



**HAL**  
open science

# Analyse multifractale pratique : coefficients dominants et ordres critiques. Applications à la turbulence pleinement développée. Effets de nombre de Reynolds fini

Bruno Lashermes

► **To cite this version:**

Bruno Lashermes. Analyse multifractale pratique : coefficients dominants et ordres critiques. Applications à la turbulence pleinement développée. Effets de nombre de Reynolds fini. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2005. Français. NNT : . tel-00011012

**HAL Id: tel-00011012**

**<https://theses.hal.science/tel-00011012>**

Submitted on 16 Nov 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : 327

Numéro attribué par la bibliothèque : 05ENSL0 327

THÈSE  
en vue d'obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

Spécialité : Physique  
Laboratoire de Physique  
École doctorale de Physique et d'Astrophysique de Lyon

Présentée et soutenue publiquement le 13 octobre 2005 par

BRUNO LASHERMES

---

**Analyse multifractale pratique :  
coefficients dominants et ordres critiques.  
Applications à la turbulence  
pleinement développée.  
Effets de nombre de Reynolds fini.**

---

**Directeur de thèse :** Mr Patrice ABRY

**Après avis de :** Mr Yves GAGNE, Rapporteur  
Mr Bruno TORRÉSANI, Rapporteur

**Devant la commission d'examen formée de :**

Mr Patrice ABRY	Directeur de Recherche, CNRS	Directeur
Mr Yves GAGNE	Professeur, Université Joseph Fourier	Rapporteur
Mr Pierre-Yves LONGARETTI	Chargé de Recherche, CNRS	Examineur
Mr Jean-François PINTON	Directeur de Recherche, CNRS	Président
Mr Bruno TORRÉSANI	Professeur, Université de Provence	Rapporteur



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Turbulence, invariance d'échelle et régularité</b>	<b>9</b>
1.1	La turbulence pleinement développée . . . . .	9
1.1.1	Mécanique des fluides et turbulence pleinement développée . . . . .	9
1.1.2	Turbulence pleinement développée et invariance d'échelle . . . . .	11
1.1.3	Turbulence pleinement développée et régularité . . . . .	13
1.2	Processus aléatoires . . . . .	14
1.2.1	Introduction . . . . .	14
1.2.2	Définition . . . . .	14
1.2.3	Processus aléatoires et invariance d'échelle . . . . .	14
1.2.4	Régularité des processus invariants d'échelle . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Signaux expérimentaux de turbulence pleinement développée</b>	<b>19</b>
2.1	Données expérimentales . . . . .	19
2.1.1	Données de l'ÉNSL, $R_\lambda \simeq 380$ et $R_\lambda \simeq 580$ . . . . .	19
2.1.2	Données de Modane, $R_\lambda \simeq 2000$ . . . . .	19
2.1.3	Données GReC, $R_\lambda \simeq 3200$ . . . . .	20
2.1.4	Hypothèse de turbulence gelée de Taylor . . . . .	20
2.1.5	Valeurs des grandeurs physiques caractéristiques . . . . .	20
2.2	Données issues de simulation numérique (DNS) . . . . .	21
<b>II</b>	<b>Analyse multifractale</b>	<b>23</b>
<b>3</b>	<b>Régularité et analyse multifractale</b>	<b>25</b>
3.1	Notions de régularité d'une fonction . . . . .	25
3.1.1	Régularités ponctuelle et uniforme. Exposant de Hölder . . . . .	26
3.1.2	Lien entre exposant de Hölder et la notion de singularité . . . . .	26
3.1.3	Fonctions scalaires définies sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	28
3.2	Classification des fonctions selon leurs propriétés de régularité. Fonctions multifractales . . . . .	29
3.3	Analyse multifractale . . . . .	30
3.3.1	Ensembles iso-Hölder . . . . .	30
3.3.2	Dimension de Hausdorff . . . . .	31
3.3.3	Spectre de singularités $D_f(h)$ . . . . .	31
3.3.4	Analyse multifractale . . . . .	32

<b>4</b>	<b>Processus multifractals synthétiques</b>	<b>35</b>
4.1	Cascades d'ondelette aléatoires . . . . .	35
4.1.1	Définition . . . . .	35
4.1.2	Propriétés multifractales . . . . .	36
4.1.3	Un exemple : cascade d'ondelette aléatoire log-normale . . . . .	37
4.2	Séries d'ondelette aléatoires . . . . .	37
4.2.1	Définition des séries d'ondelette aléatoires . . . . .	38
4.2.2	Propriétés multifractales des séries d'ondelette aléatoires . . . . .	39
4.2.3	Série d'ondelette aléatoire et invariance d'échelle . . . . .	40
4.2.4	Exemple d'un générateur gaussien et d'une distribution à grande échelle log-normale . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets</b>	<b>45</b>
5.1	Coefficients d'ondelette discrets . . . . .	45
5.1.1	Définition . . . . .	45
5.1.2	Caractérisation de la régularité ponctuelle . . . . .	46
5.2	Formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets . . . . .	47
5.2.1	Fonctions de structure . . . . .	47
5.2.2	Lien heuristique entre les exposants $\zeta_f^d(q)$ et les singularités . . . . .	47
5.2.3	Énoncé du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets . . . . .	49
5.3	Limitations du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets . . . . .	49
5.3.1	Résultats mathématiques . . . . .	50
5.3.2	Partie "droite" du spectre de singularités . . . . .	51
5.3.3	Singularités oscillantes . . . . .	51
5.3.4	Conclusions . . . . .	52
5.4	Fonctions scalaires définies sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	53
5.4.1	Coefficients d'ondelette discrets à $d$ dimensions . . . . .	54
5.4.2	Formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants</b>	<b>57</b>
6.1	Les coefficients dominants $l_f(j, k)$ . . . . .	57
6.1.1	Définition . . . . .	58
6.1.2	Caractérisation de la régularité ponctuelle . . . . .	58
6.2	Formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants . . . . .	60
6.2.1	Fonctions de structure . . . . .	60
6.2.2	Énoncé . . . . .	60
6.3	Validité du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants . . . . .	61
6.3.1	Résultats mathématiques . . . . .	61
6.3.2	Partie "droite" du spectre de singularités . . . . .	61
6.3.3	Singularités oscillantes . . . . .	62
6.3.4	Conclusions . . . . .	64
6.4	Fonctions scalaires définies sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	65
6.4.1	Coefficients dominants à $d$ dimensions . . . . .	65
6.4.2	Formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants . . . . .	66

<b>7</b>	<b>Mise en oeuvre du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants</b>	<b>67</b>
7.1	Méthodologie . . . . .	67
7.2	Processus multifractals sans singularités oscillantes . . . . .	68
7.2.1	Cascades d'ondelette aléatoires log-normales . . . . .	68
7.2.2	Autres processus . . . . .	70
7.3	Processus multifractals avec singularités oscillantes . . . . .	70
7.4	Détection de singularités oscillantes . . . . .	72
7.5	Comparaison entre cascade et série d'ondelette aléatoires : vers une compréhension de la multifractalité . . . . .	73
7.5.1	Synthèse de réalisations jumelles . . . . .	73
7.5.2	Comparaison de deux réalisations jumelles . . . . .	75
7.6	Utilisation du formalisme multifractal basé sur les coefficients mmt0 . . . . .	76
7.6.1	Processus multifractals sans singularités oscillantes . . . . .	77
7.6.2	Processus multifractals avec singularités oscillantes . . . . .	78
7.7	Conclusions . . . . .	79
<b>8</b>	<b>Application à l'analyse multifractale de la turbulence pleinement développée</b>	<b>81</b>
8.1	Étude des fonctions de structure . . . . .	81
8.1.1	Fonctions de structure $S_v^d(q, j)$ et $S_v^l(q, j)$ . . . . .	82
8.1.2	Influence des échelles dissipatives . . . . .	84
8.2	Mesure du spectre de singularités . . . . .	86
8.2.1	Méthodologie . . . . .	86
8.2.2	Résultats et validité de la mesure . . . . .	86
8.2.3	Présence de singularités oscillantes ? . . . . .	88
8.2.4	Comparaisons aux modèles d'intermittence . . . . .	89
8.2.5	Conclusions et perspectives . . . . .	93
<b>III</b>	<b>Analyse multifractale pratique : effet de linéarisation et ordres critiques</b>	<b>95</b>
<b>9</b>	<b>Effet de linéarisation et ordre critique</b>	<b>99</b>
9.1	Estimations des exposants $\zeta(q)$ . . . . .	99
9.2	Mise en évidence de l'effet de linéarisation . . . . .	100
9.2.1	Les cascades de Mandelbrot canoniques . . . . .	100
9.2.2	Méthodologie . . . . .	102
9.2.3	Exposants $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$ . . . . .	102
9.2.4	Transformée de Legendre . . . . .	105
9.2.5	Effet de linéarisation . . . . .	106
9.2.6	Conclusion : résultats théoriques sur les estimateurs . . . . .	109
9.3	Discussions sur l'effet de linéarisation . . . . .	110
9.3.1	Interprétation multifractale . . . . .	110
9.3.2	L'interprétation "un coefficient = un exposant de Hölder" . . . . .	111

<b>10 Étude de l'effet de linéarisation</b>	<b>119</b>
10.1 Méthodologie . . . . .	119
10.2 Divers processus multifractals et divers formalismes multifractals . . . . .	120
10.2.1 Processus multifractals de type densité . . . . .	120
10.2.2 Processus multifractals de type fonction . . . . .	122
10.2.3 Conclusion . . . . .	125
10.3 Influences de la résolution et de la durée . . . . .	126
10.3.1 Méthodologie . . . . .	126
10.3.2 Dépendance selon la résolution $r$ . . . . .	126
10.3.3 Dépendance selon le nombre d'échelles intégrales $N_{int}$ . . . . .	127
10.3.4 Conclusion . . . . .	129
10.4 Conclusion : l'effet de linéarisation . . . . .	129
10.5 Estimation de l'ordre critique $q_*^+$ . . . . .	130
10.5.1 Estimateur $\widetilde{q_*^+}$ . . . . .	130
10.5.2 Estimateur $q_*^+(N_{blocs})$ . . . . .	133
10.5.3 Caractérisation de $q_*^+(N_{blocs})$ . . . . .	134
10.5.4 Conclusion . . . . .	138
10.6 Effet de linéarisation et ordre critique négatif $q_*^-$ . . . . .	138
10.6.1 Effet de linéarisation et ordre critique $q_*^-$ . . . . .	139
10.6.2 Illustrations . . . . .	139
10.6.3 Estimation de l'ordre critique $q_*^-$ . . . . .	141
<b>11 Effet de linéarisation en dimension <math>d</math> et coupes géométriques</b>	<b>143</b>
11.1 Effet de linéarisation en dimension $d$ . . . . .	143
11.1.1 Définition . . . . .	143
11.1.2 Illustration . . . . .	144
11.1.3 Estimation de l'ordre critique $q_*^{+,dD}$ . . . . .	145
11.1.4 Conclusion . . . . .	146
11.2 Coupes géométriques de processus définis sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	147
11.2.1 Problématique . . . . .	147
11.2.2 Nouvelles notations . . . . .	147
11.2.3 Analyses 1D, 2D et 3D . . . . .	148
11.2.4 Méthodologie . . . . .	148
11.2.5 Résultats . . . . .	149
11.2.6 Conclusion . . . . .	151
<b>12 Effet de linéarisation en turbulence pleinement développée</b>	<b>155</b>
12.1 Vitesse turbulente eulérienne . . . . .	155
12.1.1 Mise en évidence de l'effet de linéarisation . . . . .	155
12.1.2 Estimation de l'ordre critique $q_*^+$ . . . . .	159
12.1.3 Conclusion : Mesure du spectre de singularités . . . . .	164
12.2 Dissipation turbulente . . . . .	165
12.2.1 Méthodologie . . . . .	166
12.2.2 Résultats . . . . .	166
12.2.3 Conclusion . . . . .	168

12.2.4	Effet de linéarisation et condition de Novikov . . . . .	169
12.3	Conclusion . . . . .	170
<b>IV</b>	<b>Au delà des lois de puissance en turbulence pleinement développée</b>	<b>173</b>
<b>13</b>	<b>Modélisation de la fonction de structure d'ordre 3</b>	<b>175</b>
13.1	Comparaison des exposants $\widehat{\zeta}_v^p(q)$ sur différentes expériences . . . . .	175
13.1.1	Diverses expériences de turbulence pleinement développée . . . . .	175
13.1.2	Diverses méthodes . . . . .	176
13.1.3	Discussion et interprétation . . . . .	177
13.2	La fonction de structure d'ordre 3 . . . . .	178
13.2.1	Objectif . . . . .	178
13.2.2	L'équation de base : l'équation de de Kármán-Howarth . . . . .	179
13.3	Modélisation de la fonction de structure d'ordre 3 . . . . .	181
13.3.1	Type d'écoulements considérés . . . . .	181
13.3.2	Fonction de structure d'ordre 3 . . . . .	182
13.4	Analyse de cette modélisation . . . . .	186
13.4.1	Maximum . . . . .	186
13.4.2	Exposant local . . . . .	188
13.4.3	Exposant $\zeta_v(3)$ . . . . .	190
13.4.4	Influence des deux termes correctifs . . . . .	192
13.4.5	Expressions en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	192
13.5	Discussions . . . . .	195
13.5.1	Turbulence en déclin et littérature . . . . .	195
13.5.2	Turbulence forcée . . . . .	196
<b>14</b>	<b>Comparaison aux données expérimentales</b>	<b>201</b>
14.1	Principe de l'ajustement . . . . .	201
14.1.1	Exploitation des résultats . . . . .	202
14.2	Turbulence homogène : données de turbulence de tunnel de Modane, $R_\lambda \simeq 2000$	202
14.2.1	Modélisation de la fonction de structure d'ordre 2 . . . . .	203
14.2.2	Choix de la zone d'ajustement . . . . .	204
14.2.3	Résultats . . . . .	204
14.2.4	Commentaires . . . . .	205
14.2.5	Conclusion . . . . .	206
14.3	Turbulence non homogène : données de jet turbulent de l'ÉNSL, $R_\lambda \simeq 380$	206
14.3.1	Modélisation de la fonction de structure d'ordre 2 . . . . .	206
14.3.2	Choix de la zone d'ajustement . . . . .	207
14.3.3	Résultats . . . . .	208
14.3.4	Commentaires . . . . .	208
14.3.5	Modélisation semi-empirique de la fonction de structure d'ordre 3 . . . . .	210
14.4	Conclusion et perspectives . . . . .	212

<b>V</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>215</b>
<b>A</b>	<b>Échelles caractéristiques de la turbulence pleinement développée</b>	<b>221</b>
A.1	Les échelles intégrales : $L_d$ , $L_{int}$ , $L_K$	221
A.2	L'échelle de Taylor $\lambda$	222
A.3	L'échelle de Kolmogorov $\eta$	223
A.4	Les nombres de Reynolds $R_e$ et $R_\lambda$	223
A.5	Liens entre ces échelles	224
<b>B</b>	<b>Transformées en ondelette</b>	<b>225</b>
B.1	Définition	225
B.2	Transformées en ondelette continue et discrète	227
B.2.1	Transformée en ondelette continue	227
B.2.2	Transformée en ondelette discrète et analyse multi-résolution	227
<b>C</b>	<b>Description multifractale de processus densité</b>	<b>231</b>
C.1	Quelques définitions	231
C.1.1	Densité	231
C.1.2	Mesure associée à une densité	232
C.1.3	Processus aléatoire densité	232
C.2	Analyse multifractale d'une densité	232
C.2.1	Régularité d'une densité	232
C.2.2	Analyse multifractale	233
C.2.3	Analyses multifractales de la densité et de la mesure	233
C.3	Formalismes multifractals pour les densités	234
C.3.1	Formalisme multifractal basé sur les coefficients d'agrégation	234
C.3.2	Applications des formalismes multifractals précédents	235
C.3.3	Utilisation directe des coefficients d'ondelette de la densité	235
C.3.4	Illustration : cascade de Mandelbrot canonique	236
<b>D</b>	<b>Construction et synthèse de processus multifractals</b>	<b>239</b>
D.1	Échelle intégrale et résolution	239
D.1.1	Échelle intégrale	239
D.1.2	Résolution	240
D.2	Construction de densités multifractales à l'aide de cascade multiplicative	241
D.2.1	Cascades canoniques de Mandelbrot	241
D.2.2	Généralisation : densification de la cascade multiplicative	244
D.3	Construction de fonctions multifractales à l'aide de cascade multiplicative	245
D.3.1	Mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal	245
D.3.2	Marche aléatoire multifractale	246
<b>E</b>	<b>Utilisation d'une transformée en ondelette continue</b>	<b>247</b>
E.1	Formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette continus	247
E.1.1	Coefficients d'ondelette continus et propriétés de régularité	247
E.1.2	Formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette continus	248
E.1.3	Fonctions scalaires définies sur $\mathbb{R}^d$	249

E.2	Formalisme multifractal basé sur les maxima des modules de la transformée en ondelette continue . . . . .	249
E.2.1	Coefficients mmto $m_f(a, t)$ . . . . .	249
E.2.2	Formalisme multifractal mmto . . . . .	251
E.2.3	Fonctions scalaires définies sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	251



*Le travail présenté dans ce mémoire de thèse est le fruit de collaborations diverses et variées, mais aussi de discussions engagées au milieu d'un couloir ou autour d'un café. Je vais tenter de rendre justice à tous ceux envers qui je suis redevable, que ceux que je dois malheureusement oublier veuillent bien me pardonner.*

*Tout d'abord, je tiens à remercier tous les membres du Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon, toujours prêts à sacrifier leur temps précieux pour répondre à mes questions et me prodiguer leurs conseils avisés. Merci aussi aux personnels administratifs, dont l'efficacité extrême permet au laboratoire d'avancer sans accroc.*

*Je remercie bien évidemment tout particulièrement les membres ou ex-membres de l'équipe SY-SIPHE, dont j'ai fait partie, qui m'ont fait bénéficier de leurs savoirs pointus, de leurs larges connaissances, de leurs conseils sages, et de leur soutien constant : Stéphane, Bernard, Pierre et Pierre, Laurent, Alain, Patrick, Gabriel, Herwig. Un grand merci à Patrice, le capitaine de ces trois années de navigation, qui m'a beaucoup appris, notamment par sa rigueur et sa recherche constante de l'excellence scientifique. Nous n'étions pas toujours d'accord sur l'itinéraire à suivre, n'avons pas toujours voulu pousser le gouvernail dans le même sens, mais l'équipage a très bien fonctionné, additionnant ses différences plutôt que les annihilant. Je crois sincèrement que nous pouvons être fiers du résultat ! Merci encore.*

*Je n'oublie pas celui avec qui une longue et étroite collaboration a abouti à une part importante de ce travail de thèse, Stéphane Jaffard. Une telle collaboration, avec quelqu'un venant d'autres horizons, est toujours très enrichissante, elle l'est encore plus lorsqu'il s'agit d'une personne douée de qualités humaines et scientifiques comme Stéphane.*

*Comme le lecteur s'en rendra très vite compte, l'analyse de données expérimentales constitue l'un des pivots du travail effectué. Je ne remercierai jamais assez toutes les personnes qui m'ont fourni leurs très précieuses données, fruit d'un travail de longue haleine et de qualité exceptionnelle, et dont l'acuité de leurs remarques est à souligner. Dans le désordre, merci à Christophe, Antoine, Yves, Emmanuel, Bernard, et leurs nombreux expérimentés collaborateurs expérimentateurs.*

*Je profite de ces quelques lignes pour remercier Yves Gagne et Bruno Torrèsani d'avoir bien voulu accepter la lourde tâche de rapporter sur ce travail de thèse. Je remercie aussi Jean-François Pinton d'avoir présidé ce jury et Pierre-Yves Longaretti d'y avoir participé. Leurs commentaires pertinents seront sans doute à l'origine de fructueux travaux.*

*Merci aussi à tous ceux que je n'ai pas encore cités, rencontrés durant ces quelques années passées à l'ÉNS, amis sans conteste : Romain, Josef, Fanfan, Maxime, Véronique, et tant d'autres encore.*

*Enfin, je tiens ici à saluer sincèrement mes parents, mon frère et mes frères de NMB, tous mes amis (Fif et Momo, merci encore pour le surcroît de vaisselle que vous ont causé les pages qui suivent ...).*

Minneapolis,  
le 8 Novembre 2005.



Première partie

**Introduction**



## La turbulence pleinement développée : une description statistique

La turbulence pleinement développée est un phénomène complexe, qui, bien qu'étant depuis longtemps objet de la curiosité humaine, reste toujours un domaine de recherche très ouvert de la physique en ce début de siècle. La compréhension fine de ce phénomène naturel résiste en effet dans une certaine mesure aux nombreux efforts des scientifiques qui abordent, ou ont abordé, ce domaine. Les ouvrages [27, 163, 121, 58] et les articles de synthèse [162, 129] montrent que le chemin aboutissant à la compréhension de la turbulence pleinement développée est long et sinueux, et, malgré de nombreuses avancées significatives et de nombreux caps importants franchis, le champ d'investigation reste vaste.

Ce domaine de la physique a ceci de particulier : bien que les équations régissant l'évolution d'un fluide dans le temps et l'espace soient connues (ce sont les équations de Navier-Stokes, valables pour un écoulement incompressible d'un fluide newtonien), il ne semble pas possible à ce jour de pouvoir les résoudre. Ce constat s'explique par la présence d'un terme non-linéaire dans ces équations, qui est à l'origine de l'existence d'un grand nombre de degrés de liberté présents dans la turbulence.

La présence de ce grand nombre de degrés de liberté rend illusoire une description déterministe de la turbulence pleinement développée. L'étude de ce phénomène se fait ainsi à l'aide d'une approche *statistique*. Celle-ci consiste à considérer les quantités physiques étudiées (par exemple les fluctuations de la vitesse ou du champ de dissipation de l'énergie contenue dans l'écoulement) non plus de façon déterministe, mais en les décrivant comme des objets d'essence aléatoire. Ainsi, la vitesse en un point d'un écoulement turbulent sera par exemple caractérisée par sa moyenne et son écart-type.

### Description dans le plan espace-échelle

Les physiciens étudiant la turbulence se sont très tôt rendus compte d'un aspect essentiel de ce phénomène : il existe des composantes sur une large gamme d'échelles. Précisons ce que l'on entend par échelle. Les *accroissements* longitudinaux d'une composante de la vitesse  $v(x)$  ( $x$  repère l'axe de la coordonnée  $v$ ), notés  $\delta_v(x, l) = v(x + l) - v(x)$ , permettent de caractériser les fluctuations de la vitesse  $v$  à l'échelle  $l$ . Ces fluctuations sont significativement non nulles pour une large gamme d'échelles  $l$  : la vitesse d'un écoulement turbulent est ainsi constituée de plusieurs composantes, vivant à des échelles  $l$  différentes.

Le phénomène de turbulence pleinement développée est donc particulièrement riche, et sa caractérisation ne semble pouvoir se contenter de la seule coordonnée d'espace  $x$  : il faut lui adjoindre un paramètre supplémentaire : l'échelle  $l$ .

### Cascade d'énergie, invariance d'échelle et intermittence statistique

Afin de décrire la présence de composantes sur une large gamme d'échelles, Richardson [144] a introduit dès 1922 un concept extrêmement fécond pour la théorie de la turbulence pleinement développée : la *cascade d'énergie* à travers les échelles  $l$ , depuis les plus grandes vers les plus petites. Les mouvements correspondant à une échelle donnée, souvent décrits comme des tourbillons, engendrent des mouvements à des échelles plus petites. Ainsi, l'énergie transite depuis une grande échelle, à laquelle elle est injectée par des forces extérieures, jusqu'à des échelles plus petites, où elle est dissipée par les forces visqueuses. Les diverses échelles présentes dans la turbulence sont ainsi en permanente interaction les unes avec les autres. C'est le terme non-linéaire qui traduit dans les équations de Navier-Stokes cette interaction entre échelles.

Entre les deux échelles extrêmes, l'échelle d'injection et l'échelle dissipative, s'étend alors, se-

lon cette description phénoménologique, toute une gamme d'échelles, les échelles dites *inertielles*, pour lesquelles l'énergie est seulement transférée, sans être atténuée. Il n'existe pas d'échelle caractéristique à l'intérieur de la gamme des échelles inertielles, ce qui signifie que l'énergie est transférée de la même façon à chaque échelle. La phénoménologie de la cascade d'énergie est ainsi intimement liée à une hypothèse d'*invariance d'échelle*, qui suppose l'absence de toute échelle caractéristique. Cette hypothèse aboutit naturellement à des comportements en loi de puissance en fonction de l'échelle  $l$ , pour les grandeurs statistiques utilisées pour caractériser la turbulence pleinement développée. Par exemple, les moments statistiques d'ordre  $q$  des accroissements de la vitesse  $v(x)$  sont modélisés, pour les échelles  $l$  inertielles, par :

$$\mathbb{E}|\delta_v(x, l)|^q \sim l^{\zeta_v(q)},$$

où  $\mathbb{E}$  est l'espérance mathématique.

Kolmogorov, dans son article fondateur de 1941 [84], propose alors une description *universelle* (c'est-à-dire valable pour tous les écoulements turbulents) de la turbulence pleinement développée dans la limite des grands nombres de Reynolds, sous l'hypothèse de l'invariance d'échelle. Les accroissements de la vitesse sont distribués selon une loi gaussienne à chaque échelle, et la prédiction suivante est faite pour les exposants  $\zeta_v(q)$  :  $\zeta_v(q) = q/3$ . Cette modélisation n'est en fait pas satisfaisante, car elle suppose un champ homogène de dissipation d'énergie, or si la vitesse présente des fluctuations en espace, la dissipation d'énergie, puisque due à la force visqueuse  $-\Delta\vec{v}$ , doit elle aussi présenter des fluctuations spatiales. Il est d'ailleurs bien observé que la dissipation se concentre dans des zones restreintes de l'écoulement [58]. Kolmogorov et Obukhov [85, 135] proposent alors une nouvelle modélisation qui tient compte des fluctuations de la dissipation, qui aboutit à la modélisation dite log-normale des accroissements de la vitesse  $v$ . Les exposants  $\zeta_v(q)$  ne sont plus alors une fonction linéaire de l'ordre  $q$ , mais une fonction non-linéaire, et les accroissements  $\delta_v$  ne sont plus distribués selon une même loi (par exemple une gaussienne) à chaque échelle, mais leurs distributions se déforment avec l'échelle  $l$ . À petite échelle, les accroissements ont des distributions à queue lourde, et les événements de grande amplitude (par rapport à l'écart-type) sont beaucoup plus probables que dans le cas d'une distribution gaussienne : on parle d'*intermittence statistique*. Le comportement non-linéaire des exposants  $\zeta_v(q)$  est indiscutablement vérifié expérimentalement [7, 58].

## La description multifractale

Les écoulements turbulents sont caractérisés par des profils spatiaux de vitesse très irréguliers, très chahutés et très désordonnés. Parisi et Frisch [138] proposent en 1985 de décrire ces profils irréguliers en raisonnant sur les accroissements de la vitesse  $\delta_v(x, l)$  correspondant aux échelles inertielles, qu'ils décrivent à l'aide de la notion de *singularité*. Ainsi, les accroissements se comportent localement, autour d'une position  $x$ , comme  $|\delta_v(x, l)| \sim l^{h(x)}$ . Un comportement *local* en loi de puissance est donc introduit, la singularité. Le caractère plus ou moins régulier de cette singularité est quantifié par le paramètre  $h(x)$ , parfois appelé force de la singularité. Dans cette description, il existe a priori plusieurs singularités dans les signaux de vitesse, c'est-à-dire plusieurs valeurs de  $h$ .

Les signaux de vitesse sont alors décrits à l'aide d'une hiérarchie d'ensembles de même force  $h$ , se répartissant sur des ensembles *fractals* de dimensions (plus exactement de dimensions de Hausdorff) différentes : c'est la *description multifractale*. La notion de fractal a été introduite par Mandelbrot [106], et l'intérêt dans le domaine de la physique devenait à cette époque de plus en plus évident. La dimension de Hausdorff de chaque ensemble de même exposant  $h$  est notée  $D_v(h)$ .

Cette quantité est appelée *spectre de singularités*.

Parisi et Frisch [138] proposent de plus une formule pour mesurer le spectre de singularités. Les exposants  $\zeta_v(q)$  sont mesurés par régression linéaire, dans un diagramme log-log, de la *fonction de structure* d'ordre  $q$  en fonction de l'échelle, la fonction de structure étant définie comme la moyenne spatiale de la puissance  $q$ -ième des accroissements. Le spectre de singularités  $D_v(h)$  est alors la *transformée de Legendre* des exposants  $\zeta_v(q)$ . Cette relation traduit le *formalisme multifractal*, qui est un outil de mesure pratique du spectre de singularités.

Cette avancée majeure s'inscrit alors dans une convergence pluridisciplinaire vers la notion de multifractalité, avec par exemple l'émergence d'une description multifractale similaire pour les mesures dans la communauté des systèmes dynamiques [64].

Divers modèles existent pour le spectre de singularités des signaux de vitesse [58], notamment le modèle log-normal, qui se déduit des travaux de Kolmogorov et Obukhov [85, 135], et le modèle proposé par Z.S. She et E. Lévêque [160, 100]. Un des buts des analyses effectuées sur les signaux expérimentaux est de confronter les résultats obtenus à ces modèles.

### **Transformées en ondelette, traitement du signal et formalismes multifractals**

Un enjeu essentiel de l'analyse des signaux expérimentaux de vitesse turbulente est ainsi la mesure des exposants  $\zeta_v(q)$ , afin de remonter au spectre de singularités  $D_v(h)$ . Le formalisme multifractal fondateur [138] est basé sur les accroissements  $\delta_v$  de la vitesse  $v$ , mais un outil de traitement du signal, plus puissant et plus adapté à la description des signaux dans le plan espace-échelle, apparaît, à la suite des travaux de Morlet et Grossmann [125, 62] : la *transformée en ondelette*. Cet outil permet de définir les *coefficients d'ondelette*, qui généralisent efficacement les accroissements. La transformée en ondelette a de nombreuses applications [103, 117], parmi lesquelles celle de pouvoir caractériser efficacement les propriétés de régularité ponctuelle des fonctions, et ainsi de mesurer le spectre de singularités, en remplaçant, dans le formalisme multifractal précédent, les accroissements par les coefficients d'ondelette, ce qui a été mathématiquement démontré par S. Jaffard [70].

Une analyse plus fine des signaux de vitesse a ainsi pu être effectuée, notamment par l'équipe d'A. Arnoedo [16, 11, 147]. Cette équipe a en particulier introduit une nouvelle méthode, définie à partir de la transformée en ondelette : la méthode mmo (pour maxima du module de la transformée en ondelette). Cette dernière a permis pour la première fois la mesure complète du spectre de singularités des signaux de vitesse, les précédents formalismes ne permettant seulement la mesure d'une partie de ce spectre. Bien que n'ayant pas reçu de fondement mathématique, cette méthode a été vérifiée avec succès dans un grand nombre de situations [16, 11].

Très récemment, S. Jaffard [73] a construit un nouveau formalisme multifractal, bâti à l'aide des *coefficients dominants*, définis à partir d'un certain type de transformée en ondelette, la transformée en ondelette discrète [48, 103, 1, 2]. Ce nouveau formalisme, qui repose sur une base mathématique solide, a fait l'objet d'une partie importante des travaux effectués à l'occasion de cette thèse. La partie II de ce mémoire s'attache ainsi à décrire de façon détaillée ce formalisme, en le comparant au formalisme "classique", basé sur les coefficients d'ondelette discrets. Les avantages théoriques attendus du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants (mesure de la partie droite du spectre de singularités et validité dans le cas des fonctions contenant des singularités dites *oscillantes*) sont en particulier discutés (chapitres 5 et 6), puis mis en évidence à l'aide de l'analyse numérique de processus multifractals synthétiques (chapitre 7). Notons que c'est la première fois que ce formalisme est numériquement mis en oeuvre, avec la mise au point de codes informa-

tiques<sup>1</sup> (utilisant le langage Matlab), et qu'un nouveau processus multifractal, les *séries d'ondelette aléatoires* [21, 22], dont l'une des particularités est de contenir des singularités oscillantes, est utilisé. Ce processus permet en particulier une discussion intéressante sur la présence de singularités oscillantes dans les signaux étudiés. Enfin, ce nouveau formalisme multifractal est appliqué à des données issues d'expériences de turbulence pleinement développée (chapitre 8), ce qui illustre l'utilisation nécessairement très soignée et rigoureuse de tels outils de traitement du signal, assez complexes dans leur mise en oeuvre. Tous les travaux concernant le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants ont été menés en collaboration avec S. Jaffard [95, 74], ce qui a permis une analyse et une utilisation affinées des concepts utilisés.

### Estimation des exposants $\zeta(q)$

Les formalismes multifractals utilisés, qu'ils soient définis à partir des coefficients d'ondelette discrets ou des coefficients dominants par exemple, reposent tous sur la mesure des exposants  $\zeta(q)$  des fonctions de structure d'ordre  $q$  correspondantes, ce qui amène la question suivante : quels ordres  $q$  peut-on utiliser pour effectuer l'analyse multifractale (c'est-à-dire la mesure du spectre de singularités) des signaux étudiés ? La question a été longtemps abordée en raisonnant intuitivement sur un processus multifractal synthétique, la cascade de Mandelbrot multiplicative [105], qui définit un processus de type densité, ou encore mesure, introduit afin de modéliser le champ de dissipation des écoulements turbulents. Les propriétés multifractales de ce processus se réduisent à la connaissance d'une fonction,  $\varphi(q)$ , qui est souvent heuristiquement identifiée aux exposants  $\zeta(q)$ . Il est alors attendu que les exposants mesurés convergent vers  $\varphi(q)$ , lorsque la durée des signaux analysés, nécessairement finie en pratique, devient très grande.

Ce raisonnement intuitif est en fait erroné, et est parfois à l'origine de mauvaises interprétations. Des travaux assez récents, notamment par Molchan [119] et Ossiander et Waymire [136], montrent que les exposants  $\zeta(q)$  ne coïncident avec la fonction  $\varphi(q)$  que pour une gamme finie d'ordres  $q$  :  $q \in [0, q_*^+]$  (en se restreignant ici aux valeurs positives de l'ordre  $q$ ), limitée par l'ordre critique  $q_*^+$ , qui se déduit de la connaissance de la fonction  $\varphi(q)$ . Au delà de cet ordre critique, les exposants  $\zeta(q)$  se comportent linéairement avec l'ordre  $q$ , quelle que soit la fonction  $\varphi(q)$ , ce que l'on dénommera dans ce mémoire *effet de linéarisation*.

Les résultats de Molchan et d'Ossiander et Waymire [119, 136] sont des résultats asymptotiques, c'est-à-dire dans la limite d'un nombre infini d'échantillons pour les signaux analysés. Il reste donc plusieurs questions en suspens. Tout d'abord, il est important d'un point de vue pratique de savoir si l'effet de linéarisation dépend ou non de la durée nécessairement finie des signaux étudiés. De plus, on peut se demander si l'effet de linéarisation est une caractéristique des cascades de Mandelbrot canoniques, ou alors si c'est une propriété intrinsèque de l'analyse multifractale des signaux. La valeur de l'ordre critique  $q_*^+$  est connue si l'on a à disposition une expression analytique de la fonction  $\varphi(q)$ , ce qui n'est pas le cas pour les signaux expérimentaux. Il faut donc construire un estimateur, afin de mesurer la valeur de l'ordre critique  $q_*^+$  à partir des données elles-mêmes. Enfin, il est légitime de se demander ce qu'il advient de l'effet de linéarisation lorsqu'on a accès, pour l'analyse, seulement à des coupes géométriques de signaux définis sur  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d > 1$ .

Cette problématique fait l'objet de la partie III, qui apporte des éléments de réponse en adoptant une démarche de caractérisation numérique des estimateurs (des exposants  $\zeta(q)$  et de l'ordre critique  $q_*^+$ ) à l'aide de processus multifractals synthétiques aux propriétés bien contrôlées (chapitres 9, 10 et 11). Une relecture des résultats obtenus lors de l'analyse de signaux provenant d'expériences de

---

<sup>1</sup>L'écriture de codes informatiques constitue d'ailleurs une part importante du travail de thèse ici présenté.

turbulence pleinement développée est alors proposée au chapitre 12. La valeur de l'ordre critique  $q_*^+$  dans le cas de signaux de vitesse eulérienne à une dimension est en particulier estimée.

### **Turbulence pleinement développée et exposants $\zeta_v(q)$ : vers une description non universelle**

La mesure du spectre de singularités  $D_v(h)$  s'effectue en pratique à partir de la mesure des exposants  $\zeta_v(q)$ . La valeur des exposants  $\zeta_v(q)$  est cependant intéressante en elle-même, car elle permet de mesurer l'écart à l'hypothèse d'universalité de ces exposants, supposée s'appliquer dans la limite des nombres de Reynolds infinis [58]. En effet, des travaux récents [142, 118, 47, 96, 97, 8, 59], discutent les écarts à la "loi des 4/5" de Kolmogorov [83] (valable dans la limite des nombres de Reynolds infinis, et qui prédit notamment une fonction de structure d'ordre 3 en loi de puissance d'exposant  $\zeta_v(3) = 1$ ), dans le cas des nombres de Reynolds nécessairement finis des expériences de turbulence. Les corrections à la loi des 4/5 dépendent naturellement du nombre de Reynolds, mais font aussi nécessairement intervenir la nature particulière de l'écoulement turbulent considéré (turbulence en déclin ou turbulence forcée par exemple).

Il reste alors un pas à franchir, qui consiste à prédire, à l'aide des modélisations de la fonction de structure d'ordre 3 tenant compte de ces corrections, la valeur de l'exposant  $\zeta_v(3)$ . La partie IV aborde ces questions et discute la modélisation de la fonction de structure d'ordre 3 à l'aide de termes correctifs à la loi des 4/5, tout particulièrement en ce qui concerne la prise en compte de la nature de l'écoulement turbulent (turbulence en déclin ou forcée, écoulement homogène ou non). Des prédictions pour la valeur de l'exposant  $\zeta_v(3)$  incorporant ces corrections sont ainsi proposées (chapitre 13). La modélisation de la fonction de structure d'ordre 3, et les prédictions associées, sont alors confrontées à des données expérimentales (chapitre 14). L'influence de la particularité de l'écoulement (homogène ou non) sur la fonction de structure d'ordre 3 est ainsi mise en évidence.



# Chapitre 1

## Turbulence, invariance d'échelle et régularité

### 1.1 La turbulence pleinement développée

Ce paragraphe n'a d'autre vocation que celle d'être une succinte introduction au phénomène de *turbulence pleinement développée*. Le lecteur ne doit ainsi pas s'attendre à une description détaillée. Il pourra en revanche consulter par exemple les références [58, 162, 129] pour une approche globale de ce domaine. On pourra aussi se reporter à [100] pour une introduction très agréable à lire.

#### 1.1.1 Mécanique des fluides et turbulence pleinement développée

##### Mécanique des fluides, équations de Navier-Stokes et nombre de Reynolds $R_e$

La mécanique des fluides s'occupe, comme son nom l'indique, de la description du mouvement de *fluides*<sup>1</sup>. Les fluides considérés sont indifféremment des gaz (ou des mélanges de gaz) comme l'air atmosphérique par exemple, ou des liquides, comme l'eau. Il est souvent de plus supposé, étant données les conditions physiques imposées au fluide, que celui-ci se comporte de façon newtonienne (il est ainsi uniquement caractérisé par sa *viscosité cinématique*  $\nu$ ), et que l'écoulement s'effectue de manière *incompressible* (ce qui nécessite des vitesses d'écoulement faibles devant la vitesse du son dans le fluide considéré). La densité volumique du fluide est alors constante et notée  $\rho$ . Ces deux approximations sont très largement vérifiées pour les fluides et écoulements considérés dans le cadre de cette thèse.

La description d'un fluide en mouvement peut se faire sous deux points de vue différents. Il est possible de définir une particule fluide, unité élémentaire du fluide, dont on suit la trajectoire à travers l'espace et le temps : c'est la description *lagrangienne*. Mais on peut aussi adopter un point de vue plus proche des milieux continus. Des grandeurs physiques, caractérisant l'état du fluide en un point fixe au cours du temps, par exemple la vitesse, sont utilisées : c'est la description *eulérienne*. C'est le point de vue le plus courant et qui sera usité dans ce travail de thèse. En effet, la plupart des expériences effectuées aboutissent à la mesure de grandeurs eulériennes, par exemple la vitesse du fluide en un point donné de l'écoulement en fonction du temps, à l'aide de techniques

---

<sup>1</sup>Plutôt que de citer une liste de références forcément très restrictive pour ce sujet très vaste, il est fait le choix de n'en donner aucune.

d'anémométrie à fil chaud<sup>2</sup>. Le fluide est donc décrit via sa *vitesse eulérienne*  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ , c'est-à-dire la vitesse du fluide au point  $\vec{x}$  à la date  $t$ , ainsi que par la pression au point  $\vec{x}$  et à la date  $t$  :  $p(\vec{x}, t)$ .

Sous les hypothèses précédentes concernant le fluide (fluide newtonien) et son écoulement (écoulement incompressible), le mouvement du fluide est alors décrit par les *équations de Navier-Stokes* :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \left( \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p(\vec{x}, t) + \nu \Delta \vec{v}(\vec{x}, t) \\ \text{div}(\vec{v}(\vec{x}, t)) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Deux types de termes interviennent dans l'équation de Navier-Stokes : des termes *linéaires* en  $\vec{v}$ , et un terme *non-linéaire*  $\left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}$ . Si ce dernier terme ne joue que peu d'importance dans l'évolution de l'écoulement considéré, alors celui-ci peut être considéré comme régi par des équations linéaires. On est alors dans un régime dit *laminaire*. En revanche, lorsque le terme non-linéaire devient prépondérant dans les équations (1.1), l'écoulement suit des trajectoires très complexes, très erratiques, il devient alors même impossible de les décrire de façon déterministe (on pourra consulter l'album [166] qui illustre toutes ces situations). Un tel écoulement est alors dit *turbulent*.

Afin de classer les écoulements entre eux (laminaires, turbulents), on introduit le *nombre de Reynolds*  $R_e$ , nombre adimensionné construit sur les grandeurs caractéristiques de l'écoulement : longueur  $L$  et vitesse  $V$  caractéristiques de l'écoulement, et viscosité cinématique du fluide considéré  $\nu$  :

$$R_e = \frac{VL}{\nu}.$$

Ce nombre dépend donc à la fois du fluide ( $\nu$ ) et de l'écoulement particulier effectué par ce fluide ( $L$  et  $V$ ). Il est construit comme le rapport (c'est un raisonnement dimensionnel) entre le terme créant des mouvements irréguliers, le terme non-linéaire  $\left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}$ , et le terme amortissant les irrégularités d'écoulement, c'est-à-dire le terme dissipatif :  $\nu \Delta \vec{v}$ .

Ainsi, lorsque  $R_e$  sera petit devant 1, l'écoulement sera laminaire, lorsqu'il sera grand devant 1, il sera turbulent.

## Régime de turbulence pleinement développée

Plaçons nous dans le cas où le nombre de Reynolds de l'écoulement considéré est très grand devant 1. Une telle situation est appelée *régime de turbulence pleinement développée*. Faisons quelques commentaires sur ce régime d'écoulement.

Un tel écoulement a un aspect très irrégulier. Sur la figure 1.1 est par exemple tracé un enregistrement de vitesse en un point fixe d'un jet turbulent (données réalisées et fournies par C. Baudet et A. Naert, au laboratoire de physique de l'École Normale Supérieure de Lyon, se reporter au chapitre 2 pour de plus amples précisions). Cela traduit un mouvement du fluide très désordonné et très erratique, contrairement au cas laminaire, ce qui est caractéristique d'un système ayant un grand nombre de degrés de liberté.

---

<sup>2</sup>Notons que, depuis quelques années, un enjeu très important de la recherche dans le domaine de la turbulence pleinement développée est la mise en oeuvre d'expériences effectuant des mesures lagrangiennes (par exemple les travaux de N. Mordant à l'École Normale Supérieure de Lyon sous la direction de J.-F. Pinton [122, 124], mais aussi par d'autres équipes de recherche [168, 123]).

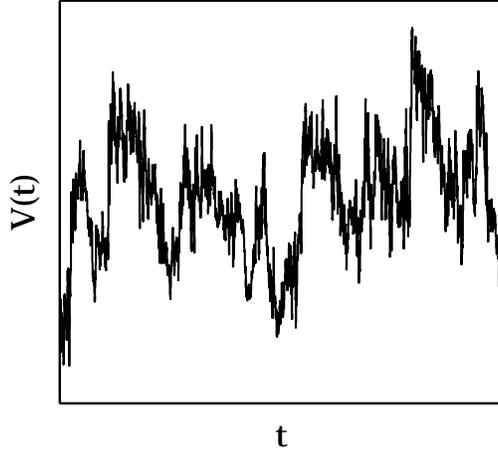


FIG. 1.1 – **Vitesse en un point d'un écoulement de jet turbulent** (données de l'ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$ ) [150].

Un tel phénomène est en pratique impossible à décrire de façon déterministe comme dans le cas laminaire, et il est alors nécessaire d'utiliser alors une *description statistique* : chaque mesure de vitesse sera considérée comme une réalisation d'un processus aléatoire (on reviendra au paragraphe 1.2 sur cette notion), que l'on cherchera à caractériser à l'aide de propriétés statistiques.

Les deux paragraphes suivants définissent le type de propriétés statistiques auxquelles s'attache tout particulièrement le travail effectué au cours de cette thèse.

### 1.1.2 Turbulence pleinement développée et invariance d'échelle

#### Fonction de corrélation d'un signal de vitesse turbulent

Les signaux de vitesse turbulente qui nous intéressent tout particulièrement, sont des profils spatiaux  $v(x)$  (cf. le chapitre 2). La première caractéristique sur laquelle on se penche assez souvent pour étudier un signal obtenu expérimentalement est sa *fonction de corrélation*  $C_v(l)$ , définie comme :

$$C_v(l) = \frac{\langle v(x+l)v(x) \rangle}{\langle (v(x))^2 \rangle},$$

où  $\langle . \rangle$  désigne une moyenne spatiale sur tous les abscisses  $x$  disponibles. Cette fonction ne dépend que d'un paramètre,  $l$ , que l'on appelle *échelle*.

La fonction de corrélation d'un profil de vitesse turbulente particulier, celui présenté sur la figure 1.1, est portée sur la figure 1.2. La fonction de corrélation  $C_v(l)$  présente une particularité très forte, que l'on retrouve dans tous les signaux de vitesse turbulente (c'est donc bien une caractéristique intrinsèque du phénomène de turbulence pleinement développée [58]) : le profil de vitesse est non-seulement corrélé à grande échelle, mais cette corrélation est approximativement une *loi de puissance* sur toute une gamme d'échelles, que l'on appelle *échelles inertielles* : la quantité  $\log_2(1 - C_v(l))$  se comporte de façon linéaire en fonction de  $\log_2(l)$  (cf. figure de droite). La

fonction de corrélation s'approxime alors très bien par :

$$C_v(l) = 1 - \left( \frac{l}{L_d} \right)^\alpha,$$

où  $L_d$  est la valeur de l'échelle de décorrélation et  $\alpha$  l'exposant de la loi de puissance, proche en pratique de  $\frac{2}{3}$ .

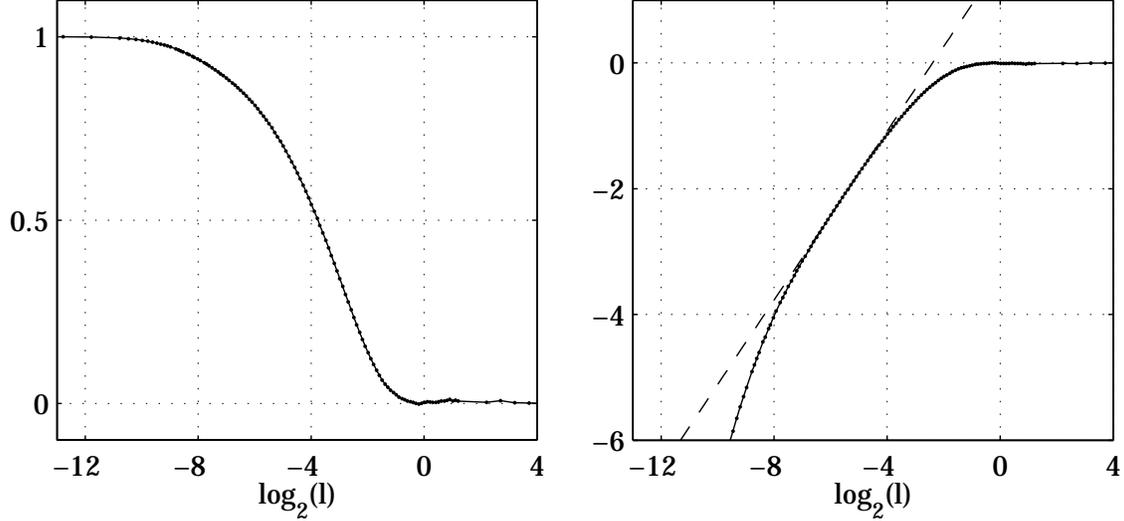


FIG. 1.2 – **Fonction de corrélation d'un signal de vitesse turbulente** (ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$ ) :  $C_v(l)$  (gauche) et  $\log_2(1 - C_v(l))$  (droite) en fonction de  $\log_2(l)$  ( $l$  est exprimée en mètres).

### Hypothèse d'invariance d'échelle

Un tel comportement à travers les échelles des fonctions de corrélation des profils spatiaux de vitesse turbulente est observé pour *toutes* les expériences [58], c'est donc une propriété fondamentale du phénomène de turbulence pleinement développée. Cela revient à écrire, dans une description *statistique*, que pour les échelles inertielles, la fonction de corrélation se comporte en moyenne comme :  $1 - \left( \frac{l}{L_d} \right)^\alpha$ .

Un tel constat expérimental, de comportement en loi de puissance selon les échelles de la fonction de corrélation  $C_v(l)$  pour les échelles inertielles, est la signature "fonctionnelle" d'une hypothèse centrale dans la description de la turbulence pleinement développée (pour les échelles inertielle bien sûr) : *l'absence d'échelle caractéristique à l'intérieur de la gamme des échelles inertielles*. Cela revient à supposer que toutes les échelles inertielles  $l$  jouent un rôle équivalent, sans prédominance de l'une (ou plusieurs) d'entre elles sur les autres : c'est l'*hypothèse d'invariance d'échelle*.

De façon plus générale, la propriété d'invariance d'échelle est traduite à l'aide des *accroissements* des profils spatiaux de vitesse, définis comme :

$$\delta_v(x, l) = v(x + l) - v(x),$$

et dont les propriétés statistiques, leurs moments statistiques estimés par moyenne spatiale  $\langle . \rangle$  par exemple, ne dépendent pas de la position  $x$  : c'est la conséquence de l'hypothèse de stationnarité

des profils spatiaux de vitesse. On notera qu'étudier la fonction de corrélation  $C_v(l)$  ou le moment statistique d'ordre 2 revient au même, puisque l'on a :

$$\langle (\delta_v(x, l))^2 \rangle = 2 \langle (v(x))^2 \rangle [1 - C_v(l)].$$

L'étude de la propriété d'invariance d'échelle et des lois de puissance associées se fera dans la suite sur les moments.

### 1.1.3 Turbulence pleinement développée et régularité

#### Irrégularité dans la zone inertielle

Une autre caractéristique importante des écoulements de turbulence pleinement développée est son aspect fortement irrégulier, comme on l'observe sur la figure 1.1. Un signal de vitesse, même turbulente, est une vitesse physique, et elle admet donc une différentielle : l'accélération. La vitesse est donc régulière à des échelles suffisamment petites, en pratique négligeables devant l'échelle de Kolmogorov  $\eta$  (cf. l'annexe A) : le signal observé à de telles échelles apparaît alors continu et dérivable.

Mais, lorsqu'il est observé à des échelles plus grandes, les échelles inertielles, le signal de vitesse présente de très fortes variations, caractérisées par des accroissements très irréguliers. Cela est vrai quelle que soit l'échelle inertielle choisie. On extrapole souvent ce comportement irrégulier jusqu'aux échelles les plus petites. Comme il vient d'en être fait la remarque, ceci est un peu abusif puisque le signal de vitesse est forcément continu et différentiable au sens strict : il est sous-entendu que l'on étend les propriétés des accroissements observées aux échelles inertielles seulement à toutes les échelles (i.e.  $l \rightarrow 0$ ).

#### La notion de singularité

Heuristiquement, un signal  $f(t)$  *régulier* se comporte selon  $|f(x) - f(x_0)| \sim |x - x_0|$  lorsque  $x \rightarrow x_0$ <sup>3</sup>, il est donc bien "lisse" lorsqu'on l'observe aux petites échelles (i.e.  $l = |x - x_0| \rightarrow 0$ ). Un signal *irrégulier* se comporte plutôt comme  $|f(x) - f(x_0)| \sim |x - x_0|^h$ , avec  $0 < h < 1$ , et il n'est donc pas "lisse" lorsque  $|x - x_0| \rightarrow 0$ , puisque bien qu'étant continu en  $x_0$ , il n'y est pas dérivable. Un comportement selon  $|x - x_0|^h$  au point  $x_0$  est appelé *singularité*. L'exposant  $h$  caractérise la force de la singularité : plus  $h$  est proche de 0, plus la singularité est dite forte.

#### Régularité et singularité : description multifractale

Un signal de vitesse turbulent est très complexe, et il semble irréaliste de vouloir le décrire de façon complète. Il est donc usuellement adopté un cadre descriptif réduit, basé sur la notion de singularité.

Un signal irrégulier tel que le signal de vitesse turbulente est ainsi décrit à l'aide de singularités  $|x - x_0|^h$ , autour de chaque abscisse  $x_0$ , caractérisées par des exposants  $h$  a priori différents. Un tel point de vue pour la description de données expérimentales s'appelle la *description multifractale*.

L'analyse d'un signal selon ce cadre est *l'analyse multifractale*. Le développement de la description multifractale [138] a été initiée dans le domaine de la turbulence hydrodynamique, celle-ci aiguillonnant alors le développement de ce cadre de travail dans le domaine des mathématiques [68, 75, 70]. L'analyse multifractale est fondée sur la formalisation mathématique de la notion de singularité à l'aide de l'exposant de Hölder  $h_f(t_0)$  (cf. partie 3.1.1).

<sup>3</sup>La constante de proportionnalité étant la dérivée de  $f$  en  $x_0$ .

## 1.2 Processus aléatoires

### 1.2.1 Introduction

La description de phénomènes physiques complexes tels le mouvement brownien, mouvement d'une "petite" particule dans un fluide à l'équilibre thermodynamique, ne peut être accomplie de façon déterministe. Bien que les équations régissant l'évolution de ce système soient connues, il existe beaucoup trop de degrés de liberté : chaque molécule du fluide interagit (par des chocs) avec toutes les autres molécules du fluide, mais aussi avec la "petite" particule en suspension dans le fluide. Or le nombre de molécules présentes dans le fluide (par unité de masse par exemple) est absolument gigantesque ...

On abandonne donc pour ce type de phénomènes physiques l'idée d'une description *déterministe*, et on choisit plutôt une description *probabiliste*. En ce qui concerne le mouvement brownien par exemple, plutôt que de rechercher la trajectoire déterministe de la "petite" particule<sup>4</sup>, on décrit cette trajectoire de façon probabiliste, à l'aide d'un *processus aléatoire*, dont chacune des réalisations est une trajectoire que la "petite" particule a une probabilité non nulle d'emprunter.

La solution, en termes de processus aléatoire, au problème de la description du mouvement brownien est obtenue avec la *marche aléatoire*, introduite par A. Einstein en 1905 [54]. Ce fut la première fois qu'un phénomène physique fut appréhendé de la sorte, de façon probabiliste et non plus déterministe, ouvrant ainsi la voie à une approche novatrice et profondément féconde.

### 1.2.2 Définition

Un processus aléatoire est ainsi la généralisation de la notion de variable aléatoire : chaque tirage d'une variable aléatoire fournit un *point* (défini dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^n$ , ...) selon une loi de probabilité donnée. Chaque réalisation d'un processus aléatoire fournit lui une *fonction*, dont les propriétés sont distribuées selon les lois de probabilité définissant le processus aléatoire. Par exemple, les accroissements de la marche aléatoire sont distribués selon des gaussiennes.

Dans la suite de cet exposé, on notera un processus aléatoire  $X(t)$ , et une réalisation particulière de ce processus  $X_i(t)$ , qui définit ainsi une fonction. Dans l'exemple du paragraphe précédent,  $X(t)$  est donc le processus aléatoire *marche aléatoire*, et  $X_i(t)$  est une trajectoire possible. Les moyennes d'ensemble concernant le processus  $X(t)$  correspondent alors à des moyennes sur toutes les réalisations  $X_i(t)$  possibles.

### 1.2.3 Processus aléatoires et invariance d'échelle

Les processus aléatoires  $X(t)$  auxquels nous nous intéressons dans le cadre de ce travail de thèse sont des processus dont les propriétés sont proches de celles observées (pour les échelles inertielles) sur les signaux de vitesse turbulente. Une de ces propriétés principales est l'invariance d'échelle de leurs accroissements (cf. paragraphe 1.1.2), qui seront notés :

$$\delta_X(t, a) = X(t + a\tau_0) - X(t),$$

où  $\tau_0$  est une constante fixant l'unité de temps, qui ne joue aucun rôle<sup>5</sup>.  $a$  est le paramètre qui va permettre de "voyager" à travers les échelles : c'est le *rapport d'échelle*, qu'on appellera souvent

---

<sup>4</sup>Encore une fois, cela nécessiterait la connaissance exacte des positions et des vitesses de chacune des molécules du fluide et de la "petite" particule à un instant donné, puis la résolution des équations du mouvement de chaque molécule et de la particule ...

<sup>5</sup>Par exemple, si le signal étudié est échantillonné, ce sera tout simplement le pas d'échantillonnage.

abusivement directement échelle. Le processus  $\delta_X(t, a)$  sera supposé stationnaire en temps, c'est-à-dire selon  $t$ . Le processus  $X(t)$  lui-même n'est pas stationnaire (en reprenant l'exemple de la marche aléatoire, les accroissements sont bien stationnaires, mais pas le processus lui-même : sa variance augmente linéairement avec le temps par exemple).

### Invariance d'échelle stricte

Commençons par définir des processus aléatoires respectant une *invariance d'échelle stricte*, encore appelés processus auto-similaires [151].

L'idée repose sur le fait que les accroissements  $\delta_X(t, a)$  se comportent statistiquement de la même façon que leurs versions dilatées en amplitude et en échelle :  $a^H \delta_X(t, 1)$ , où  $a > 0$ , encore une fois, est le paramètre qui contrôle cette dilatation à travers les échelles.  $H$  permet de renormaliser en amplitude  $\delta_X$ .

Le processus  $X(t)$  est strictement invariant d'échelle si ses accroissements  $\delta_X(t, a)$  et  $a^H \delta_X(t, 1)$  sont égaux en lois de probabilité. Ils ont par exemple les mêmes moments statistiques :

$$\mathbb{E}|\delta_X(t, a)|^q = \mathbb{E}a^{qH}|\delta_X(t, 1)|^q = C_q a^{qH},$$

où  $C_q = \mathbb{E}|\delta_X(t, 1)|^q$  est une constante ne dépendant que de l'ordre  $q$ , puisque le processus est stationnaire en temps  $t$ .

Les moments statistiques  $\mathbb{E}|\delta_X(t, a)|^q$  d'un tel processus ne sont donc pas quelconques : ce sont des *lois de puissance* en fonction de l'échelle  $a$ , et l'exposant de la loi de puissance, que l'on notera  $\zeta_X(q)$  est une fonction linéaire de l'ordre  $q$  :  $\zeta_X(q) = qH$ .

Prenons pour exemple la marche aléatoire, qui entre dans la catégorie des processus strictement invariants d'échelle (ou auto-similaires), avec  $H = 1/2$ . De plus les accroissements à la plus petite échelle ( $a = 1$ ) étant gaussiens de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ , les accroissements à toute échelle seront eux-aussi gaussiens, de moyenne nulle, et de variance égale à  $\sigma^2 a$  <sup>6</sup>.

Par définition, les accroissements de tels processus ont des statistiques régies par le même type de loi de probabilité à toutes les échelles  $a$ , seuls les paramètres définissant ces lois évoluant à travers les échelles, comme on vient de le voir sur l'exemple de la marche aléatoire. Une réalisation du processus marche aléatoire a été synthétisée et les distributions de ses accroissements estimées pour plusieurs valeurs de l'échelle  $a$ . Les résultats sont portés sur la figure 1.3, à gauche, où sont tracés les logarithmes des distributions  $P(\delta_X(a) = y)$  à chaque échelle, en fonction de  $y$  renormalisé par l'écart-type estimé  $\sigma_a$  de  $P(\delta_X(a))$  :  $y/\sigma_a$ .

On observe donc bien sur cet exemple que les distributions des accroissements conservent bien à chaque échelle la même forme fonctionnelle, seules les valeurs des paramètres de cette forme fonctionnelle (un seul ici : l'écart-type  $\sigma_a$ ) variant avec l'échelle  $a$ .

### Invariance d'échelle au sens large

Le cadre précédent est en fait assez restrictif. En particulier, il ne convient pas à la description des signaux de vitesse turbulente, puisqu'il est connu [36, 61, 28, 58] que les statistiques des accroissements de la vitesse turbulente se déforment à travers les échelles (c'est-à-dire que leur forme

<sup>6</sup>Si la moyenne est nulle, la variance est égale au moment d'ordre 2 ...

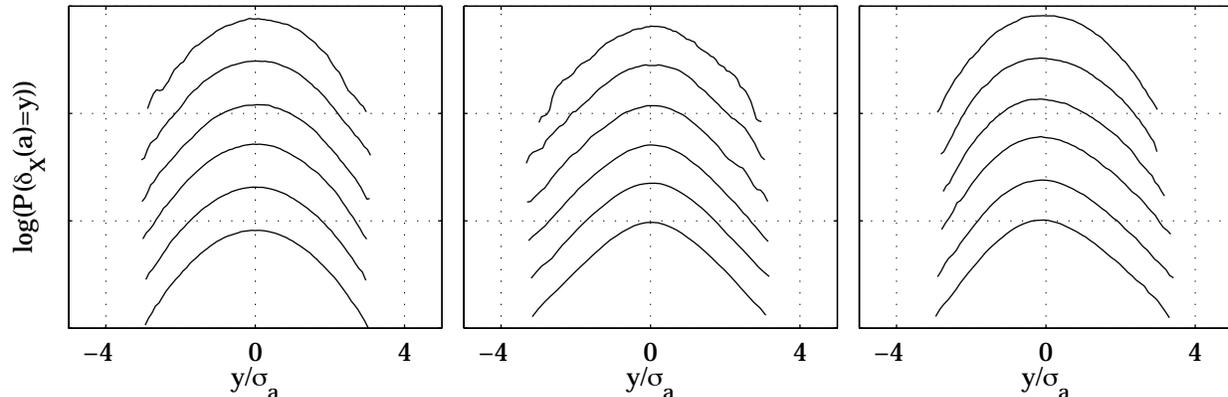


FIG. 1.3 – Logarithmes des fonctions de densité de probabilité  $P(\delta_X(a))$  des accroissements des processus marche aléatoire (gauche), de la marche aléatoire multifractale (milieu) et des signaux de vitesse turbulente (données ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$ ), pour différentes échelles  $a$  (de plus en plus petites de haut en bas). L’abscisse est normalisée par l’écart-type estimé  $\sigma_a$  des accroissements à l’échelle correspondante. Les distributions sont arbitrairement décalées verticalement pour plus de clarté.

fonctionnelle change, passant d’une loi gaussienne à grande échelle à des exponentielles étirées à plus petite échelle [58], cf. figure 1.3, à droite), tout en conservant un comportement de leurs moments statistiques en loi de puissance en fonction de l’échelle. De plus, et l’on va voir que cette remarque n’est qu’une reformulation de ce qui vient d’être dit, il a été montré expérimentalement depuis quelques dizaines d’années ([7], se reporter à [58, 10] pour la description des nombreuses expériences aboutissant à ce résultat) que les exposants  $\zeta_v(q)$  correspondants ne sont pas linéaires selon  $q$ , conformément à la prédiction faite par Obukhov [135] et Kolmogorov [85] en 1962.

On va donc se placer dans un cadre plus riche car plus flexible, que l’on appellera dans ce mémoire de thèse *invariance d’échelle au sens large*, qui revient à formuler l’hypothèse suivante :

les moments statistiques des accroissements sont toujours des lois de puissance de l’échelle  $a$ , mais leurs exposants ne sont plus nécessairement linéaires en  $q$  :

$$\mathbb{E}|\delta_X(t, a)|^q = C_q a^{\zeta_X(q)}, \text{ avec } \zeta_X(q) \neq qH. \quad (1.2)$$

La fonction  $\zeta_X(q)$ , qui n’est plus linéaire a priori (c’était la conséquence de l’hypothèse de l’invariance d’échelle stricte pour les processus auto-similaires), contrôle l’évolution des moments statistiques des accroissements. Notons que cette définition englobe le cadre précédent, qui correspond à la condition supplémentaire de linéarité pour les exposants  $\zeta_X(q)$ .

Si justement  $\zeta_X(q)$  n’est pas linéaire en  $q$ , les divers moments de la loi de probabilité des accroissements  $|\delta_X(t, a)|$  ne varient pas tous avec la même ”vitesse” selon l’échelle  $a$ , et leurs fonctions de densité de probabilité se *déforment* alors en fonction de l’échelle  $a$ . Ce n’est plus la forme fonctionnelle des distributions des accroissements qui est constante à travers les échelle comme dans le cas des processus invariants d’échelle au sens stricte, mais la ”vitesse” avec laquelle elles se déforment qui est désormais constante à travers les échelles. C’est là qu’intervient l’hypothèse d’invariance d’échelle : les distributions se déforment, mais partout, (c’est-à-dire à toutes les échelles  $a$ ) de la

même façon (c'est-à-dire que leurs moments statistiques varient en loi de puissance en fonction de l'échelle  $a$ ).

Ce cadre convient cette fois bien à la description de la vitesse turbulente pour les échelles inertielles, puisqu'elle permet la déformation des distributions lorsque l'échelle varie, tout en conservant le comportement en loi de puissance des moments statistiques.

Prenons l'exemple du processus marche aléatoire multifractale [24, 127], qui est décrit dans l'annexe D, qui est invariant d'échelle au sens large, et dont on peut calculer les exposants  $\zeta_{mrw}(q)$ <sup>7</sup> :  $\zeta_{mrw}(q) = C_1 q - \frac{C_2}{2} q^2$ <sup>8</sup>. On peut choisir par exemple  $C_1 = 0.5$  et  $C_2 = 0.02$ , et les  $\zeta_{mrw}(q)$  sont ainsi bien non linéaires.

Un tel processus a été synthétisé et ses accroissements analysés de la même façon que ceux de la marche aléatoire dans le paragraphe précédent. Les résultats sont portés sur la figure 1.3, au milieu. On voit que, contrairement au cas de la marche aléatoire, les distributions des accroissements changent de forme fonctionnelle avec l'échelle  $a$ , comme pour les signaux de vitesse turbulente (figure de droite). La distribution à grande échelle est une gaussienne à grande échelle (distribution du haut), puis les distributions se déforment progressivement lorsque  $a$  diminue : les événements de grande amplitude (i.e. d'amplitude supérieure à quelques écarts-type) deviennent de plus en plus probables, dans tous les cas plus que s'ils étaient distribués selon une loi gaussienne. Les accroissements à petites échelle sont alors généralement qualifiés de *statistiquement intermittents* : les événements de grande amplitude sont beaucoup plus probables que dans le cas d'un comportement gaussien.

#### 1.2.4 Régularité des processus invariants d'échelle

On a vu dans le paragraphe 1.1.1 que le phénomène de turbulence pleinement développée présentait deux caractéristiques générales : une invariance d'échelle à l'intérieur de la gamme des échelles inertielles, se traduisant par un comportement en loi de puissance des moments des accroissements, et un comportement très irrégulier des signaux, que l'on cherche à décrire à l'aide de singularités du type  $|v(x+l) - v(x)| \sim l^h$ .

Ces deux propriétés sont bien sûr reliées. Il en est de même pour les processus aléatoires dont les accroissements sont invariants d'échelle : chacune de leurs réalisations présente une trajectoire très irrégulière (par exemple une réalisation de la marche aléatoire). La description multifractale, décrivant les réalisations à l'aide de singularités, s'applique tout naturellement à ce type de processus : l'heuristique est la même que celle utilisée pour les signaux de vitesse turbulente (cf. paragraphe 1.1.3). On parlera donc des propriétés de régularité de ces processus, que l'on décrira selon le cadre multifractal à l'aide de singularités.

---

<sup>7</sup>On abrégera "marche aléatoire multifractale" par son acronyme anglais, mrw pour "multifractal random walk".

<sup>8</sup>Cette expression n'est valable que pour  $q \in [-\sqrt{C_2/2}, +\sqrt{C_2/2}]$ , nous aurons l'occasion d'y revenir longuement dans la partie III.



## Chapitre 2

# Signaux expérimentaux de turbulence pleinement développée

Le travail effectué au cours de cette thèse s'appuie sur une étude qui se veut précise de données expérimentales, issues d'expériences de turbulence pleinement développée. Il est important de noter qu'une part très significative de ce travail n'a pu exister que grâce à l'utilisation de ces données expérimentales, et les personnes qui ont effectués ces mesures et les ont gracieusement mises à disposition sont ici très sincèrement remerciées.

### 2.1 Données expérimentales

#### 2.1.1 Données de l'ÉNSL, $R_\lambda \simeq 380$ et $R_\lambda \simeq 580$

Les *données de l'ÉNSL* sont issues d'une expérience de turbulence pleinement développée réalisée au laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon par C. Baudet (LÉGI, Université Joseph Fourier, INPG et CNRS, Grenoble) et A. Naert (laboratoire de Physique de l'ÉNSL). Il s'agit plus précisément d'une mesure de vitesse (à l'aide d'un capteur à fil chaud) à l'intérieur d'un jet turbulent, sur l'axe de symétrie du jet. Une description plus précise de ces données peut être trouvée dans les références [150, 29, 113].

Deux expériences ont été effectuées, la première de nombre de Reynolds  $R_\lambda \simeq 380$ , la deuxième avec  $R_\lambda \simeq 580$ . Chacun des deux jeux de données est constitué de 80 runs de  $2^{20}$  échantillons. Cela correspond, pour chaque run, à environ  $2^8$  (resp.  $2^7$ ) fois l'échelle de décorrélation (que l'on appellera abusivement souvent échelle intégrale) pour le jeu de nombre de Reynolds  $R_\lambda \simeq 380$  (resp.  $R_\lambda \simeq 580$ ).

#### 2.1.2 Données de Modane, $R_\lambda \simeq 2000$

Les *données de Modane* correspondent à une expérience de turbulence de tunnel, réalisée dans les locaux de l'ONERA à Modane lors de la campagne de 1995. Elles ont été fournies par Y. Gagne (LÉGI, Université Joseph Fourier, INPG et CNRS, Grenoble). Le nombre de Reynolds correspondant est :  $R_\lambda \simeq 2000$ .

Ce jeu de données est constitué d'une seule mais très longue acquisition : il contient 25690112 échantillons, ce qui correspond à environ 3100 fois l'échelle de décorrélation.

### 2.1.3 Données GReC, $R_\lambda \simeq 3200$

Afin d'accéder à de grand nombre de Reynolds, une expérience, utilisant le fait que l'hélium gazeux à basse température (de l'ordre de  $5K$ ) possède une viscosité cinématique  $\nu$  très faible, a été construite, notamment dans le cadre du travail de thèse de S. Pietropinto [140, 141]. L'expérience consiste en la mesure de la vitesse sur l'axe d'un jet turbulent, dont le nombre de Reynolds correspondant est :  $R_\lambda \simeq 3200$ .

Ces données sont elles-aussi constituées d'une seule mais très longue acquisition : elle contient 104857600 échantillons, ce qui correspond à environ 1600 fois l'échelle de décorrélation.

### 2.1.4 Hypothèse de turbulence gelée de Taylor

Notons ici que les écoulements considérés possèdent une direction d'écoulement moyen. On repérera cette direction par la coordonnée  $x$  et on notera  $v$  la composante de la vitesse selon cette direction. Les mesures de vitesse effectuées donnent accès à un enregistrement temporel de cette composante de vitesse, que l'on peut interpréter comme un profil spatial à l'aide de l'hypothèse de turbulence gelée de Taylor [163, 121, 58]. Si l'on note  $U$  la vitesse moyenne selon la direction principale de l'écoulement, l'hypothèse de Taylor revient à considérer que la turbulence est advectée par l'écoulement moyen, à la vitesse  $U$ , sans avoir le temps d'être notablement modifiée. L'enregistrement temporel est ainsi interprété, via le changement de variable  $x = Ut$ , comme un profil spatial, à un temps fixé, de l'écoulement de turbulence pleinement développée étudié. Notons qu'il existe des techniques plus raffinées, où le raisonnement précédent est appliqué de façon locale (c'est par exemple le cas pour les données de l'ÉNSL et GReC, pour lesquelles l'obtention de profils spatiaux a été effectuée par les expérimentateurs eux-mêmes), mais nous ne discuterons pas ce point-là.

On a donc accès, pour chacun des quatre jeux de données précédents, à des profils spatiaux des écoulements étudiés, et on notera ainsi la vitesse  $v(x)$ .

### 2.1.5 Valeurs des grandeurs physiques caractéristiques

L'analyse effectuée dans la partie IV, sur les données de l'ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$  et sur les données de Modane, nécessite la connaissance de grandeurs physiques caractérisant ces écoulements turbulents. Ces valeurs ont été calculées de la façon suivante, suivant les précieux conseils des expérimentateurs de la turbulence et des membres du laboratoire de physique de l'ÉNSL, notamment B. Castaing.

Pour les données de l'ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$ , bien résolues spatialement mais de nombre de Reynolds relativement faible, on calcule d'abord l'échelle de Taylor à partir de sa définition (cf. l'annexe A) :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\mathbb{E} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}},$$

où  $\sigma$  est l'écart-type de la vitesse. La dérivée numérique  $\frac{\partial v}{\partial x}$  est estimée grâce aux accroissements de vitesse à l'échelle de l'échantillonnage<sup>1</sup>. On en déduit alors la puissance moyenne dissipée par unité de masse  $\epsilon$  par la relation (cf. l'annexe A) [86, 121, 58] :

$$\epsilon = 15\nu \frac{\sigma^2}{\lambda^2}.$$

---

<sup>1</sup>C'est-à-dire :  $\frac{\partial v}{\partial x}(x = n + 1/2) \simeq v(n + 1) - v(n)$ .

Pour les données de Modane, moins bien résolues spatialement mais de nombre de Reynolds relativement élevé, on utilise la loi des 4/5 de Kolmogorov (cf. la partie IV) : on suppose que le maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée construite sur les accroissements non-signés vaut  $-4/5\epsilon$ . On en déduit alors  $\lambda$ , toujours par la relation  $\epsilon = 15\nu\frac{\sigma^2}{\lambda^2}$ .

Les valeurs ainsi calculées sont reportées dans le tableau suivant.

données	ÉNSL, $R_\lambda \simeq 380$	Modane
$R_\lambda$	$\simeq 380$	$\simeq 2000$
$\epsilon$	$4.49 \text{ m}^2.\text{s}^{-3}$	$1.91 \text{ m}^2.\text{s}^{-3}$
$\lambda$	$6.43 \text{ m}$	$17.9 \text{ m}$

## 2.2 Données issues de simulation numérique (DNS)

Enfin, des données issues de simulation numériques DNS<sup>2</sup>, simulant les équations de Navier-Stokes en trois dimensions ont été utilisées. Elles ont été réalisées par E. Lévêque (laboratoire de physique de l'ÉNSL) et C.R. Koudella (université de Cambridge) [100, 101]. Ces données concernent le champ de dissipation, et sont constituées de 18 runs de  $256 \times 256 \times 256$  échantillons, contenant chacun  $2 \times 2 \times 2$  échelles intégrales. Le nombre de Reynolds correspondant est :  $R_\lambda \simeq 140$ .

Il est important de faire la remarque suivante : le nombre de Reynolds est faible, et la gamme d'échelles inertielles est très petite. En pratique, l'analyse multifractale de ces données sera ainsi délicate. C'est pourquoi en particulier elle n'est effectuée que sur les données de dissipation, pour laquelle elle semble avoir un sens, au moins qualitativement (cf. le paragraphe 12.2), tandis que l'analyse multifractale des données de vitesse turbulente n'est pas satisfaisante, y compris qualitativement.

---

<sup>2</sup>Pour *Direct Numerical Simulation*.



Deuxième partie

**Analyse multifractale**

Cette partie regroupe les travaux effectués sur l'étude d'un nouvel outil d'analyse multifractale : le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants. La démarche adoptée s'inscrit pleinement dans l'action de l'équipe Sisyphé (Signaux, Systèmes et Physique) au sein du Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon : il s'agit d'utiliser des méthodologies mathématiques, des outils de traitement de signal avancés afin d'en faire un usage précis et bien compris dans le domaine de la physique, plus particulièrement la turbulence pleinement développée en ce qui nous concerne.

C'est dans cet esprit de clarification et de compréhension approfondie des outils de l'analyse multifractale pratique qu'a été rédigée cette partie. Il va ainsi être présenté au chapitre 6 un nouveau formalisme multifractal, basé sur de nouvelles quantités multi-résolution : le *formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants*. Celui-ci a récemment été introduit par Stéphane Jaffard [73], du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'Université Paris XII à Créteil. L'objectif est la description la plus simple possible, mais à la fois précise et détaillée, de ce nouveau formalisme, en collaboration avec Stéphane Jaffard. Il s'agit à la fois d'essayer de cerner au plus près les différences entre ce formalisme multifractal et celui basé sur les coefficients d'ondelette discrets (chapitre 5), afin de mieux comprendre pourquoi sa portée est plus générale (il permet en effet d'effectuer l'analyse multifractale d'une classe plus large de signaux, et ce de façon plus complète). Il s'agit donc d'une relecture de ces concepts mathématiques, par et pour des physiciens.

Cette méthodologie est ensuite, pour la première fois à notre connaissance, numériquement mise en pratique, avec la mise au point de programmes informatiques, utilisant le logiciel Matlab (chapitre 7). Il est ainsi possible de caractériser numériquement les performances de ce formalisme, et d'en illustrer concrètement les apports théoriquement attendus (chapitre 7). On utilisera en particulier les *séries d'ondelettes aléatoires* (cf. paragraphe 4.2), introduites par Jean-Marie Aubry et Stéphane Jaffard en 2002 [21, 22]. Ces processus multifractals ont la particularité de posséder des singularités oscillantes (cf. paragraphe 3.1.2) presque partout, contrairement aux processus multifractals usuels. Ce processus permettra de bien saisir et expliquer les différences entre les formalismes multifractals basés sur les coefficients d'ondelette discrets ou les coefficients dominants (chapitre 7).

Les outils numériques construits, permettant la mise en oeuvre du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants, seront appliqués à des signaux réels, issus d'expériences de turbulence pleinement développée (chapitre 8). Il sera ainsi illustré que l'usage de ce formalisme sur des données réelles doit être contrôlé de façon très soignée. Ce formalisme permet alors la mesure de la totalité du spectre de singularités de certains signaux, que l'on peut ainsi correctement comparer aux prédictions de modèles théoriques. Enfin, la question de l'existence de singularités oscillantes dans ces signaux de vitesse turbulente sera discutée.

## Chapitre 3

# Régularité et analyse multifractale

Nous allons ici définir la *régularité ponctuelle* d'une fonction, que l'on notera  $f$ , qui aboutit à la définition de l'*exposant de Hölder* (paragraphe 3.1). Cette notion permet alors de proposer une classification des fonctions selon leurs propriétés de régularité ponctuelle (paragraphe 3.2). L'*analyse multifractale* d'une fonction  $f$  est alors la caractérisation des exposants de Hölder que possède  $f$ , par l'intermédiaire d'une quantité appelée *spectre de singularités* (paragraphe 3.3).

Notons enfin que dans toute cette partie,  $f$  désignera indifféremment une fonction déterministe ou une réalisation particulière d'un processus aléatoire.

### 3.1 Notions de régularité d'une fonction

Les processus aléatoires auxquels l'analyse multifractale s'intéresse possèdent des propriétés de régularité particulières. L'archétype de ces processus est la fameuse marche aléatoire (se reporter au paragraphe 1.2 pour sa définition), décrite par A. Einstein il y a tout juste un siècle [54]. La marche aléatoire est un processus dont chaque réalisation est continue mais nulle part différentiable. Chaque réalisation est donc dans l'ensemble  $C^0(\mathbb{R})$  mais pas dans  $C^1(\mathbb{R})$ . Se contenter d'affirmer seulement que chaque réalisation est une fonction continue est plutôt frustrant : il semble bien que la richesse d'une telle fonction ne réside pas seulement dans sa simple continuité. Pour pouvoir aller plus loin, il faut disposer d'autres notions que la continuité ou la différentiabilité. Il est donc nécessaire de définir des notions intermédiaires, introduisant des régularités réelles, non-nécessairement entières comme la continuité ou la différentiabilité.

L'exposant de Hölder, permettant de définir localement la régularité maximale d'un processus, est défini dans cette partie et sera au centre d'une bonne partie de ce mémoire.

Des exposés sur ces notions de régularité, très intéressants tout en restant simples, peuvent être trouvés dans [72, 164].

Rappelons que l'on s'intéresse dans toute cette partie à des *fonctions*, c'est-à-dire à des applications de l'ensemble des réels dans lui-même.

### 3.1.1 Régularités ponctuelle et uniforme. Exposant de Hölder

#### Régularité ponctuelle

Commençons tout d'abord par définir proprement la généralisation de la régularité ponctuelle d'une fonction à des valeurs non-entières.

$f \in C^\alpha(t_0)$ , avec  $\alpha > 0$ , s'il existe des constantes  $C > 0$  et  $\delta > 0$ , ainsi qu'un polynôme  $P$  d'ordre strictement inférieur à  $\alpha$  tel que :

$$\text{si } |t - t_0| \leq \delta, \quad |f(t) - P(t - t_0)| \leq C|t - t_0|^\alpha. \quad (3.1)$$

Le polynôme  $P$  est alors unique et, si la fonction  $f$  admet un développement de Taylor de degré strictement inférieur à  $\alpha$  au point  $t_0$  et est  $C^\alpha(t)$  sur un voisinage de  $t_0$ , alors  $P$  est ce développement de Taylor<sup>1</sup>. Par exemple, si  $\alpha < 1$ , alors  $P(t) = f(t_0)$ .

Cette définition généralise donc bien les notions de continuité et de différentiabilité habituelles des fonctions (cas  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 1$ ).

#### Exposant de Hölder

La propriété précédente est vérifiée pour tout un continuum de valeurs de  $\alpha$ . On définit alors l'exposant de Hölder  $h_f(t_0)$  de la fonction  $f$  au point  $t_0$  comme la valeur maximale de  $\alpha$  vérifiant cette propriété :

$$h_f(t_0) = \text{Sup} \{ \alpha / f \in C^\alpha(t_0) \} \quad (3.2)$$

L'exposant de Hölder donne donc la *régularité ponctuelle maximale* de la fonction  $f$  autour de la date  $t_0$ .

#### Régularité uniforme : fonctions uniformément höldériennes

Donnons désormais une caractérisation uniforme (i.e. sur tout l'axe réel) de la régularité de la fonction  $f$ , ce qui permet de définir une classification de l'ensemble des fonctions de l'axe réel selon leur régularité.

On dira que  $f$  est *uniformément höldérienne*,  $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$ , si elle respecte la condition suivante :

$$f \in C^\alpha(\mathbb{R}) \iff \exists C > 0 / \forall t, \exists P_t(u) / |f(u) - P_t(u)| \leq C|t - u|^\alpha, \quad (3.3)$$

où  $P_t$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $\alpha$ . Si  $\alpha < 1$ , alors  $P_t(u) = f(t)$ .

### 3.1.2 Lien entre exposant de Hölder et la notion de singularité

#### Retour sur la notion de singularité

La description multifractale de signaux a été historiquement introduite afin de caractériser des signaux partout irréguliers selon l'heuristique suivante (cf. partie 1.1) : le signal  $f$  étudié se

---

<sup>1</sup>Notons que la fonction  $f$  peut être  $C^\alpha(t_0)$  sans pour autant admettre un développement de Taylor en  $t_0$  : c'est le cas par exemple (tiré de [72]) d'un "chirp"  $f(t) = t^n \sin(1/t^n)$ , qui est  $C^n(0)$ , mais n'admet pas de dérivée seconde en  $t = 0$ . Donc si  $n = 2.5$  par exemple,  $f$  est  $C^{2,5}(0)$  mais non deux fois différentiable en  $t = 0$ .

comporte partout localement comme  $|f(t) - f(t_0)| \sim |t - t_0|^{h(t_0)}$ . Un tel comportement en loi de puissance locale, avec un exposant  $h(t_0)$  non-nécessairement entier, est appelé *singularité*.

Comme il en a déjà été fait la remarque, le développement de l'approche multifractale a été initié dans le domaine de la turbulence hydrodynamique, celle-ci aiguillonnant alors le développement de l'analyse multifractale dans le domaine des mathématiques [68, 75, 70]. Celle-ci est fondée sur l'exposant de Hölder  $h_f(t_0)$  (cf. partie 3.1.1), introduit afin de mathématiser la notion heuristique de régularité locale ( $|f(t) - f(t_0)| \sim |t - t_0|^h$ ). Dans le cas de la notion heuristique (historique) de singularité  $|f(t) - f(t_0)| \sim |t - t_0|^{h(t_0)}$ , l'exposant de Hölder au point  $t_0$  est effectivement  $h(t_0) : h_f(t_0) = h(t_0)$ .

Mais l'assertion  $|f(t) - f(t_0)| \sim |t - t_0|^{h(t_0)} \Rightarrow h_f(t_0) = h(t_0)$  n'a pas de réciproque (même en se limitant à un exposant de Hölder inférieur à 1) : une fonction  $f$  peut avoir un exposant de Hölder  $h_f(t_0)$  au point  $t_0$  et cependant ne pas se comporter localement comme  $|f(t) - f(t_0)| \sim |t - t_0|^{h(t_0)}$ . L'exposant de Hölder caractérise le comportement local d'une fonction  $f$  à l'aide d'objets que l'on dénommera toujours *singularités*, mais qui sont une généralisation de la notion historique précédemment décrite de singularité  $|t - t_0|^{h(t_0)}$ . Il est donc nécessaire de décrire plus précisément ce que l'on entend par "singularité".

### Zoologie des singularités

On généralise alors la notion de singularité à des objets plus complexes, toujours appelés *singularités* :

$$|t - t_0|^h \sin \left( \frac{1}{|t - t_0|^\beta} \right) \quad (3.4)$$

avec  $h > 0$  et  $\beta \leq 0$ .

Cette singularité possède a priori une partie *oscillante*, caractérisée par l'*exposant d'oscillation*  $\beta$ . L'exposant de Hölder caractérise de façon générale l'*enveloppe* de la singularité, donc le caractère plus ou moins singulier, mais pas ce caractère oscillant.

Comme il va être discuté ci-dessous, le cas où la singularité n'a pas de partie oscillante (i.e.  $\beta = 0$ ) est un cas très important. On définit ainsi généralement deux types caractéristiques de singularités, comportant ou non une partie oscillante (i.e.  $\beta > 0$  ou  $\beta = 0$ ) :

- les singularités simples ou "cusps" :  $|t - t_0|^h$
  - les singularités oscillantes ou "chirps" :  $|t - t_0|^h \sin \left( \frac{1}{|t - t_0|^\beta} \right)$ .
- (3.5)

Des exemples de ces deux types de singularités sont tracés dans la figure 3.1.

Le cas des singularités pour lesquelles il n'y a pas de partie oscillante n'est pas seulement un cas particulier pour lequel  $\beta = 0$ . C'est tout d'abord en raisonnant sur ce type de singularités que le formalisme multifractal a été fondé [138]. Au-delà du côté historique, certains processus multifractals ne possèdent que ce type de singularités : c'est en particulier le cas des processus multifractals construits à l'aide d'une cascade multiplicative<sup>2</sup> (cf. l'annexe D). Il est d'ailleurs important de noter que le développement de la description multifractale a été faite en utilisant presque exclusivement des processus basés sur des cascades multiplicatives et ne possédant donc pas de singularités oscillantes. S. Jaffard, Y. Meyer et A. Arneodo et son équipe ont été les premiers à réaliser que la notion d'exposant de Hölder recouvrait des objets plus généraux que les singularités

<sup>2</sup>Communication privée de S. Jaffard.

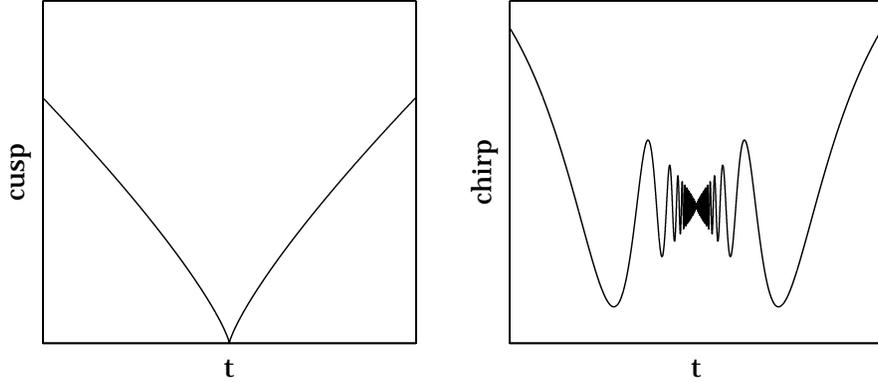


FIG. 3.1 – **Gauche : singularité simple** de paramètre  $h = 0.8$ . **Droite : singularité oscillante** de paramètres  $h = 0.8$  et  $\beta = 1$ .

simples, et à essayer de construire des processus multifractals contenant des singularités oscillantes [15, 75, 11, 12, 14, 71]. J.-M. Aubry et Stéphane Jaffard ont récemment proposé [21, 22] un nouveau processus, les séries d'ondelette aléatoires, qui sera particulièrement étudié et utilisé dans le cadre de cette thèse (cf. paragraphe 4.2 et chapitre 7).

### 3.1.3 Fonctions scalaires définies sur $\mathbb{R}^d$

Toutes les notions de régularité définies jusqu'ici concernent des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans le même ensemble  $\mathbb{R}$ . Nous allons désormais nous intéresser au cas plus général des fonctions qui prennent toujours leurs valeurs dans  $\mathbb{R}$  (donc des fonctions scalaires<sup>3</sup>), mais qui sont cette fois définies sur un espace réel à  $d$  dimensions :  $\mathbb{R}^d$ . Cette généralisation est d'intérêt certain, puisque les quantités physiques, issues de l'étude de la turbulence hydrodynamique, auxquelles s'intéresse plus particulièrement ce travail de thèse sont par nature des objets vivant dans un espace à 3 dimensions :  $\mathbb{R}^3$ .

La question de généraliser encore plus cette approche aux fonctions vectorielles, c'est-à-dire définies sur  $\mathbb{R}^d$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  en toute généralité est bien-sûr intéressante : un champ de vitesse turbulent est par exemple intrinsèquement une fonction de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  ... P. Kestener a récemment [79, 80] abordé ce sujet, qui bien que réellement intéressant, sort du cadre de ce travail de thèse.

Nous allons donc ici nous attacher à l'étude de fonctions scalaires définies sur  $\mathbb{R}^d$ , en pratique  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Il faut commencer par généraliser les notions de régularité ponctuelle et d'exposant de Hölder aux cas des fonctions scalaires définies sur  $\mathbb{R}^d$ .

#### Notions de régularité pour une fonction scalaire définie sur $\mathbb{R}^d$ .

On se place donc dans le cadre qui vient d'être défini, celui des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^d$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . La redéfinition des notions de régularité locale dans ce cas-là est directe, puisqu'il

<sup>3</sup>On appelle communément de telles fonctions *fonctions scalaires*, par opposition aux *fonctions vectorielles*, prenant leurs valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ , avec  $p$  entier au moins égal à 2.

suffit seulement de changer la norme euclidienne  $|\cdot|$  sur  $\mathbb{R}$  par la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$ <sup>4</sup>, qui sera toujours notée  $|\cdot|$ .

### Régularité ponctuelle

La régularité ponctuelle d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^d$  autour de la date  $t_0 \in \mathbb{R}^d$  se définit comme dans le cas  $n = 1$ .  $f \in C^\alpha(t_0)$ , avec  $\alpha > 0$ , s'il existe des constantes  $C > 0$  et  $\delta > 0$  ainsi qu'un polynôme  $P$  (défini sur  $\mathbb{R}^d$ ) d'ordre strictement inférieur à  $\alpha$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d / |t - t_0| \leq \delta, \quad |f(t) - P(t - t_0)| \leq C|t - t_0|^\alpha. \quad (3.6)$$

### Exposant de Hölder

La définition de l'exposant de Hölder est donc la même :  $h_f(t_0)$  est la valeur maximale de  $\alpha$  vérifiant la propriété 3.6 :

$$h_f(t_0) = \text{Sup} \{ \alpha / f \in C^\alpha(t_0) \} \quad (3.7)$$

### Fonction uniformément höldérienne

Pour finir, la propriété de régularité uniformément höldérienne se définit comme sur  $\mathbb{R}$  : on dira que  $f$  appartient à  $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$  si :

$$f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d) \iff \exists C > 0 / \forall t, \exists P_t(u) / |f(u) - P_t(u)| \leq C|t - u|^\alpha, \quad (3.8)$$

où  $P_t$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $\alpha$ .

## 3.2 Classification des fonctions selon leurs propriétés de régularité. Fonctions multifractales

Il a été défini au paragraphe précédent l'exposant de Hölder  $h_f(t_0)$ , qui forme une fonction de  $\mathbb{R}$ , support de la fonction  $f$  étudiée, dans lui-même. C'est la bonne quantité pour étudier et caractériser les propriétés de régularité ponctuelle de la fonction  $f$ .

### Fonctions homogènes

On définit les fonctions *homogènes* [87], pour lesquelles les exposants de Hölder sont statistiquement répartis de façon *homogène* sur le support de la fonction  $f$ . L'exposant de Hölder définit alors une fonction soit constante, soit *partout discontinue*. En effet, si l'on prend une fonction continue pour  $h_f(t)$ , alors la probabilité d'avoir un exposant de Hölder  $h_1$  à la date  $t_1$  et  $h_2$  à la date  $t_2$  ne dépend pas seulement de l'écart  $(t_2 - t_1)$ , mais aussi de  $h_1$ , donc de  $t_1$  puisque la probabilité que  $h_2 = h_1$  tend alors vers 1 lorsque  $(t_2 - t_0) \rightarrow 0$ . Un tel processus n'est pas stationnaire au second ordre. L'exposant de Hölder  $h_f(t_0)$  définit donc, pour une fonction homogène, soit une fonction constante, soit une fonction au moins discontinue.

On supposera que toutes les fonctions étudiées dans le cadre de cette thèse sont des fonctions homogènes.

---

<sup>4</sup>On rappelle la définition de la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^d$  : si  $x \in \mathbb{R}^d$  a pour composantes les  $x_i, i = 1..n$ , alors  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ .

## Fonctions monofractales

La situation la plus simple est le cas où  $h_f(t_0)$  est une fonction constante :  $h_f(t_0) = h \forall t_0$ . La fonction  $f$  a donc partout la même régularité ponctuelle et est alors appelée *fonction monofractale*.

C'est le cas par exemple pour le processus de marche aléatoire introduite au paragraphe 1.2 : on montre en effet que chaque réalisation de ce processus est une fonction dont l'exposant de Hölder est presque partout égal à  $1/2$ . Le processus marche aléatoire, ou encore mouvement brownien ordinaire, fait partie d'une classe de processus plus large, les *mouvements browniens fractionnaires*, définis par Mandelbrot et Van Ness en 1968 [112] mais déjà introduite par Kolmogorov en 1940 [82], qui sont tous des processus gaussiens mais dont les propriétés de corrélation de leurs accroissements à grande échelle (on rappelle que par construction la fonction de corrélation des accroissements de la marche aléatoire est  $\delta(\tau)$ ) et de régularité ponctuelles sont contrôlées par un seul paramètre, souvent noté  $H$ , strictement compris entre 0 et 1. Le mouvement brownien fractionnaire est en particulier [5] monofractal, d'exposant de Hölder (constant) partout égal à  $H$ . On retrouve le mouvement brownien ordinaire lorsque  $H = 1/2$ .

La description des signaux de vitesse turbulente introduite par Kolmogorov en 1941 [84] entre dans ce cadre, puisqu'il revient à la décrire par un mouvement brownien fractionnaire de paramètre  $H = 1/3$ .

## Fonctions multifractales

Intéressons-nous désormais au cas où l'exposant de Hölder n'est pas une constante :  $h_f(t_0) \neq cte$ , mais est une fonction discontinue de  $t_0$ . Une telle fonction  $f$  est alors dite *multifractale*. Pour de telles fonctions, les propriétés de régularité ponctuelles sont elles-mêmes très irrégulières, puisque variant fortement d'un point à l'autre (l'exposant de Hölder est une fonction discontinue). La description proposée par Kolmogorov et Obukhov en 62 [85, 135] pour la vitesse turbulente correspond en fait à cette catégorie. Le cadre des fonctions multifractales est bien adapté à la description des propriétés des signaux de vitesse turbulente à l'intérieur de la zone inertielle [138, 58]. On y reviendra plus longuement à la fin de ce mémoire de thèse.

### 3.3 Analyse multifractale

La propriété essentielle des fonctions multifractales d'avoir une régularité (l'exposant de Hölder) "partout différente" amène les commentaires suivants. Tout d'abord, d'un point de vue pratique, il apparaît totalement illusoire de vouloir mesurer l'exposant de Hölder en chaque point, ne serait-ce qu'à cause du nécessaire échantillonnage des signaux étudiés. De plus, même dans le cas où cette mesure ponctuelle serait possible, on aurait accès à une information tellement riche que l'on ne saurait quoi en faire.

#### 3.3.1 Ensembles iso-Hölder

L'idée est en fait de rassembler les exposants de Hölder en *ensembles iso-Hölder*  $E_f(h)$ , ensembles des dates  $t_0$  où l'exposant de Hölder prend une valeur particulière  $h$  :

$$E_f(h) = \{t_0 / h_f(t_0) = h\}, \quad (3.9)$$

puis de classer ces ensembles selon leur "importance géométrique". Cette dernière notion, vague, reçoit une définition précise à l'aide de la dimension de Hausdorff.

### 3.3.2 Dimension de Hausdorff

Pour quantifier proprement l' "importance géométrique" d'un ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , que l'on notera  $E$ , pour qui la dimension topologique usuelle, forcément entière, ne semble pas assez riche. Par exemple, les ensembles iso-Hölder qui viennent d'être définis ont pour dimension topologique 0 ou 1 (si  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ). L'information fournie par la dimension topologique est donc clairement insuffisante pour proposer une classification de ces ensembles.

Le bon outil pour effectuer ce classement est la *dimension de Hausdorff* [65], dont la définition est rappelée ici. On pourra se reporter par exemple (parmi le grand nombre d'ouvrages traitant de ce sujet) à [55, 165, 159] pour plus de détails.

#### Mesure de Hausdorff

Soit  $\Omega(E, \epsilon)$  un ensemble d'ensembles ouverts  $\omega$  de  $\mathbb{R}^n$  de taille  $\delta_\omega \leq \epsilon$  (distance maximale entre deux points de cet ensemble) et qui recouvrent  $E$  :

$$E \subset \bigcup_{\omega \in \Omega(E, \epsilon)} \omega.$$

La *mesure de Hausdorff*  $d$ -dimensionnelle de l'ensemble  $E$  est alors définie par :

$$m(E, d) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{\Omega(E, \epsilon)} \sum_{\omega \in \Omega(E, \epsilon)} \delta_\omega^d.$$

La mesure  $m(E, d)$  peut a priori être finie ou infinie selon la valeur de  $d$ .

#### Dimension de Hausdorff

En fait, on peut montrer [55, 165, 159] que  $m(E, d) = 0$  si  $d < d_c$  et  $m(E, d) = +\infty$  si  $d > d_c$ . On appellera *dimension de Hausdorff* de l'ensemble  $E$  (notée  $\text{Dim}_H E$ ) la valeur de transition  $d_c$  :

$$\text{Dim}_H E = \inf \{d / m(E, d) = +\infty\} = \sup \{d / m(E, d) = 0\}.$$

Notons que par convention,  $\text{Dim}_H \emptyset = -\infty$  (où  $\emptyset$  est l'ensemble vide).

La dimension de Hausdorff permet donc d'introduire des valeurs intermédiaires, quelconques dans  $\mathbb{R}$ , entre les dimensions topologiques entières. Elle va permettre ainsi de classer par exemple des ensembles de points de dimension topologique nulle, mais remplissant "plus ou moins"  $\mathbb{R}$ .

### 3.3.3 Spectre de singularités $D_f(h)$

#### Définition

L'*analyse multifractale* s'attache alors à caractériser les fonctions multifractales à l'aide d'une information contenue dans le *spectre de singularités*  $D_f(h)$ , défini comme la dimension de Hausdorff des ensembles de points où l'exposant de Hölder prend une valeur particulière (ensembles iso-Hölder) :

$$D_f(h) = \text{Dim}_H E_f(h). \tag{3.10}$$

## Cas des fonctions homogènes

On peut expliciter la notion de fonction homogène définie dans le paragraphe 3.2 : puisque les exposants de Hölder sont répartis de façon homogène sur le support de la fonction multifractale étudiée (ils sont partout présents), le spectre multifractal des restrictions de la fonction  $f$  à deux ensembles ouverts disjoints sont forcément les mêmes, et donc égaux au spectre multifractal de  $f$  :

$$\forall \Omega \subset \mathbb{R} \text{ ouvert, } D_{f|_{\Omega}}(h) = D_f(h) \quad (3.11)$$

## Réalisation particulière d'un processus aléatoire

Revenons un instant au cas où la fonction  $f$  est une réalisation particulière d'un processus aléatoire  $X$ . La notion de spectre de singularités s'étend aux processus aléatoires, comme une propriété statistique. Par définition,  $D_X(h)$  est le spectre de singularités du processus aléatoire  $X$  si pour presque chaque réalisation  $f^5$  a pour spectre de singularités (au sens précédent des fonctions)  $D_f(h) = D_X(h)$ . On ne fera pas par la suite de distinction, et on parlera simplement de spectre de singularités, que ce soit pour une fonction ou pour un processus aléatoire.

## Concavité du spectre de singularités

Dans un très grand nombre de cas (se reporter par exemple à la référence [3]), même s'il est a priori possible de construire des contre-exemples, le spectre de singularités  $D_f(h)$  est une fonction *concave*<sup>6</sup>. Ce constat, qui peut paraître anodin, est en fait intéressant à double titre. Tout d'abord, il est vérifié pour les modélisations multifractales utilisées en turbulence (cf. par exemple [58, 11]). De plus les résultats que nous allons décrire, sont de façon générale obtenus sous forme d'enveloppe convexe du spectre multifractal  $D_f(h)$ , mais peuvent devenir exacts lorsque le spectre de singularités est concave.

### 3.3.4 Analyse multifractale

#### But de l'analyse multifractale

Le spectre de singularités quantifie donc les poids relatifs, à l'aide de la dimension de Hausdorff, des différents exposants de Hölder présents dans la fonction étudiée. Une diminution d'information sur la régularité ponctuelle intervient bien ici : on ne s'intéresse pas à la répartition exacte des divers exposants de Hölder, mais seulement à la "taille", au sens de la dimension de Hausdorff, des ensembles de même exposant de Hölder.

L'analyse multifractale consiste donc à décrire les propriétés de régularités ponctuelles par l'intermédiaire du *spectre de singularités*. C'est donc une description *globale* des propriétés *locales* de régularité ponctuelle de la fonction étudiée.

#### Nécessité d'un outil pour effectuer l'analyse multifractale

Il vient d'être défini un but : l'analyse multifractale de fonctions (de signaux), qui caractérise donc la fonction étudiée par l'intermédiaire de son spectre de singularités . Il reste maintenant à définir quels sont les outils pratiques permettant d'effectuer cette analyse.

<sup>5</sup>C'est-à-dire que la probabilité qu'une réalisation vérifie cette propriété vaut un.

<sup>6</sup>Une fonction concave vérifie  $\forall x, y$  avec  $x < y$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$ , une fonction convexe vérifiant  $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ .

Cette question trouve sa réponse avec la construction de *formalismes multifractals*, qui définissent des méthodologies *pratiques* de mesure du spectre de singularités d'un signal. Notons bien dès-à-présent qu'il existe plusieurs formalismes multifractals, qui bien que construits selon la même philosophie, diffèrent à l'arrivée par un domaine de validité plus ou moins étendu. En effet, ils reposent tous fondamentalement sur l'utilisation d'une *quantité multi-résolution*, dont l'archétype est l'accroissement pour les fonctions. L'utilisation de quantités multi-résolution différentes, par exemple les coefficients d'ondelette discrets, amène donc à définir des formalismes multifractals aux efficacités respectives différentes.

La construction et la mise en pratique des formes les plus avancées de formalisme multifractal, ainsi que la discussion de leurs efficacités respectives, sont l'une des thématiques centrales de ce travail de thèse, et font l'objet de l'ensemble de cette première partie.



## Chapitre 4

# Processus multifractals synthétiques

Des processus multifractals synthétiques sont utilisés dans cette partie afin d'illustrer le propos, et de numériquement caractériser les formalismes multifractals utilisés. Le premier processus multifractal historiquement introduit est la cascade de Mandelbrot canonique [105], construite à l'aide d'une cascade multiplicative, à la suite des travaux de Yaglom [170] (cf. l'annexe D). Ce processus définit des signaux de type densité (cf. les annexes C et D), or cette partie s'attache à l'analyse multifractale des fonctions. Il va donc être utilisé des processus multifractals définissant des signaux de type fonctions. Tout d'abord les *cascades d'ondelette aléatoires*, introduites à la fin des années 90 par A. Arneodo et son équipe [17] afin de synthétiser des fonctions possédant des propriétés multifractales proches de celles observées sur les signaux de vitesse turbulente, puis ensuite les *séries d'ondelette aléatoires*. Ce processus a tout récemment été défini par J.-M. Aubry et S. Jaffard [21, 22], et possède la particularité de contenir des singularités oscillantes, contrairement au premier processus. Les réalisations de ces processus sont numériquement synthétisées à l'aide de codes informatiques utilisant le langage Matlab.

### 4.1 Cascades d'ondelette aléatoires

#### 4.1.1 Définition

##### Coefficients d'ondelette discrets $d_f(j, k)$

L'idée est de construire chaque réalisation du processus à partir de ses coefficients d'ondelette discrets  $d_f(j, k)$  (cf. l'annexe B). En effet, il est possible de reconstruire une fonction à partir de la connaissance de ses coefficients d'ondelette discrets, car effectuer une transformée en ondelette discrète revient à décomposer le signal analysé sur une base orthonormée de l'ensemble des fonctions  $L^2(\mathbb{R})$ <sup>1</sup>.

Rappelons seulement que les coefficients d'ondelette discrets sont définis à partir des composantes de la fonction  $f$  sur la base de  $L^2(\mathbb{R})$  formée par les ondelettes  $\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi_0(2^{-j}t - k)$ , où  $\psi_0$  est l'ondelette-mère (se reporter à l'annexe B), c'est-à-dire par rapport au produit scalaire (celui définissant la norme sur  $L^2(\mathbb{R})$ ) entre la fonction  $f$  et l'ondelette  $\psi_{j,k}$ . Les coefficients  $d_f(j, k)$  ne sont en fait pas tout-à-fait les coordonnées de la fonction  $f$  sur la base orthonormée  $\{\psi_{j,k}\}$ , mais

---

<sup>1</sup>Une fonction réelle  $f$  appartient à l'ensemble  $L^2(\mathbb{R})$  si elle est de carré sommable, i.e. l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} dt f^2(t)$  est convergente.

$2^{-j/2}$  fois ces coordonnées :

$$d_f(j, k) = 2^{-j/2} \int_{\mathbb{R}} dt f(t) \psi_{j,k}(t) = 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} dt f(t) \psi_0(2^{-j}t - k).$$

Cela revient à utiliser une normalisation  $L^1$  pour les ondelettes  $\psi_{j,k}$ , qui est en fait adaptée à la caractérisation des propriétés de régularité ponctuelle d'une fonction par ses coefficients d'ondelette (on reviendra longuement sur ce point dans les chapitres suivants, notamment au paragraphe 5).

Puisque les ondelettes  $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}\}$  forment une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ , la fonction  $f$  peut s'exprimer de la façon suivante :

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_f(j, k) \psi_0(2^{-j}t - k). \quad (4.1)$$

La formule (4.1) permet donc de définir une fonction à partir de ces coefficients d'ondelette discrets. Ce principe est à la base de la définition des cascades d'ondelette aléatoires.

### Cascade sur les coefficients d'ondelette

Plus précisément, les propriétés multifractales recherchées sont introduites par l'intermédiaire d'une cascade multiplicative sur les coefficients  $d_f(j, k)$ , analogue à celle définissant les cascades de Mandelbrot canoniques (cf. annexe D). Cette cascade est définie itérativement à partir de *multiplicateurs*  $W_{j,k}$ , qui sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (c'est pourquoi on les notera parfois simplement  $W$ ). Les coefficients d'ondelette discrets de la cascade d'ondelette aléatoire sont alors définis à partir de ce processus multiplicatif (on utilise l'acronyme de la dénomination anglaise : *rw*c pour *random wavelet cascade*) :

$$|d_{rw}(j, k)| = \prod_{j'=1..j, k/\lambda(j',k') \subset \lambda(j,k)} W_{j',k'},$$

où  $\lambda(j, k)$  est l'intervalle dyadique  $[2^j k, 2^j(k+1)[$ . Notons que la cascade, dont le résultat est forcément positif, définit le module des coefficients  $d_{rw}(j, k)$ . Leur signe ne joue pas de rôle, et est tiré aléatoirement de façon homogène en pratique.

Il est important de faire ici la remarque suivante : les coefficients d'ondelette discrets ont une structure forte de dépendance statistique à travers les échelles  $a = 2^j$ , due à leur définition issue d'une cascade multiplicative à travers les échelles. Ils ne sont pas en particulier statistiquement indépendants.

#### 4.1.2 Propriétés multifractales

Les propriétés multifractales du processus ainsi construit sont contenues dans la statistique des multiplicateurs  $W$ . Il est en effet possible de montrer [17] que le spectre de singularités de ce processus peut être déduit de la fonction  $\varphi_{rw}(q)$ , définie comme suit :

$$\varphi_{rw}(q) = -\log_2(\mathbb{E}W^q). \quad (4.2)$$

Notons que la fonction  $\varphi_{rw}(q)$  est alors nécessairement concave, ceci étant vrai pour  $-\log_2(\mathbb{E}|X|^q)$  pour toute variable aléatoire  $X$  [56].

Définissons alors la transformée de Legendre de  $\varphi_{rwc}(q)$  :

$$TL[\varphi_{rwc}](h) = 1 + \min_q (qh - \varphi_{rwc}(q)).$$

Le spectre de singularités  $D_{rwc}(h)$  du processus cascade d'ondelette aléatoire se déduit alors de  $TL[\varphi_{rwc}](h)$  [17] :

$$D_{rwc}(h) = \begin{cases} TL[\varphi_{rwc}](h) & \text{si } h / TL[\varphi_{rwc}](h) \geq 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}. \quad (4.3)$$

Le spectre de singularité de ce processus est donc une fonction concave (puisque c'est une transformée de Legendre), définie sur le support  $[h_1, h_2]$ , avec  $0 < h_1 < h_2$  tels que  $TL[\varphi_{rwc}](h_1) = TL[\varphi_{rwc}](h_2) = 0$ .

Notons dès-à-présent que le fait que  $D_{rwc}(h) = -\infty$  lorsque  $h \notin [h_1, h_2]$  signifie bien que ce processus ne possède pas en moyenne d'exposants de Hölder autres que ceux appartenant à  $[h_1, h_2]$ .

Enfin, il est important de préciser que le processus de cascade d'ondelette aléatoire ne contient pas de singularités oscillantes<sup>2</sup> (cf. la définition 3.5).

### 4.1.3 Un exemple : cascade d'ondelette aléatoire log-normale

Les multiplicateurs  $W$  sont tirés selon une loi de probabilité log-normale :  $W = 2^{-U}$  avec  $U$  variable aléatoire gaussienne. Une loi de probabilité normale (au gaussienne) n'a que deux paramètres (sa moyenne  $m$  et son écart-type<sup>3</sup>  $\sigma$ ), et le calcul de la fonction  $\varphi_{rwc}(q)$  (définie selon l'équation (4.2)) se fait facilement<sup>4</sup> aboutissant au résultat suivant :

$$\varphi_{rwc}(q) = mq - \frac{\sigma^2 \ln(2)}{2} q^2. \quad (4.4)$$

#### Spectre de singularités $D_{rwc}(h)$

En utilisant alors la définition (4.3) et l'expression (4.4), on arrive facilement au spectre de singularités de la cascade d'ondelette aléatoire log-normale :

$$D_{rwc}(h) = \begin{cases} 1 - \frac{(h-m)^2}{2\ln(2)\sigma^2} & \text{si } m - \sigma\sqrt{2\ln(2)} \leq h \leq m + \sigma\sqrt{2\ln(2)} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Notons que la condition  $h_1 > 0$  se traduit simplement ici par :  $m > \sigma\sqrt{2/\ln(2)}$ .

Une réalisation de cascade d'ondelette aléatoire log-normale est tracée sur la figure 4.1.

## 4.2 Séries d'ondelette aléatoires

Il est une question naturelle qui émerge lorsqu'on commence à saisir le lien entre multifractalité et analyse en ondelettes : peut-on définir un processus multifractal uniquement à partir de

<sup>2</sup>Communication privée de S. Jaffard.

<sup>3</sup>On rappelle que l'écart-type de la variable aléatoire  $U$  est défini par  $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}(U - \mathbb{E}U)^2}$ . La variance est quant-à elle le carré de l'écart-type :  $\sigma^2$ .

<sup>4</sup>On utilise pour cela la relation  $P_W(W = w)|dw| = P_U(U = u)|du|$  entre les fonctions de densité de probabilité des variables aléatoires  $W$  ( $P_W$ ) et  $U$  ( $P_U$ ).

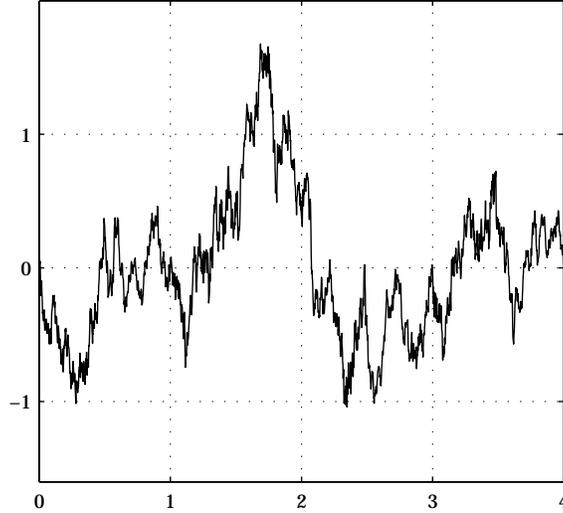


FIG. 4.1 – **Réalisation d’une cascade d’ondelette aléatoire log-normale**, de paramètre  $m = 0.5$  et  $\sigma = 0.3$  (les unités sont arbitraires).

ses coefficients en ondelettes, ou plus exactement à partir de leurs distributions de probabilité, et ce sans faire intervenir de mécanisme du type cascade, qui impose une structure de dépendance statistique entre les coefficients d’ondelette discrets à travers les échelles? Jean-Marie Aubry et Stéphane Jaffard se sont intéressés au cas où les coefficients d’ondelette discrets correspondant à des échelles différentes sont *statistiquement indépendants* [21, 22]. Les processus ainsi construits, les *séries d’ondelette aléatoires*, sont eux aussi multifractals, mais leurs propriétés sont différentes de celles des cascades d’ondelette aléatoires, et d’un intérêt certain dans le cadre de cette thèse, puisqu’il est montré [21, 22] que les réalisations de ces processus possèdent des singularités oscillantes presque partout.

En collaboration avec Jean-Marie Aubry et Stéphane Jaffard, les premières synthèses numériques de ce processus ont été réalisées au cours de ce travail de thèse, et c’est pourquoi il est fait le choix de présenter les séries d’ondelette aléatoires de façon assez précise.

#### 4.2.1 Définition des séries d’ondelette aléatoires

Comme pour les cascades d’ondelette aléatoires, le processus série d’ondelette aléatoire va être défini à partir de ses coefficients d’ondelette discrets et de l’utilisation de la formule de reconstruction (4.1).

##### Définition des séries d’ondelette aléatoires

Une fonction  $f$  est une réalisation d’une *série d’ondelette aléatoire* si ses coefficients d’ondelette  $d_{rws}(j, k)$ <sup>5</sup> (qui sont par définition des variables aléatoires) vérifient les 3 propriétés suivantes [21, 22] :

<sup>5</sup>On utilise l’acronyme de la dénomination anglaise : *random wavelet series*.

- (i) pour chaque octave  $j$  (i.e. pour une échelle donnée), les  $d_{rws}(j, k)$  sont i.i.d. (indépendants et identiquement distribués); la distribution de probabilité de la variable aléatoire  $A(j, k) = \frac{\log_2(|d_{rws}(j, k)|)}{j}$ , notée  $\rho_j$ , est définie sur  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
- (ii) les  $d_{rws}(j, k)$  ( $\forall j, \forall k$ ) sont indépendants
- (iii) il existe  $\gamma$  tel que :

$$\rho(\alpha) \equiv \inf_{\epsilon > 0} \limsup_{j \rightarrow -\infty} - \frac{\log_2(2^{-j} \rho_j([\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]))}{j} \quad (4.6)$$

est strictement négative  $\forall \alpha < \gamma$ .

Bien qu'il ne soit évidemment pas question dans le cadre de cette thèse de discuter les détails de la définition mathématique de ce processus, voici quelques commentaires :

- la dernière condition permet d'assurer la convergence de la série
- la condition (ii) énonce clairement que tous les coefficients  $d_{rws}(j, k)$  sont *statistiquement indépendants*, en particulier, cela exclut toute cascade multiplicative ...

## 4.2.2 Propriétés multifractales des séries d'ondelette aléatoires

### Multifractalité

Rappelons tout d'abord que la série d'ondelette aléatoire est, comme son nom l'indique, un processus aléatoire : chaque tirage particulier de coefficients d'ondelette discrets donne naissance à une *réalisation* du même processus.

Il est démontré mathématiquement dans [21] qu'une fonction  $f$  définie à partir de ses coefficients d'ondelette discrets  $d_{rws}(j, k)$  respectant les trois conditions de la définition donnée en 4.2.1 est *multifractale*, au sens où elle est partout irrégulière, l'exposant de Hölder étant une fonction discontinue<sup>6</sup>. Cette propriété n'était évidemment pas a priori évidente.

De façon plus précise, chaque réalisation d'une série d'ondelette aléatoire est presque sûrement uniformément höldérienne, l'exposant de Hölder étant presque partout égal à :

$$h_{max} = \left( \text{Sup}_{\alpha > 0} \frac{\rho(\alpha)}{\alpha} \right)^{-1}.$$

### Existence de singularités oscillantes presque partout

De plus, ce processus ne contient pas seulement des singularités simples (des cusps), mais aussi des singularités oscillantes (des chirps). Il est important de rappeler encore une fois que les singularités, qu'elles soient oscillantes ou non, ne sont pas des objets isolés dans la trajectoire du processus, mais qu'elles sont partout (i.e. dans chaque voisinage de point) "mêlées" entre elles. En particulier, les singularités oscillantes des séries d'ondelette aléatoires ne sont pas ponctuellement isolées dans un fonds de singularités cusps, mais sont présentes presque partout [22] (i.e. sur le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle).

<sup>6</sup>De façon plus précise, il est démontré que chaque réalisation du processus série d'ondelette aléatoire a des propriétés multifractales (régularité, spectre de singularités) avec une probabilité égale à 1.

### Spectre de singularités $D_{rws}(h)$

Le spectre de singularité  $D_{rws}(h)$  des séries d'ondelettes aléatoires est connu : il s'exprime en fonction de la fonction  $\rho(\alpha)$  et peut donc se déduire de la connaissance des  $\rho_j$ .

Introduisons tout d'abord la quantité suivante :  $Y = \{\alpha/\rho(\alpha) > 0\}$  et définissons  $h_{min} = \text{Inf}(Y)$ .

Le spectre de singularités  $D_{rws}(h)$  des séries d'ondelette aléatoires est alors [21, 22] :

$$D_{rws}(h) = \begin{cases} h \text{ Sup}_{\alpha \in ]0, h]} \frac{\rho(\alpha)}{\alpha} & \text{si } h \in [h_{min}, h_{max}] \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.7)$$

Donc, en prescrivant les distributions de probabilité  $\rho_j$  des coefficients d'ondelette discrets à chaque échelle, on prescrit le spectre de singularités du processus aléatoire ainsi construit.

### 4.2.3 Série d'ondelette aléatoire et invariance d'échelle

La définition qui vient d'être faite permet de synthétiser un processus multifractal au "sens mathématique" : le processus est uniformément höldérien et possède tout un continuum d'exposants de Hölder repérés par le spectre de singularités  $D_{rws}(h)$  (cf. paragraphe précédent). En revanche, un tel processus n'a aucune raison d'être invariant d'échelle (au sens large, cf. le paragraphe 1.2.3). Or cette propriété est nécessaire d'un point de vue pratique si l'on veut effectuer la mesure du spectre de singularités  $D_{rws}(h)$  à l'aide d'un formalisme multifractal, puisqu'il faut être capable de mesurer les exposants des fonctions de structure (cf. les chapitres suivants).

Il est donc nécessaire d'ajouter une contrainte supplémentaire sur les distributions de probabilité  $\rho_j$  pour imposer l'invariance d'échelle au sens large [22].

### Utilisation d'un propagateur

Les distributions  $\rho_j$  doivent a priori seulement respecter la condition (iii), ce qui laisse un grand choix. Afin d'obtenir des processus dont les fonctions de structure se comportent en loi de puissance, on lie entre elles les distributions  $\tilde{\rho}_j$  du logarithme du module des coefficients :  $B(j, k) = -\log_2(|d_{rws}(j, k)|)$  à l'aide d'un *propagateur*  $G_{j, j'}$  qui contrôle la déformation des distributions de probabilité :

$$\tilde{\rho}_j = G_{j, j'} * \tilde{\rho}_{j'} = G_{j, 0} * \tilde{\rho}_0,$$

où  $j < j'$  (la direction de propagation est celle des petites échelles, ce qui correspond à une diminution de  $j$  puisque le rapport d'échelle est défini par  $a = 2^j$ ).

On relie ainsi entre elle les distributions de probabilité des coefficients de manière invariante d'échelle, et le propagateur  $G_{j, j'}$  s'exprime alors en fonction du *générateur*  $G_0$  selon ( $j < j'$ ) :

$$G_{j, j'} = G_0^{*(j'-j)},$$

la notation  $f^{*n}$  signifiant  $n$  convolutions de la fonction  $f$  avec elle-même. Les fonctions de structure d'un processus ainsi construit se comportent alors selon des lois de puissance de l'échelle [22].

### 4.2.4 Exemple d'un générateur gaussien et d'une distribution à grande échelle log-normale

#### Utilisation d'un générateur gaussien

Le choix du générateur  $G_0$  ainsi que celui de la distribution initiale  $\tilde{\rho}_J$ , à une échelle  $2^J$  donnée, fixent alors les distributions  $\tilde{\rho}_j$  et donc  $\rho_j$  à toutes les octaves  $j$ . Prenons le cas où le générateur

est gaussien et la distribution initiale  $\rho_J$  log-normale. Ce cas particulier est intéressant à plusieurs niveaux : on peut facilement remonter à des expressions analytiques pour les distributions  $\rho_j$  (qui sont forcément gaussiennes, puisque la convolution de deux gaussiennes est une gaussienne) et donc pour toutes les quantités pertinentes, par exemple le spectre de singularités  $D_{rws}(h)$ . Il est de plus courant d'utiliser un propagateur gaussien dans la description de phénomènes naturels (la vitesse d'un écoulement turbulent par exemple [36, 42]) puisque c'est le propagateur le plus simple permettant de décrire une déformation des fonctions de distribution en fonction de l'échelle, et, en ce qui concerne tout du moins la turbulence, suffit largement à décrire l'intermittence statistique observée dans ce domaine (se reporter par exemple à la thèse de L. Chevillard [42] pour une description approfondie de ce phénomène en turbulence).

En revanche, la distribution de départ, c'est-à-dire à grande échelle, n'est en général pas log-normale. Pour la vitesse eulérienne turbulente par exemple, la distributions des coefficients d'ondelette *signés* au-delà de l'échelle de décorrélation est une gaussienne. Nous verrons un peu plus loin, au paragraphe 7.5 comment générer une série d'ondelette aléatoire avec un propagateur gaussien mais en partant d'une distribution gaussienne (pour les coefficients non-signés) à grande échelle. Encore une fois, le cas où la distribution de départ est log-normale est intéressante d'un point de vue pédagogique, puisque le calcul des distributions  $\rho_j$  aboutit alors à une forme analytique, de plus simple (ce sont des lois elles-aussi log-normales).

### Calcul des distributions $\rho_j$

Effectuons le calcul dans le cas où le générateur est une gaussienne de variance  $m$  et de variance  $\sigma^2$ , et où la distribution initiale  $\rho_J$  une gaussienne (les coefficients d'ondelette discrets à l'échelle  $J$  ont alors une distribution log-normale). La distribution  $\tilde{\rho}_J$  est donc nécessairement une gaussienne, et puisque la convolution de deux gaussiennes est une gaussienne, le choix suivant offre une solution :

$$\tilde{\rho}_j = G_{j,J} = G_0^{*(J-j)}.$$

On choisira pour simplifier les notations  $J = 0$ , et donc  $j \leq 0$  puisque par définition du générateur,  $j \leq J$ .

Donnons la relation liant les distributions de probabilités  $\rho_j(\alpha = A)$  et  $\tilde{\rho}_j(\beta = B)$ , qui s'expriment facilement l'une en fonction de l'autre puisque  $-jA(j, k) = B(j, k)$ . On a tout d'abord :  $\rho_j(\alpha)d\alpha = \tilde{\rho}_j(\beta)d\beta = \tilde{\rho}_j(-j\alpha)(-j)d\alpha$  et donc :

$$\rho_j(\alpha) = -j\tilde{\rho}_j(-j\alpha) = -jG_0^{*(-j)}(-j\alpha).$$

Déterminons maintenant le propagateur  $G_0^{*(J-j)}$  lorsque l'on choisit un générateur  $G_0$  gaussien de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$  :

$$G_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\alpha-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Le calcul est en fait assez simple puisque opérer de convolution dans l'espace réel revient à opérer une multiplication dans l'espace de Fourier, or la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne :

$$\text{TF} \left[ G_0^{*(-j)} \right] = (\text{TF}[G_0])^{-j}.$$

On a donc facilement :

$$\text{TF}G_0(\nu) = \int_{\mathbb{R}} d\alpha G_0(\alpha) e^{-2i\pi\alpha\nu} = e^{-2i\pi\nu m} e^{-2\pi^2\nu^2\sigma^2}$$

$$(\text{TF}[G_0](\nu))^{-j} = e^{-2i\pi\nu m(-j)} e^{-2\pi^2\nu^2\sigma^2(-j)}$$

$$G_0^{*(-j)}(\alpha) = \text{TF}^{-1} [\text{TF}[G_0]^{-j}] (\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(-j)}} e^{-\frac{(\alpha-m(-j))^2}{2\sigma^2(-j)}},$$

(on rappelle que  $j < 0$ ). On obtient donc les distributions de probabilité pour les variables aléatoires  $A$  et  $B$  :

$$\tilde{\rho}_j(\beta) = G_{j,0}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(-j)}} e^{-\frac{(\beta-m(-j))^2}{2\sigma^2(-j)}}$$

$$\rho_j(\alpha) = (-j)G_0^{*(-j)}((-j)\alpha) = \sqrt{\frac{-j}{2\pi\sigma^2}} e^{-(-j)\frac{(\alpha-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

$\rho_j$  est donc une loi gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $\frac{\sigma^2}{-j}$  ( $> 0$  puisque  $j < 0$ ).

Le processus série d'ondelette aléatoire défini à partir d'un propagateur gaussien et d'une distribution à grande échelle log-normale est donc facile à générer, puisqu'il suffit de tirer des variables aléatoires selon des lois gaussiennes pour définir les coefficients d'ondelette discrets  $d_{rws}(j, k)$ . Les coefficients d'ondelette  $d_{rws}(j, k)$  sont distribués dans ce cas particulier selon des lois log-normales ( $\tilde{\rho}_j$  est une gaussienne).

Il est important de noter encore une fois que les coefficients d'ondelette à des échelles différentes sont statistiquement indépendants et que seules leurs distributions de probabilités sont liées (contrairement au cas des cascades d'ondelette aléatoires, cf. paragraphe 4.1). On reviendra un peu plus loin sur ce point.

### Vérification de la convergence

Pour terminer avec cet exemple, il faut vérifier que la série d'ondelette aléatoire ainsi construite converge, c'est-à-dire que la condition (iii) de la définition est bien respectée. On a, si  $\epsilon \ll m$  (on doit prendre la borne inférieure sur les  $\epsilon > 0$ , cf. equation (4.6)) :

$$-\frac{\log_2(2^{-j}\rho_j([\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]))}{j} \simeq 1 - \frac{\log_2(\rho_j(\alpha)2\epsilon)}{j},$$

$$-\frac{\log_2(2^{-j}\rho_j([\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]))}{j} \simeq 1 - \frac{\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{-j}{2\pi\sigma^2}\right) - \frac{1}{\ln(2)}(-j)\frac{(\alpha-m)^2}{2\sigma^2} + \log_2(2\epsilon)}{j}.$$

Donc :

$$\limsup_{j \rightarrow -\infty} -\frac{\log_2(2^{-j}\rho_j([\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]))}{j} \simeq 1 - \frac{1}{\ln(2)} \frac{(\alpha - m)^2}{2\sigma^2},$$

et :

$$\rho(\alpha) \equiv \inf_{\epsilon > 0} \limsup_{j \rightarrow -\infty} -\frac{\log_2(2^{-j}\rho_j([\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]))}{j} = 1 - \frac{1}{\ln(2)} \frac{(\alpha - m)^2}{2\sigma^2}.$$

On définit alors  $\gamma$  par :  $1 - \frac{1}{\ln(2)} \frac{(\gamma-m)^2}{2\sigma^2} = 0$ , ce qui mène facilement à :  $\gamma = m - \sqrt{2\ln(2)\sigma^2}$  (on prend la plus petite des deux racines ...). Si l'on impose  $\gamma > 0$ , c'est-à-dire  $m > \sigma\sqrt{2\ln(2)}$ , alors il existe bien  $\gamma > 0$  tel que  $\forall \alpha < \gamma$ ,  $\rho(\alpha) < 0$  et la condition (iii) est vérifiée.

Il suffit donc de choisir les paramètres  $m$  et  $\sigma$  de façon à respecter :

$$m > \sigma\sqrt{2\ln(2)},$$

pour assurer la convergence de la série d'ondelette aléatoire ainsi construite.

## Spectre de singularités

Calculons enfin le spectre de singularités de la série d'ondelette aléatoire ainsi construite. On a déjà calculé :

$$\rho(\alpha) = 1 - \frac{1}{\ln(2)} \frac{(\alpha - m)^2}{2\sigma^2}.$$

Quelques lignes de calculs simples permettent d'aboutir à :

$$h_{min} = \gamma = m - \sqrt{2\ln(2)\sigma^2}, \text{ et } h_{max} = \frac{\sigma^2 \ln(2)}{m - \sqrt{m^2 - 2\ln(2)\sigma^2}}.$$

De plus il est facile de montrer que la fonction  $\frac{\rho(\alpha)}{\alpha}$  est croissante si  $\alpha \in [h_{min}, h_c]$  et décroissante si  $\alpha \in [h_c, h_{max}]$  avec  $h_c = \sqrt{m^2 - 2\ln(2)\sigma^2}$ . On obtient alors le spectre des singularités de la série d'ondelette aléatoire construite avec un générateur gaussien et une distribution à grande échelle log-normale :

$$D_{rws}(h) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\ln(2)} \frac{(\alpha - m)^2}{2\sigma^2} & \text{si } h \in [h_{min}, h_c] \\ \frac{h}{h_{max}} & \text{si } h \in [h_c, h_{max}] \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Le spectre obtenu est donc composé d'une portion de parabole prolongée par une droite. Le spectre correspondant au jeu de paramètres suivant :  $m = 0.5$  et  $\sigma = 0.3$  est porté sur la figure 4.2. Notons que dans ce cas,  $h_{min} \simeq 0.147$ ,  $h_c \simeq 0.354$  et  $h_{max} \simeq 0.427$ .

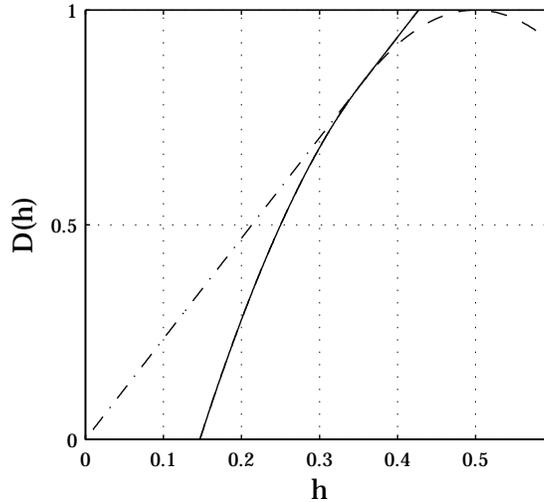


FIG. 4.2 – **Spectre de singularités**  $D_{rws}(h)$  (trait continu) et **fonction**  $\rho(h)$  (trait tiret-tiret) d'une série d'ondelette aléatoire construite à l'aide d'un générateur gaussien de paramètres  $m = 0.5$  et  $\sigma = 0.3$ .

Une réalisation de série d'ondelette aléatoire log-normale est tracée sur la figure 4.3.

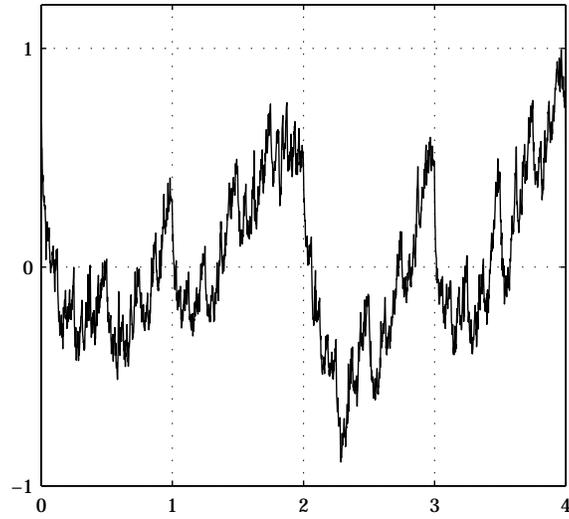


FIG. 4.3 – **Réalisation d'une série d'ondelette aléatoire log-normale**, de paramètre  $m = 0.5$  et  $\sigma = 0.3$  (les unités sont arbitraires).

## Chapitre 5

# Formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets

La but de l'analyse multifractale (cf. paragraphe 3.3) est de caractériser les propriétés de régularité ponctuelle d'une fonction  $f$  par l'intermédiaire de son spectre de singularités. Les formalismes multifractals sont des outils permettant d'effectuer cette analyse d'un point de vue pratique. Il est nécessaire d'utiliser pour la construction d'un formalisme multifractal des coefficients multi-résolution qui permettront de faire le lien avec les propriétés de régularité ponctuelle de la fonction étudiée.

Les coefficients d'ondelette ont, parmi leurs nombreuses applications, la faculté de caractériser de façon très intéressante en pratique (à la fois pour le mathématicien et pour le traiteur de signal) les propriétés de régularité des fonctions [115, 69, 70, 73]. Nous allons dans ce chapitre utiliser des *coefficients d'ondelette discrets* (paragraphe 5.1), qui vont permettre de définir le *formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets* (paragraphe 5), dont les propriétés ont été établies par S. Jaffard [70, 72] (paragraphe 5.3).

Dans tout ce chapitre,  $f$  désignera une fonction homogène multifractale (cf. le paragraphe 3.2) définie d'abord sur  $\mathbb{R}$  puis sur  $\mathbb{R}^d$  dont on désire mesurer le spectre de singularités  $D_f(h)$ .

### 5.1 Coefficients d'ondelette discrets

#### 5.1.1 Définition

Les coefficients d'ondelette discrets sont définis dans l'annexe B, et on rappelle ici seulement quelques détails et notations.

On notera l'ondelette utilisée  $\psi_{j,k}$ , repérée par les indices  $j \in \mathbb{Z}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\psi_{j,k}$  correspond à la date  $2^j k$  et au rapport d'échelle  $a = 2^j$ . On appelle *octave*  $j = \log_2 a$ , quantité adaptée dans le cas de la transformée en ondelette discrète, puisque celle-ci définit des coefficients d'ondelette sur une grille dyadique, c'est-à-dire que les coefficients d'ondelette correspondent à des rapports d'échelles évoluant selon une suite géométrique de raison 2.

Les coefficients d'ondelette discrets sont définis avec la norme  $L_1$  pour l'ondelette  $\psi_{j,k}$ , qui est la norme adaptée à la description des exposants de Hölder :

$$d_f(j, k) = \int_{\mathbb{R}} dt f(t) \frac{1}{2^j} \psi_0(2^{-j}t - k).$$

### 5.1.2 Caractérisation de la régularité ponctuelle

Les coefficients d'ondelette discrets permettent de caractériser la régularité ponctuelle de la fonction  $f$ . Cette caractérisation en terme de coefficients d'ondelette n'est pas tout-à-fait une équivalence : il existe donc deux assertions.

La première donne la caractérisation de la régularité ponctuelle à l'aide des coefficients  $d_f(j, k)$  :

$$f \in C^\alpha(t_0) \Rightarrow \exists C > 0 \ / \ \forall j, |d_f(k(j, t_0), j)| \leq C 2^{j\alpha} \left(1 + |2^{-j}t_0 - k(j, t_0)|^\alpha\right), \quad (5.1)$$

où l'on note  $k(j, t_0)$  la valeur de l'index repérant les dates qui, à chaque octave  $j$ , correspond à la date  $t_0$ . On omettra dans la suite cette notation pour n'utiliser que la notation  $k$ .

Cette caractérisation est un comportement asymptotique, dans la mesure où (5.1) est valable dans la *limite des échelles tendant vers 0*, c'est-à-dire lorsque l'indice  $j$  tend vers  $-\infty$ .

Notons que la régularité de l'ondelette utilisée n'intervient pas ici : seul son nombre de moments nuls (cf. annexe B) est important dans cette application de type analyse des ondelettes. Il faut en effet que le nombre de moments nuls  $N$  de l'ondelette soit supérieur à la régularité que l'on essaye de caractériser :  $N > \alpha$ . Cela est dû au fait que pour pouvoir être sensible à une régularité de coefficient  $\alpha$ , l'ondelette doit être aveugle aux polynômes d'ordres (entiers) inférieurs ou égaux à  $\alpha$ .

Réciproquement, si  $f$  est uniformément höldérienne et vérifie la propriété précédente, alors il existe un polynôme  $P$  d'ordre strictement inférieur à  $\alpha$  tel que :

$$\text{si } |t - t_0| \leq 1, \quad |f(t) - P(t - t_0)| \leq C |t - t_0|^\alpha \log \left( \frac{2}{|t - t_0|} \right). \quad (5.2)$$

$f$  est ainsi "presque"  $C^\alpha(t_0)$ , à une correction logarithmique près.

#### Commentaires

Puisque l'exposant de Hölder  $h_f(t_0)$  en  $t_0$  est par définition la régularité maximale de la fonction  $f$  autour de la date  $t_0$  (cf. définition 3.2), on aura en particulier :

$$|d_f(k, j)| \leq C 2^{jh_f(t_0)} \left(1 + |2^{-j}t_0 - k|^{h_f(t_0)}\right), \quad (5.3)$$

la fonction (proche d'une loi de puissance)  $C 2^{jh_f(t_0)} \left(1 + |2^{-j}t_0 - k|^{h_f(t_0)}\right)$  étant la plus "serrée" parmi les fonctions  $C 2^{j\alpha} (1 + |2^{-j}t_0 - k|^\alpha)$  pouvant borner les coefficients d'ondelette  $d_f(j, k)$ .

Notons dès ici un point qui va s'avérer important par la suite : le fait que l'exposant de Hölder prenne une certaine valeur  $h$  n'est *pas* équivalent à un comportement local des coefficients d'ondelette discrets en loi de puissance (en fonction de l'échelle) avec un exposant  $h$ , i.e.  $|d_f(j, k)| \leq C 2^{jh}$ . Or ce (possible) comportement en loi de puissance est précisément la pierre angulaire sur laquelle s'appuie le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets ... La validité de ce formalisme multifractal est donc essentiellement subordonnée à la validité d'une telle hypothèse. Nous reviendrons plus loin en détail sur ce point (cf. paragraphe 5.3).

## 5.2 Formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets

### 5.2.1 Fonctions de structure

Comme il a déjà été écrit dans ce mémoire, il est sans intérêt de chercher à mesurer chaque exposant de Hölder séparément, puisque l'exposant de Hölder  $h_f(t)$  définit une fonction partout discontinue, et que quel que soit le voisinage que l'on considère autour d'une date  $t$ , ce voisinage contient tous les exposants de Hölder contenus dans le spectre de singularités (la fonction  $f$  est supposée homogène). Ne pouvant accéder directement aux caractéristiques *locales* de la fonction étudiée, il est donc nécessaire d'utiliser des caractéristiques *globales*.

#### Définition des fonctions de structure $S_f^d(q, j)$

Ces grandeurs globales utilisées par le formalisme multifractal pour effectuer une analyse multifractale sont les *fonctions de structure*  $S_f^d(q, j)$ . Elles dépendent de deux paramètres : l'octave  $j$  et l'ordre  $q$ , qui est un réel quelconque. La fonction de structure d'ordre  $q$ ,  $S_f^d(q, j)$ , est définie, pour chaque octave  $j$ , comme la moyenne temporelle de la puissance  $q$ -ième du module des coefficients d'ondelette discrets  $d_f(j, k)$  :

$$S_f^d(q, j) = \frac{1}{n(j)} \sum_{k=1}^{n(j)} |d_f(j, k)|^q, \quad (5.4)$$

où  $n(j)$  est le nombre de coefficients  $d_f(j, k)$  disponibles à l'octave  $j$ .

#### Comportement en loi de puissance de $S_f^d(q, j)$ . Exposants $\zeta_f^d(q)$

Si la fonction  $f$  est multifractale, alors les fonctions de structure  $S_f^d(q, j)$  se comportent asymptotiquement, pour les échelles  $2^j$  tendant vers 0, comme une loi de puissance en fonction de l'échelle  $2^j$  :

$$S_f^d(q, j) \simeq C_q 2^{j\zeta_f^d(q)}. \quad (5.5)$$

L'exposant  $\zeta_f^d(q)$  caractérisant cette loi de puissance est appelé *exposant de loi d'échelle*, et définit une fonction de l'axe réel (puisque l'ordre  $q$  est lui-même un réel quelconque).

Notons tout de suite que l'on a forcément  $\zeta_f^d(0) = 0$  puisque  $S_f^d(0, j) = \frac{n(j)}{n(j)} = 1 \forall j$ .

L'exposant  $\zeta_f^d(q)$  est la grandeur globale (il est défini à partir de moyennes temporelles) qui va permettre de "remonter" au spectre de singularités  $D_f(h)$ .

#### Concavité des exposants $\zeta_f^d(q)$

On peut montrer [70] que les exposants  $\zeta_f^d(q)$  définissent une fonction concave de l'ordre  $q$ .

### 5.2.2 Lien heuristique entre les exposants $\zeta_f^d(q)$ et les singularités

Revenons un instant sur le lien entre le comportement local des coefficients d'ondelette discrets et la régularité ponctuelle de la fonction  $f$ . La formule (5.3) est souvent interprétée de la façon suivante : puisque l'exposant de Hölder est la régularité ponctuelle maximale (cf. la définition (3.2)),

si ce dernier prend la valeur  $h$  en  $t_0$ , alors les coefficients d'ondelette discrets  $d_f(j, k)$  se comportent localement (i.e. pour  $k = k(j, t_0)$ ) selon une loi de puissance d'exposant  $h$  :

$$|d_f(j, k)| \sim 2^{jh(t_0)}.$$

Puisque l'ensemble des dates  $t_0$  pour lesquelles l'exposant de Hölder est  $h$  est de dimension fractale  $D_f(h)$  (c'est la définition du spectre de singularités), la contribution, à chaque échelle, d'un exposant de Hölder particulier  $h$  à la fonction de structure  $S_f^d(q, j)$  est en moyenne<sup>1</sup> :

$$\sim \frac{2^{jqh} \times 2^{-jD_f(h)}}{2^{-j}} = 2^{j(1+qh-D_f(h))}.$$

Suivant le même raisonnement<sup>2</sup> que celui de Parisi et Frisch dans leur article fondateur [138], l'exposant de la fonction de structure d'ordre  $q$  est déduit à l'aide d'un argument de col : parmi toutes les contributions associées à des exposants de Hölder différents, celle qui domine dans la fonction de structure  $S_f^d(q, j)$  est celle qui maximise la quantité  $2^{j(1+qh-D_f(h))}$  vers les plus petites échelles (i.e.  $j \rightarrow -\infty$ ), ce qui revient à minimiser  $1 + qh - D_f(h)$  par rapport à  $h$  :

$$S_f^d(q, j) \sim 2^{j(\inf_h(1+qh-D_f(h)))}.$$

Puisque l'on a par ailleurs  $S_f^d(q, j) \sim 2^{j\zeta_f^d(q)}$ , on en tire :

$$\zeta_f^d(q) = \inf_h (1 + qh - D_f(h)).$$

Cette relation est une transformée de Legendre. Puisqu'il est connu que la transformée de Legendre est inversible sous la condition que la fonction de départ (ici  $D_f(h)$ ) est concave, il est tentant de le faire. C'est l'objet du formalisme multifractal.

Notons encore une fois que ce raisonnement est fondamentalement basé sur l'hypothèse d'un comportement local en  $2^{jh}$  des coefficients  $d_f(j, k)$ , comportement qui n'est pas nécessairement vérifié (cf. l'équation (5.3)) sous la condition que l'exposant de Hölder est  $h$ . Ce point sera longuement discuté dans le paragraphe 5.3.

### Commentaire important

Il semble important de faire dès-à-présent le commentaire suivant. Les fonctions ou les réalisations de processus étudiées en pratique dans le cadre de cette thèse sont issues de synthèse numérique (cf. annexe D) ou de l'expérience (par exemple un signal de vitesse dans un jet turbulent). Ces signaux sont *par essence* des signaux *échantillonnés* : la fonction ou la réalisation que l'on cherche à étudier n'est connue que par un ensemble discret de valeurs ponctuelles, que l'on appelle *échantillons*, ce qui est dû au nécessaire échantillonnage lors de mesures expérimentales ou encore par la résolution nécessairement finie d'une synthèse numérique. Il est alors tentant d'associer ces échantillons numériques à de vrais points mathématiques.

À chacun des points mathématiques  $t_0$  est associé un exposant de Hölder par la définition (3.2), qui impose le comportement des coefficients d'ondelette discrets décrit par la propriété (5.3). Mais cette propriété ne concerne qu'un *comportement asymptotique* lorsque l'échelle d'analyse tend vers

<sup>1</sup>Le nombre de coefficients d'ondelette discrets à l'échelle  $2^j$  est proportionnel à  $2^{-j}$ .

<sup>2</sup>Le raisonnement de Parisi et Frisch [138] ne portait bien sur pas sur les coefficients d'ondelette discrets, mais sur les accroissements de la fonction  $f$ .

0. Un coefficient d'ondelette  $d_f(j, k)$ , à une date  $2^j k$  et une échelle  $2^j$  finie (i.e.  $> 0$ ) est donc influencé par tous les points de l'intervalle de taille (environ)  $2^j$  autour de la date  $2^j k$ , et ainsi par tous les exposants de Hölder de ces points, et ce y compris à l'échelle la plus fine à laquelle on puisse accéder numériquement. Or, comme il en a déjà été fait la remarque dans le paragraphe 3.3.3, les fonctions ou réalisations  $f$  étudiées sont *homogènes*, et donc tous les exposants de Hölder existant dans le spectre de singularités  $D_f(h)$  sont présents dans n'importe quel ensemble ouvert du support de  $f$ , en particulier un ensemble ouvert centré autour d'un échantillon quelconque et plus petit que le pas d'échantillonnage de  $f$ .

Il convient donc de ne pas associer un et un seul exposant de Hölder à un coefficient d'ondelette, quelle que soit l'échelle à laquelle il correspond, y compris la plus petite accessible à l'analyse.

### 5.2.3 Énoncé du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets

On peut alors énoncer le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets, qui relie entre elles la grandeur globale accessible directement à partir de la fonction multifractale étudiée (il suffit de calculer ses coefficients d'ondelette discrets), et le but de l'analyse multifractale, c'est-à-dire le spectre de singularités  $D_f(h)$ .

Le *formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets* affirme ainsi que la transformée de Legendre des exposants  $\zeta_f^d(q)$  est égal au spectre de singularités  $D_f(h)$  [72] :

$$D_f(h) = \inf_q \left( 1 + qh - \zeta_f^d(q) \right). \quad (5.6)$$

#### Commentaires

Le formalisme multifractal précédemment énoncé, comme tous les formalismes multifractals (basé sur les accroissements par exemple), est donc une *affirmation*, résumée dans la formule (5.6) par une *égalité stricte* entre la transformée de Legendre des exposants des fonctions de structure  $\zeta_f^d(q)$  et le spectre de singularités  $D_f(h)$ . Ce n'est en particulier *pas le résultat d'un théorème*, valable pour tous les fonctions dites multifractales. Il sera ainsi fait la distinction entre le spectre de singularités  $D_f(h)$  et la transformée de Legendre des exposants  $\zeta_f^d(q)$ , qui sera notée  $D_f^d(h)$  :

$$D_f^d(h) = \inf_q \left( 1 + qh - \zeta_f^d(q) \right). \quad (5.7)$$

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets affirme donc l'égalité entre ces deux quantités :  $D_f^d(h) = D_f(h)$ , et connaître la validité de ce formalisme multifractal revient donc à connaître la validité de cette égalité.

## 5.3 Limitations du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets

Comme tout cadre de travail, le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets possède des limitations.

### 5.3.1 Résultats mathématiques

Il existe des résultats mathématiques concernant la validité du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets. Mais il est nécessaire auparavant de définir un ordre  $q_c$  tel que  $\zeta_f^d(q_c) = 1$ . On définit de même à l'aide la transformée de Legendre<sup>3</sup> :  $h_c = (\zeta_f^d)'(q_c)$ . Notons que l'on a alors  $D_f^d(h_c) = q_c h_c$ , et puisque  $q_c = (D_f^d)'(h_c)$ <sup>4</sup>, on a :  $D_f^d(h_c) = ((D_f^d)'(h_c)h_c)$ .  $h_c$  est donc le point du graphe de  $D_f^d(h)$  pour lequel la tangente locale passe par le point-origine  $(0, 0)$  : c'est une définition géométrique de  $h_c$  (cf. figure 5.1).

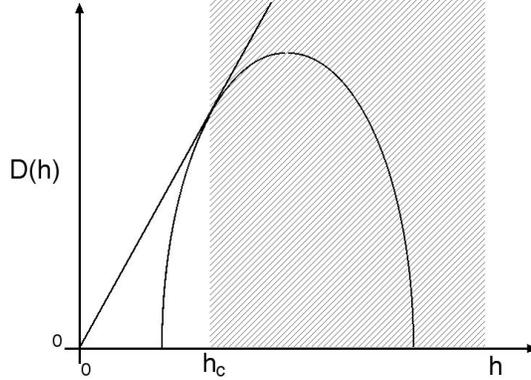


FIG. 5.1 – Définition graphique de  $h_c$ .

S. Jaffard a alors montré [70, 72] le résultat suivant :

si  $f$  est uniformément höldérienne, alors pour  $h \leq h_c$ ,

$$D_f^d(h) \leq D_f(h). \quad (5.8)$$

On peut être plus précis [70, 72] :  $D_f^d(h)$  est en fait l'enveloppe convexe de  $D_f(h)$ , si  $h \leq h_c$ . Donc si  $D_f(h)$  est concave, et on a déjà signalé que c'était le cas dans les situations courantes, l'inégalité précédente devient une égalité :

pour  $h \leq h_c$ ,

$$D_f^d(h) = D_f(h). \quad (5.9)$$

Donc, dans le cadre général des fonctions uniformément höldériennes, on ne peut a priori mesurer à l'aide du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets que la partie du spectre de singularités  $D_f(h)$  pour  $h \leq h_c$ .

Si on se restreint par contre aux fonctions uniformément höldériennes ne contenant que des singularités simples, et pas de singularités oscillantes (cf. les définitions (3.5)), alors cette égalité se généralise [70] à tout à  $h \leq h_0$ , où  $h_0 = \zeta_f^{d'}(q = 0)$  :

<sup>3</sup>On rappelle que si  $D(h) = \min_q (1 + qh - \zeta(q))$  et que  $\zeta(q)$  est différentiable, alors  $h = \zeta'(q)$ .

<sup>4</sup>C'est le même argument que précédemment, mais en utilisant cette fois la transformée de Legendre de  $D_f^d(q)$ , qui est donc  $\zeta_f^d(q)$  puisque cette dernière forme une fonction concave (une des propriétés des base de la transformée de Legendre est qu'elle est son propre inverse pour les fonctions concaves).

pour  $h \leq h_0$ ,

$$D_f(h) = D_f^l(h). \quad (5.10)$$

Par définition,  $h_0$  est l'abscisse du spectre de singularités pour laquelle celui-ci atteint son maximum, puisque la pente du spectre de singularités en  $h_0$  est donnée par la valeur de  $q$  correspondante, qui vaut 0<sup>5</sup>. L'inégalité  $h \leq h_0$  définit ce que l'on appellera la *partie gauche* du spectre de singularités (figure 5.2).

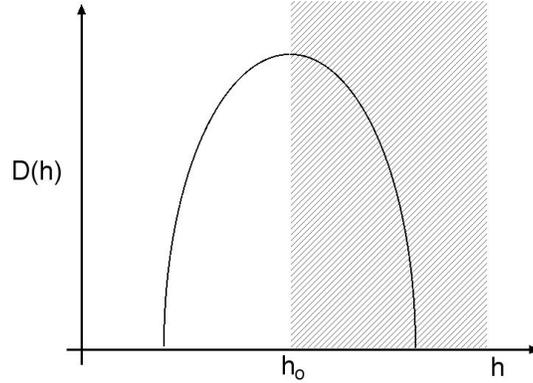


FIG. 5.2 – **Partie gauche** du spectre de singularités .

## Conclusion

Il apparaît donc que ce formalisme ne fonctionne que pour  $h \leq h_c$  (ou encore  $q \geq q_c$ ) pour les fonctions uniformément höldériennes, ou pour  $h \leq h_0$  ( $q \geq 0$ ) pour les fonctions uniformément höldériennes et ne contenant que des singularités simples (cusps). Nous allons expliciter, expliquer et commenter dans les deux paragraphes suivants les conséquences pratiques de ce résultat.

### 5.3.2 Partie "droite" du spectre de singularités

On peut facilement comprendre pourquoi le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets échoue pour la partie droite du spectre de singularités, ce qui revient à dire que les exposants  $\zeta_f^d(q)$  d'ordres  $q$  négatifs n'ont pas de sens. En effet, les coefficients d'ondelette discrets n'ont aucune raison d'être non-nuls, et peuvent en pratique prendre des valeurs très proches de zéro. Pour illustrer cette remarque, les coefficients d'ondelette discrets d'une réalisation d'un processus multifractal synthétique (une marche aléatoire multifractale [24], cf. annexe D) ont été calculés à une échelle donnée. Leur histogramme est porté sur la figure 5.3.

On voit que les coefficients d'ondelette discrets prennent des valeurs nulles ou très proches de zéro. On comprend alors que les fonctions de structure  $S_f(q, j)$  d'ordre  $q$ , et donc les exposants  $\zeta_f^d(q)$  associés, n'ont pas grand sens puisque basé sur des puissance négatives des coefficients.

### 5.3.3 Singularités oscillantes

Comme il a été déjà fait la remarque (cf. partie 5.2.1), la validité d'un formalisme multifractal repose essentiellement sur l'hypothèse suivante : la quantité multi-résolution choisie pour le

<sup>5</sup> $\zeta_f^d(q)$  et  $D_f^d(h)$  sont transformées de Legendre l'un de l'autre.

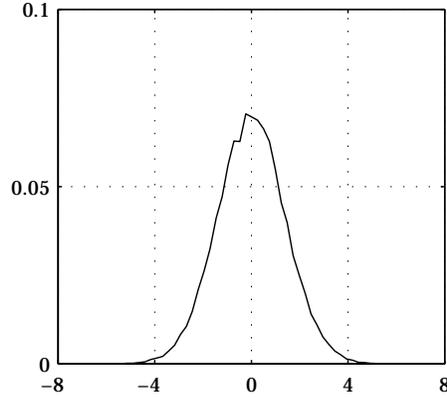


FIG. 5.3 – **Histogramme des coefficients d’ondelette discrets**  $d_f(j = 5, k)$  calculés sur une réalisation du processus marche aléatoire multifractale (se reporter à l’annexe D).

construire (les coefficients d’ondelette discrets) se comportent dans le voisinage temporel d’une singularité (caractérisée par un exposant de Hölder  $h$ ) comme une loi de puissance en fonction de l’échelle; de plus, l’exposant caractérisant cette loi de puissance est l’exposant  $h$ . Vérifions alors dans le cas simple où il n’y a qu’une seule singularité isolée, si cette hypothèse est valide dans le cas des coefficients d’ondelette discrets.

On construit pour cela une singularité simple (cf. la définition (3.5)) de paramètre  $h = 0.8$  et une singularité oscillante de même paramètre  $h = 0.8$  et de coefficient d’oscillation  $\beta = 1$  (cf. figure 5.4). Ces deux signaux-tests sont définis pour  $t \in [-0.5, 0.5]$ , ont une longueur de  $2^{17}$  points chacun, avec  $t_0 = 0$ . Il est porté dans la figure 5.4 le comportement local du module des coefficients d’ondelettes  $d_f(j, k)$  pour chacun de ces deux signaux autour de  $t = 0$ . On choisit donc pour chaque octave  $j$  la date  $k$  qui correspond à  $t = 0$ .

Les coefficients d’ondelette discrets ne se comportent donc *pas* comme une loi de puissance d’exposant  $h$  en fonction de l’échelle ( $|d_f(j, k)| \sim 2^{jh}$ ) lorsqu’il est fait l’analyse d’une singularité oscillante isolée. Y. Meyer a d’ailleurs montré [116] que cela ne pouvait être vrai que pour des singularités simples. Or un tel comportement est la base sur laquelle repose le formalisme multifractal basé sur les coefficients d’ondelette discrets.

Ce formalisme est donc bien mis en échec pour tous les signaux comportant des singularités oscillantes comme il le sera vérifié par la suite sur l’exemple des séries d’ondelette aléatoires dans le chapitre 7.

### 5.3.4 Conclusions

Comme il vient d’être discuté, le formalisme multifractal basé sur les coefficients d’ondelette discrets voit sa portée limitée essentiellement dans deux directions. Il est tout d’abord très restreint lorsque le signal dont on désire effectuer l’analyse multifractale possède des singularités oscillantes (il n’est valable que pour  $h \leq h_c$  ou encore  $q \geq q_c$ ). Cela se vérifie facilement lorsqu’on étudie une singularité oscillante isolée, mais aussi sur des processus multifractals synthétiques dont on sait qu’il contient de telles singularités (cf. le chapitre 7), et cela est d’ailleurs attendu d’un point de vue théorique [116].

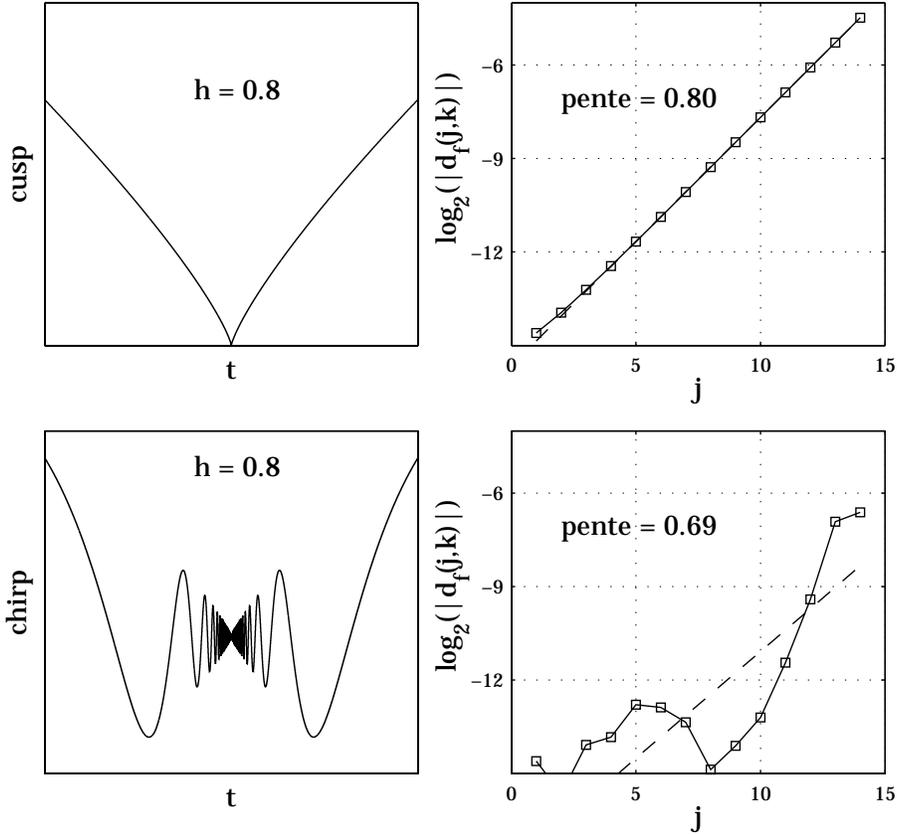


FIG. 5.4 – **Haut** : singularité simple de paramètre  $h = 0.8$  (gauche) et coefficients d'ondelette discrets correspondant à  $t = 0$  (droite). **Bas** : singularité oscillante de paramètres  $h = 0.8$  et  $\beta = 1$  (gauche) et coefficients d'ondelette discrets correspondant à  $t = 0$  (droite).

De plus, même dans le cas où le signal étudié ne contient que des singularités simples (l'exposant d'oscillation est partout nul), ce formalisme ne permet d'atteindre que la "moitié" du but fixé, puisqu'il n'autorise la mesure de la seule partie dite "gauche" du spectre de singularités  $D_f(h)$ , ce qui se comprend facilement en raisonnant sur les histogrammes des coefficients d'ondelette et se vérifie sur des processus multifractals synthétiques (cf. le chapitre 7).

Tout ceci a donc motivé depuis quelques années des recherches pour dépasser ces deux écueils : en premier lieu d'un point de vue historique les travaux d'A. Arneodo et son équipe sur la méthode mmt0 [16] (se reporter à l'annexe E pour sa description), et les travaux de S. Jaffard [73] aboutissant au *formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants*, objet du chapitre suivant.

## 5.4 Fonctions scalaires définies sur $\mathbb{R}^d$

Pour conclure sur le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets, nous allons décrire son extension aux fonctions scalaires définies sur  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d$  entier naturel non-nécessairement égal à 1.

### 5.4.1 Coefficients d'ondelette discrets à $d$ dimensions

#### Définition

La transformée en ondelette discrète se généralise aisément à  $d$  dimensions, le calcul effectif des coefficients d'ondelette discrets s'effectuant toujours selon l'algorithme rapide de Mallat [103] (se reporter à l'annexe B).

Les dates, définies dans  $\mathbb{R}^d$ , sont en particulier indexées par  $n$  entiers  $k_i$ ,  $i = 1..d$ , et l'échelle toujours repérée par l'octave  $j$  (le rapport de l'échelle à l'échelle la plus petite valant  $2^j$ ). Pour chaque date  $\{k_i\}$  et chaque octave  $j$ , la transformée en ondelette discrète définit  $(2^d - 1)$  coefficients d'ondelette pour caractériser complètement le signal analysé, correspondant grossièrement aux variations de la fonction  $f$  selon  $(2^d - 1)$  directions différentes (se reporter à l'annexe B). Ces  $(2^d - 1)$  coefficients sont repérés par l'indice  $m = 1..2^d - 1$  :

$$d_f(j, k_i, m).$$

#### Caractérisation de la régularité ponctuelle

Tout comme les définitions de régularité ponctuelle et d'exposant de Hölder sur  $\mathbb{R}^d$  restaient les mêmes (mutatis mutandis, cf. le chapitre ??) que sur  $\mathbb{R}$ , la caractérisation des propriétés de régularité ponctuelle à l'aide des coefficients d'ondelette discrets s'écrit de façon analogue. La seule différence est qu'il existe pour chaque date  $\{k_i\}$  et chaque octave  $j$   $(2^d - 1)$  coefficients d'ondelette et plus un seul.

La caractérisation de la régularité ponctuelle s'écrit [73] :

$$f \in C^\alpha(t_0) \Rightarrow \exists C > 0 \ / \ \forall m, \forall j, \ |d_f(j, k_i(j, t_0), m)| \leq C 2^{j\alpha} \left(1 + |2^{-j}t_0 - k_i(j, t_0)|^\alpha\right), \quad (5.11)$$

où l'on note  $k_i(j, t_0)$  les valeurs des index repérant les dates qui, à chaque octave  $j$ , correspondent à la date  $t_0$ . On notera souvent  $k_i$  simplement. Cette caractérisation est toujours à prendre de façon asymptotique, lorsque  $j \rightarrow -\infty$ .

Réciproquement, si  $f$  est uniformément höldérienne et vérifie la propriété précédente, alors il existe un polynôme  $P$  (défini sur  $\mathbb{R}^d$ ) d'ordre strictement inférieur à  $\alpha$  tel que :

$$\text{si } |t - t_0| \leq 1, \quad |f(t) - P(t - t_0)| \leq C |t - t_0|^\alpha \log \left( \frac{2}{|t - t_0|} \right). \quad (5.12)$$

$f$  est ainsi "presque"  $C^\alpha(t_0)$ , à une correction logarithmique près.

Comme l'exposant de Hölder est la régularité ponctuelle maximale, on a en particulier :

$$|d_f(j, k, m)| \leq C 2^{jh_f(t_0)} \left(1 + |2^{-j}t_0 - k|^{h_f(t_0)}\right). \quad (5.13)$$

### 5.4.2 Formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets se construit alors exactement de la même façon.

## Fonctions de structure à $d$ dimensions $S_f^d(q, j)$

Il s'agit maintenant de définir les fonctions de structure à partir des  $(2^d - 1)$  coefficients existant à chaque date  $\{k_i\}$  pour chaque octave  $j$ . Puisqu'il n'y a bien évidemment aucune raison de privilégier telle ou telle direction dans  $\mathbb{R}^d$ , les  $(2^d - 1)$  directions sont traitées sur un pied d'égalité. Les fonctions de structure à  $n$  dimensions sont donc définies comme la moyenne, à la fois temporelle (sur toutes les dates  $\{k_i\}$ ) et directionnelle (selon les  $(2^d - 1)$  directions), des puissances  $q$ -ième du module des coefficients :

$$S_f^d(q, j) = \frac{1}{n(j)} \sum_{\{k_i\}} \frac{1}{2^d - 1} \sum_m |d_f(j, k_i, m)|^q, \quad (5.14)$$

où  $n(j)$  est toujours le nombre de coefficients présents à l'octave  $j$  dans chacune des  $2^d - 1$  directions (c'est forcément le même).

## Exposants $\zeta_f^d(q)$

Pour les fonctions  $f$  multifractales, la fonction de structure d'ordre  $q$  se comporte alors selon une loi de puissance en fonction du rapport d'échelle  $2^j$ , lorsque  $2^j \rightarrow 0$ .

$$S_f^d(q, j) \simeq C_q 2^{j\zeta_f^d(q)}, \quad (5.15)$$

ce qui définit exactement de la même façon que dans le cas  $d = 1$  l'exposant  $\zeta_f^d(q)$ .

Là-aussi, on a par définition  $\zeta_f^d(0) = 0$  puisque  $S_f^d(0, j) = \frac{n(j)}{n(j)} = 1 \forall j$ .

## Transformée de Legendre à $d$ dimensions

La transformée de Legendre d'une fonction  $f$  définie sur un espace à  $d$  dimensions est définie selon :

$$D_f^d(h) = \min_q \left( d + qh - \zeta_f^d(q) \right). \quad (5.16)$$

Cette définition généralise donc celle correspondant au cas à une dimension. Le fait de tenir compte de la dimension  $d$  de cette façon permet d'assurer que, quelle que soit la dimension, le fait d'avoir  $\zeta_f^d(0) = 0$  impose que sa transformée de Legendre sera maximale en un point d'ordonnée  $d$ .

## Énoncé

Le *formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets à  $d$  dimensions* propose lui-aussi une relation d'égalité entre le spectre de singularité  $D_f(h)$  de la fonction étudiée  $f$ , et la transformée de Legendre  $D_f^d(h)$  des exposants des fonctions de structure  $S_f^d(q, j)$  [70] :

$$D_f(h) = D_f^d(h) = \inf_q \left( d + qh - \zeta_f^d(q) \right) \quad (5.17)$$

## Validité de ce formalisme

La validité du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets ne dépend pas de la dimension  $d$  dans laquelle il est appliqué. Toutes les discussions du paragraphe 5.3 s'étendent ainsi sans restriction en toute dimension.



## Chapitre 6

# Formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets ne permet donc pas, même lorsque la fonction étudiée ne comporte que des singularités simples, la mesure complète du spectre de singularités. Comme il a déjà été discuté, tout formalisme multifractal repose sur l'hypothèse suivante : la quantité multi-résolution utilisée se comporte localement autour d'une date  $t_0$  comme une loi de puissance de l'échelle d'exposant égal à l'exposant de Hölder au point  $t_0$ . On a précédemment vu que cette hypothèse n'était valide avec les coefficients d'ondelette (et les accroissements d'ailleurs) seulement lorsque les singularités en jeu étaient du type cusp (singularités simples, non-oscillantes).

Afin de construire un formalisme multifractal qui soit à la fois valable pour n'importe quel type de singularité, y compris les singularités oscillantes, et à la fois capable d'accéder à la partie droite du spectre, il faut utiliser une nouvelle quantité multi-résolution, donnant une base plus large à l'analyse multifractale que l'on désire effectuer. Cette nouvelle quantité multi-résolution est le *coefficient dominant*, défini à partir des coefficients d'ondelette discrets (paragraphe 6.1). Cette quantité a récemment été introduite par Stéphane Jaffard [73] qui, en travaillant sur le bien-fondé mathématique des différents formalismes multifractals, a découvert que la bonne quantité sur laquelle un formalisme multifractal devait reposer n'était pas les coefficients d'ondelette discrets eux-mêmes, mais les coefficients dominants. Ceux-ci caractérisent en effet de façon plus efficace les propriétés de régularité ponctuelle de la fonction étudiée, et donc ses exposants de Hölder.

Tous les résultats théoriques présentés ici sont issus du très récent article de Stéphane Jaffard [73]. Ce chapitre contient ainsi une description détaillée des rouages de ce formalisme, du point de vue du physicien, afin de mieux comprendre ses apports. Les coefficients dominants (paragraphe 6.1) et le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants (paragraphe 6.2) seront ainsi définis, et on décrira les avantages attendus de ce dernier par rapport au formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets (paragraphe 6.3). La mise en oeuvre pratique de ce formalisme sera effectuée au chapitre suivant.

### 6.1 Les coefficients dominants $l_f(j, k)$

Les coefficients dominants sont définis à partir de la transformée en ondelette discrète (cf. l'annexe B), et les notations ici utilisées sont bien sûr les mêmes que dans la partie précédente.

La fonction  $f$  dont on désire effectuer l'analyse multifractale sera dans cette partie supposée appartenir à l'ensemble  $L^\infty(\mathbb{R})$  (on rappelle que  $L^\infty(\mathbb{R})$  regroupe les fonctions qui sont bornées sur  $\mathbb{R}$ ). Il en effet nécessaire que les fonctions étudiées appartiennent à cet ensemble pour pouvoir définir les coefficients dominants.

Cet ensemble est différent de celui utilisé dans la partie précédente,  $L^2(\mathbb{R})$ , qui contient des fonctions qui ne sont pas bornées. Ce mémoire de thèse n'est bien sûr pas le lieu pour discuter le détail mathématique de ces différences techniques, d'autant plus que seuls les résultats des preuves données dans [73] motivent le travail ici présenté.

### 6.1.1 Définition

#### Nouvelle notation

Avant de donner la définition des coefficients dominants, il est avantageux d'introduire la notation suivante pour les coefficients d'ondelette discrets afin d'alléger l'écriture. Les indices  $j$  et  $k$  des coefficients d'ondelette discrets se rapportent à un rapport d'échelle ( $2^j$ ) et à une date ( $2^j k$ ). Le support de l'ondelette  $\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{2^j} \psi_0\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right)$  associée au coefficient  $d_f(j, k)$  est de taille environ  $2^j$  autour de la date  $t = 2^j k$ . On peut donc indexer chaque ondelette  $\psi_{j,k}$ , et donc chaque coefficient  $d_f(j, k)$  par l'intervalle dyadique  $\lambda(j, k)$  :

$$\lambda(j, k) = [2^j k, 2^j(k+1)[= 2^j k + [0, 2^j[. \quad (6.1)$$

Cette notation n'est finalement que la projection du pavage réalisé par la transformée en ondelette discrète du plan temps-échelle sur l'axe des temps (cf. l'annexe B).

L'intérêt de cette notation est de définir simplement des ensembles de coefficients d'ondelette discrets correspondant à une même date, mais à un rapport d'échelle différent. Par exemple,  $\sum_{\lambda' \subset \lambda(j,k)} d_f(\lambda')$  désignera une somme sur tous les coefficients d'ondelette définis pour la date  $t = 2^j k$  et pour des octaves  $j'$  plus petites que  $j$  :  $j' \leq j$ .

#### Définition des coefficients dominants $l_f(j, k)$

Les *coefficients dominants*<sup>1</sup>  $l_f(j, k)$  sont définis à partir des coefficients  $d_f(j, k)$  de la façon suivante :

$$l_f(j, k) = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda(j,k), j' \leq j} |d_f(\lambda')|, \quad (6.2)$$

où  $3\lambda(j, k) = \lambda(j, k-1) \cup \lambda(j, k) \cup \lambda(j, k+1)$ , c'est-à-dire l'intervalle  $\lambda(j, k)$  lui-même et ses deux intervalles voisins et de même taille. Les coefficients dominants  $l_f(j, k)$  sont donc définis comme le plus grand, en valeur absolue, des coefficients en ondelette discrets définis dans un voisinage temporel de la date  $2^j k$  et pour des échelles plus petites ( $j' \leq j$ ). Sur la figure 6.1 est porté le plan temps-échelle, et la zone grisée correspond à l'ensemble des coefficients  $d_f(\lambda')$  pour lesquels  $\lambda' \subset 3\lambda(j, k)$ .

### 6.1.2 Caractérisation de la régularité ponctuelle

Tout comme les coefficients d'ondelette discrets  $d_f(j, k)$  permettaient d'obtenir une caractérisation de la régularité ponctuelle de la fonction, et donc de faire le lien avec l'exposant de Hölder (cf. pa-

<sup>1</sup>Afin d'éviter d'éventuelles confusions avec les coefficients d'ondelette discrets, les coefficients dominants seront notés avec la lettre  $l$ , à cause de leur dénomination anglaise : "wavelet leaders".

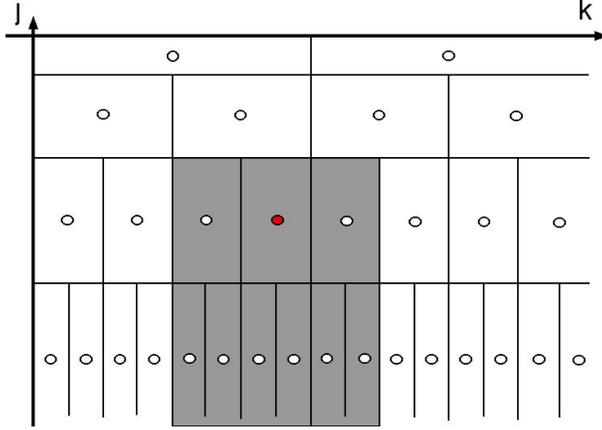


FIG. 6.1 – **Plan temps-échelle et grille dyadique associée**, repérée par le couple  $(j, k)$ . La zone grisée contient tous les coefficients  $d_f(\lambda')$  avec  $\lambda' \subset 3\lambda(j, k)$ , où  $\lambda(j, k)$  est repéré par le disque gris.

ragraphe 5.1), il existe une relation similaire sur les coefficients dominants  $l_f(j, k)^2$  :

$$f \in C^\alpha(t_0) \Rightarrow \exists C > 0 \quad / \quad \forall j, l_f(k(j, t_0), j) \leq C2^{j\alpha} \quad (6.3)$$

Il n'est pas nécessaire de prendre la valeur absolue des coefficients dominants, puisque ceux-ci sont par définition positifs. Cette caractérisation est toujours à prendre dans le sens d'un comportement asymptotique des coefficients  $l_f(j, k)$  pour les échelles tendant vers 0 (i.e.  $j \rightarrow -\infty$ ).

Cette assertion n'admet pas non plus de réciproque exacte, mais la réciproque approchée suivante : si la propriété précédente est vérifiée et que la fonction  $f$  est uniformément hölderienne, on a alors :

$$\text{si } |t - t_0| \leq 1, \quad |f(t) - P(t - t_0)| \leq C |t - t_0|^\alpha \log \left( \frac{2}{|t - t_0|} \right). \quad (6.4)$$

### Quelques commentaires

Comme l'exposant de Hölder est la régularité locale maximale (cf. définition (3.2)), on a en particulier :

$$l_f(k(j, t_0), j) \leq C2^{jh_f(t_0)}.$$

La loi de puissance  $C2^{jh_f(t_0)}$  est aussi la loi de puissance la plus "serrée" qui puisse borner les coefficients dominants autour de la date  $t_0$ .

Il y a donc une différence essentielle avec la caractérisation de régularité obtenue avec les coefficients d'ondelette discrets (équation (5.1)) : les coefficients dominants offrent une caractérisation de la régularité locale plus propre dans la mesure où ils se comportent comme une loi de puissance de l'échelle  $2^j$ , d'exposant  $h_f(t_0)$ , et ce quel que soit le type de singularité ! Les coefficients d'ondelette  $d_f(j, k)$  n'offraient une telle caractérisation que pour les singularités de type cusp (singularités simples), le terme  $(1 + |2^{-j}t_0 - k(j, t_0)|^\alpha)$  dans la caractérisation obtenue avec ces coefficients (équation (5.1)) détruisant sinon le comportement en loi de puissance (cf. paragraphe 5.3.3).

<sup>2</sup>On suppose bien sûr toujours que le nombre de moments nuls  $N_\psi$  de l'ondelette utilisée est supérieur à la régularité que l'on cherche à caractériser.

## 6.2 Formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants

On reprend la même trame que celle utilisée pour la construction du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets, mais en utilisant cette fois les coefficients dominants  $l_f(j, k)$  comme quantité multi-résolution.

### 6.2.1 Fonctions de structure

#### Définition des fonctions de structure

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants utilise comme grandeurs globales pour effectuer l'analyse multifractale, les fonctions de structure  $S_f^l(q, j)$  définies sur les coefficients dominants :

$$S_f^l(q, j) = \frac{1}{n(j)} \sum_{k=1}^{n(j)} (l_f(j, k))^q, \quad (6.5)$$

où  $n(j)$  est le nombre de coefficients  $l_f(j, k)$  disponibles à l'octave  $j$ . Il n'est pas nécessaire de prendre la valeur absolue des coefficients dominants car ceux-ci sont par définition positifs.

#### Comportement en loi de puissance des fonctions de structure $S_f^l(q, j)$ . Exposants $\zeta_f^l(q)$

Si la fonction  $f$  est multifractale, alors les fonctions de structure  $S_f^l(q, j)$  se comportent asymptotiquement, lorsque l'échelle  $2^j$  tend vers 0, comme une loi de puissance en fonction de l'échelle  $2^j$  :

$$S_f^l(q, j) \simeq C_q 2^{j\zeta_f^l(q)} \quad (6.6)$$

L'exposant  $\zeta_f^l(q)$  caractérisant cette loi de puissance est toujours appelé *exposant de loi d'échelle*.

### 6.2.2 Énoncé

On peut alors énoncer le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants, reliant le spectre de singularités  $D_f(h)$  et les exposants  $\zeta_f^l(q)$  selon :

$$D_f(h) = \inf_q \left( 1 + qh - \zeta_f^l(q) \right) \quad (6.7)$$

#### Commentaires

Encore une fois, la transformée de Legendre des coefficients dominants et le spectre de singularités  $D_f(h)$  sont a priori différents. Il est donc introduit la notation pour la première quantité :

$$D_f^l(h) = \inf_q \left( 1 + qh - \zeta_f^l(q) \right). \quad (6.8)$$

$D_f^l(h)$ , défini comme une transformée de Legendre, est nécessairement concave.

## 6.3 Validité du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants

Nous allons donner dans cette partie les résultats mathématiques existants pour ce nouveau formalisme multifractal, et allons montrer pourquoi il permet de régler les deux défauts majeurs du formalisme basé sur les coefficients d'ondelette discrets (partie "droite" du spectre de singularité et présence de singularités oscillantes).

### 6.3.1 Résultats mathématiques

Les deux quantités  $D_f(h)$  et  $D_f^l(h)$  ne sont pas a priori égales. En fait, il est montré dans [73] qu'il existe, comme c'était déjà le cas avec  $D_f^d(h)$  une inégalité entre ces deux quantités :

si la fonction  $f$  est uniformément höldérienne, on a alors :

$$\forall h, \quad D_f(h) \leq D_f^l(h). \quad (6.9)$$

La quantité  $D_f^l(h)$  est donc une fonction qui borne le spectre des singularités  $D_f(h)$ . Il évident que ce résultat est plus général que celui obtenu avec les coefficients d'ondelette discrets (cf. équation 5.8), puisque (6.9) est valable pour toute valeur de  $h$  alors que (5.8) ne l'était que pour  $h \leq h_c$ .

On peut en fait être encore plus précis :  $D_f^l(h)$  est l'enveloppe convexe (c'est une fonction concave) de  $D_f(h)$ . Donc si  $D_f(h)$  est concave, alors on obtient :

$$D_f(h) = D_f^l(h),$$

c'est-à-dire que le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants est *exact*. Ce n'est pas une remarque anecdotique puisque, comme il en a déjà été fait la remarque au paragraphe 3.3.3, les fonctions multifractales auxquelles on s'intéresse en pratique ont un spectre de singularités concave.

Ce résultat amène deux remarques, qu'il faut mettre en regard des deux limitations du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets exposées au paragraphe 5.3 :

- on a  $D_f(h) = D_f^l(h)$  pour  $h \geq h_0$ <sup>3</sup>, c'est-à-dire pour la partie droite du spectre de singularités  $D_f(h)$

- pour  $h_c \leq h \leq h_0$ <sup>4</sup>, on a  $D_f(h) = D_f^l(h)$ , alors que l'on a  $D_f(h) = D_f^d(h)$  seulement si la fonction étudiée ne contient que des singularités simples (cf. paragraphe 5.3) ; c'est donc sur partie-là du spectre  $D_f(h)$  que la présence de singularités oscillantes joue un rôle, et la formule  $D_f(h) = D_f^l(h)$  montre ainsi bien que le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants est valable quel que soit le type de singularité.

Explicitons de façon plus claire ces deux remarques.

### 6.3.2 Partie "droite" du spectre de singularités

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants est valable pour la partie droite du spectre. Cela suppose que les exposants  $\zeta_f^l(q)$  avec  $q \leq 0$  ont un sens, et que donc les fonctions

<sup>3</sup>On rappelle (cf. paragraphe 5.3.2) que  $h_0$  est la valeur de  $h$  pour laquelle  $D_f(h)$  atteint son maximum.

<sup>4</sup>On rappelle (cf. paragraphe 5.3) que  $h_c$  est défini comme l'abscisse du point pour lequel la tangente à  $D_f(h)$  passe par l'origine (0,0).

de structure  $S_f^l(q, j)$  se comportent en loi de puissance avec le "bon" exposant  $\zeta_f^l(q)$  même pour  $q \leq 0$ . Cela demande au moins que les coefficients dominants  $l_f(j, k)$  ne soient jamais nuls. On a vu au paragraphe 5.3.2 que ce n'était pas le cas avec les coefficients  $d_f(j, k)$ . Il a été procédé au même test qu'au paragraphe 5.3.2 : les coefficients dominants<sup>5</sup> (pour une certaine octave  $j$ ) de la même réalisation de processus multifractal ont été calculés, et leur histogramme porté sur la figure 6.2. On a aussi reporté pour rappel la figure 5.3.

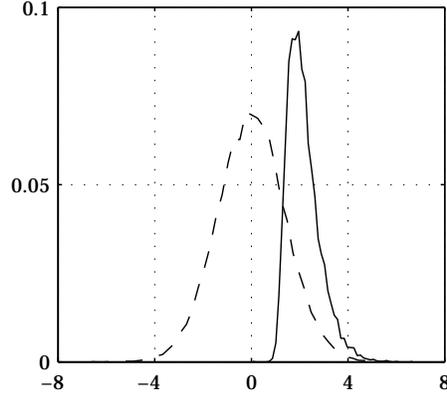


FIG. 6.2 – **Histogrammes des coefficients d'ondelette discrets**  $d_f(j = 5, k)$  (trait en pointillés) **et des coefficients dominants**  $l_f(j = 5, k)$  (trait continu) calculés sur une réalisation du processus marche aléatoire multifractal (se reporter à l'annexe D).

On voit donc sur ses histogrammes que les coefficients dominants, bien que définis à partir de quantités (les modules des coefficients d'ondelette discrets) prenant régulièrement des valeurs très proches de zéro, sont eux des valeurs "éloignées" de zéro. Il n'y a donc pas d'obstacle a priori d'étudier les fonctions de structure  $S_f^l(q, j)$ , et les exposants correspondants  $\zeta_f^l(q)$ , d'ordre  $q$  négatif.

### 6.3.3 Singularités oscillantes

Intéressons-nous maintenant au comportement des coefficients dominants en fonction de l'échelle  $2^j$  dans le cas d'une singularité isolée. Les deux singularités isolées (une oscillante, l'autre pas) définies dans le paragraphe 5.3.3 ont été analysées avec les coefficients dominants. On trace alors le comportement dans un diagramme log-log des coefficients dominants  $l_f(j, k)$  en fonction de l'échelle  $2^j$ , en choisissant pour chaque octave  $j$  la date discrétisée  $k$  correspondant à  $t = 0$ . Les résultats sont portés sur la figure 6.3 (rangée du bas), où sont rappelés (rangée du haut) les résultats obtenus avec les coefficients d'ondelette discrets

Nous avons vu (cf. paragraphe 5.3.3) que les coefficients d'ondelette discrets  $d_f(j, k)$  ne se comportaient pas dans le cas des singularités oscillantes en loi de puissance :  $|d_f(j, k)| \approx 2^{jh}$  (cf. figure 6.3), ce qui illustre pourquoi le formalisme multifractal basé sur ces coefficients était mis en échec lorsque la fonction analysée comportait des singularités oscillantes. Lorsque la même analyse est faite avec les coefficients dominants, le comportement en loi de puissance est rétabli :  $l_f(j, k) \sim 2^{jp}$ . De plus, l'exposant de cette loi de puissance est proche de  $h = 0.8$ , puisque l'on trouve  $p \simeq 0.77$

<sup>5</sup>Toujours en prenant comme ondelette discrète l'ondelette de Daubechies à 2 moments nuls (cf. l'annexe B).

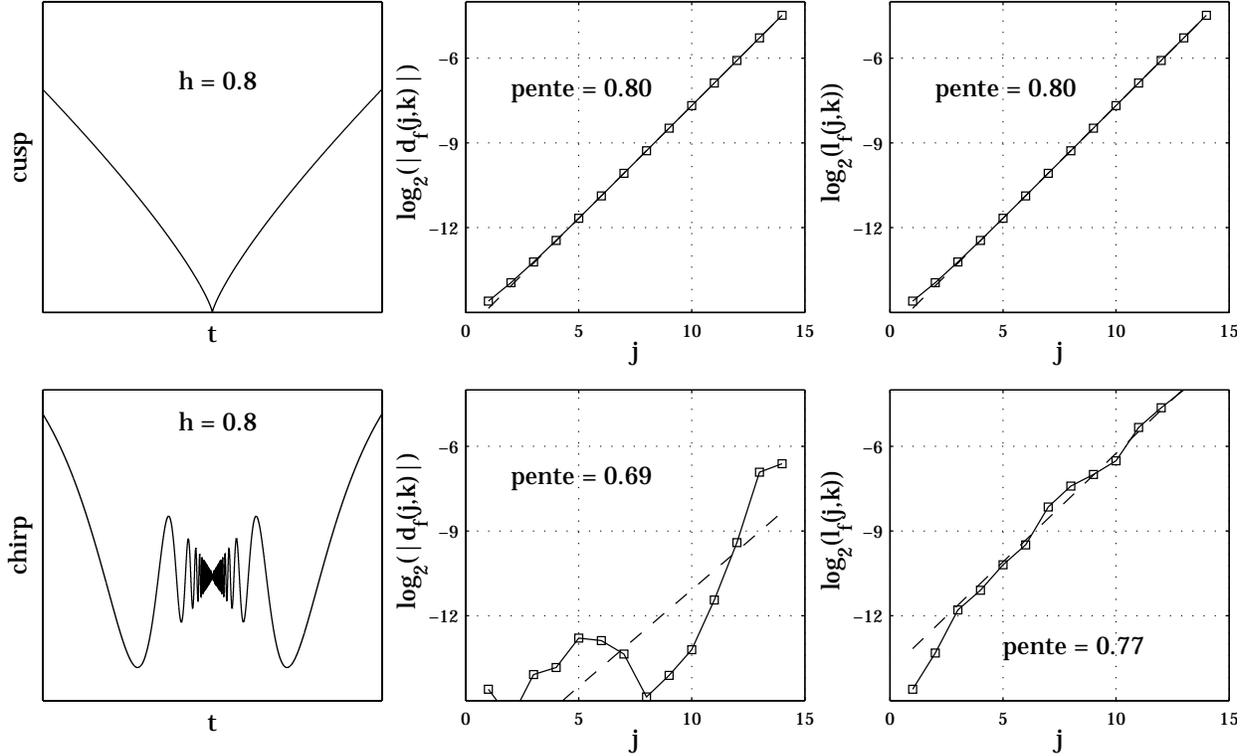


FIG. 6.3 – **Haut** : singularité simple de paramètre  $h = 0.8$ . **Bas** : singularité oscillante de paramètres  $h = 0.8$  et  $\beta = 1$ . Milieu : analyse avec les coefficients d'ondelette discrets  $d_f(j, k)$ . Droite : analyse avec les coefficients dominants  $l_f(j, k)$ .

(cf. figure 6.3).

Cet exemple simple illustre bien le fait suivant : le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants est supérieur à celui basé sur les coefficients d'ondelette discrets en ce qui concerne les singularités oscillantes, puisque même sur cet exemple simple, voire simpliste, les coefficients  $d_f(j, k)$  ne capturent pas le bon comportement en loi de puissance sur lequel est basé le formalisme multifractal.

Une autre façon de percevoir cette différence est de tenir le raisonnement suivant : une singularité (qu'elle soit oscillante ou non) est une *structure* de l'espace temps-échelle, qui "pointe" aux petites échelles vers la date  $t_0$  de la singularité. On peut même qualifier cette structure de "verticale" dans ce plan, puisqu'elle y localisée temporellement autour de la date  $t_0$ , mais affecte toutes les échelles  $2^j$ , comme on peut le voir sur la figure 6.4, où est tracé le logarithme des modules des  $d_f(j, k)$  correspondant à la singularité simple précédente (paramètre  $h = 0.8$ ).

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets ne tire aucune partie de cette structure, puisque les fonctions de structure  $S_f^d(q, j)$  sont les moyennes temporelles des puissances des coefficients d'ondelette discrets  $d_f(j, k)$  à chaque échelle  $2^j$ . Il s'avère que l'information fournie par les  $d_f(j, k)$  suffit en fait à caractériser les singularités simples, mais échoue dans le cas des singularités oscillantes.

Les coefficients dominants contiennent quant-à-eux une information différente : le coefficient

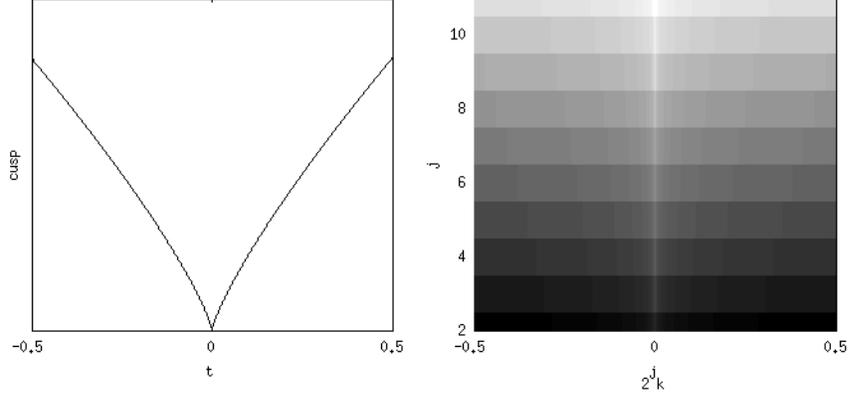


FIG. 6.4 – **Gauche : singularité simple** de paramètre  $h = 0.8$  (gauche). **Droite :  $\log_2|d_f(j, k)|$**  ; l'échelle de gris va du noir pour la valeur 0 jusqu'au blanc pour la valeur maximale.

$l_f(j, k)$  n'a aucune raison<sup>6</sup> d'être égal à  $|d_f(j, k)|$ , mais peut très bien être égal à  $|d_f(j', k')|$ , correspondant à la même localisation temporelle que  $d_f(j, k)$  (puisque le sup est pris dans un voisinage temporel de l'intervalle dyadique  $\lambda(j, k)$ , cf. paragraphe 6.1.1), mais à une échelle  $2^{j'}$  différente de  $2^j$ . Les coefficients dominants tiennent compte ainsi de la structure verticale de la singularité, puisque le sup est pris à une date fixée sur toutes les échelles plus petites que  $2^j$ . Le coefficient  $l_f(j, k)$  décrit donc, par construction, la façon dont une singularité, à une date  $t_0$  particulière, structure le plan temps-échelle voisinage temporel  $2^j k$  de la date  $t_0$ , pour toutes les échelles plus petites que  $2^j$ . Cela ne change rien pour les singularités de type cusp comme on l'a vu (cf. figure 6.3), mais permet de restaurer un comportement en loi de puissance en fonction de l'échelle, avec le bon exposant (l'exposant de Hölder) dans le cas plus général des singularités oscillantes.

### 6.3.4 Conclusions

La caractérisation des propriétés de régularité ponctuelle à l'aide des coefficients dominants est donc bien meilleure que celle basée sur les coefficients d'ondelette discrets : elle permet de caractériser de façon *générale* les exposants de Hölder d'une fonction, et non-plus de façon *restreinte* comme dans le cas des coefficients d'ondelette discrets, où la caractérisation n'est valable seulement si les singularités correspondant aux exposants de Hölder ne sont pas oscillantes, ou autrement dit, si l'exposant d'oscillation  $\beta$  est partout nul.

Elle permet de plus, même dans le cas où seules des singularités simples sont présentes, de pouvoir accéder, à travers le formalisme multifractal associé, à la partie "droite" du spectre de singularités.

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants est donc *supérieur* au formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets, dans le sens suivant (on suppose que les spectre de singularités que l'on cherche à mesurer est concave) : alors que ce dernier n'est valable que pour  $h \leq h_0$  (c'est-à-dire la partie gauche du spectre de singularités) lorsque la fonction étudiée ne contient que des singularités simples, voire  $h \leq h_c$  lorsque celle-ci est simplement höldérienne, le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants s'applique à toutes les

<sup>6</sup>On rappelle que sa définition est (cf. paragraphe 6.1.1) est :  $l_f(j, k) = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda(j, k)} |d_f(\lambda')|$ .

fonctions uniformément höldériennes, et fournit une mesure complète du spectre de singularités.

## 6.4 Fonctions scalaires définies sur $\mathbb{R}^d$

Nous allons conclure cette partie avec l'extension du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants aux fonctions scalaires définies sur  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d$  entier naturel non-nécessairement égal à 1.

Tout comme pour les fonctions scalaires définies sur  $\mathbb{R}$ , ce formalisme va s'avérer plus performant que celui basé sur les seuls coefficients d'ondelette discrets. Cela est bien sûr évident, puisque l'on a vu que la notion de régularité ponctuelle et sa caractérisation à l'aide des coefficients d'ondelette ne dépendent pas fondamentalement de la dimension de l'espace sur lequel est défini la fonction  $f$  étudiée.

### 6.4.1 Coefficients dominants à $d$ dimensions

**Cubes dyadiques**  $\lambda = \lambda(j, k_i, m)$

On généralise les intervalles dyadiques de  $\mathbb{R}$  en cubes dyadiques, pour les dates de  $\mathbb{R}^d$ , en y incluant aussi l'indice  $m$  de la direction (dans  $\mathbb{R}^d$ ) correspondante du coefficient d'ondelette discret :

$$\lambda(j, k_i, m) = 2^j (k_i) + [0, 2^j]^d. \quad (6.10)$$

#### Définition

On définit alors les coefficients dominants comme dans le cas des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ , dans les  $(2^d - 1)$  directions de  $\mathbb{R}^d$  :

$$l_f(j, k_i, m) = \sup_{\lambda' \subset 3^d \lambda(j, k_i, m)} |d_f(\lambda')|, \quad (6.11)$$

où  $3^d \lambda(j, k_i, l) = \cup_{k'_i=k_i-1, k_i, k_i+1} \lambda(j, k'_i, l)$ , c'est-à-dire le cube  $\lambda(j, k_i, l)$  lui-même et ses plus proches voisins dans l'espace temps-échelle à  $n$  dimensions (pour le temps, pas pour l'échelle).

#### Caractérisation de la régularité ponctuelle

La caractérisation de la régularité ponctuelle de la fonction  $f$  prend en compte de la même façon que celle existant avec les coefficients  $d_f(j, k_i, m)$  (paragraphe 5.4.1) les  $2^d - 1$  coefficients  $l_f(j, k_i, m)$  existant à chaque octave  $j$  pour chaque date  $\{k_i\}$

$$f \in C^\alpha(t_0) \Rightarrow \exists C > 0 \quad / \quad \forall m, \forall j, l_f(k(j, t_0), j, m) \leq C 2^{j\alpha}, \quad (6.12)$$

où  $(k(j, t_0))$  est l'index de la date discrète correspondant à  $t_0$  à l'octave  $j$ .

Cette assertion n'admet pas de réciproque exacte, mais la réciproque approchée suivante : si la propriété précédente est vérifiée et que la fonction  $f$  est uniformément hölderienne, on a alors :

$$\text{si } [t - t_0] \leq 1, \quad |f(t) - P(t - t_0)| \leq C |t - t_0|^\alpha \log \left( \frac{2}{|t - t_0|} \right). \quad (6.13)$$

### 6.4.2 Formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants

#### Fonctions de structure à $d$ dimensions $S_f^l(q, j)$

Les fonctions de structure  $S_f^l(q, j)$  construites à partir des coefficients dominants se définissent comme celles construites sur les coefficients d'ondelette discrets  $S_f^d(q, j)$  :

$$S_f^l(q, j) = \frac{1}{n(j)} \sum_{\{k_i\}} \frac{1}{2^d - 1} \sum_m (l_f(j, k_i, m))^q, \quad (6.14)$$

où  $n(j)$  est toujours le nombre de coefficients présents à l'octave  $j$  dans chacune des  $2^d - 1$  directions (c'est forcément le même).

#### Exposants $\zeta_f^l(q)$

Pour les fonctions  $f$  multifractales, la fonction de structure d'ordre  $q$  se comporte alors selon une loi de puissance en fonction du rapport d'échelle  $2^j$  :

$$S_f^l(q, j) \simeq C_q 2^{j\zeta_f^l(q)}, \quad (6.15)$$

ce qui définit exactement de la même façon que dans le cas  $1d$  l'exposant  $\zeta_f^l(q)$ .

#### Énoncé

Le *formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants* affirme alors l'égalité entre le spectre de singularités  $D_f(h)$  de la fonction analysée et la transformée de Legendre  $D_f^l(h)$  des exposants  $\zeta_f^l(q)$  :

$$D_F(h) = D_f^l(h) = \min_q \left( d + qh - \zeta_f^l(q) \right).$$

#### Validité

Comme c'était déjà le cas pour le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets, celui basé sur les coefficients dominants ne dépend pas de la dimension  $d$  utilisée. Les propriétés de validité discutées au paragraphe 6.3 se généralisent sans aucune restriction au cas à  $d$  dimensions [73] :

le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants est valide pour toutes les fonctions uniformément höldériennes pour lesquelles le spectre de singularités est concave.

## Chapitre 7

# Mise en oeuvre du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants

Il vient d'être défini au chapitre précédent un nouveau formalisme multifractal, basé sur les coefficients dominants  $l_f(j, k)$ . Ce formalisme, récemment introduit par S. Jaffard [73], n'avait pas, à notre connaissance, été mis en pratique. Un des apports importants de ce travail de thèse, a été de mettre en oeuvre ce formalisme, par la mise au point de codes informatiques (des routines ont été développées en utilisant le langage Matlab). On dispose ainsi d'outils numériques, afin de mettre en évidence les différents apports théoriquement prévus par rapport aux autres formalismes multifractals.

Ce chapitre regroupe les résultats obtenus sur la caractérisation numérique des performances théoriques de ce formalisme, afin de mieux éclairer les différences entre formalismes multifractals, basés soit sur les coefficients d'ondelette discrets, soit sur les coefficients dominants. Divers processus multifractals, possédant ou non des singularités oscillantes, ont ainsi été synthétisés, afin d'illustrer les différences et les avantages respectifs de ces deux formalismes multifractals. [95] regroupe une version réduite de ces résultats.

### 7.1 Méthodologie

Il a été employé la méthodologie suivante pour effectuer la caractérisation numérique du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants. Des réalisations de processus aléatoires multifractals de type fonction (cf. l'annexe D) ont été synthétisées, et les deux formalismes multifractals, basés soit sur les coefficients d'ondelette discrets, soit sur les coefficients dominants, ont été appliqués à chacune de ces réalisations. Les résultats moyens obtenus sont alors discutés. Notons que l'on n'analysera seulement des processus définis sur  $\mathbb{R}$ .

Chaque processus aléatoire multifractal sera noté  $X$ , et  $N_{réal}$  réalisations indépendantes, notées  $X_i$  avec  $i = 1..N_{réal}$ , seront synthétisées, avec la même résolution  $r$  et le même nombre d'échelles intégrales  $N_{int}$  (cf. l'annexe D).

Sur chaque réalisation  $X_i$  seront mesurés les exposants  $\zeta_X^{d,l}(q)$  définis dans les deux chapitres précédents, à l'aide d'une régression linéaire de  $\log_2 S_{X_i}^{d,l}(q, j)$  en fonction de  $j$  (cf. le paragraphe

9.1)<sup>1</sup>. L'estimée correspondante sera notée  $\widehat{\zeta_{X_i}^{d,l}}(q)$ . La transformée de Legendre de  $\widehat{\zeta_{X_i}^{d,l}}(q)$ , notée  $TL[\widehat{\zeta_{X_i}^{d,l}}](h)$ , sera alors calculée. Les résultats seront alors présentés sous la forme suivante : on tracera la moyenne, notée  $\overline{TL[\widehat{\zeta_{X_i}^{d,l}}]}(h)$  des  $TL[\widehat{\zeta_{X_i}^{d,l}}](h)$  sur les  $N_{réal}$  réalisations indépendantes, et on les comparera au spectre de singularités théorique des processus étudiés  $D_X(h)$ .

## 7.2 Processus multifractals sans singularités oscillantes

Nous allons d'abord utiliser un processus multifractal bâti sur des schémas de cascade multiplicative, la cascade d'ondelette aléatoire (cf. le paragraphe 4.1), afin de n'étudier que des réalisations ne possédant que des singularités simples (de type cusp) et pas de singularités oscillantes (de type chirp), comme il a été précisé au paragraphe 4.1.

### 7.2.1 Cascades d'ondelette aléatoires log-normales

#### Choix des paramètres de synthèse et d'analyse

Les paramètres définissant les propriétés multifractales du processus cascade d'ondelette aléatoire avec une loi log-normale pour les multiplicateurs (cf. paragraphe 4.1) sont au nombre de deux :  $m$  et  $\sigma$ , déterminant alors le spectre multifractal du processus (cf. équation (4.5)) :

$$D_{rwc}(h) = 1 - \frac{(h - m)^2}{2 \ln(2) \sigma^2}.$$

Il a ici été choisi :  $m = 0.7$  et  $\sigma = 0.17$ . Le plus grand exposant de Hölder de ce processus est donc (cf. paragraphe 4.1)  $h_{max} = m + \sigma \sqrt{2 \ln(2)} \simeq 0.9$ .

En ce qui concerne la synthèse des réalisations du processus, il a été réalisé  $N_{réal} = 1000$  réalisations, comportant chacune  $N_{int} = 2^5$  échelles intégrales, de résolution  $r = 2^{-15}$ , en utilisant l'ondelette de Daubechies à 6 moments nuls, de régularité suffisante puisque supérieure à 1 (cf. annexe B).

L'analyse multifractale a été effectuée à l'aide des formalismes multifractals basés sur les coefficients d'ondelette discrets et sur les coefficients dominants. L'ondelette discrète utilisée dans les deux cas est l'ondelette de Daubechies à 2 moments nuls, ce qui est largement suffisant pour estimer des exposants de Hölder inférieurs à  $0.9^2$ .

#### Résultats

Les résultats sont présentés sur la figure 7.1 : en trait noir continu est tracé le spectre des singularités  $D_{rwc}(h)$  du processus synthétisé, et les ronds correspondent à la moyenne  $\overline{TL[\widehat{\zeta_{rwc_i}^{d,l}}]}(h)$  des  $TL[\widehat{\zeta_{rwc_i}^{d,l}}](h)$  sur les  $N_{réal} = 1000$  réalisations.

<sup>1</sup>Notons que le choix de la gamme d'échelles sur laquelle sont effectuées les régressions linéaires ne pose pas de problèmes pour des signaux synthétiques, puisque l'on peut choisir la taille de cette gamme à l'aide de la résolution des processus (cf. annexe D). Ce choix, purement technique en ce qui concerne ce chapitre, ne sera pas plus discuté ici. Ce choix est en revanche beaucoup plus délicat lorsqu'il s'agit d'effectuer l'analyse de signaux réels, comme on le verra dans le chapitre 8.

<sup>2</sup>On rappelle que seul le nombre de moments nuls joue un rôle lorsqu'on utilise une ondelette afin de caractériser les propriétés de régularité ponctuelle d'un signal (cf. les paragraphes 5.1 et 6.1.1).

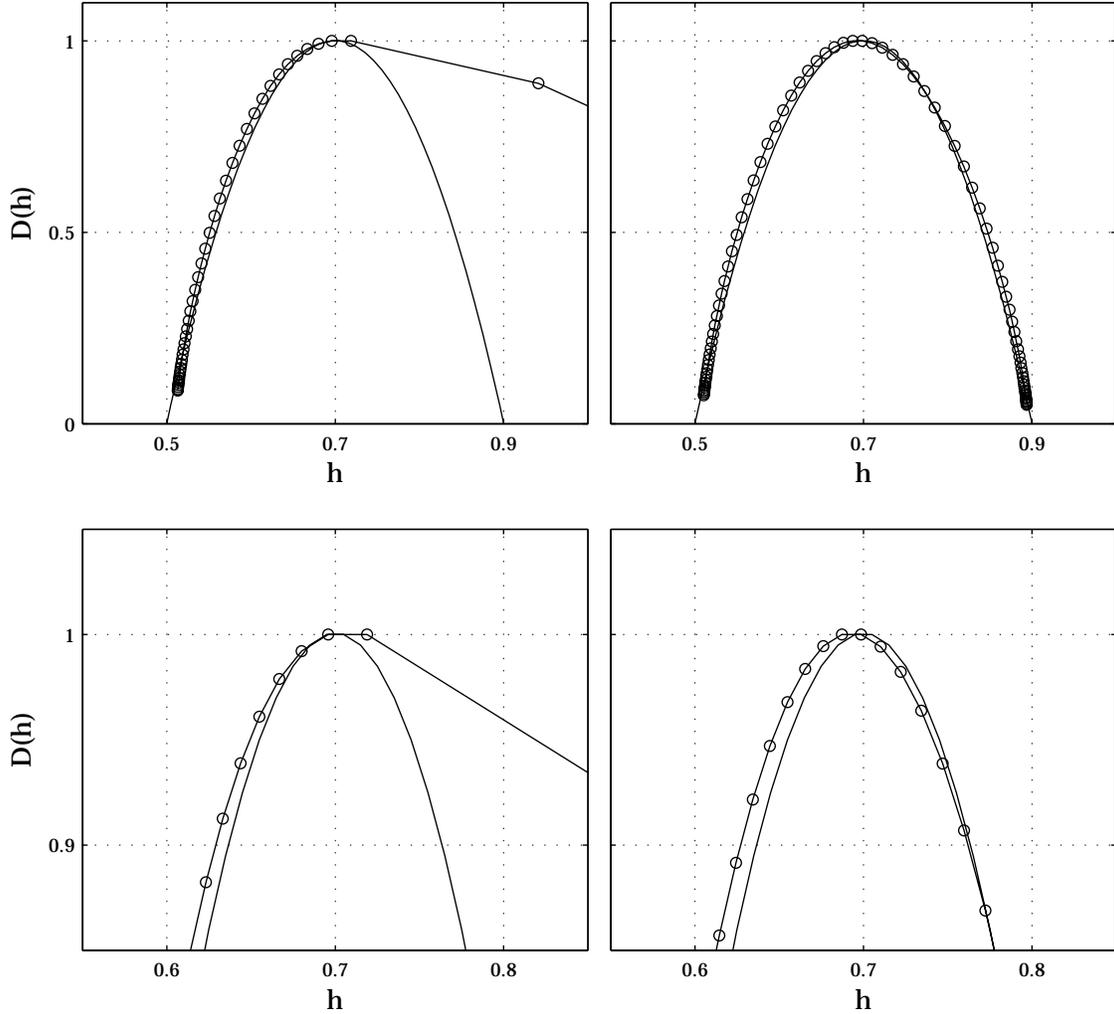


FIG. 7.1 – Cascades d’ondelette aléatoires. Trait continu :  $D_{rwc}(h)$ .  $\circ$  :  $TL[\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}](h)$  (gauche) et  $TL[\widehat{\zeta_{rwc_i}^l}](h)$  (droite). Haut : totalité du spectre de singularités et bas : zoom sur la partie supérieure.

On voit donc bien sur cet exemple de processus multifractal (qui ne possède que des singularités simples et pas de singularités oscillantes, cf. paragraphe 4.1) que le formalisme multifractal basé sur les coefficients d’ondelette discrets ne permet pas de mesurer la partie ”droite” du spectre de singularité, alors que le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants est capable de mesurer le spectre de singularité en entier, c’est-à-dire sur  $[h_{min}, h_{max}]$ , comme cela est attendu dans les chapitres précédents. Notons qu’on observe un biais de mesure (cf. figure 7.1, en bas), puisque le sommet du spectre de singularités mesuré est légèrement décalé vers les valeurs plus faibles de  $h$ . L’étude de ce type de problèmes n’entre pas dans le cadre de ce travail de thèse, mais une étude numérique des performances statistiques des formalismes multifractals utilisés a récemment été entreprise avec S. Roux, du laboratoire de physique de l’ÉNSL [149].

### 7.2.2 Autres processus

Les cascades d'ondelette aléatoires peuvent être générées avec des multiplicateurs selon d'autres lois (cf. le paragraphe 4.1), pas nécessairement une loi log-normale, par exemple une loi log-Poisson, ce qui fournit un processus de spectre de singularités de forme fonctionnelle différente. On peut aussi faire varier les paramètres contrôlant le spectre de singularités. Il est de même possible d'utiliser d'autres processus multifractals, toujours basés sur une notion de cascade multiplicative, par exemple les marches aléatoires multifractales ou les mouvements browniens en temps multifractal (cf. l'annexe D), et qui définissent des processus aux spectres de singularités  $D_X(h)$  encore différents.

La même comparaison des deux formalismes multifractals en utilisant ces processus multifractals est bien sûr intéressante (et a été effectuée dans divers cas), mais nous ne multiplierons pas les résultats dans cette thèse, puisqu'ils aboutissent tous à la même conclusion : le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants permet de mesurer la totalité du spectre de singularités  $D_X(h)$ , alors que le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets s'avère incapable de mesurer la partie droite du spectre de singularités.

## 7.3 Processus multifractals avec singularités oscillantes

Nous allons maintenant nous pencher sur les processus de séries d'ondelette aléatoires, qui sont des processus pour lesquels chaque réalisation possède presque sûrement des singularités oscillantes [21, 22], et ce presque partout (cf. le paragraphe 4.2). Ce processus est donc très intéressant puisque, comme il a déjà été précisé dans la partie 4.2, celui-ci possède de très grandes analogies avec le processus cascade d'ondelette aléatoire : ils sont tous deux définis à partir de leurs coefficients d'ondelette discrets. Cependant, ceux-ci sont indépendants d'une échelle à l'autre pour les séries d'ondelette aléatoires, alors qu'ils sont fortement corrélés (par la cascade multiplicative) pour les cascades d'ondelette aléatoires. Cette différence se traduit notamment dans le fait que les séries d'ondelette aléatoires possèdent des singularités oscillantes alors que les cascades d'ondelette aléatoires n'en possèdent pas (cf. les parties 4.1 et 4.2). Notons enfin que la présence de singularités oscillantes se traduit pour le spectre de singularités des séries d'ondelette aléatoires par une droite dans sa partie supérieure (plus précisément lorsque  $h_c \leq h \leq h_{max}$ , cf. paragraphe 4.2.4).

On s'attend donc à ce que les deux formalismes multifractals aboutissent à des résultats différents pour les séries d'ondelette aléatoires, à la différence des cascades d'ondelette aléatoires précédemment utilisées.

### Choix des paramètres de synthèse et d'analyse

On a choisi ici d'analyser des réalisations d'une série d'ondelette aléatoire log-normale, définie au paragraphe 4.2.4. Il y a deux paramètres dans la définition de ce processus :  $m$  et  $\sigma$ . On a choisi ici  $m = 0.5$  et  $\sigma = 0.3$  (ce qui respecte bien la condition de convergence des séries d'ondelette aléatoires :  $m > \sigma\sqrt{2\ln 2}$ , cf. paragraphe 4.2.4). Le spectre de singularités du processus ainsi défini est alors :

$$D_{rws}(h) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\ln(2)} \frac{(\alpha-m)^2}{2\sigma^2} & \text{si } h \in [h_{min}, h_c] \\ \frac{h}{h_{max}} & \text{si } h \in [h_c, h_{max}] \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases} ,$$

avec  $h_{min} = m - \sigma\sqrt{2\ln 2} \simeq 0.15$ ,  $h_c = \sqrt{m^2 - 2\ln(2)\sigma^2} \simeq 0.35$  et  $h_{max} = \frac{\sigma^2 \ln(2)}{m - \sqrt{m^2 - 2\ln(2)\sigma^2}} \simeq 0.43$ .

Il a été synthétisé  $N_{réal} = 1000$  réalisations de ce processus, contenant chacune  $N_{int} = 2^2$  échelles intégrales, et de résolution  $r = 2^{-15}$ . L'ondelette de Daubechies à 6 moments nuls a été utilisée pour la synthèse de ces réalisations.

L'analyse multifractale de chacune de ces réalisations a été réalisée à l'aide du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets et du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants, avec l'ondelette de Daubechies à 2 moments nuls (suffisante pour estimer des exposants de Hölder inférieurs à 0.43).

## Résultats

Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 7.2. Les moyennes  $\overline{TL[\zeta_{rws_i}^d]}(h)$  et  $\overline{TL[\zeta_{rws_i}^l]}(h)$  des transformées de Legendre sur les  $N_{réal}$  réalisations concordent dans leur partie inférieure, ce qui est attendu : les deux formalismes sont sensés être valides pour  $h \leq h_c \simeq 0.35$ . Ils diffèrent en revanche dans leur partie supérieure. Or il a déjà été signalé que la partie supérieure du spectre de singularités des séries d'ondelette aléatoires (cf. paragraphe 4.2) était une droite, et était la signature du fait que ce processus contenait des singularités oscillantes.

La quantité  $\overline{TL[\zeta_{rws_i}^d]}(h)$  mesure bien le spectre de singularités pour des  $h$  plus petits qu'environ 0.4, mais mesure mal la partie de  $D_{rws}(h)$  correspondant à  $h \geq 0.4$ . En particulier, cette quantité n'arrive pas à capter le point d'arrêt du spectre de singularités que constitue son maximum  $h_{max} \simeq 0.425$  (cf. figure 7.2, rangée du bas), mais semblerait prédire, dans l'hypothèse où le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets serait valide, un spectre de singularités "classique", i.e. sans point d'arrêt, qui contiendrait notamment des exposants de Hölder valant jusqu'à 0.48, alors que ceux-ci sont en fait absents. Notons que ce constat concerne la partie gauche du spectre, et ce désaccord ne peut donc en aucun cas imputé au fait que ce formalisme échoue à mesurer la partie droite du spectre de singularités.

En revanche,  $\overline{TL[\zeta_{rws_i}^l]}(h)$  fournit une bonne mesure de  $D_{rws}(h)$  : les résultats obtenus ne s'écartent pas en particulier de la droite que forme la partie supérieure du spectre de singularités, et montrent bien de plus que ce spectre possède un point d'arrêt en son maximum  $h_{max}$ , et ne s'étend pas au delà de  $h_{max}$ .

L'exemple du processus série d'ondelette aléatoire permet donc de mettre en lumière une différence essentielle entre le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants et le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets : le premier s'applique aux fonctions uniformément höldériennes (dont le spectre de singularités est concave), alors que le second ne peut que mesurer a priori la partie du spectre de singularités définie par  $h \leq h_c$ . Ceci est en particulier vrai lorsque la fonction étudiée contient des singularités oscillantes, comme on vient de le voir. Ce résultat est bien un résultat fort, car le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets échoue à mesurer l'exposant de Hölder prédominant :  $h_{max}$ , dont la dimension de Hausdorff de l'ensemble iso-Hölder associé est 1, la dimension topologique du support de la fonction. Autrement dit, il ne peut mesurer correctement l'exposant de Hölder le plus important (selon la notion d'importance géométrique discutée au paragraphe 3.3, quantifiée par la dimension de Hausdorff), alors que le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants donne une mesure correcte de cet exposant prédominant.

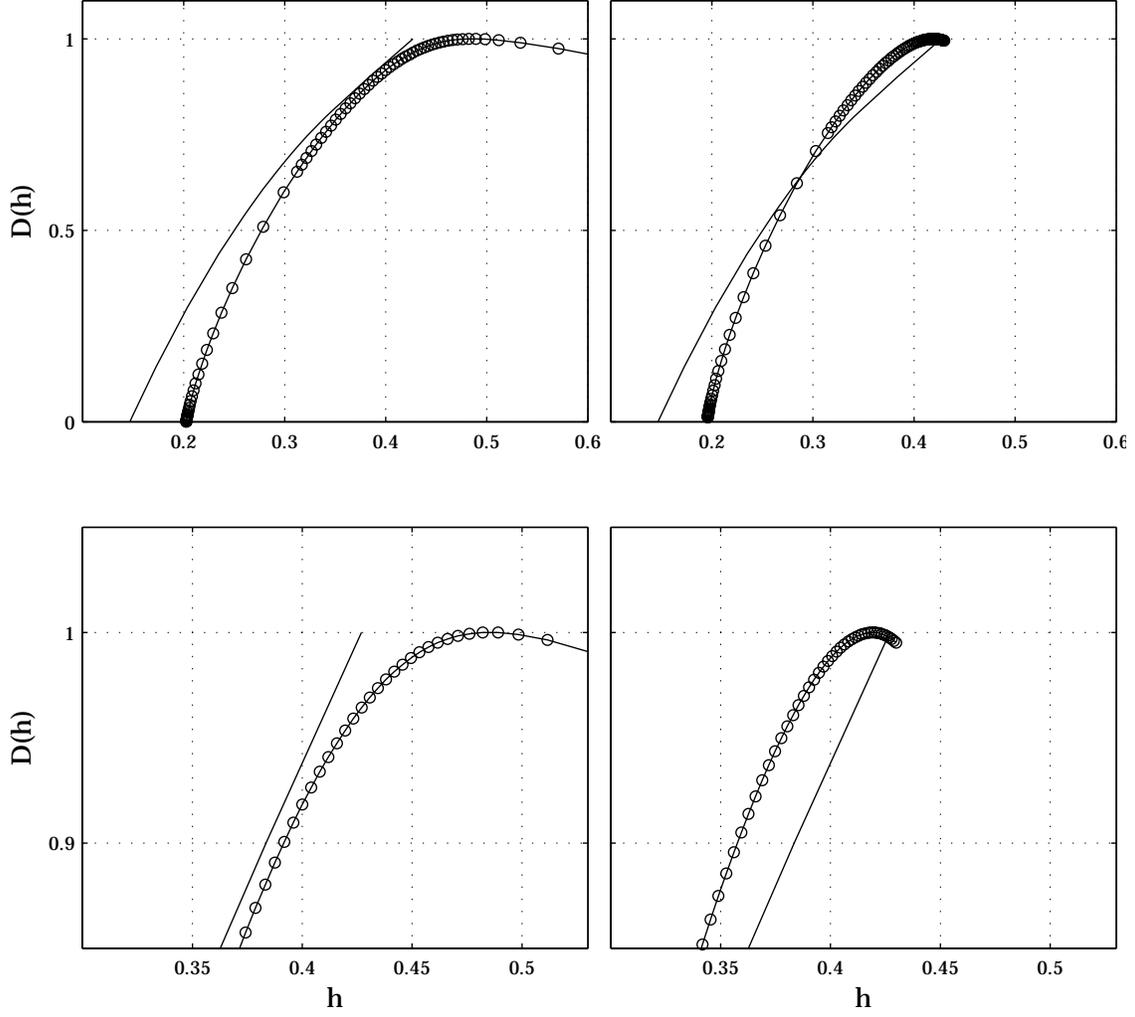


FIG. 7.2 – **Séries d'ondelette aléatoires.** Trait continu :  $D_{rws}(h)$ .  $\circ$  :  $\widehat{TL}[\widehat{\zeta}_{rws_i}^d](h)$  (gauche) et  $\widehat{TL}[\widehat{\zeta}_{rws_i}^l](h)$  (droite). Haut : totalité du spectre de singularités et bas : zoom sur sa partie supérieure.

## 7.4 Détection de singularités oscillantes

On vient de voir dans le paragraphe précédent que la présence de singularités oscillantes avait pour effet de faire échouer le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets, alors que celui basé sur les coefficients dominants permettait de mesurer correctement le spectre de singularités  $D_f(h)$ . On en déduit alors que, en comparant les résultats obtenus avec les deux formalismes, on peut détecter la présence de singularités oscillantes en cas de désaccord entre  $\widehat{TL}[\widehat{\zeta}_{X_i}^d](h)$  et  $\widehat{TL}[\widehat{\zeta}_{X_i}^l](h)$  pour la partie gauche.

En revanche, il n'y a pas de réciproque. Si les deux formalismes coïncident sur la partie gauche :  $\widehat{TL}[\widehat{\zeta}_{X_i}^d](h) = \widehat{TL}[\widehat{\zeta}_{X_i}^l](h)$  pour  $h \leq h_0$ , on ne peut pas conclure à l'absence de singularités oscillantes. En effet, il est possible [75, 12, 13, 14, 72] de définir une généralisation du spectre de singularités

$D_f(h)$  qui tiennent compte du caractère oscillant, c'est-à-dire de l'exposant d'oscillation  $\beta^3$  : c'est le spectre (parfois appelé grand-canonique)  $D_f(h, \beta)$ , avec  $h > 0$  et  $\beta \geq 0$ , défini comme la dimension de Hausdorff des ensembles  $E(h, \beta)$  des points pour lesquels l'exposant de Hölder est  $h$  et l'exposant d'oscillation  $\beta$ . L'existence de singularités oscillantes se traduit par  $D_f(h, \beta) \neq -\infty$ <sup>4</sup> pour des valeurs strictement positives de  $\beta$ , tandis que leur absence implique  $D_f(h, \beta) = -\infty$  si  $\beta \neq 0$ .

Le spectre de singularités classique  $D_f(h)$  est relié à  $D_f(h, \beta)$  par :

$$D_f(h) = \sup_{\beta} D_f(h, \beta).$$

On peut a priori être dans la situation suivante :  $\exists \beta > 0$  tel que  $D_f(h, \beta) \neq -\infty$ , mais  $D_f(h) = \sup_{\beta} D_f(h, \beta) = D_f(h, \beta = 0)$ , c'est-à-dire que, à  $h$  fixé, l'ensemble, parmi les  $E(h, \beta)$ , dont la dimension est la plus grande est :  $E(h, \beta = 0)$ . Il peut donc exister des singularités oscillantes, mais sans pourtant réellement affecter le spectre de singularités  $D_f(h)$ , puisque  $D_f(h) = D_f(h, \beta = 0)$ .

Dans cette situation, les deux formalismes multifractals donnent le même résultat pour la partie gauche du spectre :  $\overline{TL}[\widehat{\zeta_{X_i}^d}](h) = TL[\widehat{\zeta_{X_i}^l}](h)$  pour  $h \leq h_0$  [70, 73], et pourtant il existe des singularités oscillantes.

La comparaison des résultats obtenus avec les formalismes multifractals basés sur les coefficients d'ondelette discrets et sur les coefficients dominants permet donc de détecter la présence de singularités oscillantes dans une fonction, mais ne peut en aucun cas prouver que de telles singularités n'existent pas.

## 7.5 Comparaison entre cascade et série d'ondelette aléatoires : vers une compréhension de la multifractalité

Comme il a déjà été fait la remarque, les processus de cascade d'ondelette aléatoire et de série d'ondelette aléatoire sont très proches de par leur définition, et ont pourtant des propriétés multifractales bien différentes : l'un possède des singularités oscillantes, l'autre pas. C'est justement la présence de singularités oscillantes qui met en défaut le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets, alors que le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants s'applique toujours. Nous allons voir comment la comparaison de réalisations "jumelles", puisqu'étant définies à partir des mêmes coefficients d'ondelette, de cascade d'ondelette aléatoire et de série d'ondelette aléatoire va permettre une compréhension plus profonde de la multifractalité.

### 7.5.1 Synthèse de réalisations jumelles

#### Principe

Supposons que l'on ait généré des coefficients d'ondelette discrets  $d_{rwc}(j, k)$  selon une cascade multiplicative afin de synthétiser une réalisation du processus de cascade d'ondelette aléatoire. Ces coefficients, qui ont une distribution  $P(j)$  à chaque échelle  $2^j$ , qui dépend de la loi des multiplicateurs et de la distribution de départ, ne définissent pas une série d'ondelette aléatoire puisque ceux-ci sont très fortement corrélés entre eux d'échelle à échelle par les multiplicateurs de la cascade multiplicative. On peut par contre utiliser cette cascade pour générer des coefficients  $d_{rws}(j, k)$  ayant la même distribution que les  $d_{rwc}(j, k)$ , mais sans dépendance d'échelle à échelle : il suffit de

<sup>3</sup>Il existe bien sûr une définition pour l'exposant d'oscillation  $\beta$  [72], mais ce niveau de précision n'est pas utile ici.

<sup>4</sup>On rappelle que la dimension de Hausdorff de l'ensemble vide est par convention  $-\infty$ .

calculer les  $d_{rwc}(j, k)$ , puis de brouiller de façon homogène les dates  $k$  à chaque échelle. On perd alors la structure de dépendance entre échelles, puisque cette dépendance se transmettait d'une échelle  $2^j$  à une échelle  $2^{j'}$  plus fine de façon localisée en temps, de la date  $k2^j$  aux dates  $k'2^{j'} = k2^j$  et  $k''2^{j'} = k2^j + 1$  (cf. partie 4.1). Brouiller de façon homogène élimine donc bien cette structure de dépendance, et l'on tire bien ainsi des coefficients  $d_{rws}(j, k)$  distribués selon la distribution  $P(j)$  et indépendants entre eux et d'échelle à échelle.

## Spectre de singularités

Montrons alors que le spectre de singularités de la série d'ondelette aléatoire jumelle de la cascade d'ondelette aléatoire est facile à calculer. Il suffit de faire la remarque suivante : la quantité  $\rho(h)$  définie au paragraphe 4.2.1 par l'équation (4.6) n'est autre que le *spectre de grain* [21] (on se reportera par exemple aux chapitres de Y. Meyer ou de R. Riedi dans [3] pour la définition du spectre de grain, encore appelé spectre de grandes déviations), défini par les coefficients d'ondelette discrets de la réalisation de série d'ondelette aléatoire étudiée. On notera  $D_{rws}^g(h)$  ce spectre, dont on rappelle la définition (cf. l'équation 4.6 au paragraphe 4.2.1) :

$$\rho(h) = D_{rws}^g(h) = \inf_{\epsilon > 0} \limsup_{j \rightarrow -\infty} - \frac{\log_2(2^{-j} \rho_j([h - \epsilon, h + \epsilon]))}{j}.$$

Le spectre de grain  $D_X^g(h)$  constitue une méthode alternative de mesure du spectre de singularités, utilisée pour certaines applications en traitement du signal [3]. Dans le cas des cascades d'ondelette aléatoires, construites à l'aide d'une cascade multiplicative, on a [17, 3] :  $D_{rwc}^g(h) = D_{rwc}(h)$ .

Le processus cascade d'ondelette aléatoire ne contenant pas de singularités oscillantes, le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets est valide pour  $h \leq h_0$  (cf. 5.3), on a donc pour  $h \leq h_0$ ,  $D_{rwc}(h) = D_{rwc}^d(h)$ . On a ainsi :

$$\text{si } h \leq h_0, \quad D_{rwc}(h) = D_{rwc}^g(h) = D_{rwc}^d(h).$$

Or, par construction, les spectres de grains des cascades d'ondelette aléatoires et séries d'ondelette aléatoires jumelles sont identiques (toujours pour  $h \leq h_0$ ), et donc égaux à  $\rho(h)$ , puisque leurs coefficients d'ondelette discrets ont les mêmes distributions :

$$D_{rwc}^g(h) = D_{rws}^g(h) = \rho(h).$$

Dans le cas qui nous intéresse, on a  $D_{rwc}^g(h) = 1 - \frac{(h-m)^2}{2 \log(2) \sigma^2}$  pour  $h_{min} \leq h \leq h_0$ , avec ici  $h_{min} = m - \sigma \sqrt{2 \ln(2)}$  et  $h_0 = m$ . On en déduit alors le spectre de singularités de la série d'ondelette aléatoire ainsi construite à l'aide de la formule (4.7), et on retombe sur *exactement* le même spectre de singularités que celui de la série d'ondelette aléatoire étudiée dans le paragraphe 4.2.4 (équation 4.8) :

$$D_{rws}(h) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\ln(2)} \frac{(\alpha-m)^2}{2\sigma^2} & \text{si } h \in [h_{min}, h_c] \\ \frac{h}{h_{max}} & \text{si } h \in [h_c, h_{max}] \\ -\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\text{avec } h_c = \sqrt{m^2 - 2 \ln(2) \sigma^2} \text{ et } h_{max} = \frac{\sigma^2 \ln(2)}{m - \sqrt{m^2 - 2 \ln(2) \sigma^2}}.$$

## Synthèse pratique

La synthèse numérique d'une réalisation de cascade d'ondelette aléatoire et de la réalisation de série d'ondelette aléatoire jumelle se fait donc en parallèle : on tire d'abord les coefficients d'ondelette de la cascade d'ondelette aléatoire à l'aide de la cascade multiplicative, avec lesquels on synthétise directement la réalisation de la cascade d'ondelette aléatoire en inversant la transformée en ondelette discrète, puis on mélange temporellement de façon homogène ces coefficients, ce qui permet alors de reconstruire la réalisation de la série d'ondelette aléatoire jumelle.

### 7.5.2 Comparaison de deux réalisations jumelles

Une réalisation de cascade d'ondelette aléatoire avec une cascade log-normale de paramètres  $m = 0.5$  et  $\sigma = 0.3$  est synthétisée, avec l'ondelette de Daubechies d'ordre 6, ainsi que la réalisation de série d'ondelette aléatoire jumelle. La résolution utilisée est  $r = 2^{-15}$ , et la réalisation comporte  $N_{int} = 2^5$  échelles intégrales. Elles sont toutes deux analysées de deux façons différentes : avec les coefficients d'ondelette discrets et avec les coefficients dominants, calculés avec une ondelette de Daubechies à 2 moments nuls.

On a porté sur la figure 7.3 les transformées de Legendre  $TL[\widehat{\zeta}_{rwc}^d](h)$ ,  $TL[\widehat{\zeta}_{rwc}^l](h)$ ,  $TL[\widehat{\zeta}_{rws}^d](h)$  et  $TL[\widehat{\zeta}_{rws}^l](h)$  obtenues.

On voit donc bien les écarts entre le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets et le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants : tous deux donnent une bonne mesure du spectre de singularités pour la cascade d'ondelette aléatoire, alors que seul le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants permet de mesurer correctement le spectre de singularités de la série d'ondelette aléatoire. De plus, on constate bien que le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets n'est sensible qu'aux histogrammes des coefficients d'ondelette discrets : puisque les deux réalisations ont les mêmes distributions de coefficients d'ondelette discrets, ce formalisme donne le même<sup>5</sup> résultat (i.e. la même transformée de Legendre) pour les deux réalisations. Le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants est lui capable de distinguer les deux réalisations, et en particulier de montrer qu'il y a des singularités oscillantes dans la réalisation de série d'ondelette aléatoire et pas dans celle de cascade d'ondelette aléatoire .

Cet exemple permet donc bien de mettre en lumière plusieurs faits :

- les propriétés multifractales d'une fonction ne se réduisent pas aux distributions de leurs coefficients d'ondelette discrets, la connaissance de celles-ci est en particulier insuffisante lorsque la fonction contient des singularités oscillantes
- le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants est supérieur au formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets en ce qui concerne les singularités oscillantes justement parce qu'il n'utilise pas seulement les coefficients d'ondelette discrets et donc leurs distributions, mais une quantité plus adaptée : les coefficients dominants.

---

<sup>5</sup>Le léger écart observé est dû au fait que l'ondelette utilisée pour l'analyse (Daubechies à 2 moments nuls) est différente de celle utilisée pour la synthèse (Daubechies à 6 moments) nuls. Les coefficients d'ondelette définis selon l'ondelette Daubechies 6 sont donc bien les mêmes (à l'ordre temporel près) pour les deux réalisations, tandis que les coefficients d'ondelette définis selon l'ondelette Daubechies 2 sont a priori (légèrement) différents pour chaque réalisation.

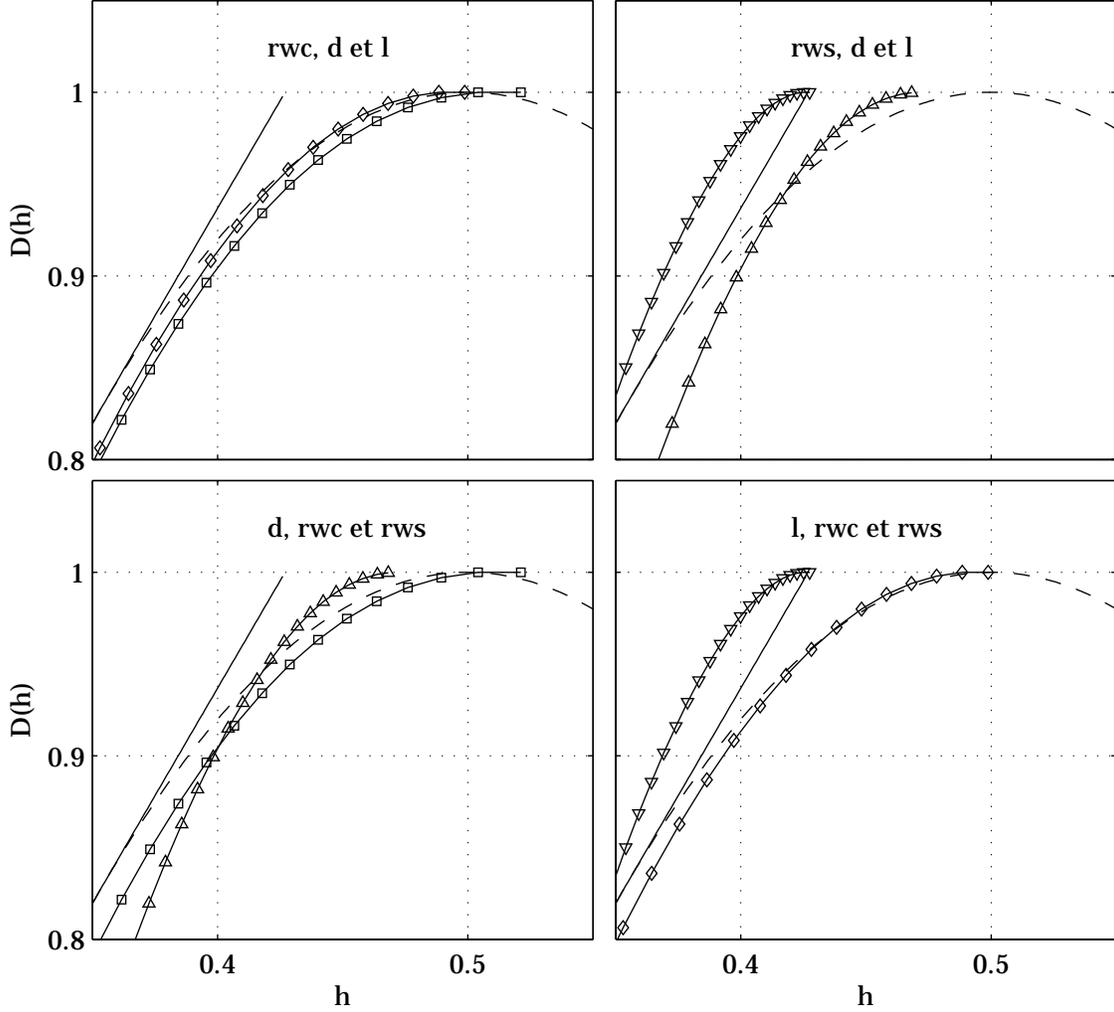


FIG. 7.3 – **Haut, gauche** : analyse de la réalisation de cascade d’ondelette aléatoire :  $TL[\widehat{\zeta_{rwc}^d}](h)$  ( $\square$ ) et  $TL[\widehat{\zeta_{rwc}^l}](h)$  ( $\diamond$ ). **Haut, droite** : analyse de la réalisation de série d’ondelette aléatoire :  $TL[\widehat{\zeta_{rws}^d}](h)$  ( $\triangle$ ) et  $TL[\widehat{\zeta_{rws}^l}](h)$  ( $\nabla$ ). **Bas, gauche** : analyse avec les coefficients d’ondelette discrets : cascade d’ondelette aléatoire ( $\square$ ) et série d’ondelette aléatoire ( $\triangle$ ). **Bas, droite** : analyse avec les coefficients dominants : cascade d’ondelette aléatoire ( $\diamond$ ) et série d’ondelette aléatoire ( $\nabla$ ). Trait continu :  $D_{rws}(h)$  et trait en pointillé :  $D_{rwc}(h)$ .

## 7.6 Utilisation du formalisme multifractal basé sur les coefficients mmto

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients mmto (cf. l’annexe E) a été introduit dans les années 1990 par A. Arneodo et son équipe [16, 11] afin de mesurer la partie droite du spectre de singularités. Bien que n’ayant pas reçu de fondement mathématique, cette méthode a été vérifiée avec succès sur un certain nombre de processus multifractals [16, 11]. Puisque le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants permet lui aussi la mesure de l’ensemble du spectre de singularités, et qu’un nouveau processus contenant des singularités oscillantes (la série d’ondelette

aléatoire) est utilisé, il convient de comparer les formalismes multifractals basés sur les coefficients dominants et les coefficients mmo. C'est l'objet de ce paragraphe.

### 7.6.1 Processus multifractals sans singularités oscillantes

On reprend tout d'abord le processus de cascade d'ondelette aléatoire.

#### Choix des paramètres de synthèse et d'analyse

$N_{réal} = 500$  réalisations du processus de cascade d'ondelette aléatoire log-normale ont été synthétisées, à l'aide de l'ondelette de Daubechies avec 6 moments nuls, avec les paramètres suivants :  $r = 2^{-13}$ ,  $N_{int} = 2^4$ ,  $m = 0.37$  et  $\sigma = 0.19$ . L'analyse est effectuée à l'aide de l'ondelette de Daubechies à 3 moments nuls pour les coefficients dominants, et à l'aide de la dérivée troisième de gaussienne, qui possède donc elle-aussi 3 moments nuls (cf. l'annexe B), pour les coefficients mmo. Notons que la zone de régression linéaire permettant la mesure des exposants  $\zeta_{rwc_i}^m(q)$  (l'indice  $m$  se rapporte à mmo) est la même que celle utilisée pour la mesure des  $\zeta_{rwc_i}^l(q)$ <sup>6</sup>.

#### Résultats

Les résultats sont portés sur la figure 7.4 : en trait continu est rappelé le spectre de singularités théorique  $D_{rwc}(h)$ , et les ronds correspondent aux moyennes  $TL[\widehat{\zeta_{rwc_i}^l}](h)$  (gauche) et  $TL[\widehat{\zeta_{rwc_i}^m}](h)$  (droite) des transformées de Legendre des estimées obtenues avec les coefficients dominants ( $\widehat{\zeta_{rwc_i}^l}(q)$ ) et les coefficients mmo ( $\widehat{\zeta_{rwc_i}^m}(q)$ ).

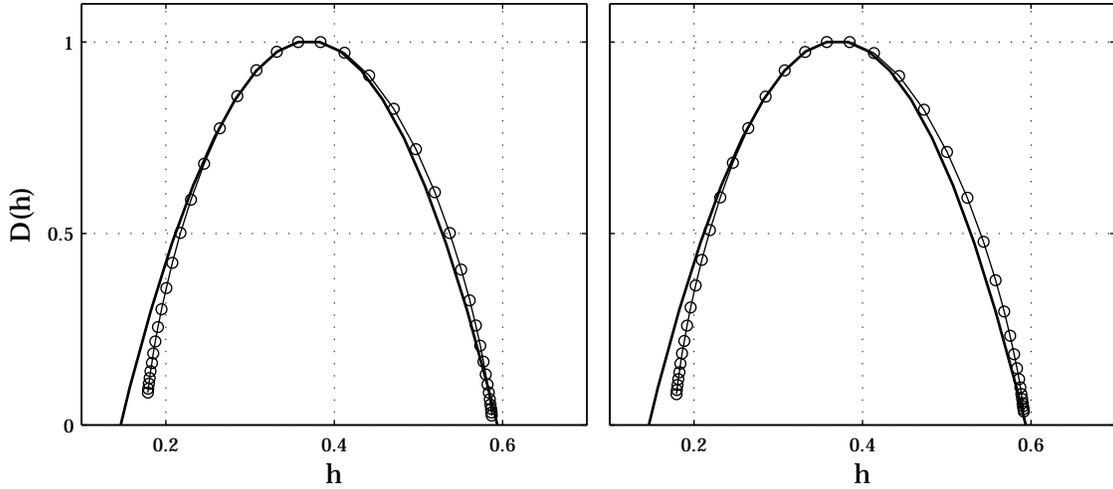


FIG. 7.4 – Cascades d'ondelette aléatoires. Trait continu :  $D_{rwc}(h)$ .  $\circ$  :  $TL[\widehat{\zeta_{rwc_i}^l}](h)$  (gauche) et  $TL[\widehat{\zeta_{rwc_i}^m}](h)$  (droite).

<sup>6</sup>Puisque deux ondelettes différentes sont utilisées ici (l'ondelette de Daubechies à 3 moments nuls et l'ondelette gaussienne à 3 moments nuls), il est nécessaire de s'assurer que la régression linéaire soit effectuée sur le même gamme d'échelles. L'échelle associée à une ondelette est connue en déterminant la fréquence centrale du filtre passe-bande associé à cette ondelette [1, 103, 117], et en définissant alors l'échelle de l'ondelette comme l'inverse de cette fréquence centrale. On peut ainsi "recaler" entre elles les échelles associées à chaque ondelette.

Les deux formalismes multifractals donnent ainsi des résultats tout-à-fait concordants, ce qui était attendu, puisque la validité de celui basé sur les coefficients mmto avait déjà été vérifiée pour de tels processus par l'équipe d'A. Arneodo [16, 11, 147].

## 7.6.2 Processus multifractals avec singularités oscillantes

Intéressons-nous désormais aux séries d'ondelette aléatoires, processus nouveau qui contient des singularités oscillantes (cf. le paragraphe 4.2).

### Choix des paramètres de synthèse et d'analyse

$N_{réal} = 100$  réalisations du processus de série d'ondelette aléatoire log-normale ont été synthétisées, à l'aide de l'ondelette de Daubechies avec 6 moments nuls, avec les paramètres suivants :  $r = 2^{-15}$ ,  $N_{int} = 2^2$ ,  $m = 0.5$  et  $\sigma = 0.3$ . L'analyse est effectuée à l'aide de l'ondelette de Daubechies à 2 moments nuls pour les coefficients dominants, et à l'aide de la dérivée seconde de gaussienne, qui possède donc elle-aussi 2 moments nuls (cf. l'annexe B) pour les coefficients mmto. La zone de régression linéaire définissant les exposants est toujours commune aux deux formalismes.

Ce sont donc exactement les mêmes paramètres que ceux utilisés au paragraphe 7.3, et les résultats reportés ci-dessous peuvent donc être directement comparés à ceux obtenus au paragraphe 7.3.

### Résultats

Les résultats sont portés sur la figure (7.5) : en trait continu est rappelé le spectre de singularités théorique  $D_{rws}(h)$ , et les ronds correspondent aux moyennes  $TL[\widehat{\zeta_{rws_i}^l}](h)$  (gauche) et  $TL[\widehat{\zeta_{rws_i}^m}](h)$  (droite) des transformées de Legendre des estimées obtenues avec les coefficients dominants ( $\widehat{\zeta_{rws_i}^l}(q)$ ) et les coefficients mmto ( $\widehat{\zeta_{rws_i}^m}(q)$ ). Seule la partie supérieure du spectre, celle qui est influencée par la présence de singularités oscillantes dans les séries d'ondelette aléatoires, est tracée.

Les deux formalismes, basés soit sur les coefficients dominants, soit sur les coefficients mmto, fournissent ici des résultats différents, contrairement à ce qui est observé pour les cascades d'ondelettes aléatoires, mais toutefois relativement proches. En particulier, il n'est pas possible de déceler des comportements clairement différents, comme cela a pu être fait au paragraphe 7.3 lorsque les formalismes multifractals basés sur les coefficients d'ondelette discrets et les coefficients dominants étaient comparés.

Il est donc difficile, seulement à partir de ces résultats, de tirer une quelconque conclusion quant-à la comparaison de ces deux formalismes. Un travail d'étude numérique des performances statistiques de ces deux formalismes multifractals a récemment été entrepris avec S. Roux, du laboratoire de physique de l'ÉNSL. Les premiers résultats [149] portent seulement sur un processus multifractal "classique", les marches aléatoires multifractales (cf. l'annexe D), mais la même étude doit être effectuée sur le processus de série d'ondelette aléatoire, qui pourra ainsi peut être trancher la question qui vient d'être soulevée.

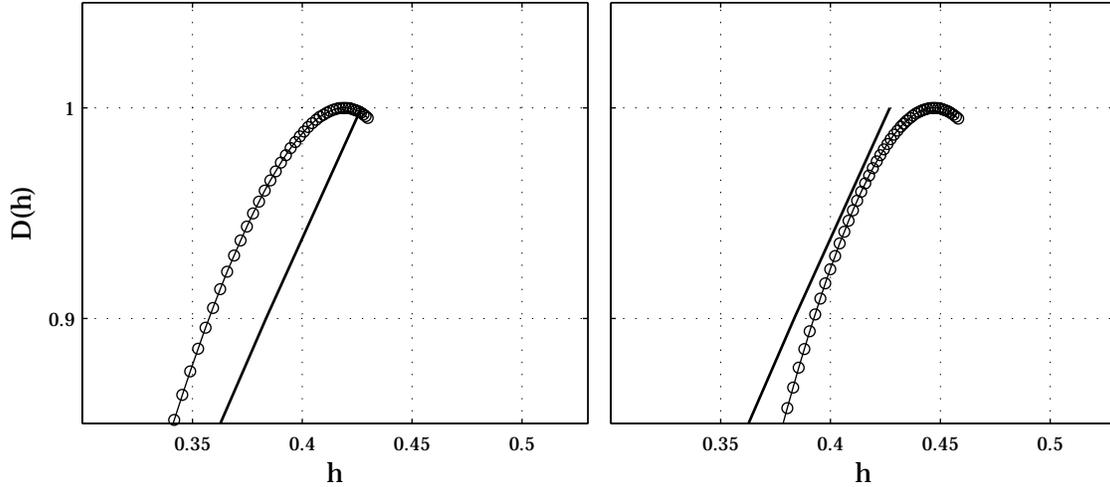


FIG. 7.5 – **Séries d’ondelette aléatoires.** Trait continu :  $D_{rws}(h)$ .  $\circ$  :  $TL[\widehat{\zeta_{rws_i}^l}](h)$  (gauche) et  $TL[\widehat{\zeta_{rws_i}^m}](h)$  (droite).

## 7.7 Conclusions

La mise en oeuvre pratique du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants a donc été effectuée, avec la mise au point de codes informatiques. C’est un apport important de ce travail de thèse, puisque ce formalisme, récemment introduit par S. Jaffard [73], n’avait pas été auparavant mis en oeuvre numériquement, ni confronté à l’analyse pratique de processus multifractals synthétiques [95]. On a donc pu numériquement le caractériser sur divers exemples de processus aléatoires multifractals.

En comparant les résultats obtenus avec le formalisme multifractal basé sur les coefficients d’ondelette discrets, il a clairement été mis en évidence les conclusions suivantes, attendues théoriquement d’après les travaux de S. Jaffard [70, 72, 73]. Le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants possède un cadre d’application plus large que le formalisme multifractal basé sur les coefficients d’ondelette discrets, puisqu’il s’applique à toutes les fonctions uniformément höldériennes, y compris à celles contenant des singularités oscillantes de type chirp. Il permet de plus la mesure complète du spectre de singularités de la fonction étudiée. Il est alors possible de détecter la présence de singularités oscillantes dans les signaux, si les résultats obtenus par les formalismes multifractals basés sur les coefficients d’ondelette discrets et les coefficients dominants sont différents, comme c’est le cas pour les séries d’ondelette aléatoires. Cette méthode ne permet en revanche pas de conclure à l’absence de singularités oscillantes.

On vient donc de vérifier que *le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants est bien un outil plus puissant que le formalisme multifractal basé sur les coefficients d’ondelette discrets* lorsqu’il s’agit d’effectuer l’analyse multifractale pratique de fonctions.



## Chapitre 8

# Application à l'analyse multifractale de la turbulence pleinement développée

Pour conclure cette partie, nous allons voir comment le nouvel outil précédemment présenté, le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants, peut être utilisé sur des signaux réels, issus d'expériences de turbulence pleinement développée.

La mesure du spectre de singularités à partir de données expérimentales est un enjeu important dans le domaine de la turbulence, car il est l'un des éléments principaux de la description théorique des signaux de vitesse turbulente, à la suite des travaux de Parisi et Frisch [138] notamment, et a suscité de nombreux travaux d'analyse de données (se reporter à la référence [58] pour un exposé de tous ces travaux). Les premiers formalismes multifractals ne permettant que la mesure de la partie gauche du spectre de singularités, il a fallu attendre les travaux d'A. Arneodo et son équipe [16, 11, 147] (le formalisme multifractal basé sur les coefficients  $m$  et  $t$ , cf. l'annexe E) pour avoir des résultats sur la partie droite du spectre de singularités des signaux de vitesse. Puisqu'un cadre mathématique pour ce formalisme fait encore défaut, il semble intéressant d'appliquer le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants à des signaux expérimentaux de vitesse turbulente, afin d'effectuer la mesure complète du spectre à l'aide d'un outil mathématiquement bien fondé comme on vient de le voir. Cette mesure va être effectuée pour certains signaux, mais il sera aussi montré que l'usage de cet outil doit être soigneusement contrôlé.

De plus, malgré plusieurs travaux, essayant soit de détecter la présence de singularités oscillantes isolées [67, 81, 32], soit de construire un formalisme multifractal (dit grand-canonique) généralisant la notion de spectre de singularités en tenant compte du coefficient d'oscillation  $\beta$  (cf. le chapitre 3.3) [15, 12, 13, 14], la présence de singularités oscillantes dans les signaux de vitesse turbulente reste une question ouverte.

### 8.1 Étude des fonctions de structure

Pour appliquer les formalismes multifractals, il faut commencer par déterminer la gamme d'échelles à l'intérieur de laquelle les fonctions de structure se comportent en loi de puissance de l'échelle  $2^j$  (on rappelle que les échelles de cette gamme sont appelées en turbulence pleinement développée échelles inertielles). En effet, c'est à l'intérieur de cette gamme que sera effectuée une régression linéaire (dans un diagramme log-log) permettant la mesure des exposants  $\zeta_v^d(q)$  ou  $\zeta_v^l(q)$ .

### 8.1.1 Fonctions de structure $S_v^d(q, j)$ et $S_v^l(q, j)$

Les fonctions de structure  $S_v^d(q, l)$  et  $S_v^l(q, j)$ , définies dans les chapitres précédents ont ainsi été mesurées sur les deux jeux de données ici étudiés. Notons enfin que l'ondelette utilisée pour l'analyse des signaux tout au long de ce chapitre est l'ondelette de Daubechies avec 3 moments nuls (cf. annexe B).

**Données ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$**

Commençons par les données de vitesse mesurées dans un jet turbulent de nombre de Reynolds  $R_\lambda \simeq 380$  (cf. le chapitre 2). Sur la figure 8.1 sont portées (à gauche) les fonctions de structure d'ordre 1 (moyennées sur les 80 runs expérimentaux que composent ce jeu de données), basées sur les coefficients d'ondelette discrets ( $S_v^d(1, j)$ ) et sur les coefficients dominants ( $S_v^l(1, j)$ ). Notons que  $2^j$  désigne le rapport de l'échelle d'analyse à l'échelle  $a_0 = 1$  m (donc  $2^j$  est directement l'échelle d'analyse exprimée en mètres).

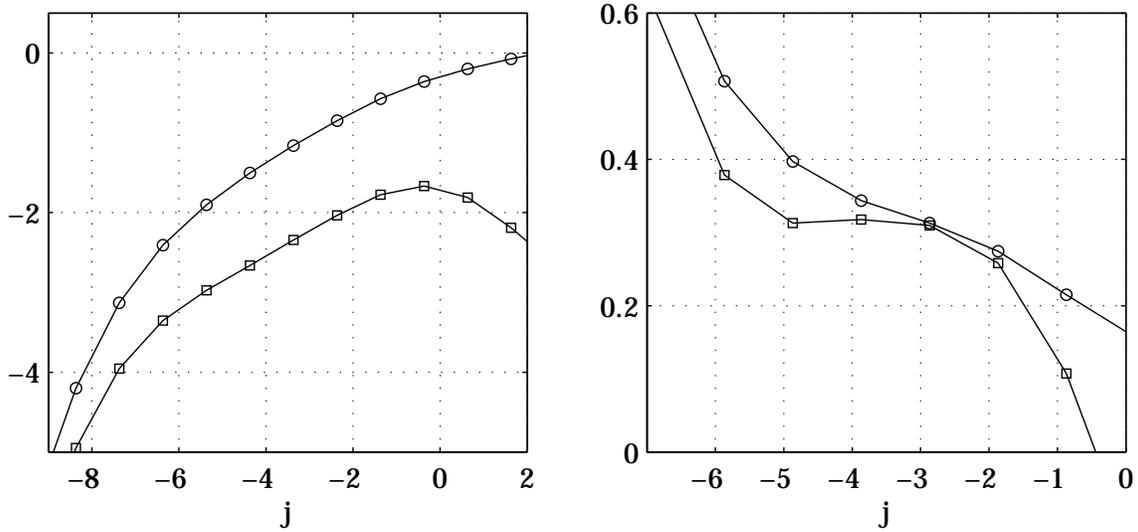


FIG. 8.1 – **Données de l'ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$ .** Droite :  $\log_2 (S_v^d(1, j))$  ( $\square$ ) et  $\log_2 (S_v^l(1, j))$  ( $\circ$ ) en fonction de  $j = \log_2(a/a_0)$ . Gauche : exposants locaux correspondants.

Deux observations sont à faire. Premièrement, on constate bien l'existence d'une gamme d'échelles inertielles, à l'intérieur de laquelle  $S_v^d(1, j)$  se comporte comme une loi de puissance. En effet l'*exposant local*, défini en  $j$  comme la dérivée (numérique) de  $\log_2 S_v^d(1, j)$  selon  $j = \log_2(a/a_0)$  :  $\log_2 S_v^d(1, j + 1/2) - S_v^d(1, j - 1/2)$  est raisonnablement constante<sup>1</sup> pour  $j$  compris environ entre  $j = -5.5$  et  $j = -2.5$ , c'est-à-dire sur environ trois octaves. Il apparaît alors justifié de mesurer un exposant  $\zeta_v^d(1)$  dans cette gamme d'échelles.

En revanche, la fonction de structure  $S_v^l(1, j)$  ne présente pas un tel comportement : la quantité  $\log_2 S_v^l(1, j)$  apparaît partout courbée, et il ne semble pas exister de gamme d'échelles pour laquelle elle soit raisonnablement linéaire, contrairement à  $S_v^d(1, j)$ . Cela se traduit clairement lorsqu'on s'intéresse à l'exposant local (figure de droite) : il ne présente pas de "plateau" comme dans le cas

<sup>1</sup>Ainsi  $\log_2 S_v^d(1, j)$  est linéaire selon  $j$  et  $S_v^d(1, j)$  se comporte donc raisonnablement comme une loi de puissance.

précédent, et il apparaît dangereux de faire l'hypothèse d'un comportement en loi de puissance de cette fonction de structure, et donc de mesurer un exposant  $\zeta_v^l(1)$ .

### Données Modane, $R_\lambda \simeq 2000$

Intéressons-nous désormais aux données de vitesse turbulente de Modane, dont le nombre de Reynolds est  $R_\lambda \simeq 2000$  (cf. annexe 2). Les résultats sont présentés sur la figure 8.2.

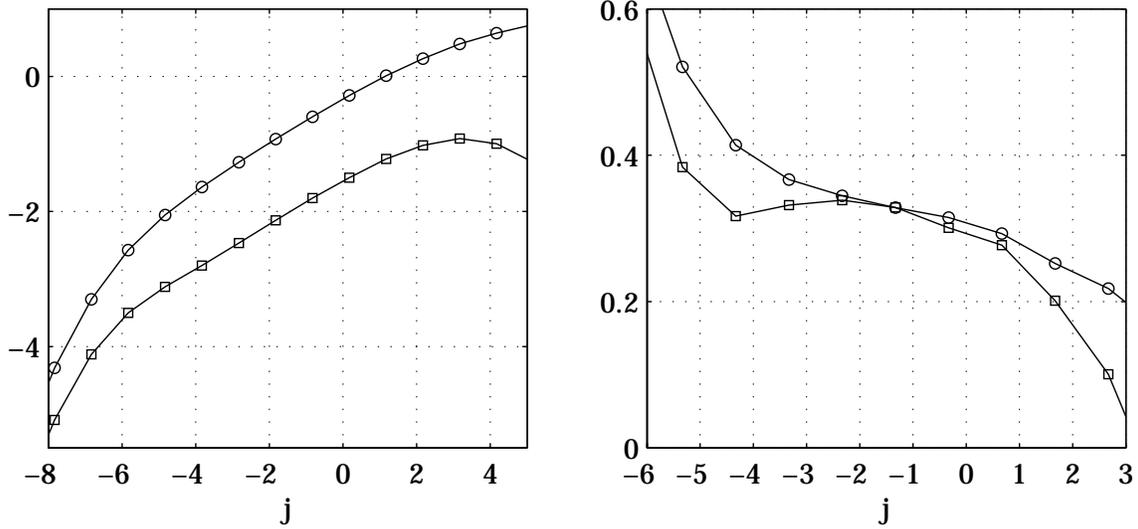


FIG. 8.2 – **Données de Modane**,  $R_\lambda \simeq 2000$ . Droite :  $\log_2(S_v^d(1, j))$  ( $\square$ ) et  $\log_2(S_v^l(1, j))$  ( $\circ$ ) en fonction de  $j = \log_2 a$ . Gauche : exposants locaux correspondants.

On retrouve un comportement raisonnablement en loi de puissance pour la fonction de structure  $S_v^d(1, j)$ , depuis l'octave  $j \simeq -5$  jusqu'à l'octave  $j \simeq 0$  : l'exposant local y est à peu près constant. Il apparaît alors justifié d'effectuer une régression linéaire sur cette gamme d'échelles, ce qui permet de mesurer les exposants  $\zeta_v^d(q)$ , sur environ 5 octaves<sup>2</sup>.

La fonction de structure  $S_v^l(1, j)$  se comporte aussi raisonnablement en loi de puissance, mais sur une gamme d'échelles plus réduite que  $S_v^d(1, j)$  : l'exposant local varie peu (et beaucoup moins que celui des données ÉNSL) entre les octaves  $j \simeq -3$  et  $j \simeq 0$ . Contrairement aux données ÉNSL précédemment étudiées, il apparaît ici justifié de définir et de mesurer un exposant  $\zeta_v^l(q)$ .

### Conclusions

L'utilisation des coefficients dominants limite les comportements en loi de puissance des fonctions de structure, comme on pouvait s'y attendre. Les  $S_v^d(j, k)$  exhibent un comportement en loi de puissance à partir d'une octave  $j_d$ , correspondant au début de la zone inertielle, et ce n'est donc qu'à partir de cette octave que les coefficients d'ondelette discrets traduisent le comportement multifractal des données. Or les coefficients dominants sont définis comme le supremum des modules des coefficients d'ondelette discrets d'échelles plus fines (et temporellement voisins, cf. le paragraphe 6.1.1). Pour que les coefficients dominants traduisent les comportement multifractal

<sup>2</sup>La zone inertielle est plus grande que celle des données ÉNSL de Reynolds  $R_\lambda \simeq 380$ . C'est attendu, puisque la longueur de la zone inertielle augmente avec le nombre de Reynolds.

des données, il fait que ce supremum soit pris sur des coefficients d'ondelette discrets traduisant eux-mêmes ce comportement multifractal. Comme les modules des coefficients d'ondelette discrets augmentent globalement avec l'octave  $j$  (la fonction de structure  $S_v^d(1, j)$  est justement la moyenne du module de ces coefficients à chaque octave), le supremum à l'octave  $j$  est en pratique réalisé par un coefficient d'ondelette discret dont l'octave est  $j$  ou légèrement plus petit que  $j$  :  $j - 1, j - 2$ . Ainsi, si les coefficients d'ondelette discrets traduisent le comportement multifractal des données à partir de l'octave  $j_d$ , les coefficients dominants ne le traduiront qu'à partir de  $j_d + 1$  ou  $j_d + 2$ . En particulier, l'octave  $j_l$  à partir de laquelle les fonctions de structure  $S_v^l(q, j)$  se comportent en loi de puissance, sera plus grande d'une unité ou deux que l'octave  $j_d$ . La gamme d'échelles  $2^j$  où les  $S_v^l(q, j)$  exhibent un comportement en loi de puissance est donc plus réduite que celle correspondant aux  $S_v^d(q, j)$ .

C'est bien ce que l'on observe sur les données de Modane, où la zone de comportement en loi de puissance passe d'environ  $j \in [-5, 0]$  pour  $S_v^d(1, j)$  à  $j \in [-3, 0]$  pour  $S_v^l(1, j)$ . Bien que cette gamme d'échelles soit plus réduite, on peut cependant y effectuer correctement la mesure des exposants  $\zeta_v^l(q)$ .

En revanche, pour les données de l'ÉNSL, la zone inertielle semble trop courte : le nombre d'octaves nécessaires à l'établissement d'un comportement en loi de puissance des  $S_v^l(q, j)$  est à peine plus petit que la taille de la zone inertielle elle-même : on n'observe alors plus de comportement en loi de puissance. C'est pourquoi il semble dangereux de mesurer des exposants  $\zeta_v^l(q)$  sur ces données. On essaiera quand même cette mesure, entre les octaves  $j \simeq -4.5$  à  $j \simeq -2.5$ , mais on verra que les résultats obtenus ne sont pas cohérents.

### 8.1.2 Influence des échelles dissipatives

À la lumière de la discussion du paragraphe précédent, on peut se poser la question suivante : est-ce qu'il ne faut pas définir les coefficients dominants qu'à partir des coefficients d'ondelette discrets correspondant aux échelles de cette même zone inertielle ? En effet, on peut penser que les échelles plus petites que celles de la zone inertielle, que l'on appelle usuellement échelles dissipatives [58], perturbent trop (par l'intermédiaire des coefficients d'ondelette discrets correspondants) les coefficients dominants de la zone inertielle.

On définit donc les *coefficients dominants réduits*, notés  $l'_v(j, k)$ , de la façon suivante : si  $j_{min}$  est la plus petite octave de la zone inertielle, on définit pour  $j \geq j_{min}$  :

$$l'_v(j, k) = \sup_{\lambda(j', k') \subset 3\lambda(j, k) / j' \geq j_{min}} |d_v(\lambda(j', k'))|, \quad (8.1)$$

avec les mêmes notations qu'au chapitre 6. Le supremum définissant les coefficients dominants ne sera donc plus pris sur toutes les octaves plus petites que  $j$ , jusqu'à la plus petite octave numériquement disponible  $j_0$ , mais seulement jusqu'à l'octave  $j_{min} > j_0$ .

On construit ainsi de nouvelles fonctions de structure, notées  $S_v^{l'}(q, j)$  et définies pour  $j \geq j_{min}$  à l'aide de ces coefficients dominants réduits :

$$S_v^{l'}(q, j) = \frac{1}{n(j)} \sum_{k=1}^{n(j)} (l'_v(j, k))^q.$$

Les fonctions de structure  $S_v^{l'}(1, j)$  ont été calculées pour diverses valeurs de  $j_{min}$ , ainsi que les exposants locaux correspondants, et tracées sur la figure 8.3.

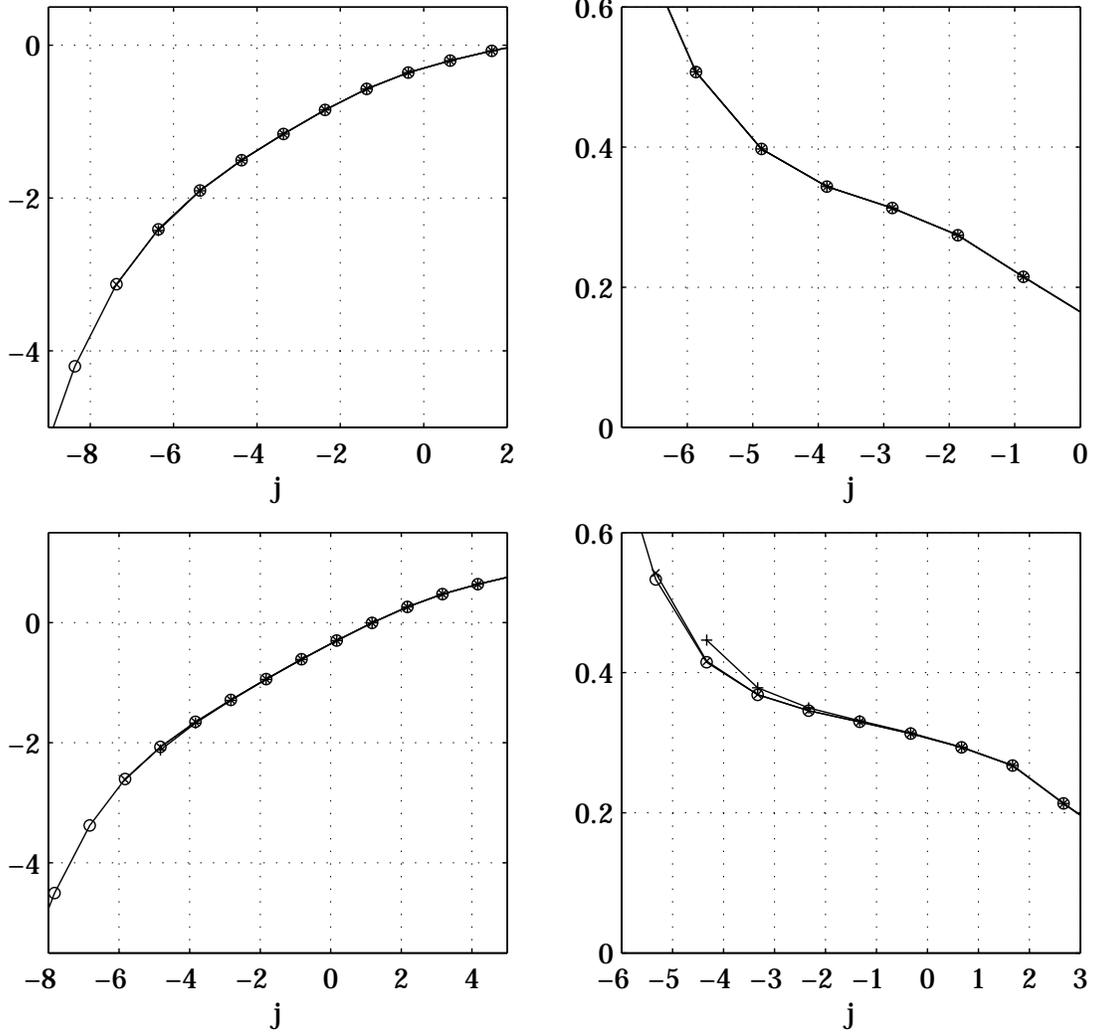


FIG. 8.3 – Fonctions de structure "classiques" et "réduites" (gauche) et exposants locaux correspondants (droite).  $\log_2 S_v^l(q, j)$  (o) et  $\log_2 S_v^{l'}(q, j)$ , pour les données de l'ÉNSL (haut) :  $j_{min} = j_0 + 5$  (x) et  $j_{min} = j_0 + 6$  (+), et pour les données de Modane (bas) :  $j_{min} = j_0 + 4$  (x) et  $j_{min} = j_0 + 5$  (+).

On voit clairement que cette modification de la définition des coefficients dominants, avec l'introduction d'une octave-plancher  $j_{min}$  ne modifie pas l'allure des fonctions de structure : dès la plus petite octave  $j_{min}$  pour laquelle elles sont définies, les fonctions de structure  $S_v^{l'}(1, j)$  coïncident quasi-parfaitement avec la fonction de structure classique  $S^l(1, j)$ . On n'obtient pas en particulier un "meilleur" comportement en loi de puissance.

Cette méthode n'apporte donc rien, et ne sera pas utilisée par la suite.

## 8.2 Mesure du spectre de singularités

### 8.2.1 Méthodologie

#### Choix de la zone de régression linéaire

On utilisera donc les fonctions de structure  $S_v^d(q, j)$  et  $S_v^l(q, j)$  pour mesurer les exposants  $\zeta_v^d(q, j)$  et  $\zeta_v^l(q, j)$ . Il faut pour cela effectuer une régression linéaire de  $\log_2 S_v^{q,l}(q, j)$  en fonction de  $j = \log_2 a$ . Pour les données de Modane, les régressions linéaires seront effectuées de l'octave  $j \simeq -5$  à  $j \simeq 0$  pour la mesure de  $\zeta_v^d(q)$ , et de  $j \simeq -3$  à  $j \simeq 0$  pour  $\zeta_v^l(q)$ .

Pour les données de l'ÉNSL, elles seront effectuées de  $j \simeq -5.5$  à  $j \simeq -2.5$  pour  $\zeta_v^d(q)$ . Bien que le bien-fondé de la mesure des exposants  $\zeta_v^l(q)$  sur les fonctions de structure  $S_d^l(q, j)$  semble discutable, on en effectuera quand-même la mesure, afin de vérifier si l'application du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants a un sens sur ces données. La régression linéaire pour les exposants  $\zeta_c^l(q)$  sera effectuée de  $j \simeq -4.5$  à  $j \simeq -2.5$ .

#### Précisions sur le traitement des données

Une fois la zone de régression linéaire bien définie pour ces signaux expérimentaux, on peut procéder à la mesure des exposants  $\zeta_v^{d,l}(q)$ , et donc, par applications des formalismes multifractals correspondants, aux spectres de singularités  $D_v^{d,l}(h)$ .

Les données de l'ÉNSL ( $R_\lambda \simeq 380$ ) et de Modane ( $R_\lambda \simeq 2000$ ) sont traitées de la façon suivante. Les exposants  $\zeta_v^{d,l}(q)$  ont été mesurés sur chacun des 80 runs (contenant chacun environ  $2^8$  échelles intégrales) pour les données ÉNSL. Les données de Modane ont été découpées en 64 signaux de 401408 points, chaque signal contenant environ  $2^6$  échelles intégrales. Les données de Modane (qui contiennent une seule mais "longue" acquisition, d'environ 3100 échelles intégrales) ont été préalablement découpées en plusieurs signaux de longueur égale afin de s'affranchir des effets de variabilité : les estimées des exposants  $\widehat{\zeta}_v^{d,l}(q)$  et leurs transformées de Legendre sont des variables aléatoires avec une moyenne et un écart-type : en moyennant sur plusieurs mesures, on "gomme" les effets d'écart-type et récupère le comportement moyen qui nous intéresse. On reviendra sur ces considérations dans la partie III.

Les transformées de Legendre des  $\widehat{\zeta}_v^{d,l}(q)$  sont alors calculées sur chacun des 80 (données ÉNSL) ou 64 (données Modane) signaux, puis moyennées, ce qui définit  $TL[\widehat{\zeta}_v^{d,l}](h)$ .

### 8.2.2 Résultats et validité de la mesure

Les résultats sont reportés dans la figure 8.4 comme dans le chapitre précédent : on a tracé la moyenne  $TL[\widehat{\zeta}_v^{d,l}](h)$  calculées sur les 80 ou 64 signaux.

L'utilisation du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets fournit des résultats classiques pour la partie gauche du spectre de singularités, pour les deux jeux de données, et ne sera pas plus discutée. L'utilisation du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants donne elle des résultats nouveaux, qu'il convient de discuter.

Les données de Modane se comportent comme les signaux multifractals synthétiques : la moyenne  $TL[\widehat{\zeta}_v^l](h)$  des transformées de Legendre de  $\widehat{\zeta}_v^l(q)$  est bien une fonction prenant ses valeurs dans  $[0, 1]$ ,

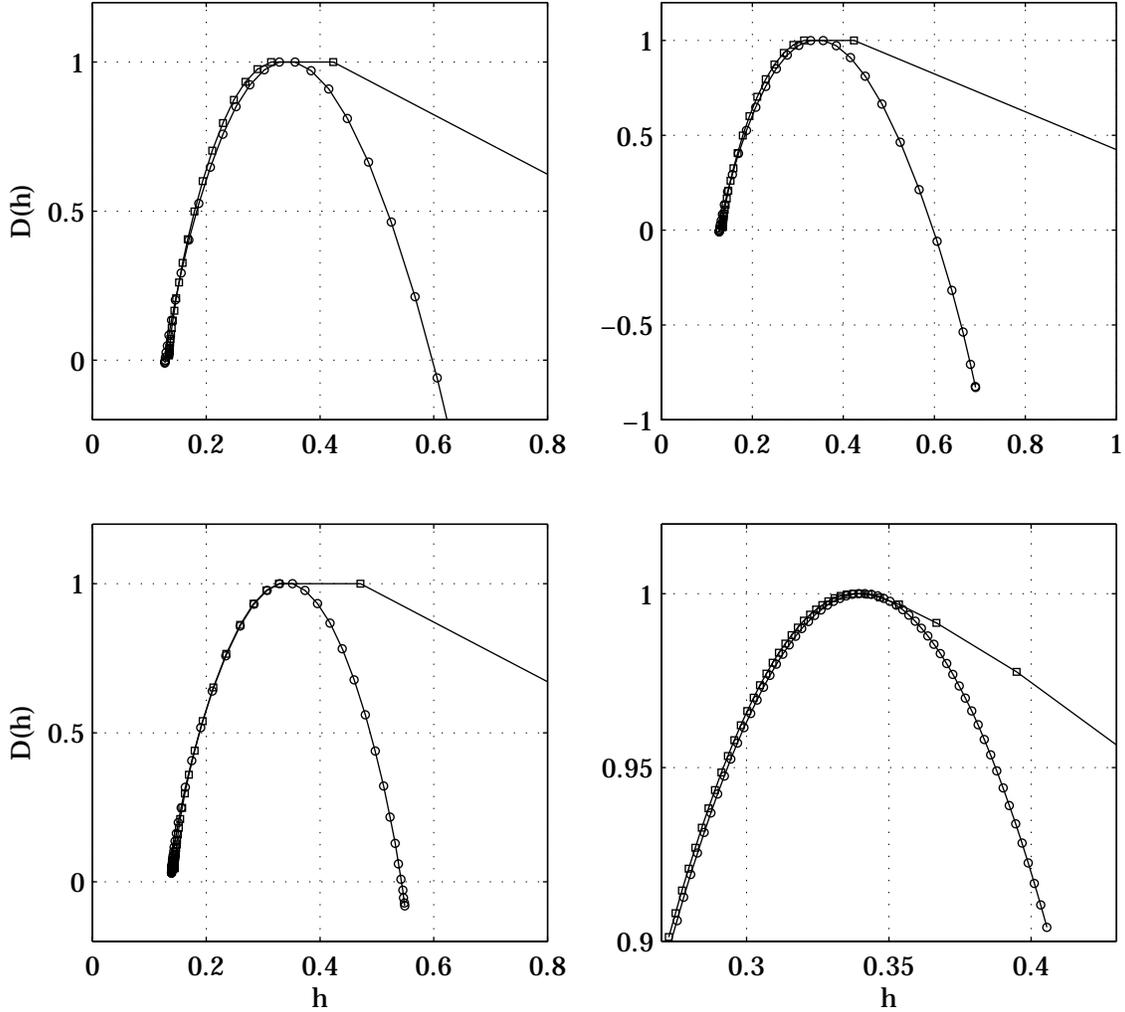


FIG. 8.4 –  $\overline{TL[\widehat{\zeta}_v^d]}(h)$  (□) et  $\overline{TL[\widehat{\zeta}_v^l]}(h)$  (○). Données de l'ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$  (haut) et données de Modane,  $R_\lambda \simeq 2000$  (bas).

et elle limitée par deux points d'ordonnées  $D \simeq 0$ . On retrouve le même comportement que celui issu de l'analyse de cascades d'ondelette aléatoires (cf. chapitre 7). Cette fonction semble de plus être symétrique autour de la droite  $h \simeq 0.34$ .

En revanche, on observe des résultats incohérents pour les données de l'ÉNSL. En effet, la moyenne des transformées de Legendre  $\overline{TL[\widehat{\zeta}_v^l]}(h)$  n'est pas bornée entre 0 et 1. Pour la partie gauche, les résultats sont proches de ceux donnés par le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets, bien que légèrement différents. Par contre, les résultats pour la partie droite ne sont pas cohérents : la transformée de Legendre diverge et prend des valeurs largement négatives. Or des valeurs négatives, obtenues par transformées de Legendre de la moyenne d'exposants et non sur une réalisation particulière, n'a pas de sens, comme il sera discuté dans la partie suivante de ce travail de thèse : la dimension de Hausdorff définissant le spectre de singularités est forcément positive. Le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants ne fonctionne

donc pas pour les données de l'ÉNSL, comme on pouvait s'y attendre, puisqu'on avait déjà fait remarquer (cf. paragraphe 8.1) que la mesure des exposants  $\zeta_v^l(q)$  était pour le moins dangereuse, les fonctions de structure  $S_v^l(q, j)$  ne présentant pas vraiment de comportement en loi de puissance. Il n'est donc pas possible d'appliquer le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants pour ces données.

### Autres données

Deux autres jeux de données de vitesse turbulente ont été analysés de façon analogue. Il s'agit de deux expériences de jet turbulent (cf. le chapitre 2), de nombre de Reynolds  $R_\lambda \simeq 580$  (données de l'ÉNSL) et  $R_\lambda \simeq 3200$  (données GReC).

Les données ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 580$  aboutissent au même résultat que les données de l'ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$  : la zone inertielle est trop petite, et les fonctions de structure  $S_v^l(q, j)$  ne se comportent pas en loi de puissance, contrairement aux  $S_v^d(q, j)$ . Il n'est donc pas possible d'utiliser non-plus le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants.

Pour les données GReC, le nombre de Reynolds  $R_\lambda \simeq 3200$  est a priori suffisant pour pouvoir obtenir un comportement en loi de puissance des fonctions de structure  $S_v^l(q, j)$ . Mais les résultats sur les données GReC ne sont pas encore disponibles, à cause du problème technique suivant. La partie droite du spectre de singularités correspond aux exposants  $\zeta_v^l(q)$  d'ordres  $q$  négatifs. Les fonctions de structure  $S_v^l(q, j)$  associées dépendent essentiellement des plus petits coefficients dominants  $l_v(j, k)$  (on rappelle qu'ils sont nécessairement positifs) puisqu'elles sont la moyenne temporelle de leurs puissances  $q$ -ièmes. Or les plus petits coefficients d'ondelette discrets, et donc les plus petits coefficients dominants, sont ceux qui sont le plus affectés par la présence de bruit, issu du processus de mesure, dans les données<sup>3</sup>. Il faut donc effectuer un pré-traitement aux données, afin d'ôter la composant de bruit, à *toutes* les échelles. Une opération classique de filtrage linéaire passe-bas est ainsi inutile, et il faut utiliser des outils plus appropriés (par exemple un filtre de Wiener). Ce travail n'a pu être encore effectué.

### Conclusion

L'usage du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants doit donc soigneusement être contrôlé, en étudiant de façon précise l'allure des fonctions de structure  $S_v^l(q, j)$ . Il ne faudrait en particulier pas se contenter de détecter la présence d'un comportement en loi de puissance sur les fonctions de structure construites à partir des coefficients d'ondelette discrets :  $S_v^d(q, j)$ , d'en déduire une zone de régression linéaire, et ensuite appliquer "en aveugle" le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants, en mesurant les exposants  $\zeta_v^l(q)$  sur la zone de régression linéaire précédemment définie.

#### 8.2.3 Présence de singularités oscillantes ?

Essayons de voir si les résultats obtenus permettent de détecter la présence de singularités oscillantes dans le signal de vitesse de Modane. Comparons pour cela les résultats obtenus avec les deux formalismes.

Ces résultats montrent que les deux formalismes fournissent la *même mesure* de la partie gauche du spectre de singularités (cf. figure 8.4 en bas à droite), y compris dans la partie supérieure du spectre de singularités. C'est en effet dans cette partie du spectre de singularités que les deux formalismes donnent des résultats différents pour les séries d'ondelette aléatoires, ce qui a été interprété

<sup>3</sup>En effet, si au signal de vitesse est superposé un bruit additif :  $s = v + b$ , alors  $d_s(j, k) = d_v(j, k) + d_b(j, k)$ .

comme la signature de la présence de singularités oscillantes dans ce processus (cf. paragraphe 7.3).

Cette comparaison ne permet donc pas de détecter la présence de singularités oscillantes. Ce n'est pas pour autant qu'elles n'existent pas : de telles singularités peuvent a priori exister sans pour autant apporter des contributions dominantes au spectre de singularités  $D_v(h)$ , comme il a été expliqué au chapitre précédent (cf. le paragraphe 7.4).

## 8.2.4 Comparaisons aux modèles d'intermittence

En ce qui concerne les données de Modane ( $R_\lambda \simeq 2000$ ), l'utilisation du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants apparaît justifiée, et on peut donc discuter les résultats obtenus. Puisque ce formalisme permet la mesure de la totalité du spectre de singularités du signal de vitesse turbulente de Modane, nous pouvons comparer les résultats obtenus aux modèles classiques d'intermittence, qui se traduisent par des prédictions du spectre de singularités, non seulement sur leur partie gauche, mais aussi pour leur partie droite.

### Modèles d'intermittence

Les modèles d'intermittence se veulent *universels* [58], c'est-à-dire valables pour toutes les expériences de turbulence pleinement développée, quelle que soit leur nature (jet turbulent, turbulence de grille, ...). Ils respectent en particulier la contrainte suivante : l'exposant d'ordre 3 est fixé :  $\zeta_v(3) = 1$ . Cette condition correspond à la loi des 4/5 de Kolmogorov [83], qui stipule que la fonction de structure (des accroissements de vitesse) d'ordre 3 est une loi de puissance d'exposant 1. Cette hypothèse ne s'avère en fait valable que dans la limite des nombres de Reynolds infinis, et n'est pas vérifiée dans le cas des expériences de turbulence, même pour un nombre de Reynolds  $R_\lambda \simeq 2000$  comme pour les données de Modane, ce qui se traduit par une valeur de l'exposant  $\zeta_v(3)$  plus petite que 1. Cette discussion fait l'objet de la partie IV. En revanche, il semble que les exposants renormalisés par  $\zeta_v(3)$  ( $\neq 1$ ) :  $\zeta_v(q)/\zeta_v(3)$ , permettent de s'affranchir de la particularité de l'expérience (nature : jet, grille et nombre de Reynolds) et offrent un comportement universel, c'est-à-dire des valeurs communes pour toutes les expérience de turbulence [10] (se reporter à la partie IV). C'est d'ailleurs un point de vue très répandu dans la littérature sur ce sujet. On étudiera donc ici la transformée de Legendre des exposants  $\zeta_v^{d,l}(q) = \zeta_v^{d,l}(q)/\zeta_v^{d,l}(3)$  et non pas celle de  $\zeta_v^{d,l}(q)$ .

Il y a essentiellement deux modèles d'intermittence [58] pour les fluctuations de vitesse turbulente eulérienne : le modèle log-normal, issu des travaux de Kolmogorov et Obukhov [85, 135], et le modèle de She-Lévêque [160, 100]. Le modèle log-normal correspond à une expression quadratique pour le spectre de singularités :

$$D_{v,\ln}(h) = \begin{cases} 1 - \frac{(h-C_1)^2}{2C_2} & \text{si } C_1 - \sqrt{2C_2} \leq h \leq C_1 + \sqrt{2C_2} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}, \quad (8.2)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux paramètres<sup>4</sup>. Les exposants  $\zeta_{ln}(q)$  correspondants, sont, pour  $-\sqrt{2/C_2} \leq q \leq \sqrt{2/C_2}$  ( $\sqrt{2/C_2} \simeq 8.94$ )<sup>5</sup> :

$$\zeta_{v,\ln}(q) = C_1 q - \frac{C_2}{2} q^2. \quad (8.3)$$

<sup>4</sup>Ce sont les deux premiers cumulants du logarithme des accroissements de la vitesse. L'analyse en cumulants permet une méthode alternative des propriétés multifractales de la vitesse turbulente [58, 51, 42].

<sup>5</sup>La discussion de ces ordres critiques limitant le comportement parabolique non-linéaire des exposants  $\zeta(q)$  fait l'objet de la partie III.

$C_1$  et  $C_2$  sont liés par la relation  $C_1 = 1/3 + 3C_2/2$  afin d'imposer  $\zeta_{v,ln}(3) = 1$ . Il n'y a donc un seul paramètre libre, et on utilise usuellement  $C_2$ . Ce paramètre (parfois appelé paramètre d'intermittence) a fait l'objet de nombreux travaux et mesures [19, 41, 104, 51], et la valeur couramment admise est :

$$C_2 \simeq 0.025 \pm 0.003,$$

ce qui impose  $C_1 = 1/3 + 3C_2/2 \simeq 0.37$ .

L'autre modèle est dû à Z.-S. She et E. Lévêque [160, 100], et correspond à une modélisation log-Poisson (contrairement à la modélisation log-normale précédente) des accroissements de vitesse [52, 161, 35], et aboutit à la prédiction suivante, sans aucun paramètre libre (on utilise des notations introduite dans la partie III) :

$$D_{v,SL}(h) = \begin{cases} A_1 (h - \frac{1}{9}) - A_2 (h - \frac{1}{9}) \ln (h - \frac{1}{9}) - 2 & \text{si } h_*^+ \leq h \leq h_*^- \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}, \quad (8.4)$$

avec  $A_1 = 3 \left( \frac{1 + \ln(\ln(\frac{3}{2}))}{\ln(\frac{3}{2})} - 1 \right)$ ,  $A_2 = \frac{3}{\ln(\frac{3}{2})}$  et  $h_*^+ \simeq 0.162$  et  $h_*^- \simeq 0.694$ . Les exposants correspondants sont, pour  $q_*^- \leq q \leq q_*^+$ , avec  $q_*^- \simeq -5.69$  et  $q_*^+ \simeq 12.36$  :

$$\zeta_{v,SL}(q) = \frac{q}{9} + 2 \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{q/3} \right]. \quad (8.5)$$

Ces deux modèles sont représentés sur la figure 8.5. Ils aboutissent à des spectres de singularités différents. Le modèle log-normal offre un spectre de singularités symétrique, alors que celui proposé par She-Lévêque est dissymétrique. De façon plus précise, les prédictions sont différentes essentiellement sur la partie droite du spectre de singularités, où elles diffèrent notablement, et coïncident quasi parfaitement sur la partie gauche de ce spectre. Comme les méthodes "classiques" de mesure de spectre de singularités (formalismes multifractals basés sur les coefficients d'ondelette discrets ou continus, ou même basé sur les accroissements) ne permettent d'obtenir que la partie gauche de ce spectre, on comprend tout l'intérêt qu'il y a à mesurer la partie droite du spectre de singularités si l'on veut discriminer entre ces deux modèles d'intermittence.

### Comparaison des résultats aux modèles

Les résultats obtenus sur les données de Modane ( $R_\lambda \simeq 2000$ ) sont ici comparés aux deux modèles d'intermittence que l'on vient de présenter.

Observons tout d'abord la transformée de Legendre moyenne  $\overline{TL[\widehat{\zeta}_v^l]}(h)$  (figure 8.5).  $\overline{TL[\widehat{\zeta}_v^l]}(h)$  est bien en désaccord avec les prédictions des modèles, comme on pouvait s'y attendre. En effet on mesure sur ce jeu de données :  $\widehat{\zeta}_v^l(3) \simeq 0.92$ .

En revanche,  $\overline{TL[\widehat{\zeta}_v^l]}(h)$  se rapproche bien plus des modèles d'intermittence<sup>6</sup>. Plus précisément, la partie gauche du spectre de singularités coïncide bien avec les deux modèles (qui, on le rappelle, donnent des prédictions très proches pour cette partie du spectre). En ce qui concerne la partie droite, où il est possible de discriminer entre les deux modèles (log-normal et She-Lévêque), les

<sup>6</sup>Notons que la transformée de Legendre de  $g(q) = \alpha f(q)$  est reliée à celle de  $f(q)$  par  $TL[g](h) = 1 + \alpha(TL[f](\alpha h) - 1)$ , ( $\min_q(qh - \alpha f(q))$  est obtenu pour  $h = \alpha f'(q)$ , et donc vaut :  $\alpha(qf'(q) - f(q))$ , c'en est donc une version dilatée.

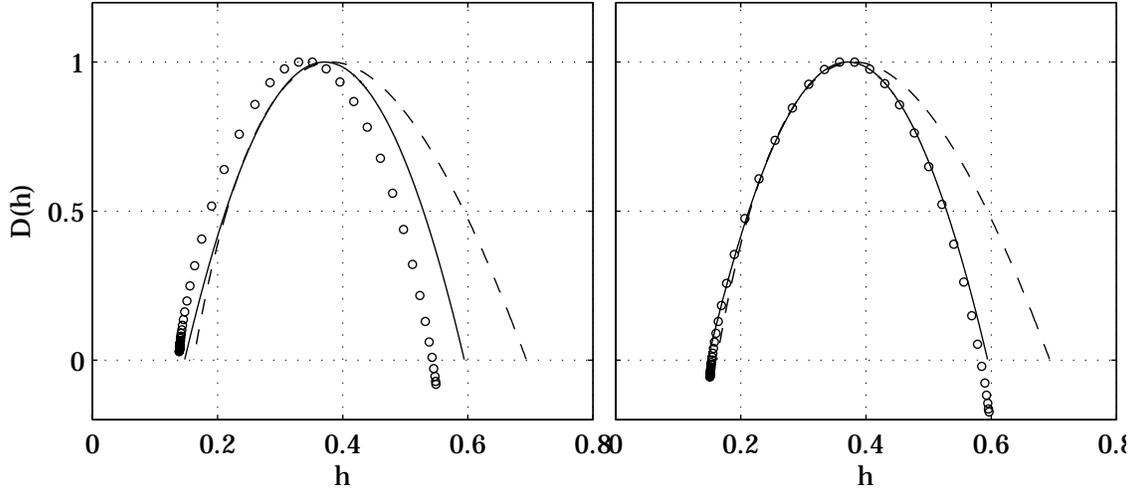


FIG. 8.5 – **Données de Modane**,  $R_\lambda \simeq 2000$ .  $TL[\widehat{\zeta}_v^l](h)$  (o, gauche) et  $TL[\widehat{\zeta}_v^{l'}](h)$  (o, droite). Modèle log-normal (avec  $C_2 = 0.025$ ) (trait continu) et modèle de She-Lévêque (trait discontinu).

résultats obtenus valident de façon assez claire la pertinence du modèle log-normal à la défaveur du modèle de She-Lévêque : le spectre de singularités est en bon accord avec les prédictions du modèle log-normal, mais s'écartent clairement de celles du modèle de She-Lévêque. Notons d'ailleurs que le spectre de singularités mesuré est assez symétrique (autour de  $h \simeq 0.37$ ).

Il est important de préciser que le paramètre libre du modèle log-normal,  $C_2$ , n'a pas été ajusté afin de coller aux résultats, mais a été choisi à  $C_2 = 0.025$ , valeur couramment admise dans la littérature [58, 19, 41, 104, 51]).

### Utilisation du formalisme multifractal basé sur les coefficients mmt0

Comparons ces résultats avec ceux obtenus à l'aide d'un autre formalisme (cf. figure 8.6), le formalisme multifractal basé sur les coefficients mmt0, introduit par A. Arneodo et son équipe [16, 11] (cf. l'annexe E), et qui permet, bien qu'il soit moins bien fondé mathématiquement que le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants, d'obtenir une mesure complète (parties gauche et droite) du spectre de singularités.

L'ondelette continue utilisée est une dérivée de gaussienne (cf. l'annexe B), famille d'ondelettes habituellement utilisée par l'équipe d'A. Arneodo pour effectuer l'analyse multifractale des signaux de vitesse turbulente [16, 11, 147], celle d'ordre trois, qui possède ainsi le même nombre de moments nuls que l'ondelette discrète utilisée (ondelette de Daubechies à trois moments nuls). La zone de régression linéaire permettant la mesure des exposants  $\zeta_v^m(q)$  est la même que celle utilisée pour la mesure des  $\zeta_v^l(q)$ <sup>7</sup>.

Notons que le problème, précédemment discuté, de la réduction de la taille de la gamme

<sup>7</sup>Puisque deux ondelettes différentes sont utilisées ici (l'ondelette de Daubechies à 3 moments nuls et l'ondelette gaussienne à 3 moments nuls), il est nécessaire de s'assurer que la régression linéaire soit effectuée sur la même gamme d'échelles. L'échelle associée à une ondelette est connue en déterminant la fréquence centrale du filtre passe-bande associé à cette ondelette [1, 103, 117], et en définissant alors l'échelle de l'ondelette comme l'inverse de cette fréquence centrale. On peut ainsi "recaler" entre elles les échelles associées à chaque ondelette.

d'échelles au sein de laquelle sont effectuées les régressions linéaires définissant les exposants, est identique avec les fonctions de structure définies à partir des coefficients mmto. Ces dernières voient leur gamme d'échelles de comportement "raisonnablement" en loi de puissance réduite de la même façon que ce qui est observé avec les fonctions de structure construites sur les coefficients dominants (cf. la figure 8.6 où les exposants locaux des fonctions de structure d'ordre 1 construites à l'aide des coefficients d'ondelette discrets, des coefficients dominants, des coefficients d'ondelette continus et des coefficients mmto sont reportés). Les données de l'ÉNSL ( $R_\lambda \simeq 380$  et  $R_\lambda \simeq 580$ ) ne peuvent ainsi pas non plus être analysées par cette méthode. Enfin, le problème du bruit pour les données GReC reste le même avec les coefficients mmto.

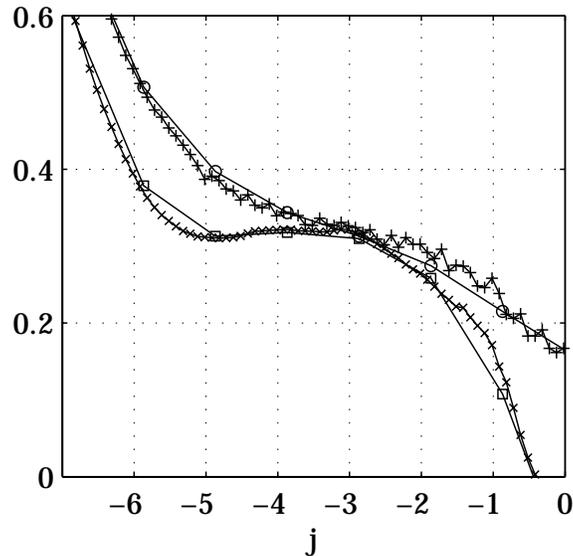


FIG. 8.6 – **Données de l'ÉNSL**,  $R_\lambda \simeq 380$ . Exposants locaux correspondant aux fonctions de structure construites à l'aide des coefficients d'ondelette discrets ( $\square$ ), des coefficients dominants ( $\circ$ ), des coefficients d'ondelette continus ( $\times$ ) et des coefficients mmto ( $+$ ).

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients mmto ne peut donc lui aussi n'être qu'appliqué aux données de Modane, et on ne peut ainsi comparer les formalismes multifractals basés sur les coefficients dominants et les coefficients mmto que sur ce jeu de données.

Les deux formalismes (basés sur les coefficients dominants ou mmto) aboutissent à des résultats concordants (cf. figure 8.7), mettant tous deux en évidence le caractère raisonnablement log-normal du spectre de singularités des signaux de vitesse turbulente .

## Conclusion

La mesure de l'ensemble (parties gauche et droite) du spectre de singularités des données de Modane a ainsi pu être effectuée, mettant en évidence que celui-ci est très raisonnablement décrit par le modèle log-normal de Kolmogorov-Obukhov [85, 135], avec la valeur couramment admise du paramètre d'intermittence ( $C_2 \simeq 0.025$ ). Cette conclusion est cohérente avec de précédents résultats obtenus par l'équipe d'A. Arneodo [147, 19, 20], qui apportent des preuves en faveur du caractère

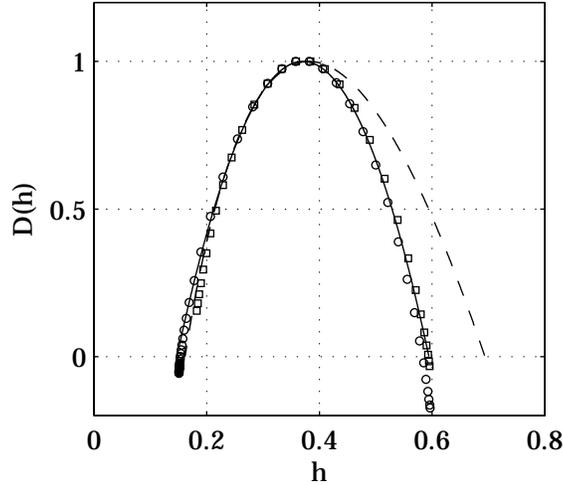


FIG. 8.7 – **Données de Modane**,  $R_\lambda \simeq 2000$ .  $\overline{TL[\widehat{\zeta}_v^l]}(h)$  (o) et  $\overline{TL[\widehat{\zeta}_v^m]}(h)$ . Modèle log-normal (avec  $C_2 = 0.025$ ) (trait continu) et modèle de She-Lévy (trait discontinu).

log-normal du spectre de singularités de la vitesse turbulente. Notons enfin que les très récents travaux de L. Chevillard [42] montrent que l’hypothèse d’un spectre de singularités log-normal permet une très bonne description des signaux de vitesse turbulente, y compris pour les échelles dissipatives (de l’ordre de l’échelle de Kolmogorov, cf. l’annexe A).

### 8.2.5 Conclusions et perspectives

Résumons tout d’abord les conclusions auxquelles les résultats présentés dans ce chapitre aboutissent. Il a tout d’abord été montré que l’utilisation du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants devait être soigneusement contrôlée : lorsque la zone de régression linéaire permettant la mesure des exposants (la zone inertielle) est trop courte, les fonctions de structure construites à l’aide des coefficients dominants ne se comportent plus en loi de puissance, alors que celles construites à l’aide des coefficients d’ondelette discrets exhibent un tel comportement. L’application du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants n’a alors pas de sens, même si l’usage du formalisme multifractal basé sur les coefficients d’ondelette discrets semble raisonnable.

De plus, la comparaison des résultats fournis par les formalismes multifractals basés sur les coefficients d’ondelette discrets et sur les coefficients dominants peut permettre la détection de singularités oscillantes, comme on l’a vu au chapitre précédent. Cette méthode ne peut en revanche pas conclure à l’absence de telles singularités. On a montré que cette conclusion s’appliquait aux données de Modane. Il n’a pas été détecté des singularités oscillantes, mais de telles singularités peuvent toutefois exister sur des ensembles suffisamment ”ténus” (au sens de la dimension de Hausdorff), pour ne pas affecter le spectre de singularités  $D_v(h)$ .

Enfin, la mesure de l’ensemble (parties gauche et droite) du spectre de singularités des signaux de vitesse de Modane montrent que ces données sont correctement décrites par un modèle log-normal pour le spectre de singularités.

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants n’a été appliqué avec succès que

sur un seul jeu de données, celui de Modane. Il convient donc de poursuivre ce travail d'analyse sur d'autres signaux de vitesse turbulente, en s'affranchissant de tous les problèmes pratiques inhérents à l'utilisation du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants, afin de consolider les résultats précédents.

## Troisième partie

# Analyse multifractale pratique : effet de linéarisation et ordres critiques

L'analyse multifractale de signaux, qu'il s'agisse de densités ou de fonctions, est réalisée en pratique à l'aide de formalismes multifractals, par exemple ceux présentés dans la première partie de ce mémoire pour les fonctions. Tous les formalismes multifractals reposent sur la mesure d'exposants  $\zeta^p(q)$  (la notation  $p$  désignant indifféremment les coefficients d'agrégation, les coefficients dominants, etc ...) relatifs à des fonctions de structure  $S^p(q, j)$ , à partir desquels le spectre de singularités est déduit par une transformée de Legendre. L'analyse multifractale pratique repose donc essentiellement sur l'estimation de ces exposants. Il apparaît alors intéressant d'essayer de caractériser numériquement les estimateurs utilisés (notés  $\hat{\zeta}^p(q)$ ) pour effectuer la mesure de ces exposants, afin d'en proposer un usage bien contrôlé.

Plus précisément, il va s'agir ici de répondre à la question suivante : étant donné un signal, de résolution et de nombre d'échelles intégrales fixés, à quel résultat doit-on s'attendre pour l'estimation des exposants  $\zeta^p(q)$  des fonctions de structure ? Un raisonnement trop rapide et aboutissant à un résultat faux, l'identification des exposants  $\zeta^p(q)$  et de la fonction  $\varphi(q)$  caractérisant les propriétés multifractales du processus étudié (cf. l'annexe D), est assez répandu dans la littérature sur le sujet. Une caractérisation numérique des estimateurs  $\hat{\zeta}^p(q)$ , effectuée à l'aide d'un grand nombre de réalisations indépendantes du processus de cascade de Mandelbrot canonique (chapitre 9), montre que les exposants  $\zeta^p(q)$  ne s'identifient avec  $\varphi(q)$  que sur une gamme restreinte d'ordres  $q$ , limitée par un *ordre critique*  $q_*^+$  (en se limitant aux ordres  $q$  positifs). Au delà de cet ordre critique, les estimateurs adoptent un comportement linéaire en fonction de  $q$  : c'est l'*effet de linéarisation* (cf. le chapitre 9). Ce constat numérique est en parfait accord avec les résultats exacts obtenus sur les estimateurs par Molchan [119, 120] et Ossiander et Waymire [136, 137], dans la limite asymptotique de réalisations de cascade de Mandelbrot canonique infiniment longues.

L'effet de linéarisation est décrit dans [119, 120, 136, 137] pour le processus de cascade de Mandelbrot canonique, et il est alors naturel de se demander s'il est seulement propre à ce processus. Il est montré que l'effet de linéarisation s'étend à l'analyse de tous les processus multifractals, à l'aide d'une caractérisation systématique sur un large panel de processus multifractals synthétiques (de type densité ou fonction), en utilisant divers formalismes multifractals (chapitre 10). De plus, puisque les résultats théoriques [119, 120, 136, 137] sont des résultats asymptotiques, valables dans la limite de réalisations infiniment longues, l'étude des dépendances de l'effet de linéarisation avec la résolution et la durée (exprimée en nombre d'échelles intégrales) nécessairement finies des signaux étudiés est effectuée (paragraphe 10.3). Il est ainsi montré que l'effet de linéarisation n'est pas dû à un défaut de statistique, mais est au contraire une *propriété intrinsèque* de l'analyse multifractale des processus.

L'effet de linéarisation est essentiellement caractérisé par l'ordre critique  $q_*^+$ , dont la valeur se déduit de la connaissance de la fonction  $\varphi(q)$  associée aux processus multifractals synthétiques (cf. l'annexe D). Cependant, lors de l'analyse de signaux réels, par exemple issus d'expériences physiques, cette fonction n'est pas connue, et il est donc nécessaire de disposer d'un outil pour estimer la valeur de l'ordre critique. Un estimateur est ainsi construit (paragraphe 10.5) et numériquement validé dans un certain nombre de situations. Enfin, l'extension de l'effet de linéarisation pour les valeurs négatives de l'ordre  $q$  est discutée au paragraphe 10.6.

Au chapitre 11 est ensuite décrite la généralisation de l'effet de linéarisation au cas des signaux définis non plus sur  $\mathbb{R}$ , mais sur  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d > 1$ . Une question de grande importance pratique émerge alors : qu'advient-il de l'effet de linéarisation lorsque l'on n'a accès seulement à des signaux définis par une coupe géométrique du processus étudié ? Cette situation est courante : par exemple, la

plupart des expériences de turbulence permettent d'accéder à des profils spatiaux de vitesse à une dimension, alors que le phénomène de turbulence évolue lui dans l'espace (i.e.  $\mathbb{R}^3$ ). Cette question est abordée elle-aussi numériquement (paragraphe 11.2), et montre qu'il n'est possible d'obtenir qu'une information restreinte sur les propriétés du processus, lorsque celui-ci n'est connu qu'à travers des coupes (*effet de coupe*).

Enfin, tous ces résultats sont appliqués à l'analyse de signaux réels : des signaux de vitesse turbulente à une dimension, et des signaux de dissipation à trois dimensions (chapitre 12). Il est ainsi montré que l'effet de linéarisation est observé sur ces données exactement de la même façon que sur les signaux multifractals synthétiques. L'ordre critique  $q_*^+$  est en particulier estimé pour les données de vitesse turbulente, et l'effet de coupe observé pour les signaux de dissipation.



## Chapitre 9

# Effet de linéarisation et ordre critique

Les estimateurs des exposants d'échelles des fonctions de structure sont tout d'abord précisément définis dans le premier paragraphe de ce chapitre. L'analyse multifractale d'un processus de cascade de Mandelbrot canonique (cf. annexe D) est ensuite effectuée de façon approfondie, en situant ces résultats par rapport à la littérature sur ce sujet. Sont alors définies les notions d'effet de linéarisation et d'ordre critique.

### 9.1 Estimations des exposants $\zeta(q)$

#### Notations

Soit  $X_i$  une réalisation du processus aléatoire multifractal étudié. Après avoir calculé les coefficients multi-résolutions utilisés : coefficients d'agrégation, coefficients d'ondelette discrets ou continus, coefficients dominants ou coefficients mmto (cf. les chapitres 5 et 6 et les annexes C et E), que l'on notera indifféremment  $p_{X_i}(j, k)$ , on construit les fonctions de structure :

$$S_{X_i}^p(q, j) = \frac{1}{n(j)} \sum_{k=1}^{n(j)} (p_{X_i}(j, k))^q, \quad (9.1)$$

où  $n(j)$  est toujours le nombre de coefficients  $p_{X_i}(j, k)$  disponibles à l'échelle  $2^j$ .

#### Zone de régression linéaire

En pratique, les signaux analysés sont échantillonnés, et possèdent une résolution (cf. l'annexe D)  $r$  non-nulle  $r > 0$ . Les coefficients multi-résolutions utilisés ne sont ainsi disponibles qu'à partir d'une échelle minimale  $2^{j_0}$ . On posera par convention  $j_0 = 1$ <sup>1</sup>. Les fonctions de structure  $S_{X_i}^p(q, j)$  ne sont ainsi connues qu'à partir de l'octave  $j_0$ .

Pour mesurer les exposants  $\zeta_{X_i}^p(q)$  à partir des fonctions de structure  $S_{X_i}^p(q, j)$ , il n'y a donc pas de sens à utiliser directement la formule (6.6) par exemple, puisque définie à partir du comportement asymptotique pour les échelles  $2^j$  tendant vers 0 des fonctions de structure. Cependant, si les processus étudiés sont invariants d'échelle au sens large (cf. paragraphe 1.2.3), le comportement

---

<sup>1</sup>Notons que dans le cas des coefficients d'ondelette discrets, l'algorithme de Mallat [103] (cf. l'annexe B) permettant leur calcul ne devient exact qu'à partir de quelques (deux ou trois) itérations, c'est-à-dire que les coefficients calculés correspondent bien aux coefficients d'ondelette discrets qu'à partir de l'octave  $j = 2$  ou  $j = 3$ .

en loi de puissance définissant l'exposant  $\zeta_{X_i}^p(q)$  n'est pas seulement valable dans la limite  $2^j \rightarrow 0$ , mais est valable sur toute une gamme d'échelles, c'est-à-dire de l'échelle la plus petite accessible et jusqu'à l'échelle intégrale  $2^{J_i}$ , définie dans l'annexe D. Il existe alors une gamme d'échelles  $[2^{j_r}, 2^{j_i}]$ , avec  $j_r \geq j_0$  et  $j_i \leq J_i$ , à l'intérieur de laquelle les fonctions de structure  $S_{X_i}^p(q, j)$  se comportent en loi de puissance :

$$j_r \leq j \leq j_i, \quad S_{X_i}^p(q, j) \simeq C_q 2^{j\zeta_{X_i}^p(q)}.$$

L'exposant  $\zeta_{X_i}^p(q)$  peut ainsi être mesuré en pratique à l'aide d'une régression linéaire dans un diagramme log-log (i.e.  $\log_2 S_{X_i}^p(q, j)$  en fonction de  $j = \log_2 a$ , où  $a$  est l'échelle), à l'intérieur de la *zone de régression linéaire*  $[j_1, j_2]$  comprise dans la gamme  $[j_r, j_i]$ . Le choix exact de  $j_1$  et  $j_2$  n'est pas discuté dans ce mémoire, sauf lorsque celui-ci est délicat, par exemple sur des données expérimentales (cf. le paragraphe 8.1).

### Définition

On utilise une régression linéaire non pondérée afin d'effectuer la mesure de  $\zeta_{X_i}^p(q)$ . Il faut d'abord construire les quantités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{X_i}^p(q, j) = \log_2 S_{X_i}^p(q, j) \\ \omega(j) = \frac{S_0 j - S_1}{S_0 S_2 - S_1^2}, \quad \text{avec } S_m = \sum_{j=j_1}^{j_2} j^m \end{array} \right.$$

On définit alors l'estimateur  $\widehat{\zeta}_{X_i}^p(q)$  de l'exposant  $\zeta_{X_i}^p(q)$  par la régression linéaire non-pondérée de  $Y_{X_i}^p(q, j)$  en fonction de l'octave  $j$  :

$$\widehat{\zeta}_{X_i}^p(q) = \sum_{j=j_1}^{j_2} \omega(j) Y_{X_i}^p(q, j) \quad (9.2)$$

Notons que la question d'utiliser une version pondérée de la régression linéaire a été abordée dans [38], mais l'estimateur ainsi construit ne semble pas plus performant statistiquement<sup>2</sup>, et il ne sera utilisé dans ce travail de thèse que des régressions linéaires non-pondérées.

## 9.2 Mise en évidence de l'effet de linéarisation

Nous allons dans ce paragraphe soigneusement effectuer l'estimation des exposants  $\zeta_{cmc}^a(q)$ , basés sur les coefficients d'agrégation, du processus de cascade de Mandelbrot canonique.

### 9.2.1 Les cascades de Mandelbrot canoniques

Les cascades de Mandelbrot canoniques sont définies de manière itérative à l'aide d'une cascade multiplicative, ce qui aboutit à l'expression, pour une résolution  $r = 2^{-J}$  fixée correspondant à  $J$  itérations (cf. annexe D) :

$$Q_r(t) = \prod_{j=1 \dots J, k/t \in \lambda(j, k)} W_{j, k},$$

<sup>2</sup>Ce résultat peut s'interpréter de la façon suivante : pour effectuer une régression linéaire pondérée, il ne faut pas seulement utiliser la valeur moyenne  $Y_{X_i}^p(q, j)$ , mais la pondérer par un écart-type. Cet écart-type est issu d'une estimation, nécessairement entachée d'erreur. On rajoute ainsi une source d'erreur à l'estimation de l'exposant, qui compense, dans les situations usuelles, le gain théoriquement obtenu en pondérant les  $Y_{X_i}^p(q, j)$ .

où  $\lambda(j, k)$  est toujours l'intervalle dyadique :  $\lambda(j, k) = [2^j k, 2^j(k+1)[$ . On peut montrer de façon intuitive que ce processus est invariant d'échelle (au sens large, cf. le paragraphe 1.2.3), c'est-à-dire que ses moments statistiques d'ordre  $q$  se comportent comme des lois de puissance de l'échelle, et en déduire, toujours de façon intuitive, une expression pour les exposants  $\zeta_{cmc}^a(q)$ . On va voir, et c'est une des motivations de ce travail de thèse, que ce raisonnement n'est pas valable pour tous les ordres  $q$ . Des mathématiciens ont en effet montré au cours des dix dernières années que ce raisonnement intuitif est erroné, en réalisant le calcul exact des exposants  $\zeta_{cmc}^a(q)$  [45, 57, 119, 136, 137].

### Raisonnement intuitif

Ce raisonnement intuitif est le suivant. Pour une résolution donnée  $r = 2^{-J}$ , la masse contenue dans l'intervalle de taille  $r$  autour d'une date  $t$  est :  $rQ_r(t)$ . Les moments statistiques de  $rQ_r(t)$  s'écrivent ( $\mathbb{E}$  note l'espérance mathématique, c'est-à-dire la moyenne sur les réalisations du processus) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(rQ_r(t))^q &= \mathbb{E} \left( r \prod_{j=1..J, k/t \in \lambda(j,k)} W_{j,k} \right)^q = r^q \mathbb{E} \prod_{j=1..J, k/t \in \lambda(j,k)} W_{j,k}^q \\ \mathbb{E}(rQ_r(t))^q &= r^q \prod_{j=1..J, k/t \in \lambda(j,k)} \mathbb{E} W_{j,k}^q,\end{aligned}$$

puisque les  $W_{j,k}$  sont indépendants. Les  $W_{j,k}$  étant tous des réalisations de la même variable aléatoire  $W$ , on a alors :

$$\mathbb{E}(rQ_r(t))^q = r^q (\mathbb{E}W^q)^J = r^q 2^{J \log_2 \mathbb{E}W^q} = r^{-\log_2 \mathbb{E}W^q + q}.$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(rQ_r(t))^q = r^{\varphi_{cmc}(q)},$$

avec  $\varphi_{cmc}(q) = -\log_2 \mathbb{E}W^q + q$ , ce qui décrit le comportement des moments statistiques de  $rQ_r(t)$  selon la résolution  $r$ .

Jusque là, tout ce qui a été écrit est exact. Ce n'est cependant pas  $\mathbb{E}rQ_r(t)$ , que l'on mesure, mais les coefficients d'agrégation de la densité à résolution  $r_0$  :  $a_{Q_{r_0}}(j, k)$ . La densité est donc construite jusqu'à l'échelle de résolution  $r_0$ , puis est analysée par agrégations successives. Comme la cascade n'est pas exactement conservative, mais seulement conservative en moyenne, les quantités  $2r_0Q_{2r_0}(t)$  et  $a_{Q_{r_0}}(j = 2, k)$  sont en particulier différentes. Si  $r_0 = 2^{-J}$  et si  $k_1$  est impair, alors  $W_{J, k_1}$  et  $W_{J, k_1+1}$  correspondent à l'étape de division d'un même intervalle dyadique  $\lambda_{J-1, (k_1+1)/2}$ . Pour que  $a_{Q_{r_0}}(j = 2, k_1) = 2r_0Q_{2r_0}(t = (k_1+1)/2)$ , il faudrait que les étapes de construction et d'analyse (par agrégation) soient les exactes réciproques l'une de l'autre. L'opération d'agrégation affectant la masse  $W_{J, k_1} + W_{J, k_1+1}$  à l'intervalle  $\lambda_{J-1, (k_1+1)/2}$ , il faudrait alors que le processus de construction répartisse de façon *exacte* la masse entre les deux sous-intervalles dyadiques  $\lambda_{J, k_1}$  et  $\lambda_{J, k_1+1}$ , ce qui revient à imposer  $W_{J, k_1} + W_{J, k_1+1} = 2$ . Or, puisque les  $W_{j,k}$  sont des réalisations *indépendantes* de la variable aléatoire  $W$ , on a au contraire  $W_{J, k_1} + W_{J, k_1+1} \neq 2$ , et seulement  $\mathbb{E}(W_{J, k_1} + W_{J, k_1+1}) = 2$ . Le raisonnement consistant à identifier de façon intuitive les deux objets s'avère ainsi faux<sup>3</sup>.

### Conclusion

Ce raisonnement conclut à l'égalité, pour tous les ordres  $q$ , des exposants  $\zeta_{cmc}^a(q)$  et de la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$ . Par exemple, si la loi utilisée pour les multiplicateurs  $W$  est une loi log-normale (cf. annexe

<sup>3</sup>Schertzer et al. [152] dénomment d'ailleurs les deux objets cascades nue et habillée.

D), on obtiendrait :  $\zeta_{cmc}^a(q) = mq(1-q) + q$ , et donc une fonction strictement concave et de courbure toujours non-nulle ( $\zeta_{cmc}^a(q) \simeq -mq^2$  pour  $q \rightarrow \pm\infty$ ). On aurait en particulier un comportement *non linéaire* des exposants  $\zeta_{cmc}^a(q)$  pour tout ordre  $q \geq 0$ . L'analyse qui va être effectuée montre que ce n'est pas vrai, conformément à ce qui est montré dans [45, 57, 119, 136, 137].

## Remarque

Notons que si l'on impose la condition de conservation exacte de la masse (cascades parfois appelées microcanoniques) :  $W_{j,k_1} + W_{j,k_1+1} = 2$ , c'est-à-dire que seulement un coefficient  $W_{j,k}$  sur deux est tiré aléatoirement, et que l'on effectue le calcul précédent, qui est alors valide, les quantités  $\zeta_X^a(q)$  et  $\varphi_X(q)$  s'identifient. Le calcul de  $\zeta_X^a(q)$  aboutit alors à des comportements linéaires selon  $q$  pour  $q \geq q_*^+$ , comme il est montré sur le cas de densités binomiales au paragraphe 9.3.2.

### 9.2.2 Méthodologie

$N_{réal} = 1000$  réalisations indépendantes (notées  $cmc_i$ , avec  $i = 1..1000$ ) du processus de cascade de Mandelbrot canonique ont été synthétisées, avec une loi log-normale pour les multiplicateurs  $W$ , ce qui donne pour la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$  (cf. annexe D) :

$$\varphi_{cmc}(q) = mq(1-q) + q.$$

On choisit  $m = 0.1125$  ici<sup>4</sup>. La résolution et le nombre d'échelles intégrales de chaque réalisation sont :  $r = 2^{-15}$  et  $N_{int} = 2^5$ .

Sur chacune des réalisations  $cmc_i$  est appliqué l'estimateur  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$ . La moyenne de ces estimées sur les  $N_{réal}$  réalisations est notée  $\overline{\widehat{\zeta_{cmc_i}^a}(q)}$ .

Notons enfin que l'on ne s'intéressera dans ce chapitre qu'aux valeurs positives de l'ordre  $q$  :  $q \geq 0$ . La question des ordres  $q$  négatifs sera abordée dans le chapitre suivant.

### 9.2.3 Exposants $\widehat{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$

#### Résultats

Sur la figure 9.1 sont tracés les résultats de la mesure des exposants  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$  pour une réalisation (gauche), cinq réalisations (milieu) et la moyenne  $\overline{\widehat{\zeta_{cmc_i}^a}(q)}$  des  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$  sur les  $N_{réal} = 1000$  réalisations synthétisées.

Pour la mesure des exposants  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$  sur une seule réalisation, le constat suivant s'impose : pour les faibles valeurs de l'ordre  $q$ , c'est-à-dire environ  $0 \leq q \lesssim 2$ , l'estimateur  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$  fournit un résultat proche de  $\varphi_{cmc}(q)$ . En revanche, pour les grandes valeurs de l'ordre  $q$ , i.e.  $q \gtrsim 4$ , l'estimateur  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$  fournit un résultat linéaire selon l'ordre  $q$ .

Lorsqu'on compare les résultats obtenus sur diverses réalisations, on observe le même comportement : l'estimateur  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$  fournit pour chaque réalisation  $cmc_i$  une bonne mesure de  $\varphi_{cmc}(q)$  pour  $0 \leq q \lesssim 2$  :

$$0 \leq q \lesssim 2, \widehat{\zeta_{cmc_i}^a}(q) \simeq \varphi_{cmc}(q),$$

et adopte un comportement linéaire au delà de  $q = 4$ . Le comportement linéaire pour  $q \gtrsim 4$  n'est pas le même pour chaque réalisation : puisque l'on étudie les réalisations d'un processus aléatoire,

<sup>4</sup>Cela correspond au modèle log-normal d'intermittence de la dissipation turbulente avec la valeur admise du paramètre d'intermittence [58].

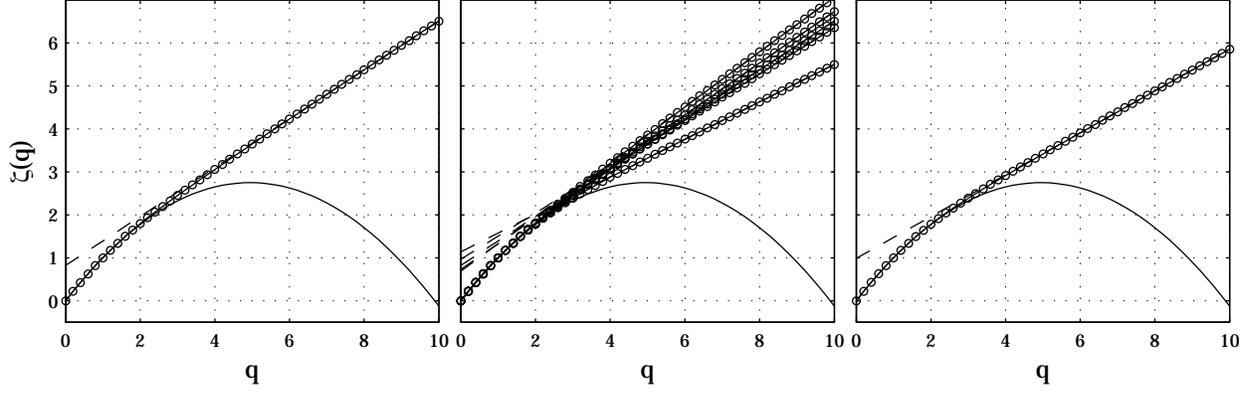


FIG. 9.1 – **Cascades de Mandelbrot canoniques. Exposants  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$**  : 1 réalisation (gauche), 5 réalisations (milieu) et  $\overline{\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a}(q)$ , moyenne sur les  $N_{réal} = 1000$  réalisations indépendantes des  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  (droite). Trait continu :  $\varphi_{cmc}(q)$ . Trait en pointillé : comportement linéaire asymptotique.

les exposants  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  caractérisant ces réalisations sont des variables aléatoires, et en particulier :

$$q \gtrsim 4, \widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q) \simeq \widehat{\alpha}_*^+ + \widehat{\beta}_*^+ q,$$

où  $\widehat{\alpha}_*^+$  et  $\widehat{\beta}_*^+$  sont deux variables aléatoires définissant le comportement linéaire (aléatoire) des exposants  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  pour  $q \gtrsim 4$ .

Enfin, lorsque l'on moyenne ces résultats sur l'ensemble des  $N_{réal}$  réalisations synthétisées, on obtient bien sûr un comportement moyen analogue. Pour  $0 \leq q \lesssim 2$ ,  $\overline{\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a}(q)$  fournit une bonne mesure de  $\varphi_{cmc}(q)$  :

$$\overline{\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a}(q) \simeq \varphi_{cmc}(q),$$

mais s'en écarte brutalement pour les ordres  $q$  plus grands ( $q \gtrsim 4$ ), et adopte un comportement linéaire :

$$\overline{\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a}(q) \simeq \overline{\alpha}_*^+ + \overline{\beta}_*^+ q,$$

où  $\overline{\alpha}_*^+$  et  $\overline{\beta}_*^+$  sont les moyennes statistiques des variables aléatoires  $\widehat{\alpha}_*^+$  et  $\widehat{\beta}_*^+$ . On trouve ici :  $\overline{\alpha}_*^+ \simeq 0.99$  et  $\overline{\beta}_*^+ \simeq 0.49$ .

## Fonctions de structure

Avant de poursuivre, procédons à quelques vérifications. Montrons tout d'abord que les fonctions de structure d'ordre quelconque (i.e.  $0 \leq q \lesssim 2$  ou  $q \gtrsim 4$ ) sont bien des lois de puissance, et que donc la mesure de leur exposant est bien pertinente. Sur la figure 9.2 sont tracées les moyennes sur les  $N_{réal} = 1000$  réalisations de  $\log_2 S_{cmc_i}^a(q, j)$ , pour  $q = 2, 5$  et  $10$ .

On montre donc bien que la mesure des exposants  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a$ , effectuée ici de l'octave  $j_1 = 5$  à l'octave  $j_2 = 14$  a bien un sens, y compris pour les ordres les plus élevés (i.e.  $q = 10$ ) : ces exposants caractérisent bien un comportement en loi de puissance des fonctions de structure, même pour  $q = 10$ .

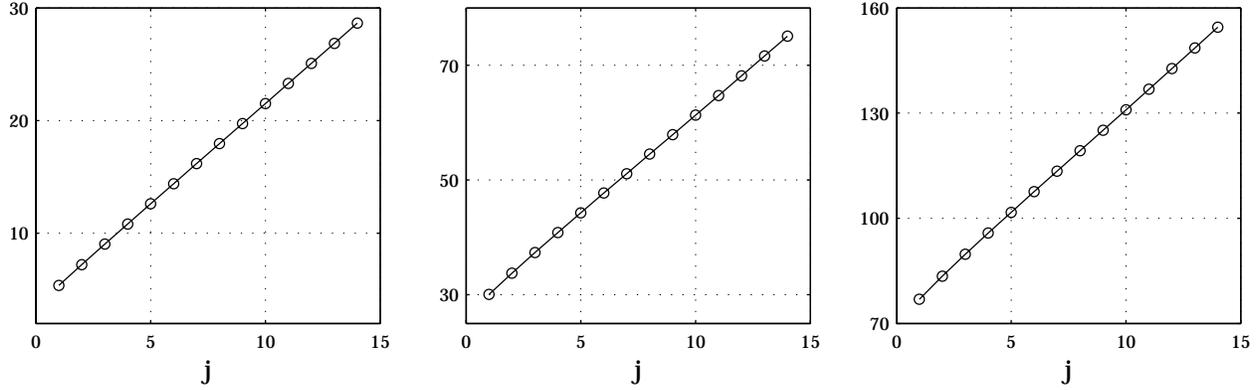


FIG. 9.2 – **Cascades de Mandelbrot canoniques.** Moyennes de  $\log_2 S^a_{cmc_i}(q, j)$  sur les  $N_{réal} = 1000$  réalisations indépendantes, en fonction de l’octave  $j$ , pour  $q = 2$  (gauche),  $q = 5$  (milieu) et  $q = 10$  (droite).

### Convergence des exposants $\widehat{\zeta^a_{cmc_i}}$

Vérifions maintenant que la moyenne  $\widehat{\zeta^a_{cmc_i}}(q)$  des exposants  $\widehat{\zeta^a_{cmc_i}}$  a bien un sens, c’est-à-dire qu’elle a été prise sur un nombre suffisant de réalisations indépendantes  $cmc_i$ . Pour cela, la moyenne  $\widehat{\zeta^a_{cmc_i}}(q)$  a été calculée sur un nombre croissant de réalisations, pour  $N_{réal}$  variant de 1 à 1000 (cf. figure 9.3).

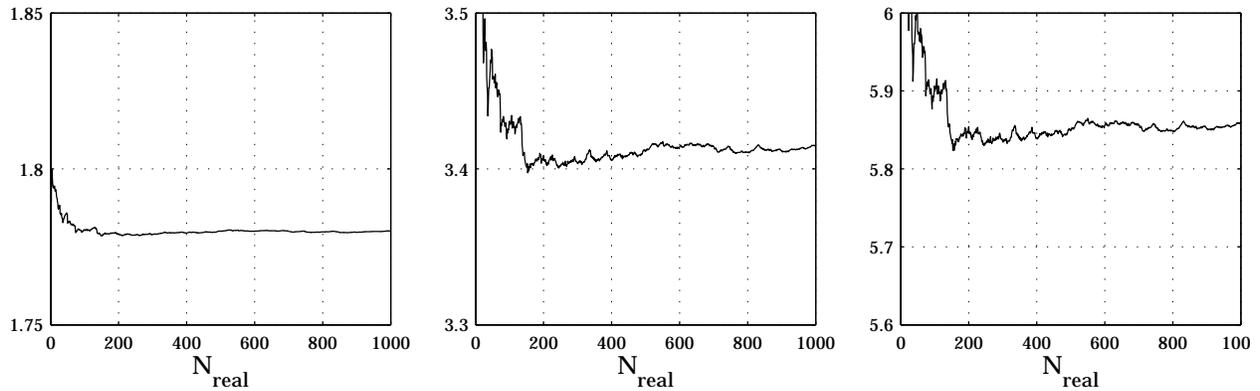


FIG. 9.3 – **Cascades de Mandelbrot canoniques.** Moyennes  $\widehat{\zeta^a_{cmc_i}}(q)$  en fonction du nombre de réalisations indépendantes utilisées, avec  $N_{réal}$  variant de 1 à 1000, pour  $q = 2$  (gauche),  $q = 5$  (milieu) et  $q = 10$  (droite).

Il est ainsi montré que la moyenne  $\widehat{\zeta^a_{cmc_i}}(q)$  des estimateurs  $\widehat{\zeta^a_{cmc_i}}$  a été calculée sur un nombre suffisant de réalisations, et qu’elle a donc bien un sens, même pour la valeur la plus élevée de l’ordre  $q$  utilisée,  $q = 10$ . Cette vérification est importante, car le nombre de réalisations indépendantes nécessaires pour pouvoir estimer correctement les moments d’ordre  $q$  augmente avec  $q$ .

Les résultats ici présentés ne souffrent donc pas d’un défaut de convergence statistique, et les

faits observés (par exemple le comportement linéaire des exposants pour  $q \gtrsim 4$ ) ne peuvent être imputés à un défaut de statistique.

### 9.2.4 Transformée de Legendre

Étudions désormais ces résultats sous un autre point de vue, en traçant les transformées de Legendre<sup>5</sup>  $TL[\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a](h)$  des exposants  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$ , ainsi que la moyenne des  $TL[\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a](h)$  sur les  $N_{réal} = 1000$  réalisations (cf. figure 9.4).

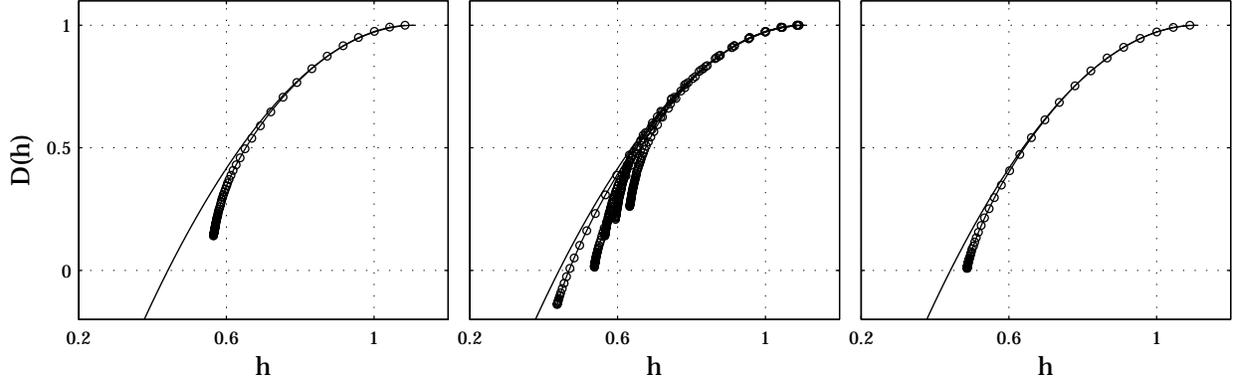


FIG. 9.4 – **Cascades de Mandelbrot canoniques. Transformées de Legendre**  $TL[\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a](h)$  **des exposants**  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  : 1 réalisation (gauche), 5 réalisations (milieu) et moyenne des  $TL[\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a](h)$  sur les  $N_{réal} = 1000$  réalisations (droite). Trait continu : transformée de Legendre de  $\varphi_{cmc}(q)$ .

La transformée de Legendre traduit les résultats observés sur les exposants  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  de la façon suivante. Dans sa partie supérieure, pour environ  $D \gtrsim 0.5$ , la transformée de Legendre d'une estimée  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  coïncide assez bien avec la transformée de Legendre de la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$ . En revanche, elle est arrêtée assez brutalement par un point d'accumulation. En effet, puisque la transformée de Legendre d'une droite est un point, la partie linéaire de l'estimée  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  pour  $q \gtrsim 4$ ,  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q) \simeq \widehat{\alpha}_*^+ + \widehat{\beta}_*^+ q$ , se transforme en un point d'accumulation pour sa transformée de Legendre (figure de gauche) :

$$(h, TL[\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a](h)) \simeq (\widehat{h}_*^+, \widehat{D}_*^+).$$

On observe ainsi un point d'accumulation pour chacune des transformées de Legendre des estimées  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  (figure du milieu). Les coordonnées  $(\widehat{h}_*^+, \widehat{D}_*^+)$  de ces points d'accumulation varient d'une réalisation du processus aléatoire à l'autre, et sont des variables aléatoires. En utilisant la définition de la transformée de Legendre, on montre alors facilement que les variables aléatoires  $\widehat{\alpha}_*^+$ ,  $\widehat{\beta}_*^+$ ,  $\widehat{h}_*^+$  et  $\widehat{D}_*^+$  sont reliées entre elles par les relations :

$$\widehat{D}_*^+ = 1 - \widehat{\alpha}_*^+, \quad \widehat{h}_*^+ = \widehat{\beta}_*^+.$$

Enfin, la moyenne des  $TL[\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a](h)$  sur les  $N_{réal} = 1000$  réalisations se comporte elle-aussi de la même façon : elle se termine brutalement par un point d'accumulation, de coordonnées  $(\overline{\widehat{h}_*^+}, \overline{\widehat{D}_*^+})$ ,

<sup>5</sup>On rappelle que la transformée de Legendre  $TL[f](h)$  de la fonction  $f(q)$  définie sur  $\mathbb{R}$  est :  $TL[f](h) = 1 + \min_q(qh - f(q))$ . Si  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^d$ , sa transformée de Legendre est :  $TL[f](h) = d + \min_q(qh - f(q))$ .

avec  $\overline{D_*^+} \simeq 0.01$  et  $\overline{\beta_*^+} \simeq 0.49$ . Cela est bien cohérent avec les moyennes obtenues sur les variables aléatoires  $\widehat{\alpha_*^+}$  et  $\widehat{\beta_*^+}$  ( $\widehat{\alpha_*^+} \simeq 0.99$  et  $\widehat{\beta_*^+} \simeq 0.49$ ), puisque ces moyennes sont, de la même façon que précédemment reliées entre elles par les relations :

$$\overline{D_*^+} = 1 - \overline{\alpha_*^+}, \quad \overline{h_*^+} = \overline{\beta_*^+}.$$

### 9.2.5 Effet de linéarisation

#### Vérifications complémentaires

Notons tout d'abord le constat suivant. En effectuant la même analyse pour d'autres valeurs du paramètre  $m$  entrant dans la définition de la fonction  $\varphi_{cmc}(q) = q + mq(1 - q)$ , on aboutit toujours au mêmes résultats que ceux décrits dans les paragraphes précédents. On note de plus le résultat intéressant suivant : on obtient en pratique toujours  $\overline{\alpha_*^+} \simeq 1$ , et donc  $\overline{D_*^+} \simeq 0$ , tandis que les moyennes  $\overline{\beta_*^+}$  et  $\overline{h_*^+}$  varient selon la valeur de  $m$ . Les valeurs de  $\overline{\alpha_*^+}$  et de  $\overline{D_*^+}$  semblent donc indépendantes de la fonction  $\varphi_{cmc}$  utilisée.

#### Ordre critique $q_*^+$

La transition entre les deux régimes ( $\simeq \varphi_{cmc}(q)$  et  $\simeq 1 + \overline{\beta_*^+}q$ ) semble assez brutale (cf. figure 9.1, à droite), elle s'effectue pour une valeur bien définie de l'ordre  $q$ , que l'on appellera *ordre critique* et que l'on notera  $q_*^+$ .

Puisque le graphe de la fonction  $\overline{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$  ne semble pas avoir de rupture de pente, et que le comportement est linéaire aux grands ordres, il est naturel de proposer la définition géométrique suivante pour l'ordre critique : c'est la valeur de  $q$  pour laquelle la tangente au graphe de  $\overline{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$  passe par le point  $(0, 1)$ . Comme  $\overline{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$  coïncide avec la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$  jusqu'à cet ordre critique, le définition précédente s'exprime de la même façon avec  $\varphi_{cmc}(q)$ . Cela se traduit analytiquement par :

$$q_*^+ / 1 + q_*^+ \varphi'_{cmc}(q_*^+) = \varphi_{cmc}(q_*^+) \quad (9.3)$$

Pour le processus de cascade de Mandelbrot canonique ici utilisé, l'ordre  $q_*^+$  ainsi défini se calcule facilement :

$$q_*^+ = \sqrt{\frac{1}{m}} \simeq 2.98, \quad \text{si } m = 0.1125,$$

valeur qui semble bien cohérente avec les résultats numériques obtenus (cf. figure 9.3).

On obtient de plus une expression pour la moyenne  $\overline{\beta_*^+}$  :

$$\overline{\beta_*^+} = \varphi'_{cmc}(q_*^+),$$

puisque, selon cette définition géométrique, le comportement linéaire asymptotique prolonge la tangente à  $\varphi_{cmc}(q)$  en  $q = q_*^+$ . On vérifie que cette définition est bien cohérente avec la valeur obtenue :  $\overline{\beta_*^+} \simeq 0.49$ .

Vérifions que cette définition de l'ordre critique  $q_*^+$  caractérise bien la transition entre les deux comportements de l'estimateur  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  :  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q) \simeq \varphi_{cmc}(q)$  pour  $q \leq q_*^+$  et  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q) \simeq \widehat{\alpha}_*^+ + \widehat{\beta}_*^+ q$  avec  $\widehat{\alpha}_*^+ \simeq 1$  pour  $q \geq q_*^+$ . On définit pour cela le nombre  $q_c$ , qui offre une quantification de l'ordre pour lequel l'estimateur  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  passe du comportement  $\simeq \varphi_{cmc}(q)$  au comportement linéaire  $\simeq \widehat{\alpha}_*^+ + \widehat{\beta}_*^+ q = \widehat{L}_{cmc_i}^a(q)$  :

$$q_c / \left| \widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q_c) - \varphi_{cmc}(q_c) \right| = \left| \widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q_c) - \widehat{L}_{cmc_i}^a(q_c) \right|. \quad (9.4)$$

Le comportement linéaire  $\widehat{L}_{cmc_i}^a(q)$  est estimé par une régression linéaire de  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  pour  $q_{as} \leq q \leq q_M$ , où  $q_M$  est l'ordre maximal pour lequel les  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  ont été calculés, et  $q_{as}$  est un ordre qui est jugé suffisamment grand pour que l'intervalle  $[q_{as}, q_M]$  caractérise bien le comportement linéaire de  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$ .

On choisit en pratique ici  $q_{as} = 8$ , et les deux distances  $\left| \widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q) - \varphi_{cmc}(q) \right|$  et  $\left| \widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q) - \widehat{L}_{cmc_i}^a(q) \right|$  sont alors tracées sur la figure 9.5.

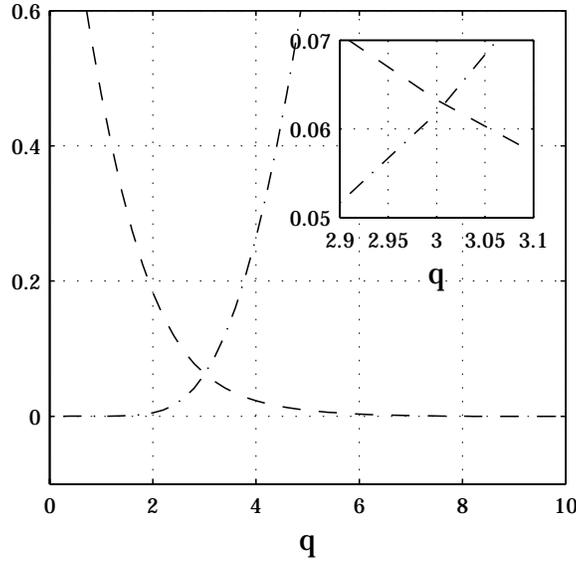


FIG. 9.5 – **Cascades de Mandelbrot canoniques.**  $\left| \widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q) - \varphi_{cmc}(q) \right|$  (trait point-tiret) et  $\left| \widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q) - \widehat{L}_{cmc_i}^a(q) \right|$  (trait tiret-tiret).

Le nombre  $q_c$  précédemment défini vaut ici :  $q_c \simeq 3.0 \pm 0.1$ <sup>6</sup> à comparer à  $q_*^+ \simeq 2.98$ , ce qui tend à montrer que la transition entre les deux comportements de  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  s'effectue bien pour  $q = q_*^+$ .

On remarque aussi sur la figure 9.5 le caractère brutal déjà souligné de la transition entre les deux comportements de la moyenne  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  des estimateurs.

<sup>6</sup>L'incertitude vaut  $\pm 0.1$  car les  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  ont été calculés pour des valeurs de l'ordre  $q$  espacées de 0.1.

## L'effet de linéarisation

On peut donc rassembler tous ces résultats précédents sous une forme unique suivante :

la moyenne de l'estimateur des exposants  $\zeta_{cmc}^a(q)$  passe d'un régime où elle mesure  $\varphi_{cmc}(q)$  à un régime de comportement linéaire selon l'ordre  $q$ .

La transition entre ces deux régimes semble de plus s'effectuer de façon brutale (cf. figure 9.1), ce qui amène à définir un *ordre critique*  $q_*^+$  auquel s'effectue cette transition (cf. paragraphe précédent). On réécrit alors les résultats précédents selon :

$$\overline{\zeta_{cmc_i}^a}(q) \rightarrow \begin{cases} \varphi_{cmc}(q) & \text{si } 0 \leq q \leq q_*^+ \\ 1 + \varphi'_{cmc}(q_*^+)q & \text{si } q \geq q_*^+ \end{cases}, \quad (9.5)$$

le symbole  $\rightarrow$  dénotant la limite de la moyenne pour un nombre infini de réalisations du processus aléatoire de cascade de Mandelbrot canonique. On rappelle que  $q_*^+$  est défini selon :

$$q_*^+ / 1 + q_*^+ \varphi'_{cmc}(q_*^+) = \varphi_{cmc}(q_*^+).$$

Le comportement qui vient d'être décrit de l'estimateur des exposants  $\zeta_{cmc}^a(q)$  sera dénommé dans ce mémoire *effet de linéarisation*.

## Commentaire

L'estimateur  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^a}$  des exposants des fonctions de structure construites sur les coefficients d'agrégation ne converge donc pas en moyenne vers la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$ , comme un raisonnement intuitif trop rapide pourrait le laisser penser. La moyenne  $\overline{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$  ne converge en fait vers  $\varphi_{cmc}(q)$  que pour une gamme réduite d'ordres  $q : q \in [0, q_*^+]$ , les estimateurs adoptent un comportement linéaire en fonction de  $q$  pour  $q \geq q_*^+$ .

## Remarque concernant la divergence des moments statistiques

Il semble nécessaire à ce stade-là de l'exposé de préciser le point suivant. L'effet de linéarisation est parfois (par exemple dans [158]) expliqué comme étant dû à une divergence des moments statistiques (c'est-à-dire la moyenne prise sur l'ensemble des réalisations du processus aléatoire étudié) des coefficients d'agrégation de la densité étudiée. En effet les fonctions de structure, puisque définies comme les moyennes temporelles de la puissance  $q$ -ième, offrent une estimation des moments statistiques (c'est une hypothèse d'ergodicité).

Il est montré dans [78] que les moments statistiques de la mesure associée (cf. l'annexe C) au processus de cascade de Mandelbrot canonique sur n'importe quel intervalle  $[t_1, t_2]$  sont convergents jusqu'à l'ordre  $q_d$ , défini à partir de la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$  selon :

$$q_d = \sup\{q > 1 / \varphi_{cmc}(q) \geq 1\}. \quad (9.6)$$

Dans le cas de la cascade de Mandelbrot canonique log-normale, on montre facilement que  $q_d = 1/m \simeq 8.89$  si  $m = 0.1125$ . On a donc en particulier  $q_d > q_*^+$ .

Ce résultat est en fait général, et est dû à la propriété de concavité de  $\varphi_X(q)$  (cf. l'annexe D). Puisque  $\varphi_X(1) = 1$  et que  $\varphi'_X(1) > 0$  (c'est un autre résultat de [78] qui assure l'existence du processus, au sens où le processus de construction converge bien vers une densité non-nulle),

la dérivée au point  $q_*^+$  pour lequel  $\varphi_X(q)$  tangente avec une droite issue de  $(0, 1)$  est forcément positive :  $\varphi'_X(q_*^+) > 0$ . De plus,  $\varphi_X(q)$  est concave, l'équation  $\varphi_X(q) = 1$  n'a donc au plus que deux solutions :  $\varphi_X(1) = \varphi_X(q_d) = 1$ , et comme  $\varphi'_X(1) > 0$ ,  $\varphi'_X(q_d) < 0$ . Puisque  $\varphi_X(q)$  est concave,  $\varphi'_X(q)$  est une fonction décroissante, et donc :

$$q_*^+ < q_d.$$

On ne peut donc en aucun cas imputer l'effet de linéarisation précédemment défini à une divergence des moments statistiques, puisque la linéarisation des exposants s'effectue à partir d'un ordre  $q$  plus petit.

## 9.2.6 Conclusion : résultats théoriques sur les estimateurs

Des travaux assez récents se sont attachés à la question de l'estimation des exposants  $\zeta_{cmc}^a(q)$  de façon théorique. Il s'agit essentiellement des travaux de Molchan [119, 120] et d'Ossiander et Waymire [136, 137], mais aussi [45, 57].

Dans [119, 120], Molchan se pose la question de la mesure pratique des exposants de loi de puissance  $\zeta_{cmc}^a(q)$  sur les réalisations du processus de cascade de Mandelbrot canonique (cf. l'annexe D). Il distingue bien la quantité  $\varphi_{cmc}(q)$  et l'estimateur  $\widehat{\zeta_{cmc}^a}(q)$  construit à l'aide des coefficients d'agrégation. Il montre alors [119] que  $\widehat{\zeta_{cmc}^a}(q)$  ne coïncide avec  $\varphi_{cmc}(q)$  que lorsque l'ordre  $q$  appartient à  $[0, q_*^+]$  et doit se comporter linéairement en fonction de  $q$  en dehors pour  $q > q_*^+$ . En revanche, le comportement linéaire n'est pas caractérisé : il est montré que  $\widehat{\zeta_{cmc}^a}(q)$  est forcément continu en  $q_*^+$ , mais Molchan envisage a priori la possibilité d'une rupture de pente en  $q_*^+$ , c'est-à-dire que la dérivée de  $\widehat{\zeta_{cmc}^a}(q)$  puisse être discontinue en  $q_*^+$ . Il classe alors [120], par analogie thermodynamique, l'ordre critique  $q_*^+$  comme point de premier ordre si la dérivée de  $\widehat{\zeta_{cmc}^a}(q)$  est continue, du second ordre si elle est discontinue.

Ces résultats étendent ceux auparavant obtenus par Collet et Koukiou [45] et Franchi [57], qui avaient obtenu ces résultats pour une classe plus restreinte de cascades, celles définies à partir de multiplicateurs  $W$  bornés supérieurement (on rappelle que ce sont des variables aléatoires positives). Dans ce cas, l'estimateur  $\widehat{\zeta_{cmc}^a}(q)$  n'a pas de rupture de pente en  $q_*^+$ . Molchan, en étendant ces résultats aux cascades de Mandelbrot canoniques, ne peut montrer un tel résultat dans le cas général, et interprète la possibilité d'une rupture de pente comme le fait que les multiplicateurs  $W$  ne sont justement plus bornés supérieurement.

À la suite des travaux mathématiques précédents, ainsi que de [78], Ossiander et Waymire [136, 137] ont montré des résultats concernant les exposants  $\zeta_{cmc}^a(q)$  valables pour toutes les cascades de Mandelbrot canoniques. À partir de la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$ , ils définissent :

$$\tilde{\varphi}_{cmc}(q) = \begin{cases} 1 + \varphi'_{cmc}(q_*^+)q & \text{si } q \geq q_*^+ \\ \varphi_{cmc}(q) & \text{si } 0 \leq q \leq q_*^+ \end{cases},$$

où  $q_*^+$  est défini comme précédemment (cf. relation (9.3)).

Il est alors montré que les estimateurs  $\widehat{\zeta_{cmc}^a}(q)$ , construits à l'aide des coefficients d'agrégation, convergent alors vers cette quantité lorsque la résolution des cascades tend vers l'infini :

$$\widehat{\zeta_{cmc}^a}(q) \longrightarrow \tilde{\varphi}_{cmc}(q).$$

C'est donc un résultat asymptotique.

Ce résultat est très important et mérite quelques commentaires. Tout d'abord, il signifie bien que, *en aucun cas*, l'estimateur  $\widehat{\zeta}_{cmc}^a(q)$  ne converge vers  $\varphi_{cmc}(q)$ , comme la plupart des papiers sur le sujet le suppose, plus ou moins implicitement.

Notons de plus que le résultat précise bien vers quoi doit tendre  $\widehat{\zeta}_{cmc}^a(q)$  lorsque l'ordre  $q$  est en dehors de l'intervalle  $[0, q_*^+]$  : c'est bien en effet un comportement linéaire, complètement fixé par la restriction de la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$  à  $[0, q_*^+]$  (plus précisément par la valeur de sa dérivée en  $q_*^+$ ). En particulier, cela implique que si deux processus aléatoires multifractals différents, mais dont les fonctions  $\varphi_{cmc}^1(q)$  et  $\varphi_{cmc}^2(q)$  coïncident sur le même intervalle  $[0, q_*^+]$ , en pouvant prendre des valeurs différentes en dehors de cet intervalle, alors l'estimation pratique des exposants  $\zeta_{cmc}^a(q)$  fournira le *même* résultat, même si la résolution des données tend vers l'infini.

Ces résultats indiquent par ailleurs que, puisque les exposants  $\zeta_{cmc}^a(q)$  sont la transformée de Legendre du spectre de singularités  $D_{cmc}(h)$ ,  $D_{cmc}(h)$  ne peut prendre que des valeurs positives, ce qui est explicitement montré dans [26] pour une classe plus générale de cascades multiplicatives.

## Conclusion

Les résultats numériques obtenus sont donc en tous points conformes aux prédictions théoriques d'Ossiander et Waymire [136, 137], et illustrent bien le fait que les exposants  $\widehat{\zeta}_{cmc}^a(q)$  et la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$  ne coïncident seulement sur  $[0, q_*^+]$ , les exposants  $\widehat{\zeta}_{cmc}^a(q)$  devenant une fonction linéaire de  $q$  pour  $q \geq q_*^+$ .

## 9.3 Discussions sur l'effet de linéarisation

Terminons ce chapitre par la discussion, à la lumière des arguments numériques et théoriques qui viennent d'être présentés, de l'interprétation multifractale de ces résultats, mais aussi des conclusions de la littérature sur ce sujet.

### 9.3.1 Interprétation multifractale

Les résultats précédents, obtenus sur un grand nombre de réalisations de cascades de Mandelbrot canoniques, peut s'interpréter de la façon suivante à l'aide du formalisme multifractal sur les densités multifractales (cf. annexe C).

Ce processus multifractal est notamment caractérisé par son spectre de singularités  $D_{cmc}(h)$ , qui est celui (presque sûrement) de chacune de ses réalisations. Puisque les réalisations numériquement synthétisées ne sont, par construction, que des versions approchées (résolution et nombre d'échelles intégrales finis) des réalisations "théoriques", leur spectre de singularités que l'on peut mesurer par application du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'agrégation n'est lui-même qu'une approximation du spectre de singularités "théorique". On peut cependant accéder au spectre de singularités du processus de cascade de Mandelbrot canonique en moyennant les spectres des singularités obtenus sur un grand nombre de réalisations indépendantes. On s'est assuré ici que le nombre de réalisations ( $N_{réal} = 1000$ ) est suffisant : la moyenne des exposants  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  a bien convergé (cf. paragraphe 9.2.3).

Le résultat obtenu (la moyenne des transformées de Legendre  $TL[\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a](h)$  sur les  $N_{réal} = 1000$  réalisations indépendantes) est donc bien cohérent avec le fait que le spectre de singularités de ce processus n'est pas la transformée de Legendre  $TL[\varphi_{cmc}](h)$  de la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$ , mais sa

restriction aux valeurs positives (cf. l'annexe D) :

$$D_{cmc}(h) = \begin{cases} TL[\varphi_{cmc}](h) & \text{si } h / TL[\varphi_{cmc}](h) \geq 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} .$$

Puisque le spectre de singularités est par définition la dimension de Hausdorff des ensembles iso-Hölder  $E(h)$ , cela revient à dire que ces ensembles ont nécessairement des dimensions de Hausdorff positives.

### Remarque

L'effet de linéarisation, tel que l'on vient de décrire, suppose implicitement qu'il existe une solution à l'équation définissant  $q_*^+$  :

$$1 + q\varphi'_{cmc}(q) = \varphi_{cmc}(q).$$

Or ce n'est a priori pas nécessairement le cas. Puisque  $\varphi_{cmc}(0) = 0$ , on a par continuité autour de  $q = 0$  :  $1 + q\varphi'_{cmc}(q) > \varphi_{cmc}(q)$ . Il se peut que l'on ait  $1 + q\varphi'_{cmc}(q) > \varphi_{cmc}(q)$  quel que soit  $q \geq 0$ , et alors  $q_*^+$  ne peut être défini. On posera par convention dans ce cas :  $q_*^+ = +\infty$ . Dans ce cas extrême, l'effet de linéarisation n'existe pas vraiment, puisque il n'y a pas de comportement asymptotique linéaire en  $\alpha + \beta q$ .

En termes de transformée de Legendre, le cas précédent se traduit facilement, puisque, en utilisant le changement de variable  $h = \varphi'_{cmc}(q)$ <sup>7</sup>, on a :  $TL[\varphi_{cmc}](h) = 1 + q\varphi'_{cmc}(q) - \varphi_{cmc}(q)$ , et donc  $TL[\varphi_{cmc}](h) \geq \epsilon$  avec  $\epsilon > 0$ , quel que soit  $h$ . Interprétée à l'aide du formalisme multifractal, cette condition signifie que tous les ensembles iso-Hölder  $E(h)$  ont une dimension de Hausdorff supérieure ou égale à  $\epsilon > 0$ .

Il est possible de construire des processus dont la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$  possède une telle propriété : c'est par exemple le cas d'une cascade de Mandelbrot canonique avec une loi log-Poisson pour les multiplicateurs  $W$ <sup>8</sup>, pour laquelle on a :

$$\varphi_{cmc}(q) = -\gamma q + \gamma \frac{q^\gamma - 1}{\beta - 1} + q,$$

avec  $\beta < 1$ . La transformée de Legendre de  $\varphi_{cmc}(q)$  (dans sa partie gauche, cf. le paragraphe 5.3.2) est alors strictement supérieure à  $\frac{\gamma}{\beta-1}$ . En choisissant convenablement les paramètres  $\beta$  et  $\gamma$ , on peut donc se placer dans la situation  $q_*^+ = +\infty$  que l'on vient de décrire.

Bien qu'un telle situation puisse exister, on supposera dans toute la suite de ce mémoire que les processus étudiés ne font pas partie de la classe particulière pour laquelle  $q_*^+ = +\infty$ .

### 9.3.2 L'interprétation "un coefficient = un exposant de Hölder"

Décrivons un raisonnement de type probabiliste qui est souvent fait pour l'analyse pratique de signaux multifractals. Il consiste à supposer que chaque coefficient d'agrégation, à l'échelle  $2^j$

<sup>7</sup>En effet, si  $f(q)$  est dérivable, ce que l'on supposera toujours réalisé, la définition de la transformée de Legendre :  $TL[f](h) = 1 + \min_q(qh - f(q))$  impose  $h = f'(q)$ .

<sup>8</sup> $W = 2^\gamma \beta^U$ , avec  $U$  variable aléatoire distribuée selon une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . La condition  $\mathbb{E}W = 1$  (cf. l'annexe D) impose alors  $\lambda = -\frac{\gamma \ln(2)}{\beta-1}$ .

utilisée, correspond à un unique exposant de Hölder  $h$  du spectre de singularités du signal étudié. Comme la dimension de Hausdorff de l'ensemble iso-Hölder  $E(h)$  (cf. chapitre 3) est  $D(h)$ , le nombre  $N(j, h)$  de tels coefficients varie selon cette interprétation comme  $2^{-jD(h)}$ . C'est à l'échelle la plus basse disponible  $2^{j_0} = 1$ , qui correspond à l'échantillonnage des données analysées, qu'il y a le plus de coefficients d'agrégation.

Le raisonnement, toujours fondé sur cette heuristique simpliste, déduit alors qu'on ne peut observer sur le signal analysé que les exposants de Hölder tels que  $N(j_0, h) \geq 1$ , puisqu'il faut au moins disposer d'un échantillon correspondant à cet exposant. La plus faible probabilité ainsi accessible est  $1/N$ , où  $N$  est le nombre total de coefficients d'agrégation à la plus basse échelle. En augmentant le nombre d'échantillons, et donc  $N$ , on doit pouvoir aller sonder des probabilités de plus en plus faibles, puisque la probabilité "minimale" accessible est  $1/N$ , et donc aller sonder des exposants de Hölder de plus en plus "rares". Puisque le nombre relatif d'exposants de Hölder  $h$  est ici quantifié par  $D(h)$ , cela se traduit, en terme d'analyse multifractale, par la possibilité de pouvoir "descendre" à des dimensions du spectre de singularités de plus en plus petites, et donc, en ce qui concerne les exposants  $\widehat{\zeta}^a(q)$ , à repousser les ordres critiques de linéarisation de plus en plus loin.

L'effet de linéarisation s'explique alors selon ce raisonnement comme un effet dû à l'échantillonnage des données, et qu'ainsi améliorer cet échantillonnage peut permettre d'estimer les exposants  $\widehat{\zeta}^a(q)$  sur une gamme plus large d'ordres  $q$ .

On peut facilement montrer que cela est faux en découpant une des réalisations précédentes du processus de cascade de Mandelbrot canonique en 4 parties égales. Les exposants  $\zeta_{cmc}^a(q)$  ont été mesurés soit sur l'ensemble de la réalisation, soit sur chacune des 4 parties (cf. figure 9.6).

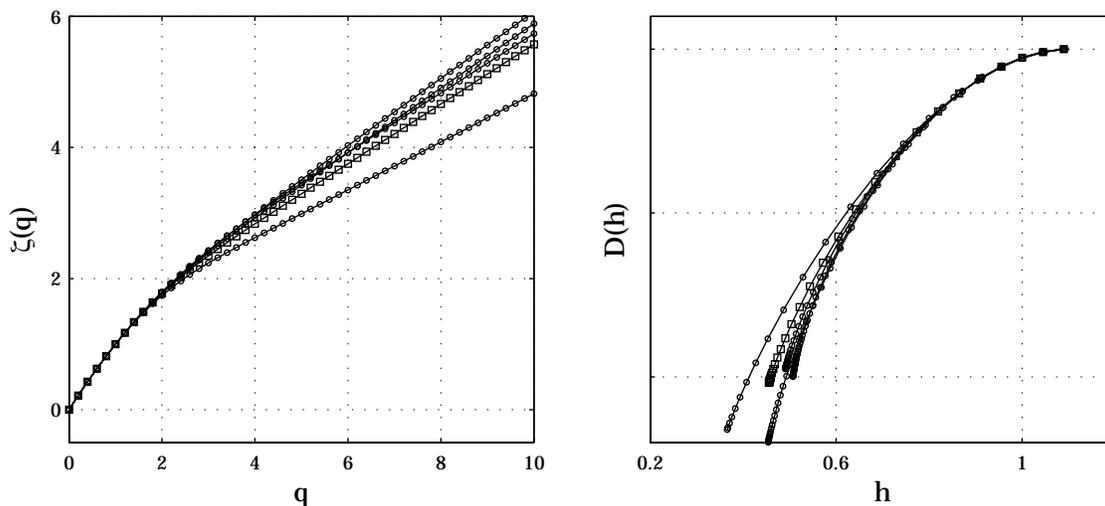


FIG. 9.6 – **Cascades de Mandelbrot canoniques.** Gauche : exposants estimés  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  sur l'ensemble de la réalisation ( $\square$ ) ou sur chacune des 4 parties ( $\circ$ ). Droite : transformées de Legendre correspondantes.

Supposons qu'il existe un exposant de Hölder minimal dans cette réalisation. Si un point était identifiable à cet exposant de Hölder, une seule des 4 parties le contiendrait et la transformée de Legendre des exposants mesurés sur l'ensemble de la réalisation devrait prendre comme valeur minimale, le plus petit des 4 minima des 4 transformées de Legendre des exposants mesurés sur

chacune des 4 parties. On voit bien sur la figure 9.6 que ce n'est pas le cas : la transformée de Legendre calculée sur l'ensemble de la réalisation prend des valeurs strictement supérieures à celles de deux des transformées de Legendre calculées sur une seule des parties. Les transformées de Legendre, et donc les exposants à partir desquels elles sont calculées, ne sont donc pas contrôlées par des exposants de Hölder "individualisés", et l'on ne sonde donc pas des dimensions fractales plus "petites" lorsqu'on augmente l'échantillonnage.

L'argumentation "un coefficient = un exposant de Hölder" est donc erronée : on a vu au chapitre 5 qu'on ne pouvait associer à une quantité multi-résolution un seul et unique exposant de Hölder. La notion d'exposant de Hölder correspond à la limite des échelles infiniment petites, en pratique inaccessibles du fait de l'échantillonnage des signaux. Les signaux étant de plus homogènes, un ouvert autour de chaque date  $t$  contient tous les exposants de Hölder du spectre de singularités. Chaque coefficient multi-résolution (agrégation, accroissement, ...) est donc "sensible", même à la plus petite échelle disponible, à tous les exposants de Hölder du signal étudié, et certainement pas qu'à un seul.

En d'autres mots, chaque ensemble iso-Hölder est un ensemble *dense* du support de la densité : bien qu'il puisse avoir une dimension de Hausdorff strictement plus petite que 1, son intersection avec tout ouvert, aussi petit soit-il, est non vide. Cela va être explicitement montré un peu plus loin dans cette partie.

## Usage dans la littérature

Ce type de raisonnement a été largement utilisé dans la littérature concernant l'analyse multifractale pratique, et donc tout particulièrement dans le domaine de la turbulence, puisque les développements de ces deux disciplines sont intimement liés.

Mandelbrot a été l'un des pères fondateurs de la notion de fractal [106, 107], et aussi l'un des premiers à s'intéresser aux processus multifractals, laissant son nom à la cascade de Mandelbrot canonique, introduite quelques années auparavant par Yaglom [170], et pour laquelle il a posé les premières bases mathématiques [105].

Il a aussi introduit au début des années 90 la notion de *dimension fractale négative*, ou encore cachée, [108, 109, 110], qui est par essence une grandeur statistique, puisque définie à partir de plusieurs réalisations d'un même processus, et qui prolonge à des valeurs négatives la dimension fractale de comptage de boîtes<sup>9</sup>. Si l'on utilise dans cette définition le nombre de boîtes intersectant  $E$  non plus sur une réalisation du processus, mais sur l'ensemble des réalisations, celle-ci peut être négative : c'est le cas par exemple si, en moyenne, il y a moins d'une boîte par réalisation qui intersecte  $E$ . La notion de dimension négative est donc définie pour un ensemble d'objets aléatoires, et non sur une réalisation particulière.

En utilisant l'association "un coefficient = un exposant de Hölder", il affecte une dimension fractale a priori positive ou négative aux ensembles iso-Hölder pour des processus aléatoires multifractals (des cascades de Mandelbrot canoniques). Il prédit alors qu'il est possible, en augmentant l'échantillonnage, de mesurer ce qu'il appelle la partie négative du spectre de singularités de processus multifractals, notamment dans le cas de coupes géométriques.

---

<sup>9</sup>La dimension fractale de comptage de boîtes (cf. par exemple [55, 159, 165, 99]),  $\text{Dim}_B$ , est une variante de dimension fractale plus facile à manier en pratique. Soit  $N(E, \delta)$  le nombre de cubes (appelés boîtes) de côté  $\delta$  nécessaires pour recouvrir l'ensemble  $E$ . On définit alors  $\text{Dim}_B(E)$  selon :  $\text{Dim}_B(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(E, \delta)}{\log \delta}$ . D'après la définition de la dimension de Hausdorff (cf. paragraphe 3.3.2), on a seulement :  $\text{Dim}_H(E) \leq \text{Dim}_B(E)$ , même si les deux dimensions coïncident pour un grand nombre de cas.

Comme il vient d'être expliqué dans le paragraphe précédent, ce raisonnement ne semble pas valable, car fondé sur une hypothèse erronée (un coefficient  $\neq$  un exposant de Hölder).

Dans plusieurs travaux [154, 158, 155, 157], Schertzer, Lovejoy, Schmitt et Brunet se sont intéressés à l'analyse multifractale pratique de données. Ce sont les premiers à s'être posé la question du bon usage des outils (formalisme multifractal) utilisés. Ils ont en particulier appliqué leurs raisonnements à des données de turbulence, et obtenu des résultats intéressants [158], sans les vérifier sur des processus multifractals synthétiques.

Ils adoptent eux-aussi le raisonnement fondé sur l'interprétation "un coefficient = un exposant de Hölder", selon une approche similaire à celle de Mandelbrot. Ils travaillent d'ailleurs implicitement avec des dimensions fractales négatives. L'effet de linéarisation est expliqué comme une conséquence de l'échantillonnage. Deux classes pour l'effet de linéarisation sont définies : les transitions de phase du premier ou du second ordre. Dans la première situation, l'échantillonnage est suffisant pour estimer le plus petit exposant de Hölder existant, et alors les exposants  $\widehat{\zeta}^a(q)$  deviennent linéaires à partir d'un ordre critique  $q_d$ , au-delà duquel il y a divergence des moments. Il y a alors rupture de pente en  $q_d$ , la pente au-delà de  $q_d$  diminuant si l'échantillonnage augmente. Pour la transition du second ordre, l'échantillonnage ne permet pas de résoudre le plus petit exposant de Hölder, et alors la linéarisation se produit pour un ordre  $q$  qui augmente avec l'échantillonnage, sans rupture de pente.

Dans [158], ces raisonnements sont appliqués à des données de vitesse eulérienne, plus précisément aux signaux de dissipation construits à partir de ces données<sup>10</sup>. Les résultats obtenus sont interprétés comme une transition du premier ordre, c'est-à-dire une linéarisation des  $\widehat{\zeta}^a(q)$  à un ordre fixe  $q_d$  correspondant à une divergence de moments. En modélisant les exposants à l'aide d'un modèle multifractal, l'estimation suivante est fournie :  $q_d \simeq 2.4$  pour la dissipation et donc  $q_d \simeq 3 \times 2.4 = 7.2$  pour la vitesse. En modifiant la façon de traiter les données (moyenner les fonctions de structure ou les exposants  $\widehat{\zeta}^a(q)$ , ce qui revient selon leur raisonnement à modifier l'échantillonnage), ils obtiennent deux résultats différents pour les grands valeurs de l'ordre  $q$ , notamment une pente plus faible du comportement linéaire asymptotique lorsque les fonctions de structure sont moyennées, qu'ils interprètent comme une diminution de pente liée à l'augmentation de l'échantillonnage (transition du premier ordre).

Ces résultats peuvent être interprétés autrement à la lumière des tests systématiques effectués dans le cadre de ce travail de thèse. L'effet de linéarisation s'effectue bien à un ordre fixe, mais qui n'est pas associé à une divergence de moments. En effet, il a été montré dans un paragraphe précédent que  $q_*^+ < q_d$ . En ce qui concerne le changement de pente de la droite asymptotique, elle est ici interprétée comme un effet de variabilité statistique : l'estimateur  $\widehat{\zeta}^a(q)$  est une variable aléatoire, qui vaut en moyenne  $\overline{\widehat{\zeta}^a(q)\widehat{\zeta}^a(q)} = 1 + \overline{\beta_*^+}q$ , mais qui possède a priori un écart-type non-nul. La valeur moyenne est bien obtenue lorsque les estimées sont moyennées sur leurs 704 réalisations. En revanche, en moyennant sur un nombre trop restreint de réalisations (4), bien que plus longues, ils n'obtiennent pas le comportement moyen  $1 + \overline{\beta_*^+}q$ , mais un comportement affecté par la variabilité statistique, d'où notamment une pente différente.

<sup>10</sup>C'est-à-dire l'usuelle surrogate de dissipation [58] que l'on construit à partir d'un signal de vitesse  $u$  :  $\epsilon = 15\nu \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$ .

## Remarque

Notons enfin qu'une méthode alternative, basée sur l'estimation directe des multiplicateurs  $W$  à l'aide des coefficients d'agrégation, et sur l'étude de leurs statistiques, a été proposée [43, 44, 139, 130]. Il a cependant été montré [77, 76] que cette méthode aboutissait à des artefacts, et ne pouvait ainsi être utilisée.

## Un (contre-)exemple simple : la densité binomiale

Nous allons montrer sur un exemple simple, la densité binomiale, en quoi le raisonnement "un coefficient = un exposant de Hölder" est faux, en montrant explicitement que cette densité est multifractale *et* uniforme, c'est-à-dire que les ensembles iso-Hölder sont des ensembles topologiquement denses du support de la densité.

### •Définition

Cette densité est la densité binomiale, appelée aussi densité de Besicovitch. C'est un exemple classique de densité multifractale (cf. par exemple [159, 11, 3]). Elle est construite selon le schéma multiplicatif déterministe suivant (analogue à celui, aléatoire, des cascades de Mandelbrot canoniques présentées dans l'annexe D). Une masse unité est initialement répartie sur l'intervalle  $[0, 1]$ , qui est divisé en deux sous-intervalles de même longueur  $[0, 1/2]$  et  $[1/2, 1]$ . À l'intervalle de gauche  $[0, 1/2]$  est alors affecté la fraction  $0 < p < 1$  de la masse initiale, et  $(1 - p)$  à l'intervalle de droite  $[1/2, 1]$ ,  $p$  étant un paramètre constant. La même étape est alors répétée pour chacun des deux sous-intervalles, en affectant à chaque fois à gauche la fraction  $p$  et à droite la fraction  $(1 - p)$ .

Au bout de  $n$  itérations, on a donc  $2^n$  sous-intervalles de longueur  $2^{-n}$ . Un intervalle particulier contenant le point  $t$  contient la fraction  $p^k(1 - p)^{n-k}$  de la masse unité initiale, où  $k$  (attention, c'est la même notation que pour les dates des coefficients d'ondelette discrets) est le nombre de "pas" à gauche pour arriver à cet intervalle. Si on écrit le nombre  $t$  en base 2 :  $t = 0.t_1t_2t_3\dots$  avec  $t_i = 0$  ou 1, alors  $k$  est le nombre de 0 dans les  $n$  premiers chiffres de l'écriture binaire de  $t$  :  $k = \text{Card}\{1 \leq i \leq n / t_i = 0\}$ .

### •Propriétés multifractales

La masse contenue dans l'intervalle dyadique  $I_n(t)$  de taille  $2^{-n}$  entourant le point  $t$  est donc :

$$p^k(1 - p)^{n-k} = \left(p^{k/n}(1 - p)^{1-k/n}\right)^n,$$

où  $k/n$  est la proportion de 0 dans les  $n$  premiers chiffres de l'écriture binaire de  $t$ . Lorsqu'on fait tendre le nombre d'itérations vers l'infini :  $n \rightarrow +\infty$ , alors :

$$p^k(1 - p)^{n-k} \simeq \left(p^{\theta(t)}(1 - p)^{1-\theta(t)}\right)^n = 2^{-n(-\theta(t)\log_2 p - (1-\theta(t))\log_2(1-p))},$$

où  $\theta(t)$  est la proportion de 0 dans l'écriture binaire de  $t$  (i.e. sur tous les chiffres  $t_i$  du nombre  $t$ ).

L'exposant de Hölder de la densité binomiale au point  $t$  est alors (cf. annexe C) :

$$h(t) = -\theta(t)\log_2 p - (1 - \theta(t))\log_2(1 - p), \quad (9.7)$$

et ne dépend donc que de la proportion  $\theta(t)$  de 0 dans l'écriture binaire de  $t$ . L'exposant de Hölder n'est pas partout le même, et la densité est donc multifractale. Enfin, puisque  $\theta$  est compris entre

0 et 1,  $h$  est compris entre  $-\log_2(1-p)$  et  $-\log_2 p$ .

Calculons désormais son spectre de singularités  $D(h)$ . Après  $n$  étapes, il y a  $C_n^k = \frac{k!(n-k)!}{n!}$  intervalles dyadiques correspondant à  $k$  0 et  $(n-k)$  1, soit une proportion de  $C_n^k/2^n$  intervalles. Lorsque  $n \rightarrow +\infty$  et  $k \rightarrow +\infty$  avec  $k/n \rightarrow \theta$ , en utilisant la formule de Stirling pour les factorielles<sup>11</sup>, on montre :

$$C_n^k \simeq 2^{-n\theta \log_2 \theta - n(1-\theta) \log_2(1-\theta)}.$$

On aboutit alors au spectre de singularités par la limite suivante<sup>12</sup> :

$$D(h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 C_n^k}{\log_2 2^n} = -\theta(h) \log_2 \theta(h) - (1 - \theta(h)) \log_2(1 - \theta(h)),$$

où  $\theta$  et  $h$  sont reliés par la relation (9.7). On obtient donc une expression du spectre de singularités  $D(h)$  paramétrée par  $\theta \in [0, 1]$ . L'expression précédente est bien sûr valable si  $h$  est compris entre  $-\log_2(1-p)$  et  $-\log_2 p$ . Sinon  $D(h) = -\infty$  (on rappelle que par convention, la dimension d'un ensemble vide est  $-\infty$ ). Le spectre de singularités de la densité binomiale est représenté sur la figure 9.7.

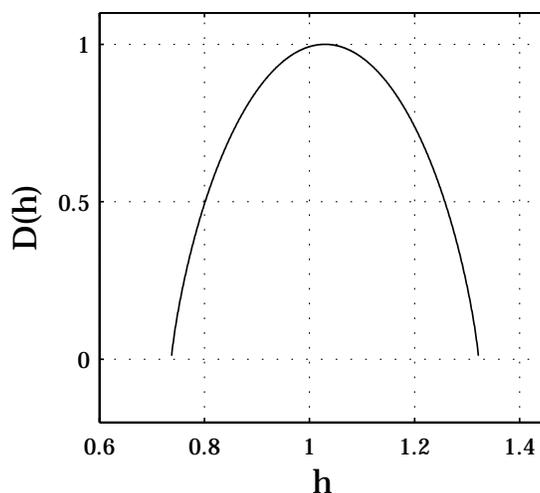


FIG. 9.7 – Spectre de singularités de la densité binomiale, avec  $p = 0.4$ .

#### • Topologie des ensembles iso-Hölder

Montrons enfin que les ensembles iso-Hölder  $E(h) = \{t / h(t) = h\}$  sont denses dans  $[0, 1]$ , comme il en fait la remarque dans [159]. Soit  $t \in E(h)$ . Les propriétés de régularité ponctuelle en  $t$  sont uniquement caractérisés par la proportion  $\theta$  de 0 de son écriture binaire, par la relation  $h = 1 - \theta \log_2 p - (1 - \theta) \log_2(1 - p)$ . Soit  $\omega$  un ouvert entourant  $t_0$  et soit  $I_n(t_0)$  un intervalle dyadique (défini comme précédemment) entourant  $t_0$  et inclus dans  $\omega$  (il existe forcément, il suffit de choisir

<sup>11</sup>On rappelle que la formule de Stirling donne un équivalent pour la factorielle :  $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

<sup>12</sup>Il faut être conscient que la dimension fractale calculée ici n'est pas la dimension de Hausdorff, mais la dimension de comptage de boîtes  $\text{Dim}_B$  [55, 159, 165, 99]. On a seulement a priori  $\text{Dim}_H(E) \leq \text{Dim}_B(E)$ , mais il est cependant explicitement montré dans [99] que les dimensions de Hausdorff et de comptage de boîtes coïncident dans le cas particulier de la densité binomiale.

$n$  assez grand). Montrons alors que, pour tout  $h$  compris entre 0 et 1, il existe un point  $t$  tel que  $t \in E(h)$  et  $t \in I_n(t_0)$ .

Par définition, l'écriture binaire de tous les points de l'intervalle  $I_n(t)$  commence par les mêmes  $n$  premiers chiffres  $t_i$ , avec une proportion  $k/n$  de 0. Puisque que tous les autres chiffres de l'écriture binaire, c'est-à-dire un nombre infini de chiffres, sont quelconques, on peut nécessairement construire un nombre de  $I_n(t)$  dont l'écriture binaire contient la proportion  $\theta$  de 0, donc d'exposant de Hölder  $h$ .

Ainsi dans tout ouvert  $\omega$  contenant  $t$ , il existe une date  $t'$  dont l'exposant de Hölder est  $h$  : l'ensemble  $E(h)$  est dense dans  $[0, 1]$ .

## Discussion

Il vient d'être explicitement montré que les ensembles iso-Hölder  $E(h)$  de la densité binomiale sont à la fois de dimensions de Hausdorff strictement inférieure à 1 (sauf  $E(h = 1/2)$ ) et denses dans  $[0, 1]$ . Si l'on reprend le raisonnement "un coefficient = un exposant de Hölder", on montre donc bien qu'il est erroné : dans cet exemple, chaque coefficient d'agrégation, quelque soit l'échelle à laquelle il est défini, recouvre un ensemble non-ponctuel du support de la densité, contient ainsi des ouverts et est donc affecté par *tous* les exposants de Hölder présents dans le spectre de singularités. Il est donc faux de penser qu'il est possible de classer les coefficients d'agrégation en les caractérisant par un seul exposant de Hölder, et de quantifier leur statistique (i.e. leur nombre relatif) à l'aide du spectre de singularités  $D(h)$ .

Tout raisonnement fondé sur l'argumentation "un échantillon = un exposant de Hölder", ainsi que ses éventuelles conclusions, sont donc à proscrire. La dimension de Hausdorff et l'exposant de Hölder sont des notions définies par une limite des échelles tendant vers 0, et extrapoler les propriétés valables aux échelles asymptotiquement nulles aux échelle nécessairement finies d'analyse n'est pas valide.



## Chapitre 10

# Étude de l'effet de linéarisation

L'objet essentiel de ce chapitre est, comme ce l'était pour le précédent, le comportement moyen des estimateurs  $\widehat{\zeta}_X^p(q)$ . Les résultats théoriques [119, 120, 136, 137] ne concernent qu'un type de processus multifractal, les cascades de Mandelbrot canoniques, et qu'un type de formalisme multifractal, celui basé sur les coefficients d'agrégation. Ce sont de plus des résultats asymptotiques, valables dans la limite de la résolution  $r$  tendant vers 0. Plusieurs questions restent donc en suspens en ce qui concerne l'analyse multifractale pratique de signaux multifractals réels, c'est-à-dire contenant un nombre fini d'échantillons, et dont les propriétés multifractales (la fonction  $\varphi(q)$  ou le spectre de singularités) ne sont pas a priori théoriquement connues.

Premièrement, est-ce que l'effet de linéarisation est propre aux cascades de Mandelbrot canoniques et au formalisme multifractal basé sur les coefficients d'agrégation, ou est-il une propriété intrinsèque (donc indépendant du formalisme multifractal utilisé) de tous les processus multifractals? Puisque les processus multifractals ont un spectre de singularités à valeurs strictement positives, on s'attend à ce que l'effet de linéarisation se présente pour ces processus sous la même forme. Ceci va être vérifié sur une large gamme de processus multifractals, à la fois de type densité ou de type fonction, en utilisant divers formalismes multifractals (cf. paragraphe 10.2). De plus, il va être numériquement montré que les caractéristiques de l'effet de linéarisation (en particulier l'ordre critique  $q_*^+$ ) ne dépendent en pratique que très peu du nombre d'échelles intégrales  $N_{int}$  (dès qu'il est supérieur à quelques échelle intégrales) et de la résolution  $r$  des réalisations analysés (cf. paragraphe 10.3). Enfin, si les propriétés multifractales des signaux analysés ne sont pas théoriquement connues, il n'est pas possible de définir à l'avance la valeur de l'ordre critique  $q_*^+$ . Il est donc nécessaire de disposer d'un estimateur de  $q_*^+$  qui, à partir des données elles-mêmes, permet d'obtenir une estimation de cet ordre critique (comme il en est fait justement la remarque dans [120]). Dans le paragraphe 10.5 va être défini et numériquement caractérisé, à l'aide de signaux synthétiques, un tel estimateur.

Enfin, la question de l'estimation des exposants  $\zeta_X^p(q)$  d'ordres  $q$  négatifs sera abordée au paragraphe 10.6. L'existence d'un effet de linéarisation en tout point similaire à celui observé pour les ordres  $q$  positifs sera illustrée.

### 10.1 Méthodologie

La démarche adoptée est la même que celle employée au chapitre précédent : en s'aidant de réalisations numériques de processus multifractals aux propriétés bien contrôlées (cf. annexe D),

nous allons caractériser les performances statistiques des outils d'estimation utilisés. Il sera ainsi généré un grand nombre<sup>1</sup>  $N_{réal}$  de réalisations  $X_i$  du même processus multifractal  $X$ , aux propriétés (fonction  $\varphi_X(q)$ , nombre d'échelles intégrales  $N_{int}$ , résolution  $r$ ) identiques, et sur chacune d'entre elles seront appliqués les estimateurs étudiés. En moyennant les résultats sur toutes les réalisations, on peut ainsi numériquement caractériser les performances statistiques de ces estimateurs .

## 10.2 Divers processus multifractals et divers formalismes multifractals

Nous avons caractérisé au chapitre précédent l'effet de linéarisation pour les cascades de Mandelbrot canoniques. Il va être ici montré que l'effet de linéarisation, tel que précédemment décrit, n'est pas une caractéristique particulière de ce processus, mais une propriété intrinsèque des densités multifractales, mais aussi des fonctions multifractales. Cette propriété est la traduction du fait que le spectre de singularités de la densité ou fonction multifractale étudiée ne peut prendre que des valeurs positives, c'est-à-dire que les ensembles iso-Hölder ont une dimension de Hausdorff nécessairement positive. Il sera ainsi de même montré que ce résultat ne dépend pas du type particulier de formalisme multifractal utilisé pour réaliser l'analyse multifractale.

### 10.2.1 Processus multifractals de type densité

#### Autres formalismes multifractals

Reprenons le processus de cascade de Mandelbrot canonique utilisé au chapitre précédent, avec les mêmes paramètres :  $m = 0.1125$ ,  $r = 2^{-15}$ ,  $N_{int} = 2^5$  et  $N_{réal} = 1000$ . Les réalisations vont être analysées cette fois à l'aide d'un autre formalisme multifractal, le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets (cf. l'annexe C), en utilisant l'ondelette de Daubechies à un moment nul.

Les résultats sont présentés, de la même façon qu'au chapitre précédent, sur la figure 10.1. Ils sont donc en tous points analogues à ceux obtenus avec le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'agrégation : chaque estimée  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^{d'}}(q)$  fournit une mesure de  $\varphi_{cmc}(q)$  pour  $q \lesssim 2$ , et adopte un comportement linéaire en  $q$  pour  $q \gtrsim 4$ . La moyenne  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^{d'}}(q)$  se comporte de la même façon, en changeant de comportement pour l'ordre critique  $q_*^+ \simeq 2.98$ . On obtient notamment  $\widehat{\alpha_*^+} \simeq 0.98$ .

La traduction de ces résultats sur les transformées de Legendre est bien sûr identique à celle décrite au chapitre précédent.

L'effet de linéarisation est donc le même pour les cascade de Mandelbrot canoniques, quel que soit le formalisme multifractal employé, basé soit sur les coefficients d'ondelette discrets ou sur les coefficients d'agrégation.

---

<sup>1</sup>Ce nombre a été choisi à chaque fois suffisamment grand pour s'assurer de la convergence statistique des quantités étudiées, comme il avait été explicitement montré par exemple pour la moyenne  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$  des exposants  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^a}(q)$  dans le cas des cascades de Mandelbrot canoniques au chapitre précédent.

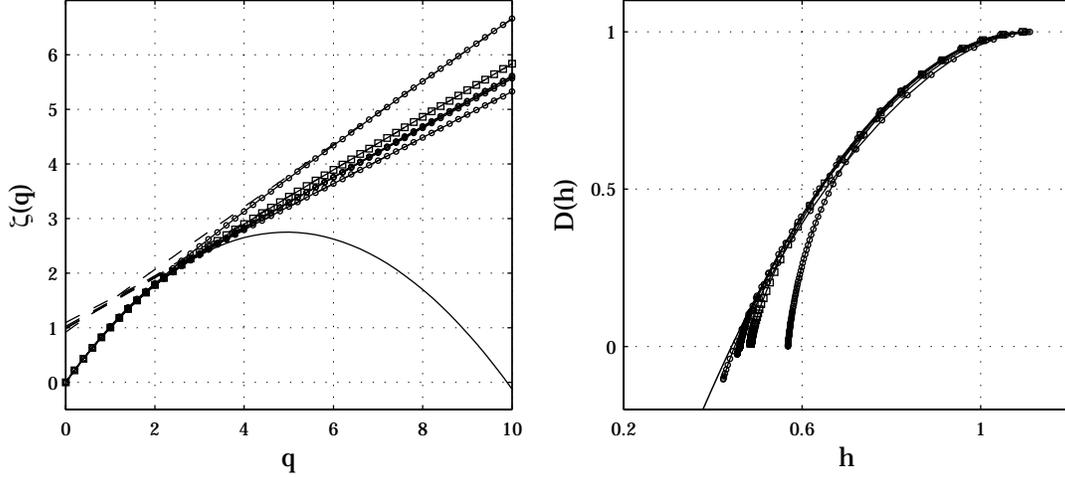


FIG. 10.1 – Cascade de Mandelbrot canonique, analysée avec les coefficients d’ondelette discrets. Gauche : exposants  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^{d'}}(q)$  pour 5 réalisations (o) et  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^{d'}}(q)$  (□), moyenne des  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^{d'}}(q)$  sur  $N_{réal} = 1000$  réalisations, trait continu : fonction  $\varphi_{cmc}(q)$  et trait en pointillé : comportement linéaire asymptotique. Droite :  $TL[\widehat{\zeta_{cmc_i}^{d'}}](h)$  (o) et leur moyenne (□), transformée de Legendre de  $\varphi_{cmc}(q)$  (trait continu).

### Autre processus : la cascade de Poisson composée

Nous allons procéder à la même analyse sur un autre processus multifractal de type densité : les cascades de Poisson composées (cf. l’annexe D). Le processus choisi est caractérisé par l’expression suivante de la fonction  $\varphi_{cpc}(q)$  [38] :

$$\varphi_{cpc}(q) = q + 1 - \mathbb{E}W^q - q(1 - \mathbb{E}W), \quad \text{avec } \mathbb{E}W^q = e^{\mu q + \frac{\sigma^2}{2}q^2},$$

où il a été choisi  $\mu = 0.04$  et  $\sigma = 0.03$ . Cette expression permet de connaître la valeur de  $q_*^+$  :  $q_*^+ \simeq 5.15$ .

Les caractéristiques propres à la synthèse pratique sont les mêmes que précédemment, c’est-à-dire :  $r = 2^{-15}$ ,  $N_{int} = 2^5$  et  $N_{réal} = 1000$ . L’analyse multifractale a été effectuée à l’aide des coefficients d’agrégation<sup>2</sup>.

Les résultats obtenus, présentés sur la figure 10.2, sont analogues à ceux obtenus avec les cascades de Mandelbrot canoniques, et ne seront donc pas détaillés une nouvelle fois.

### Conclusion

Les analyses précédentes ont été effectuées sur plusieurs processus de cascade, c’est-à-dire pour diverses expressions de la fonction  $\varphi_X(q)$ , mais aussi pour divers jeux de paramètres de cette fonction, et à l’aide de divers formalismes multifractals. Les résultats sont toujours les mêmes : l’effet de linéarisation, tel que décrit au chapitre 9, est observé pour *tous* les processus multifractals de type densité, et pour *tous* les formalismes multifractals utilisés. L’effet de linéarisation est donc une caractéristique intrinsèque de l’analyse multifractale des densités.

<sup>2</sup>Notons que la même analyse a été effectuée avec les coefficients d’ondelette discrets, aboutissant aux mêmes conclusions.

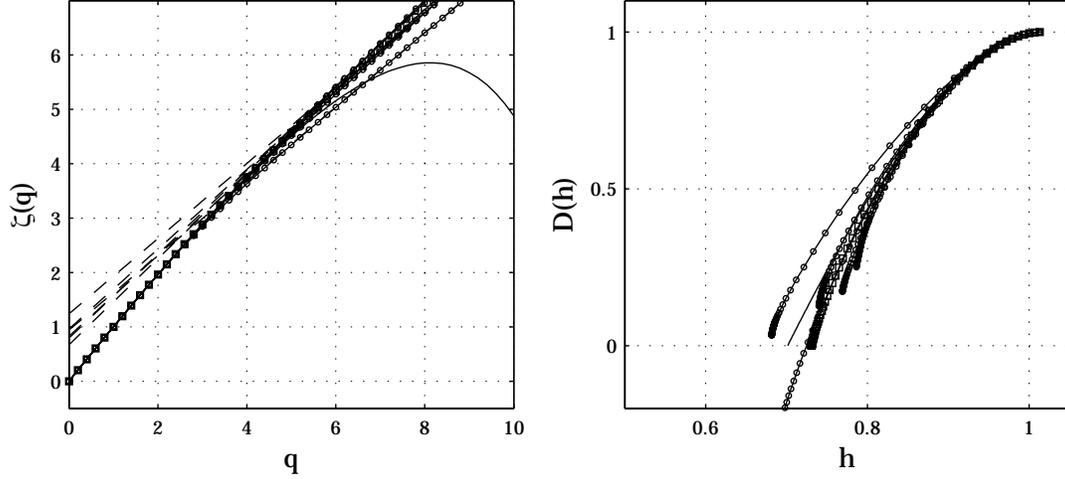


FIG. 10.2 – **Cascade de Poisson composée**, analysée avec les coefficients d'agrégations. Gauche : exposants  $\widehat{\zeta}_{cpc_i}^a(q)$  pour 5 réalisations (o) et  $\widehat{\zeta}_{cpc_i}^a(q)$  ( $\square$ ), moyenne des  $\widehat{\zeta}_{cpc_i}^a(q)$  sur  $N_{réal} = 1000$  réalisations, trait continu : fonction  $\varphi_{cpc}(q)$  et trait en pointillé : comportement linéaire asymptotique. Droite :  $TL[\widehat{\zeta}_{cpc_i}^a](h)$  (o) et leur moyenne ( $\square$ ), transformée de Legendre de  $\varphi_{cpc}(q)$  (trait continu).

### 10.2.2 Processus multifractals de type fonction

Nous allons maintenant nous intéresser à des processus aléatoires multifractals dont les réalisations sont des fonctions et non plus des densités.

#### Cascade d'ondelette aléatoire

Commençons tout d'abord par le processus de cascade d'ondelette aléatoire, présenté au paragraphe 4.1, et montrons que l'effet de linéarisation ne dépend pas du formalisme multifractal utilisé.

Il a pour cela été synthétisées  $N_{réal} = 400$  réalisations de ce processus, avec une loi log-normale pour les multiplicateurs, ce qui aboutit à (cf. paragraphe 4.1) :

$$\varphi_{rwc}(q) = mq - \frac{\sigma^2 \ln 2}{2} q^2.$$

On a choisi  $m = 0.37$  et  $\sigma = 0.19$ . Ce choix pour les paramètres revient à prescrire aux cascades d'ondelette aléatoires les mêmes propriétés multifractales que celles correspondants à la modélisation log-normale de la vitesse turbulente [85, 135] (cf. le paragraphe 8.2.4), avec la valeur  $C_2 = 0.025$  couramment admise pour le paramètre d'intermittence [58]. Cela permet alors de calculer la valeur de l'ordre critique  $q_*^+$  :

$$q_*^+ = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2 \log(2)}} \simeq 8.94.$$

Les réalisations ont été synthétisées à l'aide de l'ondelette de Daubechies avec 6 moments nuls. Chaque réalisation est de résolution  $r = 2^{-13}$  et contient  $N_{int} = 2^4$  échelles intégrales.

L'analyse est d'abord effectuée à l'aide du formalisme multifractal basé sur les coefficients

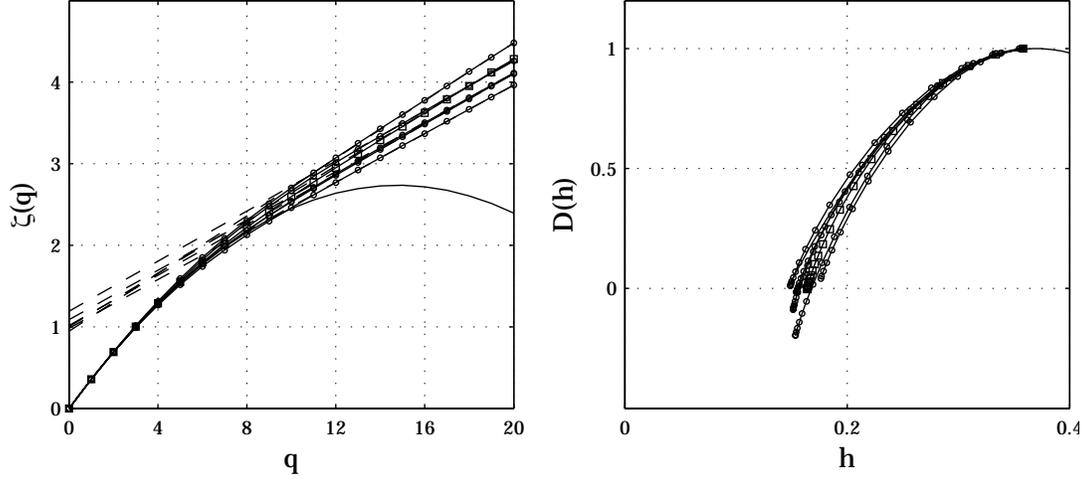


FIG. 10.3 – **Cascade d'ondelette aléatoire.** Formalismes multifractals basés sur les coefficients d'ondelette discrets. Gauche : exposants  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$  pour 5 réalisations (o) et  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$  ( $\square$ ), moyenne des  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$  sur  $N_{réal} = 1000$  réalisations, trait continu : fonction  $\varphi_{rwc}(q)$  et trait en pointillé : comportement linéaire asymptotique. Droite :  $TL[\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}](h)$  (o) et leur moyenne ( $\square$ ), transformée de Legendre de  $\varphi_{rwc}(q)$  (trait continu).

d'ondelette discrets (ondelette de Daubechies à 2 moments nuls).

Les résultats sont présentés sur la figure 10.3. Il sont semblables à ceux obtenus dans le cas de l'analyse multifractale des densités. Pour chaque réalisation, les estimées  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$  donnent une bonne mesure de  $\varphi_{rwc}(q)$  pour les plus petites valeurs de  $q$  (i.e. environ  $q \lesssim 6$ ), puis se comportent linéairement en fonction de  $q$  pour les plus grandes valeurs de  $q$  (i.e. environ  $q \gtrsim 12$ ) :  $\simeq \widehat{\alpha}_*^+ + \widehat{\beta}_*^+ q$ . Le comportement linéaire asymptotique est différent pour chaque réalisation :  $\widehat{\alpha}_*^+$  et  $\widehat{\beta}_*^+$  sont des variables aléatoires. Ce constat est le même pour la moyenne  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$  des exposants  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$  sur les  $N_{réal}$  réalisations. On a en particulier pour  $q \gtrsim 12$  :  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q) \simeq \widehat{\alpha}_*^+ + \widehat{\beta}_*^+ q$ , où  $\widehat{\alpha}_*^+$  et  $\widehat{\beta}_*^+$  sont les moyennes des variables aléatoires  $\widehat{\alpha}_*^+$  et  $\widehat{\beta}_*^+$ . On note aussi la valeur suivante :  $\widehat{\alpha}_*^+ \simeq 1.00$ .

En observant les transformées de Legendre des exposants, le constat se traduit bien sûr par l'existence de points d'accumulation  $(\widehat{h}_*^+, \widehat{D}_*^+)$ , différents pour chaque réalisation, la moyenne des transformées de Legendre ayant un point d'accumulation  $(\widehat{h}_*^+, \widehat{D}_*^+)$  avec  $\widehat{D}_*^+ = 1 - \widehat{\alpha}_*^+ \simeq 0.00$ .

### Autres formalismes multifractals

Une analyse identique (même valeurs pour  $N_{réal}$ ,  $N_{int}$  et  $r$ ) est ensuite effectuée à l'aide d'autres formalismes multifractals, basés sur les coefficients dominants (ondelette de Daubechies à 3 moments nuls), sur les coefficients d'ondelette continus (ondelette gaussienne à 3 moments nuls) et sur les coefficients mmto (idem). Notons que les régressions linéaires permettant la mesure des exposants

sont effectuées sur la même gamme d'échelles pour les deux types d'ondelette utilisés<sup>3</sup>.

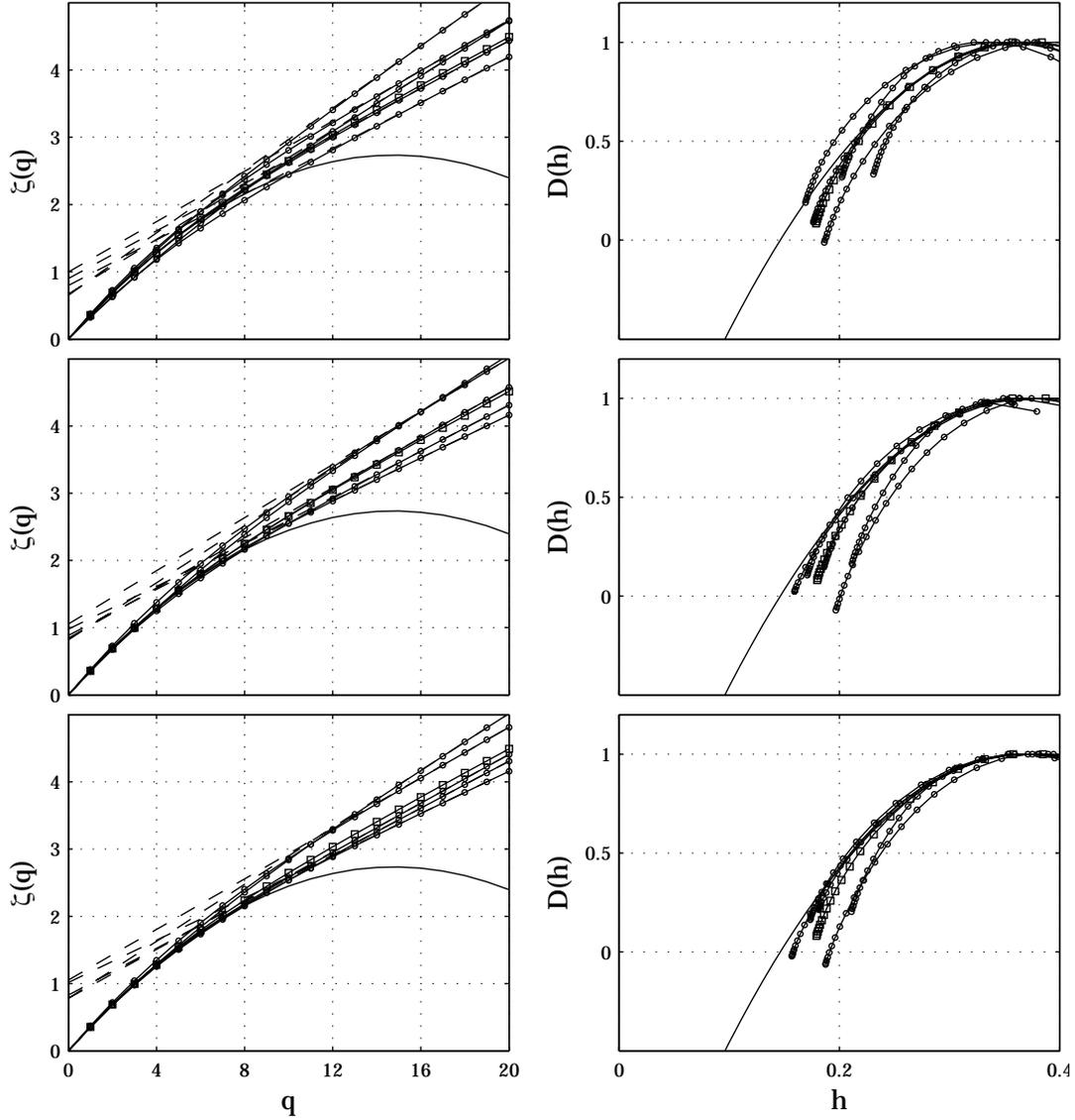


FIG. 10.4 – **Cascade d'ondelette aléatoire.** Gauche : exposants  $\widehat{\zeta}_{rwc_i}^p(q)$  pour 5 réalisations (o) et  $\widehat{\zeta}_{rwc_i}^p(q)$  ( $\square$ ), moyenne des  $\widehat{\zeta}_{rwc_i}^p(q)$  sur  $N_{réal} = 400$  réalisations, trait continu : fonction  $\varphi_{rwc}(q)$  et trait en pointillé : comportement linéaire asymptotique. Droite :  $TL[\widehat{\zeta}_{rwc_i}^p](h)$  (o) et leur moyenne ( $\square$ ), transformée de Legendre de  $\varphi_{rwc}(q)$  (trait continu). Formalismes multifractals basés sur les coefficients dominants (haut), coefficients d'ondelette continus (milieu) et coefficients mmt0 (bas).

Les résultats sont présentés sur la figure 10.4. L'effet de linéarisation est observé pour chaque

<sup>3</sup>Puisque deux ondelettes différentes sont utilisées ici (l'ondelette de Daubechies à 3 moments nuls et l'ondelette gaussienne à 3 moments nuls), il est nécessaire de s'assurer que la régression linéaire soit effectuée sur la même gamme d'échelles. L'échelle associée à une ondelette est connue en déterminant la fréquence centrale du filtre passe-bande associé à cette ondelette (cf. annexe B), et en définissant alors l'échelle de l'ondelette comme l'inverse de cette fréquence centrale. On peut ainsi "recaler" entre elles les échelles associées à chaque ondelette.

formalisme multifractal de la même façon que pour le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets.

L'effet de linéarisation est donc identique quel que soit le formalisme multifractal utilisé, tout comme c'était le cas pour l'analyse multifractale des densités.

### Autres processus multifractals

Analysons désormais d'autres processus multifractals, avec un seul formalisme multifractal, celui basé sur les coefficients d'ondelette discrets, puisque l'on vient voir que le choix spécifique de formalisme multifractal n'intervenait pas.

On utilise ici le processus de mouvement brownien en temps multifractal (cf. annexe D), construit à partir d'une cascade de Poisson composée. On a en particulier :

$$\varphi_{fbmmt}(q) = qH + 1 - \mathbb{E}W^{qH} - qH(1 - \mathbb{E}W), \quad \text{avec } \mathbb{E}W^q = e^{\mu q + \frac{\sigma^2}{2} q^2},$$

où  $\mu = 0.04$ ,  $\sigma = 0.03$  et  $H = 0.75$ . Ce choix de paramètre aboutit à la valeur suivante pour  $q_*^+$  :

$$q_*^+ \simeq 6.87.$$

On a choisi :  $r = 2^{-15}$  et  $N_{int} = 2^2$ . Enfin  $N_{réal} = 1000$  réalisations ont été synthétisées.

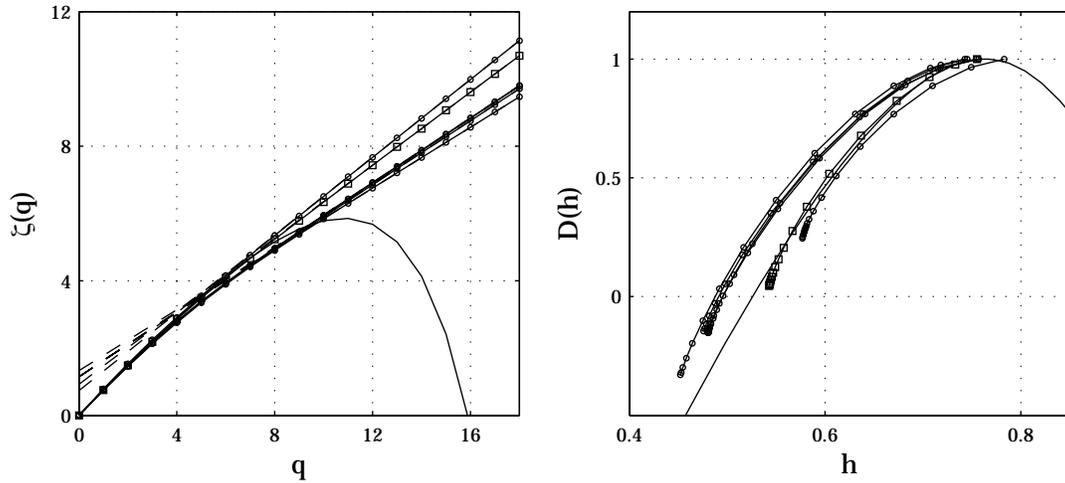


FIG. 10.5 – **Mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal.** Gauche : exponents  $\widehat{\zeta_{fbmmt_i}^d}(q)$  pour 5 réalisations (o) et  $\widehat{\zeta_{fbmmt_i}^d}(q)$  (□), moyenne des  $\widehat{\zeta_{fbmmt_i}^d}(q)$  sur  $N_{réal} = 1000$  réalisations, trait continu : fonction  $\varphi_{fbmmt}(q)$  et trait en pointillé : comportement linéaire asymptotique. Droite :  $TL[\widehat{\zeta_{fbmmt_i}^d}](h)$  (o) et leur moyenne (□), transformée de Legendre de  $\varphi_{fbmmt}(q)$  (trait continu).

Les résultats, portés sur la figure 10.5, sont donc en tout point semblables à ceux obtenus sur le processus de cascade d'ondelette aléatoire.

### 10.2.3 Conclusion

L'effet de linéarisation, tel que décrit au chapitre précédent, est donc observé, de façon identique, pour tous les processus multifractals, de type fonction ou densité, et pour tous les formalismes

multifractals utilisés. L'effet de linéarisation est donc un trait intrinsèque à l'analyse multifractale des signaux, et pas seulement de l'analyse du processus de cascade de Mandelbrot canonique à l'aide du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'agrégation.

### 10.3 Influences de la résolution et de la durée

Comme il vient d'être montré, l'effet de linéarisation ne dépend ni de la nature (fonction ou densité) du processus multifractal, ni de sa particularité (marche aléatoire multifractale ou cascade d'ondelette aléatoire), ni de la façon dont il est analysé (tous les formalismes multifractals). Les résultats théoriques concernant les cascades de Mandelbrot canoniques [119, 136, 137] s'étendent ainsi à tous les processus multifractals. Ce sont cependant des résultats asymptotiques, valables dans la limite des réalisations de processus de résolution nulle et de durée infinie.

Comme les signaux dont on essaye d'effectuer l'analyse multifractale en pratique sont forcément de résolution  $r$  finie (i.e. non-nulle) et de nombre d'échelles intégrales fini<sup>4</sup>, il apparaît important de caractériser une éventuelle dépendance de l'effet de linéarisation selon ces paramètres.

#### 10.3.1 Méthodologie

Puisque l'effet de linéarisation est identique pour tous les processus multifractals, on n'étudiera ici les dépendances selon la résolution  $r$  et le nombre d'échelles intégrales  $N_{int}$ , que sur un seul processus : une cascade d'ondelette aléatoire log-normale (cf. le paragraphe 4.1). Des résultats analogues ont été obtenus avec d'autres processus (cf. par exemple [92], où la même étude est présentée sur un mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal), les résultats présentés sont ainsi tout-à-fait représentatifs.

On choisit pour les paramètres fixant l'expression de la fonction  $\varphi_{rwc}(q)$ , et donc les propriétés attendues des réalisations synthétisées, les mêmes valeurs que dans le paragraphe précédent :

$$m = 0.37 \text{ et } \sigma = 0.19.$$

Notons qu'un tel choix de paramètres aboutit à la valeur suivante pour  $q_*^+$  :

$$q_*^+ \simeq 8.94.$$

$N_{réal} = 1000$  réalisations seront dans chaque situation synthétisées, à l'aide de l'ondelette Daubechies avec 6 moments nuls (cf. l'annexe B). Enfin, un seul estimateur des exposants  $\zeta(q)$  sera ici utilisé, celui construit à partir des coefficients d'ondelette discrets,  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$ , en utilisant l'ondelette de Daubechies avec 3 moments nuls.

#### 10.3.2 Dépendance selon la résolution $r$

Tous les résultats théoriques sur l'effet de linéarisation pour les processus multifractals concernent leurs réalisations dont la résolution  $r$  est nulle :  $r = 0$ , ce qui correspond par exemple pour les processus construits à partir d'une cascade multiplicative, à un nombre  $J$  infini de d'étapes de construction (cf. annexe D). En pratique, ce n'est bien-sûr pas le cas, et les réalisations synthétisées sont nécessairement de résolution  $r$  finie, c'est-à-dire strictement positive, et on s'attend à ce que les propriétés de ces réalisations tendent vers les propriétés asymptotiques lorsque la résolution  $r$

<sup>4</sup>On rappelle (cf. annexe D) que ce sont les deux quantités pertinentes pour quantifier la notion de durée d'une réalisation de processus multifractal.

tend vers 0.

Il semble donc intéressant de vérifier que les réalisations utilisées sont de résolution  $r$  suffisante, et décrivent bien l'effet de linéarisation asymptotique correspondant à  $r \rightarrow 0$ , et que l'on n'observe pas un artefact dû à la finitude de la résolution.

## Résultats

Vont être ainsi synthétisées des réalisations de nombre d'échelles intégrales  $N_{int}$  fixé ( $N_{int} = 2^7$ ), mais de résolutions  $r$  différentes :  $r = 2^{-8}$ ,  $r = 2^{-9}$ ,  $r = 2^{-10}$ ,  $r = 2^{-11}$ ,  $r = 2^{-12}$  et  $r = 2^{-13}$ . Pour chaque valeur de la résolution  $r$ ,  $N_{réal} = 1000$  réalisations sont synthétisées.

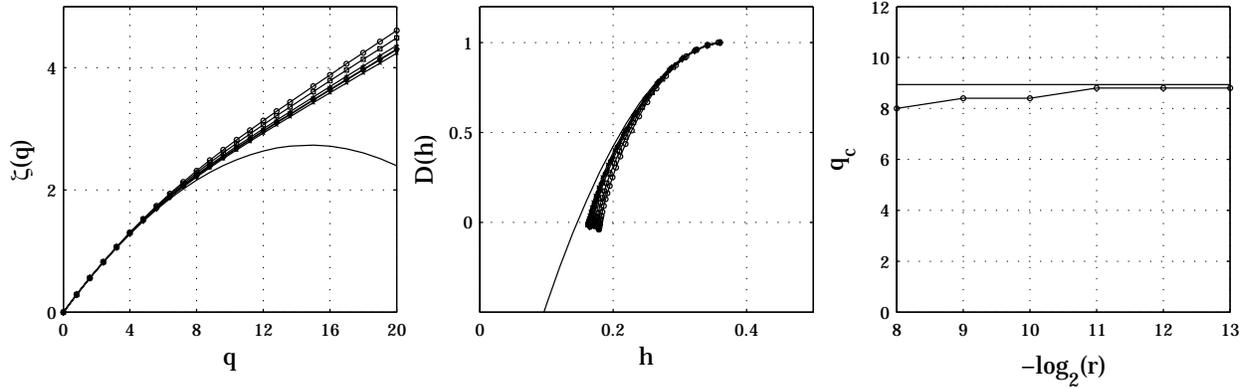


FIG. 10.6 – **Cascade d'ondelette aléatoire.** Gauche : moyenne des estimées  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$ . Milieu : moyenne des transformées de Legendre des  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$  (ligne continue :  $\varphi_{rwc}(q)$  et sa transformée de Legendre). Droite :  $q_c$  en fonction de  $-\log_2 r$  et  $q_*^+ \simeq 8.94$  (ligne continue).  $r = 2^{-8}$  (o),  $r = 2^{-9}$  ( $\square$ ),  $r = 2^{-10}$  (+),  $r = 2^{-11}$  ( $\diamond$ ),  $r = 2^{-12}$  (\*),  $r = 2^{-13}$  ( $\times$ ).

Les résultats sont présentés sur la figure 10.6. Premièrement, l'effet de linéarisation se produit bien pour chaque valeur de résolution  $r$  choisie, comme on peut l'observer sur la moyenne  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$  sur les  $N_{réal} = 1000$  réalisations des estimées  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$  (gauche), ainsi que sur la moyenne sur les mêmes  $N_{réal}$  réalisations des transformées de Legendre des  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$  (milieu).

De plus, le nombre  $q_c$ , défini au paragraphe 9.2.3 (équation (9.2.5)), sature bien à une valeur proche de  $q_*^+ \simeq 8.94$  lorsque la résolution  $r$  augmente. On peut noter que pour les plus faibles valeurs de la résolution  $r$ , le nombre  $q_c$  donne des valeurs légèrement plus faibles que  $q_*^+$ . On peut raisonnablement penser que cela est dû à deux raisons : premièrement, par sa définition même, l'estimateur utilise une définition de la transition (égale distance à chacun des deux comportements asymptotiques :  $\simeq \varphi_{rwc}(q)$  et  $\simeq \widehat{\alpha_*^+ + \beta_*^+}(q)$ , qui ne correspond pas exactement à celle de  $q_*^+$ . De plus, le caractère fini de la résolution des réalisations synthétisées, et donc un manque de convergence vers les caractéristiques du processus, définies pour une résolution nulle, commence certainement à intervenir.

### 10.3.3 Dépendance selon le nombre d'échelles intégrales $N_{int}$

Nous allons désormais faire varier le nombre d'échelles intégrales des réalisations étudiées. Comme il a été précisé dans l'annexe D, l'échelle intégrale est l'unité de longueur naturelle des

processus multifractals, chaque morceau de signal de longueur environ une échelle intégrale pouvant être considéré comme statistiquement indépendant des autres<sup>5</sup>. Ainsi, la notion d'augmenter la statistique (pour un signal donné) pour les estimations revient en pratique à augmenter le nombre d'échelles intégrales.

Nous allons ainsi voir que dès que les signaux étudiés possèdent quelques échelles intégrales (environ 4), l'effet de linéarisation ne dépend plus du nombre d'échelles intégrales. On utilisera toujours pour quantifier cette dépendance le nombre  $q_c$ .

## Résultats

Nous allons désormais étudier des réalisations de résolution  $r$  fixée ( $r = 2^{-13}$ ), mais dont le nombre d'échelles intégrales  $N_{int}$  varie. On choisira ainsi :  $N_{int} = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$  et  $2^7$ . Pour chaque valeur de  $N_{int}$ ,  $N_{réal} = 1000$  réalisations sont synthétisées.

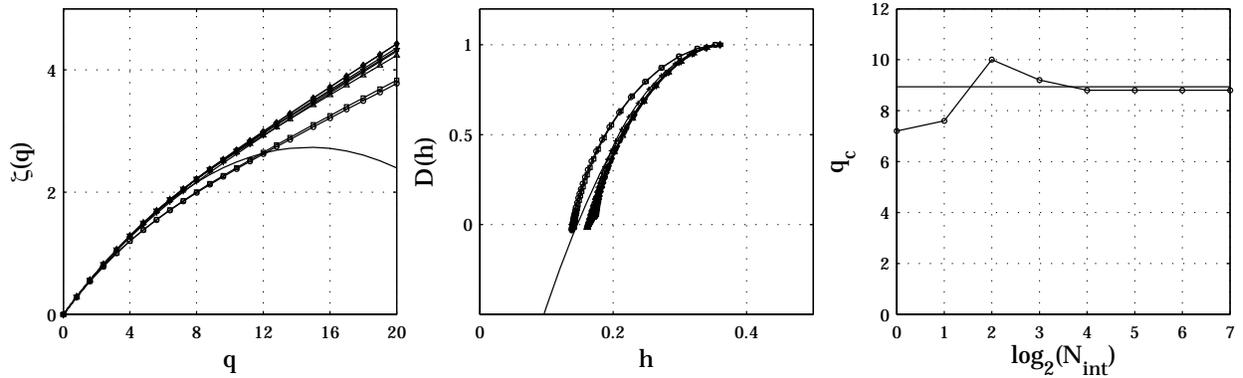


FIG. 10.7 – **Cascade d'ondelette aléatoire.** Gauche : moyenne des estimées  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$ . Milieu : moyenne des transformées de Legendre des  $\widehat{\zeta_{rwc_i}^d}(q)$  (ligne continue :  $\varphi_{rwc}(q)$  et sa transformée de Legendre). Droite :  $q_c$  en fonction de  $\log_2 N_{int}$  et  $q_*^+ \simeq 8.94$  (ligne continue).  $N_{int} = 2^0$  (o),  $N_{int} = 2^1$  ( $\square$ ),  $N_{int} = 2^2$  (+),  $N_{int} = 2^3$  ( $\diamond$ ),  $N_{int} = 2^4$  (\*),  $N_{int} = 2^5$  ( $\times$ ),  $N_{int} = 2^6$  ( $\triangle$ ),  $N_{int} = 2^7$  ( $\nabla$ ).

L'effet de linéarisation est tout d'abord observé pour chaque nombre d'échelles intégrales utilisé (figures de gauche et du milieu). On observe de plus le fait suivant : dès que les réalisations étudiées ont une longueur dépassant environ 4 échelles intégrales, on n'observe aucune dépendance selon le nombre d'échelles intégrales du nombre  $q_c$ .

Ce résultat est interprété de la façon suivante : l'effet de linéarisation n'est pas un effet de taille finie, due à une longueur (i.e. un nombre d'échelles intégrales) finie des réalisations analysées. Ceci est en pratique vrai dès que les réalisations analysées ont une longueur de quelques (environ 4) échelles intégrales.

## Conséquence associée

Ce résultat sera parfois utilisé de la façon suivante. Si on étudie un seul signal, dont la longueur est un grand nombre d'échelles intégrales, et que l'on désire bien mettre en évidence l'effet de

<sup>5</sup>Cette indépendance est exacte par construction dans le cas de processus multifractals synthétiques (cf. l'annexe D), et en bonne approximation vérifiée pour les signaux réels, puisque ce qu'on appelle échelle intégrale est en fait l'échelle de décorrélation (cf. la même annexe D), et les morceaux de longueur environ une échelle intégrale sont ainsi au moins statistiquement décorrélés.

linéarisation sur ces données, on peut avoir intérêt à découper ce signal en plusieurs sous-signaux de longueur un nombre "suffisant" d'échelles intégrales, et à effectuer des estimations d'exposants sur chacune de ces sous-signaux. En effet, puisque les estimées  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  des exposants sont des variables aléatoires, on est en pratique gêné par l'écart-type en général non-négligeable des  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  pour les plus grandes valeurs de l'ordre  $q$ , et il devient difficile par exemple de savoir si l'ordonnée à l'origine du comportement linéaire pour  $q \geq q_*^+$  est bien 1.

Ce nombre "suffisant" est à comprendre à la lumière des résultats précédents : il faut que ce nombre soit assez grand devant environ 4 échelles intégrales, par exemple  $2^5$  échelles intégrales. On peut ainsi diminuer la variabilité statistique due à l'écart-type<sup>6</sup> des  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  en les moyennant sur les sous-signaux. Ce procédé nécessite une étude statistique plus approfondie des estimateurs (caractérisation de leur biais de leur variance). Une telle étude a récemment été entreprise en collaboration avec Stéphane Roux, du laboratoire de physique de l'ÉNSL [149].

### 10.3.4 Conclusion

On a donc montré sur l'exemple des cascades d'ondelette aléatoires que l'effet de linéarisation dépend très peu de la résolution  $r$  des processus étudiés, voire plus lorsque  $r \leq 2^{-10}$ , et ne dépendait pas non plus du nombre  $N_{int}$  d'échelles intégrales, dès que  $N_{int}$  était supérieur à quelques (4) échelles intégrales. La même analyse a été effectuée pour divers processus multifractals (cf. par exemple [92]), aboutissant toujours aux mêmes conclusions.

## 10.4 Conclusion : l'effet de linéarisation

On vient donc de mettre en évidence que l'effet de linéarisation décrit au chapitre précédent, dans le cas des processus de cascade de Mandelbrot canonique analysées avec les coefficients  $\zeta^a(q)$  construits sur les coefficients d'agrégation, était observé de façon en tout point similaire pour *tous* les processus multifractals, analysés avec *tous* les exposants  $\zeta^p(q)$ , sans influence notable de la résolution ou du nombre d'échelles intégrales des signaux analysés.

On résume donc tous ces résultats de la façon unique suivante. Pour tout processus multifractal  $X$ , dont on cherche à estimer les exposants  $\zeta_X^p(q)$ , construits à partir de quantités multi-résolution  $p$  quelconques, il existe un ordre critique, noté  $q_*^+$ , tel que :

$$\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q) \rightarrow \begin{cases} \varphi_X(q) & \text{si } 0 \leq q \leq q_*^+ \\ 1 + \varphi'_X(q_*^+)q & \text{si } q \geq q_*^+ \end{cases}, \quad (10.1)$$

où le symbole  $\rightarrow$  dénote la limite de la moyenne pour un nombre infini de réalisations du processus aléatoire analysé.

L'ordre critique  $q_*^+$  se définit à partir de la fonction  $\varphi_X(q)$  selon :

$$q_*^+ / 1 + q_*^+ \varphi'_X(q_*^+) = \varphi_X(q_*^+). \quad (10.2)$$

Remarquons encore une fois que la définition ordre critique  $q_*^+$  est reliée au zéro de la transformée de Legendre de la fonction  $\varphi_X(q)$ . En effet, en paramétrant la transformée de Legendre par  $q$  (en utilisant  $h = \varphi'_X(q)$ ), on a :  $TL[\varphi_X](h) = 1 + q\varphi'_X(q) - \varphi_X(q)$ . Donc  $q = q_*^+$  correspond bien à  $TL[\varphi_X](h) = 0$ .

<sup>6</sup>Quite à augmenter l'éventuel biais de ces estimateurs.

## Interprétation

Ce résultat est interprété en termes multifractals de la même façon qu'au chapitre précédent : puisque les formalismes multifractals correspondant aux exposants  $\zeta^p(q)$  fournissent une mesure du spectre de singularités du processus multifractal analysé, l'effet de linéarisation est la traduction du fait que ce spectre de singularités ne peut prendre que des valeurs positives. En particulier, il n'y a pas de sens à vouloir mesurer des dimensions fractales négatives pour le spectre de singularités.

## 10.5 Estimation de l'ordre critique $q_*^+$

L'effet de linéarisation vient d'être numériquement caractérisé. Il se traduit essentiellement par l'existence d'un ordre critique  $q_*^+$  au-delà duquel les estimateurs  $\widehat{\zeta}^p(q)$  des exposants  $\zeta^p(q)$  se comportent linéairement en fonction de l'ordre  $q$ . Si les propriétés multifractales des signaux étudiés (la fonction  $\varphi(q)$  ou le spectre de singularités associés) sont connus, on peut alors analytiquement en déduire la valeur de  $q_*^+$ . En revanche, dans le cas où on ne connaît pas de façon théorique les propriétés multifractales des signaux étudiés, par exemple dans le cas des signaux expérimentaux, on ne peut pas connaître théoriquement la valeur de l'ordre critique  $q_*^+$ . Or cette valeur est cruciale si l'on veut effectuer une analyse de ces données, car à la lumière de ce qui vient d'être montré dans les paragraphes précédents, la mesure des exposants  $\zeta^p(q)$  pour  $q \geq q_*^+$  n'apporte pas d'information supplémentaire. En particulier, si l'on veut comparer deux modèles proposés pour la description des propriétés multifractales (par exemple comparer les modèles log-normal et de She-Lévêque dans le cas de la turbulence pleinement développée, cf. le paragraphe 8.2.4), il n'est prudent de comparer les valeurs obtenues aux valeurs prédites par les modèles seulement pour  $q \leq q_*^+$ .

Il est donc nécessaire d'avoir à disposition un outil pour estimer à partir des signaux étudiés la valeur de l'ordre critique  $q_*^+$ . Un tel estimateur va être ici défini, et numériquement caractérisé en le testant sur des réalisations synthétiques de processus multifractals.

### 10.5.1 Estimateur $\widetilde{q_*^+}$

L'estimateur qui est ici proposé repose sur l'idée simple suivante. L'effet de linéarisation précédemment décrit statue que l'estimateur  $\widehat{\zeta}_{X_i}^p(q)$  passe d'un comportement à un autre : pour  $q \leq q_*^+$ ,  $\widehat{\zeta}_{X_i}^p(q) \simeq \varphi_X(q)$ , tandis que pour  $q \geq q_*^+$ ,  $\widehat{\zeta}_{X_i}^p(q) \simeq \widehat{\alpha}_*^+ + \widehat{\beta}_*^+ q$ . On peut donc essayer de construire deux modèles asymptotiques à partir des estimées  $\widehat{\zeta}_{X_i}^p(q)$ , l'un décrivant les "petits" ordres :  $0 \leq q \leq q_*^+$ , noté  $A_1(q)$ , et l'autre les "grands" ordres :  $q \geq q_*^+$ , noté  $A_2(q)$ , et alors définir l'estimateur de  $q_*^+$  comme la valeur de l'ordre  $q$  pour lequel les estimées  $\widehat{\zeta}_{X_i}^p(q)$  passent du modèle  $A_1(q)$  au modèle  $A_2(q)$ .

#### Modèle asymptotique $A_2(q)$

Le modèle asymptotique  $A_2(q)$  est facile à définir, puisqu'il s'agit de la partie linéaire des estimées  $\widehat{\zeta}_{X_i}^p(q)$ . On le définira ainsi par une régression linéaire de  $\widehat{\zeta}_{X_i}^p(q)$  pour  $q \in [q_1, q_2]$ , où  $q_1$  est assez grand devant  $q_*^+$ . Bien sûr, on ne connaît pas  $q_*^+$ , puisque l'on cherche à l'estimer, mais il est assez facile à partir des estimées  $\widehat{\zeta}_{X_i}^p(q)$  (cf. le paragraphe 10.2) de se faire de visu une idée grossière de sa valeur.

On choisit ainsi  $q_1$  (respectivement  $q_2$ ) égal à environ deux (respectivement trois) fois cette

estimation grossière, et l'on obtient par régression linéaire de  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  pour  $q \in [q_2, q_3]$  :

$$A_2(q) = \widehat{\alpha}_*^+ + \widehat{\beta}_*^+ q.$$

### Modèle asymptotique $A_1(q)$

Pour le modèle asymptotique  $A_1(q)$ , la situation est plus compliquée. Il n'est pas aisé de raisonner directement sur les  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$ , simplement parce qu'il apparaît difficile de définir une zone d'ajustement pour un quelconque modèle, contrairement à  $A_2(q)$ . On utilise plutôt la transformée de Legendre de  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$ . En effet, d'après les résultats des paragraphes précédents, il apparaît assez clairement que la transformée de Legendre de  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  décrit bien (pour chaque réalisation) la transformée de Legendre de  $\varphi_X(q)$  pour  $D \gtrsim 0.5$ . On appellera cette partie de la transformée de Legendre ( $D \gtrsim 0.5$ ) *partie supérieure*.

De plus, dans la plupart des situations (cf. le paragraphe 10.2), la partie supérieure a une forme de cloche, ou encore de parabole renversée, et il apparaît ainsi sensé d'essayer de l'ajuster par un polynôme d'ordre 2 :  $p_0 + p_1 h + p_2 h^2$ . C'est le polynôme de plus bas degré qui puisse tenir compte du caractère courbé de la transformée de Legendre des  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$ . On montre très facilement que la transformée de Legendre d'un polynôme d'ordre 2 est un polynôme d'ordre 2, ce qui aboutit donc à un modèle quadratique pour les estimées  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  :

$$A_1(q) = s_0 + s_1 q + s_2 q^2.$$

Comme c'est la partie supérieure de la transformée de Legendre qui est ajustée, cela correspond bien à un modèle pour  $q$  proche de 0. En effet, puisque les  $\widehat{\zeta_X^p}(q)$  sont concaves, leur transformée de Legendre est inversible, et l'on a :  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q) = 1 + \min_h (qh - TL[\widehat{\zeta_{X_i}^p}](h))$ , et en particulier :  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(0) = 1 + \max_h TL[\widehat{\zeta_{X_i}^p}](h)$ . Le maximum de la transformée de Legendre correspond à  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(0)$  et la partie supérieure (telle que  $TL[\widehat{\zeta_{X_i}^p}](h) \gtrsim 0.5$ ) aux  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  pour  $q \in [0, q_3]$ , avec  $q_3 \leq q_*^+$ .  $A_1(q)$  correspond donc bien à un modèle des  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  pour les "petits" ordres.

De manière précise, on construit le modèle  $A_1(q)$  de la façon suivante. On calcule les estimées  $\widehat{\zeta_X^p}(q)$  pour  $q \geq -0.5$  jusqu'à  $q_3$  précédemment défini. La transformée de Legendre des  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  est alors calculée, et sa partie supérieure ( $TL[\widehat{\zeta_{X_i}^p}](h) \geq 0.5$ ) est ajustée par un polynôme de degré 2. On en déduit alors en inversant la transformée de Legendre le modèle  $A_1(q)$ .

Notons que l'on choisit  $q \geq -0.5$ <sup>7</sup>, afin que la transformée de Legendre des  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  ait un maximum bien défini. L'ajustement par une parabole est alors plus robuste, et cela permet de stabiliser la méthode.

### Estimateur $\widetilde{q}_*^+$

L'estimateur  $\widetilde{q}_*^+$  est alors défini de la façon suivante :

$$\widetilde{q}_*^+ / \left| \widehat{\zeta_{X_i}^p}(\widetilde{q}_*^+) - A_1(\widetilde{q}_*^+) \right| = \left| \widehat{\zeta_{X_i}^p}(\widetilde{q}_*^+) - A_2(\widetilde{q}_*^+) \right|. \quad (10.3)$$

<sup>7</sup>Pour une telle valeur d'ordre, les estimées  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  ne sont en pratique jamais divergents, quels que soient les coefficients  $p$  utilisés.

$\widetilde{q}_*^+$  quantifie donc bien l'ordre  $q$  pour lequel les estimées  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  passent du comportement modélisé par  $A_1(q)$  à celui modélisé par  $A_2(q)$ .

### Mise en oeuvre de $\widetilde{q}_*^+$

L'usage de la définition(10.3) est illustrée sur la figure 10.8, où l'estimateur ainsi construit est appliqué à une réalisation du processus de cascade d'ondelette aléatoire (le même que celui utilisé précédemment), avec  $r = 2^{-13}$  et  $N_{int} = 2^7$ . On rappelle que pour ce processus,  $q_*^+ \simeq 8.94$ . On a ici choisi  $q_2 = 20$  et  $q_3 = 30$  (ces ordres ne sont cependant pas forcément portés sur les figures pour plus de visibilité), puisque l'on peut juger de visu en première approximation que l'ordre critique est autour de  $q = 10$ .

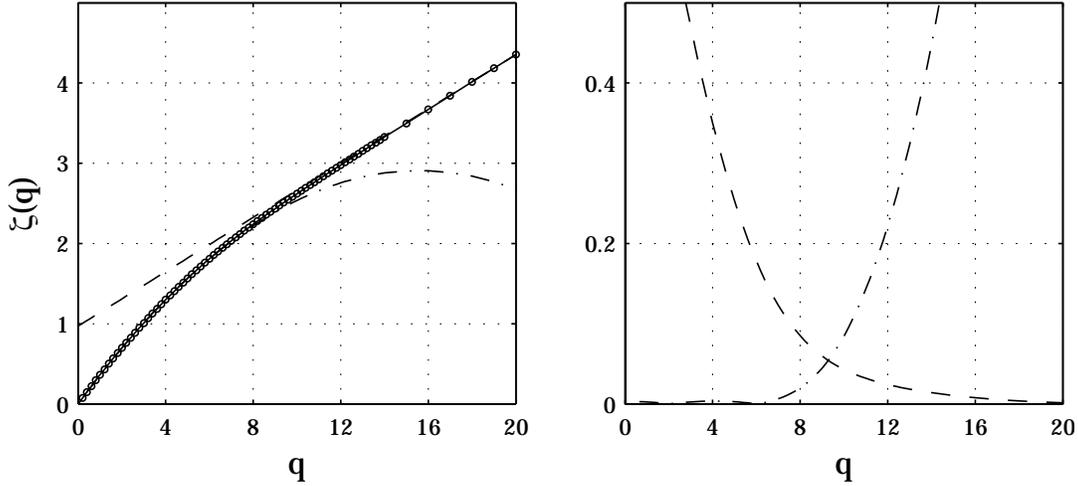


FIG. 10.8 – **Cascade d'ondelette aléatoire.** Une réalisation. Gauche : estimées  $\widehat{\zeta_{rwc}^d}(q)$  (o), modèle  $A_1(q)$  (trait tiret-tiret) et modèle  $A_2(q)$  (trait point-tiret). Droite : distances  $|\widehat{\zeta_{rwc}^d}(q) - A_1(q)|$  (trait tiret-tiret) et  $|\widehat{\zeta_{rwc}^p}(q) - A_2(q)|$  (trait point-tiret)

On trouve sur cet exemple  $\widetilde{q}_*^+ \simeq 9.3$ .

### Caractérisation de $\widetilde{q}_*^+$

Bien que l'estimateur semble fonctionner correctement dans ce cas particulier, pour lequel la méthode est bien adaptée puisque la fonction  $\varphi_{rwc}(q)$  est parabolique, le modèle  $A_1(q)$  étant alors un ajustement des estimées  $\widehat{\zeta_{rwc}^d}(q)$  pour  $q \leq q_*^+$  par leur expression théorique, une étude soignée met en évidence le fait suivant : la moyenne et l'écart-type  $\widetilde{q}_*^+$  dépend du nombre  $N_{int}$  d'échelles intégrales des réalisations analysées.

En effet, lorsque l'on moyenne les résultats obtenus avec  $\widetilde{q}_*^+$  sur  $N_{réal} = 400$  réalisations indépendantes, aux propriétés identiques à celle que l'on vient d'utiliser en exemple (i.e.  $r = 2^{-13}$  et  $N_{int} = 2^7$ ), on obtient une moyenne de  $\simeq 9.72$ <sup>8</sup> et un écart-type de  $\simeq 1.0$ . L'estimateur est donc

<sup>8</sup>On s'est par ailleurs assuré que le nombre de réalisations utilisées,  $N_{réal} = 400$ , était suffisant pour que la moyenne et l'écart-type donnés aient statistiquement un sens.

notablement biaisé, puisque  $q_*^+ \simeq 8.94$ .

La même expérience numérique est alors effectuée avec  $r = 2^{-13}$  mais  $N_{int} = 2^4$  puis  $N_{int} = 2^2$ , et les résultats portés dans le tableau suivant :

	moyenne de $\widetilde{q}_*^+$
$N_{int} = 2^7$	$\simeq 9.72$
$N_{int} = 2^4$	$\simeq 9.57$
$N_{int} = 2^2$	$\simeq 9.27$

Le constat suivant s'impose donc : le biais de l'estimateur  $\widetilde{q}_*^+$  dépend du nombre  $N_{int}$  d'échelles intégrales des réalisations étudiées, et diminue de plus lorsque  $N_{int}$  augmente.

### Conclusion

L'estimateur  $\widetilde{q}_*^+$  n'a donc pas grand intérêt, puisqu'il dépend de  $N_{int}$ . Il laisse cependant entrevoir une solution : puisque le biais de  $\widetilde{q}_*^+$  diminue avec le nombre d'échelles intégrales, on peut penser qu'en pré-découpant les données en blocs contenant un nombre variable d'échelles intégrales, on puisse gérer ce biais, voire le faire disparaître.

### 10.5.2 Estimateur $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$

On définit ainsi un nouvel estimateur de l'ordre critique  $q_*^+$ , qui sera noté  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$ . La définition de cet estimateur a été elle-aussi guidée par l'analyse systématique de réalisations synthétiques de processus multifractals, et a été obtenue après de nombreux essais, non concluants, de possibles variantes, qui ne seront bien sûr pas toutes explicités. On essaiera cependant d'insister sur les points importants du chemin qui a abouti à la définition de  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$ .

#### Découpage des réalisations en $N_{blocs}$ sous-blocs

Chaque réalisation est découpée en  $N_{blocs}$  sous-blocs de longueur égale. Si la réalisation de départ contient  $N_{int}$  échelles intégrales, alors chaque sous-bloc en contiendra  $N_{int}/N_{blocs}$ . On espère ainsi pouvoir gérer le nombre d'échelles intégrales particulier d'une réalisation à l'aide de ce paramètre supplémentaire.

Pour chacun de ces sous-blocs sont calculées les fonctions de structure, notées  $S_{X_{i,m}}^p(q, j)$ , avec  $m = 1, \dots, N_{blocs}$ , et appliqué l'estimateur des exposants des fonctions de structure, chaque estimée obtenue étant notée :  $\widehat{\zeta}_{X_{i,m}}^p(q)$ .

#### Moyenne sur les $N_{blocs}$ sous-blocs

Deux options sont possibles à ce stade : soit appliquer l'estimateur  $\widetilde{q}_*^+$  à chaque sous-bloc, puis moyenner les valeurs obtenues sur les  $N_{blocs}$  sous-blocs, soit moyenner les estimées  $\widehat{\zeta}_{X_{i,m}}^p(q)$  sur les  $N_{blocs}$  sous-blocs, puis appliquer  $\widetilde{q}_*^+$  à la moyenne obtenue.

Les deux options ont été testées dans diverses situations (divers processus et divers estimateurs  $\widehat{\zeta}^p(q)$ ). La première n'est en pratique pas stable numériquement, car lorsqu'on découpe les

réalisations, il arrive que l'application à l'un des sous-blocs de de l'algorithme définissant  $\widetilde{q}_*^+$  n'aboutisse pas<sup>9</sup>, ce qui paraît finalement assez logique, car en estimant les exposants  $\zeta^p(q)$  sur de trop courtes réalisations (i.e. de longueur quelques échelles intégrales), les estimées  $\widehat{\zeta_{X_{i,m}}^p}(q)$  peuvent s'éloigner de façon importante des comportements moyens, par exemple le comportement linéaire avec une ordonnée à l'origine proche de 1, et l'heuristique définissant  $\widetilde{q}_*^+$  est alors peu pertinente.

### Définition

L'estimateur  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  est ainsi défini à partir de la deuxième option. Les estimées  $\widehat{\zeta_{X_{i,m}}^p}(q)$  sont moyennées sur les  $N_{blocs}$  sous-blocs, ce qui définit  $\widetilde{\zeta_{X_i}^p}(q, N_{blocs})$ , qui dépend de  $N_{blocs}$ . L'estimateur  $\widetilde{q}_*^+$  (cf. définition (10.3)) est appliqué à  $\widetilde{\zeta_{X_i}^p}(q)$ , ce qui définit alors l'estimateur  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$ , qui dépend bien du paramètre  $N_{blocs}$  :

$$\widehat{q}_*^+(N_{blocs}) / \left| \widetilde{\zeta_{X_i}^p}(\widehat{q}_*^+(N_{blocs}), N_{blocs}) - A_1(\widehat{q}_*^+(N_{blocs})) \right| = \left| \widetilde{\zeta_{X_i}^p}(\widehat{q}_*^+(N_{blocs}), N_{blocs}) - A_2(\widehat{q}_*^+(N_{blocs})) \right|, \quad (10.4)$$

où les modèles asymptotiques  $A_1(q)$  et  $A_2(q)$  sont définis comme précédemment, mais à partir de  $\widetilde{\zeta_{X_i}^p}(q, N_{blocs})$ .

On a ainsi construit un estimateur qui dépend d'un paramètre supplémentaire,  $N_{blocs}$ , qui va permettre de contrôler le biais de l'estimateur dans la plupart des situations.

### 10.5.3 Caractérisation de $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$

#### Cascade d'ondelette aléatoire log-normal

L'estimateur  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  est numériquement caractérisé, notamment sa dépendance selon  $N_{blocs}$ , sur le précédent exemple de cascade d'ondelette aléatoire.  $N_{réal} = 400$  réalisations indépendantes ont été synthétisées et analysées, avec  $r = 2^{-13}$  et  $N_{int} = 2^7$ . Le paramètre  $N_{blocs}$  prend les valeurs :  $N_{blocs} = 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$  et  $2^7$ . L'ondelette utilisée est l'ondelette de Daubechies avec 3 moments nuls.

Les résultats de la figure 10.9 illustrent bien la dépendance selon  $N_{blocs}$  de l'estimateur  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$ , et notamment son biais. On voit que l'on peut ajuster le paramètre  $N_{blocs}$  afin de s'affranchir raisonnablement de ce biais. Ce biais diminue en effet lorsque  $N_{blocs}$  augmente, et s'annule (à l'intérieur des intervalles de confiance) lorsque  $N_{blocs} = 2^6$ , c'est-à-dire lorsque les sous-blocs ont une longueur de 2 échelles intégrales (on rappelle que  $N_{int} = 2^7$ ). L'écart-type de l'estimateur diminue lui-aussi avec  $N_{blocs}$ .

On observe donc qu'il est ainsi possible de contrôler le biais de l'estimateur  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  en faisant varier  $N_{blocs}$ , et ainsi de tenir compte du nombre  $N_{int}$  d'échelles intégrales de la réalisation étudiée. En effet, lorsque  $N_{blocs}$  est choisi de façon à ce que chaque sous-bloc ait une durée de 2 échelles intégrales, le biais de l'estimateur est nul. Ce constat a été vérifié en utilisant le même processus, mais en utilisant des valeurs différentes pour  $N_{int}$  : le biais de l'estimateur s'annule à chaque fois lorsque  $N_{blocs}$  est choisi de façon à ce que chaque sous-bloc ait une durée de 2 échelles intégrales.

<sup>9</sup>Par exemple si l'on a toujours :  $\left| \widehat{\zeta_{X_{i,m}}^p}(q) - A_1(q) \right| < \left| \widehat{\zeta_{X_{i,m}}^p}(q) - A_2(q) \right|$ .

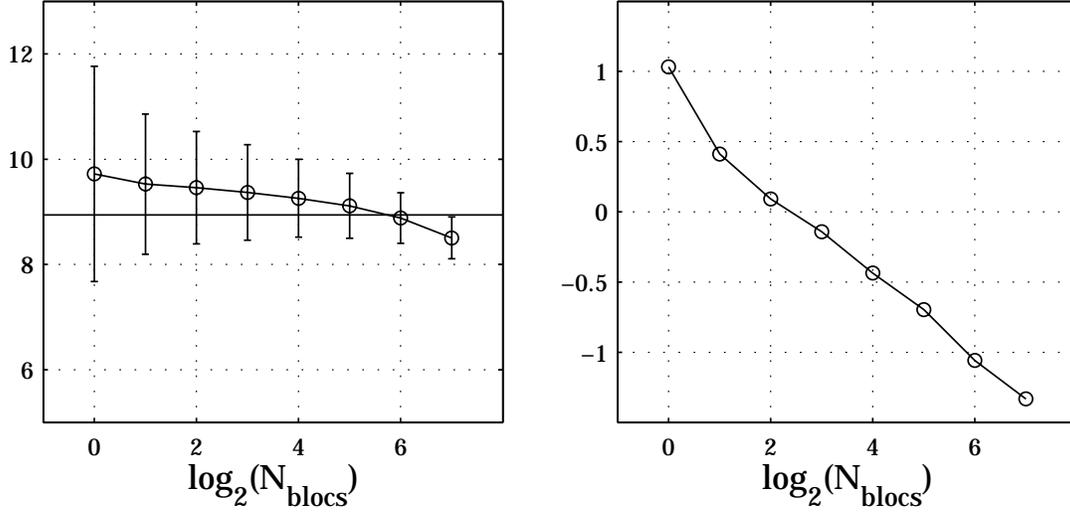


FIG. 10.9 – **Cascade d’ondelette aléatoire.** Gauche : moyenne des  $\widehat{q}_*^+(N_{\text{blocs}})$  sur les  $N_{\text{réal}} = 400$  réalisations en fonction de  $\log_2 N_{\text{blocs}}$ . Les intervalles de confiance correspondent à  $\pm 2$  écarts-type estimés. La droite horizontale rappelle  $q_*^+ \simeq 8.94$ . Droite : écart-type de  $\widehat{q}_*^+(N_{\text{blocs}})$  en fonction de  $N_{\text{blocs}}$ , dans un diagramme log-log.

### Mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal

Les résultats précédents sont très intéressants, mais on peut se demander s’ils ne sont pas dus à la particularité de ce processus d’avoir des exposants quadratiques pour  $q \leq q_*^+$ . En effet, le modèle quadratique  $A_1(q)$  est alors tout particulièrement adapté, mais ce n’est pas le cas en général, où les exposants n’ont aucune raison d’être quadratiques pour  $q \leq q_*^+$ .

L’estimateur  $\widehat{q}_*^+(N_{\text{blocs}})$  est donc caractérisé à l’aide d’un autre processus, le mouvement brownien en temps multifractal (cf. annexe D), construit à partir d’une cascade de Poisson composée (c’est le même que celui utilisé dans le paragraphe 10.2). On a en particulier :

$$\varphi_{fbmmt}(q) = qH + 1 - \mathbb{E}W^{qH} - qH(1 - \mathbb{E}W), \quad \text{avec } \mathbb{E}W^q = e^{\mu q + \frac{\sigma^2}{2} q^2},$$

où  $\mu = 0.04$ ,  $\sigma = 0.03$  et  $H = 0.75$ . Ce choix de paramètre aboutit à la valeur suivante pour  $q_*^+$  :

$$q_*^+ \simeq 6.87.$$

On a choisi :  $r = 2^{-10}$  et  $N_{\text{int}} = 2^5$ . Enfin  $N_{\text{réal}} = 400$  réalisations ont été synthétisées.

Les résultats présentés sur la figure 10.10 sont analogues à ceux obtenus pour la cascade d’ondelette aléatoire. Le biais de l’estimateur  $\widehat{q}_*^+(N_{\text{blocs}})$  diminue lorsque le nombre de sous-blocs augmente, et s’annule (à l’intérieur des intervalles de confiance) lorsque  $N_{\text{blocs}}$  est tel que chaque sous-bloc a pour longueur  $2^2$  échelles intégrales (on rappelle que  $N_{\text{int}} = 2^5$ ). L’écart-type diminue lui-aussi avec  $N_{\text{blocs}}$ , jusqu’à  $N_{\text{blocs}} = 2^4$  (correspondant à des sous-blocs de  $2^2$  échelles intégrales).

L’estimateur  $\widehat{q}_*^+(N_{\text{blocs}})$  se comporte ainsi de façon analogue sur ce processus que pour le processus précédent : si le nombre  $N_{\text{blocs}}$  de sous-blocs est ajusté de façon à ce que les sous-blocs aient

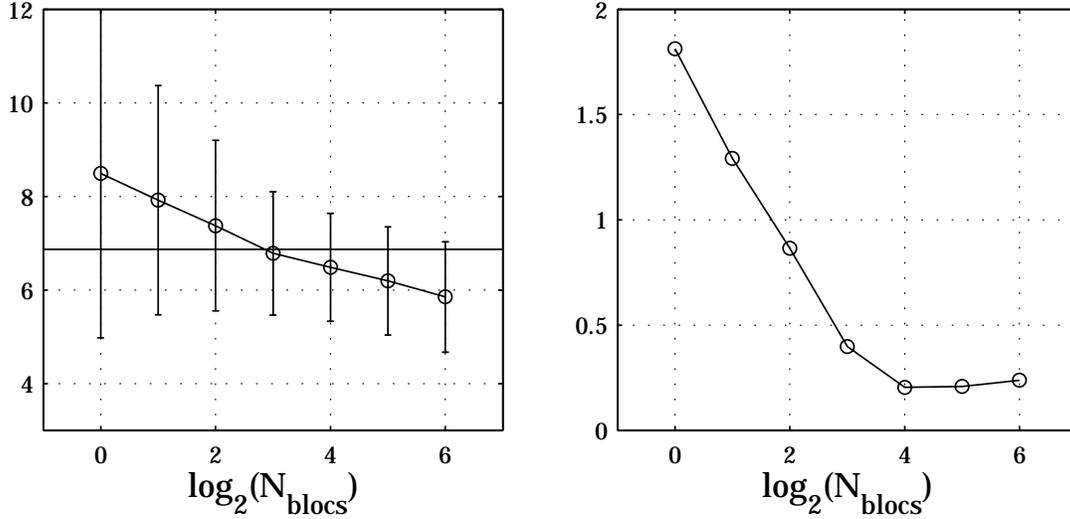


FIG. 10.10 – **Mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal.** Gauche : moyenne des  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  sur les  $N_{réal} = 400$  réalisations en fonction de  $\log_2 N_{blocs}$ . Les intervalles de confiance correspondent à  $\pm 2$  écarts-type estimés. La droite horizontale rappelle  $q_*^+ \simeq 6.87$ . Droite : écart-type de  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  en fonction de  $N_{blocs}$ , dans un diagramme log-log.

une longueur de quelques (2 ou 4) échelles intégrales, l'estimateur est non-biaisé (à l'intérieur des intervalles de confiance). Notons de plus que cette valeur est de plus repérée ici par l'arrêt de la diminution de l'écart-type estimé de  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$ .

### Autres processus

L'estimateur a été numériquement caractérisé de la même façon sur un choix le plus large possible de processus multifractals (de type fonction et de type densité), mais aussi en utilisant d'autres coefficients pour définir les fonctions de structure (coefficients d'agrégation, coefficients dominants). Les résultats ne sont pas exhaustivement présentés ici, et seuls deux exemples représentatifs (les deux précédents) sont ici discutés.

Les résultats précédents ont été observés dans une large majorité de situations. Le biais de  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  diminue lorsque  $N_{blocs}$  augmente, et s'annule (à l'intérieur des intervalles de confiance), lorsque  $N_{blocs}$  est choisi de façon à ce que chaque sous-bloc ait une longueur de quelques échelles intégrales, toujours 2 ou 4<sup>10</sup>. L'écart-type de  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  diminue lui aussi avec  $N_{blocs}$ , jusqu'à ce que  $N_{blocs}$  atteigne la valeur pour laquelle  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  est non-biaisée, où il devient alors constant (sauf pour les cascades d'ondelette aléatoires log-normales), ce qui peut permettre de repérer la valeur de  $N_{blocs}$  pour laquelle le biais disparaît.

Deux limitations ont cependant été observées. La première concerne la valeur-même de  $q_*^+$ . L'estimateur devient inopérant lorsque  $q_*^+ \lesssim 3$ . Il permet en effet d'estimer l'ordre critique d'un

<sup>10</sup>On peut mettre ce résultat en parallèle avec l'étude de la dépendance de l'effet de linéarisation avec le nombre  $N_{int}$ , qui avait conclu que l'effet de linéarisation ne dépendait pas de  $N_{int}$  dès que  $N_{int}$  était supérieur à quelques (2 ou 4) échelles intégrales.

cascade de Mandelbrot canonique log-normale, de paramètre  $m = 0.1125$  (cf. le chapitre précédent), pour laquelle  $q_*^+ \simeq 2.98$ , mais tous les essais pour estimer des ordres critiques plus faibles ont échoué. Si l'estimateur fournit une valeur proche de 3, son utilisation semble donc être discutable.

De plus, il a été observé un biais résiduel non-nul dans le cas (c'est le seul pour lequel cette observation a été faite) d'une cascade d'ondelette aléatoire dont la fonction  $\varphi_{rwc}(q)$  correspond à la modélisation de She-Lévêque [160]<sup>11</sup> de l'intermittence de la vitesse turbulente (cf. paragraphe 8.2.4) :

$$\varphi_{rwc}(q) = \frac{q}{9} + 2 \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{q/3} \right],$$

ce qui aboutit à un ordre critique  $q_*^+ \simeq 12.36$ .

On a réalisé  $N_{réal} = 400$  réalisations, avec  $r = 2^{-13}$  et  $N_{int} = 2^7$ .

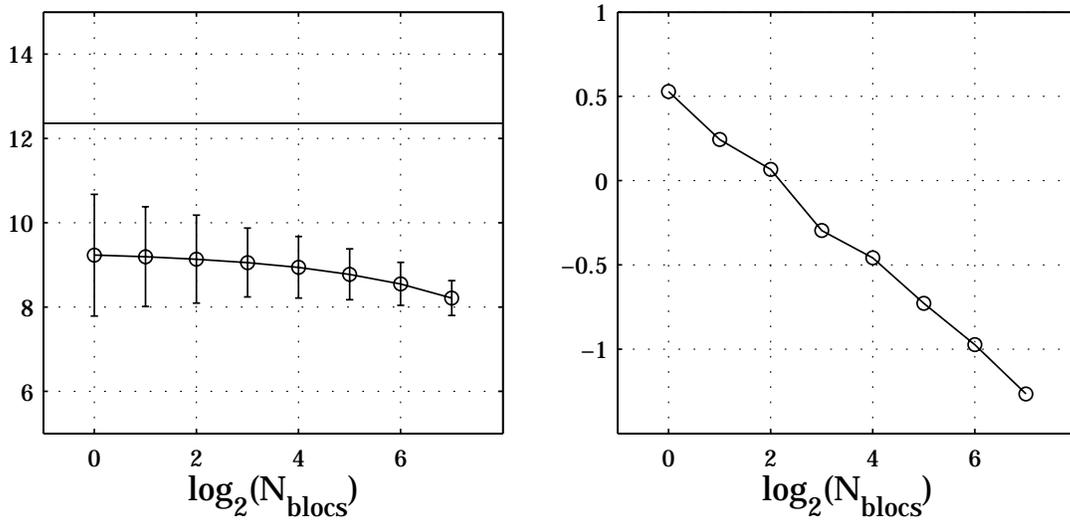


FIG. 10.11 – Cascade d'ondelette aléatoire correspondant au modèle de She-Lévêque. Gauche : moyenne des  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  sur les  $N_{réal} = 400$  réalisations en fonction de  $\log_2 N_{blocs}$ . Les intervalles de confiance correspondent à  $\pm 2$  écarts-type estimés. La droite horizontale rappelle  $q_*^+ \simeq 12.36$ . Droite : écart-type de  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  en fonction de  $N_{blocs}$ , dans un diagramme log-log.

On obtient alors les résultats représentés sur la figure 10.11. L'estimateur  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  fournit donc dans ce cas particulier une valeur notablement différente, même lorsque le nombre  $N_{blocs}$  de sous-blocs est choisi de façon à ce que chaque sous-bloc ait une longueur de 2 ou 4 échelles intégrales (i.e.  $N_{blocs} = 2^5$  ou  $2^6$  puisque  $N_{int} = 2^7$ ). On peut de plus remarquer que ces résultats sont très proches de ceux précédemment obtenus avec la cascade d'ondelette aléatoire log-normale, avec  $m = 0.37$  et  $\sigma = 0.19$  (cf. figure 10.9), qui correspond à une autre modélisation, la modélisation log-normale, des exposants des fonctions de structure de la vitesse turbulente (cf. le paragraphe 8.2.4). Il avait déjà été remarqué que ces deux modèles prédisaient des exposants  $\zeta^p(q)$ , très proches pour  $q \geq 0$  (cf. le paragraphe 8.2.4). On a donc deux modèles différents, pour lesquels les fonctions  $\varphi(q)$  sont très proches (pour  $q \leq q_*^+$ ), bien que définissant des ordres critiques  $q_*^+$  notablement

<sup>11</sup>Il faut alors choisir une loi log-Poisson pour les multiplicateurs  $W$ , cf. le chapitre précédent.

différents ( $q_*^+ \simeq 8.94$  contre  $q_*^+ \simeq 12.36$ ).

L'estimateur  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$  semble donc incapable de distinguer ces deux processus, qui ont la particularité d'avoir des exposants  $\zeta^p(q)$  très proches, bien que des ordres critiques  $q_*^+$  notablement différents. En particulier, il n'arrive pas à estimer correctement  $q_*^+$  dans le cas de la cascade d'ondelette aléatoire log-Poisson. C'est donc une limitation importante, bien que ce soit la seule situation étudiée où  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$  ne fournissait pas des résultats satisfaisants.

### Mode d'emploi de $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$

Un mode d'emploi peut donc être dégagé, à la lumière des nombreux tests effectués.

(i) Il faut commencer par mesurer le nombre d'échelles intégrales des données analysées, ce qui se fait facilement en étudiant les fonctions de structure (elles se comportent en loi de puissance pour les échelles plus petites que l'échelle intégrale).

(ii) On utilise ensuite l'estimateur  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$  en faisant varier  $N_{blocs}$  depuis 1 jusqu'à la valeur pour laquelle les sous-blocs ont une longueur d'environ une échelle intégrale.

(iii) On prend alors les valeurs de  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$ , qui sont en pratique proches, obtenues lorsque les valeurs de  $N_{blocs}$  correspondent à des sous-blocs de 2 et 4 échelles intégrales et on en prend la moyenne. On peut de même donner un intervalle de confiance empirique en le définissant comme plus ou moins deux fois la moyenne des écarts-type estimés de  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$  pour 2 et 4 échelles intégrales.

Ce mode d'emploi sera mis en application sur des données de vitesse turbulente dans le chapitre 12.

### 10.5.4 Conclusion

Un estimateur de l'ordre critique  $q_*^+$  a donc été construit et caractérisé sur un large panel de processus numériques, ce qui permet de définir un mode d'emploi pour son utilisation. Il fournit dans un grand nombre de cas une bonne estimation de  $q_*^+$ . Il faut cependant rester humble quant à l'utilisation de l'estimateur  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$ . Il a en effet été défini de façon totalement empirique, et on a vu qu'il pouvait dans certains cas donner des estimations notablement biaisées de  $q_*^+$  (par exemple dans le cas des cascades d'ondelette aléatoires correspondant à la modélisation She-Lévêque) et devenait inopérant lorsque  $q_*^+$  devenait trop petit (i.e.  $q_*^+ \leq 3$ ).

Il est donc nécessaire d'avoir à l'esprit ces limitations lors de l'utilisation de l'estimateur  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$ , bien qu'il montre globalement un comportement satisfaisant. Il est, quoiqu'il en soit, le seul outil, à notre connaissance, permettant d'avoir une idée assez précise (bien plus précise en tout cas que l'observation seule des  $\widehat{\zeta^p}(q)$  mesurés ou de leur transformée de Legendre) de la valeur de  $q_*^+$  lorsque celui-ci n'est pas théoriquement connu.

## 10.6 Effet de linéarisation et ordre critique négatif $q_*^-$

Jusqu'ici, seule l'estimation des exposants  $\zeta^p(q)$  d'ordres  $q$  positifs a été étudiée. Le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'agrégation, en ce qui concerne les densités, et les formalismes multifractals basés sur les coefficients dominants et mmt0 pour les fonctions, sont les seuls qui permettent d'estimer les exposants  $\zeta^p(q)$  avec  $q < 0$ . Le formalisme multifractal basé sur les coefficients

mmto étant très gourmand en temps d'utilisation des ordinateurs, et le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants n'étant utilisé que depuis peu, ce travail de thèse ne s'est que peu consacré à la caractérisation de l'estimation des exposants d'ordre négatif.

On se contentera donc ici de donner l'énoncé de l'effet de linéarisation pour les ordres  $q < 0$ , et de l'illustrer sur quelques exemples.

### 10.6.1 Effet de linéarisation et ordre critique $q_*^-$

L'effet de linéarisation se présente bien sûr de façon symétrique (ordres positifs ou négatifs), puisqu'il est lié comme on l'a vu à la nécessaire positivité du spectre de singularités des processus étudiés. Ainsi, la partie droite du spectre de singularités (cf. le chapitre 5) est elle aussi limitée par la condition  $D \geq 0$ . Il existe donc, pour tout processus multifractal, un effet de linéarisation pour les ordres  $q < 0$  identique (mutatis mutandi) à celui qui vient d'être décrit pour les ordres  $q > 0$ .

Ainsi, pour tout processus multifractal  $X$ , dont on cherche à estimer les exposants  $\zeta_X^p(q)$  construits avec des quantités multi-résolution  $p$ , et définis pour les valeurs négatives de  $q$ , il existe un ordre critique négatif, noté  $q_*^- < 0$ , tel que :

$$\overline{\zeta_{X_i}^p}(q) \rightarrow \begin{cases} \varphi_X(q) & \text{si } q_*^- \leq q \leq 0 \\ 1 + \varphi'_X(q_*^-)q & \text{si } q \leq q_*^- \end{cases}, \quad (10.5)$$

où le symbole  $\rightarrow$  dénote la limite de la moyenne pour un nombre infini de réalisations du processus aléatoire analysé.

L'ordre critique  $q_*^-$  se définit à partir de la fonction  $\varphi_X(q)$  selon :

$$q_*^- / q_*^+ < 0 \text{ et } 1 + q_*^+ \varphi'_X(q_*^+) = \varphi_X(q_*^+). \quad (10.6)$$

Notons que ce résultat est montré dans les articles d'Ossiander-Waymire [136, 137] qui étudient l'estimation des exposants  $\zeta^a(q)$  dans le cas des cascades de Mandelbrot canoniques.

### 10.6.2 Illustrations

L'effet de linéarisation pour les ordres négatifs est illustré ici sur deux exemples.

#### Cascade de Mandelbrot canonique

On analyse ici le processus de cascade de Mandelbrot canonique log-normale, caractérisé par la fonction :

$$\varphi_{cmc}(q) = mq(1 - q) + q,$$

avec le choix suivant :  $m = 0.1125$ , ce qui permet de calculer  $q_*^-$  :

$$q_*^- = -\sqrt{\frac{1}{m}} \simeq -2.98$$

On remarque au passage que pour les modèles log-normaux,  $q_*^+ = -q_*^-$ .

$N_{réal} = 100$  réalisations ont été synthétisées, avec  $r = 2^{-12}$  et  $N_{int} = 2^5$ . Les résultats sont portés sur la figure 10.12.

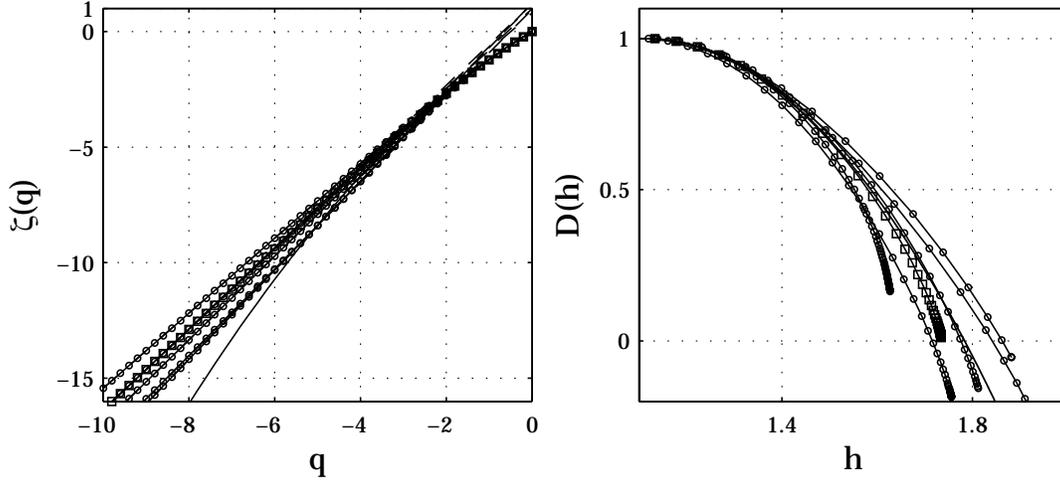


FIG. 10.12 – **Cascade de Mandelbrot canonique.** Gauche : exposants  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  pour 5 réalisations (o) et  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  ( $\square$ ), moyenne des  $\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a(q)$  sur  $N_{réal} = 100$  réalisations, trait continu : fonction  $\varphi_{cmc}(q)$  et trait en pointillé : comportement linéaire asymptotique. Droite :  $TL[\widehat{\zeta}_{cmc_i}^a](h)$  (o) et leur moyenne ( $\square$ ), transformée de Legendre de  $\varphi_{cmc}(q)$  (trait continu).

### Cascade d'ondelette aléatoire

Des réalisations du processus de cascade d'ondelette aléatoire sont ici analysées, avec les formalismes multifractals basés sur les coefficients dominants et sur les coefficients mmo. La cascade d'ondelette aléatoire utilisée est la même que précédemment : c'est une cascade d'ondelette aléatoire log-normale :

$$\varphi_{rwc}(q) = mq - \frac{\sigma^2 \ln 2}{2} q^2.$$

Il a été choisi  $m = 0.37$  et  $\sigma = 0.19$ , ce qui permet d'exprimer  $q_*^-$  :

$$q_*^- = -q_*^+ = -\sqrt{\frac{2}{\sigma^2 \log(2)}} \simeq -8.94.$$

$N_{réal} = 400$  réalisations ont été synthétisées, avec  $r = 2^{-13}$  et  $N_{int} = 2^4$ . Les résultats sont portés sur la figure 10.13.

### Conclusion

Les descriptions précises des résultats obtenus pour l'effet de linéarisation dans le cas  $q > 0$  dans les paragraphes précédents s'appliquent directement (mutatis mutandi) aux résultats présentés sur les figures 10.12 et 10.13. L'effet de linéarisation qui intervient pour les valeurs négatives de l'ordre  $q < 0$  est donc en tout point analogue à celui intervenant pour les ordres positifs, et ne sera donc pas plus longuement discuté.

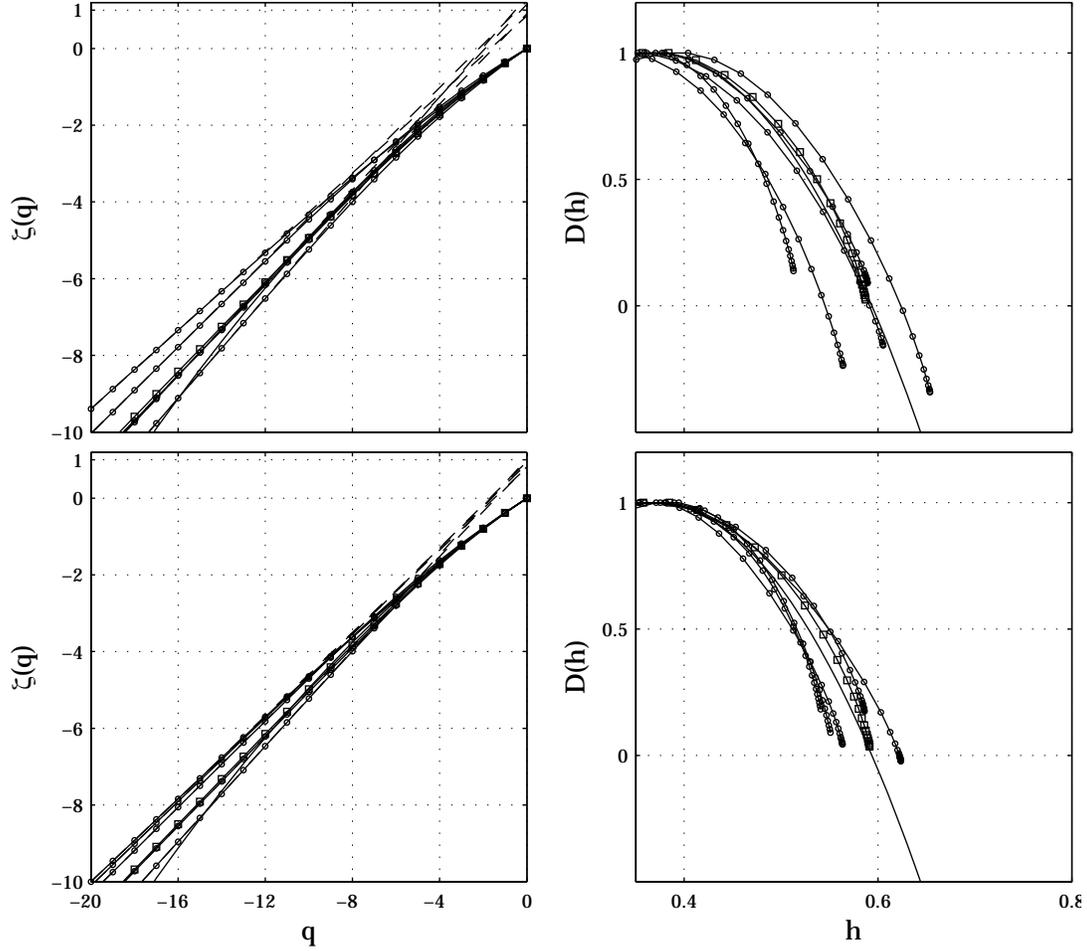


FIG. 10.13 – **Cascade d’ondelette aléatoire.** Gauche : exposants  $\widehat{\zeta}_{rwc_i}^p(q)$  pour 5 réalisations (o) et  $\widehat{\zeta}_{rwc_i}^p(q)$  ( $\square$ ), moyenne des  $\widehat{\zeta}_{rwc_i}^p(q)$  sur  $N_{réal} = 400$  réalisations, trait continu : fonction  $\varphi_{rwc}(q)$  et trait en pointillé : comportement linéaire asymptotique. Droite :  $TL[\widehat{\zeta}_{rwc_i}^p](h)$  (o) et leur moyenne ( $\square$ ), transformée de Legendre de  $\varphi_{rwc}(q)$  (trait continu). Formalismes multifractals basés sur les coefficients dominants (haut) et coefficients mmt (bas)

### 10.6.3 Estimation de l’ordre critique $q_*^-$

#### Definition

On peut de même transposer aux ordres négatifs l’estimateur  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  de l’ordre  $q_*^+$  (cf. le paragraphe 10.5.2), définissant ainsi un estimateur de l’ordre  $q_*^-$ , noté  $\widehat{q}_*^-(N_{blocs})$ . Il suffit pour cela de changer le signe des valeurs d’ordres utilisés.

#### Application aux cascades d’ondelette aléatoires

L’estimateur  $\widehat{q}_*^-(N_{blocs})$  est appliqué à  $N_{réal} = 100$  réalisations de cascade d’ondelette aléatoire log-normale, de la même façon qu’au paragraphe 10.5.2. Les réalisations sont caractérisées par

$r = 2^{-13}$  et  $N_{int} = 2^7$ . L'analyse est effectuée à l'aide des exposants définis à partir des coefficients dominants, en utilisant l'ondelette de Daubechies à 3 moments nuls. Les résultats sont présentés sur la figure 10.14, et sont à mettre en parallèle avec ceux obtenus dans la même situation avec  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  (figure 10.9).

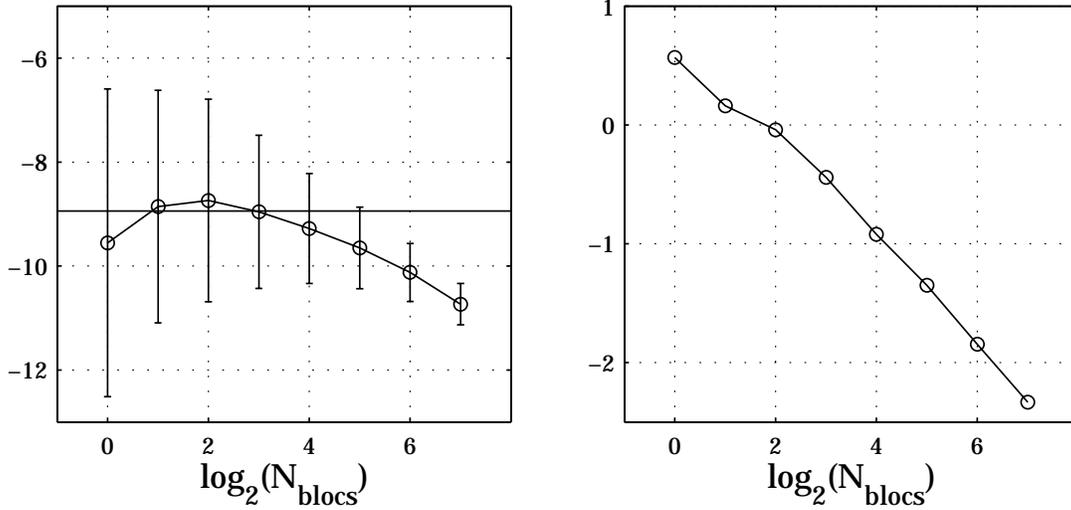


FIG. 10.14 – **Cascade d'ondelette aléatoire.** Gauche : moyenne des  $\widehat{q}_*^-(N_{blocs})$  sur les  $N_{réal} = 100$  réalisations en fonction de  $\log_2 N_{blocs}$ . Les intervalles de confiance correspondent à  $\pm 2$  écarts-type estimés. La droite horizontale rappelle  $q_*^- \simeq -8.94$ . Droite : écart-type de  $\widehat{q}_*^-(N_{blocs})$  en fonction de  $N_{blocs}$ , dans un diagramme log-log.

On observe donc que l'estimateur  $\widehat{q}_*^-(N_{blocs})$  se comporte différemment par rapport à l'estimateur  $q_*^+$ . Contrairement à l'estimation de l'ordre critique positif  $q_*^+$ , l'estimateur  $\widehat{q}_*^-(N_{blocs})$  échoue à estimer correctement  $q_*^-$  : les valeurs moyennes obtenues lorsque le nombre  $N_{blocs}$  de sous-blocs est tel que chaque sous-bloc ait une longueur de 2 ou 4 échelles intégrales (i.e.  $N_{blocs} = 2^5$  et  $N_{blocs} = 2^6$ ) sont notablement différentes de la valeur attendue  $q_*^- \simeq -8.94$ .

## Conclusion

L'estimateur  $\widehat{q}_*^-(N_{blocs})$  ne fonctionne donc pas, même dans un cas simple où la fonction  $\varphi_X(q)$  est quadratique (on rappelle que le modèle  $A_1(q)$  - cf. paragraphe 10.5.2 - utilisé est quadratique, et semble donc particulièrement adapté à cette situation). La cause de ce résultat négatif n'est pas à ce jour comprise, et le problème de construire un estimateur capable d'estimer l'ordre critique négatif  $q_*^-$  reste donc à régler.

# Chapitre 11

## Effet de linéarisation en dimension $d$ et coupes géométriques

Nous allons désormais nous intéresser à l'analyse multifractale pratique de réalisations de processus définis sur  $\mathbb{R}^d$ . L'effet de linéarisation que l'on vient de présenter et de caractériser dans le cas  $d = 1$ , se généralise aisément pour  $d > 1$ . Il sera alors illustré dans le cas de cascades de Mandelbrot canoniques définies sur  $\mathbb{R}^3$  (paragraphe 11.1).

On peut se poser la question suivante pour les processus multifractals définis sur  $\mathbb{R}^d$  : lorsque l'on a seulement accès à une coupe géométrique de ce processus, par exemple une coupe plane d'un processus défini sur  $\mathbb{R}^3$ , à quoi doit-on s'attendre quant-à la mesure des exposants  $\zeta_X^p(q)$  ? En particulier, comment se traduit l'effet de linéarisation dans cette situation ? Cette question est d'une grande importance en pratique. En effet, d'un point de vue expérimental, il n'est parfois possible d'accéder qu'à une mesure de type coupe géométrique d'un phénomène défini sur  $\mathbb{R}^d$ . C'est typiquement le cas lorsque des mesures de vitesse sont effectuées dans un écoulement turbulent, qui évolue dans un espace à 3 dimensions, à l'aide d'un anémomètre à fil chaud : on obtient un profil de vitesse à une dimension. Il est alors naturel de se demander en quoi l'analyse multifractale de ces signaux à 1 dimension permet de remonter aux propriétés du phénomène évoluant en 3 dimensions. Cette question va être abordée au paragraphe 11.2. Il va être ainsi montré que l'analyse multifractale de coupes géométriques d'un processus ne permet pas d'accéder à la totalité du spectre de singularités de ce processus.

### 11.1 Effet de linéarisation en dimension $d$

#### 11.1.1 Définition

L'interprétation multifractale qui est faite de l'effet de linéarisation est que le spectre de singularités du processus multifractal étudié ne peut prendre que des valeurs positives (cf. paragraphe 10.4). Cette interprétation ne dépend bien sûr pas de la dimension de l'espace sur lequel ce processus est défini. Si le processus est défini sur  $\mathbb{R}^d$ , on s'attend bien sûr au même résultat : le spectre de singularités ne peut prendre que des valeurs positives, c'est-à-dire entre 0 et  $d$ , et non plus entre 0 et 1 comme c'était le cas dans les deux chapitres précédents.

La généralisation de l'effet de linéarisation se fait bien sûr de façon identique pour les valeurs positives et négatives de l'ordre  $q$ . Afin de ne pas alourdir le propos, on se limitera dans ce chapitre au cas  $q \geq 0$ .

## Ordre critique $q_*^{+,dD}$

Puisque la définition de l'ordre critique  $q_*^+$ , pour  $d = 1$ , est reliée au zéro de la transformée de Legendre de la fonction  $\varphi_X(q)$  (cf. paragraphe 10.4), on généralise cette définition à la dimension  $d$ , pour laquelle la transformée de Legendre de  $\varphi_X(q)$  est :

$$TL[\varphi_X](h) = d + \min_q (qh - \varphi_X(q)).$$

On obtient ainsi la définition de l'ordre critique  $q_*^{+,dD}$  en dimension  $d$  :

$$q_*^{+,dD} / d + q_*^{+,dD} \varphi'_X(q_*^{+,dD}) = \varphi_X(q_*^{+,dD}). \quad (11.1)$$

## Effet de linéarisation en dimension $d$

L'effet de linéarisation en dimension  $d$  s'énonce alors de la façon suivante : pour tout processus multifractal  $X$  défini sur  $\mathbb{R}^d$ , dont on cherche à estimer les exposants  $\zeta_X^p(q)$ , construits à partir de coefficients multi-résolution  $p$  quelconques, il existe un ordre critique, noté  $q_*^{+,dD}$ , tel que :

$$\overline{\zeta_{X_i}^p}(q) \rightarrow \begin{cases} \varphi_X(q) & \text{si } 0 \leq q \leq q_*^{+,dD} \\ d + \varphi'_X(q_*^{+,dD})q & \text{si } q \geq q_*^{+,dD} \end{cases}, \quad (11.2)$$

où  $\rightarrow$  dénote la convergence de la moyenne pour un nombre infini de réalisations. Notons que l'ordonnée à l'origine du comportement linéaire asymptotique est la dimension  $d$ .

### 11.1.2 Illustration

L'effet de linéarisation en dimension  $d$  va être illustré à l'aide de cascades de Mandelbrot canoniques définies sur  $\mathbb{R}^3$  (cf. les annexes D et C).

## Méthodologie

La méthodologie est la même que celle utilisée dans les chapitres précédents :  $N_{réal} = 100$  réalisations du processus de cascade de Mandelbrot canonique à 3 dimensions sont synthétisées, avec une distribution log-normale pour les multiplicateurs  $W$ , ce qui donne la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$  (cf. annexe D) :

$$\varphi_{cmc}(q) = -\log_2 \mathbb{E}W^q + 3q = mq(1 - q) + 3q,$$

où  $m = 0.1125$ . On peut alors facilement déterminer  $q_*^{+,3D}$  :

$$q_*^{+,3D} = \sqrt{\frac{3}{m}} \simeq 5.16.$$

On a choisi :  $r = 2^{-7}$  et  $N_{int} = 2^1$ , ce qui correspond à  $2^8 \times 2^8 \times 2^8 = 2^{24}$  échantillons numériques et à  $2^1 \times 2^1 \times 2^1 = 2^3$  blocs d'une échelle intégrale de côté.

Enfin, l'analyse est faite à l'aide des exposants  $\widehat{\zeta_{X_i}^d}(q)$ , construits à partir des coefficients d'ondelette discrets (cf. annexe C), en utilisant l'ondelette de Daubechies avec 1 moment nul.

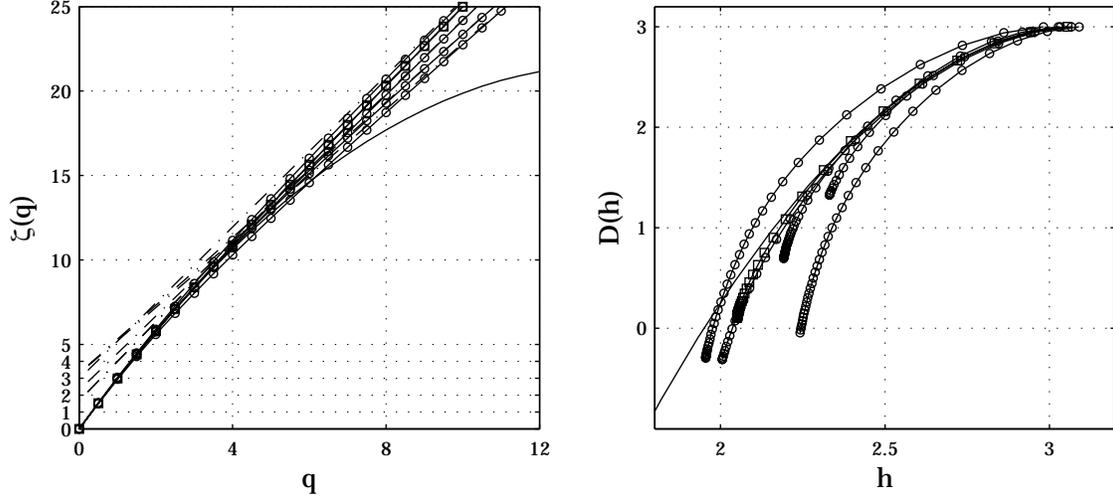


FIG. 11.1 – **Cascades de Mandelbrot canoniques.** Gauche : exposants  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^d}(q)$  pour 5 réalisations (o) et  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^d}(q)$  ( $\square$ ), moyenne des  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^d}(q)$  sur  $N_{réal} = 100$  réalisations, trait continu : fonction  $\varphi_{cmc}(q)$  et trait en pointillé : comportement linéaire asymptotique. Droite :  $TL[\widehat{\zeta_{cmc_i}^d}](h)$  (o) et leur moyenne ( $\square$ ), transformée de Legendre de  $\varphi_{cmc}(q)$  (trait continu).

## Résultats

Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 11.1, et sont donc bien analogues, mutatis mutandi (par exemple le comportement linéaire asymptotique a pour ordonnée à l'origine 3), à ceux observés pour  $d = 1$ . L'extension de l'effet de linéarisation en dimension  $d$  qui vient d'être proposée est donc bien vérifiée sur cet exemple.

Puisqu'il a été montré dans le cas  $d = 1$  que l'effet de linéarisation ne dépendait ni du processus multifractal analysé, ni du formalisme multifractal utilisé, il est ici admis que cette extension s'applique à tous les processus multifractals et à tous les formalismes multifractals.

### 11.1.3 Estimation de l'ordre critique $q_*^{+,dD}$

L'ordre critique  $q_*^{+,dD}$ , associé à l'effet de linéarisation en dimension  $d$ , est analytiquement connu grâce à la relation (11.1) portant sur la fonction  $\varphi_X(q)$ . Lorsque celle-ci n'est pas connue, par exemple lors de l'analyse de données expérimentales, il faut l'estimer, comme il a été discuté au paragraphe 10.5, où a été défini l'estimateur  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$ . Cet estimateur, construit pour les processus multifractals définis sur  $\mathbb{R}$ , est ici généralisé pour les processus définis sur  $\mathbb{R}^d$ .

#### Définition de l'estimateur $\widehat{q_*^{+,dD}}(N_{blocs})$

Le signal étudié est tout d'abord sous-découpé en  $N_{blocs}$  sous-blocs, de même côté. On utilise comme pour  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$  une division dyadique des signaux étudiés, c'est-à-dire que  $N_{blocs}$  vaut  $2^{dk}$ , avec  $k$  entier positif. Les exposants des fonctions de structure sont mesurés sur chacun de ces sous-blocs, ce qui définit  $N_{blocs}$  estimées  $\widehat{\zeta_{X_{i,m}}^p}(q)$ . On moyenne alors les  $\widehat{\zeta_{X_{i,m}}^p}(q)$  sur les  $N_{blocs}$  sous-blocs, ce qui définit  $\widetilde{\zeta_{X_i}^p}(q, N_{blocs})$ .

L'estimateur  $\widehat{q_*^{+,dD}}(N_{blocs})$  est construit à partir de deux modèles asymptotiques,  $A_1(q)$  et  $A_2(q)$  (cf. la définition (10.4)). Le modèle asymptotique  $A_1(q)$ , conçu pour modéliser  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q, N_{blocs})$  pour les plus faibles valeurs de  $q$  ( $q \leq q_*^+$ ), est obtenu pour  $d = 1$  par un ajustement de sa transformée de Legendre pour  $D \geq 0.5$  (cf. le paragraphe 10.3), c'est-à-dire pour la moitié supérieure, puisque, en moyenne, les transformées de Legendre des estimées  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  sont comprises entre 0 et 1. Lors de l'analyse multifractale des signaux définies sur  $\mathbb{R}^d$ , les transformées de Legendre des estimées  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  sont en revanche comprises entre 0 et  $d$ . La zone d'ajustement définissant le modèle  $A_1(q)$  est alors par analogie définie sur la moitié supérieure, c'est-à-dire pour  $D \geq d/2$ , et est toujours un modèle quadratique :

$$A_1(q) = s_0 + s_1q + s_2q^2.$$

Le modèle  $A_2(q)$  est défini comme lorsque  $d = 1$  (cf. le paragraphe 10.3) : il est obtenu par régression linéaire de  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q, N_{blocs})$  entre  $q_2$  et  $q_3$ , où  $q_2$  (resp.  $q_3$ ) est choisi comme égal à 2 (resp. 3) fois l'estimation grossière de  $q_*^{+,dD}$  par l'allure des estimées  $\widehat{\zeta_{X_i}^p}(q)$  :

$$A_2(q) = \widehat{\alpha_*^+} + \widehat{\beta_*^+}q.$$

## Validation

Il est difficile de faire la même caractérisation numérique que celle effectuée lorsque  $d = 1$ , car l'analyse des signaux définis sur  $\mathbb{R}^d$  devient très gourmande en mémoire informatique et en temps de calcul lorsque  $d$  augmente. En particulier, il est difficile, à résolution  $r$  fixée, de faire varier sur une large plage le paramètre  $N_{int}$ , car le nombre total d'échantillons correspondant est  $(N_{int}/r)^d$ .

On se contentera donc de vérifier qu'en découpant les signaux en sous-blocs de quelques échelles intégrales de côté, l'estimateur  $\widehat{q_*^{+,dD}}(N_{blocs})$  permet l'estimation de  $q_*^{+,dD}$ .

On utilise pour cela le processus de cascade de Mandelbrot canonique défini sur  $\mathbb{R}^3$  (paragraphe 11.1.2), pour lequel l'ordre critique est connu :  $q_*^{+,dD} \simeq 5.16$ .

Puisque les réalisations synthétisées de ce processus au paragraphe 11.1.2 ont des côtés de 2 échelles intégrales, le choix  $N_{blocs} = 1$  suffit à définir des "sous-blocs" de 2 échelles intégrales de côté, choix qui permet à 1 dimension de faire disparaître le biais de  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$ .

L'estimateur  $\widehat{q_*^{+,3D}}(N_{blocs})$  est alors appliqué à ces réalisations avec  $N_{blocs} = 1$ , et sa valeur moyenne (sur toutes les réalisations) est  $\simeq 5.3$ . L'estimateur  $\widehat{q_*^{+,3D}}(N_{blocs})$  permet bien dans ce cas-là d'estimer correctement la valeur de l'ordre critique  $q_*^{+,3D}$ .

### 11.1.4 Conclusion

L'effet de linéarisation s'étend donc facilement aux processus multifractals définis sur  $\mathbb{R}^d$ . Il n'est pas ici systématiquement étudié de façon numérique, comme cela a été fait pour  $d = 1$  (cf. le chapitre précédent), mais, puisque la valeur de la dimension  $d$  joue un rôle transparent pour l'effet de linéarisation, on suppose que toutes les conclusions auxquelles ont abouties les analyses numériques précédemment effectuées avec  $d = 1$ , s'étendent aux valeurs quelconques de  $d$ .

## 11.2 Coupes géométriques de processus définis sur $\mathbb{R}^d$

### 11.2.1 Problématique

Nous allons désormais nous intéresser à la question suivante : étant donné un processus multifractal défini sur  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d > 1$ , quelle information peut-on obtenir à partir de l'analyse multifractale d'une coupe géométrique de dimension  $\delta$  inférieure de ce processus (par exemple une coupe plane ( $\delta = 2$ ) du processus précédent, défini sur  $\mathbb{R}^3$ ) ? En particulier, puisque le spectre de singularités, objet de l'analyse multifractale, est défini à partir de la notion de dimension, la dimension de Hausdorff, il est essentiel de se demander s'il est possible d'avoir accès à l'intégralité du spectre de singularité du processus défini sur  $\mathbb{R}^d$ . La question est d'une grande pertinence pratique lorsqu'on s'intéresse à la turbulence pleinement développée, puisque l'on a bien souvent accès qu'à des coupes à une dimension de ce phénomène évoluant dans  $\mathbb{R}^3$ . En effet les mesures les plus courantes sont effectuées à l'aide de techniques d'anémométrie à fil chaud, procurant un enregistrement temporel en un point de l'écoulement, converti via l'hypothèse de Taylor de turbulence gelée (cf. le chapitre 2) en un profil spatial à une dimension.

Plusieurs travaux ont abordé cette question, notamment dans le cadre de l'analyse multifractale de signaux turbulents [108, 109, 153, 110, 158], en utilisant comme point de départ le raisonnement "un coefficient = un exposant de Hölder" discuté au chapitre 9. Ces travaux suggèrent notamment la possibilité, à partir de l'analyse multifractale de coupes géométriques (par exemple une mesure mono-dimensionnelle de vitesse dans un écoulement turbulent tri-dimensionnel), qu'il est alors possible de remonter à la totalité du spectre de singularités du processus étudié. La caractérisation numérique effectuée dans ce chapitre à l'aide du processus de cascade de Mandelbrot canonique, montre clairement que cela n'est pas possible en appliquant un formalisme multifractal sur les coupes géométriques. Cela ne signifie pas que les coupes géométriques ne peuvent pas permettre de mesurer l'intégralité du spectre de singularités du processus sous-jacent, mais que ce but ne peut être atteint à l'aide de formalismes multifractals appliqués à des coupes géométriques. Mandelbrot [108, 109, 110] suggère d'ailleurs une méthode alternative, basé sur le raisonnement "un coefficient = un exposant de Hölder" (cf. le chapitre 9). Il s'agit d'étudier la statistique du coefficient multi-résolution associée dans ce cadre au plus faible exposant de Hölder, pour une réalisation donnée. L'augmentation du nombre de réalisations analysées doit ainsi permettre d'accéder à des dimensions fractales de plus en plus faibles, i.e. "de plus en plus négatives". Cette méthode semble cependant discutable, puisque l'hypothèse sur laquelle elle repose ("un coefficient = un exposant de Hölder") n'est en fait pas valable (cf. le chapitre 9).

### 11.2.2 Nouvelles notations

La fonction  $\varphi_X^{dD}(q)$  caractérisant les propriétés multifractales du processus aléatoire  $X$ , défini sur  $\mathbb{R}^d$ , dépend de la dimension  $d$ . Par exemple, pour les cascades de Mandelbrot canoniques utilisées au paragraphe précédent :

$$\varphi_{cmc}^{dD}(q) = -\log_2 \mathbb{E}W^q + dq.$$

Puisque l'on s'intéresse ici à des coupes géométriques, et qu'il faut donc manier différentes dimensions en même temps, cette définition n'est pas très appropriée.

Afin de simplifier la discussion qui va suivre, de nouvelles notations sont ainsi introduites. Il est défini, à partir de la fonction  $\varphi_X^{dD}(q)$  caractérisant le processus aléatoire multifractal  $X$ , la fonction  $\phi_X(q)$  :

$$\phi_X(q) = \varphi_X^{dD}(q) - dq. \tag{11.3}$$

Par exemple, dans le cas des cascades de Mandelbrot canoniques définies sur  $\mathbb{R}^d$  (cf. l'annexe D), on a simplement :

$$\phi_{cmc}(q) = -\log_2 \mathbb{E}W^q.$$

La fonction  $\phi_X(q)$  est indépendante, pour les processus multifractals de type densité qui sont utilisés dans ce chapitre, de la dimension  $d$  pour laquelle ils sont définis. Cela simplifie notablement la présentation des résultats sur l'étude des coupes géométriques, objet de la seconde partie de ce chapitre.

Puisque les exposants  $\widehat{\zeta}_{X_i}^p(q)$  tendent, à l'intérieur de l'intervalle critique  $[0, q_*^{+,dD}]$ , vers  $\varphi_X^{dD}(q)$ , on définit les exposants, souvent utilisés dans la littérature,  $\widehat{\tau}_{X_i}^p(q)$  :

$$\widehat{\tau}_{X_i}^p(q) = \widehat{\zeta}_{X_i}^p(q) - dq, \quad (11.4)$$

et ces derniers tendent alors, toujours à l'intérieur de l'intervalle critique  $[0, q_*^{+,dD}]$  vers  $\phi_X(q)$  lors de l'analyse multifractale du processus aléatoire  $X$  sur  $\mathbb{R}^d$ .

Les transformées de Legendre des exposants  $\widehat{\tau}_{X_i}^p(q)$  et  $\widehat{\zeta}_{X_i}^p(q)$  sont reliées entre, de façon simple, puisque le minimum de  $(qh - \widehat{\zeta}_{X_i}^p(q) + dq)$  est réalisé pour  $h = (\widehat{\zeta}_{X_i}^p)'(q) - d$  :

$$TL[\widehat{\tau}_{X_i}^p](h) = TL[\widehat{\zeta}_{X_i}^p](h - d). \quad (11.5)$$

Rappelons que si le formalisme multifractal est vérifié pour l'analyse effectuée, le spectre de singularités du processus  $X$  est donné par la transformée de Legendre des  $\widehat{\zeta}_{X_i}^p(q)$ , et non des  $\widehat{\tau}_{X_i}^p(q)$ .

### 11.2.3 Analyses 1D, 2D et 3D

Afin d'apporter des éléments de réponse à la question de l'effet des coupes géométriques sur l'analyse multifractale, une approche numérique est encore une fois ici utilisée, dans la lignée des études précédemment présentées de l'effet de linéarisation. Ainsi, des réalisations de processus définis sur  $\mathbb{R}^d$  vont être synthétisées, et des analyses multifractales de leurs coupes géométriques de dimension  $\delta \leq d$  effectuées. Par exemple, les exposants  $\tau_X^p(q)$  seront mesurés directement sur les réalisations définies sur  $\mathbb{R}^3$  ( $d = 3$ ), mais aussi sur leurs coupes à 2 dimensions (plans,  $\delta = 2$ ) et à 1 dimension (droite,  $\delta = 1$ ).

La terminologie suivante est utilisée : *analyse  $\delta D$* , pour l'analyse des coupes de dimension  $\delta$ , et les exposants correspondants sont notés  $\widehat{\tau}_X^{p,\delta D}(q)$ . Notons enfin que la transformée de Legendre, utilisée pour représenter les résultats, sera définie en cohérence avec la dimension  $\delta$  de l'analyse  $\delta D$  effectuée :

$$TL[\widehat{\tau}_X^{p,\delta D}](h) = \delta + \min_q \left( qh - \widehat{\tau}_X^{p,\delta D}(q) \right).$$

### 11.2.4 Méthodologie

La caractérisation numérique ici proposée est effectuée sur des cascades de Mandelbrot canoniques définies sur  $\mathbb{R}^3$  ( $d = 3$ ). De façon plus précise,  $N_{réal} = 100$  réalisations du processus de cascade de Mandelbrot canonique à 3 dimensions sont synthétisées, avec des multiplicateurs  $W$  log-normaux, ce qui conduit à la fonction (cf. l'annexe D) :

$$\phi_{cmc}^{3D}(q) = mq(1 - q).$$

On a choisi  $m = 0.1125$ , pour la même raison que précédemment : c'est la valeur du paramètre  $m$  qui correspond à la valeur couramment admise du paramètre d'intermittence dans la description log-normale de la dissipation (se reporter par exemple à [58]). Enfin, la résolution est  $r = 2^{-7}$  et le  $N_{int} = 2^1$ , ce qui correspond à  $2^8 \times 2^8 \times 2^8$  échantillons numériques et à  $2^1 \times 2^1 \times 2^1 = 2^3$  blocs d'un échelle intégrale de côté.

Sur chaque réalisation sont effectuées 24 coupes à  $\delta = 2$  dimensions, c'est-à-dire 24 plans. Pour chacune des 3 directions de  $\mathbb{R}^3$ , 8 plans, perpendiculaires à cette direction et régulièrement espacés de  $2^5 = 32$  échantillons, sont obtenus. L'analyse 2D est effectuée alors sur chacun de ces plans, ce qui conduit à l'analyse de 2400 coupes planes de  $2^8 \times 2^8$  échantillons, et on étudiera la moyenne  $\widehat{\tau_{cmc_i}^{p,2D}}(q)$  sur ces 2400 coupes.

Enfin, des coupes à  $\delta = 1$  dimension sont effectuées selon chaque direction de  $\mathbb{R}^3$ , régulièrement espacées de  $2^5 = 32$  échantillons, c'est-à-dire  $2^3 \times 2^3 = 64$  coupes pour chacune des 3 directions, et donc 192 coupes à une dimension pour chaque réalisation. L'analyse 1D s'effectue ainsi sur un total de 19200 coupes 1D de  $2^8$  échantillons.

Chacune des coupes, 2D ou 1D, est caractérisée, par construction, par  $r = 2^{-7}$  et  $N_{int} = 2^1$ .

Les analyses multifractales sont toutes réalisées à l'aide des coefficients d'ondelette discrets (à 3, 2 ou 1 dimensions), en utilisant pour ondelette l'ondelette de Daubechies à 1 moment nul (cf. l'annexe B). Les régressions linéaires permettant la mesure des exposants  $\widehat{\tau_{cmc_i}^{p,\delta D}}(q)$  sont définies sur une gamme commune d'échelles pour les trois analyses.

### 11.2.5 Résultats

Les résultats obtenus selon les trois analyses (3D, 2D et 1D) sont reportés sur la figure 11.2.

Les résultats des figures de gauche sont bien sûr identiques à ceux discutés au paragraphe 11.1, l'analyse 3D coïncidant avec l'analyse réalisée dans ce paragraphe. Seule la représentation est différente, puisque ce sont les exposants  $\widehat{\tau_{cmc_i}^{d',3D}}(q)$  qui sont tracés, et non les  $\widehat{\zeta_{cmc_i}^{d',3D}}$  (on rappelle que  $\widehat{\tau_{cmc_i}^{d',3D}} = \widehat{\zeta_{cmc_i}^{d',3D}} - 3q$ ). On retrouve bien l'effet de linéarisation tel que décrit au paragraphe 11.1, mais selon un "vocabulaire" légèrement différent : les exposants  $\widehat{\tau_{cmc_i}^{d',3D}}(q)$  tendent en moyenne vers  $\phi_{cmc}(q)$  pour  $q \leq q_*^{+,3D}$ , où  $q_*^{+,3D}$  est défini à partir de  $\phi_{cmc}(q)$  selon :

$$3 + q_*^{+,3D} \phi'_{cmc}(q_*^{+,3D}) = \phi_{cmc}(q_*^{+,3D}),$$

et deviennent linéaires selon l'ordre  $q$  pour  $q \geq q_*^{+,3D}$  :

$$\widehat{\tau_{cmc_i}^{d',3D}}(q) \rightarrow \begin{cases} \phi_{cmc}(q) & \text{si } 0 \leq q \leq q_*^{+,3D} \\ 3 + \phi'_{cmc}(q_*^{+,3D})q & \text{si } q \geq q_*^{+,3D} \end{cases} .$$

Passons à la discussion, plus intéressante, des résultats obtenus avec les analyses 2D et 1D, c'est-à-dire issues des coupes géométriques de dimension 2 et 1. L'analyse multifractale des coupes planes (analyse 2D, figures du milieu) aboutit au constat clair suivant : les coupes géométriques planes se comportent, du point de vue de l'analyse multifractale effectuée avec un formalisme multifractal "2D", comme des réalisations d'un processus multifractal aléatoire défini sur  $\mathbb{R}^2$ , et caractérisé par

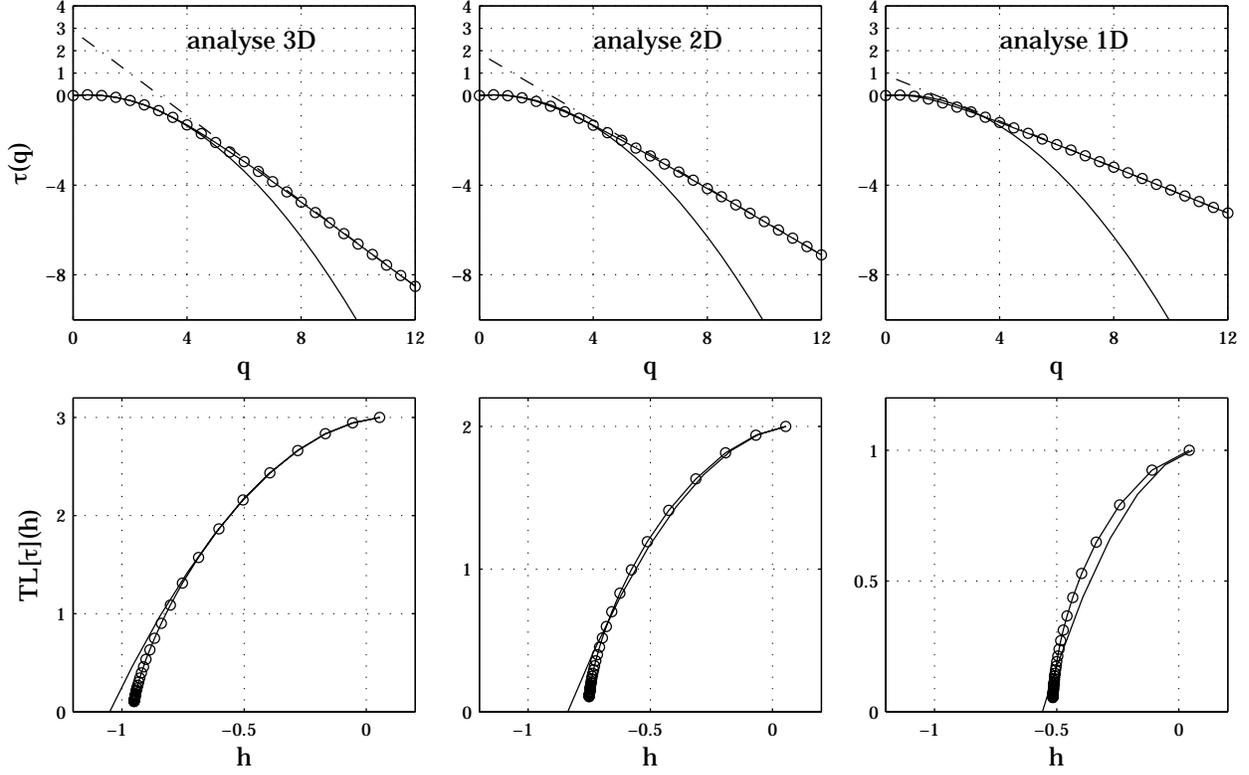


FIG. 11.2 – Cascades de Mandelbrot canoniques définies sur  $\mathbb{R}^3$ . Haut :  $\phi_{cmc}(q)$  (trait continu),  $\widehat{\tau_{cmc_i}^{d', \delta^D}}(q)$  (o) et comportements linéaires asymptotiques associés (trait en pointillés). Bas :  $TL[\phi_{cmc}](h)$  (trait continu) et  $TL[\widehat{\tau_{cmc_i}^{d', \delta^D}}](h)$  (o). Analyses 3D (gauche), 2D (milieu) et 1D (bas).

la même fonction  $\phi_{cmc}(q)$ <sup>1</sup> :

$$\widehat{\tau_{cmc_i}^{d', 2D}}(q) \rightarrow \begin{cases} \phi_{cmc}(q) & \text{si } 0 \leq q \leq q_*^{+, 2D} \\ 2 + \phi'_{cmc}(q_*^{+, 2D})q & \text{si } q \geq q_*^{+, 2D} \end{cases},$$

avec l'ordre critique  $q_*^{+, 2D}$  défini par :

$$2 + q_*^{+, 2D} \phi'_{cmc}(q_*^{+, 2D}) = \phi_{cmc}(q_*^{+, 2D}),$$

Un effet de linéarisation, comme défini au paragraphe 11.1.1, est donc bien observé, qui correspond à la valeur  $d = 2$  pour la dimension.

Le constat est le même pour l'analyse 1D, c'est-à-dire pour l'analyse de coupes à 1 dimension des réalisations définies sur  $\mathbb{R}^3$  : l'effet de linéarisation est bien observé, et correspond à celui observé pour un processus multifractal défini sur  $\mathbb{R}$  ( $d = 1$ ), de même fonction  $\phi_{cmc}(q)$ <sup>2</sup> :

$$\widehat{\tau_{cmc_i}^{d', 1D}}(q) \rightarrow \begin{cases} \phi_{cmc}(q) & \text{si } 0 \leq q \leq q_*^{+, 1D} \\ 1 + \phi'_{cmc}(q_*^{+, 1D})q & \text{si } q \geq q_*^{+, 1D} \end{cases},$$

<sup>1</sup>C'est-à-dire de fonction  $\varphi_X^{2D}(q)$  correspondante :  $\varphi_X^{2D}(q) = \phi_{cmc}(q) + 2q$ .

<sup>2</sup>C'est-à-dire de fonction  $\varphi_X^{1D}(q)$  correspondante :  $\varphi_X^{1D}(q) = \phi_{cmc}(q) + q$ .

avec  $q_*^{+,1D}$  défini par :

$$1 + q_*^{+,1D} \phi'_{cmc}(q_*^{+,1D}) = \phi_{cmc}(q_*^{+,1D}).$$

## Discussion

Intéressons-nous ici plus particulièrement aux valeurs des ordres critiques  $q_*^{+,\delta D}$ . Leurs valeurs numériques se déduisent facilement, puisque  $\phi_{cmc} = mq(1 - q)$ , avec  $m = 0.1125$  :

$$q_*^{+,3D} \simeq 5.16, \quad q_*^{+,2D} \simeq 4.22, \quad q_*^{+,1D} \simeq 2.98.$$

On a en particulier :

$$q_*^{+,3D} > q_*^{+,2D} > q_*^{+,1D}.$$

Ainsi, l'analyse multifractale 3D permet d'avoir accès à la connaissance de la fonction  $\phi_{cmc}(q)$ , donc aux propriétés du processus, pour une gamme d'ordres  $q$  ( $[0, q_*^{+,3D}]$ ) plus large que celle permise par l'analyse 2D ( $[0, q_*^{+,2D}]$ ), elle même plus large que celle issue de l'analyse 1D ( $[0, q_*^{+,1D}]$ ). Ces gammes d'ordres correspondent à des comportements linéaires d'ordonnées à l'origine de, respectivement, 3, 2 et 1.

En termes de transformée de Legendre, cela signifie que l'analyse 3D permet la mesure de la partie de la transformée de Legendre de  $\phi_{cmc}(q)$ , définie avec  $d = 3$  :

$$TL[\phi_{cmc}](h) = 3 + \min_q (qh - \phi_{cmc}(q)),$$

comprise entre les ordonnées 0 et 3, l'analyse 2D ne permettant que la mesure de cette transformée de Legendre (toujours définie avec  $d = 3$ ) entre les ordonnées 1 et 3, et enfin l'analyse 1D ne fournissant sa mesure qu'entre les ordonnées 2 et 3. Ce constat est illustré sur la figure 11.3, où les moyennes des transformées de Legendre, définies avec  $d = 3$ , sont tracées sur un même graphe.

### 11.2.6 Conclusion

Comme l'effet de linéarisation décrit au chapitre précédent (cf. le paragraphe 10.4) ne dépend pas du processus multifractal particulier étudié, on étend les résultats ici obtenus lors de l'analyse numérique de la cascade de Mandelbrot canonique définie sur  $\mathbb{R}^3$  à tous les processus multifractals définis sur  $\mathbb{R}^d$ .

Les coupes géométriques de dimension  $\delta$  de réalisations d'un processus  $X$  défini sur  $\mathbb{R}^d$  (avec donc  $\delta \leq d$ ) se comportent, depuis le point de vue de l'analyse multifractale réalisée à l'aide d'un formalisme multifractal "  $\delta D$  ", comme les réalisations d'un processus défini sur  $\mathbb{R}^\delta$ , caractérisé par la même fonction  $\phi_X(q)$ . L'effet de linéarisation est en particulier observé comme pour les processus définis sur  $\mathbb{R}^\delta$  :

$$\overline{\tau_{X_i}^{p,\delta D}}(q) \rightarrow \begin{cases} \phi_X(q) & \text{si } 0 \leq q \leq q_*^{+,\delta D} \\ 1 + \phi'_X(q_*^{+,\delta D})q & \text{si } q \geq q_*^{+,\delta D} \end{cases}, \quad (11.6)$$

avec  $q_*^{+,\delta D}$  défini par :

$$\delta + q_*^{+,\delta D} \phi'_X(q_*^{+,\delta D}) = \phi_X(q_*^{+,\delta D}).$$

Il est important de noter que les ordres critiques  $q_*^{+,\delta D}$  croissent avec  $\delta$ . Par exemple :

$$q_*^{+,1D} < q_*^{+,2D} < q_*^{+,3D}.$$

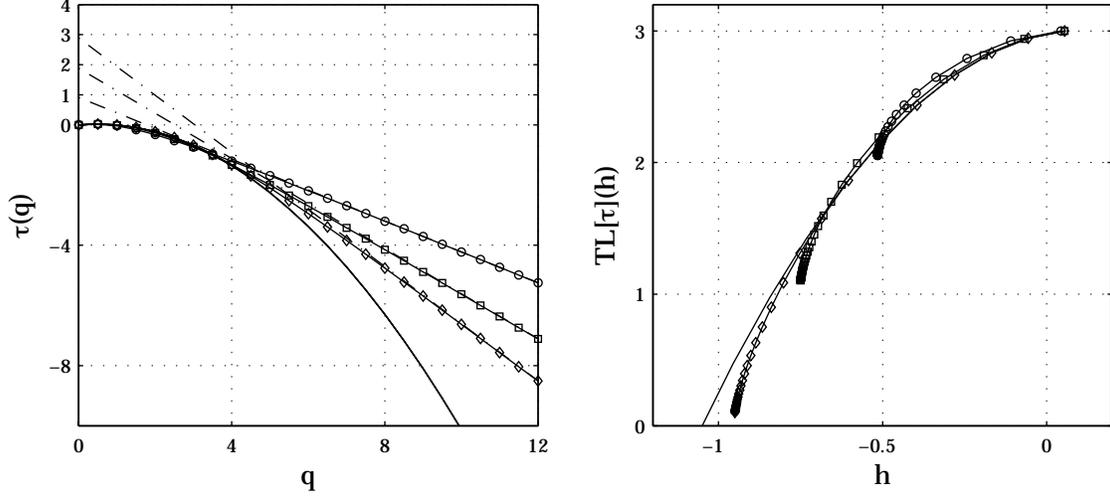


FIG. 11.3 – **Cascades de Mandelbrot canoniques définies sur  $\mathbb{R}^3$** . Gauche :  $\phi_{cmc}(q)$  (trait continu) et  $\widehat{\tau_{cmc_i}^{d',3D}}(q)$  ( $\diamond$ ),  $\widehat{\tau_{cmc_i}^{d',2D}}(q)$  ( $\square$ ),  $\widehat{\tau_{cmc_i}^{d',1D}}(q)$  ( $\circ$ ) et comportements linéaires asymptotiques associés (trait en pointillés). Droite :  $TL[\phi_{cmc}](h)$  (trait continu) et  $TL[\widehat{\tau_{cmc_i}^{d',3D}}](h)$  ( $\diamond$ ),  $TL[\widehat{\tau_{cmc_i}^{d',2D}}](h)$  ( $\square$ ),  $TL[\widehat{\tau_{cmc_i}^{d',1D}}](h)$  ( $\circ$ ). Toutes les transformées de Legendre sont définies selon  $TL[f](h) = 3 + \min_q(qh - f(q))$ .

Cela est dû à la définition même des ordres critiques et à la propriété de concavité de la fonction  $\phi_X(q)$  (cf. l'annexe D).

Ainsi, l'analyse  $\delta D$  d'un processus défini sur  $\mathbb{R}^d$ , c'est-à-dire l'analyse de coupes géométriques de dimension  $\delta \leq d$ , ne permet de mesurer la fonction  $\phi_X(q)$  que sur la gamme d'ordres  $q : [0, q_*^{+, \delta D}]$ . On dénommera dans ce mémoire de thèse ce résultat *effet de coupe*. Son corollaire en terme de transformée de Legendre est qu'il n'est seulement possible de mesurer la partie comprise entre les ordonnées  $(d - \delta)$  et  $d$  de la transformée de Legendre de  $\phi_X(q)$ , définie selon  $TL[\phi_X](h) = d + \min_q(qh - \phi_X(q))$ .

### Conséquences pour l'analyse multifractale

Si le formalisme multifractal associé aux exposants  $\tau^{p,dD}(q)$ , calculés avec  $\delta = d$ , est vérifié, c'est-à-dire que leur transformée de Legendre permet la mesure du spectre de singularités  $D_X(h)$  du processus multifractal :

$$\widehat{TL[\tau_{X_i}^{p,dD}]}(h + d) = D_X(h),$$

cela signifie que l'on ne peut mesurer la totalité du spectre de singularités avec un formalisme multifractal  $\delta D$ , appliqué aux coupes de dimension  $\delta$ , que dans le cas trivial  $\delta = d$ . En effet, les résultats précédents signifient qu'il n'est alors seulement possible de mesurer la partie du spectre de singularités  $D_X(h)$  comprise entre  $d - \delta$  et  $d$ , et l'analyse multifractale effectuée n'aboutit ainsi que partiellement.

L'effet de coupe dépasse donc l'effet de linéarisation précédemment décrit, qui traduisait le fait que les exposants de Hölder présents dans un processus multifractal étaient associés à des ensembles iso-Hölder de dimension de Hausdorff nécessairement positive. Un formalisme multifractal "  $\delta D$  " appliqué aux coupes géométriques de dimension  $\delta$  n'est pas sensible à tous les exposants de Hölder que possède le processus, mais seulement ceux associés à des dimensions de Hausdorff supérieures à  $(d - \delta)$ .



## Chapitre 12

# Effet de linéarisation en turbulence pleinement développée

Une utilisation courante des estimateurs des exposants  $\zeta(q)$  est l'analyse de signaux issus de la turbulence pleinement développée. Ces estimateurs permettent notamment de mesurer le spectre de singularités des signaux de vitesse ou de dissipation turbulentes. Il est donc intéressant, à la lumière de l'effet de linéarisation qui vient d'être discuté dans les trois précédents chapitres, de se pencher sur la mesure des exposants des fonctions de structure en turbulence pleinement développée.

Il va être ainsi montré que l'effet de linéarisation, précédemment caractérisé sur les processus multifractals, se produit de manière analogue pour les signaux de turbulence, ce qui est cohérent avec l'usuelle description multifractale des signaux turbulents pour les échelles inertielles [138, 58] (cf. le chapitre 1). Cela implique en particulier l'existence d'un ordre critique  $q_*^+$ , dont la valeur sera estimée, sur des signaux de vitesse turbulente, à l'aide de l'estimateur  $\widehat{q}_*^+(N_{blocs})$  (cf. le paragraphe 10.5). La valeur ainsi obtenue sera discutée et permettra une relecture des résultats sur l'estimation des exposants  $\zeta_v(q)$  pour les signaux de vitesse eulérienne.

Des données de dissipation 3D, issues de simulations DNS (cf. chapitre 2) seront ensuite analysées, et les résultats comparés à ceux obtenus pour des processus multifractals au chapitre précédent, permettant alors de discuter l'effet de coupes géométriques sur la mesure des exposants des fonctions de structure.

Toutes les indications techniques concernant les données, ainsi que les équipes qui les ont obtenues et les références associées sont contenues dans le chapitre 2. Afin de ne pas alourdir le discours, il ne sera pas fait de référence systématique à ce chapitre lorsqu'on discutera les données.

### 12.1 Vitesse turbulente eulérienne

Commençons par l'analyse de signaux de vitesse eulérienne. On utilisera pour cela les 4 jeux de données issus des 4 expériences décrites dans le chapitre 2, de nombre de Reynolds respectifs  $R_\lambda \simeq 380$ ,  $R_\lambda \simeq 580$ ,  $R_\lambda \simeq 2000$  et  $R_\lambda \simeq 3200$ .

#### 12.1.1 Mise en évidence de l'effet de linéarisation

Nous allons d'abord montrer que les signaux de vitesse turbulente sont sujets au même effet de linéarisation que celui décrit pour les réalisations de processus multifractals.

## Méthodologie

Deux jeux de données (les données de l'ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$  et  $R_\lambda \simeq 580$ ) sont composés de 80 runs, dont la durée (en échelles intégrales) est de respectivement  $2^8$  et  $2^7$  échelles intégrales pour chaque run. Les deux autres ne contiennent qu'un run, mais de grande durée ( $\simeq 3100$  échelles intégrales pour les données de Modane, et  $\simeq 1600$  pour les données GReC). Comme il a été expliqué dans les chapitres précédents, les estimées  $\widehat{\zeta}_v^p(q)$  des exposants des fonctions de structure sont des variables aléatoires, qui possèdent en pratique des écarts-type non-négligeables pour les valeurs élevées de  $q$ , même pour un grand nombre d'échelles intégrales. Afin de s'affranchir de ces effets de variabilité statistique, il convient alors de découper ces données en plusieurs morceaux (comme il a déjà été fait dans le paragraphe 8), contenant un nombre suffisant (à la lumière des résultats précédents) d'échelles intégrales (par exemple  $2^6$ ), et d'appliquer les estimateurs  $\widehat{\zeta}_v^p(q)$  sur chacun de ces morceaux, que l'on appellera simplement "run", comme s'il s'agissait de runs indépendants. En moyennant alors sur ces plusieurs runs, on "gomme" les effets dus à l'écart-type, et on obtient ainsi le comportement moyen des  $\widehat{\zeta}_v^p(q)$ .

Les données de Modane sont ainsi découpées en 64 runs de longueur environ  $2^6$  échelles intégrales, et les données GReC en 25 runs de longueur environ  $2^6$  échelles intégrales aussi.

Les paramètres concernant les runs pour tous les jeux de données sont résumés dans le tableau suivant :

données	ÉNSL, $R_\lambda \simeq 380$	ÉNSL, $R_\lambda \simeq 580$	Modane	GReC
$R_\lambda$	$\simeq 380$	$\simeq 580$	$\simeq 2000$	$\simeq 3200$
nombre de runs	80	80	64	25
longueur des runs (en échantillons)	$2^{20}$	$2^{20}$	401408	$2^{22}$
échelle intégrale (en échantillons)	$2^{12}$	$2^{13}$	$2^{13}$	$2^{16}$
nombre d'échelles intégrales par run ( $N_{int}$ )	$2^8$	$2^7$	$2^6$	$2^6$

Les données sont analysées exactement de la même façon qu'au chapitre 10, dont on reprendra les notations. Chacun des runs est analysé, en utilisant le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets et l'ondelette de Daubechies avec 3 moments nuls (cf. annexe B), ce qui définit les estimées  $\widehat{\zeta}_v^d(q)$ . Notons en particulier que la zone de régression linéaire, permettant la mesure des exposants  $\widehat{\zeta}_{X_i}^d(q)$ , a été soigneusement choisie, comme cela a déjà été précisément décrit dans le chapitre 8 pour les données de Modane.

### Résultats pour les données de l'ÉNSL, $R_\lambda \simeq 580$

Commençons par analyser les résultats obtenus sur les données de l'ÉNSL, de nombre de Reynolds  $R_\lambda \simeq 580$ . Les résultats sont portés sur la figure 12.1. Ils sont analogues à ceux obtenus avec les processus multifractals au chapitre 10. Pour chaque run, les estimées  $\widehat{\zeta}_{X_i}^d(q)$  ont un comportement non-linéaire en fonction de l'ordre  $q$  pour environ  $q \lesssim 6$ , puis deviennent linéaires en fonction de  $q$  :  $\widehat{\zeta}_{X_i}^d(q) \simeq \widehat{\alpha}_*^+ + \widehat{\beta}_*^+ q$  pour environ  $q \gtrsim 12$ . Le comportement linéaire asymptotique, caractérisé par les paramètres  $\widehat{\alpha}_*^+$  et  $\widehat{\beta}_*^+$ , est différent pour chacun des runs :  $\widehat{\alpha}_*^+$  et  $\widehat{\beta}_*^+$  sont des variables aléatoires. Enfin, lorsque l'on moyenne les estimées  $\widehat{\zeta}_{X_i}^d(q)$  sur les 80 runs de ce jeu de données, on

observe le comportement linéaire asymptotique,  $\simeq \overline{\alpha}_*^+ + \overline{\beta}_*^+ q$ , caractérisé par  $\overline{\alpha}_*^+ \simeq 0.93$ , raisonnablement proche de 1 puisque l'écart-type estimée de la variable aléatoire  $\overline{\alpha}_*^+$  est 0.33.

Ces résultats se traduisent sur la transformée de Legendre des exposants : les transformées de Legendre des estimées  $\widehat{\zeta}_{X_i}^d(q)$  sont limitées par un point d'accumulation, dont les coordonnées  $(\overline{h}_*^+, \overline{D}_*^+)$  prennent des valeurs différentes pour chaque run, et dont la moyenne sur les 80 runs est  $(\overline{h}_*^+, \overline{D}_*^+)$  avec  $\overline{D}_*^+ = 0.07$  en accord avec la relation  $\overline{\alpha}_*^+ = 1 - \overline{D}_*^+$  (cf. chapitre 10).

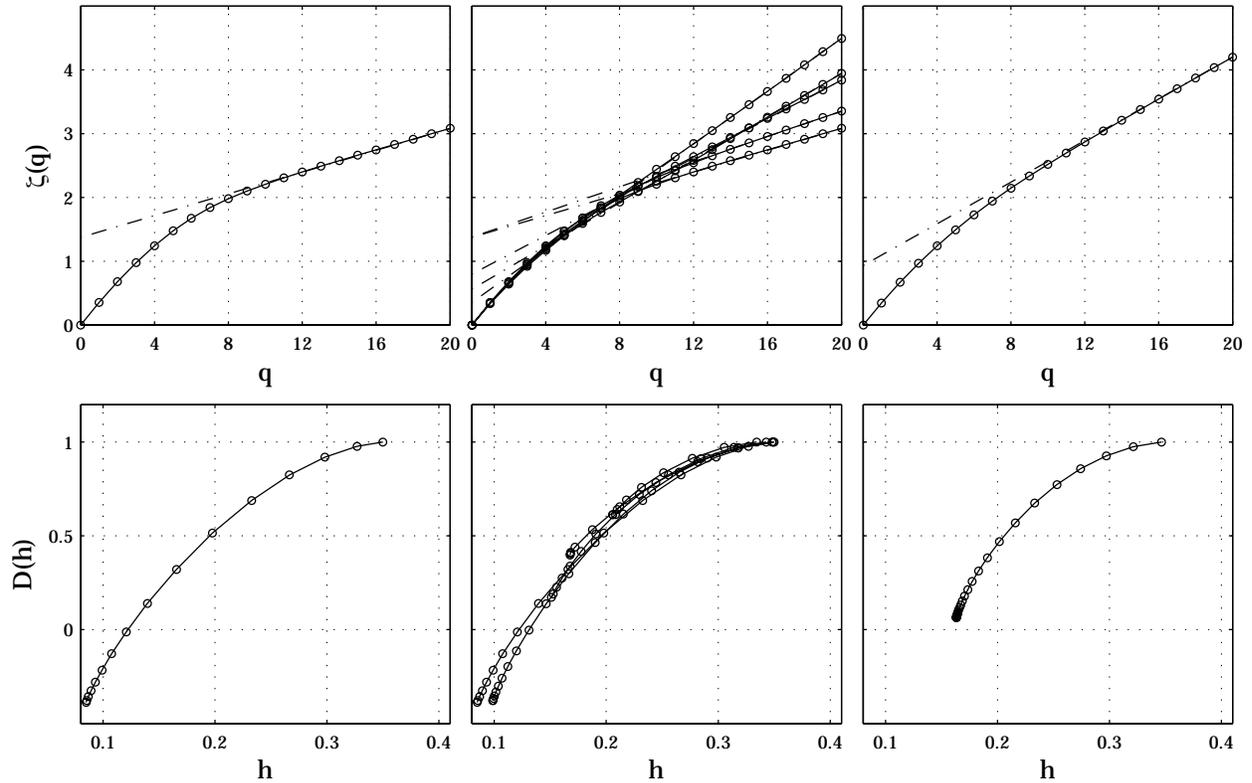


FIG. 12.1 – **Données de l'ÉNSL**,  $R_\lambda \simeq 580$ . Haut : exposants  $\widehat{\zeta}_{X_i}^d(q)$  pour 1 run (gauche), 5 runs (milieu) et moyenne  $\overline{\zeta}_{X_i}^d(q)$  sur les 80 runs. Trait en pointillé : comportements linéaires asymptotiques. Bas : transformées de Legendre des exposants  $\widehat{\zeta}_{X_i}^d(q)$  pour 1 run (gauche), 5 runs (milieu) et moyenne des transformées de Legendre des  $\widehat{\zeta}_{X_i}^d(q)$  sur les 80 runs.

On observe donc un effet de linéarisation analogue à celui observé sur les processus multifractals. Cela est déjà un résultat intéressant en soi, car c'est un indice supplémentaire pour la pertinence de la description multifractale des signaux de vitesse turbulente pour les échelles inertielles (cf. [58] par exemple).

## Fonctions de structure

Tout comme on avait vérifié au paragraphe 9.2.3 que les fonctions de structure des cascades de Mandelbrot canoniques se comportaient bien comme des lois de puissance, on le vérifie aussi sur les données de vitesse turbulente qui sont analysées (toujours les données de l'ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 580$ ). Sur la figure 12.2 sont tracées les moyennes sur les 80 runs des  $\log_2 S_v^d(q, j)$ , avec  $q = 2, 8, 15$ , en fonction de l'octave  $j$ . On observe bien un comportement linéaire dans la zone inertielle (ici entre les octaves  $j = 7$  et  $j = 10$ , où les régressions linéaires définissant la mesure des exposants  $\widehat{\zeta}_v^d(q)$  sont effectuées), qui justifie la mesure des exposants  $\widehat{\zeta}_v^d(q)$ , y compris jusqu'à  $q = 15$ .

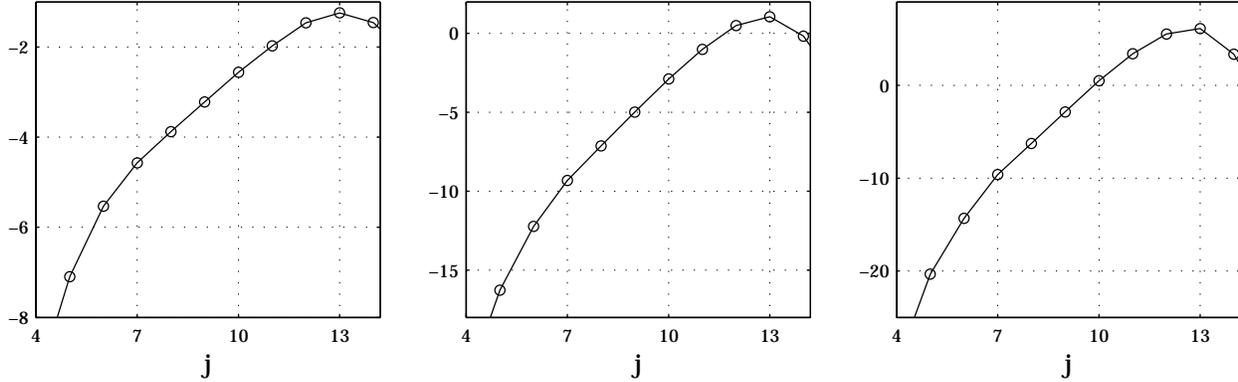


FIG. 12.2 – **Données de l'ÉNSL**,  $R_\lambda \simeq 580$ . Moyennes de  $\log_2 S_v^d(q, j)$  sur les 80 runs, en fonction de l'octave  $j$ , pour  $q = 2$  (gauche),  $q = 8$  (milieu) et  $q = 15$  (droite).

## Influence du nombre d'échelles intégrales

On peut par ailleurs étudier l'influence du nombre d'échelles intégrales sur l'effet de linéarisation observé sur les signaux de vitesse turbulente, comme cela avait été fait pour le processus de cascade d'ondelette aléatoire au paragraphe 10.3. On analyse toujours les 80 runs, mais en ne prenant que les  $n$  premiers échantillons de chaque run (on rappelle que chaque run en contient  $2^{20}$ ), avec successivement  $n = 2^{16}, 2^{17}, 2^{18}, 2^{19}$  et  $2^{20}$ , ce qui correspond respectivement à des signaux contenant  $N_{int} = 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$  et  $2^7$  échelles intégrales.

Les résultats sont présentés sur la figure 12.3, de la même façon que sur la figure 10.7 (on ne peut bien sûr ici définir de nombre  $q_c$ , puisqu'il n'existe pas ici de fonction  $\varphi_X(q)$ ). Ils montrent clairement que l'effet de linéarisation ne dépend pas du nombre d'échelles intégrales  $N_{int}$  : pour chaque valeur de  $N_{int}$ , on observe bien un effet de linéarisation, caractérisé par un point d'accumulation moyen  $(\overline{h_*^+}, \overline{D_*^+})$ . En particulier, on a toujours  $\overline{D_*^+} \simeq 0$ , et on n'observe pas une diminution de  $\overline{D_*^+}$  avec  $N_{int}$ .

## Autres jeux de données

Vérifions que les résultats obtenus sur les données de l'ÉNSL, de nombre de Reynolds  $R_\lambda \simeq 580$ , se généralisent à tous les jeux de données analysés dans le cadre de ce travail de thèse. Ces données

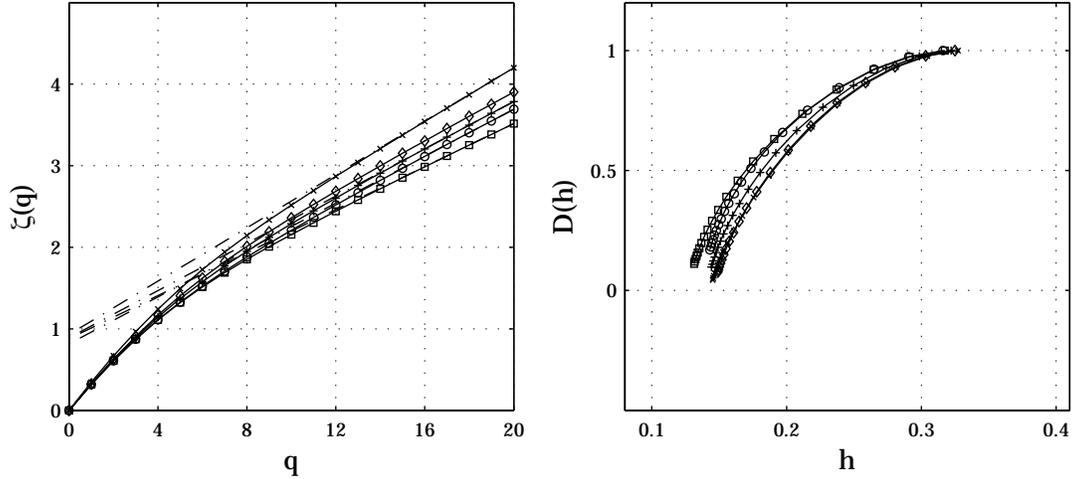


FIG. 12.3 – **Données de l'ÉNSL**,  $R_\lambda \simeq 580$ . Gauche : moyenne des estimées  $\widehat{\zeta}_{X_i}^d(q)$ . Droite : moyenne des transformées de Legendre des  $\widehat{\zeta}_{X_i}^d(q)$ .  $N_{int} = 2^3$  (o),  $N_{int} = 2^4$  (□),  $N_{int} = 2^5$  (+),  $N_{int} = 2^6$  (◇) et  $N_{int} = 2^7$  (×).

sont analysées exactement de la même façon que les données de l'ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 580$ .

Les résultats obtenus (cf. la figure 12.4) pour les autres jeux de données (ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$ , Modane et GReC) sont analogues à ceux obtenus sur les données précédentes (ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 580$ ) : l'effet de linéarisation est observé de façon identique, il suffit pour s'en convaincre de se pencher sur les résultats moyens (représentés par des □). En particulier les points d'accumulation des moyennes (sur tous les runs, respectivement 80, 64 et 25) des transformées de Legendre sont tous d'ordonnée  $\simeq 0$ , ce qui correspond à des comportements linéaires asymptotiques d'ordonnée à l'origine  $\simeq 1$ .

Notons que l'on peut ici faire une analogie entre augmenter la résolution  $r$  des processus multifractals (cf. le paragraphe 10.3) et analyser des données de nombre de Reynolds de plus en plus grand. En effet, la résolution  $r$  contrôle directement la taille de la gamme d'échelles  $2^j$  pour laquelle les fonctions de structure se comportent comme des lois de puissance (cf. l'annexe D), et le nombre de Reynolds  $R_\lambda$  contrôle la taille de la gamme des échelles inertielles (cf. par exemple [58, 42]). On peut alors, de façon purement formelle, faire le lien entre les figures 10.6 et 12.4.

### 12.1.2 Estimation de l'ordre critique $q_*^+$

Puisqu'il vient d'être montré que la mesure des exposants  $\zeta_v(q)$  était sujette à l'effet de linéarisation, intéressons-nous à la valeur de l'ordre critique  $q_*^+$  associé.

#### Prédictions pour $q_*^+$

Dans le cas des processus multifractals synthétiques utilisés dans le chapitre 10, les propriétés multifractales (en particulier le spectre de singularités) étaient théoriquement connues, et permettaient de définir analytiquement l'ordre critique  $q_*^+$  à l'aide de la relation (10.2). La situation est différente pour la turbulence pleinement développée : le spectre de singularités n'est pas connu

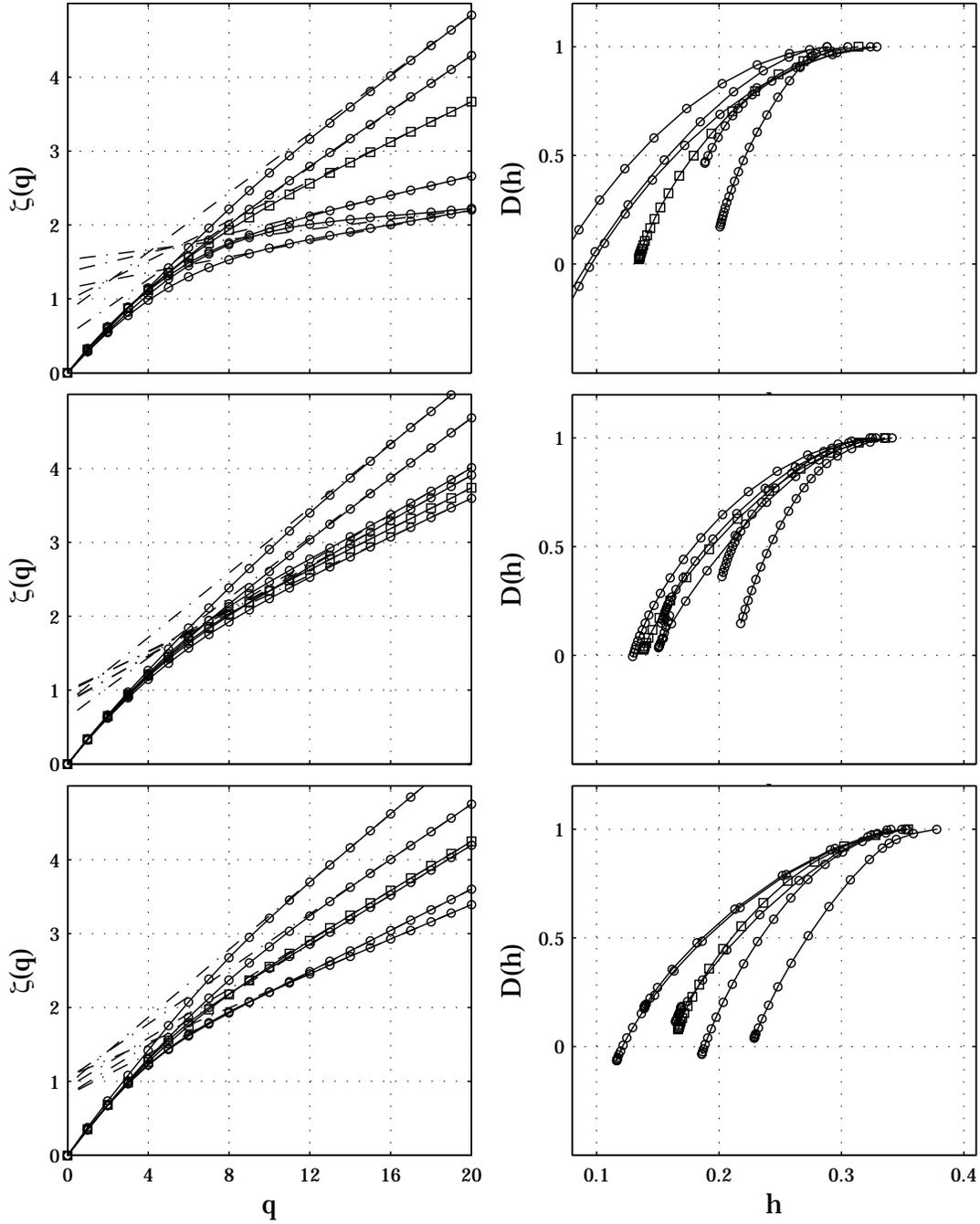


FIG. 12.4 – Données de l'ENSL,  $R_\lambda \simeq 380$  (haut), de Modane  $R_\lambda \simeq 2000$  et GReC  $R_\lambda \simeq 3200$  (bas). Gauche :  $\widehat{\zeta}_{X_i}^d(q)$  pour 5 runs ( $\circ$ ), exposants  $\widehat{\zeta}_{X_i}^d(q)$  ( $\square$ ) et comportements linéaires asymptotiques (pointillés). Droite : transformées de Legendre des  $\widehat{\zeta}_{X_i}^d(q)$  ( $\circ$ ) et leurs moyennes ( $\square$ ).

théoriquement. Il existe cependant des modèles [58], qui prédisent des expressions pour les exposants  $\zeta_v(q)$  et le spectre de singularités  $D_v(h)$ , essentiellement le modèle log-normal de Kolmogorov-

Obukhov [85, 135] et le modèle de She-Lévêque [160, 100]. Ces modèles ont été décrits au chapitre 8 (équations (8.3) et (8.5)). En employant le point de vue abordé dans cette partie, et les notations associées, ces deux modèles aboutissent aux fonctions  $\varphi_{v,ln}(q)$  et  $\varphi_{v,SL}(q)$  :

$$\begin{cases} \varphi_{v,ln}(q) = C_1 q - \frac{C_2}{2} q^2 \\ \varphi_{v,SL}(q) = \frac{q}{9} + 2 \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{q/3} \right] \end{cases},$$

avec  $C_1 = 1/2 + 3/2C_2$  et  $C_2 = 0.025$ .

On peut alors analytiquement calculer l'ordre critique à une dimension  $q_*^+$  pour le modèle log-normal :  $q_*^+ = \sqrt{2/C_2}$ , et le déterminer graphiquement pour le modèle de She-Lévêque, ce qui fournit les valeurs :

$$\frac{\text{log-normal, } C_2 = 0.025}{q_*^+} \simeq 8.94 \quad \frac{\text{She-Lévêque}}{\simeq 12.36}$$

On obtient donc deux prédictions notablement différentes, bien que les deux modèles prédisent des exposants très proches pour  $q > 0$ , comme il en a déjà été fait la remarque au paragraphe 10.5.3.

### Estimation de $q_*^+$

Nous allons désormais appliquer l'estimateur de l'ordre critique défini au paragraphe 10.5 aux signaux de vitesse turbulente. Notons que c'est toujours l'ondelette de Daubechies avec 3 moments nuls qui est utilisée pour tous les jeux de données.

Les résultats obtenus pour les quatre jeux de données sont représentés sur la figure 12.5. Selon la discussion effectuée et la méthodologie décrite au paragraphe 10.5, on choisit, pour donner une estimation de  $q_*^+$ , les valeurs fournies par l'estimateur  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$  pour les valeurs de  $N_{blocs}$  telles que chaque sous-bloc contienne 2 et 4 échelles intégrales, et on prend leur moyenne. L'intervalle de confiance est défini comme deux fois la moyenne des écarts-type mesurés pour 2 et 4 échelles intégrales. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

$$\frac{\begin{array}{cccc} \text{ÉNSL, } R_\lambda \simeq 380 & \text{ÉNSL, } R_\lambda \simeq 580 & \text{Modane, } R_\lambda \simeq 2000 & \text{GReC, } R_\lambda \simeq 3200 \end{array}}{q_*^+ \quad \begin{array}{cccc} 7.3 \pm 0.9 & 7.7 \pm 1.1 & 8.3 \pm 1.3 & 7.8 \pm 1.5 \end{array}}$$

Les résultats obtenus fournissent des valeurs concordantes à l'intérieur des intervalles de confiance : l'outil utilisé ne permet pas de déceler une éventuelle dépendance selon le nombre de Reynolds  $R_\lambda$  de l'ordre critique  $q_*^+$ .

Cet ordre critique estimé est proche de  $q \simeq 7.5$ <sup>1</sup>. Comme l'estimateur  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$  est parfois biaisé, avec un biais négatif (cf. le paragraphe 10.5), on résume ces résultats de la façon suivante :

*la mesure des exposants  $\widehat{\zeta}_v^p(q)$ , pour des profils spatiaux de dimension 1 de vitesse turbulente eulérienne, n'est pas sujette à l'effet de linéarisation pour les ordres inférieurs à environ  $q \simeq 7.5$ , quel que soit le nombre de Reynolds  $R_\lambda$ .*

<sup>1</sup>Étant données les valeurs des intervalles de confiance, on se contente ici d'un valeur choisie parmi les entiers et les demi-entiers.

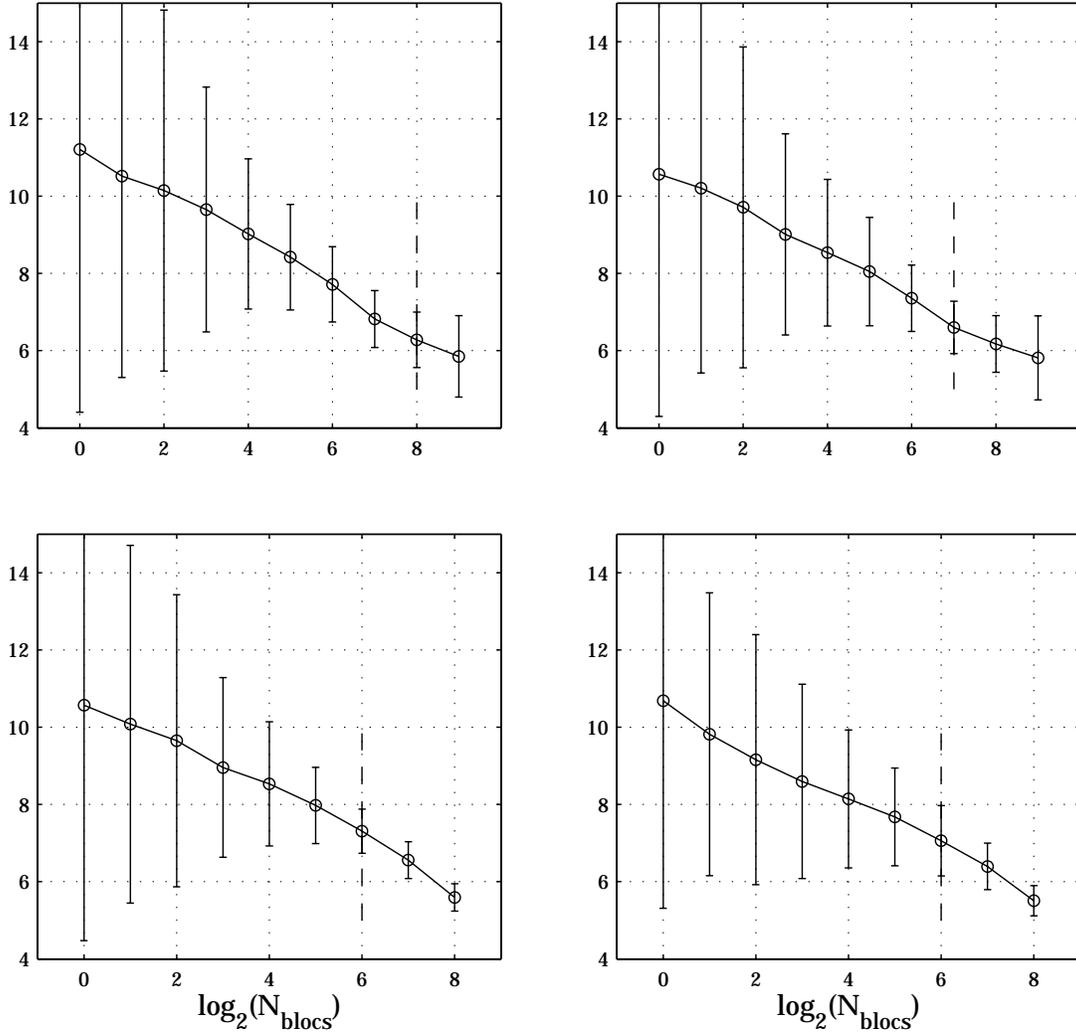


FIG. 12.5 – **Estimateur  $\widehat{q}_*^+(N_{\text{blocs}})$**  : données de l'ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$  (en haut à gauche) et  $R_\lambda \simeq 580$  (en haut à droite), données de Modane (en bas à gauche) et données GREC (en bas à droite). Les intervalles de confiance correspondent à  $\pm 2$  écarts-type estimés. La droite verticale signale la valeur de  $N_{\text{blocs}}$  pour laquelle chaque sous-bloc a pour longueur une échelle intégrale.

## Discussions

Comparons ces résultats à la littérature sur le sujet. Tout d'abord, la valeur obtenue est cohérente avec les travaux de Schmitt et al [158, 157], qui aboutissent, à partir de considérations sur une modélisation proposée de ces exposants, à la valeur  $\simeq 7.2$ . Notons toutefois que cette valeur est associée à une divergence des moments statistique pour les ordres plus grand que 7.2, contrairement à la description faite dans ce mémoire de thèse de l'effet de linéarisation (cf. le paragraphe 9.3).

La valeur estimée de l'ordre critique est de plus en accord avec les conclusions de l'article [10], regroupant les résultats obtenus par un grand nombre d'équipes travaillant sur la turbulence pleinement développée, et qui aboutit à un accord pour les valeurs des exposants  $\zeta_v(q)$  jusqu'à l'ordre  $q = 7$ .

Les résultats ici obtenus sont donc cohérents avec la littérature sur le sujet. Il est important de noter que l'une des contributions apportées au cours de ce travail de thèse, est d'avoir construit (et caractérisé) un estimateur numérique de cet ordre, qui permet d'effectuer une mesure directement à partir des signaux expérimentaux (Molchan note d'ailleurs dans [120] la nécessité d'un tel outil), sans s'appuyer sur une quelconque modélisation théorique des exposants.

Discutons désormais la valeur obtenue,  $\simeq 7.5$ , notablement plus faible que les ordres critiques prédits par les modèles log-normal et de She-Lévêque<sup>2</sup>. Puisque le modèle log-normal est une bonne modélisation des exposants  $\zeta_v(q)$ , comme cela a été montré au paragraphe 8.2.4, il est légitime d'essayer d'ajuster le seul paramètre libre de ce modèle, le coefficient d'intermittence  $C_2$ , afin d'obtenir un ordre critique  $q_*^+ = 7.5$ . Pour le modèle log-normal,  $q_*^+ = \sqrt{2/C_2}$ , donc  $q_*^+ = 7.5$  implique :  $C_2 \simeq 0.036$ . Cette valeur est beaucoup plus élevée que celle couramment admise [19, 41, 104, 51] :  $C_2 = 0.025 \pm 0.003$ . Cette explication n'est donc pas la bonne.

La valeur  $\simeq 7.5$  n'est toutefois pas en réelle contradiction avec le fait qu'un modèle log-normal modélise bien le spectre de singularités de la vitesse. En effet, il a déjà été fait la remarque que le modèle de She-Lévêque prédit des exposants très proches (en pratique indiscernables, cf. le paragraphe suivant) de ceux prédits par le modèle log-normal avec  $C_2 = 0.025$ . Les valeurs prédites pour l'ordre critique sont pourtant notablement différentes :  $q_*^+ \simeq 8.94$  pour le modèle log-normal, et  $q_*^+ \simeq 12.36$  pour le modèle She-Lévêque. Il est donc tout-à-fait raisonnable de penser qu'un très léger écart au modèle log-normal (avec le paramètre d'intermittence  $C_2 = 0.025$ ) suffise à faire diminuer la valeur de l'ordre critique depuis  $\simeq 8.94$  jusqu'à  $\simeq 7.5$ .

Il faut être conscient du caractère empirique de l'estimateur  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$  proposé (cf. le paragraphe 10.5), et donc interpréter avec la plus grande prudence les résultats obtenus. En particulier, il ne serait pas correct d'utiliser les résultats précédents afin de discuter la pertinence de tel ou tel modèle pour les exposants  $\zeta_v(q)$ . On se limitera donc à la conclusion suivante, déjà énoncée : la mesure des exposants  $\widehat{\zeta_v^p}(q)$ , pour des profils spatiaux de dimension 1 de vitesse turbulente eulérienne, n'est pas sujette à l'effet de linéarisation pour les ordres inférieurs à environ  $q \simeq 7.5$ , quel que soit le nombre de Reynolds  $R_\lambda$ .

### Ségrégation des modèles d'intermittence

Il est évident que si l'on veut déterminer à partir d'exposants expérimentaux la pertinence d'un modèle, il faut comparer les valeurs obtenues pour  $q \leq q_*^+$ . Il est alors intéressant de comparer les deux modèles principaux, les modèles log-normal et de She-Lévêque, sur la gamme d'ordres "utiles" que l'on vient de déterminer à l'aide de l'estimateur  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$  :  $[0, 7.5]$ . La figure 12.6 illustre cette comparaison.

On observe donc que l'écart entre les prédictions des deux modèles est minimale entre  $q = 0$  et  $q = 7.5$  : il est de moins de 3% en valeur relative (en bas à gauche), ce qui reviendrait à effectuer les mesures des exposants avec une précision absolue de 0.03 (en bas à droite) des exposants  $\zeta_v(q)$  jusqu'à l'ordre  $q = 7.5$ , ce qui semble irréaliste. Ce constat rejoint d'ailleurs bien la remarque effectuée au paragraphe 8.2.4, sur les très proches prédictions de ces modèles pour  $q > 0$ .

---

<sup>2</sup>Notons d'ailleurs qu'il a été montré au paragraphe 10.5 que l'estimateur  $\widehat{q_*^+}(N_{blocs})$  fournit la même estimation de l'ordre critique lors de l'analyse numérique de processus de cascade d'ondelette aléatoire définie selon ces modèles, celle prédite par le modèle log-normal ( $q_*^+ \simeq 8.94$ ).

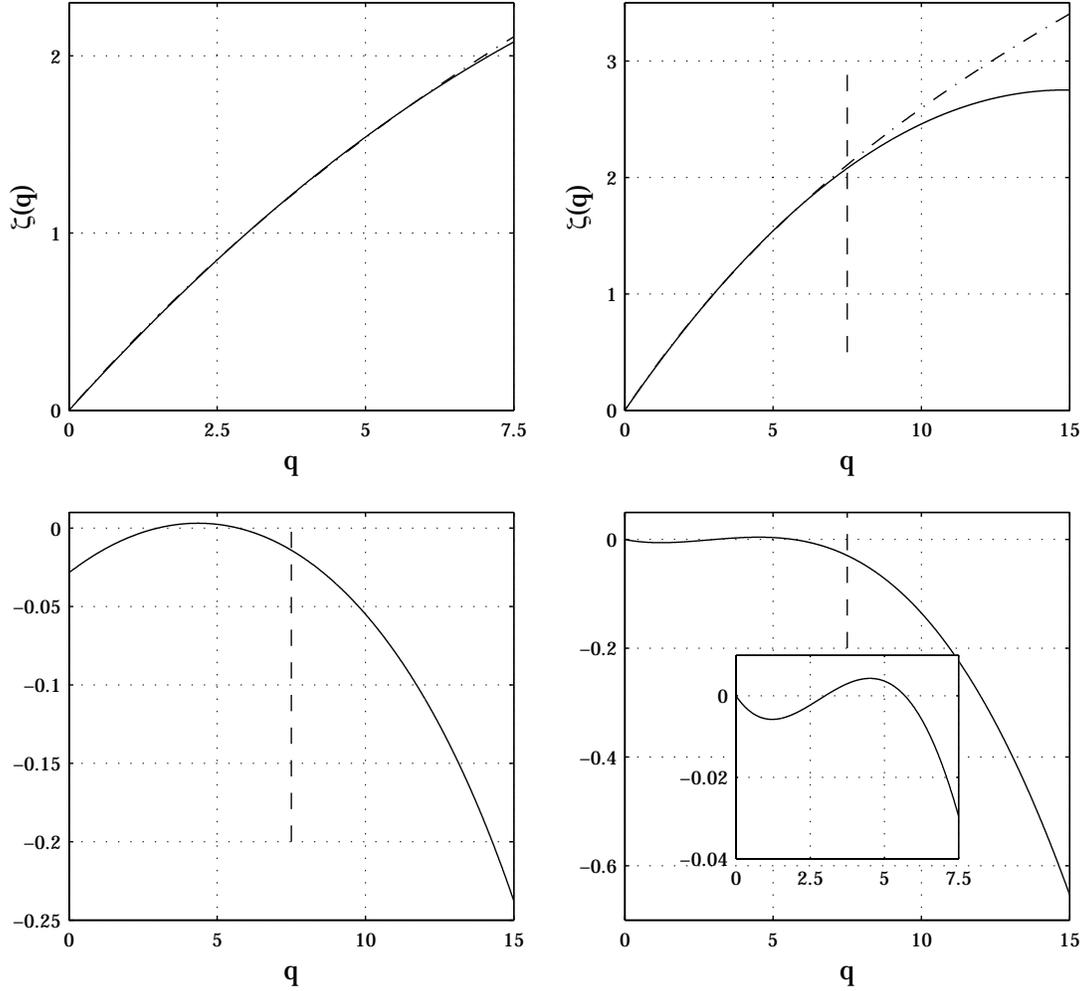


FIG. 12.6 – **Comparaisons entre les modèles log-normal ( $C_2 = 0.025$ ) et de She-Lévy.** En haut :  $\varphi_{v,ln}(q)$  (trait continu) et  $\varphi_{v,SL}(q)$  (trait en pointillés). En bas : écarts relatif :  $(\varphi_{v,ln}(q) - \varphi_{v,SL}(q))/\varphi_{v,ln}(q)$  (à gauche) et absolu :  $\varphi_{v,ln}(q) - \varphi_{v,SL}(q)$  (à droite). La barre verticale en pointillés représente la valeur estimée de l'ordre critique :  $q_*^+ \simeq 7.5$ .

Il reste donc deux solutions a priori pour discriminer entre ces deux modèles (en tous cas à partir de l'analyse multifractale de signaux de vitesse turbulente) : soit effectuer la mesure des exposants  $\zeta_v(q)$  sur des données bi- ou tri-dimensionnelles de vitesse, soit la mesure des exposants  $\zeta_v(q)$  d'ordre négatif, puisque les prédictions diffèrent alors notablement. C'est cette dernière option qui est employée avec succès au paragraphe 8.2.4, permettant de mettre en évidence le caractère log-normal du spectre de singularités.

### 12.1.3 Conclusion : Mesure du spectre de singularités

Il vient donc d'être mis en évidence que l'analyse multifractale des signaux expérimentaux de vitesse turbulente aboutissait à l'effet de linéarisation, de façon analogue à celui observé pour les processus multifractals. *L'effet de linéarisation est un fait intrinsèque à l'analyse multifractale*

*des signaux de vitesse turbulente*, tout comme il l'était pour l'analyse multifractale des signaux multifractals synthétiques. Les signaux expérimentaux de vitesse se comportent donc bien, du point de vue de l'analyse multifractale, comme des réalisations de processus multifractals, ce qui est cohérent avec la modélisation multifractale de la vitesse turbulente pour les échelles inertielles (cf. chapitre 1).

Notons de plus que les résultats obtenus dans ce paragraphe sont cohérents avec la discussion sur l'effet de coupe effectuée au chapitre précédent. Les signaux de vitesse turbulente ici analysés sont en effet des coupes géométriques de dimension 1 d'écoulements turbulents tri-dimensionnels. En particulier, on en déduit qu'il n'est pas possible de mesurer l'ensemble du spectre de singularités (défini pour la turbulence à trois dimensions) avec de telles coupes, mais seulement sa partie comprise entre les ordonnées  $D = 2$  et  $D = 3$ , qui correspond aux transformées de Legendre définies dans ce paragraphe comme  $TL[f](h) = 1 + \min_q(qh - f(q))$ , comprises entre 0 et 1.

C'est un résultat intéressant en soi, puisqu'il est parfois suggéré qu'il est possible d'accéder à une portion plus étendue du spectre de singularités  $D_v(h)$ , à l'aide de l'application de formalisme multifractal aux coupes géométriques [110, 158], en moyennant les fonctions de structure sur les tous les runs disponibles (ce qui revient à augmenter le nombre d'échelles intégrales  $N_{int}$ ), puis en mesurant les exposants  $\zeta_v(q)$  sur les fonctions de structure moyennes, et non pas en moyennant les estimées  $\widehat{\zeta}_v^p(q)$  sur les runs<sup>3</sup>. L'étude de l'influence du nombre d'échelles intégrales contenues dans les signaux (cf. figure 12.3) semble ici éclairante, car elle montre que l'effet de linéarisation ne dépend pas de  $N_{int}$ , et en particulier que l'on n'a pas accès à une partie plus grande du spectre de singularités lorsqu'on augmente la durée (i.e. le nombre d'échelles intégrales).

## 12.2 Dissipation turbulente

Il est désormais discuté l'analyse de données tri-dimensionnelles de signaux de turbulence. Il s'agit de signaux de dissipation obtenus par DNS, simulations réalisées par C.R. Koudella et E. Lévêque (cf. le chapitre 2). Comme cela a déjà été précisé au chapitre 2, le nombre de Reynolds de ces signaux,  $R_\lambda \simeq 140$ , est faible, et la gamme d'échelles inertielles peu étendue. Les comportements en loi de puissance des fonctions de structure, caractéristiques des échelles inertielles en turbulence, ne sont ainsi observables que sur un nombre très restreint d'échelles, et la mesure des exposants correspondants est délicate et nécessairement sujette à discussion.

On a tracé sur la figure 12.7 la fonction de structure d'ordre 2  $S_{DNS}^{d',3D}(2,j)$ <sup>4</sup>, calculée à 3 dimensions à l'aide des coefficients d'ondelette discrets en utilisant l'ondelette de Daubechies avec 1 moment nul, et normalisée par  $2^{3j}$  afin de bien pouvoir visualiser le comportement de cette fonction de structure (si l'on trace directement  $\log_2 S_{DNS}^{d',3D}(2,j)$ , le facteur  $2^{3j}$  prédomine et on ne voit qu'une droite dans le diagramme log-log, alors que l'exposant local varie beaucoup (cf. figure de droite)). On observe bien que le comportement en loi de puissance ne s'observe au mieux qu'entre les octaves  $j = 4$  et  $j = 6$ .

Les exposants  $\widehat{\zeta}_{DNS_i}^{d',\delta D}(q)$  et  $\widehat{\tau}_{DNS_i}^{d',\delta D}(q) = \widehat{\zeta}_{DNS_i}^{d',\delta D}(q) - \delta q$  introduits au chapitre précédent (cf. la définition (11.4)) seront tout de même mesurés, à l'aide d'une régression linéaire des fonctions de structure entre les octaves  $j = 4$  et  $j = 6$ , mais les résultats présentés ne seront que discutés de façon qualitative, en comparaison avec l'étude numérique de l'effet de coupe effectuée au paragraphe 11.2.

<sup>3</sup>Cela revient en fait à intervertir les opérations log et de moyenne sur les runs.

<sup>4</sup>On repérera les données de dissipation DNS par  $DNS$  et non par la première lettre de dissipation, contrairement aux données de vitesse indexées par la lettre  $v$ , afin d'éviter toute confusion avec les notations précédentes.

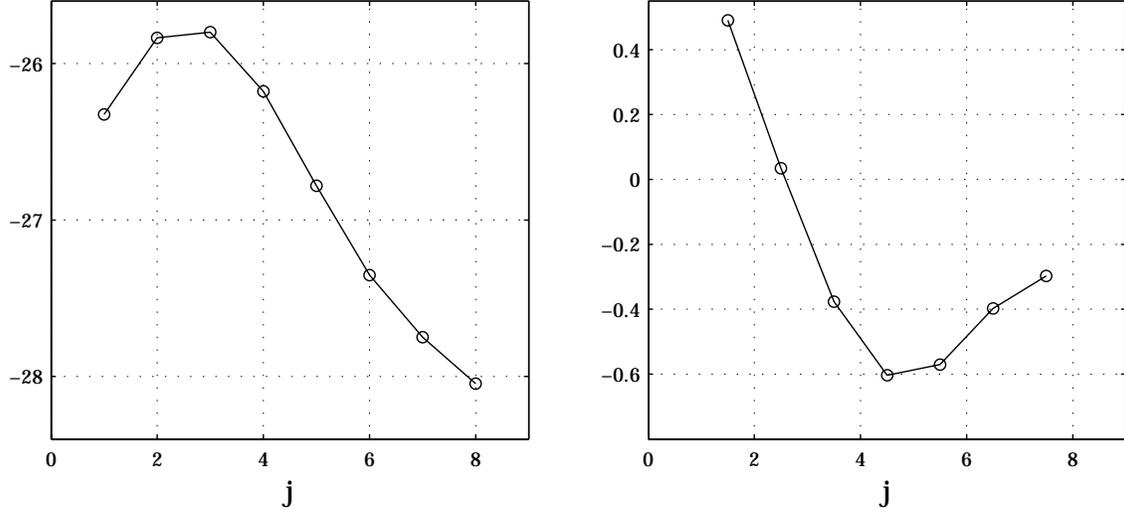


FIG. 12.7 – **Données de dissipation DNS**,  $R_\lambda \simeq 140$ .  $\log_2 \left( S_{DNS}^{d',3D}(2,j)/2^{3j} \right)$  calculée en 3 dimensions et moyennée sur les 18 runs (gauche) et exposant local correspondant (droite).

L'objet de ce paragraphe est donc de montrer que les données de dissipation DNS se comportent, vis-à-vis des coupes géométriques, qualitativement de la même façon que le processus de cascade de Mandelbrot canonique utilisé au chapitre précédent.

### 12.2.1 Méthodologie

Les 18 runs disponibles (cf. le chapitre 2) sont analysés selon le même schéma que les réalisations de cascade de Mandelbrot canonique au paragraphe 11.2. On rappelle que chacun des runs contient  $256 \times 256 \times 256$  échantillons, et que  $N_{int} = 2$ , c'est-à-dire que chaque run est composé de  $2 \times 2 \times 2$  blocs d'une échelle intégrale de côté.

Chaque run est analysé de trois façons différentes. Tout d'abord une analyse 3D, en effectuant une transformée en ondelette discrète à 3 dimensions, ce qui conduit ainsi à 18 estimées  $\widehat{\tau}_{DNS_i}^{d',3D}(q)$ . Ensuite, chacun des 18 runs est découpé en 24 plans, 8 dans chaque directions, régulièrement espacés de 32 échantillons, ce qui correspond à 432 estimées  $\widehat{\tau}_{DNS_i}^{d',2D}(q)$ . Enfin, des coupes à 1 dimension (analyse 1D) sont analysées. Ces coupes sont au nombre de 192 par run, 64 dans chaque direction, régulièrement espacées de 32 échantillons, permettant la mesure de 3456 estimées  $\widehat{\tau}_{DNS_i}^{d',1D}(q)$ .

Notons que toutes les estimées sont obtenues par régression linéaire entre les échelles  $j = 4$  et  $j = 6$  et que l'ondelette utilisée pour les transformées en ondelette discrètes est l'ondelette de Daubechies avec 1 moment nul.

### 12.2.2 Résultats

Les résultats obtenus sont reportés sur la figure 12.8, qui est à mettre en parallèle avec la figure 11.2, correspondant aux résultats obtenus avec le processus de cascade de Mandelbrot canonique.

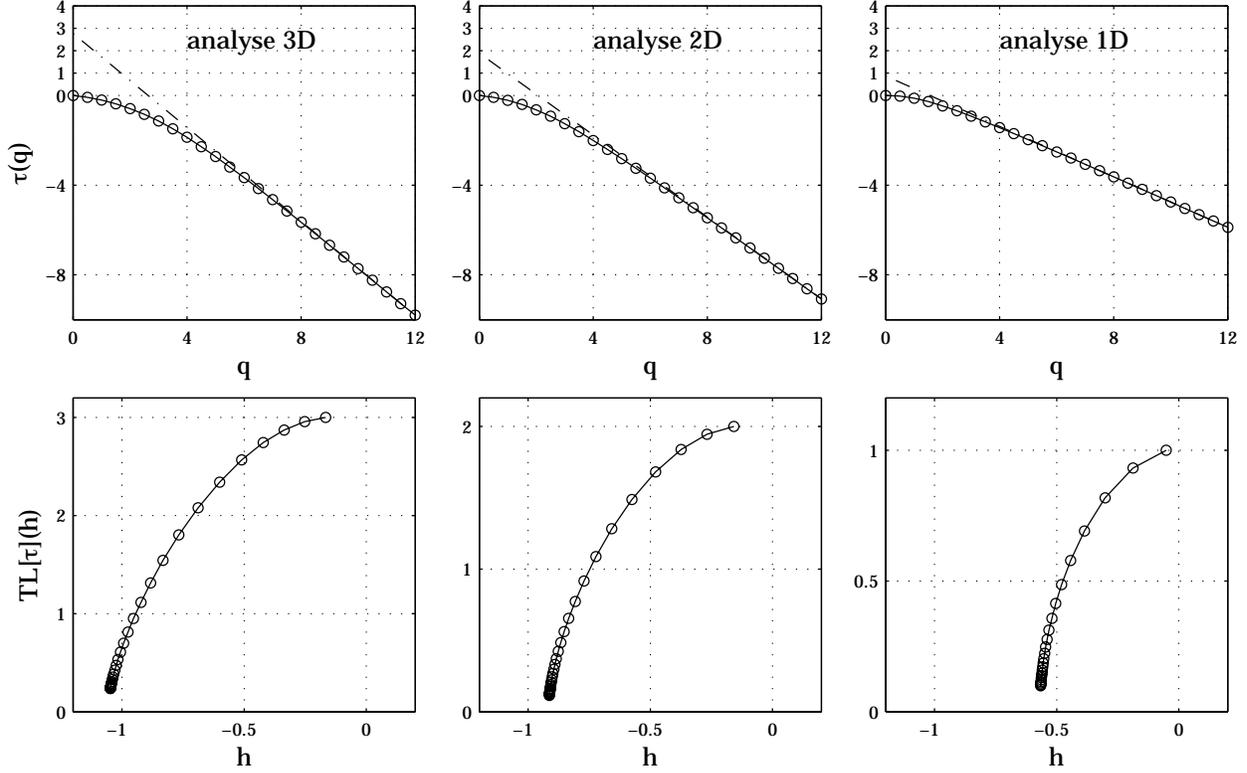


FIG. 12.8 – **Données de dissipation DNS**,  $R_\lambda \simeq 140$ . Haut :  $\overline{\tau_{DNS_i}^{d',\delta D}}(q)$  (o) et comportements linéaires asymptotiques associés (trait en pointillés). Bas :  $TL[\overline{\tau_{DNS_i}^{d',\delta D}}](h)$  (o). Analyses 3D (gauche), 2D (milieu) et 1D (bas).

L'analogie entre les résultats obtenus avec les données de dissipation DNS, et avec le processus de cascade de Mandelbrot canonique est frappante : l'effet de coupe décrit au paragraphe 11.2 est observé, avec une grande similitude, sur les données de dissipation turbulente. Ainsi, l'analyse 3D est caractérisée par un ordre critique  $q_*^{+,3D}$  plus élevé que celui associé à l'analyse 2D ( $q_*^{+,2D}$ ), lui-même plus élevé que celui de l'analyse 1D ( $q_*^{+,1D}$ ) :

$$q_*^{+,3D} > q_*^{+,2D} > q_*^{+,1D}.$$

Notons, puisque l'on se contente ici d'une analyse qualitative des signaux de dissipation DNS, que les estimateurs des ordres critiques  $q_*^{+,3D}$ ,  $q_*^{+,2D}$  et  $q_*^{+,1D}$  ne seront pas ici appliqués. Il est toutefois intéressant de discuter les prédictions des modèles classiques d'intermittence pour la dissipation [58] : le modèle log-normal [85, 135] et le modèle de She-Lévêque [160, 100]. Ces deux modèles sont caractérisés par les fonctions  $\phi_{d,ln}(q)$  et  $\phi_{d,SL}(q)$  :

$$\phi_{d,ln}(q) = mq(1 - q) \quad (12.1)$$

$$\phi_{d,SL}(q) = -\frac{2}{3}q + 2 \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^q \right], \quad (12.2)$$

avec  $m = \frac{9}{2}C_2 = 0.1125$  ( $C_2$  est le paramètre d'intermittence associé à la vitesse), le modèle de She-Lévêque n'ayant pas de paramètre libre. Ces deux modèles prédisent alors les valeurs suivantes

pour les ordres critiques :

$$q_{*,ln}^{+,1D} \simeq 2.98, \quad q_{*,ln}^{+,2D} \simeq 4.22, \quad q_{*,ln}^{+,3D} \simeq 5.16$$

$$q_{*,SL}^{+,1D} \simeq 4.22, \quad q_{*,SL}^{+,2D} = +\infty, \quad q_{*,SL}^{+,3D} \simeq +\infty.$$

Le modèle de She-Lévêque prédit donc des ordres critiques infinis (au sens défini au paragraphe 9.3) pour les analyses 2D et 3D, c'est-à-dire que l'équation définissant l'ordre critique n'a pas dans ce cas-là de solution. Le modèle de She-Lévêque est d'ailleurs une modélisation log-Poisson, et il avait été remarqué au paragraphe 9.3 que ce type de modèle pouvait aboutir à des ordres critiques infinis.

Comme cela a déjà été signalé, l'analyse ici proposée n'est que qualitative, et les résultats ne doivent pas être utilisés afin de discriminer les modèles. Les résultats obtenus semblent en bon accord avec les prédictions du modèle log-normal : les effets de linéarisation observés pour chaque analyse (3D, 2D et 1D) semblent bien être caractérisés par les ordres critiques  $q_*^{+,\delta D}$  prédits par le modèle log-normal, mais nous nous contenterons ici de cette simple remarque.

### 12.2.3 Conclusion

L'effet de linéarisation intervenant à partir d'ordres critiques de plus en plus élevés, l'analyse  $\delta D$  permet d'accéder à une information de plus en plus riche lorsque  $\delta$  augmente : la gamme d'ordres  $q$  pour laquelle les exposants  $\widehat{\tau}_{DNS_i}^{d',\delta D}(q)$  se comportent non linéairement avec l'ordre  $q$  devient de plus en plus étendue lorsque  $\delta$  augmente (cf. figure 12.9).

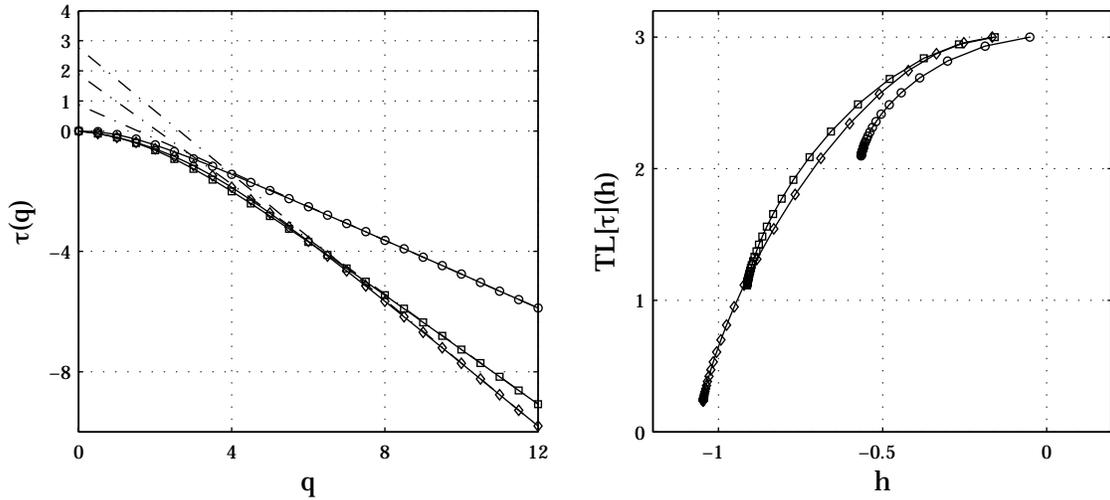


FIG. 12.9 – Données de dissipation DNS,  $R_\lambda \simeq 140$ . Gauche :  $\widehat{\tau}_{DNS_i}^{d',3D}(q)$  (o),  $\widehat{\tau}_{DNS_i}^{d',2D}(q)$  (□),  $\widehat{\tau}_{DNS_i}^{d',1D}(q)$  (◇) et comportements linéaires asymptotiques associés (trait en pointillés). Droite :  $TL[\widehat{\tau}_{DNS_i}^{d',3D}](h)$  (o),  $TL[\widehat{\tau}_{DNS_i}^{d',2D}](h)$  (□),  $TL[\widehat{\tau}_{DNS_i}^{d',1D}](h)$  (◇). Toutes les transformées de Legendre sont définies selon  $TL[f](h) = 3 + \min_q(qh - f(q))$ .

En terme d'analyse multifractale, cela signifie que l'analyse 3D permet une mesure complète du spectre de singularités associé à la dissipation turbulente, alors que les analyses 2D et 1D

n'aboutissent qu'à une mesure partielle de ce spectre : la partie comprise entre les ordonnées  $D = 1$  et  $D = 3$  pour l'analyse 2D, et celle comprise entre les ordonnées  $D = 2$  et  $D = 3$  pour l'analyse 1D.

Ces derniers commentaires sont illustrés par la figure 12.9, où sont regroupés les résultats précédents, et qui est le pendant de la figure 11.3 pour le processus de cascade de Mandelbrot canonique. Encore une fois, il est observé, sur ces données de dissipation DNS, un comportement qualitativement en tout point analogue à celui caractérisé au chapitre précédent sur le processus de cascade de Mandelbrot canonique.

#### 12.2.4 Effet de linéarisation et condition de Novikov

La condition de Novikov [134], ou encore inégalité de Novikov, est une contrainte qui porte directement sur les exposants  $\zeta_d^{p,3D}(q)$  du champ de dissipation de l'énergie turbulente, et qui a parfois été utilisée pour rejeter le modèle log-normal [58]. Cette condition s'exprime de la façon suivante : le champ de dissipation étant une quantité physique modélisée par des processus multifractals de type *densités* (cf. l'annexe C), c'est-à-dire de distributions à valeurs positives, la moyenne spatiale des puissances  $q$ -ièmes des coefficients d'agrégation est forcément une fonction croissante de l'échelle  $2^j$ , quel que soit l'ordre  $q > 0$ <sup>5</sup>. Les exposants des fonctions de structure correspondantes sont donc nécessairement positifs, c'est la condition de Novikov :

$$\zeta_d^{a,3D}(q) > 0.$$

Si l'on identifie les exposants  $\zeta_X^{a,3D}(q)$  avec la fonction  $\varphi_X^{3D}(q)$  lors de la discussion de la validité d'une modélisation du champ de dissipation, par exemple une cascade de Mandelbrot canonique log-normale, ce qui est faux comme cela a été montré dans cette partie de ce mémoire de thèse, il est possible d'aboutir à des conclusions erronées. Par exemple, pour le modèle log-normal [85, 135],  $\varphi_{d,ln}^{3D}(q) = mq(1 - q) + 3q$ , et donc, lorsque  $q \rightarrow +\infty$ ,  $\varphi_{d,ln}^{3D} \simeq -mq^2 < 0$ , et l'on conclut ainsi selon ce raisonnement à la violation de la condition de Novikov (cf. figure 12.10).

Comme on vient de le voir, la prédiction théorique du modèle log-normal en termes d'exposants  $\zeta_d^{3D}(q)$  n'est pas  $\varphi_{d,ln}^{3D}(q)$ , mais (pour les ordres positifs, cf. l'annexe D) :

$$\zeta_{d,ln}^{3D}(q) = \begin{cases} mq(1 - q) + 3q & \text{si } 0 \leq q \leq \sqrt{\frac{3}{m}} \\ q(3 + m - 2\sqrt{3m}) & \text{si } q \geq \sqrt{\frac{3}{m}} \end{cases}.$$

La condition de Novikov n'est donc pas a priori violée, elle ne l'est que si  $3 + m - 2\sqrt{3m} < 0$ , ce qui n'est pas le cas avec la valeur couramment admise dans la littérature pour  $m$  [58],  $m = 0.1125$  (cf. figure 12.10). Notons que le modèle de She-Lévêque [160, 100], qui est caractérisé par :  $\varphi_{d,SL}(q) = -\frac{2}{3}q + 2 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^q\right] + 3q$ , ne viole pas non plus la condition de Novikov.

Il semble intéressant de faire la remarque suivante : la violation de la condition de Novikov équivaudrait à l'existence d'exposants de Hölder "négatifs", puisque, par transformée de Legendre,  $h$  est la pente des  $\zeta_d^{3D}(q)$ , et pour que ces derniers prennent des valeurs négatives, il est nécessaire que leur dérivée en prenne aussi. Notons d'ailleurs que la notion d'exposant de Hölder "négatif" n'a pas de sens mathématique (cf. les définitions de l'annexe C). En extrapolant tout de même sa définition aux valeurs négatives, il est évident que des valeurs négatives pour l'exposant  $h$ , qui est une caractéristique ponctuelle de la modélisation étudiée, est en contradiction avec le fait que

<sup>5</sup>Une condition analogue s'établit de la même façon pour les ordres négatifs.

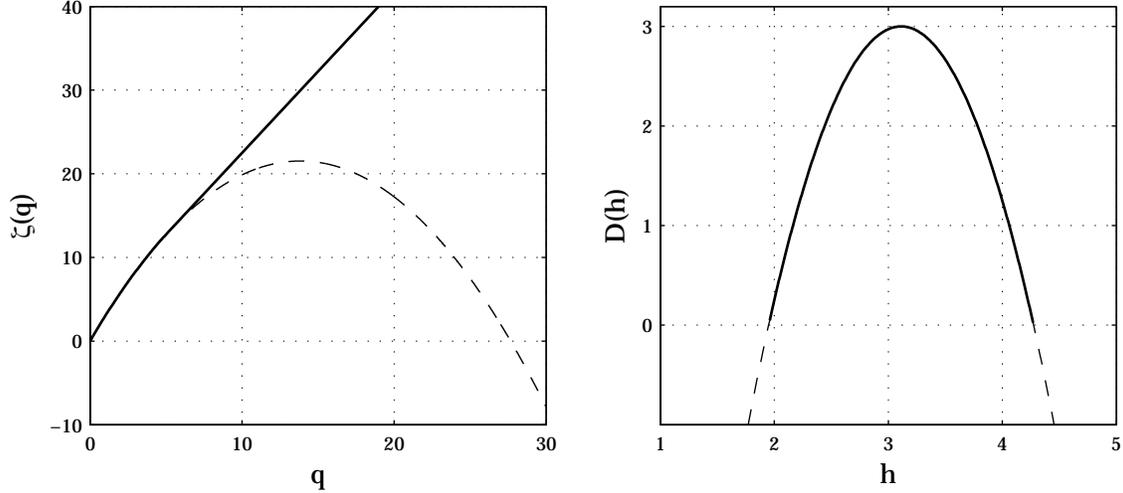


FIG. 12.10 – **Prédictions du modèle log-normal.** Gauche : exposants  $\zeta_{d,ln}^{3D}(q)$  (ligne continue) et fonction  $\varphi_{d,ln}^{3D}(q)$  (ligne en pointillés). Droite : transformées de Legendre correspondantes. Le paramètre  $m$  a été choisi selon sa valeur couramment admise :  $m = 0.1125$ .

l'objet étudié est une densité, selon le même raisonnement effectué sur les moyennes spatiales pour aboutir à la condition de Novikov. C'est une version ponctuelle de la condition de Novikov (qui est elle globale), et qui lui est équivalente.

### 12.3 Conclusion

Il vient donc d'être montré que l'analyse, en terme d'estimation des exposants  $\zeta_v(q)$  des signaux de vitesse turbulente, est sujette à l'effet de linéarisation, de façon tout-à-fait similaire à l'effet de linéarisation numériquement caractérisé pour les processus multifractals synthétiques. Ce résultat est jugé très intéressant, car la mesure des exposants  $\zeta_v(q)$  est l'une des voies d'accès aux propriétés du phénomène de turbulence pleinement développée, notamment pour sa description multifractale.

En particulier, la mesure des exposants des fonctions de structure pour des données expérimentales de vitesse eulérienne à 1 dimension doit, si l'on veut par exemple comparer ces exposants à des prédictions fournies par des modèles, être limitée à la gamme d'ordres  $q \in [0, 7.5]$ . Ceci est valable quelle que soit la taille (par exemple le nombre d'échelles intégrales présentes) des données analysées : l'effet de linéarisation n'est pas dû à un manque de statistique, comme cela a été caractérisé au chapitre 10. Il est important de noter toutefois que la qualité statistique (biais et variance) de l'estimation, à l'intérieur de la gamme  $[0, 7.5]$ , augmente bien évidemment avec la taille des données (toujours par exemple si le nombre d'échelles intégrales augmente). L'étude précise des propriétés statistiques des estimateurs employés fait d'ailleurs l'objet d'un travail récemment initié avec S. Roux, du laboratoire de physique de l'École Normale Supérieure de Lyon [149].

Il a de plus été montré que l'analyse de coupes géométriques de signaux de dissipation à 3 dimensions (données DNS) se comportait qualitativement de la même façon que l'analyse effectuée sur un processus multifractal synthétique (la cascade de Mandelbrot canonique) au chapitre précédent.

L'effet de coupe, que l'on retrouve aussi lors de l'analyse des signaux de vitesse étudiés, puisque ceux-ci sont des coupes à 1 dimension du phénomène à 3 dimensions de la turbulence, est donc essentiel lors de l'analyse multifractale de données expérimentales. Il implique en particulier l'impossibilité, à partir de l'usage de formalisme multifractal pour l'analyse de signaux de vitesse correspondant à des coupes de dimension 1, de mesurer la totalité du spectre de singularités de la vitesse turbulente, qui est un phénomène défini sur l'espace habituel, à 3 dimensions.



## Quatrième partie

# Au delà des lois de puissance en turbulence pleinement développée

Les exposants  $\zeta_v(q)$  des fonctions de structure des signaux de vitesse en turbulence pleinement développée sont souvent supposés être *universels*, c'est-à-dire indépendants de l'expérience particulière de turbulence étudiée, notamment à la suite du célèbre article de Kolmogorov en 1941 [84], qui fondait un cadre descriptif basé sur l'universalité de la turbulence pleinement développée, en se plaçant en particulier dans la limite des nombres de Reynolds infinis. Kolmogorov, toujours au cours de la même année 1941, prévoit de plus la valeur, dans cette limite des nombres de Reynolds infinis, de l'exposant d'ordre 3 :  $\zeta_v(3) = 1$ , conséquence tirée de la loi dite des 4/5 [83]. Tous les modèles qui furent ensuite proposés pour les exposants  $\zeta_v(q)$  (se reporter par exemple à [58]), qui prennent en compte les propriétés d'intermittence des signaux de vitesse turbulente, et donc du caractère non linéaire de ces exposants, respectent la condition  $\zeta_v(3) = 1$ , et se situent toujours dans ce cadre de description universelle.

La mesure pratique des exposants  $\zeta_v(q)$  montre cependant de façon claire que l'exposant  $\zeta_v(3)$  est différent de la valeur universelle 1, et dépend de l'expérience particulière de turbulence étudiée, comme cela sera illustré au chapitre 13. En revanche, les exposants  $\zeta_v(q)$ , une fois renormalisés par  $\zeta_v(3)$  (i.e. les  $\zeta_v(q)/\zeta_v(3)$ ), concordent bien d'une expérience de turbulence à l'autre [10]. Il semble donc que la valeur de l'exposant  $\zeta_v(3)$  contienne l'information sur la particularité de l'écoulement turbulent analysé (par exemple son nombre de Reynolds  $R_\lambda$ ).

Divers travaux [96, 97, 59, 60, 47, 6, 46, 171, 118] se sont assez récemment intéressés à la description de la fonction de structure d'ordre 3 au delà de la loi de puissance prédite par la loi des 4/5 [83]. Ces modélisations permettent une description plus fine de la fonction de structure d'ordre 3 mesurée expérimentalement.

Il reste cependant à faire le lien avec la valeur de l'exposant  $\zeta_v(3)$ , afin d'essayer de prédire sa valeur de façon plus précise que la prédiction  $\zeta_v(3) = 1$ , en tenant compte de la nécessaire finitude du nombre de Reynolds  $R_\lambda$ , mais aussi de la particularité de l'écoulement turbulent étudié, comme nous allons le voir. Une modélisation de la fonction de structure d'ordre 3, valable pour les échelles inertielles, dans le cas de la *turbulence en déclin homogène* (cf. le paragraphe 13.3.1), est ainsi décrite et discutée au chapitre 13. Elle est constituée d'un terme prédominant, qui correspond à la loi des 4/5, et de deux termes correctifs, l'un concernant les plus petites échelles inertielles (terme *dissipatif*), et l'autre les plus grandes (terme *non stationnaire*). Le terme dissipatif est universel, indépendant de l'expérience de turbulence, tandis que le terme non-stationnaire dépend lui explicitement de la nature de l'écoulement turbulent que l'on cherche à décrire : c'est donc une correction *non universelle* à la loi des 4/5. Notons que cette modélisation ne fait pas intervenir de relation phénoménologique entre les échelles caractéristiques de la turbulence (échelles intégrales, de Taylor et de Kolmogorov, cf. l'annexe A), contrairement aux travaux précédemment cités, et il est argumenté que l'expression obtenue permet une description plus précise de la fonction de structure d'ordre 3. Une prédiction de l'exposant  $\zeta_v(3)$  est alors déduite, qui tient donc explicitement compte des deux termes correctifs. Cette modélisation est enfin comparée à celle obtenue dans le cas de turbulence forcée [118], illustrant bien le caractère non universel du terme correctif non stationnaire.

La modélisation proposée est ensuite confrontée à des données expérimentales de turbulence en déclin, homogène ou non au chapitre 14. Les résultats obtenus permettent de montrer que la modélisation proposée, ainsi que la prédiction effectuée pour l'exposant  $\zeta_v(3)$ , sont en très bon accord avec les observations expérimentales dans le cas de la turbulence en déclin homogène. De plus, il est mis en évidence que la signature non universelle du terme correctif non stationnaire est décelable sur les données expérimentales. Il est ainsi proposée une modélisation semi-empirique de la fonction de structure d'ordre 3 dans le cas de la turbulence en déclin non homogène.

# Chapitre 13

## Modélisation de la fonction de structure d'ordre 3

### 13.1 Comparaison des exposants $\widehat{\zeta}_v^p(q)$ sur différentes expériences

Dans la partie précédente, divers signaux de vitesse expérimentaux ont été analysés, et les exposants  $\widehat{\zeta}_v^p(q)$  mesurés. Il est souvent attendu (se reporter à [58] par exemple) que ces exposants soient une caractéristique universelle du phénomène de turbulence pleinement développée, c'est-à-dire indépendants de d'écoulement particulier considéré, en particulier de son nombre de Reynolds  $R_\lambda$  et de sa nature même (turbulence de jet, de grille, de sillage ...). Comparons les exposants  $\widehat{\zeta}_v^p(q)$  mesurés, afin de montrer que cette propriété d'universalité doit être relativisée.

#### 13.1.1 Diverses expériences de turbulence pleinement développée

##### Résultats bruts

Commençons par reporter sur un même graphe les exposants obtenus sur des données différentes, mais analysées avec la même technique, basée sur les coefficients d'ondelette discrets, et en particulier la même ondelette, qui sera ici une ondelette de Daubechies à 3 moments nuls (cf. l'annexe B). Les données analysées sont décrites dans le chapitre 2 : il s'agit des données dont les nombres de Reynolds respectifs sont :  $R_\lambda \simeq 380$  et  $R_\lambda \simeq 580$  (données de l'ÉNSL),  $R_\lambda \simeq 2000$  (données de Modane) et  $R_\lambda \simeq 3200$  (données GReC). Notons que trois jeux de données correspondent à de la turbulence de jet ( $R_\lambda \simeq 380$ ,  $R_\lambda \simeq 580$  et  $R_\lambda \simeq 2000$ ) et l'autre à de la turbulence de tunnel ( $R_\lambda \simeq 2000$ ). Les résultats sont portés sur la figure 13.1.

La remarque suivante s'impose tout de suite : les exposants  $\widehat{\zeta}_v^d(q)$  ne sont pas exactement les mêmes pour tous les jeux de données. Par exemple, l'exposant  $\widehat{\zeta}_v^d(3)$  prend les valeurs suivantes : 0.86 pour  $R_\lambda \simeq 380$ , 0.96 pour  $R_\lambda \simeq 580$ , 0.94 pour  $R_\lambda \simeq 2000$  et 0.98 pour  $R_\lambda \simeq 3200$ . Il ne semble pas y avoir de dépendance claire selon le nombre de Reynolds  $R_\lambda$ .

##### Résultats renormalisés

Comme on vient de le voir, les exposants  $\widehat{\zeta}_v^d(q)$  diffèrent bien d'une expérience de turbulence pleinement développée à l'autre. En revanche, lorsqu'on trace non plus directement les exposants  $\widehat{\zeta}_v^d(q)$ , mais les  $\widehat{\zeta}_v^d(q)$  renormalisés par  $\widehat{\zeta}_v^d(3)$ , c'est-à-dire :  $\widehat{\zeta}_v^d(q) = \widehat{\zeta}_v^d(q)/\widehat{\zeta}_v^d(3)$ , toutes les courbes se superposent parfaitement (cf. figure 13.2).

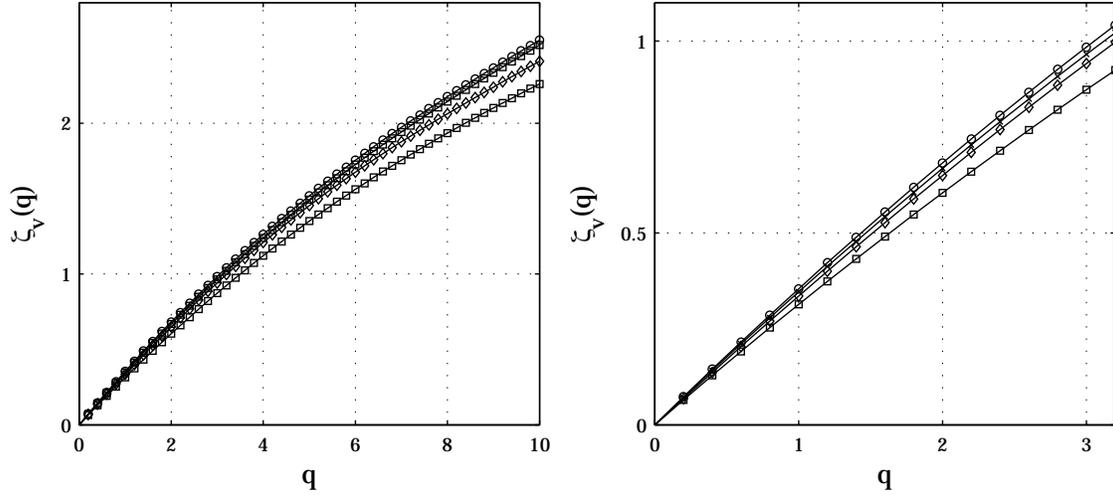


FIG. 13.1 – **Exposants**  $\widehat{\zeta}_v^d(q)$  :  $R_\lambda \simeq 380$  ( $\square$ ),  $R_\lambda \simeq 580$  ( $\times$ ),  $R_\lambda \simeq 2000$  ( $\diamond$ ) et  $R_\lambda \simeq 3200$  ( $\circ$ ).

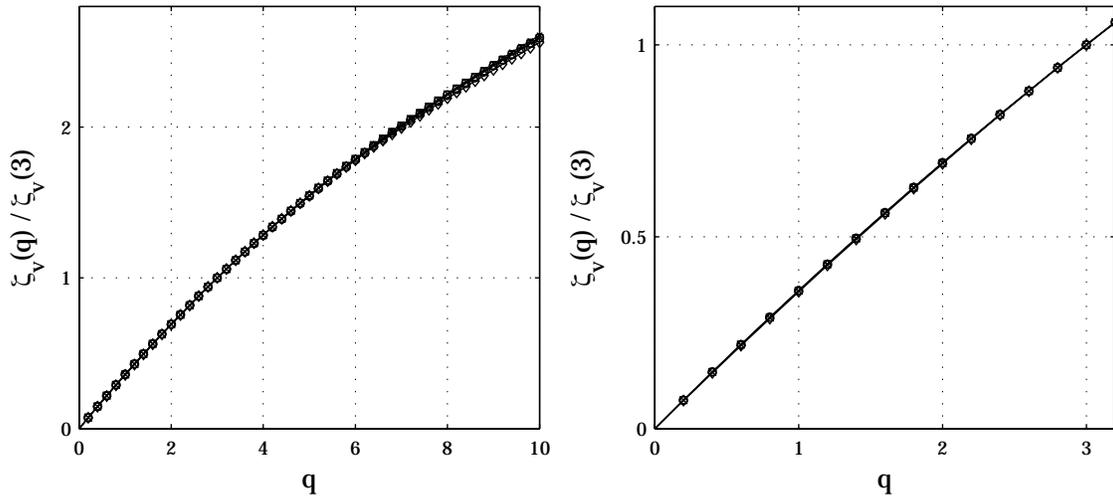


FIG. 13.2 – **Exposants**  $\widehat{\zeta}_v^d(q) = \widehat{\zeta}_v^d(q)/\widehat{\zeta}_v^d(3)$  :  $R_\lambda \simeq 380$  ( $\square$ ),  $R_\lambda \simeq 580$  ( $\times$ ),  $R_\lambda \simeq 2000$  ( $\diamond$ ) et  $R_\lambda \simeq 3200$  ( $\circ$ ).

Ce constat est à la fois frappant et clair : on semble retrouver un comportement universel, c'est-à-dire indépendant de l'expérience particulière utilisée.

### 13.1.2 Diverses méthodes

On peut de plus comparer les exposants obtenus avec diverses méthodes sur un même jeu de données (ici les données de Modane,  $R_\lambda \simeq 2000$ ). On compare ici les exposants obtenus en utilisant soit les coefficients d'ondelette discrets, soit les coefficients dominants, soit les coefficients d'ondelette continus, soit les coefficients mmt pour construire les fonctions de structure sur lesquelles on mesure ces exposants. Ces résultats sont ceux déjà présentés au chapitre 8, on ne se

reportera donc à ce chapitre pour tout détail technique concernant la mesure des exposants. Notons simplement que les ondelettes utilisées sont les ondelettes de Daubechies et gaussienne, toutes deux avec trois moments nuls.

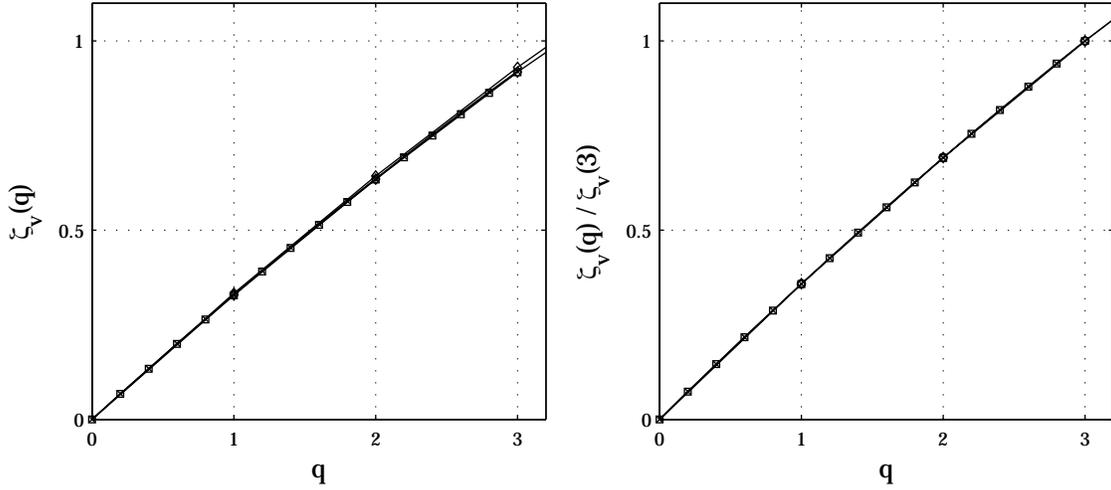


FIG. 13.3 – **Exposants**  $\widehat{\zeta}_v^p(q)$  (droite) et  $\widehat{\zeta}_v^p(q) = \widehat{\zeta}_v^p(q)/\widehat{\zeta}_v^p(3)$  (gauche) pour les données de Modane ( $R_\lambda \simeq 2000$ ), construits à partir des coefficients d’ondelette discrets ( $\square$ ), des coefficients dominants ( $\times$ ), des coefficients d’ondelette continus ( $\diamond$ ) et des coefficients mmt0 ( $\circ$ ).

Les résultats présentés sur la figure 13.3 sont un peu moins spectaculaires que ceux des figures précédentes, car les exposants  $\widehat{\zeta}_v^p(q)$  obtenus avec les diverses méthodes sont déjà en bon accord. Cet accord semble encore meilleur pour les exposants  $\widehat{\zeta}_v^p(q)$ . Il est toutefois important de remarquer, comme cela a déjà été fait dans le chapitre 8, que les exposants renormalisés ne dépendent pas de la méthode utilisée pour leur mesure.

### 13.1.3 Discussion et interprétation

Il vient donc d’être mis en évidence le fait expérimental suivant : les exposants  $\widehat{\zeta}_v^p(q)$  ne sont pas indépendants de l’expérience particulière étudiée. Ils ne sauraient en aucun cas être une quantité universelle du phénomène de turbulence pleinement développée. En revanche, les exposants renormalisés par  $\widehat{\zeta}_v^p(3)$  sont indépendants de l’expérience étudiée.

Commentons tout d’abord le fait suivant : cette façon de reporter les résultats n’est pas arbitraire (pourquoi ne pas renormaliser par  $\zeta_v(1)$  par exemple ?) : la loi des 4/5 de Kolmogorov [83], sur laquelle nous allons revenir au paragraphe suivant, stipule en effet que lorsque le nombre de Reynolds tend vers l’infini,  $\zeta_v(3)$  doit tendre vers 1. Ce type de représentation des exposants, basé sur le résultat précédent, est d’ailleurs souvent utilisé dans la littérature (cf. par exemple [58]). Notons de plus qu’une méthode de mesure des exposants  $\zeta_v(q)$  repose explicitement sur l’hypothèse  $\zeta_v(3) = 1$  : il s’agit de tracer non plus  $\log_2 S_v^p(q, j)$  en fonction de  $j = \log_2 a$ , mais  $\log_2 S_v^p(q, j)$  en fonction de  $\log_2 S_v^p(3, j)$ , puis d’effectuer une régression linéaire dans ce diagramme [30, 31, 29]. Cette procédure repose sur l’hypothèse dite d’auto-similarité étendue (souvent appelée ESS pour *extended self-similarity*) :  $S_v^p(q, j) \simeq C'_q (S_v^p(3, l))^{\zeta_v^p(q)/\zeta_v^p(3)}$ , et permet en pratique d’effectuer des

régressions linéaires pour les exposants  $\zeta_v^p(q)/\zeta_v^p(3)$  sur une gamme d'échelle plus grande que la gamme des échelles inertielles. Cette procédure est d'ailleurs cohérente avec la modélisation des accroissements de vitesse à l'aide d'un propagateur proposée par Castaing et al. [36].

Ce résultat est ici interprété de la façon suivante : les exposants  $\zeta_v^p(q)$  *ne sont pas universels*, mais dépendent de l'expérience particulière de turbulence dont ils sont issus (en particulier du nombre de Reynolds, mais pas seulement comme nous allons le voir par la suite). De plus, toute l'information concernant la "non-universalité" des exposants  $\zeta_v(q)$  semble intervenir par une constante multiplicative unique pour tous les exposants : le fait de diviser les  $\zeta_v(q)$  par l'un des exposants d'ordre fixé (3 en l'occurrence) permet de faire coïncider toutes les courbes :  $\zeta_v(q) = C\zeta_v^{univ}(q)$ , où  $\zeta_v^{univ}(q)$  sont les exposants "universels" de la turbulence pleinement développée, et  $C$  est une constante dépendant de l'expérience particulière étudiée. Cette constante dépend clairement du nombre de Reynolds, et l'on s'attend à ce qu'elle tende vers 1 lorsque  $R_\lambda \rightarrow \infty$ . Mais elle dépend a priori aussi du type particulier d'écoulement considéré (jet, tunnel, ...).

## 13.2 La fonction de structure d'ordre 3

### 13.2.1 Objectif

Comme on vient de le voir, renormaliser les exposants  $\zeta_v(q)$  des signaux de vitesse turbulente eulérienne par  $\zeta_v(3)$ , semble permettre de faire coïncider les exposants  $\zeta_v(q)$  mesurés sur différentes expériences, c'est-à-dire des écoulements turbulents différents dans leur nature (turbulence de jet, de tunnel) et par leur nombre de Reynolds  $R_\lambda$ . Il en a été conclu que l'étude précise des effets, à la fois du nombre de Reynolds et de la nature de l'expérience (jet, tunnel, ...), sur un seul des exposants permettrait de caractériser ces effets pour tous les exposants.

Ce chapitre se consacre donc à l'étude théorique de l'exposant  $\zeta_v(3)$ , défini à partir des fonctions de structure construites à l'aide des *accroissements longitudinaux signés de la vitesse* :

$$S_v(q, l) = \frac{1}{n(l)} \sum_{i=1}^{n(l)} (v(x_i + l) - v(x_i))^q,$$

où  $n(l)$  est le nombre de positions  $x_i$  disponibles pour calculer les accroissements à l'échelle  $l$ . Les quantités ne seront plus indexées par la suite par le type de quantités multi-résolution, puisqu'il s'agira désormais toujours des accroissements signés. Dans ce cas, les équations de Navier-Stokes permettent d'obtenir un résultat exploitable en pratique : la relation de Kármán-Howarth. Celle-ci exprime en effet la fonction de structure d'ordre 3 sous la forme d'une somme de trois termes, l'un prédominant et qui conduit à la loi des 4/5 de Kolmogorov, valable pour les nombres de Reynolds infinis, et deux termes correctifs qui vont permettre de tenir compte de la nature de l'écoulement turbulent utilisé, et de la nécessaire finitude du nombre de Reynolds en pratique.

Il faut être conscient que ce résultat n'apporte bien sûr qu'une réponse partielle à la question posée au début de ce chapitre : les exposants permettant d'effectuer l'analyse multifractale, et qui sont donc en pratique mesurés, sont définis à partir des fonctions de structure construites sur les valeurs *absolues*, donc non-signées, des quantités multirésolution utilisées (les accroissements ou les coefficients d'ondelette discrets par exemple, cf. le paragraphe 3.3). On supposera tout de même que les résultats ici présentés fournissent un élément de réponse pertinent à la question de la composante "non-universelle" des exposants  $\zeta_v(q)$ . De plus, cette approche s'inscrit naturellement dans

divers travaux récents cherchant à décrire plus finement les fonctions de structure en turbulence, en y incluant les effets dissipatifs à petite échelle et les effets non-stationnaires à grande échelle, plus particulièrement en ce qui concerne la fonction de structure d'ordre 3 construite sur les accroissements signés [143, 96, 97, 98, 59, 60].

Le stage de D.E.A. précédent ce travail de thèse [88], effectué au laboratoire de Physique sous la direction de P. Abry, avait d'ailleurs pour objet l'étude de formes fonctionnelles proposées par Dubrulle [53], à partir de généralisations de l'invariance d'échelle [132, 131], des fonctions de structure. Ces modèles, par définition, ne font pas intervenir d'échelle caractéristique dans l'expression des fonctions de structure, et il a été montré [88] qu'ils décrivent assez mal les fonctions de structure expérimentales. Cela est en fait assez compréhensible, puisqu'il existe clairement des échelles caractéristiques pour les fonctions de structure, en particulier l'échelle de Taylor et l'échelle de décorrélation. On va en particulier montrer dans la suite que ces deux échelles jouent bien un rôle d'échelles caractéristiques, puisque c'est autour de ces échelles que les termes correctifs calculés deviennent importants. Le cadre utilisé par Dubrulle fournit cependant un résultat intéressant [88] : elle permet de retrouver l'expression des fonctions de structure obtenue à l'aide d'autres arguments par B. Castaing, qui n'est pas simplement une loi de puissance [33, 37, 34].

Notons que l'approche adoptée ici, en étudiant une seule fonction de structure, celle d'ordre 3, est a priori déconnectée des propriétés d'intermittence de la turbulence.

### 13.2.2 L'équation de base : l'équation de de Kármán-Howarth

#### Turbulence isotrope en déclin

L'équation de Kármán-Howarth<sup>1</sup> [167] est une des rares relations exactes (dans le sens où elle est directement dérivée depuis les équations de Navier-Stokes) utilisées pour la description statistique de la turbulence hydrodynamique. Elle relie essentiellement trois quantités différentes : la fonction de structure d'ordre trois  $S_v(3, l)$ , la fonction de structure d'ordre deux  $S_v(2, l)$  et la puissance moyenne dissipée par unité de masse  $\epsilon$ . Notons encore une fois que les fonctions de structure dont il est ici question sont définies à partir des accroissements longitudinaux signés de la composante longitudinale de la vitesse (i.e. la composante selon la direction principale de l'écoulement turbulent par exemple dans le cas d'une turbulence de jet ou de grille).

Les hypothèses nécessaires à l'établissement de l'équation de Kármán-Howarth [86] sont les suivantes : homogénéité et isotropie, mais il est aussi fait l'hypothèse que la turbulence est en *déclin*, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'apport d'énergie (à grande échelle) pour compenser les pertes dissipatives dues à la viscosité (aux plus petites échelles). L'écoulement se fait donc *sans forces extérieures* : la turbulence est "laissée à elle-même", évoluant seule sans aucun forçage. Sous ces conditions, le phénomène de turbulence décrit est forcément un processus non-stationnaire, puisque voué à disparaître une fois toute l'énergie initialement injectée dissipée par les forces visqueuses, et les fonctions de structure dépendent alors bien sûr du temps : on les notera ainsi  $S_v(q, l, t)$ .

L'équation de Kármán-Howarth s'écrit alors, dans le cas d'une turbulence homogène, isotrope et en déclin [167, 86, 121] :

---

<sup>1</sup>Notons qu'elle est parfois appelée équation de Kolmogorov dans la littérature. Pour éviter toute confusion avec la loi des 4/5 de Kolmogorov, on appellera tout au long de ce mémoire cette équation *équation de Kármán-Howarth*.

$$S_v(3, l, t) - 6\nu \frac{\partial S_v(2, l, t)}{\partial l} + \frac{3}{l^4} \int_0^l ds s^4 \frac{\partial S_v(2, s, t)}{\partial t} = -\frac{4}{5}\epsilon(t)l \quad (13.1)$$

Notons que la puissance moyenne dissipée par unité de masse  $\epsilon(t)$  est définie selon la relation :

$$\epsilon(t) = -\frac{3}{2} \frac{d\sigma^2(t)}{dt} = \frac{15\nu}{2} \left. \frac{\partial^2 S_v(2, l, t)}{\partial l^2} \right|_{l=0}, \quad (13.2)$$

où  $\sigma(t)$  est l'écart-type de la vitesse  $u$  à la date  $t$ . Rappelons que la turbulence est un phénomène tri-dimensionnel, et qu'ainsi, sous l'hypothèse d'isotropie, les trois composantes de la vitesse ont en moyenne la même énergie cinétique. L'énergie cinétique moyenne totale à une date  $t$  donnée peut être donc exprimée en fonction d'une seule composante de la vitesse, la composante longitudinale par exemple :  $3 \times \frac{1}{2}\sigma^2$ .

### Turbulence isotrope stationnaire

Plaçons-nous dans le cas où le phénomène de turbulence est rendu stationnaire par un apport d'énergie à grande échelle (et seulement à grande échelle), compensant exactement les pertes visqueuses à petite échelle. L'échelle intégrale sera alors du même ordre de grandeur que l'échelle de forçage (cf. l'annexe A).

On a alors la relation suivante [167, 86, 121], valable pour des échelles  $l$  petites devant l'échelle de forçage, donc devant l'échelle intégrale  $L_{int}$  :  $l \ll L_{int}$

$$S_v(3, l) - 6\nu \frac{dS_v(2, l)}{dl} = -\frac{4}{5}\epsilon l \quad (13.3)$$

Notons que, puisqu'il est fait l'hypothèse de stationnarité, les fonctions de structure ne dépendent plus du temps  $t$ , mais seulement de l'échelle  $l$ .

### Les échelles inertielles : loi des 4/5 de Kolmogorov

La relation précédente peut être encore simplifiée en supposant que l'on se place à des échelles toujours petites devant l'échelle intégrale  $L_{int}$ , mais aussi grandes devant l'échelle dissipative de Kolmogorov  $\eta$  :  $\eta \ll l \ll L_{int}$  :

$$S_v(3, l) = -\frac{4}{5}\epsilon l \quad (13.4)$$

Cette équation est couramment appelée *loi des 4/5 de Kolmogorov*. Elle a en effet été montrée par Kolmogorov en 1941 [83]. Elle a une grande importance dans le développement de la théorie de la turbulence pleinement développée, car il en a été très souvent déduit le résultat suivant : l'exposant de la fonction de structure d'ordre 3 est 1 :

$$\zeta_v(3) = 1.$$

Ainsi, tous les modèles d'intermittence concernant la vitesse eulérienne turbulente, par exemple le modèle log-normal d'Obukhov-Kolmogorov [135, 85] ou encore le modèle de She-Lévêque [160] (on peut se reporter à [58] pour une revue des différents modèles d'intermittence), prévoient des exposants respectant cette condition, comme il en a déjà été fait la remarque au chapitre 8.

Notons de plus que cette relation sert dans certains cas à déterminer expérimentalement la puissance moyenne dissipée par unité de masse  $\epsilon$ . On mesure pour cela le maximum de  $S_v(3, l)/l$  et on obtient  $\epsilon$  par la relation (13.4).

Discutons un instant la loi des 4/5 de Kolmogorov. Pour qu'elle ait un sens, il faut se placer à des échelles très petites devant l'échelle intégrale et très grandes devant l'échelle de Kolmogorov. Il faut donc que ces deux échelles (intégrale et de Kolmogorov) soient d'ordres de grandeur suffisamment différents pour pouvoir y intercaler des échelles  $l$  telles que  $\eta \ll l \ll L_{int}$ . Or le rapport entre ces deux échelles varie avec le nombre de Reynolds selon [58] :  $\frac{L_{int}}{\eta} \sim R_e^{3/4} \sim R_\lambda^{3/2}$ <sup>2</sup>. Il faut donc que l'écoulement considéré soit de nombre de Reynolds suffisamment grand pour que cette loi ait un sens. Par exemple, pour un écoulement turbulent typique, on a  $R_\lambda \sim 1000$ , et alors  $R_\lambda^{3/2} \sim 3.10^4$ . Si on suppose que la condition  $l_1 \ll l_2$  signifie que  $l_2/l_1 \geq 100$ , alors on voit qu'intercaler des échelles  $l$  selon  $\eta \ll l \ll L_{int}$  devient difficile ... De plus, il est clairement constaté (cf. le chapitre précédent et par exemple [147]) que la mesure de l'exposant  $\zeta_v(3)$  sur des données de vitesse turbulence fournit des valeurs inférieures à 1.

La loi des 4/5 de Kolmogorov est donc bien à prendre au sens suivant : c'est une loi asymptotique, valable dans la limite des nombres de Reynolds infinis. Les expériences ne sont en pratique bien sûr pas dans cette situation, et il convient donc d'apporter des corrections à cette loi, en tenant compte de tous les termes de l'équation de Kármán-Howarth (13.1).

### 13.3 Modélisation de la fonction de structure d'ordre 3

Nous allons dans ce paragraphe construire directement, à partir de l'équation de Kármán-Howarth (13.1), sans faire intervenir de relation phénoménologique entre l'échelle  $l$ , les diverses échelle caractéristiques  $\lambda$ ,  $L_{int}$ , ou  $L_d$  et les nombres de Reynolds  $R_e$  et  $R_\lambda$ , une modélisation de la fonction de structure d'ordre trois valable pour les *échelles inertielles*. Il ne s'agit pas de décrire les parties dissipative (petites échelles) ou non stationnaire (grandes échelles) de cette fonction de structure, mais de calculer de façon exacte (sans relation phénoménologique) les écarts à la loi des 4/5 de Kolmogorov, et en particulier essayer de prédire la valeur de  $\zeta_v(3)$ .

#### 13.3.1 Type d'écoulements considérés

On essaye dans cette partie de décrire la fonction de structure d'ordre 3 correspondant à des expériences de turbulence pour laquelle il existe un écoulement moyen (i.e. hors effets turbulents) non-nul. Plus particulièrement, on étudiera des écoulements qui se déplacent en moyenne selon une direction constante (repérée par l'abscisse  $x$ ) à la vitesse (moyenne)  $U$ . C'est le cas de toutes les données utilisées dans ce travail de thèse : turbulence de jet ou turbulence de tunnel (cf. chapitre 2). La turbulence est ainsi générée dans une zone de l'espace (autour et un peu après la buse d'injection dans le cas du jet par exemple), et dotée d'une énergie cinétique initiale. Puis elle est advectée par l'écoulement moyen à la vitesse  $U$ , et évolue alors de façon libre : seules les forces visqueuses fournissent un travail, et dissipent peu à peu l'énergie cinétique initiale. La turbulence est alors en déclin, et finit forcément par s'amortir.

Le point important ici est que ces écoulements sont séparés en deux catégories : ceux donnant naissance à une turbulence *homogène* et ceux générant une turbulence *non-homogène*. La turbulence est dite *homogène* [163] si ses caractéristiques (par exemple l'écart-type d'une composante de la vitesse) sont homogènes dans les plans perpendiculaires à la direction d'écoulement moyen. Dans le cas contraire, la turbulence est dite non-homogène. Les turbulences de tunnel ou de grille entrent

---

<sup>2</sup>On a en effet  $R_\lambda \sim \sqrt{R_e}$ , cf. l'annexe A.

dans la première catégorie, alors que la turbulence de jet, entre dans la seconde catégorie [169, 163]. Nous allons voir que cette distinction est importante dans la suite de ce chapitre.

### Remarque

Bien que la mesure de vitesse soit en pratique effectuée en un point fixe  $x_0$  de l'écoulement en fonction du temps  $t$ , on rappelle qu'un profil spatial (selon la direction de l'écoulement, repérée par la coordonnée  $x$ ) de la vitesse en est déduit à l'aide de l'hypothèse de turbulence gelée de Taylor (cf. chapitre 2).

## 13.3.2 Fonction de structure d'ordre 3

### Réécriture de l'équation de Kármán-Howarth

Les écoulements considérés sont stationnaires en temps, mais pas en espace : la turbulence est advectée par l'écoulement moyen à la vitesse  $U$  selon la direction repérée par la coordonnée  $x$ . Dans le référentiel translaté à la vitesse constante  $U$  (et donc toujours galiléen), la turbulence y est homogène, isotrope et en déclin (elle n'est soumise à aucune force) : on peut donc y appliquer la relation de Kármán-Howarth (13.1).

Puisque l'écoulement est stationnaire en temps, mesurer les fonctions de structure à différentes valeurs de  $x$  revient à mesurer ces fonctions de structure à différents stades de déclin de la turbulence. Donc, effectuer la mesure à différentes positions  $x$  le long de l'écoulement correspond (d'un point de vue statistique) à effectuer la mesure à différentes dates  $t$ , qui sont reliées entre elles par  $x = Ut$ . On réécrit ainsi l'équation de Kármán-Howarth (13.1) en faisant le changement de variable  $x = Ut$  :

$$S_v(3, l, x) = -\frac{4}{5}\epsilon(x)l \left[ 1 - \frac{15\nu}{2\epsilon(x)l} \frac{\partial S_v(2, l, x)}{\partial l} + \frac{15U}{4\epsilon(x)l^5} \int_0^l ds s^4 \frac{\partial S_v(2, s, x)}{\partial x} \right]. \quad (13.5)$$

Cette équation décrit donc bien la relation entre les fonctions de structure d'ordres 2 et 3 et la puissance moyenne dissipée  $\epsilon(x)$  dans le cas d'une turbulence en déclin, où le temps  $t$  est paramétré par la coordonnée  $x$ .

### Modélisation de la fonction de structure d'ordre 2

L'expression (13.5), tout comme l'équation (13.1), est constituée d'un terme principal, qui correspond à la loi des 4/5 de Kolmogorov ( $-\frac{4}{5}\epsilon(x)l$ ), et de deux termes correctifs, pour les échelles inertielles, qui dépendent tous deux de la fonction de structure d'ordre 2. Puisque ces termes sont justement correctifs, on peut se contenter d'une expression "d'ordre zéro" (i.e. pour un nombre de Reynolds  $R_\lambda$  infini) de la fonction de structure d'ordre 2, afin de calculer les corrections à "l'ordre un" (i.e. la première correction tenant compte de la finitude de  $R_\lambda$ ) de la fonction de structure d'ordre 3.

La fonction de structure d'ordre 2 est donc modélisée de la façon suivante : elle est constante (et égale à deux fois la variance de la vitesse  $\sigma^2(x)$ , qui dépend forcément de  $x$  puisque la turbulence est en déclin) pour les échelles plus grandes que l'échelle de décorrélation (cf. l'annexe A)  $L_d$ , et se comporte en loi de puissance en fonction de l'échelle  $l$  pour les échelles plus petites que  $L_d$  :

$$S_v(2, l, x) \simeq \begin{cases} 2\sigma^2(x) \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)} & \text{si } l \leq L_d \\ 2\sigma^2(x) & \text{si } l \geq L_d \end{cases} \quad (13.6)$$

Ce modèle correspond donc bien à la limite des Reynolds infinis, puisque l'on néglige alors la partie dissipative, constituée grossièrement par les échelles plus petites que l'échelle dissipative de Kolmogorov  $\eta$  (cf. l'annexe A). L'exposant  $\zeta_v(2)$ , dont la valeur est proche de 0.71 en pratique [10], est un paramètre qui sera laissé libre.

Notons enfin que cette modélisation revient à faire une séparation des variables d'espace  $x$  et d'échelle  $l$  :  $S_v(2, l, x) = f(x) \times g(l)$ .

### Terme correctif dissipatif

Calculons désormais le terme correctif correspondant aux effets dissipatifs, qui joue un rôle pour les échelles les plus petites de la zone inertielle, avec la modélisation précédente pour la fonction de structure d'ordre 2. Notons encore une fois que l'on se place à des échelles de la zone inertielle, en particulier plus petites que l'échelle de décorrélation  $L_d$ .

Le calcul s'effectue aisément :

$$\begin{aligned} -\frac{15\nu}{2\epsilon(x)l} \frac{\partial S_v(2, l, x)}{\partial l} &\simeq -\frac{15\nu\sigma^2(x)}{\epsilon(x)l} \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{l}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)} \\ -\frac{15\nu}{2\epsilon(x)l} \frac{\partial S_v(2, l, x)}{\partial l} &\simeq -\zeta_v(2) \frac{15\nu\sigma^2(x)}{\epsilon(x)L_d^{\zeta_v(2)}} l^{\zeta_v(2)-2}. \end{aligned}$$

Or l'échelle de Taylor  $\lambda(x)$  est reliée à la puissance moyenne dissipée  $\epsilon(x)$  et à l'écart-type  $\sigma(x)$  de la vitesse selon (cf. l'annexe A) :

$$\lambda(x) = \sqrt{15\nu \frac{\sigma^2(x)}{\epsilon(x)}}.$$

On en déduit alors une relation simple :

$$-\frac{15\nu}{2\epsilon(x)l} \frac{\partial S_v(2, l, x)}{\partial l} \simeq -\zeta_v(2) \left( \frac{\lambda(x)}{L_d} \right)^2 \left( \frac{l}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)-2}. \quad (13.7)$$

Il apparaît intéressant de faire à ce stade les commentaires suivants. Tout d'abord, ce terme est *universel*, il ne dépend pas de la nature de l'écoulement particulier analysé. Il est en particulier valable quel que soit le type de turbulence étudiée, que ce soit par exemple de la turbulence de jet, de la turbulence de grille ou encore de la turbulence de tunnel.

Ce terme dépend en revanche du nombre de Reynolds, puisque le rapport  $\frac{\lambda}{L_d}$  intervient, et que celui-ci diminue avec le nombre de Reynolds, selon :  $\frac{\lambda}{L_d} \sim (R_\lambda)^{-1}$  (cf. l'annexe A). Le terme correctif dissipatif devient de plus en plus important, comme on pouvait s'y attendre, aux plus petites échelles de la zone inertielle, c'est-à-dire lorsque  $l$  devient de l'ordre de grandeur de  $\lambda$ . Son influence est donc effective à des échelles de plus en plus petites par rapport à l'échelle de décorrélation  $L_d$  lorsque le nombre de Reynolds  $R_\lambda$  augmente.

### Terme correctif non stationnaire

Passons maintenant au calcul du terme correctif lié à la non stationnarité (en espace ici) de la turbulence en déclin. On obtient facilement :

$$\frac{15U}{4\epsilon(x)l^5} \int_0^l ds s^4 \frac{\partial S_v(2, s, x)}{\partial x} \simeq \frac{15U}{2\epsilon(x)l^5} \frac{d\sigma^2(x)}{dx} \int_0^l ds s^4 \left( \frac{s}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)}$$

$$\frac{15U}{4\epsilon(x)l^5} \int_0^l ds s^4 \frac{\partial S_v(2, s, x)}{\partial x} \simeq \frac{15U}{2\epsilon(x)l^5 L_d^{\zeta_v(2)}} \frac{d\sigma^2(x)}{dx} \frac{l^{5+\zeta_v(2)}}{5+\zeta_v(2)}$$

$$\frac{15U}{4\epsilon(x)l^5} \int_0^l ds s^4 \frac{\partial S_v(2, s, x)}{\partial x} \simeq \frac{15U}{2(5+\zeta_v(2))\epsilon(x)} \frac{d\sigma^2(x)}{dx} \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)}.$$

Il n'est pas possible de poursuivre le calcul sans donner une expression à  $\frac{d\sigma^2(x)}{dx}$ . Cette quantité est la variation selon la direction de l'écoulement de la variance de la vitesse, donc de l'énergie cinétique moyenne, ou encore le taux de déclin de la turbulence advectée ( $U \frac{d\sigma^2(x)}{dx} = \frac{d\sigma^2(t)}{dt}$ ). Cette quantité dépend de l'écoulement particulier considéré et n'est donc pas une caractéristique universelle du phénomène de turbulence pleinement développée.

C'est un point très important : contrairement au terme correctif dissipatif, le *terme correctif non-stationnaire n'est pas universel*, il dépend de l'écoulement turbulent particulier considéré. Ainsi, si l'on veut décrire la fonction de structure d'ordre 3 au delà de la loi des 4/5 de Kolmogorov à nombre de Reynolds fini, même dans la zone inertielle, *cela ne peut se faire de façon universelle*.

Menons plus loin le calcul de ce terme correctif pour les écoulements homogènes, décrits au paragraphe 13.3.1. Pour ces écoulements, puisque la turbulence est homogène dans le plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement moyen (repérée par  $x$ ), la seule cause de variation de l'écart-type de la vitesse turbulente est la dissipation : la turbulence est en déclin, et les forces visqueuses dissipent peu à peu l'énergie cinétique moyenne initiale. L'énergie cinétique moyenne (par unité de masse) est uniforme dans les plans perpendiculaires à la direction de l'écoulement moyen, et ne dépend donc que de  $x$ , elle sera notée  $E(x)$ . Puisque la turbulence est localement isotrope, l'énergie cinétique moyenne est répartie de façon égale sur les trois composantes de la vitesse, et l'on a donc :

$$E(x) = \frac{3}{2}\sigma^2(x).$$

$\epsilon(x)$  est la puissance moyenne dissipée (par les forces visqueuses) à la position  $x$ , c'est donc par définition l'opposé de la dérivée de l'énergie cinétique moyenne, et l'on obtient dans le référentiel advecté :

$$\epsilon(t) = -\frac{dE(t)}{dt},$$

ou encore dans le référentiel fixe :

$$\epsilon(x) = -U \frac{dE(x)}{dx} = -U \frac{3}{2} \frac{d\sigma^2(x)}{dx}. \quad (13.8)$$

Cette relation est connue et utilisée pour les cas de turbulence homogène, par exemple la turbulence de grille [163, 47, 46].

On peut alors achever le calcul précédent :

$$\frac{15U}{4\epsilon(x)l^5} \int_0^l ds s^4 \frac{\partial S_v(2, s, x)}{\partial x} \simeq -\frac{5}{5+\zeta_v(2)} \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)}. \quad (13.9)$$

On peut faire les trois commentaires suivants au sujet de ce terme correctif non-stationnaire. Premièrement, rappelons que ce terme n'est pas de nature universelle : il n'est pas valable pour tous les types de turbulence pleinement développée, mais dépend de l'écoulement turbulent particulier,

ici un écoulement homogène.

De plus, ce terme ne dépend pas du nombre de Reynolds de l'écoulement : il ne dépend que l'échelle de décorrélation  $L_d$ , et  $\zeta_v(2)$ , valeur de l'exposant d'ordre 2 dans la limite des nombre de Reynolds infinis (il provient de l'approximation "d'ordre zéro" de la fonction de structure d'ordre 2). Pour une géométrie d'écoulement donnée, il sera donc constant, quel que soit le nombre de Reynolds imposé.

Enfin, l'écart à la loi des 4/5 de Kolmogorov se fera sentir sur une gamme d'échelle (fixe, puisque ne dépendant pas du nombre de Reynolds) de la zone inertielle proche de l'échelle de décorrélation  $L_d$  : en effet  $\frac{5}{5+\zeta_v(2)} \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)} \rightarrow \frac{5}{5+\zeta_v(2)} \sim 1$  si  $l \rightarrow L_d$  et  $\frac{5}{5+\zeta_v(2)} \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)} \rightarrow 0$  si  $l \ll L_d$ . Le terme correctif non-stationnaire crée donc un écart à la loi des 4/5 pour la fonction de structure d'ordre 3 lorsque l'échelle  $l$  s'approche de l'échelle de décorrélation  $L_d$ .

### Fonction de structure d'ordre 3

Les deux termes correctifs, dissipatif (13.7) et non stationnaire (13.9) viennent d'être calculés, on peut donc en déduire l'expression de la fonction de structure d'ordre 3 d'un écoulement turbulent homogène pour les échelles de la zone inertielle :

$$S_v(3, l, x) \simeq -\frac{4}{5}\epsilon(x)l \left[ 1 - \zeta_v(2) \left(\frac{\lambda(x)}{L_d}\right)^2 \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)-2} - \frac{5}{5+\zeta_v(2)} \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)} \right]. \quad (13.10)$$

Puisque les mesures de vitesse eulérienne utilisées sont bien sûr effectuées en un seul point, c'est-à-dire pour une valeur fixe de la coordonnée  $x$ , on omettra parfois dans la suite d'indiquer la dépendance en  $x$  des quantités  $S_v(3, l, x)$ ,  $\epsilon(x)$  et  $\lambda(x)$ .

### Conclusion

Cette expression modélise donc de façon plus précise la fonction de structure d'ordre 3 que la loi des 4/5 de Kolmogorov, qui, par hypothèse, concerne les écoulements turbulents dans la limite du nombre de Reynolds infini. Elle tient compte de la *nécessaire finitude du nombre de Reynolds* des expériences de turbulence (par l'intermédiaire de l'échelle de Taylor  $\lambda$ ). De plus, elle n'est *pas universelle*, puisque le comportement pour les échelles proches de l'échelle de décorrélation dépend du type d'écoulement turbulent étudié (le calcul a ici été mené pour un écoulement homogène).

### Fonction de structure d'ordre 3 compensée

Dans la suite, on utilisera aussi la *fonction de structure d'ordre trois compensée*, définie comme :

$$S_v^c(3, l) = \frac{S_v(3, l)}{-\frac{4}{5}\epsilon l} \simeq 1 - \zeta_v(2) \left(\frac{\lambda}{L_d}\right)^2 \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)-2} - \frac{5}{5+\zeta_v(2)} \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)} \quad (13.11)$$

Celle-ci est donc directement l'écart à la loi des 4/5 de Kolmogorov, et permet donc une présentation plus adaptée des écarts au comportement en loi de puissance d'exposant 1.

## 13.4 Analyse de cette modélisation

L'expression de la fonction de structure d'ordre 3 précédente (13.10), donne l'écart à la loi des 4/5 à *pour les échelles inertielles*. Cette loi est en pratique utilisée pour déterminer la puissance moyenne dissipée  $\epsilon$  en mesurant le maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée, et pour prédire la valeur de l'exposant d'ordre 3 :  $\zeta_v(3) = 1$ . Essayons de voir, à l'aide de la modélisation (13.10), dans quelle mesure ceci est valable. En particulier, il n'y a aucune raison a priori qu'une mesure d'exposant sur l'expression (13.10) aboutisse à  $\zeta_v(3) = 1$ .

On illustrera (cf. figure 13.4) dans ce paragraphe cette modélisation en choisissant comme paramètres  $\zeta_v(2) = 2/3$ ,  $\epsilon = 5/4 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ ,  $L_d = 1 \text{ m}$  et  $\lambda = 0.01 \text{ m}$ . Ce choix pour les échelles  $L_d$  et  $\lambda$  est fait, car le rapport  $\lambda/L_d$  est alors proche de celui des données de Modane, où  $\lambda/L_d \simeq 0.011$  (cf. le chapitre suivant).

### 13.4.1 Maximum

Calculons d'abord le maximum de  $S_v^c(3, l)$ . Celui-ci est un bon indicateur de l'écart à la loi des 4/5, pour laquelle  $S_v^c(3, l)$  est une constante égale à 1. On a facilement :

$$\frac{\partial S_v^c(3, l, x)}{\partial l} = -\zeta_v(2) (\zeta_v(2) - 2) \left( \frac{\lambda}{L_d} \right)^2 \frac{l^{\zeta_v(2)-3}}{L_d^{\zeta_v(2)-2}} - \frac{5\zeta_v(2)}{5 + \zeta_v(2)} \frac{l^{\zeta_v(2)-1}}{L_d^{\zeta_v(2)}},$$

qui s'annule bien puisque  $\zeta_v(2)$  est de l'ordre de 2/3 et que donc  $\zeta_v(2) - 2 < 0$ . De plus, ce zéro est unique et atteint pour  $l = l_m$  telle que :

$$l_m = \lambda \sqrt{\frac{(5 + \zeta_v(2))(2 - \zeta_v(2))}{5}}. \quad (13.12)$$

Le maximum (on vérifie bien que c'est un maximum avec le signe de la dérivée) est donc atteint pour une échelle légèrement plus grande que l'échelle de Taylor  $\lambda$ , puisque  $\sqrt{\frac{(5 + \zeta_v(2))(2 - \zeta_v(2))}{5}} \simeq 1.23$  si  $\zeta_v(2) = 2/3$ . Notons que la valeur exacte de  $\zeta_v(2)$  n'est pas très importante : si l'on prend  $\zeta_v(2) = 0.71$ , qui est une valeur couramment admise pour cet exposant [10, 58], on a  $\sqrt{\frac{(5 + \zeta_v(2))(2 - \zeta_v(2))}{5}} \simeq 1.21$ . On prendra donc comme valeur :

$$l_c \simeq 1.22\lambda.$$

La valeur du maximum de  $S_v^c(3, l)$  se déduit alors facilement :

$$S_v^c(3, l_m) = 1 - 2 \left( \frac{\lambda}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)} \left[ \frac{(5 + \zeta_v(2))(2 - \zeta_v(2))}{5} \right]^{\zeta_v(2)/2-1}.$$

L'application numérique donne, en prenant  $\zeta_v(2) = 2/3$  :

$$S_v^c(3, l_m) \simeq 1 - 1.52 \left( \frac{\lambda}{L_d} \right)^{2/3},$$

ou si l'on choisit plutôt  $\zeta_v(2) = 0.71$  :

$$S_v^c(3, l_m) \simeq 1 - 1.56 \left( \frac{\lambda}{L_d} \right)^{0.71}.$$

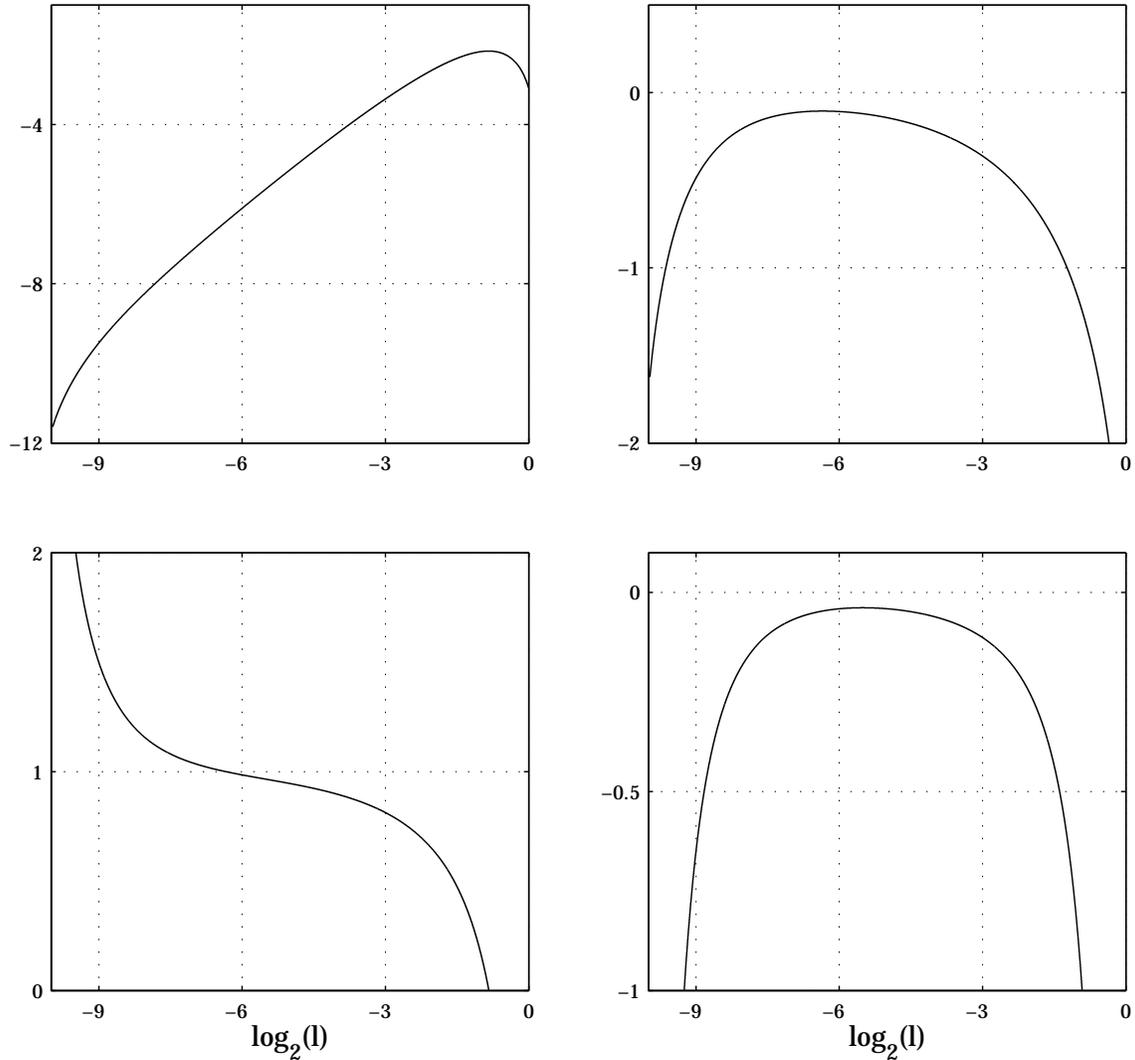


FIG. 13.4 – **Modélisation de la fonction de structure d'ordre 3** ( $L_d = 1 \text{ m}$  et  $\lambda = 0.01 \text{ m}$ ).  
 En haut à gauche :  $\log_2 S_v(3, l)$ . En haut à droite :  $\log_2 S_v^c(3, l)$ . En bas à gauche : exposant local de  $S_v(3, l)$ . En bas à droite : dérivée seconde de  $\log_2 S_v(3, l)$  par rapport à  $\log_2 l$ .

Encore une fois, les deux expressions sont très proches. Elles sont représentées en fonction de  $L_d/\lambda$  sur la figure 13.5.

On observe ainsi un écart notable à la loi des 4/5 de Kolmogorov, qui prédit un maximum valant 1. Par exemple, si  $\lambda/L_d = 0.01$ , le maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée vaut environ 0.93 si  $\zeta_v(2) = 2/3$  et 0.94 si  $\zeta_v(2) = 0.71$ . Ce résultat est bien sûr attendu, car il est connu des expérimentateurs que la technique de mesure de  $\epsilon$  par la mesure de ce maximum, n'est valable que pour les nombres de Reynolds "suffisamment" grands.

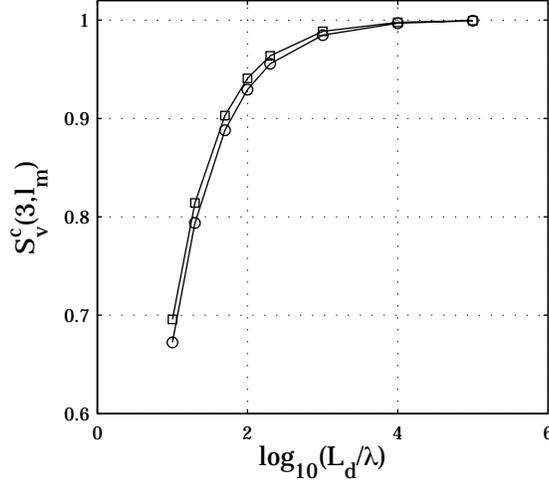


FIG. 13.5 – Valeurs du maximum de la fonction de structure d’ordre 3 compensée en fonction de  $L_d/\lambda$  lorsque  $\zeta_v(2) = 2/3$  (o) et  $\zeta_v(2) = 0.71$  (□).

### 13.4.2 Exposant local

L’exposant local est défini de la façon habituelle : c’est la valeur de la dérivée de  $\log_2(S_v(3, l))$  par rapport à  $\log_2(l)$ , ou encore un plus la dérivée de  $\log_2(S_v^c(3, l))$  par rapport à  $\log_2(l)$ . On arrive alors à :

$$\frac{\partial \log_2(S_v^c(3, l, x))}{\partial \log_2(l)} = \frac{-\zeta_v(2)(\zeta_v(2) - 2) \frac{\lambda^2}{L_d^2} \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)-2} - \frac{5\zeta_v(2)}{5+\zeta_v(2)} \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)}}{S_v^c(3, l, x)}.$$

Pour savoir si la modélisation (13.10) se comporte pour une certaine gamme d’échelles approximativement comme une loi de puissance, il faut étudier les variations de l’exposant local. En particulier, si cet exposant varie peu sur toute une gamme d’échelles, la modélisation se comportera avec une bonne approximation comme une loi de puissance dans cette gamme d’échelles.

### Dérivée logarithmique d’ordre 2

Il faut donc étudier la dérivée de cet exposant local, c’est-à-dire la dérivée logarithmique d’ordre 2 de  $S_v^3(l, c)$ . L’expression exacte est bien sûr calculable, mais on ne sait rien dire analytiquement sur elle : on ne sait pas en particulier si elle s’annule. De même pour la dérivé logarithmique d’ordre 3. On se contentera donc d’une analyse graphique de ces fonctions, ou alors de faire l’approximation des très grands nombres de Reynolds.

### Analyse graphique

L’analyse graphique se fait simplement, en traçant les fonctions correspondantes. Prenons pour exemple la figure 13.4, mais d’autres valeurs du rapport  $\lambda/L_d$  ayant été testées, fournissant à chaque fois les mêmes résultats.

On voit clairement que l’exposant local est une fonction strictement décroissante de l’échelle  $l$  (cf. les deux graphes du bas). La modélisation (13.10) n’est donc nulle part une loi de puissance à proprement parler. Ceci dit, il existe une gamme d’échelles, autour de  $l = 2^{-5} m$ , où la valeur de

cet exposant varie peu : la dérivée logarithmique d'ordre 2 est assez proche de zéro sur une gamme d'échelle assez large, ce qui se traduit par une variation lente de l'exposant local dans la même zone. Il y a donc un comportement relativement linéaire de la fonction de structure compensée autour de  $l \simeq 2^{-5} m$ . Si une fonction de structure obtenue expérimentalement montrait le même comportement, il apparaîtrait raisonnable d'effectuer une régression linéaire pour mesurer un exposant de loi de puissance.

Cela va permettre de définir l'exposant  $\zeta_v(3)$  correspondant à cette modélisation comme la valeur de l'exposant local à l'échelle  $l_c$  pour laquelle il varie le moins, i.e. la dérivée logarithmique d'ordre 3 s'annule. La détermination se fait a priori de façon graphique.

### Cas des très grands nombres de Reynolds $R_\lambda$

Si le nombre de Reynolds  $R_\lambda$  est très grand et que l'on se place à des échelles  $l$  telles que  $\eta \ll l \ll L_d$ , alors on a vu que  $S_v^c(3, l) \rightarrow 1$ . En utilisant cette approximation au dénominateur, on peut simplifier le calcul des dérivées logarithmiques d'ordres supérieurs permet d'aboutir à une expression analytique pour le calcul de l'échelle  $l_c$  pour laquelle l'exposant local varie le moins. En effet, la dérivée logarithmique d'ordre 1 s'écrit :

$$\frac{\partial \log S_v^c(3, l, x)}{\partial \log l} \simeq -\zeta_v(2)(\zeta_v(2) - 2) \frac{\lambda^2}{L_d^2} \left( \frac{l}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)-2} - \frac{5\zeta_v(2)}{5 + \zeta_v(2)} \left( \frac{l}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)}. \quad (13.13)$$

Les dérivées logarithmiques d'ordres 2 et 3 se calculent alors facilement sous cette approximation :

$$\frac{\partial^2 \log S_v^c(3, l, x)}{\partial \log l^2} \simeq -\zeta_v(2)(\zeta_v(2) - 2)^2 \frac{\lambda^2}{L_d^2} \left( \frac{l}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)-2} - \frac{5\zeta_v(2)^2}{5 + \zeta_v(2)} \left( \frac{l}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)}, \quad (13.14)$$

$$\frac{\partial^3 \log S_v^c(3, l, x)}{\partial \log l^3} \simeq -\zeta_v(2)(\zeta_v(2) - 2)^3 \frac{\lambda^2}{L_d^2} \left( \frac{l}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)-2} - \frac{5\zeta_v(2)^3}{5 + \zeta_v(2)} \left( \frac{l}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)}. \quad (13.15)$$

L'expression (13.14) est la somme de deux termes négatifs, ce qui montre bien que l'exposant local est une fonction partout décroissante pour les échelles inertielles. Il y a en revanche une échelle  $l_c$  pour laquelle la variation de l'exposant local est la moins rapide : c'est l'échelle  $l_c$  qui annule l'expression de la dérivée logarithmique d'ordre trois (13.15). En effet, on a  $\frac{\partial^3 \log S_v^c(3, l, x)}{\partial \log l^3} = 0$  pour :

$$l_c = \lambda \sqrt{\frac{(2 - \zeta_v(2))^3 (5 + \zeta_v(2))}{5\zeta_v(2)^2}}. \quad (13.16)$$

L'échelle  $l_c$  est celle pour laquelle l'exposant local varie le moins. Cette échelle est légèrement plus grande que l'échelle de Taylor  $\lambda$ . En effet, on a :

$$l_c \simeq 2.45\lambda \text{ si } \zeta_v(2) = 2/3,$$

$$l_c \simeq 2.21\lambda \text{ si } \zeta_v(2) = 0.71.$$

On voit donc que l'échelle  $l_c$  vaut environ  $2.3\lambda$  en pratique.

### 13.4.3 Exposant $\zeta_v(3)$

On définit donc l'exposant  $\zeta_v(3)$  correspondant à ce modèle de la fonction de structure d'ordre 3 comme la valeur de l'exposant local à l'échelle, notée  $l_c$ , pour laquelle l'exposant local varie le moins. Sa détermination est soit graphique, soit effectuée à l'aide des formules précédentes dans le cas des grands nombres de Reynolds.

On va voir que  $l_c$  vaut entre 1.8 et 2.5 fois  $\lambda$ , ce qui est cohérent avec la pratique de la mesure des exposants  $\zeta_v(q)$ , puisque c'est numériquement autour de 2 fois l'échelle de Taylor que la zone de régression linéaire est généralement choisie pour mesurer les exposants  $\zeta_v(q)$

Dans le cas des très grands nombres de Reynolds  $R_\lambda$ , on peut donner une expression analytique de cet exposant. En effet :

$$\frac{\partial \log S_v^c(3, l_c, x)}{\partial \log l} \simeq -\zeta_v(2)(\zeta_v(2) - 2) \frac{\lambda^2}{L_d^2} \left( \frac{l_c}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)-2} - \frac{5\zeta_v(2)}{5 + \zeta_v(2)} \left( \frac{l_c}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)}$$

$$\frac{\partial \log S_v^c(3, l_c, x)}{\partial \log l} \simeq - \left( \frac{\lambda}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)} \left[ \frac{(2 - \zeta_v(2))^3 (5 + \zeta_v(2))}{5\zeta_v(2)^2} \right]^{\zeta_v(2)/2-1} \left[ \zeta_v(2)(2 - \zeta_v(2)) + \frac{(2 - \zeta_v(2))^3}{\zeta_v(2)} \right].$$

L'exposant correspondant est donc :

$$\zeta_v(3) \simeq 1 - \left( \frac{\lambda}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)} \left[ \frac{(2 - \zeta_v(2))^3 (5 + \zeta_v(2))}{5\zeta_v(2)^2} \right]^{\zeta_v(2)/2-1} \left[ \zeta_v(2)(2 - \zeta_v(2)) + \frac{(2 - \zeta_v(2))^3}{\zeta_v(2)} \right]. \quad (13.17)$$

Selon ce modèle,  $\zeta_v(3)$  tend donc bien vers 1 lorsque  $R_\lambda \rightarrow +\infty$  et que donc  $\lambda/L_d \rightarrow 0$ , ce qui était bien sûr attendu. Les valeurs numériques de la constante sont calculées :

$$\zeta_v(3) \simeq 1 - 0.804 \left( \frac{\lambda}{L_d} \right)^{2/3} \quad \text{si } \zeta_v(2) = 2/3,$$

$$\zeta_v(3) \simeq 1 - 0.760 \left( \frac{\lambda}{L_d} \right)^{0.71} \quad \text{si } \zeta_v(2) = 0.71.$$

On a déterminé graphiquement pour diverses valeurs du rapport  $\lambda/L_d$  l'échelle  $l_c$  et l'exposant  $\zeta_v(3)$  (noté  $\zeta_v(3)$  (I)), ainsi que  $\zeta_v(3)$  à l'aide des formules précédentes (noté  $\zeta_v(3)$  (II)). Les résultats sont reportés dans les tableaux suivants, et les valeurs obtenues par la méthode graphique sont reportées sur la figure 13.4.

$\zeta_v(2) = 2/3$				$\zeta_v(2) = 0.71$			
$\frac{\lambda}{L_d}$	$\frac{l_c}{\lambda}$	$\zeta_v(3)$ (I)	$\zeta_v(3)$ (II)	$\frac{\lambda}{L_d}$	$\frac{l_c}{\lambda}$	$\zeta_v(3)$ (I)	$\zeta_v(3)$ (II)
$10^{-1}$	1.67	0.876	0.827	$10^{-1}$	1.60	0.896	0.852
$5 \cdot 10^{-2}$	1.87	0.913	0.891	$5 \cdot 10^{-2}$	1.77	0.928	0.909
$2 \cdot 10^{-2}$	2.09	0.947	0.941	$2 \cdot 10^{-2}$	1.94	0.958	0.953
$10^{-2}$	2.21	0.965	0.963	$10^{-2}$	2.03	0.973	0.971
$5 \cdot 10^{-3}$	2.30	0.978	0.976	$5 \cdot 10^{-3}$	2.11	0.983	0.982
$10^{-3}$	2.40	0.992	0.992	$10^{-3}$	2.18	0.994	0.994
$10^{-4}$	2.46	0.998	0.998	$10^{-4}$	2.22	0.999	0.999
$10^{-5}$	2.48	0.9996	0.9996	$10^{-5}$	2.22	0.9998	0.9998

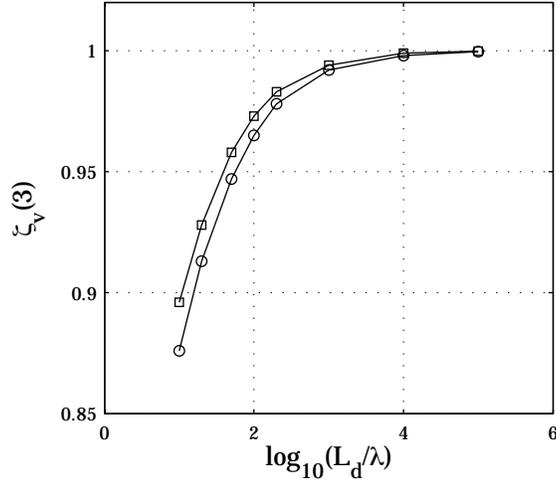


FIG. 13.6 – Valeurs de l'exposant  $\zeta_v(3)$  (détermination graphique) en fonction de  $L_d/\lambda$  lorsque  $\zeta_v(2) = 2/3$  (o) et  $\zeta_v(2) = 0.71$  (□).

Trois commentaires sont à faire. Premièrement, les formules dérivées pour les grands nombres de Reynolds ne deviennent vraiment proches des vraies valeurs que lorsque  $\lambda/L_d \leq 10^{-3}$ , ce qui est déjà un rapport grand pour des expériences de turbulence. On privilégiera donc toujours la détermination graphique. D'autre part, la valeur de  $\zeta_v(3)$  dépend assez faiblement de la valeur choisie pour  $\zeta_v(2)$ .

Enfin, et c'est le plus important car c'est le but que l'on s'était fixé, la valeur obtenue de  $\zeta_v(3)$  diffère bien de 1. Par exemple, si  $\lambda/L_d = 0.01$ , rapport proche de celui observé sur les données de Modane (où  $\lambda/L_d \simeq 0.011$ ) dont le nombre de Reynolds vaut  $R_\lambda \simeq 2000$ , l'exposant prédit vaut environ 0.97. On s'approche donc bien lentement, à l'échelle des rapports  $\lambda/L_d$  des expériences de turbulence, du comportement asymptotique  $\zeta_v(3) = 1$ .

### Vérification : usage de la méthode "classique"

Afin de vérifier que la définition de l'exposant  $\zeta_v(3)$ , comme la valeur de la pente locale en  $l = l_c$ , est bien cohérente, un ajustement par une droite du logarithme de la fonction de structure d'ordre 3 (en fonction du logarithme de l'échelle  $l$ ) ainsi définie est effectué. Il faut tout d'abord définir une zone de régression. On utilise pour cela les graphes portés sur la figure 13.4, comme s'il s'agissait de données expérimentales. Il paraît raisonnable de définir une zone de régression linéaire comme la gamme d'échelles comprises entre  $l = 2^{-7} m$  et  $l = 2^{-4} m$ , c'est-à-dire sur trois octaves, un petit peu moins d'une décade. Le résultat de la régression linéaire dans cette zone, présenté sur la figure 13.7, fournit alors une pente de  $p \simeq 0.97$ , qui est en très bon accord avec la valeur de  $\zeta_v(3)$  prédite pour  $\lambda/L_d = 0.01$  et  $\zeta_v(2) = 2/3$  (cf. les tableaux de valeurs de ce paragraphe). Ce n'est bien sûr par une surprise, puisque l'exposant local, par définition varie peu autour de  $l_c$ . Notons que la zone de régression linéaire a été choisie directement à l'aide de la figure 13.4, et non de façon à obtenir la valeur prédite, puisqu'il suffit a priori de modifier cette zone pour augmenter ou diminuer légèrement la pente de la droite ajustée.

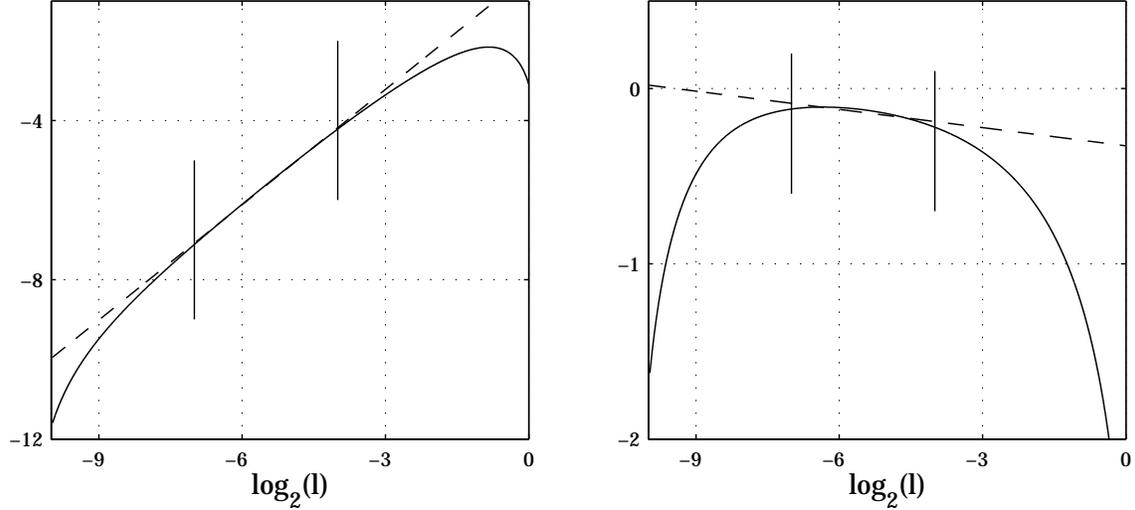


FIG. 13.7 – Traits continus : logarithmes (en base 2) des fonction de structure d’ordre 3 (gauche) et fonction de structure d’ordre 3 compensée (droite) selon la modélisation (13.10), avec  $\zeta_v(2) = 2/3$  et  $\lambda/L_d = 0.01$ . Traits en pointillé : régressions linéaires (dans un diagramme log-log) entre les échelles  $l = 2^{-7} m$  et  $l = 2^{-4} m$ , repérées par les traits verticaux.

#### 13.4.4 Influence des deux termes correctifs

Commentons les effets des deux termes correctifs, dissipatif et non stationnaire. Sur la figure 13.8 sont portés à gauche la fonction de structure d’ordre 3 compensée et à droite l’exposant local. On a de plus représenté l’influence individuelle de chaque terme correctif en traçant  $[1 - \zeta_v(2) \left(\frac{\lambda}{L_d}\right)^2 \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)-2}]$  et  $[1 - \frac{5}{5+\zeta_v(2)} \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)}]$  ainsi que les exposants locaux correspondants.

Ces figures illustrent bien le fait que le terme correctif dissipatif devient important pour les ”petites” échelles, lorsque  $l$  est de l’ordre de  $\lambda$ , et que le terme correctif non-stationnaire est lui important aux ”grandes échelles”, lorsque  $l$  tend vers  $L_d$ .

Il est surtout important de noter que même au milieu de la zone inertielle, les deux termes contribuent de façon non-négligeable à la fonction de structure d’ordre 3 compensée. En particulier, il serait absurde de ne tenir compte d’un seul des deux termes seulement. De plus, chaque terme ”courbe” la fonction de structure dans des directions (le ”haut”, le ”bas”) différentes<sup>3</sup>, et c’est bien l’association des deux qui permet d’avoir, lorsque ces deux termes ont la même influence, un comportement proche d’une loi de puissance, avec un exposant local variant peu (cf. figure 13.8, à droite).

#### 13.4.5 Expressions en fonction du nombre de Reynolds

Puisque la modélisation précédente (13.10) dépend du rapport  $\frac{\lambda}{L_d}$ , elle dépend du nombre de Reynolds basé sur l’échelle de Taylor  $R_\lambda$ . Le choix a ici été fait, contrairement à ce qui est souvent fait dans le domaine de la turbulence pleinement développée, de ne pas exprimer les résultats précédents à l’aide de  $R_\lambda$ . Il est en effet nécessaire d’introduire une relation entre  $\frac{\lambda}{L_d}$  et  $R_\lambda$ , or celle-ci est forcément phénoménologique donc approximative (cf. l’annexe A). L’objectif de la description

<sup>3</sup>En particulier, ne tenir compte que du terme dissipatif aboutit à des exposants locaux toujours supérieurs à un.

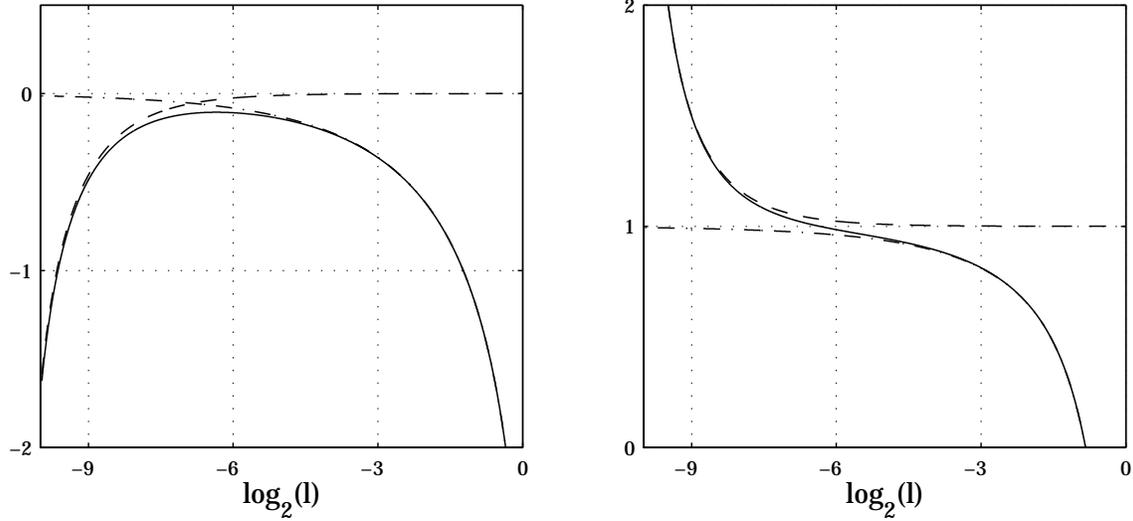


FIG. 13.8 – **Modélisation de la fonction de structure d'ordre 3** ( $L_d = 1 m$  et  $\lambda = 0.01 m$ ).  
 Gauche :  $\log_2(S_v^c(3, l))$  (trait continu),  $[1 - \zeta_v(2) \left(\frac{\lambda}{L_d}\right)^2 \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)-2}]$  (---) et  $[1 - \frac{5}{5+\zeta_v(2)} \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)}]$  (.-). Droite : exposants locaux correspondants.

ici faite est de garder le plus d'exactitude possible, et il ne sera ainsi pas utilisé d'expression en fonction de  $R_\lambda$  lors des tests sur les données.

L'utilisation de  $R_\lambda$  dans l'expression obtenue est cependant intéressante pour comparer ce résultat à la littérature sur ce sujet. Elle permet tout de même une bonne description du phénomène, bien qu'un peu moins précise. On va ici résumer les résultats précédents, exprimés avec  $R_\lambda$ , en utilisant la relation suivante (cf. l'annexe A) :

$$\frac{\lambda}{L_d} \simeq \frac{6}{R_\lambda}.$$

### Fonction de structure d'ordre 3 compensée

La fonction de structure d'ordre 3 compensée s'écrit alors :

$$S_v^c(3, l) \simeq 1 - AR_\lambda^{-2} \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)-2} - \frac{5}{5 + \zeta_v(2)} \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)},$$

avec  $A \simeq 36\zeta_v(2)$ .

Discutons maintenant de la dépendance en Reynolds des caractéristiques importantes de cette expression : son maximum et son exposant  $\zeta_v(3)$ .

### Maximum de $S_v^c(3, l)$

La valeur du maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée, atteint lorsque  $l = l_m$ , s'écrit alors :

$$S^c(3, l) \simeq 1 - \frac{B}{R_\lambda^{\zeta_v(2)}},$$

avec  $B \simeq 5.02$  si  $\zeta_v(2) = 2/3$  et  $B \simeq 5.15$  si  $\zeta_v(2) = 0.71$ .

La prédiction précédente est portée sur la figure 13.9, à gauche, pour une gamme de nombre de Reynolds  $R_\lambda$  très étendue, allant de  $10^2$  à  $10^6$ . Notons que puisque la relation entre  $\lambda/L_d$  n'est pas exacte, et que modifier la valeur de  $\zeta_v(2)$  (de  $2/3$  à  $0.71$ ) ne modifie que peu la valeur du maximum, seule l'expression correspondant à  $\zeta_v(2) = 2/3$  est tracée.

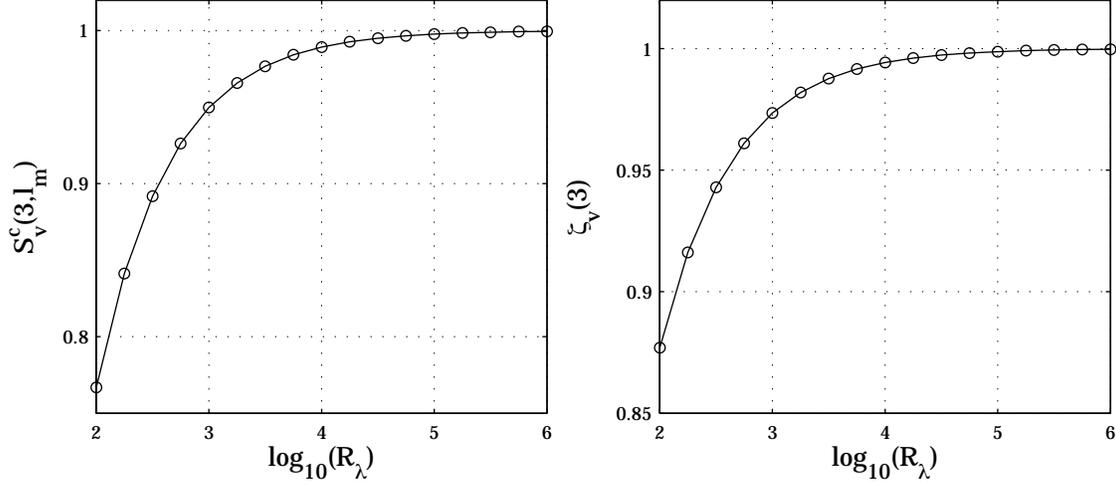


FIG. 13.9 – Maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée (gauche) et exposant  $\zeta_v(3)$  (droite) en fonction de  $R_\lambda$ .

La modélisation ne tend donc bien que lentement vers la loi des  $4/5$ , pour laquelle le maximum vaut 1, et s'en écarte notablement pour  $R_\lambda \leq 10^4$ , ce qui est un nombre de Reynolds très grand en pratique. Les effets des termes correctifs se font donc bien sentir dans le cadre des expériences de turbulence. Par exemple, si  $R_\lambda = 1000$ , le maximum vaut 0.95.

#### Exposant $\zeta_v(3)$ lorsque $R_\lambda \rightarrow +\infty$

La prédiction pour l'exposant  $\zeta_v(3)$  peut elle-aussi s'exprimer à l'aide de  $R_\lambda$ , lorsque  $R_\lambda \rightarrow +\infty$  :

$$\zeta_v(3) \simeq 1 - \frac{C}{R_\lambda^{\zeta_v(2)}},$$

avec  $C \simeq 2.65$  si  $\zeta_v(2) = 2/3$  et  $C \simeq 2.51$  si  $\zeta_v(2) = 0.71$ .

La prédiction pour l'exposant  $\zeta_v(3)$  si  $\zeta_v(2) = 2/3$  est tracée sur la figure 13.9, à droite. Notons que, comme on l'a vu lors de la discussion de la valeur de  $\zeta_v(3)$  en fonction de  $\lambda/L_d$ , cette formule sous-estime la valeur de  $\zeta_v(3)$  pour les plus petits nombres de Reynolds.

Les conclusions sont les mêmes : on s'attend à des exposants  $\zeta_v(3)$  notablement différents de 1 pour  $R_\lambda \leq 10^4$ . Si  $R_\lambda = 1000$ , la formule précédente prédit par exemple  $\zeta_v(3) = 0.97$ .

## 13.5 Discussions

### 13.5.1 Turbulence en déclin et littérature

Les résultats précédents s'inscrivent tout naturellement dans la lignée des articles [96, 97, 59, 60], puisque ceux-ci modélisent la fonction de structure d'ordre 3 dans le cas de la turbulence homogène en déclin. Notons qu'ils sont aussi reliés aux travaux [47, 6, 46, 171], qui s'attachent à mesurer chacun des termes intervenant dans l'équation de Kármán-Howarth et vérifier que leur somme redonne bien le terme prédominant  $-4/5\epsilon l$ .

Lindborg [96] utilise la même démarche que celle ici décrite, mais en utilisant un autre modèle pour le déclin de la turbulence (le modèle  $K - \epsilon$ ), en utilisant des constantes phénoménologiques non exactement connues (par exemple pour le modèle  $K - \epsilon$  ou en utilisant la loi des 2/3 de Kolmogorov [58] :  $S_v(2, l) = C\epsilon^{2/3}l^{2/3}$ , où  $C$  est une constante proche de 2 en pratique), et enfin en utilisant des relations entre les échelles  $\eta$ ,  $\lambda$  et le nombre de Reynolds  $R_\lambda$ , forcément approchées. Bien évidemment, les résultats sont sensiblement les mêmes : les termes correctifs sont des lois de puissances de l'échelle  $l$  d'exposants respectifs 2/3 (terme non-stationnaire) et  $-4/3$  (terme dissipatif), ce qui est dû au choix  $\zeta_v(2) = 2/3$ .

En revanche, les constantes multiplicatives de ces termes correctifs sont forcément différentes, puisqu'elles font intervenir des relations approchées, contrairement au raisonnement aboutissant à la modélisation (13.10).

Lundgren [97, 98] utilise des développements asymptotiques, toujours pour de la turbulence homogène, isotrope et en déclin, l'un vers l'échelle intégrale  $L_K$ , et l'autre vers l'échelle dissipative  $\eta$ , en exprimant les développements asymptotiques en séries du nombre de Reynolds  $R_e$ . En imposant aux deux développements de coïncider pour les échelles de la zone inertielle, il en déduit une expression pour la fonction de structure d'ordre 3, du même type que celle de Lindborg [97]. Il généralise dans [98] ces expressions aux fonctions de structure d'ordre quelconque. L'expression de la fonction de structure d'ordre 3 obtenue fait elle-aussi intervenir des relations phénoménologiques entre échelles.

Gagne et al. [59, 60] utilisent les résultats précédents [96, 97] et les comparent à divers jeux de données, issues d'expériences différentes de turbulence, et notamment d'écoulements différents (jet, grille, tunnel). Ils montrent que le modèle proposé de la fonction de structure d'ordre 3 exhibe une adéquation globalement correcte à toutes les données testées.

Tous ces travaux présentent donc de fortes similitudes avec la modélisation présentée dans ce mémoire de thèse. L'un des principaux apports du travail effectué est d'étudier précisément comment se traduisent en terme d'exposant  $\zeta_v(3)$  les termes correctifs à la loi de puissance, afin d'essayer d'expliquer l'observation couramment effectuée que cet exposant est strictement inférieur à 1.

Il est de plus argumenté que l'introduction de relations phénoménologiques dans les travaux [96, 97, 59, 60] dégrade inutilement la précision des relations obtenues. C'est pour cela que l'usage de constantes phénoménologiques a été évité dans le travail présenté afin d'avoir une modélisation la plus exacte possible, le but étant de la tester sur des données avec le minimum de paramètres libres. On va voir que cela va permettre, en comparant les résultats obtenus sur deux types d'écoulements différents, d'apporter des arguments au fait que le terme non-stationnaire a une signature *non-universelle*, c'est-à-dire dépendant du type d'écoulement turbulent considéré (en l'occurrence homogène ou non).

### 13.5.2 Turbulence forcée

L'approche utilisée dans ce mémoire de thèse, ainsi que tous les travaux que l'on vient de citer, s'intéressent à la turbulence en *déclin*, que l'on peut observer, sous l'hypothèse de turbulence gelée de Taylor, dans un certain nombre de situations expérimentales (se reporter au paragraphe 13.3.1). On peut cependant se demander ce qu'il advient des situations pour lesquelles la turbulence est *forcée*, ou *entrenue* : la puissance dissipée par les forces visqueuses aux petites échelles est compensée par la puissance fournie par des forces extérieures à grande échelle. C'est le cas par exemple pour l'écoulement de Von Kármán, où le fluide considéré est géométriquement confiné dans un cylindre fermée. Un écoulement turbulent (cf. par exemple [114]) peut alors être généré et entretenu par deux disques munis de pales, et tournant en sens contraires (ce dispositif expérimental est parfois appelé machine à laver).

#### Modélisation de la fonction de structure d'ordre 3

Novikov [133] a dérivé une équation reliant les fonctions de structure d'ordres 2 et 3, adaptant l'équation de Kármán-Howarth (équation (13.1)) au cas où la turbulence n'est plus en déclin, mais soumise à un forçage extérieur, modélisé par une force aléatoire gaussienne, corrélée en espace, ce qui permet de définir une échelle de forçage  $L_f$ . Cette échelle, qui gouverne l'échelle intégrale que l'on peut définir à partir de l'écoulement, est du même ordre de grandeur sans pour autant lui être égale [118] (cf. l'annexe A). L'équation résultante<sup>4</sup>, que l'on appellera *équation de Kármán-Howarth forcée*, est [133, 118] :

$$S_v(3, l) - 6\nu \frac{\partial S_v(2, l)}{\partial l} - \frac{2}{7} \epsilon \frac{l^3}{L_f^2} = -\frac{4}{5} \epsilon l. \quad (13.18)$$

L'écoulement est supposé stationnaire en temps, il n'y a donc pas de dépendance en  $t$  comme dans (13.1).

Si l'on applique le même raisonnement que celui employé au paragraphe 13.3 à l'équation (13.18) pour les échelles  $l$  inertielles, on arrive facilement à l'expression<sup>5</sup> :

$$S_v(3, l) \simeq -\frac{4}{5} \epsilon l \left[ 1 - \zeta_v(2) \left( \frac{\lambda}{L_d} \right)^2 \left( \frac{l}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)-2} - \frac{5}{14} \left( \frac{l}{L_f} \right)^2 \right], \quad (13.19)$$

à comparer à l'équation (13.10). Notons en particulier que la modélisation (13.19) prévoit un exposant égal à 2 pour le terme non-stationnaire, contrairement à (13.10) qui prévoit  $\simeq 2/3$ <sup>6</sup>.

Moisy et al [118] ont montré de façon expérimentale, dans le cas de l'écoulement de Von-Kármán, que cette équation, où des relations phénoménologiques supplémentaires ont été introduites comme dans [96, 97, 59, 60], décrivait bien la fonction de structure d'ordre 3 expérimentale.

#### Discussions

On ne peut pas effectuer l'étude de cette expression comme précédemment, c'est-à-dire sans faire intervenir de relation phénoménologique entre les échelles caractéristiques : on ne connaît

<sup>4</sup>Notons que c'est une équation approchée, puisque des termes en  $\epsilon \frac{l^5}{L_f^4}$  sont négligés [133].

<sup>5</sup>Il suffit de remplacer la fonction de structure d'ordre 2 par  $2\sigma^2 \left( \frac{l}{L_d} \right)^{\zeta(2)}$  pour  $l \leq L_d$ .

<sup>6</sup>Notons que Quian [143] aboutit, en travaillant sur l'équivalent de la relation de Kármán-Howarth dans l'espace de Fourier, à un exposant fixe de  $-4/3$  pour le terme correctif dissipatif, mais à un exposant non fixé a priori (il ne se place pas spécifiquement sous une hypothèse de turbulence en déclin ou forcée) pour le terme non-stationnaire.

pas vraiment le lien entre l'échelle de forçage  $L_f$  et l'échelle de décorrélation  $L_d$  [118], même s'il apparaît assez clairement que ces deux échelles sont du même ordre de grandeur. Puisque l'échelle de forçage est définie comme l'échelle de corrélation des forces aléatoires extérieures, on supposera ici, sans autre justification, que  $L_f = L_d$  :

$$S_v(3, l) \simeq -\frac{4}{5}\epsilon l \left[ 1 - \zeta_v(2) \left( \frac{\lambda}{L_d} \right)^2 \left( \frac{l}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)-2} - \frac{5}{14} \left( \frac{l}{L_d} \right)^2 \right].$$

Cette modélisation est illustrée par la figure 13.10, qui reprend et complète la figure 13.4. Il est en particulier toujours fait le choix de paramètres suivants :  $\zeta_v(2) = 2/3$ ,  $\epsilon = 5/4 \text{ m}^2.\text{s}^{-3}$ ,  $L_d = 1 \text{ m}$  et  $\lambda = 0.01 \text{ m}$ , et ce pour les deux modélisations (13.10) et (13.19).

Plusieurs remarques sont à faire. Premièrement, le terme correctif non-stationnaire, effectif pour les échelles proches de l'échelle de décorrélation  $L_d$ , perturbe beaucoup moins la loi de puissance  $-4/5\epsilon l$ . En effet, ce terme correctif diminue beaucoup plus vite dans le cas de la modélisation de turbulence forcée (13.19) que pour celle de la turbulence en déclin (13.10) : dans les deux cas, ce terme correctif est en  $(l/L_d)^\alpha$ , mais l'exposant  $\alpha$  passe de  $2/3$  à  $2$ . Ainsi, la gamme d'échelles  $l$  pour lesquelles on a raisonnablement un comportement en loi d'échelle d'exposant  $\zeta_v(3)$  est plus étendue vers l'échelle  $L_d$  dans le cas de la turbulence forcée que dans celui de la turbulence en déclin (cf. figure 13.10 en haut à droite et en bas à gauche).

Étudions maintenant les prédictions de la modélisation de turbulence forcée (13.19), en termes de maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée et d'exposant  $\zeta_v(3)$  (ces deux quantités sont définies et calculées exactement de la même façon que précédemment, cf. le paragraphe 13.4), lorsque le rapport  $\lambda/L_d$  varie. Les résultats sont portés sur la figure 13.11, à mettre en parallèle avec les figures 13.5 et 13.6.

Le maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée converge beaucoup plus vite, lorsque  $L_d/\lambda$  augmente, vers sa valeur asymptotique 1. Par exemple, si  $\lambda/L_d = 0.01$  (ce qui est valeur courante dans les expériences de turbulence : pour les données de Modane, ce rapport vaut environ 0.011), le maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée vaut 0.930 pour la turbulence en déclin et 0.996 en turbulence forcée.

La situation est identique pour la convergence de  $\zeta_v(3)$  vers 1, mais avec une différence importante par rapport au cas de la turbulence en déclin : la modélisation (13.19) prédit un exposant  $\zeta_v(3)$  *supérieur* à 1, et pas inférieur à 1 comme précédemment. Toujours pour  $\lambda/L_d = 0.01$ , on obtient  $\zeta_v(3) \simeq 0.966$  pour la turbulence en déclin, et  $\zeta_v(3) \simeq 1.003$  pour la turbulence forcée. Notons qu'une observation attentive de la fonction de structure d'ordre 3 compensée issue des mesures de Moisy et al. dans leur article [118], semble bien montrer un exposant  $\zeta_v(3)$  supérieur à 1.

Le cas de la turbulence forcée illustre ainsi bien que la fonction de structure d'ordre 3 est sensible, pour les échelles inertielles, à la nature même de l'écoulement turbulence considéré. Le terme correctif effectif aux échelles proches de l'échelle de décorrélation prend en effet des expressions différentes selon la nature de l'écoulement, et son influence, par exemple sur la valeur de l'exposant  $\zeta_v(3)$  varie notablement d'un écoulement à l'autre.

Le cas de la turbulence forcée ne sera pas plus étudié, car les données expérimentales utilisées dans ce mémoire de cette thèse (cf. le chapitre 2) n'entrent pas dans ce cadre.

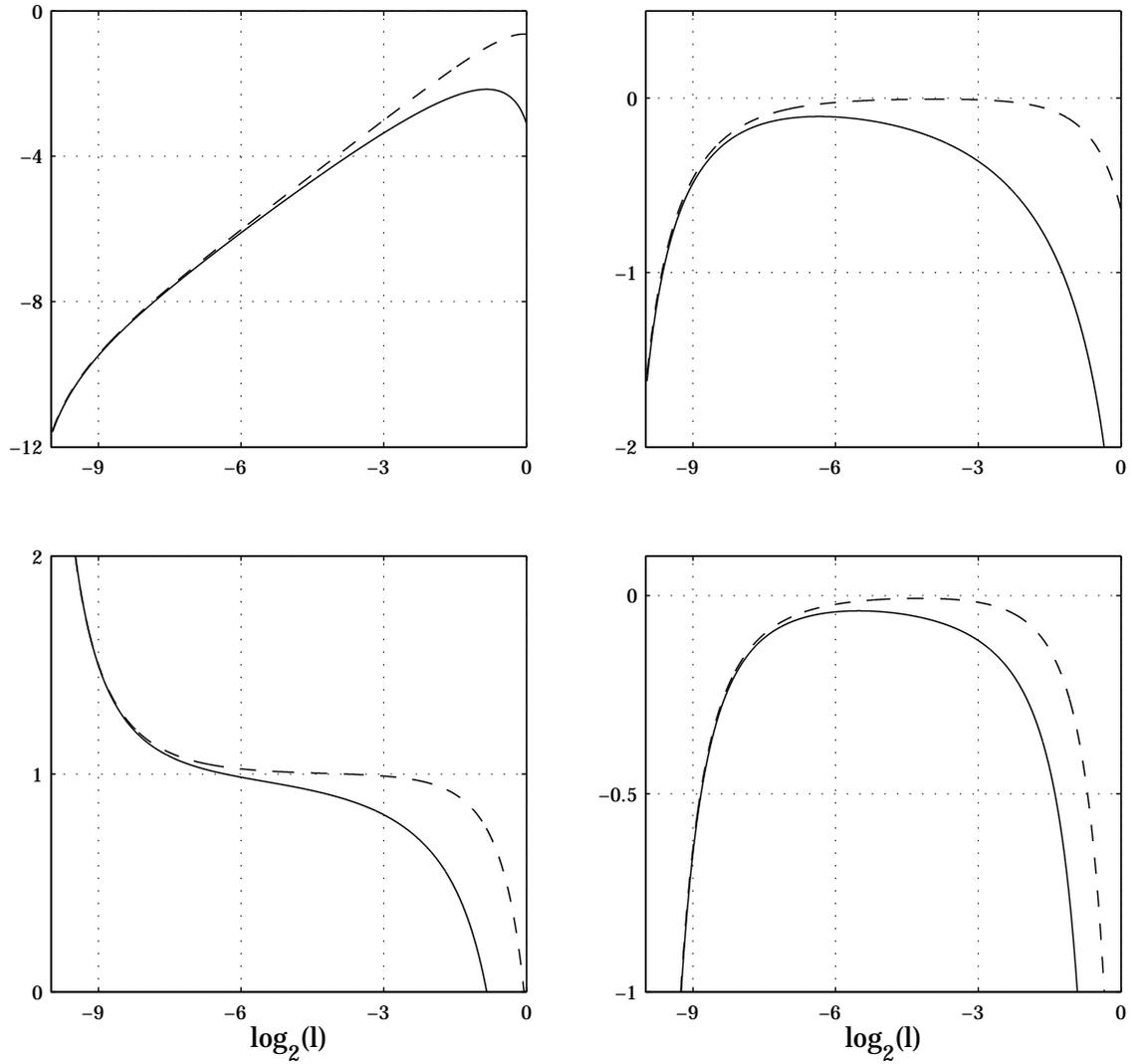


FIG. 13.10 – Modélisations correspondant à la turbulence en déclin homogène (13.10) (trait continu) et à la turbulence en déclin (13.19) (trait en pointillés) de la fonction de structure d'ordre 3 ( $L_d = 1\text{ m}$  et  $\lambda = 0.01\text{ m}$ ). En haut à gauche :  $\log_2 S_v(3, l)$ . En haut à droite :  $\log_2 S_v^c(3, l)$ . En bas à gauche : exposant local de  $S_v(3, l)$ . En bas à droite : dérivée seconde de  $\log_2 S_v(3, l)$  par rapport à  $\log_2 l$ .

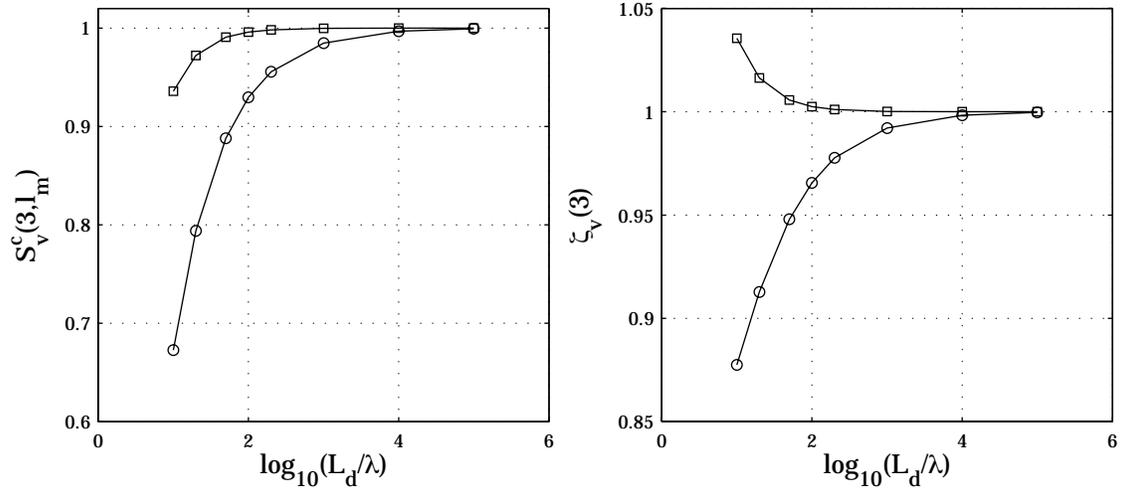


FIG. 13.11 – Valeurs maximales de  $S_v^c(3, l)$  et exposants  $\zeta_v(3)$  prédits par les modélisations correspondant à la turbulence en déclin homogène (13.10) (o) et à la turbulence forcée (13.19) (□).



# Chapitre 14

## Comparaison aux données expérimentales

Il vient donc d'être construit une modélisation de la fonction de structure d'ordre 3, qui tient explicitement compte des écarts à la loi des 4/5 de Kolmogorov. Ce modèle apporte en effet deux corrections à cette loi, l'une étant universelle et valable pour les plus petites échelles de la zone inertielle (échelles proches de l'échelle de Taylor), l'autre dépendant explicitement de la nature particulière de l'écoulement turbulent considéré, et effectif aux plus grandes échelles de la zone inertielle (échelles proches de l'échelle de décorrélation).

Il est intéressant de confronter les prédictions de ce modèle à des signaux expérimentaux de vitesse turbulente. C'est ce qui va être fait dans ce chapitre, sur deux jeux de données, les données de turbulence dans un tunnel de Modane,  $R_\lambda \simeq 2000$  et les données de jet turbulent de l'ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$  (cf. le chapitre 2).

### 14.1 Principe de l'ajustement

La modélisation qui vient d'être faite de la fonction de structure d'ordre 3 (13.10) va être confrontée aux données de la façon suivante. Le logarithme de la fonction de structure d'ordre trois compensée ( $\log_2 S_v^c(3, l) = \log_2 S_v(3, l) - \log_2 l$ ), est ajustée par le modèle  $M(l)$  à quatre paramètres :

$$M(l) = P_1 + \log_2 \left[ 1 - P_2 \left( \frac{l}{L_D} \right)^{P_4} - P_3 \left( \frac{l}{L_D} \right)^{P_4-2} \right]. \quad (14.1)$$

Notons qu'ajuster la fonction de structure d'ordre trois directement ou la fonction de structure d'ordre 3 compensée reviennent exactement au même : il suffit en effet de remarquer que  $\log_2 S_v(3, l) = \log_2 S_v^c(3, l) + \log_2 l$  et de remplacer alors le modèle précédent par  $M(l) + \log_2 l$ . On choisira donc plutôt la fonction de structure compensée, car il est plus facile de visualiser les écarts à la loi des 4/5 de Kolmogorov, selon laquelle  $S^c(3, l)$  devrait être une constante. On reportera systématiquement en revanche l'exposant local de la fonction de structure d'ordre 3 (non-compensée), afin de visualiser l'écart à  $\zeta_v(3) = 1$  (l'exposant local de la fonction de structure est celui de la fonction de structure compensée plus un).

L'ajustement de ce modèle à la fonction de structure d'ordre 3 compensée se fait sur une gamme d'échelles  $\{l_k\}_{k=1..n(l)}$ , choisie dans la zone inertielle, puisque c'est pour cette gamme d'échelle que la modélisation a été construite. On discutera lors de la mise en oeuvre de l'ajustement du choix

de cette gamme d'échelles.

L'ajustement est effectué à l'aide d'une régression non-pondérée : on quantifie l'écart du modèle aux données par l'écart quadratique moyen :

$$\text{eqm}(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{1}{n(l)} \sum_{k=1}^{n(l)} (\log_2 S_v^c(3, l_k) - M(l_k))^2. \quad (14.2)$$

L'écart quadratique moyen  $\text{eqm}(P_1, P_2, P_3, P_4)$  est alors minimisé à l'aide d'algorithmes du logiciel Matlab en faisant varier les quatre paramètres  $P_i$ . On notera  $P_i^s$  les valeurs de ces paramètres réalisant ce minimum.

L'échelle de décorrélation joue ici un rôle transparent : c'est l'unité de longueur que l'on donne aux échelles  $l$ . Si l'on choisit  $CL_d$  au lieu de  $L_d$ , l'ajustement du modèle (14.1) aux données se fera avec le même écart quadratique moyen, avec  $P_2 \rightarrow P_2 C^{P_4}$  et  $P_3 \rightarrow P_3 C^{P_4-2}$ . La valeur de  $L_d$  ne change donc pas la bonté de l'ajustement, mais seulement les valeurs des paramètres réalisant le minimum l'écart quadratique moyen.

### 14.1.1 Exploitation des résultats

Une fois l'ajustement effectué, on peut remonter aux grandeurs physiques intervenant dans la modélisation (13.10) à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \epsilon^m &= \frac{5}{4} P_1^s, \\ \lambda^m &= L_d \sqrt{\frac{P_3^s}{P_4^s}}, \\ \zeta_v^m(2) &= P_4^s, \\ \left( \frac{5}{5 + \zeta_v(2)} \right)^m &= P_2^s, \end{aligned}$$

l'indice  $m$  indiquant que ces estimations sont issues de la modélisation.

## 14.2 Turbulence homogène : données de turbulence de tunnel de Modane, $R_\lambda \simeq 2000$

Nous allons confronter dans ce paragraphe la modélisation de la fonction de structure d'ordre trois qui vient d'être faite aux données de Modane (cf. le chapitre 2). On rappelle que ces données correspondent à des mesures effectuées dans un tunnel de l'ONERA à Modane, et que la turbulence ainsi générée peut être considérée avec une très bonne approximation comme *homogène* (communication privée d'Yves Gagne) : les grandeurs caractérisant la turbulence (l'écart-type des fluctuations de vitesse par exemple) sont homogènes dans tout plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'écoulement moyen.

La turbulence générée dans un tunnel ne peut a priori être considérée comme de la turbulence en déclin : puisque l'écoulement est géométriquement confiné par les parois du tunnel, de l'énergie est constamment injectée dans les fluctuations turbulentes par l'intermédiaire des couches limites existant sur ces parois. Dans l'expérience de Modane, la mesure est effectuée juste en amont d'un

coude (en amont des grilles d'aube du coude 3 de la soufflerie S1 plus exactement), ce qui entraîne, par un effet de blocage, une diminution de la moyenne et de la variance de la vitesse longitudinale, leur rapport restant constant. Cette particularité de l'expérience de Modane permet alors de considérer raisonnablement (communication privée d'Yves Gagne) les signaux mesurés comme correspondant à de la turbulence en déclin. La relation (13.8), liant la variation de l'écart-type selon la direction de propagation moyenne à la puissance dissipée moyenne en utilisant une hypothèse de turbulence en déclin, est en particulier vérifiée, et l'on espère donc que la modélisation précédente décrive bien la fonction de structure d'ordre 3 mesurée sur ces données.

### 14.2.1 Modélisation de la fonction de structure d'ordre 2

Il faut tout d'abord mesurer l'échelle de décorrélation  $L_d$  (cf. paragraphe 14.1) avant de procéder à l'ajustement de  $S_v^c(3, l)$ . On effectue pour cela un ajustement de la fonction de structure d'ordre 2 selon le modèle (13.6) :

$$S_v(2, l, x) \simeq \begin{cases} 2\sigma^2(x) \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta_v(2)} & \text{si } l \leq L_d \\ 2\sigma^2(x) & \text{si } l \geq L_d \end{cases} .$$

Cette modélisation correspond à deux portions de droite dans un diagramme log-log. On effectue donc deux régressions linéaires (non-pondérées) entre les échelles  $2^{-5.5} m$  et  $2^{-4} m$  d'une part pour la partie "loi de puissance", car c'est dans cette gamme d'échelles que l'exposant local de la fonction de structure d'ordre 2 varie le moins (cf. figure 14.1), et entre les échelles  $2^{3.5} m$  et  $2^{6.5} m$  d'autre part pour la partie "plateau".

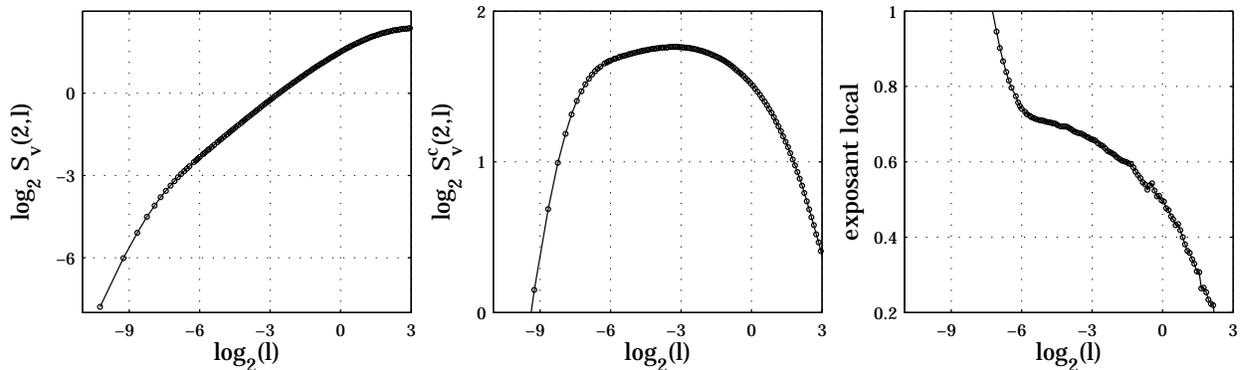


FIG. 14.1 – Logarithmes (en base 2) de la fonction de structure d'ordre 2 pour les données de Modane (gauche), de la fonction de structure compensée par  $l^{2/3}$  (milieu) et exposant local de la fonction de structure d'ordre 2 (droite).

Les deux régressions linéaires sont portées sur la figure 14.2, ce qui permet de définir l'échelle de décorrélation  $L_d$  comme la valeur de l'échelle  $l$  pour laquelle les deux ajustements s'intersectent. On trouve ici :

$$L_d \simeq 2^{0.69} m \simeq 1.61 m .$$

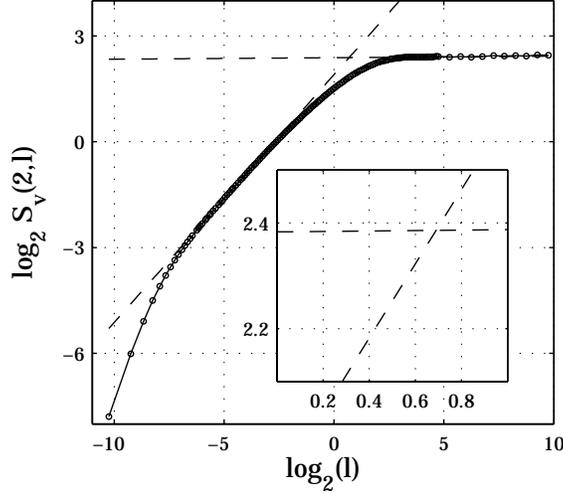


FIG. 14.2 – Modélisation de la fonction de structure d’ordre 2 pour les données de Modane : (o) données, traits en pointillés : modélisation.

### 14.2.2 Choix de la zone d’ajustement

On peut désormais effectuer l’ajustement de la fonction de structure compensée obtenue sur les données par le modèle (14.1).

La zone d’ajustement a été choisie de l’échelle  $l \simeq 4.12 \text{ mm}$  ( $\simeq 2^{-7.92} \text{ m}$ ) à l’échelle  $l \simeq 0.298 \text{ m}$  ( $\simeq 2^{-1.75} \text{ m}$ ), soit sur presque deux décades. Cette zone (cf. figure 14.3) est donc bien centrée sur la zone inertielle : l’exposant local varie le moins au milieu de cette zone. Cette gamme est choisie assez grande pour bien tenir compte des écarts de la fonctions de structure compensée à un comportement en loi de puissance.  $S_v^c(3, l)$  atteint un maximum d’environ  $1.52 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$  à peu près au milieu de cette gamme, et des minima sur les deux bords de la gamme, d’environ  $1.14 \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ , ce qui fait une variation relative (définie comme  $\frac{\max - \min}{0.5(\max + \min)}$ ) d’environ 29%.

On peut se convaincre que la gamme d’échelles choisie est suffisamment grande pour bien tenir compte des corrections à grandes et petites échelles par la valeur de l’exposant local dans cette gamme : l’exposant local s’y écarte notablement de 1, d’environ 0.7 à 1.5 (Cf figure 14.3).

### 14.2.3 Résultats

Le résultat de l’ajustement est donné sur la figure 14.3 : l’ajustement y apparaît visuellement très bon. Les valeurs  $P_i^s$  des paramètres du modèle (14.1) obtenues lors de la minimisation permettent alors d’obtenir des valeurs pour les grandeurs physiques de la modélisation :

$$\begin{aligned} \epsilon^m &\simeq 2.08 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}, \\ \lambda^m &\simeq 19.9 \text{ mm}, \\ \zeta_v^m(2) &\simeq 0.66, \\ \left( \frac{5}{5 + \zeta_v(2)} \right)^m &\simeq 0.91. \end{aligned}$$

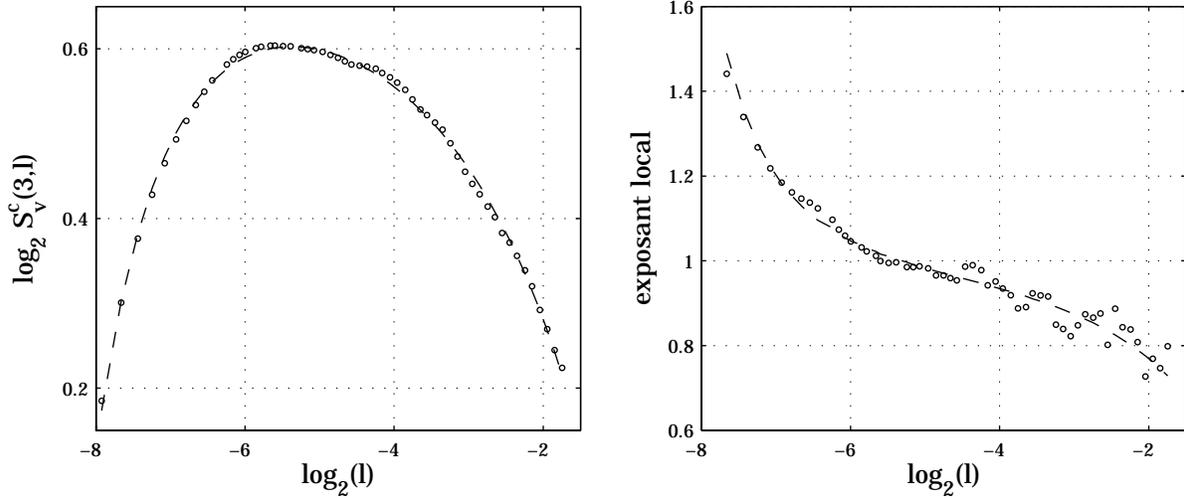


FIG. 14.3 – Gauche : ajustement de la fonction de structure d'ordre 3 compensée pour les données de Modane : (o) données, traits en pointillés : modélisation. Droite : exposants locaux correspondants.

#### 14.2.4 Commentaires

Les deux premières valeurs sont à comparer à celles obtenues par les méthodes habituelles (cf. chapitre 2) :

$$\epsilon \simeq 1.91 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3},$$

$$\lambda \simeq 17.9 \text{ mm}.$$

On voit que l'accord est bon. En effet, en ce qui concerne la puissance moyenne dissipée  $\epsilon$ , la modélisation (13.10) prévoit un maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée (cf. paragraphe 13.4.1) de l'ordre de 92% (si  $\zeta_v(2) = 2/3$ ) à 94% (si  $\zeta_v(2) = 0.71$ ) de  $\frac{4}{5}\epsilon$  (avec  $L_d \simeq 1.61 \text{ m}$  et  $\lambda \simeq 17.9 \text{ mm}$ ). Or  $2.08 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \times 0.92 \simeq 1.92 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$  et  $2.08 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \times 0.94 \simeq 1.95 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ , ce qui correspond très bien à la valeur obtenue en utilisant le maximum de la fonction de structure d'ordre trois compensée (cf. chapitre 2). Cette correction prévoit une échelle de Taylor (en utilisant la relation  $\lambda = \sqrt{15\nu \frac{\sigma^2}{\epsilon}}$  et en prenant  $\epsilon \simeq 2.08 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ ) légèrement plus faible :  $17.2 \text{ mm}$ , mais qui est toujours tout-à-fait compatible avec  $\lambda^m$ .

La valeur de  $\zeta_v(2)$  obtenue est elle aussi pleinement cohérente. La valeur obtenue par la méthode habituelle, c'est-à-dire par une régression linéaire dans un diagramme log-log pour la zone inertielle, qui a été effectuée lorsque la fonction de structure d'ordre a été modélisée (cf. figure 14.2) fournit quant-à-elle  $\zeta_v(2) \simeq 0.70$ . Les deux valeurs sont donc bien compatibles.

Intéressons-nous enfin au paramètre caractérisant la partie non-stationnaire de la modélisation (13.10), et qui dépend du type d'écoulement étudié : si l'écoulement est homogène, ce facteur vaut  $\frac{5}{5+\zeta_v(2)} \simeq 0.88$  (valable pour  $\zeta_v(2) = 2/3$  et  $\zeta_v(2) = 0.71$ ). L'ajustement fournit la valeur :

$$\left( \frac{5}{5 + \zeta_v(2)} \right)^m \simeq 0.91,$$

qui est en très bon accord avec la prédiction  $\frac{5}{5+\zeta_v(2)} \simeq 0.88$ .

Pour terminer, il est intéressant de comparer la valeur de  $\zeta_v(3)$  prédite par la modélisation utilisée (13.10) à celle que l'on peut mesurer directement par régression linéaire sur la fonction de structure d'ordre 3 obtenue. Cette régression est effectuée entre les échelles  $l = 2^{-5.5} m$  et  $l = 2^{-4} m$ , gamme d'échelles qui a été discutée au paragraphe 14.2.1. On obtient  $\zeta_v(3) \simeq 0.974$ , qui est en bon accord avec la valeur prédite pour les données de Modane (en choisissant  $\lambda/L_d = 0.011$  et  $\zeta_v(3) = 2/3$ ) :  $\zeta_v(3) \simeq 0.964$ .

### 14.2.5 Conclusion

L'ajustement qui a été réalisé sur les données de Modane à l'aide de la modélisation (13.10) apporte donc un indice sérieux à la pertinence de cette modélisation de la fonction de structure d'ordre 3 d'un écoulement turbulent *homogène*, et correspondant à de la turbulence en déclin, pour les échelles inertielles (et un peu au-delà). Notons que l'hypothèse de turbulence en déclin pour cet écoulement de turbulence de tunnel semble en particulier être une bonne approximation. Les valeurs des grandeurs physiques classiques ( $\epsilon$ ,  $\lambda$  et  $\zeta_v(2)$ ) sont retrouvées avec un bon accord, et le paramètre caractérisant le terme non-stationnaire  $\frac{5}{5+\zeta_v(2)}$ , obtenu grâce à l'hypothèse d'homogénéité, et donc spécifique à de tels écoulements, est lui-aussi recouvert avec un très bon accord.

## 14.3 Turbulence non homogène : données de jet turbulent de l'ÉNSL, $R_\lambda \simeq 380$

Nous allons à présent mener la même étude avec un autre écoulement turbulent, un jet turbulent. Ce sont les données de l'ÉNSL, de nombre de Reynolds  $R_\lambda \simeq 380$  (cf. chapitre 2). Cet écoulement ne donne pas naissance à de la turbulence homogène : les caractéristiques de la turbulence (par exemple l'écart-type de la vitesse) ne sont pas constantes dans les plans perpendiculaires à la direction de propagation, même localement si la mesure est faite au centre du jet [169, 163]. La modélisation (13.10) proposée n'est donc pas sensée s'appliquer à ces données, plus particulièrement la correction non-stationnaire, qui fait intervenir l'hypothèse d'homogénéité de l'écoulement (contrairement à la correction dissipative qui est elle universelle).

Puisque l'on vient de voir que cette modélisation s'appliquait bien à des données de turbulence homogène, il est intéressant de la tester sur des données de turbulence non-homogène, afin de montrer que ces résultats n'étaient pas fortuits, et que la nature de l'écoulement étudié influe bien de façon significative (par l'intermédiaire du terme non stationnaire) la fonction de structure d'ordre 3 même dans la zone inertielle.

### 14.3.1 Modélisation de la fonction de structure d'ordre 2

La fonction de structure d'ordre 2 est toujours modélisée par deux comportements linéaires dans un diagramme log-log. La partie loi de puissance ( $l \leq L_d$ ) est obtenue par une régression linéaire (non-pondérée) dans la gamme des échelles inertielles, choisie entre  $2^{-6.5} m$  et  $2^{-4.5} m$ , soit deux octaves. La zone inertielle est bien-sûr plus petite que dans le cas précédent, puisque le nombre de Reynolds vaut ici  $R_\lambda \simeq 380$  et non plus  $\simeq 2000$ , comme on peut l'observer sur la figure 14.4. La partie constante est elle obtenue par une régression linéaire entre  $2^0 m$  et  $2^4 m$ .

Ces deux régressions linéaires sont portées sur la figure 14.5, ce qui permet d'estimer l'échelle

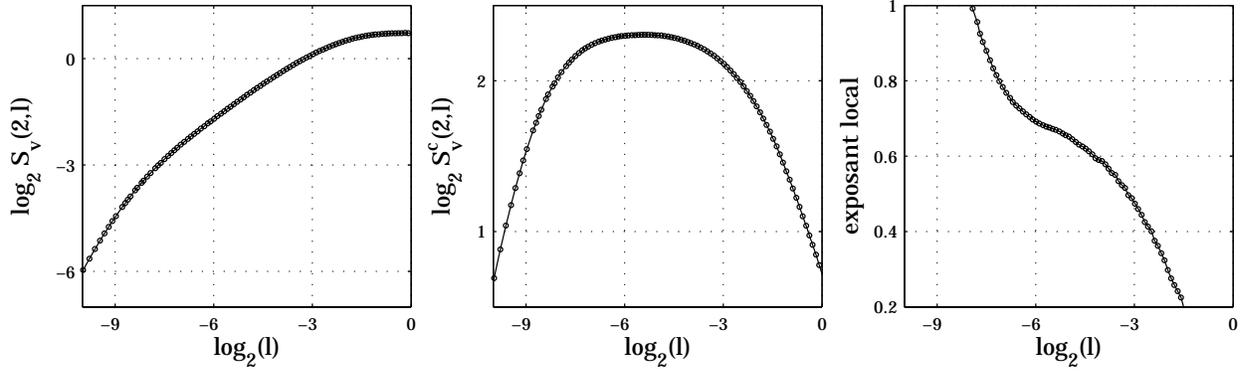


FIG. 14.4 – Fonction de structure d’ordre 2 pour les données de jet (gauche), fonction de structure compensée par  $l^{2/3}$  (milieu) et exposant local de la fonction de structure d’ordre 2 (droite).

de décorrélation :

$$L_d \simeq 2^{-2.4} m \simeq 18.9 \text{ cm.}$$

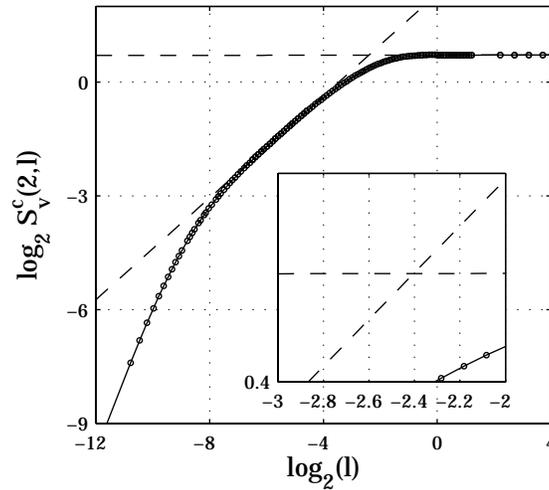


FIG. 14.5 – **Modélisation de la fonction de structure d’ordre 2 pour les données de jet :**  
(o) données, traits en pointillés : modélisation

### 14.3.2 Choix de la zone d’ajustement

La zone d’ajustement choisie pour le modèle (14.1) s’étend de  $l \simeq 2.55 \text{ mm}$  ( $\simeq 2^{-8.61} m$ ) à  $l \simeq 103 \text{ mm}$  ( $\simeq 2^{-3.28} m$ ), soit un peu moins de deux décades. Cette zone d’ajustement a été choisie selon les deux critères suivants : elle est centrée sur la zone où l’exposant local varie le moins (cf. figure 14.6) et est assez large pour tenir compte des écarts de la fonction de structure d’ordre 3 à la loi des 4/5 de Kolmogorov. De plus, afin que la comparaison avec les résultats obtenus précédemment avec les données de Modane ait un sens, cette zone correspond aussi à une même variation relative de la fonction de structure d’ordre 3 compensée :  $S_v^c(3, l)$  atteint son maximum

à peu près au centre de la zone d'ajustement, pour une valeur de  $\simeq 2.69 \text{ m}^2.\text{s}^{-3}$ , et des minima sur les bords de cette zone de valeur  $\simeq 2.06 \text{ m}^2.\text{s}^{-3}$ . Cela correspond à une variation relative d'environ 27%, correspondant à celle utilisée pour les données de Modane (qui était de 29%). De même, la variation de l'exposant local se fait entre environ 0.7 à 1.5, tout comme pour l'ajustement précédemment réalisé.

### 14.3.3 Résultats

L'ajustement est donc effectué sur la zone précédemment décrite. Le modèle (14.1) semble encore une fois bien décrire la fonction de structure de ces données de turbulence, bien que l'écart entre les données et le modèle soit plus important que dans le cas précédent (cf. figure 14.6).

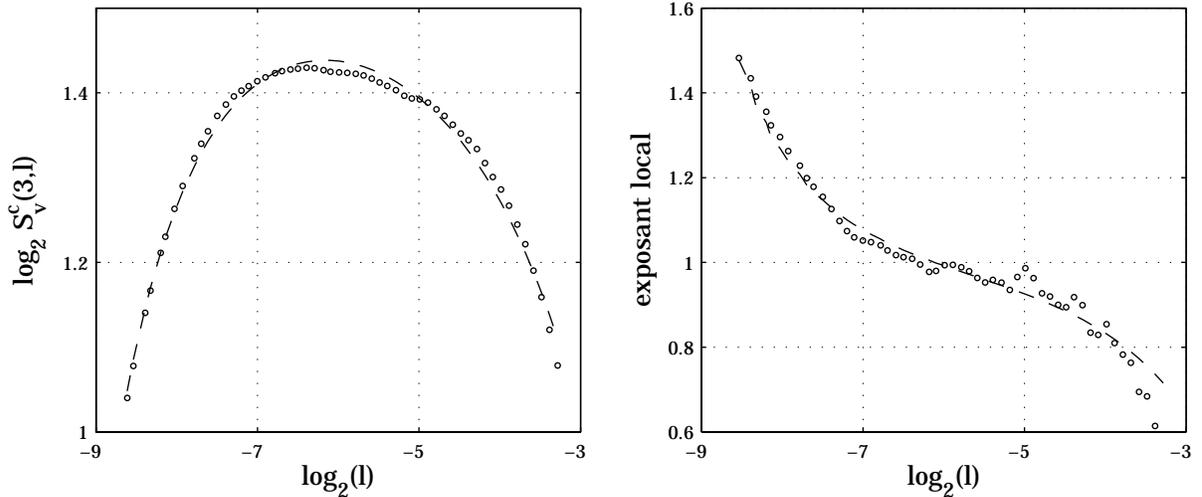


FIG. 14.6 – Gauche : ajustement de la fonction de structure d'ordre 3 compensée pour les données de jet : (o) données, traits en pointillés : modélisation. Droite : exposants locaux correspondants.

Les valeurs  $P_i^s$  des paramètres du modèle (14.1) obtenues lors de la minimisation permettent alors d'obtenir des valeurs pour les grandeurs physiques de la modélisation :

$$\begin{aligned} \epsilon^m &\simeq 3.74 \text{ m}^2.\text{s}^{-3}, \\ \lambda^m &\simeq 8.49 \text{ mm}, \\ \zeta_v^m(2) &\simeq 0.79, \\ \left(\frac{5}{5 + \zeta_v(2)}\right)^m &\simeq 0.45. \end{aligned}$$

### 14.3.4 Commentaires

Les deux premières valeurs sont à comparer à celles obtenues par les méthodes habituelles (cf. chapitre 2) :

$$\begin{aligned} \epsilon &\simeq 4.49 \text{ m}^2.\text{s}^{-3}, \\ \lambda &\simeq 6.43 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Commençons par discuter de la valeur de  $\epsilon$ . Puisque  $\epsilon$  a été estimé grâce à la dérivée du signal de vitesse dans ce cas-là et non pas à partir du maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée, on ne peut expliquer cet écart à cause de la différence entre ce maximum et  $4/5\epsilon$ .

Notons quand-même que la méthode du maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée fournit sur ces données la valeur  $\epsilon \simeq 3.36 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ , qui est elle compatible avec la valeur obtenue par ajustement. En effet, d'après le paragraphe 13.4.1, on s'attend à un maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée d'environ 84% (si  $\zeta_v(2) = 2/3$ ) à 86% (si  $\zeta_v(2) = 0.71$ ) de  $\frac{4}{5}\epsilon$ . Si l'on choisit  $\epsilon = \epsilon^m$ , cela donne un maximum compris entre 3.14 et  $3.21 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ , ce qui est proche de la valeur directement mesurée du maximum.

Ce resultat (i.e. la valeur de  $\epsilon^m$ ) semble indiquer que soit la méthode choisie pour estimer la puissance moyenne dissipée est un peu biaisée, soit que la modélisation (13.10) n'est pas ici appropriée, ce qui est attendu, puisqu'elle est construite pour les écoulements de turbulence homogène, et que les écoulements de jets sont non-homogènes. L'écart observé est certainement dû à ces deux explications.

L'écart observé sur l'échelle de Taylor est lui-aussi assez important (de l'ordre de 30%). Puisque  $\lambda$  et  $\epsilon$  sont en pratique calculés de la même façon (cf. chapitre 2 : soit l'on mesure  $\epsilon$  et l'on en déduit  $\lambda$  avec la relation  $\lambda = \sqrt{15\nu\frac{\sigma^2}{\epsilon}}$ , soit l'on construit la surrogate de la puissance dissipée qui lie par définition  $\lambda$  et  $\epsilon$  par la même relation), la discussion qui vient d'être faite sur  $\epsilon$  s'applique aussi à  $\lambda$ .

La valeur de  $\zeta_v(2)$  obtenue est complètement compatible : la méthode habituelle (régression linéaire dans un diagramme log-log) fournit  $\zeta_v(2) \simeq 0.67$ . Encore une fois, il ne faut pas s'attendre à une grande précision quant-à la mesure de  $\zeta_v(2)$  par cette méthode, puisque la valeur de  $\zeta_v(2)$  n'intervient que dans les termes correctifs.

Finissons cette discussion par le résultat le plus intéressant. L'ajustement fournit pour le paramètre  $P_4$  la valeur :  $P_4^s \simeq 0.45$ . Ce paramètre dépend de la modélisation du terme non-stationnaire dans l'équation de Kármán-Howarth, et on a vu qu'il était nécessaire d'introduire une information sur l'écoulement étudiée. Le terme non-stationnaire a ainsi été modélisé en supposant que l'écoulement était homogène. Or ce n'est pas le cas ici, puisque les données ici analysées sont des données de jet turbulent. Cet ajustement, en fournissant une valeur notablement différente et plus petite que  $\frac{5}{5+\zeta_v(2)} \simeq 0.88$ , montre bien que cette hypothèse n'est pas valable pour ces données de jet.

Ce terme décrit la décroissance de l'écart-type  $\sigma(x)$  selon la direction longitudinale, repérée par  $x$ . Si l'écoulement est homogène, cette variation n'est due qu'à la dissipation. Dans le cas d'un jet turbulent, la section de ce jet s'élargissant, l'échelle intégrale et l'écart-type de la vitesse ont tendance à augmenter linéairement avec  $x$ , distance de la sonde de mesure à la buse, lorsque  $x$  est supérieur à environ 40 diamètres de buse [169, 163], ce qui est l'effet inverse de celui dû à la dissipation. On s'attend alors à ce que le terme correctif non stationnaire soit moins important que dans le cas homogène, ce qui va bien dans le sens du résultat fourni par cet ajustement. De plus, la modélisation qui a été faite retient aussi l'hypothèse d'isotropie pour l'écoulement turbulent, or dans le cas du jet turbulent, il faudrait utiliser comme symétrie l'axisymétrie autour de l'axe de jet (cf. par exemple [6]). Il est raisonnable de penser que l'écart à l'isotropie est "gommé" aux petites échelles (de l'ordre de l'échelle de Taylor) par le phénomène turbulent, et que donc le terme correctif dissipatif n'est pas affecté. Ce n'est pas le cas a priori pour le terme correctif non stationnaire. Pour pouvoir être sûr de cette interprétation, il faudrait calculer le terme non stationnaire dans ce cas-là,

ce qui reste à faire.

### 14.3.5 Modélisation semi-empirique de la fonction de structure d'ordre 3

#### Définition

L'ajustement qui vient d'être effectué sur les données de jet de l'ÉNSL semble indiquer que la forme fonctionnelle utilisée est raisonnable, mais que le paramètre  $P_2$  (cf. l'expression (14.1) du modèle ajusté) est environ deux fois plus petit que la valeur prédite par la modélisation (13.10) :  $P_2^s \simeq 0.45$  au lieu de  $\frac{5}{5+\zeta_v(2)} \simeq 0.88$ . On propose donc la modélisation semi-empirique suivante de la fonction de structure d'ordre 3 dans le cas de la turbulence de jet qui, rappelons-le, est un écoulement de turbulence en déclin non-homogène :

$$S_v(3, l, x) \simeq -\frac{4}{5}\epsilon(x)l \left[ 1 - \zeta_v(2) \left( \frac{\lambda(x)}{L_d} \right)^2 \left( \frac{l}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)-2} - \gamma \left( \frac{l}{L_d} \right)^{\zeta_v(2)} \right], \quad (14.3)$$

avec :

$$\gamma = 0.45.$$

On a donc bien une modélisation empirique, puisque la valeur du paramètre  $\gamma$  est déduite de l'analyse des données de jet de l'ÉNSL effectuée au paragraphe précédent.

#### Discussions

Comparons alors la modélisation (14.3) à la modélisation (13.10). Cette comparaison est illustrée par la figure 14.7, qui reprend et complète la figure 13.4. Il est en particulier toujours fait le choix de paramètres suivants :  $\zeta_v(2) = 2/3$ ,  $\epsilon = 5/4 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ ,  $L_d = 1 \text{ m}$  et  $\lambda = 0.01 \text{ m}$ , et ce pour les deux modélisations (13.10) et (14.3).

Plusieurs remarques sont à faire. Premièrement, le terme correctif non-stationnaire, effectif pour les échelles proches de l'échelle de décorrélation  $L_d$ , perturbe moins la loi de puissance  $-4/5\epsilon l$  pour la modélisation de jet turbulent (13.10) que dans le cas de modélisation de turbulence homogène (14.3). En effet, ce terme correctif est deux fois moins important dans la première situation que dans la seconde, puisque  $\gamma = 0.45 \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{5}{5+\zeta_v(2)} \right)$ . La gamme d'échelles  $l$  pour lesquelles on a raisonnablement un comportement en loi d'échelle d'exposant  $\zeta_v(3)$  (i.e. l'exposant local varie peu) est alors un peu plus étendue, pour un rapport  $L_d/\lambda$  fixé, pour la turbulence de jet que pour la turbulence homogène.

Étudions maintenant les prédictions de la modélisation de turbulence de jet (14.3), en ce qui concerne le maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée et l'exposant  $\zeta_v(3)$  (ces deux quantités sont définies et calculées exactement de la même façon qu'au paragraphe 13.4), lorsque le rapport  $\lambda/L_d$  varie. Les résultats sont portés sur la figure 14.8, à mettre en parallèle avec les figures 13.5 et 13.6.

La première remarque est la suivante : dans le cas de la turbulence de jet, la modélisation proposée (14.3) converge un peu plus vite vers la loi des 4/5 de Kolmogorov que la modélisation de turbulence homogène (13.10). Cette convergence est cependant moins rapide que celle observée dans le cas de la turbulence forcée (cf. le paragraphe 13.5.2). Le maximum de la fonction de structure d'ordre 3 compensée converge un peu plus vite, lorsque  $L_d/\lambda$  augmente, vers sa valeur asymptotique 1. Par exemple, si  $\lambda/L_d = 0.01$  (ce qui est valeur courante dans les expériences de turbulence : pour les données de Modane, ce rapport vaut environ 0.01), le maximum de la fonction de structure

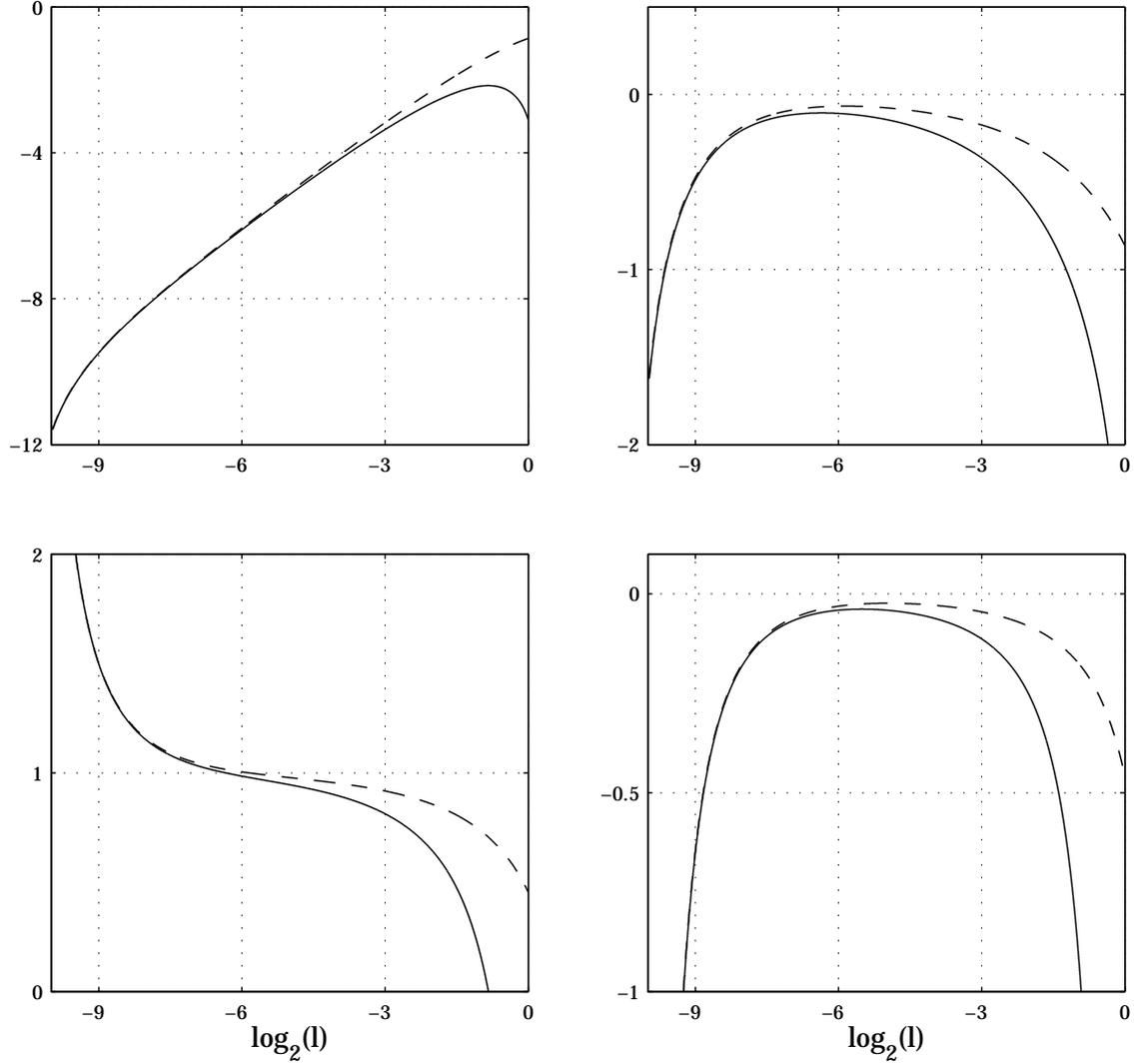


FIG. 14.7 – Modélisations correspondant à la turbulence en déclin homogène (13.10) (trait continu) et à la turbulence de jet (14.3) (trait en pointillés) de la fonction de structure d'ordre 3 ( $L_d = 1$  m et  $\lambda = 0.01$  m). En haut à gauche :  $\log_2 S_v(3, l)$ . En haut à droite :  $\log_2 S_v^c(3, l)$ . En bas à gauche : exposant local de  $S_v(3, l)$ . En bas à droite : dérivée seconde de  $\log_2 S_v(3, l)$  par rapport à  $\log_2 l$ .

d'ordre 3 compensée vaut 0.930 pour la turbulence homogène et 0.955 pour la turbulence de jet.

La situation est identique pour la convergence de  $\zeta_v(3)$  vers 1. Toujours pour  $\lambda/L_d = 0.01$ , on obtient  $\zeta_v(3) \simeq 0.966$  pour la turbulence homogène et  $\zeta_v(3) \simeq 0.977$  pour la turbulence de jet. Si on choisit  $L_d/\lambda = 0.034$ , ce qui correspond aux données de jet de l'ÉNSL,  $R_\lambda \simeq 380$  ( $L_d \simeq 18.9$  cm et  $\lambda \simeq 6.43$  mm), on obtient  $\zeta_v(3) \simeq 0.930$  pour la turbulence homogène et  $\zeta_v(3) \simeq 0.952$  pour la turbulence de jet.

Si l'on effectue la mesure de  $\zeta_v(3)$  par régression linéaire de la fonction de structure d'ordre 3 expérimentale, entre les échelles  $2^{-6.5}$  m et  $2^{-4.5}$  m (cf. le paragraphe 14.3.1), on trouve :

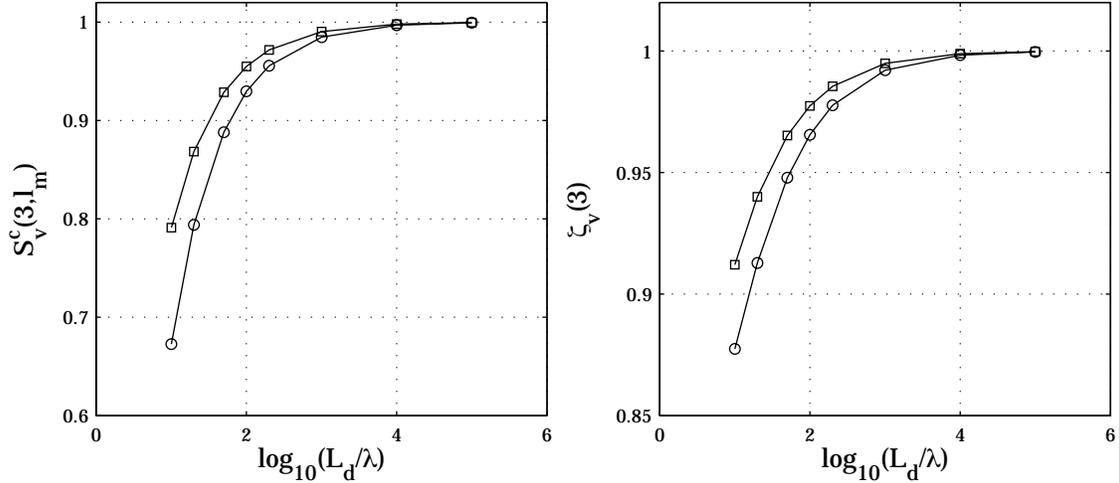


FIG. 14.8 – Valeurs maximales de  $S_v^c(3, l)$  et exposants  $\zeta_v(3)$  prédits par les modélisations correspondant à la turbulence en déclin homogène (13.10) (o) et à la turbulence de jet (14.3) (□).

$\zeta_v(3) \simeq 0.967$ . Cette valeur est relativement proche de 1, et est plus proche de la valeur prédite par la modélisation (14.3) en turbulence de jet que de celle prédite par la modélisation (13.10) en turbulence homogène.

On retrouve donc bien, comme dans la cas de la discussion effectuée sur la turbulence forcée, que la fonction de structure d'ordre 3 est sensible, pour les échelles inertielles, à la nature même de l'écoulement turbulent considéré. Le terme correctif effectif aux échelles proches de l'échelle de décorrélation prend en effet des expressions différentes selon la nature de l'écoulement, et son influence, par exemple sur la valeur de l'exposant  $\zeta_v(3)$ , est claire.

## 14.4 Conclusion et perspectives

Cette étude numérique des fonctions de structure d'ordre 3 correspondant à deux écoulements turbulents différents, l'un homogène, l'autre pas, aboutit à plusieurs résultats jugés intéressants. Tout d'abord, elle permet de valider avec un bon accord la modélisation proposée (13.10) pour la fonction de structure d'ordre 3 des écoulements turbulents homogènes (turbulence de tunnel, données de Modane). Les paramètres libres de l'ajustement effectué sont en effet en bon accord avec les prédictions de ce modèle.

De plus, l'ajustement de cette modélisation sur des données d'écoulements non homogènes (turbulence de jet, données de l'ÉNSL), montre que, même si la forme fonctionnelle semble en assez bon accord, la valeur d'un des paramètres d'ajustement ne correspond pas aux prédictions. Ce résultat est cohérent, car la modélisation proposée correspond à de la turbulence homogène, et c'est bien le paramètre concernant la nature de l'écoulement qui est affecté.

Il est donc explicitement montré que la fonction de structure d'ordre 3, pour les échelles inertielles, est notablement affectée par la finitude du nombre de Reynolds, mais aussi par la nature de l'écoulement turbulent étudié. Ce commentaire se répercute bien sûr pour l'exposant  $\zeta_v(3)$ , dont

la valeur dépend explicitement non seulement du rapport de l'échelle de Taylor  $\lambda$  à l'échelle de décorrélation  $L_d$ , mais aussi de la nature particulière de l'écoulement (turbulence homogène ou non).

Le terme correctif non stationnaire n'a été analytiquement obtenu que dans le cas de la turbulence homogène, et l'on s'est ici contenté d'un modèle semi-empirique pour la turbulence de jet. Le travail ici présenté appelle donc à être poursuivi, afin de décliner le calcul de ce terme non-stationnaire pour d'autres types d'écoulements turbulents, caractérisés par d'autres propriétés de symétrie.



Cinquième partie

Conclusions et perspectives



Ce mémoire de thèse propose une lecture de la description des signaux, synthétiques ou réels, par leurs propriétés de régularité ponctuelle (c'est l'analyse multifractale), ainsi que de leur analyse à travers les échelles qui y est associée. Cette (re)lecture est abordée sous plusieurs angles, tant d'un point de vue conceptuel, en discutant précisément les rouages des formalismes multifractals utilisés, en particulier le récent formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants, en proposant des modélisations pour le comportement à travers les échelles de la fonction de structure d'ordre 3 des signaux de vitesse turbulente, que d'un point de vue pratique, en étudiant numériquement le comportement des outils employés, notamment en caractérisant l'effet de linéarisation associé aux estimateurs des exposants  $\zeta(q)$ , pour les signaux définis sur  $\mathbb{R}$  ou sur  $\mathbb{R}^d$ . Un important travail de développement de codes informatiques a ainsi été effectué. L'un des soucis constants de ce travail de thèse a été la bonne compréhension des outils de *traitement de signal* utilisés, afin d'en faire un usage adéquat et bien contrôlé sur des signaux réels issus du domaine de la *physique*, en l'occurrence des données de turbulence pleinement développée.

La première partie de cet exposé a ainsi eu pour objet la description d'un nouveau formalisme multifractal, le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants. Ce dernier, très récemment introduit par S. Jaffard [73], a été mis en oeuvre numériquement pour la première fois à l'occasion de ce travail de thèse, en étroite collaboration avec S. Jaffard [4, 95, 74]. La construction et le fonctionnement de ce formalisme ont été soigneusement analysés, commentés et discutés, en comparaison au formalisme multifractal "classique", basé sur les coefficients d'ondelette discrets. Les avantages apportés par l'utilisation des coefficients dominants (mesure de la totalité du spectre de singularités des signaux analysés et validité pour une large classe de fonctions multifractales, y compris celles contenant des singularités oscillantes) ont ainsi pu être dégagés et illustrés simplement.

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants a ensuite été caractérisé numériquement, en analysant deux processus multifractals synthétiques, la cascade d'ondelette aléatoire [17] et la série d'ondelette aléatoire [21, 22]. Notons que ce dernier processus, décrit il y a peu par J.-M. Aubry et S. Jaffard, a permis une approche numérique inédite, puisque ce processus multifractal est l'un des premiers à ne pas être construit à l'aide d'une cascade multiplicative, et possède la particularité de contenir presque partout des singularités oscillantes. Les avantages du formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants ont ainsi pu être caractérisés numériquement, en montrant notamment la portée plus réduite du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets. Ces résultats ont été comparés au formalisme multifractal basé sur les coefficients mmto [16, 11], qui avait justement été construit afin d'effectuer la mesure complète du spectre de singularités. Ces derniers résultats ne se sont que préliminaires, mais une étude numérique systématique, récemment entreprise en collaboration avec S. Roux [149], va permettre de discuter plus finement les avantages relatifs de chaque formalisme multifractal.

Une discussion sur la possible détection de singularités oscillantes dans les signaux analysés a été initiée. Il a ainsi été montré que la comparaison des résultats fournis par l'usage des formalismes multifractals basés sur les coefficients d'ondelette discrets ou sur les coefficients dominants pouvait permettre de déceler la présence de singularités oscillantes. En revanche, il n'est pas possible avec cette méthode de conclure à l'absence de telles singularités. La question de la détection de singularités oscillantes, par exemple dans le cas de signaux de vitesse turbulente, pour laquelle ce travail ne décrit qu'une réponse partielle, demande donc à être explorée plus profondément.

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants a ensuite été appliqué à des données réelles, issues d'expériences de turbulence pleinement développée, mettant ainsi en évidence le nécessaire soin qu'il faut apporter pour l'utilisation de cet outil. Ainsi, il est clairement montré

qu'il n'est pas forcément possible d'effectuer, à l'aide de ce formalisme (mais aussi de celui basé sur les coefficients mmto), l'analyse multifractale de données de turbulence qui sont caractérisées par une gamme d'échelles inertielles trop peu étendue, correspondant à des nombres de Reynolds  $R_\lambda$  peu élevés. De plus, la méthode est apparue très sensible au bruit expérimental en ce qui concerne la mesure de la partie droite du spectre de singularités. La mesure (complète) du spectre de singularités n'a ainsi pu être effectuée que sur un jeu de données, et les résultats obtenus demandent à être confirmés par l'obtention de résultats sur d'autres données. Il faudra pour cela étudier et caractériser précisément l'effet de la taille de la gamme d'échelles inertielles, ainsi que l'influence du bruit sur la méthode.

La deuxième partie de cet ouvrage s'est attachée à la caractérisation numérique des estimateurs des exposants  $\zeta(q)$  des fonctions de structure, lors de l'analyse multifractale de signaux. L'éventuel caractère multifractal se traduit par un comportement non-linéaire de ces exposants, et l'idée que ce comportement non-linéaire doit être observé pour tous les ordres  $q$  est assez répandue. Néanmoins, une étude systématique des estimateurs employés, s'appuyant sur des résultats théoriques [119, 120, 136, 137], a montré que ce n'était pas le cas : la mesure des exposants  $\zeta(q)$  est sujette à un *effet de linéarisation*, caractérisé par l'existence d'un ordre critique  $q_*^+$  (en se limitant aux ordres  $q$  positifs) au delà duquel les estimateurs se comportent linéairement en fonction de l'ordre  $q$ . Cet effet de linéarisation a été caractérisé numériquement de façon systématique (large panel de processus multifractals, divers formalismes multifractals, signaux de résolution et de durée variables), et un estimateur de l'ordre critique  $q_*^+$  construit. Il a en particulier été montré que l'effet de linéarisation n'était pas dû à un défaut de statistique, mais était un aspect intrinsèque de l'estimation des exposants  $\zeta(q)$ . L'extension de l'effet de linéarisation aux valeurs négatives de l'ordre  $q$  a aussi été discutée.

Une autre question délicate, reliée à la précédente, concerne la situation, assez courante en pratique, où l'on n'a seulement accès à des signaux définis par une coupe géométrique du phénomène étudié. C'est le cas par exemple pour un grand nombre d'expériences de turbulence pleinement développée, où un profil spatial à une dimension de la vitesse est mesuré, alors que le phénomène physique évolue lui dans un espace à trois dimensions. Cette problématique a été abordée elle-aussi de façon numérique, et a montré que l'utilisation de formalismes multifractals pour les coupes géométriques ne pouvait permettre de mesurer l'intégralité du spectre de singularités du phénomène étudié (on parle alors d'effet de coupe).

Tous ces résultats [90, 91, 93, 92, 4], obtenus à l'aide de processus multifractals synthétiques, ont alors permis une relecture intéressante des mesures d'exposants  $\zeta(q)$  sur des données de turbulence pleinement développée [94, 89]. Il a en particulier été mis en évidence que l'effet de linéarisation et l'effet de coupe sont observés sur les données de turbulence (profils de vitesse eulérienne à une dimension et champs de dissipation à trois dimensions) exactement de la même façon que sur les signaux multifractals synthétiques. L'ordre critique  $q_*^+$  correspondant aux données de vitesse eulérienne à une dimension a été estimé,  $q_*^+ \simeq 7.5$ , sans dépendance apparente avec le nombre de Reynolds  $R_\lambda$ .

Enfin, dans la dernière partie de ce mémoire, a été abordée la problématique suivante. Les exposants  $\zeta_v(q)$ , des fonctions de structure des signaux de vitesse de turbulence pleinement développée, sont souvent qualifiés d'*universels*, c'est-à-dire indépendants de l'expérience particulière à partir de laquelle ils sont mesurés. Cette universalité correspond en fait à la limite des nombres de Reynolds infinis, cadre classiquement utilisé en turbulence depuis les travaux fondateurs de Kolmogorov [84, 83]. Ce cadre prédit notamment la valeur de l'exposant d'ordre 3 :  $\zeta_v(3) = 1$ . Les expériences

de turbulence ne correspondent pas à cette limite, et il est nécessaire de prendre en compte la valeur nécessairement finie du nombre de Reynolds  $R_\lambda$ . En particulier, les mesures de  $\zeta_v(3)$  ne fournissent pas la valeur 1, et ce sont les exposants  $\zeta_v(q)$  renormalisés par  $\zeta_v(3)$  (i.e. les  $\zeta_v(q)/\zeta_v(3)$ ) qui semblent universels, non les  $\zeta_v(q)$  [10]. L'étude de l'exposant  $\zeta_v(3)$  semble donc offrir la possibilité d'inférer les effets de la finitude du nombre de Reynolds.

À la suite de travaux portant sur l'influence de la finitude du nombre de Reynolds sur la fonction de structure d'ordre 3 [96, 97, 59, 60, 47, 6, 46, 171, 118], il a été discuté une modélisation de cette quantité pour les échelles inertielles, ne faisant intervenir aucune relation phénoménologique entre échelles caractéristiques, afin de décrire avec le plus de précision possible cette fonction de structure, dans le cas de la turbulence en déclin homogène. Cette modélisation est composée d'un terme prédominant, correspondant à la loi des 4/5 de Kolmogorov [83], et de deux termes correctifs, l'un universel et effectif aux plus petites échelles inertielles (terme correctif dissipatif), l'autre non universel et effectif aux plus grandes échelles inertielles (terme correctif non stationnaire). Le lien entre cette modélisation et l'exposant  $\zeta_v(3)$  a alors été réalisé, aboutissant à des prédictions quant-à la valeur de cet exposant, tenant compte des corrections universelles et non universelles. Cette modélisation a été théoriquement comparée avec une modélisation semblable correspondant à de la turbulence forcée, mettant bien en évidence que le terme correctif non stationnaire, qui est non universel, influence notablement la fonction de structure d'ordre 3 et son exposant  $\zeta_v(3)$ .

La modélisation proposée a ensuite été confrontée à deux jeux de données expérimentales, l'un correspondant à de la turbulence en déclin homogène, l'autre à de la turbulence en déclin non homogène. La modélisation étudiée s'est avérée tout-à-fait pertinente pour la turbulence en déclin homogène, et le caractère non universel de la modélisation, dû au terme correctif non stationnaire, est en particulier clairement influent. Ce terme dépendant explicitement de la nature de l'écoulement (turbulence en déclin homogène ou non), il est de plus montré à partir des données expérimentales que son expression varie bien en fonction de la nature de l'écoulement. L'influence prédite sur la valeur de l'exposant  $\zeta_v(3)$  a été vérifiée. Enfin, une modélisation semi-empirique, toujours pour la fonction de structure d'ordre 3 et son exposant, a été proposée pour la turbulence en déclin non homogène.

Ce travail, qui a cherché à inclure des effets de taille finie (finitude du nombre de Reynolds) dans l'expression de la fonction de structure d'ordre 3 et de son exposant, met clairement en évidence le caractère non universel de ces grandeurs. Il demande bien sûr à être complété, par exemple par l'obtention de modélisations dans d'autres situations que celle de la turbulence en déclin homogène.



## Annexe A

# Échelles caractéristiques de la turbulence pleinement développée

La turbulence pleinement développée est notamment caractérisée par l'existence de structures sur toute une gamme d'échelles. Il existe plusieurs échelles caractéristiques [27, 121, 163, 58] pour ce phénomène physique. Ces échelles sont définies dans cette annexe, et des expressions les reliant en faisant intervenir les nombres de Reynolds sont données.

### A.1 Les échelles intégrales : $L_d$ , $L_{int}$ , $L_K$

Il y a en pratique plusieurs façons de définir la "grande échelle" en turbulence pleinement développée : les échelles de décorrélation  $L_d$  et intégrale  $L_{int}$  construites à partir de la fonction de corrélation de la vitesse, ou l'échelle intégrale de Kolmogorov  $L_K$ , construite sur un raisonnement dimensionnel. Ce paragraphe les définit et explicite les liens qui existent entre elles.

Dans le cadre de ce mémoire, seule l'échelle de décorrélation est en fait utilisée. Elle sera d'ailleurs parfois abusivement appelée échelle intégrale.

#### Échelle de décorrélation $L_d$

L'échelle de décorrélation est définie comme l'échelle à laquelle la vitesse se décorrèle. Cette définition n'est bien sûr pas facile à utiliser en pratique, sauf si on modélise la fonction de corrélation de la vitesse  $C_v(l)$ . Une bonne approximation de cette dernière, pour les échelles de la zone inertielle et pour les échelles plus grandes que ces dernières, est donnée par (cf. le paragraphe 1.1.1 ou encore [58]) :

$$C_v(l) \simeq \begin{cases} 1 - \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta(2)} & \text{si } l \leq L_d \\ 0 & \text{si } l \geq L_d \end{cases} .$$

On peut alors déterminer l'échelle de décorrélation  $L_d$  à l'aide de ce modèle sur les données, en effectuant un ajustement sur la fonction de structure d'ordre 2  $S_v(2, l)$  par deux modèles linéaires dans un diagramme log-log : en effet, selon ce modèle, puisque  $S_v(2, l) = 2\sigma^2(1 - C_v(l))$ ,  $S_v(2, l)$  s'écrit :

$$S_v(2, l) \simeq \begin{cases} 2\sigma^2 \left(\frac{l}{L_d}\right)^{\zeta(2)} & \text{si } l \leq L_d \\ 2\sigma^2 & \text{si } l \geq L_d \end{cases} .$$

C'est ce qui sera fait au chapitre 13.

## Échelle intégrale $L_{int}$

L'échelle intégrale à proprement parler est définie en turbulence de la façon suivante. Si  $C_v(l)$  est la fonction de corrélation de la vitesse, alors on définit l'échelle intégrale  $L_{int}$  selon :

$$L_{int} = \int_0^\infty dl C_v(l). \quad (\text{A.1})$$

Numériquement, cette échelle est de l'ordre de grandeur de la taille de l'écoulement turbulent étudié.

En supposant que la modélisation précédente de la fonction de corrélation ( $C(l) = 1 - \left(\frac{l}{L_d}\right)^{2/3}$  pour  $l \leq L_d$  et  $C(l) = 0$  sinon) soit valide, on a alors :

$$L_{int} = \frac{2}{5}L_d.$$

Les deux échelles sont donc du même ordre de grandeur, l'échelle intégrale étant légèrement plus petite que l'échelle de décorrélation. C'est pourquoi dans la description multifractale, on désigne souvent l'échelle de décorrélation par échelle intégrale. Cet abus de langage est d'ailleurs souvent utilisé dans ce mémoire.

Notons enfin que c'est cette définition qui est souvent utilisée, notamment par les expérimentateurs, car elle ne suppose aucun modèle pour la fonction de corrélation.

## Échelle intégrale de Kolmogorov $L_K$

Cette échelle, bâtie elle-aussi pour définir la "grande" échelle d'un écoulement turbulent, est définie selon un raisonnement dimensionnel : les seules grandeurs physiques dont on dispose pour construire une longueur caractéristique de l'écoulement à grande échelle, donc sans tenir compte de la viscosité  $\nu$ , sont l'écart-type de la vitesse  $\sigma$  et la puissance moyenne dissipée par unité de masse  $\epsilon$ . On définit donc l'échelle intégrale de Kolmogorov  $L_K$  selon :

$$L_K = \frac{\sigma^3}{\epsilon}. \quad (\text{A.2})$$

En pratique, cette échelle est numériquement très proche de l'échelle intégrale  $L_{int}$ .

## Échelle de forçage $L_f$

S'il existe un processus d'injection d'énergie dans le phénomène turbulent à grande échelle, celui-ci s'opère à une échelle dite de forçage  $L_f$ . Celle-ci conditionne alors directement (dans le cas où il s'est établi un régime stationnaire) les échelles intégrales que l'on vient de définir.

Sans discuter plus en avant ce point, nous supposons dans la suite de cet exposé qu'elles sont du même ordre de grandeur.

## A.2 L'échelle de Taylor $\lambda$

L'échelle de Taylor, notée  $\lambda$ , caractérisant les fluctuations de vitesse à plus petite échelle que les échelles intégrales précédentes, est définie selon :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\mathbb{E} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}}, \quad (\text{A.3})$$

où  $\mathbb{E} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$  est la variance de la dérivée spatiale (longitudinale) de la vitesse, puisque sa moyenne est nulle.

L'échelle de Taylor est reliée à la *puissance moyenne dissipée par unité de masse*,  $\epsilon$ , sous l'hypothèse de turbulence isotrope [86, 121, 58] par la relation :

$$\epsilon = 15\nu \frac{\sigma^2}{\lambda^2}.$$

### A.3 L'échelle de Kolmogorov $\eta$

Enfin, on définit l'*échelle de Kolmogorov*  $\eta$ , qui caractérise l'échelle à partir de laquelle les effets dissipatifs deviennent prédominants. Elle est définie de façon dimensionnelle : c'est l'échelle que l'on peut construire lorsqu'on s'intéresse aux effets dissipatifs, c'est-à-dire à partir de la puissance moyenne dissipée  $\epsilon$  et de la viscosité cinématique  $\nu$  :

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}.$$

### A.4 Les nombres de Reynolds $R_e$ et $R_\lambda$

Le caractère "plus ou moins" turbulent des écoulements considérés est en pratique quantifié par les nombres de Reynolds  $R_e$  et  $R_\lambda$ .

#### Nombre de Reynolds $R_e$

On définit le *nombre de Reynolds*  $R_e$ , nombre adimensionné, à partir des valeurs caractéristiques de l'écoulement turbulent à grande échelle, c'est-à-dire l'écart-type de la vitesse  $\sigma$ , l'échelle intégrale de Kolmogorov  $L_K$  (cf. le paragraphe A.1), et la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide :

$$R_e = \frac{\sigma L_K}{\nu}. \quad (\text{A.4})$$

Le nombre  $R_e$  est donc construit de façon purement dimensionnelle.

#### Nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor $R_\lambda$

Dans le cadre de cette thèse, on utilise plutôt le *nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor*,  $R_\lambda$ , et donc plus adapté que le nombre de Reynolds  $R_e$  pour la description des signaux expérimentaux.

Le nombre de Reynolds basé sur l'échelle de Taylor  $R_\lambda$  est défini selon :

$$R_\lambda = \frac{\sigma \lambda}{\nu}. \quad (\text{A.5})$$

#### Relation entre $R_e$ et $R_\lambda$

Ces deux nombres sont bien sûr reliés. La relation découle des liens entre  $L_K$ ,  $\lambda$  et  $\epsilon$ , puisque l'on a :  $L_K = \frac{\sigma^3}{\epsilon}$  et  $\epsilon = 15\nu \frac{\sigma^2}{\lambda^2}$  dans le cas de la turbulence isotrope. On aboutit donc à :  $L_K = \frac{\sigma}{15\nu\lambda^2}$  et ainsi à :

$$R_e = \frac{R_\lambda^2}{15}.$$

## A.5 Liens entre ces échelles

Les différentes échelles précédemment définies sont liées entre elles par des relations faisant intervenir les nombres de Reynolds. On ne discutera que le lien entre l'échelle de Taylor  $\lambda$  et l'échelle de décorrélation  $L_d$ , puisque c'est la seule relation entre échelles utilisée dans ce mémoire de thèse.

### Échelles de Taylor et de décorrélation

Puisque l'échelle intégrale de Kolmogorov est définie à partir de  $\sigma^2$  et  $\epsilon$ , on peut la relier à l'échelle de Taylor selon :

$$L_K = \frac{\sigma \lambda^2}{15\nu},$$

et donc :

$$\frac{L_K}{\lambda} = \frac{R_\lambda}{15}. \quad (\text{A.6})$$

Si on utilise de plus le fait que  $L_K \simeq L_{int}$  et que l'on suppose que l'on a  $L_{int} = \frac{2}{5}L_d$ , on obtient alors la relation suivante entre  $L_d$  et  $\lambda$  :

$$\frac{L_d}{\lambda} = \frac{R_\lambda}{6}. \quad (\text{A.7})$$

## Annexe B

# Transformées en ondelette

Cette annexe va s'attacher à décrire de façon succincte les transformées en ondelette, en introduisant les notions et les résultats essentiels à la compréhension de ce mémoire de thèse. Les transformées en ondelette ont de multiples applications, mais seule leur capacité à caractériser les propriétés de régularité ponctuelle (cf. le chapitre 3.3) est utilisée dans le cadre de ce travail de thèse. Le lecteur pourra consulter, pour une introduction complète et détaillée aux transformées en ondelette ainsi qu'à leurs applications, les ouvrages [103, 164, 117, 1].

Notons que tous les codes informatiques utilisés ont été développés en collaboration avec l'équipe Sisyphe du laboratoire de Physique de l'ÉNSL de Lyon, notamment P. Abry et S. Roux.

### B.1 Définition

#### Représentation temps-échelle

Comme il a été mis en évidence dans le chapitre 1, l'analyse de certains signaux  $f(t)$ , par exemple une réalisation de marche aléatoire, nécessite de définir une quantité que l'on appelle *échelle*, et que l'on introduit par l'intermédiaire des accroissements :  $\delta_f(t, a) = f(t + a\tau_0) - f(t)$ , où  $\tau_0$  est une constante, et  $a$  le rapport d'échelle, que l'on appellera souvent abusivement simplement *échelle*. La caractérisation du signal  $f(t)$  ne se fait donc pas seulement dans le temps, mais dans un espace à deux dimensions : le plan temps-échelle. L'idée à l'origine de la transformée en ondelette est de construire une décomposition des signaux dans le plan temps-échelle, c'est-à-dire selon des "atomes" bien localisés autour d'une date  $t$  et d'un rapport d'échelle  $a$ .

#### Ondelette

La transformée en ondelette se définit donc à partir de ces "atomes", que l'on appelle *ondelettes* et que l'on notera  $\psi_{a,t}(u)$ , signifiant ainsi qu'elles sont associées à l'échelle  $a$  et à la date  $t$ . Ces ondelettes sont toutes obtenues à partir d'une unique fonction  $\psi_0(t)$ , appelée ondelette-mère, à l'aide d'une dilatation en échelle, d'un rapport  $a$ , et d'une translation en temps, à la date  $t$  :

$$\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{a} \psi_0 \left( \frac{u - t}{a} \right).$$

La norme adoptée pour les ondelettes est ici la norme  $L^1$ , puisque si  $\int |\psi_0| = 1$ , alors  $\int |\psi_{a,t}| = 1$ .

### Transformée en ondelette

La transformée en ondelette est alors définie par les coefficients d'ondelette  $c_f(a, t)$  comme le produit scalaire de la fonction  $f$  étudiée contre l'ondelette  $\psi_{a,t}(u)$  :

$$c_f(a, t) = \langle f, \psi_{a,t} \rangle = \int_{\mathbb{R}} dt f(u) \psi_{a,t}(u).$$

### Condition d'admissibilité et nombre de moments nuls

Pour que la transformée en ondelette soit bien définie, il faut que l'ondelette-mère respecte la condition suivante, appelée condition forte d'admissibilité :

$$\int d\nu \frac{|\tilde{\psi}_0(\nu)|^2}{\nu} < +\infty.$$

où  $\tilde{\psi}_0(\nu)$  est la transformée de Fourier de  $\psi_0(t)$ .

La condition d'admissibilité implique notamment que  $\tilde{\psi}_0(0) = 0$ , soit encore :

$$\int dt \psi_0(t) = 0.$$

La fonction  $\psi_0(t)$  est ainsi de moyenne nulle, d'où sa dénomination. La condition précédente est parfois appelée condition faible d'admissibilité. On se contente souvent de cette condition en pratique pour définir des ondelettes.

De manière générale, l'ondelette  $\psi_0(t)$  est caractérisée par son nombre de moments nuls  $N$ , avec  $N \geq 1$  :

$$\int dt t^k \psi_0(t) = 0, \quad k = 0..(N - 1).$$

Cette caractéristique de l'ondelette-mère est très importante lorsqu'il est fait usage des coefficients d'ondelette pour caractériser les propriétés de régularité ponctuelle de la fonction  $f$  (cf. chapitre 5 et l'annexe E).

Notons enfin que la dérivée d'une ondelette est aussi une ondelette. En effet, si l'ondelette  $\psi_0$  est à support borné, ou tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$ , ce qui est toujours le cas en pratique (par exemple les ondelette des Daubechies - cf. le paragraphe B.2.2 - ont un support borné), alors  $\int dt \psi_0'(t) = 0$  :  $\psi_0'(t)$  vérifie bien la condition faible d'admissibilité.

De même, si  $\psi_0(t)$  est une ondelette avec  $N \geq 2$  moments nuls, alors la primitive de  $\psi_0(t)$ ,  $\psi_0^p(t)$ , est aussi une ondelette, puisque une intégration par partie fournit (on suppose pour simplifier que l'ondelette  $\psi_0$  a un support borné) :  $\int dt \psi_0^p(t) = -\int dt t \psi_0(t) = 0$ .

### Filtre et échelle associés à une ondelette

Puisque les coefficients d'ondelette sont définis par un produit de convolution :

$$c_f(a, t) = \int_{\mathbb{R}} dt f(u) \psi_{a,t}(u) = \int_{\mathbb{R}} dt f(u) \frac{1}{a} \psi_0\left(\frac{u-t}{a}\right),$$

---

<sup>1</sup>On peut aussi définir ces ondelettes avec la norme  $L^2$  :  $\psi_{a,t}(u) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_0\left(\frac{u-t}{a}\right)$ , et alors, si  $\int |\psi_0|^2 = 1$ , on a  $\int |\psi_{a,t}|^2 = 1$ .

on a une interprétation en terme de filtrage linéaire la transformée en ondelette, le filtre linéaire étant l'ondelette elle-même. La condition d'admissibilité  $\int d\nu \frac{|\tilde{\psi}_0(\nu)|^2}{\nu} < +\infty$  impose alors que ce filtre soit un filtre passe-bande. On peut alors définir la fréquence centrale  $f_{\psi_{a,t}}$  de ce filtre (il suffit d'étudier la transformée de Fourier de l'ondelette), et en déduire alors l'échelle  $T_{\psi_{a,t}}$  associée à cette ondelette par :

$$T_{\psi_{a,t}} = 1/f_{\psi_{a,t}}.$$

Si l'échelle  $T_0$  est associée à l'ondelette-mère, alors les échelles associées aux ondelettes  $\psi_{a,t}$  s'en déduisent grâce au rapport d'échelle  $a$  :

$$T_{\psi_{a,t}} = aT_0.$$

## B.2 Transformées en ondelette continue et discrète

Il existe une multitude d'ondelettes-mère  $\psi_0(t)$ , définissant autant de transformées en ondelette. Ces transformées en ondelette sont généralement divisées en deux classes, les transformées en ondelette *continues*, et les transformées en ondelette *discrètes*.

### B.2.1 Transformée en ondelette continue

Si l'on n'ajoute pas de contrainte supplémentaire à la transformée en ondelette qui vient d'être définie, on peut choisir de façon continue les dates  $t$  et les rapports d'échelles  $a$  (i.e.  $t \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}^+$ ). La transformée en ondelette est alors dite *continue*. On notera  $c_f(a, t)$  les coefficients correspondants.

#### Ondelette gaussiennes

Une famille d'ondelette couramment utilisée pour définir une transformée en ondelette continue est celle formée par les dérivées d'ordre  $N$  de la gaussienne :

$$\psi_0(t) = \frac{d^N}{dt^N} e^{-t^2/2}.$$

L'ondelette ainsi définie possède alors  $N$  moments nuls. Notons que toutes ces ondelettes sont bien sûr  $C^\infty$ .

L'ondelette obtenue par la dérivée seconde de la gaussienne est représentée sur la figure B.1, à gauche.

### B.2.2 Transformée en ondelette discrète et analyse multi-résolution

L'information fournie par les coefficients  $c_f(a, t)$  est alors très riche, et l'on obtient une représentation redondante de la fonction  $f$ . On peut alors se demander s'il n'est pas possible, en n'utilisant qu'un nombre restreint des coefficients  $c_f(a, t)$ , c'est-à-dire en réalisant un échantillonnage de ces coefficients dans le plan temps-échelle, de garder toute l'information sur le signal  $f$ , et ainsi construire une représentation de  $f$  plus efficace.

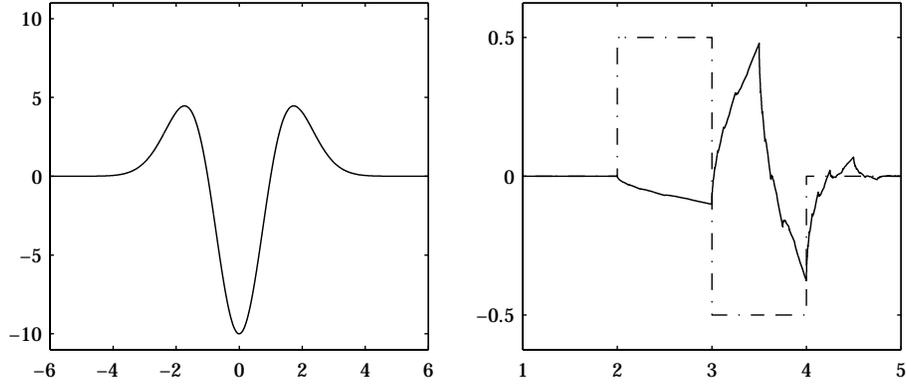


FIG. B.1 – **Gauche** : dérivée seconde de la gaussienne (2 moments nuls). **Droite** : ondelettes de Daubechies à 1 moment nul, ou ondelette de Haar (trait en pointillé) et à 2 moments nuls (trait continu). Les unités sont arbitraires.

### Définition

Cela est possible avec un type particulier de transformée en ondelette, la *transformée en ondelette discrète*, pour laquelle les coefficients, notés  $d_f(j, k)$ , ne sont calculés que sur un ensemble discret de dates et d'échelles :  $a = 2^j$ , et  $t = k2^j$ , avec  $j \in \mathbb{Z}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , et les ondelettes correspondantes  $\psi_{j,k}$  forment une base orthogonale de  $L^2(\mathbb{R})$  (et même orthonormée si l'on choisit la norme  $L^2$  pour les ondelettes  $\psi_{j,k}$ ). On obtient ainsi une représentation non-redondante de la fonction  $f$ . L'ensemble des dates et échelles utilisées,  $a = 2^j$ , et  $t = k2^j$ , sont réparties selon une *grille dyadique* dans le plan temps-échelle (cf. figure B.2).

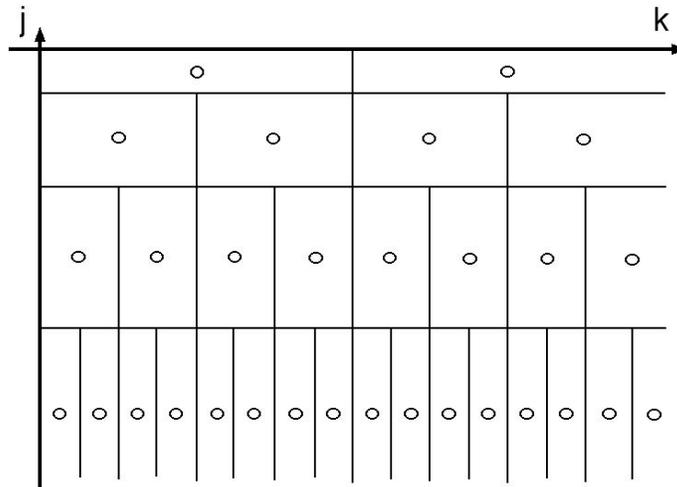


FIG. B.2 – **Plan temps-échelle et grille dyadique**. Chaque rond représente un couple  $(2^j, k2^j)$ .

## Analyse multi-résolution

À cette transformée en ondelette discrète est associée une *analyse multi-résolution* [102, 115], qui définit une base orthonormée de l'ensemble fonctionnel  $L^2(\mathbb{R})$ , à partir d'espaces d'*approximation*  $V_j$  et de *détail*  $W_j$ , repérés par l'octave  $j$  ( $= \log_2 a$ ). La projection de la fonction  $f$  sur  $V_j$  sera l'approximation de  $f$  à l'échelle  $2^j$ , et celle sur  $W_j$  les détails de  $f$  à l'échelle  $2^j$ . Chaque espace de détail  $W_j$  contient ainsi toutes les fonctions colinéaires aux ondelettes  $\psi_{j,k}$ .

Le principe de l'analyse multi-résolution consiste à construire ces espaces selon le schéma itératif suivant : l'approximation à l'échelle  $2^j$  se décompose en deux parties, l'approximation à l'échelle plus grossière  $2^{j+1}$ , et les détails, toujours à l'échelle  $2^{j+1}$ , et ce de façon orthogonale :

$$V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}.$$

Des sous-espaces de  $L^2(\mathbb{R})$ , orthogonaux entre eux, sont ainsi emboîtés, l'espace d'approximation d'échelle  $2^j$  contenant toutes les approximations et tous les détails d'échelles  $2^{j'}$  plus fines (i.e.  $j' < j$ ). On a ainsi :

$$L^2(\mathbb{R}) = V_j \oplus \left\{ \bigoplus_{j' \leq j} W_{j'} \right\}.$$

Il est de même défini une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$  sur les seuls espaces de détails  $W_j$ , ce qui correspond à la formule précédente dans la limite  $j \rightarrow +\infty$  :

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{j=+\infty} W_j.$$

Les coefficients d'ondelette discrets  $2^{j/2}d_f(j, k)$  (c'est-à-dire les coefficients d'ondelette discrets définis en utilisant la norme  $L^2$  pour les ondelettes discrètes) sont les composantes de la fonction  $f$  sur la base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$  formée par les  $\{\psi_{j,k}\}$ .

## Algorithme rapide de Mallat

Supposons désormais que  $f$  est connue par l'intermédiaire d'échantillons régulièrement espacés, que l'on note  $f(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et posons-nous la question du calcul pratique de ses coefficients  $d_f(j, k)$ .

Si l'on connaît l'approximation de  $f$  à l'échelle  $2^j$ , alors on peut connaître l'approximation et les détails à l'échelle  $2^{j+1}$ , puisque :  $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$ . La décomposition de la projection de  $f$  sur  $V_j$  selon  $V_{j+1}$  et  $W_{j+1}$  se fait bien sûr par projection, ce qui en revient en pratique à effectuer un filtrage linéaire par deux filtres discrets  $g$  et  $h$ , l'un pour  $V_{j+1}$  et l'autre pour  $W_{j+1}$ . Il suffit alors de filtrer une nouvelle fois la composante sur  $V_{j+1}$  pour obtenir les coefficients à l'échelle plus grossière suivante ( $j + 2$ ).

Mallat a introduit un algorithme de calcul rapide basé sur ce schéma itératif [102, 103], qui présente l'avantage d'avoir un coût de calcul très faible, et qui est très efficace d'un point de vue numérique. On ne détaillera pas plus ici cet algorithme, en renvoyant aux références [102, 103, 1, 117], qui a été implémenté avec le logiciel Matlab.

## Reconstruction d'une fonction à partir de ses coefficients d'ondelette discrets

Puisque la transformée d'ondelette discrète définit une base de  $L^2(\mathbb{R})$ , la connaissance des composantes d'une fonction  $f$  sur cette base est équivalente à la connaissance de la fonction  $f$  elle-même.

Ces composantes sont reliées aux coefficients d'ondelette discrets  $d_f(j, k)$  : ce sont précisément les  $2^{j/2}d_f(j, k)$ . Il est ainsi possible de définir la fonction  $f$  à partir de ses coefficients d'ondelette discrets  $d_f(j, k)$  (les processus de cascade d'ondelette aléatoire et de série d'ondelette aléatoire sont définis ainsi) :

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_f(j, k) \psi_0(2^{-j}t - k). \quad (\text{B.1})$$

Cette reconstruction se fait d'un point de vue pratique avec un algorithme analogue à celui utilisé pour le calcul des coefficients  $d_f(j, k)$ , qui est donc très efficace.

### Transformées en ondelette discrète sur $\mathbb{R}^d$

On définit de même une transformée en ondelette discrète pour les signaux  $f$  définis sur  $\mathbb{R}^d$  (et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ), toujours associée à une analyse multi-résolution [103, 117]. Ainsi, pour chaque échelle  $2^j$  sont définis un espace d'approximation  $V_j$  ainsi que  $(2^d - 1)$  espaces de détails  $W_{j,m}$ , avec  $m = 1..(2^d - 1)$ , et donc  $(2^d - 1)$  coefficients d'ondelette discrets  $d_f(j, k, m)$ . Par exemple, si  $d = 2$ , on a à chaque échelle 3 coefficients de détails pour la fonction  $f$ .

L'algorithme rapide de Mallat se généralise à  $\mathbb{R}^d$  [103, 117], qui permet ainsi d'effectuer une analyse en ondelette de signaux définis sur  $\mathbb{R}^d$  à un faible coût informatique. On n'entrera pas non-plus dans les détails de ces algorithmes, dont on utilise des versions, à 2 et 3 dimensions, implémentées avec le logiciel Matlab.

### Les ondelettes de Daubechies

Il existe plusieurs familles d'ondelette permettant de définir une transformée d'ondelette discrète [103, 117, 164]. On utilise dans le cadre de cette thèse les ondelettes de Daubechies [48], qui possèdent la particularité suivante : elles ont un support compact, et les filtres discrets associés à l'algorithme de Mallat sont de taille minimale.

Ces ondelettes sont repérées par leur nombre de moments nuls  $N$ . L'ondelette de Daubechies à 2 moments nuls est représentée sur la figure B.1. Notons que l'ondelette de Daubechies à 1 moment nul coïncide avec l'ondelette de Haar, définie comme une différence de boîtes (cf. figure B.1), introduite au début du siècle précédent par Haar [63], qui a été le premier à utiliser les concepts de multi-résolution pour construire une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Les ondelettes de Daubechies ne sont pas très régulières (cf. figure B.1). Il n'est pas facile d'avoir accès à la régularité uniforme de ces ondelettes, mais il existe quand même quelques résultats, rapportés dans [103]. L'ondelette d'ordre 2 est uniformément höldérienne avec  $\alpha \simeq 0.55$  et celle d'ordre 3 l'est avec  $\alpha \simeq 1.08$ . Cette dernière est donc en particulier continûment dérivable. Pour les grandes valeurs d'ordre  $p$ , la régularité se comporte en  $0.2p$ .

## Annexe C

# Description multifractale de processus densité

Le travail effectué au cours de cette thèse s'est essentiellement intéressé à la description multifractale de fonctions. La notion de multifractalité a cependant été historiquement introduite (cf. par exemple [3, 11]) à partir d'une autre classe d'objets mathématiques : les mesures, que l'on appelle aussi parfois densités. Bien que cette dernière dénomination ne soit pas très appropriée, c'est celle couramment utilisée au sein de l'équipe Sisyphé, la dénomination de mesure s'appliquant à une quantité différente (cf. ci-dessous), ce qui explique qu'elle soit adoptée dans ce mémoire.

Ce type de signal est utilisé dans ce travail de thèse : en effet, le champ de dissipation d'énergie en turbulence pleinement développée se modélise, pour les échelles inertielles, comme un processus dont les réalisations sont du type densités, et non du type fonction.

Cette annexe propose une courte introduction à ce sujet. Pour plus de précisions, on pourra consulter par exemple [11, 3].

### C.1 Quelques définitions

On commence par faire quelques rappels. On pourra par exemple se reporter à [9] pour un exposé simple des notions abordées.

#### C.1.1 Densité

On appelle *densité*  $\mu$  une distribution qui pondère la droite réelle. Elle est connue par la valeur, appelée masse, qu'elle affecte à chaque sous-intervalle  $A$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\mu(A) = \int_A dt \mu(t).$$

On peut donc interpréter  $\mu$  comme une distribution, qui est une application associant à toute fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$  et à support borné, la valeur scalaire réelle :  $\int_{\mathbb{R}} dt \mu(t)f(t)$ , en prenant pour  $f$  la fonction caractéristique de  $A$ .

Cette distribution possède cependant des propriétés particulières : la valeur de  $\mu(A)$  est toujours positive. En particulier on a :  $\mu(A) \leq \mu(B)$  si  $A$  est inclus dans  $B$ .

### C.1.2 Mesure associée à une densité

On associe à toute densité  $\mu(t)$  une *mesure*  $M(t)$ <sup>1</sup>, définie à la date  $t$  comme l'intégrale de la densité  $\mu$  sur l'intervalle  $[0, t]$  :

$$M(t) = \int_0^t ds \mu(s) \quad (\text{C.1})$$

$M(t)$  est donc une fonction de  $\mathbb{R}$  dans lui-même, qui est de plus croissante.

### Coefficients d'ondelette d'une densité

En utilisant l'analogie entre les densités et les distributions, on définit les coefficients d'ondelette de la densité  $\mu$  en choisissant pour la fonction  $f$  l'ondelette utilisée (cf. par exemple [11, 147, 79]). On définit ainsi le coefficient d'ondelette discret de la densité  $\mu$  à la date  $k$  et au rapport d'échelle  $2^j$  selon :

$$d_f(j, k) = \int_{\mathbb{R}} dt \mu(t) \psi_{j,k}(t) = \int_{\mathbb{R}} dt \mu(t) \frac{1}{2^j} \psi_0(2^{-j}t - k). \quad (\text{C.2})$$

Nous verrons dans la suite l'intérêt de ces coefficients.

### C.1.3 Processus aléatoire densité

Venons-en maintenant aux densités qui sont intéressantes dans le cadre de ce travail de thèse. Ce sont les réalisations de processus aléatoires, qui sont des densités définies sur  $\mathbb{R}^d$ , et non des fonctions. L'exemple type d'un tel processus est la cascade de Mandelbrot canonique [105] (cf. l'annexe D).

Dans la suite, tout comme pour les fonctions, on notera indifféremment  $\mu$  une densité déterministe ou la réalisation particulière d'un processus aléatoire densité.

## C.2 Analyse multifractale d'une densité

### C.2.1 Régularité d'une densité

#### Régularité ponctuelle

La notion de régularité ponctuelle d'une densité est définie de la façon suivante :

$\mu \in C^\alpha(t_0)$ , avec  $\alpha > 0$  et  $t_0 \in \mathbb{R}^d$ , s'il existe des constantes  $C > 0$  et  $\delta > 0$  telles que :

$$\text{si } r \leq \delta, \mu(B(t_0, r)) \leq Cr^\alpha, \quad (\text{C.3})$$

où  $B(t_0, r)$  est une boule de rayon  $r$  centrée en  $t_0$ .

Cette définition est donc bien le pendant de la définition de régularité ponctuelle d'une fonction (cf. paragraphe 3.1.1), puisque (C.3) caractérise bien la variation ponctuelle de la densité  $\mu$ . Bien sûr, cela ne peut se faire comme avec les fonctions à l'aide d'accroissements, car la densité est une distribution, elle n'est donc connue qu'à travers des intégrales.

---

<sup>1</sup>Encore une fois, ce n'est pas la terminologie forcément utilisée dans toutes les communautés. On utilise aussi la dénomination fonction de distribution pour  $M(t)$ .

## Exposant de Hölder

On définit alors l'exposant de Hölder  $h_\mu(t_0)$  de la densité  $\mu$  au point  $t_0$  comme la régularité ponctuelle maximale au point  $t_0$  :

$$h_\mu(t_0) = \text{Sup} \{ \alpha / \mu \in C^\alpha(t_0) \}. \quad (\text{C.4})$$

## Spectre de singularités

Le spectre de singularités  $D_\mu(h)$  de la densité  $\mu$  se définit alors comme pour les fonctions : c'est la dimensions de Hausdorff (cf. le paragraphe 3.3.2) de l'ensemble iso-Hölder  $E_\mu(h)$  contenant tous les points  $t$  d'exposant de Hölder  $h$  :

$$D_\mu(h) = \text{Dim}_H \{ t / h_\mu(t) = h \}. \quad (\text{C.5})$$

On dit que la densité  $\mu$  est *multifractale* si son spectre de singularités n'est pas réduit à un point, comme pour les fonctions.

Si la densité  $\mu$  est la réalisation d'un processus aléatoire de type densité, alors on définit le spectre de singularités  $D_X(h)$  du processus aléatoire  $X$ , si pour presque chaque réalisation  $\mu$ ,  $D_\mu(h) = D_X(h)$ .

### C.2.2 Analyse multifractale

L'analyse multifractale d'une densité  $\mu$  est alors la caractérisation des propriétés de régularité ponctuelle de cette densité  $\mu$  par l'intermédiaire de son spectre de singularités  $D_\mu(h)$ . Tout comme pour les fonctions multifractales, la connaissance de l'exposant de Hölder en chaque point  $t_0$  est un objectif à la fois irréaliste d'un point de vue pratique (l'exposant de Hölder définissant une fonction discontinue) et fournirait une information trop riche pour être utilisable en pratique. La bonne information est ainsi fournie par le spectre de singularités.

Il est alors nécessaire de construire un *formalisme multifractal*, outil permettant de mesurer de façon pratique le spectre de singularités d'une densité  $\mu$ , par exemple une réalisation d'un processus aléatoire de type densité.

### C.2.3 Analyses multifractales de la densité et de la mesure

#### Analyse multifractale de la mesure

La mesure  $M(t)$  est une fonction, et l'on peut alors lui appliquer l'analyse multifractale qui a été définie pour les fonctions au chapitre 3. Cette analyse aboutit, comme pour n'importe quelle autre fonction, à la définition du spectre de singularités de  $M(t)$ , noté  $D_M(h)$ .

#### Lien entre les deux analyses multifractales

Il apparaît important ici de faire la remarque suivante. Puisque :

$$B(t_0, r) = ]t_0 - r, t_0 + r[,$$

on a :

$$\mu(B(t_0, r)) = \int_{]t_0-r, t_0+r[} dt \mu(t) = \int [0, t_0 + r[ dt \mu(t) - \int_{[0, t_0-r[} dt \mu(t) = M(t_0 + r) - M(t_0 - r).$$

La caractérisation de régularité ponctuelle (C.3) pour la *densité*  $\mu$  est donc quasiment la même que celle de régularité ponctuelle (3.1) pour la *fonction*  $M$  (on rappelle que la fonction  $M$  est croissante, et que donc :  $M(t_0 + r) - M(t_0 - r) = |M(t_0 + r) - M(t_0 - r)|$ ) lorsque  $\alpha < 1$ . La seule différence est que (3.1) utilise  $|M(t_0 + r) - M(t_0)|$ , mais on supposera ici que cela ne joue aucun rôle.

On a alors :

$$h_M(t_0) = h_\mu(t_0),$$

qui traduit l'égalité entre les coefficients de Hölder de la densité  $\mu$  et de sa mesure  $M$ , bien que les notions d'exposants de Hölder ne soient pas les mêmes pour les densités et les fonctions. On a alors :

$$D_M(h) = D_\mu(h).$$

Cette égalité traduit le fait qu'effectuer l'analyse multifractale (au sens des densités) de la densité  $\mu$  ou celle (au sens des fonctions) de la mesure correspondante  $M = \int \mu$  revient au même.

### C.3 Formalismes multifractals pour les densités

Nous allons définir les formalismes multifractals utilisés pour l'analyse multifractale des densités.

#### C.3.1 Formalisme multifractal basé sur les coefficients d'agrégation

Le premier formalisme multifractal historiquement utilisé pour l'analyse multifractale des densités est celui basé sur les coefficients d'agrégation. Il est ici présenté et on pourra par exemple trouver dans [3] plus de détails sur ce sujet.

##### Coefficients d'agrégation $a_\mu(j, k)$

Les coefficients d'agrégation  $a_\mu(j, k)$  de la densité  $\mu$  sont définis comme l'intégrale de la densité sur les intervalles dyadiques  $\lambda(j, k) = [2^j k, 2^j(k + 1)[ :$

$$a_\mu(j, k) = \int_{\lambda(j, k)} dt \mu(t). \quad (\text{C.6})$$

Ces coefficients sont donc les versions discrètes des  $\mu(B(t_0, r))$  utilisés pour définir les propriétés de régularité ponctuelle de  $\mu$  (cf. paragraphe C.2.1). Ils sont nécessairement positifs, puisque la densité est une distribution positive.

##### Fonctions de structure $S_\mu^a(q, j)$

Les fonctions de structure  $S_\mu^a(q, j)$  sont définis comme les moyennes temporelles des puissances des coefficients  $a_\mu(j, k)$  à chaque octave  $j$  :

$$S_\mu^a(q, j) = \frac{1}{n(j)} \sum_{k=1}^{n(j)} (a_\mu(j, k))^q. \quad (\text{C.7})$$

## Exposants $\zeta_\mu^a(q)$

Si la densité  $\mu$  est multifractale, alors les fonctions de structure se comportent comme des lois de puissance de l'échelle  $2^j$  lorsque celle-ci tend vers 0 :

$$S_\mu^a(q, j) \simeq C_q 2^{j\zeta_\mu^a(q)}, \quad (\text{C.8})$$

ce qui définit les exposants  $\zeta_\mu^a(q)$ .

## Formalisme multifractal basé sur les coefficients d'agrégation

Le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'agrégation stipule alors que la transformée de Legendre  $D_\mu^a(h)$  des exposants  $\zeta_\mu^a(q)$  s'identifie au spectre de singularités  $D_\mu(h)$  de la densité  $\mu$  :

$$D_\mu^a(h) = D_\mu(h). \quad (\text{C.9})$$

### C.3.2 Applications des formalismes multifractals précédents

Puisque les spectres de singularités de la densité  $\mu(t)$  et de sa mesure  $M(t)$  sont les mêmes, nous pouvons utiliser les formalismes multifractals définis dans la partie 3.3 pour les fonctions afin d'effectuer l'analyse multifractale (au sens des densités) de la densité  $\mu$ .

Il faut pour cela calculer les coefficients d'ondelette (discrets ici, mais le raisonnement reste exactement le même avec des coefficients d'ondelette continus) de la mesure  $M$  :

$$d_M(j, k) = \int_{\mathbb{R}} dt M(t) \psi_{j,k}(t),$$

à partir desquels on peut alors utiliser le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets pour mesurer  $D_M(h)$  et ainsi  $D_\mu(h)$ .

### C.3.3 Utilisation directe des coefficients d'ondelette de la densité

La méthode précédente utilise pour effectuer l'analyse multifractale de la densité  $\mu$  sa mesure  $M(t)$  associée. Il est possible d'utiliser directement les coefficients d'ondelette de la densité  $\mu$  sans avoir à construire explicitement  $M(t)$ .

#### Liens entre les $d_M(j, k)$ et les $d_\mu(j, k)$

Les coefficients d'ondelette  $d_M$  et  $d_\mu$  sont en fait liés. En effet :

$$\begin{aligned} d_M(j, k) &= \int_{\mathbb{R}} dt M(t) \psi_{j,k}(t) = \int_{\mathbb{R}} dt \int_0^t ds \psi_{j,k}(t) \mu(s) \\ d_M(j, k) &= \int_{\mathbb{R}} ds \int_0^s dt \psi_{j,k}(t) \mu(s) = \int_{\mathbb{R}} ds \mu(s) \int_0^s dt \psi_{j,k}(t) \\ d_M(j, k) &= \int_{\mathbb{R}} ds \mu(s) \psi_{j,k}^p(s), \end{aligned}$$

où l'on a interverti les deux variables d'intégration ( $s$  et  $t$ ) et noté  $\psi_{j,k}^p(s) = \int_0^s dt \psi_{j,k}(t)$  la primitive de l'ondelette  $\psi_{j,k}$ . Or, si  $\psi_{j,k}$  est une ondelette avec  $N \geq 2$  moments nuls, alors  $\frac{1}{2^j} \psi_{j,k}^p$

est une ondelette à  $(N - 1)$  moments nuls (cf. l'annexe B)

Ainsi  $d_M(j, k)$  est, à un facteur multiplicatif  $2^j$  près, le coefficient d'ondelette de la densité  $\mu$  correspondant à la date  $k$  et au rapport d'échelle  $2^j$  avec l'ondelette  $\psi_{j,k}^p$ , que l'on notera  $d_\mu^p(j, k)$  :

$$d_M(j, k) = 2^j d_\mu^p(j, k). \quad (\text{C.10})$$

On peut aussi faire le raisonnement précédent "à l'envers" : si on calcule les coefficients d'ondelette de la densité  $\mu$  avec l'ondelette  $\psi_{j,k}$ , on obtiendra ceux, modulo un facteur  $2^j$ , de la mesure  $M$  selon l'ondelette qui est la dérivée de  $\psi_{j,k}$  (qui seront notés  $d'_M(j, k)$ ) :

$$d_\mu(j, k) = 2^{-j} d'_M(j, k). \quad (\text{C.11})$$

## Conséquence

On a donc un lien entre les coefficients d'ondelette de la densité et de la mesure associée, bien que les coefficients soient définis à l'aide de deux ondelettes différentes,  $\psi_{j,k}$  et sa dérivée. Les ondelettes  $\{\psi_{j,k}\}$  forment une base orthonormée de l'ensemble  $L^2(\mathbb{R})$  des fonctions de  $\mathbb{R}$ , mais pas a priori leurs dérivées (ou leur primitives). Donc si on calcule les coefficients  $d'_M(j, k)$  à partir des coefficients  $d_\mu(j, k)$  calculés avec l'ondelette  $\psi_{j,k}$ , ceux-ci n'entrent pas dans le cadre des chapitres 5 et 6. En revanche, étant tout de même des coefficients d'ondelette, ils entrent dans le cadre des "coefficients d'ondelette quelconques", par exemple issus d'une transformée en ondelette continue (cf. l'annexe E), et en particulier les résultats concernant le formalisme multifractal associé à ces coefficients sont validés par les résultats présentés dans [70]. Ainsi, le formalisme multifractal basé sur les coefficients  $d'_M(j, k)$  permet la mesure de la partie gauche du spectre de singularités de  $M$ , et donc de celui de  $\mu$ , puisque  $D_\mu(h) = D_M(h)$ .

## Mise en pratique

En pratique, on calculera donc directement les coefficients d'ondelette de la densité  $\mu$ , et l'on en déduira ensuite les coefficients d'ondelette de la mesure associée à l'aide de la relation (C.11). Une fois les coefficients  $d'_M(j, k)$  connus, il ne reste qu'à "dérouler" le formalisme multifractal basé sur ces coefficients : calculs des fonctions de structure notées  $S_M^{d'}(q, j)$  et de leurs exposants  $\zeta_M^{d'}(q)$ , puis de leur transformée de Legendre  $D_M^{d'}(h)$ .

## Densités définies sur $\mathbb{R}^d$

À la suite des travaux de P. Kestener [79], on étendra l'utilisation précédente des coefficients d'ondelette  $d_\mu(j, k)$  aux densités définies sur  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d > 1$ . On appliquera donc les formalismes multifractals définis pour les fonctions de  $\mathbb{R}^d$  sur les fonctions de structure construites à partir des coefficients  $2^{jd} d_\mu(j, k_i, m)$ , où  $d$  est la dimension et  $d_\mu(j, k_i, m)$  les coefficients d'ondelette discrets de la densité  $\mu$ .

### C.3.4 Illustration : cascade de Mandelbrot canonique

On prend l'exemple de la cascade de Mandelbrot canonique [105] (cf. l'annexe D) définie sur  $\mathbb{R}^2$ , avec des multiplicateurs  $W$  distribués selon une loi log-normale. Le processus est alors caractérisé par la fonction  $\varphi_{cmc}(q) = -\log_2 \mathbb{E}W^q + 2q = mq(1 - q) + 2q$ . Cela prescrit alors le spectre de singularités  $D_{cmc}(h)$  de ce processus :

$$D_{cmc}(h) = \begin{cases} 2 - \frac{(h-m-2)^2}{4m^2} & \text{si } 2 + m - 2\sqrt{2m} \leq h \leq 2 + m + 2\sqrt{2m} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

$N_{réal} = 500$  réalisations de ce processus ont été synthétisées, avec les paramètres suivants :  $m = 0.1125$ , avec 1 échelle intégrale et une résolution de  $2^{-10}$ , ce qui correspond à des réalisations de  $1024 \times 1024$  points. L'ondelette utilisée pour l'analyse est l'ondelette de Daubechies (à deux dimensions) avec un moment nul.

La figure C.1 présente les résultats de la façon suivante : le trait continu représente le spectre de singularités attendu, et les ronds la moyenne des transformées de Legendre des exposants estimés  $\zeta_{cmc_i}^{\hat{d}}(q)$  sur chacune des  $N_{réal} = 500$  réalisations indépendantes.

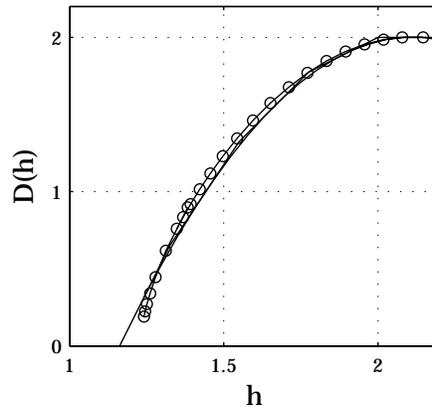


FIG. C.1 – **Cascades de Mandelbrot canonique.** Trait continu :  $D_{cmc}(h)$ . (o) : moyenne des transformées de Legendre.

Cet exemple illustre bien que l'analyse multifractale de densités, ici définies sur  $\mathbb{R}^2$ , s'effectue sans problème, puisque l'on mesure bien le spectre de singularités  $D_{cmc}(h)$ .

Notons que le spectre de singularités est parfois représenté dans ce mémoire selon le système de coordonnées suivant :  $D_\mu$  en fonction de  $h - d$  (c'est-à-dire que l'on porte  $f(h) = D_\mu(h - d)$  en fonction de  $h$ ), afin d'avoir une représentation commune quelque soit la dimension  $d$  (par exemple lors de la discussion sur les coupes géométriques de signaux).



## Annexe D

# Construction et synthèse de processus multifractals

Cette annexe présente les divers processus multifractals utilisés dans le cadre de cette thèse (on pourra trouver plus détails pour la plupart d'entre eux dans la référence [3]). Sont aussi introduits les deux paramètres pertinents pour la notion de "longueur" de ces processus : l'échelle intégrale et la résolution.

Notons que les programmes de synthèse de ces processus ont été écrits en langage Matlab, soit par l'auteur de ce mémoire, soit par des membres (ou anciens membres) de l'équipe Sysiphe du Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure de Lyon (en particulier P. Chainais et P. Abry)

### D.1 Échelle intégrale et résolution

La réalisation d'un processus multifractal quelconque numériquement synthétisée contient nécessairement un nombre fini d'échantillons, que l'on notera  $n$ . Mais ce nombre ne suffit pas à caractériser complètement la durée de la réalisation synthétisée.

#### D.1.1 Échelle intégrale

Tout processus multifractal possède en effet une *unité de longueur intrinsèque* : l'échelle intégrale. Cette échelle, que l'on notera  $T = A\tau_0$ , où  $\tau_0$  est le pas d'échantillonnage numérique (on choisit simplement dans la suite  $\tau_0 = 1$ ), est la borne supérieure de la gamme d'échelle à l'intérieur de laquelle les moments statistiques se comportent en lois de puissance (on reprend les notations du paragraphe 1.2) :

$$\mathbb{E}|\delta_X(a)|^q = C_q a^{\zeta_X(q)}, \text{ si } a \leq A.$$

Cette échelle est appelée échelle intégrale, car elle correspond dans le cas des signaux de vitesse turbulente à la plus grande échelle de la zone inertielle, souvent appelée échelle intégrale, bien que l'on a vu qu'il y avait plusieurs façons légèrement différentes de définir cette grande échelle (cf. l'annexe A). On choisira ici de garder cette dénomination, bien qu'elle soit un peu abusive.

L'existence de l'échelle intégrale s'observe sur tous les signaux réels présentant des propriétés multifractales, mais elle peut se déduire théoriquement de l'argument suivant, tiré de [49] et aussi repris dans [42].

La quantité  $g(q) = \ln \mathbb{E}|\delta_X(a)|^q$  est en effet, pour chaque rapport d'échelle  $a$  fixé, une fonction convexe de  $q$  (inégalité dite de Hölder [56]). On a donc :  $g''(q) \geq 0$ . Or  $g(q) = \ln C_q + \zeta_X(q) \ln a$ , donc  $g''(q) = (\ln C_q)'' + \zeta_X''(q) \ln a$ . On obtient alors :

$$\zeta_X''(q) \ln a \geq -(\ln C_q)''.$$

Puisque le processus  $X$  est multifractal,  $\zeta_X(q)$  est une fonction concave de  $q$  (cf. [70, 73]), et donc :  $\zeta_X''(q) < 0$ . On obtient alors :

$$\ln a \leq -\frac{(\ln C_q)''}{\zeta_X''(q)}$$

$$\ln a \leq \min_q -\frac{(\ln C_q)''}{\zeta_X''(q)},$$

ce qui fixe bien une échelle maximale  $A$ , l'échelle intégrale, au comportement en loi de puissance :

$$\mathbb{E}|\delta_X(a)|^q = C_q a^{\zeta_X(q)}, \quad \text{pour } a \leq A.$$

Cette échelle intégrale est bien sûr indépendante du nombre d'échantillons  $n$  de la réalisation synthétisée ou des données réelles analysées. On définira donc le *nombre d'échelles intégrales*  $N_{int}$  comme la durée de la réalisation ou du signal analysé, en utilisant la valeur de l'échelle intégrale  $A$  comme unité. On a donc :

$$N_{int} = \frac{n}{A},$$

si  $A$  est exprimée en nombre d'échantillons.

L'échelle intégrale est donc utilisée comme unité de longueur naturelle, ou intrinsèque, de tout signal multifractal. Lorsqu'on effectue l'analyse multifractale pratique de ces signaux, on se rend assez vite compte que c'est bien la manière pertinente de caractériser la "longueur" d'un signal, et non pas le nombre total d'échantillons  $n$  (cf. partie III).

### D.1.2 Résolution

L'autre quantité importante lorsqu'on étudie des signaux multifractals est la *résolution*, notée  $r$ . C'est le nombre d'échantillons par unité de longueur, l'unité de longueur étant l'échelle intégrale  $A$ . C'est donc par définition :

$$r = \frac{1}{A}.$$

Le nombre total  $n$  d'échantillons est alors :

$$n = \frac{N_{int}}{r}.$$

La résolution va caractériser la taille de la gamme d'échelle sur laquelle on peut observer les propriétés multifractales du signal analysé, puisque les comportements en loi de puissance sont observés pour les échelles plus petites que  $A$ .

Cette quantité apparaît naturellement lorsque l'on cherche à synthétiser des processus multifractals (cf. la suite de cette annexe) : la plupart des processus multifractals sont bâtis sur un processus itératif à travers les échelles (la cascade multiplicative), et le nombre de ces itérations fixe forcément la taille de la gamme d'échelle correspondant à des comportements en loi de puissance, donc  $r$ .

## D.2 Construction de densités multifractales à l'aide de cascade multiplicative

L'archétype des processus multifractals est la cascade canonique de Mandelbrot, introduite à la fin des années 60 par Yaglom [170], et dont les propriétés mathématiques furent étudiées par Mandelbrot [105]. Ce processus donne naissance à des signaux de type *densité*.

### D.2.1 Cascades canoniques de Mandelbrot

#### Idée générale.

Ce processus a été introduit par Yaglom en 1966 [170] pour essayer de mimer la cascade d'énergie dans un phénomène turbulent, suivant la phénoménologie de Richardson [144]. On observe en effet que le champ de dissipation de l'énergie est très irrégulièrement réparti spatialement : les zones de forte dissipation sont concentrées autour de pics de dissipation, irrégulièrement répartis en espace.

Ce type de comportement est modélisé à l'aide d'un processus de construction reposant sur une *cascade multiplicative*.

#### Définition

Le processus est construit de façon itérative. On part d'une masse unité répartie de façon homogène sur le segment  $[0, 1]$ . Cet intervalle est coupé en deux moitiés égales :  $[0, 1/2]$  et  $[1/2, 1]$ , et la masse répartie de façon aléatoire à l'aide de deux *multiplicateurs*  $W_{1,1}$  et  $W_{1,2}$  :  $1 \times W_{1,1}$  dans  $[0, 1/2]$  et  $1 \times W_{1,2}$  dans  $[1/2, 1]$ .  $W_{1,1}$  et  $W_{1,2}$  sont deux tirages indépendants de la même variable aléatoire, à valeurs strictement positives, que l'on notera  $W$ . Pour conserver en moyenne la masse totale, on impose que la variable aléatoire soit de moyenne 1 :  $\mathbb{E}W = 1$  (en effet la masse totale sera  $0.5W_{1,1} + 0.5W_{1,2}$ ). On itère ensuite cette étape pour chacun des deux segments, toujours en tirant les multiplicateurs selon la même variable aléatoire  $W$ , et ensuite de suite. On notera les  $k = 1, \dots, 2^j$  les multiplicateurs  $W_{j,k}$  utilisés pour la  $j$ -ième itération.

On effectue ainsi une construction itérative, résumée sur le schéma D.1.

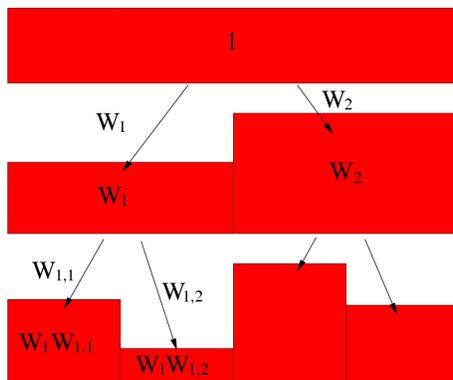


FIG. D.1 – Principe de construction d'une cascade de Mandelbrot canonique.

On définit alors la *densité*  $Q_r(t)$  à la résolution  $r = 2^{-J}$  par :

$$Q_r(t) = \prod_{j=1, \dots, J, k/t \in \lambda(j,k)} W_{j,k}, \quad (\text{D.1})$$

où  $\lambda(j, k)$  est toujours l'intervalle dyadique :  $\lambda(j, k) = [2^j k, 2^j(k+1)[$ .

Introduisons la quantité  $\varphi_{cmc}(q)$ , qui va permettre de caractériser ce processus :

$$\varphi_{cmc}(q) = -\log_2 \mathbb{E}W^q + q. \quad (\text{D.2})$$

Notons que puisque l'on a  $\mathbb{E}W^0 = 1$  et  $\mathbb{E}W = 1$  (condition de conservation), on a :  $\varphi_{cmc}(0) = 0$  et  $\varphi_{cmc}(1) = 1$ . La fonction  $\varphi_{cmc}(q)$  est de plus nécessairement concave, car  $-\log_2 \mathbb{E}|X|^q$  est une fonction concave de  $q$  pour toute variable aléatoire  $X$  [56].

Lorsque  $r \rightarrow 0$ ,  $Q_r(t)$  ne tend pas vers une fonction, mais vers une densité, telle que définie dans l'annexe C. Kahane et Peyrière [78] ont montré que le processus ainsi construit convergeait bien si :

$$\varphi'_{cmc}(1^-) > 0.$$

Pour une synthèse pratique, on s'arrête forcément à  $r > 0$ , mais on supposera que le nombre d'itérations est assez grand pour les propriétés observées sur une réalisation synthétisée soit les mêmes que celles correspondant à la densité définie par la limite  $r \rightarrow 0$ .

### Échelle intégrale et résolution

Chaque étape correspond à la construction d'échelles deux fois plus fines : c'est une construction dite dyadique. Après  $J$  itérations, on est donc passé de l'échelle 1 à l'échelle  $2^{-J}$ . La résolution de cette construction sera donc :

$$r = 2^{-J}.$$

Si l'on respecte le schéma précédent, la réalisation du processus ne contiendra qu'une échelle intégrale, puisque c'est la cascade multiplicative qui génère le comportement en loi de puissance des moments (cf. ci-dessous). Pour générer une réalisation contenant  $N_{int}$  échelles intégrales, il suffit de commencer le processus itératif de construction à partir de  $N_{int}$  intervalles de longueur 1, dont la masse initiale est égale à 1, ou tirée aléatoirement avec pour valeur moyenne 1.

On voit donc bien sur cet exemple que la résolution  $r$  et le nombre d'échelles intégrales  $N_{int}$  sont deux grandeurs indépendantes, et qui apporte une information, bien plus intéressante pour la réalisation synthétisée que le seul nombre total d'échantillons  $n = N_{int}/r$ .

### Propriétés multifractales.

Ce processus est multifractal (au sens des densités, cf. annexe C). Son spectre de singularités est donné par (cf. par exemple [3]) :

$$D_{cmc}(h) = \begin{cases} TL[\varphi_{cmc}](h) & \text{si } h / TL[\varphi_{cmc}](h) \geq 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}, \quad (\text{D.3})$$

où  $TL[\varphi_{cmc}](h)$  désigne la transformée de Legendre de  $\varphi_{cmc}(q)$  :

$$TL[\varphi_{cmc}](h) = 1 + \min_q (qh - \varphi_{cmc}(q)).$$

### Un exemple : le cas log-normal.

Nous utiliserons souvent dans le cadre de cette thèse des cascades de Mandelbrot canoniques log-normales, c'est-à-dire dont les multiplicateurs  $W$  ont une distribution log-normale :  $W = 2^{-U}$ , avec  $U$  une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $m$  et d'écart-type  $\sigma$ . Les fonctions de densité de probabilité  $P_W$  et  $P_U$  des variables aléatoires  $W$  et  $U$  sont reliées par la relation  $P_W(W = w)dw = P_U(U = u)du$ , ce qui permet de calculer facilement la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$  :

$$\varphi_{cmc}(q) = qm - q^2 \frac{\sigma^2}{2} \ln(2) + q.$$

Puisque l'on a  $\mathbb{E}W = 1$  et donc  $\varphi_{cmc}(1) = 1$ , on a en fait un seul paramètre libre, par exemple  $m$ , l'autre étant relié à  $m$  par la relation :  $\sigma^2 = \frac{2m}{\ln(2)}$ . On arrive ainsi à :

$$\varphi_{cmc}(q) = mq(1 - q) + q. \quad (\text{D.4})$$

La condition de convergence de la cascade [78] s'écrit alors :

$$m \leq 1.$$

Le spectre de singularités s'en déduit :

$$D_{cmc}(h) = \begin{cases} 1 - \frac{(h-1-m)^2}{4m} & \text{si } 1 + m - 2\sqrt{m} \leq h \leq 1 + m + 2\sqrt{m} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}, \quad (\text{D.5})$$

correspondant aux exposants :

$$\zeta_{cmc}(q) = \begin{cases} q(1 + m - 2\sqrt{m}) & \text{si } q \geq \sqrt{\frac{1}{m}} \\ mq(1 - q) + q & \text{si } -\sqrt{\frac{1}{m}} \leq q \leq \sqrt{\frac{1}{m}} \\ q(1 + m + 2\sqrt{m}) & \text{si } q \leq -\sqrt{\frac{1}{m}} \end{cases}, \quad (\text{D.6})$$

### Processus à plusieurs dimensions.

On vient de définir les cascades de Mandelbrot canoniques sur  $\mathbb{R}$ , mais on peut tout aussi bien les générer sur  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d > 1$ . Le principe de construction est le même : on part d'une masse unité uniformément répartie sur  $[0, 1]^d$ , on divise  $[0, 1]^d$  en  $2^d$  sous-intervalles égaux de côté  $1/2$  et on tire  $2^d$  valeurs indépendantes de la variable aléatoire  $W$  qui serviront de multiplicateurs. Puis on itère la même opération sur chacun des  $2^d$  sous-intervalles.

Les propriétés de la cascade ainsi construite se déduisent alors de la même façon qu'en dimension 1 : il suffit de généraliser la définition de la fonction  $\varphi_{cmc}(q)$  à  $d$  dimensions, ainsi que celle de la transformée de Legendre :

$$\begin{aligned} \varphi_{cmc}(q) &= -\log_2 \mathbb{E}W^q + dq, \\ TL[f]h &= d + \min_q (qh - f(q)). \end{aligned}$$

On obtient par exemple le spectre de singularités d'une cascade de Mandelbrot canonique log-normale définie sur  $\mathbb{R}^d$  :

$$D_{cmc}(h) = \begin{cases} d - \frac{(h-d-m)^2}{4m} & \text{si } d + m - 2\sqrt{dm} \leq h \leq d + m + 2\sqrt{dm} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}, \quad (\text{D.7})$$

correspondant aux exposants :

$$\zeta_{cmc}(q) = \begin{cases} q(d + m - 2\sqrt{dm}) & \text{si } q \geq \sqrt{\frac{d}{m}} \\ mq(1 - q) + dq & \text{si } -\sqrt{\frac{d}{m}} \leq q \leq \sqrt{\frac{d}{m}} \\ q(d + m + 2\sqrt{dm}) & \text{si } q \leq -\sqrt{\frac{d}{m}} \end{cases}, \quad (\text{D.8})$$

## Limitations

Le processus cascade de Mandelbrot canonique souffre des deux limitations suivantes. Tout d'abord, l'invariance d'échelle n'est que discrète : elle n'est valable que pour des rapports d'échelle  $a$  multiples de 2. Il n'est pas de plus stationnaire. Par exemple la fonction de corrélation entre deux dates  $t_1$  et  $t_2$  dépend de  $t_2 - t_1$  et de  $t_1$ , car la corrélation est contrôlée par le "plus proche" (dans les échelles) multiplicateur-ancêtre commun, l'échelle qui correspond à cet ancêtre commun dépend clairement de la date  $t_1$  (cf. figure D.2).

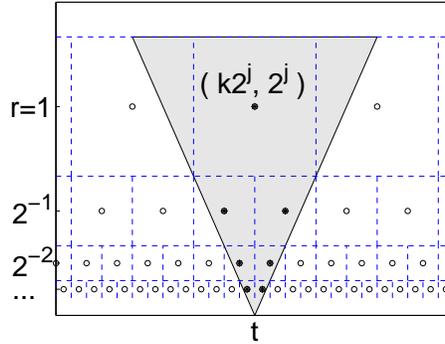


FIG. D.2 – **Cône de dépendance** dans le plan temps-échelle, repéré par les indices  $j$  et  $k$ , d'une date  $t$  **pour une cascade de Mandelbrot canonique** : il contient tous les multiplicateurs  $W_{j,k}$  qui interviennent dans la valeur de  $Q_r(t) = \prod_{j=1, \dots, J, k/t \in \lambda(j,k)} W_{j,k}$ .

Les deux limitations que l'on vient de décrire sont dues à la même cause : les multiplicateurs  $W_{j,k}$  sont répartis dans le plan temps-échelle selon une grille dyadique rigide, qui impose une invariance d'échelle discrète et des mauvaises propriétés de stationnarité.

### D.2.2 Généralisation : densification de la cascade multiplicative

Pour aller au-delà des deux limitations précédentes, il faut "casser" la grille dyadique rigide. Il a récemment été proposé [26] (cf. aussi [38]) de la remplacer par une grille aléatoire, c'est-à-dire de tirer aléatoirement la position dans le plan temps-échelle des multiplicateurs  $W$  selon un processus ponctuel (un processus de Poisson), comme cela est représenté sur la figure D.3, à gauche. Le processus ainsi défini, la cascade de Poisson composée, est alors invariant d'échelle de façon continue et stationnaire en temps.

On peut même aller plus loin et ne plus utiliser des multiplicateurs ponctuels, mais une distribution continue de multiplicateurs [156, 127, 25, 39, 40].

Ces processus définissent toujours des processus aléatoires multifractals de type densité, et leurs propriétés sont, comme pour les cascades de Mandelbrot canoniques, contrôlées par une fonction

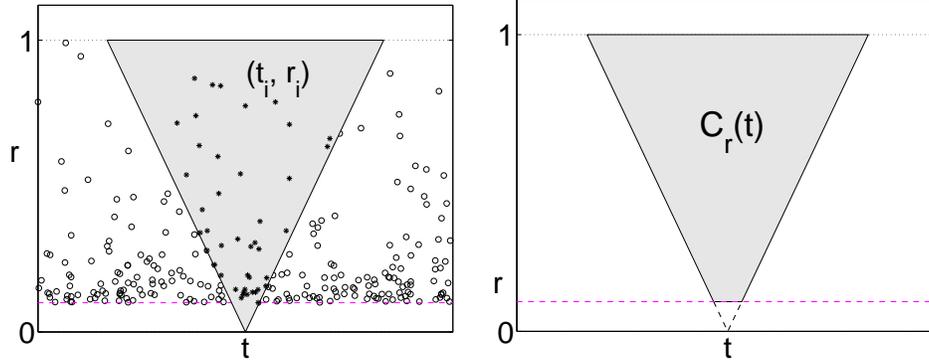


FIG. D.3 – Cône de dépendance dans le plan temps-échelle pour les cascades de Poisson composées (gauche) et les cascades infiniment divisibles (droite).

$\varphi_X(q)$ , que l'on n'exprimera pas ici (on pourra se reporter aux références précédentes pour plus de détails).

Notons enfin que les programmes Matlab permettant la synthèse de ces processus ont été réalisés et gracieusement fournis par Pierre Chainais (ISIMA, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand).

### D.3 Construction de fonctions multifractales à l'aide de cascade multiplicative

Les processus multifractals synthétiques que l'on vient de décrire sont tous du type densité. On peut cependant générer à partir de ces densités multifractales des fonctions multifractales, c'est-à-dire définir des processus aléatoires multifractals dont chaque réalisation est une fonction.

#### D.3.1 Mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal

Une idée de construction simple, due à Mandelbrot [111], consiste à transformer un mouvement brownien fractionnaire<sup>1</sup> en un processus multifractal, en le paramétrant non plus par un temps linéaire "lisse", mais par un *temps multifractal*, irrégulier et aléatoire. Ce temps multifractal est défini comme la mesure  $M(t)$  associée à la densité  $\mu(t)$ .  $M(t)$  est une fonction strictement croissante (puisque  $\mu$  est une distribution positive, cf. annexe C), mais irrégulière, puisque multifractale. On définit ainsi le mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal  $V_H$  selon [111, 146, 145] :

$$V_H(t) = B_H(M(t)), \quad (\text{D.9})$$

où  $B_H$  est le mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst  $H$ . Le mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal  $V_H$  est donc un processus multifractal dont chaque réalisation est définie à partir (cf. figure D.4) d'une réalisation de mouvement brownien fractionnaire de paramètre  $H$ , et d'une réalisation d'un processus multifractal densité (par exemple une cascade de Mandelbrot aléatoire ou une cascade de Poisson composée).

<sup>1</sup>On rappelle que le mouvement brownien fractionnaire [112] de paramètre  $H$  est un processus aléatoire monofractal dont l'exposant de Hölder est presque partout  $H$ .

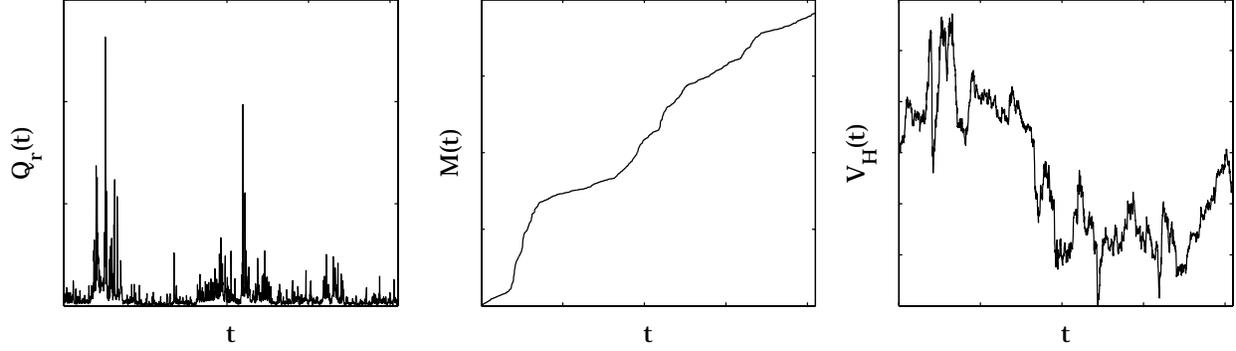


FIG. D.4 – **Gauche** :  $Q_r(t)$ , réalisation d’une cascade de Poisson composée. **Milieu** :  $M(t)$ , mesure associée. **Droite** :  $V_H(t)$ , mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal.

Les propriétés multifractales de la mesure  $M$  sont alors transmises au processus  $V_H$ . Le spectre de singularités de  $V_H$  est ainsi [146, 145] (on abrégera ”mouvement brownien fractionnaire en temps multifractal” par son acronyme anglais : fbmmt) :

$$D_{fbmmt}(h) = D_M(h/H) = D_{Q_r}(h/H), \quad (\text{D.10})$$

ce qui correspond aux exposants :

$$\zeta_{fbmmt}(q) = \zeta_{Q_r}(qH). \quad (\text{D.11})$$

### D.3.2 Marche aléatoire multifractale

Présentons une autre méthode de synthèse de fonction multifractale : la marche aléatoire multifractale, introduite par Bacry, Delour et Muzy [24, 127, 25]. L’idée est aussi de modifier une réalisation de mouvement brownien fractionnaire, mais de façon différente que précédemment.

Un mouvement brownien fractionnaire  $B_H(t)$  est défini par ses accroissements, indépendants pour le mouvement brownien ordinaire ou corrélés dans le cas général, et tirés selon une loi gaussienne de variance  $\sigma$ . La marche aléatoire multifractale  $Y_H(t)$  reprend cette méthode de construction, mais la variance des accroissements n’est plus constante, mais est une variable aléatoire (positive) :

$$Y_H(t+r) - Y_H(t) = \sigma_r(t) (B_H(t+r) - B_H(t)),$$

où  $r$  est la résolution utilisée pour la synthèse. Le processus marche aléatoire multifractale est alors défini par ces accroissements, dans la limite de résolution nulle, et par la limite d’une somme de Riemman. C’est pourquoi l’on peut parler d’intégration stochastique de  $\sigma_r(t)$  contre un mouvement brownien fractionnaire.

Si on choisit [24, 127]  $\sigma_r(t) = e^{\omega_r(t)}$  avec  $\omega_r(t)$  une variable aléatoire gaussienne corrélée en temps selon une dépendance logarithmique, on peut synthétiser un processus multifractal caractérisé par la fonction  $\varphi_{mrw}(q)$  (*mrw* est l’acronyme anglais de ”marche aléatoire multifractale”) parabolique suivante :

$$\varphi_{mrw}(q) = C_1 q - C_2 \frac{q^2}{2}. \quad (\text{D.12})$$

Les propriétés multifractales de la marche aléatoire multifractale se déduisent alors de la même façon que pour les cascades d’ondelette aléatoires (cf. paragraphe 4.1) à partir de cette fonction  $\varphi_{mrw}(q)$ .

## Annexe E

# Utilisation d'une transformée en ondelette continue

Les deux formalismes multifractals décrits aux chapitres 5 et 6 reposent tous deux sur une transformée en ondelette discrète. Cette dernière n'est pas associée à une famille particulière d'ondelette, mais à une analyse multi-résolution [48, 103, 1, 2] (cf. l'annexe B) définissant une décomposition sur une *base* d'ondelette dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

Puisque l'aspect des ondelettes qui nous intéresse dans le cadre de ce travail de thèse est la capacité de ces ondelette à caractériser les propriétés de régularité locale (en terme d'exposant de Hölder) d'un signal donné, il est légitime de s'intéresser aux autres transformées en ondelette, par exemple les transformées en ondelette continues, ainsi qu'aux formalismes multifractals qui en découlent. Notons d'ailleurs que c'est ce type de transformée en ondelette qui a été utilisé en premier pour l'analyse multifractale des signaux issus de la turbulence pleinement développée [16, 11, 147].

On reprend les notations de l'annexe B : les coefficients d'ondelette continus (avec la norme  $L^1$ ) de la fonction  $f$ , correspondant à la date  $t$  et à l'échelle  $a$ , sont notés :

$$c_f(a, t) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} du f(u) \psi_0 \left( \frac{u-t}{a} \right),$$

où  $\psi_0$  est l'ondelette-mère.

### E.1 Formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette continus

Commençons par la version continue du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets (cf. le chapitre 5).

#### E.1.1 Coefficients d'ondelette continus et propriétés de régularité

Précisons tout d'abord, puisque c'est l'argument fondamental de l'utilisation d'ondelette dans le problème (celui de l'analyse multifractale) qui nous intéresse, le lien entre les coefficients d'ondelette continus et les propriétés de régularité locale du signal analysé. Les résultats ici décrits sont issus des références [68, 164].

## Régularité ponctuelle

La caractérisation de la régularité ponctuelle est similaire, si ce n'est que les variables de temps ( $t$ ) et d'échelle ( $a$ ) sont désormais continues, à celle obtenue avec les coefficients d'ondelette discrets (cf. équation (5.2)) :

$$f \in C^\alpha(t_0) \Rightarrow \exists C > 0 \quad / \quad \forall a, \quad |c_f(a, t)| \leq C (a^\alpha + |t - t_0|^\alpha). \quad (\text{E.1})$$

Cette propriété est asymptotique, c'est-à-dire valable dans la limite des échelles  $a$  tendant vers 0. Notons qu'il est nécessaire que le nombre de moments nuls de l'ondelette (cf. la partie B pour la définition du nombre de moments nuls d'une ondelette) utilisée pour l'analyse soit strictement supérieur à  $\alpha$  pour que la propriété (E.1) soit vérifiée.

Dans ce cas-là non-plus, il n'existe pas de réciproque exacte, mais seulement approchée [68, 69, 66] : si  $f$  est uniformément höldérienne et vérifie la propriété précédente, alors il existe un polynôme  $P$  d'ordre strictement inférieur à  $\alpha$  tel que :

$$\text{si } |t - t_0| \leq 1, \quad |f(t) - P(t - t_0)| \leq C |t - t_0|^\alpha \log \left( \frac{2}{|t - t_0|} \right). \quad (\text{E.2})$$

$f$  est ainsi "presque"  $C^\alpha(t_0)$ , à une correction logarithmique près.

### E.1.2 Formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette continus

#### Fonctions de structure $S_f^c(q, a)$

On commence par définir comme auparavant les fonctions de structure définies à partir des coefficients d'ondelette continus  $c_f(a, t)$  :

$$S_f^c(q, a) = \frac{1}{n(a)} \sum_{k=1}^{n(a)} |c_f(a, t)|^q, \quad (\text{E.3})$$

où  $n(a)$  est le nombre de coefficients  $c_f(a, t)$  disponibles à l'échelle  $a$ .

La fonction de structure  $S_f^c(q, a)$  est donc définie, pour chaque ordre  $q$ , comme une fonction continue de l'échelle  $a$ .

#### Comportement en loi de puissance de $S_f^c(q, a)$ . Exposants $\zeta_f^c(q)$

Si la fonction  $f$  est multifractale, alors les fonctions de structure  $S_f^c(q, a)$  se comportent asymptotiquement vers les petites échelles comme une loi de puissance en fonction de l'échelle  $a$  :

$$S_f^c(q, a) \simeq C_q a^{\zeta_f^c(q)}. \quad (\text{E.4})$$

Notons que l'on a toujours avec cette nouvelle définition  $\zeta_f^c(0) = 0$  puisque  $S_f^c(0, a) = \frac{n(a)}{n(a)} = 1$ .

#### Formalisme multifractal

Le *formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette continus* affirme alors que la transformée de Legendre  $D_f^c(h)$  des exposants  $\zeta_f^c(q)$  est égale au spectre multifractal  $D_f(h)$  de la fonction  $f$  étudiée :

$$D_f(h) = D_f^c(h) = \inf_q (1 + qh - \zeta_f^c(q)) \quad (\text{E.5})$$

## Validité de ce formalisme

Des résultats concernant la validité de ce formalisme multifractal sont rassemblés dans [70]. Sa validité est la même que celle du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets, on se reportera donc au chapitre 5. Il ne permet en particulier la mesure du spectre de singularités de la fonction  $f$  étudiée que pour  $h \leq h_c$  dans le cas général, et pour  $h \leq h_0$ , c'est-à-dire la partie gauche du spectre de singularités, si de plus la fonction  $f$  ne contient pas de singularités oscillantes.

### E.1.3 Fonctions scalaires définies sur $\mathbb{R}^d$

Ce formalisme s'étend sans plus de difficulté que le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette discrets aux fonctions scalaires définies sur  $\mathbb{R}^d$  [49, 14, 18, 50, 148, 79], sa validité ne dépendant pas spécifiquement de  $d$ . Cette généralisation à  $\mathbb{R}^d$  n'est pas utilisée dans le cadre de cette thèse, et elle ne sera donc pas décrite ici.

## E.2 Formalisme multifractal basé sur les maxima des modules de la transformée en ondelette continue

Afin de dépasser le défaut du formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette continus de ne pouvoir mesurer la partie droite du spectre de singularités, A. Arneodo et son équipe ont introduit dans les années 90 [23, 126, 128, 16, 11] un nouveau formalisme : le *formalisme multifractal basé sur les maxima des modules de la transformée en ondelette continue*, qui sera souvent notée plus simplement *formalisme multifractal basé sur les coefficients mmto* (pour maxima des modules de la transformée en ondelette).

Les quantités multi-résolution sur lesquelles repose ce formalisme présentent de grandes similitudes heuristiques avec les coefficients dominants (cf. le paragraphe 6.1). Le formalisme résultant n'a toutefois pas reçu de fondations mathématiques.

### E.2.1 Coefficients mmto $m_f(a, t)$

Commençons par définir les coefficients multi-résolution qui fondent le formalisme mmto.

#### Squelette de la transformée en ondelette continue

La définition des coefficients mmto nécessite tout d'abord la construction du *squelette de la transformée en ondelette continue*. Celui-ci est défini en deux étapes :

- on recherche pour chaque échelle  $a$  les maxima locaux de  $|c_f(a, t)|$
- ces maxima locaux sont reliés entre eux à travers les échelles afin de former de *lignes de maxima*, définies de façon cartésienne par  $t = l_i(a)$  où  $l_i$  une ligne de maxima particulière.

L'ensemble des lignes de maxima locaux  $\{l_i\}$  définit alors le squelette de la transformée en ondelette continue. La construction de ce squelette est illustrée sur un exemple de fonction multifractale dans la figure E.1.

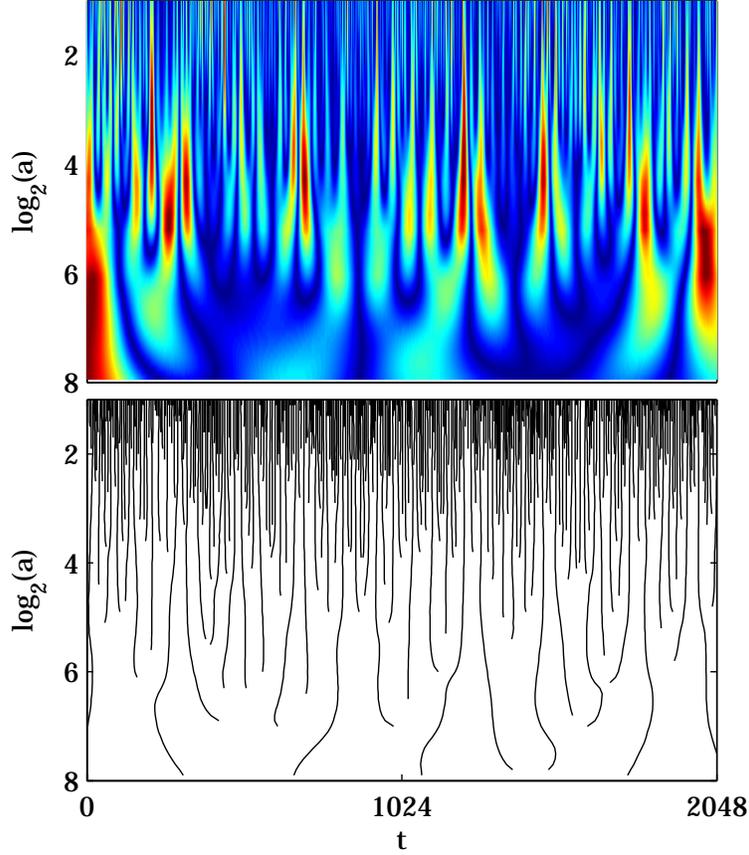


FIG. E.1 – **Module des coefficients**  $c_f(a, t) : |c_f(a, t)|$  dans le plan temps-échelle (haut) **et squelette correspondant** (bas).

### Définition

Les coefficients mmto sont alors définis sur le squelette (et uniquement sur le squelette, c'est-à-dire pour les points du plan temps-échelle tels que  $t = l_i(a)$ ) de la manière suivante :

$$m_f(a, t = l_i(a)) = \sup_{a' \leq a} |c_f(a', t = l_i(a'))| \quad (\text{E.6})$$

On notera plus simplement par la suite  $m_f(a, t)$ , sous-entendu que le couple  $(a, t)$  est choisi sur une ligne de maxima.

Une petite partie des coefficients d'ondelette continue est ainsi utilisée, l'ensemble des coefficients  $c_f(a, t)$  définissant le squelette.

Notons que le calcul des coefficients mmto, puisque définis selon un algorithme complexe, est très gourmand en temps de calcul. L'utilisation du formalisme multifractal résultant est ainsi beaucoup plus coûteuse (en temps de calcul) que les formalismes multifractals construits à partir d'une transformée en ondelette discrète (coefficients d'ondelette discrets et coefficients dominants).

## E.2.2 Formalisme multifractal mmtto

### Fonctions de structure $S_f^m(q, a)$

On commence par définir comme auparavant les fonctions de structure à partir des coefficients mmtto  $m_f(a, t)$  :

$$S_f^m(q, a) = \frac{1}{n_m(a)} \sum_{k=1}^{n_m(a)} (m_f(a, t))^q, \quad (\text{E.7})$$

où  $n_m(a)$  est le nombre de coefficients  $m_f(a, t)$  disponibles à l'échelle  $a$ , qui est forcément (beaucoup) plus petit que  $n(a)$ , nombre de coefficients d'ondelette continus.

### Comportement en loi de puissance de $S_f^m$ . Exposants $\zeta_f^m(q)$

Si la fonction  $f$  est multifractale, alors les fonctions de structure  $S_f^m(q, a)$  se comportent asymptotiquement lorsque le rapport d'échelle  $a$  tend vers 0 comme des lois de puissance en fonction de  $a$  :

$$S_f^m(q, a) \simeq C_q a^{\zeta_f^m(q)}. \quad (\text{E.8})$$

Notons que l'on a toujours  $\zeta_f^m(0) = 0$  puisque  $S_f^m(0, a) = \frac{n_m(a)}{n_m(a)} = 1$ .

### Formalisme multifractal

Le *formalisme multifractal basé sur les coefficients mmtto* affirme alors que la transformée de Legendre  $D_f^m(h)$  des exposants  $\zeta_f^m(q)$  est égale au spectre multifractal  $D_f(h)$  de la fonction  $f$  étudiée :

$$D_f(h) = D_f^m(h) = \inf_q (1 + qh - \zeta_f^m(q)) \quad (\text{E.9})$$

### Validité de ce formalisme

Il n'existe pas vraiment de résultat mathématique sur la validité de ce formalisme. Il a cependant été montré sur plusieurs types de processus multifractals [16, 11, 147] que ce formalisme permettait de mesurer la totalité du spectre de singularités, c'est-à-dire sa partie gauche et sa partie droite.

## E.2.3 Fonctions scalaires définies sur $\mathbb{R}^d$

Tout comme le formalisme multifractal basé sur les coefficients d'ondelette continus, le formalisme mmtto peut s'étendre aux fonctions scalaires définies sur  $\mathbb{R}^d$  [49, 14, 18, 50, 148, 79]. Il faut pour cela redéfinir le squelette sur  $\mathbb{R}^d$ , et la mise pratique de cette méthode, déjà assez complexe algorithmiquement et gourmande en temps de calcul le devient encore plus pour les fonctions scalaires de  $\mathbb{R}^d$ . Cette extension n'est pas utilisée dans ce travail de thèse, et n'est donc pas plus discutée.



# Bibliographie

- [1] P. ABRY, *Ondelettes et Turbulence - Multirésolutions, algorithmes de décompositions, invariance d'échelle et signaux de pression*, Diderot, Éditeurs des sciences et des arts, Paris, 1997.
- [2] ———, *Lois d'échelle, multirésolutions et ondelettes - Applications au télétrafic informatique et à la turbulence développée*, Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard, Lyon I, 2001.
- [3] P. ABRY, P. GONÇALVÈS, ET J. LÉVY VÉHEL, eds., *Lois d'échelle, fractales et ondelettes, Vol. 1&2*, Hermès Sciences Publications, 2002.
- [4] P. ABRY, S. JAFFARD, ET B. LASHERMES, *Revisiting scaling, multifractal and multiplicative cascades with the wavelet leader lens*, in Proc. of SPIE, Vol. 5607 - Wavelet Applications in Industrial Processing II, Philadelphia, États Unis, 2004.
- [5] R. ADLER, *The geometry of random fields*, John Wiley & Sons, 1981.
- [6] F. ANSELMET, R. ANTONIA, ET M. OULD-ROUIS, *Relations between third-order and second-order structure functions for axisymmetric turbulence*, J. of Turbulence., 1 (2000).
- [7] F. ANSELMET, Y. GAGNE, E. HOPFINGER, ET R. ANTONIA, *High order velocity structure functions in turbulent shear flow*, Fluid Mech., 40 (1984), pp. 63–89.
- [8] R. ANTONIA, R. SMALLEY, T. ZHOU, F. ANSELMET, ET L. DANAILA, *Similarity of energy structure functions in decaying homogeneous isotropic turbulence*, J. Fluid Mech., 487 (2003), pp. 245–269.
- [9] W. APPEL, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, éditions H&K, 2002.
- [10] A. ARNEODO ET AL, *Structure functions in turbulence, in various flow configurations, at Reynolds number between 30 and 5000, using extended self-similarity*, Europhys. Lett., 34 (1996), pp. 411–416.
- [11] A. ARNEODO, F. ARGOU, Z. BACRY, J. ELEZGARAY, ET J. MUZY, *Ondelettes, multifractales et turbulence : de l'ADN aux croissance cristallines*, Diderot, 1995.
- [12] A. ARNEODO, E. BACRY, S. JAFFARD, ET J. MUZY, *Oscillating singularities on Cantor sets : a grand-canonical multifractal formalism*, J. Stat. Phys., 87(1–2) (1997), pp. 179–209.
- [13] ———, *Singularity spectrum of multifractal functions involving oscillating singularities*, J. Four. Anal. Appl., 4 (1998), pp. 159–174.
- [14] ———, *Oscillating singularities and fractal functions*, CRM Proceedings and Lecture Notes, 18 (1999), pp. 315–329.
- [15] A. ARNEODO, E. BACRY, ET J. MUZY, *Oscillating singularities in locally self-similar functions*, Phys. Rev. Letters, 74 (1995), pp. 4823–4827.

- [16] ———, *The thermodynamics of fractals revisited with wavelets*, Physica A, 213 (1995), pp. 232–275.
- [17] ———, *Random cascades on wavelet dyadic trees*, J. Math. Phys., 39 (1998), pp. 4142–4164.
- [18] A. ARNEODO, N. DECOSTER, ET S. ROUX, *A wavelet-based method for multifractal image analysis. I. Methodology and test applications on isotropic and anisotropic random rough surfaces*, Eur. Phys. J. B, 15 (2000), pp. 567–600.
- [19] A. ARNEODO, S. MANNEVILLE, ET J. MUZY, *Towards log-normal statistics in high Reynolds number turbulence*, Eur. Phys. J. B, 1 (1998), p. 129.
- [20] A. ARNEODO, S. MANNEVILLE, J. MUZY, ET S. ROUX, *Revealing a lognormal cascading process in turbulent velocity statistics with wavelet analysis*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A, 357 (1999), pp. 2415–2438.
- [21] J.-M. AUBRY ET S. JAFFARD, *Random wavelet series*, Comm. Math. Phys., 227 (2002), pp. 483–514.
- [22] ———, *Random wavelet series : Theory and applications*, Prépublications du Labo. d'Analyse et de Math. Appliquées / UMR CNRS 8050, (2003).
- [23] E. BACRY, *Utilisation de la transformée en ondelettes pour l'analyse de signaux fractals et pour la résolution d'équations aux dérivées partielles*, Thèse de l'Université Paris VII, 1992.
- [24] E. BACRY, J. DELOUR, ET J. MUZY, *Multifractal random walk*, Phys. Rev. E, 64 (2001), p. 026103.
- [25] E. BACRY ET J. MUZY, *Log-infinitely divisible multifractal processes*, Comm. in Math. Phys., 236 (2003), pp. 449–475.
- [26] J. BARRAL ET B. MANDELBROT, *Multiplicative products of cylindrical pulses*, Probab. Theory Relat. Fields, 124 (2002), pp. 409–430.
- [27] G. BATCHELOR, *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge University Press, 1952.
- [28] R. BENZI, L. BIFERALE, G. PALADIN, A. VULPIANI, ET M. VERGASSOLA, *Multifractality in the statistics of the velocity gradients in turbulence*, Phys. Rev. Letters, 67 (1991), pp. 2299–2302.
- [29] R. BENZI, S. CILIBERTO, C. BAUDET, ET G. RUIZ CHAVARRIA, *On the scaling of three-dimensional homogeneous and isotropic turbulence*, Physica D, 80 (1995), pp. 385–398.
- [30] R. BENZI, S. CILIBERTO, C. BAUDET, G. RUIZ CHAVARRIA, ET C. TRIPICCIONE, *Extended self-similarity in the dissipation range of fully developed turbulence*, Europhys. Letters, 24 (1993), pp. 275–279.
- [31] R. BENZI, S. CILIBERTO, C. TRIPICCIONE, C. BAUDET, F. MASSAIOLI, ET S. SUCCI, *Extended self-similarity in turbulent flows*, Phys. Rev E, 48 (1993), pp. 29–32.
- [32] P. BORGNAT, *Modèles et outils pour les invariances d'échelles brisées : variations sur la transformée de Lamperti et contributions aux modèles statistiques de vortex en turbulence*, Thèse de l'École Normale Supérieure de Lyon, 2002.
- [33] B. CASTAING, *Conséquences d'un principe d'extremum en turbulence*, J. Phys. France, 50 (1989), pp. 147–156.
- [34] ———, *Turbulence : statistical approach*, in Scale covariance and Beyond, Les Houches, éditeurs : B. Dubrulle, F. Graner, D. Sornette, EDP Science, Springer, 1997.
- [35] B. CASTAING ET B. DUBRULLE, *Fully developed turbulence : an unifying point of view*, J. Phys. II France, 5 (1995), p. 895.

- [36] B. CASTAING, Y. GAGNE, ET E. HOPFINGER, *Velocity probability density functions of high Reynolds number turbulence*, Physica D, 46 (1990), pp. 177–190.
- [37] B. CASTAING, Y. GAGNE, ET M. MARCHAND, *Log-similarity for turbulent flows ?*, Physica D, 68 (1993), pp. 387–400.
- [38] P. CHAINAIS, *Cascades log-infiniment divisibles et analyse multirésolution. Application à l'étude des intermittences en turbulence*, Thèse de l'École Normale Supérieure de Lyon, 2001.
- [39] P. CHAINAIS, R. RIEDI, ET P. ABRY, *On non scale invariant infinitely divisible cascades*, preprint, (2003).
- [40] —, *Scale invariant infinitely divisible cascades*, in Int. Symp. on Physics in Signal and Image Processing, Grenoble, France, 2003.
- [41] O. CHANAL, B. CHABAUD, B. CASTAING, ET B. HÉBRAL, *Intermittency in a turbulent low temperature gaseous helium jet*, Eur. Phys. J. B, 17 (2000), pp. 309–317.
- [42] L. CHEVILLARD, *Description multifractale unifiée du phénomène d'intermittence en turbulence eulérienne et lagrangienne*, Thèse de l'Université de Bordeaux I, 2004.
- [43] A. CHHABRA ET K. SREENIVASAN, *Negative dimensions : theory, computation, and experiment*, Phys. Rev. A, 43 (1991), pp. 1114–1117.
- [44] —, *Scale-invariant multiplier distributions in turbulence*, Phys. Rev. Lett., 68 (1992), pp. 2762–2765.
- [45] P. COLLET ET F. KOUKIOU, *Large deviations for multiplicative chaos*, Comm. Math. Phys., 147 (1992), pp. 329–342.
- [46] L. DANAILA, F. ANSELMET, ET R. ANTONIA, *An overview of the effect of large-scale inhomogeneities on small-scale turbulence*, Phys. Fluids, 14 (2002), pp. 2475–2484.
- [47] L. DANAILA, F. ANSELMET, T. ZHOU, ET R. ANTONIA, *A generalization of Yaglom's equation which accounts for the large-scale forcing in heated decaying turbulence*, J. Fluid Mech., 391 (1999), pp. 359–372.
- [48] I. DAUBECHIES, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure and App. Math., 41 (1988), pp. 909–996.
- [49] N. DECOSTER, Thèse de l'Université de Bordeaux I, 1999.
- [50] N. DECOSTER, S. ROUX, ET A. ARNEODO, *A wavelet-based method for multifractal image analysis. II. Applications to synthetic multifractal rough surfaces*, Eur. Phys. J. B, 15 (2000), pp. 739–764.
- [51] J. DELOUR, J. MUZY, ET A. ARNEODO, *Intermittency of 1d velocity spatial profiles in turbulence : a magnitude cumulant analysis*, Eur. Phys. J. B, 23 (2001), pp. 243–248.
- [52] B. DUBRULLE, *Intermittency in fully developed turbulence : log-Poisson statistics and generalized scale invariance*, Phys. Rev. Lett., 73 (1994), p. 959.
- [53] —, *Finite size scale invariance*, Eur. Phys. J. B, 14 (2000), pp. 757–771.
- [54] A. EINSTEIN, *Über die von der molekularkinetischen theorie de wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen*, Annalen der Physik, (1905).
- [55] K. FALCONER, *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley and sons, 1990.
- [56] W. FELLER, *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume II*, John Wiley and sons, 1966.

- [57] J. FRANCHI, *Chaos multiplicatif : un traitement simple et complet de la fonction de partition*, Lectures Notes in Math., 1613 (1995).
- [58] U. FRISCH, *Turbulence, the Legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, 1995.
- [59] Y. GAGNE, B. CASTAING, C. BAUDET, ET Y. MALÉCOT, *Reynolds dependence of third-order velocity structure function*, Phys. of Fluids, 16 (2004), pp. 482–485.
- [60] ———, *Reynolds log-similarity of third-order velocity structure function*, in Advances in Turbulence X, Proc. of ETC10 Conference, Trondheim, Norway, Ed. : H.I. Anderson, P.-A. Krogstad, CIMNE, Barcelona, 2004.
- [61] Y. GAGNE, E. HOPFINGER, ET U. FRISCH, *A new universal scaling for fully developed turbulence : the distributions of velocity increments*, in New trends in Nonlinear Physics and Pattern Forming Phenomena, NATO ASI, vol. 237, éditeurs : P. Coulet et P. Huerre, Plenum Press, New York, 1990.
- [62] A. GROSSMANN ET J. MORLET, Siam, J. Math. Anal., 15 (1984), p. 723.
- [63] A. HAAR, *Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme*, Math. Annalen, 69 (1919), pp. 331–371.
- [64] T. HASLEY, M. JENSEN, L. KADANOFF, I. PROCACCIA, ET B. SHRAIMAN, *Fractal measures and their singularities : the characterization of strange sets*, Phys. Rev A, 33 (1986), pp. 413–423.
- [65] F. HAUSDORFF, Math. Annalen, 79 (1919), p. 157.
- [66] M. HOLSCHNIEDER ET P. TCHAMITCHIAN, *Pointwise analysis of Riemann's "non-differentiable" function*, Invent. Math., 105 (1991), pp. 157–175.
- [67] J. HUNT ET J. VASSILICOS, *Kolmogorov's contributions to the physical and geometrical understanding of small-scale turbulence and recent developments*, Proc. R. Soc. Lond. A, 434 (1991).
- [68] S. JAFFARD, *Exposants de Hölder en des points donnés et coefficients d'ondelettes*, C. R. Acad. Sci. Sér. I Math., 308 (1989), pp. 79–81.
- [69] ———, *Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients*, Publicaciones Matemáticas, 35 (1991), pp. 155–168.
- [70] ———, *Multifractal formalism for functions*, S.I.A.M. J. Math. Anal., 28(4) (1997), pp. 944–998.
- [71] ———, *On lacunary wavelet series*, Ann. Appl. Proba, 10(1) (2000), pp. 313–329.
- [72] ———, *Ondelettes pour l'analyse multifractale de fonctions*, in Lois d'échelle, fractales et ondelettes, éditeurs : P. Abry, P. Gonçalves, J. Lévy-Véhel, Hermès Science, 2002.
- [73] ———, *Wavelet techniques in multifractal analysis*, "Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoit Mandelbrot", éditeurs : M. Lapidus et M. van Frankenhuysen, Proc. of Symp. in Pure Mathematics, (2004).
- [74] S. JAFFARD, B. LASHERMES, ET P. ABRY, *Wavelet leaders in multifractal analysis*, en préparation, (2005).
- [75] S. JAFFARD ET Y. MEYER, *Wavelets methods for pointwise regularity and local oscillations of functions*, Memoirs of the AMS., 123 (1996).
- [76] B. JOUAULT, M. GREINER, ET P. LIPA, *Fix-point multiplier distributions in discrete turbulent cascade models*, Physica D, 136 (2000).

- [77] B. JOUAULT, P. LIPA, ET M. GREINER, *Multiplier phenomenology in random multiplicative cascade processes*, Phys. Rev. E, 59 (1999).
- [78] J. KAHANE ET J. PEYRIÈRE, *Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot*, Adv. in Math., 22 (1976).
- [79] P. KESTENER, *Analyse multifractale 2D et 3D à l'aide de la transformée en ondelettes : application en mammographie et en turbulence développée*, Thèse de l'Université de Bordeaux I, 2003.
- [80] P. KESTENER ET A. ARNEODO, *Generalizing the wavelet-based multifractal formalism to vector-valued random fields : application to turbulent velocity and vorticity 3D numerical data*, Phys. Rev. Letters, 93 (2004).
- [81] N. KEVLAHAN ET J. VASSILICOS, *The space and scale dependencies of the self-similar structure of turbulence*, Proc. R. Soc. Lond. A, 447 (1994).
- [82] A. N. KOLMOGOROV, *Wiensche spiralen und einige andere interessante cirve im Hilbertschen raum*, C.R. (Doklady) Acad. Sci., 26 (1940), pp. 115–118.
- [83] ———, *Dissipation of energy in locally isotropic turbulence*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 32 (1941), pp. 16–18.
- [84] ———, *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 30 (1941), pp. 299–303.
- [85] ———, *A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number*, J. Fluid Mech., 13 (1962), pp. 82–85.
- [86] L. LANDAU ET E. LIFSHITZ, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 2ième édition, 1987.
- [87] M. LAPIDUS ET M. VAN FRANKENHUYSEN, *Fractal Geometry and Number Theory*, Birkhäuser, 2000.
- [88] B. LASHERMES, *Contributions à l'étude des effets de taille finie dans les phénomènes d'invariance d'échelle*, Rapport de D.E.A., École Normale Supérieure de Lyon, 2002.
- [89] B. LASHERMES ET P. ABRY, *Scaling exponent estimation in fully developed turbulence : critical order estimation*, en préparation, (2005).
- [90] B. LASHERMES, P. ABRY, ET P. CHAINAIS, *De l'estimation des exposants des lois d'échelle*, in GRETSI'03 workshop, Paris, France, 2003.
- [91] ———, *New insights on the estimation of scaling exponents*, in Wavelet and Statistics Conference, Villard de Lans, France, 2003.
- [92] ———, *New insights into the estimation of scaling exponents*, Int. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, 2 (2004), pp. 497–523.
- [93] ———, *Scaling exponents estimation for multiscaling processes*, in ICASSP 2004 Conference, Montréal, Canada, 2004.
- [94] B. LASHERMES, C. BAUDET, P. ABRY, ET P. CHAINAIS, *Limitation of scaling exponent estimation in turbulence*, in Advances in Turbulence X, Proc. of ETC10 Conference, Trondheim, Norway, Ed. : H.I. Anderson, P.-A. Krogstad, CIMNE, Barcelona, 2004.
- [95] B. LASHERMES, S. JAFFARD, ET P. ABRY, *Wavelet leaders based multifractal analysis*, in ICASSP 2005 Conference, Philadelphia, USA, 2005.
- [96] E. LINDBORG, *Correction to the four-fifths law due to variations of the dissipation*, Phys. of Fluids, 11 (1999), pp. 510–512.

- [97] T. LUNDGREN, *Kolmogorov two-thirds law by matched asymptotic expansion*, Phys. of Fluids, 14 (2002), pp. 638–642.
- [98] —, *Kolmogorov turbulence matched asymptotic expansion*, Phys. of Fluids, 15 (2003), p. 1074.
- [99] J. LÉVY VÉHEL ET C. TRICOT, *Analyse fractale et multifractale en traitement des signaux*, in Lois d'échelle, fractales et ondelettes, éditeurs : P. Abry, P. Gonçalvès, J. Lévy-Véhel, Hermès Science, 2002.
- [100] E. LÉVÊQUE, *Contributions à la description de l'agitation turbulente d'un fluide visqueux incompressible*, Habilitation à diriger des recherches, Université Claude Bernard, Lyon I, 2004.
- [101] E. LÉVÊQUE ET C. KOUDELLA, *Finite-mode spectral model of homogeneous and isotropic Navier-Stokes turbulence*, Phys. Rev. Letters, 86 (2001), p. 4003.
- [102] S. MALLAT, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$* , Trans. Amer. Math. Soc., 315 (1989), pp. 69–87.
- [103] —, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, San Diego, CA, 1998.
- [104] Y. MALÉCOT, C. AURIAULT, H. KAHALERRAS, Y. GAGNE, O. CHANAL, B. CHABAUD, ET B. CASTAING, *A statistical estimator of turbulence intermittency in physical and numerical experiments*, Eur. Phys. J. B, 16 (2000), pp. 549–561.
- [105] B. MANDELBROT, *Intermittent turbulence in self similar cascades : Divergence of high moments and dimension of the carrier*, J. Fluid. Mech., 62 (1974), p. 331.
- [106] B. MANDELBROT, *Fractals : form, chance and dimension*, Freeman, 1977.
- [107] —, *The fractal geometry of nature*, Freeman, 1982.
- [108] —, *A class of multinomial multifractal measures with negative (latent) values for the "dimension"  $f(\alpha)$* , in Fractals, proc. of the Erice meeting, 88, 1989.
- [109] —, *Negative fractal dimensions and multifractals*, in Statphys 17, Rio de Janeiro, 1989, 1989.
- [110] B. MANDELBROT, *Negative fractal dimensions and multifractals*, Physica A, 163 (1990), pp. 306–315.
- [111] —, *A multifractal walk down wall street*, Scientific American, 280 (1999), pp. 70–73.
- [112] B. MANDELBROT ET J. VAN NESS, *Fractionnal Brownian motion, fractionnal noises and applications*, SIAM Reviews, 10 (1968), pp. 422–437.
- [113] P. MARCQ ET A. NAERT, *A Langevin equation for the energy cascade in fully developed turbulence*, Physica D, 124 (1998), p. 368.
- [114] J. MAURER, P. TABELING, ET G. ZOCCHI, *Statistics of turbulence between two counter rotating discs in low temperature helium gas*, Europhys. Lett., 26 (1994), pp. 31–36.
- [115] Y. MEYER, *Ondelettes et opérateurs*, Hermann, 1990.
- [116] —, *Wavelets, vibrations and scaling*, in CRM Series AMS, vol. 9, Presses de l'Université de Montréal, 1998.
- [117] M. MISITI, Y. MISITI, G. OPPENHEIM, ET J. POGGI, *Les ondelettes et leurs applications*, Hermès Sciences Publications, 2003.
- [118] F. MOISY, P. TABELING, ET H. WILLAIME, *Kolmogorov equation in a fully developed turbulence experiment*, Phys. Rev. Lett., 82 (1999), pp. 3994–3997.

- [119] G. M. MOLCHAN, *Scaling exponents and multifractal dimensions for independent random cascades*, Comm. Math. Phys., 179 (1996), p. 681.
- [120] ———, *Turbulent cascades : Limitations and a statistical test of the lognormal hypothesis*, Phys. Fluids, 9 (1997), pp. 2387–2396.
- [121] A. MONIN ET A. YAGLOM, *Statistical fluids dynamics*, M.I.T. Press, 1975.
- [122] N. MORDANT, *Mesure lagrangienne en turbulence : mise en oeuvre et analyse*, Thèse École Normale Supérieure de Lyon, 2001.
- [123] N. MORDANT, A. CRAWFORD, ET E. BODENSCHATZ, *Experimental Lagrangian acceleration probability density function measurement*, Physica D, 193 (2004), pp. 245–251.
- [124] N. MORDANT, O. MICHEL, P. METZ, ET J.-F. PINTON, *Scaling and intermittency of Lagrangian velocity in fully developed turbulence*, Phys. Rev. Letters, 87 (2001), p. 214501.
- [125] J. MORLET, NATO ASI series, F1 (1983).
- [126] J. MUZY, *Analyse de distributions fractales à partir de leur transformée en ondelettes : des concepts mathématiques aux applications physiques*, Thèse de l'Université de Nice, 1993.
- [127] J. MUZY ET E. BACRY, *Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log-infinitely divisible scaling laws*, Phys. Rev. E, 66 (2002), p. 056121.
- [128] J. MUZY, E. BACRY, ET A. ARNÉODO, *The multifractal formalism revisited with wavelets*, Int. J. of Bifurcation and Chaos, 4 (1994), pp. 245–302.
- [129] M. NELKIN, *Turbulence in fluids*, Am. J. Phys., 68 (2000), pp. 310–318.
- [130] M. NELKIN ET G. STOLOVITSKY, *Limitations of random multipliers in describing turbulent energy dissipation*, Phys. Rev. E, 54 (1996), pp. 5100–5106.
- [131] L. NOTTALE, *Relativité d'échelle, non-différentiabilité et espace-temps fractal*, in Lois d'échelle, fractales et ondelettes, éditeurs : P. Abry, P. Gonçalves, J. Lévy-Véhel, Hermès Science, 2002.
- [132] L. NOTTALE, G. SCHUMACHER, ET L. E.T., *Scale relativity and quantization of exoplanet orbital semi-major axes*, Astron. Astrophys., 361 (2000), p. 379.
- [133] E. NOVIKOV, *Functionals and the random-force method un turbulence theory*, Sov. Phys. J.E.T.P., 20 (1965), pp. 1290–1294.
- [134] ———, *Intermittency and scale similarity of the structure of turbulent flow*, Prikl. Math. Mekh., 35 (1970), pp. 266–277.
- [135] A. OBUKHOV, *Some specific features of atmospheric turbulence*, J. Fluid Mech., 13 (1962), pp. 77–81.
- [136] M. OSSIANDER ET E. WAYMIRE, *Statistical estimation for multiplicative cascades*, The Annals of Statistics, 28 (2000), pp. 1533–1560.
- [137] ———, *On estimation theory for multiplicative cascades*, Ind. J. Stat., (2002), pp. 323–343.
- [138] G. PARISI ET U. FRISCH, *On the singularity structure of fully developed turbulence, appendix to fully developed turbulence and intermittency by U. Frisch*, in Proc. Int. Summer school Phys. Enrico Fermi, North Holland, 1985.
- [139] G. PEDRIZZETTI, E. NOVIKOV, ET A. PRASKOVSKY, *Self-similarity and probability distributions of turbulent intermittency*, Phys. Rev. E, 53 (1996), pp. 475–484.
- [140] S. PIETROPINTO, *Expérience Grands Reynolds Cryogéniques : GReC*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, 2002.

- [141] S. PIETROPINTO, C. POULAIN, C. BAUDET, B. CASTAING, B. CHABAUD, Y. GAGNE, B. HEBRAL, Y. LADAM, P. LEBRUN, O. PIROTTE, ET P. ROCHE, *Superconducting instrumentation for high Reynolds turbulence experiments with low temperature gaseous helium*, Physica C, 386 (2003), pp. 512–516.
- [142] J. QUIAN, *Inertial range and the finite Reynolds number effect of turbulence*, Phys. Rev. E, 55 (1997), pp. 337–342.
- [143] ———, *Slow decay of the finite Reynolds number effect of turbulence*, Phys. Rev. E, 60 (1999), pp. 3409–3412.
- [144] L. RICHARDSON, *Weather prediction by numerical process*, Cambridge University Press, 1922.
- [145] R. RIEDI, *Lois d'échelle multifractales : fondements et approche par ondelette*, in Lois d'échelle, fractales et ondelettes, éditeurs : P. Abry, P. Gonçalvès, J. Lévy-Véhel, Hermès Science, 2002.
- [146] R. H. RIEDI, *Multifractal processes*, in : “Theory and applications of long range dependence”, eds. Doukhan, Oppenheim and Taqqu, (2003), pp. 625–716.
- [147] S. ROUX, *Analyse en ondelettes de l'auto-similarité de signaux en turbulence pleinement développée*, Thèse de l'Université d'Aix-Marseille II, 1996.
- [148] S. ROUX, A. ARNEODO, ET N. DECOSTER, *A wavelet-based method for multifractal image analysis. III. Applications to high-resolution satellite images of cloud structure*, Eur. Phys. J. B, 15 (2000), pp. 765–786.
- [149] S. G. ROUX, B. LASHERMES, P. ABRY, ET S. JAFFARD, *Contributions à l'étude des performances statistiques des estimateurs multifractals*, in Conférence GRETSI'05, Louvain-la-Neuve, Belgique, 2005.
- [150] G. RUIZ CHAVARRIA, C. BAUDET, ET S. CILIBERTO, *Hierarchy of the energy dissipation moments in fully developed turbulence*, Phys. Rev. Lett., 74 (1995), pp. 1986–1989.
- [151] G. SAMORODNITSKY ET M. TAQQU, *Stable non-Gaussian random processes*, Chapman and Hall, New York, 1994.
- [152] D. SCHERTZER ET S. LOVEJOY, *Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes*, J. Geophys. Res., 92 (1987), pp. 9693–9714.
- [153] ———, *Nonlinear variability in geodynamics : multiple singularities, observables, universality classes*, in Fractals : physical origin and consequences, éditeur : L. Pietronero, Plenum, 1989.
- [154] ———, *Hard and soft multifractal process*, physica A, 185 (1992), pp. 187–194.
- [155] D. SCHERTZER, S. LOVEJOY, F. SCHMITT, Y. CHIGIRINSKAYA, ET D. MARSAN, *Multifractal cascade dynamics and turbulent intermittency*, Fractals, 5 (1997), pp. 427–471.
- [156] D. SCHMITT, F. MARSAN, *Stochastic equations generating continuous multiplicative cascades*, Eur. Phys. J. B, 20 (2001), pp. 3–6.
- [157] F. SCHMITT, *Intermittence et turbulences : analyse de données, validation de modèles et applications*, Habilitation à diriger des recherches, Université Paris VI, France, 2001.
- [158] F. SCHMITT, D. SCHERTZER, S. LOVEJOY, ET Y. BRUNET, *Empirical study of multifractal phase transitions in atmospheric turbulence*, Nonlinear Processes in Geophysics, 1 (1994), pp. 95–104.
- [159] M. SCHROEDER, *Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from an Infinite Paradise*, W.H. Freeman and Company, 1991.

- [160] Z.-S. SHE ET E. LÉVÊQUE, *Universal scaling laws in fully developed turbulence*, Phys. Rev. Letters, 72 (1994), pp. 336–339.
- [161] Z.-S. SHE ET E. WAYMIRE, *Quantized energy cascade and log-Poisson statistics in fully developed turbulence*, Phys. Rev. Letters, 74 (1995), pp. 262–265.
- [162] K. SREENIVASAN, *Fluid turbulence*, Rev. Modern. Phys., 71 (1999), pp. 383–395.
- [163] H. TENNEKES ET J. LUMLEY, *A First Course in Turbulence*, MIT Press, 1972.
- [164] B. TORRÉSANI, *Analyse continue par ondelettes*, Interéditions et CNRS Éditions, 1995.
- [165] C. TRICOT, *Courbes et dimension fractale*, Springer Verlag, 1993.
- [166] M. VAN DYKE, *An Album of Fluid Motion*, The Parabolic Press, Stanford, 1982.
- [167] T. VON KÁRMÁN ET L. HOWARTH, *On the statistical theory of isotropic turbulence*, Proc. Roy. Soc., A164 917 (1938).
- [168] G. VOTH, K. SATYANARAYAN, ET E. BODENSCHATZ, *Lagrangian acceleration measurements at large Reynolds number*, Phys. Fluids, 10 (1998), pp. 2268–2280.
- [169] I. WYGNANSKI ET H. FIELDER, *Some measurements in the self-preserving jet*, J. Fluid Mech., 38 (1969), pp. 577–612.
- [170] A. YAGLOM, *Effect of fluctuations in energy dissipation rate on the form of turbulence characteristics in the inertial subrange*, Dokl. Akad. Nauk. SSR, 166 (1966), pp. 49–52.
- [171] T. ZHOU, R. ANTONIA, L. DANAILA, ET F. ANSELMET, *Approach to the four-fifths 'law' for grid turbulence*, J. of Turbulence, 1 (2000).





**Analyse multifractale pratique : coefficients dominants et ordres critiques.  
Applications à la turbulence pleinement développée.  
Effets de nombre de Reynolds fini.**

La description multifractale des signaux a été initiée au cours des vingt dernières années, notamment dans le domaine de la turbulence pleinement développée. Les propriétés de régularité ponctuelle des signaux étudiés sont caractérisées à l'aide d'un spectre de singularités. L'analyse multifractale de ces signaux consiste à mesurer ce spectre de singularités, à l'aide de formalismes multifractals. L'apparition des transformées en ondelette, à la même époque, a permis d'affiner la pratique de l'analyse multifractale, sans pour autant toujours reposer sur des bases mathématiques solides.

S. Jaffard a récemment introduit les coefficients dominants, qui permettent de construire un formalisme multifractal mathématiquement bien fondé, et au cadre d'application large : il rend possible la mesure de l'ensemble du spectre de singularités, et reste valide lorsque les signaux analysés contiennent des singularités oscillantes. Ce nouvel outil est pour la première fois mis en oeuvre, numériquement caractérisé et appliqué à des signaux de vitesse turbulente.

La question du bon usage pratique des formalismes multifractals, qui reposent sur la mesure d'exposants de fonctions de structure, est essentielle. Le travail présenté se propose d'y apporter des éléments de réponse. Une étude numérique, sur un large panel de processus multifractals synthétiques, a permis d'illustrer et de caractériser un aspect essentiel de l'analyse multifractale pratique, l'existence d'un ordre critique. Un estimateur de cet ordre critique est construit et numériquement caractérisé. Une relecture des résultats obtenus en turbulence est alors effectuée.

Enfin, la question de l'universalité des exposants des fonctions de structure en turbulence pleinement développée est abordée. Une modélisation de l'exposant de la fonction de structure d'ordre trois est proposée et comparée à des résultats expérimentaux, mettant en évidence le caractère non-universel de sa valeur.

**Practical multifractal analysis : wavelet leaders and critical orders.  
Applications to fully developed turbulence.  
Finite Reynolds number effects.**

Multifractal description of signals has been developed during the last 20 years, mainly in the fully developed turbulence area. Pointwise regularity properties are characterized by the so-called singularity spectrum. Multifractal analysis consists in the singularity spectrum measurement using multifractal formalisms. Simultaneous introduction of wavelet transforms allowed finer practical multifractal analysis, sometimes without receiving well-founded mathematical basis.

S. Jaffard recently introduced the wavelet leaders, leading to a mathematical well-founded multifractal formalism that allows the measurement of the whole singularity spectrum and remains valid when performing the analysis of signals with oscillating singularities. This new tool is for the first time implemented, numerically characterized and applied to turbulent velocity data.

On the other hand this work rises the important issue of the practical use of multifractal formalisms, that reduce in fine to structure function scaling exponent measurement. Extensive numerical study using reference synthetical multifractal processes illustrates and characterizes the existence of a critical order. An estimator of the critical order is built and numerically characterized. Previous results in turbulence then receive rereading.

Finally, the universality of structure function scaling exponents in fully developed turbulence is tackled. Third order structure function scaling exponent modelling is proposed and compared to experimental results, emphasizing its non-universal value.