}$. Une fois le régime permanent atteint, la population p_1 ne dépend que de Ω_1 . La probabilité d'échappement P_{ech} liée à une telle superposition s'écrit :

$$P_{ech} = P_{ech}^{(0)} + (P_{ech}^{(1)} - P_{ech}^{(0)}) \times p_1(\Omega_1). \quad (6.3)$$

$P_{ech}^{(n)}$ désigne la probabilité d'échappement de l'état pur $|n\rangle$ et dépend uniquement des caractéristiques de l'impulsion de mesure. La quantité $P_{ech}^{(1)} - P_{ech}^{(0)} = e$ s'interprète comme l'efficacité (ou contraste) de la détection. Nous cherchons à l'optimiser en ajustant les paramètres de l'impulsion de mesure. La valeur ultime est donnée par la loi d'échappement tunnel et vaut 96 %.

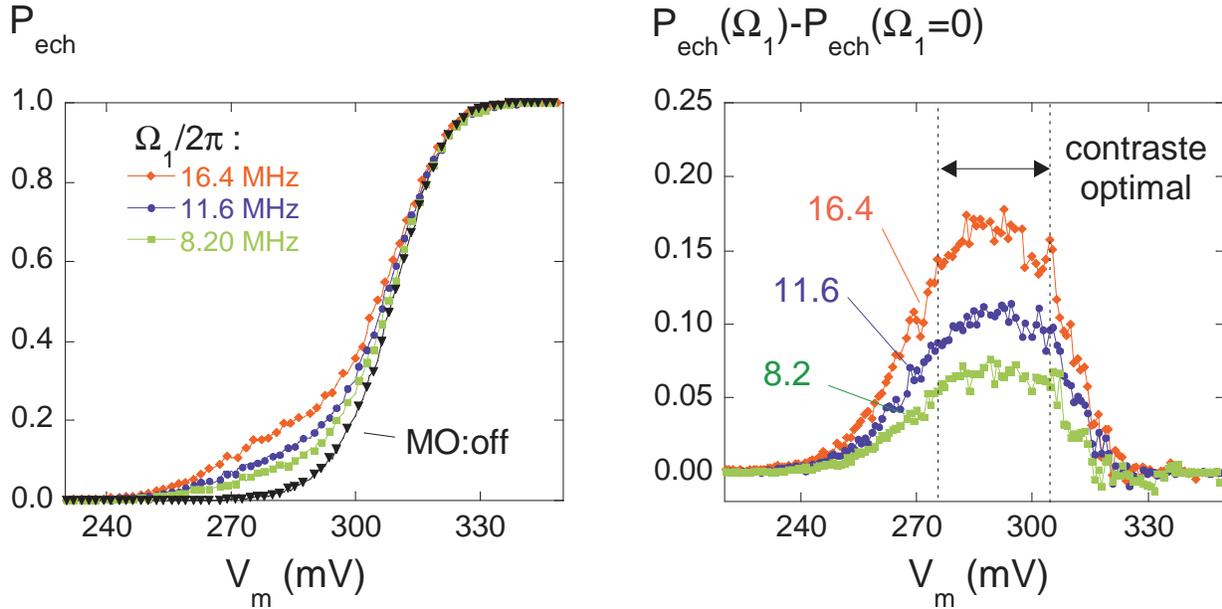


FIG. 6.5 – **À gauche** : évolution de P_{ech} avec l'amplitude de l'impulsion de mesure V_m après une excitation résonante accordée sur ν_{01} ($I_p = 2.222 \mu A$, $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$, $\nu_{01} = 8.273$ GHz). Les amplitudes MO normalisées Ω_1 sont suffisamment faibles pour exciter sélectivement l'état $|1\rangle$. La courbe noire (triangles) est prise en l'absence d'excitation et donne l'échappement du fondamental. **À droite** : plage de contraste optimal pour la mesure de la population de $|1\rangle$.

Le point de fonctionnement retenu ($I_p = 2.222 \mu A$, $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$) a déjà été étudié dans le régime d'oscillations cohérentes au chapitre 4. Ceci fournit une calibration des puissances MO et permet de vérifier la condition de basse puissance pour Ω_1 . Ainsi, on estime que la population parasite de l'état $|2\rangle$ ne dépasse pas 0.3 % dans l'ensemble des expériences décrites dans ce paragraphe⁽¹⁾. L'impulsion d'excitation MO est suivie d'une impulsion de mesure avec un délai de 2 ns. Dans l'expérience qui suit, les caractéristiques temporelles de l'impulsion de mesure sont fixées ($\Delta t = 5$ ns, $t_{m/d} = 1.6$ ns). Nous avons fait varier l'amplitude V_m de la mesure. Les résultats bruts sont portés sur le panneau supérieur de la figure 6.5. La courbe inférieure, sans MO, donne l'échappement du fondamental. Sont également représentées trois courbes correspondant à des puissances MO croissantes. On constate l'apparition d'une bosse au pied de la courbe d'échappement, d'autant plus importante que Ω_1 est élevée. On interprète ceci par l'échappement du niveau $|1\rangle$. En effet, celui-ci voit une hauteur de barrière plus faible que le fondamental et s'échappe donc pour des amplitudes V_m plus faibles. Le panneau du bas présente la probabilité d'échappement

⁽¹⁾En première approche, la population du niveau $|2\rangle$ est estimée à l'aide du modèle (cohérent) décrit au chapitre 4. Nous supposons que la valeur atteinte en régime permanent correspond à la valeur moyenne des oscillations observées. Il serait toutefois préférable de disposer d'un modèle prenant en compte les effets incohérents.

en présence de MO à laquelle a été soustraite la probabilité d'échappement du fondamental. D'après (6.3), cette quantité s'interprète comme :

$$P_{ech}(\Omega_1) - P_{ech}(\Omega_1 = 0) = e(V_m) \times p_1(\Omega_1). \quad (6.4)$$

Il existe ainsi une plage d'amplitudes pour lesquelles l'efficacité de la détection est optimale, entre 280 mV et 305 mV. Dans la suite, on règle $V_m = 285$ mV.

6.2.2 Estimation de l'efficacité de la mesure

Pour évaluer l'efficacité e de la mesure, nous proposons d'utiliser des mesures de spectroscopie pour des amplitudes d'excitation variables atteignant le régime de saturation de la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$. On conserve le même point de polarisation ainsi que le réglage optimal de la mesure obtenu au paragraphe précédent. Quelques exemples de courbes de résonances pour des amplitudes d'excitation Ω_1 croissantes sont représentés sur la figure 6.6. Les courbes sont symétriques par rapport au pic de résonance et ont été ajustées par une gaussienne piquée sur la fréquence ν_r , caractérisée par son amplitude p_{max} et sa largeur totale à mi-hauteur $\Delta\nu$. Les évolutions de ν_r et $\Delta\nu$ avec Ω_1 sont représentées sur la figure 6.7 et la dépendance $p_{max}(\Omega_1)$ est portée sur la figure 6.8 (page 138).

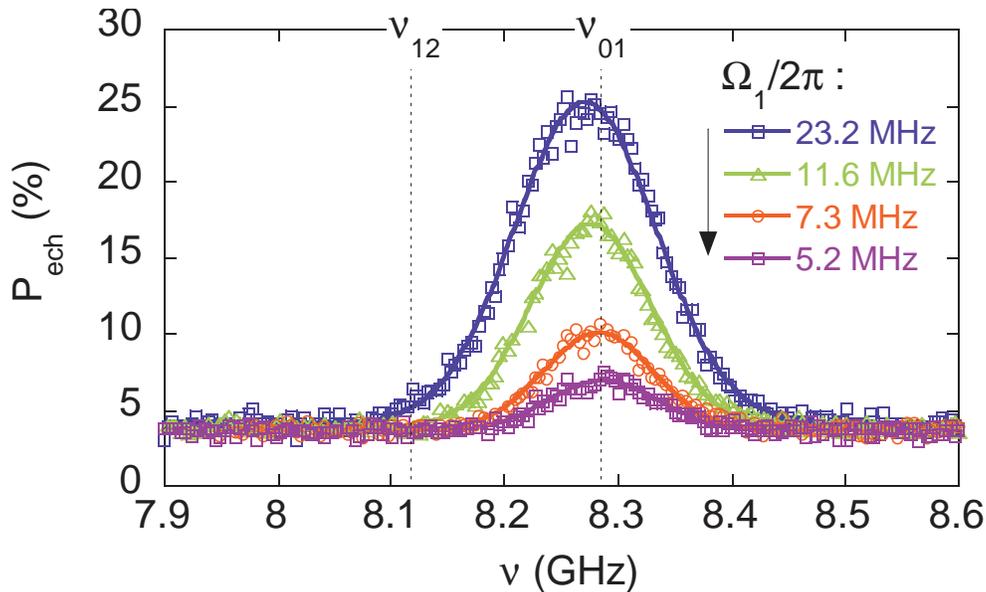


FIG. 6.6 – Exemples de courbes de résonance obtenues par spectroscopie au point ($I_p = 2.222 \mu A$, $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$), pour différentes amplitudes d'excitation. La mesure est réglée à $V_m = 285$ mV. Une première ligne en pointillés représente la fréquence ν_{01} , mesurée à basse puissance. La seconde ligne donne la fréquence calculée ν_{12} . Les ajustements sont réalisés avec une loi gaussienne.

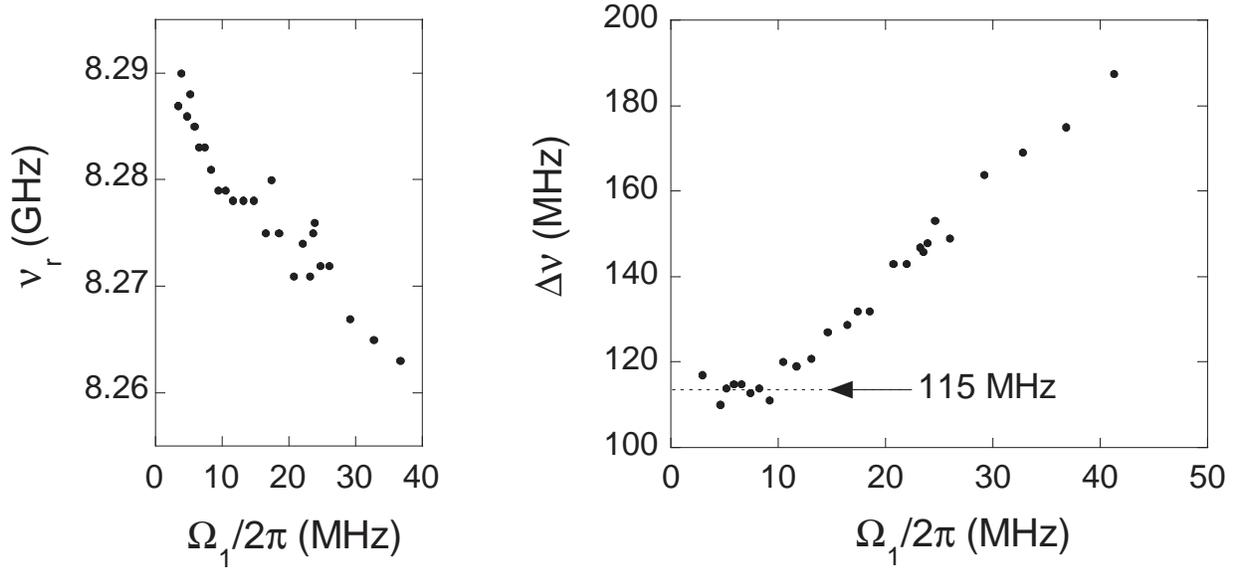


FIG. 6.7 – **À gauche** : évolution de la fréquence de résonance ν_r en fonction de l'amplitude normalisée Ω_1 de l'excitation MO. **À droite** : largeur de raie $\Delta\nu$ en fonction de Ω_1 . Les mesures ont été réalisées au point de polarisation ($I_p = 2.222 \mu A$, $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$).

La largeur de raie sature à basse puissance vers une valeur de 115 MHz. Lorsque $\Omega_1/2\pi$ dépasse 10 MHz, cette valeur augmente. Vraisemblablement, l'augmentation de la largeur de raie n'est pas uniquement due à la saturation de la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$. En effet, on observe un léger décalage de ν_r vers les basses fréquences lorsque Ω_1 augmente. Ceci est sans doute dû à une contamination du niveau $|2\rangle$, d'autant plus facile que la fréquence d'excitation se rapproche de ν_{12} .

Pour déterminer l'efficacité de la mesure, nous allons nous focaliser sur l'amplitude de la résonance. Il faut alors s'assurer que la contamination du niveau $|2\rangle$ est négligeable pour $\nu = \nu_r \approx \nu_{01}$. En première approche, le modèle cohérent permet d'estimer que $p_2(\nu_r, \Omega_1) < 1\%$ tant que $\Omega_1/2\pi < 30$ MHz. Les résultats expérimentaux peuvent donc s'interpréter dans le cadre d'un modèle à deux niveaux. L'efficacité e de la détection vérifie alors :

$$p_{max} = e \times p_1(\nu_r, \Omega_1). \quad (6.5)$$

Il n'existe pas, à notre connaissance, de théorie décrivant la dépendance de $p_1(\nu_r, \Omega_1)$ avec Ω_1 dans le régime de saturation en présence de sources de bruit gaussiennes. Nous allons donc utiliser une relation *empirique*⁽²⁾ :

$$p_1(\nu_r \approx \nu_{01}, \Omega_1) = \frac{(\Omega_1/\Omega_s)^2}{1 + (\Omega_1/\Omega_s)^2}. \quad (6.6)$$

L'ajustement donne un paramètre de saturation de la transition $\Omega_s/2\pi = 15$ MHz, et fournit une estimation de l'efficacité $e = 60\%$. Pour affiner l'interprétation des résultats

⁽²⁾Cette relation correspond à la théorie pour une résonance lorentzienne dans un système à deux niveaux.

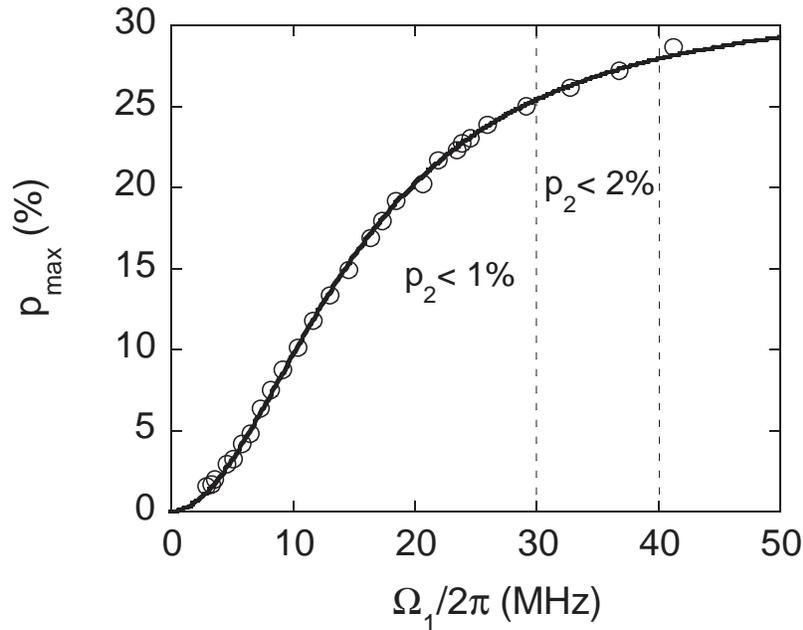


FIG. 6.8 – Évolution de l'amplitude de la résonance p_{\max} avec Ω_1 ($I_p = 2.222 \mu A$, $\Phi_p = -0.117\Phi_0$). Pour $\Omega_1/2\pi \leq 30$ MHz, la contamination du niveau $|2\rangle$ est négligeable. La ligne pleine est un ajustement par une loi empirique, donnée dans le texte.

expérimentaux, il serait intéressant d'utiliser un modèle du système prenant en compte les trois premiers niveaux d'énergie (afin de mieux justifier la restriction à un système à deux niveaux) et les sources de fluctuations gaussiennes. Quoiqu'il en soit, la valeur expérimentale de l'efficacité est éloignée de la prédiction de la théorie MQT (96 %).

6.2.3 Origines possibles de la perte d'efficacité de la mesure

Comment expliquer la perte d'efficacité de la mesure ? Nous allons examiner successivement deux causes possibles : la dépolarisation du système et l'effet de fluctuations basse fréquence.

Dépolarisation. Ceci constitue sans doute une des explications les plus simples : si l'état $|1\rangle$ relaxe vers le fondamental, une partie de la population de $|1\rangle$ n'est pas mesurée. Les phénomènes de relaxation peuvent intervenir à trois moments différents, avec des conséquences assez distinctes. Nous allons étudier successivement le temps d'attente entre la fin des MO et le début de l'impulsion, le front de montée de l'impulsion et le plateau.

Le temps qui sépare la fin des MO du début du front de montée de l'impulsion est estimé à 3 ns. Pendant ce temps, l'état $|1\rangle$ relaxe, avec un taux étudié au chapitre précédent. Pour le point de polarisation considéré, il vaut $1/\Gamma_R = 65$ ns, ce qui conduit à une dépolarisation de 4 %.

La dépolarisation intervient aussi durant le front de montée de l'impulsion. Pendant cette période, la barrière de potentiel, ainsi que la fréquence propre ν_{01} , diminuent. En conséquence, comme le montre l'étude du chapitre précédent, le taux de relaxation augmente. Nous allons faire une estimation pessimiste en considérant que durant toute la montée, Γ_R garde sa valeur maximale, atteinte au sommet de l'impulsion. Toutefois, les taux de relaxation n'ont pas été mesurés pour des puits aussi peu profonds. On estime Γ_R en extrapolant les résultats expérimentaux du dernier chapitre. Au sommet de l'impulsion, la fréquence ν_{01} est de l'ordre de 5 GHz. La relation (5.32) du chapitre 5 donne $\Gamma_R \sim 30$ ns, conduisant à une dépolarisation supplémentaire de 6 %. Un autre mécanisme de dépolarisation, proposé dans la référence [31], peut apparaître. Lors du front de montée de l'impulsion de mesure, la fréquence propre du SQUID varie de plusieurs gigahertz. Le SQUID pourrait ainsi entrer successivement en résonance avec des fluctuateurs à deux niveaux. Ces couplages successifs non maîtrisés peuvent induire une dépolarisation.

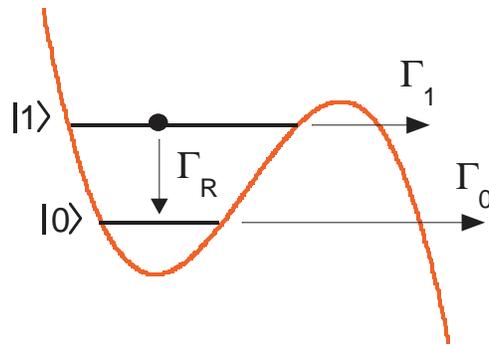


FIG. 6.9 – *Dépolarisation durant la mesure.*

Enfin, la dépolarisation se produit durant la mesure proprement dite, c'est-à-dire au sommet de l'impulsion de flux. Les différents processus à l'œuvre sont présentés sur la figure 6.9. Les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ s'échappent par effet tunnel avec les taux respectifs Γ_0 et Γ_1 . S'ajoute la relaxation de $|1\rangle$, avec le taux Γ_R . Dans cette situation, il y a compétition entre l'échappement tunnel de $|1\rangle$ (mesure) et la relaxation. Le problème est calculable analytiquement. Pour une durée de l'impulsion correspondant à un contraste optimal, la perte d'efficacité est environ égale au rapport Γ_R/Γ_1 . Ce résultat est intuitif : le rapport de la population qui a relaxé sur la population qui s'est échappée par effet tunnel est égal au rapport des taux associés aux deux phénomènes, soit Γ_R/Γ_1 . Une mesure rapide implique les taux d'échappement tunnel importants et donc une meilleure efficacité. Pour l'impulsion de mesure utilisée dans les expériences précédentes, la perte d'efficacité est estimée à 3 %.

En conclusion, la partie estimable de la perte d'efficacité totale suite au processus de dépolarisation vaut 13 %.

Fluctuations basses fréquences. Les fluctuations basse fréquence élargissent les courbes d'échappement et conduisent à une diminution du contraste de la mesure. La figure 6.10 montre les courbes d'échappement en présence du bruit en courant pour des impulsions rapides ($\Delta t = 5$ ns). Les courbes ont été tracées en supposant $\Gamma_1/\Gamma_0 = 150$ et la loi MQT est en trait plein. L'efficacité de la mesure a également été tracée dans les situations sans et avec bruit. On constate que la perte d'efficacité due au bruit en courant est de 7 %.

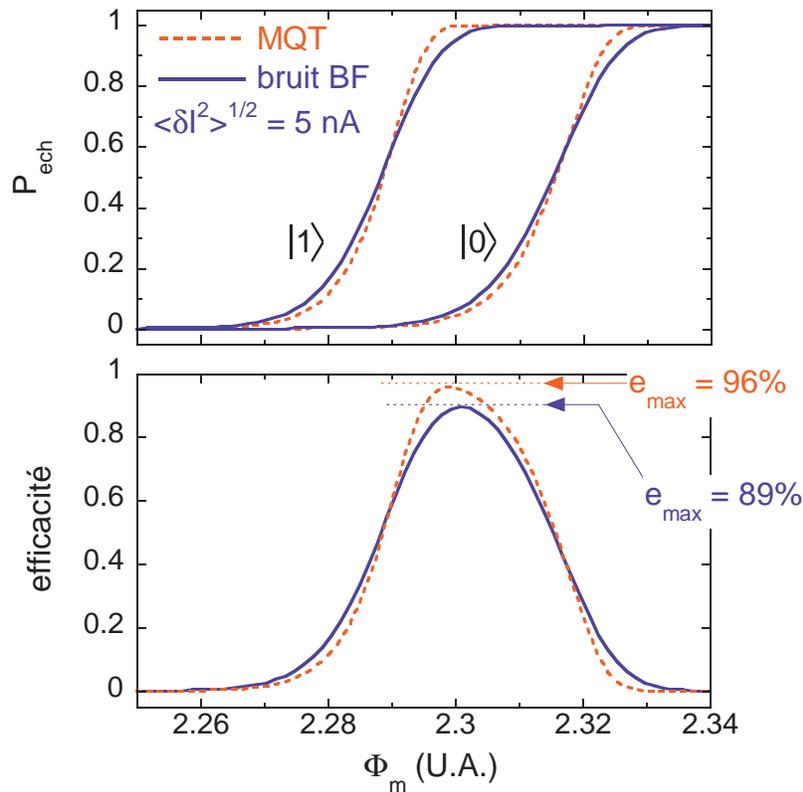


FIG. 6.10 – **En haut** : courbes d'échappement des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ obtenues en faisant varier l'amplitude Φ_m de l'impulsion de mesure. L'impulsion a une durée $\Delta t = 5$ ns. On a tracé l'échappement MQT (traits pleins) et l'échappement en présence de bruit en courant qui, vu Δt , doit être traité comme un bruit basse fréquence. **En bas** : efficacité de la mesure en fonction de l'amplitude de l'impulsion de mesure. Le bruit en courant induit une perte d'efficacité de 7 %.

En conclusion, nous estimons une perte d'efficacité d'environ 20% suite aux effets conjugués de la relaxation et du bruit. La perte d'efficacité est donc en partie comprise. Signalons que ce problème reste ouvert. En effet, dans tous les groupes utilisant actuellement l'échappement d'une jonction vers l'état résistif pour leur détection, les efficacités mesurées restent bien en dessous des valeurs attendues prédites par l'effet tunnel. Elles varient de 40 % à 60 % [88, 31, 33], alors que les prévisions donnent une limite théorique qui dépasse 95 %.

6.3 Mesure des états $|2\rangle$ et supérieurs (préliminaire)

Dans son principe, la mesure n'est pas limitée à la détection de superpositions de $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Elle permet de mesurer la population de superpositions mettant en jeu plus de niveaux. Considérons pour l'exemple une superposition d'états mettant en jeu les quatre premiers états du SQUID : $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ et $|3\rangle$ avec les populations respectives p_0 , p_1 , p_2 et p_3 . Dans l'hypothèse d'une détection idéale (efficacité égale à 1), il est possible d'ajuster l'amplitude de l'impulsion de mesure de manière à provoquer l'échappement sélectif de $|3\rangle$ alors que les autres niveaux restent piégés. p_3 est ainsi déterminé. En réglant le seuil de la détection entre $|1\rangle$ et $|2\rangle$, on mesure $p_2 + p_3$. Enfin, une dernière mesure avec un seuil entre $|0\rangle$ et $|1\rangle$ donne accès à $p_1 + p_2 + p_3$. Ces trois mesures permettent de reconstruire la distribution des populations dans le puits de potentiel.

Niveau	p_0	p_1	p_2	p_3
Valeur	0.10	0.28	0.55	0.07

TAB. 6.1 – Population des niveaux $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ et $|3\rangle$.

Pour réaliser cette expérience, la première étape consiste à créer une distribution de niveaux d'énergie connue. Pour cela, nous avons réalisé une expérience d'oscillation cohérente en excitant le SQUID avec un champ MO d'amplitude $\Omega_1/2\pi = 164.5$ MHz au point $I_p = 2.222 \mu\text{A}$, $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$. La première oscillation, pour des temps d'application des MO variant de 2 ns à 10 ns, est présentée sur la figure 6.11. Nous allons considérer un point particulier de cette oscillation qui correspond à $T_{MO} = 3.8$ ns (flèche). Les populations théoriques, calculées à l'aide du modèle multi-niveaux, sont résumées dans le tableau 6.1.

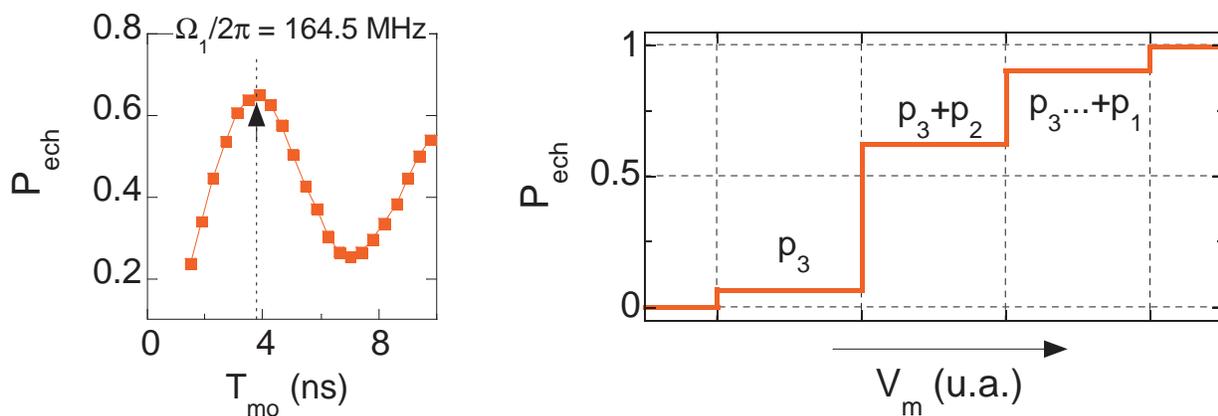


FIG. 6.11 – **À gauche** : oscillation cohérente obtenue par excitation résonante accordée sur ν_{01} ($I_p = 2.222 \mu\text{A}$, $\Phi_p = -0.117 \Phi_0$, $\nu_{01} = 8.273$ GHz). L'amplitude MO normalisée vaut $\Omega_1/2\pi = 164.5$ MHz et l'amplitude de mesure est $V_m = 285$ mV. **À droite** : résultat d'une mesure à seuil parfaite réalisée après $T_{\text{mo}} = 3.8$ ns (flèche). Les phénomènes de décohérence ont été négligés dans le calcul.

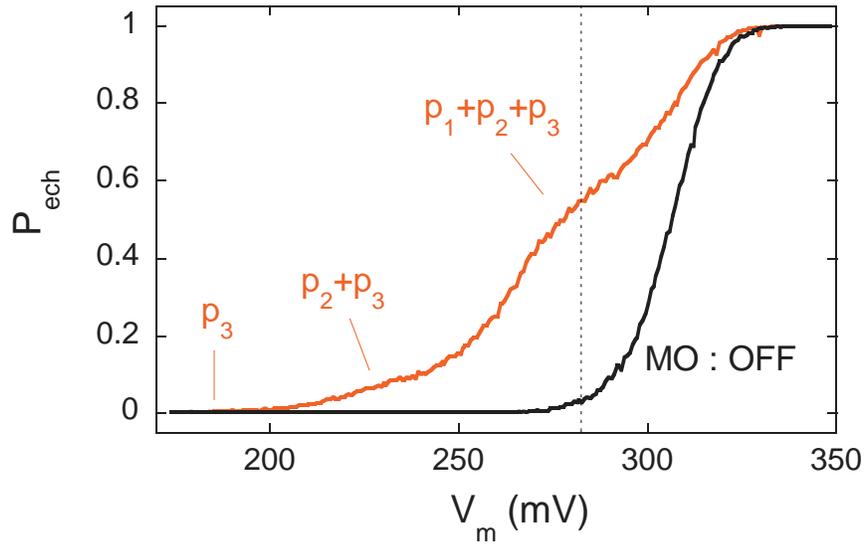


FIG. 6.12 – Évolution de P_{ech} en fonction de l'amplitude V_m de l'impulsion de mesure pour des durées d'excitation (cohérente) correspondant aux points (a), (b) et (c), avec les paramètres de la figure 6.11. Les seuils correspondant à l'échappement des niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$ sont visibles.

Les résultats d'une détection à seuil parfaite ($e = 1$) sont présentés sur la figure 6.11 pour une amplitude de mesure croissante. Le résultat expérimental est tracé sur la figure 6.12 où la probabilité d'échappement est mesurée pour des amplitudes de mesure Φ_m croissantes. La courbe présente deux bosses, associées à l'échappement des niveaux $|2\rangle$ (et supérieurs) et $|1\rangle$ (et supérieurs). Par contre, les populations mesurées sont plus faibles que la théorie. Ceci est sans doute lié à une dépolarisation des niveaux excités. En effet, une mesure préliminaire du temps de relaxation du niveau $|2\rangle$ a donné $T_R^{(2)} = 12$ ns. Le temps de relaxation du niveau $|3\rangle$, non mesuré, est sans doute encore moins long. Dans ces conditions, une partie de la population des états $|2\rangle$ et $|3\rangle$ relaxe vers l'état $|1\rangle$ dont le temps de vie est beaucoup plus long. En tenant compte de l'efficacité de détection de 60 %, cette interprétation est compatible avec les résultats expérimentaux.

Conclusions et perspectives

Les expériences réalisées au cours de mon doctorat se regroupent autour de trois axes, avec comme point commun l'étude d'un comportement quantique pour l'état de phase du SQUID. Dans ce sens, l'effet tunnel macroscopique (MQT) pour l'état fondamental constitue l'expérience la plus "simple" révélant un comportement typiquement quantique. L'effet tunnel est également au cœur de la mesure de l'état du SQUID par impulsions de flux nanosecondes. Viennent ensuite les expériences de dynamique cohérente, dans lesquelles le SQUID est excité par des impulsions micro-onde (MO), et qui constituent une première étape vers la manipulation de l'état quantique du circuit. Enfin, les processus incohérents qui limitent la visibilité des interférences quantiques ont été étudiés quantitativement. Les résultats obtenus devraient permettre d'améliorer les performances du circuit.

Avant de détailler ces trois points, précisons tout d'abord le travail de développement technique qui a rendu possibles les mesures. J'ai fabriqué les SQUIDs en utilisant les moyens de la plateforme NanoFab. Une nouvelle électronique de polarisation et de détection a été mise au point, en collaboration avec le service électronique. À terme, ce nouveau montage devrait permettre d'augmenter les cadences de répétitions. J'ai également écrit les programmes Lab-View qui permettent de piloter l'ensemble de l'expérience (polarisation et génération du signal MO). En matière condensée, les signaux cohérents relaxent très rapidement ($T_R \sim 120$ ns, $\tilde{T}_2 \sim 30$ ns). La réussite des expériences passe ainsi par la maîtrise de séquences d'impulsions MO et dc très rapides. Le montage hyperfréquence mis au point durant ma thèse permet de générer une impulsion MO (temps de montée et descente $t_{m/d} = 0.8$ ns) suivie d'une impulsion dc ($t_{m/d} = 1.6$ ns) et qui ont des durées typiques de quelques nanosecondes.

Sur un plan théorique, l'analyse des résultats expérimentaux nécessite une connaissance précise des paramètres du puits de potentiel. Pour cela, deux approches ont été menées. Un développement limité autour du point critique fournit un résultat analytique. Celui-ci a notamment permis d'interpréter les données de la référence [46] en prenant en compte la dissymétrie d'inductance du SQUID. Les expériences de spectroscopie ont parfois été réalisées avec des puits de potentiel profonds. Le développement limité n'est plus valable et nous avons alors recours au calcul numérique. Le SQUID est couplé à l'environnement par l'intermédiaire des paramètres de polarisation courant et flux. Le calcul des termes de couplage aux fluctuations de ces paramètres s'est avéré indispensable pour comprendre l'excitation par un flux MO ainsi que les effets du bruit généré par l'environnement.

Analyse de bruit par mesure d'échappement Mesure nanoseconde

Les mesures de probabilité d'échappement vers l'état résistif montrent que les SQUIDS S_1 et S_2 sont dans le régime MQT pour le flux de polarisation correspondant au maximum de courant critique. Dès que l'on s'éloigne de ce flux particulier, caractérisé par une sensibilité nulle au bruit de flux, les points expérimentaux s'écartent de la loi MQT. Ces mesures nous ont permis de quantifier les bruits en courant et en flux à basse fréquence.

En effet, l'étude théorique du chapitre 3 montre que les fréquences des fluctuations doivent être comparées avec les fréquences caractéristiques du protocole expérimental : T_m^{-1} et Δt^{-1} . Δt est la durée d'une impulsion de mesure et T_m le temps d'acquisition d'une probabilité d'échappement. En particulier, la largeur des courbes d'échappement permet de sonder les fluctuations basses fréquences, comprises entre T_m^{-1} et Δt^{-1} (respectivement 100 mHz et 20 kHz pour les mesures utilisant des impulsions de courant).

Au maximum de courant critique, le système est uniquement sensible aux fluctuations de courant. L'observation du régime MQT permet de donner une borne supérieure pour les fluctuations de courant : $\langle \delta I^2 \rangle_{BF}^{1/2} < 0.5$ nA. Cette valeur est confirmée par une estimation du bruit Johnson-Nyquist généré par les impédances proches du SQUID. L'ajustement des données pour les autres flux fournit l'amplitude des fluctuations de flux. On trouve respectivement $\langle \delta \Phi^2 \rangle_{BF}^{1/2} = 1.67 \times 10^{-3} \Phi_0$ et $5.5 \times 10^{-4} \Phi_0$ pour S_1 et S_2 . Nous soupçonnons des déplacements de vortex piégés dans les surfaces supraconductrices voisines du SQUID. Dans ce cas, une géométrie de type grille pour les plots de contact permettrait d'ancrer ces vortex. Il serait également judicieux de diminuer la surface de la boucle du SQUID.

La mesure de l'état quantique du SQUID repose elle aussi sur l'échappement tunnel vers l'état résistif. Elle est réalisée par une impulsion de flux très rapide ($t_{m/d} = 1.6$ ns, $\Delta t \sim 1$ ns). L'impulsion abaisse adiabatiquement la barrière de potentiel et induit un échappement sélectif des niveaux d'énergie. La rapidité de cette technique de mesure est un atout expérimental certain, qui permet de résoudre des phénomènes s'amortissant jusqu'à des temps de l'ordre de 5 ns.

Pour valider la mesure nanoseconde, nous avons tout d'abord mesuré le temps de vie du fondamental. Les résultats obtenus avec S_2 s'expliquent parfaitement par la théorie MQT, sous réserve de prendre en compte une légère correction due aux bruits sur les paramètres de polarisation. Cet accord montre que nous maîtrisons la technique de mesure rapide. Pour parvenir à ce résultat, nous avons optimisé la géométrie de l'environnement proche du SQUID, de manière à limiter au maximum les courants parasites générés par l'impulsion de flux.

Outre sa rapidité, le contraste de détection entre les niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$ est une caractéristique très importante de la mesure. L'effet tunnel assure en théorie un contraste de 96% permettant pratiquement une mesure en un coup. La valeur expérimentale, estimée à l'aide d'une étude spectroscopique sur S_2 , est de l'ordre de 60%. Elle est similaire à celle obtenue par d'autres groupes utilisant des JJs comme détecteurs. La perte d'efficacité par rapport

au régime MQT trouve une explication partielle (20 %) dans la dépolarisation du SQUID avant la mesure ainsi que dans la présence d'un bruit sur les paramètres de polarisation. L'origine de la perte d'efficacité supplémentaire de 20 % reste un problème ouvert.

Dynamique cohérente : compétition entre anharmonicité et couplage micro-onde

Nous avons étudié la dynamique du SQUID excité par une impulsion de flux MO accordée sur la transition de fond de puits. Cette impulsion induit des oscillations cohérentes de l'état du système. Ces oscillations se démarquent des oscillations de Rabi observées dans les qubits, car elles peuvent faire intervenir plus de deux niveaux d'énergie. La théorie que nous avons développée montre que le nombre de niveaux impliqués est le résultat d'une compétition entre deux grandeurs. D'une part, l'anharmonicité du puits de potentiel implique que plus une transition fait intervenir des niveaux d'énergie élevés, et plus l'excitation MO est désaccordée. On caractérise la non-linéarité du potentiel par le désaccord entre les deux premières transitions : $\omega_{01} - \omega_{12}$. D'autre part, pour une forte amplitude Ω_1 , les MO peuvent exciter une transition, même si elles ne sont pas exactement accordées sur cette dernière.

À faible amplitude ($\Omega_1 \ll \omega_{01} - \omega_{12}$), seuls les deux premiers niveaux du puits sont impliqués dans l'oscillation. Le SQUID se comporte alors comme un qubit de phase. Dès que $\Omega_1 \sim \omega_{01} - \omega_{12}$, trois niveaux sont impliqués dans l'oscillation et ce nombre augmente avec Ω_1 . Soulignons que la non-linéarité du potentiel est fondamentale pour l'observation des oscillations. Elles n'existeraient pas pour un oscillateur harmonique.

Les oscillations cohérentes ont été observées expérimentalement avec les SQUIDs S_1 et S_2 . Considérons tout d'abord les résultats obtenus avec S_1 . Les oscillations, de fréquence ν_{coh} , s'amortissent avec un temps caractéristique \tilde{T}_2 voisin de 12 ns. Nous avons étudié en détail la dépendance de ν_{coh} avec l'amplitude d'excitation. Pour la gamme d'amplitudes utilisées, qui correspond à $\Omega_1 \geq \omega_{01} - \omega_{12}$, l'énergie maximale du SQUID varie de $2 \times \hbar\omega_{01}$ à $10 \times \hbar\omega_{01}$. La dépendance expérimentale de ν_{coh} avec Ω_1 est fidèlement reproduite par la théorie quantique multi-niveaux.

Une théorie purement classique prévoit également des oscillations de l'énergie stockée dans le SQUID. De plus, pour les amplitudes d'excitation utilisées avec S_1 , la théorie classique reproduit aussi la dépendance $\nu_{coh}(\Omega_1)$. Au vu des faibles énergies mises en jeu dans l'oscillation cohérente, ce résultat est a priori surprenant. En fait, lorsque $\Omega_1 > \omega_{01} - \omega_{12}$, le champ MO classique excite des superpositions d'états qui présentent des fluctuations de phase faibles (de l'ordre de celles de l'état $|0\rangle$) et qui oscillent au fond du puits de potentiel à la fréquence du forçage micro-onde (~ 10 GHz). L'oscillation cohérente correspond à une modulation de l'amplitude des oscillations rapides du paquet d'onde. Au début de l'oscillation cohérente, tout se passe comme si le système n'avait pas "senti" la non-linéarité du potentiel. La source MO (classique) excite des états analogues aux états quasi-classiques rencontrés dans un oscillateur harmonique. Pour un tel état, les fluctuations quantiques

sont dominantes lorsqu'un à deux quanta d'énergie sont stockés dans l'oscillateur. Pour 10 quanta d'énergie, les fluctuations quantiques sont négligeables et l'état du système peut être décrit classiquement. Toutefois, l'analogie cesse au sommet de l'oscillation, quand l'énergie du SQUID est maximale. Les effets de la non-linéarité sont alors importants et la fonction d'onde du SQUID présente des fluctuations de phase plus élevées qu'un état quasi-classique.

Le SQUID S_2 présente des temps de cohérence plus longs que ceux de S_1 . Nous avons obtenu au maximum $\tilde{T}_2 = 34$ ns. Ceci a permis d'observer des oscillations dans le régime $\Omega_1 \leq \omega_{01} - \omega_{12}$. Dans cette gamme d'amplitudes d'excitation, la dépendance expérimentale $\nu_{coh}(\Omega_1)$ suit un comportement quasi linéaire bien ajusté par la théorie quantique. En fait, le comportement linéaire prévu pour l'oscillation de Rabi entre deux niveaux se poursuit même lorsque trois niveaux sont impliqués ($\Omega_1 \sim \omega_{01} - \omega_{12}$). Dans ce régime basse puissance, la théorie classique prévoit un comportement en loi de puissance $\nu_{coh} \propto \Omega_1^{2/3}$, incompatible avec les résultats expérimentaux. Pour cette série de mesures, la limite à deux niveaux a été approchée avec une contamination maximale du niveau $|2\rangle$ de 12 %.

À l'avenir, il serait intéressant de mesurer d'autres caractéristiques de l'oscillation cohérente, comme la population des différents niveaux d'énergie. L'expérience préliminaire du chapitre 6 mériterait d'être reconduite lorsque les temps de relaxation auront été améliorés. À plus long terme, un temps de cohérence plus élevé permettrait d'étudier d'autres états excités, par exemple le niveau $|2\rangle$. On pourrait imaginer un système utilisant deux synthétiseurs de fréquences accordés respectivement sur ω_{01} et ω_{12} . Ils piloteraient une succession de deux transitions cohérentes $|0\rangle \rightarrow |1\rangle \rightarrow |2\rangle$. On pourrait également utiliser une méthode de passage adiabatique [89], employée en physique atomique.

Bruit et processus incohérents

Pour améliorer la visibilité des phénomènes cohérents, il est nécessaire de comprendre les sources de décohérence. Les processus incohérents (relaxation et déphasage adiabatique) sont générés par un couplage aux degrés de liberté non maîtrisés de l'environnement. Celui-ci se manifeste en bruyant les paramètres de polarisation du circuit (courant et flux). Une étude détaillée a été réalisée sur le SQUID S_2 . Pour simplifier le problème, il a été opéré dans le régime à deux niveaux ($|0\rangle$ et $|1\rangle$). Un recensement détaillé des sources de bruit a été réalisé. Il en ressort que les fluctuations de courant sont générées par les impédances proches du SQUID. Le bruit de flux est, quant à lui, dominé par la source de fluctuations mise en évidence par les mesures d'échappement du fondamental.

La relaxation de $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ a été étudiée expérimentalement dans le domaine temporel. L'énergie relaxe avec un temps caractéristique T_R qui varie de 120 ns à 40 ns suivant le point de fonctionnement. Le meilleur facteur de qualité "énergie" $Q_R = \omega_{01} T_R$ mesuré vaut ainsi 7000. La source de dissipation dominante est la résistance parasite introduite par la capacité de filtrage en or. Nous projetons de la remplacer sous peu par une capacité supraconductrice en niobium-titane.

Nous avons également réalisé une étude spectroscopique à basse puissance (régime li-

néaire) pour différents points de fonctionnement. La position des pics de résonance est très bien comprise. Les résonances les plus fines présentaient une largeur à mi-hauteur de 20 MHz, soit un facteur de qualité total $Q = \nu_{01}/\Delta\nu$ de 500. La largeur de raie est ainsi dominée par le déphasage adiabatique qui est causé par la partie longitudinale du bruit. Lorsque le courant de polarisation se rapproche du courant critique, la sensibilité au bruit longitudinal augmente sur un ordre de grandeur et $\Delta\nu$ peut atteindre plusieurs centaines de mégahertz. Les mesures de $\Delta\nu$ sont très bien reproduites par notre modèle d'environnement, sans faire intervenir de paramètre libre. Dans la limite à deux niveaux, la décohérence est donc bien comprise. Il reste à étudier ces phénomènes lorsque la dynamique de phase implique plus de deux niveaux.

Le SQUID constitue-t-il un bon candidat pour implémenter un qubit ? L'état d'un qubit doit être manipulable précisément. Cela implique d'avoir une anharmonicité assez marquée pour éviter une contamination parasite du niveau $|2\rangle$ et donc de polariser le circuit près du courant critique. Or, il s'agit justement de la situation où le circuit est le plus sensible au bruit. Les codes correcteurs d'erreurs quantiques imposent une contrainte extrêmement sévère sur la robustesse des portes logiques constituant un processeur quantique [90, 91]. En effet, le taux d'erreur ne doit pas excéder un pour 10^4 opérations logiques. Dans le mode de fonctionnement utilisé pendant ma thèse, ceci nécessiterait une réduction irréaliste (quatre ordres de grandeur au moins) du bruit généré par l'environnement. Nous explorons actuellement un mode de fonctionnement découplé du bruit en courant à l'ordre linéaire, ce qui devrait améliorer significativement le temps de cohérence du circuit.

Toutefois, même considéré en dehors de la perspective "information quantique", le SQUID reste un dispositif à la physique riche et passionnante. Il concentre les problématiques liées à la mesure et une dynamique très riche, de la limite à deux niveaux aux oscillations multi-niveau... Nul doute qu'à l'avenir, ce circuit supraconducteur permettra de réaliser encore de belles expériences.

Bibliographie

- [1] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger. Experimental Test of Bell's inequalities Using Time Varying Analysers. *Phys. Rev. Lett* **49**, 1804 (1982).
- [2] E. Schrödinger. *Naturwissenschaften* **23**, 807 (1935).
- [3] W. Zurek. Pointer basis of quantum apparatus : Into what mixture does the wave packet collapse. *Phys. Rev. D* **24**, 1516 (1981).
- [4] D. DiVincenzo. Quantum Computation. *Science* **270**, 255 (1995).
- [5] M. Nielsen and I. Chuang. *Quantum Information and Quantum Computation* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [6] P. Shor. *Proceedings of the symposium on the foundations of computer science* (IEEE Computer Society press, New York, 1994).
- [7] L. Grover. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Phys. Rev. Lett.* **79**, 325 (1997).
- [8] S. Lloyd. Universal Quantum Simulators. *Science* **273**, 1073 (1996).
- [9] A. Ekert. Quantum Cryptography Based on Bell's Inequalities. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991).
- [10] J. Rarity, P. Owens, and P. Tapster. Quantum Random-number Generation and Key Sharing. *J. Mod. Opt.* **41**, 2435 (1994).
- [11] L. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. Yannoni, M. Sherwood, and I. Chuang. Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. *Nature* **414**, 883 (2001).
- [12] J. Raimond, M. Brune, and S. Haroche. *Colloquium* : Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).
- [13] C. Sacket, D. Kielpinski, B. King, C. Langer, V. Meyer, C. Myatt, M. Rowe, Q. Turchette, W. Itano, D. Wienland, and C. Monroe. Experimental entanglement of four particles. *Nature* **404**, 256 (2000).
- [14] C. Roos, M. Riebe, H. Häffner, W. Hänsel, J. Benhelm, G. Lancaster, F.-K. C. Becher, and R. Blatt. Control and Measurement of Three-Qubit Entangled States. *Science* **304**, 1478 (2004).
- [15] R. Voss and R. Webb. Macroscopic Quantum Tunneling in 1- μ m Nb Josephson Junctions. *Phys. Rev. Lett.* **47**, 265 (1981).

- [16] A. Caldeira and A. Leggett. Influence of Dissipation on Quantum Tunneling in Macroscopic Systems. *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211 (1981).
- [17] J. Martinis, M. Devoret, and J. Clarke. Energy-Level Quantization in the Zero-Voltage State of a Current-Biased Josephson Junction. *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1543 (1985).
- [18] Y. Nakamura, Y. A. Pashkin, and J. Tsai. Coherent Control of Macroscopic Quantum States in a single-Cooper-pair box. *Nature* **398**, 786 (1999).
- [19] D. Vion, A. Aassime, A. Cottet, P. Joyez, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve, and M. Devoret. Manipulating the Quantum State of an Electrical Circuit. *Science* **296**, 886 (2002).
- [20] E. Collin, G. Ithier, A. Aassime, P. Joyez, D. Vion, and D. Esteve. NMR-like Control of a Quantum Bit Superconducting Circuit. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 157005 (2004).
- [21] J. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, and C. Urbina. Rabi Oscillations in a Large Josephson Junction Qubit. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 117901 (2002).
- [22] I. Chiorescu, Y. Nakamura, C. Harmans, and J. Mooij. Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit. *Science* **299**, 1869 (2003).
- [23] T. Duty, D. Gunnarsson, K. Bladh, and P. Delsing. Coherent dynamics of a charge qubit. *Phys. Rev. B* **69**, 1405023 (2004).
- [24] J. Majer, J. Paaauw, A. ter Haar, C. Harmans, and J. Mooij. Spectroscopy on two coupled flux qubits. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 090501 (2005).
- [25] Wallraff, D. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R. Schoelkopf. Cavity quantum electrodynamics : Coherent coupling of a single photon to a Cooper pair box. *Nature* **431**, 138 (2004).
- [26] Y. Pashkin, T. Yamamoto, O. Astafiev, Y. Nakamura, D. Averin, and J. Tsai. Quantum oscillation in two coupled charge qubit. *Nature* **421**, 823 (2003).
- [27] I. Chiorescu, P. Bertet, K. Semba, Y. Nakamura, C. Harmans, and J. Mooij. Coherent dynamics of a flux qubit coupled to a harmonic oscillator. *Nature* **431**, 159 (2004).
- [28] R. McDermott, R. Simmonds, M. Steen, K. Cooper, K. Cicak, K. Osborn, S. Oh, D. Pappas, and J. Martinis. Simultaneous state measurement of coupled Josephson phase qubits. *Science* **307**, 1299 (2005).
- [29] T. Yamamoto, Y. Pashkin, O. Astafiev, Y. Nakamura, and J. Tsai. Demonstration of conditional gate operation using superconducting charge qubits. *Nature* **425**, 941 (2003).
- [30] O. Astafiev, Y. A. Paskin, Y. Nakamura, T. Yamamoto, and J. Tsai. Quantum noise in the Josephson Charge Qubit. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 267007 (2004).
- [31] K. Cooper, M. Steffen, R. McDermott, R. Simmonds, S. Oh, D. Hite, and J. Martinis. Observation of Quantum Oscillations between a Josephson Phase Qubit and a Microscopic Resonator Using fast Readout. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 180401 (2004).
- [32] P. Bertet, I. Chiorescu, G. Burkard, K. Semba, C. Harmans, D. DiVicenzo, and J. Mooij. Relaxation and Dephasing in a Flux qubit. *submitted to publication, cond-mat/0412485* (2005).

- [33] G. Ithier, E. Collin, P. Joyez, P. Meeson, D. Vion, D. Esteve, F. Chiarello, A. Shnirman, Y. Makhlin, J. Schrieffer, and G. Schön. Decoherence in a superconducting quantum bit circuit. *submitted to publication* (2005).
- [34] O. Buisson, F. Balestro, J. Pekola, and F. Hekking. One Shot Quantum Measurement Using a Hysteretic dc SQUID. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 238304 (2003).
- [35] K. Likharev. *Dynamics of Josephson junctions and circuits* (Gordon and Breach science publishers, 1986).
- [36] V. Ambegaokar and A. Baratoff. Tunneling Between Superconductors. *Phys. Rev. Lett.* **10**, 486 (1963).
- [37] V. Ambegaokar and A. Baratoff. Tunneling Between Superconductors - Errata. *Phys. Rev. Lett.* **11**, 104 (1963).
- [38] B. Josephson. Possible new effects in superconductive tunneling. *Phys. Lett.* **1**, 251 (1962).
- [39] W. Stewart. Effect of ac Impedance on dc Voltage-Current Characteristics. *Appl. Phys. Lett.* **12**, 277 (1968).
- [40] D. McCumber. Current-Voltage Characteristics of Josephson Junctions. *J. Appl. Phys.* **39**, 3133 (1968).
- [41] C. Tesche and J. Clarke. dc SQUID : Noise and Optimization. *J. Low Temp. Phys.* **29**, 301 (1977).
- [42] V. Lefevre-Seguin, E. Turlot, C. Urbina, D. Esteve, and M. Devoret. Thermal activation of a hysteretic dc superconducting quantum interference device from its zero-voltage states. *Phys. Rev. B* **46**, 5507 (1992).
- [43] A. Larkin and Y. Ovchinnikov. Effect of level quantization on the lifetime of metastable states. *Sov. Phys. JETP* **64**, 185 (1986).
- [44] A. Lupascu, C. Verwijns, R. Schouten, C. Harmans, and J. Mooij. Non destructive Readout for a Superconducting Flux Qubit. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 177006 (2004).
- [45] I. S. *et al.* Direct Observation of Dynamical Bifurcation between Two Driven Oscillation States of a Josephson Junction. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 027005 (2005).
- [46] F. Balestro, J. Claudon, J. Pekola, and O. Buisson. Evidence of Two-dimensional Macroscopic Quantum Tunneling of a Current-Biased dc SQUID. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 158301 (2003).
- [47] G. Dolan. Offset Masks for Lift-off Photoprocessing. *Appl. Phys. Lett.* **31**, 337 (1977).
- [48] A. Zorin. The Thermocoax Cable as the Microwave Frequency Filter for Single Electron Circuits. *Rev. Sci. Instrum.* **66**, 4296 (1995).
- [49] F. Balestro. *Dynamique quantique d'un SQUID-DC* (Thèse de doctorat, Grenoble I, 2003).
- [50] T. V. Duzer and C. Turner. *Principles of Superconductive Devices and Circuits* (Edward Arnold Publishers, 1981).

- [51] M. Giroud, O. Buisson, Y. Wang, and B. Pannetier. Resistive Transition of Superconducting Wire Networks. Influence of Pinning and Fluctuations. *J. Low Temp. Phys.* **87**, 683 (1992).
- [52] K. Gupta, R. Garg, and I. Bahl. *Microstrip Lines and Slotlines* (Artech House, 1979).
- [53] S. Ramo, J. Whinnery, and T. V. Duzer. *Fields and Waves in Communication Electronics* (John Wiley and Sons, 1994).
- [54] M. Devoret, J. Martinis, and J. Clarke. Measurements of Macroscopic Quantum Tunneling out of the Zero-Voltage State in a Current-Biased Josephson Junction. *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1908 (1985).
- [55] B. Ivlev and Y. Ovchinnikov. Decay of metastable states in a situation with close-lying tunneling trajectories. *Zh. Eksp. Teor. Phys.* **93**, 668 (1987).
- [56] C. M. Smith, B. Ivlev, and G. Blatter. Macroscopic Quantum Tunneling in a dc SQUID : Instanton splitting. *Phys. Rev. B* **49**, 4033 (1994).
- [57] F. Sharifi, J. Gavilano, and J. van Harlingen. Macroscopic Quantum Tunneling and Thermal Activation from Metastable States in a dc SQUID. *Phys. Rev. Lett.* **61**, 742 (1988).
- [58] S.-X. Li, Y. Yu, Y. Zhang, W. Qiu, S. Han, and Z. Wang. Quantitative study of Macroscopic Quantum Tunneling in a dc SQUID : A System with Two Degrees of Freedom. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 98301 (2002).
- [59] H. Brinkman. *Physica (Utrecht)* **22**, 149 (1956).
- [60] Y.-C. Chen. *J. Low Temp. Phys.* **65**, 133 (1986).
- [61] A. Caldeira and A. Leggett. *Ann. Phys.* **149**, 374 (1983).
- [62] *Quantum Tunneling in Condensed Media, Modern Problems in Condensed Matter Sciences Vol. 34* (edited by Yu. Kagan and A.J. Leggett, Elsevier Science Publishers, Amsterdam), 1992).
- [63] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity, second edition* (McGraw-Hill, Inc., 1996).
- [64] J. Martinis and H. Grabert. Thermal enhancement of macroscopic quantum tunneling : Derivation from the noise theory. *Phys. Rev. B* **38**, 2371 (1988).
- [65] R. Koch, J. Clarke, W. Goubau, J. Martinis, C. Pegrum, and D. van Harlingen. *J. of Low Temp. Phys* **51**, 207 (1983).
- [66] V. Foglietti, W. Gallagher, M. Ketchen, A. Kleinsasser, R. Koch, S. Raider, and R. Sandstrom. Low-frequency noise in low 1/f noise dc SQUID's. *Appl. Phys. Lett.* **49**, 1393 (1986).
- [67] G. Stan, S. Field, and J. Martinis. Critical Field for Complete Vortex Expulsion from Narrow Superconducting Strips. *Phys. Rev. Lett.* **93**, 267007 (2004).
- [68] F. Wellstood, C. Urbina, and J. Clarke. Flicker (1/f) noise in the critical current of Josephson junctions at 0.09-4.2 K. *Appl. Phys. Lett.* **85**, 5296 (2004).

- [69] J. Kivioja, T. Niemien, J. Claudon, . Buisson, F. Hekking, and J. Pekola. Observation of Transition from Escape Dynamics to Underdamped Phase Diffusion in a Josephson Junction. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 247002 (2005).
- [70] G. Ithier (Stage de Maîtrise, 2002).
- [71] N. Gronbech-Jensen and M. Cirillo. Rabi-type oscillations in a classical Josephson junction. *cond-mat/0502521* (2005).
- [72] A. Ratchov (Thèse de doctorat, Grenoble I, 2005).
- [73] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Processus d'interaction entre photons et atomes* (EDP Sciences/CNRS Éditions, 2001).
- [74] I. Rabi. Space Quantization in a Gyating Magnetic Field. *Phys. Rev.* **51**, 652 (1937).
- [75] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Lalœ. *Mécanique Quantique, tome II, Nouveau tirage* (Hermann, 1998).
- [76] J. Claudon, F. Balestro, F. Hekking, and O. Buisson. Coherent Oscillations in a Superconducting Multilevel Quantum System. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 187003 (2004).
- [77] A. Cottet. *Implementation of a quantum bit in a superconducting circuit* (Ph. D. Thesis, Paris VI, 2002).
- [78] J. Martinis, S. Nam, J. Aumento, and K. Lang. Decoherence of a superconducting qubit due to bias noise. *Phys. Rev. B* **67**, 094510 (2003).
- [79] C. van der Wal, F. Wilhem, C. Harmans, and J. Mooij. Engineering decoherence in Josephson persistent-current qubits. *Eur. Phys. J. B* **31**, 111 (2003).
- [80] R. Wangsness and F. Bloch. The Dynamical theory of Nuclear Interaction. *Phys. Rev.* **89**, 728 (1953).
- [81] A. Redfield. On the Theory of Relaxation process. *IBM J.* **19**, 1 (1957).
- [82] A. Abragam. *Les Principes du Magnétisme Nucléaire* (Bibliothèque des sciences et techniques nucléaires, 1961).
- [83] Y. Makhlin and A. Shnirman. *JETP Letters* **78**, 497 (2003).
- [84] Y. Makhlin, G. Schön, and A. Shnirman. Quantum-state engineering with Josephson-junction devices. *Rev. Mod. Phys.* **73**, 357 (2001).
- [85] H. Callen and T. Welton. Irreversibility and Generalized Noise. *Phys. Rev.* **83**, 34 (1951).
- [86] G. Zimmerli, T. Eils, R. Kautz, and J. Martinis. Noise in the Coulomb blockade electrometer. *Appl. Phys. Lett.* **61**, 237 (1992).
- [87] A. Zorin, F.-J. Ahlers, J. Niemeyer, T. Wimann, H. Wolf, V. Krupenin, and S. Lotkhov. Background charge noise in metallic single-electron tunneling devices. *Phys. Rev. B* **53**, 13682 (1996).
- [88] P. Bertet, I. Chiorescu, K. Semba, C. Harmans, and J. Mooij. Detection of a persistent-current qubit by resonant activation. *Phys. Rev. B* **70**, 100501 (2004).

- [89] J. Hauß. *Interaction entre un SQUID et un champ monochromatique* (Stage de Maîtrise, 2004).
- [90] P. Shor. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Phys. Rev. A* **52**, R2493 (1995).
- [91] A. Steane. Error Correcting Codes in Quantum Theory. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 793 (1996).

Annexe A

Paramètres des SQUIDs mesurés

	Notation	SQUID S_1	SQUID S_2
Paramètres électriques			
Courant critique d'une jonction	I_0	$3.028 \mu\text{A}$	$1.242 \mu\text{A}$
Capacité d'une jonction	C_0	760 fF	560 fF
Inductance de la boucle	L_s	98 pH	280 pH
Dissymétrie d'inductance	η	0.484	0.414
Grandeurs caractéristiques			
Énergie Josephson (pour une JJ)	E_J/k_B	72.2 K	29.6 K
Énergie de charge (pour une JJ)	E_c/k_B	4.9 mK	6.6 mK
Paramètre de couplage	b	1.11	0.95
Environnement proche			
Inductance de filtrage on-chip	L_{oc}	14 nH	9 nH
Capacité plane X/Al ₂ O ₃ /X	C_p	150 pF	~ 150 pF
Matériau X déposé		Aluminium	Or
Mutuelle avec la ligne MO	M_s	0.7 pH	1.3 pH
Inductance en fin de ligne MO	L_{mo}	1 nH	2 nH
Fabrication			
Épaisseur d'aluminium ($\times 2$)		40 nm	15 nm
Pression de dépôt		2×10^{-8} mbar	2×10^{-5} mbar
Pression statique d'oxygène (10 min)		90 mbar	1.1×10^{-1} mbar

TAB. A.1 – Paramètres électriques des SQUIDs S_1 et S_2 .

Annexe B

Programmes d'analyse de données

Cette annexe dresse une liste des programmes développés au cours de la thèse pour accélérer l'analyse des données. Ils sont codés en FORTRAN et nous ne rentrons pas ici dans le détail de leur fonctionnement. Les programmes prennent tous comme entrées minimales les paramètres électriques du SQUID (I_0 , C_0 , b et η).

- ★ **CRITIQUE** : courant critique $I_c[0](\Phi_p)$ pour $\Phi_p \in [\Phi_{min}, \Phi_{max}]$.
entrées : ► Φ_{min} , Φ_{max} et le nombre de points du tracé.
- ★ **DL_POT** : DL complet (2D) à l'ordre 3 autour d'un minimum local.
entrées : ► I_p et Φ_p .
- ★ **f01** : position des niveaux d'énergie dans le puits de potentiel.
entrées : ► I_p et Φ_p .
- ★ **Courbes d'échappement en présence de bruit**
calculé $P_{ech}(I_p)$ sous Φ_p donné, pour I_p tel que $P_{ech} \in [P_{ech}^{min}, P_{ech}^{max}]$.
P(I)_MQT MQT
P(I)_I_BF MQT & bruit en courant BF
P(I)_I_HF MQT & bruit en courant HF
P(I)_B_BF MQT & bruit en flux BF
P(I)_B_HF MQT & bruit en flux HF
entrées : ► flux de polarisation Φ_p ,
 ► durée de la mesure Δt ,
 ► valeur RMS des fluctuations du bruit,
 ► P_{ech}^{min} , P_{ech}^{max} et le nombre de points du tracé.

★ **Analyse en flux des données d'échappement**

Calcul de $I_{ech}(\Phi_p)$ et $\Delta I(\Phi_p)$, pour $\Phi_p \in [\Phi_{min}, \Phi_{max}]$.

FLUX_MQT MQT
 FLUX_I_BF MQT & bruit en courant BF
 FLUX_I_HF MQT & bruit en courant HF
 FLUX_B_BF MQT & bruit en flux BF
 FLUX_B_HF MQT & bruit en flux HF

entrées :

- ▶ durée de la mesure Δt ,
- ▶ valeur RMS des fluctuations du bruit,
- ▶ Φ_{min} , Φ_{max} et le nombre de points du tracé.

★ **CONTRASTE** Calcule l'amortissement de $f_{coh}(t)$ sous l'action combinée des fluctuations de courant et de flux entre t_{min} et t_{max} .

entrées :

- ▶ valeurs des composants de l'environnement électrique,
- ▶ valeur RMS des fluctuations de flux (BF),
- ▶ temps de relaxation T_1 ,
- ▶ sensibilités au bruit longitudinal $(\partial\nu_{01}/\partial I_p)$ et $(\partial\nu_{01}/\partial\Phi_p)$,
- ▶ t_{min} , t_{max} et nombre de points du tracé.

Annexe C

Matrice de l'opérateur \tilde{X} dans la base $\{|n\rangle\}$, fonction d'onde des états $|n\rangle$

On considère l'hamiltonien d'oscillateur harmonique (OH) perturbé par un terme cubique :

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_p(\tilde{P}^2 + \tilde{X}^2) - \hbar\omega_p\sigma\tilde{X}^3. \quad (\text{C.1})$$

Comme σ est de l'ordre de quelques pourcents, les états propres $|n\rangle$ de \hat{H}_0 peuvent être déterminés en première approximation par la théorie des perturbations au premier ordre, à partir des états propres de l'OH. Nous utilisons les résultats p. 1106 de la référence [75] (en normant les états). L'expression de \tilde{X} dans la base des états propres de l'OH est connue, reste à changer de base pour obtenir la matrice $[\tilde{X}]$ de \tilde{X} dans la base $\{|n\rangle\}$. Nous présentons ici le résultat en nous restreignant aux 4 premiers états, ce qui est suffisant étudier les changements introduits par la perturbation cubique du potentiel.

$$[\tilde{X}] = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{3/2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{couplage } |n\rangle \rightarrow |n+1\rangle \\ \text{ordre 0 en } \sigma \end{array}$$

$$+ \sigma \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -21/2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{déplacement des énergies propres} \\ \text{ordre 1 en } \sigma \end{array}$$

$$+ \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3/2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{couplage } |n\rangle \rightarrow |n+2\rangle \\ \text{ordre 1 en } \sigma. \end{array}$$

Fonction d'onde des états $|n\rangle$. La fonction d'onde $\varphi_n(\tilde{x})$ associée à l'état $|n\rangle$ est la projection de $|n\rangle$ sur la représentation $|\tilde{x}\rangle$:

$$\varphi_n(\tilde{x}) = \langle \tilde{x} | n \rangle. \quad (\text{C.2})$$

Sont représentés sur la figure C.1 ci-dessous les modules carrés de quelques unes des premières fonctions d'ondes propres.

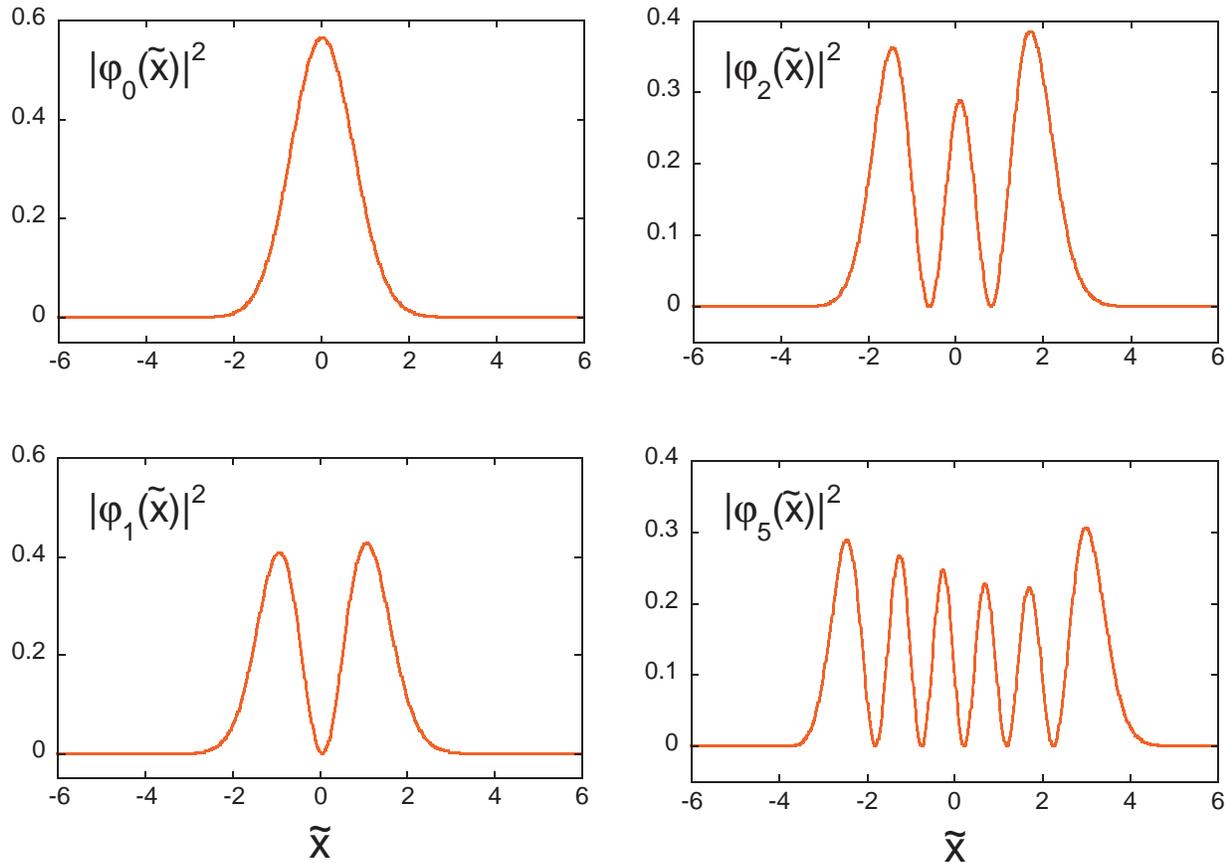


FIG. C.1 – Densité de probabilité associée aux fonctions propres $\varphi_0(\tilde{x})$, $\varphi_1(\tilde{x})$, $\varphi_2(\tilde{x})$ et $\varphi_5(\tilde{x})$. Le fond du puits de potentiel est situé en $\tilde{x} = 0$. La légère dissymétrie entre $\tilde{x} < 0$ et $\tilde{x} > 0$ est causée par la perturbation cubique du potentiel.

Annexe D

Passage à la représentation ”*”

Pour connaître l'évolution temporelle de l'état $|\varphi(t)\rangle$ du SQUID soumis à l'action d'un champ MO, il faut résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi(t)\rangle &= \widehat{H}(t) |\varphi(t)\rangle \\ |\varphi(0)\rangle &= |0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

où $\widehat{H}(t)$ dépend explicitement du temps :

$$\begin{aligned} \widehat{H}(t) &= \widehat{H}_0 + \widehat{W}(t) \\ \widehat{W}(t) &= -\sqrt{2}\hbar\Omega_1 \cos(\omega t) \tilde{X}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

La résolution de ce problème est compliquée par la dépendance temporelle de $\widehat{H}(t)$. Elle se simplifie en effectuant une approximation de type onde tournante, justifiée après un passage à la représentation interaction. Puis on se ramène à un problème indépendant du temps en introduisant une nouvelle représentation notée ”*”.

Le problème en représentation interaction. Soit $|\varphi^I(t)\rangle$ le vecteur d'état du SQUID en représentation interaction, défini par :

$$|\varphi^I(t)\rangle = e^{i\widehat{H}_0 t/\hbar} |\varphi(t)\rangle. \quad (\text{D.3})$$

Il évolue selon l'équation de Schrödinger en représentation interaction :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi^I(t)\rangle = \widehat{W}^I(t) |\varphi^I(t)\rangle, \quad (\text{D.4})$$

où $\widehat{W}^I(t)$ est donné par :

$$\widehat{W}^I(t) = e^{i\widehat{H}_0 t/\hbar} \widehat{W}(t) e^{-i\widehat{H}_0 t/\hbar}. \quad (\text{D.5})$$

Dans la représentation interaction, les variations rapides (à des pulsations voisines de ω_p) sont supprimées. On introduit ensuite les composantes $C_n^I(t)$ de $|\varphi^I(t)\rangle$ dans la base propre $\{|n\rangle\}$ de l’hamiltonien \widehat{H}_0 :

$$C_n^I(t) = \langle n | \varphi^I(t) \rangle, \quad n \in [0, N - 1]. \quad (\text{D.6})$$

L’équation (D.4) se réécrit comme un système de N équations couplées :

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_n^I(t) = \sum_{k=0}^{N-1} W_{nk}^I(t) \times C_k^I(t), \quad n \in [0, N - 1]. \quad (\text{D.7})$$

La notation $W_{nk}^I(t)$ désigne l’élément de matrice $\langle n | \widehat{W}^I(t) | k \rangle$. Ce dernier fait intervenir quatre exponentielles oscillantes :

$$W_{nk}^I(t) = \frac{\hbar\Omega_1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \left[\sqrt{n+1} \langle n | k-1 \rangle e^{-i\omega_{n,n+1}t} + \sqrt{n} \langle n | k+1 \rangle e^{+i\omega_{n-1,n}t} \right]. \quad (\text{D.8})$$

Nous ne retenons que les termes variant lentement devant la pulsation ω_p (termes séculaires). L’approximation séculaire possède une interprétation physique simple. En effet, chacun des termes oscillant décrit un processus élémentaire qui associe une transition entre niveaux du SQUID et un échange de photon avec le champ. Dans le couplage avec le champ oscillant, on ne conserve que les termes résonants :

- transition $|n+1\rangle \rightarrow |n\rangle$ avec émission d’un photon
- transition $|n-1\rangle \rightarrow |n\rangle$ avec absorption d’un photon

Tant que $\Omega_1 \ll \omega_p$ et $|\omega - \omega_{n-1,n}| \ll \omega_p$, les autres transitions sont non résonantes, donc très peu probables.

Considérons l’expression de \widetilde{X} exacte à l’ordre 1 en σ , donnée dans l’annexe C. On peut remarquer que la prise en compte des termes d’ordre 1 en σ aurait introduit des termes non résonant oscillants à des pulsations de l’ordre de $2\omega \pm \omega_p$ pour le couplage entre voisins d’ordre 2 et $\pm\omega$ pour les termes diagonaux. On peut donc se contenter de l’ordre 0 en σ dans l’expression des éléments de matrice de \widetilde{X} .

En prenant la convention $C_{-1}^I(t) = C_N^I(t) = 0$, les coefficients $C_n^I(t)$ évoluent donc selon le système de N équations couplées :

$$\frac{d}{dt} C_n^I(t) = -i \frac{\Omega_1}{2} \left[\sqrt{n+1} C_{n+1}^I(t) e^{-i[\omega_{n,n+1}-\omega]t} + \sqrt{n} C_{n-1}^I(t) e^{+i[\omega_{n-1,n}-\omega]t} \right], \quad (\text{D.9})$$

avec $n \in [0, N - 1]$.

Introduction de la représentation ””.** La dernière étape du calcul consiste à éliminer les dépendances temporelles exponentielles dans les équations précédentes. On introduit

tout d'abord les δ_k définis comme le désaccord entre la pulsation d'excitation et la pulsation de Bohr associée à la transition $|k-1\rangle \rightarrow |k\rangle$:

$$\delta_k = \omega_{k-1,k} - \omega, \quad k \in [1, N-1]. \quad (\text{D.10})$$

Puis on définit une nouvelle représentation par le changement de variable :

$$C_0^I(t) = C_0^*(t) \quad (\text{D.11})$$

$$C_n^I(t) = C_n^*(t) e^{it \sum_{k=1}^n \delta_k}, \quad n \in [1, N-1]. \quad (\text{D.12})$$

Dans le cas d'un système à 2 niveaux, la transformation coïncide avec le passage au référentiel tournant. Dans cette représentation, un vecteur d'état $|\varphi^*(t)\rangle$ évolue suivant l'action de l'hamiltonien indépendant du temps \hat{H}^* :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\varphi^*(t)\rangle &= \hat{H}^* |\varphi^*(t)\rangle \\ |\varphi^*(0)\rangle &= |0^*\rangle = |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Dans la base propre de \hat{H}_0 , \hat{H}^* s'écrit :

$$\hat{H}^* = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\Omega_1}{2} & \delta_1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \sqrt{N-1} \frac{\Omega_1}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{N-1} \frac{\Omega_1}{2} & \sum_{k=1}^{N-1} \delta_k \end{pmatrix}. \quad (\text{D.14})$$

Signalons pour conclure que le passage direct de la représentation de Schrödinger à la représentation "*" est en fait très simple :

$$\langle n | \varphi^*(t) \rangle = e^{+in\omega t} \langle n | \varphi(t) \rangle, \quad n \in [0, N-1]. \quad (\text{D.15})$$

Annexe E

Fonctions de corrélation et densités spectrales

E.1 Signal aléatoire classique

Fonction d'autocorrélation. On considère un signal aléatoire $\delta X(t)$ réel, stationnaire, de moyenne nulle. On définit la fonction d'autocorrélation classique $G_X^c(\tau)$ par :

$$G_X^c(\tau) = \langle \delta X(\tau) \delta X(0) \rangle, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (\text{E.1})$$

Les crochets désignent une moyenne statistique sur un ensemble de réalisations du signal $\delta X(t)$. $G_X^c(\tau)$ est une fonction réelle, paire par symétrie entre le futur et l'avenir.

Densités spectrales classiques. La densité spectrale classique $S_X^c(\omega)$ du signal aléatoire $\delta X(t)$ est définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

$$S_X^c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G_X^c(\tau) e^{-i\omega\tau}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (\text{E.2})$$

Vu les propriétés de la fonction d'autocorrélation, $S_X^c(\omega)$ est réelle et paire. La relation (E.2) s'inverse grâce au théorème de Wiener-Kintchine :

$$G_X^c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_X^c(\omega) e^{i\omega\tau}. \quad (\text{E.3})$$

En particulier, les fluctuations quadratiques moyennes $\langle X^2 \rangle$ du signal s'écrivent :

$$G_X^c(0) = \langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_X^c(\omega). \quad (\text{E.4})$$

E.2 Signal aléatoire quantique

Fonctions d'autocorrélation. On considère une variable quantique $\widehat{\delta X}$ de moyenne nulle. $\widehat{\delta X}$ est un opérateur qui s'applique sur une source de fluctuation complètement caractérisée par son hamiltonien \widehat{H}_X et sa température T . On note $\widehat{\delta X}(t)$ l'opérateur $\widehat{\delta X}$ en représentation interaction :

$$\widehat{\delta X}(t) = e^{i\widehat{H}_X t/\hbar} \widehat{\delta X} e^{-i\widehat{H}_X t/\hbar}. \quad (\text{E.5})$$

Comme $\widehat{\delta X}(t)$ ne commute pas nécessairement avec $\widehat{\delta X}(0)$, on peut définir plusieurs fonctions d'autocorrélation. On introduit la fonction d'autocorrélation quantique $G_X(\tau)$:

$$G_X(\tau) = \langle \widehat{\delta X}(\tau) \widehat{\delta X}(0) \rangle, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (\text{E.6})$$

Pour faciliter la comparaison avec la limite classique, pour laquelle les opérateurs commutent, on introduit la fonction d'autocorrélation symétrisée $G_X^s(\tau)$:

$$G_X^s(\tau) = \frac{1}{2} \left[\langle \widehat{\delta X}(\tau) \widehat{\delta X}(0) \rangle + \langle \widehat{\delta X}(0) \widehat{\delta X}(\tau) \rangle \right], \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (\text{E.7})$$

Densités spectrales. On définit la densité spectrale quantique par :

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle \widehat{\delta X}(0) \widehat{\delta X}(\tau) \rangle e^{-i\omega\tau}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (\text{E.8})$$

La fonction $S_X(\omega)$, définie pour $\omega \in \mathbb{R}$, caractérise la capacité de la source de fluctuations à échanger un photon d'énergie $\hbar|\omega|$. Les pulsations positives (resp. négatives) correspondent à l'absorption (resp. l'émission) d'un photon par la source de bruit. La dissymétrie entre pulsations négatives et positives, bien visible sur la figure E.2 traduit le déséquilibre entre les processus d'absorption et d'émission. On définit également la densité spectrale symétrisée (ou semi-classique) $S_X^s(\omega)$:

$$\begin{aligned} S_X^s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G_X^s(\tau) e^{-i\omega\tau} \\ &= \frac{1}{2} [S_X(-\omega) + S_X(+\omega)], \quad \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Limite classique. Les fluctuations générées par la source peuvent être considérées comme un signal classique sur la gamme de pulsations $|\omega| \ll \omega_{th}$, ω_{th} étant la pulsation thermique associée à la température T de la source. Elle est définie par $\hbar\omega_{th} = k_B T$. On a alors :

$$G_X^s(\omega) \approx G_X^c(\omega) \quad (\text{E.10})$$

$$S_X^s(\omega) \approx S_X^c(\omega), \quad |\omega| \ll \omega_{th}. \quad (\text{E.11})$$

La partie suivante présente les différentes quantités, ainsi que leurs valeurs limites dans le cadre des fluctuations de courant générées par une impédance.

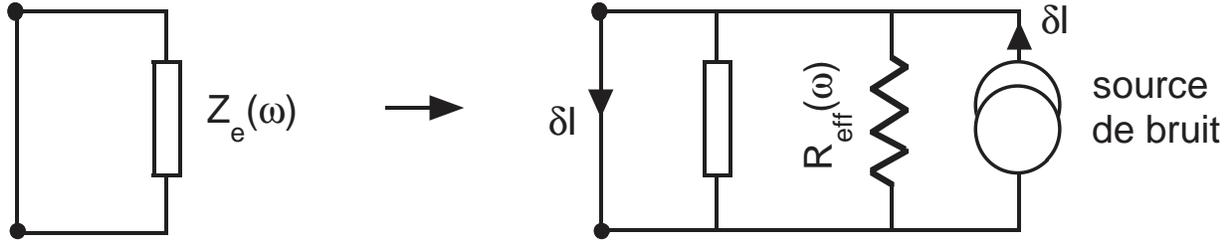


FIG. E.1 – Fluctuations de courant dans une branche de circuit d'impédance négligeable, chargée par une impédance $Z_e(\omega)$. Cette impédance peut être vue comme l'association en parallèle d'une résistance effective $R_{eff}(\omega)$ et d'une impédance imaginaire pure (rectangle).

E.3 Environnement décrit par une impédance

On considère une impédance $Z_e(\omega)$ qui charge une portion de circuit d'impédance négligeable (figure E.1). Elle génère des fluctuations de courant $\widehat{\delta I}$ dans la branche considérée. Les fluctuations totales de courant présentent un spectre de type Johnson-Nyquist, donné par le théorème de fluctuation-dissipation quantique [85] :

$$S_I(\omega) = \frac{\hbar\omega}{2\pi} \left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) + 1 \right] \text{Re}[1/Z_e(\omega)]. \quad (\text{E.12})$$

$\text{Re}[1/Z_e(\omega)]^{-1} = R_{eff}(\omega)$ s'interprète comme la résistance effective en parallèle avec la branche de circuit considérée. C'est cet élément résistif qui est la source des fluctuations. Suivant le domaine de pulsations, les fluctuations sont dominées par des processus physiques différents, résumés dans le tableau E.1. La densité spectrale symétrisée associée s'écrit :

$$S_I^s(\omega) = \frac{\hbar\omega}{2\pi} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \text{Re}[1/Z_e(\omega)]. \quad (\text{E.13})$$

Ces deux fonctions sont représentées dans le cadre d'un environnement purement résistif ($Z_e(\omega) = R$) sur la page suivante. Aux basses fréquences, le bruit peut être considéré comme un signal aléatoire classique. $S_I^s(\omega)$ est alors donnée par la formule de Nyquist généralisée, bien connue en électronique :

$$S_I^s(\omega) = S_I^c(\omega) = \frac{k_B T}{\pi R_{eff}(\omega)}, \quad |\omega| \ll \omega_{th}. \quad (\text{E.14})$$

Domaine de ω	$\omega < 0$		$0 < \omega$	
Processus associé	émission d'un photon $\hbar \omega $ par la source de bruit		absorption d'un photon $\hbar \omega $ par la source de bruit	
Origine des fluctuations	$ \omega \gg \omega_{th}$	$\omega_{th} \gg \omega $ fluctuations thermiques	$\omega \ll \omega_{th}$	$\omega_{th} \ll \omega$ point zéro
$S_I(\omega)$	0	$k_B T / (\pi R_{eff}(\omega))$	$k_B T / (\pi R_{eff}(\omega))$	$\hbar\omega / (\pi R_{eff}(\omega))$

TAB. E.1 – Processus d'absorption et d'émission de photons.

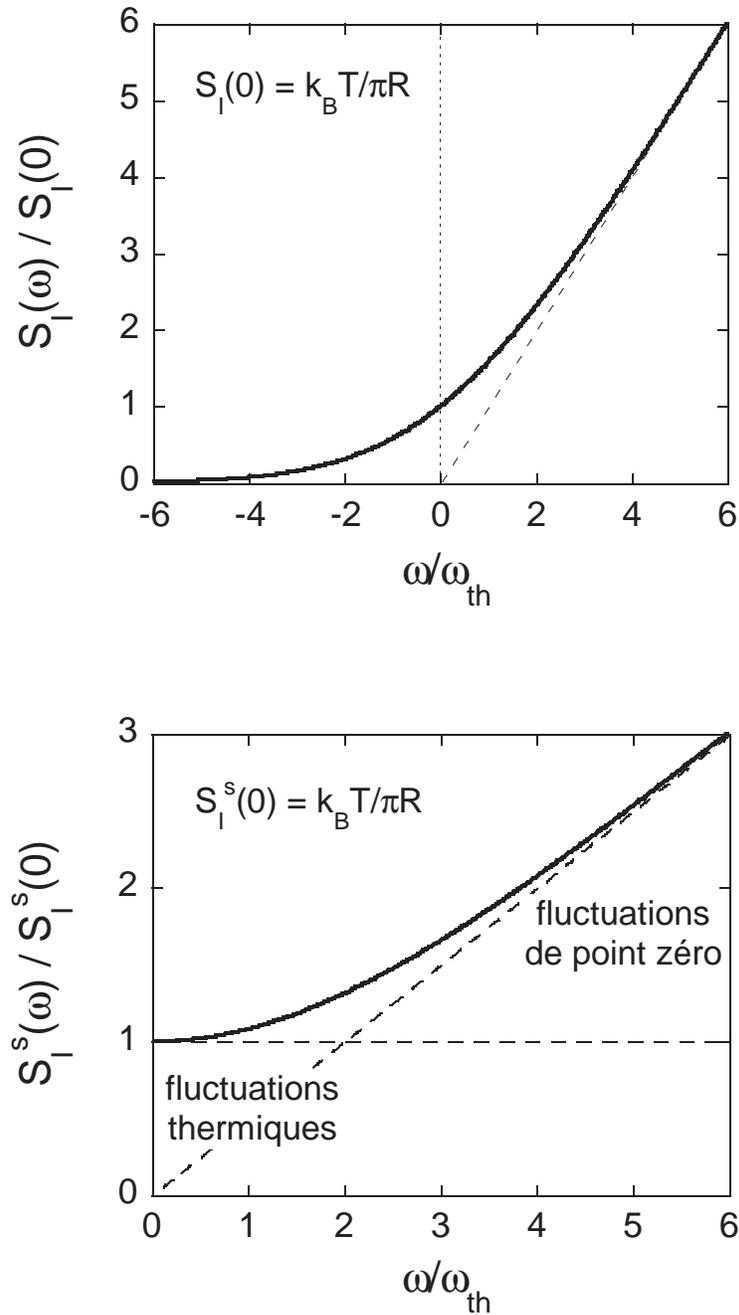


FIG. E.2 – Évolution des densités spectrales quantique (en haut) et symétrisée (en bas) des fluctuations de courant générées par une résistance. Le bruit basse fréquence est dominé par les fluctuations thermiques. Au delà de la pulsation thermique ω_{th} , les modes de l'environnement sont vides et seules subsistent les fluctuations de point zéro.

Annexe F

Publications

◆ "Evidence of Two-dimensional Macroscopic Quantum Tunneling of a Current-Biased dc SQUID"

F. Balestro, J. Claudon, J.P. Pekola and O. Buisson,
Phys. Rev. Lett. **91**, 158301 (2003).

◆ "Coherent Oscillations in a Superconducting Multilevel Quantum System"

J. Claudon, F. Balestro, F.W.J. Hekking and O. Buisson,
Phys. Rev. Lett. **93**, 187003 (2004).

◆ "Observation of Transition from Escape Dynamics to Underdamped Phase Diffusion in a Josephson Junction"

J.M. Kivioja, T.E. Niemien, J. Claudon, O. Buisson, F.W.J. Hekking and J.P. Pekola,
Phys. Rev. Lett. **94**, 247002 (2005).

◆ "Decoherence processes in a current biased dc SQUID"

J. Claudon, A. Fay, L.P. Lévy and O. Buisson,
soumis à publication.

Evidence of Two-Dimensional Macroscopic Quantum Tunneling of a Current-Biased dc SQUID

F. Balestro,¹ J. Claudon,¹ J. P. Pekola,^{1,2} and O. Buisson¹

¹*Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, Laboratoire Associé à l'Université Joseph Fourier, C.N.R.S., BP 166, 38042 Grenoble-CEDEX 9, France*

²*Low Temperature Laboratory, Helsinki University of Technology, P.O. Box 2200, 02015 HUT, Finland*
(Received 13 June 2003; published 6 October 2003)

The escape probability out of the superconducting state of a hysteretic dc SQUID has been measured at different values of the applied magnetic flux. At low temperatures, the escape current and the width of the probability distribution are temperature independent but they depend on flux. Experimental results do not fit the usual one-dimensional macroscopic quantum tunneling (MQT) law but are perfectly accounted for by the two-dimensional MQT behavior as we propose here. Near zero flux, our data confirms the recent MQT observation in a dc SQUID [S. Li *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 98301 (2002)].

DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.158301

PACS numbers: 85.25.Dq, 03.65.-w, 74.50.+r

Quantum dynamics of a current-biased Josephson junction (JJ) have been extensively studied during the past two decades [1]. The phase difference across the JJ obeys the same dynamics as the position of a fictitious particle moving in a one-dimensional tilted washboard potential, whose average slope is proportional to the current bias. For bias below the critical current, the particle is trapped in a local minimum. It can escape out by thermal activation (TA) or by macroscopic quantum tunneling (MQT). Many experiments have demonstrated these two escape regimes. Quantized energy levels and resonant activation have been observed by applying microwaves [1,2]. Very recently, Rabi oscillations and coherent temporal oscillations were observed in a current-biased JJ [3,4], in a Cooper pair transistor coupled to a biased JJ [5], and in a flux qubit [6]. Experiments on rf SQUID have also clearly demonstrated quantum dynamics in the form of MQT [1], resonant tunneling, or quantum superposition of states [7].

By contrast and surprisingly, very few studies have been performed in a current-biased dc SQUID in the quantum regime. The dynamics of a dc SQUID are described by 2 degrees of freedom and new phenomena can arise. The fictitious particle moves in this case in a two-dimensional (2D) potential. At zero magnetic field it has been predicted that escape out of a local minimum can occur via two different trajectories [8,9]. At nonzero magnetic field, MQT was derived only in the limit of small inductance of the loop [10], where the SQUID is nearly equivalent to a single junction with a flux-dependent critical current. In this case, the dynamics are one dimensional. To our knowledge, only three previous experiments were reported in the past discussing escape from a current-biased dc SQUID. In the TA regime, good agreement with 2D transition state theory [11] has been obtained [12]. Similar results were obtained in an rf SQUID [13]. In the quantum regime, no experimental evidence of two-dimensional behavior has been demonstrated until now. Sharifi *et al.* [14] claimed MQT observations but neither the amplitude of quantum fluctuations

nor the TA regime were understood. Recent measurements [15] have clearly observed MQT and TA regimes in a dc SQUID *at zero magnetic field*. Two-dimensional behavior could, however, not be observed because at zero flux the escape rate of their SQUID behaves exactly as that of a single Josephson junction, i.e., a 1D system. Understanding the dynamics of a hysteretic dc SQUID is very important in interpreting some recent quantum experiments [16,17], or a recently proposed experiment of a one shot quantum measurement in a superconducting charge qubit using a dc SQUID [18].

In this Letter, we report on an escape measurement in a dc SQUID both in the thermal and in the quantum regime. In contrast to previously reported results on MQT, the 1D tunneling escape formula cannot describe our experimental data. Since no theory has described MQT in a dc SQUID in the 2D regime at nonzero magnetic flux, we propose a method based on the zero magnetic field result derived in Ref. [8] but taking into account the flux dependence of the 2D potential. Our experimental data support quantitatively this approach.

The current-biased dc SQUID consists of two Josephson junctions in parallel in an inductive superconducting loop. The whole system has 2 degrees of freedom described by φ_1 and φ_2 , the phase difference across the two junctions. Assuming identical JJs, each having a critical current equal to I_0 and a capacitance equal to C_0 , the dynamics of the system can be treated as that of a fictitious particle moving in a two-dimensional potential given by [19]

$$U(x, y) = U_0[-sx - \cos x \cos y - \eta sy + b(y - \pi\Phi/\Phi_0)^2], \quad (1)$$

where $U_0 = \Phi_0 I_0 / \pi$ is the sum of the Josephson energy of the two JJs, $s = I_{dc} / (2I_0)$, $x = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2$, $y = (\varphi_1 - \varphi_2) / 2$, $b = \Phi_0 / (2\pi L I_0)$, and I_{dc} is the bias current. The asymmetry of inductances is parametrized by $\eta = (L_2 - L_1) / L$, where L_1 and L_2 are the inductances of the two branches and $L = L_1 + L_2$ is the inductance of the

SQUID loop. Φ is the applied flux and $\Phi_0 = h/2e$ is the flux quantum.

The potential presents valleys and mountains with local minima separated by saddle points along which the particle can escape. The barrier height between the minima and the saddle points depends on the bias current and magnetic flux and vanishes at the critical current I_c . I_c follows the usual flux dependence with Φ_0 periodicity. In the following, we consider $b \sim 1$ close to that of our dc SQUID. In this limit, there exists only one optimal trajectory that passes through the saddle point. Therefore we will not discuss escape out of a local minimum through two different trajectories [8,9]. Yet the 2D signature still exists because the optimal trajectory is not a straight line along the x direction but follows a path in the landscape with the tilt in the potential.

In the limit $s \lesssim s_c$, where $s_c = I_c/(2I_0)$ is the normalized effective critical current of the dc SQUID, we can expand the potential [Eq. (1)] to the third order. The escape occurs in a current and flux-dependent angle θ with respect to the x axis. Along this direction, we obtain the potential barrier height, $\Delta U = \Delta U_0 \sqrt{s_c} \cos^3 \theta / u \times (1 + \eta \tan \theta)^{3/2}$, and the plasma frequency, $\omega_p = \omega_{p0} (u \cos \theta / s_c)^{1/4} (1 + \eta \tan \theta)^{1/4}$, where u is the third derivative of the potential along the escape direction [12]. The quantities $\omega_{p0} = 2^{1/4} (\pi I_c / \Phi_0 C_0)^{1/2} (1 - s/s_c)^{1/4}$ and $\Delta U_0 = (4\sqrt{2}/3) (\Phi_0 / 2\pi) I_c (1 - s/s_c)^{3/2}$ are the usual plasma frequency and potential height, respectively, of a single JJ with an effective critical current I_c and a capacitance $2C_0$. The 2D character of the escape is exhibited in these expressions by the renormalization of the plasma frequency and the potential barrier height of a single JJ. Therefore the ratios ω_p / ω_{p0} and $\Delta U / \Delta U_0$ show deviations from 1D behavior.

Using the previous results of the renormalized plasma frequency and potential height, the escape rate out of a 2D potential well, in the TA regime, Γ^{TA} , is predicted to be [11]

$$\Gamma^{\text{TA}} = \frac{\omega_p}{2\pi} \frac{\omega_{w\perp}}{\omega_{s\perp}} \exp\left(-\frac{\Delta U}{k_B T}\right), \quad (2)$$

where $\omega_{w\perp}$ and $\omega_{s\perp}$ are, respectively, the transverse frequency modes in the well and at the saddle point [12]. We numerically analyzed the modulation of the escape current as a function of flux in the TA regime taking into account the transverse frequency modes in the escape rate. For our SQUID parameters, the deviation of $\omega_{w\perp} / \omega_{s\perp}$ from unity has been estimated to be 2% at zero flux and it quickly decreases to zero when increasing $|\Phi / \Phi_0|$. Since this small error appears only in the prefactor of Eq. (2), we will assume in the following that $\omega_{w\perp} / \omega_{s\perp} = 1$.

At low temperatures, the escape is dominated by quantum tunneling. This regime has been theoretically studied at zero flux in [8,9] discussing the splitting of the two

escape trajectories, or flux dependence in the low inductance limit ($b \gg 1$) [10]. There is thus far, to our knowledge, no theoretical treatment of flux dependence of 2D MQT, i.e., in the regime $b \lesssim 1$. Therefore we propose to use the MQT escape rate at zero magnetic flux [8,15] in the limit $b \approx 1$. We introduce in this escape rate, Γ^{MQT} , the 2D behavior by taking the plasma frequency ω_p and the potential barrier height ΔU along the escape direction, analogously to what was done in the TA regime earlier [12]:

$$\Gamma^{\text{MQT}} = f_{2D} \frac{\omega_p}{2\pi} \sqrt{864\pi\Delta U / \hbar\omega_p} \exp(-36\Delta U / 5\hbar\omega_p). \quad (3)$$

This 2D MQT rate thus depends on the magnetic flux and on the bias current. In the following, because $b \approx 1$, two escape trajectories are impossible and $f_{2D} \approx 1$. Note, however, that the 2D behavior remains through ΔU and ω_p . At zero magnetic flux, Γ^{MQT} equals that of a single JJ of critical current $2I_0$ and capacitance $2C_0$.

The escape probability P_{esc} from the zero voltage state during time Δt is a function of the amplitude of the bias current, the flux, and temperature. Measured escape probability using current dc pulses of duration $\Delta t = 50 \mu\text{s}$ is plotted in Fig. 2 (below). Each point corresponds to 4000 current pulses. By increasing the bias current, P_{esc} starts from zero far below the critical current where the barrier is high, and it becomes unity at currents close to and above the critical one. In the following, the escape current I_{esc} is defined as the bias current corresponding to $P_{\text{esc}} = 0.5$ and the width of the escape probability distribution ΔI as the difference between the currents at $P_{\text{esc}} = 0.9$ and $P_{\text{esc}} = 0.1$. The measured escape rate is extracted from $\Gamma(I_{\text{dc}}) = -\ln[1 - P_{\text{esc}}(I_{\text{dc}})] / \Delta t$ and it ranges from about 10 to 10^5 s^{-1} [inset of Fig. 2 (below)].

The sample is a dc SQUID consisting of two Al/AIO_x/Al tunnel junctions obtained by e-beam lithography and shadow evaporation (inset of Fig. 1). The area of each JJ is about $11 \mu\text{m}^2$. The tunnel resistance of the SQUID, $R_T \approx 80 \Omega$, and the superconducting gap $\Delta = 230 \mu\text{eV}$ are deduced from the dissipative branches of the IV characteristic and yield $I_0 \approx 2.3 \mu\text{A}$ using the Ambegaokar-Baratoff relation assuming two identical JJs. From MQT of a single JJ with the same area, we deduced $C_0 = 0.46 \text{ pF}$, which agrees with the typical specific capacitance of about $50 \text{ fF}/(\mu\text{m})^2$ for an AlO_x tunnel junction. The rectangular SQUID loop is about $10 \mu\text{m}$ by $40 \mu\text{m}$ giving an estimated magnetic inductance of about 70 pH . The kinetic inductance of the SQUID, deduced from the thin film resistivity, $\rho \approx 5.3 \mu\Omega \text{ cm}$, is coarsely estimated to be about 120 pH . The total inductance L , the sum of the kinetic and magnetic inductances, is therefore about 190 pH . An inductance asymmetry exists because the two SQUID branches have different lengths. We estimate $\eta \sim -0.2$

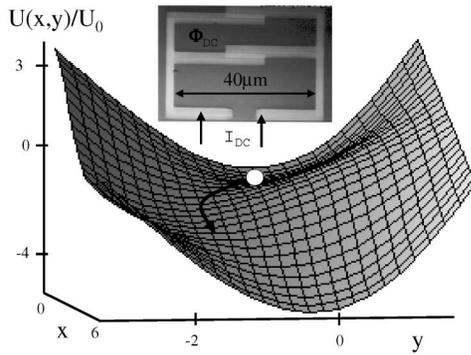


FIG. 1. Bidimensional potential of our SQUID which has parameters $s = 0.7$, $\Phi/\Phi_0 = -0.27$, $b = 0.6$, and $\eta = -0.26$. The particle and its escape path are drawn as an illustration. Inset: Photograph of the type of a dc SQUID used in the experiment.

by assuming proportionality between length of a branch and inductance. The immediate electromagnetic environment of the dc SQUID is determined by two 20 nm thin, 1 μm wide and 700 μm long superconducting aluminum wires terminated by two large pads for wire bonding. The estimated total inductance of the *in situ* wires, $L_e = 4.6$ nH, results again of the sum of 1.2 nH magnetic inductance of the coplanar strips and of 3.4 nH kinetic inductance of the wires. Although these SQUID parameters have been independently estimated, the accuracy in determining them this way is not sufficient. Therefore we extracted the inductance of the dc SQUID $L = 244$ pH and its asymmetry $\eta = -0.26$, the zero flux, the critical current $I_0 = 2.33$ μA , and the capacitance $C_0 = 0.46$ pF from the flux modulation characteristics of the escape current in the low temperature regime [see Fig. 3 (below)]. These parameters are in very good agreement with the rough estimates given above. Our $b = 0.6$ is much smaller than $b \approx 3$ of the earlier works [14,15] on MQT in a dc SQUID, indicating that the fictitious particle is much more affected by the two dimensionality of the potential.

The sample is enclosed in a cavity with resonances above 15 GHz, and it is anchored to the mixing chamber of the dilution refrigerator. This cavity is enclosed in a low temperature filter [20] consisting of thermocoax microwave filters [21] and Π filters. The attenuation of the dc lines is estimated to be at least 200 dB above 1 GHz at the mixing chamber temperature. Thermocoax filters were also introduced from 1.5 K to the low temperature filter, and low pass LC filters were used at room temperature. Current bias and voltage probe lines of the sample are separated from the computer using differential amplifiers. A superconducting shield was inserted inside the vacuum jacket of the cryostat and Mumetal surrounds the Dewar to protect the dc SQUID from external flux noise. Using this measurement setup, we separately measured a width of $\Delta I = 11$ nA on a 1 μA Josephson junction in its MQT regime.

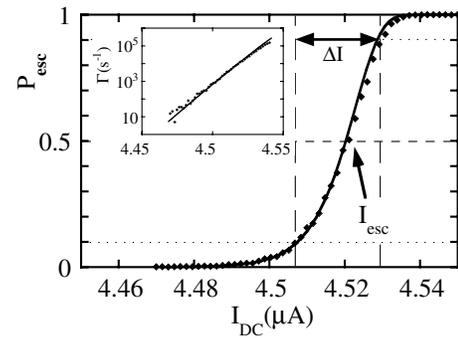


FIG. 2. Measured escape probability and escape rate (inset) as functions of the bias current at $\Phi/\Phi_0 = 0.07$, $T = 42$ mK, and $\Delta t = 50$ μs . The dots are experimental data and the lines the MQT prediction of Eq. (3). Values of I_{esc} and ΔI are indicated by dashed lines.

Figure 2 shows escape probability and escape rate at $\Phi/\Phi_0 = 0.07$ and $T = 42$ mK. At this particular flux value, the escape current is maximum (see Fig. 3) and the ratios ω_p/ω_{p0} and $\Delta U/\Delta U_0$ are equal to unity. Therefore the SQUID behaves as a single JJ. We can perfectly fit our data using 1D-MQT predictions (continuous line in Fig. 2) without free parameters which demonstrates that 1D-MQT theory describes the behavior of a dc SQUID at the maximum escape current. This first result confirms the recent MQT observation at zero flux performed by Li *et al.* [15]. It does not, however, demonstrate 2D escape behavior.

The escape current and the width versus applied external flux are directly extracted from the measured switching current distribution and they are plotted in Fig. 3 in the MQT regime at $T = 42$ mK. The width is periodic in flux with periodicity Φ_0 . It is minimum near $\Phi/\Phi_0 = 0.07$ and increases to reach maximum at $\Phi/\Phi_0 = \pm 0.5$. There is asymmetry between negative and positive flux values and discontinuities at $\Phi/\Phi_0 = \pm 0.5$. The usual 1D tunneling model cannot account for the main feature of our results. Namely, the 1D model predicts a decrease of

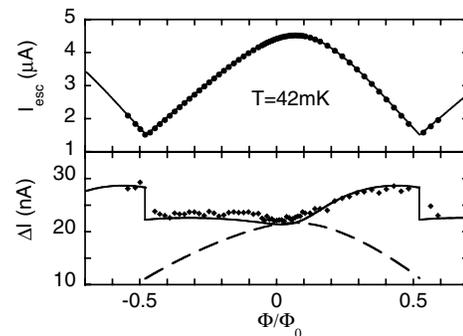


FIG. 3. Measured escape current and the width of the probability distribution against external applied flux at low temperatures (dots). 1D MQT and 2D MQT prediction [Eq. (3)] are shown, respectively, by dashed and solid lines.

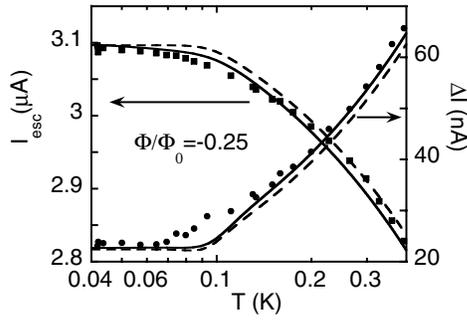


FIG. 4. Measured escape current and width of escape probability distribution ΔI vs temperature (symbols) at $\Phi/\Phi_0 = -0.25$ together with predictions when including (continuous line) or excluding (dashed line) the influence of the environment. We assume that the total escape rate is the sum of Γ_{MQT} and Γ_{TA} .

the width, $\Delta I \sim (2I_{0sc})^{3/5}$ in the MQT regime (dashed line in Fig. 3) which is contrary to our observation. Our proposed 2D formula in the MQT regime suggests increase of the width and it agrees with our data perfectly also quantitatively. It has no free parameters since all of them were already fixed by the escape current characteristics. We claim that these results are the first experimental observation of 2D escape from the zero voltage state of a dc SQUID in its MQT regime.

The escape current and width against temperature are shown in Fig. 4 for $\Phi/\Phi_0 = -0.25$. The escape current increases as temperature drops and saturates at low temperatures. The width decreases with temperature and saturates at low temperatures. These features are perfectly accounted for by Eq. (3) in the MQT regime and by Eq. (2) in the TA regime (dashed lines). The model seems to underestimate the measured width in the thermal regime by about 10%, indicating that influence of the environment must be taken into account to better fit with the data. Finally, the observed crossover temperature (≈ 80 mK) between MQT and TA is consistent with that predicted by the well-known formula $\hbar\omega_p/(2\pi k_B)$ [1].

In order to estimate the effect of the environment on the escape process, we take into account the quadratic current fluctuations $\langle \delta I^2 \rangle$. Since the SQUID is connected to the external circuit through inductive wires on the chip, we assume the electrical environment to be the inductance L_e in series with an external resistor R_{ext} . For temperatures $k_B T > \hbar R_{\text{ext}}/L_e$, the current fluctuations are given by $\langle \delta I^2 \rangle = k_B T/L_e$. For $k_B T < \hbar\omega_p$, thermal fluctuations are slow as compared to the SQUID dynamics, and the escape rate can be corrected by $\Gamma_{\text{env}}^{\text{TA}} = \Gamma^{\text{TA}} \exp[(\partial \Delta U / \partial I_{\text{dc}}) \langle \delta I^2 \rangle / 2(k_B T)^2]$ in the TA regime and $\Gamma_{\text{env}}^{\text{MQT}} = \Gamma^{\text{MQT}} \exp\{[\partial(\Delta U / \hbar\omega_p) / \partial I_{\text{dc}}] \langle \delta I^2 \rangle / 2\}$ in the MQT regime following the idea in [22]. Using the estimated wires inductance, our data perfectly are fitted both in the quantum and in the TA regime by the fluctuation

corrected expressions above (continuous line in Fig. 4). We notice that similar to the recent work in [15] the measured ΔI crosses over from MQT to TA much more gradually than what we predict.

In summary, we have shown for the first time evidence of two-dimensional macroscopic quantum escape of a hysteretic dc SQUID from its zero voltage state. Moreover, we have proposed a way to theoretically analyze the flux dependence of escape in the MQT regime, and we show that our data perfectly fit this model, also in the TA regime with the same values of the circuit parameters.

We thank K. Hasselbach, F. Hekking, Ph. Lafarge, L. Lévy, and A. Niskanen for useful discussions. This work was supported by the French ACI program. J. P. acknowledges support from CNRS and Joseph Fourier University.

- [1] *Quantum Tunneling in Condensed Media*, Modern Problems in Condensed Matter Sciences Vol. 34, edited by Yu. Kagan and A.J. Leggett (Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1992).
- [2] D. Esteve, M.H. Devoret, and J.M. Martinis, *Phys. Rev. B* **34**, 158 (1986).
- [3] Y. Yu *et al.*, *Science* **296**, 889 (2002).
- [4] John M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, and C. Urbina, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 117901 (2002).
- [5] D. Vion *et al.*, *Science* **296**, 886 (2002).
- [6] I. Chiorescu *et al.*, *Science* **289**, 1869 (2003).
- [7] J.R. Friedman *et al.*, *Nature (London)* **406**, 43 (2000).
- [8] B.I. Ivlev and Yu. N. Ovchinnikov, *Sov. Phys. JETP* **66**, 378 (1987).
- [9] C. Morais Smith, B. Ivlev, and G. Blatter, *Phys. Rev. B* **49**, 4033 (1994).
- [10] Y.-C. Chen, *J. Low Temp. Phys.* **65**, 133 (1986).
- [11] H. C. Brinkman, *Physica (Utrecht)* **22**, 149 (1956).
- [12] V. Lefevre-Seguin *et al.*, *Phys. Rev. B* **46**, 5507 (1992).
- [13] S. Han, J. Lapointe, and J. E. Lukens, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1712 (1989).
- [14] F. Sharifi, J. L. Gavilano, and J. van Harlingen, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 742 (1988).
- [15] S. Li *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 98301 (2002).
- [16] C. H. van der Wal *et al.*, *Science* **290**, 773 (2000).
- [17] S. Saito *et al.*, in *Macroscopic Quantum Coherence and Computing*, edited by J. Pekola, B. Ruggiero, and P. Silvestrini (Kluwer Academics, New York, 2002), p. 137.
- [18] O. Buisson, F. Balestro, J. P. Pekola, and F.W. J. Hekking, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 238304 (2003).
- [19] C. D. Tesche and J. Clarke, *J. Low Temp. Phys.* **29**, 301 (1977).
- [20] F. Balestro, Ph.D. thesis, Universite Joseph Fourier, 2003.
- [21] A. B. Zorin, *Rev. Sci. Instrum.* **66**, 4296 (1995).
- [22] J. M. Martinis and H. Grabert, *Phys. Rev. B* **38**, 2371 (1988).

Coherent Oscillations in a Superconducting Multilevel Quantum System

J. Claudon,¹ F. Balestro,^{1,2} F.W.J. Hekking,³ and O. Buisson¹

¹*Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, laboratoire associé à l'Université Joseph Fourier, CNRS, BP 166, 38042 Grenoble cedex 9, France*

²*Department of Nanoscience, Delft University of Technology, Lorentzweg 1, 2628 CJ Delft, The Netherlands*

³*Laboratoire de Physique et Modélisation des Milieux Condensés, Université Joseph Fourier, CNRS, BP 166, 38042 Grenoble cedex 9, France*

(Received 7 April 2004; published 26 October 2004)

We have observed coherent oscillations in a multilevel quantum system, formed by a current-biased dc SQUID. These oscillations have been induced by applying resonant microwave pulses of flux. Quantum measurement is performed by a nanosecond flux pulse that projects the final state onto one of two different voltage states of the dc SQUID, which can be read out. The number of quantum states involved in the coherent oscillations increases with increasing microwave power. The dependence of the oscillation frequency on microwave power deviates strongly from the linear regime expected for a two-level system and can be very well explained by a theoretical model taking into account the anharmonicity of the multilevel system.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.187003

PACS numbers: 85.25.-j, 03.67.Lx, 05.45.-a

Up to now, in view of quantum information processing, experiments in solid-state devices have concentrated only on the implementation of two-level quantum systems. A variety of quantum circuits based on Josephson junctions [1–4] and quantum dots [5] have been proposed and realized. Rabi oscillations have been observed showing that the two lowest levels can be manipulated coherently. However, the two-level system is not the only one useful for quantum computation. For instance, multilevel systems are of interest for solving database search problems using quantum algorithms [6], as was demonstrated with Rydberg atoms [7]. Recent theoretical proposals discuss the use of multilevel quantum systems in solid-state devices for quantum information processing [8]. In superconducting devices such as a current-biased Josephson junction [9] or a rf SQUID [10], many experiments were performed demonstrating the multilevel quantum nature of these systems. However, no experiment has probed coherent behavior yet. In this Letter, we report, to our knowledge, the first observation of coherent oscillations in a multilevel solid-state circuit, based on Josephson junctions. The nonlinearity of the Josephson junction plays a crucial role in the quantum dynamics of the device.

Specifically, the quantum system that we study in our experiments is a current-biased dc SQUID. It consists of two Josephson junctions each with critical current I_0 and capacitance C_0 . The junctions are embedded in a superconducting loop of inductance L_s , threaded by a flux Φ . Since $L_s I_0 \approx \Phi_0/2\pi$, the phase dynamics of the two junctions can be treated as that of a fictitious particle of mass $m = 2C_0(\Phi_0/2\pi)^2$ moving in a two-dimensional potential, which contains valleys and mountains [11–13]. Here $\Phi_0 = h/2e$ is the superconducting flux quantum. The local minima are separated from each other by saddle points, where the particle can escape. Along the

escape direction, the potential is cubic and can be characterized by a frequency ω_p and a barrier height ΔU ; see Fig. 1(a). These two quantities depend on the magnetic flux and vanish at the critical current I_c of the SQUID. We assume a complete separation of the variables along the escape direction and the transverse one by neglecting the coupling terms between these two directions. In this approximation, the dynamics of the SQUID's phase ϕ along the escape direction is similar to the dynamics of the phase of a current-biased single Josephson junction [14,15]. The parameters I_c , ΔU , and ω_p are renormalized, thereby taking into account the two-dimensional nature of the potential, as it was demonstrated in [11,12]. For bias currents $I_b < I_c$, the particle is trapped in a local minimum and its quantum dynamics is described by

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_p (\hat{P}^2 + \hat{X}^2) - \sigma \hbar \omega_p \hat{X}^3, \quad (1)$$

where $\hat{P} = (1/\sqrt{m\hbar\omega_p})P$ and $\hat{X} = (\sqrt{m\omega_p/\hbar})\phi$ are the reduced momentum and position operators, respectively. Here, P is the operator conjugate to ϕ ; $\sigma = 1/(6a)[2(1 - I_b/I_c)]^{-5/8}$ is the relative magnitude of the cubic term compared to the quadratic (harmonic) term. The parameter a is a constant, $a \sim 11$ for our SQUID. For I_b well below I_c , $\Delta U \gg \hbar\omega_p$ and many low-lying quantum states are found near the local minimum. These states, describing the oscillatory motion within the anharmonic (cubic) potential, are denoted $|n\rangle$ for the n th level, with $n = 0, 1, 2, \dots$. The corresponding energies E_n were calculated in Ref. [15]. Tunneling through the barrier can be neglected for the lowest-lying states with $n\hbar\omega_p \ll \Delta U$. The effect of a time-dependent flux $\Phi(t)$ can be included in Eq. (1) by adding the time-dependent term $\alpha(t)\hbar\omega_p\hat{X}$ where $\alpha(t)$ is proportional to $\Phi(t)$ [16]. In our experiment, deep quantum states are excited by applying microwave

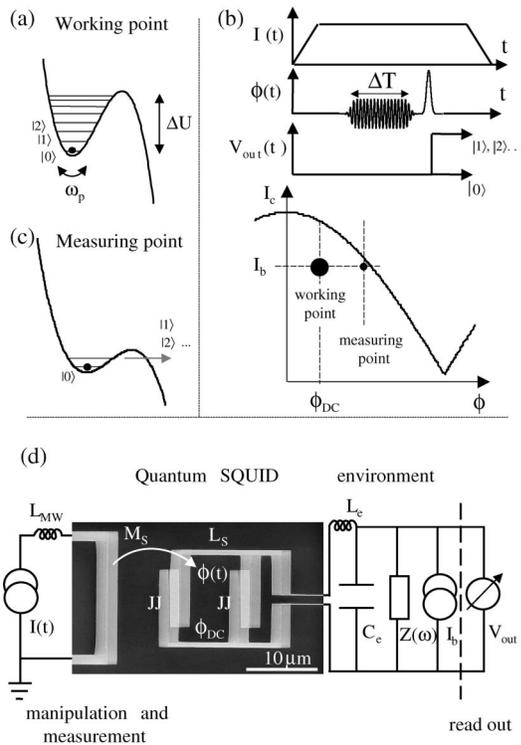


FIG. 1. Quantum experiment and measurement procedure in a dc SQUID. (a) Illustration of the fictitious particle trapped in a deep anharmonic well at the working point. (b) Experimental procedure, as explained in the text. (c) The well at the measuring point: during the nanosecond flux pulse, the particle can escape or remain in the well depending on its quantum state. (d) The dc SQUID consists of two identical Josephson junctions coupled by an inductance L_s . The quantum circuit is decoupled from the environment, symbolized by $Z(\omega)$, by a large inductance L_e and a capacitor C_e ; it is coupled by a mutual inductance M_s to the MW pulse or nanosecond pulse through a $50\ \Omega$ coax line, terminated by an inductance L_{MW} .

(MW) flux pulses characterized by their frequency ν , amplitude Φ_{MW} , and duration ΔT . Starting with $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle$, the state evolves with the MW pulse of duration ΔT into a coherent superposition $|\Psi(\Delta T)\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle + \dots + a_n|n\rangle + \dots$

Our procedure to perform quantum experiments consists of four successive steps as depicted in Fig. 1(b). A bias current I_b is switched on through the SQUID at fixed magnetic flux Φ_{dc} to prepare the circuit at the working point in the initial state $|0\rangle$. The application of a MW flux pulse produces the superposition $|\Psi(\Delta T)\rangle$. Then, a flux pulse of nanosecond duration is applied, which brings the system to the measuring point such that the state $|\Psi(\Delta T)\rangle$ is projected onto either the zero or the finite voltage state of the SQUID [Fig. 1c]. The result of this quantum measurement can be readout by monitoring the voltage V_{out} across the dc SQUID. Finally, I_b is switched off such that the circuit is reset and the experiment can be repeated to obtain state occupancy.

The aforementioned quantum measurement procedure was discussed theoretically by us in Ref. [16]. Different from previous experiments that used current bias pulses [2,4] or MW pulses [3], we implemented a quantum measurement using a large-amplitude flux pulse with nanosecond duration. This flux pulse reduces the SQUID critical current to a value very close to the bias current such that $\Delta U \sim \hbar\omega_p$. Ideally, the pulse with optimal amplitude projects the excited states with $n > 0$ onto the voltage state (V_{out} is twice the superconducting gap); the ground state $|0\rangle$ is projected onto the zero-voltage state. As the SQUID is hysteretic, the zero and finite voltage states are stable. The efficiency of this one-shot measurement is estimated to be 96% [16]. In the experiment, we use a pulse of 2.5 ns duration whose 1.5 ns rise and fall times are long enough to guarantee adiabaticity: transitions between $|0\rangle$ and excited states are estimated to occur with a probability less than 1% for a typical pulse amplitude of $0.06\Phi_0$. The measurement pulse can be applied with a variable delay after the end of the MW pulse. In the measurement procedure, this delay is kept as short as 1.5 ns to limit relaxation processes. The result of the quantum measurement is obtained by measuring the escape probability P_{esc} , repeating the experiment up to about 4000 times.

The measured dc SQUID consists of two aluminum Josephson junctions with $I_0 = 3.028\ \mu\text{A}$ and $C_0 = 0.76\ \text{pF}$, coupled by an inductance $L_s = 98\ \text{pH}$ [see Fig. 1(d)]. The quantum circuit is decoupled from the external classical circuit by long on-chip superconducting thin wires of large total inductance, $L_e = 15\ \text{nH}$, and a parallel capacitor, $C_e = 150\ \text{pF}$. The quantum circuit and the long superconducting wires are realized by E-beam lithography and shadow evaporation. The nominal room temperature microwave signal is guided by $50\ \Omega$ coax lines and attenuated twice by 20 dB (at 1.5 K and 30 mK, respectively) before reaching the SQUID through a mutual inductance $M_s = 0.7\ \text{pH}$. The MW line is terminated by an inductance estimated to be $L_{MW} = 1\ \text{nH}$. Special care was taken to avoid spurious environmental microwave resonances. The chip is mounted in a shielded copper cavity, cooled down to about 30 mK, whose cutoff frequency is above 20 GHz. Moreover, the thin film capacitor, C_e , close to the chip decouples the microwave signal from the low-frequency bias lines.

The escape probability is first obtained by measurements using long (duration $\Delta t = 50\ \mu\text{s}$) pulses of the bias current I_b . From the dependence of the escape current (defined as the current at which $P_{esc} = 1/2$) on Φ_{dc} , the experimental parameters of the SQUID are extracted [11]. At the maximum value of I_c obtained for $\Phi_{dc}/\Phi_0 = -0.085$, the measured escape rate can be fit by the well-known macroscopic quantum tunneling (MQT) formula [11,13], yielding the same SQUID parameters within a 2% error. This result confirms that the circuit remains in the ground state when only I_b pulses are applied. For other

values of Φ_{dc} , the width of the escape probability is larger than the MQT prediction by a factor up to 4 indicating a residual low-frequency flux noise in our sample [4]. This noise reduces the efficiency of our quantum measurement since it smears the escape probability difference between the ground state and the excited states. In the experiment the nanopulse amplitude is adjusted in order that the escape from $|0\rangle$ is close to 1%. For such a pulse amplitude at $\Phi_{dc}/\Phi_0 = 0.095$, we have estimated that the escape probabilities of the excited states $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ and higher states are about 30%, 60%, 90%, and 100%, respectively. The sensitivity to flux noise is weakest at the “optimal” point $\Phi_{dc}/\Phi_0 = -0.085$, however, the SQUID’s sensitivity to MW and measurement pulses is also weak such that this point cannot be used for accurate measurements.

Spectroscopic measurements were performed by sweeping the frequency of a MW flux pulse of 25 ns duration in the low power limit. In the inset of Fig. 2 we show the corresponding resonance peak found for P_{esc} versus microwave frequency ν . The resonant frequency ν_{01} depends on I_b as shown in Fig. 2; this dependence can be very well fit by the semiclassical formula for the cubic potential [15]. The parameters extracted from this fit are consistent within 2% error with the parameters extracted from the critical current versus flux dependence or from the MQT measurements at $\Phi_{dc}/\Phi_0 = -0.085$. The large width $\Delta\nu_{01} = 180$ MHz of the resonance peak is consistent with the presence of a residual low-frequency flux noise. Indeed, since the flux through the SQUID fluctuates slowly, the expected resonant frequency changes from one measurement to the other.

We also measured the lifetime of the first excited states, analyzing the decay of the resonance height. Upon in-

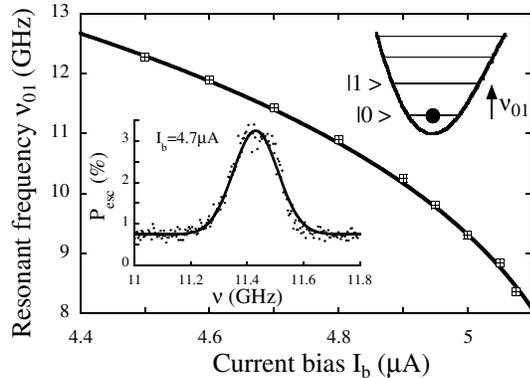


FIG. 2. Resonant transition frequency ν_{01} between states $|0\rangle$ and $|1\rangle$ as function of the bias current at $\Phi_{dc}/\Phi_0 = 0.095$. The experimental dependence of ν_{01} (symbols) on I_b is perfectly described by the semiclassical model [15] (solid line). Spectroscopy is performed by measuring the escape probability P_{esc} versus applied frequency ν (points in inset) at microwave power $A = -48$ dBm where A is the nominal microwave power at room temperature. The fit to a Gaussian (solid line) defines the resonant frequency $\nu_{01} = 11.43$ GHz and the width $\Delta\nu_{01} = 180$ MHz.

creasing the delay time between the end of the MW pulse and the nanosecond dc measurement pulse, the peak height is found to decay with times ranging from 14 to 60 ns. The frequency broadening associated with these lifetimes is estimated to be smaller than 10 MHz, i.e., not only less than the width $\Delta\nu_{01}$ of the resonance peak but also less than the detuning frequency associated with the anharmonicity between adjacent levels.

By applying short MW pulses at the resonant frequency $\nu = \nu_{01}$, we induce coherent quantum dynamics. Rabi-like coherent oscillations were observed by measuring escape probability versus MW pulse duration ΔT . In Fig. 3(a) the escape probability oscillates at a frequency $\Omega_{coh}/2\pi$ of about 300 MHz. This frequency increases as the MW flux power increases and ranges from about 100 to 1000 MHz in our experiment. It is always much smaller than the resonance frequency ν_{01} . Oscillation amplitudes as large as 70% were observed for the largest MW power. The oscillations are damped with a characteristic attenuation time of about 12 ns. Similar coherent oscillations have been observed at different working points. The dependence of Ω_{coh} as a function of the MW amplitude Φ_{MW} is shown in Fig. 4. The linear dependence predicted by Rabi theory for a two-level system [17] is not observed in our measurements.

To analyze the observed coherent oscillations, we use the following model. We ignore relaxation and decoherence processes and consider the applied MW frequency to be the resonant frequency ν_{01} . If we furthermore assume the MW pulse to couple the eigenstate $|n\rangle$ to its nearest-neighbor levels only, the time-dependent part of the Hamiltonian reads $\alpha(t)\hbar\omega_p\hat{X} \approx b\frac{\Phi_{MW}}{\Phi_0}\cos(2\pi\nu_{01}t) \times \hbar\omega_p\sum_n\sqrt{n/2}[|n\rangle\langle n-1| + |n-1\rangle\langle n|]$, where $b \sim 34$ at the considered working point. As $\Omega_{coh}/2\pi \ll \nu_{01}$,

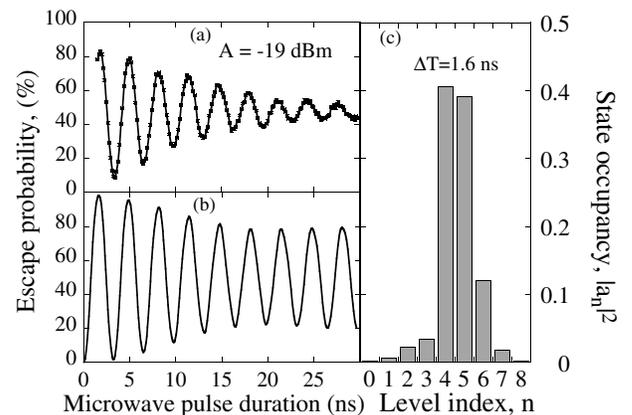


FIG. 3. (a) Measured escape probability versus MW pulse duration at the working point, defined by $\Phi_{dc}/\Phi_0 = 0.095$ and $I_b = 4.7$ μ A, with about 15 levels localized in the anharmonic well. (b) Predicted escape probability for a MW amplitude $\Phi_{MW}/\Phi_0 = 0.002$. (c) a_n coefficients of the state obtained after 1.6 ns duration of the MW pulse corresponding to the first maximum of the coherent oscillations.

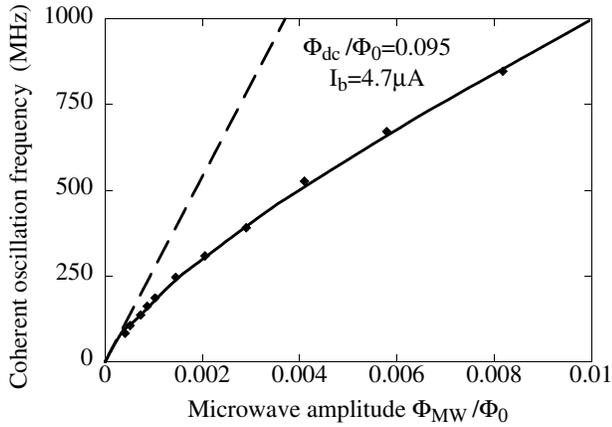


FIG. 4. Frequency of coherent oscillations versus the normalized MW flux amplitude. Square dots are experimental results, with the solid line the theoretical prediction for a multilevel anharmonic quantum system. Dashed line is the Rabi theory for a two-level system. Experimental calibration of Φ_{MW} is deduced from the fit and is consistent with the estimated Φ_{MW} applied to the setup.

can use the rotating wave approximation and treat this term nonperturbatively. We obtain the coefficients a_n of the coherent superposition $|\Psi(\Delta T)\rangle$ generated by a pulse of duration ΔT : $a_n = \sum_k \langle e_k | 0 \rangle \langle n | e_k \rangle e^{-i\lambda_k \Delta T / \hbar}$, where $|e_k\rangle$ and λ_k are the eigenstates and eigenvalues of the Hamiltonian in the rotating frame. The latter are determined numerically and then used to calculate the probabilities $|a_n(\Delta T)|^2$, whose oscillatory time dependence is determined by the frequency differences $\lambda_k - \lambda_j$. At very low MW amplitude [$b\Phi_{MW}/\Phi_0 \hbar \omega_p \ll 2E_1 - (E_2 + E_0)$], we obtain the two-level limit: $|\Psi(\Delta T)\rangle$ oscillates between $|0\rangle$ and $|1\rangle$ at the Rabi frequency $\Omega_{\text{coh}} = b\omega_p/\sqrt{2}\Phi_{MW}/\Phi_0$ [17]. At larger MW amplitude, an increasing number of states is predicted to participate in the oscillations [18]. As an example, in Fig. 3(b) the theoretical escape probability is plotted as function of MW pulse duration, taking into account the finite efficiency of our measurement. The MW amplitude $\Phi_{MW}/\Phi_0 = 0.002$ was adjusted to fit the measured oscillation frequency. The MW power calibration found from the fit is consistent, within a 30% error, with the actual applied MW amplitude and with the microwave line and coupling parameters, which were measured independently. The model calculation predicts very large amplitudes, consistent with the experimental results. At $\Delta T = 1.6$ ns the amplitude is close to 100%. In Fig. 3(c) we indicate the occupancies $|a_n|^2$ of the states $|n\rangle$ that participate in the coherent superposition state at this time. We see that it is concentrated mainly on the states $|4\rangle$, $|5\rangle$, and $|6\rangle$. Finally, the model predicts a slight beating in the oscillations at $\Delta T \sim 20$ ns where the amplitude reaches a minimum. These beating phenomena will not be analyzed in our experiment because they occur at time scales of the order of the above-mentioned attenuation time. For short dura-

tion times, the predicted coherent oscillation frequency is given by $\min_{k,l} \{(\lambda_k - \lambda_l)/\hbar\}$. In this limit and using the MW calibration deduced from Fig. 3, we calculate $\Omega_{\text{coh}}/2\pi$ as a function of Φ_{MW}/Φ_0 . The result is plotted in Fig. 4 together with the experimental one. The perfect agreement between them shows that our model captures the physics of the coherent oscillations.

We reported, to the best of our knowledge, the first observation of coherent oscillations in a multilevel solid-state-based integrated circuit. In our experiment, we have induced coherent superpositions of quantum states, which involve many levels using monochromatic microwaves. In order to perform the quantum measurement, we implemented a new measurement procedure based on nanosecond flux pulse through the SQUID. The agreement between our results and the theory proves that the essential physics of our nonlinear quantum circuit is well understood.

We thank B. Camarota, F. Faure, Ph. Lafarge, L. Lévy, D. Loss, M. Nunez-Regueiro, B. Pannetier, J. Pekola, and A. Ratchov for useful discussions. This work was supported by the ACI and ATIP programs, and by the Institut de Physique de la Matière Condensée. F.H. acknowledges support from Institut Universitaire de France and the hospitality of NTT Basic Research Laboratories.

-
- [1] Yu. Makhlin, G. Schön, and A. Shnirman, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 357 (2001); Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, and J. S. Tsai, *Nature (London)* **398**, 786 (1999); Y. Yu *et al.*, *Science* **296**, 889 (2002); T. Yamamoto *et al.*, *Nature (London)* **425**, 941 (2003).
 - [2] D. Vion *et al.*, *Science* **296**, 886 (2002).
 - [3] J. M. Martinis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 117901 (2002).
 - [4] I. Chiorescu *et al.*, *Science* **299**, 1869 (2003).
 - [5] T. Hayashi *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 226804 (2003); R. Hanson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 196802 (2003).
 - [6] S. Lloyd, *Phys. Rev. A* **61**, 010301(R) (2000).
 - [7] J. Ahn, T. C. Weinacht, and P. H. Bucksbaum, *Science* **287**, 463 (2000).
 - [8] M. N. Leuenberger and D. Loss, *Nature (London)* **410**, 789 (2001); M. N. Leuenberger *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 207601 (2002).
 - [9] R. V. Voss and R. A. Webb, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 265 (1981); J. M. Martinis, M. H. Devoret, J. Clarke, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1543 (1985).
 - [10] J. R. Friedman *et al.*, *Nature (London)* **406**, 43 (2000).
 - [11] F. Balestro *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 158301 (2003).
 - [12] V. Lefevre-Seguin *et al.*, *Phys. Rev. B* **46**, 5507 (1992).
 - [13] S. Li *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 98301 (2002).
 - [14] J. M. Martinis, M. H. Devoret, and J. Clarke, *Phys. Rev. B* **35**, 4682 (1987).
 - [15] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, *Sov. Phys. JETP* **64**, 185 (1986).
 - [16] O. Buisson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 238304 (2003).
 - [17] I. I. Rabi, *Phys. Rev.* **51**, 652 (1937).
 - [18] M. H. S. Amin, *cond-mat/0407080*.

Observation of Transition from Escape Dynamics to Underdamped Phase Diffusion in a Josephson Junction

J. M. Kivioja,¹ T. E. Nieminen,¹ J. Claudon,² O. Buisson,² F. W. J. Hekking,³ and J. P. Pekola¹

¹Low Temperature Laboratory, Helsinki University of Technology, POB 3500, FIN-02015 HUT, Finland

²Centre de Recherches sur les Très Basses Températures, laboratoire associé à l'Université Joseph Fourier, CNRS, BP 166, 38042 Grenoble-cedex 9, France

³Laboratoire de Physique et Modélisation des Milieux Condensés, CNRS and Université Joseph Fourier, BP 166, 38042 Grenoble-cedex 9, France

(Received 14 January 2005; published 22 June 2005)

We have investigated the dynamics of underdamped Josephson junctions with a relatively small Josephson coupling E_J . In addition to the usual crossover between macroscopic quantum tunneling and thermally activated (TA) behavior we observe, for the first time, the transition from TA behavior to underdamped phase diffusion. Above the crossover temperature, the threshold for switching into the finite-voltage state becomes extremely sharp. We propose a (T, E_J) phase diagram with various regimes and show that for a proper description of it, dissipation and level quantization in a metastable well are crucial.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.247002

PACS numbers: 74.50.+r, 85.25.Dq, 85.35.-p

A hysteretic Josephson junction (JJ) switching from its metastable zero-voltage state into a stable finite-voltage state has recently been used as a readout device for superconducting quantum bit systems in many experiments [1]. Switching measurements also enable one to perform conventional large bandwidth current measurements, and recently there have been proposals to use hysteretic JJs as ammeters for studying phenomena like non-Gaussian noise [2]. Often it may be advantageous to reduce the critical current I_c of the detecting junction in order to increase the measurement sensitivity. Yet the physics governing switching phenomena of small I_c junctions ultimately differs from those with larger I_c [3]. How far can one reduce I_c while still maintaining the useful features of the detector? Despite a considerable amount of work on junctions with moderate I_c [4], no clear picture based on a systematic study exists as yet of temperature-dependent escape phenomena in such junctions. In this Letter we present such a study.

The dynamical variable of a JJ is the phase difference φ of the superconducting wave function in the two electrodes. Within the resistively and capacitively shunted junction (RCSJ) model, the dynamics of φ is governed by the Josephson energy $E_J = \hbar I_c / 2e$, the charging energy $E_C = e^2 / 2C_J$ (C_J is the junction capacitance), and a shunt resistance R responsible for dissipation. For later use we also define the bare plasma frequency $\omega_p = \sqrt{8E_J E_C} / \hbar$ and the quality factor $Q = \omega_p RC$. As we will detail below, the behavior of the junction at a given temperature T can be classified according to the phase diagram of Fig. 1(a). The overdamped case $Q < 1$ with $E_J \geq E_C$ was studied in detail by Vion *et al.* [3], who uncovered the existence of a phase diffusion regime at finite T with the appearance of a small voltage, prior to switching to a voltage on the order of twice the superconducting gap Δ [5]. As far as the

underdamped case $Q > 1$ is concerned, most experiments were done on junctions with relatively high I_c . Depending on T such junctions escape out of the metastable zero-voltage state either via macroscopic quantum tunneling (MQT) or thermal activation (TA) processes, switching directly to the finite-voltage state. In this Letter, we focus on the regime $Q > 1$ with relatively small I_c , such that $E_J \sim k_B T \gg E_C$. We show, theoretically and experimentally, that a regime exists where escape does not lead to a finite-voltage state, but rather to underdamped phase diffusion (UPD) [the shaded region in Fig. 1(a)].

According to the RCSJ model, the dynamics of a JJ biased with a current I is that of a particle (mass $m = \hbar^2 / 8E_C$) whose position is φ . It moves in a tilted cosine potential $U(\varphi) = -E_J [\cos \varphi + (I/I_c)\varphi]$ under a viscous force $(\hbar/2e)^2 \frac{d\varphi}{Rdt}$. The bias current renormalizes the plasma frequency, such that $\omega_p = \sqrt{m^{-1} d^2 U / d\varphi^2} = \sqrt{8E_J E_C q_0} / \hbar$ with $q_0 = \sqrt{2(1 - I/I_c)}$. The cosine potential has wells where the particle can be localized; φ then has constant average value, and the average voltage across the junction is zero. For nonzero I the quantum levels in the potential well are metastable and the particle can escape from a given well either via TA over, or MQT through the barrier. For large junctions $\Gamma_{TA}(I, T) = \frac{\omega_p}{2\pi} e^{-\Delta U / k_B T}$ for the TA escape rate and $\Gamma_{MQT}(I) = 12\sqrt{6}\pi \frac{\omega_p}{2\pi} \sqrt{\Delta U / \hbar \omega_p} \times e^{-36/5 \Delta U / \hbar \omega_p}$ for the MQT rate [6]. In the cubic approximation the barrier height is $\Delta U = \frac{2}{3} E_J q_0^3$. Below the crossover temperature $T_0 = \hbar \omega_p / 2\pi k_B$ the dominant escape mechanism is MQT. Approximating the total escape rate as $\Gamma_{\Sigma}(I, T) \simeq \Gamma_{TA}(I, T) + \Gamma_{MQT}(I)$, the escape probability in the time interval $0 \leq t \leq \tau$ can be written as $P_{\Sigma}(I, T) = 1 - e^{-\int_0^{\tau} \Gamma_{\Sigma}(I, T) dt}$. If dissipation is weak, upon escape from the well the particle moves down the potential and phase is running freely, hence the voltage reaches a finite value,

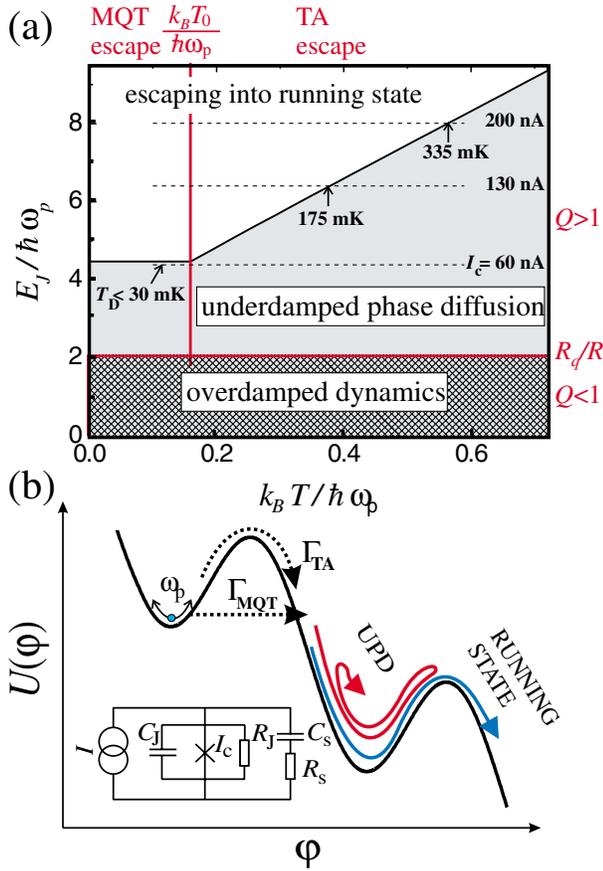


FIG. 1 (color). (a) The various operation regimes of a Josephson junction with low E_J . For details, see text. The UPD region corresponds to $R_S = 500 \Omega$, $C_J = 100$ fF, and $\tau = 100 \mu\text{s}$. (b) The dynamics in the upper well and schematic behavior upon escape. Inset: equivalent circuit of the junction with frequency dependent dissipation.

about 2Δ . However, if dissipation is strong enough, there is a finite probability that, upon escape from the well, the particle is relocalized in the next well instead of running down the potential: the phase then diffusively moves from one metastable well to another, see Fig. 1(b). In this UPD regime the average voltage across the junction is much smaller than 2Δ [3].

As it was pointed out over a decade ago [7], phase diffusion can occur even in a hysteretic junction due to the dependence of dissipation on frequency ω [4]. Our experiment corresponds to the simplified equivalent circuit with frequency dependent dissipation as presented in the inset of Fig. 1(b). After switching to the running state, the dominant part of dissipation comes from small ω , governed by $R(\omega \sim 0)$, typically given by the large junction subgap resistance, on the order of $1 \text{ M}\Omega$. In the phase diffusion regime the phase mainly oscillates in a well at the plasma frequency and thus the dissipation is characterized by $R(\omega_p)$, which is much smaller, typically on the order of vacuum impedance $Z_0 \approx 377 \Omega$, since C_s [Fig. 1(b)] acts as a short. Here we will consider junctions that are underdamped even at ω_p , in contrast to [3].

The dissipated energy between neighboring potential maxima can be approximated by $E_D \approx 8E_J/Q$ and if the particle has energy less than E_D above the *next* barrier top, it simply diffuses to the next well. The maximum possible dissipated power due to phase diffusion can be written as $\frac{1}{2\pi} \frac{2eV}{h} E_D$, where V is the average voltage across the junction. By equating this with the applied bias power $I_m V$, we find the maximum possible phase diffusion current $I_m = 4I_c/\pi Q$, which is identical in form to the well-known retrapping current formula, but now the value of Q is that at plasma frequency ω_p . For $I < I_m$, there is nonzero probability that the phase relocalizes after escape. The gray area in Fig. 1(a) presents the UPD regime, where escape does not necessarily lead to the transition into a running state. The condition $\Gamma_{\text{TA}}(I_m, T_D) \approx 1/\tau$ determines the separatrix $E_J^D(T_D)$ between the TA and UPD regions in Fig. 1(a) with current pulses of length τ :

$$E_J^D \approx \frac{3}{2} k_B T_D (1 - I_m/I_c)^{-3/2} \ln(\omega_p \tau / 2\pi). \quad (1)$$

Similarly, for $T < T_0$, the separatrix between MQT and UPD is found from $\Gamma_{\text{MQT}}(I_m) \approx 1/\tau$; E_J^D is independent of T , and given by Eq. (1) with T_0 replacing T_D .

We present experimental data of two samples, a dc-SQUID and a single JJ. They were fabricated using standard electron beam lithography and aluminum metallization in a UHV evaporator. The AlOx tunnel barriers were formed by basic room temperature oxidation of Al. The dc-SQUID consists of two wide superconducting planes connected by two short superconducting lines with tunnel junctions in the middle forming the dc-SQUID loop of area $20 \times 39 (\mu\text{m})^2$ (see the inset in Fig. 2). The loop inductance was determined [8] to be around 100 pH , small as compared to the calculated Josephson inductance ($L = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c} = 400 \text{ pH}$ per junction). The dc-SQUID thus behaves almost like a single JJ, whose I_c can be tuned. The other measured sample was a single junction between long inductive biasing lines. The normal state resistances of the dc-SQUID and the single JJ were $1.3 \text{ k}\Omega$ and $0.41 \text{ k}\Omega$ yielding for I_c 199 and 630 nA, respectively. Assuming a specific value of $50 \text{ fF}/(\mu\text{m})^2$, the capacitances of the samples were estimated to be 100 and 130 fF, respectively. Both measured samples had strongly hysteretic I - V characteristics with retrapping currents well below 1 nA.

The experimental setup is presented in the inset in Fig. 2. Switching probabilities have been measured by applying a set of trapezoidal current pulses through the sample and by measuring the number of resulting voltage pulses. At the sample stage we used low pass RC filters (surface mount components near the sample). In the measurements on a single junction we used surface mount capacitors ($C_s = 680 \text{ pF}$), but in the dc-SQUID measurements we had π filters in series with resistors, with $C_s \sim 5 \text{ nF}$ capacitance to ground. The resistors were $R_s = 500 \Omega$ and 680Ω in the measurement on a dc-SQUID and on a single junction,

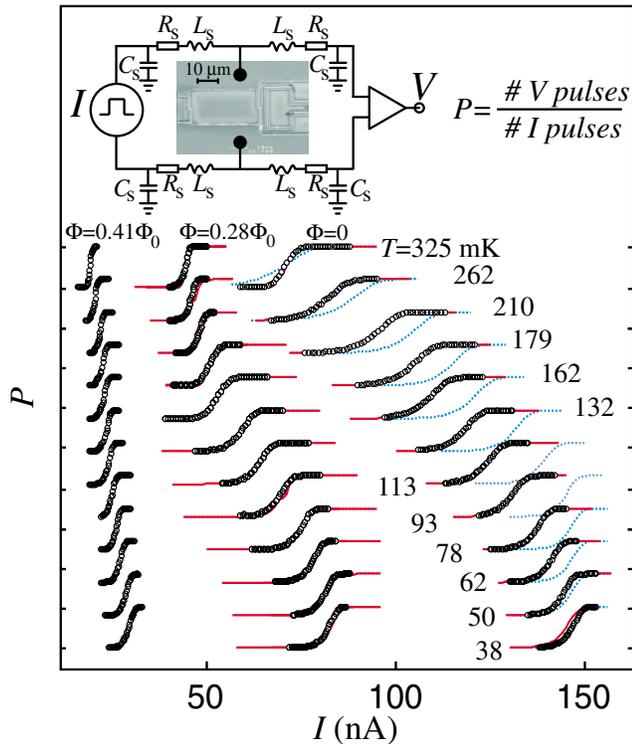


FIG. 2 (color). Cumulative histograms of the dc-SQUID at different temperatures and at different magnetic fields. Curves are shifted for clarity and the vertical spacing between ticks corresponds to unity escape probability. Solid lines are from simulations described in the text; dotted blue lines correspond to $P_{\Sigma}(I, T)$. Inset: scanning electron micrograph of the measured dc-SQUID and the experimental circuit.

respectively. Bonding wires with inductance of order nH connect the sample to filters.

In Fig. 2 we present the measured cumulative switching histograms (open circles) of the dc-SQUID at different fluxes Φ and temperatures with $\tau = 200 \mu\text{s}$. At the lowest temperatures, the histograms can be well fitted by the MQT model, giving $I_c = 200, 128,$ and 55 nA , for $\Phi/\Phi_0 = 0, 0.28,$ and 0.41 , respectively. For $\Phi = 0$ we also plot the escape probability $P_{\Sigma}(I, T)$ defined earlier (dotted blue lines). In Fig. 3 we show the measured histogram position $I_{50\%}[P(I_{50\%}) \equiv 0.5]$ and the width $\Delta I (\equiv I_{90\%} - I_{10\%})$ for both samples. The dc-SQUID measurements were done both at negative and positive values of flux in order to ensure that the external flux had not changed. The position in Fig. 3(a) is normalized to the corresponding value of I_c at zero temperature. At low T all the measured data are consistent with MQT results. On increasing T the parameters are constant up to the estimated crossover temperature T_0 . For $T > T_0$ the width is increasing and the position is moving down as the TA model predicts. The qualitative agreement is good for most of the results up to the temperature T_D . At T_D , ΔI starts to decrease abruptly. Moreover, the position $I_{50\%}$ saturates at the same value $\approx 0.35I_c$. For the single JJ, the saturation occurs at $\approx 0.3I_c$. The dc-SQUID data measured at $\Phi = \pm 0.41\Phi_0$ show no

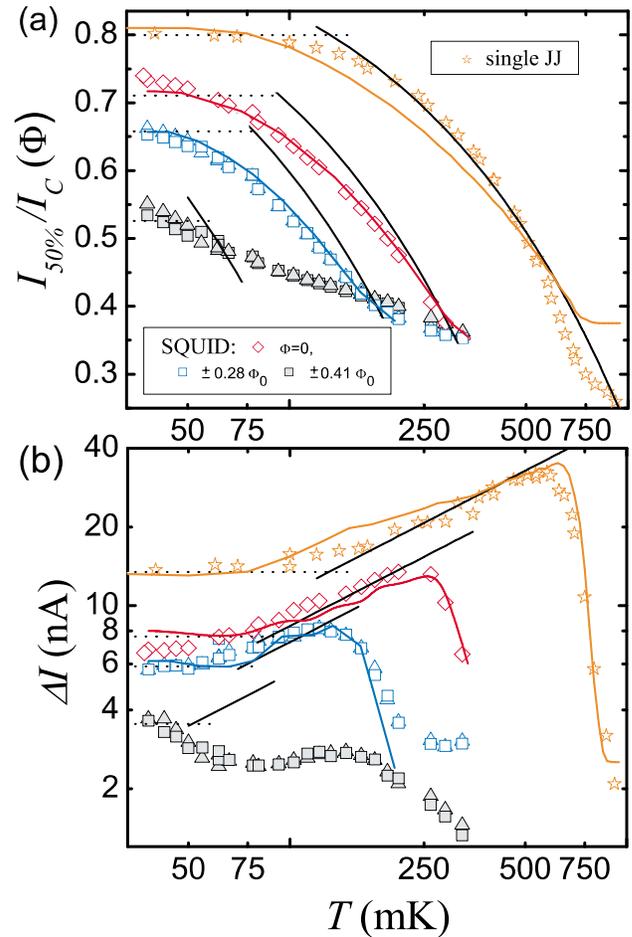


FIG. 3 (color). (a) The positions ($I_{50\%}$) and (b) the widths (ΔI) of the histograms. Black solid and dotted lines are results (with known junction parameters) of standard TA and MQT models, respectively, ignoring dissipation. Blue, red, and orange solid lines are the parameters of the simulated histograms based on the LO model discussed in the text.

trace of thermal activation at any temperature, and underdamped phase diffusion prevails down to temperatures below $T_0 \approx 50 \text{ mK}$ where MQT dominates.

If we assume a realistic shunt impedance $R(\omega_p) \approx 500 \Omega$ (the value of the surface mount resistors), we obtain $Q \approx 4$ at $I_c = 200 \text{ nA}$ and $C_J = 100 \text{ fF}$, which yields $I_m \approx 0.35I_c$, like in the experiment. In the diagram of Fig. 1 we also present I_c of the dc-SQUID at fluxes $0, \pm 0.28\Phi_0,$ and $\pm 0.41\Phi_0$ by horizontal dashed lines. It can be seen that the intersections of the dashed lines and the boundary of the UPD regime are very close to the experimental values of T_D . The saturation of the histograms and their reentrant steepness is thus a manifestation of the crossover from TA escape into UPD due to dissipation. In the case of a single JJ we obtain $I_m \approx 0.3I_c$ and $T_D \approx 650 \text{ mK}$, yielding $Q = 4.4$. This corresponds to $R(\omega_p) \approx 230 \Omega$, somewhat smaller than the anticipated value $R(\omega_p) \approx 680 \Omega$.

Figure 2 shows that the standard TA and MQT models cannot account for our observations. Except for the data at

the lowest temperatures, the measured histograms deviate from $P_{\Sigma}(I, T)$. Dissipation alone cannot explain the difference. The basic TA model yields a width $\Delta I \propto T^{2/3}$ [6] and it can be seen in Figs. 2 and 3 that the dc-SQUID has weaker temperature dependence even well below T_D . In the dc-SQUID there are just few energy levels in the well and thus the assumptions of continuous energy spectrum are not valid [6]. Within the semiclassical model of Larkin and Ovchinnikov (LO) [9], the total escape probability is calculated using $P_{LO}(\tau) = 1 - \sum_k \rho_k(\tau)$, where $\rho_k(\tau)$ is the probability of finding the particle in a state k after the current pulse of length τ . The kinetic equation can be written as $\frac{d\rho_k}{dt} = \sum_j (\gamma_{kj}\rho_j - \gamma_{jk}\rho_k) - \Gamma_k\rho_k$. We take into account transitions γ_{jk} between neighboring levels and tunneling out, Γ_k . The relaxation rates between levels j and $j-1$ are well approximated by $\gamma_{j-1,j} = j\omega_p/4Q$. Detailed balance yields $\gamma_{j,j-1} = e^{-\beta(E_j - E_{j-1})}\gamma_{j-1,j}$. The positions of the levels and the escape rates are calculated using the results of Ref. [9]. The final state $\bar{\rho} \equiv [\rho_1\rho_2 \dots \rho_k]$ is calculated numerically using $\bar{\rho}(\tau) = \frac{1}{\tau} \times \int_0^\tau e^{\mathbf{A}(t)} \bar{\rho}(0) dt$, where \mathbf{A} is the transition matrix. I is set to zero in the beginning, and $\bar{\rho}(0)$ is Boltzmann distributed.

The effect of the relocalizing dissipation must be taken into account also in the quantized energy level model. Using again $E_D = 8E_J/Q$, and the fact that the energy difference between the two successive maxima is $-2\pi E_J I/I_c$, the level energy E must satisfy

$$\Delta U - E < E_J(2\pi I/I_c - 8/Q) \quad (2)$$

to allow switching into the free running state. If (2) is violated, the corresponding tunneling rate is set to zero [10]. Note that (2) yields the condition $I > I_m$ if we set $\Delta U = E$, but in Eq. (2) we assume that after tunneling the starting point is not at the potential maximum. The solid red lines in Fig. 2 present results of simulations with quantized energy levels and dissipation for the data of the dc-SQUID at zero and $\pm 0.28\Phi_0$ fluxes. At $\pm 0.41\Phi_0$ I_c is so small that the escape probability is large even at zero bias (except at the lowest temperatures). This means that the phase is moving constantly rather than infrequently escaping from a localized state, and thus our model does not work anymore. The only fitting parameter was Q , and the fitted values were in a very reasonable range. At $\Phi = 0$ we find $Q \approx 6$ at the lowest temperature, and it decreases with increasing temperature up to 4 at 325 mK. At $\pm 0.28\Phi_0$ $Q \approx 3$ to 4, again decreasing with temperature. In Fig. 3 we present $I_{50\%}$ and ΔI of the simulated histograms. We present also the simulated parameters for single junction ($Q \approx 4$) [5]. In the measurements on a single junction, the number of energy levels is large (≈ 20) and their separation is smaller than their width. Our model assumes well-separated levels and thus the agreement with a simple TA model is better for a single junction at $T < T_D$, especially in Fig. 3(a), whereas reentrant steepness of the histograms could not be explained with the basic TA model. The agreement between simulation and measure-

ments on a dc-SQUID is excellent. The position and the width of the measured histograms coincide and, in particular, at higher temperatures the simulated histograms for both samples start to get steeper again. At higher temperatures the upper energy levels, whose escape rate is significant with smaller potential tilting angles, are populated as well. The histograms thus peak at smaller currents and the condition (2) is not necessarily fulfilled anymore. What remains in the measured (and simulated) histograms is the escape from the states at the tail of the Boltzmann distribution above the dissipation barrier.

In summary, our measurements demonstrate for the first time how a Josephson junction can transit from the macroscopic quantum tunneling through thermal activation into underdamped phase diffusion under the variation of temperature and magnetic flux. A model including a phase diffusion barrier and level quantization yields a quantitative fit of the observations.

The Academy of Finland, EU IST-FET-SQUID2, and the French ACI, IPMC, and IUF programs are acknowledged for financial support. We thank J. Männik, A. O. Niskanen, T. T. Heikkilä, and M. A. Paalanen for helpful discussions.

Note added.—Since the submission of this manuscript, similar experimental results were reported in [11]. Their interpretation differs from ours in details.

-
- [1] D. Vion *et al.*, *Science* **296**, 886 (2002); I. Chiorescu *et al.*, *Nature (London)* **431**, 159 (2004); S. Saito *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 037001 (2004); J. Claudon *et al.*, *ibid.* **93**, 187003 (2004).
 - [2] J. Tobiska and Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 106801 (2004); J. P. Pekola, *ibid.* **93**, 206601 (2004).
 - [3] D. Vion *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3435 (1996).
 - [4] A. Franz *et al.*, *Phys. Rev. B* **69**, 014506 (2004); Y. Koval, M. V. Fistul, and A. V. Ustinov, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 087004 (2004); P. A. Warburton *et al.*, *J. Appl. Phys.* **95**, 4941 (2004); Joachim Sjöstrand *et al.*, *cond-mat/0406510*.
 - [5] In this Letter, we ignore the T dependence of Δ .
 - [6] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems* (World Scientific, Singapore, 1999), 2nd ed..
 - [7] J. M. Martinis and R. L. Kautz, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1507 (1989); R. L. Kautz and J. M. Martinis, *Phys. Rev. B* **42**, 9903 (1990).
 - [8] H. S. J. van der Zant, D. Berman, and T. P. Orlando, *Phys. Rev. B* **49**, 12945 (1994).
 - [9] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **91**, 318 (1986); [*Sov. Phys. JETP* **64**, 185 (1987)]. A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **87**, 1842 (1984); [*Sov. Phys. JETP* **60**, 1060 (1984)].
 - [10] With the low Q values in the experiment, the phase relaxes in the next well in a time $\sim \omega_p^{-1} \sim 100$ ps, far shorter than the typical time interval between phase diffusion events (10, ..., 100 μ s for bias currents used here).
 - [11] V. M. Krasnov *et al.*, *cond-mat/0503067*; J. Männik *et al.*, *cond-mat/0503729*.

Decoherence processes in a current biased dc SQUID

J. Claudon, A. Fay, L. P. Lévy and O. Buisson

CRTBT-LCMI, C.N.R.S.- Université Joseph Fourier, BP 166, 38042 Grenoble-cedex 9, France

(Dated: July 15, 2005)

A current bias dc SQUID behaves as an anharmonic quantum oscillator controlled by a bias current and an applied magnetic flux. We consider here its two level limit consisting of the two lower energy states $|0\rangle$ and $|1\rangle$. We have measured energy relaxation times and microwave absorption for different bias currents and fluxes in the low microwave power limit. Decoherence times are extracted. The low frequency flux and current noise have been measured independently by analyzing the probability of current switching from the superconducting to the finite voltage state, as a function of applied flux. The high frequency part of the current noise is derived from the electromagnetic environment of the circuit. The decoherence of this quantum circuit can be fully accounted by these current and flux noise sources.

PACS numbers: Valid PACS appear here

Feynman first considered how computation could be carried out with quantum mechanical nanoobjects[1]. Some twenty year later, coherent manipulation of two and multi-level quantum systems, efficient quantum read-outs, entanglement between quantum bits have been achieved[2–7] demonstrating the full potential of quantum logic gates in solid state physics. However at present, decoherence processes limit their future developments. In contrast with atomic system, the huge number of degree of freedom make the optimization of the coherence time a challenging problem. Up to now the most successful strategy has been to manipulate the quantum system at particular working points where its coupling to external noise is minimal[3]. However experimental analysis of decoherence phenomena remains a priority for a full-control of quantum experiments. In superconducting circuits, different models for the noise sources have been proposed to describe the decoherence processes observed in various qubits[8–11]. However a complete and consistent understanding of decoherence remains a current and open problem.

The superconducting circuit used in this experiment is a current-biased dc SQUID. It consists of two Josephson junctions (JJ), each with a critical current I_0 and a capacitance C_0 . The junctions are embedded in a superconducting loop of inductance L_s , threaded by a flux Φ_b . In the limit where $L_s I_0 \approx \Phi_0/2\pi$, the phase dynamics of the two junctions can be mapped onto a fictitious particle following a one dimensional path in a 2D-potential [6]. If the biasing current I_b is smaller than the SQUID critical current I_c , the particle is trapped in a cubic potential well characterized by its bottom frequency $\omega_p(I_b, \Phi_b)$ and a barrier height $\Delta U(I_b, \Phi_b)$ (Fig. 1.a). The quantum states in this anharmonic potential are written as $|n\rangle$, with corresponding energies E_n , $n = 0, 1, \dots$. In the following, only the lowest states $|0\rangle$ and $|1\rangle$ will be involved. For I_b well below I_c , these two levels are stable and constitute a phase qubit.

When the bias current I_b is close to I_c , ΔU decreases and becomes of the order of a few $\hbar\omega_p$. The ground state can tunnel through the potential barrier

and the SQUID switches to a voltage state[12]. The tunnelling rate Γ_0 of the ground state $|0\rangle$ is given by the well-known MQT formula for underdamped JJ[13]: $\Gamma_0(I_b, \Phi_b) = a\omega_p \exp(-36\Delta U/5\hbar\omega_p)$, where a is of the order of unity.

The controlled environment of the dc SQUID induces fluctuations of the bias current and the bias flux. In this letter, we show how the current and flux noise sources can be separately quantified. This is achieved by escape measurements of the SQUID at specific working points where it is mostly sensitive to current or flux noise. Using these identified noise sources, the measured decoherence times are fit precisely as a function of bias current.

Experimental results are analyzed assuming a linear coupling between the SQUID and the environment degrees of freedom. We suppose that current $\delta\hat{I}$ and flux $\delta\hat{\Phi}$ noises are generated by independent gaussian sources. Here, $\delta\hat{x}$ ($x = I$ or Φ) is an operator acting on the environment. Their fluctuations are specified by the quantum spectral densities $S_x(\nu)$ [14]. In presence of flux microwave (MW) excitation, the total Hamiltonian \hat{H} in the SQUID eigenstates basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ reads: $\hat{H} = -\frac{1}{2}\hbar\nu_{01}\hat{\sigma}_z - \hbar\nu_R \cos(2\pi\nu t)\hat{\sigma}_x + \hat{N}$ where $\hat{\sigma}_x$ and $\hat{\sigma}_z$ are Pauli matrices and $\nu_{01} = (E_1 - E_0)/\hbar$. The first term is the qubit Hamiltonian and the second term describes the MW excitation of reduced amplitude ν_R at frequency ν . In this notation, ν_R corresponds also to the Rabi precession frequency for a tuned excitation ($\nu = \nu_{01}$). The last term is the coupling to the noise sources. For our circuit it is, within linear response,

$$\hat{N} = -\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x \left[\frac{r_I(\theta)}{2\pi\sqrt{C_0}\hbar\nu_{01}}\hat{\delta I} + \frac{r_\Phi(\theta)}{\pi L_s\sqrt{C_0}\hbar\nu_{01}}\hat{\delta\Phi} \right] - \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z \left[\left(\frac{\partial\nu_{01}}{\partial I_b} \right)\hat{\delta I} + \left(\frac{\partial\nu_{01}}{\partial\Phi_b} \right)\hat{\delta\Phi} \right]. \quad (1)$$

where η is the asymmetry inductance parameter (see below), $r_I(\theta) = \cos\theta + \eta\sin\theta$, $r_\Phi(\theta) = \sin\theta$ and θ is the angle between the escape and the mean slope directions in the 2D potential[12, 15]. To first order, the transverse noise proportional to $\hat{\sigma}_x$ only induces

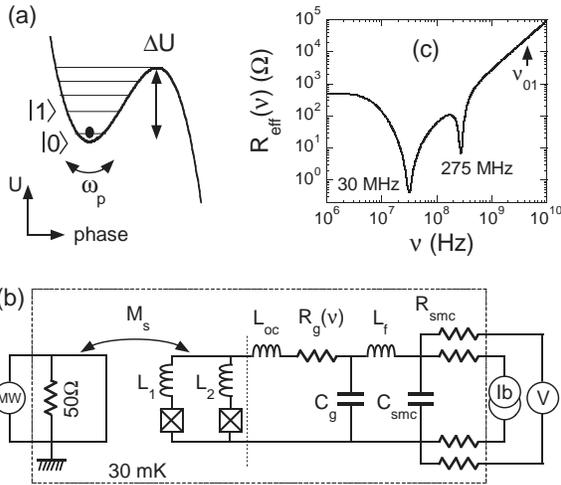


FIG. 1: (a) SQUID cubic-quadratic potential. (b) Electrical environment of the SQUID. (c) Calculated effective real impedance R_{eff} versus frequency.

depolarization. The longitudinal term proportional to $\hat{\sigma}_z$ induces "pure" dephasing. The qubit sensitivity to longitudinal noise is given by the partial derivatives $(\partial\nu_{01}/\partial I_b)$ and $(\partial\nu_{01}/\partial\Phi_b)$. They depend strongly on the experimental working point and increase near the critical current.

The measured SQUID consists of two large aluminum JJs of $15\ \mu\text{m}^2$ area ($I_0 = 1.242\ \mu\text{A}$ and $C_0 = 0.56\ \text{pF}$) enclosing a $350\ \mu\text{m}^2$ -area superconducting loop. The two SQUID branches of inductances L_1 and L_2 contribute to the total loop inductance $L_s = 280\ \text{pH}$ with the asymmetry parameter $\eta = (L_1 - L_2)/L_s = 0.414$. The immediate environment of the SQUID consists of two cascaded LC filters designed to decouple the circuit from the external classical world (see Fig. 1). A large on-chip inductance $L_{oc} = 9\ \text{nH}$ is made of two long and thin superconducting wires which value, derived from the normal state resistance, is dominated by the kinetic inductance. The gold thin film parallel capacitor, $C_g \approx 150\ \text{pF}$, introduces a finite resistor which dc value at 30 mK is measured close to $R_g = 0.1\ \Omega$. The second filter consists of the bounding wires, with an estimated inductance $L_f = 3\ \text{nH}$, and a surface mounted (SMC) capacitor $C_{SMC} = 2\ \text{nF}$ and four $500\ \Omega$ SMC resistors. The nominal room temperature microwave signal is guided by $50\ \Omega$ coaxial lines, attenuated at low temperature before reaching the SQUID through a mutual inductance $M_s = 1.3\ \text{pH}$. Special care was taken in magnetic shielding and bias lines filtering.

The current noise through the SQUID comes mostly from its immediate environment thermalized at $T = 30\ \text{mK}$ ($\nu_T \equiv k_B T/h = 600\ \text{MHz} \ll \nu_{01}$). The quantum spectral density of the current noise, $S_I(\nu)$ in this environment is set by the fluctuation-dissipation theorem: $S_I(\nu) = h\nu [\coth(\frac{h\nu}{2k_B T}) + 1] R_{eff}(\nu)^{-1}$ where $R_{eff}(\nu)^{-1}$ is the real part of the environment circuit admittance.

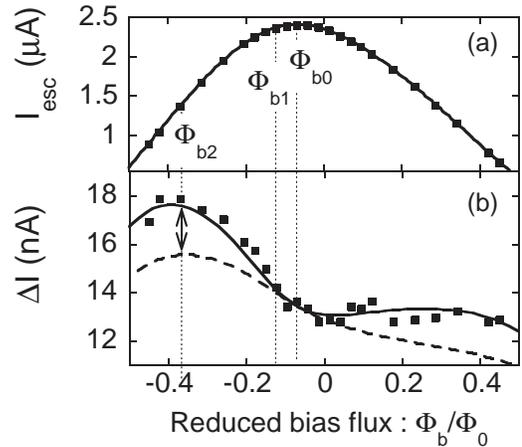


FIG. 2: (a) Measured escape current (dots) versus external applied flux fitted to MQT theory (solid line) at 30 mK. (b) The width of the probability distribution $P_{esc}(I_b)$ (dots) fitted to the 2D MQT predictions. The solid curve takes the low frequency flux noise into account while the dashed line does not. At bias flux Φ_{b0} (resp. Φ_{b1}) the sensitivity to flux noise is zero (resp. small) while it is maximum at Φ_{b2} .

$R_{eff}(\nu)$ is calculated using the electrical circuit shown in Fig.1(b) and is plotted in Fig.1(c). To a good approximation, the root mean square (RMS) current fluctuations are about $\sqrt{k_B T/L_{oc}} = 6\ \text{nA}$. Most of the noise is peaked around 30 MHz, a frequency much smaller than ν_T . A simple estimate of the flux noise produced by the inductive coupling to the $50\ \Omega$ coaxial line shows it can be neglected in the following.

The escape probability $P_{esc}(I_b)$ out of the superconducting states is measured under fixed flux using dc current pulses with $\Delta t = 50\ \mu\text{s}$ duration and I_b amplitude. Each measurement involves 5000 identical current pulses and the total acquisition time is $T_m = 10\ \text{s}$. The escape current I_{esc} is defined as the current I_b where the escape probability $P_{esc}(I_b) = 0.5$ and the width of the switching curve $\Delta I = I_h - I_l$ as the difference between the currents where $P_{esc}(I_h) = 0.9$ and $P_{esc}(I_l) = 0.1$. In Fig.2, the dependence of I_{esc} and ΔI on Φ_b are plotted. By fitting the escape current curve $I_{esc}(\Phi_b)$, the experimental parameters of the SQUID (I_0, C_0, L_s, η) are determined.

Moreover, escape measurements are a sensitive tool to characterize noise (frequency range and amplitude). If noise frequencies exceed the inverse of a current pulse duration Δt^{-1} , the tunnel rate fluctuates during each current pulse. The escape probability is controlled by the average $\langle\Gamma_0\rangle$ escape rate in the frequency window $[\Delta t^{-1}, \nu_T]$: $P_{esc} = 1 - \exp[-\langle\Gamma_0(I_b + \delta I, \Phi_b + \delta\Phi)\rangle\Delta t]$ [12, 16]. The current noise produced by the electrical environment, peaked at 30MHz, lies in this frequency interval. Its effect is to decrease $I_{esc}(\Phi_b)$ by about 6 nA, the RMS current fluctuations (unobservable in Fig.2.a). Similarly, the width of the switching curve is not affected.

On the other hand, if noise frequencies are slower than

Δt^{-1} , the tunnel rate is constant during a pulse, but fluctuates from pulse to pulse. In this limit, the escape probability becomes $P_{\text{esc}} = \langle 1 - \exp[-\Gamma_0(I_b + \delta I, \Phi_b + \delta\Phi)\Delta t] \rangle$, where the statistical average $\langle \rangle$ is now in frequency range from T_m^{-1} to Δt^{-1} . To first order, low frequency noise does not affect I_{esc} , but increases the width ΔI . Thus ΔI is the best quantity to probe the origin and the magnitude of the low frequency fluctuations: if the flux Φ_b is set at the value Φ_{b0} which maximizes I_c , the SQUID is only sensitive to current fluctuations since $\frac{\partial \nu_{01}}{\partial \Phi_b} = 0$. In the vicinity of this flux, the measured width is explained by the usual MQT theory. Hence the measured RMS current fluctuations in the $[T_m^{-1}, \Delta t^{-1}]$ interval (low frequency current noise) is below 0.5 nA, the error bar in ΔI measurements. This is consistent with the 0.1 nA RMS value derived from the spectral density of noise at frequencies below Δt^{-1} . For other applied fluxes, the width is slightly larger than MQT prediction, indicating a residual low frequency flux noise. The dependence of ΔI on Φ_b shown in Fig.2b is perfectly explained by a gaussian low frequency flux noise. Its RMS amplitude, $\langle \delta\Phi_{LF}^2 \rangle^{1/2} = 5.5 \times 10^{-4} \Phi_0$, is extracted from the fit shown in Fig.2b and is attributed to the flux noise in the [100 mHz, 20 kHz] frequency interval. The origin of flux noise may be a displacement of vortices trapped in the four aluminum $100 \times 100 \mu\text{m}$ contact pads located at a 0.5 mm distance from the SQUID. Their motion may be induced by the current pulses. From the residual magnetic field in our setup, about 15 vortices could be trapped in each pad.

Hereafter we discuss dephasing and relaxation induced by the noise sources previously identified. These incoherent processes are experimentally studied with low power spectroscopy and energy relaxation measurement. As described in Ref.[6], a MW flux pulse is applied followed by a 2 ns duration dc flux pulse to perform a fast but adiabatic measurement of the quantum state of the SQUID (Fig.3.c inset). The duration $T_{MW} = 300$ ns of MW pulses is sufficient to reach the stationary state where the population p_1 of the level $|1\rangle$ only depends on ν and the amplitude ν_R . The microwave amplitude ν_R is calibrated using Rabi like oscillations[6]. In the two level experiments discussed in this paper, the measured escape probability P_{esc} induced by the dc flux pulse can be interpreted as $P_{\text{esc}} = P_{\text{esc}}^{(0)} + (P_{\text{esc}}^{(1)} - P_{\text{esc}}^{(0)}) \times p_1(\nu, \nu_R)$. $P_{\text{esc}}^{(n)}$ denotes the escape probability out of the pure state $|n\rangle$. In Fig.3(a) and (b), the escape probability versus microwave frequency ν are plotted at two different biasing points. The experimental curves present a resonant peak which position and full width at half maximum define the resonant frequency ν_{01} and $\Delta\nu$. Spectroscopy experiments are performed in the linear regime and $\Delta\nu$ is experimentally checked to be independent of the MW amplitude. Relaxation measurements were performed by populating the $|1\rangle$ state with low power MW tuned at ν_{01} during a time $T_{MW} = 300$ ns, and measuring its population with increasing time delay T_{delay} after the end of

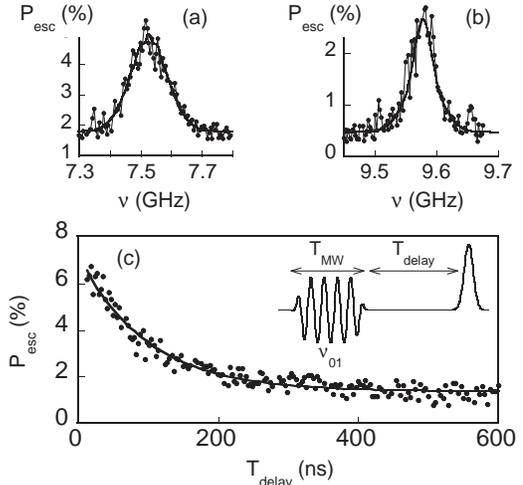


FIG. 3: (a) and (b) Escape probability versus applied microwave frequency with amplitude $\nu_R < 5$ MHz at two different working points ($I_b = 2.288 \mu\text{A}$, $\Phi_{b1} = -0.117 \Phi_0$) and ($I_b = 0.946 \mu\text{A}$, $\Phi_{b2} = -0.368 \Phi_0$), respectively. The points are experimental data and the continuous lines are the Fourier transforms of $f_{\text{coh}}(t)$ (see text). (c) Measured escape probability versus delay time (dots) fitted to an exponential law with $T_1 = 95$ ns (continuous line). The inset specifies the timing of the measurement pulse which follows the MW excitation pulse.

the MW pulse. As shown in Fig.3(c), the escape probability follows an exponential relaxation with a characteristic time T_1 . In Fig.4, measured resonant frequency ν_{01} , relaxation time T_1 and the inverse of microwave width $\Delta\nu^{-1}$ are plotted versus current bias for the two different applied fluxes Φ_{b1} (close to Φ_{b0}) and Φ_{b2} shown in Fig.2. ν_{01} , T_1 and $\Delta\nu^{-1}$ decreases as I_b gets closer to I_c . For these two applied fluxes, the ν_{01} dependence fits perfectly the semiclassical formulas for a cubic potential [17] using the same SQUID electrical parameters as those extracted from escape measurements.

The depolarization rate T_1^{-1} is given by the sum $T_1^{-1} = \Gamma_R + \Gamma_E$ of the relaxation Γ_R and the excitation Γ_E rates. These two rates are calculated using Fermi golden rule. At low temperature, excitation can be neglected and Γ_R reads:

$$\Gamma_R = \frac{r_I^2(\theta)}{4C_0 h \nu_{01}} S_I(\nu_{01}) + \frac{r_\Phi^2(\theta)}{L_s^2 C_0 h \nu_{01}} S_\Phi(\nu_{01}).$$

Neglecting the high frequency part of the flux noise, one obtains $T_1 = 2R_{\text{eff}}(\nu_{01})C_0/r_I^2(\theta)$, using the electrical model described in Fig.1. At high frequencies, the relevant electrical environment consists of L_{oc} in series with R_g . Thus the effective resistance takes the simple form $R_{\text{eff}}(\nu_{01}) = (2\pi L_{oc} \nu_{01})^2 / R_g(\nu_{01})$. This analysis take the skin effect into account assuming a frequency dependence $R_g(\nu) = \alpha\sqrt{\nu}$. The model (continuous lines in Fig.4(b)) describes precisely the T_1 dependence with $\alpha = 1.4 \Omega/\sqrt{\text{GHz}}$ as only free parameter. This value is

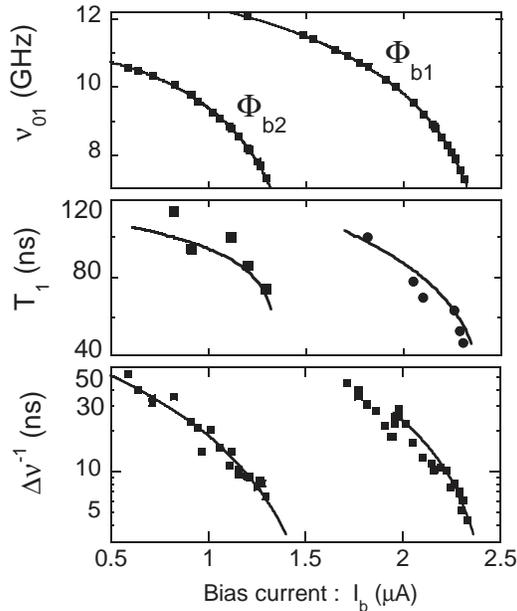


FIG. 4: Resonant transition frequency (a), relaxation time (b) and microwave width (c) as function of bias current at $\Phi_{b1} = -0.117 \Phi_0$ and $\Phi_{b2} = -0.368 \Phi_0$ respectively right and left curves. Symbols correspond to experiments and continuous line to model predictions.

consistent with the estimated surface resistance of the gold capacitor.

Relaxation alone is too weak to explain the value of $\Delta\nu$ and "pure" dephasing also contribute to the linewidths. First, we consider the time evolution of the reduced density matrix in the basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ in the absence of MW. The linear coupling to noise sources induces a time decay of the amplitude $f_{coh}(t)$ of the coherence terms. Since current and flux noises are independent, $f_{coh}(t)$ is factorized as $f_{coh}(t) = f_I(t) f_\Phi(t) \exp(-2t/T_1)$ where $f_I(t)$ and $f_\Phi(t)$ are respectively the "pure" dephasing contributions due to current and flux noises.

The current contribution is given by the well-known gaussian noise formula [11, 18]: $f_I(t) = \exp[-\frac{1}{2}t^2 \times$

$(2\pi \frac{\partial\nu_{01}}{\partial I_b})^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu S_I(\nu) \text{sinc}(\pi\nu t)]$, where $(\partial\nu_{01}/\partial I_b)$ is extracted directly from the slope of the experimental curve of Fig. 4(a). We neglect flux noise contributions with frequencies higher than 20kHz. Since the acquisition time of absorption spectra and escape measurements are similar, the SQUID undergoes the same RMS flux fluctuations in the two experiments. In these conditions, $f_\Phi(t)$ takes the simple gaussian form: $f_\Phi(t) = \exp[-\frac{1}{2}t^2 \times (2\pi \frac{\partial\nu_{01}}{\partial \Phi_b})^2 \langle \delta\Phi_{LF}^2 \rangle]$. $(\partial\nu_{01}/\partial \Phi_b)$ was computed using the known electrical parameters of the SQUID[19].

Within linear response, the shape of the resonance curve is proportional to the Fourier transform (FT) of $f_{coh}(t)$. Resonance curves in Fig.3(a) and (b) are fitted using $P_{esc} - P_{esc}^{(0)} \propto \text{FT}\{f_{coh}\}(\nu - \nu_{01})$ (continuous line). Our model explains perfectly the shape of the experimental curves. In Fig.4c, the theoretical width $\Delta\nu$ extracted from the curve $\text{FT}\{f_{coh}\}(\nu)$ is in very good agreement with experimental data without free parameter. When I_b gets close to I_c , the partial derivatives $(\partial\nu_{01}/\partial I_b)$ and $(\partial\nu_{01}/\partial \Phi_b)$ increase: the noise sensitivity increases and $\Delta\nu$ broadens. For bias points corresponding to Φ_{b2} , the width is due to current and flux noise. For a bias flux equal to Φ_{b1} , the effect of flux noise is small and the width is dominated by current noise. At this flux, for $I_b < 1.95 \mu\text{A}$, our model predicts satellite resonances around ν_{01} which are not observed. Other noise mechanism may blur the predicted satellite peaks.

In conclusion, we have shown how the flux and current noise present in this controlled quantum circuit can be separately identified. We measured the decoherence times at low microwave power where the quantum circuit can be reduced to a two level system. Analyzing the coupling of the SQUID to the known noise sources, the measured relaxation times and the resonance width can be fully understood.

We thank E. Colin, V. H. Dao, K. Hasselbach, F.W.J Hekking, B. Pannetier, P. E. Roche, J. Schrieff, A. Shnirman for very useful discussions. This work was supported by two ACI programs and by the Institut de Physique de la Matière Condensée.

-
- [1] R. P. Feynman, *Lectures on computation* Perseus Books (2000).
 - [2] T. Yamamoto *et al.*, Nature **425**, 941 (2003).
 - [3] D. Vion *et al.*, Science **296**, 886 (2002).
 - [4] J. M. Martinis *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 117901 (2002).
 - [5] I. Chiorescu *et al.*, Science **299**, 1869 (2003).
 - [6] J. Claudon *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 187003 (2004).
 - [7] A. Wallraff *et al.*, Nature **431**, 162 (2004).
 - [8] K.B. Cooper *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 180401 (2004).
 - [9] O. Astafiev *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 267007 (2004).
 - [10] P. Bertet *et al.*, cond-mat/0412485.
 - [11] G. Ithier *et al.*, submitted to publication.
 - [12] F. Balestro *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91**, 158301 (2003).
 - [13] A.O. Caldeira and A.J. Leggett, Ann. Phys. **149**, 374 (1983).
 - [14] The quantum spectral density is defined as follows : $S_x(\nu) = \int dt \langle \widehat{\delta x}(0) \widehat{\delta x}(\tau) \rangle e^{-i2\pi\nu\tau}$.
 - [15] V. Lefevre-Seguin *et al.*, Phys. Rev. B **46**, 5507 (1992).
 - [16] J.M. Martinis and H.Grabert, Phys. Rev. B **38**, 2371 (1988).
 - [17] A.I. Larkin and Y.N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **64**, 185 (1986).
 - [18] A. Cottet, PhD thesis, Université Paris VI, (2002).
 - [19] $(\partial\nu_{01}/\partial \Phi_b)$ could be measured by changing slightly Φ_b .