



HAL
open science

TRANSPORT DANS UN PLASMA DE FUSION EN PRESENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE CHAOTIQUE

Frederic Nguyen

► **To cite this version:**

Frederic Nguyen. TRANSPORT DANS UN PLASMA DE FUSION EN PRESENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE CHAOTIQUE. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 1992. Français. NNT: . tel-00011403

HAL Id: tel-00011403

<https://theses.hal.science/tel-00011403>

Submitted on 17 Jan 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris VII

thèse soutenue le 24 septembre 1992
pour l'obtention du titre de docteur de l'Université de Paris VII
[arrêté du 23 novembre 1988] par

Frédéric NGUYEN

**TRANSPORT DANS UN PLASMA DE
FUSION EN PRESENCE D'UN CHAMP
MAGNETIQUE CHAOTIQUE**

membres du jury :	Jean Heyvaerts	président
	André Samain	directeur de thèse
	Guy Laval	rapporteur
	André Brahic	
	Marc Dubois	rapporteur
	Philippe Ghendrih	responsable CEA
	André Grosman	

laboratoire d'accueil : Département de Recherche sur la Fusion Contrôlée
Centre d'études de Cadarache, 13108 Saint-Paul-Lez-Durance-Cédex
FRANCE

Formation doctorale : Astrophysique et techniques spatiales,
UFR de Physique, Université Paris VII.

errata - 1 -

errata

thèse soutenue le 24 septembre 1992
pour l'obtention du titre de docteur de l'Université de Paris VII
[arrêté du 23 novembre 1988] par

Frédéric NGUYEN

**TRANSPORT DANS UN PLASMA DE FUSION EN
PRESENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE CHAOTIQUE**

numéro d'identification : 92/PA07/7293
Thèse nouveau régime : astrophysique

page 41 :

$$F(\theta) = \frac{2}{\frac{A}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(C + \frac{G}{2})} \left[\frac{A}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arctg}(\sqrt{\beta} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}) \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (C + \frac{G}{2}) \operatorname{arctg}(\sqrt{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}) + \frac{G \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{2(1 + \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2})} \right] \quad (\text{II-13})$$

page 66 :

En géométrie plane, un bobinage de type multipolaire $\exp[i(m_0 \text{ réel} \theta)]$ en θ de période $2\pi/m_0 \text{ réel}$ dans l'espace réel $\underline{\quad}$ crée une perturbation magnétique dont le potentiel vecteur (quasi dans le vide) présente une décroissance exponentielle de la forme $\exp[-m_0 \text{ réel}(r_{DE} - r)/r_{DE}]$.

page 70:

La figure (III.3) représente la dépendance toroïdale, i.e. en \underline{n} , de $(\delta\phi_{\text{pol}})_{m,n}(\phi_{\text{tor}})$.

page 79 :

La ligne de flux réalise ensuite l'excursion $2\pi - \Delta\theta^*$ du côté champ fort où elle ne subit pas de déplacement radial.

page 80:

Au contraire, une ligne de champ dont $\underline{q} < 3$ subit une perturbation moins importante comme moyenne sur la "bosse".

page 82 :

la surface $q = \underline{1.875}$ (correspondant aux triangles) n'est pas détruite.

page 119 :

Le bilan énergétique est alors un dépôt sur la paroi de l'ordre de $\Gamma_{\text{erg}} \times T$ où Γ_{erg} est le flux ergodique d'ions et T la température.

page 126 :

Ceci mène à un profil décroissant exponentiellement pour la densité:

$$n_e = n_0 \exp\left[\frac{a-r}{\lambda_n}\right]$$

$$\text{où } \lambda_n = \left(\frac{D_{\perp} L}{c_s}\right)^{1/2} \text{ et } r > a$$

De même, on trouve un profil exponentiel pour la température :

$$T_{e,i} = T_0 \exp\left[\frac{a-r}{\lambda_{e,i}}\right]$$

page 149:

La pente est donc $d\theta^*/dr = + (\Delta\phi/q^2)dq/dr$, $\Delta\phi$ est la distance toroïdale en radians le long d'une ligne de champ entre notre plan poloïdal et le premier module rencontré :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi q}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} \text{ où } q = 3.$$

page 150:

Nous retranchons $\pi/6$ car notre plan poloïdal est entre deux modules, toroïdalement, et encore $2\pi/6$ car la première zone (-) rencontrée en partant de $\theta^* = \pi$ est la zone (-) inférieure du module précédant le module exactement distant d'un demi-tour poloïdal.

page 181

$$K_{\theta} = 0,55 n \sqrt{\pi} qR \left(\frac{1}{r}\right)^2 \frac{m^2}{4T} \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2} v_{th}^2 \frac{qR}{\tau_{coll}}$$

(VI-77b)

$$K_{\phi} = 0,55 n \sqrt{\pi} \frac{R}{N} \left(\frac{N}{R}\right)^2 \frac{m^2}{4T} b^{1/2} \frac{R}{N} \frac{v_{th}^2}{\tau_{coll}}$$

REMERCIEMENTS

Je tiens en premier lieu à remercier Marc Dubois qui m'a fait découvrir les milieux de la physique des plasmas et de l'astrophysique. Son intérêt pour mon travail l'a finalement conduit à être rapporteur de ma thèse.

Je suis reconnaissant au professeur Jean Heyvaerts pour avoir eu la possibilité de suivre la formation doctorale en astrophysique de l'observatoire de Paris-Meudon et de l'université de Paris VII. Il m'a également fait le plaisir de présider le jury devant lequel j'ai soutenu.

La préparation de ma thèse s'est effectuée au sein du Département de Recherches sur la Fusion Contrôlée du CEA au centre de Cadarache. J'y ai bénéficié d'excellentes conditions de travail. Je remercie messieurs Tachon, Laurent et Maschke pour m'avoir accueilli, respectivement, dans leur département, service de physique et section de théorie.

Je suis très redevable à Philippe Ghendrih du suivi de ma thèse comme responsable CEA, fonction qu'il a prise très à cœur. En plus du travail effectué ensemble, ses encouragements, ses aiguillons, ses conseils avisés et sa gentillesse n'ont jamais fait défaut.

Je remercie tout particulièrement André Samain. Il a non seulement assuré la direction de ma thèse avec sa compétence coutumière mais il a également tenu à améliorer ma capacité de recherche. En plus de son incomparable culture en physique, j'ai pu profiter de sa curiosité et de son enthousiasme toujours renouvelés, alliés à une grande persévérance dans la résolution de problèmes intéressants et difficiles. Son exemple et les efforts qu'il a déployés à mon égard ont grandement contribué à ma formation de chercheur.

J'ai beaucoup apprécié la collaboration avec le groupe interaction plasma paroi. Je pense notamment à André Grosman qui a, de plus, bien voulu faire partie de mon jury. Je remercie aussi Xavier Garbet et Hubert Capes pour les nombreuses discussions concernant la physique théorique.

Je suis reconnaissant au professeur Guy Laval pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour le sérieux avec lequel il a assuré son rôle de rapporteur.

Je sais gré au professeur André Brahic d'avoir bien voulu être membre de mon jury et de m'avoir donné des conseils précieux pour améliorer mon exposé de soutenance.

Je remercie Chantal Passeron pour l'aide qu'elle m'a apportée dans l'écriture du Code Mastoc.

Ma thèse s'est déroulée dans une atmosphère chaleureuse au sein du DRFC et je veux remercier les nombreuses personnes qui y ont contribué.

Je suis enfin reconnaissant à mes parents et à mon frère Sylvain, ainsi qu'à mes amis, parmi lesquels de nombreux thésards de Cadarache, pour le soutien et l'encouragement qu'ils m'ont prodigués.

TRANSPORT DANS UN PLASMA DE FUSION EN PRÉSENCE D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE CHAOTIQUE

Abstract.....	4
Résumé.....	5
Table des matières.....	6
Table des illustrations.....	10
Notations et symboles	14
I - INTRODUCTION.....	24
II - TOPOLOGIE MAGNETIQUE	32
II.1 - Configuration tokamak	34
II.2 - Coordonnées intrinsèques.....	38
II.3 - Perturbation résonante.....	42
II.3.a - Equations des lignes de champ perturbées et formulation hamiltonienne	43
II.3.b - Résonance sur une surface magnétique	45
II.3.c - Un seul mode harmonique : cas intégrable.....	46
II.4 - Couche ergodique.....	50
II.4.a - Recouvrement des îlots et paramètre de Chirikov.....	51
II.4.b - Calcul du coefficient de diffusion quasi-linéaire	53
II.4.c - Corrélacion des lignes de flux avec un mode harmonique.....	57
II.4.d - Séparation exponentielle, longueur de Kolmogorov	58
II.5 - Influence d'une paroi matérielle dans la couche ergodique.....	59

III - CODE MASTOC.....	62
III.1 - Modélisation du divertor ergodique pour le code numérique Mastoc	64
III.2 - Dimensionnement.....	66
III.3 - Calcul de la perturbation magnétique	68
III.4 - Tracé de lignes de champ.....	76
III.5 - Zones $\delta B_r > 0$ et $\delta B_r < 0$ sur la surface du divertor ergodique	78
III.6 - Section de Poincaré.....	82
III.7 - Déplacement maximum $(\delta r)_{\text{module max}}$ d'une ligne de flux au passage devant un module	83
III.8 - Quantification de la longueur de connexion.....	86
III.9 - Pénétration radiale des lignes de champ	90
III.10 - Taille des tubes de flux.....	93
III.11 - Chaos de seconde espèce	95
III.12 - Résumé des principaux résultats du code Mastoc.....	97
IV - TRANSPORT DE PARTICULES ET DE CHALEUR EN PRESENCE DE LA PERTURBATION DU DIVERTOR ERGODIQUE	98
IV.1 - Introduction.....	100
IV.2 - Détermination du champ de température et du flux ergodique de chaleur.....	103
IV.3 - Détermination des champs de densité et de pression et du flux ergodique de particules	108
IV.4 - Théorie quasi-linéaire.....	114
IV.5 - Zone laminaire entre la couche ergodique et la paroi matérielle.....	119

V - COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE TORE SUPRA.....	122
V.1 - Introduction.....	124
V.2 - Description du divertor ergodique de Tore Supra.....	129
V.3 - Grandeurs liées à la topologie magnétique et au transport.....	131
V.4 - Connexion magnétique entre le neutraliseur et l'espace entre les protections	133
V.5 - Evaluation numérique du dépôt sur les modules	135
V.6 - Asymétrie du dépôt sur les neutraliseurs	139
V.7 - Epaisseur de la zone laminaire.....	141
V.8 - Modulations poloïdales dans la couche laminaire	143
a) Description des expériences.....	143
b) Mécanisme physique	144
c) Résultat numérique.....	145
d) Calculs analytiques reproduisant cette structure magnétique.....	147
V.9 - Récapitulatif des principaux résultats	150
VI - ETUDE DE L'EVOLUTION D'UN PLASMA PAR UNE METHODE DE MINIMUM DE PRODUCTION D'ENTROPIE	152
VI.1 - Introduction.....	154
VI.2 - Principe de minimum de production d'entropie	155
VI.3 - Régimes collisionnels.....	162
VI.3.a - Plasma non magnétisé.....	162
VI.3.b - Plasma magnétisé : régime Pfirsch-Schlüter.....	167
VI.4 - Régimes faiblement collisionnels.....	172
VI.5 - Application à la diffusion néo-classique en présence de la perturbation magnétique du divertor ergodique.....	189
Introduction.....	189
Equilibre électronique.....	191
Flux radiaux d'ions	193
Les perturbations magnétiques ne produisent pas de particule piégée	193
Régime faiblement collisionnel avec des particules piégées.....	197
Discussion et conclusion	199
VII - CONCLUSION.....	202

Appendice 1 : taux de production d'entropie.....	206
Appendice 2 : Calcul de la variable U_2 pour une perturbation à une seule harmonique	210
Références bibliographiques.....	214

TABLES DES ILLUSTRATIONS

Photographies

I - INTRODUCTION

(I.1) : une bobine de divertor ergodique (module)..... 28

II - TOPOLOGIE MAGNETIQUE

(V.1) : vue de l'intérieur du tokamak Tore Supra128

(V.2) : plaques de neutralisation entre les barres de courant d'un module de
divertor ergodique.....130

(V.3) : asymétries poloïdales lors du réattachement de plasma détaché.....143

Figures

I - INTRODUCTION

(I.1) : configurations limiteur et divertor	27
(I.2) : ligne de champ magnétique passant devant deux modules de divertor ergodique.....	27

II - TOPOLOGIE MAGNETIQUE

(II.1) : configuration tokamak	35
(II.2) : flux poloïdal et toroïdal	39
(II.3) : angle polaire autour de l'axe magnétique principal (poloïdal) et coordonnée intrinsèque.....	41
(II.4) : îlot magnétique pour un seul mode harmonique	47
(II.5) : une section de Poincaré est une coupe dans un plan poloïdal	48
(II.6) : section de Poincaré pour un mode harmonique unique	49
(II.7) : mer chaotique et îlots résiduels, $\sigma = 1,5$	51
(II.8) : élargissement de la résonance.....	55
(II.9) : divergence exponentielle, L_K est la longueur de Kolmogorov	58
(II.10) : séparation de la couche ergodique en deux zones.....	60

III - CODE MASTOC

(III.1) : bobinage d'un module de divertor ergodique	64
(III.2a) : fonction $\text{sinc}[(18 - m)2\pi/10] - \text{sinc}[(18 + m)2\pi/10]$	69
(III.2b) : dépendance poloïdale de $(\delta\phi_{\text{pol}})_{m, n = 6}$ ($q = 3$), résultat numérique.....	69
(III.3) : dépendance toroïdale de $(\delta\phi_{\text{pol}})_{m = 18, n}$ ($q = 3$).....	70
(III.4a) : dépendance radiale de $(\delta\phi_{\text{pol}})_{m = 18, n}$	71
(III.4b) : $(\delta\phi_{\text{pol}})_{m = 18, n}$ en fonction du facteur de sécurité q	71
(III.5) : $\delta\phi_{\text{pol}}$ sur la surface magnétique $q = 3$	72
(III.6) perturbation radiale δB_r devant un module de divertor ergodique	73
(III.7) : paramètre de Chirikov	74
(III.8) : coefficient de diffusion quasi-linéaire des lignes de champ	74
(III.9) : ligne de champ résonante passant devant quatre modules	77
(III.10) : zones $\delta B_r > 0$ (+) et $\delta B_r < 0$ (-).....	78
(III.11) : effet radial "maximal" à $q = 3$	80
(III.12) : conducteurs inclinés ; conducteurs horizontaux.....	81
(III.13) : section de Poincaré pour 45 kA de courant dans le bobinage du divertor ergodique.....	82
(III.14) : Déformation des surfaces magnétiques après le passage devant un module.....	83
(III.15) : trois lignes de champ partant de surfaces magnétiques différentes.....	85
(III.16) : statistique de la longueur de connexion de la paroi à la paroi en nombre de tours poloïdaux ($L_{\text{mur}}/2\pi qR$).....	86
(III.17) : empreinte sur un module de la longueur de connexion.....	88
(III.18) : statistique de la longueur de connexion et de la pénétration radiale	91
(III.19) : statistique de $(\delta r)_{\text{pénétration}}$ pour $L_{\text{mur}} = 1$ tour poloïdal	92
(III.20) : empreinte de quelques tubes de flux sur un module de divertor ergodique.....	94
(III.21) : trois lignes de champ initialement très voisines	95

IV - TRANSPORT DE PARTICULES ET DE CHALEUR EN PRESENCE DE LA PERTURBATION DU DIVERTOR ERGODIQUE

(IV.1) : structure du champ de température dans la couche ergodique.....	101
(IV.2) : alimentation en énergie des tubes de flux dans la zone laminaire	120

V - COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE TORE SUPRA

(V.1) : couche limite créée par un limiteur	125
(V.2) : plaques de neutralisation entre les barres de courant d'un module de divertor ergodique.....	129
(V.3) : angle poloïdal limite θ^* limite	133
(V.4) : connexion magnétique du neutraliseur.....	134
(V.5a) : $L_{\text{pénétration}}(\delta r)_{\text{pénétration}}$	135
(V.5b) : $(L_{\text{pénétration}})^{1/2}(\delta r)_{\text{pénétration}}$	136
(V.5c) : $(\delta r)_{\text{pénétration}}$	137
(V.6) : dépendance poloïdale de dépôt sur un module.....	138
(V.7) : asymétrie du dépôt sur les neutraliseurs	139
(V.8) : mécanisme l'asymétrie du dépôt sur les neutraliseurs.....	140
(V.9) : robustesse vis-à-vis des défauts d'alignement	142
(V.10) : points dans un plan poloïdal connectés à $r = 0,73$ m au moins.....	145
(V.11) : mécanisme donnant cette structure de connexion	148

NOTATIONS ET SYMBOLES

a rayon de la "dernière" surface magnétique

$$a(\varphi) = n_k \frac{\partial \delta H(J_k, \varphi)}{\partial J_k}$$

A constante dans l'expression de la fonction de distribution F

\vec{A}_{eq} potentiel vecteur d'équilibre

$A_{m, n}(q)$ amplitude d'un mode

\vec{B} champ magnétique

B_0 champ magnétique défini par $\phi_{tor} = (1/2\pi)(B_0\pi r^2)$

\vec{B}_{eq} champ magnétique d'équilibre

B_φ champ toroïdal

B_θ champ poloïdal

$$B_\theta(r, \theta) = \overline{B}_\theta(r) (1 + \Lambda(r/R)\cos\theta)$$

$$\overline{B}_\theta(r) = B_\theta(r, \theta)/(1 + \Lambda(r/R)\cos\theta)$$

\tilde{B} perturbation du champ magnétique $B \frac{\tilde{B}}{B} = \sum_{m n} \left(\frac{\tilde{B}}{B} \right)_{m n} \exp i(m\theta + n\varphi)$

$\frac{\tilde{B}_{ripple}}{B} = b \cos N\varphi$ ondulation magnétique ("*ripple*") due au caractère discret des bobines produisant le champ toroïdal,

$\frac{\tilde{B}_{pol}}{B} = \frac{r}{R} \cos \theta$ modulation poloïdale du champ $\tilde{B}_{pol} \approx B_0 \frac{r}{R} \cos \phi_2$

C(F) opérateur de collision.

D (m²/s) coefficient de diffusion des particules

D' coefficient de diffusion

D'' = (D_⊥D_⊥')^{1/2} coefficient de diffusion

D_{erg} coefficient de diffusion des particules effectif qui tient compte de l'ergodicité des lignes de flux.

D_{LC} (m²/m) coefficient de diffusion des lignes de champ

D_{LC} v_{thi}, D_{collision}, turbulence D_{turb} coefficients de diffusion ioniques

D_⊥' coefficient de diffusion des particules

D_⊥ coefficient de diffusion des particules

e charge

ergodique un domaine est ergodique si une ligne de champ passe aussi près que l'on veut d'un point donné de ce domaine. Nous emploierons le terme ergodique même si il reste des zones très petites (au sens où leur mesure tend vers zéro) où cette propriété n'est pas vraie.

E_r champ électrique radial

$$f = \frac{n_H m_H}{\tau_{H/Z}} = \frac{n_Z m_Z}{\tau_{Z/H}} \text{ coefficient de friction}$$

F fonction de distribution

$$F(x, p, t, s) = A_s \cdot \exp\left(-\frac{H-U}{T}\right), A_s = \text{cste}, T = \text{cste}$$

\vec{F} force de friction

F_0 fonction de distribution à l'équilibre

F_M fonction de distribution d'une maxwellienne avec pour chaque espèce

$$F_M = A \cdot \exp\left(-\frac{H}{T}\right)$$

F_y force de friction dans la direction diamagnétique

$$h(J) = H(x, p) - \mu \tilde{B} \text{ hamiltonien}$$

H hamiltonien

(H) ions légers

$$H'(\phi_{\text{tor}}, u, \varphi) = m H(\phi_{\text{tor}}, u, \varphi) - n \phi_{\text{tor}}$$

I_{tor} courant dans les bobines créant le champ magnétique toroïdal

\vec{I} vecteur unitaire dans la direction centrifuge

$J = J_1, J_2, J_3$ constantes du mouvement

J jacobien du système $\chi, \theta^*, \varphi^*$

\dot{j} densité de courant

$J_{\mathcal{R}}$ projection de J sur la surface de résonance \mathcal{R}

j_ϕ courant toroïdal

k nombre d'onde spatial de la structure collective du fluide

kv est l'inverse du temps de transit le long des trajectoires à travers la structure collective du fluide

$$K_\theta = n \sqrt{\pi} qR \left(\frac{1}{r}\right)^2 \frac{m^2}{4T} \left(\frac{r}{R}\right)^2 v_{\text{th}}^3$$

coefficients néoclassiques

$$K_\phi = n \sqrt{\pi} \frac{R}{N} \left(\frac{N}{R}\right)^2 \frac{m^2}{4T} b^2 v_{\text{th}}^3$$

$$k_{//} = \frac{1}{R} \left(n + \frac{m}{q(r_{mn})}\right) = \alpha(r - r_{mn})$$

$$\begin{cases} k_{//} = \frac{1}{qR} \text{ pour } \frac{\tilde{B}_{\text{pol}}}{B} = \frac{r}{R} \cos \theta \\ k_{//} = \frac{N}{R} \text{ pour } \frac{\tilde{B}_{\text{ripple}}}{B} = b \cos N\varphi \end{cases}$$

nombre d'onde parallèles

$k_{//v} = \alpha / k_{\perp v}$ nombre d'onde parallèle associé à $k_{\perp v}$

$k_{//v'} = \alpha / k_{\perp' v}$ nombre d'onde parallèle associé à $k_{\perp' v}$

$k_{\perp T}$ nombre d'onde transverse moyen

$k_{\perp v}$ nombre d'onde transverse représentant l'action de l'opérateur $-i\partial/\partial r$ sur une surface

$k_{\perp}'_v$ nombre d'onde transverse représentant l'action de l'opérateur $-i\partial/\partial r$ sur une surface " " "

L longueur parallèle parcourue

$L_{\text{au mur}}$ longueur de connexion magnétique entre le point considéré dans le plasma et la paroi matérielle

$L_{\text{connexion}}$ longueur de connexion magnétique entre deux points de la paroi matérielle

$L_{\text{dépôt}}$ longueur combinaison entre L_T et L_M : $\max(L_T, L_M)$

$li = \frac{\langle B_{\theta}^2 \rangle}{\overline{B_{\theta}^2}}$ inductance interne et par unité de longueur du cordon de plasma divisé par $\mu_0/4\pi$

L_K longueur de Kolmogorov

L_M échelle parallèle pour la matière

L_{mur} longueur de la ligne de champ entre ses deux points de contact avec la paroi matérielle

$L_{\text{mur}}/2\pi qR$ nombre de tours poloïdaux

L_p échelle parallèle de cohérence du champ de pression

$L_{\text{pénétration}}$ longueur minimale nécessaire pour obtenir la pénétration $(\delta r)_{\text{pénétration}}$ à partir du mur

(L_{sh}) longueur de cisaillement magnétique

L_T échelle parallèle de cohérence du champ de température

\mathcal{M} moment azimuthal autour de l'axe de révolution vertical

m nombre poloïdal autour de m_0

m_i masse de l'ion

m_e masse de l'électron

$m_0 = m_0 \text{ réel}(d\theta^*/d\theta)$ nombre d'onde poloïdal moyen

$m_0 \text{ réel}$ nombre d'onde poloïdal du bobinage dans l'espace réel θ^*

n densité

n nombre toroïdal, multiple de n_0

$\{n\}$ perturbation

(n) indice du mode $\{n\}$

n_e profil électronique

$n_{m,n}$ structure radiale du champ de densité n

n_0 nombre toroïdal moyen

$n(\psi)$ profil de densité

p pression

$q(\mathcal{X})$ facteur de sécurité sur la surface magnétique \mathcal{X} donnant le rapport du nombre de grands tours en φ au nombre de petits tours en θ réalisés par une ligne de flux

$q_{\text{res}} = -m/n$

\vec{Q}_{erg} flux ergodique de chaleur à travers les surfaces magnétiques

\mathcal{R} surface de résonance

r_{chaos} frontière entre la zone ergodique entourant le plasma confiné et la zone laminaire au contact du mur

r_{DE} petit rayon du tore sur lequel s'appuie le bobinage octopolaire du divertor ergodique

$r_{détaché}$ limite du plasma détaché

$r_{îlot}$ position radiale de l'îlot non perturbé

r_{min} atteint rayon minimal atteint

$r_{m, n}$ rayon de la surface telle que $\frac{m}{q(r_{m, n})} + n = 0$

r_{res} position radiale de surface rationnelle telle que $q = -m/n$

$R_o(r)$ distance à l'axe principal du centre de la surface magnétique de rayon r

$1/\mathcal{R}$ courbure du champ magnétique

s abscisse curviligne le long de la ligne de champ

stochastique un domaine est stochastique si des trajectoires voisines se séparent exponentiellement.

$$S = \frac{rdq}{qdr}$$

$S(U, U)$ entropie de l'état U

$$S(V, W) = - \sum_s \int \frac{F_M}{2T^2} VW d_3x d_3p$$

S_o symétrie ponctuelle

$S_\Gamma(r)$ source de particules donnée, variant régulièrement avec r

S_Q densité de puissance déposée

$\dot{S}(U, U)$ taux de production d'entropie

$S_{ij} = S_{ji} = S(U_i, U_j)$; $S = S_{ij} \lambda^i \lambda^j$ entropie

$\dot{S} = \dot{S}_{ij} \lambda^i \lambda^j$; $\dot{S}_{ij} = \dot{S}_{ji} = \dot{S}(U_i, U_j)$ taux de production d'entropie

\dot{S}_j^i , Σ_j^i , $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ opérateurs agissant dans l'espace de fonctions (U_i) sur l'espace de fonctions (U_j) de telle façon que, quelles que soient les fonctions U_i ,

$$U_j : (\dot{S}_j^i U_i) * U_j = (\dot{S} U_i) * U_j$$

$$(\Sigma_j^i U_i) * U_j = (\Sigma U_i) * U_j$$

$$2\dot{S}_{compl}(U_1, \underline{U}_1) = U_2 * (\Sigma_2^1 - 2\dot{S}_2^1) \underline{U}_1 = ((\Sigma_2^2 + 2\dot{S}_2^2)^{-1} (\Sigma_2^1 + 2\dot{S}_2^1) U_1) * (\Sigma_2^1 - 2\dot{S}_2^1) \underline{U}_1$$

$\dot{S}_{actuel}(U_1, U_1)$ forme symétrique qui est la production d'entropie réelle $\dot{S}(U, U)$

$\dot{S}_{coll} \varphi$ taux de production d'entropie dû au mouvement macroscopique dans la direction toroïdale φ

$\dot{S}_{compl}(\tilde{B}/\Delta v_{//})$ production d'entropie complémentaire due à \tilde{B} localisée dans un domaine $\Delta v_{//}$ autour de $v_{//} = 0$

$$\dot{S}_{actuel}(U_1, U_1) = \dot{S}_{class} + \dot{S}_{PS}$$

$\dot{S}_{\text{class}}(U_1, U_1)$ taux de production d'entropie due au diamagnétisme transverse

$\dot{S}_{\text{pomp. mag.}}$ taux de production d'entropie due à des effets de pompage magnétique

$\dot{S}_{\text{PS}}(U_1, U_1)$ taux de production d'entropie de Pfirsch-Schlüter due au mouvement parallèle de chaque assemblée

T température

$$T = \langle T \rangle(r) + \sum_{m, n} T_{m, n}(r) \exp[i(m\theta + n\phi)]$$

$T(\psi)$ profil de température

\tilde{T} fluctuation autour de T

$\langle T \rangle$ température moyenne sur la surface magnétique de rayon r

T_e température électronique

T_i température ionique

$T_{m, n}$ structure radiale du champ de température T

$u = m\theta + n\phi$ phase

$u(J)$ fonction écart à l'équilibre thermodynamique

$U(x, p, t, s)$ écart à l'équilibre thermodynamique pour chaque espèce

$U_i(J)$ base de fonctions

v vitesse parallèle de la matière

v_G vitesse de dérive

$v_{m, n}$ structure radiale du champ de vitesse v

v_{the} vitesse thermique des électrons

$v_{\text{thi}} = (2T/m_i)^{1/2}$ vitesse thermique des ions

v_{\perp} vitesse transversale

V vitesse moyenne d'ensemble d'une population de particules

$\text{Var}(x, p)$ variable dynamique

\vec{V}_D vitesse de dérive verticale des particules

$V_{\phi} = V_{\phi \text{ dia}} + W_{//}$ vitesse macroscopique dans la direction toroïdale ϕ

$V_{\phi \text{ dia}}$ vitesse dans la direction ϕ d'un déplacement diamagnétique à divergence nulle

$V_{\theta} = rW_{//}/(qR)$ vitesse macroscopique dans la direction poloïdale θ

$V_{\perp \text{ dia}}$ vitesse diamagnétique transverse

V_y vitesse macroscopique dans la direction diamagnétique y

$$w = \frac{ZD}{D + D_{\text{turb}}}$$

$W_{//}$ vitesse d'un mouvement parallèle arbitraire à divergence nulle ne produisant aucune force de Lorentz.

x_G position du centre guide

$Z = e_Z / e_H$

(Z) ions impureté

$$\alpha = - \frac{m S}{r q R}$$

α_{phase} phase à l'origine

$$\beta_{\text{pol}} = (\langle p \rangle - p(r)) \left(\frac{\overline{B_{\theta}^2}(r)}{2\mu_0} \right) \text{ rapport de la pression du plasma effectivement confiné à la}$$

pression magnétique de \vec{B}_{θ}

$1/\gamma_{\text{eff}}$ temps de piégeage des particules piégées dans \vec{B}_{ripple}

$\gamma \delta F$ terme d'amortissement

Γ flux radial de particules

Γ_{erg} flux radial moyen de particules dans la couche ergodique

Γ_{turb} flux radial de particules dû à la turbulence

δ distance entre deux trajectoires

δ_0 distance initiale entre deux trajectoires très voisines

$\vec{\delta A}$ perturbation au potentiel vecteur d'équilibre

$(\delta A)_{\theta^*}$ composante transverse

$\vec{\delta A}_{//}$ potentiel vecteur parallèle à B seulement

δA_{\perp} perturbation perpendiculaire

δB_{ϕ} perturbation de type ondulation magnétique ("*ripple*")

δB_r perturbation magnétique radiale

δF perturbation de la fonction de distribution

$\vec{\delta H}$ perturbation de l'hamiltonien

δM déplacement transverse MHD des lignes de champ

δn variation locale de densité

δn_{min} échelle transverse minimale du champ de densité n

δn_{max} échelle transverse maximale du champ de densité n

δp_{min} échelle transverse minimale du champ de pression p

δp_{max} échelle transverse maximale du champ de pression p

$\delta \phi_{\text{pol}}$ perturbation du flux poloïdal

$(\delta \phi_{\text{pol}})_{m, n}$ amplitude du terme (m, n)

$(\delta q)_{\text{res}}$ élargissement de la résonance

$\delta r(\text{îlot})$ largeur de l'îlot non perturbé selon la coordonnée r

$(\delta r)_{\text{laminaire}}$ excursion radiale de la partie laminaire du tube de flux, limitée à L_K

$(\delta r)_{\text{module}}$ déplacement radial qu'une ligne de champ subit quand elle passe devant un module

$(\delta r)_{\text{module max}}$ déplacement radial maximum de la ligne de champ quand elle passe devant un module.

$(\delta r)_{\text{pénétration}}$ pénétration radiale maximale de la ligne de champ entre ses deux points de connexion sur le mur.

δT variation locale de température

δT_{max} échelle transverse maximale du champ T

δT_{min} échelle transverse minimale du champ T

$\Delta = \Delta_0 \exp -L/L_K$ épaisseur d'un tube de flux dans la direction contractante

Δr élargissement radial de la résonance

$(\Delta r)_{\text{îlot}}$ distance radiale entre deux îlots voisins de même nombre toroïdal n

$\Delta v_{//\text{piégé}}$ domaine piégé centré sur $v_{//} = 0$ dans l'espace des phases

$\Delta\theta \approx 2\pi/3$ extension poloïdale d'un module de divertor ergodique dans l'espace réel

$\Delta\theta^*$ largeur d'un module le long de la coordonnée intrinsèque θ^*

$\Delta\theta_{\text{réel}} = 2\pi/3$ extension poloïdale d'un module de divertor ergodique dans l'espace réel

$(\Delta\theta^*)_{\text{zone}} = \pi/m_0 \sim 2\pi/36$ largeur poloïdale qui est la distance en θ^* entre deux conducteurs successifs dans un module

$\Delta\varphi \approx \pi/14$ extension toroïdale d'un module de divertor ergodique

$\Delta\Omega_{\text{îlot}} = (n_k \frac{\partial\Omega}{\partial J_k} \delta H)^{1/2}$ largeur du domaine résonant, extension du domaine piégé créé

par δH autour de la surface résonante

$\Delta\Omega_{\text{Landau}}$ extension du domaine Landau

Δ_{\perp} Laplacien

Δ_{\perp}^{-1} opérateur

θ angle polaire autour du centre de chaque surface magnétique (poloïdal)

θ^* coordonnée "intrinsèque"

θ^*_{limite} position poloïdale au-dessous de laquelle une ligne de champ se reconnecte sur la paroi verticale basse des protections en graphite du divertor ergodique

$$\vartheta = n_k \frac{\partial\Omega}{\partial J_k} (J_{\mathcal{R}}) = n_k n_l \frac{\partial^2 h}{\partial J_k \partial J_l}$$

$$\Lambda = \beta_{\text{pol}} + li/2 - 1$$

λ_e libre parcours électronique moyen

λ_q facteur exponentiel de décroissance de l'énergie

λ^i jeu de paramètres caractérisant l'écart U à l'équilibre thermodynamique :

$$U(J, t) = \lambda^i(t) U_i(J)$$

μ moment magnétique

ν_{coll} taux de collisions

$\nu_{\text{coll } ss'}$ est la fréquence de collision des particules s (masse m_s) sur les particules s'

$\nu\omega_{\text{va-et-vient}}$ harmoniques du mouvement de va-et-vient de la particule piégée

$\rho_c = v_{\perp}/\omega_c$ rayon de Larmor

σ paramètre de Chirikov

$$\Sigma(V, W) = 2 \sum_s \int \frac{F_M(V, H) W}{T^2} d_3x d_3p$$

$$\Sigma_{ij} = \Sigma(U_i, U_j) = -\Sigma(U_j, U_i)$$

$\tau_{ZH(Z/H)}$ temps de collision des ions H(Z) sur les ions Z(H).

$$\frac{1}{\tau_{coll}} = \frac{\langle (v_{\perp})^2 \rangle}{v_{th}^2} \text{ fréquence de collision où } \langle (v_{\perp})^2 \rangle \text{ est le coefficient de}$$

diffusion de Spitzer pour l'espèce considérée à la vitesse thermique v_{th}

φ angle polaire autour de l'axe principal (toroïdal)

φ_c phase cyclotronique

φ_k, j_k nouvelles variables angulaire et d'action

$\phi = \phi_1, \phi_2, \phi_3$ variables angulaires canoniquement conjuguées des variables J

$$\phi = 2 \int (\delta\phi_{pol})_{m,n} |$$

$\phi_2 = \theta^*(x) \quad \phi_3 = \varphi^*(x)$ coordonnées "intrinsèques"

$\phi_{erg}(r_0)$ flux radial d'énergie au rayon r_0 dans la couche ergodique

$$\Phi_i = 2S_{ij}(d\lambda^j/dt) \text{ "flux"}$$

ϕ_{pol} fonction de flux poloïdal où $2\pi\phi_{pol}$ est le flux poloïdal : flux magnétique à travers une surface $(\theta^*(\chi) = cste)$ tangente à la surface magnétique χ

$\phi_{tor}(x)$ fonction de flux toroïdal où $2\pi\phi_{tor}$ est le flux magnétique traversant les petits tours autour de l'axe magnétique (flux magnétique traversant une section poloïdale $(\varphi^*(\chi) = cste)$ d'une surface magnétique χ)

$\phi_{tor res}$ ϕ_{tor} correspondant à la surface résonante

χ label de surface magnétique

χ_{erg} coefficient ergodique de conduction de la chaleur

$\chi_{//}$ coefficient de conduction de la chaleur parallèle aux lignes de champ

χ_{\perp} coefficient de conduction de la chaleur perpendiculaire aux lignes de champ

$\psi(x_G)$ flux poloïdal caractérisant une surface magnétique

ω fréquence

ω_c fréquence de giration dans le plan transverse

$\omega_{précession}$ fréquence du mouvement de dérive de trajectoire de va-et-vient

(Ω) intervalle

$\Omega(J)$ surface de résonance

$\vec{\nabla}B$ non uniformité du champ magnétique

$\nabla_{//} = \frac{d}{ds}$ opérateur le long des lignes de flux d'abscisse curviligne s

$\nabla_{//} \tilde{T}$ gradient parallèle de température

$\langle \rangle$ moyenne sur une surface magnétique

(+) zone telle que $\delta B_r > 0$

(-) zone telle que $\delta B_r < 0$

{ } crochets de Poisson $\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i}$

* produit scalaire de fonctions A et B: $A*B = \sum_s \int_{F_M} A(x, p) \cdot B(x, p) d_3x d_3p$

$\langle (\delta\Omega)^2 \rangle$ coefficient de diffusion de la variable $\Omega(J)$

I - INTRODUCTION

Les paramètres d'un plasma permettant d'obtenir la fusion thermonucléaire contrôlée doivent satisfaire le critère de Lawson : dans un tokamak, ces paramètres sont fixés ($T \sim 20 \text{ keV}$, $n \sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$ pour un temps de confinement de l'énergie d'une seconde). Le plasma étant contenu dans une enceinte matérielle, l'interaction entre le plasma et la paroi est d'une importance cruciale : le plasma de bord doit réaliser la transition entre le plasma thermonucléaire et la paroi matérielle tout en autorisant l'évacuation de la chaleur et des particules α produites, l'alimentation en combustible et en satisfaisant des contraintes technologiques concernant les dépôts de puissance et les taux d'érosion. Lors des premières expériences tokamak, le plasma était directement en appui sur des limiteurs. Cette configuration pour laquelle ces objets doivent supporter de façon passive toute la puissance sortante n'est pas satisfaisante : le dépôt thermique est radialement trop localisé, les impuretés créées ou réémises (recyclage) ont une forte probabilité d'atteindre le plasma confiné avec des effets catastrophiques de dilution s'il s'agit d'impuretés légères (C, Be) et de rayonnement s'il s'agit d'impuretés lourdes. Le concept de divertor a alors été développé : en modifiant la configuration magnétique à la périphérie du plasma de façon à créer une zone dont tous les points sont magnétiquement connectés à la paroi avec des longueurs parallèles importantes, on "éloigne" du plasma central le lieu de l'interaction plasma-paroi. Une première possibilité bénéfique vient du fait que la température du plasma tend à diminuer le long des longues lignes de champ connectant le plasma de bord à la paroi. Comme la pression du plasma tend à être constante le long de ces lignes, la diminution de la température près de la paroi correspond à une augmentation de la densité. Cet effet de condensation permet de réaliser au contact de la paroi des régimes où la température est minimisée et la densité élevée : la production d'impuretés par pulvérisation est ainsi fortement diminuée. La condensation permet également d'établir au bord une couche radiative absorbant la puissance provenant du plasma central et répartissant cette puissance sur une grande surface pour éviter l'impact d'ions énergétiques sur la paroi. Du simple fait de la diffusion, des longueurs de connexion à la paroi grandes permet un étalement du dépôt de puissance. Un autre effet favorable d'une longueur de connexion importante entre les plaques de divertor et le plasma central est l'assurance que les particules neutres s'ionisent dans une zone magnétiquement connectée au bord. On peut alors tirer profit du flux d'ions légers (H, D) sortant le long des lignes de champ ouvertes connectées aux plaques de divertor pour produire un lessivage des impuretés grâce à des effets de friction collisionnelle. La puissance sortante produite au sein du plasma confiné est en fait aussi utilisée pour agir sur le plasma de bord et contrôler l'interaction entre le plasma et la paroi. Deux types de divertor adaptés à la configuration tokamak sont expérimentés.

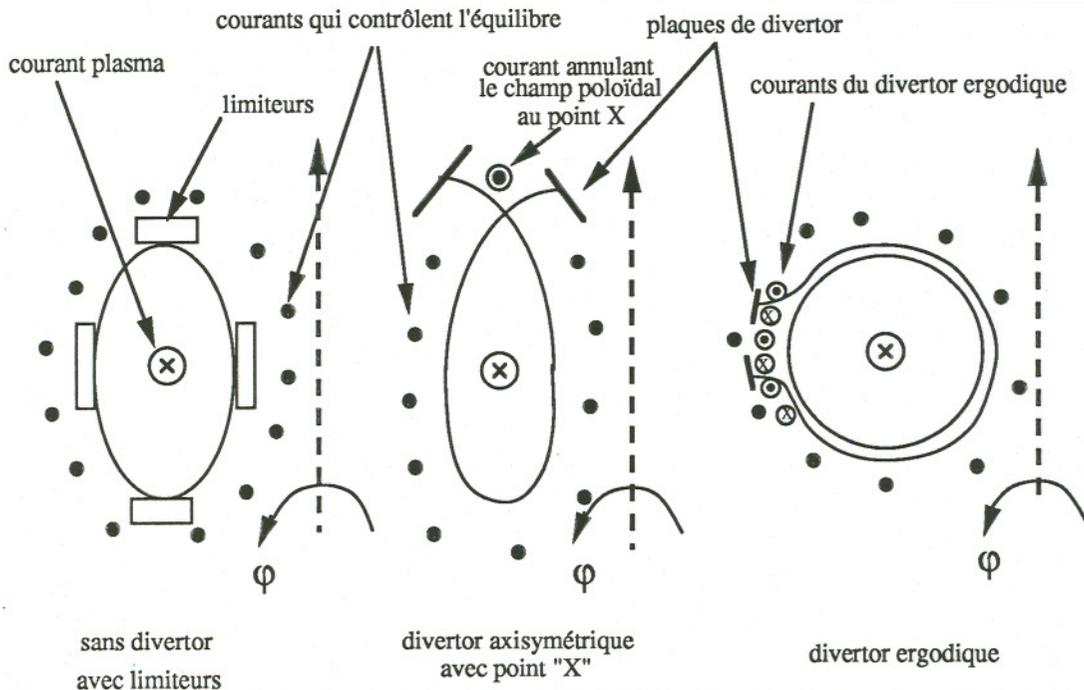


Figure (I.1) : configurations limiteur et divertor

Le divertor axisymétrique est obtenu en ajoutant un courant, de l'ordre du courant plasma lui-même, qui annule en un point "X" à la périphérie du plasma le champ poloidal produit par le plasma central et réalise une connexion magnétique sur des plaques de divertor à l'extérieur de la séparatrice passant en ce point. Le divertor ergodique consiste en une série de perturbations magnétiques radiales résonantes le long des lignes de champ au bord du plasma, qui détruisent les surfaces magnétiques dans une "couche ergodique". Les lignes de champ magnétique sont donc déviées depuis le plasma confiné jusqu'à la paroi.

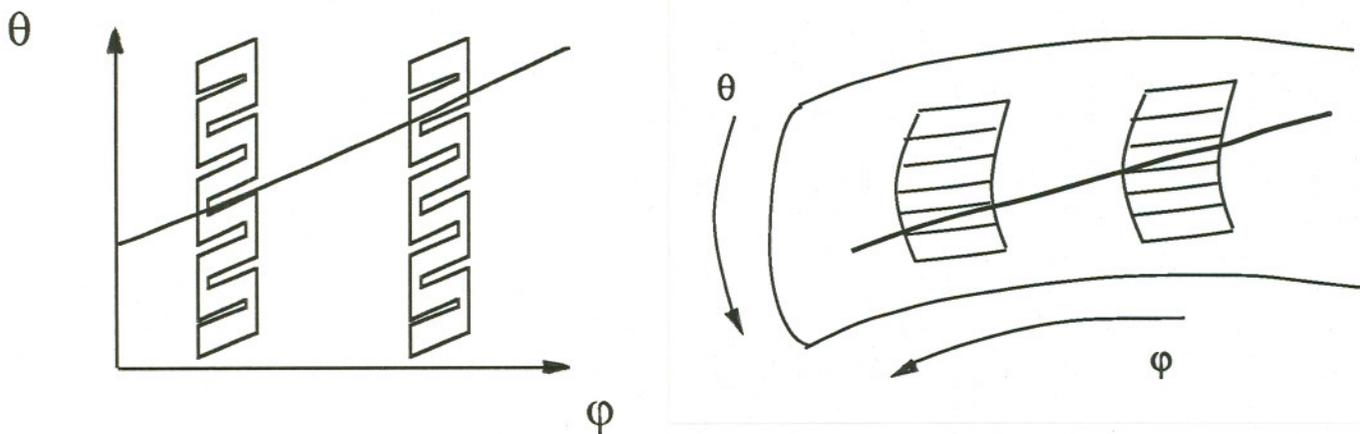


figure (I.2) : ligne de champ magnétique passant devant deux modules de divertor ergodique

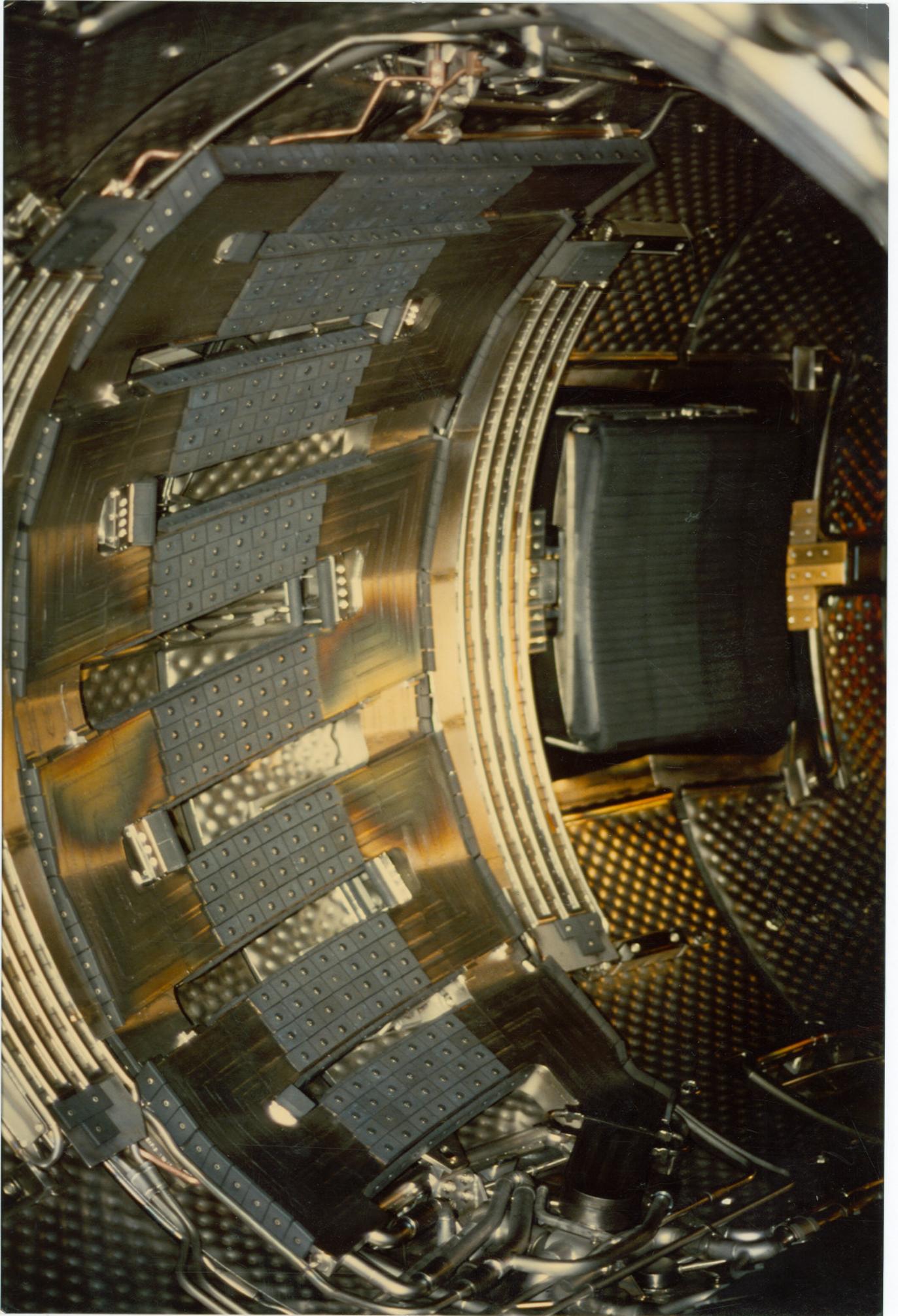


photo (I.1) : une bobine de divertor ergodique (module)

Pour le tokamak Tore Supra, le divertor ergodique a été choisi (Samain *et al.*, 1984b) (Cf. fig. (I.2) et photo (I.1)) car il permet une meilleure utilisation de l'espace interne aux bobines supraconductrices du champ toroïdal qui sont en effet circulaires et autorise également l'étude de l'effet d'une configuration magnétique stochastique sur le plasma de bord.

Le but de cette thèse est l'étude théorique et numérique du transport de l'énergie et de la matière depuis le plasma confiné jusqu'à la paroi matérielle dans la configuration avec divertor ergodique et la comparaison de nos modèles avec les résultats expérimentaux. Le chapitre II est consacré à la topologie magnétique en présence des perturbations magnétiques résonantes induites par le courant circulant dans le bobinage du divertor ergodique. Au delà d'un seuil pour l'intensité de la perturbation magnétique (critère de Chirikov), une couche ergodique est créée dans le plasma de bord. La connexion magnétique de cette couche ergodique avec la paroi matérielle est étudiée. Des outils analytiques, décrivant les propriétés de stochasticité et d'ergodicité de cette couche sont établis. Le chapitre III présente une étude de la topologie de la couche ergodique et de sa connexion à la paroi au moyen d'un code numérique (Mastoc : *Magnetic Stochastic Configuration*). Ces outils permettent de décrire, dans le chapitre IV, le transport des particules et de l'énergie dans la configuration divertor ergodique. Une zone de transition, entre la couche ergodique et la paroi matérielle, où le transport est de type "laminaire", est mise en évidence. Un transport "laminaire" résulte d'une simple compétition entre les composantes parallèle et perpendiculaire aux lignes de champ magnétique comme c'est le cas dans une couche limite dans l'ombrage d'un limiteur. Ces résultats sont confrontés à l'expérience sur le tokamak Tore Supra dans le chapitre V.

La diffusion des particules et de la chaleur dans la couche ergodique est une situation typique d'évolution irréversible d'un plasma tendant vers l'équilibre thermodynamique. La variation d'entropie du système, exprimée par les flux de particules et d'énergie dirigés vers l'extérieur du plasma, est gouvernée par l'opérateur de collision agissant sur les fonctions de distribution décrivant les différentes assemblées de particules. En régime peu collisionnel, cette production d'entropie correspond à la présence de singularités dans l'espace des phases, dues en particulier au changement de topologie des trajectoires induit par la stochasticité. Nous avons utilisé un principe variationnel de minimum de production d'entropie qui permet en particulier le calcul de l'entropie créée par des perturbations résonantes (divertor ergodique, ondulation magnétique ("*ripple*") due au nombre fini de bobines produisant le champ toroïdal, modulation poloïdale du champ magnétique, etc.). Cette théorie doit faciliter les calculs dans la configuration divertor ergodique lorsque l'on tient compte d'un élément très

important dont il n'a pas été question jusqu'à présent : le champ électrique, cohérent avec la perturbation magnétique produite par le bobinage du divertor ergodique, nécessaire pour assurer la neutralité du plasma en chaque point. Le chapitre VI décrit ce principe de minimum de production d'entropie qui est alors appliqué au calcul de la diffusion néoclassique des ions impurétés en tenant compte du champ électrique radial moyen induit par le transport rapide des électrons vers la paroi dans la configuration divertor ergodique.

II - TOPOLOGIE MAGNETIQUE

II.1 - Configuration tokamak

Le fondement du confinement magnétique repose sur le fait que les particules chargées décrivent des hélices autour des lignes de champ magnétique. Le mouvement d'une particule chargée se décompose en un mouvement parallèle au champ magnétique et dans le plan transverse en une giration de fréquence $\omega_c = eB/m$ et de rayon $\rho_c = v_{\perp}/\omega_c$, appelé rayon de Larmor. En première approximation, le mouvement parallèle est pratiquement libre : une particule dans des conditions de fusion thermonucléaire (un électron thermique se déplace à un dixième de la vitesse de la lumière) parcourt en une seconde (temps de confinement de l'énergie) une distance équivalente à plusieurs millions de fois la taille de la machine. Durant le même temps de une seconde, le déplacement perpendiculaire $v_{\text{coll}}\rho_c^2$ dû au taux de collisions v_{coll} est lié au pas de l'hélice, le rayon de Larmor ρ_c , et se chiffre en centimètres. Si la ligne de champ magnétique se referme sur elle-même (configuration fermée), le mouvement parallèle n'est contraint par aucune limite. Au contraire, le mouvement transverse est toujours limité par les parois matérielles. Le temps de confinement est alors le temps nécessaire à une particule pour passer du plasma central aux parois dans son mouvement transverse.

Une configuration torique pour laquelle les lignes de champ s'appuient sur des tores réalise ces conditions de fermeture des lignes de champ et d'éloignement des parois matérielles. Ces tores, du fait de la divergence nulle du champ magnétique, doivent être emboîtés les uns dans les autres. Cependant, la courbure du champ magnétique $1/\mathcal{R}$ et la non uniformité $\vec{\nabla}B$ résultant de la décroissance du champ lorsque l'on s'éloigne de l'axe principal du tore, supposé vertical, produisent une dérive verticale des particules :

$$\vec{V}_D = \frac{1}{eB} \left(-\mu \vec{\nabla}B - m v_{\parallel}^2 \frac{\vec{I}}{\mathcal{R}} \right) \times \frac{\vec{B}}{B} \quad (\text{II-1})$$

Cette dérive est inacceptable pour le confinement. Les lignes de champ sont alors enroulées sur les surfaces toriques dans la direction poloïdale θ de façon à ce que la dérive verticale des particules se compense lors des passages successifs au-dessus et en-dessous du plan équatorial. Cet enroulement est réalisé en ajoutant un champ poloïdal B_{θ} au champ toroïdal de base B_{ϕ} . Ce champ B_{θ} est créé, soit par des bobinages extérieurs (configuration stellarator), soit en suscitant dans le plasma un courant toroïdal (configuration tokamak). Ce courant toroïdal peut résulter d'un phénomène d'induction, le plasma constituant le secondaire d'un transformateur, ou d'un phénomène non

inductif, plus difficile à mettre en œuvre mais qui présente l'avantage de permettre un fonctionnement continu contrairement à la méthode précédente qui est par nature pulsée. Dans ces conditions, les lignes de champ en s'enroulant décrivent toute la surface torique sur laquelle elles se trouvent. Ces surfaces sont alors appelées surfaces magnétiques.

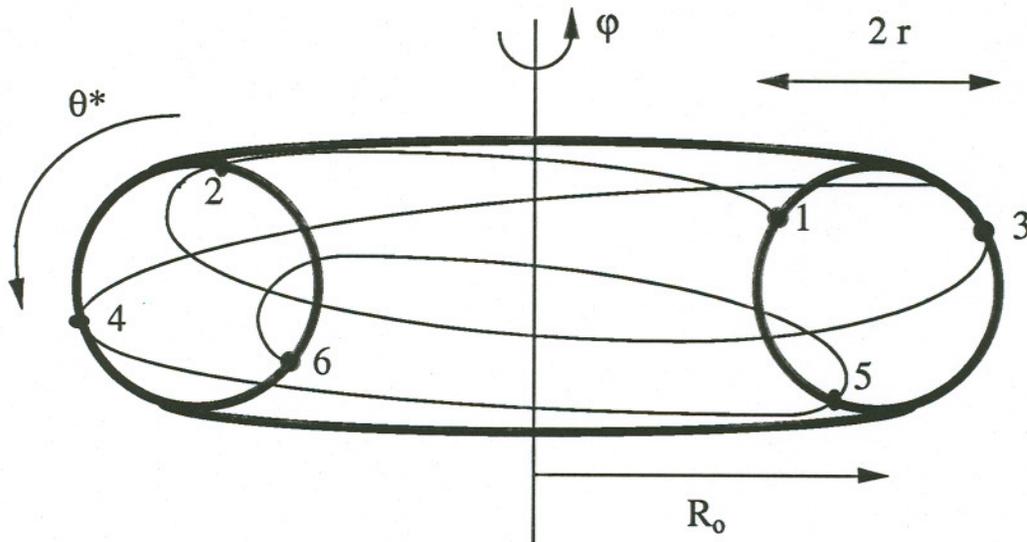


figure (II.1) : configuration tokamak

En fait, les particules dans les configurations avec surfaces magnétiques, tokamak et stellarator, sont confinées avec un très haut degré d'approximation (Kruskal, 1962; Artsimovich, 1972), au moins dans la mesure où elles sont "circulantes", c'est-à-dire progressent toujours dans la même direction le long des lignes de champ sans être arrêtées par des effets de miroir magnétique. Chaque trajectoire est spécifiée par trois constantes du mouvement : le moment magnétique μ , l'énergie H et, dans le cas le plus simple des tokamaks où la condition d'axisymétrie toroïdale est réalisée, le moment azimuthal \mathcal{M} autour de l'axe de révolution vertical ($\mathcal{M} = e\phi_{pol} + Rmv_\phi$ où $2\pi\phi_{pol}$ est le flux magnétique traversant les grands cercles autour de l'axe vertical dessinés sur la surface magnétique où se trouve la particule). On notera que $e\phi_{pol}/Rmv_\phi \sim (B_\theta/B)(r/\rho_c) \gg 1$ de sorte que $\mathcal{M} \approx e\phi_{pol}$ détermine la surface magnétique où se trouve la particule. Les trajectoires sont intégrables, c'est-à-dire qu'on peut définir des variables d'action $J = J_1, J_2, J_3$, constantes du mouvement et donc fonctions de μ , H et \mathcal{M} , et des variables angulaires $\phi = \phi_1, \phi_2, \phi_3$ canoniquement conjuguées des variables J telles que $x, p = f(J, \phi)$, 2π périodiques en ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 .

Les équations de Hamilton imposent alors que $\frac{dJ_k}{dt} = 0$, i.e. $J_k = \text{cste}$ et

$\frac{d\phi_k}{dt} = \frac{\partial H(J)}{\partial J_k} = \text{cste}$, c'est-à-dire ϕ_k varie proportionnellement au temps sur chaque trajectoire spécifiée par J . On organise les variables ϕ de façon que ϕ_1 soit la phase du mouvement cyclotronique autour du centre guide et ϕ_2 ϕ_3 soient respectivement les phases du mouvement du centre guide de la particule circulante en θ et φ . La variable J_3 est approximativement $e\phi_{\text{tor}}(x)$ où $2\pi\phi_{\text{tor}}$ est le flux magnétique traversant les petits cercles autour de l'axe magnétique (flux du champ magnétique toroïdal en fait).

L'équilibre du plasma dans une telle configuration se calcule grâce aux équations de la magnéto-hydrodynamique (MHD) : le plasma est un fluide conducteur décrit localement par une densité de courant \vec{j} , une pression p ainsi qu'un champ magnétique \vec{B} , créé aussi bien par des bobinages extérieurs que par le plasma lui-même. A l'équilibre, le gradient de pression est compensé par des forces de Laplace :

$$\vec{\nabla}p = \vec{j} \times \vec{B} \quad (\text{II-2})$$

Le champ magnétique est décrit par les équations de Maxwell, en particulier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right. \quad (\text{II-3a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \vec{j} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II-3b})$$

Nous remarquons que l'équation (II-2) assure que les surfaces magnétiques, si elles existent, sont également des surfaces isobares. De même, les lignes de courant sont inscrites sur ces surfaces. On peut alors se donner la fonction $p(\phi_{\text{pol}})$ et $R\langle B_\varphi \rangle = f(\phi_{\text{pol}}) = \mu_0 I_{\text{tor}}/2\pi$ fixant la pression et l'intégrale d'Ampère sur un grand cercle dessiné sur la surface magnétique ϕ_{pol} . Les relations (II-2), (II-3b) et (II-3a) dans le sens θ permettent d'exprimer le courant toroïdal j_φ en terme de la "charge" $p(\phi_{\text{pol}}) f(\phi_{\text{pol}})$ que représente le plasma. La loi d'Ampère (II-3a) dans le sens φ conduit alors à l'équation de Grad-Shafranov, déterminant la fonction $\phi_{\text{pol}}(x)$, et donc la forme des surfaces magnétiques. Plusieurs codes numériques rendent aisément disponibles ces données. Pour une configuration magnétique à section circulaire comme Tore Supra, l'effet de la pression et du courant électrique dans le plasma se traduit par un décalage vers l'extérieur des surfaces magnétiques. Soit $R_0(r)$ la distance à l'axe principal du centre de la surface magnétique de rayon r , φ et θ les angles polaires

autour de l'axe principal et autour du centre de chaque surface magnétique, le calcul de Shafranov donne

1°/ le décalage $R_o(r) - R_o(a)$ de la surface magnétique r par rapport à la "dernière" surface magnétique de rayon a

$$R_o(r) - R_o(a) = [R_o(a)^2 + (\Lambda + 1)(a^2 - r^2)]^{1/2} - R_o(a) \quad (\text{II-4a})$$

où $\Lambda = \beta_{\text{pol}} + l_i/2 - 1$

$$\beta_{\text{pol}} = \frac{\langle p \rangle - p(r)}{\left(\frac{\overline{B_\theta^2}(r)}{2\mu_o} \right)} \quad \text{rapport de la pression du plasma effectivement confiné à la}$$

pression magnétique du champ poloïdal \vec{B}_θ

$$l_i = \frac{\langle B_\theta^2 \rangle}{\overline{B_\theta^2}} \quad \text{inductance interne et par unité de longueur du cordon de plasma divisé}$$

par $\mu_o/4\pi$

2°/ la répartition du champ poloïdal B_θ sur chaque surface magnétique

$$B_\theta(r, \theta) = \overline{B_\theta}(r) \left(1 + \Lambda \frac{r}{R} \cos\theta \right) \quad (\text{II-4b})$$

II.2 - Coordonnées intrinsèques

Nous allons déterminer des systèmes de coordonnées "intrinsèques" donnant une représentation simple des lignes de champ pour l'étude de la topologie magnétique (Boozer, 1983). Nous considérons pour cela une particule d'énergie très faible de façon à ce que la dérive verticale soit négligeable et donc que la trajectoire du centre guide soit exactement une ligne de champ. La position radiale est parfaitement déterminée par la surface magnétique passant au point considéré. Les surfaces magnétiques étant emboîtées les unes dans les autres, il suffit de les repérer par un label χ . Les coordonnées sur chaque surface magnétique, dites intrinsèques, s'obtiennent alors comme les variables angulaires $\phi_2 = \theta^*(x)$ $\phi_3 = \varphi^*(x)$ décrivant le mouvement du centre guide de la particule. Comme $d\theta^*/dt$ et $d\varphi^*/dt$ sont des constantes du mouvement, nous avons $d\theta^*/dt = \text{cste}(\chi)$ et $d\varphi^*/dt = \text{cste}(\chi)$, soit :

$$\left(\frac{d\theta^*}{d\varphi^*}\right)_{L.C.} = \frac{1}{q(\chi)} \quad (\text{II-5})$$

où $\left(\frac{d\theta^*}{d\varphi^*}\right)_{L.C.}$ est la dérivée le long de la ligne de champ. La quantité $q(\chi)$ est le facteur de sécurité sur la surface magnétique χ donnant le rapport du nombre de grands tours en φ au nombre de petits tours en θ réalisés par une ligne de flux. Quel que soit le contour fermé C , nous avons du fait de la conjugaison des variables J_2 J_3 et ϕ_2 ϕ_3 :

$$\int_C (\vec{p} - e\vec{A})dx = \int_C (J_2 d\phi_2 + J_3 d\phi_3) \# -e \int_C \vec{A} \cdot d\vec{x} \# \int_C (\phi_{\text{tor}} d\theta^* + \phi_{\text{pol}} d\varphi^*)$$

$$\text{où : } \begin{cases} \phi_{\text{tor}} = \text{flux toroïdal} / 2\pi \\ \phi_{\text{pol}} = \text{flux poloïdal} / 2\pi \end{cases}$$

Rappelons que le flux toroïdal est le flux magnétique traversant une section poloïdale ($\varphi^*(\chi) = \text{cste}$) d'une surface magnétique χ alors que le flux poloïdal est le flux magnétique à travers une surface ($\theta^*(\chi) = \text{cste}$) tangente à la surface magnétique χ .

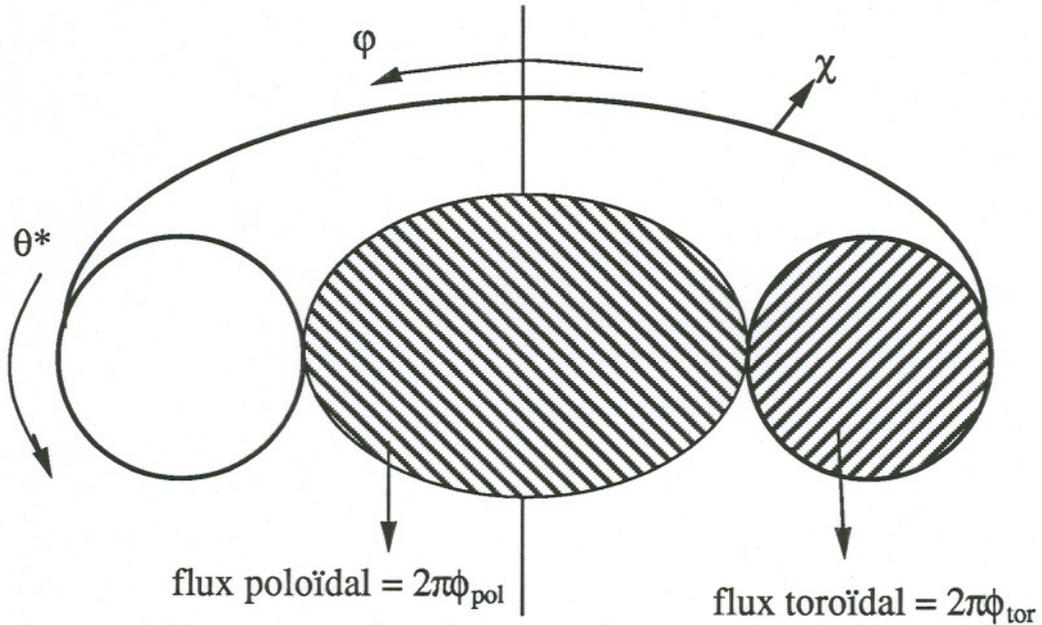


figure (II.2) : flux poloïdal et toroïdal

Les éléments différentiels dans l'égalité précédente sont alors identiques. Nous pouvons alors prendre comme jauge :

$$\vec{A}_{eq} = \phi_{pol} \vec{\nabla} \varphi^* + \phi_{tor} \vec{\nabla} \theta^* \quad (II-6)$$

et exprimer le champ magnétique d'équilibre \vec{B}_{eq} sous la forme :

$$\vec{B}_{eq} = \vec{\nabla} \phi_{tor} \times \vec{\nabla} \theta^* + \vec{\nabla} \phi_{pol} \times \vec{\nabla} \varphi^* \quad (II-7)$$

Le jacobien du système $\chi, \theta^*, \varphi^*$ est donné par $J = [\vec{\nabla} \chi, \vec{\nabla} \theta^*, \vec{\nabla} \varphi^*]$. L'opérateur $\nabla_{//} = \frac{d}{ds}$ le long des lignes de flux d'abscisse curviligne s s'écrit :

$$B_{eq} \nabla_{//} = \vec{B}_{eq} \cdot \vec{\nabla} = J \left(\frac{d\phi_{tor}}{d\chi} \frac{\partial}{\partial \varphi^*} - \frac{d\phi_{pol}}{d\chi} \frac{\partial}{\partial \theta^*} \right) \quad (II-8)$$

Nous avons utilisé les relations, déduites de (II-7) :

$$\vec{B}_{eq} \cdot \vec{\nabla} \theta^* = -J \frac{d\phi_{pol}}{d\chi}(\chi) \quad (II-9a)$$

$$\vec{B}_{eq} \cdot \vec{\nabla} \varphi^* = +J \frac{d\phi_{tor}}{d\chi}(\chi) \quad (II-9b)$$

$$\vec{B}_{eq} \cdot \vec{\nabla} \chi = 0 \quad (II-9c)$$

On déduit de (II-5) et (II-8) l'expression du facteur de sécurité $q(\chi)$:

$$\left(\frac{d\theta^*}{d\varphi^*} \right)_{L.C.} = \frac{1}{q(\chi)} = - \frac{d\phi_{pol}}{d\phi_{tor}}(\chi) \quad (II-10)$$

Il faut imposer une autre contrainte que la condition (II-5) pour déterminer les angles θ^* et φ^* . Par exemple, on peut imposer que, le long des lignes de flux d'abscisse curviligne s , on ait $d\theta^*/ds = \omega_\theta(\chi)$, $d\varphi^*/ds = \omega_\varphi(\chi)$. Compte tenu de (II-9), le jacobien J est localement proportionnel à B_{eq} . On peut au contraire imposer que le jacobien J soit constant sur chaque surface magnétique. On obtient alors les coordonnées d'Hamada (Hamada, 1959, 1962) définies par $d\theta^*/ds = 1/q$ et $d\varphi^*/ds = -(J/B_{eq})d\phi_{pol}/d\chi$. Dans ce qui suit, nous choisissons que $\varphi^* = \varphi$, l'angle polaire autour de l'axe principal pour garder une interprétation géométrique simple.

Dans le cas d'un équilibre dans un tokamak axisymétrique, nous avons $\vec{\nabla} \varphi = \frac{\vec{e}_\varphi}{R}$ où R est indépendant de φ . Il résulte alors de (II-9b) que $J = (B_\varphi/R)/(d\phi_{tor}/d\chi)$. Compte tenu de (II-9a), le champ magnétique d'équilibre est de la forme

$\vec{B}_{eq} = R J \frac{d\phi_{tor}}{d\chi}(\chi) \vec{e}_\varphi + \vec{\nabla} \phi_{pol} \times \frac{\vec{e}_\varphi}{R}$. Finalement, \vec{B}_{eq} peut se mettre sous la forme :

$$\vec{B}_{eq} = f(\chi) \frac{\vec{e}_\varphi}{R} + \vec{\nabla} \phi_{pol}(\chi) \times \frac{\vec{e}_\varphi}{R} \quad \text{où } f(\chi) = RB_\varphi \quad (II-11)$$

Les équations des lignes de champ s'écrivent simplement :

$$\begin{aligned} \chi &= cste \\ (d\theta^*/d\varphi^*)_{L.C.} &= 1/q(\chi) = cste \end{aligned} \quad (II-12)$$

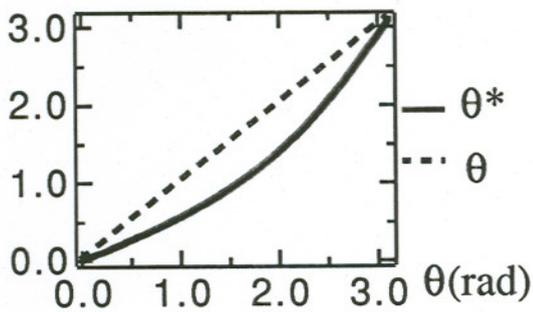
Sur une surface χ donnée, nous pouvons exprimer θ^* en fonction de l'angle polaire autour de l'axe magnétique θ : $\theta^* = F(\theta)$ où F vérifiant (II-10) est une fonction 2π périodique. Pour une configuration magnétique avec des sections poloïdales circulaires, on a :

$$F(\theta) = \frac{2}{\frac{A}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(C + \frac{G}{2})} \left[\frac{A}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arctg}(\sqrt{\beta} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (C + \frac{G}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{\alpha} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}) + \frac{G \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{2(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2})} \right] \quad (\text{II-13})$$

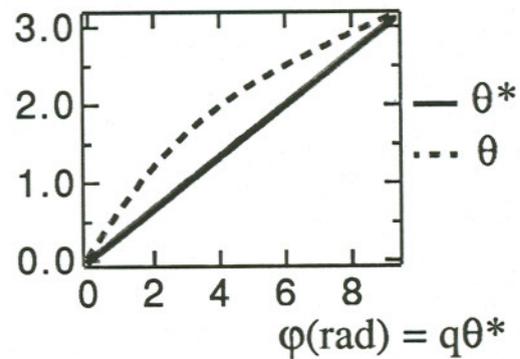
où

$$\alpha = \frac{1 - r/R_o(r)}{1 + r/R_o(r)}, \quad \beta = \frac{1 - \Lambda r/R_o(r)}{1 + \Lambda r/R_o(r)}$$

$$A = \frac{(1 - \beta)^2}{(\alpha - \beta)^2}, \quad C = \frac{\alpha^2(2 - \beta) - 2\alpha + \beta}{\alpha(\alpha - \beta)^2}, \quad G = \frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha(\alpha - \beta)}$$



$$\theta^* = F(\theta)$$



ligne de champ sur la surface $q = 3$

figure (II.3) : angle polaire autour de l'axe magnétique principal (poloïdal) et coordonnée intrinsèque

II.3 - Perturbation résonante

Nous allons ajouter une perturbation $\vec{\delta A}$ au potentiel vecteur d'équilibre et chercher les nouvelles équations des lignes de champ magnétique dans le système de coordonnées intrinsèques. Remarquons tout d'abord qu'une perturbation perpendiculaire $\vec{\delta A}_\perp$ donne lieu à un déplacement transverse magnéto-hydrodynamique (MHD) $\vec{\delta M}$ des lignes de champ tel que :

$$\vec{\delta M} = - \frac{\vec{\delta A}_\perp \times \vec{B}}{B^2} \quad (\text{II-14})$$

Un tel déplacement ne modifie pas la topologie magnétique, les tubes de flux étant simplement décalés. C'est le cas des perturbations $\delta B_\varphi = \nabla \times \delta A_\theta$ de type ondulation magnétique ("*ripple*"), dues au caractère discret en φ des bobines produisant le champ toroïdal, qui ont un effet de compression et de dilatation des tubes de flux dans le sens radial en ne changeant pas la topologie tant que le niveau de perturbation $\delta B_\varphi/B$ reste très inférieur à 1. Une modification de la topologie magnétique qui engendre une stochasticité des lignes de flux est déterminée par un potentiel vecteur $\vec{\delta A}_\parallel$ parallèle à B seulement. Une perturbation $\vec{\delta A}_\parallel$ possède une composante suivant $\vec{\nabla} \varphi$ et une composante transverse $\#(\delta A)_{\theta^*}$ qui, de nouveau, réalise un simple décalage MHD. On ne considérera finalement que des perturbations du flux poloïdal :

$$\begin{aligned} \vec{\delta A} &= \delta A_\varphi \vec{e}_\varphi = \delta \phi_{\text{pol}} (\chi, \theta^*, \varphi) \vec{\nabla} \varphi \\ \delta \phi_{\text{pol}} &= R \delta A_\varphi \end{aligned} \quad (\text{II-15a})$$

La perturbation magnétique est donc :

$$\vec{\delta B} = \frac{\partial (\delta \phi_{\text{pol}})}{\partial \chi} \vec{\nabla} \chi \times \vec{\nabla} \varphi + \frac{\partial (\delta \phi_{\text{pol}})}{\partial \theta^*} \vec{\nabla} \theta^* \times \vec{\nabla} \varphi \quad (\text{II-15b})$$

**II.3.a - Equations des lignes de champ perturbées
et formulation hamiltonienne**

Les équations des lignes de champ sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta^*}{d\varphi} = \frac{\vec{\nabla}_{//}\theta^*}{\vec{\nabla}_{//}\varphi} \\ \frac{d\chi}{d\varphi} = \frac{\vec{\nabla}_{//}\chi}{\vec{\nabla}_{//}\varphi} \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}_{//} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla}}{B} \\ \vec{B} = \vec{B}_{\text{eq}} + \vec{\delta B} \end{array} \right. \quad (\text{II-16})$$

Compte tenu de (II-11) et (II-15b), nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}_{//}\theta^* = \frac{J}{B} \left[-\frac{d\phi_{\text{pol}}}{d\chi} - \frac{\partial(\delta\phi_{\text{pol}})}{\partial\chi} \right] \\ \vec{\nabla}_{//}\chi = \frac{J}{B} \frac{\partial(\delta\phi_{\text{pol}})}{\partial\theta^*} \\ \vec{\nabla}_{//}\varphi = \frac{J}{B} \frac{d\phi_{\text{tor}}}{d\chi} \end{array} \right.$$

et il vient de (II-16) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta^*}{d\varphi} = \frac{1}{q(\chi)} - \frac{\partial[\delta\phi_{\text{pol}}(\chi, \theta^*, \varphi)]}{\partial\chi} \frac{d\chi}{d\phi_{\text{tor}}} \\ \frac{d\chi}{d\varphi} = \frac{\partial[\delta\phi_{\text{pol}}(\chi, \theta^*, \varphi)]}{\partial\theta^*} \frac{d\chi}{d\phi_{\text{tor}}} \end{array} \right. \quad (\text{II-17a})$$

Nous pouvons donner une formulation hamiltonienne à ces équations. Si nous prenons ϕ_{tor} pour label χ de surface magnétique, les équations (II-17a) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta^*}{d\varphi} = -\frac{\partial(\phi_{\text{pol}}(\phi_{\text{tor}}) + \delta\phi_{\text{pol}}(\phi_{\text{tor}}, \theta^*, \varphi))}{\partial\phi_{\text{tor}}} \\ \frac{d\phi_{\text{tor}}}{d\varphi} = \frac{\partial(\phi_{\text{pol}}(\phi_{\text{tor}}) + \delta\phi_{\text{pol}}(\phi_{\text{tor}}, \theta^*, \varphi))}{\partial\theta^*} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire en posant $H = \phi_{\text{pol}}(\phi_{\text{tor}}) + \delta\phi_{\text{pol}}(\phi_{\text{tor}}, \theta^*, \varphi)$

$$\begin{cases} \frac{d\theta^*}{d\varphi} = - \frac{\partial H}{\partial \phi_{\text{tor}}} \\ \frac{d\phi_{\text{tor}}}{d\varphi} = \frac{\partial H}{\partial \theta^*} \end{cases}$$

(II-17b)

II 3.b - Résonance sur une surface magnétique

Nous allons décomposer la perturbation δB en perturbations élémentaires aux quelles on peut appliquer le concept de "résonance" sur une surface magnétique. Séparons la dépendance radiale de la dépendance angulaire en effectuant une décomposition de Fourier de cette perturbation :

$$\delta\phi_{pol}(\phi_{tor}, \theta^*, \varphi) = \sum_{m, n = -\infty}^{+\infty} (\delta\phi_{pol})_{m, n}(\phi_{tor}) \exp[i(m\theta^* + n\varphi)] \quad (II-18)$$

Une ligne de champ non perturbée s'enroule sur une surface magnétique repérée par ϕ_{tor} . Les amplitudes $(\delta\phi_{pol})_{m, n}$ de chaque terme (m, n) le long de la ligne de champ sont donc constantes mais l'action effective d'un tel terme dépend de la phase $m\theta^* + n\varphi$. De fait, la valeur moyenne sur une surface magnétique du terme $\exp[i(m\theta^* + n\varphi)]$ est nulle sauf si la phase est constante, ce qui se traduit par :

$$\frac{d}{ds} (m\theta^* + n\varphi) = 0 \quad (II-19)$$

Compte tenu du caractère intrinsèque des coordonnées θ^* φ^* , c'est-à-dire

$\left(\frac{d\theta^*}{d\varphi}\right)_{L.C.} = \frac{1}{q(\phi_{tor})}$, l'égalité (II-19) n'est réalisée que si $\frac{1}{q(\phi_{tor})} = -\frac{n}{m}$. Lorsque le coefficient $(\delta\phi_{pol})_{m, n}(\chi)$ est non nul sur la surface où $q = -m/n$, le terme (m, n) est résonant sur cette surface rationnelle. Remarquons qu'avec notre convention pour la décomposition de Fourier, la composante magnétique résonante correspondante est en fait le "mode harmonique" (m, n) :

$$(\delta\phi_{pol})_{m, n}(\phi_{tor}) \exp [i (m\theta^* + n\varphi)] + (\delta\phi_{pol})_{-m, -n}(\phi_{tor}) \exp [- i (m\theta^* + n\varphi)]$$

II.3.c - Un seul mode harmonique : cas intégrable

Les équations (II-17) sont intégrables lorsqu'il n'existe qu'un seul mode résonant (m, n) ; l'intégrabilité se comprend au sens de l'existence de trois constantes du mouvement. Considérons un mode

$$\delta\phi_{pol} = (\delta\phi_{pol})_{m,n} \exp[i(m\theta^* + n\varphi)] + c.c. = \phi \cos(m\theta^* + n\varphi + \alpha_{phase})$$

où $\phi = 2 |(\delta\phi_{pol})_{m,n}|$. Cette perturbation est résonante sur la surface rationnelle $q = -m/n$. Nous allons voir qu'il se crée alors une chaîne d'îlots sur cette surface magnétique résonante. Une ligne de champ n'a pas la même topologie si elle se trouve dans un îlot ou en dehors.

Il nous faut calculer les équations des nouvelles surfaces magnétiques sur lesquelles sont maintenant dessinées les lignes de champ, qui vont en particulier définir les frontières des îlots. L'hamiltonien perturbé est donné par :

$$H = \phi_{pol}(\phi_{tor}) + \phi \cos(m\theta^* + n\varphi + \alpha_{phase}) \quad (II-20)$$

Le long d'une ligne de champ perturbée, H n'est plus une constante (au sens $dH/d\varphi \neq 0$), i.e. le système hamiltonien (II-17) est dit non-autonome. Effectuons le changement de coordonnées suivant :

$$(\phi_{tor}, \theta^*, \varphi) \rightarrow (\phi_{tor}, u, \varphi)$$

où $u = m\theta^* + n\varphi + \alpha_{phase}$ est la phase. Les équations d'une ligne de champ deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{d\phi_{tor}}{d\varphi} = \frac{\partial H'}{\partial u} \\ \frac{du}{d\varphi} = - \frac{\partial H'}{\partial \phi_{tor}} \end{cases} \quad (II-21)$$

où $H'(\phi_{tor}, u, \varphi) = m H(\phi_{tor}, u, \varphi) - n\phi_{tor}$. La fonction H' est constante le long d'une ligne de champ, le système est autonome, soit :

$$m [\phi_{pol}(\phi_{tor}) + \phi \cos(u)] - n \phi_{tor} = cste \text{ sur une ligne de champ} \quad (II-22)$$

Considérons la valeur $\phi_{\text{tor res}}$ correspondant à la surface résonante i.e.

$$\frac{d\phi_{\text{pol}}}{d\phi_{\text{tor}}}(\phi_{\text{tor res}}) = -\frac{1}{q(\phi_{\text{tor res}})} = \frac{n}{m}. \text{ Le développement limité au second ordre de (II-22)}$$

autour de $\phi_{\text{tor res}}$ donne l'équation des surfaces magnétiques perturbées :

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \phi_{\text{pol}}(\phi_{\text{tor res}})}{d\phi_{\text{tor}}^2} [\phi_{\text{tor}} - \phi_{\text{tor res}}]^2 + \phi \cos u = K = \text{cste} \quad (\text{II-23})$$

et la forme de ces surfaces dans le plan ϕ_{tor}, u . Supposant $\phi(dq/d\phi_{\text{tor}}) > 0$, on a:

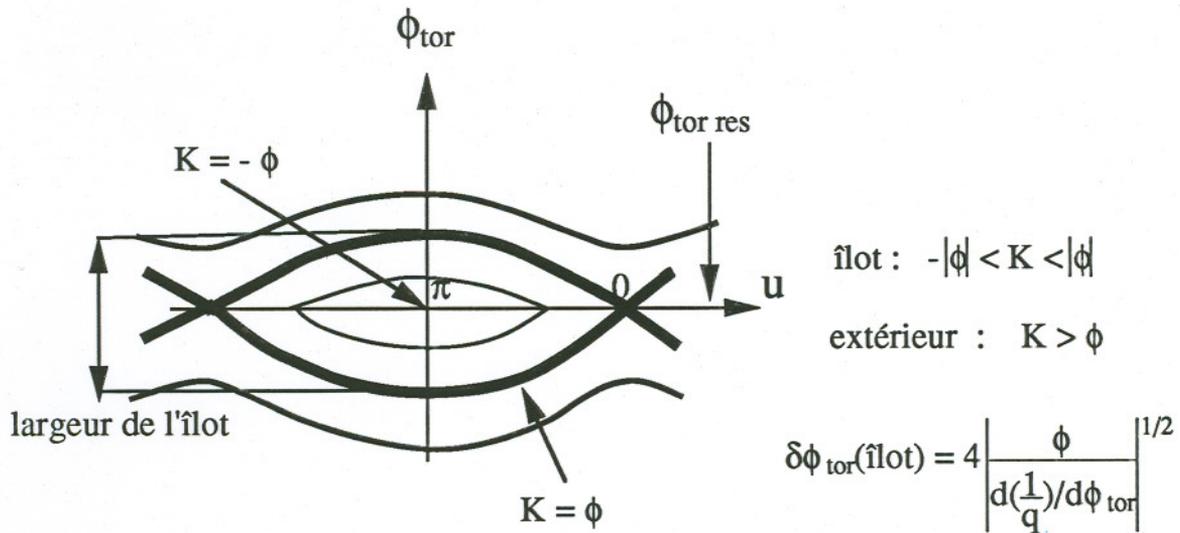


figure (II.4) : îlot magnétique pour un seul mode harmonique

Définissons B_0 par $B_0 = \langle B_{\text{tor}} \rangle$ soit $\phi_{\text{tor}} = (1/2\pi)(B_0\pi r^2)$ et $d\phi_{\text{tor}} = B_0 r dr$.
La largeur de l'îlot selon la coordonnée r est alors :

$$\delta r(\text{îlot}) = \frac{\delta\phi_{\text{tor}}(\text{îlot})}{B_0 r} = \frac{4}{B_0 r} \left| \phi B_0 r q^2 \frac{dr}{dq} \right|^{1/2} \quad (\text{II-24})$$

En se rappelant que $\delta\phi_{pol} = R\delta A\phi$ et en posant $(L_{sh})^{-1} = \frac{r}{q^2 R} \frac{dq}{dr}$, on obtient finalement :

$$\delta r(\hat{i}lot) = \left| \frac{32 (\delta\phi_{pol})_{m, n} L_{sh}}{RB_0} \right|^{1/2} \quad (II-25)$$

De façon à diminuer la dimension de l'espace des phases, on étudie l'effet de telles perturbations sur une section de Poincaré : c'est une figure sur laquelle on porte les traces successives des lignes de champ dans un plan poloïdal après chaque révolution toroïdale.

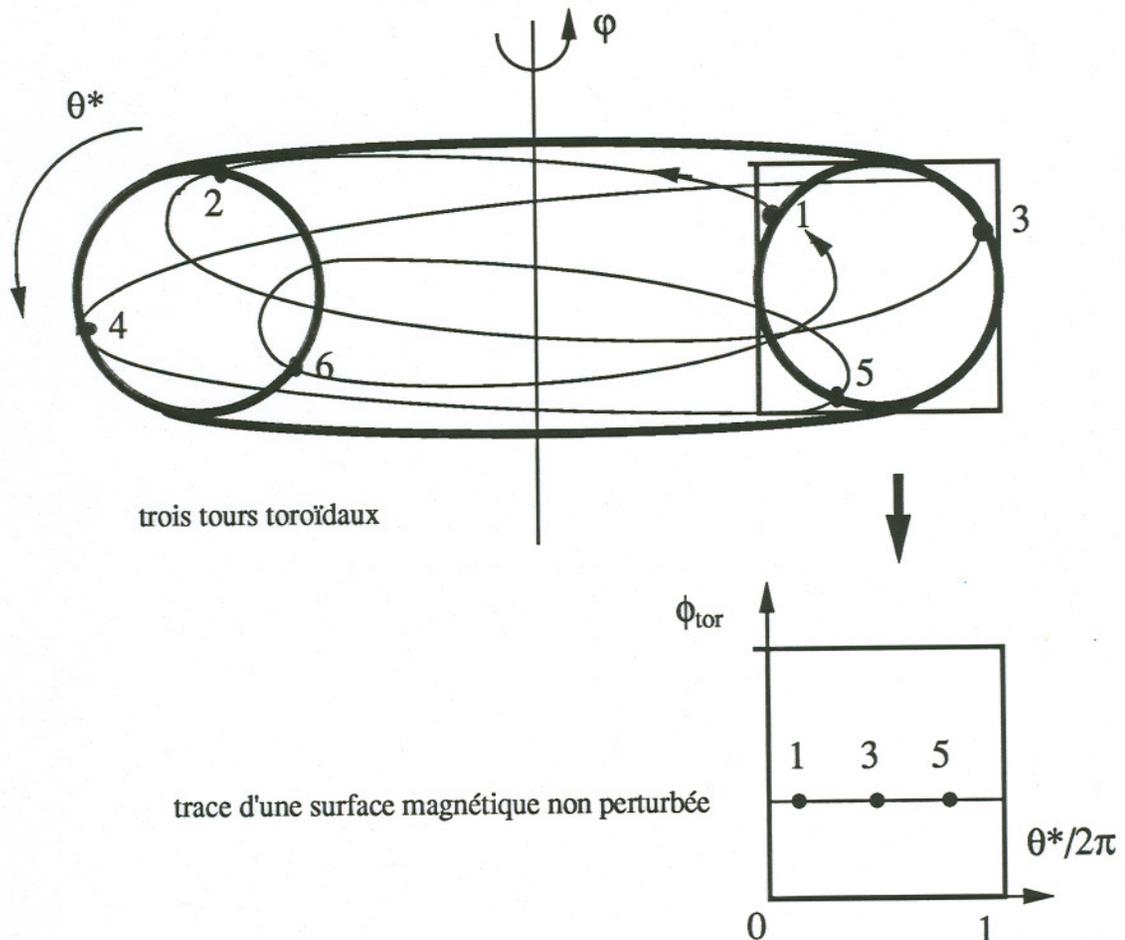


figure (II.5) : une section de Poincaré est une trace des lignes de champ dans un plan poloïdal

Un mode harmonique unique se voit sur la figure suivante :

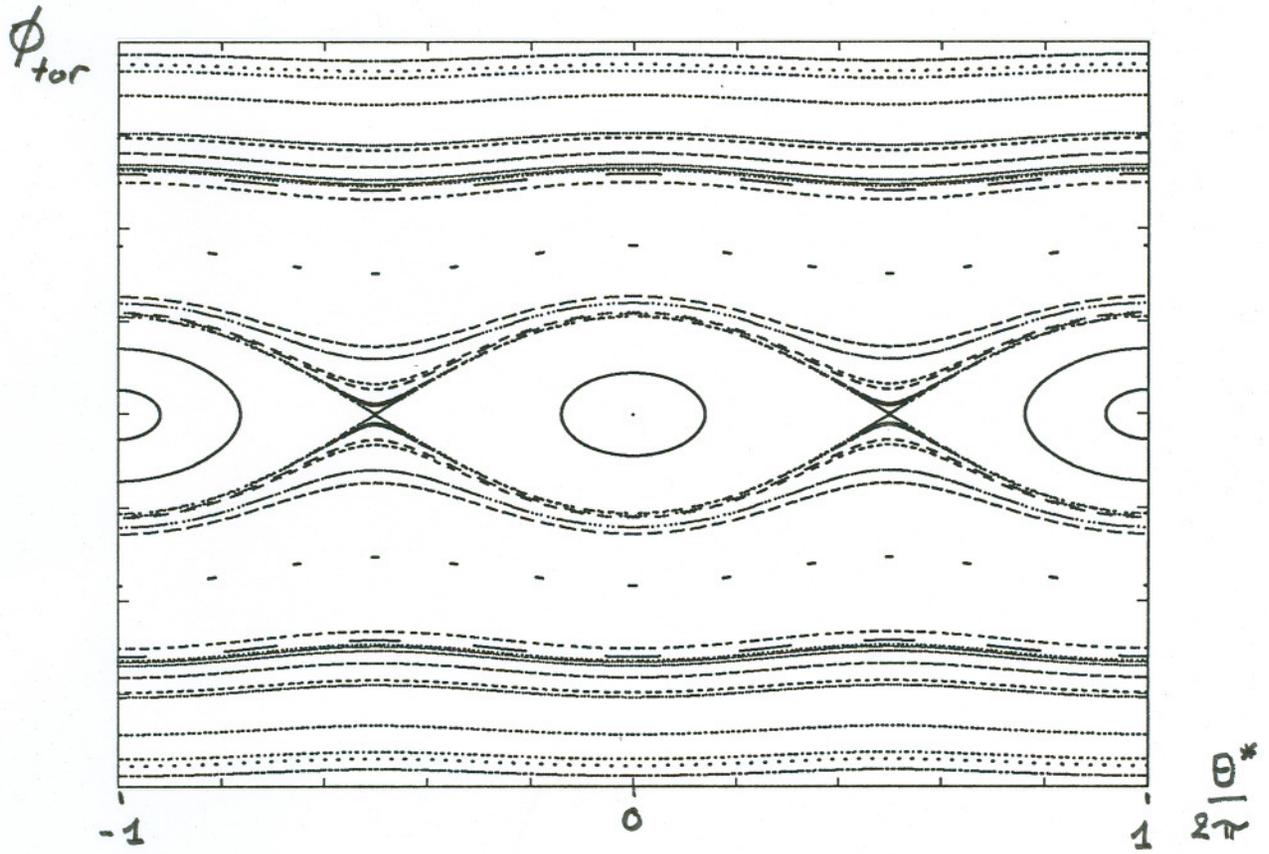


figure (II.6) : section de Poincaré pour un mode harmonique unique

II.4 - Couche ergodique

Si nous ajoutons une série de perturbations harmoniques résonantes, localisées sur des surfaces magnétiques voisines, il se crée une série de chaînes d'îlots qui vont éventuellement empiéter. Une ligne de champ ne reste alors plus confinée au voisinage d'une surface magnétique mais va explorer le volume en interaction (Zaslavsky & Chirikov, 1972). La ligne de champ progresse selon une marche au hasard, phénomène de type diffusif. On dit alors que l'on est en présence d'une couche ergodique. L'équation d'une ligne de champ n'est plus intégrable, au sens où il n'est plus possible de déterminer une constante du mouvement garantissant l'existence des surfaces magnétiques. Deux trajectoires voisines se séparent exponentiellement. Cette situation traduit le caractère stochastique des lignes de flux. Dans le cas tokamak, nous pouvons, en fonction du cisaillement magnétique et de la perturbation introduite, calculer analytiquement le coefficient de diffusion ainsi que la longueur de Kolmogorov donnant une mesure de la stochasticité des lignes de champ.

II.4.a - Recouvrement des îlots et paramètre de Chirikov

L'interaction de chaînes voisines d'îlots produit une mer chaotique dans laquelle se trouvent des îlots résiduels.

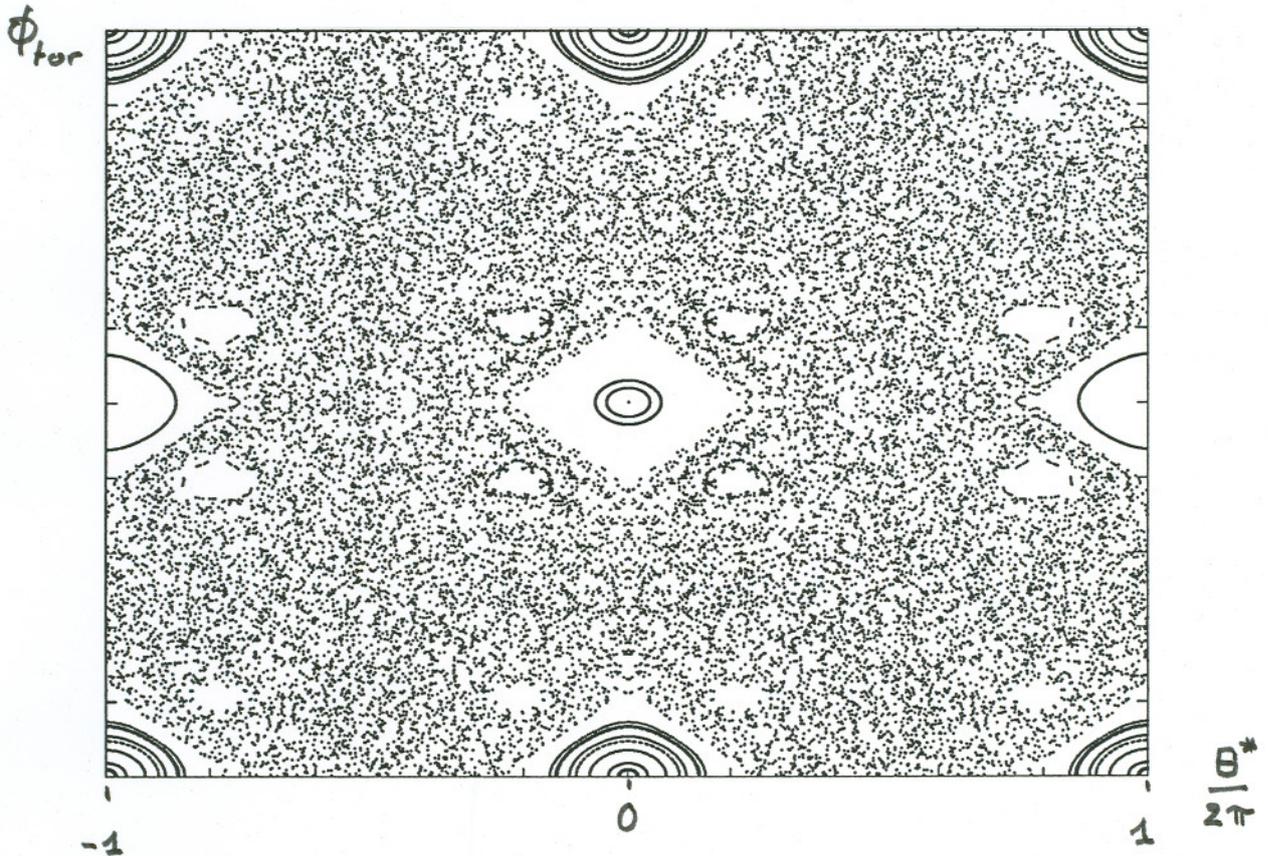


figure (II.7) : mer chaotique et îlots résiduels, $\sigma = 1,5$

L'ergodicité va dépendre du taux de recouvrement des îlots que l'on appelle paramètre de Chirikov (Chirikov, 1979) et que l'on définit comme suit :

$$\sigma = \frac{\frac{\delta r(\text{îlot 1})}{|r_{\text{îlot 1}} - r_{\text{îlot 2}}|} + \frac{\delta r(\text{îlot 2})}{|r_{\text{îlot 1}} - r_{\text{îlot 2}}|}}{2} \quad (\text{II-26})$$

où $\delta r(\text{îlot})$ est la largeur de l'îlot non perturbé et $r_{\text{îlot}}$ est sa position radiale. Tant que $\sigma \leq 1$, l'interaction entre les deux perturbations produit des îlots résiduels de tailles non négligeables. Pour un paramètre de Chirikov $\sigma \geq 1$, les derniers tores K.A.M.

(théorème Kolmogorov-Arnold-Moser (V.I. Arnold, 1963)) existant entre les points X des chaînes d'îlots non perturbés sont détruits. Des structures persistent pour les grandes valeurs de σ mais leur mesure est de plus en plus faible. Pour un cisaillement magnétique donné dq/dr , nous pouvons de calculer la distance $(\Delta r)_{\text{îlot}}$ entre deux surfaces résonantes rationnelles voisines de même nombre toroïdal n :

$$q_1 = -\frac{m}{n} ; q_2 = -\frac{m+1}{n}$$

$$\Delta q = -q_2 + q_1 = \frac{1}{n} ; (\Delta r)_{\text{îlot}} \sim \left| \Delta q \cdot \frac{dr}{dq} \right| = \left| L_{\text{sh}} \cdot \frac{r}{qRm} \right|$$

d'où :

$$\sigma \approx \left| 32 \frac{A_{m,n}}{B_0} L_{\text{sh}} \right|^{1/2} \frac{mqR}{r |L_{\text{sh}}|}$$

où

$$\delta A_\varphi = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} A_{m,n}(r) \exp[i(m\theta^* + n\varphi)]$$

Nous obtenons ainsi en fonction du petit rayon r caractéristique de chaque surface magnétique la valeur du paramètre de Chirikov :

$$\sigma(r) \sim \left| \frac{32}{L_{\text{sh}}} \frac{A_{m,n}}{B_0} \right|^{1/2} \frac{mqR}{r} \quad (\text{II-27})$$

II.4.b - Calcul du coefficient de diffusion quasi-linéaire

Dans une zone ergodique où tous les tores K.A.M. ont été détruits, une ligne de champ n'est plus confinée et explore tout le volume disponible. L'étude de la diffusion d'une classe de particules de vitesse $v_{//}$ donnée permet de déterminer la diffusion des lignes de champ comme les trajectoires de ces particules. Nous étudions la fonction de distribution de la population considérée de laquelle nous déduisons un flux radial de particules Γ que nous trouverons diffusif : $\Gamma = -D \frac{\partial n}{\partial r}$. Le coefficient D (m^2/s) est le coefficient de diffusion des particules et le rapport $D_{LC} = D/v_{//}$ (m^2/m) est le coefficient de diffusion des lignes de champ.

La fonction de distribution s'écrit :

$$F = F_0(r, t) + \delta F(r, \theta^*, \varphi, t) \quad \text{où } F_0(r, t) = \langle F \rangle$$

$\langle \rangle$ est la moyenne sur une surface magnétique. Avec une perturbation $\delta B = \text{rot}(\delta A_\varphi)$, les équations de mouvement sont :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v_{//} \frac{\delta B_r}{B} = v_{//} \frac{\partial(\delta A_\varphi)}{r \partial \theta^*} \\ \frac{d\theta^*}{dt} &= \frac{1}{q(r)} \frac{d\varphi}{dt} - \frac{v_{//}}{rB} \delta B_{\theta^*} = \frac{v_{//}}{qR} - \frac{v_{//}}{rB} \frac{\partial(\delta A_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{v_{//}}{R} \end{aligned} \quad (\text{II-28})$$

L'évolution est donnée par l'équation de Vlassov qui assure que la fonction de distribution F est constante le long des lignes de champ : $\left(\frac{dF}{dt}\right)_{L.C.} = 0$

soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial t} + \frac{\partial(\delta F)}{\partial t} + \frac{v_{//}}{B} \frac{\partial(\delta A_\varphi)}{r \partial \theta^*} \left(\frac{\partial F_0}{\partial r} + \frac{\partial \delta F}{\partial r} \right) \\ + \left[\frac{v_{//}}{qR} - \frac{v_{//}}{rB} \frac{\partial(\delta A_\varphi)}{\partial r} \right] \frac{\partial(\delta F)}{\partial \theta^*} + \frac{v_{//}}{R} \frac{\partial(\delta F)}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-29})$$

En effectuant une moyenne sur les surfaces magnétiques et une intégration par parties, nous trouvons :

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} + \frac{\partial}{r \partial r} \left[v_{//} < \delta F \frac{\partial(\delta A_\phi)}{B \partial \theta^*} > \right] = 0 \quad (\text{II-30})$$

Le nombre de particules entre deux surfaces magnétiques de rayon r et $r + dr$ étant $F_0 r dr$ et $\Gamma(r)$ le flux de particules traversant la surface magnétique de rayon r , on en déduit :

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = - \frac{\partial \Gamma(r)}{r \partial r} \quad (\text{II-31})$$

Le flux de particules se déduit donc de :

$$\Gamma = v_{//} < \delta F \frac{\partial(\delta A_\phi)}{B \partial \theta^*} > \quad (\text{II-32})$$

La perturbation de la fonction de distribution, δF , s'obtient en linéarisant l'équation de Vlassov et en introduisant dans le second membre de l'équation un terme d'amortissement de la forme $-\gamma \delta F$. Ce terme permet d'intégrer l'équation de $t = -\infty$ (où $\delta F=0$) à t , c'est-à-dire en satisfaisant le principe de causalité. Nous résolvons alors cette équation avec une transformée de Fourier :

$$F_{m,n}(r) = \frac{-\frac{\partial F_0}{\partial r} v_{//} \frac{m}{rB} A_{m,n}(r)}{\frac{v_{//}}{R} \left(\frac{m}{q} + n \right) - i\gamma} \quad (\text{II-33})$$

où
$$\delta F = \sum_{m,n} F_{m,n}(r) \exp [i(m\theta^* + n\phi)]$$

$$\delta A_\phi = \sum_{m,n} A_{m,n}(r) \exp [i(m\theta^* + n\phi)]$$

Le flux vaut alors :

$$\Gamma(r) = -2 v_{//}^2 \sum_{m,n} \frac{\partial F_0}{\partial r} \left| \frac{m}{B} A_{m,n} \right|^2 \frac{\gamma}{\frac{v_{//}^2}{R^2} \left(\frac{m}{q} + n \right)^2 + \gamma^2} \quad (\text{II-34})$$

Nous constatons que la dissipation élargit la résonance autour de chaque surface rationnelle r_{res} tel que $q = -\frac{m}{n}$.

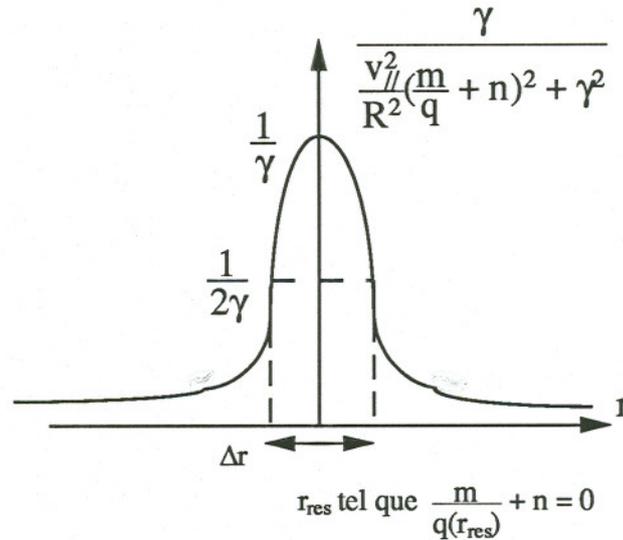


figure (II.8) : élargissement de la résonance

L'élargissement radial est de l'ordre de $\Delta r = 2 \frac{q^2 R}{m} \frac{dr}{dq} \frac{\gamma}{v_{//}}$. Il est intéressant de supposer que le coefficient d'amortissement γ résulte en fait d'une diffusion de coefficient D' , de sorte que $\gamma = D'/\Delta r^2$, ce qui mène à :

$$\Delta r = 2 \left(\frac{r L_{\text{sh}} D'}{m} \right)^{1/3} \quad (\text{II-35})$$

Pour que le flux Γ de particules que nous calculons existe effectivement, il est nécessaire que ces élargissements Δr se chevauchent, c'est-à-dire que Δr soit supérieur à la distance entre deux surfaces résonantes voisines. Nous discuterons cette condition ultérieurement. Le flux s'obtient alors comme une moyenne sur une épaisseur δr :

$$\Gamma_{\text{réel}} = \frac{1}{\delta r} \int_r^{r + \delta r} \Gamma(r) dr$$

On en déduit le coefficient de diffusion quasilineaire D tel que $\Gamma = -D \frac{\partial n}{\partial r}$:

$$D = 2\pi qR \left| \frac{m}{r} \frac{A_{m,n}}{B_0} \right|^2 v_{//} = D_{LC} v_{//} \quad (\text{II-36})$$

On remarquera que les coefficients D et D_{LC} sont indépendants de γ .

Nous supposons maintenant que le coefficient de diffusion D' déterminant le coefficient d'amortissement γ est le coefficient de diffusion calculé D . Nous pouvons alors comparer la condition imposée plus haut de recouvrement des élargissements de résonance avec le critère de Chirikov pour le recouvrement des îlots magnétiques. On constate que ces deux conditions coïncident. Ce simple résultat suggère que si le critère de Chirikov est largement satisfait, le coefficient de diffusion quasi-linéaire peut être appliqué. Ce résultat est ensuite démontré par des calculs numériques dans des situations typiques (Rechester *et al.*, 1979a ; Rechester & White, 1980). La diffusion des lignes de champ se comprend comme un changement de position radiale au fur et à mesure de leur excursion parallèle. Ceci se traduit par la loi :

$$(\delta r)^2 = 2 D_{LC} L \quad (\text{II-37})$$

où $(\delta r)^2$ est la variance pour une longueur parallèle parcourue L .

II.4.c - Corrélation des lignes de flux avec un mode harmonique

Du fait du cisaillement magnétique, une diffusion radiale induit un changement du facteur de sécurité q et, pour un mode résonant (m, n) sur une surface $q_{\text{res}} = -m/n$, un déphasage avec le mode. Une ligne de champ reste résonante avec un mode (m, n) tant que la phase $m\theta^* + n\phi$ n'a pas varié d'une quantité de l'ordre de un. Nous avons

$\frac{d(m\theta^* + n\phi)}{d\phi} = m\left(\frac{1}{q(r)} + \frac{n}{m}\right) = m\left(\frac{1}{q(r)} - \frac{1}{q_{\text{res}}(r)}\right)$. Au bout d'une longueur $L = R\phi$, la ligne de champ a diffusé radialement de façon que $(r - r_{\text{res}})^2 \sim 2D_{\text{LC}}L$. Nous avons donc

$\left|\frac{1}{q(r)} - \frac{1}{q_{\text{res}}(r)}\right| \sim \left|\frac{\partial(1/q)}{\partial r}\right| (D_{\text{LC}}L)^{1/2}$ et la quantité $m\theta^* + n\phi$ a varié de

$\frac{L}{R} m \left|\frac{\partial(1/q)}{\partial r}\right| (D_{\text{LC}}L)^{1/2}$. La ligne de flux est décorrélée de la perturbation (m, n) au bout de la distance $L = L_K$ telle que cette quantité soit de l'ordre de $\pi/2$. La longueur de Kolmogorov L_K est alors donnée par :

$$L_K \sim 2\pi qR \sigma^{-4/3} \quad (\text{II-38})$$

II.4.d - Séparation exponentielle, longueur de Kolmogorov

Dans la couche ergodique, les lignes de champ ne sont pas intégrables. Deux trajectoires très voisines, séparées initialement de δ_0 s'écartent alors exponentiellement l'une de l'autre :

$$\delta = \delta_0 \exp(L/L_K) \quad (\text{II-39})$$

Le fait que l'échelle d'exponentiation dans (II-39) soit l'échelle de Kolmogorov peut être démontré en effectuant les moyennes convenables sur les exposants de Lyapunov en chaque point (Samain & Ghendrih, 1992).

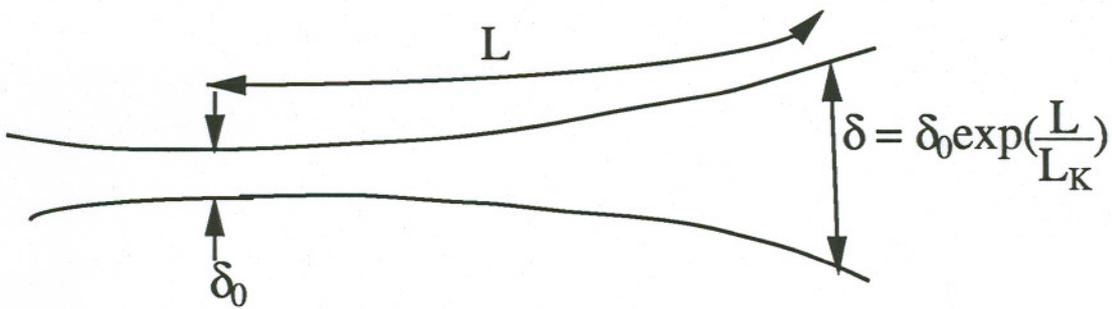


figure (II.9) : divergence exponentielle, L_K est la longueur de Kolmogorov

Remarquons que la conservation du flux magnétique ($\text{div } \vec{B} = 0$) associée à toute direction dilatante telle que $\delta = \delta_0 \exp(L/L_K)$ une direction contractante telle que $\Delta = \Delta_0 \exp(-L/L_K)$.

II.5 - Influence de la paroi matérielle dans la couche ergodique

D'après l'étude du paragraphe précédent (II.4), le divertor ergodique crée dans le plasma de bord une couche ergodique : les lignes de champ explorent tout le volume ergodique selon un processus de type diffusif. Cependant, dans une configuration tokamak réelle, cette couche ergodique est limitée par la paroi matérielle. Cette paroi borne alors l'exploration radiale des lignes de champ : toute ligne de champ de la couche ergodique se connecte sur cette paroi lorsque son exploration radiale l'amène à franchir cette frontière. Remarquons qu'une ligne de champ est connectée à la paroi par ses deux extrémités. Le principe même du divertor ergodique est une connexion magnétique de la paroi à la paroi à travers la couche ergodique. Pour chaque ligne de champ, nous pouvons alors définir la longueur de connexion L_{mur} qui est la longueur de la ligne de champ entre ses deux points de contact avec la paroi. Toutes les longueurs L_{mur} sont finies.

A faible profondeur de pénétration radiale, la valeur de L_{mur} est peu importante et on peut s'attendre à ce que les propriétés de diffusion et de stochasticité décrites dans le paragraphe (II.4a) ne soient plus applicables. En fait, ces propriétés permettent de caractériser la topologie magnétique dont dépend fortement le transport dans la couche ergodique. En effet, le transport dans un plasma magnétisé résulte d'un compromis entre un flux le long des lignes de champ, dû au gradient parallèle de la grandeur qui est la source de la force thermodynamique induisant ce transport, et un flux transverse, dû aux gradients transverses. Comme nous le verrons dans le chapitre IV, dans une couche stochastique sans interaction avec une paroi, la divergence exponentielle des lignes de champ, en modifiant la structure des tubes de flux, détermine la structure dans l'espace de la grandeur considérée, c'est-à-dire les gradients transverses et parallèles et donc les flux de cette grandeur. La structure de base correspond à des tubes de flux suffisamment déformés par la divergence exponentielle des lignes de champ qui le composent. Dans une première approximation, nous pouvons prendre la longueur de Kolmogorov L_K comme échelle parallèle caractéristique de ces tubes de flux. En chaque point, il faut alors comparer la longueur L_K à la longueur $L_{\text{au mur}}$ de connexion magnétique à la paroi à partir du point considéré dans la couche ergodique. Si $L_{\text{au mur}}$ est supérieure à L_K , le transport s'effectue de façon diffusive, par pas aléatoires successifs le long de tubes de flux de longueur $\sim L_K$. Si au contraire, $L_{\text{au mur}}$ est inférieure à L_K , le transport prend place de façon "laminaire", non diffusive, le long du tube de flux de longueur $L_{\text{au mur}}$ qui connecte le point considéré à la paroi matérielle. Nous séparons donc l'espace en deux zones en comparant la longueur $L_{\text{au mur}}$ à la longueur L_K . La zone laminaire, telle que $L_{\text{au mur}} < L_K$, est caractérisée par un transport sur les tubes de flux bien définis qui sont

connectés à la paroi matérielle. Elle contrôle le dépôt d'énergie et de particules sur la paroi. La zone stochastique, pour laquelle $L_{\text{au mur}} > L_K$, est le siège d'une diffusion entre le plasma confiné et la zone laminaire. Nous pouvons calculer analytiquement les grandeurs liées à l'ergodicité, D_{LC} (§ II.4.b), et à la stochasticité, L_K (II.4.d). Nous pouvons donc restreindre l'étude numérique de la topologie magnétique à la connexion à la paroi.

La connaissance a priori de la diffusion présente également l'intérêt de donner une idée de la localisation des deux zones, laminaire et stochastique : en plaçant la paroi en $r = a$ et en supposant une diffusion des lignes de champ donnée par $(\delta r)^2 = 2D_{LC} L$, la partie laminaire du tube de flux, limitée à L_K , présente une excursion radiale $(\delta r)_{\text{laminaire}} = (2D_{LC} \cdot L_K)^{1/2}$ c'est-à-dire se situe à des rayons $r \geq r_{\text{chaos}} = a - (2D_{LC} L_K)^{1/2}$. Au contraire, la partie "ergodique" de la ligne de champ se trouve à un petit rayon inférieur à r_{chaos} .

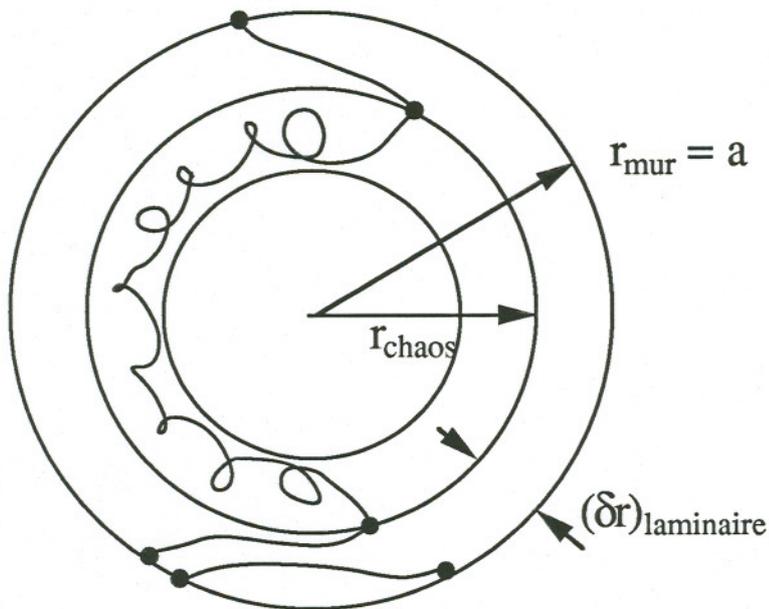


figure (II.10) : séparation de la couche ergodique en deux zones

- une zone "complètement" ergodique pour $r < r_{\text{chaos}}$
- une zone laminaire $r_{\text{mur}} > r > r_{\text{chaos}}$

Cependant, cette localisation radiale des deux zones n'est pas strictement vérifiée puisque les longueurs $L_{\text{au mur}}$ mises en jeu sont trop faibles pour vérifier précisément la loi de diffusion qui s'obtient comme une moyenne statistique. Cette frontière r_{chaos} est donc diffuse, il est nécessaire d'effectuer un calcul numérique pour préciser la topologie magnétique réelle. De plus, dans le cas du divertor ergodique, la structure multipolaire du bobinage rend la perturbation magnétique rapidement décroissante radialement. Cette valeur de r_{chaos} déduite de la loi de diffusion ne prend pas du tout en compte cette décroissance rapide des effets perturbateurs. Ces remarques mettent en évidence la nécessité d'utiliser un code numérique pour l'étude de la topologie de la connexion magnétique.

III - CODE MASTOC

(Magnetic Stochastic Configuration)

"The purpose of computing is insight, not numbers".

Hamming

III.1 - Modélisation du divertor ergodique pour le code numérique MASTOC

Le divertor ergodique (Samain *et al.*, 1984b) est constitué de six modules identiquement régulièrement espacés dans la direction toroïdale φ . Un module consiste en un bobinage octopolaire qui s'inscrit sur un tore de petit rayon $r_{DE} = 0,85$ m et de grand rayon $R_0 = 2,38$ m. L'extension poloïdale d'un module dans l'espace réel est $\Delta\theta \approx 2\pi/3$ et toroïdale $\Delta\varphi \approx \pi/14$. Le bobinage est formé par la superposition des deux bobinages représentés sur la figure (III.1).

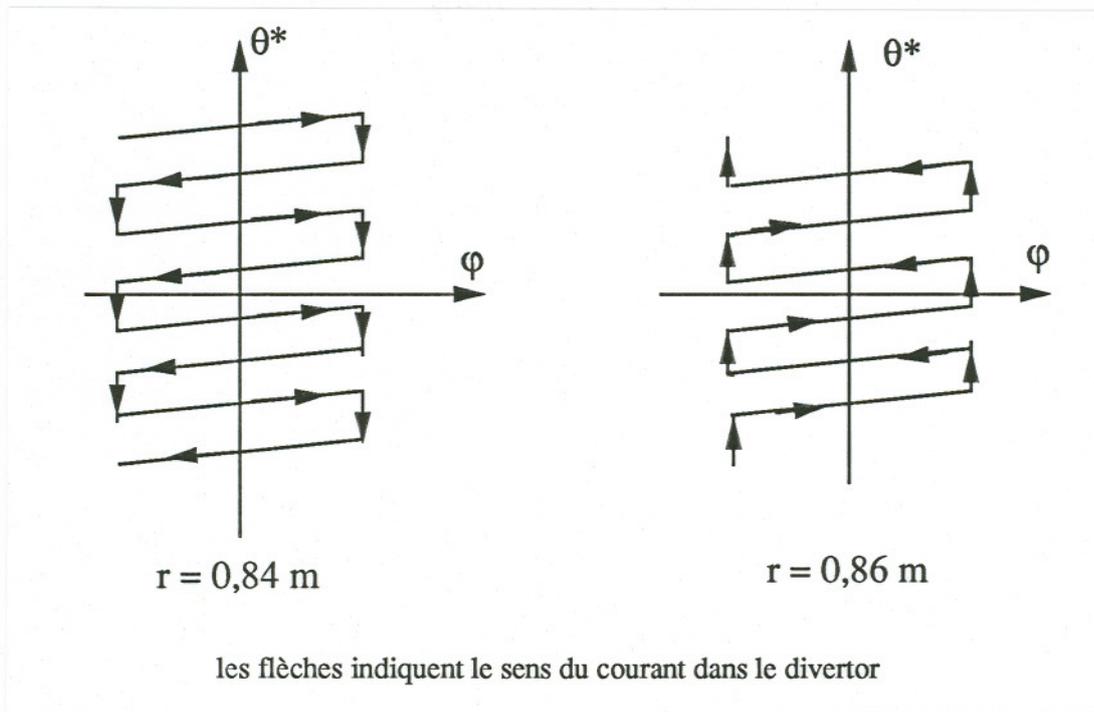


figure (III.1) : bobinage d'un module de divertor ergodique

Dans chaque bobinage, le courant électrique est transporté par neuf fils de cuivre disposés parallèlement, groupés trois par trois. L'intensité maximale traversant un fil de cuivre est de 2,5 kA. Le courant maximal dans les trois périodes centrales est donc de 45 kA contre 22,5 kA aux extrémités. Les fils de courants sont inclinés le long des lignes de champ selon une pente correspondant à un facteur de sécurité égal à 2,3.

Les conducteurs en cuivre sont modélisés par des fils infiniment fins. Les conducteurs dans la direction poloïdale sont négligés : leur contribution est

alternativement positive et négative, de plus, nous ne considérons que la partie résonante (§ II.3). La perturbation du potentiel vecteur est calculée avec la formule de Biot et Savart. On tient compte du fait que la perturbation est invariante par symétrie S_0 : $\theta \rightarrow -\theta$, $\varphi \rightarrow -\varphi$ moyennant un changement de signe du courant électrique dans les fils du divertor.

III.2 - Dimensionnement

Le but du divertor ergodique est de modifier la connexion magnétique entre le plasma confiné et la paroi matérielle de façon à mieux contrôler le plasma de bord : essentiellement, le divertor ergodique crée une perturbation magnétique résonante qui détruit les surfaces magnétiques autour du plasma confiné; il défléchit ainsi les lignes de champ en les connectant à la paroi dans les intervalles entre les conducteurs. Nous avons vu au paragraphe II.3 que la perturbation magnétique devait correspondre à une perturbation principalement parallèle du potentiel vecteur $\delta\vec{A}_{//}$. En effectuant la décomposition de Fourier de la perturbation en coordonnées intrinsèques θ^* et φ^* , nous trouvons le mode résonant $A_{m,n}(q)$ (II.3.b) sur la surface magnétique rationnelle $q = -m/n$. La couche ergodique est la région dans laquelle tous les tores K.A.M. sont détruits. La limite de la couche ergodique est constituée, du côté plasma confiné, par le premier tore K.A.M. intact. Nous savons que cette condition équivaut à ce que le paramètre de Chirikov franchisse une valeur seuil, approximativement égale à 0,7 (Chirikov, 1979). Comme la couche ergodique doit être restreinte au plasma de bord, de façon à préserver le confinement central, la perturbation doit être telle que l'amplitude du terme résonant $A_{m,n}$ décroisse rapidement radialement, de sorte que le paramètre de Chirikov ait une valeur inférieure à la valeur critique qui fixe le premier tore K.A.M. non détruit. Un premier moyen d'imposer une forte décroissance radiale du terme résonant est de faire décroître la perturbation magnétique elle-même dans la direction radiale. En géométrie plane, un bobinage de type multipolaire $\exp[i(m_0 \text{ réel} \theta)]$ en θ de période $2\pi/m_0 \text{ réel}$ dans l'espace réel θ crée une perturbation magnétique dont le potentiel vecteur (quasi dans le vide) présente une décroissance exponentielle de la forme $\exp[-m_0 \text{ réel}(r_{DE} - r)/r_{DE}]$. Le bobinage a un caractère multipolaire $\exp[i(m_0 \theta^*)]$ le long de la coordonnée intrinsèque θ^* avec un nombre d'onde poloïdal moyen $m_0 = m_0 \text{ réel} (d\theta^*/d\theta)$. La localisation du bobinage en θ dans un intervalle $\Delta\theta = (d\theta/d\theta^*)\Delta\theta^*$ détermine alors le spectre des nombres poloïdaux m autour de m_0 : la dépendance multipolaire, sinusoïdale, de nombre poloïdal m_0 , est convoluée avec une fonction créneau de largeur $\Delta\theta^*$; le spectre en m est alors une différence de deux sinus cardinaux, $\text{sinc}[(m_0 - m)\Delta\theta^*/2] - \text{sinc}[(m_0 + m)\Delta\theta^*/2]$, conduisant à un spectre $m = \pm (m_0 \pm o(1/\Delta\theta^*))$ soit [13, 22] pour les valeurs positives. Par ailleurs, le fait que le bobinage consiste en $n_0 = 6$ modules identiques décalés de $2\pi/n_0$ en φ impose une périodicité $2\pi/n_0$ toroïdalement et les nombres toroïdaux n sont donc multiples de n_0 . Du fait que chacun des six modules est limité toroïdalement sur une extension finie $\Delta\varphi$, les valeurs de n s'étendent jusqu'à $n_0 \cdot o(1/\Delta\varphi) \sim 24$. Cependant, la condition de résonance $q = -m/n$ avec $q \sim 3$ associée à ces deux intervalles de spectres poloïdaux et toroïdaux impose que les modes résonants aient pour nombre toroïdal la valeur minimale $n_0 = 6$.

Le dimensionnement du bobinage dépend de la taille désirée de la zone ergodique et de la configuration magnétique d'équilibre. Prenons un équilibre pour lequel le paramètre de Chirikov est de l'ordre de 3 avec $q=3$. La limite de la zone ergodique est donnée par $\sigma \sim 1$ (II.4.a). Nous savons que le paramètre de Chirikov varie comme $(\delta A)^{1/2}$ (II-27) soit une variation de l'amplitude du terme perturbateur résonant d'un facteur dix approximativement. La surface $q \sim 3$, caractérisant la limite du plasma, est en appui sur les protections du bobinage en $r \sim 0,79$ m. Nous désirons que la surface $q = 2$ en $r = 0,66$ m constitue la limite de la couche ergodique. En utilisant la décroissance exponentielle d'un mode résonant "moyen" (m_0 réel, n_0) de la forme $\exp[-m_0 \text{ réel}(r_{DE} - r)/r_{DE}]$ où $r_{DE} = 0,85$ m, nous trouvons un nombre poloïdal de $m_0 \text{ réel} = 10$. Bien entendu, ce nombre poloïdal fixe le pas en θ , $2\pi/m_0 \text{ réel}$, du bobinage multipolaire dans l'espace réel. En coordonnées intrinsèques, le nombre poloïdal moyen $m_0 = m_0 \text{ réel}(d\theta^*/d\theta)$ est différent du fait de la relation entre θ et θ^* (II.2). Du côté extérieur (faible champ, $\theta = 0$) où le divertor ergodique est implanté, cette relation donne $d\theta^*/d\theta \approx 0,554$ pour la surface $q = 3$ ($r = 0,78$ m, $R_0 = 2,38$ m) avec $\Lambda = -0,3$. Le nombre poloïdal m_0 (correspondant à la coordonnée intrinsèque θ^*) est alors $m_0 = m_0 \text{ réel}/0,554$ soit $m_0 = 18$. La condition de résonance $q = -m_0/n_0$ fixe le nombre toroïdal moyen n_0 à 6 pour $q = 3$. La périodicité toroïdale de $2\pi/n_0$ est imposée en constituant le divertor ergodique de six modules régulièrement espacés toroïdalement dans le tokamak. Des extensions poloïdales de $\Delta\theta_{\text{réel}} = 2\pi/3$, soit $\Delta\theta^* \approx 2\pi/5$, et toroïdale de $\Delta\varphi = \pi/14$ complètent la détermination du spectre (m, n) de la zone ergodique.

III.3 - Calcul de la perturbation magnétique

Nous désirons calculer la perturbation magnétique en coordonnées intrinsèques et précisément déterminer les composantes de Fourier de cette perturbation. Une telle décomposition est valable pour un équilibre seulement car les coordonnées intrinsèques sont caractéristiques d'un équilibre magnétique (§ II.2). Les calculs dans la suite correspondent à l'équilibre suivant pour lequel le plasma est en appui sur les protections du divertor ergodique ($q = 3,18$) :

$$\begin{array}{lll} a = 0,803 \text{ m} & R = 2,377 \text{ m} & B_T = 3,03 \text{ T} \\ I_{\text{plasma}} = 1,51 \text{ MA} & \beta_p + li/2 = 0,73 & I_{DE} = 45 \text{ kA} \end{array}$$

$$\delta\phi_{\text{pol}}(\phi_{\text{tor}}, \theta^*, \varphi) = R \delta A_{\varphi} = \sum_{m, n = -\infty}^{+\infty} (\delta\phi_{\text{pol}})_{m, n}(\phi_{\text{tor}}) \exp[i(m\theta^* + n\varphi)] \quad (\text{III-1})$$

Du fait de la symétrie du bobinage, la perturbation, moyennant le changement de signe du courant, doit être invariante par la symétrie ponctuelle S_0 c'est-à-dire :

$$\delta\phi_{\text{pol}}(\phi_{\text{tor}}, -\theta^*, -\varphi) = \delta\phi_{\text{pol}}(\phi_{\text{tor}}, \theta^*, \varphi) \quad (\text{III-2})$$

Comme $\delta\phi_{\text{pol}}$ est réel, ceci implique que :

$$\begin{aligned} (\delta\phi_{\text{pol}})_{m, n}(\phi_{\text{tor}}) &= i \text{Im} [(\delta\phi_{\text{pol}})_{m, n}(\phi_{\text{tor}})] \\ &= -(\delta\phi_{\text{pol}})_{-m, -n}(\phi_{\text{tor}}) \end{aligned} \quad (\text{III-3})$$

Il suffit donc de déterminer la partie imaginaire des termes $(\delta\phi_{\text{pol}})_{m, n}(\phi_{\text{tor}})$ pour des nombres poloïdaux m variant de $-\infty$ à $+\infty$ et toroïdaux n variant de 0 à $+\infty$ par multiples de 6.

La dépendance fonctionnelle selon la coordonnée intrinsèque θ^* est de la forme $\text{sinc}[(m_0 - m)\Delta\theta^*/2] - \text{sinc}[(m_0 + m)\Delta\theta^*/2]$ (voir § III.2). $\Delta\theta^* = 2\pi/5$ est l'extension poloïdale du bobinage et $m_0 = 18$ donne la périodicité poloïdale du bobinage selon la coordonnée intrinsèque θ^* . La figure (III.2a) représente la fonction $\text{sinc}[(18 - m)2\pi/10] - \text{sinc}[(18 + m)2\pi/10]$ alors que la figure (III.2b) donne le

résultat du calcul par le code Mastoc de la dépendance poloïdale, i.e. en m , de ce terme $(\delta\phi_{\text{pol}})_{m, n}(\phi_{\text{tor}})$.

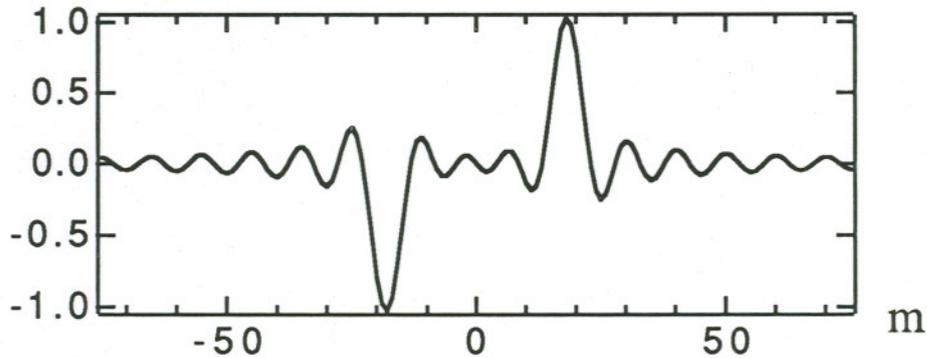


figure (III.2a) : fonction $\text{sinc}[(18 - m)2\pi/10] - \text{sinc}[(18 + m)2\pi/10]$

$\delta\phi_{\text{pol } n=6}(q = 3)$

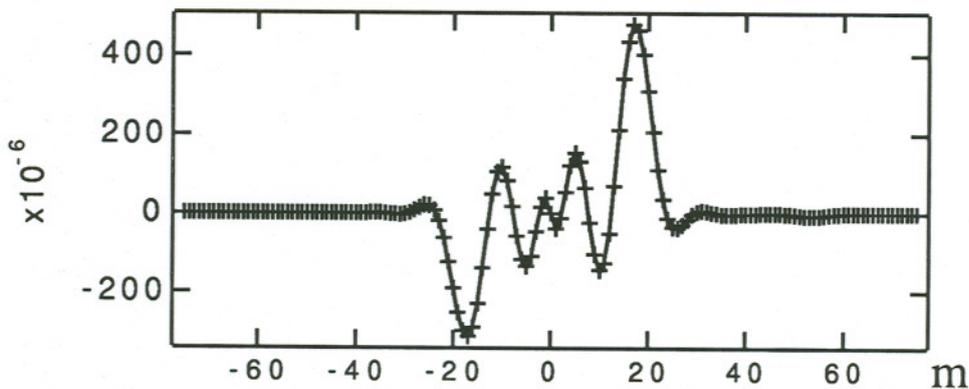


figure (III.2b) : dépendance poloïdale de $(\delta\phi_{\text{pol}})_{m, n = 6}(q = 3)$, résultat numérique

La largeur des deux pics principaux, en $m_0 = 18$ et $-m_0$, est donnée par la dépendance fonctionnelle de type sinus cardinal. La figure (III.3b) présente une asymétrie vis-à-vis de

la transformation $m \rightarrow -m$. Cette asymétrie est due à la légère inclinaison des barres de courant du divertor ergodique.

Toroïdalement, l'extension finie du bobinage rend la perturbation localisée : la dépendance fonctionnelle est de type sinus cardinal, $\text{sinc}(n \Delta\phi/2)$ où $\Delta\phi \approx \pi/14$. Comme nous l'avons remarqué au paragraphe précédent, seuls les termes dont le nombre toroïdal est multiple de $n_0 = 6$ présentent une amplitude non nulle du fait de la périodicité toroïdale. La figure (III.3) représente la dépendance toroïdale, i.e. en m , de $(\delta\phi_{\text{pol}})_{m,n}(\phi_{\text{tor}})$.

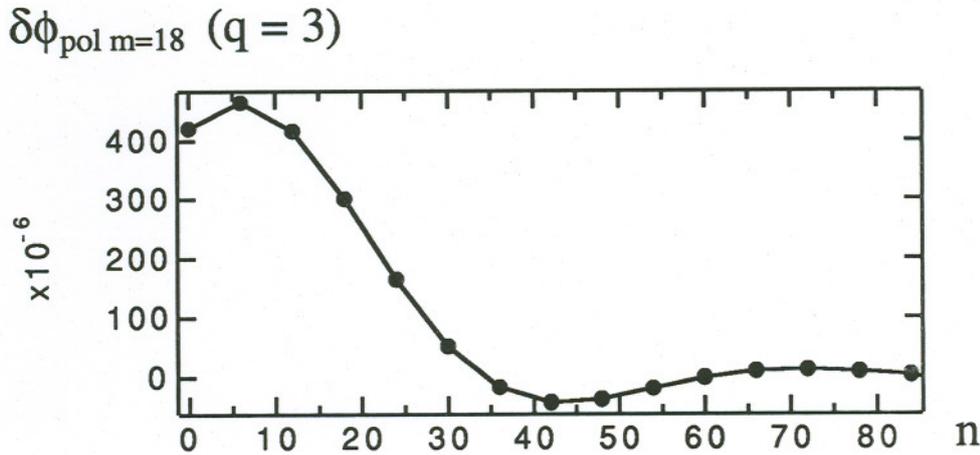


figure (III.3) : dépendance toroïdale de $(\delta\phi_{\text{pol}})_{m = 18, n} (q = 3)$

La figure (III.4a) représente la dépendance radiale de quelques termes $(\delta\phi_{\text{pol}})_{m,n}(\phi_{\text{tor}})$ alors que la figure (III.4b) donne ces mêmes termes en fonction du facteur de sécurité. Les disques noirs sont les amplitudes de modes résonants (§ II.3) de nombre toroïdal égal à 6.

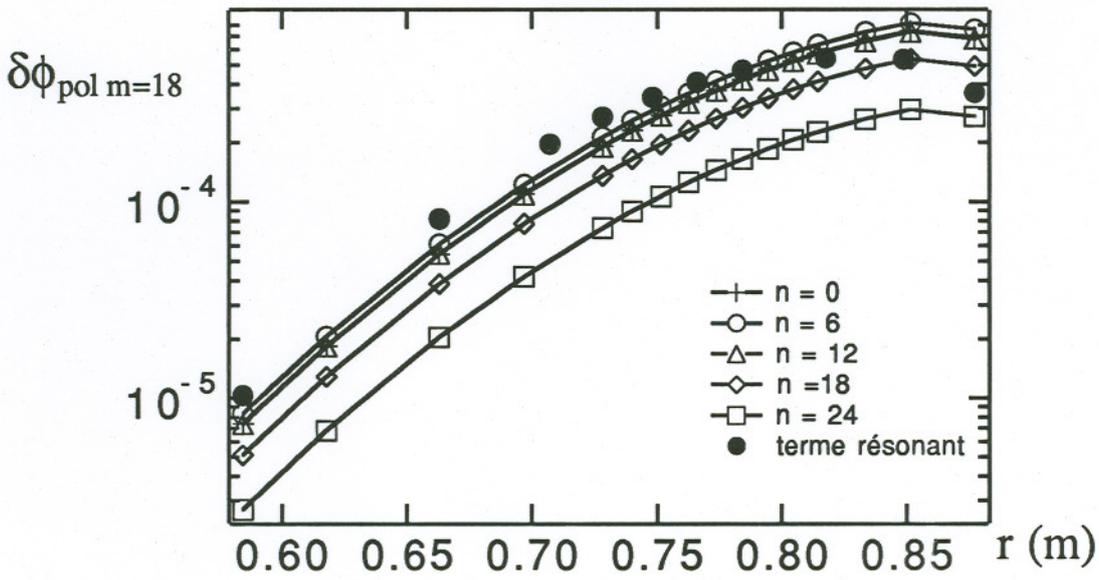


figure (III.4a) : dépendance radiale de $(\delta\phi_{\text{pol}})_{m=18,n}$

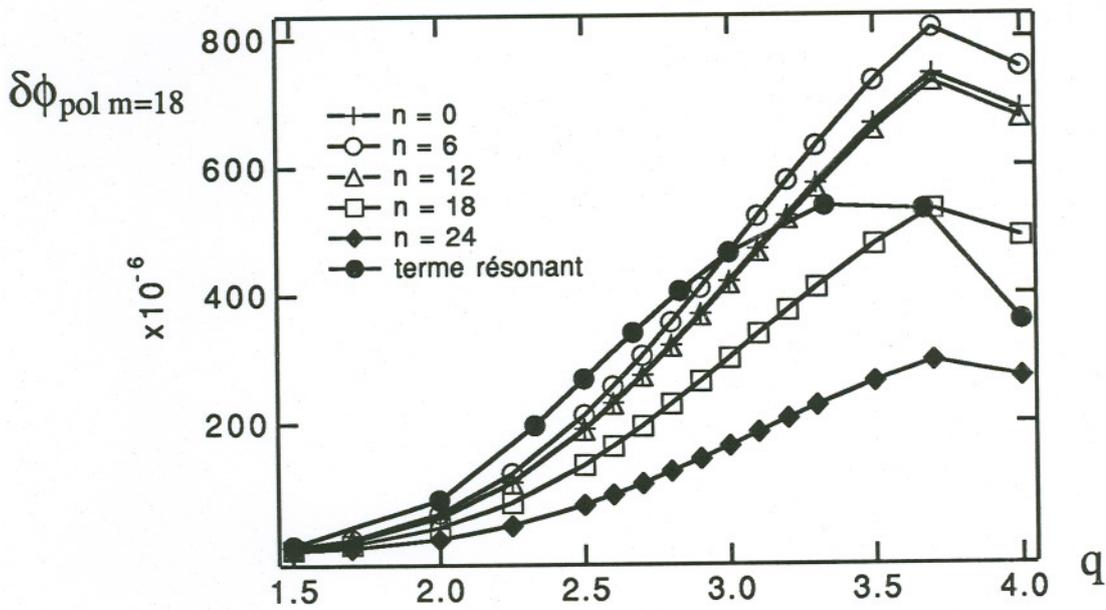


figure (III.4b) : $(\delta\phi_{\text{pol}})_{m=18,n}$ en fonction du facteur de sécurité q

La figure (III.4a) montre bien que l'amplitude des modes décroît exponentiellement, au moins dans les vingt premiers centimètres. Pour le mode ($m=18, n=6$), la décroissance exponentielle selon la loi $\exp[-m_0 \text{réel}(\tau_{DE} - r)/\tau_{DE}]$ donne un facteur 1,9 entre $q = 3$ ($r = 0,78$ m) et $q = 2,5$ ($r = 0,73$ m) alors que ce facteur est de 2,2 sur la figure (III.4a).

La figure (III.5) représente la perturbation $\delta\phi_{\text{pol}}$ recalculée sur la surface magnétique $q = 3$.

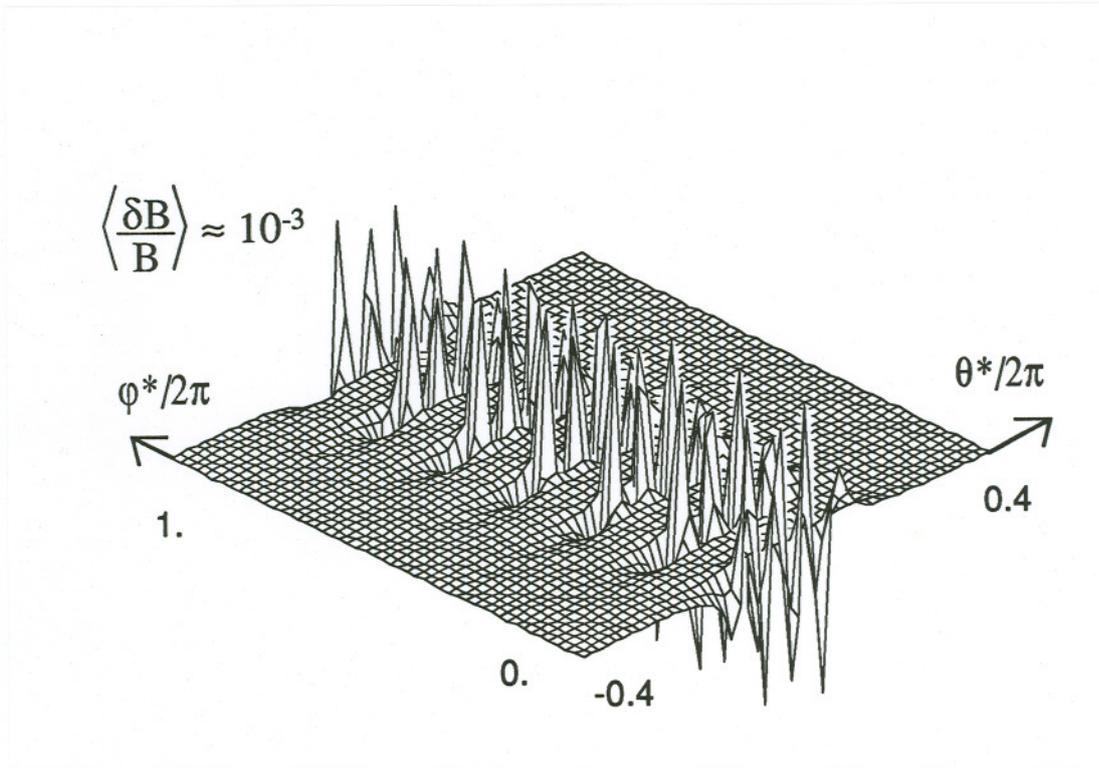


figure (III.5) : $\delta\phi_{\text{pol}}$ sur la surface magnétique $q = 3$

Poloïdalement, la perturbation présente bien 3,5 périodes sur l'intervalle $\Delta\theta^* \approx 2\pi/5$. Toroïdalement, la perturbation est bien $2\pi/6$ périodique comme somme de six fonctions créneaux. L'amplitude relative de la perturbation magnétique moyennée sur la surface $\langle \delta B/B \rangle$ est de l'ordre de 10^{-3} . La figure (III.6) représente la résultante radiale de la perturbation, δB_r , au dessus d'un module. La forme de δB_r est l'empreinte de la géométrie du bobinage.

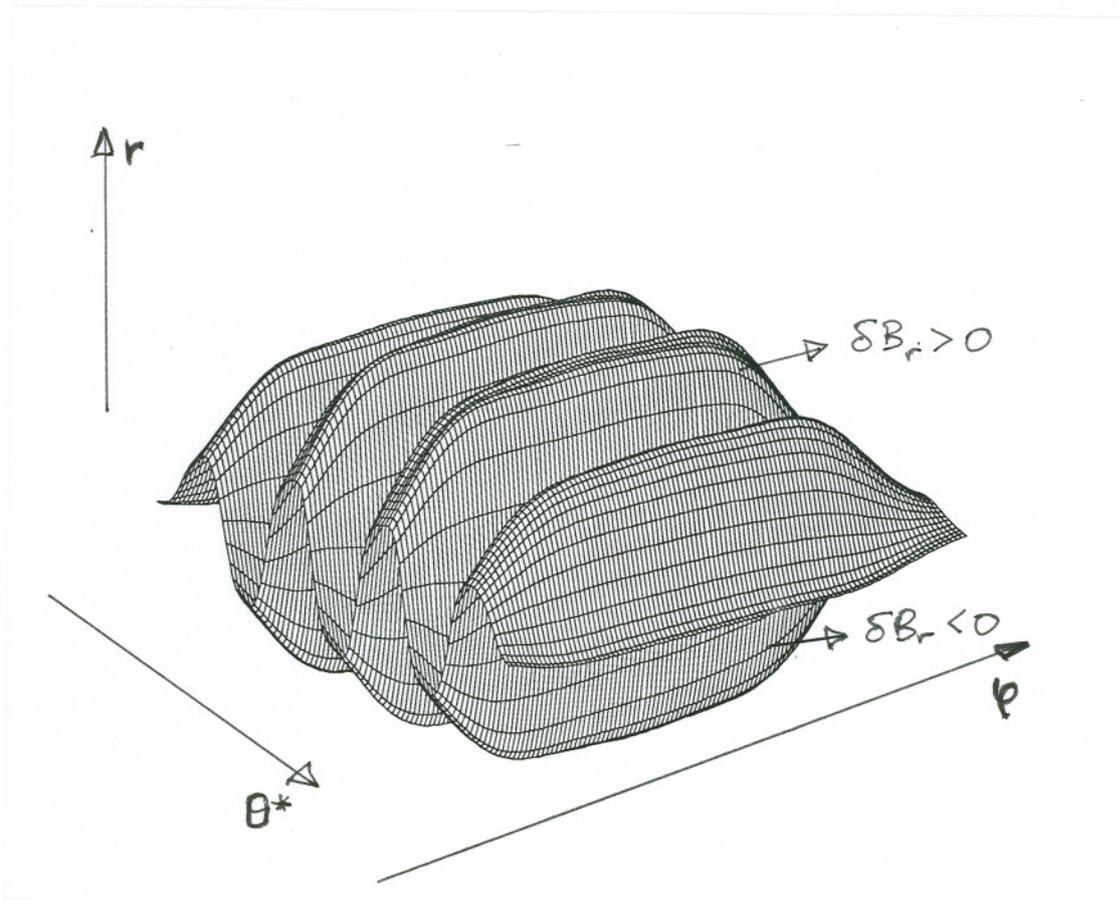


figure (III.6) perturbation radiale δB_r devant un module de divertor ergodique

Si nous nous intéressons au terme résonant tel qu'il est défini au paragraphe (II.3), nous constatons sur les figures (III.2b) et (III.3) que les harmoniques, dont le module est le plus grand, correspondent à $n = 6$ et $|m| \in [15, 20]$, ce qui donne une région résonante où l'effet perturbateur est le plus important autour de la surface magnétique $q = 3$. L'analyse de type quasi-linéaire du chapitre (II.4), qui permet le calcul du seuil du chaos, du coefficient de diffusion des lignes de champ et de l'échelle de Kolmogorov, ne prend en compte que ces termes résonants. Le calcul donne les résultats des figures suivantes, (III.7) et (III.8).

σ (n = 6)

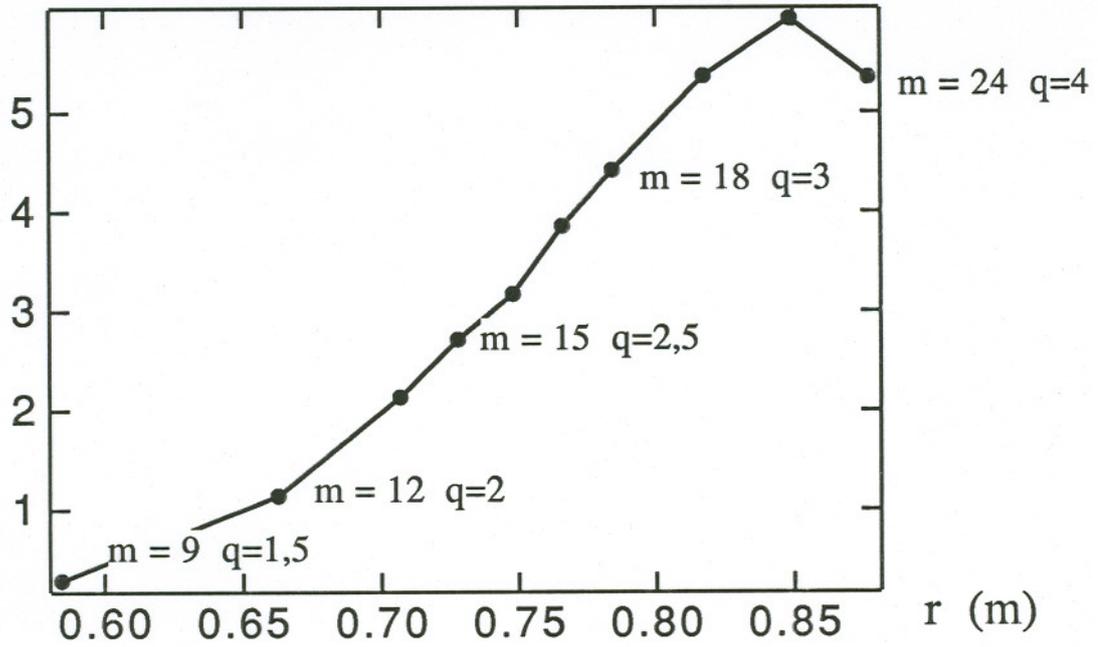


figure (III.7) : paramètre de Chirikov

D_{QL} (m²/m) n=6

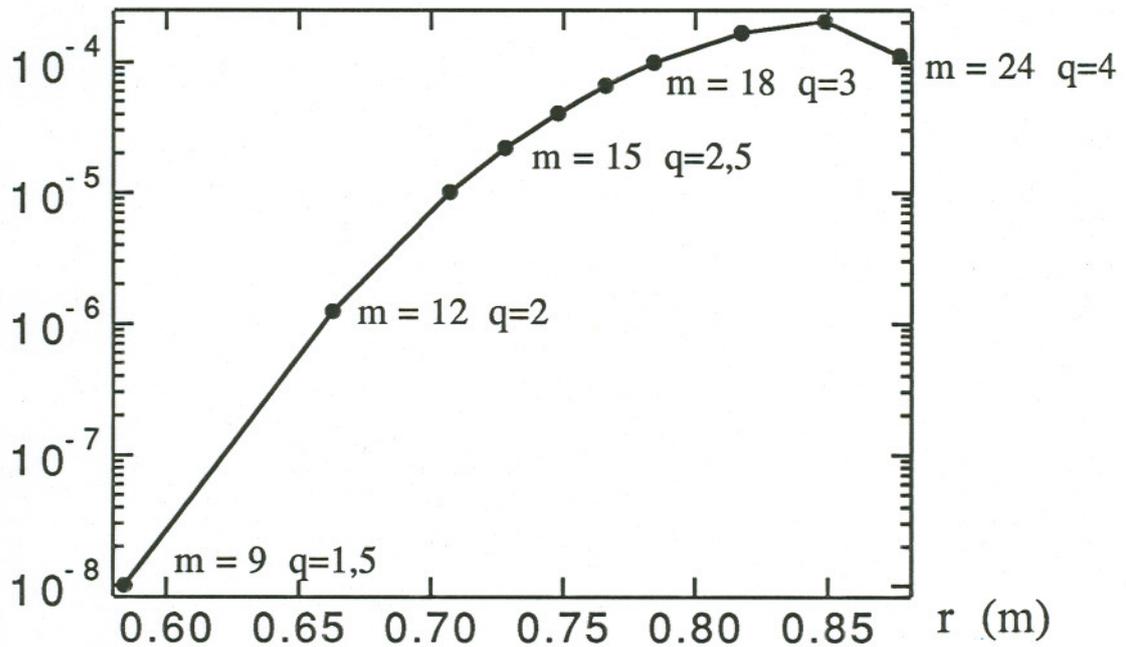


figure (III.8) : coefficient de diffusion quasi-linéaire des lignes de champ

Les nombres poloïdaux et toroïdaux de quelques modes résonants sont indiqués sur les deux figures ci-dessus. Rappelons que le calcul du coefficient de diffusion quasi-linéaire (§ II.4b) n'est valable que pour un paramètre de Chirikov supérieur à 1. Au voisinage de ce seuil, il effectue d'autres calculs. Nous retrouvons bien que l'effet est maximal, aussi bien en ce qui concerne le paramètre de Chirikov que le coefficient de diffusion quasi-linéaire, au voisinage de la surface $q = 3$. La décroissance radiale rapide, due au caractère multipolaire du bobinage (§ III.2), permet d'assurer que le confinement central n'est pas affecté. Grâce à ce coefficient de diffusion des lignes de champ magnétique, nous pouvons déjà avoir une première estimation de la modification du transport au bord. Considérons pour cela un transport non collisionnel le long des lignes de champ : le coefficient de diffusion des particules s'obtient en multipliant D_{QL} par la vitesse thermique de la particule considérée. Pour les électrons, avec $D_{QL} \sim 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m}$ et $v_{th} \sim 10^6 \text{ m/s}$, nous obtenons un coefficient de diffusion de $100 \text{ m}^2/\text{s}$. L'effet attendu sur les électrons est donc très important. Pour les ions, une vitesse thermique de l'ordre de 10^4 m/s conduit à une diffusion de $1 \text{ m}^2/\text{s}$, valeur comparable au transport anormal : on ne s'attend donc pas à une modification du transport ionique. Expérimentalement, on constate toutefois un effet d'écran. Cette première approche du transport grâce à des outils théoriques usuels ne prend pas du tout en compte l'influence de la paroi matérielle sur le transport au bord et sur le dépôt résultant. Pour cela, nous devons étudier la topologie de la connexion magnétique (§ II.4), étude que nous effectuerons avec un code numérique. Cependant, pour un tracé précis des lignes de champ entre le plasma confiné et la paroi matérielle, il n'est pas acceptable de réduire la perturbation magnétique aux seuls modes résonants car cela ne rend pas compte de la localisation de la perturbation magnétique par rapport aux conducteurs du divertor ergodique. Cette localisation est bien entendu essentielle pour le calcul précis de la connexion des lignes de force à la paroi matérielle. Pour obtenir la localisation, toroïdale et poloïdale, de la perturbation, c'est-à-dire retrouver la forme exacte de la fonction $\delta\phi_{pol}$ dans l'espace $(\phi_{tor}, \theta^*, \varphi)$ (voir figure (III.5)), il faut garder suffisamment de termes (m, n) dans la série (III-1), résonants ou non résonants.

III.4 - Tracé de lignes de champ

L'effet de la perturbation, tel qu'il ressort des équations hamiltoniennes (II-17)

$$\frac{d\theta^*}{d\varphi} = - \frac{\partial H}{\partial \phi_{\text{tor}}} = \frac{1}{q} - \frac{\partial (\delta\phi_{\text{pol}})}{\partial \phi_{\text{tor}}}$$

$$\frac{d\phi_{\text{tor}}}{d\varphi} = \frac{\partial H}{\partial \theta^*} = \frac{\partial (\delta\phi_{\text{pol}})}{\partial \theta^*}$$

où $H = \phi_{\text{pol}}(\phi_{\text{tor}}) + \delta\phi_{\text{pol}}(\phi_{\text{tor}}, \theta^*, \varphi)$

consiste principalement en un changement de surface magnétique par l'effet $d\phi_{\text{tor}}/d\varphi$. Ce changement de surface magnétique modifie la transformée rotationnelle, quantifiée par q , et donc la pente de la ligne de champ. Localement, au-dessus des modules, la pente est encore modifiée par le terme $-\partial(\delta\phi_{\text{pol}})/\partial\phi_{\text{tor}}$ qui est cependant petit devant $1/q$. Rappelons que la perturbation est fortement localisée au regard des modules : une ligne de champ n'est pas sensible à la perturbation entre deux modules, toroïdalement, et du côté fort champ i.e. poloïdalement en dehors de l'extension $\Delta\theta^* \approx 2\pi/5$ d'un module. Finalement, l'effet principal est surtout le changement de surface magnétique qui est équivalent à un saut radial et qui produit un changement de pente lié à la variation du facteur de sécurité avec le cisaillement magnétique. La localisation de la perturbation donne ainsi une forme en "marche" à la ligne de champ au passage devant un module. La ligne de champ reste sur la même surface magnétique ailleurs.

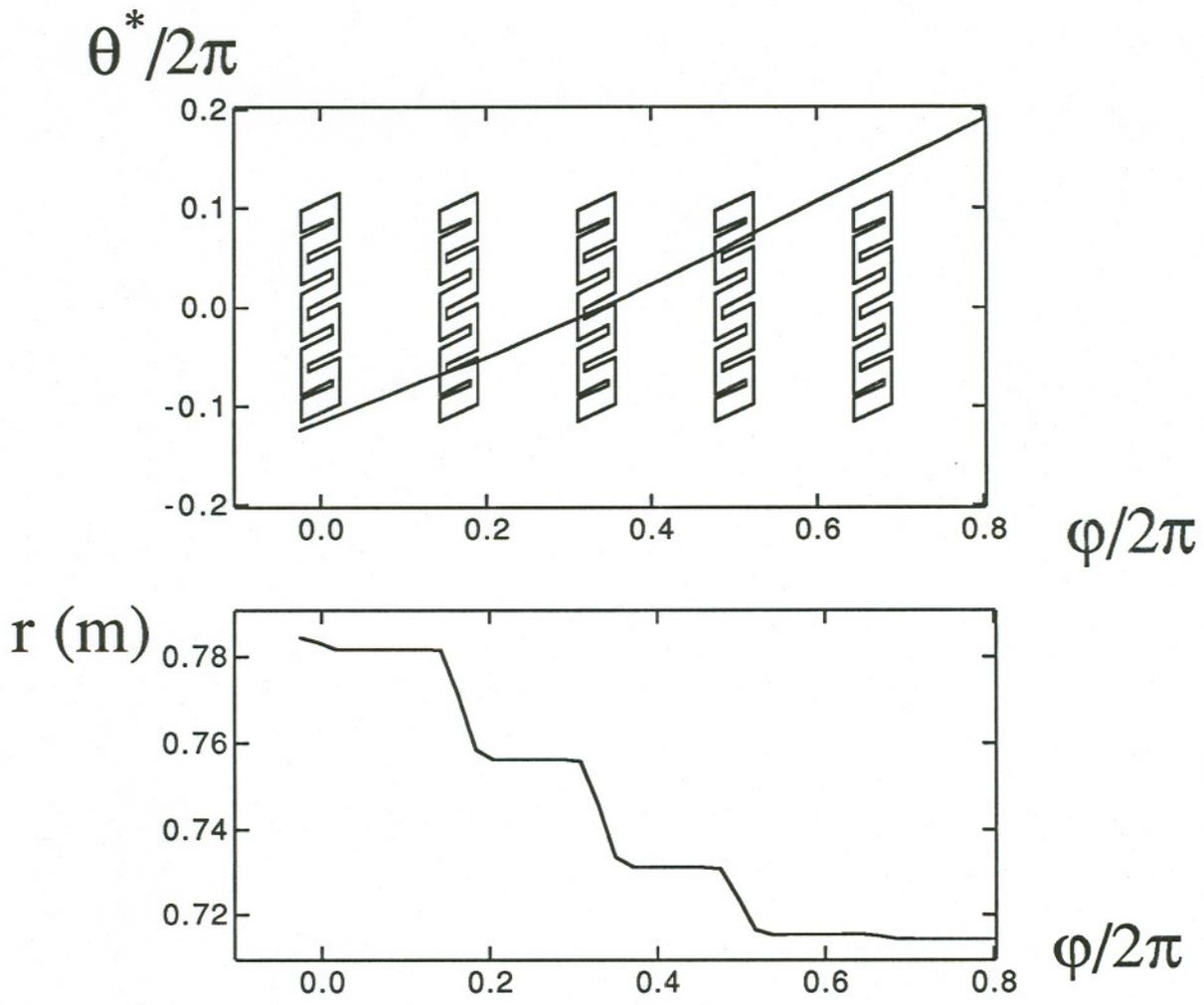


figure (III.9) : ligne de champ résonante passant devant quatre modules

III.5 - Zones $\delta B_r > 0$ et $\delta B_r < 0$ sur la surface du divertor ergodique

Nous pouvons séparer la surface du divertor ergodique en deux types de zones suivant le signe de δB_r : la zone est (+) si la perturbation est telle que $\delta B_r > 0$, au contraire, la zone (-) est caractérisée par une perturbation magnétique $\delta B_r < 0$, dirigée vers le centre du plasma. Supposant $B_\phi > 0$, lorsque l'on suit une ligne de champ dans le sens $d\phi > 0$, un saut $\delta r > 0$ (i.e. $d\phi_{\text{tor}}/d\phi > 0$) correspond au passage devant une zone (+), $\delta B_r > 0$. Au contraire, si la ligne de champ est suivie dans la direction contraire ($d\phi < 0$) la zone (+), $\delta B_r > 0$, donne un saut $\delta r < 0$ c'est-à-dire vers le plasma central. Cette classification en deux zones présente un intérêt pour l'étude de la connexion magnétique. Dans le cas où aucun limiteur n'est en avant des modules, c'est-à-dire que le plasma est directement en appui sur le bobinage du divertor ergodique, une ligne de champ ouverte de la couche ergodique ne peut se connecter que sur un module de divertor ergodique : précisément, une ligne de champ suivie dans le sens $d\phi > 0$ ne peut être déviée vers l'extérieur ($\delta r > 0$) que sur une zone (+) d'un module du fait de la localisation de la perturbation. Une ligne de champ suivie dans le sens $d\phi > 0$ connecte en fait une zone (-) à une zone (+). La figure (III,10) donne la séparation en zones (+) et (-) d'un module de divertor ergodique. Cette figure est en fait la projection dans le plan (ϕ, θ^*) de la figure (III.6) qui représente δB_r en trois dimensions.

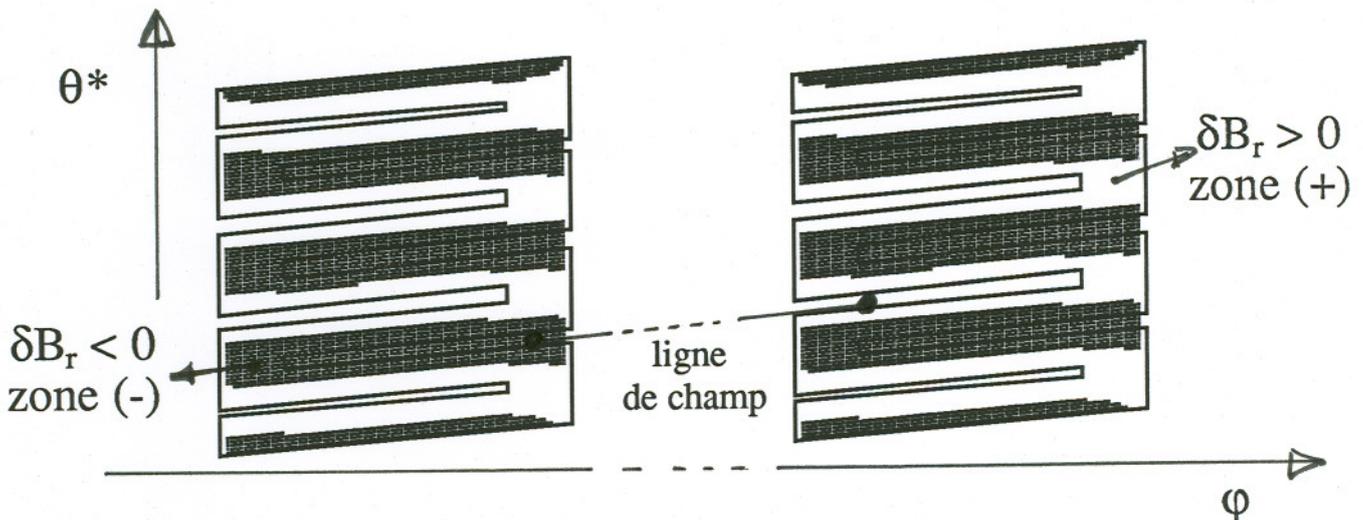


figure (III.10) : zones $\delta B_r > 0$ (+) et $\delta B_r < 0$ (-)

La résonance d'une ligne de champ se comprend comme la propriété de passer devant les modules successifs avec une perturbation δB_r toujours de même signe, c'est-à-dire toujours devant une zone (+) ou toujours devant un zone (-). Ceci a lieu de façon parfaite pour une valeur q_{res} de q . Chaque zone a une largeur poloïdale $(\Delta\theta^*)_{zone} = \pi/m_0 \sim 2\pi/36$ qui est la distance le long de θ^* entre deux conducteurs successifs dans un module. Il existe donc tout un faisceau de lignes de flux qui peuvent défiler devant les modules, sur un intervalle $\Delta\theta^* \sim 2\pi/6$ et $\Delta\varphi^* = q\Delta\theta^* = 3*2\pi/6$, en rencontrant toujours des zones de même signe : d'où l'élargissement de la résonance

$(\delta q)_{res}$ donné par $\left(\frac{\delta 1}{q}\right)_{res} = \frac{(\delta q)_{res}}{q^2} = \frac{(\Delta\theta^*)_{zone}}{\Delta\varphi} \sim \frac{1}{18}$ et donc $(\delta q)_{res} \sim \pm 0,5$. Dans la

couche "résonante" où $|q - q_{res}| < (\delta q)_{res}$, une ligne de flux, lors de son excursion $\Delta\theta^*$ devant les modules, cumule les déplacements radiaux $(\delta r)_{module}$ qu'elle subit en $(\Delta\theta^*/2(\Delta\theta^*)_{zone}) \sim 3$ modules. L'interférence constructive des δB_r produit ainsi un déplacement radial $\sim 3(\delta r)_{module}$. La ligne de flux réalise ensuite l'excursion $2\pi - \Delta\theta^*$ do côté champ fort où elle ne subit pas de déplacement radial. Quand elle passe de nouveau devant les modules, on peut admettre qu'elle subit un autre déplacement radial $3(\delta r)_{module}$ incorrélié avec le précédent. La ligne de flux subit donc un déplacement radial aléatoire $\sim \pm 3(\delta r)_{module}$ pour un déplacement en φ égal à $2\pi q$ correspondant à une distance $2\pi q R$. On peut s'attendre à un coefficient de diffusion de la ligne de champ :

$$D_{LC} = \frac{|3(\delta r)_{module \max}|^2}{2 \times 2\pi q R} = \frac{((\delta r)_{module \max})^2}{4R} \quad (III-4)$$

où $(\delta r)_{module \max}$ est maintenant le déplacement radial maximum de la ligne de champ quand elle passe devant un module. La formule (III-4) n'est valable que dans la zone $|q - q_{res}| < (\delta q)_{res}$. Nous allons préciser maintenant le mécanisme par lequel une ligne de champ se déphase après un tour poloïdal. Une ligne de champ, du fait des sauts radiaux cumulés dans l'excursion $\Delta\theta^*$, change de valeur de facteur de sécurité : $q = q_{res} + \delta q$. Cette variation de q produit après un tour poloïdal une variation de $\theta^* \sim (-\delta q/q^2)2\pi q$ où $2\pi q$ représente la variation de l'angle toroïdal. Un déphasage effectif en résulte si cette variation de θ^* permet un passage d'une zone (+ ou -) à son contraire. Comme ce passage correspond à une variation de θ^* égale à $(\Delta\theta^*)_{zone} = \pi/m_0$, le déphasage a lieu si $(\delta q/q^2)2\pi q > \pi/m_0$. Il apparaît en fait que cette condition est équivalente au critère de Chirikov $\sigma > 1$.

L'inclinaison des barres de courant le long des lignes de champ (selon une pente locale correspondant à $q \sim 2,3$) n'est pas indispensable à l'obtention de la résonance

mais elle permet d'obtenir l'effet maximal. Sur la figure (III.11), nous montrons qu'une ligne de champ sur la surface $q = 3$ suit la "ligne de crête" de la perturbation, ce qui assure une déviation radiale maximale. Au contraire, une ligne de champ dont $q > 3$ subit une perturbation moins importante comme moyenne sur la "bosse". L'inclinaison des conducteurs le long des lignes de champ est cependant nécessaire pour permettre aux lignes de champ de pénétrer entre les barres de courant et de se connecter ainsi sur la plaque de neutralisation correspondante (voir photo(V.2)), et non sur les protections latérales des barres de courant (voir fig. (III.12)).

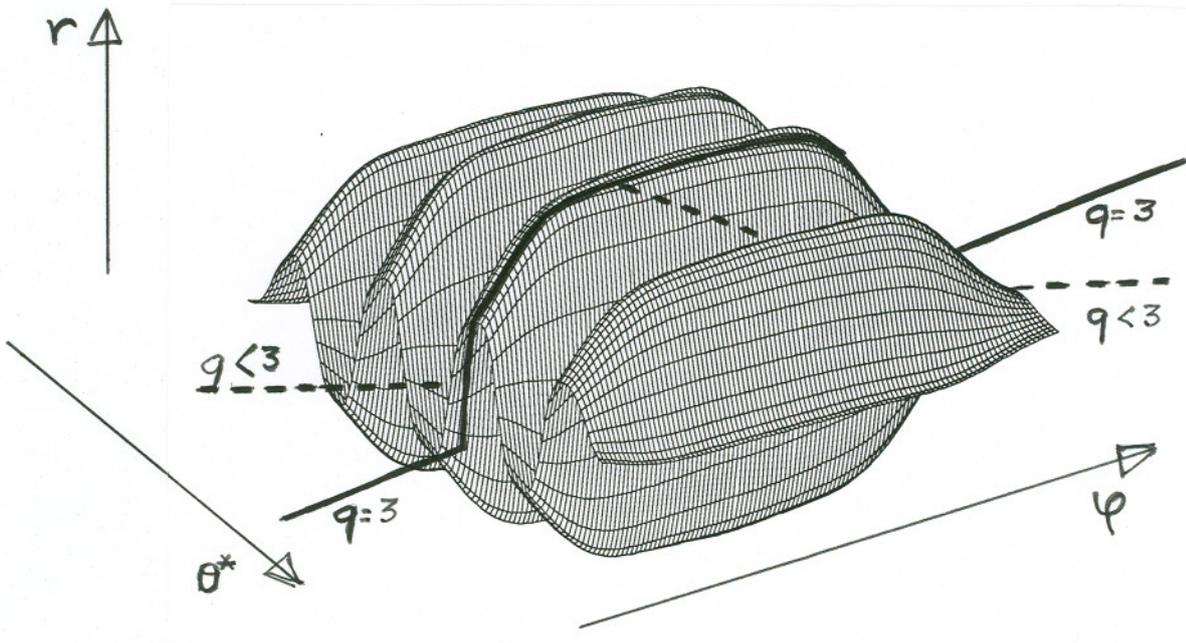


figure (III.11) : effet radial "maximal" pour $q = 3$

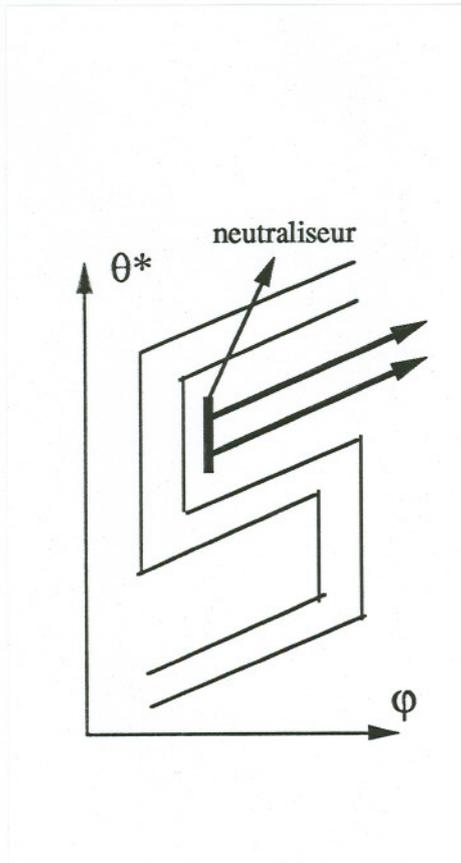
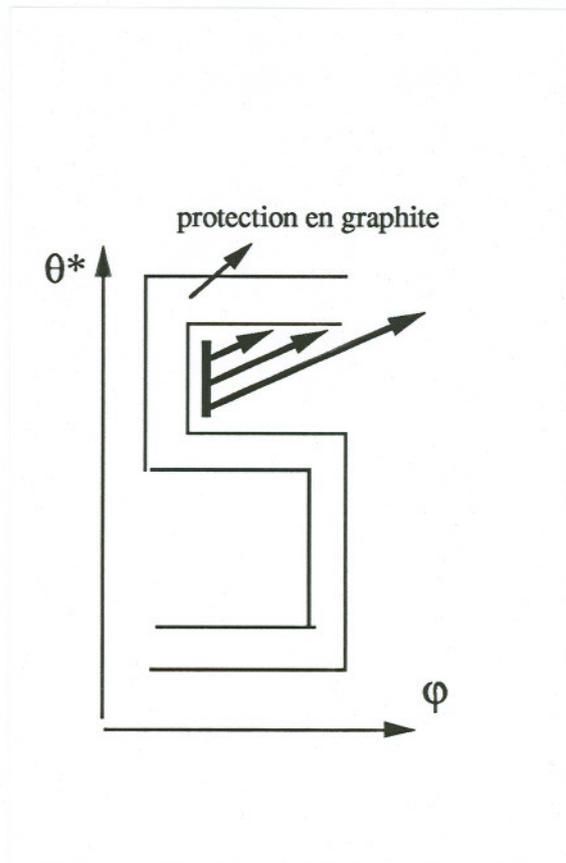


figure (III.12) : conducteurs inclinées
⇒ connexion possible sur les neutraliseurs



conducteurs horizontaux
⇒ connexion sur les
protections en graphite

III.6 - Section de Poincaré

Nous pouvons vérifier l'ergodicité induite par le divertor ergodique en calculant une section de Poincaré (voir II.3.c) dans le plan $(r, \theta^*, \varphi = \text{cste})$. La figure est obtenue pour un courant maximal dans les bobines du divertor ergodique (45 kA) avec l'équilibre précédemment décrit. Ce calcul est évidemment effectué sans condition limite c'est-à-dire que la paroi (les modules) n'a pas été introduite et aucune ligne de champ n'est ouverte. Comme on l'attend de l'application du critère de Chirikov, la décroissance de la perturbation est bien telle que les tores K.A.M. sont préservés pour $q < 2$, plus précisément, la surface $q = 1,875$ (correspondant aux triangles) n'est pas détruite. On trouve bien sur la courbe (III.7) cette transition autour de $q = 2$ puisque $\sigma(q=2) = 1,14 > 1$ et $\sigma(q=1,5) = 0,28 < 1$.

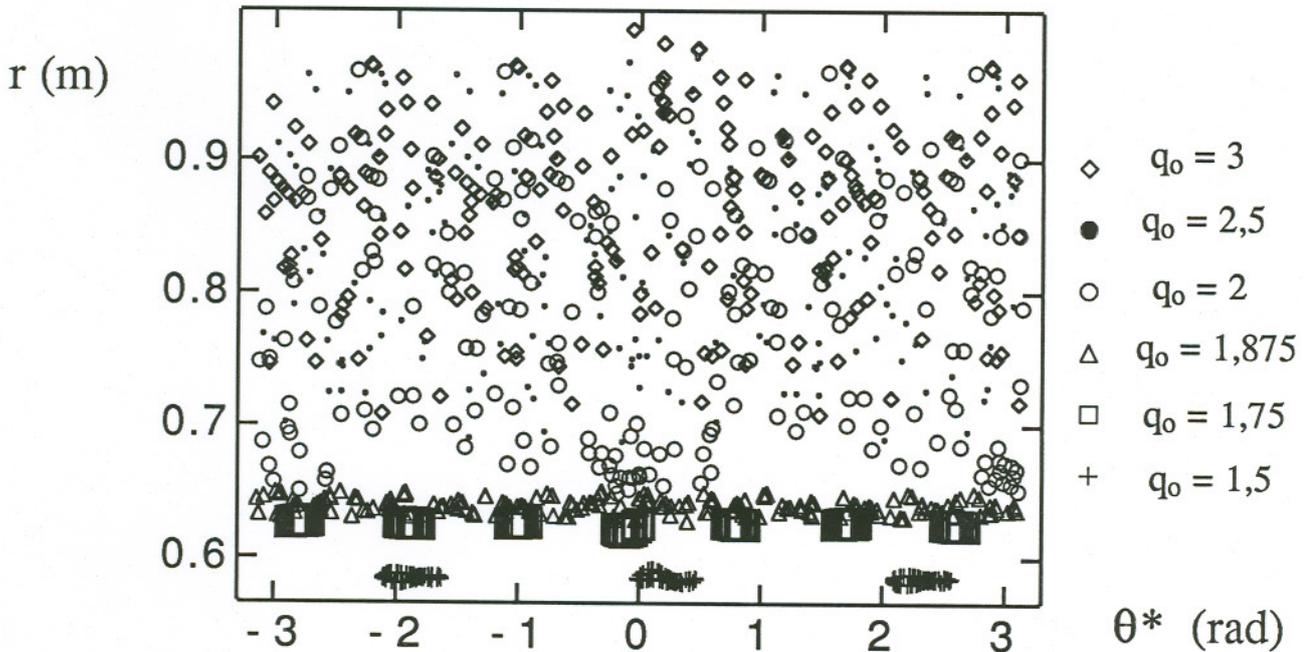


figure (III.13) : section de Poincaré pour 45 kA de courant dans le bobinage du divertor ergodique

III.7 - Déplacement maximum (δr)_{module max} d'une ligne de flux au passage devant un module

Comme nous exprimons l'effet du divertor ergodique sur les lignes de champ comme une "marche" au hasard dans le sens radial, la décroissance radiale de la perturbation peut s'étudier grâce à la hauteur maximale d'une "marche" après le passage devant un module. Pour cela, nous considérons la valeur de δr en fonction de θ^* , c'est-à-dire la déformation $r + \delta r(\theta^*) = \text{cste}$ d'une surface $r = \text{cste}$ après le passage devant un module. Notons qu'une telle déformation peut s'avérer utile pour l'étude d'un phénomène se produisant sur une échelle parallèle faible c'est-à-dire de l'ordre de la distance entre deux modules $2\pi R/6$. La figure (III.14) présente trois surfaces $r + \delta r(\theta^*) = \text{cste}$ déformées par le passage devant un module.

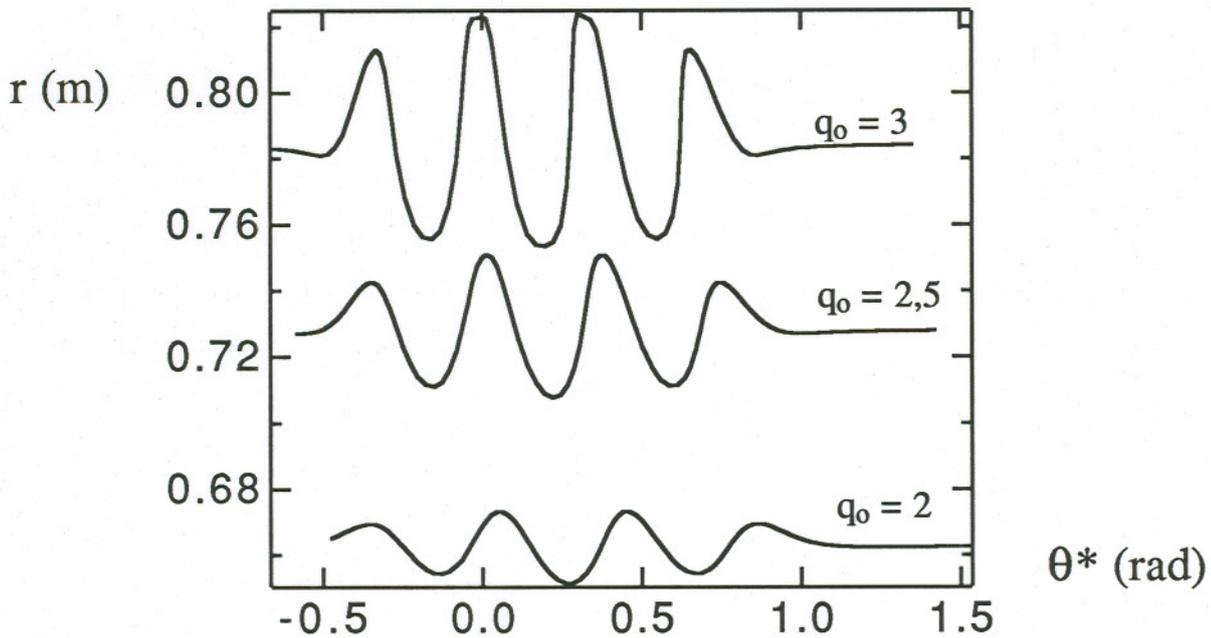


figure (III.14) : Déformation des surfaces magnétiques après le passage devant un module

La hauteur maximale d'une marche est de

- 0,04 m sur la surface $r = 0,78$ m , $q = 3$
- 0,02 m sur la surface $r = 0,73$ m , $q = 2,5$
- 0,011 m sur la surface $r = 0,66$ m , $q = 2$

Ces valeurs donnent par la formule (III-4) des coefficients de diffusion des lignes de champ, applicables dans la région $|q - q_{\text{res}}| < (\delta q)_{\text{res}}$:

$$D_{LC} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ (m}^2\text{/m)} \text{ sur la surface } r = 0,78 \text{ m, } q = 3$$

$$D_{LC} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ (m}^2\text{/m)} \text{ sur la surface } r = 0,73 \text{ m, } q = 2,5$$

$$D_{LC} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ (m}^2\text{/m)} \text{ sur la surface } r = 0,66 \text{ m, } q = 2$$

Ces coefficients sont tout à fait comparables aux valeurs tirées de la théorie quasi-linéaire données par (II-36) pour $q = 3$ ($D_{LC} = 9,8 \cdot 10^{-5} \text{ (m}^2\text{/m)}$) et $q = 2,5$ ($D_{LC} = 2,18 \cdot 10^{-5} \text{ (m}^2\text{/m)}$). En revanche, pour $q = 2$, la valeur s'écarte notablement de l'estimation quasi-linéaire. Nous savons qu'au voisinage du seuil du chaos ($\sigma \sim 1$), l'expression quasi-linéaire du coefficient de diffusion n'est plus applicable.

La décroissance de la hauteur de la marche, en allant vers le centre du plasma, s'explique d'une part par la décroissance de l'amplitude de la perturbation magnétique due à la multipolarité du bobinage et d'autre part par la non coïncidence entre la pente de la ligne de champ et la pente de la "ligne de crête" de la perturbation (voir figure (III.11)). Il faut noter que les perturbations radiales δr subies par la ligne de champ ne sont pas identiques lors de passages successifs devant des modules (quatre passages au maximum sur un tour toroïdal avec $q \geq 3$) : chaque passage devant un module induit un saut $(\delta r)_{\text{module}}$ et δq qui modifie la marche δr suivante. La marche δr cumulée pour quatre passages successifs devant les modules n'est donc pas la somme de quatre marches identiques mais la somme de quatre marches de moins en moins hautes (voir figure (III.15)).

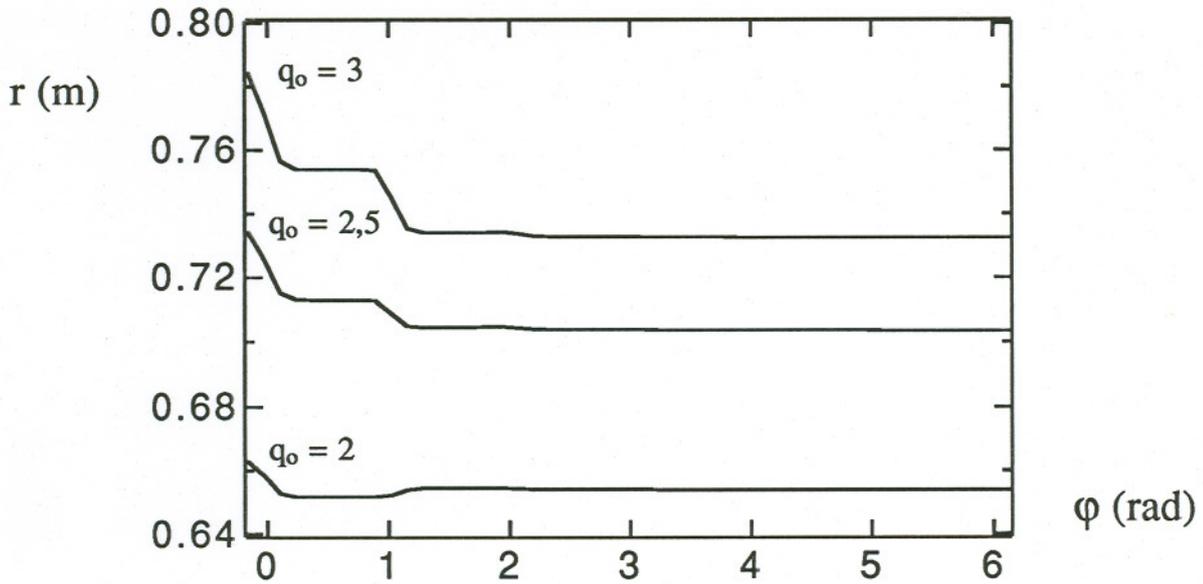


figure (III.15) : trois lignes de champ partant de surfaces magnétiques différentes

Ainsi, en partant de la surface $q = 3$, quatre marches peuvent totaliser un saut de $\delta r = 0,07$ m, chiffre se réduisant à $\delta r = 0,036$ m pour $q = 2,5$ et $\delta r = 0,012$ m pour $q = 2$.

III.8 - Quantification de la longueur de connexion

Dans le cas où le plasma est en appui sur les modules du divertor ergodique constituant alors la paroi matérielle, toutes les lignes de champ de la couche ergodique se connectent sur les modules eux-mêmes (voir paragraphe III.6) du fait de la localisation de la perturbation. Comme les modules sont toroïdalement espacés de $\Delta\phi = 2\pi/6$, en négligeant l'extension toroïdale des modules $\Delta\phi \sim \pi/14$, la longueur de connexion de la paroi à la paroi L_{mur} varie par saut de $2\pi R/6$: en fait de $2\pi R/6$ à $4 \cdot 2\pi R/6$ si l'on tient compte qu'une ligne de champ défile devant ~ 4 modules pendant son excursion sur $\Delta\theta^*$. En dehors de l'extension poloïdale des modules $\Delta\theta^*$, les lignes de champ ne subissent aucune perturbation et restent donc sur la même surface magnétique. Il s'ensuit que les longueurs de connexion possibles sont de la forme :

$$L_{\text{mur}} = 0 + v \frac{2\pi R}{6}, \quad v=1, \dots, 4$$
$$2\pi qR + v \frac{2\pi R}{6}$$

...

La longueur de connexion est donc quantifiée avec une petite échelle $2\pi R/6$ et une grande échelle $2\pi qR$. Remarquons que dans la couche ergodique, le facteur de sécurité q d'une ligne de champ varie et donc que la grande échelle $2\pi qR$ n'est pas une constante, au contraire de la petite échelle $2\pi R/6$. Nous retiendrons finalement que le nombre de tours poloïdaux constitue une grandeur caractéristique de la connexion associée à une petite échelle $2\pi R/6$ invariante.

Nous maillons régulièrement un module de divertor ergodique et nous suivons les lignes de champ dans le sens $d\phi > 0$ pour étudier la connexion des zones (-) aux zones (+). La statistique issue de ce calcul est représentée sur la figure (III.16) .

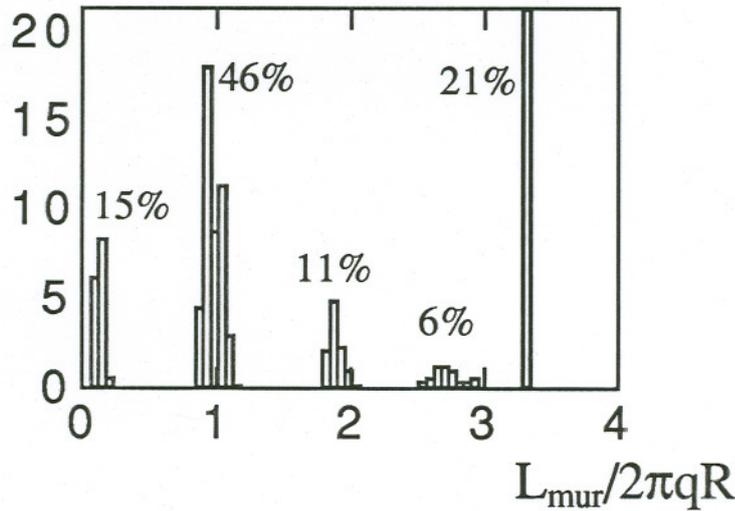


figure (III.16) : statistique de la longueur de connexion de la paroi à la paroi en nombre de tours poloïdaux ($L_{mur}/2\pi qR$)

Nous constatons que 15 % des lignes de champ se connectent en moins d'un tour poloïdal, avec des longueurs $L_{mur} = \nu 2\pi R/6$, 46% après un tour poloïdal : $L_{mur} = 2\pi qR + \nu 2\pi R/6$, 11% après deux tours poloïdaux : $L_{mur} = 2*2\pi qR + \nu 2\pi R/6$, 6% après trois tours poloïdaux : $L_{mur} = 3*2\pi qR + \nu 2\pi R/6$. Le calcul est limité à trois tours poloïdaux et demi et les 21 % restants représentent donc le pourcentage de lignes de champ ayant une longueur de connexion supérieure ou égale à quatre tours poloïdaux : $L_{mur} \geq 4*2\pi qR$. Nous remarquons que, le nombre de tours poloïdaux $L_{mur}/2\pi qR$ augmentant, l'échelle caractéristique du parcours $2\pi qR$ diminue. Ceci est en accord avec le fait qu'en moyenne, les lignes de champ ayant une longueur de connexion de la paroi à la paroi L_{mur} grande ont une pénétration radiale importante, la valeur de q moyennée sur L_{mur} est donc plus petite que $q = 3$. C'est la raison pour laquelle les barres de l'histogramme de la figure (III.16) correspondant à une connexion en trois tours poloïdaux sont décalés à gauche du point d'abscisse $L_{mur}/(2\pi qR) = 3$ (avec $q = 3$).

Comparons la longueur de Kolmogorov L_K (II-38) aux échelles caractéristiques L_{mur} que nous venons d'introduire. Pour la surface magnétique $q = 2,67$, nous avons un terme résonant $\frac{1}{R}(\delta\phi_{pol})_{m=16, n=6} \sim 1,4 \cdot 10^{-4}$, un cisaillement magnétique donné par $L_{sh} = \frac{dr}{dq} \frac{q^2 R}{r} \sim 2,77$, soit un paramètre de Chirikov (II-27) $\sigma \sim 3,2$ et donc une

longueur de Kolmogorov $L_K \sim 2\pi qR \sigma^{-4/3} \sim \frac{2\pi qR}{4,6}$. Rappelons que cette estimation est une valeur moyenne dans la couche ergodique et ne prend pas en compte la décroissance radiale de la perturbation. Nous avons, au paragraphe (II.5), défini deux classes de tubes de flux en comparant la longueur de connexion L_{mur} à $2L_K$. Nous savons dans ce cas que la transition correspond à peu près à la distance $2\pi qR$, caractéristique d'un tour poloïdal. La différence de nature entre les différents tubes de flux apparaît, selon ce critère grossier, pour cette valeur frontière de un tour poloïdal.

L'empreinte de cette topologie exprimée en terme de longueur de connexion quantifiée en tours poloïdaux est donnée sur la figure (III.17).

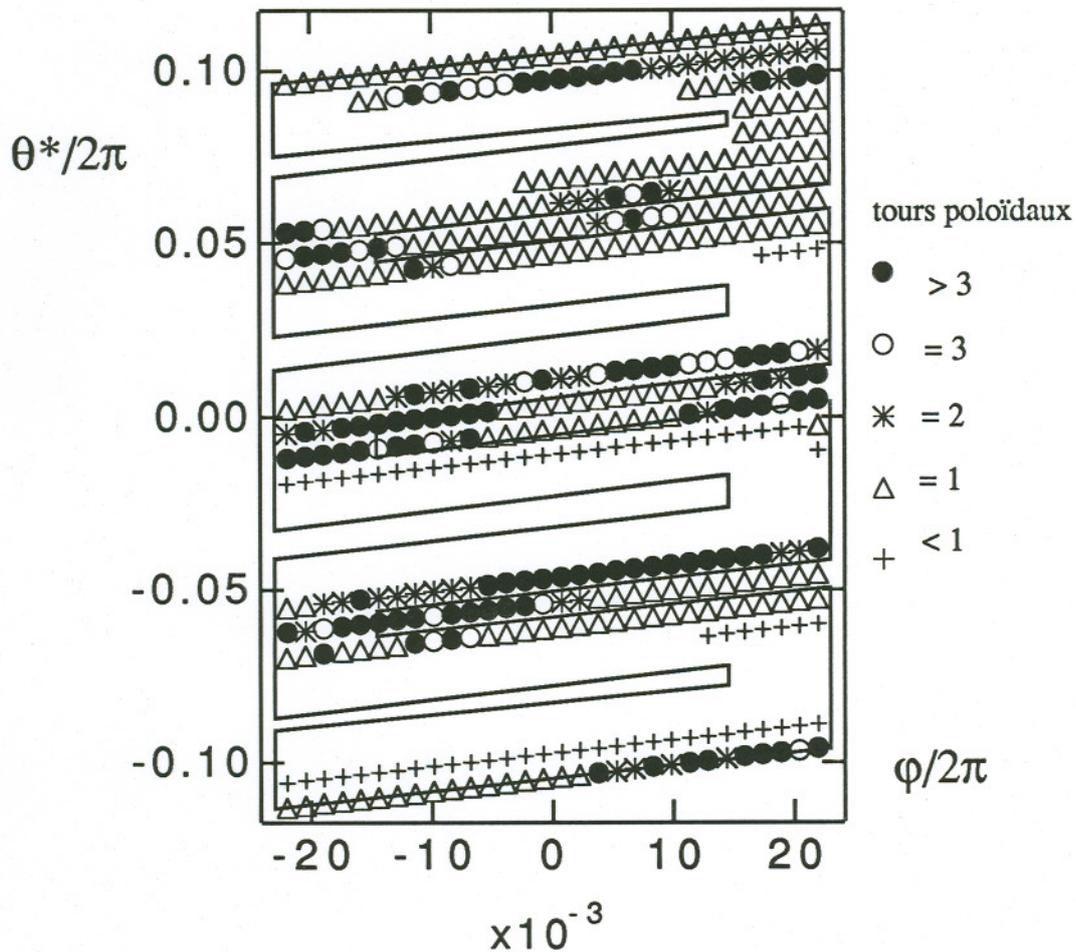


figure (III.17) : empreinte sur un module de la longueur de connexion

Remarque : il existe une zone dans la partie supérieure du module pour laquelle la longueur de connexion est d'un tour poloïdal uniquement parce que les lignes de champ sortent du domaine poloïdal $\Delta\theta^* \sim \frac{2\pi}{5}$ des modules du fait de la transformée rotationnelle $\frac{d\theta^*}{d\phi} = \frac{1}{q}$ sur la distance toroïdale séparant deux modules successifs $\Delta\phi = \frac{2\pi}{6}$. Ces lignes de champ sont de nature différente du reste de la classe "un tour poloïdal" en ce sens qu'elles restent sur une surface magnétique $q \approx 3$ durant le tour poloïdal (du côté fort champ) pour se connecter sur une zone (+) dès qu'elles passent devant un module. Au contraire, les autres lignes de champ subissent d'abord des perturbations (-) qui les placent à un rayon r plus petit avant de subir des perturbations (+) qui les connectent sur un module dans une zone (+).

III.9 - Pénétration radiale des lignes de champ

Dans le paragraphe précédent, nous avons mis en évidence un critère permettant de distinguer les lignes de champ : la longueur de connexion L_{mur} de la paroi à la paroi ou le nombre de tours poloïdaux correspondant $2\pi qR/L_{\text{mur}}$. Un autre critère fondamental est la pénétration radiale maximale $(\delta r)_{\text{pénétration}}$ de la ligne de champ entre ses deux points de connexion sur le mur. Dans une zone ergodique ($\sigma \geq 1$), une ligne de champ a une exploration radiale qui suit, pour des longueurs parallèles L importantes une loi de diffusion $(\delta r)^2 = 2D_{LC}L$ impliquant que $(\delta r)_{\text{pénétration}} \approx (D_{LC}L_{\text{mur}})^{1/2}$. Les longueurs de connexion de la paroi à la paroi L_{mur} sont en fait trop petites pour que l'on puisse utiliser cette loi de diffusion. L'excursion radiale $(\delta r)_{\text{pénétration}}$ est liée au nombre de modules de divertor ergodique rencontrés et à la phase avec laquelle les perturbations δB_r sont subies. Prenons l'exemple d'une ligne de champ telle que $L_{\text{mur}} = 2\pi qR = 1$ tour poloïdal. Au maximum, cette ligne de champ peut passer au-dessus de huit modules : quatre au début puis encore quatre après avoir parcouru le côté fort champ ($\Delta\phi = \frac{4}{5} 2\pi qR$) où il n'y a pas de module. La ligne de champ ayant pénétré radialement de $(\delta r)_{\text{pénétration}}$ grâce à des perturbations (-) vers le plasma central doit ensuite pour se connecter à la paroi, subir des perturbations (+) en sens inverse. Au plus, la valeur de $(\delta r)_{\text{pénétration}}$ est égale à $4(\delta r)_{\text{module max}}$. Généralement, la connaissance de $(\delta r)_{\text{module max}}$ nous permet de donner les valeurs supérieures de $(\delta r)_{\text{pénétration}}$: par exemple pour $L_{\text{mur}} \gg 2\pi qR$, $(\delta r)_{\text{pénétration}} \leq (1/2)(L_{\text{mur}}/2\pi qR) 4(\delta r)_{\text{module max}}$.

La figure (III.18) donne une statistique des valeurs de $(\delta r)_{\text{pénétration}}$ calculée avec le code MASTOC avec le maillage décrit dans le paragraphe précédent. Chaque histogramme présente, par intervalle de pénétration radiale de largeur 0,02 m, le nombre de lignes de champ de longueur de connexion donnée (en radians). Les pourcentages sont relatifs au nombre total de lignes de champ dans l'histogramme, c'est-à-dire pour l'intervalle tout entier.

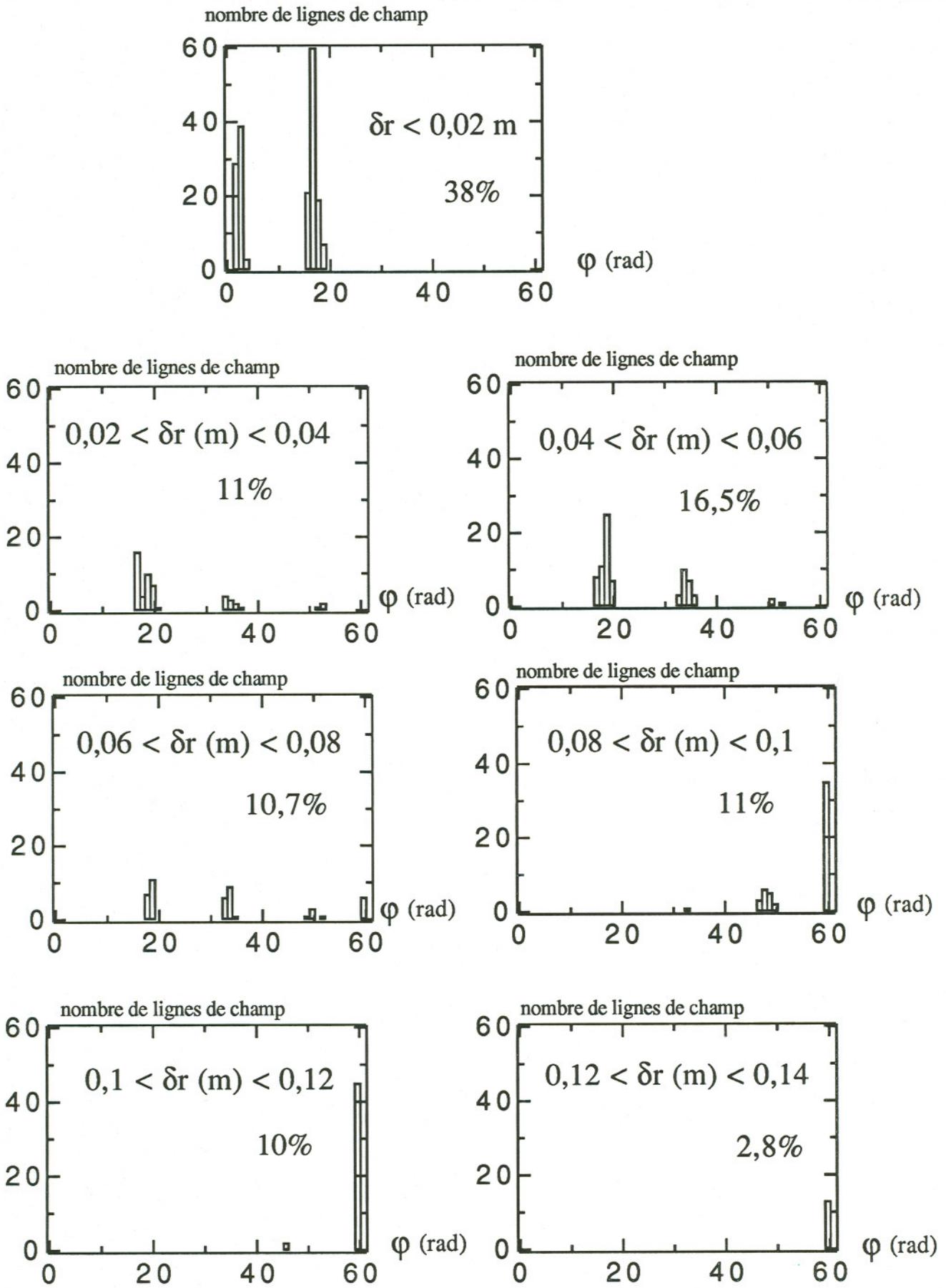


figure (III.18) : statistique de la longueur de connexion et de la pénétration radiale.

Nous retrouvons bien, pour une longueur de connexion donnée L_{mur} , une limite supérieure à l'excursion radiale $(\delta r)_{\text{pénétration}}$. Inversement, une excursion radiale donnée nécessite effectivement une longueur de connexion minimale. Nous constatons de plus que la valeur minimale de $(\delta r)_{\text{pénétration}}$ augmente avec L_{mur} . Autrement dit, plus la ligne de champ est longue, plus elle pénètre dans le plasma. Par exemple, pour $L_{\text{mur}} \geq$ deux tours poloïdaux, $(\delta r)_{\text{pénétration}}$ est au moins de 0,04 m.

La statistique de la pénétration de la classe "1 tour poloïdal" est tracée sur la figure (III.19).

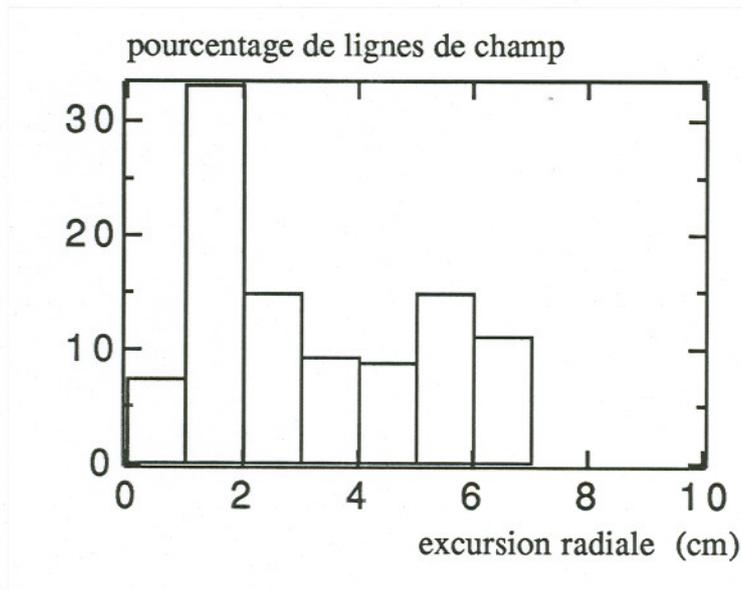


figure (III.19) : statistique de $(\delta r)_{\text{pénétration}}$ pour $L_{\text{mur}} = 1$ tour poloïdal

III.10 - Taille des tubes de flux

Jusqu'à présent, nous avons étudié les lignes de champ magnétique individuellement. Nous allons dans ce paragraphe nous intéresser aux tubes de flux magnétique connectant des zones (-) aux zones (+). Nous avons vu au paragraphe (III.8) que les tubes de flux ayant une longueur de connexion égale à un tour poloïdal présentent le plus d'intérêt, comme valeur frontière au-delà de laquelle le transport n'est plus de type laminaire le long de tubes de flux bien identifiés (II.5).

Les tubes de flux doivent connecter une zone (-) d'un module à une zone (+) d'un autre module (III.5). Nous désirons connaître les dimensions transversales de ces tubes de flux, évidemment reliées aux dimensions des surfaces (+) et (-) sur les modules. La figure (III.20) donne le résultat de l'étude numérique concernant les lignes de champ qui se reconnectent après un tour poloïdal sur le module situé à une distance toroïdale $\Delta\phi = 18 \times \frac{2\pi}{6}$ (qui est exactement le module de départ car il y a six modules dans le tore). Les petits symboles sont les points de départ alors que les grands sont les points d'arrivée. Poloïdalement, aucune structure n'a une épaisseur au moins égale au pas de notre maillage $\Delta\theta^* = \frac{1,31}{29}$ (soit 0,036 m). Toroïdalement, des structures sur le module de départ apparaissent. Une structure de longueur 0,2 m (groupe de petits triangles de gauche) se dilate jusqu'à 1,2 m (grands triangles) tandis qu'une autre de 0,5 m (petits cercles) se "replie" sur 0,2 m (grands cercles). Poloïdalement, l'extension des petits triangles est d'au moins 0,02 m. Au contraire, les tubes de flux dont la dimension toroïdale est de l'ordre de 0,5 m (petits cercles) ont une épaisseur poloïdale inférieure à 0,02 m.

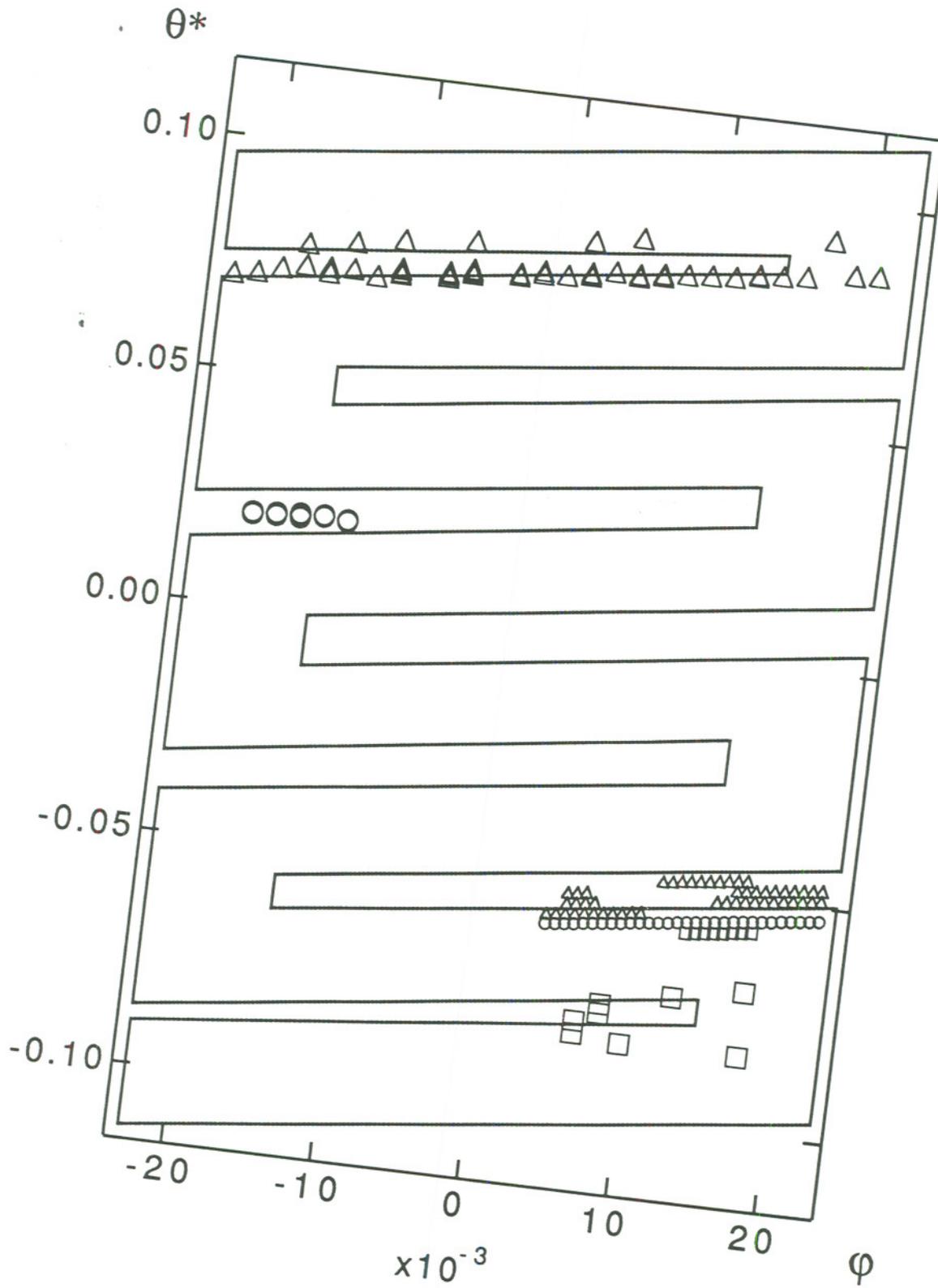


figure (III.20) : empreinte de quelques tubes de flux sur un module de divertor ergodique

III.11 - Chaos de seconde espèce

Nous avons déjà souligné que le mécanisme de connexion magnétique sur un module introduisait deux échelles $2\pi qR$ et $2\pi/6$, caractéristiques de la localisation poloïdale et toroïdale d'un module. Si l'on classe les lignes de champ selon leur longueur de connexion, cette quantification introduit une grande sensibilité aux conditions initiales : en effet, la connexion sur un module se produit sur une zone limitée toroïdalement ($\Delta\phi = \frac{\pi}{14}$). Considérons deux lignes de champ voisines : la première peut se connecter alors que la suivante "rate" le module de peu. Cette seconde ligne de champ ne pourra alors se connecter au mieux qu'après $\Delta\phi = \frac{2\pi}{6}$, la connexion peut même se produire après un parcours parallèle très important. Finalement, ces deux lignes de champ auront des propriétés très différentes, aussi bien du point de vue de la longueur de connexion que de la pénétration radiale. Cette divergence peut se produire dès le second module rencontré (voir figure (III.21)) c'est-à-dire qu'il aura suffi d'une longueur $2 \times \frac{2\pi R}{6}$. Cette longueur caractéristique due à l'aspect discret de la connexion est plus faible de la longueur L_K associée à la stochasticité (ici estimé à $\frac{2\pi qR}{4,6}$).

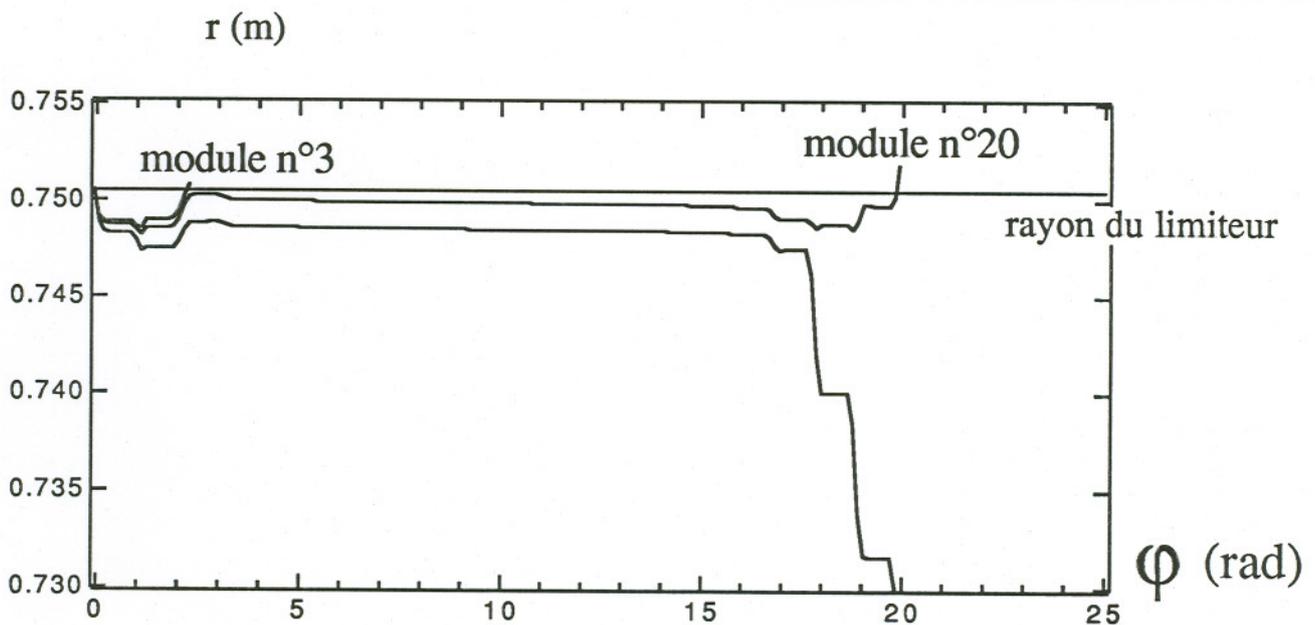


figure (III.21) : trois lignes de champ initialement très voisines

On peut donc considérer que lorsqu'une ligne de flux quitte la paroi matérielle, le module sur lequel elle retourne à paroi matérielle est très sensible aux conditions initiales. Cette situation de chaos est évidente si la ligne de flux pénètre dans la zone ergodique, introduite dans le paragraphe II.4, de telle sorte que sa longueur soit supérieure à L_K et que l'on puisse considérer qu'elle perd son identité. Il est remarquable que cette situation de chaos, entre le point de départ et le module d'arrivée, se retrouve lorsque les lignes de flux restent dans la zone laminaire où leur longueur est inférieure à L_K , sans entrer dans la zone ergodique. Nous pouvons appeler cette situation "chaos de seconde espèce".

III.12 - Résumé des principaux résultats du code Mastoc

Grâce au code MASTOC, nous possédons un outil permettant de rendre compte précisément de la topologie de la couche ergodique et de la connexion à la paroi. Comme principaux résultats, rappelons que :

- la couche ergodique est constituée de tubes de flux qui connectent des zones de modules de divertor ergodique où $\delta B_r > 0$ à des zones où $\delta B_r < 0$;
- la statistique de la connexion à la paroi au mur est la suivante :
 - 15 % des lignes de flux restent collées à la paroi (δr pénétration $< 0,02$ m) sans faire un tour poloïdal,
 - 46 % des lignes de flux effectuent un tour poloïdal en pénétrant jusqu'à 0,07 m vers le plasma central,
 - 39 % des lignes de flux font plus d'un tour poloïdal en pénétrant de 0,04 à 0,15 m vers le plasma central ;
- il n'existe pas de concentration anormalement forte de lignes de flux connectant rapidement le plasma central à la paroi ;
- les tubes de flux sur les modules ont une dimension toroïdale qui n'excède pas 0,2 m lorsque la longueur poloïdale est de 0,02 m . Au contraire, les tubes de flux dont la dimension toroïdale est de 0,4 m ont une épaisseur poloïdale inférieure à 0,02 m ;
- la quantification de la longueur de connexion induit une grande sensibilité aux conditions initiales.

Ce code peut être appliqué à toute autre configuration des éléments de paroi.

**IV - TRANSPORT DE PARTICULES ET DE
CHALEUR EN PRESENCE DE LA
PERTURBATION DU DIVERTOR
ERGODIQUE**

IV.1 - Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du transport de l'énergie et des particules dans le plasma de bord, en présence de la perturbation magnétique résonante induite par le divertor ergodique. Ce problème du transport en présence d'un champ magnétique stochastique a déjà fait l'objet de nombreux travaux dans le cadre du confinement magnétique torique (Rechester & Rosenbluth, 1978 ; Rechester *et al.*, 1981 ; Krommes *et al.*, 1983). Nous sommes amenés à séparer la couche ergodique en deux zones (II.5) : une couche purement ergodique et stochastique qui entoure le plasma central puis une couche "laminaire" au contact de la paroi matérielle. Dans ce chapitre IV, nous allons étudier le transport dans la couche entièrement ergodique. Pour cela, nous déterminons les forces thermodynamiques qui régissent le transport et les échelles caractéristiques qui leur sont associées. Le transport de la chaleur est assuré par la conduction électronique parallèle le long des lignes de champ perturbées et est proportionnel au gradient thermique moyen dans le plasma. Le transport de particules est quant à lui déterminé par la vitesse parallèle du plasma qui résulte de l'équilibre entre des forces de friction parallèles et des forces de pression. On peut alors s'attendre à ce que cette vitesse parallèle soit liée au gradient de pression à travers les surfaces magnétiques non perturbées et en conséquence que le flux radial de particules soit proportionnel au gradient radial moyen de pression. Cependant, le transport entre deux surfaces magnétiques ne s'effectue pas directement le long d'une ligne de champ connectant ces deux surfaces. Nous avons vu que la stochasticité du champ magnétique donne lieu à des rapprochements très importants des lignes de champ : comme on peut le voir sur la figure (IV.1), le transport s'effectue par une succession de pas, chaque pas résultant d'un mouvement parallèle le long d'une ligne de champ perturbée et d'une diffusion transverse d'une ligne de champ à une autre. Le flux radial dépend donc de l'équilibre entre une convection le long des lignes de champ et une diffusion transverse. Pour les particules, en supposant le flux transverse localement proportionnel au gradient de densité, le flux moyen peut être proportionnel au gradient moyen de densité plutôt qu'au gradient moyen de pression.

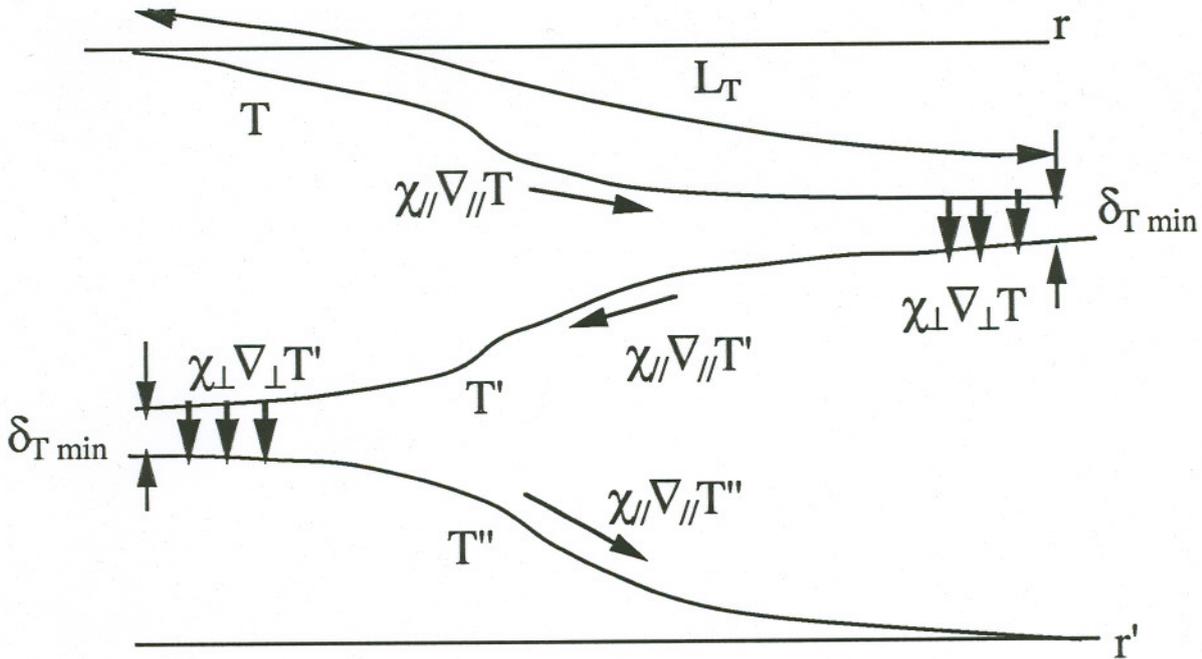


figure (IV.1) : structure du champ de température dans la couche ergodique

En particulier, pour les opérations en mode divertor ergodique, il est important de connaître la force thermodynamique qui régit le flux radial de particules (Samain *et al.*, 1982, 1984b ; Mc Cool *et al.*, 1989 ; Grosman *et al.*, 1990a ; Breton, 1991). En effet, si le flux radial de particules est proportionnel au gradient moyen de pression, un mode de confinement où la pression est constante dans la couche ergodique (Samain *et al.*, 1982, 1984b) peut être obtenu en maintenant un faible flux radial de particules. Un tel régime conduit à une condensation au bord d'un plasma dense et froid qui est supposé très favorable du point de vue de l'interaction plasma paroi. Si au contraire le flux radial de particules est régi par le gradient moyen de densité, une telle condensation au bord est impossible.

Le transport de l'énergie et des particules est étudié grâce à un principe variationnel qui permet de trouver les régimes limites pour lesquels le flux de particules dépend uniquement du gradient moyen de pression ou au contraire uniquement du gradient moyen de densité. Nous développons ensuite une approche de type quasi-linéaire dans laquelle l'aspect non-linéaire est pris en compte en injectant les résultats de la méthode variationnelle. Cette approche de type quasi-linéaire permet d'obtenir une formule d'interpolation pour une situation intermédiaire entre les deux cas limites précédents.

Dans le paragraphe IV.5, nous utiliserons les échelles caractéristiques de ce transport pour déterminer la taille de la zone laminaire et le mécanisme du dépôt sur le mur du tokamak. Nous appliquerons ces résultats à l'expérience Tore Supra et interpréterons quelques résultats expérimentaux (chapitre V).

IV.2 - Détermination du champ de température et du flux ergodique de chaleur

Le transport de la chaleur est assuré par le mouvement des électrons, du fait de leur vitesse bien supérieure à celle des ions. Dans la configuration tokamak usuelle, le flux radial d'énergie provient d'une diffusion perpendiculaire aux surfaces magnétiques due à une turbulence. Dans une couche ergodique et stochastique, il faut tenir compte de la topologie magnétique.

Le flux de chaleur s'exprime en fonction de forces thermodynamiques que nous limiterons ici au gradient du champ de température. En régime stationnaire, le champ de température est tel qu'il doit satisfaire à l'équation de continuité de la chaleur :

$$- \operatorname{div} (\chi_{//} \vec{\nabla}_{//} T + \chi_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} T) = S_Q = - \nabla_{//} (\chi_{//} \nabla_{//} T) - \nabla_{\perp} (\chi_{\perp} \nabla_{\perp} T) \quad (\text{IV-1})$$

où S_Q est la densité de puissance déposée, $\chi_{//}$ et χ_{\perp} les coefficients de conduction de la chaleur parallèlement et perpendiculairement aux lignes de champ. La densité de puissance appliquée dans la couche ergodique est supposée une fonction régulière de la coordonnée radiale r . Nous nous plaçons dans une géométrie cylindrique labellée par (r, θ, φ) . Elle doit compenser le flux ergodique de chaleur \vec{Q}_{erg} à travers les surfaces magnétiques :

$$S_Q(r) = \operatorname{div} \vec{Q}_{\text{erg}} \quad (\text{IV-2})$$

Ce flux \vec{Q}_{erg} est le flux radial, dû au flux parallèle local $\chi_{//} \vec{\nabla}_{//} T \frac{\vec{B}}{B}$, moyenné sur une surface magnétique. \vec{B} est la perturbation magnétique radiale. On définit alors le coefficient de conduction de la chaleur ergodique χ_{erg} de la façon suivante :

$$\vec{Q}_{\text{erg}} = - \left\langle \chi_{//} \nabla_{//} T \frac{\vec{B}}{B} \right\rangle = - \chi_{\text{erg}} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} \quad (\text{IV-3})$$

où $\langle T \rangle$ est la température moyenne en θ et φ sur la surface r . χ_{erg} est supposé plus grand que χ_{\perp} . On ne prend donc pas en compte le flux radial moyen provenant de la conduction perpendiculaire avec le gradient radial, supposé variant lentement, de la température moyenne $\langle T \rangle$. χ_{erg} est donc un coefficient de conduction de la chaleur

équivalent associé au gradient régulier $\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r}$ et rendant compte des propriétés d'ergodicité des lignes de champ perturbées. Le terme source $S_Q(r)$ vaut donc, d'après (IV-2) et (IV-3)

$$S_Q(r) = - \frac{\partial}{\partial r} \left[\chi_{\text{erg}} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} \right] \quad (\text{IV-4})$$

L'équation locale de continuité du flux de chaleur (IV-3) peut s'exprimer sous forme variationnelle. Le champ de température T doit rendre extrémal la fonctionnelle suivante (Samain *et al.*, 1982, 1984b ; Laval, 1987) :

$$- \int d_3x \cdot T \left[\text{div } \vec{Q} - \text{div } \vec{Q}_{\text{erg}} \right] \quad (\text{IV-5})$$

Le domaine d'intégration comprend toute la couche ergodique. En effectuant des intégrations par parties et en remarquant que, dans l'intégration sur les variables d'espace d_3x , seule la partie moyenne $\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r}$ de $\frac{\partial T}{\partial r}$ aura une contribution non nulle, le principe variationnel est équivalent à :

le champ de température T dans la couche ergodique doit rendre extrémal la fonctionnelle :

$$\int d_3x \left[\chi_{\parallel} |\nabla_{\parallel} T|^2 + \chi_{\perp} |\nabla_{\perp} T|^2 - \chi_{\text{erg}} \left| \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} \right|^2 \right] \quad (\text{IV-6})$$

Nous supposons que le champ de température T présente la structure de la figure (IV.1), c'est-à-dire sur un tube de flux magnétique de longueur L_T , le champ T est cohérent avec une fluctuation \tilde{T} autour de T . Le gradient parallèle est donné par $\nabla_{\parallel} \tilde{T}$ que nous prendrons égal à $\frac{\tilde{T}}{L_T}$ sur chaque tube de flux. Le bilan d'énergie sur chaque tube de flux est un transport parallèle lié à un coefficient de conduction χ_{\parallel} associé à un transport perpendiculaire lié à un coefficient de conduction χ_{\perp} . La stochasticité des lignes de champ magnétique se traduit par la divergence exponentielle de deux lignes de

champ très voisines (Rechester & Rosenbluth, 1978), distantes initialement de $\delta_{T \min}$: après un parcours parallèle L_T , elles sont séparées de $\delta_{T \max}$ donnée par

$$\delta_{T \max} \approx \delta_{T \min} \exp \frac{L_T}{L_K} \quad (\text{IV-7})$$

où L_K est la longueur de Kolmogorov, que nous supposons plus petite que L_T . Cet effet de stochasticité induit des gradients perpendiculaires très importants entre deux tubes de flux voisins de $\delta_{T \min}$:

$$|\nabla_{\perp} T|_{\max} \sim \frac{\tilde{T}}{\delta_{T \min}} \quad (\text{IV-8})$$

La séparation exponentielle est cependant bornée par la diffusion ergodique : dans une zone ergodique, une ligne de champ de longueur L_T diffuse d'un pas $\delta_{T \max}$ tel que :

$$\delta_{T \max} \approx (D_{LC} L_T)^{1/2} \quad (\text{IV-9})$$

Deux lignes de champ au bout de la longueur L_T ne peuvent se séparer plus rapidement que par l'effet de diffusion. L'échelle transverse maximale $\delta_{T \max}$ s'estime donc :

$$(\delta_{T \max})^2 \approx \min \left(\delta_{T \min}^2 \exp \frac{2L_T}{L_K}, D_{LC} L_T \right) \approx f(L_T, \delta_{T \min}) \quad (\text{IV-10})$$

Ces trois échelles fixent la structure du champ de température : la fluctuation \tilde{T} s'exerce parallèlement sur la longueur L_T et transversalement sur toute échelle comprise entre $\delta_{T \min}$ et $\delta_{T \max}$. Ces échelles seront déterminées lors de l'application du principe variationnel (IV-6). Remarquons que les quantités L_K et D_{LC} sont liées à la topologie magnétique et non pas au transport. Nous supposons que le champ de température est décrit par l'ensemble de ces tubes de flux et que, dans le principe variationnel, nous pouvons sommer la contribution individuelle de chaque tube. Le gradient moyen de

température $\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r}$ doit donc se retrouver à l'échelle d'une structure : ce gradient doit

exprimer la variation de température sur l'échelle transverse maximale soit

$$\tilde{T} \approx \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} \delta_{T \max} \quad (\text{IV-11})$$

Comme nous supposons que les contributions de chaque tube de flux sont identiques dans (IV-6), nous allons appliquer le principe variationnel à une seule structure. La fluctuation \tilde{T} autour de T s'exerce sur toute la longueur L_T et le gradient parallèle s'exprime alors :

$$\nabla_{//} T \sim \frac{\tilde{T}}{L_T} \quad (IV-12)$$

De même, cette fluctuation \tilde{T} est la source de gradients transverses pour toutes les échelles δ comprises entre $\delta_{T \min}$ et $\delta_{T \max}$. Le gradient le plus important est $\tilde{T} / \delta_{T \min}$ mais ne s'applique que sur une longueur L_K où le tube de flux est étroit du fait de la stochasticité, c'est-à-dire dont l'échelle transverse est effectivement de l'ordre de $\delta_{T \min}$. La contribution du flux perpendiculaire dans la fonctionnelle doit donc être pondérée par un facteur L_K/L_T pour tenir compte de ce phénomène. Remarquons que nous cherchons les échelles caractéristiques de la structure. C'est la raison pour laquelle nous nous contentons de facteur correctif simple. Le principe (IV-6) devient :

$$g(L_T, \delta_{T \min}) \tilde{T}^2 - \chi_{\text{erg}} \left| \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} \right|^2 \quad (IV-13)$$

est extremum en \tilde{T} , $\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r}$, L_T et $\delta_{T \min}$

où

$$g(L_T, \delta_{T \min}) = \frac{\chi_{//}}{L_T^2} + \frac{\chi_{\perp}}{\delta_{T \min}^2} \frac{L_K}{L_T} \quad (IV-14)$$

En remplaçant \tilde{T} par (IV-11), le principe (IV-13) s'exprime par :

$$\left(\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} \right)^2 [f(L_T, \delta_{T \min}) g(L_T, \delta_{T \min}) - \chi_{\text{erg}}] \quad (IV-15)$$

extremum en $\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r}$, L_T et $\delta_{T \min}$

L'extrémalisation de (IV-15) par rapport à $\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r}$ mène à :

$$\chi_{\text{erg}} \sim fg \quad (IV-16)$$

Remarquons que, à L_T fixée, la fonction fg croît avec $\delta_{T \min}$ si $\delta_{T \min}^2 \exp(2L_T/L_K) \ll D_{LC} L_T$ et décroît avec $\delta_{T \min}$ dans le cas contraire. Pour

avoir un extremum de (IV-67) relativement à $\delta_{T \min}$, il faut donc se placer à la frontière de ces deux domaines, soit :

$$(\delta_{T \min})^2 \exp(2L_T/L_K) \sim D_{LC} L_T \quad (IV-17)$$

Notons que cette relation entre $\delta_{T \min}$ et L_T impose que la fonction f vaille toujours sa valeur maximale. Dans ce cas, l'extrémalisation sous cette contrainte de (IV-15) par rapport à L_T , donc de fg , revient à extrémaliser g uniquement, ce qui mène à (avec L_T plus grand que L_K) :

$$\frac{\chi_{//}}{L_T^2} \sim \frac{\chi_{\perp}}{(\delta_{T \min})^2} \quad (IV-18)$$

En utilisant (IV-9), (IV-16), (IV-17) et (IV-18) le champ de température est défini par les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} L_T &= L_K \ln \left(\frac{\chi_{//} D_{LC}}{\chi_{\perp} L_K} \right)^{1/2} \\ \delta_{T \max} &= (D_{LC} L_T)^{1/2} \\ \delta_{T \min} &= (D_{LC} L_T)^{1/2} \exp(-L_T/L_K) \\ \chi_{\text{erg}} &= \frac{\chi_{//} D_{LC}}{L_T} \end{aligned} \quad (IV-19)$$

Nous avons donc déterminé un champ de température T fortement dépendant de la structure magnétique de la couche ergodique : la structure de base de ce champ de température est constituée de tubes de flux de longueur L_T dans lesquels circulent des flux parallèles \tilde{T}/L_T et des flux perpendiculaires $\tilde{T}/(\text{échelle transverse})$. Les flux transverses sont d'autant plus intenses que les tubes de flux s'amincissent sous l'effet de la stochasticité magnétique. Localement, les flux peuvent donc s'exprimer grâce aux gradients induits par la topologie magnétique mais il faut redéfinir un nouveau tube de flux tous les pas L_T . Autrement dit, le flux de chaleur en un point donné n'est corrélé aux variations du champ T que sur une longueur de cohérence L_T au maximum et ce, dans un tube de flux donné.

IV.3 - Détermination des champs de densité et de pression et du flux ergodique de particules

La densité de particules n et la vitesse parallèle de la matière v sont déterminées par l'équation de continuité et une équation de type fluide le long des lignes de champ. L'équation de continuité s'écrit :

$$\nabla_{//}(nv) - \nabla_{\perp}(D_{\perp} \nabla_{\perp} n) = S_{\Gamma} \quad (\text{IV-20})$$

où $S_{\Gamma}(r)$ est une source de particules donnée, variant régulièrement avec r . Nous avons supposé ici que le flux transverse de particules dû à la diffusion est déterminé en chaque point par le gradient de densité. Dans les régimes subsoniques, $v \ll v_{thi}$ où $v_{thi} = (2T/m_i)^{1/2}$ et m_i est la masse de l'ion, l'équation fluide traduit l'équilibre le long des lignes de champ entre la force de pression $\nabla_{//}p(x)$ (où $p(x) = 2n(x) T(x)$) et la force de viscosité $D_{\perp}' \Delta_{\perp}(n m_i v)$ où $D_{\perp}' \approx D_{\perp}$:

$$-\nabla_{//}p + D_{\perp}' \Delta_{\perp}(n m_i v) = 0 \quad (\text{IV-21})$$

La vitesse parallèle v une fois déterminée à partir de (IV-20) et (IV-21), le flux radial moyen de particules Γ_{erg} est alors donné par :

$$\Gamma_{erg} = \langle n v \frac{\tilde{B}}{B} \rangle \quad (\text{IV-22})$$

Le système formé des équations (IV-20) et (IV-21) présente les trois variables v , p et n . Nous allons résoudre ce système en nous plaçant dans des conditions telles que l'on ne garde que les variables v et p , ou v et n , sachant que la pression et la densité sont liées par une équation d'état ($p = 2nT$) mais qui dépend de la température. Pour pouvoir exprimer les variations transverses (car seul $\Delta_{\perp}n$ intervient dans (IV-20)) de n en fonction de celle de p , il faudra s'assurer que celles de T sont très petites. Nous verrons que ceci implique que l'échelle parallèle de cohérence du champ de température L_T est très inférieure à l'échelle parallèle du champ de pression. Si au contraire, nous voulons éliminer la variable p de l'équation (IV-21), il faut s'assurer que l'échelle parallèle de variation du champ de pression est très supérieure à celle du champ de température.

Dans les deux cas, nous allons calculer le flux effectif de particules qui sera alors piloté, ou par le gradient de pression, ou par le gradient de densité. Considérons tout d'abord le premier cas pour lequel les laplaciens $\Delta_{\perp} n$ et $\Delta_{\perp} T$ qui sont déterminés par les composantes à petite échelle des champs n et T vérifient la relation :

$$\frac{\Delta_{\perp} n}{n} \gg \frac{\Delta_{\perp} T}{T} \quad (\text{IV-23})$$

Sous cette condition, $\Delta_{\perp} n$ s'exprime uniquement en fonction de $\Delta_{\perp} p$ ($\Delta_{\perp} p = 2T\Delta_{\perp} n$). Le système (IV-20, IV-21) s'écrit alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} n\mathbf{v} &= (D'_{\perp} m_i \Delta_{\perp})^{-1} \nabla_{//} p \\ \nabla_{//} [(D'_{\perp} m_i \Delta_{\perp})^{-1} \nabla_{//} p] - \frac{D_{\perp} \Delta_{\perp} p}{2T} &= S_{\Gamma} \end{aligned} \quad (\text{IV-24})$$

Ces équations ne dépendent que de v et p . Ceci signifie que la vitesse v ne dépend que du champ de pression p et que le flux moyen Γ_{erg} , donné par (IV-22), est de la forme :

$$\Gamma_{\text{erg}} = \left\langle \frac{\tilde{B}}{B} (D'_{\perp} m \Delta_{\perp})^{-1} \nabla_{//} p \right\rangle = - D_{\text{erg}} \frac{\partial \langle p \rangle}{2 \langle T \rangle \partial r} \quad (\text{IV-25})$$

D_{erg} qui est supposé plus grand que D'_{\perp} et D_{\perp} , est le coefficient effectif de diffusion des particules qui tient compte de l'ergodicité des lignes de flux. Il nous faut cependant déterminer la structure du champ p . Ce champ p est régi par les équations (IV-24) et (IV-25) qui jouent le même rôle que (IV-1) et (IV-3) pour le champ T . Tenant compte du fait que la source S_{Γ} provient du profil du flux radial moyen :

$$S_{\Gamma}(r) = \frac{\partial \Gamma_{\text{erg}}}{\partial r} \quad (\text{IV-26})$$

il apparaît que le champ p doit rendre extrémale la fonctionnelle :

$$\int d_3x \left[(v_{\text{thi}}^2 / D'_{\perp}) ((-\Delta_{\perp})^{-1} \nabla_{//} p) \nabla_{//} p + D_{\perp} |\nabla_{\perp} p|^2 - D_{\text{erg}} \left(\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial r} \right)^2 \right] \quad (\text{IV-27})$$

Cette fonctionnelle ne diffère de la fonctionnelle de (IV-6) donnant le champ T que par la présence de l'opérateur Δ_{\perp}^{-1} dans le terme contenant $\nabla_{//p}$. Nous donnons au champ p la même structure de base que pour la température, c'est-à-dire que le champ p est cohérent avec une fluctuation \tilde{p} sur un morceau de tube de flux de longueur parallèle $L_p \gg L_K$ et dont les échelles de cohérence transverses sont $\delta_{p \min}$ et $\delta_{p \max}$. Les équations (IV-7) (IV-9) (IV-10) et (IV-11) s'appliquent donc à L_p , $\delta_{p \min}$, $\delta_{p \max}$ et \tilde{p} . D'autre part, nous pouvons remplacer dans la fonctionnelle (IV-27) les quantités

$$-(\Delta_{\perp})^{-1} \nabla_{//p} \nabla_{//p} \quad \text{et} \quad |\nabla_{\perp p}|^2 \quad \text{par} \quad \left(\frac{L_p}{L_K}\right) (\delta_{p \min})^2 \frac{\tilde{p}^2}{L_p^2} \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{p}}{(\delta_{p \min})^2} \left(\frac{L_K}{L_p}\right)$$

respectivement. Le coefficient $\left(\frac{L_K}{L_p}\right)$ constitue la correction qui rend compte du domaine limité sur lequel on a effectivement $\delta_{p \min}$ comme échelle transverse. Le principe variationnel impose donc que la fonctionnelle :

$$\left(\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial r}\right)^2 f(L_p, \delta_{p \min}) h(L_p, \delta_{p \min}) - D_{\text{erg}} \quad (\text{IV-28})$$

où la fonction f est définie par (IV-10) et la fonction h par

$$h(L_p, \delta_{p \min}) = \frac{v_{\text{thi}}^2 (\delta_{p \min})^2}{D_{\perp} L_K L_p} + \frac{D_{\perp} L_K}{(\delta_{p \min})^2 L_p} \quad (\text{IV-29})$$

doit être extrémale par rapport à $\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial r}$, L_p et $\delta_{p \min}$. En effectuant l'extrémalisation comme pour le champ T, nous trouvons les relations :

$$\frac{v_{\text{thi}}^2 (\delta_{p \min})^2}{D_{\perp} L_K^2} = \frac{D_{\perp}}{(\delta_{p \min})^2}$$

$$\delta_{p \min}^2 \exp\left(2\frac{L_p}{L_K}\right) \approx D_{\text{LC}} L_p \quad (\text{IV-30})$$

$$D_{\text{erg}} \approx fh$$

En utilisant ces formules, les caractéristiques du champ de pression, avec celle du champ de vitesse sont données par :

$$L_p \approx L_M = L_K \ln \left(\frac{D_{LC} v_{thi}}{(D_{\perp} D_{\perp}')^{1/2}} \right)^{1/2} \quad (IV-31)$$

et :

$$\delta_{p \max} = (D_{LC} L_M)^{1/2} \quad (IV-32)$$

$$\delta_{p \min} = (D_{LC} L_M)^{1/2} \exp\left(-\frac{L_M}{L_K}\right)$$

La fluctuation du champ de pression doit traduire le gradient moyen sur la grande échelle transverse soit :

$$\tilde{p} \approx (D_{LC} L_M)^{1/2} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial r} \quad (IV-33)$$

Le coefficient de diffusion ergodique est donné par :

$$D_{erg} = D_{LC} v_{thi} \left(\frac{D_{\perp}}{D_{\perp}'} \right)^{1/2} \quad (IV-34)$$

Contrairement à la valeur de χ_{erg} donnée par (IV-19), ce coefficient de diffusion D_{erg} est indépendant du facteur logarithmique qui apparaît dans l'expression de L_M (IV-31). Cette différence s'explique par le fait que l'écoulement des particules le long des lignes de flux est un phénomène convectif et non pas diffusif comme c'est le cas pour un flux de chaleur. Nous devons encore vérifier l'hypothèse (IV-23) qui s'exprime sous la forme :

$$\frac{\tilde{p}}{p(\delta_{p \min})^2} \gg \frac{\tilde{T}}{T(\delta_{T \min})^2}$$

En utilisant (IV-19), (IV-32) et (IV-33), cette condition devient :

$$\frac{1}{L_M^{1/2}} \frac{\partial \langle p \rangle}{\langle p \rangle \partial r} \exp\left(\frac{2L_M}{L_K}\right) \gg \frac{1}{L_T^{1/2}} \frac{\partial \langle T \rangle}{\langle T \rangle \partial r} \exp\left(\frac{2L_T}{L_K}\right)$$

soit $L_M \gg L_T$ si les gradients des champs moyens sont équivalents $\left(\frac{\partial \langle p \rangle}{\langle p \rangle \partial r} \sim \frac{\partial \langle T \rangle}{\langle T \rangle \partial r} \right)$. Si cette condition est satisfaite, le flux de particules est alors proportionnel au gradient de pression comme l'exprime l'équation (IV-25) avec D_{erg} donné par (IV-34).

Le second cas qui nous intéresse est celui pour lequel notre système initial (IV-20, IV-21) ne dépend que des variables v et n . Cette fois, il faut exprimer le gradient $\nabla_{//p}$ comme $T\nabla_{//n}$ uniquement. Ceci est possible si nous avons :

$$\frac{\nabla_{//n}}{n} \gg \frac{\nabla_{//T}}{T} \quad (IV-35)$$

Dans ce cas, le flux radial moyen est proportionnel au gradient du champ moyen de densité :

$$\Gamma_{erg} = -D_{erg} \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial r} \quad (IV-36)$$

Pour obtenir les caractéristiques du champ de densité qui vont permettre le calcul de D_{erg} , la même analyse que précédemment pour le champ p peut être appliquée. Nous prenons la même forme de fonction d'essai et le même type de fonctionnelle. La structure du champ de densité n est donc identique. La longueur parallèle caractéristique est encore égale à L_M donnée par (IV-31) alors que (IV-32) et (IV-33) fournissent $\delta_{n \min}$, $\delta_{n \max}$ et $\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial r}$. L'expression (IV-34) est toujours valable pour le coefficient D_{erg} de (IV-36). La condition (IV-35) nécessaire se traduit par :

$$\frac{\tilde{n}}{\langle n \rangle L_n} \gg \frac{\tilde{T}}{\langle T \rangle L_T} \quad (IV-37)$$

et devient, grâce à (IV-33) appliqué au champ n et (IV-19) :

$$\frac{1}{L_n^{1/2}} \frac{\partial \langle n \rangle}{\langle n \rangle \partial r} \gg \frac{1}{L_T^{1/2}} \frac{\partial \langle T \rangle}{\langle T \rangle \partial r} \quad (IV-38)$$

Toujours dans l'hypothèse où les échelles de gradient des champs moyens sont comparables $\left(\frac{\partial \langle n \rangle}{\langle n \rangle \partial r} \sim \frac{\partial \langle T \rangle}{\langle T \rangle \partial r} \right)$, la relation (IV-38) est alors équivalente à l'inégalité $L_M \ll L_T$. Cette condition est bien l'opposée de celle qui est requise pour la situation précédente.

La condition $L_M \gg L_T$ signifie que $v_{thi} / (D_{\perp}' D_{\perp})^{1/2} \gg \chi_{//} / (\chi_{\perp} L_K)$. De façon à expliciter cette condition, nous allons supposer que les diffusions transverses de particules, de quantité de mouvement et d'énergie sont produites par la même microturbulence et, en conséquence, les grandeurs D_{\perp} , D_{\perp}' et χ_{\perp} / n sont du même ordre. En écrivant $\chi_{//} = n \lambda_e v_{the}$ où λ_e est le libre parcours moyen et v_{the} la vitesse thermique des électrons, nous trouvons finalement que la condition $L_M \gg L_T$ est équivalente à :

$$\frac{\lambda_e}{L_K} \ll \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \quad (IV-39)$$

Cette inégalité (IV-39) est donc la condition nécessaire pour que le flux de particules Γ_{erg} résultant de l'ergodisation des lignes de champ magnétique soit proportionnel au gradient de pression.

IV.4 - Théorie quasi-linéaire

Il est intéressant de retrouver les résultats des paragraphes précédents, IV.2 et IV.3, dans le cadre d'une théorie quasi-linéaire. Une telle analyse peut être menée uniquement si les coefficients de transport transverses ont été renormalisés en supposant que, dans les équations (IV-1), (IV-20) et (IV-21), toutes les non linéarités en $\tilde{\mathbf{B}}$ peuvent être prises en compte par ces coefficients renormalisés. Ces coefficients de transport χ_{\perp} , D_{\perp} et D_{\perp}' seront choisis de façon à retrouver dans les équations linéarisées (IV-1), (IV-20) et (IV-21) les échelles parallèles des champs de température et de pression définies dans les paragraphes IV.2 et IV.3.

Nous allons décomposer la perturbation magnétique radiale $\frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}}$, de même que les champs T , n et v de la façon suivante :

$$\frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}} = \sum_{m, n} \left(\frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}} \right)_{m, n} \exp[i(m\theta + n\varphi)] \quad (\text{IV-40})$$

$$T = \langle T \rangle (r) + \sum_{m, n} T_{m, n}(r) \exp[i(m\theta + n\varphi)]$$

Pour chaque mode résonant, sur la surface $r_{m, n}$ telle que :

$$\frac{m}{q(r_{m, n})} + n = 0$$

nous obtenons le système suivant d'équations en linéarisant en $\tilde{\mathbf{B}}$ le système (IV-1), (IV-20) et (IV-21) :

$$\chi_{//} k_{//}^2 T_{m, n} - \chi_{\perp} \frac{\partial^2 T_{m, n}}{\partial r^2} - i \chi_{//} k_{//} \left(\frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}} \right)_{m, n} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} = 0 \quad (\text{IV-41})$$

$$- D_{\perp} \frac{\partial^2 n_{m, n}}{\partial r^2} + i k_{//} v_{m, n} \langle n \rangle = 0 \quad (\text{IV-42})$$

$$-2i k_{//} [\langle T \rangle n_{m, n} + \langle n \rangle T_{m, n}] + m_i \langle n \rangle D_{\perp}' \frac{\partial^2 v_{m, n}}{\partial r^2} - 2 \left(\frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}} \right)_{m, n} \left[\langle n \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} + \langle T \rangle \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial r} \right] = 0 \quad (\text{IV-43})$$

où :

$$k_{//} = \frac{1}{R} \left(n + \frac{m}{q(r)} \right) = \alpha(r - r_{m,n}) ; \quad \alpha = - \frac{m S}{r q R} ; \quad S = \frac{rdq}{qdr} \quad (\text{IV-44})$$

Remarquons que R , exprimé en géométrie cylindrique, est constant. Résolvons tout d'abord l'équation donnant la température. Une solution approchée de (IV-41) se trouve en introduisant un nombre d'onde transverse moyen $k_{\perp T}$. Ce nombre d'onde représente

la structure radiale de $T_{m,n}$, c'est-à-dire l'opérateur $-i \frac{\partial}{\partial r}$ dans l'équation (IV-41) est

remplacé par ik_{\perp} ($\frac{\partial T_{m,n}}{\partial r} = ik_{\perp} T_{m,n}$). Ceci donne l'expression suivante :

$$T_{m,n}(r) = \frac{i k_{//} \chi_{//}}{\chi_{//} k_{//}^2 + \chi_{\perp} k_{\perp T}^2} \left(\frac{\tilde{B}}{B} \right)_{m,n} \frac{\partial(T)}{\partial r} \quad (\text{IV-45})$$

Cette solution (IV-45) est approchée mais le point important est qu'elle donne la même localisation de la résonance que la solution exacte de (IV-41). La perturbation magnétique étant une fonction régulière de l'espace au voisinage des surfaces de résonance $r_{m,n}$, le nombre d'onde radial $k_{\perp T}$ se déduit du terme résonant de (IV-45) à partir de la localisation de $T_{m,n}$ autour de la surface $r_{m,n}$ i.e. telle que $k_{//} = 0$, c'est-à-dire qu'au voisinage de $r_{m,n}$, nous avons :

$$\chi_{\perp} k_{\perp T}^2 \approx \chi_{//} k_{//T}^2$$

D'autre part $k_{//} = \alpha (r - r_{m,n})$ au voisinage de $r_{m,n}$, ce qui mène à :

$$k_{//T} \approx \alpha / k_{\perp T}$$

d'où finalement :

$$k_{\perp T} \approx \frac{\alpha^2 \chi_{//}^{1/4}}{\chi_{\perp}} \quad (\text{IV-46})$$

Le nombre d'onde parallèle $k_{//T}$ alors identifié est $1/L_T$ donné par (IV-19) .

$$k_{//T} \approx \frac{1}{L_T} \approx \alpha^{1/2} \left(\frac{\chi_{\perp}}{\chi_{//}} \right)^{1/4} \quad (\text{IV-47})$$

L'équation (IV-47) relie le coefficient renormalisé inconnu de conduction de la chaleur χ_{\perp} à l'échelle parallèle du champ de température :

$$\chi_{\perp} = \left(\frac{\chi_{//}}{\alpha^2 L_T^4} \right) \quad (\text{IV-48})$$

Pour déterminer la vitesse v , nous substituons dans les équations (IV-42) et (IV-43) la valeur de $T_{m,n}$ donnée par (IV-45). Après avoir éliminé $n_{m,n}$, une équation fermée pour $v_{m,n}$ est obtenue :

$$\begin{aligned} & \left(\langle n \rangle m_i D'_{\perp} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \langle n \rangle \langle T \rangle k_{//} \left[D_{\perp} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right]^{-1} k_{//} \right) v_{m,n} = \\ & 2 \langle T \rangle \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial r} \left[\tilde{B} \right]_{m,n} + 2 \langle n \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} \left[\tilde{B} \right]_{m,n} \frac{\chi_{\perp} k_{\perp T}^2}{k_{//}} \frac{k_{//}}{\chi_{//} k_{//}^2 + \chi_{\perp} k_{\perp T}^2} \end{aligned} \quad (\text{IV-49})$$

Cette équation permet de calculer $v_{m,n}$ comme une somme de deux termes, proportionnels à $\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial r}$ et $\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r}$. Il apparaît que ces deux termes ne sont pas résonants sur les mêmes surfaces. Nous devons donc, pour les estimer, introduire deux nombres d'onde différents $k_{\perp v}$ et $k_{\perp v'}$ représentant l'action de l'opérateur $-i \frac{\partial}{\partial r}$ sur ces deux surfaces. L'expression de $v_{m,n}$ en fonction de ces deux nombres d'onde est alors la suivante :

$$\begin{aligned} v_{m,n}(r) = v_{thi}^2 & \left[\frac{\partial \langle n \rangle}{\langle n \rangle \partial r} \frac{-D_{\perp} k_{\perp v}^2}{D''^2 k_{\perp v}^4 + v_{thi}^2 k_{//}^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial \langle T \rangle}{\langle T \rangle \partial r} \frac{\chi_{\perp} k_{\perp T}^2}{\chi_{//} k_{//}^2 + \chi_{\perp} k_{\perp T}^2} \frac{-D_{\perp} k_{\perp v}^2}{D''^2 k_{\perp v}^4 + v_{thi}^2 k_{//}^2} \right] \left(\tilde{B} \right)_{m,n} \end{aligned} \quad (\text{IV-50})$$

où $D'' = (D_{\perp} D'_{\perp})^{1/2}$.

Les valeurs de $k_{\perp v}$, $k_{\perp v'}$ et de leurs nombres d'onde parallèles associés $k_{//v} = \alpha / k_{\perp v}$ et $k_{//v'} = \alpha / k_{\perp v'}$ sont déduites de leur localisation autour des

surfaces de résonance $r_{m, n}$. Dans le premier terme de (IV-50), la résonance est seule et elle est traduite par :

$$D''^2 k_{\perp v}^4 \approx v_{th}^2 k_{//v}^2, \quad k_{//v} \approx \alpha / k_{\perp v}$$

ce qui donne :

$$k_{\perp v} \approx \left(\frac{\alpha v_{th}}{D''} \right)^{1/3} \quad (IV-51)$$

Comme nous l'avons fait pour χ_{\perp} , nous renormalisons le coefficient D'' en identifiant $k_{//v}$ à $1/L_M$ donné par (IV-31) :

$$D'' = \frac{v_{th}}{\alpha^2 L_M^3} \quad (IV-52)$$

Le second terme de l'équation (IV-50) contient deux dénominateurs résonants différents. Remarquons que les résonances liées aux nombres d'onde transverses $k_{\perp T}$ et $k_{\perp v}$ sont déjà déterminées. Il faut maintenant résoudre la résonance liée au nombre d'onde transverse $k_{\perp v}'$ qui apparaît dans le second dénominateur résonant du deuxième terme de (IV-50). Pour cela, nous allons comparer les localisations respectives des deux résonances précédentes sachant que la résonance la plus localisée fixera la résonance en $k_{\perp v}$. Nous allons donc considérer deux cas selon les valeurs de $k_{\perp T}$ et $k_{\perp v}$ données par (IV-46) et (IV-51). Dans le cas où la perturbation de la vitesse est transversalement plus localisée que la perturbation de température i.e. $k_{\perp v} \gg k_{\perp T}$, la résonance en $k_{\perp v}'$ que nous cherchons est donc identique à celle du premier terme de (IV-50) d'où $k_{\perp v}' \approx k_{\perp v}$ et $k_{//v} \approx k'_{//v}$. Nous pouvons alors identifier $k'_{//v}$ à $1/L_M$:

$$L_M \approx \frac{1}{k'_{//v}} \approx \frac{k'_{\perp v}}{\alpha}$$

Cette relation renormalise D'' comme le fait la formule (IV-52). Dans le cas opposé où la perturbation de température est plus localisée que la perturbation de vitesse, soit $k_{\perp v} \ll k_{\perp T}$, la localisation de la résonance du second terme dans (IV-50) est imposée par $k_{\perp T}$. Le nombre d'onde transverse $k_{\perp v}'$ que nous cherchons est donc donné par $k_{\perp T}$: $k_{\perp v}' \approx k_{\perp T}$. Par conséquent nous avons $k_{\perp v}' \gg k_{\perp v}$ et donc $k_{//v} \gg k'_{//v}$. Cette fois, nous devons identifier $1/L_M$ au plus grand nombre d'onde parallèle qui se trouve être $k_{//v}$.

Revenons maintenant au flux radial moyen de particules. Substituant (IV-50) dans (IV-22) et séparant le produit des deux dénominateurs résonants en une somme, nous avons :

$$\Gamma_{\text{erg}} = -n v_{\text{thi}} \left(\frac{D_{\perp}}{D'_{\perp}} \right)^{1/2} \sum_{m, n} \left(\frac{\tilde{B}}{B} \right)_{m, n} \left(\frac{\tilde{B}}{B} \right)_{m, n}^* \quad (\text{IV-53})$$

$$\left[\frac{\gamma}{k_{\parallel}^2 + \gamma^2} \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial r} + \frac{\gamma' \gamma_T^2}{\gamma^2 - \gamma_T^2} \left\{ \frac{1}{\gamma_T} \frac{\gamma_T}{k_{\parallel}^2 + \gamma_T^2} - \frac{1}{\gamma'} \frac{\gamma'}{k_{\parallel}^2 + \gamma^2} \right\} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} \right]$$

où : $\gamma = \frac{D k_{\perp v}^2}{v_{\text{th}}}$, $\gamma' = \frac{D k_{\perp v}^2}{v_{\text{th}}}$, $\gamma_T = \left(\frac{\chi_{\perp}}{\chi_{\parallel}} \right)^{1/2} k_{\perp T}$

Utilisant la limite $\delta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{x^2 + \gamma^2}$ et la relation $\frac{\gamma'}{\gamma_T} = \frac{L_T}{L_M}$, nous obtenons finalement

l'expression générale du flux radial de particules dépendant de D_{erg} donné par (IV-34) et des échelles parallèles L_T et L_M :

$$\Gamma_{\text{erg}} = -n D_{\text{erg}} \left[\frac{\partial \langle n \rangle}{\partial r} + \frac{1}{1 + \frac{L_T}{L_M}} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial r} \right] \quad (\text{IV-54})$$

Cette expression permet de retrouver les deux cas limites du paragraphe IV.3.

IV.5 - Zone laminaire entre la couche ergodique et la paroi matérielle

L'objet de ce paragraphe consiste en l'étude de l'interaction entre le plasma de la couche ergodique et la paroi matérielle du tokamak. Considérant les puissances souhaitées au sein d'un plasma de fusion, il est crucial de maîtriser l'extraction d'énergie et de particules (§ I), c'est la raison pour laquelle nous étudions le dépôt sur la paroi.

Le dépôt d'énergie résulte d'une part du flux électronique qui transporte la chaleur. D'autre part, le flux ionique donne également un dépôt sur le bord : les ions incidents viennent frapper la paroi et se neutralisent. Ces neutres sont réémis vers le plasma. Ceci constitue le phénomène de recyclage. L'énergie des neutres réémis est cependant négligeable devant l'énergie des ions incidents. Le bilan énergétique est alors un dépôt sur la paroi de l'ordre de $\Gamma_{erg} \times T$ où Γ_{erg} est le flux ergodique d'électrons et T la température. Les flux de chaleur et de particules arrivent à la paroi le long des lignes de champ en des endroits spécifiques, précisément sur les zones (+) et (-) introduites dans le paragraphe III.6 où le divertor ergodique produit une perturbation magnétique radiale $\delta B_r > 0$ ou < 0 .

Grâce à l'étude du transport de la chaleur dans une couche ergodique et stochastique dans les chapitres précédents, nous savons qu'un flux local de chaleur est déterminé par la structure du champ de température sur la portion de longueur parallèle L_T du tube de flux passant en ce point. Le flux de particules présente la même propriété avec la longueur L_M associée aux champs de densité n et de pression p . La comparaison des longueurs L_T et L_M avec la distance $L_{au\ mur}$ d'un point courant à la paroi matérielle permet de préciser la notion de couche laminaire d'épaisseur $\delta r_{laminaire}$ en contact avec la paroi matérielle et qui entoure la zone ergodique. Posant $L_{dépôt} = \max(L_T, L_M)$, la zone ergodique est l'ensemble des points tels que $L_{au\ mur} > L_{dépôt}$. Dans cette couche, la structure des champs de densité n et de température T n'est pas influencée par les zones (+) et (-), très localisées en θ et φ , de réception sur la paroi. On peut considérer que les flux radiaux d'énergie et de particules sont homogènes en θ et φ . Au contraire, la zone laminaire est formée de points où $L_{au\ mur} < L_{dépôt}$. Dans cette zone, les flux d'énergie et de particules ne sont pas homogènes en θ et φ : ils prennent place dans des tubes de flux magnétiques identifiables connectant une zone (\pm) sur un module à la couche ergodique ou une zone (\pm) à une zone (\pm) sans passer dans la couche ergodique. Dans ces derniers, les flux parallèles sont alimentés par des flux transverses avec formation d'une couche limite ("*scrape-off-layer*"). Le dépôt en un point de la paroi dépend du comportement des lignes de flux, issues de ce point, dans la zone laminaire : les tubes de flux qui récupèrent le

plus d'énergie sont ceux dont la pénétration radiale $(\delta r)_{\text{pénétration}} (< (\delta r)_{\text{laminaire}})$ est la plus importante. Le dépôt doit donc croître avec $(\delta r)_{\text{pénétration}}$. Un autre facteur à prendre en compte est la longueur durant laquelle le tube de flux reste au voisinage du rayon $a - (\delta r)_{\text{pénétration}}$. Plus cette longueur est grande, plus sa surface soumise au flux perpendiculaire sera importante. Cette longueur est corrélée à $L_{\text{pénétration}}$ définie comme la longueur minimale nécessaire pour obtenir la pénétration $(\delta r)_{\text{pénétration}}$ à partir de la paroi. Le dépôt sur la paroi matérielle est donc une fonction de ces deux paramètres $(\delta r)_{\text{pénétration}}$ et $L_{\text{pénétration}}$, que nous appellerons facteur de mérite. Nous allons étudier différents facteurs de mérite : $(\delta r)_{\text{pénétration}}$, $(\delta r)_{\text{pénétration}} L_{\text{pénétration}}^{1/2}$ et $(\delta r)_{\text{pénétration}} L_{\text{pénétration}}$.

Nous constatons que l'étude du dépôt repose sur une analyse du transport mais également de façon cruciale de la topologie précise de la connexion magnétique, limitée à une longueur parallèle $L_{\text{dépôt}}$.

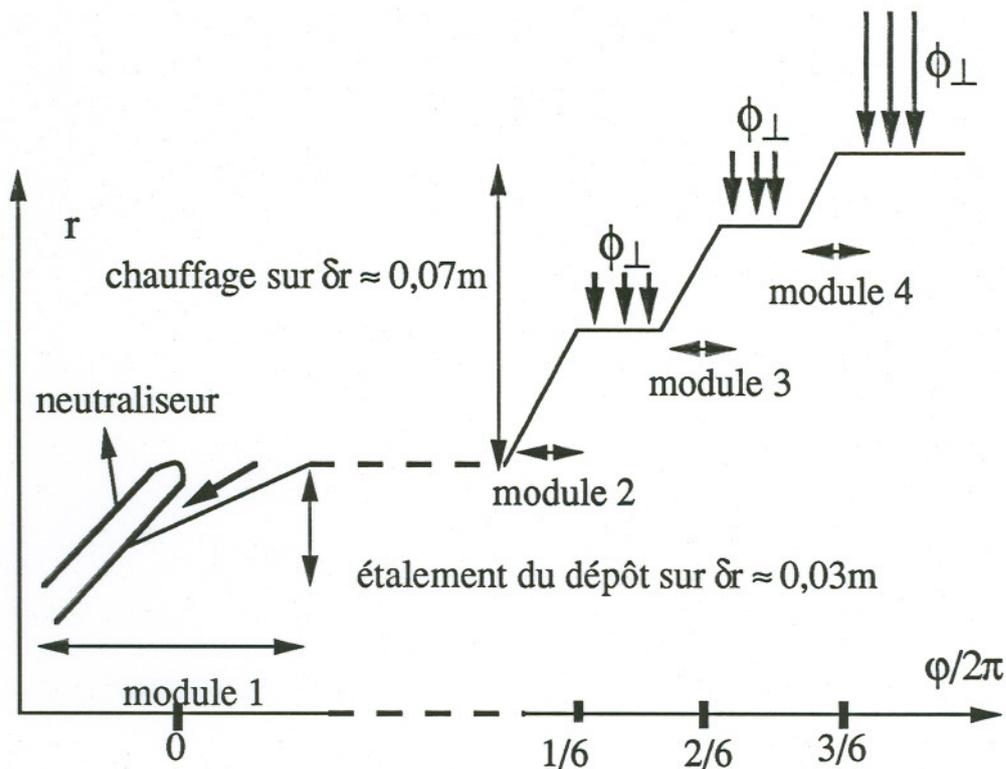


figure (IV.2) : alimentation en énergie des tubes de flux dans la zone laminaire

V - COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE TORE SUPRA

"L'imagination se lassera plutôt de concevoir que la Nature de fournir".

Pascal

V.1 - Introduction

L'objectif de la physique du plasma de bord d'un tokamak est l'optimisation des paramètres permettant l'obtention de la fusion thermonucléaire dans le cœur du plasma tout en satisfaisant les contraintes technologiques imposées par les structures de la machine. Il faut pouvoir extraire l'énergie et les particules α produites tout en alimentant la décharge en combustible (D, T). Il apparaît que, sous de nombreux aspects, le fonctionnement d'un tokamak est largement contrôlé et même dominé par les processus de bord. En ce qui concerne le confinement des particules, avec un transport des particules dans le plasma central plus ou moins fixé, les densités du plasma et des ions impureté sont souvent imposées par les conditions au bord. Dans certains modes de fonctionnement, le transport dans le plasma central peut lui-même être affecté et donner lieu à une concentration catastrophique d'impuretés. Le confinement de l'énergie dans les tokamaks est fonction des propriétés du plasma central, mais plusieurs modes à confinement améliorés semblent essentiellement dépendre des conditions au bord : mode H (Fonck, 1984 ; Keilhacker, 1986), injection de glaçons, "*Improved Ohmic Confinement*" d'ASDEX (Söldner, 1988), "*supershot mode*" de TFTR (Strachan, 1987).

La température des structures du tokamak ne doit pas dépasser quelques centaines de degrés Celsius. Rappelons que les bobines créant le champ magnétique toroïdal dans le tokamak Tore Supra sont supraconductrices et baignent dans de l'hélium superfluide à une température de 1,7 K. La maîtrise, de façon stationnaire, des flux de puissance est donc cruciale. Une température de plasma faible au bord (quelques dizaines d'électron volts) permet d'éviter la pulvérisation ("*sputtering*") de la paroi matérielle par impact d'ions rapides. Un flux d'énergie trop important conduit aussi à une pollution de la décharge par création d'un "point chaud" et sublimation de la paroi ("*Carbon bloom*" avec des éléments de paroi en graphite) : les ions lourds (métalliques) rayonnent l'énergie dans le cœur du plasma et les ions légers (C, Be) diluent le combustible (D, T) de la fusion. Tous les éléments de première paroi sont activement refroidis par une circulation d'eau sous pression (~ 30 bars) et les limites technologiques d'extraction de puissance sont actuellement atteintes. On cherche donc à homogénéiser le flux radial d'énergie et à étaler le dépôt de puissance sur la plus grande surface possible avec un angle d'incidence minimal. Afin d'améliorer le pompage des particules, le recyclage et la pression des neutres doivent être maximalisés.

En configuration limiteur, c'est-à-dire avec un objet matériel directement au contact du plasma confiné, ces objectifs sont difficilement réalisables. La physique d'une telle configuration est brièvement décrite dans le paragraphe suivant.

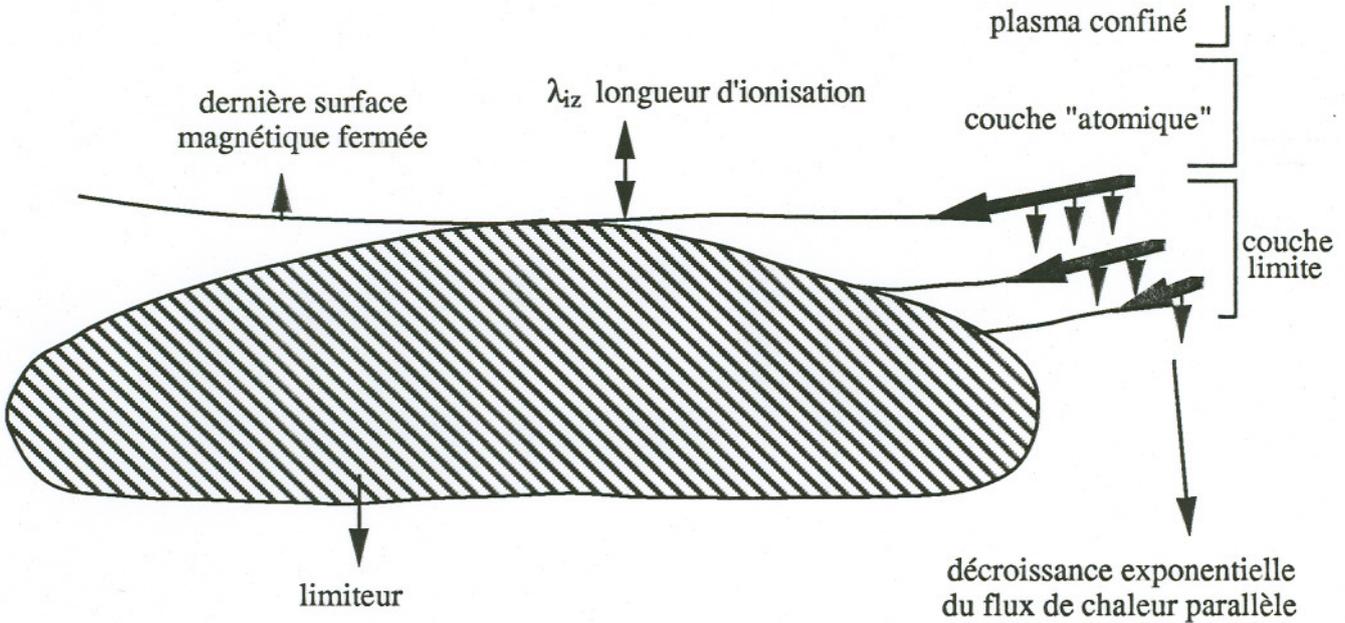


figure (V.1) : couche limite créée par un limiteur

La dernière surface magnétique fermée est la première surface magnétique, en partant du centre, qui tangente un point d'un limiteur. Dans "l'ombre" du limiteur s'étend une couche limite ("*scrappe-off layer*") à l'intérieur de laquelle le transport est une compétition entre une composante parallèle et une composante transverse aux lignes de champ magnétique. Dans le modèle le plus simple de couche limite, l'écoulement du plasma est libre parallèlement et le transport de l'énergie et des particules résulte d'une diffusion anormale transversalement. Ceci permet de ne pas prendre en compte les effets toroïdaux et néoclassiques, tout en retrouvant les bonnes dimensions de la couche limite. Habituellement, on considère des équations fluides car la longueur d'une ligne de champ de la couche limite entre ses deux points de connexion sur la paroi est supérieure aux libres parcours moyen d'autocollision des électrons et des ions. Le plasma s'écoule alors à une vitesse approximativement égale à la vitesse sonore à la paroi, $c_s \approx \left(\frac{k (T_e + T_i)}{m_i} \right)^{1/2}$. Le temps de confinement des particules, $\tau_{//}$, dans la couche limite est alors très court, $\tau_{//} \sim L/c_s$ (où L est la longueur de la ligne de champ), typiquement inférieur à une

milliseconde. L'équation de conservation de la matière s'exprime alors de la façon suivante :

$$D \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} = \frac{n}{\tau_{//}}$$

Ceci mène à un profil décroissant exponentiellement pour la densité:

$$n_e = n_0 \exp\left[-\frac{r-a}{\lambda_n}\right]$$

où $\lambda_n = \left(\frac{D_{\perp} L}{c_s}\right)^{1/2}$ et $r > a$

De même, on trouve un profil exponentiel pour la température :

$$T_{e,i} = T_0 \exp\left[-\frac{r-a}{\lambda_{e,i}}\right]$$

Le limiteur agit comme un puits de particules et d'énergie : cet effet est dominant vis-à-vis des autres effets atomiques (rayonnement des ions impureté, ionisation, excitation). Le limiteur constitue alors la seule source pour le transport transverse. En avant de la couche limite (*i.e.* $r < a$) s'étend une couche "atomique" dont la largeur radiale dépend de la longueur d'ionisation des neutres, où dominent les processus atomiques et l'interaction avec les neutres. Cette longueur d'ionisation est de l'ordre de quelques centimètres. Notons que la source de particules est au bord, contrairement à la source d'énergie qui se trouve au centre du plasma. Le temps de confinement des particules, rapport du nombre total de particules de combustible au flux sortant total de ces mêmes particules, est de l'ordre de 10^{-3} à 1 seconde. Il est toujours très inférieur au temps total de la décharge. Les particules doivent donc être renouvelées plusieurs fois lors de la décharge et le mécanisme d'alimentation est donc très important. Le phénomène de recyclage par lequel les ions incidents se neutralisent à la paroi et retournent en même nombre vers le plasma sous forme de neutres est le mécanisme d'alimentation le plus important. L'injection de gaz périphérique ou de glaçons lancés à grande vitesse, conduisant à un dépôt de matière plus central, est également utilisée.

Pour s'affranchir des problèmes d'interaction directe plasma-paroi, les concepts de divertor ont été développés. Le plasma confiné est isolé des parois matérielles par une modification de la structure magnétique au bord : une zone d'épaisseur transverse non négligeable (1/10 à 1/5 du petit rayon) dont tous les points sont magnétiquement connectés à des éléments spécifiques, des neutraliseurs, entoure le plasma confiné. Le

lieu de l'interaction plasma-paroi est physiquement éloigné du plasma central. La distance transverse paroi plasma confiné peut devenir plus grande que la longueur d'ionisation des neutres : les ions impureté retournent aux neutraliseurs le long des lignes de champ ouvertes connectées à la paroi, c'est-à-dire sans polluer la décharge. On tire également bénéfice de la localisation de l'interaction plasma-paroi sur des dispositifs spécialement adaptés : les plaques de neutralisation, sur lesquelles arrive le plasma, sont activement refroidies, la pression de gaz neutre peut être augmentée de façon à faciliter le pompage, le recyclage local est important. Cette configuration permet d'avoir une action, et donc un contrôle, des paramètres du plasma de bord. On cherche à créer un plasma dense et froid qui rayonne, ce qui est favorable pour l'homogénéité du dépôt thermique et pour la réduction de la pulvérisation ("*sputtering*"). Dans un tel régime de condensation, l'injection de gaz ou de glaçons de deutérium conduit à un flux important d'ions légers vers les neutraliseurs le long des lignes de champ ouvertes. Ce flux augmente le recyclage et la densité de neutres aux neutraliseurs mais produit aussi un "lessivage" des ions impureté par un effet de friction collisionnelle.

Le concept de divertor ergodique repose sur la création d'une couche magnétique stochastique entourant le plasma confiné. Cette configuration est obtenue par l'application d'une perturbation magnétique résonante qui détruit les surfaces magnétiques au bord du tokamak. Cette perturbation magnétique résonante est produite par un bobinage hélicoïdal, le divertor ergodique, placé à l'intérieur de la chambre à vide. Le courant circulant dans ce bobinage est modeste, de 1 à 2 % du courant plasma. Ce dispositif est installé et fonctionne dans le tokamak Tore Supra. Les principaux résultats expérimentaux sont les suivants (Grosman *et al.*, 1992). Le transport de l'énergie est fortement augmenté au bord sans que le confinement central soit affecté. En ce qui concerne les particules, il s'opère une redistribution du recyclage sur des surfaces différentes et un écrantage extrêmement important du flux de recyclage est mis en évidence. L'injection de matière, pour être efficace, doit alors être réalisée à coeur du plasma (glaçons, injection de neutres). Un effet d'écran est observé, aussi bien pour des impuretés créées dans le plasma que pour des impuretés injectées volontairement. Des études de contrôle de couche radiative, avec des effets bénéfiques du point de vue MHD pour la prévention des disruptions, sont entreprises. Le dépôt de puissance est largement modifié et est étroitement lié à la structure de la connexion magnétique de la couche ergodique avec la paroi matérielle. Nous allons dans ce chapitre comparer quelques résultats expérimentaux aux prédictions théoriques que l'on peut tirer de l'étude présentée précédemment.

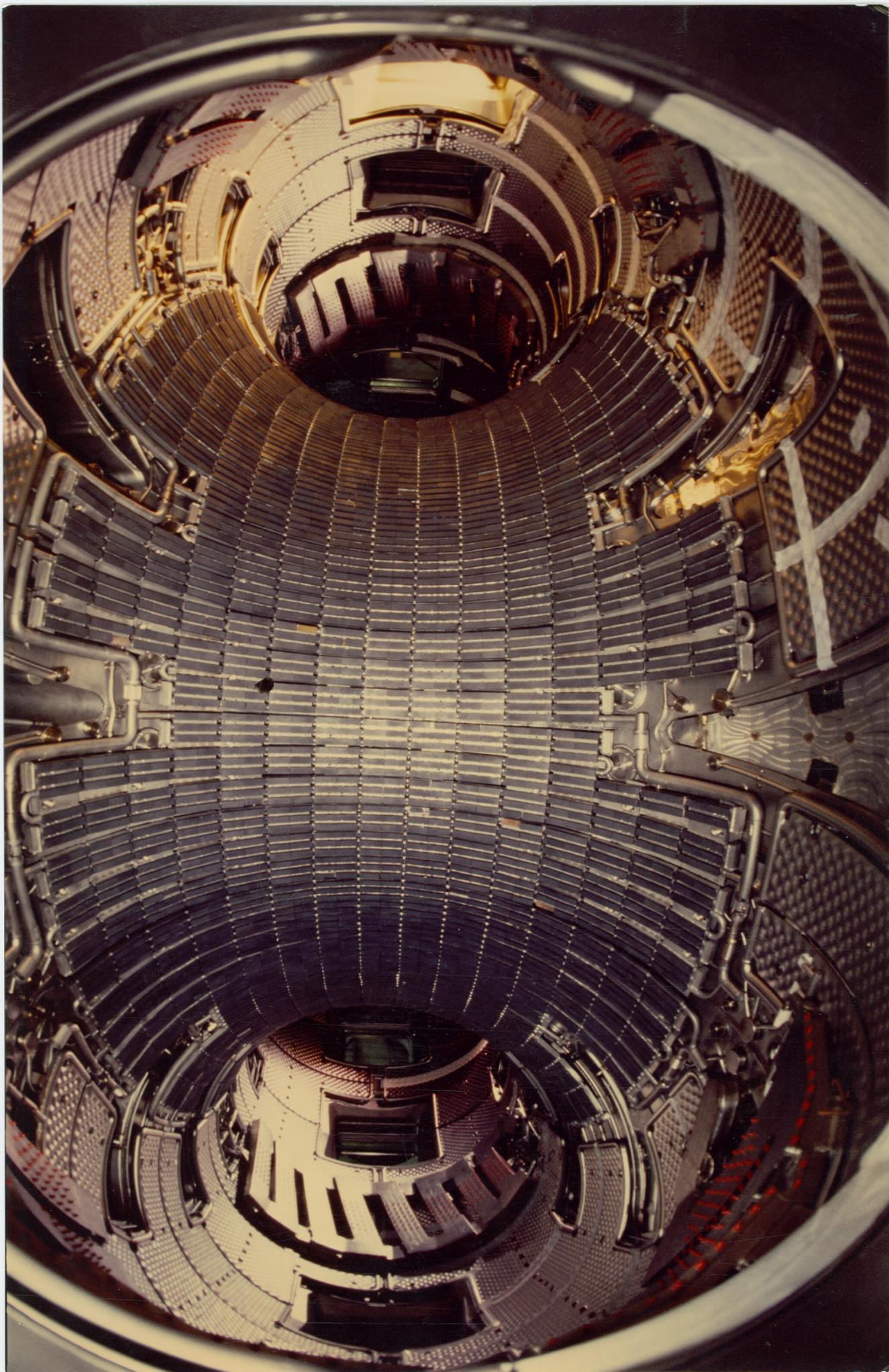


photo (V.1) : vue de l'intérieur du tokamak Tore Supra

V.2 - Description du divertor ergodique de Tore Supra

Le divertor ergodique de Tore Supra est un bobinage hélicoïdal placé à l'intérieur de la chambre à vide. Son dimensionnement fait l'objet du paragraphe III.2. Le divertor ergodique est constitué de six modules identiques. Le bobinage octopolaire d'un module est décrit dans le paragraphe III.1 (voir également les figures (I.1), (I.2),(III.1) et les photos (I.1) et (V.1)).

Lorsque le plasma est en appui sur les modules de divertor ergodique, toutes les lignes de champ ouvertes de la couche ergodique se connectent sur les modules. Le dépôt, dépendant de la connexion magnétique sur la longueur $L_{\text{dépôt}}$ (§ IV.5), est principalement localisé sur les modules eux-mêmes. C'est la raison pour laquelle des tuiles de protection en graphite sont boulonnées ou brasées sur les faces en regard du plasma (voir photo (I.1) et (V.2)). Entre les barres de courant des modules sont implantées des plaques de neutralisation inclinées à 45° par rapport à la surface magnétique.

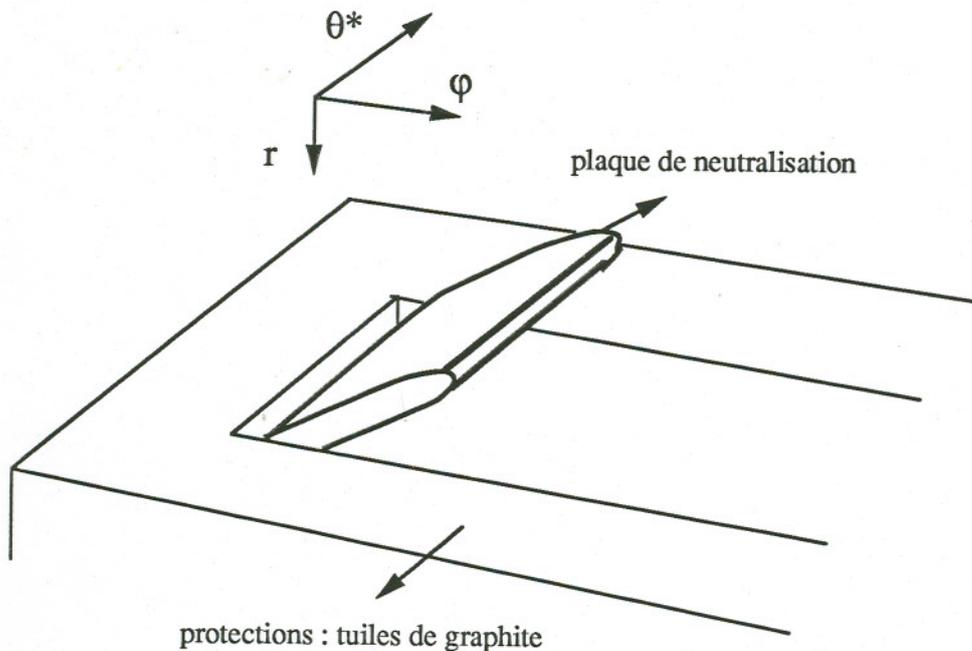


fig. (V.2) : plaques de neutralisation entre les barres de courant d'un module de divertor ergodique

A la base de ces plaques de neutralisation se trouvent les gorges des pompes destinées à évacuer les atomes neutres produits par l'interaction du plasma incident sur ces plaques. Les plaques de neutralisation ainsi que les modules sont activement refroidis par une circulation d'eau sous pression.

Des limiteur sont également implantés à divers endroits dans la chambre à vide. Au premier plan de la photographie (I.1), un limiteur dans le plan équatorial ($\theta^* = 0$) est visible.

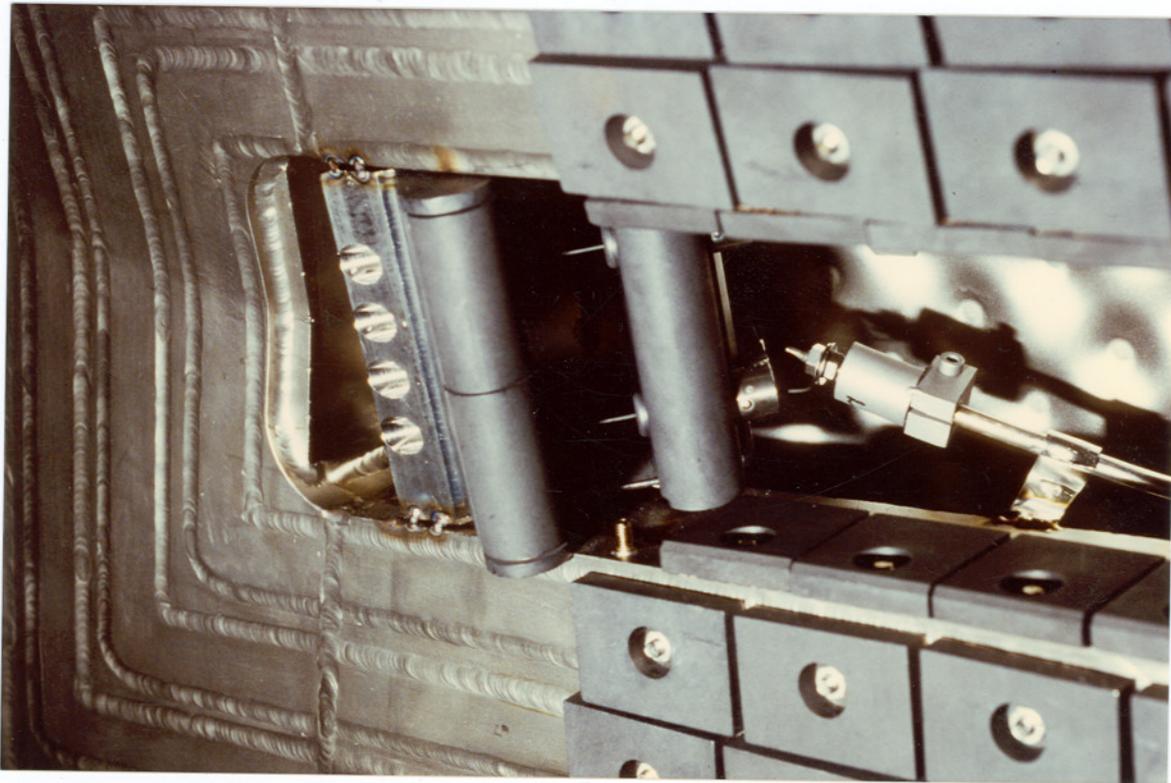


photo (V.2) : plaques de neutralisation entre les barres de courant
d'un module de divertor ergodique

V.3 - Grandeurs liées à la topologie magnétique et au transport

Nous allons appliquer les résultats sur le dépôt à la configuration tokamak Tore Supra. Nous devons tout d'abord estimer les différentes grandeurs liées à la topologie magnétique et au transport.

La longueur de Kolmogorov et le coefficient de diffusion quasi linéaire des lignes de champ, qui donnent une mesure de la stochasticité et de l'ergodicité, valent (au rayon $r = 0,74$ m, soit $q = 2,67$, supposé représentatif) :

$$L_K \sim 2\pi q R / 4,6 \sim 10 \text{ m}$$

$$D_{LC} \sim 4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{m}$$

Les échelles caractéristiques du transport sont L_T et L_M . Les valeurs numériques utiles sont les suivantes :

$$T_e \sim T_i \sim 100 \text{ eV} \quad ; \quad n \sim 10^{19} \text{ m}^{-3}$$

$$D_{\perp} \sim D_{\perp}' \sim 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_{th i} = \sqrt{\frac{e}{m}} (T(\text{eV}))^{1/2} = 10^4 (T(\text{eV}))^{1/2} \sim 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\chi_{//} = 2 \cdot 10^{22} (T(\text{eV}))^{5/2} = 2 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-1} \text{s}^{-1}$$

$$\chi_{\perp} = n(10^{19}) \cdot 10^{19} = 10^{19} \text{ m}^{-1} \text{s}^{-1}$$

Ce qui mène aux grandeurs :

$$L_T \sim \frac{7}{2} L_K \sim 2\pi q R$$

$$L_M \sim \frac{3}{2} L_K \sim \frac{3}{2} \frac{2\pi q R}{4,6}$$

Pour les paramètres du plasma de bord considérés, nous trouvons que $L_T > L_M$. Pour le dépôt thermique sur la paroi, la longueur de tube de flux sur laquelle se produit le chauffage est la plus grande de ces deux valeurs soit $L_{\text{dépôt}} \sim L_T \sim 2\pi q R$. Le dépôt

thermique sur la paroi matérielle, les modules de divertor ergodique eux-mêmes dans les cas étudiés ici, se déduit de la connexion magnétique avec le calcul d'un facteur de mérite sur une longueur parallèle de tube de flux limitée à $L_{\text{dépôt}} \sim 1$ tour poloidal.

V.4 - Connexion magnétique entre le neutraliseur et l'espace entre les protections

L'inclinaison $d\theta^*/d\phi$ des barres de courant du divertor ergodique, selon une pente à peu près égale à celle des lignes de flux ($q = 3$), permet de connecter la partie inférieure des neutraliseurs à la couche ergodique. En première approximation, tout l'espace entre les protections des conducteurs du divertor ergodique va se projeter le long des lignes de flux sur les neutraliseurs. En fait, la différence de pente, entre les protections ($d\theta^*/d\phi \sim 1/2,3$) et les lignes de champ ($d\theta^*/d\phi = 1/q < 1/3$), produit un ombrage.

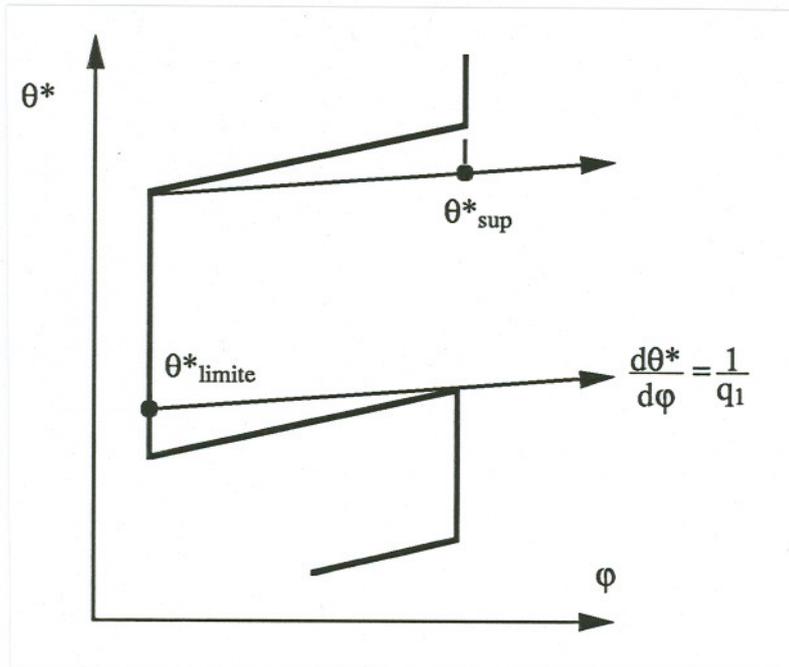


figure (V.3) : angle poloidal limite θ^*_{limite}

Il existe à chaque rayon, tel que $q > 3$, une position θ^*_{limite} au-dessous de laquelle une ligne de champ se reconnecte sur la paroi verticale basse des protections graphite avant d'atteindre la surface entre protection à $q = 3$. De même, du côté paroi verticale haute des protections, il existe à $q = 3$ une surface qui se connecte sur la paroi verticale supérieure de la protection graphite et non pas sur la plaque de neutralisation. La zone connectée est finalement représentée sur la figure (V.4). Cette figure représente un maillage d'un neutraliseur se trouvant juste sous le plan équatorial : le plasma se situe à gauche sur cette figure. Les points indiquent que les lignes de champ sont déviées de façon à atteindre la surface $q = 3$ sur l'extension $R\Delta\phi_{module} < R\pi/14$ qui sépare le

début du module de la plaque de neutralisation. Les disques noirs sont les points qui ne sont pas connectés à la surface $q = 3$ sur cette même excursion toroïdale. Les croix indiquent les points connectés à la protection inférieure des modules.

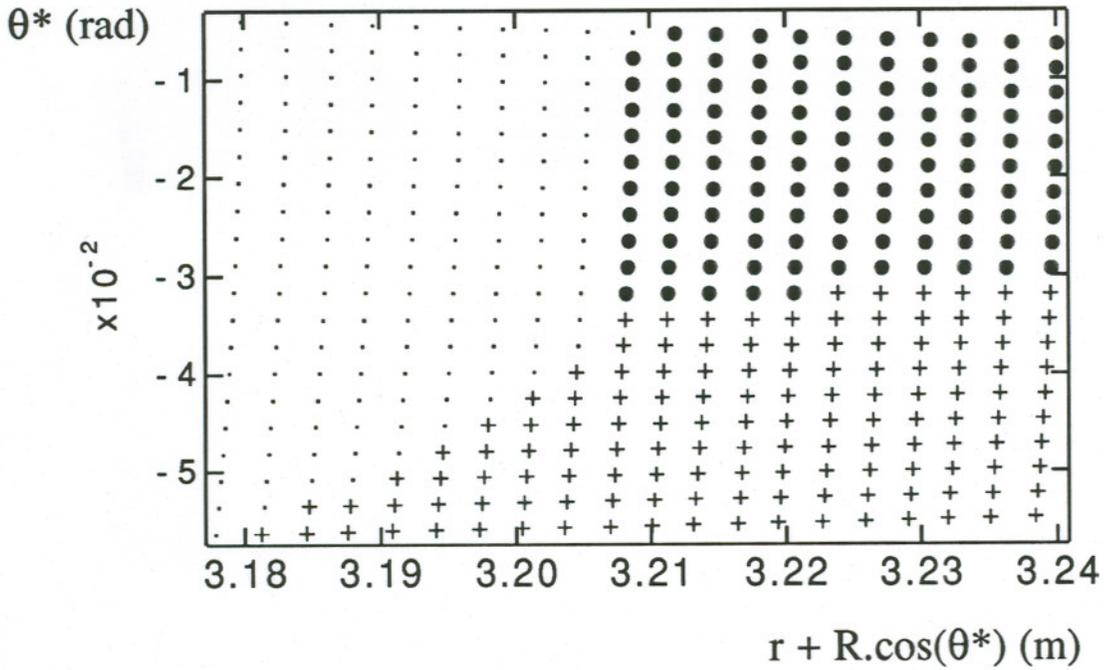


figure (V.4) : connexion magnétique du neutraliseur

Finalement, une ligne de champ arrivant entre les barres de courant du divertor ergodique est déviée radialement jusqu'à une profondeur maximale de 0,03 m. Ces 0,03 m de pénétration radiale, entre les barres de courant, correspondent à la "marche" radiale maximale due à la perturbation du divertor ergodique, à $q > 3$, sur l'extension $R\Delta\phi_{\text{module}} < R\pi/14$ qui sépare le début du module de la plaque de neutralisation.

V.5 - Evaluation numérique du dépôt sur les modules

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe IV.5, la puissance déposée en un point d'une zone (\pm) d'un module dépend de la pénétration $(\delta r)_{\text{pénétration}}$ d'un tube de flux issu de ce point dans la zone laminaire, c'est-à-dire sur une distance $L_{\text{pénétration}} < L_{\text{dépôt}}$. Dans les calculs réalisés, les modules de divertor ergodique sont maillés régulièrement. Les lignes de champ sont intégrées dans le sens $d\phi > 0$ correspondant à un dépôt sur des zones (-). La valeur maximale du facteur de mérite sur la longueur $L_{\text{dépôt}}$ est déterminée pour chaque ligne de flux. Les figures suivantes présentent le résultat du calcul pour les trois facteurs de mérite $L_{\text{pénétration}}(\delta r)_{\text{pénétration}}$, $(L_{\text{pénétration}})^{1/2}(\delta r)_{\text{pénétration}}$ et $(\delta r)_{\text{pénétration}}$. Les lignes de champ et donc leur point d'impact sont séparées en cinq classes : chaque classe correspond à un intervalle de largeur constante du facteur de mérite.

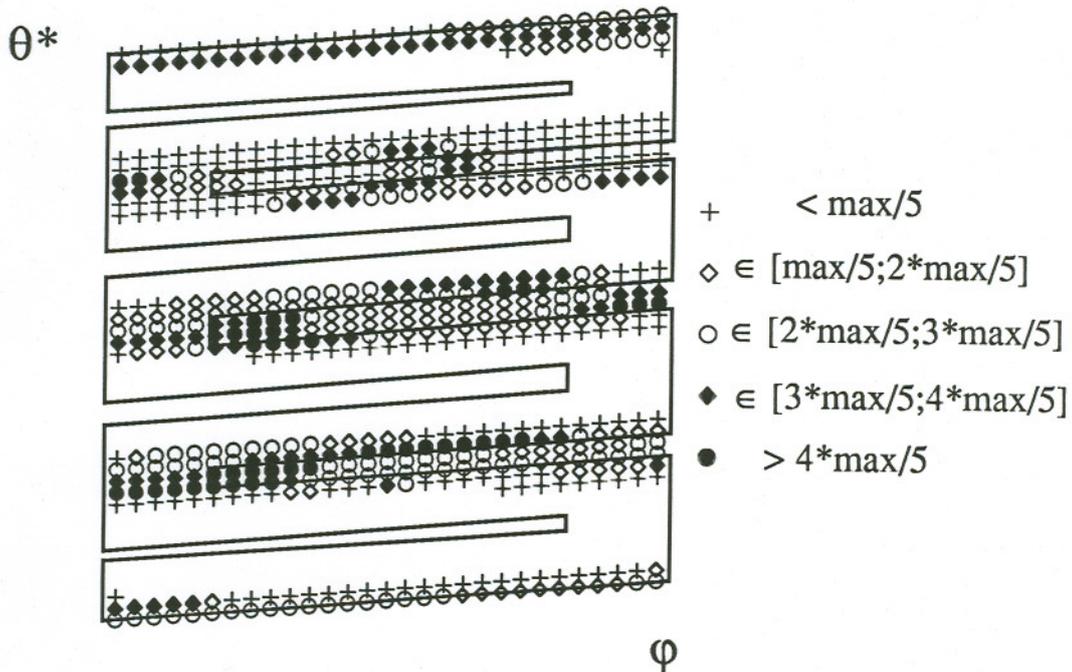


figure (V.5a) : $L_{\text{pénétration}}(\delta r)_{\text{pénétration}}$

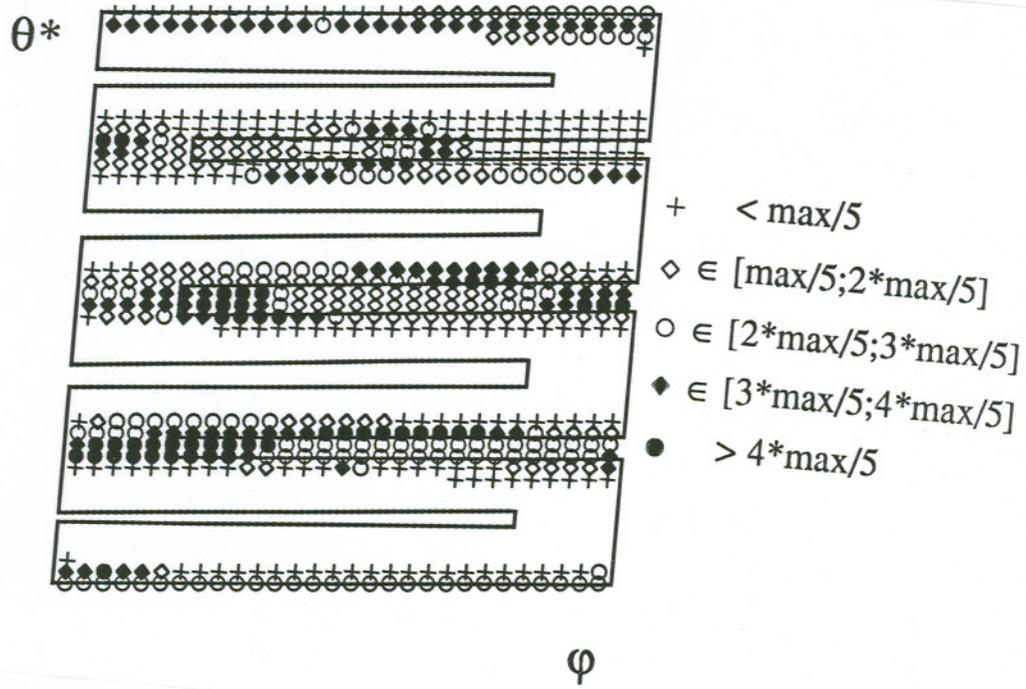


figure (V.5b) : $(L_{\text{pénétration}})^{1/2}(\delta r)_{\text{pénétration}}$

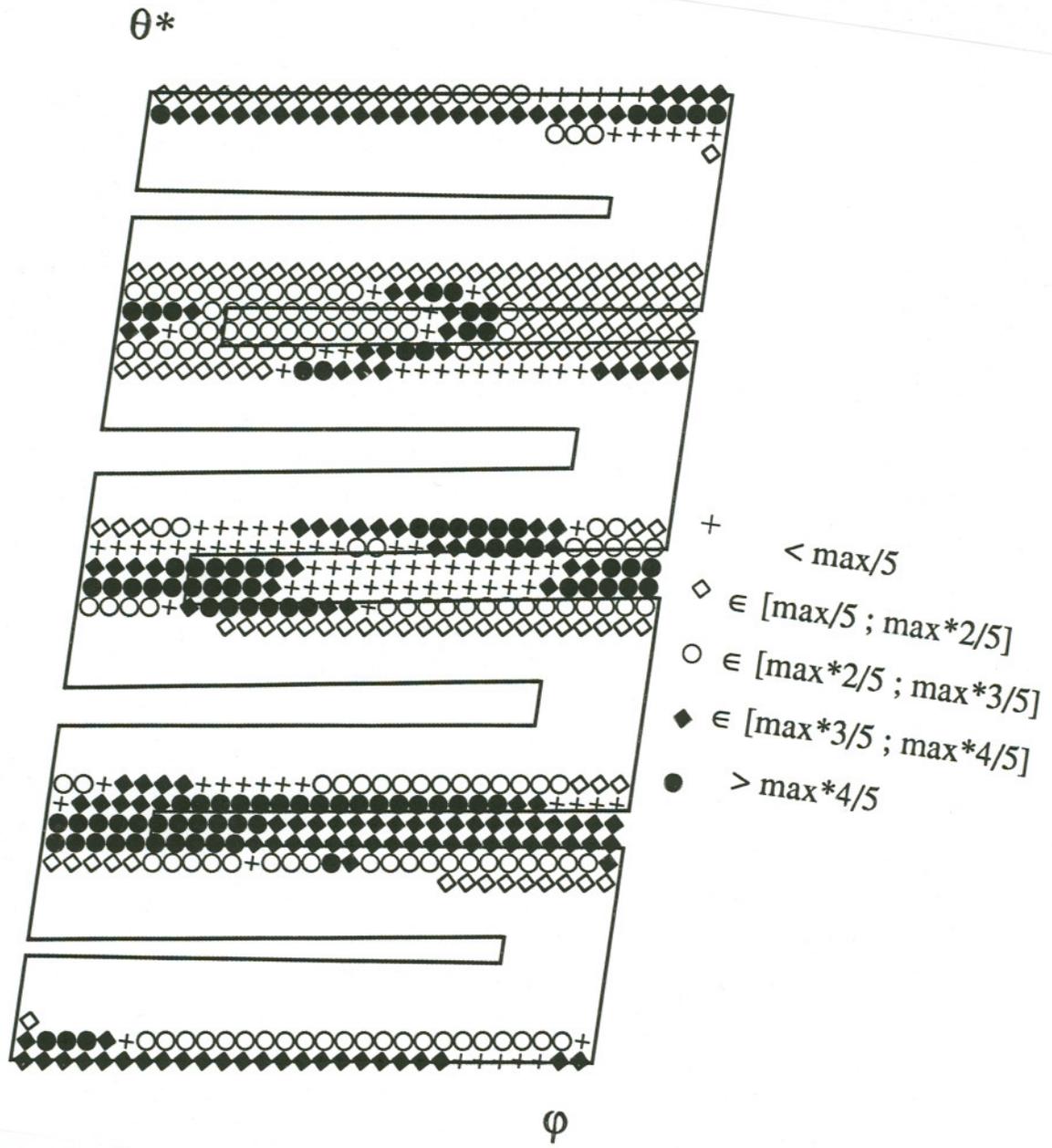


figure (V.5c) : (δr) pénétration (m)

Nous constatons que ces trois facteurs de mérite donnent une localisation du dépôt sensiblement identique. Grâce à l'étude de la connexion magnétique entre le neutraliseur et l'espace entre protections (§ V.4), nous savons que la majeure partie de la puissance arrivant entre les barres de courant du divertor ergodique vient se déposer sur le neutraliseur jusqu'à une profondeur radiale de 0,03 m. Nous pouvons donc sommer les contributions le long de lignes de champ de facteur de sécurité $q = 2,3$. Les trois facteurs de mérite donnent exactement la même dépendance poloïdale qui est représentée sur la figure (V.6). Les carrés noirs correspondent aux neutraliseurs alors que les carrés blancs sont relatifs aux protections.

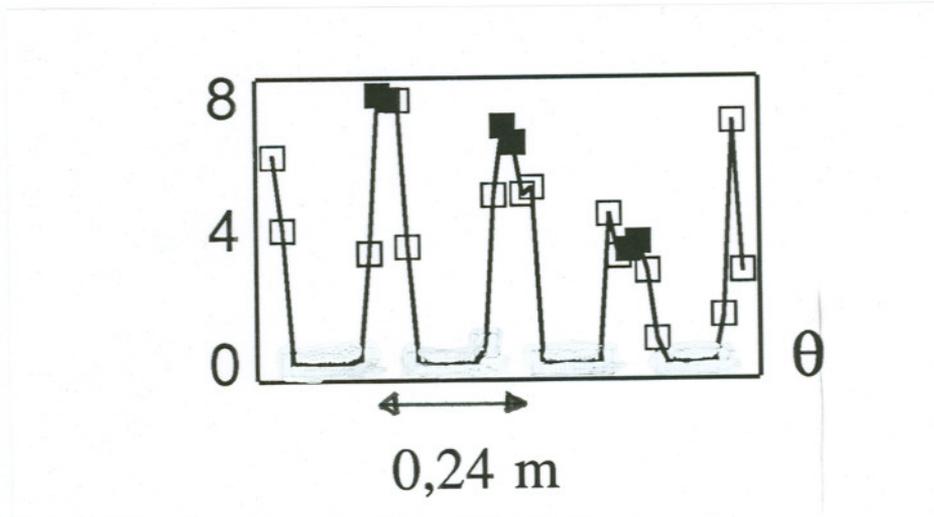


figure (V.6) : dépendance poloïdale de dépôt sur un module

Nous trouvons 60 % du dépôt sur les protections en tuile de graphite et 40 % sur les neutraliseurs. Ces chiffres sont en bon accord avec les mesures expérimentales effectuées sur le tokamak TORE SUPRA (Grosman *et al.*, 1992). Les trois facteurs de mérite menant à des résultats similaires, nous retiendrons dans la suite le plus simple i.e. la pénétration radiale maximale sur la longueur $L_{\text{dépôt}} : (\delta r)_{\text{pénétration}}$.

V.6 - Asymétrie du dépôt sur les neutraliseurs

La figure (V.6) montre que ce dépôt de puissance décroît sur les neutraliseurs de bas en haut (au sens θ^*). Ceci se comprend si nous considérons les différentes façons de se connecter profondément dans la zone ergodique au bout d'une longueur $L_{\text{dépôt}} \sim$ un tour poloidal.

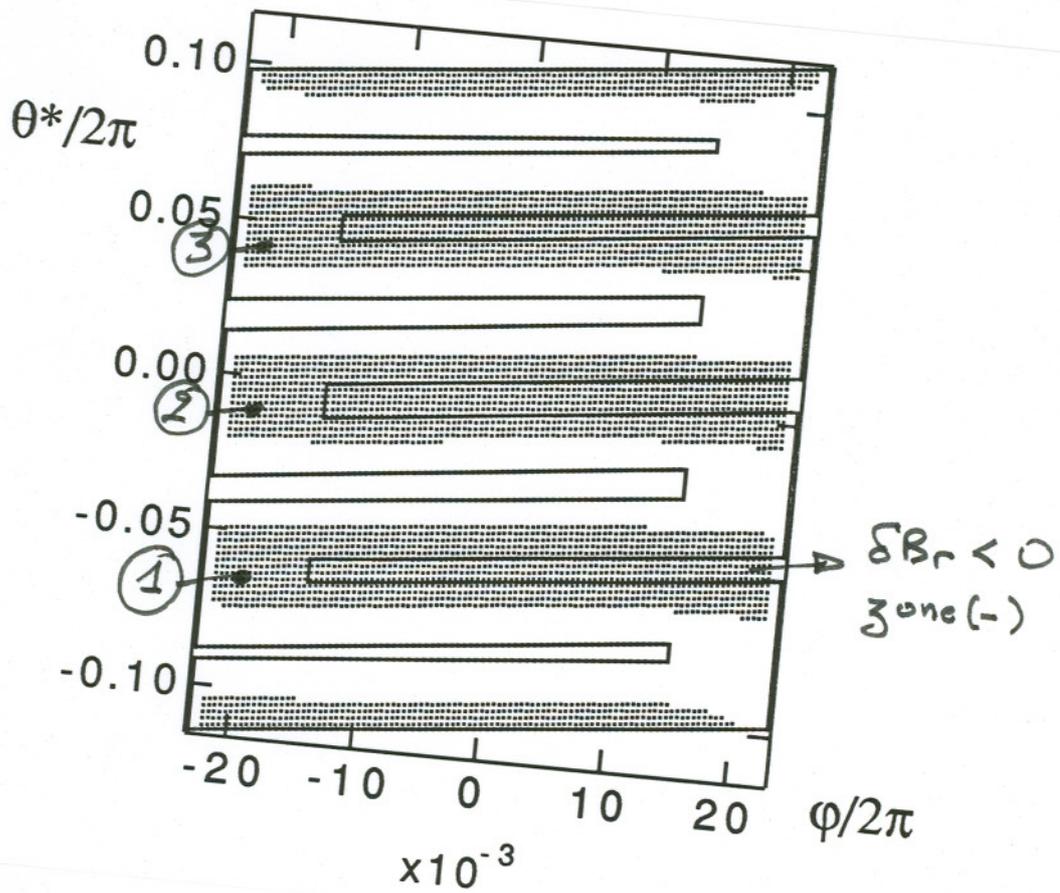


figure (V.7) : asymétrie du dépôt sur les neutraliseurs

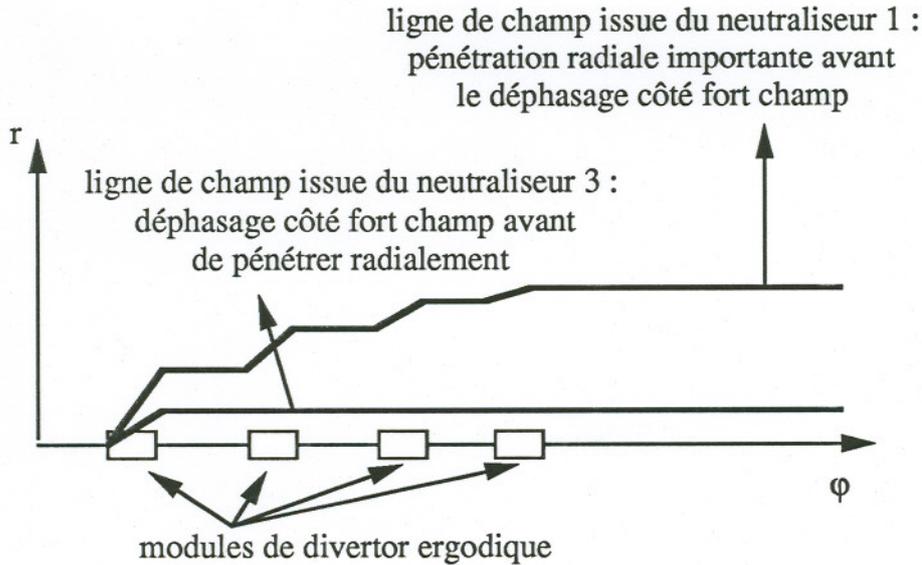


figure (V.8) : mécanisme l'asymétrie du dépôt sur les neutraliseurs

Les lignes de champ du neutraliseur 1 (et de la demi-zone (-) inférieure) traversent sur les 3 modules suivants 3,5 zones (-) et sont donc fortement déviées vers le centre du plasma avant de passer du côté fort champ. Au contraire, les lignes de champ du neutraliseur 3 ne traversent que 1,5 zones (-) avant de passer du côté fort champ, ce qui ne permet pas une excursion radiale importante. Ces lignes de champ, ayant quand même changé de surface magnétique, perdent leur corrélation durant le trajet côté fort champ. Du fait de cette décorrélation, seule une partie de ces lignes de champ qui repassent au dessus des modules à la fin de leur tour poloïdal, traverse des zones (-) et augmente leur pénétration radiale vers le centre. Remarquons que les lignes de champ de la demi-zone (-) supérieure ne subissent presque pas de perturbation avant d'entamer le parcours côté fort champ. Elles ne se décorréllent donc pas et retrouvent ainsi les zones (-) en phase à la fin du tour poloïdal, ce qui leur assure une pénétration radiale importante compatible avec la traversée de 3 zones (-). Notons également que la dissymétrie considérée plus haut concerne seulement le dépôt de puissance sur les zones (-). Une dissymétrie inverse apparait si on considère le dépôt de puissance sur les zones (+).

V.7 - Epaisseur de la zone laminaire

Dans les expériences tokamak sans couche ergodique, le dépôt thermique décroît exponentiellement derrière la dernière surface magnétique fermée en contact avec le limiteur au delà de laquelle s'étend la couche limite ("*scrape off layer*"). Le facteur exponentiel λ_q est appelé facteur de décroissance de l'énergie. Dans cette couche limite, les lignes de champ sont alimentées par conduction perpendiculaire sur une longueur parallèle $L_{\text{connexion}}$ de l'ordre d'un tour poloïdal. Le facteur exponentiel résulte de compétition entre cette conduction parallèle, qui conduit l'énergie au limiteur, et la conduction perpendiculaire qui alimente les tubes de flux voisins (§ V.1). Cette longueur de décroissance λ_q est de l'ordre de 0,01 m pour les paramètres de bord de TORE SUPRA précédemment donnés. La forme des limiteurs doit donc s'ajuster à une telle décroissance qui n'est valable que pour certains paramètres de bord : l'angle suivant lequel s'effectue le dépôt doit être très faible de façon à augmenter la surface, il est alors nécessaire de contrôler précisément la position relative du plasma et du limiteur. Un désalignement du plasma (figure (V.9)) rend un, ou plusieurs, limiteur beaucoup moins efficace : une grande partie du limiteur ne reçoit plus aucune puissance car ce limiteur se trouve à une distance plus grande que λ_q de la dernière surface magnétique. Ces défauts d'alignements sont précisément de l'ordre de λ_q et sont donc particulièrement préoccupants. Ceci traduit un inconvénient de la configuration limiteur pour laquelle la puissance est radialement concentrée.

Dans la configuration divertor ergodique, nous savons que le mécanisme du dépôt au bord est très différent. L'énergie arrivant au bord est collectée profondément dans le plasma ($\sim (\delta r)_{\text{pénétration}} \sim 0,07$ m) par des tubes de flux de longueur L_T au maximum (zone laminaire dans laquelle des tubes de flux bien identifiés transportent la puissance). Un défaut d'alignement de l'ordre de 0,01 m ne change pas radicalement le chauffage de ces tubes de flux. La connexion magnétique est un peu modifiée, la position de la couche complètement ergodique, qui homogénéise le flux radial moyen, est un peu décalée mais le dépôt sur les modules s'effectue toujours selon le même schéma. Le flux d'énergie est toujours canalisé entre les barres par les tubes de flux déviés par la perturbation magnétique. Le cumul de déviation par passage devant quatre modules successifs peut atteindre $(\delta r)_{\text{pénétration}} \sim 0,07$ m. La configuration divertor ergodique rend donc la surface de dépôt sur les modules robuste vis-à-vis d'un défaut d'alignement. De plus, la façon dont la puissance arrive entre les barres de courant et s'étale radialement sur les plaques de neutralisation est également robuste. La perturbation radiale δB_r ne dépend pas de la configuration magnétique d'équilibre. Seul l'ombrage des parois des protections (§ V.4) peut être modifié du fait du changement du facteur de sécurité q local

induit par le déplacement du plasma. Il n'en reste pas moins que l'étalement radial demeure de l'ordre de 0,03 m.

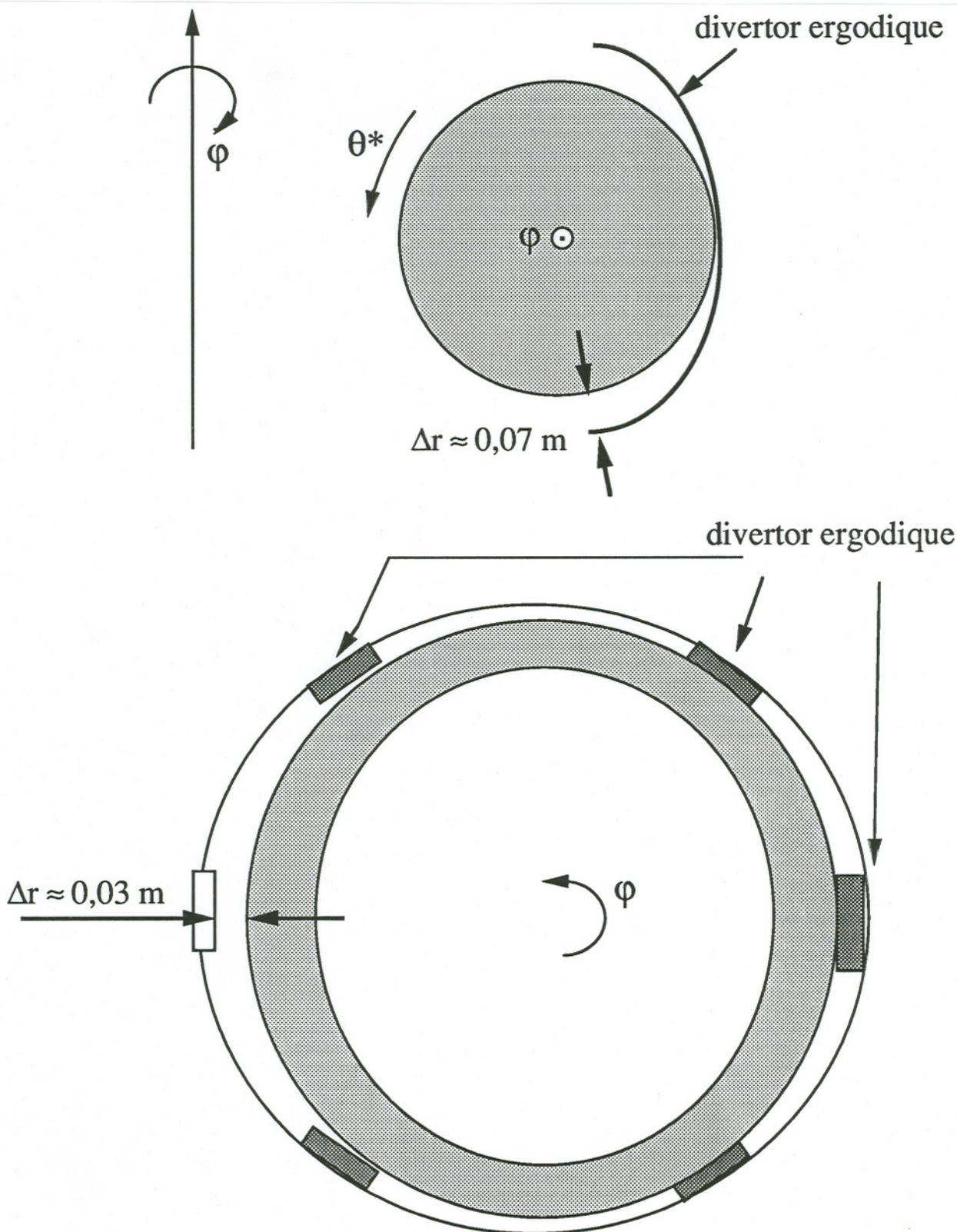
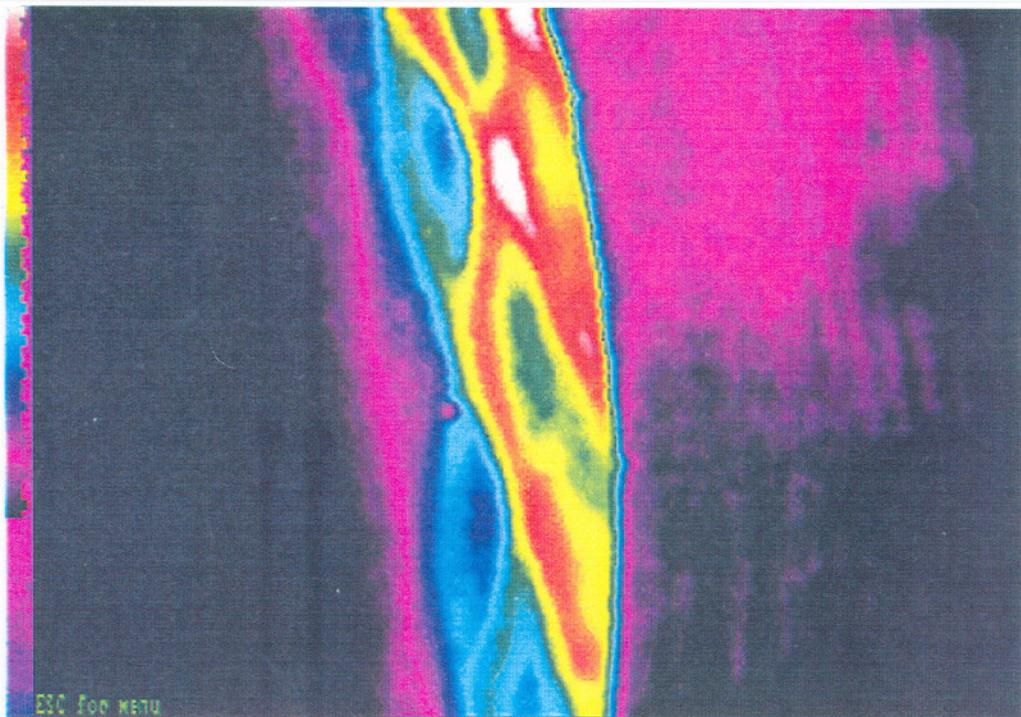


figure (V.9) : robustesse vis-à-vis des défauts d'alignement

V.8 - Modulations poloïdales dans la couche laminaire

a) Description des expériences

Une série d'expériences intéressantes permettant de mettre en évidence la structure des lignes de flux dans la zone laminaire a été réalisée avec des plasmas "détachés" tels que le plasma de bord rayonne la totalité de la puissance provenant du plasma central. Cet équilibre radiatif est le résultat d'une bifurcation due au fait que la puissance rayonnée est d'autant plus grande que la température est plus faible. L'application de la perturbation magnétique résonante sur un plasma détaché provoque le réattachement de celui-ci, c'est-à-dire le plasma de bord se réchauffe progressivement à partir du centre et cesse de rayonner la totalité du flux de puissance sortant. Durant la phase de réattachement, des structures dues à une émission de lumière H_{α} sont observées au bord (Poutchy *et al.*, 1992), dans la zone laminaire. La visée est effectuée tangentielle ment du côté du mur intérieur. Les structures forment des "îlots" sombres délimités par des frontières brillantes où se produit l'émission H_{α} (cf. photo (V.3)). Ces structures disparaissent au fur et à mesure que le front de plasma chaud progresse.



plasma central émission H_{α} paroi intérieure

photo (V.3) : asymétries poloïdales lors du réattachement de plasma détaché

b) Mécanisme physique

La limite du plasma détaché est le rayon $r_{\text{détaché}}$ auquel s'annule le flux radial d'énergie non radiative. Le rayonnement H_{α} est alors localisé dans la zone $r < r_{\text{détaché}}$. Il ne peut évidemment pas exister dans la zone $r > r_{\text{détaché}}$ où n'existe plus de puissance disponible. A l'application de la perturbation magnétique résonante du divertor ergodique, un point à un rayon $r > r_{\text{détaché}}$ peut se trouver connecté magnétiquement à la zone $r < r_{\text{détaché}}$ sur une longueur parallèle inférieure à L_T : l'émission de lumière H_{α} est alors rendue possible par le flux d'énergie correspondant à cette connexion qui vient ioniser les particules neutres. Cette émission est estimée constante le long des lignes de flux connectées au rayon $r_{\text{détaché}}$ sur une distance parallèle inférieure à L_T . La lumière H_{α} révèle donc à un instant donnée la structure de la connexion magnétique à la zone $r < r_{\text{détaché}}$. Ce régime est transitoire, les structures disparaissent au fur et à mesure que le front de plasma chaud progresse vers le bord c'est-à-dire que le plasma se réattache : le plasma froid rayonnant atteint une température trop importante pour rayonner et le front où le flux radial d'énergie non radiative s'annule progresse. Ce modèle suppose une densité de neutres homogène au bord. Nous ne modélisons pas complètement la physique complexe du recyclage au bord et des hétérogénéités associées qui pourraient survenir mais nous donnons une explication qualitative de la forme des structures observées.

c) Résultat numérique

La connexion magnétique, sur la longueur parallèle $L_T \sim 2\pi qR$ dans les deux sens ($d\varphi > 0$ et $d\varphi < 0$) d'une section poloïdale ($\varphi = \text{cste}$) du côté fort champ ($\theta^* = \pi$), est calculée. Le résultat est présenté sur la figure (V.10).

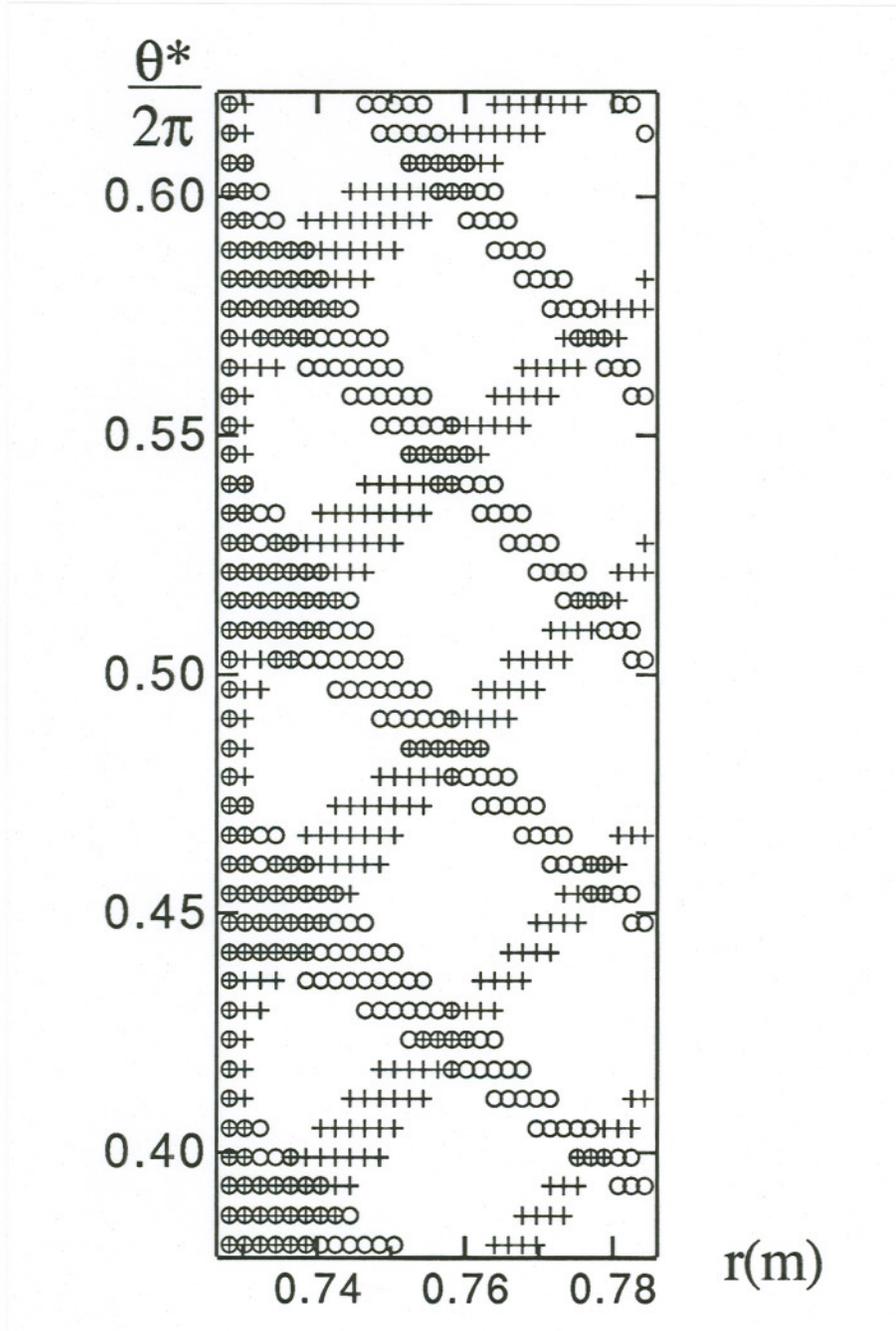


figure (V.10) : points dans un plan poloïdal connectés à $r = 0,73$ m au moins

Sur cette figure, seuls sont portés les points connectés en L_T au moins au rayon $r_{\text{détaché}} = 0,73$ m. Les croix représentent la connexion dans le sens $d\phi > 0$ et les ronds la connexion dans le sens $d\phi < 0$. Les points brillants de l'image (V.3) étant émetteurs de lumière H_{α} grâce à l'ionisation des neutres, la structure émissive de l'image est reconnaissable sur la figure (V.10). Bien qu'ayant la forme d'îlots, ces structures ne sont en rien des îlots magnétiques, elles constituent une trace de la connexion magnétique à la surface magnétique $r_{\text{détaché}} = 0,73$ m qui est supposée, dans notre calcul, être la limite de la couche rayonnante i.e. le rayon où le flux d'énergie non radiative s'annule.

d) Calculs analytiques reproduisant cette structure magnétique

Nous allons détailler le mécanisme qui conduit à cette structure particulière de la connexion magnétique en $L_T \sim 2\pi qR$ au plasma central. Nous nous sommes placés du côté fort champ ($\theta^* = \pi$). Considérons une position radiale dans ce plan poloïdal (i.e. à q donné). Considérons la surface $q = 3$ tout d'abord.

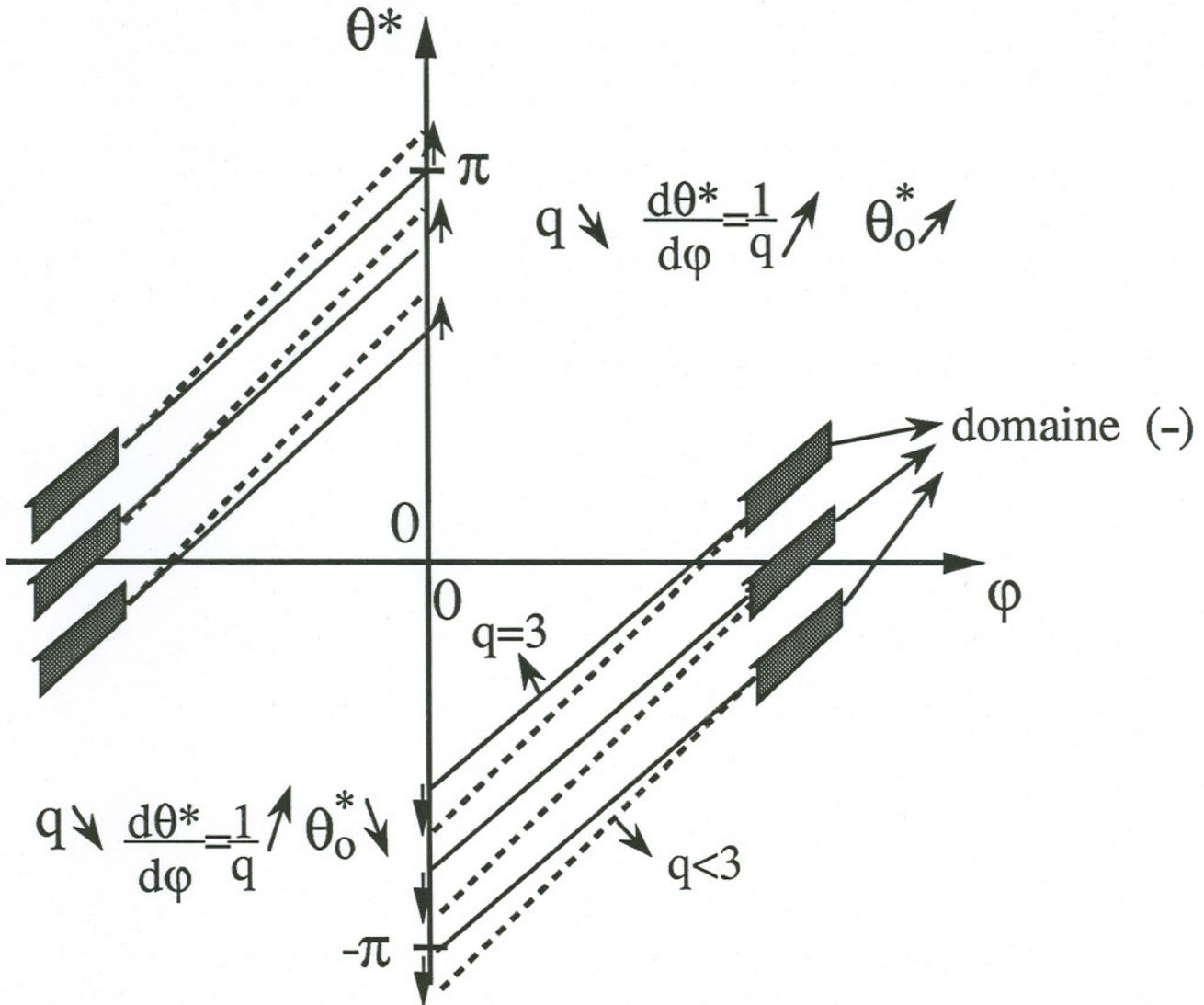


figure (V.11) : mécanisme donnant cette structure de connexion

Les lignes de champ passant devant une zone (-) ($d\phi > 0$), sur le premier module rencontré, vont subir des perturbations en phase sur les modules suivants, c'est le

phénomène de résonance. Remarquons qu'en partant du côté fort champ, les lignes de champ de longueur L_T ne passent qu'une fois devant des modules (i.e. 4 modules successifs au maximum). Finalement, les points connectés au plasma central, avec $(\delta r)_{\text{pénétration}} \geq 0,07$ m, seront ceux pour lesquels les lignes de champ passent devant une zone (-) sur le premier module rencontré. Pour une autre surface magnétique ($q < 3$), le même phénomène se produit. Une ligne de champ arrivant devant une zone (-) subit une perturbation vers le centre du plasma. Comme $q < 3$, la ligne est un peu moins résonante et la somme des perturbations (-) ($\delta B_r < 0$ pour $d\phi > 0$) successives est moins importante mais la pénétration radiale (δr) nécessaire pour atteindre un rayon donné ($r_{\text{détaché}} = 0,73$ m e.g.) est moins grande. Cette fois encore, les points connectés à $r_{\text{détaché}} = 0,73$ m sont ceux pour lesquels les lignes de champ passent devant une zone (-) sur le premier module rencontré. A un rayon donné, ceci revient à projeter sur notre plan poloïdal les zones (-) suivant les lignes de champ $d\theta^*/d\phi = 1/q$. Le facteur de sécurité q décroissant avec r , ces projections décroissent en θ^* puisque l'intervalle $\Delta\phi$, entre notre plan poloïdal et le premier module rencontré, reste fixe (fig. (V.11)). Il en résulte, dans le plan (r, θ^*) , des bandes inclinées (les croix sur la figure (V.10)). Au contraire, pour la connexion dans le sens rétrograde ($d\phi < 0$), la décroissance de q et donc l'augmentation de la pente des lignes de champ dans un plan (θ^*, ϕ) (figure (V.11)) produisent des bandes de pente décroissante (les ronds sur la figure (V.10)).

Nous allons calculer analytiquement les caractéristiques de ces structures magnétiques au vu de ce mécanisme et vérifier que l'on retrouve les résultats numériques de la figure (V.10) et de l'expérience (photo (V.3)).

L'écart $\Delta\theta^*$ entre deux bandes successives de même pente doit traduire la distance entre deux zones (-) sur un module c'est-à-dire la périodicité d'un module $\Delta\theta^* = 2\pi/5 \times 1/35 \sim 2\pi/18$. Dans l'espace réel, cet écart vaut $a.\Delta\theta$ ($a = 0,80$ m). Nous savons que $d\theta^*/d\theta$ est proportionnel à :

$$\frac{1}{(1 + r/R_o(r) \cos \theta)^2} \times \frac{1}{(1 + \Lambda r/R_o(r) \cos \theta)} \quad \text{où } \Lambda = \beta_p + li/2 \text{ et } R_o(r) \text{ est}$$

le grand rayon du centre de la surface magnétique de petit rayon r . La relation entre

$R_o(r)$ et r est donnée par le décalage de Shafranov $\frac{dR_o(r)}{dr} = -(\Lambda + 1) \frac{r}{R_o(r)}$. En

$\theta = \pi$, $d\theta^*/d\theta = 1,76$ pour $\Lambda = -0,3$ donc la longueur d'une structure est de 0,159 m. La valeur expérimentale déduite de la photo (V.3) est de 0,165 m. L'épaisseur d'une structure va nous être donnée par la pente des bandes (+ et o de la figure (V.10)). Dans le plan poloïdal, une zone (-) se situe à une ordonnée

$\theta^* = \theta_0^* - \Delta\phi/q$. La pente est donc $d\theta^*/dr = + (\Delta\phi/q^2)dq/dr$, $\Delta\phi$ est la distance toroïdale le long d'une ligne de champ entre notre plan poloïdal et le premier module rencontré : $\Delta\phi = \frac{2\pi q R}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{6}$ où $q = 3$. Remarquons qu'il est important d'avoir montré que seule la structure en zones (-) du premier module importe. Ceci permet de prendre un intervalle $\Delta\phi$ fixe et une unique valeur de q puisque une seule ligne de champ partant de notre plan poloïdal côté fort champ reste sur une surface magnétique tant qu'elle ne passe pas au-dessus d'un module de divertor ergodique i.e. jusqu'au premier module rencontré. Nous retranchons $\pi/6$ car notre plan poloïdal est entre deux modules, toroïdalement, et encore $2\pi/6$ car la première zone (-) rencontrée en partant de $q^* = \pi$ est la zone (-) inférieure du module précédant le module exactement distant d'un demi-tour poloïdal.

Pour $q = 3$, notre configuration magnétique donne $d\theta^*/dr = 8,73$. C'est exactement la pente que nous pouvons calculer sur la figure (V.10). L'épaisseur d'un losange constitué par l'intersection de deux familles de pentes opposées est $2.\Delta\theta^*/(d\theta^*/dr)$ où $\Delta\theta^*$ est la demi période d'un module. L'épaisseur, en terme de petit rayon, est donc $2.(1/2).(2\pi/18).(1/(8,73)) = 0,04$ m. Pour trouver l'épaisseur dans l'espace réel, il faut corriger cette épaisseur du décalage de Shafranov entre les surfaces magnétiques :

$$\Delta x = \Delta (R_o(r) - r) = \Delta r \left(\frac{dR_o}{dr} - 1 \right) = - \Delta r \left[\left(1 + (\Lambda + 1) \frac{r}{R_o} \right) \right] = - 1,23 \Delta r.$$

L'épaisseur réelle Δx est donc de 0,049 m à comparer à la valeur expérimentale de 0,046 m. La période poloïdale expérimentale est quant à elle de 0,165 m pour une valeur calculée de 0,159 m. Nous trouvons donc un très bon accord entre l'expérience et nos estimations fondées sur notre modèle de tubes connectés au plasma plus central ($r_{\text{détaché}} = 0,73$ m) dans lesquels s'écoule de la puissance qui ionise les neutres rencontrés. Notre estimation de un tour poloïdal pour la longueur de cohérence L_T du transport de trouve ainsi validée.

V.9 - Récapitulatif des principaux résultats

Le dépôt de puissance sur le mur est lié à la connexion magnétique sur une longueur parallèle bornée $L_{\text{dépôt}}$ que l'on sait estimer. Ceci définit une zone laminaire entre le mur et la couche vraiment ergodique entourant le plasma confiné. Les principaux résultats expérimentaux, en configuration divertor ergodique, sont retrouvés :

- la puissance vient s'étaler sur les modules de divertor ergodique sans concentration anormale ;
- 40 % de la puissance tombe sur les neutraliseurs et les 60 % restants sur les protections graphites du module ;
- le dépôt n'est pas très sensible à des défauts d'alignement du plasma par rapport au module. Ceci est dû au fait que la puissance est transportée au module depuis une profondeur de l'ordre de $(\delta r)_{\text{pénétration}} \sim 0,07$ m. De plus, la puissance, arrivant entre les barres de courant du divertor ergodique, s'étale sur 0,03 m sur les plaques de neutralisation. Radialement, la zone où s'effectue le dépôt n'est plus mince comme c'est le cas en configuration limiteur ($\lambda_q \sim 0,01$ m) ;
- les structures visibles en lumière H_α lors du réattachement de plasma détaché consécutif à l'application de la perturbation magnétique résonante du divertor ergodique sont expliquées, qualitativement et quantitativement.

Cette étude permet une bonne compréhension d'un certain nombre de résultats physiques, notamment du transport dans la couche ergodique et dans la zone laminaire qui conduit au dépôt sur la paroi. Ceci montre que le concept de divertor ergodique est intéressant pour les tokamaks. Il est prévu d'utiliser le code MASTOC et les résultats concernant le transport dans les couches ergodique et laminaire pour étudier d'autres configurations d'éléments de paroi avec le divertor ergodique ou même d'autres formes de divertor ergodique.

**VI - ETUDE DE L'EVOLUTION D'UN PLASMA
PAR UNE METHODE DE MINIMUM DE
PRODUCTION D'ENTROPIE**

"La science conduit à énoncer des propositions insupportables au sens commun".

Valéry

VI.1 - Introduction

L'étude de l'évolution lente d'un plasma magnétiquement confiné est d'une importance cruciale pour la fusion thermonucléaire contrôlée. En effet, cette étude concerne les problèmes de transport des particules et de l'énergie qui déterminent le temps de vie du plasma et également la contamination du plasma par les ions impuretés produits par l'environnement matériel. L'outil fondamental de cette étude est l'équation cinétique qui gouverne la fonction de distribution $F(x, p, t)$ des particules de chaque espèce dans l'espace des phases (x, p) .

$$\frac{dF(x, p, t, s)}{dt} = \frac{\partial F(x, p, t, s)}{\partial t} + \{F, H\} = C(F)$$

$$\text{où } \{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$H(x, p, t, s)$ est l'hamiltonien et $C(F)$ est l'opérateur de collision. La dimensionalité six de l'espace des phases (x, p) rend la solution de cette équation cinétique difficile en l'absence de symétrie physique. Pour cette raison, il peut être intéressant d'introduire un principe variationnel équivalent. Un tel principe est connu dans la littérature comme le principe de "minimum de production d'entropie" (Prigogine, 1961 ; Robinson & Bernstein, 1962 ; Rutherford, 1970 ; Cannobio, 1971 ; Rosenbluth *et al.*, 1972 ; Samain & Werkoff, 1977). Il permet d'effectuer les calculs en utilisant des fonctions test. De plus, dans les cas particuliers où la fonction de distribution présente des composantes singulières, le principe peut être renormalisé de façon à ce qu'il ne prenne en compte que la partie régulière de la fonction de distribution. Comme nous le verrons par la suite, ce sera le cas par exemple lorsque l'hamiltonien H contiendra des composantes qui sont en résonance avec les vitesses des particules dans les régimes faiblement collisionnels.

Le but de ce chapitre est tout d'abord de décrire ce principe, son lien avec le formalisme d'Onsager, sa structure dans divers régimes de collisionnalité et en présence de composantes résonantes de l'hamiltonien. Nous appliquerons alors ce principe pour déterminer le transport de différents types de particules en présence d'une couche stochastique dans le plasma de bord d'un tokamak.

VI.2 - Principe de minimum de production d'entropie

Il est pratique d'exprimer le principe de minimum de production d'entropie en termes d'écart à l'équilibre thermodynamique, caractérisé pour chaque espèce par une variable $U(x, p, t, s)$ définie par :

$$F(x, p, t, s) = A_s \exp\left(-\frac{H-U}{T}\right), \quad A_s = \text{cste}, \quad T = \text{cste} \quad (\text{VI-1})$$

La variable U détermine le taux de production d'entropie $\dot{S}(U, U)$, une fonction quadratique symétrique de $\frac{\partial U}{\partial p}$ (voir l'annexe 1) bien définie caractérisant l'opérateur de collision. Il est aisément vérifiable que l'équation de Fokker-Planck est équivalente à l'affirmation selon laquelle la fonctionnelle :

$$\sum_s \int \frac{2}{T} \frac{dF}{dt} \underline{U} d_3x d_3p + \dot{S}(\underline{U}, \underline{U}) \quad (\text{VI-2})$$

est extrémale pour toute variation de la fonction test $\underline{U}(x, p)$ autour de la valeur $U(x, p)$. Remarquons que ces variations ne concernent pas la variable :

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = \frac{F}{T} \left(-\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} + \{U, H\} \right) \quad (\text{VI-3})$$

qui ne dépend pas de \underline{U} . Bien que ce principe (VI-2) mérite le nom de minimum de production d'entropie à cause du terme $\dot{S}(\underline{U}, \underline{U})$, le terme de trajectoire

$\int \frac{2}{T} \frac{dF}{dt} \underline{U} d_3x d_3p$ est nécessaire pour garantir la stricte équivalence avec l'équation cinétique. Au second ordre en U et \underline{U} , le principe peut être écrit, supposant pour simplifier que $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$:

$$-4 S\left(\frac{\partial U}{\partial t}, \underline{U}\right) + \Sigma(U, \underline{U}) + \dot{S}(\underline{U}, \underline{U}) \text{ extremum en } \underline{U}$$

(VI-4)

$$\text{où : } \quad S(V, W) = - \sum_s \int \frac{F_M}{2T^2} VW \, d_3x \, d_3p \quad (\text{VI-5})$$

$$\begin{aligned} \Sigma(V, W) &= 2 \sum_s \int \frac{F_M}{T^2} \{V, H\} W \, d_3x \, d_3p & (\text{VI-6}) \\ &= - \frac{2}{T} \sum_s \int \{V, F_M\} W \, d_3x \, d_3p \\ &= \frac{2}{T} \sum_s \int F_M \{V, W\} \, d_3x \, d_3p \end{aligned}$$

avec pour chaque espèce la fonction de distribution maxwellienne $F_M = A \exp\left(-\frac{H}{T}\right)$

$$S(V, W) = S(W, V) ; \quad \Sigma(V, W) = - \Sigma(W, V) ; \quad \dot{S}(V, W) = \dot{S}(W, V) \quad (\text{VI-7})$$

L'écart U correspond à une variation de l'entropie du plasma donnée par $S(U, U)$ (étant supposé que l'énergie totale et le nombre de particules de chaque espèce sont conservés). Les calculs effectifs peuvent être faits à partir du principe (VI-4) si les variables $F(x, p, t)$, $U(x, p, t)$ et donc $\underline{U}(x, p)$ sont des fonctions "molles" de x et de p . Il est alors pratique dans ce qui suit d'exprimer les formes bilinéaires $S(V, W)$, $\Sigma(V, W)$ et $\dot{S}(V, W)$ comme :

$$S(V, W) = (SV)*W$$

$$\Sigma(V, W) = (\Sigma V)*W$$

$$\dot{S}(V, W) = (\dot{S}V)*W$$

où S , Σ et \dot{S} sont des opérateurs linéaires agissant sur des fonctions $V(x, p)$ et $W(x, p)$. $A(x, p)*B(x, p)$ est le produit scalaire de fonctions :

$$A*B = \sum_s \int F_M A(x, p) B(x, p) \, d_3x \, d_3p$$

Nous avons :

$$(SV)*W = V*(SW) ; \quad (\Sigma V)*W = -V*(\Sigma W) ; \quad (\dot{S}V)*W = V*(\dot{S}W)$$

Considérons par exemple un cas non collisionnel ; pour une évolutions lente $\partial H/\partial t$, le terme $\Sigma(U, \underline{U})$ domine dans le principe (VI-4). Dans ce cas, avec une bonne précision, \underline{U} rend $\Sigma(U, \underline{U})$ extremum i.e. U est une constante du mouvement. Prenons un cas collisionnel avec des trajectoires intégrables déterminées par un jeu de trois constantes du mouvement régulières $J(x, p)$, l'hamiltonien est $H = H(J)$. La fonction de distribution F , de même que l'écart U , sont alors des constantes du mouvement et sont régulières si elles sont presque des fonctions des variables d'action J :

$$U \# U(J)$$

Nous choisissons alors la fonction test \underline{U} de telle façon que $\underline{U} = \underline{U}(J)$ soit exactement une fonction des variables d'action J . La fonctionnelle $\Sigma(U, \underline{U})$ s'annule alors exactement, quelles que soient les vitesses des particules le long des trajectoires (ce qui autrement pourrait rendre $\Sigma(U, \underline{U})$ très grande). Le principe (VI-4) devient alors :

$$- 4 S\left(\frac{\partial U}{\partial t}, \underline{U}\right) + \dot{S}(\underline{U}, \underline{U}) \text{ extremum en } \underline{U}(J) \quad (\text{VI-8})$$

Les relations d'Onsager (Onsager, 1931a, 1931b) sont alors automatiquement vérifiées. En effet, en utilisant le formalisme d'Onsager, l'écart U à l'équilibre thermodynamique est caractérisé par un jeu de paramètres λ^i tel que :

$$\begin{aligned} U(J, t) &= \lambda^i(t)U_i(J) \\ \underline{U}(J, t) &= \underline{\lambda}^i(t)U_i(J) \end{aligned} \quad (\text{VI-9})$$

où les $U_i(J)$ forment une bonne base de fonctions. Dans un tel formalisme, l'entropie S est donnée par :

$$S = S_{ij} \lambda^i \lambda^j, \quad S_{ij} = S_{ji} = S(U_i, U_j) \quad (\text{VI-10})$$

et le taux de production d'entropie par :

$$\dot{S} = \dot{S}_{ij} \lambda^i \lambda^j \quad ; \quad \dot{S}_{ij} = \dot{S}_{ji} = \dot{S}(U_i, U_j) \quad (\text{VI-11})$$

Le nouveau principe (VI-8) donne alors :

$$- 4S_{ij} \frac{d\lambda^i}{dt} \lambda^j + \dot{S}_{ji} \lambda^i \lambda^j \text{ extremum en } \lambda \quad (\text{VI-12})$$

c'est-à-dire :

$$- 2S_{ij} \frac{d\lambda^i}{dt} + \dot{S}_{ji} \lambda^i = 0 \quad (\text{VI-13})$$

En introduisant les "flux" $\Phi_j = 2S_{ij}(d\lambda^i/dt)$, l'équation (VI-13) devient :

$$\Phi_j = \dot{S}_{ji} \lambda^i \quad (\text{VI-14})$$

Les relations (VI-13) et (VI-14) impliquent les symétries d'Onsager. La relation (VI-14) traduit une relaxation vers l'équilibre thermodynamique.

Dans le cas général, on peut écrire, au lieu de (VI-9),

$$U = \lambda^i(t)U_i(x, p) \quad (VI-15)$$

$$\underline{U} = \underline{\lambda}^i(t)U_i(x, p)$$

où $U_i(x, p)$ est une base de fonctions appropriée au problème considéré. Le principe (VI-4) devient alors :

$$-4S_{ij} \frac{d\lambda^i}{dt} \lambda^j + \Sigma_{ji} \lambda^i \dot{\lambda}^j + \dot{S}_{ij} \lambda^i \lambda^j \text{ extremum en } \lambda \quad (VI-16)$$

où rien n'assure la nullité de $\Sigma_{ij} = \Sigma(U_i, U_j) = -\Sigma(U_j, U_i)$ comme c'était le cas précédemment puisque les U_i étaient des fonctions des constantes du mouvement J . L'équation d'évolution est alors la suivante :

$$4S_{ij} \frac{d\lambda^i}{dt} = \Sigma_{ji} \lambda^i + 2\dot{S}_{ij} \lambda^i \quad (VI-17)$$

A cause de l'antisymétrie du tenseur Σ_{ij} , les relations de symétrie d'Onsager (VI-13) (VI-14) ne sont plus valables. En fait, nous trouverons que les relations d'Onsager s'appliquent quand même dans tous les cas pratiques considérés dans la suite. Ceci sera assuré par des renormalisations du principe (VI-4) suivant le schéma suivant :

$$U = U_1 + U_2 \quad (VI-18a)$$

où les fonctions U_1 et \underline{U}_1 appartiennent à l'espace vectoriel de fonctions (U_1) et déterminent l'entropie de l'état U, \underline{U} .

$$S(U, U) \# S(U_1, U_1) \gg S(U_1, U_2), S(U_2, U_2) \quad (VI-18b)$$

$$S\left(\frac{\partial U}{\partial t}, \underline{U}\right) \# S\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}, \underline{U}_1\right)$$

Cela signifie que les fonctions U_1 et \underline{U}_1 , ou les paramètres λ et $\underline{\lambda}$ qui les déterminent, définissent l'écart objectif à l'équilibre thermodynamique. Au contraire, les fonctions U_2 de l'espace vectoriel des fonctions (U_2) sont essentielles pour le taux de production d'entropie $\dot{S}(\underline{U}, \underline{U})$ et les effets de trajectoire $\Sigma(U, \underline{U})$. Par exemple, dans le cas d'un plasma confiné, les fonctions U_1 sont déterminées par les profils de densité et de température sur les surfaces magnétiques successives. Les fonctions U_2 contiennent l'information sur la dépendance de la fonction de distribution F dans l'espace des vitesses. Le principe (VI-4) devient :

$$\begin{aligned}
 & - 4S\left(\frac{\partial \underline{U}_1}{\partial t}, \underline{U}_1\right) + \dot{S}(\underline{U}_1, \underline{U}_1) + \Sigma(\underline{U}_1, \underline{U}_1) \\
 & + ((\Sigma + 2\dot{S})U_2) * \underline{U}_1 + ((\Sigma + 2\dot{S})U_1) * \underline{U}_2 + ((\Sigma + 2\dot{S})U_2) * \underline{U}_2 \quad (\text{VI-19}) \\
 & \text{extremum en } \underline{U}_1 \in (U_1), \underline{U}_2 \in (U_2)
 \end{aligned}$$

Nous définissons les opérateurs \dot{S}_j^i, Σ_j^i ($i = 1, 2 ; j = 1, 2$) agissant dans l'espace de fonctions (U_j) sur l'espace de fonctions (U_j) de telle façon que, quelles que soient les fonctions U_i, U_j :

$$(\dot{S}_j^i U_i) * U_j = (\dot{S}U_i) * U_j \quad (\text{VI-20a})$$

$$(\Sigma_j^i U_i) * U_j = (\Sigma U_i) * U_j \quad (\text{VI-20b})$$

On obtient après extrémalisation de (VI-19) par rapport à $\underline{U}_2 \in (U_2)$

$$(\Sigma_2^2 + 2\dot{S}_2^2)U_2 = -(\Sigma_2^1 + 2\dot{S}_2^1)U_1 \quad (\text{VI-21})$$

Le principe (VI-19) se réduit alors aux quatre premiers termes. Utilisant (VI-21) pour éliminer U_2 dans $((\Sigma + 2\dot{S})U_2) * \underline{U}_1 = U_2 * ((-\Sigma + 2\dot{S})\underline{U}_1) = U_2 * ((-\Sigma_2^1 + 2\dot{S}_2^1)\underline{U}_1)$, ce principe devient :

$$- 4S\left(\frac{\partial \underline{U}_1}{\partial t}, \underline{U}_1\right) + \dot{S}(\underline{U}_1, \underline{U}_1) + \Sigma(\underline{U}_1, \underline{U}_1) + 2\dot{S}_{\text{compl}}(\underline{U}_1, \underline{U}_1) \quad (\text{VI-22a})$$

extremum en $\underline{U}_1 \in (U_1)$

$$\begin{aligned}
 \text{où } 2\dot{S}_{\text{compl}}(\underline{U}_1, \underline{U}_1) &= U_2 * (\Sigma_2^1 - 2\dot{S}_2^1)\underline{U}_1 \\
 &= ((\Sigma_2^2 + 2\dot{S}_2^2)^{-1}(\Sigma_2^1 + 2\dot{S}_2^1)U_1) * (\Sigma_2^1 - 2\dot{S}_2^1)\underline{U}_1
 \end{aligned} \quad (\text{VI-22b})$$

La symétrie d'Onsager nécessite alors que pour tous $U_1, \underline{U}_1 \in (U_1)$:

$$\Sigma(U_1, \underline{U}_1) = 0 \quad (\text{VI-23a})$$

$$\dot{S}_{\text{compl}}(U_1, \underline{U}_1) = \dot{S}_{\text{compl}}(\underline{U}_1, U_1) \quad (\text{VI-23b})$$

Ce sera le cas dans toutes les situations typiques considérées par la suite, en fait pour différentes raisons. Le principe (VI-2) peut alors être réécrit sous la forme :

$$- 4S\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}, \underline{U}_1\right) + \dot{S}_{\text{actuel}}(\underline{U}_1, \underline{U}_1) \text{ extremum en } \underline{U}_1 \in (U_1) \quad (\text{VI-24a})$$

$$\dot{S}_{\text{actuel}}(U_1, U_1) = \dot{S}(U_1, U_1) + \dot{S}_{\text{compl}}(U_1, U_1)$$

Il est essentiel de noter que, quel que soit U_1 , la forme symétrique $\dot{S}_{\text{actuel}}(U_1, U_1)$ est la production d'entropie réelle $\dot{S}(U, U)$, i.e.

$$\dot{S}_{\text{actuel}}(U_1, U_1) = \dot{S}(U_1+U_2, U_1+U_2) \quad (\text{VI-24b})$$

où U_2 se déduit de U_1 par (VI-21). Tous les calculs présentés dans la suite sont basés sur la décomposition (VI-18), menant aux fonctionnelles $\Sigma(U_1, \underline{U}_1)$ et $\dot{S}_{\text{compl}}(U_1, U_1)$ vérifiant (VI-23). L'évolution des paramètres fondamentaux qui déterminent U_1 est alors contrôlée par le principe (VI-24).

VI.3 - Régimes collisionnels

Dans ce chapitre, nous étudions les régimes collisionnels. Nous séparons le cas du plasma non magnétisé décrit par une fonction de distribution générale $F(x, p)$ du cas du plasma magnétisé décrit par une fonction de distribution $F(x_G, \mu, H)$ dépendant des variables lentes x_G (centre guide), μ (moment magnétique) et H .

VI.3.a - Plasma non magnétisé

Le plasma non magnétisé est caractérisé par $\lambda_{\text{coll}} \ll \rho_c$ où λ_{coll} est le libre parcours moyen et ρ_c le rayon de Larmor. Nous allons en fait considérer la limite $\rho_c \Rightarrow \infty$. Le taux de production d'entropie $\dot{S}(U, U)$ est alors dominant dans le principe variationnel (VI-4). En conséquence, selon ce principe, $\dot{S}(U, U)$ doit être pratiquement nul. Nous pouvons alors décomposer l'écart à l'équilibre thermodynamique U sous la forme $U = U_1 + U_2$ où U_2 est une faible perturbation à U_1 et :

$$\dot{S}(U_1, U_1) = 0 \iff U_1 \in \text{Ker}\dot{S}$$

Un écart U_1 qui réalise une production d'entropie nulle correspond à une fonction de distribution de la forme :

$$F_s = \frac{n_s(x)}{(2\pi m_s T(x))^{3/2}} \exp\left[-m_s \frac{(v - V(x))^2}{2T(x)}\right] \quad (\text{VI-25})$$

c'est-à-dire en chaque point x , il existe un référentiel à la vitesse $V(x)$ dans lequel toutes les espèces s , de densité $n_s(x)$, sont maxwelliennes à la même température $T(x)$.

Nous avons alors :

$$\frac{U_{1s}}{T} = \ln(n_s(x)) - \frac{3}{2} \ln T(x) - H\left(\frac{1}{T(x)} - \frac{1}{T}\right) + \frac{mvV(x)}{T} \quad (\text{VI-26})$$

De même, la fonction test \underline{U}_{1s} , voisine de U_{1s} , s'écrit :

$$\frac{\underline{U}_{1s}}{T} = \ln(\underline{n}_s(x)) - \frac{3}{2} \ln \underline{T}(x) - H\left(\frac{1}{\underline{T}(x)} - \frac{1}{T}\right) + \frac{mv\underline{V}(x)}{T} \quad (\text{VI-27})$$

La variable U_1 définit l'entropie $S(U, U) \# S(U_1, U_1)$ de l'état caractérisé par l'écart U . La variable U_2 , qui n'appartient pas à $\text{Ker } \dot{S}$, introduit les variations fines de U relativement à V et donne le taux de production d'entropie $\dot{S}(U_2, U_2)$. En fait, remarquons que $U_1 \in \text{Ker } \dot{S}$ implique :

$$\dot{S}(U_1, U_2) = (\dot{S}U_1) * U_2 = 0 ; \dot{S}(U_2, U_1) = 0 \quad (\text{VI-28})$$

Le principe (VI-19) se réduit alors à :

$$\begin{aligned} & -4S\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}, \underline{U}_1\right) + \Sigma(U_1, \underline{U}_1) + (\Sigma U_1) * \underline{U}_2 \\ & + (\Sigma U_2) * \underline{U}_1 + (\Sigma U_2) * \underline{U}_2 + (\dot{S}U_2) * \underline{U}_2 \end{aligned} \quad (\text{VI-29})$$

extremum en $\underline{U}_1 \in (U_1), \underline{U}_2 \in (U_2)$

De façon à pouvoir comparer les différents termes dans (VI-29), nous établissons les ordres de grandeur suivants :

$$\begin{aligned} (\Sigma U_1) * \underline{U}_2 & \sim kv U_1 \underline{U}_2 \\ (\dot{S}U_2) * \underline{U}_2 & \sim \underline{U}_2^2 v_{\text{coll}} \end{aligned} \quad (\text{VI-30})$$

où v_{coll} est la fréquence de collision, k est le nombre d'onde spatial de la structure collective du fluide, kv est l'inverse du temps de transit le long des trajectoires à travers cette structure. Lorsque nous extrémalisons l'expression (VI-29) relativement à \underline{U}_2 , nous trouvons :

$$U_2 \sim kv \frac{U_1}{v_{\text{coll}}} \quad (\text{VI-31})$$

Le régime collisionnel considéré, caractérisé par $U_2 \ll U_1$, est réalisé si $kv \ll v_{\text{coll}}$ ou $\lambda_{\text{coll}} \ll 1/k$. D'autre part, $\Sigma(U_1, \underline{U}_1) \sim kv U_1 \underline{U}_1$ sauf si nous introduisons la contrainte supplémentaire :

$$\Sigma(U_1, \underline{U}_1) = 0 \quad (\text{VI-32})$$

Arrivé en ce point, deux voies s'offrent pour la poursuite du calcul :

1°- La contrainte (VI-32) n'est pas appliquée. Tous les termes dépendant de U_2 dans (VI-29) sont kv/v_{coll} plus petits que $\Sigma(U_1, \underline{U}_1)$ et le principe (VI-29) se réduit à :

$$-4S\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}, \underline{U}_1\right) + \Sigma(U_1, \underline{U}_1) \quad \text{extremum en } \underline{U}_1 \in (U_1) \quad (\text{VI-33})$$

Dans ce cas, nous allons trouver la propagation d'une onde sonore isentropique correspondant à une évolution rapide $\partial U_1/\partial t \sim kvU_1$, pour laquelle les relations d'Onsager ne s'appliquent évidemment pas : une oscillation non dissipative ne retourne pas à l'équilibre thermodynamique exponentiellement comme l'exigent les relations de symétrie d'Onsager. De fait, calculons $-4S(\partial U_1/\partial t, \underline{U}_1)$ et $\Sigma(U_1, \underline{U}_1)$ avec U_1 et \underline{U}_1 définis par (VI-26, VI-27). Tout d'abord, nous avons :

$$-4S\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}, \underline{U}_1\right) = \frac{2}{T} \int \frac{F_M}{T} \frac{\partial U_1}{\partial t} \underline{U}_1 d_3x d_3v$$

$$-4S\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}, \underline{U}_1\right) = 2 \int n d_3x \left[\frac{\partial n}{n \partial t} \ln(n(x)) + \frac{3}{2} \frac{\partial T}{T \partial t} \ln T(x) + \frac{m}{T} \frac{\partial V_i}{\partial t} V_i(x) \right] \quad (\text{VI-34})$$

De même, nous avons :

$$\Sigma(U_1, \underline{U}_1) = \frac{2}{T} \int F_M \{U_1, \underline{U}_1\} d_3x d_3v$$

$$\Sigma(U_1, \underline{U}_1) =$$

$$2 \int n d_3x \left[\frac{V_i(x)}{n} \frac{\partial n}{\partial x_i} + \ln T(x) \frac{\partial V_i}{\partial x_i} - \frac{\partial n}{n \partial x_i} V_i(x) + \left(\frac{T}{T(x)} - 1\right) \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right] \quad (\text{VI-35})$$

Au premier ordre en $\partial n/\partial x_i$, $\partial T/\partial x_i$ et V_i , l'extrémalisation de (VI-33) par rapport à $\underline{n}(x)$ au voisinage $n(x)$ donne :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n V_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{VI-36})$$

à $\underline{T}(x)$ autour de $T(x)$:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial T}{\partial t} + T \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{VI-37})$$

et à $\underline{V}_i(x)$ autour de $V_i(x)$:

$$n m \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial n T}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{VI-38})$$

Remarquons que les équations (VI-36, VI-37) contiennent l'équation de l'écoulement isentropique du gaz parfait considéré dans ce paragraphe :

$$\frac{1}{nT} \left(\frac{dnT}{dt} \right) + \gamma \operatorname{div} V = 0 \quad \text{où } \gamma = \frac{5}{3}$$

Les équations (VI-36, VI-37, VI-38) dérivées du principe (VI-33) sont les équations de l'onde sonore comme prévu.

2°- A l'opposé, si on étudie une évolution lente, $\partial U_1 / \partial t \ll kv U_1$, le terme $\Sigma(U_1, \underline{U}_1)$ devient dominant dans le principe variationnel (VI-29). Dans ce cas, avec une bonne précision, $\Sigma(U_1, \underline{U}_1)$ est un extremum en \underline{U}_1 ou, de façon équivalente, $\Sigma_1^1 U_1 = 0$. D'après (VI-35), cette contrainte est équivalente à la condition d'un régime d'onde d'entropie tel que :

$$\sum_s n(x) T(x) = \text{cste} ; \operatorname{div} V(x) = 0$$

Nous choisissons \underline{U}_1 tel que $\Sigma_1^1 \underline{U}_1 = 0$ et donc la contrainte (VI-32) est exactement vérifiée. Le principe (VI-22) équivalent à (VI-19) ou (VI-29) se réduit alors aux seuls termes $S(\partial U_1 / \partial t, \underline{U}_1)$ et $2\dot{S}_{\text{compl}}(U_1, \underline{U}_1)$. Ce dernier terme s'écrit dans le cas présent :

$$2\dot{S}_{\text{compl}}(U_1, \underline{U}_1) = ((\Sigma_2^2 + 2\dot{S}_2^2)^{-1} \Sigma_2^1 U_1) * \Sigma_2^1 \underline{U}_1$$

La variable $\Sigma_2^1 U_1$ de l'espace de fonctions (U_2) n'appartient pas à $\operatorname{Ker} \dot{S}$. Agissant sur cette variable, l'opérateur \dot{S} est dominant comparativement à l'opérateur Σ , dans le rapport v_{coll}/kv . La fonctionnelle $2\dot{S}_{\text{compl}}(U_1, \underline{U}_1)$ peut en conséquence s'écrire :

$$2\dot{S}_{\text{compl}}(U_1, \underline{U}_1) = ((2\dot{S}_2^2)^{-1} \Sigma_2^1 U_1) * \Sigma_2^1 \underline{U}_1$$

et elle apparaît alors symétrique en U_1 et \underline{U}_1 car les opérateurs \dot{S} et \dot{S}^{-1} le sont. Nous en déduisons que l'évolution de U_1 , obtenue par l'extrémalisation de $-4S(\partial U_1/\partial t, \underline{U}_1) + 2\dot{S}_{\text{compl}}(U_1, \underline{U}_1)$ vis-à-vis de \underline{U}_1 , présente exactement la structure d'Onsager.

Remarque :

Le principe (VI-33) ne prend pas en compte l'amortissement de l'onde sonore. Le principe général (VI-4) permet de calculer cet amortissement. Cependant, comme l'évolution sonore n'est pas un phénomène lent mais se produit à la fréquence $\omega \sim kv$, le principe (VI-19) doit être élargi pour induire le terme $-4S(\partial U_1/\partial t, U_2)$: ce terme est d'ordre $\omega U_1 U_2$ et joue un rôle équivalent à $\Sigma(U_1, \underline{U}_2)$ dans l'extrémalisation par rapport à \underline{U}_2 . Le principe (VI-22) obtenu après l'élimination de \underline{U}_2 devient :

$$-4S\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}, \underline{U}_1\right) + \Sigma(U_1, \underline{U}_1) + ((2\dot{S}_2^2)^{-1}(\Sigma_2^1 - 4S_2^1 i\omega)U_1) * (\Sigma_2^1 - 4S_2^1 i\omega)\underline{U}_1$$

extremum en $\underline{U}_1 \in (U_1)$

VI.3.b - Plasma magnétisé : régime Pfirsch-Schlüter.

Un plasma magnétisé dans une configuration magnétique toroïdale en régime Pfirsch-Schlüter (Pfirsch & Schlüter, 1962) constitue un cas collisionnel bien plus subtil. Le fait que le plasma est magnétisé s'exprime par la condition $\rho_c \ll \lambda_{coll}$. Dans le paragraphe précédent, nous utilisons les six coordonnées usuelles x, p de l'espace des phases. Dans le cas d'un plasma magnétisé, nous introduisons plutôt les cinq variables lentes de Kruskal x_G, μ, H et la variable rapide φ_c , la phase cyclotronique. L'intérêt de telles coordonnées apparaît lorsque nous appliquons le principe variationnel (VI-2). Les termes dans $\Sigma(U, \underline{U})$ contenant $d\varphi_c/dt$ sont très grands à cause du mouvement cyclotronique rapide. L'extrémalisation de $\Sigma(U_1, \underline{U}_1)$ par rapport à \underline{U} assure alors que $dF/d\varphi_c(\mu, H, x_G, \varphi_c) = 0$, c'est-à-dire que F et U sont fonctions des variables lentes x_G, μ et H uniquement.

La grande collisionnalité de la situation Pfirsch-Schlüter est traduite par $qR \gg \lambda_{coll}$. On vérifie *a posteriori* que le temps de diffusion des particules le long d'une surface magnétique est beaucoup plus petit que le temps de diffusion à travers les surfaces magnétiques. Dans ce cas, chaque espèce atteint pratiquement un équilibre et présente donc une fonction de distribution $F(x, p)$ proche d'une maxwellienne sur chaque surface magnétique. Ecrivant $F = A \exp(-(H - U)/T)$ où $U = U_1 + U_2$, U_1 représente les variations de densité et de température d'une surface magnétique à l'autre. Pour simplifier, nous négligeons la possibilité de champ électrique radial et de vitesse toroïdale moyenne associée. Nous prenons alors U_1 et \underline{U}_1 de la forme :

$$\begin{aligned} U_1 &= \ln(n(\psi(x_G))) - \frac{3}{2} \ln(T(\psi(x_G))) - H \left(\frac{1}{T(\psi(x_G))} - \frac{1}{T} \right) \\ \underline{U}_1 &= \ln(\underline{n}(\psi(x_G))) - \frac{3}{2} \ln(\underline{T}(\psi(x_G))) - H \left(\frac{1}{\underline{T}(\psi(x_G))} - \frac{1}{T} \right) \end{aligned} \quad (VI-39)$$

où $\psi(x_G)$ est la surface magnétique passant par le point x_G . On vérifie facilement que $\Sigma(U_1, \underline{U}_1)$ est nulle de sorte que (VI-23a) est vérifiée. L'entropie du plasma confiné est déterminée par U_1 . On vérifie que :

$$-4S \left(\frac{\partial U}{\partial t}, \underline{U} \right) \# -4S \left(\frac{\partial U_1}{\partial t}, \underline{U}_1 \right) = 2 \sum_s \int d_3x \left(\frac{\partial n}{\partial t} \ln(\underline{n}) + \frac{3}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \ln(\underline{T}) \right)$$

(VI-40)

Nous avons $\vec{x} = \vec{x}_G + \frac{1}{\omega_c}(\vec{v}_\perp \times \frac{\vec{B}}{B})$ où $\omega_c = -eB/m$. Les effets "classiques" d'un plasma magnétisé sont dus au fait que U_1 dépend des coordonnées x à travers les variables lentes μ , H et x_G . De sorte que nous pouvons écrire pour H et μ donnés :

$$U_1(\psi(x_G), \mu, H) = U_1(\psi(x)) + \frac{\partial U_1}{\partial \psi}(\vec{\nabla}\psi \times \frac{\vec{B}}{B}) \cdot \frac{\vec{v}_\perp}{\omega_c} \quad (\text{VI-41})$$

Seul le second terme du membre de droite dans (VI-41) donne de la production d'entropie $\dot{S}(U_1, U_1)$. En effet, rappelant $\dot{S}(U_1, U_1) = (\dot{S}U_1) * U_1$ et l'équation (VI-41), la contribution de $\dot{S}(U_1(\psi(x)))$ est nulle parce que ce terme n'a pas de dépendance en vitesse. Au contraire, la dépendance en v_\perp du second terme produit de l'entropie comme si l'assemblée avait une vitesse moyenne V_\perp :

$$V_\perp = \frac{1}{m} \frac{\partial U_1}{\partial \psi} \left(\frac{\vec{\nabla}\psi}{\omega_c} \times \frac{\vec{B}}{B} \right) ; \quad \frac{\partial U_1}{\partial \psi} = \frac{\partial n}{n \partial \psi} + \left(\frac{H}{T} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial T}{T \partial \psi} ,$$

nous avons alors :

$$\dot{S}(U_1, U_1) = \dot{S}(mv_\perp V_\perp, mv_\perp V_\perp) \quad (\text{VI-42})$$

Les fonctions U_2 sont des fonctions des variables lentes x_G , μ et H qui, à μ et H fixés, donnent une contribution nulle dans l'intégrale entre deux surfaces magnétiques voisines. Dans le cas Pfirsch-Schlüter, la fonction U_2 représente les vitesses parallèles moyennes d'une population en chaque point le long des lignes de champ ainsi que les variations locales de densité δn et de température δT sur chaque surface magnétique :

$$U_2 = mv_{//} V_{//} + \frac{\delta n}{n} + \left(\frac{H}{T} - \frac{3}{2} \right) \frac{\delta T}{T} \quad (\text{VI-43})$$

Nous utilisons l'équation (VI-21) pour déterminer U_2 . Remarquons que $\dot{S}_2^1 U_1$ est nul donc (VI-21) devient $(\Sigma_2^2 + 2\dot{S}_2^2)U_2 + \Sigma_2^1 U_1 = 0$ où $\Sigma_2^1 U_1 = \frac{\partial U_1}{\partial \psi_G} v_G \nabla U_1$ est une fonction paire relativement au signe de $v_{//}$ et v_G est la vitesse de dérive

$-(mv_\perp^2 \frac{\vec{v}_B}{B} + mv_{//}^2 \frac{\vec{1}}{R}) \times \frac{\vec{B}}{eB^2}$. En conséquence, nous nous intéressons uniquement à la

composante paire de U_2 pour calculer $2\dot{S}_{\text{compl}}(U_1, \underline{U}_1) = -U_2 * \Sigma_2^1 \underline{U}_1$. Séparant U_2 en ses composantes impaire et paire et notant que la parité change avec l'opérateur $\Sigma_2^2 = (\nu_{\parallel} \nabla_{\parallel} + \nu_G \nabla_{\perp})^2 \# (\nu_{\parallel} \nabla_{\parallel})^2$ alors qu'elle est préservée avec \dot{S}_2^2 , nous déduisons de (VI-21)

$$\dot{S}_2^2 U_2 \text{ impaire} + \Sigma_2^2 U_2 \text{ paire} = 0 \quad (\text{VI-44})$$

et

$$\dot{S}_2^2 U_2 \text{ paire} + \Sigma_2^2 U_2 \text{ impaire} + \Sigma_2^1 U_1 = 0 \quad (\text{VI-45})$$

Nous obtenons finalement :

$$2\dot{S}_{\text{compl}}(U_1, \underline{U}_1) = ((2\dot{S}_2^2 - \Sigma_2^2(2\dot{S}_2^2)^{-1}\Sigma_2^2)\Sigma_2^1 U_1) * \Sigma_2^1 \underline{U}_1 \quad (\text{VI-46})$$

Cette expression de \dot{S}_{compl} assure les symétries d'Onsager parce que l'opérateur $2\dot{S}_2^2 - \Sigma_2^2(2\dot{S}_2^2)^{-1}\Sigma_2^2$ est symétrique. Remarquons que cette fonctionnelle symétrique \dot{S}_{compl} donnée par (VI-46) est en fait valide dans tous les régimes collisionnels tant que $\Sigma_2^2 \# (\nu_{\parallel} \nabla_{\parallel})^2$.

Le principe d'extremum qui donne l'évolution de U_1 , i.e. des profils $n(\psi)$ et $T(\psi)$, peut être exprimé sous la forme (VI-24)

$$-4S\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}, \underline{U}_1\right) + \dot{S}_{\text{actuel}}(\underline{U}_1, \underline{U}_1) \text{ extremum en } \underline{U}_1 \in (U_1)$$

où nous avons d'après (VI-40) :

$$-4S\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}, \underline{U}_1\right) = 2 \sum_s \int d_3x \left(\frac{\partial n}{\partial t} \ln(\underline{n}) + \frac{3}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \ln(\underline{T}) \right) \quad (\text{VI-47})$$

$$\dot{S}_{\text{compl}}(U_1, U_1) = \dot{S}(U_1+U_2, U_1+U_2) = \dot{S}(U_1, U_1) + \dot{S}(U_2, U_2)$$

Dans le régime Pfirsch-Schlüter, le taux de production d'entropie $\dot{S}(U_2, U_2) = \dot{S}(U_2 \text{ impaire}, U_2 \text{ impaire})$ provient uniquement de la partie impaire de U_2 parce que la partie paire représente seulement les variations $\delta n(x)$ et $\delta T(x)$ de la densité et de la température (en supposant que le rapport de masse entre les espèces considérées

est tel que le transfert d'énergie d'une espèce à l'autre dû à la différence de température puisse être négligé). L'équation (VI-45) se réduit alors à :

$$\begin{aligned}\Sigma_2^2 U_2 \text{ impaire} &= (v_{//} \nabla_{//} U_2 \text{ impaire})_{\text{dans l'espace } (U_2)} \\ &= - \Sigma_2^1 U_1 = (-v_G \nabla U_1)_{\text{dans l'espace } (U_2)}\end{aligned}\quad (\text{VI-48})$$

Dans un tokamak axisymétrique, l'équation (VI-47) conduit à $U_2 \text{ impaire}$ de la forme :

$$U_2 \text{ impaire} = mT \left\{ \left[\frac{\partial n}{n \partial \psi_G} + \left(\frac{H}{T} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial T}{T \partial \psi_G} \right] \frac{R B_\phi}{eB} + \varepsilon(H, \psi_G) B \right\} v_{//G} \quad (\text{VI-49})$$

Finalement, nous pouvons écrire $\dot{S}_{\text{actuel}}(U_1, U_1) = \dot{S}_{\text{class}} + \dot{S}_{\text{PS}}$ où $\dot{S}_{\text{class}} = \dot{S}(U_1, U_1)$ et $\dot{S}_{\text{PS}} = \dot{S}(U_2 \text{ impaire}, U_2 \text{ impaire})$ provenant de (VI-42) et (VI-49). La quantité $\dot{S}_{\text{class}}(U_1, U_1)$ est le taux de production d'entropie due au diamagnétisme transverse :

$$\begin{aligned}\dot{S}_{\text{class}}(U_1, U_1) &\approx \sum_{ss'} \int d_3x \frac{v_{\text{coll } ss'} n_s m_s}{2T} (V_{\perp \text{dia } s} - V_{\perp \text{dia } s'})^2 \quad (\text{VI-50}) \\ \text{où } V_{\perp \text{dia}} &= - \frac{R_0 B_\theta}{eB} \left[\frac{\partial n}{n \partial \psi_G} + \left(\frac{H}{T} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial T}{T \partial \psi_G} \right]\end{aligned}$$

$v_{\text{coll } ss'}$ est la fréquence de collision des particules s (masse m_s) sur les particules s' . D'autre part, $\dot{S}_{\text{PS}}(U_1, U_1)$ est le taux de production d'entropie due au mouvement parallèle de chaque assemblée. Ce mouvement est tout d'abord dû à un déplacement diamagnétique à divergence nulle dans la direction ϕ à la vitesse $V_{\phi \text{ dia}}$, produisant avec le champ magnétique poloïdal B_θ une force de Laplace qui compense le gradient radial de pression .

$$V_{\phi \text{ dia}} = \bar{V}_{\phi \text{ dia}} \frac{R}{R_0} \quad (\text{VI-51})$$

$$\text{où } \bar{V}_{\phi \text{ dia}} = \frac{R_0}{e} T \left[\frac{\partial n}{n \partial \psi_G} + \left(\frac{H}{T} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial T}{T \partial \psi_G} \right] = - V_{\perp \text{dia}} \frac{B}{B_\theta}$$

A ce mouvement peut se superposer un mouvement parallèle arbitraire à la vitesse $W_{//}$ ne produisant aucune force de Laplace. Ce mouvement doit être à divergence nulle et donc doit être de la forme :

$$W_{// \text{div nulle}} = \varepsilon(H, \psi_G)B = W_{//}(H, \psi_G)\frac{B}{B_0}$$

Le mouvement parallèle à la vitesse moyenne $V_{\phi \text{ dia}}(B_{\phi} / B) + W_{//}$ correspond à un écart U_2 impaire donné par (VI-49). Tenant compte du fait que $R = R_0(1 + (r/R)\cos\theta)$ et que $B = B_0(1 - (r/R)\cos\theta)$, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{S}_{PS}(U_1, U_1) &\approx \sum_{ss'} \int d_3x \frac{v_{\text{coll } ss'} n_s m_s}{2T} \left[(V_{\phi \text{ dia } s} - V_{\phi \text{ dia } s'}) \left(1 + \frac{r}{R} \cos\theta\right) + (W_{//s} - W_{//s'}) \left(1 - \frac{r}{R} \cos\theta\right) \right]^2 \\ &\approx \sum_{ss'} \left\{ \int d_3x \frac{v_{\text{coll } ss'} n_s m_s}{2T} \left[(V_{\phi \text{ dia } s} + W_{//s}) - (V_{\phi \text{ dia } s'} + W_{//s'}) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \int d_3x \frac{v_{\text{coll } ss'} n_s m_s}{2T} \left[(V_{\phi \text{ dia } s} - W_{//s}) - (V_{\phi \text{ dia } s'} - W_{//s'}) \right]^2 \frac{r^2}{2R^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{VI-52})$$

Minimisant \dot{S}_{PS} par rapport à $W_{//s}$, on trouve $V_{\phi \text{ dia } s} + W_{//s} = V_{\phi \text{ dia } s'} + W_{//s'}$ et

$$\begin{aligned} \dot{S}_{PS}(U_1, U_1) &\approx \sum_{ss'} \int d_3x \frac{v_{\text{coll } ss'} n_s m_s}{2T} (V_{\phi \text{ dia } s} - V_{\phi \text{ dia } s'})^2 \\ &\approx 2q^2 \dot{S}_{\text{class}}(U_1, U_1) \end{aligned} \quad (\text{VI-53})$$

Minimisant $\sum_s \int d_3x \left[\frac{\partial n}{\partial t} \ln(n) + \frac{3}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \ln(T) \right] + (1 + 2q^2) \dot{S}_{\text{class}}(U_1, U_1)$ par rapport à $\underline{n}(\psi)$, on trouve :

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \text{div} \Gamma_s = 0$$

$$\Gamma_s = - \sum_{s'} v_{\text{coll } ss'} n_s m_s (1 + 2q^2) \frac{T}{e_s B^2} \left[\frac{\partial n_s}{e_s n_s \partial r} - \frac{\partial n_{s'}}{e_{s'} n_{s'} \partial r} \right] \quad (\text{VI-54})$$

VI.4 - Régimes faiblement collisionnels

En l'absence, ou la quasi-absence, de collisions, les fonctions de distribution F sont constantes le long des trajectoires. Si on suppose que le plasma est dans un état stationnaire, c'est-à-dire les fonction $F(x, p, t) = F(x, p)$ sont strictement indépendantes du temps, ces fonctions de distribution doivent être des constantes régulières du mouvement. En général, il existe une seule constante du mouvement, l'hamiltonien $H(x, p)$ (supposé indépendant du temps). Les fonctions $F(x, p)$ doivent alors être des fonctions de la forme $F(H)$. Ceci ne permet pas un plasma confiné dans l'espace. Le confinement nécessite que les trajectoires de chaque espèce soient intégrables, de sorte qu'il existe trois constantes du mouvement indépendantes $J(x, p) = (J_1(x, p), J_2(x, p) \text{ et } J_3(x, p))$. Dans un tokamak, ces variables sont évidemment liées aux constantes de base $H(x, p)$, $\mu \neq mv_{\perp}^2/(2B)$, $\mathcal{M} = Rp_{\phi} \neq e\psi(x_G)$. Une fonction de distribution $F(x, p)$, constante du mouvement, est alors une fonction $F(J) \neq F(H)$. Les trois constantes $J = (J_k)$ peuvent être déterminées de façon à être les variables d'action canoniquement conjuguées à des variables d'angle $\phi(x, p) = (\phi_k)$, telles que $(x, p) = f(J, \phi)$ soient 2π périodiques en ϕ_k . L'hamiltonien $H(x, p)$ étant une fonction $h(J)$, on a alors :

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \frac{\partial h(J)}{\partial J_k} ; \quad \frac{dJ_k}{dt} = - \frac{\partial h(J)}{\partial \phi_k} = 0$$

Toute variable dynamique $V_{\text{dyn}}(x, p)$ peut être mise sous la forme

$$V_{\text{dyn}}(x, p) = \sum_{n = n_1, n_2, n_3} V_{\text{dyn } n}(J) \exp(in_k \phi_k). \text{ La variable } V_{\text{dyn}} \text{ est résonante sur les}$$

trajectoires caractérisées par J si on a $V_{\text{dyn } n}(J) \neq 0$ et $n_k \frac{\partial h(J)}{\partial J_k} = 0$, c'est-à-dire

l'amplitude correspondante à une phase constante n'est pas nulle. Remarquons que $d_3x d_3p = d_3J d_3\phi$, de sorte que $F_0(J) d_3J (2\pi)^3$ est le nombre de particules dans le volume d_3J de l'espace J .

Dans le cas d'un tokamak, les variables ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 représentent respectivement la phase cyclotronique ϕ_c , la phase du mouvement du centre guide dans les directions poloidale θ et toroïdale ϕ . Du fait des topologies différentes des trajectoires, le système de coordonnées (J, ϕ) est évidemment discontinu lorsque l'on passe du domaine circulant au domaine piégé. Pour appliquer le principe de production d'entropie, il est commode de commencer avec un hamiltonien pour lequel toutes les trajectoires ont la même topologie. En fait, ceci assure que les fonctions de distribution $F(J)$ et les fonctions $u(J)$, écart à l'équilibre thermodynamique, telles que :

$$F(J) = A \exp\left[-\frac{h(J) - u(J)}{T}\right] \quad (\text{VI-55})$$

sont des fonctions simples et régulières de J . Cette simplification est obtenue en soustrayant à l'hamiltonien $H(x, p)$ correspondant à la configuration magnétique actuelle, la composante $\mu\tilde{B}$ où \tilde{B} est la variation du champ magnétique B sur chaque surface magnétique et est en fait la cause des effets de piégeage le long des lignes de champ. Avec ce nouvel hamiltonien $h(J) = H(x, p) - \mu\tilde{B}$, la vitesse parallèle $v_{G//}$ du centre guide devient une constante du mouvement. On trouve en fait :

$$\phi_1 \approx \phi_c, \quad \phi_2 \approx \theta_G, \quad \phi_3 \approx \phi_G \quad (\text{VI-56})$$

Les trois variables d'action J déterminent les trois constantes du mouvement μ , $Rp_\phi = e\psi(x_G) + Rmv_{G//} - e\psi(x_G)$ et $v_{G//}$:

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{m}{e} \mu \\ J_3 &= Rp_\phi \\ v_{G//} &= \frac{1}{mR} (J_3 - e f(\frac{J_2}{e})) \end{aligned} \quad (\text{VI-57})$$

où la fonction $f(\phi_{\text{toroïdal}})$ donne le flux poloidal, ψ , pour la surface magnétique

embrassant le flux toroïdal $\phi_{\text{toroïdal}}$. Comme $\frac{df(\phi_{\text{toroïdal}})}{d\phi_{\text{toroïdal}}} = -\frac{1}{q(\psi)}$, on a :

$$h(J) = \mu B + \frac{1}{2} m v_{//}^2$$

$$\frac{\partial h}{\partial J_2} = \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{d\theta_G}{dt} = \frac{v_{G//}}{qR} \quad (\text{VI-58})$$

$$\frac{\partial h}{\partial J_3} = \frac{d\phi_3}{dt} = \frac{d\varphi_G}{dt} = \frac{v_{G//}}{R}$$

Pour le cas axisymétrique, l'hamiltonien exact est :

$$H(x, p) = h(J) + \mu \tilde{B}_{\text{pol}} \quad (\text{VI-59})$$

$$\tilde{B}_{\text{pol}} \approx B_0 \frac{r}{R} \cos\phi_2 \approx B_0 \frac{r}{R} \cos\theta$$

Nous allons décomposer l'écart à l'équilibre thermodynamique U sous la forme $U_1 + U_2$ selon le schéma (VI-18) qui s'exprime maintenant à travers les équations :

$$U_1 = U_{n=(0,0,0)}(J) = u(J) \quad (VI-60)$$

$$U_2 = \sum_{n \neq (0,0,0)} U_n(J) \exp(in_k \phi_k)$$

Notons que les variables $u(J)$ et $\underline{u}(J)$ commutent de telle sorte que $(\Sigma U_1) * U_1 = 0$. La relation (VI-23a) est ainsi vérifiée.

Pour chaque assemblée d'un plasma confiné décrit par une densité $n(\psi)$ et une température $T(\psi)$, l'écart de base à l'équilibre thermodynamique s'écrit :

$$\frac{U_1}{T} = \frac{u(J)}{T} = \ln(n(J_3)) - \frac{3}{2} \ln(T(J_3)) - h(J) \left(\frac{1}{T(J_3)} - \frac{1}{T} \right) + \frac{mv_{G//}(J) W_{//}(J)}{T} \quad (VI-61)$$

avec une formule similaire pour $\underline{U}_1 = \underline{u}(J)$ en remplaçant n et T par \underline{n} et \underline{T} . En prenant en compte (VI-57), l'écart $u(J)$ représente pour chaque assemblée le mouvement diamagnétique à la vitesse $V_{\phi \text{ dia}}$ donnée par (VI-51) auquel se superpose un mouvement parallèle arbitraire à la vitesse $W_{//}(J)$. On notera que pour chaque assemblée, la quantité $V_{\phi} = V_{\phi \text{ dia}} + W_{//}$ est la vitesse macroscopique dans la direction toroïdale ϕ , la quantité $V_{\theta} = rW_{//}/(qR)$ est la vitesse macroscopique dans la direction poloïdale

θ . La grandeur $-4S \left(\frac{\partial U_1}{\partial t}, \underline{U}_1 \right)$ est encore donnée par (VI-47) :

$$-4S \left(\frac{\partial U_1}{\partial t}, \underline{U}_1 \right) = -4S \left(\frac{\partial u(J, t)}{\partial t}, \underline{u}(J) \right) = 2 \sum_s \int d_3x \left(\frac{\partial \underline{n}}{\partial t} \ln(\underline{n}) + \frac{3}{2} \frac{\partial \underline{T}}{\partial t} \ln(\underline{T}) \right) \quad (VI-62)$$

D'autre part, le taux de production d'entropie $\dot{S}(U_1, U_1)$ est déterminé, à l'ordre le plus bas en r/R , par le terme dominant dans $\dot{S}_{\text{class}} + \dot{S}_{\text{PS}}$ respectivement donnés par (VI-50) et (VI-52), soit tenant compte de $V_{\phi \text{ dia}} = -V_{\perp \text{ dia}} \frac{B}{B_{\theta}}$:

$$\begin{aligned} \dot{S}(U_1, U_1) &= \dot{S}(u(J), u(J)) \\ &\approx \sum_{ss'} \int d_3x \frac{n_s m_s v_{\text{coll } ss'}}{2T} [V_{\phi \text{ dias}} + W_{//s} - (V_{\phi \text{ dias}'} + W_{//s'})]^2 (1 + o(\frac{r^2}{R^2})) \end{aligned} \quad (\text{VI-63})$$

Dans un plasma faiblement collisionnel, la cause fondamentale pour une production d'entropie supplémentaire s'ajoutant à $\dot{S}(U_1, U_1) = \dot{S}(u(J), u(J))$ est le fait que les trajectoires déterminées par l'hamiltonien réel $H(x, p)$ ne sont plus strictement intégrables. Cela signifie que la petite perturbation δH telle que $H(x, p) = h(J) + \delta H(x, p)$, en fait $\delta H = \mu \tilde{B} \approx \mu(r/R) B_0 \cos \phi_2$ dans un tokamak axisymétrique, est résonante pour les trajectoires intégrables gouvernées par $h(J)$. En général, on a :

$$\delta H = \sum_n h_n(J) \exp(in_k \phi_k) + \text{c.c.} \quad (\text{VI-64})$$

pour laquelle un triplet (n) , ou une classe de triplets (n) , génère une surface résonante dans l'espace J telle que :

$$n_k \frac{d\phi_k}{dt} = n_k \frac{\partial h(J)}{\partial J_k} = 0$$

sur laquelle on a $h_n(J) \neq 0$ (et bien sûr $F(J) \neq 0$).

Pour avoir une première idée, on peut calculer U_2 en utilisant la formule (VI-21) en négligeant les collisions (c'est-à-dire \dot{S}_2^1 et \dot{S}_2^2) et au premier ordre en δH . On néglige donc δH dans $\sum_{2.}^2 = \frac{2}{T^2} \{ \cdot, h + \delta H \}_2^2$ et δH joue uniquement dans

$$\sum_{2.}^1 = \frac{2}{T^2} \{ \cdot, \delta H \}. \text{ Nous avons } U_2 = \sum_{n \neq (0, 0, 0)} U_{2n}(J) \exp(in_k \phi_k) \text{ et (VI-21) donne}$$

donc :

$$\begin{aligned} \Sigma_2^2 U_2 &= \frac{2}{T^2} \sum_{n \neq (0, 0, 0)} U_{2n}(J) \exp(in_k \phi_k) in_k \frac{\partial h}{\partial J_k} \\ - \Sigma_2^1 U_1 &= - \frac{2}{T^2} \sum_{n \neq (0, 0, 0)} - \frac{\partial U_1}{\partial J_k} \left[\frac{\partial}{\partial \phi_k} (h_n(J) \exp(in_k \phi_k)) \right] \end{aligned}$$

d'où

$$U_2 = \sum_{n \neq (0, 0, 0)} \frac{n_k \frac{\partial u(J)}{\partial J_k} h_n \exp(in_k \phi_k)}{n_k \frac{\partial h(J)}{\partial J_k}} \quad (\text{VI-65})$$

La variable U_2 diverge sur les surfaces de résonance telles que $n_k \frac{\partial h}{\partial J_k} = 0$, $h_n \neq 0$.

S'il n'existait pas de surface de résonance dans l'espace J , U_2 serait une fonction régulière et ne constituerait qu'une petite perturbation à $U_1(J) = u(J)$. Dans ce cas, l'évolution du système serait encore donnée approximativement par le principe :

$$- 4S\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}, \underline{U}_1\right) + \dot{S}(\underline{U}_1, \underline{U}_1) \text{ extremum en } \underline{U}_1 \quad (\text{VI-66})$$

Au contraire, l'existence de résonance rend U_2 et surtout ses gradients, dont dépend le taux de production d'entropie, très importants sur les surfaces de résonance dans l'espace J . On s'attend alors à une production d'entropie complémentaire $\dot{S}_{\text{compl}}(U_1)$ dans le principe (VI-66). \dot{S}_{compl} est donné par (VI-22b) où U_2 est exprimée en fonction de U_1 par (VI-21). En vue de résoudre la singularité de U_2 dans la formule (VI-65) autour des surfaces de résonance, nous devons introduire les effets non linéaires de δH dans Σ_2^2 et les effets collisionnels \dot{S}_2^2 agissant sur U_2 . En revanche, nous négligeons toujours \dot{S}_1^1 agissant sur U_1 . L'équation (VI-21) donnant U_2 devient :

$$(\Sigma_2^2 + 2 \dot{S}_2^2) U_2 = - \Sigma_2^1 U_1 = \frac{2}{T^2} \sum_{n \neq (0, 0, 0)} in_k \frac{\partial u}{\partial J_k} h_n(J) \exp(in_k \phi_k) \quad (\text{VI-67})$$

Le cas le plus simple est celui pour lequel nous avons une seule harmonique $\{n\}$ dans (VI-64) :

$$\delta H = h_n(J) \exp(i\varphi) + \text{c.c.} ; \varphi = n_k \phi_k$$

Nous avons donc une seule surface de résonance $\Omega(J) = 0$, où $\Omega(J) = n_k \frac{\partial h(J)}{\partial J_k}$, autour de laquelle la fonction $U_2(J, \phi)$ est localisée dans un intervalle $(\Omega) < \Delta\Omega$. Le calcul de U_2 est donné dans l'appendice 2. On trouve que la fonctionnelle $\dot{S}_{\text{compl}}(U_1, \underline{U}_1) = \dot{S}_{\text{compl}}(u(J), \underline{u}(J))$ donnée par (VI-22b) est symétrique, c'est-à-dire la condition (VI-23b) est réalisée. Les relations d'Onsager sont donc vérifiées. La présence de la perturbation résonante $\delta H = h_n(J) \exp(i\varphi) + \text{c.c.}$ se traduit par la présence dans le principe (VI-66) d'une production supplémentaire d'entropie :

$$\dot{S}_{\text{compl}}(u(J), \underline{u}(J)) = \frac{1}{T^2} \int \left(n_k \frac{\partial u}{\partial J_k} \right) \left(n_k \frac{\partial \underline{u}}{\partial J_k} \right) I \delta(\Omega) F_M d_3x d_3p \quad (\text{VI-68})$$

où la valeur de I dépend du régime de collisionnalité, défini par le rapport entre le coefficient de diffusion $\langle (\delta\Omega)^2 \rangle = (\Delta\Omega_{\text{Landau}})^3$ de la variable $\Omega(J)$ et l'extension

$(n_k \frac{\partial \Omega}{\partial J_k} \delta H)^{1/2} = \Delta\Omega_{\text{îlot}}$ du domaine piégé créé par δH autour de la surface résonante (Requin, 1981). Dans le régime de Landau ($\Delta\Omega_{\text{Landau}} \gg \Delta\Omega_{\text{îlot}}$), nous avons $\Delta\Omega \approx \Delta\Omega_{\text{Landau}}$ et

$$I = 2\pi |h_n(J)|^2 \quad (\text{VI-69})$$

Le régime Zakharov-Karpman ($\Delta\Omega_{\text{Landau}} \ll \Delta\Omega_{\text{îlot}}$) (Zakharov & Karpman, 1963) mène à $\Delta\Omega \approx \Delta\Omega_{\text{îlot}}$ et

$$I = 1,38 \sqrt{2} \frac{|h_n(J)|^{1/2}}{\vartheta^{3/2}} \langle (\delta\Omega)^2 \rangle \quad (\text{VI-70})$$

Dans le cas d'un tokamak axisymétrique, pour lequel $\delta H = \mu \tilde{B} = \mu B_0 \frac{r}{R} \cos \theta$, nous avons, compte tenu de (VI-56), (VI-57) et (VI-58) :

$$\varphi = \phi_2 = \theta_G$$

$$\mathbf{n} = (0, 1, 0)$$

$$k_n = -\frac{\mu_0}{2} B_0 \frac{r}{R} \quad (\text{VI-71})$$

$$\Omega = \frac{\partial h}{\partial J_2} = \frac{v_{G//}}{qR}$$

$$\vartheta = \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} = \frac{1}{qR} \frac{\partial v_{G//}}{\partial J_2} = \frac{1}{mR^2 q^2}$$

$$\langle (\delta \Omega)^2 \rangle = \langle (\delta v_{G//})^2 \rangle \frac{1}{q^2 R^2} = \frac{1}{2q^2 R^2} \langle (\delta v_{\perp})^2 \rangle_{\text{Spitzer}}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial J_2} = \frac{\partial u}{\partial J_2} = m W_{//} \frac{\partial v_{G//}}{\partial J_2} = \frac{W_{//}}{qR}$$

La production d'entropie complémentaire (VI-68) pour chaque espèce est alors de la forme :

$$\dot{S}_{\text{compl}}(u(J), u(J)) = \frac{1}{\theta^2} \int \frac{1}{q^2 R^2} (W_{//})^2 I \delta(\Omega) F_M d_3x d_3p \quad (\text{VI-72})$$

On peut alors calculer la valeur de $\dot{S}_{\text{compl}}(U_1, U_1)$ à ajouter dans le principe (VI-66). En substituant à la perturbation $\frac{\tilde{B}_{\text{pol}}}{B} = \frac{r}{R} \cos \theta$ une perturbation magnétique d'ondulation ("ripple") due au caractère discret des bobines produisant le champ toroïdal, $\frac{\tilde{B}_{\text{ripple}}}{B} = b \cos N\varphi$, le calcul est analogue et la formule (VI-68) donne encore la production d'entropie complémentaire $\dot{S}_{\text{compl}}(U_1, U_1)$ à ajouter au principe (VI-66). Compte tenu de (VI-62) et (VI-63), le principe qui gouverne l'évolution des profils devient :

$$2 \sum_s \int d_3x \left[\frac{\partial n}{\partial t} \ln(\underline{n}) + \frac{3}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \ln(\underline{T}) \right] + \dot{S}_{\text{actuel}}(\underline{U}_1, \underline{U}_1) \quad (\text{VI-73})$$

extremum en \underline{U}_1 déterminé par $\frac{\partial \underline{n}}{\underline{n} \partial \psi}$, $\frac{\partial \underline{T}}{\underline{T} \partial \psi}$ et $\underline{W}_{//}$

$$\dot{S}_{\text{actuel}} = \dot{S}_{\text{coll } \varphi} + \dot{S}_{\text{pomp mag}}$$

$$\text{où} \quad \dot{S}_{\text{coll } \varphi}(\underline{U}_1, \underline{U}_1) = \dot{S}(\underline{U}_1, \underline{U}_1) \quad (\text{VI-74})$$

$$\approx \sum_{ss'} \int d_3x \frac{n_s m_s v_{\text{coll } ss'}}{2T} [V_{\varphi \text{ dia } s} + W_{//s} - (V_{\varphi \text{ dia } s'} + W_{//s'})]^2 \left(1 + o\left(\frac{r^2}{R^2}\right) \right)$$

$$V_{\varphi \text{ dia}} = - \frac{R_0 T}{e} \left[\frac{\partial n}{n \partial \psi} + \left(\frac{H}{T} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial T}{T \partial \psi} \right]$$

$$\dot{S}_{\text{pomp mag}} = \dot{S}_{\text{compl}}(\underline{U}_1, \underline{U}_1)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{T} \int d_3x K_{\theta} \left(\frac{r}{qR} \right)^2 W_{//}^2 & \text{pour } \frac{\tilde{B}_{\text{pol}}}{B} = \frac{r}{R} \cos \theta \\ \frac{1}{T} \int d_3x K_{\varphi} (V_{\varphi \text{ dia}} + W_{//})^2 & \text{pour } \frac{\tilde{B}_{\text{ripple}}}{B} = b \cos N\varphi \end{cases} \quad (\text{VI-75})$$

Dans le régime Landau, caractérisé par :

$$1 < k_{//} \lambda_{\text{coll}} < \left(\frac{B}{\tilde{B}} \right)^{3/2} \quad (\text{VI-76a})$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} k_{//} = \frac{1}{qR} & \text{pour } \frac{\tilde{B}_{\text{pol}}}{B} = \frac{r}{R} \cos \theta \\ k_{//} = \frac{N}{R} & \text{pour } \frac{\tilde{B}_{\text{ripple}}}{B} = b \cos N\varphi \end{cases}$$

et λ_{coll} est le libre parcours moyen, on a :

$$K_{\theta} = n \sqrt{\pi} qR \left(\frac{1}{r}\right)^2 \frac{m^2}{4T} \left(\frac{r}{R}\right)^2 v_{\text{th}}^3 \quad (\text{VI-76b})$$

$$K_{\varphi} = n \sqrt{\pi} \frac{R}{N} \left(\frac{N}{R}\right)^2 \frac{m^2}{4T} b^2 v_{\text{th}}^3$$

Dans le régime Zakharov-Karpman, caractérisé par :

$$\left(\frac{\tilde{B}}{B}\right)^{3/2} < k_{//} \lambda_{\text{coll}} \quad (\text{VI-77a})$$

nous avons :

$$K_{\theta} = 0,55 n \sqrt{\pi} qR \left(\frac{1}{r}\right)^2 \frac{m^2}{4T} \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2} v_{\text{th}}^2 \frac{qR}{\tau_{\text{coll}}} \quad (\text{VI-77b})$$

$$K_{\varphi} = 0,55 n \sqrt{\pi} \frac{R}{N} \left(\frac{N}{R}\right)^2 \frac{m^2}{4T} b^{1/2} \frac{R}{N} \frac{1}{\tau_{\text{coll}}}$$

avec $\frac{1}{\tau_{\text{coll}}} = \frac{\langle (v_{\perp})^2 \rangle}{v_{\text{th}}^2}$ où $\langle (v_{\perp})^2 \rangle$ est le coefficient de Spitzer (Spitzer, 1967) pour l'espèce considérée à la vitesse thermique v_{th} .

La vitesse $W_{//}$ détermine la vitesse macroscopique de chaque assemblée dans la direction poloïdale $V_{\theta} = \frac{B_{\theta}}{B} W_{//} = \frac{r}{qR} W_{//}$. De même, la vitesse $V_{\varphi} = V_{\varphi\text{dia}} + W_{//}$ est la vitesse macroscopique toroïdale. Il résulte de (VI-75) que la production d'entropie par unité de volume, due à la perturbation $\frac{\tilde{B}}{B} = \frac{r}{R} \cos\theta$ ou $\frac{\tilde{B}}{B} = b \cos N\varphi$, s'exprime sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{T} K_{\theta} V_{\theta}^2 & \text{pour } \frac{\tilde{B}_{\text{pol}}}{B} = \frac{r}{R} \cos\theta \\ \frac{1}{T} K_{\varphi} V_{\varphi}^2 & \text{pour } \frac{\tilde{B}_{\text{ripple}}}{B} = b \cos N\varphi \end{cases}$$

La quantité $-K_{\theta} V_{\theta}$ (ou $-K_{\varphi} V_{\varphi}$) s'interprète donc comme une force de friction dans la direction θ (φ) due à un effet de pompage magnétique (Nguyen *et al.*, 1991) : la perturbation \tilde{B} , de nombre d'onde $\vec{k} = \frac{1}{r} \vec{e}_{\theta}$ (ou $\vec{k} = \frac{N}{R} \vec{e}_{\varphi}$), se déplaçant à la vitesse

$\vec{V} = V_\theta \vec{e}_\theta$ (ou $V_\phi \vec{e}_\phi$) par rapport à une population, exerce sur cette population une force de friction $-K_\theta V_\theta \vec{e}_\theta$ (ou $-K_\phi V_\phi \vec{e}_\phi$) proportionnelle à $-(\vec{k} \cdot \vec{V})\vec{k}$. Dans le cas précis où chaque assemblée a des vitesses macroscopiques $V_\theta \vec{e}_\theta$ et $V_\phi \vec{e}_\phi$ définies, cette interprétation en terme de friction est possible mais elle n'est pas universelle. La seule réalité physique est en fait la production d'entropie. Dans des situations plus compliquées, il n'est plus possible d'exhiber des forces s'apparentant à des frictions alors que la production d'entropie existe toujours, d'où l'intérêt du principe d'extrémalisation (VI-66).

Dans le cas axisymétrique où la perturbation appliquée est $\frac{\tilde{B}}{B} = \frac{r}{R} \cos\theta$, on a les ordres de grandeur suivants :

$$\dot{S}_{\text{coll } \phi} \propto \left(\frac{r^2}{R^2}\right) \ll \dot{S}_{\text{pomp mag}} \ll \dot{S}_{\text{coll } \phi}$$

Lorsque nous effectuons la minimisation par rapport à $W_{//}$, nous devons annuler le terme dominant $\dot{S}_{\text{coll } \phi}$. Le terme $V_{\phi \text{ dia}} + W_{//}$ doit donc être constant, égal à C_{ste} indépendant de l'assemblée. $\dot{S}_{\text{actuel}}(U_1, U_1)$ se réduit à $\dot{S}_{\text{pomp mag}}$ qui vaut :

$$\dot{S}_{\text{pomp mag}} = \sum_s \frac{1}{T} \int d_3x K_\theta \left(\frac{r}{qR}\right)^2 (C_{\text{ste}} - V_{\phi \text{ dia}})^2 \text{ pour } \frac{\tilde{B}_{\text{pol}}}{B} = \frac{r}{R} \cos\theta$$

La minimisation par rapport à C_{ste} donne alors $\sum_s K_{\theta s} (C_{\text{ste}} - V_{\phi \text{ dia}}) = 0$ c'est-à-dire :

$$C_{\text{ste}} = \frac{\sum_s K_{\theta s} V_{\phi \text{ dia } s}}{\sum_s K_{\theta s}}$$

La minimisation de (VI-73) par rapport à n_s mène à :

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \text{div } \Gamma_s = 0$$

$$\text{où : } e_s \Gamma_s = -\frac{T}{B_0^2} \sum_{s'} \frac{K_{\theta s} K_{\theta s'}}{\sum_{s''} K_{\theta s''}} \left(\frac{\partial n_s}{e_s n_s \partial r} - \frac{\partial n_{s'}}{e_{s'} n_{s'} \partial r} \right)$$

Nous allons maintenant considérer les cas où la somme (VI-64) comporte plusieurs perturbations résonantes $h_n \exp(i n_k \phi_k)$, $h_{n'} \exp(i n'_k \phi_k)$, ... dont les domaines de résonance sont définis par les largeurs $|\Omega| < \Delta\Omega$, $|\Omega'| < \Delta\Omega'$, ... autour des surfaces résonantes $\Omega(J) = 0$, $\Omega'(J) = 0$, ...

1°) Les domaines résonants sont disjoints. Chaque perturbation agit comme si elle était seule et donne lieu à une production d'entropie complémentaire \dot{S}_{compl} . On ajoute alors simplement ces termes dans le principe (VI-66).

2°) Les domaines résonants se recouvrent. Deux cas se présentent selon les localisations des résonances.

a) Cas "Chirikov"

Les perturbations d'indice (n) et (n') font partie d'une série $[\{n\}, \{n'\}, \{n''\}, \dots]$ de modes voisins avec des indices (n) , (n') , (n'') , ... voisins. Si chaque perturbation est dans le régime Landau, la variable U_2 , donnée par (VI-65) et (2-1) de l'appendice 2, dépend linéairement des perturbations. Elle est alors égale à la somme des fonctions U_2 créées par chaque terme d'indice (n) . La production d'entropie complémentaire à ajouter dans le principe (VI-66) est également la somme des \dot{S}_{compl} de type Landau calculées pour chaque mode $\{n\}$ d'indice (n) . La minimisation par rapport à $\underline{u}(J)$ donne la contribution des perturbations $\{n\}$ à la diffusion que l'on peut écrire, notant que :

$$-4S \left(\frac{\partial \underline{u}(J)}{\partial t}, \underline{u}(J) \right) = \frac{2}{T} \int \frac{\partial F(J)}{\partial t} \underline{u}(J) d_3x d_3p$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\pi \frac{\partial}{\partial J_k} \left[D_{kl} \frac{\partial F}{\partial J_l} \right] \quad (\text{VI-78})$$

$$\text{où } D_{kl} = \sum_n |h_n|^2 n_k n_l \delta \left(n_k \frac{\partial h}{\partial J_k} \right)$$

Cette loi est la loi de diffusion quasi-linéaire. Elle est en fait équivalente à imposer que la production d'entropie complémentaire \dot{S}_{compl} à ajouter dans le principe (VI-66) est la somme des \dot{S}_{compl} de type Landau créés par chaque perturbation $\{n\}$.

Si chaque perturbation est dans le régime Zakharov-Karpman, le recouvrement des domaines de résonance traduit le critère de Chirikov (car $\Delta\Omega_{\text{domaine (Z-K)}} = \Delta\Omega_{\text{îlot}}$). On admet que la diffusion quasi-linéaire s'applique. Cette loi de diffusion de type quasi-linéaire implique alors que la production d'entropie à ajouter dans le principe (VI-66) est la production d'entropie \dot{S}_{compl} de type Landau.

Finalement dans tous les cas où les domaines de résonance se recouvrent, la production d'entropie \dot{S}_{compl} , due à la perturbation δH , est constituée par la somme des termes \dot{S}_{compl} de type Landau, dus à chaque composante h_n de la perturbation. Du fait de (VI-22b), le terme complémentaire \dot{S}_{compl} est donné par $U_2 * \sum_2^1 U_1$ où $\sum_2^1 U_1$ est une variable de même échelle que δH et $U(J)$. Les composantes de U_2 à ces échelles de base ont donc dans tous les cas la structure linéaire en δH applicable au régime Landau. Cependant, quel que soit le régime faiblement collisionnel, l'expression Landau de \dot{S}_{compl} , indépendante du taux de collision, est égale au taux effectif de production d'entropie, c'est-à-dire que nous avons :

$$\dot{S}_{\text{compl}} \approx \int \alpha |\nabla_p U_2|^2 \langle (\delta p)^2 \rangle d_3x d_3p \quad (\text{VI-79})$$

Quand le régime devient de moins en moins collisionnel, $\langle (\delta p)^2 \rangle$ tend vers zéro et il faut donc que $|\nabla_p U|^2$ devienne très grand, ce qui implique que U_2 ait des composantes de très petite échelle δp dans l'espace des phases : comme la fonction de distribution F est pratiquement constante le long des lignes de champ, la stochasticité de ces dernières produit en effet ces gradients $|\nabla_p U|$ très importants.

Tous ces résultats s'appliquent à la perturbation produite par le divertor ergodique. La perturbation à prendre en compte est alors de la forme :

$$\delta H = -e \vec{\delta A} \cdot \vec{v}_{//} \quad \text{où} \quad \delta A_{//} = \sum_{mn} A_{mn}(\psi) \exp[i(m\theta^* + n\varphi^*)] \quad (\text{VI-80})$$

Les variables angulaires ϕ_2 et ϕ_3 sont les coordonnées intrinsèques θ^* et φ^* et la perturbation δH est une somme des termes de la forme (VI-64), avec des indices (n) voisins. La condition de recouvrement des domaines résonants $\Delta\Omega$ dans l'espace des phases est équivalente à la condition de recouvrement des îlots magnétiques. La loi de

diffusion (VI-78) dans l'espaces des phases ψ , $v_{//}$ reflète la diffusion transverse des lignes de champ. La stochasticité de ces lignes est nécessaire pour assurer que le taux effectif de production d'entropie donné par (VI-79) est bien égal au taux de production d'entropie de type Landau, même si on est dans le régime Zakharov-Karpman.

b) Les deux modes sont résonants sur la même surface

On considère deux perturbations $\{n\}$ et $\{n'\}$ dont les indices (n) et (n') sont très différents mais dont les domaines résonants se recouvrent tout de même parce que les surfaces de résonance définies par

$$n_k \omega_k(J) = 0 \quad \text{et} \quad n'_k \omega'_k(J) = 0 \quad (\text{VI-81})$$

coïncident. Remarquons que l'on peut toujours trouver un système de variables angulaire et d'action tel que l'on puisse écrire les indices sous la forme $n = (0, n_2, 0)$ et $n' = (0, 0, n_3)$. Les équations (VI-81) impliquent alors que les fréquences $\omega_2(J)$ et $\omega_3(J)$ s'annulent toutes les deux sur la surface de résonance. Nous allons dans la suite, sans perte de généralité, nous placer dans la situation tokamak. Les deux perturbations

que nous appliquons sont la modulation du champ $\frac{\tilde{B}_{pol}}{B} = \frac{r}{R} \cos\theta = \frac{r}{R} \cos\phi_2$ et

l'ondulation magnétique ("*ripple*") $\frac{\tilde{B}_{ripple}}{B} = b \cos N\phi = b \cos\phi_3$. Ces perturbations s'appliquent à la configuration de base, sans domaine piégé, décrite par (VI-56), (VI-57) et (VI-58). Nous avons alors $n = (0, 1, 0)$ et $n' = (0, 0, N)$. Nous savons d'après

(VI-58) que $\omega_2 = \frac{v_{//}(J)}{qR}$ et $\omega_3 = \frac{v_{//}(J)}{R}$. Les équations (VI-81) s'écrivent :

$$\begin{cases} \omega_2(J) = \frac{v_{//}(J)}{qR} = 0 \\ N\omega_3(J) = \frac{N v_{//}(J)}{R} = 0 \end{cases} \quad (\text{VI-82})$$

et sont alors vérifiées sur la surface $v_{//}(J) = 0$.

Pour trouver la production d'entropie complémentaire à appliquer dans le principe (VI-66), on peut supposer que l'une des perturbations est d'abord appliquée seule. Cette perturbation \tilde{B}_1 crée alors une production d'entropie complémentaire $\dot{S}_{\text{compl}}(\tilde{B}_1/\Delta v_{//1})$ donnée par (VI-75), localisée dans un domaine $\Delta v_{//1}$ autour de $v_{//} = 0$. Si cette perturbation ne produit pas de particules piégées (régime Landau), la seconde perturbation \tilde{B}_2 agit linéairement sur la configuration de base et ajoute une production d'entropie complémentaire $\dot{S}_{\text{compl}}(\tilde{B}_2/\Delta v_{//2})$ toujours calculée avec (VI-75), localisée dans un domaine $\Delta v_{//2}$ autour de $v_{//} = 0$.

Si au contraire, la première perturbation crée des particules piégées (régime Zakharov-Karpman), la production d'entropie due à la seconde perturbation se calcule différemment pour les particules piégées et les particules circulantes. Les particules piégées occupent un domaine piégé $\Delta v_{//\text{piégé}}$ centré sur $v_{//} = 0$ dans l'espace des phases. Les trajectoires des particules ont une nouvelle topologie dans ce domaine piégé et il faut redéfinir des nouvelles variables angulaire et d'action ϕ_k, j_k . La production d'entropie complémentaire due à l'action de la seconde perturbation sur ces particules piégées se calcule comme précédemment selon le schéma donné par (VI-21) (VI-22) mais compte tenu de la nouvelle topologie et aussi du fait de la possibilité du dépiégeage par l'effet des collisions.

Si $\Delta v_{//2}$ est beaucoup plus grand que $\Delta v_{//1}$, la production d'entropie complémentaire due à \tilde{B}_2 est d'abord la contribution des particules dans $\Delta v_{//2}$, non piégées par \tilde{B}_1 , approximativement égale à $\dot{S}_{\text{compl}}(\tilde{B}_2/\Delta v_{//2})$, à laquelle on ajoute $\dot{S}_{\text{compl}}(\tilde{B}_2/\Delta v_{//1})$ due à l'action de \tilde{B}_2 sur les particules piégées créées par \tilde{B}_1 dans $\Delta v_{//1}$. Si les domaines $\Delta v_{//2}$ et $\Delta v_{//1}$ sont de taille comparable, la production d'entropie due à \tilde{B}_2 agissant sur les particules non piégées par \tilde{B}_1 est mal définie, mais nous vérifierons a posteriori que $\dot{S}_{\text{compl}}(\tilde{B}_2/\Delta v_{//1}) \gg \dot{S}_{\text{compl}}(\tilde{B}_2/\Delta v_{//2})$. Finalement dans tous les cas où une première perturbation \tilde{B}_1 produit des particules piégées, la production d'entropie complémentaire due à la seconde perturbation \tilde{B}_2 sera la somme :

$$\dot{S}_{\text{compl}}(\tilde{B}_2/\Delta v_{//2}) + \dot{S}_{\text{compl}}(\tilde{B}_2/\Delta v_{//1})$$

Nous devons maintenant déterminer quelle sera la perturbation qui jouera le rôle de première perturbation car les deux productions d'entropie $\dot{S}_{\text{compl}}(\tilde{B}_1/\Delta v_{//2})$ et $\dot{S}_{\text{compl}}(\tilde{B}_2/\Delta v_{//1})$ sont très différentes. En fait, les deux perturbations envisagées ne jouent pas un rôle symétrique vis-à-vis du piégeage : l'une d'elles, $\tilde{B}_{\text{ripple}}$, correspond à une faible extension du domaine piégé le long des trajectoires lors du mouvement de

va-et-vient ($\sim R/N$) ; l'autre perturbation, \tilde{B}_{pol} , donne une extension plus importante ($\sim qR$). Si le piégeage dans l'ondulation magnétique ("*ripple*") est effectif, il supprime alors la possibilité de piégeage par \tilde{B}_{pol} qui nécessite des allers et retours de longueur parallèle qR . L'ondulation magnétique ("*ripple*") jouera alors le rôle de première perturbation. Si le piégeage par \tilde{B}_{ripple} n'est pas effectif, on doit alors d'abord envisager le piégeage par \tilde{B}_{pol} auquel se superposerait l'action de \tilde{B}_{ripple} .

Le piégeage par \tilde{B}_{ripple} est effectif si les minima locaux dus à \tilde{B}_{ripple} ne sont pas détruits par la modulation \tilde{B}_{pol} , c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} \nabla_{//} \tilde{B} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\tilde{B}_{ripple} + \tilde{B}_{pol}) = 0 & (VI-83) \\ \left(\Leftrightarrow \frac{Nb}{R} \sin N\varphi + \frac{r}{R} \frac{1}{qR} \sin \theta = 0 \right) \end{aligned}$$

a des solutions en φ dans un domaine étendu en θ . Ceci se produit si :

$$\frac{bN}{R} > \frac{r}{R} \frac{1}{qR} \quad (VI-84a)$$

D'autre part, il est également nécessaire que les particules soient dans le régime Zakharov-Karpman vis-à-vis de la perturbation \tilde{B}_{ripple} :

$$\frac{1}{b^{3/2}} < \frac{N}{R} \lambda_{coll} \quad (VI-84b)$$

Outre la production d'entropie (VI-75) créée par \tilde{B}_{ripple} , l'application de \tilde{B}_{pol} donne une production d'entropie (VI-75) ainsi qu'une production d'entropie supplémentaire $\dot{S}_{compl}(\tilde{B}_{pol} / \Delta v_{// ripple})$ localisée dans le domaine piégé par \tilde{B}_{ripple} . L'hamiltonien perturbateur s'écrit dans les nouvelles variables angulaire et d'action φ_k, j_k qui décrivent ce domaine piégé :

$$\mu \tilde{B}_{pol} = \sum_v h_v(j) \exp(i v_k \varphi_k) \quad (VI-85)$$

$\dot{S}_{compl}(\tilde{B}_{pol} / \Delta v_{// ripple})$ est alors donnée par (VI-68) et (VI-69) où $\delta(\Omega)$ est remplacée

par $\frac{1}{\pi} \frac{\gamma_{eff}}{(\gamma_{eff})^2 + \omega^2}$, $\frac{1}{\gamma_{eff}}$ étant le temps de piégeage des particules piégées dans \tilde{B}_{ripple}

En principe les fréquences $\omega + n_k \omega_k$ sont de la forme $\omega_{\text{précession}} + v\omega_{\text{va-et-vient}}$ reflétant les harmoniques $v\omega_{\text{va-et-vient}}$ du mouvement de va-et-vient de la particule piégée et $\omega_{\text{précession}}$ le mouvement de dérive de cette trajectoire de va-et-vient. Le terme n_k à considérer correspond à $v = 0$ (moyenne sur le mouvement de va-et-vient), $\omega = \omega_{\text{précession}}$ étant supposé plus petit que γ_{eff} . On a alors :

$$\dot{S}_{\text{compl}}(\tilde{B}_{\text{pol}} / \Delta v_{\text{ripple}}) = \frac{1}{T^2} \left(\frac{1}{r} \frac{T}{eB} \frac{\partial n}{n \partial r} \right)^2 \frac{(\mu \tilde{B}_{\text{pol}})^2}{\gamma_{\text{eff}}} n b^{1/2} \quad (\text{VI-86})$$

$$\text{où } \gamma_{\text{eff}} = \frac{1}{\tau_{\text{coll}}} \frac{1}{b}$$

Si le piégeage par $\tilde{B}_{\text{ripple}}$ n'est pas effectif, nous envisageons alors le piégeage par \tilde{B}_{pol} . Il faut pour cela que les particules soient dans le régime Zakharov-Karpman vis-à-vis de la perturbation \tilde{B}_{pol} c'est-à-dire :

$$\left(\frac{R}{r} \right)^{3/2} < \frac{\lambda_{\text{coll}}}{qR} \quad (\text{VI-87})$$

Comme précédemment, nous devons ajouter au principe (VI-66) les productions d'entropie (VI-75) dues à \tilde{B}_{pol} et $\tilde{B}_{\text{ripple}}$ ainsi que la production d'entropie complémentaire due à l'action de $\tilde{B}_{\text{ripple}}$ sur les particules piégées par \tilde{B}_{pol} :

$$\dot{S}_{\text{compl}}(\tilde{B}_{\text{ripple}} / \Delta v_{\text{poloïdal}}) = \frac{1}{T^2} \left(\frac{N}{R} \frac{T}{eB} \frac{\partial n}{n \partial r} \frac{qR}{r} \right)^2 (\mu \tilde{B}_{\text{ripple}})^2 \left(\frac{nr}{R} \right)^{1/2} \quad (\text{VI-88})$$

$$\text{où } \gamma_{\text{eff}} = \frac{1}{\tau_{\text{coll}}} \frac{1}{r/R}$$

Cette expression ne contient pas la correction due au fait que dans ce grand domaine (spatialement en θ), il existe de nombreuses phases résonantes pour $\tilde{B}_{\text{ripple}}$.

VI.5 - Application à la diffusion néo-classique en présence de la perturbation magnétique du divertor ergodique

Introduction

Le divertor ergodique permet d'appliquer une perturbation magnétique résonante au bord d'une configuration tokamak qui détruit les surfaces magnétiques. Les lignes de champ dans cette couche connectent le plasma confiné à la paroi matérielle (Nguyen *et al.*, 1990). On attend d'une telle connexion entre le plasma et la paroi les mêmes effets que pour un divertor axisymétrique, c'est-à-dire un lessivage des ions impuretés par le flux parallèle d'ions hydrogène recyclants et une condensation près du mur (à pression constante le long des lignes de champ) d'un plasma dense et froid (Samain *et al.*, 1984b, 1990). Ces effets nécessitent des régimes très collisionnels.

Nous examinons ici la possibilité du contrôle des impuretés avec le divertor ergodique dans des régimes faiblement collisionnels où les effets de frictions des ions hydrogène sur les impuretés sont faibles. Une décontamination peut alors se produire à travers un champ électrique radial imposé par le divertor ergodique dans le référentiel du laboratoire. En effet, à cause de leur vitesse élevée le long des lignes de champ, les électrons tendent à se placer en équilibre thermodynamique dans la couche stochastique.

Ceci signifie qu'un champ électrique radial $E_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$ qui confine les électrons apparaît dans le référentiel du laboratoire (Feneberg *et al.*, 1988, Garbet *et al.*, 1988), en supposant que la température T est constante :

$$E_r = \frac{T}{e} \frac{\partial n_e}{n_e \partial r} \quad (\text{VI-89})$$

Comme nous le verrons par la suite, cet effet se produit dès que le coefficient de diffusion électronique, dû au divertor ergodique, est grand devant le coefficient de diffusion des ions. De plus, nous supposons dans ce qui suit que la perturbation électro-magnétique créée par le divertor ergodique n'a pratiquement aucune action sur le coefficient de diffusion des ions. Un champ électrique radial dirigé vers l'extérieur a été observé sur TEXT (Schoch *et al.*, 1988) et sur TORE SUPRA (Grosman *et al.*, 1992).

Toute perturbation statique dans le référentiel du laboratoire qui est résonante avec les ions impureté (Z) freine le mouvement macroscopique de l'assemblée (Z) le long des surfaces magnétiques. Ceci signifie que la perturbation tend à mettre l'assemblée (Z) en équilibre thermodynamique dans le référentiel du laboratoire, i.e. à annuler la quantité

$-\frac{T\partial n_Z}{e_Z n_Z \partial r} + e_Z E_r$. En conséquence, la perturbation tend à induire un flux radial d'ions (Z) de la forme :

$$\Gamma(Z) = -D n_Z \left(\frac{\partial n_Z}{n_Z \partial r} - e_Z \frac{E_r}{T} \right) = -D n_Z \left(\frac{\partial n_Z}{n_Z \partial r} + Z \frac{\partial n_e}{n_e \partial r} \right) ; \quad D > 0 \quad (\text{VI-90})$$

D est un coefficient de diffusion

qui mène à un flux dirigé vers l'extérieur d'ions (Z), en dehors du profil de n_e . Ceci s'oppose à l'effet de friction entre les ions impureté (Z) et les ions légers (H). Ces effets collisionnels agissent de façon à ce que ces deux assemblées se trouvent en équilibre thermodynamique dans le même référentiel en rotation autour de l'axe principal. Un tel référentiel existe uniquement si la différence des vitesses diamagnétiques

$\frac{T}{B} \left(\frac{\partial n_Z}{e_Z n_Z \partial r} - \frac{\partial n_H}{e_H n_H \partial r} \right)$ s'annule. Les frictions dans ce cas donnent lieu à un flux radial d'ions (Z) de forme néo-classique :

$$\Gamma(Z) = -\frac{\Gamma(H)}{Z} = -D' n_Z \left(\frac{\partial n_Z}{n_Z \partial r} - Z \frac{\partial n_H}{n_H \partial r} \right) \quad (\text{VI-91})$$

D' est un coefficient de diffusion

correspondant à une accumulation vers l'intérieur d'ions (Z) dans le profil n_H . Notre but est d'étudier le flux $\Gamma(Z)$ dans la couche stochastique créée par un divertor ergodique, en supposant que la perturbation résonante statique qui gêne le mouvement macroscopique des ions (Z) consiste en une perturbation de type ondulation magnétique

("ripple") $\frac{\tilde{B}_{\text{ripple}}}{B} = b \cos N\varphi$ à laquelle se superpose une modulation poloïdale

$\frac{\tilde{B}_{\text{pol}}}{B} = \frac{r}{R} \cos\theta$. Nous allons calculer pour divers régimes collisionnels la valeur seuil de

la perturbation ondulation magnétique ("ripple") pour laquelle s'opère la transition de la structure (VI-90) à (VI-91).

Equilibre électronique

Pour l'assemblée électronique, caractérisée par la charge e et la vitesse V dans la couche ergodique, l'équation d'équilibre mécanique est donnée par :

$$n_e (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) - \vec{\nabla}P + \vec{F} = \vec{0} \quad (\text{VI-92})$$

où \vec{F} représente les effets de friction. Le transport de l'énergie est donné par $\vec{Q} = -\chi_{\text{erg}} \vec{\nabla}T$. Comme ce flux d'énergie Q est fini et que χ_{erg} a une valeur très grande dans la couche ergodique, le gradient de température $\partial T/\partial r$ est négligeable. Nous supposons donc que la température est constante. La projection sur la direction radiale donne :

$$n_e e (E_r + V_\theta B_\phi - V_\phi B_\theta) - T \frac{\partial n_e}{\partial r} = 0 \quad (\text{VI-93})$$

Dans le contexte de (VI-93), l'équation (VI-89) exprime que l'assemblée électronique ne présente pas de vitesse macroscopique dans la direction diamagnétique y :

$$V_y = \frac{1}{B} (V_\theta B_\phi - V_\phi B_\theta) = \frac{1}{B} \left(\frac{T \partial n_e}{e n_e \partial r} - E_r \right)$$

L'annulation de V_y traduit en fait le fort effet résonant des électrons avec la perturbation statique créée par le divertor ergodique. Si V_y n'est pas nulle, cette perturbation exerce une force de friction F_y importante sur l'assemblée électronique et produit un flux radial $\Gamma(e)$ qui vérifie la relation de Laplace $eB\Gamma_e = F_y$. La valeur quasi-linéaire est :

$$\Gamma(e) = - n_e D_{\text{LC}} v_{\text{the}} \left(\frac{\partial n_e}{n_e \partial r} - \frac{e E_r}{T} \right)$$

où D_{LC} est le coefficient de diffusion quasi-linéaire des lignes de champ magnétique. Ce flux électronique radial doit vérifier l'ambipolarité globale :

$$e\Gamma(e) + e_Z\Gamma(Z) + e_H\Gamma(H) = 0 \quad (\text{VI-94})$$

L'équation (VI-94) impose (VI-89) dès que le coefficient de diffusion des électrons $D_{\text{LC}} v_{\text{the}}$ induit par la perturbation magnétique résonante du divertor ergodique est bien plus grand que les coefficients de diffusion ioniques $\sim D_{\text{LC}} v_{\text{thi}}$ ($D_{\text{LC}} \sim 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m}$), $D_{\text{collision, turbulence}}$ qui déterminent les flux $\Gamma(Z)$ et $\Gamma(H)$. Considérant le rapport

important entre les vitesses électronique v_{the} et ionique v_{thi} , cette condition est satisfaite si $D_{LC} v_{the} \gg D_{collision, turbulence}$.

Flux radiaux d'ions

La diffusion des ions peut se calculer en utilisant le principe de minimum de production d'entropie (Rosenbluth *et al.*, 1972, Dei-Cas *et al.*, 1975) exposé précédemment. Compte tenu de l'équation de continuité $\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\Gamma) = 0$, on peut

exprimer $S\left(\frac{\partial U}{\partial t}, \underline{U}\right)$ sous la forme $2 \int \Gamma \frac{\partial n}{n \partial r} d_3x$. Les flux radiaux Γ sont alors calculés en exprimant que la quantité :

$$\sum_{Z, H} 2 \int \frac{\partial n}{n \partial r} d_3x + \dot{S} \quad (\text{VI-95})$$

est un extremum par rapport aux profils $n(r)$.

Les perturbations magnétiques ne produisent pas de particule piégée

Nous allons d'abord supposer un régime suffisamment collisionnel pour que les perturbations \tilde{B}_{pol} et $\tilde{B}_{\text{ripple}}$ ne créent pas de particules piégées. Une présentation intuitive est alors obtenue en considérant que chaque assemblée d'ions présente une vitesse moyenne V_θ et V_φ dans la direction poloïdale θ et toroïdale φ . Ces vitesses sont soumises à la condition d'équilibre radial maintenant appliquée aux ions :

$$ne(E_r + V_\theta B_\varphi - V_\varphi B_\theta) - T \frac{\partial n}{\partial r} = 0 \quad (\text{VI-96})$$

Dans le cas non cinétique :

$$k_{//} \lambda_{\text{coll}} < 1$$

$$k_{//} = \frac{1}{qR} \text{ pour } \tilde{B}_{\text{pol}} ; \quad k_{//} = \frac{N}{R} \text{ pour } \tilde{B}_{\text{ripple}}$$

la production d'entropie a la valeur "Pfirsch et Schlüter" réalisée dans le corps de la distribution $v_{//}$ et est donnée par (VI-52). Compte tenu que

$$V_{\phi} = V_{\phi \text{ dia}} + W_{//} , V_{\theta} = W_{//} \frac{B_{\theta}}{B_{\phi}} , \text{ on a :}$$

$$\dot{S}_{PS} = \int d_3x \frac{1}{T} \left[f (V_{\phi Z} - V_{\phi H})^2 + \frac{q^2 f}{2} \left\{ V_{\theta H} - V_{\theta Z} + \frac{T}{B_{\phi}} \left(\frac{\partial n_H}{e_H n_H \partial r} - \frac{\partial n_Z}{e_Z n_Z \partial r} \right) \right\}^2 \right] \quad (\text{VI-97})$$

où $f = \frac{n_H m_H}{\tau_{H/Z}} = \frac{n_Z m_Z}{\tau_{Z/H}}$ et $\tau_{Z/H}(Z/H)$ est le temps de collision des ions H (Z) sur les ions Z (H).

Si au contraire, pour une assemblée (H) ou (Z) et pour une perturbation \tilde{B}_{pol} ou $\tilde{B}_{\text{ripple}}$, la condition $k_{//} \lambda_{\text{coll}} > 1$ est réalisée, on doit ajouter la production d'entropie due au pompage magnétique (Canobbio, 1971) se produisant autour de la surface de résonance $v_{//} = 0$, donné par (VI-75), (VI-76) et (VI-77).

$$\dot{S}_{\text{pomp mag}} = \sum_{Z, H} \frac{1}{T} \int (K_{\theta} |V_{\theta}|^2 + K_{\phi} |V_{\phi}|^2) d_3x$$

$$\begin{aligned} \text{où } K_{\theta} &= n\sqrt{\pi} (qR) \left(\frac{1}{r}\right)^2 \frac{m^2}{4T} \left(\frac{r}{R}\right)^2 v_{\text{th}}^3 \quad \text{si } \lambda_{\text{coll}} > qR \\ K_{\theta} &= 0 \quad \text{si } \lambda_{\text{coll}} < qR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{\phi} &= n\sqrt{\pi} \frac{R}{N} \left(\frac{N}{R}\right)^2 \frac{m^2}{4T} b^2 v_{\text{th}}^3 \quad \text{si } \lambda_{\text{coll}} > \frac{R}{N} \\ K_{\phi} &= 0 \quad \text{si } \lambda_{\text{coll}} < \frac{R}{N} \end{aligned}$$

Dans un régime cinétique où la condition $k_{//} \lambda_{\text{coll}} > 1$ est satisfaite pour les deux assemblées et les deux perturbations, nous pouvons négliger le second terme dans \dot{S}_{PS} .

Les équations dérivant de la minimisation de (VI-95) par rapport à V_θ et V_φ , soumises à la condition (VI-96), sont les suivantes :

$$- K_{\theta H} V_{\theta H} - e_H \Gamma(H) B_\varphi = 0 \quad (\text{VI-98})$$

$$- K_{\theta Z} V_{\theta Z} - e_Z \Gamma(Z) B_\varphi = 0$$

$$- K_{\varphi H} V_{\varphi H} + f (V_{\varphi Z} - V_{\varphi H}) + e_H \Gamma(H) B_\theta = 0 \quad (\text{VI-99})$$

et

$$- K_{\varphi Z} V_{\varphi Z} + f (V_{\varphi H} - V_{\varphi Z}) + e_Z \Gamma(Z) B_\theta = 0$$

Notons que les équations (VI-98) et (VI-99) expriment l'équilibre de chaque assemblée en θ, φ sous l'action des forces de friction $-K_\theta V_\theta$ en θ et $-K_\varphi V_\varphi + f (V_\varphi' - V_\varphi)$ en φ et des forces de Laplace $-e\Gamma B_\varphi$ et $+e\Gamma B_\theta$ (Nguyen *et al.*, 1991).

Les vitesses V_θ et V_φ se déduisent de (VI-98) et (VI-99) en fonction des flux radiaux Γ . En substituant ces valeurs dans (VI-96), nous obtenons :

$$e_H \Gamma(H) = \frac{A_{HH} \left(E_r - T \frac{\partial n_H}{e_H n_H \partial r} \right) - A_{HZ} \left(E_r - T \frac{\partial n_Z}{e_Z n_Z \partial r} \right)}{A_{HH} A_{ZZ} - A_{HZ} A_{ZH}}$$

$$e_Z \Gamma(Z) = \frac{-A_{ZH} \left(E_r - T \frac{\partial n_H}{e_H n_H \partial r} \right) + A_{ZZ} \left(E_r - T \frac{\partial n_Z}{e_Z n_Z \partial r} \right)}{A_{HH} A_{ZZ} - A_{HZ} A_{ZH}} \quad (\text{VI-100})$$

où $E_r = \frac{T}{e} \frac{\partial n_e}{n_e \partial r}$ lorsque la perturbation magnétique du divertor ergodique est appliquée

et :

$$A_{ZZ} = \frac{B_\varphi^2}{K_{\theta H}} + \frac{B_\theta^2 (K_{\varphi Z} + f)}{K_{\varphi Z} K_{\varphi H} + f (K_{\varphi Z} + K_{\varphi H})}$$

$$A_{HH} = \frac{B_\varphi^2}{K_{\theta Z}} + \frac{B_\theta^2 (K_{\varphi H} + f)}{K_{\varphi Z} K_{\varphi H} + f (K_{\varphi Z} + K_{\varphi H})}$$

$$A_{ZH} = A_{HZ} = \frac{B_\theta^2 f}{K_{\varphi Z} K_{\varphi H} + f (K_{\varphi Z} + K_{\varphi H})}$$

Divers régimes sont obtenus selon les valeurs des rapport f/K_ϕ et K_θ/K_ϕ . En l'absence d'ondulation magnétique ("*ripple*"), i.e. lorsque les coefficients K_ϕ s'annulent, nous retrouvons les flux néo-classiques, indépendants du champ électrique radial, c'est-à-dire (en supposant que $K_{\theta Z} \ll K_{\theta H}$) :

$$e_z \Gamma(Z) = - \frac{K_{\theta Z}}{B_\phi^2} T \left(\frac{\partial n_Z}{e_z n_Z \partial r} - \frac{\partial n_H}{e_H n_H \partial r} \right) \quad (\text{VI-101})$$

Inversement, lorsque nous avons :

$$K_{\phi H} \gg \frac{B_\theta^2}{B_\phi^2} K_{\theta H} \quad (\text{VI-102})$$

nous trouvons que le flux $\Gamma(Z)$ est contrôlé par le champ électrique radial $E_r = \frac{T}{e} \frac{\partial n_e}{n_e \partial r}$:

$$e_z \Gamma(Z) = \frac{1}{1 + \xi} \frac{K_{\theta Z}}{B_\phi^2} T \left(E_r - T \frac{\partial n_Z}{e_z n_Z \partial r} \right) \quad (\text{VI-103})$$

où $\xi \ll 1$ si $K_{\phi Z} < K_{\phi H} < f$

$$\xi = \frac{B_\theta^2}{B_\phi^2} \frac{K_{\theta Z}}{f} \quad \text{si } K_{\phi Z} < f < K_{\phi H}$$

$$\xi = \frac{B_\theta^2}{B_\phi^2} \frac{K_{\theta Z}}{K_{\phi Z}} \quad \text{si } f < K_{\phi Z} < K_{\phi H}$$

Régime faiblement collisionnel avec des particules piégées

Si la condition $k_{//} \lambda_{coll} > 1$ n'est pas satisfaite pour une assemblée et pour une modulation \tilde{B}_{pol} ou \tilde{B}_{ripple} , l'assemblée en question se comporte comme un fluide vis-à-vis de cette modulation. Cette dernière ne produit alors aucune singularité autour de la surface $v_{//} = 0$ dans l'espace des phases de la fonction de distribution. Le coefficient correspondant K_{θ} ou K_{ϕ} (Z ou H) dans $\dot{S}_{pomp\ mag}$ s'annule. Pratiquement, si l'assemblée (Z) est dans le régime Pfirsch-Schlüter, la condition $k_{//} \lambda_{coll} > 1$ n'est pas satisfaite pour \tilde{B}_{pol} et $K_{\theta Z}$ s'annule. La fonctionnelle $\dot{S}_{PS} + \dot{S}_{pomp\ mag}$ ne contient $V_{\theta Z}$ que si nous prenons en compte le second terme de la production d'entropie de Pfirsch-Schlüter dans (VI-97). En utilisant (VI-96), nous écrivons \dot{S} sous la forme :

$$\dot{S} = \int d^3x \frac{1}{T} \left[K_{\theta H} V_{\theta H}^2 + K_{\phi H} V_{\phi H}^2 + K_{\phi Z} V_{\phi Z}^2 + f (V_{\phi Z} - V_{\phi H})^2 + 2 q^2 f \left\{ (V_{\phi Z} - V_{\phi H}) \frac{B_{\theta}}{2B_{\phi}} + \frac{T}{B_{\phi}} \left(\frac{\partial n_H}{e_H n_H \partial r} - \frac{\partial n_Z}{e_Z n_Z \partial r} \right) \right\}^2 \right] \quad (VI-104)$$

En supposant $K_{\phi Z} \ll f$, la minimisation de \dot{S} par rapport à $V_{\phi Z}$ donne $V_{\phi H} - V_{\phi Z}$ en fonction de la différence $\frac{\partial n_H}{e_H n_H \partial r} - \frac{\partial n_Z}{e_Z n_Z \partial r}$ indépendamment du champ électrique radial

$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r}$. En minimisant (VI-95) par rapport à $\frac{\partial n_Z}{n_Z \partial r}$, nous retrouvons le flux de Pfirsch-Schlüter, indépendant du champ électrique radial E_r :

$$e_Z \Gamma(Z) = - e_H \Gamma(H) = \frac{2 q^2 f}{B_{\phi}^2} T \left(\frac{\partial n_H}{e_H n_H \partial r} - \frac{\partial n_Z}{e_Z n_Z \partial r} \right) \quad (VI-105)$$

quelle que soit l'action de la perturbation magnétique de type ondulation magnétique ("ripple").

Au contraire, pour une collisionnalité très faible, la production d'entropie $\dot{S}_{pomp\ mag}$ n'est pas la simple addition des effets de pompage magnétique dus aux perturbations $\frac{\tilde{B}_{pol}}{B} = \frac{r}{R} \cos\theta$ et $\frac{\tilde{B}_{ripple}}{B} = b \cos N\phi$ considérées séparément comme nous l'avons fait précédemment. Ces perturbations sont en fait résonantes avec la même classe de particules $v_{//} \neq 0$: la modulation poloïdale $\frac{r}{R} \cos\theta$ joue sur les particules déjà piégées

dans les perturbations de type ondulation magnétique ("*ripple*") si ce piégeage est effectif et inversement si ce piégeage n'est pas effectif. Pratiquement, cet effet ne joue que lorsque les ions (Z) sont piégés dans les ondulations magnétiques ("*ripple*") : pour cela, le piégeage doit être effectif

$$\frac{r}{qR} < Nb \quad (\text{VI-106a})$$

et le temps de dépiégeage doit être supérieur à la période de va-et-vient :

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{3/2} < \frac{N}{R} \lambda_{\text{coll}} \quad (\text{VI-106b})$$

Le flux $\Gamma(Z)$ correspondant peut être estimé en ajoutant dans (VI-95) la production d'entropie complémentaire due à l'action de \tilde{B}_{pol} sur les particules piégées par $\tilde{B}_{\text{ripple}}$, donnée par (VI-86) (Goldston *et al.*, 1981) :

$$\dot{S}(\tilde{B}_{\text{pol}} / \Delta v_{// \text{ ripple}}) = \int d_3x \left[20 n b^{3/2} \left(\frac{1}{RB}\right)^2 \tau_{\text{coll} Z} \left(E_r - \frac{T \partial n_Z}{e_Z n_Z \partial r} \right)^2 \right] \quad (\text{VI-107})$$

Cette production d'entropie est due au fait que la dérive verticale produite par la modulation $\frac{\tilde{B}_{\text{pol}}}{B} = \frac{r}{R} \cos \theta$ en présence du gradient radial $\frac{\partial n_Z}{n_Z \partial r} - \frac{e_Z \partial U}{T \partial r}$ conduit à une accumulation de particules piégées dans chaque ondulation magnétique ("*ripple*") irréversiblement amortie par le dépiégeage collisionnel. Il en résulte un flux supplémentaire $\Gamma(Z)$ d'ions (Z) ayant la même dépendance en $E_r = \frac{T}{e} \frac{\partial n_e}{n_e \partial r}$ que dans (VI-103) :

$$e_Z \Gamma(Z) = 20 n_Z b^{3/2} \frac{\tau_{\text{coll}}}{RB} T \left(E_r - \frac{T \partial n_Z}{e_Z n_Z \partial r} \right) \quad (\text{VI-108})$$

Discussion et conclusion

Un divertor ergodique établit un champ électrique radial qui confine les électrons et leur assure l'équilibre thermodynamique dans le référentiel du laboratoire. Toute perturbation qui freine le mouvement macroscopique en θ et φ des ions impureté dans ce référentiel tend à supprimer les forces de Laplace radiales auxquelles est soumise l'assemblée et place cette dernière en équilibre thermodynamique dans le champ électrique. Le flux $\Gamma(Z)$ d'ions impureté est alors de la forme (VI-90) proportionnel à la

somme $\frac{\partial n_Z}{n_Z \partial r} + Z \frac{\partial n_e}{n_e \partial r}$, en opposition à la forme néo-classique (VI-91), proportionnelle à

la différence $\frac{\partial n_Z}{n_Z \partial r} - Z \frac{\partial n_H}{n_H \partial r}$ qui conduit à l'accumulation traditionnelle des impuretés dans

le profil de n_H . Nous avons étudié cet effet dans le cas où une perturbation de type ondulation magnétique ("*ripple*") $b \cos N\varphi$ s'ajoutait à la modulation usuelle du champ

$\frac{r}{R} \cos\theta$. En l'absence d'ondulation magnétique ("*ripple*") ou avec les ions impuretés dans

le régime Pfirsch-Schlüter, le flux d'impureté retrouve son expression néoclassique de la forme (VI-91). Au contraire, le flux d'impureté a la forme (VI-90) si les ions (Z) sont en

régime cinétique en présence d'un niveau suffisant d'ondulation magnétique ("*ripple*") : si ces derniers ne produisent pas de particules piégées et si la condition (VI-102) est

vérifiée, le flux $\Gamma(Z)$ est donné par (VI-103) ; si les ondulations magnétiques ("*ripple*") produisent effectivement des particules piégées, condition (VI-106), le flux $\Gamma(Z)$ est

donné par (VI-108). Les flux (VI-103) et (VI-108) ne sont significatifs qu'à faible collisionnalité, i.e. à faible densité et haute température. Par exemple, pour

$n = 10^{18} \text{ m}^{-3}$, $T = 500 \text{ eV}$, $B = 2 \text{ T}$ et un coefficient d'ondulation magnétique ("*ripple*") de $b = 0,1$, nous obtenons pour les ions impureté carbone

$\Gamma(Z) = -D n_Z \left(\frac{\partial n_Z}{n_Z \partial r} + Z \frac{\partial n_e}{n_e \partial r} \right)$ où $D \approx 0,4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ avec (VI-108). En régime permanent

pour lequel le flux $\Gamma(Z)$ est équilibré par un flux turbulent Γ_{turb} de la forme

$\Gamma_{\text{turb}} = -D_{\text{turb}} \frac{\partial n_Z}{\partial r}$, il vient :

$$n_Z = n_e^{-w} \quad ; \quad w = \frac{Z D}{D + D_{\text{turb}}} \quad (\text{VI-109})$$

Ceci implique un effet décontaminant à travers la couche ergodique si n_e décroît significativement et $\frac{ZD}{D + D_{\text{turb}}} > 1$. L'équation (VI-109) s'oppose bien sûr au cas

néo-classique pour lequel nous avons $\Gamma(Z) = -D'n_Z \left(\frac{\partial n_Z}{n_Z \partial r} - Z \frac{\partial n_H}{n_H \partial r} \right)$ et $n_Z = n_H^{+w}$.

Remarquons que les effets néo-classiques de pompage magnétique de l'ondulation magnétique ("*ripple*") et de la modulation poloïdale constituent les plus simples moyens pour freiner les mouvements moyens en θ et φ des ions et donc d'établir un flux radial $\Gamma(Z)$ de la forme (VI-90) en présence du divertor ergodique. Il en existe cependant d'autres. La perturbation électrostatique due au divertor ergodique, ou même des modes turbulents, s'ils sont bloqués par le divertor ergodique dans le repère du laboratoire, ou une friction sur les particules neutres sont susceptibles de jouer le même rôle.

VII - CONCLUSION

La première étape de notre étude est l'analyse du transport des particules et de l'énergie dans une couche ergodique et stochastique, sans paroi matérielle. Les échelles caractéristiques, parallèles au champ magnétique, sur lesquelles s'effectue le transport de chaleur, L_T , et de matière, L_M , sont calculées. Dans une seconde étape, l'influence de la paroi matérielle est considérée. La topologie magnétique du plasma de bord et, en particulier, la connexion à la paroi matérielle résultant de l'application de la perturbation résonante produite par le divertor ergodique ont été déterminées précisément. Le domaine influencé par le divertor ergodique est alors séparé en deux zones : une zone réellement ergodique entourant le plasma central, caractérisée par $L_{\text{au mur}} > L_{\text{dépôt}}$, où le transport est diffusif ($L_{\text{au mur}}$ est la longueur de connexion du point considéré dans le plasma à la paroi matérielle et $L_{\text{dépôt}} = \max(L_M, L_T)$) ; une zone "laminaire", $L_{\text{au mur}} < L_{\text{dépôt}}$, où le transport prend place dans des tubes de flux identifiables, connectés à des zones caractéristiques sur les modules du divertor ergodique. La puissance émise par le plasma confiné est transportée à travers la couche ergodique sans canal préférentiel et se distribue ensuite sur les tubes de flux caractéristiques de la zone laminaire. Le transport de la chaleur dans ces tubes résulte de la compétition entre le transport parallèle et perpendiculaire, sans effet de stochasticité. Le code numérique Mastoc a été développé pour préciser ces structures. Il permet une évaluation du coefficient de diffusion des lignes de champ magnétique cohérente avec la théorie quasi-linéaire. Il permet également le calcul d'une statistique des lignes de flux allant d'un module du divertor ergodique à un autre, suivant la profondeur de pénétration et la longueur de ces lignes. En particulier, dans le cas du divertor ergodique de Tore Supra, il établit que 50% de ces lignes de flux pénètrent dans la zone réellement ergodique. Les autres lignes de flux retrouvent un module sans pénétrer la couche ergodique en formant des tubes de flux de dimension transverse centimétrique.

Ce travail, en mettant en évidence l'importance de la topologie de la connexion magnétique à la paroi matérielle sur une longueur $L_{\text{dépôt}}$, éclaire certaines des observations les plus importantes de l'expérience Tore Supra en configuration divertor ergodique : la localisation de la puissance entre les conducteurs du divertor ergodique, la répartition assez homogène du dépôt de puissance, les asymétries poloïdales de l'émission H_α du plasma de bord. La baisse de la température électronique dans toute la zone ergodique est, quant à elle, due à l'augmentation du coefficient de conduction de la chaleur. Le code Mastoc, appliqué à l'étude du transport dans la zone laminaire, permet d'entreprendre l'étude de toute configuration des éléments de paroi matérielle en présence de la perturbation résonante du divertor ergodique, sur la base que la puissance déposée

en un point d'une paroi matérielle est déterminée par la pénétration du tube de flux sur la longueur parallèle $L_{\text{dépôt}}$.

Les effets du divertor ergodique sur les impuretés ne sont pas encore totalement élucidés. Un effet d'écran des impuretés est observé. Le lessivage par friction collisionnelle d'un flux d'ions légers ou le champ électrique radial moyen dirigé vers l'extérieur, constaté expérimentalement, seraient de bons candidats pour expliquer un tel phénomène. Le champ électrique, radial moyen ou fluctuant et cohérent avec la perturbation magnétique résonante du divertor ergodique, joue vraisemblablement un rôle essentiel. L'outillage développé dans la dernière partie devrait permettre d'analyser en détail cet effet.

Le divertor ergodique est un dispositif permettant non seulement de modifier la connexion magnétique à la paroi matérielle mais également d'agir sur le transport au bord, ce qui autorise à profiter de la puissance sortante produite par le plasma confiné pour contrôler les paramètres du plasma de bord.

APPENDICE 1 : TAUX DE PRODUCTION D'ENTROPIE

Le taux de production d'entropie est donné par la formule suivante (Landau, 1937) :

$$\dot{S}(U) = \frac{1}{2T^2} \sum_{s, s'} \int X_{s, s', k, l} \left(\frac{\partial U_s}{\partial p_k} - \frac{\partial U_{s'}}{\partial p_{k'}} \right) \left(\frac{\partial U_s}{\partial p_l} - \frac{\partial U_{s'}}{\partial p_{l'}} \right) F_s F_{s'} d_3x d_3p \quad (1-1)$$

$$U_s = U_s(x, p) ; U_{s'} = U_{s'}(x, p')$$

$$\text{où } F_s = F_s(x, p) = A_s \exp\left(-\frac{H_s - U_s}{T}\right)$$

$$F_{s'} = F_{s'}(x, p') = A_{s'} \exp\left(-\frac{H_{s'} - U_{s'}}{T}\right)$$

$$X_{s, s', k, l}(x, p, p', t) = 2\pi e_s^2 e_{s'}^2 \ln(\Lambda) \left(\frac{\omega^2 \delta_{kl} - \omega_k \omega_l}{\omega^3} \right)$$

$$\omega = \frac{\partial H_s}{\partial p} - \frac{\partial H_{s'}}{\partial p'}$$

La somme dans l'intégrale (1-1) est formée de termes proportionnels (avec des coefficients positifs) à $T_{kl} A_k A_l$ où :

$$T_{kl} = \omega^2 \delta_{kl} - \omega_k \omega_l$$

$$A_{kl} = \frac{\partial U_s}{\partial p_k} - \frac{\partial U_{s'}}{\partial p_{k'}}$$

Remarquons que :

$$T_{kl} A_k A_l = \omega^2 A^2 - (\omega \cdot A)^2 \quad (1-2)$$

L'équation (1-2) assure que ces termes sont positifs ou nuls (inégalité de Cauchy). Le taux de production d'entropie \dot{S} s'annule donc si chaque terme $T_{kl} A_k A_l$ est nul séparément. La façon d'annuler chaque terme $T_{kl} A_k A_l$ est d'imposer l'égalité $A_k = \zeta \omega_k$ soit :

$$\frac{\partial U_s}{\partial p_k} - \frac{\partial U_{s'}}{\partial p_{k'}} = \zeta(p_k, p_{k'}) \left(\frac{p_k}{m_s} - \frac{p_{k'}}{m_{s'}} \right) \quad (1-3)$$

Prouvons que ζ ne dépend pas de p et p' . Nous avons :

$$F(p) - F'(p') = \zeta(p, p') \left(\frac{p}{m} - \frac{p'}{m} \right)$$

$$F(p) - F''(p'') = \zeta(p, p'') \left(\frac{p}{m} - \frac{p''}{m} \right)$$

Par soustraction, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F''(p'') - F'(p') &= \frac{p}{m} [\zeta(p, p') - \zeta(p, p'')] \\ &\quad + \frac{p''}{m''} \zeta(p, p'') - \frac{p'}{m'} \zeta(p, p') \end{aligned}$$

quels que soient p, p' et p'' . ζ ne dépend donc pas de p . Pour la même raison, ζ est également indépendant de p' . Nous obtenons finalement, en posant $\zeta = 1/\tau$:

$$\frac{\partial U_s}{\partial p_k} = \frac{1}{\tau} \frac{p_k}{m_s} + \beta_k \quad (1-4)$$

En intégrant (1-4), nous avons pour chaque population s :

$$U_s = \frac{1}{\tau} \frac{p^2}{2 m_s} + pW(x) \quad (1-5)$$

$$F_s = A_s \exp - \left(\frac{H_s - U_s}{T} \right) = A_s(x) \exp \left[- \frac{H_s}{T} + \frac{H_s}{\tau'(x)} + \frac{pW(x)}{\tau''(x)} \right]$$

La fonction de distribution F_s peut être transformée en chaque point x en réarrangeant les températures et les vitesses :

$$F_s(x, p) = B_s(x) \exp \left[- \frac{m_s (v - V_s(x))^2}{2T(x)} \right] \quad (1-6)$$

Finalement, en chaque point x de l'espace, pour avoir un taux de production d'entropie \dot{S} nul, un référentiel dans lequel toutes les populations sont maxwelliennes,

éventuellement décalées d'une vitesse d'ensemble $V_s(x)$, à la même température $T(x)$ doit exister.

APPENDICE 2 : CALCUL DE LA VARIABLE U_2 POUR UNE PERTURBATION A UNE SEULE HARMONIQUE

Compte tenu de (VI-67), il est normal de penser que la variable U_2 est une fonction de la forme :

$$U_2 (J, \varphi) = g (J, \varphi) n_k \frac{\partial u(J)}{\partial J_k} \quad (2-1)$$

où g est 2π périodique en φ et indépendante de $u(J)$. A une certaine distance de la

surface de résonance \mathcal{R} d'équation $\Omega(J) = n_k \frac{\partial h(J)}{\partial J_k} = 0$, nous n'avons pas besoin de

tenir compte des effets non linéaires de δH et des collisions. La variable U_2 est alors simplement donnée par l'équation (VI-65) c'est-à-dire nous avons :

$$g = \frac{\delta H}{\Omega(J)} \quad (2-2)$$

Il est pratique de caractériser un point J par sa projection $J_{\mathcal{R}}$ sur la surface \mathcal{R} selon la direction n et par sa distance $\Omega(J)$ à la surface \mathcal{R} . La fonction $g(\Omega, \varphi)$ est alors exprimée comme une fonction $g(\Omega, \varphi, J_{\mathcal{R}})$ variant régulièrement selon φ et $J_{\mathcal{R}}$ mais étant localisée en Ω dans un intervalle $\Delta\Omega$ autour de la valeur $\Omega = 0$.

Il faut trouver la forme de g au voisinage de la surface de résonance en tenant compte des collisions et de l'effet non linéaire de δH agissant sur g . En ce qui concerne les collisions, nous savons qu'une fonction $g(\Omega)$, localisée autour d'une surface $\Omega(x, p) = \text{cste}$ de l'espace des phases, donne lieu, du fait de la forme de l'opérateur de collision, à un taux de production d'entropie décrit par :

$$\dot{S}(g, g) \approx \frac{1}{2} \int \frac{F_M}{T^2} \langle (\delta\Omega)^2 \rangle \left| \frac{\partial g}{\partial \Omega} \right|^2 d_3x d_3p \quad (2-3)$$

où $\langle (\delta\Omega)^2 \rangle$ est le coefficient de diffusion de la variable Ω au sens de Spitzer (Spitzer, 1967). L'équation (2-3) implique que l'opérateur \dot{S} agissant sur la variable $g(\Omega)$ est de la forme :

$$\dot{S}(g) = -\frac{1}{2} \frac{\langle (\delta\Omega)^2 \rangle}{T^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \Omega^2}$$

Les effets non linéaires de δH agissant sur U_2 et donc sur $g(\Omega, \varphi, J_{\mathcal{R}})$ nécessitent la prise en compte des relations suivantes :

$$\{\varphi, h + \delta H\} = n_k \frac{\partial(h + \delta H)}{\partial J_k}$$

$$\{\Omega, h + \delta H\} = -n_k \frac{\partial \Omega}{\partial J_k} \frac{\partial(\delta H)}{\partial \varphi}$$

$$\{J_k, h + \delta H\} = 0$$

L'équation (VI-67) qui donne $g(\Omega, \varphi, J_{\mathcal{R}})$ au voisinage de la surface résonante pour chaque valeur $J_{\mathcal{R}}$ devient alors, en négligeant la contribution de g devant celle de ses gradients qui, seuls, produisent de l'entropie :

$$[\Omega + a(\varphi)] \frac{\partial g}{\partial \varphi} - \vartheta \frac{\partial \delta H}{\partial \varphi} \frac{\partial g}{\partial \Omega} - \frac{1}{2} \langle (\delta\Omega)^2 \rangle \frac{\partial^2 g}{\partial \Omega^2} = \frac{\partial \delta H}{\partial \varphi} \quad (2-4)$$

où

$$\vartheta = n_k \frac{\partial \Omega}{\partial J_k}(J_{\mathcal{R}}) = n_k n_l \frac{\partial^2 h}{\partial J_k \partial J_l}$$

$$a(\varphi) = n_k \frac{\partial \delta H(J_{\mathcal{R}}, \varphi)}{\partial J_k}$$

L'équation (2-4) peut être résolue directement dans les deux régimes suivants.

1°- Régime Landau

Ce sont les collisions qui prédominent devant les effets non linéaires de δH et qui résolvent donc la résonance de U_2 en $\Omega = 0$. Le premier membre de (2-4) se réduit au premier et troisième termes. La largeur $\Delta\Omega$ de la localisation de g autour de $\Omega = 0$

s'obtient alors en remarquant que, dans l'équation (2-4), les termes $\Omega \frac{\partial g}{\partial \varphi}$ et

$-\frac{1}{2} \langle (\delta\Omega)^2 \rangle > \frac{\partial^2 g}{\partial \Omega^2}$ doivent être du même ordre de grandeur de façon à se compenser, ce qui mène à :

$$\Delta\Omega_{\text{Landau}} \sim \left| \langle (\delta\Omega)^2 \rangle \right|^{1/3} \quad (2-5)$$

2° - Régime Zakharov-Karpman

La collisionnalité est trop faible et ce sont les non-linéarités en δH qui résolvent la

résonance. Ce sont cette fois les termes $\Omega \frac{\partial g}{\partial \phi}$ et $\vartheta \frac{\partial \delta H}{\partial \phi} \frac{\partial g}{\partial \Omega}$ qui doivent se compenser.

La largeur du domaine résonant, $\Delta\Omega_{\text{îlot}}$, s'obtient donc comme :

$$\Delta\Omega_{\text{îlot}} \sim (\vartheta \delta H)^{1/2} \quad (2-6)$$

En fait, le domaine $|\Omega| < \Delta\Omega_{\text{îlot}}$ est un "îlot", domaine piégé tel que la perturbation δH introduit une nouvelle topologie des trajectoires, distinctes de la topologie initiale induite par les variables angulaires et d'action ϕ, J . Le régime Landau s'applique en fait si $\Delta\Omega_{\text{Landau}} \gg \Delta\Omega_{\text{îlot}}$ et le régime Zakharov-Karpman si $\Delta\Omega_{\text{îlot}} \gg \Delta\Omega_{\text{Landau}}$. La fonction g est facilement dérivable dans chaque cas et en utilisant (VI-22b), on obtient les valeurs (2-1), (2-2) et (2-3) de $\dot{S}_{\text{compl}}(u(J), u(J))$.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- V.I. Arnold, Russian Math. Surv. **18** (1963) 9.
L. A. Artsimovitch, Nucl. Fusion, **12** (1972) 215.
A.H. Boozer, Phys. Fluids **26** (1983) 1288.
S.I. Braginskii, Review of Plasma Physics, N.Y. 1965, Vol.1, p. 205.
C. Breton *et al.*, Nucl. Fusion **31** (1991)1774.
E. Canobbio, Plasma Physics and Contr. Fusion Res. **3** (1971) 491.
H. Capes, Ph. Ghendrih, A. Samain, J.P. Morera, Plasma Phys. Contr. Fus. **32** (1990)103.
B.V.Chirikov, Phys. Reports **52** (1979) 265.
J.S. deGrassie, N. Ohyaub *et al.*, J. Nucl. Mat. **128&129** (1984) 266.
S. R. de Groot, P. Mazur, 1962, *Non-Equilibrium Thermodynamics* (North-Holland Publ. Co., Amsterdam), chap. 4.
R. Dei-Cas, A. Samain in Plasma Physics and Contr. Nucl. Fus. Res. **1** (1975) 563.
K.H. Dippel, J. Nucl. Mat. **145&147** (1987) 3
H.-W. Drawin and M.A. Dubois, 1991, submitted to Nucl. Fus.
W. Engelhardt and W. Feneberg, J. Nucl. Mat. **76&77** (1978) 520.
Equipe Tore Supra (presented by Ph. Ghendrih) in Proceedings of the 13th IAEA, Washington 1990, Vol. I, p. 541 (1991).
W. Feneberg, M.A. Hellberg, Contr. Plasma Phys. **28** (1988) 329.
R. J. Fonck, P. Beiersdorfer, M. Bell *et al.*, Heating in Toroidal Plasma, ENEA, Rome, **1** (1984) 37.
X. Garbet, F. Mourges, A. Samain, Plasma Physics. and Contr. Fusion **30** (1988) 343.
Ph. Ghendrih, F. Nguyen *et al.*, 19th EPS, Innsbruck (Austria) 1992a, to be published in Plasma Phys. and Contr. Fus.
Ph. Ghendrih, H. Capes, F. Nguyen, A. Samain, International workshop on Plasma Edge Theory, Bad Honnef, Contr. Plasma Physics **32** (1992b) 179.
R.J. Goldston, H.H. Towner, J. Plasma Phys. **26** (1981) 283.
J. Greene, J. Math. Phys. **20** (1979) 1183.
A. Grosman, M-H. Achard *et al.*, J. Nucl. Mat. **162&164** (1989) 162.
A. Grosman *et al.*, Plasma Physics and Contr. Fusion **32** (1990a) 1011
A. Grosman, F. Nguyen, *et al.* J. Nucl. Mat. **176&177** (1990b) 493.
A. Grosman *et al.*, J. Nucl. Mat. **196&198** (1992) 59.
D. Guilhem, M. Chatelier, P. Chappuis J. Koski, J. Watkins, J. Nucl. Mat. **176&177** (1990) 240.
S. Hamada, Prog. Theor. Phys. (Kyoto) **22** (1959) 145.
S. Hamada, Nucl. Fusion **2** (1962) 23.

- F.L. Hinton, R.D. Hazeltine, Rev. Mod. Phys. **48** (1976) 239.
- M. Keilhaker, G. Gierke, E. R. von Müller *et al.*, Plasma Phys. Contr. Fus. **28** (1986) 29.
- T. A. Krommes, C. Oberman, R. G. Kleva, J. Plasma Phys. **30** (1983) 11.
- M. Kruskal, Journal of mathematical physics **3** (1962) 806.
- L. Landau, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **7** (1937) 203.
- G. Laval, *Theory of Fusion Plasma, Proceedings of the International School of Plasma Physics "Piero Caldirola"*, Villa Cipressi, Varenna, édité par A. Bondeson, E. Sidoni, F. Troyon (Società Italiana di Fisica, 1987), p 445.
- S. McCool *et al.*, Plasma Phys. and Contr. Fus. **29** (1989) 547.
- F. Nguyen, Ph. Ghendrih, A. Samain, J. Nucl. Mat. **176&177** (1990) 499.
- F. Nguyen, A. Samain, Ph. Ghendrih, 18th EPS Berlin, Europhysics conf. abstract **15C-IV** (1991) 189.
- F. Nguyen, Ph. Ghendrih, A. Samain, 19th EPS, Innsbruck (Austria) 1992, Europhysics conf. abstract **16C-II** (1992) 851.
- F. Nguyen, A. Samain, Ph. Ghendrih, International workshop on Plasma Edge Theory, Bad Honnef, Contr. Plasma Physics **32** (1992a) 371.
- F. Nguyen, Ph. Ghendrih, A. Samain, to be published in the proceedings of the International Workshop on Magnetic Turbulence and Transport, Cargèse 1992b.
- N. Ohyanu, J.S. DeGrassie, N. Brooks *et al.*, Nucl. Fusion **25** (1985) 1684.
- L. Onsager, Phys. Rev. **37** (1931a) 405.
- L. Onsager, Phys. Rev. **38** (1931b) 2265.
- D. Pfirsch, A. Schlüter, 1962, Max-Planck-Institute Report MPI/PA/7/62 (non publié).
- L. Poutchy *et al.*, 19th EPS, Innsbruck 1992, Europhysics conf. abstract **16C-II** (1992) 847.
- A. B. Rechester, M. N. Rosenbluth, Phys. Rev. Lett. **40** (1978) 38.
- A.B. Rechester, M.N. Rosenbluth, R.B. White, Phys. Rev. Lett. **42** (1979a) 1247.
- A.B. Rechester, M.N. Rosenbluth, R.B. White, 1979b, *Statistical description of stochastic orbits in a tokamak* dans : *Intrinsic Stochasticity in Plasmas*, Eds. G. Laval and D. Grésillon (Edition de Physique, Orsay, 1979), pp.239.
- A. B. Rechester, M. N. Rosenbluth, R. B. White, Phys. Rev. A **23** (1981) 2664.
- A. B. Rechester, R. B. White, Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 1586.
- G. Requin, 1981, Thèse de doctorat d'Etat, Université de Paris-Sud, centre d'Orsay, non publié.
- B.B. Robinson, I.B. Bernstein, Ann. Phys. (N.Y.) **18** (1962) 110.
- M.N. Rosenbluth, R.D. Hazeltine, F.L. Hinton, Phys. Fluids **15** (1972) 116.
- P. H. Rutherford, Phys. Fluids **13** (1970) 482.
- A. Samain, A. Grosman, W. Feneberg, J. Nucl. Mat. **111&112** (1982) 408.

- A. Samain, P. Deschamps A. Grosman, M. Lipa *J. Nucl. Mater.* **128** (1984a) 38.
- A. Samain, A. Grosman, T. Blenski, G. Fuchs, B. Steffen, *J. Nucl. Mater.* **128&129** (1984b) 395.
- A. Samain, T. Blenski, Ph. Ghendrih, A. Grosman, *Contr. Plasma Phys.* **30** (1990) 157.
- A. Samain, H. Capes, Ph. Ghendrih, F. Nguyen, 1992, à paraître dans *Phys. Fluids*.
- A. Samain, Ph. Ghendrih, 1992, communication privée.
- A. Samain, F. Werkoff, *Nucl. Fusion* **17** (1977) 53.
- P.M. Schoch, S.C. McCool, A.J. Wootton *et al.*, in *Contr. Fus. and Plasma Heating* **12B** (1988) 191.
- F.X. Söldner, E.R. Müller, F. Wagner *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 1105.
- L. Spitzer, *Physics of fully ionised gases*, 1967, Interscience publishers, New York.
- P.C. Stangeby, G.M. McCracken, *Nucl. Fusion* **30** (1990) 1225.
- J. D. Strachan, M. Bitter, A. T. Ramset *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 1004.
- S. Takamura, Y. Shen *et al.*, *J. Nucl. Mat.* **162&164** (1989) 643.
- V.E. Zakharov, V.I. Karpman, *Sov. Physics JETP* **16** (1963) 351
- G.M. Zaslavsky, B.C. Chirikov, *Sov. Phys. Usp.* **14** (1972) 549.

BIBLIOGRAPHIE

I - INTRODUCTION

L. A. Artsimovitch, Nucl. Fusion, **12** (1972) 215.

tokamak devices

H. P. Furth, Nucl. Fusion, **15** (1975) 487.

B. B. Kadomtsev *et al.*, Nucl. Fusion, **30** (1990) 1675.

tokamaks

P.C. Liewer, Nucl. Fusion **25** (1985) 543.

P.C. Stangeby, G.M. McCracken, Nucl. Fusion **30** (1990) 1225.

Review paper: plasma boundary phenomena in tokamaks.

La fusion thermonucléaire contrôlée par confinement magnétique, collection CEA,
Masson, Paris 1987.

II - TOPOLOGIE MAGNETIQUE

J.C. Adam, G. Laval, D. Pesme, Ann. Phys. Fr., **6** (1981) 319.

Effets des interactions résonnantes ondes-particules en turbulence faible des plasmas

A.H. Boozer, Phys. Fluids **26** (1983) 1288.

Evaluations of the structure of ergodic fields

H. Goldstein, *classical mechanics*, Addison-Wesley publishing company, 1980.

R.H.G. Helleman, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, vol. 5, ed. E.G.D.

Cohen, North Holland Publ., Amsterdam and N.Y. (1980) p. 165-233

self-generated chaotic behavior in nonlinear mechanics.

M. Kruskal, Journal of mathematical physics **3** (1962) 806.

Asymptotic theory of hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic.

III -CODE MASTOC

F. Nguyen, Ph. Ghendrih, A. Samain, J. Nucl. Mat., 176&177 (1990) 499.

IV - TRANSPORT DE PARTICULES ET DE CHALEUR EN PRESENCE DE LA PERTURBATION DU DIVERTOR ERGODIQUE

F.L. Hinton, R. D. Hazeltine, Rev. Mod. Phys., 48 (1976) 239.

theory of plasma transport in toroidal confinement systems

A. Samain, H. Capes, Ph. Ghendrih, F. Nguyen, (1992), submitted to Phys. Fluids.

Particles flux across a stochastic magnetic layer

V - COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE TORE SUPRA

Equipe Tore Supra (presented by Ph. Ghendrih) in Proceedings of the 13th IAEA, Washington 1990, Vol. I, p. 541 (1991).

Ergodic divertor experiments on Tore Supra

Ph. Ghendrih, F. Nguyen *et al.*, 19th EPS, Innsbruck (Austria) 1992a, to be published in Plasma Phys. and Contr. Fus.

A review of experiments and theory on stochastic scrape-off-layers

Ph. Ghendrih, H. Capes, F. Nguyen, A. Samain, International workshop on Plasma Edge Theory, Bad Honnef 1992b, to be published in Contr. to Plasma Physics.

Control of the edge transport with the ergodic divertor

A. Grosman, F. Nguyen, *et al.* J. Nucl. Mat. 176&177 (1990b) 493.

Ergodic divertor impact on Tore Supra plasma edge

A. Grosman *et al.*, 10th PSI conference, Monterey (California) 1992, to be published in J. Nucl. Mat.

*Transport in the plasma edge Specific connexion to the wall in the Tore Supra
ergodic divertor experiments*

VI - ETUDE DE L'EVOLUTION D'UN PLASMA PAR UNE METHODE DE
MINIMUM DE PRODUCTION D'ENTROPIE

H.B.G. Casimir, Rev. of Mod. Phys., 17 (1945) 343.

On Onsager's Principle of Microscopic Reversibility

L. Onsager, Phys. Rev. 37 (1931) 405, 38 (1931) 2265.

Reciprocal Relations in Irreversible Processes

I. Prigogine, 1961, *Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes*
(Intersciences Publishers, New York), 2nd edition.

VII - CONCLUSION

PUBLICATIONS

F. Nguyen, Ph. Ghendrih, A. Samain, "Connexion topology and SOL physics induced by the ergodic divertor in Tore Supra", *J. Nucl. Mat.*, **176&177** (1990) 499.

A. Grosman, F. Nguyen *et al.*, "Ergodic Divertor impact on Tore Supra plasma edge", *J. Nucl. Mat.*, **176&177** (1990) 493.

F. Nguyen, A. Samain, Ph. Ghendrih, "Impurity control by the radial electric field in a stochastic layer", *Europhysics conf. abstract*, 18th EPS Berlin, **15C-IV** (1991) 189.

Equipe Tore Supra (présenté par Ph. Ghendrih), "Ergodic divertor experiments on Tore Supra", dans *Proceedings of the 13th IAEA*, Washington 1990, Vol. I, p. 541 (1991).

A. Grosman, F. Nguyen *et al.*, "Transport in the plasma edge specific connexion to the wall in the TORE SUPRA ergodic divertor experiments", PSI conference, Monterey (California) 1992, à paraître dans *J. Nucl. Mat.*

F. Nguyen, A. Samain, Ph. Ghendrih, "Minimum entropy production principle applied to decontaminating regimes in a stochastic layer in presence of a radial electric field", *International workshop on Plasma Edge Theory*, Bad Honnef (RFA) 1992, *Contr. Plasma Physics* **32** (1992) 371.

Ph. Ghendrih, H. Capes, F. Nguyen, A. Samain, "Control of the edge transport with the Ergodic Divertor", *International workshop on Plasma Edge Theory*, Bad Honnef (RFA) 1992, *Contr. Plasma Physics* **32** (1992) 179.

H. Capes, A. Samain, Ph. Ghendrih, F. Nguyen, "Condition for density accumulation with the Ergodic Divertor", *International workshop on Plasma Edge Theory*, Bad Honnef (RFA) 1992, *Contr. Plasma Physics* **32** (1992) 192.

A. Samain, H. Capes, Ph. Ghendrih, F. Nguyen, "Particle flux across a stochastic magnetic layer", (1992) à paraître dans *Phys. Fluids*.

F. Nguyen, Ph. Ghendrih, A. Samain, "Edge transport induced by the interaction of stochastic layer with the wall", 19th EPS, Innsbruck (Austria) 1992, Europhysics conf. abstract, 16C-II (1992) 851.

Ph. Ghendrih, F. Nguyen *et al.*, "A review of experiments and theory on stochastic scrape-off-layers", 19th EPS, Innsbruck (Austria) 1992, à paraître dans Plasma Phys. and Contr. Fus.

F. Nguyen, Ph. Ghendrih, A. Samain, "Transport in a stochastic layer created by an ergodic divertor in a tokamak edge plasma", à paraître dans the proceedings of the international workshop on magnetic turbulence and transport, Cargèse (France), 1992.

CONFERENCES

Ecole de printemps sur les plasmas chauds, Cadarache, France, mai 1988.

Workshop on Electrostatic Turbulence, Cadarache, France, Octobre 1989.

9th PSI (Plasma Surface Interaction), Bournemouth, U.K., mai 1990. Poster :
"Connexion topology and SOL physics induced by the ergodic divertor in Tore Supra"

Satellite Workshop of the 9th PSI , Cadarache, France, mai 1990.

Plasma Physics Summer School, Oxford, U.K., juillet 1990.

Conférence de la Société Française de Physique, division plasma, Orsay, France, sept.
1990. Poster : "topologie des connexions magnétiques et modification de la couche limite
induites par le divertor ergodique de Tore Supra"

European Tokamak Programme Workshop, Arles, France, décembre 1990.

Colloque Eurodoct 91, Saclay, France, avril 1991. Rapporteur de la cession de travail 7 :
une thèse pour demain.

European Fusion Theory Conference, Goteborg, Suède, juin 1991. Poster : "Transport
in a chaotic magnetic domain limited by a wall".

International workshop on Plasma Edge Theory, Bad Honnef , RFA, juin 1992.
Présentation orale : "Minimum entropy production principle applied to decontaminating
regimes in a stochastic layer in presence of a radial electric field".

Workshop on magnetic turbulence and transport, Cargèse, France, juillet 1992.
Présentation orale : "Transport in a stochastic layer created by an ergodic divertor in a
tokamak edge plasma".

ABSTRACT

In the tokamak Tore Supra, the magnetic field ensuring the confinement is stochastic at the plasma edge due to a resonant perturbation. This perturbation is created by a set of six helicoidal coils inside the vacuum vessel, the ergodic divertor. The first part of the study concerns the analysis of the transport of particles and energy in a fusion plasma in presence of a stochastic magnetic field, without physical wall. The effective transport of electrons, i.e. heat transport, increases. The ions transport increases too but less than heat transport. This discrepancy produces a mean radial electric field. The second part is devoted to the influence of the physical wall. The topology of the magnetic connexion on the wall is precisely determined with the code Mastoc. The transport of particles and energy is then described from the confined plasma until the wall. This study enlightens several important observations of the experience Tore Supra in the ergodic divertor configuration : the spreading of the power deposition on the wall components without anomalous concentration, the robustness of this configuration relatively to misalignment, the edge structures visible in $H\alpha$ light during plasma reattachment. In order to study the transport of impurity ions, a variational approach of minimum entropy production has been developed. This principle is applied to the calculation of the neoclassical diffusion of impurity ions with the radial electric field. This electric field deconfines ions if the pressure profile is not balanced by a Lorentz force, i.e. if the plasma is locked in rotation, poloidally and toroidally, because of magnetic perturbation or friction force.

RESUME

Dans le tokamak Tore Supra, le champ magnétique qui assure le confinement est rendu stochastique à la périphérie du plasma par l'application d'une perturbation résonante. Cette perturbation est créée par un ensemble de six bobines hélicoïdales, le divertor ergodique, situé à l'intérieur de la chambre à vide. La première partie de notre étude est l'analyse du transport des particules et de l'énergie dans un plasma de fusion en présence d'un champ magnétique stochastique, sans paroi matérielle. Le transport effectif des électrons, i.e. de la chaleur, est fortement augmenté et, dans une moindre mesure, celui des ions. Cette différence produit un champ électrique radial moyen. Dans une seconde partie, l'influence d'une paroi matérielle est considérée. Grâce au code numérique Mastoc, la topologie de la connexion magnétique sur la paroi est déterminée précisément. Il est ainsi possible de décrire le transport des particules et de l'énergie depuis le plasma confiné jusqu'aux éléments de paroi. Cette étude éclaire certaines des principales observations de l'expérience Tore Supra en configuration divertor ergodique : l'étalement du dépôt de puissance sur les différents éléments de la paroi sans concentration anormale, la robustesse de cette configuration vis-à-vis de défauts d'alignement, les structures visibles en lumière H_{α} lors de réattachement de plasma. Afin d'étudier le transport des ions impurétés, une approche variationnelle par minimum de production d'entropie a été développée. Ce principe variationnel est appliqué au calcul de la diffusion néoclassique des ions impurétés dans le champ électrique radial moyen. Ce champ électrique déconfiner les ions si le profil de pression n'est pas équilibré par une force de Laplace, c'est-à-dire si le plasma est bloqué en rotation, poloïdale et toroïdale, par une perturbation magnétique ou une force friction.