

Analyse multirésolution du Transfert Radiatif en milieu hétérogène: application de la méthode de Galerkin-ondelettes à l'Equation du Transfert Radiatif

Nicolas Ferlay

▶ **To cite this version:**

Nicolas Ferlay. Analyse multirésolution du Transfert Radiatif en milieu hétérogène: application de la méthode de Galerkin-ondelettes à l'Equation du Transfert Radiatif. Sciences de la Terre. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2003. Français. NNT : . tel-00010894

HAL Id: tel-00010894

https://theses.hal.science/tel-00010894

Submitted on 7 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : D.U. 1422

UNIVERSITE BLAISE PASCAL
(U.F.R. de Recherche Scientifique et Technique)

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES
N° 381

THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ
Spécialité : Physique de l'atmosphère

par

Nicolas FERLAY

Diplômé d'Études Approfondies

Analyse multirésolution du transfert radiatif en milieu hétérogène: application de la méthode de Galerkin-Ondelette à l'Equation du Transfert Radiatif

Soutenue publiquement le 4 Juillet 2003, devant la commission d'examen :

Président du jury :
Alain Arnéodo, Directeur de Recherche CNRS, Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon
Rapporteurs :
Anthony Davis, Chercheur au LANL, Los Alamos, U.S.A.
Michel Verstraete, Chercheur, IES, EC Joint Research Centre, Ispra, Italie
Examinateurs :
Albert Bénassi, Professeur, LaMP, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand
Bruno Torrésani, Professeur, LATP, Université de Provence, Marseille
Directeur de thèse :
Harumi Isaka, Professeur, LaMP, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent au professeur Harumi Isaka qui m'a proposé ce sujet de thèse et qui a dirigé mes travaux. Sa culture scientifique, son exigence, sa persévérance et sa rigueur, ont été plus que bienvenus : ils ont été indispensables pour mener à bien cette aventure. Il m'a de plus permis de participer à diverses conférences et Workshop, et de rencontrer ainsi la communauté du transfert radiatif atmosphérique.

Un grand merci à Albert Bénassi pour les nombreuses discussions que nous avons eues, sa générosité et son enthousiasme pour transmettre ses connaissances et sa culture des ondelettes et des statistiques, pour m'avoir permis de faire le lien avec la communauté des "matheux" au cours de divers colloques.

Les docteurs Michel Verstraete et Anthony Davis ont accepté la lourde tâche d'être rapporteur de cette thèse. Je leur exprime toute ma gratitude pour m'avoir fait cette honneur, pour être allés au-delà des imperfections du manuscrit que je leur ai remis, pour le soin qu'ils ont mis à cette lecture, et leurs corrections.

Je remercie le professeur Bruno Torrésani ainsi que le docteur Alain Arnéodo pour m'avoir fait le très grand honneur d'examiner mes travaux de thèse.

Un grand merci au Laboratoire de Météorologie Physique dans son ensemble pour m'avoir fourni des moyens informatiques, un cadre de travail, une assistance, tout à fait corrects, grâce auxquels les problèmes quotidiens sont plus facilement solutionnés. Je remercie en particulier Cécile Yvetot pour sa gentillesse et son sourire, Bernard Guillemet pour sa grande humanité. Merci également au laboratoire pour m'avoir recruté en tant qu'ATER, ce qui m'a permis de finir cette thèse dans de bonnes conditions.

Un merci particulier à Frédéric et Céline, compagnons de recherche de l'équipe "transfert radiatif" du laboratoire, pour nos discussions rayonnantes, et pour les simulations Monte Carlo et SHDOM qu'ils ont lancées pour moi.

Un grand merci à tous les doctorants du LaMP qui étaient présents pendant ces quelques années : Régis, Angela, Gilles (indétronable au squash), Karine(s), Fanny (et ses tartes à la poire), Olivier (indétronable au pois chiche), Marie, Céline, Mathieu, Maud, Damien, Claire, Mohammad, etc. L'ambiance entre doctorants a été excellente, et a permis de surmonter bien des baisses de régime.

Merci à ma famille pour son amour, à mes amis pour leur soutien et leur présence.

Pour finir, merci bien sûr à Delphine pour son soutien constant, sa tolérance, sa pêche, et bien d'autres petites choses.

Table des matières

Remerciements . . . . . **iii**

Table des matières . . . . . **v**

Annexes . . . . . **ix**

Table des figures . . . . . **xi**

Liste des tableaux . . . . . **xvii**

1 Introduction **1**
1.1 Quelques aspects sur la complexité des sciences du climat 1
1.1.1 Rôle central du transfert de l'énergie radiative 1
1.1.2 Rôle radiatif des nuages 3
1.1.3 Un problème d'intégration d'échelle 4
1.1.4 Enjeux et challenges des sciences du climat 5
1.1.5 Observations satellitaires 6
1.2 Le transfert radiatif en nuage hétérogène 8
1.2.1 Hétérogénéité des champs nuageux 8
1.2.1.1 Hétérogénéité à différentes échelles 8
1.2.1.2 De quelles hétérogénéités parle-t-on ? 8
1.2.2 Insuffisance du modèle plan-parallèle 9
1.2.2.1 Non-linéarité des réponses radiatives 9
1.2.2.2 Flux radiatifs nets horizontaux 10
1.2.2.3 Aspects multiéchelles du transfert radiatif 13
1.2.3 Techniques de calcul utilisées 13
1.2.4 Besoin de formalisation du transfert radiatif en milieu hétérogène . . . 14
1.2.4.1 Fermeture et couplage des échelles 14
1.3 Approche proposée dans ce travail 15
1.3.1 Utilisation de l'outil ondelettes 15
1.3.2 Technique utilisée : la méthode de Galerkin-ondelette 16

2 L'analyse multirésolution et ses utilisations **17**
2.1 Analyse multirésolution et ondelettes 18
2.1.1 Les bases orthonormées d'ondelettes 18
2.1.2 Analyse multirésolution 20
2.1.2.1 Définition 20
2.1.2.2 Conséquences 21
2.1.3 Transformation en ondelettes rapides 23
2.1.3.1 Initialisation 23

2.1.3.2 Calcul des coefficients 24
2.1.3.3 Périodisation de l'AMR 24
2.1.3.4 Transformation discrète périodique ou périodisée 24
2.1.4 Exemples d'analyses multirésolutions 24
2.1.4.1 AMR de Haar 25
2.1.4.2 AMR de Shannon 26
2.1.4.3 AMR de Meyer 26
2.1.4.3.1 Ondelette de Meyer non-associée à une multirésolution 26
2.1.4.3.2 Ondelette de Meyer associée à une multirésolution . 27
2.1.4.3.3 Aspects numériques 27
2.1.5 Utilisation des analyses multirésolutions 30
2.2 Utilisation d'ondelettes pour la résolution d'edp 31
2.2.1 Vers une représentation appropriée de la solution 32
2.2.1.1 Méthode spectrale 32
2.2.1.2 Décomposition adaptée aux problèmes physiques sous jacent 32
2.2.2 Méthode de Galerkin-Ondelette 34
2.2.2.1 Application à l'Equation du Transfert Radiatif 35
2.2.2.1.1 Coefficients de connexion 35

3 Analyse en ondelettes de l'ETR 41
3.1 Définitions et notations 42
3.1.1 Quantités radiatives 42
3.1.2 Propriétés radiatives du milieu 43
3.2 Equation du Transfert Radiatif (ETR) 44
3.2.1 Bilan radiatif dans un élément de volume 44
3.2.2 Equation générale du transfert radiatif 45
3.2.3 Conditions aux limites 46
3.2.4 Champ direct et diffus 47
3.3 Méthode des ordres successifs de diffusion 48
3.4 Transformation azimutale de l'ETR 48
3.4.1 Décomposition azimutale en Fourier 49
3.4.1.1 Décomposition des radiances 49
3.4.1.2 Décomposition des fonctions du type $R(\vec{r},\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}')$ 49
3.4.2 Transformation azimutale de l'Equation du transfert radiatif pour les différents ordres de diffusion 50
3.4.3 Conditions aux limites 52
3.5 Décomposition en ondelettes de l'ETR 53
3.5.1 Méthode de Galerkin-ondelette appliquée à l'ETR 53
3.5.1.1 Nouvelle formulation de l'équation du transfert radiatif . . . 55
3.5.1.2 Lecture des équations 3.58 et 3.59 57
3.6 Etude des coefficients de connexion 58
3.6.1 Coefficients de connexion d'interaction 59
3.6.1.1 Etude dans le domaine physique 59
3.6.1.2 Etude dans le domaine fréquentiel 61
3.6.1.2.1 Etude du support du produit de convolution $\widehat{\Psi_1} * \widehat{\Psi_2}$ 62
3.6.1.2.2 Effet de la distance horizontale sur le produit de la convolution 63
3.6.1.3 Bilan de l'étude des coefficients de connexion d'interaction . 66
3.6.2 Coefficients de connexion de dérivation 66
3.6.2.1 Etude dans l'espace fréquentiel avec l'AMR de Meyer 67

3.6.2.2 Etude avec l'AMR de Haar . . . 72
3.6.2.3 Représentation standard de la matrice des coefficients de connexion de différentiation . . . 72
3.6.2.3.1 Multirésolution de Haar . . . 73
3.6.2.3.2 Multirésolution de Meyer . . . 73
3.6.2.3.3 Multirésolution hybride Haar-Meyer . . . 73
3.7 Premières analyses multirésolutions des interactions . . . 75
3.7.1 Analyse des interactions locales entre les échelles . . . 76
3.7.1.1 Perturbations du champ de rayonnement lors de son interaction avec le milieu. . . . 76
3.7.1.1.1 Devenir d'une fluctuation de type A (fonction d'échelle) 76
3.7.1.1.2 Devenir d'une fluctuation de type D (ondelette) . . 77
3.7.1.2 Action des fluctuations du milieu . . . 77
3.7.1.2.1 Effet d'une fluctuation du milieu de type A (fonction d'échelle) . . . 77
3.7.1.2.2 Effet d'une fluctuation du milieu de type D (ondelette) 79
3.7.2 Mécanismes des interactions entre les échelles . . . 79
3.7.2.1 Bilan sur les interactions entre les échelles . . . 79
3.7.2.2 Source additionnelle due aux hétérogénéités sous-pixel . . . 80
3.7.2.2.1 "Cascade inverse d'énergie" en deux étapes . . . 80
3.7.2.2.2 Efficacité d'interaction . . . 81
3.7.3 Importance de l'hypothèse d'homogénéité verticale . . . 83
3.8 Formalisation multirésolution du transfert radiatif . . . 86
3.8.1 Transfert radiatif à l'échelle des "pixels" d'approximation . . . 86
3.8.1.1 Méthode "Independent Wavelet Approximation" . . . 88
3.8.1.2 Lien avec la décomposition de Reynolds . . . 89
3.8.2 Transfert radiatif à l'échelle sous-pixel . . . 91

4 Mise au point d'un code de calcul . . . 93
4.1 Résolution des ETR multirésolutions : aspects radiatifs . . . 94
4.1.1 La fonction source . . . 94
4.1.1.1 Représentation de la fonction de phase . . . 94
4.1.1.2 Formule de quadrature angulaire . . . 95
4.1.2 Intégration numérique des ETR multirésolutions . . . 97
4.2 Aspects numériques . . . 97
4.2.1 Problème d'échantillonnage ou de discrétisation . . . 97
4.2.2 Phénomène de Gibbs . . . 99
4.2.3 Discrétisation verticale . . . 99
4.2.4 Filtrage . . . 100
4.3 Aspects concernant l'analyse multirésolution . . . 101
4.3.1 Séparation des quantités radiatives . . . 101
4.3.2 Choix de la multirésolution . . . 101
4.3.2.1 AMR de Meyer versus AMR de Haar . . . 103
4.3.2.2 Choix d'une multirésolution hybride ? . . . 104
4.4 Aspects numériques concernant les composants de connexion . . . 105
4.4.1 Vacuité du tenseur d'interaction . . . 106
4.4.2 Vacuité de l'opérateur effectif d'interaction . . . 106
4.5 Remarques sur les caractéristiques actuelles du code . . . 108

5 Résultats obtenus et premières analyses . . . 109
5.1 Simulations effectuées . . . 109
5.2 Comparaison des résultats avec SHDOM et Monte Carlo . . . 111
5.2.1 Comparaison des flux et radiances sortants dans le cas du nuage sinusoïdal 112
5.2.1.1 Comparaison des radiances sortantes . . . 115
5.2.1.2 Comparaison des flux sortants . . . 115
5.2.1.2.1 Flux direct transmis . . . 115
5.2.1.2.2 Flux diffus descendant sortant du nuage . . . 115
5.2.1.2.3 Flux diffus montant sortant du nuage . . . 116
5.2.2 Comparaison des flux et radiances sortants dans le cas du nuage "cascade bornée" . . . 116
5.2.2.1 Comparaison des radiances sortantes . . . 116
5.2.2.2 Comparaison des flux sortants . . . 124
5.2.2.2.1 Flux direct transmis . . . 124
5.2.2.2.2 Flux diffus montant sortant du nuage . . . 124
5.2.2.2.3 Flux diffus descendant sortant du nuage . . . 124
5.2.3 Bilan de ces comparaisons . . . 125
5.3 Analyse des interactions . . . 128
5.3.1 Cas du nuage sinusoïdal . . . 129
5.3.1.1 Approximation basse résolution de la variabilité nuageuse . . . 129
5.3.1.2 Analyse des flux sortants . . . 129
5.3.1.2.1 Cas de la multirésolution de Meyer . . . 129
5.3.1.2.2 Cas de la multirésolution de Haar . . . 142
5.3.1.3 Analyse des radiances sortantes . . . 151
5.3.1.3.1 Cas de la multirésolution de Meyer . . . 151
5.3.1.3.2 Cas de la multirésolution de Haar . . . 153
5.3.2 Cas du nuage à cascade bornée . . . 156
5.3.2.1 Approximation basse résolution de la variabilité nuageuse . . . 156
5.3.2.2 Analyse des flux sortants . . . 157
5.3.2.2.1 Flux directs sortants . . . 157
5.3.2.2.2 Flux diffus sortants . . . 159
5.3.2.2.3 Flux total (direct + diffus) descendant sortant . . . 161
5.3.2.2.4 Total des flux sortants du nuage . . . 163
5.3.2.3 Analyse des radiances sortantes . . . 165
5.3.2.3.1 Radiances descendantes . . . 165
5.3.2.3.2 Radiances montantes . . . 165

6 Conclusions et perspectives . . . 169

Bibliographie . . . 173

Annexes . . . 179

Résumé . . . 204

Annexes

A Incertitude d'Heisenberg 179

B Propriétés des coefficients de connexion 181
B.1 Propriétés des coefficients de connexion du terme produit 181
B.2 Propriétés des coefficients de connexion du terme dérivée 182

C Calcul des coefficients de connexion de Meyer 185
C.1 Définition des supports des fonctions et des pas de discrétisation 185
C.2 Calcul de $T_{k_1,k_2,k_3}^{j_1,j_2,j_3} = \langle \gamma_{j_1,k_1} \gamma_{j_2,k_2}, \gamma_{j_3,k_3} \rangle$ pour l'AMR de Meyer 187
C.3 Calcul de $\langle \delta\gamma_{j_1,k_1}, \gamma_{j_3,k_3} \rangle$ pour l'AMR de Meyer 189

D Caractéristiques spectrales de la différentiation de Haar 191

E Absorption nuageuse et corrélation verticale du milieu 193

F Expression des termes de couplage dans l'équation 3.115 197

G Précisions sur les calculs Monte Carlo et SHDOM 199
G.1 Précisions sur le code Monte Carlo et son utilisation 199
G.2 Précisions sur le code SHDOM et son utilisation 201

Table des figures

1.1 Energie solaire atteignant l'extrémité de l'atmosphère (traits pleins en haut) ; Energie solaire moyenne absorbée par le système Terre-océan-atmosphère (traits pleins en bas) ; Rayonnement infra-rouge quittant le système Terre-océan-atmosphère (tirets) – Les échelles sont en $W.m^{-2}$ – D'après [Lorentz 1967]. 2
1.2 Excès d'énergie solaire absorbée par rapport au rayonnement infra-rouge sortant (traits pleins) ; Transport vers le nord de l'énergie (tirets) - Les échelle sont en $W.m^{-2}$ – D'après [Lorentz 1967]. 3
1.3 Caractéristiques de radiomètres existants en fonction de leur résolution spatiale et du nombre de bandes spectrales (d'après [Schowengerdt 1997]). 7
1.4 Réponse non linéaire des flux radiatifs en fonction de l'épaisseur optique du milieu. Cas de la réflectance et de la transmittance pour une incidence solaire de 45°. 10
1.5 Spectre d'énergie des champs d'épaisseur optique ($\overline{\tau} = 10$), et des réflectances calculées par les méthodes Monte Carlo et IPA (communication personnelle de B. Guillemet (LaMP)) 11
1.6 Simulations de réflectances pour un nuage de type cascade bornée (en haut à gauche), et un nuage obtenu à partir du premier en décorrélant les valeurs (en haut à droite, par un calcul Monte Carlo (au centre) et un calcul IPA (en bas) – Communication personnelle de F. Szczap (LaMP)). 12
1.7 Erreur sur la restitution de l'épaisseur optique moyenne à grande échelle de champs nuageux, basée sur un calcul IPA, en fonction de la taille des pixels (communication personnelle B. Mayer (DLR)). 13

2.1 Supports espace-fréquence de deux ondelettes ψ_{u_0,s_0} et $\psi_{u,s}$ 19
2.2 Le signal d'entrée est filtré par un filtre passe-bas et un filtre passe-haut, et sous-échantillonné. La reconstruction est réalisée en insérant des zéros et en filtrant avec les filtres duaux 23
2.3 Visualisation de quelques fonctions de la base de Haar – $J = 0$ – De haut en bas : la fonction d'échelle $\phi_{0,0}$, l'ondelette la plus grossière $\Psi_{0,0}$, les deux ondelettes à l'échelle deux fois plus fine $\Psi_{1,k}$, les quatre ondelettes à l'échelle quatre fois plus fine $\Psi_{2,k}$. 25
2.4 Vision basse résolution au sens de l'AMR de Haar d'un signal – $J = 4$ (donc $2^4 = 16$ pixels d'approximation), L=8. 26
2.5 Visualisation de la fonction d'échelle et de l'ondelette mère de l'AMR de Meyer. 28
2.6 Visualisation des ondelettes mère de Meyer pour les deux définitions (1 : sans multirésolution ; 2 : avec multirésolution). 29
2.7 Spectre d'énergie d'un signal d'origine et de sa décomposition-reconstruction par les ondelettes de Meyer - Utilisation du logiciel de calcul Matlab. 29
2.8 Vision basse résolution au sens de l'AMR de Meyer d'un signal – $J = 4$ (donc il y a $2^4 = 16$ "pixels" d'approximation), L=8. 30

3.1 L'énergie radiative traverse un élément de surface dA de normale n dans la direction Ω. 42
3.2 Conventions angulaires 43
3.3 Etablissement de l'ETR 45
3.4 Représentation de trois ondelettes de Meyer dans le domaine physique 60
3.5 Les trois situations où, quand les supports se recouvrent, les coefficients sont non-nuls 60
3.6 Modules des transformées de Fourier des fonction d'échelle et ondelette mère de Meyer 61
3.7 Convolution dans le domaine de Fourier Cas $\Psi_1 = \Psi_2 = \varphi$ 63
3.8 Convolution dans le domaine de Fourier Cas $\Psi_1 = \psi_{j_1}$, $\Psi_2 = \varphi$ 64
3.9 Convolution dans le domaine de Fourier Cas $\Psi_1 = \Psi_2 = \psi$, $j_1 = 0$ 64
3.10 Convolution dans le domaine de Fourier. Effet de la distance horizontale . . . 65
3.11 AMR de Meyer - Décroissance rapide de la valeur du tenseur en fonction de $\Delta k = k_2 - k_1$ 65
3.12 Les 4 fonctions F_i 69
3.13 Représentation standard de l'opérateur de dérivation $\langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle$ projeté sur l'espace de Haar 73
3.14 Représentation standard de l'opérateur de dérivation projeté sur l'espace de Meyer pour différents seuils. 74
3.15 Représentation standard de l'opérateur de dérivation hybride HM pour deux seuils 75
3.16 Filtre $F_{\psi,\psi}$ pour $j = 6$ 76
3.17 Résultat de l'interaction : fluctuation incidente de type A 77
3.18 Résultat de l'interaction : fluctuation incidente de type D 78
3.19 Résultat de l'interaction : fluctuation du milieu de type A 78
3.20 Résultat de l'interaction : fluctuation du milieu de type D 79
3.21 Remontée d'énergie dans les échelles en deux étapes 80
3.22 Efficacité d'interaction pour les situations de remontée d'énergie dans les échelles. Les différentes courbes correspondent aux différentes échelles pour l'ondelette ψ_i . κ_j est soit une ondelette (indicée de 7 à 0), soit une fonction d'échelle (indicée 00). 82
3.23 Décomposition multirésolution de type Haar d'un signal " trou". On visualise le signal (a), puis sa décomposition en ondelettes : l'approximation à l'échelle ($J = 3$) (b), et les détails aux différentes échelles ((b) à (h)). Le trou dans le nuage est réalisé quand les coefficients d'ondelette non nuls sont alignés verticalement. 85
3.24 Transmission à travers la couverture nuageuse éparse 85

4.1 Allure de la fonction de phase d'Henyey-Greenstein pour quelques valeurs de g 96
4.2 Schématisation des allers et retours dans le nuage, conduisant à l'obtention des sources aux différents ordres de diffusion et à leur extinction 98
4.3 Effet du filtrage à la plus haute fréquence. 102
4.4 Signal périodique à l'échelle de 6.4 km (2^8 points), et son approximation par deux AMR. Echelle d'approximation $J = 4$. 104
4.5 Transport horizontal du rayonnement, réalisé au moyen de différentes multirésolutions. 105
4.6 Représentation standard de l'opérateur effectif d'interaction pour une fluctuation de type sinusoïdal. 107

4.7 Représentation standard de l'opérateur effectif d'interaction pour une fluctuation de type "cascade bornée". 107

5.1 Hétérogénéités nuageuses horizontales simulées. 111
5.2 Evolution des flux normalisés sortants, à l'échelle de la période nuageuse, du nuage sinusoïdal en fonction de l'ordre de diffusion - g=0. 112
5.3 Comparaison de radiances montantes sortant du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 113
5.4 Comparaison de radiances descendantes sortant du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 114
5.5 Comparaison des flux directs transmis – Cas du nuage sinusoïdal. 116
5.6 Comparaison des flux diffus descendants sortants du nuage sinusoïdal. 117
5.7 Comparaison des flux diffus montants sortants du nuage sinusoïdal. 118
5.8 Comparaison des radiances montantes sortant du nuage cascade bornée - Direction : $iphi = 1$, $iquad = 1$. 120
5.9 Comparaison des radiances montantes sortant du nuage cascade bornée - Direction : $iphi = 1$, $iquad = 8$. 121
5.10 Comparaison des radiances descendantes sortant du nuage cascade bornée - Direction : $iphi = 2$, $iquad = 8$. 122
5.11 Comparaison des radiances descendantes sortant du nuage - Direction : $iphi = 1$, $iquad = 1$. 123
5.12 Comparaison des radiances descendantes sortant du nuage cascade bornée - Direction : $iphi = 1$, $iquad = 4$. 123
5.13 Flux collimaté direct sortant du nuage cascade bornée. 125
5.14 Comparaison des flux (normalisés) diffus montants sortant du nuage cascade bornée. 126
5.15 Comparaison des flux (normalisés) diffus descendants sortant du nuage cascade bornée. 127
5.16 Fonction d'échelle périodisée de Meyer $\varphi_{J,4}$ et les limites du pixel 5, centré au même point, de largeur $2^{-J} \times période$. 128
5.17 Fluctuation sinusoïdale de l'épaisseur optique et ses approximations par les AMR de Meyer et Haar - Résolution : $J = 3$, pixel de 800 m. 129
5.18 "Pixel 5" et "Pixel 6" de Meyer, et les fluctuations d'épaisseur optique en regard. 130
5.19 Flux collimatés (directs) dans le nuage sinusoïdal – $\Theta_{sol} = 161°$ – AMR de Meyer. 130
5.20 Flux diffus descendant dans le nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 133
5.21 Flux diffus montant dans le nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 133
5.22 Evolution des flux diffus cumulés sortants, à l'échelle des pixels d'approximation, en fonction de l'ordre de diffusion : a) et b) flux descendant, pixel 1 et 2 ; c) et d) flux montant, pixel 1 et 2 – AMR de Meyer – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 135
5.23 Evolution des contributions cumulées des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants à l'échelle du nuage en fonction de l'ordre de diffusion – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 135
5.24 Flux normalisés sortant à l'échelle du nuage pour chaque ordre de diffusion – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 136
5.25 Effet de canalisation dans le nuage sinusoïdal. 138
5.26 Flux nets verticaux pour l'ensemble du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. . 139
5.27 Flux nets verticaux dans la colonne 58 – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 140

5.28 Flux dans la colonne 58 du aux interactions sous-pixel – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 141
5.29 Flux nets verticaux dans la colonne 40 – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 141
5.30 Flux collimatés (directs) dans le nuage sinusoïdal – $\Theta_{sol} = 161°$ – AMR de Haar. 142
5.31 Flux diffus descendant dans le nuage sinusoïdal – AMR de Haar. 144
5.32 Flux diffus montant dans le nuage sinusoïdal – AMR de Haar. 144
5.33 Evolution des flux diffus cumulés à l'échelle des pixels d'approximation en fonction de l'ordre de diffusion : a) et b) flux montant, pixel 1 et 2 ; c) et d) flux descendant, pixel 1 et 2 – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar. 145
5.34 Evolution des contributions cumulées des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants à l'échelle du nuage en fonction de l'ordre de diffusion – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar. 146
5.35 Flux nets verticaux pour l'ensemble du nuage sinusoïdal– AMR de Haar. . . . 148
5.36 Flux nets verticaux dans la colonne 58 – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar. . 148
5.37 Flux dans la colonne 58 du aux interactions sous-pixel – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar. 149
5.38 Flux nets verticaux dans la colonne 40 – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar. . 150
5.39 Radiances sortantes montantes moyennes à l'échelle du pixel 1 : radiances dues à la totalité des interactions (à gauche), dues aux interactions à l'échelle (au centre) et sous-pixel (à droite) – AMR de Meyer – Nuage sinusoïdal. 152
5.40 Radiances sortantes montantes moyennes à l'échelle du pixel 2 : radiances dues à la totalité des interactions (à gauche), dues aux interactions à l'échelle (au centre) et sous-pixel (à droite) – AMR de Meyer – Nuage sinusoïdal. 152
5.41 Contributions relatives des interactions sous-pixel aux radiances montantes sortant des pixels 1 et 2 – AMR de Meyer – Nuage sinusoïdal. 153
5.42 Radiances sortantes montantes moyennes à l'échelle du pixel 1 : radiances totales (à gauche), dues aux interactions à l'échelle (au centre) et sous-pixel (à droite) – AMR de Haar – Nuage sinusoïdal. 154
5.43 Radiances sortantes montantes moyennes à l'échelle du pixel 2 : radiances totales (à gauche), dues aux interactions à l'échelle (au centre) et sous-pixel (à droite) – AMR de Haar – Nuage sinusoïdal. 154
5.44 Contributions relatives des interactions sous-pixel aux radiances montantes sortant des pixels 1 et 2 – AMR de Haar – Nuage sinusoïdal. 155
5.45 Approximations basse résolution de la fluctuation type "cascade bornée" par les AMR Haar et Meyer. 156
5.46 Flux direct sortant du nuage, et la fonction d'échelle de Meyer périodisée $\varphi_{J=3,k=6}$. 157
5.47 Flux collimatés (directs) dans le nuage "cascade bornée" – $\Theta_{sol} = 161°$ – AMR de Haar. 158
5.48 Flux diffus descendant dans le nuage "cascade bornée" – AMR de Haar. . . . 160
5.49 Flux diffus montant dans le nuage "cascade bornée" – AMR de Haar. 160
5.50 Evolution des contributions cumulées des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants descendants pour les huit pixels en fonction de l'ordre de diffusion – AMR de Haar – Nuage "cascade bornée". 161
5.51 Evolution des contributions cumulées des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants montants pour les huit pixels en fonction de l'ordre de diffusion – AMR de Haar – Nuage "cascade bornée". 162
5.52 Evolution des contributions cumulées des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants à l'échelle du nuage "cascade bornée" en fonction de l'ordre de diffusion – AMR de Haar. 162

5.53 Effet de canalisation du rayonnement dans le nuage “cascade bornée”. 164
5.54 Radiances sortantes descendante moyennes à l’échelle du pixel 3 : radiances totales (à gauche), dues aux interactions à l’échelle (au centre) et sous-pixel (à droite) 166
5.55 Radiances sortantes descendante moyennes à l’échelle du pixel 4 : radiances totales (à gauche), dues aux interactions à l’échelle (au centre) et sous-pixel (à droite) 166
5.56 Contributions relatives des interactions sous-pixel aux radiances descendantes sortant des pixels 3 et 4 167
5.57 Radiances sortantes montantes moyennes à l’échelle du pixel 7 : radiances totales (à gauche), dues aux interactions à l’échelle (au centre) et sous-pixel (à droite) 167
5.58 Radiances sortantes montantes moyennes à l’échelle du pixel 8 : radiances totales (à gauche), dues aux interactions à l’échelle (au centre) et sous-pixel (à droite) 168
5.59 Contributions relatives des interactions sous-pixel aux radiances montantes sortant des pixels 7 et 8 168

D.1 Rapport des spectres des fonctions $\delta(f)$ et f'. 192

E.1 Fluctuation horizontale d’épaisseur optique. 194

G.1 Représentation des 1116 directions angulaires pour lesquelles la radiance est calculée. 200
G.2 Graphique représentant l’algorithme de calcul de SHDOM (d’après [Evans 98]). 202

Liste des tableaux

3.1 Différents flux transmis à travers le nuage “trou”. 84

4.1 Points et poids de Gauss pour les radiances montantes et pour 8 angles . . . 96
4.2 Vacuité du tenseur d’interaction en fonction du seuil AMR de Meyer 106
4.3 Vacuité de l’opérateur effectif d’interaction pour le nuage cascade bornée en fonction du seuil 108

5.1 Angles zénithaux définis par la quadrature de Gauss. 110
5.2 Flux moyens directs sortants dans les 8 ”pixels” et à l’échelle du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 131
5.3 Contribution en % des interactions sous-pixel au flux direct sortant – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 131
5.4 Flux moyens diffus sortants dans les 8 “pixels” et à l’échelle du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 132
5.5 Contribution en % des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 134
5.6 Flux moyens totaux (direct+diffus) descendants sortants, dans les 8 “pixels” et à l’échelle du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 137
5.7 Contribution en % des interactions sous-pixel au flux total (direct + diffus) descendant sortant – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. 137
5.8 Somme des flux détaillés sortants du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer. . . . 138
5.9 Flux moyens directs sortants dans les 8 pixels et à l’échelle du nuage sinusoïdal – AMR de Haar. 142
5.10 Contribution en % des interactions sous-pixel au flux direct sortant – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar. 143
5.11 Flux diffus moyens sortants, dans les 8 pixels et à l’échelle du nuage sinusoïdal – AMR de Haar. 143
5.12 Contribution en % des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar. 143
5.13 Flux moyens totaux (direct+diffus) descendants sortants, dans les 8 pixels et à l’échelle du nuage sinusoïdal – AMR de Haar. 146
5.14 Contribution en % des interactions sous-pixel au flux total (direct + diffus) descendant sortant – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar. 146
5.15 Somme des flux détaillés sortant du nuage sinusoïdal – AMR de Haar. 147
5.16 Flux directs sortants moyens dans les 8 “pixels Meyer” et à l’échelle du nuage “cascade bornée”. 156
5.17 Flux directs moyens sortants dans les 8 pixels et à l’échelle du nuage “cascade bornée” – AMR de Haar. 157
5.18 Contribution en % des interactions sous-pixel au flux direct sortant – AMR de Haar – Nuage “cascade bornée”. 158

5.19 Flux diffus moyens sortants, dans les 8 pixels et à l'échelle du nuage "cascade bornée" – AMR de Haar. 159
5.20 Contribution en % des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants – AMR de Haar – Nuage "cascade bornée". 159
5.21 Flux moyens totaux (direct+diffus) descendants sortants, dans les 8 pixels et à l'échelle du nuage "cascade bornée" – AMR de Haar. 163
5.22 Contribution en % des interactions sous-pixel au flux total (direct + diffus) descendant sortant – AMR de Haar – Nuage "cascade bornée". 163
5.23 Somme des flux normalisés sortant du nuage "cascade bornée" – AMR de Haar. 163

"Penser que le soleil lui-même a des ennuis
Que le soleil lui-même a de sombres histoires
Avec de petits riens qui font les grands nuages
Et d'autres petits riens qui font pires en lui-même
Cela devrait pouvoir me consoler un peu"

Les ennuis du soleil

Elsa Triolet et E. Guillevic

chanté par Jeanne Moreau

"Ils marchaient, suivant le premier trottoir venu.
Un petit nuage rose descendait de l'air et s'approchait d'eux
– J'y vais ? proposa-t-il.
– Vas-y, dit Colin.
Et le nuage les enveloppa.
A l'intérieur, il faisait chaud et ça sentait le sucre à la cannelle.
– On ne voit plus ! dit Colin... Mais nous on les voit !...
– C'est un peu transparent, dit Chloé. Méfiez-vous."

L'écume des jours

Boris Vian

Chapitre 1

Introduction

Dans ce chapitre introductif, nous donnons quelques aspects concernant la complexité des sciences du climat et le rôle central du transfert de l'énergie radiative. L'importance du rôle radiatif des nuages est examiné en particulier. Une des caractéristiques des sciences du climat est la très grande gamme d'échelles en présence et les interactions entre les processus physiques aux différentes échelles. L'un des enjeux majeurs des sciences du climat est très certainement la prise en compte des processus à différentes échelles sans les calculer tous explicitement. L'étude du transfert radiatif est primordiale pour une deuxième raison que nous abordons : la télédétection satelittaire.

Dans un deuxième temps, les problématiques du transfert radiatif en milieu hétérogène sont détaillées : la difficulté de la prise en compte des processus radiatifs, leurs aspects multiéchelles, les techniques de calcul généralement utilisées, et le besoin de formalisation du transfert radiatif en milieu hétérogène, qui a conduit à l'utilisation, dans ce travail, de l'analyse multirésolution de type ondelettes.

1.1 Quelques aspects sur la complexité des sciences du climat

1.1.1 Rôle central du transfert de l'énergie radiative

L'objectif des sciences du climat est de comprendre le fonctionnement de cette "machine" thermique qu'est l'enveloppe superficielle de la Terre, constituée d'océans, de terres fermes, et d'une atmosphère mince par rapport à l'extension horizontale, contenant des gaz, des particules solides ou liquides. Compte tenu de la diversité à la fois des composants du système et des phénomènes physiques, la climatologie regroupe un ensemble de sciences : le transfert radiatif (interaction matière-rayonnement), la thermodynamique, la mécanique des fluides, la chimie (en phase gazeuse ou liquide, la photochimie). Ces dernières années, on a pu constater l'importance et la complexité des couplages entre ces différentes sciences en étudiant des phénomènes comme El Nino (couplage océan-atmosphère associé à un forçage solaire maximal), aux effets à grande échelle dans le temps et l'espace, la destruction de la couche d'ozone stratosphérique (destruction chimique due à la présence d'espèces chimiques chlorées anthropiques, associées à des nuages très froids (170 K)), ou l'effet de serre. La climatologie cherche désormais à prévoir la réponse du climat à la perturbation du fonctionnement de cette machine énergétique, due aux effets de l'action de l'homme sur l'environnement- essentiellement le rejet de gaz dans l'atmosphère.

Notre planète est globalement en équilibre thermique : elle se refroidit en rayonnant dans les grandes longueurs d'onde (supérieures à 10 μm) vers l'espace qui l'entoure, et est chauffée par l'absorption du rayonnement solaire à courtes longueurs d'onde (entre 300 et 1500 nm). Si, globalement, on sait combien le système Terre absorbe de cette énergie solaire (envi-

ron 70%), on connait mal la répartition de cette absorption et ses mécanismes complexes. Les raisons essentielles des différences de répartition de cette absorption sont la variation de l'éclairement solaire en fonction de la latitude, la diversité des propriétés des surfaces planétaires, la présence en altitude de couches nuageuses qui contrôlent l'entrée d'énergie dans le système, l'éclairement simultané d'une partie seulement de la planète et les temps de réponse de chacun des composants du système. Cette "machine" thermique joue donc le rôle que lui imposent les lois de la physique, celui d'un échange d'énergie entre les différentes composantes du système, amenant à une modification du climat à toutes les échelles.

Raisonnons d'abord à l'échelle synoptique à partir de figures issues de [Lorentz 1967]. La figure 1.1 indique l'énergie solaire atteignant l'extrémité de l'atmosphère (traits pleins en haut), l'énergie solaire moyenne absorbée par le système Terre-océan-atmosphère (traits pleins en bas), et le rayonnement infra-rouge quittant le système Terre-océan-atmosphère (tirets). Les valeurs sont en $W.m^{-2}$. On voit que les régions tropicales absorbent plus de chaleur qu'elles

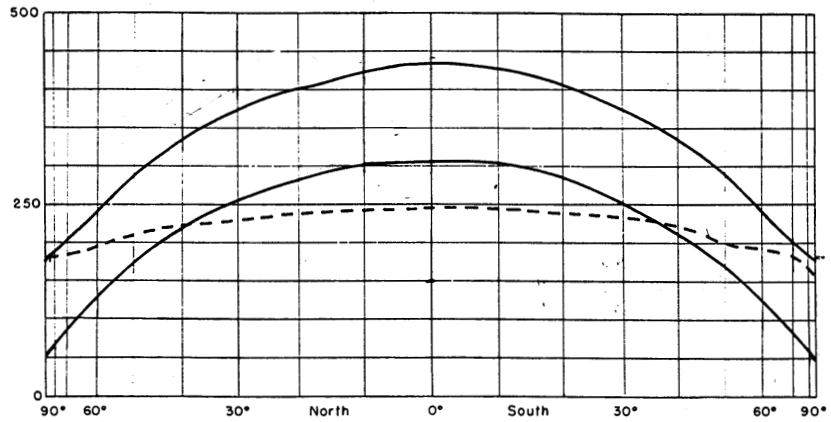


FIG. 1.1 – Energie solaire atteignant l'extrémité de l'atmosphère (traits pleins en haut) ; Energie solaire moyenne absorbée par le système Terre-océan-atmosphère (traits pleins en bas) ; Rayonnement infra-rouge quittant le système Terre-océan-atmosphère (tirets) – Les échelles sont en $W.m^{-2}$ – D'après [Lorentz 1967].

n'en émettent. Les régions polaires, au contraire, ont tendance à se refroidir radiativement. Des mécanismes vont "transporter" l'énergie des tropiques en direction des pôles, véhiculée par les masses d'air et les courants océaniques. Le transport méridional de l'énergie vers le nord est indiqué en tirets sur la figure 1.2, ainsi que l'excès d'énergie solaire absorbée par rapport au rayonnement infra-rouge sortant (traits pleins). On considère que 50% de cet échange est réalisé par les transports océaniques, 50% par les transports atmosphériques.

A une latitude donnée, l'absorption de l'énergie solaire crée également des déséquilibres énergétiques : la surface terrestre est réchauffée radiativement, alors que l'atmosphère est radiativement refroidie [Lenoble 1993] : un échange d'énergie va donc se mettre en place entre la surface et l'atmosphère ; les échanges convectif, de chaleur latente, par rayonnement infrarouge.

Les transfert radiatifs interagissent donc avec les thermodynamiques atmosphériques, la

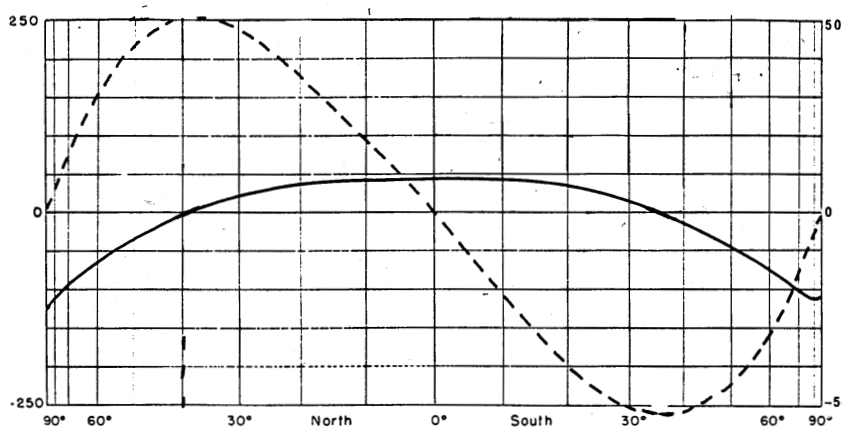


FIG. 1.2 – Excès d'énergie solaire absorbée par rapport au rayonnement infra-rouge sortant (traits pleins) ; Transport vers le nord de l'énergie (tirets) - Les échelle sont en $W.m^{-2}$ – D'après [Lorentz 1967].

dynamique, les processus d'évaporation et de convection. Selon [Lenoble 1993], le temps de relaxation d'une perturbation de température causée par un échange radiatif dans la troposphère est beaucoup plus grand que le temps de relaxation dynamique. Cela signifie que les échanges radiatifs jouent un rôle mineur à petite échelle de temps (2 ou 3 jours) mais deviennent de plus en plus importants à mesure que l'échelle de temps augmente. Ainsi, la redistribution de l'énergie radiative est le mécanisme principal définissant le climat global [Hansen et al. 1981].

1.1.2 Rôle radiatif des nuages

Les nuages recouvrent en permanence 60 à 70% de la surface du globe. On sait qu'ils jouent un rôle radiatif important et complexe [Harrison et al. 1990]. D'une part, les nuages contrôlent l'entrée de l'énergie dans le système en réfléchissant une partie du rayonnement (environ 20%). Ils participent ainsi au refroidissement de la planète. D'autre part, les nuages étant plus froids que la surface terrestre, ils rayonnent moins que celle-ci dans les longueurs d'onde thermique, et ont ainsi tendance à réchauffer la planète. Ces deux phénomènes sont en concurrence, et l'effet radiatif net des nuages dépend du type de nuages considérés. Les cirrus par exemple, nuages de haute altitude, sont optiquement minces : ils réfléchissent peu le rayonnement solaire. Etant très froids, ils émettent moins dans l'infra-rouge que des nuages de plus basse altitude. Ils ont donc tendance à réchauffer la planète. L'effet des nuages bas de type stratocumulus est inverse : ils réfléchissent efficacement le rayonnement solaire et, étant plus chaud, ils émettent plus dans l'infrarouge. Ils ont donc tendance à refroidir la planète ; leur rôle radiatif est important car ces champs nuageux sont très présents [Cahalan et al. 1994a].

De plus, le rôle des nuages est d'autant plus important et complexe à prendre en compte

que des rétroactions complexes (*feedback*) apparaissent. Par exemple, le rôle radiatif des cirrus sur le réchauffement de la planète est positif ; celui-ci a pour conséquence à la fois un réchauffement et un refroidissement de l'atmosphère, respectivement à basse et haute altitude ; et ce refroidissement a pour conséquence une présence plus importante de cirrus. De même, le forçage radiatif solaire crée de la convection qui génère des nuages, qui à leur tour créeent un forçage radiatif qui perturbe la dynamique, les profils des températures, etc. Selon [Cess et al. 1990], la plus grande incertitude dans les modèles climatiques globaux tient à la complexité des rétroactions nuageuses.

On parle ainsi de sensibilité climatique à la couverture nuageuse. Une variation de 1 % de l'albédo terrestre (soit ± 0.003) entraîne une changement de 0.5 K de la température moyenne de la surface terrestre. Or, la structure des nuages, mal connue et de ce fait mal représentée, contrôle la réflectivité nuageuse [Cahalan et al. 1994a] : on surestime l'albédo des nuages en les considérant plan-parallèle[1], donc leur capacité à refroidir la planète.

Les bilans radiatifs nuageux sont donc une donnée importante, et ils doivent être connus avec une certaine précision pour pouvoir quantifier nombre de processus. On considère que l'estimation des flux radiatifs dans les GCM (*Global Circulation Model*) doit atteindre la précision du % [Stephens and Tsay 1990]. Pourtant, cette précision n'est pas atteinte. Une incertitude de 20 $W.m^{-2}$ demeure, par exemple, concernant l'absorption solaire par les nuages (environ 3 %) : l'absorption nuageuse obtenue à partir de mesures est toujours supérieure à celle obtenue par modélisation ([Stephens and Tsay 1990], [Ramanathan et al. 1995], [Cess et al. 1995]). Des efforts importants sont portés vers une meilleure prise en compte des nuages dans les calculs radiatifs à grande échelle [Oreopoulos and Barker 1999].

Enfin, rappelons le rôle primordial du transfert radiatif pour la chimie atmosphérique, en particulier troposphérique. Beaucoup de réactions chimiques d'importance sont des réactions photochimiques, c'est à dire que l'éclairement solaire des molécules et leurs photodissociations est le moteur de réactions chimiques. C'est le cas pour les chimies gazeuse aqueuse. En photochimie, les quantités radiatives à considérer sont moins le flux solaire direct que les radiances [Madronich and Flocke 1997] : l'intégration des radiances en un point donne un flux moyen, appelé le flux actinique. Celui-ci fournit le taux de photolyse, défini comme le taux local d'un processus de photoabsorption conduisant à un événement spécifique de photodissociation. La diffusion multiple qui s'opère dans la plupart des nuages existants va en faire de véritables laboratoires de photochimie : les gaz et aérosols interstitiels vont être particulièrement éclairés, ainsi que les particules en solution dans les gouttes (pour [Ruggaber et al. 1997], le taux de photolyse à considérer pour une molécule contenue dans une gouttelette vaut 1.6 fois le taux de photolyse de cette même molécule en phase interstitielle). De plus, dans le cas de champ nuageux épars de type champ de cumulus, l'éclairement des nuages par leurs voisins va être particulièrement importants pour la photochimie des aérosols et gaz situés entre ces nuages. Ainsi, le rôle radiatif des nuages, et la prise en compte des effets radiatifs "3D", sont primordiaux en chimie troposphérique.

1.1.3 Un problème d'intégration d'échelle

Les sciences du climat constituent une discipline scientifique singulière et complexe de par l'étendue des échelles spatiale et temporelle en présence.

On note tout d'abord une large gamme d'échelles de temps : le temps de vie de molécules intervenant dans les réactions chimiques troposphériques est parfois très court (une seconde) ; la durée moyenne de vie d'une cellule convective est d'environ 20 minutes, la Terre a une période de rotation de 24 heures ; une masse d'air fait le tour du globe à une latitude fixée en

[1] l'hypothèse du nuage plan-parallèle signifie qu'on considère les nuages comme ayant une extension horizontale infinie, un sommet et une base plans, et qu'ils sont homogènes.

quelques semaines ; le transport méridional est plus lent [Jacob 1999] : il faut un ou deux mois à une masse d'air à une latitude moyenne pour atteindre les régions tropicales ou polaires ; les faibles vitesses verticales dans l'atmosphère imposent une durée de transport vertical de 3 mois environ pour traverser la troposphère ; la période de rotation de la Terre autour du Soleil est d'une année, et c'est environ le temps de transport nécessaire à une masse d'air pour passer d'un hémisphère à l'autre ; le soleil connaît un cycle d'activité de 11 ans ; les CFC (*Chloro Fluoro Carbone*) ont un temps de vie de plusieurs centaines d'années ; enfin, les courants océaniques sont associés à des cycles de transport atteignant le millier d'années. Dans ce paragraphe, nous avons évoqué une dizaine d'ordres de grandeur temporelle.

La gamme d'échelles spatiales est également très large : depuis l'échelle de Kolmogorov, c'est-à-dire l'échelle de dissipation de la turbulence (le millimètre ou le centimètre), jusqu'aux échelles synoptiques, de l'ordre du millier de km, en passant par la taille de cellules nuageuses convectives (de quelques centaines de mètres à quelques centaines de kilomètres), l'épaisseur de la couche limite atmosphérique (de l'ordre du km), de la troposphère (la dizaine de km), jusqu'aux dimensions horizontales qui atteignent la dizaine de milliers de km. Soit 10 ordres de grandeur spatiale.

On pourrait penser modéliser et mener des études à une échelle donnée et indépendamment des autres échelles, par exemple en utilisant les valeurs moyennes à l'échelle considérée. Mais ce n'est naturellement pas envisageable : il existe des interactions entre les échelles qui rendent ce découplage impossible. La turbulence atmosphérique en est un bon exemple. [Gage and Nastrom 1986] étudient le spectre d'énergie cinétique atmosphérique sur une large gamme d'échelles (de 50 m à 1000 km), produit en partie par la turbulence quasi-bidimensionnelle. [Lilly 1989] montre que l'énergie cinétique à 500 km est le résultat de l'injection d'énergie aux échelles baroclines (supérieures à 3000 km) par des processus d'instabilité, et aux échelles des panaches nuageux dans la couche limite et des nuages cumuliformes. [Grabowski and Moncrieff 2002] étudient les effets du rayonnement interactif sur l'organisation de la convection tropicale. Celle-ci est difficilement descriptible et nécessite l'utilisation d'outils appropriés comme les ondelettes [Yano, Moncrieff, Wu and Yamada 2001][Yano, Moncrieff and Wu 2001]. Modéliser à grande échelle ces phénomènes nécessite donc d'être capable de générer des processus convectifs, et des instabilités baroclines. Si l'on ne peut pas représenter toutes les échelles, ne serait-ce que numériquement – pour modéliser convenablement la convection, une grille horizontale de 1 km maximum est nécessaire pour permettre le développement de convections nuageuses profondes [Vallis et al. 1997], il faudra trouver un moyen de prendre en compte les effets des processus aux échelles non représentées : c'est le but de la paramétrisation ; décrire les effets des phénomènes (par exemple à plus petites échelles) en termes de variables disponibles (à l'échelle explicitée).

1.1.4 Enjeux et challenges des sciences du climat

Vu l'étendue des échelles qu'une modélisation complète doit prendre en compte, vu la complexité des mécanismes intervenants, l'un des enjeux principaux des sciences du climat est la simplification de la représentation de ces mécanismes, la prise en compte des interactions entre les échelles sans un calcul explicite, un compromis à trouver entre une précision et une économie des calculs.

Une des possibilités est l'approche statistique [Wilks 1995]. Elle consiste à ne pas tout décrire mais à obtenir des solutions statistiquement correctes. Des modèles, déterministes aux grandes échelles et probabilistes aux petites échelles, ont ainsi vu le jour. Par exemple, les modèles de prévision de pluies contrôlent les mouvements atmosphériques sur une certaine gamme d'échelles, et décrivent les petites échelles de façon statistique [Harris and Foufoula-Georgiou 2001]. Ces statistiques sont souvent basées sur des données d'observations.

L'autre possibilité est l'approche paramétrique. Cette approche comporte deux aspects : la paramétrisation des processus, et la paramétrisation des milieux complexes.

La paramétrisation des processus concerne généralement les petites échelles. On parle de paramétrisation des processus physiques sous-grille. Cela consiste en quelque sorte à donner une condition aux limites à l'échelle minimale de résolution du calcul. La paramétrisation est certainement une des choses les plus difficiles en sciences du climat. L'art de la paramétrisation s'appuie sur une grande connaissance des processus en jeu : elle est propre à chaque problème, et dépend de l'échelle considérée. On peut citer les LES (*Large Eddy Simulation)* qui consistent à calculer les grandes échelles d'un écoulement sans en calculer les petites, mais en modélisant leur influence à plus grande échelle. La paramétrisation des petites échelles n'est évidemment pertinente que si les échelles non-représentées jouent un rôle significatif à plus grande échelle : on parle alors d'interactions entre échelles provoquant une cascade d'énergie vers le haut (*upscale energy cascade*), de diffusion arrière de l'énergie (*backscattering*). La paramétrisation est une préoccupation ancienne et une réalité dans la communauté de la turbulence pour résoudre le problème de fermeture. Un état de l'art sur la paramétrisation des processus physiques sous-grille en sciences de l'atmosphère peut être trouvé dans [ECMWF 2001]. La paramétrisation est également essentielle en transfert radiatif, en particulier en atmosphère nuageuse. On va le voir, le transfert radiatif est un problème non-linéaire et multiéchelle. La non-prise en compte des variabilités nuageuses sous-pixel provoque des erreurs à plus grande échelle : on ne peut pas se contenter de la valeur moyenne de l'épaisseur optique dans chaque pixel. Pourtant, la paramétrisation du transfert radiatif n'est pas à un stade très avancé. Ce travail a pour objectif d'aller vers une réponse à ce besoin.

La paramétrisation des milieux complexes consiste à représenter la complexité des milieux par un petit nombre de paramètres. C'est le cas de la représentation de l'orographie, ou des structures nuageuses. La solution consiste, par exemple, à trouver, par des techniques d'homogénéisation, des milieux plus simples et équivalent, i.e. des milieux plus simplement descriptibles, qui donnent des réponses équivalentes. On parle alors de paramètres effectifs équivalents (par exemple le rayon effectif équivalent d'un cristal de glace, qui n'a rien de sphérique). La difficulté réside dans le choix des réponses équivalentes, le paramètre effectif équivalent permettant généralement de satisfaire à lui seul une condition mais non plusieurs [Szczap et al. 2000a][Szczap et al. 2000b].

Nous l'avons dit, la paramétrisation des interactions entre échelles est possible une fois que les mécanismes des interactions sont bien compris. Elle repose sur des techniques et des outils : outils statistiques, outils appropriés aux processus physiques (par exemple des outils multiéchelles), outils fonctionnant par apprentissage (réseaux de neurones). Il s'agit ensuite de valider la paramétrisation en la confrontant soit à des résultats de simulations de modèles plus fins qui contrôlent plus d'échelles, soit à des mesures. Dans les deux cas, des mesures à petites échelles sont nécessaires pour valider la modélisation. Vouloir simplifier les processus radiatifs nuageux en paramétrisant les petites échelles, nécessite donc, en première étape, la mesure des hétérogénéités nuageuses à petite échelle, avant de savoir en deuxième étape, comment prendre en compte simplement ces hétérogénéités à plus grande échelle.

1.1.5 Observations satellitaires

Le besoin de modéliser avec plus de précision la physique de l'atmosphère exige la mesure assez systématique des paramètres importants de l'étude du climat. La réponse à cette problématique se trouve dans les techniques de télédétection satellitaire. C'est la deuxième raison pour laquelle le transfert radiatif occupe une place à part en sciences du climat : les "mesures" des paramètres sont obtenues par inversion de quantités radiatives. La télédétection à l'aide de radiomètres satellisés permet la surveillance globale et répétitive du milieu natu-

rel. Les radiomètres peuvent être considérés comme des intruments de mesure particuliers, qui fournissent, par l'inversion de mesures de radiances intégrées, des quantités telles que le contenu en eau nuageuse intégré, le rayon des gouttes d'eau, l'altitude de sommet de nuages, etc. Ces "mesures" ne peuvent être obtenues que par des algorithmes d'inversion. On met au point ces algorithmes après avoir compris le problème direct, i.e. quand on est capable de générer des radiances à partir de paramètres de modèles, et que le problème est suffisamment bien posé [Tikhonov 1977] pour que la restitution de ces paramètres soit possible. L'inversion de paramètres nuageux repose classiquement sur un calcul plan-parallèle [Meador and Weaver 1980], qui consiste à représenter les nuages comme des couches homogènes d'extension horizontale infinie. Les techniques d'inversion reposent en particulier sur l'utilisation de plusieurs longueurs d'onde et de plusieurs angles d'observation de la même scène. La télédétection satellitaire a bien sûr un défaut, c'est la faible résolution spatiale de ces mesures, imposée par l'altitude de vol des satellites et la taille des détecteurs embarqués. Cependant, l'évolution des technologies permet d'obtenir dès maintenant des résolutions largement suffisantes (de l'ordre du mètre) pour nombre d'applications. La figure 1.3 présente les caractéristiques des principaux radiomètres en "activité" ou devant prochainement être lancés. Les radiomètres sont positionnés dans un diagramme bi-dimensionnel en fonction de la résolution spatiale au nadir et du nombre de bandes spectrales utilisées. N'y figurent pas le GLI (résolution de 250 m

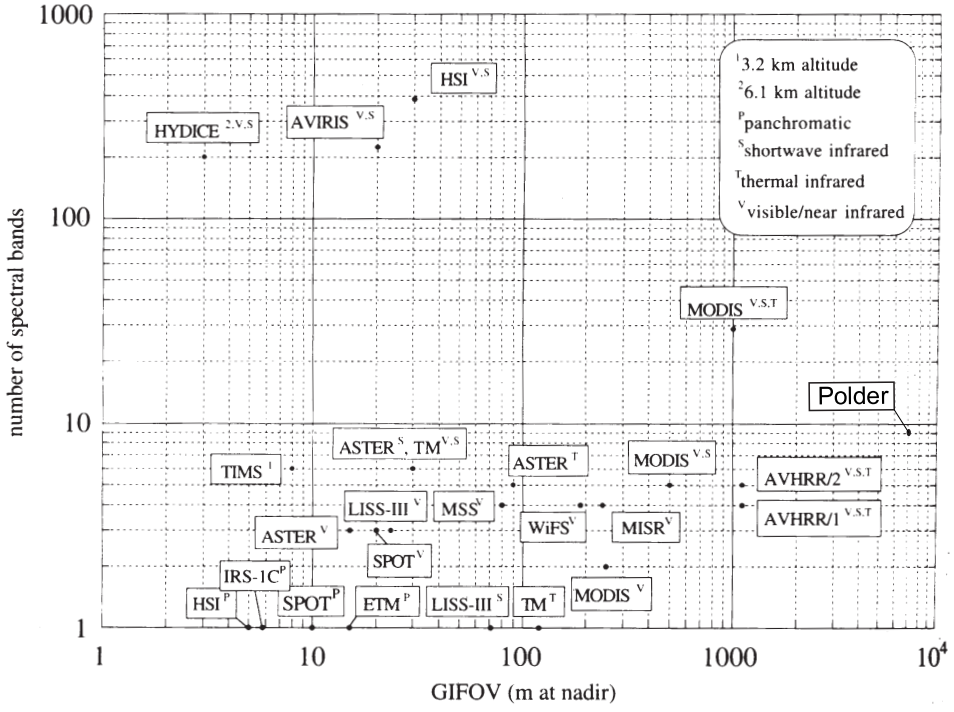


FIG. 1.3 – Caractéristiques de radiomètres existants en fonction de leur résolution spatiale et du nombre de bandes spectrales (d'après [Schowengerdt 1997]).

et 1 km) du programme ADEOS II de la NASDA, lancé en décembre 2002, et les radiomètres micro-onde comme le SSM/I (résolution de l'ordre de la dizaine de km). Un problème de modélisation et d'échelles se pose donc aussi pour l'inversion de paramètres : considérer que les radiances issues d'un pixel atmosphérique ne dépendent que des propriétés microphysiques de ce pixel et non de ses voisins, et que l'hétérogénéité sous-pixel est négligeable, sont des hypothèses qui peuvent être contestables.

1.2 Le transfert radiatif en nuage hétérogène

1.2.1 Hétérogénéité des champs nuageux

Il suffit de lever les yeux quand le ciel n'est pas parfaitement dégagé pour se convaincre de l'hétérogénéité des nuages, et de le faire régulièrement pour s'apercevoir de leur grande diversité. On constate des hétérogénéités géométriques : des épaisseurs et des étendues horizontales nuageuses variables, des trous dans les nuages, des bosses à leur sommet. Il est évident que la notion d'hétérogénéité est subjective et complexe : elle dépend de l'échelle à laquelle on observe les nuages, de l'angle d'observation, de la position de l'observateur par rapport au Soleil. En observant les nuages depuis le sol, en avion, ou sur des images satellites, on s'aperçoit que les nuages présentent des hétérogénéités sur une très grande gamme d'échelles. La seule variable dont on discute dans le paragraphe suivant est celle du contenu en eau liquide nuageuse.

1.2.1.1 Hétérogénéité à différentes échelles

On a coutume de parler d'hétérogénéité interne, i.e. en dessous de l'échelle du nuage, et externe, i.e. à l'échelle des champs nuageux. En réalité, les nuages sont hétérogènes sur une large gamme d'échelles. Des outils statistiques ou de traitement du signal, appliqués à des quantités nuageuses mesurées in situ, ou inversées à partir de mesures radiatives (RADAR, LIDAR ; mesures au sol, à partir d'avions ou de satellites), permettent de qualifier ces hétérogénéités. Ainsi, on a mesuré que la variabilité horizontale du contenu en eau liquide nuageuse présente des propriétés d'invariance d'échelle, depuis la dizaine de mètres jusqu'à la centaine de kilomètres [Davis et al. 1996]. Les champs nuageux sont intermittents (couverture fractionnaire), et on a analysé que les portions de nuages suivent une loi exponentielle tandis que les portions de ciel clair suivent une loi puissance [Duroure and Guillemet 1990]. Les formes géométriques présentent des propriétés d'autosimilarité pour des échelles comprises entre l'échelle des cellules convectives ($\sim$10 km) et 1000 km [Lovejoy 1982]. L'explication des structures nuageuses tient aux propriétés des processus physiques à l'origine de leurs créations et leurs évolutions. Les propriétés d'invariance d'échelle ont pour origine celles des champs de vitesse turbulents, les gouttes d'eau pouvant être considérées comme un traceur passif. L'intermittence des champs nuageux est liée aux processus convectifs qui les ont créés, et à des processus complexes d'agrégation et d'auto-organisation des amas nuageux [Duroure and Guillemet 1990].

1.2.1.2 De quelles hétérogénéités parle-t-on ?

Les questions que l'on doit se poser sont les suivantes : qu'entend-on par hétérogénéité, et quelles hétérogénéités sont importantes à prendre en compte d'un point de vue radiatif ? Personne ne sait réellement qualifier les hétérogénéités nuageuses. La meilleure preuve est que personne n'est parvenu jusqu'à présent à générer par modélisation des nuages réalistes. Mais l'objectif n'est pas de représenter fidèlement un nuage, plutôt de représenter et paramétrer les hétérogénéités importantes du point de vue qu'on s'est fixé, ici le point de vue radiatif. Si l'on pouvait se contenter du modèle plan-parallèle, les calculs radiatifs seraient triviaux et on s'en contenterait.

Pour répondre à ces questions, il faut analyser les processus radiatifs qui opèrent, savoir comment et quelles hétérogénéités nuageuses affectent les quantités radiatives, et à quelles échelles ces effets sont importants. [Aïda 1977] a étudié l'albédo de nuages disposés en "rue". [Welch and Wielicki 1984] ont montré que les lacunes entre les nuages modifient les propriétés de réflectivité, et que différentes structures nuageuses ayant les mêmes couverture fractionnaire

et contenu en eau peuvent facilement produire des flux radiatifs très différents. [Barker et al. 1999] étudient la sensibilité de la géométrie des nuages sur les flux solaires moyens à grande échelle. Les contraintes de calcul sont telles que la taille de la grille horizontale des GCM varie entre 50×50 km et 300×300 km : quand les pixels sont partiellement nuageux, et il est rare que ce ne soit pas le cas pour de telles échelles, des biais très importants apparaissent par rapport au modèle plan-parallèle. On affine ce modèle en pondérant les flux plan-parallèle par la couverture fractionnaire ; en utilisant dans chaque pixel un calcul gamma-IPA (détaillé plus loin) [Oreopoulos and Barker 1999] ; en prenant en compte les hétérogénéités sous-pixel par des techniques de renormalisation [Cairns et al. 2000].

Le point soulevé par [Welch and Wielicki 1984] est essentiel : le calcul ne doit pas reposer uniquement sur les valeurs des propriétés microphysiques, mais également sur la disposition de ces valeurs. Si l'on suppose par exemple que la fonction de densité de probabilité d'épaisseur optique est lognormale, les données de la moyenne et de l'écart type de la distribution – qui la définissent complètement – ne sont pas suffisantes pour prévoir les flux radiatifs associés. Une information sur la structure spatiale des valeurs est primordiale. On illustrera ce problème sur la figure 1.6 discutée plus loin. Ainsi, des outils statistiques plus élaborés sont utilisés désormais pour qualifier les hétérogénéités : par exemple des fonctions de structure [Davis et al. 1997] permettant de définir les propriétés fractales [Duroure and Guillemet 1990] ou multifractales [Roux et al. 2000] des champs nuageux.

1.2.2 Insuffisance du modèle plan-parallèle

Nous l'avons vu dans la première partie de ce chapitre introductif, les calculs de transfert radiatif sont très importants pour la modélisation du climat et pour la mesure à distance de paramètres nuageux. L'hypothèse du nuage plan-parallèle est largement utilisée car elle permet des calculs radiatifs cimples et rapides. Nous allons voir ici pourquoi le modèle plan-parallèle est insuffisant.

1.2.2.1 Non-linéarité des réponses radiatives

La non-linéarité est un notion naturellement très importante dans notre étude, qu'il importe de bien définir. La notion de non-linéarité est très présente en sciences du climat et elle est associée à la turbulence. La présence dans l'équation de Navier-stokes (qui décrit l'écoulement de fluide visqueux) d'un terme quadratique ($\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\nabla V}$) donne un caractère non-linéaire à cette équation, qui est à l'origine de la notion de chaos et des difficultés de prévision en météorologie. L'Equation du Transfert Radiatif – qui décrit l'interaction du rayonnement par un milieu – est linéaire et intégro-différentielle. Pourtant le problème du transfert radiatif est non-linéaire. Eclaircissons ce point.

L'interception d'une quantité radiative L, se propageant le long d'un chemin de coordonnée s, par un milieu de propriété d'extinction α est décrite par : $\mathrm{d}L = -\alpha L \mathrm{d}s$ (Loi de Bouguer-Beer). On en déduit (loi exponentielle de Beer) que l'énergie radiative varie selon :

$$L(s) = L_0 \exp(-\int \alpha \mathrm{d}s) = L_0 \exp(-\tau) = L(\tau) \tag{1.1}$$

qui est une fonction convexe. τ est appelée épaisseur optique. Les réponses radiatives ne sont donc pas linéaires comme le montre la figure 1.4. Considérons deux chemins d'épaisseurs optiques τ_1 et τ_2. On écrit l'inégalité de Jensen [Jensen 1906] :

$$\frac{L(\tau_1) + L(\tau_2)}{2} \geq L(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}) \tag{1.2}$$

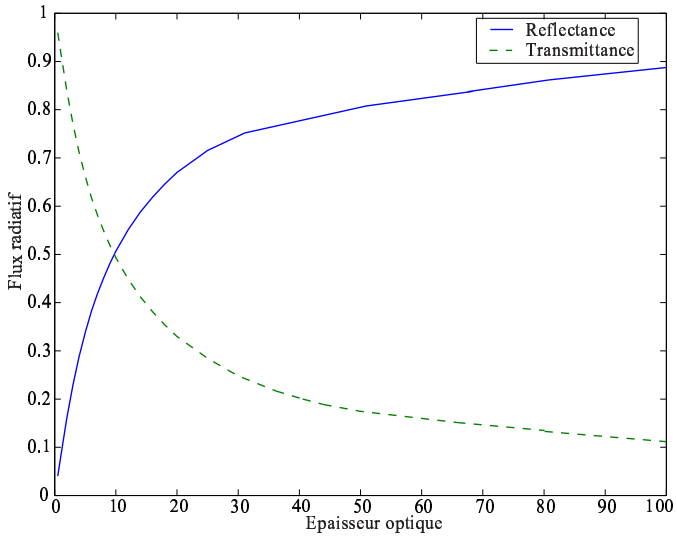


FIG. 1.4 – Réponse non linéaire des flux radiatifs en fonction de l'épaisseur optique du milieu. Cas de la réflectance et de la transmittance pour une incidence solaire de 45°.

Ainsi, si le milieu n'est pas homogène à une certaine échelle, on fait des erreurs de calcul en ne considérant que la propriété moyenne de ce milieu à cette échelle : on surestime et on sous-estime systématiquement respectivement la réflectance et la transmittance de ce milieu.

Nous entendons donc ici non-linéarité comme synonyme d'interaction – ou de couplage – entre échelles : on ne peut pas se contenter des valeurs moyennes des propriétés optiques des nuages à une certaine échelle. Dans le cas des stratocumulus marins, qui ont la structure la plus proche de la représentation plan-parallèle, la diminution de l'albédo du nuage à l'échelle d'une grille GCM (supérieure à 100×100 km^2) est de l'ordre de 10 à 15% [Cahalan et al. 1994b][Barker 1996]. Lorsque les nuages homogènes ont le même albédo que les nuages hétérogènes, ceci requiert une diminution de 30% de leur contenu en eau [Cahalan et al. 1994b].

La première erreur que l'on fait dans un calcul plan-parallèle est donc de ne considérer que la valeur moyenne des champs, de négliger l'effet des hétérogénéités des nuages. Une réponse à ce problème est le calcul IPA (sur lequel nous revenons plus loin), qui repose sur la division du champ nuageux en pixels, et réalise un calcul de type plan-parallèle et indépendant dans chacun des pixels. Ce type de calcul est dit "1D".

1.2.2.2 Flux radiatifs nets horizontaux

Dans les calculs radiatifs de type plan-parallèle ou IPA, les propriétés radiatives du nuage sont uniquement liées aux paramètres microphysiques. Dans le cas de nuages hétérogènes, lorsque la taille du pixel est de l'ordre de celle du libre parcours moyen des photons, cette dépendance unique n'est plus du tout valide : deux pixels ayant les mêmes propriétés microphysiques (épaisseur optique, rayon efficace) n'ont pas forcément les mêmes propriétés radiatives, compte tenu des effets de leurs environnements. Ainsi, à petite échelle, il y a interaction entre les pixels : le transport horizontal net des photons – conditionné par les gradients locaux du champ d'épaisseur optique – n'est plus négligeable. Pour des nuages de type stratocumulus sans trous, le transport horizontal peut atteindre plus de 20% du rayonnement solaire incident, et il peut être du même ordre de grandeur que les autres flux (réflectance, transmittance, absorptance) [Faure 2000]. En plus de l'erreur dû à la non-linéarité des réponses radiatives, la seconde erreur que l'on fait dans un calcul plan-parallèle est donc de ne pas

considérer ce transport horizontal net de l'énergie radiative. Un manifestation de ce transport horizontal est le phénomène de lissage radiatif ([Stephens 1988a], [Marshak et al. 1995], [Davis et al. 1997]) : à cause de la diffusion multiple, les photons visitant des pixels de propriétés microphysiques différentes, les champs de réflectance sont moins fluctuants aux petites échelles que les champs d'épaisseur optique : la correspondance entre les hétérogénéités des champs d'épaisseur optique et de réflectance n'est plus directe. La figure 1.5 montre les spectres d'énergie des signaux d'épaisseur optique et de réflectances, obtenus à partir de simulations Monte Carlo et IPA. On observe qu'à grande échelle, les spectres des radiances suivent celui de l'épaisseur optique. A petite échelle, le spectre pour les radiances Monte Carlo décroît plus rapidement – la rupture de pente spectrale se situe vers 2 km, alors que le spectre pour les radiances IPA – calcul qui ne prend pas en compte les effets "3D" – suit celui du signal d'épaisseur optique. [Davis et al. 1997] a obtenu une rupture de pente spectrale autour de 200 m pour des radiances mesurées par le radiomètre Landsat TM durant la campagne FIRE [Davis et al. 1997]. L'effet de lissage est donc une manifestation du transfert radiatif dit "3D".

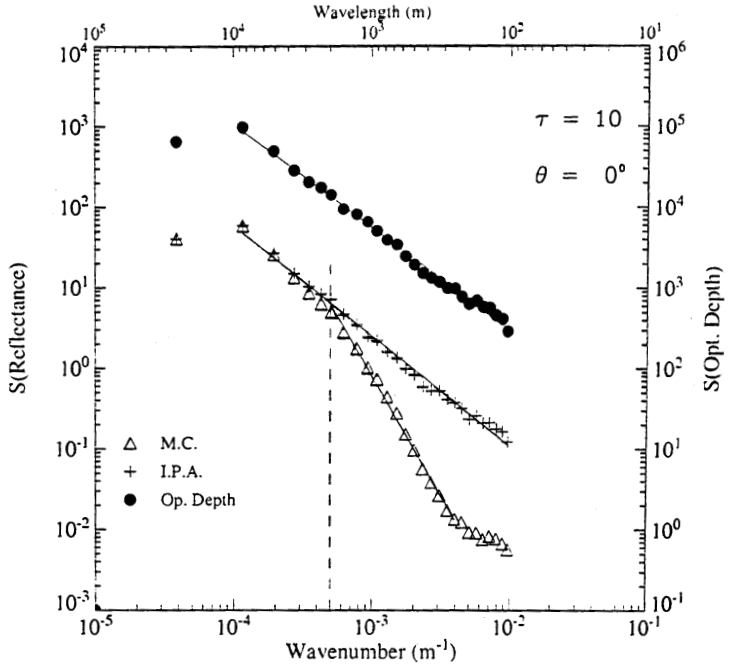


FIG. 1.5 – Spectre d'énergie des champs d'épaisseur optique ($\overline{\tau} = 10$), et des réflectances calculées par les méthodes Monte Carlo et IPA (communication personnelle de B. Guillemet (LaMP))

L'exemple donné dans la figure 1.6 illustre également les effets des gradients locaux d'épaisseur optique et le lissage des champs de réfléctance. On considère un champ nuageux horizontalement hétérogène (fig. 1.6 en haut à gauche) généré par un modèle "cascade

bornée" [Cahalan 1994]. En changeant aléatoirement la position des valeurs, on obtient un deuxième champ (fig. 1.6 en haut à droite). Ces deux champs ont donc la même fonction de densité de probabilité ; la même moyenne, le même écart-type. Les courbes au centre et en bas donnent les réflectances associées à ces deux champs calculées par les modèles de Monte Carlo et IPA. On observe que les courbes de réflectance à gauche et à droite sont très différentes, et n'ont pas les mêmes valeurs moyennes, à petite échelle et même à grande échelle (non données ici). Les courbes au centre et en bas n'ont pas le même contenu fréquentiel : les radiances Monte Carlo sont plus lisses que les radiances IPA ; ces dernières sont autant fluctuantes à petite échelle que les signaux d'épaisseur optique. Ainsi, la figure 1.6 indique que deux champs comportant les mêmes valeurs peuvent avoir des réponses radiatives différentes (comparaison gauche-droite), et que la prise en compte (calcul Monte Carlo) ou non (calcul IPA) des effets "3D" conduit à des réflectances différentes en particulier au niveau de leurs contenus spectraux (comparaison centre-bas). Ce qui différencie ces deux champs nuageux, c'est leur structure, la disposition des valeurs, leur variabilité à petite échelle, qui est beaucoup plus importante pour le deuxième champ que pour le premier, et qui a pour conséquence des transports horizontaux de photons très différents.

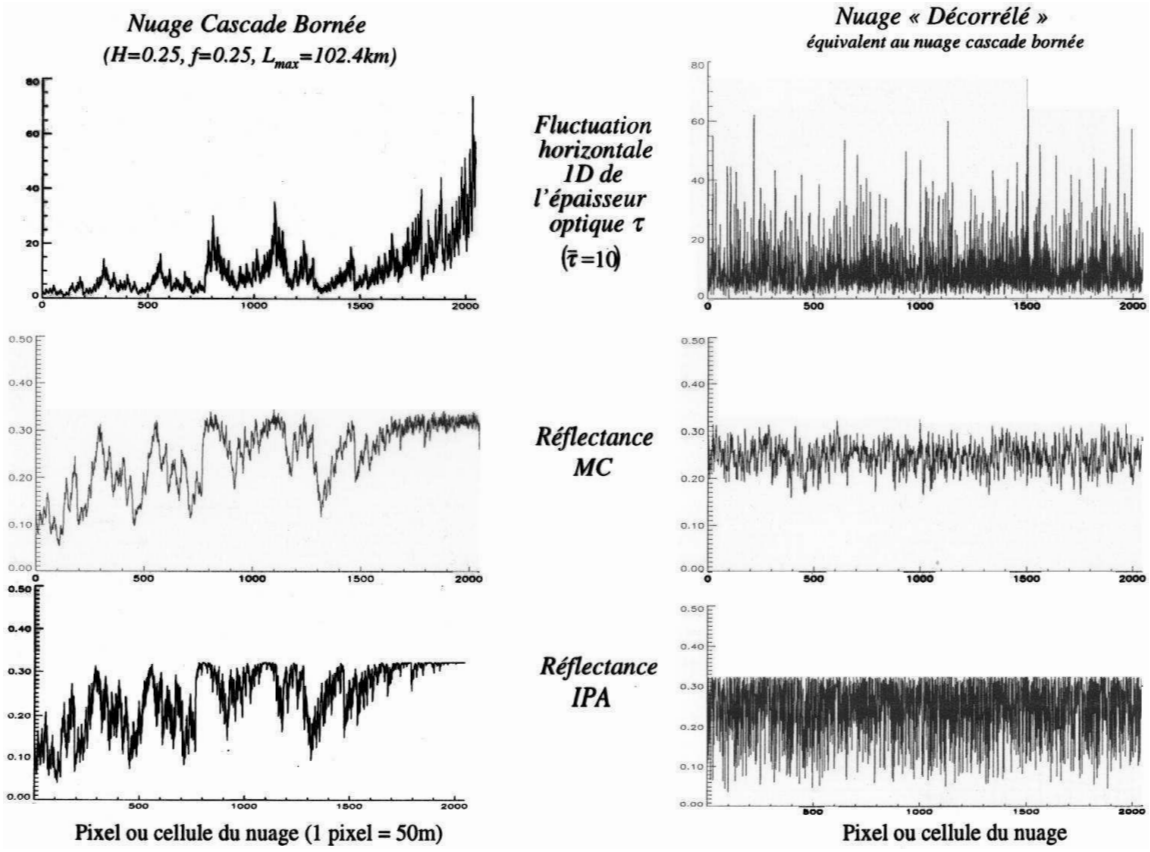


FIG. 1.6 – Simulations de réflectances pour un nuage de type cascade bornée (en haut à gauche), et un nuage obtenu à partir du premier en décorrélant les valeurs (en haut à droite, par un calcul Monte Carlo (au centre) et un calcul IPA (en bas) – Communication personnelle de F. Szczap (LaMP)).

1.2.2.3 Aspects multiéchelles du transfert radiatif

Le calcul de type plan-parallèle est donc mal adapté au cas des nuages hétérogènes car il ne prend pas en compte la non-linéarité des réponses radiatives et néglige le transport horizontal des photons. L'approche IPA traite chaque pixel nuageux indépendamment, et effectue un calcul de type plan-parallèle dans chacun des pixels. La figure 1.7 montre qualitativement l'erreur que l'on commet sur la restitution de propriété optique moyenne à grande échelle (épaisseur optique) d'un champ nuageux hétérogène, à partir d'un calcul IPA et en fonction de la taille des pixels. L'erreur passe par un minimum pour un pixel de quelques kilomètres. L'erreur à grande échelle est due à la non-prise en compte des hétérogénéités sous-pixel. L'erreur à petite échelle est due à la non-prise en compte des interactions entre les pixels voisins.

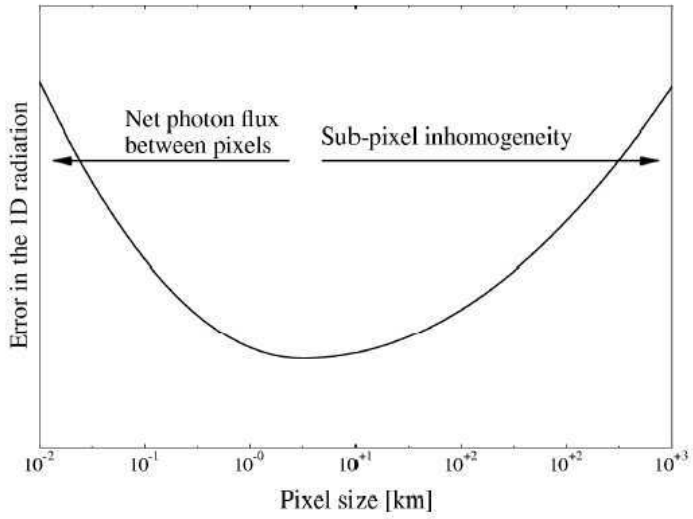


FIG. 1.7 – Erreur sur la restitution de l'épaisseur optique moyenne à grande échelle de champs nuageux, basée sur un calcul IPA, en fonction de la taille des pixels (communication personnelle B. Mayer (DLR)).

1.2.3 Techniques de calcul utilisées

La calcul IPA (*Independent Pixel Approximation*) [Cahalan 1994a,b] déjà mentionné réalise un calcul plan-parallèle dans chacun des pixels considérés. Le principe de cette technique est que les erreurs de calcul pour chaque pixel sont aléatoires, et se compensent à grande échelle pour fournir des flux moyens relativement précis. La méthode gamma-IPA [Barker 1996] repose sur l'hypothèse d'une fonction gamma pour la densité de probabilité de l'épaisseur optique. Cette méthode permet, en pondérant les quantités radiatives plan-parallèle de calculer les flux radiatifs en faisant intervenir seulement la moyenne et l'écart-type de la distribution

d'épaisseur optique.

Le calcul NIPA (*Non-Independent Pixel Approximation*) [Marshak et al. 1998] pallie les défauts de l'IPA en prenant en compte l'influence des pixels voisins sur les quantités radiatives associées à un pixel donné. Cela implique la connaissance de la fonction de réponse impulsionnelle du champ nuageux (fonction de Green), qui peut être déterminée à partir d'observations au LIDAR. La méthode NIPA a été pensée pour améliorer la réponse aux problèmes direct et inverse. Par ailleurs, les interactions entre pixels avoisinants ont été étudiés au moyen de réseaux de neurones dans [Faure 2000] et [Faure et al. 2001].

Des calculs basés sur des techniques d'homogénéisation ont également été développés. Ils se basent sur la définition de nuages homogènes équivalents, de paramètres effectifs équivalents, donnant les mêmes réponses radiatives qu'un nuage hétérogène. On peut citer dans ces travaux ceux de [Szczap 2000] conduisant à la méthode de l'EHCA (*Equivalent Homogeneous plan parallel Cloud Approximation*). Plus généralement, les hétérogénéités spatiales des champs nuageux sont traités comme une nouvelle forme de propriétés optiques ([Stephens 1988b], [Cahalan 1994], [Cairns et al. 2000]).

Enfin, des calculs de transfert radiatif "3D" existent bien sûr. Mais ils ne répondent pas forcément aux besoins de toute la communauté, pour cause de lourdeur et temps de calcul. Un tour d'horizon des codes de calcul "3D" existants est donné dans [Gabriel et al. 1993]. Peuvent être rajoutés les travaux de [Galinski and Ramanathan 1998]. Dans ce présent travail, on compare les résultats du code de calcul que nous avons développé et baptisé *WaveNum* à ceux des codes Monte Carlo [Marchuk et al. 1980] et SHDOM [Evans 1998].

Le besoin de compromis précision-vitesse de calcul a amené à des programmes internationaux de comparaison de code de calcul radiatif, d'abord ICRCCM (*Intercomparison of Radiation Codes in Climate Models*) dans les années 1980 et encore aujourd'hui avec I3RC (*Intercomparaison of 3D Radiative Codes*).

1.2.4 Besoin de formalisation du transfert radiatif en milieu hétérogène

Les calculs de transfert radiatif interviennent dans un grand nombre de modèles et à différentes échelles. Les besoins de la communauté consistent en une meilleure représentation des processus radiatifs en évitant une trop grosse lourdeur des calculs. Plutôt que le développement et l'utilisation de modèles radiatifs "exacts", il y a en fait nécessité de formaliser le problème du transfert radiatif en milieu hétérogène. Cette formalisation doit permettre, par l'identification, la description et la compréhension des mécanismes d'interactions entre échelles et entre "pixels" avoisinants, d'aller vers une simplification intelligente des calculs radiatifs (en sachant ce que l'on simplifie) et de la représentation du milieu nuageux, et une maîtrise des erreurs introduites dans les calculs. Cette formalisation passe par l'utilisation d'outil adéquat afin de paramétrer de façon plus systématique et maîtrisée les processus de transfert radiatif. L'outil que nous nous proposons d'utiliser ici est l'analyse multirésolution (AMR) basée sur des ondelettes dans une méthode de Galerkin appliquée à l'Equation du Transfert Radiatif.

1.2.4.1 Fermeture et couplage des échelles

Notre approche pour contribuer à cette formalisation s'appuie sur les travaux de [Stephens 1988a] et [Stephens 1988b]. [Stephens 1988a] présente une nouvelle formulation de l'Equation du Transfert Radiatif, basée sur la transformée de Fourier de cette équation en deux dimensions suivant l'horizontale. Cette formulation permet de distinguer les différentes échelles des hétérogénéités des champs nuageux et de rayonnements en interaction. L'équation de transfert obtenue réalise un couplage de ces échelles. Dans [Stephens 1988b], les notions de hiérarchie d'échelles et de fermeture sont introduites, et une technique de fermeture est présentée pour la

prise en compte de la couverture fractionnaire. [Gabriel et al. 1993] et [Gabriel and Evans 1996] ont prolongé ces travaux en explicitant plus en détail la méthode de fermeture[2]. Celle-ci est basée sur une décomposition de type Reynolds. Cette méthode est généralement associée aux systèmes stochastiques décrits par des équations différentielles comportant des fonctions aléatoires. Dans le cas de système déterministe, les fermetures permettent de faire la moyenne horizontale de l'équation de transfert, et d'augmenter l'efficacité des calculs. Le point central de la fermeture des équations est le traitement du terme $\overline{\alpha' N'}$, qui représente la corrélation entre le champ d'extinction nuageuse (α) et le champ de radiances (N).

1.3 Approche proposée dans ce travail

1.3.1 Utilisation de l'outil ondelettes

Parmi les références données plus haut, certaines sont associées à l'utilisation de l'outil ondelettes pour étudier les aspects multiéchelles de processus physiques : [Harris and Foufoula-Georgiou 2001] étudient l'importance radiative dans le domaine des micro-ondes de la prise en compte de la variabilité sous-pixel dans le cadre d'algorithme d'inversion de pluies tropicales à partir de mesures avec le TMI (Tropical Microwave Imager). Les fluctuations aux petites échelles qui ne sont pas représentées par le modèle nuageux utilisé, et ce pour des raisons techniques (filtrage nécessaire des hautes fréquences), sont réintroduites à l'aide de cascades entre échelles développées sur une base d'ondelettes. [Yano, Moncrieff, Wu and Yamada 2001] et [Yano, Moncrieff and Wu 2001] étudient à l'aide d'ondelettes l'organisation de la convection tropicale. Plus généralement, les ondelettes et l'analyse multirésolution sont utilisées de plus en plus en physique, géophysique et en sciences de l'atmosphère : [Weng and Lau 1994] étudient également la convection tropicale ; [Yamada and Ohkitani 1991] identifient les cascades d'energie en turbulence à l'aide d'ondelettes de Meyer ; la dynamique atmosphérique est étudiée au moyen d'ondelettes par [Fournier 2000], [Fournier 2002], [Fournier 2003] et [Hasegawa 2000] ; enfin, [Davis et al. 1994] et [Davis et al. 1999] étudient les structures nuageuses à l'aide d'ondelettes. L'analyse de la turbulence à l'aide d'ondelettes est désormais une activité à part entière [Meneveau 1991], et utilise souvent des ondelettes continues[3] : grâce à cette transformation, [Arnéodo et al. 1999] étudient les statistiques des champs de vitesse turbulents, [Roux et al. 2000] étudient les caractéristiques multifractales d'images satellites Landsat ; [Farge et al. 1999] utilisent cette technique pour analyser en profondeur les processus turbulents ; [Venugopal et al. 2003] étudient la turbulence dans la couche limite à l'aide des ondelettes continues "chapeau mexicain". Une description plus complète des différentes activités en physique et géophysique utilisant des ondelettes peut être trouvée dans [Van Den Berg 1999] et [Foufoula-Georgiou and Kumar 1994].

Cet outil "ondelette" fournit une décomposition multiéchelle des fluctuations des signaux, qui contient en outre une information sur leurs localisations dans le domaine physique. La difficulté du transfert radiatif en milieu hétérogène tient à la prise en compte des interactions entre les échelles. Plus haut, nous avons également souligné l'importance des gradients locaux d'épaisseur optique, qui conditionnent les flux nets horizontaux. Les processus physiques à l'oeuvre impliquent donc des interactions locales entre échelles. C'est pourquoi nous pensons que l'analyse en ondelettes est plus appropriée que l'analyse de Fourier pour représenter

[2] la fermeture d'équations consistent à prendre en compte dans ces équations les effets des processus physiques non-représentés, en les paramétrisant.

[3] La transformée en ondelette continue est un outil performant pour le traitement des signaux. On tire profit de la redondance de cette représentation : elle permet une interprétation et un traitement de l'information plus précis. En géophysique, le but du traitement est par exemple la séparation des différentes propagations d'ondes présentes dans le profil sismique afin d'en faciliter l'interprétation physique. Cette transformation amène également aux techniques des maxima d'ondelettes.

ces processus de transfert radiatif, puisqu'elle propose une décomposition des signaux en fluctuations élémentaires, localisées à la fois dans les domaines physique et de Fourier. De plus et comme nous le verrons, l'analyse multirésolution de type ondelettes propose une échelle d'approximation et des échelles plus fines. Cette notion d'échelle d'approximation semble bien répondre à la donnée d'un pixel de résolution imposé, que ce soit le pixel élémentaire d'une grille de modèles de calcul, ou le pixel d'un radiomètre satellisé. Si l'on comprend les mécanismes des interactions entre les échelles, l'effet des hétérogénéités sous-pixel à l'échelle des pixels d'approximation, on est sur la voie de la paramétrisation des petites échelles et de la fermeture en transfert radiatif.

1.3.2 Technique utilisée : la méthode de Galerkin-ondelette

La technique utilisée est similaire à celle de [Stephens 1986] et [Stephens 1988a] : la décomposition de l'Equation du Transfert Radiatif sur une base multirésolution. Dans notre travail, il s'agit d'une base multirésolution de type ondelettes. On ne va plus manipuler le champ de quantités radiatives (les radiances) et le champ des propriétés optiques du milieu (l'extinction), mais leurs coefficients d'échelle et d'ondelette. Le principe de la méthode de Galerkin est de faire le calcul de l'interaction matière-rayonnement dans l'espace de ces coefficients. L'intérêt de cette méthode est de décomposer l'interaction des deux champs en interactions élémentaires. La nouvelle formulation de l'Equation du Transfert Radiatif va faire apparaître des coefficients, appelés coefficients de connexion [Perrier and Wickerhauser 1999], qui contiennent toutes les interactions entre les échelles. Une des questions importantes qui vont se poser concerne le choix de l'analyse multirésolution à utiliser, sa pertinence, et l'interprétation physique des résultats

Le plan de cette thèse est comme suit : le deuxième chapitre est assez mathématique et présente l'analyse multirésolution et ses applications, en particulier celle que l'on exploite ; la méthode de Galerkin-ondelette. Le troisième chapitre présente l'Equation du Transfert Radiatif et sa décomposition multirésolution. Les coefficients de connexion sont étudiés et l'information qu'ils contiennent est analysée. Quelques premières analyses des mécanismes d'interaction entre échelles sont données. Le chapitre se termine par les premiers pas vers une formalisation multirésolution du transfert radiatif en milieu hétérogène. Le quatrième chapitre détaille la mise au point du code calcul de transfert radiatif basé sur cette approche. Ce code est construit dans le but de quantifier les interactions entre les échelles et l'effet des hétérogénéités sous-pixel. Enfin, le cinquième chapitre montre la comparaison des résultats obtenus par rapport aux code Monte Carlo et SHDOM, afin de valider nos calculs, et donne les premières analyses des interactions pour deux types simplifiés de nuage. Quelques effets radiatifs "3D" sont étudiés à l'aide de cette approche novatrice. Enfin, le mémoire se termine par les conclusions et perspectives de ce travail.

Chapitre 2

L'analyse multirésolution et ses utilisations

Nous présentons dans ce chapitre les analyses multirésolutions de type ondelettes et leurs applications. Les analyses multirésolutions sont utilisées et développées aussi bien par la communauté des physiciens, mathématiciens, ou informaticiens. L'analyse multirésolution est l'un des exemples les plus flagrants de la possibilité d'interaction de différentes disciplines, du non-cloisonnement (nécessaire) des sciences, et de la richesse d'innovations mathématiques et de leurs applications. L'histoire même du développement de cette analyse est exemplaire : les balbutiements de cette analyse sont généralement attribués à un géophysicien, Jean Morlet, motivé par la détection de singularité dans des signaux sismiques, et aidé par un mathématicien, Alex Grossman. Leur collaboration a conduit à la transformée en ondelettes continues. La formalisation de l'analyse a été faite ensuite par quelques mathématiciens jusqu'aux travaux en commun de Stéphane Mallat (motivé par des considérations pratiques en imagerie) et Yves Meyer qui ont généralisé l'analyse en ondelettes à l'analyse multirésolution basée sur une hiérarchie d'espaces d'approximation imbriqués, ce qui a conduit à des algorithmes rapides réalisant la transformée discrète en ondelettes. Puis Ingrid Daubechies a généralisé l'analyse multirésolution en proposant l'obtention de bancs de filtres de tailles finies conduisant à des ondelettes à support compact performantes numériquement. Les développements des années 90 sont allés en direction de performances numériques, de l'étude et de la résolution à partir d'ondelettes des équations aux dérivées partielles. Quelques détails concernant l'histoire de cette épopée mathématique des années 1980-1990 se trouvent dans l'ouvrage de vulgarisation de [Bulke Hubbard 1995]. Beaucoup de disciplines se sont donc intéressées au développement des analyses multirésolutions. Pourquoi cet engouement ? Parce que ces analyses prolongent l'analyse de Fourier dans une direction intéressante, qui est l'introduction de l'information sur la localisation spatiale des fluctuations d'un signal.

Cette interdisciplinarité fait que les motivations sont différentes : on exploitera telle propriété des ondelettes et des analyses multirésolutions en fonction de l'utilisation qu'on en fait. Certains utilisent les ondelettes pour leur régularité, d'autres pour leur simplicité et leur rapidité de calcul. Certains utilisent les ondelettes comme une nouvelle méthode spectrale pour résoudre les équations aux dérivées partielles (*edp*) [Goedecker 1998] dans un but d'homogénéisation [Dumont 1996][Brewster and Beylkin 1995][Beylkin et al. 1998], d'analyse et de modélisation de phénomènes [Farge et al. 1999]. Notre approche se situe dans cette dernière catégorie.

Nous présentons dans ce chapitre les analyses multirésolutions de type ondelettes. Cette présentation ne se veut pas exhaustive. Le lecteur peut se référer à [Mallat 1998] pour un *tour* plus complet du sujet. Quelques domaines d'applications sont passés en revue. Nous abordons ensuite l'utilisation des ondelettes pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Sont

détaillés le principe et l'intérêt des méthodes spectrales utilisant des ondelettes, en particulier la méthode de Galerkin-Ondelette utilisée dans ce travail. Les **coefficients de connexion,** essentiels dans notre étude, sont introduits à cette occasion et leurs expressions sont données.

2.1 Analyse multirésolution et ondelettes

Cette présentation débute par l'introduction des bases orthonormées d'ondelettes qui, on va le voir, sont associées ou non à la notion d'analyse multirésolution. Cette notion implique l'imbrication d'espaces d'approximations, et elle permet de définir des algorithmes performants de transformée en ondelettes rapides. Sans ces performances numériques, les analyses multirésolutions seraient beaucoup moins prisées. Cette section permet également de définir les notations et conventions adoptées, ce qui est important quand on utilise les ondelettes, car chaque discipline (s')est habituée à ses propres notations. Dans la suite, on notera en raccourci *analyse multirésolution* par **AMR**. Quelques analyses multirésolutions sont présentées, en particulier celles utilisées dans ce travail, puis quelques domaines d'application des AMR sont passés en revue.

2.1.1 Les bases orthonormées d'ondelettes

Les systèmes orthogonaux d'espaces fonctionnels sont abondamment utilisés en mathématiques et dans leurs applications [Walter and Shen 2001]. Le principe est de représenter une fonction par une série, ou par la donnée d'une famille de coefficients. Le système orthogonal le plus utilisé est le système trigonométrique de Fourier pour des fonctions périodiques. Des systèmes plus récents et de plus en plus utilisés sont les systèmes d'ondelettes.

Une **base d'ondelettes** de $L^2(\mathbb{R})$ est composée de fonctions $\psi_{j,k}$ donnée par :

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \text{ avec } j,k \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

où ψ est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ appelée ondelette mère, j l'indice d'échelle, k l'indice de position. $\psi_{j,k}$ est donc déduit de ψ par une transformation d'échelle et une translation. La présence de $2^{j/2}$ est normalisante. (Rappelons que $L^2(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions f d'énergie finie : $\int |f(t)|^2\, dt < +\infty$)

Des propriétés de régularité, de localisation et d'oscillation sont souvent données pour les ondelettes. Ainsi, on définit des bases d'ondelettes de classe m si :

1. la collection des fonctions $\psi_{j,k},\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}$, forme une base orthornormée de $L^2(\mathbb{R})$;
2. $\psi^{(l)}(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ pour $l = 0, ..., m$;
3. $\psi^{(l)}(x)$ décroît rapidement quand $x \to \pm\infty$, pour $l = 0, ..., m$;
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^l \psi(x) dx = 0$, pour $l = 0, ..., m$.

Voici la traduction des propriétés ci-dessus :
- la propriété 2 donne la régularité de ψ donc sa localisation fréquentielle ;
- la propriété 3 donne la localisation de ψ dans le domaine physique. On dira que l'ondelette $\psi_{j,k}$ est essentiellement concentrée sur l'intervalle dyadique $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$, "*essentiellement*" car cela va dépendre de la vitesse de décroissance de l'ondelette ;
- la propriété 4 indique que tous les moments de ψ d'ordre $k \leq m$ sont nuls, ce qui définit le caractère oscillant de ψ dans le domaine physique. Les polynômes de degré inférieur à m seront "invisibles" pour cette ondelette analysante, en particulier $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0$: les ondelettes sont de moyennes nulles.

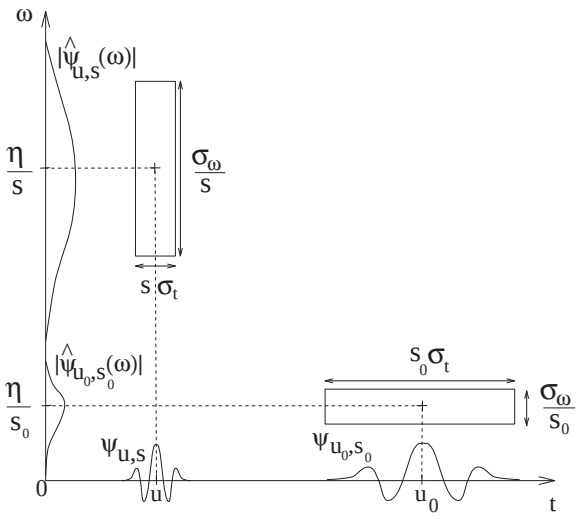


FIG. 2.1 – Supports espace-fréquence de deux ondelettes ψ_{u_0,s_0}et $\psi_{u,s}$ (d'après [Mallat 1998])

Ces nouveaux systèmes orthogonaux vont plus loin que la décomposition de Fourier dans le sens où ils proposent des familles de fonctions localisées à la fois dans les espaces physique et spectral : la représentation des fonctions en ondelettes est intermédiaire entre une représentation purement spectrale, et une purement physique. Elle fournit un nouveau pavage du plan temps-fréquence respectant le principe d'incertitude d'Heisenberg : quand la localisation est bonne dans le domaine physique, elle est mauvaise dans le domaine spectral, et inversement (voir l'annexe A). Les pavés sont d'aspects variables, mais de même taille :

$$\Delta x \Delta \omega = \text{constante} \qquad \text{(voir la figure 2.1).} \tag{2.2}$$

Ainsi d'après la propriété (1), une fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ se décompose en série d'ondelettes $\psi_{j,k}$ et :

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \, \psi_{j,k}(x) \text{ avec } \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\psi}_{j,k}(x) dx. \tag{2.3}$$

$\langle ., . \rangle$ est la notation qu'on adopte pour désigner le produit scalaire, et $\overline{\psi}$ désigne le conjugué de ψ.

Les fluctuations d'un signal f se décomposent donc comme la somme de fluctuations de moyenne nulle, localisées dans des intervalles dyadiques de largeur et de position variables. Autrement dit, on voit le signal comme la **somme de détails élémentaires** $(\psi_{j,k})$ de différentes dimensions ($\sum_{j=-\infty}^{+\infty}$). Comme il est remarqué très justement dans [Meyer 1990], cette égalité fonctionne encore si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et si $1 < p < \infty$ [1], mais (2.3) cesse de fonctionner si $f(x)$

[1] $L^p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions qui vérifient $\int |f(t)|^p \, dt < +\infty$.

appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$ ou $L^1(\mathbb{R})$: si $f(x) = 1$, l'égalité conduirait à $1 = 0$! Or, la plupart des signaux physiques sont dans $L^\infty(\mathbb{R})$. La solution à ce problème consiste à se donner une seconde fonction $\varphi(x)$, que [Meyer 1990] appelle "père des ondelettes" et qui est plus communément appelée **fonction d'échelle** dans le cadre de l'AMR. Les propriétés (2) et (3) sont encore valables pour φ ; la propriété (4) est remplacée par la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$, et (1) par la condition que l'ensemble des fonctions $\{\varphi(x-k),\, k \in \mathbb{Z}, \psi_{j,k}(x),\, j \geq 0,\, k \in \mathbb{Z}\}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi(x-k) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(x)\ . \tag{2.4}$$

$$\text{avec } a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\varphi}(x-k)dx \text{ et } d_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\psi}_{j,k}(x)dx. \tag{2.5}$$

On voit maintenant le signal comme la somme d'une **approximation grossière** (ou tendance) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi(x-k)$ et de **détails** de plus en plus petits ($\sum_{j=0}^{+\infty}$).

Cette décomposition définit l'esprit de l'analyse multirésolution. Bien sûr, les fonctions φ et ψ ne sont pas indépendantes : on va voir au paragraphe suivant que la fonction ψ se déduit de φ. La donnée de φ définit donc entièrement l'analyse multirésolution. Les systèmes d'ondelettes sont antérieurs à celle d'analyse multirésolution. La première ondelette réellement définie a été celle de Morlet, et ne proposait pas de multirésolution associée. On verra par exemple plus loin que l'ondelette de Meyer peut être définie sans référence à une analyse multirésolution.

2.1.2 Analyse multirésolution

L'approximation multirésolution à la résolution 2^{-j} est définie comme la projection orthogonale sur un espace $V_j \in L^2(\mathbb{R})$.

2.1.2.1 Définition

Suivant [Meyer 1990] et [Mallat 1998], une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ est une **suite croissante** de sous-espaces vectoriels $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes :

$$\forall\,(j,k) \in \mathbb{Z}^2,\ f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t-2^{-j}k) \in V_j \tag{2.6}$$

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ V_{j-1} \subset V_j \text{ donc } ... \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset ... \subset L^2(\mathbb{R}) \tag{2.7}$$

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1} \tag{2.8}$$

$$\lim_{j\to-\infty} V_j = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\} \text{ et } \lim_{j\to+\infty} V_j = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} V_j = L^2(\mathbb{R}) \tag{2.9}$$

$$\exists \varphi \in V_0 \text{ tel que } \{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \text{ forment une base orthonormale de } L^2(\mathbb{R}) \tag{2.10}$$

Les espaces V_j sont appelés espace d'approximation. L'approximation multirésolution de f à la résolution 2^{-j}est définie comme sa projection orthogonale sur l'espace V_j.

La propriété (2.6) signifie que V_j est invariant par toute translation proportionnelle à l'échelle 2^{-j} ; la propriété (2.8) garantit que la dilatation par 2 d'une fonction f de V_j (donc le grossissement par deux des détails) définit une approximation de cette fonction à l'échelle plus grossière 2^{-j+1}.

2.1.2.2 Conséquences

A Soit $P_{V_j} f$ la projection de $f \in L^2(\mathbb{R})$ sur V_j, les propriétés (2.8) et (2.10) impliquent que :

$$P_{V_j} f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_{j,n} \rangle \, \varphi_{j,n}(x) \tag{2.11}$$

La fonction φ est appelée **fonction d'échelle** et $\varphi_{j,n}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - n)$. Elle possède les mêmes caractères de régularité et de localisation spatiale que l'ondelette qui lui sera associée. La fonction d'échelle φ vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$; elle est une partition de l'unité : $\sum\limits_k \varphi(x-k) = 1$.

Le produit scalaire $a_j[n] = \langle f, \varphi_{j,n} \rangle$ peut être réécrit comme un produit de convolution :

$$a_j[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) 2^{j/2} \overline{\varphi}(2^j x - n)dx = f \star \overline{\varphi_j}(2^{-j}n) \tag{2.12}$$

$$\text{avec } \varphi_j(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x) \text{ et } \star \text{ le produit de convolution,}$$

et vu comme une approximation discrète à l'échelle 2^{-j}. L'énergie de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ étant essentiellement concentrée autour de zéro, l'approximation discrète $a_j[n]$ est alors le **filtrage passe-bas** de f échantillonnée à des intervalles 2^{-j}.

B Ondelette mère

Les approximations de f aux échelles 2^{-j} et $2^{-(j+1)}$ sont égales aux projections orthogonales du signal sur les sous-espaces V_j et V_{j+1}. D'après la propriété 2.7, l'approximation $P_{V_j} f$ est plus grossière que $P_{V_{j+1}} f$: $P_{V_j} f \subset P_{V_{j+1}} f$. En passant de $P_{V_{j+1}} f$ à $P_{V_j} f$, on perd de l'information, des détails présents à l'échelle $2^{-(j+1)}$ qui disparaissent à l'échelle 2^{-j}.

On définit W_j, le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \tag{2.13}$$

L'équation 2.13 peut se lire ainsi :

$$\begin{array}{ccccc} \text{approximation} & = & \text{approximation} & + & \text{détails} \\ \text{à l'échelle } 2^{-(j+1)} & & \text{à l'échelle } 2^{-j} & & \text{d'échelle } 2^{-j} \end{array}$$

On peut construire une fonction notée ψ telle que $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\left\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\right\}$ est une base orthonormale de W_j. On retrouve ici l'ondelette mère ψ introduite au paragraphe 2.1.1. En écrivant $P_{W_j} f = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \, \psi_{j,n}(x)$ comme la projection du signal dans l'espace des détails W_j, il vient :

$$P_{V_{j+1}} f = P_{V_j} f + P_{W_j} f. \tag{2.14}$$

Puisque :

$$P_{V_{j+1}} f = P_{V_j} f + P_{W_j} f = P_{V_{j-1}} f + P_{W_{j-1}} f + P_{W_j} f \tag{2.15}$$

$$= P_{V_{j-2}} f + P_{W_{j-2}} f + P_{W_{j-1}} f + P_{W_j} f, \text{ etc. }, \tag{2.16}$$

on peut écrire par récurrence et en se fixant une échelle J d'approximation :

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = V_J \bigoplus_{j \geq J} W_j \tag{2.17}$$

Pour des signaux $f \in L^2(\mathbb{R})$, on retrouve donc l'égalité 2.3 :

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \, \psi_{j,k}(x) \tag{2.18}$$

Quand on traite des signaux de valeur moyenne non nulle, on écrit :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_{J,k} \rangle \, \varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \, \psi_{j,k}(x) \tag{2.19}$$

$$\text{ou} \qquad f(x) = \langle f \rangle_J (x) + \sum_{j \geq J} f_j(x) \tag{2.20}$$

$$\text{avec} \quad \begin{array}{ccc} \langle f \rangle_J \in V_J & \text{et} & \langle f \rangle_J (x) = \sum_k a_{Jk} \varphi_{J,k}(x) \\ f_j \in W_j & \text{et} & f_j(x) = \sum_k d_{jk} \psi_{jk}(x) \end{array} \tag{2.21}$$

Les coefficients a_{Jk} représentent les valeurs moyennes du signal à l'horizon 2^{-J} et localisées aux points $k2^{-J}$. Ils sont appelés **coefficients d'échelle**.
Les coefficients d_{jk} représentent les détails du signal d'échelle 2^{-j} et localisées aux points $(k + \frac{1}{2})2^{-j}$. Ils sont appelés **coefficients d'ondelette.**

C Filtres miroirs conjugués et équation d'échelle

La propriété (2.7) signifie l'inclusion des espaces V_j. Puisque $V_0 \subset V_1$ et en écrivant que $\sqrt{2}\varphi(2x - k)$ est une base orthonormale de V_1, on peut caractériser l'AMR par la donnée des coefficients h_k tels que :

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h\,[n]\, \sqrt{2}\varphi(2x - n) \text{ avec } h\,[n] = \left\langle \varphi(x), \sqrt{2}\varphi(2x - n) \right\rangle. \tag{2.22}$$

Cette équation est appelée **équation d'échelle** [Mallat 1998] ou équation de dilatation [Walter and Shen 2001]. La séquence $h\,[n]$ sera interprété comme un filtre discret passe-bas.
On peut écrire aussi $\widehat{\varphi}(\omega) = \sqrt{2}\widehat{h}(\omega)\widehat{\varphi}(\omega/2)$, avec $\widehat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h\,[n] \mathrm{e}^{-in\omega}$, puis par récurrence $\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\widehat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \widehat{\varphi}(0)$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante sur $\widehat{h}(w)$ pour que ce produit infini soit la transformée de Fourier d'une fonction d'échelle :

$$\begin{array}{l} \forall \omega \in \mathbb{R}, \ \left|\widehat{h}(\omega)\right|^2 + \left|\widehat{h}(\omega + \pi)\right|^2 = 2 \\ \widehat{h}(0) = \sqrt{2} \end{array} \tag{2.23}$$

Les filtres discrets vérifiant la condition ci-dessus sont appelé **filtres miroirs conjugués**.
De même, puisque $W_0 \subset V_1$, on peut écrire

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g\,[n]\, \sqrt{2}\varphi(2x - n) \text{ avec } g\,[n] = \left\langle \psi(x), \sqrt{2}\varphi(2x - n) \right\rangle \tag{2.24}$$

La séquence $g\,[n]$ sera interprété comme un filtre discret passe-haut.
On peut démontrer que le filtre g se déduit du filtre h.

$$\widehat{g}(\omega) = \mathrm{e}^{-i\omega} \widehat{h}^*(\omega + \pi) \text{ et } g\,[n] = (-1)^{1-n} h\,[1 - n] \tag{2.25}$$

Ainsi, la donnée du filtre h définit complètement la multirésolution.

2.1.3 Transformation en ondelettes rapides

L'imbrication des espaces V_j, l'utilisation de convoluées discrètes par les filtres h et g ont permis la construction d'algorithmes rapides en cascade, capables de réaliser la projection orthogonale d'un signal sur un espace d'ondelettes, c'est-à-dire de faire correspondre à n valeurs échantillonnées du signal des coefficients d'échelle et d'ondelette, et l'opération inverse : la reconstruction d'un signal à partir de la donnée de coefficients d'échelle et d'ondelette par l'utilisation de filtres duaux $\widetilde{h}$ et $\widetilde{g}$ (voir schéma sur la figure 2.2).

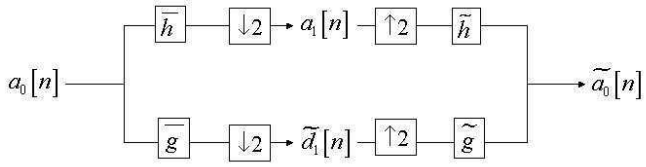


FIG. 2.2 – Le signal d'entrée est filtré par un filtre passe-bas et un filtre passe-haut, et sous-échantillonné. La reconstruction est réalisée en insérant des zéros et en filtrant avec les filtres duaux

La taille du vecteur des coefficients d'échelle et d'ondelettes varie en fonction de la taille du filtre h, car l'application du filtre consiste en une convolution et la taille des filtres varient en fonction des AMR. Les convolutions par les filtres sont suivies ou précédées respectivement de décimation-sous-échantillonnage (décomposition) ou d'insertion de zéros (reconstruction). Ces opérations de décimation provoquent des phénomènes d'*aliasing* qui "polluent" les coefficients, mais peuvent être annulés lors de la reconstruction en utilisant des filtres ayant des propriétés adéquates. Selon [Vetterli 1986], la condition sous forme matricielle pour obtenir une reconstruction parfaite est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \widehat{h}(\omega) & \widehat{g}(\omega) \\ \widehat{h}(\omega+\pi) & \widehat{g}(\omega) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \widehat{\widetilde{h}}^*(\omega) \\ \widehat{\widetilde{g}}^*(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Si les filtres h et $\widetilde{h}$ sont égaux, la condition (2.26) est équivalente à la condition sur le filtre h. On appelle ces filtres des **filtres miroirs en quadrature**.

2.1.3.1 Initialisation

Les signaux discrets traités $b[n]$ sont échantillonnés à une résolution finie et fixée. Si la distance d'échantillonnage est N^{-1}, on associe à $b[n]$ une fonction $f(x) \in V_L$ approximée à l'échelle $2^{-L} = N^{-1}$: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_{L,n} \rangle \varphi_{L,n}(x)$. On calcule les coefficients $a_L[n] = \langle f, \varphi_{L,n} \rangle$ à partir de $b[n]$: $b[n] = N^{1/2} a_L[n]$. Si $f(x)$ est régulière au voisinage de $N^{-1}n$, on peut considérer que $b[n] \approx f(N^{-1}n)$.

2.1.3.2 Calcul des coefficients

Suivant l'égalité $V_L = V_J \overset{L-1}{\underset{j=J}{\oplus}} W_j$, on obtient le vecteur des coefficients $\left[a_J, \{d_j\}_{J \leq j \leq L-1}\right]$ à partir des coefficients d'échelle $a_L[n] = \langle f, \varphi_{L,n} \rangle$. Par la suite, on appellera J l'échelle d'approximation et L l'échelle de résolution

2.1.3.3 Périodisation de l'AMR

Cet aspect est important car les champs nuageux que nous allons traités sont horizontalement périodiques. Périodiser l'AMR est équivalent à faire l'AMR de signaux périodiques, et inversement :

$$\int_0^1 f(x)\psi_{j,k}^{per}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{per}(x)\psi_{j,k}(x)dx. \tag{2.27}$$

La périodisation de l'AMR produit donc des ondelettes périodiques. La périodisation d'une base d'ondelettes $\{\psi_{j,k}, (j,k) \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$ est en fait une base d'ondelettes de $L^2[0,1]$:

$$\psi_{j,k}^{per}(x) = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \psi_{j,k}(x + k') \text{ avec } k \in \left[0, 2^j - 1\right]. \tag{2.28}$$

C'est donc un des moyens d'obtenir une base d'ondelettes sur un intervalle.

La conséquence en est la perte de l'invariance par échelle, surtout à grande échelle ; les fonctions à petite échelle étant à support plus restreint et donc moins sujet à la périodisation. Deux effets de la périodisation sont que les moments ne s'annulent plus aux bords et la présence de large coefficients d'ondelette aux bords si $f(0) \neq f(1)$.

Concernant les bases de $L^\infty(\mathbb{R})$, il en est de même en périodisant les fonctions d'échelle. Il est à noter que les fonctions d'échelle étant des partitions de l'unité, la périodisation des fonctions d'échelle pour une échelle d'approximation égale à zéro donne une fonction d'échelle périodisée égale à l'unité.

2.1.3.4 Transformation discrète périodique ou périodisée

Puisque $a_j[n] = \left\langle f, \varphi_{j,n}^{per} \right\rangle$ peut s'écrire aussi $a_j[n] = \langle f^{per}, \varphi_{j,n} \rangle$ (de même pour $\psi_{j,n}$), les algorithmes proposés seront utilisables en réalisant des convolutions circulaires.

On obtient alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1} \langle f, \varphi_{J,k} \rangle \varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=J}^{L-12^j-1} \sum_{k=0} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x) \tag{2.29}$$

Dans le cas de l'AMR périodisée, à $N = 2^L$ échantillons du signal correspondent 2^L produits scalaires avec les fonctions analysantes : 2^J coefficients d'échelle, 2^J coefficients d'ondelette pour l'échelle J, 2^{J+1} coefficients d'ondelette pour l'échelle $(J+1)$, ..., 2^{L-1} coefficients d'ondelette à la plus petite échelle $(L-1)$, et au total $(2^J) + (2^J) + (2^{J+1}) + ... + (2^{L-1}) = 2^L = N$.

2.1.4 Exemples d'analyses multirésolutions

On détaille ici quelques AMR, dont celles de Haar et de Meyer utilisées dans cette étude. On retrouve la notion d'incertitude de Heisenberg qui est qu'une fonction ne peut avoir une localisation très précise et dans l'espace physique et dans l'espace des fréquences.

A noter que nous ne parlons ici que des ondelettes orthogonales, et qu'il existe aussi des ondelettes biorthogonales pour lesquelles les filtres analysants et les filtres duaux de synthèse ne sont pas égaux. Nous ne détaillons pas non plus les ondelettes de Daubechies à support compact, même si elles sont très utilisées numériquement. On se contente de renvoyer le lecteur à l'ouvrage d'Ingrid Daubechies [Daubechies 1992].

2.1.4.1 AMR de Haar

En 1910, A. Haar définit une fonction continue par morceaux dont les dilatées et translatées forment une base $L^2(\mathbb{R})$: c'est l'ondelette de Haar [Haar 1910]

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 \text{ si } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{2.30}$$

L'AMR de Haar associe $\psi(x)$ à la fonction d'échelle $\varphi(x) = 1$ si $0 \leq x < 1$ (voir la figure 2.3).

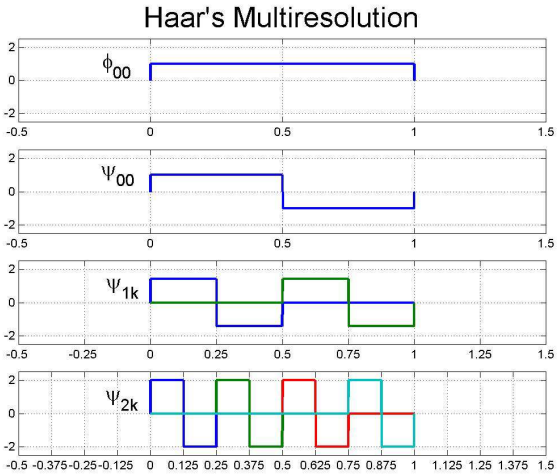


FIG. 2.3 – Visualisation de quelques fonctions de la base de Haar – $J = 0$ – De haut en bas : la fonction d'échelle $\phi_{0,0}$, l'ondelette la plus grossière $\Psi_{0,0}$, les deux ondelettes à l'échelle deux fois plus fine $\Psi_{1,k}$, les quatre ondelettes à l'échelle quatre fois plus fine $\Psi_{2,k}$.

Les avantages de l'AMR de Haar tiennent dans sa simplicité. Grâce à la compacité de ses fonctions, l'AMR de Haar est la plus intéressante numériquement. De plus, la fonction d'échelle étant constante, les coefficients d'échelle de Haar donnent la moyenne vraie du signal sur un support localisé de largeur 2^{-J}. La périodicité des signaux ne perturbent pas l'AMR.

Les inconvénients de cette AMR tiennent également dans sa simplicité. Le manque de régularité des fonctions analysantes (uniquement un moment nul) les rend peu adaptées pour étudier les fonctions régulières (représentation peu économique). De plus, les support physiques des fonctions de Haar étant compacts, leurs support physiques fréquentiels sont infinis (voir l'annexe A sur l'incertitude de Heisenberg ; $\widehat{\varphi}(\omega)$=sinus cardinal). L'AMR de Haar n'est donc pas parfaitement dans l'idée qu'on peut se faire de l'AMR, pour laquelle une double propriété de localisation physique et fréquentielle est recherchée. La figure 2.4 donne un exemple de l'approximation basse résolution de Haar d'un signal généré par un processus de type cascade bornée ; on compte $2^4 = 16$ pixels d'approximation.

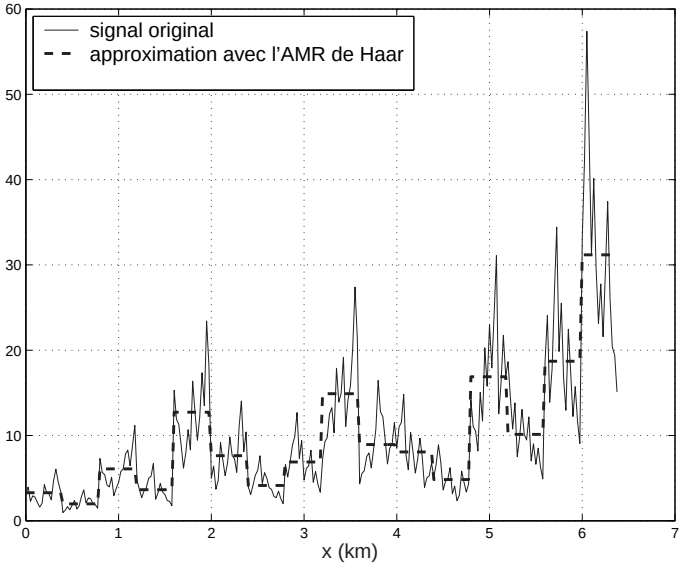


FIG. 2.4 – Vision basse résolution au sens de l'AMR de Haar d'un signal – $J = 4$ (donc $2^4 = 16$ pixels d'approximation), L=8.

2.1.4.2 AMR de Shannon

C'est l'AMR duale de celle de Haar :

$$\widehat{\varphi}(\omega) = 1 \; si - \pi \leq x \leq \pi, \text{ alors } \forall \omega \in [-\pi, \pi] \, , \; \widehat{h}(\omega) = \sqrt{2} 1_{[-\pi/2, \pi/2]}(\omega). \tag{2.31}$$

La transformée de Fourier inverse de $\widehat{\varphi}$ est également un sinus cardinal ; le support physique des fonctions d'échelles et ondelettes est infini.

2.1.4.3 AMR de Meyer

L'ondelette de Meyer est une fonction à bande fréquentielle limitée dont la transformée de Fourier est lisse au contraire de celle de l'ondelette de Shannon. Ce caractère lisse donne une décroissance beaucoup plus rapide dans l'espace physique.

2.1.4.3.1 Ondelette de Meyer non-associée à une multirésolution

La construction de cette ondelette ψ est réalisée dans l'espace fréquentiel à partir des opérations successives suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\omega) = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{e}^{\frac{-1}{\omega^2}} \text{ pour } \; \omega > 0 \\ 0 \;\; \text{pour } \omega \leq 0 \end{array} \right. \\ h(\omega) = \dfrac{f(\frac{4\pi}{3} - \omega)}{f(\omega - \frac{2\pi}{3}) + f(\frac{4\pi}{3} - \omega)} \\ \varphi(\omega) = \sqrt{h(\omega) h(-\omega)} \\ \widehat{\psi}(\omega) = \mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}} \sqrt{\varphi^2(\omega/2) - \varphi^2(\omega)} \end{array} \right.$$

Elle est utilisée dans [Yamada and Ohkitani 1990].

2.1.4.3.2 Ondelette de Meyer associée à une multirésolution

La fonction d'échelle et l'ondelette mère de Meyer sont définies analytiquement dans l'espace de Fourier.

$$\hat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq 2\pi/3 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta(\frac{3|\omega|}{2\pi} - 1\right) & \text{si } 2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\widehat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\omega| \notin [2\pi/3, 8\pi/3] \\ \mathrm{e}^{-i\omega/2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta(\frac{3|\omega|}{2\pi} - 1\right) & \text{si } 2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3 \\ \mathrm{e}^{-i\omega/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\beta(\frac{3|\omega|}{2\pi} - 1\right) & \text{si } 4\pi/3 \leq |\omega| \leq 8\pi/3 \end{cases}$$

La présence du terme $\mathrm{e}^{-i\omega/2}$ fait que l'ondelette mère est centrée en $x = 1/2$.

Le seul degré de liberté est le comportement de $\widehat{\varphi}(\omega)$ dans son passage de 0 à 1 et est défini par la fonction auxiliaire $\beta(x)$, dont les valeurs vont de 0 à 1 sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour vérifier la condition de quadrature, $\beta(x)$ satisfait :

$$\forall x \in [0, 1]\,,\ \beta(x) + \beta(1 - x) = 1. \tag{2.32}$$

Un exemple proposé par Daubechies est la fonction $\beta(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3)$. La fonction $\widehat{h}(\omega)$ a alors trois moments nuls en $|\omega| = \pi/3$ et $|\omega| = 2\pi/3$.

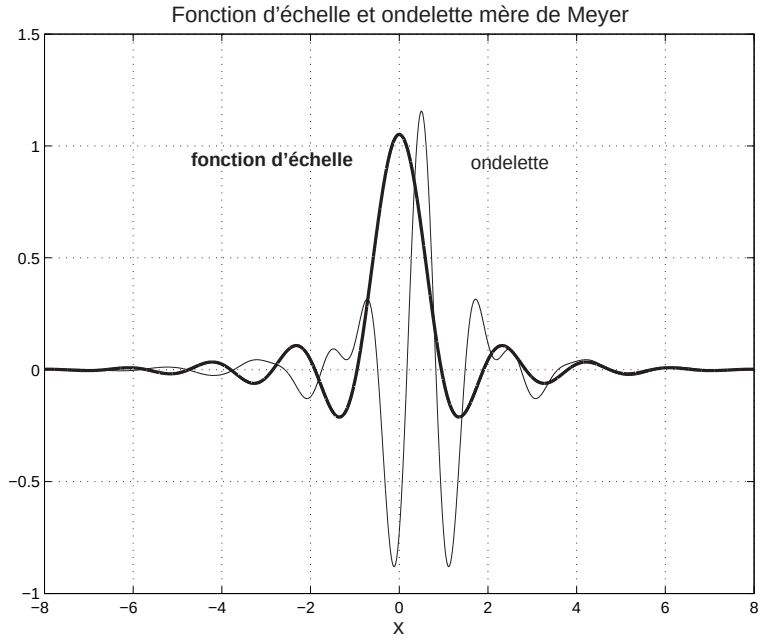
La représentation dans les espaces physiques et de Fourier de la fonction d'échelle et de l'ondelette mère, pour cette fonction auxiliaure, est donnée dans la figure 2.5. Ces deux définitions différentes de l'ondelette de Meyer (associée ou non à une AMR) conduisent à des fonctions proches comme on peut le voir sur la figure 2.6.

2.1.4.3.3 Aspects numériques

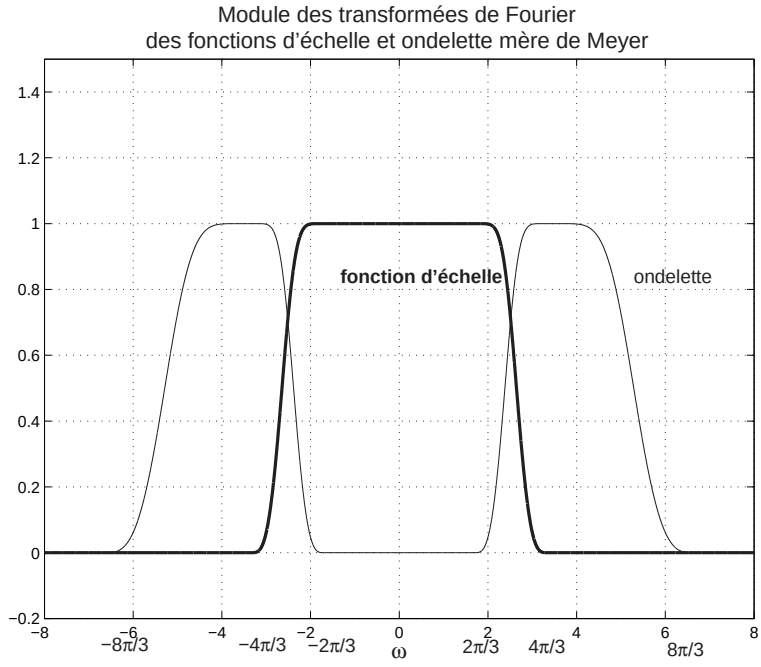
Le logiciel de calcul MATLAB propose des filtres miroirs conjugués pour l'AMR de Meyer. Les fonctions de Meyer n'étant pas à support compact, la dimension des filtres est en théorie infinie. Il est proposé dans la toolbox Wavelet de MATLAB des filtres en quadrature associés à l'AMR de Meyer, définis dans [Abry 1996] ayant une taille de 60. Des versions périodisées des routines de décomposition et de recomposition en ondelettes *wavedec* et *waverec* ont été programmées (les convolutions par les filtres sont remplacées par des convolutions circulaires), mais les résultats obtenus ne sont pas excellents. Comme le montre la figure 2.7, les spectres d'énergie des signaux après une décomposition-recomposition par l'AMR de Meyer sont bruités. Cela tient sans doute à la troncature des filtres en quadrature de Meyer, de taille théoriquement infinie.

Il est préférable d'utiliser la transformation en ondelettes de Meyer implémentée dans l'espace des fréquences. Dans ce cas, la transformation est basée sur une projection dans l'espace des fréquences de la transformée de Fourier du signal sur des fenêtres fréquentielles. Si ces fenêtres fréquentielles sont bien choisies, la projection est faite sur une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$. Une des procédures proposées conduit à des bases appelées bases trigonométriques locales [Coifman and Meyer 1991] dont la construction est détaillée dans [Auscher et al. 1992] et [Kolaczyk 1994]. Bien sûr, les fenêtres fréquentielles utilisées, appelées ici fonctions "cloche", ont la forme des fonctions analysantes de Meyer dans l'espace de Fourier. Les algorithmes de décomposition-recomposition correspondants ont été définis par [Kolaczyk 1994] et ont donnés les routines FWT_YM et IWT_YM proposées par le logiciel Wavelab qu'on peut télécharger gratuitement à l'adresse suivante : http ://www-stat.stanford.edu/˜wavelab.

La figure 2.8 donne un exemple de l'approximation à basse résolution de Meyer du même signal que celui de la figure 2.4. Le signal basse-résolution est reconstitué à partir de $2^4 = 16$ coefficients d'échelle. Dans le cas de l'AMR de Meyer, on peut moins parler de "pixels" d'approximation que pour l'AMR de Haar.

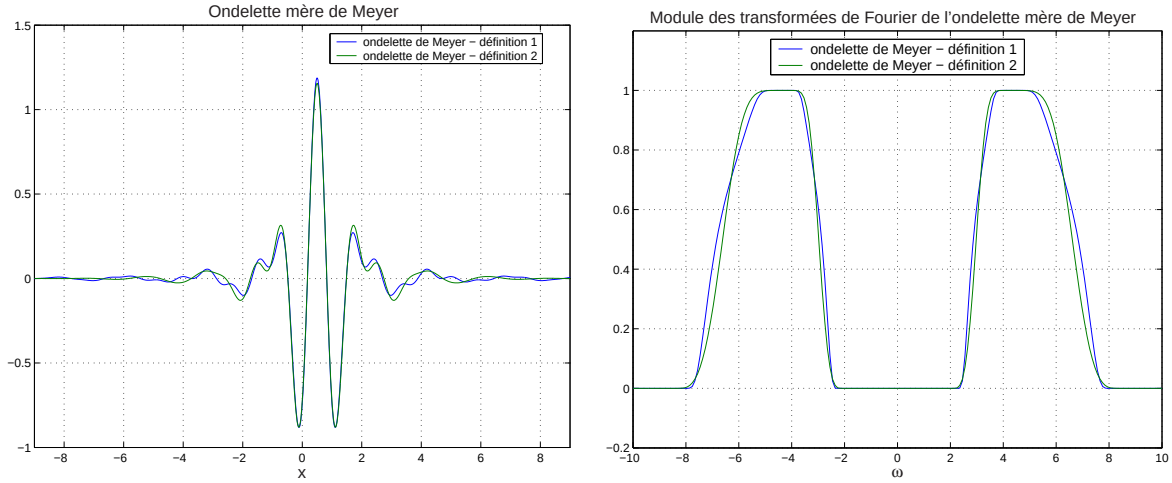


(a) domaine physique



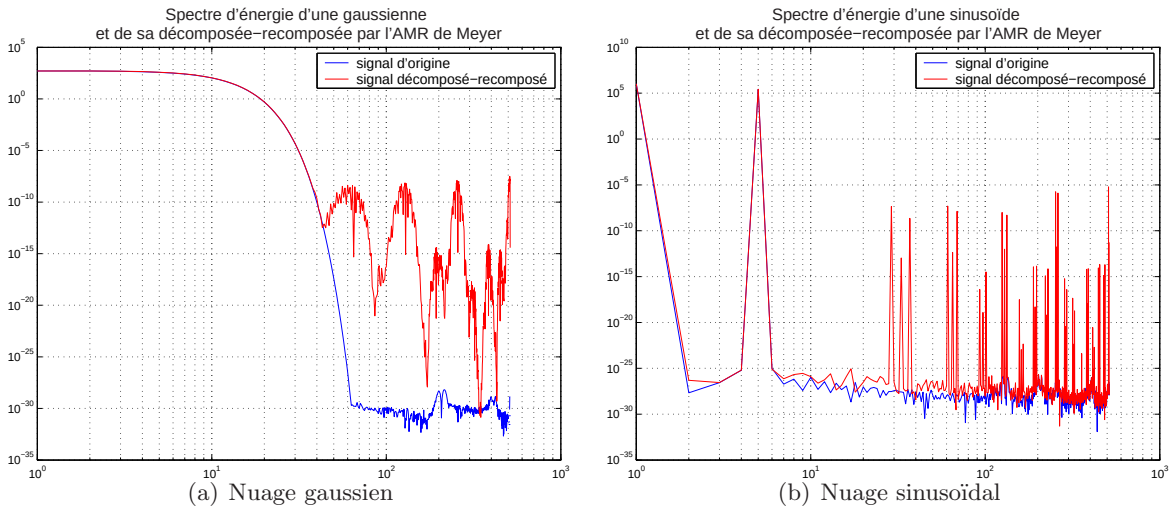
(b) domaine de Fourier

FIG. 2.5 – Visualisation de la fonction d'échelle et de l'ondelette mère de l'AMR de Meyer.



(a) domaine physique (b) domaine de Fourier

FIG. 2.6 – Visualisation des ondelettes mère de Meyer pour les deux définitions (1 : sans multirésolution ; 2 : avec multirésolution).



(a) Nuage gaussien (b) Nuage sinusoïdal

FIG. 2.7 – Spectre d'énergie d'un signal d'origine et de sa décomposition-reconstruction par les ondelettes de Meyer - Utilisation du logiciel de calcul Matlab.

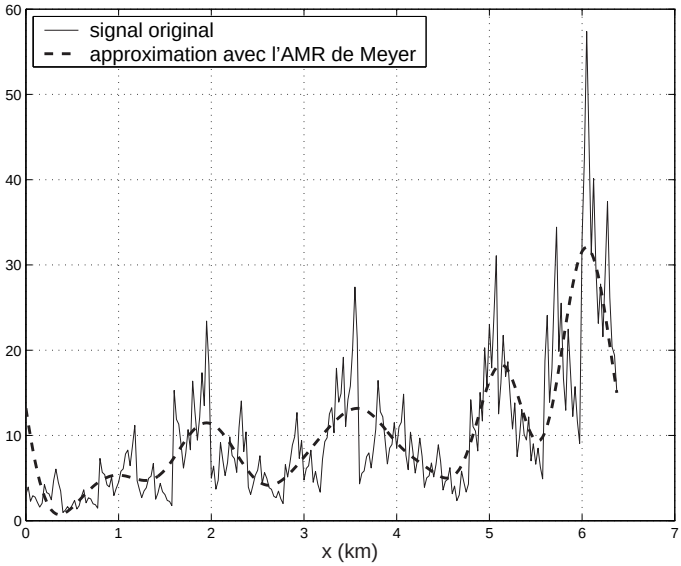


FIG. 2.8 – Vision basse résolution au sens de l'AMR de Meyer d'un signal – $J = 4$ (donc il y a $2^4 = 16$ "pixels" d'approximation), L=8.

2.1.5 Utilisation des analyses multirésolutions

On vient de voir quelques exemples d'AMR. On peut se poser la question du choix de l'AMR et des conséquences de ce choix. Quelles multirésolutions utiliser ? Cela va dépendre bien sûr des applications. En fonction des besoins des applications, on exploitera certaines propriétés des AMR. On passe ici en revue quelques utilisations importantes des AMR en traitement du signal et en analyse de données, dans les techniques de compression de données.

L'AMR se révèle un excellent outil pour le traitement du signal, au même titre que l'analyse de Fourier. D'ailleurs, on l'a vu, les deux analyses ne sont souvent pas très éloignées. L'aspect multirésolution de la transformée en ondelettes permet de l'utiliser comme la transformée de Fourier pour étudier spectralement les signaux. Dans ce cas, l'information sur la localisation des fluctuations, contenue dans les coefficients d'ondelettes, n'est pas exploitée. Le fait d'utiliser des bases d'ondelettes orthonormales permet par la formule de Parseval de réaliser la partition de la variance dans le domaine des ondelettes : la norme $L^2(\mathbb{R})$ vérifie :

$$\|f\|^2 = \sum_k \langle f, \varphi_{J,k} \rangle^2 + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{k_j} \left\langle f, \psi_{j,k_j} \right\rangle^2 \tag{2.33}$$

ce qui est équivalent à la densité spectrale de puissance de la décomposition de Fourier [Perrier et al. 1995]. L'équivalence *nombre d'onde=échelle* existe pour les ondelettes quand celles-ci sont bien localisées dans l'espace des fréquences.

Le caractère de localité des ondelettes est une propriété assez unique et intéressante à exploiter. Ainsi, la détection des singularités d'un signal se fera grâce aux maxima des coefficients d'ondelettes localisés sur la singularité [Mallat and Hwang 1992] [Mallat and Zhong 1992] et dont l'échelle associée correspond à la taille de la singularité. Il sera également intéressant d'utiliser des ondelettes pour lesquelles ne sont "visibles" que les singularités. Dans ce cas, la régularité des ondelettes peut être une propriété importante.

Si les ondelettes sont assez bien localisées physiquement (dans le temps) et spectralement, on aura donc une double localisation spatiale-spectrale (ou temps-fréquence) des fluctuations

des signaux. En se référant à l'image de Bruno Torrésani (site internet : http ://www.cmi.univ-mrs.fr/˜torresan/universalis/ondel.html), on pourra dire en analysant les coefficients d'ondelettes d'un enregistrement de musique si une note est jouée à tel moment, et si c'est une ronde ou une double croche. L'analyse par ondelettes fait dans ce sens mieux que l'analyse de Fourier à fenêtre glissante ; cette dernière a l'inconvénient de proposer une fenêtre d'observation de taille fixe, localisant donc mal les discontinuités à des échelles plus petites que l'échelle d'observation, et étant limité dans les basses fréquences par cette même taille de fenêtre. La transformée en ondelettes propose une fenêtre d'observation qui s'adapte aux échelles des fluctuations présentes : dans une analyse en ondelettes, l'incertitude relative fréquentielle est constante sur une grande gamme d'échelle : $\Delta\omega/\omega$ =constante [Abry 1996].

Enfin, la décomposition en ondelettes est très utile pour le débruitage des signaux [Donoho and Johnstone 1994]. La difficulté dans le débruitage des signaux réside dans ce qu'il faut considérer comme du bruit et comme contenant de l'information. Bien sûr, l'utilisation d'ondelettes ne résout pas cette difficulté. Mais elle permet à partir des coefficients d'ondelettes de discerner la nature des bruits et d'agir de manière ciblée. Si, localement, un signal est entaché d'un bruit important (situation typique de mesures aéroportées), un seuillage des coefficients est une réponse appropriée. Si, à une échelle donnée, un bruit stationnaire d'amplitude limitée vient se superposer à des fluctuations contenant de l'information, on sélectionnera les coefficients d'ondelettes à cette échelle d'amplitude supérieure à un seuil. En fonction des applications, les propriétés de régularité des ondelettes vont aussi jouer un rôle.

Les caractères de localité et de multirésolution de l'analyse en ondelettes en font également un excellent outil pour la représentation économique de données ou la compression de données. La décomposition en ondelettes est naturellement adaptative. En ne gardant que les coefficients significatifs, on réduit le nombre de variables contenant l'information. Les ondelettes sont à la base de technique de compression de données comme par exemple la compression *jpeg2000*. En imagerie, les AMR sont naturellement intéressantes [Mallat 1998] : en isolant une échelle de détails, on peut par exemple restituer les contours de l'image ; en ne gardant que les coefficients à grande échelle, on garde de l'image originale une image floue, qui sera dyadique si on utilise l'AMR de Haar.

2.2 Utilisation d'ondelettes pour la résolution d'équations aux dérivées partielles

L'utilisation de méthodes spectrales pour résoudre les équations aux dérivées partielles (edp) est classique. Les recherches dans ce domaine consistent à étudier de nouvelles représentations de la solution et des "opérateurs-acteurs" de l'équation [Beylkin 1992]. Ces représentations seront judicieuses si elles permettent d'améliorer le calcul. Cela veut par exemple dire une économie de la représentation de la solution dans cette base, une représentation simple des opérateurs permettant un calcul précis et efficace. Mais à côté de ces aspects techniques, une représentation de la solution sera adéquate si elle permet d'analyser la physique sous-jacente. Si le regard qu'on porte sur les processus est approprié, on les distinguera mieux, on pourra les analyser, les modéliser, et les simplifier.

Depuis le tout début des années 90, soit peu de temps après l'apparition de l'analyse multirésolution, une activité assez importante des mathématiciens appliqués et physiciens est dédiée à l'étude et la résolution numérique des edp à l'aide d'ondelettes [Liandrat and Tchamitchian 1990]. On pense en effet que les propriétés de double localisation temps-fréquence des ondelettes sont pertinentes à la fois pour rendre le calcul naturellement adaptatif et performant, et pour mettre en lumière les processus physiques. Quand la solution est décomposée sur une base multirésolution de type ondelettes et que tous les calculs se font dans cet espace multirésolution, on parle de méthode de Galerkin-Ondelette. C'est cette voie

qui a été suivie dans ce travail de thèse. Cette technique fait apparaître des coefficients de connexion auxquels nous accorderons au chapitre suivant un intérêt tout particulier.

Avant d'aborder les méthodes de Galerkin-Ondelette et l'équation qui nous préoccupe - l'Equation du Transfert Radiatif, nous détaillons les enjeux des représentations des solutions des edp, en prenant pour exemple l'équation de Navier-stokes.

2.2.1 Vers une représentation appropriée de la solution

2.2.1.1 Méthode spectrale

Les méthodes spectrales consistent à "projeter" les équations sur une base orthogonale de l'espace fonctionnel [Bouchon 1999][Canuto et al. 1988]. Pour résoudre des problèmes périodiques, on a classiquement recours à des séries de Fourier ; pour des problèmes non périodiques, à des bases de polynômes comme ceux de Legendre ou de Chebyshev. Ces projections permettent une représentation simple des "opérateurs-acteurs" de l'équation, par exemple de l'opérateur de différentiation au premier ordre, d'intégration, le laplacien, ... , et de résoudre ainsi de manière efficace l'équation en exploitant leurs propriétés.

Illustrons cet aspect avec l'exemple simple de l'opérateur de différentiation. Celui-ci est diagonal dans une représentation spectrale de type Fourier [Bouchon 1999] :

$$c_k(f') = \mathrm{i}.k.c_k(f), \tag{2.34}$$

avec k le nombre d'onde, $c_k(f)$ et $c_k(f')$ les coefficients de Fourier de f et f'. Cette relation présente l'intérêt de permettre facilement le calcul des coefficients de Fourier $c_k(f')$ – à partir des coefficients $c_k(f)$, et donc la dérivée de la fonction f. C'est un très grand avantage de la décomposition de Fourier. A partir de la relation 2.34 et d'un raisonnement par récurrence, on peut déduire que la décroissance des coefficients de Fourier est d'autant plus rapide que f est régulière. Traduit en langage mathématique :

$$\text{soit } f \in H^m_{per}{}^2, \text{ alors } |c_k(f)| < \frac{C_2}{|k|^m} \text{ pour } k \neq 0. \tag{2.35}$$

Ainsi, la représentation en Fourier de fonctions régulières est économique. Mais si la fonction présente certaines singularités très locales, les coefficients de Fourier à petite échelle seront importants. La raison est que ces coefficients ne portent pas d'informations sur la localisation de ces singularités. L'information sera contenue dans la phase. L'utilisation d'ondelettes permet d'avoir à petite échelle des coefficients non nuls localisés sur les singularités et nuls ailleurs.

2.2.1.2 Décomposition adaptée aux problèmes physiques sous jacent

A côté de ces considérations mathématiques, il est important que la décomposition choisie pour la solution le soit en fonction de motivations d'ordre physique. En effet, une bonne analyse des phénomènes physiques passe par une représentation adéquate qui permette de discerner clairement ces phénomènes, des comportements, des interactions, des mécanismes. Toute la difficulté et tout l'intérêt sont d'essayer de voir les choses sous un certain angle, de se donner les moyens d'avoir ce point de vue, pour mieux modéliser les phénomènes physiques. Tout comme l'analyse de données en statistique multidimensionnelle peut être considérée comme une technique de modélisation, faisant émerger les propriétés du modèle, des données

[2] si $f \in H^m_{per}$, l'espace de Hilbert d'ordre m, alors f est dans L^2_{per}, ainsi que ses m dérivées successives.

elles-mêmes [Brissaud et al. 1990], l'esprit des méthodes spectrales peut être de choisir un espace de projection qui donne une représentation de la solution permettant d'orienter l'analyse et la modélisation.

Si par exemple les processus physiques considérés montrent des interactions entre les échelles, il est judicieux d'avoir une représentation multiéchelle des phénomènes qui permettent de décrire ces interactions. On parle ainsi communément de **décomposition en échelles des équations** [Heurtaux et al. 1992] ou de **méthodes multiéchelles** [Dahmen et al. 1995]. Prenons l'exemple de l'équation de Navier-stokes :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v.\bigtriangledown)v = \frac{1}{\rho} \bigtriangledown p + \nu \Delta v \tag{2.36}$$

Elle est l'équation déterministe qui décrit l'écoulement d'un fluide visqueux, accompagnée de conditions aux limites et souvent de la condition d'incompressibilité $\bigtriangledown.v = 0$. L'écoulement est caractérisé par un nombre sans dimension, le nombre de Reynolds $R_e = \frac{UL}{\nu}$, avec U un ordre de grandeur des variations de vitesse, L une taille caractéristique de l'écoulement, et ν la viscosité cinématique du fluide. La résolution directe de cette équation est difficile : la complexité de l'écoulement augmente lorsque le nombre de Reynolds croît, et le caractère non linéaire de l'équation devient très problématique (grande sensibilité aux conditions initiales). Une simulation correcte demande la représentation de l'écoulement du fluide à toute les échelles de l'écoulement, depuis la plus grande échelle L jusqu'à la plus petite, l'échelle de dissipation visqueuse η. Or, $\frac{L}{\eta} = \frac{L}{(\nu^3/\bar{\varepsilon})^{1/4}} \backsim \mathrm{Re}^{3/4}$, avec $\bar{\varepsilon}$ le taux moyen massique de dissipation visqueuse. Si on raisonne en terme de grilles de résolutions à adopter, cela impose en trois dimensions $\mathrm{Re}^{9/4}$points de grille dans un cube d'arêtes L. En météorologie et océanographie, on rencontre des nombres de Reynolds de 10^8 à 10^{12}, ce qui impose de 10^{13} à 10^{27}points ! Une simulation résolvant toutes les échelles dans un volume macroscopique est exclue. C'est pour cette raison que des approches statistiques ont été adoptées, approches basées sur une description phénoménologique de la turbulence par Richardson : une **cascade d'énergie** des grandes échelles vers les petites échelles, la plus petite étant l'échelle de dissipation visqueuse, à travers une gamme d'échelles appelées inertielles où il y a conservation de l'énergie. Cette description amène à la prédiction par Kolmogorov (K41) de la fameuse pente en $-5/3$ du spectre d'énergie, largement vérifiée expérimentalement.

Les processus turbulents reposent donc sur des interactions entre les échelles. Comme on l'a dit ci-dessus, il est alors judicieux d'avoir une représentation multiéchelle des phénomènes pour pouvoir décrire ces interactions. La transformée de Fourier propose une représentation multiéchelle, si on considère que *nombre d'onde=échelle.* [Bouchon 1999] étudie l'équation de Burgers, une simplification de Navier-stokes souvent utilisée comme modèle de turbulence, à l'aide d'une transformée de Fourier 3D et propose une séparation des échelles conduisant à des méthodes multi-niveaux [Temam 1996].[Heurtaux et al. 1992] étudie cette même équation et, dans la décomposition de l'opérateur d'évolution de Burgers sur une base d'ondelette, étudie le couplage des échelles et le transfert d'énergie entre elles. Qu'est ce qui fait la différence entre ces deux approches ? Ce sont les propriétés des deux outils, transformées de Fourier dans un cas, en ondelettes dans l'autre, et leur adéquation à la physique sous-jacente.

D'après [Farge et al. 1996], la transformée de Fourier ne convient pas pour deux raisons : la première est qu'en turbulence pleinement développée, le terme convectif non-linéaire devient prépondérant. Or, ce terme est représenté de manière complexe dans l'espace de Fourier par un produit de convolution, complexe dans le sens où un grand nombre de modes de Fourier sont mis en jeu. L'outil Fourier n'est donc peut-être pas le plus adéquat pour représenter ce terme convectif qui dicte l'évolution, au contraire du terme dissipatif (l'opérateur laplacien est diagonal dans l'espace de Fourier). D'ailleurs [Bouchon 1999] ne réalise pas le produit $(v.\bigtriangledown)v$ à l'aide d'une convolution (car en dimension 3 une convolution coûte beaucoup d'opérations),

mais dans l'espace physique à l'aide d'aller-retour (méthode pseudospectrale [Canuto et al. 1988]).

La seconde raison est que la solution de l'équation de Navier stokes possède une structure spatiale très intermittente, celle de l'écoulement. Cette structure est le résultat d'une succession d'interactions non linéaires entre des **structures cohérentes** de tailles différentes formées d'un ou plusieurs tourbillons. La représentation de ces structures cohérentes implique une localisation spatiale du champ de vorticité. La description de Richardson est donc loin de la réalité : les cascades d'énergie ne vont pas simplement des grandes vers les petites échelles : les tourbillons interagissent entre eux pour en former de plus larges, provoquant un transfert d'énergie vers les grandes échelles. Ainsi on parle de **diffusion arrière d'énergie** [Leith 1990], et pas de cascade inverse d'énergie car il n'y a pas de phénoménologie associée.

Il faut donc étudier de nouvelles représentations multiéchelles pour la solution de l'équation qui soient mieux adaptées à la structure spatiale très intermittente de l'écoulement. La transformée en ondelettes est un bon outil pour décrire de telles structures, localisées à la fois en espace et en échelle, au moyen d'une représentation économique [Charton 1996]. [Farge et al. 1996] utilise les ondelettes pour séparer ces structures du reste de l'écoulement. [Farge et al. 1999] présente la transformée en ondelettes comme un outil adéquat, pas seulement pour analyser et interpréter les résultats expérimentaux, mais aussi pour tenter d'envisager une théorie statistique de la turbulence qui soit plus satisfaisante. Cet outil permet de définir de nouvelles méthodes numériques plus adaptées [Liandrat and Tchamitchian 1990][Charton and Perrier 1996][Fröhlich and Schneider 1997][Dahmen and Schneider 1999], en particulier les méthodes de Galerkin-ondelette qui sont utilisées et exploitées dans ce présent travail.

2.2.2 Méthode de Galerkin-Ondelette

Les méthodes spectrales basées sur l'utilisation de bases multirésolutions de type ondelette consistent à projeter l'équation dans un espace multirésolution, à représenter la solution f par ses coefficients d'échelle et d'ondelettes. Si des termes non-linéaires ou des termes dérivées à différents ordres apparaissent (respectivement le terme d'advection et le terme diffusif dans l'équation de Navier-stokes), deux solutions sont possibles : soit réaliser les opérations produit ou différentiation dans l'espace initial de la solution, ce qui implique des allers et retours d'un espace vers l'autre – la recomposition de la solution à partir de ces coefficients d'ondelettes pour réaliser dans l'espace initial les opérations, puis à nouveau la représentation de la solution par ses coefficients d'ondelettes, et ceci à chaque pas de temps du calcul ; soit représenter ces termes dans l'espace de projection.

La première méthode est appelée **méthode pseudospectrale**, ou **de collocation** [Vasilyev et al. 1998]. Par exemple dans le cas du produit de deux fonctions, le produit est réalisé sur les points de grille appelés points de collocation. La consomnation en temps de calcul des allers et retours entre les espaces sera un point sensible de cette méthode.

La deuxième méthode consiste à résoudre entièrement l'équation dans l'espace de ces coefficients ; c'est une "vraie" méthode de Galerkin – appelée **méthode de Galerkin-Ondelette**. Ce n'est qu'en fin de calcul que l'on recompose la solution à partir des coefficients d'échelles et d'ondelettes solutions de l'équation projetée dans leur espace. Le traitement des termes produit, dérivée, etc ., fait apparaître des coefficients appelés **coefficients de connexion** [Perrier and Wickerhauser 1999][Resnikoff and Wells. 1998] qui relient les coefficients des différents termes aux coefficients de la solution. Cette deuxième méthode a été retenue ici pour étudier l'équation qui décrit le transfert radiatif en milieu hétérogène.

2.2.2.1 Application à l'Equation du Transfert Radiatif

L'Equation du Transfert Radiatif, présentée en détail au chapitre 3, s'écrit

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla N\left(\vec{r}, \vec{\Omega}\right) = -\alpha\left(\vec{r}\right)\left[N\left(\vec{r}, \vec{\Omega}\right) - J\left(\vec{r}, \vec{\Omega}\right)\right] \tag{2.37}$$

$$J\left(\vec{r}, \vec{\Omega}\right) = \frac{\widetilde{\omega}_o(\vec{r})}{4\pi} \int_{4\pi} P\left(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}'\right) N\left(\vec{r}, \vec{\Omega}'\right) d\omega_{\vec{\Omega}'} + \left[1 - \widetilde{\omega}_o\left(\vec{r}\right)\right] B\left(\vec{r}\right) \tag{2.38}$$

L'interaction entre le champ de rayonnement et le champ nuageux est décrite par le terme $\alpha.N$ avec N une grandeur radiative, la radiance, et α le coefficient d'extinction, caractéristique de l'interception du rayonnement par le milieu, ici un nuage composé de gouttelettes d'eau. $J\left(\vec{r}, \vec{\Omega}\right)$ est un terme source, conséquence des sources diffusives dans le nuage (terme intégral), et de l'émission propre du milieu ($B\left(\vec{r}\right)$), fonction de sa température thermodynamique. Le coefficient d'extinction α quantifie combien le milieu intercepte le rayonnement, l'albédo de diffusion simple $\widetilde{\omega}_o$ quantifie la part de rayonnement absorbé par le milieu et la part de rayonnement diffusé – redistribué – dans différentes directions, la fonction de phase $P\left(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}'\right)$ définit comment le rayonnement est redistribué.

Comme on l'a vu au chapitre introductif, la difficulté du transfert radiatif en milieu hétérogène tient à la prise en compte et à la représentation des interactions entre les échelles des hétérogénéités. Quelles échelles des hétérogénéités des propriétés optiques du milieu ont un effet radiatif significatif à une échelle plus grossière ? Et est-ce important pour le problème direct, le problème inverse ? Pour répondre à ces questions, il faut avoir une vision multiéchelle des phénomènes, pour pouvoir quantifier l'effet de chacune des échelles. Le deuxième point important qui a été souligné est l'importance du flux radiatif net horizontal, flux conditionné par les gradients locaux des quantités représentant les propriétés optiques du milieu. La non prise de ce flux net horizontal fait que des calculs de type IPA sont biaisés à petite échelle.

Les processus physiques à l'oeuvre présentent donc des **interactions locales entre échelles**. Ici aussi, l'analyse multirésolution semble plus appropriée que l'analyse de Fourier pour représenter ces processus de transfert radiatif : l'AMR fournit une information multiéchelle sur la variabilité des propriétés optiques du champ nuageux et cette information garde On va voir au chapitre suivant que ces interactions locales entre échelles sont représentées par les coefficients de connexion.

L'ETR est une équation complexe : c'est une **équation intégro-différentielle** à cause de la présence du terme source diffusif ; elle est **linéaire à coefficients variables** lorsque le milieu est hétérogène ; ses conditions aux limites sont non classiques en physique et dans le cadre de l'étude des edp. Classiquement, on décompose le gradient ∇N en une partie horizontale et une partie verticale : l'équation s'apparente alors à une **équation d'évolution** un peu particulière, où la coordonnée z joue le rôle du temps t : on suit en quelque sorte le devenir des photons au cours de leur interception par le milieu. Si le nuage est éclairé par le haut, la condition à la limite basse du nuage sera connue après avoir fait traversé les photons, et la multiplicité de la diffusion aura pour conséquence des conditions aux limites pour chaque ordre de diffusion. Si on suppose que la fonction de phase $P\left(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}'\right)$ et l'albédo de diffusion simple $\widetilde{\omega}_o(\vec{r})$ sont homogènes, cette équation est résoluble par une méthode de Galerkin-ondelette faisant apparaître des **coefficients de connexion** pour traiter les termes $\alpha.N$ et $\dfrac{\partial N}{\partial x}$.

2.2.2.1.1 Coefficients de connexion

Précisons tout d'abord quelques notations.

Ψ_i représente une fonction de la base multirésolution. Quand Ψ_i est une fonction d'échelle, $\sum_i$ signifie $\sum_{k=0}^{2^J-1}$. Quand Ψ_i est une ondelette, $\sum_i$ signifie $\sum_{j=J}^{L-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}$. On peut donc écrire ainsi la décomposition en ondelettes d'une fonction f :

$$f(x) = \sum_1 \langle f, \varphi_1 \rangle \varphi_1(x) + \sum_1 \langle f, \psi_1 \rangle \psi_1(x) \tag{2.39}$$

Allons vers une écriture matricielle de l'équation 2.39. Si on note les vecteurs $\overrightarrow{\varphi_J} = \begin{pmatrix} \varphi_{J,O} \\ \varphi_{J,1} \\ ... \\ \varphi_{J,2^J-1} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\psi_j} = \begin{pmatrix} \psi_{j,O} \\ \psi_{j,1} \\ ... \\ \psi_{j,2^j-1} \end{pmatrix}$ pour $j = J, ..., L-1$ et $\overrightarrow{\Psi_{L-1}} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\psi_J} \\ \overrightarrow{\psi_{J+1}} \\ ... \\ \overrightarrow{\psi_{L-1}} \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}$ représente la matrice des vecteurs de la base multirésolution de $L^p(\mathbb{R})$. Si on note les vecteurs $\overrightarrow{f_J^{\varphi}} = \begin{pmatrix} \langle f, \varphi_{J,0} \rangle \\ \langle f, \varphi_{J,1} \rangle \\ ... \\ \langle f, \varphi_{J,2^J-1} \rangle \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f_j^{\psi}} = \begin{pmatrix} \langle f, \psi_{j,0} \rangle \\ \langle f, \psi_{j,1} \rangle \\ ... \\ \langle f, \psi_{j,2^j-1} \rangle \end{pmatrix}$ pour $j = J, ..., L-1$ et $\overrightarrow{f_{L-1}^{\Psi}} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\psi}} \\ \overrightarrow{f_{J+1}^{\psi}} \\ ... \\ \overrightarrow{f_{L-1}^{\psi}} \end{pmatrix}$, alors on peut avoir une écriture matricielle de l'équation 2.39 :

$$f(x) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{f_j^{\psi}} \end{pmatrix}^t . \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

avec $(M)^t$ la transposée de la matrice M.

Traitement du terme produit

Ecrivons le coefficient (d'échelle ou d'ondelette) $\langle fg, \Psi_3 \rangle$ du produit $f.g$:

$$\begin{aligned}
\langle fg, \Psi_3 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(x)\, \overline{\Psi}_3(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_1 \langle f, \varphi_1 \rangle \varphi_1(x) + \sum_1 \langle f, \psi_1 \rangle \psi_1(x) \right) \left(\sum_2 \langle g, \varphi_2 \rangle \varphi_2(x) + \sum_1 \langle g, \psi_2 \rangle \psi_2(x) \right) \overline{\Psi}_3(x)\, dx \\
&= \sum_1 \sum_2 \langle f, \varphi_1 \rangle \langle g, \varphi_2 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\, \varphi_2(x) . \overline{\Psi}_3(x)\, dx + \sum_1 \sum_2 \langle f, \varphi_1 \rangle \langle g, \psi_2 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\, \psi_2(x) . \overline{\Psi}_3(x)\, dx \\
&+ \sum_1 \sum_2 \langle f, \psi_1 \rangle \langle g, \varphi_2 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x)\, \varphi_2(x) . \overline{\Psi}_3(x)\, dx + \sum_1 \sum_2 \langle f, \psi_1 \rangle \langle g, \psi_2 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x)\, \psi_2(x) . \overline{\Psi}_3(x)\, dx
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Il apparaît les coefficients de connexion pour le produit de deux fonctions [Perrier and Wickerhauser 1999] :

$$T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(x)\Psi_2(x)\overline{\Psi_3}(x)dx, \tag{2.42}$$

avec Ψ_i soit une fonction d'échelle soit une ondelette, qu'on appelle **coefficient de connexion d'interaction**. D'où

$$\begin{aligned}\langle fg, \Psi_3\rangle = &\sum_1\sum_2\sum_2 \langle f,\varphi_1\rangle \langle g,\varphi_2\rangle T_{\varphi_1,\varphi_2,\Psi_3} + \sum_1\sum_2 \langle f,\varphi_1\rangle \langle g,\psi_2\rangle T_{\varphi_1,\psi_2,\Psi_3} \\ &+ \sum_1\sum_2 \langle f,\psi_1\rangle \langle g,\varphi_2\rangle T_{\psi_1,\varphi_2,\Psi_3} + \sum_1\sum_2 \langle f,\psi_1\rangle \langle g,\psi_2\rangle T_{\psi_1,\psi_2,\Psi_3}\end{aligned} \tag{2.43}$$

ou encore :

$$\langle fg, \Psi_3\rangle = \sum_{\Psi_1}\sum_{\Psi_2} \langle f,\Psi_1\rangle \langle g,\Psi_2\rangle T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3}, \tag{2.44}$$

le symbole $\sum_{\Psi_i}$ signifiant qu'on fait la somme sur toutes les fonctions d'échelle et ondelettes. $\left\{ T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3}, \text{ avec } \Psi_3 \in \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix} \right\}$ est appelé le **tenseur d'interaction**. Il est d'ordre 3 et pour une AMR périodique définie à partir de 2^L points, il est de taille $2^L * 2^L * 2^L$. Ce tenseur d'interaction est étudié au chapitre 3 pour les AMR de Haar et de Meyer. Il y sera donné une interprétation physique des interactions proposées par les coefficients de connexion d'interaction. On donne dans l'annexe B les propriétés de ce tenseur.

En séparant les coefficients d'échelle et d'ondelettes des fonctions f, g, et fg, on peut donner une écriture matricielle de ce terme en séparant, pour une fonction Ψ_3, le tenseur de connexion en 4 matrices :

$$\langle fg, \Psi_3\rangle = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{f_{L-1}^{\Psi}} \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{T}}^{J,J}_{k_3\ j_3} & \overline{\mathbf{T}}^{J,L-1}_{k_3\ j_3} \\ \overline{\mathbf{T}}^{L-1,J}_{k_3\ j_3} & \overline{\mathbf{T}}^{L-1,L-1}_{k_3\ j_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{g_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{g_{L-1}^{\psi}} \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

$\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{T}}^{J,J}_{k_3\ j_3} & \overline{\mathbf{T}}^{J,L-1}_{k_3\ j_3} \\ \overline{\mathbf{T}}^{L-1,J}_{k_3\ j_3} & \overline{\mathbf{T}}^{L-1,L-1}_{k_3\ j_3} \end{pmatrix}$ est une matrice de taille $2^L * 2^L$ avec :

- $\overline{\mathbf{T}}^{J,J}_{k_3\ j_3} = \left(T_{\varphi_{J,k_1},\varphi_{J,k_2},\Psi_3}\right)$ et $\begin{matrix} 0 \le k_1 \le 2^J-1 \\ 0 \le k_2 \le 2^J-1 \end{matrix}$,
- $\overline{\mathbf{T}}^{L-1,J}_{k_3\ j_3} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{\psi_J,\varphi_J}_{k_3\ j_3} \\ \mathbf{T}^{\psi_{J+1},\varphi_J}_{k_3\ j_3} \\ \dots \\ \mathbf{T}^{\psi_{L-1},\varphi_J}_{k_3\ j_3} \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{T}^{\psi_{j_1},\varphi_J}_{k_3\ j_3} = \left(T_{\psi_{j_1,k_1},\varphi_{J,k_2},\Psi_3}\right)$ et $\begin{cases} 0 \le k_1 \le 2^{j_1}-1 \\ 0 \le k_2 \le 2^J-1 \end{cases}$,
  pour $J \le j \le L-1$,
- $\overline{\mathbf{T}}^{J,L-1}_{k_3\ j_3} = \left(\overline{\mathbf{T}}^{L-1,J}_{k_3\ j_3}\right)^t$,
- $\overline{\mathbf{T}}^{L-1,L-1}_{k_3\ j_3} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{\psi_J,\psi_J}_{k_3\ j_3} & \mathbf{T}^{\psi_J,\psi_{J+1}}_{k_3\ j_3} & \dots & \mathbf{T}^{\psi_J,\psi_{L-1}}_{k_3\ j_3} \\ \mathbf{T}^{\psi_{J+1},\psi_J}_{k_3\ j_3} & \mathbf{T}^{\psi_{J+1},\psi_{J+1}}_{k_3\ j_3} & \dots & \mathbf{T}^{\psi_{J+1},\psi_{L-1}}_{k_3\ j_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{T}^{\psi_{L-1},\psi_J}_{k_3\ j_3} & \mathbf{T}^{\psi_{L-1},\psi_{J+1}}_{k_3\ j_3} & \dots & \mathbf{T}^{\psi_{L-1},\psi_{L-1}}_{k_3\ j_3} \end{pmatrix}$

avec $\mathbf{T}^{\psi_{j_1},\psi_{j_2}}{}_{k_3}^{j_3} = \left(T_{\psi_{j_1,k_1},\psi_{j_2,k_2},\Psi_3}\right)$ et $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq k_1 \leq 2^{j_1} - 1 \\ 0 \leq k_2 \leq 2^{j_2} - 1 \end{array} \right.$, pour j_1 et j_2 dans $[J, L-1]$.

Cette séparation pourra être utile quand on écrira l'équation du transfert radiatif à l'échelle du pixel et du sous-pixel (3.8).

Traitement du terme dérivée

Projetons une fonction dérivée $f'(x)$ sur un espace multirésolution :

$$f'(x) = \sum_1 \left\langle f', \varphi_1 \right\rangle \varphi_1(x) + \sum_1 \left\langle f', \psi_1 \right\rangle \psi_1(x) \tag{2.46}$$

ou sous forme matricielle :

$$f'(x) = \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x}^{\varphi}} \\ \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x}_J} \\ \frac{\partial f}{\partial x}^{\Psi} \\ \frac{\partial f}{\partial x}_{L-1} \end{array} \right)' \cdot \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{array} \right) \tag{2.47}$$

Ecrivons le coefficient d'ondelette du terme dérivée $\frac{\partial N}{\partial x}$: pour $\Psi_3 \in \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{array} \right)$,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x}, \Psi_3 \right\rangle &= \int_{D_x} \frac{\partial N}{\partial x} \overline{\Psi}_3(x) dx \\ &= \int_{D_x} \left[\sum_1 \langle N, \varphi_1 \rangle \varphi_1'(x) + \sum_1 \langle N, \psi_1 \rangle \psi_1'(x) \right] \overline{\Psi}_3(x) dx \\ &= \sum_1 \langle N, \varphi_1 \rangle \int_{D_x} \varphi_1'(x) \overline{\Psi}_3(x) dx + \sum_1 \langle N, \psi_1 \rangle \int_{D_x} \psi_1'(x) \overline{\Psi}_3(x) dx \end{aligned} \tag{2.48}$$

Il apparaît les coefficients de connexion :

$$\langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle = \int_{D_x} \Psi_1'(x)) \overline{\Psi_3}(x)$$

avec Ψ_i soit une fonction d'échelle soit une ondelette, qu'on appellera **coefficient de connexion de différentiation du premier ordre**, ou **coefficient de connexion dérivée**. Donc :

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial x}, \Psi_3 \right\rangle = \sum_1 \langle N, \varphi_1 \rangle \langle \delta\varphi_1, \Psi_3 \rangle + \sum_1 \langle N, \psi_1 \rangle \langle \delta\psi_1, \Psi_3 \rangle \tag{2.49}$$

ou encore

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial x}, \Psi_3 \right\rangle = \sum_{\Psi_1} \left\langle N, \overline{\Psi}_1 \right\rangle \langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle . \tag{2.50}$$

$\langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle$ est la **matrice de coefficients de différentiation,** de taille $2^L * 2^L$.

$\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle =$

$$\begin{bmatrix} \langle \partial\varphi_{J,0},\varphi_{J,0}\rangle & \langle \partial\varphi_{J,1},\varphi_{J,0}\rangle & \dots & \langle \partial\psi_{j,k},\varphi_{J,0}\rangle & \dots & \langle \partial\psi_{L-1,2^{L-1}-1},\varphi_{J,0}\rangle \\ \langle \partial\varphi_{J,0},\varphi_{J,1}\rangle & \langle \partial\varphi_{J,1},\varphi_{J,1}\rangle & \dots & \langle \partial\psi_{j,k},\varphi_{J,1}\rangle & \dots & \langle \partial\psi_{L-1,2^{L-1}-1},\varphi_{J,1}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle \partial\varphi_{J,0},\psi_{j,k}\rangle & \langle \partial\varphi_{J,1},\psi_{j,k}\rangle & \dots & \langle \partial\psi_{j,k},\psi_{j,k}\rangle & \dots & \langle \partial\psi_{L-1,2^{L-1}-1},\psi_{j,k}\rangle \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \langle \partial\varphi_{J,0},\psi_{L-1,2^{L-1}-1}\rangle & \langle \partial\varphi_{J,1},\psi_{L-1,2^{L-1}-1}\rangle & \dots & \langle \partial\psi_{j,k},\psi_{L-1,2^{L-1}-1}\rangle & \dots & \langle \partial\psi_{L-1,2^{L-1}-1},\psi_{L-1,2^{L-1}-1}\rangle \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

D'où, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\dfrac{\partial f^{\varphi}}{\partial x_J}} \\ \overrightarrow{\dfrac{\partial f^{\Psi}}{\partial x_{L-1}}} \end{pmatrix} = \langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{f_{L-1}^{\Psi}} \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

et

$$f'(x) = \left(\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{f_{L-1}^{\Psi}} \end{pmatrix} \right)^t \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

$$\text{i.e.} \qquad f'(x) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{f_{L-1}^{\Psi}} \end{pmatrix}^t \langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle^t \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

La matrice de coefficients de différentiation $\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle$ donne une représentation standard [Goedecker 1998] de l'opérateur de dérivation au premier ordre. Cette matrice des coefficients de différentiation sera étudiée et représentée au chapitre 3 pour les AMR de Haar et de Meyer, et pour une AMR hybride notée "HM", conçue à partir des AMR de Haar et de Meyer.

Chapitre 3

Analyse en ondelettes de l'Equation du Transfert Radiatif

Dans ce chapitre, nous présentons le coeur de ce travail de thèse et notre approche : l'analyse multirésolution de l'Equation du Transfert Radiatif – équation appelée par la suite ETR. Cette équation intégrodifférentielle est complexe et compliquée à résoudre dans le cas où le milieu est hétérogène. Le champ de radiances – notées N, inconnues de l'équation, dépend en dimension trois de cinq variables indépendantes : trois de position et deux angulaires. La séparation des variables est réalisée grâce à la transformation de l'ETR par des développements en séries orthogonales des différents termes de l'équation, développement classique en transfert radiatif comme l'utilisation de polynômes de Legendre et de séries de Fourier (nous reprenons ici les transformations proposées dans [Stephens 1986]), et novateur dans cette discipline pour l'utilisation de bases d'ondelettes. Cette dernière transformation permet de décrire les hétérogénéités des champs interagissants au moyen d'ondelettes, de décomposer l'interaction globale du champ de rayonnement et du milieu en interactions entre les fluctuations élémentaires des deux champs, celles-ci étant définies par le choix de l'AMR retenue. Cette méthode de Galerkin-ondelette conduit à une nouvelle formulation de l'ETR faisant apparaître des **coefficients de connexion** déjà introduits au paragraphe 2.2.2.1 ; tout notre travail est basé sur cette formulation et ces coefficients de connexion.

Le chapitre est organisé comme suit : la section 3.1 définit les grandeurs radiatives que nous manipulons et les notations adoptées. Les trois sections suivantes introduisent l'ETR (section 3.2) et les techniques classiques – directement issues des travaux de [Stephens 1986] et [Stephens 1988a] – utilisées ici comme première étape de résolution et de traitement de l'ETR : la méthode des ordres successifs de diffusion (section 3.3), la transformation azimutale de l'ETR (section 3.4). Dans la section 3.5, nous appliquons la méthode de Garlerkin-ondelette à l'ETR, et proposons ainsi une formulation multirésolution de l'ETR faisant apparaître des coefficients de connexion, que nous étudions dans la section 3.6. Nous détaillons finement l'information contenue dans ces coefficients en adoptant un double point de vue physique et fréquentiel, points de vue permis par l'outil multirésolution et l'utilisation de différentes AMR. Cette étude conduira à une première analyse multirésolution des interactions entre le champ de rayonnement et le milieu (section 3.7). La nouvelle formulation multirésolution de l'ETR permet de décrire formellement le transfert radiatif à l'échelle de pixels d'approximation, avec la prise en compte – comme source interne additionnelle à l'échelle de ces pixels – de la contribution des fluctuations sous-pixel des propriétés optiques du milieu. La section 3.8 contient cette formalisation mulitrésolution du problème du transfert radiatif en milieu hétérogène.

3.1 Définitions et notations

Nous définissons ici les quantités radiatives que nous manipulons – l'énergie radiative, le flux radiatif (net), et la radiance, puis les propriétés optiques du milieu.

3.1.1 Quantités radiatives

Dans la suite, on ne parlera que de quantités radiatives monochromatiques, c'est-à-dire associées à des rayonnement électromagnétiques localisés fréquentiellement (fréquence comprise entre ν et $d\nu$). Les unités qui suivent ne comportent donc jamais le symbole Hz^{-1} pour dire "par largeur de spectres fréquentiels élémentaires".

On considère tout d'abord l'*énergie radiative* notée d^2E (en Joules) qui traverse pendant un temps $\mathrm{d}t$ un élément de surface $\mathrm{d}A$, en une certaine position repérée par $\overrightarrow{r}$ et d'orientation repérée par la normale $\overrightarrow{n}$ (voir figure 3.1). Cette énergie radiative est portée par des faisceaux (rayons) angulaires incohérents se déplaçant dans une infinité de directions. Etant incohérents, c'est à dire n'interagissant pas entre eux, on peut traiter ces faisceaux séparément.

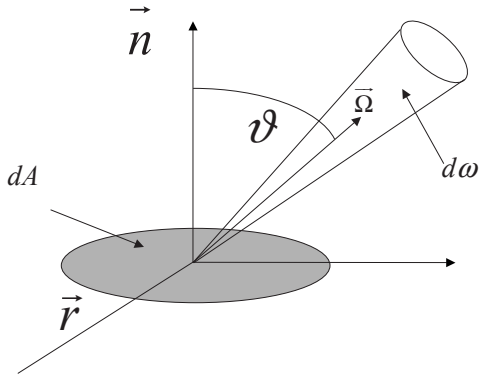


FIG. 3.1 – L'énergie radiative traverse un élément de surface dA de normale n dans la direction Ω.

On définit le *flux d'énergie radiative* F (en $\mathrm{W.m}^{-2}$) comme l'énergie ramenée à une surface et un intervalle de temps élémentaires : $F = \mathrm{d}^2E/\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$. On définit également le *flux net d'énergie radiative :* le flux est compté positivement quand le sens de traversée de la surface correspond au sens fixé pour la normale à la surface $\overrightarrow{n}$, et néghativement sinon. Si le champ de rayonnement est isotrope en ce point, le flux net est donc nul.

Ce flux ne porte que peu d'informations sur la dépendance directionnelle des flux radiatifs. Une description angulaire plus précise des flux d'énergie radiative est nécessaire, particulièrement pour les applications en télédétection : la distribution du flux d'énergie dans les directions couvrant la sphère unitaire. On fait alors appel à la description de l'énergie d^3E contenue dans un angle solide $\mathrm{d}\omega$ et se propageant dans une direction $\vec{\Omega}$ (voir figure 3.1). On en arrive à la grandeur radiative que nous allons manipuler par la suite, la fonction *radiance* monochromatique et non polarisée $N\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ (*radiance* préférée à *luminance* terme trop exclusivement français, et *intensité*, terme très utilisé également par les anglo-saxons mais trop commun), qui est l'énergie passant à travers une surface élémentaire, par unité de temps, et

contenue dans un angle solide élémentaire, se propageant dans une direction $\vec{\Omega}$. L'angle entre $\vec{\Omega}$ et $\overrightarrow{n}$ est noté ϑ. On a :

$$N\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) = \frac{\mathrm{d}^3 E}{\cos\vartheta \mathrm{d}A\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega} \text{ en W.m}^{-2}\text{.sr}^{-1} \tag{3.1}$$

$\vec{\Omega}$ est repérée par les deux angles θ et ϕ, respectivement zénithal et azimutal (fig. 3.2) :

$$\vec{\Omega} = \eta\cos\phi\ \vec{i} + \eta\sin\phi\ \vec{j} + \mu\ \vec{k} \text{ avec } \mu = \cos\theta \text{ et } \eta = \sin\theta. \tag{3.2}$$

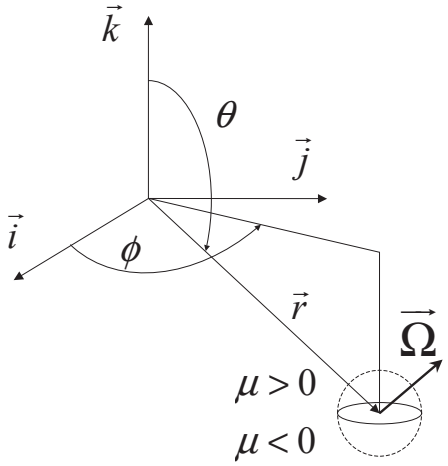


FIG. 3.2 – Conventions angulaires

Si la radiance est, en chaque point, indépendante de la direction, on dit qu'elle est isotrope. Si elle est indépendante de la position, on dit qu'elle est homogène.

3.1.2 Propriétés radiatives du milieu

Les propriétés radiatives suivantes définissent combien et comment un volume élémentaire intercepte le rayonnement et le diffuse dans d'autres directions :

– le coefficient d'extinction $\alpha(\vec{r})$ au point de coordonnées $\vec{r}$, en m^{-1}. Ce coefficient définit combien le milieu intercepte le rayonnement.

$$\alpha = \sum_i S_i Q^i_{eff} N_i \tag{3.3}$$

où :
– S_i est la section droite de la particule interceptante d'indice i ; si la particule est de section circulaire de rayon r_i, alors $S_i = \pi r_i^2$;
– Q^i_{eff} le coefficient d'efficacité d'interception ;
– N_i la concentration (nombre/m^3) des particules indicées i.

Q^i_{eff} dépend du paramètre de taille $2\pi r_i/\lambda$ avec λ longueur d'onde du rayonnement. Il prend en compte la diffusion et la diffraction du rayonnement par les particules. Le coefficient d'extinction α est la somme de deux coefficients ; le coefficient d'absorption a et de diffusion s : $\alpha(\vec{r}) = a(\vec{r}) + s(\vec{r})$.

– l'albédo de diffusion simple : $\widetilde{\omega}_o(\vec{r})$ au point de coordonnées $\vec{r}$.

$$\widetilde{\omega}_o(\vec{r}) = \frac{s(\vec{r})}{\alpha(\vec{r})} \tag{3.4}$$

Il définit combien un volume élémentaire diffuse le rayonnement qu'il intercepte, élémentaire dans le sens où l'on compte dans ce volume une seule diffusion par les particules. Si $\widetilde{\omega}_o(\vec{r}) = 1$, le milieu est purement diffusif et non-absorbant.

– la fonction de phase normalisée : $P(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}')$. Elle définit la probabilité qu'au point de coordonnées $\vec{r}$, le rayonnement incident de direction $\vec{\Omega}'$ soit diffusé dans la direction $\vec{\Omega}$. Par définition donc,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} P(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\omega_{\vec{\Omega}'} = 1 \tag{3.5}$$

– le facteur d'asymétrie g :

$$g = \frac{1}{2\pi} \int_{4\pi} \cos(\theta).P(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') d\omega_{\vec{\Omega}'} \tag{3.6}$$

g indique si la diffusion est plutôt avant ($1 \geq g > 0$), arrière ($-1 \leq g < 0$) ou isotrope ($g = 0$).

Enfin, l'émission propre du milieu, fonction de sa température thermodynamique, est représentée par la fonction de Planck $B(\vec{r})$, et $B(\vec{r}) = f(T(\vec{r}), \lambda)$.

On définit communément l'épaisseur du milieu d'un point de vue optique par un nombre sans dimension τ appelé *épaisseur optique*. Le long d'un chemin s :

$$\mathrm{d}\tau(s) = \alpha(s)\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \tau(L) = \int_0^L \alpha(s)\mathrm{d}s. \tag{3.7}$$

Pour des calculs radiatifs simples (nuages homogène), τ est une des variables de l'ETR. On définit alors l'épaisseur optique d'une couche nuageuse, d'épaisseur géométrique H, par :

$$\tau = \alpha.H. \tag{3.8}$$

En écrivant $\tau = \alpha.H = H/(1/\alpha)$, on assimile τ à la distance H normalisée par $1/\alpha$. $1/\alpha$ est vu comme le libre parcours moyen des photons, distance moyenne que parcourt un photon entre deux rencontres avec les particules. τ correspond alors aux nombres d'interaction subit par un photon s'il traversait en ligne droite le nuage.

3.2 Equation du Transfert Radiatif (ETR)

3.2.1 Bilan radiatif dans un élément de volume

Reprenons ici et temporairement les notations de [Lenoble 1993]. Considérons une fonction radiance monochromatique et non polarisée $N(M, \overrightarrow{s})$ au point M, se propageant dans une direction $\overrightarrow{s}$, dans un milieu caractérisé par son coefficient d'extinction α, l'albédo de diffusion simple $\widetilde{\omega}_o$ et sa fonction de phase $P\left(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}'\right)$. α, $\widetilde{\omega}_o$ et $P\left(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}'\right)$ dépendent généralement de la position M.

La variation de la radiance sur une longueur ds suivant une direction $\overrightarrow{s}$ s'exprime par $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s}.\mathrm{d}s$ (fig. 3.3). Le flux d'énergie radiative entrant dans un élément de volume $\mathrm{d}\Sigma\,\mathrm{d}s$ centré au point M par unité de temps et dans un angle solide dω est

$$F_1 = N(M, \overrightarrow{s})\,\mathrm{d}\Sigma\mathrm{d}\omega \tag{3.9}$$

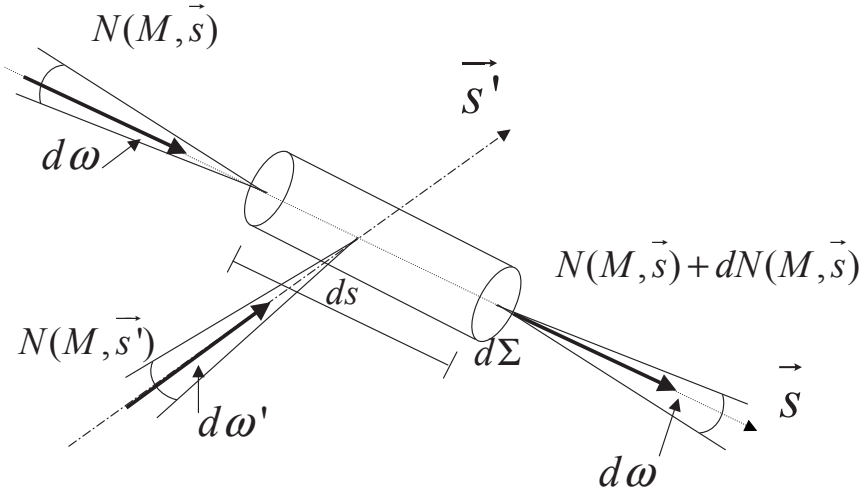


FIG. 3.3 – Etablissement de l'ETR

Le flux d'énergie radiative quittant cet élément de volume est

$$F_2 = \left(N\left(M, \overrightarrow{s}\right) + \frac{\mathrm{d}N\left(M, \overrightarrow{s}\right)}{\mathrm{d}s}.\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\Sigma \mathrm{d}\omega. \tag{3.10}$$

Qu'est ce qui est responsable de la différence de flux $F_2 - F_1$? C'est d'abord le flux d'énergie radiative perdue sur la longueur ds par extinction (absorption+diffusion). Selon la loi d'extinction,

$$F_3 = -\alpha(M) N\left(M, \overrightarrow{s}\right) \mathrm{d}\Sigma \mathrm{d}\omega \mathrm{d}s. \tag{3.11}$$

Parallèlement, de l'énergie radiative est gagnée sur la longueur ds par deux processus : la diffusion du rayonnement venant d'autres directions $\overrightarrow{s'}$ vers la direction $\overrightarrow{s}$, et l'émission thermique du milieu lui-même. Ces deux contributions sont proportionnelles à dω, et au volume dΣ ds. Ce gain d'énergie est

$$F_4 = \alpha(M) J\left(M, \vec{\Omega}\right) \mathrm{d}\Sigma \mathrm{d}\omega \mathrm{d}s. \tag{3.12}$$

La conservation de l'énergie conduit à :

$$F_2 - F_1 = F_4 + F_3 \tag{3.13}$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}N\left(M, \overrightarrow{s}\right)}{\mathrm{d}s} = -\alpha(M) \left(N\left(M, \overrightarrow{s}\right) - J\left(M, \vec{\Omega}\right) \right) \tag{3.14}$$

3.2.2 Equation générale du transfert radiatif

En reprenant ici les notations de [Stephens 1988a], l'Equation générale du transfert radiatif pour une fonction radiance monochromatique et non polarisée s'exprime comme :

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla N\left(\vec{r}, \vec{\Omega}\right) = -\alpha\left(\vec{r}\right) \left[N\left(\vec{r}, \vec{\Omega}\right) - J\left(\vec{r}, \vec{\Omega}\right) \right] \tag{3.15}$$

avec

$$J\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)=\frac{\widetilde{\omega}_o(\vec{r})}{4\pi}\int\limits_{4\pi}P\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)N\left(\vec{r},\vec{\Omega}'\right)d\omega_{\vec{\Omega}'}+\left[1-\widetilde{\omega}_o\left(\vec{r}\right)\right]B\left(\vec{r}\right) \tag{3.16}$$

et

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla=\eta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\phi\frac{\partial}{\partial y}+\mu\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.17}$$

$N\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ est la fonction radiance et $J\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ la fonction source le long d'un vecteur unité directionnel $\vec{\Omega}$ au point $\vec{r}$. $\alpha\left(\vec{r}\right)$ désigne le coefficient d'extinction au point $\vec{r}$, qu'on suppose indépendant de la direction du rayonnement incident.

L'équation 3.15 est l'équation générale du transfert radiatif 3D pour un milieu turbide, c'est à dire un milieu où les particules interceptant le rayonnement (gouttelettes d'eau dans le cas de nuages, (gaz de) feuilles dans le cas de couvert végétal) sont suffisamment éloignées les unes des autres pour considérer que les propriétés optiques d'une particule sont inchangées quel que soit le voisinage de cette particule (pas de phénomènes d'ombrage). Cette équation avec ses conditions aux limites définit complètement le champ de radiance dans le milieu. Il est important de remarquer que l'équation 3.15 est valable pour un volume suffisamment élémentaire dans lequel la diffusion est simple.

3.2.3 Conditions aux limites

Un milieu qui a une extension infinie en x et y requiert la donnée des conditions aux limites au sommet et à la base de ce milieu. Si on s'intéresse au rayonnement visible, l'éclairement solaire donne la condition au sommet du nuage. On connaît donc l'énergie entrant dans le milieu par le haut.

La condition limite basse en revanche n'est pas la donnée d'une énergie entrante. Ce qui est donné, c'est la propriété de réflectivité de la surface sous-jacente du milieu : la base du milieu est atteinte par un rayonnement incident, et une partie de ce rayonnement est réfléchie donc rediffusée dans d'autres directions entrant dans le nuage. On ne connaîtra l'énergie entrant dans le milieu par le bas que lorqu'on connaîtra le rayonnement incident sur la surface sous-jacente du milieu.

La propriété de réflexion de la surface terrestre sous-jacente sera définie par la donnée de sa fonction de distribution de la réflectance bidirectionnelle (BRDF), ou le rapport de la radiance réfléchie $dI_r^+(\vec{\Omega})$ dans un angle solide $d\omega$ et autour d'une direction particulière $\vec{\Omega}$ sur l'énergie du rayonnement incident $I^-(\vec{\Omega}')$ compris dans un angle solide $d\omega'$et de direction $\vec{\Omega}'$:

$$R(-\vec{\Omega}',\vec{\Omega})=\frac{dI_r^+(\vec{\Omega})}{I^-(\vec{\Omega}')\cos\theta^{'}d\omega'} \tag{3.18}$$

L'intensité totale réfléchie dans la direction $\vec{\Omega}$ est alors :

$$I_r^+(\vec{\Omega})=\int dI_r^+(\vec{\Omega})=\int\limits_{-}\cos\theta' R(-\vec{\Omega}',\vec{\Omega})I^-(\vec{\Omega}')d\omega' \tag{3.19}$$

Le symbole $\int\limits_{-}$ signifie que l'on fait l'intégration de toutes les radiances descendantes.

Les propriétés de réflexion extrêmes qu'on peut rencontrer sont les réflectivités purement diffuse (lambertienne) et purement spéculaire, la première étant rencontrée pour des irrégularités microscopiques de surface (exemple de la neige ; dans ce cas : $R(-\vec{\Omega}',\vec{\Omega})=$ constante), la seconde pour des surfaces parfaitement lisses (surface océanique au repos).

3.2.4 Champ direct et diffus

La fonction radiance se décompose en une composante solaire "quasi-parallèle" $N_{dir}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ et une composante diffuse $N_{dif}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$[Goody 1964] :

$$N\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) = N_{dir}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) + N_{dif}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) \tag{3.20}$$

La composante solaire "quasi-parallèle" est contenue dans un angle solide réduit, angle sous lequel on voit le Soleil depuis un point de la Terre (32 minutes d'arc soit 6.8×10^{-5} stéradian). On considère que ce rayonnement est collimaté, c'est à dire que sans interaction, il n'y a pas décroissance du flux radiatif long de sa propagation, la section droite du cône contenant le rayonnement étant considérée constante. Ainsi :

$$N_{dir}\left(\vec{r},\vec{\Omega}_{\odot}\right) = F_s(\vec{r})\delta(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}_{\odot}) \tag{3.21}$$

F_s est le flux porté par un faisceau solaire traversant un plan perpendiculaire à la direction solaire $\vec{\Omega}_{\odot}$. $\delta(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}_{\odot})$ =$\delta(\phi-\phi_{\odot})\delta(\cos\theta-\cos\theta_{\odot})$ est une fonction Dirac 2D. Suivant la définition mathématique de la fonction Dirac, la radiance est nulle sauf dans la direction $\vec{\Omega}_{\odot}$ où elle est infinie. L'équation 3.20 a du sens seulement lorsqu'on l'intègre sur un certain angle solide.

En combinant les équations 3.15 et 3.20, on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}\cdot\nabla N_{dir}\left(\vec{r},\vec{\Omega}_{\odot}\right) + \vec{\Omega}\cdot\nabla N_{dif}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) = &-\alpha\left(\vec{r}\right)\left[N_{dir}\left(\vec{r},\vec{\Omega}_{\odot}\right) + N_{dif}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)\right] \\ &+ \frac{\widetilde{\omega}_o(\vec{r})\alpha\left(\vec{r}\right)}{4\pi}\int\limits_{4\pi} P\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)\left[N_{dir}\left(\vec{r},\vec{\Omega}_{\odot}\right) + N_{dif}\left(\vec{r},\vec{\Omega}'\right)\right] d\omega\left(\vec{\Omega}'\right)\end{aligned} \tag{3.22}$$

En intégrant les deux côtés de l'équation 3.22 sur un angle solide $\delta\omega_{\odot}$ autour de la direction $\vec{\Omega}_{\odot}$ et en faisant tendre $\delta\omega_{\odot}$ vers 0, on obtient :

$$\lim_{\delta\omega_{\odot}\to 0}\left[\int\limits_{\delta\omega_{\odot}} \vec{\Omega}\cdot\nabla(N_{dir}\left(\vec{r},\vec{\Omega}_{\odot}\right)d\omega)\right] = -\lim_{\delta\omega_{\odot}\to 0}\left[\int\limits_{\delta\omega_{\odot}} \alpha\left(\vec{r}\right)N_{dir}\left(\vec{r},\vec{\Omega}_{\odot}\right)\right]$$

Puisque $\lim_{d\omega_{\odot}\to 0}\left[N_{dir}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)d\omega_{\odot}\right] = F_s(\vec{r}) \neq 0$ on obtient l'expression du transfert radiatif pour le faisceau solaire quasi-parallèle :

$$\vec{\Omega}_{\odot}\cdot\nabla F_s(\vec{r}) = -\alpha\left(\vec{r}\right)F_s(\vec{r}) \tag{3.23}$$

et pour le champ de rayonnement diffus :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}\cdot\nabla N_{dif} = \quad &-\alpha\left(\vec{r}\right)N_{dif}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) + \frac{\widetilde{\omega}_o(\vec{r})\alpha\left(\vec{r}\right)}{4\pi}\int\limits_{4\pi} P\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)N_{dif}\left(\vec{r},\vec{\Omega}'\right)d\omega\left(\vec{\Omega}'\right) \\ &+\frac{\widetilde{\omega}_o(\vec{r})\alpha\left(\vec{r}\right)}{4\pi}P\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_{\odot}\right)F_s(\vec{r})\end{aligned} \tag{3.24}$$

où le dernier terme du membre de droite est la fonction source due à la diffusion du rayonnement solaire collimaté. Pour un milieu homogène, la solution de l'équation 3.23 est triviale (simplement la loi de Beer) et peut être incorporée à l'équation 3.24. Dans le cas d'un milieu hétérogène, l'équation 3.23 doit être résolue. La séparation du flux solaire collimaté et du flux diffus permet d'utiliser des schémas de quadrature pour calculer les sources diffuses $\int\limits_{4\pi} P\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)N_{dif}\left(\vec{r},\vec{\Omega}'\right)d\omega\left(\vec{\Omega}'\right)$.

3.3 Méthode des ordres successifs de diffusion

Exprimons maintenant le champ de rayonnement diffus comme la somme de diffusions successives :

$$N_{dif}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}N_{dif}^{k}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) \tag{3.25}$$

où $N_{dif}^{k}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ désigne la contribution au champ de radiances diffuses du rayonnement diffusé k fois. Par la suite, nous abandonnons le sous-indice $_{dif}$. Malgré la lente convergence qu'elle implique (on verra par la suite (chapitre 5) que trente à quarante ordres de diffusion sont nécessaires pour faire sortir la plupart des photons d'un nuage typique), la méthode des ordres successifs de diffusion est une méthode possible pour résoudre l'ETR et elle est appropriée pour analyser finement les processus de transfert radiatif [Lenoble 1985]. Le but que nous nous sommes fixé pour cette étude est d'analyser le plus finement et le plus physiquement possible les effets multiéchelles des hétérogénéités nuageuses sur les processus de transfert radiatif, à travers une analyse multirésolution. Dans cette nouvelle vision des choses, il est intéressant de combiner multirésolution et ordres successifs de diffusion. On sait en outre que l'augmentation de l'ordre de diffusion propose des sources de plus en plus faibles et homogènes et que ceci pourrait être exploité numériquement pour accélérer la convergence.

A partir de l'équation 3.24, on obtient l'ETR pour le terme d'ordre de diffusion k :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}\cdot\nabla N_{dif}^{k}= \quad & -\alpha\left(\vec{r}\right)N_{dif}^{k}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)+\left(1-\delta_{k,1}\right)\frac{\widetilde{\omega}_{o}(\vec{r})\alpha(\vec{r})}{4\pi}\int_{4\pi}P\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)N_{dif}^{k-1}\left(\vec{r},\vec{\Omega}'\right)d\omega\left(\vec{\Omega}'\right)\\ & +\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_{o}(\vec{r})\,\alpha\left(\vec{r}\right)}{4\pi}P\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_{\odot}\right)F_{s}(\vec{r})\end{aligned} \tag{3.26}$$

où $\delta_{k,1}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{m,0}=\left\{\begin{array}{l}1 \text{ si m=0}\\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right.$). Les deux expressions de l'ETR (3.15+3.16) et 3.26 sont formellement identiques, sauf que la fonction source dans l'équation 3.26 est en principe connue *explicitement* car calculée au cours du calcul du champ de radiance d'ordre $(k-1)$, alors que la fonction source dans l'équation 3.15 doit être estimée *implicitement*. Le transfert radiatif peut donc être vu comme la création successive de sources de diffusion qui s'éteignent.

Il est remarquable que la condition initiale concernant la direction solaire $\vec{\Omega}_{\odot}$ (condition déterminante pour les processus radiatifs conduisant au champ de rayonnement diffus car elle conditionne le transport des photons, les libres parcours moyens dans le nuage, les phénomènes d'ombrage, etc.), ne soit pas explicitement dans l'équation 3.26 sauf pour la fonction source d'ordre 1 $\frac{\widetilde{\omega}_{o}(\vec{r})\,\alpha\left(\vec{r}\right)}{4\pi}P\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_{\odot}\right)F_{s}(\vec{r})$. L'effet de l'angle solaire zénithal sur le champ diffus apparaît dans la répartition des sources dans le nuage.

3.4 Transformation azimutale de l'ETR

Suivant [Stephens 1986] et [Stephens 1988a], on transforme maintenant l'ETR en décomposant les fonctions en séries de Fourier par rapport à la coordonnée azimutale, méthode classique en transfert radiatif et à la base de l'approximation à deux flux. Cela permet de manipuler les coefficients de Fourier azimutaux du champ de radiances, dépendant de moins de variables.

3.4.1 Décomposition azimutale en Fourier

La fonction radiance est décomposée azimutalement en une série de Fourier ainsi que la fonction de phase. Il en sera de même pour les conditions aux limites. Cette décomposition est classiquement utilisée pour résoudre l'ETR car elle permet l'indépendance des modes azimutaux pour des nuages homogènes horizontalement (pas de termes de dérivées horizontales) et c'est à la base de l'approximation à deux flux. Pour des nuages hétérogènes horizontalement, ce n'est plus le cas. Il n'y a donc aucun avantage particulier à utiliser cette décomposition, excepté le fait que c'est une approche traditionnelle. Une autre possibilité serait de développer les radiances et la fonction de phase en utilisant un système multirésolution sur la sphère, comme les ondelettes sphériques [Schröder and Sweldens 1995]. [Schröder and Hanrahan 1994] appliquent cette méthode pour représenter les fonctions de réflectance bidirectionnelle dans la méthode des radiosités. Ce peut être une direction de travaux futurs.

3.4.1.1 Décomposition des radiances

Les radiances sont décomposées en $2\left(N_F+1\right)$ fonctions $N_{c/s}^m \quad (0 \leqslant m \leqslant N_F)$:

$$N\left(\vec{r},\mu,\phi\right)=\sum_{m=0}^{N_F} N_c^m\left(\vec{r},\mu\right)\cos m\phi+\sum_{m=1}^{N_F} N_s^m\left(\vec{r},\mu\right)\sin m\phi \tag{3.27}$$

avec :

$$\left.\begin{array}{c} N_c^m(\overrightarrow{r},\mu) \\ N_s^m(\overrightarrow{r},\mu) \end{array}\right. = \left.\begin{array}{c} \dfrac{1}{\pi\left(1+\delta_{m,0}\right)} \\ \dfrac{1}{\pi} \end{array}\right\} \int_{\phi_\odot}^{\phi_\odot+2\pi} N(\overrightarrow{r},\mu,\phi) \left.\begin{array}{c} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{array}\right. d\phi \tag{3.28}$$

avec $\delta_{m,0}$ est le symbole de Kronecker.

En introduisant la fonction radiance diffusées à l'ordre k $N^k\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$, on obtient les coefficients de Fourier azimutaux $N_{c/s}^{k,m}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$.

3.4.1.2 Décomposition des fonctions du type $R(\vec{r},\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}')$

Puisque l'angle de diffusion Θ peut être exprimé par :

$$\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}'=\cos\Theta=\mu\mu'+\left(1-\mu^2\right)^{1/2}\left(1-\mu'^2\right)^{1/2}\cos\left(\phi-\phi'\right), \tag{3.29}$$

on peut écrire :

$$R(\vec{r},\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}')=R(\vec{r},\mu,\mu',\phi-\phi'). \tag{3.30}$$

Les fonctions de la forme (3.30) sont des fonctions paires en ϕ sur $[\phi',\phi'+2\pi]$ donc $R_s^m\left(\vec{r},\mu,\mu'\right)$ est nul $\forall m$:

$$R(\vec{r},\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}')=\sum_{m=0}^{M} R_c^m\left(\vec{r},\mu,\mu'\right)\cos\left[m\left(\phi-\phi'\right)\right] \tag{3.31}$$

avec $R_c^m\left(\vec{r},\mu,\mu'\right)=\frac{1}{\pi\left(1+\delta_{m,0}\right)}\int_0^{2\pi} R\left(\vec{r},\mu,\mu',\phi''\right)\cos\left(m\phi''\right)d\phi''$.

La **fonction de phase** et la **réflectance de certaines surfaces** font partie de cette famille de fonctions.

En utilisant ce développement, on obtient la fonction source de premier ordre (diffusion du flux collimaté) :

$$\frac{\widetilde{\omega}_o(\vec{r})\,\alpha\,(\vec{r})}{4\pi}P\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}_\odot\right)F_s(\vec{r})$$
$$=\frac{\widetilde{\omega}_o(\vec{r})\,\alpha\,(\vec{r})}{4\pi}\sum_{m=0}^{M}P^m\left(\vec{r},\mu,\mu_\odot\right)\left(\cos m\phi_\odot\cos m\phi+\sin m\phi_\odot\sin m\phi\right)F_s(\vec{r}) \tag{3.32}$$

et d'ordre $(k-1)$:

$$\frac{\widetilde{\omega}_o(\vec{r})\,\alpha\,(\vec{r})}{4\pi}\int_{4\pi}P\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)N^{k-1}\left(\vec{r},\vec{\Omega}'\right)d\omega_{\vec{\Omega}'}$$
$$=\frac{\widetilde{\omega}_o(\vec{r})\,\alpha\,(\vec{r})}{4}\sum_{m=0}^{N_F}\left\{\int_{-1}^{1}P^m\left(\vec{r},\mu,\mu'\right)\left(1+\delta_{0,m}\right)N_c^{k-1,m}\left(\vec{r},\mu'\right)\cos\left(m\phi\right)d\mu'\right\} \tag{3.33}$$
$$+\frac{\widetilde{\omega}_o(\vec{r})\,\alpha\,(\vec{r})}{4}\sum_{m=0}^{N_F}\left\{\int_{-1}^{1}P^m\left(\vec{r},\mu,\mu'\right)N_s^{k-1,m}\left(\vec{r},\mu'\right)\sin\left(m\phi\right)d\mu'\right\}$$

3.4.2 Transformation azimutale de l'Equation du transfert radiatif pour les différents ordres de diffusion

L'ETR est désormais transformée en un système de $2\left(N_F+1\right)$ équations couplées. L'opérateur gradient peut être décomposé en un gradient horizontal et un gradient vertical. Ainsi, l'ETR pour le flux collimaté devient :

$$\mu_\odot\frac{\partial}{\partial z}F_s(\vec{r})=-\alpha\left(\vec{r}\right)F_s(\vec{r})-\left(\eta_\odot\cos\phi_\odot\frac{\partial}{\partial x}+\eta_\odot\sin\phi_\odot\frac{\partial}{\partial y}\right)F_s(\vec{r}) \tag{3.34}$$

En substituant les décompositions azimutales en séries de Fourier des radiances aux différents ordres de diffusion et des fonctions sources, on obtient de nouvelles équations dont les inconnues sont les coefficients de Fourier azimutaux du champ de radiances.

$$\mu\frac{\partial}{\partial z}N_c^{k,m}\left(\vec{r},\mu\right)=-\alpha\left(\vec{r}\right)N_c^{k,m}\left(\vec{r},\mu\right)-\frac{\eta}{2\left(1+\delta_{m,0}\right)}\sum_{m'=0}^{N_F}D\left(m,m'\right)\frac{\partial}{\partial x}N_c^{k,m'}\left(\vec{r},\mu\right)$$
$$+\left(1-\delta_{k,1}\right)\left(1+\delta_{m,0}\right)\frac{\alpha\left(\vec{r}\right)\widetilde{\omega}_o\left(\vec{r}\right)}{4}\int_{-1}^{1}P^m\left(\vec{r},\mu,\mu'\right)N_c^{k-1,m}\left(\vec{r},\mu'\right)d\mu' \tag{3.35}$$
$$+\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_o\left(\vec{r}\right)\alpha\left(\vec{r}\right)}{4\pi}P^m\left(\vec{r},\mu,\mu_\odot\right)\cos m\phi_\odot F_s(\vec{r})$$
$$\mu\frac{\partial}{\partial z}N_s^{k,m}\left(\vec{r},\mu\right)=-\alpha\left(\vec{r}\right)N_s^{k,m}\left(\vec{r},\mu\right)-\frac{\eta}{2}\sum_{m'=0}^{N_F}G\left(m,m'\right)\frac{\partial}{\partial x}N_s^{k,m'}\left(\vec{r},\mu\right)$$
$$+\left(1-\delta_{k,1}\right)\frac{\alpha\left(\vec{r}\right)\widetilde{\omega}_o\left(\vec{r}\right)}{4}\int_{-1}^{1}P^m\left(\vec{r},\mu,\mu'\right)N_s^{k-1,m}\left(\vec{r},\mu'\right)d\mu \tag{3.36}$$
$$+\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_o(\vec{r})\,\alpha\,(\vec{r})}{4\pi}P^m\left(\vec{r},\mu,\mu_\odot\right)\sin m\phi_\odot\;F_s(\vec{r})$$

avec $\begin{cases} D\left(m,m'\right)=\delta_{m-m'+1,0}+\delta_{m+m'-1,0}+\delta_{m-m'-1,0} \\ G\left(m,m'\right)=\delta_{m'-m+1,0}+\delta_{m'-m-1,0}-\delta_{m+m'-1,0} \end{cases}$ pour $0\leqslant m,m'\leqslant N_F$. On retrouve la remarque faite dans l'introduction du paragraphe 3.4.1 : la présence des composants $D\left(m,m'\right)$ et $G\left(m,m'\right)$ empêchent la séparation des modes azimutaux [Stephens 1988a].

On peut réécrire l'équation sous forme matricielle :

$$\mu\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{N}^{k}\left(\vec{r},\mu\right)=-\alpha\left(\vec{r}\right)\widetilde{N}^{k}\left(\vec{r},\mu\right)-\eta\tilde{Q}\frac{\partial\widetilde{N}^{k}\left(\vec{r},\mu\right)}{\partial x} \tag{3.37}$$
$$+\left(1-\delta_{k,1}\right)\frac{\omega_0(\vec{r})\,\alpha\left(\vec{r}\right)}{4}\int_{-1}^{1}\tilde{P}\left(\vec{r},\mu,\mu'\right)\widetilde{N}^{k-1}\left(\vec{r},\mu'\right)d\mu'+\delta_{k,1}\frac{\omega_0(\vec{r})\,\alpha\left(\vec{r}\right)}{4\pi}\tilde{P}^{dir}f_{\nu}\left(\vec{r}\right),$$

avec :

- $\widetilde{Q}=\begin{pmatrix}\widetilde{D} & 0\\ 0 & \widetilde{G}\end{pmatrix}$, $\widetilde{P}=\begin{pmatrix}\widetilde{P_c} & 0\\ 0 & \widetilde{P_s}\end{pmatrix}$, $\tilde{P}^{dir}=\begin{pmatrix}\widetilde{P_c}^{dir}\\ \widetilde{P_s}^{dir}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P^{m}\left(\vec{r},\mu,\mu_{\odot}\right)\cos m\phi_{\odot}\\ P^{m}\left(\vec{r},\mu,\mu_{\odot}\right)\sin m\phi_{\odot}\end{pmatrix}$,
- $\widetilde{N}^{k}\left(\vec{r},\mu\right)=\begin{pmatrix}\widetilde{N}_c^{k}\\ \widetilde{N}_s^{k}\end{pmatrix}$

où les vecteurs colonnes des radiances sont définis par $\widetilde{N}_c^{k}=\begin{pmatrix}N_c^{k,0}\\ N_c^{k,1}\\ ...\\ N_c^{k,N_F}\end{pmatrix}$, $\widetilde{N}_s^{k}=\begin{pmatrix}N_s^{k,0}\\ N_s^{k,1}\\ ...\\ N_s^{k,N_F}\end{pmatrix}$, et les matrices de couplage par :

- $\widetilde{D}=\left[\frac{1}{2(1+\delta_{m,0})}D\left(m,m'\right);\ \forall m,m'\right]$,
- $\widetilde{G}=\left[\frac{1}{2}G\left(m,m'\right);\quad\forall m,m'\right]$,
- $\widetilde{P_c}=\left[\delta_{m-m',0}\left(1+\delta_{m,0}\right)P^{m}\left(\vec{r},\mu,\mu'\right);\quad\forall m,m'\right]$,
- $\widetilde{P_s}=\left[\delta_{m-m',0}P^{m}\left(\vec{r},\mu,\mu'\right);\quad\forall m,m'\right]$,
- $\widetilde{P}_c^{dir}=\left[P^{m}\left(\vec{r},\mu,\mu_{\odot}\right)\cos m\phi_{\odot};\quad\forall m\right]$,
- $\widetilde{P}_s^{dir}=\left[P^{m}\left(\vec{r},\mu,\mu_{\odot}\right)\sin m\phi_{\odot};\quad\forall m\right]$.

On préfère parfois réécrire l'équation 3.37 par une paire d'équations intégro-différentielles couplées en séparant les radiances montantes et descendantes : $\begin{cases}\widetilde{N}^{k^+}=\widetilde{N}^{k}\left(\vec{r},\mu^{+}\geq 0\right)\\ \widetilde{N}^{k^-}=\widetilde{N}^{k}\left(\vec{r},\mu^{-}\leq 0\right)\end{cases}$

$$\mu^{+}\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{N}^{k^+}$$
$$=-\alpha\left(\vec{r}\right)\widetilde{N}^{k^+}-\eta\left[\widetilde{Q}\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{N}^{k^+}\right]+\left(1-\delta_{k,1}\right)\frac{\widetilde{\omega}_o\left(\vec{r}\right)\alpha\left(\vec{r}\right)}{4}\int_{0}^{1}\widetilde{P}\left(\vec{r},\mu^{+},\mu'^{+}\right)\widetilde{N}^{(k-1)^+}d\mu'^{+} \tag{3.38}$$
$$+\left(1-\delta_{k,1}\right)\frac{\widetilde{\omega}_o\left(\vec{r}\right)\alpha\left(\vec{r}\right)}{4}\int_{-1}^{0}\widetilde{P}\left(\vec{r},\mu^{+},\mu''^{-}\right)\widetilde{N}^{(k-1)^-}d\mu''^{-}+\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_o\left(\vec{r}\right)\alpha\left(\vec{r}\right)}{4\pi}\widetilde{P}^{dir}\left(\vec{r},\mu^{+},\mu_{\odot}^{-}\right)F_s(\vec{r})$$

$$\mu^- \frac{\partial}{\partial z}\widetilde{N}^{k^-}$$
$$= -\alpha(\vec{r})\,\widetilde{N}^{k^-} - \eta\left[\widetilde{Q}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{N}^{k^-}\right] + (1-\delta_{k,1})\,\frac{\widetilde{\omega}_o(\vec{r})\,\alpha(\vec{r})}{4}\int_0^1 \widetilde{P}\left(\vec{r},\mu^-,\mu'^+\right)\widetilde{N}^{(k-1)^+}\,d\mu'^+ \quad (3.39)$$
$$+ (1-\delta_{k,1})\,\frac{\widetilde{\omega}_o(\vec{r})\,\alpha(\vec{r})}{4}\int_{-1}^0 \widetilde{P}\left(\vec{r},\mu^-,\mu''^-\right)\widetilde{N}^{(k-1)^-}\,d\mu''^- + \delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_o\omega(\vec{r})\,\alpha(\vec{r})}{4\pi}\widetilde{P}^{dir}\left(\vec{r},\mu^-,\mu_\odot^-\right)F_s(\vec{r})$$

Cette écriture conduit un peu plus directement à l'écriture programmée du transfert radiatif.

3.4.3 Conditions aux limites

Notons a et b, les altitudes de sommet et base du milieu. Dans notre étude, on considère que les conditions aux limites au sommet du nuage sont données pour le flux collimaté et le champ diffus respectivement par

$$F_s(\vec{r})\left(x,y,a,\vec{\Omega}_\odot\right) = A_{direct}(x,y) \text{ et } \tilde{N}^{k,m,-}\left(x,y,a,\mu^-\right) = A_{dif}^{k,m}\left(x,y,\mu^-\right). \quad (3.40)$$

Dans les exemples numériques qui suivent, on ne considère que le rayonnement solaire au sommet du nuage et pas de rayonnement diffus entrant. La condition à la limite basse du nuage est donnée par la BRDF R. La radiance d'ordre k diffusée vers le haut à partir de la surface sous-jacente, qui constitue la condition aux limites pour l'équation 3.38 est donnée par :

$$N^{k,+}(x,y,b,\mu,\phi) = \int_{-1}^0\int_0^{2\pi} R\left(x,y,b,\mu,\mu',\phi-\phi'\right)N^{k,-}\left(x,y,b,\mu',\phi'\right)d\phi' d\mu' \quad (3.41)$$

Puisque nous avons projeté azimutalement l'ETR sur la base de Fourier, il faut développer de même les conditions aux limites. On obtient :

$$N^{k+}\left(x,y,b,\mu^+,\phi\right) =$$
$$\sum_{m=0}^{N_F}\pi(1+\delta_{m,0})\left[\int_{-1}^0 R^m\left(x,y,b,\mu^+,\mu'\right)N_c^{k,m,-}\left(x,y,b,\mu'\right)d\mu'\right]\cos m\phi \quad (3.42)$$
$$+\sum_{m=0}^{N_F}\pi\left[\int_{-1}^0 R^m\left(x,y,b,\mu^+,\mu'\right)N_s^{k,m,-}\left(x,y,b,\mu'\right)d\mu'\right]\sin m\phi$$

soit finalement

$$\widetilde{N}^{k,+}\left(x,y,b,\mu^+\right) = \pi\left(1+\delta_{0,m}\delta_{c,(c/s)}\right)\int_{-1}^0 \widetilde{R}\left(x,y,b,\mu^+,\mu'^-\right)\widetilde{N}^{k,-}\left(x,y,b,\mu'^-\right)d\mu'^- \quad (3.43)$$

pour $m \geq 0$, $0 < \mu^+ \leq 1$, $0 > \mu^+ \geq 1$, $\delta_{c,(c/s)}$ est le symbole de Kronecker égal à 1 pour le terme cosinus et 0 pour le sinus.

La conditon aux limites pour les radiance montantes d'ordre de diffusion 1 est :

$$N_{c/s}^{1,\,m+}\left(x,y,b,\mu^+\right) = R^m\left(x,y,b,\mu^+,\mu_\odot\right)F_s(x,y,b)\begin{cases}\cos m\phi_\odot\\ \sin m\phi_\odot\end{cases} \quad (3.44)$$

3.5 Décomposition en ondelettes de l'ETR

Les décompositions précédentes de l'ETR conduisent à manipuler les coefficients de Fourier azimutaux des radiances aux différents ordres de diffusion. Avant de procéder à la décomposition horizontale en ondelettes, faisons quelques hypothèses sur l'hétérogénéité du milieu. Afin de simplifier davantage l'étude, considérons que seuls les coefficients d'absorption et de diffusion sont hétérogènes. Suivant [Stephens 1988a], on justifie ces hypothèses par le fait que la variabilité des propriétés optiques a et s est beaucoup plus grande que celle de la fonction de phase en se basant sur les observations de [Stephens and Platt 1987]. De plus, on considère que l'albédo de diffusion simple est homogène : $\frac{s}{\alpha}$ =constante. Cela revient à considérer que la taille des gouttes est constante dans le nuage. Seule la variabilité de la concentration en gouttes est prise en compte. Ainsi : $\tilde{P}(\vec{r},\mu,\mu') = \tilde{P}(\mu,\mu')$, $\widetilde{\omega}_o(x,z) = \widetilde{\omega}_o$, et seul le champ de coefficient d'extinction, appelé par la suite champ d'extinction est hétérogène.

Enfin, les champs nuageux sont considérés uniformes selon la direction $\overrightarrow{y}$, ceci afin de réaliser une transformation 1D en ondelettes et non 2D , et périodiques suivant $\overrightarrow{x}$, ce qui a pour conséquence la périodisation de l'AMR.

L'équation 3.37 devient :

$$\mu\frac{\partial}{\partial z}\overset{(1)}{\widetilde{N}^k}(x,z,\mu) = -\alpha(x,z)\overset{(2)}{\widetilde{N}^k}(x,z,\mu) - \eta\tilde{Q}\frac{\partial\overset{(3)}{\widetilde{N}^k}(x,z,\mu)}{\partial x} \tag{3.45}$$
$$+ (1-\delta_{k,1})\frac{\widetilde{\omega}_o\alpha(x,z)}{4}\int_{-1}^{1}\tilde{P}(\mu,\mu')\,\widetilde{N}^{k-1}(x,z,\mu')\,d\mu' + \delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_o\alpha(x,z)}{4\pi}\overset{(5)}{\tilde{P}^{dir}}F_s(\vec{r})$$

Cette équation est résoluble par une méthode de Galerkin-ondelette faisant apparaître des **coefficients de connexion** (voir chapitre 2).

3.5.1 Méthode de Galerkin-ondelette appliquée à l'ETR

La transformée multirésolution de l'équation 3.45 consiste à décomposer les deux membres de l'équation sur une base multirésolution de type ondelette. Il s'agit de manipuler les coefficients d'échelle et d'ondelettes de chacuns des termes A de l'équation qui dépendent de la coordonnée x. On ne détaille ici que l'ETR pour le champ diffus. L'ETR pour le flux collimaté viendra alors naturellement. Suivant l'équation 2.29 :

$$A(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1}\langle A,\varphi_{J,k}\rangle\,\varphi_{J,k}(x) + \sum_{j=J}^{L-12^j-1}\sum_{k=0}\langle A,\psi_{j,k}\rangle\,\psi_{j,k}(x) \tag{3.46}$$

avec $\langle A,\varphi_{J,k}\rangle$ et $\langle A,\psi_{j,k}\rangle$ les coefficients respectivement d'échelle et d'ondelettes de la fonction A, et $\varphi_{J,k}$ la fonction d'échelle à l'échelle 2^{-J} d'indice de position k, $\psi_{j,k}$ l'ondelette mise à l'échelle 2^{-j}, d'indice de position k.

Comme au chapitre 2 dans la partie 2.2.2.1.1, on note $\begin{pmatrix}\overrightarrow{\varphi_J}\\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}}\end{pmatrix}$ la matrice des vecteurs de la base multirésolution $L^p(\mathbb{R})$. Pour alléger les équations à venir, adoptons les notations suivantes : soit Ψ_i un des vecteurs de cette base ; quand Ψ_i est une fonction d'échelle, $\sum_i$ signifie $\sum_{k=0}^{2^J-1}$; quand Ψ_i est une ondelette, $\sum_i$ signifie $\sum_{j=J}^{L-12^j-1}\sum_{k=0}$. On peut alors réécrire l'équation 3.46 :

$$A(x) = \sum_1\langle A,\varphi_1\rangle\,\varphi_1(x) + \sum_1\langle A,\psi_1\rangle\,\psi_1(x) \tag{3.47}$$

Quand la fonction A est le produit de deux fonctions ou le résultat d'une opération de dérivation, nous avons vu au chapitre 2 qu'apparaissent des **coefficients de connexion**. Pour le produit de deux fonctions, ils permettent de relier les coefficients de chacune des fonctions aux coefficients de la fonction produit. Le tenseur dit d'interaction qui regroupent ces coefficients est d'ordre trois. De même, les coefficients de connection de de différentiation permettent de relier les coefficients d'une fonction et ceux de sa dérivée. La matrice de coefficients de différentiation est d'ordre deux. Si $\tilde{P}(\vec{r},\mu,\mu')$ ou (resp. et) $\widetilde{\omega}_o(x,z)$ n'étaient pas indépendants de la position horizontale comme il est supposé ici, il apparaîtrait des coefficients de connexion d'ordre 4 (resp. 5).

Projetons chacun des termes de l'équation 3.45 dans un espace multirésolution :

Terme 1 :

$$\left\langle \mu\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{N}^k,\Psi_3\right\rangle(z,\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mu\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{N}^k(x,z,\mu)\,\overline{\Psi}_3(x)dx=\mu\frac{\delta}{\delta z}\left\langle \widetilde{N}^k,\Psi_3\right\rangle(z,\mu) \tag{3.48}$$

Terme 2 :

Apparaissent les coefficients de connexion d'interaction regroupés dans le tenseur d'interaction :

$$T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3}=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_1(x)\Psi_2(x)\overline{\Psi_3}(x)dx \text{ avec } \Psi_i \text{ soit une fonction d'échelle soit une ondelette.} \tag{3.49}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\left\langle \alpha\widetilde{N}^k,\Psi_3\right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(x,z)\,\widetilde{N}^k(x,z,\mu)\,\overline{\Psi}_3(x)dx\\ &=\sum_1\sum_2\langle\alpha,\varphi_1\rangle\left\langle\widetilde{N}^k,\varphi_2\right\rangle T_{\varphi_1,\varphi_2,\Psi_3}+\sum_1\sum_2\langle\alpha,\varphi_1\rangle\left\langle\widetilde{N}^k,\psi_2\right\rangle T_{\varphi_1,\psi_2,\Psi_3}\\ &+\sum_1\sum_2\langle\alpha,\psi_1\rangle\left\langle\widetilde{N}^k,\varphi_2\right\rangle T_{\psi_1,\varphi_2,\Psi_3}+\sum_1\sum_2\langle\alpha,\psi_1\rangle\left\langle\widetilde{N}^k,\psi_2\right\rangle T_{\psi_1,\psi_2,\Psi_3} \qquad (3.50)\\ &=\sum_{\Psi_1}\sum_{\Psi_2}\langle\alpha,\Psi_1\rangle(z)\left\langle\widetilde{N}^k,\Psi_2\right\rangle(z,\mu)\,T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} \qquad (3.51)\end{aligned}$$

Le symbole $\sum_{\Psi_i}$ signifie qu'on fait la somme sur toutes les fonctions d'échelle et ondelettes.

Terme 3 :

Apparaissent les coefficients de connexion de différentiation regroupé dans la matrice de coefficients de différentiation :

$$\langle\delta\Psi_1,\Psi_3\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\Psi_1(x)}{\partial x}\overline{\Psi_3}(x)dx \text{ avec } \Psi_i \text{ soit une fonction d'échelle soit une ondelette.} \tag{3.52}$$

Ainsi :

$$\left\langle -\eta\tilde{Q}\frac{\partial\widetilde{N}^k\left(x,z,\mu\right)}{\partial x},\Psi_3\right\rangle = -\eta\tilde{Q}\int\limits_{D_x}\frac{\partial\widetilde{N}^k\left(x,z,\mu\right)}{\partial x}\overline{\Psi}_3(x)dx$$

$$= -\eta\tilde{Q}\sum_1\left\langle\widetilde{N}^k,\varphi_1\right\rangle\left\langle\delta\varphi_1,\Psi_3\right\rangle + \sum_1\left\langle\widetilde{N}^k,\psi_1\right\rangle\left\langle\delta\psi_1,\Psi_3\right\rangle \quad (3.53)$$

$$= -\eta\tilde{Q}\sum_{\Psi_1}\left\langle\widetilde{N}^k,\Psi_1\right\rangle\left\langle\delta\Psi_1,\Psi_3\right\rangle \quad (3.54)$$

Terme 4 :
Le tenseur d'interaction apparaît également ici :

$$\left\langle\left(1-\delta_{k,1}\right)\frac{\widetilde{\omega}_o\alpha\left(x,z\right)}{4}\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}\left(\mu,\mu'\right)\widetilde{N}^{k-1}\left(x,z,\mu'\right)d\mu',\Psi_3\right\rangle$$

$$= \left(1-\delta_{k,1}\right)\frac{\widetilde{\omega}_o}{4}\int\limits_{D_x}\left(\alpha\left(x,z\right)\int\limits_{-1}^{1}\left(\tilde{P}\left(\mu,\mu'\right)\widetilde{N}^{k-1}\left(x,z,\mu'\right)d\mu'\right)\right)\overline{\Psi}_3(x)dx$$

$$= \left(1-\delta_{k,1}\right)\frac{\widetilde{\omega}_o}{4}\left[\begin{array}{l}\sum\limits_1\sum\limits_2\left\langle\alpha,\varphi_1\right\rangle T_{\varphi_1,\varphi_2,\Psi_3}\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}\left(\mu,\mu'\right)\left\langle\widetilde{N}^{k-1},\varphi_2\right\rangle d\mu' \\ +\sum\limits_1\sum\limits_2\left\langle\alpha,\varphi_1\right\rangle T_{\varphi_1,\psi_2,\Psi_3}\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}\left(\mu,\mu'\right)\left\langle\widetilde{N}^{k-1},\psi_2\right\rangle d\mu' \\ +\sum\limits_1\sum\limits_2\left\langle\alpha,\psi_1\right\rangle T_{\psi_1,\varphi_2,\Psi_3}\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}\left(\mu,\mu'\right)\left\langle\widetilde{N}^{k-1},\varphi_2\right\rangle d\mu' \\ +\sum\limits_1\sum\limits_2\left\langle\alpha,\psi_1\right\rangle T_{\psi_1,\psi_2,\Psi_3}\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}\left(\mu,\mu'\right)\left\langle\widetilde{N}^{k-1},\psi_2\right\rangle d\mu'\end{array}\right] \quad (3.55)$$

En simplifiant comme pour le deuxième terme, on obtient :

$$\left\langle\left(1-\delta_{k,1}\right)\frac{\widetilde{\omega}_o\alpha\left(x,z\right)}{4}\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}\left(\mu,\mu'\right)\widetilde{N}^{k-1}\left(x,z,\mu'\right)d\mu',\Psi_3\right\rangle$$

$$= \left(1-\delta_{k,1}\right)\frac{\widetilde{\omega}_o}{4}\sum_{\Psi_1}\sum_{\Psi_2}\left\langle\alpha,\Psi_1\right\rangle(z)T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3}\int\limits_{-1}^{1}\tilde{P}\left(\mu,\mu'\right)\left\langle\widetilde{N}^{k-1},\Psi_2\right\rangle\left(z,\mu'\right)d\mu' \quad (3.56)$$

Terme 5 :

$$\left\langle\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_o\alpha\left(x,z\right)}{4\pi}\tilde{P}^{dir}f_\nu\left(\vec{r}\right),\Psi_3\right\rangle$$

$$= \delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_o}{4\pi}\tilde{P}^{dir}\int\limits_{D_x}\alpha\left(x,z\right)f_\nu\left(x,z,\mu_\odot\right)\overline{\Psi}_3(x)dx \quad (3.57)$$

$$= \delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_o}{4\pi}\tilde{P}^{dir}\sum_{\Psi_1}\sum_{\Psi_2}\left\langle\alpha,\Psi_1\right\rangle(z)\left\langle f_\nu,\Psi_2\right\rangle\left(z,\mu_\odot\right)T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3}$$

3.5.1.1 Nouvelle formulation de l'équation du transfert radiatif

On obtient ainsi une nouvelle formulation de l'équation du transfert radiatif dont les inconnues sont cette fois les coefficients en ondelettes des coefficients de Fourier azimutaux du champ de radiance :

Pour $\Psi_3 \in \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}$:

$$
\begin{aligned}
\mu\frac{\delta}{\delta z}\left\langle \widetilde{N}^k,\Psi_3\right\rangle(z,\mu) = & \\
& -\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\varphi_1\rangle(z)\left\langle \widetilde{N}^k,\varphi_2\right\rangle(z,\mu)\,T_{\varphi_1,\varphi_2,\Psi_3} \\
& -\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\varphi_1\rangle(z)\left\langle \widetilde{N}^k,\psi_2\right\rangle(z,\mu)\,T_{\varphi_1,\psi_2,\Psi_3} \\
& -\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle(z)\left\langle \widetilde{N}^k,\varphi_2\right\rangle(z,\mu)\,T_{\psi_1,\varphi_2,\Psi_3} \\
& -\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle(z)\left\langle \widetilde{N}^k,\psi_2\right\rangle(z,\mu)\,T_{\psi_1,\psi_2,\Psi_3} \\
& -\eta\tilde{Q}\left[\sum_1\left\langle \widetilde{N}^k,\varphi_1\right\rangle\langle\delta\varphi_1,\Psi_3\rangle+\sum_1\left\langle \widetilde{N}^k,\psi_1\right\rangle\langle\delta\psi_1,\Psi_3\rangle\right] \\
& +(1-\delta_{k,1})\frac{\widetilde{\omega}_o}{4}\left[\begin{array}{l}
\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\varphi_1\rangle(z)T_{\varphi_1,\varphi_2,\Psi_3}\int_{-1}^{1}\tilde{P}(\mu,\mu')\left\langle \widetilde{N}^{k-1},\varphi_2\right\rangle(z,\mu')\,d\mu' \\
+\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\varphi_1\rangle(z)T_{\varphi_1,\psi_2,\Psi_3}\int_{-1}^{1}\tilde{P}(\mu,\mu')\left\langle \widetilde{N}^{k-1},\psi_2\right\rangle(z,\mu')\,d\mu' \\
+\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle(z)T_{\psi_1,\varphi_2,\Psi_3}\int_{-1}^{1}\tilde{P}(\mu,\mu')\left\langle \widetilde{N}^{k-1},\varphi_2\right\rangle(z,\mu')\,d\mu' \\
+\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle(z)T_{\psi_1,\psi_2,\Psi_3}\int_{-1}^{1}\tilde{P}(\mu,\mu')\left\langle \widetilde{N}^{k-1},\psi_2\right\rangle(z,\mu')\,d\mu'
\end{array}\right] \\
& +\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_o}{4\pi}\tilde{P}^{dir}\left[\begin{array}{l}
\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\varphi_1\rangle(z)\langle F_s,\varphi_2\rangle(z,\mu_\odot)\,T_{\varphi_1,\varphi_2,\Psi_3} \\
+\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\varphi_1\rangle(z)\langle F_s,\psi_2\rangle(z,\mu_\odot)\,T_{\varphi_1,\psi_2,\Psi_3} \\
\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle(z)\langle F_s,\varphi_2\rangle(z,\mu_\odot)\,T_{\psi_1,\varphi_2,\Psi_3} \\
+\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle(z)\langle F_s,\psi_2\rangle(z,\mu_\odot)\,T_{\psi_1,\psi_2,\Psi_3}
\end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

Comme d'habitude, quand Ψ_i est une fonction d'échelle, $\sum_i$ signifie $\sum_{k=0}^{2^J-1}$. Quand Ψ_i est une ondelette, $\sum_i$ signifie $\sum_{j=J}^{L-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}$. En simplifiant l'écriture comme plus haut :

$$
\begin{aligned}
\mu\frac{\delta}{\delta z}\left\langle \widetilde{N}^k,\Psi_3\right\rangle(z,\mu) = & -\sum_{\Psi_1}\sum_{\Psi_2}\langle\alpha,\Psi_1\rangle(z)\left\langle \widetilde{N}^k,\Psi_2\right\rangle(z,\mu)\,T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} \\
& -\eta\tilde{Q}\sum_{\Psi_1}\left\langle \widetilde{N}^k,\Psi_1\right\rangle\langle\delta\Psi_1,\Psi_3\rangle \\
& +(1-\delta_{k,1})\frac{\widetilde{\omega}_o}{4}\sum_{\Psi_1}\sum_{\Psi_2}\langle\alpha,\Psi_1\rangle(z)T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3}\int_{-1}^{1}\tilde{P}\left(\mu,\mu'\right)\left\langle \widetilde{N}^{k-1},\Psi_2\right\rangle\left(z,\mu'\right)d\mu' \\
& +\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_o}{4\pi}\tilde{P}^{dir}\sum_{\Psi_1}\sum_{\Psi_2}\langle\alpha,\Psi_1\rangle(z)\langle F_s,\Psi_2\rangle(z)T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3}\ ,
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

le symbole $\sum_{\Psi_1}$ signifiant qu'on fait la somme sur toutes les fonctions d'échelle et ondelettes.

Cette nouvelle écriture de l'ETR est très intéressante par bien des aspects, formels et numériques.

3.5.1.2 Lecture des équations 3.58 et 3.59

Les équations 3.58 et 3.59 ne décrivent plus l'interaction globale entre le champ de radiances et le champ nuageux, mais les interactions entre les fluctuations élémentaires des deux champs. La partie gauche des équations contient le gradient vertical d'un coefficient (d'échelle ou d'ondelette) $\left\langle \widetilde{N}^k,\Psi_3 \right\rangle$. La partie droite exprime les interactions élémentaires, mettant en jeu les coefficients $\langle \alpha, \Psi_1 \rangle$, $\left\langle \widetilde{N}^k, \Psi_2 \right\rangle$, $\langle F_s, \Psi_2 \rangle$, à l'origine de ce gradient vertical. Autrement dit, les équations indiquent comment varie verticalement une fluctuation élémentaire Ψ_3 du champ de radiance, suite à la propagation de celui-ci dans un milieu absorbant et diffusant.

Quelle fluctuation élémentaire Ψ_2 du champ de radiance ou du rayonnement direct atténué, interagit avec une fluctuation élémentaire Ψ_1 du champ d'extinction, le résultat de cette interaction élémentaire participant au gradient vertical de cette fluctuation élémentaire Ψ_3 ? La réponse est contenue dans les coefficients de connexion : si le coefficient T_{Ψ_1,Ψ_2,Ψ_3} est non nul, cette interaction entre les fluctuations élémentaires Ψ_1 et Ψ_2 est possible, et le résultat de l'interaction est en particulier une fluctuation Ψ_3.

Pour une direction de propagation telle que $\eta = \sin\theta \neq 0$, et si le coefficient de connexion $\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle$ est non nul, une fluctuation élémentaire Ψ_1, en particulier voisine de la fluctuation Ψ_3, participe au gradient vertical de cette fluctuation élémentaire Ψ_3.

Ainsi, cette nouvelle formulation de l'Equation générale du Transfert Radiatif nous indique que **toutes les interactions entre les fluctuations élémentaires à différentes échelles et différentes positions sont représentées dans les deux composants de connexion** T_{Ψ_1,Ψ_2,Ψ_3} et $\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle$. On rappelle que :

$$\begin{array}{l} T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(x)\Psi_2(x)\overline{\Psi_3}(x)dx \\ \langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\partial\Psi_1(x)}{\partial x}\overline{\Psi_3}(x)dx \end{array} \quad \text{avec } \Psi_i \in \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix} \tag{3.60}$$

T_{Ψ_1,Ψ_2,Ψ_3}est appelé **tenseur d'interaction**, il est d'ordre 3, et pour une AMR définie à partir de 2^L points, il est de taille $2^L * 2^L * 2^L$. Ce terme renferme toutes les interactions entre les fluctuations élémentaires du champ nuageux et celles du champ de rayonnement qu'il intercepte. L'écriture du tenseur d'interaction met en présence trois fonctions Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 , donc trois couples de paramètres $(j_i, k_i)_{i=1,2,3}$. Ψ_1 est une fluctuation élémentaire du champ d'extinction, Ψ_2 une fluctuation élémentaire du champ de radiances azimutal, et Ψ_3 une fluctuation élémentaire produit par l'interaction entre Ψ_1 et Ψ_2. La valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(x)\Psi_2(x)\overline{\Psi_3}(x)dx$ nous indique s'il est possible que Ψ_2 "rencontre" Ψ_1 (il faut effectivement déjà qu'ils se rencontrent) pour créer Ψ_3. Le tenseur des interactions intervient dans le terme puits ((2) : extinction) et dans le terme source diffusif ((4)). Si cette fluctuation Ψ_3 est créée par l'interaction du rayonnement incident suivant une direction $\overrightarrow{\Omega}$, elle viendra se soustraire (signe -) aux fluctuations existantes dans cette direction, et alimentera les autres directions $\overrightarrow{\Omega'}$ en accord avec l'indicatrice de diffusion $P(\overrightarrow{\Omega'}, \overrightarrow{\Omega})$.

Ces interactions seront-elles toutes effectives ? Cela va dépendre des hétérogénéités nuageuses, i.e. des valeurs des coefficients d'ondelettes $\langle \alpha, \Psi_1 \rangle (z)$.

$\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle$ est appelée la **matrice de coefficients de différentiation,** et de taille $2^L * 2^L$. Quand elles se propagent dans la direction d'angle zénithal θ, les fluctuations élémentaires Ψ_1 du champ de rayonnement sont soumises à un opérateur dit de dérivation qui les transforme

afin de permettre qu'en les ajoutant, ces fluctuations reforment bien un champ de rayonnement qui se décale horizontalement.

On tire de ces nouvelles formulations trois conséquences :

- les règles des interactions, des couplages entre les échelles, sont connues et très générales ; elles sont identiques pour tous types d'hétérogénéité,
- ces règles sont décrites par les composants T_{Ψ_1,Ψ_2,Ψ_3} et $\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle$; ils ne dépendent que de l'AMR choisie,
- une fois l'AMR choisie, on peut calculer une fois pour toutes ces composants, et les appeler au cours du calcul ; c'est donc numériquement très intéressant.

Dès lors, les questions qui se posent sont les suivantes : les mécanismes des interactions ne dépendant que de l'AMR choisie, et puisqu'on a la liberté de choisir différentes AMR, quel crédit est à porter à l'information contenue dans ces composants de connexion ? Les règles des interactions changent-elles ou non en fonction des AMR ?

On va répondre à ces questions en étudiant de plus près ces composants. L'étude des coefficients de connexion montre que le tenseur des interactions renferme les mécanismes des interactions (locales) entre les échelles, et que la matrice de différentiation contient les interactions en fonction de la distance horizontale. On va voir que les mécanismes des interactions vont dépendre, mais faiblement, des propriétés des multirésolutions utilisées.

Les composants définissent quelles interactions sont possibles, mais cela ne dit pas si elles vont avoir lieu ou pas. En fait, les interactions effectives dépendent de l'hétérogénéité du milieu, de la valeur des coefficients $\langle \alpha, \Psi_1 \rangle (z)$. Un composant décrit les interactions effectives :

$$\underset{\alpha\,\Psi_2,\Psi_3}{T} = \sum_{\Psi_1} \langle \alpha, \Psi_1 \rangle (z) T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} \tag{3.61}$$

$\underset{\alpha\,\Psi_2,\Psi_3}{T}$ sera appelé **opérateur effectif d'interaction**. Ce composant dépend de la multirésolution utilisée et du milieu. Il définit quels mécanismes des interactions sont effectivement activés quand on définit le champ d'extinction $\alpha(z)$. En pratique, on fera d'ailleurs une fois pour toutes le calcul de $\underset{\alpha\,\Psi_2,\Psi_3}{T}$.

3.6 Etude des coefficients de connexion

Les coefficients de connexion contiennent toute l'information sur les interactions élémentaires entre le champ de rayonnement et le milieu. Nous étudions ici cette information. En fonction des AMR et grâce au théorème de Parseval, notre étude se basera sur une vision dans le domaine physique et fréquentiel, en adoptant respectivement l'AMR de Haar et de Meyer. On va voir que ces visions ne s'opposent pas ; au contraire, elles se complètent et se font écho.

Les conventions utilisées pour la transformée de Fourier sont les suivantes :

- la transformée de Fourier d'une fonction $f(x)$ est donnée par $\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$,
- la transformée de Fourier inverse donne $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) e^{+i\omega x} dx$.

Commençons par étudier les coefficients de connexion d'interaction, puis étudions les coefficients de connexion de dérivation.

3.6.1 Coefficients de connexion d'interaction

Les termes (2) (4) et (5) font apparaître les coefficients de connexion d'interaction regroupés dans le tenseur de connexion

$$T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(x)\Psi_2(x)\overline{\Psi_3}(x)dx \text{ , } \Psi_i \text{ étant une composante du vecteur } \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

Ce terme renferme toutes les **interactions entre les fluctuations élémentaires du champ nuageux et celles du champ de rayonnement** qu'il intercepte. En utilisant les AMR de Haar et de Meyer, on va décrire et détailler les interactions entre les deux champs dans les espaces physique et de Fourier. En effet, les propriétés de compacité du support de leurs fonctions, respectivement dans les domaines physique et de Fourier, permettent de dégager les mécanismes des interactions locales entre les échelles par des études graphiques dans ces domaines duaux.

L'écriture du tenseur d'interaction met en présence trois fonctions Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, et trois couples de paramètres $(j_i, k_i)_{i=1,2,3}$ et en particulier trois échelles :

- Ψ_1 et Ψ_2 sont les deux fluctuations élémentaires en interaction, d'échelle associées j_1 et j_2 ;
- Ψ_3 est la fluctuation qui résulte de l'interaction de Ψ_1 et Ψ_2. Il y a véritablement interaction entre échelles quand le tenseur est non nul pour une situation différente de $j_1 = j_2 = j_3$.

Quand par la suite on parle de fluctuation à petite échelle, cela veut dire que j élevée, c'est à dire que le paramètre d'échelle $a = 2^{-j}$ est faible.

3.6.1.1 Etude dans le domaine physique

Les fonctions sont centrées en des points $x_i = \begin{cases} k2^{-j} & si\ \Psi_i = \varphi_{j,k} \\ (k+0.5)2^{-j} & si\ \Psi_i = \psi_{j,k} \end{cases}$ et ont un support de l'ordre de taille 2^{-j}. "De l'ordre de" seulement car cela dépend de la vitesse de décroissance des fonctions dans le domaine physique. Quand les supports des trois ondelettes Ψ_i se recouvrent dans le domaine physique, une interaction sera possible. Les coefficients d'interaction sont donc différents en fonction des AMR.

Pour le cas de l'AMR de Meyer (fig. 3.4), la visualisation des ondelettes dans le domaine physique n'apporte pas beaucoup d'informations tant les fonctions sont oscillantes et leurs supports étendus.

Pour l'AMR de Haar au contraire, la visualisation des trois fonctions dans le domaine physique indique très rapidement si le tenseur d'interaction pour cette situation est nul ou non. Trois cas seulement sont à prendre en compte (fig. 3.5) :

- les trois fonctions sont des fonctions d'échelle positionnées au même endroit,
- deux des trois fonctions sont la même ondelette positionnée au même endroit, la troisième étant une ondelette à plus grande échelle dont le support intercepte les deux autres,
- deux des trois fonctions sont la même ondelette positionnée au même endroit, la troisième étant une fonction d'échelle dont le support intercepte les deux autres.

Pour les deux derniers cas, les **fonctions sont interchangeables** sous l'intégrale pour la même valeur du coefficient d'interaction.

L'expression simple des fonctions de Haar conduit à un calcul analytique simple des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(x)\Psi_2(x)\overline{\Psi_3}(x)dx$:

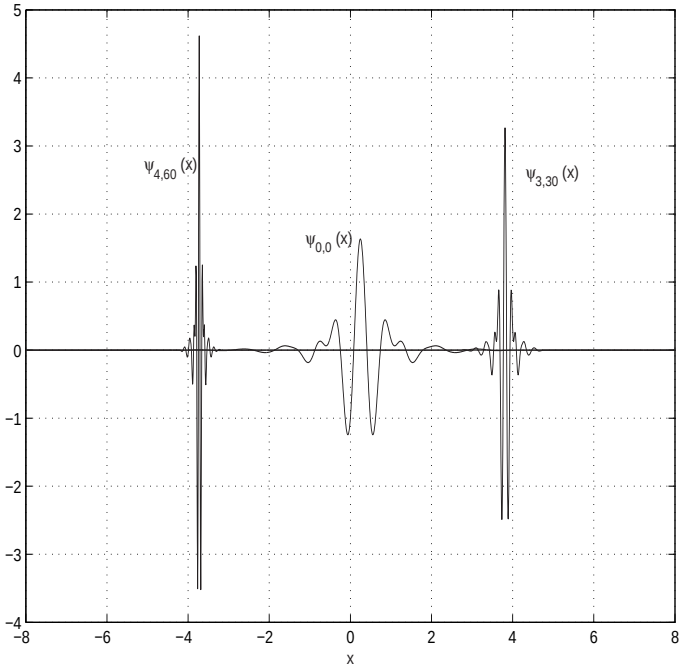


FIG. 3.4 – Représentation de trois ondelettes de Meyer dans le domaine physique

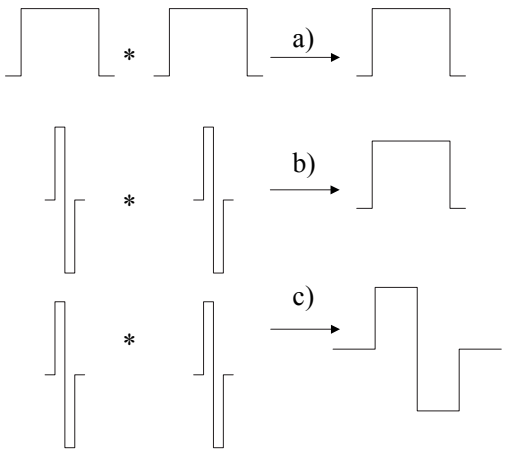


FIG. 3.5 – Les trois situations où, quand les supports se recouvrent, les coefficients sont non-nuls

$$
\begin{aligned}
&a) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{J,k}(x)\varphi_{J,k}(x)\overline{\varphi_{J,k}}(x)dx = 2^{\frac{J}{2}} \\
&b) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j_1,k_1}(x)\psi_{j_1,k_1}(x)\overline{\psi_{j_3,k_3}}(x)dx = \begin{cases} 2^{\frac{j_3}{2}} \\ -2^{\frac{j_3}{2}} \end{cases} \text{ avec } j_3 < j_1 \\
&c) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j_1,k_1}(x)\psi_{j_1,k_1}(x)\overline{\varphi_{J,k_3}}(x)dx = 2^{\frac{J}{2}}
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

Ce calcul a déjà été fait dans [Perrier and Wickerhauser 1999].

La vision des interactions dans le domaine physique avec l'AMR de Haar est parfaitement simple et claire. Lors de l'analyse des interactions, nous prendrons les symboles de la figure 3.5 comme représentation des fluctuations aux différentes échelles des champs et de leurs interactions.

3.6.1.2 Etude dans le domaine fréquentiel

Cette analyse dans le domaine fréquentiel va nous permettre d'étudier les interactions entre les échelles au sens de l'équivalence *nombre d'onde = échelle*. On utilise ici l'AMR de Meyer. Rappelons que les fonctions de Meyer ont un support fréquentiel compact (fig. 3.6).

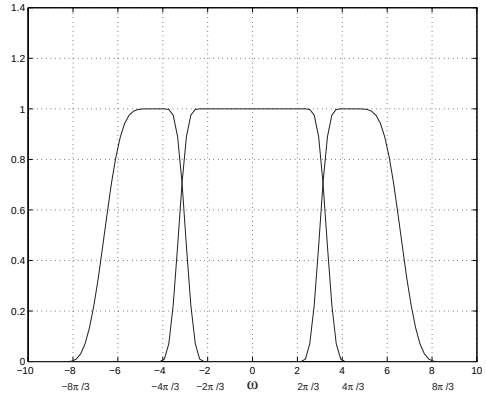


FIG. 3.6 – Modules des transformées de Fourier des fonction d'échelle et ondelette mère de Meyer

Grâce au théorème de Parseval, on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1(x)\Psi_2(x)\overline{\Psi_3}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\widehat{\Psi_1\Psi_2}\right)(\omega)\ .\overline{\widehat{\Psi_3}}(\omega)\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\widehat{\Psi_1} * \widehat{\Psi_2}\right)(\omega)\ .\overline{\widehat{\Psi_3}}(\omega)\,d\omega
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

Dans ce cas, on peut dire que si le support fréquentiel du produit de convolution $\widehat{\Psi_1} * \widehat{\Psi_2}$ n'intercepte pas le support fréquentiel de $\overline{\widehat{\Psi_3}}$, il n'y pas interaction. L'information sur la localisation physique des interactions est portée par la phase.

Plus précisément et puisque $\widehat{\Psi_i}(\omega) = \widehat{\Psi}_{j_i,k_i}(\omega) = 2^{-\frac{j_i}{2}} e^{-i\frac{k_i}{2^{j_i}}\omega}\widehat{\Psi}\left(\frac{\omega}{2^{j_i}}\right)$:

$$\left(\widehat{\Psi_1\Psi_2}\right)(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2^{-\frac{j_1}{2}} e^{-i\frac{k_1}{2^{j_1}}\omega''} \widehat{\Psi}\left(\frac{\omega''}{2^{j_1}}\right) 2^{-\frac{j_2}{2}} e^{-i\frac{k_2}{2^{j_2}}(\omega-\omega'')} \widehat{\Psi}\left(\frac{\omega-\omega''}{2^{j_2}}\right) d\omega'' \quad (3.65)$$

$$= \frac{2^{-\frac{j_1+j_2}{2}} e^{-i\frac{k_2}{2^{j_2}}\omega}}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\left(\frac{k_2}{2^{j_2}}-\frac{k_1}{2^{j_1}}\right)\omega''} \widehat{\Psi}\left(\frac{\omega''}{2^{j_1}}\right) \widehat{\Psi}\left(\frac{\omega-\omega''}{2^{j_2}}\right) d\omega'' \quad (3.66)$$

Alors,

$$T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} = \quad (3.67)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2^{-\frac{j_1+j_2}{2}} e^{-i\frac{k_2}{2^{j_2}}\omega}}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\left(\frac{k_2}{2^{j_2}}-\frac{k_1}{2^{j_1}}\right)\omega''} \widehat{\Psi}\left(\frac{\omega''}{2^{j_1}}\right) \widehat{\Psi}\left(\frac{\omega-\omega''}{2^{j_2}}\right) d\omega'' \right) 2^{-\frac{j_3}{2}} e^{+i\frac{k_3}{2^{j_3}}\omega} \overline{\widehat{\Psi}}\left(\frac{\omega}{2^{j_3}}\right) d\omega \quad (3.68)$$

$$= \frac{2^{-\frac{j_1+j_2+j_3}{2}}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\left(\frac{k_2}{2^{j_2}}-\frac{k_1}{2^{j_1}}\right)\omega''} \widehat{\Psi}\left(\frac{\omega''}{2^{j_1}}\right) \widehat{\Psi}\left(\frac{\omega-\omega''}{2^{j_2}}\right) d\omega'' \right) e^{+i\left(\frac{k_3}{2^{j_3}}-\frac{k_2}{2^{j_2}}\right)\omega} \overline{\widehat{\Psi}}\left(\frac{\omega}{2^{j_3}}\right) d\omega \quad (3.69)$$

En écrivant que :

– M_Ψ est le module de $\widehat{\Psi}$. Si $\begin{cases} \Psi = \varphi, \mathrm{M}_\Psi = \mathrm{M}_\varphi \text{ et } \widehat{\varphi}(\omega) = \mathrm{M}_\varphi(\omega). \\ \Psi = \psi, \mathrm{M}_\Psi = \mathrm{M}_\psi \text{ et } \widehat{\psi}(\omega) = e^{-\frac{i\omega}{2}} \mathrm{M}_\psi(\omega). \end{cases}$

– les fonctions sont centrées en des points $x_i = \begin{cases} k2^{-j} \quad si\ \Psi_i = \varphi_{j,k} \\ (k+0.5)2^{-j} \quad si\ \Psi_i = \psi_{j,k} \end{cases}$,

on obtient :

$$T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} = (2\pi)^{-3/2} 2^{-\frac{1}{2}(j_1+j_2+j_3)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i(x_3-x_2)\omega} C_{x_1-x_2}(\omega) \mathrm{M}_\Psi\left(\frac{\omega}{2^{j_3}}\right) d\omega \quad (3.70)$$

$$\text{avec} \qquad C_{x_1-x_2}(\omega) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x_1-x_2)\omega''} \mathrm{M}_\Psi\left(\frac{\omega''}{2^{j_1}}\right) \mathrm{M}_\Psi\left(\frac{\omega-\omega''}{2^{j_2}}\right) d\omega'' \right) \quad (3.71)$$

On reconnaît $C_{x_1-x_2}(\omega)$ comme la transformée de Fourier inverse d'une fonction, la fonction $Y(\omega'') = \mathrm{M}_\Psi\left(\frac{\omega''}{2^{j_1}}\right) \mathrm{M}_\Psi\left(\frac{\omega-\omega''}{2^{j_2}}\right)$, au point $(x_1 - x_2)$, et T_{Ψ_1,Ψ_2,Ψ_3} comme la transformée de Fourier inverse de la fonction $Z(\omega) = C_{x_1-x_2}(\omega)\mathrm{M}_\Psi\left(\frac{\omega}{2^{j_3}}\right)$ au point $(x_3 - x_2)$. Les fonctions de Meyer étant infiniment continues et à supports fréquentiels compacts, le tenseur T_{Ψ_1,Ψ_2,Ψ_3} est donc à **décroissance rapide** en $(x_1 - x_2)$ et $(x_3 - x_2)$: les interactions entre échelles entre les deux champs gardent donc un **caractère local** (dans l'espace physique) : si les ondelettes sont trop distantes, l'interaction sera négligeable.

3.6.1.2.1 Etude du support du produit de convolution $\widehat{\Psi_1} * \widehat{\Psi_2}$

On ne se préoccupe ici que du support fréquentiel de $\widehat{\Psi_1} * \widehat{\Psi_2}$; on suppose $x_1 = x_2$.

Les convolutions sont tracées en gras sur les figures ci-dessous.

Trois cas sont abordés :

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \varphi, \quad (3.72)$$

$$\Psi_1 = \psi, \Psi_2 = \varphi, \quad (3.73)$$

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \psi. \quad (3.74)$$

– Cas $\Psi_1 = \varphi_{J,k_1}$ et $\Psi_2 = \varphi_{J,k_2}$
La convolution de $\widehat{\varphi}$ par elle-même double le support fréquentiel de $\widehat{\varphi}$ (fig. 3.7). Le support de $\widehat{\varphi}* \widehat{\varphi}$ intercepte donc le support de $\widehat{\varphi}$ et de $\widehat{\psi}$. L'interaction proposée est donc la suivante :

$$\widehat{\varphi} * \widehat{\varphi} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{\varphi} \\ \widehat{\psi}_J \end{array} \right. \tag{3.75}$$

La première interaction est la plus importante et l'équivalent de la situation a) de Haar (fig. 3.5). C'est l'interaction entre les deux champs à l'échelle des pixels d'approximation (largeur de l'ordre de 2^{-J}).

– Cas $\Psi_1 = \psi_{j_1,k_1}$et $\Psi_2 = \varphi_{J,k_2}$
Deux sous-cas sont à considérer (fig. 3.8) :
  – si $j_1 >> J$, le support de $\widehat{\psi}* \widehat{\varphi}$ ne sera pas très différent de celui de $\widehat{\psi}$ (fig. 3.8a).
  – si j_1 est proche de J, le support de $\widehat{\psi}* \widehat{\varphi}$ couvre les supports des deux fonctions (fig. 3.8b).

  Le premier cas correspond à la situation b) de la figure 3.5 en interchangeant les deuxième et troisième fonctions.

– Cas $\Psi_1 = \psi_{j_1,k_1}$et $\Psi_2 = \psi_{j_2,k_2}$.
La figure 3.9 présente les résultats de la convolution de Ψ_1 et Ψ_2, pour des différences $(j_2 - j_1)$ croissantes. En fonction de la différence entre j_1 et j_2, les résultats de la convolution sont très différents : quand cette différence est grande (fig. 3.9d), le support du produit de la convolution est très proche de celui de la fonction à plus haute fréquence : on se retrouve dans la situation c) de la figure 3.5 en interchangeant les deux dernières fonctions. Quand $j_1 = j_2$ (fig. 3.9a), on retrouve la situation b) de la figure 3.5.

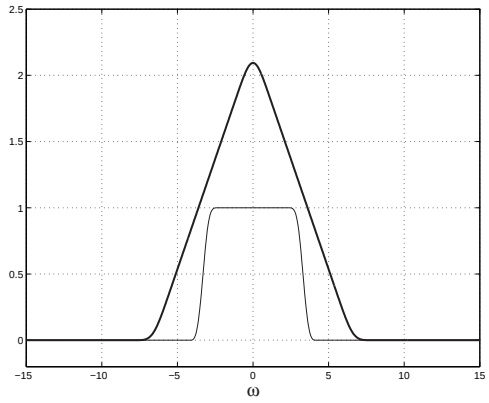


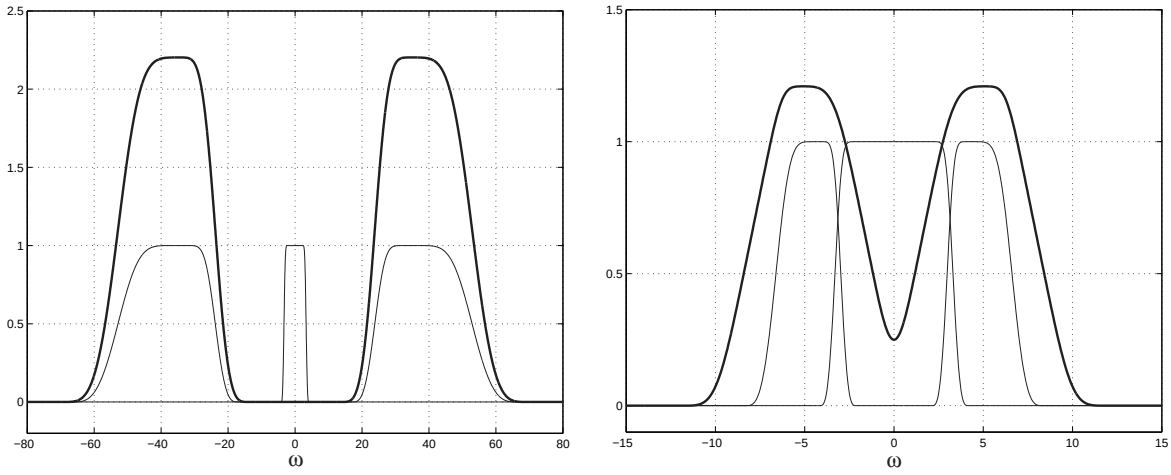
FIG. 3.7 – Convolution dans le domaine de Fourier Cas $\Psi_1 = \Psi_2 = \varphi$

3.6.1.2.2 Effet de la distance horizontale sur le produit de la convolution

Comme il a été dit, le tenseur est à décroissance rapide en $(x_1 - x_2)$ et $(x_3 - x_2)$. Cette décroissance est illustrée dans la figure 3.10 sur deux exemples.

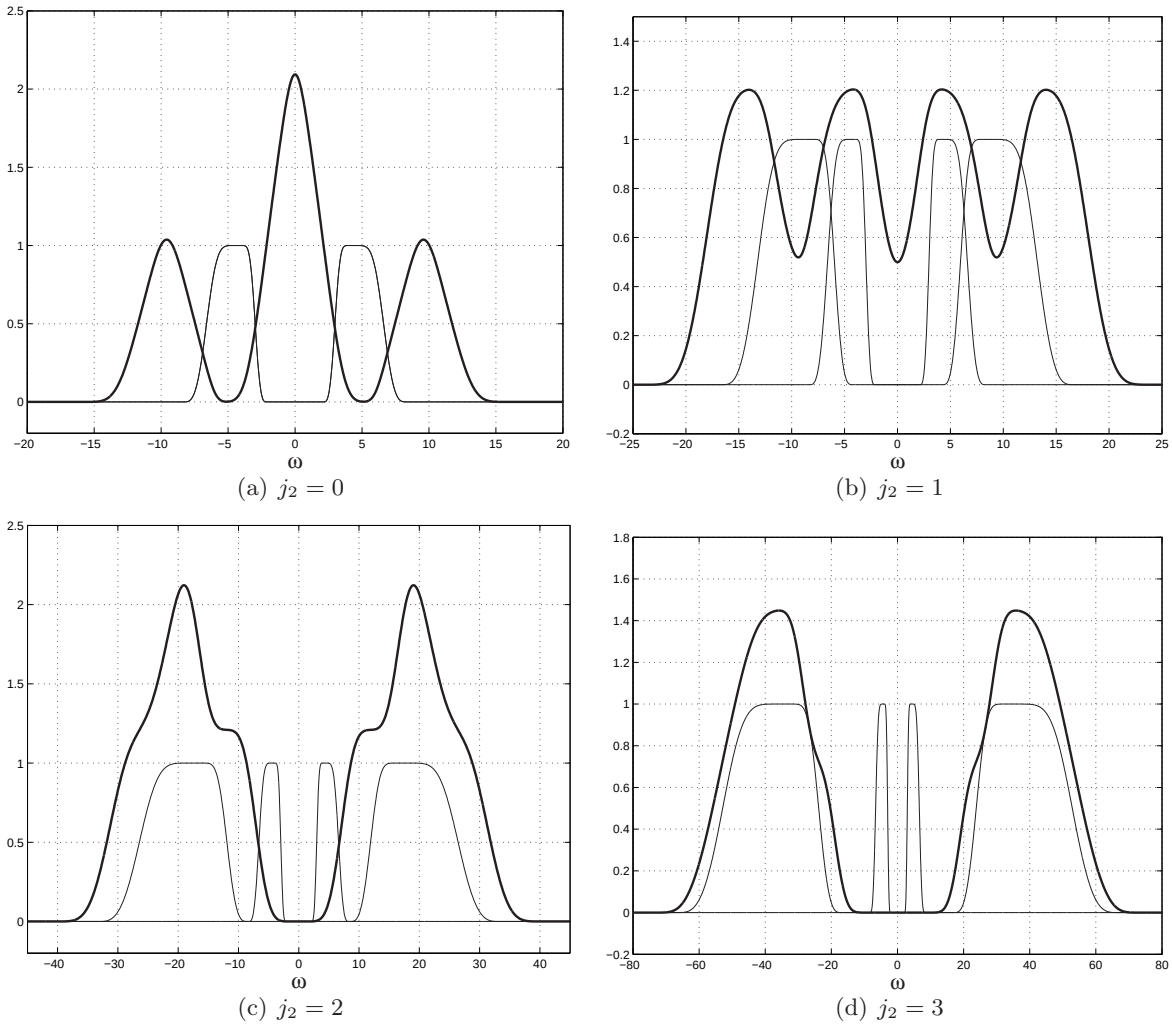
On voit qu'en fonction de $\Delta k = k_2 - k_1$, le produit de convolution "se dégrade" ; l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\widehat{\Psi_1} * \widehat{\Psi_2}\right)(\omega) \, . \overline{\widehat{\Psi_3}}(\omega) \, d\omega$ sera beaucoup plus faible quand $\Delta k \neq 0$. La figure 3.11 montre la décroissance rapide du tenseur en fonction de $(k_2 - k_1)$ pour deux cas :

a) $T_{\varphi_{J,k_1},\varphi_{J,k_2},\varphi_{J,5}}$ avec $J = 3$,
b) $T_{\psi_{j,k_1},\psi_{j,k_2},\psi_{j,15}}$ avec $j = 5$.



(a) $j_1 = 3$ (b) $j_1 = 0$

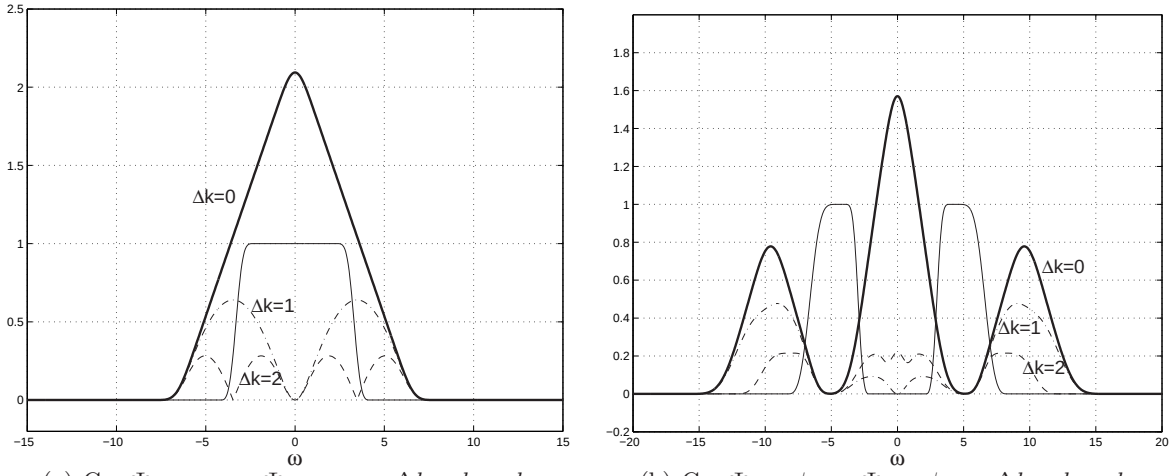
FIG. 3.8 – Convolution dans le domaine de Fourier Cas $\Psi_1 = \psi_{j_1}$, $\Psi_2 = \varphi$



(a) $j_2 = 0$ (b) $j_2 = 1$

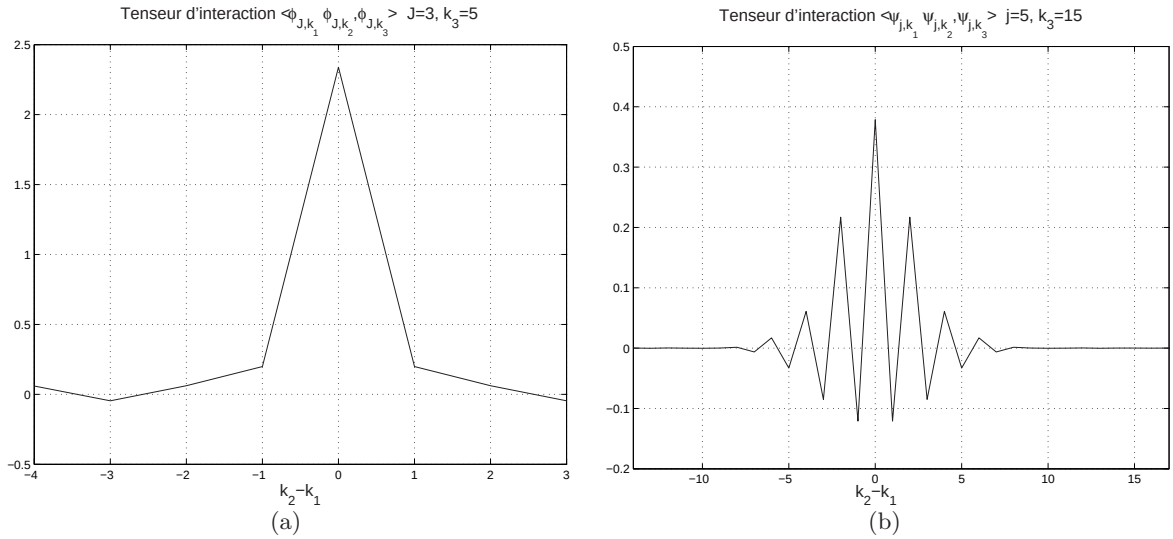
(c) $j_2 = 2$ (d) $j_2 = 3$

FIG. 3.9 – Convolution dans le domaine de Fourier Cas $\Psi_1 = \Psi_2 = \psi$, $j_1 = 0$



(a) Cas $\Psi_1 = \varphi_{J,k_1}$, $\Psi_2 = \varphi_{j,k_2}$, $\Delta k = k_2 - k_1$ (b) Cas $\Psi_1 = \psi_{J,k_1}$, $\Psi_2 = \psi_{J,k_2}$, $\Delta k = k_2 - k_1$

FIG. 3.10 – Convolution dans le domaine de Fourier. Effet de la distance horizontale



(a) (b)

FIG. 3.11 – AMR de Meyer - Décroissance rapide de la valeur du tenseur en fonction de $\Delta k = k_2 - k_1$

3.6.1.3 Bilan de l'étude des coefficients de connexion d'interaction

L'étude des coefficients de connexion et de l'information qu'ils contiennent a été faite avec deux points de vue différents : dans le domaine physique et pour l'AMR de Haar ; dans le domaine fréquentiel et pour l'AMR de Meyer.

Les interactions montrées et communes pour les différentes AMR sont les suivantes :

- les **interactions** se font **à l'échelle de la fonction d'échelle**, ou à l'échelle des 2^J pixels basse résolution (fig. 3.5a et 3.7). Dans ce cas, les trois fonctions en jeu sont des fonctions d'échelle.
- les interactions entre une fluctuation élémentaire de type ondelette à petite échelle avec une fluctuation de type fonction d'échelle ou ondelette à une échelle plus grossière créent (uniquement, dans le cas de l'AMR de Haar, et essentiellement, dans le cas de l'AMR de Meyer) des fluctuations à l'échelle de la plus petite échelle des fluctuations en présence (fig. 3.5 cas b) et c) en intervertissant les deux fluctuations, centrale et à droite ; fig. 3.8a et 3.9d).
- les interactions entre deux fluctuations élémentaires de type **ondelette à la même échelle** créent des **fréquences plus basses** et en particulier créent une fluctuation de type fonction d'échelle ; le produit de deux ondelettes de Haar colocalisées créent une fonction créneau (fig. 3.5b) ; le support du produit de convolution de la transformée de Fourier de deux ondelettes recouvrent les basses fréquences et en particulier $\left(\widehat{\Psi_1\Psi_2}\right)(0) \neq 0$ (fig. 3.9a).

Cette dernière interaction est la clé de l'effet des petites échelles sur les grandes échelles. On parlera d'effets des fluctuations sous-pixels à l'échelle des pixels d'approximation. On retrouve ce résultat avec une décomposition de Fourier : le produit de deux cosinus se décompose en une somme de deux cosinus de fréquences différentes, une plus basse et une plus haute :

$$\cos(a)\cos(b) = 0.5(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \tag{3.76}$$

Quand $a = b$, il est produit $cos(0)$, soit une fonction constante.

C'est la démonstration évidente que l'interaction de deux fluctuations de moyenne nulle peut produire des fluctuations de moyenne non nulles, donc modifier la moyenne du signal traité.

On peut considérer que les trois types d'interactions données ci-dessus, communes aux AMR, sont les plus importantes du point de vue des interactions entre échelles. Il faut également garder à l'esprit que les trois fonctions sont interchangeables dans le tenseur d'interaction.

Il est intéressant de voir la différence des interactions montrées par différentes AMR. Quelques interactions montrées par l'AMR de Meyer n'existent pas pour l'AMR de Haar, par exemple le cas $T_{\psi_{j,k_1},\psi_{j,k_2},\psi_{j,k_3}}$ (fig. 3.11b). Mais c'est surtout l'effet de la distance horizontale entre les centres des fluctuations interagissantes qui différencient les deux AMR : à cause des supports physiques "différemment compacts" des fonctions, la décroissance des interactions en fonction de la distance est très dépendante de l'ARM utilisée. Prenons l'exemple de l'interaction du type fig. 3.5a. Pour l'AMR de Haar, l'interaction a lieu uniquement si les troix créneaux sont positionnés au même endroit et le coefficient de connexion vaut $2^{3/2} = 2.828$. Pour l'AMR de Meyer, il y a décroissance des interactions en fonction de la position (fig. 3.11) et, pour $k_1 = k_2 = k_3$, le coefficient de connexion vaut 2.339.

3.6.2 Coefficients de connexion de dérivation

Si le terme dérivée apparaît de façon un peu artificielle dans l'équation après la décomposition du gradient en deux parties horizontale et verticale, son analyse et son traitement sont très

importants car ce terme va représenter le transport horizontal des photons dans le nuage. Supposons la propagation d'un rayonnement N dans la direction de propagation $\overrightarrow{\Omega}$ d'abscisse s et dans un **milieu transparent**. Le long de la direction de propagation : $\frac{dN}{ds} = 0$ d'où $\frac{dN}{dz} = -\tan\theta \frac{dN}{dx}$. La fonction $N(z,x)$ est définie par :

$$N(z,x) = N_0(x - z\tan\theta) \tag{3.77}$$

Le signal est donc juste décalé horizontalement, ou translaté. Or, les représentations multirésolutions de type ondelette ne sont pas invariantes par translation : les coefficients d'ondelette de $f(x)$ sont différents de ceux de $f(x-a)$. Il est donc normal que l'opérateur de dérivation modifie les coefficients de f. Traduit en coefficients d'ondelettes, cela donne :

$$\frac{\delta}{\delta z}\langle N,\Psi_3\rangle(z) = -\tan\theta \sum_{\Psi_1} \langle N,\Psi_1\rangle \langle \delta\Psi_1,\Psi_3\rangle \tag{3.78}$$

Les coefficients de connexion de dérivation sont étudiés d'abord dans l'espace de Fourier avec l'AMR de Meyer, puis nous adoptons l'AMR de Haar, avant de représenter de manière standard l'opérateur dérivée

3.6.2.1 Etude dans l'espace fréquentiel avec l'AMR de Meyer

Grâce au théorème de Parseval :

$$\langle \delta\Psi_1,\Psi_3\rangle = \int_{D_x} \frac{\delta}{\delta x}\Psi_1(x)\overline{\Psi}_3(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{D_\omega} \Big(i\omega\widehat{\Psi}_1(\omega)\Big)\overline{\widehat{\Psi}}_3(\omega)d\omega \tag{3.79}$$

avec $\widehat{\Psi}(\omega) = \widehat{\Psi}_{j,k}(\omega) = 2^{-\frac{j}{2}} e^{-i\frac{k}{2^j}\omega}\widehat{\Psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$. D'où :

$$\langle \delta\Psi_1,\Psi_3\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{D_\omega} i\omega 2^{-\frac{j_1}{2}} 2^{-\frac{j_3}{2}} e^{i\left(\frac{k_3}{2^{j_3}} - \frac{k_1}{2^{j_1}}\right)\omega}\widehat{\Psi}\left(\frac{\omega}{2^{j_1}}\right)\overline{\widehat{\Psi}}\left(\frac{\omega}{2^{j_3}}\right)d\omega \tag{3.80}$$

Etant donnés les supports fréquentiels compacts des fonctions de Meyer (fig. 3.6), les produits scalaires non-nuls sont prévisibles et limités aux cas suivants :

- Ψ_1 et Ψ_3 sont deux fonctions d'échelle $\varphi_{J,k}$,
- Ψ_1 et Ψ_3 sont une fonction d'échelle $\varphi_{J,k}$ et une ondelette $\psi_{J,k}$ (ondelette de plus grande échelle),
- Ψ_1 et Ψ_3 sont deux ondelettes dont les échelles caractéristiques associées sont égales, ou différentes de un.

Par la suite, on note :

$$\mathrm{M}_\Psi \text{ est le module de } \widehat{\Psi} : \begin{cases} \text{si } \Psi = \varphi,\ \mathrm{M}_\Psi = \mathrm{M}_\varphi \text{ et } \widehat{\varphi}(\omega) = \mathrm{M}_\varphi(\omega). \\ \text{si } \Psi = \psi,\ \mathrm{M}_\Psi = \mathrm{M}_\psi \text{ et } \widehat{\psi}(\omega) = e^{\frac{-i\omega}{2}}\mathrm{M}_\psi(\omega). \end{cases}$$

Etude de $\langle \delta\varphi_1,\varphi_3\rangle, \langle \delta\varphi_{J,k_1},\psi_{J,k_3}\rangle$, *et* $\langle \delta\psi_{j_1,k_1},\psi_{j_3,k_3}\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \delta\varphi_1, \varphi_3 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{D_\omega} i\omega 2^{-J} e^{i\left(\frac{k_3-k_1}{2^J}\right)\omega} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^J}\right)^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{D_\eta} i\eta 2^J e^{i(k_3-k_1)\eta} \mathrm{M}_\varphi(\eta)^2 d\eta \text{ avec } \eta = \omega/2^J \\
&= 2^J \digamma_1(k_3-k_1) \text{ avec } \digamma_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{D_\eta} i\eta e^{i(x)\eta} \mathrm{M}_\varphi(\eta)^2 d\eta \qquad (3.81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \delta\varphi_{J,k_1}, \psi_{J,k_3} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{D_\omega} i\omega 2^{-J} e^{i\left(\frac{k_3-k_1}{2^J}\right)\omega} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^J}\right) e^{i\frac{\omega}{2.2^J}} \bar{\hat{\psi}}\left(\frac{\omega}{2^J}\right) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{D_\eta} i\eta 2^J e^{i(k_3-k_1+0.5)\eta} \mathrm{M}_\varphi(\eta) \mathrm{M}_\psi(\eta) d(\eta) \text{ avec } \eta = \omega/2^J \\
&= 2^J \digamma_2(k_3-k_1+0.5) \text{ avec } \digamma_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{D_\eta} i\eta e^{i(x)\eta} \mathrm{M}_\varphi(\eta) \mathrm{M}_\psi(\eta) d\eta
\end{aligned} \qquad (3.82)$$

De même, $\left\langle \delta\psi_{J,k_3}, \varphi_{J,k_1} \right\rangle = 2^J \digamma_2(k_3-k_1+0.5)$

$$\begin{aligned}
\left\langle \delta\psi_{j_1,k_1}, \psi_{j_3,k_3} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{D_\xi} i\omega 2^{-\frac{j_1}{2}} 2^{-\frac{j_3}{2}} e^{i\left(\frac{k_3}{2^{j_3}} - \frac{k_1}{2^{j_1}}\right)\omega} \hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^{j_1}}\right) \bar{\hat{\psi}}\left(\frac{\omega}{2^{j_3}}\right) d\omega \\
&= \begin{cases} 2^j \digamma_3(k_3-k_1) & \text{si } j_1 = j_3 = j \\ 2^{j_1} \digamma_4(2k_3-k_1+0.5) & \text{si } j_1 = j_3+1 \\ 2^{j_3} \digamma_4(k_3-2k_1-0.5) & \text{si } j_3 = j_1+1 \end{cases} \qquad (3.83)
\end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad \begin{aligned} \digamma_3(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{D_\eta} i\eta e^{i(x)\eta} \mathrm{M}_\psi(\eta)^2 d\eta \\ \digamma_4(x) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{2} \int_{D_\eta} i\eta e^{i(x)\eta} \mathrm{M}_\psi(2\eta) \mathrm{M}_\psi(\eta) d\eta \end{aligned} \qquad (3.84)$$

Ainsi, l'AMR de Meyer fournit 4 fonctions $\digamma_1$, $\digamma_2$, $\digamma_3$, $\digamma_4$ qui sont les transformées de Fourier inverse de 4 fonctions imaginaires et impaires $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\eta \mathrm{M}_\varphi(\eta)^2$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\eta \mathrm{M}_\varphi(\eta) \mathrm{M}_\psi(\eta)$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\eta \mathrm{M}_\psi(\eta)^2$ et $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\sqrt{2}\eta \mathrm{M}_\psi(2\eta) \mathrm{M}_\psi(\eta)$. Les 4 fonctions $\digamma_i$ sont rigoureusement réelles et impaires. Les fonctions de Meyer étant infiniment continues et à supports fréquentiels compacts, les transformées de Fourier inverses sont à décroissance rapide. Les 4 fonctions $\digamma_i$ sont représentées sur la figure 3.12. En réalité, à cause de la périodisation des champs, ces filtres vont être différents en fonction de l'échelle considérée, car en périodisant on perd la propriété d'invariance d'échelle.

Pour une fluctuation de type φ_3 , le terme dérivée horizontale s'exprime par :

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial \widetilde{N^k}(x,z,\mu)}{\partial x}, \varphi_{J,k_3} \right\rangle = \sum_{k_1} \left\langle \widetilde{N^k}, \varphi_{J,k_1} \right\rangle \left\langle \delta\varphi_{J,k_1}, \varphi_{J,k_3} \right\rangle + \sum_{k_1} \left\langle \widetilde{N^k}, \psi_{J,k_1} \right\rangle \left\langle \delta\psi_1, \varphi_{J,k_3} \right\rangle \\
&= 2^J \sum_{k_1} \left\langle \widetilde{N^k}, \varphi_{J,k_1} \right\rangle \digamma_1(k_3-k_1) + 2^J \sum_{k_1} \left\langle \widetilde{N^k}, \psi_{J,k_1} \right\rangle \digamma_2(k_3-k_1-0.5)
\end{aligned} \qquad (3.85)$$

Les valeurs de $\digamma_1$ au point (k_3-k_1) et $\digamma_2$ au point $(k_3-k_1-0.5)$ indiquent comment et

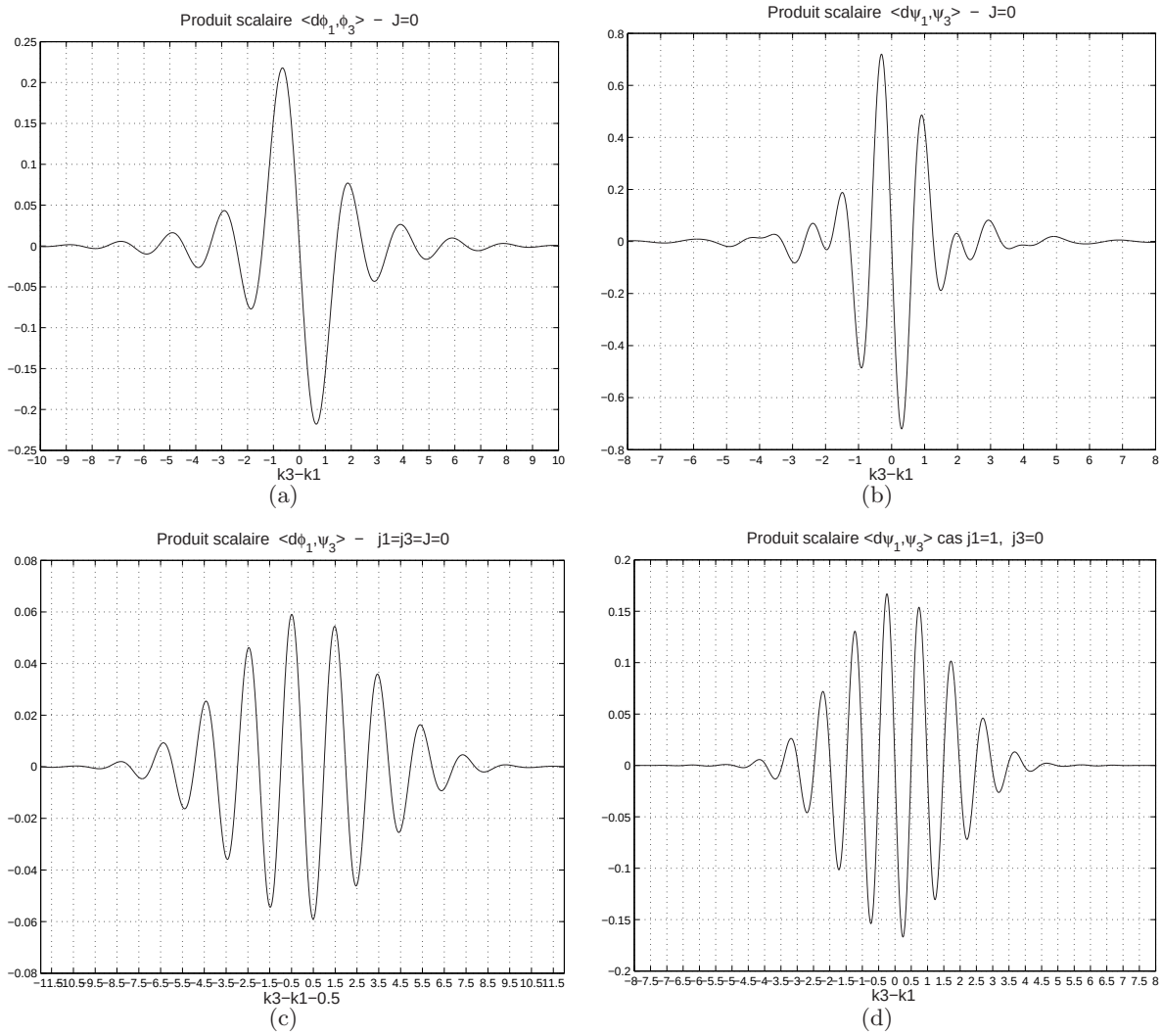


FIG. 3.12 – Les 4 fonctions F_i

combien la fluctuation φ_{J,k_3} est perturbée au cours de sa propagation par les fluctuations voisines φ_{J,k_1} et ψ_{J,k_1}.

Pour une fluctuation de type ψ_3 , le terme dérivée horizontale s'exprime par :

$$\left\langle \frac{\partial \widetilde{N^k}(x,z,\mu)}{\partial x}, \psi_{j_3,k_3} \right\rangle = \sum_{k_1} \left\langle \widetilde{N^k}, \varphi_{J,k_1} \right\rangle \langle \delta\varphi_{J,k_1}, \psi_{j_3,k_3} \rangle + \sum_{j_1,k_1} \left\langle \widetilde{N^k}, \psi_{j_1,k_1} \right\rangle \langle \delta\psi_{j_1,k_1}, \psi_{j_3,k_3} \rangle$$

$$= \delta_{j_3-J} 2^J \sum_{k_1} \left\langle \widetilde{N^k}, \varphi_{J,k_1} \right\rangle F_2(k_3 - k_1 + 0.5) + 2^j \sum_{k_1} \left\langle \widetilde{N^k}, \psi_{j_3,k_1} \right\rangle F_{_3}(k_3 - k_1) \tag{3.86}$$

$$+(1 - \delta_{j_3-(L-1)}) 2^{j_1} \sum_{k_1} \left\langle \widetilde{N^k}, \psi_{j_1=j_3+1} \right\rangle F_{_4}(2k_3 - k_1 + 0.5)$$

$$+(1 - \delta_{j_3-J}) 2^{j_3} \sum_{k_1} \left\langle \widetilde{N^k}, \psi_{j_1=j_3-1} \right\rangle F_{_4}(k_3 - 2k_1 - 0.5) \tag{3.87}$$

Les valeurs de F_2 au point $(k_3 - k_1 + 0.5)$, F_3 au point $(k_3 - k_1)$, F_4 aux points $(2k_3 - k_1 + 0.5)$ et $(k_3 - 2k_1 - 0.5)$ indiquent comment et combien la fluctuation ψ_{j_3,k_3} est perturbée au cours de sa propagation par les fluctuations voisines φ_{J,k_1}, $\psi_{j_3,k_1}, \psi_{j_3+1,k_1}$ et ψ_{j_3-1,k_1}.

On peut définir les filtres $F_{\varphi,\varphi}$ et $F_{\psi,\psi}$ dont les valeurs sont celles de F_1 et F_3 aux points entiers, les filtres $F_{\varphi,\psi}$ et $F_{\psi,\varphi}$, $F_{\psi,2\psi}$ et $F_{2\psi,\psi}$ dont les valeurs sont celles de F_2 et F_4 respectivement aux points 0.5+$\mathbb{Z}$ centré sur 0.5 et -0.5.

Si on note les vecteurs $\overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\varphi}}_J = \begin{pmatrix} \left\langle \widetilde{N^k}, \varphi_{J,0} \right\rangle \\ \left\langle \widetilde{N^k}, \varphi_{J,1} \right\rangle \\ \cdots \\ \left\langle \widetilde{N^k}, \varphi_{J,2^J-1} \right\rangle \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\psi}}_j = \begin{pmatrix} \left\langle \widetilde{N^k}, \psi_{j,0} \right\rangle \\ \left\langle \widetilde{N^k}, \psi_{j,1} \right\rangle \\ \cdots \\ \left\langle \widetilde{N^k}, \psi_{j,2^j-1} \right\rangle \end{pmatrix}$

pour $j = J, ..., L-1$, et $\overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\Psi}}_{L-1} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\psi}}_J \\ \overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\psi}}_{J+1} \\ \cdots \\ \overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\psi}}_{L-1} \end{pmatrix}$, alors on peut voir le calcul comme les convolutions de ces vecteurs par les filtres ci-dessus, précédés d'insertion de zéros ($\boxed{\uparrow}$) dans le cas de $F_{2\psi,\psi}$ et suivis de décimation ($\boxed{\downarrow}$) dans le cas $F_{\psi,2\psi}$ Ces notations adoptées et le symbole $*$ représentant le produit de convolution, on peut écrire à partir des équations 3.85 et 3.86 :

$$\overrightarrow{\frac{\partial \widetilde{N^k}}{\partial x}^{\varphi}}_J = \left(\overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\varphi}}_J * F_{\varphi,\varphi} \right) + 2^J \left(\overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\psi}}_j * F_{\psi,\varphi} \right) \tag{3.88}$$

et

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\frac{\partial \widetilde{N^k}}{\partial x}^{\psi}}_{j_3} &= \delta_{j_3-J} 2^J \left(\overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\varphi}}_J * F_{\varphi,\psi} \right) + 2^j \left(\overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\psi}}_j * F_{\psi,\psi} \right) \\ &+ (1 - \delta_{j_3-(L-1)}) \left(\overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\psi}}_{j_1=j_3+1} \rightarrow \times 2^{j_1} \rightarrow (* F_{\psi,2\psi}) \rightarrow \boxed{\downarrow} \right) \\ &+ (1 - \delta_{j_3-J}) \left(\overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\psi}}_{j_1=j_3-1} \rightarrow \times\ 2^{j_3} \rightarrow \boxed{\uparrow} \rightarrow (* F_{2\psi,\psi}) \right) \end{aligned} \tag{3.89}$$

Faisons un bilan de cette étude avec l'AMR de Meyer du terme de dérivée horizontale :

- le terme dérivée horizontal correspond à la convolution des vecteurs des coefficients d'échelle et d'ondelettes du champ de radiances par 6 filtres, déduits directement de la définition analytique des fonctions de Meyer. Les largeurs effectives de ces filtres et leurs valeurs donnent une indication quand à l'influence des fluctuations élémentaires avoisinant une fluctuation centrale. Les valeurs de ces filtres décroissent rapidement. Par exemple, on peut considérer que les 10 coefficients d'échelles situés horizontalement de part et d'autre d'un coefficient d'échelle "central" agissent sur lui par l'action du filtre $F_{\varphi,\varphi}$ (fig. 3.12).
- Les différentes familles de fluctuations élémentaires (fonction d'échelle, ondelette à différentes échelles) interagissent entre elles, mais globalement le filtrage a surtout lieu au sein d'une famille. Le terme dérivée propose donc peu d'interactions entre échelles. Ceci n'est pas surprenant car les fonctions de Meyer sont bien localisées dans le domaine spectral. On se rapproche du cas idéal de Fourier, pour lequel l'opérateur de dérivation est diagonal (voir remarque chapitre 2, partie 2.2.1.1, et plus loin la représentation standard de l'opérateur dérivée).
- Les filtres définis sont tous impairs. Si les vecteurs appelés sont constants, ces interactions horizontales seront nulles. Si par exemple $\left\langle \widetilde{N^k}, \psi_{j,ipos} \right\rangle$ est indépendant de l'indice de position *ipos*, alors $\left(\overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\psi}_j} * F_{\psi,\psi} \right) = \overrightarrow{0}$. Cela confirme le commentaire fait précédemment : les coefficients de connexion indiquent quelles interactions sont possibles. Mais pour un cas donné, seules une partie de ces interactions sont actives ou "activées". En particulier si le milieu est homogène, il en est de même des fluctuations du champ de radiances aux différentes échelles, et le vecteur $\begin{pmatrix} \overrightarrow{\frac{\partial \widetilde{N^k}^{\varphi}}{\partial x}}_J \\ \overrightarrow{\frac{\partial \widetilde{N^k}^{\Psi}}{\partial x}}_{L-1} \end{pmatrix}$ est nul.
- Les interactions augmentent en direction des petites échelles (terme 2^j en facteur) ce qui est logique car les supports diminuant, les gradients sont plus importants.

Ainsi, l'étude du terme dérivée dans le domaine de Fourier avec l'AMR de Meyer est intéressante pour la compréhension des interactions. Elle est également intéressante du point de vue du calcul :

- le calcul dans le domaine de Fourier permet d'avoir une **approximation de la dérivée horizontale exacte,** et non un schéma approximatif de la dérivée. Cette approche qui utilise en fait la dérivabilité des fonctions de la base multirésolution est exploitée communément dans des méthodes spectrales plus classiques [Canuto et al. 1988]). Ainsi, quand la base de projection est constituée de polynômes de Chebyshev T_k d'ordre k, on écrit :

$$u(x) = \sum_k u_k T_k(x) \quad \text{et} \quad u'(x) = \sum_k u_k T'_k(x) \tag{3.90}$$

Pour nous ici, reprenant l'écriture matricielle du chapitre 2, partie 3 :

$$u(x) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u^{\varphi}_J} \\ \overrightarrow{u^{\Psi}_{L-1}} \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}, u'(x) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u^{\varphi}_J} \\ \overrightarrow{u^{\Psi}_{L-1}} \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}'$$

$$\text{et} \quad \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}' = \langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle^t \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}$$

– le calcul des coefficients de connexion dérivée se fera pour l'AMR de Meyer à l'aide de **transformées de Fourier inverse** de fonctions analytiques. Malgré la présence de phénomène de Gibbs dû au calcul dans le domaine spectral et détaillé au chapitre suivant, on va voir que le calcul du terme dérivée à l'aide de l'AMR de Meyer est correct.

3.6.2.2 Etude avec l'AMR de Haar

Dans le cadre de la résolution d'équations aux dérivées partielles au moyen de méthode de Galerkin-ondelette, de nombreuses études ont été menées sur la représentation des opérateurs de différentiations sur une base d'ondelettes à support compact [Beylkin 1992]. Il est montré que le calcul de la dérivée à partir de fonctions d'échelle et d'ondelettes est le même que le calcul fait avec la fonction d'échelle à la résolution $2^{-(L-1)}$ la plus fine. Grâce à l'équation d'échelle 2.22, $\langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle$ avec $\Psi_i \in \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}$ se déduit du produit scalaire

$$r_l = \int_{D_x} \varphi'(x)\varphi(x-l)dx. \tag{3.91}$$

Les valeurs des r_l sont données dans certains ouvrages pour les ondelettes de Daubechies [Beylkin 1992] [Goedecker 1998]. Les AMR de Daubechies aux ordres élevées proposent des schémas de dérivation élaborés qui se rapprochent de schémas de Stirling [Resnikoff and Wells. 1998]. En ce sens, on dit que les ondelettes de Daubechies sont différentiables. [Fournier 2000] utilise l'ondelette de Daubechies d'ordre 14 ; elle est présentée comme la base à support le plus compact possible fournissant une dérivée d'ordre deux continue.

Pour l'AMR de Haar, qui correspond à celle de Daubechies d'ordre 1, on peut montrer [Beylkin 1992] que le calcul de l'opérateur de différentiation du premier ordre est équivalent au schéma centré classique de différences finies $D_L f(x_l) = \frac{1}{2\Delta x}\left[f(x_{l+1}) - f(x_{l-1})\right]$, avec $\Delta x = D2^{-L}$, avec D la taille du domaine. Ainsi, l'AMR de Haar propose une **approximation au premier ordre** (au sens du développement de Taylor) **de la dérivée exacte**.

On sait qu'un schéma de différences finies provoque un filtrage de la dérivée (voir annexe D). Si on utilise cette multirésolution, il va falloir estimer l'influence de ce filtrage sur le transport horizontal. On verra en outre aux chapitres 4 et 5 que l'utilisation de l'AMR de Haar pour la représentation du terme dérivée est source de bruit numérique dans notre étude.

3.6.2.3 Représentation standard de la matrice des coefficients de connexion de différentiation

Comme il a été dit au chapitre 2, la matrice des coefficients de connexion de dérivation du premier ordre $\langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle$ fournit une représentation standard de l'opérateur de dérivation projeté dans l'espace multirésolution. Cette matrice $\langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle$ relie $\begin{pmatrix} \overrightarrow{\frac{\partial \widetilde{N^k}^{\varphi}}{\partial x}_J} \\ \overrightarrow{\frac{\partial \widetilde{N^k}^{\Psi}}{\partial x}_{L-1}} \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} \overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\varphi}_J} \\ \overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\Psi}_{L-1}} \end{pmatrix}$.

La représentation standard de la matrice des coefficients de connexion de différentiation permet de visualiser la portée horizontale des interactions définie par l'AMR, et les interactions entre échelles.

Ci-dessous sont données des exemples de la représentation standard de cette matrice pour $J = 3$ et $L = 7$, et pour les AMR de Haar, Meyer et l'AMR hybride "HM" que nous définissons. On a dessiné à chaque fois un quadrillage apparent afin de situer les échelles et visualiser les interactions entre les échelles.

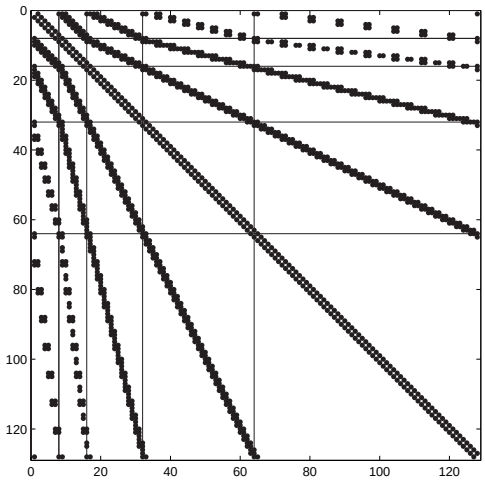


FIG. 3.13 – Représentation standard de l'opérateur de dérivation $\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle$ projeté sur l'espace de Haar

3.6.2.3.1 Multirésolution de Haar

La matrice est très clairsemée (pourcentage de vide=92%) et elle est non-diagonale (figure 3.13) : le terme dérivée au sens de Haar propose donc des interactions entre les échelles. A noter la très faible largeur des bandes, conséquence du schéma de différences finies centrées (+1/2, -1/2) : seules les fluctuations les plus voisines d'une fluctuation centrale sont prises en compte dans le calcul du terme de dérivée horizontale.

3.6.2.3.2 Multirésolution de Meyer

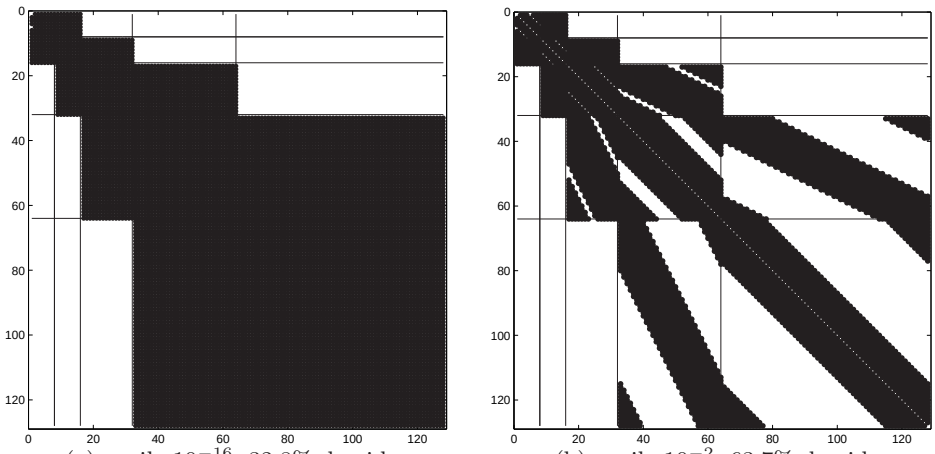
La figure 3.14 représente la matrice des coefficients de connexion de différentiation de l'AMR de Meyer pour différents seuils :

$$\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle (i,j) = 0 \text{ si } |\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle (i,j)| < seuil \tag{3.92}$$

Les fonctions de Meyer étant bien localisées fréquentiellement, la représentation de la matrice des coefficients de connexion de différentiation se rapproche du cas idéal de Fourier, pour lequel la matrice est diagonale. On retrouve (figure 3.14a) les interactions calculées plus haut (paragraphe 3.6.2.1). Quand on sélectionne les coefficients au-dessus d'un certain seuil (figure 3.14b), il apparaît une structure équivalente à la représentation de Haar, mais avec des bandes plus larges : la portée horizontale des interactions est plus grande dans le cas de l'utilisation de l'AMR de Meyer.

3.6.2.3.3 Multirésolution hybride Haar-Meyer

Il est proposé ici une multirésolution hybride Haar-Meyer. Un traitement numérique correct du terme de dérivée horizontal est très important, et le fait est que l'AMR de Meyer donne une approximation de la dérivée **exacte** des fonctions. On essaie ici de garder le traitement Meyer du terme dérivée, tout en manipulant des coefficients de Haar.



(a) seuil=10^{-16}, 32.8% de vide (b) seuil=10^{-2}, 63.7% de vide

FIG. 3.14 – Représentation standard de l'opérateur de dérivation projeté sur l'espace de Meyer pour différents seuils.

D'après l'équation 2.53 et pour l'AMR de Meyer :

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{f_{L-1}^{\Psi}} \end{pmatrix}^t_{Meyer} \langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle^t_{Meyer} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}_{Meyer} \tag{3.93}$$

.

Définissons par MH et HM les **matrices de passage** de la base de Meyer à la base de Haar, et inversement :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}_{Haar} = HM. \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}_{Meyer} \text{ et } \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}_{Meyer} = MH. \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}_{Haar} \tag{3.94}$$

$f(x)$ s'écrit de différentes façons :

$$f(x) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{f_{L-1}^{\Psi}} \end{pmatrix}^t_{Meyer} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}_{Meyer} \tag{3.95}$$

$$\text{et} \qquad f(x) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{f_{L-1}^{\Psi}} \end{pmatrix}^t_{Haar} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}_{Haar} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{f_{L-1}^{\Psi}} \end{pmatrix}^t_{Haar} HM. \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}_{Meyer} . \tag{3.96}$$

Par identification :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{f_{L-1}^{\Psi}} \end{pmatrix}^t_{Meyer} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{f_{L-1}^{\Psi}} \end{pmatrix}^t_{Haar} HM \tag{3.97}$$

Ainsi, l'équation 3.93 devient :

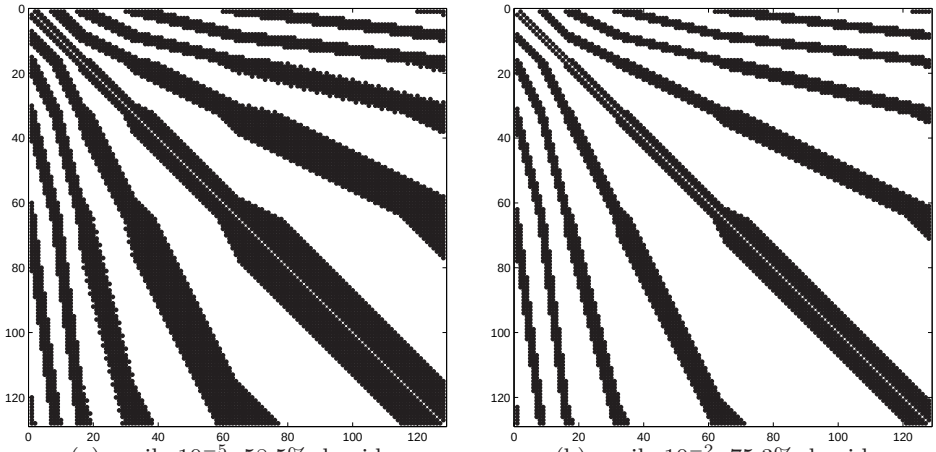
$$f'(x) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{f_{L-1}^{\Psi}} \end{pmatrix}_{Haar}^{t} \left[HM \, \langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle_{Meyer}^{t} MH \right] \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}_{Haar} \tag{3.98}$$

$$= \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_J^{\varphi}} \\ \overrightarrow{f_{L-1}^{\Psi}} \end{pmatrix}_{Haar}^{t} \langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle_{HM} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix}_{Haar} \tag{3.99}$$

On définit une **nouvelle matrice des coefficients de connexion de différentiation** pour l'AMR de Haar

$$\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle_{HM} = HM \, \langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle_{Meyer}^{t} MH, \tag{3.100}$$

qui est en fait la **projection de la matrice de différentiation de Meyer sur la base de Haar**. La représentation standard de $\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle_{HM}$ est donnée figure 3.15.



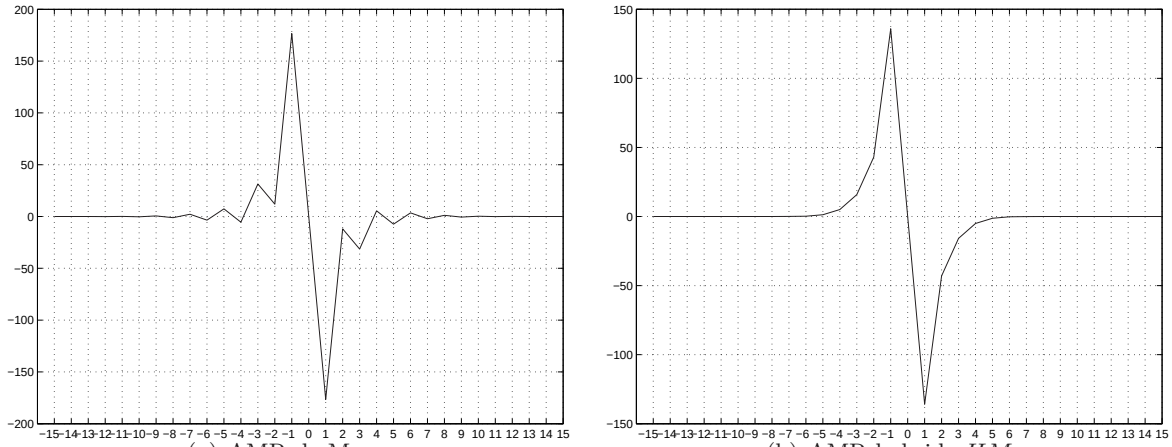
(a) seuil=10^{-5}, 58.5% de vide (b) seuil=10^{-2}, 75.3% de vide

FIG. 3.15 – Représentation standard de l'opérateur de dérivation hybride HM pour deux seuils

La structure de la matrice est intermédiaire entre les structures des matrices de différentiation pour les AMR de Haar et celle de Meyer : les interactions entre échelles sont assez présentes, suivant ainsi l'AMR de Haar. La portée horizontale des interactions est plus grande (bandes plus larges) que pour le cas de Haar, suivant ainsi l'AMR de Meyer. On peut voir sur la figure 3.16 les valeurs des filtres $F_{\psi,\psi}$, pour $j = 6$, pour l'AMR de Meyer et l'AMR hybride "HM".

3.7 Premières analyses multirésolutions des interactions

La nouvelle formulation de l'ETR obtenue par sa décomposition dans un espace multirésolution a fait apparaître des coefficients de connexion, regroupés dans deux composants : le tenseur d'interaction et la matrice de différentiation. Ces composants sont tout à fait généraux, car ils ne dépendent pas du milieu, mais uniquement de l'AMR choisie. Ils fournissent la "liste" donc les mécanismes des interactions. Mais ils ne permettent pas de deviner si ces interactions ont lieu ou non. Ce seront les coefficients d'ondelette et d'échelle du milieu, autrement dit les hétérogénéités du milieu aux différentes échelles, qui décideront des interactions.



(a) AMR de Meyer (b) AMR hybride HM

FIG. 3.16 – Filtre $\digamma_{\psi,\psi}$ pour $j = 6$

Après avoir étudié les interactions élémentaires fondamentales pour comprendre les interactions entre échelles en jeu dans les processus radiatifs, nous analysons dans cette section les interactions locales entre les échelles et leurs mécanismes. Ceci afin de répondre aux questions suivantes : comment un champ de rayonnement est-il perturbé lors de son interaction avec un milieu ? Quel est le rapport entre les fluctuations du milieu et celles du champ de rayonnement ? Pouvons-nous décrire clairement l'effet des petites échelles sur les échelles plus grossières ? Cette analyse des mécanismes des interactions entre échelles va faire apparaître la notion d'efficacité d'interaction, de sources additionnelles dues aux hétérogénéités sous-pixel, dont on peut, pour des cas simples, intuiter le signe. Ce dernier point est l'objet de la partie 3.7.3 qui souligne l'importance de l'hypothèse d'homogénéité verticale du milieu nuageux.

3.7.1 Analyse des interactions locales entre les échelles

3.7.1.1 Perturbations du champ de rayonnement lors de son interaction avec le milieu.

Il s'agit d'analyser ici à quelles fluctuations donne naissance l'interaction d'une fluctuation élémentaire du rayonnement incident par le milieu, et comment le champ de rayonnement est perturbé. Les interactions entre échelles sont abordées du point de vue de l'opérateur effectif d'interaction noté $\underset{\alpha\,\Psi_2,\Psi_3}{T}$ au paragraphe 3.5.1.2. Cet opérateur agit sur le champ de rayonnement incident pour produire un champ de rayonnement résultant de l'interaction :

$$\underset{\alpha\,\Psi_2,\Psi_3}{T} \;:\; N_{\text{incident}} \longrightarrow N_{\text{résultant}} \tag{3.101}$$

On distingue ici la fluctuation de type fonction d'échelle et de type ondelette, et on discute de la position du tenseur dans l'équation (terme source ou terme puits). Pour se représenter les choses, on adopte la schématisation des fluctuations élémentaires de Haar déjà utilisée dans la figure 3.5, et on note A les fluctuations de type fonction d'échelle et D celles de type ondelette.

3.7.1.1.1 Devenir d'une fluctuation de type A (fonction d'échelle)

Suite à l'interaction d'une fluctuation de type A du champ incident avec les fluctuations du

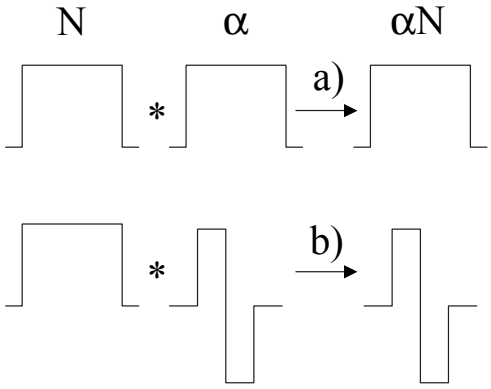


FIG. 3.17 – Résultat de l'interaction : fluctuation incidente de type A

milieu (fig. 3.17), il est créé des fluctuations de type A , et de type D à la même échelle que celle de la fluctuation élémentaire du milieu.

Le cas $3.17A_a$ conduit à une extinction de la fluctuation A quand le tenseur est positionné dans le terme puits, et une production de fluctuation A vers toutes les directions de diffusion données par la fonction de phase, quand le tenseur est positionné dans le terme source diffusif.

Il y a **réplique des hétérogénéités du milieu** (cas $3.17A_b$) dans le champ résultant. Quand le tenseur est positionné dans le terme puits, la réplique est accompagnée d'un signe négatif, sinon, la réplique est de même signe.

3.7.1.1.2 Devenir d'une fluctuation de type D (ondelette)

L'interaction d'une fluctuation de type D du champ incident avec le milieu provoque l'**apparition de toute la gamme des fluctuations** dans le champ résultant pour peu que le milieu soit fluctuant à différentes échelles (fig. 3.18).

Notons que si le tenseur est positionné dans le terme puits, il y a concurrence entre les interactions cas $3.18D_a$ (extinction), cas $3.18D_b$ (production) et cas $3.17A_b$ (production) pour diminuer ou augmenter la fluctuation de type D.

Le cas $3.18D_c$ est particulièrement important : par ce mécanisme (qui fait interagir deux fluctuations de même échelle) et c'est le seul, une fluctuation de type D est à l'origine de fluctuations à plus grande échelle, et en particulier de type A dans le champ résultant.

3.7.1.2 Action des fluctuations du milieu

Le point de vue que l'on adopte ici est différent : c'est celui des relations entre l'hétérogénéité du milieu et le champ de rayonnement résultant de l'interaction, ou des mécanismes créant la corrélation des deux champs. Il suffit pour cela d'intervertir les fluctuations des champs N et α dans les schémas ci-dessus.

3.7.1.2.1 Effet d'une fluctuation du milieu de type A (fonction d'échelle)

Il y a réplique de fluctuations du champ de rayonnement incident (fig. 3.19). Si le tenseur est positionné dans le terme puits, il y a extinction des fluctuations de N proportionnellement à l'extinction moyenne du milieu ; s'il est dans le terme source, il y a création dans les directions

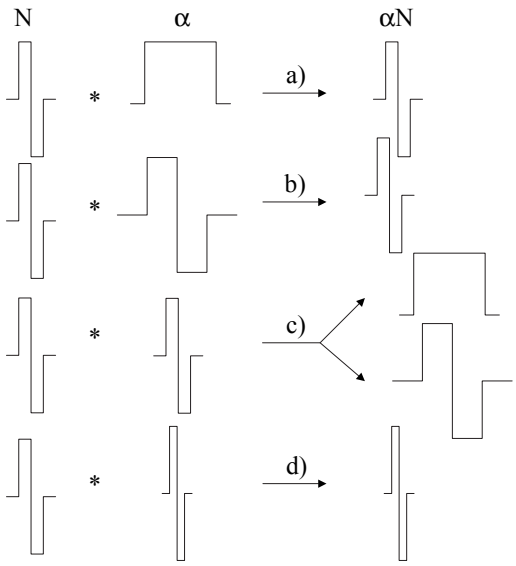


FIG. 3.18 – Résultat de l'interaction : fluctuation incidente de type D

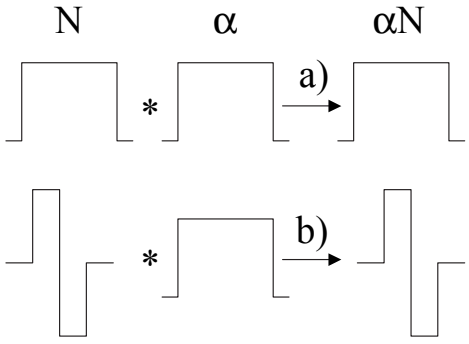


FIG. 3.19 – Résultat de l'interaction : fluctuation du milieu de type A

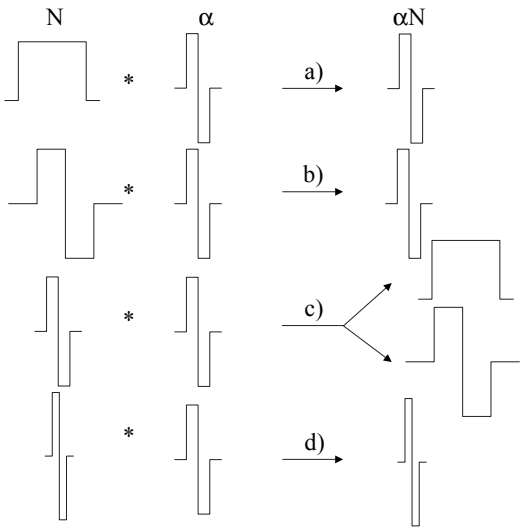


FIG. 3.20 – Résultat de l'interaction : fluctuation du milieu de type D

$\overrightarrow{\Omega'}$ des fluctuations existantes dans le champ incident. C'est l'extinction et la diffusion dans le sens "classique" du champ de rayonnement incident par le milieu.

3.7.1.2.2 Effet d'une fluctuation du milieu de type D (ondelette)

Chaque échelle des fluctuations de type D peut affecter l'ensemble des échelles du champ de rayonnement (fig. 3.20). L'interaction avec les fluctuations à grande échelle du champ de radiance provoque la réplique de la fluctuation D (cas 3.20a et b). L'interaction avec des fluctuations de même échelle provoquent la création dans le champ résultant de fluctuations à plus grande échelle (cas 3.20c). Enfin, le cas 3.20d correspond à la réplique dans le champ résultant des fluctuations à petite échelle du champ incident.

3.7.2 Mécanismes des interactions entre les échelles

Gardons à l'esprit que ces mécanismes ont un caractère local. Dans la plupart des AMR, il y a recouvrement des ondelettes $\psi_{j,k}$ avec k variable ; une information sur la portée horizontale des interactions se trouve dans le tenseur des interactions. Dans le cas de l'AMR de Haar, il n'y a pas recouvrement des ondelettes, et le caractère local des interactions est renforcé. Hormis cette décroissance rapide du tenseur d'interaction en fonction des positions des fluctuations, les effets des fluctuations avoisinant une fluctuation "centrale" sont représentés dans la matrice des coefficients de différentiation, et la portée des interactions est définie par la largeur des bandes de la matrice. Dans le cas de l'AMR de Haar, seuls les deux pixels voisins sont pris en compte.

3.7.2.1 Bilan sur les interactions entre les échelles

On distingue deux types d'interactions entre échelles :
– les interactions où les deux fluctuations élémentaires qui interagissent sont des fonctions d'échelle.

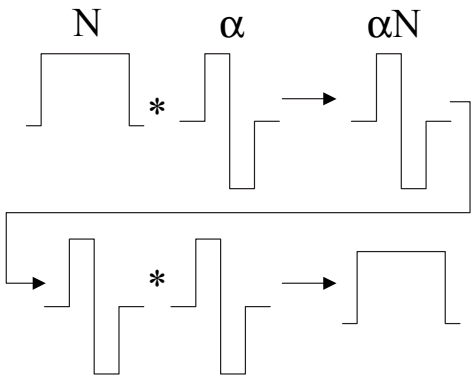


FIG. 3.21 – Remontée d'énergie dans les échelles en deux étapes

– les interactions complexes faisant intervenir des fluctuations de type ondelette qui provoquent de nombreuses interactions entre les échelles des hétérogénéités. En particulier, la présence d'hétérogénéités dans le champ nuageux à différentes échelles provoquent l'apparition de fluctuations à ces mêmes échelles dans le champ de rayonnement résultant (fig. 3.17b), et chaque échelle de fluctuations du champ nuageux perturbe l'ensemble des fluctuations A et D (fig. 3.20) ; en particulier l'interaction entre deux fluctuations de même échelle provoque une remontée d'énergie dans les échelles.

Grossièrement, les interactions provoquent la **réplique des hétérogénéités du milieu** dans le champ de rayonnement, puis ces interactions "parentes" interagissent entre elles, provoquant la production de fluctuation de type A à partir de fluctuations de type D. C'est dans ce couplage entre les échelles que nous venons de décrire que se définit le **caractère non-linéaire du transfert radiatif en milieu hétérogène**.

3.7.2.2 Source additionnelle due aux hétérogénéités sous-pixel

Par source additionnelle, nous entendons la présence de coefficients d'échelle dans le champ de rayonnement résultant qui ne seraient pas apparus si le milieu n'était pas fluctuant aux échelles inférieures à celle des pixels d'approximation, autrement dit, si les coefficients d'ondelettes $\langle \alpha, \psi_1 \rangle$ étaient tous nuls.

3.7.2.2.1 "Cascade inverse d'énergie" en deux étapes

On ne considère ici que le cas b) des interactions de la figure 3.5, mais le raisonnement peut être tenu avec l'interaction correspondant au cas c). Ces interactions entre échelles définissent une "cascade inverse d'énergie" en deux étapes (fig. 3.21) : supposons que le rayonnement incident soit homogène. En première étape, l'interaction avec le milieu hétérogène crée des hétérogénéités jumelles dans le champ (cas b) de la figure 3.17). Dans le champ atténué (direction de propagation), ces hétérogénéités créées sont de signe opposé. Dans le champ diffus résultant de cette interaction, les hétérogénéités créées sont de même signe. Dans une deuxième étape, ces hétérogénéités créées interagissent à leur tour avec les hétérogénéités du milieu (cas c) de la figure 3.20) : le résultat est la production de fluctuations de type fonction d'échelle.

La présence de fluctuations à petite échelle dans le champ nuageux suffit donc à produire en deux interactions une remontée d'énergie de cette échelle vers l'échelle du pixel d'ap-

proximation (fig. 3.21). Ce mécanisme basé sur l'interaction de deux ondelettes de même échelle 2^{-j} avec $j \geq J$, est à l'origine d'une **source additionnelle de rayonnement à l'échelle** 2^{-J} du pixel d'approximation due aux interactions non-linéaires sous-pixel : si on néglige ces interactions à petite échelle, on néglige cette source additionnelle. Il faut noter que si les hétérogénéités du milieu rencontrées dans les deux étapes sont de même signe, la source additionnelle créée est de signe positive dans le champ réduit, et négative dans le champ diffus induit. Nous reviendrons plus loin sur cet aspect.

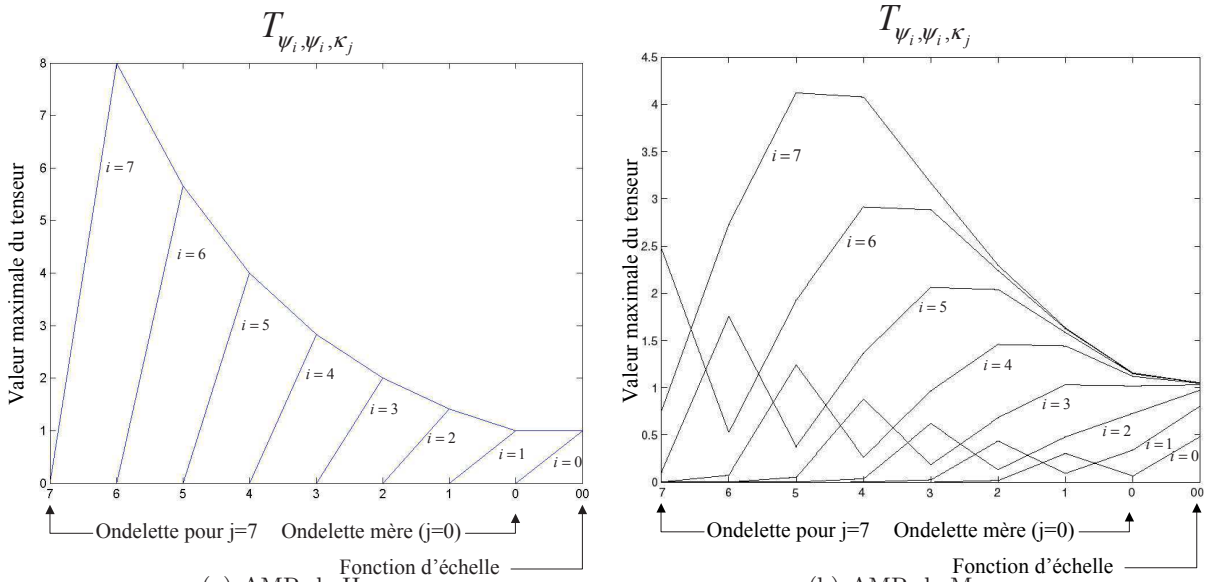
Le vocabulaire employé (cascade inverse d'énergie) est un peu "provocateur", en tous cas pour ceux qui étudient la turbulence. Le mot *cascade* est en effet réservé et traditionnellement associé à la description phénoménologique de la turbulence par Richardson ; cette cascade transfère l'énergie des grandes vers les petites échelles. Quand il s'agit de transfert d'énergie des petites vers les grandes échelles, la communauté de la turbulence préfère parler de "backscattering" d'énergie, mais le terme est source d'ambiguïté dans le domaine du transfert radiatif. Ce qui est proposé ici est bien une tentative de description phénoménologique de la remontée d'énergie dans les échelles dans les processus de transfert radiatif en milieu hétérogène.

3.7.2.2.2 Efficacité d'interaction

On rappelle ici les valeurs des coefficients de connexion pour l'AMR de Haar données au paragraphe 3.6.1.1 :

$$\begin{array}{l} a) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{J,k}(x)\varphi_{J,k}(x)\overline{\varphi_{J,k}}(x)dx = 2^{\frac{J}{2}} \\ b) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j_1,k_1}(x)\psi_{j_1,k_1}(x)\overline{\psi_{j_3,k_3}}(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} 2^{\frac{j_3}{2}} \\ -2^{\frac{j_3}{2}} \end{array} \right. \text{ avec } j_3 < j_1 \\ c) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j_1,k_1}(x)\psi_{j_1,k_1}(x)\overline{\varphi_{J,k_3}}(x)dx = 2^{\frac{J}{2}} \end{array} \tag{3.102}$$

Il est à noter qu'il n'y a pas d'échelles d'hétérogénéité privilégiées dans ce mécanisme de remontée d'énergie : en effet, $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j_1,k_1}(x)\psi_{j_1,k_1}(x)\overline{\varphi_{J,k_3}}(x)dx = 2^{\frac{J}{2}}$, $\forall j_1 \geq J$. La valeur du tenseur de connexion ($2^{\frac{J}{2}}$) peut être comprise comme l'**efficacité de l'interaction**. Cette efficacité est indépendante de j_1. Donc les différentes échelles des hétérogénéités nuageuses ont la même capacité d'interaction sur les grandes échelles. Ce mécanisme d'interaction entre échelles n'est pas plus efficace que le mécanisme d'interaction entre les fluctuations à l'échelle des fonctions d'échelle (cas a). Dans le cas de l'AMR de Meyer, les efficacités d'interaction ont également ce caractère d'invariance d'échelle. Les figures 3.22 montrent les valeurs maximales des coefficients de connexion d'interaction pour les situations de remontée d'énergie entre échelles $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i(x)\psi_i(x)\overline{\psi_j}(x)dx$ (avec $J \leq j$ et $J \leq i$ pour l'AMR de Haar, et $J \leq j \leq i$ pour l'AMR de Meyer) , et $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i(x)\psi_i(x)\overline{\varphi_J}(x)dx$ (avec $J \leq i$). La convergence des courbes vers le point le plus à droite et d'ordonnée 1 confirme que pour l'AMR de Haar et de Meyer, la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i(x)\psi_i(x)\overline{\varphi_J}(x)dx$ est indépendante de l'échelle i. Pour l'AMR de Meyer, contrairement à l'AMR de Haar, l'interaction produisant une ondelette ψ_j à partir de deux ondelettes ψ_i à plus petite échelle dépend de l'échelle i, et l'efficacité d'interaction est maximum pour $i - j = 2$ et $i - j = 3$. On peut constater la ressemblance de ces courbes.



(a) AMR de Haar (b) AMR de Meyer

FIG. 3.22 – Efficacité d'interaction pour les situations de remontée d'énergie dans les échelles. Les différentes courbes correspondent aux différentes échelles pour l'ondelette ψ_i . κ_j est soit une ondelette (indicée de 7 à 0), soit une fonction d'échelle (indicée 00).

Généralement, le spectre d'énergie des signaux d'épaisseur optique ou de contenu en eau nuageux est en loi puissance $S(k) \sim k^{-\beta}$ avec $\beta \in (1.2, 1.7)$. L'énergie décroît donc assez rapidement dans les échelles. Les coefficients en ondelettes du milieu varient comme $2^{-\frac{j\beta}{2}}$. En deux étapes, une source additionnelle est créée d'ordre de grandeur $(2^{\frac{J}{2}})^2(2^{-\frac{j\beta}{2}})^2$. Les deux facteurs interviennent au carré car :

- le tenseur d'interaction (efficacité : $2^{\frac{J}{2}}$) intervient deux fois,
- le coefficient d'ondelette créé dans le champ résultant (première étape) est de l'ordre de grandeur $2^{-\frac{j\beta}{2}}$, et cette fluctuation agit à son tour avec une ondelette présente à la même échelle.

La source additionnelle est donc d'ordre de grandeur $2^{J-j\beta}$.

Si on simule le transfert radiatif sur un nuage de type bruit blanc qui a autant d'énergie à petite qu'à grande échelle ($\beta = 0$), les sources créées seront très énergétiques (2^J) d'autant plus que chaque échelle contribuera à cette source avec la même efficacité. On comprend ainsi que les hétérogénéités à toutes les échelles d'un champ nuageux perturbent fortement les valeurs à grande échelle des flux et radiances résultants, et que deux milieux très différents à petite échelle produisent des quantités radiatives globales très différentes.

Ceci étant dit, si l'efficacité d'interaction des petites échelles j sur les grandes échelles est indépendante de j, les processus radiatifs d'interaction entre échelles ne sont pas invariants d'échelles. Quand l'échelle des fluctuations est inférieure au libre parcours moyen local des photons, qui dépend de la position dans le nuage et de la direction du rayonnement, la remontée d'énergie dans les échelles sera plus faible. Un changement de comportement à l'échelle où le support de l'ondelette passe par le libre parcours moyen des photons est à étudier dans le cadre de travaux sur le transfert radiatif 3D. Des études futures dans cette direction sont certainement nécessaires.

3.7.3 Importance de l'hypothèse d'homogénéité verticale

Les mécanismes de remontée d'énergie dans les échelles en deux étapes décrits plus haut produisent des sources additionnelles. Nous avons déjà vu (paragraphe 3.7.2.2.1) qu'en fonction du terme de l'ETR que nous considérons, terme représentant l'extinction du rayonnement incident, ou terme représentant la source de diffusion, la réplique de l'hétérogénéité du milieu dans le champ est de signe différent. Nous allons ici un peu plus loin et étudions les conséquences de l'hypothèse d'homogénéité verticale du milieu, souvent considérée dans les calculs radiatifs. Ou plus généralement de l'hypothèse de **corrélation (verticale) des hétérogénéités nuageuses** le long de la propagation du rayonnement. Par corrélation, nous entendons ici "quand le signe des coefficients d'ondelettes de la fluctuation horizontale d'épaisseur optique est inchangé le long de la propagation du rayonnement". Considérant un éclairement vertical, il s'agit donc ici de corrélation verticale. Dans le cas particulier d'une hypothèse d'homogénéité verticale, les coefficients d'ondelettes sont non seulement de même signe, mais ils sont de plus égaux.

Considérons l'éclairement par un flux direct vertical et homogène d'un nuage hétérogène horizontalement et homogène verticalement, et considérons un schéma diffusif simple à deux flux (le milieu diffuse le rayonnement verticalement, soit vers le haut, soit vers le bas). Le problème est donc à une dimension.

Etudions l'extinction du flux direct. On a vu le mécanisme de la remontée d'énergie dans les échelles. En première étape, des fluctuations de même échelle que celles rencontrées dans le milieu sont créées dans le champ radiatif (fig. 3.21a), et elles sont de signe opposé $(-(+*+) \rightarrow -)$. En deuxième étape, et puisque qu'il y a corrélation des hétérogénéités nuageuses, les deux fluctuations interagissantes de même échelle sont de signes opposés. Une fluctuation de type fonction d'échelle est créée (fig. 3.21b) et elle est positive $(-(+*-) \rightarrow +)$. Des sources additionnelles, conséquences de la présence d'hétérogénéité horizontale dans le champ nuageux, sont donc créées dans le champ réduit, à chaque endroit dans le nuage où le mécanisme en deux étapes peut se produire. La **source additionnelle** dans le flux direct atténué est **positive** : si on la néglige, on sous-estime le flux transmis. Ceci est l'illustration de l'inégalité de Jensen due à la convexité des réponses radiatives : **on sous-estime systématiquement le flux direct transmis dans un calcul plan-parallèle**. Par la suite, le calcul ne prenant pas en compte les hétérogénéités nuageuses sous-pixel est appelé calcul *à l'échelle.*

On trouvera dans l'annexe E le détail d'un calcul analytique à l'aide de l'AMR de Haar, et pour un cas d'école. Ce calcul montre que les sources additionnelles dans le rayonnement transmis et dans l'absorption par le milieu sont respectivement systématiquement positives et négatives.

Raisonnons maintenant par rapport au flux diffusé une fois. La première étape crée des fluctuations de même échelle que celles rencontrées et de même signe (terme source diffusif)$(+(+*+) \rightarrow +)$. S'il y a homogénéité verticale des fluctuations, une **source additionnelle de signe négatif** (terme puits) sera créée lors de la deuxième étape $(-(+*+) \rightarrow -)$. De même que pour le flux direct atténué, à chaque endroit dans le nuage où le mécanisme en deux étapes peut se produire, des sources d'ordre de diffusion un, de signe négatif, sont créées. On **surestime** donc **systématiquement la diffusion simple dans un calcul plan-parallèle** (diffusion aussi bien vers le haut que vers la bas).

On pourrait poursuivre ce raisonnement simple et décrire des mécanismes qui conduisent à des sources systématiquement de même signe en fonction de l'ordre de diffusion. Nous verrons au chapitre 5 qu'on retrouve numériquement ces tendances : des sources dues aux interactions sous-pixel positives dans le flux direct transmis, des sources de signe négatif pour la diffusion simple, et de signes variables en fonction des ordres de diffusion plus élevés. Des études plus

poussées doivent être menées pour analyser l'effet des hétérogénéités verticales.

Manipuler qualitativement des coefficients en ondelettes et retrouver des résultats connus est rassurant. On a retrouvé ici l'importance des couvertures fractionnaires en transfert radiatif, ou des trous dans les nuages, et l'inadéquation de calcul "plan-parallèle" pour ce type d'hétérogénéité. En effet, un trou dans un nuage se construit avec des coefficients en ondelettes non nuls aux bords des trous et alignés verticalement (illustration figure 3.23). En éclairement vertical, il y a corrélation parfaite de ces coefficients le long de la propagation du rayonnement ; et dans ce cas, les sources additionnelles dues à la présence de trous sont importantes car toutes de même signe.

Afin d'illustrer un peu plus cet aspect qualitatif, **prenons l'exemple numérique suivant :** on calcule la transmission d'un rayonnement solaire vertical et homogène à travers une couverture nuageuse périodique de période 6.4 km et d'épaisseur 2.5 km, dont le coefficient d'extinction varie comme sur la figure 3.23a : le coefficient d'extinction vaut $1\,\mathrm{km}^{-1}$ quand la couverture nuageuse est présente, soit une épaisseur optique de 2.5, et 0 bien sûr à l'endroit du trou dans le nuage. Supposons que le nuage n'a que la propriété d'absorber le rayonnement. Le flux transmis *à l'échelle* correspond à la transmission à travers un nuage équivalent (fig. 3.23b) dont le coefficient d'extinction est constant par morceaux. Les propriétés optiques de cette couverture nuageuse auraient été mesurées par un satellite performant, mais dont le point faible est son pixel de résolution de $6.4 * 2^{-3} = 800$ m (on oublie ici la deuxième dimension horizontale). On voit sur la figure 3.24 les flux transmis qu'on obtient pour cette simulation : le flux transmis vrai, le flux transmis *à l'échelle*, et la source additionnelle due aux interactions sous-pixel. Dans ce cas, la source additionnelle est positive. Les résultats numériques sont donnés dans le tableau 3.1. Le flux vrai maximum correspond au calcul avec la vraie distribution des propriétés optiques. La source additionnelle, due à l'effet des hétérogénéités sous-pixel, est comptée à l'échelle des pixels de 800 m. Le flux vrai moyen correspond à la somme des flux transmis *à l'échelle* et de la source additionnelle. Le résultat numérique est donné dans le tableau 3.1.

	pixel 4	pixel 5
Flux transmis *à l'échelle*	0.515	0.458
Flux vrai maximum	1	1
Flux moyen vrai	0.756	0.713
Source additionnelle	0.241	0.255

TAB. 3.1 – Différents flux transmis à travers le nuage "trou".

Ainsi, en considérant le nuage équivalent basse résolution (fig. 3.23b) :
- on sous-estime le flux transmis à l'échelle des pixels de 800 m. L'erreur est de près de 32% pour le pixel 4, et de 36 % pour le pixel 5,
- on ne voit pas que le flux transmis atteint la valeur de l'unité sur une distance horizontale de près de 1 km.

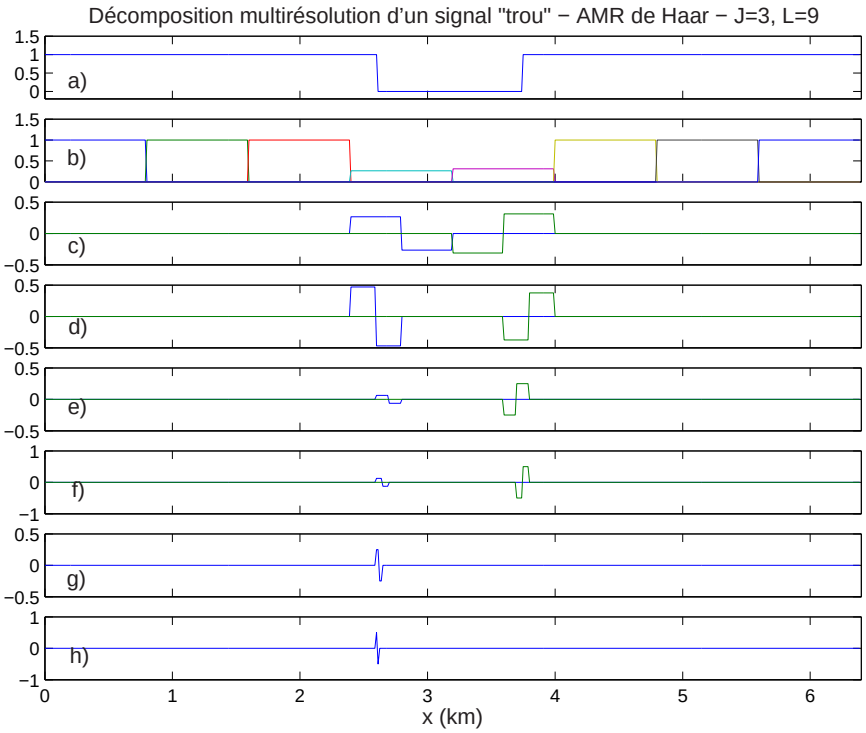


FIG. 3.23 – Décomposition multirésolution de type Haar d'un signal " trou". On visualise le signal (a), puis sa décomposition en ondelettes : l'approximation à l'échelle ($J = 3$) (b), et les détails aux différentes échelles ((b) à (h)). Le trou dans le nuage est réalisé quand les coefficients d'ondelette non nuls sont alignés verticalement.

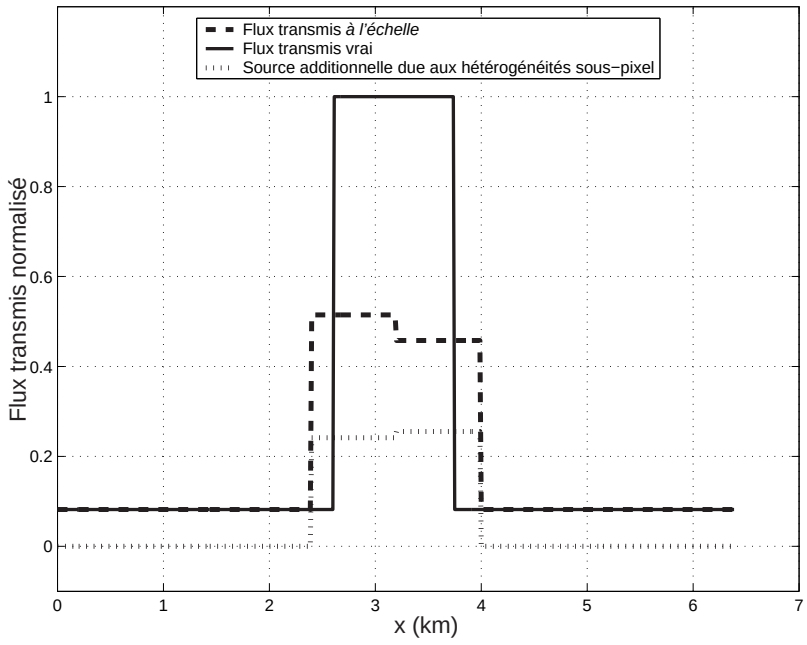


FIG. 3.24 – Transmission à travers la couverture nuageuse éparse

3.8 Formalisation multirésolution du transfert radiatif en milieu hétérogène

Nous revenons ici aux nouvelles formulations de l'ETR obtenue au paragraphe 3.5.1.1.

L'équation 3.58 a été écrite pour chaque fluctuation élémentaire de la fonction radiance ; l'équation a pour inconnue $\left\langle \widetilde{N}^k, \Psi_3 \right\rangle (z, \mu)$, l'un des coefficients d'échelle ou d'ondelettes du vecteur $\begin{pmatrix} \overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\varphi}}_J \\ \overrightarrow{\widetilde{N^k}^{\Psi}}_{L-1} \end{pmatrix}$. L'intérêt de cette écriture détaillée est de distinguer les natures différentes des interactions élémentaires à l'origine du gradient vertical de la fluctuation Ψ_3 dans la direction μ : les interactions entre les fonctions d'échelle des deux champs – interactions dîtes *à l'échelle*, et les interactions entre ondelettes, à l'origine de sources additionnelles dues à l'effet des hétérogénéités du milieu aux petites échelles à une plus grande échelle.

L'ETR multirésolution peut également être écrite sous une forme matricielle comme dans l'équation 3.59 en manipulant non plus l'un des coefficients du vecteur ci-dessus mais le vecteur entier. Cette écriture plus compacte est intéressante si l'on veut simplement résoudre par la méthode de Galerkin-Ondelette l'ETR. Elle peut conduire de façon assez directe à un code de calcul qui manipule des tableaux de coefficients d'échelle et d'ondelette des champs. Mais avec cette écriture matricielle, on s'éloigne de l'objectif fixé, qui est la mise en lumière des interactions entre échelles dans les processus radiatifs, leur quantification et pourquoi pas leur paramétrisation.

Nous préférons donc ici séparer l'ETR à l'échelle de la fonction d'échelle et aux échelles plus fines et l'écrire de façon explicite. Comme la fonction d'échelle donne la "moyenne" à une certaine échelle des champs, nous employons dorénavant les terme de pixel et de sous-pixel pour qualifier l'échelle à laquelle on écrit l'équation, se référant ainsi aux images de nuages prises depuis des radiomètres satellisés. Dans le cas de Haar, cette terminologie est bien adaptée ; elle l'est moins pour d'autres AMR où les "moyennes" qu'elles proposent sont loin de la moyenne au sens classique.

Il apparaît dans chacune des équations des **termes de couplage entre les échelles**, en particulier les sources additionnelles déjà citées et étudiées dans la partie précédente. On fait ici le lien avec la décomposition de Reynolds.

3.8.1 Transfert radiatif à l'échelle des "pixels" d'approximation

Nous utilisons les mêmes symboles que précédemment :

Quand Ψ_i est une fonction d'échelle, $\sum_i$ signifie $\sum_{k=0}^{2^J-1}$. Quand Ψ_i est une ondelette, $\sum_i$ signifie $\sum_{j=J}^{L-1} \sum_{k=0}^{2^j-1}$.

$\mu^{\pm}$ représentent les directions montantes (μ^+) et descendantes (μ^-).

$$
\begin{aligned}
&\mu^{\pm}\frac{\partial\left\langle \tilde{N}^{k}\left(z,\mu^{\pm}\right),\varphi_{3}\right\rangle}{\partial z}\\
&=-\sum_{1}\sum_{2}\left\langle \alpha,\varphi_{1}\right\rangle T_{\varphi_{1},\varphi_{2},\varphi_{3}}\left\langle \tilde{N}^{k}\left(z,\mu^{\pm}\right),\varphi_{2}\right\rangle\\
&-\eta\tilde{Q}\sum_{1}\left\langle \delta\varphi_{1},\varphi_{3}\right\rangle\left\langle \tilde{N}^{k}\left(z,\mu^{\pm}\right),\varphi_{1}\right\rangle\\
&+\left(1-\delta_{k,1}\right)\frac{\widetilde{\omega}_{0}}{4}\sum_{1}\sum_{2}\left\langle \alpha,\varphi_{1}\right\rangle T_{\varphi_{1},\varphi_{2},\varphi_{3}}\int_{0}^{1}\tilde{P}\left(\mu^{\pm},\mu'^{+}\right)\left\langle \tilde{N}^{k-1}\left(z,\mu'^{+}\right),\varphi_{2}\right\rangle d\mu'^{+}\\
&+\left(1-\delta_{k,1}\right)\frac{\widetilde{\omega}_{0}}{4}\sum_{1}\sum_{2}\left\langle \alpha,\varphi_{1}\right\rangle T_{\varphi_{1},\varphi_{2},\varphi_{3}}\int_{-1}^{0}\tilde{P}\left(\mu^{\pm},\mu'^{-}\right)\left\langle \tilde{N}^{k-1}\left(z,\mu'^{-}\right),\varphi_{2}\right\rangle d\mu'^{-}\\
&+\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_{0}}{4}\sum_{1}\sum_{2}\left\langle \alpha,\varphi_{1}\right\rangle T_{\varphi_{1},\varphi_{2},\varphi_{3}}\tilde{P}^{dir}\left\langle f_{\nu}\left(z,\mu_{\odot}\right),\varphi_{2}\right\rangle\\
&+T_{1}^{\psi\varphi}\left(\mu^{\pm}\right)+T_{2}^{\varphi\psi}\left(\mu^{\pm}\right)+T_{3}^{\psi\psi}\left(\mu^{\pm}\right)+S^{\psi}\left(\mu^{\pm}\right)
\end{aligned}
\tag{3.103}
$$

Les cinq premiers termes de la partie droite de l'équation 3.103 dépendent uniquement de la fonction d'échelle. On peut considérer qu'ils représentent l'ETR à l'échelle des pixels d'approximation (de taille de l'ordre de 2^{-J}) définis par les fonctions d'échelle $\varphi_{J,k}$ de l'AMR utilisée.

Les trois termes additionnels $T_1^{\psi\varphi}\left(\mu^{\pm}\right), T_2^{\varphi\psi}\left(\mu^{\pm}\right), T_3^{\psi\psi}\left(\mu^{\pm}\right)$ représentent les contributions à la dérivée verticale de la fonction radiance à l'échelle du pixel, des interactions entre α et $\tilde{N}^k$ réalisant un couplage entre les échelles.

Le premier terme représente l'interaction des fluctuations sous-pixel du coefficient d'extinction avec les fluctuations à l'échelle du pixel de la fonction radiance.

$$
\begin{aligned}
T_{1}^{\psi\varphi}\left(\mu^{\pm}\right)&=-\sum_{1}\sum_{2}\left\langle \alpha,\psi_{1}\right\rangle T_{\psi_{1},\varphi_{2},\varphi_{3}}\left\langle \tilde{N}^{k}\left(z,\mu^{\pm}\right),\varphi_{2}\right\rangle\\
&+\frac{\widetilde{\omega}_{0}}{4}\left[\begin{array}{l}\sum_{1}\sum_{2}\left\langle \alpha,\psi_{1}\right\rangle T_{\psi_{1},\varphi_{2},\varphi_{3}}\int_{0}^{1}\tilde{P}\left(\mu^{\pm},\mu'^{+}\right)\left\langle \tilde{N}^{k-1}\left(z,\mu'^{+}\right),\varphi_{2}\right\rangle d\mu'^{+}\\ \sum_{1}\sum_{2}\left\langle \alpha,\psi_{1}\right\rangle T_{\psi_{1},\varphi_{2},\varphi_{3}}\int_{0}^{1}\tilde{P}\left(\mu^{\pm},\mu'^{-}\right)\left\langle \tilde{N}^{k-1}\left(z,\mu'^{-}\right),\varphi_{2}\right\rangle d\mu'^{-}\end{array}\right]\\
&+\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_{0}}{4}\sum_{1}\sum_{2}\left\langle \alpha,\psi_{1}\right\rangle T_{\psi_{1},\varphi_{2},\varphi_{3}}\tilde{P}^{dir}\left\langle f_{\nu}\left(z,\mu_{\odot}\right),\varphi_{2}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{3.104}
$$

Le second terme représente l'interaction des fluctuations à l'échelle du pixel du coefficient d'extinction avec les fluctuations sous-pixel de la fonction radiance.

$$
\begin{aligned}
T_{2}^{\varphi\psi}\left(\mu^{\pm}\right)&=-\sum_{1}\sum_{2}\left\langle \alpha,\varphi_{1}\right\rangle T_{\varphi_{1},\psi_{2},\varphi_{3}}\left\langle \tilde{N}^{k}\left(z,\mu^{\pm}\right),\psi_{2}\right\rangle\\
&+\frac{\widetilde{\omega}_{0}}{4}\left[\begin{array}{l}\sum_{1}\sum_{2}\left\langle \alpha,\varphi_{1}\right\rangle T_{\varphi_{1},\psi_{2},\varphi_{3}}\int_{0}^{1}\tilde{P}\left(\mu^{\pm},\mu'^{+}\right)\left\langle \tilde{N}^{k-1}\left(z,\mu'^{+}\right),\psi_{2}\right\rangle d\mu'^{+}\\ \sum_{1}\sum_{2}\left\langle \alpha,\varphi_{1}\right\rangle T_{\varphi_{1},\psi_{2},\varphi_{3}}\int_{0}^{1}\tilde{P}\left(\mu^{\pm},\mu'^{-}\right)\left\langle \tilde{N}^{k-1}\left(z,\mu'^{-}\right),\psi_{2}\right\rangle d\mu'^{-}\end{array}\right]\\
&+\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_{0}}{4}\sum_{1}\sum_{2}\left\langle \alpha,\varphi_{1}\right\rangle T_{\varphi_{1},\psi_{2},\varphi_{3}}\tilde{P}^{dir}\left\langle f_{\nu}\left(z,\mu_{\odot}\right),\psi_{2}\right\rangle
\end{aligned}
\tag{3.105}
$$

Le troisième terme représente l'interaction des fluctuations sous-pixel du coefficient d'extinction avec les fluctuations sous-pixel de la fonction radiance.

$$\begin{aligned} T_3^{\psi\psi}\left(\mu^{\pm}\right) = & -\sum_1\sum_2 \langle \alpha,\psi_1\rangle\, T_{\psi_1,\psi_2,\varphi_3} \left\langle \tilde{N}^k\left(z,\mu^{\pm}\right),\psi_2\right\rangle \\ & + \frac{\widetilde{\omega}_0}{4}\left[\begin{array}{l} \sum_1\sum_2 \langle \alpha,\psi_1\rangle\, T_{\psi_1,\psi_2,\varphi_3} \int_0^1 \tilde{P}\left(\mu^{\pm},\mu'^{+}\right)\left\langle \tilde{N}^{k-1}\left(z,\mu'^{+}\right),\psi_2\right\rangle d\mu'^{+} \\ \sum_1\sum_2 \langle \alpha,\psi_1\rangle\, T_{\psi_1,\psi_2,\varphi_3} \int_0^1 \tilde{P}\left(\mu^{\pm},\mu'^{-}\right)\left\langle \tilde{N}^{k-1}\left(z,\mu'^{-}\right),\psi_2\right\rangle d\mu'^{-} \end{array}\right] \\ & + \delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_0}{4}\sum_1\sum_2 \langle \alpha,\psi_1\rangle\, T_{\psi_1,\psi_2,\varphi_3}\tilde{P}^{dir}\left\langle f_\nu\left(z,\mu_\odot\right),\psi_2\right\rangle \end{aligned} \tag{3.106}$$

Le quatrième terme additionnel $S^{\psi}\left(\mu^{\pm}\right)$ représente la contribution de la dérivée horizontale des ondelettes à la fonction radiance à l'échelle du pixel :

$$S^{\psi}\left(\mu^{\pm}\right) = -\eta\tilde{Q}\sum_1 \langle \delta\psi_1,\varphi_3\rangle \left\langle \tilde{N}^k\left(z,\mu^{\pm}\right),\psi_1\right\rangle \tag{3.107}$$

La présence de ce terme de couplage n'est pas dû aux hétérogénéités du milieu. En effet, le terme dérivée horizontal produit des fluctuations de type ondelette même si le milieu est homogène, ceci afin d'assurer un décalage horizontal de la fonction radiance en accord avec sa direction de propagation $\overrightarrow{\Omega}$.

L'écriture ci-dessus est très générale. Dans le cas de l'AMR de Haar et en première approximation pour toutes les multirésolutions (car l'AMR de Haar "résume" les interactions entre les échelles), l'écriture est bien plus simple :

- $\sum_1\sum_2 \langle \alpha,\varphi_1\rangle\, T_{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3} \left\langle \tilde{N}^k\left(z,\mu^{\pm}\right),\varphi_2\right\rangle$ se résume à

$$\left\langle \alpha,\varphi_{J,k_3}\right\rangle T_{\varphi_{J,k_3},\varphi_{J,k_3},\varphi_{J,k_3}} \left\langle \tilde{N}^k\left(z,\mu^{\pm}\right),\varphi_{J,k_3}\right\rangle \tag{3.108}$$

- $T_1^{\psi\varphi}\left(\mu^{\pm}\right) = 0$,
- $T_2^{\varphi\psi}\left(\mu^{\pm}\right) = 0$,
- $T_3^{\psi\psi}\left(\mu^{\pm}\right)$ est beaucoup plus simple que l'expression générale de l'équation 3.106. Dans le cas de l'AMR de Haar, seules deux ondelettes strictement identiques – même échelle et même position – interagissent de façon efficace pour modifier le champ résultant à l'échelle des pixels d'approximation – celle de la fonction d'échelle. Dans l'équation 3.106, la double somme $\sum_1\sum_2$, qui signifie $\sum_{j_1}\sum_{k_1}\sum_{j_2}\sum_{k_2}$, est donc réduite à $\sum_{j_1}\sum_{k_1}\sum_{j_2=j_1}\sum_{k_2=k_1}$. $T_3^{\psi\psi}\left(\mu^{\pm}\right)$ est donc la seule source additionnelle à l'échelle des pixels d'approximation due aux hétérogénéités sous-pixel.

3.8.1.1 Méthode "Independent Wavelet Approximation"

Si dans l'équation 3.103, les termes additionnels présentés ci-dessus ne sont pas considérés, on néglige la variabilité nuageuse sous-pixel et ses effets radiatifs. Si, en plus, on ne compte pas le terme

$$-\eta\tilde{Q}\sum_1 \langle \delta\varphi_1,\varphi_3\rangle \left\langle \tilde{N}^k\left(z,\mu^{\pm}\right),\varphi_1\right\rangle, \tag{3.109}$$

on rend chaque pixel indépendant : on néglige alors le flux net horizontal dû à la différence des valeurs des coefficients d'extinction des pixels. Une méthode "Independent Wavelet Approximation " est alors définie, qui dans le cas de l'AMR de Haar est exactement équivalente au calcul IPA.

Dans la construction du code de transfert radiatif déduit de cette étude et dans les calculs dont les résultats sont présentés au chapitre 5, on écrira le transfert radiatif à l'échelle du pixel en ne négligeant pas le terme ci-dessus (équation 3.109) : le flux horizontal net calculé à l'échelle ne sera donc pas nul et les pixels d'approximation ne seront pas indépendants.

3.8.1.2 Lien avec la décomposition de Reynolds

Nous revenons ici sur le **problème de fermeture** évoqué au chapitre introductif. [Stephens 1988b] et [Gabriel and Evans 1996] abordent le problème de fermeture en transfert radiatif en se basant sur une décomposition de type Reynolds. La décomposition de Reynolds est une approche statistique introduite pour décrire la turbulence et pour obtenir les effets de la turbulence sur l'écoulement moyen. L'écoulement turbulent est décomposé en deux parties : un écoulement moyen, et la partie turbulente. La variable U (la vitesse) s'écrit donc :

$$U = \overline{U} + U' \tag{3.110}$$

Dans le cas des écoulement turbulents, la moyenne n'est définie ni en tant que moyenne spatiale, ni temporelle, mais en tant que moyenne sur un ensemble de réalisations.

En introduisant la séparation 3.110 dans l'équation de Navier stokes, on peut obtenir une équation ayant pour inconnue $\overline{U}$, qui ne dépend que de valeurs moyennes, plus un terme additionnel, provenant du terme non-linéaire de l'équation, et résultat des effets de la turbulence sur l'écoulement moyen : le **terme de covariance** $\overline{U_i' U_j'}$. Un des problèmes de la turbulence est de savoir représenter ce terme additionnel du deuxième ordre. On peut montrer que ce terme dépend lui-même de termes de troisième ordre, etc. Le problème de fermeture consiste à fermer ce système, c'est-à-dire à paramétriser le terme à un certain ordre n. Une des méthodes les plus simples est d'introduire la viscosité turbulente, par analogie à la viscosité moléculaire :

$$\overline{U_i' U_j'} = \nu_T \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \tag{3.111}$$

[Stephens 1988b] aborde le problème de fermeture en transfert radiatif pour les couvertures nuageuses fractionnaires sous l'angle du couplage entre les échelles. De même qu'à l'équation 3.111, fermer le système consiste à représenter les termes d'interaction entre échelles par des fonctions dépendant seulement de quantités à l'échelle des pixels. Ces fonctions sont générées par des opérateurs qui définissent de nouvelles propriétés optiques du milieu et une nouvelle ETR. [Gabriel and Evans 1996] développe une méthode de fermeture de premier ordre pour des couvertures nuageuses fractionnaires, basée sur la modification du terme source diffusif de premier ordre, et un modèle simple de couverture fractionnaire.

Montrons ici comment la décomposition multirésolution des équations permet d'aborder ce problème de fermeture.

Réécrivons l'équation 3.45 en décomposant les champs $\alpha(x,z)$ et $\widetilde{N}^k(x,z,\mu)$ suivant l'équation 3.110. L'opérateur moyenne est défini par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(x)\overline{\varphi_{J,k}}(x)dx \text{ avec } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{J,k}(x)dx = 1 \tag{3.112}$$

Dans ce cas, la moyenne correspond au coefficient d'échelle à la position k. Appliquons

l'opérateur moyen à l'équation 3.45. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mu\frac{\partial}{\partial z}\overset{(1)}{\overline{\widetilde{N}^k(x,z,\mu)}} = \quad & -\overset{(2)}{\overline{\alpha(x,z)\widetilde{N}^k(x,z,\mu)}}-\eta\tilde{Q}\overset{(3)}{\overline{\frac{\partial\widetilde{N}^k(x,z,\mu)}{\partial x}}} \\
& +(1-\delta_{k,1})\frac{\widetilde{\omega}_o\overline{\alpha(x,z)}}{4}\overset{(4)}{\int_{-1}^{1}}\tilde{P}(\mu,\mu')\,\overline{\widetilde{N}^{k-1}(x,z,\mu')}d\mu' \\
& +\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_o\overset{(5)}{\overline{\alpha(x,z)}}}{4\pi}\tilde{P}^{dir}\overline{f_\nu(\vec{r})} \\
& \overset{(6)}{-\overline{\alpha'(x,z)\,\widetilde{N}^k(x,z,\mu)'}} \\
& +(1-\delta_{k,1})\frac{\widetilde{\omega}_o\overline{\alpha(x,z)}}{4}\overset{(7)}{\int_{-1}^{1}}\tilde{P}(\mu,\mu')\,\overline{\alpha'(x,z)\,\widetilde{N}^k(x,z,\mu')'}d\mu' \\
& +\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_o\overset{(8)}{\overline{\alpha(x,z)}}}{4\pi}\tilde{P}^{dir}\overline{\alpha'(x,z)f'_\nu(\vec{r})}
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Comparons cette équation avec l'équation 3.103 à l'échelle du pixel avec l'AMR de Haar :

$$\begin{aligned}
& \mu\frac{\partial}{\partial z}\overset{(1)}{\left\langle\tilde{N}^k(z,\mu),\varphi_{J,k_3}\right\rangle} \\
& =-\langle\alpha,\varphi_{J,k_3}\rangle\,T_{\varphi_{J,k_3},\varphi_{J,k_3},\varphi_{J,k_3}}\overset{(2)}{\left\langle\tilde{N}^k(z,\mu),\varphi_{J,k_3}\right\rangle}-\eta\tilde{Q}\sum_1\langle\delta\varphi_1,\varphi_3\rangle\overset{(3)}{\left\langle\tilde{N}^k(z,\mu),\varphi_1\right\rangle} \\
& +(1-\delta_{k,1})\frac{\widetilde{\omega}_0}{4}\langle\alpha,\varphi_{J,k_3}\rangle\,T_{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3}\overset{(4)}{\int_{-1}^{1}}\tilde{P}(\mu,\mu')\left\langle\tilde{N}^{k-1}(z,\mu'),\varphi_{J,k_3}\right\rangle d\mu' \\
& +\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_0}{4}\langle\alpha,\varphi_{J,k_3}\rangle\,T_{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3}\overset{(5)}{P(\mu,\mu_\odot)}\langle f_\nu(z,\mu_\odot),\varphi_2\rangle \\
& -\overset{(6)}{\sum_{j=J}^{L-12^j-1}\sum_{k=0}}\langle\alpha,\psi_{j,k_1}\rangle\,T_{\psi_{j,k_1},\psi_{j,k_1},\varphi_{J,k_3}}\left\langle\tilde{N}^k(z,\mu),\psi_{j,k_1}\right\rangle \\
& +\frac{\widetilde{\omega}_0}{4}\left[\overset{(7)}{\sum_{j=J}^{L-12^j-1}\sum_{k=0}}\langle\alpha,\psi_{j,k_1}\rangle\,T_{\psi_{j,k_1},\psi_{j,k_1},\varphi_{J,k_3}}\int_{-1}^{1}\tilde{P}(\mu,\mu')\left\langle\tilde{N}^{k-1}(z,\mu'),\psi_{j,k_1}\right\rangle d\mu'\right] \\
& +\delta_{k,1}\frac{\widetilde{\omega}_0}{4}\overset{(8)}{\sum_{j=J}^{L-12^j-1}\sum_{k=0}}\langle\alpha,\psi_{j,k_1}\rangle\,T_{\psi_{j,k_1},\psi_{j,k_1},\varphi_{J,k_3}}\tilde{P}^{dir}\langle f_\nu(z,\mu_\odot),\psi_{j,k_1}\rangle \\
& -\eta\tilde{Q}\sum_1\langle\delta\psi_{j_1,k_1},\varphi_{J,k_3}\rangle\overset{(9)}{\left\langle\tilde{N}^k(z,\mu),\psi_{j_1,k_1}\right\rangle}
\end{aligned} \tag{3.114}$$

On reconnaît dans les termes 1 à 8 de l'équation 3.114 les termes 1 à 8 de l'équation 3.113. Les termes 6 à 8 correspondent aux termes de covariance. Le terme 9 de l'équation 3.114 n'a pas d'équivalent dans l'équation 3.113.

Le problème de fermeture du transfert radiatif peut donc être étudié avec cette analyse multirésolution. Le terme $\sum_{j=J}^{L-12^j-1}\sum_{k=0}\langle\alpha,\psi_{j,k_1}\rangle\,T_{\psi_{j,k_1},\psi_{j,k_1},\varphi_{J,k_3}}\left\langle\tilde{N}^k(z,\mu),\psi_{j,k_1}\right\rangle$ a pour équivalent

le terme de covariance $\overline{\alpha' N'}$. Des travaux ont débuté dans cette voie, en particulier par le biais d'une écriture matricielle des équations. Des travaux futurs permettront de poursuivre cette analyse.

3.8.2 Transfert radiatif à l'échelle sous-pixel

On peut de même écrire l'ETR pour chaque échelle sous-pixel 2^{-j}, mais on ne peut pas utiliser l'écriture simplificatrice précédente.

Ici :
- $\sum_i$ signifie $\sum_{k=0}^{2^J-1}$ dans un cas périodique et $\sum_{k\in\mathbb{Z}}$ sinon,
- ψ_i signifie ψ_{j_i,k_i}.
- T_{ψ_1,ψ_2,ψ_3} réunit les coefficients d'interaction pour $j_1 = j_2 = j_3 = j$.

$$
\begin{aligned}
&\mu^+ \frac{\partial \left\langle \tilde{N}^k\left(z,\mu^\pm\right),\psi_3\right\rangle}{\partial z} \\
&= -\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle\, T_{\psi_1,\psi_2,\psi_3} \left\langle \tilde{N}^k\left(z,\mu^\pm\right),\psi_2\right\rangle \\
&- \eta\tilde{Q}\sum_1 \langle\delta\psi_1,\psi_3\rangle \left\langle \tilde{N}^{k,}\left(z,\mu^\pm\right),\psi_1\right\rangle \\
&+ (1-\delta_{k,1})\frac{\omega_0}{4}\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle\, T_{\psi_1,\psi_2,\psi_3} \int_0^1 \tilde{P}\left(\mu^\pm,\mu'^+\right) \left\langle \tilde{N}^{k-1,}\left(z,\mu^+\right),\psi_2\right\rangle d\mu'^+ \qquad (3.115)\\
&+ (1-\delta_{k,1})\frac{\omega_0}{4}\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle\, T_{\psi_1,\psi_2,\psi_3} \int_{-1}^0 \tilde{P}\left(\mu^\pm,\mu'^-\right) \left\langle \tilde{N}^{k-1,}\left(z,\mu'^-\right),\psi_2\right\rangle d\mu'^- \\
&+ \delta_{k,1}\frac{\omega_0}{4\pi}\sum_1\sum_2 \left\langle\alpha,\psi_{j,k_\alpha^j}\right\rangle T_{\psi_1,\psi_2,\psi_3}\tilde{P}^{dir}\left\langle f_\nu\left(z,\mu_\odot\right),\psi_3\right\rangle \\
&+ T_1^{\varphi\varphi}\left(\mu^\pm\right) + T_2^{\varphi\psi}\left(\mu^\pm\right) + T_3^{\psi\varphi}\left(\mu^\pm\right) + T_4^{\psi\psi}\left(\mu^\pm\right) + S_1^{\varphi}\left(\mu^\pm\right) + S_2^{\psi}\left(\mu^\pm\right)
\end{aligned}
$$

Cette équation a la même structure que l'équation 3.103. Les cinq premiers termes de la partie droite de l'équation 3.115 représentent la contribution à la dérivée verticale des fluctuations de la fonction radiance à l'échelle 2^{-j}, des interactions des fluctuations des fonctions radiances et coefficient d'extinction à cette même échelle. Les six termes additionnels $T_1^{\varphi\varphi}\left(\mu^\pm\right), T_2^{\varphi\psi}\left(\mu^\pm\right), T_3^{\psi\varphi}\left(\mu^\pm\right), T_4^{\psi\psi}\left(\mu^\pm\right), S_1^{\varphi}\left(\mu^\pm\right)$ et $S_2^{\psi}\left(\mu^\pm\right)$ représentent les contributions du couplage des interactions entre échelles des fluctuations (à l'échelle du pixel et en dessous) des fonctions radiances et coefficient d'extinction à la dérivée verticale des fluctuations de la fonction radiance à l'échelle 2^{-j}. Ces six termes sont explicités dans l'annexe F.

Dans le cas de l'AMR de Haar,
- $T_{\psi_1,\psi_2,\psi_3} = 0$,
- $T_1^{\varphi\varphi}\left(\mu^\pm\right) = 0$,
- $T_2^{\varphi\psi}$ et $T_3^{\psi\varphi}$ se résume à $T_2^{\varphi\psi_{j_3,k_3}}$ et $T_3^{\psi_{j_3,k_3}\varphi}$,
- $T_4^{\psi\psi}$ se résume à $T_4^{\psi_{j,k}\psi_{j,k}}$ avec $j > j_3$.

L'ETR à l'échelle du sous-pixel n'est donc que le résultat de couplages entre échelles et d'interaction horizontale. $T_2^{\varphi\psi}\left(\mu^\pm\right)$ correspond à la réplique de l'hétérogénéité du milieu,

$T_3^{\psi\varphi}(\mu^{\pm})$ à l'atténuation (cas extinction) et à la réplique (cas diffusion) de l'hétérogénéité du rayonnement incident, $T_4^{\psi\psi}(\mu^{\pm})$ aux résultats des interactions des échelles plus fines.

Pour l'AMR de Meyer, il en est à peu près de même, mais $T_{\psi_1,\psi_2,\psi_3} \neq 0$ (voir fig 3.11b).

Chapitre 4

Mise au point d'un nouveau code de calcul du transfert radiatif

L'analyse en ondelettes de l'Equation du transfert radiatif détaillée au chapitre précédent permet de formaliser le problème du transfert radiatif en milieu hétérogène : la présence dans le champ d'extinction de fluctuations aux échelles inférieures à celle des pixels dits d'approximation créent des sources additionnelles identifiables. Nous avons pu ainsi écrire l'ETR à l'échelle des pixels d'approximation (équation 3.103), dans laquelle des termes additionnels apparaissent, et ceux-ci résultent des interactions entre les échelles. De plus, la partie 3.7 comporte quelques premières analyses de ces interactions. Toutefois, ces analyses ont un caractère local : elles ne permettent pas de quantifier l'importance des petites échelles dans le champ de rayonnement final. Pour cela, il faut calculer les quantités radiatives. Dans ce but, un code de calcul du transfert radiatif a été mis au point, basé sur la méthode de Galerkin-ondelette apliquée à l'ETR. Par la suite, on donne à ce code le nom de *WaveNum*. Il est la traduction dans un langage de programmation de l'écriture des équations établies au chapitre 3. Il est basé sur la décomposition azimutale en série de Fourier de l'Equation du Transfert Radiatif, sur la méthode des ordres successifs de diffusion, et sur la décomposition horizontale multirésolution de type ondelette de l'équation. Seul le coefficient d'extinction est hétérogène. La séparation des fluctuations élémentaires de types φ et ψ des champs de radiances et de coefficient d'extinction, la séparation des équations à l'échelle des pixels d'approximation à l'échelle sous-pixel, permettent de faire apparaître dans le calcul les sources additionnelles dues aux hétérogénéités sous-pixel des propriétés optiques du milieu. Ces séparations empêchent une écriture matricielle complète de l'équation. En l'état, le code n'a pas vocation et ambition d'être le plus performant possible en terme de rapidité de calcul. D'ailleurs, le calcul se fait avec le logiciel de calcul MATLAB, qui est réputé pour n'avoir pas les meilleures performances. Ce code n'a pas été construit pour résoudre le transfert radiatif par un nouveau moyen, afin de concurrencer d'autres codes de calcul existants : il a pour l'instant vocation à être un modèle instrument [Brissaud et al. 1990], un outil d'analyse des problèmes d'échelle dans le transfert radiatif, un modèle flexible et adaptable pour l'étude du transfert radiatif "3D".

On détaille dans ce chapitre comment les ETR multirésolutions sont résolues numériquement, quels choix ont été faîts. La première section détaille les aspects radiatifs de cette résolution, et n'est pas originale : elle reprend quelques solutions numériques classiques. Sont ensuite abordés les aspects numériques à prendre en compte dans ce type de modélisation. La section suivante aborde les aspects liés à l'utilisation de la méthode de Galerkin-Ondelette : la séparation des quantités radiatives est explicitée, ce qui faît apparaître les sources additionnelles dues aux hétérogénéités sous-pixel du champ d'extinction ; les critères de choix, en particulier numériques, des AMR ; la vacuité de composants de connexion. Enfin, quelques informations sont données sur les caractéristiques actuelles du code.

4.1 Résolution des ETR multirésolutions : aspects radiatifs

Voyons d'abord les aspects radiatifs, en particulier comment la fonction de phase est représentée et choisie, comment les ETR sont intégrées et l'augmentation de l'ordre de diffusion est réalisée.

4.1.1 La fonction source

La fonction source $\int\limits_{4\pi} P\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right) N\left(\vec{r},\vec{\Omega}'\right) d\omega_{\vec{\Omega}'}$ doit être calculée. La fonction de phase est décomposée suivant des polynômes de Legendre. L'intégrale est calculée au moyen de quadrature.

4.1.1.1 Représentation de la fonction de phase

Il est classique de décomposer la fonction de phase sur une famille de polynômes orthogonaux, en particulier les polynômes de Legendre [Chandrasekhar 1960] [Thomas and Stamnes 1999] :

$$P(\cos\Theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \varpi_l P_l(\cos\Theta) \tag{4.1}$$

avec $\cos\Theta = \mu\mu' + \left(1-\mu^2\right)^{1/2}\left(1-\mu'^2\right)^{1/2}\cos\left(\phi-\phi'\right)$. En pratique, la somme se fera sur un nombre fini de termes, M.

La décomposition azimutale de la fonction de phase (voir éq. 3.31) s'écrit :

$$P(\vec{\Omega},\vec{\Omega}') = P(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}') = \sum_{m=0}^{M} P_c^m\Big(\mu\mu' + \left(1-\mu^2\right)^{1/2}\left(1-\mu'^2\right)^{1/2}\cos\left(\phi-\phi'\right)\Big)\cos\left[m\left(\phi-\phi'\right)\right] \tag{4.2}$$

On a ici allégé l'écriture et enlevé la dépendance de P par rapport à $\vec{r}$. A partir des équations 4.1 et 4.2, et en exploitant le théorème d'addition des harmoniques sphériques, on peut séparer les angles μ et μ' et obtenir :

$$P(\cos\Theta) = \sum_{l=0}^{N} \varpi_l \left[P_l^m(\mu)P_l^m\left(\mu'\right) + 2\sum_{m=1}^{M}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\mu)P_l^m\left(\mu'\right)\cos\left[m\left(\phi-\phi'\right)\right]\right] \tag{4.3}$$

avec $P_l^m(\mu)$ les polynômes de Legendre associés (détail de cette décomposition dans [Thomas and Stamnes 1999]).

En inversant les ordres de sommation, on écrit :

$$P(\cos\Theta) = \sum_{m=0}^{M}(2-\delta_{0,m})\sum_{l=m}^{N}\varpi_l^m P_l^m(\mu)P_l^m\left(\mu'\right)\cos\left[m\left(\phi-\phi'\right)\right] \tag{4.4}$$

$$\text{avec } \varpi_l^m = \varpi_l\frac{(l-m)!}{(l+m)!},\ l=m,...,N,\ 0\le m\le N \tag{4.5}$$

En pratique, l'ordre de décomposition de Legendre de la fonction de phase sera le même que l'ordre de décomposition de Fourier azimutale.

Les équations 3.56 et 3.57 sont modifiées et on obtient la fonction source de premier ordre (diffusion du rayonnement collimaté) et d'ordre $(k-1)$:

$$\left\langle \delta_{k,1} \frac{\widetilde{\omega}_o \alpha\left(x,z\right)}{4\pi} \tilde{P}^{dir} f_\nu\left(\vec{r}\right), \Psi_3 \right\rangle \tag{4.6}$$

$$= \delta_{k,1}(2-\delta_{0,m}) \frac{\widetilde{\omega}_o}{4\pi} \sum_{\Psi_1} \sum_{\Psi_2} \left\langle \alpha, \Psi_1 \right\rangle (z) \left\langle f_\nu, \Psi_2 \right\rangle (z, \mu_\odot) \, T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} \sum_{l=m}^{N} \varpi_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu_\odot)$$

et

$$\left\langle \left(1-\delta_{k,1}\right) \frac{\widetilde{\omega}_o \alpha\left(x,z\right)}{4} \int_{-1}^{1} \tilde{P}\left(\mu,\mu'\right) \widetilde{N}^{k-1}\left(x,z,\mu'\right) d\mu', \Psi_3 \right\rangle \tag{4.7}$$

$$= \left(1-\delta_{k,1}\right)\left(2-\delta_{0,m}\right) \frac{\widetilde{\omega}_o}{4} \sum_{\Psi_1} \sum_{\Psi_2} \left\langle \alpha, \Psi_1 \right\rangle (z) T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} \sum_{l=m}^{N} \varpi_l^m P_l^m(\mu) \int_{-1}^{1} P_l^m\left(\mu'\right) \left\langle \widetilde{N}^k, \Psi_2 \right\rangle \left(z,\mu'\right) d\mu'$$

On le voit dans l'équation 4.7, la séparation des angles μ et μ' permet de calculer plus simplement la fonction source.

Dans cette étude, nous avons choisi la fonction de phase de Henyey-Greenstein :

$$P_{HG}(\cos\Theta) = \frac{1-g^2}{(1+g^2-2g\cos\Theta)^{3/2}} \tag{4.8}$$

L'intérêt de cette fonction de phase est qu'elle ne dépend que d'un paramètre, le paramètre d'asymétrie g, et que ses coefficients de Legendre sont très simples :

$$\varpi_l = (2l+1) g^l. \tag{4.9}$$

C'est l'une des raisons qui expliquent l'usage courant de cette fonction dans la communauté du transfert radiatif [Lenoble 1993].

Pour représenter une fonction de phase très asymétrique ($|g| >> 0$), il est nécessaire d'utiliser un ordre de décomposition élevé, sans quoi la diffusion arrière est très oscillante. C'est pourquoi nous avons commencé par utiliser le cas particulier qu'est la fonction isotrope $P_{HG}(\cos\Theta) = 1$ obtenue pour $g = 0$, soit $\varpi_0 = 1$ et $\varpi_l = 0$ quand $l > 0$. L'allure de la fonction de phase d'Henyey-Greenstein est donnée figure 4.1 pour quelques valeurs de g.

4.1.1.2 Formule de quadrature angulaire

Une méthode classique consiste à calculer l'intégrale par une combinaison linéaire pondérée des valeurs $P\left(\mu^{\pm},\mu'\right) \left\langle \tilde{N}\left(\mu'\right), \Psi \right\rangle$ en certains points de discrétisation : ce sont les **méthodes de quadrature** [Chandrasekhar 1960]. Les points en question sont appelés points de quadrature et des poids leurs sont associés. Soient $\left(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{N_q}\right)$ les points de quadrature et leurs poids associés $\left(W\left(\mu_1\right), W\left(\mu_1\right), ..., W\left(\mu_{N_q}\right)\right)$.

L'intégrale est approximée par :

$$\int_{-1}^{1} P\left(\mu,\mu'\right) \left\langle N_{c/s}^m\left(\mu'\right), \Psi \right\rangle d\mu' = \sum_{j=1}^{N_q} W\left(\mu_j'^{+}\right) P\left(\mu,\mu_j'^{+}\right) \left\langle N_{c/s}^m\left(\mu_j'^{+}\right), \Psi \right\rangle$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_q} W\left(\mu_j'^{-}\right) P\left(\mu,\mu_j'^{-}\right) \left\langle N_{c/s}^m\left(\mu_j'^{-}\right), \Psi \right\rangle \tag{4.10}$$

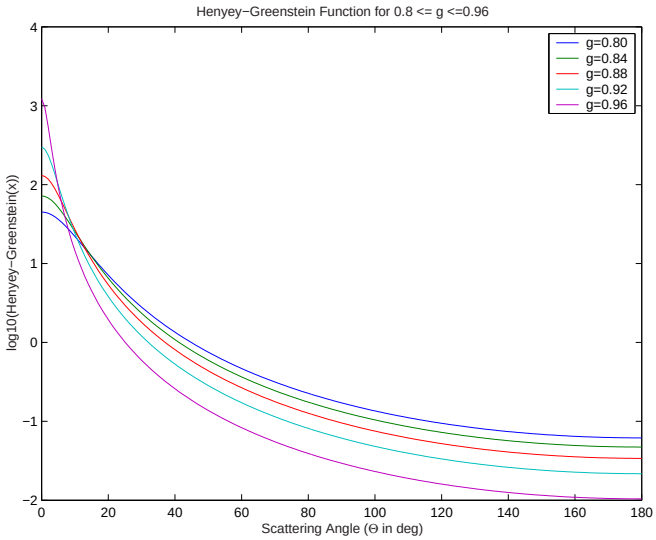


FIG. 4.1 – Allure de la fonction de phase d'Henyey-Greenstein pour quelques valeurs de g

Points de quadrature	0.9894	0.9446	0.8656	0.7554	0.6179	0.4580	0.2816	0.0950
Poids de quadrature	0.0271	0.0623	0.0951	0.1246	0.1496	0.1691	0.1826	0.1894

TAB. 4.1 – Points et poids de Gauss pour les radiances montantes et pour 8 angles

Différents schémas de quadrature sont disponibles, des schémas fermés, ouverts ($\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{N_q}$ avec $\mu_1 > 0$, $\mu_{N_q} < 1.$), et semi-ouverts. Dans notre cas, un schéma ouvert en zéro (angle zénithal de 90°) est nécessaire parce qu'on ne peut pas calculer la valeur de la dérivée pour cet angle.

La quadrature utilisée ici est le schéma ouvert de Gauss-Legendre (ou de double Gauss-Legendre quand on veut séparer les deux hémisphères). Les points de quadrature de Gauss-Legendre correspondent aux zéros des polynômes de Legendre. [Chandrasekhar 1960] donne une condition entre le nombre de points de quadrature n et l'ordre maximal des polynômes de Legendre N pour que l'intégrale soit exacte :

$$4n - 1 > 2N \tag{4.11}$$

En pratique, cette condition n'est pour l'instant pas respectée pour des raisons liées aux contraintes du calcul numérique. La table 4.1 donne les points et les poids de quadrature pour un schéma de Gauss simple et pour 8 angles entre 0° et 90° à la précision 10^{-4}. Une précision plus grande est utilisée dans le calcul (10^{-14}).

4.1.2 Intégration numérique des ETR multirésolutions

L'Equation du Transfert Radiatif est une équation locale. La résolution du transfert radiatif se résout par l'intégration de cette équation. L'utilisation de quadrature ouvre la voie vers la résolution de l'équation du transfert radiatif par un système linéaire d'équations couplées d'inconnues $N(\mu_i)$, $i = \pm 1, .., \pm n$. La résolution de ce système linéaire peut se faire matriciellement par la recherche de valeurs et de vecteurs propres : c'est la **méthode** dite **des ordonnées discrètes**. Par exemple pour la solution à deux flux, la solution complète est une combinaison linéaire des solutions exponentielles pour les deux valeurs propres du système [Thomas and Stamnes 1999]. Par exemple, le code DISORT de la NASA est basé sur ce principe. Associée à une méthode de adding-doubling, cette méthode permet de résoudre en une fois le transfert radiatif dans tout le nuage. C'est ce qui est utilisé dans [Stephens 1988a] et [Stephens 1988b].

Cependant, dans cette première tentative pour résoudre les équations du transfert radiatif sous forme multirésolution, nous utilisons une approche plus primitive de l'intégration des équations. Le gradient vertical est exprimé sous sa forme explicite : $\frac{dN}{dz} = \frac{N(z+\Delta z) - N(z)}{\Delta z}$. Cette approche nous permet d'étudier l'effet du pas vertical sur la solution, d'étudier le phénomène de Gibbs (à l'origine de bruit numérique se propageant à partir des points de discontinuités et très problématique pour l'analyse en ondelettes tout autant que l'analyse en Fourier), et d'étudier le problème du transport horizontal du rayonnement réalisé par le terme de dérivée horizontale.

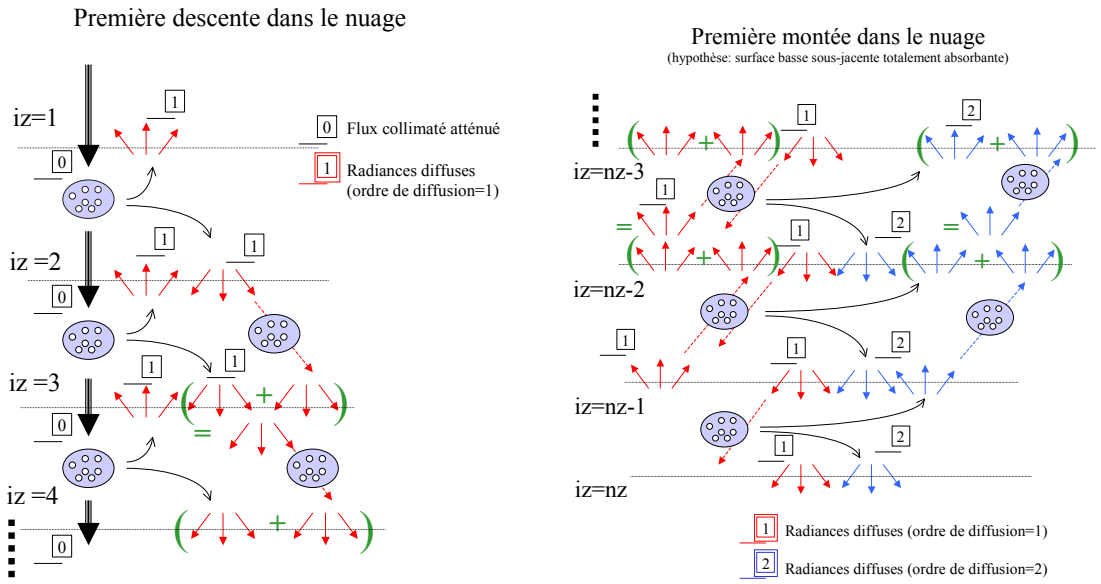
Des allers et retours dans le nuage réalisent l'intégration numérique des équations et l'augmentation de l'ordre de diffusion (voir les figures 4.2). Ils permettent d'obtenir les fonctions source pour chaque ordre de diffusion, de faire s'atténuer cette source le long de sa direction de propagation et d'aller chercher pour chaque descente/montée dans le nuage la condition à la limite basse/haute du nuage.

4.2 Aspects numériques

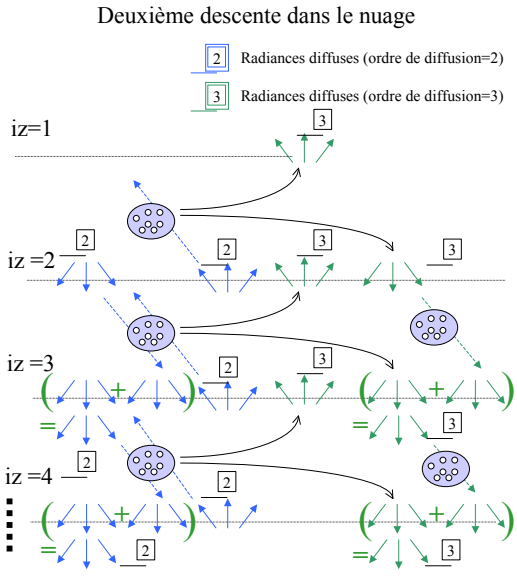
Des problèmes numériques apparaissent lors de l'intégration numérique des équations. Ils sont liés en partie à l'utilisation des AMR.

4.2.1 Problème d'échantillonnage ou de discrétisation

Le problème d'échantillonnage apparaît lors du passage du continu au discret [Mallat 1998]. L'échantillonnage d'un signal sur l'intervalle T provoque la périodisation de la transformée de Fourier de ce signal avec pour période $2\pi/T$. Si le support fréquentiel de $\widehat{f}$ est inclus dans $[-\pi/T, \pi/T]$, le théorème de Shannon-Whittaker prouve que le signal continu peut être restitué par la donnée des valeurs échantillonnées de f. Si le support fréquentiel de $\widehat{f}$ n'est pas inclus dans $[-\pi/T, \pi/T]$, la périodisation modifie la fonction $\widehat{f}$ dans l'intervalle couvrant une période, provoquant une modification (augmentation) du contenu à haute fréquence du signal ; c'est le phénomène d'**aliasing** ou de repliement du spectre. Si le support fréquentiel du signal est infini (comme pour une gaussienne par exemple), on aura *théoriquement* toujours des problèmes d'aliasing : le signal reconstitué passera bien par certains points du signal initial, ceux échantillonnés, mais entre ces points, l'interpolation sera mauvaise. La fréquence maximale à laquelle on a accès pour décrire harmoniquement (fréquentiellement) le signal est appelée fréquence de **Nyquist** et vaut la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Si le signal a un support fréquentiel borné, une décomposition tronquée en Fourier pourra reconstituer parfaitement le signal, pour peu que l'échantillonnage suffisamment fin du signal propose une



(a) (b)



(c)

FIG. 4.2 – Schématisation des allers et retours dans le nuage, conduisant à l'obtention des sources aux différents ordres de diffusion et à leur extinction

fréquence de Nyquist supérieure à la borne haute du support fréquentiel, évitant ainsi les problèmes d'aliasing.

Inversement et c'est important dans notre cas, un calcul basé sur l'échantillonnage dans l'espace de Fourier d'une fonction $\widehat{f}$ implique la périodicité du signal f. Cette règle a été prise en compte lors du calcul des coefficients de connexion de l'AMR périodique de Meyer, calcul basé sur la définition analytique des fonctions de Meyer dans l'espace fréquentiel.

4.2.2 Phénomène de Gibbs

L'effet de Gibbs est un phénomène qu'il faut avoir à l'esprit quand on utilise une décomposition de type ondelettes, car dans la grande majorité des multirésolutions "sur le marché", cet effet intervient. Le thème "phénomène de Gibbs et ondelettes" est traité très en détail par [Walter and Shen 2001].

De quoi s'agit-il ? Il s'agit d'un limitation intrinsèque des bases orthogonales de type Fourier ou ondelettes pour représenter parfaitement une discontinuité forte d'un signal. Les valeurs différentes des limites à gauche et à droite en un point x_0, produit un phénomène d'"overshoot" en ce point, phénomène qui ne peut être corrigé par une augmentation de la décomposition. Contrairement au problème d'échantillonnage pour un support fréquentiel borné, il est vain d'augmenter la taille des échantillons pour espérer annuler l'effet de Gibbs : il est intrinsèque à cette méthode.

Cet effet est présent pour les multirésolutions habituelles proposant des fonctions d'échelle appartenant à l'espace de Sobolev à l'ordre r, c'est-à-dire des fonctions d'échelle dont les dérivées sont à décroissance rapide jusqu'à l'ordre r. C'est le cas des fonctions de Meyer. Ainsi les calculs effectués avec la multirésolution de Meyer présentent un bruit numérique de type Gibbs pour tout signal assez irrégulier. Les principaux problèmes numériques auront pour origine la propagation de ce bruit lors de l'intégration verticale des équations.

Selon [Walter and Shen 2001], les seules multirésolutions qui font exceptions et ne souffrent pas d'effet de Gibbs sont celle de Haar et les multirésolutions proposant des fonctions d'échelle à valeur positive.

4.2.3 Discrétisation verticale

L'intégration verticale des équations fournira des résultats corrects si le pas de discrétisation est suffisamment faible. En effet, deux conditions sont à vérifier.

La première condition est que les phénomènes physiques soient bien représentés. En effet, l'Equation générale du Transfert Radiatif (3.15) est valable pour un volume élémentaire dans lequel la diffusion est simple. Si ce n'est pas le cas, le milieu est optiquement plus épais et la diffusion multiple a des chances de se produire. L'albédo de diffusion simple $\widetilde{\omega}_o(\vec{r})$ n'est plus alors judicieux pour quantifier la fonction source. Cela impose des volumes élémentaires réduits quand le coefficient d'extinction est important.

La deuxième condition est mathématique : la loi d'extinction de Beer obtenue par intégration de l'équation 3.11 indique que l'énergie radiative décroît de façon exponentielle. Le développement limité au premier ordre de la fonction exponentielle est $e^x = 1 + x + o(x)$. L'approximation est correcte si $x << 1$.

Ces deux conditions imposent des pas de dicrétisation verticale limités. Ceci est d'autant plus vrai plus pour les directions de propagation du rayonnement très inclinées sur l'horizontale ($ds = dz/\cos\theta$). Par exemple, pour la direction la plus horizontale proposée par la quadrature de Gauss, $1/\cos(85°) \simeq 11.5$). Quand le milieu est découpé en boîtes élémentaires, il suffit de choisir des tailles de boîte suffisamment petites. C'est pourquoi dans le code radiatif SHDOM de Evans [Evans 1998], la grille est redécoupée localement quand l'épaisseur

optique est trop importante, en considérant qu'il y a homogénéité en dessous de l'échelle de la grille initiale. [Lenoble 1985] donne une condition empirique reliant la discrétisation verticale à utiliser à l'épaisseur optique locale maximale et à la valeur minimale du cosinus des angles zénithaux considérés.

Quand on utilise suivant les directions horizontales une décomposition spectrale des fonctions radiances, que devient le critère pour respecter ces conditions ? [Stephens 1988a] propose un critère lié à la méthode des ordonnées discrètes qu'il utilise. Dans notre cas, nous avons estimé la discrétisation verticale à adopter de façon empirique et à partir de **considérations portant sur le terme de dérivée horizontale**. En effet, à cause de ce terme dérivée, l'énergie du signal à haute fréquence augmente beaucoup. Ce problème apparaît également en analyse spectrale de type Fourier tout simplement parce que $(e^{inx})' = ine^{inx}$: la dérivée induit des termes élevés à haute fréquence. Ceci est l'équivalent du terme 2^j en facteur dans les équations 3.81, 3.82 et 3.83, terme compris dans la matrice $\langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle$. Si le pas de discrétisation verticale du schéma numérique est trop important, cette augmentation d'énergie à petite échelle, associée aux effets de Gibbs, devient incontrôlable. Dans notre étude, le terme dérivée est représenté par :

$$\tan\theta \sum_{\Psi_1} \left\langle \widetilde{N}^k, \Psi_1 \right\rangle \langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle \,. \tag{4.12}$$

Le problème apparaît donc surtout pour des directions de propagation très inclinées sur l'horizontale ($\tan(85°) \simeq 11.4$). La valeur maximale des coefficients dans la matrice de différentiation $\langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle$ sera également à considérer. Elle dépendra de l'analyse multirésolution. On reviendra sur cet problème dans le paragraphe 4.4. Un critère empirique a été retenu dans ce travail : la discrétisation verticale doit respecter la relation :

$$\max(\tan\theta \langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle \frac{pas}{domaine}) < 0.2, \tag{4.13}$$

avec *pas* : le pas vertical et, *domaine* : la dimension d'une période horizontale.

Concrètement, cette augmentation d'énergie à haute fréquence nous a obligé à employer une technique de filtrage.

4.2.4 Filtrage

Le traitement du terme dérivée demande un filtrage à haute fréquence des fonctions radiance. Filtrer les hautes fréquences est une pratique commune pour la résolution numérique de l'équation de Navier-stokes à cause de sa non-linéarité. Ici, cette opération est très délicate, car on ne doit pas "tuer" les hautes fréquences puisqu'on s'intéresse à leurs effets à plus grande échelle. Utiliser l'AMR de Haar et filtrer les coefficients de Haar à petite échelle n'est pas une bonne solution, car les fonctions de Haar étant très mal localisées fréquentiellement, on modifie ainsi toutes les échelles spectrales. En revanche, le filtrage des coefficients d'ondelette de Meyer répond bien au problème, les ondelettes de Meyer étant bien localisées spectralement. Quand on utilise l'AMR de Haar, cela suppose de "jongler" avec les coefficients en ondelette des deux multirésolutions. Pour éviter des allers et retours entre les deux représentations, on utilise les matrices de passage HM et MH définies au paragraphe 3.6.2.3.3. La figure 4.3 illustre le filtrage opéré sur les coefficients de Meyer (fig. 4.3a) et la conséquence sur les coefficients de Haar (fig. 4.3b). Dans ces figures sont représentés les vecteurs des coefficients de Meyer et de Haar. Pour une échelle de résolution $L = 7$, les vecteurs sont de dimension 128, et les 64 dernières valeurs correspondent à celles des 64 coefficients d'ondelette d'échelle la plus fine. Les courbes en bleu indiquent les valeurs des coefficients avant le seuillage, les courbes en rouge les valeurs après le seuillage. On observe que le seuillage des coefficients de

Meyer à l'échelle la plus fine entraine un filtrage des coefficients de Haar sur toute la gamme des échelles (au sens de Haar).

4.3 Aspects concernant l'analyse multirésolution

4.3.1 Séparation des quantités radiatives

Un des intérêts de l'approche développée dans ce travail de thèse est de pouvoir détailler les interactions élémentaires à l'origine des valeurs moyennes des flux et radiances dans chaque "pixel" d'approximation. Les quantités radiatives moyennes $\overline{Q}$, à une certaine échelle et localisées, sont proportionnelles aux coefficients d'échelles $\langle Q, \varphi \rangle$ des champs de rayonnement :

$$\overline{Q}(k) = 2^{\frac{J}{2}} \langle Q, \varphi_{J,k} \rangle \quad \text{avec} \quad \begin{cases} J : \text{échelle d'approximation} \\ k : \text{indice de position, } k \in [0; 2^J - 1] \end{cases} \tag{4.14}$$

On distingue dans le calcul, d'une part les quantités radiatives dîtes *à l'échelle*, conséquences de l'interaction du rayonnement par le champ nuageux hétérogène représenté seulement par ses coefficients d'échelle (donc une version basse résolution de la variabilité nuageuse), et d'autre part les quantités radiatives dues aux interactions sous-pixel, sources additionnelles, résultat de l'effet des fluctuations aux petites échelles du champ nuageux. Les quantités qui sont résultat des interactions *à l'échelle* seront indicées $_J$, et celles qui résultent des interactions sous-pixel via un couplage entre les échelles seront indicées $_{sub}$. Ainsi, quand un calcul fera intervenir un coefficient d'ondelette du champ d'extinction, le résultat de cette interaction élémentaire sera indicé $_{sub}$.

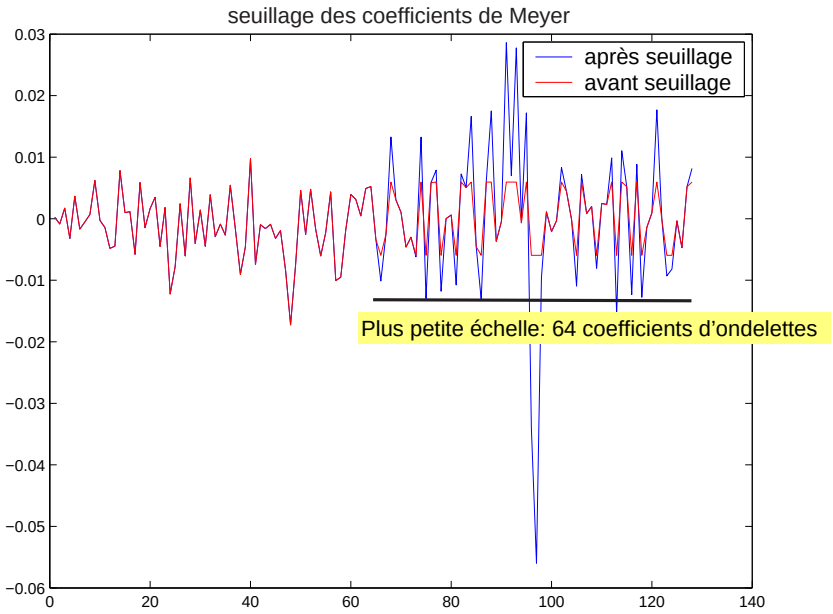
WaveNum manipule (et fournit) donc deux familles de coefficients de champs de radiances, une famille $_J$ et une famille $_{sub}$. Cet objectif de séparation des quantités radiatives a pour conséquence une écriture particulière et orientée du code de calcul, et un doublement (ou presque) du nombre d'opérations lors de son exécution. Les deux familles de coefficients ne sont pas indépendantes : si les coefficients indicés $_J$ se calculent indépendamment des coefficients $_{sub}$, ces derniers en revanche dépendent des premiers : quand une interaction élémentaire fait intervenir un coefficient indicé $_J$ du champ de radiance et un coefficient d'ondelette du champ d'extinction, le résultat de l'interaction porte l'indice $_{sub}$.

Ainsi, on notera par la suite, d'une part $flux_J$ et $radiance_J$, d'autre part $flux_{sub}$ et $radiance_{sub}$, les flux et radiances calculés respectivement *à l'échelle* et dus aux interactions entre échelles. La somme de ces quantités radiatives fournit le champ de rayonnement total noté sans indice, conséquences de la totalité des interactions entre le champ de rayonnement et le champ nuageux. C'est ce dernier champ de rayonnement qui sera comparé au début du chapitre suivant avec les résultats de simulations des codes SHDOM et Monte Carlo, ceci afin de valider le calcul.

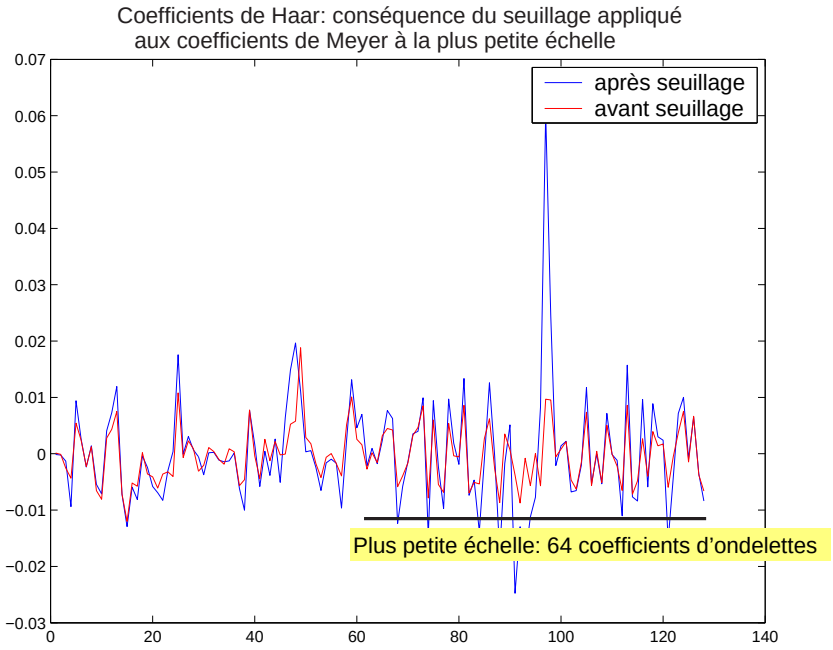
4.3.2 Choix de la multirésolution

Comme nous l'avons vu aux chapitres 2 et 3, il n'y a pas de multirésolution "parfaite", et le choix de l'AMR va dépendre de l'application. Dans ce qui nous préoccupe, deux points sont à considérer.

En premier lieu, quelle est la "vision" que nous impose l'AMR ? Nous avons vu au chapitre 2 que le principe d'Heisenberg fait qu'on ne peut pas avoir une bonne localisation des fonctions à la fois dans le domaine spectral et dans le domaine physique. Le choix d'une AMR nous fera préférer un domaine plutôt que l'autre. Est-ce utile dans notre cas d'avoir cette double localisation ? Qu'entendons-nous en fait par interaction entre échelles : est-ce entre les échelles spatiales ? L'AMR de Haar propose alors une vision très claire des échelles et des interactions.



(a) Coefficients de Meyer



(b) Coefficients de Haar

FIG. 4.3 – Effet du filtrage à la plus haute fréquence.

Est-ce au sens des nombres d'onde ? Dans ce cas, les AMR de Meyer et de Shannon sont préférables. Ce débat est-il seulement conceptuel ? Un des objectifs de cette thèse est d'essayer de répondre à ces questions.

En deuxième lieu, l'AMR utilisé doit nous permettre un calcul précis et faisable. Le calcul sera précis si l'évaluation des coefficients de connexion est bonne. Il sera faisable en considérant les performances actuelles et à venir des matériels informatiques, en terme de rapidité d'exécution, de capacité de stockage, de mémoire vive.

Nous détaillons ci-dessous les qualités et défauts des AMR de Meyer et de Haar, puis nous nous intéressons aux aspects numériques concernant les composants de connexion.

4.3.2.1 AMR de Meyer versus AMR de Haar

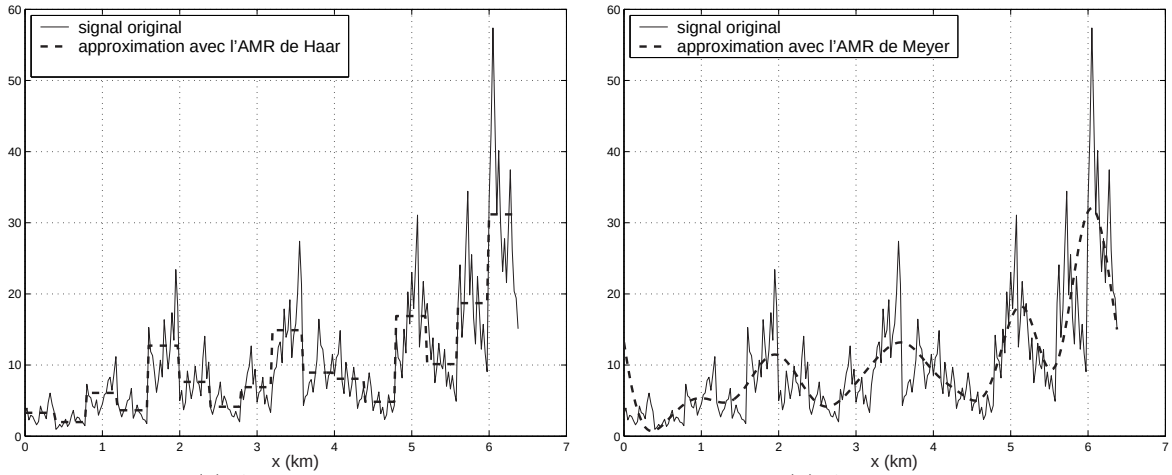
Ces deux AMR ont été utilisées car elles sont très opposées l'une de l'autre. L'AMR de Shannon n'a pas été retenue à cause de la très mauvaise localisation de ses fonctions dans l'espace physique. L'AMR de Meyer paraît être un bon compromis.

Comme nous l'avons dit, l'intérêt de l'AMR de Meyer est la bonne localisation des fonctions dans le domaine fréquentiel. Si nous adoptons le point de vue *échelle = nombre d'onde*, l'AMR de Meyer est bien placée pour étudier les interactions entre échelles.

Le calcul des coefficients de connexion de Meyer n'est pas trivial. L'utilisation classique des filtres miroirs conjugués pour calculer ces coefficients [Perrier and Wickerhauser 1999] n'est pas la bonne solution car ces filtres sont forcément tronqués. Nous l'avons vu dans la partie 3.6, les définitions analytiques dans l'espace de Fourier des fonctions de Meyer permettent, via le théorème de Parseval, d'exprimer analytiquement les coefficients de connexion d'interaction et de différentiation. La périodisation du problème permet, moyennant précautions, de faire le calcul à partir de l'espace de Fourier des coefficients de connexion par des transformées de Fourier inverse. Les propriétés d'invariance des coefficients de connexion permettent de ne calculer que le noyau des coefficients suffisants, les autres en étant déduits. Le détail du calcul des coefficients de connexion de Meyer et leurs propriétés sont donnés respectivement dans les annexes C et B. De plus, cette AMR est performante pour traiter le terme dérivée horizontal car elle donne une approximation de la dérivée exacte. Cependant, comme nous allons le voir, des bruits numériques apparaissent avec cette AMR, dus au phénomène de Gibbs, qui n'existent pas pour l'AMR de Haar, et les fonctions de Meyer n'étant pas très bien localisées dans l'espace physique, le tenseur d'interaction sera beaucoup plus plein donc le calcul beaucoup plus lourd. Cette lourdeur des calculs risque d'être déterminante dans le choix de l'AMR utilisée.

Le grand intérêt de l'AMR de Haar réside dans la définition simple des fonctions d'échelle et d'ondelette et la compacité de leurs supports physiques. Si nous adoptons le point de vue *échelle=taille d'un support dans le domaine physique*, l'AMR de Haar est alors la mieux placée pour étudier les interactions entre échelles. Les conséquences de ces définitions sont des interactions entre échelles résumées à l'essentiel, donc une grande vacuité du tenseur d'interaction, pas de phénomène de Gibbs présent, et des coefficients d'interaction calculables à la main. Par contre, comme on l'a déjà remarqué, l'évaluation correcte du terme dérivée pose problème. On en voit une illustration sur la figure 4.5 que nous commentons au paragraphe suivant.

Enfin, pour être physiquement interprétables, il faut que les interactions soient décrites clairement dans cet espace multirésolution. Or, nous nous intéressons à l'effet des fluctuations sous-pixel à l'échelle des pixels d'approximation. La notion de **valeur moyenne au sens de l'AMR** est importante. Seule l'AMR de Haar propose une vision basse résolution des signaux qui corresponde à la moyenne vraie de ces signaux à l'échelle 2^{-J} de la fonction d'échelle. Elle correspond à l'observation du champ par un instrument de mesure à la résolution dégradée



(a) AMR de Haar (b) AMR de Meyer

FIG. 4.4 – Signal périodique à l'échelle de 6.4 km (2^8 points), et son approximation par deux AMR. Echelle d'approximation $J = 4$.

(fig. 4.4a), qui fait la moyenne de l'énergie qu'il reçoit depuis un pixel . Dans le cas de l'AMR de Meyer, la même reconstruction fournit une "moyenne" du signal dans un sens différent et propre à cette multirésolution (fig. 4.4b). L'instrument de mesures qui est définit alors ne réalise plus la moyenne au sens classique à l'échelle d'un pixel, mais est sensible aux fonctions d'échelle φ_J de Meyer. Il en est de même pour toutes les AMR autres que Haar.

4.3.2.2 Choix d'une multirésolution hybride ?

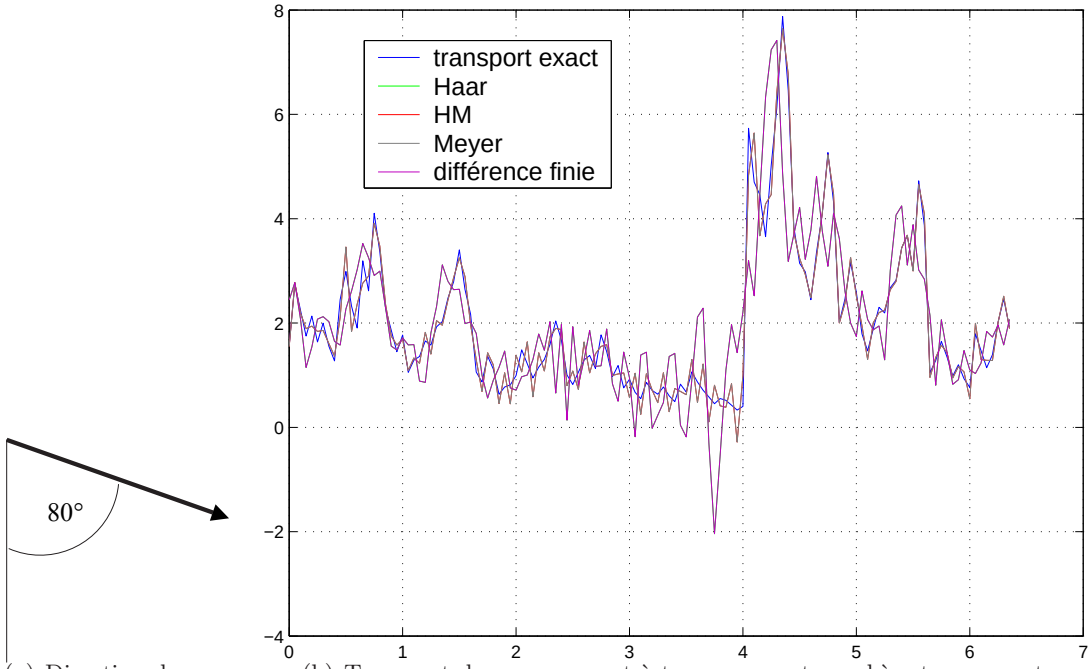
Les propriétés et qualités des AMR de Meyer et Haar ne permettent pas de les départager et de faire un choix.

L'AMR de Meyer permet de traiter convenablement la dérivée des fonctions, mais souffre d'effet de Gibbs. Cet effet intervient dans le calcul des termes produit et dérivée, mais c'est essentiellement le terme dérivée qui pose problème. Le calcul de la propagation du rayonnement dans des directions très proches de l'horizontale est accompagné d'un bruit numérique maximal qui s'amplifie (dû, on l'a vu, aux effets de Gibbs), et qui se propage à son tour, via la fonction de phase, vers les autres directions.

L'AMR de Haar ne souffre pas d'effets de Gibbs, mais sa faiblesse réside dans le traitement du terme dérivée. Le problème du choix de l'AMR doit être examiné numériquement, et porter sur le terme de dérivée horizontale.

Pour cette étude, nous avons testé les AMR de Haar et de Meyer. Nous avons également envisagé une **AMR hybride**, notée multirésolution "HM", qui tente d'exploiter les qualités des deux AMR de Haar et Meyer. Le calcul du terme produit se fait à l'aide de l'AMR de Haar, évitant ainsi la présence d'effet de Gibbs pour ce terme ; le calcul du terme dérivée se fait à l'aide de l'AMR de Meyer. Pour éviter les allers et retours entre les deux espaces multirésolutions, on a défini une nouvelle matrice de différentiation $\langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle_{HM}$, qui définit en quelque sorte un nouveau schéma de différentiation pour l'AMR de Haar.

Afin de tester l'ensemble des AMR, nous avons simulé le transport à travers une atmosphère transparente d'un rayonnement hétérogène dans une direction inclinée de 10° par rapport à l'horizontale. Pour une hétérogénéité de type sinusoïdal avec peu de périodes, les résultats obtenus avec l'ensemble des trois AMR se superposent et sont corrects. Pour une fluctuation du rayonnement incident beaucoup plus "chahutée" (ici la fluctuation générée par



(a) Direction de propagation

(b) Transport du rayonnement à travers une atmosphère transparente

FIG. 4.5 – Transport horizontal du rayonnement, réalisé au moyen de différentes multirésolutions.

un processus à cascade bornée utilisé par la suite), les trois calculs donnent des résultats diffèrents. On visualise sur la figure 4.5 le transport exact (obtenu par une translation du signal d'origine, respectant et l'angle d'incidence et l'épaisseur du nuage), ceux obtenus avec les AMR de Haar, Meyer, le calcul hybride "HM", et avec un calcul utilisant le schéma classique de différences finies centrées (+1/2,-1/2), ceci afin de vérifier si, en pratique, la différentiation de Haar et ce schéma sont équivalents [Beylkin 1992]. On observe que les schémas différences finies et Haar donnent des résultats parfaitement confondus, ce qui était prévisible. Les schémas Meyer et hybride "HM" donnent aussi des résultats parfaitement confondus, ce qui est remarquable. Les résultats obtenus avec l'AMR de Meyer (et donc également *HM*) sont proches du transport vrai, avec toutefois la présence de bruit à petite échelle avant la discontinuité centrale du signal, manifestation du phénomène de Gibbs inhérent à l'utilisation des ondelettes de Meyer. Le transport avec d'AMR de Haar n'est pas très bon pour ce type de signal, alors qu'il est tout à fait comparable avec le schéma de Meyer pour des signaux plus réguliers. Le transport des petites échelles ne se fait donc pas correctement. Il est assez surprenant que le schéma de différences finies produise ce bruit car un tel schéma a plutôt tendance à filtrer les signaux (voir annexe D). On peut remarquer que la présence de bruits avant la discontinuité centrale pour le calcul avec Haar n'est pas à la plus petite échelle. La comparaison des spectres d'énergie de ces signaux n'est pas montrée ici, mais ces spectres sont tous très proches : c'est bien dans la phase qu'il y a une différence, d'où résulte la différence des signaux reconstitués.

4.4 Aspects numériques concernant les composants de connexion

L'intérêt de voir apparaître les deux composants de connexion tenseur d'interaction et matrice de différentiation dans l'ETR générale est aussi numérique. Le calcul de ces composants se fera **une fois pour toutes** au début de la simulation, et ils seront juste appelés par

le programme au cours de celle-ci.

4.4.1 Vacuité du tenseur d'interaction

Le tenseur d'interaction est le composant qui est numériquement le plus lourd : il est de dimension trois et pour 2^L points, il est de taille $2^L \times 2^L \times 2^L$. En fonction des AMR, ce tenseur est plus ou moins vide. L'exploitation de la vacuité du tenseur d'interaction sera d'un grand intérêt numérique afin d'aller en direction d'un **schéma** de calcul dit **adaptatif** et de sauver de la place mémoire. Le calcul sera effectivement adaptatif si les zéros présents dans la matrice ne sont pas appelés. Pour cela, il faut rendre les matrices éparses, c'est à dire ne garder en mémoire que les adresses des coefficients non nuls et leurs valeurs. Cette opération est intéressante si la matrice contient moins de un tiers de valeur non-nulles. On va le voir, l'AMR de Haar est très intéressante de ce point de vue.

La table 4.2 donne le pourcentage de vide pour le tenseur d'interaction de Meyer pour différents seuils de coefficients et pour les échelles de résolution $L = 7$ (on définit donc $2^L = 128$ points dans l'espace physique), et d'approximation $J = 3$ (on a donc 8 pixels d'approximation ou 8 fonctions d'échelles). Un calcul précis se doit de prendre en compte tous les coefficients

seuil	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
Vide en %	10.1	20.9	38.6	57.6	71.4	82.9	92.5	98.3	99.87

TAB. 4.2 – Vacuité du tenseur d'interaction en fonction du seuil AMR de Meyer

de connexion. Dans ce cas, la vacuité du tenseur est très faible. Une étude est à faire sur l'effet du seuillage des coefficients. Dans le cas de l'AMR de Haar, le tenseur est vide à 99.94 % sans seuillage ! L'intérêt numérique de l'AMR de Haar est évident.

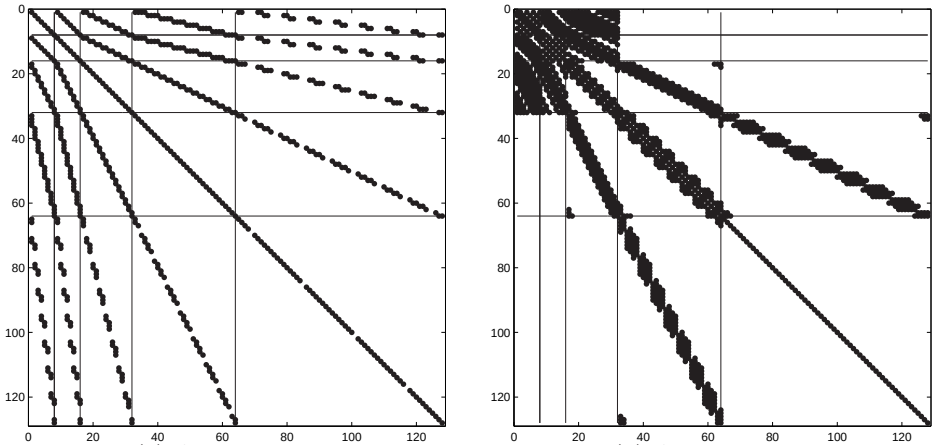
4.4.2 Vacuité de l'opérateur effectif d'interaction

Outre la vacuité du tenseur, la capacité de l'AMR a représenté économiquement les signaux est à prendre en compte. L'opérateur effectif d'interaction, noté $T_{\alpha\,\Psi_2,\Psi_3}$ et défini au paragraphe 3.59 par :

$$T_{\alpha\,\Psi_2,\Psi_3} = \sum_{\Psi_1} \langle \alpha, \Psi_1 \rangle (z) T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} \tag{4.15}$$

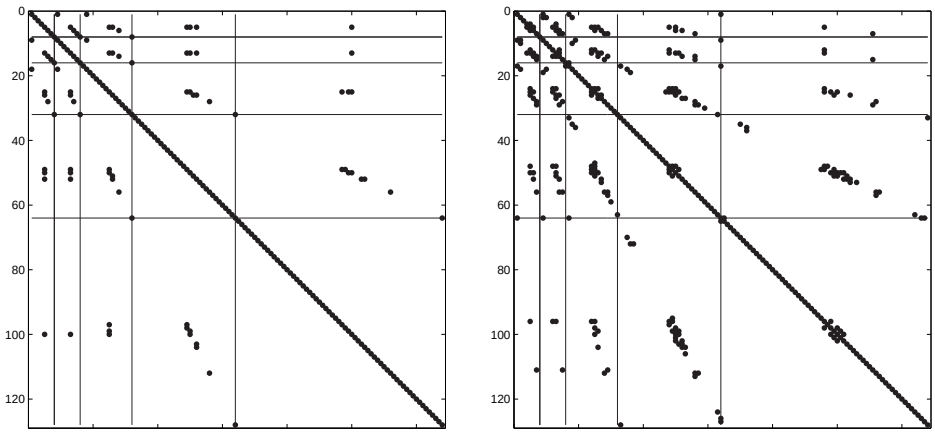
prend en compte la vacuité du tenseur d'interaction T_{Ψ_1,Ψ_2,Ψ_3} propre à l'AMR utilisée **et** la représentation du coefficient d'extinction par l'AMR. On visualise dans les figures 4.6 et 4.7 la vacuité de $T_{\alpha\,\Psi_2,\Psi_3}$ pour les deux fluctuations nuageuses horizontales utilisées dans le chapitre suivant. La figure 4.6 représente la vacuité de $T_{\alpha\,\Psi_2,\Psi_3}$ dans le cas d'une fluctuation sinusoïdale et au seuil de 10^{-1}. La vacuité au seuil de 10^{-1}dans le cas de l'AMR de Haar est de 95.7%, contre 90.3% pour Meyer. En outre, ce composant propose plus d'interactions entre échelles (termes non diagonaux) pour l'AMR de Haar que pour celle de Meyer tout simplement parce que la sinusoïde est représentée par l'AMR de Meyer au moyen seulement des fonctions d'échelles et des ondelettes à la plus grande échelle J, alors que la décomposition de la fonction sinus sur l'AMR de Haar est plus fournie. Au niveau de la vacuité de ce composant, la propriété de vacuité du tenseur d'interaction l'emporte toutefois sur la qualité de la représentation du coefficient d'extinction.

Dans le cas du nuage "cascade bornée", on obtient au seuil de 10^0 (fig. 4.7) :



(a) AMR de Haar (b) AMR de Meyer

FIG. 4.6 – Représentation standard de l'opérateur effectif d'interaction pour une fluctuation de type sinusoïdal.



(a) AMR de Haar (b) AMR de Meyer

FIG. 4.7 – Représentation standard de l'opérateur effectif d'interaction pour une fluctuation de type "cascade bornée".

La vacuité au seuil de 10^0 dans le cas de l'AMR de Haar est de 98.7%, contre 97.7% pour Meyer. Mais ce qui est plus intéressant, c'est de regarder comment cette vacuité varie en fonction du seuil (table 4.3) : pour un seuillage beaucoup plus faible, l'avantage sera bien sûr encore donné à l'AMR de Haar.

seuil	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
Vide en % AMR de Haar	94.43	94.43	94.43	94.43	94.434	94.43	94.43	94.66	98.73
Vide en % AMR de Meyer	0.01	0.28	2.97	12.35	25.13	38.15	56.25	82.87	97.75

TAB. 4.3 – Vacuité de l'opérateur effectif d'interaction pour le nuage cascade bornée en fonction du seuil

On mesure sur ces deux exemples à quel point le choix de l'AMR est important numériquement. Quand le seuil est beaucoup plus faible, $T_{\alpha\,\Psi_2,\Psi_3}$ est presque autant vide pour l'AMR de Haar et quelque soit le milieu, alors qu'avec l'AMR de Meyer, il se remplit très vite.

En pratique, le calcul de $\sum_{\Psi_1} \langle \alpha, \Psi_1 \rangle (z) T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3}$ qui donne $T_{\alpha\,\Psi_2,\Psi_3}$ est fait une fois pour toutes au début de la simulation. Si le milieu est hétérogène verticalement, ce calcul devra être fait pour chaque couche horizontale.

A côté de l'importance numérique de la vacuité des composants de connexion, revenons ici sur l'importance des valeurs maximales dans la matrice de différentiation $\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle$. On a vu que ces valeurs maximales jouent un rôle dans la discrétisation verticale à adopter. Pour des échelles d'approximation $J = 3$ et de résolution $L = 7$, et pour les AMR de Meyer, de Haar et l'AMR hybride *HM*, les valeurs maximales de $\langle \delta\Psi_1,\Psi_3 \rangle$ sont respectivement de 176.5, 67.9 et 135.9. De ce point de vue également, l'AMR hybride *HM* est intermédiaire entre les AMR de Meyer et de Haar.

4.5 Remarques sur les caractéristiques actuelles du code

Le code *Wavenum* développé pendant ce travail de thèse est à l'état de prototype. La langage utilisé (MATLAB), le découpage vertical du nuage, l'augmentation des ordres de diffusion réalisé par des allers et retours, la séparation des grandeurs radiatives en deux familles, ne vont pas dans le sens de performances numériques. De plus, les propriétés éparses des matrices ne sont pas véritablement exploitées. C'est la raison pour laquelle aucun paragraphe n'est véritablement consacré aux performances numériques actuelles du code de calcul.

Donnons tout de même quelques ordres de grandeur : pour 32 angles azimutaux, 8 angles zénithaux par quadrant, 128 points horizontaux, 1000 couches verticales, une trentaine d'ordres de diffusion, une décomposition azimutale d'ordre 16 et l'AMR de Haar :

- il faut environ 15 heures pour calculer toutes les grandeurs radiatives dans le nuage à l'aide d'un PC muni d'un processeur Pentium 4, fonctionnant à la vitesse de 1.7 GHz et muni d'une RAM de 512 Mo, soit environ **trente minutes par traversée de nuage**,
- le stockage en mémoire des coefficients d'échelle et d'ondelettes de tout le champ de radiances et du champ de radiances lui-même, reconstruit au cours du calcul, à l'intérieur du nuage et pour 50 altitudes intermédiaires, représente environ 30 Giga octets. Ces reconstructions intermédiaires ne sont pas indispensables et elles consomment du temps de calcul.

Chapitre 5

Résultats obtenus et premières analyses

Des simulations du transfert radiatif en atmosphère nuageuse hétérogène ont été réalisées à l'aide du code de calcul *WaveNum* mis au point durant ce travail de thèse. Les analyses multirésolutions de Meyer et de Haar, et l'AMR hybride HM définie aux chapitres précédents, ont été utilisées, et différents types de nuage ont été testés. Ceci tout d'abord dans le but d'appréhender les difficultés numériques que l'on peut rencontrer, la précision de calcul que l'on peut obtenir, pour des hétérogénéités nuageuses très différentes, et pour différentes AMR. Les comparaisons des résultats obtenus par rapport à ceux de code référence tels que Monte Carlo et SHDOM sont données. Elles montrent que les résultats sont en bon accord et que les difficultés numériques sont en partie surmontées. Ces simulations variées ont également pour objectif d'analyser les effets des hétérogénéités nuageuses sur les champs radiatifs à l'aide de cette nouvelle approche multirésolution. Les questions qui se posent sont celles de l'interprétation des résultats, de la dépendance du choix de l'AMR utilisée.

La section 5.1 détaille les simulations effectuées. Comme il a été dit dans la section 4.3.1, *WaveNum* fournit les quantités radiatives indicées $_J$ et $_{sub}$, respectivement calculées *à l'échelle* des pixels d'approximation, et dues aux interactions sous-pixel. La somme de ces deux quantités est égale aux quantités radiatives totales, notées sans indice, et conséquences de la totalité des interactions entre le champ de rayonnement et le champ nuageux. Ce sont ces derniers rayonnements, obtenus pour les différentes AMR, qui sont comparés dans la section 5.2 avec les résultats de simulations des codes SHDOM et Monte Carlo, ceci afin de valider les calculs.

Puis, la section 5.3 analyse les quantités moyennes à l'échelle des 2^J pixels d'approximation et de la période nuageuse. La séparation des quantités radiatives en deux familles permet de quantifier l'importance à plus grande échelle des hétérogénéités à petite échelle du champ nuageux, et ceci pour les radiances et les flux. Les flux analysés sont le flux solaire direct réduit, le flux diffus, ou la somme des deux pour le rayonnement descendant. Par exemple, dans le tableau 5.2 de la page 131, on distingue les flux directs sortants du nuage à l'échelle des pixels d'approximation (8 premières colonnes) et du nuage entier (dernière colonne), dus aux interactions à l'échelle (dwn_J), dus aux interactions sous-pixel (dwn_{sub}) et la somme des deux (dwn).

5.1 Simulations effectuées

Les types de nuages testés ont en commun quelques caractéristiques géométriques, optiques et les mêmes conditions aux limites.

Les caractéristiques géométriques suivantes ont été adoptées :

– épaisseur du nuage = 250m

– périodicité nuageuse suivant l'axe horizontal $\overrightarrow{x}$ avec une période de 6.4 km
– le nuage est uniforme dans la direction horizontale $\overrightarrow{y}$ et verticale $\overrightarrow{z}$
– sommet et base du nuage sont plats,

Les résolutions spatiales et angulaires sont les suivantes :
– la résolution horizontale est de 50 m : 128 points définissent donc horizontalement le nuage,
– la résolution verticale est de 25 cm : le nuage est découpé en 1000 couches,
– 8 angles zénithaux décrivent un quadrant : ils sont disposés de façon non régulière et imposés par le schéma de quadrature de Gauss utilisé,
– la résolution angulaire azimutale est de 12.5° soit 32 angles pour 360°.

Les angles sont repérés dans les tableaux et figures à venir par des indices. L'indice *iphi* de l'angle azimutal vaut donc de 1 à 32, et $iphi = 1$ correspond à $\phi = 0°$. Le tableau 5.1 fournit les angles zénithaux pour les radiances montantes et descendantes pour l'indice *iquad* et selon la convention adoptée (fig. 3.2).

indice *iquad*	1	2	3	4	5	6	7	8
angle zénital (en °) (radiances montantes)	8.35	19.17	30.05	40.94	51.84	62.74	73.64	84.55
angle zénital (en °) (radiances descendantes)	95.45	106.36	117.26	128.16	139.06	149.95	160.83	171.65

TAB. 5.1 – Angles zénithaux définis par la quadrature de Gauss.

Les caractéristiques optiques suivantes ont été adoptées :
– on simule le transfert radiatif pour des longueurs d'onde visible, et les nuages sont considérés purement diffusifs : $\widetilde{\omega}_o = 1$. Les nuages sont conservatifs (ils sont non-absorbants), et la somme des flux sortants normalisés est égale à un (fig. 5.2).
– la fonction de phase est celle de Heney-Greenstein pour $g = 0$ et $g = 0.7$, et elle est la même partout dans le nuage.

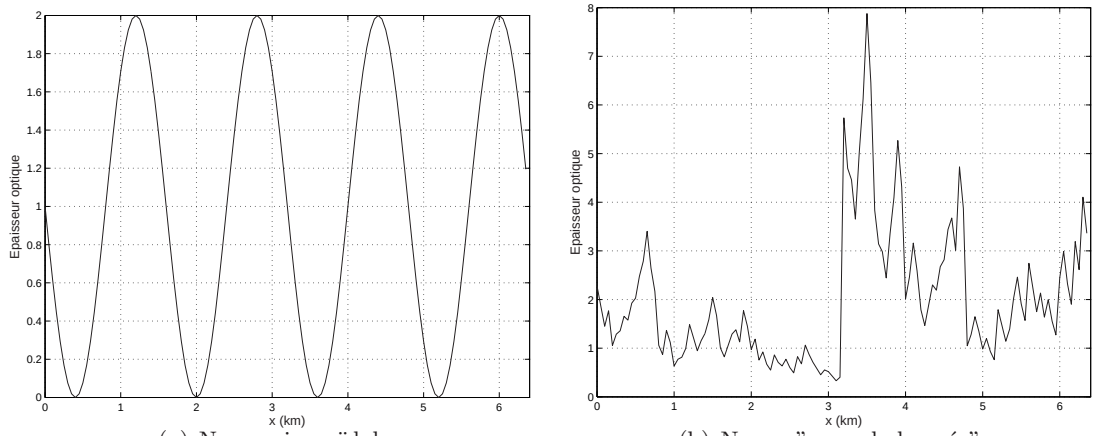
La condition à la limite haute du nuage est un flux solaire entrant collimaté et homogène avec un angle d'incidence zénithal de 160.83° (soit 19.17° par rapport à la verticale descendante) et dans le plan $\phi = 0°$. Il y a donc pas de rayonnement diffus entrant au sommet du nuage. La surface sous-jacente est considérée comme étant purement absorbante (par exemple une surface océanique).

Les caractéristiques des décompositions en séries orthogonales sont les suivantes :
– la décomposition azimutale en Fourier du champ de radiances fournit une composante constante et 16 harmoniques,
– l'ordre de la décomposition en polynômes de Legendre de la fonction de phase est imposé par la décomposition azimutale en Fourier et vaut aussi 16,
– La résolution horizontale de 128 points fixe l'échelle de résolution des AMR : $L = 7$. L'échelle d'approximation J est fixée à trois : sont donc définis $2^3 = 8$ pixels d'approximation.

Les nuages utilisés dans ces simulations sont homogènes verticalement. Le calcul n'est pas basé sur cette homogénéité, comme le seraient des schémas de adding-doubling. Les hétérogénéités horizontales n'ont pour l'instant pas pour vocation à être réalistes. On s'apercevra d'ailleurs qu'une hétérogénéité simple comme le nuage sinusoïdal permet de faire une analyse claire des interactions entre échelles. Deux types d'hétérogénéités horizontales ont été simulés :
– Le **nuage sinusoïdal** (fig. 5.1a)
  La sinusoïde est de période 1600 m, d'épaisseur optique moyenne égale à 1. A cause du

passage à zéro de la distribution, la couverture nuageuse peut être considérée comme fractionnaire.

– Le **nuage cascade bornée** (fig. 5.1b)
Ce signal a été généré à l'aide du modéle dit à cascade bornée ([Cahalan 1994] et [Marshak et al. 1994]). L'épaisseur optique moyenne est égale à 2. Cette distribution a l'avantage de proposer des grands sauts d'épaisseur optique qui numériquement posent problème, ceci afin d'examiner le comportement du code de calcul pour ce type de condition.



(a) Nuage sinusoïdal (b) Nuage "cascade bornée"

FIG. 5.1 – Hétérogénéités nuageuses horizontales simulées.

Ces deux types de nuage idéalisés sont supposés représenter des stratus bas au dessus d'une surface océanique.

Le choix de l'ordre de diffusion maximum dépend des nuages testés. Les simulations ont été arrétées lorsque le bilan d'énergie a été fermé avec une précision de 0.5%. Les résultats présentés correspondent pour le nuage sinusoïdal à 29 ordres de diffusion et un bilan fermé à 0.02% près, et pour le nuage cascade bornée à 26 ordres de diffusion et un bilan fermé à 0.5% près. Dans les deux cas, la diffusion est isotrope : $g = 0$. Pour illustrer ce propos, on peut voir sur la figure 5.2 l'évolution des flux normalisés sortants du nuage en fonction de l'ordre de diffusion dans le cas du nuage sinusoïdal et pour $g = 0$. Sont figurés les flux cumulés dus aux interactions à l'échelle, aux interactions sous-pixel et à la totalité des interactions. On constate que le flux du aux interactions sous-pixel converge vers zéro : celles-ci ne créent donc pas d'énergie dans le nuage, ce qui est rassurant ! Ces interactions vont seulement modifier la répartition angulaire de l'énergie.

Rappelons que trois analyses multirésolutions ont été testées : l'AMR de Meyer, de Haar, et l'AMR hybride "HM" définie aux deux chapitre précédents.

5.2 Comparaison des résultats avec SHDOM et Monte Carlo

Les flux totaux, résultats de la totalité des interactions, ou encore la somme des quantités radiatives indicées $_J$ et $_{sub}$, sont maintenant comparées avec les résultats de simulations des codes SHDOM et Monte Carlo.

Quand on compare des résultats de codes de transfert radiatif, la comparaison des radiances vient souvent en deuxième après celle des flux car il est plus facile d'obtenir des flux corrects que des radiances correctes. Mais les flux étant déduits des radiances, ce sont les

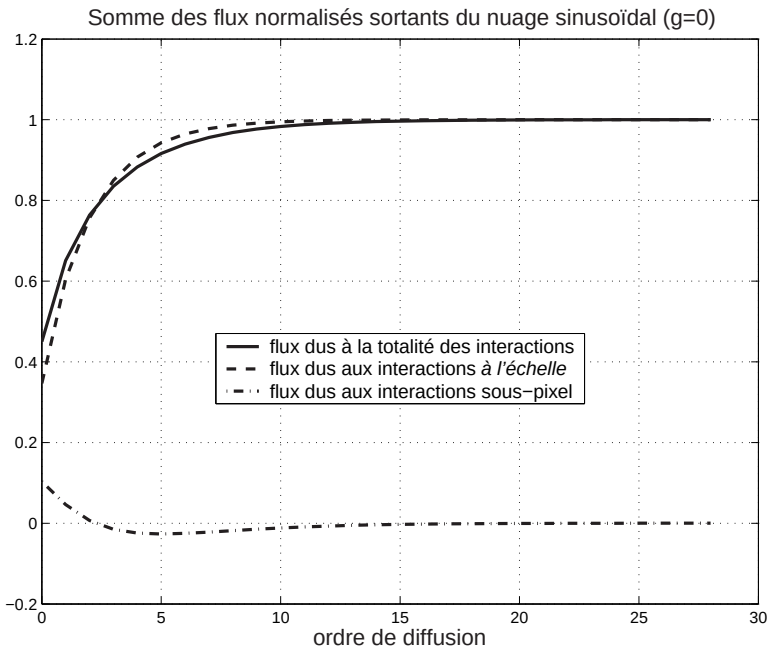


FIG. 5.2 – Evolution des flux normalisés sortants, à l'échelle de la période nuageuse, du nuage sinusoïdal en fonction de l'ordre de diffusion - g=0.

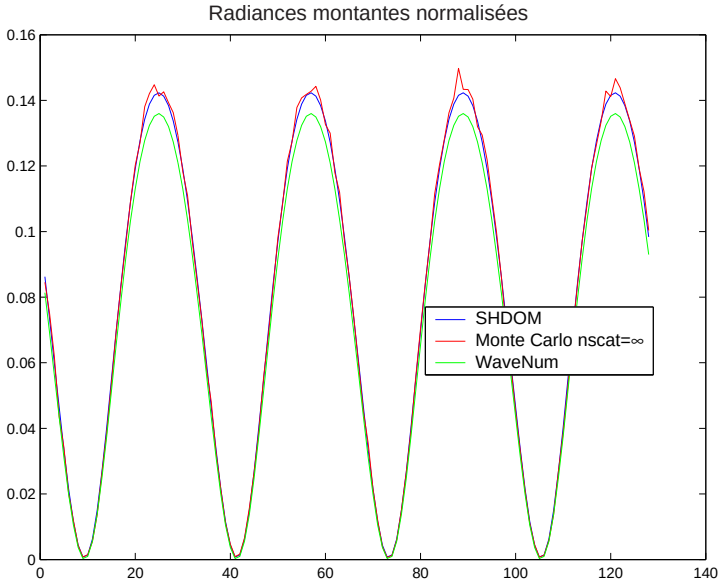
radiances qu'on va comparer en premier lieu ; l'interprétation de la comparaison des flux sera plus aisée.

La comparaison des radiances n'est pas présentée sous forme polaire, car il faudrait pour cela choisir seulement quelques points. Il est plus judicieux de présenter la comparaison des radiances sur l'ensemble d'une période du nuage pour certaines directions angulaires. Cela fera mieux apparaître les difficultés numériques. La comparaison des flux se fera sur les flux sortants du nuage, les flux directs réduits, diffus montant et descendant. Tous les flux et radiances donnés ci-dessous sont normalisés par l'énergie entrant dans le nuage. Si des valeurs de flux sont supérieurs à un, cela correspond à des effets de *canalisation* (ou *channellin*g, en anglais) du rayonnement : pour des raisons d'inhomogénéité horizontale, la colonne verticale considérée est relativement éclairée par ses voisines.

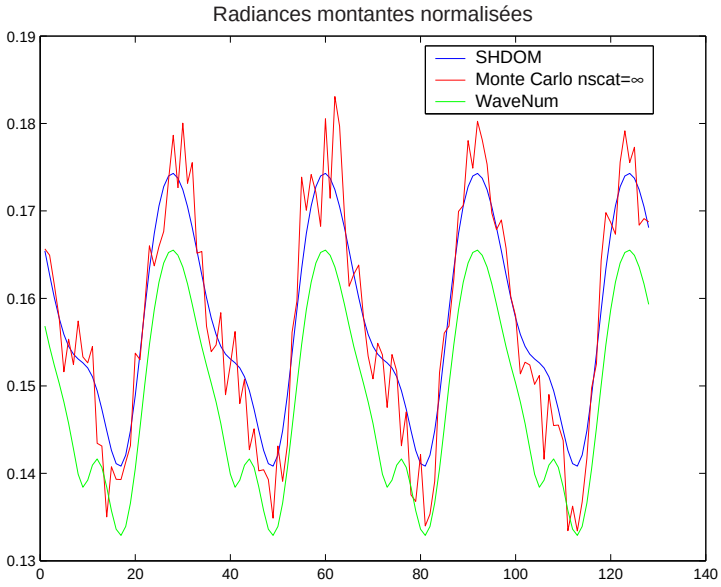
Des précisions concernant le fonctionnement et les caractéristiques des simulations SHDOM et Monte Carlo produites sont donnés dans l'annexe G. On précise en particulier la règle concernant la précision des calculs Monte Carlo qui a justifié le lancement de 3.10^9 photons sur le nuage pour une précision moyenne d'environ 1% sur les radiances.

5.2.1 Comparaison des flux et radiances sortants dans le cas du nuage sinusoïdal

On montre ici les résultats **uniquement pour l'AMR de Meyer**, car ceux pour les AMR de Haar et *HM* en sont très proches. La discussion sur la différences des résultats en fonction des AMR se fera avec le nuage "cascade bornée". De plus, les résultats de *WaveNum* sont comparés avec ceux du code Monte Carlo pour l'ordre maximal de diffusion "infini", car ceux pour l'ordre de diffusion 29 (l'ordre retenu pour *WaveNum)* sont très proches.

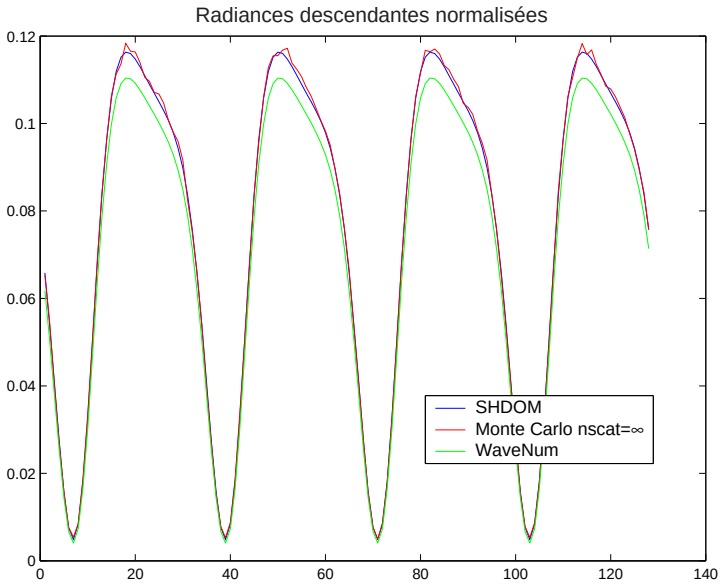


(a) Direction : iphi=1, iquad=1

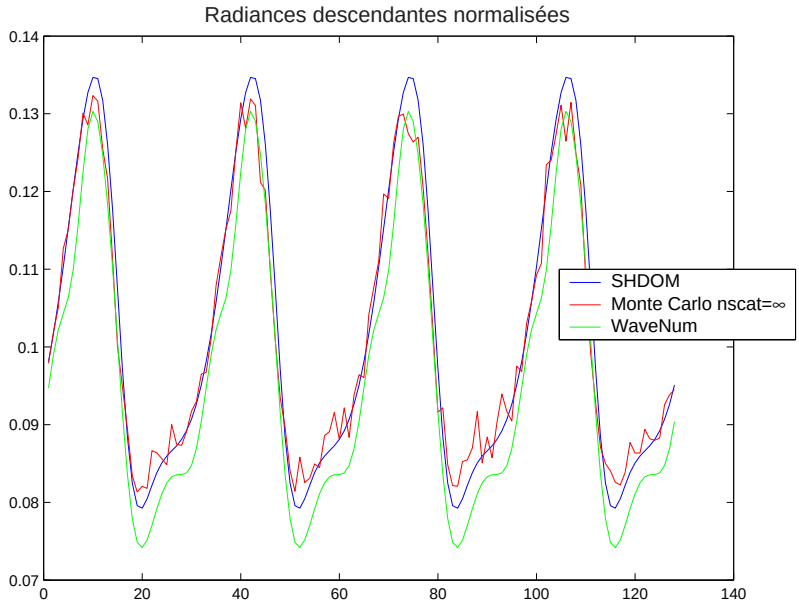


(b) Direction : iphi=1, iquad=8

FIG. 5.3 – Comparaison de radiances montantes sortant du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.



(a) Direction : iphi=6, iquad=4



(b) Direction : iphi=1, iquad=2

FIG. 5.4 – Comparaison de radiances descendantes sortant du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

5.2.1.1 Comparaison des radiances sortantes

Les figures 5.3 et 5.4 montrent respectivement la comparaison des radiances montantes et descendantes, pour deux directions différentes : l'une très verticale (fig. 5.3a et 5.4a) et l'autre très proche de l'horizontale (fig. 5.3b et 5.4b). On rappelle que les correspondances entre les indices *iphi* et *iquad* et les angles sont données dans la section 5.1 et dans le tableau 5.1. Pour des angles proches de la verticale (cas a), on constate un bon accord, même si on sousestime dans les deux cas les radiances dans les régions où elles sont maximales, c'est-à-dire des zones où l'épaisseur optique est élevée. Et ceci n'est pas du au nombre fini d'ordre de diffusion, car les résultats pour Monte Carlo aux ordres de diffusion 29 (non figurés ici) et infini sont très proches. Pour des directions proches de l'horizontale (cas b), le biais est plus systématique et nos résultats sont toujours en dessous des résultats des codes référence. Notons que les radiances Monte Carlo pour les angles zénitaux proches de 90° sont entachées de bruits s'apparentant à des bruits statistiques. Pour ces angles, dans le cas de la figure 5.3b, les plus faibles valeurs des radiances *WaveNum* et Monte Carlo sont proches, et il en est de même pour les valeurs les plus élevées dans le cas de la figure 5.4b. Ces valeurs pour ces deux directions correspondent aux zones de faible épaisseur optique.

On constate donc que les radiances obtenues avec notre code de calcul sont assez proches de celles obtenues avec les codes SHDOM et Monte Carlo. Le fait que l'accord est meilleur pour des directions verticales plutôt qu'horizontales tient au fait que l'épaisseur optique mesurée à l'oblique dans ces directions horizontales est grande. Ceci est confirmé par le fait que pour des directions verticales, on constate un plus grand écart pour les régions de plus forte épaisseur optique. Rappelons ici (voir annexe pour plus de précisions et [Evans 1998]) que les radiances SHDOM sont obtenues de façon itérative : l'intégration angulaire des radiances fournit les sources de diffusion, le calcul de l'extinction de ces sources de diffusion donne un nouveau jeu de radiances qui fournit à son tour des sources qui, si l'ETR est équilibrée, sont égales au premier jeu de sources. Ce calcul itératif garantit une fermeture du bilan d'énergie. Ce type de calcul itératif n'existe pas dans notre code : nous ne sommes pas sûr de la stricte conservation de l'énergie partout dans le nuage. Une autre origine des écarts constatés se trouve possiblement dans les faiblesses du schéma de quadrature utilisé (seulement 8 points de quadrature par quadrant). Cet argument est détaillé dans le paragraphe suivant sur la comparaison des flux diffus.

5.2.1.2 Comparaison des flux sortants

5.2.1.2.1 Flux direct transmis

La comparaison est faite ici uniquement avec SHDOM, le flux Monte Carlo étant confondu avec SHDOM (fig. 5.5). On constate un bon accord du flux dû au rayonnement direct réduit calculé avec *WaveNum* et SHDOM : l'erreur relative maximale vaut 1.28 %, et cela correspond aux valeurs les plus faibles ; à l'échelle du nuage, l'erreur relative moyenne vaut 0.059 %.

5.2.1.2.2 Flux diffus descendant sortant du nuage

La comparaison se fait ici avec les flux SHDOM et Monte Carlo, sorties founies directement par ces codes, et avec les flux obtenus à partir de l'intégration des sorties radiances des codes par le schéma de quadrature de Gauss utilisé dans le code *WaveNum*. On peut voir sur les figures 5.6 que nos résultats sont proches des flux de sortie des codes de référence : très proches du flux Monte Carlo et légèrement supérieurs au flux SHDOM pour les régions où le flux est maximal (fig. 5.6b), et très proches du flux SHDOM et légèrement supérieurs au flux Monte Carlo pour les régions où le flux est minimal (fig. 5.6c). La comparaison avec les flux SHDOM et Monte Carlo calculés à l'aide de la quadrature de Gauss confirme le biais négatif de nos résultats pour les régions où l'épaisseur optique est élevée, biais constaté sur les

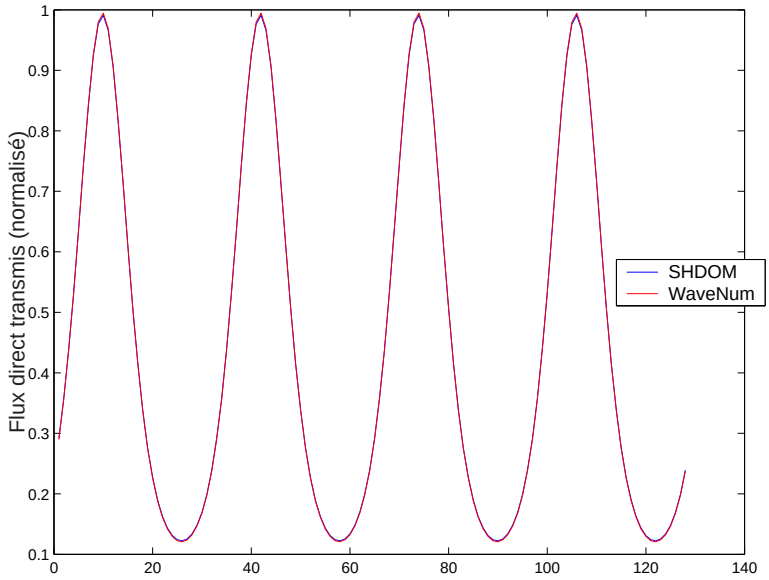


FIG. 5.5 – Comparaison des flux directs transmis – Cas du nuage sinusoïdal.

radiances. On retrouve donc le point évoqué plus haut : si des écarts apparaissent au niveau de la comparaison des radiances, c'est en partie dû à la quadrature utilisée, et ce surtout pour les angles faiblement inclinés. Les erreurs relatives constatés par rapport au flux SHDOM sortie de code sont au maximum de 4.4 % (et ce pour les très faibles valeurs des flux), et de 0.016 % à l'échelle du nuage.

5.2.1.2.3 Flux diffus montant sortant du nuage

Les flux étant normalisés, le flux diffus montant sortant du nuage correspond à la réflectance. La comparaison se fait de même que pour le flux diffus transmis par rapport aux deux flux SHDOM et aux deux flux Monte Carlo (fig. 5.7).

On constate ici une bonne adéquation avec les flux Monte Carlo et les flux SHDOM déduits des radiances par une intégration de Gauss. Les erreurs relatives constatés par rapport au flux SHDOM sortie de code sont de 0.063 % à l'échelle du nuage.

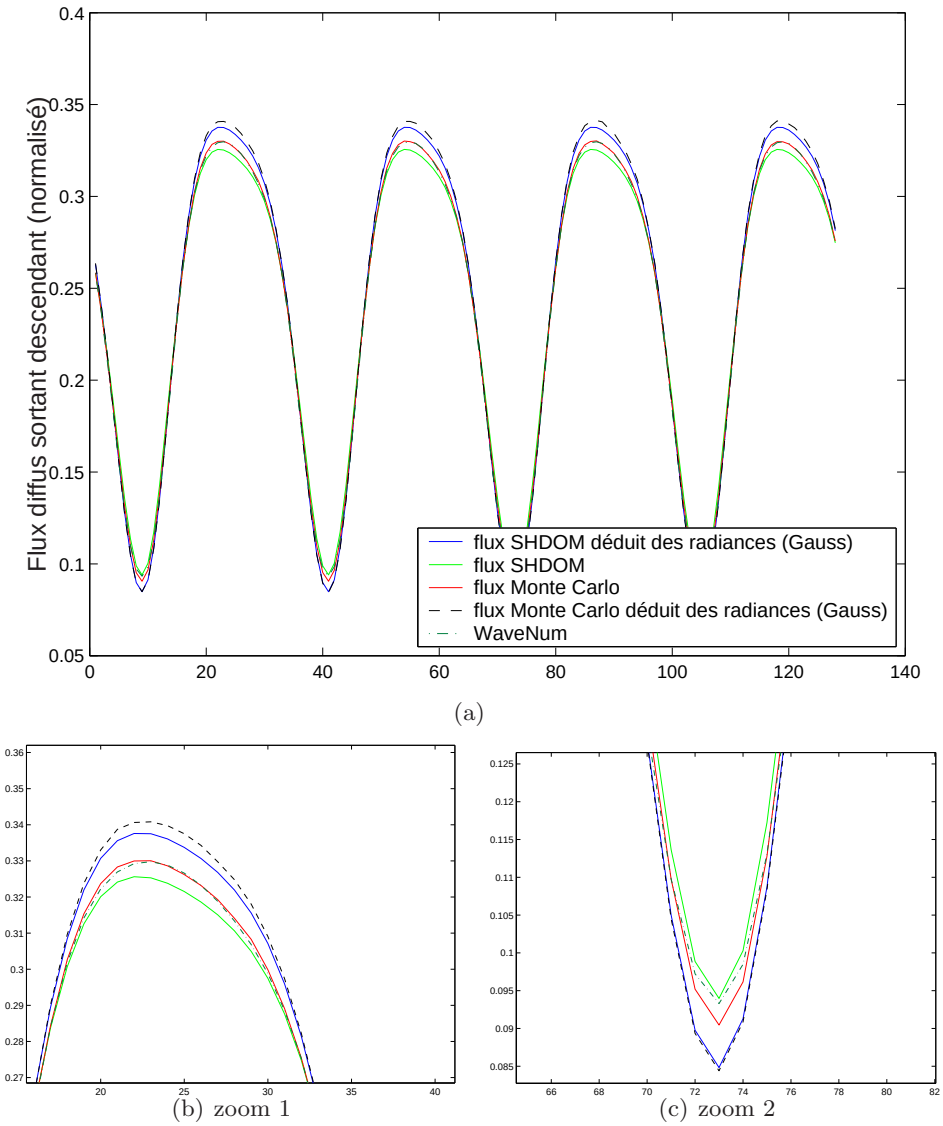
5.2.2 Comparaison des flux et radiances sortants dans le cas du nuage "cascade bornée"

On montre ici les résultats obtenus pour les trois AMR Haar, Meyer et "HM" pour *WaveNum*. La comparaison est faite en particulier avec les radiances et flux Monte Carlo calculés pour un ordre de diffusion limité et égal à celui de nos simulations, et pour un ordre de diffusion "infini". On différencie par la suite ces deux résultats Monte Carlo en les notant $MC26$ et $MC\infty$.

5.2.2.1 Comparaison des radiances sortantes

Les figures 5.8 et 5.9 montrent la comparaison des radiances montantes sortantes pour deux directions respectivement proches de la verticale et de l'horizontale. Les figures 5.10 et 5.11 sont l'équivalent pour les radiances descendantes.

D'une manière générale, on observe que la comparaison est la meilleure pour les directions les plus à la verticale (figures 5.8 et 5.10). Les radiances obtenues avec *WaveNum* sont plus

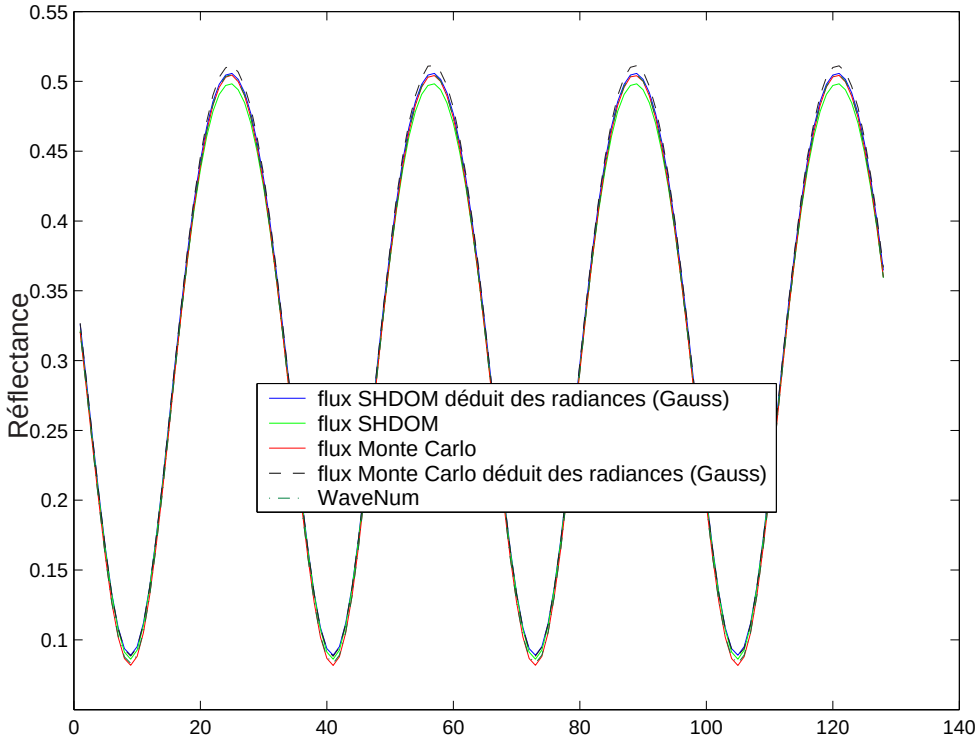


(a)

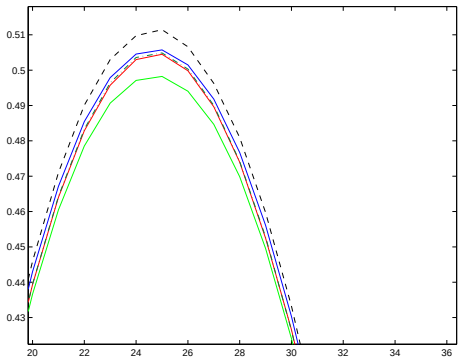
(b) zoom 1

(c) zoom 2

FIG. 5.6 – Comparaison des flux diffus descendants sortants du nuage sinusoïdal.



(a)



(b) zoom 1

FIG. 5.7 – Comparaison des flux diffus montants sortants du nuage sinusoïdal.

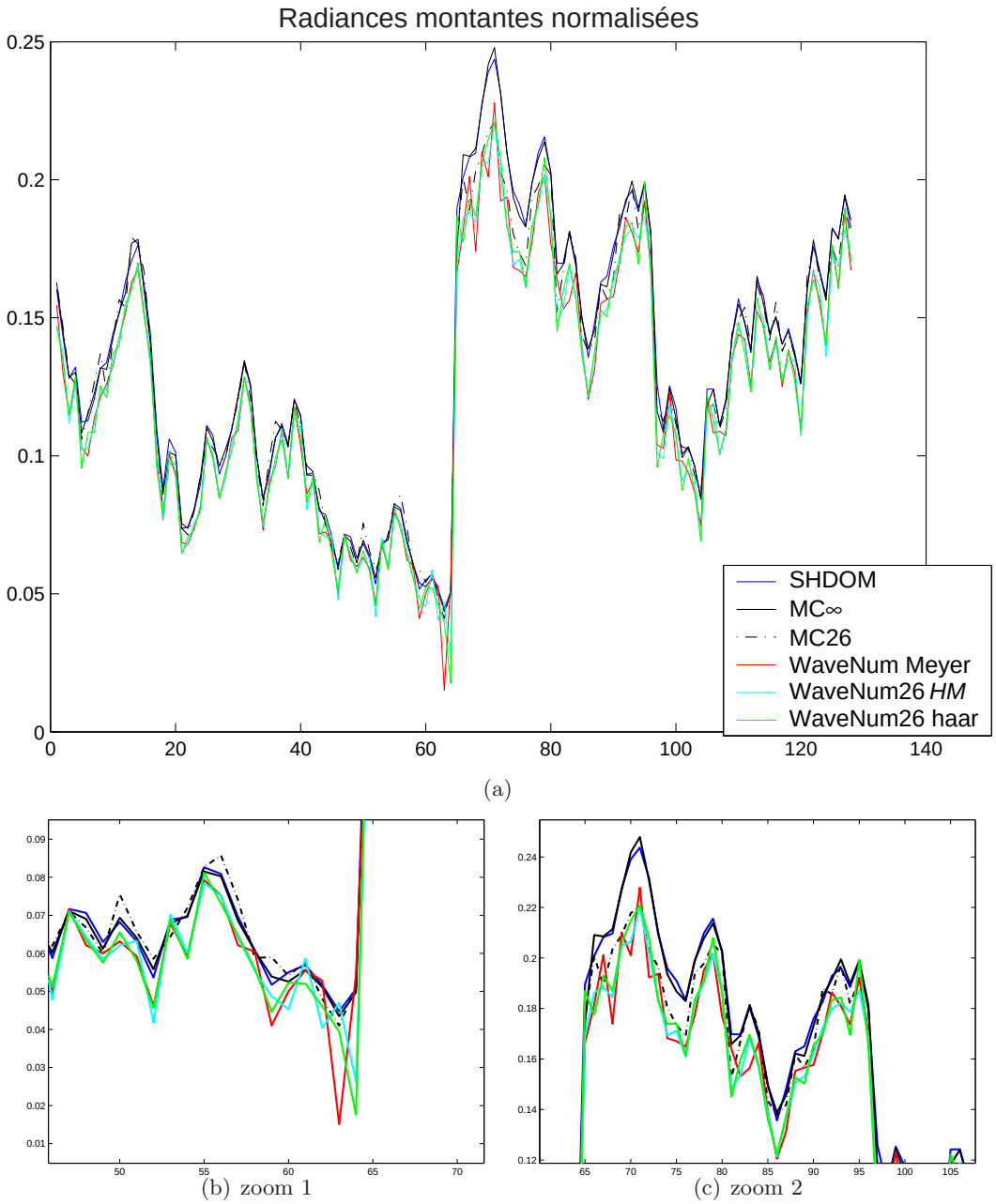
ou moins bruitées en fonction des AMR, des directions considérées, et de la position dans le nuage (donc de l'épaisseur optique locale). Les radiances obtenues pour l'AMR de Meyer semble plus bruitée à petite échelle, et les radiances pour les AMR de Haar et *HM* sont souvent très proches. Il est à noter qu'en certains points, la valeur des radiances $MC26$ est supérieure à celles des radiances $MC\infty$ (voir figures 5.8b et 5.9b). Cette différence n'a aucun sens physique, l'ordre de diffusion inférieur fournissant normalement des radiances inférieures. L'explication a ceci est d'ordre statistique et numérique : les deux résultats $MC26$et $MC\infty$ sont issus de deux simulations distinctes, et des erreurs statistiques sont associées à ces résultats (erreurs directement liées au nombre de photons utilisés dans les simulations Monte Carlo) ; de plus, les radiances sont obtenues après interpolation et extrapolation des valeurs correspondant aux directions utilisées dans Monte Carlo vers les directions définies par les discrétisations azimutal et zénithal (définie par la quadrature de Gauss) retenues pour *WaveNum*. Des précisions sont données dans l'annexe intel to to to toooo.

Pour les directions les plus verticales (fig. 5.8 et 5.10), le bon accord avec les radiances $MC26$ montrent que le processus d'augmentation de l'ordre de diffusion est correctement modélisé : dans les régions de forte épaisseur optique (fig. 5.8c et 5.10b) où la diffusion continue à opérer (où les photons ne sont pas encore tous sortis du nuage), les radiances *WaveNum* sont proches des radiances $MC26$. Ces régions sont repérables par le fait que les valeurs maximales des radiances $MC26$ sont inférieures à celles des radiances $MC\infty$. Elles sont aussi repérables en observant la pente non nulle de l'évolution des radiances *WaveNum* en fonction de l'ordre de diffusion (non figuré ici). Les différences constatées avec les radiances SHDOM sont donc dues en partie à la limitation des ordres de diffusion.

Pour les directions les plus horizontales (fig. 5.9 et 5.11), les radiances obtenues avec 5.11 dépendent davantage des AMR et elles sont beaucoup plus bruitées que pour les directions proches de la verticale. On note en commun pour les trois AMR un biais systématique négatif par rapport aux radiances SHDOM et Monte Carlo. Etudions de plus près les bruits présents. A la verticale de la forte discontinuité centrale du signal d'épaisseur optique se développe un bruit caractéristique (fig.5.8b) qui est accentué pour les directions proches de l'horizontale et peut avoir tendance à se propager vers la gauche (fig. 5.9b et 5.11). Ce bruit prend deux formes différentes :

- pour l'AMR de Haar, qui ne souffre pas de présence d'effet de Gibbs [Walter and Shen 2001], il se manifeste par une paire de dents de scie accolées, de grandes amplitudes, et très localisées sur la discontinuité (5.9 a et b). On retrouve ici le mauvais comportement du schéma aux différences finies centré vu au chapitre 4 et sur la figure 4.5. Plus loin du saut central, les radiances "Haar" sont beaucoup plus lisses, manifestation du filtrage du au schéma aux différences finies centré (voir annexe D).
- La deuxième forme est celle conduisant à une propagation du bruit : elle est présente pour les AMR utilisant les coefficients de connexion de Meyer. C'est probablement la manifestation du **phénomène de Gibbs** déjà évoqué au chapitre précédent. Ce phénomène affecte le terme produit et le terme dérivée. La figure 5.9b permet de bien discerner ses effets dans ces deux termes : les radiances "Meyer" sont comportent un bruit d'amplitude importante car, et le terme produit et le terme dérivée, calculés tous deux avec l'AMR de Meyer, sont affectés par ce bruit ; les radiances *HM* sont bruitées également mais l'amplitude est moins grande, certainement parce que seul le terme dérivée est calculé avec l'AMR de Meyer. D'ailleurs, plus généralement et pour des directions très inclinées (fig. 5.9 et 5.11), les radiances "Meyer" sont plus bruitées que les autres : le bruit de Gibbs provenant du terme produit est présent partout. A noter que les radiances *HM* ne souffrent pas de la première forme de bruit évoqué ci-dessus.

Ainsi, la comparaison des radiances sortantes pour cette situation montre :

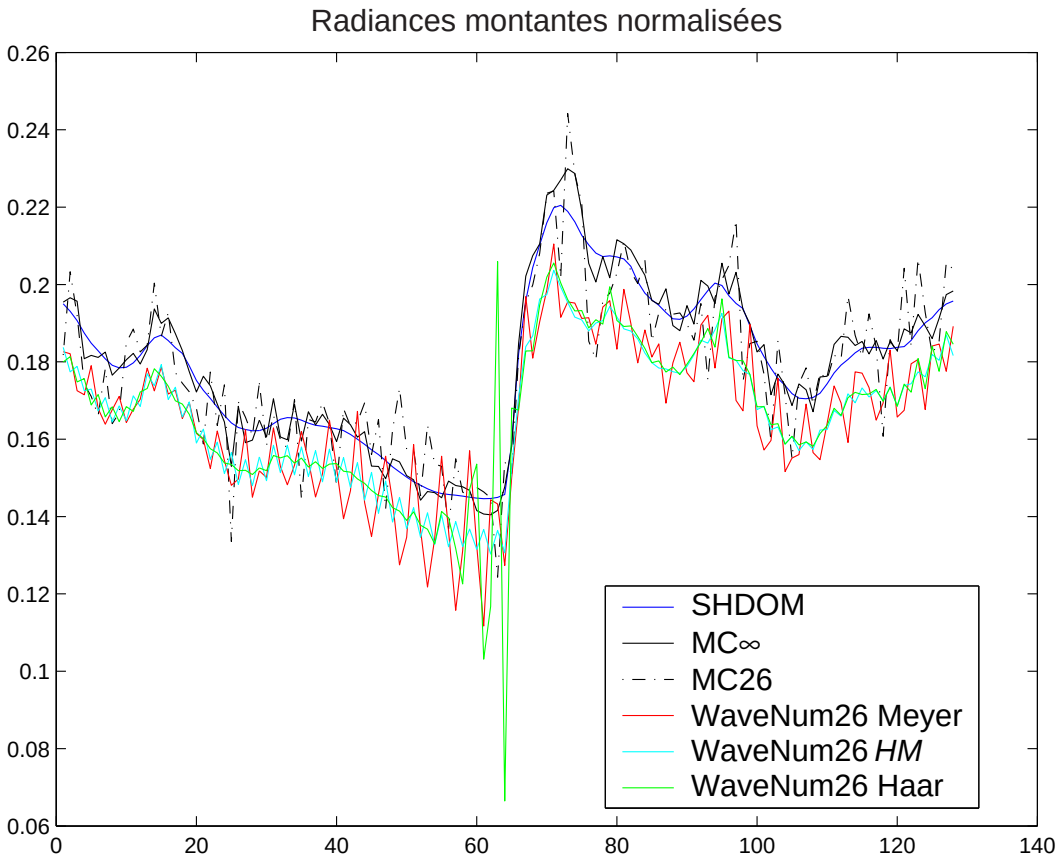


(a)

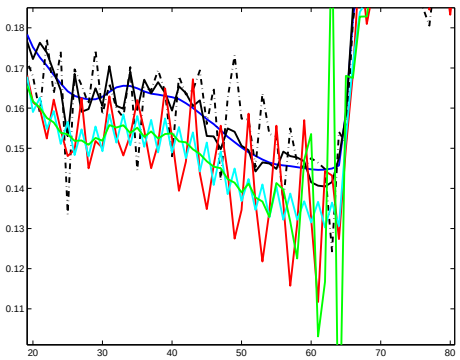
(b) zoom 1

(c) zoom 2

FIG. 5.8 – Comparaison des radiances montantes sortant du nuage cascade bornée - Direction : $iphi = 1$, $iquad = 1$.

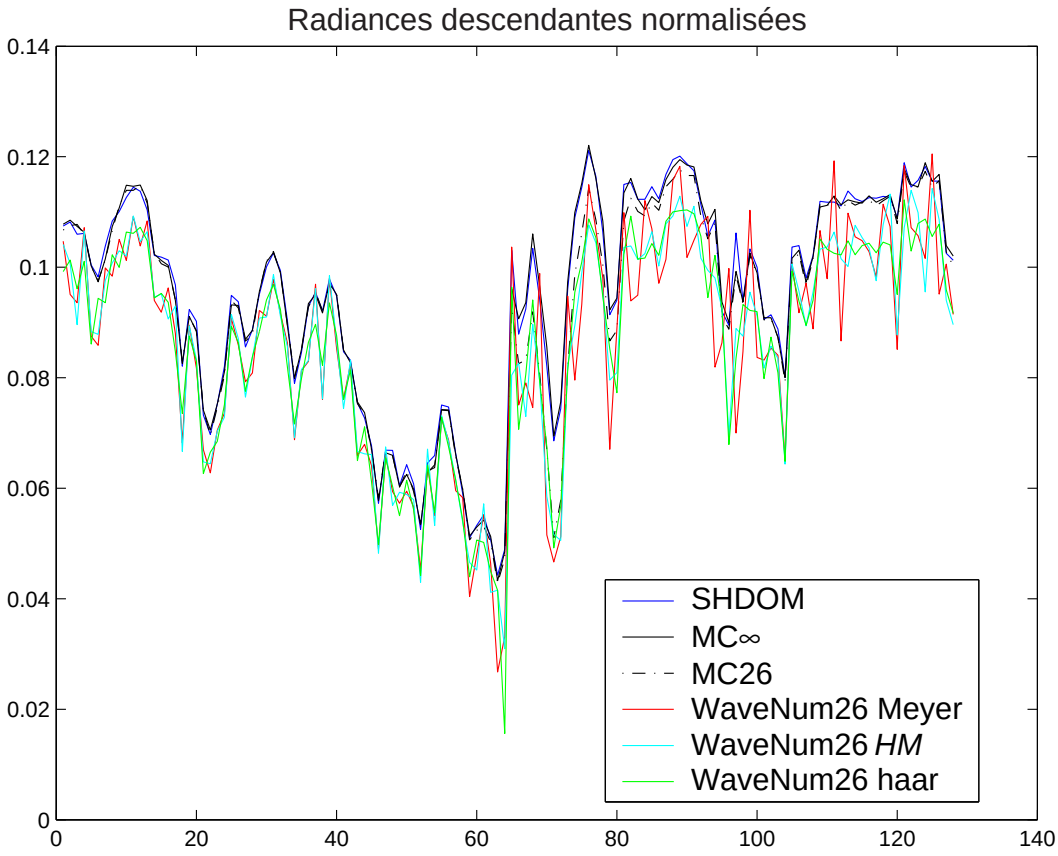


(a)

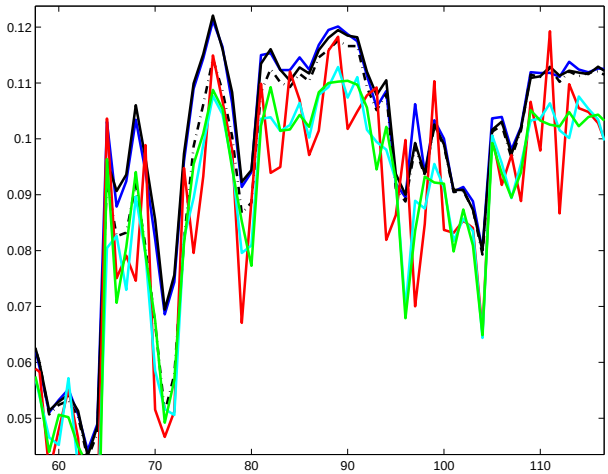


(b) zoom

FIG. 5.9 – Comparaison des radiances montantes sortant du nuage cascade bornée - Direction : $iphi = 1$, $iquad = 8$.

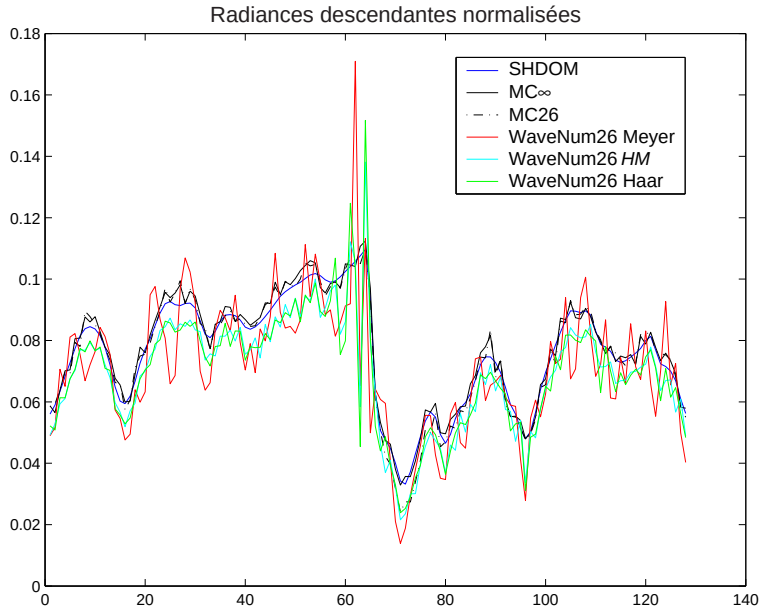


(a)



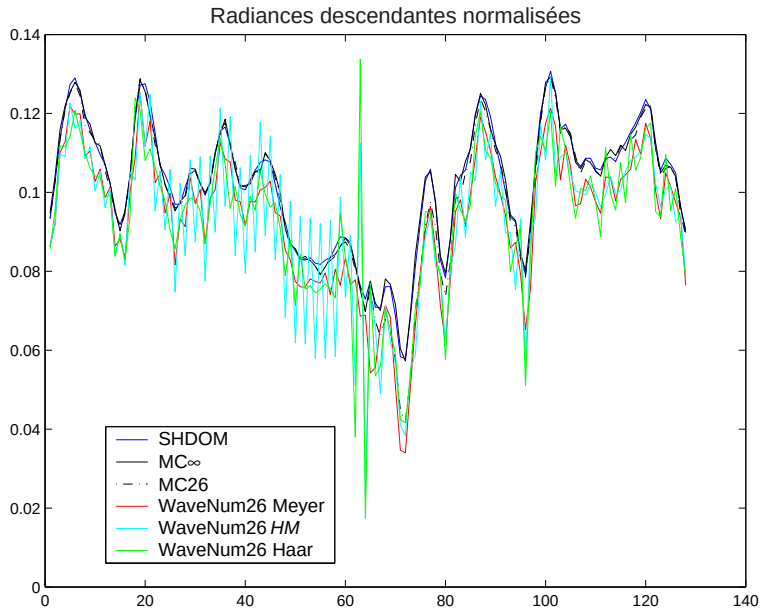
(b) zoom

FIG. 5.10 – Comparaison des radiances descendantes sortant du nuage cascade bornée - Direction : $iphi = 2$, $iquad = 8$.



(a)

FIG. 5.11 – Comparaison des radiances descendantes sortant du nuage - Direction : $iphi = 1$, $iquad = 1$.



(a)

FIG. 5.12 – Comparaison des radiances descendantes sortant du nuage cascade bornée - Direction : $iphi = 1$, $iquad = 4$.

- que les radiances montantes *Wavenum* souffrent d'un biais négatif pour les directions proches de l'horizontale ;
- que la présence de bruit numérique, avec pour origine les fortes discontinuités du signal d'épaisseur optique, se transmet à tout le signal (et particulièrement vers la gauche) quand il s'agit d'un effet de Gibbs, sans toutefois faire exploser les valeurs. Des travaux sont à mener pour étudier cette propagation du bruit ;
- que l'accord est meilleur pour les radiances montantes que descendantes. Les radiances descendantes *WaveNum* sont globalement les plus bruitées pour ce nuage. Il est à noter que c'était moins le cas pour le nuage sinusoïdal (fig. 5.3 et 5.4) ;
- que l'AMR hybride *HM* semble être un bon compromis entre celles de Haar et de Meyer, la figure 5.9c étant l'illustration que cette AMR exploite les avantages des deux AMR.

Concernant ce dernier point, il ne faut pas crier victoire trop tôt car pour d'autres directions (fig. 5.12), on obtient des résultats différents. Pour cette direction, le bruit présent à gauche de la discontinuité centrale est de plus grande amplitude pour les résultats de l'AMR *HM*. Des études plus approfondies sont à mener pour étudier la conséquence de notre façon de procéder : le fait de projeter la matrice de différentiation de Meyer sur la base de Haar doit certainement être un point sensible.

5.2.2.2 Comparaison des flux sortants

5.2.2.2.1 Flux direct transmis

La comparaison avec les références SHDOM et Monte Carlo (fig. 5.13) montre la présence de bruits à haute fréquence pour les résultats des trois calculs *Wavenum*. Similairement à l'étude des radiances, on note des fluctuations importantes et anormales des flux à la verticale du saut central d'épaisseur optique, que les AMR de type Meyer et Haar ont du mal à gérer, pour cause respectivement de phénomène de Gibbs et de calcul approximatif de la dérivée horizontale du signal. Les erreurs constatées pour l'AMR de Meyer sont les suivantes :

	erreur sur la la moyenne du flux	erreur relative sur la la moyenne du flux (en %)
Erreur/shdom	$2.08.10^{-3}$	0.40
Erreur/Monte Carlo	$2.28.10^{-3}$	0.44

5.2.2.2.2 Flux diffus montant sortant du nuage

La comparaison avec les références SHDOM et Monte Carlo (fig. 5.14a) montre un assez bon accord.

En zoomant sur une partie du signal (fig. 5.14b), on s'aperçoit que dans les régions où l'épaisseur optique est importante et où les photons continuent à sortir du nuage, la comparaison de nos simulations avec la simulation $MC26$ est très correcte. Les erreurs constatées pour l'AMR de Meyer sont les suivantes :

	erreur sur la moyenne des réflectances	erreur relative sur la moyenne des réflectances (en %)
Erreur/shdom	$9.31.10^{-3}$	1.93
Erreur/MC26	$2.28.10^{-3}$	0.48

5.2.2.2.3 Flux diffus descendant sortant du nuage

Après la comparaison faite sur les radiances descendantes, on retrouve ici logiquement un moins bon accord sur la comparaison des flux diffus vers le bas que vers le haut. On constate un bruit à la verticale du saut central d'épaisseur optique qui se propage pour l'AMR *HM*. (fig. 5.15b). On observe encore ici le bon accord avec la simulation $MC26$ (fig. 5.15c). Les erreurs constatées pour l'AMR de Meyer sont les suivantes :

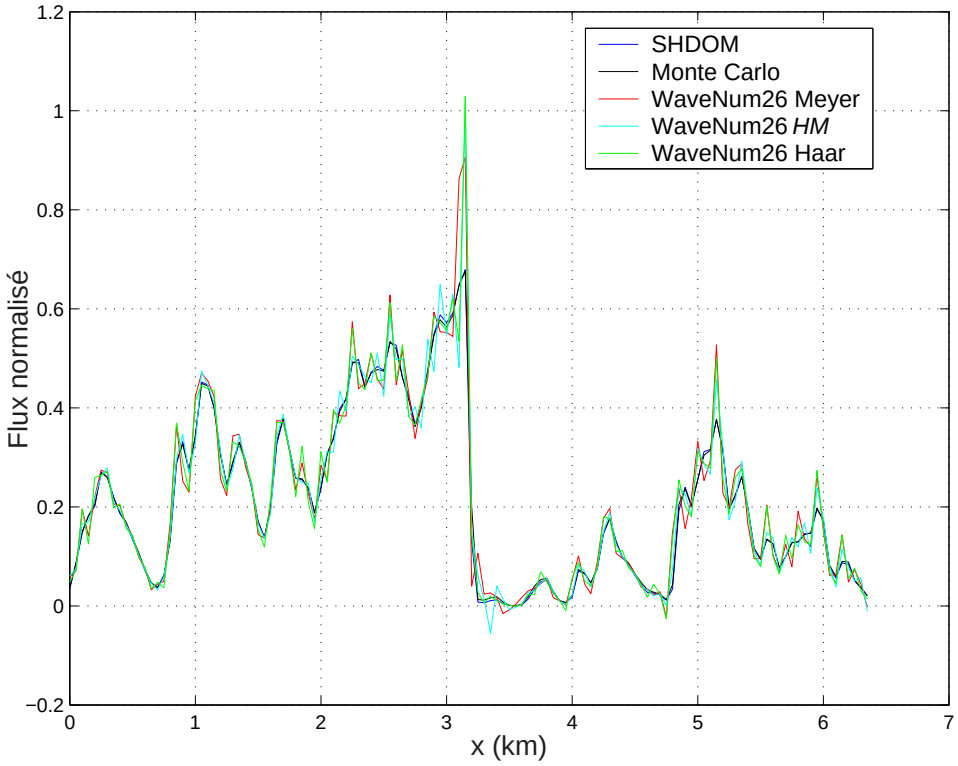


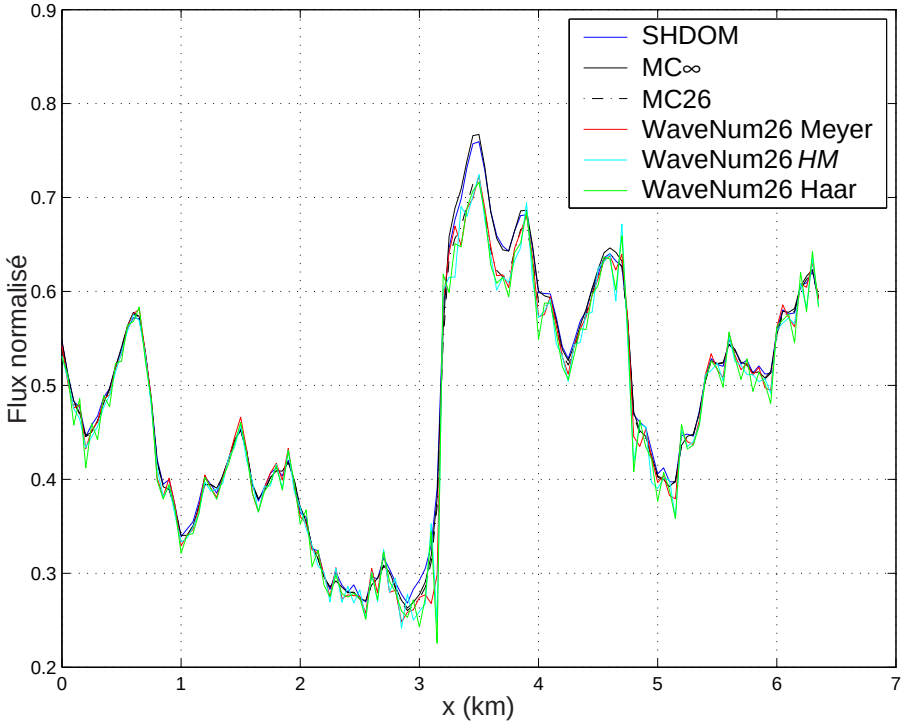
FIG. 5.13 – Flux collimaté direct sortant du nuage cascade bornée.

	erreur sur la moyenne des réflectances	erreur relative sur la moyenne des réflectances (en %)
Erreur/shdom	$9.4.10^{-3}$	3.0
Erreur/Monte Carlo nscat=26	5.10^{-3}	1.7

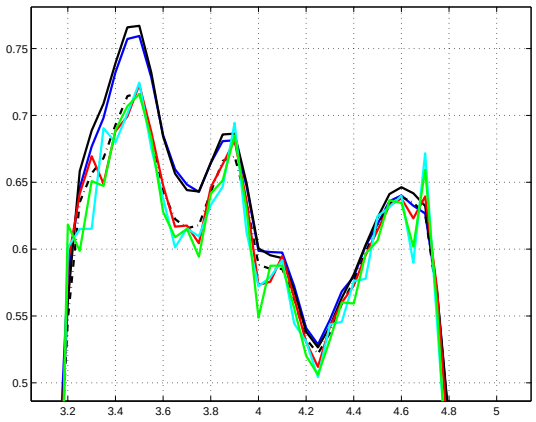
5.2.3 Bilan de ces comparaisons

La comparaison des résultats du code *WaveNum* avec ceux des codes de référence Monte Carlo et SHDOM montre la relative précision de nos résultats pour les nuages testés, et ceci à la fois pour les flux et pour les radiances. Cette comparaison fait apparaître les difficultés numériques rencontrées, les avantages et défauts des AMR. Pour les trois AMR, les radiances montantes souffrent d'un biais négatif systématique dans des directions proches de l'horizontale. Peut-être ce biais est-il imputable au schéma explicite adopté pour l'intégration verticale des équations. Les résultats concernant l'AMR hybride *HM* sont encourageants, même s'il est à noter que le bruit reste important dans certains cas avec cette AMR (figure 5.12). Quelles solutions pouvons nous envisager pour diminuer les bruits numériques ?

- revoir le choix du schéma adopté pour l'intégration verticale des équations et son impact numérique ;
- si des bruits numériques sont présents, ils ne font pas –moyennant précautions– exploser les valeurs. Un filtrage final des radiances sortantes peut tout à fait être envisagé, basé sur un seuillage des coefficients d'ondelettes à petite échelle ;
- l'adoption d'une méthode pour résoudre le transfert radiatif qui ne se base pas sur un découpage vertical fin peut certainement conduire à une propagation contrôlée du bruit, s'il est encore significatif.

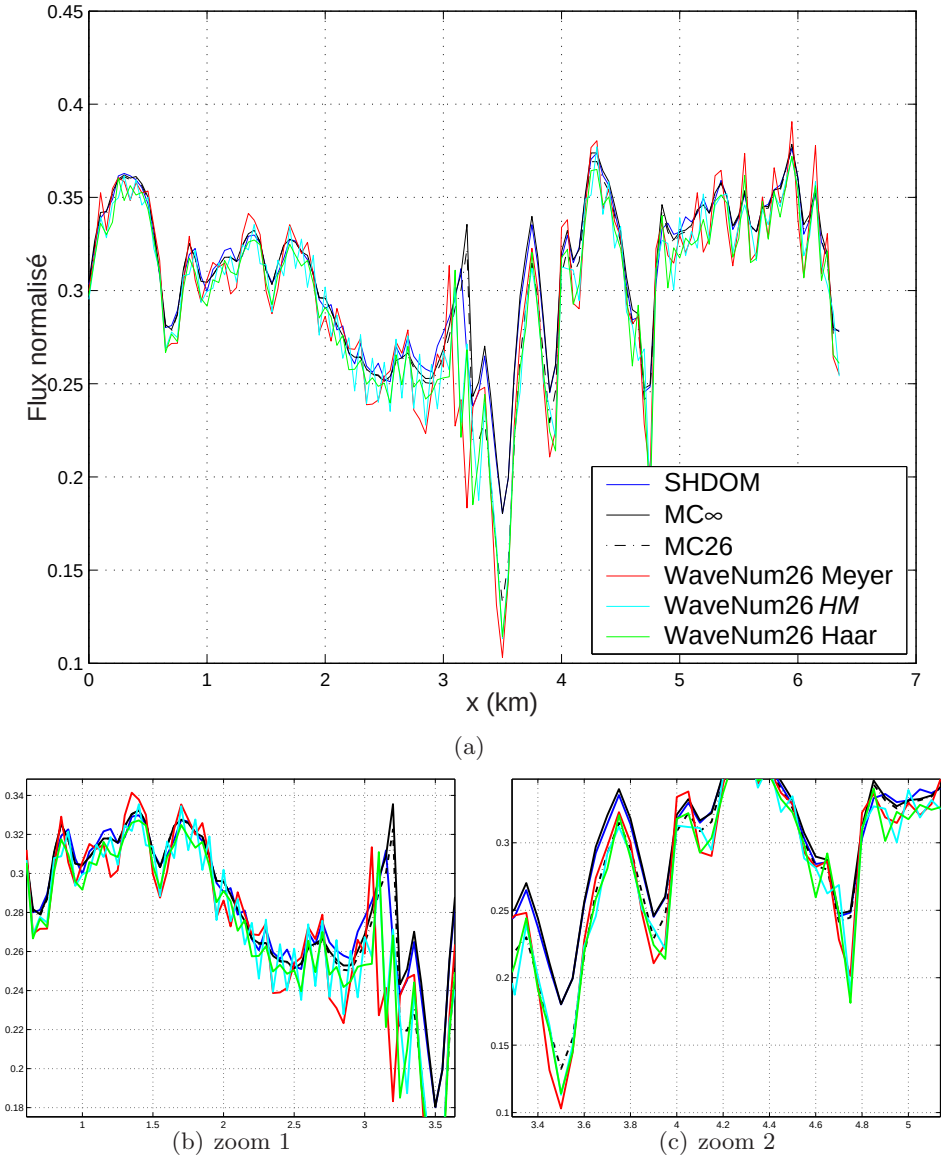


(a)



(b) zoom

FIG. 5.14 – Comparaison des flux (normalisés) diffus montants sortant du nuage cascade bornée.



(a)

(b) zoom 1

(c) zoom 2

FIG. 5.15 – Comparaison des flux (normalisés) diffus descendants sortant du nuage cascade bornée.

5.3 Analyse des interactions, ou de l'effet des hétérogénéités nuageuses

Nous avons vu dans la première partie de ce chapitre que les résultats de simulation obtenus par ce code de calcul basé sur une décomposition en ondelettes de l'ETR sont relativement en accord avec les résultats des codes de référence Monte Carlo et SHDOM, malgré la présence de bruits numériques complexes, et de biais systématique pour certaines directions. Nous allons maintenant exploiter la nature multirésolution de la décomposition et la construction du code, orientée vers la quantification de l'effet des hétérogénéités. On rappelle que les quantités radiatives sont divisées en deux familles indicées $_J$ (quantités *à l'échelle)* et $_{sub}$ (quantités dues aux interactions sous-pixel*)* suivant les règles précisées dans l'introduction de ce chapitre. Dans les tableaux qui suivent sont portés les flux radiatifs moyens indicés $_J$ et $_{sub}$ à l'échelle des pixels d'approximation et du nuage. La taille des pixels d'approximation est, comme on l'a dit, fixée par l'échelle d'approximation $J = 3$, donc chaque pixel d'approximation a pour taille $2^{-3} * \textit{période} = 2^{-3} * 6.4$ km= 800 m. Il est important d'avoir à l'esprit que la notion de pixel convient mieux à l'AMR de Haar qu'à celle de Meyer, et que les pixels pour les deux AMR ne sont pas centrés aux mêmes points. Les pixels de Haar, sont centrés aux abscisses 400 m, 1200 m, etc.. Les "pixels" de Meyer sont centrés aux abscisses 0 m, 800 m, 1600 m, etc.. Les flux à l'échelle des pixels ne seront donc pas les mêmes pour les deux AMR. La figure 5.16 montre la fonction d'échelle de Meyer périodisée $\varphi_{J,4}$ et les limites du "pixel" 5 au sens de Meyer. Avant d'étudier en détail les contributions des interactions sous-pixel

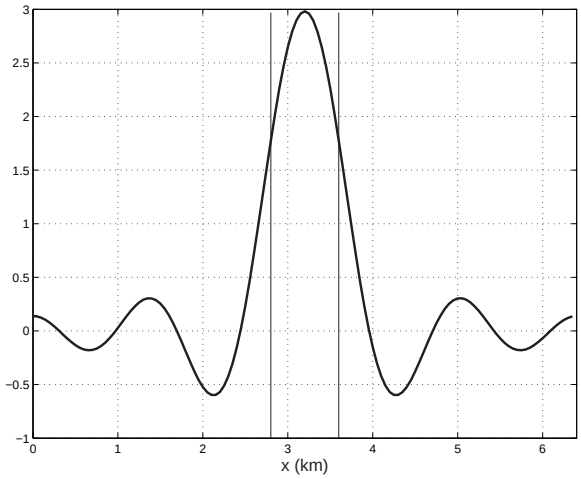


FIG. 5.16 – Fonction d'échelle périodisée de Meyer $\varphi_{J,4}$ et les limites du pixel 5, centré au même point, de largeur $2^{-J} \times \textit{période}$.

aux flux moyens à l'échelle des pixels d'approximation, nous donnons pour chaque cas les flux détaillés dans le nuage (par exemple la figure 5.19), afin d'illustrer la séparation des échelles et les deux familles des quantités radiatives que nous manipulons. Nous étudions ensuite les flux et les radiances sortants et la contribution des interactions sous-pixel. L'analyse est faite en particulier à l'échelle des pixels d'approximation. L'évolution des flux sortants en fonction de l'ordre de diffusion est également analysée. Enfin, une étude des flux nets verticaux dans le nuage est menée permettant d'étudier l'effet de canalisation du rayonnement.

5.3.1 Cas du nuage sinusoïdal

5.3.1.1 Approximation basse résolution de la variabilité nuageuse

La figure 5.17 donne la vision basse résolution de la distribution sinusoïdale d'épaisseur optique pour les deux AMR.

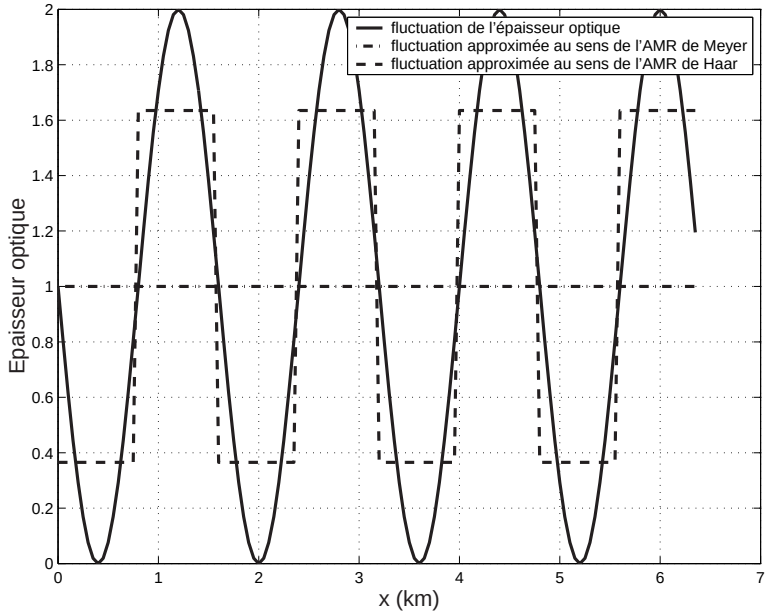


FIG. 5.17 – Fluctuation sinusoïdale de l'épaisseur optique et ses approximations par les AMR de Meyer et Haar - Résolution : $J = 3$, pixel de 800 m.

L'approximation basse résolution, au sens de l'AMR de Meyer, est un champ uniforme ; les 8 coefficients d'échelle de Meyer sont tous égaux à $2^{-3/2}$. Le calcul *à l'échelle* sera donc parfaitement équivalent à un calcul plan-parallèle (homogénéité horizontale et verticale du champ nuageux). Seuls les coefficients d'ondelettes d'échelle J sont non-nuls : $\langle \tau, \psi_{J,2k} \rangle = -1/4$, $\langle \tau, \psi_{J,2k+1} \rangle = +1/4$, avec $k = 0, .., 3$. Si on limite le "pixel"de Meyer à 800 m, la portion de signal de fluctuation du milieu en regard passe d'un maximum à un minimum, et inversement, respectivement pour les pixels impairs et les pixels pairs (fig. 5.18).

L'approximation basse résolution proposée par l'AMR de Haar est un champ créneau. L'épaisseur optique locale vaut alternativement 0.365 et 1.635.

5.3.1.2 Analyse des flux sortants

5.3.1.2.1 Cas de la multirésolution de Meyer

5.3.1.2.1.1 Flux directs sortants

La figure 5.19 montre les flux solaires directs dans le nuage.

Dans le cas de Meyer, le flux direct transmis *à l'échelle (*fig. 5.19 au centre) correspond à l'approximation plan-parallèle. Le flux additionnel (fig. 5.19 en bas) correspond donc exactement à l'écart du flux direct total (fig. 5.19 en haut) avec le calcul plan-parallèle. Dans les régions où l'épaisseur optique est maximale (colonne 58 par exemple), le calcul à basse résolution surestime logiquement le flux direct transmis (contribution sous-pixel dans la colonne 58 de près de -0.2). C'est l'inverse pour les régions de forte épaisseur optique (colonne

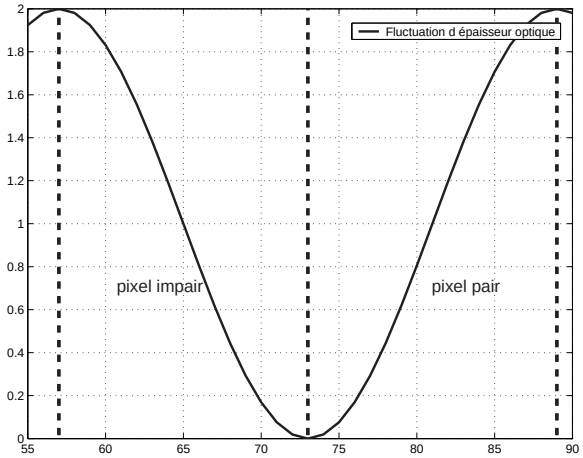


FIG. 5.18 – "Pixel 5" et "Pixel 6" de Meyer, et les fluctuations d'épaisseur optique en regard.

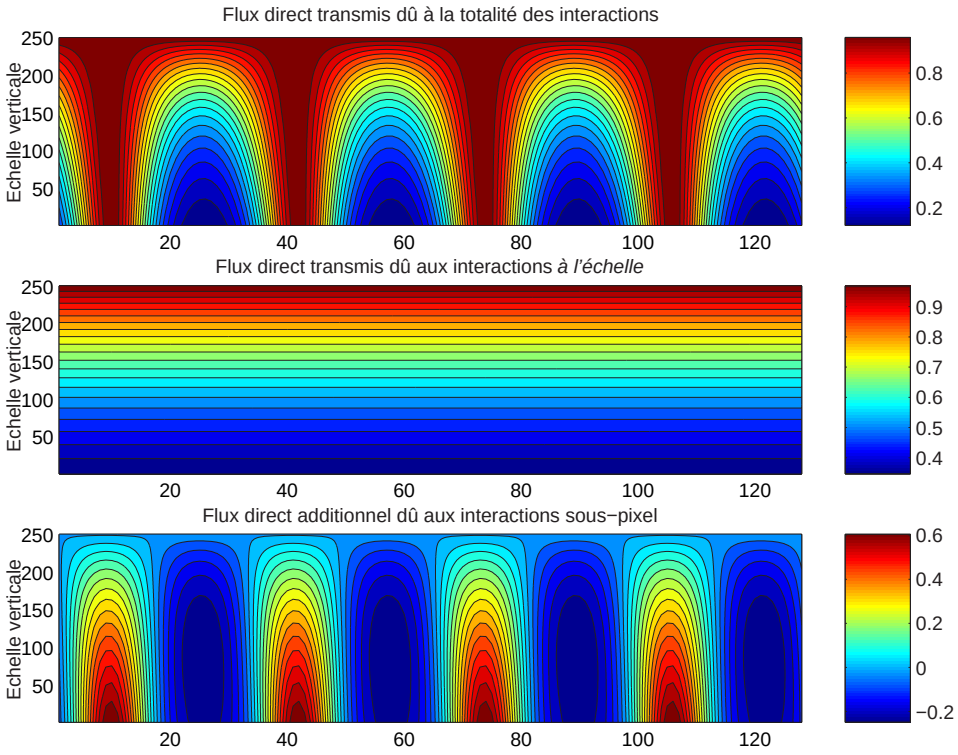


FIG. 5.19 – Flux collimatés (directs) dans le nuage sinusoïdal – $\Theta_{sol} = 161°$ – AMR de Meyer.

43 par exemple) où le calcul à basse résolution sous-estime le flux direct transmis (contribution sous-pixel dans la colonne 43 de près de +0.6). Les sources additionnelles prennent donc des valeurs négatives ou positives dans le nuage, en fonction de la surestimation ou de la sous-estimation de l'épaisseur optique le long du trajet de propagation du rayonnement solaire. Voyons maintenant ce qu'il en est à l'échelle des 8 pixels d'approximation et à l'échelle du nuage entier pour les flux directs sortants au bas du nuage. Les flux moyens sortants sont détaillés dans le tableau 5.2, et les contributions en pourcentage des interactions sous-pixel au flux direct moyen sortant au bas du nuage, sont données tableau 5.3.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage
dwn_J	0.3468	0.3468	0.3468	0.3468	0.3468	0.3468	0.3468	0.3468	0.3468
dwn_{sub}	0.0529	0.1536	0.0529	0.1536	0.0529	0.1536	0.0529	0.1536	0.1032
dwn	0.3997	0.5001	0.3997	0.5001	0.3997	0.5001	0.3997	0.5001	0.4500

TAB. 5.2 – Flux moyens directs sortants dans les 8 "pixels" et à l'échelle du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage
dwn_{sub}	+13.24	+30.68	+13.24	+30.68	+13.24	+30.68	+13.24	+30.68	+22.94

TAB. 5.3 – Contribution en % des interactions sous-pixel au flux direct sortant – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

On obtient des contributions dues aux interactions sous-pixel systématiquement positives dans chaque pixel, donc également à l'échelle du nuage, et importantes : en pourcentage de 13.24 à 30.68% dans les pixels d'approximation, et 22.94% à l'échelle du nuage. On peut noter que les sources additionnelles dans les pixels pairs (0.1536) sont presque trois fois plus importantes que dans les pixels impairs (0.0529).

Analysons ces valeurs. Tout d'abord, les contributions sous-pixel sont importantes car l'approximation basse résolution par l'AMR de Meyer – un champ nuageux homogène – ne garde aucune information sur la variabilité du milieu, et parce que la valeur minimale d'épaisseur optique du champ nuageux est zéro : la couverture nuageuse est en réalité fractionnaire, et l'écart entre le résultat du calcul plan-parallèle et le résultat vrai résulte de la non-prise en compte de ces trous dans le nuage. C'est cette tendance qui l'emporte en moyenne : la différence vient plus du fait qu'on ignore les régions de faible épaisseur optique plutôt que les fortes. On verra que l'approximation à basse résolution de l'AMR de Haar rend mieux compte de la variabilité nuageuse ; les contributions sous-pixel seront relativement moins importantes.

On a constaté que les flux directs sortants moyens dus aux interactions sous-pixel sont systématiquement positifs. Cela veut dire que les coefficients d'échelles du flux direct sortant $flux_{sub}$ (représenté fig. 5.19 en bas) sont tous positifs. On retrouve ici l'analyse faite au paragraphe 3.7.3 sur l'importance de l'hypothèse d'homogénéité verticale : la corrélation des coefficients d'ondelettes du champ d'extinction le long du trajet du rayonnement solaire, corrélation assurée par l'homogénéité verticale du milieu et l'angle solaire zénithal proche de la vertical (19.16°)), provoque l'apparition de sources additionnelles positives via un mécanisme d'interactions en deux étapes décrit au paragraphe 3.7.3. On sous-estime en plan-parallèle la transmission.

Si le soleil était au nadir, les contributions dans les pixels devraient être rigoureusement les

mêmes, car dans le cas de l'AMR de Meyer, la variabilité du champ est la même dans chaque "pixel" (fig. 5.18). On peut raisonner également en s'appuyant sur le mécanisme d'interaction cité ci-dessus : dans les pixels impairs, $\langle \tau, \psi_J \rangle = +1/4$ et dans les pixels pairs $\langle \tau, \psi_J \rangle = -1/4$; or en deux étapes, ces coefficients interviennent deux fois : les sources additionnelles ont même valeur pour l'éclairement vertical.

Ici, le soleil est décalé du nadir de 19.16° : cet angle d'incidence est suffisant pour que, dans les pixels impairs, la portion de sinus supérieur à l'unité (de la valeur 2 à la valeur 1 en épaisseur optique) fasse **ombrage** à la portion sinus voisine et à droite, inférieure à l'unité (de la valeur 1 à la valeur 0 en épaisseur optique) ; dans ces pixels, on ne sous-estime la transmission que de 0.0529. On retrouve d'ailleurs l'effet de cet ombrage dans la transmission totale : 0.3997 pour les pixels impairs contre 0.5001 pour les pixels pairs.

5.3.1.2.1.2 Flux diffus sortants

Les figures 5.20 et 5.21 montrent les flux diffus descendants et montants dans le nuage. Rappelons ici que les résultats présentés correspondent à un facteur d'assymétrie $g = 0$. Ici aussi, la variabilité horizontale des flux sortants est complètement représentée par les flux dus aux interactions sous-pixel ($flux_{sub}$). On peut remarquer que le calcul *à l'échelle,* qui rappelons-le correspond dans ce cas au calcul plan-parallèle, situe le maximum des flux dans le nuage près des frontières hautes et basses. Ainsi, pour le flux diffus descendant dans la colonne 58, le maximum est situé au bas du nuage (9ème couche sur 50) (fig. 5.20 au centre) alors qu'il est en réalité dans le tiers central (22ème couche sur 50) (fig. 5.20 en haut et en bas).

Les flux diffus moyens sortants sont détaillés dans le tableau 5.4.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage
dwn_J	0.2989	0.2989	0.2989	0.2989	0.2989	0.2989	0.2989	0.2989	0.2989
dwn_{sub}	-0.0677	-0.0507	-0.0677	-0.0507	-0.0677	-0.0507	-0.0677	-0.0507	-0.0592
dwn	0.2312	0.2482	0.2312	0.2482	0.2312	0.2482	0.2312	0.2482	0.2397
up_J	0.3544	0.3544	0.3544	0.3544	0.3544	0.3544	0.3544	0.3544	0.3544
up_{sub}	-0.0485	-0.0391	-0.0485	-0.0391	-0.0485	-0.0391	-0.0485	-0.0391	-0.0438
up	0.3059	0.3153	0.3059	0.3153	0.3059	0.3153	0.3059	0.3153	0.3106

TAB. 5.4 – Flux moyens diffus sortants dans les 8 "pixels" et à l'échelle du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

Ce tableau indique qu'aussi bien à l'échelle du nuage que dans chacun des pixels d'approximation, les sources diffuses additionnelles dues aux interactions sous-pixel sont négatives dans chacun des pixels d'approximation, et aussi bien vers le haut que vers le bas. **On surestime ainsi les flux diffus moyens en négligeant les interactions entre échelle**. Cette surestimation est plus importante dans les pixels pairs que dans les pixels impairs, et plus importante pour les flux diffus descendants que montants. Les contributions en pourcentage des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants sont données dans le tableau 5.5.

Les contributions atteignent pour les flux diffus sortants vers le bas et vers le haut des valeurs respectivement de près de **30%**et **16%** à l'échelle des pixels d'approximation, et **près de 25%** et **14%** à l'échelle du nuage.

On peut se poser la question du signe systématiquement négatif des contributions. La première explication que nous pouvons donner est en liaison avec l'étude de l'extinction du flux direct : le calcul *à l'échelle* surestime l'extinction du rayonnement direct par le milieu -puisqu'il sous-estime la transmission du flux direct (tableau 5.3), donc ce calcul surestime la

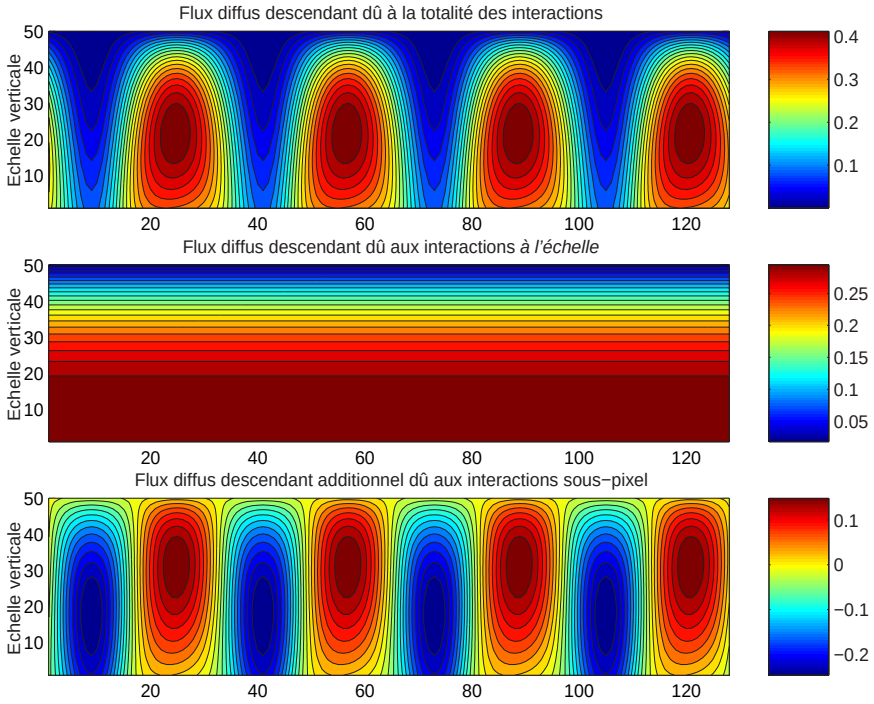


FIG. 5.20 – Flux diffus descendant dans le nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

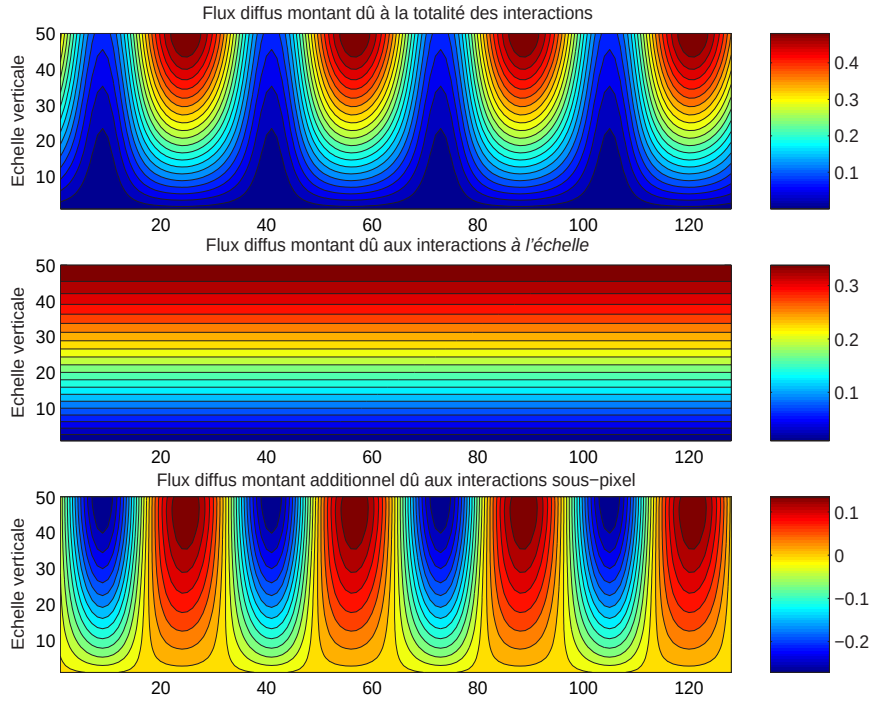


FIG. 5.21 – Flux diffus montant dans le nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	moyenne (échelle du nuage)
dwn_{sub}	-29.26	-20.43	-29.26	-20.43	-29.26	-20.43	-29.26	-20.43	-24.69
up_{sub}	-15.87	-12.41	-15.87	-12.41	-15.87	-12.41	-15.87	-12.41	-14.12

TAB. 5.5 – Contribution en % des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

redistribution angulaire d'énergie. Les quantités diffusées étant surestimées, les contributions des interactions sous-pixel aux flux diffus sont négatives. On peut adopter aussi le même raisonnement que celui du paragraphe 3.7.3 sur l'importance de l'hypothèse d'homogénéité verticale : en plan-parallèle, on surestime de façon systématique le flux diffus. Les contributions sont plus fortes pour les flux descendants : cette constatation est à rapprocher du fait que ceux-ci sont le résultat de plus d'interactions entre le champ de rayonnement et le milieu. Selon [Marshak et al. 1995], les photons réfléchis sont diffusés typiquement τ fois, avec τ l'épaisseur optique, et les photons transmis τ^2 fois, dans le régime diffusif ($\tau>>1$). Dans notre cas, les valeurs d'épaisseur optique ne sont pas très importantes, mais puisque g=0, on peut considérer que l'on est dans le cas du régime difusif. Afin de mieux examiner ces problèmes, étudions de plus près la diffusion multiple qui opère ici. Sur les figures 5.22, on voit l'**évolution en fonction de l'ordre de diffusion** des contributions cumulées des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants pour le pixel 1 et le pixel 2 (vu la périodicité du champ, les autres ne sont pas représentés).

On constate tout d'abord la similarité des évolutions pour les flux montants et descendants. Pour chaque cas, les contributions sous-pixel cumulées sont d'abord nettement négatives, passent par un minimum pour le quatrième ordre de diffusion, puis convergent. Les contributions sous-pixel décroissent donc en valeur absolue quand l'ordre de diffusion augmente, elles sont d'abord négatives, puis un changement de signe intervient à la quatrième diffusion. Les contributions relatives à l'échelle du nuage entier (fig. 5.23) atteignent un maximum en valeur absolue pour l'ordre de diffusion deux (23% et 41% pour les flux montant et descendant), avant de converger vers les pourcentages de près de 14% et 25% à l'échelle du nuage. On remarque également sur les figures 5.22 que les flux *à l'échelle* convergent plus rapidement – autour du dixième ordre de diffusion, que les flux totaux – autour du quinzième ordre. La figure 5.24 confirme ces faits. Elle montre les flux sortants pour chaque ordre de diffusion à l'échelle du nuage entier. On constate les changements de signes des flux diffus $flux_{sub}$: pour des ordres de diffusion faibles (inférieurs à six) les flux sous-pixel sont négatifs (fig. 5.24a et c) et ils diminuent en valeur absolue. A partir de la sixième diffusion, les flux $flux_{sub}$ deviennent positives (fig. 5.24b et d), ils passent par un maximum (à l'ordre de diffusion huit) avant de décroître. L'évolution de $flux_{sub}$ pour chaque ordre de diffusion est soit un amortissement semi-périodique (les valeurs de $flux_{sub}$ diminuent en valeur absolue et changent de signe), soit un amortissement apériodique (les valeurs de $flux_{sub}$ diminuent en valeur absolue sans changement de signe). Parallèlement à ce comportement de $flux_{sub}$, le flux à l'échelle $flux_J$ décroît rapidement. Cette diminution en valeur absolue de $flux_{sub}$ et ce changement de signe, font que les flux *à l'échelle* convergent plus rapidement que les flux totaux. Ainsi, à partir du vingtième ordre de diffusion (fig. 5.24b et d), on peut considérer que seuls les flux sous-pixel participent aux flux sortants. On reviendra sur ce changement de signe des contributions lors de l'étude des radiances.

On peut trouver une explication de cette convergence plus lente – en fonction de l'ordre de diffusion – des flux totaux, due aux interactions entre échelles, sur les figures 5.20 et 5.21 :

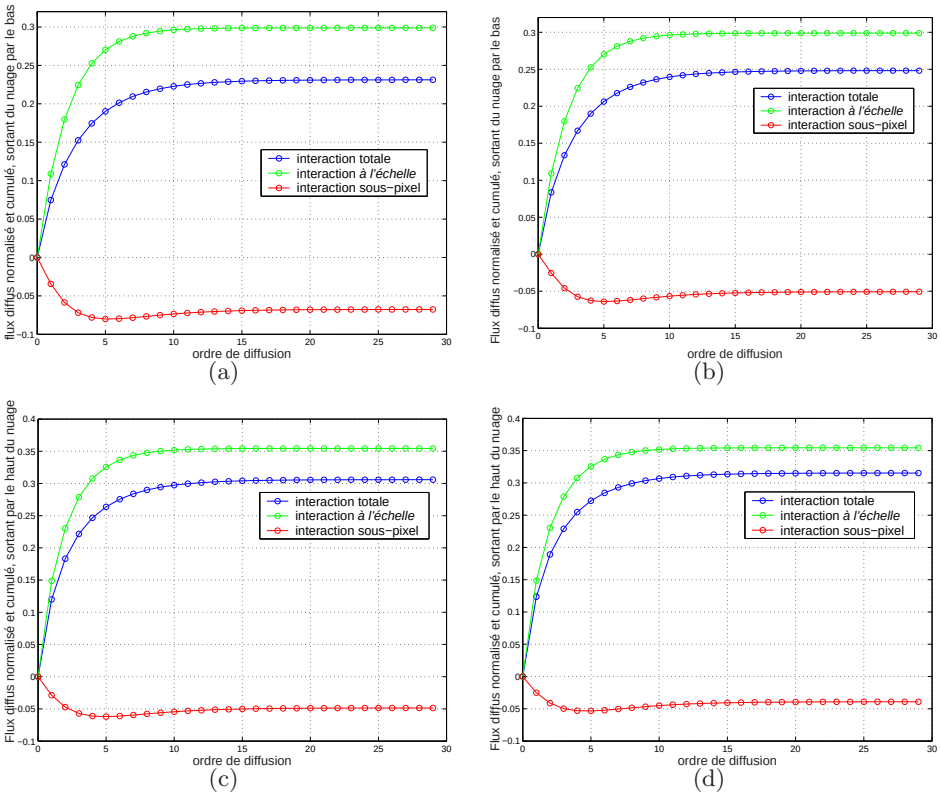


FIG. 5.22 – Evolution des flux diffus cumulés sortants, à l'échelle des pixels d'approximation, en fonction de l'ordre de diffusion : a) et b) flux descendant, pixel 1 et 2 ; c) et d) flux montant, pixel 1 et 2 – AMR de Meyer – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

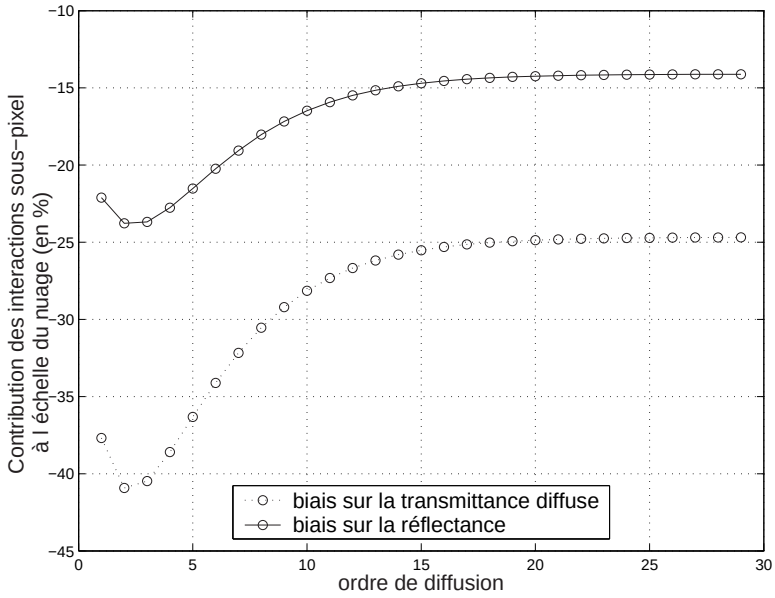
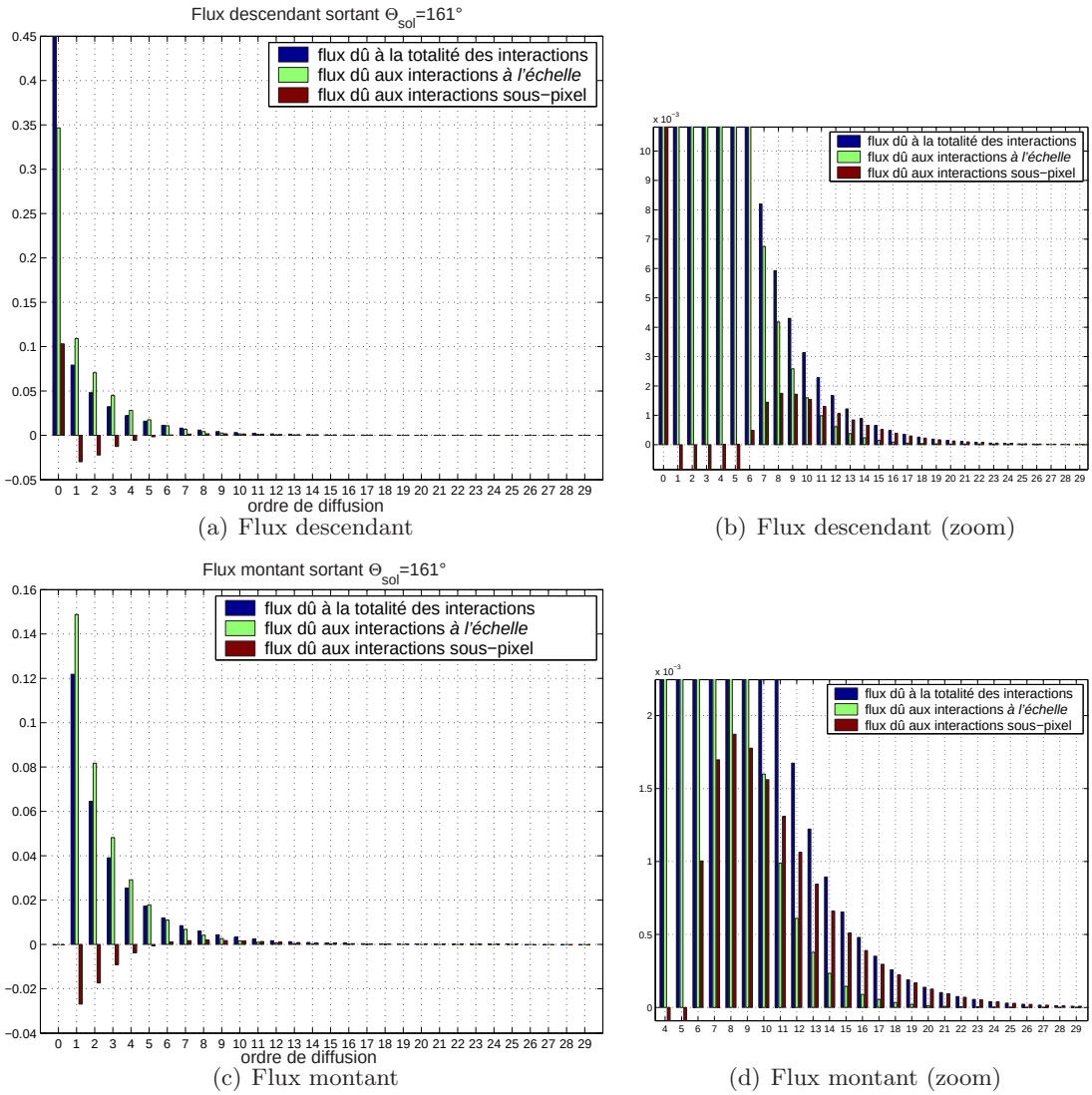


FIG. 5.23 – Evolution des contributions cumulées des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants à l'échelle du nuage en fonction de l'ordre de diffusion – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.



(a) Flux descendant

(b) Flux descendant (zoom)

(c) Flux montant

(d) Flux montant (zoom)

FIG. 5.24 – Flux normalisés sortant à l'échelle du nuage pour chaque ordre de diffusion – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

les flux maximaux *à l'échelle* sont à la limite du nuage (basse pour les flux descendants et haute pour les flux montants), et les sources additionnelles dues aux interactions sous-pixel ont tendance à reporter l'altitude de ces maxima plus à l'intérieur du nuage. Logiquement, les "trous relatifs" dans la distribution nuageuse, représentés par les coefficients d'ondelette à différentes échelles du champ d'extinction, font pénétrer plus en avant les photons, ce processus étant quantitativement représenté dans la source additionnelle. Cette pénétration des photons dans le nuage a pour conséquence des interactions plus nombreuses. Il est donc logique que les ordres de diffusion élevés continuent à alimenter $flux_{sub}$ et que celui-ci converge plus lentement que $flux_J$. L'analyse de ce processus demande une étude plus approfondie des sources diffusives dans le nuage aux différents ordres de diffusion, et de l'importance de la contribution des interactions sous-pixel dans ces sources.

5.3.1.2.1.3 Flux total sortant descendant (direct+diffus)

Les flux totaux (direct+diffus) sortant du nuage par le bas sont donnés dans le tableau 5.6. Les contributions en pourcentage des interactions sous-pixel au flux total sortant vers le bas sont données tableau 5.7.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage
total dwn_J	0.6456	0.6456	0.6456	0.6456	0.6456	0.6456	0.6456	0.6456	0.6456
total dwn_{sub}	-0.0147	0.1028	-0.0147	0.1028	-0.0147	0.1028	-0.0147	0.1028	0.0440
total dwn	0.6309	0.7483	0.6309	0.7483	0.6309	0.7483	0.6309	0.7483	0.6896

TAB. 5.6 – Flux moyens totaux (direct+diffus) descendants sortants, dans les 8 "pixels" et à l'échelle du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

En calculant les flux *à l'échelle*, on sous-estime globalement le flux total transmis de 0.0440 (rappel : les valeurs sont normalisées). Cette erreur vient de la sous-estimation *à l'échelle* de la transmission du flux direct (0.1032) compensée en partie par la surestimation du flux diffus transmis (-0.0592). Le constat est différent à l'échelle des pixels : pour les pixels impairs, il y a une faible surestimation (-0.0147) du flux total transmis, et pour les pixels pairs une forte sous-estimation (0.1028). Ainsi, à l'échelle du nuage, on obtient une contribution positive de 0.0440 soit en pourcentage 6.38 %.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage
total dwn_{sub}	-2.33	+13.73	-2.33	+13.73	-2.33	+13.73	-2.33	+13.73	+6.38

TAB. 5.7 – Contribution en % des interactions sous-pixel au flux total (direct + diffus) descendant sortant – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

Cette contribution positive de 0.0440 est à comparer à la contribution négative (-0.0438) pour le flux montant. Globalement, les interactions sous-pixel participent au transport de l'énergie radiative à travers le nuage vers le bas : le nuage transmet plus d'énergie (+0.0440) et en réfléchit moins (-0.0438) que s'il était plan-parallèle. On reviendra sur cet aspect dans le paragraphe à travers l'étude des flux nets verticaux.

5.3.1.2.1.4 Total des flux sortants du nuage

Le total des flux moyens sortants du nuage est donné dans le tableau 5.8. La somme des flux normalisés sortants à l'échelle du nuage vaut 1.0002 : le bilan énergétique est donc fermé

à la précision 0.02%. La contribution globale des interactions sous-pixel est quasiment nulle (0.02%), ce qui est rassurant : il n'y a pas de création d'énergie dans le nuage.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage
$total_J$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$total_{sub}$	-0.0633	0.0636	-0.0633	0.0636	-0.0633	0.0636	-0.0633	0.0636	0.0002
$total$	0.9367	1.0636	0.9367	1.0636	0.9367	1.0636	0.9367	1.0636	1.0002

TAB. 5.8 – Somme des flux détaillés sortants du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

Effet de canalisation du rayonnement (ou *channelling*)

Ce tableau 5.8 indique également les effets de canalisation du rayonnement à l'échelle des pixels d'approximation. Quand le flux moyen dans un pixel est supérieur à un, cela signifie que ce pixel est relativement éclairé par ses voisins : le transport horizontal net de photons des pixels voisins vers le pixel considéré est positif. Le calcul *à l'échelle* correspond pour ce nuage et pour l'AMR de Meyer au calcul plan-parallèle : chaque colonne échange la même énergie radiative avec ses voisines : le flux net horizontal est alors nul et les flux indicés $_J$ sont égaux à un. Les effets de channelling interviennent aux endroits des minima locaux d'épaisseur optique. La distribution étant homogène verticalement, cela correspond à des "trous" relatifs dans le nuage. Pour ce nuage, ce sont vraiment des trous. La figure 5.25 montre les valeurs du flux total sortant en chaque point. On a représenté en trait plein pointé les zones de *channelling*. La représentation de la distribution d'épaisseur optique (en valeur arbitraire) montre la concordance entre le *channelling* et les minima d'épaisseur optique.

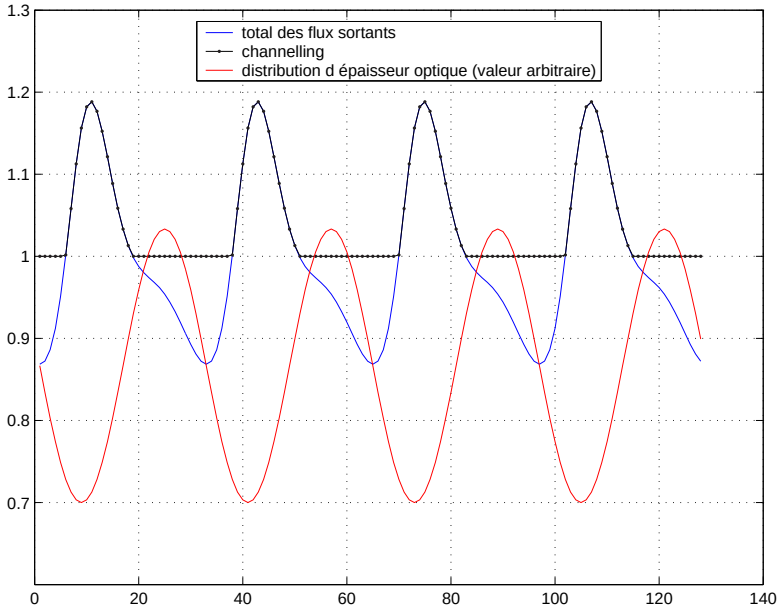


FIG. 5.25 – Effet de canalisation dans le nuage sinusoïdal.

A cause de l'AMR utilisée et de la vision plan-parallèle à basse résolution du nuage, l'effet de canalisation est donc uniquement dû ici aux interactions sous-pixel. Nous étudions plus précisément cet aspect dans le paragraphe ci-dessous.

5.3.1.2.1.5 Etude du transport vertical de l'énergie radiative

Nous allons ici étudier le transport vertical de l'énergie radiative dans le nuage, et l'effet sur ce transport des interactions sous-pixel. Cette étude s'appuie sur l'étude des flux nets verticaux. Le flux net vertical est défini ainsi :

$$\text{flux net vertical} = (\text{flux direct réduit} + \text{flux diffus descendant}) - \text{flux diffus montant}$$

Le flux net vertical est théoriquement constant en calcul plan-parallèle si le nuage est conservatif ($\widetilde{\omega}_0 = 1$) [Marshak et al. 1998]. La figure 5.26 donne les flux verticaux nets à l'échelle du nuage, calculés en considérant l'ensemble des interactions entre les deux champs, celles *à l'échelle* et celles sous-pixel.

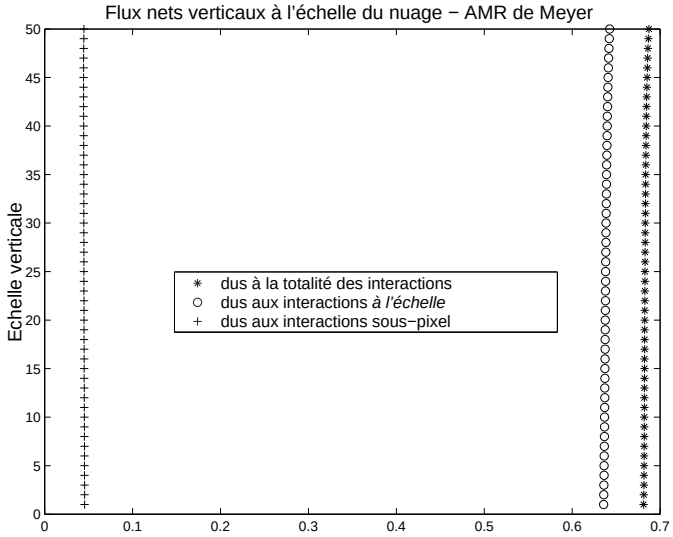


FIG. 5.26 – Flux nets verticaux pour l'ensemble du nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

Les flux nets sont quasiment constants dans le nuage, le flux net à l'échelle valant environ 0.64. On visualise sur cette figure la contribution positive due à la présence d'hétérogénéités dans le champ nuageux. Les hétérogénéités nuageuses participent donc globalement au transport de l'énergie radiative vers le bas. Mais qu'en est-il localement dans le nuage ? Plaçons nous dans deux colonnes : la colonne 58 et la colonne 40, dans lesquelles le rayonnement est respectivement non-canalisé et canalisé comme on le voit sur la figure 5.25.

Quel est le signe du flux net vertical dû aux interactions sous-pixel dans la colonne 58 ? La figure 5.27 donne l'allure des flux nets verticaux dans cette colonne. On observe que le flux net vertical dû aux interactions sous-pixel est partout négatif dans cette colonne, et il augmente en valeur absolue lors de la traversée vers le bas du nuage. La conséquence est un abaissement du flux net total de 0.64 à des valeurs entre 0.43 et 0.5. Ceci traduit la fuite horizontale des photons depuis cette colonne. Cet effet augmente lors de la traversée du nuage vers la bas. Les interactions sous-pixel ont donc tendance à diminuer le transport vers le bas de l'énergie radiative dans la colonne 58. Mais qu'en est-il dans le détail ? La figure 5.28 décompose les flux verticaux dans la colonne 58 dus seulement aux interactions sous-pixel. On retrouve dans cette figure l'évolution du flux net vertical dû aux interactions sous-pixel, partout négatif et évoluant de -0.14 à -0.21. On observe que les interactions sous-pixel provoquent un flux direct partout négatif (maximum en valeur absolue au tiers bas du nuage), des flux diffus partout positif, maximum au tiers haut du nuage pour le flux diffus descendant : le nuage transmet moins le rayonnement collimaté solaire, et diffuse plus vers le haut et le bas. La somme des

flux descendants (direct + diffus) est quasiment partout négative dans le nuage. Ainsi, le flux net vertical dû aux interactions sous-pixel est négatif parceque celles-ci, d'une part diminuent la transmission vers le bas du rayonnement (direct + diffus) – c'est surtout vrai dans le bas du nuage et causé par la diminution du flux direct, et d'autre part augmentent la diffusion de l'énergie radiative vers le haut.

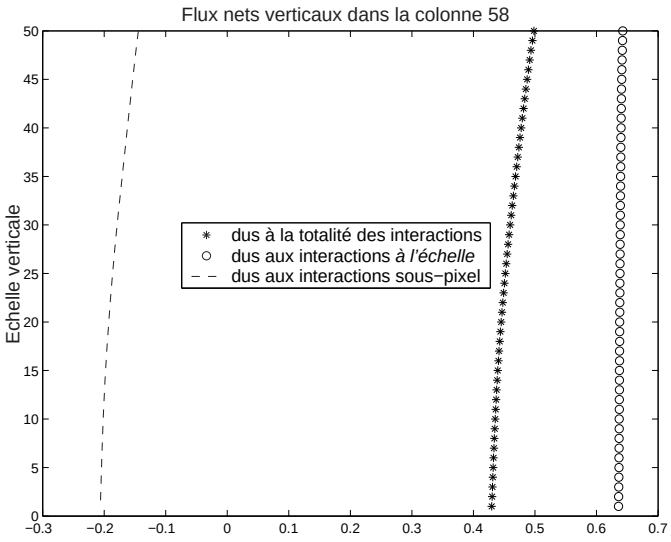


FIG. 5.27 – Flux nets verticaux dans la colonne 58 – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

En référence à [Davis and Marshak 2001], quand les lignes de flux sont verticales, i.e. quand le flux net est constant verticalement dans le nuage, on est dans le cas d'un calcul IPA : les flux nets verticaux dépendent des épaisseurs optiques moyennes dans les colonnes, et le flux net horizontal est nul. Quand les lignes de flux sont courbées, i.e. quand le flux net varie verticalement dans le nuage, on visualise les effets 3D et en particulier l'effet de canalisation. Les effets 3D pour ce nuage et cette AMR sont uniquement représentés dans les calculs sous-pixel.

Dans la colonne 40, qui est une zone de faible épaisseur optique, les effets sont inversés (fig. 5.29) : le flux net dû aux interactions sous-pixel est positif et il augmente quand on traverse le nuage vers le bas. Dans cette colonne, le transport de l'énergie radiative vers le bas est donc augmenté par les effets sous-pixel. On peut constater l'effet de canalisation : à la base de cette colonne, le flux net vertical est supérieur à un.

Cette étude des flux nets verticaux pour ce nuage et avec l'AMR de Meyer permet d'apprécier les effets globaux et locaux des hétérogénéités sous-pixel sur le transport vertical de l'énergie radiative à travers le nuage. Globalement, la présence d'hétérogénéités dans le champ nuageux augmente le transport vers le bas. Localement (colonne 58), le calcul *à l'échelle,* négligeant la fuite horizontale des photons, indique une transmission trop rapide et aisée des photons à travers le nuage : la transmission verticale de l'énergie radiative y est surestimée. Quand les flux nets verticaux dus aux interactions sous-pixel diminuent dans le nuage, il y a fuite horizontale des photons (par analogie électrique, le flux contourne ces zones de plus forte résistance) ; quand ils augmentent dans le nuage, il y a canalisation de l'énergie radiative (la résistance au passage du flux est plus faible).

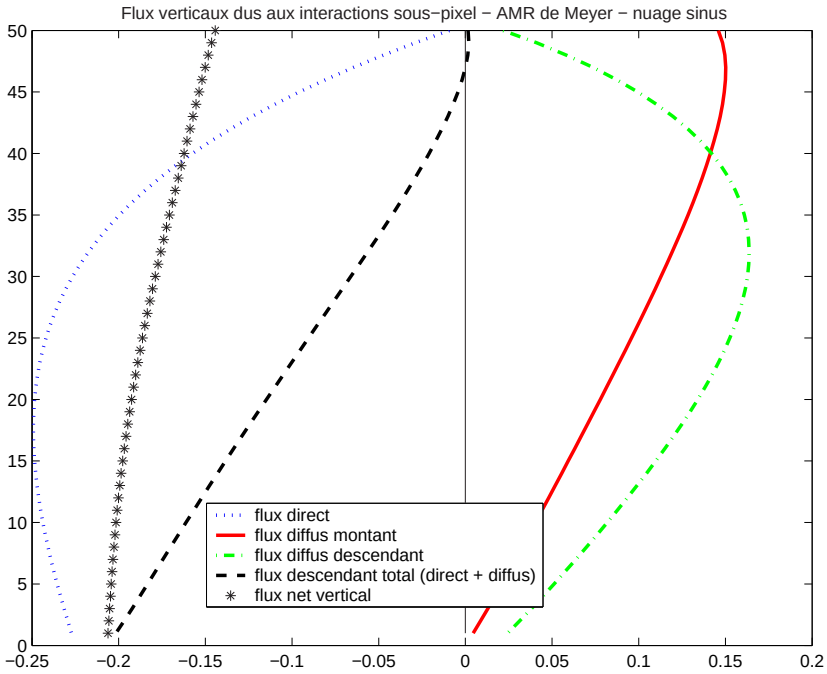


FIG. 5.28 – Flux dans la colonne 58 du aux interactions sous-pixel – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

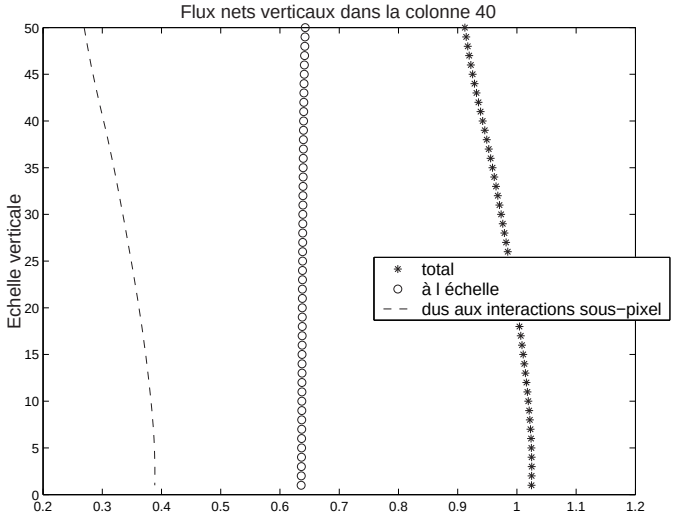


FIG. 5.29 – Flux nets verticaux dans la colonne 40 – Nuage sinusoïdal – AMR de Meyer.

5.3.1.2.2 Cas de la multirésolution de Haar

5.3.1.2.2.1 Flux directs (collimatés) sortants

La figure 5.30 montre les flux solaires directs dans le nuage. Les flux directs sortant au bas du

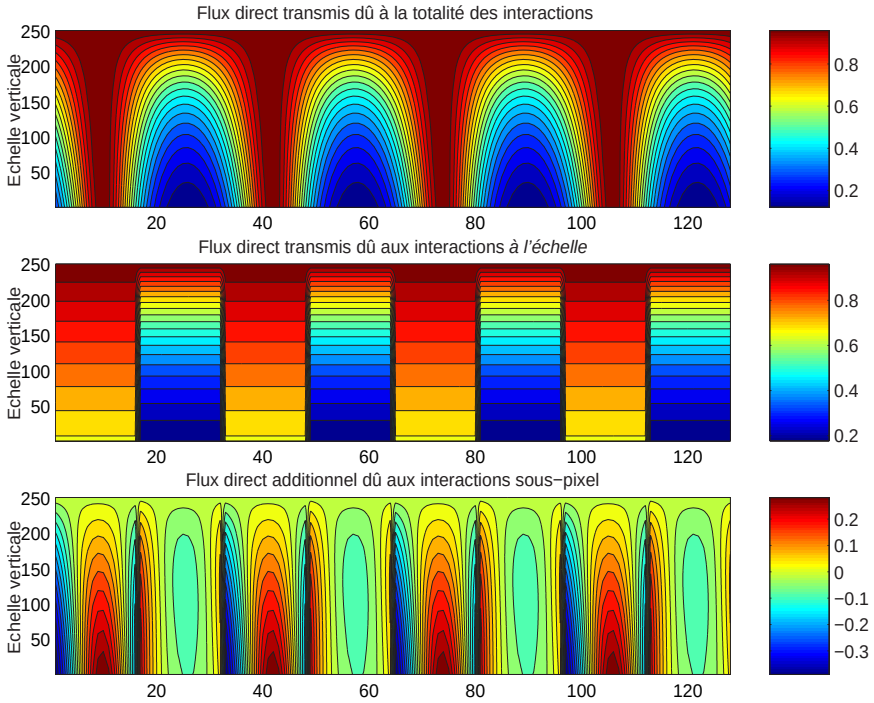


FIG. 5.30 – Flux collimatés (directs) dans le nuage sinusoïdal – $\Theta_{sol} = 161°$ – AMR de Haar.

nuage sont détaillés dans le tableau 5.9. Dans le cas de Haar, le flux direct transmis *à l'échelle (*fig. 5.9 au centre) ne correspond plus à l'approximation plan-parallèle. Les contributions en pourcentage des interactions sous-pixel au flux direct sortant au bas du nuage sont données tableau 5.10.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage
dwn_J	0.6791	0.1769	0.6791	0.1769	0.6791	0.1769	0.6791	0.1769	0.4280
dwn_{sub}	0.0255	0.0183	0.0255	0.0183	0.0255	0.0183	0.0255	0.0183	0.0219
dwn	0.7046	0.1952	0.7046	0.1952	0.7046	0.1952	0.7046	0.1952	0.4499

TAB. 5.9 – Flux moyens directs sortants dans les 8 pixels et à l'échelle du nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

Comme pour l'AMR de Meyer, on obtient avec l'AMR de Haar des **contributions positives pour chacun des pixels.** Les deux AMR donnent donc qualitativement le même résultat, mais ici les amplitudes sont moindres, car l'approximation basse résolution par l'AMR de Haar est plus proche de la variabilité nuageuse.

5.3.1.2.2.2 Flux diffus sortants

Les figures 5.31 et 5.32 montrent les flux diffus descendants et montants dans le nuage. Contrairement à l'AMR de Meyer et logiquement, c'est maintenant la variabilité horizontale

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage
dwn_{sub}	+3.62	+9.35	+3.62	+9.35	+3.62	+9.35	+3.62	+9.35	4.86

TAB. 5.10 – Contribution en % des interactions sous-pixel au flux direct sortant – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

à l'intérieur des pixels qui est représenté par les sources dues aux interactions sous-pixel. Avec l'AMR de Haar, on peut remarquer que, dans la colonne 58, le calcul *à l'échelle* paraît situer plus convenablement le maximum du flux diffus descendant, dans le tiers central du nuage.

Les flux diffus sortants sont détaillés dans le tableau 5.11.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage
dwn_J	0.1564	0.3404	0.1564	0.3404	0.1564	0.3404	0.1564	0.3404	0.2484
dwn_{sub}	0.0093	-0.0320	0.0093	-0.0320	0.0093	-0.0320	0.0093	-0.0320	-0.0114
dwn	0.1657	0.3084	0.1657	0.3084	0.1657	0.3084	0.1657	0.3084	0.2370
up_J	0.1629	0.4742	0.1629	0.4742	0.1629	0.4742	0.1629	0.4742	0.3185
up_{sub}	0.0123	-0.0333	0.0123	-0.0333	0.0123	-0.0333	0.0123	-0.0333	-0.0105
up	0.1752	0.4409	0.1752	0.4409	0.1752	0.4409	0.1752	0.4409	0.3080

TAB. 5.11 – Flux diffus moyens sortants, dans les 8 pixels et à l'échelle du nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

Ce tableau indique qu'à l'échelle du nuage, la prise en compte des interactions sous-pixel fait baisser la valeur des flux diffus, aussi bien vers le haut que vers le bas. **On surestime ainsi globalement les flux diffus en négligeant les interactions entre échelles**. Cependant ici, à l'échelle des pixels d'approximation, les contributions sont plus variables que pour l'AMR de Meyer :

- pour les pixels impairs, les interactions sous-pixel font **augmenter** systématiquement la valeur des flux diffus vers le haut (réfléchis) et vers le bas,
- tandis que pour les pixels pairs, les interactions sous-pixel font **baisser** systématiquement la valeur des flux diffus vers le haut (réfléchis) et vers le bas.

Les contributions en pourcentage des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants sont données tableau 5.12. Les contributions sont moins fortes que pour l'AMR de Meyer, le maximum étant d'environ 10% à l'échelle des pixels, et de 5% à l'échelle globale du nuage. Les changements de signe des contributions additionnelles en fonction des pixels sont assez

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	moyenne (échelle du nuage)
dwn_{sub}	+5.59	-10.36	+5.59	-10.36	+5.59	-10.36	+5.59	-10.36	-4.79
up_{sub}	+7.03	-7.54	+7.03	-7.54	+7.03	-7.54	+7.03	-7.54	-3.40

TAB. 5.12 – Contribution en % des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

remarquables, d'autant plus qu'ils concernent de la même façon les flux sortants montants et descendants. Vu l'approximation basse résolution de la variabilité nuageuse au sens de Haar (fig. 5.17), pouvait-on prévoir ce comportement ? De même que pour l'AMR de Meyer, l'extinction du rayonnement collimaté par le milieu est surestimée quand on fait le calcul

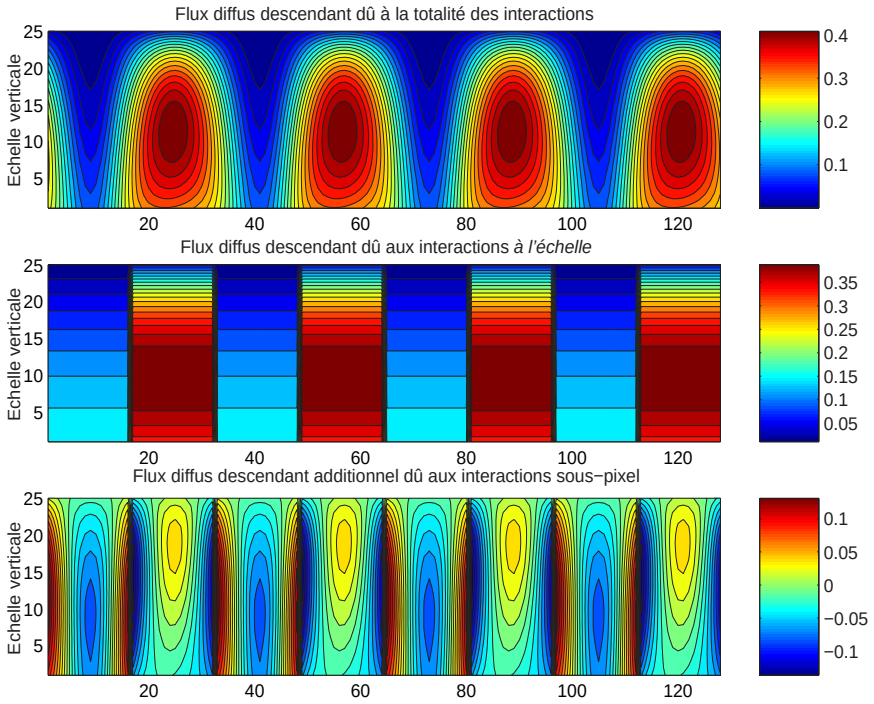


FIG. 5.31 – Flux diffus descendant dans le nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

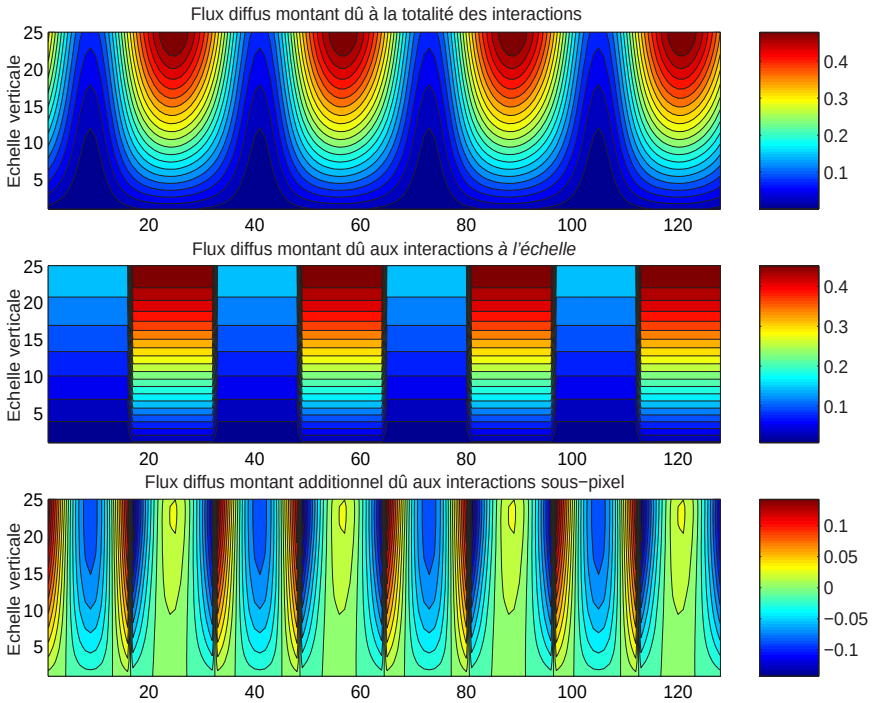


FIG. 5.32 – Flux diffus montant dans le nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

à l'échelle, donc le champ diffus également. On retrouve comme précédemment des contributions sous-pixel négatives pour les pixels pairs. Pourquoi n'en est-il pas de même pour les pixels impairs où les contributions sont positives ?

Si l'on observe l'**évolution en fonction de l'ordre de diffusion** des contributions cumulées des interactions sous-pixel aux flux diffus pour le pixel 1 et le pixel 2 (fig. 5.33), on constate que les sources additionnelles sous-pixel sont d'abord de signe négatif dans les pixels impairs (fig. 5.33a et c), puis la tendance s'inverse et les sources aux ordres de diffusion plus élevés (de 3 à 15) sont positives. Le signe positif des contributions additionnelles dans les pixels pairs est donc dû à la diffusion multiple. Mais de quelle source diffusée s'agit-il ? Vu les faibles épaisseurs optiques dans les pixels impairs, il s'agira de la diffusion multiple des sources provenant des pixels avoisinants. Cette hypothèse est vérifiée dans le tableau 5.15 : il indique que les pixels impairs canalisent le rayonnement. L'étude des radiances (section 5.3.1.3.2) va montrer que pour les pixels impairs, le signe positif des sources additionnelles sous-pixel provient des directions très inclinées, donc des pixels avoisinants. L'explication de ce signe positif est donc en fait assez simple. Le fait de considérer dans les pixels impairs une épaisseur optique constante de 0.365 sans voir les très faibles épaisseurs optiques, synonymes de trous dans le nuage, sous-estime la transmission efficace par les pixels impairs des sources radiatives des pixels voisins. Les sources de diffusion multiple dues aux interactions entre échelles sont donc positives. Les figures 5.33a) et c) indiquent également que dans les pixels

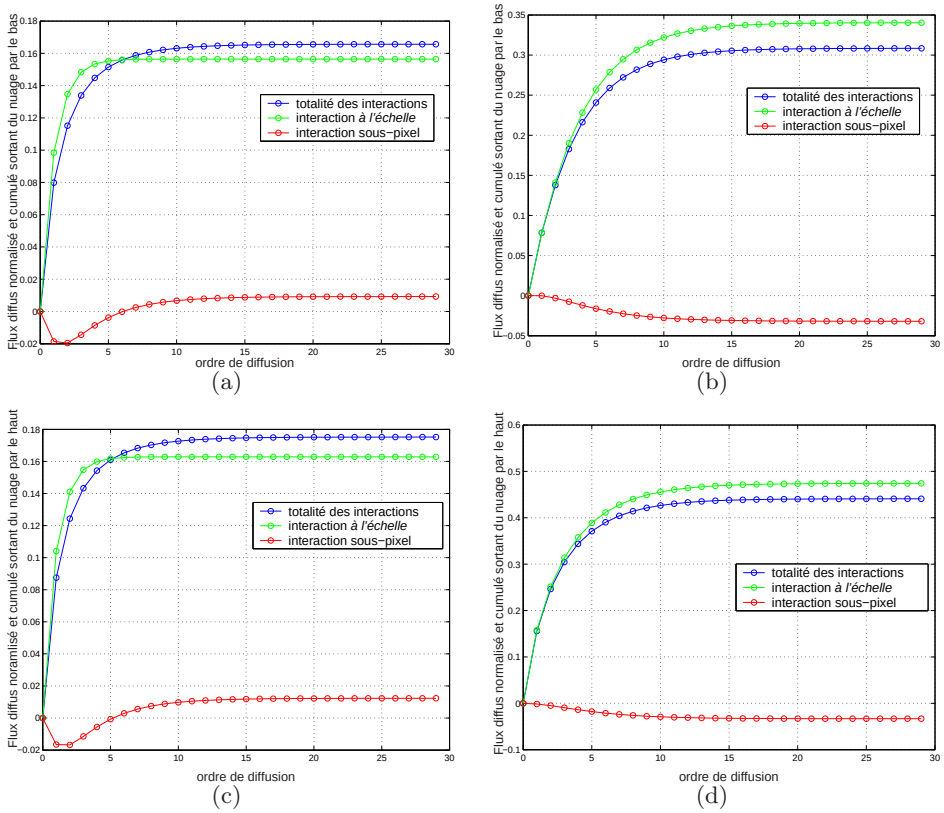


FIG. 5.33 – Evolution des flux diffus cumulés à l'échelle des pixels d'approximation en fonction de l'ordre de diffusion : a) et b) flux montant, pixel 1 et 2 ; c) et d) flux descendant, pixel 1 et 2 – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

pairs, les flux *à l'échelle* convergent très rapidement. On constate sur les figures 5.33b) et d) que dans les pixels pairs, les flux cumulés sortants dus aux interactions sous-pixel ne sont pas

du tout soumis à cette remontée avec les ordres de diffusion. A l'échelle du nuage (fig. 5.34), on retrouve cette augmentation assez vive des sources avec l'ordre de diffusion en partant d'une valeur très négative. Ici encore, c'est la transmittance qui est la plus affectée par les interactions sous-pixel.

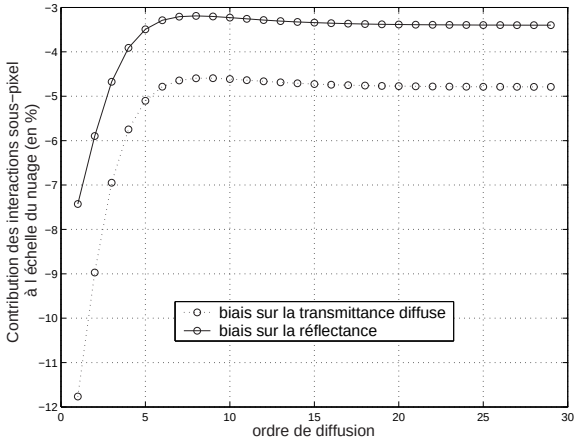


FIG. 5.34 – Evolution des contributions cumulées des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants à l'échelle du nuage en fonction de l'ordre de diffusion – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

5.3.1.2.2.3 Flux total sortant vers le bas (direct+diffus)

Les flux totaux (direct+diffus) sortants du nuage par le bas sont donnés dans le tableau 5.13 et les contributions en pourcentage des interactions sous-pixel au flux total sortant vers le bas sont données dans le tableau 5.14.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage
total dwn_J	0.8355	0.5173	0.8355	0.5173	0.8355	0.5173	0.8355	0.5173	0.6764
total dwn_{sub}	0.0348	-0.0137	0.0348	-0.0137	0.0348	-0.0137	0.0348	-0.0137	0.0105
total dwn	0.8703	0.5036	0.8703	0.5036	0.8703	0.5036	0.8703	0.5036	0.6869

TAB. 5.13 – Flux moyens totaux (direct+diffus) descendants sortants, dans les 8 pixels et à l'échelle du nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage
total dwn_{sub}	+4.00	-2.72	+4.00	-2.72	+4.00	-2.72	+4.00	-2.72	+1.53

TAB. 5.14 – Contribution en % des interactions sous-pixel au flux total (direct + diffus) descendant sortant – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

En sommant les flux sortants diffus et direct, les contributions sous-pixel sont réduites par l'addition des plus et des moins dans chaque pixel. Pour les pixels impairs, il y a une sous-estimation (0.0348) du flux total transmis, et pour les pixels pairs une légère surestimation (-0.0137). A l'échelle du nuage, la sous-estimation de la transmission du flux direct (0.0219)

compensée en partie par la surestimation du flux diffus transmis (-0.0114) donne une contribution positive de 0.0105 soit en pourcentage 1.53 %. De même que pour l'AMR de Meyer, on peut en conclure que globalement, les interactions sous-pixel participent au transport de l'énergie radiative à travers le nuage vers le bas, mais pour l'AMR de Haar, la contribution est près de 4 fois moins élevée.

5.3.1.2.2.4 Total des flux sortant du nuage.

Le total des flux moyens sortants du nuage est donné dans le tableau 5.15.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage
$total_J$	1.1403	0.8496	1.1403	0.8496	1.1403	0.8496	1.1403	0.8496	0.99492
$total_{sub}$	0.0333	-0.0332	0.0333	-0.0332	0.0333	-0.0332	0.0333	-0.0332	6e-005
$total$	1.1736	0.8164	1.1736	0.8164	1.1736	0.8164	1.1736	0.8164	0.99498

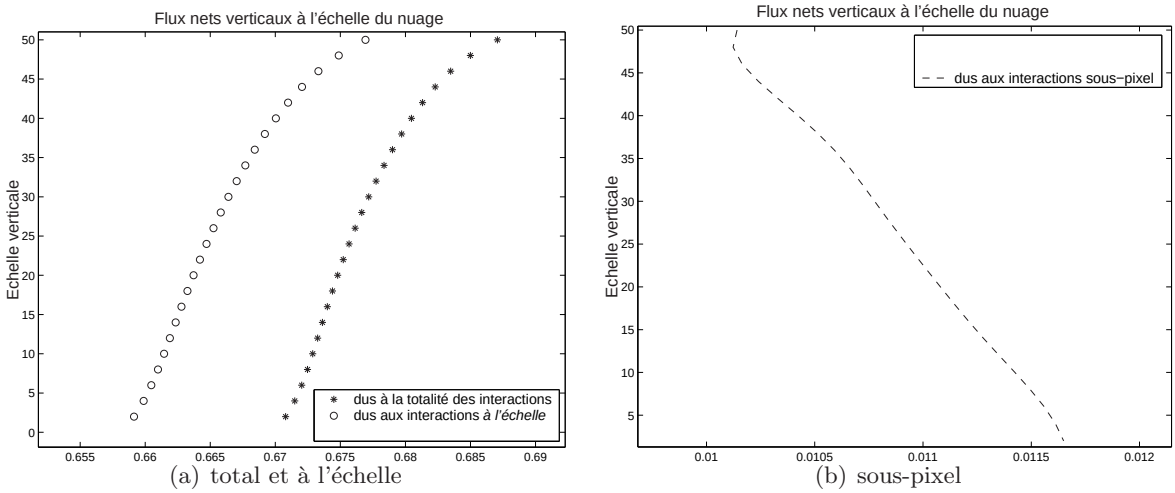
TAB. 5.15 – Somme des flux détaillés sortant du nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

Le bilan donne 0.99498 : le bilan énergétique est donc fermé à une précision d'environ 0.5%. Ce tableau indique également les effets de "channelling" importants dans les pixels impairs : on constate qu'il ressort, par le haut et le bas de la colonne de largeur définie par la taille d'un pixel, 17.36 % d'énergie en plus qu'il n'en est rentré. Le tableau indique que cet effet est en grande partie dû aux interactions *à l'échell*e (14.03 %). En effet, pour l'AMR de Haar, le terme $\sum_1 \langle \delta\varphi_1, \varphi_3 \rangle \left\langle \tilde{N}^k \left(z, \mu^{\pm} \right), \varphi_1 \right\rangle$ (paragraphe 3.8.1) présent dans le calcul à l'échelle n'est pas nul : on prend en compte *à l'échelle* le transport horizontal net dans le nuage dû aux valeurs différentes des propriétés optiques moyennes du milieu dans les pixels d'approximation. Les interactions sous-pixel sont responsables de $\frac{3.33}{17.36}100 = 19.18\%$ de la canalisation à l'échelle des pixels d'approximation.

5.3.1.2.2.5 Etude du transport vertical de l'énergie radiative

Les figures 5.35 donnent les flux verticaux nets à l'échelle du nuage, calculés en considérant l'ensemble des interactions entre les deux champs et celles *à l'échelle* (fig. 5.35a) et sous-pixel (fig. 5.35b). A l'échelle du nuage, le flux net dû aux interactions sous-pixel varie entre 0.01 et 0.0115. Le flux net *à l'échelle* est plus élevé que pour l'AMR de Meyer, compris entre 0.66 et 0.675, et il n'est plus constant dans le nuage : le calcul avec l'AMR de Haar et *à l'échelle* n'est plus un calcul plan parallèle. La figure 5.36 donne les flux nets verticaux dans la colonne 58. Cette figure est à comparer à la figure 5.27. On observe que le flux net vertical dû aux interactions sous-pixel est ici aussi partout négatif, mais moins important en valeur absolue que dans le cas de de l'AMR de Meyer. Le flux net vertical dû aux interactions *à l'échelle* est plus faible (inférieur à 0.6) que dans le cas de l'AMR de Meyer (supérieur à 0.6). De même qu'avec l'AMR de Meyer, le flux net total décroît quand on traverse le nuage du haut vers le bas, mais ici, cette décroissance n'est pas due uniquement au flux net sous-pixel : le flux net *à l'échelle* n'est pas non plus constant dans le nuage. La figure 5.37 (comparable à la figure 5.28) détaille les flux verticaux dans la colonne 58 dus aux interactions sous-pixel.

Ici aussi, le flux direct est négatif partout, le flux diffus montant est partout positif, le flux diffus descendant est maximum vers le tiers supérieur du nuage. Mais ici, le flux diffus descendant dû aux interactions sous-pixel est négatif dans le quart bas du nuage : le calcul à l'échelle de type Haar y surestime le flux diffus descendant. Les interactions sous-pixel donnent finalement un flux net vertical partout négatif dans cette colonne, de -0.08 à la base contre -0.02 au sommet. Ce flux net est plus faible en valeur absolue que dans le cas de Meyer.



(a) total et à l'échelle (b) sous-pixel

FIG. 5.35 – Flux nets verticaux pour l'ensemble du nuage sinusoïdal– AMR de Haar.

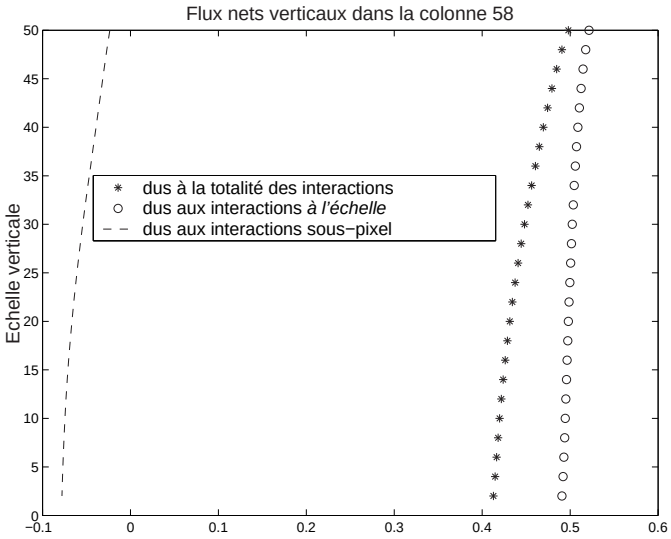


FIG. 5.36 – Flux nets verticaux dans la colonne 58 – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

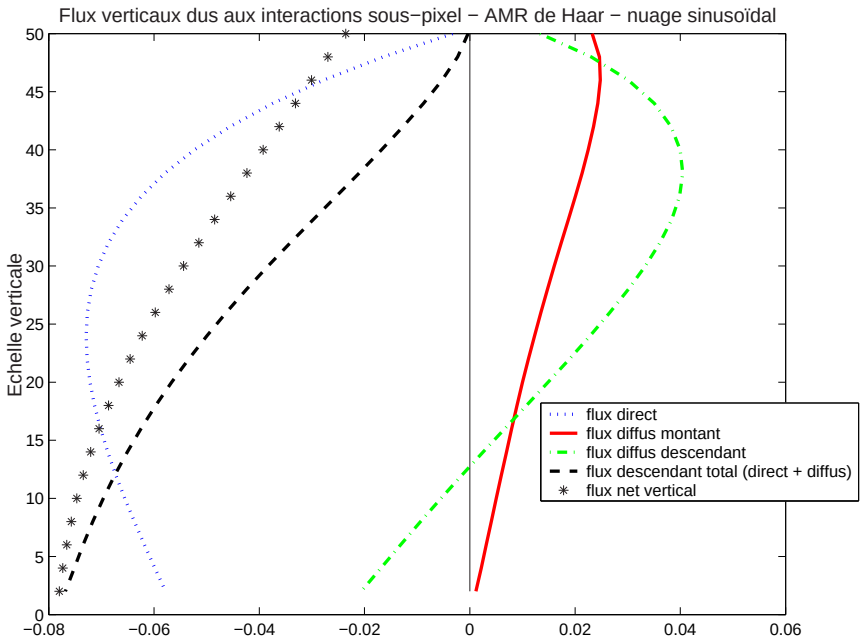


FIG. 5.37 – Flux dans la colonne 58 du aux interactions sous-pixel – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

Dans la colonne 40 (figure 5.38), on constate comme pour l'AMR de Meyer (fig. 5.29) un flux net vertical aux interactions sous-pixel de signe positif et augmentant quand on traverse le nuage vers le bas. De même, le flux net vertical à l'échelle semble à peu de choses près constant, mais ici il vaut environ 0.2 de plus que dans le cas de l'AMR de Meyer, manifestation du fait que le phénomène de canalisation du rayonnement dans la colonne 40 est en partie porté par le calcul *à l'échelle* dans le cas de l'AMR de Haar.

Cette étude des flux nets verticaux pour ce nuage et avec l'AMR de Haar permet d'apprécier la différence des calculs *à l'échelle* par rapport à ceux avec l'AMR de Meyer. Une partie des effets radiatifs 3D, ceux conséquences de la différence d'épaisseur optique moyenne à l'échelle des pixels d'approximation (successivement 0.365 et 1.635), sont ici pris en compte *à l'échelle.* Les contributions sous-pixel aux flux nets verticaux sont donc moins importantes.

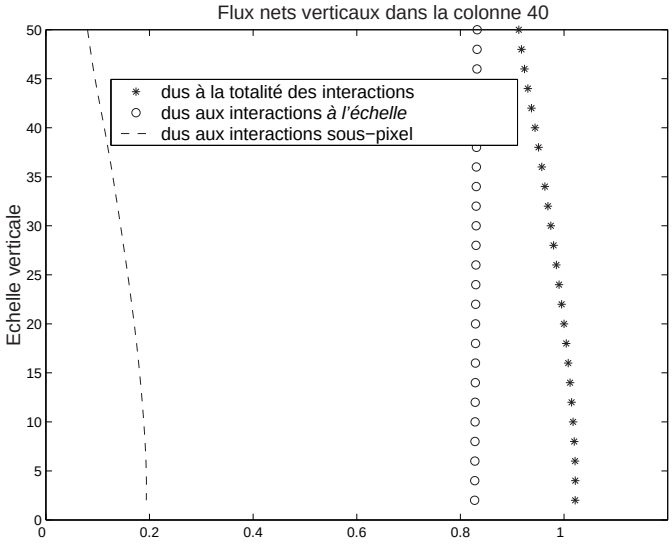


FIG. 5.38 – Flux nets verticaux dans la colonne 40 – Nuage sinusoïdal – AMR de Haar.

5.3.1.3 Analyse des radiances sortantes

On analyse ici les radiances sortantes obtenues pour chaque pixel d'approximation, c'est à dire les radiances moyennes à l'échelle de ces pixels. L'intérêt de notre calcul est que nous est fourni par le code *WaveNum* et en une seule simulation la contribution de l'effet des hétérogénéités sous-pixel aux radiances à l'échelle des pixels d'approximation. On adopte une représentation polaire pour représenter les radiances : la distance au centre correspond au sinus de l'angle zénithal θ (donc la direction la plus à la verticale est au centre, et la plus horizontale est en périphérie), et on décrit le cercle suivant l'angle azimutal ϕ. Deux types de figures sont représentées : la première comporte trois représentations polaires donnant les radiances émergeantes calculées en prenant en compte la totalité des interactions entre les deux champs (RAD), les interactions *à l'échelle* (RAD_J), et les interactions sous-pixel (RAD_{sub}). La deuxième figure représente la contribution relative des interactions sous-pixel aux radiances sortantes dans chacun des pixels d'approximation. C'est simplement le rapport entre RAD_{sub} et RAD, ou plus justement $RAD_{sub}/(RAD_J + RAD_{sub})$. De plus, on ne visualise que les radiances montantes : la diffusion étant isotrope, les radiances descendantes n'apportent aucune information supplémentaire. Pour ce nuage sinusoïdal, seuls les résultats pour les pixels 1 et 2 sont montrés.

5.3.1.3.1 Cas de la multirésolution de Meyer

Les figures 5.39 et 5.40 donnent les radiances normalisées montantes sortantes issues respectivement des pixels 1 et 2. La rosace de gauche fournit les radiances dues à la totalité des interactions (RAD) ; la rosace centrale les radiances dues aux interactions à l'échelle (RAD_J) ; la rosace de droite les radiances dues aux interactions sous-pixel (RAD_{sub}).

On observe une symétrie des résultats par rapport à l'axe $\phi = 0°$. Ceci est dû à l'invariance des nuages suivant l'axe $\overrightarrow{y}$. Les radiances *à l'échelle* (représentation polaire centrale) sont quasiment indépendantes de l'angle azimutal. L'effet des interactions sous-pixel (représentation polaire de droite) est le plus important pour les angles zénithaux supérieurs à 60°. Pour ces angles zénithaux, l'effet des interactions sous-pixel change de signe entre le plan avant ($\phi \leq 90°$ et $\phi \geq 270°$) et le plan arrière ($90° \leq \phi \leq 270°$). Pour le pixel 1, les valeurs des radiances normalisées RAD_{sub} sont négatives (jusqu'à -0.04) pour les angles zénithaux supérieurs à 60° et dans le plan arrière, et positives (jusqu'à +0.01) pour les angles zénithaux supérieurs à 60° et dans le plan avant. Pour le pixel 2, c'est l'inverse. La symétrie quasi-parfaite des radiances RAD_{sub} dans les pixels 1 et 2 est à relier à la symétrie des portions de signal en regard des "pixels" impairs et pairs de Meyer (voir la figure 5.18). Analysons tout d'abord les zones de la représentation polaire où les radiances RAD_{sub} sont positives : dans les pixels 1 et 2, la diffusion du rayonnement par la partie respectivement gauche et droite du signal – où l'épaisseur optique est maximale – est sousestimée dans le calcul *à l'échelle* ; cette énergie diffuse – prise en compte dans le calcul sous-pixel – se propage assez librement vers le haut dans des directions très inclinées sur l'horizontale et vers les zones de faible épaisseur optique – invisibles pour la représentation basse résolution du signal, la partie respectivement droite et gauche des pixels 1 et 2 (des abscisses 65 à 81 sur la figure 5.18). Pour résumé, les valeurs positives de RAD_{sub} ont pour origine une diffusion augmentée par les parties gauche et droite des pixels respectivement 1 et 2, et cette énergie diffuse sort assez facilement du nuage par les parties respectivement droite et gauche de ces pixels. Analysons maintenant les zones de la représentation polaire où les radiances RAD_{sub} sont négatives : dans les pixels 1 et 2, la diffusion du rayonnement par la partie respectivement droite et gauche du signal – où l'épaisseur optique est minimale – est surestimée dans le calcul *à l'échelle* ; cette énergie diffuse "en trop" – prise en compte dans le calcul sous-pixel et de signe négatif – se propage assez difficilement vers le haut dans des directions très inclinées sur l'horizontale et vers les

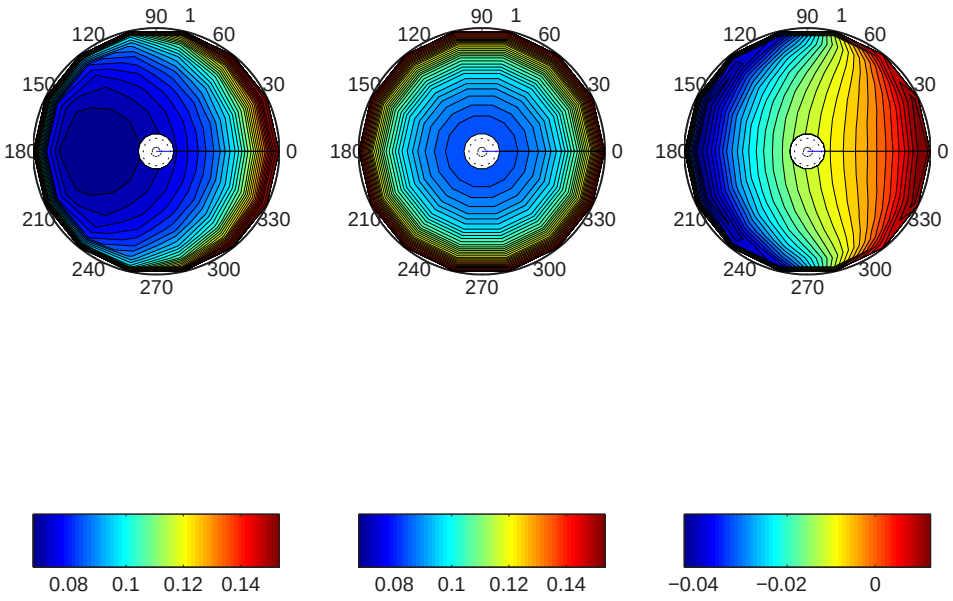


FIG. 5.39 – Radiances sortantes montantes moyennes à l'échelle du pixel 1 : radiances dues à la totalité des interactions (à gauche), dues aux interactions à l'échelle (au centre) et sous-pixel (à droite) – AMR de Meyer – Nuage sinusoïdal.

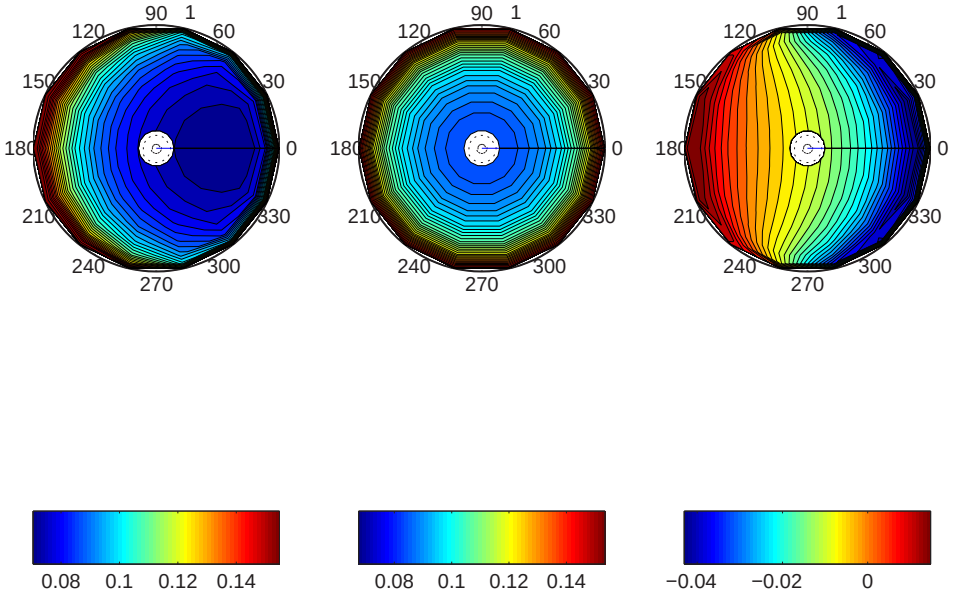


FIG. 5.40 – Radiances sortantes montantes moyennes à l'échelle du pixel 2 : radiances dues à la totalité des interactions (à gauche), dues aux interactions à l'échelle (au centre) et sous-pixel (à droite) – AMR de Meyer – Nuage sinusoïdal.

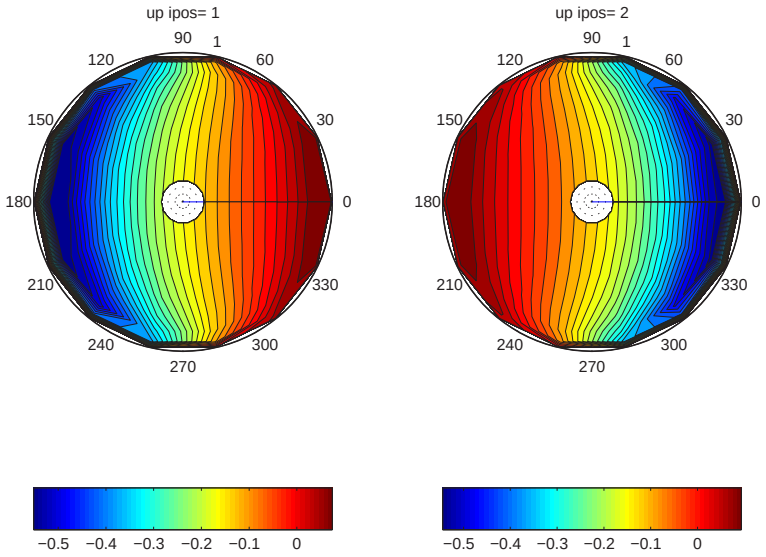


FIG. 5.41 – Contributions relatives des interactions sous-pixel aux radiances montantes sortant des pixels 1 et 2 – AMR de Meyer – Nuage sinusoïdal.

zones de forte épaisseur optique – invisibles pour la représentation basse résolution du signal, la partie respectivement gauche et droite des pixels 1 et 2. Pour résumé, les valeurs négatives de RAD_{sub} ont pour origine une surévaluation de la diffusion par les parties droite et gauche des pixels respectivement 1 et 2, énergie diffuse qui se propagerait vers les parties respectivement gauche et droite de ces pixels, dont l'épaisseur optique est constante et vaut l'unité dans le calcul *à l'échelle*, alors qu'en réalité, l'épaisseur optique y atteint des valeurs plus élevées (jusqu'à deux).

La présence plus importante des valeurs négatives de RAD_{sub} dans les deux pixels fait que les flux diffus $flux_{sub}$ moyens dans ces deux pixels sont négatifs (voir 5.3.1.2.1.2). C'est donc la surestimation par le calcul à l'échelle de l'épaisseur optique là où celle-ci est en réalité beaucoup plus faible, donc la surestimation des sources de diffusion, qui l'emporte globalement dans le calcul de $flux_{sub}$ à l'échelle des pixels d'approximation.

La figure 5.41 donne la contribution relative des interactions sous-pixel en visualisant le rapport des coefficients d'échelle dus aux interactions sous-pixel sur les coefficients d'échelle totaux, pour les pixels 1 (à gauche) et 2 (à droite). On peut constater que, logiquement par rapport à l'analyse faite ci-dessus, la contribution des interactions sous-pixel est maximale pour des directions proches de l'horizontale. Cette contribution atteint 50% en valeur absolue (et de signe négatif). On peut interpréter ainsi ces résultats : dans ces directions, le calcul à l'échelle surestime de 50% la valeur des radiances moyennes à l'échelle des pixels d'approximation.

5.3.1.3.2 Cas de la multirésolution de Haar

Les figures 5.42 et 5.43 donnent les radiances montantes sortantes issues respectivement des pixels 1 et 2 pour l'AMR de Haar. Remarquons tout d'abord que les radiances totales (représentations polaires de gauche) sont différentes du cas de l'AMR de Meyer. Rappelons-nous que la définition des pixels de Haar et de Meyer ne sont pas les mêmes, et qu'en particulier, ils ne sont pas positionnés au même endroit.

Les radiances calculées à l'échelle sont maintenant très différentes pour les pixels 1 et 2 (fig. 5.42 et 5.43 au centre) : l'épaisseur optique moyenne dans le pixel 2 est plus importante,

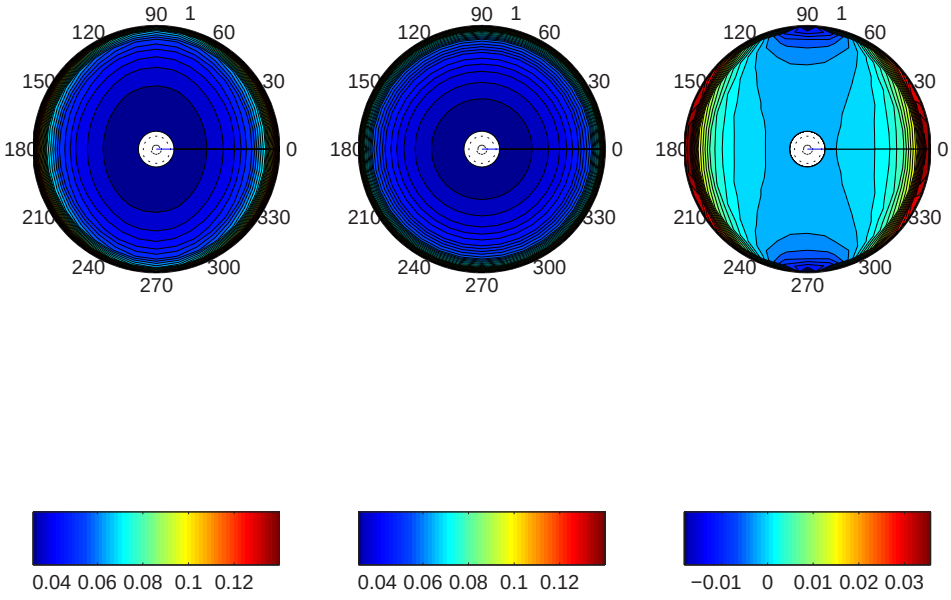


FIG. 5.42 – Radiances sortantes montantes moyennes à l'échelle du pixel 1 : radiances totales (à gauche), dues aux interactions à l'échelle (au centre) et sous-pixel (à droite) – AMR de Haar – Nuage sinusoïdal.

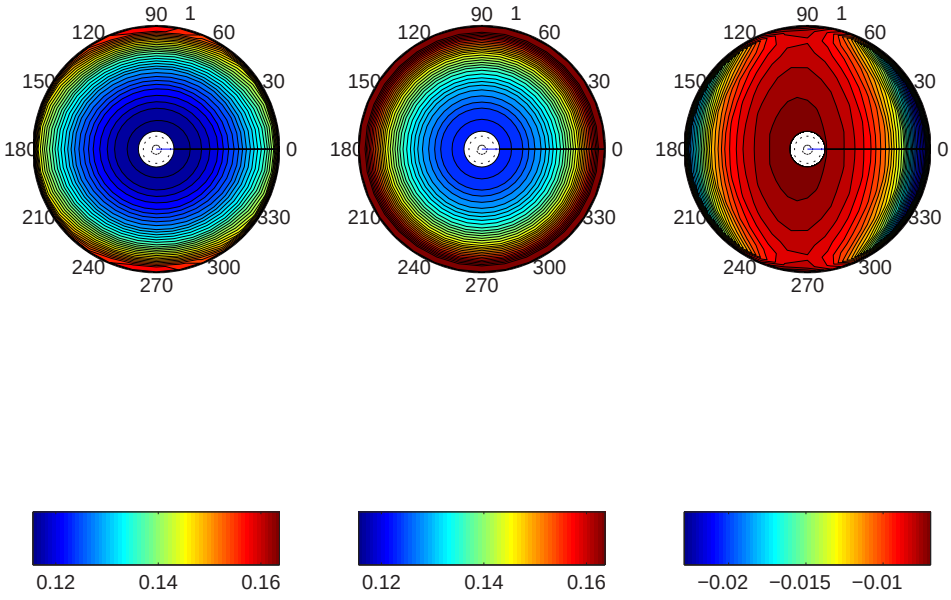


FIG. 5.43 – Radiances sortantes montantes moyennes à l'échelle du pixel 2 : radiances totales (à gauche), dues aux interactions à l'échelle (au centre) et sous-pixel (à droite) – AMR de Haar – Nuage sinusoïdal.

et de ce pixel émerge beaucoup plus de flux diffus.

Les radiances additionnelles RAD_{sub} dues aux interactions sous-pixel ne présentent plus la symétrie constatée entre les pixels pour l'AMR de Meyer, mais l'explication des changements de signe de RAD_{sub} pour les deux pixels et en fonction des directions peut être analyser de la même façon et suivant les remarques déjà données au paragraphe 5.3.1.2.2.2.

Dans le pixel 1, les radiances sous-pixel sont très faibles en valeur absolue, sauf pour les angles zénithaux importants où les contributions sont significatives et positives pour presque tous les plans azimutaux, excepté pour les plans perpendiculaires à l'axe $\overrightarrow{x}$ où elles sont négatives. On ne sait pas pour l'instant interpréter ces valeurs négatives (autour de -0.01) pour ces plans azimutaux. Comme il a été noté au paragraphe 5.3.1.2.2.2, les contributions positives correspondent à la diffusion multiple. Ces contributions pour ces directions très inclinées correspondent aux sources radiatives provenant des pixels pairs : le calcul *sous-pixel* compense la sousestimation des sources de diffusion dans les pixels pairs et la surestimation de l'épaisseur optique dans les pixels impairs par le calcul *à l'échelle*. La présence de contributions positives plus importantes en valeur absolue fait que les flux diffus $flux_{sub}$ moyen, ausi bien montant que descendant, sont positifs dans les pixels pairs (voir les tableaux 5.11 et 5.12).

Dans le pixel 2, les radiances sous-pixel sont négatives dans toutes les directions, et maximales en valeur absolue pour les angles zénithaux importants. L'explication de la non-présence de radiances RAD_{sub} dans les pixels pairs est à relier à la remarque faite au paragraphe 5.3.1.2.2.2 que la diffusion aux ordres de diffusion élevé n'apporte pas de contributions positives à l'énergie diffuse sous-pixel dans les pixels pairs. Ces valeurs négatives conduisent au flux diffus *sous-pixel* moyen négatif dans ce pixel (voir les tableaux 5.11 et 5.12).

On peut également observer la contribution des interactions sous-pixel en visualisant le rapport des coefficients d'échelle dus aux interactions sous-pixel sur les coefficients d'échelle totaux : la figure 5.44 donne ces contributions relatives pour les radiances montantes et pour les pixels 1 (à gauche) et 2 (à droite).

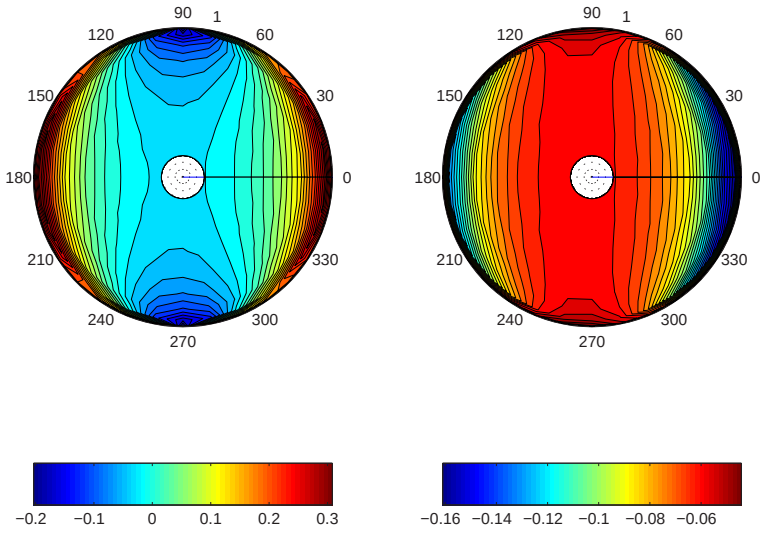


FIG. 5.44 – Contributions relatives des interactions sous-pixel aux radiances montantes sortant des pixels 1 et 2 – AMR de Haar – Nuage sinusoïdal.

La figure 5.44 donne la contribution relative des interactions sous-pixel en visualisant le rapport des coefficients d'échelle dus aux interactions sous-pixel sur les coefficients d'échelle totaux, pour les pixels 1 (à gauche) et 2 (à droite). On peut constater ici aussi que, logiquement par rapport à l'analyse faite ci-dessus, la contribution des interactions sous-pixel est maximale

pour des directions proches de l'horizontale. Pour le pixel 1, cette contribution atteint près de 30% pour les angles zénithaux élevés et dans la majorité des plans azimutaux. Pour le pixel 2, elle atteint 16% et est de signe négatif.

5.3.2 Cas du nuage à cascade bornée

5.3.2.1 Approximation basse résolution de la variabilité nuageuse

La figure 5.45 donne l'approximation à basse résolution de la fluctuation nuageuse de type cascade bornée pour les deux AMR de Haar et de Meyer.

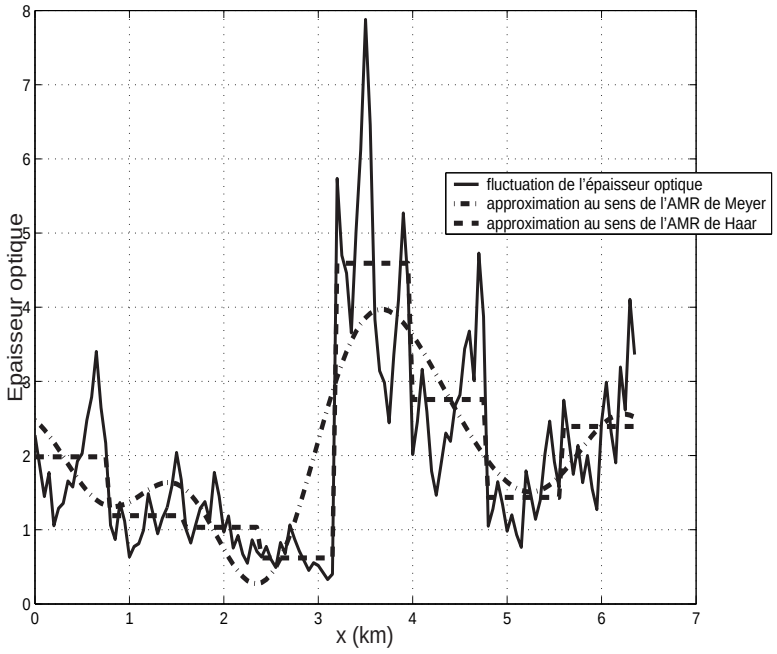


FIG. 5.45 – Approximations basse résolution de la fluctuation type "cascade bornée" par les AMR Haar et Meyer.

Dans cette analyse des flux sortants pour le nuage cascade bornée, nous ne donnons que les résultats obtenus pour la multirésolution de Haar (et pour la technique de calcul HM). La raison est la suivante : pour ce nuage et l'AMR de Meyer, on obtient, à l'échelle des 8 pixels d'approximation, les flux direct transmis donnés dans le tableau 5.16. On constate que le flux

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	en moyenne (échelle du nuage)
dwn_J	0.0857	0.2704	0.2635	0.6052	0.1801	0.0542	0.1507	0.1801	0.2237
dwn_{sub}	0.0029	-0.0191	-0.0053	-0.1339	0.1213	-0.0683	0.0350	-0.0116	-0.0099
dwn	0.0885	0.2513	0.2582	0.4713	0.3014	*-0.0141*	0.1857	0.1685	0.2138

TAB. 5.16 – Flux directs sortants moyens dans les 8 "pixels Meyer" et à l'échelle du nuage "cascade bornée".

moyen obtenu dans le pixel 6 est négatif et vaut -0.0141, ce qui est une valeur irréaliste et dénuée de sens physique. On voit là l'inconvénient de travailler avec une AMR qui propose

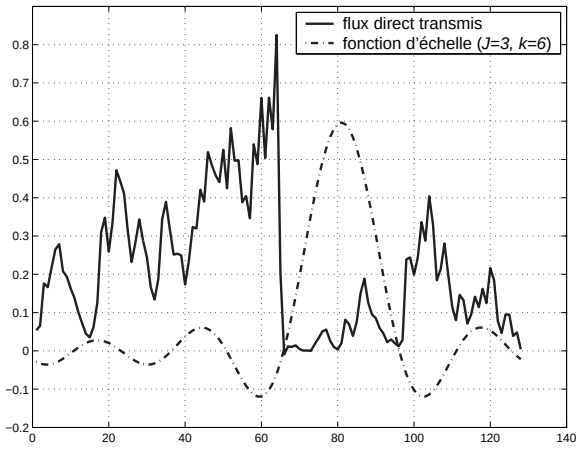


FIG. 5.46 – Flux direct sortant du nuage, et la fonction d'échelle de Meyer périodisée $\varphi_{J=3,k=6}$.

une fonction d'échelle oscillante présentant des valeurs négatives. La distribution des valeurs analysées peut très bien amener à ce genre de problème. Pour nous en convaincre, il suffit d'observer les deux fonctions dont on réalise le produit scalaire (fig. 5.46) : le signal du flux direct sortant du nuage, et la fonction d'échelle de Meyer périodisée $\varphi_{J=3,k=6}$.

Les valeurs maximales du signal du flux direct coïncident avec les valeurs négatives de la fonction d'échelle (autour des soixantième et centième points) pour donner finalement un produit scalaire négatif.

L'utilisation de l'AMR de Meyer, conduisant à des valeurs non physiques, seuls les résultats pour l'AMR de Haar sont étudiés. Il faut noter toutefois que l'utilisation de l'AMR de Meyer permet de faire des calculs de l'énergie radiative due à la totalité des interactions tout à fait valables, mais leus analyse est difficilement exploitable en terme d'interaction entre échelle.

5.3.2.2 Analyse des flux sortants

5.3.2.2.1 Flux directs sortants

La figure 5.47 montre les flux directs solaires détaillés dans le nuage.

Les flux directs moyens sortants dans les 8 pixels d'approximation sont détaillés dans le tableau 5.17, et les contributions en pourcentage des interactions sous-pixel aux flux directs moyens sortant du nuage, sont données tableau 5.18. Les contributions sont maximales dans les pixels 1, 6 et 8 (supérieur à 0.02), et maximales en pourcentage dans les pixels 5 et 6 : les contributions vont de -2.66 à 51.75%. A l'échelle du nuage, les signes contraires se compensent et la contribution est de 5.37%.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage)
dwn_J	0.1174	0.2772	0.3283	0.5347	0.0132	0.0489	0.2173	0.0813	0.2023
dwn_{sub}	0.0228	0.0174	0.0044	-0.0138	0.0141	0.0210	0.0045	0.0216	0.0115
dwn	0.1402	0.2946	0.3327	0.5209	0.0273	0.0699	0.2218	0.1029	0.2138

TAB. 5.17 – Flux directs moyens sortants dans les 8 pixels et à l'échelle du nuage "cascade bornée" – AMR de Haar.

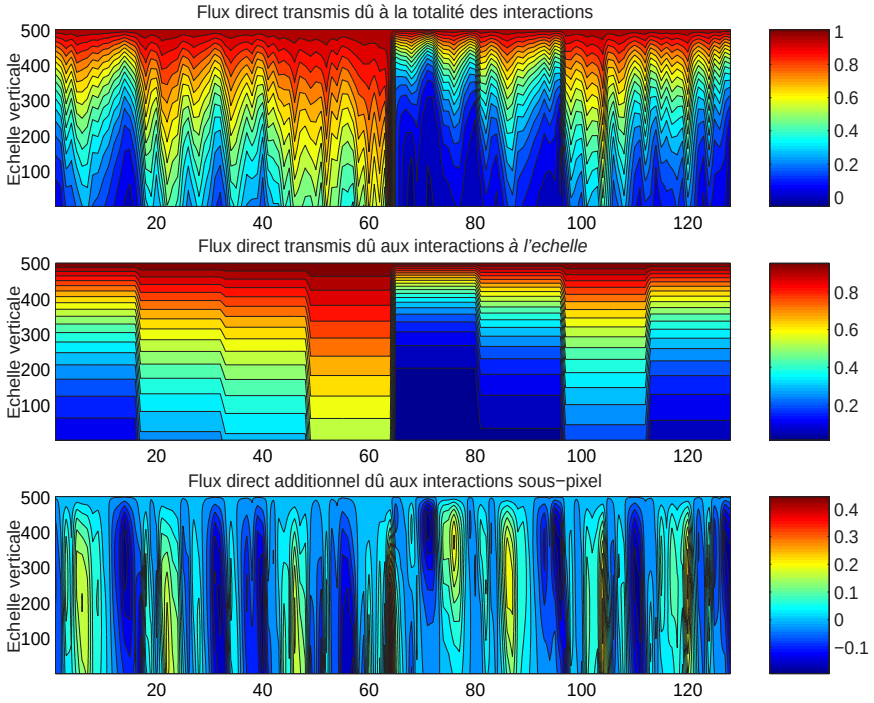


FIG. 5.47 – Flux collimatés (directs) dans le nuage "cascade bornée" – $\Theta_{sol} = 161°$ – AMR de Haar.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	échelle du nuage
dwn_{sub}	16.26	5.90	1.33	-2.66	51.75	30.07	2.02	20.93	5.37

TAB. 5.18 – Contribution en % des interactions sous-pixel au flux direct sortant – AMR de Haar – Nuage "cascade bornée".

5.3.2.2.2 Flux diffus sortants

Les figures 5.48 et 5.49 montrent les flux diffus descendants et montants dans le nuage. Pour le flux diffus descendant, on voit que les sources additionnelles sous-pixel prennent des valeurs comprises entre -0.15 et +0.1. Pour le flux montant, les valeurs vont de -0.1 à +0.07.

Les flux diffus sortants sont détaillés dans le tableau 5.19. Contrairement au cas du nuage sinusoïdal étudié précédemment, les contributions sous-pixel ne sont pas plus importantes pour les flux diffus descendants. On peut noter que dans tous les pixels exceptés les pixels 4 et 7, les flux diffus dus aux interactions sous-pixel sont de signes négatifs, aussi bien pour les flux montants que descendants. Pour les pixels 4 et 7, les contributions sous-pixel sont positives, aussi bien pour les flux montants et descendants. Ces deux pixels contiennent des minima locaux d'épaisseur optique. Cet effet est certainement conséquence de la canalisation du rayonnement dans ces pixels, canalisation qu'on constatera plus loin.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	moyenne (échelle du nuage)
dwn_J	0.3388	0.3136	0.3011	0.2332	0.2269	0.3158	0.3329	0.3375	0.30
dwn_{sub}	-0.0139	-0.0016	-0.0108	0.0271	-0.0007	-0.0052	0.0012	-0.0095	-0.0017
dwn	0.3249	0.3120	0.2903	0.2603	0.2262	0.3106	0.3341	0.3280	0.2983
up_J	0.5202	0.3919	0.3612	0.2535	0.6881	0.5978	0.4411	0.5711	0.4781
up_{sub}	-0.0171	-0.0021	-0.0065	0.0297	-0.0393	-0.0179	0.0060	-0.0201	-0.0084
up	0.5031	0.3898	0.3547	0.2832	0.6488	0.58	0.4471	0.5510	0.4697

TAB. 5.19 – Flux diffus moyens sortants, dans les 8 pixels et à l'échelle du nuage "cascade bornée" – AMR de Haar.

A l'échelle du nuage, les contributions sous-pixel sont légèrement négatives pour les flux montant et descendant : en pourcentage (tableau 5.20), les contributions représentent -0.56 et 0.79% des flux respectivement descendant et montant. A l'échelle des pixels d'approximation, les contributions négatives atteignent en valeur absolue 6.05 % ; les contributions positives atteignent 10.47 % dans le pixel 4.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	moyenne (échelle du nuage)
dwn_{sub}	-4.29	-0.53	-3.71	+10.40	-0.31	-1.65	+0.35	-2.88	-0.56
up_{sub}	-3.39	-0.52	-1.85	+10.47	-6.05	-3.08	+1.34	-3.65	-1.79

TAB. 5.20 – Contribution en % des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants – AMR de Haar – Nuage "cascade bornée".

Afin d'analyser plus finement ces résultats, on a observé l'évolution des flux diffus moyens sortants en fonction de l'ordre de diffusion, en particulier dans les pixels 4 et 7. Les évolutions des flux diffus cumulés sortants sont données dans les figures 5.50 et 5.51. Pour de nombreux pixels, les contributions sous-pixel oscillent autour de zéro. La convergence des flux sortants n'étant pas encore réalisée pour certains pixels (par exemple le pixel 5, surtout pour le flux descendant), les signes des contributions sous-pixel dans les tableaux précédents sont donc à prendre avec précaution (tout particulièrement pour le pixel 5). On voit que pour le pixel 4, la convergence de la contribution sous-pixel vers des valeurs positives s'obtient entre le cinquième et le dixième ordre de diffusion. La figure 5.52 indique les contributions sous-pixel relatives à l'échelle du nuage. On constate à nouveau ici que les contributions sous-pixel sont plus

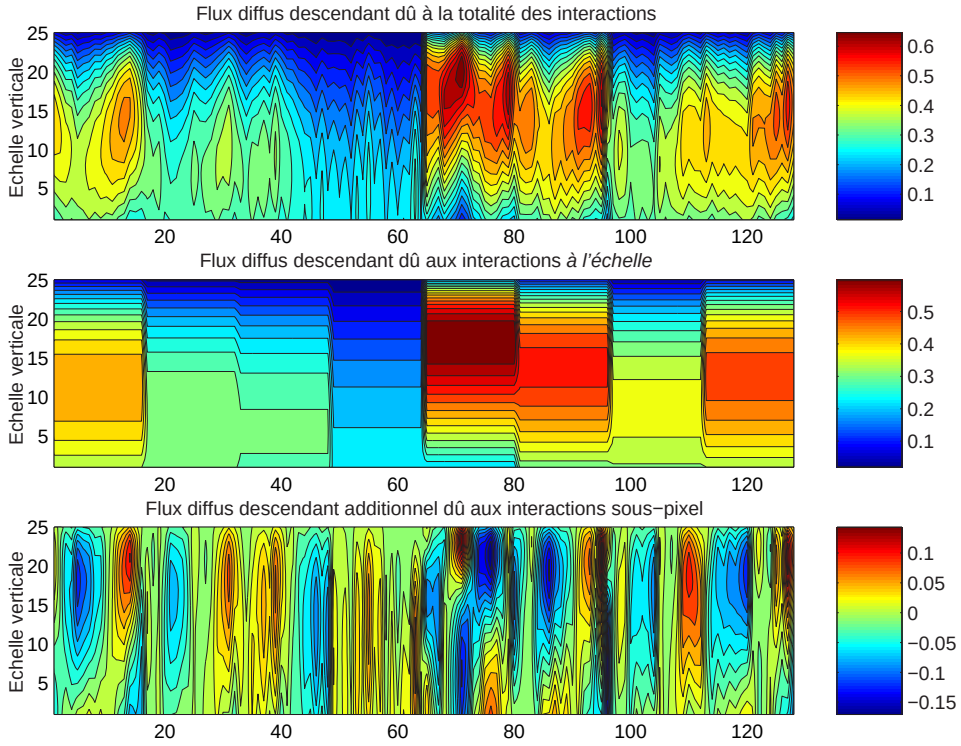


FIG. 5.48 – Flux diffus descendant dans le nuage “cascade bornée” – AMR de Haar.

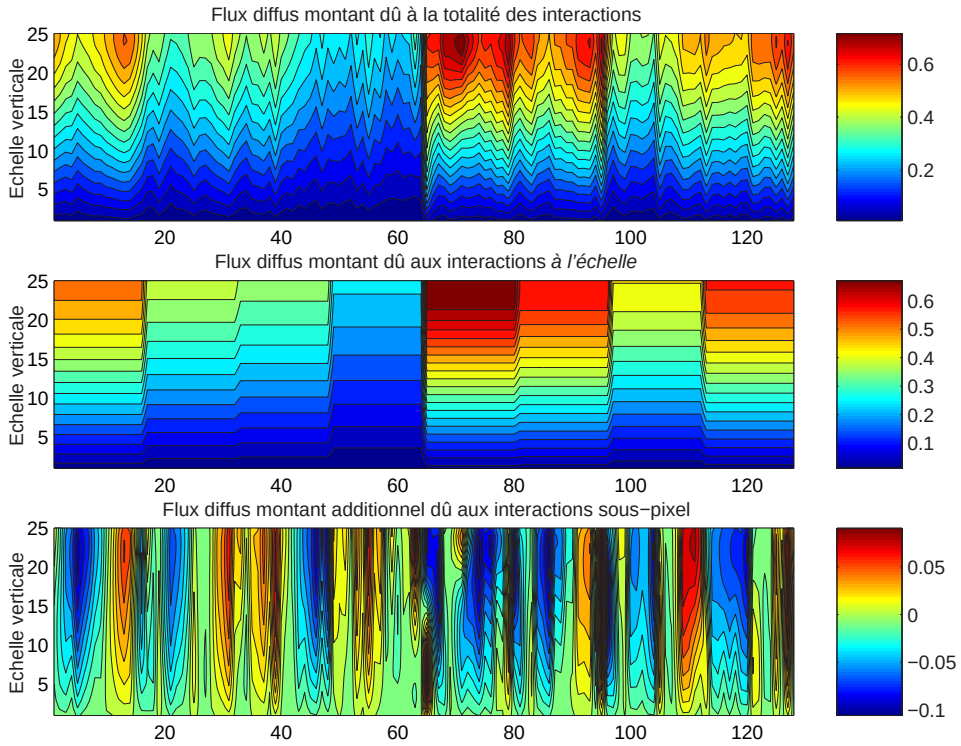


FIG. 5.49 – Flux diffus montant dans le nuage “cascade bornée” – AMR de Haar.

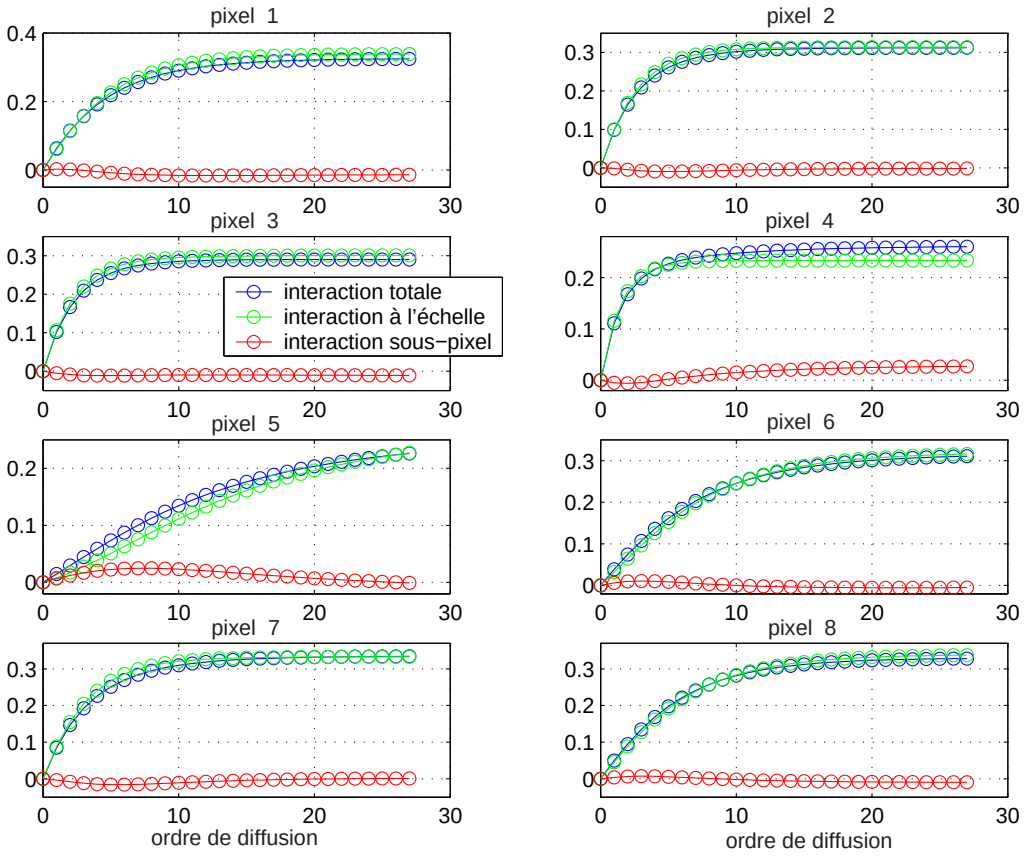


FIG. 5.50 – Evolution des contributions cumulées des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants descendants pour les huit pixels en fonction de l'ordre de diffusion – AMR de Haar – Nuage "cascade bornée".

importantes pour le flux diffus montant (autour de -2 %) que pour le flux descendant (entre -0.5 et -0.8 %). On voit que les valeurs absolues des contributions cumulées des interactions sous-pixel passent par un maximum avant de diminuer et de se stabiliser en oscillant autour d'une valeur.

5.3.2.2.3 Flux total (direct + diffus) descendant sortant

Les flux totaux (direct+diffus) sortants du nuage par le bas sont donnés dans le tableau 5.21 et les contributions en pourcentage des interactions sous-pixel au flux total sortant vers le bas sont données tableau 5.22.

En faisant la somme des flux diffus et des flux directs sortants, les contributions sous-pixel sont positives dans 7 pixels sur 8, et également à l'échelle du nuage entier. Ce signe positif est dû à l'écart sur le flux direct entre le calcul *à l'échelle* et le calcul vrai. Ainsi, à l'échelle du nuage et dans 7 pixels d'approximation, les hétérogénéités aident au transport vertical de l'énergie radiative. A l'échelle d'une période nuageuse, la contribution des interactions sous-pixel au flux total (direct + diffus) descendant sortant vaut +1.92%. A l'échelle des pixels d'approximation, elle atteint +5.70%.

Pour ce nuage très fluctuant, nous pouvons constater qu'à l'échelle du nuage, les fluctuations sous-pixel sont relativement faibles : -2 % pour le flux réfléchi, 1.92 % pour le flux total transmis. Cependant, à l'échelle des pixels d'approximation, les contributions sont plus importantes : jusqu'à 10.47 % pour le flux réfléchi, +5.70 % pour le flux total transmis, et

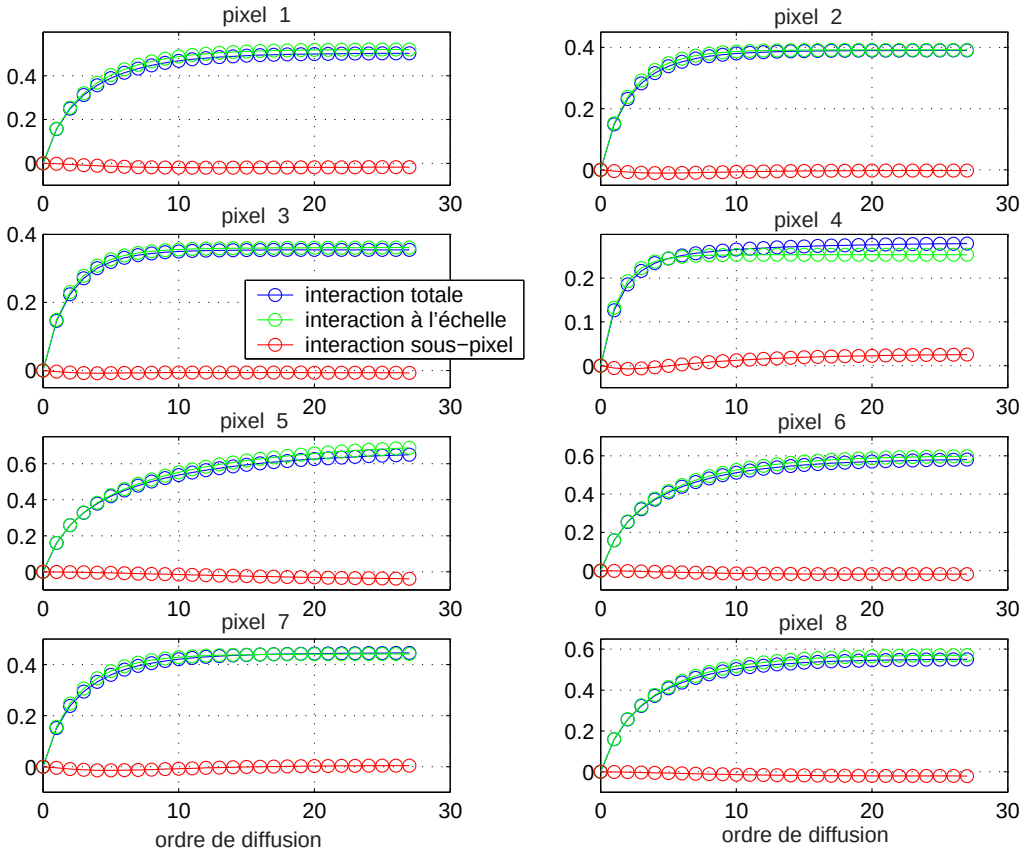


FIG. 5.51 – Evolution des contributions cumulées des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants montants pour les huit pixels en fonction de l'ordre de diffusion – AMR de Haar – Nuage "cascade bornée".

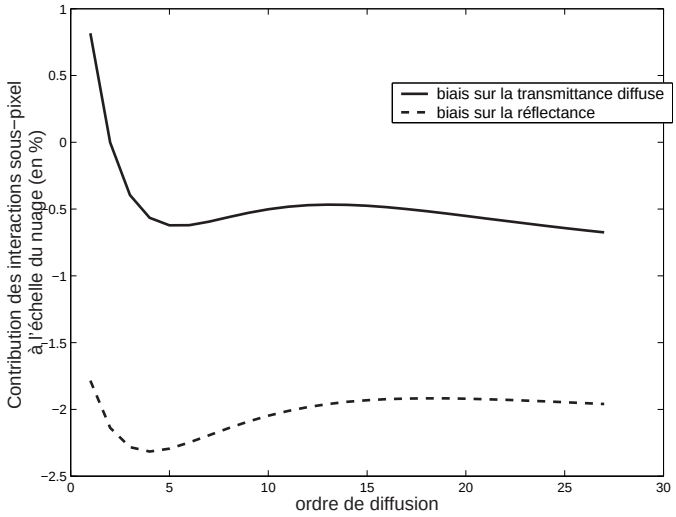


FIG. 5.52 – Evolution des contributions cumulées des interactions sous-pixel aux flux diffus sortants à l'échelle du nuage "cascade bornée" en fonction de l'ordre de diffusion – AMR de Haar.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	moyenne (échelle du nuage)
total dwn_J	0.4562	0.5908	0.6294	0.7680	0.2401	0.3647	0.5502	0.4188	0.5017
total dwn_{sub}	0.0089	0.0158	-0.0064	0.0131	0.0134	0.0158	0.0057	0.0121	0.0098
total dwn	0.4651	0.6066	0.6230	0.7811	0.2535	0.3805	0.5559	0.4309	0.5115

TAB. 5.21 – Flux moyens totaux (direct+diffus) descendants sortants, dans les 8 pixels et à l'échelle du nuage "cascade bornée" – AMR de Haar.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	moyenne (échelle du nuage)
total dwn_{sub}	+1.89	+2.59	-1.01	+1.66	+5.70	+4.16	+0.99	+2.82	+1.92

TAB. 5.22 – Contribution en % des interactions sous-pixel au flux total (direct + diffus) descendant sortant – AMR de Haar – Nuage "cascade bornée".

jusqu'à 50 % pour le flux direct transmis.

5.3.2.2.4 Total des flux sortants du nuage

La tableau 5.23 donne le total des flux normalisés sortants du nuage dans les huit pixels d'approximation et à l'échelle d'une période nuageuse. Le bilan donne 0.9818 : le bilan n'est donc pas fermé ; il manque 1.82 % du rayonnement initial, ce pour des raisons physiques – l'ordre de diffusion est limité et tous les photons ne sont pas encore sortis du nuage (surtout dans le pixel 5 ; voir la figure 5.50), et numériques – la convergence vers la stricte unité n'est pas assurée.

	ipos1	ipos2	ipos3	ipos4	ipos5	ipos6	ipos7	ipos8	moyenne (échelle du nuage)
$total_J$	0.9764	0.9827	0.9906	1.0214	0.9282	0.9625	0.9914	0.9898	0.9804
$total_{sub}$	-0.0082	0.0137	-0.0129	0.0429	-0.0259	-0.0021	0.0116	-0.0080	0.0014
$total$	0.9682	0.9964	0.9777	1.0643	0.9023	0.9604	1.0030	0.9818	0.9818

TAB. 5.23 – Somme des flux normalisés sortant du nuage "cascade bornée" – AMR de Haar.

Le tableau indique du "channelling" dans les pixels 4 et 7 : on y constate des valeurs supérieurs à l'unité, respectivement 1.0643 et 1.0030. Mais rappelons que la convergence des flux n'est pas réalisée partout, et qu'en l'état, il ne faut pas se référer à l'unité mais à 0.9818. Toutefois, il serait incorrect d'extrapoler les résultats en divisant les flux totaux dus à la totalité des interactions par 0.9818, car il n'y a plus que dans le pixel 5 qu'il est à prévoir un changement significatif des résultats avec l'augmentation de l'ordre de diffusion. Dans ces deux pixels, l'effet de canalisation est présent dans le calcul *à l'échelle*. On peut remarquer la coïncidence entre la canalisation du rayonnement dans les pixels 4 et 7, et les contributions sous-pixel aux flux diffus, positives uniquement dans ces pixels (cf. les tableaux 5.19 et 5.20). Comme pour le cas du nuage sinusoïdal avec l'AMR de Haar, ces pixels sont éclairés par leurs voisins : le minimum local d'épaisseur optique n'étant pas considéré dans le calcul *à l'échelle*, celui-ci sous-estime la transmission de ces sources voisines ; les contributions sous-

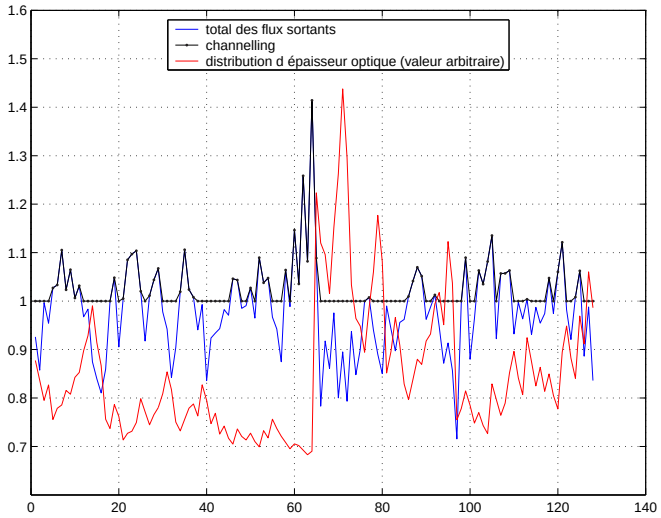


FIG. 5.53 – Effet de canalisation du rayonnement dans le nuage “cascade bornée”.

pixel sont donc positives. Cette analyse sera confirmée par l'étude des radiances sortantes. La figure 5.53 montre les valeurs du flux total sortant en chaque point. L'effet de canalisation du rayonnement intervient à la verticale des minima locaux d'épaisseur optique.

5.3.2.3 Analyse des radiances sortantes

On montre ici les radiances sortantes à l'échelle des huit pixels d'approximations. Pour ce nuage "cascade bornée", les radiances analysées sont les radiances descendantes pour les pixels 3 et 4, et les radiances montantes pour les pixels 7 et 8.

5.3.2.3.1 Radiances descendantes

Les figures 5.54 et 5.55 donnent les radiances descendantes sortantes, issues respectivement des pixels 3 et 4. Les contributions sous-pixel pour les radiances issues du pixel 3 (fig. 5.54 à droite) sont presque partout négatives, avec un maximum en valeur absolue pour les angles zénithaux $\theta > 60°$, et pour les plans azimutaux $120° \leq \phi \leq 240°$. Les valeurs positives des contributions se trouvent dans la zone symétrique avant. Ces valeurs sont dues aux faibles valeurs des épaisseurs optiques dans la partie droite du pixel 3 (fig. 5.45). Les contributions n'excèdent pas 7.10^{-3} en valeur absolue. Pour le pixel 4 (fig. 5.55 à droite), les contributions sous-pixel sont positives dans la majorité des directions. Les plus importantes sont pour le plan arrière et des angles zénithaux $\theta > 60°$. Ces contributions sont certainement dues à l'éclairage du pixel 4 par le pixel 5, et la transmission de ce rayonnement dans les zones de très faibles épaisseurs optiques. Les valeurs positives dans le plan avant (autour de 10.10^{-3}) sont sans doute dues au rayonnement provenant du pixel 3.

On peut également observer la contribution relative des interactions sous-pixel en visualisant le rapport des coefficients d'échelle dus aux interactions sous-pixel sur les coefficients d'échelle totaux. La figure 5.56 donne les contributions relatives pour les radiances montantes et pour les pixels 3 (à gauche) et 4 (à droite).

Suite à l'étude sur les flux diffus, on vérifie que les contributions sous-pixel relatives sont plus importantes dans le pixel 4 : de -6 % à près de 19 %. Dans le pixel 3, les contributions relatives vont de -7 % à 1%.

5.3.2.3.2 Radiances montantes

Les figures 5.57 et 5.58 donnent les radiances montantes sortantes issues respectivement des pixels 7 et 8. Pour le pixel 4 (fig. 5.57 à droite), les contributions sous-pixel sont également positives dans la majorité des directions. Ce cas est similaire à celui du pixel 4 : ces contributions sont certainement dues à l'éclairage du pixel 7 par le pixel 8. Pour le pixel 8 (fig. 5.58 à droite), les contributions sont négatives dans toutes les directions. La figure 5.59 donne les contributions relatives pour les radiances montantes et pour les pixels 7 (à gauche) et 8 (à droite). Les valeurs des contributions relatives vont de -1% à +4% pour le pixel 7, et de -2% à -4.5% pour le pixel 8.

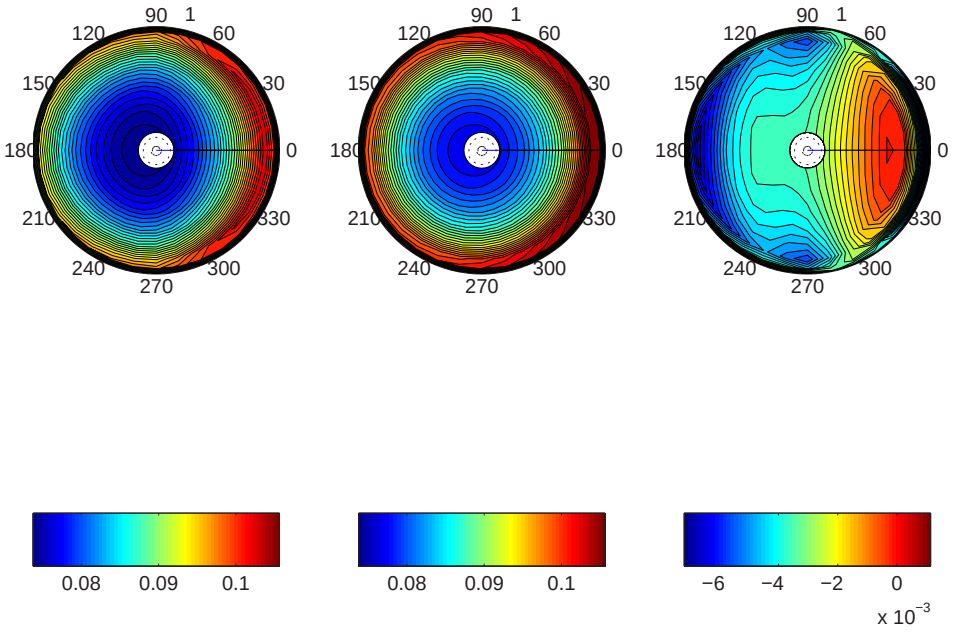


FIG. 5.54 – Radiances sortantes descendante moyennes à l'échelle du pixel 3 : radiances totales (à gauche), dues aux interactions à l'échelle (au centre) et sous-pixel (à droite)

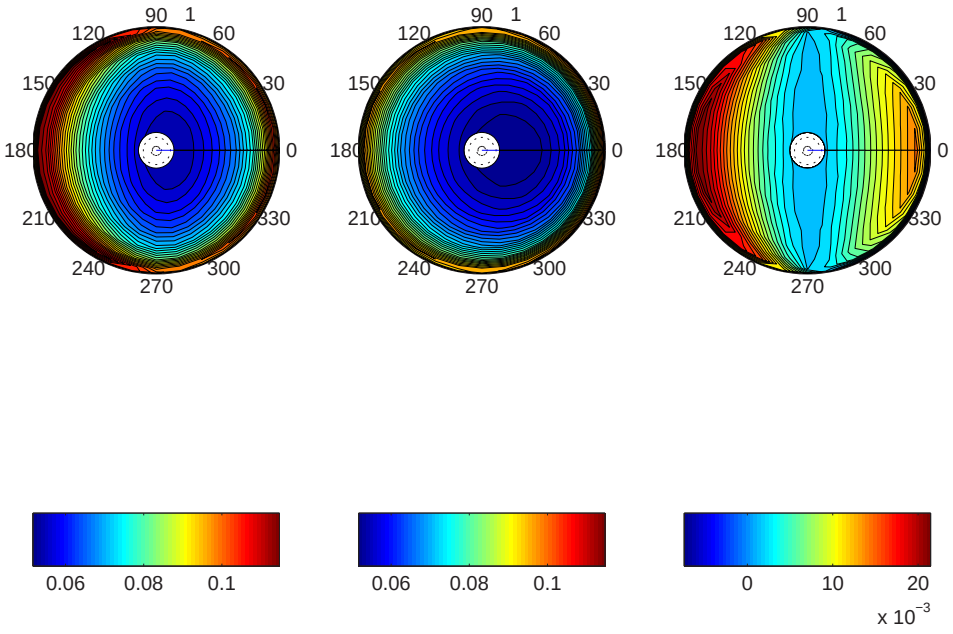


FIG. 5.55 – Radiances sortantes descendante moyennes à l'échelle du pixel 4 : radiances totales (à gauche), dues aux interactions à l'échelle (au centre) et sous-pixel (à droite)

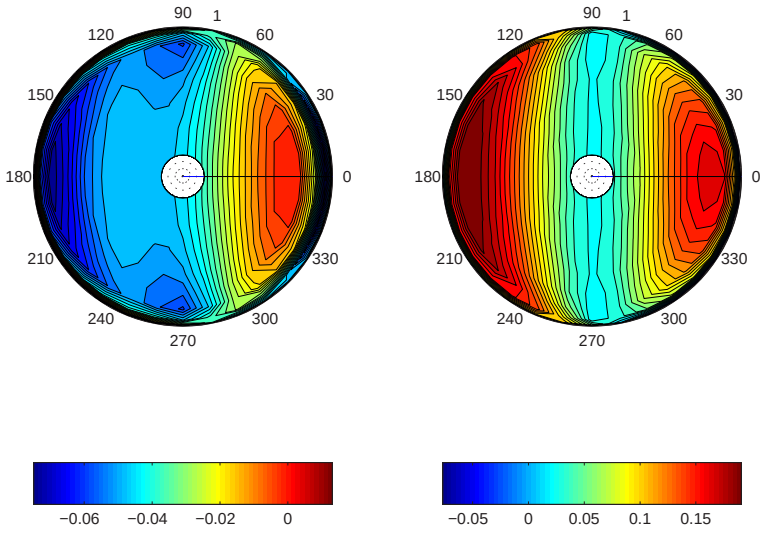


FIG. 5.56 – Contributions relatives des interactions sous-pixel aux radiances descendantes sortant des pixels 3 et 4

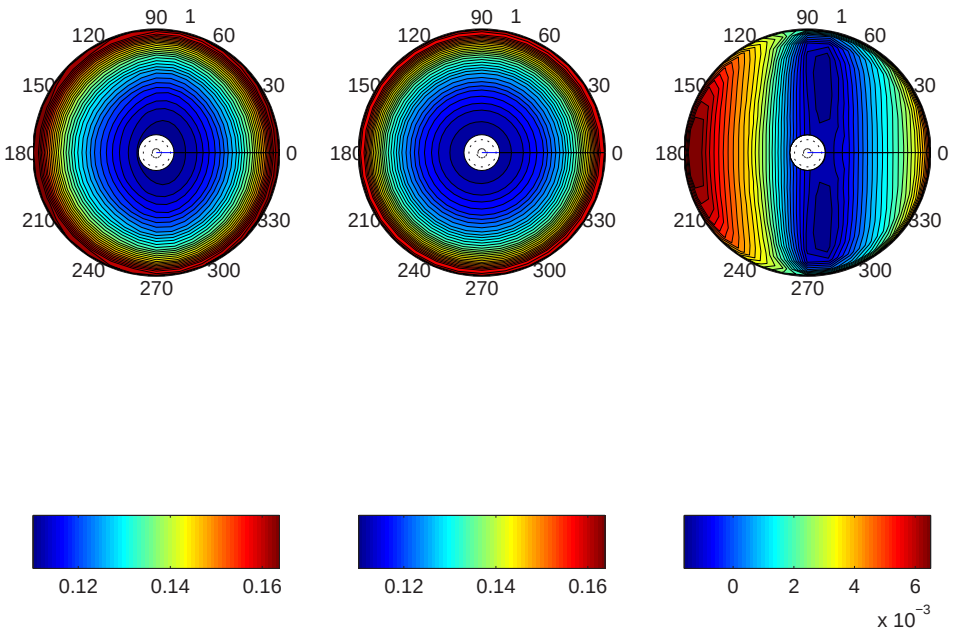


FIG. 5.57 – Radiances sortantes montantes moyennes à l'échelle du pixel 7 : radiances totales (à gauche), dues aux interactions à l'échelle (au centre) et sous-pixel (à droite)

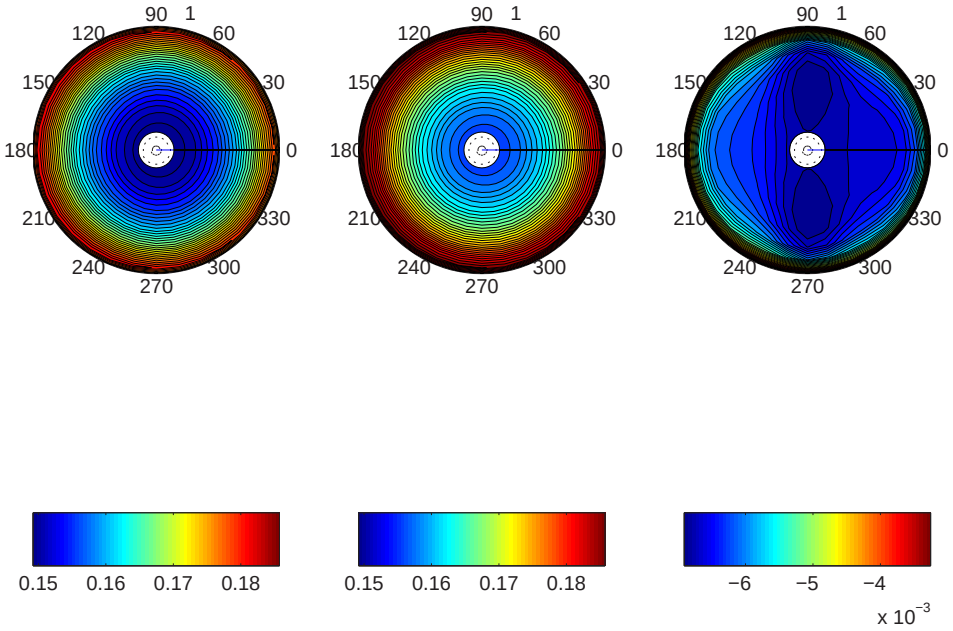


FIG. 5.58 – Radiances sortantes montantes moyennes à l'échelle du pixel 8 : radiances totales (à gauche), dues aux interactions à l'échelle (au centre) et sous-pixel (à droite)

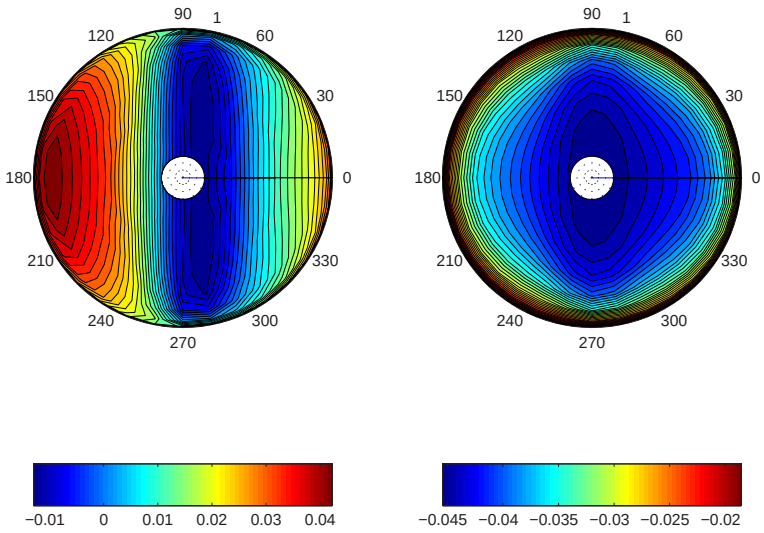


FIG. 5.59 – Contributions relatives des interactions sous-pixel aux radiances montantes sortant des pixels 7 et 8

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

La prise en compte des effets des hétérogénéités nuageuses dans les calculs radiatifs et à différentes échelles spatiales, est un problème majeur aussi bien dans l'étude du climat qu'en télédétection spatiale. L'hypothèse du nuage plan-parallèle –et de sa variante le modèle IPA – largement utilisée en sciences de l'atmosphère, est insuffisante pour permettre d'estimer avec suffisamment de précision le rôle radiatif réel des nuages pour tous les cas de figure. Afin de répondre aux besoins de la communauté, qui sont une meilleure prise compte des nuages dans les calculs radiatifs, ainsi qu'un coût acceptable de ces calculs, une formalisation du transfert radiatif en milieu hétérogène est indispensable. Cette formalisation doit permettre de décrire les processus d'interaction entre échelles, en vue de paramétriser les effets des hétérogénéités sous-pixel, de résoudre le problème de fermeture en transfert radiatif, de maîtriser les erreurs dans les calculs radiatifs simplifiés.

Afin de répondre à cette problématique, et inspirés par les travaux de [Stephens 1986] et [Stephens 1988a], nous avons appliqué dans ce travail la méthode de Galerkin-ondelette à l'Equation du Transfert Radiatif, en supposant que seul le coefficient d'extinction est hétérogène (on modélise un nuage dont le contenu en eau liquide nuageuse varie, causé par une variation du nombre de gouttes dont le rayon est constant), et pour une hétérogénéité horizontale 1D. Nous avons ainsi obtenu (chapitre 3) une nouvelle formulation multirésolution de l'équation :

$$
\begin{aligned}
\mu \frac{\delta}{\delta z} \left\langle \widetilde{N}^k, \Psi_3 \right\rangle (z,\mu) = & - \sum_{\Psi_1} \sum_{\Psi_2} \langle \alpha, \Psi_1 \rangle (z) \left\langle \widetilde{N}^k, \Psi_2 \right\rangle (z,\mu)\, T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} \\
& - \eta \tilde{Q} \sum_{\Psi_1} \left\langle \widetilde{N}^k, \Psi_1 \right\rangle \langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle \\
& + (1-\delta_{k,1}) \frac{\widetilde{\omega}_o}{4} \sum_{\Psi_1} \sum_{\Psi_2} \langle \alpha, \Psi_1 \rangle (z) T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} \int_{-1}^{1} \tilde{P}\left(\mu,\mu'\right) \left\langle \widetilde{N}^{k-1}, \Psi_2 \right\rangle \left(z,\mu'\right) d\mu' \\
& + \delta_{k,1} \frac{\widetilde{\omega}_o}{4\pi} \tilde{P}^{dir} \sum_{\Psi_1} \sum_{\Psi_2} \langle \alpha, \Psi_1 \rangle (z) \langle F_s, \Psi_2 \rangle (z) T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} \ ,
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

où Ψ_i est soit une fonction d'échelle, soit une ondelette, le symbole $\sum_{\Psi_i}$ signifiant qu'on fait la somme sur toutes les fonctions d'échelle et ondelettes. Cette formulation réalise – par l'intermédiaire de coefficients de connexion – le couplage entre les échelles des hétérogénéités du champ de radiances et du champ d'épaisseur optique en interaction. Grâce aux propriétés de l'analyse multirésolution de type ondelettes – la définition d'échelle et de "pixels" d'approxi-

mation, la localisation spatiale des fonctions analysantes – ce couplage possède un caractère local dans le domaine physique, et c'est l'un des intérêts majeurs de cette approche. La projection de l'ETR dans un espace multirésolution divise l'interaction globale des deux champs en interactions élémentaires, qui sont les interactions entre les fluctuations élémentaires des deux champs (définies par l'AMR utilisée). L'ensemble de ces interactions élémentaires locales est contenu dans un composant de connexion : le tenseur d'interaction

$$\left\{ T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3},\ \text{avec}\ \ (\Psi_i)_{i=1,2,3} \in \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{array} \right) \right\},$$

rassemblant tous les coefficients de connexion d'interaction. Cette formulation fait également apparaître un deuxième composant, la matrice des coefficients de connexion dérivée

$$\left\{ \langle \delta\Psi_1, \Psi_3 \rangle,\ \text{avec}\ \ (\Psi_i)_{i=1,3} \in \left(\begin{array}{c} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{array} \right) \right\},$$

qui rend compte du transport horizontal de l'énergie radiative en rassemblant les interactions entre fluctuations élémentaires voisines du champ de radiances, voisines au sens des localisations dans les domaines physique, et de Fourier pour l'AMR de Meyer. L'information contenue dans ces composants de connexion a été étudiée en détail dans le chapitre 3. Parmi les interactions élémentaires entre le champ de rayonnements et le milieu, on trouve celles provoquant la réplique des hétérogénéités du milieu dans le champ de rayonnements, et celles provoquant des interactions entre les échelles. Le tenseur d'interaction décrit en particulier le mécanisme responsable de la remontée d'énergie dans les échelles : l'interaction de deux fluctuations élémentaires jumelles des deux champs produit des fluctuations aux plus grandes échelles. Nous avons introduit la notion d'efficacité d'interaction, qui n'est autre que la valeur du coefficient de connexion associé à cette interaction. Le grand intérêt de notre approche est de pouvoir séparer les contributions locales de chacune des petites échelles des hétérogénéités du milieu à une plus grande échelle, dite des "pixels" d'approximation. La séparation de ces contributions permet de définir les radiances moyennes à l'échelle d'approximation, comme la somme des radiances indicées J dues aux interactions à l'échelle d'approximation, et des radiances indicées *sub*, source additionnelle due aux interactions sous-pixel. Cette source additionnelle correspond à l'erreur que l'on commet quand on a une vision basse résolution de la variabilité nuageuse. Cette étude des coefficients de connexion permet d'analyser qualitativement les erreurs des calculs de type plan-parallèle, et l'importance, d'un point de vue radiatif, d'hypothèse de modélisation, comme par exemple l'homogénéité verticale des champs nuageux simulés. Ces premières analyses ont été confirmées par l'analyse des résultats de simulation du code de calcul *WaveNum*, développé pendant cette thèse et basé sur l'application de la méthode de Galerkin-Ondelette à l'ETR.

Le fait que l'ensemble des interactions élémentaires soit regroupé dans deux composants qui ne dépendent que de l'AMR choisie est très intéressant d'un point de vue formel car l'équation 6.1 est tout à fait générale ; les mécanismes des interactions ne dépendent pas du milieu. Les interactions effectives sont rassemblées dans ce que nous avons appelé l'opérateur effectif d'interaction, défini par

$$\underset{\alpha\,\Psi_2,\Psi_3}{T} = \sum_{\Psi_1} \langle \alpha, \Psi_1 \rangle\,(z) T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3}.$$

Cet opérateur prend en compte à la fois l'ensemble des interactions élémentaires possibles (T_{Ψ_1,Ψ_2,Ψ_3}) et l'hétérogénéité du milieu ($\langle \alpha, \Psi_1 \rangle$). Le calcul est ainsi naturellement adaptatif, car cet opérateur ne contient que les interactions effectives : là où les propriétés optiques

du milieu ne fluctuent pas, il n'y a pas calcul des interactions entre échelles. Enfin, cette nouvelle formulation de l'ETR a permis dans la dernière section du chapitre 3 la formalisation multirésolution du transfert radiatif en milieu hétérogène, qui s'apparente à la décomposition de Reynolds des équations. On écrit le transfert radiatif à l'échelle des pixels d'approximation avec la présence de sources additionnelles dues aux interactions entre échelles.

Les chapitres 4 et 5 ont détaillé la mise au point du code de transfert radiatif basé sur la décomposition multirésolution de l'ETR, et donné la comparaison des résultats de quelques simulations avec ceux des codes de référence Monte Carlo et SHDOM, afin de valider nos calculs. Ce code est la traduction des équations multirésolutions. La séparation des contributions *à l'échelle* et sous-pixel permet de quantifier pour le nuage entier les contributions des interactions sous-pixel à l'échelle des pixels d'approximation. Les difficultés numériques rencontrées dans ce genre d'approche – effet de Gibbs, évaluation correcte du terme de dérivée horizontale – ont pu ainsi être analysées et en partie résolues. Cet outil de calcul supporte les fortes fluctuations des champs nuageux.

Le choix de l'AMR est un point délicat, aussi bien du point de vue numérique, que du point de vue de l'interprétation physique des résultats, de la définition du terme "interaction entre échelles". Les AMR utilisées ont été celles de Haar et de Meyer, choisies pour la compacité des supports de leurs fonctions, respectivement dans les domaine physique et spectral. Le calcul des radiances et flux est correct avec ces deux AMR. Cette étude a montré le grand intérêt de l'utilisation de l'AMR de Haar. La compacité "maximale" des supports des fonctions de Haar fait que les coefficients de connexion d'interaction sont réduits à l'essentiel, ce qui rend les composants de connexion de Haar tout à fait creux. De plus, les propriété de la fonction d'échelle de Haar permet de lever bien des ambiguïtés dans l'interprétation physique des résultats : l'appellation *pixel d'approximation* n'est rigoureusement valable que dans le cas de l'AMR de Haar ; il est impossible que les coefficients d'échelle du champ de rayonnements soient négatifs avec cette AMR. L'utilisation de l'AMR de Meyer pose en revanche des problèmes numériques (effet de Gibbs, remplissage des composants de connexion) et d'interprétation plus délicats. En particulier, le parallèle entre la décomposition de Reynolds des équations et l'écriture du transfert radiatif à l'échelle des "pixels" d'approximation de Meyer est moins direct ; et les coefficients d'échelle peuvent être négatifs pour un signal aux valeurs strictement positives. Le défaut de l'AMR de Haar est son mauvais traitement du terme dérivée. Une technique a été développée et conduit à la définition d'une analyse multirésolution hybride, notée *HM* : le traitement du terme produit est réalisé avec l'AMR de Haar, le terme dérivée est calculé à l'aide d'une matrice de coefficients de connexion dérivée hybride, basée sur la dérivée au sens de l'AMR de Meyer. Cette AMR hybride *HM* permet une interprétation physique aisée des résultats (AMR de Haar) et des simulations numériquement intéressantes. Les résultats obtenus avec cette AMR sont encourageants.

Les premières analyses des interactions contenues dans les résultats de simulation pour deux types d'hétérogénéité, montrent les premières utilisations que l'on peut faire de ce nouvel outil. Le code *WaveNum* est à l'état de prototype et nécessite des développements importants. Néanmoins, les temps de calcul commencent à être raisonnables et le code est exploitable en l'état pour nombre d'applications. Le fait d'obtenir directement, après une simulation, le champ des sources additionnelles dues aux interactions sous-pixel, et d'avoir l'évolution en fonction de l'ordre de diffusion de ces sources est original et intéressant. L'interprétation est délicate car elle dépend de l'AMR utilisée. Néammoins, ces résultats montrent que la contribution des interactions sous-pixel sur les flux peut être importante à l'échelle des pixels d'approximation même si elle est plus faible à l'échelle d'une période nuageuse, et que la contribution sous-pixel sur les radiances à l'échelle d'approximation peut être très importante dans certaines directions. L'utilisation de l'AMR de Meyer et du nuage sinusoïdal a permis d'évaluer les erreurs commises en plan parallèle pour les couvertures fractionnaires : à l'échelle

des pixels d'approximation, les erreurs sur les flux atteignent 30%, et jusqu'à 50% pour les radiances dans certaines directions. Pour l'AMR de Haar et le nuage "cascade bornée", les contributions sous-pixel sur les flux atteignent 10.47% à l'échelle des pixels d'approximation contre -1.79% à l'échelle d'une période nuageuse. Pour les radiances montantes, elles atteignent 4.5%, et près de 19% pour les radiances descendantes. Les calculs nous indiquent donc les directions dans lesquelles le contenu en information sur les hétérogénéités sous-pixel est important. Cette nouvelle approche a permis également l'étude approfondie et originale de processus radiatifs "3D", tels que la canalisation du rayonnement, l'effet des hétérogénéités nuageuses sur le transport vertical de l'énergie radiative.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses et variées.

Elles vont en premier lieu en direction du développement du code. *En premier lieu* ne veut pas dire que cette direction est la plus urgente à prendre. Les allers et retours dans le nuage pour augmenter l'ordre de diffusion sont le facteur le plus handicapant pour les performances du code, aussi bien en précision (propagation de bruits) qu'en temps de calcul. L'utilisation de techniques d'adding-doubling devrait permettre de répondre à ce problème. De plus, la traduction du code dans un langage autre que MATLAB est nécessaire si l'on recherche vraiment la performance. Le code pourrait être beaucoup plus adaptatif si l'on exploite la vacuité des composants d'interaction et si l'on a une écriture plus généralement matricielle des équations. Dans ce cadre, un travail important est à mener pour déterminer la sensibilité des réponses radiatives au seuillage des coefficients de connexion, afin de définir des techniques performantes de calculs approximés. L'utilisation d'autres schémas de quadrature -par exemple la quadrature de Gauss-Lobatto- est envisagée. A moyen terme, une décomposition dans les deux dimensions horizontales est nécessaire. La solidité de la théorie des ondelettes en deux dimensions devraient le permettre. D'autres multirésolutions peuvent également être envisagées, mais l'AMR de Haar paraît bien répondre aux objectifs à la fois numériques et de formalisation. A plus long terme, l'utilisation d'ondelettes sphériques [Schröder and Sweldens 1995] pour représenter le champ de radiances est envisageable.

Ces améliorations du code de calcul vont permettre des simulations plus ambitieuses, en particulier la définition de champ nuageux sur une plus large gamme d'échelles. L'augmentation du nombre d'échelles devrait permettre d'étudier le changement du comportement spectral des réponses radiatives ; l'échelle en dessous de laquelle se manifeste le lissage radiatif. Le fait de détailler l'origine des contributions dans les sources diffusives à chaque ordre de diffusion devrait aider à ces recherches. Plus généralement, un grand nombre d'études peuvent et doivent être menées afin de revisiter à l'aide de ce nouvel outil les problèmes radiatifs "3D".

Le développement d'une formalisation multirésolution du transfert radiatif en milieu hétérogène est l'objectif de cette approche, en vue de la paramétrisation des hétérogénéités nuageuses. Cela passe entre autres, par une (ré-)écriture matricielle des équations. Des efforts importants sont encore à porter dans cette direction.

Un des enjeux du transfert radiatif en milieu nuageux hétérogène est certainement de pouvoir mesurer les hétérogénéités à différentes échelles, et de savoir comment prendre en compte leurs effets dans les différents modèles dans lesquels interviennent des calculs radiatifs. La poursuite de ce travail et de cette approche peut certainement aider à cette tâche.

Bibliographie

Abry, P. : 1996, *Ondelettes et Turbulences : Multirésolution, Algorithmes de Décomposition, Invariance D'échelle et Signaux de Pression*, Diderot Editeur, Arts et Sciences.

Aïda, M. : 1977, Reflection of solar radiation from an array of cumuli, *J. Meteorol. Soc. Jpn.* **55**, 174–181.

Arnéodo, A., Manneville, S., Muzy, J. F. and Roux, S. G. : 1999, Revealing a lognormal cascading process in turbulent velocity statistics with wavelet analysis, *Philos. Trans. Roy. Soc. London* **357**, 2415–2438.

Auscher, P., Weiss, G. and Wickerhauser, M. V. : 1992, Local sine and cosine bases of coifman and meyer and the constructions of smooth wavelets, *in* C.K.Chui (ed.), *Wavelets - A Tutorial in Theory and Applications*, C.K.Chui (Ed.), New York, pp. 237–256.

Barker, H. W. : 1996, A parameterization for computing grid-averaged solar fluxes for inhomogeneous marine boundary layer clouds. Part I : Methodology and homogeneous biases, *J. Atmos. Sci.* **49**(13), 1115–1126.

Barker, H. W., Stephens, G. L. and Fu, Q. : 1999, The sensitivity of domain-averaged solar fluxes to assumptions about cloud geometry, *Q.J.R. Meteorol. Soc.* **125**, 2127–2152.

Beylkin, G. : 1992, On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets, *SIAM J. Num. Anal* **108**, 1716–1740.

Beylkin, G., Brewster, M. and Gilbert, A. : 1998, A multiresolution strategy for numerical homogenization of nonlinear ODEs, *Applied and Computational Harmonic Analysis* **5**, 450–486.

Bouchon, F. : 1999, *Modèles Sous-Mailles et Schémas Multi-Niveaux. Application À la Simulation Des Grandes Échelles D'écoulements Turbulents*, PhD thesis, Université Blaise Pascal (Clermont II).

Brewster, M. and Beylkin, G. : 1995, A multiresolution strategy for numerical homogenization, *Applied and Computational Harmonic Analysis* **2**, 327–349.

Brissaud, M., Forsé, M. and Zighed, A. (eds) : 1990, *La Modélisation, Confluent Des Sciences*, Editions du CNRS, Lyon.

Bulke Hubbard, B. : 1995, *Ondes et Ondelettes, la Saga D'un Outil Mathématique*, Pour la Science, Diffusion Belin, Paris.

Cahalan, R. : 1994, Bounded cascade clouds : Albedo and effective thickness., *Nonlin. Proc. Geophys.* **1**, 156–167.

Cahalan, R., Ridgway, W., Wiscombe, W. J. and Bell, T. L. : 1994a, The albedo of fractal stratocumulus clouds, *J. Atmos. Sci.* **51**(16), 2434–2455.

Cahalan, R., Ridgway, W., Wiscombe, W. J. and Bell, T. L. : 1994b, Independent pixel and Monte Carlo estimates of stratocumulus albedo, *J. Atmos. Sci.* **51**(24), 3776–3790.

Cairns, B., Lacis, A. A. and Carlson, B. E. : 2000, Absorption within inhomogeneous clouds and its parameterization in general circulation models, *J. Atmos. Sci.* **57**, 700–714.

Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A. : 1988, *Spectral Methods in Fluids Dynamics*, Springer Verlag, New York.

Cess, R. D., Potter, G. and al. : 1990, Intercomparison and interpretation of climate feedback processes in 19 atmospheric general circulation models, *J. Geoph. Res.* **95**, 16601–16615.

Cess, R. D., Zhang, M. H., Minnis, P., Corsetti, L., Dutton, E. G., Organ, B. W., Garber, D. P., Gats, W. L., Hack, J. J., Harrison, E. F., Jing, X., Kiehl, J. T., Long, C. N., Morcrette, J. J., Potter, G. L., Ramanathan, V., Subasilar, B., Whitlock, C. H., Younga, D. F. and Zou, Y. : 1995, Absorption of solar radiation by clouds : Observations versus models, *Science* **267**, 496–499.

Chandrasekhar, S. : 1960, *Radiative Transfer*, Dover Publications, New York.

Charton, P. : 1996, *Produits de Matrices Rapides En Bases D'ondelettes : Application À la Résolution Numérique D'équations Aux Dérivées Partielles*, PhD thesis, université Paris 13.

Charton, P. and Perrier, V. : 1996, A pseudo-wavelet scheme for the two-dimensional Navier-Stokes equations, *Comp. Appl. Math* **15**, 137–157.

Coifman, R. R. and Meyer, Y. : 1991, Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre, *série I, C. R. Acad. Sci.* pp. 259–261.

Dahmen, W., Prössdorf, S. and Schneider, R. : 1995, Multiscale methods for pseudo-differential equations on manifolds, *Wavelet Analysis and its Applications*, Academic Press, pp. 385–424.

Dahmen, W. and Schneider, R. : 1999, Composite wavelet bases for operator equations, *Mathematics of Computation* **68**(228), 1533–1567.
URL: *citeseer.nj.nec.com/dahmen97composite.html*

Daubechies, I. : 1992, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS NSF Series in Applied Math., SIAM, Philadelphie.

Davis, A. and Marshak, A. : 2001, Multiple scattering in clouds : Insights from three-dimensional diffusion/ p1 theory, *Nuclear Science and Engineering* **137**, 251–280.

Davis, A., Marshak, A., Cahalan, R. and Wiscombe, W. : 1997, The Landsat scale break in stratocumulus as a three-dimentional radiative transfer effect : Implications for cloud remote sensing., *J. Atmos. Sci.* **54**(2), 241–260.

Davis, A., Marshak, A. and Clothiaux, E. : 1999, Anisotropic multi-resolution analysis in 2d, application to long-range correlations in cloud mm-radar fields, *SPIE Conference on Wavelet Applications VI*, SPIE.

Davis, A., Marshak, A. and Wiscombe, W. : 1994, Wavelet-based multifractal analysis of nonstationnary and/or intermittent geophysical signals, *Wavelets in Geophysics* pp. 249–298.

Davis, A., Marshak, A., Wiscombe, W. and Cahalan, R. : 1996, Scale invariance of liquid water distributions in marine straocumulus. Part i : Spectral properties and stationarity issues., *J. Atmos. Sci.* **53**, 1538–1558.

Donoho, D. and Johnstone, I. : 1994, Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases, *C.R. Acad. Sci. Paris* **319**, 1317–1322.

Dumont, S. : 1996, *Ondelettes, Homogénéisation Périodique et Élasticité*, PhD thesis, Université de Montpellier II.

Duroure, C. and Guillemet, B. : 1990, Analyse des hétérogénéités spatiales des stratocumulus et cumulus, *Atmospheric Research* **25**, 331–350.

ECMWF (ed.) : 2001, *Key Issues in the Parametrization of Subgrid Physical Processes*, ECMWF Seminar Proceedings, Reading, Angleterre.

Evans, K. F. : 1998, The Spherical Harmonics Discrete Ordinate Method for three-dimensional atmospheric radiative transfer, *J. Atmos. Sci.* **55**, 429–446.

Farge, M., Kevlahan, N., Perrier, V. and Goirand, E. : 1996, Wavelets and turbulence, *Proceedings of the IEEE* **84**(4), 639–669.

Farge, M., Kevlahan, N., Perrier, V. and Schneider, K. : 1999, Turbulence analysis, modeling and computing using wavelets, *in* J. Van Den Berg (ed.), *Wavelets and Physics*, Cambridge University Press, chapter 4, pp. 117–200.

Faure, T. : 2000, *Inversion de Paramètres Microphysiques En Nuages Hétérogènes Par Réseaux de Neurones*, PhD thesis, Université Blaise Pascal (Clermont II).

Faure, T., Isaka, H. and Guillemet, B. : 2001, Neural Network analysis of the radiative interaction between neighboring cloud pixel of inhomogeneous clouds, *J. Geophys. Res.* **106**, 14465–14484.

Foufoula-Georgiou, E. and Kumar, P. (eds) : 1994, *Wavelet in Geophysics*, Academic Press.

Fournier, A. : 2000, Introduction to orthonormal wavelet analysis with shift invariance : Application to observed atmospheric blocking spatial structure, *J. Atmos. Sci.* **57**, 3856–3880.

Fournier, A. : 2002, Atmospheric energetics in the wavelet domain. Part I : Governing equations and interpretation for idealized flows, *J. Atmos. Sci.* **59**, 1182–1197.

Fournier, A. : 2003, Atmospheric energetics in the wavelet domain. Part II : Time-averaged observed atmospheric blocking, *J. Atmos. Sci.* **60**, 319–338.

Fröhlich, J. and Schneider, K. : 1997, An adaptive wavelet-vaguelette algorithm for the solution of pdes, *J. Comput. Phys.* **130**, 174–190.

Gabriel, P. M. and Evans, K. F. : 1996, Simple radiative transfer methods for calculating domain-averaged solar fluxes in inhomogeneous clouds, *J. Atmos. Sci.* **53**(6), 858–877.

Gabriel, P. M., Tsay, S.-C. and Stephens, G. L. : 1993, A Fourier-Ricatti approach to radiative transfer. Part I : Foundations, *J. Atmos. Sci.* **50**(18), 3125–3147.

Gage, K. and Nastrom, G. : 1986, Theoretical interpretation of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft during gasp, *J. Atmos. Sci.* **43**, 729–739.

Galinski, V. L. and Ramanathan, V. : 1998, 3d radiative transfer in weakly inhomogeneous medium. Part I : Diffusive approximation, *J. Atmos. Sci.* **55**, 2946–2959.

Goedecker, S. : 1998, *Wavelets And their Applications, for the Solution of Partial Differential Equations in Physics*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.

Goody, R. M. : 1964, *Atmospheric Radiation*, Oxford University Press, London.

Grabowski, W. W. and Moncrieff, M. W. : 2002, Large-scale organization of tropical convection in two-dimensional explicit numerical simulations : Effects of interactive radiation, *Q. J. R. Meteorol. Sci.* **128**, 2349–2375.

Haar, A. : 1910, Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme, *Math. Annal.* **69**, 331– 371.

Hansen, J., Johnson, D., Lacis, A., Lebedeff, S., Lee, P., Rind, D. and Russell, G. : 1981, Climate impact of increasing atmospheric carbon dioxide, *Science* **213**, 957–966.

Harris, D. and Foufoula-Georgiou, E. : 2001, Subgrid variability and stochastic downscaling of modeled clouds : Effects on radiative computations for rainfall retrieval, *J. Geo. Res.* **106**(D10), 10349–10362.

Harrison, E. F., Minnis, P., Barkstrom, R., Ramanathan, V., Cess, R. D. and Gibson, G. G. : 1990, Seasonal variation of cloud radiative forcing derived from the earth radiation budget experiment, *J. Geoph. Res.* **95**, 18687–18704.

Hasegawa, A. : 2000, *Local Spectral Energetics Analysis for Blocking Anticyclone Using the Orthornormal Wavelet Expansion*, PhD thesis, University of Tsukuba.

Heurtaux, F., Planchon, F. and Wickerhauser, M. V. : 1992, Scale decomposition in Burger's equation, *in* J. J. Benedetto and M. Frazier (eds), *Wavelets : Mathematics and Applications*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, pp. 505–523.
URL: *ftp ://wuarchive.wustl.edu/doc/techreports/wustl.edu/math/papers/burgers.ps.Z*

Jacob, D. J. : 1999, *Introduction to Atmospheric Chemistry*, Princeton University Press, New Jersey.

Jensen, J. L. W. V. : 1906, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes., *Acta Math.* **30**, 175–193.

Kolaczyk, E. D. : 1994, *Wavelet Methods for the Inversion of Certain Homogeneous Linear Operators in the Presence of Noisy Data*, PhD thesis, Université de Stanford.

Kuo, K.-S., Weger, R. C., Welch, R. and Cox, S. : 1996, The Picard iterative approximation to the solution of the integral equation of radiative transfer, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **55**, 195–213.

Leith, C. E. : 1990, Stochastic backscatter in a subgrid-scale model : Plane shear mixing layer, *Phys. Fluids* **A**(3), 297–299.

Lenoble, J. : 1985, *Radiative Transfer in Scattering and Absorbing Atmospheres : Standard and Computational Procedures*, A. Deepak Publication, Hapton, Virginia.

Lenoble, J. : 1993, *Atmospheric Radiative Transfer*, A. DEEPAK Publishing, Hampton, Virginia, USA.

Liandrat, J. and Tchamitchian, P. : 1990, Resolution of the 1d regularized Burgers equation using a spatial wavelet approximation : Algorithm and numerical result, *Technical Report 90-83*, ICASE.

Lilly, D. K. : 1989, Two-dimensional turbulence generated by energy sources at two scales, *J. Atmos. Sci.* **46**(13), 2026–2030.

Lorentz, E. : 1967, *The Nature and Theory of the General Circulation of the Atmosphere*, World Met. Org., Genève.

Lovejoy, S. : 1982, Area-perimeter relation for rain and cloud area, *Science* **216**, 185–187.

Madronich, S. and Flocke, S. : 1997, *The Role of Solar Radiation in Atmospheric Chemistry*, Springer Verlag.

Mallat, S. : 1998, *A Wavelet Tour of Signal Processing (Second Edition)*, Academic Press.

Mallat, S. and Hwang, W. : 1992, Singularity detection and processing with wavelets, *IEEE Trans. Info. Theory* **38**(2), 617–643.

Mallat, S. and Zhong, S. : 1992, Characterization of signals from multiscale edges, *IEEE Trans. Patt. Anal. and Mach. Intell.* **14**(7), 710–732.

Marchuk, G. I., Mikhailov, G. A., Nazaraliev, M. A., Darbinjan, R. A., Kargin, B. A. and Elepov, B. S. : 1980, *The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics*, Springer Verlag, Berlin.

Marshak, A., Davis, A., Cahalan, R. F. and Wiscombe, W. : 1994, Bounded cascade model as nonstationary multifractals, *Physical Review E* **49**(1), 48–69.

Marshak, A., Davis, A., Cahalan, R. and Wiscombe, W. : 1998, Nonlocal independant pixel approximation : Direct and inverse problems, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* **36**(1), 192–205.

Marshak, A., Davis, A., Wiscombe, W. and Cahalan, R. : 1995, Radiative smoothing in fractal clouds, *J. Geo. Res.* **100**(12), 26247–26261.

Meador, W. E. and Weaver, W. R. : 1980, Two-stream approximations to radiative transfer in planetary atmospheres : A unified description of existing methods and a new improvement., *J. Atmos. Sci.* **37**, 630–643.

Melton, J. : 1995, 3D application of a cartesian grid euler method, *Remote Sensing* pp. Paper 95–0853.

Meneveau, C. : 1991, Analysis of turbulence in the orthonormal wavelet representation, *J. Fluid. Mech.* **232**, 469–520.

Meyer, Y. : 1990, *Ondelettes et Opérateurs*, Hermann, Paris.

Oreopoulos, L. and Barker, H. W. : 1999, Accouting for subgrid-scale cloud variability in a multi-layer 1d solar radiative transfer algorithm, *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **125**, 301–330.

Perrier, V., Philipovitch, T. and Basdevant, C. : 1995, Wavelet spectra compared to fourier spectra, *J. Math. Phys.* **36**(3), 1506–1519.

Perrier, V. and Wickerhauser, M. V. : 1999, Multiplication of short wavelet series using connection coefficients.

Ramanathan, V., Subasilar, B., Zhang, G., Conant, W., Cess, R., Kiehl, J. Grassl, H. and Shi, L. : 1995, Warm pool heat budget and short-wave cloud forcing : A missing physics, *Science* **267**, 499–503.

Resnikoff, H. L. and Wells., R. O. : 1998, *Wavelet Analysis. The Scalable Structure of Information*, Springer Verlag, New York.

Roux, S., Arnéodo, A. and Decoster, N. : 2000, A wavelet based method for multifractal image analysis. Part III. applications to high-resolution satellite images of cloud structure, *The European Physical Journal B* **15**, 765–786.

Ruggaber, A., Dlugi, R., Bott, A., Forkel, R., Herrman, H. and Jacobi, H.-W. : 1997, Modelling of radiation quantities and photolysis frequencies in the aqueous phase in the troposphere, *Atmospheric Environment* **31**(19), 3137–3150.

Schröder, P. and Hanrahan, P. : 1994, Wavelet methods for radiance computations, *5th Eurographics Workshop on Rendering*.

Schröder, P. and Sweldens, W. : 1995, Spherical wavelets : Efficiently representing functions on the sphere, Proceedings of Siggraph 95.

Stephens, G. L. : 1986, Radiative transfer in spatially heterogeneous, two-dimensional, anisotropically scattering media, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **36**(1), 51–67.

Stephens, G. L. : 1988a, Radiative transfer through arbitrarily shaped optical media. Part I : A general method of solution, *J. Atmos. Sci.* **45**(12), 1818–1836.

Stephens, G. L. : 1988b, Radiative transfer through arbitrarily shaped optical media. Part II : Group theory and simple closures, *J. Atmos. Sci.* **45**(12), 1837–1848.

Stephens, G. L. and Tsay, S. C. : 1990, On the cloud absorption anomaly, *Q.J.R.Meteorol.Soc.* **116**, 671–704.

Stephens, G. and Platt, C. : 1987, Aircraft observations of the radiative and microphysical properties of stratocumulus and cumulus cloud fields, *J. Climate Appl. Meteor.* **26**, 1243–1269.

Szczap, F. : 2000, *Etudes Des Effets Des Hétérogénéités Des Nuages sur Leurs Propriétés Radiatives Effectives et Leurs Paramétrisations.*, PhD thesis, Université Blaise Pascal (Clermont II).

Szczap, F., Isaka, H., Saute, M., Guillemet, B. and Ioltukhovski, I. : 2000a, Effective radiative properties of bounded cascade nonabsorbing clouds : Definition of the equivalent homogeneous cloud approximation, *J. Geophys. Res.* **105**, 20617–20634.

Szczap, F., Isaka, H., Saute, M., Guillemet, B. and Ioltukhovski, I. : 2000b, Effective radiative properties of bounded cascade absorbing clouds : Definition of an effective single-scattering albedo, *J. Geophys. Res.* **105**, 20635–20648.

Temam, R. : 1996, Multilevel methods for the simulation of turbulence, *J. Comput. Phys.* **127**, 309–315.

Thomas, G. E. and Stamnes, K. : 1999, *Radiative Transfer in the Atmosphere and Ocean*, Cambridge University Press.

Tikhonov, A. N. : 1977, *Solution of Ill-Posed Problems*, Winston, New York.

Vallis, G. K., Shutts, G. J. and Gray, M. E. B. : 1997, Balanced mesoscale motion and stratified turbulence, *Q.J.R. Meteorol. Soc.* **123**, 1621–1652.

Van Den Berg, J. (ed.) : 1999, *Wavelets in Physics*, Cambridge University Press.

Vasilyev, O., Yuen, D. and Paolucci, S. : 1998, The solution of PDE's using wavelets.

Venugopal, V., Porté-Agel, F., Foufoula-Georgiou, E. and Carper, M. : 2003, Mutliscale interactions betwen surface shear stress and velocity in turbulent boundary layers, *J. Geo. Res. (soumis et révisé)* .

Vetterli, M. : 1986, Filter banks allowing perfect reconstruction, *Signal. Proc.* **10**, 219–244.

Walter, G. and Shen, X. : 2001, *Wavelets and Others Orthogonal Systems (Second Edition)*, Chapman 1 Hall/CRC (Studies in advanced mathematics), Boca Raton, Florida.

Welch, R. M. and Wielicki, B. A. : 1984, Stratocumulus cloud field reflected fluxes : The effects of cloud shape, *J. Atmos. Sci.* **41**, 3085–3103.

Weng, H. and Lau, K.-L. : 1994, Wavelets, period doubling, time-frequency localization to organization of convection over the tropical western pacific, *J. Atmos. Sci.* **51**(17), 2523–2543.

Wilks, D. S. : 1995, *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences*, International Geophysics Series (59), Academic Press.

Yamada, M. and Ohkitani, K. : 1990, Orthonormal wavelet expansion and its application to turbulence, *Progress of theoretical physics* **86**, 819–823.

Yamada, M. and Ohkitani, K. : 1991, An identification of energy cascade in turbulence by orthonormal wavelet analysis, *Progress of theoretical physics* **86**(4), 799–815.

Yano, J. I., Moncrieff, M. W. and Wu, X. : 2001, Wavelet analysis of simulated tropical convective cloud systems. Part II : Decomposition of convective and meso-scales, *J. Atmos. Sci.* **58**(8), 868–876.

Yano, J. I., Moncrieff, M. W., Wu, X. and Yamada, M. : 2001, Wavelet analysis of simulated tropical convective cloud systems. Part I : Basic analysis, *J. Atmos. Sci.* **58**(8), 850–867.

Annexe A

Incertitude d'Heisenberg

Une problématique importante du traitement du signal réside dans la question de la double localisation de l'énergie des fonctions dans les domaines physique et de Fourier. Par exemple, la fonction Dirac [1] $\delta(t-u)$ a un support physique restreint à $t=u$, et sa transformée de Fourier a une énergie uniformément répartie sur toutes les fréquences.

Plus généralement, si f a un support physique compact, $\widehat{f}$ a un support fréquentiel infini. La fonction $\left|\widehat{f}(\omega)\right|$ décroît en fait rapidement à haute fréquence si f varie de façon régulière en temps (ou espace). Pour réduire le support physique de f , on peut comprimer la fonction par un facteur $s>1$ tout en maintenant constante l'énergie du signal :

$$f_s(t)=\sqrt{s}f(st) \text{ et } \|f_s\|^2=\|f\|^2 \tag{A.1}$$

La transformée de Fourier $\widehat{f_s}(\omega)=\sqrt{s}\widehat{f}(\frac{\omega}{s})$ est dilaté d'un facteur s, donc on perd en localisation fréquentielle ce qu'on a gagné en localisation temporelle (spatiale). Ainsi, il est impossible de bien localiser l'énergie d'une fonction à la fois dans l'espace des fréquences et dans l'espace physique. En fait, la localisation de l'énergie des fonctions est limitée par le principe d'incertitude d'Heisenberg. En référence à la mécanique quantique, considérons une fonction d'onde $f\in L^2(\mathbb{R})$. La densité de probabilité qu'une particule soit localisée en t est $\frac{1}{\|f\|^2}|f(t)|^2$. La densité de probabilité que son moment soit égal à ω est $\frac{1}{2\pi\|f\|^2}\left|\widehat{f}(\omega)\right|^2$. La position moyenne de la particule est

$$u=\frac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} t\,|f(t)|^2\,dt, \tag{A.2}$$

et son moment moyen est

$$\xi=\frac{1}{2\pi\,\|f\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega\left|\widehat{f}(\omega)\right|^2 d\omega. \tag{A.3}$$

Les variances autour de ces positions moyennes sont respectivement

$$\sigma_t^2=\frac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(t-u)^2\,|f(t)|^2\,dt, \tag{A.4}$$

et

$$\sigma_\omega^2=\frac{1}{2\pi\,\|f\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega-\xi)^2\left|\widehat{f}(\omega)\right|^2 d\omega. \tag{A.5}$$

[1] Des compléments mathématiques concernant les espaces des fonctions, la définition de la fonction Dirac, peuvent être trouvés dans [Mallat 1998].

La localisation temps-fréquence de la fonction f est représentée dans le plan temps-fréquence (t, ω) par une boîte dîte d'Heisenberg, centrée en (u, ξ), de dimension σ_t par σ_ω. La boîte d'Heisenberg associée à la fonction f_s est de dimension σ_t/s par $s * \sigma_\omega$. L'aire de cette boîte d'Heisenberg est indépendante de s. Plus σ_t (resp. σ_ω) est grand, plus l'incertitude sur la position (resp. le moment) de la particule est grande.

Le principe d'incertitude d'Heisenberg stipule que

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4} \tag{A.6}$$

Cette inégalité devient une égalité si et seulement si f est un chirp de Gabor ; ie une gaussiennee modulée.

La question de la double localisation de l'énergie se pose en particulier pour les ondelettes. La mise à l'échelle des ondelettes à partir d'une ondelette-mère suit précisément le procédé de l'équation A.1. La projection d'une fonction f sur une base d'ondelettes $\psi_{j,k}$ avec $j, k \in \mathbb{Z}$, permet ainsi de localiser l'énergie du signal à l'aide d'un pavage du plan temps-fréquence (t, ω) ; les pavés sont d'aire $\sigma_t \sigma_\omega$ constante, et les résolutions en temps et en fréquence dépendent de s. Une représentation de ce pavage est donnée figure 2.1. Ici, le pavage correspond à une ondelette analytique (i.e. dont la transformée de Fourier est nulle pour les fréquences négatives) ; par conséquent les intégrales dans les équations A.3 et A.5 sont définies comme $\int_0^{+\infty}$ (voir [Mallat 1998] page 84).

Annexe B

Propriétés des coefficients de connexion

B.1 Propriétés des coefficients de connexion du terme produit

Les coefficients de connexion pour le produit de deux fonctions sont réunis dans le tenseur d'interaction noté $T^{j_1,j_2,j_3}_{k_1,k_2,k_3}$:

$$T^{j_1,j_2,j_3}_{k_1,k_2,k_3} = \langle \gamma_{j_1,k_1}\gamma_{j_2,k_2}, \gamma_{j_3,k_3}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{j_1,k_1}(x)\gamma_{j_2,k_2}(x)\,\overline{\gamma_{j_3,k_3}}(x)dx \quad \text{avec } \gamma_{j_i,k_i} \in \begin{pmatrix} \overrightarrow{\varphi_J} \\ \overrightarrow{\Psi_{L-1}} \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

$\overline{\gamma_{j_3,k_3}}$ est le conjugué de γ_{j_3,k_3}. La fonction d'échelle et les ondelettes étant des fonctions réelles, le tenseur d'interaction est invariant en permutant les trois indices 1, 2 et 3. On en déduit :

$$\langle \gamma_{j_1,k_1}\gamma_{j_2,k_2}, \gamma_{j_3,k_3}\rangle = T^{j_1,j_2,j_3}_{k_1,k_2,k_3} = T^{j_2,j_1,j_3}_{k_2,k_1,k_3} = T^{j_3,j_2,j_1}_{k_3,k_2,k_1} = T^{j_1,j_3,j_2}_{k_1,k_3,k_2} = T^{j_2,j_3,j_1}_{k_2,k_3,k_1} = T^{j_3,j_1,j_2}_{k_3,k_1,k_2} \tag{B.2}$$

De plus, par un changement d'inconnues dans l'équation B.1, on obtient :

$$T^{j_1,j_2,j_3}_{k_1,k_2,k_3} = T^{j_1\ j_2}_{0\ \ k_2-2^{j_2-j_1}k_1}{}^{\ j_3}_{\ j_3-j_1} = 2^{j_1/2}T^{0\ \ j_2-j_1}_{k_1\ k_2}{}^{\ j_3-j_1}_{\ k_3} = 2^{j_1/2}T^{0j_2-j_1}_{0\ k_2-2^{j_2-j_1}k_1}{}^{\ j_3-j_1}_{\ j_3-j_1}$$

avec $j_1 = \min(j_1, j_2, j_3)$.

Ainsi, seul un noyau minimal de coefficients de connexion est à calculer, les autres étant déduits par des manipulations sur les indices.

Par l'intermédiaire de l'équation d'échelle (équation 2.22), on peut aussi exprimer chaque coefficient de connexion comme une combinaison linéaire de coefficients de connexion aux plus basses échelles, et se ramener finalement au seul calcul de $\langle \varphi_{0,k_1}\varphi_{0,k_2}, \varphi_{0,0}\rangle$ pour k_1 et $k_2 \in \mathbb{Z}$ [*PerrierandWickerhauser* 1999]. Cette dernière technique est utilisée quand on manipule les filtres en quadrature des analyses multirésolutions. Dans ce travail, où l'on a utilisé les AMR de Haar et de Meyer, ce n'est pas le cas. Pour l'AMR de Meyer, le calcul est fait à partir de la définition analytique des transformées de Fourier des fonctions de Meyer (voir annexe C). Pour l'AMR de Haar, le calcul des coefficients de connexion est trivial et on peut se passer de ces relations [*PerrierandWickerhauser* 1999]. Un programme MATLAB simple, donné ci-dessous, permet d'obtenir les coefficients d'interaction pour l'AMR de Haar (définis à la section 3.6.1.1) :

```
%%%%%  Calcul des coefficients de connexion de Haar   %%%%%
L=7;      % L est l'échelle de résolution ; on compte donc 2^L = 2^7 = 128 points
```

```
J=3 ;      %  J est l'échelle d'approximation ; on compte donc 2^J = 2^3 = 8 pixels d'approximation
npos=2^J ;
s=zeros(npos,npos,npos) ;
%% calcul de ⟨φ, φ,φ⟩
    for ipos=1 :npos
     s(ipos,ipos,ipos)=2^(J/2) ;
    end
% calcul du type ⟨ψ, ψ,φ⟩
    for iscale=J :(L-1)
        s=zeros(2^iscale,2^iscale,npos) ;
        Npaq=2^(iscale-J)
        for iphi=1 :npos
            limin=Npaq*(iphi-1)+1 ;
             limax=limin+Npaq-1 ;
             connect=zeros(2^iscale,2^iscale) ;
             for ipos=limin :limax
                  connect(ipos,ipos)=2^(J/2) ;
             end
            s( :, :,iphi)=connect ;
         end
    end
% calcul du type ⟨ψ_j, ψ_j, ψ_j'⟩ avec j' < j
    for ipsi1=(J+1) :(L-1)
      for ipsi2=(ipsi1-1) :(-1) :J
        s=zeros(2^ipsi1,2^ipsi1,2^ipsi2) ;
          Npaq=2^(ipsi1-ipsi2) ;
            for iphi=1 :2^ipsi2
              limin=Npaq*(iphi-1)+1 ;
              limax=limin+Npaq-1 ;
              liminter=limin+(limax-limin+1)/2 ;
              connect=zeros(2^ipsi1,2^ipsi1) ;
                for ipos=limin :limax
                  connect(ipos,ipos)=2^(ipsi2/2)*(ipos<liminter)-2^(ipsi2/2)*(ipos>=liminter) ;
                end
                s( :, :,iphi)=connect ;
            end
      end
    end
```

B.2 Propriétés des coefficients de connexion du terme dérivée

Les coefficients de connexion du terme dérivée possèdent également des propriétés d'invariance. Suivant [Resnikoff and Wells. 1998], nous adoptons ici les notations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \Gamma_k^l = \int \varphi_k'(x)\,\varphi_l(x)\,dx, & \Gamma_k^{i,l} = \int \varphi_k'(x)\,\psi_{i,l}(x)\,dx, \\ \Gamma_{j,k}^l = \int \psi_{j,k}'(x)\,\varphi_l(x)\,dx, & \Gamma_{j,k}^{i,l} = \int \psi_{j,k}'(x)\,\psi_{i,l}(x)\,dx. \end{array} \tag{B.3}$$

Les propriétés d'invariance des coeffficients de connexion du terme dérivée sont les suivantes :

– $\Gamma_l^m = -\Gamma_m^l, \Gamma_{0,l}^{j,k} = -\Gamma_{j,k}^{0,l}, \Gamma_{i,l}^{j,k} = -\Gamma_{j,k}^{i,l}$ (obtenus par intégration par parties)
– invariance par translation d'indice :

$$\Gamma_{0,l}^{k} = \Gamma_{0,0}^{k-l}, \tag{B.4}$$

$$\Gamma_{j_\varphi,k}^{j_\varphi,l} = 2^{j_\varphi}\Gamma_{0,0}^{k-l}, \tag{B.5}$$

$$\Gamma_{0,l}^{j,k} = -\Gamma_{j,k}^{0,l} = \Gamma_{0,0}^{j,k-2^j l}, \tag{B.6}$$

$$\Gamma_{i,l}^{j,k} = -\Gamma_{j,k}^{i,l} = 2^{j}\Gamma_{0,0}^{j-i,l-2^{j-i}k}. \tag{B.7}$$

De même que pour les coefficients de connexion du terme produit et comme il a déjà été dit à la section 3.6.2.2, l'utilisation de l'équation d'échelle (équation 2.22) permet de déduire la valeur de tous coefficients de connexion du terme dérivée de celle de $\int_{D_x} \varphi'(x)\varphi(x-l)dx$, noté r_l [Beylkin 1992] ou ici, et comme dans [Resnikoff and Wells. 1998], Γ_0^l. Cette dernière propriété est indispensable pour le calcul classique de coefficients de connexion pour les AMR de Daubechies, et en particulier celle de Haar. Des codes de calcul Fortran sont disponibles pour le calcul des ces coefficients de connexion, à partir de site internet (par exemple celui de Juan M. Restrepo : http ://www.math.arizona.edu/˜restrepo).

Annexe C

Calcul des coefficients de connexion de Meyer

C.1 Définition des supports des fonctions et des pas de discrétisation

Le calcul des coefficients de connexion de Meyer se base sur la définition analytique des ondelettes de Meyer dans l'espace des fréquences, et il est réalisé à partir de cet espace :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq 2\pi/3 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\beta(\frac{3|\omega|}{2\pi} - 1\right) & \text{si } 2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{C.1}$$

$$\widehat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\omega| \notin [2\pi/3, 8\pi/3] \\ e^{-i\omega/2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta(\frac{3|\omega|}{2\pi} - 1\right) & \text{si } 2\pi/3 \leq |\omega| \leq 4\pi/3 \\ e^{-i\omega/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\beta(\frac{3|\omega|}{2\pi} - 1\right) & \text{si } 4\pi/3 \leq |\omega| \leq 8\pi/3 \end{cases} \tag{C.2}$$

avec ω la pulsation. Ainsi, les supports fréquentiels (ou impulsionnels) de $\hat{\varphi}_{J,k}$ et $\widehat{\psi}_{j,k}$ sont respectivement $\left[-\frac{4\pi}{3}2^J; \frac{4\pi}{3}2^J\right]$ et $\left[-\frac{8\pi}{3}2^j; \frac{8\pi}{3}2^j\right]$. Le domaine de fréquence $[-P2sp_j; P2sp_j]$ (avec $P2sp_j = 2^j$, $P2sp_{j=0}$) sur lequel sont définis les transformées de Fourier des fonctions de Meyer est à définir. Il doit être au minimum $\left[-\frac{8\pi}{3}2^j; \frac{8\pi}{3}2^j\right]$.

Des précautions doivent être prises si l'on veut travailler convenablement dans les deux espaces physiques et fréquentiels.

Tout d'abord, suivant les conséquences du théorème de Shannon-Whittaker [Mallat 1998], la largeur du domaine de fréquence que l'on retient pour le calcul doit être cohérente avec l'échantillonnage dans le domaine physique : l'échantillonnage de largeur δT_j dans l'espace physique rend les transformées de Fourier des fonctions $\frac{2\pi}{\delta T_j}$ périodiques. La discrétisation des fonctions dans le domaine physique est réalisée par le produit des fonctions continues par une fonction peigne de Dirac (sha). En notant γ_j une fonction à l'échelle j et sa transformée de Fourier $\widehat{\gamma}_j$, et $\gamma_{j,d}$ la fonction discréte associée et sa transformée de Fourier $\widehat{\gamma}_{j,d}$, on a :

$$\gamma_{j,d}(x) = \gamma_j(x) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_j(x - n\delta T_j) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_j(x)\delta_j(x - n\delta T_j) \tag{C.3}$$

et

$$\widehat{\gamma}_{j,d}(\omega) = \frac{1}{\delta T_j} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\gamma}_j(\omega - k\frac{2\pi}{\delta T_j}) \tag{C.4}$$

Les domaines fréquentiels $[-P2sp_j; P2sp_j]$ sur lequel sont définis les fonctions $\left\{\widehat{\varphi}_{J,k}(\omega),\, k \in \left[0; 2^J - 1\right]\right\}$ et $\left\{\widehat{\psi}_{j,k}(\omega),\, j \geq J,\, k \in \left[0; 2^j - 1\right]\right\}$, doivent donc être compris dans le domaine $\left[-\frac{\pi}{\delta T_j}; \frac{\pi}{\delta T_j}\right]$ afin d'éviter la modification de la définition des transformées de Fourier par leur périodisation (repliement du spectre conduisant au phénomène d'*aliasing*). Le phénomène d'*aliasing* est éliminé si

$$P2sp_j \leq \frac{\pi}{\delta T_j} \text{ ou } \delta T_j \leq 2^{-j} \frac{\pi}{P2sp_{j=0}}. \tag{C.5}$$

De plus, il s'agit de périodiser les fonctions d'échelle et les ondelettes dans le domaine physique afin de traiter un problème périodique horizontalement. Si la période à l'échelle $j = 0$ est notée P, la période des fonctions de la base multirésolution à l'échelle j est $P_j = 2^j P$. C'est également la période des coefficients d'échelle et d'ondelette. Le fait de discrétiser la transformée de Fourier – i.e. de discrétiser $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ sous la forme d'une série – provoque la périodicité du signal f dans le domaine des x par transformée de Fourier inverse [Stephens 1986]. Dans notre étude, cela implique donc la périodicité des champs nuageux, tout comme celle du champ de radiances. Cette périodisation de période P_j est concrètement réalisée par un échantillonnage dans l'espace des fréquences de pas $\delta\omega_j = \frac{2\pi}{P_j}$: il faut donc choisir une discrétisation fréquentielle compatible avec la périodisation souhaitée dans le domaine physique.

On peut considérer la fonction périodisée $\widetilde{\gamma}_{j,d}$ comme la convolution de $\gamma_{j,d}$ par une fonction peigne de Dirac $S_j(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nP_j)$:

$$\widetilde{\gamma}_{j,d}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{j,d}(x')S_j(x - x')dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_{j,d}(x')\delta(x - nP_j - x')dx' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_{j,d}(x - nP_j) \tag{C.6}$$

Puisque $\gamma_{j,d}(x) = \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \gamma_j(x)\delta_j(x - n\delta T_j)$ (équation C.3), l'équation peut être réécrite :

$$\widetilde{\gamma}_{j,d}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \gamma_j(x - nP_j)\delta_j(x - nP_j - n'\delta T_j) \tag{C.7}$$

La transformée de Fourier $\widehat{\widetilde{\gamma}}_{j,d}$ est :

$$\widehat{\widetilde{\gamma}}_{j,d}(\omega) = \frac{2\pi}{P_j} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \widehat{\gamma}_{j,d}(\omega)\delta_j(\omega - n'\frac{2\pi}{P_j}) \tag{C.8}$$

$$= \frac{2\pi}{P_j}\frac{1}{\delta T_j} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\gamma}_j(\omega - k\frac{2\pi}{\delta T_j})\delta_j(\omega - n'\frac{2\pi}{P_j}) \tag{C.9}$$

$\widehat{\gamma}_j(\omega - k\frac{2\pi}{\delta T_j})$ indique la périodisation de la transformée de Fourier de $\widehat{\gamma}_j$ due à l'échantillonnage de γ_j dans le domaine physique.

$\delta_j(\omega - n'\frac{2\pi}{P_j})$ indique la discrétisation de $\widehat{\gamma}_j$ due à la périodisation de γ_j dans le domaine physique.

Le pas fréquentiel $\delta\omega_j = \dfrac{2\pi}{P_j}$ doit correspondre au découpage du domaine fréquentiel de largeur $2 * P2sp_j$ par N point :

$$\delta\omega_j = \frac{2\pi}{P_j} = \frac{2 * P2sp_j}{N} \tag{C.10}$$

d'où

$$N = \frac{P_j * P2sp_j}{\pi} \tag{C.11}$$

Cette expression vérifie la condition de Whittacker-Shannon, car cette dernière impose

$$N \geq \frac{P_j * P2sp_j}{\pi} \tag{C.12}$$

L'équation C.12 indique que, pour une valeur de P_j fixé, l'augmentation de la résolution dans le domaine physique doit être accompagnée de l'augmentation de $P2sp_j$: le domaine fréquentiel $[-P2sp_j; P2sp_j]$ sur lequel sont définies les fonctions de Meyer est bien plus large que le support de ces fonctions.

Concrètement, les deux conditions (équations C.5 et C.10) sont vérifiées en utilisant les routines *nstdfft* et *instdfft* proposées par MATLAB : ce sont des transformées de Fourier directe et inverse dîtes non-standard ; elles peuvent traiter des fonctions définies pour des fréquences négatives. Ces fonctions sont utilisées par la routine *meyer.m* qui définit les fonctions de Meyer dans le domaine physique à partir de leur définition analytique dans le domaine de Fourier. Les fonctions sont définies dans le domaine physique sur $[lowb; uppb]$ à partir de n échantillons positionnés en $t = lowb + [0 : (n-1)] * (uppb - lowb)/n$. L'échantillonnage dans le domaine de Fourier suit $\omega = [-n : 2 : n-2]/(2 * l_{int})$ avec $l_{int} = (uppb - lowb)/(2\pi)$. ω est la pulsation ($\omega = 2\pi * f$). La correspondance avec les notations ci-dessus donnent $lowb = 0$, $uppb = P_j = 2^j P$ et $n = N$. On peut vérifier que l'échantillonnage fréquentiel ainsi défini correspond à l'équation C.10, et que le support fréquentiel vérifie l'équation C.11. En pratique, on a utilisé $n = 2^{14}$ points.

C.2 Calcul de $T^{j_1,j_2,j_3}_{k_1,k_2,k_3} = \langle \gamma_{j_1,k_1}\gamma_{j_2,k_2}, \gamma_{j_3,k_3}\rangle$ pour l'AMR de Meyer

L'équation 3.64 donne l'expression dans le domaine fréquentiel du tenseur d'interaction :

$$T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\widehat{\Psi_1\Psi_2}\right)(\omega)\ \overline{.\widehat{\Psi_3}}\,(\omega)\, d\omega \tag{C.13}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\widehat{\Psi_1} * \widehat{\Psi_2}\right)(\omega)\ \overline{.\widehat{\Psi_3}}\,(\omega)\, d\omega \tag{C.14}$$

avec $\widehat{\Psi_i}(\omega) = \widehat{\Psi}_{j_i,k_i}(\omega) = 2^{-\frac{j_i}{2}} e^{-i\frac{k_i}{2^{j_i}}\omega}\widehat{\Psi}\left(\frac{\omega}{2^{j_i}}\right) = 2^{-\frac{j_i}{2}} e^{-ix_i\omega}\mathrm{M}_\Psi\left(\frac{\omega}{2^{j_i}}\right)$.

M_Ψ est le module de $\widehat{\Psi}$, qui peut être soit M_φ soit M_ψ.

x_i est le centre de symétrie de la fonction Ψ : $x_i = (k_i + 1/2)2^{-j_i}$ si $\Psi = \psi$, $x_i = k_i 2^{-j_i}$ si $\Psi = \varphi$.

On peut écrire :

$$T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\widehat{\Psi_1} * \widehat{\Psi_2}\right)(\omega)\ 2^{-\frac{j_3}{2}} e^{+ix_3\omega} \mathrm{M}_\Psi(\frac{\omega}{2^{j_3}}).d\omega \tag{C.15}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\widehat{\Psi_1} * \widehat{\Psi_2}\right)(\omega)\ 2^{-\frac{j_3}{2}} \mathrm{M}_\Psi(\frac{\omega}{2^{j_3}})\right] e^{+ix_3\omega} d\omega \tag{C.16}$$

$$= F(x_3) \text{ avec } F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\widehat{\Psi_1} * \widehat{\Psi_2}\right)(\omega)\ 2^{-\frac{j_3}{2}} \mathrm{M}_\Psi(\frac{\omega}{2^{j_3}})\right] e^{+ix\omega} d\omega \tag{C.17}$$

T_{Ψ_1,Ψ_2,Ψ_3} est donc égal à la valeur de la fonction F, qui est la transformée de Fourier inverse de la fonction $\left(\widehat{\Psi_1} * \widehat{\Psi_2}\right)(\omega)\ 2^{-\frac{j_3}{2}} \mathrm{M}_\Psi(\frac{\omega}{2^{j_3}})$, au point $x = x_3$.

En pratique, le terme $\left(\widehat{\Psi_1} * \widehat{\Psi_2}\right)(\omega) = \left(\widehat{\Psi_1\Psi_2}\right)(\omega)$ n'est pas calculé comme un produit de convolution dans le domaine de Fourier : le produit $\Psi_1\Psi_2$ est fait dans le domaine physique, puis sa transformée de Fourier $\left(\widehat{\Psi_1\Psi_2}\right)(\omega)$ est calculée. Ensuite, $\left(\widehat{\Psi_1\Psi_2}\right)(\omega)$ est multipliée par $2^{-\frac{j_3}{2}} \mathrm{M}_\Psi(\frac{\omega}{2^{j_3}})$, et on effectue la transformée de Fourier inverse de ce produit. T_{Ψ_1,Ψ_2,Ψ_3} est finalement égal à la valeur de F au point x_3.

Les supports fréquentiels des fonctions de Meyer étant compacts, le nombre de cas pour lesquels $T_{\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3} \neq 0$ est limité. Les seuls cas à considérer sont les suivants :

- $\langle\varphi,\varphi,\varphi\rangle$
- $\langle\varphi,\varphi,\psi_j\rangle$ avec $j \in \{J; J+1\}$
- $\langle\varphi,\psi_{j_2},\psi_{j_3}\rangle$ avec $|j_2 - j_3| \leq 2$
- $\langle\psi_{j_1},\psi_{j_2},\psi_{j_3}\rangle$ avec $j_1 \leq j_2$ et $|j_2 - j_3| \leq 2$, ou $j_2 \leq j_1$ et $|j_1 - j_3| \leq 2$

La routine MATLAB ci-dessous permet par exemple de calculer les coefficients $\langle\varphi,\psi_{j_2},\psi_{j_3}\rangle$:

```
%%%%%  Calcul des coefficients de connexion de Meyer   %%%%%
%%                    calcul de <φ, ψ_j2, ψ_j3>                %%
%
function [sol,res,t,x]=fi2psi(j2,j3,J,k1,k2,k3) ;
n=2^14 ;
lowb=0 ;
uppb=2^J ;
lint = (uppb-lowb)/2/pi ;
x = [-n :2 :n-2]/(2*lint) ;
mi=min(x) ;
ma=max(x) ;
xa = abs(x) ;
%  Compute support of Fourier transform of phihat.
int1 = find(xa <2*pi/3) ;
int2 = find((xa >= 2*pi/3) & (xa <4*pi/3)) ;
%  Compute Fourier transform of phi.
phihat1 = zeros(1,n) ;
phihat1(int1) = exp(-i*k1*x(int1)).*ones(size(int1)) ;
phihat1(int2) = exp(-i*k1*x(int2)).*cos(pi/2*meyeraux(3/2/pi*xa(int2)-1)) ;
%
```

```
[my1,t] = instdfft(phihat1,lowb,uppb) ;
%
%  Compute support of Fourier transform of psidilat1
int3 = find((xa >= 2*2^(j2-J)*pi/3) & (xa <4*2^(j2-J)*pi/3)) ;
int4 = find((xa >= 4*2^(j2-J)*pi/3) & (xa <8*2^(j2-J)*pi/3)) ;
psihatdilat2 = zeros(1,n) ;
psihatdilat2(int3) = exp(-i*x(int3)/2^(j2-J)*(k2+1/2)).*sin(pi/2*meyeraux(3/2/2^(j2-J)/pi*xa(int3)-
1)) ;
psihatdilat2(int4) = exp(-i*x(int4)/2^(j2-J)*(k2+1/2)).*cos(pi/2*meyeraux(3/4/2^(j2-J)/pi*xa(int4)-
1)) ;
%
[my2,t] = instdfft(psihatdilat2,lowb,uppb) ;
%
my12=my1.*my2 ;
[G,omega]=nstdfft(my12,lowb,uppb) ;
%
% Compute support of Fourier transform of psidilat2
int5 = find((xa >= 2*2^(j3-J)*pi/3) & (xa <4*2^(j3-J)*pi/3)) ;
int6 = find((xa >= 4*2^(j3-J)*pi/3) & (xa <8*2^(j3-J)*pi/3)) ;
psihatdilat3 = zeros(1,n) ;
psihatdilat3(int5) = sin(pi/2*meyeraux(3/2/2^(j3-J)/pi*xa(int5)-1)) ;
psihatdilat3(int6) = cos(pi/2*meyeraux(3/4/2^(j3-J)/pi*xa(int6)-1)) ;
%
prod=G.*psihatdilat3 ;
%
[res,t] = instdfft(prod,lowb,uppb) ;
res=res*2^((3*J-(j2+j3))/2) ;
int=find(t==((k3+1/2)/2^(j3-J))) ;
sol=real(res(int))
%
```

C.3 Calcul de $\langle \delta\gamma_{j_1,k_1},\gamma_{j_3,k_3}\rangle$ pour l'AMR de Meyer

Le calcul de $\langle \delta\gamma_{j_1,k_1},\gamma_{j_3,k_3}\rangle$ pour l'AMR de Meyer est basé sur les expressions analytiques obtenues au paragraphe 3.6.2.1 : les coefficients de connnection de différentiation au premier ordre sont obtenus à partir de transformées de Fourier inverse de fonctions définies analytiquement dans le domaine de Fourier. On donne ci-dessous le programme MATLAB permettant de calculer les coefficients de connexion $\langle \delta\psi_{j,k_1},\psi_{j,k_3}\rangle$ et le filtre $\mathcal{F}_{\psi,\psi}$.

```
%%%%%  Calcul des coefficients de connexion de Meyer   %%%%
%%                    calcul de <δψ_{j,k1},ψ_{j,k3}>                    %%
%
function [res,over,t]=pscalpsi(j,k1) ;
%
n=2^14 ;
uppb=2^j ;lowb=0 ;
lint = (uppb-lowb)/2/pi ;
x = [-n :2 :n-2]/(2*lint) ;
xa = abs(x) ;
%
% Compute support of Fourier transform of psicomp.
```

```
int3 = find((xa >= 2*pi/3) & (xa <4*pi/3)) ;
int4 = find((xa >= 4*pi/3) & (xa <8*pi/3)) ;
psihat1 = zeros(1,n) ;
psihat1(int3) = exp(-i*(k1+0.5)*x(int3)).*sin(pi/2*meyeraux(3/2/pi*xa(int3)-1)) ;
psihat1(int4) = exp(-i*(k1+0.5)*x(int4)).*cos(pi/2*meyeraux(3/4/pi*xa(int4)-1)) ;
%
psihat3 = zeros(1,n) ;
psihat3(int3) = sin(pi/2*meyeraux(3/2/pi*xa(int3)-1)) ;
psihat3(int4) = cos(pi/2*meyeraux(3/4/pi*xa(int4)-1)) ;
%
prod=i*x.*psihat1.*psihat3 ;
%
% Compute over using non standard inverse FFT.
[over,t] = instdfft(prod,lowb,uppb) ;
over=2^j*over ;
K3=2^j-1 ;
res=[] ;
for k3=0 :K3
    int=find(t==(k3+0.5)) ;
    [res]=[res over(int)] ;  % res fournit le filtre F_{ψ,ψ}.
end
```

Annexe D

Caractéristiques spectrales de la différentiation par ondelettes de Haar

Nous étudions ici le filtrage sur la fonction dérivée provoqué par la différentiation par ondelettes de Haar.

Le calcul de l'opérateur de différentiation du premier ordre au moyen de l'AMR de Haar est équivalente au schéma centré classique de différences finies [Beylkin 1992] :

$$\frac{df(x)}{dx} \simeq \delta(f)(x) = \frac{1}{2\Delta x}\left[f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)\right], \tag{D.1}$$

avec $\Delta x = D2^{-L}$ avec D la largeur du domaine. La transformée de Fourier de cette différence finie est :

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}(f)(\omega) &= \frac{1}{2\Delta x}\left[\int e^{-i\omega x} f(x+\Delta x)\,dx - \int e^{-i\omega x} f(x-\Delta x)\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2\Delta x}\left(e^{i\omega\Delta x} - e^{-i\omega\Delta x}\right)\widehat{f}(\omega) \\ &= i\frac{\sin(\omega\Delta x)}{\Delta x}\widehat{f}(\omega)\end{aligned} \tag{D.2}$$

Le spectre de puissance de la fonction f, noté S_f, vaut $S_f = \left|\widehat{f}(\omega)\right|^2$.

Suivant l'équation D.2, on déduit que spectre de la fonction différence finie est

$$S_{\delta(f)} = \frac{\sin^2(\omega\Delta x)}{\Delta x^2} S_f, \tag{D.3}$$

tandis que le spectre de la dérivée de f est

$$S_{f'} = \omega^2 S_f. \tag{D.4}$$

Ainsi, l'utilisation de l'AMR de Haar induit un filtrage des fonctions dérivées, en particulier à petites échelles (ou grand nombre d'onde). Ce problème doit également être étudié pour l'AMR de Meyer, mais en principe, vu l'infinie dérivabilité théorique des fonctions de Meyer, aucun filtrage ne devrait exister, excepté celui du à la troncation finie du développement en ondelette de Meyer.

La figure D.1 représente le rapport $\dfrac{\sin^2(\omega\Delta x)}{\omega^2\Delta x^2}$ soit $\dfrac{S_{\delta(f)}}{S_{f'}}$. L'échantillonnage valant $\Delta x = D2^{-L}$, le nombre d'onde maximal pour le domaine nuageux est $\dfrac{\omega_{Nyquist}}{2\pi} = \dfrac{1}{2\Delta x}$. $\dfrac{S_{\delta(f)}}{S_{f'}}$ est échantillonné

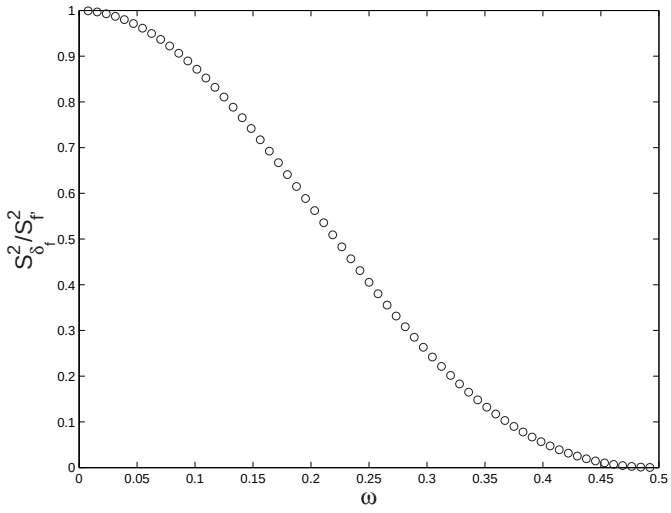


FIG. D.1 – Rapport des spectres des fonctions $\delta(f)$ et f'.

aux points $\omega_i = \dfrac{i}{2\pi D}$ pour $i = 0, 1, .., 2^{L-1} - 1$, et $L = 7$. En abscisse, ω est normalisée par $\omega_{\max}$. La figure indique que l'effet du filtrage est assez sévère. L'effet de ce filtrage sur le transport horizontal des photons doit être estimé si l'on utilise la différentiation au sens de Haar.

Annexe E

Calcul simple illustrant le signe systématique de l'absorption nuageuse dû aux interactions sous-pixel, dans un cas de corrélation verticale du milieu

Afin d'illustrer l'importance de l'hypothèse de corrélation verticale du milieu (nous entendons par corrélation : "quand le signe des coefficients d'ondelettes de la fluctuation horizontale d'épaisseur optique est inchangé le long de la propagation du rayonnement") sur le signe des quantités radiatives (ici l'absorption) dues aux interactions sous-pixel dans le cas d'un éclairement vertical, nous détaillons ci-dessous le calcul de la transmission d'un rayonnement à travers un milieu purement absorbant, et l'absorption de ce rayonnement par ce milieu. La fluctuation horizontale de l'épaisseur optique du milieu dans chaque couche du nuage est donnée sur la figure E.1 : le milieu est périodique de période 6.4 km ; l'épaisseur optique moyenne est 1 ; l'épaisseur optique vaut partout l'unité, sauf entre les abscisses 2.4 et 3.2 km, où la fluctuation suit celle d'une ondelette de Haar à l'échelle $j = 3$. A l'aide de l'AMR de Haar et une échelle d'approximation $J = 0$, la fluctuation horizontale du coefficient d'extinction α est descriptible à l'aide du coefficient d'échelle pour $J = 0$ noté $\overline{A} = \langle \alpha, \varphi_{0,0} \rangle$, et d'un coefficient d'ondelette $A_i = \langle \alpha(z_i), \psi_{j=3,k=3} \rangle$.

Nous supposons que la fluctuation horizontale d'épaisseur optique a la même allure dans le nuage, mais que la valeur du coefficient d'ondelette non-nul dépend de la coordonnée z : on note A_i le coefficient d'ondelette pour la couche verticale i. L'éclairement étant vertical, le milieu étant purement absorbant et défini comme ci-dessus, et pour le cas $J = 0$, seuls les coefficients de connexion ci-dessous interviennent :

$$\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{0,0}(x)\varphi_{0,0}(x)\overline{\varphi_{0,0}}(x)dx = 2^{\frac{J=0}{2}} = 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{3,3}(x)\psi_{3,3}(x)\overline{\varphi_{0,0}}(x)dx = 2^{\frac{J=0}{2}} = 1 \end{array} \tag{E.1}$$

De plus, de même que pour le milieu, le fluctuation horizontale du flux radiatif transmis est descriptible par le coefficient d'échelle noté $\overline{N}(i) = \langle N(z_i), \varphi_{0,0} \rangle$, et un coefficient d'ondelette $N_i = \langle N(z_i), \psi_{j=3,k=3} \rangle$.

L'éclairement du milieu est homogène et est décrit par $\overline{N}(0) = \overline{N}$.

Suite à l'extinction du rayonnement par la première couche du milieu d'épaisseur $\triangle z$, on obtient :

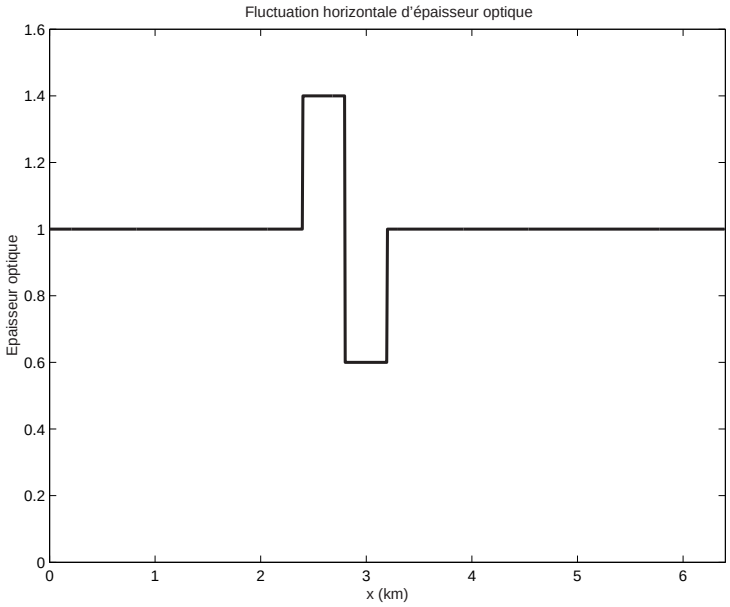


FIG. E.1 – Fluctuation horizontale d'épaisseur optique.

– Coefficient d'échelle du flux transmis :

$$\begin{aligned} \overline{N}(1) &= \overline{N}(0) - \triangle z \overline{AN}(0) \\ &= \overline{N}(1 - \overline{A}\triangle z) \end{aligned} \tag{E.2}$$

– Coefficient d'ondelette du flux transmis :

$$N_1 = -\triangle z A_1 \overline{N} \tag{E.3}$$

– Absorption dans la couche :

$$Abs = \overline{N}(0) - \overline{N}(1) = \overline{NA}\triangle z \tag{E.4}$$

Suite à l'extinction par la deuxième couche, on obtient :
– Coefficient d'échelle du flux transmis :

$$\begin{aligned} \overline{N}(2) &= \overline{N}(1) - \triangle z \left(\overline{N}(1)\overline{A} + N_1 A_2\right) \\ &= \overline{N}\left((1 - \overline{A}\triangle z)^2 + \triangle z^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2\right) \end{aligned} \tag{E.5}$$

– Coefficient d'ondelette du flux transmis :

$$\begin{aligned} N_2 &= N_1 - \triangle z \left(N_1 \overline{A} + \overline{N}(1) A_2\right) \\ &= -\triangle z \overline{N}(A_1 + A_2)(1 - \triangle z \overline{A}) \end{aligned} \tag{E.6}$$

– Absorption dans la couche :

$$\begin{aligned} Abs &= \overline{N}(1) - \overline{N}(2) \\ &= \overline{N}\triangle z \left((1 - \overline{A}\triangle z\right)\overline{A} - \triangle \mathbf{z} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2) \end{aligned} \tag{E.7}$$

Suite à l'extinction par la troisième couche, on obtient :
– Coefficient d'échelle du flux transmis :

$$\begin{aligned} \overline{N}(3) &= \overline{N}(2) - \triangle z \left(\overline{N}(2)\overline{A} + N_2 A_3\right) \\ &= \overline{N}\left[(1 - \overline{A}\triangle z)^3 + \triangle \mathbf{z}^2 (\mathbf{1} - \overline{A}\triangle \mathbf{z}) \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{A}_3\right)\right] \end{aligned} \tag{E.8}$$

– Coefficient d'ondelette du flux transmis :

$$\begin{array}{l} N_3 = N_2 - \triangle z \left(N_2 \overline{A} + \overline{N}(2) A_3 \right) \\ = -\triangle z \overline{N} \left((A_1 + A_2 + A_3)(1 - \triangle z \overline{A})^2 + \triangle z^2 A_1 A_2 A_3 \right) \end{array} \tag{E.9}$$

– Absorption dans la couche :

$$\begin{array}{l} Abs = \overline{N}(2) - \overline{N}(3) \\ = \overline{N} \triangle z \left[\left(1 - \overline{A} \triangle z\right)^2 \overline{A} - \triangle \mathbf{z} (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_3 + \triangle \mathbf{z}^2 \overline{A} \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_3 \right) \right] \end{array} \tag{E.10}$$

Suite à l'extinction par la quatrième couche, on obtient :

– Coefficient d'échelle du flux transmis :

$$\begin{array}{l} \overline{N}(4) = \overline{N}(3) - \triangle z \left(\overline{N}(3) \overline{A} + N_3 A_4 \right) \\ = \overline{N} \left[(1 - \overline{A} \triangle z)^4 + \triangle \mathbf{z}^2 \left[\begin{array}{c} (1 - \overline{A} \triangle z)^2 \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_3 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) \mathbf{A}_4 \right) \\ + \triangle z^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \end{array} \right] \right] \end{array} \tag{E.11}$$

– Coefficient d'ondelette du flux transmis :

$$\begin{array}{l} N_3 = N_2 - \triangle z \left(N_2 \overline{A} + \overline{N}(2) A_3 \right) \\ = -\triangle z \overline{N} \left((A_1 + A_2 + A_3)(1 - \triangle z \overline{A})^2 + \triangle z^2 A_1 A_2 A_3 \right) \end{array} \tag{E.12}$$

– Absorption dans la couche :

$$\begin{array}{l} Abs = \overline{N}(3) - \overline{N}(4) \\ = \overline{N} \triangle z \left[\left(1 - \overline{A} \triangle z\right)^3 \overline{A} + \triangle \mathbf{z} \mathbf{F}_1 + \triangle \mathbf{z}^2 \mathbf{F}_2 + \triangle \mathbf{z}^3 \mathbf{F}_3 \right] \\ \text{avec : } \mathbf{F}_1 = -(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) \mathbf{A}_4, \\ \qquad \mathbf{F}_2 = \overline{A} \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_3 + 2(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) \mathbf{A}_4 \right), \\ \qquad \mathbf{F}_3 = - \left[\overline{A}^2 \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \mathbf{A}_3 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3) \mathbf{A}_4 \right) + \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4 \right] \end{array} \tag{E.13}$$

On pourrait continuer cet exercice de calcul à la main, mais le calcul pour les quatre premières couches semblent donner quelques règles.

Dans le cas où les coefficients d'ondelette A_i sont de même signe, le flux moyen transmis, proportionnel au coefficient d'échelle $\overline{N}(i)$, est augmenté d'une source additionnelle due aux interactions sous-pixel, et cette source est systématiquement positive : en effet, l'équation E.11 indique que cette source est la somme de termes ne dépendant que de produits d'ordre pair des coefficients A_i. Si ces coefficients sont de même signe, chaque terme sera positif, ainsi que la source. De plus (cf les équations E.7, E.10 et E.13), l'absorption de l'énergie radiative par le milieu s'écrit comme la somme de l'absorption due aux interactions *à l'échelle* (des pixels d'approximation), et de l'absorption due aux interactions sous-pixel (repérée en gras dans les équations). Cette absorption additionnelle s'écrit comme un polynôme de variable $\triangle z$, dont les coefficients ne dépendent que de la somme du produit d'ordre pair de coefficients d'ondelettes $\mathbf{A}_i$. Ainsi, dans le cas où les coefficients $\mathbf{A}_i$ sont de même signe, de même que pour le rayonnement transmis, les signes des termes additionnels sont prévisibles : dans l'équation E.13, $\mathbf{F}_1 < 0$, $\mathbf{F}_2 > 0$, $\mathbf{F}_3 < 0$.

L'absorption dans chaque couche semble être de la forme :

$$Abs(i) = \overline{N} \triangle z \left[\left(1 - \overline{A} \triangle z\right)^{i-1} \overline{A} + \sum_{i'=1}^{i-1} \triangle z^{i'} F_{i'} \right] \tag{E.14}$$

$$\text{avec } \ \text{sign}(F_{i'}) = \text{sign}\left((-1)^{i'} \right) \ \text{ et } \ F_1 = -A_i \sum_{k=1}^{i-1} A_k \tag{E.15}$$

L'approximation au premier ordre de l'absorption dans chaque couche verticale i est

$$Abs(i) = \overline{N}\triangle z \left[\left(1 - \overline{A}\triangle z\right)^{i-1} \overline{A} - \triangle z A_i \sum_{k=1}^{i-1} A_k \right] \tag{E.16}$$

Ainsi, le calcul de type plan-parallèle néglige les transmission et l'absorption additionnelles dues aux interactions entre échelle, et celles-ci, quand il y a corrélation entre l'hétérogénéité du milieu avec la direction d'incidence, et en approximant le polynôme $\sum_i \triangle z^i F_i$ au premier ordre, sont respectivement positive et négative. Dans ce cas, et toujours au premier ordre, le calcul de type plan-parallèle surestime donc systématiquement l'absorption, de la quantité $\overline{N}\triangle z^2 A_i \sum_{k=1}^{i-1} A_k$.

Annexe F

Expression des termes de couplage entre échelles dans l'équation 3.115

Nous donnons ici l'expression des six termes additionnels intervenant dans l'équation 3.115.

Quand Ψ_i est une fonction d'échelle, $\sum_i$ signifie $\sum_{k=0}^{2^J-1}$. Quand Ψ_i est une ondelette, $\sum_i$ signifie $\sum_{j=J}^{L-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}$. $\mu^{\pm}$ représentent les directions montantes (μ^+) et descendantes (μ^-).

Le terme $T_1^{\varphi\varphi}(\mu^{\pm})$ représente la contribution à l'échelle 2^{-j_3} de l'interaction des fluctuations à l'échelle du pixel du coefficient d'extinction et de la fonction radiance.

$$\begin{aligned} T_1^{\varphi\varphi}(\mu^{\pm}) = &-\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\varphi_1\rangle \left\langle \tilde{N}(z,\mu^{\pm}),\varphi_2\right\rangle \langle\varphi_1\varphi_2,\psi_3\rangle \\ &+\frac{\omega_0}{4}\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\varphi_1\rangle\langle\varphi_1\varphi_2,\psi_3\rangle \int_0^1 P(\mu^{\pm},\mu'^{+}) \left\langle \tilde{N}(z,\mu'^{+}),\varphi_2\right\rangle d\mu'^{+} \\ &+\frac{\omega_0}{4}\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\varphi_1\rangle\langle\varphi_1\varphi_2,\psi_3\rangle \int_{-1}^0 P(\mu^{\pm},\mu'^{-}) \left\langle \tilde{N}(z,\mu'^{-}),\varphi_2\right\rangle d\mu'^{-} \end{aligned} \tag{F.1}$$

Dans le cas de l'AMR de Haar, ce terme est nul.

Le terme $T_2^{\varphi\psi}(\mu^{\pm})$ représente la contribution à l'échelle 2^{-j_3} de l'interaction des fluctuations à l'échelle du pixel du coefficient d'extinction avec les fluctuations sous-pixel de la fonction radiance.

$$\begin{aligned} T_2^{\varphi\psi}(\mu^{\pm}) = &-\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\varphi_1\rangle \left\langle \tilde{N}(z,\mu^{\pm}),\psi_2\right\rangle \langle\varphi_1\psi_2,\psi_3\rangle \\ &+\frac{\omega_0}{4}\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\varphi_1\rangle\langle\varphi_1\psi_2,\psi_3\rangle \int_0^1 P(\mu^{\pm},\mu'^{+}) \left\langle \tilde{N}(z,\mu'^{+}),\psi_2\right\rangle d\mu'^{+} \\ &+\frac{\omega_0}{4}\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\varphi_1\rangle\langle\varphi_1\psi_2,\psi_3\rangle \int_{-1}^0 P(\mu^{\pm},\mu'^{-}) \left\langle \tilde{N}(z,\mu'^{-}),\psi_2\right\rangle d\mu'^{-} \end{aligned} \tag{F.2}$$

Dans le cas de l'AMR de Haar, $\sum_1\sum_2$ est réduit à $\sum_{k_1}\sum_{j_2=j_3,k_2=k_3}$, avec k_1 tel que le support de $\psi_2=\psi_3$ intercepte celui de φ_{J,k_1}.

Le terme $T_3^{\psi\varphi}(\mu^{\pm})$ représente la contribution à l'échelle 2^{-j_3} de l'interaction des fluctuations sous-pixel du coefficient d'extinction avec les fluctuations à l'échelle du pixel de la fonction radiance.

$$\begin{aligned} T_3^{\psi\varphi}(\mu^{\pm}) = &-\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle \left\langle \tilde{N}(z,\mu^{\pm}),\varphi_2\right\rangle \langle\psi_1\varphi_2,\psi_3\rangle \\ &+\frac{\omega_0}{4}\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle\langle\psi_1\varphi_2,\psi_3\rangle \int_0^1 P(\mu^{\pm},\mu'^{+}) \left\langle \tilde{N}(z,\mu'^{+}),\varphi_2\right\rangle d\mu'^{+} \\ &+\frac{\omega_0}{4}\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle\langle\psi_1\varphi_2,\psi_3\rangle \int_{-1}^0 P(\mu^{\pm},\mu'^{-}) \left\langle \tilde{N}(z,\mu'^{-}),\varphi_2\right\rangle d\mu'^{-} \end{aligned} \tag{F.3}$$

Dans le cas de Haar, la somme se résume également à celle du cas de $T_2^{\varphi\psi}(\mu^{\pm})$.

Le terme $T_4^{\psi\psi}(\mu^{\pm})$ représente la contribution à l'échelle 2^{-j_3} de l'interaction des fluctuations sous-pixel du coefficient d'extinction avec les fluctuations sous-pixel de la fonction radiance.

$$\begin{aligned} T_4^{\psi\psi}(\mu^{\pm}) = &-\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle \left\langle \tilde{N}(z,\mu^{\pm}),\psi_2\right\rangle \langle\psi_1\psi_2,\psi_3\rangle \\ &+\frac{\omega_0}{4}\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle\langle\psi_1\psi_2,\psi_3\rangle \int_0^1 P(\mu^{\pm},\mu'^{+}) \left\langle \tilde{N}(z,\mu'^{+}),\psi_2\right\rangle d\mu'^{+} \\ &+\frac{\omega_0}{4}\sum_1\sum_2 \langle\alpha,\psi_1\rangle\langle\psi_1\psi_2,\psi_3\rangle \int_{-1}^0 P(\mu^{\pm},\mu'^{-}) \left\langle \tilde{N}(z,\mu'^{-}),\psi_2\right\rangle d\mu' \end{aligned} \tag{F.4}$$

Dans le cas de Haar, les cas à considérer sont : $j_1 = j_2 < j_3$, et $k_1 = k_2$ tel que le support de $\psi_1 = \psi_2$ intercepte celui de ψ_3.

Les termes $S_1^{\varphi}(\mu^{\pm})$ et $S_2^{\psi}(\mu^{\pm})$ représentent les contributions à l'échelle 2^{-j_3} des dérivées horizontales des fonctions d'échelle et ondelettes de la fonction radiance :

$$S_1^{\varphi}(\mu^{\pm}) = -\eta\tilde{Q}\sum_1 \langle\partial\varphi_1,\psi_3\rangle \left\langle \tilde{N}(z,\mu^{\pm}),\varphi_1\right\rangle \tag{F.5}$$

Dans le cas de l'AMR de Meyer, $S_1^{\varphi}(\mu^{\pm})$ est à prendre en compte seulement si $j_3 = J$ ou $j_3 = J+1$.

$$S_2^{\psi}(\mu^{\pm}) = -\eta\tilde{Q}\sum_1 \langle\partial\psi_1,\psi_3\rangle \left\langle \tilde{N}(z,\mu^{\pm}),\psi_1\right\rangle \tag{F.6}$$

Dans le cas de l'AMR de Meyer, $\sum_1$ est réduit au cas $|j_3 - j_1| \leq 1$.

Annexe G

Précisions sur les calculs Monte Carlo et SHDOM

On donne ici quelques précisions concernant les codes de calcul pris comme référence dans ce travail, et sur leurs conditions de simulation.

G.1 Précisions sur le code Monte Carlo et son utilisation

La propagation de la lumière dans un milieu autre que le vide peut être vue comme une chaîne de Markov de collision d'un photon, celui-ci pouvant être absorbé ou diffusé [Marchuk et al. 1980]. Un processus de Markov est un processus stochastique $[X(t)]$ où la distribution conditionnelle du processus au temps t_n, $X(t_n)$, ne dépend que de $X(t_{n-1})$. La méthode de Monte Carlo consiste à simuler cette chaîne de Markov. Plus précisément, la méthode de Monte Carlo utilisée ici est celle qui consiste à suivre le photon pas à pas et à moyenner la radiance pour des angles solides prédéterminés (*forward with bin averaging method*), associée à la technique de la section efficace maximale [Marshak et al. 1995]. Les méthodes de Monte Carlo pour résoudre l'Equation du Transfert Radiatif consistent à simuler les trajectoires des photons dans le milieu selon le schéma suivant :

- 1. La position originale du photon est simulée avec une distribution source ;
- 2. Le libre parcours du photon est simulé ;
- 3. Les coordonnées de la nouvelle collision sont calculées ;
- 4. La sortie du photon hors du milieu est examinée ;
- 5. Le type de collision (absorption ou diffusion) est simulé ;
- 6. Le cosinus μ de l'angle de diffusion est simulé ;
- 7. Les coordonnées de la nouvelle direction de diffusion sont calculées.

Les modèles de Monte Carlo directs donnent une estimation des flux radiatifs pour n'importe quelle condition de milieu et d'angle solaire. Les flux et les radiances sont estimés en termes de nombre de photons, où chaque photon représente un quantum d'énergie. Le champ de radiances est discrétisé comme sur la figure G.1. Chacun des hémisphères est divisé en 1116 surfaces : le pas zénithal est constant et vaut $\delta\theta = 5°$; le pas azimutal $\delta\varphi$ est variable et dépend de l'angle zénithal : $\delta\varphi = 30°$ pour $0 \leq \theta \leq 5°$, $\delta\varphi = 15°$ pour $5 \leq \theta \leq 15°$, $\delta\varphi = 10°$ pour $15 \leq \theta \leq 25°$, $\delta\varphi = 5°$ pour $25 \leq \theta \leq 90°$. Afin de comparer les radiances obtenues par ce code et les radiances calculées avec *WaveNum*, nous avons interpolé et extrapolé les radiances Monte Carlo dans les directions définies par notre échantillonnage azimutal – 32 angles et une résolution de 12.5° – et par la quadrature de Gauss pour les angles zénithaux (cf. tableau 5.1), suivant une interpolation spline.

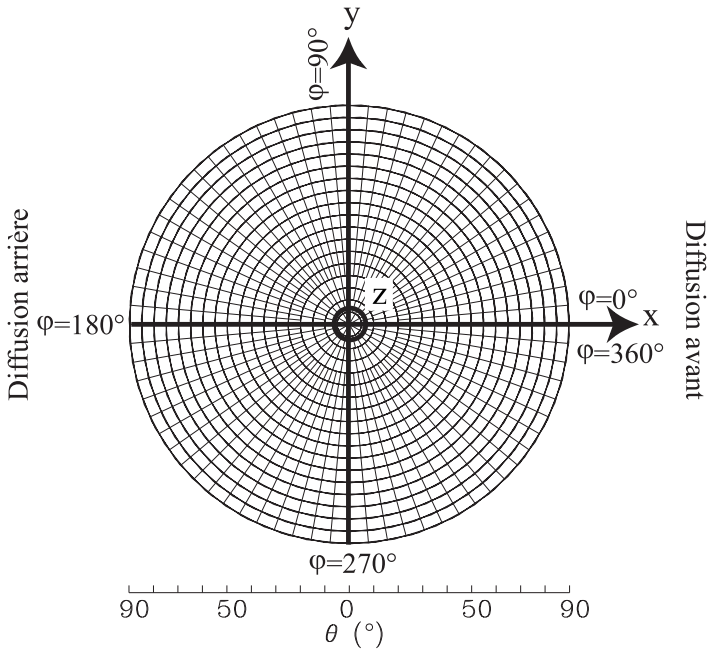


FIG. G.1 – Représentation des 1116 directions angulaires pour lesquelles la radiance est calculée.

La méthode de Monte carlo produit des erreurs statistiques qui naturellement décroissent quand le nombre de photons lancés sur le milieu augmente (loi des grands nombres). En supposant que la trajectoire de chaque photon peut être vu comme une épreuve de Bernoulli[1], si le nombre total de photons incidents vaut N_0, si le nombre de photons émergeant du nuage dans un angle solide élémentaire autour d'une direction considérée vaut N_r, l'erreur relative E_r sur les flux radiatifs dans ces directions peut être estimée [Cahalan et al. 1994b] à partir d'un calcul statistique sur l'écart-type des flux radiatifs :

$$E_r = \left(\frac{N_0 - N_r}{N_0 N_r} \right)^{1/2} . \tag{G.1}$$

Ainsi, en moyenne, c'est à dire si l'on suppose qu'autant de photons sortent du nuage dans chaque direction – ce qui est faux en pratique, l'erreur relative sur chaque radiance vaut :

$$E_r \approx \left(\frac{N_0}{2^L * 1116 * 2} \right)^{-1/2} \tag{G.2}$$

pour chaque radiance issue de chaque pixel nuageux (il y en a 2^L), pour chaque direction (il y en a 1116), aussi bien vers le haut que vers le bas. Dans les simulations Monte Carlo pour notre étude, 3.10^9 photons incidents ont été lancés sur la période nuageuse, et sachant que l'on compte $2^7 = 128$ pixels nuageux par période, le calcul donne une erreur relative moyenne d'environ 1% sur les radiances. L'erreur relative sur les flux pour chaque pixel élémentaire vaut :

$$E_r = \left(\frac{N_0 - N_0/(2^L.2)}{N_0 N_0/(2^L.2)} \right)^{1/2} , \tag{G.3}$$

[1]Les épreuves de Bernoulli sont des essais répétés d'une expérience qui obéissent aux conditions suivantes : chaque épreuve aboutit soit à un succès soit à un échec ; la probabilité de succès est la même pour chaque épreuve ; les épreuves sont indépendantes.

soit, pour chacun des $2^7 = 128$ pixels nuageux, une erreur d'environ $1,15.10^{-4}\%$.

Les radiances et flux calculés avec le code *WaveNum* pour les deux types de nuages simulés dans ce travail, nuage sinusoïdal et "cascade bornée", correspondent à un ordre de diffusion limité. Afin de valider ces calculs, nous avons comparé ces résultats avec ceux issus de deux simulations Monte Carlo distinctes, l'une pour un ordre de diffusion "infini", l'autre pour le même ordre de diffusion limité. Le fait que, par exemple, dans la figure 5.9, les radiances sortantes $MC26$ sont ponctuellement supérieures aux radiances $MC\infty$, ce qui n'a absolument rien de physique, s'explique ainsi par le fait que, premièrement les deux résultats Monte Carlo sont le résultat de deux simulations différentes, deuxièmement ces deux résultats sont entachés d'erreur statistique inhérente à la modélisation Monte Carlo, et troisièmement nous avons interpolé et extrapolé les radiances Monte Carlo dans les 1116 directions angulaires de calcul vers les directions utilisées par le code *WaveNum*.

G.2 Précisions sur le code SHDOM et son utilisation

La méthode des harmoniques sphériques aux ordonnées discrètes (SHDOM) développée par [Evans 1998] combine la représentation du champ de rayonnement avec des harmoniques sphériques et des ordonnées discrètes. La représentation en harmoniques sphériques est utilisée pour calculer rapidement l'intégrale de diffusion. Les ordonnées (angulaires) discrètes sont utilisées pour intégrer spatialement l'équation du transfert radiatif. Ce modèle permet de résoudre l'équation du transfert radiatif en 1D, 2D et 3D pour des rayonnements non polarisés avec des milieux possédant des propriétés variables (coefficient d'extinction, fonction de phase, . . .). Les calculs de transfert radiatif peuvent être réalisés, soit en monochromatique, soit par bande spectrale (en utilisant des k distributions). Les émissions solaire et thermique peuvent être prises en compte. Ce qui distingue ce modèle de transfert radiatif d'autres modèles est, d'une part, l'utilisation des harmoniques sphériques pour accélérer les calculs de l'intégrale de diffusion et, d'autre part, l'emploi d'une grille adaptative pour améliorer la précision spatiale. La méthode de résolution est simplement l'itération entre la fonction source et le champ de radiances, ce qui est équivalent à la méthode des ordres successifs de diffusion (ou une itération de Picard [Kuo et al. 1996]) utilisée dans le présent travail.

Les harmoniques sphériques constituent une base orthogonale pour les fonctions des angles μ et φ (zénithal et azimutal). Comme il a déjà été dit, le calcul de la fonction source est plus rapide dans l'espace des harmoniques sphériques : lorsque la diffusion ne dépend que de l'angle relatif des rayons incident et diffusé, la fonction source, dans l'espace des harmoniques sphériques, est réduite à une simple multiplication :

$$J_{lm}^{scat} = \frac{\omega \chi_l}{2l+1} I_{lm}, \tag{G.4}$$

où I_{lm} est le coefficient en harmoniques sphériques des radiances, χ_l est le coefficient de Legendre pour la décomposition de la fonction de phase, ω l'albédo de diffusion simple. La transformation de la fonction source en ordonnées discrètes permet de calculer la radiance en ordonnées discrètes en intégrant l'équation du transfert radiatif.

La méthode de résolution est une itération de Picard décrit dans la figure G.2. Elle comprend quatre étapes principales :

- 1) la fonction source en harmoniques sphériques est transformée en ordonnées discrètes,
- 2) la fonction source est intégré spatialement pour obtenir le champ de radiances,
- 3) le champ de radiances est transformé en harmoniques sphériques,

– 4) la fonction source est calculée à partir du champ de radiances en harmoniques sphériques.

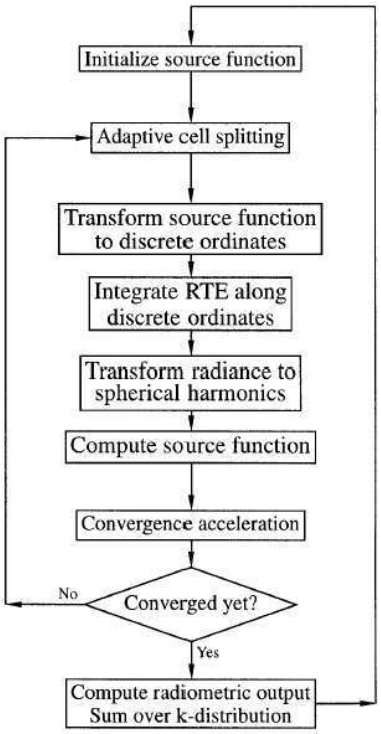


FIG. G.2 – Graphique représentant l'algorithme de calcul de SHDOM (d'après [Evans 98]).

Quelques techniques sont utilisées pour rendre plus performants les calculs. La convergence du calcul est accélérée ; elle repose sur une convergence géométrique de la fonction source :

$$J'^{(n)} = J^{(n)} + a(J^{(n)} - J^{(n-1)}), \tag{G.5}$$

avec a déterminé d'après les propriétés de convergence géométrique. De plus, une troncature adaptative en harmoniques sphériques permet que l'ordre de la série varie en chaque point de grille, ce qui permet de sauver de la mémoire de calcul. Une grille adaptative est implémentée afin d'augmenter la résolution dans les parties denses du nuage et dans celles où existe une variation importante du champ de rayonnements (sommet et bord de nuage). Cette approche est utilisée en dynamique des fluides [Melton 1995]. Une grille régulière est définie initialement, mais au cours des itérations, les mailles peuvent être divisées afin d'augmenter la résolution spatiale. Le critère de division d'une maille est basé sur la variation de la fonction source dans cette maille. Enfin, le champ de radiances et la fonction source sont initialisés avant la séquence d'itérations par une solution du transfert radiatif de type Eddington .

Les caractéristiques des simulations SHDOM effectuées dans ce travail sont les suivantes :

- 16 angles zénithaux en 0 et 180° définis par la quadrature de Gauss,
- 32 angles azimutaux entre 0 et 360°,
- 1 m de résolution verticale
- le critère pour la convergence du calcul est de 1.10^{-5} sur l'écart-type normalisé de la différence entre deux fonctions sources successives
- la méthode "Delta-M scaling" est utilisée pour réduire le pic de diffusion avant de la fonction de phase, ce qui passe par une mise à l'échelle de la fonction de phase, de l'albédo de diffusion simple, et du coefficient d'extinction.

Les radiances SHDOM que l'on compare aux radiances calculées par *WaveNum*, sont obtenues par intégration spatiale des fonctions sources en fin d'itérations suivant les ordonnées angulaires discrètes de *WaveNum*.

Résumé

Le transfert radiatif en atmosphère nuageuse est une donnée essentielle dans l'étude du climat. A cause de ses aspects non-linéaire et multiéchelle, une des difficultés du transfert radiatif tient à la prise en compte des hétérogénéités spatiales des propriétés microphysiques (variabilité horizontale, hétérogénéité géométrique, ...), tant d'un point de vue théorique que numérique. Afin de répondre à cette problématique, nous utilisons ici l'analyse multirésolution de type ondelette dans une méthode de Galerkin appliquée à l'Equation du Transfert Radiatif.
Cette méthode permet de formaliser le problème du transfert radiatif en milieu hétérogène en distinguant les processus élémentaires d'interaction entre le champ de rayonnements et le milieu, décrits par des coefficients de connexion.
Cette réécriture a conduit à la mise au point d'un code de calcul, conu comme un "modèle instrument", un outil d'analyse des problèmes d'échelle en transfert radiatif. Les résultats ont été validés par rapport aux codes Monte Carlo et SHDOM.
Des premières simulations ont montré l'intérêt de cette approche pour quantifier les sources radiatives additionnelles à l'échelle de pixels dits d'approximation dues aux interactions sous-pixel, et pour l'étude originale des effets " 3D".
Cette nouvelle approche ouvre des possibilités d'application aux études en cours sur les limitations des codes de calcul existants et des techniques d'inversion (dimension des pixels, hypothèses d'hétérogénéité verticale, ...), et peut amener à la construction de paramétrisation des hétérogénéités nuageuses.

Mots clés : transfert radiatif, nuages, hétérogénéité, analyse multirésolution, méthode de Galerkin-Ondelette.

Abstract

Radiative transfer in cloudy atmosphere is essential in climate study. Regarding its non-linear and multiscale aspects, one of the difficulties of radiative transfer is to account for spatial heterogeneities of cloud microphysic properties (horizontal variability, geometric heterogeneity), from both theoretical and numerical points of view.
In order to answer these problems, we use a wavelet multiresolution analysis in a Galerkin method applied to the radiative transfer equation.
This method yields the formalization of radiative transfer in heterogeneous medium by differentiating the elementary interaction processes betwen the radiation field and the medium, described by connection coefficients.
This rewriting leads us to build a code, designed as an "instrument model", a tool that analyses scale problems in radiative transfer. The results have been validated with Monte Carlo and SHDOM codes. First simulations demonstrate the interest of this approach to quantify additional radiative sources at approximation pixel scale due to scale interactions, and for the original study of 3D radiative effects. This new approach opens up applications in the current studies concerning the limitations of existing codes and inversion procedures (pixel size, vertical homogenity hypothesis, ..), and can give rise to the making of cloud heterogeneity parameterisation.

Keywords : radiative transfer, cloud, heterogenity, multiresolution analysis, Wavelet-Galerkin method.