UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS – UFR Sciences
École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en SCIENCES
de l'Université de Nice Sophia Antipolis

Spécialité :

MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue par

Maëlle NODET

Modélisation mathématique et assimilation de données lagrangiennes pour l'océanographie

Thèse dirigée par Jacques BLUM
soutenue le 18 novembre 2005 à 14 heures 30
devant le jury composé de :

M. Jacques BLUM	Université de Nice	Directeur
M. Bruno FERRON	CNRS-IFREMER	Invité
Mme Fabienne GAILLARD	IFREMER	Examinateur
M. François-Xavier LE DIMET	Université de Grenoble 1	Examinateur
M. Jean-Pierre PUEL	Université de Versailles	Examinateur
M. Olivier TALAGRAND	CNRS - LMD	Examinateur
M. Jacques VERRON	CNRS - LEGI	Rapporteur

Laboratoire J.-A. Dieudonné, Parc Valrose, 06108 NICE Cedex 2

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Jacques Blum, pour le sujet passionnant qu'il m'a donné, la grande liberté qu'il m'a laissée, les excellentes conditions matérielles et scientifiques dans lesquelles j'ai travaillé, ainsi que pour ses encouragements et son indéfectible bonne humeur.

Merci à Gilles Lebeau, qui m'a guidée dans l'étude des équations primitives. Ses conseils, ses qualités pédagogiques et sa patience m'ont été très précieux.

Je remercie également l'ensemble des membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir examiner mon travail : Roger Temam et Jacques Verron pour avoir accepté d'être rapporteurs et avoir consacré du temps et de l'énergie à la lecture de mon manuscrit ; Bruno Ferron et Fabienne Gaillard pour avoir accepté d'examiner cette thèse et m'avoir aidée et accueillie à Brest ; Jean-Pierre Puel, François-Xavier Le Dimet et Olivier Talagrand pour avoir accepté de faire partie du jury et pour les discussions fructueuses que nous avons pu mener.

Merci aussi aux océanographes et matheux appliqués de Grenoble et de Brest qui m'ont beaucoup aidée : Bruno Ferron et Céline Robert, pourfendeurs de bugs et fins connaisseurs d'OPA ; Herlé Mercier et Fabienne Gaillard pour leurs suggestions toujours pertinentes et leur accueil à l'IFREMER ; Éric Blayo, François-Xavier Le Dimet, Pierre Brasseur et Jacques Verron pour leur accueil à Grenoble et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Mes remerciements s'adressent aussi à Anthony Weaver, pour la mise à disposition des sources d'OPAVAR et son aide. Je remercie aussi l'IDRIS, centre de calculs grâce auquel j'ai pu effectuer mes expériences numériques ; les divers services offerts (gratuité des heures, efficacité et gentillesse du personnel administratif, disponibilité et compétence de l'assistance) sont tout simplement exceptionnels. Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet IDOPT de l'INRIA Rhône-Alpes et du Groupe Mission Mercator Coriolis, dont je remercie vivement tous les acteurs.

Merci ensuite à tout le personnel administratif du laboratoire Dieudonné : Cécile, Claudine, Fernande, Isabelle DA., Isabelle L. (merci pour le chocolat !), Janine, Jean-Lou (et ses calendriers mythiques), Jean-Paul, Marie-Christine, Marie-Claude (et son efficacité), Philippe (Monsieur Le Directeur) et Stéphanie. Merci aussi à Bernard et Jean-Marc pour leur aide informatique précieuse. Merci également au personnel administratif de l'IFREMER (Gilberte et Bruno), de Mercator (Laetitia) et du LMC (Hélène). Mes remerciements

vont aussi à tous les membres du laboratoire Dieudonné, où ce fut un véritable plaisir de passer trois années, et particulièrement aux enseignants avec lesquels j'ai travaillé (André et Magali).

Un merci spécial à Didier, qui s'est rematérialisé à Toulouse mais qui continue à assurer la hot-line et l'approvisionnement en apéricubes ; ses compétences en tout domaine et sa gentillesse sont à la hauteur de ses BMW. Un autre merci spécial à Fabien et Marie pour leur gentillesse, leur bonne humeur, leur énergie et toutes les petites choses partagées pendant ces trois années. Un grand merci aussi à tous les thésards et ex-thésards, Alexis and family, Guil et Véro, JP, Delphine, Mat3 et tous les autres. Merci aussi à tous ceux qui m'ont aidée et soutenue dans la rédaction de ce manuscrit. Merci également à tous les thésards, enseignants, chercheurs et administratifs qui contribuent ou ont contribué à la bonne ambiance du laboratoire ; un merci particulier à tous ceux qui font ou ont fait partie de l'équipe café.

Je terminerai cette série de remerciements avec une pensée pour tous ceux, proches, amis, parents, que je n'ai pas cités et qui n'ont pas besoin de l'être pour savoir qu'ils comptent pour moi.

Table des matières

1 Introduction **1**
1.1 L'étude de l'océan : enjeux, outils et difficultés 2
1.2 Les équations primitives de l'océan 4
1.3 L'assimilation des données lagrangiennes 7

I Étude des équations primitives de l'océan **11**

2 État de l'art **13**
2.1 Les équations primitives de l'océan 14
2.2 Résultats d'existence, d'unicité et de régularité 17
2.3 Cadre et objectifs de notre travail 20

3 Résultats d'existence et de régularité **25**
3.1 Résultats abstraits et conséquences 26
3.2 Étude de la pression et nouveaux résultats 40

II Assimilation de données lagrangiennes **69**

4 État de l'art **71**
4.1 Introduction 72
4.2 Méthodes d'assimilation de données 73
4.3 Les observations océanographiques 84
4.4 Les données lagrangiennes 88
4.5 Cadre et objectifs de notre travail 90

5 Étude théorique du problème **93**
5.1 Position du problème 94
5.2 Existence de solutions fortes pour les équations primitives non-linéaires . . 97
5.3 Existence d'un contrôle optimal 104
5.4 Obtention formelle des équations primitives adjointes 109

6 Étude numérique : implémentation **113**
6.1 Le code direct 114
6.2 Le code OPAVAR 119
6.3 Assimilation des positions de flotteurs dérivants 123
6.4 Autres opérateurs d'observation implémentés 128

7 Étude numérique : résultats **131**
7.1 Cadre du travail 133
7.2 Validation de la méthode 138
7.3 Étude de la sensibilité aux différents paramètres du réseau des flotteurs . . 153
7.4 Comparaison avec une méthode eulérienne 161
7.5 Assimilation d'observations bruitées 168
7.6 Étude de la complémentarité avec l'assimilation des profils de température 174

8 Conclusions et perspectives **193**

Annexe **197**

Liste des figures **203**

Bibliographie **206**

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1 L'étude de l'océan : enjeux, outils et difficultés 2
1.1.1 Pourquoi étudier l'océan 2
1.1.2 Comment étudier l'océan 3
1.1.3 Difficultés 4
1.2 Les équations primitives de l'océan 4
1.2.1 Historique 5
1.2.2 Résultats obtenus 5
1.3 L'assimilation des données lagrangiennes 7
1.3.1 Historique 7
1.3.2 Étude théorique du problème 7
1.3.3 Étude numérique du problème 8
1.3.4 Résultats numériques obtenus 8

On s'intéresse dans cette thèse à l'océanographie, d'un point de vue théorique d'abord, puis appliqué ensuite. Ce premier chapitre introductif est organisé comme suit. Dans le premier paragraphe, nous présentons le domaine, à savoir l'étude de l'océan. Le paragraphe suivant présente la première partie de notre travail : l'étude théorique des équations primitives de l'océan. Le dernier paragraphe présente la deuxième partie de notre travail : l'assimilation de données lagrangiennes dans un modèle d'océan.

1.1 L'étude de l'océan : enjeux, outils et difficultés

1.1.1 Pourquoi étudier l'océan

L'importance de l'océan dans le système terre.

La place de l'océan dans le système terre est fondamentale. Rappelons pour commencer que l'océan couvre 70% de la surface de la terre et que son volume est d'environ 1 300 millions de kilomètres cube, ce qui représente 97% de l'eau terrestre. Cette gigantesque masse d'eau a une très grande capacité de stockage de chaleur et de matière, comme le carbone ou des sels minéraux.

L'océan joue un rôle fondamental dans l'équilibre climatique de notre planète, en stockant et transportant de l'énergie sous forme de chaleur. En effet, on peut voir la terre comme une immense machine thermique, recevant de l'énergie solaire et dégageant de l'énergie par rayonnement infra-rouge. En un point donné, l'énergie reçue n'équilibre pas forcément l'énergie émise, c'est le cas par exemple aux pôles, où l'énergie reçue est plus faible, ou dans la bande tropicale, où l'énergie reçue est plus importante. Le bilan en un point donné varie aussi avec les saisons, ainsi l'hémisphère d'hiver est déficitaire, tandis que l'hémisphère d'été est bénéficiaire. Les deux fluides atmosphère et océan jouent alors un rôle de régulateurs en transportant l'énergie (sous forme de chaleur) des zones bénéficiaires vers les zones déficitaires. On estime que l'océan et l'atmosphère transportent la même quantité de chaleur, mais ils le font à des échelles de temps bien différentes. Dans l'atmosphère les temps caractéristiques sont de l'ordre de quelques jours. Dans les couches superficielles de l'océan (entre la surface et 1 000 mètres de profondeur) ils sont de l'ordre de quelques années à quelques dizaines d'années ; ils sont de l'ordre du siècle ou du millénaire pour les couches profondes.

L'océan joue aussi un rôle environnemental par sa position majeure dans les cycles de l'eau et du carbone. En effet, les courants océaniques transportent les sels nutritifs (comme les nitrates par exemple) dont se nourrit le phytoplancton, qui stocke du carbone dans ses tissus organiques. Ce stockage du carbone par l'activité biologique du plancton, appelé production primaire océanique, est le premier maillon du cycle de la vie dans l'océan, de lui dépendent toutes les populations animales marines.

Les impacts des conditions océaniques sur l'homme.

L'océan, par son rôle dans le système climatique, a un impact indirect sur l'homme et ses activités qui est essentiel et bien connu. Nous retiendrons ici les impacts et enjeux

plus directs du rôle de l'océan, en distinguant la haute mer et les zones côtières.

De nombreuses activités ont lieu en haute mer et dépendent très fortement des courants et des conditions océaniques et météorologiques. On retiendra d'une part les activités de transport, comme la navigation commerciale, avec en particulier le transport du pétrole, et celle des forces navales. Les plates-formes pétrolières sont elles aussi sensibles aux conditions océaniques. Enfin, les flottes de pêche dépendent des courants, car ce sont eux qui transportent les sels nutritifs et contrôlent ainsi, via le plancton, la taille et la répartition des stocks de poissons.

On estime que plus de la moitié de la population mondiale vit à moins de 30 kilomètres des côtes. Les courants côtiers sont responsables de l'érosion et de l'ensablement du littoral. Ils dispersent aussi les polluants, qu'ils soient permanents, comme des déchets d'usines implantées au bord de la mer ou encore des composés transportés par les fleuves, ou bien accidentels. Comme en haute mer, la production primaire conditionne la pêche côtière. Les zones côtières sont extrêmement sensibles à certains phénomènes climatiques, comme le catastrophique El Niño ou encore les cyclones et tempêtes tropicales. Un dernier point important est la hausse du niveau de la mer et les dangers que cela représente.

1.1.2 Comment étudier l'océan

Les observations

Il existe deux grandes façons complémentaires d'observer l'océan : à distance depuis des satellites, ou sur place (*in situ*) dans des instruments ou engins immergés.

Les satellites mesurent la hauteur de la mer, liée aux courants, et d'autres paramètres de surface, comme la température, le vent, la couleur de l'eau (liée à la production primaire), la couverture des glaces, etc. Ils fournissent des données ayant une excellente couverture spatiale et temporelle. L'arrivée de l'altimétrie satellitaire a été véritablement révolutionnaire pour le domaine, en terme de volume d'information.

Les mesures *in situ* sont effectuées par des navires scientifiques ou commerciaux, des stations d'observation ancrées, des bouées fixes ou dérivantes. Les instruments embarqués mesurent les courants, la température, la salinité, les concentrations en divers traceurs biogéochimiques, etc. L'avantage des systèmes *in situ* est qu'ils observent l'océan sur toute la colonne d'eau, et pas uniquement la surface comme le font les satellites.

La modélisation

Les équations qui régissent le comportement de l'océan sont aujourd'hui suffisamment connues pour donner lieu à des simulations numériques. Grâce à la puissance des moyens de calcul, on peut actuellement représenter l'évolution du climat pendant plusieurs siècles, l'évolution fine du Pacifique Tropical pendant plusieurs années, ou encore le Golfe de Gascogne pendant quelques semaines. Les modèles numériques sont variés et différents selon le problème étudié, que ce soit l'océan global et la machine climatique océan/atmosphère, un bassin océanique particulier, une mer "presque" fermée, ou encore une zone côtière.

Il est désormais possible de coupler les modèles d'océan à des modèles d'atmosphère, de glaces de mer, du cycle du carbone, d'activité biologique, etc.

L'assimilation de données

À la frontière entre les observations et les modèles se trouve l'assimilation de données : c'est l'ensemble des méthodes qui permettent de tirer le meilleur parti de toutes les informations disponibles (contenues dans les modèles et les données) afin d'effectuer des prévisions de l'état de l'océan ou encore de calculer des paramètres mal connus dans les modèles. L'assimilation de données met en jeu des techniques mathématiques d'optimisation et/ou de statistique. Elle permet d'améliorer notre connaissance de l'océan, d'affiner les modèles numériques, et d'anticiper les phénomènes catastrophiques.

1.1.3 Difficultés

Observer l'océan et prévoir son comportement n'est pas si simple. Les difficultés sont de plusieurs ordres.

La première est d'ordre financier. Le coût de tout cela est gigantesque, tant en moyens humains (chercheurs, ingénieurs, techniciens), qu'en matériel (satellites, navires, bouées, instruments de mesure, moyens informatiques). La coopération internationale est nécessaire et doit s'accompagner d'une prise de conscience des enjeux environnementaux et climatiques, qui apparaît sûrement mais lentement.

La deuxième est d'ordre scientifique. Les problèmes liés à l'océan sont extrêmement compliqués, car il s'agit non seulement d'étudier le comportement d'un fluide turbulent mais aussi d'étudier son évolution parmi des centaines d'autres éléments qui interagissent de manière complexe.

1.2 Les équations primitives de l'océan

La première partie de notre travail est l'étude des équations primitives linéaires de l'océan avec terme source peu régulier :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u - \alpha\, v + \partial_x p = f_1 & \text{dans } \Omega\times(0,T) \\ \partial_t v - \nu\Delta v + \alpha\, u + \partial_y p = f_2 & \\ \partial_z p - \beta\,\theta = 0 & \\ \partial_t \theta - \nu\Delta\theta + \gamma\, w = f_3 & \\ w(x,y,z,t) = -\int_0^z \partial_x u(x,y,z',t) + \partial_y v(x,y,z',t)\, dz' & \text{dans } \Omega\times(0,T) \end{cases} \tag{1.1}$$

associées aux conditions aux limites

$$\begin{cases} u, v, w, \theta, p \text{ sont périodiques en } x, y & \\ u = 0, v = 0, \theta = 0 \quad \text{sur } \mathbb{T}^2\times\{z=0, z=a\}\times(0,T) & \\ \int_{z=0}^{a} \partial_x u + \partial_y v\, dz = 0 \quad \text{sur } \mathbb{T}^2\times(0,T) & \end{cases} \tag{1.2}$$

avec les notations suivantes :

- *domaine :* $\Omega = \mathbb{T}^2 \times (0,a)$ est le bassin océanique, $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ est le tore bidimensionnel et a est la profondeur constante, x, y sont les variables horizontales et z est la variable verticale, $(0,T)$ est l'intervalle temporel ;
- *variables :* $U = (u,v)$ est la vitesse horizontale, w la vitesse verticale, p la pression et θ la température ;
- *paramètres physiques :* α est lié au paramètre de Coriolis, β à la gravité et à la densité de référence dans l'océan, γ est un réel positif.

1.2.1 Historique

Pour les équations primitives non linéaires en dimension 3 d'espace, [Lions *et al.*, 1992] puis [Temam et Ziane, 2004] ont établi des résultats d'existence globales de solutions faibles et d'existence locale de solutions fortes. Avec des conditions aux limites plus favorables, [Titi et Cao, 2005] et [Petcu, 2005] obtiennent l'existence globale de solutions fortes. Enfin, en dimension 2, [Temam et Ziane, 2004] et [Petcu, 2005] montrent l'unicité des solutions faibles et l'existence globale et l'unicité des solutions fortes.

Pour les équations linéaires, le problème a été étudié par [Ziane, 1995] et [Hu *et al.*, 2002] avec diverses conditions aux limites ; les auteurs montrent la régularité des solutions faibles lorsque le second membre est de carré intégrable dans Ω.

L'historique du problème est l'objet du chapitre 2, qui présente les équations primitives, les résultats principaux de la littérature sur le sujet et précise le cadre de notre travail.

1.2.2 Résultats obtenus

Nous avons étudié les équations (1.1) avec les conditions aux limites (1.2). Nous montrons le théorème suivant :

Théorème 1.1 *Soit* $\sigma \in]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[$, $\sigma \neq -\frac{1}{2}$ *et soit* $F(t) = (f_1, f_2, f_3) \in (L^2(\mathbb{R}; H^\sigma)^3)$ *avec Support* $(F) \subset \{t \geq 0\}$.
Il existe un unique

$$X(t) = (u, v, \theta) \in (L^2(\mathbb{R}; H^{\sigma+2})^3), \quad \textit{Support } (X) \subset \{t \geq 0\} \tag{1.3}$$

et il existe une pression

$$p(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \Omega), \quad \textit{Support } (p) \subset \{t \geq 0\} \tag{1.4}$$

unique à une distribution du temps près, tels que (1.1,1.2) ont lieu au sens des distributions dans $\mathbb{R} \times \Omega$.
De plus, on a

$$\|X\|_{(L^2(\mathbb{R};H^{\sigma+2}))^3} \leq C \|F\|_{(L^2(\mathbb{R};H^\sigma))^3} \tag{1.5}$$

et la température θ *vérifie*

$$\partial_t \theta \in L^2(\mathbb{R}; H^\sigma) \quad \textit{et} \quad \|\partial_t \theta\|_{L^2(\mathbb{R};H^\sigma)} \leq C \|F\|_{(L^2(\mathbb{R};H^\sigma))^3} \tag{1.6}$$

pour $\sigma \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ *on a*

$$\partial_t X \in (L^2(\mathbb{R};H^\sigma))^3 \quad et \quad \|\partial_t X\|_{(L^2(\mathbb{R};H^\sigma))^3} \leq C\,\|F\|_{(L^2(\mathbb{R};H^\sigma))^3} \tag{1.7}$$

La pression p vérifie

$$p(t,x,y,z) = c(t) + q(t,x,y) + \beta\int_0^z \theta(t,x,y,z')\,dz' \tag{1.8}$$

avec

$$c(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad Support\ (c) \subset \{t \geq 0\} \tag{1.9}$$

et

- *pour* $\sigma \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ *on a*

$$q(t,x,y) \in L^2(\mathbb{R};H^{\sigma+1}(\mathbb{T}^2)) \quad et \quad \|q\|_{L^2(\mathbb{R};H^{\sigma+1}(\mathbb{T}^2))} \leq C\,\|F\|_{(L^2(\mathbb{R};H^\sigma))^3} \tag{1.10}$$

- *pour* $\sigma \in]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}[$ *on a*

$$\begin{gathered} q(t,x,y) = q_1(t,x,y) + q_2(t,x,y) \\ q_2(t,x,y) \in L^2(\mathbb{R};H^{\sigma+1}(\mathbb{T}^2))\ et\ \|q_2\|_{L^2(\mathbb{R};H^{\sigma+1}(\mathbb{T}^2))} \leq C\,\|F\|_{(L^2(\mathbb{R};H^\sigma))^3} \\ q_1(t,x,y) \in H^{\sigma/2+1/4}(\mathbb{R};H^1(\mathbb{T}^2))\ et\ \|q_1\|_{H^{\sigma/2+1/4}(\mathbb{R};H^1(\mathbb{T}^2))} \leq C\,\|F\|_{(L^2(\mathbb{R};H^\sigma))^3} \end{gathered} \tag{1.11}$$

On montre aussi le corollaire suivant

Corollaire 1.1 *Soient* $\varphi(t) \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,T[)$, $F(t) = (f_1,f_2,f_3) \in (L^2(0,T;H^{-1}))^3$, $X_0 \in \mathcal{H}$ *et* (X,p) *l'unique solution de l'équation (1.1) avec*

$$\begin{gathered} X = (u,v,\theta) \in L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap \mathcal{C}([0,T];\mathcal{H}), \quad X(t=0) = X_0 \\ p \in \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)) \end{gathered} \tag{1.12}$$

Alors φp *s'écrit*

$$\varphi p(t,x,y,z) = c(t) + q(t,x,y) + \beta\int_0^z \theta(t,x,y,z')\,dz',\ avec\ c(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \tag{1.13}$$

avec $q(t) \in H^{-1/4}(0,T;H^1(\mathbb{T}^2)$ *et on a l'équivalence suivante*

$$\begin{gathered} q(t) \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^2)) \\ \Updownarrow \\ \Delta_2^{-1}\big[\int_0^a (\partial_t - \nu\Delta)^{-1}[\varphi\partial_x f_1 + \varphi\partial_y f_2]\,dz\big] \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^2)) \end{gathered} \tag{1.14}$$

Les espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ sont les espaces naturels associés à l'étude des équations primitives, il s'agit de l'adhérence dans $L^2(\Omega)$ et dans $H^1(\Omega)$ de l'ensemble des fonctions lisses à support compact dans Ω vérifiant les conditions aux limites (1.2) et la condition intégrale de "divergence nulle" $\int_0^a(\partial_x u + \partial_y v)\,dz = 0$.

L'étude des équations primitives linéaires est l'objet du chapitre 3. Dans la première partie de ce chaptire, nous démontrons quelques résultats abstraits pour l'opérateur associé aux équations primitives linéaires, puis nous en déduisons un résultat d'existence et d'unicité des solutions. Dans la deuxième partie, nous démontrons le théorème 1.1 et son corollaire 1.1.

1.3 L'assimilation des données lagrangiennes

La deuxième partie de notre travail est l'étude d'un problème d'assimilation de données, que l'on peut formuler en ces termes : on suppose connu et parfait le modèle régissant le comportement de l'océan ; on dispose sur une fenêtre temporelle $[0, T]$ d'observations qui sont des données de positions de bouées dérivantes ; on souhaite estimer le meilleur état initial de l'océan, ie celui dont l'évolution sur $[0, T]$ soit la plus concordante possible avec les observations.

1.3.1 Historique

Les données lagrangiennes sont disponibles depuis peu, leur assimilation opérationnelle n'a pas encore commencé. Pour le moment, quelques équipes étudient le problème dans le cadre idéalisé des expériences jumelles. Le concept est le suivant : grâce au modèle on simule l'évolution de l'océan et on choisit un état que l'on appelle *vrai* à un instant donné que l'on appelle $t = 0$. Ensuite, on fait évoluer cet *état vrai* sur $[0, T]$ et on l'observe. On dispose ainsi d'un ensemble de mesures de l'océan *vrai* sur $[0, T]$. Ensuite commence le processus d'assimilation : on suppose maintenant que l'on ne connaît plus l'état vrai, mais que l'on dispose uniquement des équations du modèle et des observations effectuées. On met alors en œuvre une méthode d'assimilation pour reconstruire un état de l'océan appelé *état analysé*. L'efficacité du processus est d'autant meilleure que l'*état analysé* est proche de l'*état vrai*.

La difficulté principale de l'assimilation des données lagrangiennes est que, contrairement aux autres types de données océanographiques, le lien entre les variables observées (ie les positions de particules dérivant dans les courants) et les variables du modèle (ie les vitesses des courants, la température et la salinité) n'est pas linéaire. Les différents travaux effectués jusqu'à maintenant ont tous pour objectif de contourner cette difficulté : [Kamachi et O'Brien, 1995], [Molcard *et al.*, 2003] et [Ozgökmen *et al.*, 2003] transforment les données de positions en données de vitesses ; [Mead, 2005] réécrit son modèle en coordonnées lagrangiennes ; [Ide *et al.*, 2002], [Kuznetsov et Jones, 2003] et [Salman *et al.*, 2005] ajoutent les variables de position dans les variables d'état du problème.

Le contexte et l'historique du problème sont l'objet du chapitre 4. Nous y présentons les différentes méthodes d'assimilation de données, nous décrivons les observations océanographiques et plus particulièrement les données lagrangiennes, nous présentons les méthodes et résultats disponibles dans la littérature et enfin nous précisons le cadre de notre travail.

1.3.2 Étude théorique du problème

Nous formulons l'assimilation des données lagrangiennes comme un problème de contrôle optimal. On appelle X_0 l'état initial de l'océan, c'est notre variable de contrôle. Avec X_0 et le modèle aux équations primtives on calcule l'état de l'océan $X(t)$ pour tout

temps t. On forme alors la fonction coût suivante :

$$\mathcal{J}(X_0) = \int_0^T \|H(X(t)) - Y^o\|^2 \, dt + \|X_0\|^2 \tag{1.15}$$

où Y^o représente les observations, $H(X(t))$ est leur équivalent donné par le modèle (on ne précise pas ici les normes utilisées) ; H est appelé *opérateur d'observation*, il fait le lien entre les variables d'état $X = (u, v, \theta)$ et les variables observées qui sont les positions de particules lagrangiennes. La fonction coût mesure ainsi, au sens des moindres carrés, l'écart entre le modèle issu de X_0 et les données.

Nous montrons que le problème de contrôle optimal admet une solution, ie il existe X_0^* qui vérifie :

$$\mathcal{J}(X_0^*) = \inf_{X_0} \mathcal{J}(X_0) \tag{1.16}$$

L'étude théorique du problème est l'objet du chapitre 5. Après avoir introduit le problème de contrôle optimal, nous montrons un théorème d'existence de solutions fortes pour les équations primitives non linéaires dans un cadre adapté au problème, puis nous prouvons l'existence d'un contrôle optimal et nous terminons en écrivant formellement les équations primitives adjointes associées.

1.3.3 Étude numérique du problème

Toutes les méthodes présentées donnent des résultats satisfaisants, cependant elles ne sont pas exemptes de limitations : dans le premier cas (voir [Molcard *et al.*, 2003] et [Ozgökmen *et al.*, 2003]) les auteurs constatent une dégradation des résultats dès que l'intervalle de temps entre deux positions relevées dépasse deux ou trois jours ; dans les deuxième et troisième cas (voir [Mead, 2005], [Ide *et al.*, 2002], [Kuznetsov et Jones, 2003] et [Salman *et al.*, 2005]) les auteurs utilisent des modèles d'océans relativement simples.

Nous avons choisi d'utiliser une méthode variationnelle, ie découlant de la théorie du contrôle optimal, qui nous permet d'assimiler *directement* et sans modifications préalables les données de positions, dans le modèle réaliste d'océan OPA de [Madec *et al.*, 1999].

Dans le chapitre 6 nous décrivons l'implémentation de cette méthode *variationnelle lagrangienne* dans le système variationnel OPAVAR de [Weaver *et al.*, 2002].

1.3.4 Résultats numériques obtenus

Dans le cadre des expériences jumelles nous avons réalisé de très nombreuses simulations numériques.

Nous avons tout d'abord étudié la sensibilité de notre méthode aux différents paramètres des flotteurs : leur nombre, leur profondeur de dérive, leur distribution horizontale, la période temporelle d'observation des positions. Nous avons mis en évidence l'existence d'une profondeur optimale de dérive, aux alentours de 1 000 mètres ainsi que d'une densité optimale de flotteurs, autour d'un flotteur pour 10 000 km^2. Contrairement

à celle [Molcard *et al.*, 2003] et [Ozgökmen *et al.*, 2003], notre méthode *lagrangienne* est robuste par rapport à l'augmentation de la période temporelle d'échantillonnage des positions et donne encore de bons résultats pour une période de dix jours.

Ensuite nous avons comparé notre méthode *lagrangienne*, à celle plus classique, appelée *eulérienne*, qui consiste à transformer les positions en vitesses : lorsque la période temporelle d'échantillonnage des positions dépasse deux ou trois jours, la méthode *lagrangienne* reste satisfaisante, contrairement à la méthode *eulérienne*.

Ensuite nous avons étudié la sensibilité de notre méthode à d'éventuelles erreurs d'observation : pour une erreur de positionnement de l'ordre de la dizaine de kilomètres (valeur réaliste) les résultats sont quasiment équivalents à ceux obtenus sans erreur.

Enfin, nous avons étudié l'assimilation conjointe des positions des flotteurs avec des profils verticaux de température délivrés à intervalle régulier par ces mêmes flotteurs et nous avons mis en évidence la complémentarité de ces deux types de données.

Les résultats numériques de ces simulations sont présentés et commentés dans le chapitre 7.

Enfin, le chapitre 8 conclut la deuxième partie de cette thèse et propose des perspectives de travail.

Première partie

Étude des équations primitives de l'océan

Chapitre 2

État de l'art

Sommaire

2.1 Les équations primitives de l'océan 14
2.1.1 Modèle physique et hypothèses simplificatrices 14
2.1.1.1 Les lois fondamentales 14
2.1.1.2 Hypothèses et approximations 15
2.1.2 Modèle mathématique 15
2.1.2.1 Domaine 15
2.1.2.2 Conditions aux limites 16
2.1.2.3 Reformulation de la condition de divergence nulle . . 16
2.1.2.4 Espaces fonctionnels 17
2.2 Résultats d'existence, d'unicité et de régularité 17
2.2.1 Résultats de référence pour les équations primitives non linéaires en dimension 3 d'espace 17
2.2.1.1 Existence globale de solutions faibles. 17
2.2.1.2 Existence et unicité locale de solutions fortes. 18
2.2.2 Autres résultats pour les équations non linéaires 18
2.2.3 Équations primitives linéaires 19
2.3 Cadre et objectifs de notre travail 20
2.3.1 Cadre de notre travail 20
2.3.1.1 Domaine et conditions aux limites 20
2.3.1.2 Réécriture des équations 21
2.3.1.3 Équations linéaires étudiées 22
2.3.2 Étude abstraite de l'opérateur des équations primitives 22
2.3.3 Étude des équations primitives linéaires avec un terme source peu régulier 23

Dans ce chapitre, nous présentons et expliquons brièvement la forme des équations primitives de l'océan, telles qu'elles ont été établies par [Lions *et al.*, 1992] à partir des lois fondamentales de la physique. Puis nous effectuons un bref survol des résultats d'existence et de régularité obtenus depuis les années 1990. Enfin, nous décrivons le cadre, les motivations et les objectifs de notre travail.

2.1 Les équations primitives de l'océan

Ce paragraphe présente les lois fondamentales de la physique et les principales hypothèses qui conduisent aux équations primitives de l'océan. On se reportera aux travaux fondateurs de [Lions *et al.*, 1992] et à l'article de synthèse de [Temam et Ziane, 2004]. On précise aussi le cadre mathématique des équations primitives : domaine spatial, conditions aux limites.

2.1.1 Modèle physique et hypothèses simplificatrices

2.1.1.1 Les lois fondamentales

Les lois fondamentales qui régissent le comportement de l'océan sont les suivantes : conservation de la quantité de mouvement, de la masse, de l'énergie, de la salinité et enfin équation d'état liant la densité à la température et à la salinité.

En toute généralité nous devrions écrire les équations sur la sphère, comme le font [Lions *et al.*, 1992]. Cependant, pour simplifier la présentation, et notamment l'écriture des opérateurs différentiels, nous nous placerons dans un bassin océanique "plat", autrement dit nous supposerons que la verticale est une direction constante. Les équations s'écrivent alors

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla p + 2\,\rho\,\vec{\Omega} \times \mathbf{V} + \rho\, g\, \vec{\mathbf{k}} = D_{\mathbf{V}} \\ \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\, \nabla.\mathbf{V} = 0 \\ \dfrac{d\theta}{dt} = D_\theta \\ \dfrac{dS}{dt} = D_S \\ \rho = \rho\,(\theta, S, p) \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\mathbf{V}$ est la vitesse du fluide, p sa pression, ρ sa densité, θ sa température, S sa salinité, les D_* sont des termes de diffusion, $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation de la terre, g la constante de gravitation, $\mathbf{k}$ le vecteur unitaire vertical et $\frac{d}{dt}$ est la dérivée particulaire.

Ces lois modélisent des phénomènes moléculaires et sont ainsi une première approximation, mais elles restent encore trop complexes. Pour pouvoir les étudier et les utiliser, les scientifiques ont effectué un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

2.1.1.2 Hypothèses et approximations

La première approximation que l'on fait est celle de **Boussinesq**, qui suppose que la densité ρ est constante excepté dans le terme de flottabilité (ie dans ρg) et dans l'équation d'état. En utilisant $\frac{d}{dt} = \partial_t + \mathbf{V}.\nabla$ et en distinguant les vitesses horizontales $U = (u, v)$ et verticale w, on obtient les équations dites de Boussinesq pour l'océan :

$$\begin{cases} \partial_t U + (U.\nabla_2)\, U + w\, \partial_z U + \frac{1}{\rho_0}\nabla_2\, p + f\, \vec{\mathbf{k}} \times U = \nu_{\mathbf{V}}\, \Delta_2\, U + \mu_{\mathbf{V}}\, \partial_{zz} U \\ \partial_t w + (U.\nabla_2)\, w + w\, \partial_z w + \frac{1}{\rho_0}\partial_z p + \frac{\rho}{\rho_0}\, g = \nu_{\mathbf{V}}\, \Delta_2\, w + \mu_{\mathbf{V}}\, \partial_{zz} w \\ \nabla_2.U + \partial_z w = 0 \\ \partial_t \theta + (U.\nabla_2)\, \theta + w\, \partial_z \theta = \nu_\theta\, \Delta_2 \theta + \mu_\theta\, \partial_{zz} \theta \\ \partial_t S + (U.\nabla_2)\, S + w\, \partial_z S = \nu_S\, \Delta_2 S + \mu_{\mathbf{S}}\, \partial_{zz} S \\ \rho = \rho_0\, (1 - \beta_\theta\, (\theta - \theta_r) + \beta_S\, (S - S_r)) \end{cases} \tag{2.2}$$

où l'on a explicité les termes de diffusion en distinguant les viscosités verticales ν_* des viscosités horizontales μ_* ; f est le paramètre de Coriolis (variable), ρ_0 est la densité de référence, θ_r et S_r sont les température et salinité de référence.

La deuxième approximation usuelle, qui mène aux équations primitives, est l'hypothèse **hydrostatique** : dans l'équation du mouvement vertical on ne conserve que les termes dominants, à savoir le terme de pression et la force de gravité. Il existe des modèles non hydrostatiques dans lesquels on ne néglige pas les termes en w. Ces modèles sont utilisés pour représenter les mouvements de convection aux abords des zones de formation d'eaux profondes. Mais ces phénomènes sont très localisés et assez lents. Ainsi, pour représenter l'océan à l'échelle du bassin dans la plupart des études, l'approximation hydrostatique est très bonne. On obtient alors les équations suivantes, appelées équations primitives de l'océan :

$$\begin{cases} \partial_t U + (U.\nabla_2)\, U + w\, \partial_z U + \frac{1}{\rho_0}\nabla_2\, p + f\, \vec{\mathbf{k}} \times U - \nu_{\mathbf{V}}\, \Delta_2\, U - \mu_{\mathbf{V}}\, \partial_{zz} U = 0 \\ \partial_z p + \rho\, g = 0 \\ \nabla_2.U + \partial_z w = 0 \\ \partial_t \theta + (U.\nabla_2)\, \theta + w\, \partial_z \theta - \nu_\theta\, \Delta_2 \theta - \mu_\theta\, \partial_{zz} \theta = 0 \\ \partial_t S + (U.\nabla_2)\, S + w\, \partial_z S - \nu_S\, \Delta_2 S - \mu_{\mathbf{S}}\, \partial_{zz} S = 0 \\ \rho = \rho_0\, (1 - \beta_\theta\, (\theta - \theta_r) + \beta_S\, (S - S_r)) \end{cases} \tag{2.3}$$

2.1.2 Modèle mathématique

Dans ce paragraphe, on précise le domaine spatial, les conditions aux limites usuelles, et on introduit les espaces fonctionnels classiques associés aux équations.

2.1.2.1 Domaine

On fait l'hypothèse de **toit rigide** : la surface de l'océan est supposée plane. On suppose aussi que la profondeur de l'océan ne s'annule pas. On représente alors le domaine spatial par

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \Omega_2, -h(x, y) < z < 0\} \tag{2.4}$$

où Ω_2 est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^2$ et h est la profondeur, vérifiant $h \geq h_0$ où h_0 est une constante strictement positive.

On fait aussi l'hypothèse dite du β-**plan** : le paramètre de Coriolis f est supposé affine, de sorte que $f = f_0 + \beta y$.

2.1.2.2 Conditions aux limites

On décompose la frontière du domaine $\Gamma = \partial\Omega$ en $\Gamma_s \cup \Gamma_b \cup \Gamma_l$ où $\Gamma_s = \Omega_2 \times \{0\}$ est la surface de l'océan, $\Gamma_b = \{(x,y) \in \Omega_2, z = -h(x,y)\}$ est le fond et $\Gamma_l = \{(x,y) \in \partial\Omega_2, -h(x,y) \leq z \leq 0\}$ est la frontière latérale.

Dans la littérature, on trouve diverses conditions aux limites.
$\star$ Sur les côtes (Γ_l) :

$$U = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial n_\theta} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial n_S} = 0 \tag{2.5}$$

avec $\frac{\partial}{\partial n_\theta} = \nu_\theta \, \mathbf{n}_H.\nabla + \mu_\theta \, \mathbf{n}_V \partial_z$ où $\mathbf{n}_H$ et $\mathbf{n}_V$ sont les composantes horizontale et verticale de la normale sortante à Γ (de même pour $\frac{\partial}{\partial n_S}$).
Les conditions de Dirichlet pour la vitesse sont dites "no-slip" : elles modélisent l'absence de glissement le long des parois latérales (ie continentales) de l'océan. Les conditions de Neumann pour les traceurs termohalins (ie la température et la salinité) sont dites de flux nulles : les échanges avec les côtes continentales sont négligés.
$\star$ Au fond (Γ_b) :

$$U = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial n_\theta} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial n_S} = 0 \tag{2.6}$$

On trouve aussi, dans le cas où $h(x,y) = h$, $\partial_z U = 0$ ou encore une condition de friction linéaire du type $\partial_z U + \beta_f U = 0$, où β_f est un paramètre donné, qui modélise le frottement au fond de l'océan ; pour θ on trouve aussi $\theta = \theta^b$.
$\star$ À la surface (Γ_s) :

$$\nu_{\mathbf{V}} \, \partial_z U + \alpha_U \, (U - U^a) = \tau_U, \quad w = 0, \quad \nu_\theta \, \partial_z \theta + \alpha_\theta \, (\theta - \theta^a) = 0, \quad \partial_z S = 0 \tag{2.7}$$

où U^a, respectivement θ_a, est la vitesse de l'atmosphère, resp. la température, τ_U est le vent, supposé connu.
La condition pour U est une modélisation de la couche limite obtenue avec la condition plus naturelle $U = U^a$. Cette condition est parfois simplifiée en $\partial_z U = g$ où g est une fonction donnée, ou encore $\partial_z U = 0$. De même pour θ on peut aussi imposer $\theta = \theta^a$.

On se donne aussi des conditions initiales

$$U|_{t=0} = U_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad S|_{t=0} = S_0 \tag{2.8}$$

2.1.2.3 Reformulation de la condition de divergence nulle

Les équations sont habituellement reformulées en utilisant la condition de divergence nulle $\nabla_2.U + \partial_z w = 0$ pour exprimer w en fonction de u et v :

$$w(x,y,z,t) = -\int_0^z \partial_x u(x,y,z',t) + \partial_y v(x,y,z',t) \, dz' \text{ dans } \Omega \times (0,T) \tag{2.9}$$

La condition aux limites $w = 0$ sur Γ_s s'écrit alors

$$\int_{-h}^{0} \partial_x u(x,y,z',t) + \partial_y v(x,y,z',t)\, dz' = 0, \quad \forall (x,y,t) \in \Omega_2 \times (0,T) \tag{2.10}$$

2.1.2.4 Espaces fonctionnels

On décrit brièvement les espaces fonctionnels naturels associés aux équations primitives (2.3). Soit (CL) un ensemble de conditions aux limites associées aux équations primitives (2.3) ; par exemple, (CL) peut être la réunion des conditions (2.5,2.6,2.7) ; on décompose (CL) en $(\mathrm{CL})_U$, $(\mathrm{CL})_\theta$ et $(\mathrm{CL})_S$. À chaque ensemble (CL) on associe les espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{U = (u,v) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)^2, u, v \text{ vérifiant } (\mathrm{CL})_U, \\ &\qquad \textstyle\int_{-h(x,y)}^{0} \partial_x u(x,y,z') + \partial_y v(x,y,z')\, dz' = 0, \forall (x,y) \in \Omega_2\} \\ E_2 &= \{\theta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \theta \text{ vérifiant } (\mathrm{CL})_\theta\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

On définit ensuite H_1 (respectivement H_2) comme adhérences de E_1 (resp. E_2) dans $L^2(\Omega)^2$ (resp. $L^2(\Omega)$), puis V_1 (resp. V_2) comme adhérences de E_1 (resp. E_2) dans $H^1(\Omega)^2$ (resp. $H^1(\Omega)$). On définit enfin $H = H_1 \times H_2$ et $V = V_1 \times V_2$.

2.2 Résultats d'existence, d'unicité et de régularité

Ce paragraphe résume quelques résultats disponibles concernant l'existence, l'unicité et la régularité des solutions des équations primitives. En deux mots : pour les équations primitives en dimension 3 d'espace avec des conditions aux limites "usuelles", on a existence globale de solutions faibles, existence et unicité locale en temps de solutions fortes (voir [Lions *et al.*, 1992], [Temam et Ziane, 2004]) ; avec des conditions aux limites plus favorables, on peut avoir existence globale de solutions fortes (voir [Titi et Cao, 2005], [Petcu, 2005]). En dimension 2, on a de plus l'unicité des solutions faibles (voir [Temam et Ziane, 2004], [Petcu, 2005]).

2.2.1 Résultats de référence pour les équations primitives non linéaires en dimension 3 d'espace

2.2.1.1 Existence globale de solutions faibles.

Une solution faible $X(t) = (U(t), \theta(t))$ de l'équation (2.3) (avec les conditions aux limites spatiales et temporelles choisies) est telle que

$$\begin{cases} X(t) \text{ vérifie la formulation faible de (2.3) et des conditions aux limites} \\ X(t) \in L^\infty(0,t_1;H) \cap L^2(0,t_1;V) \end{cases} \tag{2.12}$$

où $(0,t_1)$ est l'intervalle de temps considéré.
La formulation faible de (2.3) (avec les conditions choisies) est obtenue de manière très classique en intégrant (2.3) contre une fonction test $\widetilde{X} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \cap V$.

Le premier résultat est celui de [Lions *et al.*, 1992], qui prouvent l'existence globale en temps de solutions faibles dans le cadre suivant :

- le domaine physique est un bassin sur la sphère (avec côtes et îles, toutes de frontières régulières) ;
- les équations (2.3) sont adaptées à la sphère ;
- les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{array}{lllll} \text{sur } \Gamma_s : & \partial_z U = C\tau_U\,, & w = 0\,, & \partial_z\theta + \alpha_\theta(\theta - \theta^a) = 0\,, & \partial_z S = 0 \\ \text{sur } \Gamma_b : & U = 0\,, & w = 0\,, & \theta = \theta^b\,, & S = S^b \\ \text{sur } \Gamma_l : & U = 0\,, & w = 0\,, & \frac{\partial\theta}{\partial n} = 0\,, & \frac{\partial S}{\partial n} \end{array} \tag{2.13}$$

- les données aux limites τ_U, θ^a, θ^b et S^b sont supposées très régulières ; la condition initiale X_0 est dans H.

Pour des conditions aux limites plus générales dans un bassin de type (2.4) (et non plus sur la sphère), [Temam et Ziane, 2004] montrent aussi l'existence globale de solutions faibles. Le cadre est alors :

- le domaine physique est de type (2.4), avec les hypothèses de toit rigide et β-plan ;
- les équations (2.3) comportent un terme supplémentaire de forçage $F = (f_1, f_2, f_3)$ dans les équations de u, v et θ ;
- les conditions aux limites sont (2.5,2.6,2.7) ;
- les données aux limites τ_U, U^a, θ^a sont dans $L^2(0, t_1; L^2(\Gamma_s))$, le terme source F est donné dans $L^2(0, t_1; H)$, la condition initiale X_0 est dans H.

2.2.1.2 Existence et unicité locale de solutions fortes.

Dans le même cadre que précédemment, avec quelques hypothèses supplémentaires de régularité pour les données, [Temam et Ziane, 2004] montrent que pour $X_0 \in V$, il existe un temps t_* (dépendant de la norme de X_0 dans V) et une unique solution faible $X(t)$ de (2.3) telle que

$$X(t) \in \mathcal{C}([0, t_*]; V) \cap L^2([0, t_*]; H^2(\Omega)^3) \tag{2.14}$$

2.2.2 Autres résultats pour les équations non linéaires

Conditions aux limites de type Neumann

En imposant des conditions aux limites de type Neumann à la vitesse U au fond et à la surface de l'océan, [Titi et Cao, 2005] montrent l'existence globale et l'unicité de solutions fortes, autrement dit vérifiant (2.14), ainsi que la continuité par rapport aux données. Leur cadre de travail est le suivant :

- le domaine physique est de type (2.4), la profondeur de l'océan $h(x, y) = h$ est constante, les hypothèses de toit rigide et β-plan sont faites ;
- les équations sont (2.3) avec un terme source f_3 supplémentaire dans l'équation de θ ;
- les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{array}{lllll} \text{sur } \Gamma_s : & \partial_z U = 0\,, & w = 0\,, & \partial_z\theta + \alpha_\theta\,\theta = 0 \\ \text{sur } \Gamma_b : & \partial_z U = 0\,, & w = 0\,, & \partial_z\theta = 0 \\ \text{sur } \Gamma_l : & U.n = 0\,, & \frac{\partial U}{\partial n} \times n = 0\,, & \frac{\partial\theta}{\partial n} = 0 \end{array} \tag{2.15}$$

- le terme source f_3 est donné dans $H^1(\Omega)$, la condition initiale X_0 est dans V.

Conditions aux limites périodiques

En imposant des conditions aux limites périodiques dans les trois dimensions, [Petcu, 2005] montre un résultat d'existence locale en temps et d'unicité de solutions fortes et de solutions très régulières (jusqu'à $\mathcal{C}^\infty$).

Cas des données petites

Avec des conditions aux limites de type (5.30), [Guillén-González *et al.*, 2001] montrent un résultat d'existence globale de solutions fortes pour les équations (2.3) sans température, dans le cas où la condition initiale est de norme petite dans $H^1(\Omega)^2$.

Le cas de la dimension 2 d'espace

En dimension 2 d'espace, on a existence globale et unicité des solutions fortes ; et très régulières (jusqu'à $\mathcal{C}^\infty$) dans le cas périodique, voir [Temam et Ziane, 2004] et [Petcu *et al.*, 2004].

2.2.3 Équations primitives linéaires

La régularité du problème stationnaire de type Stokes a été étudiée par [Ziane, 1995], [Hu *et al.*, 2002] (voir aussi l'article de synthèse [Temam et Ziane, 2004]).
Le domaine Ω est de type (2.4) (où h est une fonction strictement positive régulière sur $\overline{\Gamma}_s$) ou bien horizontalement périodique, ie de la forme

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathbb{T}^2, -h(x, y) < z < 0\} \tag{2.16}$$

où $\mathbb{T}^2$ est le tore bidimensionnel.
Les équations considérées sont les suivantes :

$$\begin{cases} -\Delta u + \partial_x p = f_1 \\ -\Delta v + \partial_y p = f_2 \\ \int_{-h(x,y)}^{0} \partial_x u + \partial_y v \, dz = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

où la pression p ne dépend que de x, y.
Les conditions aux limites associées sont diverses :

- [Ziane, 1995] $U = 0$ sur toute la frontière ;
- [Ziane, 1995] U périodique en x, y et $U = 0$ sur $\Gamma_s \cup \Gamma_b$;
- [Ziane, 1995] $U = 0$ sur Γ_l, $\frac{\partial U}{\partial n} = \phi_s$ sur Γ_s et $\frac{\partial U}{\partial n} = \phi_b$ sur Γ_b, où ϕ_s (respectivement ϕ_b) est donné dans $H^{1/2}(\Gamma_s)$ (resp. $H^{1/2}(\Gamma_b)$) ;
- [Hu *et al.*, 2002] $U = 0$ sur $\Gamma_l \cup \Gamma_b$ et $\partial_z U + \alpha_U U = \tau_U$ sur Γ_s, avec $\tau_U \in H_0^1(\Gamma_s)$.

Pour toutes ces conditions aux limites, les auteurs montrent que si $f_i \in L^2(\Omega)$ et si $(U, p) \in H^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)$ est une solution faible de (2.17), alors

$$(U, p) \in H^2(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)^2 \tag{2.18}$$

De plus, [Hu *et al.*, 2002] montrent la continuité par rapport aux données f et τ_U, ainsi que la dépendance des constantes de continuité par rapport à l'épaisseur h du domaine.

2.3 Cadre et objectifs de notre travail

Notre travail est motivé par la remarque suivante : de nombreux problèmes mettant en jeu les équations primitives (par exemple la modélisation océanique, l'assimilation de données liées à la pression de surface, ou de manière plus théorique l'étude de la contrôlabilité des équations primitives) nécessitent le calcul ou l'estimation de la pression. Or, dans les études précédentes, la pression est soit masquée dans la condition de divergence nulle, soit traitée comme un terme source. Notre objectif est d'étudier de plus près la pression et sa régularité. Pour cela nous nous plaçons dans un cadre simple, permettant de faire des calculs explicites.

Remarque 2.1 *Pour l'équation de Stokes, le problème de la régularité de la pression a été traité par [Fabre et Lebeau, 2002]. Ils utilisent pour cela des inégalités de Carleman établies avec des techniques d'opérateurs pseudo-différentiels.*

2.3.1 Cadre de notre travail

2.3.1.1 Domaine et conditions aux limites

Nous considérons un bassin océanique horizontalement périodique et de profondeur verticale constante, soit

$$\Omega = \mathbb{T}^2 \times (0, a) \tag{2.19}$$

où $\mathbb{T}^2$ est le tore en dimension 2, 0 représente le fond et a la surface.
On considèrera aussi le cas $\Omega = \Omega_2 \times (0, a)$, où Ω_2 est un ouvert connexe régulier de $\mathbb{R}^2$, en modifiant les conditions aux limites associées (voir chapitre 3).

On commence par faire les simplifications suivantes :
• Le rôle de la salinité est le même que celui de la température, on supposera donc que ρ ne dépend que de θ, on peut alors oublier l'équation d'évolution de la salinité.
• Pour alléger les notations, on donne la même valeur ν à la viscosité cinématique (verticale et horizontale) et au paramètre de diffusion dans l'équation de la température.
• On suppose que la force de Coriolis est constante $f = -\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On obtient alors les équations non linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u - \alpha\, v + \frac{1}{\rho_0}\,\partial_x p + (U.\nabla_2)\, u + w\,\partial_z u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ \partial_t v - \nu\Delta v + \alpha\, u + \frac{1}{\rho_0}\,\partial_y p + (U.\nabla_2)\, v + w\,\partial_z v = 0 & \\ \partial_z p = -\rho g & \\ \partial_t \theta - \nu\Delta\theta + (U.\nabla_2)\,\theta + w\,\partial_z\theta = 0 & \\ \rho = \rho_0(1 - \beta_\theta(\theta - \theta_r)) & \\ w(x,y,z,t) = -\int_0^z \partial_x u(x,y,z',t) + \partial_y v(x,y,z',t)\, dz' & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ U(t=0) = U_0, \qquad \theta(t=0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.20}$$

Les conditions aux limites considérées sont les suivantes :

$$\begin{cases} u, v, w, \theta, p \text{ sont périodiques en } x, y \\ u = 0, v = 0 \quad \text{sur } \mathbb{T}^2 \times \{z = 0, z = a\} \times (0, T) \\ \theta = \theta_b \quad \text{sur } \mathbb{T}^2 \times \{z = 0\} \times (0, T) \\ \theta = \theta_a \quad \text{sur } \mathbb{T}^2 \times \{z = a\} \times (0, T) \\ \int_{z=0}^{a} \partial_x u(x, y, z, t) + \partial_y v(x, y, z, t)\, dz = 0 \quad \text{sur } \mathbb{T}^2 \times (0, T) \end{cases} \tag{2.21}$$

où θ_b et θ_a sont les conditions aux limites pour θ au fond et à la surface du bassin, supposées constantes et telles que $0 \leq \theta_b \leq \theta_a$.
Nous avons choisi d'utiliser les conditions aux limites de Dirichlet (et non la formulation mixte Dirichlet-Neumann présentée plus haut), car d'une part il s'agit de conditions physiques raisonnables, et d'autre part ceci nous permettra de considérer les équations linéaires avec un terme source peu régulier. En effet, imposer une condition de type Neumann suppose que la dérivée normale est bien définie, ce qui impose un niveau de régularité a priori élevé.

2.3.1.2 Réécriture des équations

On va réécrire l'équation (2.20) avec des conditions aux limites homogènes en θ. Pour cela, on remarque qu'il existe une solution de (2.20) de la forme

$$\begin{array}{l} \widetilde{u} = 0, \quad \widetilde{v} = 0, \quad \widetilde{w} = 0, \quad \widetilde{\theta}(x, y, z) = \theta_b + z\frac{\theta_a - \theta_b}{a} \\ \widetilde{\rho} = \rho_0(1 - \beta_\theta(\widetilde{\theta} - \theta_r)) \quad \partial_z \widetilde{p} = -\widetilde{\rho} g \end{array} \tag{2.22}$$

On écrit alors toute solution $(u^*, v^*, w^*, \theta^*, p^*, \rho^*)$ de (2.20) sous la forme $(\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{w}, \widetilde{\theta}, \widetilde{p}, \widetilde{\rho}) + (u, v, w, \theta, p, \rho)$ où $(u, v, w, \theta, p, \rho)$ vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u - \alpha\, v + \frac{1}{\rho_0}\partial_x p + (U.\nabla_2)\, u + w\, \partial_z u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \partial_t v - \nu\Delta v + \alpha\, u + \frac{1}{\rho_0}\partial_y p + (U.\nabla_2)\, v + w\, \partial_z v = 0 & \\ \partial_z p = \rho_0\, \beta_\theta\, g\, \theta & \\ \partial_t \theta - \nu\Delta\theta + \frac{\theta_a - \theta_b}{a} w + (U.\nabla_2)\, \theta + w\, \partial_z \theta = 0 & \\ w(x, y, z, t) = -\int_0^z \partial_x u(x, y, z', t) + \partial_y v(x, y, z', t)\, dz' & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ U(t = 0) = U_0, \qquad \theta(t = 0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.23}$$

Quitte à diviser p par ρ_0, on peut supposer que $\rho_0 = 1$. En posant

$$\gamma = \frac{\theta_a - \theta_b}{a}, \quad \beta = \beta_\theta g \tag{2.24}$$

on obtient finalement les équations primitives non linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u - \alpha\, v + \partial_x p + (U.\nabla_2)\, u + w\, \partial_z u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \partial_t v - \nu\Delta v + \alpha\, u + \partial_y p + (U.\nabla_2)\, v + w\, \partial_z v = 0 & \\ \partial_z p = \beta\, \theta & \\ \partial_t \theta - \nu\Delta\theta + \gamma\, w + (U.\nabla_2)\, \theta + w\, \partial_z \theta = 0 & \\ w(x, y, z, t) = -\int_0^z \partial_x u(x, y, z', t) + \partial_y v(x, y, z', t)\, dz' & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ U(t = 0) = U_0, \qquad \theta(t = 0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.25}$$

associées aux conditions aux limites

$$\begin{cases} u, v, w, \theta, p \text{ sont périodiques en } x, y \\ u = 0, v = 0, \theta = 0 \quad \text{sur } \mathbb{T}^2 \times \{z = 0, z = a\} \times (0, T) \\ \int_{z=0}^{a} \partial_x u + \partial_y v \, dz = 0 \quad \text{sur } \mathbb{T}^2 \times (0, T) \end{cases} \tag{2.26}$$

2.3.1.3 Équations linéaires étudiées

On étudiera d'une part le modèle linéaire dépendant du temps :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u - \alpha\, v + \partial_x p = f_1 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \partial_t v - \nu \Delta v + \alpha\, u + \partial_y p = f_2 \\ \partial_z p - \beta\, \theta = 0 \\ \partial_t \theta - \nu \Delta \theta + \gamma\, w = f_3 \\ w(x, y, z, t) = -\int_0^z \partial_x u(x, y, z', t) + \partial_y v(x, y, z', t) \, dz' & \text{dans } \Omega \times (0, T) \end{cases} \tag{2.27}$$

où $F = (f_1, f_2, f_3)$ est un terme source donné ; avec les conditions initiales

$$U(t = 0) = U_0, \qquad \theta(t = 0) = \theta_0 \text{ dans } \Omega \tag{2.28}$$

et les conditions aux limites (2.26).

On utilisera aussi le modèle linéaire stationnaire écrit pour l'étude spectrale, avec $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} \lambda u - \nu \Delta u - \alpha\, v + \partial_x p = f_1 & \text{dans } \Omega \\ \lambda v - \nu \Delta v + \alpha\, u + \partial_y p = f_2 \\ \partial_z p - \beta\, \theta = 0 \\ \lambda \theta - \nu \Delta \theta + \gamma\, w = f_3 \\ w(x, y, z) = -\int_0^z \partial_x u(x, y, z') + \partial_y v(x, y, z') \, dz' & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.29}$$

avec les conditions aux limites (2.26) stationnaires :

$$\begin{cases} u, v, w, \theta, p \text{ sont périodiques en } x, y \\ u = 0, v = 0, \theta = 0 \quad \text{sur } \mathbb{T}^2 \times \{z = 0, z = a\} \\ \int_{z=0}^{a} \partial_x u + \partial_y v \, dz = 0 \quad \text{sur } \mathbb{T}^2 \end{cases} \tag{2.30}$$

2.3.2 Étude abstraite de l'opérateur des équations primitives

La première partie de notre travail consiste à étudier les équations primitives linéaires (2.27, 2.26) et (2.29, 2.30), en utilisant une méthode variationnelle classique.
Pour cela, nous commençons par introduire des espaces de type H et V (voir paragraphe 2.1.2.4), puis nous écrivons les équations sous forme d'un opérateur de V dans V'. L'étude de cet opérateur permet d'établir un résultat d'existence et d'unicité des solutions

$$X \in L^2(0, T; V) \cap \mathcal{C}([0, T]; H) \qquad p \in \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)) \tag{2.31}$$

pour les équations (2.27, 2.26) avec terme source F donné dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^3)$ et condition initiale $X_0 \in H$; respectivement

$$X \in V \qquad p \in L^2(\Omega) \tag{2.32}$$

pour les équations (2.29, 2.30)) avec terme source F donné dans $H^{-1}(\Omega)^3$.

La méthode utilisée est classique, puisqu'il s'agit de l'interprétation variationnelle des équations. La pression joue alors un rôle de mutliplicateur pour la contrainte intégrale de type "divergence nulle" $\int_0^a \partial_x u + \partial_y v \, dz = 0$. On est alors confronté aux deux limitations suivantes :

- d'une part la régularité de la pression n'est pas explicitée mais simplement lue dans l'équation ;
- ensuite l'espace "naturel" (avec la méthode variationnelle) du terme source est de type H^{-1} en espace ; la méthode ne permet pas de descendre en régularité.

2.3.3 Étude des équations primitives linéaires avec un terme source peu régulier

La deuxième partie de notre travail consiste à étudier le problème découplé $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\begin{cases} \lambda u - \nu \Delta u + \partial_x p = f_1 & \text{dans } \Omega \\ \lambda v - \nu \Delta v + \partial_y p = f_2 & \\ \partial_z p = 0 & \\ \lambda \theta - \nu \Delta \theta = f_3 & \\ w(x,y,z) = -\int_0^z \partial_x u(x,y,z') + \partial_y v(x,y,z') \, dz' & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.33}$$

avec les conditions aux limites (2.26). En considérant des seconds membres $F \in L^2(0,T;H^s(\Omega))$ avec $s \in]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[$ avec $s \neq -\frac{1}{2}$ on peut utiliser des transformations de Fourier pour calculer *explicitement* la pression. On en déduit un résultat d'existence, d'unicité et de continuité par rapport au second membre pour les équations primitives linéaires dépendant du temps (2.27, 2.26). Dans le cas $s = -1$ on peut affiner les résultats obtenus avec la méthode variationnelle abstraite et préciser la régularité de la pression.

Chapitre 3

Résultats d'existence et de régularité

Sommaire

3.1 Résultats abstraits et conséquences 26
3.1.1 Les espaces $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}'$ 26
3.1.1.1 Définitions. 26
3.1.1.2 L'injection $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H}$. 27
3.1.1.3 Les injections $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \simeq \mathcal{H}' \hookrightarrow \mathcal{V}'$. 28
3.1.1.4 L'espace $\mathcal{V}'$. 29
3.1.2 L'opérateur des équations primitives 30
3.1.2.1 L'opérateur P de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$. 30
3.1.2.2 L'opérateur $\mathcal{P}$ non borné sur $\mathcal{H}$. 33
3.1.3 Etude spectrale qualitative 33
3.1.4 Cas d'évolution : ce que nous dit J.L. Lions 35
3.1.5 Applications aux Equations Primitives linéaires 36
3.2 Étude de la pression et nouveaux résultats 40
3.2.1 Enoncé des résultats 40
3.2.1.1 Notations 40
3.2.1.2 Enoncé du théorème 42
3.2.1.3 Remarques 43
3.2.1.4 Corollaire : problème de Cauchy pour $\sigma = -1$ 43
3.2.2 Preuve du théorème 3.2 44
3.2.2.1 Passage en Fourier en espace 44
3.2.2.2 Passage en Fourier-Laplace en temps 46
3.2.2.3 Quelques résultats préliminaires pour les paramètres . 47
3.2.2.4 Étude du problème découplé 51
3.2.2.5 Étude du problème couplé 56
3.2.2.6 Fin de la preuve 63
3.2.3 Remarques et compléments 65
3.2.3.1 Expression explicite pour la pression 65
3.2.3.2 Preuve du corollaire 3.1 65
3.2.3.3 Contre-exemple aux estimations maximales 65
3.2.3.4 Remarque sur les conditions de type Neumann 67

Dans ce chapitre, on étudie les équations primitives linéaires (2.27) avec les conditions aux limites (2.26) présentées dans le chapitre précédent.

3.1 Résultats abstraits et conséquences

Dans cette partie on aura $\Omega = \mathbb{T}^2 \times (0,a)$ ou $\Omega = \Omega_2 \times (0,a)$, avec Ω_2 un ouvert connexe régulier de $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, les conditions aux limites (2.26) seront remplacées par les conditions de Dirichlet suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = 0, v = 0, \theta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ \int_{z=0}^{a} \partial_x u(x,y,z,t) + \partial_y v(x,y,z,t)\, dz = 0 & \text{sur } \Omega_2 \times (0,T) \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Remarque 3.1 *On n'impose rien pour w sur le bord latéral $\partial\Omega_2 \times (0,a) \times (0,T)$, cf remarque 3.2.*

3.1.1 Les espaces $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}'$

3.1.1.1 Définitions.

Les fonctions que l'on considère sont à valeurs dans $\mathbb{C}$, et on notera $L^2(\Omega)$, respectivement $H_0^1(\Omega)$, l'espace des fonctions à valeurs complexe de carré intégrable sur Ω, respectivement nulles sur le bord de Ω, dont le gradient est intégrable sur Ω. Ce sont des espaces de Hilbert pour les produits scalaires suivants :

$$\begin{array}{l} (\varphi,\psi)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \varphi(x,y,z)\overline{\psi}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\ (\varphi,\psi)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla\varphi(x,y,z).\nabla\overline{\psi}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \end{array} \tag{3.2}$$

Comme pour les équations de Navier-Stokes, on va introduire des espaces de type H_0^1 et L^2 avec une condition supplémentaire de divergence nulle. Cependant, étant donnée la forme des équations primitives, les espaces que l'on utilisera ne font intervenir que u, v et θ, la condition de divergence nulle s'écrit alors un peu différemment et nécessite l'introduction de quelques notations.

Soient $u(x,y,z) \in L^2(\Omega_2 \times (0,a))$, $v(x,y,z) \in L^2(\Omega_2 \times (0,a))$. On définit les moyennes verticales :

$$\underline{u}(x,y) = \int_0^a u(x,y,z)\, dz, \quad \underline{v}(x,y) = \int_0^a v(x,y,z)\, dz \tag{3.3}$$

On a $\underline{u}(x,y), \underline{v}(x,y) \in L^2(\Omega_2)$ et

$$\|\underline{u}\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C\, \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\underline{v}\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.4}$$

Soit $\vec{n}$ la normale (sortante) à $\partial\Omega_2$. On note, comme pour l'étude des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{array}{rcl} L^2(\Omega_2, \mathrm{div}, 0) & = & \{(\underline{u},\underline{v} \in (L^2(\Omega_2))^2, \partial_x\underline{u} + \partial_y\underline{v} = 0, (\underline{u},\underline{v}).\vec{n}|_{\partial\Omega_2} = 0\} \\ H_0^1(\Omega_2, \mathrm{div}) & = & \{(\underline{u},\underline{v} \in (H_0^1(\Omega_2))^2, \partial_x\underline{u} + \partial_y\underline{v} = 0\} \end{array} \tag{3.5}$$

Rappelons (voir [Temam, 1977], [Girault et Raviart, 1979]) que l'espace $H_0^1(\Omega_2, \mathrm{div})$ est dense dans $L^2(\Omega_2, \mathrm{div}, 0)$.
On note $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ les espaces de Hilbert suivants :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} & = & \mathcal{H}_1 \times L^2(\Omega) \\ & = & \{X = (u, v, \theta) \in (L^2(\Omega))^3, (\underline{u}, \underline{v}) \in L^2(\Omega_2, \mathrm{div}, 0)\} \\ \mathcal{V} & = & \mathcal{V}_1 \times H_0^1(\Omega) \\ & = & \{X = (u, v, \theta) \in (H_0^1(\Omega))^3, (\underline{u}, \underline{v}) \in H_0^1(\Omega_2, \mathrm{div})\} \end{array} \tag{3.6}$$

Remarque 3.2 *Soit w la vitesse verticale :*

$$w(x, y, z) = -\int_0^z (\partial_x u(x, y, z') + \partial_y v(x, y, z'))\, dz' \tag{3.7}$$

Pour $(u, v) \in \mathcal{H}_1$, on a $(w, \partial_z w) \in L^2(0, a; H^{-1}(\Omega_2))$ et $w|_{z=0} = w|_{z=a} = 0$.
Pour $(u, v) \in \mathcal{V}_1$, on a $(w, \partial_z w) \in L^2(\Omega)$, et toujours $w|_{z=0} = w|_{z=a} = 0$, mais la trace de w sur le bord latéral de $\Omega_2 \times (0, a)$ n'a pas de sens a priori.

On munit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ des produits scalaires suivants :

$$\begin{array}{rcl} (X, X')_{\mathcal{H}} & = & (u, u')_{L^2(\Omega)} + (v, v')_{L^2(\Omega)} + \frac{\beta}{\gamma}(\theta, \theta')_{L^2(\Omega)} \\ & = & \int_\Omega (u\overline{u'} + v\overline{v'} + \frac{\beta}{\gamma}\theta\overline{\theta'})\, dx\, dy\, dz \\ (X, X')_{\mathcal{V}} & = & (u, u')_{H_0^1(\Omega)} + (v, v')_{H_0^1(\Omega)} + \frac{\beta}{\gamma}(\theta, \theta')_{H_0^1(\Omega)} \\ & = & \int_\Omega (\nabla u.\nabla\overline{u'} + \nabla v.\nabla\overline{v'} + \frac{\beta}{\gamma}\nabla\theta.\nabla\overline{\theta'})\, dx\, dy\, dz \end{array} \tag{3.8}$$

Les espaces $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ munis de ces produits scalaires sont ainsi des espaces de Hilbert, ce sont de plus des sous-espaces fermés de $(L^2(\Omega))^3$ et $(H_0^1(\Omega))^3$.

On notera aussi

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & (L^2(\Omega))^2 & \to & H^{-1}(\Omega_2) \\ & (u, v) & \mapsto & -\mathrm{div}(\underline{u}, \underline{v}) = -\int_0^a (\partial_x u + \partial_y v)\, dz \end{array} \tag{3.9}$$

et $\Psi_1 : (H_0^1(\Omega))^2 \to L^2(\Omega_2)$ la restriction de Ψ à $(H_0^1(\Omega))^2$.
Les applications Ψ et Ψ_1 sont continues.

3.1.1.2 L'injection $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H}$.

On a la proposition suivante :

Proposition 3.1 *L'injection $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H}$ est compacte et dense.*

Preuve. **Compacité.** La compacité est claire : si (X_n) est une suite bornée dans $\mathcal{V}$ elle est bornée dans $(H_0^1(\Omega))^3$ donc converge vers X, après extraction éventuelle d'une sous-suite, dans $(L^2(\Omega))^3$. Comme (X_n) est une suite de $\mathcal{H}$ qui est fermé pour la norme de $(L^2(\Omega))^3$, $X \in \mathcal{H}$ et (X_n) tend vers X pour la norme de $\mathcal{H}$.
Densité. Il s'agit de vérifier la densisté de $\mathcal{V}_1$ dans $\mathcal{H}_1$.
Soit $\phi(z) \in H_0^1(0, a)$ telle que $\int_0^a \phi(z)\, dz = 1$. Pour $f = (u, v) \in \mathcal{H}_1$, on définit

$$\begin{array}{rcl} \underline{f}(x, y) & = & (\underline{u}, \underline{v}) \\ f_0(x, y, z) & = & f(x, y, z) - \phi(z)\underline{f}(x, y) \end{array} \tag{3.10}$$

On a $\underline{f} \in L^2(\Omega_2, \mathrm{div}, 0)$, $\underline{f_0} = 0$ et pour $f \in \mathcal{V}_1$, $\underline{f} \in H_0^1(\Omega_2, \mathrm{div})$ et $f_0 \in (H_0^1(\Omega))^3$.
On a

$$\begin{array}{rcl} \|\phi(z)\underline{f}(x,y)\|_{\mathcal{H}_1} & \leq & C\|f\|_{\mathcal{H}_1} \\ \|\phi(z)\underline{f}(x,y)\|_{\mathcal{V}_1} & \leq & C\|f\|_{\mathcal{V}_1} \end{array} \tag{3.11}$$

Soit $f = f_0 + \phi(z)\underline{f} \in \mathcal{H}_1$ et $\varepsilon > 0$. Comme $H_0^1(\Omega_2, \mathrm{div})$ est dense dans $L^2(\Omega_2, \mathrm{div}, 0)$, il existe $\underline{g^\varepsilon}(x,y) \in H_0^1(\Omega_2, \mathrm{div})$ tel que

$$\|\phi(z)(\underline{f} - \underline{g^\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \tag{3.12}$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il existe $h^\varepsilon(x,y,z) \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\|f_0 - h^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \tag{3.13}$$

On a

$$\underline{h^\varepsilon}(x,y) = \int_0^a h^\varepsilon(x,y,z)\,dz = \int_0^a (h^\varepsilon(x,y,z) - f_0(x,y,z))\,dz \tag{3.14}$$

donc

$$\|\phi(z)\underline{h^\varepsilon}(x,y)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{a}\varepsilon\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.15}$$

Soit $g_0^\varepsilon(x,y,z) = h^\varepsilon(x,y,z) - \phi(z)\underline{h^\varepsilon}(x,y)$. On a $g_0^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $\underline{g_0^\varepsilon} = 0$ et

$$\|f_0 - g_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon(1 + \sqrt{a}\|\phi\|_{L^2(\Omega)}) \tag{3.16}$$

En posant $g^\varepsilon = g_0^\varepsilon + \phi(z)\underline{g^\varepsilon}$ on a $g^\varepsilon \in \mathcal{V}_1$ et

$$\|f - g^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon(2 + \sqrt{a}\|\phi\|_{L^2(\Omega)}) \tag{3.17}$$

ce qui achève la preuve.
□

Remarque 3.3 *On peut alors écrire le schéma suivant :*

$$\begin{array}{ccc} (H_0^1(\Omega))^3 & \overset{i_0}{\hookrightarrow} & (L^2(\Omega))^3 \\ \cap\!\!\uparrow & & \cap\!\!\uparrow \\ \mathcal{V} & \overset{i}{\hookrightarrow} & \mathcal{H} \end{array} \tag{3.18}$$

avec i_0 et i compactes et denses.

3.1.1.3 Les injections $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \simeq \mathcal{H}' \hookrightarrow \mathcal{V}'$.

On peut identifier $\mathcal{H}$ avec son antidual $\mathcal{H}'$ par l'identification de Riesz :
• si $x \in \mathcal{H}$ on lui associe $\underline{x} \in \mathcal{H}'$ défini par

$$\langle \underline{x}, z\rangle_{\mathcal{H}',\mathcal{H}} = (x,z)_{\mathcal{H}}, \forall z \in \mathcal{H}, \tag{3.19}$$

en effet $\underline{x}$ est bien dans $\mathcal{H}'$ car le produit scalaire sur $\mathcal{H}$ est anti-$\mathbb{C}$-linéaire par rapport à la deuxième variable ; de plus, l'application $x \mapsto \underline{x}$ est $\mathbb{C}$-linéaire, car ce produit scalaire

est $\mathbb{C}$-linéaire par rapport à la première variable ;
• réciproquement, si $\underline{y} \in \mathcal{H}'$ on lui associe $y \in \mathcal{H}$ défini par

$$(y,z)_{\mathcal{H}} = \langle \underline{y}, z\rangle_{\mathcal{H}',\mathcal{H}}, \forall z \in \mathcal{H} \tag{3.20}$$

D'après le paragraphe précédent, on peut alors écrire, en notant $\mathcal{V}'$ l'anti-dual de $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{H} \simeq \mathcal{H}' \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{V}'. \tag{3.21}$$

L'injection j est définie de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathcal{H}, \forall z \in \mathcal{V}, \langle j(x), z\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = (x, i(z))_{\mathcal{H}}. \tag{3.22}$$

Pour $x \in \mathcal{H}$, ceci définit bien un élément $j(x)$ de l'antidual de $\mathcal{V}$, car i est $\mathbb{C}$-linéaire et le produit scalaire est anti-$\mathbb{C}$-linéaire en la seconde variable. De plus, l'application j est $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{V}'$.

L'identification de Riesz pour $\mathcal{V}$ s'écrit alors au moyen d'un opérateur A $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ défini par

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad \langle A(x), z\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = (x,z)_{\mathcal{V}}, \quad \forall z \in \mathcal{V} \tag{3.23}$$

3.1.1.4 L'espace $\mathcal{V}'$.

L'espace $\mathcal{V}'$ n'est pas un espace de distributions mais un espace quotient :

$$\begin{gathered} \mathcal{V}' = \mathcal{V}_1' \times H^{-1}(\Omega) \\ \text{avec } \mathcal{V}_1' = (H^{-1}(\Omega))^2)/E \quad \text{ et } E \simeq [L^2(\Omega_2)/\mathbb{C}]' \end{gathered} \tag{3.24}$$

Ceci est un corollaire du lemme suivant :

Lemme 3.1 *On la suite exacte d'espaces de Hilbert suivante :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_1 \xrightarrow{i_1} (H_0^1(\Omega))^2 \xrightarrow{\Psi_1} L^2(\Omega_2)/\mathbb{C} \longrightarrow 0. \tag{3.25}$$

Preuve. On a déjà montré que Ψ_1 est linéaire, continue, de noyau l'image de i_1. Il reste donc à montrer la surjectivité de Ψ_1. Nous allons utiliser la proposition suivante, qui est un résultat analogue pour l'équation de Stokes (voir par exemple [Girault et Raviart, 1979]) :

Proposition 3.2 *L'application suivante*

$$\begin{array}{ccc} (H_0^1(\Omega_2))^2 & \to & \{\phi \in L^2(\Omega_2), \int_{\Omega_2} \phi = 0\} \\ (\widetilde{u}, \widetilde{v}) & \mapsto & \partial_x \widetilde{u} + \partial_y \widetilde{v} \end{array} \tag{3.26}$$

est linéaire, continue et surjective.

Soit maintenant $f \in L^2(\Omega_2)$. On cherche $(u,v) \in (H_0^1(\Omega))^2$ tels que $f = \int_0^a (\partial_x u + \partial_y v)\, dz + C$, où C est une constante. La proposition 3.2 nous donne l'existence de $\widetilde{u}(x,y)$ et $\widetilde{v}(x,y)$ dans $(H_0^1(\Omega_2))^2$, tels que

$$f = \partial_x \widetilde{u} + \partial_y \widetilde{v} + C \tag{3.27}$$

avec $C = \int_{\Omega_2} f$. Soit ensuite $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,a])$ telle que $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$ et $\int_0^a \varphi(z)\,dz = 1$. Posons alors

$$u(x,y,z) = \widetilde{u}(x,y)\varphi(z), \qquad v(x,y,z) = \widetilde{v}(x,y)\varphi(z) \tag{3.28}$$

On vérifie facilement que u et v sont dans $H_0^1(\Omega)$ et que $f = \int_0^a (\partial_x u + \partial_y v)\,dz + C$.
□

En transposant la suite (3.25), on obtient la suite exacte suivante entre espaces de Hilbert :

$$0 \longrightarrow [L^2(\Omega_2)/\mathbb{C}]' \xrightarrow{{}^t\Psi_1} (H^{-1}(\Omega))^2 \xrightarrow{{}^t i_1} \mathcal{V}_1' \longrightarrow 0, \tag{3.29}$$

d'où découle la description (3.24).

Remarque 3.4 *On peut décrire $E = Im({}^t\Psi_1)$ de la manière suivante.*
Soit $\varphi \in (H^{-1}(\Omega))^2$, alors

$$\begin{array}{rcl}
\varphi \in E & \Leftrightarrow & \langle \varphi, X\rangle = 0, \quad \forall X \in \mathcal{V}_1 \\
& \Leftrightarrow & \exists L \in [L^2(\Omega_2)/\mathbb{C}]', \quad \forall X = (u,v) \in (H_0^1(\Omega))^2, \\
& & \langle \varphi, X\rangle = L(\int_0^a \partial_x \overline{u} + \partial_y \overline{v}\,dz) \\
& \Leftrightarrow & \exists p_0 \in L^2(\Omega_2)/\mathbb{C}, \quad \forall X = (u,v) \in (H_0^1(\Omega))^2, \\
& & \langle \varphi, X\rangle \;\; = \int_{\Omega_2} p_0(x,y)(\int_{z=0}^a \partial_x \overline{u} + \partial_y \overline{v}\,dz)\,dx\,dy \\
& & \qquad\quad = \int_\Omega p_0(x,y)(\partial_x \overline{u}(x,y,z) + \partial_y \overline{v}(x,y,z))\,dx\,dy\,dz
\end{array} \tag{3.30}$$

3.1.2 L'opérateur des équations primitives

3.1.2.1 L'opérateur P de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$.

Dans ce paragraphe, on écrit l'opérateur associé à l'équation (2.29) (modèle linéaire pour l'étude spectrale). On n'écrit pour l'instant que des égalités formelles ; le lien entre l'opérateur obtenu et l'équation aux dérivées partielles (2.29) sera justifié dans le paragraphe 3.1.5. Pour obtenir cet opérateur, on multiplie l'équation (2.29) par $\gamma\overline{u'}$, $\gamma\overline{v'}$, $\gamma\overline{w'}$, $\beta\overline{\theta'}$ (où $X' = (u', v', \theta') \in \mathcal{V}$), on ajoute les lignes et on intègre par parties en utilisant les conditions aux limites (3.1). On obtient ainsi formellement :

$$\begin{array}{c}
\mathcal{S}_\lambda(u,v,\theta) = F \\
\Updownarrow \\
\forall X' = (u', v', \theta') \in \mathcal{V}
\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\gamma\lambda(u,u')_{L^2(\Omega)} + \gamma\lambda(v,v')_{L^2(\Omega)} + \beta\lambda(\theta,\theta')_{L^2(\Omega)} \\
\quad +\gamma\nu(\nabla_3 u, \nabla_3 u')_{L^2(\Omega)} + \gamma\nu(\nabla_3 v, \nabla_3 v')_{L^2(\Omega)} + \beta\nu(\nabla_3\theta, \nabla_3\theta')_{L^2(\Omega)} \\
\quad -\alpha\gamma(v,u')_{L^2(\Omega)} + \alpha\gamma(u,v')_{L^2(\Omega)} \\
\quad -\beta\gamma(\theta,w')_{L^2(\Omega)} + \beta\gamma(w,\theta')_{L^2(\Omega)} \\
\quad = \gamma(f_1,u')_{L^2(\Omega)} + \gamma(f_2,v')_{L^2(\Omega)} + \beta(f_3,\theta')_{L^2(\Omega)} \\
\text{avec } w = -\int_0^z \partial_x u + \partial_y v, \quad w' = -\int_0^z \partial_x u' + \partial_y v'
\end{array}\right. \tag{3.31}$$

soit encore, l'équivalence étant toujours formelle :

$$\begin{array}{c}
\mathcal{S}_\lambda(X) = F \\
\Updownarrow \\
\lambda(X,X')_{\mathcal{H}} + \nu(X,X')_{\mathcal{V}} + \beta B(X,X') + \alpha C(X,X') = (F,X')_{\mathcal{H}}, \quad \forall X' \in \mathcal{V}
\end{array} \tag{3.32}$$

où B et C sont définis par

$$\begin{array}{l} B(X,X') = -(\theta,w')_{L^2(\Omega)} + (w,\theta')_{L^2(\Omega)} \\ \quad \text{avec } w = -\int_0^z \partial_x u + \partial_y v, \quad w' = -\int_0^z \partial_x u' + \partial_y v' \\ C(X,X') = -(v,u')_{L^2(\Omega)} + (u,v')_{L^2(\Omega)} \end{array} \tag{3.33}$$

et vérifient

$$\begin{array}{lll} B(X,X) & = \int_\Omega(-\theta\overline{w} + w\overline{\theta}) & = 2i\Im(\int_\Omega w\overline{\theta}) \quad \in i\mathbb{R} \\ C(X,X) & = \int_\Omega(-v\overline{u} + u\overline{v}) & = 2i\Im(\int_\Omega u\overline{v}) \quad \in i\mathbb{R} \end{array} \tag{3.34}$$

On peut ainsi définir un opérateur $P = \nu A + \beta B + \alpha C$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, appelé opérateur des équations primitives, défini par

$$\forall X \in \mathcal{V}, \quad P(X) = \nu A(X) + \beta B(X) + \alpha C(X) \tag{3.35}$$

avec pour tout $(X,X') \in \mathcal{V}$

$$\begin{array}{l} \langle P(X), X'\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \nu(X,X')_{\mathcal{V}} + \beta B(X,X') + \alpha C(X,X') \\ \langle(\lambda+P)(X), X'\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \lambda(X,X')_{\mathcal{H}} + \nu(X,X')_{\mathcal{V}} + \beta B(X,X') + \alpha C(X,X') \end{array} \tag{3.36}$$

Remarque 3.5 *L'opérateur A est associé à l'équation aux dérivées partielles de type Stokes obtenue en faisant $\alpha = \beta = \gamma = 0$ dans (2.29), l'opérateur B est associé au couplage (via les constantes β et γ) entre la vitesse verticale w et la température θ et enfin C est l'opérateur de Coriolis.*

On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.3 *L'opérateur P envoie $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$. De plus, l'application*

$$(X,X') \mapsto \langle P(X), X'\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}$$

est continue sur $\mathcal{V}^2$. Plus précisément on a

$$|\langle P(X), X'\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}| \leq (\nu + 2\frac{a^2}{\pi}\sqrt{\beta\gamma} + \frac{2\alpha a^2}{\pi^2})\|X\|_{\mathcal{V}}\|X'\|_{\mathcal{V}} \tag{3.37}$$

Preuve. Par définition A envoie bien $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$, de plus l'application suivante est clairement continue :

$$\begin{array}{rcl} A : \mathcal{V}\times\mathcal{V} & \to & \mathbb{C} \\ (X,X') & \mapsto & \langle A(X), X'\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = (X,X')_{\mathcal{V}} \end{array} \tag{3.38}$$

De même, B et C envoient $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ et induisent aussi des applications continues sur $\mathcal{V}^2$. En effet, soient $X = (u,v,\theta)$ et $X' = (u',v',\theta')$ dans $\mathcal{V}$, on a

$$\begin{array}{rcl} |B(X,X')| & = & |-(\theta,w')_{L^2(\Omega)} + (w,\theta')_{L^2(\Omega)}| \\ & \leq & \|\theta\|_{L^2(\Omega)}\|w'\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)}\|\theta'\|_{L^2(\Omega)} \\ |C(X,X')| & = & |-(v,u')_{L^2(\Omega)} + (u,v')_{L^2(\Omega)}| \\ & \leq & \|v\|_{L^2(\Omega)}\|u'\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v'\|_{L^2(\Omega)} \end{array} \tag{3.39}$$

On a une inégalité de Poincaré pour u, v, et θ, et plus généralement pour tout $\varphi \in H^1_0(\Omega)$:

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{a^2}{\pi^2}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.40}$$

En particulier, on obtient

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|X\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{a}{\pi}\|X\|_{\mathcal{V}}, \qquad \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\|X\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{a}{\pi}\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\|X\|_{\mathcal{V}} \tag{3.41}$$

Ensuite on a

$$\begin{array}{rcl} \|w\|^2_{L^2(\Omega)} & = & \|\int_0^z \partial_x u + \partial_y v\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & \leq & \int_\Omega (\int_0^z |\partial_x u + \partial_y v|\, dz')^2\, dx\, dy\, dz \\ & \leq & \int_\Omega z(2\int_0^a |\partial_x u|^2 + |\partial_y v|^2\, dz')\, dx\, dy\, dz \\ & \leq & a^2\|X\|^2_{\mathcal{V}} \end{array} \tag{3.42}$$

On obtient finalement

$$\begin{array}{rcl} |B(X,X')| & \leq & \frac{2a^2}{\pi}\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\|X\|_{\mathcal{V}}\|X'\|_{\mathcal{V}} \\ |C(X,X')| & \leq & \frac{2a^2}{\pi^2}\|X\|_{\mathcal{V}}\|X'\|_{\mathcal{V}} \end{array} \tag{3.43}$$

Finalement, B et C donc P envoient bien $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ et que, de plus, l'application $(X,X') \mapsto \langle P(X), X'\rangle$ est continue sur $\mathcal{V}^2$ et on a l'inégalité (3.37).
□

On montre aussi, grâce au théorème de Lax-Milgram, que pour λ bien choisi l'opérateur $\lambda + P$ est inversible :

Proposition 3.4 *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Re(\lambda) > -\frac{\nu\pi^2}{a^2}$. Alors l'opérateur linéaire $\lambda + P$ est continu et bijectif de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$.*

Preuve. La proposition 3.3 nous donne la continuité de $\lambda + P$ et l'estimation suivante :

$$\|\lambda - P\| \leq |\lambda|\frac{a^2}{\pi^2} + \nu + 2\frac{a^2}{\pi}\sqrt{\beta\gamma} + \frac{2\alpha a^2}{\pi^2} \tag{3.44}$$

On va montrer que pour $\Re(\lambda) > -\frac{\nu\pi^2}{a^2}$ l'opérateur $\lambda + P$ est coercitif. En effet, soit $X \in \mathcal{V}$, on a

$$\Re((\lambda + P)(X,X)) = \Re(\lambda)\|X\|^2_{\mathcal{H}} + \nu\|X\|^2_{\mathcal{V}} \tag{3.45}$$

Si $\Re(\lambda) \geq 0$, $\lambda + P$ est bien coercitif, sinon on obtient grâce à (3.41) :

$$\Re(\lambda)\|X\|^2_{\mathcal{H}} \geq \Re(\lambda)\frac{a^2}{\pi^2}\|X\|^2_{\mathcal{V}} \tag{3.46}$$

d'où

$$\Re((\lambda + P)(X,X)) \geq (\Re(\lambda)\frac{a^2}{\pi^2} + \nu)\|X\|^2_{\mathcal{V}} \tag{3.47}$$

avec $\Re(\lambda)\frac{a^2}{\pi^2} + \nu > 0$. Le théorème de Lax-Milgram permet de conclure.
□

3.1.2.2 L'opérateur $\mathcal{P}$ non borné sur $\mathcal{H}$.

On formule cette fois le problème en terme d'opérateur non borné sur $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{P}$ l'opérateur non-borné suivant :

$$\begin{cases} D(\mathcal{P}) &= \{X \in \mathcal{V}, \quad (\nu A + \beta B + \alpha C)(X) \in \mathcal{H}\} \\ \mathcal{P}(X) &= \nu A(X) + \beta B(X) + \alpha C(X), \quad \forall X \in D(\mathcal{P}) \end{cases} \tag{3.48}$$

Avec la proposition (3.4) on montre le résultat suivant :

Proposition 3.5 *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $\Re(\lambda) > -\frac{\nu\pi^2}{a^2}$, alors $\lambda + \mathcal{P}$ est bijectif de $D(\mathcal{P})$ sur $\mathcal{H}$ et son inverse $\mathcal{T} = (\lambda + \mathcal{P})^{-1}$ est compact de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.*

Preuve. Voyons d'abord l'injectivité de $\lambda + \mathcal{P}$. Si $X \in D(\mathcal{P}) \subset \mathcal{V}$ est tel que $(\lambda + \mathcal{P})(X) = 0$ alors la proposition (3.4) nous donne $X = 0$.
Voyons maintenant la surjectivité. Soit $Y \in \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$, la proposition (3.4) nous donne $X \in \mathcal{V}$ tel que $(\lambda + \mathcal{P})(X) = Y$. En particulier $(\lambda + \mathcal{P})(X) \in \mathcal{H}$, donc $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{H}$ et $X \in D(\mathcal{P})$.
Soit enfin $\mathcal{T} = (\lambda + \mathcal{P})^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Alors $\operatorname{Im}\mathcal{T} = D(\mathcal{P}) \subset \mathcal{V} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{H}$ avec i compacte, donc $\mathcal{T}$ est compact, en vertu du lemme suivant.
□

Lemme 3.2 *Soient E et F deux espaces de Banach, avec $F \overset{i}{\hookrightarrow} E$ où l'injection i est compacte. Si $T : E \to E$ linéaire continu est tel que $ImT \subset F$, alors T est un opérateur compact sur E.*

Preuve. L'image de T est contenu dans F donc T se factorise en $T = i \circ S$ avec $S : E \to F$ linéaire. On montre alors avec le théorème du graphe fermé que S est continu, et comme i est compacte, T l'est aussi.
□

3.1.3 Etude spectrale qualitative

Dans ce paragraphe, on montre un résultat concernant la localisation dans $\mathbb{C}$ des valeurs propres de l'opérateur P.
On appelle valeur propre de l'opérateur $-P : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ tout nombre complexe λ tel que $\lambda + P$ est non injectif de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$. On note $\mathbb{V}_P$ l'ensemble des valeurs propres de $-P$:

$$\mathbb{V}_P = \{\lambda \in \mathbb{C},\, \exists X \in \mathcal{V},\, X \neq 0,\, \langle \lambda X + P(X), X' \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = 0\, \forall X' \in \mathcal{V}\} \tag{3.49}$$

Proposition 3.6 *On a l'inclusion suivante :*

$$\mathbb{V}_P \subset \Big\{\lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \leq -\frac{\nu\pi^2}{a^2} \quad et \quad |\Im(\lambda)| \leq 2\alpha + 2a\sqrt{\beta\gamma}\sqrt{-\frac{\Re(\lambda)}{\nu}}\Big\} \tag{3.50}$$

Preuve. Si λ est une valeur propre de $-P$, alors

$$\begin{cases} \exists X \in \mathcal{V}, X \neq 0 \\ \lambda X + \nu A(X) + \beta B(X) + \alpha C(X) = 0 \text{ dans } \mathcal{V}' \end{cases} \tag{3.51}$$

ou encore

$$\begin{cases} \exists X \in \mathcal{V}, X \neq 0 \\ \lambda(X, X')_{\mathcal{H}} + \nu(X, X')_{\mathcal{V}} + \beta B(X, X') + \alpha C(X, X') = 0, \forall X' \in \mathcal{V} \end{cases} \tag{3.52}$$

En faisant $X' = X$ dans l'équation (3.52) et en utilisant (3.34), on obtient

$$\lambda \|X\|^2_{\mathcal{H}} + \nu \|X\|^2_{\mathcal{V}} + 2i\beta \Im(\textstyle\int_\Omega w\overline{\theta}) + 2i\alpha \Im(\int_\Omega u\overline{v}) = 0 \tag{3.53}$$

soit encore

$$\begin{aligned} &\Re(\lambda)\|X\|^2_{\mathcal{H}} + \nu\|X\|^2_{\mathcal{V}} = 0 \\ &\Im(\lambda)\|X\|^2_{\mathcal{H}} + 2\beta\Im(\textstyle\int_\Omega w\overline{\theta}) + 2\alpha\Im(\int_\Omega u\overline{v}) = 0 \end{aligned} \tag{3.54}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré (3.41) $\|X\|^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{a^2}{\pi^2}\|X\|^2_{\mathcal{V}}$, on obtient pour $\Re(\lambda)$:

$$\Re(\lambda) = -\frac{\nu\|X\|^2_{\mathcal{V}}}{\|X\|^2_{\mathcal{H}}} \leq -\frac{\nu\pi^2}{a^2} \tag{3.55}$$

En utilisant les majorations (3.41) et (3.42) on a pour $\Im(\lambda)$:

$$\begin{aligned} |\Im(\lambda)| &= 2\beta|\Im(\textstyle\int_\Omega w\overline{\theta})|/\|X\|^2_{\mathcal{H}} + 2\alpha|\Im(\int_\Omega u\overline{v})|/\|X\|^2_{\mathcal{H}} \\ &\leq 2\beta\|w\|_{L^2(\Omega)}\|\theta\|_{L^2(\Omega)}/\|X\|^2_{\mathcal{H}} + 2\alpha\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}/\|X\|^2_{\mathcal{H}} \\ &\leq 2\beta a\sqrt{\tfrac{\gamma}{\beta}}\|X\|_{\mathcal{V}}\|X\|_{\mathcal{H}}/\|X\|^2_{\mathcal{H}} + 2\alpha\|X\|^2_{\mathcal{H}}/\|X\|^2_{\mathcal{H}} \\ &= 2a\sqrt{\beta\gamma}\|X\|_{\mathcal{V}}/\|X\|_{\mathcal{H}} + 2\alpha \\ &= 2\alpha + 2a\sqrt{\beta\gamma}\sqrt{-\tfrac{\Re(\lambda)}{\nu}} \end{aligned} \tag{3.56}$$

□

On montre aussi le resultat suivant :

Proposition 3.7 *Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{V}_P$, alors $\lambda + P$ est bijectif de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$.*

Preuve. Supposons que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{V}_P$. Si $\Re(\lambda) > -\frac{\nu\pi^2}{a^2}$, la proposition 3.4 assure que $\lambda + P$ est bijectif. Il reste à montrer que $\lambda + P$ est bijectif pour $\lambda \in \mathbb{D}$, avec

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) \leq -\frac{\nu\pi^2}{a^2}\} \setminus \mathbb{V}_P. \tag{3.57}$$

Par définition des valeurs propres, $\lambda + P$ est injectif pour $\lambda \in \mathbb{D}$. Il reste donc à montrer que $\lambda + P$ est surjectif, pour $\lambda \in \mathbb{D}$. Pour cela on va introduire l'inverse de P : la proposition (3.4) nous dit que l'opérateur linéaire continu P est bijectif de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$, donc P^{-1} est linéaire continu et bijectif de $\mathcal{V}'$ sur $\mathcal{V}$. On peut voir $\mathcal{V}$ comme un sous espace de $\mathcal{V}'$ grâce à (3.21) (et non pas par l'indentification de Riesz) :

$$\mathcal{V} \overset{j\circ i}{\hookrightarrow} \mathcal{V}' \quad \text{avec } j \circ i \text{ injection compacte} \tag{3.58}$$

Posons alors

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{V}' & \to & \mathcal{V}' \\ X & \mapsto & TX = P^{-1}(X) \end{array} \tag{3.59}$$

On peut remarquer que $P \circ T = \mathbb{1}_{\mathcal{V}'}$ et $T \circ P = \mathbb{1}_{\mathcal{V}}$.
L'image de T est $\mathcal{V}$, donc d'après (3.58) et le lemme 3.2, T est compact et on a le résultat suivant :

$$\mu \in Sp(T) \setminus \{0\} \Leftrightarrow \mu \in Vp(T) \setminus \{0\} \tag{3.60}$$

où $Sp(T)$ et $Vp(T)$ désignent respectivement le spectre et les valeurs propres de T :

$$\begin{array}{rcl} Sp(T) & = & \{\lambda \in \mathbb{C},\ T - \lambda \text{ est non bijectif } \} \\ Vp(T) & = & \{\lambda \in \mathbb{C},\ T - \lambda \text{ est non injectif } \} \end{array} \tag{3.61}$$

Faisons maintenant le lien entre les valeurs propres de T et celle de P. Soit $\lambda \neq 0$, alors

$$\begin{array}{rcl} -\frac{1}{\lambda} \in Vp(T) & \Leftrightarrow & \exists X \in \mathcal{V}', X \neq 0, \lambda TX + X = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exists X \in \mathcal{V}, X \neq 0, \lambda P^{-1}(X) + X = 0 \\ & \Leftrightarrow & \lambda \in \mathbb{V}_P \end{array} \tag{3.62}$$

On utilise maintenant (3.60) et (3.62) pour conclure :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \in \mathbb{D} & \Rightarrow & \lambda \notin \mathbb{V}_P \\ & \Leftrightarrow & -\frac{1}{\lambda} \in Sp(T) \\ & \Rightarrow & \lambda T + \mathbb{1}_{\mathcal{V}'} = \lambda T + P \circ T = (\lambda + P)T \text{ est surjectif de } \mathcal{V}' \text{ sur } \mathcal{V}' \\ & \Rightarrow & \lambda + P \text{ est surjectif de } \mathcal{V} \text{ sur } \mathcal{V}' \end{array} \tag{3.63}$$

□

3.1.4 Cas d'évolution : ce que nous dit J.L. Lions

Nous allons utiliser le théorème suivant :

Théorème 3.1 *[Lions et Magenes, 1970] Soit H un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $(.,.)_H$ et de la norme $\|.\|_H$. On identifie H et son antidual. Soit V un autre espace de Hilbert de norme $\|.\|_V$, d'antidual V'. On suppose que $V \subset H$ avec injection continue et dense, de sorte que $V \subset H \subset V'$.*
Soit $T > 0$ fixé. Pour presque tout $t \in [0,T]$ on se donne une forme bilinéaire $b(t;u,v)$: $V \times V \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés :

1. *la fonction $t \mapsto b(t;u,v)$ est mesurable $\forall u, v \in V$,*
2. *$|b(t;u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$ pour presque tout $t \in [0,T]$, $\forall u, v \in V$,*
3. *$\Re(b(t;u,u)) \geq \alpha\|u\|_V^2 - C\|u\|_H^2$ pp $t \in [0,T]$,*

où $\alpha > 0$, M et C sont des constantes. Alors, si $f \in L^2(0,T;V')$ et $u_0 \in H$, il existe une unique fonction u telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(0,T;V) \cap \mathcal{C}([0,T];H) \quad et \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0,T;V') \\ \langle \frac{du}{dt}(t), v\rangle + b(t;u(t),v) = \langle f(t), v\rangle \text{ pp } t \in [0,T], \forall v \in V \\ u(0) = u_0 \end{array} \right. \tag{3.64}$$

De ce théorème on déduit la proposition suivante :

Proposition 3.8 *Soient $T > 0$ fixé, $X_0 \in \mathcal{H}$ et $F = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(0,T,\mathcal{V}')$. Alors il existe un unique*

$$X = (u, v, \theta) \in L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap \mathcal{C}([0,T];\mathcal{H}) \quad \text{avec} \quad \frac{dX}{dt} \in L^2(0,T;\mathcal{V}') \tag{3.65}$$

tel que

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} + P(X(t)) = F(t) \text{ dans } \mathcal{V}', \text{ pp } t \in [0,T] \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{3.66}$$

3.1.5 Applications aux Equations Primitives linéaires

Tout d'abord on montre un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation linéaire stationnaire spectrale (2.29) avec les conditions (3.1) :

Proposition 3.9 *Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{V}_P$ et $Y = (y_1, y_2, y_3) \in (H^{-1}(\Omega))^3$ alors il existe un unique $X = (u, v, \theta) \in \mathcal{V}$ et il existe une pression $p(x,y,z) \in L^2(\Omega)$, unique à une constante près, tels que*

$$\begin{cases} \lambda u - \nu\Delta u - \alpha v + \partial_x p = y_1 & \text{dans } \Omega \\ \lambda v - \nu\Delta v + \alpha u + \partial_y p = y_2 & \\ \partial_z p - \beta\theta = 0 & \\ \lambda\theta - \nu\Delta\theta + \gamma w = y_3 & \\ w(x,y,z) = -\int_0^z \partial_x u(x,y,z') + \partial_y v(x,y,z')\, dz' & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.67}$$

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{V}_P$ fixé.
Voyons tout d'abord l'unicité. Si $(X,p) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$ vérifie (3.67) avec $Y = 0$, alors $(\lambda + P)(X) = 0$ dans $\mathcal{V}'$ et $X = 0$. En effet, si on se donne $X' \in \mathcal{V}$, alors on peut multiplier l'équation par $\overline{X'}$ comme dans le paragraphe 3.1.2.1, les intégrations par parties étant alors justifiées. En remplaçant X par 0 dans l'équation (3.67) avec $Y = 0$, il vient $\nabla p = 0$, donc $p = 0$, à une constante près.
Voyons maintenant l'existence. Soit $Y \in (H^{-1}(\Omega))^3$, $Y = (Y_u, Y_v, Y_\theta)$ avec $(Y_u, Y_v) \in \mathcal{V}_1'$ et $Y_\theta \in H^{-1}(\Omega)$. On utilise la suite exacte (3.29) pour définir $Y_{\mathcal{V}'} = ({}^t i_1(Y_u, Y_v), Y_\theta)$. Alors $Y_{\mathcal{V}'} \in \mathcal{V}'$ et on a

$$\langle Y, X' \rangle = \langle Y_{\mathcal{V}'}, X' \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}, \qquad \forall X' \in \mathcal{V} \tag{3.68}$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne la dualité $(H^{-1}(\Omega))^3, (H_0^1(\Omega))^3$. D'après la proposition 3.6, il existe $X \in \mathcal{V}$ tel que $(\lambda + P)(X) = Y_{\mathcal{V}'}$ dans $\mathcal{V}'$, ie :

$$\langle (\lambda + P)(X), X' \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \langle Y, X' \rangle, \quad \forall X' \in \mathcal{V} \tag{3.69}$$

Autrement dit, en utilisant (3.36), on a

$$\lambda(X, X')_{\mathcal{H}} + \nu(X, X')_{\mathcal{V}} + \beta B(X, X') + \alpha C(X, X') = \langle Y, X' \rangle, \quad \forall X' \in \mathcal{V} \tag{3.70}$$

En intégrant par parties et en utilisant les conditions aux limites données par $X' \in \mathcal{V}$, on obtient que (3.70) équivaut à l'équation suivante, pour tout $X' \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda \int_\Omega (u\overline{u'} + v\overline{v'} + \tfrac{\beta}{\gamma}\theta\overline{\theta'}) - \nu \int_\Omega (\Delta u\overline{u'} + \Delta v\overline{v'} + \tfrac{\beta}{\gamma}\Delta\theta\overline{\theta'}) \\
&\quad - \int_\Omega y_1\overline{u'} + y_2\overline{v'} + y_3\tfrac{\beta}{\gamma}\overline{\theta'} + \alpha \int_\Omega (-v\overline{u'} + u\overline{v'}) \\
&\quad + \beta \int_\Omega \Big(\theta\overline{\textstyle\int_0^z \partial_x u' + \partial_y v'} - \overline{\theta'} \int_0^z \partial_x u + \partial_y v \Big) \\
&= \lambda \int_\Omega (u\overline{u'} + v\overline{v'} + \tfrac{\beta}{\gamma}\theta\overline{\theta'}) - \nu \int_\Omega (\Delta u\overline{u'} + \Delta v\overline{v'} + \tfrac{\beta}{\gamma}\Delta\theta\overline{\theta'}) \\
&\quad - \int_\Omega y_1\overline{u'} + y_2\overline{v'} + y_3\tfrac{\beta}{\gamma}\overline{\theta'} + \alpha \int_\Omega (-v\overline{u'} + u\overline{v'}) \\
&\quad + \beta \int_\Omega \big(- (\textstyle\int_0^z \theta)(\partial_x\overline{u'} + \partial_y\overline{v'}) - \overline{\theta'}(\int_0^z \partial_x u + \partial_y v) \big) \\
&= \lambda \int_\Omega (u\overline{u'} + v\overline{v'} + \tfrac{\beta}{\gamma}\theta\overline{\theta'}) - \nu \int_\Omega (\Delta u\overline{u'} + \Delta v\overline{v'} + \tfrac{\beta}{\gamma}\Delta\theta\overline{\theta'}) \\
&\quad - \int_\Omega y_1\overline{u'} + y_2\overline{v'} + y_3\tfrac{\beta}{\gamma}\overline{\theta'} + \alpha \int_\Omega (-v\overline{u'} + u\overline{v'}) \\
&\quad + \beta \int_\Omega \big(\overline{u'}(\textstyle\int_0^z \partial_x\theta) + \overline{v'}(\int_0^z \partial_y\theta) - \overline{\theta'}(\int_0^z \partial_x u + \partial_y v) \big)
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Ceci définit une forme anti-$\mathbb{C}$-linéaire continue sur $(H_0^1(\Omega))^3$ nulle sur $\mathcal{V}$ donc d'après la remarque 3.4 il existe une pression $p_0(x,y) \in L^2(\Omega_2)$ telle que pour tout $X' \in (H_0^1(\Omega))^3$ on a :

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda \int_\Omega (u\overline{u'} + v\overline{v'} + \tfrac{\beta}{\gamma}\theta\overline{\theta'}) - \nu \int_\Omega (\Delta u\overline{u'} + \Delta v\overline{v'} + \tfrac{\beta}{\gamma}\Delta\theta\overline{\theta'}) \\
&\quad - \int_\Omega y_1\overline{u'} + y_2\overline{v'} + y_3\tfrac{\beta}{\gamma}\overline{\theta'} + \alpha \int_\Omega (-v\overline{u'} + u\overline{v'}) \\
&\quad + \beta \int_\Omega \big(\overline{u'}(\textstyle\int_0^z \partial_x\theta) + \overline{v'}(\int_0^z \partial_y\theta) - \overline{\theta'}(\int_0^z \partial_x u + \partial_y v) \big) \\
&\quad - \int_\Omega p_0(x,y)(\partial_x\overline{u'} + \partial_y\overline{v'}) \\
&= \lambda \int_\Omega (u\overline{u'} + v\overline{v'} + \tfrac{\beta}{\gamma}\theta\overline{\theta'}) - \nu \int_\Omega (\Delta u\overline{u'} + \Delta v\overline{v'} + \tfrac{\beta}{\gamma}\Delta\theta\overline{\theta'}) \\
&\quad - \int_\Omega y_1\overline{u'} + y_2\overline{v'} + y_3\tfrac{\beta}{\gamma}\overline{\theta'} + \alpha \int_\Omega (-v\overline{u'} + u\overline{v'}) \\
&\quad + \beta \int_\Omega \big(\overline{u'}(\textstyle\int_0^z \partial_x\theta) + \overline{v'}(\int_0^z \partial_y\theta) - \overline{\theta'}(\int_0^z \partial_x u + \partial_y v) \big) \\
&\quad + \int_\Omega \overline{u'}\partial_x p_0(x,y) + \overline{v'}\partial_y p_0(x,y)
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Comme ceci vaut pour tout $X' \in (H_0^1(\Omega))^3$, on obtient les trois égalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
\lambda u - \nu\Delta u - \alpha v + \partial_x p_0(x,y) + \beta \int_0^z \partial_x\theta &=& y_1 \\
\lambda v - \nu\Delta v + \alpha u + \partial_y p_0(x,y) + \beta \int_0^z \partial_y\theta &=& y_2 \\
\lambda\theta - \nu\Delta\theta - \gamma(\int_0^z \partial_x u + \partial_y v) &=& y_3
\end{array} \right. \tag{3.73}$$

En posant $p = p_0(x,y) + \beta \int_0^z \theta$ et $w = -(\int_0^z \partial_x u + \partial_y v)$ on obtient bien le système (3.67). □

Remarque 3.6 *La construction de p laisse à penser que $p_0(x,y) = p(x,y,0)$ et que 0 joue un rôle particulier, ce qui n'est pas le cas. En effet, dans l'équation (3.71) on effectue une intégration par parties pour calculer $\int_{\Omega_2} \int_0^a \theta(z)\overline{w}(z)\,dz\,dx\,dy$. Pour cela on a introduit la primitive de $\theta(z)$ égale à $\int_0^z \theta(z')\,dz'$. On pourrait aussi choisir la primitive $\int_{z_0}^z \theta(z')\,dz'$, et le calcul s'écrirait alors :*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \theta(z)\overline{w'}(z)\,dz\,dx\,dy &= -\int_\Omega (\textstyle\int_{z_0}^z \theta(z')\,dz')\partial_z\overline{w'}\,dz\,dx\,dy \\
&= -\int_\Omega (\textstyle\int_{z_0}^z \theta(z')\,dz')(\partial_x\overline{u'} + \partial_y\overline{v'})\,dz\,dx\,dy \\
&= \int_\Omega (\textstyle\int_{z_0}^z \partial_x\theta(z')\,dz')\overline{u'} + (\int_{z_0}^z \partial_y\theta(z')\,dz')\overline{v'}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

et p serait alors donnée par

$$p = p_0(x,y) + \beta \int_{z_0}^z \theta(z')\,dz' \tag{3.75}$$

soit dans ce cas $p_0(x,y) = p(x,y,z_0)$.

De la même façon, on montre un résultat pour l'équation linéaire d'évolution (2.27) et les conditions (3.1) :

Proposition 3.10 *Soient $T > 0$ fixé, $X_0 \in \mathcal{H}$ et $F = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(0,T,(H^{-1}(\Omega))^3)$. Alors il existe un unique*

$$X = (u, v, \theta) \in L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap \mathcal{C}([0,T];\mathcal{H}) \tag{3.76}$$

et il existe une pression

$$p \in \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.77}$$

unique à une distribution du temps près, tels que l'équation suivante a lieu au sens des distributions dans $\Omega \times (0,T)$:

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u - \alpha v + \partial_x p = f_1 \\ \partial_t v - \nu\Delta v + \alpha u + \partial_y p = f_2 \\ \partial_z p - \beta\theta = 0 \\ \partial_t \theta - \nu\Delta\theta + \gamma w = f_3 \\ \quad avec\ w(z) = -\int_0^z \partial_x u(z') + \partial_y v(z')\, dz' \end{cases} \tag{3.78}$$

et

$$(u, v, \theta)|_{t=0} = X_0 \tag{3.79}$$

Remarque 3.7 *La dérivee $\frac{dX}{dt}$ est dans $H^{-1}(0,T,(H_0^1(\Omega))^3)$ et l'équation (3.78) nous donne en particulier*

$$\nabla p \in L^2(0,T,(H^{-1}(\Omega))^3) + H^{-1}(0,T,(H_0^1(\Omega))^3) \tag{3.80}$$

Preuve. Pour alléger les notations, on notera les espaces de fonctions dépendant seulement de t sous la forme X_t au lieu de $X(0,T)$ (exemple L^2_t pour $L^2(0,T)$), les espaces de fonctions définies sur Ω du type $(X(\Omega))^3$ seront abrégés en X (exemple L^2 pour $(L^2(\Omega))^3$)) et enfin on notera $L^2_t(X)$ pour $L^2(0,T;X)$ (exemple $L^2_t(H_0^1)$ pour $L^2(0,T,(H_0^1(\Omega))^3)$ ou bien $H_t^{-1}(\mathcal{V})$ pour $H^{-1}(0,T;\mathcal{V})$).
Existence. Comme dans la preuve de la proposition 3.9 on pose

$$F_{\mathcal{V}'}(t) = ({}^t i_1(f_1(t), f_2(t)), f_3(t)) \tag{3.81}$$

Pour presque tout t, $F_{\mathcal{V}'}(t) \in \mathcal{V}'$ et par continuité de ${}^t i_1$ il vient

$$\int_0^T \|F_{\mathcal{V}'}\|_{\mathcal{V}'}\, dt \le \int_0^T C\|F_{\mathcal{V}'}\|_{H^{-1}}\, dt \le C\|F\|_{L^2_t(H^{-1})} \tag{3.82}$$

donc $F_{\mathcal{V}'} \in L^2(0,T,\mathcal{V}')$ et on a, pour tout $X' \in L^2(0,T;\mathcal{V})$:

$$\langle F, X'\rangle_{L^2_t(H^{-1}),L^2_t(H_0^1)} = \langle F_{\mathcal{V}'}, X'\rangle_{L^2_t(\mathcal{V}'),L^2_t(\mathcal{V})} \tag{3.83}$$

D'après le théorème de J.L. Lions, il existe $X \in L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap \mathcal{C}([0,T];\mathcal{H})$ tel que

$$\frac{dX}{dt} + P(X) = F_{\mathcal{V}'}, \text{ dans } \mathcal{V}', \text{ pour presque tout } t \in [0,T] \tag{3.84}$$

avec $X(0) = X_0$.
Comme dans la proposition précédente, on va réintroduire une pression. Pour cela, on se

donne $\psi \in C_c^\infty(0,T)$ et on va multiplier l'équation (3.84) par $\psi(t)$ et intégrer sur $(0,T)$, afin d'obtenir un élement de $\mathcal{V}'$, que l'on verra comme une forme linéaire continue sur H_0^1 et nulle sur $\mathcal{V}$. Pour cela, on va devoir donner un sens dans H^{-1} à chacun des termes suivants :

$$\int_0^T F(t)\psi(t)\,dt, \quad \int_0^T \tfrac{dX}{dt}(t)\psi(t)\,dt, \quad \int_0^T P(X(t))\psi(t)\,dt \tag{3.85}$$

Commençons avec le second membre : $F \in L^2(0,T;H^{-1})$ donc $\int_0^T F(t)\psi(t)\,dt \in H^{-1}$ et pour tout $X' \in H_0^1$ on a

$$|\langle \int_0^T F(t)\psi(t)\,dt, X'\rangle_{H^{-1},H_0^1}| \leq \|F\|_{L_t^2(H^{-1})}\|\psi\|_{L_t^2}\|X'\|_{H_0^1} \tag{3.86}$$

et pour tout $X' \in \mathcal{V}$ on a

$$\langle \int_0^T F(t)\psi(t)\,dt, X'\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \langle \int_0^T F_{\mathcal{V}'}(t)\psi(t), X'\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \tag{3.87}$$

Regardons maintenant le terme $\frac{dX}{dt}$. On a $X \in L^2(0,T;\mathcal{V})$ donc $\frac{dX}{dt} \in H^{-1}(0,T;\mathcal{V})$:

$$\int_0^T \tfrac{dX}{dt}\psi\,dt = -\int_0^T X\tfrac{d\psi}{dt}\,dt \tag{3.88}$$

ceci définit un élément de $\mathcal{V} \subset H_0^1$ que l'on peut voir dans H^{-1} de la manière habituelle suivante :

$$\langle \int_0^T \tfrac{dX}{dt}\psi\,dt, X'\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \big(\int_0^T \tfrac{dX}{dt}\psi\,dt, X'\big)_{L^2} \tag{3.89}$$

si $X' \in H_0^1$ et on a alors

$$|\langle \int_0^T \tfrac{dX}{dt}\psi\,dt, X'\rangle_{H^{-1},H_0^1}| \leq \|\tfrac{dX}{dt}\|_{H_t^{-1}(\mathcal{V})}\|\psi\|_{H_{0,t}^1}\|X'\|_{H^{-1}} \tag{3.90}$$

Regardons maintenant $\int_0^T P(X(t))\psi(t)\,dt$. Soit $X' \in \mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \int_0^T P(X(t))\psi(t)\,dt, X'\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} &= \int_0^T \psi(t)P(X(t),X')\,dt \\ &= \nu\int_0^T \psi(t)(X(t),X')_\nu\,dt + \int_0^T \psi(t)\beta B(X(t),X')\,dt \\ &\quad + \int_0^T \psi(t)\alpha C(X(t),X')\,dt \\ &= \nu(\int_0^T \psi(t)X(t)\,dt, X')_\nu + \beta B(\int_0^T \psi(t)X(t)\,dt, X') \\ &\quad + \alpha C(\int_0^T \psi(t)X(t)\,dt, X')\end{aligned} \tag{3.91}$$

ceci définit une forme linéaire continue sur H_0^1 et on a :

$$\begin{aligned}\|\int_0^T P(X(t))\psi(t)\,dt\|_{H^{-1}} &\leq (\nu + \beta\|B\| + \alpha\|C\|)\ \|\int_0^T \psi(t)X(t)\,dt\|_\nu \\ &\leq (\nu + \beta\|B\| + \alpha\|C\|)\ \|X\|_{L_t^2(\mathcal{V})}\|\psi\|_{L_t^2}\end{aligned} \tag{3.92}$$

Finalement la forme linéaire

$$X' \mapsto \langle \int_0^T \tfrac{dX}{dt}(t)\psi(t)\,dt + \int_0^T P(X(t))\psi(t)\,dt - \int_0^T F(t)\psi(t)\,dt, X'\rangle_{H^{-1},H_0^1} \tag{3.93}$$

est continue sur H_0^1 et nulle sur $\mathcal{V}$. Il existe donc, pour tout $\psi \in C_c^\infty(]0,T[)$, une "pression" $J(\psi) \in L^2(\Omega_2)$ telle que $\int_{\Omega_2} J(\psi)\,dx\,dy = 0$ et

$$\langle \int_0^T (\tfrac{dX}{dt}(t)dt + P(X(t)) - F(t))\psi(t)\,dt, X'\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega J(\psi)(\partial_x\overline{u'} + \partial_y\overline{v'}) \tag{3.94}$$

et on a

$$|\int_\Omega J(\psi)(\partial_x\overline{u'}+\partial_y\overline{v'})| \leq C_1\|\psi\|_{H^1_{0,t}}\|X'\|_{H^{-1}}+C_2\|\psi\|_{L^2_t}\|X'\|_{H^1_0} \tag{3.95}$$

en particulier, pour tout $\varphi\in\{\varphi L^2(\Omega_2),\int_{\Omega_2}\varphi=0\}$ on a, en utilisant la proposition 3.2 :

$$|\int_\Omega J(\psi)\varphi| \leq C_3\|\psi\|_{H^1_{0,t}}\|\varphi\|_{L^2} \tag{3.96}$$

donc l'application

$$\begin{array}{rcl} J: H^1_0(0,T) & \to & L^2(\Omega_2) \\ \psi & \mapsto & J(\psi) \end{array} \tag{3.97}$$

est continue (et linéaire). Il existe donc $p_0(t,x,y)\in\mathcal{D}'(]0,T[;L^2(\Omega))$ telle que

$$J(\psi)=\int_0^T p_0(t,x,y)\psi(t)\,dt. \tag{3.98}$$

En intégrant par parties comme dans la preuve de la proposition 3.9, on obtient l'équation suivante, au sens des distributions dans $\Omega\times(0,T)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u-\nu\Delta u-\alpha v+\partial_x p_0+\beta\int_0^z\partial_x\theta=f_1 \\ \partial_t v-\nu\Delta v+\alpha u+\partial_y p_0+\beta\int_0^z\partial_y\theta=f_2 \\ \partial_t\theta-\nu\Delta\theta-\gamma(\int_0^z\partial_x u+\partial_y v)=f_3 \end{array}\right. \tag{3.99}$$

et en posant $p=p_0(t,x,y)+\beta\int_0^z\theta$ et $w=-(\int_0^z\partial_x u+\partial_y v)$ on a bien (3.78).
Unicité. Soit $X=(u,v,\theta)\in L^2_t(\mathcal{V})\cap C^0_t(\mathcal{H})$ et $p\in\mathcal{D}'(]0,T[;L^2(\Omega))$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u-\nu\Delta u-\alpha v+\partial_x p=0 \\ \partial_t v-\nu\Delta v+\alpha u+\partial_y p=0 \\ \partial_z p-\beta\theta=0 \\ \partial_t\theta-\nu\Delta\theta+\gamma w=0 \\ \text{ avec } w(z)=-\int_0^z\partial_x u(z')+\partial_y v(z')\,dz' \end{array}\right. \tag{3.100}$$

et

$$(u,v,\theta)|_{t=0}=0 \tag{3.101}$$

On multiplie par $X'\in C^\infty_c(]0,T[;\mathcal{V})$ et on intègre par parties pour obtenir

$$\langle\tfrac{dX}{dt}+P(X),X'\rangle_{L^2_t(\mathcal{V}'),L^2_t(\mathcal{V})}=0, \quad \text{ et } X(0)=0 \tag{3.102}$$

ie $\frac{dX}{dt}+P(X)=0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega\times]0,T[)$. Comme $X\in L^2_t(\mathcal{V})$, $P(X)\in L^2_t(\mathcal{V}')$ donc $\frac{dX}{dt}\in L^2_t(\mathcal{V}')$ et finalement $\frac{dX}{dt}+P(X)=0$ dans $\mathcal{V}'$ pour presque tout $t\in(0,T)$, donc d'après la proposition 3.8 $X=0$. En reportant dans l'équation, il vient $\nabla p=0$ au sens des distributions dans $\Omega\times(0,T)$, ie à une distribution du temps près, $p=0$ dans $\mathcal{D}'(]0,T[;L^2(\Omega))$.
□

3.2 Étude de la pression et nouveaux résultats

3.2.1 Enoncé des résultats

3.2.1.1 Notations

Dans cette partie, on prend Ω de la forme $\Omega=\mathbb{T}^2\times(0,a)$.

Les espaces $\mathcal{H}^s$. Pour $s \in \mathbb{R}$ on définit les espaces suivants :

$$\begin{array}{l}\mathcal{H}^s(\Omega) = \Big\{ \quad f(x,y,z) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*,\zeta\in\mathbb{Z}^2} f_{k,\zeta}\, e_k(z)\, e_\zeta(x,y), (x,y,z) \in \Omega, \\ \qquad\qquad \sum_{k\in\mathbb{N}^*,\zeta\in\mathbb{Z}^2}(1+\nu k^2+\nu|\zeta|^2)^s |f_{k,\zeta}|^2 < \infty\Big\}\end{array} \tag{3.103}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta = (\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{array}{rcll} e_k(z) & = & \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{k\pi z}{a}) & \forall z \in (0,a) \\ e_\zeta(x,y) & = & \frac{1}{2\pi} e^{i(\xi x+\eta y)} & \forall (x,y) \in \mathbb{T}^2 \end{array} \tag{3.104}$$

Si $f \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, on note

$$\|f\|_s^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}^*,\zeta\in\mathbb{Z}^2} (1+\nu k^2+\nu|\zeta|^2)^s |f_{k,\zeta}|^2 \tag{3.105}$$

Les espaces $\mathcal{H}^s(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert pour le produit scalaire suivant :

$$\langle f, g\rangle_s = \sum_{k\in\mathbb{N}^*,\zeta\in\mathbb{Z}^2} (1+\nu k^2+\nu|\zeta|^2)^s f_{k,\zeta}\, \overline{g_{k,\zeta}}. \tag{3.106}$$

On a la caractérisation suivante :

Lemme 3.3

$$\begin{array}{rcll} -\frac{3}{2} < s < \frac{1}{2} & \Rightarrow & \mathcal{H}^s(\Omega) & = & H^s(\Omega) \\ \frac{1}{2} < s < \frac{5}{2} & \Rightarrow & \mathcal{H}^s(\Omega) & = & \{f \in H^s(\Omega), f|_{z=0} = f|_{z=a} = 0\} \end{array} \tag{3.107}$$

Preuve. La théorie des séries de Fourier nous dit déjà que $\mathcal{H}^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et que $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega), f|_{z=0} = f|_{z=a} = 0\}$. Voyons maintenant $\mathcal{H}^l(\Omega)$, pour l entier quelconque. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $\zeta \in \mathbb{Z}^2$, on remarque que $-\partial_{zz}(e_k e_\zeta) = \frac{k^2\pi^2}{a^2} e_k e_\zeta$ et $-(\partial_{xx}+\partial_{yy})(e_k e_\zeta) = \zeta^2 e_k e_\zeta$, donc

$$(1+\nu k^2+\nu\zeta^2)[e_k e_\zeta] = (1-\nu\tfrac{a^2}{\pi^2}\partial_{zz} - \nu\partial_{xx} - \nu\partial_{yy})[e_k e_\zeta] \tag{3.108}$$

De la même façon, on a

$$(1+\nu k^2+\nu\zeta^2)^{-1}[e_k e_\zeta] = (1-\nu\tfrac{a^2}{\pi^2}\partial_{zz} - \nu\partial_{xx} - \nu\partial_{yy})^{-1}[e_k e_\zeta] \tag{3.109}$$

où $(1-\nu\frac{a^2}{\pi^2}\partial_{zz} - \nu\partial_{xx} - \nu\partial_{yy})^{-1}$ est l'inverse de l'opérateur $1-\nu\frac{a^2}{\pi^2}\partial_{zz} - \nu\partial_{xx} - \nu\partial_{yy}$ avec conditions de Dirichlet en z et périodique en x, y.
Soit maintenant $f \in \mathcal{H}^s(\Omega)$ et $m \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y,z) & = & \sum_{k\in\mathbb{N}^*,\zeta\in\mathbb{Z}^2} f_{k,\zeta}\, e_k e_\zeta \\ & = & \sum_{k\in\mathbb{N}^*,\zeta\in\mathbb{Z}^2} (1+\nu k^2+\nu\zeta^2)^m (1+\nu k^2+\nu\zeta^2)^{-m} f_{k,\zeta}\, e_k e_\zeta \\ & = & (1-\nu\frac{a^2}{\pi^2}\partial_{zz} - \nu\partial_{xx} - \nu\partial_{yy})^m g(x,y,z) \end{array} \tag{3.110}$$

où $g = \sum_{k\in\mathbb{N}^*,\zeta\in\mathbb{Z}^2} (1+\nu k^2+\nu\zeta^2)^{-m} f_{k,\zeta}\, e_k e_\zeta$ est dans $\mathcal{H}^{s+2m}(\Omega)$. Les résultats classiques pour l'opérateur $(1-\nu\frac{a^2}{\pi^2}\partial_{zz} - \nu\partial_{xx} - \nu\partial_{yy})^m$ combinés avec les descriptions de $\mathcal{H}^0(\Omega)$ et $\mathcal{H}^1(\Omega)$ nous donnent, pour $l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{H}^l(\Omega) & = & H^l(\Omega) & \text{pour } l \le 0 \\ \mathcal{H}^l(\Omega) & = & \{f \in H^l(\Omega), \partial_{zz}^j f|_{z=0,z=a} = 0, 0 \le j \le E(\frac{l-1}{2})\} & \text{pour } l > 0 \end{array} \tag{3.111}$$

Pour s non entier, on utilise les résultats d'interpolation de [Lions et Magenes, 1970].
□

3.2.1.2 Enoncé du théorème

Voici un résultat d'existence et d'uncité pour les équations primitives linéaires (2.27) avec les conditions aux limites (2.26).

Théorème 3.2 *Soit* $\sigma \in]-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}[$, $\sigma \neq -\frac{1}{2}$.
Soit $F(t) = (f_1, f_2, f_3) \in (L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H}^\sigma)^3)$ *avec Support* $(F) \subset \{t \geq 0\}$.
Il existe un unique

$$X(t) = (u, v, \theta) \in (L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H}^{\sigma+2})^3), \quad \textit{Support } (X) \subset \{t \geq 0\} \tag{3.112}$$

et il existe une pression

$$p(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \Omega), \quad \textit{Support } (p) \subset \{t \geq 0\} \tag{3.113}$$

unique à une distribution du temps près, tels que l'équation suivante a lieu au sens des distributions dans $\mathbb{R} \times \Omega$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \nu \Delta u - \alpha v + \partial_x p = f_1 \\ \partial_t v - \nu \Delta v + \alpha u + \partial_y p = f_2 \\ \partial_z p - \beta \theta = 0 \\ \partial_t \theta - \nu \Delta \theta + \gamma w = f_3 \\ \textit{avec } w(z) = -\int_0^z (\partial_x u + \partial_y v) \textit{ et } w(a) = 0 \end{array} \right. \tag{3.114}$$

De plus, on a

$$\|X\|_{(L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^{\sigma+2}))^3} \leq C \|F\|_{(L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma))^3} \tag{3.115}$$

et la température θ *vérifie*

$$\partial_t \theta \in L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H}^\sigma) \quad \textit{et} \quad \|\partial_t \theta\|_{L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma)} \leq C \|F\|_{(L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma))^3} \tag{3.116}$$

La pression p *vérifie*

$$p(t, x, y, z) = c(t) + q(t, x, y) + \beta \int_0^z \theta(t, x, y, z')\, dz' \tag{3.117}$$

avec

$$c(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \quad \textit{Support } (c) \subset \{t \geq 0\} \tag{3.118}$$

et

- *pour* $\sigma \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ *on a*

$$q(t, x, y) \in L^2(\mathbb{R}; H^{\sigma+1}(\mathbb{T}^2)) \quad \textit{et} \quad \|q\|_{L^2(\mathbb{R};H^{\sigma+1}(\mathbb{T}^2))} \leq C \|F\|_{(L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma))^3} \tag{3.119}$$

- *pour* $\sigma \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ *on a*

$$\begin{array}{c} q(t, x, y) = q_1(t, x, y) + q_2(t, x, y) \\ q_2(t, x, y) \in L^2(\mathbb{R}; H^{\sigma+1}(\mathbb{T}^2)) \textit{ et } \|q_2\|_{L^2(\mathbb{R};H^{\sigma+1}(\mathbb{T}^2))} \leq C \|F\|_{(L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma))^3} \\ q_1(t, x, y) \in H^{\sigma/2+1/4}(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{T}^2)) \textit{ et } \|q_1\|_{H^{\sigma/2+1/4}(\mathbb{R};H^1(\mathbb{T}^2))} \leq C \|F\|_{(L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma))^3} \end{array} \tag{3.120}$$

3.2.1.3 Remarques

1. L'exposant de régularité σ.

   - Pour un terme de forçage $F \in (L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma)^3)$, on ne peut espérer mieux que $X \in (L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^{\sigma+2})^3)$. La condition aux limites $X|_{z=0,z=a} = 0$ n'est alors bien définie que pour $\sigma + 2 > \frac{1}{2}$, ie $\sigma > -\frac{3}{2}$.
   - Le cas $\sigma = -\frac{1}{2}$ correspond à un indice critique pour la régularité du terme de pression dont la description est plus technique.
   - Se limiter à $\sigma < \frac{1}{2}$ permet d'utiliser les espaces $\mathcal{H}^\sigma$ et de faire des calculs explicites, ce qui simplifie le travail.

2. Une formule explicite pour q_1.

   On montrera un résultat plus précis que (3.120), dans le cas $\sigma \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$, à savoir

   $$q(t,x,y) = q_1(t,x,y) + q_2(t,x,y), \quad q_2(t,x,y) \in L^2(\mathbb{R};H^{\sigma+1}(\mathbb{T}^2)) \tag{3.121}$$

   où q_1 est explicite en fonction de F (voir le paragraphe 3.2.3.1 et la formule (3.274)).

3. La formule (3.117).

   Dans la formule (3.117) donnant p, q est la valeur de la pression en $z = 0$. On peut tout aussi bien remplacer q par $p(t,x,y,z_0)$ pour $z_0 \in [0,a]$ quelconque, ou par $\int_0^a p(t,x,y,z)\,dz$, les résultats restent les mêmes.

4. Estimations maximales.

   Pour $\sigma > -\frac{1}{2}$, on a $\partial_x p, \partial_y p \in L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma)$, de sorte que l'on peut mettre la pression en terme source et on a dans ce cas les estimations maximales

   $$\|X\|_{(L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^{\sigma+2}))^3} + \|\partial_t X\|_{(L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma))^3} \leq C\,\|F\|_{(L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma))^3} \tag{3.122}$$

   Par contre, pour $\sigma \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$, l'estimation maximale est fausse (voir le paragraphe 3.2.3.3), d'où l'intérêt du résultat...

3.2.1.4 Corollaire : problème de Cauchy pour $\sigma = -1$

Pour $\sigma = -1$ on a déjà montré un résultat d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy (voir résultats abstraits). On peut maintenant en dire un peu plus sur la régularité de la pression :

Corollaire 3.1 *Soient $\varphi(t) \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,T[)$, $F(t) = (f_1,f_2,f_3) \in (L^2(0,T;\mathcal{H}^{-1}))^3$, $X_0 \in \mathcal{H}$ et (X,p) l'unique solution de l'équation (3.114) avec*

$$\begin{array}{l} X = (u,v,\theta) \in L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap \mathcal{C}([0,T];\mathcal{H}), \quad X(t=0) = X_0 \\ p \in \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)) \end{array} \tag{3.123}$$

Alors φp s'écrit

$$\varphi p(t,x,y,z) = c(t) + q(t,x,y) + \beta \int_0^z \theta(t,x,y,z')\,dz', \ \textit{ avec } c(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \tag{3.124}$$

avec $q(t) \in H^{-1/4}(0,T;H^1(\mathbb{T}^2)$ *et on a l'équivalence suivante*

$$\begin{array}{c} q(t) \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^2)) \\ \Updownarrow \\ \Delta_2^{-1}\big[\int_0^a (\partial_t - \nu\Delta)^{-1}[\varphi\partial_x f_1 + \varphi\partial_y f_2]\,dz\big] \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^2)) \end{array} \tag{3.125}$$

La preuve de ce corollaire fait l'objet du paragraphe 3.2.3.2.

3.2.2 Preuve du théorème 3.2

Le schéma de la preuve est le suivant : on commence par une remarque, puis on passe en Fourier en espace horizontal (paragraphe 3.2.2.1), ensuite on passe en Fourier en temps (paragraphe 3.2.2.2), pour obtenir finalement un problème différentiel par rapport à la variable z, les autres variables (de Fourier) étant des paramètres. Après quelques estimations concernant les paramètres (paragraphe 3.2.2.3), on étudie le problème complètement découplé (ie sans force de Coriolis et sans couplage pression-température-vitesses, paragraphe 3.2.2.4). Enfin on étudie le problème couplé (paragraphe 3.2.2.5), puis on conclut (paragraphe 3.2.2.6).

Remarquons que l'estimation (3.116) pour la température s'obtient facilement. En effet, on remarque que si (3.115) est vraie, on a $w \in L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma)$ et

$$\|w\|_{L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma)} \leq C\,\|F\|_{L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma)} \tag{3.126}$$

donc la température vérifie une équation de la chaleur

$$\partial_t\theta - \nu\Delta\theta = f_3 - \gamma w \tag{3.127}$$

avec terme source dans $L^2(\mathbb{R};\mathcal{H}^\sigma)$, donc on a (3.116).

Il suffit donc de montrer l'existence, l'unicité, (3.117), (3.115), (3.119) et (3.120).

3.2.2.1 Passage en Fourier en espace

Pour $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\Omega)$, on écrit

$$f(t,x,y,z) = \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^2} f_\zeta(t,z)\,e^{i\zeta.(x,y)} \tag{3.128}$$

L'équation (3.114) équivaut donc à la famille d'équations suivantes, indexées par $\zeta = (\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t u_\zeta - \nu\partial_{zz}u_\zeta + \nu\zeta^2 u_\zeta - \alpha v_\zeta + i\xi p_\zeta = f_{1,\zeta} \\ \partial_t v_\zeta - \nu\partial_{zz}v_\zeta + \nu\zeta^2 v_\zeta + \alpha u_\zeta + i\eta p_\zeta = f_{2,\zeta} \\ \partial_z p_\zeta - \beta\theta_\zeta = 0 \\ \partial_t\theta_\zeta - \nu\partial_{zz}\theta_\zeta + \nu\zeta^2\theta_\zeta + \gamma w_\zeta = f_{3,\zeta} \\ \text{avec } w_\zeta(t,z) = -\int_0^z (i\xi u_\zeta + i\eta v_\zeta),\ w_\zeta(a) = 0,\ X_\zeta|_{z=0,z=a} = 0 \end{array}\right. \tag{3.129}$$

L'équation liant p_ζ et θ_ζ donne

$$p_\zeta(t,z) = p_\zeta(t,0) + \beta\int_0^z \theta_\zeta(t,z')\,dz' \tag{3.130}$$

On pose alors

$$\begin{array}{lll} \zeta = 0 \ : & c_0(t) = p_0(t,0) & ; \ q_0(t) = 0 \\ \zeta \neq 0 \ : & c_\zeta(t) = 0 & ; \ q_\zeta(t) = p_\zeta(t,0) \end{array} \tag{3.131}$$

Les espaces H^s_ζ. On définit maintenant un espace de fonctions de $z \in (0,a)$. Pour $f(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} f_k\, e_k(z)$, on posera

$$\|f\|^2_{s,\zeta} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (1+\nu k^2+\nu\zeta^2)^s |f_k|^2 \tag{3.132}$$

et on notera H^s_ζ l'espace de Hilbert des fonctions de z associé à cette norme. Comme précédemment, on a le lemme suivant :

Lemme 3.4

$$\begin{array}{rcl} -\frac{3}{2} < s < \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ H^s_\zeta & = & H^s(0,a) \\ \frac{1}{2} < s < \frac{5}{2} \ \Rightarrow \ H^s_\zeta & = & \{f(z) \in H^s(0,a), f|_{z=0} = f|_{z=a} = 0\} \end{array} \tag{3.133}$$

Pour $f(t,x,y,z) = \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^2} f_\zeta(t,z)\, e^{i\zeta\cdot(x,y)}$ on a alors :

$$\|f(t)\|^2_{\mathcal{H}^s} = \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^2} \|f_\zeta(t,.)\|^2_{s,\zeta} \tag{3.134}$$

et il s'agit de vérifier qu'on a l'estimation suivante, avec C indépendant de ζ :

$$\|X_\zeta\|_{(L^2(\mathbb{R};H^{\sigma+2}_\zeta))^3} \ \leq \ C\,\|F_\zeta\|_{(L^2(\mathbb{R};H^\sigma_\zeta))^3} \tag{3.135}$$

ainsi que les estimations pendantes pour $q_\zeta = q_{1,\zeta} + q_{2,\zeta}$:

$$\begin{array}{lll} -\frac{1}{2} < \sigma < \frac{1}{2} & : & \|q_\zeta\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^{\sigma+1}_\zeta)} \leq C\|F_\zeta\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^\sigma_\zeta)} \\ -\frac{3}{2} < \sigma < -\frac{1}{2} & : & \|q_{1,\zeta}\|_{H^{\sigma/2+1/4}(\mathbb{R}_+;H^1_\zeta)} + \|q_{2,\zeta}\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^{\sigma+1}_\zeta)} \leq C\|F_\zeta\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^\sigma_\zeta)} \end{array} \tag{3.136}$$

Le cas $\zeta = 0$.
Dans ce cas, p_0 disparaît des deux premières équations, $w_0 = 0$ et l'équation (3.129) donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_0 - \nu\partial_{zz} u_0 - \alpha v_0 = f_{1,0} \\ \partial_t v_0 - \nu\partial_{zz} v_0 + \alpha u_0 = f_{2,0} \\ \partial_t \theta_0 - \nu\partial_{zz}\theta_0 = f_{3,0} \\ p_0(t,z) = c_0(t) + \beta\int_0^z \theta_0(t,z')\,dz' \end{array} \right. \tag{3.137}$$
$$\text{avec } X_0|_{z=0,z=a} = 0$$

de sorte que $X_0(t,z)$ vérifie une équation de la chaleur avec un terme d'ordre inférieur, donc par les résultats classiques on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \|X_0\|_{(L^2(\mathbb{R};H^{\sigma+2}_0))^3} & \leq & C\,\|F_0\|_{(L^2(\mathbb{R};H^\sigma_0))^3} \\ \|\partial_t X_0\|_{(L^2(\mathbb{R};H^\sigma_0))^3} & \leq & C\,\|F_0\|_{(L^2(\mathbb{R};H^\sigma_0))^3} \end{array} \tag{3.138}$$

De plus on a $q_0(t) = 0$ et les estimations (3.119) et (3.120) sont triviales.

Dans toute la suite, on suppose que $\zeta \neq 0$.

Pour la pression, on a donc

$$p_\zeta(t,z) = q_\zeta(t) + \beta \int_0^z \theta_\zeta(t,z')\, dz' \tag{3.139}$$

et l'existence et l'unicité pour u, v et θ implique celles de p, à la constante $c(t)$ près.

3.2.2.2 Passage en Fourier-Laplace en temps

Pour $f(t,z) \in L^2(\mathbb{R}; H^\sigma_\zeta)$ à support dans $\{t \geq 0\}$, on note $\hat{f}(\tau)$ sa transformée de Fourier-Laplace :

$$\hat{f}(\tau,z) = \int_0^{+\infty} e^{-it\tau}\, f(t,z)\, dt \tag{3.140}$$

On sait que $\hat{f}$ est holomorphe dans $\{\tau \in \mathbb{C}, \Im(\tau) < 0\}$ et vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{f}(\tau)\|^2_{H^\sigma_\zeta}\, d\tau \;=\; C_0\, \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^\sigma_\zeta)} \tag{3.141}$$

D'après (3.129), à $\zeta \neq 0$ fixé, pour $u_\zeta, v_\zeta \in L^2(\mathbb{R}; H^\sigma_\zeta)$ on a

$$p_\zeta \in L^2(\mathbb{R}_+; H^\sigma_\zeta) + \partial_t L^2(\mathbb{R}_+; H^{\sigma+2}_\zeta) \tag{3.142}$$

donc la transformée de Fourier-Laplace de p_ζ est bien définie.

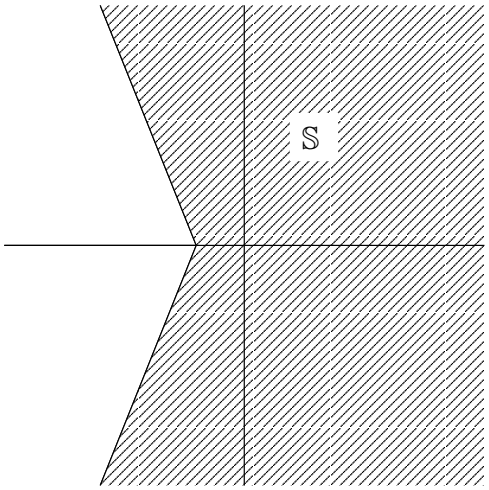
Introduction des paramètres.
On notera

$$\lambda = i\tau, \quad \omega^2 = \lambda + \nu\zeta^2 \tag{3.143}$$

avec $\zeta^2 \in \mathbb{Z}^2 \setminus 0$ et $\lambda \in \mathbb{S}$ où

$$\mathbb{S} = \{-\delta_2 - \mu_1 + i\mu_2,\ \text{ avec } (\mu_1,\mu_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } |\mu_2| \geq \frac{1}{\delta_1}\mu_1\} \tag{3.144}$$

est un secteur de $\mathbb{C}$ du type



(3.145)

avec $\delta_1 > 0$ assez petit de sorte que $\mathbb{S} \cap \mathbb{V}_P = \emptyset$ (ce qui est possible d'après la proposition 3.6) et

$$\delta_2 < \delta_3 = \min(\frac{\nu\pi^2}{2a^2}, \frac{\nu}{2}) \tag{3.146}$$

de sorte que

$$\left.\begin{array}{l}\lambda \in \mathbb{S} \\ \zeta \in \mathbb{Z}^2 \setminus 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} w^2 \neq 0 \\ \lambda + \delta_3 \neq 0 \\ \nu\zeta^2 - \delta_3 > 0 \end{array}\right. \tag{3.147}$$

Passage en Fourier Laplace pour le système (3.129).
En conservant les mêmes notations pour les fonctions et leurs transformées de Fourier-Laplace, on obtient que (3.129) est équivalent au système suivant, indexé en $(\zeta^2, \lambda) \in \mathbb{Z}^2 \setminus 0 \times \mathbb{S}$:

$$\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (\omega^2 - \nu\partial_{zz})u_\zeta - \alpha v_\zeta + i\xi p_\zeta = f_{1,\zeta} \\ (\omega^2 - \nu\partial_{zz})v_\zeta + \alpha u_\zeta + i\eta p_\zeta = f_{2,\zeta} \\ \partial_z p_\zeta - \beta\theta_\zeta = 0 \\ (\omega^2 - \nu\partial_{zz})\theta_\zeta + \gamma w_\zeta = f_{3,\zeta} \end{array}\right. \\ \text{avec } w_\zeta(z) = -\int_0^z (i\xi u_\zeta + i\eta v_\zeta) \\ \text{et } w_\zeta(a) = 0,\ X_\zeta|_{z=0,z=a} = 0 \end{array} \tag{3.148}$$

À ζ et λ fixés dans $\mathbb{Z}^2 \setminus 0$ et $\mathbb{S}$, (3.148) est un système différentiel en $z \in (0, a)$ avec données $F_\zeta \in H^\sigma(0, a)$ et inconnues $X_\zeta \in H^\sigma(0, a)$, $X_\zeta|_{z=0,a} = 0$. L'unicité est alors évidente. En effet, la troisième équation de (3.148) nous donne $p_\zeta \in H^{\sigma+3}(0, a)$, donc si $F = 0$ les deux premières équations de (3.148) donnent $u_\zeta, v_\zeta \in H^{\sigma+5}(0, a)$, donc $w \in H^{\sigma+6}(0, a)$, puis $\theta \in H^{\sigma+8}(0, a)$, etc. En particulier on a $X_\zeta \in H_0^1(0, a)$, donc on peut utiliser le résultat spectral donnant $\mathbb{S} \cap \mathbb{V}_P = \emptyset$ et on obtient $\hat{X}_\zeta = 0$ pour tout $(\lambda, \zeta) \in \mathbb{Z}^2 \setminus 0 \times \mathbb{S}$, puis $X = 0$ par injectivité de la transformée de Fourier-Laplace et de Fourier. On conclut en remarquant qu'alors p est nulle à une fonction du temps près.

Il reste à prouver l'existence et les estimations pour les solutions de (3.148), qui donneront les estimations (3.135) et (3.136) grâce à (3.141).

3.2.2.3 Quelques résultats préliminaires pour les paramètres

On posera

$$\langle\zeta\rangle = 1 + |\zeta|, \quad \langle\omega\rangle^2 = |\lambda| + \langle\zeta\rangle^2 \tag{3.149}$$

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 3.5 *Il existe des constantes C telles que, pour tous $\lambda \in \mathbb{S}$, $\zeta \in \mathbb{Z}^2 \setminus 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on a les inégalités suivantes :*

$$|\omega^2| \ \geq\ C\,\langle\omega\rangle^2 \ \geq\ C\,(1 + |\lambda| + \zeta^2) \tag{3.150}$$

et

$$|\omega^2 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2}| \geq C\,(\langle\omega\rangle^2 + k^2). \tag{3.151}$$

Ce lemme découle du résultat suivant :

Lemme 3.6 *Soient C_1 et C_2 deux cônes fermés de $\mathbb{R}^n$. On suppose que la distance entre C_1 et C_2 est non nulle, ie il existe une constante $d > 0$ telle que*

$$\forall x \in C_1, \forall y \in C_2, \quad \|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow \|x - y\| \geq d \tag{3.152}$$

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in C_1, \forall y \in C_2, \quad \|x - y\| \geq C\left(\|x\| + \|y\|\right) \tag{3.153}$$

Preuve du lemme 3.6. Quitte à diviser par $\|x\| + \|y\|$, on peut supposer que $\|x\| + \|y\| = 1$. Soit $K \subset (\mathbb{R}^n)^2$ défini par

$$K = (C_1 \times C_2) \cap \{(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \|x\| + \|y\| = 1\} \tag{3.154}$$

Il faut montrer que pour $(x, y) \in K$ on a $\|x-y\| \geq C$. Or K est un compact de $(\mathbb{R}^n)^2$ sur lequel la fonction continue $(x, y) \mapsto \|x-y\|$ ne s'annule pas. En effet, s'il existe $(x, y) \in K$ tels que $\|x - y\| = 0$, alors $\|x\| = \|y\| \neq 0$ et $\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\| = 0$ ce qui contredit (3.152). Le minimum de la fonction $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ est donc strictement positif et on obtient le résultat voulu.
□

Preuve du lemme 3.5. Pour montrer (3.150) on pose $x = \lambda + \delta_3$ et $y = -\nu\zeta^2 + \delta_3$ où δ_3 est donné par (3.146), les cônes associés étant

$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & \{z = -\mu_1 + i\mu_2 \in \mathbb{C}, (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, |\mu_2| \geq \frac{1}{\delta_1}\mu_1\} \\ C_2 & = & \mathbb{R}_- \subset \mathbb{C} \end{array} \tag{3.155}$$

Ces cônes sont bien fermés et à distance non nulle. Par le lemme 3.6, il existe donc $C > 0$ tel que pour tout λ, ζ vérifiant les hypothèse du lemme 3.5 on a :

$$|\omega^2| = |\lambda + \nu\zeta^2| \geq C(|\lambda + \delta_3| + |\nu\zeta^2 - \delta_3|) \tag{3.156}$$

Comme $\lambda + \delta_3$ ne s'annule jamais dans le cône fermé C_1 (voir (3.147)), il existe une constante C telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{S}$ on a

$$|\lambda + \delta_3| \geq C|\lambda| \tag{3.157}$$

En effet : pour $|\lambda| \geq 2\delta_3$ on a $|\lambda+\delta_3| \geq |\lambda|-\delta_3 \geq \frac{1}{2}|\lambda|$; pour $|\lambda| \leq 2\delta_3$ on a $|\lambda+\delta_3| \geq C|\lambda|$ où $C > 0$ est donné par

$$C = \inf_{\lambda \in \mathbb{S}\setminus 0, |\lambda| \leq 2\delta_3} \frac{|\lambda + \delta_3|}{|\lambda|} \tag{3.158}$$

De la même façon, $\nu\zeta^2 - \delta_3$ ne s'annule pas sur C_2 donc il existe C tel que pour tout $\zeta \in \mathbb{Z}^2 \setminus 0$ on a

$$|\nu\zeta^2 - \delta_3| \geq C\zeta^2 \tag{3.159}$$

Puis $\zeta^2 \geq \frac{1}{2}(1 + \zeta^2) \geq \frac{1}{4}\langle\zeta\rangle^2$, donc finalement

$$|\omega^2| \geq C(|\lambda| + \langle\zeta\rangle^2) = \langle\omega\rangle^2 \tag{3.160}$$

Enfin on remarque que $\langle\omega\rangle^2 \geq (1 + |\lambda| + \zeta^2)$, ce qui achève la preuve de (3.150).
Pour obtenir l'inégalité (3.151) on pose $x = \omega^2$ et $y = -\frac{\nu k^2\pi^2}{a^2}$ et on procède comme précédemment.
□

La fonction $M_\sigma(\lambda,\zeta)$.
On introduit la fonction suivante de $(\lambda,\zeta)\in\mathbb{S}\times\mathbb{Z}^2\backslash 0$:

$$M_\sigma^2(\lambda,\zeta)=\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k^2(k^4+\langle\omega\rangle^4)(k^2+\langle\zeta\rangle^2)^\sigma} \tag{3.161}$$

qui a un sens pour $\sigma>-\frac{5}{2}$.
On notera

$$\begin{array}{rcl} A(\lambda,\zeta)\sim B(\lambda,\zeta) & \Leftrightarrow & \exists C_1,C_2>0,\ \forall(\lambda,\zeta)\in\mathbb{S}\times\mathbb{Z}^2\backslash 0,\\ & & C_1\,B(\lambda,\zeta)\ \le\ A(\lambda,\zeta)\ \le\ C_2\,B(\lambda,\zeta)\end{array} \tag{3.162}$$

On a alors la

Proposition 3.11 *Pour $\sigma\in]-\frac{5}{2},\frac{3}{2}[$, $\sigma\neq-\frac{1}{2}$, on a les équivalents*

$$\begin{array}{lrcl} \sigma>-\frac{1}{2}: & M_\sigma & \sim & \dfrac{\langle\zeta\rangle^{-\sigma}}{\langle\omega\rangle^2}\\ \sigma<-\frac{1}{2}: & M_\sigma & \sim & \dfrac{\langle\zeta\rangle^{-\sigma}}{\langle\omega\rangle^2}\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\ge\langle\omega\rangle^\kappa}+\dfrac{\langle\omega\rangle^{-\sigma}}{\langle\omega\rangle^{\frac{5}{2}}}\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\le\langle\omega\rangle^\kappa}\,,\quad \textit{avec } \kappa=\frac{2\sigma+1}{2\sigma}\end{array} \tag{3.163}$$

Preuve. On va estimer M_σ^2. On peut écrire :

$$\begin{array}{rcl} M_\sigma^2=\sum\frac{(k^2+\langle\zeta\rangle^2)^{-\sigma}}{k^2\,(\langle\omega\rangle^4+k^4)} & \sim & \big[\int_1^{\langle\zeta\rangle}\frac{(x^2+\langle\zeta\rangle^2)^{-\sigma}}{x^2\,(\langle\omega\rangle^4+x^4)}\,dx+\int_{\langle\zeta\rangle}^{\langle\omega\rangle}\frac{(x^2+\langle\zeta\rangle^2)^{-\sigma}}{x^2\,(\langle\omega\rangle^4+x^4)}\,dx\\ & & +\int_{\langle\omega\rangle}^{\infty}\frac{(x^2+\langle\zeta\rangle^2)^{-\sigma}}{x^2\,(\langle\omega\rangle^4+x^4)}\,dx\big]\end{array} \tag{3.164}$$

On a facilement les équivalents suivants :

$$\begin{array}{rcl} I_1 = \int_1^{\langle\zeta\rangle}\frac{(x^2+\langle\zeta\rangle^2)^{-\sigma}}{x^2\,(\langle\omega\rangle^4+x^4)}\,dx & \sim & \frac{\langle\zeta\rangle^{-2\sigma}}{\langle\omega\rangle^4}\int_1^{\langle\zeta\rangle}\frac{dx}{x^2}\\ & \sim & \frac{\langle\zeta\rangle^{-2\sigma}}{\langle\omega\rangle^4}\\ I_2 = \int_{\langle\zeta\rangle}^{\langle\omega\rangle}\frac{(x^2+\langle\zeta\rangle^2)^{-\sigma}}{x^2\,(\langle\omega\rangle^4+x^4)}\,dx & \sim & \int_{\langle\zeta\rangle}^{\langle\omega\rangle}\frac{x^{-2\sigma}}{x^2\,(\langle\omega\rangle^4+x^4)}\,dx\\ & \sim & \frac{1}{\langle\omega\rangle^4}\int_{\langle\zeta\rangle}^{\langle\omega\rangle}\frac{dx}{x^{2\sigma+2}}\\ I_3 = \int_{\langle\omega\rangle}^{\infty}\frac{(x^2+\langle\zeta\rangle^2)^{-\sigma}}{x^2\,(\langle\omega\rangle^4+x^4)}\,dx & \sim & \int_{\langle\omega\rangle}^{\infty}\frac{x^{-2\sigma}}{x^2\,(\langle\omega\rangle^4+x^4)}\,dx\\ & \sim & \frac{\langle\omega\rangle^{-2\sigma}}{\langle\omega\rangle^5}\int_1^{\infty}\frac{u^{-2\sigma}}{u^2\,(1+u^4)}\,du\\ & \sim & \frac{\langle\omega\rangle^{-2\sigma}}{\langle\omega\rangle^5}\end{array} \tag{3.165}$$

On distingue maintenant les cas $\sigma>-\frac{1}{2}$ et $\sigma<-\frac{1}{2}$.
$\star$ Si $\sigma>-\frac{1}{2}$, avec $\sigma<0$, alors $\frac{\langle\omega\rangle^{-2\sigma}}{\langle\omega\rangle}$ est borné et $\langle\zeta\rangle^{-2\sigma}\ge 1$ donc

$$\frac{\langle\omega\rangle^{-2\sigma}}{\langle\omega\rangle^5}\ \le\ C\frac{1}{\langle\omega\rangle^4}\ \le\ C\frac{\langle\zeta\rangle^{-2\sigma}}{\langle\omega\rangle^4}\quad\Rightarrow\quad I_3\ \le\ CI_1 \tag{3.166}$$

Si $\sigma>-\frac{1}{2}$, avec $\sigma>0$, alors $\langle\omega\rangle^{-2\sigma}\le\langle\zeta\rangle^{-2\sigma}$ donc $I_3\le CI_1$.
De plus, pour $\sigma>-\frac{1}{2}$ on a $2\sigma+2>1$ donc

$$\int_{\langle\zeta\rangle}^{\langle\omega\rangle}\frac{dx}{x^{2\sigma+2}}\ \le\ C\langle\zeta\rangle^{-2\sigma-1}\quad\Rightarrow\quad I_2\ \le\ CI_1 \tag{3.167}$$

Finalement, on a $I_1 \leq I_1 + I_2 + I_3 \leq CI_1$ avec $I_1 \sim \frac{\langle\zeta\rangle^{-2\sigma}}{\langle\omega\rangle^4}$, d'où (3.163) pour $\sigma > -\frac{1}{2}$.
$\star$ Si $\sigma < -\frac{1}{2}$ alors

$$\int_{\langle\zeta\rangle}^{\langle\omega\rangle} \frac{dx}{x^{2\sigma+2}} \leq C\langle\omega\rangle^{-2\sigma-1} \quad \Rightarrow \quad I_2 \leq CI_3 \tag{3.168}$$

Pour comparer I_1 et I_3 on introduit l'exposant critique

$$\kappa = \frac{2\sigma+1}{2\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad -2\sigma\kappa = -2\sigma - 1 \tag{3.169}$$

Pour $\sigma \in]-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}[$, on a $\kappa \in]0, \frac{4}{5}[$. On distingue à nouveau deux cas.
$*$ Si $(\langle\zeta\rangle, \langle\omega\rangle) \in \{\langle\zeta\rangle \leq \langle\omega\rangle^\kappa\}$, alors on a

$$\langle\zeta\rangle^{-2\sigma} \leq \langle\omega\rangle^{-2\sigma\kappa} = \langle\omega\rangle^{-2\sigma-1} \quad \Rightarrow \quad I_1 \leq C\, I_3 \tag{3.170}$$

$*$ Si $(\langle\zeta\rangle, \langle\omega\rangle) \in \{\langle\zeta\rangle \geq \langle\omega\rangle^\kappa\}$, alors on a

$$\langle\zeta\rangle^{-2\sigma} \geq \langle\omega\rangle^{-2\sigma\kappa} = \langle\omega\rangle^{-2\sigma-1} \quad \Rightarrow \quad I_3 \leq C\, I_1 \tag{3.171}$$

Pour $\sigma \in]-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}[$ on a ainsi $I_1 + I_2 + I_3 \sim \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \geq \langle\omega\rangle^\kappa} I_1 + \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \leq \langle\omega\rangle^\kappa} I_3$, ce qui donne (3.163) pour $\sigma < -\frac{1}{2}$.
□
On a alors le

Corollaire 3.2 *Pour $\sigma \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ on a*

$$\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma} \quad \sim \quad \langle\omega\rangle^{-2} \tag{3.172}$$

Pour $\sigma \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ on a

$$\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma} \quad \leq \quad \langle\omega\rangle^{-1} \tag{3.173}$$

et

$$\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2} \quad \leq \quad C\, \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \geq \langle\omega\rangle^\kappa} + \langle\omega\rangle^{-1} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \leq \langle\omega\rangle^\kappa} \tag{3.174}$$

Preuve. On utilise la proposition 3.3. Pour $\sigma \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, (3.172) est immédiat. Pour $\sigma \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$ on a

$$\begin{aligned}
\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma} &\sim \langle\omega\rangle^2 \big(\tfrac{\langle\zeta\rangle^{-\sigma}}{\langle\omega\rangle^2} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \geq \langle\omega\rangle^\kappa} + \tfrac{\langle\omega\rangle^{-\sigma}}{\langle\omega\rangle^{5/2}} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \leq \langle\omega\rangle^\kappa}\big) \tfrac{\langle\zeta\rangle^\sigma}{\langle\omega\rangle^2} \\
&\sim \langle\omega\rangle^{-2} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \geq \langle\omega\rangle^\kappa} + \langle\zeta\rangle^\sigma \langle\omega\rangle^{-\sigma-5/2} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \leq \langle\omega\rangle^\kappa} \\
&\leq \langle\omega\rangle^{-2} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \geq \langle\omega\rangle^\kappa} + \langle\omega\rangle^{-\sigma-5/2} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \leq \langle\omega\rangle^\kappa} \\
&\leq \langle\omega\rangle^{-1}
\end{aligned} \tag{3.175}$$

car $\langle\zeta\rangle^\sigma < 1$ comme $\sigma < 0$ et $\langle\omega\rangle^{-\sigma-5/2} < \langle\omega\rangle^{-1}$ comme $-\sigma - 5/2 < -1$.
Enfin on a

$$\begin{aligned}
\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2} &\sim \langle\omega\rangle^2 (\langle\zeta\rangle^{-\sigma} \langle\omega\rangle^{-2} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \geq \langle\omega\rangle^\kappa} + \langle\omega\rangle^{-\sigma-5/2} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \leq \langle\omega\rangle^\kappa}) \\
&\qquad (\langle\zeta\rangle^{\sigma+2} \langle\omega\rangle^{-2} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \geq \langle\omega\rangle^\kappa} + \langle\omega\rangle^{\sigma-1/2} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \leq \langle\omega\rangle^\kappa}) \\
&\sim \langle\zeta\rangle^2 \langle\omega\rangle^{-2} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \geq \langle\omega\rangle^\kappa} + \langle\omega\rangle^{-1} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \leq \langle\omega\rangle^\kappa} \\
&\leq C\, \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \geq \langle\omega\rangle^\kappa} + \langle\omega\rangle^{-1} \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \leq \langle\omega\rangle^\kappa}
\end{aligned} \tag{3.176}$$

□

3.2.2.4 Étude du problème découplé

Pour étudier le système (3.148), on commence par regarder le problème totalement découplé, ie le cas $\alpha = \beta = \gamma = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l}(\omega^2 - \nu\partial_{zz})u_\zeta + i\xi p_\zeta = f_{1,\zeta}\\ (\omega^2 - \nu\partial_{zz})v_\zeta + i\eta p_\zeta = f_{2,\zeta}\\ \partial_z p_\zeta = 0\\ (\omega^2 - \nu\partial_{zz})\theta_\zeta = f_{3,\zeta}\end{array}\right. \quad \text{avec } \int_0^a(\xi u_\zeta + \eta v_\zeta) = 0 \text{ et } X_\zeta|_{z=0,z=a} = 0 \tag{3.177}$$

Notations simplifiées. On notera :
- $p_{\zeta,0} = p_\zeta(z=0)$;
- $\|.\|_{\sigma,\zeta}$ pour $\|.\|_{H^\sigma_\zeta}$, $\|.\|_{(H^\sigma_\zeta)^2}$ et $\|.\|_{(H^\sigma_\zeta)^3}$;
- $(H^{\sigma+2}_\zeta)^2_{\text{div}}$ pour l'espace $\{(u,v) \in (H^{\sigma+2}_\zeta)^2, \int_0^a \xi u + \eta v = 0\}$.

On a la

Proposition 3.12 *Soit $(\lambda,\zeta) \in \mathbb{S}\times\mathbb{Z}^2\backslash 0$. L'opérateur*

$$\begin{array}{rccc} & (H^{\sigma+2}_\zeta)^2_{div}\times\mathbb{C}\times H^{\sigma+2}_\zeta & \to & (H^\sigma_\zeta)^3 \\ \mathcal{L}_0 : & (u,v,p_0,\theta) & \mapsto & \left[\begin{array}{l}(\omega^2-\nu\partial_{zz})u + i\xi p_0\\ (\omega^2-\nu\partial_{zz})v + i\eta p_0\\ (\omega^2-\nu\partial_{zz})\theta\end{array}\right] = \left[\begin{array}{l}f_1\\ f_2\\ f_3\end{array}\right]\end{array} \tag{3.178}$$

est continu et bijectif. De plus $Y = (u,v)$ se décompose en $Y_1 + Y_2$ et on a les estimations suivantes

$$\begin{array}{lrcl}(a) & |\zeta p_0| & \le & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma \|F\|_{\sigma,\zeta}\\ (b) & M_{-\sigma-2}[M_{-\sigma}]^{-1}\|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma+2,\zeta} & \le & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2}\|F\|_{\sigma,\zeta}\\ (c) & \langle\omega\rangle^2\|Y_2\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_2\|_{\sigma+2,\zeta} & \le & C\|F\|_{\sigma,\zeta}\\ (d) & \langle\omega\rangle^2\|\theta\|_{\sigma,\zeta} + \|\theta\|_{\sigma+2,\zeta} & \le & C\|f_3\|_{\sigma,\zeta}\end{array} \tag{3.179}$$

avec $(f_1,f_2) = F$.

Avant de prouver cette proposition, on fait une remarque élémentaire, mais qui sera utile dans la suite :

Remarque 3.8 *Les valeurs propres de l'opérateur $\omega^2 - \nu\partial_{zz}$ sont des valeurs propres de l'opérateur P. De plus, pour tout $\lambda \notin \mathbb{V}_P$, l'opérateur $\omega^2 - \nu\partial_{zz}$ est continu et bijectif de $H^{\sigma+2}_\zeta$ sur H^σ_ζ pour tout $\sigma \in]-\frac{3}{2},\frac{1}{2}[$.*

Preuve de la proposition 3.12. La continuité est facile, tout comme l'injectivité (car $\mathbb{S}\cap\mathbb{V}_P = \emptyset$). Il reste à voir la surjectivité et les estimations. On remarque que $\mathcal{L}_0$ se découple en deux opérateurs, l'un agissant sur (u,v,p_0) et l'autre sur θ.
On traite d'abord la partie relative à θ : la surjectivité est claire ; pour l'estimation, on

remarque que θ vérifie une équation de la chaleur pour laquelle on a l'estimation maximale suivante, qui est justement (3.179,d) :

$$\langle\omega\rangle^2\|\theta\|_{\sigma,\zeta} + \|\theta\|_{\sigma+2,\zeta} \leq C\|f_3\|_{\sigma,\zeta} \tag{3.180}$$

En effet : soit $f \in H^\sigma_\zeta$, avec $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k e_k(z)$. Soit g la solution de $(\omega^2 - \nu\partial_{zz})g = f$ avec conditions aux limites de Dirichlet. Alors $g \in H^{\sigma+2}(0,a)$, avec $\sigma+2 \in]\frac{1}{2},\frac{5}{2}[$, et $g(0) = g(a) = 0$, donc $g \in H^{\sigma+2}_\zeta$ d'après le lemme 3.4. On peut ainsi écrire $g = \sum_k g_k e_k$ et on a :

$$(\omega^2 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2})g_k = f_k \tag{3.181}$$

avec $\omega^2 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2} \neq 0$.
On a alors facilement, en utilisant le lemme 3.5 :

$$\begin{aligned}
\langle\omega\rangle^4\|g\|^2_{\sigma,\zeta} &= \langle\omega\rangle^4 \sum_k (1+\nu\zeta^2+\nu k^2)^\sigma |g_k|^2 \\
&= \langle\omega\rangle^4 \sum_k (1+\nu\zeta^2+\nu k^2)^\sigma \frac{|f_k|^2}{|\omega^2 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2}|^2} \\
&\leq C\langle\omega\rangle^4 \sum_k (1+\nu\zeta^2+\nu k^2)^\sigma \frac{|f_k|^2}{\langle\omega\rangle^4 + k^4} \\
&\leq C\sum_k (1+\nu\zeta^2+\nu k^2)^\sigma |f_k|^2 \\
&= C\|f\|^2_{\sigma,\zeta}
\end{aligned} \tag{3.182}$$

et

$$\begin{aligned}
\|g\|^2_{\sigma+2,\zeta} &= \sum_k (1+\nu\zeta^2+\nu k^2)^{\sigma+2} \frac{|f_k|^2}{|\omega^2 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2}|^2} \\
&\leq \sum_k (1+\nu\zeta^2+\nu k^2)^\sigma |f_k|^2 \frac{(1+\nu\zeta^2+\nu k^2)^2}{|\omega^2 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2}|^2} \\
&\leq C\sum_k (1+\nu\zeta^2+\nu k^2)^\sigma |f_k|^2 \frac{\langle\zeta\rangle^4 + k^4}{\langle\omega\rangle^4 + k^4} \\
&= C\|f\|^2_{\sigma,\zeta}
\end{aligned} \tag{3.183}$$

Avec $f = f_{3,\zeta} \in H^\sigma_\zeta$ et $\theta_\zeta = g$ on obtient (3.180).
Il reste donc à étudier l'opérateur $\mathcal{L}_0$ restreint à $(u,v,p_0) \in (H^{\sigma+2}_\zeta)^2_{\text{div}} \times \mathbb{C}$. Pour la surjectivité, on procède en deux temps : d'abord on calcule (explicitement) la constante p_0, puis on inverse l'opérateur $(\omega^2 - \nu\partial_{zz})$ (ce qui est possible pour $(\lambda,\zeta) \in \mathbb{S}\times\mathbb{Z}^2\backslash 0$ d'après la remarque 3.8). Il suffit donc de calculer p_0 et de montrer les estimations (3.179).
Pour calculer p_0, on exprime d'abord u et v en fonction de p_0 et $F = (f_1, f_2)$:

$$u = (\omega^2 - \nu\partial_{zz})^{-1}[f_1 - i\xi p_0], \quad v = (\omega^2 - \nu\partial_{zz})^{-1}[f_1 - i\eta p_0] \tag{3.184}$$

puis on utilise $\int_0^a i\xi u + i\eta v = 0$ pour obtenir p_0 :

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_0^a i\xi(\omega^2 - \nu\partial_{zz})^{-1}[f_1 - i\xi p_0] + i\eta(\omega^2 - \nu\partial_{zz})^{-1}[f_1 - i\eta p_0]\,dz = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\textstyle\int_0^a (\omega^2 - \nu\partial_{zz})^{-1}[(\xi^2+\eta^2)p_0]\,dz = -\int_0^a (\omega^2 - \nu\partial_{zz})^{-1}[i\xi f_1 + i\eta f_2]\,dz \\
\Leftrightarrow\ &\textstyle\zeta^2 p_0 \int_0^a (\omega^2 - \nu\partial_{zz})^{-1}[1]\,dz = -\int_0^a (\omega^2 - \nu\partial_{zz})^{-1}[i\xi f_1 + i\eta f_2]\,dz
\end{aligned} \tag{3.185}$$

On va montrer que cette équation définit bien p_0 et permet de l'estimer. Pour cela on calcule :

$$\begin{aligned}\int_0^a (\lambda-\nu\Delta)^{-1}(1)\,dz &= \int_0^a \frac{1}{\omega^2}(1-\cosh(\frac{\omega z}{\sqrt{\nu}}))+\frac{ch(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}})-1}{\omega^2\sinh(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}})}\sinh(\frac{\omega z}{\sqrt{\nu}})\,dz \\ &= \frac{1}{\omega^2}(a-\frac{\sqrt{\nu}}{\omega}\sinh(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}}))+\frac{(\cosh(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}})-1)^2}{\omega^2\sinh(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}})}\frac{\sqrt{\nu}}{\omega} \qquad (3.186)\\ &= \frac{a}{\omega^2}\Big[1+2\frac{1-\cosh(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}})}{\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}}\sinh(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}})}\Big]\end{aligned}$$

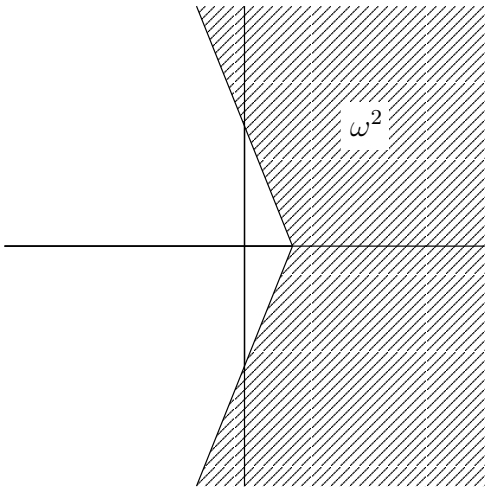
où ω est la racine carré de partie réelle positive de ω^2. On introduit la fonction

$$\mathcal{N}(\chi)=1+2\frac{1-\cosh(\chi)}{\chi\sinh(\chi)} \qquad (3.187)$$

que l'on va estimer pour $\chi=\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}}$ (on montrera en particulier que $\mathcal{N}$ ne s'annule pas). On a $\omega^2=\lambda+\nu\zeta$, donc

$$\omega^2\in\{\nu-\delta_2-\mu_1+i\mu_2,\ \text{ avec } (\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } |\mu_2|\geq\frac{1}{\delta_1}\mu_1\} \qquad (3.188)$$

avec δ_1 petit et $\nu-\delta_2>0$; ie ω^2 se trouve dans un secteur du type

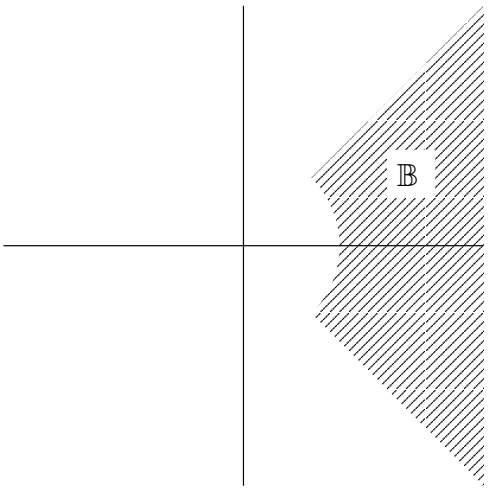


(3.189)

donc ω et χ sont dans un domaine du type :

$$\mathbb{B}=\{\mu_1+i\mu_2,\ \text{ avec } (\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R} \text{ et } |\mu_2|\leq(1+\delta_5)\mu_1\}\setminus\delta_4 B_1 \qquad (3.190)$$

où δ_4 et δ_5 sont petites et B_1 est le disque unité ouvert ; ie $\mathbb{B}$ est du type :



(3.191)

On a l'estimation suivante pour $\mathcal{N}(\chi)$ avec $\chi \in \mathbb{B}$:

Lemme 3.7 *Il existe des constantes C_1 et C_2 telles que pour tout $\chi \in \mathbb{B}$*

$$\frac{C_1}{1+|\chi|^2} \leq \frac{|\mathcal{N}(\chi)|}{|\chi|^2} \leq \frac{C_2}{1+|\chi|^2} \tag{3.192}$$

On prouvera ce lemme plus loin. On a ainsi

$$\zeta^2 p_0 = -\frac{\omega^2}{a}\Big[\mathcal{N}(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}})\Big]^{-1}\int_0^a (\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[i\xi f_1 + i\eta f_2]\,dz \tag{3.193}$$

avec, grâce aux lemmes 3.5 et 3.7 :

$$C_1\langle\omega\rangle^2 \leq \frac{\omega^2}{a}\Big[\mathcal{N}(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}})\Big]^{-1} \leq C_2\langle\omega\rangle^2 \tag{3.194}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes strictement positives indépendantes de $\omega \in \mathbb{B}$.
On va maintenant estimer l'intégrale de (3.193).
Soit $f = \sum_k f_k e_k \in H^\sigma_\zeta$ et $g = \sum_k g_k e_k \in H^{\sigma+2}_\zeta$ tel que $g = (\omega - \nu\partial_{zz})^{-1}[f]$. Comme précédemment on a

$$g_k = \frac{f_k}{\omega^2 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2}} \tag{3.195}$$

On a alors, comme pour (3.182), en utilisant le lemme 3.5 :

$$\begin{aligned}
|\int_0^a(\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}f| = |\int_0^a g| &= |\int_0^a \sum \frac{f_k}{\omega^2+\frac{\nu k^2\pi^2}{a^2}} e_k(z)\,dz| \\
&= |\sum \frac{f_k}{\omega^2+\frac{\nu k^2\pi^2}{a^2}} \int_0^a e_k(z)\,dz| \\
&= |C\sum_{k\in 2\mathbb{N}+1} \frac{f_k}{k\,(\omega^2+\frac{\nu k^2\pi^2}{a^2})}| \\
&\leq C\sum \frac{|f_k|}{k\,|\omega^2+\frac{\nu k^2\pi^2}{a^2}|} \\
&\leq C\sum \frac{|f_k|}{k\,(\langle\omega\rangle^2+k^2)} \\
&\leq C\|f\|_{\sigma,\zeta}\Big[\sum \frac{(1+\nu k^2+\nu|\zeta|^2)^{-\sigma}}{k^2\,(\langle\omega\rangle^2+k^2)^2}\Big]^{1/2} \\
&\leq C\|f\|_{\sigma,\zeta} M_\sigma(\lambda,\zeta)
\end{aligned} \tag{3.196}$$

Finalement, en utilisant l'expression de la pression (3.193) et les deux estimations (3.194) et (3.196) on obtient :

$$\zeta^2\,|p_0| \leq C\,\langle\omega\rangle^2\,M_\sigma(\lambda,\zeta)\,|\zeta|\,\|F\|_{\sigma,\zeta} \tag{3.197}$$

d'où (3.179,a) et la surjectivité.
Pour obtenir (3.179,b,c) on revient à (3.184) :

$$\begin{aligned}
u &= (\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[f_1 - i\xi p_0] \\
&= (\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[f_1] - i\xi p_0(\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[1] \\
&= u_2+u_1
\end{aligned} \tag{3.198}$$

Posons donc

$$\begin{aligned}
Y_1 &= -i\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix} p_0(\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[1] \\
Y_2 &= (\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.199}$$

Pour Y_2 on a, comme pour θ_ζ en début de paragraphe, l'estimation maximale de l'équation de la chaleur, à savoir :

$$\langle\omega\rangle^2\|Y_2\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_2\|_{\sigma+2,\zeta} \leq C\|F\|_{\sigma,\zeta} \tag{3.200}$$

Voyons maintenant Y_1 :

$$\|Y_1\|_{\sigma+2,\zeta} = |\zeta|\,|p_0|\,\|(\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[1]\|_{\sigma+2,\zeta} \tag{3.201}$$

Pour estimer $\|(\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[1]\|_{\sigma+2,\zeta}$ on procède comme précédemment : la fonction constante valant 1 est dans H^σ_ζ et se décompose en $\sum_k a_k e_k$, où $a_k = C_0\frac{1}{k}$ pour k impair et $a_k = 0$ sinon. On a alors

$$\begin{aligned}
\|(\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[1]\|_{\sigma+2,\zeta} &= C_0\Big[\sum_{k\ \text{impair}} (1+\nu\zeta^2+\nu k^2)^{\sigma+2}\frac{1}{k^2|\omega^2+\frac{\nu k^2\pi^2}{a^2}|^2}\Big]^{1/2} \\
&\leq C\Big[\sum_k \frac{(\langle\zeta\rangle^2+k^2)^{\sigma+2}}{k^2(\langle\omega\rangle^4+k^4)}\Big]^{1/2} \\
&= CM_{-\sigma-2}(\lambda,\zeta)
\end{aligned} \tag{3.202}$$

(pour $\sigma \in]-\frac{3}{2},\frac{1}{2}[$ on a $-\sigma-2 \in]-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}[$ donc $M_{-\sigma-2}$ est bien défini)
De la même façon on établit

$$\|(\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[1]\|_{\sigma,\zeta} \leq CM_{-\sigma}(\lambda,\zeta) \tag{3.203}$$

(pour $\sigma \in]-\frac{3}{2},\frac{1}{2}[$ on a $-\sigma \in]-\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$ donc $M_{-\sigma}$ est bien défini)
Finalement, on vient de montrer

$$\begin{array}{rcl} \|Y_1\|_{\sigma+2,\zeta} & \leq & C\,|\zeta|\,|p_0|\,M_{-\sigma-2}(\lambda,\zeta) \\ \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} & \leq & C\,|\zeta|\,|p_0|\,M_{-\sigma}(\lambda,\zeta) \end{array} \tag{3.204}$$

ce qui achève la preuve.
□

Preuve du lemme 3.7. Les singularités de $\mathcal{N}$ sont les zéros de sinh donc sont toutes situées sur l'axe imaginaire et $\mathcal{N}$ est holomorphe dans $\mathbb{B}$. De plus, $\mathcal{N}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{B}$. En effet, si $\mathcal{N}(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}})$ est nul alors d'après (3.185) et (3.184) on peut trouver p_0 non nul, puis u et v dans $(H^{\sigma+2}_\zeta)^2_{\rm div}$, tels que $\mathcal{L}_0(u,v,p_0,0)=0$, ce qui contredit l'injectivité de $\mathcal{L}_0$ pour $\omega \in \mathbb{B}$.
En $+\infty$, on a :

$$\lim_{|\chi|\to+\infty} \mathcal{N}(\chi) = 1 \tag{3.205}$$

donc si K est une grande constante, il existe C_1 et C_2 tels que pour tout $\chi \in \mathbb{B}\setminus KB_1$ on a

$$C_1 \leq \mathcal{N}(\chi) \leq C_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{C_1}{1+|\chi|^2} \leq \frac{|\mathcal{N}(\chi)|}{|\chi|^2} \leq \frac{C_2}{1+|\chi|^2} \tag{3.206}$$

Sur le compact $\mathbb{B}\cap K\bar{B}_1$, $\mathcal{N}(\chi)$ et χ sont bornés et non nuls donc il existe C_1 et C_2 tels que pour tout $\chi \in \mathbb{B}\cap K\bar{B}_1$ on a

$$\frac{C_1}{1+|\chi|^2} \leq \frac{C_1}{|\chi|^2} \leq \frac{|\mathcal{N}(\chi)|}{|\chi|^2} \leq \frac{C_2'}{|\chi|^2} \leq \frac{C_2}{1+|\chi|^2} \tag{3.207}$$

□

3.2.2.5 Étude du problème couplé

On revient au système couplé $\alpha,\beta,\gamma \neq 0$ (3.148). On introduit $\mathcal{L}_1$ l'opérateur de pertubation correspondant :

$$\begin{array}{rccc} & (H^{\sigma+2}_\zeta)^2_{\rm div}\times\mathbb{C}\times H^{\sigma+2}_\zeta & \to & (H^\sigma_\zeta)^3 \\ \mathcal{L}_1 : & (u,v,p_0,\theta) & \mapsto & \left[\begin{array}{l} -\alpha v + i\xi\beta\int_0^z\theta \\ \alpha u + i\eta\beta\int_0^z\theta \\ -\gamma\int_0^z(i\xi u+i\eta v)\end{array}\right] \end{array} \tag{3.208}$$

de sorte que l'opérateur $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_1$, où $\mathcal{L}_0$ est définit par (3.178), est exactement celui du système (3.148). On a la

Proposition 3.13 *Soit $(\lambda,\zeta)\in\mathbb{S}\times\mathbb{Z}^2\backslash 0$. L'opérateur*

$$\begin{array}{rccc} & (H^{\sigma+2}_\zeta)^2_{div}\times\mathbb{C}\times H^{\sigma+2}_\zeta & \to & (H^\sigma_\zeta)^3 \\ \mathcal{L}: & (u,v,p_0,\theta) & \mapsto & (\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_1)(u,v,p_0,\theta)=F \end{array} \tag{3.209}$$

est continu et bijectif. De plus $Y=(u,v)$ se décompose en Y_1+Y_2 et on a les estimations suivantes

$$\begin{array}{lrcl} (a) & |\zeta p_0| & \le & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma\|F\|_{\sigma,\zeta} \\ (b) & M_{-\sigma-2}[M_{-\sigma}]^{-1}\|Y_1\|_{\sigma,\zeta}+\|Y_1\|_{\sigma+2,\zeta} & \le & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2}\|F\|_{\sigma,\zeta} \\ (c) & \langle\omega\rangle^2\|Y_2\|_{\sigma,\zeta}+\|Y_2\|_{\sigma+2,\zeta} & \le & C\|F\|_{\sigma,\zeta} \\ (d) & \langle\omega\rangle^2\|\theta\|_{\sigma,\zeta}+\|\theta\|_{\sigma+2,\zeta} & \le & C\|F\|_{\sigma,\zeta} \end{array} \tag{3.210}$$

Preuve. Soit $(\lambda,\zeta)\in\mathbb{S}\times\mathbb{Z}^2\backslash 0$ fixé. Pour montrer que $\mathcal{L}$ est un isomorphisme, on montre d'abord que l'image de $\mathcal{L}_1$ est contenue dans un compact de $(H^\sigma_\zeta)^3$. En effet : si $(u,v,p_0,\theta)\in(H^{\sigma+2}_\zeta)^2_{\rm div}\times\mathbb{C}\times H^{\sigma+2}_\zeta$, alors

$$\begin{array}{rcl} -\alpha v+i\xi\beta\int_0^z\theta & \in & H^{\sigma+2}(0,a) \\ \alpha u+i\eta\beta\int_0^z\theta & \in & H^{\sigma+2}(0,a) \\ -\gamma\int_0^z(i\xi u+i\eta v) & \in & H^{\sigma+3}(0,a) \end{array} \tag{3.211}$$

et $(H^{\sigma+2}(0,a))^2\times H^{\sigma+3}(0,a)$ est un compact de $(H^\sigma_\zeta)^3$. Pour schématiser :

$$\begin{array}{lccccl} \mathcal{L}_0: & E_1 & \overset{\sim}{\to} & E_2 & & \text{isomorphisme entre Hilbert} \\ \mathcal{L}_1: & E_1 & \hookrightarrow & F & \overset{c}{\hookrightarrow} E_2 & \text{opérateur compact} \end{array} \tag{3.212}$$

D'après la théorie de Fredholm, $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_1$ est d'image fermée de codimension finie, de noyau de dimension finie et d'indice nul ; $\mathcal{L}$ est donc un isomorphisme si et seulement si son noyau est réduit à zéro. Soit (u,v,p_0,θ) dans le noyau de $\mathcal{L}$, ie

$$\left\{\begin{array}{l} (\omega^2-\nu\partial_{zz})u=\alpha v-i\xi p \\ (\omega^2-\nu\partial_{zz})v=-\alpha u-i\eta p \\ \partial_z p-\beta\theta=0 \\ (\omega^2-\nu\partial_{zz})\theta=-\gamma w \end{array}\right. \tag{3.213}$$
$$\text{avec } w(z)=-\int_0^z(i\xi u+i\eta v)$$
$$\text{et } w(a)=0,\ X|_{z=0,z=a}=0$$

Donc u, v et θ sont réguliers (car ils vérifient des équations de la chaleur avec données régulières) et comme $\lambda\notin\mathbb{V}_P$, $(u,v,\theta)=0$, puis $p_0=0$.
Montrons maintenant les estimations (3.210). Pour cela on écrit

$$\mathcal{L}(u,v,p_0,\theta)=F \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{L}_0(u,v,p_0,\theta)=F-\mathcal{L}_1(u,v,p_0,\theta) \tag{3.214}$$

et on utilise la proposition 3.12. On obtient :

$$\begin{array}{lrcl} (a) & |\zeta p_0| & \le & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma\big[\|F\|_{\sigma,\zeta}+\|Y\|_{\sigma,\zeta}+|\zeta|\|\int_0^z\theta\,dz\|_{\sigma,\zeta}\big] \\ (b) & \frac{M_{-\sigma-2}}{M_{-\sigma}}\|Y_1\|_{\sigma,\zeta}+\|Y_1\|_{\sigma+2,\zeta} & \le & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2}\big[\|F\|_{\sigma,\zeta}+\|Y\|_{\sigma,\zeta}+|\zeta|\|\int_0^z\theta\,dz\|_{\sigma,\zeta}\big] \\ (c) & \langle\omega\rangle^2\|Y_2\|_{\sigma,\zeta}+\|Y_2\|_{\sigma+2,\zeta} & \le & C\big[\|F\|_{\sigma,\zeta}+\|Y\|_{\sigma,\zeta}+|\zeta|\|\int_0^z\theta\,dz\|_{\sigma,\zeta}\big] \\ (d) & \langle\omega\rangle^2\|\theta\|_{\sigma,\zeta}+\|\theta\|_{\sigma+2,\zeta} & \le & C\big[\|F\|_{\sigma,\zeta}+|\zeta|\|\int_0^z Y\,dz\|_{\sigma,\zeta}\big] \end{array} \tag{3.215}$$

On montrera plus loin le lemme suivant :

Lemme 3.8 *Soit $s \in]-\frac{3}{2},\frac{1}{2}[$, $s \neq -\frac{1}{2}$ et $\varphi \in H^s_\zeta \cap H^{s+2}_\zeta$. Alors la fonction $\phi(z) = \int_0^z \varphi(z')\,dz'$ est dans H^s_ζ.*
De plus, si $s \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, on a

$$\|\phi\|_{s,\zeta} \leq C\|\varphi\|_{s,\zeta} \tag{3.216}$$

où C est une constante indépendante de ζ et de ω.
Si $s \in]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}[$ on a

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{s,\zeta} &\leq C_2(\omega,\zeta)\left(\langle\omega\rangle^2\|\varphi\|_{s,\zeta} + \|\varphi\|_{s+2,\zeta}\right) \\ \|\phi\|_{s,\zeta} &\leq C_1(\omega,\zeta)\left(\tfrac{M_{-s-2}}{M_{-s}}\|\varphi\|_{s,\zeta} + \|\varphi\|_{s+2,\zeta}\right) \end{aligned} \tag{3.217}$$

avec :

$$\begin{aligned} &(i) && \langle\zeta\rangle\, C_2(\omega,\zeta) && \overset{\langle\omega\rangle\to\infty}{\longrightarrow} && 0 \\ &(ii) && \langle\zeta\rangle\, C_1(\omega,\zeta)\,\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\geq\langle\omega\rangle^\kappa} && \overset{\langle\omega\rangle\to\infty}{\longrightarrow} && 0 \\ &(iii) && C_1(\omega,\zeta)\,\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\leq\langle\omega\rangle^\kappa} && \overset{\langle\omega\rangle\to\infty}{\longrightarrow} && 0 \end{aligned} \tag{3.218}$$

On suppose pour commencer que $\sigma \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$. En utilisant ce résultat, on obtient :

$$\begin{aligned} &(a) && |\zeta p_0| &&\leq C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma\left[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\|\theta\|_{\sigma,\zeta}\right] \\ &(b) && \tfrac{M_{-\sigma-2}}{M_{-\sigma}}\|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma+2,\zeta} &&\leq C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2}\left[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\|\theta\|_{\sigma,\zeta}\right] \\ &(c) && \langle\omega\rangle^2\|Y_2\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_2\|_{\sigma+2,\zeta} &&\leq C\left[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\|\theta\|_{\sigma,\zeta}\right] \\ &(d) && \langle\omega\rangle^2\|\theta\|_{\sigma,\zeta} + \|\theta\|_{\sigma+2,\zeta} &&\leq C\left[\|F\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\|Y\|_{\sigma,\zeta}\right] \end{aligned} \tag{3.219}$$

On va absorber les termes perturbatifs de droite à gauche. Pour $\langle\omega\rangle$ borné, les estimations (3.210) sont vraies car $\mathcal{L}$ est un isomorphisme. On peut donc supposer que $\langle\omega\rangle$ est assez grand. L'absorption de $\|Y_2\|_{\sigma,\zeta}$ dans $(3.219, c)$ est facile et on obtient :

$$\|Y_2\|_{\sigma,\zeta} \leq C\frac{1}{\langle\omega\rangle^2}\left[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\|\theta\|_{\sigma,\zeta}\right] \tag{3.220}$$

Donc $\|Y_2\|_{\sigma,\zeta}$ est un terme négligeable des seconds membres des inégalités $(3.219, a, b)$ et introduit un terme supplémentaire dans $(3.219, d)$:

$$\begin{aligned} &(a) && |\zeta p_0| &&\leq C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma\left[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\|\theta\|_{\sigma,\zeta}\right] \\ &(b) && \tfrac{M_{-\sigma-2}}{M_{-\sigma}}\|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma+2,\zeta} &&\leq C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2}\left[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\|\theta\|_{\sigma,\zeta}\right] \\ &(c) && \langle\omega\rangle^2\|Y_2\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_2\|_{\sigma+2,\zeta} &&\leq C\left[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\|\theta\|_{\sigma,\zeta}\right] \\ &(d) && \langle\omega\rangle^2\|\theta\|_{\sigma,\zeta} + \|\theta\|_{\sigma+2,\zeta} &&\leq C\left[\|F\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + \tfrac{|\zeta|^2}{\langle\omega\rangle^2}\|\theta\|_{\sigma,\zeta}\right] \end{aligned} \tag{3.221}$$

D'après le corollaire 3.2, $\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma} \sim \langle\omega\rangle^{-2}$, on peut donc absorber $\|Y_1\|_{\sigma,\zeta}$ dans $(3.221, b)$ pour obtenir :

$$\|Y_1\|_{\sigma,\zeta} \leq C\langle\omega\rangle^{-2}\left[\|F\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\|\theta\|_{\sigma,\zeta}\right] \tag{3.222}$$

Comme précédemment, $\|Y_1\|_{\sigma,\zeta}$ devient négligeable dans $(3.221, a, c)$ et on obtient :

$$\begin{array}{lrcl}
(a) & |\zeta p_0| & \leq & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma \big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\|\theta\|_{\sigma,\zeta}\big] \\
(b) & \frac{M_{-\sigma-2}}{M_{-\sigma}}\|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma+2,\zeta} & \leq & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2}\big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\|\theta\|_{\sigma,\zeta}\big] \\
(c) & \langle\omega\rangle^2\|Y_2\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_2\|_{\sigma+2,\zeta} & \leq & C\big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\|\theta\|_{\sigma,\zeta}\big] \\
(d) & \langle\omega\rangle^2\|\theta\|_{\sigma,\zeta} + \|\theta\|_{\sigma+2,\zeta} & \leq & C\big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|\theta\|_{\sigma,\zeta}\big]
\end{array} \tag{3.223}$$

L'absorption de $\|\theta\|_{\sigma,\zeta}$ est alors immédiate et on a :

$$\|\theta\|_{\sigma,\zeta} \leq C\frac{1}{\langle\omega\rangle^2}\|F\|_{\sigma,\zeta} \tag{3.224}$$

Comme précédemment, $\|\theta\|_{\sigma,\zeta}$ devient négligeable dans $(3.223, a, b, c)$, ce qui achève la preuve de (3.210) et de la proposition pour $\sigma \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Voyons maintenant le cas $\sigma \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$. On reprend les inégalités (3.215) et on utilise le lemme 3.8 avec C_1 pour Y_1 et C_2 pour θ et Y_2 pour obtenir :

$$\begin{array}{lrcl}
(a) & |\zeta p_0| & \leq & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma \big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_2\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta| C_2 I_\theta\big] \\
(b) & I_1 & \leq & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2}\big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_2\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta| C_2 I_\theta\big] \\
(c) & I_2 & \leq & C\big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_2\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta| C_2 I_\theta\big] \\
(d) & I_\theta & \leq & C\big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta| C_2 I_2 + |\zeta| C_1 I_1\big]
\end{array} \tag{3.225}$$

en notant

$$\begin{array}{rcl}
I_\theta & = & \langle\omega\rangle^2\|\theta\|_{\sigma,\zeta} + \|\theta\|_{\sigma+2,\zeta} \\
I_2 & = & \langle\omega\rangle^2\|Y_2\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_2\|_{\sigma+2,\zeta} \\
I_1 & = & \frac{M_{-\sigma-2}}{M_{-\sigma}}\|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma+2,\zeta}
\end{array} \tag{3.226}$$

Comme précédemment, on absorbe Y_2 dans $(3.225, c)$, pour obtenir

$$\|Y_2\|_{\sigma,\zeta} \leq C\frac{1}{\langle\omega\rangle^2}\big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta| C_2 I_\theta\big] \tag{3.227}$$

puis on absorbe Y_2 dans $(3.226, a, b, d)$:

$$\begin{array}{lrcl}
(a) & |\zeta p_0| & \leq & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma \big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\, C_2\, I_\theta\big] \\
(b) & I_1 & \leq & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2}\big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\, C_2\, I_\theta\big] \\
(c) & I_2 & \leq & C\big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\, C_2\, I_\theta\big] \\
(d) & I_\theta & \leq & C\big[\, \|F\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\, C_2\, \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|^2\, C_2^2\, I_\theta + |\zeta|\, C_1\, I_1\,\big]
\end{array} \tag{3.228}$$

en utilisant $(3.218, i)$ dans (d).
D'après le corollaire 3.2 on a $\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma} \leq \langle\omega\rangle^{-1}$ pour $\sigma \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$, on peut donc absorber Y_1 dans $(3.228, b)$ pour obtenir :

$$\|Y_1\|_{\sigma,\zeta} \leq C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma}\big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\, C_2\, I_\theta\big] \tag{3.229}$$

et on a :

$$\begin{array}{lrcl} (a) & |\zeta p_0| & \leq & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma \big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\, C_2\, I_\theta\big] \\ (b) & I_1 & \leq & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2} \big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\, C_2\, I_\theta\big] \\ (c) & I_2 & \leq & C\big[\|F\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\, C_2\, I_\theta\big] \end{array} \tag{3.230}$$

Voyons pour (d). En utilisant le lemme 3.8 et le corollaire 3.2 on a :

$$\begin{array}{rcl} (d)\quad I_\theta & \leq & C\big[\,\|F\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|\, C_2\, \|Y_1\|_{\sigma,\zeta} + |\zeta|^2\, C_2^2\, I_\theta + |\zeta|\, C_1\, I_1\,\big] \\ & \leq & C\,\|F\|_{\sigma,\zeta}\,\big[1 + |\zeta|\, C_2\,\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma} + |\zeta|\, C_1\,\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2}\big] + \\ & & C\,|\zeta|\, C_2\, I_\theta\,\big[|\zeta|\, C_2\,\langle\omega\rangle^2\, M_\sigma M_{-\sigma} + |\zeta|\, C_2 + |\zeta|\, C_1\ \langle\omega\rangle^2\, M_\sigma M_{-\sigma-2}\,\big] \\ & \leq & C\,\big[1 + |\zeta|\, C_1\,\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2}\big]\,\big[\,\|F\|_{\sigma,\zeta} + \,|\zeta|\, C_2\, I_\theta\,\big] \\ & \leq & C\,\big[1 + |\zeta|\, C_1\,\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\geq\langle\omega\rangle^\kappa} + C_1\,\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\leq\langle\omega\rangle^\kappa}\big]\,\big[\,\|F\|_{\sigma,\zeta} + \,|\zeta|\, C_2\, I_\theta\,\big] \\ & \leq & C\,\big[\,\|F\|_{\sigma,\zeta} + \,|\zeta|\, C_2\, I_\theta\,\big] \end{array} \tag{3.231}$$

D'après le corollaire 3.2, $|\zeta|\, C_2$ tend vers 0 quand $\langle\omega\rangle$ tend vers l'infini, on peut donc absorber I_θ dans (d) puis dans (a, b, c) pour conclure :

$$\begin{array}{lrcl} (a) & |\zeta p_0| & \leq & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma \|F\|_{\sigma,\zeta} \\ (b) & I_1 & \leq & C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2} \|F\|_{\sigma,\zeta} \\ (c) & I_2 & \leq & C\|F\|_{\sigma,\zeta} \\ (d) & I_\theta & \leq & C\,\|F\|_{\sigma,\zeta} \end{array} \tag{3.232}$$

□

Preuve du lemme 3.8. Soient $s < \frac{1}{2}$ fixé et $\varphi \in H^{s+2}_\zeta$, avec $\varphi = \sum_l \varphi_l e_l(z)$. Calculons les composantes ϕ_k de ϕ sur les e_k :

$$\begin{array}{rcl} \phi_k & = & C_0 \int_0^a \phi(z) \sin(\frac{k\pi z}{a})\, dz \\ & = & C_0 \int_0^a \big[\int_0^z \sum_l \varphi_l \sin(\frac{l\pi z'}{a})\, dz'\big] \sin(\frac{k\pi z}{a})\, dz \\ & = & C \int_0^a \big[\sum_l \varphi_l \frac{1}{l}(1 - \cos(\frac{l\pi z}{a}))\big] \sin(\frac{k\pi z}{a})\, dz \\ & = & C \sum_l \int_0^a \frac{\varphi_l}{l}\big[\sin(\frac{k\pi z}{a}) - \frac{1}{2}(\sin(\frac{(k+l)\pi z}{a}) + \sin(\frac{(k-l)\pi z}{a}))\big]\, dz \\ & = & C \sum_l \frac{\varphi_l}{l}\big[\frac{1-(-1)^k}{k} - \frac{(1-(-1)^{k+l})k}{k^2-l^2}\big] \end{array} \tag{3.233}$$

donc

$$|\phi_k| \sim C \sum_l \frac{|\varphi_l|}{l}\Big[\frac{1}{k} + \frac{k}{(k+l)(|k-l|+1)}\Big] \tag{3.234}$$

Voyons pour commencer le cas $s \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. On a

$$\begin{array}{rcl} \|\phi\|_s^2 & = & \sum_k (1 + k^2 + \zeta^2)^s |\phi_k|^2 \\ & \sim & \sum_k (1 + k^2 + \zeta^2)^s \Big(\sum_l \frac{|\varphi_l|}{l}\big[\frac{1}{k} + \frac{k}{(k+l)(|k-l|+1)}\big]\Big)^2 \\ & \leq & \|\varphi\|_s^2 \sum_k (1 + k^2 + \zeta^2)^s \sum_l \frac{1}{l^2(1+l^2+\zeta^2)^s}\big[\frac{1}{k} + \frac{k}{(k+l)(|k-l|+1)}\big]^2 \end{array} \tag{3.235}$$

Regardons la somme en l : pour l petit ou grand devant k, $[\frac{1}{k}+\frac{k}{(k+l)(|k-l|+1)}]$ est de l'ordre de $\frac{1}{k}$, pour l et k du même ordre, $[\frac{1}{k}+\frac{k}{(k+l)(|k-l|+1)}]$ est de l'ordre de 1. On a donc :

$$\begin{aligned}\|\phi\|_s^2 &\leq C\,\|\varphi\|_s^2 \sum_k (1+k^2+\zeta^2)^s \left(\frac{1}{k^2} \sum_l \left(\frac{1}{l^2(1+l^2+\zeta^2)^s} \right) + \frac{1}{k^2(1+k^2+\zeta^2)^s} \right) \\ &\leq C\,\|\varphi\|_s^2 \left(\sum_k \frac{(1+k^2+\zeta^2)^s}{k^2} \sum_l \frac{1}{l^2(1+l^2+\zeta^2)^s} + \sum_k \frac{1}{k^2} \right)\end{aligned} \tag{3.236}$$

Les deux sommes en k et en l sont finies car $2-2s>1$ et $2+2s>1$ et on a, pour s positif :

$$\begin{aligned}\sum_k \frac{(1+k^2+\zeta^2)^s}{k^2} &\sim \int_1^\zeta \frac{(x^2+\zeta^2)^s}{x^2}dx + \int_\zeta^{+\infty} \frac{(x^2+\zeta^2)^s}{x^2}dx \\ &\sim \zeta^{2s}+\zeta^{2s-1} \quad \sim \quad \zeta^{2s}\end{aligned} \tag{3.237}$$

toujours pour s positif, on a facilement :

$$\sum_l \frac{1}{l^2(1+l^2+\zeta^2)^s} \quad \sim \quad \zeta^{-2s} \tag{3.238}$$

donc finalement pour tout $s\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, on a :

$$\sum_l \frac{(1+l^2+\zeta^2)^s}{l^2} \quad \sim \quad \zeta^{2s} \tag{3.239}$$

donc on a finalement, pour $s\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$:

$$\|\phi\|_s^2 \quad \leq \quad C\|\varphi\|_s^2 \tag{3.240}$$

Voyons maintenant le cas $s\in]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}[$. Pour cela on pose

$$\begin{aligned}I_\varphi^2 &= g_{\omega,\zeta}^2\|\varphi\|_{s,\zeta}^2 + \|\varphi\|_{s+2,\zeta}^2 \\ &= \sum_l (1+l^2+\zeta^2)^s (g_{\omega,\zeta}^2 + (1+l^2+\langle\zeta\rangle^2)^2)|\varphi_l|^2 \\ &\sim \sum_l (1+l^2+\zeta^2)^s ((g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2 + l^4)|\varphi_l|^2\end{aligned} \tag{3.241}$$

où $g_{\omega,\zeta}$ représente $\langle\omega\rangle^2$ ou bien $\frac{M_{-s-2}}{M_{-s}}$.
Estimons $\|\phi\|_s$ en fonction de I_φ :

$$\begin{aligned}\|\phi\|_s^2 &= \sum_k (1+k^2+\zeta^2)^s |\phi_k|^2 \\ &\sim \sum_k (1+k^2+\zeta^2)^s \left(\sum_l \frac{|\varphi_l|}{l} \left[\frac{1}{k}+\frac{k}{(k+l)(|k-l|+1)}\right] \right)^2 \\ &\leq I_\varphi^2 \sum_k (1+k^2+\zeta^2)^s \sum_l \frac{1}{l^2(1+l^2+\zeta^2)^s((g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2+l^4)} \left[\frac{1}{k}+\frac{k}{(k+l)(|k-l|+1)}\right]^2\end{aligned} \tag{3.242}$$

Regardons la somme en l : pour l petit ou grand devant k, le dernier facteur $[\frac{1}{k}+\frac{k}{(k+l)(|k-l|+1)}]$ est de l'ordre de $\frac{1}{k}$ et, comme pour l'estimation de M_σ, on a

$$\begin{aligned}&\sum_{l<<k \text{ ou } l>>k} \frac{1}{l^2(1+l^2+\zeta^2)^s((g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2+l^4)} \left[\frac{1}{k}+\frac{k}{(k+l)(|k-l|+1)}\right]^2 \\ &\qquad \leq \quad C \quad \frac{1}{k^2} \sum_l \frac{1}{l^2(1+l^2+\zeta^2)^s((g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2+l^4)} \\ &\qquad \leq \quad C \quad \frac{1}{k^2}[I_1+I_2+I_3]\end{aligned} \tag{3.243}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{\zeta} \frac{dx}{x^2(1+x^2+\zeta^2)^s((g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2+x^4)} \sim \frac{\zeta^{-2s}}{(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2} \\ I_2 &= \int_{\zeta}^{(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^{1/2}} \frac{dx}{x^2(1+x^2+\zeta^2)^s((g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2+x^4)} \\ &\sim \frac{1}{(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2}\int_{\zeta}^{(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^{1/2}} \frac{dx}{x^{2s+2}} \quad \sim \quad \frac{(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^{-s-1/2}}{(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2} \\ I_3 &= \int_{(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^{1/2}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x^2+\zeta^2)^s((g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2+x^4)} \sim \frac{1}{(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^{s+5/2}} \end{aligned} \tag{3.244}$$

Donc finalement on a

$$\begin{aligned} &\sum_{l<<k \text{ ou } l>>k} \frac{1}{l^2(1+l^2+\zeta^2)^s(g_{\omega,\zeta}^2+l^4+\zeta^4)}\left[\frac{1}{k}+\frac{k}{(k+l)(|k-l|+1)}\right]^2 \\ &\qquad \leq \quad C \quad \frac{1}{k^2}\frac{\zeta^{-2s}+(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^{-s-1/2}}{(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2} \end{aligned} \tag{3.245}$$

Puis, pour la somme en k on a facilement

$$\sum_k (1+k^2+\zeta^2)^s \frac{1}{k^2} \sim \zeta^{2s} \tag{3.246}$$

Regardons maintenant (3.242) pour l proche de k :

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_k (1+k^2+\zeta^2)^s \sum_{l\simeq k,l} \frac{1}{l^2(1+l^2+\zeta^2)^s((g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2+l^4)}\left[\frac{1}{k}+\frac{k}{(k+l)(|k-l|+1)}\right]^2 \\ &\quad \sim \sum_k (1+k^2+\zeta^2)^s \frac{1}{k^2(1+k^2+\zeta^2)^s((g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2+k^4)}\left[\frac{1}{k}+C\right]^2 \\ &\quad \sim \sum_k \frac{1}{k^2((g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2+k^4)} \\ &\quad \leq C\frac{1}{(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2} \end{aligned} \tag{3.247}$$

On a finalement montré que, pour $s \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$:

$$\|\phi\|_s^2 \quad \leq \quad I_\varphi^2 \quad \frac{1+\langle\zeta\rangle^{2s}(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^{-s-1/2}}{(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^2} \tag{3.248}$$

Soit

$$\|\phi\|_s \quad \leq \quad I_\varphi \quad \left((g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^{-1}+\langle\zeta\rangle^s(g_{\omega,\zeta}+\langle\zeta\rangle^2)^{-s/2-5/4}\right) \tag{3.249}$$

Posons alors

$$\begin{aligned} C_2(\omega,\zeta) &= (\langle\omega\rangle^2+\langle\zeta\rangle^2)^{-1}+\langle\zeta\rangle^s(\langle\omega\rangle^2+\langle\zeta\rangle^2)^{-s/2-5/4} \\ C_1(\omega,\zeta) &= (\tfrac{M_{-s-2}}{M_{-s}}+\langle\zeta\rangle^2)^{-1}+\langle\zeta\rangle^s(\tfrac{M_{-s-2}}{M_{-s}}+\langle\zeta\rangle^2)^{-s/2-5/4} \end{aligned} \tag{3.250}$$

On a

$$\begin{aligned} |\zeta|\, C_2 &\sim |\zeta|\,(\langle\omega\rangle^2+\langle\zeta\rangle^2)^{-1}+\langle\zeta\rangle^{s+1}(\langle\omega\rangle^2+\langle\zeta\rangle^2)^{-s/2-5/4} \\ &\leq C\langle\omega\rangle^{-1}+\langle\zeta\rangle^{s+1}\langle\omega\rangle^{-s-5/2} \end{aligned} \tag{3.251}$$

Pour $s \geq 1$ on a

$$\langle\zeta\rangle^{s+1}\langle\omega\rangle^{-s-5/2} \leq C\langle\omega\rangle^{s+1}\langle\omega\rangle^{-s-5/2} \leq C\frac{1}{\langle\omega\rangle} \tag{3.252}$$

et pour $s \leq 1$ on a

$$\langle\zeta\rangle^{s+1}\langle\omega\rangle^{-s-5/2} \leq C\langle\omega\rangle^{-s-5/2} \leq C\frac{1}{\langle\omega\rangle} \tag{3.253}$$

car $s+\frac{5}{2}>1$. Dans tous les cas, on a bien $(3.218, i)$.
Voyons C_1, pour cela on pose

$$\kappa = \frac{2(-s-2)+1}{2(-s-2)} = \frac{2s+3}{2s+4} \tag{3.254}$$

et on regarde $\frac{M_{-s-2}}{M_{-s}}$ pour $s \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$:

$$\begin{aligned} \tfrac{M_{-s-2}}{M_{-s}} &\sim (\langle\zeta\rangle^{s+2}\langle\omega\rangle^{-2}\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\geq\langle\omega\rangle^\kappa}+\langle\omega\rangle^{s-1/2}\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\leq\langle\omega\rangle^\kappa})\langle\zeta\rangle^{-s}\langle\omega\rangle^2 \\ &\sim \langle\zeta\rangle^2\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\geq\langle\omega\rangle^\kappa}+\langle\zeta\rangle^{-s}\langle\omega\rangle^{s+3/2}\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\leq\langle\omega\rangle^\kappa} \end{aligned} \tag{3.255}$$

On a ainsi, d'après (3.250) :

$$\langle\zeta\rangle\, C_1\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\geq\langle\omega\rangle^\kappa} \sim (\langle\zeta\rangle^{-2}+\langle\zeta\rangle^{-5/2})\,\langle\zeta\rangle\,\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\geq\langle\omega\rangle^\kappa} \tag{3.256}$$

Comme $\kappa>0$, $\langle\zeta\rangle$ tend vers l'infini quand quand $\langle\omega\rangle$ tend vers l'infini dans le domaine $\{\langle\zeta\rangle\geq\langle\omega\rangle^\kappa\}$, d'où $(3.218, ii)$. Puis

$$\begin{aligned} C_1\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\leq\langle\omega\rangle^\kappa} &\sim (\langle\zeta\rangle^{-s}\langle\omega\rangle^{s+3/2}+\langle\zeta\rangle^2)^{-1}+\langle\zeta\rangle^s(\langle\zeta\rangle^{-s}\langle\omega\rangle^{s+3/2}+\langle\zeta\rangle^2)^{-s/2-5/4} \\ &\leq (\langle\omega\rangle^{s+3/2}+\langle\zeta\rangle^2)^{-1}+\langle\zeta\rangle^s(\langle\zeta\rangle^{-s}\langle\omega\rangle^{s+3/2}+\langle\zeta\rangle^{-s})^{-s/2-5/4} \\ &\leq (\langle\omega\rangle^{s+3/2}+\langle\zeta\rangle^2)^{-1}+\langle\zeta\rangle^{s^2/2+9s/4}(\langle\omega\rangle^{s+3/2}+1)^{-s/2-5/4} \end{aligned} \tag{3.257}$$

en utilisant $\langle\zeta\rangle^{-s}>1$, $\langle\zeta\rangle^2>\langle\zeta\rangle^{-s}$. On remarque enfin que

$$s+\tfrac{3}{2}>0 \quad ; \quad \tfrac{1}{2}s^2+\tfrac{9}{4}s<-1 \quad ; \quad -\tfrac{1}{2}s-\tfrac{5}{4}<-\tfrac{1}{2} \tag{3.258}$$

donc $C_1\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\leq\langle\omega\rangle^\kappa}$ tend bien vers 0 quand $\langle\omega\rangle$ tend vers l'infini, ce qui achève la preuve du lemme.
□

3.2.2.6 Fin de la preuve

On utilise les estimations (3.210) de la proposition 3.13.

Pour u et v, on a :

$$\begin{aligned} \|Y_1\|_{\sigma+2,\zeta} &\leq C\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2}\|F\|_{\sigma,\zeta} \\ \|Y_2\|_{\sigma+2,\zeta} &\leq C\|F\|_{\sigma,\zeta} \end{aligned} \tag{3.259}$$

avec $\langle\omega\rangle^2 M_\sigma M_{-\sigma-2} \leq C$, donc

$$\|Y\|_{\sigma+2,\zeta} \leq C\|F\|_{\sigma,\zeta} \tag{3.260}$$

En inversant la transformée de Fourier-Laplace on a

$$\begin{array}{c} Y \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{\sigma+2}_\zeta) \\ \|Y\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^{\sigma+2}_\zeta)} \quad \leq \quad C\|F\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^{\sigma}_\zeta)} \end{array} \tag{3.261}$$

d'où (3.135) pour u et v.

Pour θ on a la même chose :

$$\begin{array}{c} \theta \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{\sigma+2}_\zeta) \\ \|\theta\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^{\sigma+2}_\zeta)} \quad \leq \quad C\|F\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^{\sigma}_\zeta)} \end{array} \tag{3.262}$$

d'où (3.135) pour θ.
On a donc montré (3.115) et (3.116).

Pour $\sigma \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, on a $M_\sigma \sim \frac{\langle\zeta\rangle^{-\sigma}}{\langle\omega\rangle^2}$ donc (3.210,a) donne

$$\langle\zeta\rangle^{\sigma+1}|p_0| \quad \leq \quad C\|F\|_{\sigma,\zeta} \tag{3.263}$$

Donc $p_0 = q$ vérifie

$$\begin{array}{c} q \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{\sigma+1}(\mathbb{T}^2)) \\ \|q\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^{\sigma+1}(\mathbb{T}^2)} \quad \leq \quad C\|F\|_{L^2(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{\sigma})} \end{array} \tag{3.264}$$

d'où (3.136) pour $\sigma \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et (3.119).

Pour $\sigma \in]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$, on décompose $p_0 = q$ en q_1 et q_2 de la manière suivante :

$$q_1 = p_0 \, \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \leq \langle\omega\rangle^\kappa}, \quad q_2 = p_0 \, \mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle \geq \langle\omega\rangle^\kappa} \tag{3.265}$$

Pour q_2 on a comme précédemment, en utilisant la proposition 3.11 :

$$\langle\zeta\rangle^{\sigma+1}|q_2| \quad \leq \quad C\|F\|_{\sigma,\zeta} \tag{3.266}$$

donc

$$\begin{array}{c} q_2 \in L^2(\mathbb{R}_+; H^{\sigma+1}(\mathbb{T}^2)) \\ \|q_2\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^{\sigma+1}(\mathbb{T}^2))} \quad \leq \quad C\|F\|_{L^2(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{\sigma})} \end{array} \tag{3.267}$$

Pour q_1 l'équivalent de M_σ donne :

$$\langle\omega\rangle^{1/2+\sigma}\langle\zeta\rangle|q_1| \quad \leq \quad C\|F\|_{\sigma,\zeta} \tag{3.268}$$

On a

$$\kappa = \frac{2\sigma+1}{2\sigma} \in]0, \frac{2}{3}[\tag{3.269}$$

donc

$$\langle\zeta\rangle \leq \langle\omega\rangle^\kappa = (|\tau| + \langle\zeta\rangle^2)^{1/2} \Rightarrow \langle\zeta\rangle \leq |\tau|^{1/2} \tag{3.270}$$

Ainsi on a $\langle\omega\rangle \sim \langle\tau\rangle$ sur le support de q_1, donc finalement, (3.268) donne

$$\begin{array}{c} q_1 \in H^{\sigma/2+1/4}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{T}^2)) \\ \|q_1\|_{H^{\sigma/2+1/4}(\mathbb{R}_+;H^1(\mathbb{T}^2))} \quad \leq \quad C\|F\|_{L^2(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{\sigma})} \end{array} \tag{3.271}$$

□

3.2.3 Remarques et compléments

3.2.3.1 Expression explicite pour la pression

L'étude du problème découplé nous donne la formule suivante pour p_0 :

$$p_0 = -\frac{1}{a}\frac{\omega^2}{\zeta^2}\Big[\mathcal{N}(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}})\Big]^{-1}\int_0^a(\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[i\xi f_1+i\eta f_2]\,dz \tag{3.272}$$

où $\mathcal{N}$ est défini par (3.187). Dans le cas couplé, on peut utiliser (3.214) pour écrire

$$\begin{aligned} p_0 = -\tfrac{1}{a}\tfrac{\omega^2}{\zeta^2}\big[\mathcal{N}(\tfrac{\omega a}{\sqrt{\nu}})\big]^{-1}\textstyle\int_0^a(\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[i\xi(f_1+\alpha v-i\xi\beta\int_0^z\theta)\\ +i\eta(f_2-\alpha u-i\eta\beta\textstyle\int_0^z\theta)]\,dz \end{aligned} \tag{3.273}$$

La proposition 3.13 nous dit que les termes en u et θ sont réguliers et finalement la partie singulière de la pression est donnée par

$$q_1(\tau,\xi,\eta) = -\,\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\le\langle\omega\rangle^\kappa}\,\frac{1}{a}\frac{\omega^2}{\zeta^2}\Big[\mathcal{N}(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}})\Big]^{-1}\int_0^a(\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[i\xi f_1+i\eta f_2]\,dz \tag{3.274}$$

où $\mathcal{N}$ est défini par (3.187).

3.2.3.2 Preuve du corollaire 3.1

Sous les hypothèses du corollaire 3.1, φX vérifie l'équation (3.114) avec pour terme source $\varphi F+\varphi'(t)X$ qui est dans $(L^2(0,T;\mathcal{H}^{-1}))^3$ et à support dans $t>0$. Le théorème 3.2 s'applique et on a donc (3.124). Grâce à la remarque précédente, on sait que q se décompose en q_1+q_2, avec q_1 moins régulier que q_2, et on a explicitement en Fourier

$$q_1(\tau,\xi,\eta) = -\,\mathbb{1}_{\langle\zeta\rangle\le\langle\omega\rangle^\kappa}\,\frac{1}{a}\frac{\omega^2}{\zeta^2}\Big[\mathcal{N}(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}})\Big]^{-1}\int_0^a(\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[i\xi(\varphi f_1)_{\tau,\zeta}+i\eta(\varphi f_2)_{\tau,\zeta}]\,dz \tag{3.275}$$

(en effet, la contribution du terme $\varphi'(t)X$ du second membre est régulière, puisque $C\in L^2(0,T;\mathcal{V})$)
On a alors l'équivalence suivante, en utilisant les résultats précédents :

$$\begin{aligned} & q_1\in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^2))\\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{\zeta^2}\textstyle\int_0^a(\omega^2-\nu\partial_{zz})^{-1}[i\xi(\varphi f_1)_{\tau,\zeta}+i\eta(\varphi f_2)_{\tau,\zeta}]\,dz\in L^2(\tau;\ell^2_\zeta)\\ \Leftrightarrow\ & \Delta_2^{-1}\big[\textstyle\int_0^a(\partial_t-\nu\Delta)^{-1}[\varphi\partial_x f_1+\varphi\partial_y f_2]\,dz\big]\in L^2(0,T;L^2(\mathbb{T}^2)) \end{aligned} \tag{3.276}$$

□

3.2.3.3 Contre-exemple aux estimations maximales

On va construire un contre-exemple à l'estimation maximale (3.122) lorsque $\sigma<-1/2$. Pour cela il suffit de montrer que le gradient de p_0 n'est pas L^2 en temps, car tous les autres termes de l'équation (excepté $\partial_t X$) le sont.
Soit σ fixé dans $]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}[$ et soit α tel que $\alpha\in]\sigma+\frac{1}{2},0[$. On construit un second membre F en séparant les variables temporelles et spatiales. Soit $g(t)\in L^2(\mathbb{R})$ à support dans t positif. Soit $f\in\mathcal{H}^\sigma$ indépendante du temps définie par

$$f(x,y,z) = \sum_k k^{-\alpha}\,e_k(z)e^{ix} \tag{3.277}$$

Alors pour $\zeta = (1,0)$, on a $f_{\zeta,k} = k^{-\alpha}$ et pour $\zeta \neq (1,0)$, $f_{\zeta,k} = 0$.
Soit maintenant $F \in (L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}^\sigma))^3$ à support dans t positif définie par $F = (fg, 0, 0)$ et soit p la pression solution de (3.114) associée à F. On décompose p en $q_1 + p_1$ où ∇p_1 est aussi régulier que F, et q_1 est donné explicitement par la formule (3.274) (en omettant la coupure en hautes fréquences) :

$$q_1(\tau,\xi,\eta) = -\frac{1}{a}\frac{\omega^2}{\zeta^2}\Big[\mathcal{N}(\frac{\omega a}{\sqrt{\nu}})\Big]^{-1}\int_0^a (\omega^2 - \nu\partial_{zz})^{-1}[i\xi f(\xi,\eta,z)g(\tau)]\,dz \tag{3.278}$$

Donc $q_1(t,x,y) = q_1(t)\,e^{ix}$ et la transformée de Fourier de $q_1(t)$ vaut

$$\begin{aligned} q_1(\tau) &= g(\tau)\,m(\tau) \\ avec \quad m(\tau) &= \tfrac{1}{a}(\tau - i)\Big[\mathcal{N}(\tfrac{\omega a}{\sqrt{\nu}})\Big]^{-1}\textstyle\int_0^a (\omega^2 - \nu\partial_{zz})^{-1}[f_{(1,0)}(z)]\,dz \end{aligned} \tag{3.279}$$

en utilisant $\omega^2 = i\tau + \zeta^2$. Calculons maintenant $m(\tau)$:

$$\begin{aligned} m(\tau) &= \tfrac{1}{a}(\tau - i)\Big[\mathcal{N}(\tfrac{\omega a}{\sqrt{\nu}})\Big]^{-1}\int_0^a \sum_k \frac{f_k}{\omega^2 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2}} e_k(z)\,dz \\ &= \tfrac{C_a}{a}(\tau - i)\Big[\mathcal{N}(\tfrac{\omega a}{\sqrt{\nu}})\Big]^{-1}\sum_{k\ \text{impair}} \frac{k^{-\alpha}}{k\,(1 + i\tau + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2})} \end{aligned} \tag{3.280}$$

On va minorer le module de $m(\tau)$. Pour cela, posons

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{k\ \text{impair}} \frac{k^{-\alpha}}{k\,(1 + i\tau + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2})} \\ &= \sum_{k\ \text{impair}} \frac{k^{-\alpha}(1 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2}))}{k\,((1 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2})^2 + \tau^2)} - i\sum_{k\ \text{impair}} \frac{k^{-\alpha}\tau}{k\,((1 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2})^2 + \tau^2)} \end{aligned} \tag{3.281}$$

On a alors, comme $\alpha + 3 > 1$:

$$\begin{aligned} |(\tau - i)S_k| &\geq |\Re((\tau - i)S_k)| = |\tau\Re(S_k) + \Im(S_k)| \\ &= |\tau| \sum_{k\ \text{impair}} \frac{k^{-\alpha}}{k\,((1 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2})^2 + \tau^2)}(1 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2} - 1) \\ &= C|\tau| \sum_{k\ \text{impair}} \frac{k^{2-\alpha}}{k\,((1 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2})^2 + \tau^2)} \\ &\geq C|\tau| \sum_{k \geq |\tau|^{1/2}} \frac{k^{2-\alpha}}{k\,((1 + \frac{\nu k^2\pi^2}{a^2})^2 + \tau^2)} \\ &\sim |\tau| \int_{|\tau|^{1/2}} \frac{x^{2-\alpha}\,dx}{x(x^4 + \tau^2)} \\ &\sim |\tau|^{-\alpha/2} \end{aligned} \tag{3.282}$$

De plus, on a $\mathcal{N}^{-1} \to 1$ quand $|\tau| \to +\infty$, donc pour $|\tau|$ assez grand

$$|m(\tau)| \geq C|\tau|^{-\alpha/2} \tag{3.283}$$

On a finalement, pour $|\tau|$ assez grand

$$|q_1(\tau)| \geq C\,|g(\tau)|\,|\tau|^{-\alpha/2} \tag{3.284}$$

Choisissons maintenant $g \in L^2(\mathbb{R})$, à support dans $t > 0$, tel que $g \notin H^s(\mathbb{R})$ pour tout $s > 0$. Alors $|g(\tau)|\,|\tau|^{-\alpha/2}$ n'est pas dans $L^2(\tau \in \mathbb{R})$ (car $-\alpha > 0$), donc la pression $q_1(t)e^{ix}$ n'est pas de carré intégrable en temps et son gradient non plus.

3.2.3.4 Remarque sur les conditions de type Neumann

Le problème est beaucoup plus simple dans le cas où les conditions aux limites sur X sont les suivantes :

$$\theta_{z=0,a} = 0 \quad ; \partial_z(u,v)|_{z=0,a} = 0 \quad ; \int_0^a \partial_x u + \partial_y v = 0; \quad X \text{ périodique en } x, y \tag{3.285}$$

Pour voir ceci, reprenons le schéma de la preuve précédente. On passe en variables de Fourier pour x, y, t, on obtient l'équation (3.148) en remplaçant $(u_\zeta, v_\zeta)|_{z=0,a} = 0$ par $\partial_z(u_\zeta, v_\zeta)|_{z=0,a} = 0$. De la même façon on obtient pour p_0 la formule (3.185), où l'opérateur $(\omega^2 - \nu\partial_{zz})^{-1}$ est vu avec conditions de Neumann en $z = 0, a$. Le calcul devient alors :

$$\begin{array}{rcl} \int_0^a (\omega^2 - \nu\partial_{zz})^{-1}[1]\,dz & = & \int_0^a \frac{1}{\omega^2}\,dz \\ & = & \frac{a}{\omega^2} \end{array} \tag{3.286}$$

Puis, si on note g tel que $(\omega^2 - \nu\partial_{zz})g = f$ et $\partial_z g|_{z=0,a} = 0$, alors on a

$$\begin{array}{rcl} \int_0^a (\omega^2 - \nu\partial_{zz})^{-1}[f]\,dz & = & \int_0^a g\,dz \\ & = & \frac{1}{\omega^2}\int_0^a (\omega^2 - \nu\partial_{zz})g\,dz \\ & = & \frac{1}{\omega^2}\int_0^a f\,dz \end{array} \tag{3.287}$$

donc finalement on obtient :

$$a\zeta^2 p_0 = -i\int_0^a (\xi f_1 + \eta f_2)\,dz \tag{3.288}$$

donc le gradient horizontal de p a la même régularité que F, de sorte qu'on a les estimations maximales pour X, lorsque $F \in L^2(0,T;H^\sigma(\Omega))$ avec $\sigma \in]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ (dans le cas $\sigma < -\frac{1}{2}$ on ne peut plus définir la trace de $\partial_z X$ ni même $\int_0^a F$).

Deuxième partie

Assimilation de données lagrangiennes

Chapitre 4

État de l'art

Sommaire

4.1 Introduction 72
4.2 Méthodes d'assimilation de données 73
4.2.1 Notations 74
4.2.2 Méthodes statistiques 75
4.2.2.1 BLUE 76
4.2.2.2 Interpolation optimale 76
4.2.2.3 Filtre de Kalman 77
4.2.2.4 Schématisation de l'approche séquentielle 78
4.2.3 Méthodes variationnelles 78
4.2.3.1 Rappels de contrôle optimal 79
4.2.3.2 3D-Var 81
4.2.3.3 4D-Var 82
4.2.3.4 Prise en compte de l'erreur modèle 83
4.2.3.5 Schématisation de l'approche variationnelle 84
4.2.4 Autres méthodes 84
4.3 Les observations océanographiques 84
4.3.1 Historique 84
4.3.2 Différents types de données 85
4.3.2.1 Satellitaires 86
4.3.2.2 In situ 86
4.3.3 Programmes nationaux et internationaux 87
4.3.3.1 En France 87
4.3.3.2 Coopérations internationales 87
4.4 Les données lagrangiennes 88
4.4.1 Description des flotteurs dérivants 88
4.4.2 Assimilation des données de position 89
4.5 Cadre et objectifs de notre travail 90
4.5.1 Expériences jumelles 90
4.5.2 Modèle 91
4.5.3 Méthode 91
4.5.4 Objectifs 92

4.1 Introduction

Nous avons souligné dans l'introduction l'importance de l'océan et les enjeux de la prévision de son comportement à court terme (suivi de nappe de déchets, pêche, plate-formes pétrolières, etc.), à moyen terme (prévisions saisonnières d'épisodes El Niño, etc.) ou encore à long terme (changement climatique).
Une bonne connaissance de l'océan nécessite une modélisation fine et adaptée du phénomène que l'on cherche à étudier. Or ceci est délicat, pour plusieurs raisons :

• **Non reproducibilité d'une situation.** L'océanographie n'est pas tout à fait une science expérimentale, au sens où l'on ne peut pas reproduire une situation expérimentale donnée : le nombre de paramètres et de degrés de liberté est tel que, aux yeux de l'expérimentateur, chaque situation est unique. Il est ainsi exclu d'ajuster les paramètres d'un modèle ou de valider une hypothèse en reproduisant à volonté la même expérience.

• **Coût des observations.** Les zones profondes de l'océan sont difficiles d'accès et l'océan, contrairement à l'atmosphère, n'est pas transparent. Si désormais les données de surface, via les observations satellitaires, sont nombreuses, ce n'est pas encore le cas des données en profondeur (profils de température et de salinité, mesures de courants profonds, etc.). La validation des modèles se fait ainsi avec des observations dont les fréquences spatiales et temporelles sont limitées.

• **Non-linéarité, turbulence.** Les non-linéarités induisent des transferts d'énergie entre les différentes échelles (spatiales et temporelles) de l'écoulement. Les modèles numériques, limités par la puissance de calcul des ordinateurs, ne représentent pas toutes les échelles. Or le rôle de celles qui ne sont pas représentées, comme par exemple des tourbillons de taille inférieure à la résolution du modèle, est crucial à cause de leur interaction avec les autres échelles. Il est donc nécessaire de représenter leur effet sur l'écoulement (on appelle cette représentation la "paramétrisation" des petites échelles). La paramétrisation est l'un des aspects fondamentaux de la modélisation.

• **Conditions aux limites mal connues.** Les équations régissant les écoulements géophysiques sont des équations d'évolution en domaine borné. En particulier, intégrer un modèle numérique suppose connues les conditions aux limites. En océanographie, comme en météorologie, les frontières sont complexes et les échanges aux frontières (transferts radiatifs, vents, précipitations, évaporation, échange de sel, de divers composés chimiques, de sédiments, etc.) sont mal connus.

• **Conditions initiales mal connues.** De la même façon, les modèles doivent être initialisés. Or l'état initial n'est jamais parfaitement connu, mais seulement très partiellement observé. Il est pourtant crucial une fois de plus d'en avoir une très bonne estimation, car les équations présentent une forte sensibilité aux conditions initiales.

Pour toutes ces raisons, on comprend bien que les informations disponibles doivent être utilisées de manière "optimale" en vue de valider et d'améliorer les modèles, de bien approcher les conditions aux limites spatiales et temporelles afin d'effectuer des prévisions.

C'est l'objectif de l'assimilation de données :

"L'assimilation de données est l'ensemble des techniques qui permettent de combiner, de façon optimale (dans un sens à définir), l'information mathématique contenue dans les équations et l'information physique provenant des observations en vue de reconstituer l'état de l'écoulement." [Le Dimet et Blum, 2002]

L'assimilation de données entre dans la catégorie des "Problèmes Inverses". En météorologie et en océanographie, l'assimilation de données recouvre deux types de problèmes : d'une part l'identification de l'état initial ; dans ce cas toutes les informations (modèles, données) sont réunies en vue de déterminer le meilleur état initial correspondant à ces informations. D'autre part, il peut aussi s'agir d'identifier certains paramètres mal connus du modèle (liés aux paramétrisations des petites échelles, aux conditions aux limites, etc.).

L'assimilation de données (numérique et effective) suppose plusieurs choix :

1. celui de la méthode d'assimilation ;
2. celui du modèle, c'est-à-dire du domaine spatial et temporel considéré, des équations, de leur discrétisation, d'éventuelles paramétrisations, des conditions aux limites ;
3. celui des données.

Ce chapitre est organisé comme suit : le paragraphe 4.2 introduit les notations et présente les différentes méthodes d'assimilation de données et plus particulièrement les méthodes variationnelles, qui sont le cadre de notre travail. Le paragraphe 4.3 décrit les grands types de données disponibles pour l'océan, ainsi que leur assimilation. Nous insisterons particulièrement sur les données lagrangiennes, autrement dit les données de positions de flotteurs dérivants, qui sont celles auxquelles nous nous sommes intéressés. Le modèle d'océan que nous utilisons est un modèle aux équations primitives qui sera décrit dans le chapitre 6 ; ses équations continues ont été présentées et étudiées dans la première partie.

4.2 Méthodes d'assimilation de données

On distingue en assimilation de données deux grandes classes de méthodes : les méthodes de filtrage d'une part, basées sur la théorie de l'estimation statistique (voir [Jazwinski, 1970]), dont le principal représentant est le filtre de Kalman et les méthodes variationnelles d'autre part, basées sur la théorie du contrôle optimal (voir [Lions, 1968]), dont le principal représentant est le 4D-Var.
Les méthodes de filtrage sont encore appelées méthodes séquentielles : les données sont assimilées au fur et à mesure. A chaque pas de temps où l'on dispose de mesures, on estime le "meilleur" compromis entre l'état prévu par le pas de temps précédent et les observations effectuées.
Les méthodes variationnelles, elles, utilisent toutes les observations disponibles pendant un laps de temps fixé (appelé fenêtre temporelle, qui varie généralement de 10 à 30 jours en océanographie) pour estimer un état initial (ie au début de la fenêtre temporelle) qui

soit le "meilleur" compromis entre toutes les observations et le résultat de la prévision précédente.
Pour plus de détails, voir les articles de synthèse suivants : [Bouttier et Courtier, 1999], [Bennett, 1992], [Bennett, 2002], [Ghil et Manalotte-Rizzoli, 1991].

4.2.1 Notations

On reprend ici les notations introduites par [Ide *et al.*, 1997].

Modèle numérique

Le vecteur d'état du système étudié est noté $\mathbf{x}$. Il s'agit de l'état du système (qui peut contenir la température, la salinité, les vitesses, ou encore la densité, la pression, la fonction de courant, etc.) discrétisé par différences finies le plus souvent, mais aussi par éléments finis ou encore par une méthode spectrale.
Le modèle numérique non-linéaire utilisé est noté M. Il s'agit ici aussi du résultat de la discrétisation, par une méthode donnée, des équations continues choisies pour représenter le système. On a la relation suivante :

$$\mathbf{x}^f(t_{i+1}) = M(t_i, t_{i+1})[\mathbf{x}^f(t_i)] \tag{4.1}$$

L'exposant ^{f} signifie *forecast*, l'état $\mathbf{x}^f(t_{i+1})$ est la prévision que l'on obtient en connaissant uniquement $M(t_i, t_{i+1})$ et l'état précédent $\mathbf{x}^f(t_i)$.
On notera plus simplement $\mathbf{x}^f(t_i) = \mathbf{x}_i^f$ et $M(t_i, t_{i+1}) = M_i$.

Évidemment le modèle utilisé est une approximation du vrai modèle régissant l'écoulement océanique : la discrétisation du modèle continu, en réduisant le nombre de degrés de liberté, induit des erreurs ; le modèle continu sous-jacent est lui-même obtenu en faisant de nombreuses approximations. L'état vrai discrétisé $\mathbf{x}_i^t$, ^{t} pour *true*, s'exprime ainsi en fonction du modèle numérique utilisé :

$$\mathbf{x}_{i+1}^t = M_i[\mathbf{x}_i^t] + \eta_i \tag{4.2}$$

On appelle η_i l'*erreur modèle* associée à M.
La notation $\mathbf{M}$ désigne l'opérateur dérivé de M (ou une approximation de l'opérateur dérivé) en un point donné, appelé opérateur linéaire tangent. L'adjoint de $\mathbf{M}$, noté ${}^t\mathbf{M}$, est appelé opérateur adjoint de M, ou encore modèle adjoint.

Observations

Le vecteur des observations est noté $\mathbf{y}^o$. Il dépend de l'état vrai du système via un opérateur d'observation H, qui peut être non-linéaire :

$$\mathbf{y}_i^o = H_i[\mathbf{x}_i^t] + \varepsilon_i^o \tag{4.3}$$

L'erreur ε_i est appelée erreur d'observation.
Il faut noter ici que le nombre d'observations est en général largement inférieur au nombre de variables. Si on note n la taille de $\mathbf{x}_i$ et p_i celle de $\mathbf{y}_i^o$, on a en général $p_i << n$.
Comme pour le modèle, on notera $\mathbf{H}$ l'opérateur d'observation tangent (qui est la dérivée, éventuellement approchée, de H en un point donné) et ${}^t\mathbf{H}$ l'opérateur d'observation adjoint.

Ébauche

En général on dispose d'une estimation de l'état du modèle, que l'on appelle ébauche, notée $\mathbf{x}^b$, ^{b} pour *background*. L'ébauche peut être par exemple issue d'une climatologie, ou bien d'un processus d'assimilation antérieur, ou encore d'un modèle de prévision. L'ébauche est bien souvent un terme crucial du processus d'assimilation. En effet, le problème d'approcher l'état du système à partir d'un petit nombre d'observations est souvent mal posé ; l'information supplémentaire apportée par l'ébauche permet alors de rendre ce problème bien posé.
L'erreur d'ébauche est notée ε^b :

$$\varepsilon^b = \mathbf{x}^b - \mathbf{x}^t \tag{4.4}$$

Analyse

Le processus d'assimilation utilise toutes les informations disponibles (modèle, observations, ébauche) pour construire un état de l'océan, dit état analysé, noté $\mathbf{x}^a$. L'erreur d'analyse est notée ε^a :

$$\varepsilon^a = \mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t \tag{4.5}$$

L'obtention de l'état analysé est appelé *phase d'analyse*. A l'issue de la phase d'analyse, on peut utiliser le modèle et l'état analysé pour effectuer une prévision :

$$\mathbf{x}^f_{i+1} = M_i[\mathbf{x}^a_i] \tag{4.6}$$

Remarque 4.1 *Les méthodes variationnelles sont itératives. Elles sont initialisées avec un vecteur noté* $\mathbf{x}^g$, ^{g} *pour* first guess*, appelé premier itéré. Il est bien souvent initialisé avec l'ébauche* $\mathbf{x}^b$ *ou encore avec l'état prévu* $\mathbf{x}^f$*, mais d'autres choix peuvent être faits.*

Erreurs

Une bonne assimilation suppose une bonne connaissance des erreurs η, ε^a, ε^b et ε^o. Or en général elles sont mal connues, elles doivent donc être modélisées. La qualité de leur modélisation est ici encore un point crucial pour l'efficacité du processus d'assimilation. On utilise des éléments statistiques pour décrire les erreurs : les moyennes $\overline{\eta}$, $\overline{\varepsilon^a}$, $\overline{\varepsilon^b}$ et $\overline{\varepsilon^o}$ des erreurs et leurs matrices de covariances respectives $\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{R}$. La taille de ces matrices est souvent très grande : pour un vecteur d'état de taille 10^6, les matrices $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{A}$ sont de taille 10^{12}. Il est évidemment impossible de les stocker et de les manipuler, et diverses méthodes sont employées pour les modéliser sous une forme plus légère.

Remarque 4.2 *Les méthodes de type filtre de Kalman utilisent d'autres notations pour* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$*. L'ébauche* $\mathbf{x}^b$ *est donnée par* $\mathbf{x}^f$ *et l'erreur d'ébauche est alors appelée erreur de prévision et sa matrice des covariances est notée* $\mathbf{P}^f$*. La matrice des covariances d'erreur d'analyse est alors notée* $\mathbf{P}^a$*.*

4.2.2 Méthodes statistiques

La théorie de l'estimation statistique optimale fonde les méthodes statistiques, appelées encore méthodes de filtrage, ou méthodes séquentielles, car elles utilisent les données au fur et à mesure. En deux mots, le principe théorique des méthodes statistiques est le

suivant : l'état analysé optimal est celui qui minimise la variance de l'erreur d'analyse. Sous certaines hypothèses que l'on précisera, le problème d'assimilation stationnaire admet une unique et optimale solution, décrite par le BLUE (Best Linear Unbiaised Estimator). Le BLUE peut être adapté au cas dépendant du temps, pour donner l'algorithme du filtre de Kalman [Kalman, 1960], que nous présenterons ainsi que quelques unes de ses variantes.

4.2.2.1 BLUE

On fait les hypothèses suivantes :

Hypothèses 4.1 (BLUE)

1. *L'opérateur d'observation est linéaire autour de* $\mathbf{x}^b$*, ie* $H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}^b) = \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)$ *pour tout* $\mathbf{x}$ *assez proche de* $\mathbf{x}^b$*, où* $\mathbf{H}$ *est un opérateur linéaire.*
2. *Les erreurs sont non triviales, non biaisées et les erreurs d'observation et d'ébauche sont indépendantes, autrement dit* $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{R}$ *sont définies positives, les moyennes* $\overline{\varepsilon^b}$ *et* $\overline{\varepsilon^o}$ *sont nulles et l'espérance de* $\varepsilon^b\ {}^t\varepsilon^o$ *est nulle.*
3. *L'état analysé est obtenu en corrigeant linéairement l'ébauche à partir du vecteur innovation* $\mathbf{d}$*, avec* $\mathbf{d} = \mathbf{y}^o - H[\mathbf{x}^b]$*.*

Sous les hypothèses 4.1, il existe un unique état analysé $\mathbf{x}^a$, optimal au sens des moindres carrés, donné par l'algorithme du BLUE :

Algorithme 4.1 (BLUE)

1. *Calcul de la matrice* $\mathbf{K}$*, appelée matrice de gain de l'analyse :*

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^t\mathbf{H}(\mathbf{H}\mathbf{B}^t\mathbf{H} + \mathbf{R})^{-1} \tag{4.7}$$

2. *Analyse*

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + \mathbf{K}(\mathbf{y}^o - H[\mathbf{x}^b]) \tag{4.8}$$

La matrice $\mathbf{A}$ vaut dans ce cas

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{B} \tag{4.9}$$

Remarque 4.3 *Lorsque l'état analysé est donné par la formule (4.8) où* $\mathbf{K}$ *est une matrice quelconque, on a encore une formule pour* $\mathbf{A}$ *:*

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{B}^t(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}) + \mathbf{K}\mathbf{R}^t\mathbf{K} \tag{4.10}$$

qui devient (4.9) lorsque $\mathbf{K}$ *est donnée par (4.7).*

4.2.2.2 Interpolation optimale

L'interpolation optimale (voir [De Mey et Ménard, 1989]) est une simplification du BLUE. L'idée est la suivante : pour une variable et un point de grille donnés, un petit nombre d'observations suffit à calculer l'incrément ; en pratique ce sont les observations de cette variable au voisinage du point considéré. La ligne de la matrice $\mathbf{K}$ correspondant à ce point et cette variable est alors calculée en restreignant $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$ aux points d'observation considérés. Les avantages de l'interpolation optimale sont sa simplicité et son moindre coût

de calcul, ainsi cette méthode a été largement utilisée dans le passé. Elle est actuellement à la base du système d'assimilation SAM (voir [De Mey et Benkiran, 2002]) du projet Mercator (voir paragraphe 4.3.3.1). Un de ses principaux inconvénients est justement que chaque observation agit localement sur l'état analysé ; en d'autres termes, un point situé loin de toute observation aura un état analysé égal à l'ébauche. L'état obtenu peut être physiquement non satisfaisant.

4.2.2.3 Filtre de Kalman

Pour établir les équations du filtre de Kalman [Kalman, 1960], on généralise le BLUE au cas dépendant du temps, avec les hypothèses et notations suivantes :

Hypothèses 4.2 (Kalman)

1. *L'ébauche* $\mathbf{x}^b$ *est donné par la prévision* $\mathbf{x}^f$*, et les matrices* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *sont notées* $\mathbf{P}_a$ *et* $\mathbf{P}_f$*.*
2. *Les erreurs de prévisions* η_i *(erreur modèle) sont supposées non biaisées et de matrice de covariances* $\mathbf{Q}$ *connue.*
3. *Les erreurs modèle* η_i *et d'analyse* ε_i^a *sont supposées indépendantes.*
4. *Enfin le modèle de prévision* M_i *est supposé linéaire autour de* $\mathbf{x}_i^a$ *: il existe un opérateur linéaire* $\mathbf{M}$ *tel que* $M_i[\mathbf{x}_i] - M_i[\mathbf{x}_i^a] = \mathbf{M}_i[\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^a]$ *pour tout* $\mathbf{x}$ *assez proche de* $\mathbf{x}_i^a$*.*

Sous les hypothèses 4.1 et 4.2, il existe un unique état analysé optimal, donné par l'algorithme du filtre de Kalman suivant :

Algorithme 4.2 (Kalman)

1. *Calcul de la matrice de gain de Kalman*
$$\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_i^f \, {}^t\mathbf{H}_i (\mathbf{H}_i \mathbf{P}_i^f \, {}^t\mathbf{H}_i + \mathbf{R}_i)^{-1} \tag{4.11}$$
2. *Analyse*
$$\mathbf{x}_i^a = \mathbf{x}_i^f + \mathbf{K}_i (\mathbf{y}_i^o - H_i[\mathbf{x}_i^f]) \tag{4.12}$$
3. *Calcul de la matrice de covariance d'erreur d'analyse*
$$\mathbf{P}_i^a = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i) \mathbf{P}_i^f \tag{4.13}$$
4. *Prévision*
$$\mathbf{x}_{i+1}^f = M_i[\mathbf{x}_i^a] \tag{4.14}$$
5. *Calcul de la matrice de covariance d'erreur de prévision*
$$\mathbf{P}_{i+1}^f = \mathbf{M}_i \mathbf{P}_i^a \, {}^t\mathbf{M}_i + \mathbf{Q}_i \tag{4.15}$$

(voir [Kalman, 1960], [Gelb, 1974], [Ghil, 1989], [Ghil et Manalotte-Rizzoli, 1991], [Fukumori et Malanotte-Rizzoli, 1995])

Le **filtre de Kalman Étendu** (EKF, pour Extended Kalman Filter) généralise l'algorithme 4.2 lorsque les opérateurs M et H ne sont plus linéaires. Si on définit $\mathbf{H}$ comme étant l'opérateur dérivé de H en $\mathbf{x}^b$ et $\mathbf{M}$ l'opérateur dérivé de M en $\mathbf{x}^a$, alors l'algorithme 4.2 peut encore être utilisé, c'est le filtre de Kalman étendu. L'état analysé obtenu n'est plus optimal, en général.

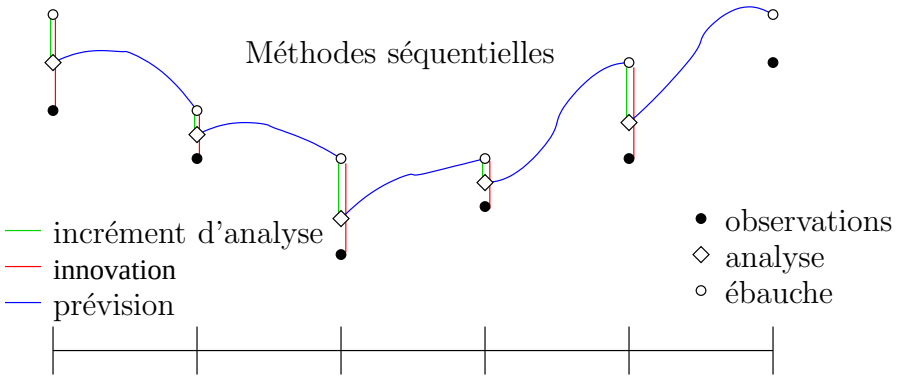
Remarque 4.4 *Les algorithmes du BLUE, du filtre de Kalman et de l'EKF ont plusieurs inconvénients qui les rendent extrêmement difficiles à mettre en œuvre en pratique : les erreurs sont mal connues ce qui implique de grandes incertitudes sur les matrices* $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *et* $\mathbf{R}$ *et donc autant d'erreurs dans l'analyse. De plus la taille de ces matrices interdit leur stockage et limite leur calcul direct. Les avancées actuelles en assimilation séquentielle proposent de nouvelles méthodes pour obtenir de bonnes approximations de ces matrices à un coût de calcul raisonnable.*

On retiendra notamment le **filtre de Kalman d'Ensemble** (EnKF, pour Ensemble Kalman Filter, voir [Evensen, 1994]), qui propose un moyen simple de calculer les matrices $\mathbf{P}^f$, en utilisant un ensemble de vecteurs d'état $\mathbf{x}^f$ et une méthode de Monte-Carlo. Les prévisions $\mathbf{x}^f$ utilisées pour estimer $\mathbf{P}^f$ sont calculées avec le modèle non-linéaire, ce qui évite la linéarisation et les erreurs associées.

On peut citer aussi le **filtre SEEK** (Singular Evolutive Extended Kalman Filter, voir [Pham *et al.*, 1998], [Hoteit et Pham, 2004] et [Verron *et al.*, 1999]), qui utilise les opérateurs linéarisés comme l'EKF. La taille du problème est réduit en utilisant une projection sur un espace de vecteurs singuliers (les EOF, pour Empirical Orthogonal Functions) de dimension réduite, qui permet de calculer rapidement des matrices de covariance d'erreurs approchées.

4.2.2.4 Schématisation de l'approche séquentielle

Comme on vient de le voir, les méthodes séquentielles utilisent les données dès leur apparition. À chaque instant d'observation, on dispose d'une ébauche et d'une observation. La différence $\mathbf{y}_i^o - H_i[\mathbf{x}_i^b]$ est appelé innovation et permet, via la matrice de gain $\mathbf{K}$, de calculer l'incrément d'analyse $\delta\mathbf{x}_i^a$ qui donne l'état analysé $\mathbf{x}_i^a = \mathbf{x}_i^b + \delta\mathbf{x}_i^a$. On effectue ensuite une phase de prévision : le modèle est initialisé avec l'état analysé puis il est intégré jusqu'au prochain instant d'observation. L'état prévu à cet instant devient la nouvelle ébauche et le cycle continue.



(4.16)

4.2.3 Méthodes variationnelles

La théorie du contrôle optimal (voir [Lions, 1968]) fonde les méthodes variationnelles. L'idée est de calculer une fonction coût mesurant, au sens des moindres carrés, l'écart entre les observations et leur équivalent donné par le modèle, puis de chercher l'état optimal minimisant cette fonction coût. Le BLUE est le résultat optimal d'un tel problème

de minimisation. Contrairement aux méthodes séquentielles, les méthodes variationnelles tridimensionnelle et quadridimensionnelle (3D-Var et 4D-Var) ne cherchent pas à calculer (ou approcher) la matrice de gain $\mathbf{K}$ mais cherchent directement, par une méthode de descente, l'optimum de la fonction coût considérée.

Remarque 4.5 *Soit $\mathcal{J}$ une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant au moins un minimum. Pour éviter toute confusion, l'expression "minimum de $\mathcal{J}$" désignera la valeur minimale prise par la fonction que l'on considère, alors que le terme "optimum de $\mathcal{J}$" désignera un point de $\mathbb{R}^n$ où ce minimum est atteint.*

Remarque 4.6 *Le BLUE peut être vu comme la solution d'un problème d'optimisation. En effet, sous les hypothèses 4.1 du BLUE, l'état analysé $\mathbf{x}^a$ calculé par l'agorithme 4.1 est l'unique solution du problème d'optimisation suivant :*

Problème 4.1 *Trouver l'optimum $\mathbf{x}^a$ de la fonction coût $\mathcal{J}$ suivante :*

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = {}^t(\mathbf{x}-\mathbf{x}^b)\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^b) + {}^t(\mathbf{y}^o - H[\mathbf{x}])\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}^o - H[\mathbf{x}]) \tag{4.17}$$

La fonction coût $\mathcal{J}$ se décompose en deux termes :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J}^b(\mathbf{x}) & = & {}^t(\mathbf{x}-\mathbf{x}^b)\,\mathbf{B}^{-1}\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}^b) \\ \mathcal{J}^o(\mathbf{x}) & = & {}^t(\mathbf{y}^o - H[\mathbf{x}])\,\mathbf{R}^{-1}\,(\mathbf{y}^o - H[\mathbf{x}]) \end{array} \tag{4.18}$$

où $\mathcal{J}^b$ est appelé terme d'ébauche et $\mathcal{J}^o$ est appelé terme d'observation.

Les méthodes variationnelles ([Lewis et Derber, 1985], [Le Dimet et Talagrand, 1986], [Talagrand et Courtier, 1987], [Courtier et Talagrand, 1987], [Thacker et Long, 1988], [Courtier *et al.*, 1998], [Rabier *et al.*, 1998a], [Andersson, 1998], [Rabier *et al.*, 1998b]) se formulent de manière similaire, c'est l'extension au cas dépendant du temps et aux modèles non linéaires qui les distinguent finalement des méthodes séquentielles, dérivées aussi du BLUE. Contrairement à ces dernières, les méthodes variationnelles utilisent toutes les observations disponibles sur une fenêtre de temps donnée.

Pour une fenêtre temporelle $[0,T]$ donnée, la fonction coût est calculée en fonction de l'état initial $\mathbf{x}_0$: le terme $\mathcal{J}^o$ mesure l'écart aux observations disponibles sur $[0,T]$; $\mathcal{J}^b$ mesure l'écart à l'ébauche et joue un rôle régularisant. Les algorithmes variationnels proposent ensuite une approximation de l'état initial $\mathbf{x}_0^a$ minimisant $\mathcal{J} = \mathcal{J}^b + \mathcal{J}^o$. Pour cela on utilise en général (et notamment dans les cas linéaires), un algorithme de descente dans la direction du gradient de $\mathcal{J}$.

On va d'abord faire quelques rappels de contrôle optimal, puis on présentera les méthodes 3D et 4D-Var et leurs variantes.

4.2.3.1 Rappels de contrôle optimal

On va faire quelques rappels formels de contrôle optimal dans le cadre de notre problème. On utilisera des notations consistantes avec celles introduites précédemment : le sens des exposants est le même, les vecteurs en minuscules grasses sont remplacés par

leurs équivalents continus en majuscules, par exemple le vecteur $\mathbf{y}^o$ correspond à la variable Y^o.
Pour formuler le problème, on considère l'équation d'évolution suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dX}{dt} & = & \mathcal{M}(X(t),t) \quad t \in (0,T) \\ X(0) & = & U \end{array} \right. \tag{4.19}$$

et on appelle $\mathcal{M}$ le modèle continu, X la variable d'état continue et U le contrôle. On ne précise pas les espaces fonctionnels associés mais on peut avoir en tête que X est défini sur $\Omega \times (0,T)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, U est défini sur Ω et appartient à un espace de Hilbert $\mathcal{U}$.
On dispose d'une observation de la variable X :

$$\mathcal{H}(t;X) = Y \tag{4.20}$$

où $\mathcal{H}$ est un opérateur à valeurs dans un Hilbert $\mathcal{O}$ appelé espace d'observation. On se donne aussi une observation Y^o dans $\mathcal{O} \times [0,T]$. À tout contrôle $U \in \mathcal{U}$ on associe la fonction coût $\mathcal{J}$ suivante :

$$\mathcal{J}(U) = \int_0^T \|\mathcal{H}(t;X(t)) - Y^o\|^2_{\mathcal{O}}\, dt + w^b \|U - X^b\|^2_{\mathcal{U}} \tag{4.21}$$

où $X^b \in \mathcal{U}$ est l'ébauche et w^b est un réel positif fixé.
Comme pour le BLUE, le terme

$$\mathcal{J}^o = \int_0^T \|\mathcal{H}(t;X(t)) - Y^o\|^2_{\mathcal{O}}\, dt \tag{4.22}$$

est appelé terme d'observation, et

$$\mathcal{J}^b = \|U - X^b\|^2_{\mathcal{U}} \tag{4.23}$$

est appelé terme d'ébauche.
Le problème de contrôle optimal associé à (4.19) et (4.21) est le suivant :

Problème 4.2 *Trouver $U^* \in \mathcal{U}$ tel que*

$$\mathcal{J}(U^*) = \inf_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(U) \tag{4.24}$$

où $\mathcal{J}$ est donné par (4.21) et X est associé à U par (4.19).

Remarque 4.7

1. *Sans hypothèses sur le modèle $\mathcal{M}$ et sur l'opérateur d'observation $\mathcal{H}$, l'optimum U^* peut ne pas exister ou ne pas être unique.*
2. *Dans les cas favorables d'optimisation convexe, on a existence d'un optimum pour $w^b \geq 0$; l'unicité requiert souvent la condition supplémentaire $w^b > 0$.*

On suppose que l'on se trouve dans un cas favorable (cf chapitre 3 de [Lions, 1968]), et on poursuit notre résolution formelle du problème 4.2.
L'optimum U^* est caractérisé par le système d'optimalité suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dX}{dt} & = & \mathcal{M}(X(t),t) \\ X(0) & = & U^* \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{rcl} -\dfrac{dP}{dt} & = & [\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X}(t)]^* P(t) + [\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}(t)]^* (\mathcal{H}(t;X(t)) - Y^o) \\ P(T) & = & 0 \end{array}\right. \\ -P(0) + w^b(U^* - X^b) = 0 \end{array}\right. \tag{4.25}$$

où l'on a identifié les Hilbert $\mathcal{U}$ et $\mathcal{O}$ avec leurs duaux. La variable P est appeleée l'état adjoint de X. Les opérateurs linéaires $[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X}(t)]^*$ et $[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}(t)]^*$ correspondent aux opérateurs discrets $\mathbf{M}$ et $\mathbf{H}$ et sont appelés respectivement modèle adjoint et opérateur d'observation adjoint.

Remarque 4.8 *En pratique on ne résout pas directement le système d'optimalité (4.25), mais on utilise un algorithme de descente dans la direction du gradient. Le gradient de $\mathcal{J}$ est calculé par intégration rétrograde du modèle adjoint : soit U fixé dans $\mathcal{U}$, X la solution de (4.19) associée et P l'état adjoint correspondant à X, solution de l'équation suivante :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\dfrac{dP}{dt} & = & [\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X}(t)]^* P(t) + [\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}(t)]^* (\mathcal{H}(t;X(t)) - Y^o) \\ P(T) & = & 0 \end{array}\right. \tag{4.26}$$

alors le gradient de $\mathcal{J}$ en U est donné par la formule

$$\nabla \mathcal{J}(U) = -P(0) + w^b(U - X^b) \tag{4.27}$$

(toujours formellement, notamment en omettant les isomorphismes canoniques entre les Hilbert impliqués et leurs duaux)

4.2.3.2 3D-Var

Voici la fonction coût du 3D-Var :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}_0) = {}^t(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b)\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b) + {}^t(\mathbf{y}^o - H[\mathbf{x}_0])\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}^o - H[\mathbf{x}_0]) \tag{4.28}$$

Lorsque l'opérateur d'observation $H = \mathbf{H}$ est linéaire et $\mathbf{B}$ est définie positive, $\mathcal{J}$ admet un unique optimum $\mathbf{x}_0^a$. L'algorithme du 3D-Var approche cet optimum en effectuant une méthode de descente dans la direction du gradient $\nabla \mathcal{J}$:

$$\nabla \mathcal{J}(\mathbf{x}) = 2\,\mathbf{B}^{-1}\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) - 2\,{}^t\mathbf{H}\,\mathbf{R}^{-1}\,(\mathbf{y}^o - H[\mathbf{x}]) \tag{4.29}$$

L'algorithme est initialisé avec un premier itéré $\mathbf{x}^g$ qui est souvent pris égal à l'ébauche $\mathbf{x}^b$. Le nombre d'itérations est soit limité directement par l'utilisateur, soit imposé par un test d'arrêt portant sur la valeur de la norme du gradient.

Remarque 4.9

1. *Dans les problèmes d'océanographie, et plus généralement dans tout problème de grande dimension, le stockage de la matrice* $\mathbf{B}$ *est impossible : comme dans les algorithmes séquentiels, une modélisation de cette matrice est nécessaire. Cependant, seul l'inverse de* $\mathbf{B}$ *intervient, et uniquement dans des produits de type matrice vecteur, ce qui autorise des modélisations complexes, voir [Weaver et Courtier, 2001], [Ricci, 2004], [Ricci et al., 2003].*
2. *La dimension temporelle n'est pas prise en compte par cette fonction coût, car dans l'expression de* $\mathcal{J}^o$ *la différence entre le modèle et les observations* $\mathbf{y}^o - H[\mathbf{x}]$ *est calculée pour l'état initial et les observations* $\mathbf{y}^o$*, réparties sur la fenêtre temporelle* $[0, T]$*, sont ramenées à l'instant* $t = 0$*.*
3. *Cependant ce dernier élément simplifie grandement le calcul du gradient de* $\mathcal{J}$ *car, contrairement au 4D-Var, l'intégration du modèle* $\mathbf{M}$ *et de son adjoint* ${}^t\mathbf{M}$ *n'est pas requise. Cet algorithme a ainsi été couramment utilisé en météorologie comme en océanographie, voir [Rabier et al., 1998a], [Andersson, 1998], [Courtier et al., 1998], [Weaver et al., 2003].*

Lorsque l'opérateur d'observation est faiblement non linéaire, on peut encore utiliser une méthode de descente, c'est l'algorithme du **3D-Var incrémental**. On suppose que l'approximation suivante est valide :

$$H[\mathbf{x}_0] - H[\mathbf{x}^b] \simeq \mathbf{H}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b) \tag{4.30}$$

où $\mathbf{H}$ est l'opérateur dérivé de H en $\mathbf{x}^b$, appelé opérateur d'observation linéaire tangent. On pose alors $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b$ et on change de variable pour considérer la fonction coût approchée suivante :

$$\mathcal{J}(\delta\mathbf{x}) = {}^t\delta\mathbf{x}\mathbf{B}^{-1}\delta\mathbf{x} + {}^t(\mathbf{y}^o - H[\mathbf{x}^b] - \mathbf{H}\delta\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}^o - H[\mathbf{x}^b] - \mathbf{H}\delta\mathbf{x}) \tag{4.31}$$

on a alors

$$\nabla\mathcal{J}(\delta\mathbf{x}) = 2\mathbf{B}^{-1}\delta\mathbf{x} + 2\,{}^t\mathbf{H}\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}^o - H[\mathbf{x}^b] - \mathbf{H}\delta\mathbf{x}) \tag{4.32}$$

Après minimisation on obtient un incrément d'analyse $\delta\mathbf{x}^a$ et un état analysé $\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + \delta\mathbf{x}^a$. Si l'ébauche $\mathbf{x}^b$ et le premier itéré $\mathbf{x}^g$ sont assez proches de l'optimum recherché, alors $\mathbf{x}^a$ en donne une bonne approximation.

On peut aussi tenir compte des faibles non linéarités en remettant à jour les opérateurs linéaire tangent et adjoint au cours de la minimisation, ie en linéarisant non plus autour de $\mathbf{x}^b$ mais autour de l'état analysé obtenu à l'issu de la minimisation. On obtient alors une autre fonction coût incrémentale, que l'on minimise à nouveau. Les remises à jour sont appelées boucles externes, tandis que les itérations de minimisation sont appelées boucles internes (voir [Weaver *et al.*, 2002] ou encore le chapitre 6 pour plus de détails).

4.2.3.3 4D-Var

Le 4D-Var (voir [Le Dimet et Talagrand, 1986], [Talagrand et Courtier, 1987], [Rabier *et al.*, 1998b], [Vialard *et al.*, 2003], [Weaver *et al.*, 2003]) est une amélioration du

3D-Var qui prend en compte la dimension temporelle dans les observations. La fonction coût du 4D-Var est la suivante :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}_0) = {}^t(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b)\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b) + \sum_{i=0}^{n} {}^t(\mathbf{y}_i^o - H_i[\mathbf{x}_i])\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{y}_i^o - H_i[\mathbf{x}_i]) \tag{4.33}$$

La dimension temporelle intervient dans le terme d'observation et en particulier dans $\mathbf{x}_i$ qui dépend de l'état initial $\mathbf{x}_0$ via le modèle M (a priori non linéaire) :

$$\mathbf{x}_i = M_{0,i}[\mathbf{x}_0] = M_i M_{i-1} \dots M_1[\mathbf{x}_0] \tag{4.34}$$

Lorsque les opérateurs M et H sont linéaires et que les matrices de covariance vérifient les hypothèses du BLUE, la fonction coût admet un unique optimum $\mathbf{x}_0^a$. Comme pour le 3D-Var, cet optimum est approximé par une méthode de descente dans la direction du gradient, donné par :

$$\nabla\mathcal{J}(\mathbf{x}) = 2\,\mathbf{B}^{-1}\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) - 2\sum_{i=0}^{n} {}^t\mathbf{M}_1 \dots {}^t\mathbf{M}_i\,{}^t\mathbf{H}_i\,\mathbf{R}_i^{-1}\,(\mathbf{y}_i^o - H_i[\mathbf{x}_i]) \tag{4.35}$$

Remarque 4.10 *Lorsque les opérateurs M et H sont linéaires et que l'erreur modèle est nulle, les algorithmes du 4D-Var et de Kalman donnent la même solution à la fin de la fenêtre temporelle, lorsqu'ils utilisent les mêmes données. Plus précisément, l'analyse finale du filtre de Kalman coïncide avec la valeur finale de la trajectoire analysée par le 4D-Var, voir [Li et Navon, 2001].*

Comme pour le 3D-Var, il existe un **4D-Var incrémental** (voir [Courtier *et al.*, 1994], [Weaver *et al.*, 2002] et chapitre 6), qui prend en compte les faibles non-linéarités des opérateurs H et M.

Comme pour les algorithmes de Kalman, la réduction d'ordre est un enjeu important, qui permet de gagner considérablement en temps de calcul. Le **4D-Var de rang réduit** (voir [Durbiano, 2001], [Robert, 2004]), dans sa version incrémentale, détermine un incrément dans un sous-espace de correction de dimension réduite, par exemple engendré par une base d'EOF (Emprirical Orthogonal Functions).

4.2.3.4 Prise en compte de l'erreur modèle

Il s'agit d'une question délicate en assimilation variationnelle. En effet, ceci revient à ajouter un terme du type $\sum_{i=0}^{n} {}^t\eta_i\mathbf{Q}_i^{-1}\eta_i$ dans la fonction coût, ie à augmenter le vecteur de contrôle en $(\mathbf{x}_0, \eta_0, \dots, \eta_n)$ au lieu de $\mathbf{x}$. Dans le cadre du 4D-Var standard, la dimension du vecteur de contrôle devient beaucoup trop grande pour permettre la mise en œuvre effective de l'algorithme à un coût de calcul raisonnable.

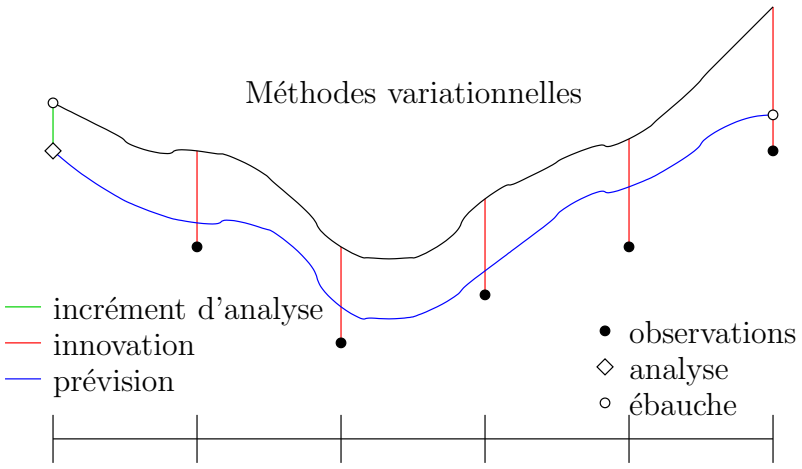
Une solution est d'utiliser une méthode de **réduction d'ordre** et de projeter l'erreur sur un espace de dimension réduite, ce qui diminue d'autant la taille du vecteur de contrôle, voir [Vidard, 2001], [Durbiano, 2001].

Une autre solution est apportée par les méthodes duales. Le **4D-PSAS** (Physical Space Analysis System, voir [Courtier, 1997], [Louvel, 2001], [Auroux, 2003]) effectue la

minimisation d'une fonctionnelle dite duale qui a, dans le cadre linéaire, le même optimum que la fonction coût primale (4.33) augmentée du terme d'erreur modèle. L'avantage est que la minimisation a désormais lieu dans l'espace des observations, qui est en général de dimension inférieure à celle de l'espace complet.

4.2.3.5 Schématisation de l'approche variationnelle

Contrairement aux méthodes séquentielles, les méthodes variationnelles n'assimilent pas les observations au fur et à mesure mais en une seule fois. Le vecteur innovation $\mathbf{d}_i = \mathbf{y}_i^o - H_i[M_{0,i}[\mathbf{x}^b]]$ est calculé à différents instants grâce au modèle, et permet de calculer l'incrément d'analyse à l'instant initial. L'état analysé obtenu dépend ainsi de toutes les observations postérieures disponibles dans la fenêtre temporelle étudiée. Comme pour les méthodes séquentielles, on obtient une nouvelle ébauche (pour la fenêtre temporelle suivante) en effectuant une prévision à partir de l'état initial analysé.



(4.36)

4.2.4 Autres méthodes

La première méthode d'assimilation de données utilisée à l'échelle d'un bassin océanique est le **nudging**, appelé encore relaxation newtonienne, voir [Verron et Holland, 1989], [Verron, 1992], [Verron *et al.*, 1992], [Blayo *et al.*, 1994], [Blayo *et al.*, 1996]. Le nudging consiste à ajouter dans les équations du modèle un terme de rappel aux observations. L'avantage du nudging est qu'il est très simple à mettre en œuvre. Plus récemment, [Auroux, 2003] et [Auroux et Blum, 2005] ont développé le **nudging rétrograde** qui consiste à intégrer le modèle de façon rétrograde en temps et le **BFN** (back and forth nudging) qui consiste à réaliser plusieurs intégrations successives du nudging direct et du rétrograde.

4.3 Les observations océanographiques

4.3.1 Historique

La première carte de courants marins a été réalisé par Franklin en 1777. Son idée était de diminuer la durée des traversées des navires de courrier de New-York à Londres en suivant le Gulf Stream. Il en détermina les limites en mesurant la température de l'eau

et put tracer une première carte des courants dans l'Atlantique Nord. Dans les années 1840-50, Maury, officier de la Navy, établit les premières cartes mondiales de vents et de courants en utilisant des données recueillies par les bateaux. La première campagne purement océanographique eut lieu en 1872 : pendant 4 ans, l'expédition anglaise Challenger parcourut les mers du globe en effectuant des mesures de bathymétrie (profondeur), de température et de courants.

Le vingtième siècle a vu l'émergence de nouveaux instruments de mesure de plus en plus sophistiqués. Cependant l'océanographie a longtemps souffert du manque de données. Financer des navires scientifiques, installer des bouées fixes ou lancer des flotteurs dérivants sont des opérations coûteuses et difficiles à mettre en place sur de très grandes étendues comme les océans. De plus les zones profondes sont difficiles d'accès. Finalement, les données in situ sont relativement peu nombreuses et sont réparties irrégulièrement dans l'espace horizontal, en profondeur et dans le temps.

L'augmentation spectaculaire du nombre de données est due à l'avènement de l'altimétrie satellitaire : elle a bouleversé l'océanographie en mettant soudainement à disposition des scientifiques des données réparties sur toute la surface du globe, avec une période temporelle de quelques jours seulement.

Au début des années 1970, les satellites commencèrent à transmettre des données d'observation du système terre. Les premiers altimètres furent embarqués à bord des satellites américains Skylab, Goos 3 et Seasat en 1978, puis Geosat en 1985. L'ESA (European Space Agency) lanca son premier satellite ERS 1 (European Remote-Sensing Satellite) en 1991 (mission ERS 1 de 91 à 96), puis ERS 2 en 1995. Enfin signalons les missions altimétriques franco-américaines du CNES et de la NASA : Topex/Poséidon (lancé en 92), Jason 1 (lancé en 2001) et Jason 2 (en cours de développement, prévu pour 2008). Ces missions s'intègrèrent à d'ambitieux programmes internationaux d'observation, notamment WOCE (World Ocean Circulation Experiment, 1990-2002) et TOGA (Tropical Ocean and Global Atmosphere, 1994-2000). En parallèle on a assisté à l'amélioration considérable de la modélisation numérique : grâce à la puissance croissante des ordinateurs, des modèles de plus en plus sophistiqués ont vu le jour, sans cesse améliorés par l'arrivée de nouvelles observations.

La prochaine étape est celle de l'océanographie opérationnelle, qui permettra, comme en météorologie, de prédire l'évolution des courants, de la température, de la salinité et de nombreux autres paramètres à l'échelle du globe quelques semaines à l'avance. Mercator Océan (Groupement d'Intérêt Public depuis 2002) est la première expérience française d'océanographie opérationnelle et propose, depuis 2001, un bulletin hebdomadaire d'analyses et de prévisions océaniques.

4.3.2 Différents types de données

Il existe deux grands types de données : les données satellitaires, mesurées depuis l'espace par des instruments distants et les données in situ, mesurées sur place par des instruments immergés.

4.3.2.1 Satellitaires

Les différents paramètres observés. L'altimétrie satellitaire fournit des mesures du niveau de la mer et de la topographie de surface de l'océan (mesurés par rapport au géoïde), données liées aux courants. Elle permet aussi de mesurer la hauteur et le spectre des vagues (donnant des informations sur les fronts et tourbillons à grande échelle). Les données altimétriques sont utilisées pour de nombreuses applications : transport commercial, activités militaires, forages pétroliers.
La température et le vent de surface (liés aux flux océan-atmosphère) sont aussi mesurés depuis l'espace, et sont utiles pour le suivi de masses d'eau (température) et l'étude du climat (vent et température) de l'échelle saisonnière, comme El Niño, à celle du siècle, comme le changement climatique.
Les satellites donnent aussi des informations de couleur de l'océan, liée à l'activité biologique (quantité de phytoplancton). Là encore les applications sont nombreuses : pêche, suivi de la prolifération d'algues et de la qualité des eaux, suivi des sédiments et de l'érosion...
D'autres informations sont utilisées indirectement : les mesures concernant les glaces de mer et l'atmosphère sont utilisées comme forçages pour les modèles d'océan (ou bien directement via des modèles couplés).

Les missions en cours. Voici quelques satellites mesurant les paramètres ci-dessus :

- Topex/Poséidon (altimétrie),
- Jason 1 (altimétrie),
- ENVISAT (ENVIronmental SATellite, topographie, température de surface, couleur),
- ERS 2 (European Remote-Sensing, vent et température de surface),
- GFO (Geosat Follow-On, topographie),
- SeaStar (appelé aussi OrbView 2, couleur),
- satellites NOAA (US National Oceanic and Atmospheric Administration).

Les données sont ensuite transmises à des centres de traitement et de diffusion.

Les avantages majeurs des données satellitaires sont leur couverture horizontale globale, leurs grandes résolutions spatiale et temporelle. On dispose ainsi d'un jeu de données globales et quasiment continues. Par contre, les observations ne sont faites qu'en surface et les profondeurs de l'océan ne sont pas accessibles, ce qui rend nécessaire l'utilisation complémentaire de données in situ.

4.3.2.2 In situ

Les données in situ sont beaucoup moins nombreuses que les données satellitaires. Cependant, les systèmes immergés ont accès aux profondeurs de l'océan, contrairement aux satellites qui ne voient que la surface.

Les instruments in situ mesurent la température, la salinité, la pression, la conductivité, les courants et divers paramètres physico-chimiques et biogéochimiques.

Les systèmes de mesure. On distingue trois types de systèmes : les navires, les capteurs eulériens et les capteurs lagrangiens.
Les navires océanographiques réalisent des profils verticaux en des points déterminés. Ils sont équipés d'un câble portant diverses sondes et capteurs répartis sur tout le profil vertical et effectuent aussi des prélèvements d'eau pour des analyses physiques, chimiques ou biologiques.
Les systèmes eulériens (bouées fixes, mouillages, bouées ancrées) sont par définition en un lieu fixé et mesurent l'évolution temporelle de la température, la salinité et les courants le long d'un profil vertical.
Enfin les systèmes lagrangiens évoluent au gré des courants, à profondeur ou à densité fixée. Il existe différents types de flotteurs lagrangiens : certains sont positionnés de manière acoustique, et donnent ainsi des informations de courant en profondeur, d'autres ne communiquent qu'à la surface et font périodiquement des profils verticaux de température et de salinité, entre deux phases de dérive en profondeur.

L'apport des satellites est ici aussi majeur, car il permet la transmission, quasiment en temps réel, des mesures in situ grâce au système Argos.

4.3.3 Programmes nationaux et internationaux

La météorologie a été reconnue comme une préoccupation internationale et planétaire, elle est actuellement dotée d'un réseau unifié de services nationaux via l'OMM (Organisation Météorologique Mondiale) ; l'océanographie ne bénéficie pas d'un tel soutien, même si ses applications sont cruciales pour une très large partie de la population mondiale. De nombreux programmes existent, et leur foisonnement est de bon augure, mais pour l'instant aucune structure unifiée ne garantit la pérennité des moyens accordés aujourd'hui à l'océanographie, pérennité pourtant nécessaire pour le passage à l'océanographie opérationnelle.

4.3.3.1 En France

En France la route vers l'océanographie opérationnelle est ouverte par **Mercator Océan**, qui assure le volet modélisation de l'océan et assimilation de données (donc prévisions). Ce GIP est articulé essentiellement autour de deux pôles : l'équipe projet, qui conçoit et développe le système d'assimilation et le groupe Mission qui rassemble une centaine de scientifiques sélectionnés par appel d'offre chaque année, créant de facto un lien fort entre la recherche et l'opérationnel. Six organismes français participent à Mercator Océan : le CNES, le CNRS, l'IFREMER, l'IRD, Météo-France et le SHOM.
Pour l'acquisition des observations il existe deux programmes : **Jason** pour les observations satellitaires et **Coriolis** pour les mesures in situ (et notamment des flotteurs lagrangiens MARVOR et PROVOR).

4.3.3.2 Coopérations internationales

Comme nous l'avons dit à plusieurs reprises, l'acquisition de données dans l'océan est un processus coûteux pour lequel la coopération internationale est cruciale. Dans le passé, deux programmes majeurs d'observation ont fait progresser notre connaissance de l'océan : le programme **TOGA** (Tropical Ocean and Global Atmosphere, 1985-95),

patronné entre autres par l'OMM et la COI (Commission Océanographique Intergouvernementale de l'UNESCO), a été lancé après le dramatique épisode El Niño de 1982-83, pour comprendre et tenter de prévoir ces phénomèmes. Le programme **WOCE** (World Ocean Circulation Experiment, 1990-98) a été lancé pour construire une base de données représentative de l'océan global actuel. Une trentaine de pays dont la France ont participé à WOCE, finançant des campagnes de mesures satellitaires et in situ.

Actuellement de nombreux programmes internationaux financent et coordonnent l'acquisition et la distribution de données, on citera entre autres trois programmes majeurs qui en regroupent des dizaines d'autres : le programme **GOOS** (Global Ocean Observing System) créé en 1991 par la COI de l'UNESCO, le programme **GEOSS** (Global Earth Observation System of Systems) de l'U.S. EPA (Environmental Protection Agency) lancé en 2003 regroupant actuellement une centaine de pays et le programme **GMES** (Global Monotoring for Environment and Security) lancé en 1991 par l'ESA (Agence Spatiale Européenne) et la Commission Européenne.

Du côté de l'assimilation de données, **GODAE** (Global Ocean Data Assimilation Experiment) est une expérience lancée en 1997 pour dix ans s'appuyant sur le constat suivant : pour persuader les organisations internationales et les gouvernements de financer durablement un système d'observation de l'océan, il faut au préalable démontrer son utilité et notamment sa capacité à fournir (en utilisant les systèmes d'assimilation actuels) en temps réel des prévisions globales de qualité. Cette expérience s'appuie sur les campagnes actuelles de données (notamment les campagnes satellitaires, cf plus haut) et son objectif est, entre autres, de prouver la nécessité de pérenniser le système d'observation actuel.

Du côté des données lagrangiennes, on peut citer le programme **Argo** qui déploie des flotteurs profileurs dérivants de type PROVOR dans l'océan global. Il y a actuellement (le 6 août 2005) 1966 flotteurs actifs ; l'objectif d'Argo est de déployer un réseau de 3 000 flotteurs délivrant 100 000 profils de température et de salinité par an. Argo fait partie de GODAE, de GOOS, et est supporté en France par Coriolis.

4.4 Les données lagrangiennes

4.4.1 Description des flotteurs dérivants

Nous décrivons ici plus en détail les différents types de flotteurs lagrangiens et leur caractéristiques.

Mode de dérive. Certains flotteurs dérivent à profondeur constante, d'autres à densité constante. La profondeur de dérive est choisie par l'utilisateur (entre 500 et 2 500 mètres en général).
Mode de localisation. Rappelons que l'océan est opaque au rayonnement électromagnétique, ce qui interdit la localisation traditionnelle par ondes visibles ou radio. Certains flotteurs (type MARVOR) sont équipés de récepteur (ou d'émetteur) acoustique et peuvent ainsi être localisés en profondeur. Mais ce système suppose la présence de sources

acoustiques (ou de récepteurs), ce qui n'est pas toujours simple à mettre en pratique dans l'océan. Ainsi, d'autres flotteurs (type PROVOR) sont invisibles en profondeur et ne sont localisés qu'une fois revenus en surface.

Mesures effectuées. Ceci est lié au mode de positionnement. Les flotteurs qui sont localisés en profondeur fournissent naturellement des données de trajectoires, et peuvent en outre être équipés de capteurs de température, salinité, etc. Ceux qui ne sont localisés qu'en surface fournissent, eux, des profils verticaux de température et de salinité. L'enregistrement de ces paramètres pendant la phase de dérive à profondeur ou densité fixée est pour le moment peu exploitable car on ne connaît pas précisément leur trajectoire.

Période de positionnement. Ceci est encore lié au mode de positionnement. Les flotteurs acoustiques ont une période d'échantillonage d'environ 6 heures, tandis que les profileurs dérivants ont une période plus longue (10 jours pour les flotteurs Argo, 5 jours pour les Med-Argo, en Méditerranée).

Pour résumer, décrivons un flotteur acoustique et un flotteur Argo dérivant tous deux à profondeur constante :

• le flotteur acoustique MARVOR dérive librement à sa profondeur de parking pendant 2 à 3 mois, toutes les 6 heures il détermine et enregistre sa position, il revient régulièrement en surface pour transmettre par satellite les données de sa trajectoire ;

• le flotteur PROVOR du programme Argo dérive librement à sa profondeur de parking pendant 10 jours, au bout de 10 jours il descend rapidement jusqu'à 2 000 mètres et remonte rapidement a la surface en mesurant la température et la salinité. Pendant la montée, il est assez peu dévié par les courants, il enregistre ainsi un profil (quasi-)vertical de température et de salinité en un point donné. Une fois arrivé en surface, il dérive quelques heures puis transmet ses données (ainsi que sa position actuelle) par satellite. Après la transmission, il plonge à nouveau jusqu'à sa profondeur de parking, et le cycle reprend.

4.4.2 Assimilation des données de position

Les positions de flotteurs dérivants en océanographie font partie des *nouvelles données*, dont l'assimilation n'a débuté que récemment. La difficulté principale est que les observations ne sont pas des variables d'état du modèle. En effet, en océanographie la plupart des données assimilées actuellement sont la température, la salinité, la hauteur d'eau, les courants, etc. : on observe directement une composante du vecteur d'état. Au contraire, dans le cas des données lagrangiennes, la relation entre le vecteur d'état et les positions observées est non-linéaire.

La première idée est de transformer les données de positions en données de vitesse, via une formule de Taylor du type

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\xi_1(t_{k+1}) - \xi_1(t_k)}{t_{k+1} - t_k} & \approx & u(\xi_1(t_k), \xi_2(t_k), z_0, t_k) \\ \dfrac{\xi_2(t_{k+1}) - \xi_2(t_k)}{t_{k+1} - t_k} & \approx & v(\xi_1(t_k), \xi_2(t_k), z_0, t_k) \end{array} \tag{4.37}$$

où $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ est la position d'un flotteur dans le plan horizontal de profondeur $z = z_0$, t_k et t_{k+1} sont deux instants successifs d'observation et (u, v) est la vitesse horizontale du

fluide. Bien sûr, cette formule d'approximation est valable tant que l'intervalle de temps $t_{k+1} - t_k$ n'est pas trop grand. L'avantage de cette méthode est sa simplicité : une fois les positions converties en vitesses, on se retrouve dans le cadre traditionnel de l'assimilation de données, ie celui où les variables observées font partie des variables d'état du modèle. Cette méthode a été utilisée par [Kamachi et O'Brien, 1995] dans un modèle Shallow-Water avec une méthode variationnelle. Plus récemment, elle a été utilisée par [Molcard *et al.*, 2003] et [Ozgökmen *et al.*, 2003] pour un modèle quasi-géostrophique puis un modèle aux équations primitives, en utilisant une méthode d'interpolation optimale. Elle donne des résultats satisfaisants quand la période temporelle $t_{k+1} - t_k$ est inférieure ou égale à 2 ou 3 jours (dans une configuration semblable à celle que nous utilisons), mais au-delà les résultats sont médiocres.

Une autre idée est de changer la formulation du modèle : [Mead, 2005] a implémenté un modèle Shallow-Water en coordonnées lagrangiennes. Les variables d'état deviennent alors variables observées et on peut mettre en œuvre une méthode classique d'assimilation. L'inconvénient de cette méthode est qu'il est actuellement délicat voire impossible, en terme de coût de calcul, de représenter un océan réaliste avec une formulation lagrangienne.

Une troisième idée est d'ajouter des composantes au vecteur d'état. Par exemple, pour un modèle aux équations primitives, le vecteur d'état est formé des champs u, v, T et S, et on ajoute la variable de position $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Le modèle d'évolution du vecteur d'état intègre alors l'équation d'advection des flotteurs. Dans ce formalisme, les données sont alors des observations directes d'une variable du modèle. On met alors en œuvre une méthode classique (permettant tout de même de prendre en compte les aspects non-linéaires du nouveau modèle) pour assimiler les positions. Cette méthode a été introduite et mise en œuvre par [Ide *et al.*, 2002], [Kuznetsov et Jones, 2003] et [Salman *et al.*, 2005] pour un modèle de vortex bidimensionnel puis un modèle Shallow-Water en utilisant un filtre de Kalman étendu puis de Kalman d'ensemble et les résultats sont très bons.

Du côté des profils de température, [Forget *et al.*, 2003] ont implémenté une méthode 4D-Var pour assimiler les données Argo dans une configuration réaliste à basse résolution de l'Atlantique Nord. La méthode fonctionne avec succès en expériences jumelles ainsi qu'avec des données réelles.

4.5 Cadre et objectifs de notre travail

4.5.1 Expériences jumelles

Tous les résultats présentés dans le paragraphe précédent (à l'exception du dernier) ont été réalisés dans ce cadre. Le constat qui mène aux expériences jumelles est le suivant : pour pouvoir dire qu'une méthode d'assimilation est efficace, on voudrait pouvoir vérifier que le résultat obtenu avec assimilation est meilleur que sans. Pour cela il faut pouvoir comparer les sorties du système avec ce qui se passe reéllement dans l'océan. En pratique c'est assez délicat, car on ne dispose que d'informations partielles sur l'océan vrai (climatologie, mesures indépendantes de celles qui ont été assimilées). Le principe

des expériences jumelles est de se donner un état de l'océan *connu* (en faisant évoluer le modèle à partir de conditions initiales connues) que l'on appelle *état vrai* et d'utiliser cet état de l'océan comme référence, et non plus l'océan réel. On peut alors, connaissant l'état vrai, quantifier complètement l'efficacité du processus, et comparer les résultats avec et sans assimilation.

Plus précisément, pour valider une méthode d'assimilation dans le cadre d'expériences jumelles, on procède ainsi :

- d'abord on choisit un *état vrai*. En pratique, on intègre le modèle pendant quelques années et on choisit un état de l'océan à un instant donné. On le fait ensuite évoluer sur la fenêtre temporelle choisie et on génére les *données* en observant cette évolution.
- Ensuite on se donne une *ébauche*. Elle peut être choisie comme le résultat d'un processus d'assimilation antérieur, issue d'une climatologie, etc. Elle contient l'information préalable dont on dispose sur l'océan. Son évolution sur la fenêtre temporelle nous donne un état de référence que l'on appellera encore ébauche. Cette ébauche est ce que l'on obtient sans assimilation.
- Enfin, on assimile les données, en initialisant la méthode avec l'ébauche. Le résultat obtenu s'appelle état *assimilé* ou *analysé*. On peut alors comparer qualitativement ou quantitativement l'état assimilé et l'ébauche et vérifier que l'adéquation avec l'état vrai est meilleur avec assimilation que sans.

Le premier avantage des expériences jumelles est donc de permettre de quantifier l'efficacité d'une méthode donnée. Le deuxième avantage, dans le cas des données lagrangiennes, est de permettre d'oublier, dans un premier temps, les problèmes liés aux données réelles, et notamment les problèmes de dérive des flotteurs Argo. De plus, ce formalisme permet de fabriquer des flotteurs virtuels dont les caractéristiques (profondeur de dérive et période temporelle de positionnement) peuvent être modifiées.

4.5.2 Modèle

Nous avons choisi un modèle aux équations primitives, plus réaliste que les modèles quasi-géostrophique ou Shallow-Water, dans une configuration idéalisée d'Atlantique Nord. Malgré la simplicité de notre bassin, la circulation obtenue présente des phénomènes complexes, comme des courants et tourbillons instables et énergétiques, qui rendent le problème d'assimilation intéressant et ardu.

4.5.3 Méthode

Nous avons choisi le 4D-Var, car cette méthode permet de passer outre le principal problème lié aux données lagrangiennes, qui est la relation complexe (et non-linéaire) entre les observations et les variables du modèle. En effet, il suffit simplement de choisir un opérateur d'observation adapté, qui exprime la position d'un flotteur dérivant en fonction du champ de vitesse horizontal du fluide. Ainsi nous n'avons pas besoin d'interpréter les données de position en données de vitesse, nous pouvons les assimiler directement.
Cependant, le modèle d'océan M comme l'opérateur d'observation H sont non-linéaires ; la fonction coût $\mathcal{J}$ n'est plus nécessairement convexe et l'algorithme du 4D-Var peut alors

converger vers un minimum local de $\mathcal{J}$, converger très lentement ou encore pas du tout. Nous avons donc choisi d'utiliser la version incrémentale du 4D-Var, qui permet de prendre en compte les faibles non-linéarités tout en assurant la convergence de l'algorithme.

4.5.4 Objectifs

Le premier objectif de notre travail est de valider la méthode, en la comparant en particulier à la méthode classique qui consiste à interpréter les positions en vitesses. Le deuxième objectif est d'étudier la sensibilité de la méthode aux paramètres suivants : nombre de flotteurs, période temporelle d'échantillonage des positions, profondeur verticale de dérive. On aura notamment à l'esprit que les flotteurs du programme Argo (environ 100 flotteurs dans l'Atlantique Nord, période d'échantillonage de 10 jours) n'ont pas été lancés pour récolter des données de position, il convient donc de voir si l'information qu'elles contiennent peut être utilisée avec profit.

Chapitre 5

Étude théorique du problème

Sommaire

5.1 Position du problème 94
5.1.1 L'équation d'état 94
5.1.2 La fonction coût 96
5.1.3 Formulation du problème 96
5.2 Existence de solutions fortes pour les équations primitives non-linéaires 97
5.2.1 Estimations d'énergie pour les équations linéaires 97
5.2.2 Estimation des termes non linéaires 101
5.2.3 Fin de la preuve 102
5.3 Existence d'un contrôle optimal 104
5.3.1 Convergence du terme d'observation 104
5.3.2 Passage à la limite dans l'équation d'état 107
5.4 Obtention formelle des équations primitives adjointes 109
5.4.1 Lagrangien associé au problème de contrôle optimal 109
5.4.2 Equations primitives adjointes 110

5.1 Position du problème

On a déjà fait quelques rappels formels de contrôle optimal (voir paragraphe 4.2.3.1 dans le chapitre précédent). Dans ce paragraphe, on présente les différents éléments du problème : le modèle physique, appelé équation d'état, et la fonction coût.

5.1.1 L'équation d'état

Les équations primitives de l'océan

On considère les équations primitives de l'océan dans un bassin périodique dans les directions horizontales de profondeur verticale constante :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u + (U.\nabla_2)u + w\partial_z u - \alpha v + \partial_x p = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ \partial_t v - \nu\Delta v + (U.\nabla_2)v + w\partial_z v + \alpha u + \partial_y p = 0 & \\ \partial_z p - \beta\theta = 0 & \\ \partial_t \theta - \nu\Delta\theta + (U.\nabla_2)\theta + w\partial_z\theta + \gamma w = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ w(x,y,z) = -\int_0^z \partial_x u(x,y,z') + \partial_y v(x,y,z')\, dz' & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ U(t=0) = U_0, \qquad \theta(t=0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

avec

- $\Omega = \mathbb{T}^2 \times (0,a)$ le bassin de circulation, périodique en x et y, de profondeur constante en z, $(0,T)$ l'intervalle de temps ;
- $U = (u,v)$ le vecteur vitesse horizontal, w la vitesse vertiale, θ la température et p la pression ;
- $U_0 = (u_0, v_0)$ et θ_0 les conditions initiales ;
- $\nabla_2 = (\partial_x, \partial_y)$ l'opérateur de gradient horizontal, $(\nabla_2.)$ l'opérateur divergence horizontal $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ l'opérateur de gradient tridimensionnel, $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$ le laplacien tridimensionnel ;
- α, ν, γ, β des constantes physiques.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\begin{cases} u, v, \theta \text{ sont périodiques en } x, y & \\ u = 0, v = 0, \theta = 0 \text{ sur } \mathbb{T}^2 \times \{z = 0, z = a\} \times (0,T) & \\ \int_{z=0}^{1} \partial_x u + \partial_y v\, dz = 0 \quad \text{sur } \mathbb{T}^2 \times (0,T) & \end{cases} \tag{5.2}$$

On note $X(t) = (u(t), v(t), \theta(t))$ l'état du système, $X_0 = (u_0, v_0, \theta_0)$ l'état initial du système (qui est notre contrôle).

Cadre de travail

Pour pouvoir définir la fonction coût, on va travailler avec des solutions très régulières des équations primitives non linéaires. Pour cela, on commence par définir les espaces

fonctionnels suivants, pour m entier positif ou nul :

$$\begin{aligned}
L^2_z H^m_{xy} &= \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ périodique en } x,y,\ \partial^\alpha_{x,y} u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq m\right\} \\
\mathcal{U}^{m+1} &= \big\{X=(u,v,\theta) \in (L^2_z H^m_{xy})^3,\ \text{périodique en } x,y, \\
&\quad X=0 \text{ sur } \mathbb{T}^2 \times \{z=0, z=a\}, \\
&\quad \textstyle\int_{z=0}^{a} \partial_x u + \partial_y v\, dz = 0 \text{ sur } \mathbb{T}^2 \\
&\quad \nabla X = (\nabla u, \nabla v, \nabla\theta) \in ((L^2_z H^m_{xy})^3)^3 \big\} \\
\mathcal{H}^{m+1} &= \big\{u \in L^2_z H^m_{xy},\ \text{périodique en } x,y, \\
&\quad u=0 \text{ sur } \mathbb{T}^2 \times \{z=0, z=a\}, \\
&\quad \nabla u \in (L^2_z H^m_{xy})^3 \big\}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

associés aux produits scalaires et aux normes suivants :

$$\begin{aligned}
(u_1,u_2)_{L^2_z H^m_{xy}} &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha_{x,y} u_1 \partial^\alpha_{x,y} u_2\ dx\, dy\, dz \\
(\nabla u_1, \nabla u_2)_{(L^2_z H^m_{xy})^3} &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha_{x,y} \nabla u_1 . \partial^\alpha_{x,y} \nabla u_2\ dx\, dy\, dz \\
(X_1,X_2)_{\mathcal{U}^{m+1}} = &\ (u_1,u_2)_{L^2_z H^m_{xy}} + (\nabla u_1, \nabla u_2)_{(L^2_z H^m_{xy})^3} \\
&+(v_1,v_2)_{L^2_z H^m_{xy}} + (\nabla v_1, \nabla v_2)_{(L^2_z H^m_{xy})^3} \\
&+K(\theta_1,\theta_2)_{L^2_z H^m_{xy}} + K(\nabla\theta_1, \nabla\theta_2)_{(L^2_z H^m_{xy})^3} \\
\|u\|^2_{L^2_z H^m_{xy}} &= (u,u)_{L^2_z H^m_{xy}} \\
\|X\|^2_{\mathcal{U}^{m+1}} &= (X,X)_{\mathcal{U}^{m+1}}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

(K est une "grande" constante qui sera précisé ultérieurement).
On munit $(\mathcal{H}^{m+1})^3$ des mêmes produit scalaire et norme que $\mathcal{U}^{m+1}$.

Remarque 5.1 *Les espaces $\mathcal{U}^{m+1}$ et $(\mathcal{H}^{m+1})^3$ ne sont pas des espaces d'interpolation. Dans la suite, m est un entier* fixé *supérieur ou égal à deux.*

Existence de solutions fortes

Dans ce cadre, on a existence de solutions fortes pour les équations primitives non linéaires (5.1) :

Proposition 5.1 *Soient $m \geq 2$ entier et $X_0 = (u_0, v_0, \theta_0) \in \mathcal{U}^{m+1}$. Alors si K est assez grand, il existe $t^* > 0$ avec $t^* = t^*(\alpha, \beta, \gamma, \nu, \|X_0\|_{\mathcal{U}^{m+1}})$ et il existe une unique solution $X(t) = (u(t), v(t), \theta(t))$ des équations primitives (5.1) avec les conditions aux limites (5.2) telle que*

$$X \in \mathcal{C}([0,t^*]; \mathcal{U}^{m+1}), \quad \partial_t X \in L^2(0,t^*; L^2_z H^m_{xy}) \tag{5.5}$$

De plus, on a

$$\|X(t)\|^2_{\mathcal{U}^{m+1}} + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|\partial_t X(s)\|^2_{2,m}\, ds \quad \leq \quad \frac{M}{\delta}\|X_0\|^2_{\mathcal{U}^{m+1}} \tag{5.6}$$

pour tout $t \in [0, t^{**}]$, avec δ dépendant de t^{**}.

La preuve de cette proposition fait l'objet du paragraphe 5.2

5.1.2 La fonction coût

Les trajectoires lagrangiennes

Écrivons maintenant la fonction coût, en fonction du contrôle X_0. Pour alléger l'écriture on supposera qu'il n'y a qu'un seul flotteur dérivant et que sa position n'est donnée qu'à un seul instant t_1. Sa position $\xi(t) = (\xi^1(t), \xi^2(t))$ dans le plan $z = z_0$ vérifie l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d\xi}{dt} & = & U(t, \xi^1(t), \xi^2(t), z_0) \\ \xi(0) & = & \xi_0 \end{array} \right. \tag{5.7}$$

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la proposition 5.1 :

Proposition 5.2 *Sous les hypothèses de la proposition 5.1, l'unique solution X des équations primitives (5.1) et (5.2) est continue en temps et en z, lipschitzienne en (x, y) et pour tout $\xi_0 \in \mathcal{T}^2$ et $z_0 \in [0, a]$ il existe une unique trajectoire lagrangienne solution de l'équation (5.7) associée à X, ξ_0 et z_0.*

La fonction coût

La fonction coût s'écrit alors :

$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{J}(X_0) & = & \frac{1}{2}\|\xi(t_1) - d\|^2 & + & \frac{\omega}{2}\|X_0\|^2_{\mathcal{U}^{m+1}} \\ & = & \mathcal{J}^o(X_0) & + & \omega\, \mathcal{J}^b(X_0) \end{array} \tag{5.8}$$

avec :
- $d = (d_1, d_2)$ la donnée ;
- m un entier, $m \geq 2$, ω une constante strictement positive ;
- $\|.\|$ la norme euclidienne dans le plan $z = z_0$.

L'*opérateur d'observation* est donc défini de la manière suivante :

$$\mathcal{G}(t_1; X_0) = \xi(t_1) \tag{5.9}$$

où ξ est définie par l'équation (5.7) avec le champ de vitesse $U = (u, v)$ associé à la condition initiale X_0.

Remarque 5.2 *Contrairement à la théorie classique de [Lions, 1968], l'opérateur d'observation est non linéaire ; de plus il s'exprime soit en fonction de l'état initial X_0, soit en fonction du champ de vitesse $\{U(t), t \in [0, t_1]\}$, et pas seulement en fonction de $U(t_1)$.*

5.1.3 Formulation du problème

Voilà le problème de contrôle optimal associé à l'assimilation des données lagrangiennes :

Problème 5.1 *Soit $d \in \mathbb{R}^2$ une donnée. On cherche un contrôle optimal $X_0^* \in \mathcal{U}^{m+1}$ solution du problème de minimisation*

$$\mathcal{J}(X_0^*) = \inf_{X_0 \in \mathcal{U}^{m+1}} \mathcal{J}(X_0) \tag{5.10}$$

où la fonction coût est définie par (5.8), l'équation d'état par (5.1,5.2) et les observations par (5.7).

La preuve de l'existence d'un contrôle optimal fait l'objet du paragraphe 5.3.

5.2 Existence de solutions fortes pour les équations primitives non-linéaires

Dans ce paragraphe, on montre la proposiion 5.1. La preuve se fait en trois étapes : d'abord on établit des estimations pour l'équation linéaire (5.11), ensuite on estime les termes non linéaires de (5.1) et enfin on conclut.

5.2.1 Estimations d'énergie pour les équations linéaires

Avec les notations du paragraphe 5.1, on considère les équations primitives linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u - \alpha v + \partial_x p = F_1 & \text{dans } \Omega\times(0,T) \\ \partial_t v - \nu\Delta v + \alpha u + \partial_y p = F_2 & \\ \partial_z p - \beta\theta = 0 & \\ \partial_t \theta - \nu\Delta\theta + \gamma w = F_3 & \text{dans } \Omega\times(0,T) \\ w(x,y,z) = -\int_0^z \partial_x u(x,y,z') + \partial_y v(x,y,z')\,dz' & \text{dans } \Omega\times(0,T) \\ U(t=0) = U_0, \qquad \theta(t=0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{5.11}$$

avec les conditions aux limites (5.2).

On utilisera les notations suivantes :
- $\iint f$ pour $\int_0^T \int_\Omega f(t,x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,dt$
- $\|f\|$ pour $\|f\|_{L^2(\Omega)}$
- $\|f\|_{2,m}$ pour $\|f\|_{L^2_z H^m_{xy}}$
- $\|f\|_m$ pour $\|f\|_{H^m_{xy}}$
- $\|(f_1,f_2)\|_{2,m}$ pour $\|(f_1,f_2)\|_{(L^2_z H^m_{xy})^2}$
- $\|(f_1,f_2,f_3)\|_{2,m}$ pour $\|(f_1,f_2,f_3)\|_{(L^2_z H^m_{xy})^3}$

On a le résultat suivant :

Lemme 5.1 *Pour tout K assez grand, pour tout $T>0$, il existe des constantes $C_1(a,\nu,K,\gamma,\beta)$, $C_2(K,\nu)$, $C_3(a,\nu)$ et $C_4(\nu)$ telles que, pour tout $X_0\in\mathcal{U}^{m+1}$, $F\in L^2(0,T;L^2_z H^m_{xy})$, l'unique solution $X(t)$ de (5.11) associée vérifie*

$$X(t)\in\mathcal{C}([0,T],\mathcal{U}^{m+1}) \tag{5.12}$$

et on a de plus l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} &\|X(t)\|^2_{2,m} + \|\nabla X(t)\|^2_{2,m} + \tfrac{1}{\nu}\int_0^t \|\partial_t X(s)\|^2_{2,m}\,ds \\ &\quad\le e^{C_1 t}\big(C_2\|X_0\|^2_{2,m} + C_3\|\nabla X_0\|^2_{2,m} + C_4\int_0^T \|F(s)\|^2_{2,m}\,ds\big) \end{aligned} \tag{5.13}$$

pour tout $t\in[0,T]$.

Preuve. Dans la partie précédente nous avons montré un résultat d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy. Pour X_0 donné dans $\mathcal{U}^{m+1}$ et $F \in L^2(0,T;L^2_z H^m_{xy})$, il existe $X(t)$ au moins dans $L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap \mathcal{C}([0,T];\mathcal{H})$. Il suffit donc de montrer (5.13). Pour cela, on établit successivement quatre estimations d'énergie : d'abord une estimation de $\|X(t)\|_{L^2_{xyz}}$ puis de la même façon de $\|X(t)\|_{L^2_z H^m_{xy}}$, ensuite de $\|\nabla X(t)\|_{L^2_{xyz}}$ puis de la même façon de $\|\nabla X(t)\|_{L^2_z H^m_{xy}}$.
Pour établir les estimations d'énergie sur $\|X(t)\|_{L^2_{xyz}}$ on multiplie les équations précédentes par u, v, w, $K\theta$ et on intègre en espace et en temps. On obtient ainsi :

$$\begin{array}{l} T_1+T_2+T_3+T_4+T_5 = T_6 \\ \begin{array}{ll} T_1 = \iint \partial_t u u + \partial_t v v + K\partial_t\theta\theta & T_2 = \iint -\nu\Delta u u - \nu\Delta v v - \nu K\Delta\theta\theta \\ T_3 = \iint -\alpha v u + \alpha u v & T_4 = \iint -\beta\theta w + K\gamma w\theta \\ T_5 = \iint \partial_x p u + \partial_y p v + \partial_z p w & T_6 = \iint F_1 u + F_2 v + K F_3 \theta \end{array} \end{array} \tag{5.14}$$

En intégrant par parties et en utilisant les conditions (5.2), on obtient :

$$\begin{array}{rcl} T_1 &=& \frac{1}{2}\big(\|u(t)\|^2 + \|v(t)\|^2 + K\|\theta(t)\|^2 - \|u_0\|^2 - \|v_0\|^2 - \|\theta_0\|^2\big) \\ &=& \frac{1}{2}\big(\|X(t)\|^2 - \|X_0\|^2\big) \\ T_2 &=& \nu\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 + \|\nabla v(s)\|^2 + K\|\nabla\theta(s)\|^2\,ds \\ &=& \nu\int_0^t \|\nabla X(s)\|^2 \\ T_3 &=& 0 \\ T_5 &=& -\iint p(\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w) + \int_0^t\int_{\mathbb{T}^2} p(w|_{z=1} - w|_{z=0})\,dx\,dy\,dt \\ &=& 0 \end{array} \tag{5.15}$$

Puis :

$$\begin{array}{rcl} \|X(t)\|^2 + 2\nu\int_0^t \|\nabla X(s)\|^2 &=& \|X_0\|^2 + 2\iint(F_1 u + F_2 v + K F_3\theta) \\ && -2(K\gamma-\beta)\iint w\theta \end{array} \tag{5.16}$$

On majore ensuite le second membre de cette égalité. Pour cela, on commence par établir l'inégalité suivante pour w, que l'on utilisera par la suite :

$$\begin{array}{rcl} \|w\|^2 &=& \int_\Omega |\int_0^z \partial_x u + \partial_y v\,dz'|^2\,dx\,dy\,dz \\ &\le& \int_\Omega 2z\int_0^z |\partial_x u|^2 + |\partial_y v|^2\,dz'\,dx\,dy\,dz \\ &\le& a^2(\|\partial_x u\|^2 + \|\partial_y v\|^2) \end{array} \tag{5.17}$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl} 2\iint(F_1 u + F_2 v + K F_3\theta) &\le& \int_0^t \|F_1(s)\|^2 + \|F_2(s)\|^2 + K\|F_3(s)\|^2 \\ && +\|u(s)\|^2 + \|v(s)\|^2 + K\|\theta(s)\|^2\,ds \\ &=& \int_0^t \|F(s)\|^2 + \|X(s)\|^2\,ds \\ -2(K\gamma-\beta)\iint w\theta &\le& |K\gamma-\beta|\int_0^t(\|w\|^2 + \|\theta\|^2) \\ &\le& |K\gamma-\beta|\int_0^t a^2\|\partial_x u\|^2 + a^2\|\partial_y v\|^2 + \|\theta\|^2\,ds \end{array} \tag{5.18}$$

On obtient finalement l'inégalité suivante :

$$\begin{array}{rcl} \|X(t)\|^2 + 2\nu\int_0^t \|\nabla X(s)\|^2 &\le& \|X_0\|^2 + \int_0^t \|F(s)\|^2 + \int_0^t \|X(s)\|^2\,ds \\ && + \int_0^t \|\partial_z u\|^2 + \|\partial_z v\|^2\,ds \\ && +|K\gamma-\beta|\int_0^t a^2\|\partial_x u\|^2 + a^2\|\partial_y v\|^2 + \|\theta\|^2\,ds \\ &\le& \|X_0\|^2 + \int_0^t \|F(s)\|^2 + \int_0^t \|U(s)\|^2 \\ && +(K + |K\gamma-\beta|)\|\theta(s)\|^2\,ds \\ && + \int_0^t \max(1, a^2|K\gamma-\beta|)\|\nabla U(s)\|^2\,ds \end{array} \tag{5.19}$$

Pour obtenir l'estimation sur $\|X(t)\|_{L^2_z H^m_{xy}}$, on procède de la même façon. On vérifie d'abord que, si u, v, w, θ et p vérifient l'équation (5.11), alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $\partial^\alpha_{xy} u$, $\partial^\alpha_{xy} v$, $\partial^\alpha_{xy} w$, $\partial^\alpha_{xy}\theta$ et $\partial^\alpha_{xy} p$ vérifient la même équation (avec F_i remplacé par $\partial^\alpha_{xy} F_i$, X_0 remplacé par $\partial^\alpha_{xy} X_0$) et les mêmes condtions aux limites. On peut donc reprendre les calculs précédents pour obtenir l'inégalité suivante :

$$\begin{array}{rcl} \|X(t)\|^2_{2,m} & + & 2\nu \int_0^t \|\nabla X(s)\|^2_{2,m} \quad \leq \quad \|X_0\|^2_{2,m} + \int_0^t \|F(s)\|^2_{2,m} \\ & & + \int_0^t \|U(s)\|^2_{2,m} + (K + |K\gamma - \beta|)\|\theta(s)\|^2_{2,m}\, ds \\ & & + \int_0^t \max(1, a^2|K\gamma - \beta|)\|\nabla U(s)\|^2_{2,m}\, ds \end{array} \tag{5.20}$$

Pour obtenir le deuxième type d'estimations, on multiplie cette fois l'équation par $\partial_t u$, $\partial_t v$, $\partial_t w$ et $K\partial_t\theta$ puis on intègre sur $\Omega \times (0,t)$:

$$\begin{array}{l} T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = T_6 \\ \\ T_1 = \iint \partial_t u \partial_t u + \partial_t v \partial_t v + K \partial_t \theta \partial_t \theta \\ T_2 = \iint -\nu \Delta u \partial_t u - \nu \Delta v \partial_t v - \nu K \Delta \theta \partial_t \theta \\ T_3 = \iint -\alpha v \partial_t u + \alpha u \partial_t v \\ T_4 = \iint -\beta \theta \partial_t w + K\gamma w \partial_t \theta \\ T_5 = \iint \partial_x p \partial_t u + \partial_y p \partial_t v + \partial_z p \partial_t w \\ T_6 = \iint F_1 \partial_t u + F_2 \partial_t v + K F_3 \partial_t \theta \end{array} \tag{5.21}$$

En intégrant par parties et en utilisant les conditions (5.2), on obtient :

$$\begin{array}{rcl} T_1 & = & \int_0^t \|\partial_t u(s)\|^2 + \|\partial_t v(s)\|^2 + K\|\partial_t u(s)\|^2\, ds \\ & = & \int_0^t \|\partial_t X(s)\|^2\, ds \\ T_2 & = & \frac{\nu}{2}\|\nabla X(t)\|^2 - \frac{\nu}{2}\|\nabla X_0\|^2 \\ T_4 & = & \iint (K\gamma + \beta) w \partial_t \theta + \int_\Omega \big(\theta_0 w_0 - \theta(t) w(t)\big)\, dx\, dy\, dz \\ T_5 & = & 0 \end{array} \tag{5.22}$$

D'où :

$$\begin{array}{l} 2\int_0^t \|\partial_t X(s)\|^2\, ds + \nu\|\nabla X(t)\|^2 = \nu\|\nabla X_0\|^2 + 2\iint \alpha v \partial_t u - \alpha u \partial_t v \\ \quad -2\iint (K\gamma + \beta) w \partial_t \theta + 2\int_\Omega (\theta(t) w(t) - \theta_0 w_0)\, dx\, dy\, dz \\ \quad +2\iint F_1 \partial_t u + F_2 \partial_t v + K F_3 \partial_t \theta \end{array} \tag{5.23}$$

Comme précédemment, on majore le second membre, en utilisant l'inégalité suivante :

$$xy \leq \frac{\varepsilon}{2} x^2 + \frac{1}{2\varepsilon} y^2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 \tag{5.24}$$

On obtient donc, quels que soient les réels strictement positifs ε_i, $2 \leq i \leq 5$:

$$\begin{array}{rcl} 2\iint \alpha v \partial_t u - \alpha u \partial_t v & \leq & \alpha \int_0^t (\varepsilon_2 \|\partial_t U(s)\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_2}\|U(s)\|^2)\, ds \\ -2\iint (K\gamma + \beta) w \partial_t \theta & \leq & (K\gamma + \beta)\int_0^t \varepsilon_3 \|\partial_t \theta(s)\|^2\, ds + \\ & & (K\gamma + \beta)\int_0^t \frac{a^2}{\varepsilon_3}(\|\partial_x u(s)\|^2 + \|\partial_y v(s)\|^2)\, ds \\ 2\int_\Omega (\theta(t) w(t) - \theta_0 w_0)\, dx\, dy\, dz & \leq & a^2 \varepsilon_4 (\|\partial_x u(t)\|^2 + \|\partial_y v(t)\|^2) + \frac{1}{\varepsilon_4}\|\theta(t)\|^2 \\ & & + \|\theta_0\|^2 + a^2\|\partial_x u_0\|^2 + a^2\|\partial_y v_0\|^2 \\ 2\iint F_1 \partial_t u + F_2 \partial_t v + K F_3 \partial_t \theta & \leq & \int_0^t (\frac{1}{\varepsilon_5}\|F(s)\|^2 + \varepsilon_5 \|\partial_t X(s)\|^2)\, ds \end{array} \tag{5.25}$$

On obtient ainsi l'inégalité suivante :

$$\begin{array}{rl} & (\nu - a^2\varepsilon_4)\|\nabla U(t)\|^2 + K\nu\|\nabla\theta(t)\|^2 - \frac{1}{\varepsilon_4}\|\theta(t)\|^2 \\ & + \int_0^t (2 - \alpha\varepsilon_2 - \varepsilon_5)\|\partial_t U(s)\|^2 + (2K - (K\gamma+\beta)\varepsilon_3 - K\varepsilon_5)\|\partial_t\theta(s)\|^2\, ds \\ \leq & (\nu + a^2)\|\nabla U_0\|^2 + K\nu\|\nabla\theta_0\|^2 + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon_5}\|F(s)\|^2\, ds + \|\theta_0\|^2 \\ & + (K\gamma+\beta)\int_0^t \frac{a^2}{\varepsilon_3}\|\nabla U(s)\|^2\, ds + \alpha\int_0^t \frac{1}{\varepsilon_2}\|U(s)\|^2\, ds \end{array} \tag{5.26}$$

Comme précédemment, on peut faire les même calculs pour les dérivées en x et y, et on obtient :

$$\begin{array}{rl} & (\nu - a^2\varepsilon_4)\|\nabla U(t)\|_{2,m}^2 + K\nu\|\nabla\theta(t)\|_{2,m}^2 - \frac{1}{\varepsilon_4}\|\theta(t)\|_{2,m}^2 \\ & + \int_0^t (2 - \alpha\varepsilon_2 - \varepsilon_5)\|\partial_t U(s)\|_{2,m}^2 + (2K - (K\gamma+\beta)\varepsilon_3 - K\varepsilon_5)\|\partial_t\theta(s)\|_{2,m}^2\, ds \\ \leq & (\nu + a^2)\|\nabla U_0\|_{2,m}^2 + K\nu\|\nabla\theta_0\|_{2,m}^2 + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon_5}\|F(s)\|_{2,m}^2\, ds + \|\theta_0\|_{2,m}^2 \\ & + (K\gamma+\beta)\int_0^t \frac{a^2}{\varepsilon_3}\|\nabla U(s)\|_{2,m}^2\, ds + \alpha\int_0^t \frac{1}{\varepsilon_2}\|U(s)\|_{2,m}^2\, ds \end{array} \tag{5.27}$$

On choisit les ε_i comme suit :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\alpha}, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{\gamma}, \quad \varepsilon_4 = \frac{\nu}{2a^2}, \quad \varepsilon_5 = \frac{1}{2} \tag{5.28}$$

et on obtient ainsi :

$$\begin{array}{rl} & \frac{\nu}{2}\|\nabla U(t)\|_{2,m}^2 + K\nu\|\nabla\theta(t)\|_{2,m}^2 - \frac{2a^2}{\nu}\|\theta(t)\|_{2,m}^2 \\ & + \int_0^t \frac{1}{2}\|\partial_t U(s)\|_{2,m}^2 + (\frac{K}{2} - \gamma\beta)\|\partial_t\theta(s)\|_{2,m}^2\, ds \\ \leq & (\nu + a^2)\|\nabla U_0\|_{2,m}^2 + K\nu\|\nabla\theta_0\|_{2,m}^2 + \int_0^t 2\|F(s)\|_{2,m}^2\, ds + \|\theta_0\|_{2,m}^2 \\ & + \int_0^t a^2\gamma(K\gamma+\beta)\|\nabla U(s)\|_{2,m}^2\, ds + \int_0^t \alpha^2\|U(s)\|_{2,m}^2\, ds \end{array} \tag{5.29}$$

En ajoutant l'équation (5.20) et l'équation (5.29) multipliée par $\frac{2}{\nu}$, on obtient :

$$\begin{array}{rl} & \|U(t)\|_{2,m}^2 + (K - \frac{4a^2}{\nu^2})\|\theta(t)\|_{2,m}^2 + \|\nabla U(t)\|_{2,m}^2 + 2K\|\nabla\theta(t)\|_{2,m}^2 \\ & + \int_0^t \frac{1}{\nu}\|\partial_t U(s)\|_{2,m}^2 + (\frac{K}{2} - \gamma\beta)\frac{2}{\nu}\|\partial_t\theta(s)\|_{2,m}^2\, ds \\ & + \int_0^t 2\nu\|\nabla U(s)\|_{2,m}^2 + 2\nu K\|\nabla\theta(s)\|_{2,m}^2\, ds \\ \leq & \|U_0\|_{2,m}^2 + (K + \frac{2}{\nu})\|\theta_0\|_{2,m}^2 + (2 + \frac{2a^2}{\nu})\|\nabla U_0\|_{2,m}^2 + 2K\|\nabla\theta_0\|_{2,m}^2 \\ & + \int_0^t (1 + \frac{4}{\nu})\|F(s)\|_{2,m}^2\, ds \\ & \int_0^t (1 + \frac{2\alpha^2}{\nu})\|U(s)\|_{2,m}^2\, ds + \int_0^t (K + |K\gamma - \beta|)\|\theta(s)\|_{2,m}^2\, ds \\ & + \int_0^t (\max(1, a^2|K\gamma - \beta|) + \frac{2\gamma a^2}{\nu}(K\gamma+\beta))\|\nabla U(s)\|_{2,m}^2\, ds \end{array} \tag{5.30}$$

Pour $K \geq 2\max(\frac{4a^2}{\nu^2}, 2\gamma\beta)$, pour tout T et pour tout $t \in [0,T]$ on a :

$$\begin{array}{r} \|X(t)\|_{2,m}^2 + \|\nabla X(t)\|_{2,m}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|\partial_t X(s)\|_{2,m}^2\, ds \\ \leq C_5 + C_1\int_0^t \|X(s)\|_{2,m}^2 + \|\nabla X(s)\|_{2,m}^2\, ds \end{array} \tag{5.31}$$

avec :

$$\begin{array}{rl} C_5 = & 2\|U_0\|_{2,m}^2 + (2K + \frac{4}{\nu})\|\theta_0\|_{2,m}^2 + (4 + \frac{4a^2}{\nu})\|\nabla U_0\|_{2,m}^2 + 4K\|\nabla\theta_0\|_{2,m}^2 \\ & + \int_0^T (2 + \frac{8}{\nu})\|F(s)\|_{2,m}^2\, ds \\ C_1 = & 2\max\left(1 + \frac{2\alpha^2}{\nu}, \frac{1+|\gamma - \beta/K|}{1+2\alpha^2/\nu}, \max(1, a^2|K\gamma - \beta|) + \frac{2\gamma a^2}{\nu}(K\gamma+\beta)\right) \end{array} \tag{5.32}$$

Par le lemme de Gronwall, on obtient donc :

$$C_5 + C_1 \int_0^t \|X(s)\|_{2,m}^2 + \|\nabla X(s)\|_{2,m}^2 \, ds \leq C_5 e^{C_1 t} \tag{5.33}$$

soit

$$\begin{array}{l} \|X(t)\|_{2,m}^2 + \|\nabla X(t)\|_{2,m}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|\partial_t X(s)\|_{2,m}^2 \, ds \\ \quad \leq e^{C_1 t}\big(C_2\|X_0\|_{2,m}^2 + C_3\|\nabla X_0\|_{2,m}^2 + C_4 \int_0^T \|F(s)\|_{2,m}^2 \, ds\big) \\ \quad \text{avec} \quad C_2 = 2 + \frac{4}{K\nu},\ C_3 = 4 + \frac{4a^2}{\nu} \text{ et } C_4 = 2 + \frac{8}{\nu} \end{array} \tag{5.34}$$

□

5.2.2 Estimation des termes non linéaires

On va maintenant estimer les termes non linéaires de l'équation (5.1). On a le résultat suivant :

Lemme 5.2 *Soient $m \geq 2$ entier, X_1 et X_2 dans $\mathcal{U}^{m+1}$. On définit*

$$\begin{array}{rcl} F_1 &=& (U_1.\nabla_2)u_2 + w_1\partial_z u_2 \\ F_2 &=& (U_1.\nabla_2)v_2 + w_1\partial_z v_2 \\ F_3 &=& (U_1.\nabla_2)\theta_2 + w_1\partial_z \theta_2 \end{array} \tag{5.35}$$

on a alors pour tout $i \in \{1,2,3\}$:

$$\|F_i\|_{2,m}^2 \quad \leq \quad C\ (\|X_1\|_{2,m} + a^2\|\nabla X_1\|_{2,m})\ \|\nabla X_1\|_{2,m}\ \|\nabla X_2\|_{2,m}^2 \tag{5.36}$$

où C est une constante (indépendante de a) de l'ordre de 1.
Si $X_1 = X_2$ alors on a pour tout $i \in \{1,2,3\}$:

$$\|F_i\|_{2,m}^2 \quad \leq \quad C_5\ \big(\|X_1\|_{2,m}^2 + \|\nabla X_1\|_{2,m}^2\big)^2 \tag{5.37}$$

où $C_5 = C_5(a)$ est une constante du type $C_5' + C_5'' a^2$ (avec C_5' et C_5'' constantes de l'ordre de 1).

Preuve. Regardons tout d'abord le terme $u_1\partial_x u_2$:

$$\begin{array}{rcl} \|u_1\partial_x u_2\|_{2,m}^2 &=& \int_{z=0}^a \|u_1(z)\partial_x u_2(z)\|_m^2 \, dz \\ &\leq& \int_{z=0}^a \|u_1(z)\|_m^2 \|\partial_x u_2(z)\|_m^2 \, dz \end{array} \tag{5.38}$$

car H_{xy}^m est une algèbre pour $m \geq 2$.
On estime maintenant $\sup_{z\in(0,a)} \|u_1(z)\|_m^2$. Pour cela on commence par écrire une estimation en dimension 1 pour $\varphi(z) \in H^1(0,a)$ avec $\varphi(0) = 0$:

$$\begin{array}{rcl} |\varphi(z)|^2 &=& \int_0^z \partial_z |\varphi(z')|^2 \, dz' \\ &=& \int_0^z 2\varphi(z')\partial_z\overline{\varphi}(z') \, dz' \\ &\leq& 2\big(\int_0^a |\varphi(z)|^2 \, dz \int_0^a |\partial_z\varphi(z)|^2 \, dz\big)^{1/2} \end{array} \tag{5.39}$$

De la même façon on montre une estimation semblable pour $\|u_1(z)\|_m^2$:

$$\|u_1(z)\|_m^2 \leq 2\|u_1\|_{2,m}\|\partial_z u_1\|_{2,m} \tag{5.40}$$

on a donc avec (5.38) et (5.40) :

$$\begin{array}{rcl} \|u_1\partial_x u_2\|_{2,m}^2 & \leq & 2\|u_1\|_{2,m}\|\partial_z u_1\|_{2,m}\int_{z=0}^a \|\partial_x u_2(z)\|_m^2\,dz \\ & \leq & 2\|X_1\|_{2,m}\|\nabla X_1\|_{2,m}\|\nabla X_2\|_{2,m}^2 \end{array} \tag{5.41}$$

Et si $u_1 = u_2$ on a :

$$\begin{array}{rcl} \|u_1\partial_x u_1\|_{2,m}^2 & \leq & 2\|X_1\|_{2,m}\|\nabla X_1\|_{2,m}^3 \\ & \leq & \big(\|X_1\|_{2,m}^2 + \|\nabla X_1\|_{2,m}^2\big)^2 \end{array} \tag{5.42}$$

On a les mêmes inégalités pour les termes $u_1\partial_x u_2$, $u_1\partial_x\theta_2$, $v_1\partial_y u_1$, $v_1\partial_y v_2$ et $v_1\partial_y\theta_2$.
Regardons maintenant le terme $w_1\partial_z u_2$. Comme (5.38), on a :

$$\|w_1\partial_z u_2\|_{2,m}^2 \leq \int_{z=0}^a \|w_1(z)\|_m^2\|\partial_z u_2(z)\|_m^2\,dz \tag{5.43}$$

on a aussi, comme (5.40) :

$$\|w_1(z)\|_m^2 \leq 2\|w_1\|_{2,m}\|\partial_z w_1\|_{2,m} \tag{5.44}$$

d'où :

$$\begin{array}{rcl} \|w_1\partial_z u_2\|_{2,m}^2 & \leq & 2\|w_1\|_{2,m}\|\partial_z w_1\|_{2,m}\|\partial_z u_2\|_{2,m}^2 \\ & \leq & C\|w_1\|_{2,m}\|\nabla X_1\|_{2,m}\|\nabla X_2\|_{2,m}^2 \end{array} \tag{5.45}$$

Ensuite on majore $\|w_1\|_{2,m}$ comme dans (5.17) :

$$\begin{array}{rcl} \|w_1\|_{2,m}^2 & = & \sum_{|\alpha|\leq m}\int_0^a |\partial_{xy}^\alpha w_1|^2\,dz \\ & = & \sum_{|\alpha|\leq m}\int_0^a |\partial_{xy}^\alpha \int_0^z \partial_x u_1(z') + \partial_y v_1(z')\,dz'|^2\,dz \\ & \leq & \sum_{|\alpha|\leq m}\int_0^a z\,dz\int_0^a 2|\partial_{xy}^\alpha\partial_x u_1(z)|^2 + 2|\partial_{xy}^\alpha\partial_y v_1(z)|^2\,dz \\ & \leq & a^2\big(\|\partial_x u_1\|_{2,m}^2 + \|\partial_y v_1\|_{2,m}^2\big) \\ & \leq & a^2\|\nabla X_1\|_{2,m}^2 \end{array} \tag{5.46}$$

d'où finalement

$$\|w_1\partial_z u_2\|_{2,m}^2 \leq Ca^2\|\nabla X_1\|_{2,m}^2\|\nabla X_2\|_{2,m}^2 \tag{5.47}$$

et si $u1 = u_2$ on a

$$\|w_1\partial_z u_1\|_{2,m}^2 \leq Ca^2\|\nabla X_1\|_{2,m}^4 \leq Ca^2\big(\|X_1\|_{2,m}^2 + \|\nabla X_1\|_{2,m}^2\big)^2 \tag{5.48}$$

On a les mêmes inégalités pour les termes $w_1\partial_z v_2$ et $w_1\partial_z\theta_2$, ce qui achève la preuve.
□

5.2.3 Fin de la preuve

On va maintenant construire une solution de l'équation non linéaire (5.1). Pour cela, on commence par introduire quelques notations.
Soit L l'opérateur suivant :

$$L(X,p_0) = \left[\begin{array}{l} \partial_t u - \Delta u - \alpha v + \partial_x p_0 + \int_0^z \beta\partial_x\theta\,dz \\ \partial_t v - \Delta v + \alpha u + \partial_y p_0 + \int_0^z \beta\partial_y\theta\,dz \\ \partial_t\theta - \Delta\theta + \gamma w \end{array}\right] \tag{5.49}$$

Soit $F(X_1, X_2)$ défini par

$$F(X_1, X_2) = \begin{bmatrix} -(U_1.\nabla_2)u_2 - w_1\partial_z u_2 \\ -(U_1.\nabla_2)v_2 - w_1\partial_z v_2 \\ -(U_1.\nabla_2)\theta_2 - w_1\partial_z \theta_2 \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

Soit N, carré d'une norme, défini par :

$$N(X(t)) = \|X(t)\|^2_{\mathcal{U}^{m+1}} + \int_0^t \|\partial_t X(s)\|^2_{2,m}\, ds \tag{5.51}$$

On se donne enfin une condition initiale $X_0 \in \mathcal{U}^{m+1}$. On définit la suite (X^n, p_0^n) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &X^0(t,x,y,z) = X_0(x,y,z), \quad \forall (t,x,y,z) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ &\begin{cases} L(X^{n+1}, p_0^{n+1}) = F(X^n, X^n) & \text{pour } n \geq 0 \\ X^{n+1}|_{t=0} = X_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{5.52}$$

Vérifions par récurrence que la suite (X^n, p_0^n) est bien définie pour tout t et que $N(X^n(t))$ est finie pour tout n et tout t. Notons $N^0 = N(X^0) = \|X_0\|^2_{\mathcal{U}^{m+1}}$. Supposons que X^n est bien défini et de norme $N^{1/2}$ finie pour tout t. Grâce aux lemmes 5.1 et 5.2, on obtient l'existence et l'unicité de X^{n+1} et on a de plus

$$\begin{aligned} N(X^{n+1}(t)) &\leq C_0 e^{C_1 t}(N^0 + \textstyle\int_0^t \|F(X^n, X^n)\|^2_{2,m}\, ds) \\ &\leq C_0 e^{C_1 t}(N^0 + C_5 \textstyle\int_0^t \|X^n\|^4_{\mathcal{U}^{m+1}}\, ds) \\ &\leq C_0 e^{C_1 t}(N^0 + C_5 t \sup_{s\in[0,t]} N(X^n(s))^2) \\ &\leq C_6 e^{C_1 t}(N^0 + t \sup_{s\in[0,t]} N(X^n(s))^2) \\ &< \infty \end{aligned} \tag{5.53}$$

Soit maintenant $t^* \leq (4C_6^2 e^{2C_1 t^*} N^0)^{-1}$, on a alors par récurrence

$$\sup_{t\in[0,t^*]} N(X^n(t)) \leq 2C_6 e^{C_1 t^*} N^0 \tag{5.54}$$

En effet, quitte à augmenter C_6, on a $N_0 \leq 2C_6 e^{C_1 t^*} N^0$ puis par récurrence :

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,t^*]} N(X^{n+1}(t)) &\leq C_6 e^{C_1 t^*}(N^0 + t^* \sup_{s\in[0,t]} N(X^n(s))^2) \\ &\leq C_6 e^{C_1 t^*}(N^0 + t^*(2C_6 e^{C_1 t^*} N^0)^2) \\ &\leq 2C_6 e^{C_1 t^*} N^0 \end{aligned} \tag{5.55}$$

La suite (X^n) est donc bornée pour N uniformément en $t \in [0, t^*]$.
Pour passer à la limite, nous regardons l'équation vérifiée par $X^{n+1} - X^n$:

$$L(X^{n+1} - X^n) = F(X^n, X^n) - F(X^{n-1}, X^{n-1}), \quad X^{n+1} - X^n|_{t=0} = 0 \tag{5.56}$$

D'après les lemmes 5.1 et 5.2 il vient

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,t^*]} N(X^{n+1}-X^n) &\leq C\int_0^{t^*} \|F(X^n,X^n)-F(X^{n-1},X^{n-1})\|^2_{2,m}\,dt \\
&= C\int_0^{t^*} \|\tfrac{1}{2}F(X^n-X^{n-1},X^n+X^{n-1}) \\
&\qquad +\tfrac{1}{2}F(X^n+X^{n-1},X^n-X^{n-1})\|^2_{2,m}\,dt \\
&\leq C\int_0^{t^*} N(X^n-X^{n-1})N(X^n+X^{n-1})\,dt \\
&\leq C\int_0^{t^*} N(X^n-X^{n-1})(N(X^n)+N(X^{n-1}))\,dt \\
&\leq CN^0\int_0^{t^*} N(X^n-X^{n-1})\,dt \\
&\leq CN^0t^*\sup_{t\in[0,t^*]} N(X^n-X^{n-1}) \\
&\leq (CN^0t^*)^n\sup_{t\in[0,t^*]} N(X^1-X^0)
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Quitte à réduire encore t^* on peut supposer que $CN^0t^*<1$ et la suite (X^n) est donc de Cauchy pour N. Elle converge donc vers X fortement dans $\mathcal{C}([0,t^*],\mathcal{U}^{m+1})$; $\partial_t X^n$ converge vers $\partial_t X$ fortement dans $L^2(0,t^*;L^2_zH^m_{xy})$ et on a bien l'inégalité (5.6). On peut alors, comme dans le chapitre 3, passer à la limite dans la forme variationnelle de l'équation puis faire réapparaître une pression, ce qui achève la preuve de la proposition 5.1.
□

5.3 Existence d'un contrôle optimal

La solution du problème 5.1 est donnée par le théorème suivant :

Théorème 5.1 *Il existe un contrôle optimal $X_0^*\in\mathcal{U}^{m+1}$ solution du problème de minimisation*

$$\mathcal{J}(X_0^*)=\inf_{X_0\in\mathcal{U}^{m+1}}\mathcal{J}(X_0) \tag{5.58}$$

La preuve de se résultat se fait par la méthode des suites minimisantes, en deux étapes : d'abord nous montrons la convergence du terme d'observation, ensuite nous passons à la limite dans l'équation d'état. Ces deux étapes font l'objet des deux paragraphes suivants.

5.3.1 Convergence du terme d'observation

Soit (X_0^n) une suite minimisante pour $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J}(X_0^n)\to\inf_{X_0\in\mathcal{U}^{m+1}}\mathcal{J}(X_0)=\inf_{X_0\in\mathcal{U}^{m+1}}\mathcal{J}^o(X_0)+\|X_0\|^2_{\mathcal{U}^{m+1}} \tag{5.59}$$

Alors (X_0^n) est une suite bornée dans $\mathcal{U}^{m+1}$ et dans $(\mathcal{H}^{m+1})^3$, et tend vers une limite X_0^* faiblement dans $\mathcal{U}^{m+1}$ et dans $(\mathcal{H}^{m+1})^3$. Le point clé de la preuve est de montrer la convergence du terme d'observation $\mathcal{J}^o(X_0^n)=\frac{1}{2}\|\xi^n(t_1)-d\|^2$ vers $\frac{1}{2}\|\xi^*(t_1)-d\|^2$ où ξ^n et ξ^* sont les trajectoires associées respectivement à X_0^n et X_0^*. En effet, on aura alors convergence forte de X_0^n vers X_0^* dans $\mathcal{U}^{m+1}$ et dans $(\mathcal{H}^{m+1})^3$ et on vérifiera aisément que X_0^* est bien un minimum de $\mathcal{J}$.
Commençons donc par montrer la convergence du terme d'observation. Soit X^n la solution des équations (5.1) et (5.2) associée à X_0^n. Fixons un t^* donné par la proposition 5.1 (t^* dépend de la norme de X_0 et la norme des X_0^n reste bornée, on peut donc trouver

un t^* convenant pour tous les X^n). Cette proposition nous dit que la suite (X^n) est bornée uniformément en n dans $\mathcal{C}([0,t^*],(\mathcal{H}^{m+1})^3)$ et que la suite $\partial_t X^n$ est uniformément bornée dans $L^2(0,t^*;(L^2_z H^m_{xy})^3)$. On montre alors que (X^n) est uniformément bornée dans $\mathcal{C}^{1/2}([0,t^*],(L^2_z H^m_{xy})^3)$:

$$\begin{array}{rcl} \|X^n(t_2)-X^n(t_1)\|_{2,m} & = & \|\int_{t_1}^{t_2}\partial_t X^n\|_{2,m} \\ & \leq & \sqrt{t_2-t_1}(\int_{t_1}^{t_2}\|\partial_t X^n\|^2_{2,m})^{1/2} \\ & \leq & \sqrt{t_2-t_1}\,C \end{array} \tag{5.60}$$

où C est indépendant de n et des t_i. On a ainsi :

$$\begin{array}{rlll} & (X^n) & \text{est bornée uniformément dans} & \mathcal{C}([0,t^*],(\mathcal{H}^{m+1})^3) \\ & (X^n) & \text{est bornée uniformément dans} & \mathcal{C}^{1/2}([0,t^*],(L^2_z H^m_{xy})^3) \\ \Rightarrow & (X^n) & \text{est bornée uniformément dans} & \mathcal{C}^{\theta/2}([0,t^*],([\mathcal{H}^{m+1},L^2_z H^m_{xy}]_\theta)^3) \end{array} \tag{5.61}$$

pour tout $\theta\in[0,1]$.
On va montrer maintenant qu'il existe $\theta>0$ petit tel que, pour $\delta>0$ assez petit, l'espace $[\mathcal{H}^{m+1},L^2_z H^m_{xy}]_\theta$ est compact dans l'espace $\mathcal{L}^\delta$ suivant :

$$\mathcal{L}^\delta=\left\{u\in H^{1/2+\delta}_z H^{2+\delta}_{xy},\ \text{ périodique en } x,y,\ u=0 \text{ sur } \{z=0,z=a\}\times\mathbb{T}^2\right\} \tag{5.62}$$

Pour $\delta>0$, $\mathcal{L}^\delta$ est contenu dans l'espace des fonctions continues en z et lipschitziennes en (x,y).
Pour cela, on va décrire l'interpolé Hilbertien $[\mathcal{H}^{m+1},L^2_z H^m_{xy}]_\theta$. Comme dans la partie précédente, on va décrire ces espaces grâce aux séries de Fourier pour $(x,y)\in\mathbb{T}^2$ et aux séries de sinus en $z\in(0,a)$. Soit $\zeta=(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ les variables de Fourier associées aux séries de Fourier sur le tore, et $\kappa\in\mathbb{N}^*$ la variable de Fourier associée aux séries de sinus sur $(0,a)$.
On a alors

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x,y,z)\in L^2_z H^m_{xy} & \Leftrightarrow & W_1(\zeta,\kappa)\,\hat\varphi(\zeta,\kappa)\in\ell^2(\mathbb{Z}^2\times\mathbb{N}^*) \\ \varphi(x,y,z)\in\mathcal{H}^{m+1} & \Leftrightarrow & W_2(\zeta,\kappa)\,\hat\varphi(\zeta,\kappa)\in\ell^2(\mathbb{Z}^2\times\mathbb{N}^*) \end{array} \tag{5.63}$$

où W_1 et W_2 sont les poids suivants :

$$\begin{array}{rcl} W_1(\zeta,\kappa) & = & (1+|\zeta|^2)^{\frac{m}{2}} \\ W_2(\zeta,\kappa) & = & (1+|\zeta|^2)^{\frac{m+1}{2}}+(1+|\zeta|^2)^{\frac{m}{2}}(1+|\kappa|^2)^{\frac12} \end{array} \tag{5.64}$$

Pour $\theta>0$ assez petit, on a :

$$\varphi\in[\mathcal{H}^{m+1},L^2_z H^m_{xy}]_\theta \quad\Leftrightarrow\quad W_1^\theta W_2^{1-\theta}\hat\varphi\in\ell^2(\mathbb{Z}^2\times\mathbb{N}^*) \tag{5.65}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} W_1^\theta\,W_2^{1-\theta} & = & (1+|\zeta|^2)^{\frac{m\theta}{2}}((1+|\zeta|^2)^{\frac{m+1}{2}}+(1+|\zeta|^2)^{\frac{m}{2}}(1+|\kappa|^2)^{\frac12})^{(1-\theta)} \\ & = & (1+|\zeta|^2)^{\frac{m}{2}}((1+|\zeta|^2)^{\frac12}+(1+|\kappa|^2)^{\frac12})^{(1-\theta)} \end{array} \tag{5.66}$$

Pour $\delta>0$ petit, on a aussi :

$$\varphi\in\mathcal{L}^\delta \quad\Leftrightarrow\quad W_\delta(\zeta,\kappa)\,\hat\varphi(\zeta,\kappa)\in\ell^2(\mathbb{Z}^2\times\mathbb{N}^*) \tag{5.67}$$

avec

$$W_\delta(\zeta,\kappa) \quad = \quad (1+|\zeta|^2)^{\frac{2+\delta}{2}}(1+|\kappa|^2)^{\frac{\delta+1/2}{2}} \tag{5.68}$$

Pour avoir l'injection compacte de $[\mathcal{H}^{m+1}, L^2_z H^m_{xy}]_\theta$ (pour $\theta>0$ petit) dans $\mathcal{L}^\delta$ (pour $\delta>0$ petit) il suffit alors de trouver δ et θ tels que :

$$\lim_{|\zeta|,|\kappa|\to+\infty} \frac{W_\delta(\zeta,\kappa)}{W_1(\zeta,\kappa)^\theta\, W_2(\zeta,\kappa)^{1-\theta}} = 0 \tag{5.69}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{W_\delta}{W_1^\theta\, W_2^{1-\theta}} &= \frac{(1+|\zeta|^2)^{\frac{2+\delta}{2}}(1+|\kappa|^2)^{\frac{\delta+1/2}{2}}}{(1+|\zeta|^2)^{\frac{m}{2}}((1+|\zeta|^2)^{\frac12}+(1+|\kappa|^2)^{\frac12})^{(1-\theta)}} \\ &\le \frac{(1+|\zeta|^2)^{\frac{\delta}{2}}(1+|\kappa|^2)^{\frac{\delta+1/2}{2}}}{((1+|\zeta|^2)^{\frac12}+(1+|\kappa|^2)^{\frac12})^{(1-\theta)}} \\ &\le \frac{\frac13(1+|\zeta|^2)^{\frac{3\delta}{2}}+\frac23(1+|\kappa|^2)^{\frac{3\delta+3/2}{4}}}{((1+|\zeta|^2)^{\frac12}+(1+|\kappa|^2)^{\frac12})^{(1-\theta)}} \end{aligned} \tag{5.70}$$

en utilisant $m\ge 2$ et $ab\le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ pour a,b positifs avec $p=3$, $q=\frac32$. Puis on obtient :

$$\frac{W_\delta}{W_1^\theta\, W_2^{1-\theta}} \quad \le \quad (1+|\zeta|^2)^{\frac{3\delta}{2}-\frac{1-\theta}{2}} + (1+|\kappa|^2)^{\frac{3\delta+3/2}{4}-\frac{1-\theta}{2}} \tag{5.71}$$

Pour θ et δ strictement positifs et assez petits, on a

$$\frac{3\delta}{2}-\frac{1-\theta}{2}\simeq -\frac12 \quad \text{et} \quad \frac{3\delta+3/2}{4}-\frac{1-\theta}{2}\simeq -\frac18 \tag{5.72}$$

On peut donc trouver θ et δ strictement positifs et assez petits tels que le terme de droite de (5.71) tend vers 0. On a finalement montré que (X^n) est uniformément bornée dans $\mathcal{C}^{\theta/2}([0,t^*],([\mathcal{H}^{m+1},L^2_zH^m_{xy}]_\theta)^3)$ où $[\mathcal{H}^{m+1},L^2_zH^m_{xy}]_\theta$ est compact dans $\mathcal{L}^\delta$. Donc (X^n) converge fortement vers X^* dans $\mathcal{C}([0,t^*],(\mathcal{L}^\delta)^3)$. Et finalement on a bien

$$\mathcal{J}^o(X^n_0)=\frac12\|\xi^n(t_1)-d\|^2 \quad \to \quad \frac12\|\xi^*(t_1)-d\|^2=\mathcal{J}^o(X^*_0) \tag{5.73}$$

On montre alors que (X^n_0) converge fortement vers X^*_0 dans $\mathcal{U}^{m+1}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(X^*_0) &= \|X^*_0\|^2_{\mathcal{U}^{m+1}}+\mathcal{J}^o(X^*_0) \\ &\le \underline{\lim}\|X^n_0\|^2_{\mathcal{U}^{m+1}}+\lim\mathcal{J}^o(X^n_0) \\ &\le \inf_{X_0\in\mathcal{U}^{m+1}}\mathcal{J}(X_0) \end{aligned} \tag{5.74}$$

donc $\mathcal{J}(X^*_0)=\inf_{X_0\in\mathcal{U}^{m+1}}\mathcal{J}(X_0)$, puis $\|X^n_0\|_{\mathcal{U}^{m+1}}\to\|X^*_0\|_{\mathcal{U}^{m+1}}$, donc (X^n_0) converge fortement vers X^*_0 dans $\mathcal{U}^{m+1}$, et X^*_0 est un minimum de $\mathcal{J}$.
La convergence forte de (X^n) dans $\mathcal{C}([0,t^*],(\mathcal{L}^\delta)^3)$ nous donne aussi l'égalité

$$X^*(t=0)=X^*_0 \tag{5.75}$$

5.3.2 Passage à la limite dans l'équation d'état

On va maintenant vérifier que la limite X^* vérifie l'équation (5.1) et les conditions aux limites (5.2). Pour cela, on commence par passer à la limite dans la forme faible de l'équation. Soit $X' = (u', v', \theta') \in (\mathcal{D}((0,t^*)\times\Omega))^3$ une fonction test vérifiant les conditions (5.2). On va passer à la limite dans les 5 termes suivants :

$$\begin{array}{rcl} T_1 &=& \iint \partial_t u^n u' + \partial_t v^n v' + K\partial_t\theta^n\theta' \\ T_2 &=& \iint -\nu\Delta u^n u' - \nu\Delta v^n v' - \nu K\Delta\theta^n\theta' \\ T_3 &=& \iint -\alpha v^n u' + \alpha u^n v' \\ T_4 &=& \iint -\beta\theta^n w' + K\gamma w^n\theta' \\ T_5 &=& \iint (U^n.\nabla_2 u^n + w^n\partial_z u^n)u' + (U^n.\nabla_2 v^n + w^n\partial_z v^n)v' \\ && \quad +K(U^n.\nabla_2\theta^n + w^n\partial_z\theta^n)\theta' \end{array} \tag{5.76}$$

Terme 1. On sait que $(\partial_t X^n)$ est uniformément bornée dans $L^2(0,t^*;(L^2_z H^m_{xy})^3)$, donc faiblement convergente dans $L^2(0,t^*;(L^2_z H^m_{xy})^3)$. On montre aisément que sa limite est $\partial_t X^*$, par exemple pour $\partial_t u^n$:

$$\iint \partial_t u^n u' = -\iint u^n\partial_t u' \;\to\; -\iint u^*\partial_t u' = \iint \partial_t u^* u' \tag{5.77}$$

On obtient alors pour le premier terme :

$$T_1 \to \iint \partial_t u^* u' + \partial_t v^* v' + K\partial_t\theta^*\theta' \tag{5.78}$$

Terme 2. On intègre par parties en espace pour obtenir :

$$\iint -\nu\Delta u^n u' = -\iint \nu u^n\Delta u' \tag{5.79}$$

on passe alors à la limite :

$$T_2 \to -\iint \nu u^*\Delta u' - \iint \nu v^*\Delta v' - K\iint \nu\theta^*\Delta\theta' \tag{5.80}$$

Terme 3. On a sans difficulté

$$T_3 \to \iint -\alpha v^* u' + \alpha u^* v' \tag{5.81}$$

Terme 4. Le premier terme ne pose pas de difficulté. Vérifions le deuxième terme :

$$\begin{array}{rcl} \iint w^n\theta' &=& -\iint \big[\int_0^z (\partial_x u^n(z') + \partial_y v^n(z'))\,dz'\big]\theta' \\ &=& \int_0^{t^*}\int_{xy}\int_{z'=0}^a (\partial_x u^n(z') + \partial_y v^n(z'))\big[\int_{z=z'}^a \theta'(z)\,dz\big]\,dz' \\ &=& \iint (\partial_x u^n + \partial_y v^n)\big[\int_{z'=z}^a \theta'(z')\,dz'\big] \end{array} \tag{5.82}$$

grâce à l'égalité de Fubini. Comme (X^n) converge fortement dans $L^2(0,t^*;(L^2_z H^m_{xy})^3)$ avec $m \geq 2$, on peut passer à la limite pour obtenir, en réutilisant Fubini puis en posant $w^* = \int_0^z (\partial_x u^*(z') + \partial_y v^*(z'))\,dz'$:

$$T_4 \to -\beta\iint \theta^* w' - K\gamma\iint w^*\theta' \tag{5.83}$$

Terme 5. Regardons le terme suivant (les autres se traiteront de la même façon) :

$$\begin{array}{rcccc} \iint (w^n\partial_z u^n - w^*\partial_z u^*)u' & = & \iint w^*(\partial_z u^n - \partial_z u^*)u' & + & \iint (w^n - w^*)\partial_z u^n u' \\ & = & T_{5,1} & + & T_{5,2} \end{array} \tag{5.84}$$

On sait que $\partial_z u^n - \partial_z u^*$ tend faiblement vers 0 dans $L^2(0,t^*;L^2_z L^2_{xy})$. On a aussi $w^* \in L^2(0,t^*;L^2_z H^2_{xy})$ car $X^* \in L^2(0,t^*;\mathcal{U}^{m+1})$. On va montrer que w^*u' est dans $L^2(0,t^*;L^2_z L^2_{xy})$ comme dans la preuve du lemme 5.2 :

$$\begin{array}{rcl} \iint |w^*u'|^2 & \leq & \int_t \int_z \|w^*u'\|^2_{H^2_{xy}} \\ & \leq & \int_t \int_z \|w^*\|^2_{H^2_{xy}} \|u'\|^2_{H^2_{xy}} \\ & \leq & \int_t \|u'\|_{L^2_z H^2_{xy}} \|\partial_z u'\|_{L^2_z H^2_{xy}} \|w^*\|^2_{L^2_z H^2_{xy}} \\ & \leq & \sup_t \left[\|u'\|_{L^2_z H^2_{xy}} \|\partial_z u'\|_{L^2_z H^2_{xy}} \right] \|w^*\|^2_{L^2_t L^2_z H^2_{xy}} \\ & < & \infty \end{array} \tag{5.85}$$

Le terme $T_{5,1}$ tend donc vers 0.
Voyons le terme $T_{5,2}$:

$$\begin{array}{rcl} |\iint (w^n - w^*)\partial_z u^n u'|^2 & \leq & \|w^n - w^*\|^2_{L^2((0,t^*)\times\Omega)} \|\partial_z u^n u'\|^2_{L^2((0,t^*)\times\Omega)} \\ & \leq & C\|X^n - X^*\|^2_{L^2(0,t^*;L^2_z H^1_{xy})} \int_t \int_z \|\partial_z u^n\|^2_{H^2_{xy}} \|u'\|^2_{H^2_{xy}} \\ & \leq & C\|X^n - X^*\|^2_{L^2(0,t^*;L^2_z H^1_{xy})} \|\partial_z u^n\|^2_{L^2(0,t^*;L^2_z H^2_{xy})} \\ & \leq & C\|X^n - X^*\|^2_{L^2(0,t^*;L^2_z H^1_{xy})} \|X^n\|^2_{L^2(0,t^*;\mathcal{U}^{m+1})} \\ & \leq & C\|X^n - X^*\|^2_{L^2(0,t^*;L^2_z H^1_{xy})} \end{array} \tag{5.86}$$

et $T_{5,2}$ tend aussi vers 0. Finalement, on a convergence du terme 5 vers la limite attendue :

$$\begin{array}{rcl} T_5 \rightarrow & \iint (U^*.\nabla_2 u^* + w^*\partial_z u^*)u' + (U^*.\nabla_2 v^* + w^*\partial_z v^*)v' \\ & +K(U^*.\nabla_2\theta^* + w^*\partial_z\theta^*)\theta' \end{array} \tag{5.87}$$

La limite X^* vérifie donc l'équation suivante, pour tout $X' \in (\mathcal{D}((0,t^*)\times\Omega))^3$ vérifiant (5.2) :

$$\begin{array}{rl} 0 = & \iint \left(\partial_t u^* u' + \partial_t v^* v' + \partial_t \theta^* \theta'\right) \\ & - \iint (\nu u^* \Delta u' + \nu v^* \Delta v' + K\nu\theta^* \Delta\theta') \\ & + \iint (-\alpha v^* u' + \alpha u^* v') \\ & + \iint (-\beta\theta^* w' - K\gamma\left[\int_0^z (\partial_x u^*(z') + \partial_y v^*(z'))\, dz'\right]\theta') \\ & - \iint \Big((U^*.\nabla_2 u^* + w^*\partial_z u^*)u' + (U^*.\nabla_2 v^* + w^*\partial_z v^*)v' \\ & \quad +K(U^*.\nabla_2\theta^* + w^*\partial_z\theta^*)\theta' \Big) \end{array} \tag{5.88}$$

On vérifie maintenant que ceci définit une forme linéaire continue sur $L^2(0,t^*;(H^1_0(\Omega))^3$. Pour les termes faisant intervenir linéairement X^* et ses dérivées, c'est évident. Il reste à voir les termes non linéaires en X^*. Posons

$$\phi(u') = \iint (u^*\partial_x u^* + w^*\partial_z u^*)u' \tag{5.89}$$

et vérifions que ϕ est continue sur $L^2(0,t^*;L^2(\Omega))$ donc a fortiori sur $L^2(0,t^*;H_0^1(\Omega))$. On a $X^* \in \mathcal{C}(0,t^*,\mathcal{U}^{m+1})$ donc toutes les dérivées en espace de u^* sont dans $\mathcal{C}(0,t^*,L_z^2H_{xy}^2)$, ainsi que w^* et $\partial_z w^*$ et on a, en procédant comme dans la preuve du lemme 5.2 :

$$\begin{aligned}
\iint |u^*\partial_x u^* + w^*\partial_z u^*|^2 &= \int_{t,z} \|u^*\partial_x u^* + w^*\partial_z u^*\|^2_{L^2_{xy}} \\
&\leq C\int_{t,z} \|u^*\partial_x u^* + w^*\partial_z u^*\|^2_{H^2_{xy}} \\
&\leq C\int_{t,z} \|u^*\|^2_{H^2_{xy}}\|\partial_x u^*\|^2_{H^2_{xy}} + \|w^*\|^2_{H^2_{xy}}\|\partial_z u^*\|^2_{H^2_{xy}} \\
&\leq C\int_t \|u^*\|_{L^2_zH^2_{xy}}\|\partial_z u^*\|_{L^2_zH^2_{xy}}\|\partial_x u^*\|^2_{H^2_{xy}} \\
&\quad + C\int_t \|w^*\|_{L^2H^2_{xy}}\|\partial_z w^*\|_{L^2H^2_{xy}}\|\partial_z u^*\|^2_{H^2_{xy}} \\
&\leq C\sup_t \|X^*(t)\|^4_{\mathcal{U}^{m+1}}
\end{aligned} \tag{5.90}$$

Donc ϕ est une forme linéaire continue sur $L^2(0,t^*;H_0^1(\Omega))$. On traite de la même façon tous les autres termes non linéaires en X^*.
Finalement, la formule (5.88) définit une forme linéaire continue sur $L^2(0,t^*;H_0^1(\Omega))^3$ et nulle sur les éléments de $L^2(0,t^*;(H_0^1(\Omega))^3$ vérifiant les conditions aux limites (5.2). Comme dans la proposition 3.10 du chapitre 3, on réintroduit le terme de pression : il existe $p^* \in \mathcal{D}'(0,t^*,L^2(\Omega))$ tel que (X^*,p^*) vérifie les équations primitives (5.1) et les conditions aux limites (5.2).
□

5.4 Obtention formelle des équations primitives adjointes

Il nous semble intéressant d'écrire les équations de l'état adjoint associé au problème 5.1, même si la preuve du théorème 5.1 ne les utilise pas. En effet, la mise en œuvre numérique utilise abondamment les équations et opérateurs adjoints et il est instructif d'écrire, au moins formellement, leur version continue.
Pour cela on commence par écrire la forme faible des équations primitives (5.1) puis on obtient l'état adjoint en dérivant le Lagrangien associé au problème 5.1.

5.4.1 Lagrangien associé au problème de contrôle optimal

Pour écrire le Lagrangien associé au problème 5.1, on commence par écrire la forme faible des équations primtives (5.1,5.2). Pour cela, on se donne une fonction test (u',v',w',θ') régulière vérifiant les mêmes conditions aux limites et de divergence nulle que (u,v,w,θ), on multiplie les équations (5.1) par $(u',v',w',\frac{\beta}{\gamma}\theta')$ et on intègre sur Ω. En intégrant par parties et en utilisant les conditions sus-citées, on obtient

$$\begin{aligned}
0 = \quad & \int_\Omega (u'\partial_t u + v'\partial_t v + \tfrac{\beta}{\gamma}\theta'\partial_t\theta) + \int_\Omega \nu(\nabla u.\nabla u' + \nabla v.\nabla v' + \tfrac{\beta}{\gamma}\nabla\theta.\nabla\theta') \\
& + \int_\Omega \beta(w\theta' - \theta w') + \int_\Omega \alpha(uv' - vu') - \int_\Omega (U.\nabla_2 + w\partial_z)X'.X
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^o + \mathcal{L}^b + \mathcal{L}^{PE} \tag{5.92}$$

• $\mathcal{L}^o$ est le terme d'observation :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^o &= \mathcal{L}^o(u,v) \\
&= \mathcal{J}^o(u,v) \\
&= \tfrac{1}{2}\|\xi(t_1) - d\|^2
\end{aligned} \tag{5.93}$$

• $\mathcal{L}^b$ est le terme de régularisation :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^b &= \mathcal{L}^b(u_0, v_0, \theta_0) \\ &= \mathcal{J}^b(u_0, v_0, \theta_0) \\ &= \tfrac{\omega}{2}\|X_0\|^2_{\mathcal{U}^{m+1}} \end{aligned} \tag{5.94}$$

• $\mathcal{L}^{PE}$ est le terme associé aux équations primitives via l'intégration sur $(0,T)$ de la forme faible, qui se décompose lui-même en trois termes : le terme $\mathcal{L}^t$ pour la dérivée en temps, le terme non-linéaire $\mathcal{L}^{nl}$ et enfin le terme $\mathcal{L}^P$ associé aux équations primitives linéaires stationnaires :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{PE} &= \mathcal{L}^{PE}((u,v,w,\theta),(u',v',w',\theta')) \\ &= \mathcal{L}^t + \mathcal{L}^P + \mathcal{L}^{nl} \\ \mathcal{L}^t &= \int_0^T \int_\Omega (u'\partial_t u + v'\partial_t v + \tfrac{\beta}{\gamma}\theta'\partial_t\theta) \\ &= -\int_0^T \int_\Omega (\partial_t u' u + \partial_t v' v + \tfrac{\beta}{\gamma}\partial_t\theta'\theta) \\ &\quad + \int_\Omega (u(T)u'(T) + v(T)v'(T) + \tfrac{\beta}{\gamma}\theta(T)\theta'(T)) \\ &\quad + \int_\Omega (u_0 u'(0) + v_0 v'(0) + \tfrac{\beta}{\gamma}\theta_0\theta'(0)) \\ \mathcal{L}^{nl} &= -\int_0^T \int_\Omega (U.\nabla_2 + w\partial_z)X'.X \\ \mathcal{L}^P &= \int_0^T \int_\Omega \nu(\nabla u.\nabla u' + \nabla v.\nabla v' + \tfrac{\beta}{\gamma}\nabla\theta.\nabla\theta') \\ &\quad + \int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \beta(w\theta' - \theta w') + \int_0^T \int_\Omega \alpha(uv' - vu') \end{aligned} \tag{5.95}$$

5.4.2 Equations primitives adjointes

Pour obtenir les équations adjointes, on dérive (formellement) le Lagrangien par rapport aux variables d'état (u,v,w,θ). Pour cela on forme la différence $\mathcal{L}(\phi+\widetilde{\phi}) - \mathcal{L}(\phi)$ pour chaque variable $\phi \in \{u,v,w,\theta\}$ et pour chaque terme du Lagrangien.

• Terme $\mathcal{L}^t$:

$$\mathcal{L}^t(u+\widetilde{u},v,\theta) - \mathcal{L}^t(u,v,\theta) = -\int_0^T \int_\Omega \widetilde{u}\partial_t u' + \int_\Omega \widetilde{u}(T)u'(T) \tag{5.96}$$

et de même pour v et θ.

• Terme $\mathcal{L}^{nl}$, au premier ordre :

$$\mathcal{L}^{nl}(u+\widetilde{u}) - \mathcal{L}^{nl}(u) \simeq -\int_0^T \int_\Omega \widetilde{u}\partial_x X'.X - \int_0^T \int_\Omega (U.\nabla_2 + w\partial_z)u'\widetilde{u} \tag{5.97}$$

et de même pour v. Pour w et θ le terme est linéaire et on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{nl}(w+\widetilde{w}) - \mathcal{L}^{nl}(w) &= -\int_0^T \int_\Omega \widetilde{w}\partial_z X'.X \\ \mathcal{L}^{nl}(\theta+\widetilde{\theta}) - \mathcal{L}^{nl}(\theta) &= -\int_0^T \int_\Omega (U.\nabla_2 + w\partial_z)\theta'\widetilde{\theta} \end{aligned} \tag{5.98}$$

• Terme $\mathcal{L}^P$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^P(u+\widetilde{u}) - \mathcal{L}^P(u) &= \int_0^T \int_\Omega \nu\nabla\widetilde{u}.\nabla u' + \int_0^T \int_\Omega \alpha\widetilde{u}v' \\ \mathcal{L}^P(v+\widetilde{v}) - \mathcal{L}^P(v) &= \int_0^T \int_\Omega \nu\nabla\widetilde{v}.\nabla v' - \int_0^T \int_\Omega \alpha\widetilde{v}u' \\ \mathcal{L}^P(w+\widetilde{w}) - \mathcal{L}^P(w) &= \int_0^T \int_\Omega \beta\widetilde{w}\theta' \\ \mathcal{L}^P(\theta+\widetilde{\theta}) - \mathcal{L}^P(\theta) &= \int_0^T \int_\Omega \nu\tfrac{\beta}{\gamma}\nabla\widetilde{\theta}.\nabla\theta' - \int_0^T \int_\Omega \beta\widetilde{\theta}w' \end{aligned} \tag{5.99}$$

• Le terme $\mathcal{L}^b$ ne dépend pas de (u, v, w, θ).

• Voyons maintenant le terme d'observation $\mathcal{L}^o$ (qui ne dépend que de u et v). Introduisons pour cela l'opérateur d'observation

$$\mathcal{G}(t_i; u, v) = \xi(t_i) \tag{5.100}$$

on a alors, au premier ordre :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}^o(u+\widetilde{u}) - \mathcal{L}^o(u) & = & \frac{1}{2}\|\mathcal{G}(t_i; u+\widetilde{u}, v) - d\|^2 - \frac{1}{2}\|\mathcal{G}(t_i; u, v) - d\|^2 \\ & = & (\mathcal{G}(t_i; u+\widetilde{u}, v) - \mathcal{G}(t_i; u, v)).(\mathcal{G}(t_i; u, v) - d) \end{array} \tag{5.101}$$

Cherchons la perturbation $\widetilde{\xi}$ associée à $\widetilde{u}$, ie $\mathcal{G}(t_i; u+\widetilde{u} - \mathcal{G}(t_i; u, v) = \widetilde{\xi}(t_i)$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d(\xi+\widetilde{\xi})}{dt} & = & (u+\widetilde{u}, v)(t, (\xi+\widetilde{\xi})(t), z_0) \\ (\xi+\widetilde{\xi})(0) & = & \xi_0 \end{array} \right. \tag{5.102}$$

En omettant les z_0 et en écrivant $\widetilde{\xi} = (\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\xi_2})$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{\xi_1}'(t) & = & (u+\widetilde{u})(t, (\xi+\widetilde{\xi})(t)) - u(t, \xi(t)) \\ \widetilde{\xi_2}'(t) & = & v(t, (\xi+\widetilde{\xi})(t)) - v(t, \xi(t)) \\ \widetilde{\xi}(0) & = & 0 \end{array} \right. \tag{5.103}$$

soit, au premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{\xi_1}'(t) & = & \widetilde{\xi_1}\partial_x u(t, \xi(t)) + \widetilde{\xi_2}\partial_y u(t, \xi(t)) + \widetilde{u}(t, \xi(t)) \\ \widetilde{\xi_2}'(t) & = & \widetilde{\xi_1}\partial_x v(t, \xi(t)) + \widetilde{\xi_2}\partial_y v(t, \xi(t)) \\ \widetilde{\xi}(0) & = & 0 \end{array} \right. \tag{5.104}$$

Si on note F la matrice associée à ce système

$$F = \left(\begin{array}{cc} \partial_x u(t, \xi(t)) & \partial_y u(t, \xi(t)) \\ \partial_x v(t, \xi(t)) & \partial_y v(t, \xi(t)) \end{array} \right) \tag{5.105}$$

on obtient

$$\left(\begin{array}{c} \widetilde{\xi_1} \\ \widetilde{\xi_2} \end{array} \right)(t) = \int_0^t \exp\left(\int_s^t F(s')\, ds' \right) \left(\begin{array}{c} \widetilde{u}(s, \xi(s)) \\ 0 \end{array} \right) ds \tag{5.106}$$

Finalement on a, formellement au premier ordre :

$$\mathcal{L}^o(u+\widetilde{u}) - \mathcal{L}^o(u) = (\widetilde{\xi^1}(t_i), \widetilde{\xi^2}(t_i)).(\xi^1(t_i) - d_1, \xi^2(t_i) - d_2) \tag{5.107}$$

Si on note $\mathcal{F}(t, s) = \exp(\int_s^t F(s')\, ds')$ et $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ses colonnes, on obtient, toujours formellement au premier ordre :

$$\mathcal{L}^o(u+\widetilde{u}) - \mathcal{L}^o(u) = \int_0^{t_i} \widetilde{u}(s, \xi(s)) \mathcal{F}_1(t_i, s).(\xi^1(t_i) - d_1, \xi^2(t_i) - d_2)\, ds \tag{5.108}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^o(u+\widetilde{u})-\mathcal{L}^o(u) &= \int_0^T\int_\Omega \widetilde{u}(s,x,y,z)\mathcal{F}_1(t_i,s).(\xi^1(t_i)-d_1,\xi^2(t_i)-d_2)\\ &\qquad \delta_{(\xi^1(s),\xi^2(s),z_0)}(x,y,z)\mathbb{1}_{[0,t_i]}(s)\,ds\,dx\,dy\,dz\end{aligned} \tag{5.109}$$

De la même façon on a pour v :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^o(v+\widetilde{v})-\mathcal{L}^o(v) &= \int_0^T\int_\Omega \widetilde{v}(s,x,y,z)\mathcal{F}_2(t_i,s).(\xi^1(t_i)-d_1,\xi^2(t_i)-d_2)\\ &\qquad \delta_{(\xi^1(s),\xi^2(s),z_0)}(x,y,z)\mathbb{1}_{[0,t_i]}(s)\,ds\,dx\,dy\,dz\end{aligned} \tag{5.110}$$

- Bilan : on peut finalement écrire, formellement, les équations primitives adjointes :

$$\left\{\begin{array}{l} -\partial_t u' - (U.\nabla_2 + w\partial_z)u' - \nu\Delta u' + \alpha v' + \partial_x\pi = \partial_x X'.X \\ \qquad\qquad +\mathcal{F}_1(t_i,s).(d-\xi(t_i))\mathbb{1}_{s\in[0,t_i],x=\xi^1(s),y=\xi^2(s),z=z_0} \\ -\partial_t v' - (U.\nabla_2 + w\partial_z)v' - \nu\Delta v' - \alpha u' + \partial_y\pi = \partial_y X'.X \\ \qquad\qquad +\mathcal{F}_2(t_i,s).(d-\xi(t_i))\mathbb{1}_{s\in[0,t_i],x=\xi^1(s),y=\xi^2(s),z=z_0} \\ -\partial_z X'.X + \beta\theta' + \partial_z\pi = 0 \\ -\partial_t\theta' - (U.\nabla_2 + w\partial_z)\theta' - \nu\Delta\theta' - \gamma w' = 0 \\ \partial_x u' + \partial_y v' + \partial_z w' = 0 \\ u'(T) = v'(T) = \theta'(T) = 0 \end{array}\right. \tag{5.111}$$

avec les conditions aux limites (5.2).

Chapitre 6

Étude numérique : implémentation

Sommaire

6.1 Le code direct 114
6.1.1 OPA 8.1 114
6.1.1.1 Équations 114
6.1.1.2 Conditions aux limites 114
6.1.1.3 Discrétisations 115
6.1.2 La configuration 116
6.1.3 Quelques remarques 118
6.2 Le code OPAVAR 119
6.2.1 Rappels 119
6.2.2 Le 4D-Var incrémental 119
6.2.3 La double vie de la matrice **B** 121
6.2.3.1 Modélisation de la matrice **B** dans OPAVAR 121
6.2.3.2 Préconditionnement 122
6.2.4 Modèles tangent et adjoint 122
6.2.5 Minimisation 122
6.3 Assimilation des positions de flotteurs dérivants 123
6.3.1 L'opérateur d'observation discret 123
6.3.2 Les opérateurs d'observation tangent et adjoint 125
6.3.2.1 Dérivation d'un code 125
6.3.2.2 Transposition d'un code 126
6.3.2.3 Difficultés 127
6.3.3 Quelques mots sur la matrice **R** 128
6.4 Autres opérateurs d'observation implémentés 128
6.4.1 Assimilation "eulérienne" des positions 128
6.4.2 Étude de la complémentarité positions/températures 129
6.4.2.1 Assimilation des profils de température seuls 129
6.4.2.2 Assimilation conjointe des profils et des positions . . . 130

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, assimiler effectivement des données nécessite un modèle, des observations et une méthode d'assimilation. Dans ce chapitre, nous décrivons tout ceci : nous commençons par présenter le code d'océan OPA (développé par [Madec *et al.*, 1999] au LODYC) ainsi que la configuration que nous avons construite. Ensuite nous présentons l'algorithme du 4D-Var incrémental et les diverses composantes du code OPAVAR (développé par [Weaver *et al.*, 2002] au CERFACS et au LODYC). Enfin nous décrivons les composantes d'observations spécifiques aux données lagrangiennes que nous avons développées.

6.1 Le code direct

Le code OPA (Océan PArallélisé) est un modèle de circulation générale océanique aux équations primitives développé par le LODYC (Laboratoire d'Océanographie DYnamique et de Climatologie de l'Institut Pierre Simon Laplace). Le premier paragraphe reprend quelques éléments du manuel de référence du code OPA dans sa version 8.1 (voir [Madec *et al.*, 1999]). Le deuxième paragraphe présente le bassin idéalisé que nous avons simulé.

6.1.1 OPA 8.1

6.1.1.1 Équations

Les équations du modèle sont les équations primitives de l'océan, sous une forme légèrement plus générale que celle présentée dans la première partie : le terme de diffusion n'est pas nécessairement un laplacien, le terme de Coriolis est non constant, la densité ρ peut ne pas dépendre linéairement de la température θ et de la salinité S et enfin les conditions aux limites peuvent être différentes. Les équations d'OPA sont les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t u + (U.\nabla_2)u + w\partial_z u - fv + \frac{1}{rho_0}\partial_x p = D^u & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ \partial_t v + (U.\nabla_2)v + w\partial_z v + fu + \frac{1}{\rho_0}\partial_y p = D^v & \\ \partial_z p = -\rho g & \\ \partial_t \theta + (U.\nabla_2)\theta + w\partial_z \theta = D^\theta & \\ \partial_t S + (U.\nabla_2)S + w\partial_z S = D^S & \\ \rho = \rho(\theta, S, p) & \\ \nabla_2.U + \partial_z w = 0 & \end{array}\right. \tag{6.1}$$

où Ω est le bassin de circulation et $(0,T)$ l'intervalle de temps, $U = (u,v)$ est la vitesse horizontale du fluide et w la vitesse verticale, p la pression, f est le paramètre de Coriolis, ρ_0 une densité de référence, ∇_2 est l'opérateur (∂_x, ∂_y) et D^u, D^v, D^θ et D^S sont des opérateurs de diffusion modélisant les phénomènes physiques de petite échelle (appelés encore paramétrisations sous-maille).

6.1.1.2 Conditions aux limites

On peut distinguer deux types de frontières : la frontière océan-continent au fond et sur les côtes et la frontière océan-atmosphère en surface.
Notre bassin est rectangulaire à fond plat, mais OPA permet d'utiliser une topographie

des côtes et du fond complexe. On a donc $\Omega = (0, L) \times (0, l) \times (0, a)$. Sa frontière $\partial\Omega$ est réunion de $\Gamma_a = [0, L] \times [0, l] \times \{a\}$ (surface), $\Gamma_b = [0, L] \times [0, l] \times \{0\}$ (fond) et $\Gamma_l = \partial\Omega \setminus (\Gamma_a \cup \Gamma_b)$ (côtes).

A l'interface océan-continent, les flux de température et salinité sont supposés nuls, ce qui donne, en notant $\frac{\partial}{\partial\nu}$ la dérivée normale au bord :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_l \cup \Gamma_b \tag{6.2}$$

Au fond du bassin, la vitesse verticale w est supposée nulle et la vitesse horizontale vérifie une condition de friction linéaire (ie une relation de proportionalité entre la vitesse horizontale U et sa dérivé normale), ce qui donne :

$$w = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial\nu} = C_1\, U \quad \text{sur } \Gamma_b \tag{6.3}$$

Sur les frontières latérales, la vitesse horizontale vérifie une condition de glissement libre (ie la dérivée normale de la vitesse tangentielle est nulle) et de flux nul (ie la vitesse normale est nulle), ce qui donne, en notant U_t et U_n les vitesses normale et tangentielle (avec $\{U_t, U_n\} = \{u, v\}$) :

$$\frac{\partial U_t}{\partial\nu} = 0, \quad U_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_l \tag{6.4}$$

OPA peut aussi prendre en compte l'afflux d'eau douce lié aux fleuves et rivières, mais nous négligerons cet aspect.

A l'interface océan-atmosphère, la vitesse verticale est nulle et nous imposons un vent constant :

$$w = 0, \quad \frac{\partial U_t}{\partial z} = C_2(\tau_u, \tau_v) \quad \text{sur } \Gamma_a \tag{6.5}$$

On néglige tous les autres échanges (précipitations, évaporation, radiation solaire) pour poser

$$\frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial\nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a \tag{6.6}$$

6.1.1.3 Discrétisations

En espace, le schéma numérique de résolution des équations primitives (6.1) est un schéma aux différences finies que nous ne détaillerons pas (cf [Madec *et al.*, 1999]). Il est cependant utile (cf paragraphe 6.3.1) de décrire la grille de discrétisation.

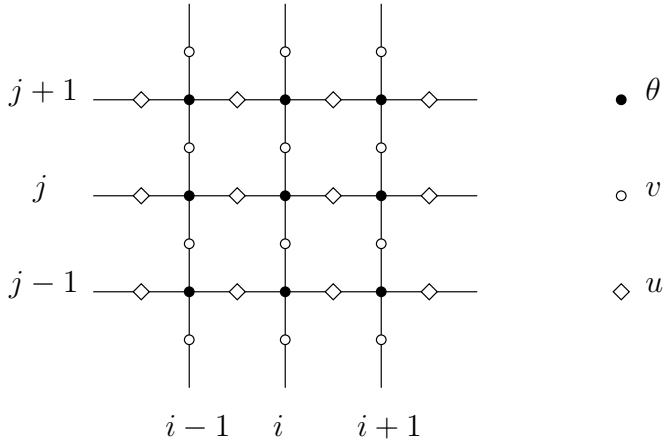
La grille spatiale est régulière sur l'horizontale et comporte onze niveaux d'épaisseur croissante sur la verticale. Les variables scalaires (θ, S, ρ, p) sont définies au centre de chaque cellule de la grille (qui correspondent aux points de coordonnées entières), les variables vectorielles (u, v, w) sont définies au centre de chaque face des cellules (donc en des points de coordonnées entières ou demi-entières, cf tableau 6.7), selon une grille de type Arakawa C. Le tableau suivant précise l'emplacement des variables, en coordonnées

entières ou demi-entières dans la grille :

θ	i	j	k
u	$i+1/2$	j	k
v	i	$j+1/2$	k
w	i	i	$k+1/2$

(6.7)

soit, en coupe dans un plan de coordonnées verticale entière fixée :



(6.8)

En temps, le schéma numérique utilisé est un schéma saute-mouton (leap-frog) stabilisé par un filtre d'Asselin pour la partie non diffusive des équations, du type

$$u^{n+1} = u^{n-1} + 2\Delta t\, F^n$$

Pour la partie diffusive des équations, le schéma de leap-frog est modifié en un

$$u^{n+1} = u^{n-1} + 2\Delta t\, D^{n-1}$$

pour l'horizontale et en

$$u^{n+1} = u^{n-1} + 2\Delta t\, D^{n+1}$$

pour la partie diffusive verticale. Voir [Madec *et al.*, 1999] pour plus de détails.

6.1.2 La configuration

Domaine

Comme nous l'avons dit plus haut, notre bassin est du type $\Omega = (0, L) \times (0, l) \times (0, a)$, avec $L = 3\,600$ kilomètres, $l = 2\,800$ kilomètres et $a = 5\,000$ mètres. Il s'étend en longitude de -56^oW à -24^oW, en latitude de 22.5^oN à 47.5^oN, ce qui correspond aux coordonnées géographiques de l'Atlantique Nord.

Le paramètre de Coriolis f dans l'équation (6.1) est approché par l'équation affine suivante, selon l'hypothèse dite du β-plan :

$$f = f_0 + \beta y, \quad \text{avec } f_0 = 0.9.10^{-4}\mathrm{s}^{-1}, \beta = 2.10^{-11}\mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}^{-1} \tag{6.9}$$

et y exprimé en mètres autour de la latitude moyenne du bassin.

La résolution horizontale est de 20 kilomètres, la grille horizontale comporte ainsi $180 \times 140 = 25\,200$ points. La grille verticale comporte onze niveaux d'épaisseur croissante (de 300 à 700 mètres), la surface de l'océan correspond au premier niveau.

Propriétés de l'eau de mer

La densité de l'eau de mer ne dépend pas de la salinité mais seulement de la température, via l'équation suivante :

$$\rho(\theta) = \rho_0(1.028 - r_\alpha\theta), \quad \text{avec } \rho_0 = 1020\text{kg/m}^3 \text{ et } r_\alpha = 2.10^{-4}\text{K}^{-1} \tag{6.10}$$

Au temps $t = 0$ on initialise la température de l'océan avec le profil vertical suivant, ne dépendant que de la profondeur z :

$$T(z) = 1 + 24\exp\frac{6.25(z-a)}{a}, \quad z \in (0,a) \tag{6.11}$$

Forçages

Comme nous l'avons dit plus haut, seul le vent est pris en compte à la surface. Le vent imposé est stationnaire, zonal et indépendant de la longitude. Il est donné en fonction de la latitude y par la formule suivante :

$$\tau_u(x,y) = -0.1\cos(\frac{2\pi y}{l}), \quad \tau_v(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in (0,L)\times(0,l) \tag{6.12}$$

Autres éléments

Les termes de diffusion D verticaux sont négligés dans les équations des traceurs θ et S et des vitesses u et v. Les termes de diffusion horizontaux sont modélisés par un bilaplacien horizontal ; la valeur du coefficient de diffusion est $-8.10^{-10}\text{m}^2/\text{s}$ pour les traceurs et la dynamique.

L'énergie cinétique turbulente vaut en moyenne à la surface 20cm/s^2, et atteint 600cm/s^2 dans les tourbillons centraux.

Le pas de temps du modèle est de 1 200 secondes, soit 20 minutes.

Spin-up

On appelle spin-up (simulation forcée) de l'océan la mise en mouvement des masses d'eau à partir du repos (pour les vitesses) et d'un profil de température initial, sous l'effet des forçages, uniquement le vent dans notre configuration. Généralement la phase de spin-up dure plusieurs années. Nous avons intégré notre modèle pendant 25 années, jusqu'à obtention d'une configuration de double-gyre : présence d'un fort courant d'ouest en est (appelé encore "jet") à la latitude médiane (ie au point de maximum du vent), présence de deux gyres, l'un chaud et l'autre froid et enfin présence de quelques tourbillons autour du jet central. La figure 6.1 présente des coupes horizontales (au niveau 2, soit à 450 mètres de profondeur) des champs de vitesses u et v, de l'énergie cinétique $E = (u^2 + v^2)/2$ et de la température θ.

6.1.3 Quelques remarques

Choix d'un modèle aux équations primitives

Si les modèles quasi-géostrophique et Shallow-Water ont été largement utilisés par la communauté océanographique, ils sont désormais remplacés par des modèles aux équations primitives dans nombre d'études. Ces modèles sont plus lourds à manipuler, mais sont aussi plus réalistes, et offrent de grandes possibilités de modélisation : frontières et échanges complexes, couplage avec des modèles de glaces de mer, d'atmosphère, de chimie ou de biologie marine, océan global, etc.

Choix de la configuration en "boîte"

Afin de faciliter la manipulation du code, et de réduire le coût de calcul, nous avons choisi une configuration académique d'OPA, avec des frontières et des échanges aux frontières simplifiés. Malgré les simplifications, elle présente des phénomènes caractéristiques des circulations de moyenne latitude, notamment à la jonction des deux gyres, où se développent des courants énergétiques et instables. L'instabilité du jet central et des tourbillons font de la configuration en boîte un bon cas-test pour étudier le

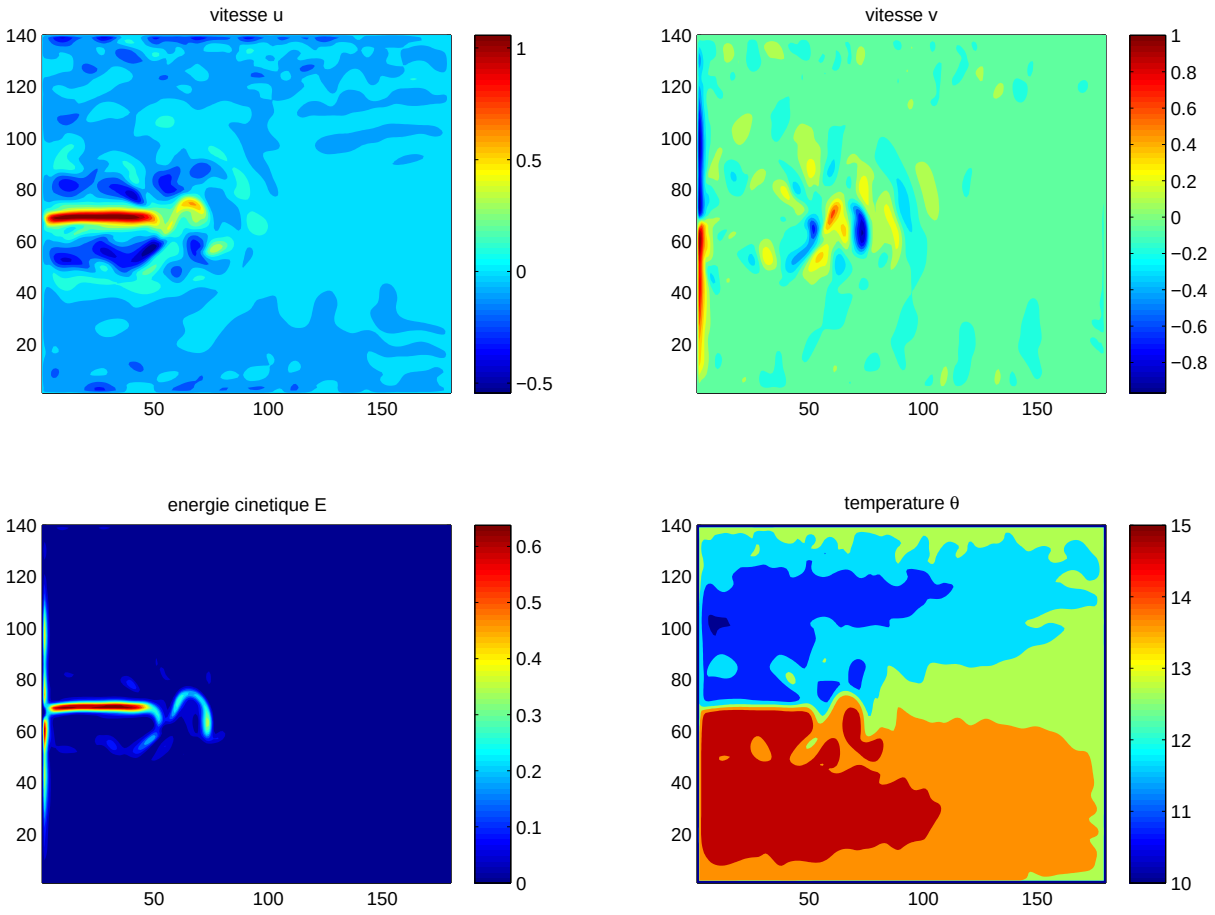


FIG. 6.1 – État de l'océan au bout de 25 ans : coupes horizontales au niveau 2 des vitesses u et v, de énergie cinétique et de la température.

problème de l'assimilation de données lagrangiennes.

Évolution du code

La configuration choisie permet une formulation simple des opérateurs d'observation, mais l'évolution du code vers une configuration plus réaliste est possible, tant pour la partie OPA/OPAVAR que pour la partie "données lagrangiennes", à quelques modifications d'implémentation près.

6.2 Le code OPAVAR

Le code OPAVAR, développé par [Weaver *et al.*, 2002] (voir aussi [Weaver *et al.*, 2003] et [Vialard *et al.*, 2003]), est un algorithme de 4D-Var incrémental comprenant le code direct OPA de [Madec *et al.*, 1999], le modèle linéaire tangent, son adjoint et le module de minimisation de [Gilbert et Lemaréchal, 1989] préconditionné via la matrice $\mathbf{B}$. Nous décrivons brièvement tous ces éléments, en commençant par des rappels du chapitre 4.

6.2.1 Rappels

Rappelons (voir chapitre 4) la fonction coût du 4D-Var :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}_0) = {}^t(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b)\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b) + \sum_{i=0}^{n} {}^t(\mathbf{y}_i^o - H_i[\mathbf{x}_i])\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{y}_i^o - H_i[\mathbf{x}_i]) \tag{6.13}$$

où $\mathbf{x}_0$ est l'état initial que l'on cherche à identifier, $\mathbf{x}^b$ est une ébauche, $\mathbf{B}$ est la matrice de covariance d'erreur d'ébauche, $\mathbf{y}_i^o$ est le vecteur des observations au temps i, H_i est l'opérateur d'observation au temps i, $\mathbf{R}_i$ est la matrice de covariance d'erreur d'observation au temps i.
La dimension temporelle intervient dans $\mathbf{x}_i$ qui dépend de l'état initial $\mathbf{x}_0$ via le modèle M :

$$\mathbf{x}_i = M_{0,i}[\mathbf{x}_0] = M_i M_{i-1} ... M_1[\mathbf{x}_0] \tag{6.14}$$

et la fonction coût s'écrit alors, en explicitant la dépendance en $\mathbf{x}_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{x}_0) &= \mathcal{J}^b(\mathbf{x}_0) + \mathcal{J}^o(\mathbf{x}_0) \\ \mathcal{J}^b(\mathbf{x}_0) &= {}^t(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b)\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b) \\ \mathcal{J}^o(\mathbf{x}_0) &= \sum_{i=0}^{n} {}^t(\mathbf{y}_i^o - H_i M_i ... M_1[\mathbf{x}_0])\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{y}_i^o - H_i M_i ... M_1[\mathbf{x}_0]) \end{aligned} \tag{6.15}$$

Nous avons vu que l'algorithme du 4D-Var peut ne pas (ou lentement) converger lorsque les opérateurs M et H sont non linéaires, ce qui est le cas pour notre problème. Le 4D-Var incrémental permet de résoudre ce problème en assurant la convergence. Sous certaines hypothèses raisonnables, le minimum obtenu est proche de celui recherché.

6.2.2 Le 4D-Var incrémental

Les hypothèses du 4D-Var incrémental sont les suivantes : il existe pour tout i des opérateurs linéaires $\mathbf{M}_i$ et $\mathbf{H}_i$ tels que les approximations

$$\begin{aligned} M_i ... M_1[\mathbf{x}_0] - M_i ... M_1[\mathbf{x}^b] &\simeq \mathbf{M}_i ... \mathbf{M}_1(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b) \\ H_i[\mathbf{x}_0] - H_i[\mathbf{x}^b] &\simeq \mathbf{H}_i(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b) \end{aligned} \tag{6.16}$$

sont valides sur la fenêtre temporelle considérée.
Dans ce cas, on pose $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b$ et on réécrit la fonction coût sous la forme incrémentale suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{J}(\delta\mathbf{x}) & = & \mathcal{J}^b(\delta\mathbf{x}) + \mathcal{J}^o(\delta\mathbf{x}) \\ \mathcal{J}^b(\delta\mathbf{x}) & = & {}^t\delta\mathbf{x}\mathbf{B}^{-1}\delta\mathbf{x} \\ \mathcal{J}^o(\delta\mathbf{x}) & = & \sum_{i=0}^{n} {}^t(\mathbf{d}_i - \mathbf{H}_i\mathbf{M}_i...\mathbf{M}_1\delta\mathbf{x})\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{d}_i - \mathbf{H}_i\mathbf{M}_i...\mathbf{M}_1\delta\mathbf{x}) \\ & & \text{avec } \mathbf{d}_i = \mathbf{y}_i^o - H_iM_i...M_1[\mathbf{x}^b] \end{array} \tag{6.17}$$

où $\mathbf{d}_i$ est appelé vecteur innovation. La fonction coût incrémentale est quadratique et son gradient est donné par

$$\nabla\mathcal{J}(\delta\mathbf{x}) \;=\; 2\mathbf{B}^{-1}\delta\mathbf{x} + 2\,{}^t\mathbf{M}_1...\,{}^t\mathbf{M}_i\,{}^t\mathbf{H}_i\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{d}_i - \mathbf{H}_i\mathbf{M}_i...\mathbf{M}_1\delta\mathbf{x}) \tag{6.18}$$

Le 4D-Var permet de prendre en compte les faibles non-linéarités des opérateurs M_i et H_i en remettant à jour périodiquement les opérateurs linéaires $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{H}_i$ et leurs adjoints, comme le montre l'algorithme simplifié ci-dessous :

Algorithme 6.1 (4D-Var incrémental)

– *Initialisation :* $\mathbf{x}_0^r = \mathbf{x}^g$
($\mathbf{x}^r$ *est appelé état de référence dans OPAVAR ;* $\mathbf{x}^g$ *est le premier itéré).*

DÉBUT DE LA BOUCLE EXTERNE
- *Intégration du modèle non linéaire :* $\mathbf{x}_i^r = M_{0,i}[\mathbf{x}^r]$
- *Calcul du vecteur innovation* $\mathbf{d}_i$ *grâce à l'opérateur d'observation non linéaire*

  DÉBUT DE LA BOUCLE INTERNE
  - *Calcul de la fonction coût incrémentale* $\mathcal{J}^o(\delta\mathbf{x})$ *en utilisant les opérateurs* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{H}$ *linéarisés autour de* $\mathbf{x}^r$
  - *Calcul du gradient* $\nabla\mathcal{J}^o(\delta\mathbf{x})$ *grâce aux opérateurs adjoints* ${}^t\mathbf{M}$ *et* ${}^t\mathbf{G}$
  - *Minimisation via l'algorithme M1QN3*

  FIN DE LA BOUCLE INTERNE

- *Mise à jour de l'incrément d'analyse* $\delta\mathbf{x}^a = \delta\mathbf{x}$
- *Mise à jour de l'état de référence* $\mathbf{x}^r = \mathbf{x}^b + \delta\mathbf{x}^a$

FIN DE LA BOUCLE EXTERNE

– *Calcul de l'état analysé* $\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + \delta\mathbf{x}^a$, $\mathbf{x}_i^a = M_{0,i}[\mathbf{x}^a]$.

Remarque 6.1 *Il faut noter que l'incrément est toujours calculé autour de l'ébauche :*

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^b \tag{6.19}$$

tandis que les opérateurs sont linéarisés autour de l'état de référence :

$$M[\mathbf{x}] = M[\mathbf{x}^r] + \mathbf{M}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^r) \tag{6.20}$$

ceci complique la formulation du terme d'observation de la fonction coût incrémentale, et notamment du vecteur innovation, mais simplifie le terme d'ébauche, et permet le préconditionnement.

6.2.3 La double vie de la matrice B

La matrice **B** joue un double rôle dans le code OPAVAR. D'une part elle modélise les covariances d'erreur d'ébauche qui interviennent dans le terme d'ébauche de la fonction coût, d'autre part elle permet de préconditionner l'algorithme de minimisation.

6.2.3.1 Modélisation de la matrice B dans OPAVAR

Il existe dans OPAVAR plusieurs options pour définir cette matrice, ou plutôt les opérateurs $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{x}$ et $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}^{1/2}\mathbf{x}$ associés. En effet, ces produits matrice-vecteur sont les seules opérations que l'on fait avec **B**, qui est de toute façon de taille beaucoup trop grande pour être stockée directement. La méthode que l'on utilise consiste à modéliser **B** par un opérateur de diffusion généralisé. Nous expliquons très sommairement le principe de cette méthode, nous renvoyons à [Weaver et Courtier, 2001] pour les détails et [Weaver *et al.*, 2003], [Vialard *et al.*, 2003] pour les applications.

Rappelons que le vecteur d'état (à une date fixée), noté $\mathbf{x}$, est de taille n, tout comme l'ébauche $\mathbf{x}^b$ et l'erreur d'ébauche ε^b. Plus précisément, n est du type $4N$ où N est le nombre total de point de grille et 4 est le nombre de variables d'état : le vecteur $\mathbf{x}$ (ainsi que $\mathbf{x}^b$, ε^b, etc.) est formé par concaténation de $u_1, ..., u_N$ (discrétisation de la vitesse u sur la grille), $v_1, ..., v_N$, $\theta_1, ..., \theta_N$ et $S_1, ..., S_N$.

La matrice **B** est de taille $n \times n$ et représente la covariance d'erreur d'ébauche :

$$\mathbf{B}_{m,p} = E\big[(\varepsilon^b_m - E(\varepsilon^b_m))\,{}^t(\varepsilon^b_p - E(\varepsilon^b_p))\big] \tag{6.21}$$

où E est l'espérance mathématiques et $1 \leq m, p \leq n$. On peut réécrire **B** en utilisant une matrice dite de corrélation adimensionnelle :

$$\mathbf{B}_{m,p} \;=\; \mathbf{B}^{1/2}_{m,m}\,\mathbf{C}_{m,p}\,\mathbf{B}^{1/2}_{p,p} \tag{6.22}$$

où $\mathbf{B}^{1/2}_{m,m}$ est un écart-type pour le point m (qui correspond à une variable donnée en un point de grille). Ainsi $\mathbf{C}_{m,p}$ est la fonction de corrélation entre le point d'indice m de l'erreur d'ébauche et le point p (qui peuvent correspondre à deux variable distinctes en deux points distincts, ou bien la même variable en deux points distants, ou encore deux variables différentes au même point de grille).

Une fois que les écarts-type ont été précisés (par l'utilisateur), il reste à modéliser la matrice de corrélation. Pour cela on fait plusieurs hypothèses :

1. tout d'abord on suppose que les erreurs sur u, v, θ et S sont indépendantes, ie que la matrice **C** est formée de 4 blocs diagonaux de même taille N. Chaque bloc représente ainsi la corrélation entre les valeurs d'une même variable en deux points de grille différents ;
2. ensuite on suppose que la fonction de corrélation peut être découplée en corrélation horizontale 2D et verticale 1D ;
3. ensuite, les fonctions de corrélation (verticale comme horizontale) sont supposés homogènes et isotropes, c'est-à-dire ne dépendant que de la distance entre deux points de grille ;

4. enfin, les fonctions de corrélation sont supposées gaussiennes, ie de la forme

$$C_0 \exp\left(\frac{-\|x_1 - x_2\|^2}{\sigma^2}\right) \tag{6.23}$$

où C_0 est une constante de normalisation et σ représente une échelle spatiale, qui sera précisée par l'utilisateur.

L'idée de [Weaver et Courtier, 2001] est alors d'utiliser un opérateur de diffusion pour estimer les gaussiennes mises en jeu.

6.2.3.2 Préconditionnement

Grâce à la formulation incrémentale $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^b$, on peut préconditionner la minimisation par le changement de variable

$$\delta\mathbf{w} = \mathbf{B}^{-1/2}\delta\mathbf{x} \tag{6.24}$$

qui permet de réécrire le terme d'ébauche en

$$\mathcal{J}^b(\delta\mathbf{w}) \;=\; {}^t\delta\mathbf{w}\,\delta\mathbf{w} \tag{6.25}$$

La minimisation se fait alors pour cette nouvelle fonction coût.

6.2.4 Modèles tangent et adjoint

Le modèle tangent $\mathbf{M}$ est une approximation de l'opérateur dérivé de M au voisinage de l'ébauche. Plus précisément, il s'agit du linéarisé d'un opérateur $\widetilde{M}$ simplifié (notamment dans la représentation des processus physiques verticaux, voir les détails dans [Weaver *et al.*, 2002]).
Le modèle adjoint ${}^t\mathbf{M}$ est l'adjoint du modèle linéaire $\mathbf{M}$.

Ces modèles sont obtenus par des techniques de dérivation de code, voir par exemple [Giering et Kaminski, 1998]. Ils ont été écrits à la main par [Weaver *et al.*, 2002], tout comme le seront nos routines (voir le paragraphe 6.3.1), mais ce n'est pas toujours le cas : le modèle d'assimilation de données océaniques du MIT (voir [Marshall *et al.*, 1997]) comprend en outre un dérivateur automatique qui délivre les routines tangente et adjointe associées à chaque nouvelle routine implémentée.

6.2.5 Minimisation

L'algorithme de minimisation est M1QN3 de [Gilbert et Lemaréchal, 1989]. Il s'agit d'un algorithme Quasi-Newton de type BFGS à mémoire limitée. L'idée est d'éviter le calcul (lourd !) de la matrice hessienne qui intervient dans l'algorithme de Newton en l'approchant judicieusement. Plus de détails sont disponibles dans [Gilbert et Lemaréchal, 1989], [Dennis et Moré, 1977], [Broyden, 1969] et [Weaver *et al.*, 2002].

6.3 Assimilation des positions de flotteurs dérivants

Nous venons de présenter les grandes lignes du package OPAVAR. Ce code a été utilisé initialement pour assimiler des données de température dans le Pacifique Tropical, voir [Vialard *et al.*, 2003], [Weaver *et al.*, 2003] ou encore [Robert, 2004] et [Durbiano, 2001]. L'opérateur d'observation utilisé est simple, puisqu'il s'agit d'un opérateur d'interpolation d'une variable d'état sur quelques points de grille. Afin d'assimiler des données de positions de flotteurs dérivants, nous avons implémenté un opérateur d'observation adapté, ainsi que les opérateurs tangent et adjoint associés.

6.3.1 L'opérateur d'observation discret

Dans ce paragraphe nous présentons la discrétisation de l'équation d'avection des flotteurs. L'objectif pour nous n'est absolument pas d'utiliser un schéma extrêmement précis, ni même un schéma d'exécution très rapide, mais de coder un opérateur d'observation dont nous devrons ensuite écrire le linéarisé puis l'adjoint, perspective qui interdit les schémas trop complexes. Nous avons ainsi dû trouver un compromis entre la précision, la rapidité d'exécution et la dérivabilité du code.

L'équation continue

On suppose que les flotteurs dérivent à profondeur fixée $z = z_0 \in (0, a)$ dans le fluide, dont on note $U = (u, v)$ la vitesse horizontale. Si on note $\xi(t) = (\xi^1(t), \xi^2(t))$ la position d'un flotteur au temps t dans le plan $z = z_0 \in (0, a)$, alors ξ vérifie l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d\xi}{dt} & = & U(t, \xi^1(t), \xi^2(t), z_0) \\ \xi(0) & = & \xi_0 \end{array} \right. \tag{6.26}$$

où ξ_0 est une position initiale donnée.

Discrétisation

La variable continue ξ est discrétisée en temps, avec le même pas de temps que le modèle OPA. On note $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ le vecteur des positions, avec $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_k) \in \mathbb{R}^{2k}$ où k est le nombre de pas de temps. Nous avons choisi un schéma saute-mouton pour la résolution approchée de (6.26). Ce schéma requiert l'évaluation de la vitesse du fluide pour chaque pas de temps à l'endroit où se trouve le flotteur. Le champ de vitesse est discrétisé sur une grille présentée au début de ce chapitre et doit donc être interpolé. Notons $U_j^f = (u_j^f, v_j^f)$ le vecteur des vitesses du flotteur, ie résultant de l'interpolation du champ de vitesse U_j au temps j au point ξ_j. Si on appelle $interp_{z_0}(f, x)$ la fonction d'interpolation de f au point x à la profondeur z_0, on a $U_j^f = interp_{z_0}(U_j, \xi_i)$. Le schéma

numérique utilisé pour résoudre (6.26) s'écrit alors :

$$\begin{array}{ll} \bullet \text{ Initialisation} & \left\{ \begin{array}{rcl} \xi_0 & & \text{donné} \\ U_0^f & = & interp_{z_0}(U_0, \xi_0) \end{array} \right. \\ \bullet \text{ Premier pas de temps} & \left\{ \begin{array}{rcl} \xi_1 & = & \xi_0 + hU_0^f \\ U_1^f & = & interp_{z_0}(U_1, \xi_1) \end{array} \right. \\ \bullet \text{ Boucle pour } j = 1..k & \left\{ \begin{array}{rcl} \xi_j & = & \xi_{j-2} + 2hU_{j-1}^f \\ U_j^f & = & interp_{z_0}(U_j, \xi_j) \end{array} \right. \end{array} \tag{6.27}$$

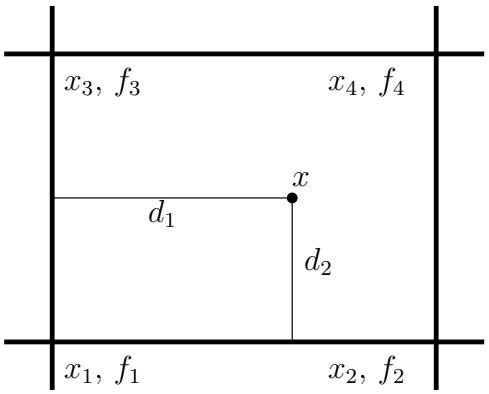
où h est le pas de temps du modèle. Ce schéma est très simple, il a le double avantage d'être rapide d'exécution et de ne pas poser de problèmes particulier à la dérivation (voir plus bas) exceptés ceux liés à la fonction $interp_{z_0}$.

Interpolation

Nous verrons plus bas que la dérivation de l'opérateur H nécessite la dérivée de la fonction $interp_{z_0}(f, x)$ par rapport à f (le champ que l'on interpole) et à x (le point où l'on interpole). La dérivée par rapport au champ f ne pose pas de problème, car $interp_{z_0}$ est en général linéaire en f. Pour la dérivée en espace (ie par rapport à x), c'est nettement plus délicat. En effet, pour être de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x, la fonction $interp_{z_0}$ doit en général utiliser la totalité du champ f : autrement dit, interpoler f en un point donné x requiert les valeurs de f sur la totalité de la grille ! Ici, il s'agit de la grille horizontale, qui comprend $140 \times 180 = 25200$ points. Cette fonction est ensuite appelé par chacun des flotteurs (environ 1 000 dans la plupart de nos expériences) à chaque pas de temps (environ 700). Il est donc raisonnable de renoncer à implémenter une interpolation $\mathcal{C}^1$ en espace.

Nous avons ensuite choisi de limiter à 4 le nombre de points utilisés pour le calcul de l'interpolé ; ceci en vue de limiter le coût de calcul. En un point donné on utilisera donc 1, 2 ou 4 valeurs, si le flotteur est respectivement sur un point de grille, sur l'arête d'une maille ou bien à l'intérieur d'une maille.

Enfin, nous avons choisi d'utiliser une interpolation Lipschitz (et en particulier continue) en vue de résoudre le système (6.26). Si x est un point à l'intérieur d'une maille horizontale, on note x_1, x_2, x_3, x_4 ses plus proches voisins, f_1, f_2, f_3, f_4 les valeurs de f en ces points à la profondeur z_0 et d_1, d_2, d_3, d_4 les distances aux arêtes de la maille (normalisées à 1 en divisant par la taille de la maille) :



(6.28)

La formule d'interpolation s'écrit alors :

$$interp_{z_0}(f,x) = f_1 + d_1(f_2 - f_1) + d_2(f_3 - f_1) + d_1 d_2(f_1 + f_4 - f_2 - f_3) \qquad (6.29)$$

En pratique il suffit de déterminer le point x_1, sans oublier que les grilles de u et de v sont décalées, voir (6.7) et (6.8), puis d'en déduire les autres x_i, les f_i et les d_i. Cette formule peut en outre s'utiliser lorsque le point x est sur l'arête d'une maille ou sur un point de grille et elle définit ainsi une fonction d'interpolation bidimensionnelle continue.

L'opérateur d'observation H

L'opérateur d'observation H_i à l'instant i est nul s'il n'y a pas d'observation, et vaut ξ_i sinon. En pratique, on se fixe une période temporelle d'observation, qui correspond à un nombre K de pas de temps, et l'équivalent modèle des observations est le vecteur $\xi_0, \xi_K, \xi_{2K} ... \xi_{n'K}$ où n' est la partie entière du nombre total de pas de temps k divisé par la période K.

Notre opérateur s'écrit sous une forme légèrement plus complexe que celle présentée dans le chapitre 4, puisqu'il ne dépend plus des variables d'état u et v, mais de deux nouvelles variables ξ et U^f, respectivement vecteurs des positions et des vitesses du flotteur, avec ξ dépendant de manière non linéaire du champ de vitesse U. Tout se passe en fait comme si nous avions ajouté deux variables au vecteur d'état, qui devient alors $(u, v, \theta, S, \xi, U^f)$, et que nous observions seulement ξ. Quand nous écrirons les opérateurs tangent et adjoint, nous devrons ainsi calculer les variables tangentes et adjointes de ξ et de U^f.

6.3.2 Les opérateurs d'observation tangent et adjoint

On ne va pas rentrer ici dans les détails de la dérivation (manuelle comme automatique) de codes numériques, mais seulement montrer les grandes lignes de l'écriture du code tangent et soulever les difficultés d'implémentation. Nous avons utilisé les recettes de construction de codes adjoints de [Giering et Kaminski, 1998].

Signalons ici qu'il existe des dérivateurs automatiques, comme le logiciel commercial TAMC de [Giering, 1999], le logiciel libre [Tapenade, 2002] développée par le projet TROPICS de l'INRIA, ou encore le dérivateur intégré (et donc adapté) au modèle d'océan du MIT.

6.3.2.1 Dérivation d'un code

Pour dériver tout ou partie d'un code, il convient d'abord d'identifier les variables actives, qui sont celles par rapport auxquelles on va dériver, et les variables passives qui y interviennent. Les variables actives sont tout simplement celles qui sont modifiées lorsque l'état initial de l'océan est modifié. Par exemple, toutes les variables d'état u, v, θ et S sont actives, comme nos nouvelles variables ξ et U^f, ainsi que les distances d_i et les points x_i dans la fonction $interp_{z_0}$, tandis que les constantes physiques sont passives. A chaque variable active ϕ (appelée variable directe) on associe une variable tangente $\delta\phi$. Le code

tangent est le code d'évolution des variables tangentes.

On poursuit sur un exemple. On considère la ligne de code suivante :

$$x = az + by^2 + 3f(z) + c \tag{6.30}$$

où x, y et z sont les variables actives, a, b et c sont des variables passives et f est une fonction au moins $\mathcal{C}^1$. Le code tangent doit permettre de calculer δx au premier ordre, lorsque toutes les variables actives ϕ sont perturbées en $\phi + \delta\phi$. On commence donc par perturber la ligne (6.30) :

$$\begin{array}{rcl} x + \delta x & = & a(z + \delta z) + b(y + \delta y)^2 + 3f(z + \delta z) + c \\ & = & a(z + \delta z) + b(y^2 + 2y\delta y + (\delta y)^2) + 3(f(z) + \delta z f'(z) + o(\delta z)) + c \end{array} \tag{6.31}$$

Puis on ne garde que les termes d'ordre au plus 1, et enfin on soustrait x pour avoir :

$$\delta x = a\,\delta z + 2\,b\,y\,\delta y + 3\,\delta z\,f'(z) \tag{6.32}$$

On peut remarquer que le code tangent fait intervenir les variables directes, qui devront donc être stockées, dès que celles-ci interviennent de manière non-linéaire.
Finalement, pour une ligne de code faisant intervenir des fonctions aux moins $\mathcal{C}^1$, dériver un code revient à un simple calcul de différentielle. Les difficultés commencent lorsque les fonctions qui interviennent ne sont plus dérivables.

6.3.2.2 Transposition d'un code

Le code adjoint est obtenu par transposition du code tangent. Comme précédemment, nous ne rentrons pas dans les détails et nous nous contenterons d'illustrer l'idée générale sur un exemple. Pour transposer la ligne (6.32), on l'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2by & a + 3f'(z) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \tag{6.33}$$

Puis on transpose (6.33) :

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2by & 1 & 0 \\ a + 3f'(z) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} \tag{6.34}$$

où ϕ^* est appelé variable adjointe de ϕ. Enfin on revient au code en ligne, en finissant par x^* :

$$\left[\begin{array}{rcl} z^* & = & z^* + (a + 3f'(z))\,x^* \\ y^* & = & y^* + 2by\,x^* \\ x^* & = & 0 \end{array} \right. \tag{6.35}$$

Les trois lignes (6.35) sont appelées code adjoint de la ligne (6.32).

6.3.2.3 Difficultés

La première difficulté est la non dérivabilité de certaines fonctions. Dans ce cas on a plusieurs possibilités : soit on simplifie le code direct pour le rendre dérivable, puis on dérive le code direct simplifié (c'est ce qui est fait en particulier dans les processus physiques verticaux du modèle OPA) ; soit on donne une valeur arbitraire à la dérivée (c'est ce que nous faisons pour notre interpolation). Cette deuxième possibilité est judicieuse lorsque la dérivée est "le plus souvent" bien définie, comme c'est la cas pour $interp_{z_0}$ qui est dérivable presque partout en x.

Voyons par exemple deux lignes de notre code :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \xi_j & = & \xi_{j-2} + 2hU^f_{j-1} \\ U^f_j & = & interp_{z_0}(U_j, \xi_j) \end{array} \right. \tag{6.36}$$

Les lignes associées dans le code tangent sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \delta\xi_j & = & \delta\xi_{j-2} \, + \, 2\,h\,\delta U^f_{j-1} \\ \delta U^f_j & = & interp_{z_0}(\delta U_j, \xi_j) \, + \, \delta\xi_j \, . \, \partial_x interp_{z_0}(U_j, \xi_j) \end{array} \right. \tag{6.37}$$

Hors des arêtes des mailles, la fonction $interp_{z_0}$ est dérivable. Sur les arêtes des mailles elle ne l'est pas et nous devons lui donner une valeur. Le choix ici n'est pas très compliqué, car $interp_{z_0}$ est dérivable à gauche et à droite. Nous avons choisi d'imposer la moyenne des deux dérivées, mais on aurait aussi pu imposer l'une ou l'autre.

Une autre difficulté est lié aux non-linéarités. Lorsque le code direct n'est pas linéaire, les valeurs des variables directes sont requises dans les codes tangent et adjoint, comme nous venons de la voir dans (6.32) et (6.35). Pour obtenir ces valeurs au fur et à mesure de l'exécution du code tangent (puis du code adjoint) il existe plusieurs possibilités :

1. stocker toutes les valeurs en mémoire, ce qui est possible si les vecteurs ne sont pas de trop grande taille ;
2. écrire toutes les valeurs dans des fichiers sur le disque de la machine, et les consulter au fur et à mesure en accédant au disque, ce qui augmente le temps de calcul ;
3. recalculer les valeurs au fur et à mesure, ce qui peut être aussi extrêmement coûteux ;
4. écrire une partie des valeurs sur le disque, les consulter au fur et à mesure et recalculer les valeurs intermédiaires non stockées ;
5. écrire une partie des valeurs sur le disque, les consulter au fur et à mesure et les interpoler pour approcher les valeurs intermédiaires non stockées.

Le choix de la méthode dépend de la taille du problème et de ses particularités, notamment son caractère faiblement ou fortement non linéaire. Il faut tout de même avoir en tête que les accès au disque prennent beaucoup de temps et que les points 1 et 5 doivent être préférés dès que possible.

Notons aussi que TAMC privilégie l'approche 3, TAPENADE privilégie l'approche 2, tout en proposant tous deux des évolutions vers l'approche intermédiaire 4.

6.3.3 Quelques mots sur la matrice R

Pour simplifier, notre matrice $\mathbf{R}$ est scalaire. Notre fonction coût (sous sa forme non incrémentale non préconditionnée) s'écrit alors :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}_0) = {}^t(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b)\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b) + \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{n} \|\mathbf{y}_i^o - H_i[\mathbf{x}_i]\|^2 \tag{6.38}$$

où r est un paramètre qui permet de quantifier le poids du terme d'observation par rapport au terme d'ébauche.
Ce paramètre doit être choisi avec soin : une trop petite valeur diminue l'effet régularisant et ralentit la convergence, une trop grande valeur donne un état analysé plus proche de l'ébauche que des observations (voir en annexe).

6.4 Autres opérateurs d'observation implémentés

Nous avons implémenté d'autres opérateurs d'observations : le premier afin de comparer notre méthode à une méthode variationnelle classique, le deuxième en vue d'étudier la complémentarité des données de positions et de température.

6.4.1 Assimilation "eulérienne" des positions

Une méthode classique en océanographie, utilisé notamment par [Molcard *et al.*, 2003] et [Ozgökmen *et al.*, 2003], consiste à transformer les données de positions en données de vitesse par la formule d'approximation (4.37) que l'on rappelle ci-dessous pour plus de clarté :

$$\begin{aligned} \frac{\xi_1(t_{k+1}) - \xi_1(t_k)}{t_{k+1} - t_k} &\approx u(\xi_1(t_k), \xi_2(t_k), z_0, t_k) \\ \frac{\xi_2(t_{k+1}) - \xi_2(t_k)}{t_{k+1} - t_k} &\approx v(\xi_1(t_k), \xi_2(t_k), z_0, t_k) \end{aligned} \tag{6.39}$$

où $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ est la position d'un flotteur dans le plan horizontal de profondeur $z = z_0$, t_k et t_{k+1} sont deux instants successifs d'observation et (u, v) est la vitesse horizontale du fluide.

Les expériences jumelles se déroulent alors en deux phases :

1. Génération des données de vitesse : on se donne un état vrai de l'océan et des positions initiales de flotteurs, puis on fait évoluer cet état vrai pour générer des positions de flotteurs en des instants donnés, grâce à l'opérateur d'observation (lagrangien) direct décrit dans le paragraphe 6.3.1. Ensuite on utilise la formule (4.37) pour transformer ces données en vitesses. On dispose ainsi d'un jeu de données de vitesse en des points et instants donnés ; on oublie complètement les positions de flotteurs sous-jacentes.
2. Assimilation des données de vitesse ([Molcard *et al.*, 2003] et [Ozgökmen *et al.*, 2003] utilisent une méthode d'interpolation optimale, mais nous continuons avec le 4D-Var incrémental en vue de comparer les méthodes lagrangienne et eulérienne) : Si i est un instant d'observation et $x_1, x_2, ..., x_p$ sont les points d'observation de la vitesse à

cet instant, l'opérateur d'observation (eulérien) s'écrit, en fonction du vecteur d'état (U, θ, S) à l'instant i, noté $(\mathbf{U}_i, \theta_i, \mathbf{S}_i)$:

$$H_i[U_i, \theta_i, S_i] = (interp_{z_0}(U_i, x_1), ..., interp_{z_0}(U_i, x_p)) \tag{6.40}$$

Avec cette formulation, les positions $x_1, ..., x_p$ ne sont plus des variables actives, car elles sont fixées une fois pour toutes par le jeu de données. La dérivation se fait uniquement par rapport à U_i, sans poser aucun problème, car $interp_{z_0}$ est linéaire par rapport à U_i :

$$\mathbf{H}_i[\delta U_i, \delta\theta_i, \delta S_i] = (interp_{z_0}(\delta U_i, x_1), ..., interp_{z_0}(\delta U_i, x_p)) \tag{6.41}$$

Remarque 6.2 *L'avantage de cette méthode est sa simplicité. En effet, les variables observées sont des variables d'état du modèle, et l'opérateur d'observation est un simple opérateur d'interpolation, linéaire en les variables d'état. Il n'y a alors aucune difficulté pour écrire les opérateurs tangent et adjoint.*

Dans le chapitre suivant, nous présenterons les résultats obtenus avec cette méthode, qui fonctionne très bien lorsque la période temporelle entre deux relevés de position n'est pas trop grande.

6.4.2 Étude de la complémentarité positions/températures

Les données de positions ne donnent a priori d'informations que sur le champ de vitesse et il est intéressant d'étudier l'assimilation conjointe de données de température et de vitesse pour étudier leur complémentarité. En ayant en tête les flotteurs Argo, nous avons choisi de simuler des flotteurs profileurs dérivants.

6.4.2.1 Assimilation des profils de température seuls

La première étape est d'implémenter l'assimilation des profils de température. Comme précédemment, les expériences jumelles se déroulent en deux temps :

1. Génération des profils : comme précédemment, on se donne un état vrai de l'océan et des positions initiales de flotteurs, puis on génère des positions de flotteurs en des instants donnés, grâce à l'opérateur d'observation (lagrangien) direct décrit dans le paragraphe 6.3.1. On obtient ainsi, pour tout instant d'observation i, un jeu de positions $x_1, x_2, ..., x_p$. En chaque instant d'observation i, on mesure un profil vertical de température en chaque point (horizontal) x_j, en interpolant le champ de température à différentes profondeurs. On dispose ainsi d'un jeu de profils de température en des points et instants donnés et, comme précédemment, on oublie complètement les positions de flotteurs sous-jacentes.
2. Assimilation des profils : comme précédemment on utilise le 4D-Var incrémental. L'opérateur d'observation en i s'écrit :

$$\begin{aligned} H_i[U_i, \theta_i, S_i] \;=\; & (interp_1(\theta_i, x_1,), interp_2(\theta_i, x_1,), ..., interp_N(\theta_i, x_1), \\ & ..., interp_1(\theta_i, x_p,), ..., interp_N(\theta_i, x_p)) \end{aligned} \tag{6.42}$$

où cette fois la fonction d'interpolation n'est plus utilisée à profondeur fixée z_0, mais aux N premiers niveaux verticaux, N (choisi par l'utilisateur) correspond à

la profondeur maximale du profil. Là encore, il s'agit d'un opérateur d'observation linéaire qui se dérive (puis se transpose) sans difficulté :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_i[\delta U_i, \delta\theta_i, \delta S_i] &= (interp_1(\delta\theta_i, x_1,), ..., interp_N(\delta\theta_i, x_1), \\ &\quad ..., interp_1(\delta\theta_i, x_p,), ..., interp_N(\delta\theta_i, x_p))\end{aligned} \tag{6.43}$$

6.4.2.2 Assimilation conjointe des profils et des positions

Le jeu de données est fourni par un ensemble de flotteurs dérivant à profondeur fixé, qui délivrent régulièrement des positions et des profils verticaux instantanés de température. Si i est un instant d'observation, l'opérateur H_i se découple en

$$H_i = (H_i^f, H_i^p) \tag{6.44}$$

où H_i^f est l'opérateur associées aux positions et H_i^p associé aux profils. Si on suppose que les erreurs d'observation sont décorrélées, on peut modéliser la matrice $\mathbf{R}_i$ par deux matrices scalaires en blocs diagonaux. Dans ce cas, la fonction coût s'écrit :

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{J}^b(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{r_f}\sum_{i=0}^{n} \|\mathbf{y}_i^o - H_i^f[\mathbf{x}_i]\|^2 + \frac{1}{r_p}\sum_{i=0}^{n} \|\mathbf{y}_i^o - H_i^p[\mathbf{x}_i]\|^2 \tag{6.45}$$

La mise en œuvre numérique nécessite de choisir les deux paramètres r_f et r_p (voir l'annexe).

Chapitre 7

Étude numérique : résultats

Sommaire

7.1 Cadre du travail 133
7.1.1 Expériences jumelles avec données simulées 133
7.1.2 État vrai 135
7.1.3 Ébauche 135
7.1.4 Données simulées 135
7.2 Validation de la méthode 138
7.2.1 Premiers tests 138
7.2.2 Diagnostics qualitatifs 140
7.2.3 Diagnostics quantitatifs 144
7.2.4 Expériences longues 148
7.2.5 Conclusion 150
7.3 Étude de la sensibilité aux différents paramètres du réseau des flotteurs 153
7.3.1 Période temporelle d'échantillonnage des positions 153
7.3.2 Nombre de flotteurs 154
7.3.3 Nombre et distribution horizontale 155
7.3.4 Niveau de dérive 157
7.3.5 Impact couplé du nombre et de la période d'échantillonnage . . 160
7.3.6 Conclusion 161
7.4 Comparaison avec une méthode eulérienne 161
7.4.1 Temps intégral lagrangien 161
7.4.2 Tests divers avec une petite période d'échantillonnage 162
7.4.3 Augmentation de la période d'échantillonnage 166
7.4.4 Conclusion 166
7.5 Assimilation d'observations bruitées 168
7.5.1 Erreurs réelles de positionnement des flotteurs 168
7.5.1.1 Flotteurs acoustiques (MARVOR) 168
7.5.1.2 Flotteurs profileurs du programme Argo (PROVOR) . 168
7.5.2 Implémentation 169
7.5.3 Résultats 169
7.5.4 Conclusion 170

7.6 Étude de la complémentarité avec l'assimilation des profils de température 174
7.6.1 Validation 174
7.6.2 Influence du nombre et de la période 182
7.6.2.1 Augmentation de la période 182
7.6.2.2 Diminution du nombre 185
7.6.3 Expériences longues 188
7.6.4 Conclusion 189

Dans le chapitre précédent nous avons décrit l'implémentation d'une méthode variationnelle d'assimilation de données lagrangiennes. Dans ce chapitre, nous exposons quelques résultats numériques pour valider notre méthode, en soulever ses points forts et ses points faibles, ainsi que pour évaluer sa sensibilité à divers paramètres.
Le premier paragraphe décrit les paramètres des expériences jumelles et de l'optimisation. Dans le deuxième paragraphe, nous validons notre méthode en présentant une série de diagnostics qualitatifs et quantitatifs. Dans le troisième nous évaluons la sensibilité de notre méthode aux différents paramètres du réseau des flotteurs, comme la période d'échantillonnage, le nombre de flotteurs, leur répartition horizontale et leur profondeur de dérive. Dans le quatrième, nous comparons notre méthode avec une méthode "eulérienne" classiquement utilisée en océanographie. Dans le cinquième, nous étudions l'assimilation de données bruitées. Dans le sixième, nous étudions l'assimilation d'un jeu de données complet de type "Argo idéalisé", c'est-à-dire des données de positions de flotteurs et de profils verticaux de température. Le choix et l'optimisation des différents paramètres de l'assimilation sont jusitifés et expliqués en annexe.

7.1 Cadre du travail

Dans ce paragraphe on explique et on décrit les choix effectués pour les différents paramètres du processus d'assimilation : états initiaux, données assimilées, fenêtre d'assimilation, paramètres scalaires de l'optimisation.

7.1.1 Expériences jumelles avec données simulées

Les expériences jumelles avec données simulées sont une première étape nécessaire à la mise en œuvre de toute nouvelle méthode d'assimilation. En effet, nous allons voir qu'elles ont un double avantage crucial pour le développement, la validation et l'évaluation d'une nouvelle méthode.
Nous rappelons brièvement le principe des expériences jumelles (voir le paragraphe 4.5 pour plus de détails) :

- on commence par choisir un état de l'océan, obtenu par intégration du modèle, dit *état initial vrai*. En intégrant cet état initial sur la fenêtre d'assimilation, on obtient l'*état vrai*. On génère des données dites *vraies* en observant cet état vrai sur la fenêtre d'assimilation.
- On se donne ensuite un autre état initial de l'océan appelé *ébauche*. L'évolution libre de l'ébauche sur la fenêtre nous donne un état *sans assimilation* que l'on appellera encore *ébauche*.
- Enfin on obtient, après assimilation des données vraies, un *état assimilé* ou encore *état analysé* ; l'ébauche joue alors un double rôle d'initialisation de l'algorithme de minimisation et de régularisation via le terme d'ébauche de la fonction coût.

Le premier avantage des expériences jumelles est que l'état vrai est connu, et l'efficacité de la méthode peut ainsi être quantifiée, en comparant état vrai et ébauche d'une part et état vrai et état assimilé d'autre part. En météorologie ou en océanographie opérationnelle l'état vrai n'est bien sûr pas connu et valider une méthode est beaucoup plus périlleux.
Le deuxième avantage est que les données sont vraies, c'est-à-dire issues d'un état du modèle, ce qui est évidemment plus favorable au processus d'assimilation que des données

réelles, ne correspondant pas nécessairement au modèle. On peut alors soit négliger complètement les problèmes d'erreurs modèle et d'observation, soit imposer une erreur "maîtrisée" aux observations.

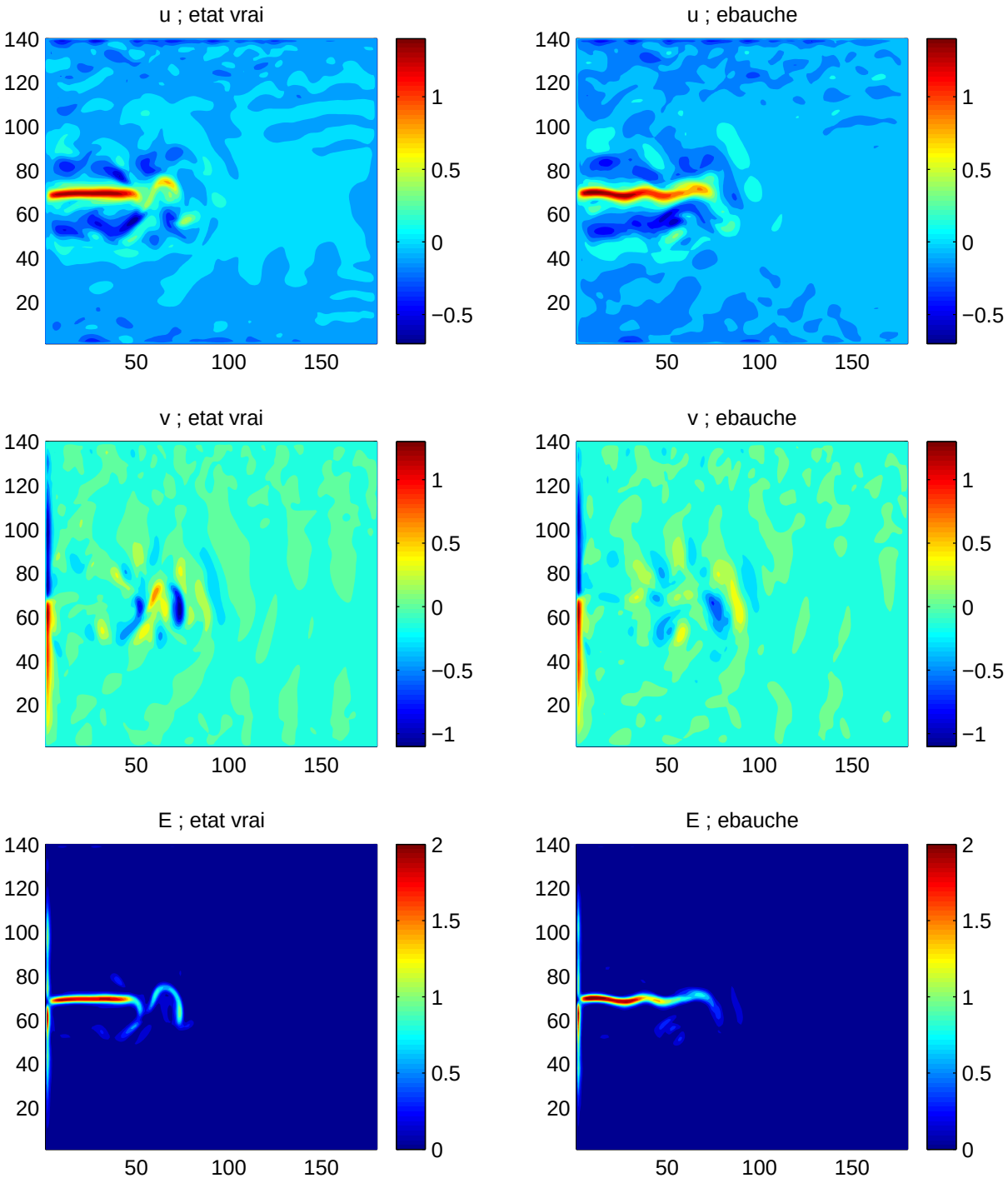


FIG. 7.1 – Expériences jumelles : champs de vitesse u, v et énergie cinétique au niveau 1 pour l'état vrai et l'ébauche au temps initial

7.1.2 État vrai

L'état vrai peut être choisi assez librement. Nous avons choisi une stratification initiale, autrement dit un profil de température initial, puis nous avons intégré notre modèle pendant 25 ans, jusqu'à obtention du spin-up, c'est-à-dire un régime stable de l'océan, où la taille et le nombre des structures importantes (gyres, courant de jet central, tourbillons majeurs) varie peu. La figure 7.1 (à gauche) représente une coupe horizontale à la surface (ie au niveau vertical numéro 1) pour les vitesses horizontales u et v ainsi que pour l'énergie cinétique de l'état initial vrai.

7.1.3 Ébauche

Le choix de l'ébauche est nettement moins élémentaire. Idéalement nous aimerions pouvoir nous permettre de choisir un état de l'océan relativement éloigné de l'état vrai, comme cela peut être le cas en océanographie opérationnelle. En pratique on dispose du résultat de la prévision précédente qu'on peut espérer assez proche de la vérité. Il est donc assez raisonnable de supposer que l'ébauche est "proche" de l'état vrai, "proche" en un sens imprécis car justement l'état vrai est inconnu ! En expériences jumelles, nous avons l'état vrai, et le moyen le plus simple de fabriquer des ébauches est de choisir l'état du même océan quelque temps (jours, mois, années) avant l'état vrai. Il est très important pour l'efficacité de la minimisation d'avoir effectivement un petit écart entre l'ébauche et l'état vrai : en effet notre fonction coût est non-quadratique, car le modèle et l'opérateur d'observation sont non-linéaires, il peut donc exister des minimums locaux. Le 4D-Var incrémental, en linéarisant modèle et opérateur autour de l'ébauche, propose un moyen de localiser approximativement un minimum, qui sera le minimum attendu si jamais l'ébauche est proche de l'état vrai. Notre ébauche est, pour les vitesses, l'état de l'océan 10 jours avant l'état vrai. *Pour la température, l'ébauche est initialisée avec la température vraie* (cf annexe pour la justification de ce choix). La figure 7.1 (à droite) représente une coupe horizontale à la surface pour u, v et l'énergie cinétique de l'état initial de l'ébauche.

7.1.4 Données simulées

L'assimilation de données réelles de flotteurs dérivants soulève plusieurs difficultés. La plus importante est la non-correspondance avec le modèle : la trajectoire, même observée avec des instruments de mesures parfaits, ne s'obtient pas en intégrant le modèle. En d'autres termes, même avec une connaissance parfaite de l'état initial de l'océan et de la position initiale du flotteur, la position observée et la position simulée ne sont pas identiques et peuvent être vraiment très différentes. Une autre difficulté vient de l'observation elle-même. Dans le cas de flotteurs acoustiques il existe une marge d'erreur sur le positionnement du flotteur due aux appareils émetteurs, récepteurs et au modèle acoustique utilisé. Dans le cas de flotteurs Argo, le problème est encore plus flagrant : un flotteur Argo dérive en profondeur, autour de 1 000 mètres, mais n'est positionné par GPS qu'une fois arrivé en surface, il est ainsi dévié lors de la montée et de la descente. De plus, il s'écoule en général quelques heures entre le moment où le flotteur arrive en surface et celui où il commence à être entendu par les satellites GPS. On comprend donc qu'assimiler des données de dérive en profondeur avec une telle marge d'erreur est pour le moment

inenvisageable. Nous avons donc choisi d'utiliser des données idéalisées générées par l'observation de l'état vrai. Nous étudierons l'assimilation de données bruitées au paragraphe 7.5. La figure 7.2 montre 2 000 trajectoires de flotteurs simulées grâce à l'état vrai du modèle pendant 10 jours. La figure 7.3 détaille une partie de l'image précédente.

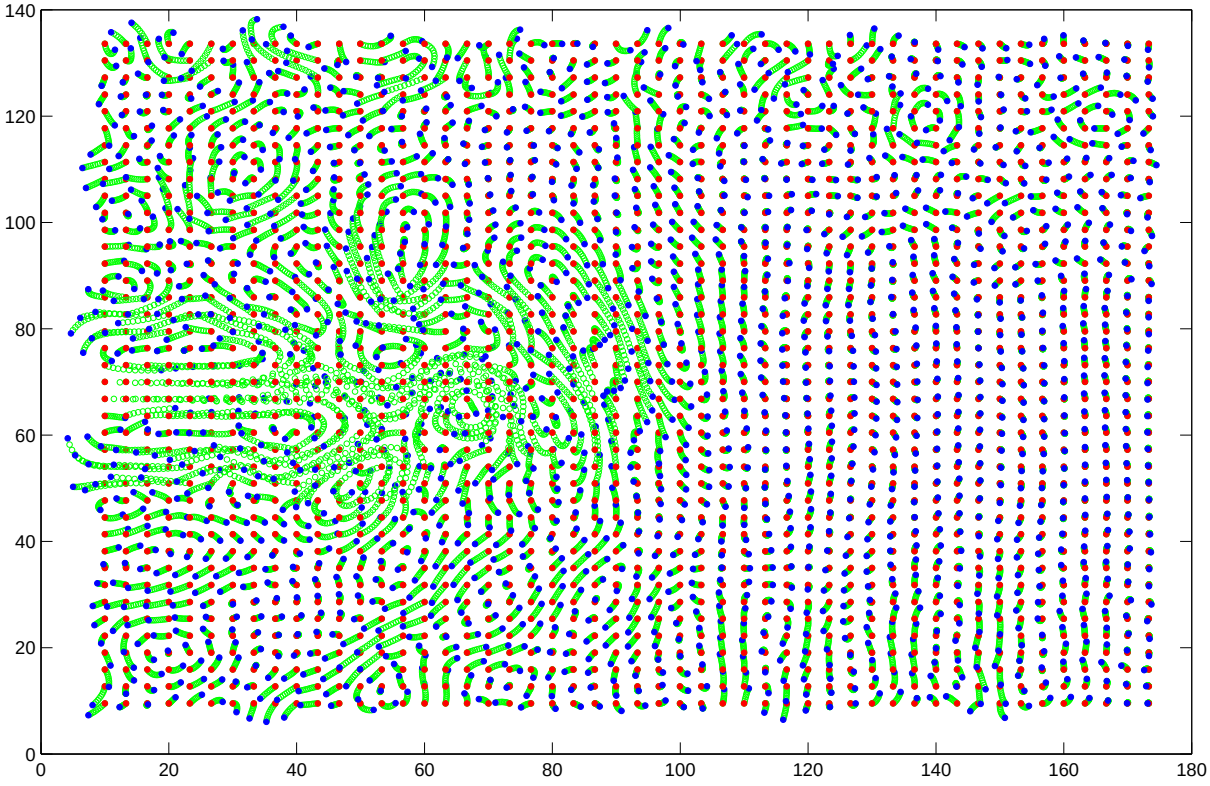


FIG. 7.2 – Expériences jumelles : positions de 2000 flotteurs, en rouge la position initiale du flotteur, en bleu sa position finale au bout de 10 jours de dérive, en vert les positions intermédiaires chaque jour. Vue de la totalité du bassin.

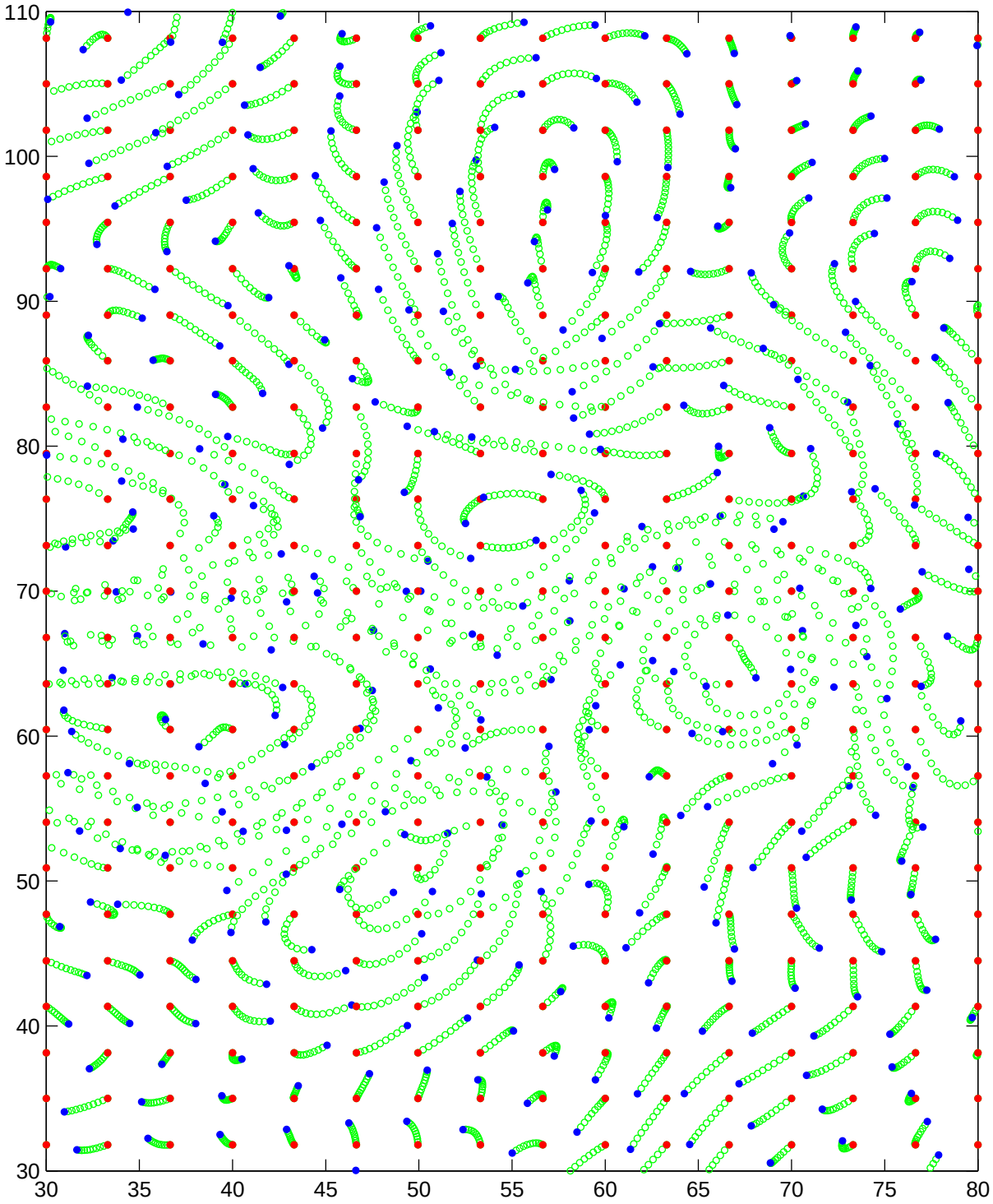


FIG. 7.3 – Expériences jumelles : positions de 2000 flotteurs, en rouge la position initiale du flotteur, en bleu sa position finale au bout de 10 jours de dérive, en vert les positions intermédiaires chaque jour. Vue d'une portion agrandie du bassin.

7.2 Validation de la méthode

Dans ce paragraphe on observe différents éléments, très simples comme la valeur de la fonction coût, qualitatifs comme des coupes horizontales de l'énergie cinétique ou encore quantitatifs comme les valeurs des écarts quadratiques (dits encore erreurs RMS), afin de mettre en évidence l'efficacité de la méthode.
Pour cela on a utilisé comme jeu de données les positions de 3 000 flotteurs dérivant en profondeur au niveau 4 (environ 1 000 mètres) pendant 10 jours, échantillonnées une fois par jour.

7.2.1 Premiers tests

Ces premiers tests ont simplement pour but de vérifier que la méthode lagrangienne implémentée converge. Pour cela, on utilise le jeu de données présenté ci-dessus ; on effectue 6 boucles externes de 10 itérations internes chacune, soit 60 itérations. Au début de chaque boucle externe, la fonction coût est calculée avec les modèle et opérateur d'observation non-linéaires, soit

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{x}_0) &= \mathcal{J}^b(\mathbf{x}_0) + \mathcal{J}^o(\mathbf{x}_0) \\ \mathcal{J}^b(\mathbf{x}_0) &= {}^t(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b)\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b) \\ \mathcal{J}^o(\mathbf{x}_0) &= \sum_{i=0}^{n} {}^t(\mathbf{y}_i^o - H_i M_{i,0}[\mathbf{x}_0])\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{y}_i^o - H_i M_{i,0}[\mathbf{x}_0]) \end{aligned} \tag{7.1}$$

alors que pour chaque itération interne, la fonction coût est calculée avec les modèle et opérateur tangents :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\delta\mathbf{x}) &= \mathcal{J}^b(\delta\mathbf{x}) + \mathcal{J}^o(\delta\mathbf{x}) \\ \mathcal{J}^b(\delta\mathbf{x}) &= {}^t\delta\mathbf{x}\mathbf{B}^{-1}\delta\mathbf{x} \\ \mathcal{J}^o(\delta\mathbf{x}) &= \sum_{i=0}^{n} {}^t(\mathbf{d}_i - \mathbf{H}_i\mathbf{M}_i...\mathbf{M}_1\delta\mathbf{x})\mathbf{R}_i^{-1}(\mathbf{d}_i - \mathbf{H}_i\mathbf{M}_i...\mathbf{M}_1\delta\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{7.2}$$

où $\mathbf{d}_i$ est le vecteur innovation (voir la description du code OPAVAR dans le chapitre précédent).

La figure 7.4 (en haut) montre l'évolution du log décimal du terme d'observations $\mathcal{J}^o$ de la fonction coût en fonction du nombre d'itérations.
On observe d'abord que la fonction coût diminue dans chaque boucle externe et augmente à chaque changement de boucle externe : en effet, les itérations internes minimisent la fonction coût incrémentale (7.2) qui décroît effectivement ; à chaque changement de boucle, on revient à la fonction coût non incrémentale (7.1) et on recommence le processus.
On observe ensuite que la fonction coût est environ divisé par 160 en 30 itérations et par 200 en 60 itérations. Sur la même figure, en bas, est représenté le $\log_{10}$ de la norme de la dérivé de la fonction coût par rapport aux valeurs initiales de u, v et T ainsi que la norme du gradient. On observe que la norme du gradient est divisée par 400 en 30 itérations et par 1 000 en 60 itérations. Après comparaison qualitative et quantitative des résultats (cf paragraphes suivants), on constate que l'état assimilé obtenu après 30 itérations est aussi bon que celui obtenu après 60 itérations, pour un coût de calcul nettement inférieur. Dans la plupart des situations on se limitera donc, pour des raisons de temps de calcul, à 30 itérations.

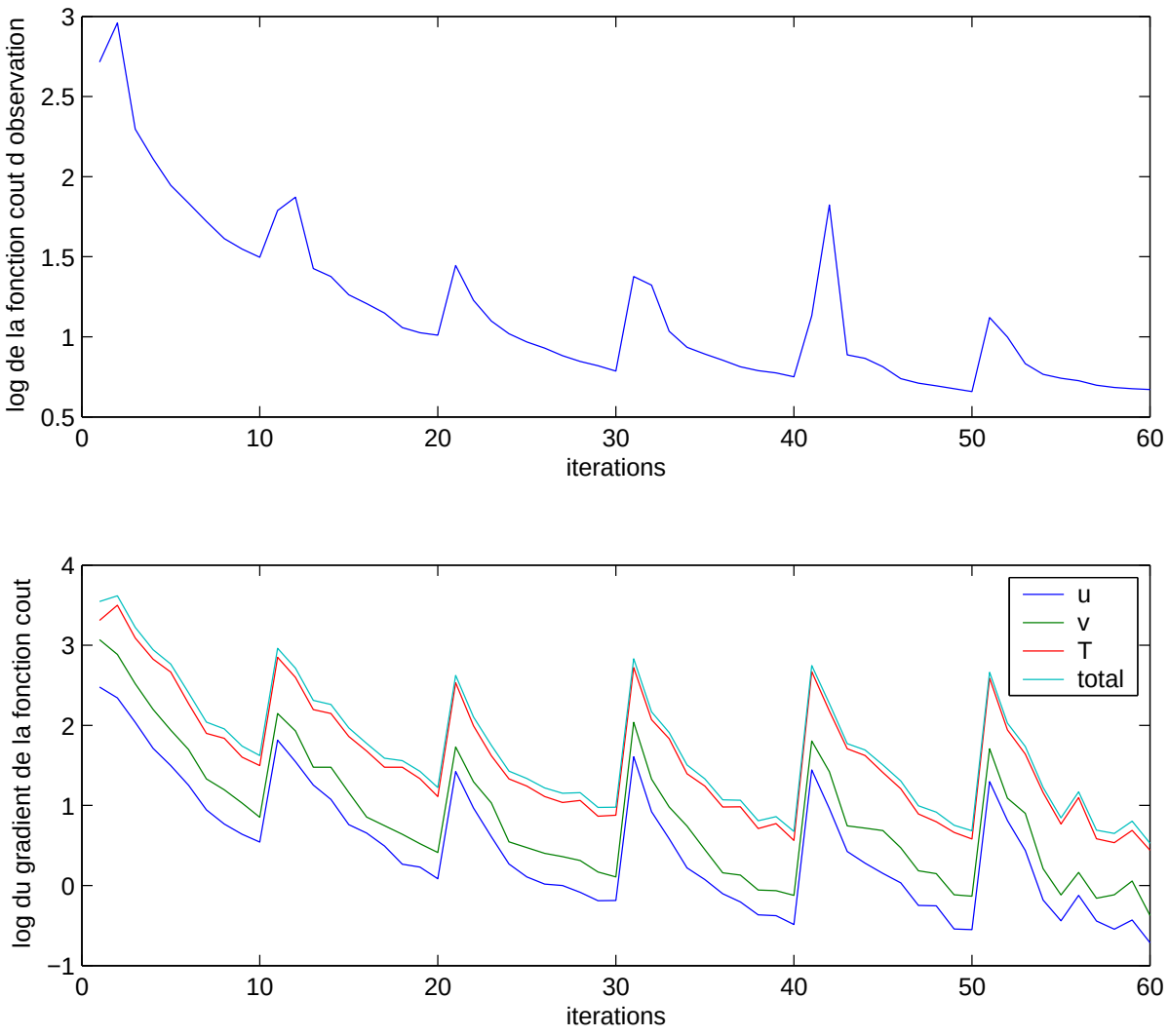


FIG. 7.4 – Premiers tests : valeurs de la fonction coût et de la norme de son gradient par rapport aux variables u, v et T en $\log_{10}$ et en fonction du nombre d'itérations.

7.2.2 Diagnostics qualitatifs

Une première façon d'évaluer la pertinence du minimum obtenu par l'algorithme est de visualiser une section des champs obtenus et de comparer avec l'état vrai et l'ébauche. On rappelle que l'ébauche est le résultat obtenu sans assimilation. On rappelle aussi que la température et la salinité de l'ébauche sont fixées à la température et à la salinité vraies ; on suppose ainsi que la température et la salitnité initiales sont parfaitement connues. On cherche uniquement à reconstituer les vitesses horizontales u et v.

Pour cela, on assimile le même jeu de données que précédemment (positions de 3 000 flotteurs dérivant au niveau 4 pendant 10 jours), et on visualise un instantané des champs de vitesse u et v à la fin de la fenêtre d'assimilation, c'est-à-dire à 10 jours.

La figure 7.5 représente les champs de vitesse u et v au niveau 1 (ie en surface) au bout de 10 jours pour l'état vrai, l'ébauche et l'état assimilé. On voit pour u comme pour v que les structures principales de l'écoulement vrai (courant jet central, principaux tourbillons) sont bien restituées par l'assimilation. On peut remarquer aussi que la présence d'observations au niveau 4 seulement a permis d'améliorer significativement le niveau 1 (et tous les autres niveaux). Par contre, on notera que le champ assimilé est plus bruité que les autres.

La figure 7.6 représente les champs de vitesse u et v au niveau 4 et comme précédemment on observe que l'état assimilé est plus proche de l'état vrai que ne l'est l'ébauche.

Enfin, la figure 7.7 représente des coupes horizontales aux niveaux 1 et 4 de l'énergie cinétique $E_c = u^2 + v^2$ à la fin de la fenêtre temporelle pour les trois champs vrai, assimilé et ébauche. Les grosses structures (qui sont aussi les plus énergétiques) sont ainsi bien mises en évidence et, tout en restant imparfait, l'état assimilé est satisfaisant.

Remarque 7.1 *Nous présentons des instantanés à 10 jours plutôt qu'au temps initial pour la raison suivante : l'objectif du processus d'assimilation est l'identification de l'état initial ; cependant, il ne faut pas oublier que la fonction coût a deux termes, le terme qui se rapporte effectivement aux observations, et le terme de régularisation qui est un rappel à l'ébauche. Pour que la minimisation aboutisse, le terme d'ébauche doit être assez grand. Le résultat du processus d'assimilation est ainsi un compromis entre* coïncider avec les observations vraies sur toute la fenêtre *et* coïncider avec l'ébauche au temps initial. *L'état initial analysé est donc proche de l'ébauche, et l'adéquation entre l'état analysé et l'état vrai s'améliore au cours du temps. On verra ceci sur l'analyse quantitative des résultats dans le paragraphe suivant.*

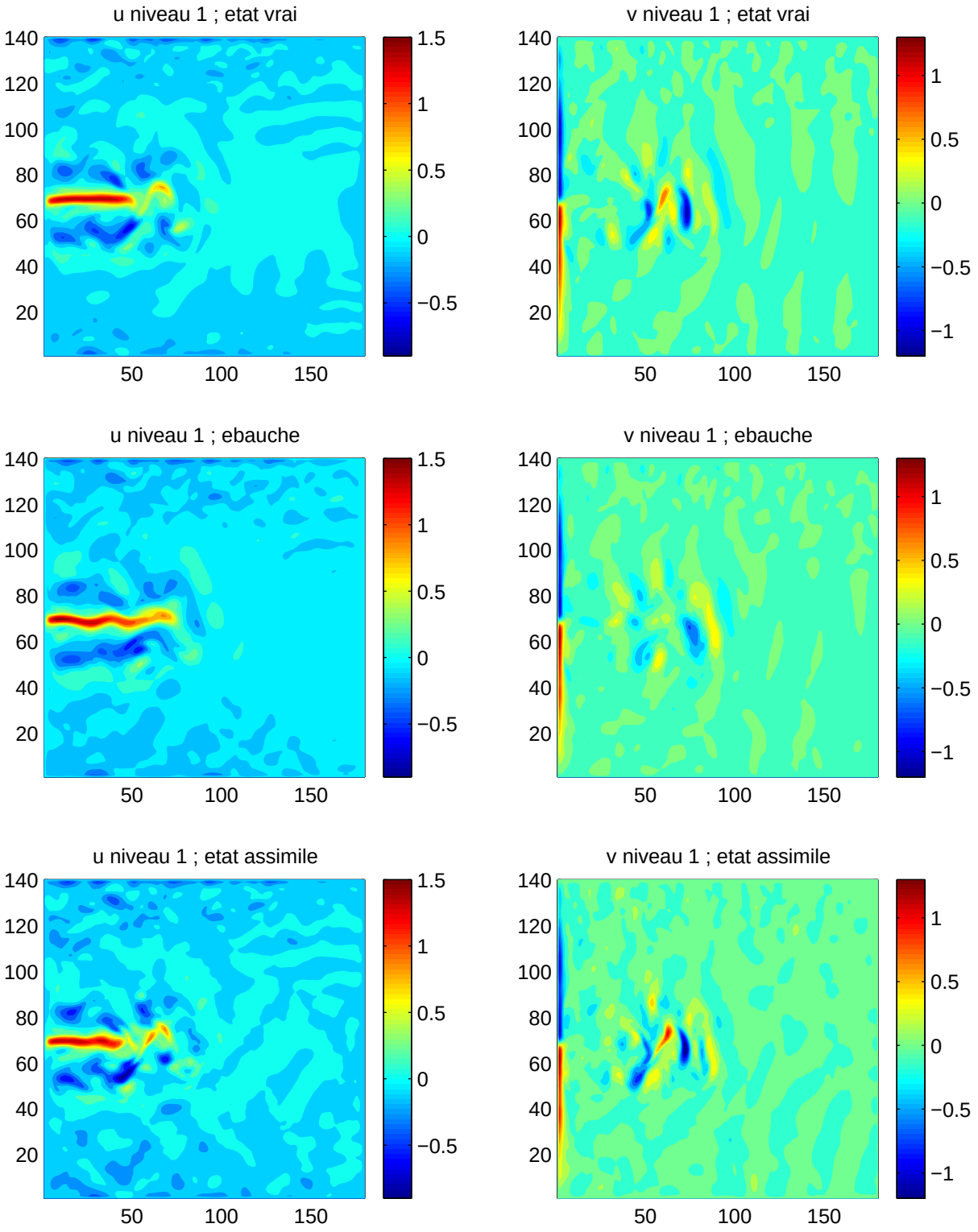


FIG. 7.5 – Exemple de diagnostic qualitatif : champs de vitesses u et v au niveau 1.

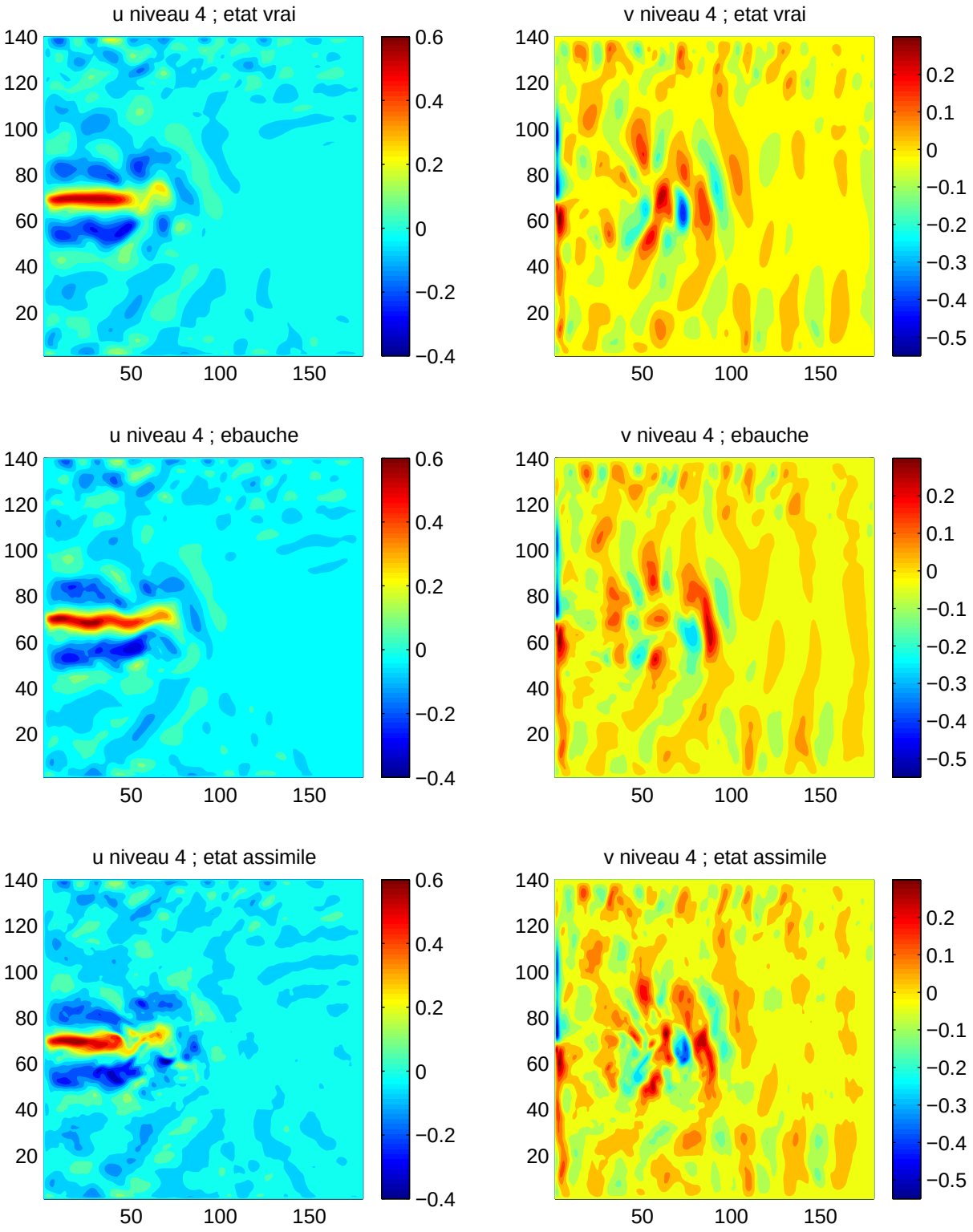


FIG. 7.6 – Exemple de diagnostic qualitatif : champs de vitesses u et v au niveau 4.

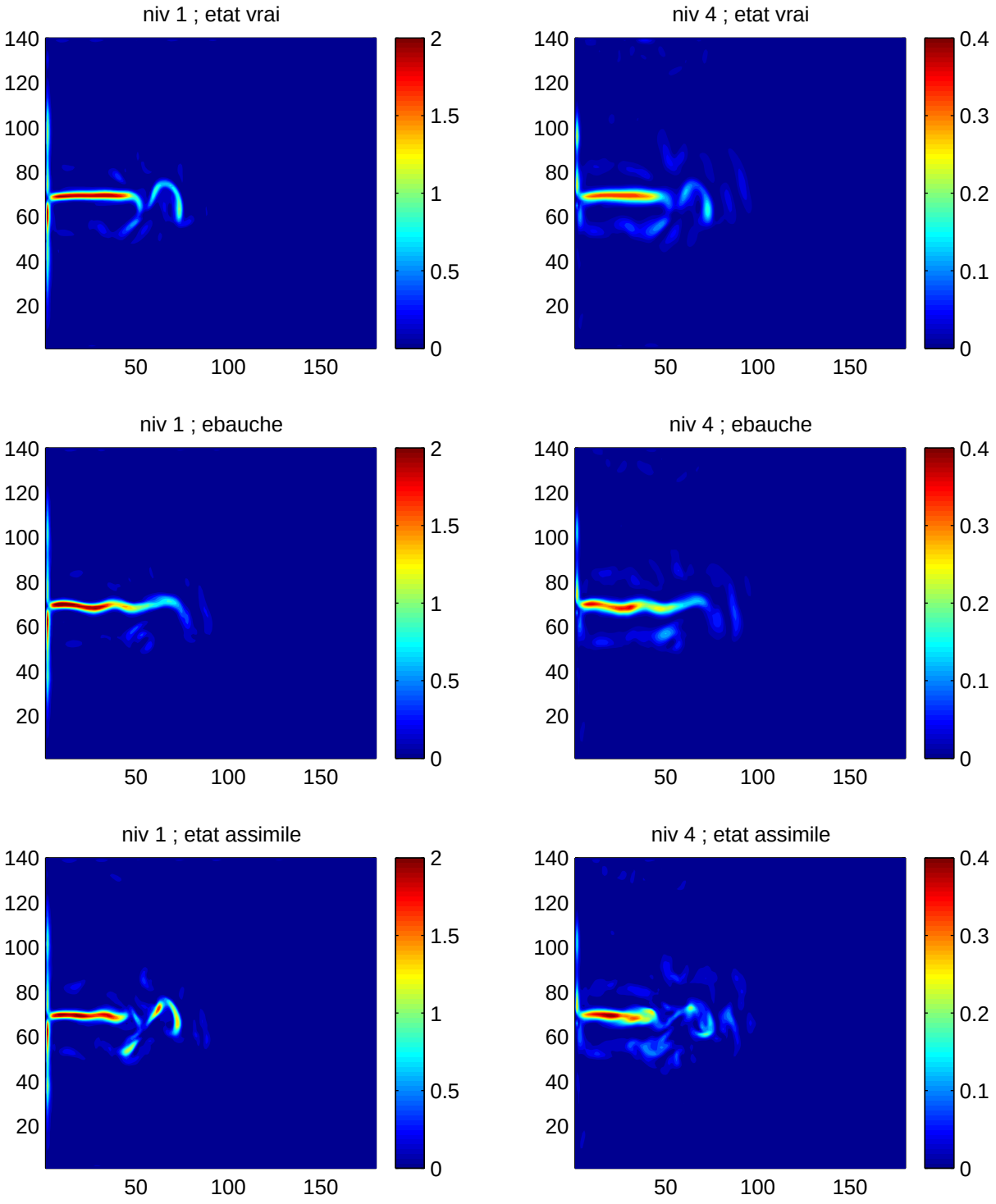


FIG. 7.7 – Exemple de diagnostic qualitatif : énergie cinétique aux niveaux 1 et 4.

7.2.3 Diagnostics quantitatifs

Une façon plus quantitative d'évaluer l'efficacité de la méthode est de calculer d'une part la différence entre l'état vrai et l'ébauche (différence sans assimilation), d'autre part la différence entre l'état vrai et l'état assimilé (différence avec assimilation), puis de comparer, via certaines normes bien choisies, les différences obtenues. On va introduire trois façon de quantifier les erreurs avec et sans assimilation.

• La première, notée E_1, que nous appelons *erreur RMS relative* est la version discrète de l'erreur continue $\mathcal{E}_1$ suivante :

$$\mathcal{E}_1(u;t) = \Big(\frac{\int_\Omega |u_v(x,y,z,t) - u(x,y,z,t)|^2\,dx\,dy\,dz}{\int_\Omega |u_v(x,y,z,t)|^2\,dx\,dy\,dz}\Big)^{1/2} \tag{7.3}$$

avec u_v la vitesse vraie, et u la vitesse dont on veut calculer l'erreur (par exemple l'ébauche ou le résultat d'une expérience d'assimilation).
La version discrète de $\mathcal{E}_1$ est calculée par une simple méthode des rectangles :

$$E_1(u;t) = \Big(\frac{\sum_{i,j,k} h(k)|u_v(i,j,k,t) - u(i,j,k,t)|^2}{\sum_{i,j,k} h(k)|u_v(i,j,k,t)|^2}\Big)^{1/2} \tag{7.4}$$

où $h(k)$, appelé facteur d'échelle vertical associé au niveau k, est la distance verticale entre le niveau k et le niveau $k+1$, i, j et k sont les indices de grille en longitude, latitude et profondeur, et t est l'indice temporel.

• La deuxième, notée E_2 et appelée *erreur RMS relative finale*, est une fonction du niveau vertical. Elle est donnée par la formule

$$E_2(u;k) = \Big(\frac{\sum_{i,j} |u_v(i,j,k,t_f) - u(i,j,k,t_f)|^2}{\sum_{i,j} |u_v(i,j,k,t_f)|^2}\Big)^{1/2} \tag{7.5}$$

où t_f est le temps final de simulation, c'est-à-dire 10 jours, à la fin de la fenêtre temporelle d'assimilation. Sa version continue est

$$\mathcal{E}_2(u;z) = \Big(\frac{\int_{x,y\in\Omega_2} |u_v(x,y,z,t_f) - u(x,y,z,t_f)|^2\,dx\,dy}{\int_{x,y\in\Omega_2} |u_v(x,y,z,t_f)|^2\,dx\,dy}\Big)^{1/2} \tag{7.6}$$

où Ω_2 est la section horizontale du domaine : $\Omega = \Omega_2 \times (0,a)$.

• La troisième erreur que l'on utilisera pour nos diagnostics, dite *erreur RMS relative globale*, est une combinaison linéaire des erreurs $E_1(u)$, $E_1(v)$. Les coefficients de cette combinaison linéaire sont calculés en fonction des écarts types (temporels) des variables u et v. La formule donnant E_3 est la suivante :

$$E_3(t) = \Big(\frac{1}{\sigma_u}E_1(u;t) + \frac{1}{\sigma_v}E_1(v;t)\Big)\Big(\frac{1}{\sigma_u} + \frac{1}{\sigma_v}\Big)^{-1} \tag{7.7}$$

Les écarts σ sont des écarts types temporels moyennés en espace et en temps :

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i,j,k,t} h(k)|u(i,j,k,t) - \overline{u}(i,j,k)|^2}{N_i N_j N_t \sum_k h(k)} \tag{7.8}$$

où N_i, N_j, et N_t sont respectivement le nombres de points de discrétisation en longitude, latitude et temps, $\overline{u}$ est la moyenne temporelle de u :

$$\overline{u}(i,j,k) = \frac{1}{N_t}\sum_t u(i,j,k,t) \tag{7.9}$$

De la même façon on calcule σ_v.

• Enfin, la quatrième erreur, dite *erreur relative globale finale* est calculée comme E_3, en remplaçant E_1 par E_2 dans la formule (7.7) :

$$E_4(k) = \Big(\frac{1}{\sigma_u}E_2(u;k) + \frac{1}{\sigma_v}E_2(v;k)\Big)\Big(\frac{1}{\sigma_u}+\frac{1}{\sigma_v}\Big)^{-1} \tag{7.10}$$

La figure 7.8 illustre ces différents calculs. À la première ligne à gauche on a représenté l'erreur relative globale E_3 pour u et v en fonction du temps. À droite figure l'erreur relative globale finale E_4 au temps final en fonction du niveau. Aux deuxième et troisième lignes on a representé l'erreur relative E_1 pour u et v en fonction du temps (à gauche) et l'erreur relative finale E_2 en fonction du niveau (à droite). Pour les erreurs en fonction du temps on note que, comme annoncé à la remarque 7.1, l'erreur diminue au cours du temps ; à la fin de la fenêtre temporelle l'amélioration par rapport à l'ébauche est d'environ 30%. Pour les erreurs finales en fonction du niveau, on constate que l'amélioration a lieu à tous les niveaux, bien que l'information assimilée provienne uniquement de flotteurs dérivant au niveau 4, comme on a pu le voir au paragraphe précédent.

Il est également intéressant de distinguer les composantes barotrope et barocline de la vitesse. La composante barotrope de la vitesse u ou v, notée u_{bt} ou v_{bt} est sa moyenne verticale, et correspond au courant moyen sur la colonne d'eau :

$$u_{bt}(i,j,t) = \frac{\sum_k h(k)u(i,j,k,t)}{\sum_k h(k)} \tag{7.11}$$

La composante barocline, u_{bc} ou v_{bc}, est le résidu entre la vitesse et sa composante barotrope. Elle est donnée par :

$$u_{bc}(i,j,k,t) = u(i,j,k,t) - u_{bt}(i,j,t) \tag{7.12}$$

La répartition de l'énergie est d'environ 4/7 pour la composante barotrope et 3/7 pour la composante barocline. La figure 7.9 présente les erreurs E_1 et E_3 pour les composantes barotrope et barocline de u et v. On remarque que la composante barotrope est bien restituée, et ce dès l'instant initial, alors que la composante barocline est fortement dégradée à l'instant initial, puis revient à hauteur de l'ébauche (et même un peu mieux) vers la fin de la fenêtre.
Ces résultats ne sont pas complètement surprenants : les flotteurs dérivent à un seul niveau, cela semble logique qu'ils ne "voient" pas les variations verticales de vitesse et restituent mal les composantes baroclines. Par contre ils "voient" bien l'ordre 0 de ces variations verticales, c'est-à-dire les composantes barotropes.

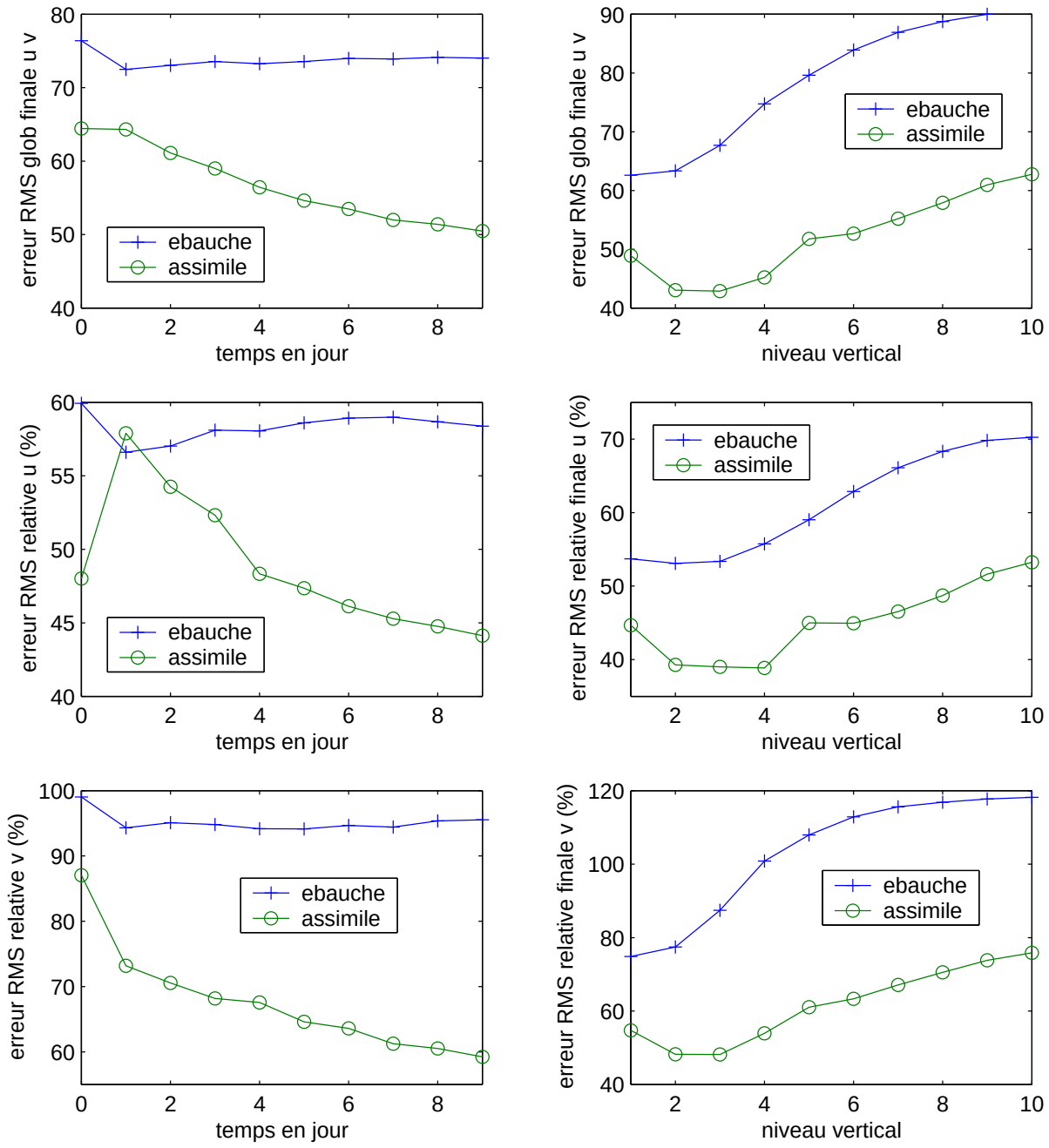


FIG. 7.8 – Exemple de diagnostic quantitatif : erreurs RMS relatives en fonction du temps et du niveau pour les vitesses.

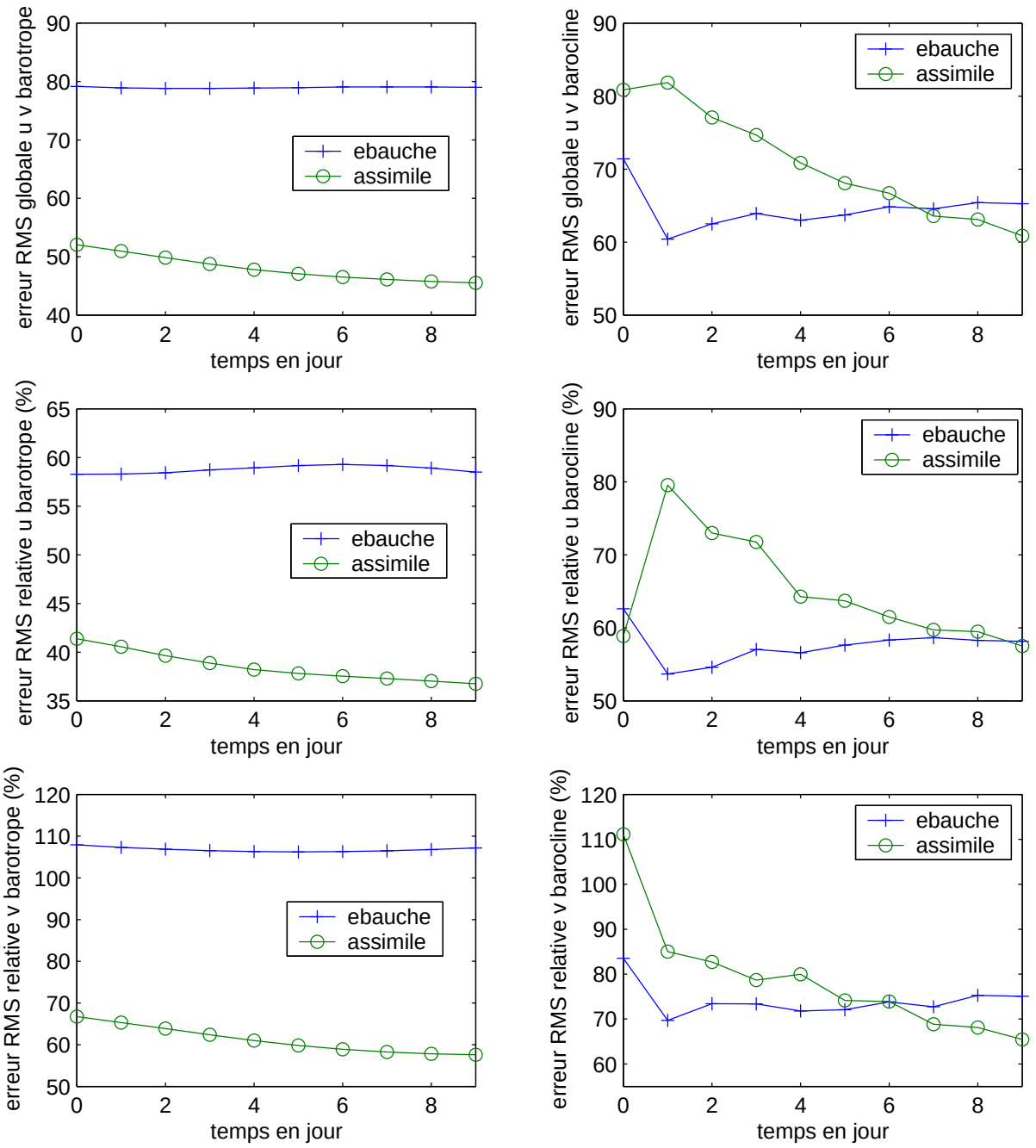


FIG. 7.9 – Exemple de diagnostic quantitatif : erreurs RMS en fonction du temps pour les composantes barocline et barotrope de la vitesse.

7.2.4 Expériences longues

Il est intéressant de poursuivre l'assimilation au-delà d'une fenêtre temporelle. En effet, on a vu (remarque 7.1) que le rôle du rappel à l'ébauche est très important et tend à donner autant d'importance à l'ébauche qu'aux observations. Or nous souhaitons nous libérer de ce rappel, pour reconstituer l'état vrai (et non un compromis entre l'état vrai – via les observations – et l'ébauche comme c'est le cas actuellement). Pour cela, nous pouvons poursuivre l'assimilation sur la fenêtre temporelle suivante, de 10 à 20 jours, en utilisant comme nouvelle ébauche le résultat de l'assimilation précédente . Cette nouvelle ébauche contient alors l'information précédemment assimilée. On peut réitérer le processus à volonté... On appelera *cycle* le processus d'assimilation complet sur une fenêtre de dix jours. Nous présentons dans ce paragraphe les résultats obtenus pour trente jours, soit trois cycles successifs.

Qualitativement, la figure 7.10 montre les champs u et v obtenus après 30 jours, au niveau 1. L'adéquation entre l'état vrai et l'état assimilé est tout à fait satisfaisante. Les autres niveaux sont très bien restitués également.

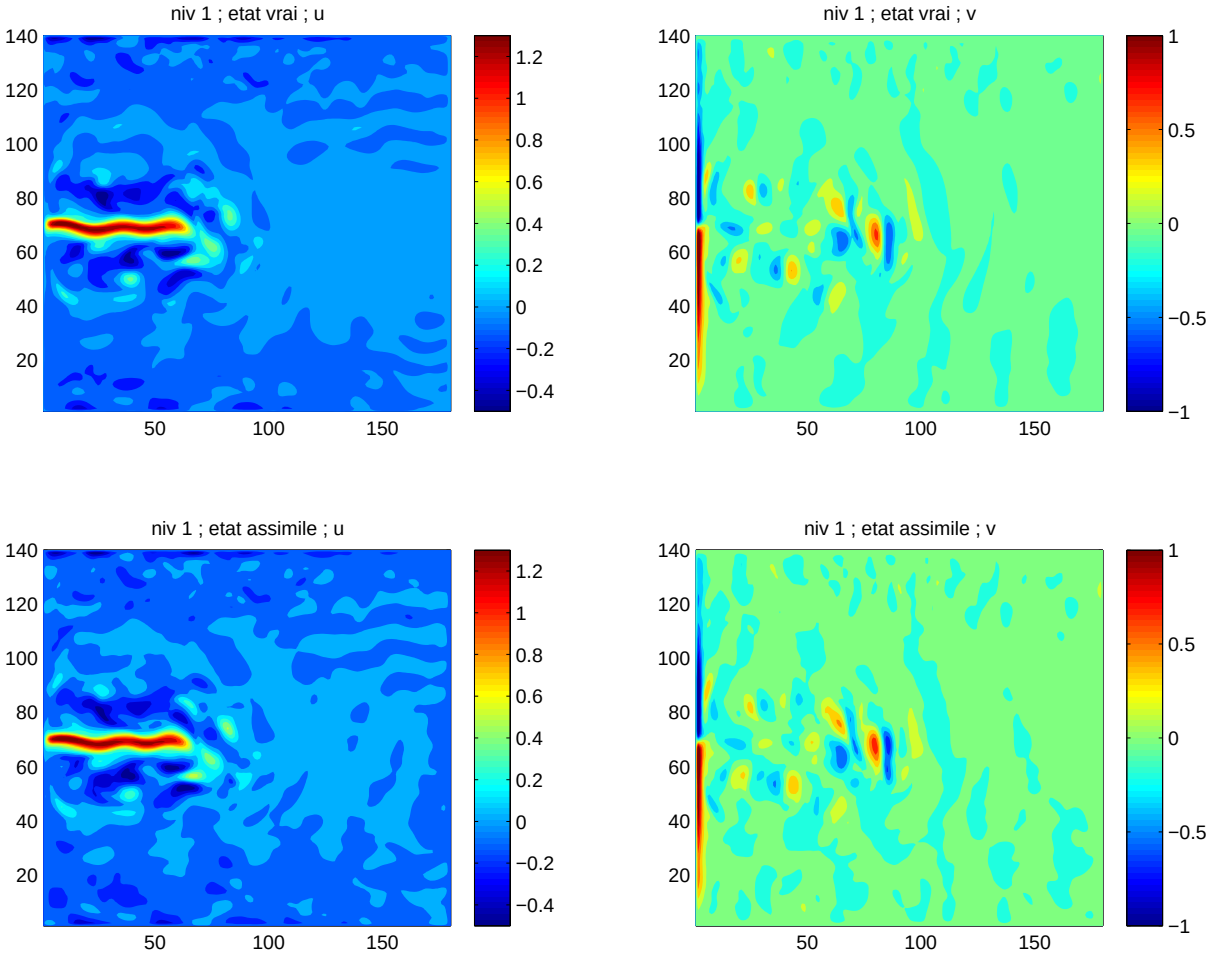


FIG. 7.10 – Expérience de 30 jours en assimilant seulement les positions : champs u et v horizontaux à la surface à la fin de la fenêtre temporelle.

Quantitativement, la figure 7.11 présente les erreurs RMS relatives E_1 et relatives globales E_3 pour u et v en fonction du temps. On note que l'amélioration se poursuit au même rythme. En trois cycles d'assimilation on a ainsi ramené l'erreur de 75% (première ébauche) à 21% (dernier état analysé), soit une diminution de plus de 70%.

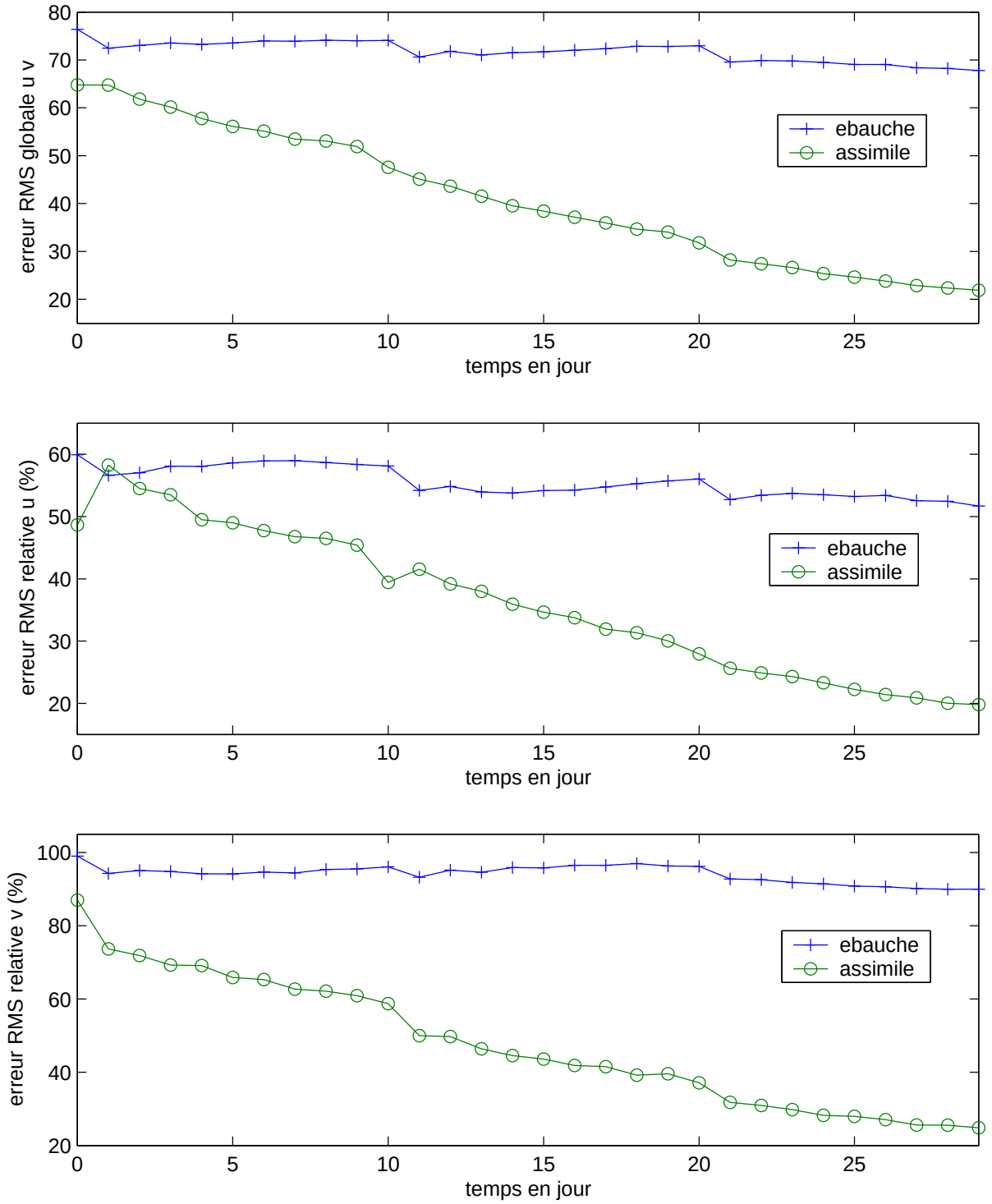


FIG. 7.11 – Expérience de 30 jours en assimilant seulement les positions : erreurs RMS pour u et v en fonction du temps.

Finalement, les figures 7.12 et 7.13 montrent les erreurs relatives E_1 et relatives globales E_3 en fonction du temps pour les composantes barotrope et barocline des vitesses u et v. La tendance observée précédemment se confirme pour les composantes barotropes, qui sont très bien restituées. Pour les composantes baroclines, on observe une amélioration avec le temps et les piètres résultats observés pour dix jours d'assimilation (cf figure 7.9) s'améliorent nettement.

Ici on peut se demander pourquoi on n'a pas assimilé directement les données avec une fenêtre plus grande, ou même utilisé la stratégie temporelle proposée par [Blum *et al.*, 1998]. Cette stratégie propose un moyen d'identifier un état initial donné en assimilant d'abord les données sur la fenêtre $[0, T]$ puis sur $[0, 2T]$, $[0, 4T]$... Ici nous sommes limités par la formulation incrémentale du problème. En effet, le modèle comme l'opérateur d'observation, tous deux non-linéaires, sont linéarisés pour la minimisation. On ne peut donc pas augmenter à volonté la taille de la fenêtre temporelle, on est limité par la validité de ce que l'on appelle *l'hypothèse linéaire tangent*. En pratique, notre méthode ne marche pas bien pour des fenêtres de 20 et 30 jours. On pourra trouver plus de détails sur ce point dans l'annexe. On doit donc se limiter à dix jours et la stratégie des cycles successifs, qui permet aussi de transporter l'information d'une fenêtre à l'autre via le changement d'ébauche, est bien adaptée à notre problème.

Remarque 7.2 *Si l'objectif recherché est d'identifier l'état initial sur une fenêtre de dix jours donnée, on peut adapter la stratégie des cycles successifs de la manière suivante : on effectue normalement le premier cycle, pour le deuxième on reprend les mêmes données, la même fenêtre, et on remplace l'ébauche par l'état initial analysé, puis on recommence... Ce n'est pas notre propos ici, donc nous ne regarderons pas ceci.*

7.2.5 Conclusion

Ces quelques diagnostics montrent que notre méthode fonctionne : lorsque la température et la salinité sont connues, l'assimilation des données de positions permet de reconstituer les vitesses u et v. Qualitativement, les structures principales de l'écoulement sont bien restituées (jet, principaux tourbillons). Quantitativement, nous venons de voir que la méthode *lagrangienne* améliore le champ de vitesse à tous les niveaux, et pas uniquement au niveau où se trouvent les flotteurs. De plus, elle semble bien restituer le contenu barotrope de l'information mais nettement moins bien le contenu barocline. Lorsque nous poursuivons les expériences au-delà de dix jours, en effectuant plusieurs cycles d'assimilation, nous obtenons un état de l'océan très proche de l'état vrai (même pour les composantes baroclines). Dans les expériences qui vont suivre on se limitera dès que possible, pour des raisons de temps de calcul, à un seul cycle d'assimilation.

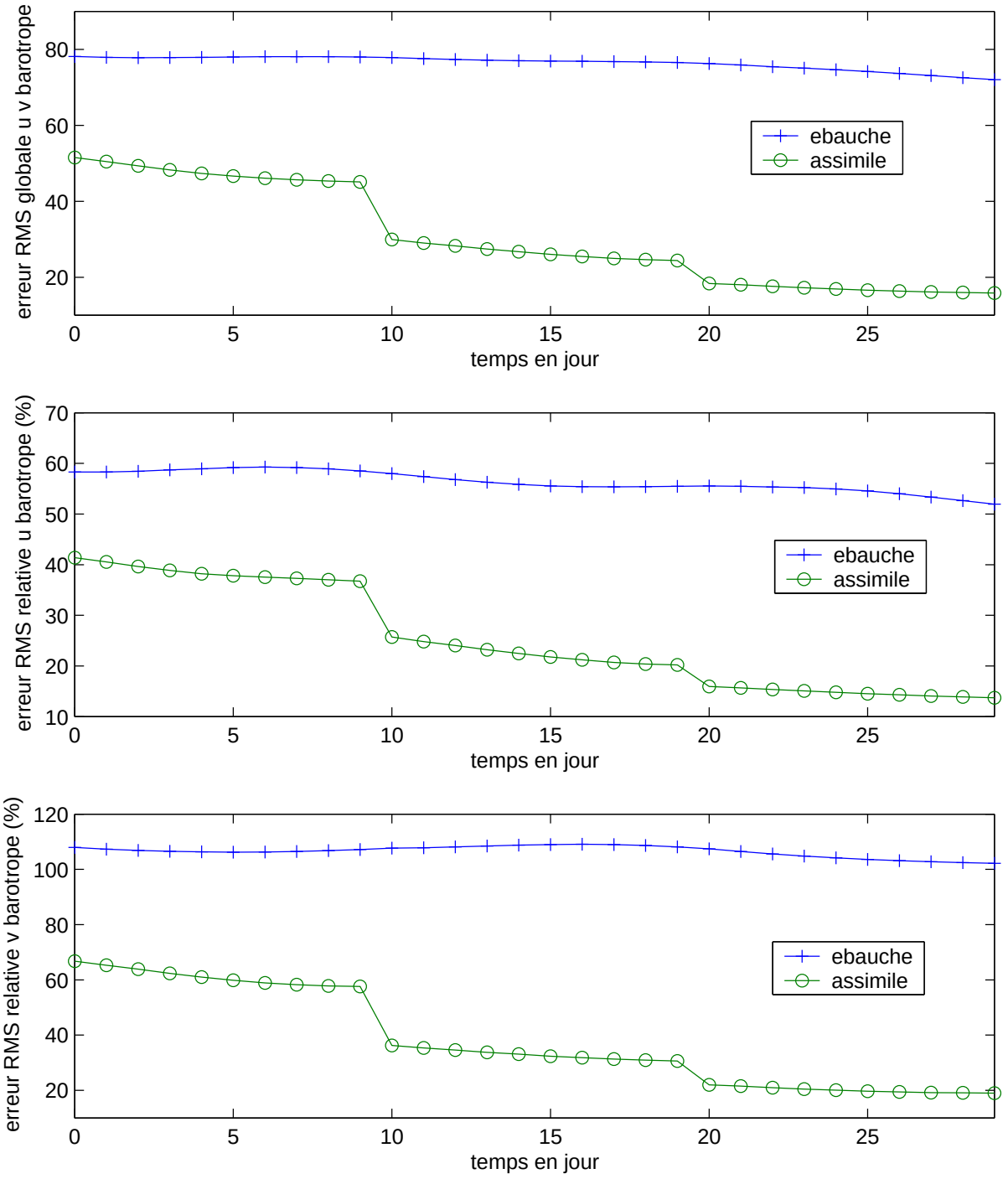


FIG. 7.12 – Expérience de 30 jours en assimilant seulement les positions : erreurs RMS pour les composantes barotropes de u et v.

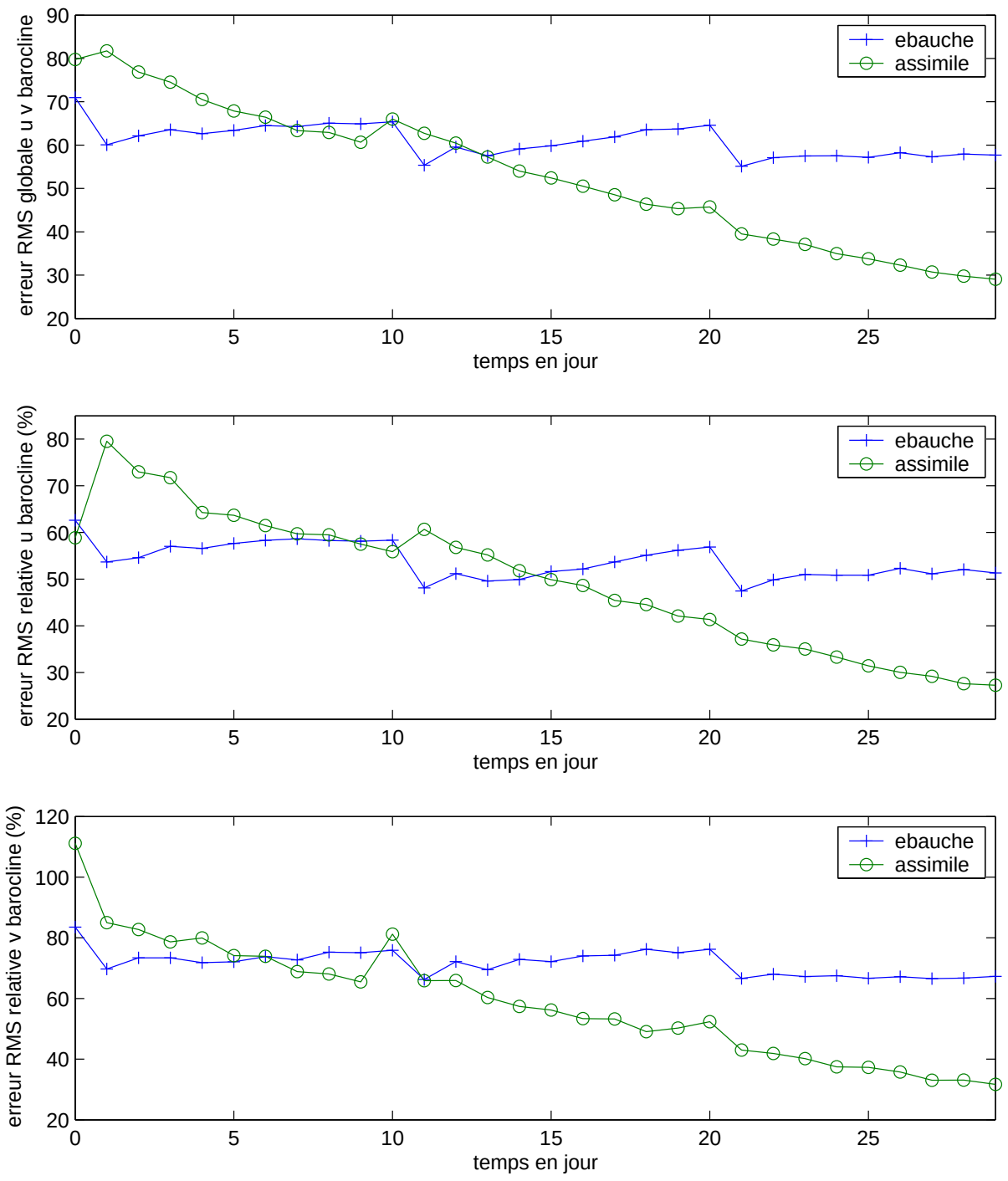


FIG. 7.13 – Expérience de 30 jours en assimilant seulement les positions : erreurs RMS pour les composantes baroclines de u et v.

7.3 Étude de la sensibilité aux différents paramètres du réseau des flotteurs

Dans ce paragraphe on étudie la sensibilité de la méthode aux paramètres suivants : période temporelle d'échantillonnage, nombre de flotteurs et répartition horizontale, niveau vertical de dérive et enfin impact couplé du nombre de flotteurs et de la période d'échantillonnage de leur positions. Le principe de chaque étude est le même : tous les paramètres sont fixés, à l'exception de celui que l'on examine, qui prend diverses valeurs.

7.3.1 Période temporelle d'échantillonnage des positions

Le contexte de ces expériences est le suivant : 3 000 flotteurs dérivent au niveau 4 (soit environ 1 000 mètres de profondeur), seule la période d'échantillonnage des positions varie. Nous avons effectué sept expériences avec des périodes allant de six heures à dix jours.

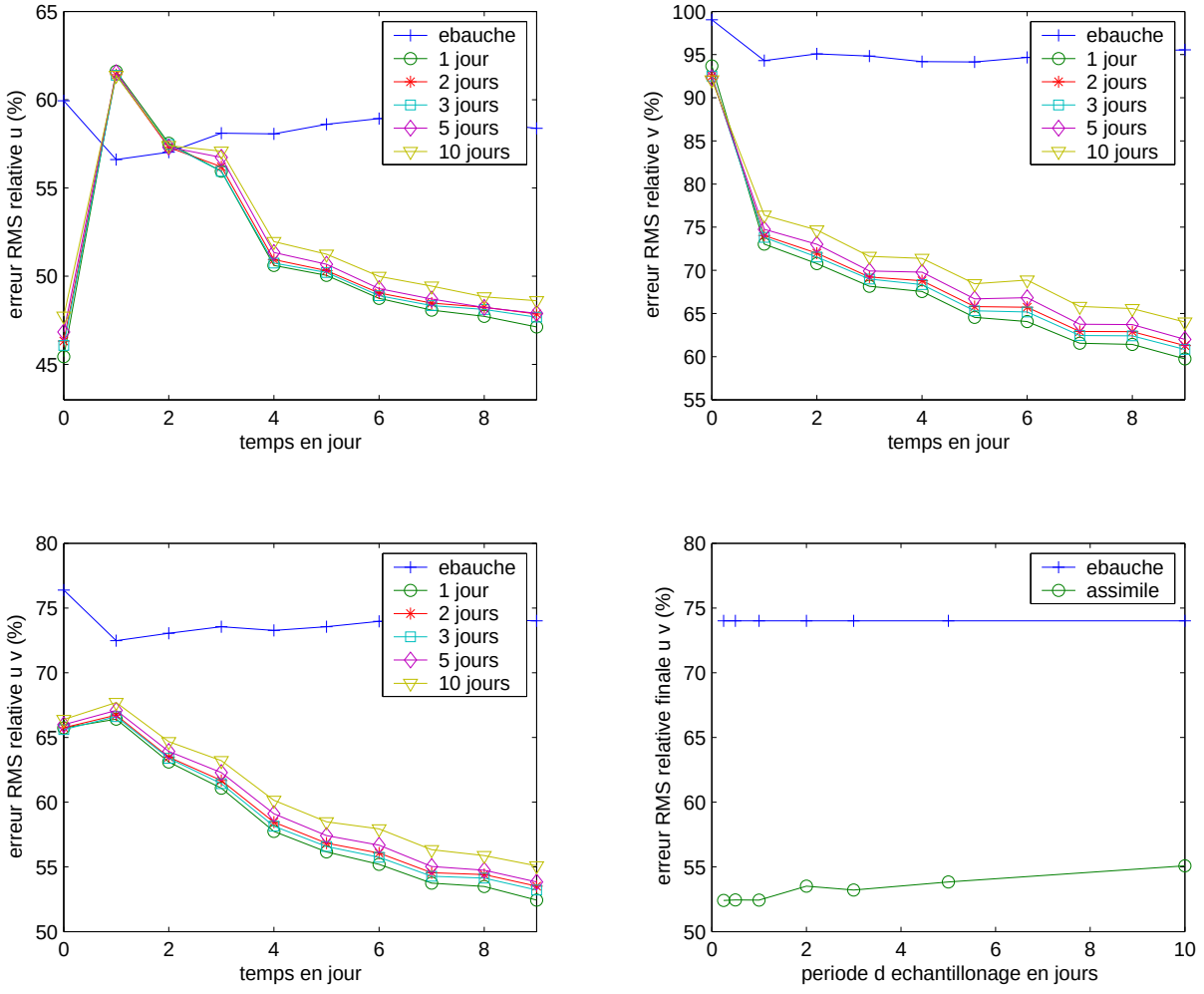


FIG. 7.14 – Étude de la sensibilité à la période d'échantillonnage : erreurs RMS pour u, v en fonction du temps et de la période d'échantillonnage.

La figure 7.14 présente les résultats obtenus : en haut sont représentées les erreurs RMS relatives E_1 en fonction du temps pour u (à gauche) et v (à droite), pour l'ébauche (sans assimilation) et les états assimilés corespondant à des périodes de 1, 2, 3, 5 et 10 jours. Les courbes obtenues pour 6 et 12 heures sont très semblables à celle obtenue pour 1 jour, elles ont été omises pour plus de clarté. En bas à gauche on a représenté l'erreur relative globale E_3 pour (u, v) en fonction du temps. Enfin en bas à droite on a tracé l'erreur relative globale finale $E_3(t_f)$ en fonction de la période d'échantillonnage.

On remarque que notre méthode est très robuste vis à vis de l'augmentation de la période d'échantillonnage, son efficacité est quasiment indépendante de la période, elle nous permet d'assimiler indifféremment des flotteurs de type acoustiques (période de quelques heures) ou Argo (période de cinq jours en Méditerranée et de dix jours en Atlantique).

7.3.2 Nombre de flotteurs

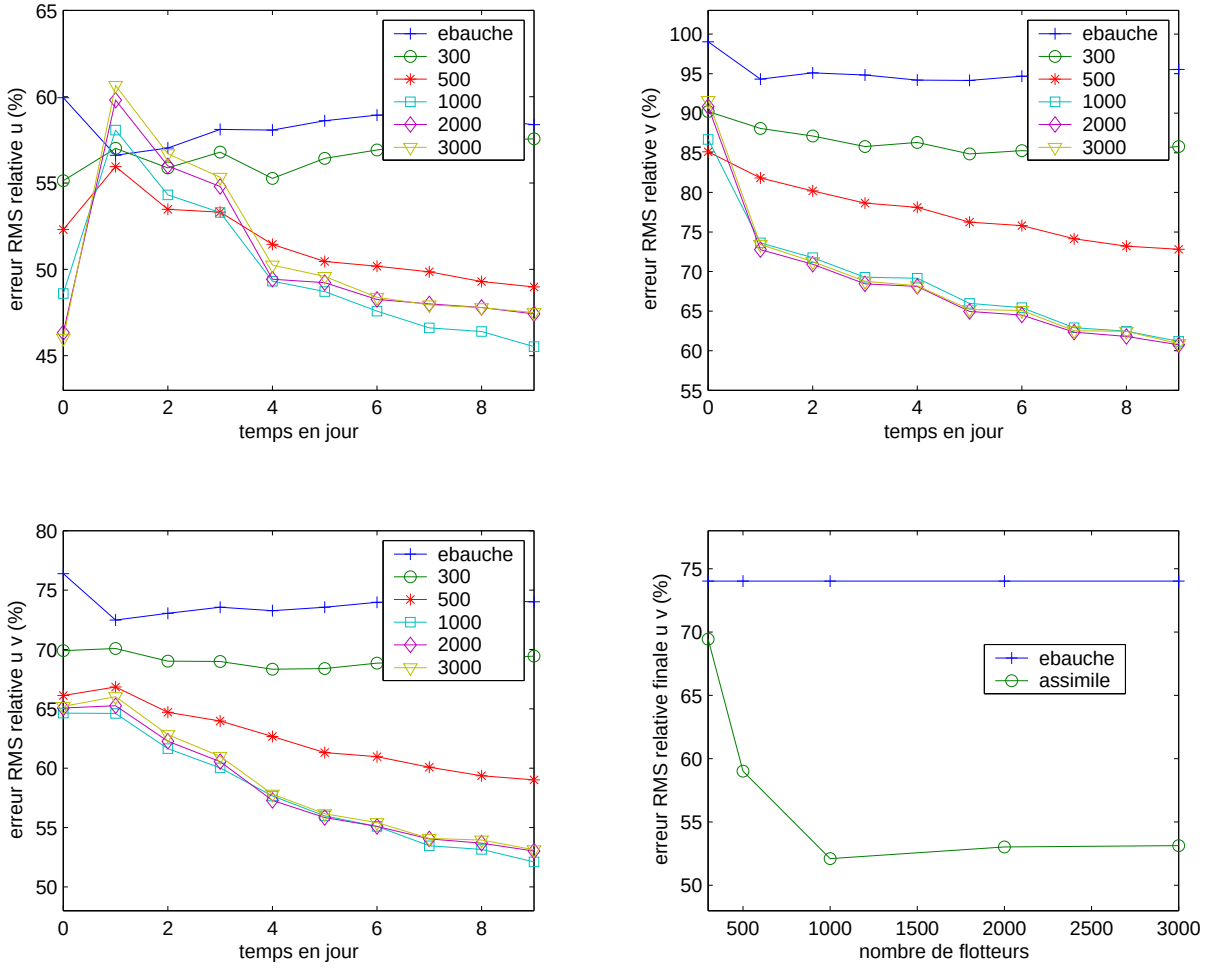


FIG. 7.15 – Étude de la sensibilité au nombre de flotteurs : erreurs RMS pour u et v en fonction du temps et du nombre de flotteurs.

Le contexte de ces expériences est le suivant : les flotteurs, en nombre variable, dérivent au niveau 4 et sont positionnés toutes les six heures. Nous avons effectué cinq expériences avec 300, 500, 1 000, 2 000 et 3 000 flotteurs.

La figure 7.15 présente les erreurs RMS relatives pour u et v en fonction du temps (en haut), l'erreur globale pour (u, v) en fonction du temps (en bas à gauche) pour les cinq expériences effectuées ainsi que pour la simulation libre (ie l'ébauche, sans assimilation). En bas à droite on a représenté l'erreur relative globale finale pour (u, v) en fonction du nombre de flotteurs.

On remarque cette fois que la méthode est très sensible au nombre de flotteurs : dans tous les cas l'erreur est moins grande avec assimilation que sans, mais en dessous de 1 000 flotteurs les résultats sont médiocres. Au-delà de 1 000, l'ajout de flotteurs supplémentaires n'améliore pas le résultat.

7.3.3 Nombre et distribution horizontale

Le contexte de ces expériences est le suivant : les flotteurs, en nombre variable, dérivent au niveau 4 et leurs positions sont échantillonnées chaque jour. On s'intéresse à l'impact de la distribution initiale des flotteurs, pour cela on a effectué six expériences différentes :

- *1 000 reg* : distribution régulière de 1 000 flotteurs, soit un flotteur pour 10 000 km^2, soit encore un flotteur pour 100 km × 100 km ;
- *500 reg* : idem avec 500 flotteurs (140 km × 140 km) ;
- *260 reg* : idem avec 260 flotteurs (200 km × 200 km) ;
- *500 non reg* : distribution irrégulière de 500 flotteurs, répartis en 260 flotteurs dans la zone du jet (100×100) et 240 flotteurs dans le reste du domaine (200×200) ;
- *500 jet* : 500 flotteurs uniquement dans la zone du jet (70×70) ;
- *260 jet* : 260 flotteurs uniquement dans la zone du jet (100×100).

La figure 7.16 représente schématiquement les diverses expériences.

La figure 7.17 représente l'erreur RMS globale E_3 pour u et v en fonction du temps pour les diverses expériences. Les résultats sont assez délicats à interpréter... Regardons par exemple les trois expériences avec 500 flotteurs : deux d'entre elles, *500 reg* et *500 non reg* ont des flotteurs dans tous le domaine, alors que *500 jet* a des flotteurs seulement dans la zone du jet, de manière plus dense. Cette dernière donne les moins bons résultats. Pour les deux expériences avec 260 flotteurs, il semble cette fois que concentrer les flotteurs dans la zone du jet à la densité de *1 000 reg* soit meilleur que les répartir régulièrement dans le domaine à faible densité. Il est assez troublant de voir que l'opération de *concentrer les flotteurs dans la zone du jet* dégrade sensiblement les résultats pour 500 flotteurs et les améliore fortement pour 260 flotteurs...

L'interprétation que l'on donne est la suivante : il semble que ces expériences mettent en évidence l'existence d'une *densité optimale* de flotteurs, qui est celle de *1 000 reg*. Dans ce cas, la densité supérieure de *500 jet* n'apporte pas d'information supplémentaire (et dégrade les résultats ?), mais pêche par l'absence de flotteurs dans le reste du domaine, par comparaison avec *500 reg* et *500 non reg*. Ensuite, on remarque que la densité optimale

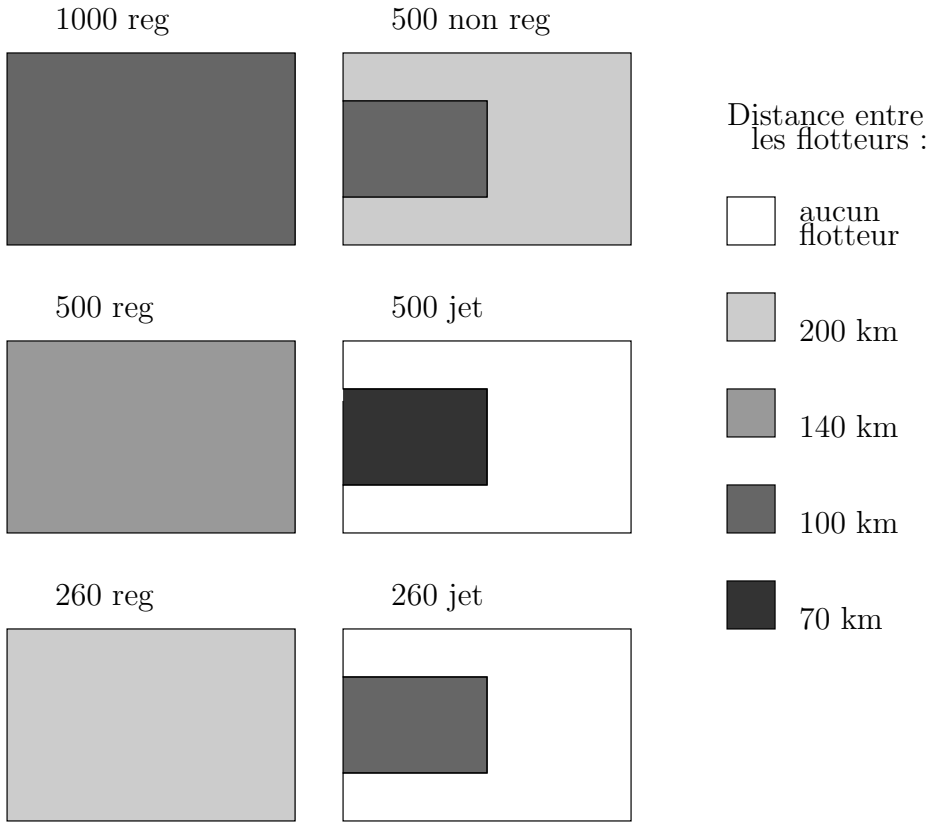


FIG. 7.16 – Étude de la sensibilité au nombre et à la distribution horizontale des flotteurs : présentation schématique des expériences effectuées.

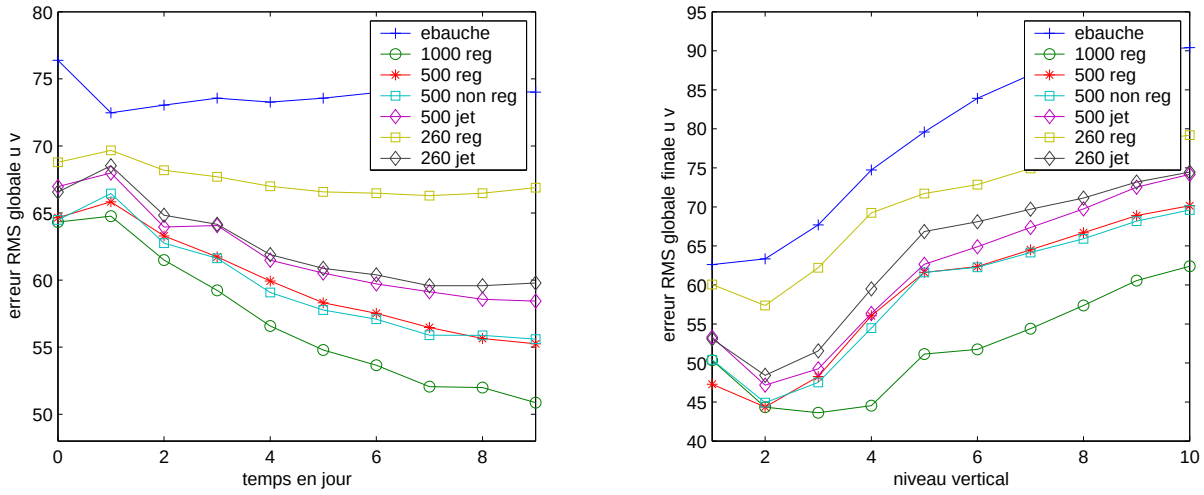


FIG. 7.17 – Étude de la sensibilité au nombre et à la distribution horizontale des flotteurs : erreurs RMS globales pour u et v en fonction du temps pour différentes distributions avec 1 000, 500 et 260 flotteurs.

de *1 000 reg* est aussi celle de *260 jet* dans la zone du jet. On comprend alors que *260 jet* fait aussi bien que *500 jet*. Enfin, l'amélioration sensible entre *260 reg* et *260 jet* peut alors s'expliquer par le fait que la densité de *260 reg* est trop faible pour être utile, et qu'il vaut mieux avoir une zone de présence des flotteurs plus petite mais avec une meilleure densité.

7.3.4 Niveau de dérive

Le contexte de ces expériences est le suivant : 3 000 flotteurs dérivent à niveau variable et sont positionnés toutes les six heures. Dans chacune des sept expériences effectuées les flotteurs dérivent à un niveau donné, allant de 1 (surface) à 10 (fond).

Les deux premières lignes de la figure 7.18 représentent les erreurs RMS relatives pour u et v en fonction du temps ; on a séparé les niveaux supérieurs (1 à 4) et inférieurs (7 à 10) pour plus de lisibilité. A la dernière ligne (à gauche) on a représenté l'erreur RMS relative globale pour (u, v) en fonction du temps pour toutes les expériences ainsi que l'erreur globale finale en fonction du niveau (à droite).

On remarque que les résultats sont extrêmement sensibles au niveau vertical de dérive. Pour les niveaux 7 et 10 l'erreur est plus grande avec assimilation que sans : l'assimilation de données de flotteurs dérivant trop profondément dégrade l'information contenue dans l'ébauche, ce qui est extrêment mauvais. Le niveau 5 est à peine moins mauvais, car si son erreur finale est inférieure à celle de l'ébauche, elle reste encore grande. Les niveaux supérieurs 1, 2 et 3 ne dégradent pas l'ébauche, mais l'améliorent à peine, le niveau 3 se comportant tout de même de manière raisonnable. Le meilleur niveau est le niveau 4. Il se situe à 1 000 mètres de profondeur et correspond au zéro du premier mode barocline.

Il est judicieux ici de regarder séparément les composantes barotropes et baroclines des vitesses : la figure 7.19 présente les erreurs globales pour les composantes barotropes (en haut) et barocline (en bas) de u et v. Comme précédemment, on a séparé les niveaux inférieurs des niveaux supérieurs pour plus de clarté.

On remarque alors que les niveaux 1, 2 et 3 améliorent peu les composantes barotropes, contrairement aux niveaux 10, 7, 5 et surtout 4. La composante barocline, elle, est dégradée par toutes les expériences : modérement pour les niveaux 1 à 4 et énormément pour les niveaux 5 à 10. Le niveau 4 semble être le meilleur compromis entre une bonne restitution du mode barotrope (qui concentre les 4/7 de l'énergie cinétique) et une moindre dégradation de la composante barocline.

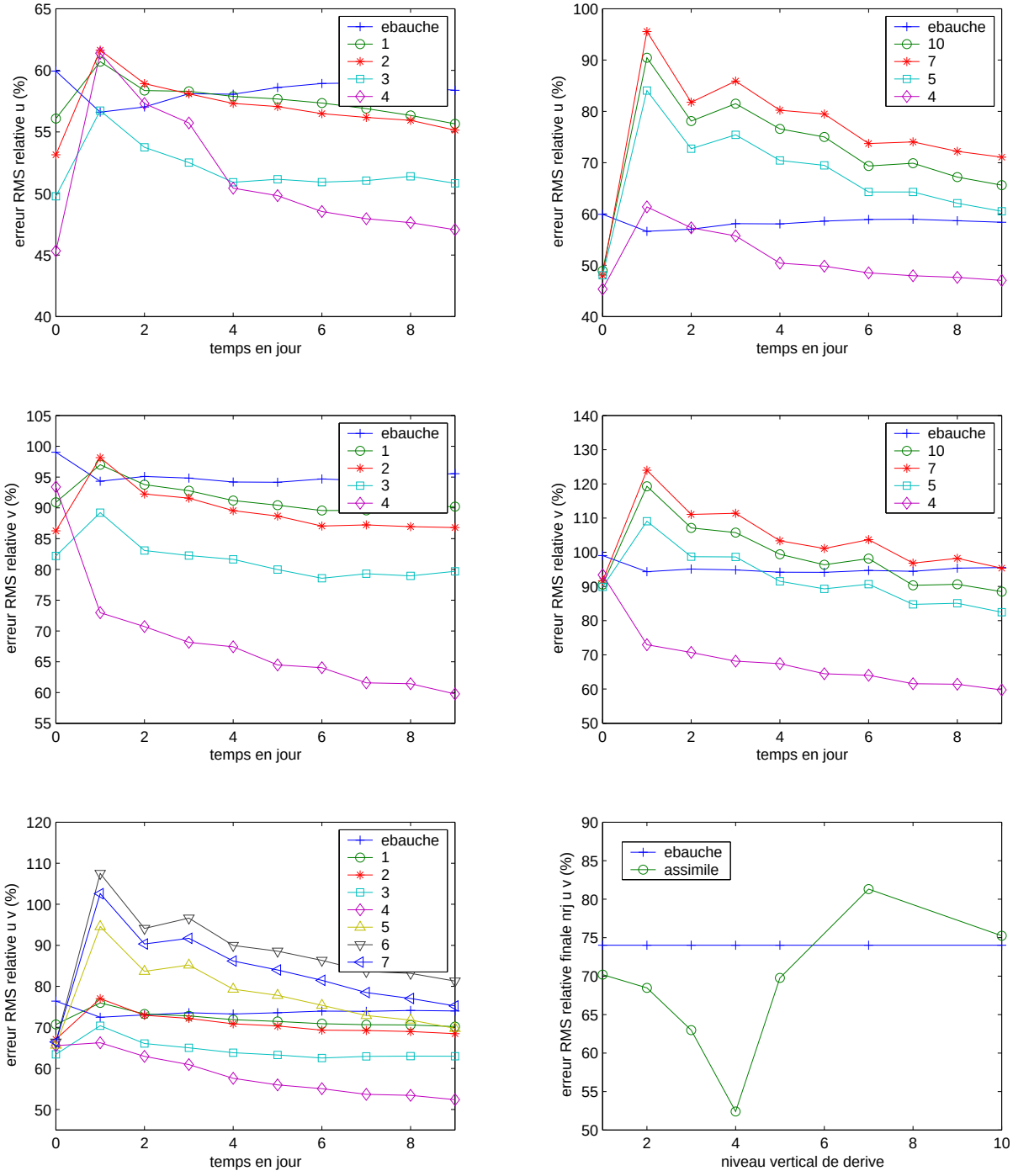


FIG. 7.18 – Étude de la sensibilité au niveau vertical de dérive : erreurs RMS pour u et v en fonction du temps pour différents niveaux de dérive.

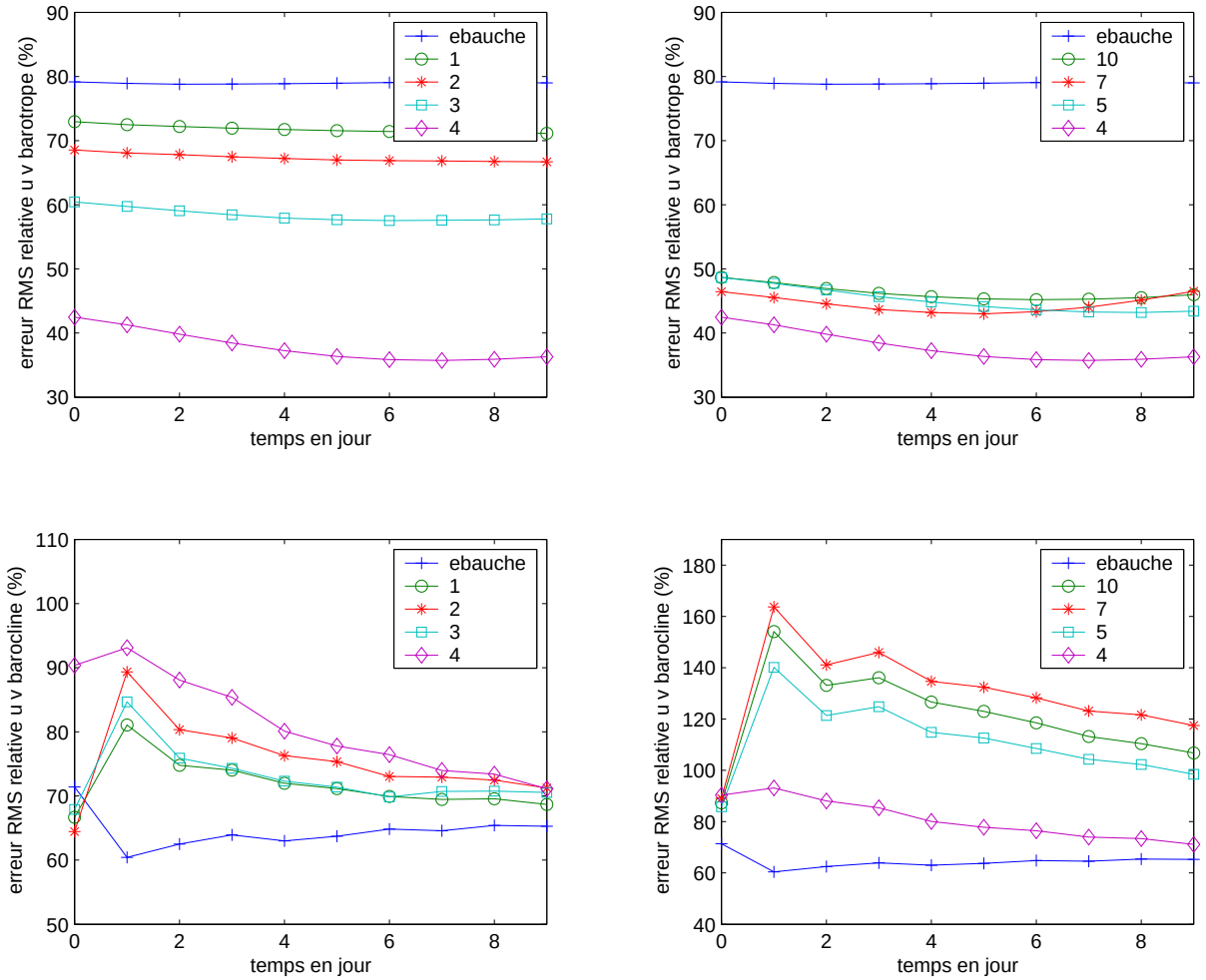


FIG. 7.19 – Étude de la sensibilité au niveau vertical de dérive : erreurs RMS pour les composantes barotropes et baroclines de u et v en fonction du temps.

7.3.5 Impact couplé du nombre et de la période d'échantillonnage

Enfin on a évalué l'influence couplée du nombre de flotteurs et de leur période d'échantillonnage. Pour cela on a effectué neuf expériences avec 500, 1 000 et 2 000 flotteurs dérivant au niveau 4 positionnés tous les 1, 3 et 5 jours.
La figure 7.20 présente l'erreur relative globale pour (u, v) en fonction du temps pour ces neuf expériences, ainsi que l'erreur finale en fonction de la période d'échantillonnage.
On remarque que la stabilité par rapport à la période se confirme pour un nombre de flotteurs inférieur à 3 000 (en effet, les tests de sensibilité à la période ont tous été réalisés avec 3 000 flotteurs, cf un peu plus haut), même si pour 500 flotteurs la dégradation avec l'augmentation de la période est un peu plus nette. On note aussi que notre méthode est aussi efficace pour 1 000 flotteurs que pour 2 000, et ce quelle que soit la période. Finalement, on peut conclure qu'il est préférable de déployer de nombreux flotteurs, positionnés peu souvent, plutôt qu'un petit nombre de flotteurs très finement suivis.

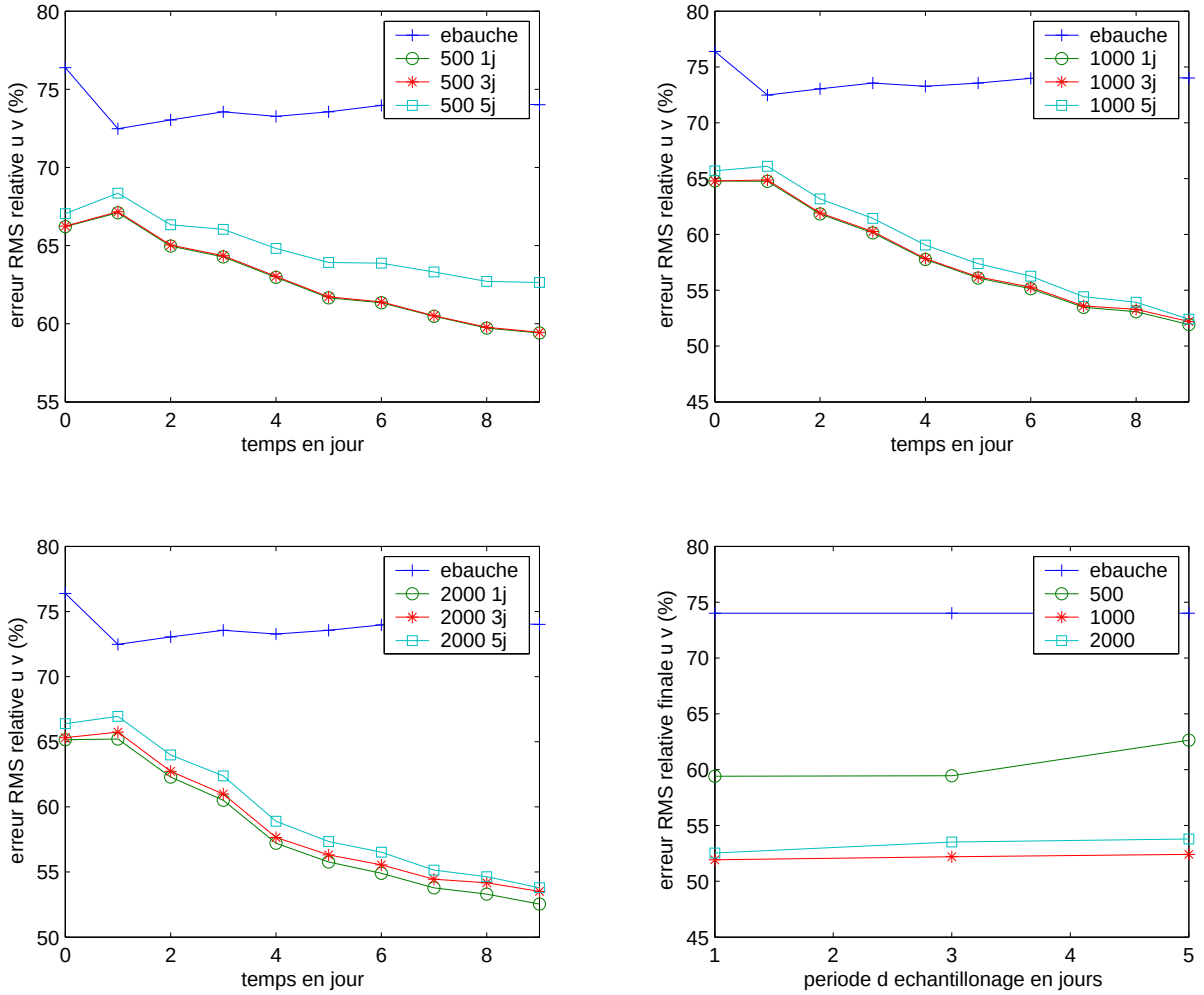


FIG. 7.20 – Étude de l'impact couplé du nombre de flotteurs et de la période temporelle d'échantillonnage : erreurs RMS pour u et v en fonction du temps et de la période.

7.3.6 Conclusion

L'étude de la sensibilité aux différents paramètres d'un réseau de flotteurs a mis en évidence les faits suivants, pour notre méthode et pour l'assimilation des seules données de positions des flotteurs en expériences jumelles :

• il existe un nombre optimal de flotteurs, qui est 1 000 pour notre configuration, qui correspond à un flotteur par boîte de 100 kilomètres par 100 kilomètres (soit encore 5 par 5 points de grille) ;

• il existe un niveau optimal de dérive, qui est 1 000 mètres pour notre configuration, et qui correspond au zéro du premier mode barocline ;

• notre méthode est robuste vis à vis de l'augmentation de la période d'échantillonnage des flotteurs et permet d'assimiler indifféremment des positions idéalisées de flotteurs de type acoustique (période de six heures) ou de type Argo (dix jours).

On peut maintenant se demander si la robustesse face à l'augmentation de la période d'échantillonnage est vraiment due à la méthode, ou bien plutôt à la stabilité de notre configuration ; c'est l'objet du paragraphe suivant.

7.4 Comparaison avec une méthode eulérienne

Dans ce paragraphe on compare notre méthode, dite lagrangienne, à la méthode eulérienne, classique en océanographie, qui consiste à transformer les données de positions en données de vitesse, via une formule d'approximation aux différences finies. Le principe de cette méthode a été présenté dans le paragraphe 4.4.2 et l'algorithme dans le paragraphe 6.4.1.

7.4.1 Temps intégral lagrangien

La notion temporelle intéressante lorsque l'on assimile des données lagrangiennes est celle de *temps intégral lagrangien* (TIL dans la suite). Il s'agit du temps moyen de décorrélation des vitesses le long des trajectoires de particules lagrangiennes. Pour une trajectoire de flotteur donnée, on peut en effet calculer la vitesse du flotteur le long de sa trajectoire (c'est-à-dire la vitesse du fluide le long de la trajectoire), que l'on note $(u_i, v_i)(t)$, où i représente l'indice du $i$ème flotteur. On peut alors calculer le temps de décorrélation de la vitesse, qui est le premier zéro de la fonction suivante :

$$\psi_i(t) = u_i(t)u_i(0) + v_i(t)v_i(0) \tag{7.13}$$

En effet, comme nos flotteurs dérivent à profondeur fixée, leur vitesse verticale est nulle, et la fonction $\psi(t)$ est tout simplement le produit scalaire entre la vitesse initiale du flotteur et sa vitesse au temps t. Elle s'annule pour la première fois lorsque la direction de la vitesse a changé de 90 degrés.
Le TIL pour une zone donnée (ie une profondeur fixée et un domaine horizontal donné) est alors le premier zéro de la fonction suivante :

$$\psi_I(t) = \sum_{i \in I} \left[u_i(t)u_i(0) + v_i(t)v_i(0) \right] \tag{7.14}$$

où I est l'ensemble des indices des flotteurs de la zone que l'on considère.

La figure 7.21 représente la fonction ψ pour la zone de la figure 7.3 au niveau 4. Le TIL associé à cette zone est d'environ douze à treize jours. Dans la totalité du bassin, il est de l'ordre de 20 jours, et dans les zones "agitées" il est de l'ordre de 10 jours.

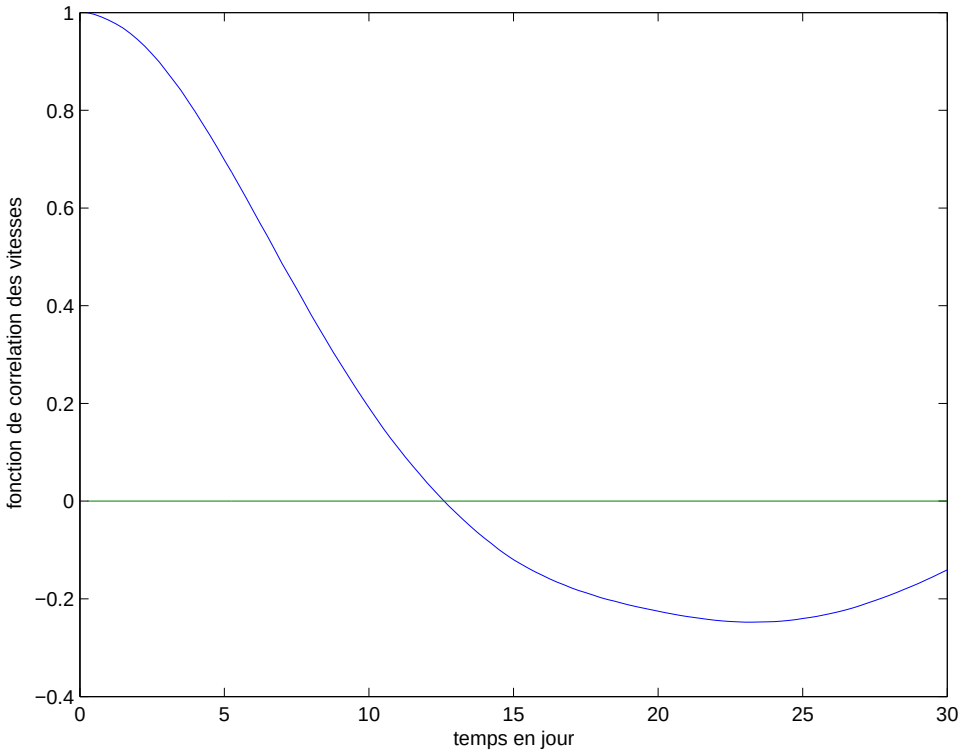


FIG. 7.21 – Courbe de corrélation des vitesses au niveau 4, dans la zone centrale.

Les méthodes eulériennes classiques implémentées en océanographie (voir notamment [Molcard *et al.*, 2003] et [Ozgökmen *et al.*, 2003]) sont efficaces lorsque la période d'échantillonnage des positions est inférieure à 20 ou 30% du TIL, soit entre deux et quatre jours dans notre configuration. On va vérifier ceci grâce à la méthode eulérienne décrite au chapitre précédent.

7.4.2 Tests divers avec une petite période d'échantillonnage

Dans ce paragraphe on considère un jeu de données dont les caractéristiques sont les suivantes : 3 000 flotteurs dérivent au niveau 4, leur positions sont relevées une fois par jour, on effectue un cycle d'assimilation de dix jours (avec trente itérations de minimisation).

La figure 7.22 représente les erreurs RMS relatives pour u et v (en bas) et relatives globales pour (u, v) (en haut) en fonction du temps (à gauche) ou du niveau vertical (à droite).

On note que la méthode eulérienne est meilleure que notre méthode lagrangienne, surtout pour la reconstitution de la vitesse u. En particulier, le saut initial de l'erreur sur u n'existe pas pour la méthode eulérienne. On peut aussi remarquer que la méthode eulérienne améliore nettement mieux le niveau 4 (ie celui où se trouve les données) que les autres niveaux, alors que notre méthode lagrangienne a une efficacité un peu plus homogène en fonction du niveau.

Regardons maintenant les composantes barotropes et baroclines de u et v, représentées à la figure 7.23. Si la restitution des composantes barotropes est légèrement meilleure pour la méthode lagrangienne, ce n'est pas du tout le cas des composantes baroclines : la méthode eulérienne, contrairement à la méthode lagrangienne, fait mieux que la simulation libre sans assimilation.

En deux mots : pour une période d'un jour, la méthode lagrangienne restitue bien les composantes barotropes des vitesses, et s'aligne sur l'erreur de l'ébauche à la fin de la fenêtre d'assimilation ; la méthode eulérienne, elle, améliore conjointement les composantes barotropes et baroclines, même si l'amélioration reste plus nette pour les composantes barotropes.

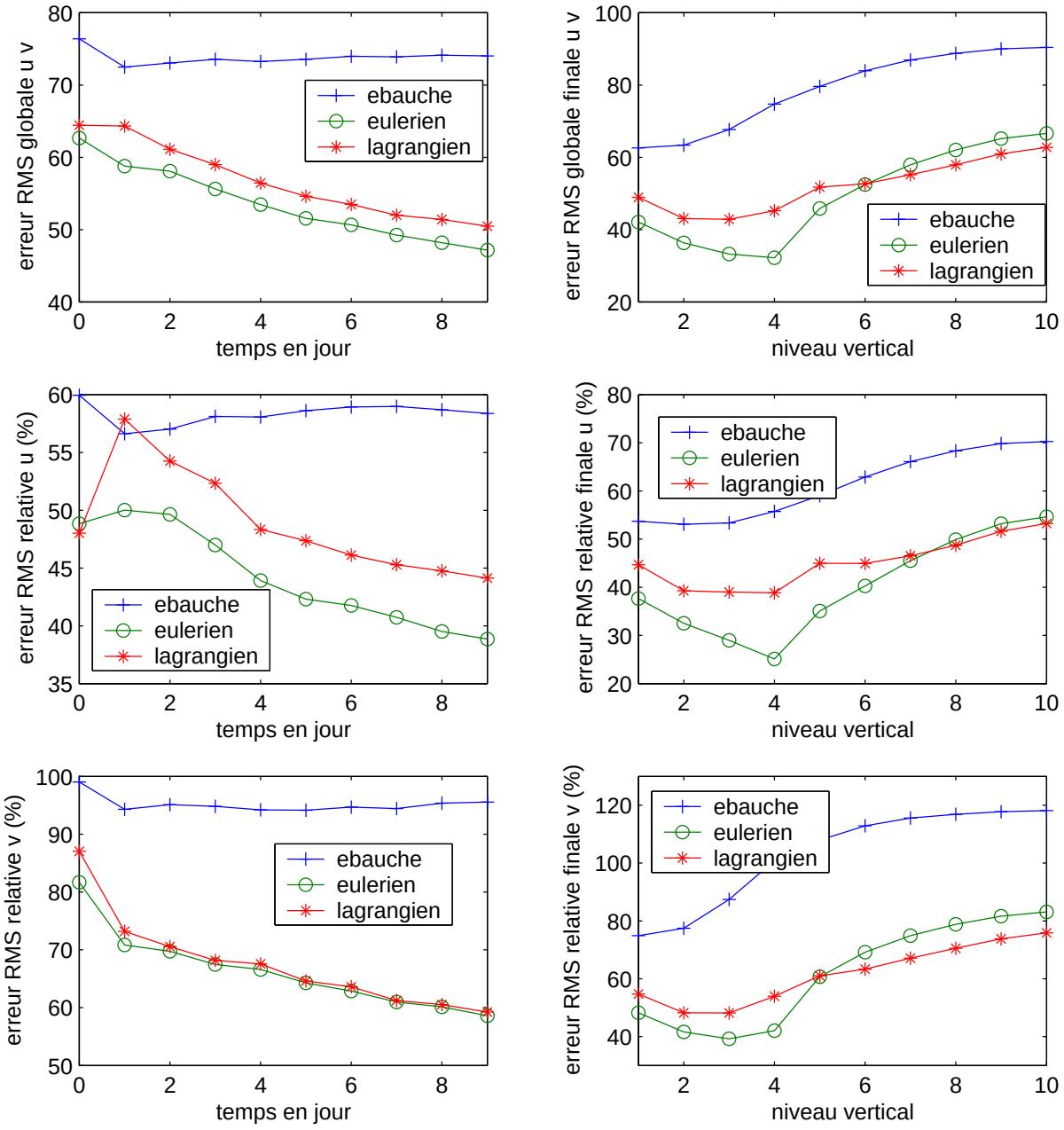


FIG. 7.22 – Comparaison des méthodes lagrangienne et eulérienne : erreurs RMS relatives en fonction du temps et du niveau pour les vitesses u et v.

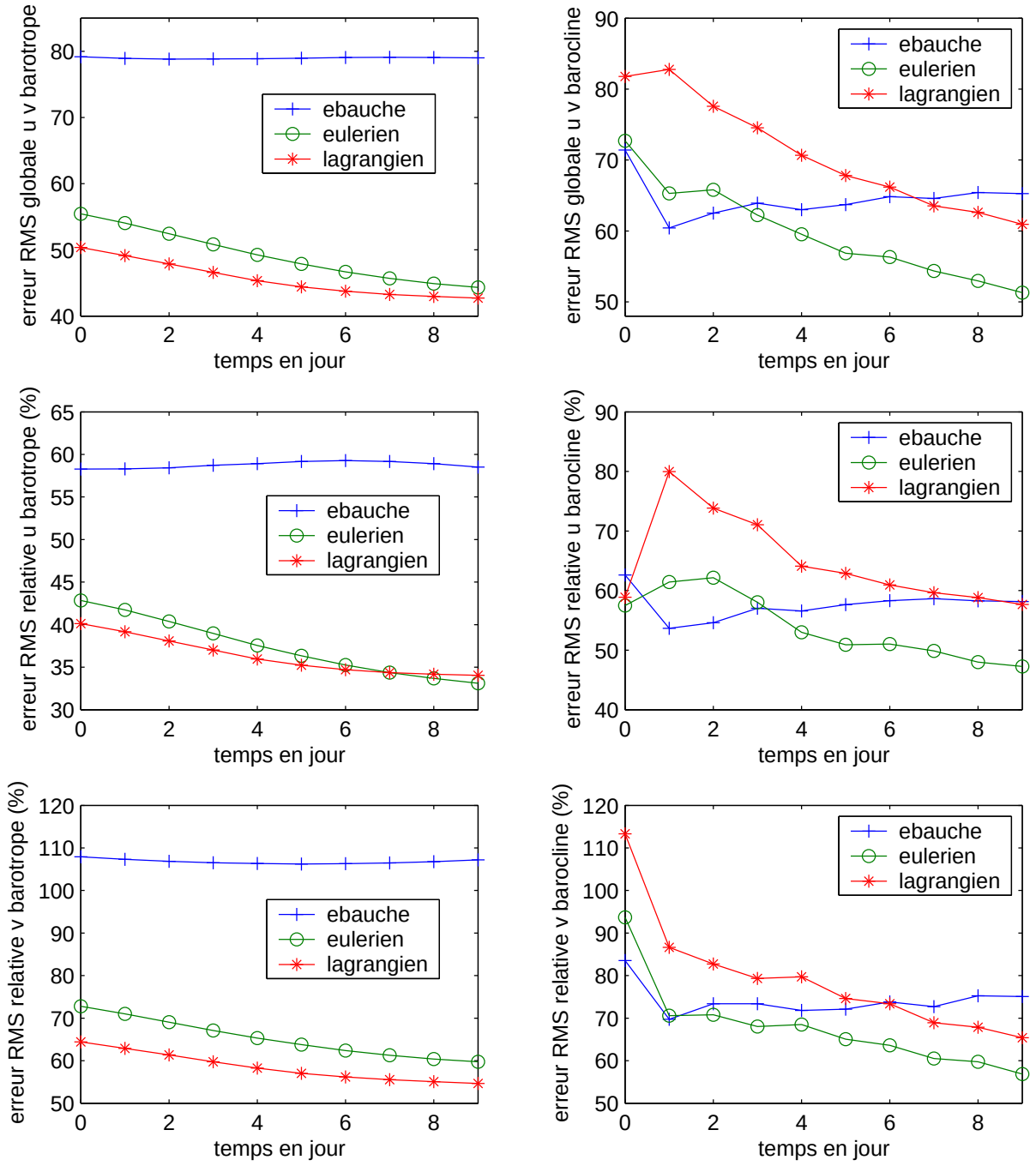


FIG. 7.23 – Comparaison des méthodes lagrangienne et eulérienne : erreurs RMS en fonction du temps et du niveau, pour les composantes baroclines et barotropes des vitesses.

7.4.3 Augmentation de la période d'échantillonnage

On va maintenant voir l'effet de l'augmentation de la période d'échantillonnage sur le résultat de l'assimilation pour la méthode eulérienne, et comparer avec la méthode lagrangienne. Pour cela, on réalise les expériences suivantes : 3 000 flotteurs dérivent au niveau 4, et sont positionnés tous les 1, 3, 5 ou 10 jour(s).

La figure 7.24 présente les résultats obtenus : en haut on a représenté les erreurs RMS relatives E_1 pour u et pour v en fonction du temps pour les méthodes lagrangienne et eulérienne pour une période de 1 ou 3 jour(s) (à gauche) ou 5 ou 10 jours (à droite). En bas à gauche on a représenté l'erreur RMS globale E_3 pour (u, v) en fonction du temps pour toutes les expériences à l'exception des expériences de période 10 jours, pour ne pas surcharger le graphique. Enfin, en bas à droite figure l'erreur globale finale $E_3(t_f)$ pour chacune des deux méthodes (ainsi que pour la simulation libre) en fonction de la période d'échantillonnage.

On remarque que les résultats de la méthode eulérienne se dégradent sensiblement lorque la période augmente, contrairement à ceux de la méthode lagrangienne. On remarque que la méthode eulérienne reste relativement efficace pour une période allant jusqu'à trois jours, ce qui correspond aux 20 à 30% du TIL indiqués par [Molcard *et al.*, 2003], [Ozgökmen *et al.*, 2003]. Ceci peut se voir sur la figure 7.3 qui montre des trajectoires de flotteurs : dans la zone des tourbillons, les flotteurs ne se déplacent pas en ligne droite et on s'attend à voir l'approximation des vitesses par les différences de positions devenir rapidement caduque.

7.4.4 Conclusion

A l'issue de cette comparaison, on peut donc dire que la méthode eulérienne est efficace lorsque la période d'échantillonnage est inférieure à 20–30% du TIL, et est même meilleure que la méthode lagrangienne pour une période d'un jour.

Cependant, notre méthode est meilleure que la méthode eulérienne dès que la période d'échantillonnage atteint trois jours et reste efficace pour des périodes approchant le TIL. Elle mérite donc bien le qualificatif *lagrangienne*, car elle est capable d'extraire l'information des positions même quand l'approximation eulérienne n'est plus valide.

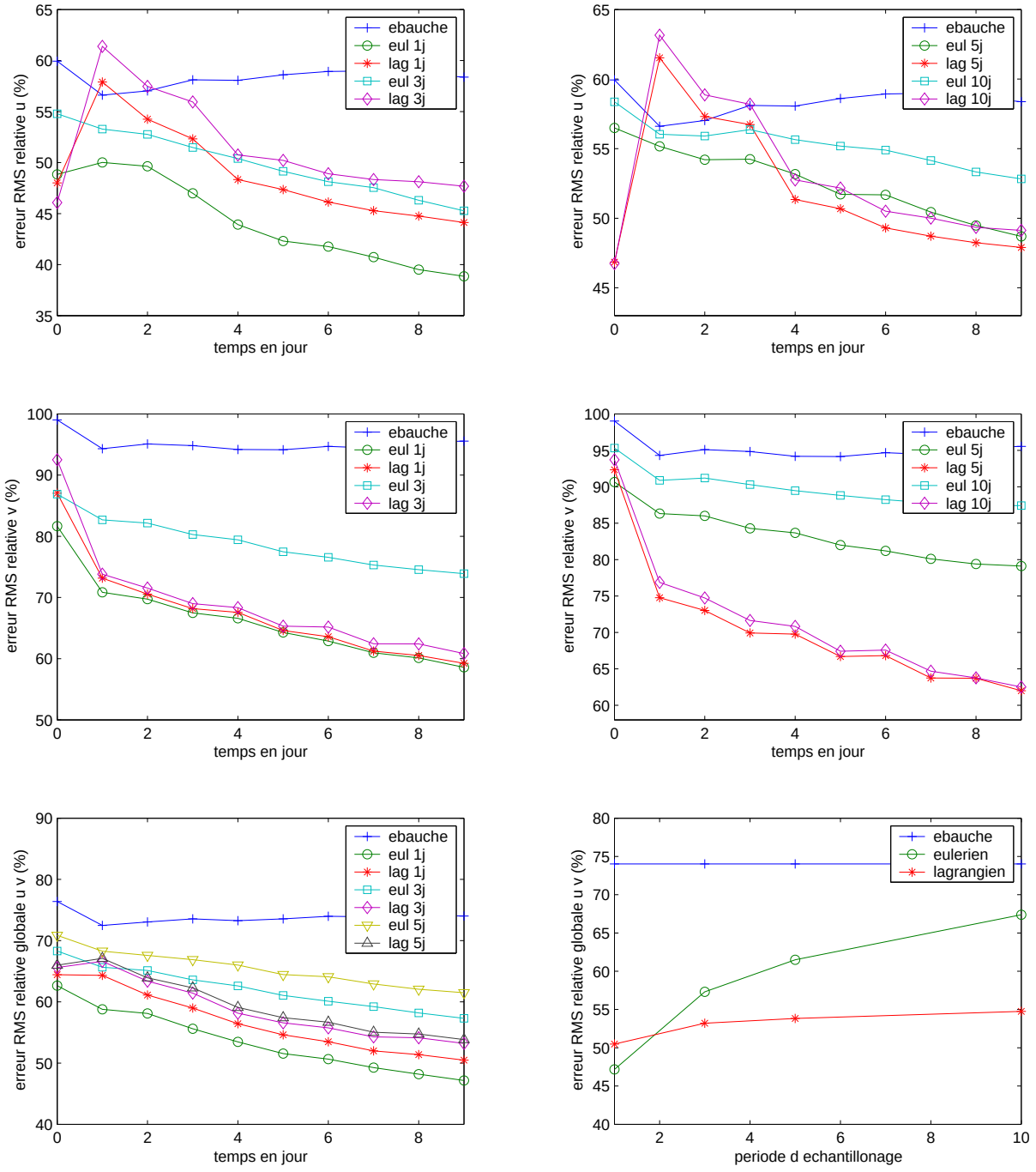


FIG. 7.24 – Comparaison des méthodes lagrangienne et eulérienne : erreurs RMS en fonction du temps pour u, v pour différentes périodes d'échantillonnage.

7.5 Assimilation d'observations bruitées

Dans cette partie, on ajoute une erreur (exprimée en kilomètres) sur les observations de positions. Dans le premier paragraphe, on donne une estimation des erreurs réelles pour deux types de flotteurs "classiques" (Marvor et Provor). Dans le deuxième paragraphe on explique brièvement l'implémentation des expériences. Enfin on montre les résultats obtenus pour un réseau de 1 000 flotteurs positionnés une fois par jour avec une erreur d'observation variant de 0 à 20 kilomètres.

7.5.1 Erreurs réelles de positionnement des flotteurs

7.5.1.1 Flotteurs acoustiques (MARVOR)

L'origine des erreurs est multiple (A. Faisant, 2005, communication personnelle) ; elles peuvent être liées aux **sources acoustiques** :

- précision du positionnement des sources en latitude, longitude et profondeur,
- nombre de sources disponibles/simultanément audibles,
- géométrie des sources audibles et du flotteur,
- précision des horloges,
- qualité du modèle de propagation acoustique,
- topographie du fond (qui peut créer par endroits des zones "d'ombre acoustique"),
- puissance des sources,
- rupture de l'ancrage, ... ;

ou bien aux **flotteurs** :

- réglage des flotteurs (nombre d'écoutes par jour),
- durée du cycle en profondeur et retour en surface,
- complexité de la trajectoire et vitesse de déplacement,
- problèmes techniques ("surdité" temporaire), ... ;

ou encore à la **qualité des transmissions** :

- messages incohérents,
- manquants ("trous" dans la transmission), ... ;

ou enfin à la **qualité du traitement des données** :

- méthodologie utilisée (interpolation, moindres carrés),
- sélection des messages et des positions (en cas de discordance ou d'incohérences),
- lissage éventuel des trajectoires, ...

Les scientifiques français exploitant ces données s'accordent à considérer que l'erreur entre la position réelle et la mesure est d'environ 3 à 4 kilomètres (T. Reynaud, 2005, communication personnelle).

7.5.1.2 Flotteurs profileurs du programme Argo (PROVOR)

Contrairement aux flotteurs acoustiques, les flotteurs profileurs ne sont positionnés qu'en surface par le système Argos. Les différentes étapes du cycle du PROVOR sont les suivantes (estimations en heures réalisées par [Assenbaum *et al.*, 2002]) :

- temps passé en surface après la dernière position Argos (environ 3 à 4 heures),
- plongée et descente jusqu'à la profondeur de dérive (environ 1 heure),
- dérive à profondeur contrôlée (entre 9 et 10 jours),

– descente à la profondeur de début de profil (environ 1 jour),
– montée et mesure du profil (4 à 6 heures),
– temps passé en surface avant la première position Argos (environ 1 à 2 heures),
– transmission Argos (4 à 6 heures).

Après traitement des données (par diverses méthodes d'extrapolation de trajectoire), les erreurs d'approximation de la position en profondeur proviennent essentiellement :
– de l'erreur du positionnement Argos (environ 1 kilomètre)
– de l'advection à la montée, à la descente et en surface.

Les erreurs varient de 2 kilomètres dans les zones à faible dynamique à 6 kilomètres dans les zones énergétiques (M. Assenbaum, 2005, communication personnelle).

7.5.2 Implémentation

L'implémentation se fait de la manière suivante : après avoir généré les données on dispose d'un ensemble du type

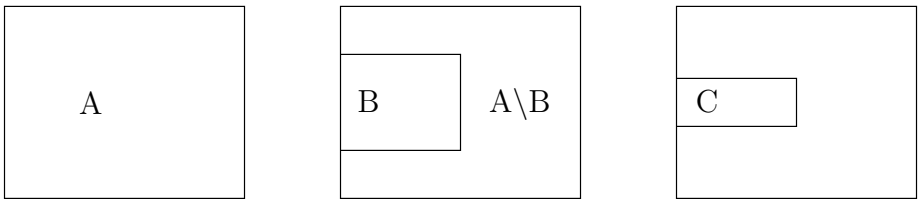
$$\{(x_i^k, y_i^k), 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\} \tag{7.15}$$

où i est l'indice temporel et k est le numéro du flotteur. À chaque distance x_i^k et y_i^k on ajoute un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart type L, où L est une distance en kilomètres. On obtient alors un jeu de données bruitées, que l'on assimile comme précédemment.

7.5.3 Résultats

Dans ce paragraphe, on assimile les positions bruitées de 1 000 flotteurs dérivant au niveau 4 échantillonnés 1 fois par jour. L'amplitude du bruit varie de 0 à 20 kilomètres.

Pour évaluer l'importance du bruit, on le compare au déplacement du flotteur pendant ses 10 jours de dérive. Pour cela on calcule, pour chaque flotteur, le déplacement Δx en longitude et Δy en latitude pendant 10 jours : il s'agit tout simplement de la valeur absolue de la différence entre la première position et la dernière. Ensuite on effectue des moyennes de ces déplacements dans différentes zones : la totalité de l'océan (zone A), deux zones plus ou moins grandes centrées sur le jet (zones B et C), une zone ne contenant pas le jet (A\B). Les zones sont décrites par la figure suivante :



(7.16)

Le tableau suivant présente les déplacements moyens en x et en y (en kilomètres) obtenus :

zone	Δx (km)	Δy(km)
A	30	30
A\B	22	30
B	66	49
C	93	60

(7.17)

Ainsi en moyene Δx est compris entre 20 et 100 et Δy entre 30 et 60. Les amplitudes de bruit au-delà de 10 kilomètres sont donc loin d'être négligeables devant le déplacement d'une grande majorité de flotteurs.

La figure 7.25 présente en haut les erreurs relatives globales E_3 (à gauche) et globales finales E_4 (à droite) et en bas les erreurs relatives E_1 (à gauche) et relatives finales E_3 (à droite) pour u et v pour l'ébauche et les états assimilés obtenus avec un bruit de 0, 1, 5 ou 10 kilomètre(s). On note que les résultats sont très peu dégradés, même pour 10 kilomètres, qui est déjà supérieur au bruit réél estimé par les océanographes (voir paragraphe précédent).

La figure 7.26 présente les mêmes résultats pour un bruit de 0, 10, 15 et 20 kilomètre(s). Les résultats sont un peu moins bons, mais la méthode fonctionne encore très bien. On peut noter cependant que les niveaux intermédiaires (ie proches du niveau de dérive des flotteurs) sont un peu plus dégradés que les niveaux inférieurs et supérieurs.

Qualitativement, la figure 7.27 présente les champs de vitesse horizontaux u et v au niveau 4 pour l'état vrai, l'état après assimilation de données non bruitées et celui avec un bruit de 20 kilomètres. L'adéquation avec l'état vrai reste dans tous les cas satisfaisante. On remarque cependant que l'état assimilé avec bruit est un peu moins lisse encore que l'état assimilé sans bruit.

7.5.4 Conclusion

Ces résultats sont très satisfaisants et montrent que la méthode est capable d'extraire de l'information des positions bruitées, même lorsque l'amplitude du bruit avoisine le déplacement total du flotteur. En outre, pour une erreur d'amplitude réaliste, ie inférieure à dix kilomètres d'après les océanographes, la méthode fonctionne quasiment aussi bien qu'avec des données parfaites.

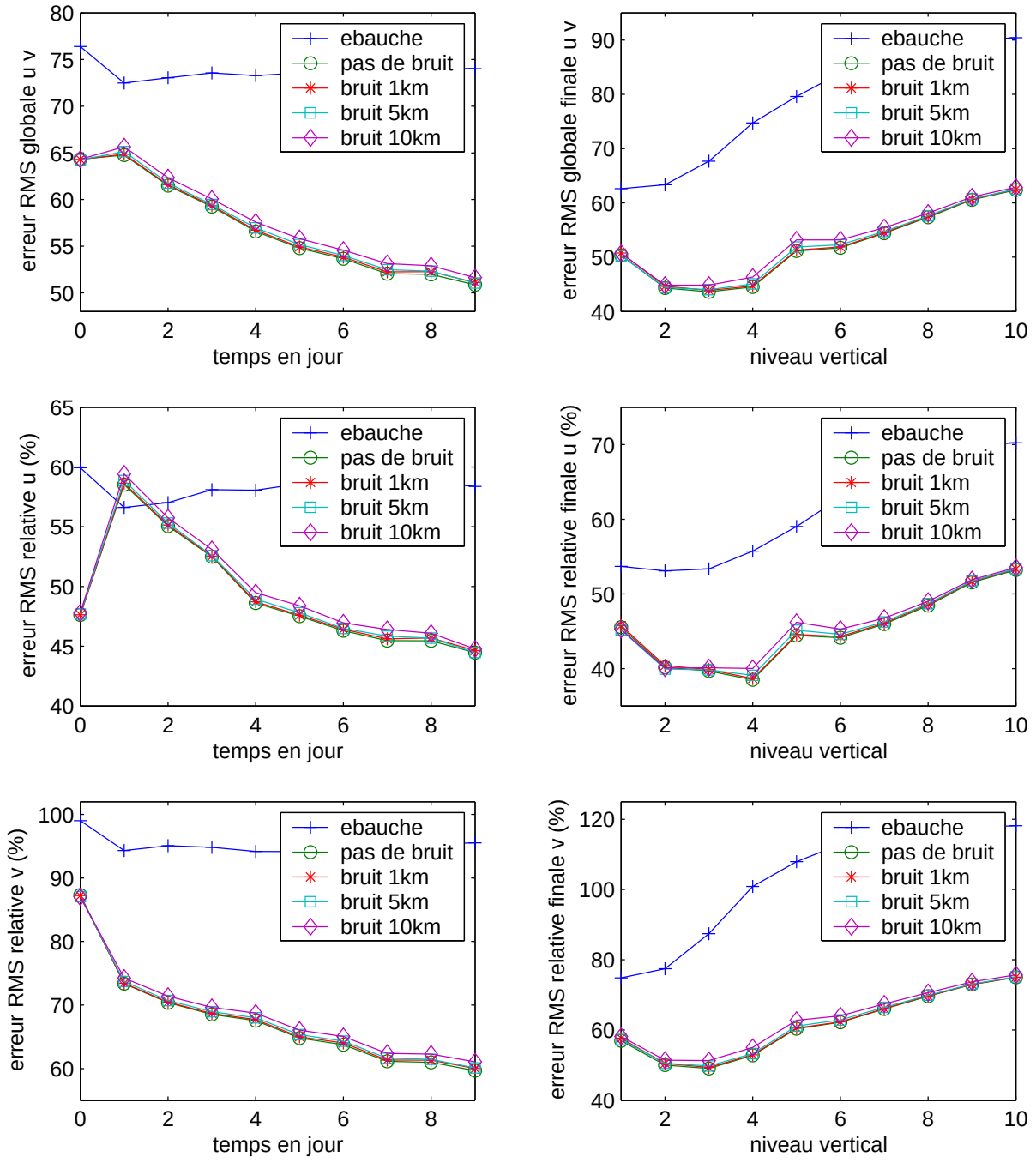


FIG. 7.25 – Assimilation d'observations bruitées : erreurs RMS pour u et v avec un bruit d'amplitude 0, 1, 5, et 10 km.

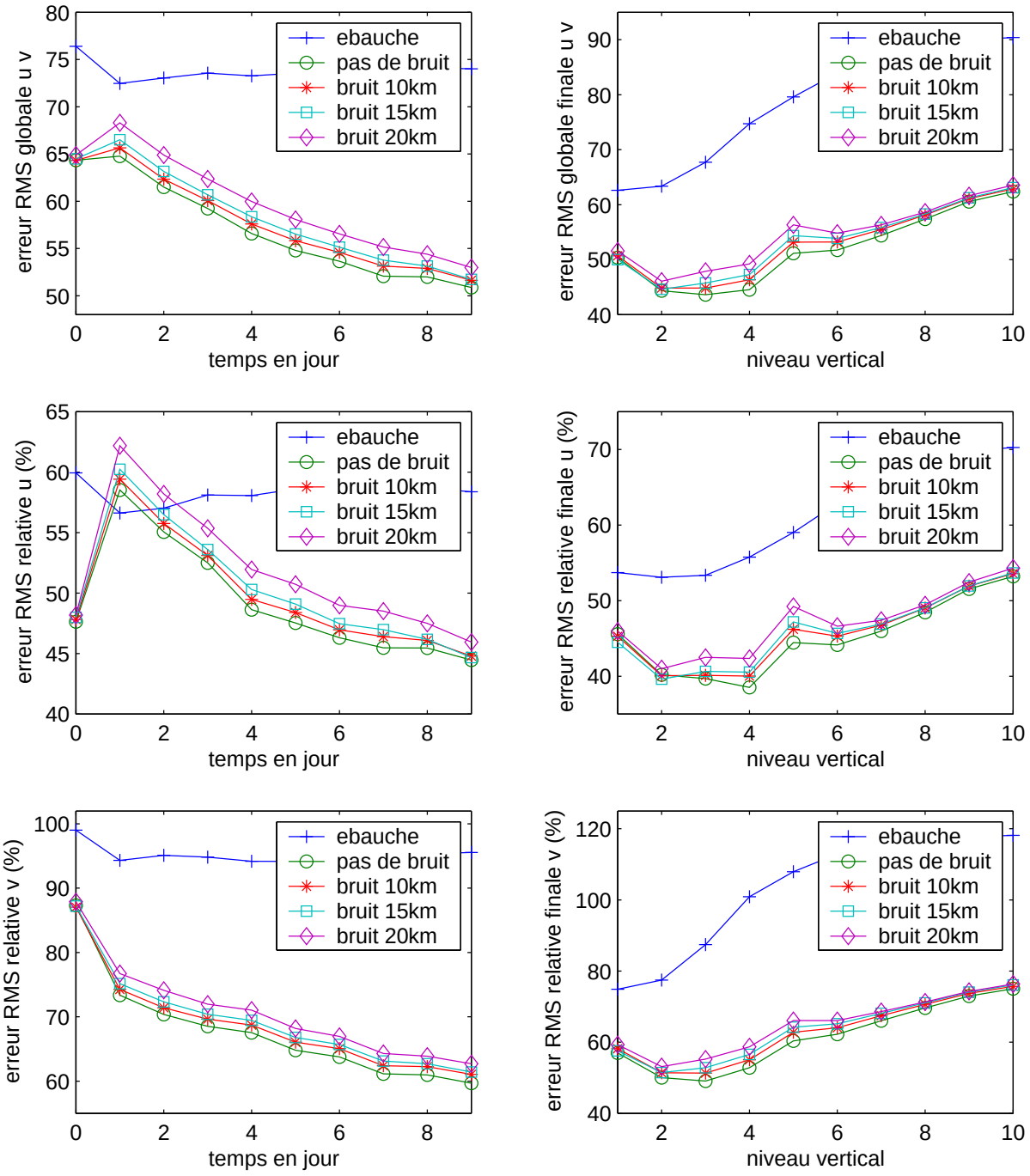


FIG. 7.26 – Assimilation d'observations bruitées : erreurs RMS pour u et v avec un bruit d'amplitude 0, 10, 15, et 20 km.

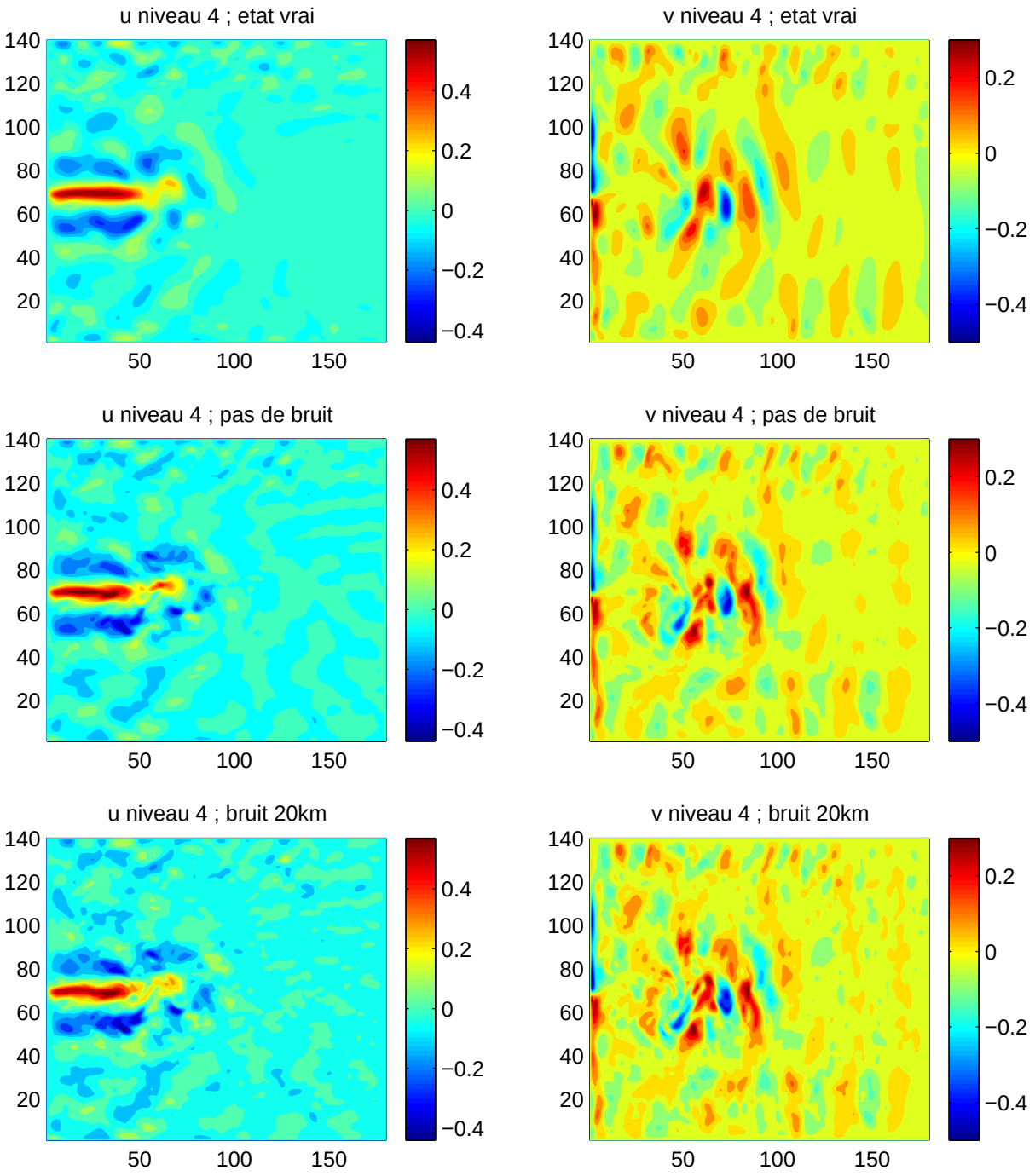


FIG. 7.27 – Assimilation d'observations bruitées : champ de vitesses u et v au niveau 4 pour l'état vrai, l'état assimilé sans bruit et l'état assimilé avec un bruit de 20 km d'amplitude.

7.6 Étude de la complémentarité avec l'assimilation des profils de température

Dans ce paragraphe, on étudie l'assimilation conjointe des positions des flotteurs et de profils verticaux de température, mesurés à l'exacte verticale du point où se trouve le flotteur.

L'étude de l'assimilation des données thermohalines seules (ie données de température et de salinité) mesurées par les flotteurs-profileurs Argo a fait l'objet de la thèse de [Forget, 2005]. Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié, *à température connue*, l'assimilation des données de positions seules. Dans cette partie, nous étudions l'assimilation conjointe des profils de température et des positions des flotteurs. Contrairement à la partie précédente, nous ne supposons plus connue la température, mais nous assimilons les données des profils pour la reconstituer. Ainsi, dans tout ce paragraphe, l'ébauche choisie pour u, v, θ et S est l'état de l'océan *un an avant* l'état vrai.

L'implémentation de ce problème a été décrite dans le chapitre précédent (paragraphe 6.4.2). Pour commencer on présente quelques résultats de validation : pour une expérience favorable on observe des champs de vitesses et température obtenus, on compare les erreurs RMS avec celles obtenues en assimilant uniquement les positions ou bien uniquement les profils de température, et enfin on distingue les composantes barotropes et baroclines des variables. Ensuite on étudie l'impact de la diminution du nombre de flotteur et l'augmentation de la période d'échantillonnage. Enfin on effectue des expériences plus longues (trente jours).

7.6.1 Validation

On valide l'assimilation conjointe des positions et des profils de température dans le cadre suivant : on se donne 1 000 flotteurs, dérivant au niveau 4 pendant 10 jours. Les positions sont échantillonnées une fois par jour ; les profils de température sont mesurés aux mêmes instants (ie une fois par jour aussi) et s'étendent du fond à la surface (soit à partir de 4 500 mètres de profondeur).

Les figures 7.28 et 7.29 présentent les champs de vitesses u et v et de température T aux niveaux 1 et 2 (surface et sub-surface) pour l'état vrai, l'ébauche et l'état assimilé. L'adéquation qualitative entre l'état vrai et l'état assimilé est très bonne. La température est tout à fait bien restituée, ce qui est plutôt rassurant étant donnée l'excellente couverture spatio-temporelle des données de T. Dans ce cadre, les résultats pour u et v sont assez similaires à ceux que l'on obtient lorsque l'on assimile seulement les positions, à température vraie connue.

Pour l'étude quantitative des résultats, on va définir les erreurs RMS avec température. Comme pour u et v, on définit la variance σ_θ par

$$\sigma_\theta^2 = \frac{\sum_{i,j,k,t} h(k) |\theta(i,j,k,t) - \overline{\theta}(i,j,k)|^2}{N_i N_j N_t \sum_k h(k)} \tag{7.18}$$

On définit également les variances $\sigma(k)$ associées au k-ième niveau vertical :

$$\sigma_\theta^2(k) = \frac{\sum_{i,j,t} |\theta(i,j,k,t) - \overline{\theta}(i,j,k)|^2}{N_i N_j N_t} \tag{7.19}$$

De la même façon, on définit σ_u et σ_v. Définissons maintenant l'erreur $E_1(t)$ (erreur RMS relative) :

$$E_1(\theta;t) = \Big(\frac{\sum_{i,j,k} h(k) |\theta_v(i,j,k,t) - \theta(i,j,k,t)|^2}{\sigma_\theta \, N_i \, N_j \sum_{i,j,k} h(k)} \Big)^{1/2} \tag{7.20}$$

De même on définit $E_1(u;t)$ et $E_1(v;t)$.
Pour $E_2(k)$ on pose :

$$E_2(\theta;k) = \Big(\frac{\sum_{i,j} |\theta_v(i,j,k,t_f) - \theta(i,j,k,t_f)|^2}{\sigma_\theta(k) \, N_i \, N_j} \Big)^{1/2} \tag{7.21}$$

De même on définit $E_2(u;t)$ et $E_2(v;t)$.
Enfin, les erreurs globales E_3 et E_4 deviennent :

$$E_3(t) = \frac{1}{3} \Big(E_1(u;t) + E_1(v;t) + E_1(\theta;t) \Big) \tag{7.22}$$

$$E_4(k) = \frac{1}{3} \Big(E_2(u;k) + E_2(v;k) + E_2(\theta;k) \Big) \tag{7.23}$$

Pour pouvoir valider les résultats quantitatifs on compare les résultats de l'expérience précédente (appelée *flo+pro* dans les légendes des graphiques) aux deux expériences suivantes :

- *pro* : on assimile uniquement les profils verticaux de température, mesurés une fois par jour sur toute la colonne d'eau ;
- *flo* : on assimile uniquement les positions de flotteurs dérivant au niveau 4, mesurées une fois par jour ;

avec les mêmes paramètres pour l'optimisation (en particulier avec la même ébauche).

La figure 7.30 présente l'erreur relative globale en fonction du temps E_3 pour u, v et la température T selon la formule (7.22) pour l'ébauche et les expériences *flo+pro* (positions et profils), *pro* (profils seuls) et *flo* (positions seules). On constate tout d'abord que l'erreur globale est meilleure pour l'expérience avec profils et positions.

Précisons maintenant ceci : la figure 7.31 présente l'erreur relative en fonction du temps E_1 à gauche et l'erreur relative finale E_2 à droite, pour u en haut, v au milieu et T en bas, pour ces mêmes expériences. On constate tout d'abord que les informations de température sont importantes pour contrôler les vitesses : en effet, *flo* fait mieux que l'ébauche mais fait moins bien que *pro*, alors que cette dernière a seulement des données de température ! La formulation variationnelle 4D permet effectivement de transférer de l'information en température aux autres variables. La distinction en fonction du niveau est intéressante également, car on y voit que *pro* contrôle bien les vitesses en surface et *flo* les contrôle mieux en profondeur et pas suffisamment en surface. On constate ensuite

que les données de positions complètent effectivement celles de température : T n'est que légèrement dégradée lorsque l'on passe de *pro* à *flo+pro*, mais surtout les vitesses sont bien meilleures. Les courbes d'erreurs sur les vitesses en fonction du niveau sont là encore éloquentes, et la complémentarité entre *flo* et *pro* se lit parfaitement sur la figure.

Regardons maintenant les composantes barotropes et baroclines séparément : la figure 7.32 présente les erreurs RMS relatives E_1 et relatives globales E_3 en fonction du temps pour les composantes barotropes (à gauche) et baroclines (à droite) de u, v et T. Pour la composante barotrope, les résultats obtenus sont tout à fait naturels : pour les vitesses, *flo+pro* fait mieux que *flo* qui fait mieux que *pro*, pour la température, *flo* est sensiblement comme l'ébauche, *flo+pro* et *pro* sont bons tous les deux. Quant à la composante barocline on remarque que l'assimilation des positions a tendance à la dégrader, alors que l'assimilation des profils seuls l'améliore. En particulier, *pro* est systématiquement meilleur que *flo+pro* (et c'est encore plus marqué pour *flo*). On remarque aussi que pour la composante barocline *flo* fait systématiquement moins bien que l'ébauche, alors que *flo+pro* finit par s'améliorer à la fin de la fenêtre temporelle. Ceci est assez naturel, car les profils de température sont *verticaux* et contiennent de fait de l'information barocline, contrairement aux positions qui ne voient que la composante barotrope. La complémentarité profils/positions est alors naturelle.

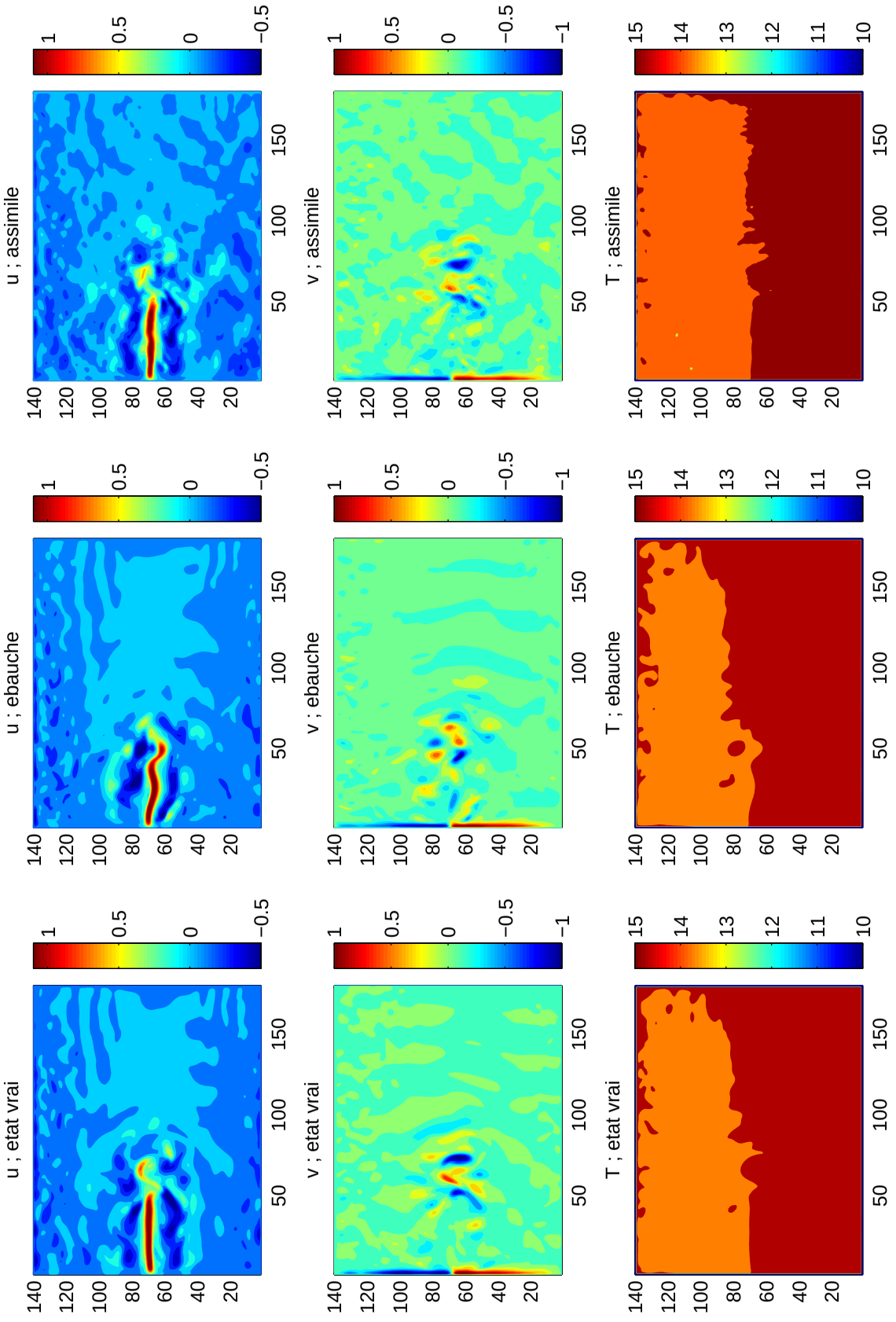


FIG. 7.28 – Complémentarité profils/position : validation. Champ de vitesses u, v et de température T pour l'état vrai, l'ébauche et l'état assimilé au niveau 1.

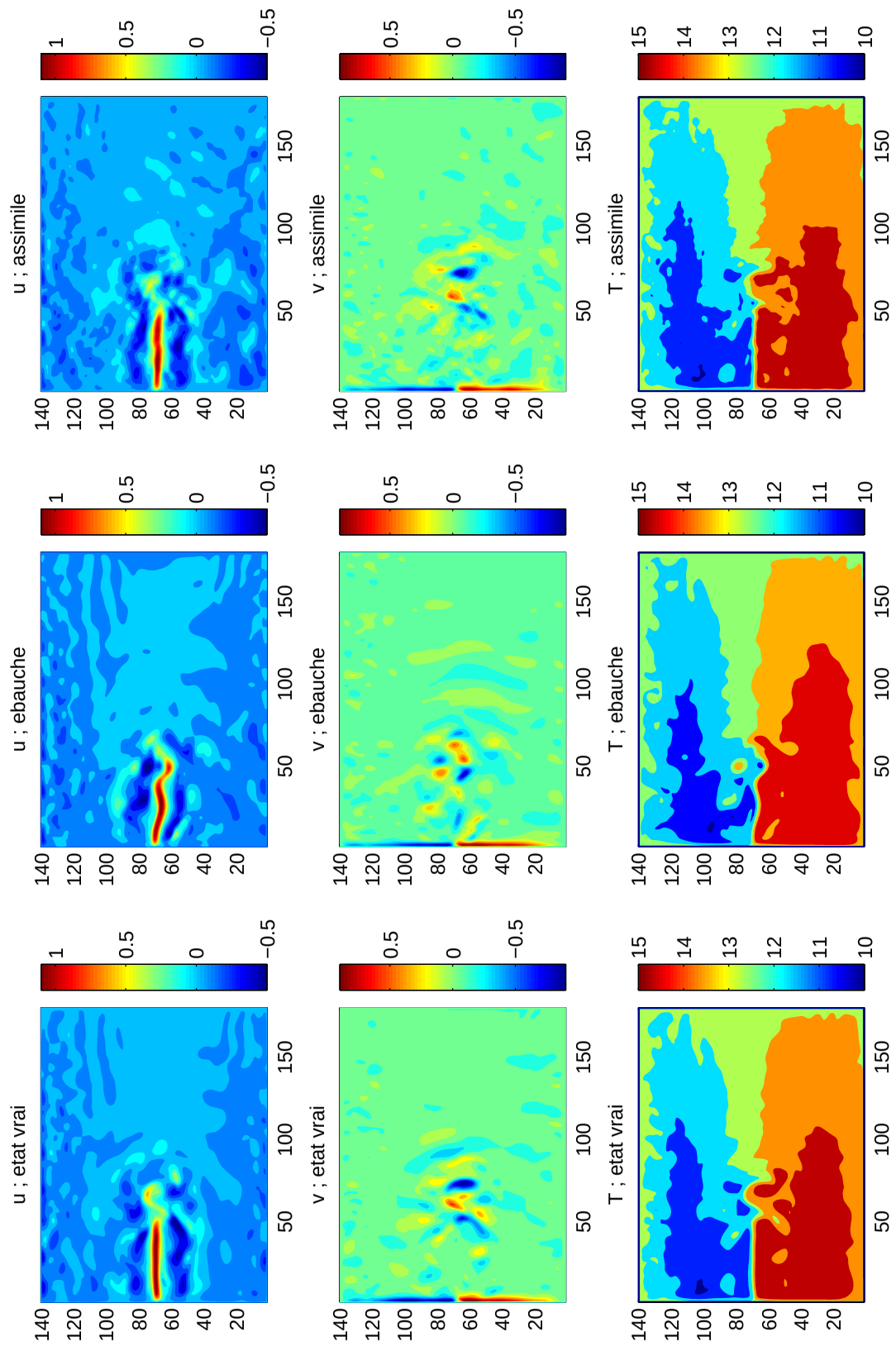


FIG. 7.29 – Complémentarité profils/position : validation. Champ de vitesses u, v et de température T pour l'état vrai, l'ébauche et l'état assimilé au niveau 2.

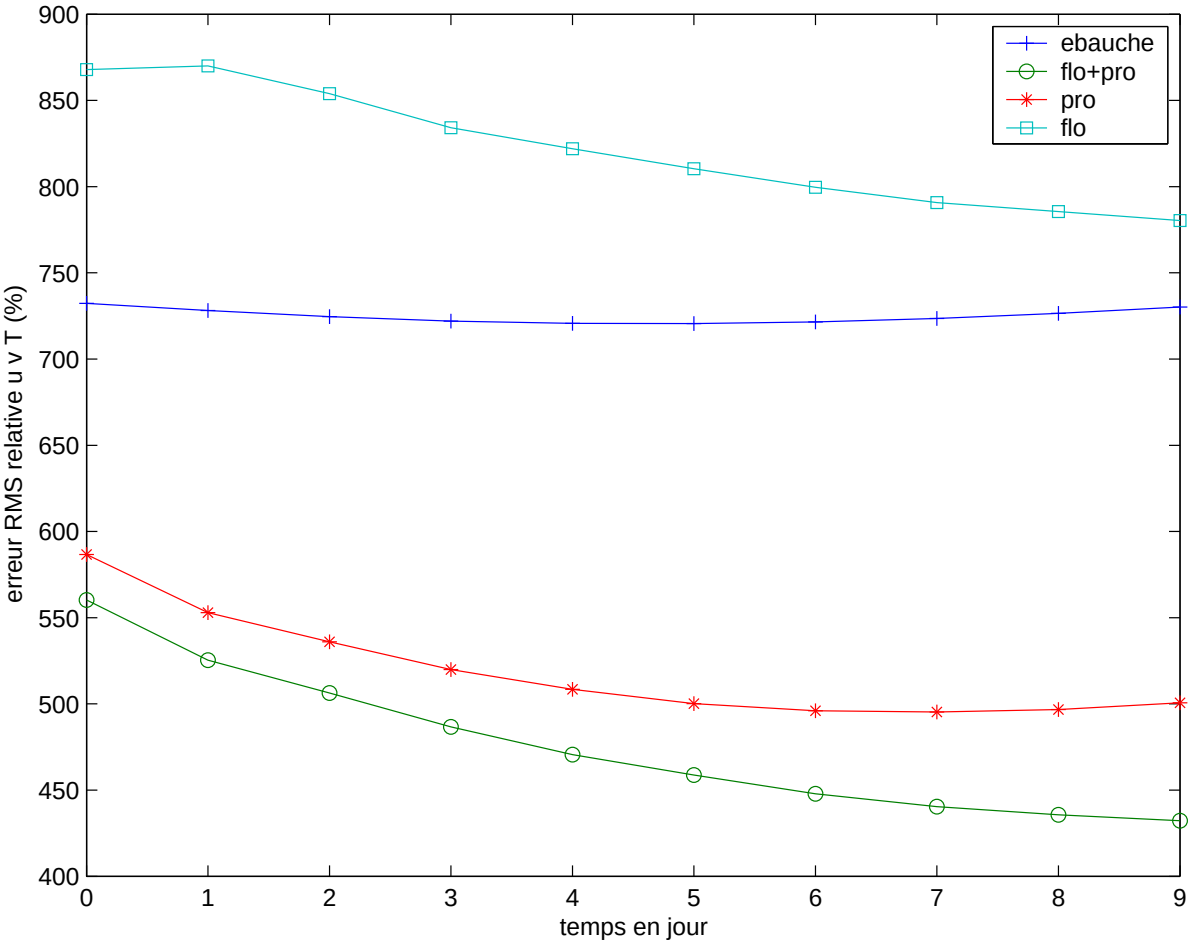


FIG. 7.30 – Complémentarité profils/position : validation. Erreur RMS globale pour u, v et T en fonction du temps pour l'ébauche et les expériences *profils seuls*, *positions seules*, *positions et profils*.

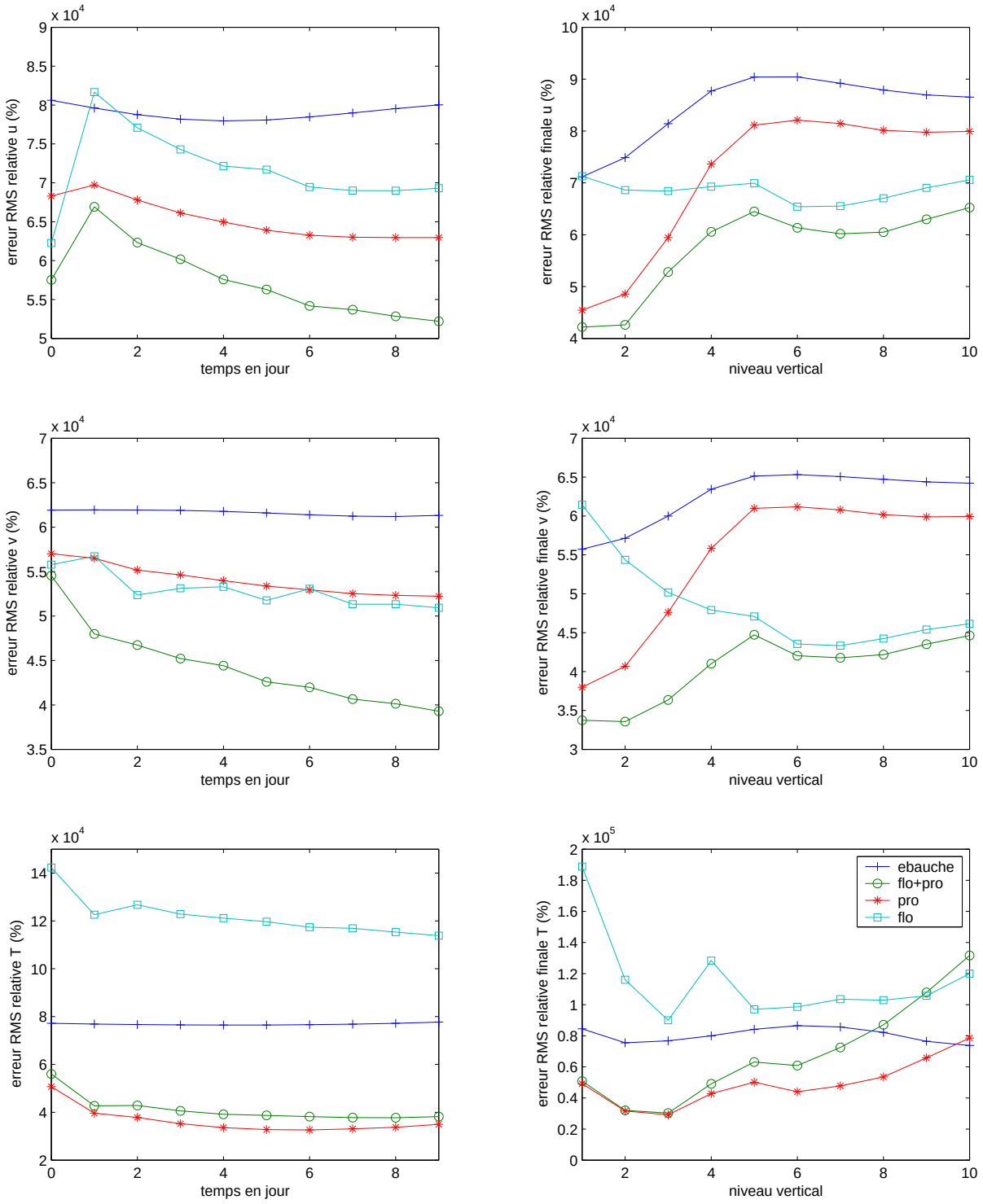


FIG. 7.31 – Complémentarité profils/position : validation. Erreurs RMS relatives en fonction du temps et relatives finales pour u, v et T pour l'ébauche et les expériences *profils seuls*, *positions seules*, *positions et profils*.

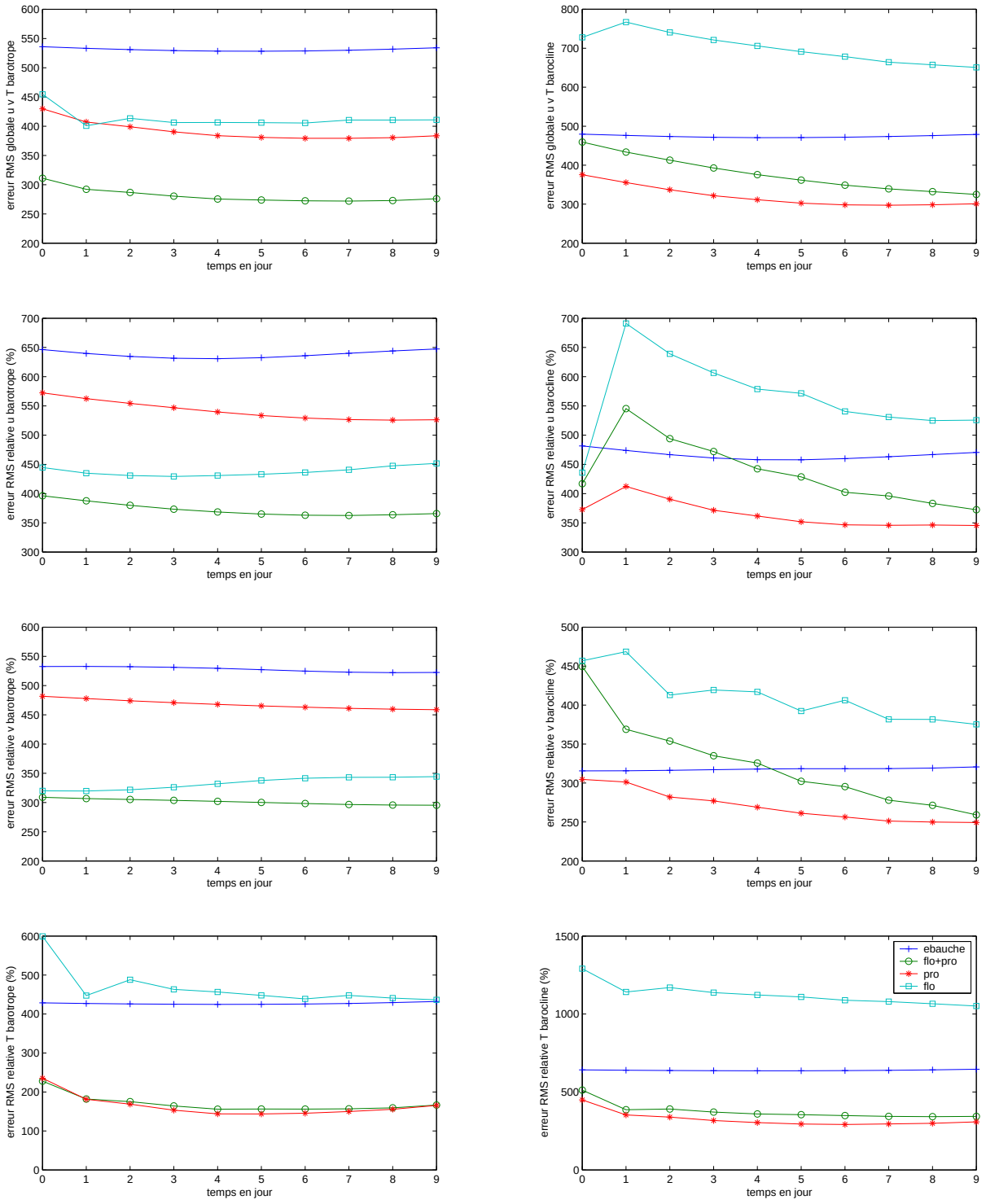


FIG. 7.32 – Complémentarité profils/position : validation. Erreurs RMS relatives en fonction du temps pour les composantes barotropes et baroclines de u, v et T pour l'ébauche et les expériences *profils seuls*, *positions seules*, *positions et profils*.

7.6.2 Influence du nombre et de la période

On limite désormais la profondeur des profils à une valeur physiquement réaliste de 2 000 mètres. Les flotteurs dérivent toujours au niveau 4 pendant 10 jours. On étudie l'impact, pour un jeu de 1 000 flotteurs, de l'augmentation de la période de 1 à 10 jours ; puis celui, pour une période fixée à un jour, de la diminution du nombre de flotteurs de 1 000 à 100. On compare toujours les résultats à ceux obtenus précédemment avec uniquement les profils (expérience *pro*) et uniquement les positions (expérience *flo*).

7.6.2.1 Augmentation de la période

La figure 7.33 présente les erreurs RMS globales E_3 pour u, v et T pour l'ébauche, l'assimilation des positions seules (1 000 flotteurs, un échantillonnage par jour), l'assimilation des profils seuls (1 000 profils, un échantillonnage par jour) et l'assimilation conjointe des profils et positions à période variable (1 000 flotteurs, un échantillonnage tous les 1, 3, 5 ou 10 jours).

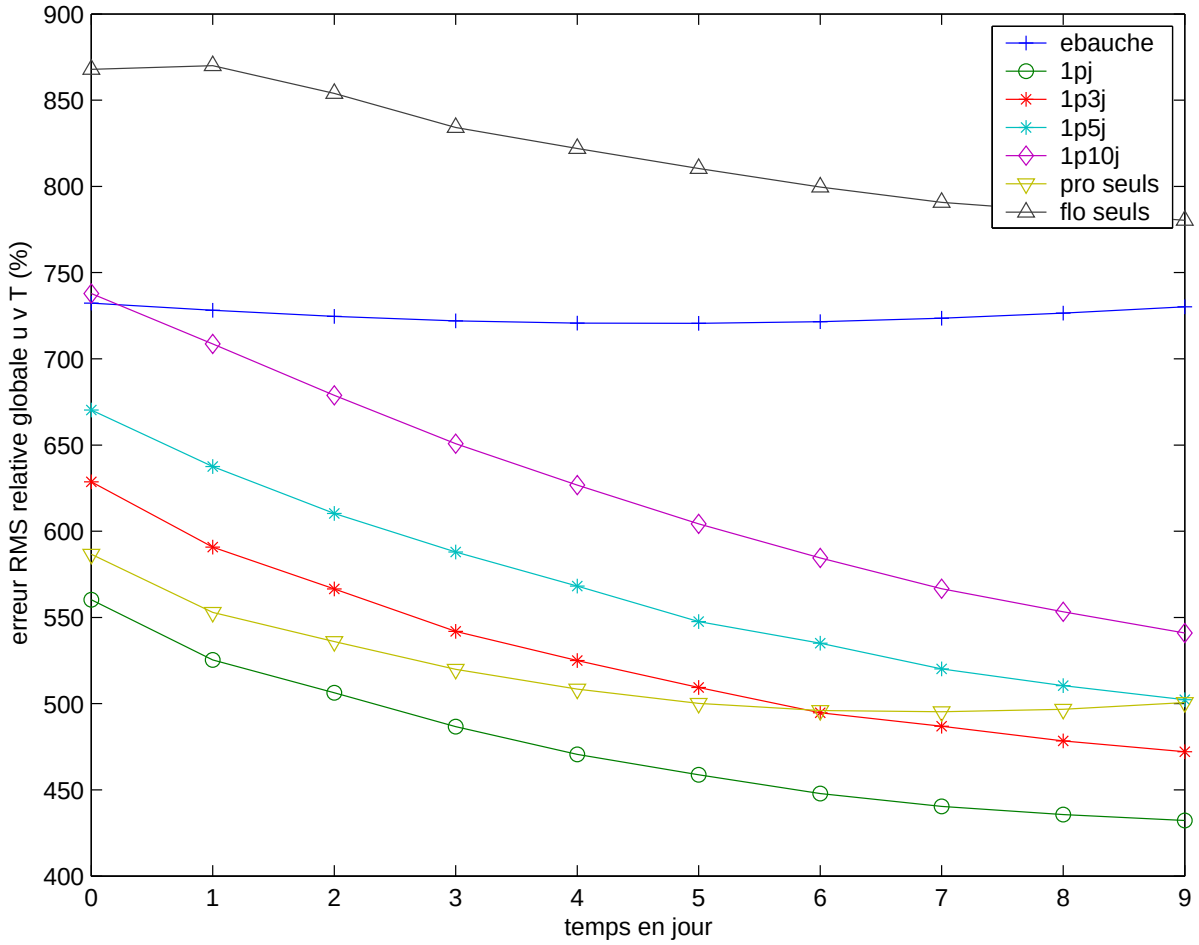


FIG. 7.33 – Complémentarité profils/positions. Erreurs RMS globales pour 1 000 flotteurs et une période d'échantillonnage variant de 1 à 10 jours, comparaison avec l'assimilation des positions seules et des profils seuls.

Contrairement aux résultats des paragraphes précédents, les résultats sont sensibles

à la diminution de la fréquence des échantillonnages. Ceci s'explique très simplement : auparavant on supposait connue la température, ce qui n'est plus le cas maintenant. Dans les expériences actuelles, la température est contrôlée par les profils verticaux et plus la fréquence baisse plus le nombre de données de température diminue et plus les résultats se dégradent. On peut noter cependant que, au moins à la fin de la fenêtre temporelle, la combinaison des positions et des profils (même avec une grande période de 10 jours) donne de meilleurs résultats que des données plus fréquentes avec uniquement des positions ou uniquement des profils.

La figure 7.34 présente plus précisément les erreurs E_1 (à gauche) et E_2 (à droite) pour u, v et T pour les mêmes expériences. De la même façon, on remarque que l'augmentation de la période d'échantillonnage dégrade régulièrement les résultats, qui restent cependant toujours meilleurs que l'ébauche. Le manque d'information de température se fait sentir surtout pour u (graphique en haut à gauche), où la courbe de période 10 jours atteint celle avec positions seules au début de la fenêtre, avant de revenir en deçà au cours du temps. Pour v, par contre, les résultats sont un peu plus stables et restent meilleurs avec *profils+position*s quelle que soit la période. Pour T enfin, le meilleur résultat est toujours celui *profils seuls*, mais les expériences *profils+positions* font toujours mieux que l'ébauche.

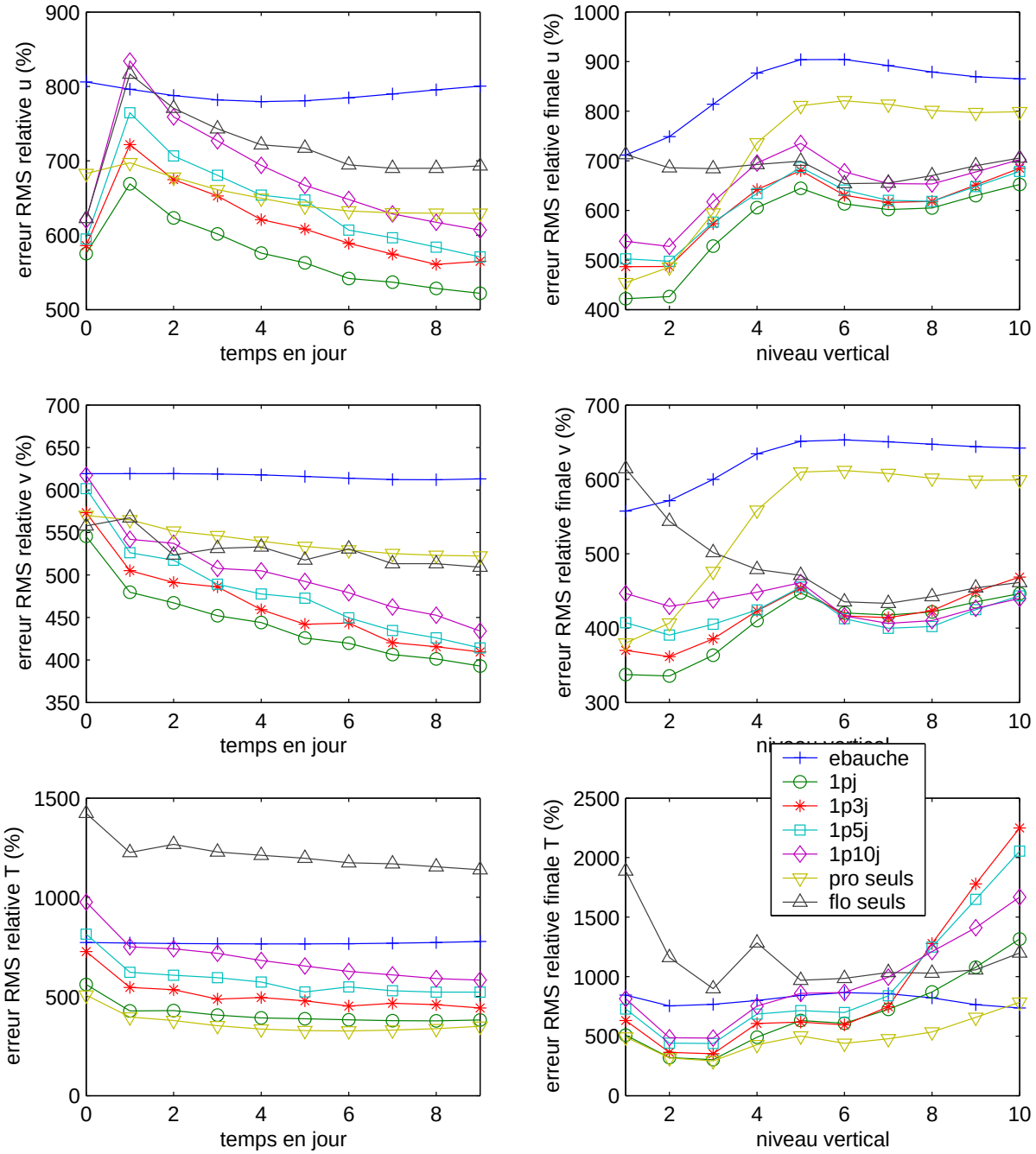


FIG. 7.34 – Complémentarité profils/positions. Erreurs RMS relatives en fonction du temps et relatives finales en fonction du niveau pour 1 000 flotteurs et une période d'échantillonnage variant de 1 à 10 jours, comparaison avec l'assimilation des positions seules et des profils seuls.

7.6.2.2 Diminution du nombre

La figure 7.35 présente l'erreur RMS globale E_3 en fonction du temps pour l'ébauche, l'assimilation des profils seuls (*pro seuls*), celle des positions seules (*flo seuls*) et l'assimilation conjointe des profils et des positions pour un réseau de 100, 300, 500 et 1 000 flotteurs échantillonnés une fois par jour. Comme précédemment, on note une grande sensibilité à la diminution du nombre de flotteurs. En comparant avec la figure 7.33 on remarque qu'il vaut bien mieux diviser par 10 le nombre de données en jouant sur la période temporelle (ie passer de 1 000 flotteurs, 1 échantillonnage par jour à 1 000 flotteurs, 1 pour 10 jours) plutôt que sur le nombre (ie passer de 1 000 flotteurs, 1 échantillonnage par jour à 100 flotteurs, 1 par jour). Ceci rejoint un peu les résultats obtenus avec l'assimilation des positions seules, à température initiale vraie donnée. On va voir en effet sur la figure suivante que ce sont les résultats pour les vitesses qui se comportent différemment lorsque l'on fait varier le nombre et la période, alors que les résultats pour la température sont plutôt sensibles au nombre global de données sur la fenêtre temporelle.

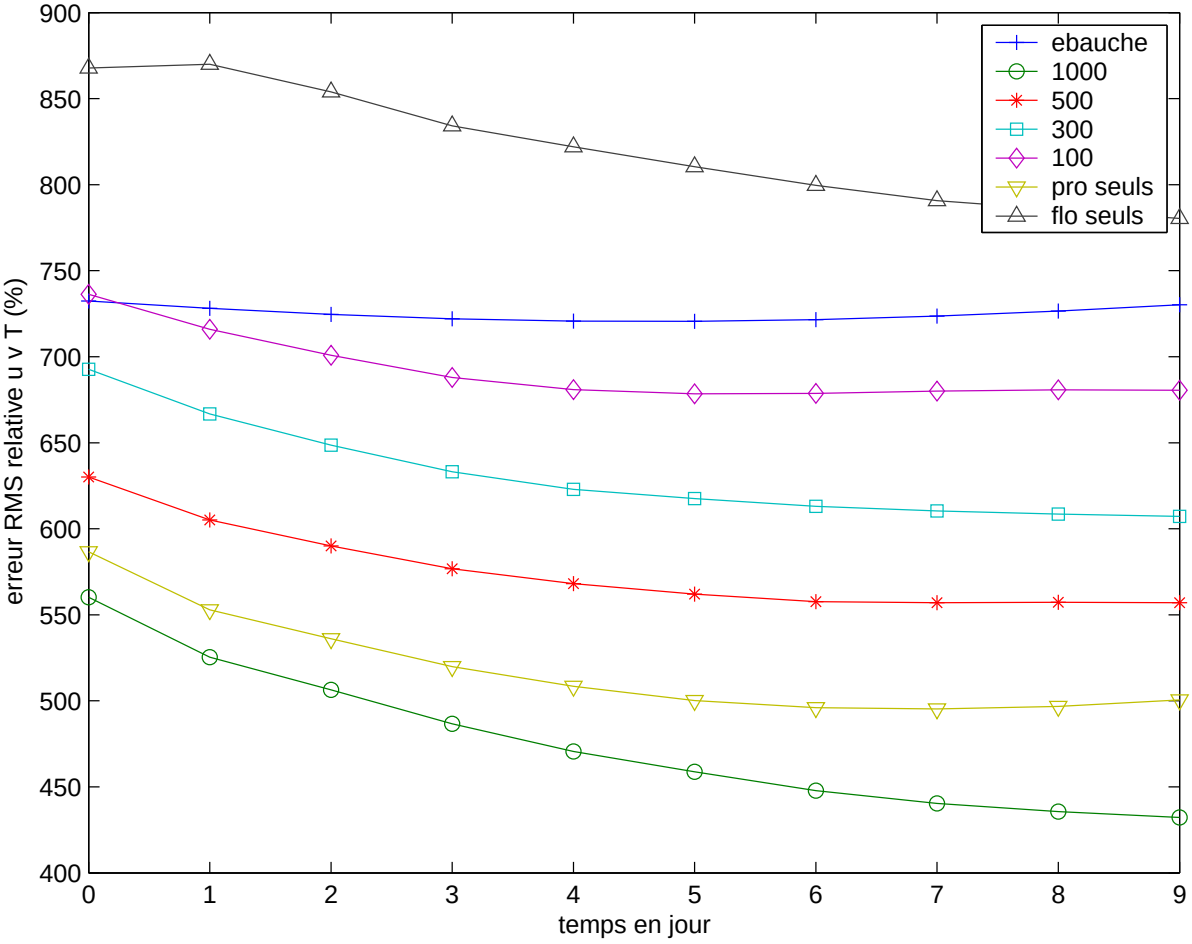


FIG. 7.35 – Complémentarité profils/positions. Erreurs RMS globales pour une période temporelle d'échantillonnage d'un jour pour 100 à 1 000 flotteurs, comparaison avec l'assimilation des positions seules et des profils seuls.

La figure 7.36 présente les erreurs RMS relatives en fonction du temps E_1 (à gauche) et relatives finales en fonction du niveau E_3 (à droite) pour u, v et T (haut, milieu, bas) pour les mêmes expériences. Remarquons tout d'abord que les deux figures concernant la température (en bas) sont assez similaires à celles de la figure 7.34 : on obtient ainsi les mêmes résultats en divisant par n le nombre de flotteurs ou en divisant par n la fréquence temporelle d'échantillonnage. L'efficacité de l'assimilation de la température dépend tout simplement du nombre global de données disponibles sur la fenêtre temporelle. Ce n'est pas le cas pour les vitesses : comme on a pu le voir précédemment, notre méthode lagrangienne est capable de restituer de l'information des positions vers les vitesses même quand la fréquence d'observation est basse, la méthode fonctionne donc mieux (pour les vitesses) lorsque la période augmente plutôt que lorsque le nombre de flotteurs diminue.

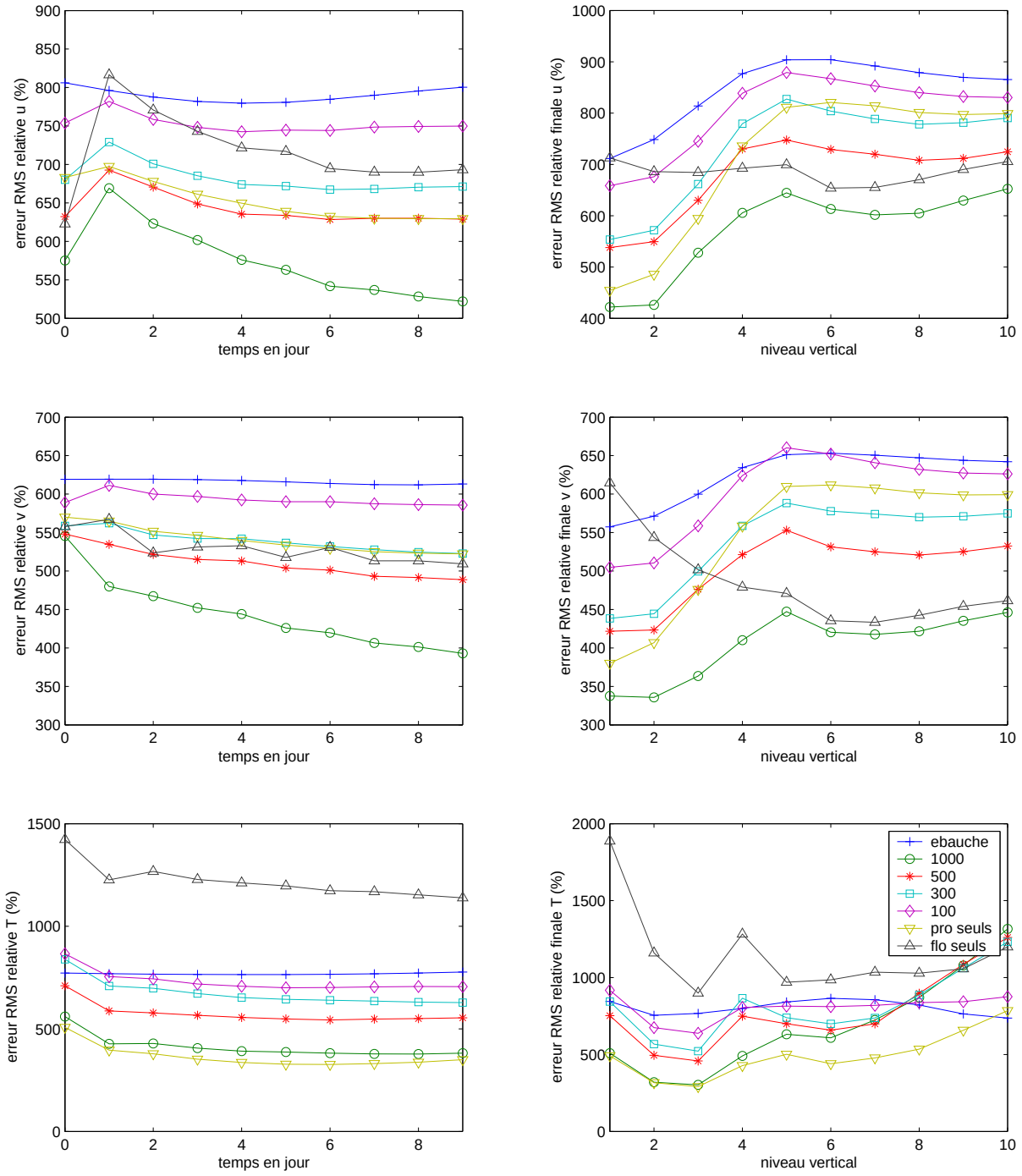


FIG. 7.36 – Complémentarité profils/positions. Erreurs RMS relatives en fonction du temps et relatives finales en fonction du niveau pour une période temporelle d'échantillonnage de un jour pour 100 à 1 000 flotteurs, comparaison avec l'assimilation des positions seules et des profils seuls.

7.6.3 Expériences longues

Dans ce paragraphe on effectue des expériences plus longues, avec divers nombres de flotteurs et diverses périodes. Le principe est le même que celui du paragraphe 7.2.4 : pour la première fenêtre (de 1 à 10 jours) on utilise la même ébauche que précédemment (ie l'état vrai de l'océan décalé d'un an dans le passé), pour la deuxième fenêtre on utilise comme ébauche le résultat final de l'assimilation sur la première fenêtre, et de même pour la troisième. Comme précédemment, les flotteurs dérivent au niveau 4 et effectuent des profils de température entre 2 000 mètres de profondeur et la surface.

La figure 7.37 présente l'erreur RMS globale E_3 en fonction du temps pour l'ébauche, trois expériences avec 1 000 flotteurs (périodes de 1, 5 et 10 jours) et deux expériences avec 500 flotteurs (périodes de 1 et 5 jours). On note que l'erreur diminue bien pour toutes les expériences, signe que la méthode fonctionne, même si la diminution est assez lente pour *500 flotteurs, 5 jours*. On constate toujours, du moins pour l'erreur globale, qu'il vaut mieux privilégier le nombre de flotteurs plutôt que la période.

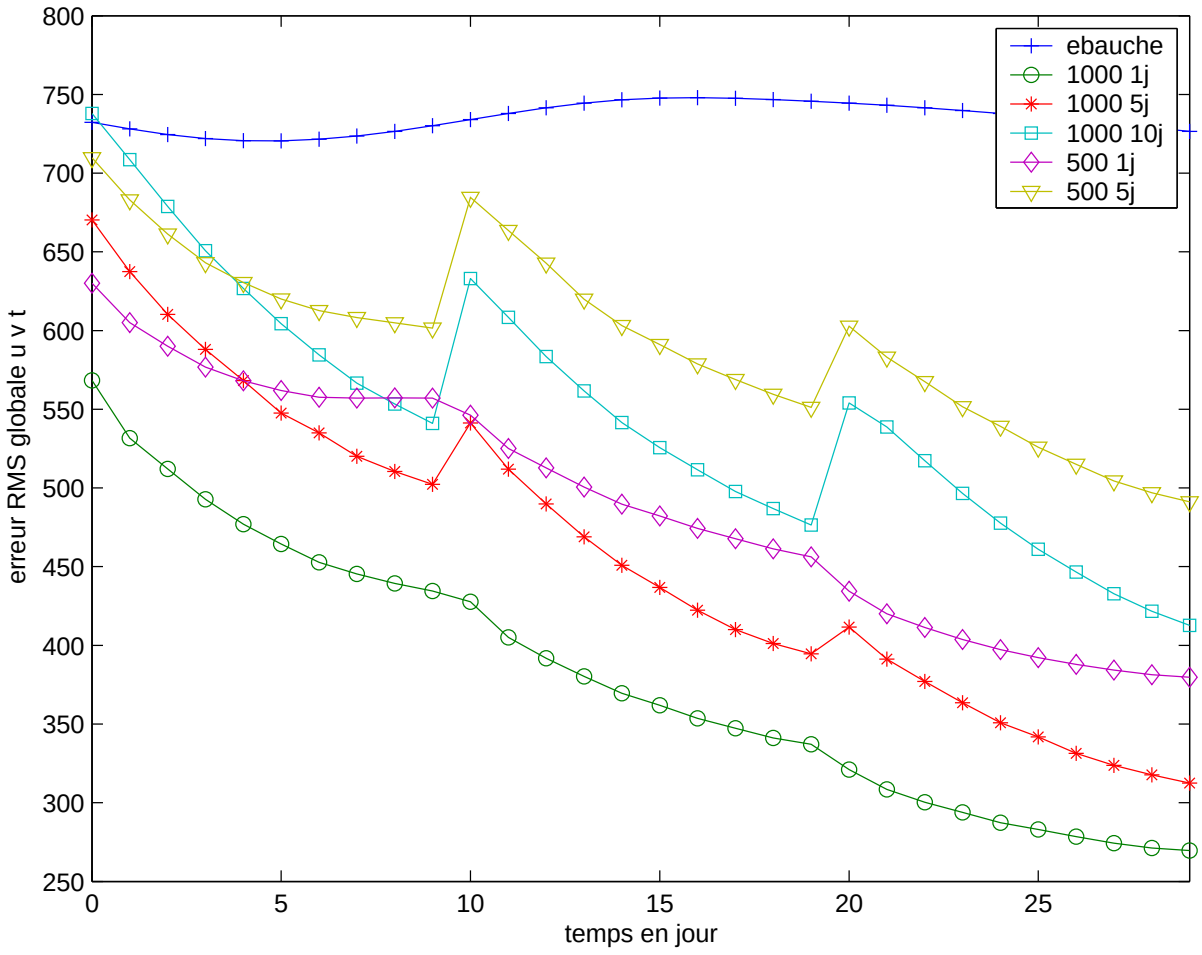


FIG. 7.37 – Complémentarité profils/positions : expériences longues. Erreurs RMS relatives globales en fonction du temps pour l'assimilation conjointe des profils et des positions avec 1 000 ou 500 flotteurs échantillonnés tous les 1, 5 ou 10 jours.

La figure 7.38 présente les erreurs RMS relatives E_1 pour u, v et T ainsi que l'erreur relative globale E_3 en fonction du temps pour les expériences avec 1 000 flotteurs échantillonnés tous les 1, 5 ou 10 jours. La tendance observée au paragraphe précédent se confirme : les résultats pour la température sont beaucoup plus sensibles à la diminution de la fréquence que les résultats pour les vitesses, l'erreur $E_1(T)$ pour une période de 10 jours diminue sûrement mais assez lentement au cours du temps.

flo

La figure 7.39 présente les mêmes graphiques pour un réseau de 500 flotteurs échantillonnés une fois par jour ou une fois tous les cinq jours, comparés à 1 000 flotteurs une fois tous les cinq jours. On peut faire les mêmes remarques que précédemment quant aux influences différentes du nombre et de la période.

7.6.4 Conclusion

Ces quelques expériences montrent qu'il existe une double complémentarité entre les données de positions et les données de profils verticaux de température. En effet, on observe d'une part une complémentarité température/vitesses : les profils seuls restituent bien les températures mais les flotteurs seuls n'apportent que peu d'information, c'est la combinaison profils/positions qui permet de reconstituer effectivement les vitesses (et également la température). D'autre part les positions donnent une information barotrope et les profils une information barocline. Plus précisément, les positions seules restituent très mal les composantes baroclines, contrairement aux profils seuls, et la conjonction des deux permet d'améliorer la restitution. Pour les composantes barotropes c'est plutôt l'inverse qui se produit, les positions reconstituant mieux les composantes barotropes que les profils.

La diminution du nombre de flotteurs et de la fréquence d'échantillonnage dégrade les résultats, mais ils restent meilleurs avec assimilation que sans. On a remarqué aussi que la diminution du nombre de flotteurs est plus pénalisante que celle de la fréquence d'échantillonnage : il vaut mieux privilégier un réseau dense observé peu souvent plutôt que l'inverse.

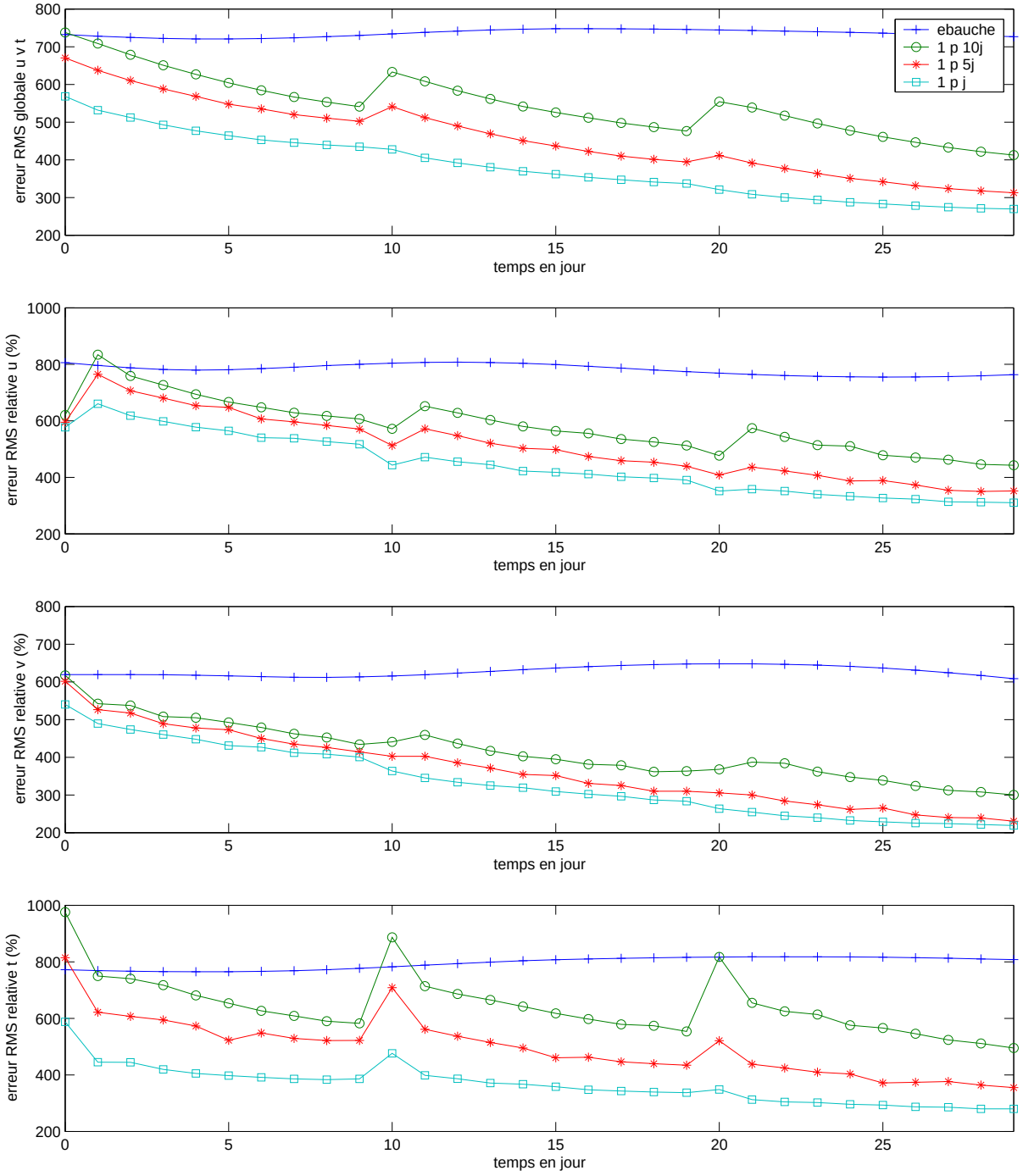


FIG. 7.38 – Complémentarité profils/positions : expériences longues. Erreurs RMS relatives E_1 (pour u, v et T) et relatives globales E_3 en fonction du temps pour l'assimilation conjointe des profils et des positions avec 1 000 échantillonnés tous les 1, 5 ou 10 jours.

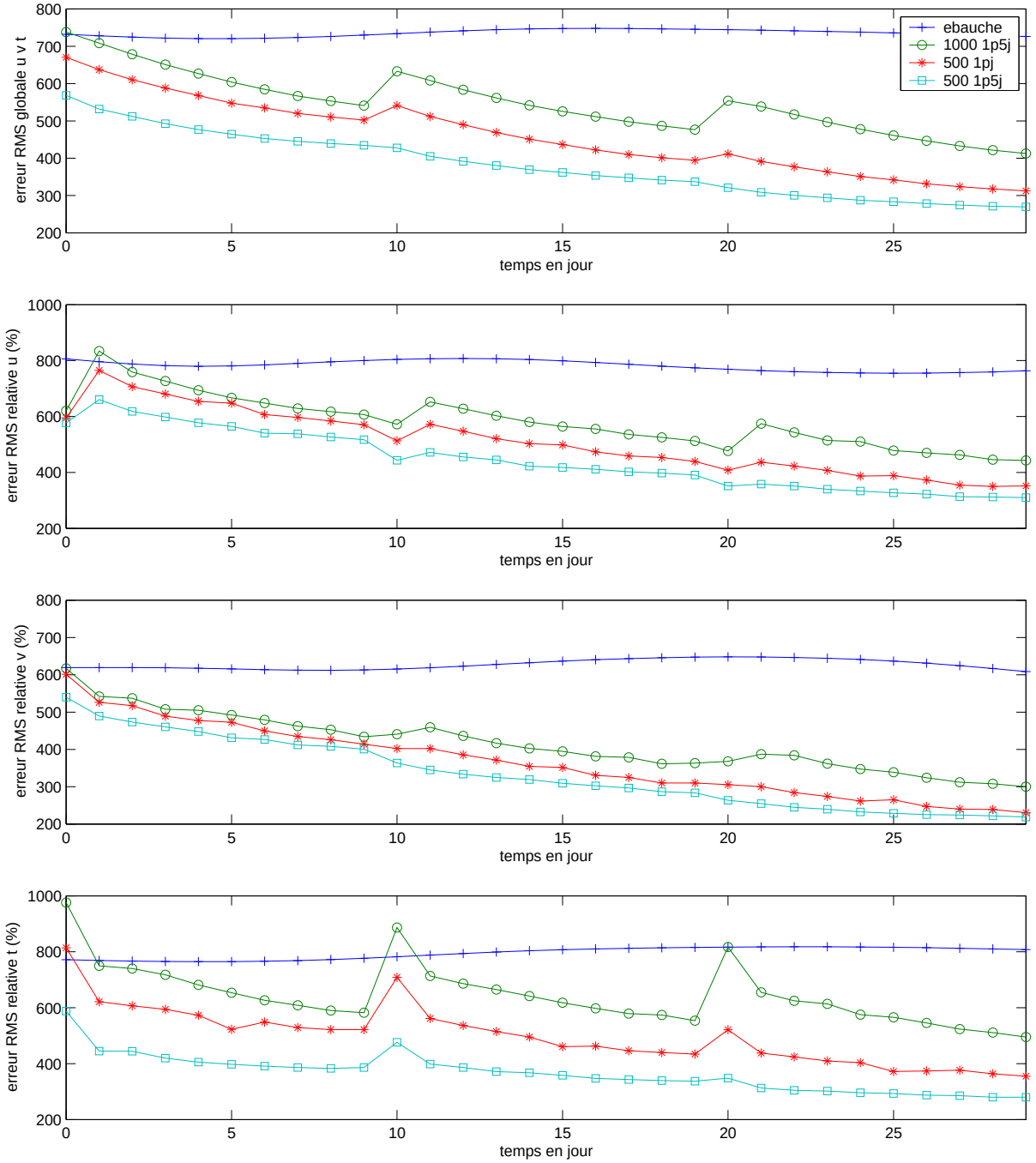


FIG. 7.39 – Complémentarité profils/positions : expériences longues. Erreurs RMS relatives E_1 (pour u, v et T) et relatives globales E_3 en fonction du temps pour l'assimilation conjointe des profils et des positions avec 500 flotteurs échantillonnés tous les 1 ou 5 jours, comparaison avec 1 000 flotteurs tous les 5 jours.

Chapitre 8

Conclusions et perspectives

L'objectif de cette deuxième partie était de mettre en œuvre une méthode *lagrangienne* pour assimiler de nouvelles données : les positions de flotteurs dérivant à profondeur constante dans l'océan. Pour cela nous avons utilisé une méthode fondée sur la théorie du contrôle optimal : l'assimilation variationnelle quadri-dimensionnelle. Dans ce formalisme nous avons développé un nouvel opérateur d'observation, adapté aux données lagrangiennes. Nous avons implémenté cet opérateur ainsi que les opérateurs linéaire-tangent et adjoint associés et nous les avons intégrés au système d'assimilation océanique OPAVAR. Nous avons validé notre méthode lagrangienne et l'avons utilisée pour étudier l'impact des données de position sur la reconstitution du champ de vitesse dans l'océan. Les expériences présentées dans ce travail soulèvent un certains nombre de commentaires et de perspectives.

– Tout d'abord, notre méthode est effectivement *lagrangienne*. En effet, contrairement à la méthode *eulérienne* qui consiste à interpréter les données de positions en données de vitesses, la méthode *lagrangienne* donne de bons résultats lorsque la période temporelle d'échantillonnage des positions est grande, par exemple trois, cinq ou dix jours.

– Nous avons mis en évidence l'existence d'une *densité spatiale optimale* de flotteurs, qui est d'un flotteur pour dix mille kilomètres carrés dans notre configuration. Pour une densité supérieure les résultats ne s'améliorent pas ; pour une densité très inférieure l'information devient insuffisante. Ceci n'est pas très encourageant pour l'assimilation des données issues du réseau de flotteurs Argo, dont la densité prévue à terme est très inférieure à celle que nous demandons. En outre, nos hypothèses de travail sont académiques et sous-estiment peut-être la densité optimale.

– Nous avons constaté que la méthode *lagrangienne* reconsitue mieux les composantes barotropes que les composantes baroclines et cela suscite deux remarques.

- La première est que le zéro du premier mode barocline est une *profondeur de dérive optimale*, comme nous avons pu le constater dans nos expériences.
- La deuxième est que les données lagrangiennes de positions sont complémentaires de toute information barocline, comme nous avons pu le mettre en évidence en assimilant conjointement les données de positions avec des profils verticaux de température de type Argo.

– Nous avons montré également que la méthode *lagrangienne* est assez robuste face à la présence d'erreurs d'observation. En effet, même lorsque la position est entachée d'une erreur de vingt kilomètres, les résultats sont encore bons. En outre, lorsque l'erreur est de l'ordre de dix kilomètres, valeur pourtant supérieure à l'estimation de l'erreur *réelle*, la méthode fonctionne aussi bien qu'avec des données parfaites. Ceci est extrêmement encourageant pour l'assimilation de données réelles, même si pour cela d'autres problèmes subsistent, comme nous le verrons un peu plus bas.

La perspective la plus évidente ouverte par ce travail est aussi celle qui génère le plus de questions et de pistes de recherche, il s'agit de l'assimilation des données réelles de flotteurs dérivants. En effet, nous venons de valider notre travail dans le cadre académique des expériences jumelles et il est tout à fait légitime de confronter la méthode à la réalité. La première étape serait de faire évoluer la configuration de l'océan vers un modèle réaliste, en ajoutant une bathymétrie, des côtes et des forçages réalistes (vents, flux de chaleur, etc.). Ensuite il faudrait adapter le code d'assimilation à la nouvelle grille, en modifiant un peu l'implémentation. On pourrait alors commencer les expériences d'assimilation de données réelles. Les difficultés prévisibles et les pistes de recherche sont les suivantes :

– Le nombre de données de positions sera-t-il suffisant pour espérer reconstituer le champ de vitesse ? En effet, on a pu voir en étudiant l'impact du nombre de flotteurs sur l'efficacité du processus d'assimilation qu'un petit nombre de flotteurs donne une information peu significative.

– Comment valider le processus d'assimilation ? Quelles seront les données indépendantes qui permettront d'affirmer que les positions ont effectivement apporté une information utile ?

– Le nombre de données de température sera-t-il suffisant également ? En effet, on a pu voir en étudiant la complémentarité profils/positions qu'une connaissance assez bonne du champ de température est requise pour assimiler utilement les positions.

– Même si tous ces points sont satisfaits, il reste un problème majeur : celui de la *modélisation des trajectoires*. En effet, imaginons un instant que nous travaillions dans l'Atlantique Nord avec un modèle à basse résolution. La taille des tourbillons résolus par le modèle est grande, autrement dit le modèle ne "voit" pas les tourbillons de taille petite ou moyenne. Cependant, le flotteur lui les "voit"... La trajectoire simulée par le modèle grande échelle risque d'être totalement différente de la trajectoire réelle. Inutile de dire alors que l'assimilation sera totalement inefficace... Cet exemple est certes simpliste mais illustre bien les difficultés futures : modéliser l'océan est délicat, modéliser des trajectoires de flotteurs l'est aussi et dépend fortement, par le lien non-linéaire entre vitesses et positions, de la qualité du modèle d'océan sous-jacent.

– En assimilation de données eulériennes, les problèmes liés à la modélisation sont résolus en ajoutant un terme d'*erreur modèle* inconnu, qui peut être identifié par le système d'assimilation. En assimilation variationnelle, ceci peut être fait en utilisant des méthodes de réduction d'ordre, qui mériteraient d'être étudiées avec des données lagrangiennes.

– Une façon éventuelle de modéliser les trajectoires de flotteurs lagrangiens, qui est depuis peu étudiée par la communauté "flotteurs lagrangiens", est d'ajouter un bruit stochastique dans l'équation différentielle d'advection, pour modéliser l'effet sur la trajectoire des phénomènes sous-maille non résolus par le modèle. La question qui se pose alors est de savoir comment gérer ce terme stochastique dans l'algorithme d'assimilation variationnelle, notamment dans les opérateurs tangent et adjoint.

– Enfin, dans cette thèse nous avons étudié l'assimilation conjointe de données lagrangiennes et de données thermohalines *in situ*. Dans la perspective de l'océanographie opérationnelle, il faudra aussi étudier la complémentarité avec des données satellitaires comme la hauteur d'eau ou la température de surface. Les données lagrangiennes pourront alors s'intégrer, avec tous les autres types de données, dans un système opérationnel de prévisions océanographiques.

Annexe - Calibration des paramètres de l'assimilation

Le processus d'assimilation comporte un certain nombre de paramètres que nous avons dû choisir. Évidemment certains paramètres sont liés et il a fallu parfois en optimiser plusieurs simultanément, ce qui n'est pas forcément visible dans la présentation linéaire de ce paragraphe. Les quelques expériences ci-dessous sont quelques exemples des nombreuses expériences de réglage effectuées.

Paramètres du 4D-Var incrémental

Nous commençons par regarder le problème du choix des paramètres de l'optimisation :
- nombre total d'itérations de minimisation (voir l'algorithme 6.1 dans le chapitre précédent)
- nombre de boucles externes (idem)
- intervalle de stockage de la trajectoire de référence (la taille du problème impose de stocker la trajectoire de référence en des temps donnés peu nombreux, voir le point 5 du paragraphe 6.3.2.3)

Nous avons commencé par limiter le nombre total d'itérations à 30 qui est un bon compromis entre efficacité de la minimisation et temps de calcul (voir aussi les premiers tests du paragraphe 7.2).

Le problème du choix de la taille de l'intervalle de stockage est assez délicat : un jour semble a priori un bon compromis entre espace mémoire nécessaire et réalisme de la trajectoire interpolée. Cependant, avec notre opérateur d'observation, l'état assimilé que l'on obtient est assez bruité. Or cet état assimilé est justement celui qui est utilisé pour remettre à jour la trajectoire non linéaire lorsque l'on fait plus d'une boucle externe. Choisir un intervalle de stockage d'un jour ne permet donc pas de faire plusieurs boucles externes. Un grand nombre de boucles externes (3 ou plus) est coûteux en temps, mais permet de mieux prendre en compte les non-linéarités. Nous avons donc choisi la valeur maximale pour l'intervalle de stockage (10 jours) et 3 boucles externes. La figure 8.1 montre quelques expériences effectuées justifiant ce choix.

Choix de l'ébauche et de la taille de la fenêtre d'assimilation

L'ébauche et la taille de la fenêtre sont liées par la formulation incrémentale : en effet, le modèle est linéarisé *autour de l'ébauche sur toute la fenêtre d'assimilation*. Lorsque l'ébauche est très différente de l'état vrai, ou bien lorsque la taille de la fenêtre est très

grande, les erreurs d'approximation sont importantes.

Le code OPAVAR propose un test de validation de l'*hypothèse linéaire tangent*, que nous avons utilisé. Pour cela on reprend les notations du chapitre 4 : M est le modèle non-linéaire, $\mathbf{M}$ est le modèle linéaire tangent autour de l'ébauche $\mathbf{x}^b$, $\mathbf{x}^t$ est l'état vrai. On compare la perturbation non-linéaire δ_1 :

$$\delta_1 \;=\; M[\mathbf{x}^t] - M[\mathbf{x}^b] \tag{8.1}$$

et la perturbation linéaire δ_2 :

$$\delta_2 \;=\; \mathbf{M}(\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^b) \tag{8.2}$$

Pour cela on calcule la corrélation spatiale entre δ_1 et δ_2 :

$$Cor(\delta_1, \delta_2) = \frac{\langle \delta_1 \delta_2 \rangle - \langle \delta_1 \rangle \langle \delta_2 \rangle}{\sqrt{(\langle \delta_1^2 \rangle - \langle \delta_1 \rangle^2)(\langle \delta_2^2 \rangle - \langle \delta_2 \rangle^2)}} \tag{8.3}$$

où $\langle X \rangle$ est la moyenne spatiale de X. Plus la corrélation est proche de 1 meilleure est l'adéquation entre les champs. Les figures 8.2 et 8.3 représentent les corrélations pour différents choix d'ébauche et de taille de fenêtre d'assimilation. Les corrélations sont nettement plus satisfaisantes pour une fenêtre de 10 jours seulement et une ébauche décalée de 10 jours, nous avons donc choisi ces valeurs.

Cependant, les résultats d'assimilation étaient assez médiocres, nous sommes donc restés sur une fenêtre de 10 jours et nous avons comparé différentes ébauches, en fixant notamment la température de l'ébauche à la température initiale vraie. Ceci est assez raisonnable : dans la réalité on n'observe pas uniquement des données de positions, mais on dispose aussi d'autres données, notamment de température. On peut donc supposer pour commencer que le champ de température de l'ébauche est vrai. Dans ce cas, l'ébauche n'est plus un état du modèle, et on observe un ajustement géostrophique sur les premiers pas de temps de la fenêtre. La figure 8.4 montre les erreurs E_1 pour u et v et E_3 (pour u et v seulement) avec différentes ébauches ainsi que l'évolution du quotient de E_3 pour l'état assimilé par E_3 pour l'ébauche. Nous avons ainsi choisi une ébauche décalée de 10 jours dans laquelle la température est vraie.

Poids relatifs des différents termes de la fonction coût

Un autre paramètre fondamental pour l'assimilation sont les paramètres r_f et r_p (voir paragraphe 6.4.2), qui représentent les poids relatifs du terme d'ébauche $\mathcal{J}^b$ par rapport aux termes d'observation associés aux positions et aux profils dans la fonction coût. L'état assimilé est en effet assez sensible à ces paramètres : pour une trop grande valeur le terme de régularisation est trop faible et l'algorithme ne converge pas, pour une trop petite valeur les termes d'observation diminuent peu au cours de la minimisation et l'état assimilé reste trop loin des observations. Nous avons ainsi choisi des valeurs moyennes de r_f et r_p qui assurent convergence de l'algorithme et décroissance des deux termes d'observation.

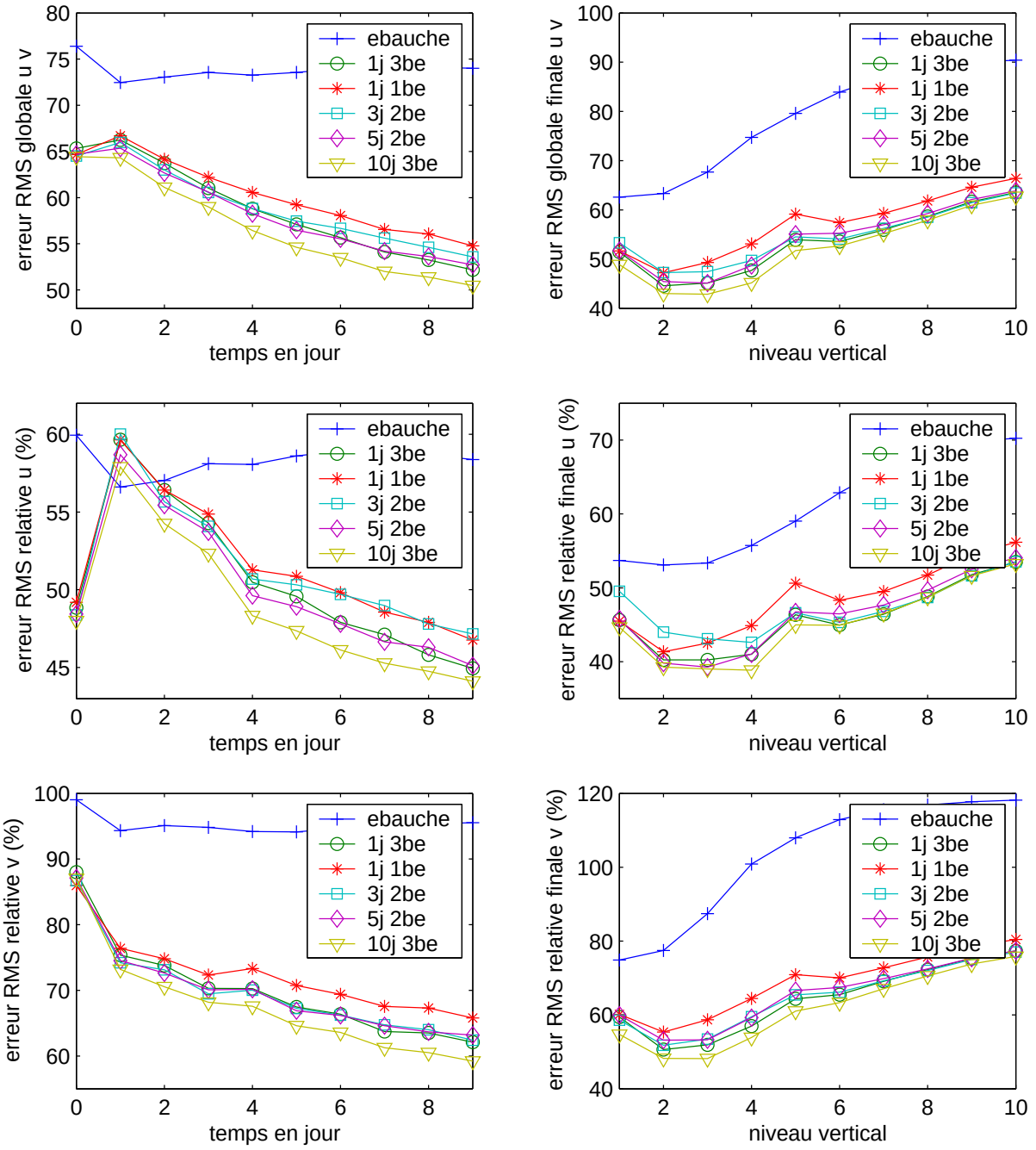


FIG. 8.1 – Calibration des paramètres de l'optimisation : choix de l'intervalle de stockage de la trajectoire de référence (en jours, variant de 1 à 10) et du nombre de boucles externes (1, 2 ou 3 be).

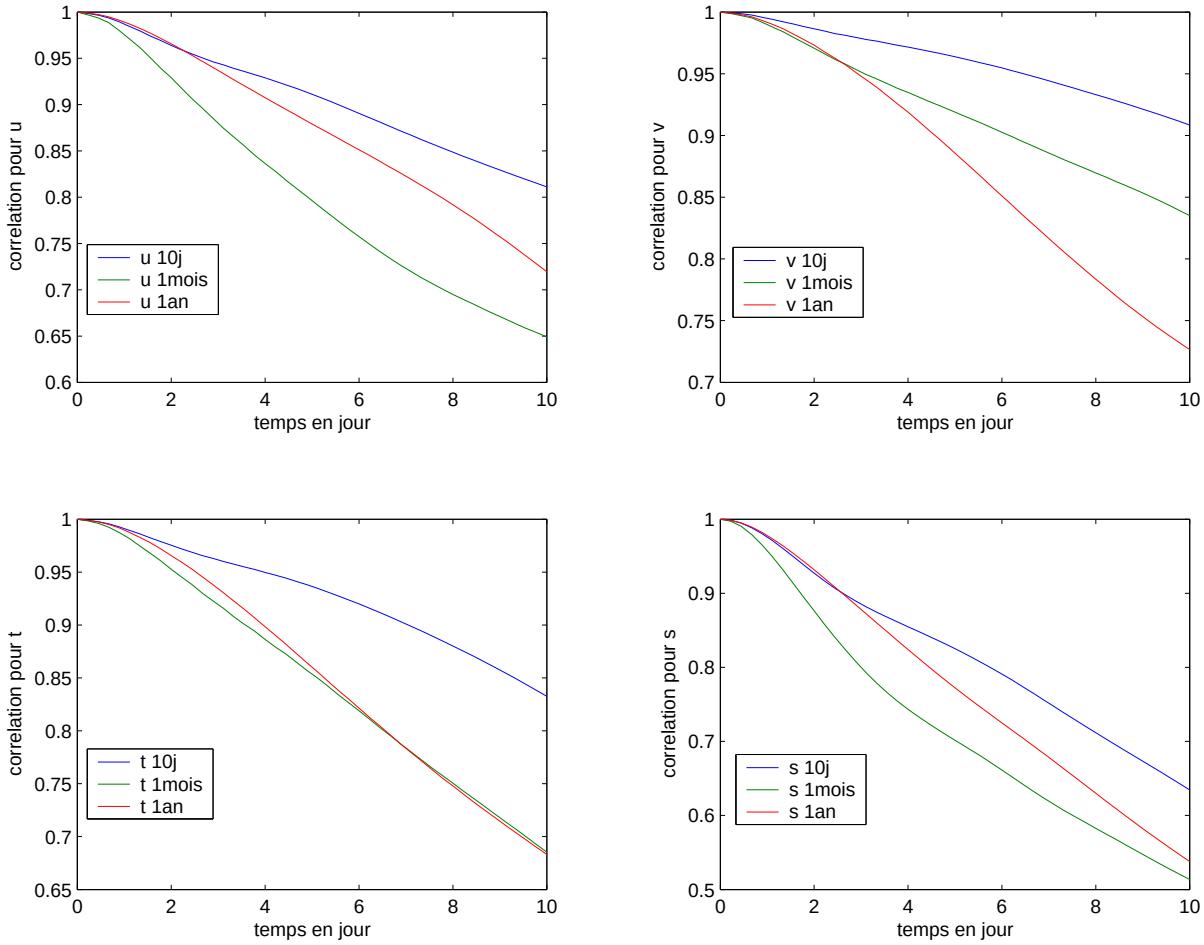


FIG. 8.2 – Calibration des paramètres de l'optimisation : choix de l'ébauche et de la taille de la fenêtre. Corrélations pour une fenêtre de 10 jours, avec une ébauche décalé de 10 jours, un mois ou un an.

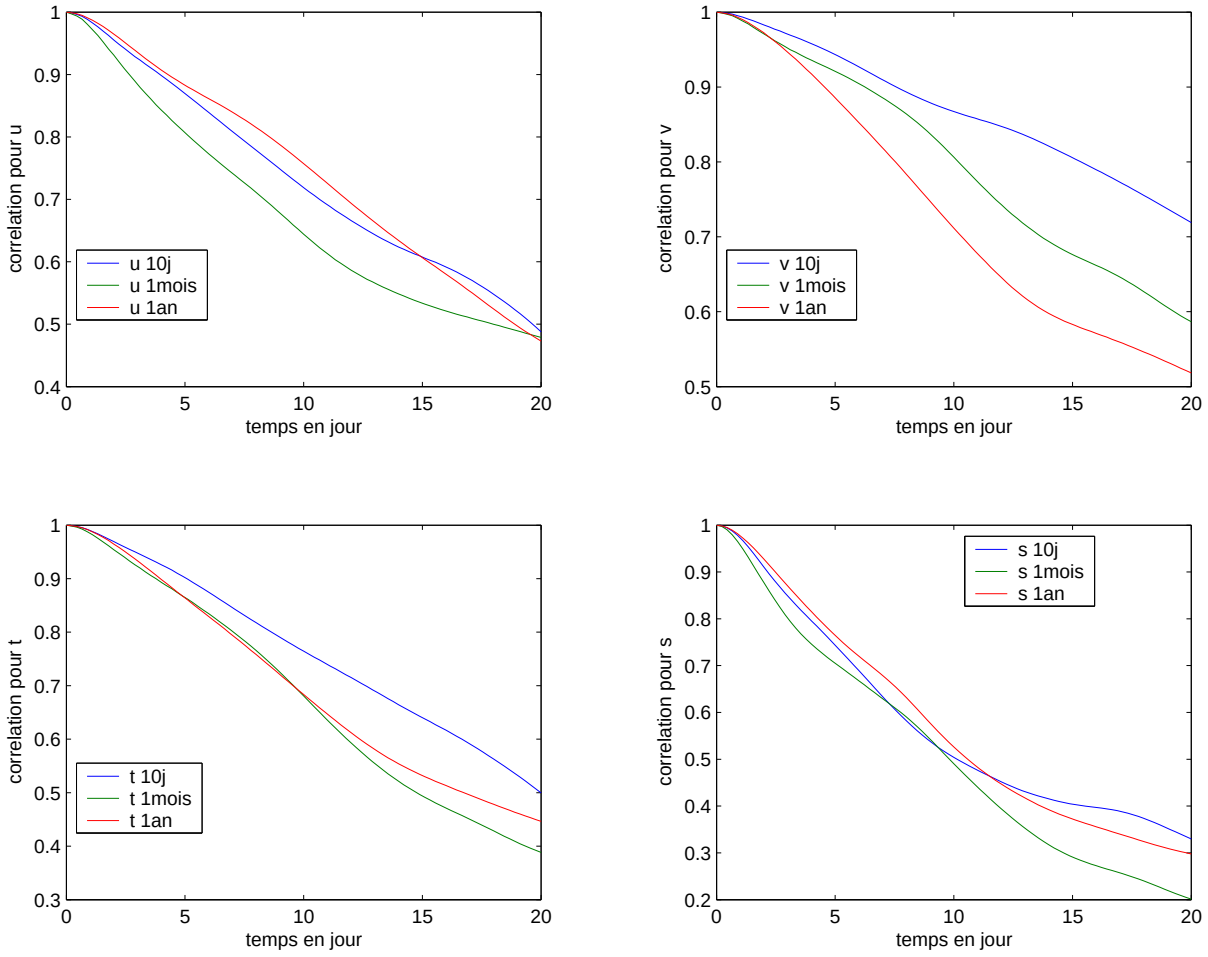


FIG. 8.3 – Calibration des paramètres de l'optimisation : choix de l'ébauche et de la taille de la fenêtre. Corrélations pour une fenêtre de 20 jours, avec une ébauche décalé de 10 jours, un mois ou un an.

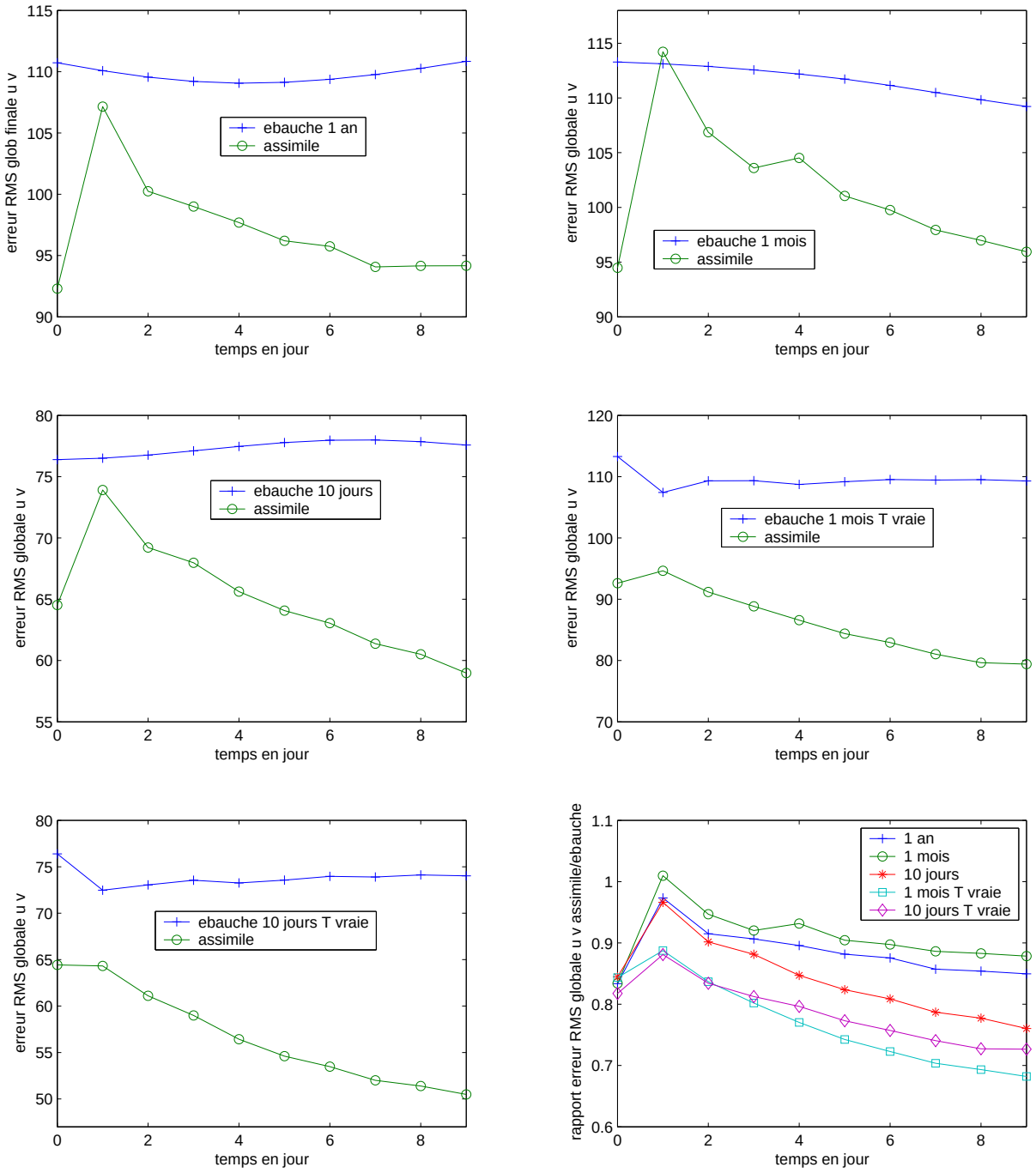


FIG. 8.4 – Calibration des paramètres de l'optimisation : choix de l'ébauche. Erreurs RMS relatives et globales pour différentes ébauches, décalées de 10 jours, 1 mois ou 1 an par rapport à l'état vrai, avec éventuellement la température ramenée à la vraie.

Table des figures

6.1 État de l'océan au bout de 25 ans : coupes horizontales au niveau 2 des vitesses u et v, de énergie cinétique et de la température. 118

7.1 Expériences jumelles : champs de vitesse u, v et énergie cinétique au niveau 1 pour l'état vrai et l'ébauche au temps initial 134
7.2 Expériences jumelles : positions de 2000 flotteurs, en rouge la position initiale du flotteur, en bleu sa position finale au bout de 10 jours de dérive, en vert les positions intermédiaires chaque jour. Vue de la totalité du bassin. 136
7.3 Expériences jumelles : positions de 2000 flotteurs, en rouge la position initiale du flotteur, en bleu sa position finale au bout de 10 jours de dérive, en vert les positions intermédiaires chaque jour. Vue d'une portion agrandie du bassin. 137
7.4 Premiers tests : valeurs de la fonction coût et de la norme de son gradient par rapport aux variables u, v et T en $\log_{10}$ et en fonction du nombre d'itérations. 139
7.5 Exemple de diagnostic qualitatif : champs de vitesses u et v au niveau 1. . 141
7.6 Exemple de diagnostic qualitatif : champs de vitesses u et v au niveau 4. . 142
7.7 Exemple de diagnostic qualitatif : énergie cinétique aux niveaux 1 et 4. . . 143
7.8 Exemple de diagnostic quantitatif : erreurs RMS relatives en fonction du temps et du niveau pour les vitesses. 146
7.9 Exemple de diagnostic quantitatif : erreurs RMS en fonction du temps pour les composantes barocline et barotrope de la vitesse. 147
7.10 Expérience de 30 jours en assimilant seulement les positions : champs u et v horizontaux à la surface à la fin de la fenêtre temporelle. 148
7.11 Expérience de 30 jours en assimilant seulement les positions : erreurs RMS pour u et v en fonction du temps. 149
7.12 Expérience de 30 jours en assimilant seulement les positions : erreurs RMS pour les composantes barotropes de u et v. 151
7.13 Expérience de 30 jours en assimilant seulement les positions : erreurs RMS pour les composantes baroclines de u et v. 152
7.14 Étude de la sensibilité à la période d'échantillonnage : erreurs RMS pour u, v en fonction du temps et de la période d'échantillonnage. 153
7.15 Étude de la sensibilité au nombre de flotteurs : erreurs RMS pour u et v en fonction du temps et du nombre de flotteurs. 154
7.16 Étude de la sensibilité au nombre et à la distribution horizontale des flotteurs : présentation schématique des expériences effectuées. 156

7.17 Étude de la sensibilité au nombre et à la distribution horizontale des flotteurs : erreurs RMS globales pour u et v en fonction du temps pour différentes distributions avec 1 000, 500 et 260 flotteurs. 156
7.18 Étude de la sensibilité au niveau vertical de dérive : erreurs RMS pour u et v en fonction du temps pour différents niveaux de dérive. 158
7.19 Étude de la sensibilité au niveau vertical de dérive : erreurs RMS pour les composantes barotropes et baroclines de u et v en fonction du temps. . . . 159
7.20 Étude de l'impact couplé du nombre de flotteurs et de la période temporelle d'échantillonnage : erreurs RMS pour u et v en fonction du temps et de la période. 160
7.21 Courbe de corrélation des vitesses au niveau 4, dans la zone centrale. . . . 162
7.22 Comparaison des méthodes lagrangienne et eulérienne : erreurs RMS relatives en fonction du temps et du niveau pour les vitesses u et v. 164
7.23 Comparaison des méthodes lagrangienne et eulérienne : erreurs RMS en fonction du temps et du niveau, pour les composantes baroclines et barotropes des vitesses. 165
7.24 Comparaison des méthodes lagrangienne et eulérienne : erreurs RMS en fonction du temps pour u, v pour différentes périodes d'échantillonnage. . . 167
7.25 Assimilation d'observations bruitées : erreurs RMS pour u et v avec un bruit d'amplitude 0, 1, 5, et 10 km. 171
7.26 Assimilation d'observations bruitées : erreurs RMS pour u et v avec un bruit d'amplitude 0, 10, 15, et 20 km. 172
7.27 Assimilation d'observations bruitées : champ de vitesses u et v au niveau 4 pour l'état vrai, l'état assimilé sans bruit et l'état assimilé avec un bruit de 20 km d'amplitude. 173
7.28 Complémentarité profils/position : validation. Champ de vitesses u, v et de température T pour l'état vrai, l'ébauche et l'état assimilé au niveau 1. 177
7.29 Complémentarité profils/position : validation. Champ de vitesses u, v et de température T pour l'état vrai, l'ébauche et l'état assimilé au niveau 2. 178
7.30 Complémentarité profils/position : validation. Erreur RMS globale pour u, v et T en fonction du temps pour l'ébauche et les expériences *profils seuls*, *positions seules*, *positions et profils*. 179
7.31 Complémentarité profils/position : validation. Erreurs RMS relatives en fonction du temps et relatives finales pour u, v et T pour l'ébauche et les expériences *profils seuls*, *positions seules*, *positions et profils*. 180
7.32 Complémentarité profils/position : validation. Erreurs RMS relatives en fonction du temps pour les composantes barotropes et baroclines de u, v et T pour l'ébauche et les expériences *profils seuls*, *positions seules*, *positions et profils*. 181
7.33 Complémentarité profils/positions. Erreurs RMS globales pour 1 000 flotteurs et une période d'échantillonnage variant de 1 à 10 jours, comparaison avec l'assimilation des positions seules et des profils seuls. 182
7.34 Complémentarité profils/positions. Erreurs RMS relatives en fonction du temps et relatives finales en fonction du niveau pour 1 000 flotteurs et une période d'échantillonnage variant de 1 à 10 jours, comparaison avec l'assimilation des positions seules et des profils seuls. 184

7.35 Complémentarité profils/positions. Erreurs RMS globales pour une période temporelle d'échantillonnage d'un jour pour 100 à 1 000 flotteurs, comparaison avec l'assimilation des positions seules et des profils seuls. 185
7.36 Complémentarité profils/positions. Erreurs RMS relatives en fonction du temps et relatives finales en fonction du niveau pour une période temporelle d'échantillonnage de un jour pour 100 à 1 000 flotteurs, comparaison avec l'assimilation des positions seules et des profils seuls. 187
7.37 Complémentarité profils/positions : expériences longues. Erreurs RMS relatives globales en fonction du temps pour l'assimilation conjointe des profils et des positions avec 1 000 ou 500 flotteurs échantillonnés tous les 1, 5 ou 10 jours. 188
7.38 Complémentarité profils/positions : expériences longues. Erreurs RMS relatives E_1 (pour u, v et T) et relatives globales E_3 en fonction du temps pour l'assimilation conjointe des profils et des positions avec 1 000 échantillonnés tous les 1, 5 ou 10 jours. 190
7.39 Complémentarité profils/positions : expériences longues. Erreurs RMS relatives E_1 (pour u, v et T) et relatives globales E_3 en fonction du temps pour l'assimilation conjointe des profils et des positions avec 500 flotteurs échantillonnés tous les 1 ou 5 jours, comparaison avec 1 000 flotteurs tous les 5 jours. 191

8.1 Calibration des paramètres de l'optimisation : choix de l'intervalle de stockage de la trajectoire de référence (en jours, variant de 1 à 10) et du nombre de boucles externes (1, 2 ou 3 be). 199
8.2 Calibration des paramètres de l'optimisation : choix de l'ébauche et de la taille de la fenêtre. Corrélations pour une fenêtre de 10 jours, avec une ébauche décalé de 10 jours, un mois ou un an. 200
8.3 Calibration des paramètres de l'optimisation : choix de l'ébauche et de la taille de la fenêtre. Corrélations pour une fenêtre de 20 jours, avec une ébauche décalé de 10 jours, un mois ou un an. 201
8.4 Calibration des paramètres de l'optimisation : choix de l'ébauche. Erreurs RMS relatives et globales pour différentes ébauches, décalées de 10 jours, 1 mois ou 1 an par rapport à l'état vrai, avec éventuellement la température ramenée à la vraie. 202

Bibliographie

[Andersson, 1998] E. Andersson. The ECMWF implementation of three-dimensional variational assimilation (3D-Var). III : Experimental results. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 124 :1831–1860, July 1998.

[Assenbaum *et al.*, 2002] M. Assenbaum, B. Le Cann, et G. Reverdin. Estimation des déplacements de subsurface des flotteurs PROVOR. Rapport d'activité pour le Groupe Mission Mercator Coriolis, 2002.

[Auroux, 2003] D. Auroux. *Étude de différentes méthodes d'assimilation de données pour l'environnement*. Thèse, Université de Nice, 2003.

[Auroux et Blum, 2005] D. Auroux et J. Blum. Back and forth nudging algorithm for data assimilation problems. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 340(12) :873–878, 2005.

[Bennett, 1992] A.F. Bennett. *Inverse methods in physical oceanography*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Bennett, 2002] A.F. Bennett. *Inverse modeling of the Ocean an Atmosphere*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Blayo *et al.*, 1994] E. Blayo, J. Verron, et J. M. Molines. Assimilation of TOPEX/POSEIDON altimeter data into a circulation model of the North Atlantic. *Journal of Geophysical Research*, 99 :24691–24706, December 1994.

[Blayo *et al.*, 1996] E. Blayo, J. Verron, J. M. Molines, et Testard L.. Monitoring of the Gulf Stream path using Geosat and Topex/Poseidon altimetric data assimilated into a model of ocean circulation. *Journal of Marine Systems*, 8 :73–89, 1996.

[Blum *et al.*, 1998] J. Blum, B. Luong, et J. Verron. Variational assimilation of altimeter data into a non-linear ocean model : temporal strategies. In *Control and partial differential equations (Marseille-Luminy, 1997)*, volume 4 of *ESAIM Proc.*, pages 21–57 (electronic). Soc. Math. Appl. Indust., Paris, 1998.

[Bouttier et Courtier, 1999] F. Bouttier et P. Courtier. Data assimilation concepts and methods. *Meteorological Training Course Lecture Series*, 1999.

[Broyden, 1969] C.G. Broyden. A new double-rank minimization algorithm. *AMS Notices*, 16 :670, 1969.

[Courtier, 1997] P. Courtier. Dual formulation of four-dimensional variational assimilation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 123 :2249–2261, October 1997.

[Courtier *et al.*, 1998] P. Courtier, E. Andersson, W. Heckley, J. Pailleux, D. Vasiljevic, M. Hamrud, A. Hollingsworth, F. Rabier, et M. Fisher. The

ECMWF implementation of three-dimensional variational assimilation (3D-Var). I :Formulation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 124 :1783–1807, July 1998.

[Courtier et Talagrand, 1987] P. Courtier et O. Talagrand. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. II : Numerical results. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 113 :1329–1347, October 1987.

[Courtier *et al.*, 1994] P. Courtier, J. N. Thepaut, et A. Hollingsworth. A strategy for operational implementation of 4D-Var, using an incremental approach. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 120 :1367–1387, July 1994.

[De Mey et Benkiran, 2002] P. De Mey et M. Benkiran. A multivariate reduced-order optimal interpolation method and its application to the Mediterranean basin-scale circulation. In N. Pinardi et J.D. Woods, editors, *Ocean Forecasting, Conceptual basis and applications*. 2002.

[De Mey et Ménard, 1989] P. De Mey et Y. Ménard. Synoptic analysis and dynamical adjustment of GEOS 3 and Seasat altimeter Eddy fields in the northwest Atlantic. *Journal of Geophysical Research*, 94 :6221–6230, May 1989.

[Dennis et Moré, 1977] J. E. Dennis, Jr. et Jorge J. Moré. Quasi-Newton methods, motivation and theory. *SIAM Rev.*, 19(1) :46–89, 1977.

[Durbiano, 2001] S. Durbiano. *Vecteurs caractéristiques de modèles océaniques pour la réduction d'ordre en assimilation de données*. Thèse, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2001.

[Evensen, 1994] G. Evensen. Sequential data assimilation with a non-linear quasi-geostrophic model using monte-carlo methods to forecast error statistics. *J. Geophys. Res.*, 99 :10143–10162, 1994.

[Fabre et Lebeau, 2002] Caroline Fabre et Gilles Lebeau. Régularité et unicité pour le problème de Stokes. *Comm. Partial Differential Equations*, 27(3-4) :437–475, 2002.

[Forget, 2005] G. Forget. *Profils ARGO et assimilation 4Dvar pour le suivi climatique de l'Océan Nord Atlantique*. Thèse, Université de Bretagne Occidentale, 2005.

[Forget *et al.*, 2003] G. Forget, B. Ferron, et H. Mercier. 4D-Var Assimilation of Profiling Floats in an OGCM of the North Atlantic : an Observing System Simulation Experiment. *EGS - AGU - EUG Joint Assembly, Abstracts from the meeting held in Nice, France, 6 - 11 April 2003, abstract #6788*, pages 6788–+, April 2003.

[Fukumori et Malanotte-Rizzoli, 1995] I. Fukumori et P. Malanotte-Rizzoli. An approximate Kalman filter for ocean data assimilation : An example with an idealized Gulf Stream model. *J. Geophys. Res.*, 100 :6777–6794, April 1995.

[Gelb, 1974] A. Gelb. *Applied Optimal Estimation*. MIT Press, Cambridge, MA, 1974.

[Ghil, 1989] M. Ghil. Meteorological data assimilation for oceanographers. Part I : description and theoretical framework. *Dyn. Atmos. Oceans*, 13 :171–218, 1989.

[Ghil et Manalotte-Rizzoli, 1991] M. Ghil et P. Manalotte-Rizzoli. Data assimilation in meteorology and oceanography. *Adv. Geophys.*, 23 :141–265, 1991.

[Giering, 1999] R. Giering. *Tangent linear and Adjoint Model Compiler, Users manual 1.4*, 1999. http ://www.autodiff.com/tamc.

[Giering et Kaminski, 1998] R. Giering et T. Kaminski. Recipes for Adjoint Code Construction. *ACM Trans. On Math. Software*, 24(4) :437–474, 1998.

[Gilbert et Lemaréchal, 1989] Jean Charles Gilbert et Claude Lemaréchal. Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton algorithms. *Math. Programming*, 45(3, (Ser. B)) :407–435, 1989.

[Girault et Raviart, 1979] V. Girault et P.-A. Raviart. *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*, volume 749 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[Guillén-González *et al.*, 2001] F. Guillén-González, N. Masmoudi, et M. A. Rodríguez-Bellido. Anisotropic estimates and strong solutions of the primitive equations. *Differential Integral Equations*, 14(11) :1381–1408, 2001.

[Hoteit et Pham, 2004] I. Hoteit et D.-T. Pham. An adaptively reduced-order extended Kalman filter for data assimilation in the tropical Pacific. *Journal of Marine Systems*, 45 :173–188, April 2004.

[Hu *et al.*, 2002] C. Hu, R. Temam, et M. Ziane. Regularity results for linear elliptic problems related to the primitive equations. *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 23(2) :277–292, 2002. Dedicated to the memory of Jacques-Louis Lions.

[Ide *et al.*, 1997] K. Ide, P. Courtier, M. Ghil, et Lorenc A. C.. Unified notation for data assimilation : operational, sequential and variational. *Journal of Meteorological Society of Japan*, 75 :181–189, 1997.

[Ide *et al.*, 2002] K. Ide, L. Kuznetsov, et C. K. R. T. Jones. Lagrangian data assimilation for point vortex systems*. *Journal of Turbulence*, 3 :53–+, November 2002.

[Jazwinski, 1970] A. H. Jazwinski. *Stochastic processes and filtering theory*, volume 64 of *Applied Mathematical Sciences*. Academic Press, 1970.

[Kalman, 1960] R. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Physical Oceanography*, 23 :2541–2566, 1960.

[Kamachi et O'Brien, 1995] M. Kamachi et J. O'Brien. Continuous data assimilation of drifting buoy trajectory into an equatorial Pacific Ocean model. *Journal of Marine Systems*, 6 :159–178, 1995.

[Kuznetsov et Jones, 2003] K. Kuznetsov, L. Ide et C. Jones. A method for assimilation of Lagrangian data. *Monthly Weather Review*, 131(10) :2247–2260, 2003.

[Le Dimet et Blum, 2002] F. X. Le Dimet et J. Blum. Assimilation de données pour les fluides géophysiques. *Matapli*, (67) :33–55, 2002.

[Le Dimet et Talagrand, 1986] F.-X. Le Dimet et O. Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus Series A*, 38 :97–+, 1986.

[Lewis et Derber, 1985] J. M. Lewis et J. C. Derber. The use of adjoint equations to solve a variational adjustment problem with convective constraints. *Tellus A*, 37 :309–322, 1985.

[Li et Navon, 2001] Z. Li et I. M. Navon. Optimality of variational data assimilation and its relationship with the Kalman filter and smoother. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 127 :661–683, January 2001.

[Lions, 1968] J.-L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Avant propos de P. Lelong. Dunod, Paris, 1968.

[Lions et Magenes, 1970] J.-L. Lions et E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Dunod, Paris, 1970. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 20.

[Lions *et al.*, 1992] J.-L. Lions, R. Temam, et S. H. Wang. New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications. *Nonlinearity*, 5(2) :237–288, 1992.

[Louvel, 2001] S. Louvel. Implementation of a dual variational algorithm for assimilation of synthetic altimeter data in the oceanic primitive equation model MICOM. *J. Geophys. Res.*, 106 :9199–9212, May 2001.

[Madec *et al.*, 1999] G. Madec, P. Delecluse, M. Imbard, et C. Lévy. Opa 8.1 Ocean General Circulation Model reference manual. 1999. Note du Pôle de Modélisation, Institut Pierre Simon Laplace, France.

[Marshall *et al.*, 1997] J. Marshall, A. Adcroft, C. Hill, L. Perelman, et C. Heisey. A finite-volume, incompressible navier stokes model for studies of the ocean on parallel computers. *J. Geophysical Res.*, 102(C3) :5753–5766, 1997.

[Mead, 2005] J. L. Mead. Assimilation of simulated float data in Lagrangian coordinates. *Ocean Modelling*, 8 :369–394, 2005.

[Molcard *et al.*, 2003] A. Molcard, L. I. Piterbarg, A. Griffa, T. M. Özgökmen, et A. J. Mariano. Assimilation of drifter observations for the reconstruction of the Eulerian circulation field. *Journal of Geophysical Research (Oceans)*, 108 :1–1, March 2003.

[Ozgökmen *et al.*, 2003] T. M. Ozgökmen, A. Molcard, T. M. Chin, L. I. Piterbarg, et A. Griffa. Assimilation of drifter observations in primitive equation models of midlatitude ocean circulation. *Journal of Geophysical Research (Oceans)*, 108 :31–1, July 2003.

[Petcu, 2005] M. Petcu. *Régularité et asymptotique pour les équations primitives*. Thèse, Université Paris-Sud (Orsay), 2005.

[Petcu *et al.*, 2004] M. Petcu, R. Temam, et D. Wirosoetisno. Existence and regularity results for the primitive equations in two space dimensions. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 3(1) :115–131, 2004.

[Pham *et al.*, 1998] D. T. Pham, J. Verron, et M. C. Roubaud. A Singular Evolutive Extended Kalman filter for data assimilation in oceanography. *Inverse Problems*, 14 :979–997, 1998.

[Rabier *et al.*, 1998a] F. Rabier, A. McNally, E. Andersson, P. Courtier, P. Unden, J. Eyre, A. Hollingsworth, et F. Bouttier. The ECMWF implementation of three-dimensional variational assimilation (3D-Var). II : Structure functions. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 124 :1809–1829, July 1998.

[Rabier *et al.*, 1998b] F. Rabier, J.-N. Thepaut, et P. Courtier. Extended assimilation and forecast experiments with a four-dimensional variational assimilation system. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 124 :1861–1887, July 1998.

[Ricci, 2004] S. Ricci. *Modélisation multivariée de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche pour l'assimilation variationnelle océanique*. Thèse, Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2004.

[Ricci *et al.*, 2003] S. Ricci, A. T. Weaver, E. Machu, P. Rogel, et J. Vialard. Formulation of the background error covariance matrix for an ocean variational assimilation system : T-S properties preservation. *EGS - AGU - EUG Joint Assembly, Abstracts from the meeting held in Nice, France, 6 - 11 April 2003, abstract #381*, pages 381–+, April 2003.

[Robert, 2004] C. Robert. *Développement et comparaison de méthodes d'assimilation de données de rang réduit dans un modèle de circulation océanique : application à l'océan Pacifique Tropical*. Thèse, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2004.

[Salman *et al.*, 2005] H. Salman, L. Kuznetsov, C. Jones, et K. Ide. A method for assimilating Lagrangian data into a shallow-water equation ocean model. *Monthly Weather Review*, 2005. to appear.

[Talagrand et Courtier, 1987] O. Talagrand et P. Courtier. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 113 :1311–1328, October 1987.

[Tapenade, 2002] Tapenade. *http ://www-sop.inria.fr/tropics/tapenade.html*, 2002.

[Temam, 1977] R. Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2.

[Temam et Ziane, 2004] R. Temam et M. Ziane. Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics. In *Handbook of mathematical fluid dynamics. Vol. III*, pages 535–657. North-Holland, Amsterdam, 2004.

[Thacker et Long, 1988] W. C. Thacker et R. B. Long. Fitting dynamics to data. *J. Geosphys. Res.*, 93 :1227–1240, 1988.

[Titi et Cao, 2005] E. S. Titi et C. Cao. Global well-posedness of the three-dimensional viscous Primitives Equations of large scale ocean and atmosphere dynamics. arXiv http ://arxiv.org/abs/math/0503028, 2005.

[Verron, 1992] J. Verron. Nudging Satellite Altimeter Data Into Quasi-Geostrophic Ocean Models. *J. Geophys. Res.*, 97 :7479–7491, May 1992.

[Verron *et al.*, 1999] J. Verron, L. Gourdeau, D. T. Pham, R. Murtugudde, et A. J. Busalacchi. An extended Kalman filter to assimilate satellite altimeter data into a nonlinear numerical model of the tropical Pacific Ocean : Method and validation. *J. Geophys. Res.*, 104 :5441–5458, 1999.

[Verron et Holland, 1989] J. Verron et W. R. Holland. Impacts de données d'altimétrie satellitaire sur les simulations numériques des circulations générales océanique aux latitudes moyennes. *Annales Geophysicae*, 7(1) :31–46, 1989.

[Verron *et al.*, 1992] J. Verron, J. M. Molines, et E. Blayo. Assimilation of Geosat data into a quasigeostrophic model of the North-Atlantic between 20^{o}N and 50^{o}N : preliminary results. *Oceanol. Acta*, 15 :575–583, 1992.

[Vialard *et al.*, 2003] J. Vialard, A. Weaver, D.L.T. Andreson, et P. Delecluse. Three- and four-dimensional variational assimilation with a general circulation model of the tropical Pacific Ocean. Part II : physical validation. *Monthly Weather Review*, 131 :1379–1395, 2003.

[Vidard, 2001] P. A. Vidard. *Vers une prise en compte des erreurs modèle en assimilation de données 4D-Variationnelle. Application à un modèle réaliste d'océan.* Thèse, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2001.

[Weaver et Courtier, 2001] A. Weaver et P. Courtier. Correlation modelling on the sphere using a generalized diffusion equation. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 127 :1815–1846, July 2001.

[Weaver *et al.*, 2002] A. Weaver, J. Vialard, D.L.T. Anderson, et P. Delecluse. Three- and four-dimensional variational assimilation with a general circulation model of the tropical Pacific Ocean. Technical Report ECMWF. 2002.

[Weaver *et al.*, 2003] A. Weaver, J. Vialard, D.L.T. Anderson, et P. Delecluse. Three- and four-dimensional variational assimilation with a general circulation model of the tropical Pacific Ocean. Part I : formulation, internal diagnostics and consistency checks. *Monthly Weather Review*, 131 :1360–1378, 2003.

[Ziane, 1995] M. Ziane. Regularity results for Stokes type systems related to climatology. *Appl. Math. Lett.*, 8(1) :53–58, 1995.

Résumé

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à des problèmes de modélisation et d'assimilation de données en océanographie, tant d'un point de vue théorique que numérique. L'étude de l'océan est cruciale pour de nombreuses raisons (changement climatique, météorologie, navigation commerciale et militaire, etc.). Dans une première partie nous étudions les équations primitives linéaires tridimensionnelles de l'océan, et nous donnons des résultats nouveaux de régularité en calculant explicitement le terme de pression. Dans une deuxième partie nous étudions l'assimilation variationnelle de données lagrangiennes dans un modèle d'océan. L'assimilation de données est l'ensemble des méthodes qui permettent de combiner de façon optimale, en vue d'effectuer des prévisions, deux sortes d'informations disponibles sur un système physique : les observations d'une part et les équations du modèle d'autre part. Nous utilisons une méthode variationnelle pour assimiler des données lagrangiennes, à savoir les positions de flotteurs dérivant dans l'océan. Nous commençons par établir de nouvelles estimations a priori pour les équations primitives afin d'étudier le problème théorique de contrôle optimal associé. Puis nous décrivons l'implémentation de la méthode variationnelle dans un modèle réaliste d'océan aux équations primitives. Enfin nous effectuons de nombreuses expériences numériques et notamment plusieurs études de sensibilité, qui montrent que l'assimilation de données lagrangiennes est techniquement réalisable et pertinente d'un point de vue océanographique.

Mots clés : assimilation de données, problèmes inverses, contrôle optimal, océanographie, équations primitives de l'océan (aspects équations aux dérivées partielles), modèles numériques de circulation océanique, méthodes numériques

Summary

In this work we consider modelling and Data Assimilation problems in oceanography through both theoretical and numerical analysis. In the first part we study linear Primitive Equations of the ocean and we establish new regularity results, thanks to an explicit calculation of the pressure term. In the second part we study variational assimilation of Lagrangian data into an ocean model. Data Assimilation covers all methods which allow to blend optimally all sources of information about a physical system (observations and model equations) in order to obtain forecasts of its evolution. We use a variational method to assimilate Lagrangian data, namely positions of drifting floats. We first establish new a priori estimations, in order to study the associated optimal control problem. We then describe the implementation of the variational method into a realistic Primitive Equations ocean circulation model. Finally we perform many numerical experiments, particularly sensitivity studies, which show that Lagrangian Data Assimilation is technically feasible and relevant from the oceanographic point of view.

Keywords : data assimilation, inverse problems, optimal control theory, oceanography, Primitive Equations of the ocean (as partial differential equations), numerical ocean circulation models, numerical methods