Idéaux fermés de certaines algèbres de beurling et applications aux opérateurs - Ensembles d'unicité

Cyril Agrafeuil

Résumé: Dans la première partie, nous nous intéressons à des opérateurs dont le spectre est inclus dans le cercle unité $\mathbb{T}$. Nous obtenons des résultats concernant certaines propriétés de croissance des normes $\|T^{-n}\|\,(n \geq 0)$ pour des opérateurs T dont le spectre est dénombrable ou vérifie certaines conditions géométriques. Pour obtenir ces résultats, nous sommes amenés à travailler dans les espaces de fonctions

$$A_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \text{ continue sur } \mathbb{T} : \ \big\|f\big\|_\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|\omega(n) < +\infty \Big\},$$

où $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels strictement positifs, et $\widehat{f}(n)$ désigne le n$^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f. Lorsque la suite $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un poids, $\big(A_\omega(\mathbb{T}), \|\,\|_\omega\big)$ est une algèbre de Banach. Nous obtenons alors la caractérisation de certains idéaux fermés de $A_\omega(\mathbb{T})$ pour une famille de poids.

Dans la seconde partie, nous nous intéressons à des fermés de $\mathbb{T}$ qui sont (ou non) des ensembles d'unicité pour des espaces $A^+_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in A_\omega(\mathbb{T}) \ : \ \widehat{f}(n) = 0 \quad (n < 0) \Big\}$, où $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels strictement positifs. Un fermé E de $\mathbb{T}$ étant d'unicité pour un espace X de fonctions continues sur $\mathbb{T}$, si la seule fonction dans X s'annulant sur E est la fonction nulle. Plus précisément, nous étudions le lien qu'il y a entre le fait qu'un fermé de $\mathbb{T}$ satisfait une condition géométrique donnée et le fait qu'il soit ou non un ensemble d'unicité pour $A^+_\omega(\mathbb{T})$.

Abstract: In the first part, we study operators with spectrum included in the unit circle $\mathbb{T}$. We obtain results concerning growth of $\|T^{-n}\|\,(n \geq 0)$ for operators T with countable spectrum or spectrum satisfying geometric conditions. For this, we need to work in the spaces

$$A_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \text{ continuous on } \mathbb{T} : \ \big\|f\big\|_\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|\omega(n) < +\infty \Big\},$$

where $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ is a sequence of non-negative real numbers, and $\widehat{f}(n)$ denotes the n$^{\text{th}}$ Fourier coefficient of f. When $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ is a weight, $\big(A_\omega(\mathbb{T}), \|\,\|_\omega\big)$ is a Banach algebra. We obtain the characterisation of some closed ideals of $A_\omega(\mathbb{T})$ for a family of weight.

In the second part, we are interested in closed subset of $\mathbb{T}$ which are (or not) sets of uniqueness for $A^+_\omega(\mathbb{T}) = \Big\{ f \in A_\omega(\mathbb{T}) : \ \widehat{f}(n) = 0 \quad (n < 0) \Big\}$, where $\omega = \big(\omega(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ is a sequence of non-negative real numbers. A closed subset E of $\mathbb{T}$ is said to be a set of uniqueness for X, a space of continuous functions on $\mathbb{T}$, if the zero function is the only function in X that vanishes on X. More precesely, we study the link between the fact that a closed subset of $\mathbb{T}$ satisfies a given geometric condition, and the fact that it is or not a set of uniqueness for $A^+_\omega(\mathbb{T})$.

Mots-clefs: Algèbres de Beurling, opérateurs, idéaux fermés, ensembles d'unicité, ensembles dénombrables, synthèse spectrale, ensembles d'interpolation.