



HAL
open science

Etudes numériques du spectre d'un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant.

Rahhal Janane

► **To cite this version:**

Rahhal Janane. Etudes numériques du spectre d'un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant.. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2005. Français. NNT : . tel-00011254

HAL Id: tel-00011254

<https://theses.hal.science/tel-00011254>

Submitted on 21 Dec 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2005

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Études numériques du spectre d'un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Présentée et soutenue publiquement par

Rahhal JANANE

le 27 Octobre 2005 devant le jury ci-dessous

Président	:	Rachid TOUZANI	Professeur (Clermont-Ferrand II)
Examineurs	:	Catherine BOLLEY	Professeur (Ecole Centrale de Nantes)
		Gabriel CALOZ	Professeur (Rennes I)
		Francois JAUBERTEAU	Professeur (Nantes)
		Daniel MARTIN	MCF (Rennes I)
		Abderemane MORAME	MCF (Nantes)
Rapporteurs	:	Francois DUBOIS	Professeur (CNAM Paris)
		Michèle VANMAELE	Professeur (GENT Belgique)
Directeurs de thèse	:	Francois JAUBERTEAU	
		Abderemane MORAME	
Laboratoire	:	Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN)	
N° E.D.	:	ED 366-222	

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

N° attribué par la bibliothèque

Année : 2005

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Études numériques du spectre d'un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Présentée et soutenue publiquement par

Rahhal JANANE

le 27 Octobre 2005 devant le jury ci-dessous

Président	:	Rachid TOUZANI	Professeur (Clermont-Ferrand II)
Examineurs	:	Catherine BOLLEY	Professeur (Ecole Centrale de Nantes)
		Gabriel CALOZ	Professeur (Rennes I)
		Francois JAUBERTEAU	Professeur (Nantes)
		Daniel MARTIN	MCF (Rennes I)
		Abderemane MORAME	MCF (Nantes)
Rapporteurs	:	Francois DUBOIS	Professeur (CNAM Paris)
		Michèle VANMAELE	Professeur (GENT Belgique)
Directeurs de thèse	:	Francois JAUBERTEAU	
		Abderemane MORAME	
Laboratoire	:	Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN)	
N° E.D.	:	ED 366-222	

Remerciements

L'ensemble du travail présenté dans cette thèse doit énormément à l'attention constante et aux encouragements sans relâche de mon directeur de thèse François JAUBERTEAU, qui s'est toujours montré d'une remarquable disponibilité, allant jusqu'à m'offrir une place dans son bureau. Il m'a fait l'honneur d'encadrer ce travail et j'ai beaucoup de plaisir à travailler avec lui dans un climat d'entente exceptionnel.

J'exprime toute ma gratitude à Abderemane MORAME d'avoir accepté de co-diriger cette thèse, je lui suis très reconnaissant pour ses orientations, ses conseils et d'avoir su me faire profiter ses grandes compétences scientifiques.

J'adresse mes remerciements à Michèle VANMAELE et François DUBOIS d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je leurs témoigne toute ma considération pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture du manuscrit. Leurs commentaires pertinents et l'intérêt qu'ils ont accordé à ce travail m'ont permis d'en améliorer la rédaction.

Je remercie également Catherine BOLLEY, Gabriel GALOZ, Daniel MARTIN et Rachid TOUZANI qui ont accepté de faire partie du jury.

Je remercie aussi Yves COUDIERE et Franck DAUMER pour leurs innombrables interventions. Leur expertise en informatique a été d'un grand secours dans la configuration et l'installation de différents logiciels.

Je tiens à remercier Daniel MARTIN, à la fois pour le travail d'entretien du code MELINA et aussi pour ses conseils, sa disponibilité et son aide quand à l'utilisation du code de calcul, ce qui a rendu la partie numérique plus aisée dans sa conception et sa programmation.

Par ailleurs, Madame Catherine BOLLEY, trouve ici ma reconnaissance pour l'attention qu'elle a portée à l'appréciation du manuscrit et pour les remarques pertinentes et constructives qui ont été formulées.

Aussi, j'ai une pensée émue pour Hamid ZIANI, un collègue qui aurait souhaité voir ce moment et avec qui les discussions étaient très riches et très fécondes.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à tous les collègues du Département de Mathématiques Jean Leray à Nantes et du Département Technique de Commercialisation de l'IUT de Saint-Nazaire qui n'ont pas directement participé à cette thèse, mais ils m'ont beaucoup apporté au cours de son élaboration par leur bonne humeur et leurs encouragements. Merci aussi au personnel administratif et technique des deux institutions pour leur disponibilité et leur dévouement.

Enfin, je n'oublie pas de mentionner le dévouement, la compréhension et la bonne humeur dont a su faire preuve Nadia, ma femme, tout au long de ce travail.

*A la mémoire de mon père
JANANE Mohammed*

A tous les membres de ma famille

ÉTUDES NUMÉRIQUES DU SPECTRE D'UN OPÉRATEUR DE SHRÖDINGER AVEC CHAMP MAGNÉTIQUE CONSTANT

Résumé

Cette thèse comporte quatre parties. Les deux premières parties concernent le calcul de la première valeur propre de familles d'opérateurs de Neumann en utilisant d'abord une méthode basée sur les différences finies, puis une approximation par une méthode d'éléments finis sans quadrature numérique. Pour le calcul numérique de la plus petite valeur propre, la méthode de la puissance inverse a été implémentée avec factorisation LU de la matrice considérée pour la résolution des systèmes linéaires utilisés.

La troisième partie porte sur un problème de valeurs propres faisant intervenir un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant issu de la théorie de Ginzburg-Landau et concernant la supraconductivité de certains matériaux. Pour la résolution numérique, une méthode basée sur les éléments finis avec intégration numérique est utilisée. Dans cette partie, une évaluation de la partie basse du spectre de la réalisation de Neumann est obtenue. En fait, seule la plus petite valeur propre est importante pour le problème physique. Ensuite, l'existence des solutions du problème variationnel spectral a été établie. Pour le calcul des paires propres, une méthode basée sur les éléments finis a été utilisée. L'étude de la convergence et l'estimation des erreurs pour les paires propres approchées avec quadrature numérique dans le cas où les fonctions propres sont vectorielles, sont semblables à celles obtenues dans le cas où les fonctions propres sont réelles. Dans l'étude de ces estimations, la distinction est faite entre le cas d'une valeur propre exacte simple et le cas d'une valeur propre exacte multiple.

La quatrième partie porte sur la mise en oeuvre de la résolution numérique du problème précédent. Cela passe par l'utilisation de MELINA qui est une bibliothèque de procédures pour la résolution de problèmes aux limites, gouvernés par des équations aux dérivées partielles, par la méthode des éléments finis en dimension 2 ou 3.

Abstract :

The first and second parts are about the computation of the first eigenvalue of families of Neumann operators, with finite elements. The third part concerns an eigenvalue problem for Schrodinger operator with constant magnetic field coming from the Ginzburg-Landau theory on supraconductivity. The numerical computation is based on finite element method with numerical quadrature. The existence of solutions for the variational formulation is studied. The fourth part is about the numerical resolution of the previous problem for several domains with different geometries. They are in agreement with the theory.

Table des matières

I	Calcul de la première valeur propre d'une famille d'opérateurs de Neumann en utilisant une approximation par une méthode d'éléments finis sans quadrature numérique	15
1	Historiques et généralités sur la supraconductivité	17
2	Quelques propriétés du bas spectre de la réalisation de Neumann de la famille d'opérateurs P_ξ	25
2.1	Problème spectral continu et sa formulation variationnelle	25
2.2	Comportement et propriétés de la fonction μ	26
2.3	Problème spectral approché et sa formulation variationnelle	27
3	Approximation par la méthode des différences finies	33
3.1	Schéma aux différences finies	33
3.2	Principe de la méthode de la puissance itérée	36
3.3	Calcul de la plus petite valeur propre par la méthode de la puissance inverse	37
4	Approximation par la méthode des éléments finis	41
4.1	Maillage	41
4.2	Notations	42
4.2.1	Polynômes d'approximations	42
4.2.2	Espace d'approximation	42
4.3	Formulation variationnelle discrète	42
4.4	Convergence des valeurs propres approchées	43
4.5	Utilisation des éléments finis P_1	43
4.5.1	Base canonique de l'espace d'approximation $V_{0,h}^1$	43
4.5.2	Transformation algébrique du problème variationnel discret	44
4.5.3	Calcul des coefficients de la matrice de rigidité N_h	45
4.5.4	Calcul des coefficients de la matrice de masse M_h	48
4.5.5	Calcul de la plus petite valeur propre	50
4.6	Utilisation des éléments finis P_2	52
4.6.1	Base canonique de l'espace d'approximation $V_{0,h}^2$	52

4.6.2	Transformation algébrique du problème variationnel discret	54
4.6.3	Calcul des coefficients de la matrice de rigidité N_h	55
4.6.4	Calcul des coefficients de la matrice de masse M_h	75
4.6.5	Calcul de la plus petite valeur propre	81
4.6.6	Comparaison des trois méthodes	83
 II Calcul de la première valeur propre d'une famille d'opérateurs de Montgomery en utilisant une méthode d'éléments finis sans quadrature numérique.		85
5	Introduction	87
6	Quelques propriétés du bas du spectre de la famille d'opérateurs Q_ξ	89
6.1	Problème spectral continu et sa formulation variationnelle	89
6.2	Comportement et propriétés de la fonction μ	90
6.3	Problème spectral approché et sa formulation variationnelle	91
7	Approximation par la méthode des différences finies	95
7.1	Schéma aux différences finies d'ordre 2	95
7.2	Schéma aux différences finies d'ordre 4	99
8	Approximation par la méthode des éléments finis P_1	101
8.1	Maillage	101
8.2	Notations	101
8.3	Formulation variationnelle discrète	102
8.4	Convergences des valeurs propres approchées	102
8.5	Base canonique de l'espace d'approximation $V_{0,h}^1$	103
8.6	Transformation algébrique du problème variationnel discret	103
8.7	Calcul des coefficients de la matrice de rigidité N_h	104
8.8	Calcul des coefficients de la matrice de masse M_h	106
8.9	Calcul de la plus petite valeur propre	107
8.10	Comparaison des deux méthodes	109
 III Évaluation numérique des paires propres d'un opérateur différentiel linéaire en utilisant une formulation variationnelle vectorielle et une approximation par une méthode d'éléments finis avec quadrature numérique		111
9	Position du problème	113
9.1	Introduction	113

9.2	Notations	114
9.3	Hypothèses	116
9.4	Problème continu de valeurs propres	116
10	Problème variationnel de valeurs propres	117
10.1	Formulation variationnelle	117
10.1.1	Remarque 1	120
10.1.2	Remarque 2	121
10.2	Existence des solutions du problème variationnel spectral	122
10.3	Problème variationnel considéré	126
11	Généralités sur la méthode des éléments finis	129
11.1	Triangulation	129
11.2	Inégalités inverses	131
11.3	Propriété d'approximation	132
11.4	Projection elliptique	132
11.5	Remarque	132
12	Approximation sans intégration numérique	133
12.1	Problème variationnel approché	133
12.2	Remarque : cas où la valeur propre exacte est multiple	134
13	Méthode des éléments finis avec quadrature numérique	137
13.1	Principe d'une quadrature numérique	137
13.1.1	Remarque	137
13.2	Approximation avec quadrature numérique	138
13.3	Approximation du produit scalaire dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$	140
13.4	Approximation de la forme bilinéaire	140
13.5	Estimation des erreurs de quadrature	142
14	Étude du problème variationnel approché avec intégration numérique	145
14.1	Problème variationnel approché	145
14.2	Convergence et estimation des erreurs pour les paires propres	145
14.2.1	Estimation des erreurs pour les valeurs propres	146
14.3	Estimation des erreurs pour les paires propres	146
14.3.1	Cas d'une valeur propre simple	146
14.3.2	Cas d'une valeur propre multiple	147
14.3.3	Remarque : amélioration de l'ordre de convergence	148

IV	Modelisation numérique	149
15	Applications numériques	151
15.1	Utilisation et programmation du code de calcul Melina	151
15.1.1	Description succincte du code de calcul Melina	151
15.1.2	Exemples du laplacien avec des conditions Dirichlet-Neumann . . .	152
15.2	Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant	155
15.3	Vérification de l'effet d'une translation	155
15.3.1	Maillages uniformes d'un secteur angulaire	155
15.3.2	Maillages raffinés d'un secteur angulaire	157
15.4	Réalisation de Neumann sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$	160
15.4.1	Approximation de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par un carré	160
15.4.2	Approximation de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par un dem-disque	161
15.5	Réalisation de Neumann sur différents domaines	162
15.5.1	Triangle équilatéral	162
15.5.2	Carré	163
15.5.3	Disque	164
15.5.4	Ellipse	165
15.5.5	Pentagone régulier	166
15.5.6	Hexagone régulier	167
15.5.7	Octogone régulier	168

Première partie

Calcul de la première valeur propre
d'une famille d'opérateurs de
Neumann en utilisant une
approximation par une méthode
d'éléments finis sans quadrature
numérique

Chapitre 1

Historiques et généralités sur la supraconductivité

En 1908, un laboratoire de Leiden en Hollande dirigé par le physicien Kammerlingh Onnes, réussit à liquéfier l'hélium et atteindre des températures très basses proche de 4 K ($0\text{K} = -273,15\text{C}$). Le 28 avril 1911, un étudiant de Kammerlingh Onnes, Gilles Holst découvre en refroidissant du mercure que sa résistance électrique chute brutalement, jusqu'à une valeur apparemment nulle, en dessous d'une température voisine de 4 K (figure 1b), alors que la décroissance de la résistivité est normalement progressive en fonction de la température observée pour un matériau normal (figure 1a).

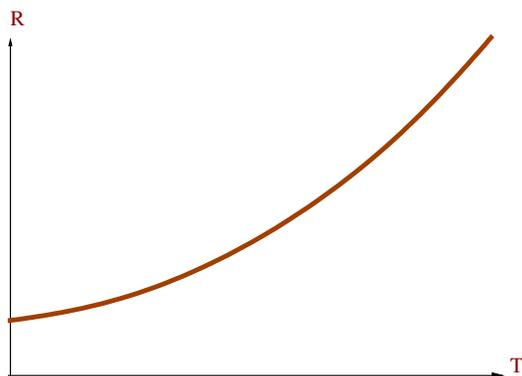


figure 1a : Résistance électrique d'un métal normal en fonction de la température

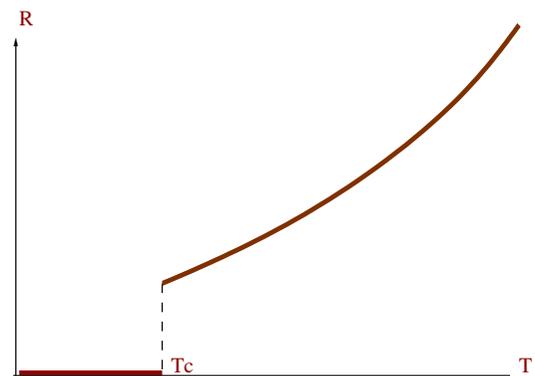


figure 1b : Résistance électrique d'un supraconducteur
Résistivité nulle en dessous de la température critique T_c

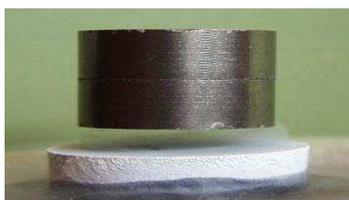
Ce spectaculaire phénomène de disparition de la résistivité à basse température est nommé **supraconductivité** où la dissipation d'énergie par effet joule n'a pas lieu d'être. Ce comportement supraconducteur est encore observé sur l'étain ($T_c=3.7\text{K}$) puis le plomb ($T_c=7.2\text{K}$), vers 1912 par K. Onnes. Le record de température critique pour un corps pur est détenu par le niobium ($T_c=9.2\text{K}$). Il a fallu attendre 1931, pour l'exploration des alliages supraconducteurs. En 1962, c'est la découverte du niobium-titane (Nb-Ti) dont la température critique est voisine de 10K. C'est cet alliage qui est utilisé aujourd'hui dans les fils des bobines supraconductrices fabriquées par Alstom à Belfort. Jusqu'en 1986, le record de T_c était détenu par l'alliage Nb₃Ge ($T_c=23\text{K}$), mais la découverte, cette année-là, par Johannes G. Bednorz et K. Alex Müller des oxydes supraconducteurs a relancé la recherche sur les supraconducteurs et l'obtention des matériaux à haute température critique pour les quels T_c est de l'ordre de 125K à 164K actuellement. Avec l'entrée en scène des ces nouveaux supraconducteurs, le refroidissement utilisant l'hélium liquide (4K) a laissé place à l'azote liquide (77K) dont l'obtention et la manipulation sont beaucoup plus aisées que l'hélium. Si la chute à zéro de la résistivité électrique des supraconducteurs est le phénomène le plus spectaculaire, leur comportement en présence de champs magnétiques s'est révélé tout aussi prodigieux qu'important. En effet, en 1933 les chercheurs berlinois Walther Meissner et Robert Ochsenfeld montrèrent que lorsqu'un champ magnétique extérieur est appliqué à un matériau supraconducteur, celui ci réagit de sorte que le champ magnétique en son sein reste nul, en expulsant le flux magnétique, sauf dans une fine couche superficielle. Une illustration particulière de ce phénomène est la lévitation d'une pastille supraconductrice dans un champ magnétique : l'expulsion des lignes d'induction magnétique se traduit par une force répulsive entre la pastille et la source de champ magnétique, retourner la pastille ne change en rien son comportement. Le supraconducteur semble se comporter comme un diamagnétique parfait. Ce phénomène porte le nom d' **effet Meissner**.

L'état supraconducteur étant limité en température, on constate aussi que l'application d'un champ magnétique suffisamment élevé provoque la disparition de la supraconductivité; il en est de même si on fait passer un courant important dans l'échantillon. La supraconductivité dépend donc de trois paramètres différents : la température T , le champ magnétique extérieur H et la densité du courant électrique I appliquée.

En 1935 les frères F. et H. LONDON proposèrent la première théorie phénoménologique de la supraconductivité qui décrit le comportement des électrons dans les supraconducteurs et donne une explication satisfaisante de l'effet Meissner. Cette théorie montre l'existence d'une zone de transition au voisinage de la surface de l'échantillon dans laquelle le champ magnétique passe d'une valeur non nulle à l'extérieur de l'échantillon à une valeur presque nulle au sein de l'échantillon. Cette épaisseur, noté λ_L et appelée longueur de pénétration de London, constitue une des valeurs caractéristiques des supraconducteurs.

Plus de 40 ans après la découverte de la supraconductivité, aucune explication microscopique du phénomène n'était apparue, les plus grands esprits de cette période par ailleurs très riche pour la physique ont essayés vainement d'élucider le mécanisme microscopique de la supraconductivité. Il a fallu attendre 1957 pour voir apparatre le premier modèle d'une théorie microscopique (BCS), proposé par J. Bardeen, L. N. Cooper et R. Schrieffer en émettant l'hypothèse d'une interaction entre électrons par l'intermédiaire du réseau (les phonons) en formant des paires, nommées paires de Cooper, par un appariement dans l'espace des quantités de mouvement. Cette théorie a rencontré un succès éclatant en permettant d'interpréter l'essentiel des résultats expérimentaux et un certain nombre de ses conséquences ont été confirmés expérimentalement.

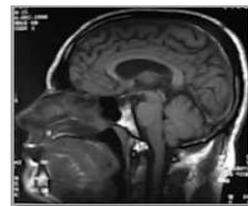
De nombreuses applications technologiques de la supraconductivité ont vu le jour, parmi les quelles, on peut citer les trains à lévitation supraconductrice allemands et japonais utilisant des aimants supraconducteurs de fortes puissances qui empêchent le frottement avec les rails, les Images à Résonance Magnétique IRM utilisées dans le domaine de l'imagerie médicale, la spectroscopie par résonance nucléaire RMN qui se développe dans l'industrie chimique et pharmaceutique et les aimants circulaires utilisés dans la construction de l'accélérateur de particules LHC (Large Hardon Collider) du CERN.



Aimant en lévitation
au dessus d'un supraconducteur



MagLev
Transrapid (Shanghai)



I R M
Image du cerveau

Comme on l'a vu précédemment, plusieurs modèles mathématiques ont été élaborés pour expliquer la supraconductivité. Dans la suite, on va se limiter à la théorie de Ginzburg-Landau, issue directement de la théorie générale des transitions de phase du second ordre établie de façon intuitive par L. D. Landau vers 1950. Cette théorie, également phénoménologique, suppose que lors de la transition de l'état normal (paramagnétique désordonné à haute température) vers l'état supraconducteur (ferromagnétique ordonné à basse température), il y a condensation d'une partie des électrons de conduction dans un état ordonné. Elle suppose l'existence d'une fonction d'onde ψ tendant vers 0 à la transition de phase, décrivant à l'échelle macroscopique l'ensemble des électrons supraconducteurs, et d'une écriture de l'énergie libre selon les puissances de ψ . La fonction ψ à valeurs complexes est appelée paramètre d'ordre, le carré de son module $|\psi|^2$ représente

la densité des paires d'électrons supraconducteurs et sa phase la circulation du courant électrique. Ainsi, l'état supraconducteur du matériau correspond à $|\psi|$ proche de 1 et l'état normal du matériau correspond à $|\psi|$ proche de 0. En incorporant des termes assurant "l'invariance par changement de jauge", V. L. Ginzburg et L. D. Landau proposèrent deux équations permettant de décrire l'état supraconducteur. Ces équations rendent compte de l'effet Meissner en permettant de définir une longueur caractéristique de variation du champ magnétique local, $\lambda(T) = \frac{a}{\sqrt{T_c - T}}$ la profondeur de pénétration, identifié à la longueur caractéristique de London $\lambda_L(T)$. En outre elles introduisent une nouvelle longueur caractéristique appelée longueur de cohérence $\xi(T) = \frac{b}{\sqrt{T_c - T}}$ qui représente la distance sur laquelle s'établit l'état supraconducteur.

Dans cette modélisation, on rencontre le problème de réduction au minimum de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau correspondante à l'énergie libre du matériau considéré :

$$\mathcal{G}(\psi, A) = \int_{\Omega} \left(|\nabla - i\kappa A \psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2} (|\psi|^2 - 1)^2 \right) dx + \int_{\Omega} \kappa^2 |\text{rot} A - H|^2 dx \quad (1.1)$$

Le premier terme représente l'énergie associée aux électrons supraconducteurs et le deuxième terme l'énergie magnétique.

L'ouvert Ω , représentant l'échantillon supraconducteur, est un domaine borné et suffisamment régulier de \mathbb{R}^2 , ψ le paramètre d'ordre et A est un champ de vecteurs défini sur Ω qui représente le potentiel magnétique induit dont le champ magnétique associé est $B = \text{rot} A$. H est le champ magnétique extérieur ou champ magnétique appliqué à Ω

En supposant que les champ magnétiques extérieurs sont uniformes, constants et normaux à Ω , on peut écrire H sous la forme $H = \sigma H_e$ où H_e est un champ fixé constant égal à 1 et σ est un paramètre représentant l'intensité du champ appliqué.

Le paramètre $\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} = \frac{a}{b}$, indépendant de la température T , est une caractéristique physique de l'échantillon. Selon la nature du matériau, on distingue essentiellement deux type de supraconducteurs :

◊ Les **supraconducteurs de type 1** (figure 2a) correspondant à κ petit ($< \frac{1}{\sqrt{2}}$), qui présentent un diamagnétisme parfait (effet Meissner) jusqu' à ce que le module du champ magnétique appliqué atteigne une valeur critique $H_{C'}$: le matériau devient subitement normal avec une transition abrupte.

◊ Les **supraconducteurs de type 2** (figure 2b) correspondant à κ grand ($> \frac{1}{\sqrt{2}}$) dont l'aimantation ne s'annule pas brutalement mais elle décroît lentement à partir d'un champ critique H_{C_1} , appelé champ critique inférieur, pour s'annuler à un second champ critique H_{C_2} , appelé champ critique supérieur. Ce diamagnétisme partiel entre les champs critiques H_{C_1} et H_{C_2} a été observé par L. V. Schubnikov en 1937 et il a fallu attendre les

travaux de A. Abrikosov, 20 ans plus tard, basés sur la théorie de Ginzburg-Landau pour comprendre l'existence de deux types de supraconducteurs.

En réalité, si le matériau redevient normal au champ critique supérieur H_{C_2} , il n'en est pas de même de sa surface qui continue à manifester des signes de supraconductivité jusqu'à un nouveau champ magnétique critique appelé H_{C_3} dont l'existence a été prédite par P.-G. De Gennes. Cela signifie que, partant des champs élevés, une supraconductivité de surface d'extension ξ^2 apparaît à un champ $H_{C_3} := 1.695H_{C_2}$.

Dans la suite, on s'intéressera uniquement aux échantillons supraconducteurs de type 2 avec trois champs critiques $H_{C_1}(\kappa)$, $H_{C_2}(\kappa)$ et $H_{C_3}(\kappa)$ correspondant aux effets suivants :

- $\sigma < H_{C_1}(\kappa)$:
L'échantillon est dans la phase supraconductrice, il laisse passer le courant sans résistance électrique et repousse les lignes du champ magnétique extérieur.
- $H_{C_1}(\kappa) < \sigma < H_{C_2}(\kappa)$:
L'échantillon est dans un état mixte avec coexistence des phases normale et supraconductrice.
- $H_{C_2}(\kappa) < \sigma < H_{C_3}(\kappa)$:
La supraconductivité a disparu à l'intérieur et subsiste à la surface du matériau.
- $\sigma > H_{C_3}(\kappa)$:
L'échantillon est dans son état normal où la supraconductivité a totalement disparu du matériau

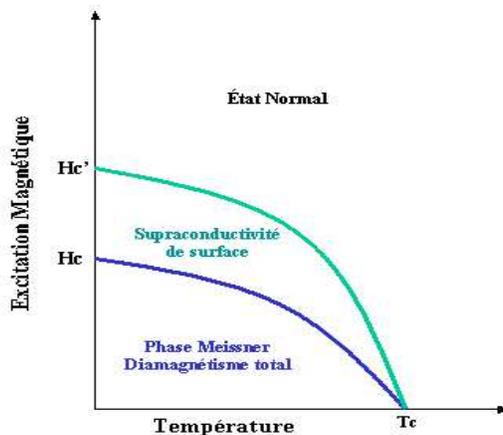


Figure 2a : Diagramme de phase D'un supraconducteur de type I

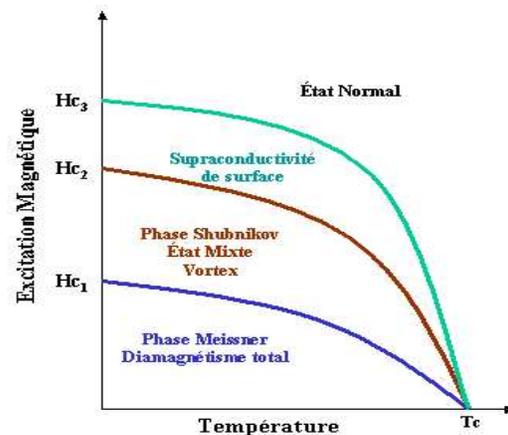


Figure 2b : Diagramme de phase D'un supraconducteur de type II

Les points critiques de la fonctionnelle $\mathcal{G}(\psi, A)$ sont solutions des équations d'Euler ([29], [40]). En linéarisant ces équations au voisinage de l'état normal, on se ramène au calcul de la plus petite valeur propre de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique :

$$P_{h,A} = -\left(h\nabla - iA\right)^2$$

Le champ de vecteurs A est un potentiel magnétique régulier dont le champ magnétique associé est $B = \text{rot}A$ et h est un paramètre positif qui caractérise le type de supraconductivité du matériau.

Le problème continu de valeurs propres s'écrit :

$$\begin{cases} P_{h,A}\psi = \lambda\psi & \text{sur } \Omega \\ \left((h\nabla - iA)\psi\right) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.2)$$

Dans cette section, on va s'intéresser à l'étude de l'opérateur P défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par :

$$P = \left(D_{x_1} - b\frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(D_{x_2} + b\frac{x_1}{2}\right)^2. \quad (1.3)$$

On note que l'opérateur P est un cas particulier de l'opérateur $P_{h,A}$ avec $h = 1, A = b\left(\frac{x_2}{2}; -\frac{x_1}{2}\right)$ en vertu de la relation :

$$\left(\nabla - iA\right)^2 = -\left(\frac{1}{i}\nabla - A\right)^2.$$

A l'aide de transformations unitaires (une transformation de jauge suivie d'une transformation de Fourier, voir [14]), on se ramène à la recherche de la plus petite valeur propre pour la réalisation de Neumann d'une famille d'opérateurs P_ξ définie par :

$$P_\xi = D_t^2 + (t - \xi)^2 \text{ sur }]0, +\infty[. \quad (1.4)$$

Soit $\mu(\xi)$ la plus petite valeur propre de P_ξ . On montre (voir [36]) que le bas du spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur $P_{h,A}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ est $bh\Theta_0$ avec

$$\Theta_0 = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \mu(\xi). \quad (1.5)$$

Un autre résultat important ([40]) précisant l'apparition de la nucléation dans le cas d'un domaine Ω simplement connexe dont la frontière est suffisamment régulière :

$$\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \frac{H_{C_3}(\kappa)}{\kappa} = \frac{1}{\Theta_0}.$$

Le réel Θ_0 joue un rôle important dans la détermination du bas spectre dans plusieurs cas de la réalisation de Neumann, c'est pourquoi on va s'intéresser à son approximation en utilisant la famille d'opérateurs P_ξ . Dans un premier temps, on va rappeler des résultats théoriques concernant le bas spectre de cette famille d'opérateurs. Ensuite, on va s'intéresser à l'approximation numérique de la plus petite valeur propre en utilisant d'abord un schéma numérique basé sur les différences finies, et ensuite des méthodes utilisant les éléments finis sans quadrature numérique.

Chapitre 2

Quelques propriétés du bas spectre de la réalisation de Neumann de la famille d'opérateurs P_ξ

2.1 Problème spectral continu et sa formulation variationnelle

On considère l'opérateur différentiel P_ξ dépendant du paramètre réel ξ et défini par :

$$P_\xi u(t) = -u''(t) + (t - \xi)^2 u(t). \quad (2.1)$$

Soit ξ un nombre réel fixé, le problème spectral continu consiste à chercher une fonction non nulle u suffisamment régulière sur $]0, +\infty[$ et un réel λ_ξ vérifiant :

$$\begin{cases} P_\xi u = \lambda_\xi u & \text{sur }]0, +\infty[\\ u'(0) = 0. & \text{(condition de Neumann en 0)} \end{cases} \quad (2.2)$$

On introduit les espaces qui apparaîtront lors de la formulation variationnelle du problème spectral continu (2.2) :

$$\mathcal{D}_2 = \left\{ u \in H^2(]0, +\infty[) \mid t^k u \in L^2(]0, +\infty[) \text{ , } k = 0, 1, 2 \right\}, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{D}_2^N = \left\{ u \in \mathcal{D}_2 \text{ et } u'(0) = 0 \right\}, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ u \in H^1(]0, +\infty[) \mid t^k u \in L^2(]0, +\infty[) \text{ , } k = 0, 1, 2 \right\}, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{D}_1^N = \left\{ u \in \mathcal{D}_1 \text{ et } u'(0) = 0 \right\}. \quad (2.6)$$

On montre que le domaine de la réalisation de Neumann de l'opérateur P_ξ sur $L^2(]0, +\infty[)$ est indépendant de ξ (voir [14]) et vaut \mathcal{D}_2^N .

Soit u une fonction suffisamment régulière solution du problème spectral continu (2.2) et v une "fonction test", $v \in \mathcal{D}_1$, en utilisant la condition de Neumann en 0 on a :

$$\int_0^{+\infty} \left[-u''(t) + (t - \xi)^2 u(t) \right] v(t) dt = \int_0^{+\infty} \left[u'(t)v'(t) + (t - \xi)^2 u(t)v(t) \right] dt.$$

Ainsi le problème variationnel s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{D}_1 \text{ et un réel } \lambda_\xi \text{ vérifiant :} \\ \forall v \in \mathcal{D}_1, \quad a(u, v) = \lambda_\xi(u, v)_{L^2}. \end{cases} \quad (2.7)$$

où $a(u, v)$ est la forme bilinéaire associée à l'opérateur P_ξ :

$$a(u, v) = \int_0^{+\infty} \left[u'(t)v'(t) + (t - \xi)^2 u(t)v(t) \right] dt, \quad (2.8)$$

et $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ le produit scalaire de $L^2(]0, +\infty[)$:

$$(u, v)_{L^2} = \int_0^{+\infty} u(t)v(t) dt.$$

On note q_ξ la forme quadratique associée à la réalisation de Neumann de l'opérateurs P_ξ :

$$q_\xi(u) = a(u, u) = \int_0^{+\infty} \left[|u'(t)|^2 + (t - \xi)^2 |u(t)|^2 \right] dt. \quad (2.9)$$

Cette forme est définie sur le domaine \mathcal{D}_1 .

Soit $\mu(\xi)$ la plus petite valeur propre de P_ξ sur $L^2(]0, +\infty[)$. Le principe du min-max donne :

$$\mu(\xi) = \inf_{u \in \mathcal{D}_1, u \neq 0} \frac{q_\xi(u)}{\|u\|_{L^2(]0, +\infty[)}^2}. \quad (2.10)$$

2.2 Comportement et propriétés de la fonction μ

Voici quelques résultats concernant le comportement de $\mu(\xi)$, pour plus d'information sur ce sujet, on peut consulter par exemple [5], [28], [38], ou [4].

- La fonction $\xi \mapsto \mu(\xi)$ est continue sur \mathbb{R} ,
- $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \mu(\xi) = +\infty$ et $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \mu(\xi) = 1$,

- $\mu(0) = 1$ et $\mu'(0) < 0$,
- Il existe un unique réel $\xi_0 > 0$ tel que la fonction μ est strictement décroissante de $] - \infty, \xi_0[$ dans $] \Theta_0, +\infty[$ et strictement croissante de $] \xi_0, +\infty[$ dans $] \Theta_0, 1[$,
- $\Theta_0 = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \mu(\xi) = \mu(\xi_0) < 1$,
- $\Theta_0 = \xi_0^2$ et $0 < \mu''(\xi_0) < 2$,
- $\int_0^{+\infty} [|\varphi_0'(t)|^2 + (t - \xi_0)^2 |\varphi_0(t)|^2] dt = \Theta_0$ où φ_0 est une fonction propre normalisée associée à l'opérateur P_{ξ_0} ,
- $|\varphi_0(0)|^2 = \frac{\mu''(\xi_0)}{2\xi_0}$,
- $\int_0^{+\infty} (t - \xi_0) |\varphi_0(t)|^2 dt = 0$,
- φ_0 décroît rapidement vers 0 en $+\infty$.

Une estimation de $\Theta_0 \simeq 0.59010$ a été donnée par P.G. De Gennes [56].

V. Bonnaillie [14] a établi un encadrement de Θ_0 avec 5 décimales :

$$0.59009 \leq \Theta_0 \leq 0.59010$$

2.3 Problème spectral approché et sa formulation variationnelle

Comme φ_0 décroît rapidement vers 0 en $+\infty$, alors pour le calcul de $\mu(\xi)$ il est naturel de considérer le problème spectral continu approché qui consiste à chercher une fonction u non nulle, suffisamment régulière sur $]0, T[$ et nulle sur $[T, +\infty[$ ainsi qu'un réel $\lambda_{\xi, T}$ vérifiant :

$$\begin{cases} P_{\xi} u = \lambda_{\xi, T} u & \text{sur }]0, T[\\ u'(0) = 0 & \text{et } u(T) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

C'est un problème de valeurs propres de Sturm-Liouville qui peut être décrit facilement par la théorie abstraite des opérateurs linéaires, compacts et auto-adjoints.

Théorème 2.3.1.

Toutes les valeurs propres du problème spectral approché (2.11) sont simples et strictement positives. Les fonctions propres correspondantes sont réelles et forment un système complet et orthogonal dans $L^2(]0, T[)$.

Le problème (2.11) possède un nombre infini et dénombrable de valeurs propres formant une suite croissante de nombres positifs tendant vers $+\infty$.

$$0 < \lambda_{\xi,T,1} < \lambda_{\xi,T,2} < \cdots < \lambda_{\xi,T,m} < \cdots \rightarrow +\infty,$$

Preuve : Pour la démonstration de ce résultat et pour plus de détails concernant les valeurs propres des opérateurs de Sturm-Liouville, on peut consulter par exemple [15], [42] ou [44]. \square

De la même manière que la section précédente, on définit les espaces nécessaires pour la formulation variationnelle du problème spectral continu approché (2.11) :

$$\mathcal{D}_{2,T} = \left\{ u \in H^2(]0, T[) \mid t^k u \in L^2(]0, T[) \text{ , } k = 0, 1, 2 \text{ et } u(T) = 0 \right\}, \quad (2.12)$$

$$\mathcal{D}_{2,T}^N = \left\{ u \in \mathcal{D}_{2,T} \mid u'(0) = 0 \right\}, \quad (2.13)$$

$$\mathcal{D}_{1,T} = \left\{ u \in H^1(]0, T[) \mid t^k u \in L^2(]0, T[) \text{ , } k = 0, 1, 2 \text{ et } u(T) = 0 \right\}, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{D}_{1,T}^N = \left\{ u \in \mathcal{D}_{1,T} \mid u'(0) = 0 \right\}. \quad (2.15)$$

Le domaine de la réalisation de Neumann en 0 et de Dirichlet en T de l'opérateur P_ξ sur $L^2(]0, T[)$ est indépendant de ξ et vaut $\mathcal{D}_{2,T}^N$.

Soit une fonction u suffisamment régulière solution du problème spectral continu approché (2.11) et v une "fonction test", $v \in \mathcal{D}_{1,T}$, en utilisant une intégration par parties et les conditions de Neumann en 0 et de Dirichlet en T on a :

$$\int_0^T \left[-u''(t) + (t - \xi)^2 u(t) \right] v(t) dt = \int_0^T \left[u'(t)v'(t) + (t - \xi)^2 u(t)v(t) \right] dt.$$

Ainsi le problème variationnel s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{D}_{1,T} \text{ et un réel } \lambda_\xi^T \text{ vérifiant :} \\ \forall v \in \mathcal{D}_{1,T}, \quad a_T(u, v) = \lambda_\xi^T (u, v)_{L_T^2}. \end{cases} \quad (2.16)$$

où $a_T(u, v)$ est la forme bilinéaire associée à l'opérateur P_ξ sur $L^2(]0, T[)$:

$$a_T(u, v) = \int_0^T \left[u'(t)v'(t) + (t - \xi)^2 u(t)v(t) \right] dt, \quad (2.17)$$

et $(\cdot, \cdot)_{L_T^2}$ le produit scalaire de $L^2(]0, T[)$:

$$(u, v)_{L_T^2} = \int_0^T u(t)v(t) dt.$$

Proposition 2.3.2.

La forme bilinéaire $a_T(.,.)$ est continue, symétrique et coercive.

Preuve : La forme bilinéaire $a_T(.,.)$ est continue sur $\mathcal{D}_{1,T} \times \mathcal{D}_{1,T}$. En effet, $\forall u, v \in \mathcal{D}_{1,T}$

$$\begin{aligned} a_T(u, v) &\leq |u'|_{L_T^2} |v'|_{L_T^2} + C_T |u|_{L_T^2} |v|_{L_T^2} \quad \text{avec} \quad C_T = \|(t - \xi)^2\|_\infty = \max(\xi^2; (T - \xi)^2) \\ &\leq \|u\|_1 \|v\|_1 + C_T \|u\|_1 \|v\|_1 \\ &\leq C \|u\|_1 \|v\|_1 . \end{aligned}$$

La forme bilinéaire $a_T(.,.)$ est symétrique car $\forall u, v \in \mathcal{D}_{1,T} \quad a_T(u, v) = a_T(v, u)$.

La forme bilinéaire $a_T(.,.)$ est coercive. En effet, pour tout $u \in \mathcal{D}_{1,T}$ on a :

$$\begin{aligned} u(s) &= u(T) - \int_s^T u'(t) dt \\ &= - \int_s^T u'(t) dt \quad \text{car} \quad u(T) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} |u(s)| &= \left| \int_s^T u'(t) dt \right| \\ &\leq \int_s^T |u'(t)| dt \\ &\leq \int_0^T |u'(t)| dt. \end{aligned}$$

Et l'inégalité de Hölder permet d'avoir

$$|u|_{L_T^2} \leq T |u'|_{L_T^2} .$$

Et par suite

$$\begin{aligned} a_T(u, u) &= \int_0^T |u'(t)|^2 dt + \int_0^T (t - \xi)^2 |u(t)|^2 dt \\ &\geq \int_0^T |u'(t)|^2 dt \\ &\geq \alpha \|u\|_1^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{(1 + T)^2} . \end{aligned}$$

□

Les propriétés des valeurs propres λ_ξ^T et des fonctions propres correspondantes du problème variationnel (2.16) sont décrites dans le théorème suivant :

Théorème 2.3.3.

Les valeurs propres du problème variationnel (2.16) forment une suite croissante de nombres positifs tendant vers $+\infty$

$$0 < \lambda_{\xi,1}^T < \lambda_{\xi,2}^T < \dots < \lambda_{\xi,m}^T < \dots \rightarrow +\infty,$$

Les fonctions propres correspondantes $\{w_m\}_1^\infty$ forment une base orthonormale de $L^2(]0, T[)$.

Preuve : En appliquant le théorème 6.2-1 ([53]) à la forme bilinéaire $a_T(u, v)$. □

On note $q_{\xi,T}$ la forme quadratique associée :

$$q_{\xi,T}(u) = a_T(u, u) = \int_0^T [|u'(t)|^2 + (t - \xi)^2 |u(t)|^2] dt. \quad (2.18)$$

Cette forme est définie sur le domaine $\mathcal{D}_{1,T}$.

Soit $\mu_T(\xi) = \lambda_{\xi,1}^T$ la plus petite valeur propre de P_ξ sur $L^2(]0, T[)$. Le principe du min-max s'écrit :

$$\mu_T(\xi) = \inf_{u \in \mathcal{D}_{1,T}, u \neq 0} \frac{q_{\xi,T}(u)}{\|u\|_{L^2(]0, T[)}^2}. \quad (2.19)$$

Proposition 2.3.4.

$$\mu(\xi) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \mu_T(\xi).$$

où $\mu(\xi)$ est la plus petite valeur propre de P_ξ qui est caractérisée par la relation (2.10).

Preuve :

Existence de la limite : Pour tout $\varepsilon > 0$, l'espace $\mathcal{D}_{1,T}$ s'injecte continument dans $\mathcal{D}_{1,T+\varepsilon}$, la formule (2.19) montre $\mu_{T+\varepsilon} < \mu_T$ et donc $\lim_{T \rightarrow +\infty} \mu_T(\xi)$ existe.

Soit ω_T la fonction propre associée à la valeur propre approchée $\mu_T(\xi)$. On considère la fonction $\tilde{\omega}$ de \mathcal{D}_1 , prolongement de ω_T sur $[0, +\infty[$ et définie par :

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{cases} \omega_T(t) & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{si } t \in [T, +\infty[. \end{cases}$$

le principe du min-max nous permet d'écrire

$$\mu(\xi) \leq \frac{q_\xi(\tilde{\omega})}{\|\tilde{\omega}\|_{L^2(]0, +\infty[)}^2} = \frac{q_{\xi,T}(\omega_T)}{\|\omega_T\|_{L^2(]0, T[)}^2} = \mu_T(\xi).$$

Et par conséquent, on a :

$$\mu(\xi) \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \mu_T(\xi).$$

Réciproquement, on considère ω la fonction propre associée à la valeur propre exacte $\mu(\xi)$. Soit χ une fonction de $\mathcal{C}^\infty([0; +\infty[)$ définie par

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

On considère la suite de fonctions $(\omega_n)_{n \geq 1}$ de l'espace $\mathcal{D}_{1,2n}$ et définie par $\omega_n = \chi(\frac{t}{n}) \times \omega$. le Théorème de convergence dominée de Lebesgue nous permet d'écrire

$$q_\xi(\omega_n) \longrightarrow q_\xi(\omega) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

En utilisant encore le principe du min-max on a :

$$\frac{q_\xi(\omega_n)}{\|\omega_n\|_{L^2(]0, +\infty[)}^2} = \frac{q_{\xi,2n}(\omega_n)}{\|\omega_n\|_{L^2(]0, 2n[)}^2} \geq \inf_{u \in \mathcal{D}_{1,2n}, u \neq 0} \frac{q_{\xi,2n}(u)}{\|u\|_{L^2(]0, 2n[)}^2} = \mu_{2n}(\xi).$$

et par passage à la limite, on obtient :

$$\mu(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_\xi(\omega_n)}{\|\omega_n\|_{L^2(]0, +\infty[)}^2} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{2n}(\xi).$$

□

Chapitre 3

Approximation par la méthode des différences finies

Soit n un entier naturel non nul et T un nombre réel strictement positif. Afin d'approcher $\mu_T(\xi)$, on introduit un pas de discrétisation h :

$$h = \frac{T}{n+1}$$

Ensuite, on définit une partition régulière de l'intervalle $[0 ; T]$ comme étant l'ensemble des points $(t_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ avec

$$t_0 = 0 \quad ; \quad t_i = ih \text{ pour } 0 \leq i \leq n+1 \quad \text{et} \quad t_{n+1} = T$$

Pour résoudre numériquement notre problème (2.11), en utilisant de simples formules de Taylor, on va approcher l'opérateur de dérivée seconde par un opérateur discret d'ordre k ($k = 2$ ou 4) et par suite le problème continu par une écriture algébrique matricielle de valeurs propres.

Le problème va consister à chercher des vecteurs $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ de composantes u_i , approximations des $u(t_i)$ en chacun des noeuds internes de $[0 ; T]$ (ie t_i pour $1 \leq i \leq n$), et des nombres réels λ_h approximations des valeurs propres λ_T .

3.1 Schéma aux différences finies

Supposons u une fonction appartenant à $C^4([0, T])$, des combinaisons de développements de Taylor au voisinage de t nous donne :

$$u''(t) = \frac{1}{h^2} \left[u(t+h) - 2u(t) + u(t-h) \right] + O(h^2).$$

On introduit ainsi le schéma aux différences finies suivant :

$$\frac{1}{h^2} \left[-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} \right] + (t_i - \xi)^2 u_i = \lambda_T u_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

En posant $\lambda_h = h^2 \lambda_T$ et $\alpha_i = 2 + h^2(\beta_i)^2$ avec $\beta_i = t_i - \xi$, on a :

$$-u_{i-1} + \alpha_i u_i - u_{i+1} = \lambda_h u_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n. \quad (3.1)$$

D'autre part, au voisinage de 0, on peut écrire $u(h) = u(0) + hu'(0) + O(h)$ et comme $u'(0) = 0$ et $u(T) = 0$ alors on peut supposer que $u_0 = u_1$ et $u_{n+1} = 0$.

Par conséquent le problème approché s'écrit :

$$\begin{cases} (-1 + \alpha_1)u_1 - u_2 & = \lambda_h u_1 \\ -u_{i-1} + \alpha_i u_i - u_{i+1} & = \lambda_h u_i \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ -u_{n-1} + \alpha_n u_n & = \lambda_h u_n. \end{cases} \quad (3.2)$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} (-1 + \alpha_1) & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \alpha_2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \alpha_{n-2} & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \alpha_{n-1} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & \alpha_n \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

et U le vecteur dont la i^{eme} composante est u_i . Le schéma (3.2) s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$AU = \lambda_h U.$$

Proposition 3.1.1.

La matrice A est symétrique, tridiagonale, définie positive et à diagonale fortement dominante. Les valeurs propres de A sont strictement positives

Preuve :

Il est clair que A est symétrique et tridiagonale. La matrice A est définie positive. En effet, soit $X = (x_i)_{i \leq n}$ un vecteur quelconque de \mathbb{R}^n , on a :

$$\begin{aligned}
\langle AX, X \rangle &= {}^t X A X = [(-1 + \alpha_1)x_1 - x_2]x_1 + [-x_1 + \alpha_2x_2 - x_3]x_2 + \cdots \\
&\quad + [-x_{n-2} + \alpha_{n-1}x_{n-1} - x_n]x_{n-1} + [-x_{n-1} + \alpha_nx_n]x_n \\
&= -x_1^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\
&= x_1^2 + 2 \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + 2x_n^2 + h^2 \sum_{i=1}^n (\beta_i x_i)^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\
&= \left(x_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 \right) + \left(\sum_{i=2}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 \right) + x_n^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + h^2 \sum_{i=1}^n (\beta_i x_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + x_n^2 + h^2 \sum_{i=1}^n (\beta_i x_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 + x_n^2 + h^2 \sum_{i=1}^n (\beta_i x_i)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

et cette quantité ne peut-être nulle que si tous les x_i sont nuls.

La matrice A est à diagonale dominante car pour tout i , $2 \leq i \leq n-1$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| &= 2 \leq a_{ii} = 2 + (h\beta_i)^2, \\
\sum_{j=2}^n |a_{1j}| &= 1 \leq a_{11} = 1 + (h\beta_1)^2, \\
\sum_{j=1}^{n-1} |a_{nj}| &= 1 \leq a_{nn} = 2 + (h\beta_n)^2.
\end{aligned}$$

En plus, les t_i sont distincts, donc il existe au moins un t_k telle que $t_k \neq \xi$ et par suite l'élément a_{kk} de la diagonale vérifie

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| = 2 < a_{kk} = 2 + (h\beta_k)^2.$$

et par conséquent la diagonale est fortement dominante.

Soit $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre λ . le vecteur

$U \neq 0$ et on a :

$\lambda = \langle AU, U \rangle$ est strictement supérieure à 0 car la matrice A est définie positive. \square

Enfin, pour le calcul numérique, on va utiliser une méthode itérative permettant de calculer la plus petite valeur propre en module d'une matrice donnée. Pour cela on va commencer d'abord par donner le principe général de la méthode de la puissance itérée.

3.2 Principe de la méthode de la puissance itérée

Soit V un vecteur quelconque de \mathbb{K}^n , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base de \mathbb{K}^n . On pose :

$$V_0 = V \quad V_1 = AV_0 = AV = \sum_{i=1}^n v_i A e_i \quad \text{avec} \quad V = \sum_{i=1}^n v_i e_i.$$

Donc pour tout $p \geq 1$, on a :

$$V_p = AV_{p-1} = A^p V_0 = A^p V = \sum_{i=1}^n v_i A^p e_i.$$

Soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une base de \mathbb{K}^n formée de vecteurs propres de A qu'on suppose diagonalisable, on a :

$$V_p = A^p V = \sum_{i=1}^n \lambda_i^p v_i e_i.$$

et si λ_1 est la valeur propre dominante (plus grand module), alors on a :

$$\frac{1}{\lambda_1^p} A^p V = v_1 e_1 + \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^p e_i.$$

Et si on fait l'hypothèse que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ alors on a :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right|^p = 0.$$

d'où

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^p} A^p V = v_1 e_1.$$

Par conséquent, la suite des vecteurs $(A^p V)_p$ tend vers le vecteur propre dominant $v_1 e_1$.

Si λ_1 est trop grande (ou trop petite) en module et comme les vecteurs $A^p V$ sont de l'ordre $\lambda_1^p v_1 e_1$, alors en calcul numérique, on peut facilement dépasser les capacités des calculateurs. Pour remédier à ce dépassement de mémoire, on va normaliser les vecteurs calculés à chaque itération.

Ainsi, on ne va pas appliquer A à V_p , mais au vecteur normé : $\frac{V_p}{\|V_p\|}$ où $\|\cdot\|$ étant prise en général comme la plus grande composante du vecteur V_p à savoir $\|V_p\|_\infty$.

3.3 Calcul de la plus petite valeur propre par la méthode de la puissance inverse

Enfin pour calculer la valeur propre de plus petit module de la matrice A qui nous concerne (3.3), dans ce cas la plus petite valeur propre, on va utiliser la méthode de la puissance inverse classique (méthode de la puissance itérée appliquée à A^{-1} sans la calculer évidemment).

Pour la résolution des systèmes linéaires utilisés par l'algorithme de la puissance inverse on fait appel à la factorisation LU de la matrice A où L est une matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure. On note que cette factorisation existe sans permutations car la matrice A est réelle, symétrique et définie positive.

En outre, la matrice étant définie positive, on aurait pu aussi utiliser une factorisation positive de Cholesky $L^t L$ où L est une matrice triangulaire inférieure régulière dont les coefficients diagonaux sont positifs.

ALGORITHME 1 :

(Méthode de la puissance inverse classique)

- $V^{(0)}$ vecteur d'initialisation non nul
- Résoudre le système linéaire $AW^{(k+1)} = V^{(k)}$
- Calculer le vecteur $V^{(k+1)} = \frac{W^{(k+1)}}{\|W^{(k+1)}\|}$
- Test d'arrêt : $k > \text{IteMax}$ ou $\|V^{(k+1)} - V^{(k)}\| < \text{ErrSou}$
 IteMax est le nombre maximale d'itération autorisé.
 ErrSou est l'erreur souhaitée
- Calculer $\beta^{(k+1)} = W^{(k+1)} \cdot V^{(k)}$
- Calculer $\lambda^{(k+1)} = \frac{1}{\beta^{(k+1)}}$
- Valeur approchée de la plus petite valeur propre :
 $\lambda_1 \approx \lambda^{(k+1)}$ et $\mu_T(\xi) \approx \frac{\lambda_1}{h^2}$

La convergence de l'algorithme précédent est assurée par la proposition suivante :

Proposition 3.3.1.

Soit A une matrice diagonalisable. Si λ_1 est l'unique valeur propre de plus petit module et si le vecteur d'initialisation $V^{(0)}$ n'est pas orthogonal au sous-espace propre à gauche correspondant à λ_1 , alors la direction du vecteur $V^{(n)}$ tend vers celle du sous-espace propre associé à λ_1 et on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda^{(k+1)} = \lambda_1.$$

Pour la preuve de cette proposition et pour plus de renseignement concernant les méthodes itératives de calcul de valeurs propres, on peut consulter par exemple ([45],[20] ou [55]). Ce résultat reste valable si λ_1 est une valeur propre multiple vérifiant :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p < \lambda_{p+1} \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Pour résoudre les systèmes de type $Ax = f$ utilisés par l'algorithme, on factorise la matrice A sous la forme LU . Or A étant symétrique et tridiagonale, on a :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & l_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & l_n & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & u_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & d_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} d_1 = 1 + \alpha_1 & \text{et} & u_1 = -1 \\ u_i = -1 & l_i = \frac{-1}{d_{i-1}} & \text{et} & d_i = \alpha_i + l_i \quad \text{pour} \quad 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

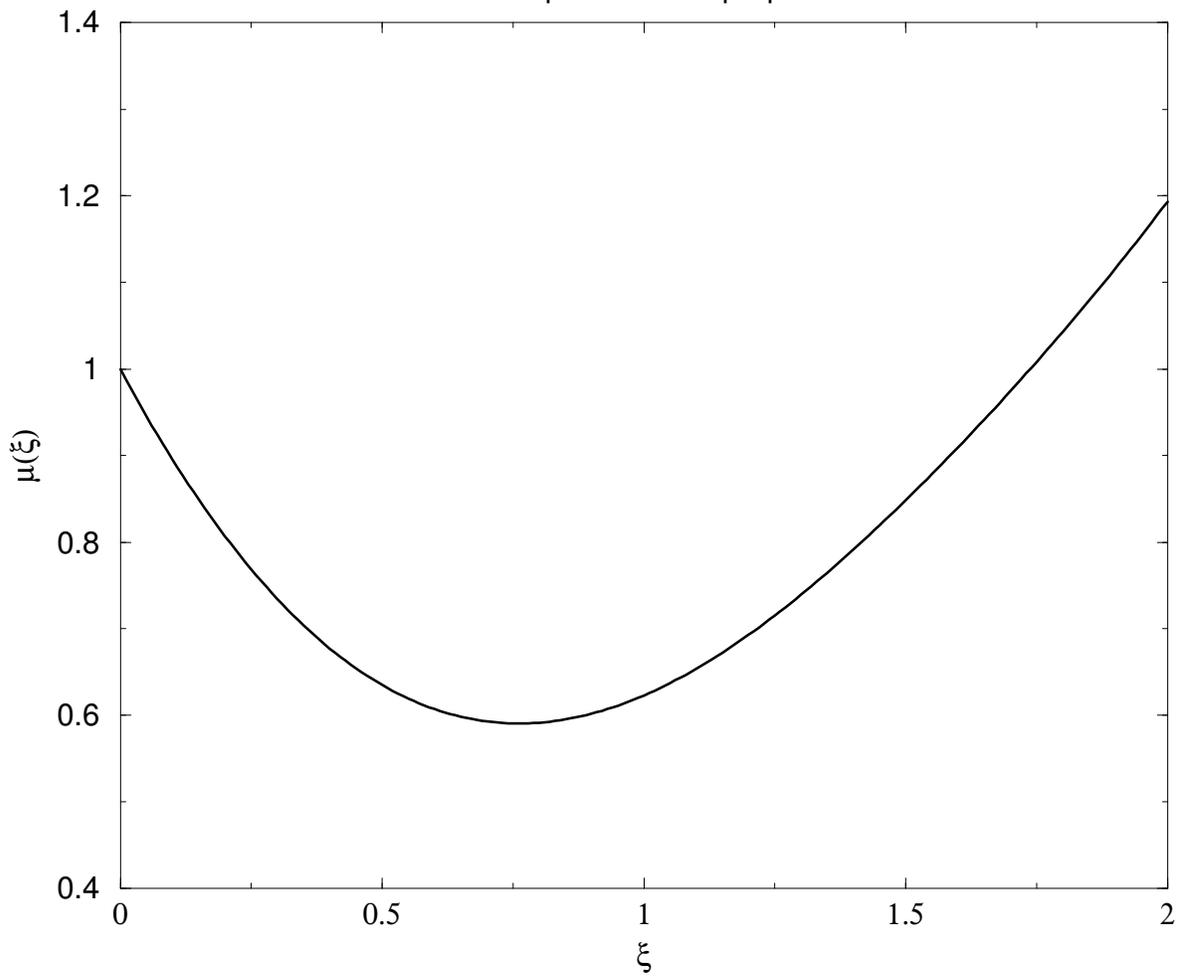
La résolution du système $Ax = f$ se fait en deux étapes, soit $Ly = f$ suivi de $Ux = y$. Le nombre d'opérations utilisées est de l'ordre de $5n$ au lieu de $\frac{2}{3}n^3$ pour l'algorithme de Gauss.

Voici quelques résultats numériques pour des valeurs de T comprises entre 2. et 4. θ étant une approximation de Θ_0 .

Méthodes des différences finies								
n	T=2.75		T=3.		T=3.25		T=3.5	
	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $						
100	0.6055	$1.54 \cdot 10^{-2}$	0.5873	$0.28 \cdot 10^{-2}$	0.5815	$0.86 \cdot 10^{-2}$	0.5793	$1.08 \cdot 10^{-2}$
250	0.6076	$1.75 \cdot 10^{-2}$	0.5914	$0.13 \cdot 10^{-2}$	0.5884	$0.17 \cdot 10^{-2}$	0.5863	$0.38 \cdot 10^{-2}$
300	0.6084	$1.83 \cdot 10^{-2}$	0.5964	$0.63 \cdot 10^{-2}$	0.5891	$0.10 \cdot 10^{-2}$	0.5887	$0.14 \cdot 10^{-2}$
500	0.6098	$1.97 \cdot 10^{-2}$	0.5964	$0.63 \cdot 10^{-2}$	0.5907	$0.06 \cdot 10^{-2}$	0.5883	$0.18 \cdot 10^{-2}$

$$\theta = 0.5907$$

Plus petite valeur propre



Chapitre 4

Approximation par la méthode des éléments finis

Avec la méthode des différences finies, on a approché l'opérateur de dérivation par un opérateur discret. Cette approximation est justifiée par l'utilisation de simples formules de Taylor en faisant des hypothèses de régularité trop importantes pour les fonctions considérées.

Contrairement à la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis consiste à construire des approximations par des fonctions avec des hypothèses de régularité moins importantes. Elle permet de traiter notre problème sans difficultés supplémentaires et avec une meilleure précision que les différences finies.

4.1 Maillage

Soit n un entier naturel non nul, un maillage de $]0, T[$ est la donnée de $n + 2$ points :

$$t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = T.$$

On note :

$$h_i = t_{i+1} - t_i \text{ pour } 0 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad h = \max_{0 \leq i \leq n} h_i.$$

Dans la suite et sauf indication contraire, on supposera que le maillage est uniforme et on a simplement $h = h_i = \frac{T}{n+1}$.

4.2 Notations

4.2.1 Polynômes d'approximations

On note \mathbb{P}_k l'espace des polynomes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à k .

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ pour } 0 \leq i \leq k \right\}. \quad (4.1)$$

4.2.2 Espace d'approximation

Pour obtenir une approximation numérique de la solution du problème variationnel (2.16), il est nécessaire d'introduire un espace d'approximation de dimension finie approchant l'espace $\mathcal{D}_{1,T}$.

On définit les espace d'approximation V_h^k et $V_{0,h}^k$ par :

$$V_h^k = \left\{ v \text{ continue sur } [0, T] \ ; \ v|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \mathbb{P}_k \ , \ 0 \leq i \leq n \right\}. \quad (4.2)$$

$$V_{0,h}^k = \left\{ v \in V_h^k \mid v(T) = 0 \right\}. \quad (4.3)$$

V_h^k est un espace vectoriel de dimension $k(n+1) + 1$ et $V_{0,h}^k$ est de dimension $k(n+1)$ (voir par exemple [30] Proposition 2.1.6).

4.3 Formulation variationnelle discrète

La théorie de l'approximation variationnelle nous conduit à considérer le problème variationnel discret suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver une fonction non nulle } u_h \in V_{0,h}^k \text{ vérifiant :} \\ \forall v_h \in V_{0,h}^k, \quad a_T(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h)_{L_T^2}. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

La valeur propre λ_h dépend de ξ , T et h .

Le théorème 6.4-1 ([53]) nous permet d'avoir le résultat suivant :

Théorème 4.3.1.

Les valeurs propres du problème variationnel (4.4) forment une suite croissante

$$0 < \lambda_{1,h} < \lambda_{2,h} < \dots < \lambda_{N,h} \quad \text{avec } N = \dim V_{0,h}^k = k(n+1).$$

et il existe une base $\{w_{m,h}\}_{m=1}^N$ de $V_{0,h}^k$, orthonormale dans $L^2(]0, T[)$ telle que

$$\forall v_h \in V_{0,h}^k, \quad a_T(w_{m,h}, v_h) = \lambda_{m,h}(w_{m,h}, v_h)_{L_T^2}, \quad 1 \leq m \leq N.$$

4.4 Convergence des valeurs propres approchées

Soit $\lambda_k = \lambda_{\xi,k}^T$, $k \geq 1$ les valeurs propres du problème (2.16) et l'espace usuel de Sobolev $H^{l+1}(]0, T[) = \left\{ u \in L^2(]0, T[) \mid D^\alpha u \in L^2(]0, T[), \quad 1 \leq \alpha \leq l+1 \right\}$. En appliquant le théorème 6.5-1 ([53]), on obtient le résultat de convergence suivant :

Théorème 4.4.1.

Pour tout entier naturel m , $1 \leq m \leq N$ ($N = \dim V_{0,h}^k$) on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\lambda_{m,h} - \lambda_m| = 0,$$

et si de plus l'espace V_m engendré par les m premiers vecteurs propres w_1, \dots, w_m du problème variationnel (2.16) vérifie $V_m \subset H^{l+1}(]0, T[)$ pour un entier non nul $l \leq k$, on a :

$$|\lambda_{m,h} - \lambda_m| \leq C(\xi, T)h^{2l}.$$

4.5 Utilisation des éléments finis P_1 **4.5.1 Base canonique de l'espace d'approximation $V_{0,h}^1$**

Dans cette partie on va approcher la solution u du problème variationnel par une fonction dans V_h^1 . Cet espace vectoriel est de dimension $n+2$ dont la base canonique est donnée par les fonctions chapeaux $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n+1}$, telles que $\varphi_j \in V_h^1$ et $\varphi_j(t_i) = \delta_{ij}$ (δ désigne le symbole de Kronecker).

On peut établir facilement que les fonctions $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ sont de la forme :

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}(t_1 - t) & \text{si } t \in [t_0, t_1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}(t - t_{j-1}) & \text{si } t \in [t_{j-1}, t_j] \\ \frac{1}{h}(t_{j+1} - t) & \text{si } t \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\varphi_{n+1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}(t - t_n) & \text{si } t \in [t_n, t_{n+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $v(T) = 0$, on va considérer l'espace d'approximation $V_{0,h}^1$ qui est un sous-espace vectoriel de V_h^1 , de dimension $n + 1$, dont la base canonique est $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n}$. En effet, toute fonction w_h de V_h^1 s'écrit comme combinaison linéaire des fonctions $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n+1}$: $w_h = \sum_{k=0}^{n+1} w_h(t_k) \varphi_k$. Or si $w_h(T) = w_h(t_{n+1}) = 0$ alors $w_h = \sum_{k=0}^n w_h(t_k) \varphi_k$.

4.5.2 Transformation algébrique du problème variationnel discret

On rappelle qu'on cherche à résoudre le problème variationnel discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver une fonction non nulle } u_h \in V_{0,h}^1 \text{ vérifiant :} \\ \forall v_h \in V_{0,h}^1, \quad a_T(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h)_{L_T^2}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Comme u_h et v_h appartiennent à l'espace vectoriel de dimension finie $V_{0,h}^1$, leurs décompositions sur la base canonique de $V_{0,h}^1$ sont de la forme :

$$u_h(t) = \sum_{j=0}^n u_h(t_j) \varphi_j(t) = \sum_{j=1}^{n+1} u_j \varphi_{j-1}(t), \quad v_h(t) = \sum_{j=0}^n v_h(t_j) \varphi_j(t) = \sum_{j=1}^{n+1} v_j \varphi_{j-1}(t) \quad \forall t \in [0, T],$$

avec $u_j = u_h(t_{j-1})$ et $v_j = v_h(t_{j-1})$ pour $1 \leq j \leq n + 1$.

Le problème variationnel discret (4.5) revient donc à trouver un vecteur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de \mathbb{R}^{n+1} tel que pour tout vecteur $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de \mathbb{R}^{n+1} on ait :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n+1} u_i v_j \int_0^T [\varphi'_{i-1}(t) \varphi'_{j-1}(t) + (t-\xi)^2 \varphi_{i-1}(t) \varphi_{j-1}(t)] dt = \lambda_h \sum_{1 \leq i, j \leq n+1} u_i v_j \int_0^T \varphi_{i-1}(t) \varphi_{j-1}(t) dt.$$

en posant $N_h = (N_{ij}^h)_{1 \leq i, j \leq n+1}$ la matrice de rigidité, de terme générique

$$N_{ij}^h = a_T(\varphi_{i-1}, \varphi_{j-1}) = \int_0^T [\varphi'_{i-1}(t) \varphi'_{j-1}(t) + (t-\xi)^2 \varphi_{i-1}(t) \varphi_{j-1}(t)] dt.$$

et $M_h = (M_{ij}^h)_{1 \leq i, j \leq n+1}$ la matrice de masse, de terme générique

$$M_{ij}^h = \int_0^T \varphi_{i-1}(t) \varphi_{j-1}(t) dt.$$

Ainsi le problème variationnel discret (4.5) est équivalent au problème matriciel généralisé de valeurs propres :

$$N_h U = \lambda_h M_h U. \quad (4.6)$$

4.5.3 Calcul des coefficients de la matrice de rigidité N_h

Pour le calcul des coefficients N_{ij}^h , on a besoin de calculer d'abord les intégrales $I(a)$ et $J(a)$ suivantes :

$$I(a) = \int_0^h (a-u)^2 u^2 du = \left[a^2 \frac{u^3}{3} - 2a \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} \right]_0^h = a^2 \frac{h^3}{3} - a \frac{h^4}{2} + \frac{h^5}{5}$$

$$I(a) = h^3 \left(\frac{a^2}{3} - \frac{ah}{2} + \frac{h^2}{5} \right)$$

$$J(a) = \int_0^h (a-u)^2 (h-u) u du = \left[a^2 h \frac{u^2}{2} - (a^2 + 2ah) \frac{u^3}{3} + (2a+h) \frac{u^4}{4} - \frac{u^5}{5} \right]_0^h$$

$$J(a) = a^2 \frac{h^3}{2} - (a^2 + 2ah) \frac{h^3}{3} + (2a+h) \frac{h^4}{4} - \frac{h^5}{5} = a^2 \frac{h^3}{6} - a \frac{h^4}{6} + \frac{h^5}{20}$$

$$J(a) = h^3 \left(\frac{a^2}{6} - \frac{ah}{6} + \frac{h^2}{20} \right)$$

Comme dans la section 3, on pose $\beta_i = t_i - \xi$.

Maintenant, on va calculer, sans l'utilisation de quadrature numérique, les valeurs exactes des coefficients N_{ij}^h :

$$\begin{aligned} \bullet N_{11}^h &= \int_0^T (\varphi_0'(t))^2 dt + \int_0^T (t-\xi)^2 (\varphi_0(t))^2 dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{h^2} dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{h^2} (t-\xi)^2 (t-t_0)^2 dt \\ &= \frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} I(\beta_1) \end{aligned}$$

$$N_{11}^h = \frac{1}{h} + \beta_1^2 \frac{h}{3} - \beta_1 \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{5} = \frac{1}{h} \left(1 + \beta_1^2 \frac{h^2}{3} - \beta_1 \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{5} \right)$$

$$\begin{aligned} \bullet N_{12}^h &= N_{21}^h = \int_0^T \varphi_0'(t) \varphi_1'(t) dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \varphi_0(t) \varphi_1(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} -\frac{1}{h^2} dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{h^2} (t - \xi)^2 (t_1 - t)(t - t_0) dt \\ &= -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \int_0^h (t - \xi)^2 (t_1 - t)(t - t_0) dt \text{ on pose } u = t_1 - t \\ &= -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \int_0^h (\beta_1 - u)^2 u (h - u) du = -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} J(\beta_1) \\ &= -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \left[\beta_1^2 \frac{h^3}{6} - \beta_1 \frac{h^4}{6} + \frac{h^5}{20} \right] = -\frac{1}{h} + \beta_1^2 \frac{h}{6} - \beta_1 \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{20} \end{aligned}$$

$$N_{12}^h = N_{21}^h = -\frac{1}{h} + \beta_0 \beta_1 \frac{h}{6} + \frac{h^3}{20} = \frac{1}{h} \left(-1 + \beta_0 \beta_1 \frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{20} \right)$$

$$\begin{aligned} \bullet N_{22}^h &= \int_0^T \left(\varphi_1'(t) \right)^2 dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \left(\varphi_1(t) \right)^2 dt \\ &= \frac{2}{h} + \frac{1}{h^2} \int_{t_0}^{t_1} (t - \xi)^2 (t - t_0)^2 dt + \frac{1}{h^2} \int_{t_1}^{t_2} (t - \xi)^2 (t_2 - t)^2 dt \\ &= \frac{2}{h} + \frac{1}{h^2} \int_0^h (u + \beta_0)^2 u^2 du + \frac{1}{h^2} \int_0^h (-u + \beta_2)^2 u^2 du = \frac{2}{h} + \frac{1}{h^2} \cdot I(-\beta_0) + \frac{1}{h^2} \cdot I(\beta_2) \\ &= \frac{2}{h} + \frac{1}{h^2} \left[\beta_0^2 \frac{h^3}{6} + \beta_0 \frac{h^4}{2} + \frac{h^5}{5} \right] + \frac{1}{h^2} \left[\beta_2^2 \frac{h^3}{6} - \beta_2 \frac{h^4}{2} + \frac{h^5}{5} \right] \\ &= \frac{2}{h} + (\beta_0^2 + \beta_2^2) \frac{h}{3} + (\beta_0 - \beta_2) \frac{h^2}{2} + \frac{2h^3}{5} \end{aligned}$$

Or $\beta_0 - \beta_2 = -2h$ et $\beta_0^2 + \beta_2^2 = (\beta_0 - \beta_2)^2 + 2\beta_0\beta_2 = 4h^2 + 2\beta_0\beta_2$, alors on a :

$$N_{22}^h = \frac{2}{h} + (\beta_0^2 + \beta_2^2) \frac{h}{3} - \frac{3h^3}{5} = \frac{2}{h} + 2\beta_0\beta_2 \frac{h}{3} + \frac{11h^3}{15} = \frac{1}{h} \left(2 + 2\beta_0\beta_2 \frac{h^2}{3} + \frac{11h^4}{15} \right)$$

$$\begin{aligned} \bullet N_{23}^h &= N_{32}^h = \int_0^T \varphi_1'(t) \varphi_2'(t) dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \varphi_1(t) \varphi_2(t) dt \\ &= -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \int_{t_1}^{t_2} (t - \xi)^2 (t - t_1)(t_2 - t) dt \\ &= -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \int_0^h (\beta_2 - u)^2 (h - u) u du \text{ avec } u = t_2 - t \\ &= -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} J(\beta_2) = -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \left[\beta_2^2 \frac{h^3}{6} - \beta_2 \frac{h^4}{6} + \frac{h^5}{20} \right] = -\frac{1}{h} + \beta_2^2 \frac{h}{6} - \beta_2 \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{20} \end{aligned}$$

$$N_{23}^h = N_{32}^h = -\frac{1}{h} + \beta_1\beta_2\frac{h}{6} + \frac{h^3}{20} = \frac{1}{h}\left(-1 + \beta_1\beta_2\frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{20}\right)$$

Pour tout i , $2 \leq i \leq n$ on a :

$$\begin{aligned} \bullet N_{i,i+1}^h &= N_{i+1,i}^h = \int_0^T \varphi'_{i-1}(t)\varphi'_i(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2\varphi_{i-1}(t)\varphi_i(t) dt \\ &= -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-\xi)^2(t-t)(t-t_{i-1}) dt \\ &= -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2} \int_0^h (\beta_i - u)^2(h-u)u du \quad \text{avec } u = t_{i-1} - t \\ &= -\frac{1}{h} + \frac{1}{h^2}J(\beta_i) = -\frac{1}{h} + \beta_i^2\frac{h}{6} - \beta_i\frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{20} \end{aligned}$$

$$N_{i,i+1}^h = N_{i+1,i}^h = -\frac{1}{h} + \beta_{i-1}\beta_i\frac{h}{6} + \frac{h^3}{20} = \frac{1}{h}\left(-1 + \beta_{i-1}\beta_i\frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{20}\right)$$

Pour tout i , $2 \leq i \leq n+1$ on a :

$$\begin{aligned} \bullet N_{i,i}^h &= \int_0^T \left(\varphi'_{i-1}(t)\right)^2 dt + \int_0^T (t-\xi)^2\left(\varphi_{i-1}(t)\right)^2 dt \\ &= \frac{2}{h} + \frac{1}{h^2} \int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}} (t-\xi)^2(t-t_{i-2})^2 dt + \frac{1}{h^2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t-\xi)^2(t-t)^2 dt \\ &= \frac{2}{h} + \frac{1}{h^2} \int_0^h (u + \beta_{i-2})^2 u^2 du + \frac{1}{h^2} \int_0^h (-u + \beta_i)^2 u^2 du \\ &= \frac{2}{h} + \frac{1}{h^2} \cdot I(-\beta_{i-2}) + \frac{1}{h^2} \cdot I(\beta_i) \end{aligned}$$

Et comme $\beta_{i-2} - \beta_i = -2h$ et $\beta_{i-2}^2 + \beta_i^2 = (\beta_{i-2} - \beta_i)^2 + 2\beta_{i-2}\beta_i = 4h^2 + 2\beta_{i-2}\beta_i$, alors on a :

$$N_{i,i}^h = \frac{2}{h} + (\beta_{i-2}^2 + \beta_i^2)\frac{h}{3} - \frac{3h^3}{5} = \frac{2}{h} + 2\beta_{i-2}\beta_i\frac{h}{3} + \frac{11h^3}{15} = \frac{1}{h}\left(2 + 2\beta_{i-2}\beta_i\frac{h^2}{3} + \frac{11h^4}{15}\right)$$

Enfin

$$N_{i,j}^h = 0 \quad \text{si } |i-j| \geq 2 \quad \text{car} \quad \text{Support } \varphi_{i-1} \cap \text{Support } \varphi_{j-1} = \emptyset$$

$$N_h = \begin{pmatrix} \blacklozenge & \blackstar & 0 & \dots & 0 \\ \blackstar & \blacklozenge & \blackstar & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \blackstar & \blacklozenge & \blackstar & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \blackstar & \blacklozenge & \blackstar & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \blackstar & \blacklozenge & \blackstar & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \blackstar & \blacklozenge & \blackstar & 0 \end{pmatrix} \text{ est symétrique et tridiagonale}$$

4.5.4 Calcul des coefficients de la matrice de masse M_h

$$\bullet M_{11}^h = \int_0^T (\varphi_0(t))^2 dt = \frac{1}{h^2} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)^2 dt = \frac{1}{h^2} \int_0^h u^2 du = \frac{1}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{h}{3}$$

$$M_{11}^h = \frac{h}{3} = 2 \times \frac{h}{6}$$

$$\begin{aligned} \bullet M_{12}^h = M_{12}^h &= \int_0^T \varphi_0(t)\varphi_1(t) dt = \frac{1}{h^2} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)(t - t_0) dt = \frac{1}{h^2} \int_0^h t(h - t) dt \\ &= \frac{1}{h^2} \left[h \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{h^2} \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{h}{6} \end{aligned}$$

$$M_{12}^h = M_{12}^h = 1 \times \frac{h}{6}$$

$$\begin{aligned} \bullet M_{22}^h &= \int_0^T (\varphi_1(t))^2 dt = \frac{1}{h^2} \left[\int_{t_0}^{t_1} (t - t_0)^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} (t_1 - t)^2 dt \right] \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\int_0^h u^2 du + \int_0^h v^2 dv \right] = \frac{1}{h^2} \frac{2h^3}{3} = \frac{2h}{3} \end{aligned}$$

$$M_{22}^h = \frac{2h}{3} = 4 \times \frac{h}{6}$$

Pour tout i , $2 \leq i \leq n$ on a :

$$\bullet M_{i,i+1}^h = M_{i+1,i}^h = \int_0^T \varphi_i(t)\varphi_{i-1}(t) dt = \frac{1}{h^2} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - t)(t - t_{i-1}) dt = \frac{1}{h^2} \int_0^h (h - u)u du$$

$$\bullet M_{i,i+1}^h = M_{i+1,i}^h = \frac{1}{h^2} \left[h \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{h^2} \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{h}{6}$$

$$M_{i,i+1}^h = M_{i+1,i}^h = 1 \times \frac{h}{6}$$

Pour tout i , $2 \leq i \leq n+1$ on a :

$$\begin{aligned} \bullet M_{ii}^h &= \int_0^T (\varphi_{i-1}(t))^2 dt = \frac{1}{h^2} \left[\int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}} (t - t_{i-2})^2 dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1})^2 dt \right] \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\int_0^h u^2 du + \int_0^h v^2 dv \right] = \frac{1}{h^2} \frac{2h^3}{3} = \frac{2h}{3} \end{aligned}$$

$$M_{ii}^h = \frac{2h}{3} = 4 \times \frac{h}{6}$$

Enfin

$$M_{i,j}^h = 0 \text{ si } |i-j| \geq 2 \text{ car } \text{Support } \varphi_{i-1} \cap \text{Support } \varphi_{j-1} = \emptyset$$

$$M_h = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ est symétrique, tridiagonale et définie positive}$$

Proposition 4.5.1.

Les matrices N_h et M_h sont symétriques, tridiagonales et définies positives. En outre, la matrice M_h est à diagonale strictement dominante. Les valeurs propres du problème matriciel généralisé (4.6) sont strictement positives

Preuve :

On vérifie aisément que les matrices N_h et M_h sont symétriques, et tridiagonales. ($N_{ij}^h = M_{ij}^h = 0$ pour $|i-j| \geq 2$)

La matrice N_h est définie positive car la forme bilinéaire $a_T(.,.)$ est coercive.
La matrice M_h est à diagonale strictement dominante car

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = 2 < a_{ii} = 4 \quad \text{pour tout } i, \quad 2 \leq i \leq n-1$$

$$\sum_{j=2}^n |a_{1j}| = 1 < a_{11} = 2 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n-1} |a_{nj}| = 1 < a_{nn} = 4$$

La matrice M_h est définie positive car c'est une matrice à diagonale strictement dominante et dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs (voir par exemple [45]) \square

4.5.5 Calcul de la plus petite valeur propre

On pose : $N_h = \frac{1}{h} N$ et $M_h = \frac{h}{6} M$ et $\lambda = \frac{h^2}{6} \times \lambda_h$

Le problème matriciel généralisé de valeurs propres (4.6) est équivalent à :

$$NU = \lambda MU \tag{4.7}$$

Les matrices N et M sont symétriques, tridiagonales et définies positives. Par conséquent et de manière analogue à la section 3.4, on utilise la méthode de la puissance inverse adaptée au problème généralisé de valeurs propres (4.7).

ALGORITHME 2 :

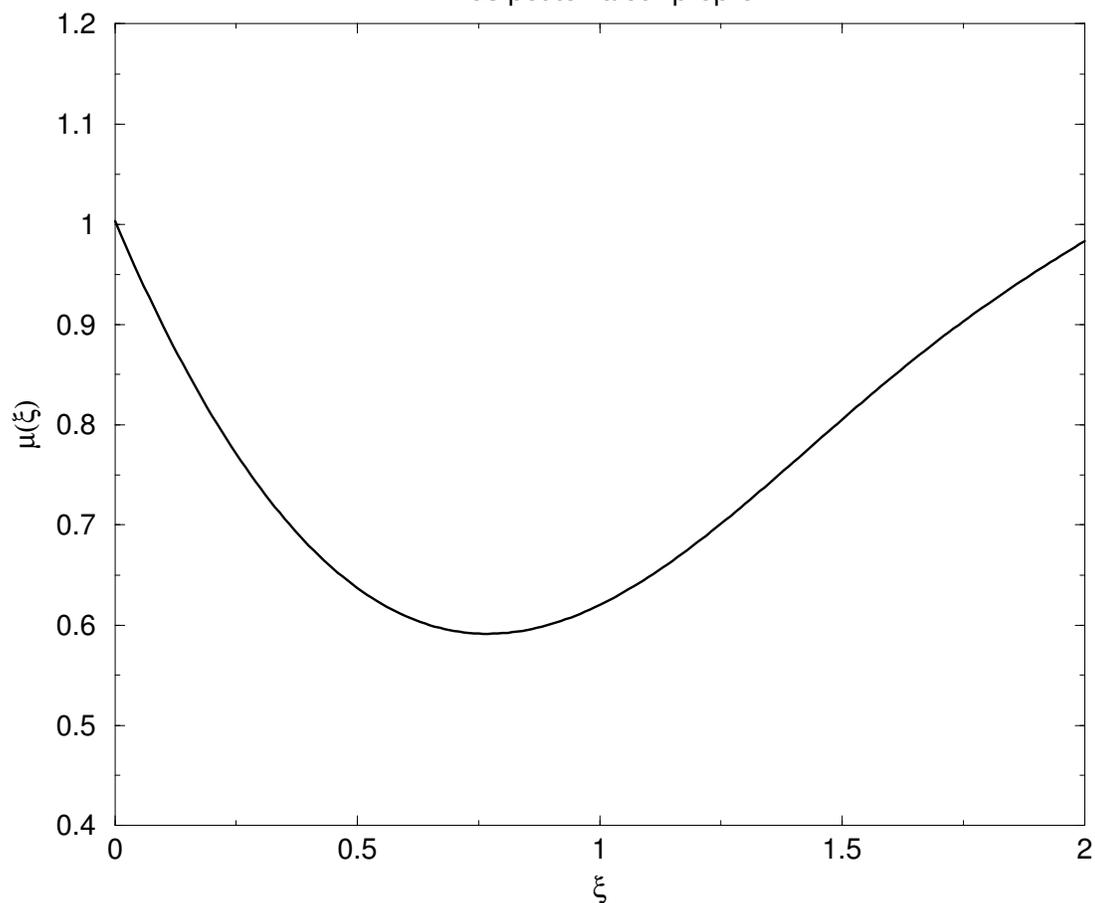
- $X^{(0)}$ vecteur d'initialisation non nul
- Résoudre le système linéaire $NY^{(k+1)} = MX^{(k)}$
- Calculer le vecteur $X^{(k+1)} = \frac{Y^{(k+1)}}{\|Y^{(k+1)}\|_M}$
 $\|Y\|_M = (Y.MY)^{\frac{1}{2}}$ la norme induite par le produit scalaire défini par M .
- Test d'arrêt : $k > \text{IteMax}$ ou $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \text{ErrSou}$
 IteMax est le nombre maximale d'itération autorisé.
 ErrSou est l'erreur souhaitée
- Calculer $\beta^{(k+1)} = Y^{(k+1)}.MX^{(k)}$
- Calculer $\lambda^{(k+1)} = \frac{1}{\beta^{(k+1)}}$
- Valeur approchée de la plus petite valeur propre :
 $\lambda_1 \approx \lambda^{(k+1)}$ et $\mu_T(\xi) \approx \frac{h^2 \lambda_1}{6}$

Voici quelques résultats numériques pour des valeurs de T comprises entre 3 et 5.

Méthode des éléments finis P_1								
n	T=3.5		T=4.		T=4.5		T=5.	
	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $						
100	0.5962	$0.61 \cdot 10^{-2}$	0.5961	$0.60 \cdot 10^{-2}$	0.5969	$0.68 \cdot 10^{-2}$	0.5976	$0.75 \cdot 10^{-2}$
250	0.5931	$0.30 \cdot 10^{-2}$	0.5926	$0.25 \cdot 10^{-2}$	0.5928	$0.27 \cdot 10^{-2}$	0.5931	$0.30 \cdot 10^{-2}$
300	0.5927	$0.26 \cdot 10^{-2}$	0.5922	$0.21 \cdot 10^{-2}$	0.5924	$0.23 \cdot 10^{-2}$	0.5926	$0.25 \cdot 10^{-2}$
500	0.5920	$0.19 \cdot 10^{-2}$	0.5913	$0.12 \cdot 10^{-2}$	0.5914	$0.14 \cdot 10^{-2}$	0.5916	$0.16 \cdot 10^{-2}$

$$\theta = 0.5913$$

Plus petite valeur propre



4.6 Utilisation des éléments finis P_2

4.6.1 Base canonique de l'espace d'approximation $V_{0,h}^2$

Dans cette partie, on considère les éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_2 , on va donc approcher la solution u du problème variationnel par une fonction dans l'espace d'approximation :

$$V_h^2 = \left\{ v \text{ continue sur } [0, T] \ ; \ v|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \mathbb{P}_2 \ , \ 0 \leq i \leq n \right\}. \quad (4.8)$$

Proposition 4.6.1.

L'espace V_h^2 est un espace vectoriel de dimension $2n + 3$. La base canonique de cet espace est composée par les deux familles de fonctions $\{\varphi_i\}_{0 \leq i \leq n+1}$, et $\{\psi_j\}_{0 \leq j \leq n}$, définies respectivement par

$$\forall i, 0 \leq i \leq n+1, \quad \varphi_i \in V_h^2, \quad \varphi_i(t_k) = \delta_{ik} \text{ et } \varphi_i(t_{k+\frac{1}{2}}) = 0 \text{ pour tout } k, \ 0 \leq k \leq n,$$

$$\forall j, 0 \leq j \leq n, \quad \psi_j \in V_h^2, \quad \psi_j(t_k) = 0 \text{ et } \psi_j(t_{k+\frac{1}{2}}) = \delta_{jk} \text{ pour tout } k, \ 0 \leq k \leq n$$

$$\text{avec } t_{k+\frac{1}{2}} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Pour la preuve de cette proposition, on peut consulter par exemple ([53],[55]). On peut établir facilement que les fonctions $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ et $(\psi_j)_{0 \leq j \leq n}$ sont de la forme :

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \begin{cases} \frac{2}{h^2} [(t_1 - t)^2 + \frac{h}{2}(t - t_1)] & \text{si } t \in [t_0, t_1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{h^2} (t - t_1)(t - t_{\frac{1}{2}}) & \text{si } t \in [t_0, t_1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \varphi_{n+1}(t) &= \begin{cases} \frac{2}{h^2} [(t - t_n)^2 - \frac{h}{2}(t - t_n)] & \text{si } t \in [t_n, t_{n+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{h^2} (t - t_n)(t - t_{n+\frac{1}{2}}) & \text{si } t \in [t_n, t_{n+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et pour tout i , $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{2}{h^2} [(t - t_{i-1})^2 - \frac{h}{2}(t - t_{i-1})] & \text{si } t \in [t_{i-1}, t_i] \\ \frac{2}{h^2} [(t - t_{i+1})^2 + \frac{h}{2}(t - t_{i+1})] & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{h^2} (t - t_{i-1})(t - t_{i-\frac{1}{2}}) & \text{si } t \in [t_{i-1}, t_i] \\ \frac{2}{h^2} (t - t_{i+1})(t - t_{i+\frac{1}{2}}) & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et pour tout j , $0 \leq j \leq n$, on a :

$$\psi_j(t) = \begin{cases} -\frac{4}{h^2} [(t - t_j)^2 - h(t - t_j)] & \text{si } t \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\psi_j(t) = \begin{cases} -\frac{4}{h^2} [(t - t_{j+1})^2 + h(t - t_{j+1})] & \text{si } t \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{h^2} (t - t_{j+1})(t - t_j) & \text{si } t \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $v(T) = 0$, on introduit l'espace d'approximation

$$V_{0,h}^2 = \left\{ v \in V_h^2 \mid v(T) = 0 \right\}. \quad (4.9)$$

$V_{0,h}^2$ est un sous-espace vectoriel de V_h^2 , de dimension $2n + 2$, dont la base canonique est formée des deux familles $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(\psi_j)_{0 \leq j \leq n}$. En effet, si $w_h \in V_{0,h}^2 \subset V_h^2$, on a :

$$\begin{aligned} w_h(t) &= \sum_{i=0}^{n+1} w_h(t_i) \varphi_i(t) + \sum_{j=0}^n w_h(t_{j+\frac{1}{2}}) \psi_j(t) \\ &= \sum_{i=0}^n w_h(t_i) \varphi_i(t) + \sum_{j=0}^n w_h(t_{j+\frac{1}{2}}) \psi_j(t) \quad \text{car } w_h(t_{n+1}) = w_h(T) = 0 \end{aligned}$$

4.6.2 Transformation algébrique du problème variationnel discret

On cherche donc à résoudre le problème variationnel discret suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver une fonction non nulle } u_h \in V_{0,h}^2 \text{ vérifiant :} \\ \forall v_h \in V_{0,h}^2, \quad a_T(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h)_{L_T^2}. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Comme u_h et v_h appartiennent à l'espace vectoriel de dimension finie $V_{0,h}^2$, leurs décompositions sur la base canonique de $V_{0,h}^2$ sont de la forme :

$$u_h(t) = \sum_{i=0}^n u_h(t_i) \varphi_i(t) + \sum_{j=0}^n u_h(t_{j+\frac{1}{2}}) \psi_j(t) \quad \text{et} \quad v_h(t) = \sum_{i=0}^n v_h(t_i) \varphi_i(t) + \sum_{j=0}^n v_h(t_{j+\frac{1}{2}}) \psi_j(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Les fonctions de base (φ_i) et (ψ_j) ayant des supports inclus respectivement dans $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ et $[t_j, t_{j+1}]$, si on les rangeait dans l'ordre " naturel "

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n,$$

on obtiendrait des matrices de masse et de rigidité ayant des structures pleines (éparses). Toutefois, on peut obtenir des structures de matrice-bande en rangeant convenablement les fonctions de bases. Ainsi, pour obtenir des matrices tridiagonales par bloc, on ordonne les fonctions de base comme suit

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \psi_0, \phi_2 = \varphi_0, \phi_3 = \psi_1, \phi_4 = \varphi_1, \dots, \phi_{2n+1} = \psi_n, \phi_{2n+2} = \varphi_n, \\ \left\{ \begin{array}{l} \phi_{2k} = \varphi_{k-1} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n+1 \\ \phi_{2k+1} = \psi_k \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi les fonctions $u_h, v_h \in V_{0,h}^2$ s'écrivent sous la forme

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^{2n+2} u_i \phi_i(t) \quad \text{et} \quad v_h(t) = \sum_{j=1}^{2n+2} v_j \phi_j(t) \quad \forall t \in [0, T].$$

Le problème variationnel discret (4.10) revient donc à trouver un vecteur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq 2n+2}$ de \mathbb{R}^{2n+2} tel que pour tout vecteur $V = (v_i)_{2 \leq i \leq 2n+2}$ de \mathbb{R}^{2n+2} on ait :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 2n+2} u_i v_j \int_0^T [\phi'_i(t) \phi'_j(t) + (t-\xi)^2 \phi_i(t) \phi_j(t)] dt = \lambda_h \sum_{1 \leq i, j \leq 2n+2} u_i v_j \int_0^T \phi_i(t) \phi_j(t) dt,$$

en posant $N_h = (N_{ij}^h)_{1 \leq i, j \leq 2n+2}$ la matrice de rigidité, de terme générique

$$N_{ij}^h = a_T(\phi_i, \phi_j) = \int_0^T [\phi'_i(t) \phi'_j(t) + (t-\xi)^2 \phi_i(t) \phi_j(t)] dt,$$

et $M_h = (M_{ij}^h)_{1 \leq i, j \leq 2n+2}$ la matrice de masse, de terme générique

$$M_{ij}^h = \int_0^T \phi_i(t) \phi_j(t) dt,$$

le problème variationnel discret (4.10) est équivalent au problème matriciel généralisé de valeurs propres :

$$N_h U = \lambda_h M_h U, \quad (4.11)$$

N_h et M_h sont des matrices carrées d'ordre $2n + 2$.

4.6.3 Calcul des coefficients de la matrice de rigidité N_h

Dans un premier temps, on va préciser tout d'abord les valeurs de certaines intégrales ($K(a)$, $H(a)$, $L(a)$ et $R(a)$) qu'on va utiliser pour calculer les coefficients N_{ij}^h de la matrice de rigidité N_h :

$$\begin{aligned} K(a) &= \int_0^h (u+a)^2 (u-h)^2 u^2 du = \int_0^h k_a(u) du \\ &= \int_0^h (u^2 + 2au + a^2)(u^2 - 2hu + h^2)u^2 du \\ &= \int_0^h \left[u^6 + 2(a-h)u^5 + (a^2 - 4ah + h^2)u^4 + 2ah(h-a)u^3 + a^2h^2u^2 \right] du \\ &= \left[\frac{u^7}{7} + (a-h)\frac{u^6}{3} + (a^2 - 4ah + h^2)\frac{u^5}{5} + ah(h-a)\frac{u^4}{2} + a^2h^2\frac{u^3}{3} \right]_0^h \\ &= \frac{h^7}{7} + a\frac{h^6}{3} - \frac{h^7}{7} + a^2\frac{h^5}{5} - 4a\frac{h^6}{5} + \frac{h^7}{5} + a\frac{h^6}{2} - a^2\frac{h^5}{2} + a^2\frac{h^5}{3} \\ &= \frac{h^7}{105} + a\frac{h^6}{30} + a^2\frac{h^5}{30} \end{aligned}$$

$K(a) = \int_0^h (u+a)^2 (u-h)^2 u^2 du = \frac{h^7}{105} + a\frac{h^6}{30} + a^2\frac{h^5}{30} = \frac{h^5}{30} \left(\frac{2h^2}{7} + ah + a^2 \right)$
--

$$\begin{aligned}
H(a) &= \int_0^h (u-a)^2(2u-h)(u-h)u^2 \, du = \int_0^h h_a(u) \, du \\
&= \int_0^h (u^2 - 2au + a^2)(2u^2 - 3hu + h^2)u^2 \, du \\
&= \int_0^h \left[2u^6 - (4a + 3h)u^5 + (2a^2 + 6ah + h^2)u^4 - (2ah^2 + 3a^2h)u^3 + a^2h^2u^2 \right] \, du \\
&= \frac{2h^7}{7} - (4a + 3h)\frac{h^6}{6} + (2a^2 + 6ah + h^2)\frac{h^5}{5} - (2ah^2 + 3a^2h)\frac{h^4}{4} + a^2h^2\frac{h^3}{3} \\
&= -\frac{h^7}{70} + a\frac{h^6}{30} - a^2\frac{h^5}{60}
\end{aligned}$$

$H(a) = \int_0^h (u-a)^2(2u-h)(u-h)u^2 \, du = -\frac{h^7}{70} + \frac{ah^6}{30} - \frac{a^2h^5}{60}$

$$\begin{aligned}
L(a) &= \int_0^h u^2(u+a)^2(2u-h)^2 \, du = \int_0^h l_a(u) \, du \\
&= \int_0^h u^2(u+a)^2(2u-h)[(u-h)+u] \, du \\
&= H(-a) + \int_0^h u^3(u+a)^2(2u-h) \, du \\
&= H(-a) + \int_0^h \left[2u^6 + (4a-h)u^5 + (2a^2-2ah)u^4 - a^2hu^3 \right] \, du \\
&= H(-a) + \frac{2h^7}{7} + (4a-h)\frac{h^6}{6} + (2a^2-2ah)\frac{h^5}{5} - a^2h\frac{h^4}{4} \\
&= -\frac{h^7}{70} - a\frac{h^6}{30} - a^2\frac{h^5}{60} + \frac{5h^7}{42} + \frac{4ah^6}{15} + \frac{3a^2h^5}{20} \\
&= \frac{11h^7}{105} + \frac{7ah^6}{30} - \frac{2a^2h^5}{15}
\end{aligned}$$

$L(a) = \int_0^h u^2(u+a)^2(2u-h)^2 \, du = \frac{11h^7}{105} + \frac{7ah^6}{30} - \frac{2a^2h^5}{15}$
--

$$\begin{aligned}
R(a) &= \int_0^h u(u+a)^2(2u-h)^2 du = \int_0^h r_a(u) du \\
&= \int_0^h \left[4u^5 + (8a-4h)u^4 + (4a^2-8ah+h^2)u^3 + (2ah^2-4a^2h)u^2 + a^2h^2u \right] du \\
&= \frac{2h^6}{3} + \frac{8ah^5}{5} - \frac{4h^6}{5} + \frac{h^6}{4} - 2ah^5 + a^2h^4 + \frac{2ah^5}{3} - \frac{4a^2h^4}{3} + \frac{a^2h^4}{2} \\
&= \frac{47h^6}{60} + \frac{4ah^5}{15} + \frac{a^2h^4}{6}
\end{aligned}$$

$$R(a) = \int_0^h u(u+a)^2(2u-h)^2 du = \frac{47h^6}{60} + \frac{4ah^5}{15} + \frac{a^2h^4}{6}$$

Maintenant, on va calculer, les valeurs exactes des coefficients N_{ij}^h :

$$\begin{aligned}
\bullet N_{11}^h &= \int_0^T (\phi_1'(t))^2 dt + \int_0^T (t-\xi)^2 (\phi_1(t))^2 dt \\
&= \int_0^T (\psi_0'(t))^2 dt + \int_0^T (t-\xi)^2 (\psi_0(t))^2 dt = (*) + (**)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{16}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} [2(t-t_0)-h]^2 dt = \frac{16}{h^4} \int_0^h (2t-h)^2 dt \\
&= \frac{16}{h^4} \left[\frac{(2t-h)^3}{6} \right]_0^h = \frac{16}{h^4} \times \frac{2h^3}{6} = \frac{16}{3h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(**) &= \frac{16}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} (t-\xi)^2 [(t-t_0)^2 - h(t-t_0)]^2 dt \\
&= \frac{16}{h^4} \int_0^h (u+\beta_0)^2 (u^2 - hu)^2 du = \frac{16}{h^4} K(\beta_0) \\
&= \frac{16}{h^4} \left(\frac{h^7}{105} + \frac{\beta_0 h^6}{30} + \frac{\beta_0^2 h^5}{30} \right) = \frac{16h^3}{105} + \frac{8\beta_0 h^2}{15} + \frac{8\beta_0^2 h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{11}^h = \frac{16}{3h} + \frac{16h^3}{105} + \frac{8\beta_0 h^2}{15} + \frac{8\beta_0^2 h}{15} = \frac{1}{h} \left(\frac{16}{3} + \frac{16h^4}{105} + \frac{8\beta_0 h^3}{15} + \frac{8\beta_0^2 h^2}{15} \right)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad N_{12}^h &= N_{21}^h = \int_0^T \phi_1'(t)\phi_2'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \phi_1(t)\phi_2(t) dt \\
&= \int_0^T \psi_0'(t)\varphi_0'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \psi_0(t)\varphi_0(t) dt = (*) + (**) \\
(*) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{2}{h^2} \left[2(t-t_1) + \frac{h}{2} \right] \frac{-4}{h^2} [2(t-t_1) + h] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} [4(t-t_1) + h] [2(t-t_1) + h] dt = -\frac{4}{h^4} \int_{-h}^0 (4u+h)(2u+h) du \\
&= -\frac{4}{h^4} \left[\frac{8u^3}{3} + 3hu^2 + h^2u \right]_0^h = \frac{4}{h^4} \left(2h^3 - \frac{8h^3}{3} \right) = -\frac{8}{3h} \\
(**) &= \int_{t_0}^{t_1} (t-\xi)^2 \frac{2}{h^2} \left[(t-t_1)^2 + \frac{h}{2}(t-t_1) \right] \frac{-4}{h^2} [(t-t_1)^2 + h(t-t_1)] dt \\
&= -\frac{4}{h^2} \int_{t_0}^{t_1} (t-\xi)^2 [2(t-t_1)^2 + h(t-t_1)] [(t-t_1)^2 + h(t-t_1)] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_{-h}^0 (u+\beta_1)(2u^2+hu)(u^2+hu) du = -\frac{4}{h^4} \int_0^h (u-\beta_1)u^2(2u-h)(u-h) du \\
&= -\frac{4}{h^4} H(\beta_1) = -\frac{4}{h^4} \left(-\frac{h^7}{70} + \frac{ah^6}{30} - \frac{a^2h^5}{60} \right) = \frac{2h^3}{35} - \frac{2\beta_1h^2}{15} + \frac{\beta_1^2h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{12}^h = N_{21}^h = -\frac{8}{3h} + \frac{\beta_1^2h}{15} - \frac{2\beta_1h^2}{15} + \frac{2h^3}{35} = \frac{1}{h} \left(-\frac{8}{3} + \frac{\beta_1^2h^2}{15} - \frac{2\beta_1h^3}{15} + \frac{2h^4}{35} \right)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad N_{13}^h &= N_{31}^h = \int_0^T \phi_1'(t)\phi_3'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \phi_1(t)\phi_3(t) dt \\
&= \int_0^T \psi_0'(t)\psi_1'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \psi_0(t)\psi_1(t) dt = 0 \\
&= 0 \quad \text{car Support } \psi_0 \cap \text{Support } \psi_1 = \emptyset
\end{aligned}$$

$$N_{13}^h = N_{31}^h = 0 \quad \text{car Support } \phi_1 \cap \text{Support } \phi_3 = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{14}^h &= N_{41}^h = \int_0^T \phi_1'(t) \phi_4'(t) dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \phi_1(t) \phi_4(t) dt \\
&= \int_0^T \psi_0'(t) \varphi_1'(t) dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \psi_0(t) \varphi_1(t) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \psi_0'(t) \varphi_1'(t) dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \psi_0(t) \varphi_1(t) dt = (*) + (**) \\
(*) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{-4}{h^2} [2(t - t_0) - h] \frac{2}{h^2} [2(t - t_0) - \frac{h}{2}] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} [2(t - t_0) - h] [4(t - t_0) - h] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (2u - h)(4u - h) du = -\frac{4}{h^4} \int_0^h (8u^2 - 6uh + h^2) du \\
&= -\frac{4}{h^4} \left[\frac{8u^3}{3} - 3hu^2 + h^2u \right]_0^h = -\frac{4}{h^4} \left(-\frac{8h^3}{3} - 3h^3 + h^3 \right) = -\frac{8}{3h} \\
(**) &= \int_{t_0}^{t_1} (t - \xi)^2 \frac{-4}{h^2} [(t - t_0)^2 - h(t - t_0)] \frac{2}{h^2} [(t - t_0)^2 - \frac{h}{2}(t - t_0)] dt \\
&= -\frac{4}{h^2} \int_{t_0}^{t_1} (t - \xi)^2 [(t - t_0)^2 - h(t - t_0)] [2(t - t_0)^2 - h(t - t_0)] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (u + \beta_0)^2 (u^2 - hu)(2u^2 - hu) du \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (u + \beta_0)^2 (u - h)(2u - h)u^2 du \\
&= -\frac{4}{h^4} H(-\beta_0) = -\frac{4}{h^4} \left(-\frac{h^7}{70} - \frac{\beta_0 h^6}{30} - \frac{\beta_0^2 h^5}{60} \right) = \frac{2h^3}{35} + \frac{2\beta_0 h^2}{15} + \frac{\beta_0^2 h}{15}
\end{aligned}$$

$N_{14}^h = N_{41}^h = -\frac{8}{3h} + \frac{2h^3}{35} + \frac{2\beta_0 h^2}{15} + \frac{\beta_0^2 h}{15} = \frac{1}{h} \left(-\frac{8}{3} + \frac{\beta_0^2 h^2}{15} + \frac{2\beta_0 h^3}{15} + \frac{2h^4}{35} \right)$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{22}^h &= \int_0^T (\phi_2'(t))^2 dt + \int_0^T (t - \xi)^2 (\phi_2(t))^2 dt \\
&= \int_0^T (\varphi_0'(t))^2 dt + \int_0^T (t - \xi)^2 (\varphi_0(t))^2 dt = (*) + (**)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{4}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} \left[2(t-t_1) + \frac{h}{2}\right]^2 dt = \frac{1}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} [4(t-t_1) + h]^2 dt \\
&= \frac{1}{h^4} \int_0^h (4u-h)^2 dt = \frac{1}{h^4} \left[\frac{(4u-h)^3}{12} \right]_0^h = \frac{1}{h^4} \times \frac{7h^3}{3} = \frac{7}{3h} \\
(**) &= \frac{4}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} (t-\xi)^2 \left[(t-t_1)^2 + \frac{h}{2}(t-t_1) \right]^2 dt = \frac{1}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} (t-\xi)^2 [2(t-t_1)^2 + h(t-t_1)]^2 dt \\
&= \frac{1}{h^4} \int_0^h (u-\beta_1)^2 (2u^2 - hu)^2 du = \frac{1}{h^4} \int_0^h (u-\beta_1)^2 (2u-h)^2 u^2 du = \frac{1}{h^4} L(-\beta_1) \\
&= \frac{1}{h^4} \left(\frac{11h^7}{105} - \frac{7\beta_1 h^6}{30} + \frac{2\beta_1^2 h^5}{15} \right) = \frac{11h^3}{105} - \frac{7\beta_1 h^2}{30} + \frac{2\beta_1^2 h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{22}^h = \frac{7}{3h} + \frac{11h^3}{105} - \frac{7\beta_1 h^2}{30} + \frac{2\beta_1^2 h}{15} = \frac{1}{h} \left(\frac{7}{3} + \frac{11h^4}{105} - \frac{7\beta_1 h^3}{30} + \frac{2\beta_1^2 h^2}{15} \right)$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{23}^h &= N_{32}^h = \int_0^T \phi_2'(t) \phi_3'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \phi_2(t) \phi_3(t) dt \\
&= \int_0^T \varphi_0'(t) \psi_1'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \varphi_0(t) \psi_1(t) dt = 0 \\
&= 0 \quad (\text{Support } \varphi_0 \cap \text{Support } \psi_1 = \emptyset)
\end{aligned}$$

$$N_{23}^h = N_{32}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_2 \cap \text{Support } \phi_3 = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{24}^h &= N_{42}^h = \int_0^T \phi_2'(t) \phi_4'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \phi_2(t) \phi_4(t) dt \\
&= \int_0^T \varphi_0'(t) \varphi_1'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \varphi_0(t) \varphi_1(t) dt = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0'(t) \varphi_1'(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} (t-\xi)^2 \varphi_0(t) \varphi_1(t) dt = (*) + (**)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{4}{h^2} \int_{t_0}^{t_1} \left[2(t-t_1) - \frac{h}{2}\right] \left[2(t-t_0) - \frac{h}{2}\right] dt \\
&= \frac{1}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} [4(t-t_1) - h][4(t-t_0) - h] dt = \frac{1}{h^4} \int_0^h (4u-3h)(4u-h) du \\
&= \frac{1}{4h^4} \int_{-2h}^{2h} (v-h)(v+h) du \frac{1}{4h^4} \left[\frac{v^3}{3} - h^2v \right]_{-2h}^{2h} = \frac{1}{4h^4} \left(\frac{16h^3}{3} - 4h^3 \right) = \frac{1}{3h} \\
(**) &= \frac{4}{h^2} \int_{t_0}^{t_1} (t-\xi)^2 \left[(t-t_1)^2 + \frac{h}{2}(t-t_1) \right] \left[(t-t_0)^2 + \frac{h}{2}(t-t_0) \right] dt \\
&= \frac{1}{h^2} \int_{t_0}^{t_1} (t-\xi)^2 [2(t-t_1)^2 + h(t-t_1)] [2(t-t_0)^2 + h(t-t_0)] dt \\
&= \frac{1}{h^4} \int_0^h (u+\beta_0)^2 (2u-h)^2 (u-h) u du \\
&= \frac{1}{h^4} \left[\int_0^h (u+\beta_0)^2 (2u-h)^2 u^2 du - h \int_0^h (u+\beta_0)^2 (2u-h)^2 u du \right] \\
&= \frac{1}{h^4} [L(\beta_0) - hR(\beta_0)] = \frac{1}{h^4} \left[\frac{11h^7}{105} + \frac{7\beta_0 h^6}{30} - \frac{2\beta_0^2 h^5}{15} - h \left(\frac{47h^6}{60} + \frac{4\beta_0 h^5}{15} + \frac{\beta_0^2 h^4}{6} \right) \right] \\
&= \frac{19h^3}{28} - \frac{\beta_0 h^2}{30} - \frac{\beta_0^2 h}{30}
\end{aligned}$$

$$N_{24}^h = N_{42}^h = \frac{1}{3h} + \frac{19h^3}{28} - \frac{\beta_0 h^2}{30} - \frac{\beta_0^2 h}{30} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{3} + \frac{19h^4}{28} - \frac{\beta_0 h^3}{30} - \frac{\beta_0^2 h^2}{30} \right)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad N_{25}^h &= N_{52}^h = \int_0^T \phi_2'(t) \phi_5'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \phi_2(t) \phi_5(t) dt \\
&= \int_0^T \varphi_0'(t) \psi_2'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \varphi_0(t) \psi_2(t) dt = 0 \\
&= 0 \quad (\text{Support } \varphi_0 \cap \text{Support } \psi_2 = \emptyset)
\end{aligned}$$

$$N_{25}^h = N_{52}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_2 \cap \text{Support } \phi_5 = \emptyset$$

$$N_{26}^h = N_{62}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_2 \cap \text{Support } \phi_6 = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{33}^h &= \int_0^T (\phi_3'(t))^2 dt + \int_0^T (t-\xi)^2 (\phi_3(t))^2 dt \\
&= \int_0^T (\psi_1'(t))^2 dt + \int_0^T (t-\xi)^2 (\psi_1(t))^2 dt = (*) + (**) \\
(*) &= \frac{16}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} [2(t-t_1) - h]^2 dt = \frac{16}{h^4} \int_0^h (2u-h)^2 du \\
&= \frac{16}{h^4} \left[\frac{(2u-h)^3}{6} \right]_0^h = \frac{16}{h^4} \times \frac{2h^3}{6} = \frac{16}{3h} \\
(**) &= \frac{16}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} (t-\xi)^2 [(t-t_1)^2 - h(t-t_1)]^2 dt \\
&= \frac{16}{h^4} \int_0^h (u+\beta_1)^2 (u^2 - hu)^2 du = \frac{16}{h^4} K(\beta_1) \\
&= \frac{16}{h^4} \left(\frac{h^7}{105} + \frac{\beta_1 h^6}{30} + \frac{\beta_1^2 h^5}{30} \right) = \frac{16h^3}{105} + \frac{8\beta_1 h^2}{15} + \frac{8\beta_1^2 h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{33}^h = \frac{16}{3h} + \frac{16h^3}{105} + \frac{8\beta_1 h^2}{15} + \frac{8\beta_1^2 h}{15} = \frac{1}{h} \left(\frac{16}{3} + \frac{16h^4}{105} + \frac{8\beta_1 h^3}{15} + \frac{8\beta_1^2 h^2}{15} \right)$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{34}^h &= N_{43}^h = \int_0^T \phi_3'(t)\phi_4'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \phi_3(t)\phi_4(t) dt \\
&= \int_0^T \psi_1'(t)\varphi_1'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \psi_1(t)\varphi_1(t) dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \psi_1'(t)\varphi_1'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} (t-\xi)^2 \psi_1(t)\varphi_1(t) dt = (*) + (**) \\
(*) &= -\frac{8}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} [2(t-t_2) + h] \left[2(t-t_2) + \frac{h}{2} \right] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} [2(t-t_2) + h] [4(t-t_2) + h] dt = -\frac{4}{h^4} \int_0^h (2v-h)(4v-h) dv \\
&= -\frac{8}{3h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(**) &= -\frac{8}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} (t - \xi)^2 [(t - t_1)^2 - h(t - t_1)] [(t - t_1)^2 - \frac{h}{2}(t - t_1)] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (u + \beta_1)^2 (u^2 - hu)(2u^2 - hu) du \\
&= -\frac{4}{h^4} H(-\beta_1) = -\frac{4}{h^4} \left[-\frac{h^7}{70} + \frac{ah^6}{30} - \frac{a^2h^5}{60} \right] \\
&= \frac{2h^3}{35} + \frac{2\beta_1h^2}{15} + \frac{\beta_1^2h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{34}^h = N_{43}^h = -\frac{8}{3h} + \frac{2h^3}{35} + \frac{2\beta_1h^2}{15} + \frac{\beta_1^2h}{15} = \frac{1}{h} \left(-\frac{8}{3} + \frac{2h^4}{35} + \frac{2\beta_1h^3}{15} + \frac{\beta_1^2h^2}{15} \right)$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{35}^h &= N_{53}^h = \int_0^T \phi_3'(t)\phi_5'(t) dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \phi_3(t)\phi_5(t) dt \\
&= \int_0^T \psi_1'(t)\psi_2'(t) dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \psi_1(t)\psi_2(t) dt = 0 \\
&= 0 \quad (\text{Support } \psi_1 \cap \text{Support } \psi_2 = \emptyset)
\end{aligned}$$

$$N_{35}^h = N_{53}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_3 \cap \text{Support } \phi_5 = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{36}^h &= N_{63}^h = \int_0^T \phi_3'(t)\phi_6'(t) dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \phi_3(t)\phi_6(t) dt \\
&= \int_0^T \psi_1'(t)\varphi_2'(t) dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \psi_1(t)\varphi_2(t) dt = (*) + (**) \\
(*) &= -\frac{8}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} [2(t - t_1) - h] [2(t - t_1) - \frac{h}{2}] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} [2(t - t_1) - h] [4(t - t_1) + h] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (2u - h)(4u - h) du \\
&= -\frac{4}{h^4} \left[\frac{8u^3}{3} + 3hu^2 + h^2u \right]_0^h = \frac{4}{h^4} (2h^3 - \frac{8h^3}{3}) \\
&= -\frac{8}{3h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(**) &= -\frac{4}{h^2} \int_{t_1}^{t_2} (t - \xi)^2 [(t - t_1)^2 - h(t - t_1)] [(t - t_1)^2 - \frac{h}{2}(t - t_1)] dt \\
&= -\frac{4}{h^2} \int_{t_1}^{t_2} (t - \xi)^2 [(t - t_1)^2 - h(t - t_1)] [2(t - t_1)^2 - h(t - t_1)] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (u + \beta_1)^2 (u^2 - hu)(2u^2 - hu) du = -\frac{4}{h^4} H(-\beta_1) = \frac{2h^3}{35} + \frac{2\beta_1 h^2}{15} + \frac{\beta_1^2 h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{63}^h = N_{36}^h = -\frac{8}{3h} + \frac{\beta_1^2 h}{15} + \frac{2\beta_1 h^2}{15} + \frac{2h^3}{35} = \frac{1}{h} \left(-\frac{8}{3} + \frac{\beta_1^2 h^2}{15} + \frac{2\beta_1 h^3}{15} + \frac{2h^4}{35} \right)$$

$$N_{37}^h = N_{73}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_3 \cap \text{Support } \phi_7 = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{44}^h &= \int_0^T (\phi_4'(t))^2 dt + \int_0^T (t - \xi)^2 (\phi_4(t))^2 dt \\
&= \int_0^T (\varphi_1'(t))^2 dt + \int_0^T (t - \xi)^2 (\varphi_1(t))^2 dt = (*) + (**) \\
(*) &= \frac{4}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} [2(t - t_0) - \frac{h}{2}]^2 dt + \frac{4}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} [2(t - t_2) + \frac{h}{2}]^2 dt \\
&= \frac{4}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} [4(t - t_0) - h]^2 dt + \frac{4}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} [4(t - t_2) + h]^2 dt \\
&= \frac{1}{h^4} \left[\int_0^h (4u - h)^2 du + \int_0^h (-4v + h)^2 dv \right] = \frac{2}{h^4} \int_0^h (4u - h)^2 du \\
&= \frac{2}{h^4} \left[\frac{(4u - h)^3}{12} \right]_0^h = \frac{2}{h^4} \times \frac{7h^3}{3} = \frac{14}{3h} \\
(**) &= \frac{4}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} (t - \xi)^2 [(t - t_0)^2 - \frac{h}{2}(t - t_0)]^2 dt + \frac{4}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} (t - \xi)^2 [(t - t_2)^2 + \frac{h}{2}(t - t_2)]^2 dt \\
&= \frac{1}{h^4} \left[\int_{t_0}^{t_1} (t - \xi)^2 [2(t - t_0)^2 - h(t - t_0)]^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} (t - \xi)^2 [2(t - t_2)^2 + h(t - t_2)]^2 dt \right] \\
&= \frac{1}{h^4} \left[\int_0^h (u + \beta_0)^2 (2u^2 - hu)^2 du + \int_0^h (-v + \beta_2)^2 (2v^2 - hv)^2 dv \right] = \frac{1}{h^4} (L(\beta_0) + L(-\beta_2)) \\
&= \frac{1}{h^4} \left[\frac{22h^7}{105} + \frac{7(\beta_0 - \beta_2)h^6}{30} + \frac{2(\beta_0^2 + \beta_2^2)h^5}{15} \right] = \frac{1}{h^4} \left[\frac{22h^7}{105} + \frac{7(-2h)h^6}{30} + \frac{2(\beta_0^2 + \beta_2^2)h^5}{15} \right] \\
&= -\frac{9h^3}{35} + \frac{2(\beta_0^2 + \beta_2^2)h}{15} = -\frac{9h^3}{35} + \frac{2(4h^2 + 2\beta_0\beta_2)h}{15} = \frac{29h^3}{105} + \frac{4\beta_0\beta_2h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{44}^h = \frac{14}{3h} - \frac{9h^3}{35} + \frac{2(\beta_0^2 + \beta_2^2)h}{15} = \frac{14}{3h} + \frac{29h^3}{105} + \frac{4\beta_0\beta_2h}{15}$$

$$N_{44}^h = \frac{1}{h} \left(\frac{14}{3} - \frac{9h^4}{35} + \frac{2(\beta_0^2 + \beta_2^2)h^2}{15} \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{14}{3} + \frac{29h^3}{105} + \frac{4\beta_0\beta_2h}{15} \right)$$

- $N_{45}^h = N_{54}^h = \int_0^T \phi_4'(t)\phi_5'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2\phi_4(t)\phi_5(t) dt$

$$= \int_0^T \varphi_1'(t)\psi_2'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2\varphi_1(t)\psi_2(t) dt = 0$$

$$= 0 \quad (\text{Support } \varphi_1 \cap \text{Support } \psi_2 = \emptyset)$$

$$N_{45}^h = N_{54}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_4 \cap \text{Support } \phi_5 = \emptyset$$

- $N_{46}^h = N_{64}^h = \int_0^T \phi_4'(t)\phi_6'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2\phi_4(t)\phi_6(t) dt$

$$= \int_0^T \varphi_1'(t)\varphi_2'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2\varphi_1(t)\varphi_2(t) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \varphi_1'(t)\varphi_2'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} (t-\xi)^2\varphi_1(t)\varphi_2(t) dt = (*) + (**)$$

$$(*) = \frac{4}{h^2} \int_{t_1}^{t_2} \left[2(t-t_2) + \frac{h}{2} \right] \left[2(t-t_1) - \frac{h}{2} \right] dt$$

$$= \frac{1}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} [4(t-t_2) + h][4(t-t_1) - h] dt = \frac{1}{h^4} \int_0^h (4u-3h)(4u-h) du$$

$$= \frac{1}{4h^4} \int_{-2h}^{2h} (v-h)(v+h) du \frac{1}{4h^4} \left[\frac{v^3}{3} - h^2v \right]_{-2h}^{2h}$$

$$= \frac{1}{4h^4} \left(\frac{16h^3}{3} - 4h^3 \right) = \frac{1}{3h}$$

$$\begin{aligned}
(**) &= \frac{4}{h^2} \int_{t_1}^{t_2} (t - \xi)^2 \left[(t - t_2)^2 + \frac{h}{2}(t - t_2) \right] \left[(t - t_1)^2 - \frac{h}{2}(t - t_1) \right] dt \\
&= \frac{1}{h^2} \int_{t_1}^{t_2} (t - \xi)^2 \left[2(t - t_2)^2 + h(t - t_2) \right] \left[2(t - t_1)^2 + h(t - t_1) \right] dt \\
&= \frac{1}{h^4} \int_0^h (u + \beta_1)^2 (u - h) u (2u - h)^2 du \\
&= \frac{1}{h^4} \left[\int_0^h (u + \beta_1)^2 (2u - h)^2 u^2 du - h \int_0^h (u + \beta_1)^2 (2u - h)^2 u du \right] \\
&= \frac{1}{h^4} [L(\beta_1) - hR(\beta_1)] = \frac{1}{h^4} \left[\frac{11h^7}{105} + \frac{7\beta_1 h^6}{30} - \frac{2\beta_1^2 h^5}{15} - h \left(\frac{47h^6}{60} + \frac{4\beta_1 h^5}{15} + \frac{\beta_1^2 h^4}{6} \right) \right] \\
&= \frac{19h^3}{28} - \frac{\beta_1 h^2}{30} - \frac{\beta_1^2 h}{30}
\end{aligned}$$

$$N_{46}^h = N_{64}^h = \frac{1}{3h} + \frac{19h^3}{28} - \frac{\beta_1 h^2}{30} - \frac{\beta_1^2 h}{30} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{3} + \frac{19h^4}{28} - \frac{\beta_1 h^3}{30} - \frac{\beta_1^2 h^2}{30} \right)$$

$$N_{47}^h = N_{74}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_4 \cap \text{Support } \phi_7 = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{55}^h &= \int_0^T (\phi_5'(t))^2 dt + \int_0^T (t - \xi)^2 (\phi_5(t))^2 dt \\
&= \int_0^T (\psi_2'(t))^2 dt + \int_0^T (t - \xi)^2 (\psi_2(t))^2 dt = (*) + (**) \\
(*) &= \frac{16}{h^4} \int_{t_2}^{t_3} [2(t - t_2) - h]^2 dt = \frac{16}{h^4} \int_0^h (2u - h)^2 du \\
&= \frac{16}{h^4} \left[\frac{(2u - h)^3}{6} \right]_0^h = \frac{16}{h^4} \times \frac{2h^3}{6} = \frac{16}{3h} \\
(**) &= \frac{16}{h^4} \int_{t_2}^{t_3} (t - \xi)^2 [(t - t_2)^2 - h(t - t_2)]^2 dt \\
&= \frac{16}{h^4} \int_0^h (u + \beta_2)^2 (u^2 - hu)^2 du \\
&= \frac{16}{h^4} K(\beta_2) = \frac{16}{h^4} \left(\frac{h^7}{105} + \frac{\beta_2 h^6}{30} + \frac{\beta_2^2 h^5}{30} \right) = \frac{16h^3}{105} + \frac{8\beta_2 h^2}{15} + \frac{8\beta_2^2 h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{55}^h = \frac{16}{3h} + \frac{16h^3}{105} + \frac{8\beta_2 h^2}{15} + \frac{8\beta_2^2 h}{15} = \frac{1}{h} \left(\frac{16}{3} + \frac{16h^4}{105} + \frac{8\beta_2 h^3}{15} + \frac{8\beta_2^2 h^2}{15} \right)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad N_{56}^h &= N_{65}^h = \int_0^T \phi_5'(t)\phi_6'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \phi_5(t)\phi_6(t) dt \\
&= \int_0^T \psi_2'(t)\varphi_2'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \psi_2(t)\varphi_2(t) dt = \\
&= \int_{t_2}^{t_3} \psi_2'(t)\varphi_2'(t) dt + \int_{t_2}^{t_3} (t-\xi)^2 \psi_2(t)\varphi_2(t) dt = (*) + (**) \\
(*) &= -\frac{8}{h^4} \int_{t_2}^{t_3} [2(t-t_3)+h] [2(t-t_3)+\frac{h}{2}] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_{t_2}^{t_3} [2(t-t_3)+h] [4(t-t_3)+h] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (2v-h)(4v-h) dv = -\frac{8}{3h} \\
(**) &= -\frac{8}{h^4} \int_{t_2}^{t_3} (t-\xi)^2 [(t-t_3)^2 + h(t-t_3)] [(t-t_3)^2 + \frac{h}{2}(t-t_3)] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (u-\beta_3)^2 (v^2 - hv)(2v^2 - hv) dv \\
&= -\frac{4}{h^4} H(\beta_3) = \frac{2h^3}{35} - \frac{2\beta_3 h^2}{15} + \frac{\beta_3^2 h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{56}^h = N_{65}^h = -\frac{8}{3h} + \frac{2h^3}{35} - \frac{2\beta_3 h^2}{15} + \frac{\beta_3^2 h}{15} = -\frac{8}{3h} + \frac{\beta_2^2 h}{15} - \frac{h^3}{105} = -\frac{8}{3h} + \frac{\beta_3 \beta_1 h}{15} + \frac{2h^3}{35}$$

$$N_{56}^h = N_{65}^h = -\frac{8}{3h} + \frac{2h^3}{35} - \frac{2\beta_3 h^2}{15} + \frac{\beta_3^2 h}{15} = \frac{1}{h} \left(-\frac{8}{3} + \frac{2h^4}{35} + \frac{\beta_1 \beta_3 h^2}{15} \right)$$

$$N_{57}^h = N_{75}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_5 \cap \text{Support } \phi_7 = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad N_{58}^h &= N_{85}^h = \int_0^T \phi_5'(t) \phi_8'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \phi_5(t) \phi_8(t) dt \\
&= \int_0^T \psi_2'(t) \varphi_3'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \psi_2(t) \varphi_3(t) dt = \\
&= \int_{t_2}^{t_3} \psi_2'(t) \varphi_2'(t) dt + \int_{t_2}^{t_3} (t-\xi)^2 \psi_2(t) \varphi_2(t) dt = (*) + (**) \\
(*) &= -\frac{8}{h^4} \int_{t_2}^{t_3} \left[2(t-t_2) - \frac{h}{2}\right] [2(t-t_2) - h] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_{t_2}^{t_3} [4(t-t_2) - h] [2(t-t_3) - h] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (4v-h)(2v-h) dv = -\frac{8}{3h} \\
(**) &= -\frac{8}{h^4} \int_{t_2}^{t_3} (t-\xi)^2 \left[(t-t_2)^2 - \frac{h}{2}(t-t_2)\right] [(t-t_2)^2 - h(t-t_2)] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (u+\beta_2)^2 (v^2-hv)(2v^2-hv) dv \\
&= -\frac{4}{h^4} H(-\beta_2) = \frac{2h^3}{35} + \frac{2\beta_2 h^2}{15} + \frac{\beta_2^2 h}{15} = \frac{2h^3}{35} + \frac{\beta_2 \beta_4 h^2}{15} = -\frac{h^3}{105} + \frac{\beta_3^2 h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{58}^h = N_{85}^h = -\frac{8}{3h} + \frac{2h^3}{35} + \frac{2\beta_2 h^2}{15} + \frac{\beta_2^2 h}{15} = -\frac{8}{3h} - \frac{h^3}{105} + \frac{\beta_3^2 h}{15} = -\frac{8}{3h} + \frac{2h^3}{35} + \frac{\beta_2 \beta_4 h^2}{15}$$

$$N_{58}^h = N_{85}^h = \frac{1}{h} \left(-\frac{8}{3} + \frac{2h^4}{35} + \frac{\beta_2 \beta_4 h^2}{15} \right)$$

Pour tout k , $0 \leq k \leq n$ on a :

$$\begin{aligned}
\bullet \quad N_{2k+1, 2k+1}^h &= \int_0^T \left(\phi_{2k+1}'(t)\right)^2 dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \left(\phi_{2k+1}(t)\right)^2 dt \\
&= \int_0^T \left(\psi_k'(t)\right)^2 dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \left(\psi_k(t)\right)^2 dt = (*) + (**)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{16}{h^4} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [2(t-t_k) - h]^2 dt \\
&= \frac{16}{h^4} \int_0^h (2u-h)^2 du = \frac{16}{3h} = \frac{16}{3} \times \frac{1}{h} \\
(**) &= \frac{16}{h^4} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t-\xi)^2 [(t-t_k)^2 - h(t-t_k)]^2 dt \\
&= \frac{16}{h^4} \int_0^h (u+\beta_k)^2 (u^2 - hu)^2 du = \frac{16}{h^4} K(\beta_k) \\
&= \frac{16}{h^4} \left(\frac{h^7}{105} + \frac{\beta_k h^6}{30} + \frac{\beta_k^2 h^5}{30} \right) = \frac{16h^3}{105} + \frac{8\beta_k h^2}{15} + \frac{8\beta_k^2 h}{15} = \frac{16h^3}{105} + \frac{8\beta_k \beta_{k+1} h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{2k+1,2k+1}^h = \frac{16}{3h} + \frac{16h^3}{105} + \frac{8\beta_k \beta_{k+1} h}{15} = \frac{1}{h} \left(\frac{16}{3} + \frac{16h^4}{105} + \frac{8\beta_k \beta_{k+1} h^2}{15} \right)$$

- $$\begin{aligned}
N_{2k+1,2k+2}^h &= N_{2k+2,2k+1}^h \\
&= \int_0^T \phi_{2k+1}'(t) \phi_{2k+2}'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \phi_{2k+1}(t) \phi_{2k+2}(t) dt \\
&= \int_0^T \psi_k'(t) \varphi_k'(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \psi_k(t) \varphi_k(t) dt = \\
&= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_k'(t) \varphi_k'(t) dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t-\xi)^2 \psi_k(t) \varphi_k(t) dt = (*) + (**) \\
(*) &= -\frac{8}{h^4} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [2(t-t_{k+1}) + h] [2(t-t_k)k + 1 + \frac{h}{2}] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [2(t-t_k) + h] [4(t-t_k) + h] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (2v-h)(4v-h) dv = -\frac{8}{3h} = -\frac{8}{3} \times \frac{1}{h} \\
(**) &= -\frac{8}{h^4} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t-\xi)^2 [(t-t_{k+1})^2 + h(t-t_{k+1})] [(t-t_{k+1})^2 + \frac{h}{2}(t-t_{k+1})] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (u-\beta_{k+1})^2 (u^2 - hu)(2u^2 - hu) du \\
&= -\frac{4}{h^4} H(\beta_{k+1}) = \frac{2h^3}{35} - \frac{2\beta_{k+1} h^2}{15} + \frac{\beta_{k+1}^2 h}{15} = \frac{2h^3}{35} + \frac{\beta_{k+1} \beta_{k-1} h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{2k+1,2k+2}^h = N_{2k+2,2k+1}^h = -\frac{8}{3h} + \frac{2h^3}{35} + \frac{\beta_{k+1} \beta_{k-1} h}{15} = \frac{1}{h} \left(-\frac{8}{3} + \frac{2h^4}{35} + \frac{\beta_{k+1} \beta_{k-1} h^2}{15} \right)$$

$N_{2k+1,2k+3}^h = N_{2k+1,2k+3}^h = 0$	car	Support $\phi_{2k+1} \cap$ Support $\phi_{2k+3} = \emptyset$
---	-----	--

- $$\begin{aligned}
N_{2k+1,2k+4}^h &= N_{2k+1,2k+4}^h = \int_0^T \phi'_{2k+1}(t) \phi'_{2k+4}(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \phi_3(t) \phi_6(t) dt \\
&= \int_0^T \psi'_k(t) \varphi'_{k+1}(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \psi_k(t) \varphi_{k+1}(t) dt = (*) + (**) \\
(*) &= -\frac{8}{h^4} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [2(t-t_k) - h] [2(t-t_k) - \frac{h}{2}] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (2u-h)(4u-h) du = -\frac{8}{3h} = -\frac{8}{3} \times \frac{1}{h} \\
(**) &= -\frac{8}{h^2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t-\xi)^2 [(t-t_k)^2 - h(t-t_k)] [(t-t_k)^2 - \frac{h}{2}(t-t_k)] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (u+\beta_k)^2 (u^2 - hu)(2u^2 - hu) du \\
&= -\frac{4}{h^4} H(-\beta_k) = \frac{2h^3}{35} + \frac{2\beta_k h^2}{15} + \frac{\beta_k^2 h}{15} = \frac{2h^3}{35} + \frac{\beta_k \beta_{k+2} h}{15}
\end{aligned}$$

$N_{2k+1,2k+4}^h = N_{2k+1,2k+4}^h = -\frac{8}{3h} + \frac{2h^3}{35} + \frac{\beta_k \beta_{k+2} h}{15} = \frac{1}{h} \left(-\frac{8}{3} + \frac{2h^4}{35} + \frac{\beta_k \beta_{k+2} h^2}{15} \right)$

Et pour tout $k \geq 2$, on a :

- $$\begin{aligned}
N_{2k,2k-3}^h &= N_{2k-3,2k}^h \\
&= \int_0^T \phi'_{2k}(t) \phi'_{2k-3}(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \phi_{2k-3}(t) \phi_{2k}(t) dt \\
&= \int_0^T \psi'_{k-2}(t) \varphi'_{k-1}(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \psi_{k-2}(t) \varphi_{k-1}(t) dt = (*) + (**)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{-8}{h^2} \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} [2(t - t_{k-2}) - h] [2(t - t_{k-2}) - \frac{h}{2}] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (2u - h)(4u - h) du = -\frac{8}{3h} = -\frac{8}{3} \times \frac{1}{h} \\
(**) &= -\frac{8}{h^4} \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} (t - \xi)^2 [(t - t_{k-2})^2 - h(t - t_{k-2})] [(t - t_{k-2})^2 - \frac{h}{2}(t - t_{k-2})] \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (u + \beta_{k-2})^2 (u - h)(2u - h) u^2 du \\
&= -\frac{4}{h^4} H(-\beta_{k-2}) = \frac{2h^3}{35} + \frac{2\beta_{k-2}h^2}{15} + \frac{\beta_{k-2}^2 h}{15} = \frac{2h^3}{35} + \frac{\beta_k \beta_{k-2} h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{2k,2k-3}^h = N_{2k-3,2k}^h = -\frac{8}{3h} + \frac{2h^3}{35} + \frac{\beta_k \beta_{k-2} h}{15} = \frac{1}{h} \left(-\frac{8}{3} + \frac{2h^4}{35} + \frac{\beta_k \beta_{k-2} h^2}{15} \right)$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{2k,2k-2}^h = N_{2k-2,2k}^h &= \int_0^T \phi'_{2k}(t) \phi'_{2k-2}(t) dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \phi_{2k}(t) \phi_{2k-2}(t) dt \\
&= \int_0^T \varphi'_{k-1}(t) \varphi'_{k-2}(t) dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \varphi_{k-1}(t) \varphi_{k-2}(t) dt = (*) + (**) \\
(*) &= \frac{4}{h^2} \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} [2(t - t_{k-2}) - \frac{h}{2}] [2(t - t_{k-1}) + \frac{h}{2}] dt \\
&= \frac{1}{h^4} \int_0^h (4u - 3h)(4u - h) du = \frac{1}{3h} \\
(**) &= \frac{4}{h^2} \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} (t - \xi)^2 [(t - t_{k-2})^2 - \frac{h}{2}(t - t_{k-2}) - 2] [(t - t_{k-1})^2 + \frac{h}{2}(t - t_{k-1})] dt \\
&= \frac{1}{h^4} \int_0^h (u - \beta_{k-2})^2 (2u - h)^2 (u - h) u du = \frac{1}{h^4} [L(\beta_{k-2}) - hR(\beta_{k-2})] \\
&= \frac{19h^3}{28} - \frac{\beta_{k-2}h^2}{30} - \frac{\beta_{k-2}^2 h}{30} = \frac{19h^3}{28} - \frac{\beta_{k-2} \beta_{k-1} h}{30}
\end{aligned}$$

$$N_{2k,2k-2}^h = N_{2k-2,2k}^h = \frac{1}{3h} + \frac{19h^3}{28} - \frac{\beta_{k-2} \beta_{k-1} h}{30} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{3} + \frac{19h^4}{28} - \frac{\beta_{k-2} \beta_{k-1} h^2}{30} \right)$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{2k,2k-1}^h &= N_{2k-1,2k}^h = \int_0^T \phi_2 k'(t) \phi'_{2k-1}(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \phi_2 k(t) \phi_{2k-1}(t) dt \\
&= \int_0^T \psi'_{k-1}(t) \varphi'_{k-1}(t) dt + \int_0^T (t-\xi)^2 \psi_{k-1}(t) \varphi_{k-1}(t) dt = (*) + (**) \\
(*) &= -\frac{8}{h^4} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [2(t-t_k) + h] \left[2(t-t_k) + \frac{h}{2}\right] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (2v-h)(4v-h) dv = -\frac{8}{3h} \\
(**) &= -\frac{8}{h^4} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t-\xi)^2 [(t-t_k)^2 + h(t-t_k)] \left[(t-t_k)^2 + \frac{h}{2}(t-t_k)\right] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h (u-\beta_k)^2 (2u-h)(u-h) u^2 du \\
&= -\frac{4}{h^4} H(\beta_k) = \frac{2h^3}{35} - \frac{2\beta_k h^2}{15} + \frac{\beta_k^2 h}{15} = \frac{2h^3}{35} + \frac{\beta_k \beta_{k-2} h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{2k,2k-1}^h = N_{2k-1,2k}^h = -\frac{8}{3h} + \frac{2h^3}{35} + \frac{\beta_k \beta_{k-2} h}{15} = \frac{1}{h} \left(-\frac{8}{3} + \frac{2h^4}{35} + \frac{\beta_k \beta_{k-2} h^2}{15} \right)$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{2k,2k}^h &= \int_0^T (\phi_2 k'(t))^2 dt + \int_0^T (t-\xi)^2 (\phi_2 k(t))^2 dt \\
&= \int_0^T (\varphi'_{k-1}(t))^2 dt + \int_0^T (t-\xi)^2 (\varphi_{k-1}(t))^2 dt = (*) + (**) \\
(*) &= \frac{4}{h^4} \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \left[2(t-t_{k-2}) - \frac{h}{2}\right]^2 dt + \frac{4}{h^4} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[2(t-t_k) + \frac{h}{2}\right]^2 dt \\
&= \frac{1}{h^4} \left[\int_0^h (4u-h)^2 du + \int_0^h (-4v+h)^2 dv \right] = \frac{2}{h^4} \int_0^h (4u-h)^2 du \\
&= \frac{2}{h^4} \left[\frac{(4u-h)^3}{12} \right]_0^h = \frac{2}{h^4} \times \frac{7h^3}{3} = \frac{14}{3h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(**) &= \frac{4}{h^4} \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} (t - \xi)^2 \left[(t - t_{k-2})^2 - \frac{h}{2}(t - t_{k-2}) \right]^2 dt + \frac{4}{h^4} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - \xi)^2 \left[(t - t_k)^2 + \frac{h}{2}(t - t_k) \right]^2 dt \\
&= \frac{1}{h^4} \left[\int_0^h (u + \beta_{k-2})^2 (2u - h)^2 u^2 du + \int_0^h (v - \beta_k)^2 (2v - h)^2 v^2 dv \right] \\
&= \frac{1}{h^4} (L(\beta_{k-2}) + L(-\beta_k)) \\
&= \frac{1}{h^4} \left[\frac{22h^7}{105} + \frac{7(\beta_{k-2} - \beta_k)h^6}{30} + \frac{2(\beta_{k-2}^2 + \beta_k^2)h^5}{15} \right] \\
&= -\frac{9h^3}{35} + \frac{2(\beta_{k-2}^2 + \beta_k^2)h}{15} = \frac{29h^3}{105} + \frac{4\beta_{k-2}\beta_k h}{15}
\end{aligned}$$

$$N_{2k,2k}^h = \frac{14}{3h} - \frac{9h^3}{35} + \frac{4\beta_{k-2}\beta_k h}{15} = \frac{1}{h} \left(\frac{14}{3} - \frac{9h^4}{35} + \frac{4\beta_{k-2}\beta_k h^2}{15} \right)$$

$$N_{2k,2k+1}^h = N_{2k+1,2k}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_{2k+1} \cap \text{Support } \phi_{2k} = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{2k,2k+2}^h &= N_{2k+2,2k}^h = \int_0^T \phi_2 k'(t) \phi'_{2k+2}(t) dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \phi_2 k(t) \phi_{2k+2}(t) dt \\
&= \int_0^T \varphi'_{k-1}(t) \varphi'_k(t) dt + \int_0^T (t - \xi)^2 \varphi_{k-1}(t) \varphi_k(t) dt = (*) + (**) \\
(*) &= \frac{4}{h^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[2(t - t_k) + \frac{h}{2} \right] \left[2(t - t_{k-1}) - \frac{h}{2} \right] dt \\
&= \frac{1}{h^4} \int_0^h (4u - 3h)(4u - h) du = \frac{1}{3h} \\
(**) &= \frac{4}{h^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t - \xi)^2 \left[(t - t_k)^2 + \frac{h}{2}(t - t_k) \right] \left[(t - t_{k-1})^2 - \frac{h}{2}(t - t_{k-1}) \right] dt \\
&= \frac{1}{h^4} \int_0^h (u + \beta_{k-1})^2 (u - h) u (2u - h)^2 du \\
&= \frac{1}{h^4} \left[\int_0^h (u + \beta_{k-1})^2 (2u - h)^2 u^2 du - h \int_0^h (u + \beta_{k-1})^2 (2u - h)^2 u du \right] \\
&= \frac{1}{h^4} [L(\beta_{k-1}) - hR(\beta_{k-1})]
\end{aligned}$$

4.6.4 Calcul des coefficients de la matrice de masse M_h

$$\begin{aligned}
\bullet M_{11}^h &= \int_0^T [\phi_1(t)]^2 dt = \int_0^T [\psi_0(t)]^2 dt \\
&= \frac{16}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} [(t-t_0)^2 + h(t-t_0)]^2 dt \\
&= \frac{16}{h^4} \int_0^h u^2(u-h)^2 du = \frac{16}{h^4} I(h) = \frac{8h}{15} = 16 \times \frac{h}{30}
\end{aligned}$$

$$M_{11}^h = \frac{8h}{15} = 16 \times \frac{h}{30}$$

$$\begin{aligned}
\bullet M_{12}^h = M_{21}^h &= \int_0^T \phi_1(t)\phi_2(t) dt = \int_0^T \psi_0(t)\varphi_0(t) dt \\
&= -\frac{8}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} [(t-t_1)^2 + \frac{h}{2}(t-t_1)] [(t-t_1)^2 + h(t-t_1)] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h u^2(2u-h)(u-h) du = -\frac{4}{h^4} \int_0^h (2u^4 - 3hu^3 + h^2u^2) du \\
&= -\frac{4}{h^4} \left[\frac{2h^5}{5} - \frac{3h^5}{4} + \frac{h^5}{3} \right] = \frac{h}{15} = 2 \times \frac{h}{30}
\end{aligned}$$

$$M_{12}^h = M_{21}^h = \frac{h}{15} = 2 \times \frac{h}{30}$$

$$M_{13}^h = M_{31}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_1 \cap \text{Support } \phi_3 = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\bullet M_{14}^h = M_{41}^h &= \int_0^T \phi_1(t)\phi_4(t) dt = \int_0^T \psi_0(t)\varphi_1(t) dt \\
&= -\frac{8}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} [(t-t_0)^2 - h(t-t_0)] [(t-t_0)^2 - \frac{h}{2}(t-t_0)] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h u^2(u-h)(2u-h) du = -\frac{4}{h^4} \times \frac{-h}{60} = \frac{h}{15} = 2 \times \frac{h}{30}
\end{aligned}$$

$$M_{14}^h = M_{41}^h = \frac{h}{15} = 2 \times \frac{h}{30}$$

$$\begin{aligned} \bullet M_{22}^h &= \int_0^T [\phi_2(t)]^2 dt = \int_0^T [\varphi_0(t)]^2 dt \\ &= \frac{4}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} \left[(t-t_1)^2 + \frac{h}{2}(t-t_1) \right]^2 dt = \frac{1}{h^4} \int_0^h u^2(2u-h)^2 du = \frac{2h}{15} = 4 \times \frac{h}{30} \end{aligned}$$

$$M_{22}^h = \frac{2h}{15} = 4 \times \frac{h}{30}$$

$$M_{23}^h = M_{32}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_2 \cap \text{Support } \phi_3 = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \bullet M_{24}^h = M_{42}^h &= \int_0^T \phi_2(t)\phi_4(t) dt = \int_0^T \varphi_0(t)\varphi_1(t) dt \\ &= \frac{4}{h^4} \int_{t_0}^{t_1} \left[(t-t_1)^2 + \frac{h}{2}(t-t_1) \right] \left[(t-t_0)^2 - \frac{h}{2}(t-t_0) \right] dt \\ &= \frac{4}{h^4} \int_0^h \left[(u-h)^2 + \frac{h}{2}(u-h) \right] \left[u^2 - \frac{h}{2}u \right] du = \frac{1}{h^4} \int_0^h u(u-h)(2u-h)^2 du \\ &= \frac{4}{h^4} \int_0^h \left(u - \frac{h}{2} \right) (u-h) u du = -\frac{4}{h^4} J\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{h}{30} = -1 \times \frac{h}{30} \end{aligned}$$

$$M_{24}^h = M_{42}^h = -\frac{h}{30} = -1 \times \frac{h}{30}$$

$$N_{25}^h = N_{52}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_2 \cap \text{Support } \phi_5 = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \bullet M_{33}^h &= \int_0^T [\phi_3(t)]^2 dt = \int_0^T [\psi_1(t)]^2 dt \\ &= \frac{16}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} \left[(t-t_1)^2 - h(t-t_1) \right]^2 dt = \frac{16}{h^4} \int_0^h u^2(u-h)^2 du = \frac{8h}{15} = 16 \times \frac{h}{30} \end{aligned}$$

$$M_{33}^h = \frac{8h}{15} = 16 \times \frac{h}{30}$$

$$\begin{aligned}
\bullet M_{34}^h = M_{43}^h &= \int_0^T \phi_3(t)\phi_4(t) dt = \int_0^T \psi_1(t)\varphi_1(t) dt \\
&= -\frac{8}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} \left[(t-t_2)^2 + \frac{h}{2}(t-t_2) \right] \left[(t-t_2)^2 + h(t-t_2) \right] dt \\
&= -\frac{8}{h^4} \int_0^h \left[(u^2 - \frac{h}{2}u)(u^2 - hu) \right] du = \frac{h}{15} = 2 \times \frac{h}{30}
\end{aligned}$$

$$M_{34}^h = M_{43}^h = \frac{h}{15} = 2 \times \frac{h}{30}$$

$$N_{35}^h = N_{53}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_3 \cap \text{Support } \phi_5 = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\bullet M_{36}^h = M_{63}^h &= \int_0^T \phi_3(t)\phi_6(t) dt = \int_0^T \psi_1(t)\varphi_2(t) dt \\
&= -\frac{8}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} \left[(t-t_1)^2 - \frac{h}{2}(t-t_1) \right] \left[(t-t_1)^2 - h(t-t_1) \right] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h u^2(2u-h)(u-h) du = \frac{h}{15} = 2 \times \frac{h}{30}
\end{aligned}$$

$$M_{36}^h = M_{63}^h = \frac{h}{15} = 2 \times \frac{h}{30}$$

Et pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\bullet M_{2k,2k-3}^h &= M_{2k-3,2k}^h \\
&= \int_0^T \phi_{2k}(t)\phi_{2k-3}(t) dt = \int_0^T \varphi_{k-2}(t)\psi_{k-1}(t) dt \\
&= -\frac{8}{h^4} \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \left[(t-t_{k-2})^2 - \frac{h}{2}(t-t_{k-2}) \right] \left[(t-t_{k-2})^2 + h(t-t_{k-2}) \right] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h u^2(2u-h)(u-h) du = \frac{h}{15} = 2 \times \frac{h}{30}
\end{aligned}$$

$$M_{2k,2k-3}^h = M_{2k-3,2k}^h = \frac{h}{15} = 2 \times \frac{h}{30}$$

$$\begin{aligned}
\bullet M_{2k,2k-2}^h &= M_{2k-2,2k}^h = \int_0^T \phi_{2k}(t)\phi_{2k-2}(t) dt = \int_0^T \varphi_{k-2}(t)\varphi_{k-1}(t) dt \\
&= \frac{4}{h^4} \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \left[(t-t_{k-2})^2 - \frac{h}{2}(t-t_{k-2}) \right] \left[(t-t_{k-1})^2 + \frac{h}{2}(t-t_{k-1}) \right] dt \\
&= \frac{1}{h^4} \int_0^h u(u-h)(2u-h)^2 du = -\frac{h}{30} = -1 \times \frac{h}{30}
\end{aligned}$$

$$M_{2k,2k-2}^h = M_{2k-2,2k}^h = -\frac{h}{30} = -1 \times \frac{h}{30}$$

$$\begin{aligned}
\bullet M_{2k,2k-1}^h &= M_{2k-1,2k}^h = \int_0^T \phi_{2k}(t)\phi_{2k-1}(t) dt = \int_0^T \varphi_{k-1}(t)\psi_{k-1}(t) dt \\
&= -\frac{8}{h^4} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[(t-t_k)^2 + \frac{h}{2}(t-t_k) \right] \left[(t-t_k)^2 + h(t-t_k) \right] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h u^2(u-h)(2u-h) du = \frac{h}{15} = 2 \times \frac{h}{30}
\end{aligned}$$

$$M_{2k,2k-1}^h = M_{2k-1,2k}^h = -\frac{h}{30} = -1 \times \frac{h}{30}$$

$$\begin{aligned}
\bullet M_{2k,2k}^h &= \int_0^T [\phi_{2k}(t)]^2 dt = \int_0^T [\varphi_{k-1}(t)]^2 dt \\
&= \frac{4}{h^4} \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} \left[(t-t_{k-2})^2 - \frac{h}{2}(t-t_{k-2}) \right]^2 dt + \frac{4}{h^4} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[(t-t_k)^2 + \frac{h}{2}(t-t_k) \right]^2 dt \\
&= \frac{8}{h^4} \int_0^h \left(u^2 - \frac{h}{2}u \right)^2 du = \frac{2}{h^4} \int_0^h u^2(2u-h)^2 du = \frac{4h}{15} = 8 \times \frac{h}{30}
\end{aligned}$$

$$M_{2k,2k}^h = \frac{4h}{15} = 8 \times \frac{h}{30}$$

$$M_{2k,2k+1}^h = M_{2k+1,2k}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_{2k} \cap \text{Support } \phi_{2k+1} = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\bullet M_{2k,2k+2}^h &= M_{2k,2k+2}^h = \int_0^T \phi_{2k}(t)\phi_{2k+2}(t) dt = \int_0^T \varphi_{k-1}(t)\varphi_k dt \\
&= \frac{4}{h^4} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[(t-t_k)^2 + \frac{h}{2}(t-t_k) \right] \left[(t-t_{k-1})^2 - \frac{h}{2}(t-t_{k-1}) \right]^2 dt \\
&= \frac{1}{h^4} \int_0^h u(u-h)(2u-h)^2 du = -\frac{h}{30} = -1 \times \frac{h}{30}
\end{aligned}$$

$$M_{2k,2k+2}^h = M_{2k,2k+2}^h = -\frac{h}{30} = -1 \times \frac{h}{30}$$

$$M_{2k,2k+3}^h = M_{2k+3,2k}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_{2k} \cap \text{Support } \phi_{2k+3} = \emptyset$$

$$M_{2k+1,2k-3}^h = M_{2k-3,2k}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_{2k+1} \cap \text{Support } \phi_{2k-3} = \emptyset$$

$$M_{2k+1,2k-2}^h = M_{2k-2,2k+1}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_{2k+1} \cap \text{Support } \phi_{2k-2} = \emptyset$$

$$M_{2k+1,2k-1}^h = M_{2k-1,2k+1}^h = 0 \quad \text{car} \quad \text{Support } \phi_{2k+1} \cap \text{Support } \phi_{2k-1} = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\bullet M_{2k+1,2k+1}^h &= \int_0^T [\phi_{2k+1}(t)]^2 dt = \int_0^T [\psi_k(t)]^2 dt \\
&= \frac{16}{h^4} \int_{t_1}^{t_2} \left[(t-t_1)^2 - h(t-t_1) \right]^2 dt = \frac{16}{h^4} \int_0^h u^2(u-h)^2 du = \frac{8h}{15}
\end{aligned}$$

$$M_{2k+1,2k+1}^h = \frac{8h}{15} = 16 \times \frac{h}{30}$$

$$\begin{aligned}
\bullet M_{2k+1,2k+2}^h &= M_{2k+2,2k+1}^h = \int_0^T \phi_{2k+1}(t)\phi_{2k+2}(t) dt = \int_0^T \psi_k(t)\varphi_k(t) dt \\
&= -\frac{8}{h^4} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[(t-t_{k+1})^2 + \frac{h}{2}(t-t_{k+1}) \right] \left[(t-t_{k+1})^2 + h(t-t_{k+1}) \right] dt \\
&= -\frac{4}{h^4} \int_0^h u^2(2u-h)(u-h) du = \frac{h}{15} = 2 \times \frac{h}{30}
\end{aligned}$$

4.6.5 Calcul de la plus petite valeur propre

On pose :

$$N_h = \frac{1}{h} N, \quad M_h = \frac{h}{30} M \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{h^2}{30} \times \lambda_h$$

Le problème matriciel généralisé de valeurs propres (4.11) est équivalent à :

$$NU = \lambda MU \quad (4.12)$$

Les matrices N et M sont symétriques et tridiagonales par blocs, de plus la matrice M est définie positive (à diagonale strictement dominante). On utilise encore la méthode de la puissance inverse adaptée au problème généralisé de valeurs propres (4.21).

ALGORITHME 3 :

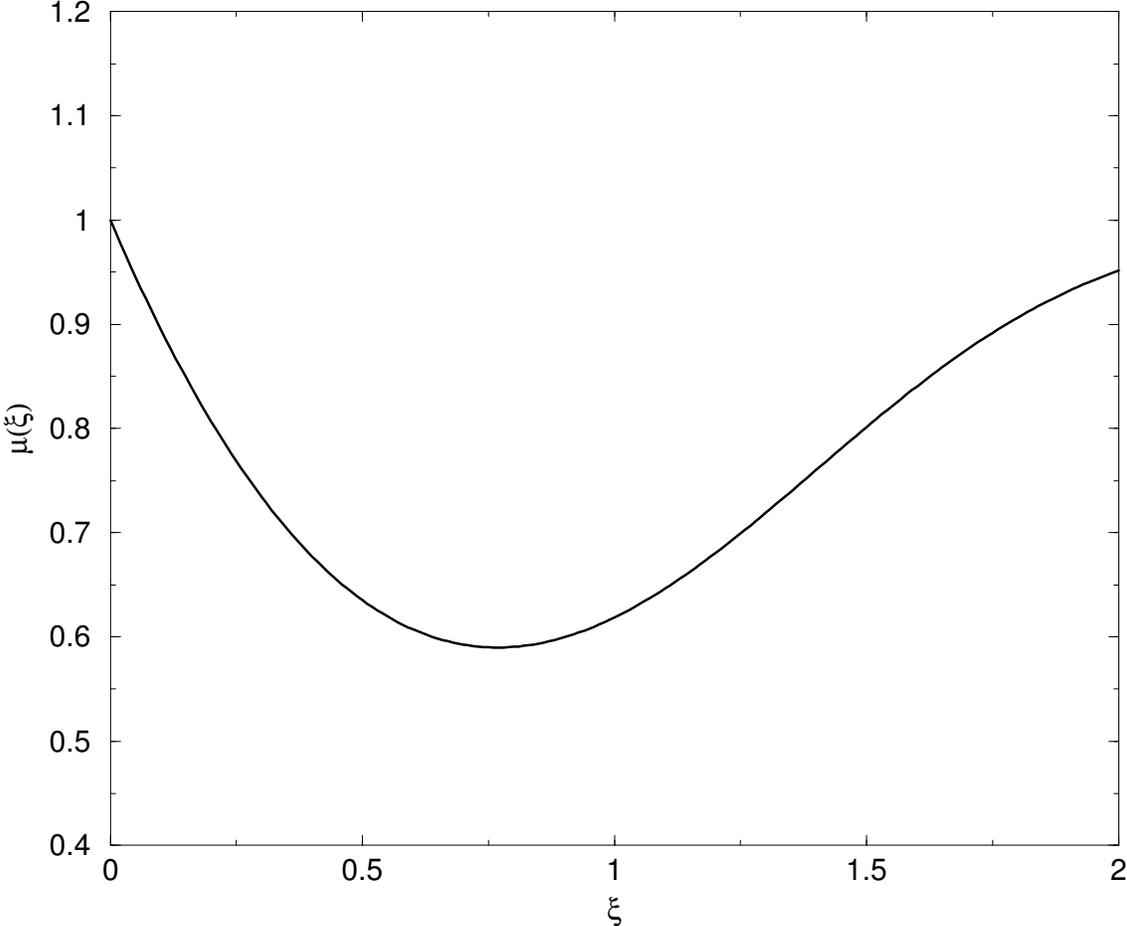
- $X^{(0)}$ vecteur d'initialisation non nul
- Résoudre le système linéaire $NY^{(k+1)} = MX^{(k)}$
- Calculer le vecteur $X^{(k+1)} = \frac{Y^{(k+1)}}{\|Y^{(k+1)}\|_M}$
 $\|Y\|_M = (Y.MY)^{\frac{1}{2}}$ la norme induite par le produit scalaire défini par M .
- Test d'arrêt : $k > \text{IteMax}$ ou $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \text{ErrSou}$
 IteMax est le nombre maximale d'itération autorisé.
 ErrSou est l'erreur souhaitée
- Calculer $\beta^{(k+1)} = Y^{(k+1)}.MX^{(k)}$
- Calculer $\lambda^{(k+1)} = \frac{1}{\beta^{(k+1)}}$
- Valeur approchée de la plus petite valeur propre :
 $\lambda_1 \approx \lambda^{(k+1)}$ et $\mu_T(\xi) \approx \frac{h^2 \lambda_1}{30}$

Quelques résultats numériques pour des valeurs de T comprises entre 3.5 et 5.

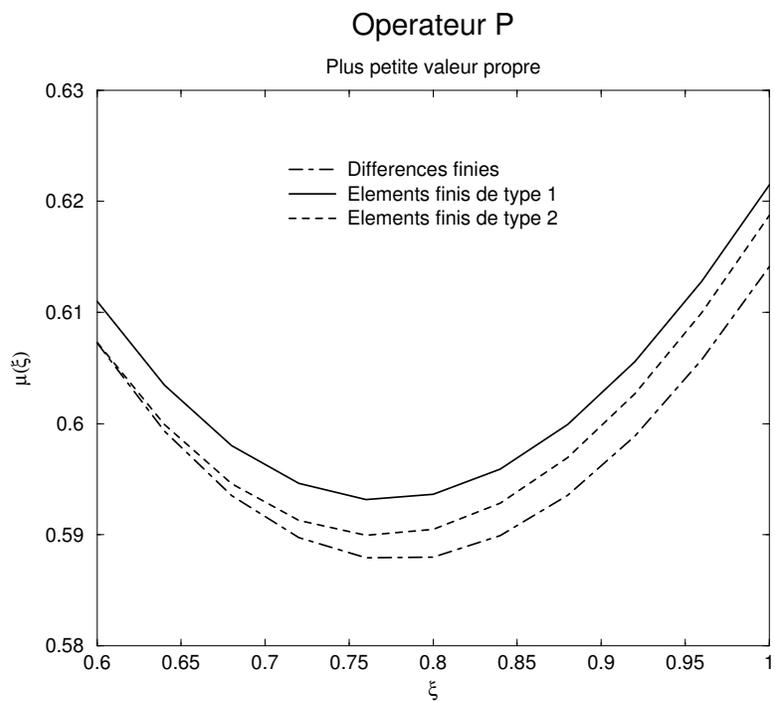
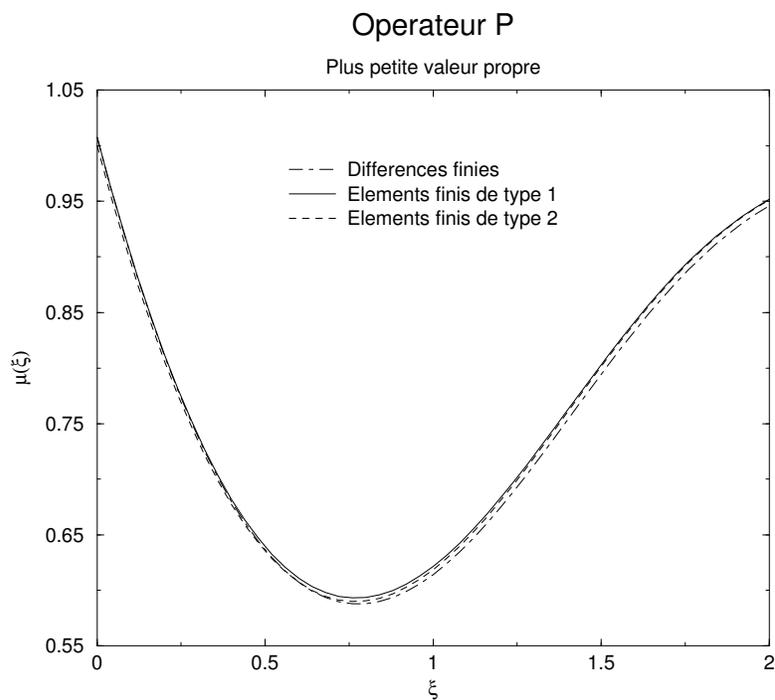
Méthode des éléments finis P_2								
n	T=3.5		T=4.		T=4.5		T=5.	
	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $						
100	0.5974	$0.73 \cdot 10^{-2}$	0.5986	$0.85 \cdot 10^{-2}$	0.6008	$1.07 \cdot 10^{-2}$	0.6033	$1.32 \cdot 10^{-2}$
250	0.5924	$0.23 \cdot 10^{-2}$	0.5921	$0.20 \cdot 10^{-2}$	0.5927	$0.26 \cdot 10^{-2}$	0.5934	$0.33 \cdot 10^{-2}$
300	0.5912	$0.11 \cdot 10^{-2}$	0.5907	$0.60 \cdot 10^{-3}$	0.5910	$0.90 \cdot 10^{-3}$	0.5914	$0.13 \cdot 10^{-2}$
500	0.5897	$0.40 \cdot 10^{-3}$	0.5893	$0.80 \cdot 10^{-3}$	0.5896	$0.50 \cdot 10^{-3}$	0.5899	$0.20 \cdot 10^{-3}$

$$\theta=0.5899$$

Plus petite valeur propre



4.6.6 Comparaison des trois méthodes



Deuxième partie

Calcul de la première valeur propre
d'une famille d'opérateurs de
Montgomery en utilisant une
méthode d'éléments finis sans
quadrature numérique.

Chapitre 5

Introduction

Dans cette partie, on s'intéresse aux valeurs propres de l'opérateur de Ginzburg-Landau associé à un champ magnétique $A = (A_1, A_2)$ et défini sur \mathbb{R}^2 par :

$$P_{h,A} = (hD - A)^2 = (hD_x - A_1)^2 + (hD_y - A_2)^2.$$

Où h est un réel strictement positif. On considère le problème continu de valeurs propres suivant :

$$P_{h,A}\psi = \lambda\psi \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^2. \quad (5.1)$$

On définit par $\lambda(h, A)$ le bas du spectre de (5.1). On a la caractérisation suivante

$$\lambda(h, A) = \inf_{\psi \in \mathcal{D}_{1,A}} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} |(hD - A)\psi|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^2} |\psi|^2 dx}. \quad (5.2)$$

avec $\mathcal{D}_{1,A}$ le sous-espace de $W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ défini par

$$\mathcal{D}_{1,A} = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid (hD - A)u \in [L^2(\mathbb{R}^2)]^2 \right\}.$$

On montre ([48]) que pour tout champs de vecteur $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(h, A)}{h} = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} |\text{curl } A(x)| \quad \text{avec} \quad \text{curl } A(x) = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1.$$

Pour l'étude du problème de valeurs propres (5.1) sur \mathbb{R}^2 on peut consulter par exemple ([37], [52], [50]).

En étudiant la première valeur propre quand le champ magnétique s'annule sur une courbe en changeant de signe, Montgomery [50] a conjecturé que le modèle est donné par le bas du spectre de l'opérateur

$$S = D_x^2 + (x^2 - D_y)^2. \quad (5.3)$$

En effectuant une transformation de Fourier partielle selon la première coordonnée, le bas du spectre est $\inf_{\xi \in \mathbb{R}} \mu(\xi)$ avec $\mu(\xi)$ la plus petite valeur propre de l'opérateur Q_ξ défini par

$$Q_\xi = D_t^2 + (t^2 - \xi)^2 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

Dans la suite, on va s'intéresser à l'approximation numérique de la plus petite valeur propre de l'opérateur Q_ξ en utilisant des schémas numériques basés sur les différences finies, et ensuite une méthode utilisant les éléments finis avec ou sans quadrature numérique.

Chapitre 6

Quelques propriétés du bas du spectre de la famille d'opérateurs Q_ξ

6.1 Problème spectral continu et sa formulation variationnelle

On considère l'opérateur différentiel Q_ξ dépendant du paramètre réel ξ et défini par :

$$Q_\xi u(t) = -u''(t) + (t^2 - \xi)^2 u(t). \quad (6.1)$$

Soit ξ un nombre réel fixé, le problème spectral continu consiste à chercher une fonction non nulle u suffisamment régulière sur \mathbb{R} et un réel λ_ξ vérifiant :

$$Q_\xi u = \lambda_\xi u \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

On introduit les espaces qui apparaîtront lors de la formulation variationnelle du problème spectral continu :

$$\mathcal{D}_2 = \left\{ u \in H^2(\mathbb{R}) \mid t^k u \in L^2(\mathbb{R}), \quad k \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k \leq 4 \right\},$$

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}) \mid t^k u \in L^2(\mathbb{R}), \quad k \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k \leq 2 \right\}.$$

Soit u une fonction suffisamment régulière solution du problème spectral continu (6.2) et v une "fonction test", $v \in \mathcal{D}_1$, en utilisant une intégration par partie on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[-u''(t) + (t^2 - \xi)^2 u(t) \right] v(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[u'(t)v'(t) + (t^2 - \xi)^2 u(t)v(t) \right] dt$$

Ainsi le problème variationnel s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver une fonction } u \in \mathcal{D}_1 \text{ vérifiant :} \\ \forall v \in \mathcal{D}_1, \quad a(u, v) = \lambda_\xi(u, v). \end{cases} \quad (6.3)$$

où $a(u, v)$ est la forme bilinéaire associée à l'opérateur Q_ξ :

$$a(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} [u'(t)v'(t) + (t^2 - \xi)^2 u(t)v(t)] dt,$$

et $(., .)$ le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R})$:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v(t) dt.$$

On note q_ξ la forme quadratique associée à l'opérateurs Q_ξ :

$$q_\xi(u) = a(u, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} [|u'(t)|^2 + (t^2 - \xi)^2 |u(t)|^2] dt.$$

Cette forme est définie sur le domaine \mathcal{D}_1 .

Soit $\mu(\xi)$ la plus petite valeur propre de Q_ξ sur $L^2(\mathbb{R})$. Le principe du min-max donne :

$$\mu(\xi) = \inf_{u \in \mathcal{D}_1, u \neq 0} \frac{q_\xi(u)}{\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}.$$

6.2 Comportement et propriétés de la fonction μ

Voici quelques résultats concernant le comportement de $\mu(\xi)$, pour plus d'information sur ce sujet, on peut consulter ([37], [52], [50]).

- La fonction $\xi \mapsto \mu(\xi)$ est continue sur \mathbb{R} ,
- $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mu(\xi) = +\infty$,
- $\mu(0) < \frac{5}{4}$,
- Il existe un unique réel $\xi_* > 0$ réalisant le minimum de la fonction μ ,
- $\Theta^* = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \mu(\xi) = \mu(\xi_*) < 1$,
- $\int_0^{+\infty} [|\varphi_*'(t)|^2 + (t^2 - \xi_*)^2 |\varphi_*(t)|^2] dt = \Theta^*$, où φ_* est la fonction propre normalisée associée à Q_{ξ_*} ,
- φ_* décroît rapidement vers 0 à l'infini.

6.3 Problème spectral approché et sa formulation variationnelle

Comme φ_* décroît rapidement vers 0 à l'infini, alors pour le calcul de $\mu(\xi)$ il est naturel de considérer le problème spectral continu approché qui consiste à chercher une fonction u non nulle, suffisamment régulière sur $] -T, T[$ et nulle sur $[T, +\infty[$ et sur $] -\infty, -T]$ ainsi qu'un réel $\lambda_{\xi,T}$ vérifiant :

$$\begin{cases} Q_\xi u = \lambda_{\xi,T} u & \text{sur }] -T, T[\\ u(-T) = 0 & \text{et } u(T) = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

C'est aussi un problème de valeurs propres de Sturm-Liouville et on retrouve des résultats identiques au problème (2.11). Les valeurs propres du problème (6.4) sont simples et forment une suite croissante de nombres strictement positifs tendant vers $+\infty$.

$$0 < \lambda_{\xi,T,1} < \lambda_{\xi,T,2} < \cdots < \lambda_{\xi,T,m} < \cdots \rightarrow +\infty,$$

On définit les espaces nécessaires pour la formulation variationnelle du problème spectral continu approché (6.4) :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{2,T} &= \left\{ u \in H^2(]-T, T[) \mid u(-T) = u(T) = 0 \right\} = H^2(]-T, T[) \cap H_0^1(]-T, T[), \\ \mathcal{D}_{1,T} &= \left\{ u \in H^1(]-T, T[) \mid u(-T) = u(T) = 0 \right\} = H_0^1(]-T, T[). \end{aligned}$$

Le domaine de la réalisation de Dirichlet en T et $-T$ de l'opérateur Q_ξ sur $L^2(]-T, T[)$ est indépendant de ξ et vaut $\mathcal{D}_{2,T}$.

Soit une fonction u suffisamment régulière solution du problème spectral continu approché (6.4) et v une "fonction test", $v \in \mathcal{D}_{1,T}$, en utilisant une intégration par parties et les conditions de Dirichlet en T et $-T$, on a :

$$\int_{-T}^T \left[-u''(t) + (t^2 - \xi)^2 u(t) \right] v(t) dt = \int_{-T}^T \left[u'(t)v'(t) + (t^2 - \xi)^2 u(t)v(t) \right] dt.$$

Ainsi le problème variationnel s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver une fonction } u \in \mathcal{D}_{1,T} \text{ vérifiant :} \\ \forall v \in \mathcal{D}_{1,T}, \quad a_T(u, v) = \lambda_{\xi,T}^T(u, v)_T. \end{cases} \quad (6.5)$$

où $a_T(u, v)$ est la forme bilinéaire associée à l'opérateur Q_ξ sur $L^2(]-T, T[)$:

$$a_T(u, v) = \int_{-T}^T \left[u'(t)v'(t) + (t^2 - \xi)^2 u(t)v(t) \right] dt.$$

$(\cdot, \cdot)_T$ le produit scalaire de $L^2([-T, T])$: $(u, v)_T = \int_{-T}^T u(t)v(t) dt$

et $|\cdot|_T$ la norme induite : $|u|_T = \left[\int_{-T}^T |u(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$

Proposition 6.3.1.

La forme bilinéaire $a_T(\cdot, \cdot)$ est continue, symétrique et coercive.

Preuve : La forme bilinéaire $a_T(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathcal{D}_{1,T} \times \mathcal{D}_{1,T}$.

En effet, $\forall u, v \in \mathcal{D}_{1,T}$ on a :

$$\begin{aligned} a_T(u, v) &\leq |u'|_T |v'|_T + C_T |u|_{T^2} |v|_{T^2} \quad \text{avec} \quad C_T = \|(t^2 - \xi)^2\|_{\infty, [-T, T]} = \max(\xi^2; (T^2 - \xi)^2) \\ &\leq \|u\|_1 \|v\|_1 + C_T \|u\|_1 \|v\|_1 \\ &\leq C \|u\|_1 \|v\|_1. \end{aligned}$$

La forme bilinéaire $a_T(\cdot, \cdot)$ est symétrique car $\forall u, v \in \mathcal{D}_{1,T}$ $a_T(u, v) = a_T(v, u)$.

La forme bilinéaire $a_T(\cdot, \cdot)$ est coercive. En effet, $\forall u, v \in \mathcal{D}_{1,T}$ on a :

$$\begin{aligned} a_T(u, u) &= \int_{-T}^T |u'(t)|^2 dt + \int_{-T}^T (t^2 - \xi)^2 |u(t)|^2 dt \\ &\geq \int_{-T}^T |u'(t)|^2 dt \\ &\geq \alpha \|u\|_1^2 \quad (\text{Utilisation de l'Inégalité de Poincaré dans } H_0^1([-T, T])). \end{aligned}$$

□

Les propriétés des valeurs propres λ_ξ^T et des fonctions propres correspondantes du problème variationnel (6.5) sont décrites dans le théorème suivant :

Théorème 6.3.2.

Les valeurs propres du problème variationnel (6.5) forment une suite croissante de nombres positifs tendant vers $+\infty$

$$0 < \lambda_{\xi,1}^T < \lambda_{\xi,2}^T < \dots < \lambda_{\xi,m}^T < \dots \rightarrow +\infty,$$

Les fonctions propres correspondantes $\{w_m\}_1^\infty$ forment une base orthonormale de $L^2([-T, T])$

Preuve : Une simple application du théorème 6.2-1 ([53]) à la forme bilinéaire $a_T(\cdot, \cdot)$. □

On note $q_{\xi,T}$ la forme quadratique associée :

$$q_{\xi,T}(u) = a_T(u, u) = \int_{-T}^T [|u'(t)|^2 + (t^2 - \xi)^2 |u(t)|^2] dt.$$

Cette forme est définie sur le domaine $\mathcal{D}_{1,T}$.

Soit $\mu_T(\xi) = \lambda_{\xi,1}^T$ la plus petite valeur propre de la réalisation de Dirichlet de l'opérateur Q_ξ sur $L^2(-T, T)$. Le principe du min-max s'écrit :

$$\mu_T(\xi) = \inf_{u \in \mathcal{D}_{1,T}, u \neq 0} \frac{q_{\xi,T}(u)}{|u|_T^2}. \quad (6.6)$$

Proposition 6.3.3.

$$\mu(\xi) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \mu_T(\xi).$$

Preuve :

Existence de la limite

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'espace $\mathcal{D}_{1,T}$ s'injecte continument dans $\mathcal{D}_{1,T+\varepsilon}$, la formule (6.6) montre $\mu_{T+\varepsilon} < \mu_T$ et donc $\lim_{T \rightarrow +\infty} \mu_T(\xi)$ existe.

Soit ω_T la fonction propre associée à la valeur propre approchée $\mu_T(\xi)$. On considère la fonction $\tilde{\omega}$ de \mathcal{D}_1 , prolongement de ω_T sur \mathbb{R} et définie par :

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{cases} \omega_T(t) & \text{si } t \in [-T, T] \\ 0 & \text{si } t \in]-\infty, -T] \cup [T, +\infty[. \end{cases}$$

Le principe du min-max nous permet d'écrire

$$\mu(\xi) \leq \frac{q_\xi(\tilde{\omega})}{\|\tilde{\omega}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} = \frac{q_{\xi,T}(\omega_T)}{|\omega_T|_T^2} = \mu_T(\xi).$$

Et par conséquent, on a :

$$\mu(\xi) \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \mu_T(\xi).$$

Réciproquement, on considère ω_T la fonction propre associée à la valeur propre exacte $\mu_T(\xi)$. Soit χ une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 2. \end{cases}$$

On considère la suite de fonctions $(\omega_n)_{n \geq 1}$ de l'espace $\mathcal{D}_{1,2n}$ et définie par $\omega_n = \chi(\frac{t}{n}) \times \omega$. le Théorème de convergence dominée de Lebesgue nous permet d'écrire

$$q_\xi(\omega_n) \longrightarrow q_\xi(\omega) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

En utilisant encore le principe du min-max on a :

$$\frac{q_\xi(\omega_n)}{\|\omega_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} = \frac{q_{\xi,2n}(\omega_n)}{\|\omega_n\|_{L^2([-2n, 2n])}^2} \geq \inf_{u \in \mathcal{D}_{1,2n}, u \neq 0} \frac{q_{\xi,2n}(u)}{\|u\|_{L^2([-2n, 2n])}^2} = \mu_{2n}(\xi),$$

et par passage à la limite, on obtient :

$$\mu(\xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_\xi(\omega_n)}{\|\omega_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{2n}(\xi).$$

□

Chapitre 7

Approximation par la méthode des différences finies

Soit n un entier naturel non nul et T un nombre réel strictement positif. Pour approcher $\mu_T(\xi)$, on introduit un pas de discrétisation h :

$$h = \frac{2T}{n+1}.$$

Ensuite, on définit une partition régulière de l'intervalle $[-T ; T]$ comme étant l'ensemble des points $(t_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ avec

$$t_0 = -T \quad ; \quad t_i = -T + ih \text{ pour } 0 \leq i \leq n+1 \quad \text{et} \quad t_{n+1} = T.$$

Pour résoudre numériquement notre problème (6.4), en utilisant de simples formules de Taylor, on va approcher l'opérateur de dérivée seconde par un opérateur discret d'ordre k ($k = 2$ ou 4) et par suite le problème continu par une écriture algébrique matricielle de valeurs propres.

Le problème va consister à chercher des vecteurs $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ de composantes u_i , approximations des $u(t_i)$ en chacun des noeuds internes de $[-T ; T]$ (ie t_i pour $1 \leq i \leq n$), et des nombres réels λ_h approximations des valeurs propres λ_T .

7.1 Schéma aux différences finies d'ordre 2

Supposons u suffisamment régulière, des combinaisons de développements de Taylor au voisinage de t nous donne :

$$u''(t) = \frac{1}{h^2} \left[u(t+h) - 2u(t) + u(t-h) \right] + O(h^2).$$

On introduit ainsi le schéma aux différences finies suivant :

$$\frac{1}{h^2} \left[-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} \right] + (t_i^2 - \xi)^2 u_i = \lambda_T u_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

En posant $\lambda_h = h^2 \lambda_T$ et $\alpha_i = 2 + h^2(\beta_i)^2$ avec $\beta_i = t_i^2 - \xi$, on a :

$$-u_{i-1} + \alpha_i u_i - u_{i+1} = \lambda_h u_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n. \quad (7.1)$$

Comme $u_0 = u(-T) = 0$ et $u_{n+1} = u(T) = 0$, le problème approché s'écrit :

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1 - u_2 & = \lambda_h u_1 \\ -u_{i-1} + \alpha_i u_i - u_{i+1} & = \lambda_h u_i \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ -u_{n-1} + \alpha_n u_n & = \lambda_h u_n. \end{cases} \quad (7.2)$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \alpha_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \alpha_{n-2} & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \alpha_{n-1} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

et U le vecteur dont la i^{eme} composante est u_i . Le schéma (7.2) s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$A.U = \lambda_h U.$$

Proposition 7.1.1.

La matrice symétrique et tridiagonale A est définie positive et à diagonale fortement dominante.

Les valeurs propres de A sont strictement positives

Preuve :

La matrice A est définie positive, la preuve est identique à celle de la proposition 3.1.1. En effet, soit $X = (x_i)_{i \leq n}$ un vecteur quelconque de \mathbb{R}^n , on a :

$$\begin{aligned}
\langle AX, X \rangle &= {}^t X A X = [\alpha_1 x_1 - x_2] x_1 + [-x_1 + \alpha_2 x_2 - x_3] x_2 + \cdots \\
&\quad + [-x_{n-2} + \alpha_{n-1} x_{n-1} - x_n] x_{n-1} + [-x_{n-1} + \alpha_n x_n] x_n \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\
&= x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 + x_n^2 + h^2 \sum_{i=1}^n (\beta_i x_i)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

et cette quantité ne peut-être nulle que si tous les x_i sont nuls.

La matrice A est à diagonale dominante car

$$\begin{aligned}
\forall i, \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| &= 2 \leq a_{ii} = 2 + (h\beta_i)^2, \\
\sum_{j=2}^n |a_{1j}| &= 1 \leq a_{11} = 2 + (h\beta_1)^2, \\
\sum_{j=1}^{n-1} |a_{nj}| &= 1 \leq a_{nn} = 2 + (h\beta_n)^2.
\end{aligned}$$

En plus, les t_i sont distincts, donc il existe au moins un t_k telle que $t_k \neq \xi$ et donc un k tel que $\beta_k \neq 0$. Par suite l'élément a_{kk} de la diagonale verifie

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| < a_{kk} = 2 + (h\beta_k)^2$$

et par conséquent la diagonale est fortement dominante.

Soit $U = (u_i)_{i \leq n}$ un vecteur propre normalisé associé à la valeur propre λ , $U \neq 0$ et on a : $\lambda = \langle AU, U \rangle$ est strictement supérieure à 0 car la matrice A est définie positive. \square

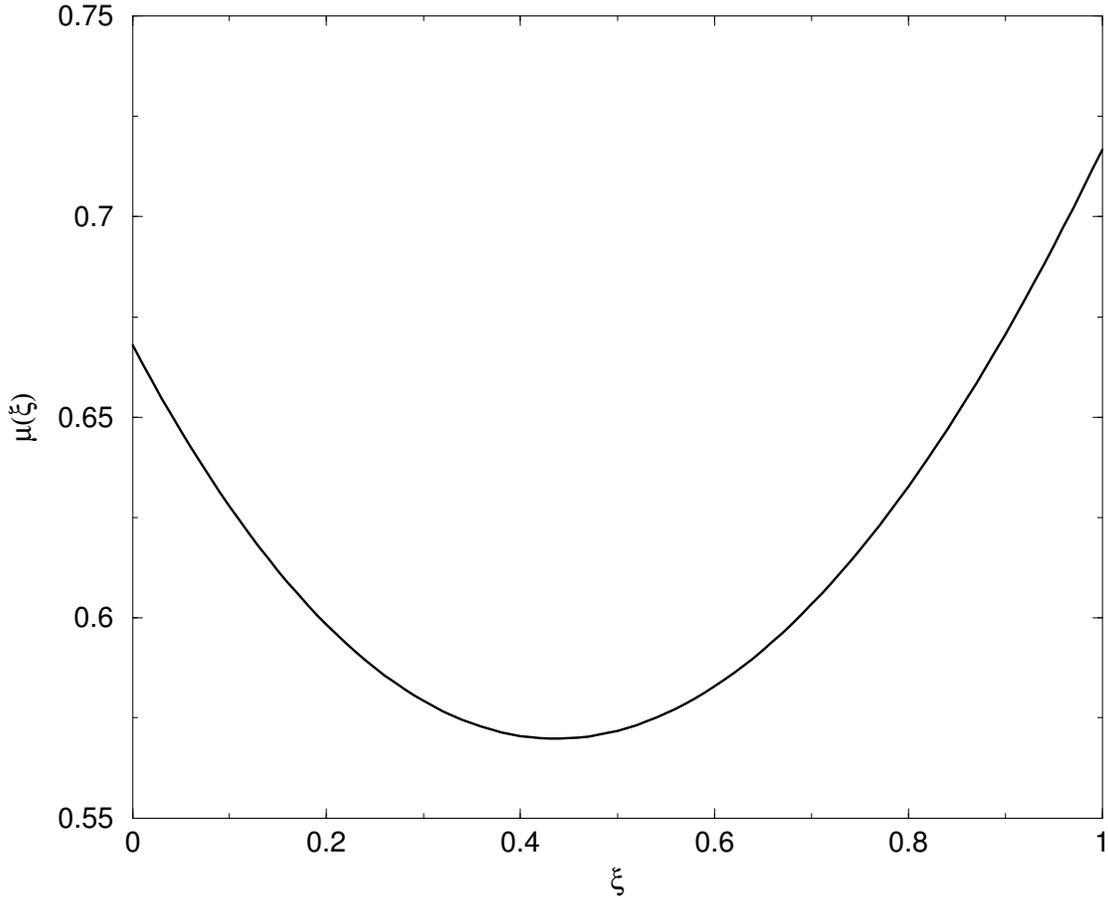
Enfin, pour le calcul numérique, on va utiliser la méthode de la puissance inverse comme dans le précédent chapitre.

Ci-dessous quelques résultats numériques pour des valeurs de T comprises entre 2. et 4. La constante γ calculée ci-dessous vaut $\Theta^* \times (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$ dont une valeur approchée a été donnée par R. Montgomery [50] $\gamma \simeq 0.5698$.

Méthodes des différences finies d'ordre 2								
n	T=2.5		T=3.		T=3.5		T=4.	
	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $						
100	0.5699	$0.1 \cdot 10^{-3}$	0.5696	$1.7 \cdot 10^{-4}$	0.5696	$0.2 \cdot 10^{-3}$	0.5693	$0.5 \cdot 10^{-3}$
250	0.5700	$0.2 \cdot 10^{-3}$	0.5698	$0.1 \cdot 10^{-4}$	0.5698	$0.2 \cdot 10^{-4}$	0.5697	$0.7 \cdot 10^{-4}$
300	0.5700	$0.2 \cdot 10^{-3}$	0.5698	$0.1 \cdot 10^{-4}$	0.5698	$0.1 \cdot 10^{-4}$	0.5698	$0.4 \cdot 10^{-4}$
500	0.5700	$0.2 \cdot 10^{-3}$	0.5698	$0.1 \cdot 10^{-4}$	0.5698	$0.1 \cdot 10^{-4}$	0.5698	$0.1 \cdot 10^{-5}$

$\gamma = 0.5698$

Plus petite valeur propre



7.2 Schéma aux différences finies d'ordre 4

En utilisant que les trois points t_{i-1} , t_i et t_{i+1} , il est possible de construire des approximations d'ordre 4 pour les dérivées secondes de fonctions suffisamment régulières. Par exemple pour une fonction u de classe C^6 sur $[-T ; T]$, des combinaisons de formules de Taylor nous permettent d'écrire que pour $1 \leq i \leq n$ on a :

$$u''(t_{i+1}) + 10u''(t_i) + u''(t_{i-1}) = \frac{12}{h^2} [u(t_{i+1}) - 2u(t_i) + u(t_{i-1})] + O(h^4).$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma numérique aux différences finies suivant :

$$-\frac{12}{h^2} [u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}] + (t_i^2 - \xi)^2 u_i = \lambda_T [u_{i+1} + 10u_i + u_{i-1}] \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n,$$

en posant $\lambda_h = \frac{h^2}{12} \lambda_T$ et $\alpha_i = 2 + h^2(\beta_i)^2$ avec $\beta_i = t_i^2 - \xi$, on a :

$$-u_{i-1} + \alpha_i u_i - u_{i+1} = \lambda_h (u_{i-1} + 10u_i + u_{i+1}) \quad 1 \leq i \leq n. \tag{7.4}$$

Comme $u_0 = u(-T) = 0$ et $u_{n+1} = u(T) = 0$, alors le problème approché s'écrit :

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1 - u_2 & = \lambda_h (10u_1 + u_2) \\ -u_{i-1} + \alpha_i u_i - u_{i+1} & = \lambda_h (u_{i-1} + 10u_i + u_{i+1}) \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ -u_{n-1} + \alpha_n u_n & = \lambda_h (u_{n-1} + 10u_n). \end{cases} \tag{7.5}$$

On pose :

$$N_h = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \alpha_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \alpha_3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \alpha_{n-2} & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \alpha_{n-1} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & \alpha_n \end{pmatrix} = A$$

$$M_h = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, le schéma (7.5) s'écrit sous forme d'un problème matriciel généralisé de valeurs propres :

$$N_h U = \lambda_h M_h U.$$

On note que les matrices N_h et M_h sont des matrices creuses ($N_{ij} = M_{ij} = 0$ pour $|i - j| \geq 2$), cette remarque est intéressante pour le stockage des deux matrices. On a déjà vu que la matrice symétrique N_h est définie positive et à diagonale fortement dominante (voir la proposition 3.1) et il est très simple de vérifier que la matrice symétrique M_h est définie positive et à diagonale strictement dominante et que toutes les valeurs propres λ_h sont strictement positives.

Pour le calcul numérique, on utilise la méthode de la puissance inverse classique au problème généralisé de valeurs propres en utilisant le produit scalaire défini par la matrice M_h .

On retrouve des résultats numériques sensiblement les mêmes que dans le cas des différences finies d'ordre 2.

Chapitre 8

Approximation par la méthode des éléments finis P_1

8.1 Maillage

Soit n un entier naturel non nul, un maillage de $] -T, T[$ est la donnée de $n + 2$ points :

$$t_0 = -T < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = T.$$

On note :

$$h_i = t_{i+1} - t_i \text{ pour } 0 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad h = \max_{0 \leq i \leq n} h_i.$$

Dans la suite et sauf indication contraire, on supposera que le maillage est uniforme et on a simplement $h = h_i = \frac{2T}{n+1}$. On verra vers la fin que pour obtenir des résultats plus précis tout en faisant des économies d'opérations, on utilisera un raffinement de maillage.

8.2 Notations

Soit \mathbb{P}_1 l'ensemble des polynômes de degré inférieure ou égal à 1 :

$$\mathbb{P}_1 = \left\{ p(t) = at + b, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

On définit les espace d'approximation V_h^1 et $V_{0,h}^1$ par :

$$V_h^1 = \left\{ v \text{ continue sur } [-T, T] \ ; \ v|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1 \quad , \quad 0 \leq i \leq n \right\},$$

$$V_{0,h}^1 = \left\{ v \in V_h^1 \mid v(T) = v(-T) = 0 \right\}.$$

V_h^1 est un espace vectoriel de dimension $n + 2$ et $V_{0,h}^1$ est de dimension n .

8.3 Formulation variationnelle discrète

On considère le problème variationnel discret suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver une fonction non nulle } u_h \in V_{0,h}^1 \text{ vérifiant :} \\ \forall v_h \in V_{0,h}^1, \quad a_T(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h)_T. \end{array} \right. \quad (8.1)$$

La valeur propre λ_h dépend de ξ , T et h .

Le théorème 6.4-1 ([53]) nous permet d'avoir le résultat suivant :

Théorème 8.3.1.

Les valeurs propres du problème variationnel (8.1) forment une suite croissante

$$0 < \lambda_{1,h} < \lambda_{2,h} < \cdots < \lambda_{n,h} \quad \text{avec } n = \dim V_{0,h}^1$$

et il existe une base $\{w_{m,h}\}_{m=1}^n$ de $V_{0,h}^1$, orthonormale dans $L^2(\cdot - T, T)$ tels que

$$\forall v_h \in V_{0,h}^1, \quad a_T(w_{m,h}, v_h) = \lambda_{m,h}(w_{m,h}, v_h)_T, \quad 1 \leq m \leq n$$

8.4 Convergences des valeurs propres approchées

Soit $(\lambda_l)_{l \geq 1}$ les valeurs propres du problème (6.5), le théorème 6.5-1 ([53]), nous permet d'avoir le résultat de convergence suivant :

Théorème 8.4.1.

Pour tout entier naturel m , $1 \leq m \leq n$ on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\lambda_{m,h} - \lambda_m| = 0,$$

et si de plus l'espace V_m engendré par les m premiers vecteurs propres w_1, \dots, w_m du problème variationnel (6.5) vérifie $V_m \subset H^2(\cdot - T, T)$, on a :

$$|\lambda_{m,h} - \lambda_m| \leq C(\xi, T)h^2.$$

8.5 Base canonique de l'espace d'approximation $V_{0,h}^1$

Dans cette partie on va approcher la solution u du problème variationnel par une fonction dans V_h^1 . Cet espace vectoriel est de dimension $n + 2$ dont la base canonique est donnée par les fonctions chapeaux $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n+1}$, telles que $\varphi_j \in V_h^1$ et $\varphi_j(t_i) = \delta_{ij}$.

Les fonctions $(\varphi_j)_{0 \leq j \leq n+1}$ sont de la forme :

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}(t_1 - t) & \text{si } t \in [t_0, t_1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}(t - t_{j-1}) & \text{si } t \in [t_{j-1}, t_j] \\ \frac{1}{h}(t_{j+1} - t) & \text{si } t \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\varphi_{n+1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}(t - t_n) & \text{si } t \in [t_n, t_{n+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $v(-T) = v(T) = 0$, on va considérer l'espace d'approximation $V_{0,h}^1$ qui est un sous-espace vectoriel de V_h^1 , de dimension n , dont la base canonique est $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$.

8.6 Transformation algébrique du problème variationnel discret

On rappelle qu'on cherche à résoudre le problème variationnel discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver une fonction non nulle } u_h \in V_{0,h}^1 \text{ vérifiant :} \\ \forall v_h \in V_{0,h}^1, \quad a_T(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h)_{L^2_T}. \end{cases} \quad (8.2)$$

Soient u_h et $v_h \in V_{0,h}^1$, leurs décompositions dans la base canonique de $V_{0,h}^1$ sont de la forme :

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^n u_h(t_j) \varphi_j(t) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j(t), \quad v_h(t) = \sum_{j=1}^n v_h(t_j) \varphi_j(t) = \sum_{j=1}^n v_j \varphi_j(t) \quad \forall t \in [-T, T],$$

avec $u_j = u_h(t_j)$ et $v_j = v_h(t_j)$ pour $1 \leq j \leq n$. Le problème variationnel discret (8.2) revient donc à trouver un vecteur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{R}^n tel que pour tout vecteur $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{R}^n on ait :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i v_j \int_{-T}^T [\varphi'_i(t) \varphi'_j(t) + (t^2 - \xi)^2 \varphi_i(t) \varphi_j(t)] dt = \lambda_h \sum_{1 \leq i, j \leq n} u_i v_j \int_{-T}^T \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt,$$

en posant $N_h = (N_{ij}^h)_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de rigidité, de terme générique

$$N_{ij}^h = a_T(\varphi_i, \varphi_j) = \int_{-T}^T [\varphi'_i(t) \varphi'_j(t) + (t^2 - \xi)^2 \varphi_i(t) \varphi_j(t)] dt,$$

et $M_h = (M_{ij}^h)_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de masse, de terme générique

$$M_{ij}^h = \int_{-T}^T \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt.$$

Ainsi le problème variationnel discret (8.2) est équivalent au problème matriciel généralisé de valeurs propres :

$$N_h U = \lambda_h M_h U. \quad (8.3)$$

8.7 Calcul des coefficients de la matrice de rigidité N_h

Le calcul des coefficients N_{ij}^h fait appel au calcul des intégrales $I(a, \xi)$ et $J(a, \xi)$ suivantes :

$$\begin{aligned} I(a, \xi, h) &= \frac{1}{h^3} \int_0^h [(u+a)^2 - \xi]^2 u^2 du \\ &= \frac{1}{h^3} \int_0^h [(u+a)^4 u^2 - 2\xi(u+a)^2 u^2 + \xi^2 u^2] du \\ &= \frac{1}{h^3} \int_0^h (u+a)^4 u^2 du - 2\xi \frac{1}{h^3} \int_0^h (u+a)^2 u^2 du + \xi^2 \frac{1}{h^3} \int_0^h u^2 du \\ I_4(a, h) &= \frac{1}{h^3} \int_0^h (u+a)^4 u^2 du = \frac{1}{h^3} \int_0^h u^2 (u^4 + 4u^3 a + 6u^2 a^2 + 4u a^3 + a^4) du \\ &= \frac{1}{7} h^4 + \frac{2}{3} a h^3 + \frac{6}{5} a^2 h^2 + a^3 h + \frac{1}{3} a^4 \\ I_2(a, h) &= \frac{1}{h^3} \int_0^h (u+a)^2 u^2 du = \frac{1}{h^3} \int_0^h u^2 (u^2 + 2au + a^2) du = \frac{1}{5} h^2 + \frac{1}{2} a h + \frac{1}{3} a^2 \end{aligned}$$

$$I(a, \xi, h) = I_4(a, h) - 2\xi I_2(a, h) + \frac{1}{3}\xi^2$$

$$\begin{aligned} J(a, \xi, h) &= \frac{1}{h^2} \int_0^h [(u+a)^2 - \xi]^2 u \, du \\ &= \frac{1}{h^2} \int_0^h [(u+a)^4 u - 2\xi(u+a)^2 u + \xi^2 u] \, du \\ &= \frac{1}{h^2} \int_0^h (u+a)^4 u \, du - 2\xi \frac{1}{h^2} \int_0^h (u+a)^2 u \, du + \xi^2 \frac{1}{h^2} \int_0^h u \, du \\ J_4(a, h) &= \frac{1}{h^2} \int_0^h (u+a)^4 u \, du = \frac{1}{h^2} \int_0^h (u^5 + 4u^4 a + 6u^3 a^2 + 4u^2 a^3 + u a^4) \, du \\ &= \frac{1}{6} h^4 + \frac{4}{5} a h^3 + \frac{3}{2} a^2 h^2 + \frac{4}{3} a^3 h + \frac{1}{2} a^4 \\ J_2(a, h) &= \frac{1}{h^2} \int_0^h (u+a)^2 u \, du = \frac{1}{h^2} \int_0^h (u^3 + 2au^2 + a^2 u) \, du = \frac{1}{4} h^2 + \frac{2}{3} a h + \frac{1}{2} a^2 \end{aligned}$$

$$J(a, \xi, h) = J_4(a, h) - 2\xi J_2(a, h) + \frac{1}{2}\xi^2$$

Maintenant, on va calculer les valeurs exactes des coefficients N_{ij}^h .
Pour tout i , $1 \leq i \leq n$ on a :

$$\begin{aligned} \bullet N_{i,i+1}^h &= N_{i+1,i}^h = \int_{-T}^T \varphi_i'(t) \varphi_{i+1}'(t) \, dt + \int_{-T}^T (t^2 - \xi)^2 \varphi_i(t) \varphi_{i+1}(t) \, dt \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_i'(t) \varphi_{i+1}'(t) \, dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t^2 - \xi)^2 \varphi_i(t) \varphi_{i+1}(t) \, dt = (*) + (**) \\ &\text{car } \text{Support } \varphi_i \cap \text{Support } \varphi_{i+1} = [t_i, t_{i+1}] \\ (*) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} -\frac{1}{h^2} \, dt = -\frac{1}{h} \\ (**) &= \frac{1}{h^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t^2 - \xi)^2 (t_{i+1} - t)(t - t_i) \, dt \\ &= -\frac{1}{h^2} \int_0^h [(u+t_i)^2 - \xi]^2 (u-h)u \, du \\ &= -hI(t_i, \xi, h) + hJ(t_i, \xi, h) \end{aligned}$$

$$N_{i,i+1}^h = N_{i+1,i}^h = -\frac{1}{h} - h[I(t_i, \xi, h) - J(t_i, \xi, h)]$$

$$\begin{aligned}
\bullet N_{i,i}^h &= \int_{-T}^T [\varphi_i'(t)]^2 dt + \int_{-T}^T (t^2 - \xi)^2 [\varphi_i(t)] dt = (*) + (**) \\
(*) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{1}{h^2} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} -\frac{1}{h} dt = \frac{2}{h} \\
(**) &= \frac{1}{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t^2 - \xi)^2 (t - t_{i-1})^2 dt + \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t^2 - \xi)^2 (t_{i+1} - t)^2 dt \\
&= \frac{1}{h^2} \int_0^h [(u + t_{i-1})^2 - \xi]^2 u^2 du + \frac{1}{h^2} \int_0^h [(u - t_{i+1})^2 - \xi]^2 u^2 du \\
&= hI(t_{i-1}, \xi, h) + hI(t_{i+1}, \xi, h)
\end{aligned}$$

$$N_{i,i}^h = \frac{2}{h} + h[I(t_{i-1}, \xi, h) + I(t_{i+1}, \xi, h)]$$

Enfin

$$N_{i,j}^h = 0 \text{ si } |i - j| \geq 2 \text{ car } \text{Support } \varphi_i \cap \text{Support } \varphi_j = \emptyset$$

$$N_h = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \star & \star & \star & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \star & \star & \star & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \star & \star & \star & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \star & \star \end{pmatrix} \text{ est symétrique et tridiagonale}$$

8.8 Calcul des coefficients de la matrice de masse M_h

Pour tout i , $1 \leq i \leq n$ on a :

$$\begin{aligned}
\bullet M_{i,i+1}^h = M_{i+1,i}^h &= \int_{-T}^T \varphi_i(t) \varphi_{i+1}(t) dt = \frac{1}{h^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - t)(t - t_i) dt \\
&= \frac{1}{h^2} \int_0^h (h - u)u du = \frac{1}{h^2} \left(h \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{h}{6}
\end{aligned}$$

$$M_{i,i+1}^h = M_{i+1,i}^h = 1 \times \frac{h}{6}$$

$$\begin{aligned} \bullet M_{ii}^h &= \int_{-T}^T (\varphi_i(t))^2 dt = \frac{1}{h^2} \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1})^2 dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - t)^2 dt \right] \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\int_0^h u^2 du + \int_0^h v^2 dv \right] = \frac{1}{h^2} \frac{2h^3}{3} = \frac{2h}{3} \end{aligned}$$

$$M_{ii}^h = \frac{2h}{3} = 4 \times \frac{h}{6}$$

Enfin

$$M_{i,j}^h = 0 \text{ si } |i - j| \geq 2 \quad \text{car} \quad \text{Support } \varphi_i \cap \text{Support } \varphi_j = \emptyset$$

$$M_h = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est symétrique, tridiagonale et définie positive}$$

On vérifie aisément que les matrices M_h et N_h sont définies positives (M_h est à diagonale strictement dominante) et que les valeurs propres du problème matriciel généralisé (8.3) sont strictement positives.

8.9 Calcul de la plus petite valeur propre

On pose :

$$N_h = \frac{1}{h} N \quad \text{et} \quad M_h = \frac{h}{6} M \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{h^2}{6} \times \lambda_h$$

Le problème matriciel généralisé de valeurs propres (8.3) est équivalent à :

$$NU = \lambda MU \tag{8.4}$$

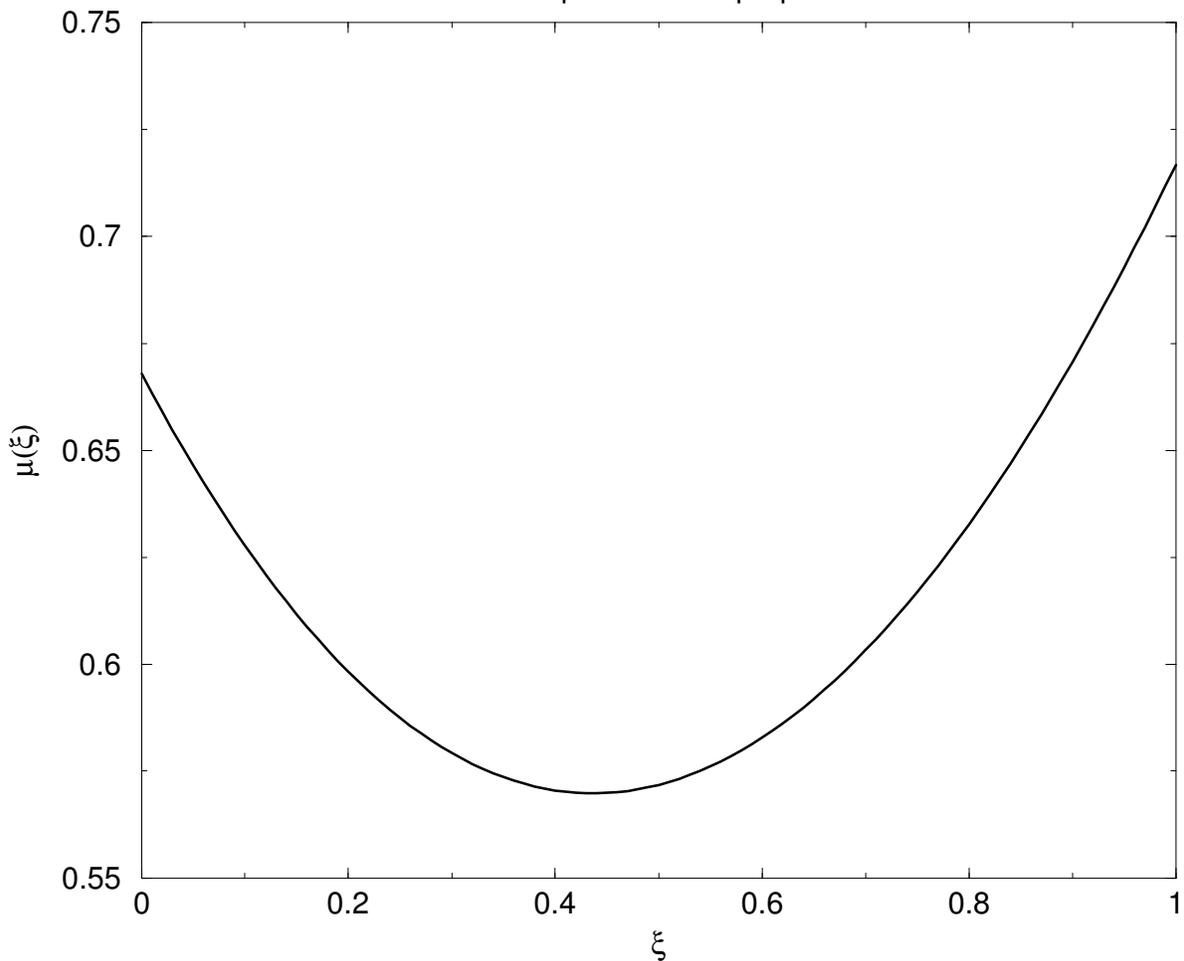
Les matrices N et M sont symétriques, tridiagonales et définies positives. Par conséquent, pour le calcul de la plus petite valeur propre on utilise la méthode de la puissance inverse adaptée au problème généralisé de valeurs propres (8.4).

Quelques résultats numériques pour des valeurs de T comprises entre 3. et 10.

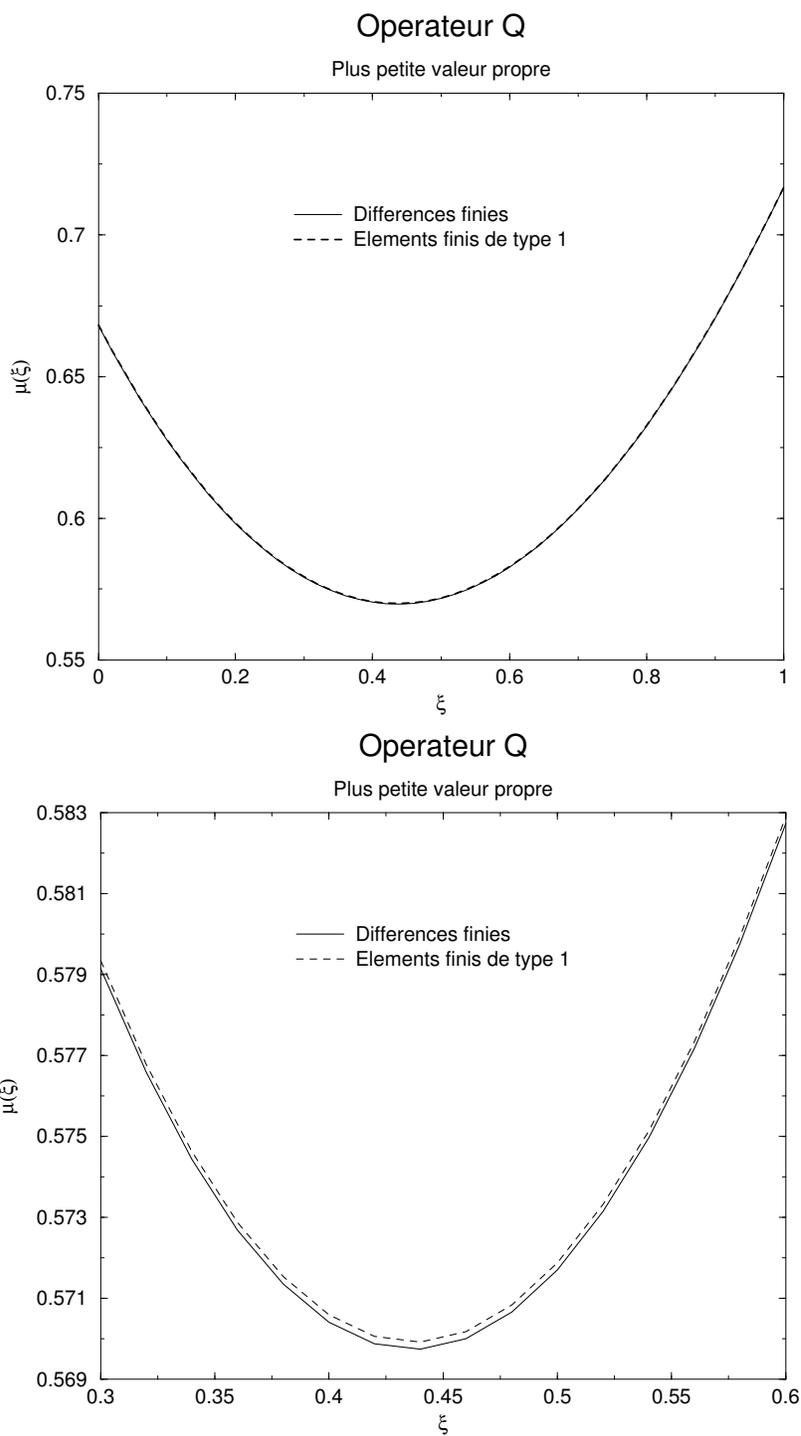
Méthodes des éléments finis P_1								
n	T=3.		T=4.		T=5.		T=10.	
	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $						
100	0.5700	$0.2 \cdot 10^{-3}$	0.5702	$0.4 \cdot 10^{-3}$	0.5704	$0.6 \cdot 10^{-3}$	0.5720	$2.2 \cdot 10^{-3}$
250	0.5699	$0.1 \cdot 10^{-3}$	0.5699	$0.1 \cdot 10^{-3}$	0.5699	$0.1 \cdot 10^{-3}$	0.5702	$0.33 \cdot 10^{-3}$
300	0.5698	$0.5 \cdot 10^{-4}$	0.5699	$0.1 \cdot 10^{-3}$	0.5699	$0.1 \cdot 10^{-3}$	0.5700	$0.2 \cdot 10^{-3}$
500	0.5698	$0.5 \cdot 10^{-4}$	0.5698	$0.5 \cdot 10^{-4}$	0.5698	$0.5 \cdot 10^{-4}$	0.5699	$0.1 \cdot 10^{-3}$

$$\gamma = 0.5698$$

Plus petite valeur propre



8.10 Comparaison des deux méthodes



Troisième partie

Évaluation numérique des paires propres d'un opérateur différentiel linéaire en utilisant une formulation variationnelle vectorielle et une approximation par une méthode d'éléments finis avec quadrature numérique

Chapitre 9

Position du problème

9.1 Introduction

On considère un problème de valeurs propres faisant intervenir un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant issu de la théorie de Ginzburg-Landau et concernant la supraconductivité de certains matériaux.

Pour la résolution numérique, on utilise une méthode basée sur les éléments finis avec intégration numérique. En effet, les approximations des couples d'éléments propres par la méthode des éléments finis sont calculées comme étant les paires propres d'un problème matriciel généralisé de valeurs propres. Les coefficients matriciels utilisant des intégrales sont estimés par une méthode de quadrature numérique. On vérifiera aisément que l'approximation par une méthode appropriée d'éléments finis avec intégration numérique (le degré de précision doit être bien choisi) satisfait les mêmes estimations classiques qu'une méthode d'éléments finis sans quadrature numérique.

Enfin, divers aspects des techniques générales pour les problèmes de valeurs propres (surtout ceux faisant intervenir des opérateurs auto-adjoints) ont été étudiés par de nombreux auteurs, par exemple : G. J. Fix ([33],[34]); R. J. Herbold, M. H. Schultz & R. S. Varga ([41]); P. J. Ciarlet & P. A. Raviart ([23]); I. Babuska & A. K. Aziz ([3]); G. Strang & G. J. Fix ([59]); B. Mercier ([49]); K. Ishihara ([43]); F. Chatelin ([19]); P. J. Raviart & J. M. Thomas ([53]); R. Dautry & J.-L. Lions ([26]); I. Babuska & J. E. Osborn ([8]-[10]); P. J. Ciarlet & J. L. Lions ([22]); M. Vanmaele([60]-[63]); M. Vanmaele & R. Van Keer ([64]-[68]).

9.2 Notations

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) borné de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment régulière.

Soit V un espace vectoriel d'Hilbert de dimension infinie. V est dense dans $L^2(\Omega)$ avec injection compacte : $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

V est aussi un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$.

On considère l'opérateur différentiel P défini sur $V \times V$ par :

$$Pu = \sum_{i,j=1}^n (D_j - A_j) [a_{ij} (D_i - A_i) u] + a_0 u \quad (9.1)$$

Si $u = u_1 + iu_2$ avec $i^2 = -1$, on pose

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a_1 = a_0 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i A_j$$

on peut écrire :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

avec :

$$p_{11} = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i a_{ij} \partial_j \cdot + a_1$$

$$p_{22} = - \sum_{i,j=1}^n \partial_i a_{ij} \partial_j \cdot + a_1$$

$$p_{12} = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (A_j \partial_j \cdot + A_i \partial_j \cdot) - \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij} A_j)$$

$$p_{21} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (A_j \partial_j \cdot + A_i \partial_j \cdot) + \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij} A_j)$$

On note par (\cdot, \cdot) le produit scalaire naturel sur l'espace produit $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

En effet pour $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, on pose :

$$(u, v) = \sum_{k=1}^2 (u_k, v_k)_{0,\Omega} = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} u_k v_k dx = \int_{\Omega} u.v dx$$

et la norme correspondante :

$$\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{k=1}^2 (u_k, u_k)_{0,\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} u_k^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{\Omega} |u|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

On désigne par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace usuel de Sobolev d'ordre m :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq \alpha \leq m \right\}$$

Cet espace sera muni de la norme habituelle :

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 0 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

et de la semi-norme suivante :

$$|u|_{m,p,\Omega} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 0 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

En particulier, si $p = 2$ on a les notations suivantes :

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

$$\|u\|_{m,\Omega} = \|u\|_{m,2,\Omega} \quad \text{et} \quad |u|_{m,\Omega} = |u|_{m,2,\Omega}$$

S'il n'y a pas confusion, on notera aussi $\|u\|_{m,\Omega}$ et $|u|_{m,\Omega}$ respectivement la norme et la semi-norme naturelles de l'espace produit $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$.

9.3 Hypothèses

On suppose que les coefficients a_{ij} $1 \leq i, j \leq n$, A_j $1 \leq j \leq n$ et a_1 sont des fonctions de $L^\infty(\Omega)$ qui vérifient les hypothèses suivantes :

- (H1) $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$, pp dans Ω
(H2) Il existe $\alpha > 0$: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$ pp dans Ω et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

9.4 Problème continu de valeurs propres

Dans ce travail, on va essayer d'évaluer les paires propres de l'opérateur P avec une condition mixte Dirichlet-Neumann sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. En fait, seule la plus petite valeur propre de la réalisation de Neumann de l'opérateur P est importante pour le problème physique.

On cherche un réel λ et une fonction non nulle u de $V \times V$ suffisamment régulière dans $\overline{\Omega}$ tels que :

$$\begin{cases} Pu = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_P} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (9.2)$$

- Condition de Dirichlet : $\Gamma_0 = \emptyset$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

- Condition de Neumann : $\Gamma_1 = \emptyset$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_P} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu_P}$ représente la dérivée conormale relative à l'opérateur différentiel P .

$$\frac{\partial}{\partial \nu_P} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n \nu_{P,j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \sum_{i,j=1}^n \nu_{P,j} a_{ij} A_i \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 10

Problème variationnel de valeurs propres

10.1 Formulation variationnelle

Dans cette section, on va essayer de donner une formulation variationnelle (dite aussi formulation faible) du problème continue (1.2).

On suppose que la solution $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ du problème continu est suffisamment régulière.

Soit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ une fonction test quelconque de l'espace produit $V \times V$. En multipliant le premier terme de la première égalité de (1.2), on obtient :

$$\begin{aligned} (Pu)v &= - \sum_{i,j=1}^n (\partial_i a_{ij} \partial_j u_1) v_1 - \sum_{i,j=1}^n (\partial_i a_{ij} \partial_j u_2) v_2 + a_1 u_1 v_1 + a_1 u_2 v_2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (A_j \partial_i u_2 + A_i \partial_j u_2) v_1 \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij} A_j) u_2 v_1 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (A_j \partial_i u_1 + A_i \partial_j u_1) v_2 + \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij} A_j) u_1 v_2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left[A_j (v_2 \partial_i u_1 - v_1 \partial_i u_2) + A_i (v_2 \partial_j u_1 - v_1 \partial_j u_2) \right] + \sum_{i,j=1}^n \partial_i (a_{ij} A_j) (u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &\quad - \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n (\partial_i a_{ij} \partial_j u_k) v_k + \sum_{k=1}^2 a_1 u_k v_k \end{aligned}$$

On pose :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (Pu)v \, dx$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} (\partial_i a_{ij} \partial_j u_k) v_k \, dx = - \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j u_k \partial_i v_k \, dx + \int_{\Gamma} a_{ij} (\partial_j u_k) \nu^i v_k \, ds$$

Et par suite :

$$- \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\partial_i a_{ij} \partial_j u_k) v_k \, dx = \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j u_k \partial_i v_k \, dx - \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma} a_{ij} (\partial_j u_k) \nu^i v_k \, ds$$

Or d'après l'hypothèse (H1) on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i (v_2 \partial_j u_1 - v_1 \partial_j u_2) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ji} A_j (v_2 \partial_i u_1 - v_1 \partial_i u_2) \quad (\text{changement d'indices}) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_j (v_2 \partial_i u_1 - v_1 \partial_i u_2) \quad \text{car } a_{ji} = a_{ij} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j u_k \partial_i v_k \, dx + \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} a_{1k} u_k v_k \, dx + 2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} A_j (v_2 \partial_i u_1 - v_1 \partial_i u_2) \, dx \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \partial_i (a_{ij} A_j) (u_1 v_2 - u_2 v_1) \, dx - \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma} a_{ij} (\partial_j u_k) \nu^i v_k \, ds \end{aligned}$$

En appliquant encore la formule de Green, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_i (a_{ij} A_j) (u_1 v_2 - u_2 v_1) \, dx &= - \int_{\Omega} a_{ij} A_j \partial_i (u_1 v_2 - u_2 v_1) \, dx + \int_{\Gamma} a_{ij} A_j (u_1 v_2 - u_2 v_1) \nu^i \, ds \\ &= - \int_{\Omega} a_{ij} A_j (u_1 \partial_i v_2 - u_2 \partial_i v_1) \, dx - \int_{\Omega} a_{ij} A_j (v_2 \partial_i u_1 - v_1 \partial_i u_2) \, dx \\ &\quad + \int_{\Gamma} a_{ij} A_j (u_1 v_2 - u_2 v_1) \nu^i \, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} a_{ij} A_j (u_2 \partial_i v_1 - u_1 \partial_i v_2) dx - \int_{\Omega} a_{ij} A_j (v_2 \partial_i u_1 - v_1 \partial_i u_2) dx \\
&\quad + \int_{\Gamma} a_{ij} A_j (u_1 v_2 - u_2 v_1) \nu^i ds
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j u_k \partial_i v_k dx + \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} a_1 u_k v_k dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} A_j (v_2 \partial_i u_1 - v_1 \partial_i u_2) dx \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} A_j (u_2 \partial_i v_1 - u_1 \partial_i v_2) dx - \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma} a_{ij} (\partial_j u_k) \nu^i v_k ds \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma} a_{ij} A_j (u_1 v_2 - u_2 v_1) \nu^i ds
\end{aligned}$$

On pose :

$$u \cdot v = \sum_{k=1}^2 u_k v_k \quad \text{le produit scalaire Euclidien des vecteurs } u \text{ et } v ,$$

$$\det(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1 \quad \text{le déterminant des vecteurs } u \text{ et } v .$$

On obtient une écriture plus condensée de la forme $a(\cdot, \cdot)$:

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j u \cdot \partial_i v dx + \int_{\Omega} a_1 u \cdot v dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} A_j \left[\det(\partial_i u, v) - \det(u, \partial_i v) \right] dx \\
&\quad + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_P} \cdot v ds
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \nu_P} \cdot v &= - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \nu^i (\partial_j u_1) v_1 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_j \nu^i u_2 v_1 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_j \nu^i u_1 v_2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \nu^i (\partial_j u_2) v_2 \\
&= - \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \nu^i (\partial_j u_k) v_k + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_j \nu^i (u_1 v_2 - u_2 v_1) \\
&= - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \nu^i (\partial_j u) \cdot v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_j \nu^i \det(u, v)
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_j u \cdot \partial_i v &= \sum_{i,j=1}^n a_{ji} \partial_i u \cdot \partial_j v \quad (\text{changement des indices}) \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i u \cdot \partial_j v \quad (\text{hypothèse de symétrie des coefficients } a_{ij} = a_{ji})
\end{aligned}$$

Et en utilisant la condition sur la frontière Γ , on a :

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \partial_i u \cdot \partial_j v \, dx + \int_{\Omega} a_1 u \cdot v \, dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} A_j \left[\det(\partial_i u, v) - \det(u, \partial_i v) \right] dx \quad (10.1)$$

Finalement le problème variationnel aux valeurs propres s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver un réel } \lambda \text{ et une fonction non nulle } u \text{ de } V \times V \text{ tels que} \\ a(u, v) = \lambda(u, v) \quad \forall v \in V \times V \end{cases} \quad (10.2)$$

- Condition de Neumann sur Γ : $V = H^1(\Omega)$
- Condition de Dirichlet sur Γ : $V = H_0^1(\Omega)$
- Condition mixte Dirichlet-Neumann : $V = \left\{ u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_0} = 0 \right\}$

Il est clair que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique.

Le problème variationnel est le point de départ pour les approximations utilisant des méthodes basées sur les éléments finis. Dans le cadre de l'analyse fonctionnelle faisant intervenir les espaces de Sobolev, la formulation variationnelle permet une approche relativement rigoureuse dans le cas où les hypothèses sont des conditions de régularité faible pour les données du problème.

10.1.1 Remarque 1

La fonction vectorielle $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ peut être considérée comme une fonction à valeur complexe : $u = u_1 + I \cdot u_2$ avec $I^2 = -1$. Dans ce cas, la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est la partie réelle d'une forme sesquilinéaire hermitienne $a_c(\cdot, \cdot)$ et le produit scalaire (\cdot, \cdot) est la partie réelle du produit scalaire complexe $(\cdot, \cdot)_c$.

En effet, soient $u = u_1 + I u_2$ et $v = v_1 + I v_2$ deux fonctions à valeur sur \mathbb{C} , on a :

$$u\bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 - I(u_1 v_2 - u_2 v_1) = \sum_{k=1}^2 u_k v_k - I(u_1 v_2 - u_2 v_1) = u \cdot v - I \det(u, v)$$

$$Re(u, v)_c = Re\left(\int_{\Omega} u \bar{v} dx\right) = \sum_{k=1}^2 \left(\int_{\Omega} u_k v_k dx\right) = (u, v)$$

D'autre part la forme sesquilinéaire hermitienne $a_c(\cdot, \cdot)$ s'écrit :

$$a_c(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} (D_i - A_i) u \overline{(D_j - A_j) v} dx + \int_{\Omega} a_0 u \bar{v} dx \quad (10.3)$$

Et pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ on a :

$$\begin{aligned} (D_i - A_i) u \overline{(D_j - A_j) v} &= [(-I\partial_i - A_i)(u_1 + Iu_2)] \cdot [(I\partial_j - A_j)(v_1 - Iv_2)] \\ &= [-I\partial_i u_1 - A_i u_1 + \partial_i u_2 - IA_i u_2] \cdot [I\partial_j v_1 - A_j v_1 + \partial_j v_2 + IA_j v_2] \\ &= [(-A_i u_1 + \partial_i u_2) - I(\partial_i u_1 + A_i u_2)] [(-A_j v_1 + \partial_j v_2) + I(\partial_j v_1 + A_j v_2)] \\ &= \sum_{k=1}^2 (\partial_i u_k \partial_j v_k + A_i A_j u_k v_k) + A_i (u_2 \partial_j v_1 - u_1 \partial_j v_2) + A_j (v_2 \partial_i u_1 - v_1 \partial_i u_2) \\ &\quad + I \left[-(\partial_i u_1 \partial_j v_2 - \partial_i u_2 \partial_j v_1) + A_j \sum_{k=1}^2 v_k \partial_j u_k - A_i \sum_{k=1}^2 u_k \partial_i v_k - A_i A_j (u_1 v_2 - u_2 v_1) \right] \\ &= \partial_i u \cdot \partial_j v + A_i A_j u \cdot v + A_i \det(\partial_j v, u) + A_j \det(\partial_i u, v) \\ &\quad - I [-\det(\partial_i u, \partial_j v) - A_j v \cdot \partial_i u + A_i u \cdot \partial_j v + A_i A_j \det(u, v)] \end{aligned}$$

Par suite, la partie réelle de $a_c(u, v)$ est :

$$Re[a_c(u, v)] = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \partial_i u \cdot \partial_j v dx + \int_{\Omega} a_1 u \cdot v dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} [A_j \det(\partial_i u, v) + A_i \det(\partial_j v, u)] dx$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i \det(\partial_j v, u) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ji} A_j \det(\partial_i v, u) \quad \text{par simple changement d'indices} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_j \det(\partial_i v, u) \quad \text{car } a_{ji} = a_{ij} \end{aligned}$$

Et par conséquent on a : $a(u, v) = Re[a_c(u, v)]$

10.1.2 Remarque 2

Il est plus naturel de poser le problème spectral général dans un cadre complexe. En effet, soient \mathfrak{H} un espace de Hilbert sur \mathbb{C} et $a_c(u, v)$ une forme sesquilinéaire et continue

sur $\mathfrak{V} \times \mathfrak{V}$. On cherche alors les nombres complexes λ pour lesquels il existe une solution non nulle $u \in \mathfrak{V}$ du problème spectral suivant :

$$a_c(u, v) = \lambda(u, v)_c \quad \forall v \in \mathfrak{V}$$

Et comme la forme sesquilinéaire $a_c(u, v)$ définie par la relation (10.3) est hermitienne, i.e vérifie

$$\forall u, v \in \mathfrak{V} \quad a_c(v, u) = \overline{a_c(u, v)}$$

alors les valeurs propres λ sont nécessairement réelles et il suffit de se limiter au cas réel en utilisant la forme bilinéaire et symétrique $a(u, v)$.

10.2 Existence des solutions du problème variationnel spectral

Dans la suite, on prendra $V = L^2(\Omega)$ et

$$a : \begin{array}{ccc} [\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & a(u, v) \end{array}$$

la forme bilinéaire définie précédemment en (10.1).

Sous les hypothèses (H1), (H2) on a les résultats ci-dessous.

Proposition 10.2.1.

La forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercitive : il existe deux constantes réelles $\beta > 0$ et $\gamma \geq 0$ telles que

$$\forall u \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \quad a(u, u) + \gamma \|u\|_{0,\Omega}^2 \geq \beta \|u\|_{1,\Omega}^2$$

Preuve :

Pour tout $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ on a :

$$a(u, u) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \partial_i u \cdot \partial_j u \, dx + \int_{\Omega} a_1 |u|^2 \, dx + 2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} A_j \det(\partial_i u, u) \, dx$$

$$a(u, u) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \partial_i u_k \partial_j u_k \, dx + \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} a_1 |u_k|^2 \, dx + 2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} A_j \det(\partial_i u, u) \, dx$$

L'hypothèse (H2) nous assure l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i u_k \partial_j u_k \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\partial_i u_k|^2$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \partial_i u \cdot \partial_j u \, dx &= \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \partial_i u_k \partial_j u_k \, dx \\ &\geq \sum_{k=1}^2 \alpha \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_i u_k|^2 \, dx \\ &\geq \alpha \sum_{k=1}^2 |u_k|_{1,\Omega}^2 \\ &\geq \alpha |u|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

Ensuite, pour minorer le troisième terme de $a(u, u)$, on va appliquer l'inégalité de Cauchy avec $\varepsilon > 0$:

$$2ab = 2a \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} b \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{2}{\varepsilon} b^2$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} A_j \det(\partial_i u, u) \, dx &= 2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} A_j (-u_2 \partial_i u_1 + u_1 \partial_i u_2) \, dx \\ &\leq 2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |a_{ij} A_j| (|u_2| |\partial_i u_1| + |u_1| |\partial_i u_2|) \, dx \\ &\leq C \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (2|u_2| |\partial_i u_1| + 2|u_1| |\partial_i u_2|) \, dx \end{aligned}$$

avec $C = \max_{1 \leq i \leq n} \|C_i\|$ et $C_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_j$ car les fonctions A_j et $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$.

En appliquant la précédente inégalité de Cauchy, on obtient :

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} A_j \det(\partial_i u, u) \, dx &\leq C \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon}{2} |\partial_i u_1|^2 + \frac{2}{\varepsilon} |u_2|^2 + \frac{\varepsilon}{2} |\partial_i u_2|^2 + \frac{2}{\varepsilon} |u_1|^2 \right) dx \\ &\leq \frac{C\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (|\partial_i u_1|^2 + |\partial_i u_2|^2) + \frac{2Cn}{\varepsilon} \int_{\Omega} (|u_1|^2 + |u_2|^2) \, dx \\ &\leq \frac{C\varepsilon}{2} |u|_{1,\Omega}^2 + \frac{2Cn}{\varepsilon} \|u\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq \alpha |u|_{1,\Omega}^2 + \alpha_1 \|u\|_{0,\Omega}^2 - \frac{C\varepsilon}{2} |u|_{1,\Omega}^2 - \frac{2Cn}{\varepsilon} \|u\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq \left(\alpha - \frac{C\varepsilon}{2}\right) |u|_{1,\Omega}^2 + \left(\alpha_1 - \frac{2Cn}{\varepsilon}\right) \|u\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha_\varepsilon = \alpha - \frac{C\varepsilon}{2} > 0$.

Pour cela, il suffit que $0 < \varepsilon < \frac{2\alpha}{C}$ (par exemple si on prend $\varepsilon = \frac{\alpha}{C}$ alors $\alpha_\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$)

ε étant fixé, pour tout réel $\gamma \geq 0$ on a :

$$a(u, u) + \gamma \|u\|_{0,\Omega}^2 \geq \alpha_\varepsilon |u|_{1,\Omega}^2 + \left(\gamma + \alpha_1 - \frac{2Cn}{\varepsilon}\right) \|u\|_{0,\Omega}^2$$

On choisit maintenant γ de sorte que la quantité $\gamma_\varepsilon = \gamma + \alpha_1 - \frac{2Cn}{\varepsilon}$ soit strictement positive i.e $\gamma > -\alpha_1 + \frac{2Cn}{\varepsilon}$ (pour $\varepsilon = \frac{\alpha}{C}$, $\gamma > -\alpha_1 + \frac{2nC^2}{\alpha}$).

Ces choix de ε et de γ étant faits, pour tout $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ on a :

$$a(u, u) + \gamma \|u\|_{0,\Omega}^2 \geq \alpha_\varepsilon |u|_{1,\Omega}^2 + \gamma_\varepsilon \|u\|_{0,\Omega}^2$$

En posant $\beta_\varepsilon = \min(\alpha_\varepsilon; \gamma_\varepsilon)$, on a :

$$a(u, u) + \gamma \|u\|_{0,\Omega}^2 \geq \beta_\varepsilon |u|_{1,\Omega}^2$$

□

Maintenant on va rappeler un théorème important concernant la théorie spectrale des problèmes aux limites elliptiques et leurs approximations à l'aide de méthodes variationnelles (voir [53], Théorème 6.2-1).

Soit \mathbb{V} et \mathbb{H} deux espaces de Hilbert de dimensions infinies vérifiant : $\mathbb{V} \subset \mathbb{H}$ avec injection continue et \mathbb{V} est dense dans \mathbb{H} . Et soit $a(., .)$ une forme bilinéaire continue sur $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$. On considère le problème spectral variationnel général :

Trouver un réel λ et une fonction non nulle u de \mathbb{V} vérifiant

$$a(u, v) = \lambda(u, v) \quad \forall v \in \mathbb{V}$$

Théorème 10.2.2.

On suppose que l'injection canonique de \mathbb{V} dans \mathbb{H} est compacte et que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique et V -elliptique. Alors les valeurs propres du problème spectral variationnel général forment une suite croissante tendant vers $+\infty$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots \longrightarrow +\infty$$

et il existe une base hilbertienne orthonormale de \mathbb{H} formée de vecteurs propres (w_m) . De plus, la suite $(\lambda_m^{-1/2} w_m)$ est une base hilbertienne orthonormale de l'espace \mathbb{V} pour le produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$.

A l'aide de ce théorème et de la proposition précédente, on peut désormais énoncer le résultat important suivant :

Théorème 10.2.3.

Les valeurs propres du problème spectral variationnel (10.2) forment une suite croissante et minorée tendant vers $+\infty$

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots \longrightarrow +\infty$$

et il existe une base hilbertienne orthonormale de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres (w_m) tels que :

$$\forall v \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \quad a(w_m, v) = \lambda(w_m, v)$$

Preuve :

La Proposition 10.2.1 assure l'existence de deux nombres réels $\beta > 0$ et $\gamma \geq 0$ tels que :

$$\forall u \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \quad a(u, u) + \gamma \|u\|_{0,\Omega} \geq \beta \|u\|_{1,\Omega}.$$

En appliquant le Théorème 10.2.2 à la forme bilinéaire symétrique et coercive suivante :

$$b(\cdot, \cdot) = a(\cdot, \cdot) + \gamma(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$$

on obtient l'existence d'une suite croissante $(\mu_m)_{m \geq 1}$ de valeurs propres tendant vers $+\infty$ du problème spectral variationnel $b(u, v) = \mu(u, v)$:

$$0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_m \leq \dots \longrightarrow +\infty$$

et il existe une base hilbertienne orthonormale de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ formée de vecteurs propres (w_m) tels que :

$$\forall v \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \quad b(w_m, v) = \mu(w_m, v)$$

D'où

$$\forall v \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \quad a(w_m, v) = (\mu - \gamma)(w_m, v)$$

Par conséquent, les valeurs propres du problème (10.2) sont de la forme $\lambda_m = \mu_m - \gamma$ et on a :

$$-\gamma < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots \longrightarrow +\infty$$

□

10.3 Problème variationnel considéré

Soit $a : [H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire continue et symétrique définie précédemment :

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \partial_i u \cdot \partial_j v \, dx + \int_{\Omega} a_1 u \cdot v \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i \left[\det(\partial_i u, v) - \det(u, \partial_i v) \right] dx$$

où a_{ij} $1 \leq i, j \leq n$, A_j $1 \leq j \leq n$, a_1 et $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_j$ $1 \leq i \leq n$ sont des fonctions de $L^\infty(\Omega)$ qui satisfont les conditions suivantes :

(i) $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$, pp dans Ω

Cette condition assure la symétrie de la forme bilinéaire $a(.,.)$.

(ii) Les coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$ obéissent aux conditions habituelles d'ellipticité :

il existe $\alpha > 0$: $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$ pp dans Ω et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Quitte à ajouter une constante γ positive et en tenant compte de la condition (ii), on suppose que la fonction $a_1(x)$ est choisie de sorte que la forme bilinéaire $a(.,.)$ est fortement coercive.

Enfin, il est simple de vérifier que la forme $a(.,.)$ est bornée :

$$\forall u, v \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \quad |a(u, v)| \leq M \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$$

Sous les hypothèses précédentes, le problème variationnel de valeurs propres $a(u, v) = \lambda(u, v)$ possède un ensemble infini et dénombrable de valeurs propres $(\lambda_l)_{l \geq 1}$, toutes strictement positives et ayant chacune une multiplicité finie. Cette suite de valeurs propres est croissante et ne possède aucun point d'accumulation :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_l \leq \dots \longrightarrow +\infty$$

Chaque valeur propre est comptée autant de fois que sa multiplicité.

Les fonctions propres correspondantes $(w_l)_{l \geq 1}$ forment une base hilbertienne orthogonale de l'espace $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ par rapport au produit scalaire induit par $a(., .)$. Elles forment également une base de Hilbert de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ associée au produit scalaire naturel $(., .)_{0, \Omega}$.

Dans la suite, on supposera que les fonctions propres sont orthonormées dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$:

$$(w_i, w_j)_{0, \Omega} = \sum_{k=1}^2 (w_i^k, w_j^k)_{0, \Omega} = \delta_{ij}$$

Enfin, on rappelle une caractérisation classique des valeurs propres $(\lambda_l)_{l \geq 1}$ en utilisant le quotient de Rayleigh \mathfrak{R} défini pour tout $v \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), v \neq 0$:

$$\mathfrak{R}(v) = \frac{a(v, v)}{|v|_{0, \Omega}^2}$$

On désigne par V_l le sous-espace propre de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ engendré par les l premiers vecteurs propres w_i :

$$V_l = \text{Vect}\{w_1, w_2, \dots, w_l\}$$

et V_l^\perp l'orthogonal de V_l dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ pour le produit scalaire induit par $a(., .)$:

$$\begin{aligned} V_l^\perp &= \{ v \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega); \quad a(v, w_i) = 0 \quad , 1 \leq i \leq l \} \\ &= \{ v \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega); \quad (v, w_i)_{0, \Omega} = 0 \quad , 1 \leq i \leq l \} \end{aligned}$$

La première valeur propre λ_1 est caractérisée par :

$$\lambda_1 = \min_{v \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), v \neq 0} \mathfrak{R}(v)$$

Et pour $l \geq 2$, la valeur propre λ_l vérifie :

$$\lambda_l = \min_{v \in V_{l-1}^\perp, v \neq 0} \mathfrak{R}(v)$$

Une caractérisation intéressante de la valeur propre λ_l est donnée par le *principe du min-max* :

$$\lambda_l = \min_{E_l \in \mathcal{V}_l} \max_{v \in E_l, v \neq 0} \mathfrak{R}(v)$$

où \mathcal{V}_l est l'ensemble des sous-espaces E_l de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ de dimension l .

Chapitre 11

Généralités sur la méthode des éléments finis

Pour plus d'informations sur la méthode des éléments finis, on pourra consulter [21], [30] ou [53].

11.1 Triangulation

L'objectif de cette partie est de présenter les principes généraux de la construction d'un maillage pour la méthode des éléments finis classique.

On considère un domaine polygonal convexe et borné de \mathbb{R}^2 de frontière $\Gamma = \partial\Omega$. On remarque que la normale extérieure ν est définie presque partout sur Γ et qu'elle est discontinue aux sommets du polygone frontière.

Soit une famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ de $\bar{\Omega}$ où chaque maillage \mathcal{T}_h est composé de triangle K (K est appelé aussi une maille de \mathcal{T}_h) :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K \quad \forall h > 0$$

Dans toute la suite, on supposera que la famille des triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ vérifie les hypothèses classiques suivantes :

(1) \mathcal{T}_h est une triangulation : pour tout couple de triangles distincts de \mathcal{T}_h , K_i et K_j , $i \neq j$, l'intersection $K_i \cap K_j$ est soit vide, soit un sommet, soit un côté commun.

(2) La famille de maillages $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est régulière *i.e* il existe une constante σ_0 telle que :

$$\forall h > 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad \sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K} \geq \sigma_0$$

où $h_K = \max_{x,y \in K} \|x - y\| = \text{diam}(K)$, le diamètre de K , $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 et ρ_K le diamètre du plus grand cercle inscrit dans K *i.e*

$$\rho_K = \sup_{B \in K} \{ \text{diam}(B), \quad B \text{ disque inclus dans } K \}$$

Cette condition signifie qu'il existe un $\theta_0 > 0$ tel que : $\forall h > 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad \theta_K \geq \theta_0$ où θ_K est le plus petit angle au sommet du triangle K .

Pour un triangle K donné, σ_K caractérise la forme du triangle K . Ce rapport tend vers l'infini pour un triangle qui " s'écrase ". Ainsi, la famille $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est régulière si ses triangles K ne s'aplatissent pas trop lorsque h tend vers 0 (la condition $h_K \geq \sigma_0 \rho_K$ permet d'éviter les triangles très allongés).

$$(3) \quad h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \longrightarrow 0$$

h est appelé le paramètre de la triangulation. Il caractérise la finesse du maillage.

(4) Il existe une famille de transformations affines et bijectives générant l'ensemble du maillage à partir d'une maille de référence tout en respectant certaines contraintes de disposition. Cela signifie que pour chaque triangle K , il existe une application affine T_K bijective qui trace l'élément de référence \hat{K} (triangle ou carré unité par exemple) sur un élément variable K du maillage :

$$\begin{aligned} T_K : \hat{K} &\longrightarrow K \\ \hat{x} &\longmapsto x = T_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K \end{aligned}$$

B_K , matrice carrée d'ordre 2, est la matrice jacobienne de T_K et b_K un vecteur de \mathbb{R}^2 .

En notant judicieusement les sommets du triangle K , on peut supposer que le jacobien $J_K = \det(B_K)$ est strictement positif. En effet, soit A_1 le sommet du triangle K dont l'abscisse est la plus grande (ou la plus petite). On désigne par A_2 et A_3 les autres sommets de K de sorte que la pente de la droite $(A_1 A_3)$ est supérieure à celle de la droite $(A_1 A_2)$. On a :

$$\begin{aligned} J_K &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) > 0 \\ (T_K[(0,0)] &= A_1 \quad , \quad T_K[(1,0)] = A_2 \quad , \quad T_K[(0,1)] = A_3 \quad) \end{aligned}$$

Et pour le cas où $x_1 \neq x_2$ et $x_1 \neq x_3$ on a :

$$J_K = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \left[\frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \right]$$

D'autre part, il est clair que :

$$J_K = \frac{\text{mes}(K)}{\text{mes}(\widehat{K})} = 2 \text{mes}(K) \quad ; \quad \|B_K\| \leq \frac{h_K}{\rho_{\widehat{K}}} \quad \text{et} \quad \|B_K^{-1}\| \leq \frac{h_{\widehat{K}}}{\rho_K}$$

Par conséquent, pour une famille régulière de maillages, il existe une constante $C > 0$ telle que $\|B_K\| \cdot \|B_K^{-1}\| \leq C$. La quantité $\text{cond}(B_K) = \|B_K\| \cdot \|B_K^{-1}\|$ représente le conditionnement de la matrice B_K .

(5) La famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ est quasi-uniforme :

$$\text{Il existe } \tau > 0 \text{ telque } \forall h > 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h : \quad \rho_K > \tau h$$

Cette condition permet de contrôler uniformément la quantité $\frac{1}{h_K}$ et donne le moyen d'avoir la possibilité de prouver et d'utiliser quelques inégalités inverses qu'on citera dans la prochaine sous-section (voir [21], [30]).

(6) Enfin, pour chaque triangulation \mathcal{T}_h , on lui associe un espace d'approximation \mathbf{X}_h^k de dimension finie :

$$\mathbf{X}_h^k = \left\{ v_k \in C^0(\overline{\Omega}) : v|_K \in \mathbb{P}_k, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ et } v_k = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}$$

où \mathbb{P}_k représente l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k :

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^k \alpha_{ij} x_1^i x_2^j, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \dim \mathbb{P}_k = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

Dans la suite, pour éviter d'alourdir les écritures et s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera l'intérieur \dot{K} de K également par K et par \mathbf{X}_h^k l'espace \mathbf{X}_h^k .

11.2 Inégalités inverses

La famille $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ étant formée de triangulations supposées régulières et quasi-uniformes, alors le Théorème 3.2.6 de [21] entraîne les inégalités suivantes :

$$|w|_{m,K} \leq Ch^{-s} |w|_{m-s,K}, \quad 0 \leq s \leq m \quad \forall w \in \mathbb{P}_k(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall h > 0$$

$$\|w\|_{m,K} \leq Ch^{-s} \|w\|_{m-s,K}, \quad 0 \leq s \leq m \quad \forall w \in \mathbb{P}_k(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall h > 0$$

où $\mathbb{P}_k(K)$ est l'ensemble des polynômes sur K de degré inférieur ou égal à k .

11.3 Propriété d'approximation

L'espace produit $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \subset H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ satisfait la propriété d'approximation suivante :

$$\inf_{v_h \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h} \left\{ \|v - v_h\|_{0,\Omega} + |v - v_h|_{1,\Omega} \right\} \leq Ch^{r+1} \|v\|_{r+1,\Omega}$$

$$\forall v \in H^{r+1}(\Omega) \times H^{r+1}(\Omega) \quad , \quad 1 \leq r \leq k$$

Pour obtenir ce résultat, il suffit d'appliquer la propriété d'approximation de \mathbf{X}_h dans $H^1(\Omega)$. Pour cela, on peut se référer par exemple à [53].

11.4 Projection elliptique

On définit le projecteur elliptique P par :

$$P : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$$

$$v \longmapsto Pv$$

A partir de la propriété d'approximation citée précédemment, on obtient aisément le résultat suivant (voir [53], Lemme 6.5-1) :

$$\|v - Pv\|_{0,\Omega} \leq Ch^k \|v\|_{k+1,\Omega} \quad \forall v \in H^{k+1}(\Omega) \times H^{k+1}(\Omega)$$

Et de manière similaire, on obtient le résultat ci-dessous (cf [2], lemme 6-1) :

$$\left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|Pv\|_{k+1,K}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \|v\|_{k+1,\Omega} \quad \forall v \in H^{k+1}(\Omega) \times H^{k+1}(\Omega)$$

11.5 Remarque

Comme le maillage qu'on va utiliser est triangulaire (toutes les mailles sont des triangles) sur Ω , alors on a :

$$\|p\|_{k+1,K} = \|p\|_{k,K} \quad \forall p \in \mathbb{P}_k(K) \quad , \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

Chapitre 12

Approximation sans intégration numérique

12.1 Problème variationnel approché

Pour approcher numériquement les paires propres du problème variationnel continu, on considère d'abord le problème approché sans quadrature numérique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver un réel } \lambda_h \text{ et une fonction non nulle } u_h \text{ de } \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h : \\ a(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h) \quad \forall v_h \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \end{array} \right. \quad (12.1)$$

Théorème 12.1.1.

Sous les hypothèses de la section 10.3, les valeurs propres du problème approché (12.1) forment une suite croissante

$$0 < \lambda_{h,1} \leq \lambda_{h,2} \leq \dots \leq \lambda_{h,N_h} \quad \text{avec} \quad N_h = \dim(\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h)$$

et il existe une base $(w_{h,l})$ de $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$, orthonormale dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, formée de vecteurs propres $w_{h,l}$ tels que

$$\forall v_h \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \quad a(w_{h,l}, v_h) = \lambda_{h,l}(w_{h,l}, v_h), \quad 1 \leq l \leq N_h$$

Ce resultat est une simple application du Théorème 6.4-1 de [53].

Et l'analogie en dimension finie du *principe du min – max* pour la l^{eme} valeur propre approchée $\lambda_{h,l}$ s'écrit :

$$\lambda_{h,l} = \min_{E_{h,l} \in \mathcal{V}_{h,l}} \max_{v_h \in E_{h,l}, v_h \neq 0} \mathfrak{R}(v_h)$$

où $\mathcal{V}_{h,l}$ est l'ensemble des sous-espaces $E_{h,l}$ de $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$ de dimension l .

Sous les hypothèses de la Section 10.3 et à partir de la propriété d'approximation de la Section 11.3, on retrouve des résultats analogues à ceux du Théorème 6.5-1 de [53] :

Théorème 12.1.2.

(1) Pour $1 \leq l \leq N_h$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\lambda_{h,l} - \lambda_l| = 0 \quad (12.2)$$

(2) Si les fonctions propres w_i , $1 \leq i \leq N_h$, appartiennent à $H^{k+1}(\Omega) \times H^{k+1}(\Omega)$ alors on a :

$$|\lambda_{h,l} - \lambda_l| \leq Ch^{2k} \quad \text{pour tout } 1 \leq l \leq k \quad (12.3)$$

(3) Si λ_l est une valeur propre simple et w_l la fonction propre correspondante, alors on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|w_{h,l} - w_l\|_{1,\Omega} = 0 \quad (12.4)$$

(4) Si en plus les fonctions propres $w_i \in H^{k+1}(\Omega) \times H^{k+1}(\Omega)$, $1 \leq i \leq N_h$, alors on a :

$$\|w_{h,l} - w_l\|_{1,\Omega} \leq Ch^k \quad (12.5)$$

$$\|w_{h,l} - w_l\|_{0,\Omega} \leq Ch^{k+1} \quad (12.6)$$

12.2 Remarque : cas où la valeur propre exacte est multiple

Soit λ_l une valeur propre exacte de multiplicité $(L + 1)$:

$$\lambda_{l-1} < \lambda_l = \lambda_{l+1} \cdots \lambda_{L+l} < \lambda_{L+l+1}$$

Et soit $w_l, w_{l+1}, \dots, w_{L+l}$ des fonctions propres exactes associées à λ_l , choisies orthonormales dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. On note $(\lambda_{h,l+p}, w_{h,l+p})$, $0 \leq p \leq L$, les paires propres approchées correspondantes supposées orthonormales dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Une démarche identique à celle développée dans [26] (chapitre XII, paragraphe 5.4, pages 907-909),

permet d'obtenir des estimations semblables à (12.5) et (12.6) pour :

$$W_{h,l+p}^* - w_{h,l+p} , \quad 0 \leq p \leq L$$

où $W_{h,l+p}^*$ sont des fonctions propres exactes correspondant à λ_l et orthonormales dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Enfin, des arguments semblables à ceux développés pour montrer les Théorèmes 3.5 et 3.7 de [70], permettent d'établir que si les fonctions propres (w_i) , $1 \leq i \leq L + l$ appartiennent à $H^{k+1}(\Omega) \times H^{k+1}(\Omega)$, alors il existe un ensemble de fonctions propres (W_{l+p}) , $0 \leq p \leq L$ fixées, correspondantes à λ_l , indépendantes de h et orthonormales dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ainsi qu'un nombre m , $1 \leq m \leq k$ tels que :

$$\|W_{h,l+p} - w_{h,l+p}\|_{1,\Omega} \leq Ch^m , \quad 0 \leq p \leq L$$

Chapitre 13

Méthode des éléments finis avec quadrature numérique

En général, la forme bilinéaire $a(.,.)$ et le produit scalaire $(.,.)$ associés au problème variationnel approché contiennent des intégrales sur Ω . Dans la méthode d'éléments finis standard, on suppose que ces intégrales sont évaluées analytiquement. Cependant, seuls quelques exemples académiques donnent lieu à des intégrales qu'on peut calculer de manière exacte. Dans la quasi-totalité des problèmes, on utilise l'intégration numérique pour approcher ces intégrales à l'aide de différentes formules de quadrature.

13.1 Principe d'une quadrature numérique

Soit A un domaine connexe d'intérieur non vide et soit $N \geq 1$ un entier naturel. Une formule de quadrature à N points sur A consiste en la donnée de N réels $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$ appelés poids et N points $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ appelés points de *Gauss* tels que :

$$\forall p \in \mathbb{P}_k \quad \int_A p(x) dx = \sum_{r=1}^N \omega_r p(\xi_r)$$

Le plus grand entier k possible est appelé *ordre de précision* de la quadrature numérique.

13.1.1 Remarque

Une formule de quadrature numérique d'ordre k , permet d'approcher à l'ordre $k + 1$ l'intégrale sur A d'une fonction suffisamment régulière. En effet, en posant $h_A = \text{mes}(A)$,

on vérifie aisément à l'aide du développement de Taylor que :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^{k+1}(A) \quad \left| \int_A \phi(x) dx - \sum_{r=1}^N \omega_r \phi(\xi_r) \right| \leq h_A^{k+1} \sup_{x \in A, |\alpha|=k+1} |D^\alpha \phi(x)|$$

Pour plus de détails, on peut consulter [24].

13.2 Approximation avec quadrature numérique

Pour cette section, on pourra se référer à [21], [26], [30], [53].

On considère l'évaluation d'une intégrale sur Ω du type $\int_\Omega \phi(x) dx$ où ϕ est une fonction régulière. On a :

$$\int_\Omega \phi(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \phi(x) dx$$

Ainsi le problème consiste à estimer des intégrales sur les triangles du maillage.

Soit K un élément quelconque de la triangulation. L'application T_K qui transforme l'élément de référence \hat{K} en K est un C^1 -difféomorphisme. Le changement $x = T_K(\hat{x})$ donne :

$$\begin{aligned} \int_K \phi(x) dx &= \int_{\hat{K}} \phi(T_K(\hat{x})) \det(B_K) d\hat{x} \\ &= \det(B_K) \int_{\hat{K}} \phi(T_K(\hat{x})) d\hat{x} \\ &= J_K \int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) d\hat{x} \end{aligned}$$

où J_K est le déterminant de la matrice jacobienne de T_K .

Par ce procédé, on se ramène donc à l'approximation de l'intégrale sur l'élément de référence \hat{K} (triangle unité) du maillage :

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) d\hat{x}$$

Et pour toute fonction $\hat{\phi} \in \mathcal{C}^0(\hat{K})$, on pose :

$$I_{\hat{K}}(\hat{\phi}) = \sum_{r=1}^N \hat{\omega}_r \hat{\phi}(\hat{b}_r) \simeq \int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) d\hat{x}$$

où les $\hat{\omega}_r$ et \hat{b}_r , $r = 1, \dots, N$ sont respectivement les poids et les points de Gauss de la quadrature numérique dont l'ordre de précision est noté L .

Ensuite, on définit l'erreur de quadrature $E_{\hat{K}}$ par :

$$E_{\hat{K}}(\hat{\phi}) = \int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) d\hat{x} - I_{\hat{K}}(\hat{\phi})$$

avec $E_{\hat{K}}(p) = 0$ pour tout polynome p appartenant à \mathbb{P}_L .

On pose $\phi(x) = \hat{\phi}(T_K(\hat{x}))$, $x = T_K(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{K}$, $x \in K$. On obtient :

$$I_K(\phi) = J_K \cdot I_{\hat{K}}(\hat{\phi}) \simeq \int_K \phi(x) dx$$

L'erreur de quadrature E_K correspondante est :

$$E_K(\phi) = \int_K \phi(x) dx - I_K(\phi) = J_K \cdot E_{\hat{K}}(\hat{\phi})$$

Pour l'estimation de ces erreurs de quadrature, le lemme de Bramble-Hilbert pour les éléments finis triangulaires (cf [21] Théorème 4-1.3 page 193) permet d'établir les lemmes utiles ci-dessous.

Les preuves sont semblables aux résultats obtenus dans [2] (Théorème 3.5 et Corollaire 3.6), dans [11] (Lemmes 3.1 et 3.2) et dans [62] (Théorème 2.5, 2.6 et 2.7). Dans ces estimations locales, la constante générique C est indépendante du diamètre h_K du triangle K .

Lemme 13.2.1.

On suppose que la quadrature numérique est d'ordre $2k - 1$. Pour $0 \leq s, t \leq k$, on a :

$$\forall p, q \in \mathbb{P}_k(K) \quad |E_K(pq)| \leq Ch_K^{2k-s-t} |p|_{k-s,K} |q|_{k-t,K} \quad (13.1)$$

Pour tout entier r , $0 \leq r \leq k$, $\forall d \in W^{r,\infty}(K)$, $\forall p, q \in \mathbb{P}_k(K)$ on a :

$$|E_K(dpq)| \leq Ch_K^r \|d\|_{r,\infty,K} \|p\|_{r,K} |q|_{0,K} \quad (13.2)$$

Et quand $d \in W^{2k,\infty}(K)$ on a pour tout $p, q \in \mathbb{P}_k(K)$:

$$|E_K(dpq)| \leq Ch_K^{2k} \|d\|_{2k,\infty,K} \|p\|_{k,K} \|q\|_{k,K} \quad (13.3)$$

Lemme 13.2.2.

On suppose que l'ordre de précision de la quadrature numérique est $2k + 1$.

Pour tout entier r , $0 \leq r \leq k$, $\forall d \in W^{r+2,\infty}(K)$, $\forall p, q \in \mathbb{P}_k(K)$ on a :

$$|E_K(dpq)| \leq Ch_K^{r+2} \|d\|_{r+2,\infty,K} \|p\|_{\min(r+2,k),K} |q|_{0,K} \quad (13.4)$$

Enfinement pour $k = 1$, $\forall d \in W^{1,\infty}(K)$, $\forall p, q \in \mathbb{P}_k(K)$ on a :

$$|E_K(dpq)| \leq Ch_K \|d\|_{1,\infty,K} \|p\|_{1,K} |q|_{0,K} \quad (13.5)$$

13.3 Approximation du produit scalaire dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Sur l'espace $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$, on définit un produit scalaire discret (une approximation du produit scalaire dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$) et la norme associée par :

$$(v, w)_h = \sum_{k=1}^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} I_K(v_k w_k) \quad , \quad \forall v, w \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \quad (13.6)$$

$$|v|_h = \sqrt{(v, v)_h} \quad , \quad \forall v \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \quad (13.7)$$

En appliquant le Lemme 3.2 de [2], on obtient le résultat suivant :

Proposition 13.3.1.

Les normes $|\cdot|_h$ et $|\cdot|_{0,\Omega}$ sont uniformément équivalentes sur $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$, i.e., il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 indépendantes de h telles que :

$$C_1 |v|_h \leq |v|_{0,\Omega} \leq C_2 |v|_h \quad , \quad \forall v \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \quad (13.8)$$

13.4 Approximation de la forme bilinéaire

Dans la suite on suppose que les coefficients a_{ij} $1 \leq i, j \leq n$, A_j $1 \leq j \leq n$ et a_1 sont des fonctions de $C^0(\overline{\Omega})$.

L'approximation analogue de la forme bilinéaire $a(.,.)$ sur $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$ nous conduit à considérer la forme discrète suivante :

$$a_h(v, w) = A_h(v, w) + B_h(v, w) \quad \forall v, w \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \quad (13.9)$$

Les quantités $A_h(.,.)$ et $B_h(.,.)$ sont définies par :

$$A_h(v, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} I_K \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i v \partial_j w + a_1 v w \right] \quad \forall v, w \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \quad (13.10)$$

$$B_h(v, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} I_K \left[\sum_{i=1}^n b_i \left[\det(\partial_i v, w) - \det(v, \partial_i w) \right] \right] \quad \forall v, w \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \quad (13.11)$$

Où encore et de manière plus explicite :

$$A_h(v, w) = \sum_{k=1}^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} I_K \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i v_k \partial_j w_k + a_1 v_k w_k \right] \quad \forall v, w \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$$

$$B_h(v, w) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} I_K \left[\sum_{i=1}^n b_i \left[(\partial_i v_1) w_2 - (\partial_i v_2) w_1 + (\partial_i w_1) v_2 - (\partial_i w_2) v_1 \right] \right] \quad \forall v, w \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$$

Il est clair que la forme bilinéaire discrète $a_h(.,.)$ est symétrique.

Et la proposition ci-dessous nous permet d'affirmer que cette dernière est uniformément bornée et fortement coercive.

Proposition 13.4.1.

La forme bilinéaire discrète $a_h(.,.)$ est uniformément bornée et fortement coercive, i.e , il existe deux constantes strictement positives M et C indépendantes de h telles que :

$$|a_h(v, w)|_{0,\Omega} \leq M \|v\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \quad , \quad \forall v, w \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \quad (13.12)$$

$$a_h(v, v) \geq C \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad , \quad \forall v \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \quad (13.13)$$

Pour établir ces inégalités, on procède de la même manière que dans [21] page 187 et on utilise (2.12) de [62].

On peut aussi consulter [2] et [66] pour plus détails. On note que l'inégalité (5.12) assure que la matrice de rigidité associée à la forme bilinéaire discrète $a_h(.,.)$ est définie positive.

13.5 Estimation des erreurs de quadrature

Pour estimer les approximations du produit scalaire $(., .)$ et de la forme bilinéaire $a(., .)$ par $(v, w)_h$ et $a_h(., .)$ respectivement, on introduit les erreurs de quadratures suivantes : $\forall v, w \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$

$$E(v, w) = (v, w) - (v, w)_h = \sum_{k=1}^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} E_K(v_k w_k) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} E_K(v, w) \quad (13.14)$$

$$\begin{aligned} E_a(v, w) &= a(v, w) - a_h(v, w) \\ &= E_A(v, w) + E_B(v, w) \end{aligned} \quad (13.15)$$

où les quantités $E_A(., .)$ et $E_B(., .)$ sont exprimées à l'aide des relations (13.9) - (13.11) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E_A(v, w) &= A(v, w) - A_h(v, w) \\ &= \sum_{k=1}^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} E_K \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_i v_k \partial_j w_k + a_1 v_k w_k \right] \\ E_B(v, w) &= B(v, w) - B_h(v, w) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} E_K \left[\sum_{i=1}^n b_i \left[(\partial_i v_1) w_2 - (\partial_i v_2) w_1 + (\partial_i w_1) v_2 - (\partial_i w_2) v_1 \right] \right] \end{aligned}$$

Théorème 13.5.1.

On suppose que la précision de quadrature est $2k - 1$, alors l'erreur totale $E(., .)$ d'approximation du produit scalaire $(., .)$ vérifie :

$$|E(v, w)| \leq Ch^2 \cdot |v|_{1,\Omega} \cdot |w|_{1,\Omega} \quad , \quad \forall v, w \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \quad (13.16)$$

Pour montrer ce résultat, il suffit d'appliquer l'inégalité (13.1) du Lemme 13.2.1 avec $s = t = k - 1$ et procéder exactement de la même manière que la preuve du Lemme 5.1 de [2].

Théorème 13.5.2.

Si la précision de la quadrature est $2k - 1$ et si les coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, A_j , $1 \leq j \leq n$ et a_1 sont des fonctions de $W^{\alpha, \infty}(\Omega)$, $\alpha = 1, 2$ alors on a :

$$|E_a(v, w)| \leq Ch^\alpha \|v\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \quad , \quad \forall v, w \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \quad (13.17)$$

Quand $\alpha = 1$, on utilise (13.2) avec $r = k$. Et quand $\alpha = 2$, on fait appelle à (13.3).

Théorème 13.5.3.

Si la précision de la quadrature est $2k + 1$ et si les coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, A_j , $1 \leq j \leq n$ et a_1 sont des fonctions de $W^{k, \infty}(\Omega)$. alors l'erreur totale $E_a(\cdot, \cdot)$ d'approximation de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$ vérifie :

$$|E_a(v, w)| \leq Ch \cdot \|v\|_{1, \Omega} \cdot \|w\|_{1, \Omega} \quad , \quad \forall v, w \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \quad (13.18)$$

Si en plus les coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, A_j , $1 \leq j \leq n$ et a_1 sont des fonctions de $W^{k+1, \infty}(\Omega)$, on a :

$$|E_a(v, w)| \leq Ch^2 \|v\|_{1, \Omega} \|w\|_{1, \Omega} \quad , \quad \forall v, w \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \quad (13.19)$$

La preuve de l'inégalité (13.18) s'obtient facilement en combinant (13.4) avec $r = k - 2 + s$ et (13.5) avec $s = 0$. Et en utilisant la relation (13.4) avec $r = k - 1 + s$, on obtient (13.19).

Chapitre 14

Étude du problème variationnel approché avec intégration numérique

14.1 Problème variationnel approché

Pour calculer numériquement les paires propres du problème variationnel continu de valeurs propres, on considère le problème approché avec quadrature numérique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver un réel } \tilde{\lambda}_h \text{ et une fonction non nulle } \tilde{u}_h \text{ de } \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h : \\ a_h(\tilde{u}_h, v_h) = \tilde{\lambda}_h(\tilde{u}_h, v_h) \quad \forall v_h \in \mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h \end{array} \right. \quad (14.1)$$

La forme bilinéaire discrète $a_h(.,.)$ étant symétrique, uniformément bornée et fortement coercive (cf Proposition 13.4.1) et vue les propriétés du produit scalaire discret $(.,.)_h$ (cf Proposition 13.3.1), alors le problème variationnel approché (14.1) possède des paires propres approchées, notées $(\tilde{\lambda}_{h,l}, \tilde{u}_{h,l})$ avec $1 \leq l \leq N_h$ où N_h est la dimension de l'espace $\mathbf{X}_h \times \mathbf{X}_h$.

14.2 Convergence et estimation des erreurs pour les paires propres

Les évaluations d'erreurs pour les paires propres approchées avec quadrature numérique dans le cas où les fonctions propres sont vectorielles, sont semblables à celles obtenues dans le cas où les fonctions propres sont réelles. Les démarches sont strictement identiques. Pour plus de détail, voir les travaux de M. Vanmaele [62], [68].

14.2.1 Estimation des erreurs pour les valeurs propres

Soit λ_l une valeur propre exacte du problème variationnel continu de multiplicité $(L + 1)$:

$$\lambda_{l-1} < \lambda_l = \lambda_{l+1} \cdots \lambda_{L+l} < \lambda_{L+l+1}$$

Et soit $u_l, u_{l+1}, \dots, u_{L+l}$ les fonctions propres exactes associées à λ_l , choisies orthonormales dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

On note $(\tilde{\lambda}_{h,l+p}, \tilde{u}_{h,l+p})$, $0 \leq p \leq L$, les paires propres approchées correspondantes supposées orthonormales relativement au produit scalaire approché $(\cdot, \cdot)_h$.

Théorème 14.2.1.

Si la précision de la quadrature est au moins $2k - 1$ et si les coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, A_j , $1 \leq j \leq n$ et a_1 sont des fonctions de $W^{k,\infty}(\Omega)$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\tilde{\lambda}_{h,l+p} - \lambda_l| = 0 \quad 0 \leq p \leq L \quad (14.2)$$

Théorème 14.2.2.

Si la précision de la quadrature est $2k - 1$ et si les coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, A_j , $1 \leq j \leq n$ et a_1 sont des fonctions de $W^{2k,\infty}(\Omega)$, on a :

$$|\tilde{\lambda}_{h,l+p} - \lambda_l| \leq Ch^2 \quad 0 \leq p \leq L \quad (14.3)$$

14.3 Estimation des erreurs pour les paires propres

Dans l'analyse des estimations d'erreurs et de la convergence des fonctions propres approchées, on distingue le cas d'une valeur propre exacte simple et d'une valeur propre exacte multiple.

14.3.1 Cas d'une valeur propre simple

Soit λ_l une valeur propre exacte simple du problème variationnel continu et soit u_l une fonction propre exacte associée à λ_l , normée dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

On note $(\tilde{\lambda}_{h,l}, \tilde{u}_{h,l})$, la paire propre approchée correspondante supposée normée relativement au produit scalaire approché $(\cdot, \cdot)_h$.

Théorème 14.3.1.

Si la précision de la quadrature est $2k - 1$, si les coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, A_j , $1 \leq j \leq n$ et a_1 sont des fonctions de $W^{2k, \infty}(\Omega)$, et si en plus la fonction propre exacte u_l appartient à $H^{k+1}(\Omega) \times H^{k+1}(\Omega)$ alors pour $k \geq 2$, on a :

$$|\tilde{u}_{h,l} - u_l|_{0, \Omega} \leq Ch^{k-1} \quad (14.4)$$

Théorème 14.3.2.

Si la précision de la quadrature est au moins $2k - 1$, si les coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, A_j , $1 \leq j \leq n$ et a_1 sont des fonctions de $W^{2k, \infty}(\Omega)$, et si en plus la fonction propre exacte u_l appartient à $H^{k+1}(\Omega) \times H^{k+1}(\Omega)$ alors pour $k \geq 2$, on a :

$$|\tilde{\lambda}_{h,l} - \lambda_l| \leq Ch^{2k-1} \quad (14.5)$$

$$\|\tilde{u}_{h,l} - u_l\|_{1, \Omega} \leq Ch^{k-1} \quad (14.6)$$

14.3.2 Cas d'une valeur propre multiple

Soit λ_l une valeur propre exacte du problème variationnel continu de multiplicité $(L + 1)$ avec $L \geq 1$:

$$\lambda_{l-1} < \lambda_l = \lambda_{l+1} \cdots \lambda_{L+l} < \lambda_{L+l+1}$$

Soit $u_l, u_{l+1}, \dots, u_{L+l}$ les fonctions propres exactes associées à λ_l , choisies orthonormales dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

On note $(\tilde{\lambda}_{h,l+p}, \tilde{u}_{h,l+p})$, $0 \leq p \leq L$, les paires propres approchées correspondantes supposées orthonormales relativement au produit scalaire approché $(\cdot, \cdot)_h$.

Avec les mêmes hypothèses pour les coefficients de la forme bilinéaire et avec les mêmes conditions de régularité pour les fonctions propres associées à la valeur propre exacte multiple, on établit des estimations semblables à (6.5) – (6.8) pour :

$$U_{h,l+p} - \tilde{u}_{h,l+p}, \quad 0 \leq p \leq L$$

$$\lambda_{h,l} - \tilde{\lambda}_{h,l+p}, \quad 0 \leq p \leq L$$

$U_{h,l+p}$ sont des fonctions propres exactes correspondant à λ_l et orthonormales dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

En effet, un raisonnement analogue à celui décrit dans [71] permet d'établir les résultats qui suivent :

Théorème 14.3.3.

Si la précision de la quadrature est $2k - 1$, si les coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, A_j , $1 \leq j \leq n$ et a_1 sont des fonctions de $W^{2k, \infty}(\Omega)$, et si en plus les fonctions propres exactes $u_l, u_{l+1}, \dots, u_{L+l}$ appartiennent à $H^{k+1}(\Omega) \times H^{k+1}(\Omega)$ alors pour $k \geq 2$, il existe $U_l, U_{l+1}, \dots, U_{L+l}$ des fonctions propres fixées exactes associées à la valeur propre λ_l et orthonormales dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et une suite (h_j) tendant vers 0 et un nombre m , $0 \leq m \leq k - 1$, tels que :

$$|U_{l+p} - \tilde{u}_{h_j, l+p}|_{0, \Omega} \leq Ch_j^m \quad 0 \leq p \leq L \quad (14.7)$$

Théorème 14.3.4.

Si la précision de la quadrature est $2k - 1$, si les coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, A_j , $1 \leq j \leq n$ et a_1 sont des fonctions de $W^{2k, \infty}(\Omega)$, et si en plus les fonctions propres exactes $u_l, u_{l+1}, \dots, u_{L+l}$ appartiennent à $H^{k+1}(\Omega) \times H^{k+1}(\Omega)$ alors pour $k \geq 2$, il existe $U_l, U_{l+1}, \dots, U_{L+l}$ des fonctions propres fixées exactes associées à la valeur propre λ_l et orthonormales dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et une suite (h_j) tendant vers 0 et un nombre m , $0 \leq m \leq k - 1$, tels que :

$$|\tilde{\lambda}_{h, l+p} - \lambda_l| \leq Ch^{2k-1} \quad 0 \leq p \leq L \quad (14.8)$$

$$\|U_{l+p} - \tilde{u}_{h_j, l+p}\|_{1, \Omega} \leq Ch_j^m \quad 0 \leq p \leq L \quad (14.9)$$

14.3.3 Remarque : amélioration de l'ordre de convergence

Si la condition de Neumann (ou de Dirichlet) est imposée sur toute la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ et si en plus cette dernière est suffisamment régulière, alors les estimations d'erreur pour les paires propres peuvent être améliorées (un ordre en plus pour les valeurs propres et deux ordres en plus pour les fonctions propres) et devenir presque optimales en comparaison avec la méthode des éléments finis standard (cf [53]) où le cas $k = 1$ est autorisé.

Quatrième partie

Modélisation numérique

Chapitre 15

Applications numériques

15.1 Utilisation et programmation du code de calcul Melina

15.1.1 Description succincte du code de calcul Melina

Le code MELINA ¹ est une bibliothèque de procédures pour la résolution de problèmes aux limites, gouvernés par des équations aux dérivées partielles, par la méthode des éléments finis en dimension 2 ou 3. Il a été développé par O.DEBAYSER (de 1989 à 1996) et D.MARTIN ² (depuis 1989). C'est essentiellement un code de recherche qui fournit un ensemble d'outils aisément manipulables pour le traitement numérique de problèmes nouveaux ou la mise au point de nouveaux algorithmes.

Le traitement numérique d'une application repose principalement sur la description de sa formulation variationnelle. Les données et le programme principal sont, en général, une transcription simple de la formulation variationnelle du problème et de l'algorithme conduisant à sa résolution.

La résolution d'un nouveau problème aux limites ou la mise en oeuvre d'un nouvel algorithme de résolution peut être implémentée à l'aide du seul programme principal et de quelques procédures spécifiques.

Pour le problème étudié, on va utiliser des procédures de la librairie VALPRO de MELINA pour le calcul de valeurs et de vecteurs propres :

- VPINIT procédure de haut niveau d'initialisation des vecteurs aléatoires pour le calcul de valeurs propres.

¹<http://www.maths.univ-rennes1.fr/~dmartin/melina/www/code.html>

²I.R.M.A.R Université de RENNES I, UMR 853 du C.N.R.E.S. Daniel.Martin@univ-rennes1.fr

- VPMISE procédure de haut niveau de calculs des valeurs et vecteurs propres par la méthode d'itérations de sous-espaces.
- ITEINV procédure de haut niveau pour déterminer la plus petite valeur propre et le vecteur propre normalisé par la méthode d'itération inverse.

Pour le maillage du domaine sur lequel on veut étudier le problème, on a utilisé EMC2 un logiciel d'édition de maillages et de contours bidimensionnels [57]. Il permet de générer des maillages pour la méthode des éléments finis en définissant la géométrie, la discrétisation des contours, les sous domaines et les numéros de références pour les conditions aux limites. Ces maillages formés de triangles ou de quadrangles, sont de type grille ou de type Delaunay-Vorno (les seuls sommets du maillage contenus dans le cercle circonscrit à un triangle sont les sommets du triangle).

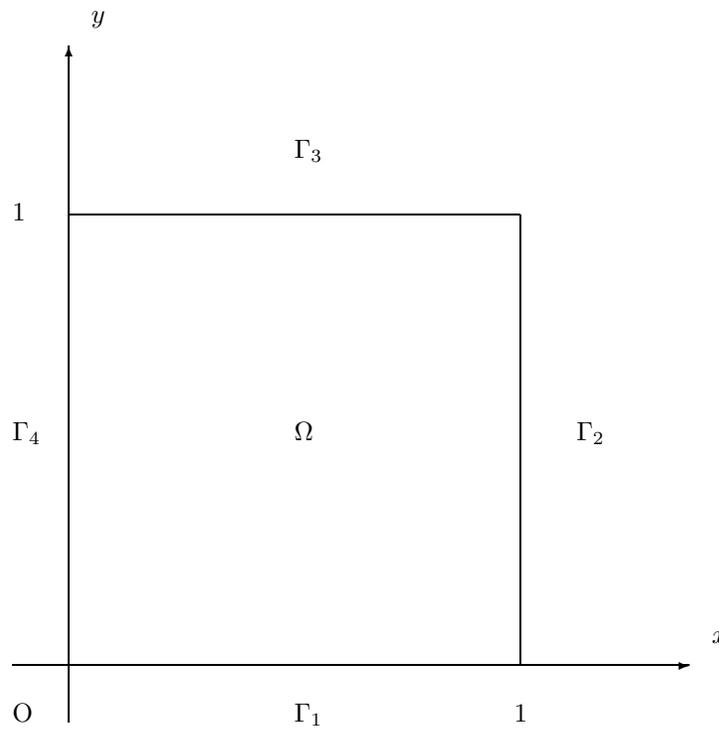
Le logiciel EMC2 permet aussi de régulariser le maillage ou une de ses parties. Il est possible d'éditer un maillage en le raffinant par endroit, en ajoutant, supprimant, déplaçant des sommets et en lui appliquant des transformations affines (translation, symétrie, rotation, homothétie...).

Le traducteur mome permet de transformer le fichier maillage de type nopo (modulef) en fichier directement exploitable par MELINA.

Pour les visualisations et les représentations graphiques, on utilise la librairie PGPLOT et le logiciel grame. Aussi, la M-file matme.m de MELINA permet des sorties graphiques avec le logiciel MATLAB.

15.1.2 Exemples du laplacien avec des conditions Dirichlet-Neumann

Soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ un carré unité.

**Exemple1**

On considère le problème :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \end{cases}$$

Les trois premières valeurs propres exactes de ce problème sont :

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} \simeq 2.4674 \quad \lambda_2 = \frac{5\pi^2}{4} \simeq 12.3370 \quad \lambda_3 = \frac{9\pi^2}{4} \simeq 22.2066.$$

Résultats numériques avec des EF P2						
λ	62 triangles		248 triangles		566 triangles	
	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $
λ_1	2.46742	$1.9 \cdot 10^{-5}$	2.46744	$3.9 \cdot 10^{-5}$	2.46743	$2.9 \cdot 10^{-5}$
λ_2	12.33960	$2.6 \cdot 10^{-3}$	12.33721	$2.0 \cdot 10^{-4}$	12.33723	$2.2 \cdot 10^{-4}$
λ_3	22.22705	$2.0 \cdot 10^{-2}$	22.20734	$7.3 \cdot 10^{-4}$	22.20699	$3.8 \cdot 10^{-4}$

Exemple2

On considère le problème :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_4 \end{cases}$$

Les valeurs propres exactes de ce problème sont de la forme $\mu_{k,l} = \pi^2 \left[k^2 + \frac{(2l+1)^2}{4} \right]$

$$\lambda_1 = \mu_{1,0} = \frac{5\pi^2}{4} \simeq 12.33701 \quad \lambda_2 = \mu_{1,1} = \frac{13\pi^2}{4} \simeq 32.07612 \quad \lambda_3 = \mu_{2,0} = \frac{17\pi^2}{4} \simeq 41.94582.$$

Résultats numériques avec des EF P2						
λ	62 triangles		248 triangles		566 triangles	
	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $
λ_1	12.33973	$2.7 \cdot 10^{-3}$	12.33723	$2.3 \cdot 10^{-4}$	12.33724	$2.4 \cdot 10^{-4}$
λ_2	32.12825	$5.2 \cdot 10^{-2}$	32.07931	$3.1 \cdot 10^{-3}$	32.07699	$7.7 \cdot 10^{-4}$
λ_3	42.03110	$8.5 \cdot 10^{-2}$	41.95304	$7.2 \cdot 10^{-3}$	41.94716	$1.3 \cdot 10^{-3}$

Exemple3

On considère le problème de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{x \ln 4} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \end{cases}$$

Les valeurs propres exactes de ce problème sont de la forme $\mu_{m,n} = (n\pi)^2 + (\xi_m \ln 4)^2$, où ξ_m est le m^{eme} zéro de $J_1(\xi)Y_1(2\xi) - J_1(2\xi)Y_1(\xi)$ avec J_1 et Y_1 les fonctions standards de Bessel (voir [66])

$$\lambda_1 \simeq 19.63729 \quad \lambda_2 \simeq 29.50690 \quad \lambda_3 \simeq 59.11571 \quad \lambda_4 \simeq 76.57605.$$

Résultats numériques avec des EF P2						
λ	62 triangles		248 triangles		566 triangles	
	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $	λ_h	$ \lambda_h - \lambda $
λ_1	19.64177	$4.5 \cdot 10^{-3}$	19.63763	$3.4 \cdot 10^{-4}$	19.63772	$4.3 \cdot 10^{-4}$
λ_2	29.53061	$2.4 \cdot 10^{-2}$	29.50841	$1.5 \cdot 10^{-3}$	29.50746	$5.6 \cdot 10^{-4}$
λ_3	59.31182	$2.0 \cdot 10^{-1}$	59.13140	$1.6 \cdot 10^{-2}$	59.11880	$3.1 \cdot 10^{-3}$

15.2 Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant

On considère l'opérateur P défini sur un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ par :

$$P = \left(D_{x_1} - \frac{Bx_2}{2} \right)^2 + \left(D_{x_2} + \frac{Bx_1}{2} \right)^2$$

C'est l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant issu de la théorie phénoménologique de Ginzburg-Landau et concernant les transitions de phase d'un supraconducteur. C'est aussi un cas particulier de l'opérateur défini par la relation (9.1) avec $a_{ij} = \delta_{ij}$, $A_1 = \frac{Bx_2}{2}$, $A_2 = -\frac{Bx_1}{2}$ et $a_0 = 0$.

Dans la suite on va s'intéresser à la détermination numérique du bas spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant en utilisant une méthode d'éléments finis avec quadrature. Pour la programmation ³des calculs numériques, on fait appel à la librairie VALPRO de MELINA.

Enfin, on rappelle quelques propriétés élémentaires de stabilité du spectre de l'opérateur de Schrödinger (voir [14]).

- Invariance par changement de jauge :
Pour tout $\phi \in H^2(\Omega)$, le spectre est inchangé si on remplace le champ de vecteur $A = (A_1, A_2)$ par $A + \nabla\phi$
- Effet d'une translation :
La réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant, sur un domaine Ω est unitairement équivalente à celle obtenue sur le domaine Ω_t déduit de Ω par translation de vecteur t .
- Effet d'une rotation :
Le bas du spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant, sur un domaine Ω reste inchangé si nous effectuons une rotation sur le domaine Ω .

15.3 Vérification de l'effet d'une translation

15.3.1 Maillages uniformes d'un secteur angulaire

Soit Ω un secteur angulaire. On note **S1** (cf figure 15.1) un maillage régulier de Ω , **S2** le transformé de **S1** par la translation de vecteur $(1,0)$ et **S3** l'image de **S2** par la même

³<http://www.maths.univ-rennes1.fr/~dmartin/melina/www/code.html/valpro/index.html>

translation.

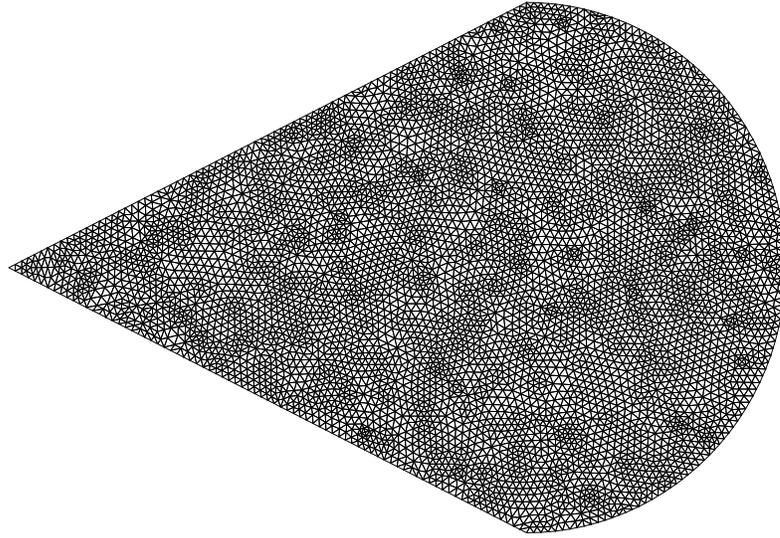


FIG. 15.1 – Maillage régulier du secteur angulaire.

SECTEURS TRANSLATES						
Maillage régulier à 2816 triangles						
Formule de quadrature d'ordre $2k - 1$ pour P_k						
<i>B en Tesla</i>	Eléments finis P_2			Eléments finis P_3		
	S1	S2	S3	S1	S2	S3
10 T	3.937	3.937	3.943	3.939	3.939	3.939
25 T	9.876	9.871	10.196	9.868	9.868	9.870
50 T	20.346	19.759	28.773	19.741	19.735	19.870
100 T	61.573	39.627	248.670	40.695	39.470	53.277

FIG. 15.2 – Énergie (plus petite valeur propre) associée à des maillages translatsés pour des champs magnétiques variant de 10 à 100 T.

On voit que pour un champs magnétique peu élevé, les résultats numériques (cf FIG. 15.2) obtenues seulement avec des éléments finis de type P_2 confirment la stabilité du spectre par translation, alors que pour un champ magnétique élevé, ici supérieur à 50 Tesla, les valeurs propres et les modules des vecteurs propres des maillages **S1**, **S2** et **S3** sont très différents avec des éléments finis de type P_2 , et l'utilisation des éléments finis de type P_3 ne gomme pas tout à fait ces irrégularités. Cette incohérence des résultats pour des maillages uniformément réguliers a été soulignée dans [14]. En effet, une translation de vecteur t engendre des oscillations de la forme $\frac{B}{2}x \wedge t$, et un maillage uniforme (trop grossier) ne permet pas toujours de capter toutes les oscillations.

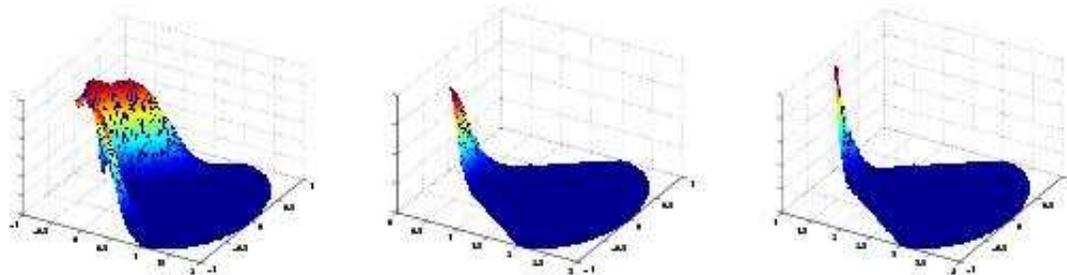


FIG. 15.3 – Modules des états fondamentaux associés à des maillages uniformes tradlatés pour un champ magnétique $B=100$ T et en utilisant des éléments finis P2

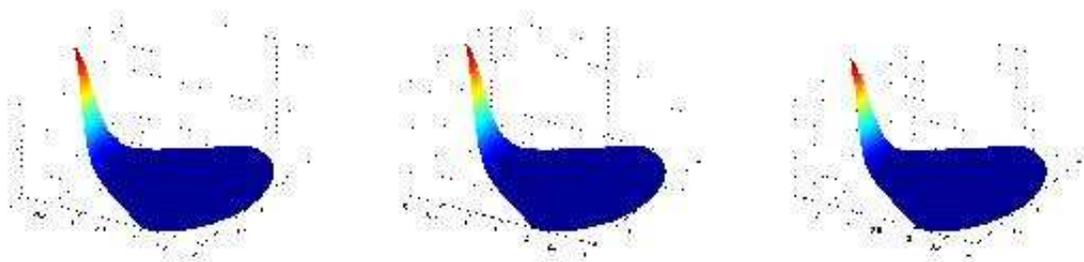


FIG. 15.4 – Modules des états fondamentaux associés à des maillages uniformes tradlatés pour un champ magnétique $B=100$ T et en utilisant des éléments finis P3

15.3.2 Maillages raffinés d'un secteur angulaire

D'après les résultats de Helffer-Morame ([38], [39]) et V. Bonnaillie([13], [14]), l'état propre (la concentration des électrons supraconducteurs) est localisé au voisinage des points du domaine dont la courbure est maximale et il décroît de manière exponentielle ailleurs.

Par suite, il parait donc naturel de considérer des maillages avec raffinement localisé au voisinages du sommet (le point de courbure maximale) du secteur angulaire.

Ainsi, la combinaison des éléments finis P3 avec des maillages raffinés localement au voisinage des points de courbure maximale permet d'obtenir des résultats convenables (voir 15.6).

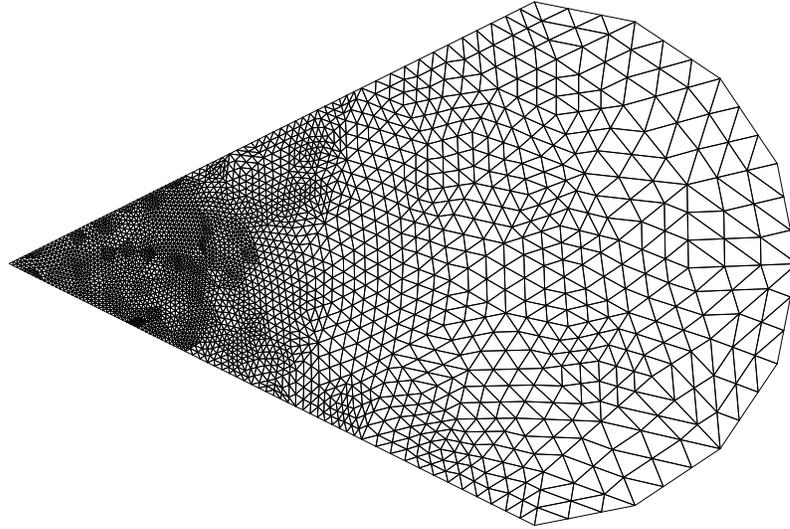
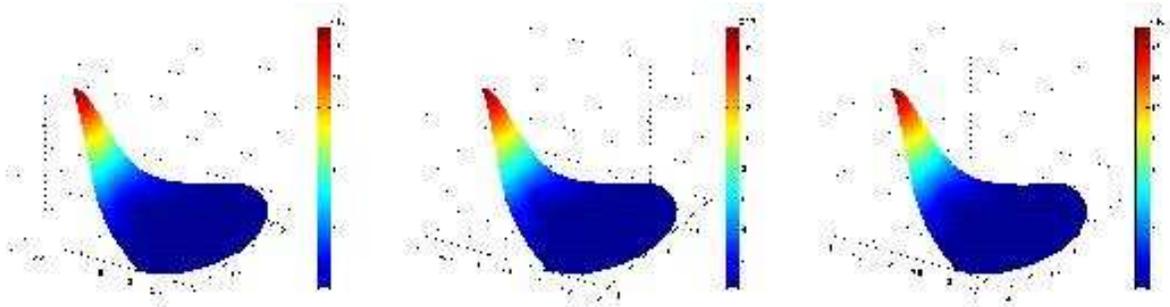


FIG. 15.5 – Maillage raffiné au voisinage du sommet du secteur angulaire.

SECTEURS TRANSLATES						
Maillage raffiné à 2857 triangles						
Formule de quadrature d'ordre $2k - 1$ pour P_k						
B en Tesla	Eléments finis P_2			Eléments finis P_3		
	S1	S2	S3	S1	S2	S3
25 T	9.881	9.895	9.979	9.931	9.936	9.930
50 T	19.750	19.756	19.998	19.775	19.781	19.783
100 T	40.020	39.485	44.527	39.492	39.494	39.523
150 T	65.220	59.219	98.745	59.254	59.220	59.2571

FIG. 15.6 – Énergie associée à des maillages raffinés localement

FIG. 15.7 – Modules des états fondamentaux associés à des maillages raffinés translates pour un champ magnétique $B=25$ T et en utilisant des éléments finis P_3

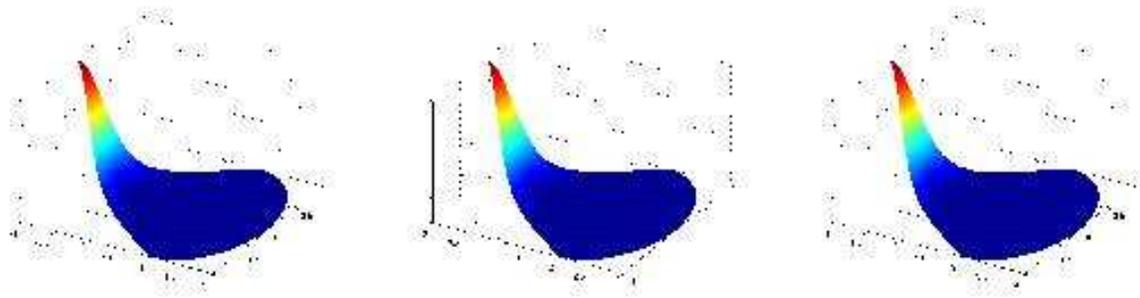


FIG. 15.8 – Modules des états fondamentaux associés à des maillages raffinés translatés pour un champ magnétique $B=50$ T et en utilisant des éléments finis P3

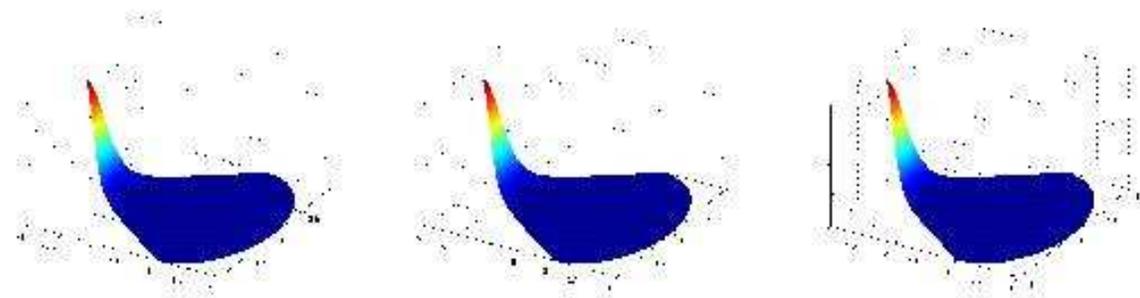


FIG. 15.9 – Modules des états fondamentaux associés à des maillages raffinés translatés pour un champ magnétique $B=100$ T et en utilisant des éléments finis P3

15.4 Réalisation de Neumann sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

15.4.1 Approximation de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par un carré

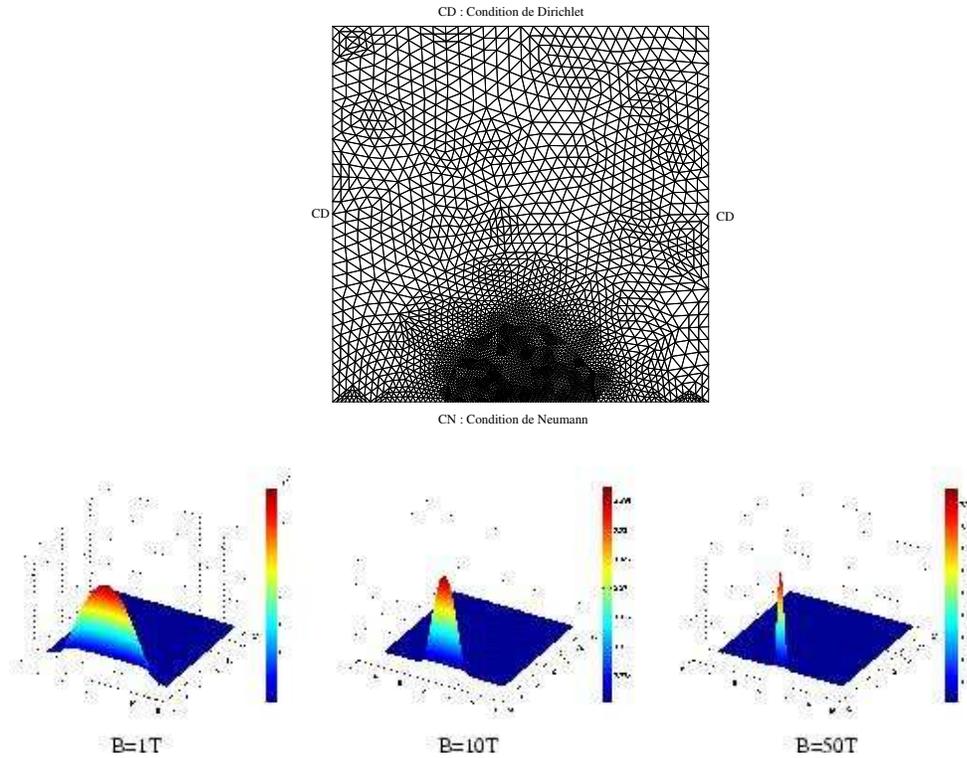


FIG. 15.10 – Modules des états fondamentaux

Carré de côté $C=25$		
Condition de Neumann sur la base (coté contenant O)		
Conditions de Dirichlet sur les autres cotés		
Maillage	B	P_3
Nombre de triangles	Champ magnétique	Eléments finis de degré 3
2059	1 T	0.606
	10 T	6.040
	50 T	31.325
3401	1 T	0.607
	10 T	5.992
	50 T	30.585

FIG. 15.11 – Énergie associée à des maillages raffinés localement

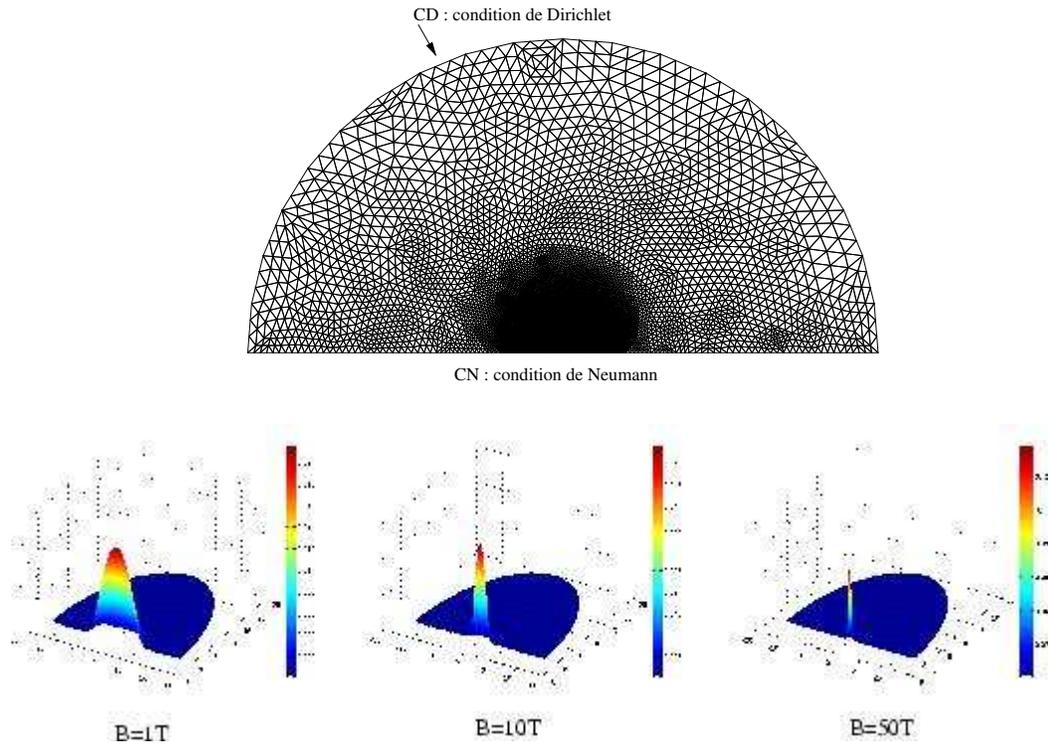
15.4.2 Approximation de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ par un dem-disque

FIG. 15.12 – Modules des états fondamentaux

Demi-Disque de centre O et de rayon R=25		
Maillage raffinés au voisinage de l'origine O		
Condition de Neumann sur le diamètre de base		
Conditions de Dirichlet sur le demi-cercle		
Maillage	B	P_3
Nombre de triangles	Champ magnétique	Eléments finis de degré 3
1641	1 T	0.608
	10 T	6.079
	50 T	31.585
2307	1 T	0.607
	10 T	6.032
	50 T	30.985

FIG. 15.13 – Énergie associée à des maillages raffinés localement

15.5 Réalisation de Neumann sur différents domaines

15.5.1 Triangle équilatéral

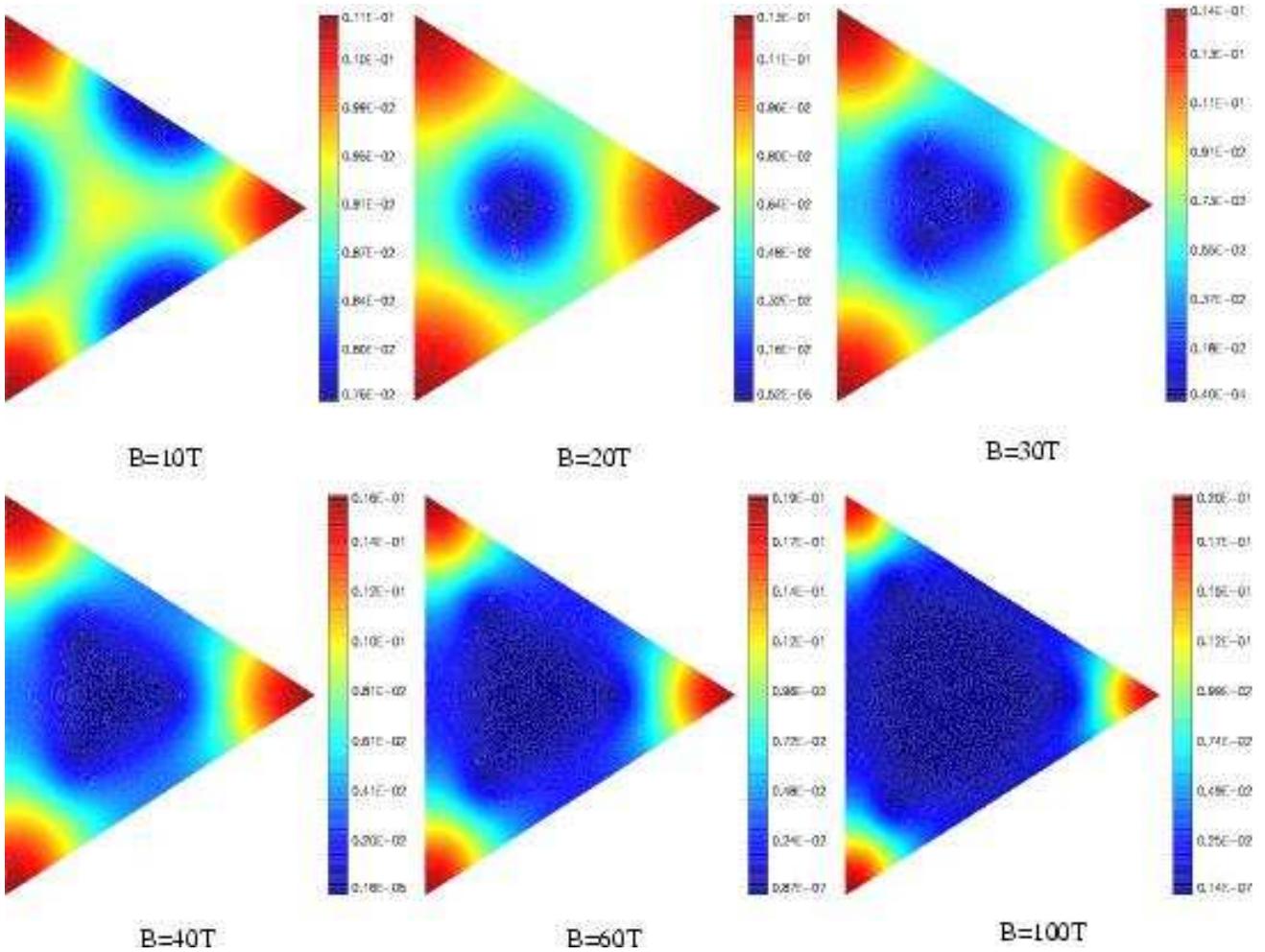


FIG. 15.14 – Modules des états fondamentaux d'un triangle équilatéral pour différents champs magnétiques

15.5.2 Carré

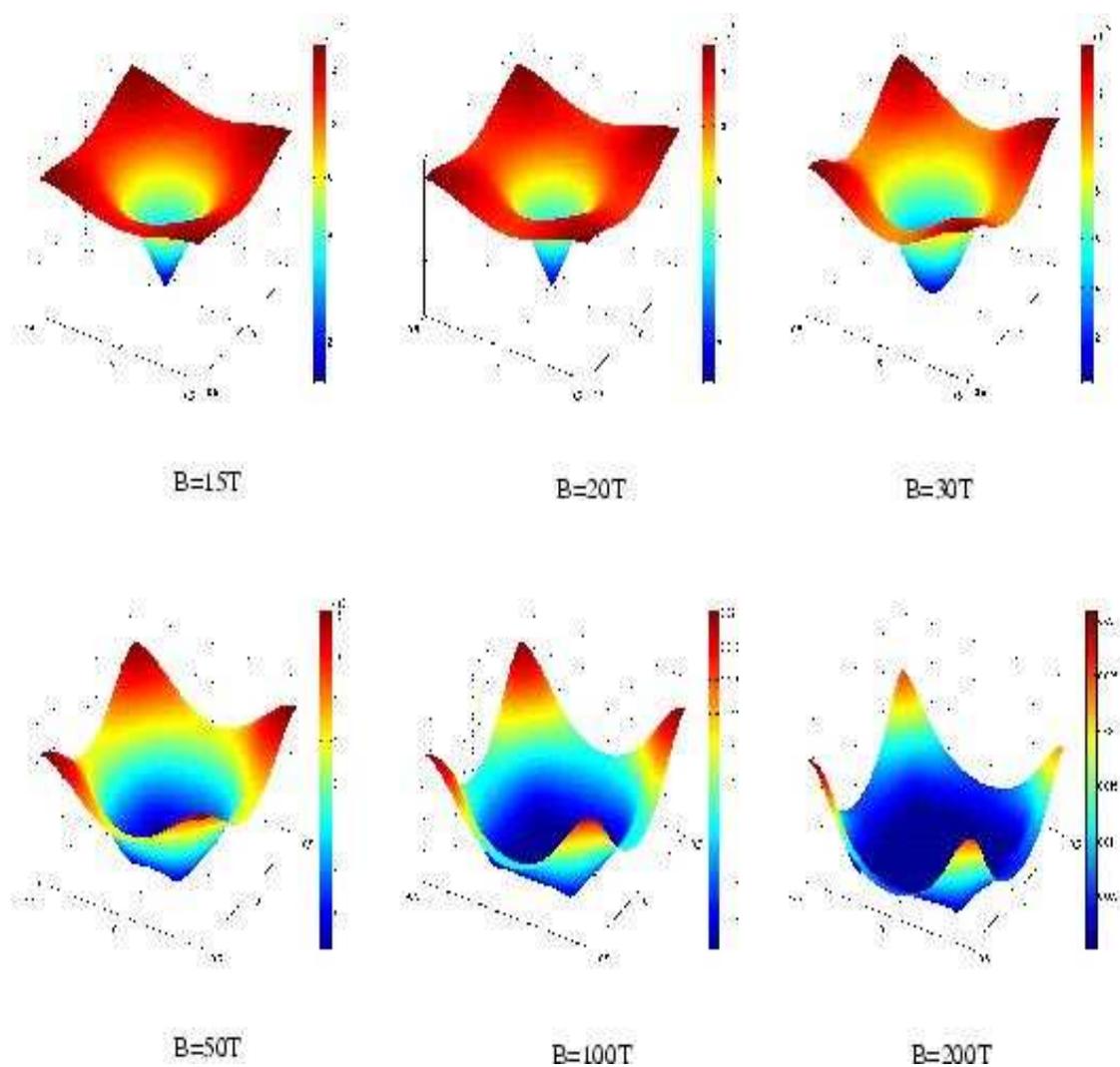


FIG. 15.15 – Modules des états fondamentaux d'un carré pour différents champs magnétiques

15.5.3 Disque

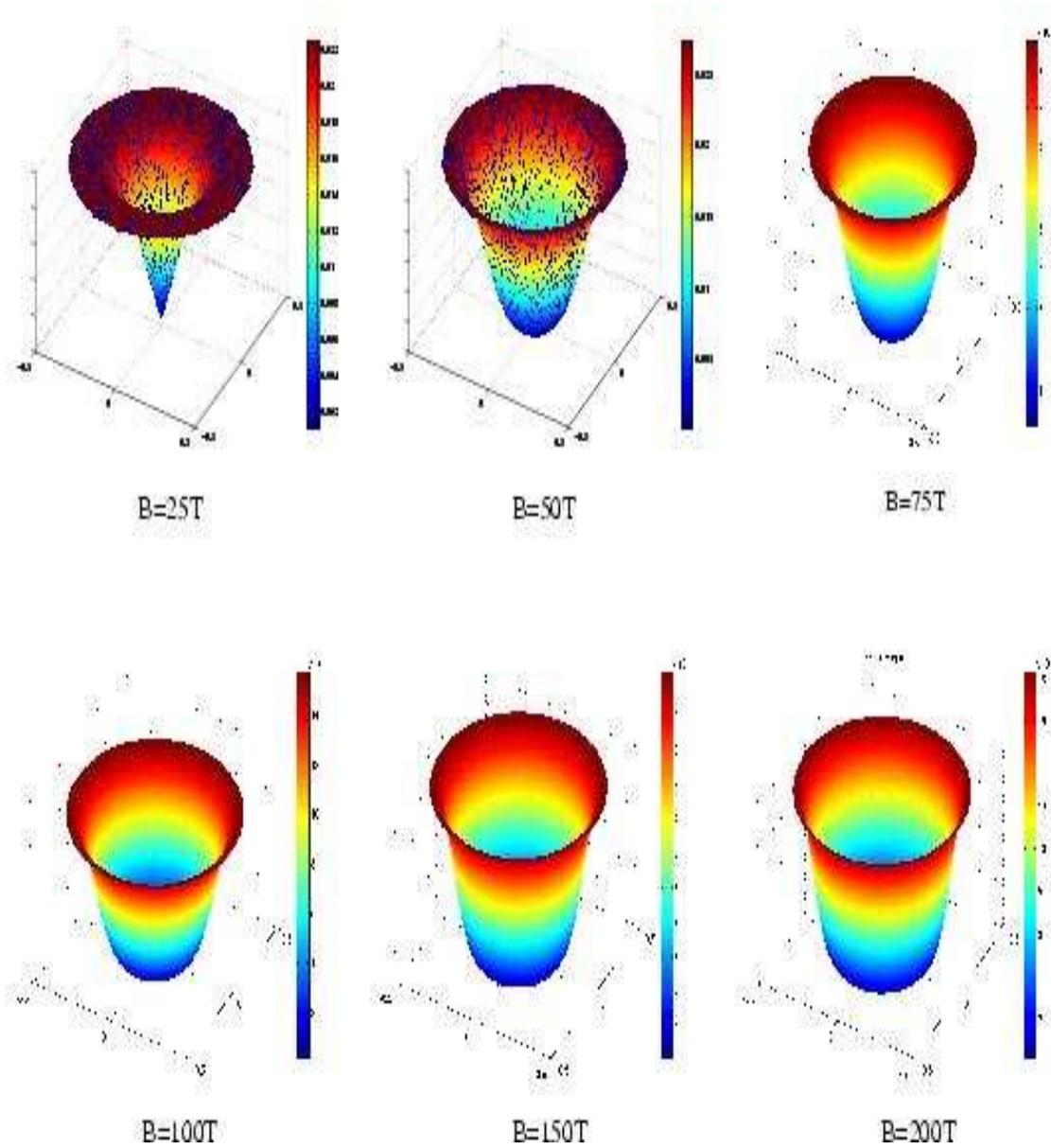


FIG. 15.16 – Modules des états fondamentaux d'un disque pour différents champs magnétiques

15.5.4 Ellipse

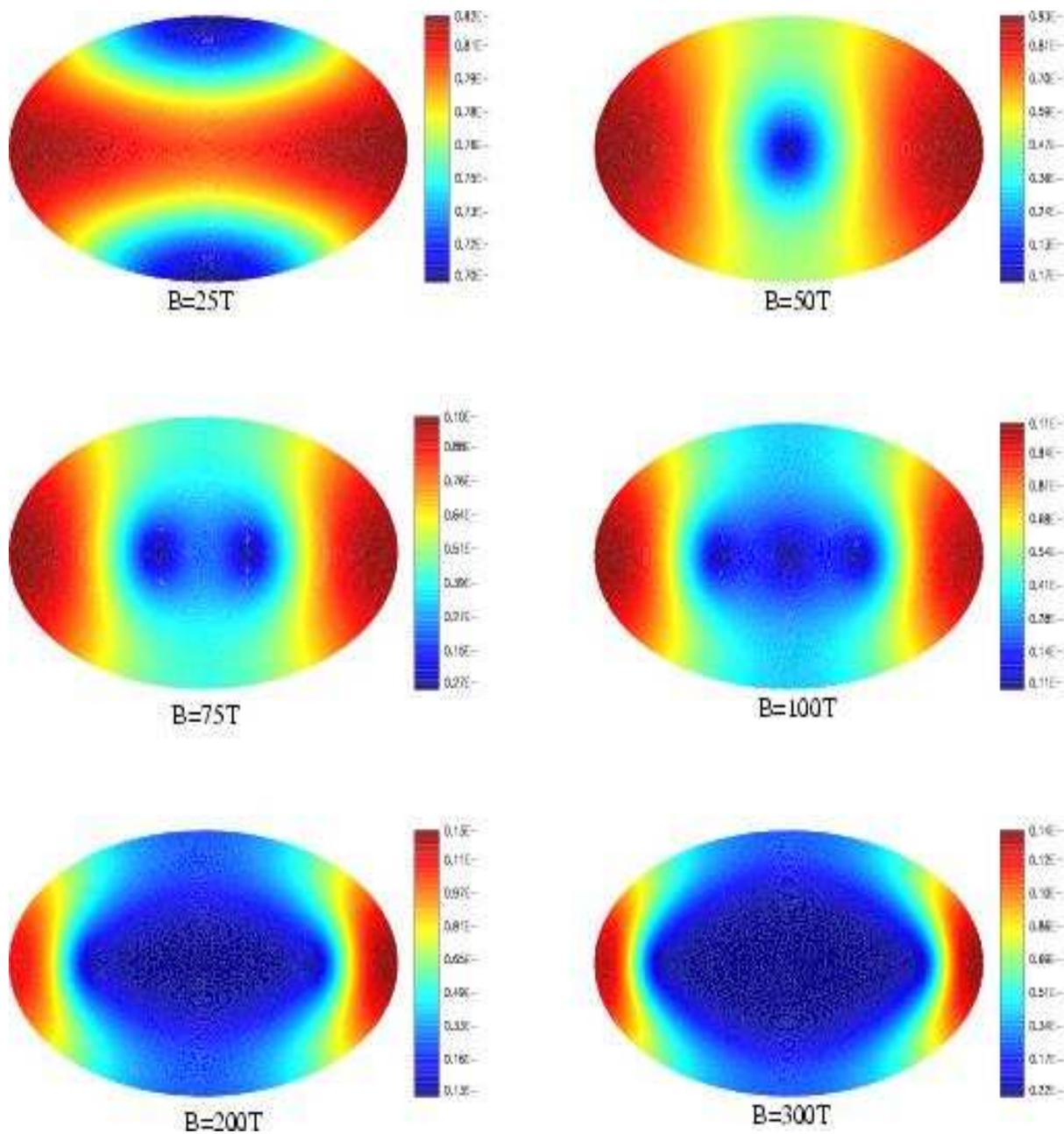


FIG. 15.17 – Modules des états fondamentaux d'une ellipse pour différents champs magnétiques

15.5.5 Pentagone régulier

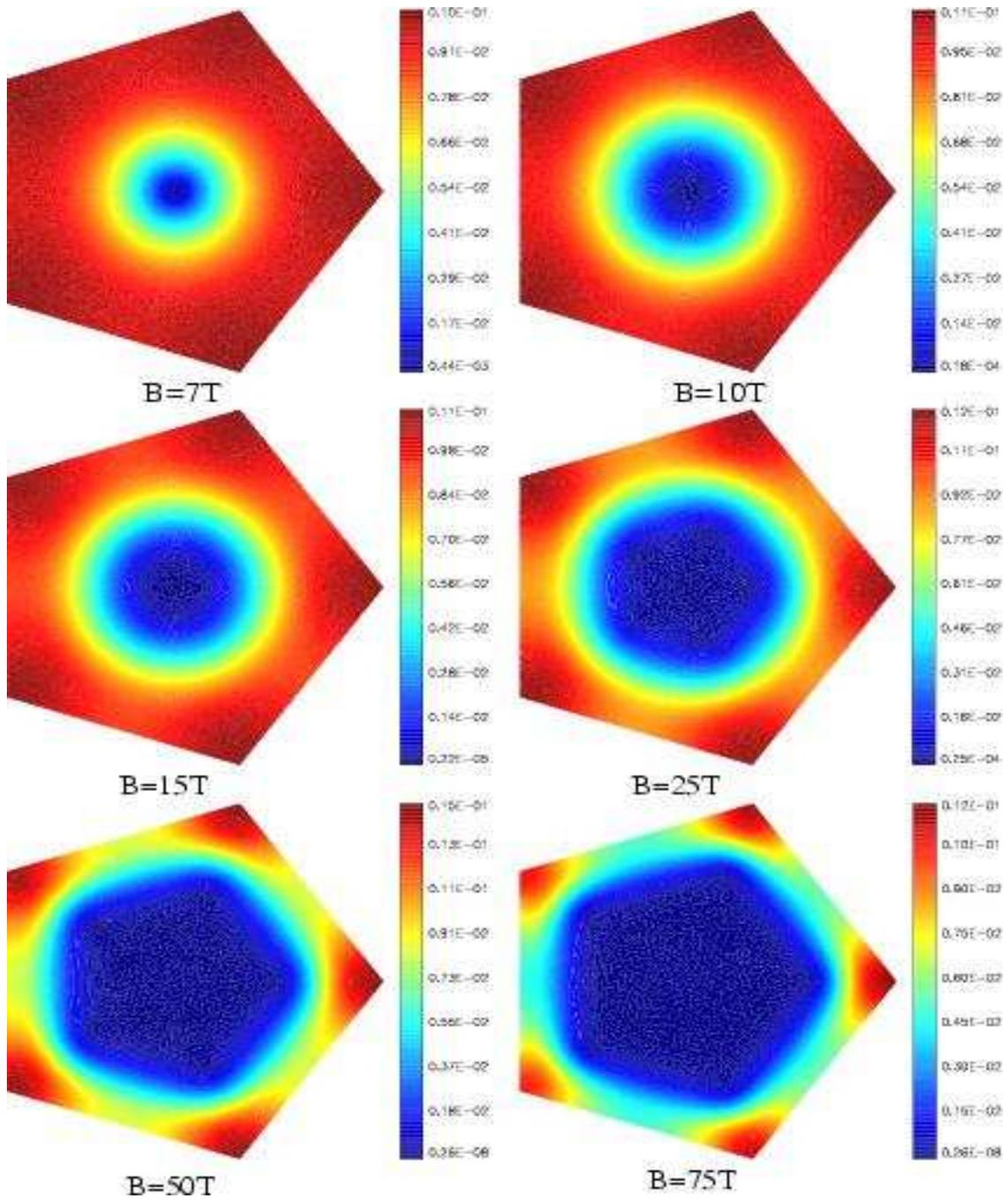


FIG. 15.18 – Modules des états fondamentaux d'un pentagone pour différents champs magnétiques

15.5.6 Hexagone régulier

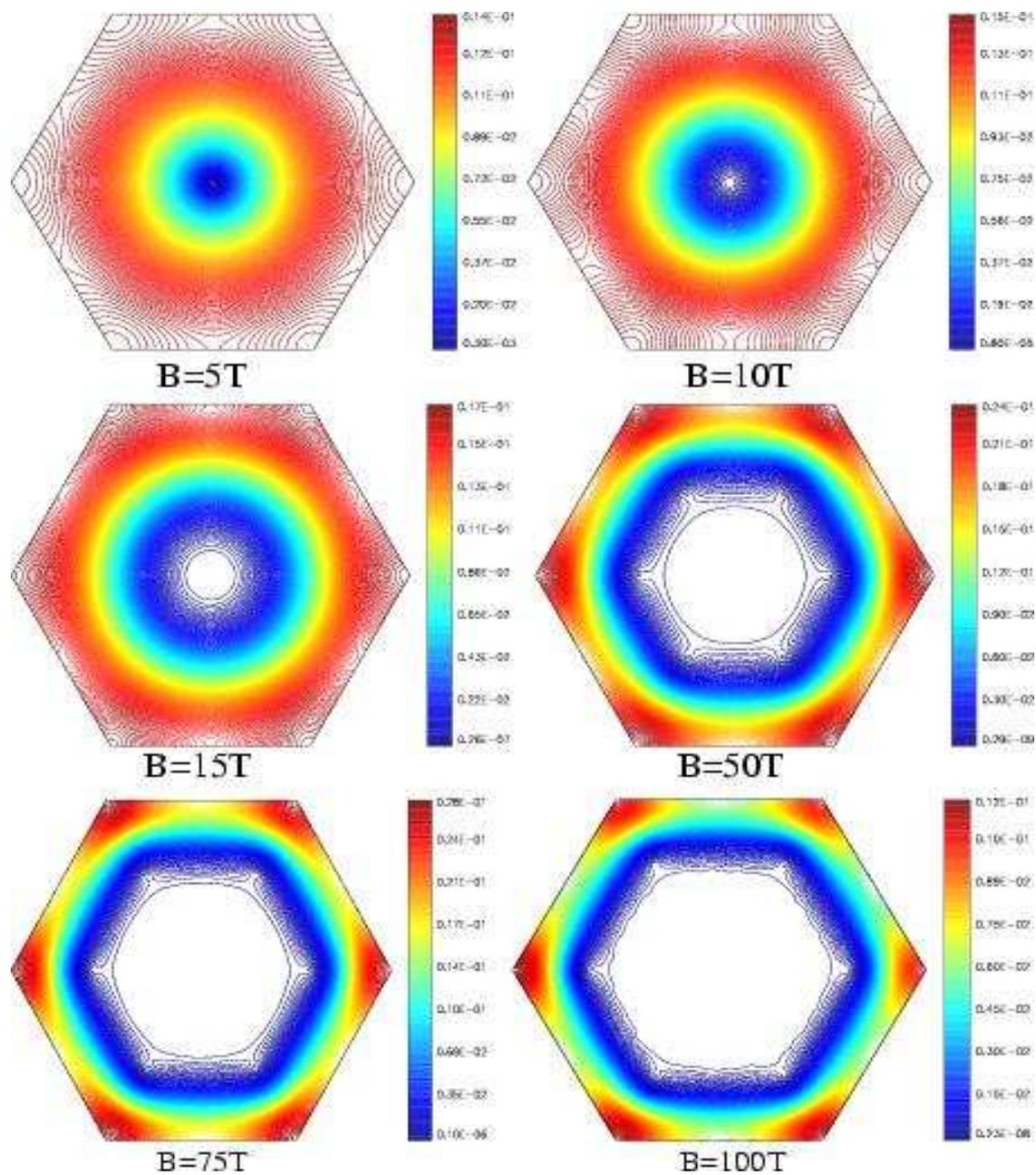


FIG. 15.19 – Modules des états fondamentaux d'un hexagone pour différents champs magnétiques

15.5.7 Octogone régulier

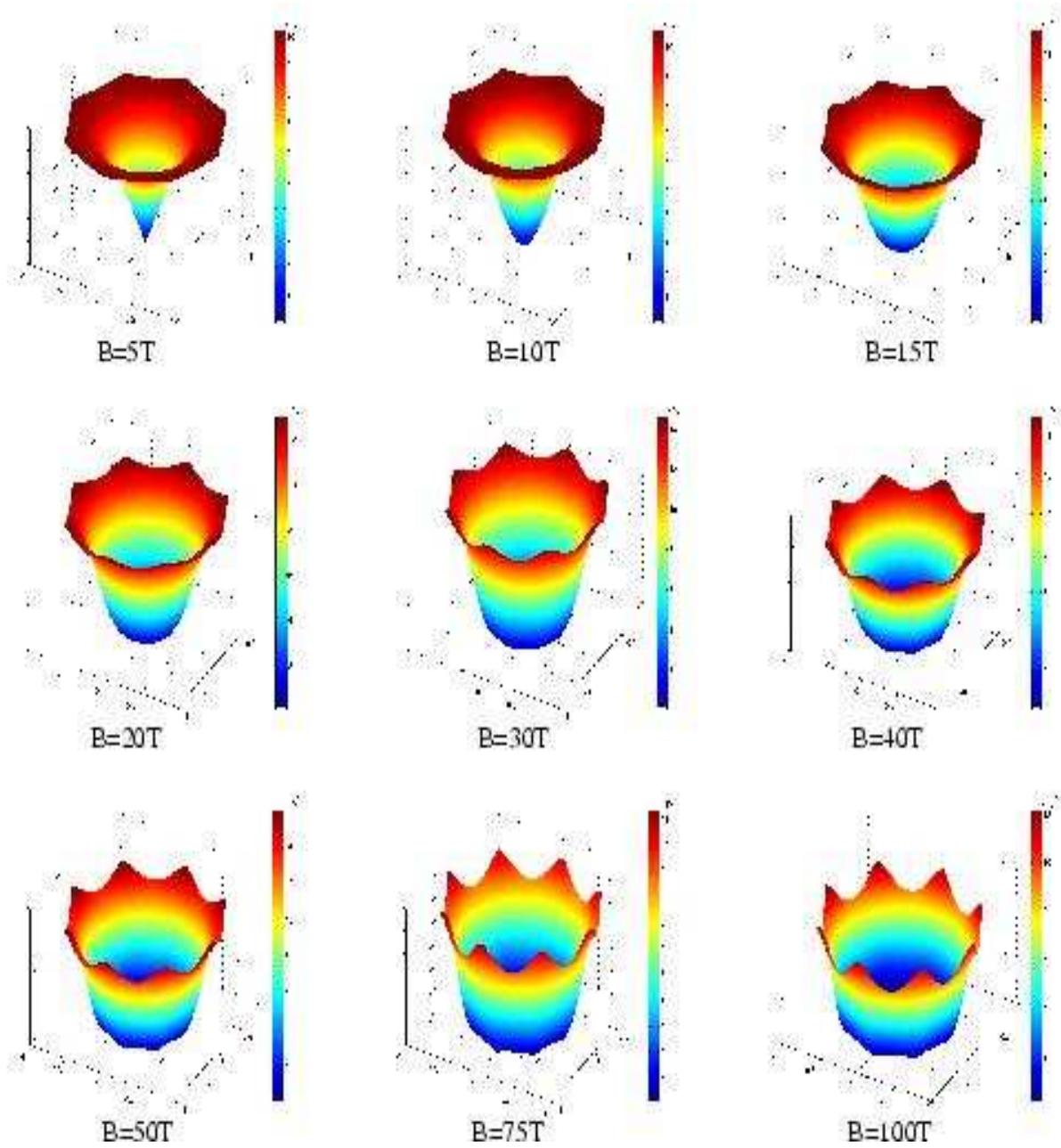


FIG. 15.20 – Modules des états fondamentaux d'un octogone pour différents champs magnétiques

Bibliographie

- [1] R. A. ADAMS *Sobolev Spaces*. New York : Academic Press, 1975.
- [2] A. B. ANDREEV, V. A. KASCIEVA & M. VANMAELE. Some results in lumped mass finite-element approximation of eigenvalue problems using numerical quadrature. *J. Comp. Appl. Math.* 1992; **43** : 291-311.
- [3] I. BABUŠKA & A. K. AZIZ. Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method. In : *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to PDEs* 1972; Ed. A. K. Aziz, 5-343. New York : Academic Press.
- [4] A. BERNOFF & P. STERNBERG. Onset of superconductivity in decreasing fields for general domains. *J. Math. Phys.* 1998; **39** : 235-287
- [5] C. BOLLEY . Modélisation du champ de retard à la condensation d'un supraconducteur par un problème de bifurcation *M²AN* 1992; **26(2)** : 235-287.
- [6] C. BOLLEY & B. HELFFER. An application of semi-classical analysis to the asymptotic study of the supercooling field of a superconducting material. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Theo.* 1993; N2 : 189-233.
- [7] C. BOLLEY & B. HELFFER. Sur les asymptotiques des champs critiques pour l'équation de Ginzburg-Landau. *Semin. Equ. Dériv. Partielles Ec. Polytech. Cent. Math., Palaiseau Semin.* 1993-1994; Exp. **N4** .
- [8] I. BABUŠKA & J. E. OSBORN. Estimates for the errors in eigenvalue and eigenvector approximation by Galerkin methods, with particular attention to the case of multiple eigenvalues. *SIAM J. Numer. Anal.* 1987; **24** : 1249-1276.
- [9] I. BABUŠKA & J. E. OSBORN. Finite element-Galerkin approximation of the eigenvalues and eigenvectors of selfadjoint problems. *Math. Comp.* 1989; **52** : 275-297.
- [10] I. BABUŠKA & J. E. OSBORN. eigenvalue Problems. In : *Handbook of Numerical Analysis, Vol II, Finite Element Methods* (Part1), Eds. P.G. Ciarlet and J. L. Lions, 641-787. Amsterdam : North-Holland, 1991.
- [11] U. BANERJEE & J. E. OSBORN. Estimation of the Effect of Numerical Integration in Finite Element Eigenvalue Approximation. *Numer. Math.* 1991; **56** : 735-362.
- [12] V. BONNAILLIE On the fundamental state for a Schrödinger operator with magnetic field in a domain with corners. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser.* 2003; **2** : 135-140.

- [13] V. BONNAILLIE A posteriori error estimate for the eigenvalue problem associated to the Schrödinger operator with magnetic field. *Soumis* Octobre 2003.
- [14] V. BONNAILLIE Analyse Mathématique de la Supraconductivité dans un Domaine à Coins : Méthodes Semi-Classiques et Numériques. *Thèse soutenue le 11 Décembre 2003, Université Paris XI.*
- [15] M. BRAUN . *Differentiel Equations and Their Applications* New York : Springer-Verlag ; 1993.
- [16] J. H. BRAMBLE & S. R. HILBERT. Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation. *Numer. Math.* 1971 ; **16** : 362-369.
- [17] J. H. BRAMBLE & J. E. OSBORN. Rate of convergence estimates for nonself-adjoint eigenvalue approximations. *Math. Comp.* 1971 ; **27** : 525-549.
- [18] H. BRÉSIS. *Analyse fonctionnelle*. Paris : Masson, 1993.
- [19] F. CHATELIN. *Spectral Approximation of Linear Operators*. New York : Academic Press, 1983
- [20] F. CHATELIN. *Valeurs propres de matrices*. Paris : Masson, 1988.
- [21] P. G. CIARLET. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Amsterdam : North-Holland, 1978.
- [22] P. G. CIARLET & J. L. LIONS. *Handbook of Numerical Analysis, Vol II, Finite Element Methods* (Part1). Amsterdam : North-Holland, 1991.
- [23] P. G. CIARLET & P. A. RAVIART. The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element methods. In : *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to PDEs* 1972 ; Ed. A. K. Aziz, 404-474. New York : Academic Press.
- [24] M. CROUZEIX & A. L. MIGNOT. *Analyse Numérique des Équations Différentielles* . Paris : Masson ; 1992
- [25] R. DAUTRY & J. L. LIONS. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques* (Tome1). Paris : Masson, 1984.
- [26] R. DAUTRY & J.-L. LIONS. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques* (Tome2). Paris : Masson, 1985.
- [27] J. DELSCOUX, N. NASSIF & J. RAPPAZ. On Spectral Approximation. (Part1). The Problem of Convergence. *RAIRO. Numerical Analysis* 1978 ; **12** : 97-112.
- [28] M. DAUGE & B. HELFFER. eigenvalues variation I, Neumann problem for Sturm-Liouville operators. *Journal of Differentiel Equations, Vol. 104* 1993 ; **2** : 243-262.
- [29] P. G. DE GENNES. *Superconductivity of Metals and Alloys*. Benjamin, New York, 1996
- [30] A. ERN & J. L. GUERMOND. *Éléments finis : Théorie, Applications, Mise en Oeuvre*. Berlin : Springer-Verlag ; 2001.

- [31] L. C. EVANS *Partial Differential Equations*, 1998. Graduate Studies in Mathematic, Volume 19. USA : American Mathematical Society.
- [32] M. FEISTAUER & A. ŽENÍŠEK. Finite Element Solution of Nonlinear Elliptic Problems. *Numer. Math.* 1987 ; **50** : 451-475.
- [33] G. J. FIX. Effects of quadrature errors in finite element approximation of steady state, eigenvalue and parabolic problems. In : *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to PDEs* 1972 ; Ed. A. K. Aziz, 525-556. New York : Academic Press.
- [34] G. J. FIX. Eigenvalue approximation by the finite element method. *Advances in Mathematics* 1973 ; **10** : 300-316.
- [35] J. P. GRÉGOIRE, J. C. NEDELEC & J. PLANCHARD. A method of finding the eigenvalues and eigenfunctions of selfadjoint elliptic operators. *Comput. Methods Appl. Engr.*, 1976 ; **8** : 201-214.
- [36] B. HELFFER (D'après Helfer-Morame, Lu-Pan, Helfer-Pan). Bouteilles magnétiques et supraconductivité. *Séminaire EDP de l'école Polytechnique 2000-2001* .
- [37] B. HELFFER & A. MORAME. Semiclassical analysis for the ground state energy of a Schrodinger operator with magnetic wells. *Journal of Functional Analysis Vol. 138* 1996 ; N1 , 40-81.
- [38] B. HELFFER & A. MORAME. Magnetic bottles in connection with superconductivity. *Journal of Functional Analysis Vol. 185* 2001 ; N2 , October 604-680.
- [39] B. HELFFER & A. MORAME. Magnetic bottles for the Neumann problem : curvature effects in the case of dimension 3 (general case). *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* 2004 ; Tome 37 , 105-170.
- [40] B. HELFFER & X. B. PAN. Upper critical field and location of surface nucleation of superconductivity. *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire Vol. 20* 2003 ; N1 , 145-181.
- [41] R. J. HERBOLD, M. H. SCHULTZ & R. S. VARGA. The effect of quadrature errors in the numerical solution of boundary value problems by variational techniques. *Aequationes Math.* 1969 ; 3 , 247-270.
- [42] P. F. HSIEH & Y. SSIBUYA. *Basic Theory of Ordinary Differential Equations* New York : Springer-Verlag ; 1999.
- [43] K. ISHIHARA. Convergence of the finite element method applied to the eigenvalue problem $\Delta u + \lambda u = 0$. *Publ. RIMS Kyoto Univ.* 1977 ; **13** : 47-60.
- [44] A. KIRSCH . *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems* New York : Springer-Verlag ; 1996.
- [45] P. LASCAUX & R. THEODOR. *Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur Tome 1 et 2*. Berlin : Springer-Verlag ; 1987.

- [46] K. LU & X-B. PAN. Estimates of the upper critical field for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. *Physica D* 1999; **127** : 73-104.
- [47] K. LU & X-B. PAN. Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau operator in bounded domains. *Journal of Math. Physics, Vol. 40* 1999; **N6** : 2647-2670.
- [48] K. LU & X-B. PAN. Gauge invariant eigenvalue problems on \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}_+^2 . *Trans. AMS* 2000; **352(3)** : 1247-1276.
- [49] B. MERCIER. *Lecture on Topics in Finite Element Solution of Elliptic Problems*. Paris : Masson ; 1976.
- [50] R. MONTGOMERY . Hearing the zero locus of a magnetic field. *Comm. Math. Physics* 1995; **168** : 651-675.
- [51] J. NECAS. *Les Méthdes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*. Paris : Masson ; 1967.
- [52] X-B. PAN & K-H. KWEK . Schrödinger operators with non-degenerately vanishing magnetic fields in bounded domain. *Trans. AMS* 2000 ; **354(10)** : 4201-4227.
- [53] P. A. RAVIART & J. M. THOMAS. *Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles* . Paris : Masson ; 1983.
- [54] M. REED & B. SIMON *Methods of modern Mathematical Physics, IV : Analysis of operators*. New York : Academic Press ;1978
- [55] L. SAINSAULIEU. *Calcul scientifique* . Paris : Dunob ; 2000.
- [56] D. SAINT-JAMES & P. G. DE GENNES. Onset of superconductivity in decreasing fields. *Phys. Let. 7, 5* (1963) : 306-308
- [57] E. SALTEL & F. HECHT. EMC² Un logiciel d' édition de maillages et de contours bi-dimensionnels. *Programme 6 : Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique* Octobre 1995; Rapport technique **N 118**, INRIA, Rocquencourt.
- [58] G. STRANG. Variational crimes in the finite element methode. *In : The Mathematical Foundations of Finite Element Method with Applications to PDEs*, Ed. A. K. Aziz, 689-710. New York : Academic Press ; 1972.
- [59] G. STRANG & G. J. FIX. *An Analysis of the Finite Element Method* . N. J. : Prentice-Hall, 1973.
- [60] M. VANMAELE. *Contribution to the Theory of Finite Element Methods for Second-Order Elliptic Eigenvalue Problems*. 2001, Academiae Analecta. Paleis der Academiën, Hertogsstraat 1, Brussel.
- [61] M. VANMAELE. On optimal and nearly optimal error estimates of a numerical quadrature finite element method for 2nd-order eigenvalue problems with Dirichlet boundary conditions. *Simon Stevin* 1993; **67** : 121-132.
- [62] M. VANMAELE. A numerical quadrature finite element method for 2nd-order eigenvalue problems with Dirichlet-Robin boundary conditions. *Proceedings ISNA* 1993; **92** : 269-292. Prague.

- [63] M. VANMAELE. On an external finite element method for second-order eigenvalue problems on a concave 2D-domain with Dirichlet boundary conditions. *Applied Mathematics and Computation* 1995; **71** : 211-226.
- [64] M. VANMAELE & R. VAN KEER. On an internal approximation of a class of elliptic eigenvalue problems. *In : Equadiff 7*, Ed. J. Kurzweil. Teubner-Texte zur Mathematik. 1989; **118** : 301-304.
- [65] M. VANMAELE & R. VAN KEER. Error estimates for a finite element method with numerical quadrature for a class of elliptic eigenvalue problems. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai Numerical Methods*. 1990; **59** : 267-282.
- [66] M. VANMAELE & R. VAN KEER. Convergence and error estimates for a finite element method with numerical quadrature for a second order elliptic eigenvalue problem. *International Series of Numerical Mathematics* 1991; **96** : 225-236.
- [67] M. VANMAELE & R. VAN KEER. An operator method for a numerical quadrature finite element approximation for a class of second-order elliptic eigenvalue problems in composite structures. *RAIRO Math. Mod. and Numer. Anal.* 1995; **29** (3) : 339-365.
- [68] M. VANMAELE & R. VAN KEER. On a variational approximation method for a class of elliptic eigenvalue problems in composite structures. *Math. Comp.* 1996; **65** : 999-1017.
- [69] M. VANMAELE & A. ŽENÍŠEK. External finite element approximations of eigenvalue problems. *RAIRO Math. Mod. and Numer. Anal.* 1993; **27** : 565-589.
- [70] M. VANMAELE & A. ŽENÍŠEK External finite element approximations of eigenfunctions in case of multiple eigenvalues problems. *J. Comp. Appl. Math.* 1994; **50** : 51-66.
- [71] M. VANMAELE & A. ŽENÍŠEK The combined effect of numerical integration and approximation of the boundary in the finite element for eigenvalues problems. *Numer. Math.* 1995; **2** : 253-273.
- [72] A. ŽENÍŠEK *Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and Their Finite Element Approximations* . London : Academic Press, 1990.

Résumé

Cette thèse comporte quatre parties. Les deux premières parties concernent le calcul de la première valeur propre de familles d'opérateurs de Neumann en utilisant d'abord une méthode basée sur les différences finies, puis une approximation par une méthode d'éléments finis sans quadrature numérique. Pour le calcul numérique de la plus petite valeur propre, la méthode de la puissance inverse a été implémentée avec factorisation LU de la matrice considérée pour la résolution des systèmes linéaires utilisés.

La troisième partie porte sur un problème de valeurs propres faisant intervenir un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant issu de la théorie de Ginzburg-Landau et concernant la supraconductivité de certains matériaux. Pour la résolution numérique, une méthode basée sur les éléments finis avec intégration numérique est utilisée. Dans cette partie, une évaluation de la partie basse du spectre de la réalisation de Neumann est obtenue. En fait, seule la plus petite valeur propre est importante pour le problème physique. Ensuite, l'existence des solutions du problème variationnel spectral a été établie. Pour le calcul des paires propres, une méthode basée sur les éléments finis a été utilisée. L'étude de la convergence et l'estimation des erreurs pour les paires propres approchées avec quadrature numérique dans le cas où les fonctions propres sont vectorielles, sont semblables à celles obtenues dans le cas où les fonctions propres sont réelles. Dans l'étude de ces estimations, la distinction est faite entre le cas d'une valeur propre exacte simple et le cas d'une valeur propre exacte multiple.

La quatrième partie porte sur la mise en oeuvre de la résolution numérique du problème précédent.

Mots clés : Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant, différences finies, formulation variationnelle vectorielle, éléments finis, quadrature numérique, estimation des erreurs, raffinement de maillage.

Abstract :

The first and second parts are about the computation of the first eigenvalue of families of Neumann operators, with finite elements. The third part concerns an eigenvalue problem for Schrödinger operator with constant magnetic field coming from the Ginzburg-Landau theory on supraconductivity. The numerical computation is based on finite element method with numerical quadrature. The existence of solutions for the variational formulation is studied. The fourth part is about the numerical resolution of the previous problem for several domains with different geometries. They are in agreement with the theory.

Keywords : Schrödinger operator with constant magnetic field, finite differences, weak vectoriel formulation, finite elements, numerical quadrature, error estimates, mesh refinement.