



# Méthodes de Volumes Finis et Singularités

Karim Djadel

## ► To cite this version:

Karim Djadel. Méthodes de Volumes Finis et Singularités. Mathématiques [math]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2005. Français. NNT : . tel-00010772

**HAL Id: tel-00010772**

**<https://theses.hal.science/tel-00010772>**

Submitted on 26 Oct 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthodes de Volumes Finis et singularités

# Table des Matières

|                                                                                                                                  |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Table des Matières</b>                                                                                                        | <b>1</b>  |
| <b>Introduction générale</b>                                                                                                     | <b>5</b>  |
| <b>I Méthodes de Volumes Finis et singularités de coin bidimensionnelles</b>                                                     | <b>9</b>  |
| <b>1 Introduction</b>                                                                                                            | <b>11</b> |
| 1.1 Position du problème . . . . .                                                                                               | 11        |
| 1.2 Espaces de Sobolev à poids - régularité de la solution . . . . .                                                             | 12        |
| 1.3 Plan de la première partie . . . . .                                                                                         | 15        |
| Notations importantes de la première partie                                                                                      | <b>16</b> |
| <b>2 Méthode de Volumes Finis centrée cellule raffinée en présence d'une singularité de coin</b>                                 | <b>19</b> |
| 2.1 Notations-Définitions . . . . .                                                                                              | 19        |
| 2.2 Schéma numérique . . . . .                                                                                                   | 20        |
| 2.3 Majoration d'erreur . . . . .                                                                                                | 22        |
| 2.4 Essais numériques . . . . .                                                                                                  | 30        |
| <b>3 Méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur des éléments finis conformes en présence d'une singularité de coin</b>           | <b>35</b> |
| 3.1 Notations-Définitions . . . . .                                                                                              | 35        |
| 3.2 Schéma numérique . . . . .                                                                                                   | 37        |
| 3.3 Résultats préliminaires . . . . .                                                                                            | 39        |
| 3.4 Majoration d'erreur . . . . .                                                                                                | 42        |
| 3.5 Essais numériques . . . . .                                                                                                  | 47        |
| <b>4 Une méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur des éléments finis non conformes en présence d'une singularité de coin</b>   | <b>51</b> |
| 4.1 Notations . . . . .                                                                                                          | 51        |
| 4.2 Schéma numérique . . . . .                                                                                                   | 53        |
| 4.3 Résultats préliminaires . . . . .                                                                                            | 54        |
| 4.4 Majoration d'erreur . . . . .                                                                                                | 56        |
| 4.5 Essais numériques . . . . .                                                                                                  | 64        |
| <b>5 Méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme raffinée en présence d'une singularité de coin pour le problème de Stokes</b> | <b>67</b> |
| 5.1 Position du problème et résultats de régularité . . . . .                                                                    | 67        |
| 5.2 Schéma numérique . . . . .                                                                                                   | 69        |
| 5.3 Résultats préliminaires . . . . .                                                                                            | 70        |

|           |                                                                                                                                                                           |            |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.4       | Majoration d'erreur . . . . .                                                                                                                                             | 73         |
| 5.5       | Essais numériques . . . . .                                                                                                                                               | 82         |
| <b>6</b>  | <b>Discrétisation de l'équation de Navier-Stokes par une méthode d'Éléments-Volumes non conforme sur un ouvert polygonal non-convexe de <math>\mathbb{R}^2</math></b>     | <b>87</b>  |
| 6.1       | Position du problème et résultats de régularité . . . . .                                                                                                                 | 87         |
| 6.2       | Schéma numérique . . . . .                                                                                                                                                | 89         |
| 6.3       | Existence et unicité de la solution approchée . . . . .                                                                                                                   | 92         |
| 6.4       | Majoration d'erreur . . . . .                                                                                                                                             | 96         |
| 6.5       | Essais numériques . . . . .                                                                                                                                               | 104        |
| <b>7</b>  | <b>Application de la méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme à quelques cas tests de la mécanique des fluides</b>                                                   | <b>107</b> |
| 7.1       | Premier cas test : La cavité entraînée . . . . .                                                                                                                          | 108        |
| 7.2       | Second cas test : La marche descendante . . . . .                                                                                                                         | 109        |
| <b>II</b> | <b>Méthodes de Volumes Finis et anisotropie en dimension deux</b>                                                                                                         | <b>113</b> |
| <b>1</b>  | <b>Introduction</b>                                                                                                                                                       | <b>115</b> |
| 1.1       | Position du problème . . . . .                                                                                                                                            | 115        |
| 1.2       | Maillages anisotropes . . . . .                                                                                                                                           | 117        |
| 1.3       | Comportement de la solution . . . . .                                                                                                                                     | 118        |
| 1.4       | Plan de la seconde partie . . . . .                                                                                                                                       | 120        |
|           | Notations importantes de la seconde partie                                                                                                                                | <b>122</b> |
| <b>2</b>  | <b>Méthode de Volumes Finis centrée cellule pour les problèmes de réaction-diffusion sur des maillages anisotropes</b>                                                    | <b>125</b> |
| 2.1       | Notations-Définitions . . . . .                                                                                                                                           | 125        |
| 2.2       | Schéma numérique . . . . .                                                                                                                                                | 127        |
| 2.3       | Majoration d'erreur . . . . .                                                                                                                                             | 128        |
| 2.4       | Essais numériques . . . . .                                                                                                                                               | 142        |
| <b>3</b>  | <b>Méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur des éléments conformes pour les problèmes de réaction-diffusion sur des maillages anisotropes</b>                           | <b>145</b> |
| 3.1       | Notations-Définitions . . . . .                                                                                                                                           | 145        |
| 3.2       | Schéma numérique . . . . .                                                                                                                                                | 148        |
| 3.3       | Majoration d'erreur . . . . .                                                                                                                                             | 149        |
| 3.4       | Essais numériques . . . . .                                                                                                                                               | 152        |
| <b>4</b>  | <b>Méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur des éléments non conformes pour les problèmes de réaction-diffusion sur des maillages anisotropes : cas des triangles</b>   | <b>155</b> |
| 4.1       | Notations-Définitions . . . . .                                                                                                                                           | 155        |
| 4.2       | Schéma numérique . . . . .                                                                                                                                                | 156        |
| 4.3       | Majoration d'erreur . . . . .                                                                                                                                             | 158        |
| 4.4       | Essais numériques . . . . .                                                                                                                                               | 163        |
| <b>5</b>  | <b>Méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur des éléments non conformes pour les problèmes de réaction-diffusion sur des maillages anisotropes : cas des quadrangles</b> | <b>165</b> |
| 5.1       | Notations-Définitions . . . . .                                                                                                                                           | 165        |
| 5.2       | Schéma numérique . . . . .                                                                                                                                                | 167        |
| 5.3       | Majoration d'erreur . . . . .                                                                                                                                             | 167        |
| 5.4       | Essais numériques . . . . .                                                                                                                                               | 175        |

|                                                                                             |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>III Méthodes de Volumes Finis et singularités en dimension trois</b>                     | <b>179</b> |
| <b>1 Introduction</b>                                                                       | <b>181</b> |
| 1.1 Position du problème . . . . .                                                          | 181        |
| 1.2 Espaces de Sobolev à poids - régularité de la solution . . . . .                        | 182        |
| 1.3 Cas particuliers . . . . .                                                              | 185        |
| 1.4 Plan de la troisième partie . . . . .                                                   | 188        |
| Notations importantes de la troisième partie                                                | <b>189</b> |
| <b>2 Méthode de Volumes Finis centrée cellule et singularités en dimension trois</b>        | <b>193</b> |
| 2.1 Notations-définitions . . . . .                                                         | 193        |
| 2.2 Schéma numérique . . . . .                                                              | 194        |
| 2.3 Rappel de la majoration d'erreur dans le cas régulier ( $u \in H^2(\Omega)$ ) . . . . . | 195        |
| 2.4 Essais numériques . . . . .                                                             | 196        |
| <b>3 Méthode d'Éléments-Volumes Finis conforme et singularités en dimension trois</b>       | <b>203</b> |
| 3.1 Notations-Définitions . . . . .                                                         | 203        |
| 3.2 Schéma numérique . . . . .                                                              | 205        |
| 3.3 Rappel de la majoration d'erreur dans le cas régulier ( $u \in H^2(\Omega)$ ) . . . . . | 206        |
| 3.4 Essais numériques . . . . .                                                             | 206        |
| <b>4 Méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme et singularités en dimension trois</b>   | <b>213</b> |
| 4.1 Notations-Définitions . . . . .                                                         | 213        |
| 4.2 Schéma numérique . . . . .                                                              | 215        |
| 4.3 Rappel de la majoration d'erreur dans le cas régulier ( $u \in H^2(\Omega)$ ) . . . . . | 215        |
| 4.4 Essais numériques . . . . .                                                             | 216        |
| <b>5 Estimateur a-posteriori pour la méthode de Volumes Finis centrée cellule en 3D</b>     | <b>219</b> |
| 5.1 Notations-Définitions . . . . .                                                         | 219        |
| 5.2 Introduction de l'estimateur . . . . .                                                  | 221        |
| 5.3 Essais numériques . . . . .                                                             | 223        |
| <b>Conclusion</b>                                                                           | <b>232</b> |
| <b>Appendices</b>                                                                           | <b>234</b> |
| <b>Bibliographie</b>                                                                        | <b>244</b> |

# Remerciements

Je remercie tout d'abord M. Serge NICAISE pour m'avoir permis d'effectuer cette thèse sous sa direction et d'avoir été si patient avec moi, sans lui ce travail n'aurait jamais été possible.

J'adresse aussi mes plus vifs remerciements au président du jury, le Professeur Thierry GOUDON, aux rapporteurs, les Professeurs Raphaële HERBIN et Fayssal BENKHALDOUN, ainsi qu'aux membres du jury, les Professeurs Claude BREZINSKI et Paul DEURING, pour avoir accepté de lire cette thèse et m'avoir fait bénéficier de leur précieuses remarques et suggestions.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance à tout ceux qui, au sein des laboratoires Paul Painlevé de Lille et de Mathématiques Appliquées au Calcul Scientifique de Valenciennes, ont su m'aider et me guider afin d'accomplir ce travail, plus particulièrement Messieurs Emmanuel CREUSÉ et Denis MERCIER avec qui j'ai eu des discussions très enrichissantes.

Je tiens aussi à adresser ma reconnaissance à tout mes collègues thésards qui m'ont maintes fois aidé et éclairé de leurs lumières, plus spécialement Nadir SOUALEM, Delphine JENNEQUIN et Ioannis KAPOPOULOS à qui je dois beaucoup.

Je souhaite enfin remercier ma famille et mes proches pour leur soutien et leur aide précieuse tout au long de cette période.

# Introduction générale

Depuis leur apparition dans les années soixante et les premiers travaux les concernant [88, 91], les méthodes de Volumes Finis n'ont cessé de faire l'objet d'un vif intérêt dans plusieurs sous-disciplines de la Physique (Thermodynamique, Mécanique des Fluides, ...). En effet, de telles méthodes bénéficient de deux caractéristiques fondamentales constituant leur avantages par rapport aux autres méthodes telles que les Différences Finies et les Éléments Finis entre autres :

- leur simplicité algorithmique: les méthodes de Volumes Finis ont, en général, un coût en espace mémoire et en temps de calcul peu élevé et sont caractérisées par une certaine simplicité dans l'écriture des programmes,
- elles obéissent au principe du conservation de flux, ceci expliquant que les méthodes de Volumes Finis soient particulièrement employées dans le domaine de la Mécanique des Fluides.

Néanmoins, d'un point de vue mathématique, ces méthodes sont longtemps restées peu étudiées contrairement aux méthodes d'Éléments Finis ou de Différences Finies. Elles ont donc, depuis quelques années, fait l'objet de travaux mathématiques de plus en plus conséquents (étude de problèmes elliptiques [52, 8, 94, 63], paraboliques [52, 22], hyperboliques [52, 27], équations de Stokes [23, 54, 55] et de Navier-Stokes [13, 42, 54], ...). Parmi les nombreuses méthodes de Volumes Finis, citons :

- la méthode de Volumes Finis centrée cellule [52] : Cette méthode est l'une des premières apparue (initialement sous le nom de méthode de Volumes Finis "cell-center" ou FV4) et est particulièrement efficace sur des maillages structurés. De plus, elle a fait l'objet des premiers travaux mathématiques sur les méthodes de Volumes Finis [63, 52].
- les méthodes d'Éléments-Volumes Finis (conforme et non conforme) [8, 19, 48] : ces méthodes ont été introduites relativement récemment et font l'objet de nombreux travaux (applications aux équations de Navier-Stokes instationnaires, utilisation d'estimateur a-posteriori, ...). Ces méthodes révèlent une volonté de déstructurer les schémas de Volumes Finis plus classiques (centrée cellule par exemple) en les rapprochant de schémas d'Éléments Finis.
- la méthode de Volumes Finis centrée sommet [91] : plus connue sous le nom de méthode de Volumes Finis "cell-vertex", elle est encore relativement peu étudiée mathématiquement.
- la méthode de Volumes Finis diamant [12, 27] : tout comme pour les méthodes d'Éléments-Volumes Finis, le but de cette méthode est de déstructurer les schémas de Volumes Finis de type centré cellule tout en restant dans une méthodologie de Volumes Finis en travaillant notamment toujours sur des flux et en

utilisant des approximations par Différences Finies. Précisons en outre que les estimées établies dans les travaux en vigueur nécessitent des régularités légèrement supérieures à leur équivalents pour la méthode de Volumes Finis centrée cellule.

- la méthode de Volumes Finis mixtes [76] : nous citons cette méthode en tant qu’un des nombreux développements récents concernant les méthodes de Volumes Finis; le but recherché étant, en l’occurrence, de se rapprocher des méthodes d’Éléments Finis mixtes tout en diminuant la complexité algorithmique.

Précisons qu’il existe bien d’autres méthodes de Volumes Finis et que nous ne prétendons donc nullement être exhaustifs dans la liste donnée précédemment.

Dans cette thèse, nous traiterons les deux premières méthodes. Leur étude semble en effet ouvrir la porte à l’analyse de beaucoup d’autres méthodes de Volumes Finis pour lesquelles les techniques développées sont relativement proches. En outre, ces deux méthodes semblent être celles qui trouvent le plus d’échos, aussi bien dans le domaine de la Physique, que dans celui des Mathématiques. Par ailleurs, nous ne nous intéresserons ici qu’aux problèmes elliptiques et plus précisément, pour chaque partie, nous n’étudierons que des problèmes modèles tout en sachant qu’une généralisation à certains opérateurs elliptiques ne pose aucun problème majeur. Les sujets abordés dans cette thèse seront donc les suivants :

- **Première partie** : nous traiterons le cas des singularités de coin bidimensionnelles. En effet, la théorie montre que, si où nous nous plaçons sur un domaine non convexe de  $\mathbb{R}^2$ , la solution d’un problème elliptique perd sa régularité optimale [31, 32, 46]. Par conséquent, toutes les estimées d’erreur établies dans le cadre d’une régularité optimale ne sont plus valables. Nous nous proposons donc de rétablir cet ordre de convergence optimal dans le cas d’une solution non régulière en utilisant, entre autres, des raffinements de maillage locaux comme pour les méthodes d’Éléments Finis [38, 41, 62, 68] et de Différences Finies [44]. Dans une courte introduction, nous présenterons plus en détails le problème et nous introduirons quelques notations et définitions de base concernant cette partie. Pour le problème de Laplace, le cas d’une discrétisation par Volumes Finis centrée cellule sera traité dans le chapitre 2 (pour cette méthode, nous attirons l’attention du lecteur sur des travaux antérieurs [63, 64] dont toutefois les résultats ont des applications assez restrictives), le cas d’une discrétisation par Éléments-Volumes Finis sera, quant à lui, traité en section 3 pour la méthode conforme et en section 4 pour la méthode non conforme (signalons à ce sujet [21] où l’auteur traite de la discrétisation par des méthodes d’Éléments-Volumes Finis d’un problème à singularités de coin bidimensionnelles mais il n’introduit pas les raffinements de maillage locaux afin de restaurer l’ordre de convergence optimal des méthodes). Nous nous intéresserons ensuite, dans les chapitres 5 et 6, aux problèmes de Stokes et de Navier-Stokes considérés sur un ouvert non convexe de  $\mathbb{R}^2$  et discrétisés par une méthode d’Éléments-Volumes Finis non conforme (préférée à la méthode d’Éléments-Volumes Finis conforme pour son coût algorithmique moins élevé). Précisons que l’utilisation d’un schéma de Volumes Finis centrée cellule pour le système de Stokes a été traitée dans [84] et a fait l’objet de travaux extérieurs à cette thèse. Nous proposerons enfin en section 6 quelques applications de la méthode étudiée à quelques cas tests de la Mécanique des Fluides où l’utilisation de raffinements de maillage s’avère pertinente.



- **Seconde partie** : nous nous intéresserons au cas des problèmes de réaction-diffusion perturbés discrétisés sur des maillages anisotropes [2, 75, 74]. Ces maillages vérifient le critère de Delaunay, c'est à dire que les triangles ne sont pas trop "dégénérés" ou "plats" mais de manière critique, cependant ils tiennent compte des spécificités de la solution du problème considéré. De la même manière que pour ce qui a été fait dans la première partie, nous décrirons tout d'abord le problème et introduirons des définitions de base. Nous utiliserons en particulier les résultats théoriques de [2, 49, 74] qui quantifient de manière précise le comportement de la solution de tels problèmes. Les sections 2-4 seront alors dédiées à l'étude de la convergence des méthodes de Volumes Finis centrée cellule, d'Éléments-Volumes Finis conforme et d'Éléments-Volumes Finis non conforme appliquées à un problème de réaction-diffusion perturbé modèle sur des maillages anisotropes. Nous établirons alors la convergence vers la solution exacte des méthodes de Volumes Finis centrée cellule et d'Éléments-Volumes Finis conforme et expliquerons les raisons du mauvais comportement de la méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme (et aussi d'Éléments Finis non conforme du même coup). Afin de résoudre ce problème d'instabilité de la méthode, nous préconiserons l'emploi d'éléments non conformes plus stables et plus précisément le remplacement des éléments triangulaires par des éléments quadrangulaires. Nous démontrerons alors la convergence de la solution approchée vers la solution exacte.
- **Troisième partie** : cette partie sera davantage numérique que théorique et traitera de la discrétisation de problèmes elliptiques par des méthodes de Volumes Finis en présence de singularités tridimensionnelles. En effet, tout comme pour le cas bidimensionnel, la solution d'un problème elliptique sur un domaine non convexe de  $\mathbb{R}^3$  présente des singularités [2, 92, 70]. Cependant, par rapport au cas bidimensionnel, l'expression de ces singularités s'avère plus complexe et leur nature plus variée (singularités de coin et d'arêtes). Nous introduirons dans un premier temps quelques notations et définitions inhérentes à cette partie. La section 2 présentera la méthode de Volumes Finis centrée cellule en dimension trois. Nous mettrons alors en évidence, à l'aide de quelques essais numériques, le meilleur ordre de convergence obtenu sur les maillages raffinés localement par rapport aux maillages uniformes. Nous développerons la même stratégie pour les méthodes d'Éléments-Volumes Finis conforme et non conforme dans les chapitres 3 et 4. La section 5 présentera, quant à elle, un estimateur a-posteriori pour la méthode de Volumes Finis centrée cellule. Les résultats de cette section étant utilisés dans la section 2, nous avons jugé utile d'inclure ceux-ci dans cette partie de la thèse.

Signalons en outre que, pour chaque chapitre, des essais numériques illustrent les résultats théoriques obtenus. Par ailleurs, nous avons cherché à rendre les différentes parties le plus indépendantes possible les unes des autres, le lecteur ne s'étonnera donc pas de voir certaines définitions se répéter d'une partie à l'autre. Enfin, pour chaque méthode étudiée, nous avons adopté les notations des références de base utilisées (c'est à dire [52] pour la méthode de Volumes Finis centrée cellule, [2] pour la méthode d'Éléments-Volumes Finis conforme et [65, 66] pour la méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme).



## Première partie

# Méthodes de Volumes Finis et singularités de coin bidimensionnelles



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Position du problème

Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal connexe de  $\mathbb{R}^2$  de bord  $\Gamma$ , où  $\Gamma$  est l'union finie de  $N$  segments  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Notons alors, pour  $j \in \{1, \dots, N\}$ ,

- $O_j$  l'intersection entre  $\bar{\Gamma}_j$  et  $\bar{\Gamma}_{j+1}$ , en convenant que  $\Gamma_1 = \Gamma_{N+1}$ ,
- $\omega_j$  l'angle intérieur à  $\Omega$  en  $O_j$  (voir figure 1.1).

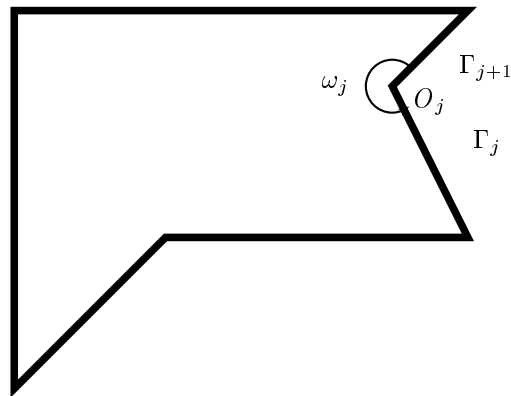


FIG. 1.1 – *Domaine  $\Omega$*

Nous introduisons  $W := \{ j \in \llbracket 1, N \rrbracket : \omega_j > \pi \}$ .

Soit  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ . Nous considérons alors le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} L(u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = g \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

où

$$L(.) := \sum_{i,j=1}^2 D^i a_{ij} D^j + a_0.$$

tel qu'il existe une constante  $\tau > 0$  telle que :

- $a_0 \in C^1(\bar{\Omega})$  et  $\forall M \in \bar{\Omega}, a_0(M) \geq \tau$ ,
- $\forall i, j \in \{1, 2\}, a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$  et  $\forall M \in \bar{\Omega}, a_{ij}(M) = a_{ji}(M)$ ,
- $\forall i, j \in \{1, 2\}, \forall M \in \bar{\Omega}, \forall \xi := (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(M) \xi_i \xi_j \geq \tau |\xi|^2$ .

Le problème (1.1.1) admet une unique solution  $u \in H^1(\Omega)$ . En outre, il est bien connu que dans le cas où  $\Omega$  est convexe (c'est à dire  $W = \emptyset$ ),  $u \in H^2(\Omega)$  (voir le théorème 3.2.1.2 de [46]).

En revanche, dans le cas où  $W \neq \emptyset$ ,  $u \notin H^2(\Omega)$  (sauf si  $f$  vérifie certaines relations d'orthogonalité [46]) à cause de la présence de singularités de coin en  $O_j$  pour  $j \in W$ . Il faut alors introduire de nouveaux espaces pour décrire le comportement de  $u$  près des sommets  $O_j, j \in W$ .

## 1.2 Espaces de Sobolev à poids - régularité de la solution

Définissons, pour  $j \in W$  :

$$r_j : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$M \longmapsto r_j(M) = d(M, O_j),$$

et introduisons les espaces de Sobolev à poids définis, pour l'ensemble  $W$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\beta \in [0, 1[$ , par

$$H_W^{m,\beta}(\Omega) :=$$

$$\{ u \in H^{m-1}(\Omega) : |u|_{m,\beta,\Omega}^2 := \int_{\Omega} \left| \min_{j \in W} r_j(x)^\beta D^\alpha u(x) \right|^2 dx < +\infty, \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 : |\alpha| = m \},$$

muni de la norme  $\|u\|_{m,\beta,\Omega} := (\|u\|_{m-1,\Omega}^2 + |u|_{m,\beta,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Il peut être alors prouvé que, dans le cas où  $W \neq \emptyset$ , la solution  $u$  de (1.1.1) appartient à  $H_W^{2,\beta}(\Omega)$ , pour tout  $\beta$  tel que  $\max_{j \in W} \{1 - \frac{\pi}{\omega_j}\} < \beta < \frac{1}{2}$ , et qu'elle admet de plus la décomposition

$$u = \tilde{u} + \sum_{j \in W} c_j u_j,$$

où, pour tout  $j \in W$ ,  $c_j \in \mathbb{R}$  et  $\tilde{u}$ , resp.  $u_j$ , constitue la partie régulière, resp. la partie singulière relative au sommet  $O_j$ , du problème (1.1.1). Plus de détails sur cet aspect sont disponibles dans [31] et [46].

Donnons à présent quelques propositions intéressantes pour la suite de notre travail. Nous convenons que pour les quelques propositions que nous allons énoncer, nous omettrons l'indice  $W$  de  $H_W^{2,\beta}(\Omega)$ , ceci nous permettant d'alléger les notations.

**Proposition 1.2.1.** Soit  $u \in H^{2,\beta}(\Omega)$  la solution de (1.1.1) avec  $\max_{j \in W} \{1 - \frac{\pi}{\omega_j}\} < \beta < \frac{1}{2}$ . Il existe alors une constante  $C \in \mathbb{R}_+^*$  telle que

$$|u|_{2,\beta,\Omega} \leq C \|f\|_{0,\Omega} .$$

Preuve: voir [46] ■

**Proposition 1.2.2.** Soient  $\Omega$  un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^2$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\beta \in [0,1[$ . Nous avons alors le plongement de Sobolev suivant :

$$H^{m,\beta}(\Omega) \hookrightarrow_c H^{m-1}(\Omega) , .$$

Preuve: voir [38] ■

**Proposition 1.2.3.** Soient  $\Omega$  un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^2$ ,  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$  et  $\beta \in [0,1[$ . Nous avons :

$$H^{m,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-1}(\bar{\Omega}) .$$

Preuve: voir [38] ■

**Proposition 1.2.4.** Soient  $\Omega$  un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^2$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\beta \in [0,1[$ . Nous avons :

$$H^{m,\beta}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) , \forall p < \frac{2}{1+\beta} .$$

Preuve: Se déduit par l'inégalité de Hölder (voir le lemme 8.4.1.2 de [46]). ■

**Proposition 1.2.5.** Soient  $\Omega$  un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^2$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\beta \in [0,1/2[$ . Nous avons :

$$H^{m,\beta}(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}(\partial\Omega) .$$

Preuve: Un théorème de trace standard (voir le théorème 3 de l'appendice [IM] de [50]) fournit

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}(\partial\Omega) , \forall p \geq \frac{4}{3} .$$

Le résultat de la proposition 1.2.4 vient alors par composition du plongement précédent et de celui de la proposition 1.2.4. ■

**Proposition 1.2.6.** (Lemme de Bramble-Hilbert) Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^2$  et  $f : H^{1,\beta}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue s'annulant sur  $\mathcal{P}^0(\Omega)$ . Nous avons alors :

$$|f(v)| \leq C(f,\Omega) |v|_{1,\beta} , \forall v \in H^{1,\beta}(\Omega) , \forall \beta \in [0,1/2[ .$$

Preuve: En utilisant des arguments identiques à ceux du lemme 8.4.1.3 de [46], nous obtenons que

$$\inf_{p \in \mathbb{P}^0(\Omega)} \|v - p\|_{1,\beta,\Omega} \lesssim |v|_{1,\beta,\Omega}, \forall v \in H^{1,\beta}(\Omega).$$

Nous pouvons alors écrire que  $|f(v)| = \inf_{p \in \mathbb{P}^0(\Omega)} |f(v + p)| \lesssim \inf_{p \in \mathbb{P}^0(\Omega)} \|v - p\|_{1,\beta,\Omega} \lesssim |v|_{1,\beta,\Omega}$  ce qui nous permet de conclure la preuve de la proposition. ■

Pour  $\Omega$  non convexe, diverses méthodes d'Éléments Finis raffinées ont été étudiées dans le but de compenser les effets des singularités de  $u$  en  $O_j$ ,  $j \in W$  ([38, 89]). Cependant, à notre connaissance, cette démarche a été très peu considérée pour les méthodes de Volumes Finis [63, 64]. Notre but est donc de discrétiser (1.1.1) par diverses méthodes de Volumes Finis raffinées.

La première méthode traitée sera la méthode de Volumes Finis centrée cellule, qui relève d'une approche plutôt mécanique du problème (voir [52, 51, 88]). Nous traiterons ensuite deux autres méthodes dites d'Éléments-Volumes Finis dont la ligne directrice consiste à combiner les méthodes d'Éléments Finis et de Volumes Finis [8, 19, 20].

Dans toute la suite de cette partie, nous conviendrons, sans perte de généralité, que  $W = \{O\}$ , avec  $O := \bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_N$ , où  $\Gamma_1$  est situé sur l'axe  $(Ox)$  (voir figure 1.2). De plus, nous appellerons  $\omega$  l'angle intérieur à  $\Omega$  situé en  $O$  de sens trigonométrique direct, vérifiant  $\omega > \pi$ . Pour simplifier l'écriture, nous désignerons  $H_W^{2,\beta}(\Omega)$  par  $H^{2,\beta}(\Omega)$ ,  $\forall \beta \in [0,1[$ .

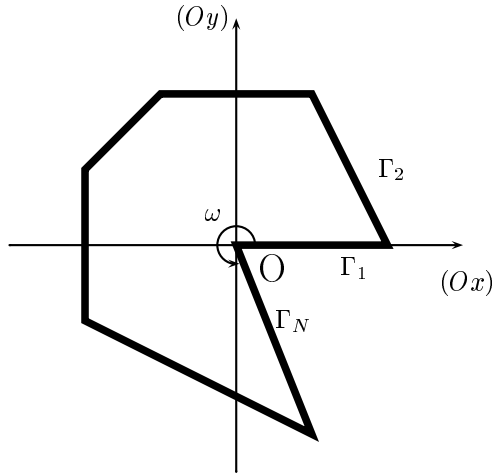


FIG. 1.2 – *Domaine  $\Omega$*

En outre, nous convenons que pour toute cette partie le symbole  $a \lesssim b$  signifiera qu'il existe une constante  $C$ , indépendante des diverses paramètres en jeu (notamment le maillage,  $u$ ,  $a$  et  $b$ ), telle que  $a \leq C b$ .



### 1.3 Plan de la première partie

Dans les chapitres 2-4, nous n'étudierons que le problème de Dirichlet homogène, nous démontrerons en particulier qu'un raffinement de maillage judicieux permet de rétablir l'ordre de convergence optimal des méthodes étudiées (méthodes de Volumes Finis centrée cellule, d'Éléments-Volumes Finis conforme et d'Éléments-Volumes Finis non conforme). Cependant, nous précisons que les techniques utilisées autorisent une généralisation à des opérateurs elliptiques plus généraux, comme celui de (1.1.1), ou à des types de singularités différentes, comme celle intervenant par exemple à l'intersection de deux bords du domaine  $\Omega$  de conditions différentes (la régularité des solutions et les fonctions singulières de tels problèmes étant donné dans [46, 31]). Dans les sections 5 et 6, nous étudierons la discrétisation des systèmes de Stokes et de Navier-Stokes par les méthodes d'Éléments-Volumes Finis. Nous décrirons dans un premier temps les singularités de la solution de tels problèmes, nous montrerons ensuite comment des raffinements identiques à ceux opérés dans les sections précédentes permettent de restaurer l'ordre de convergence initial de la méthode. La section 7 présentera quant à elle quelques essais numériques de cette même méthode sur quelques cas tests de la mécanique (cas de la cavité entraînée et de la marche descendante) ce qui illustrera de façon concrète notre exposé sur les singularités de coin en dimension deux.

Rappelons en dernier lieu que, pour chaque méthode de Volumes Finis traitée, nous adopterons les notations utilisées dans les travaux et ouvrages de base, ceci permettant au lecteur de pouvoir s'y référer plus facilement.

## Notations importantes de la première partie

### Domaine

- $\Omega :=$  Ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^2$  présentant un coin non convexe en  $O$
- $\Gamma :=$  Bord de  $\Omega$
- $\omega :=$  Ouverture angulaire du domaine  $\Omega$  en  $O$  ( $\omega > \pi$ )

### Normes

$G$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p > 1$ ,  $\beta \in [0,1)$

- $|\cdot|_{m,p,G} := \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| = m}} \int_G |D^\alpha \cdot|^p dx \right)^{1/p}$
- $\|\cdot\|_{m,p,G} := \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| \leq m}} \int_G |D^\alpha \cdot|^p dx \right)^{1/p}$
- $|\cdot|_{m,G} := \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| = m}} \int_G |D^\alpha \cdot|^2 dx \right)^{1/2}$
- $\|\cdot\|_{m,G} := \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| \leq m}} \int_G |D^\alpha \cdot|^2 dx \right)^{1/2}$
- $|\cdot|_{m,\beta,G} := \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| = m}} \int_G |d(O,x)^\beta D^\alpha \cdot|^2 dx \right)^{1/2}$
- $\|\cdot\|_{m,\beta,G} := \left( \|\cdot\|_{m-1,G}^2 + |\cdot|_{m,\beta,G}^2 \right)$

### Espaces fonctionnels

$G$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p > 1$ ,  $\beta \in [0,1)$

- $C^m(G) := \{ v : G \longrightarrow \mathbb{R} : D^\alpha v \text{ continue sur } G, \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } |\alpha| = m \}$
- $W^{m,p}(G) := \{ v : G \longrightarrow \mathbb{R} : \|v\|_{m,p,G} < \infty \}$
- $H^m(G) := \{ v : G \longrightarrow \mathbb{R} : \|v\|_{s,G} < \infty \}$
- $H_0^m(G) := \{ v \in H^m(G) : D^\alpha v|_{\partial G} \equiv 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } |\alpha| = m-1 \}$
- $H^{m,\beta}(G) := \{ v \in H^{m-1}(G) : |v|_{m,\beta,G} < \infty \}$
- $\mathcal{P}^k(G) :=$  Espace des polynômes de degré au plus  $k \in \mathbb{N}$
- $X_h := \{ v_h \in \mathcal{P}^1(T_h) : v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \}$  ( $T_h$  désignant un maillage de  $\Omega$ )
- $X_h^0 := \{ v_h \in X_h : v_h|_{\partial\Omega} \equiv 0 \}$
- $S_h := \{ v_h \in \mathcal{P}^1(T_h) : \int_e v_h|_K ds = \int_e v_h|_L ds, \forall e \in E_h \text{ avec } e = \bar{K} \cap \bar{L} \}$   
( $E_h$  désignant l'ensemble des arêtes du maillage  $T_h$ )
- $S_h^0 := \{ v_h \in S_h : \int_e v_h|_K ds = 0, \forall e \in E_h \text{ avec } e \subset \bar{K} \cap \partial\Omega \}$
- $(\hat{S}_h^0)^2 := \{ \mathbf{v}_h \in (S_h^0)^2 : \operatorname{div} \mathbf{v}_h|_K = 0, \forall K \in T_h \}$   
( $T_h$  désignant un maillage de  $\Omega$ )

## Divers

- $h_K :=$  Diamètre d'une maille  $K$
- $\rho_K :=$  Maximum du diamètre des cercles inscrits dans une maille  $K$
- $h :=$  Pas du maillage  $T_h$  (i.e.  $\max_{K \in T_h} h_K$ )
- $|\alpha| := \sum_{i=1}^d |\alpha_i|, \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d), d \in \mathbb{N}^*$
- $\operatorname{div} :=$  Opérateur de divergence (i.e.  $\operatorname{div} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \partial v_1 / \partial x + \partial v_2 / \partial y$ )
- $\nabla :=$  Opérateur de gradient (i.e.  $\nabla v := \begin{pmatrix} \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \end{pmatrix}$ )

- $H(v) := \begin{pmatrix} \partial^2 v / \partial^2 x & \partial^2 v / \partial x \partial y \\ \partial^2 v / \partial x \partial y & \partial^2 v / \partial^2 y \end{pmatrix}$ , la Hessienne de la fonction  $v \in C^2$
- $\mathbb{1}_G :=$  Indicatrice du domaine  $G \subset \mathbb{R}^2$
- $|G| :=$  Longueur ou aire du domaine  $G \subset \mathbb{R}^2$
- $\hat{K} :=$  Triangle de référence (i.e. de sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  et  $(0,1)$ )
- $\mathcal{M}_G^0(\cdot) :=$  Opérateur de  $L^2(G)$ -projection,  $G$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$
- $\mathbf{n}_G :=$  Normale unitaire sortante à  $G \subset \mathbb{R}^2$  sur sa frontière
- $r : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, M \longmapsto d(M, O)$

## Chapitre 2

# Méthode de Volumes Finis centrée cellule raffinée en présence d'une singularité de coin

### 2.1 Notations-Définitions

Considérons le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega , \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega , \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$ .

Dans le but de discrétiser (2.1.1) par la méthode de Volumes Finis centrée cellule (ou dite "cell-center"), nous donnons tout d'abord la définition d'un maillage admissible (au sens de la méthode de Volumes Finis centrée cellule). L'introduction de cette définition est motivée par la nécessité de consistance des diverses approximations que nous allons effectuer (voir [33]).

**Définition 2.1.1.** Nous appelons maillage admissible de  $\Omega$ , noté  $\tau$ , tout triplet  $(\mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{E})$ , où :

- a.  $\mathcal{V}$  désigne un ensemble d'ouverts polygonaux convexes de  $\Omega$  appelés Volumes de Contrôle,
- b.  $\mathcal{P}$  désigne un ensemble de points de  $\Omega$  tel que chaque Volume de Contrôle contienne un et un seul point de  $\mathcal{P}$ ,
- c.  $\mathcal{E}$  représente l'ensemble des arêtes des Volumes de Contrôle.

Ce triplet vérifiant :

1.  $\overline{\bigcup_{K \in \mathcal{V}} K} = \overline{\Omega}.$

2. Pour tous Volumes de Contrôle  $K$  et  $L$  :

$$\overline{K} \cap \overline{L} = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{un sommet commun,} \\ \text{une arête complète de } K \text{ et de } L. \end{cases}$$

3. Soient  $x_K \in K$ ,  $x_L \in L$  deux éléments de  $\mathcal{P}$ , où  $K, L \in \mathcal{V}$ .

Si  $\overline{K} \cap \overline{L} =: \sigma \in \mathcal{E}$ , alors le segment  $[x_K, x_L]$  coupe orthogonalement  $\sigma$ .

4. Si  $\sigma \in \mathcal{E}$ , avec  $\sigma \subset \partial\Omega \cap \overline{K}$ ,  $K \in \mathcal{V}$  et si nous posons

$D_{K,\sigma} :=$  demi droite d'origine  $x_K$  perpendiculaire à  $\sigma$ , alors

$D_{K,\sigma} \cap \sigma =: \{x_\sigma\} \neq \emptyset.$

*Remarque 2.1.1.* La condition 3 garantit la consistance de l'approximation qui va être introduite au point suivant [33].

Avant d'aller plus loin, nous introduisons diverses notations qui serviront tout au long de ce chapitre.

Posons

–  $h_K := \text{diam}(K)$ ,  $K \in \mathcal{V}$ ,

–  $h := \max_{K \in \mathcal{V}} \text{diam}(K)$ ,

–  $\mathcal{E}_K := \{\sigma \in \mathcal{E} : \sigma \subset \overline{K}\}$ ,  $K \in \mathcal{V}$ ,

–  $n_{K,\sigma} :=$  la normale unitaire sortante à  $K$  le long de  $\sigma$ ,  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ ,  $K \in \mathcal{V}$ ,

–  $\mathcal{E}_{int} := \{\sigma \in \mathcal{E} : \sigma \subset \Omega\}$ ,

–  $\mathcal{E}_{ext} := \{\sigma \in \mathcal{E} : \sigma \subset \partial\Omega\}$ ,

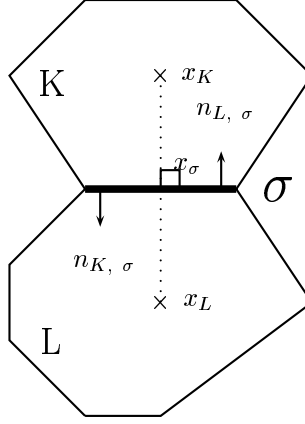
–  $\chi(\tau) := \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \forall K \in \mathcal{V}, v|_K \in \mathbb{P}^0(K)\}$ .

## 2.2 Schéma numérique

Donnons-nous un maillage admissible  $\tau$  de  $\Omega$ . Nous désignons par  $\{u_K\}_{K \in \tau}$  une approximation de  $\{u(x_K)\}_{K \in \tau}$ .

Posons, pour  $K \in \mathcal{V}$ ,  $f_K := \frac{1}{|K|} \int_K f \, dx$  et donnons la figure 2.1 pour plus de clarté dans notre explication.

Introduisons à présent la formulation du problème (2.1.1) au sens de la méthode de Volumes Finis centrée cellule.

FIG. 2.1 – *exemple d'interface  $\sigma \in \mathcal{E}$* 

$$-\Delta u = f$$

$$\Downarrow$$

$$-\int_K \Delta u \, dx = \int_K f \, dx \, , \, \forall K \in \mathcal{V}$$

$$\Downarrow$$

$$-\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_{\sigma} \nabla u \cdot n_{K,\sigma} \, ds = |K| f_K \, , \, \forall K \in \mathcal{V} . \quad (2.2.1)$$

Pour tout  $K \in \mathcal{V}$ , nous approchons  $\nabla u \cdot n_{K,\sigma}$  par  $\frac{u_{\sigma} - u_K}{d(x_K, x_{\sigma})}$ , où  $u_{\sigma}$  est une variable auxiliaire approchant  $u(x_{\sigma})$  (ceci constitue en fait une approximation par différences finis).

Si  $\sigma := \overline{K} \cap \overline{L} \in \mathcal{E}$  (voir figure 2.1), nous approchons de la même manière  $\nabla u \cdot n_{L,\sigma}$  par  $\frac{u_{\sigma} - u_L}{d(x_L, x_{\sigma})}$ .

Nous utilisons ensuite la conservation du flux, en exigeant que l'approximation du flux sortant de K sur  $\sigma$  soit égale, au signe près, à l'approximation du flux sortant de L sur  $\sigma$ , d'où :

$$\frac{u_{\sigma} - u_L}{d(x_L, x_{\sigma})} = -\frac{u_{\sigma} - u_K}{d(x_K, x_{\sigma})}$$

$$\Downarrow$$

$$u_{\sigma} = \frac{d(x_L, x_{\sigma}) u_K + d(x_K, x_{\sigma}) u_L}{d(x_K, x_L)} .$$

Nous remplaçons alors cette expression de  $u_\sigma$  dans notre approximation du flux de  $u$  sortant de  $K$  sur  $\sigma$ , pour obtenir :

$$\int_{\sigma} \nabla u \cdot n_{K,\sigma} \, ds \sim |\sigma| \frac{u_L - u_K}{d(x_K, x_L)}.$$

*Remarque 2.2.1.* Si  $\sigma \in \overline{K} \cap \partial\Omega$ , nous ne pouvons pas appliquer la conservation du flux. Nous utilisons cependant les conditions de bord de (2.1.1) et approchons  $\nabla u \cdot n_{K,\sigma}$  par  $\frac{u_\sigma - u_K}{d(x_K, x_\sigma)} = \frac{-u_K}{d(x_K, x_\sigma)}$ .

Grâce aux approximations ainsi effectuées et à (2.2.1), nous aboutissons au système linéaire suivant :

$$-\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = |K| f_K, \forall K \in \mathcal{V}, \quad (2.2.2)$$

où :

$$F_{K,\sigma} := \begin{cases} |\sigma| \frac{u_L - u_K}{d(x_K, x_L)} & \text{si } \sigma = \overline{K} \cap \overline{L}, \\ |\sigma| \frac{-u_K}{d(x_K, x_\sigma)} & \text{si } \sigma \subset \overline{K} \cap \partial\Omega. \end{cases}$$

**Proposition 2.2.1.** [52, 33] Soit  $\tau$  un maillage admissible de  $\Omega$ . Le système (2.2.2) admet une unique solution  $(u_K)_{K \in \mathcal{V}}$ .

Preuve: Comme nous sommes en dimension finie, il suffit de démontrer que si  $f \equiv 0$ , alors  $u_K = 0, \forall K \in \tau$ .

Pour ceci, nous multiplions (2.2.2) par  $u_K$  et sommons sur  $K \in \tau$ . Nous obtenons ainsi

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \\ \sigma = \overline{K} \cap \overline{L}}} |\sigma| \frac{|u_L - u_K|^2}{d(x_K, x_L)} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \\ \sigma = \overline{K} \cap \partial\Omega}} |\sigma| \frac{|u_K|^2}{d(x_K, \partial\Omega)} = 0,$$

ce qui implique que  $u_K = 0, \forall K \in \tau$ . ■

## 2.3 Majoration d'erreur

Dans le cas où la solution  $u$  de (2.1.1) est dans  $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ , il peut être démontré une majoration en norme  $L^2$  de l'erreur en  $O(h)$  (voir [52, 33]).

Si la solution de (2.1.1) appartient à  $H^2(\Omega)$ , une majoration d'erreur similaire peut être établie moyennant une hypothèse supplémentaire sur le maillage  $\tau$  (voir théorème 9.4 de [52]).

Cependant, dans le cas que nous traitons  $u \in H^{2,\beta}(\Omega)$ , où  $1 - \frac{\pi}{\omega} < \beta < \frac{1}{2}$ , à cause de la présence d'une singularité en  $O$ . L'idée générale est donc de s'inspirer de la démonstration du théorème 9.4 de [52] (en ajoutant notamment une condition sur le maillage  $\tau$ ) et, afin d'obtenir un ordre de convergence optimal, d'y inclure un raffinement de maillage en  $O$  comme pour les méthodes d'Éléments Finis ([46, 89]).

Dans ce but, il est nécessaire d'imposer de nouvelles conditions sur le maillage  $\tau$ . Nous allons donc définir un maillage admissible restreint raffiné ([46, 89]).

**Définition 2.3.1.** Nous appelons maillage admissible restreint  $\beta$ -raffiné (de  $\Omega$ ), tout maillage admissible  $\tau = (\mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{E})$  de  $\Omega$  tel qu'il existe  $\xi > 0$ , tel que  $\forall K \in \mathcal{V}$  :



$$(H1) \quad h_K \leq \xi d(x_K, \sigma), \forall \sigma \in \mathcal{E}_K ,$$

$$(H2) \quad h_K \leq \xi h^{\frac{1}{1-\beta}} \text{ si } O \in \partial K ,$$

$$(H3) \quad h_K \leq \xi h \min\{1, \inf_K r^\beta\} \text{ si } O \notin \partial K ,$$

où, dans (H3),  $r = r(M) := d(M, 0)$ ,  $\forall M \in \bar{\Omega}$ . Nous soulignons le fait que la condition (H3) ne porte en fait que sur les Volumes de Contrôle "relativement proches" de  $O$ . En effet, si nous nous situons loin du point de singularité, il n'est pas utile d'imposer des conditions de raffinement, la singularité n'ayant qu'un effet local. Donnons à présent le théorème de majoration d'erreur suivant :

**Théorème 2.3.1.** *Soit  $u \in H^{2,\beta}(\Omega)$  la solution de (2.1.1), où  $1 - \frac{\pi}{\omega} < \beta < \frac{1}{2}$ .*

*Soit  $\tau$  un maillage admissible restreint  $\beta$ -raffiné de  $\Omega$  et  $(u_K)_{K \in \mathcal{V}}$  la solution de (2.2.2). Introduisons en outre*

$$\begin{aligned} u_\tau : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} , \\ M &\longmapsto u_\tau := \begin{cases} u_K \text{ si il existe } K \in \mathcal{V} \text{ tel que } M \in K , \\ 0 \text{ ailleurs ,} \end{cases} \\ e_\tau : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} , \\ M &\longmapsto e_\tau := \begin{cases} e_K := u(x_K) - u_K \text{ si il existe } K \in \mathcal{V} \text{ tel que } M \in K , \\ 0 \text{ ailleurs ,} \end{cases} \\ |\cdot|_{\tau, \Omega} : \chi(\tau) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ , \\ v &\longmapsto \left( \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E} \\ \sigma = \bar{K} \cap \bar{L}}} |\sigma| \frac{|v|_K - v|_L|^2}{d(x_K, x_L)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E} \\ \sigma \subset \bar{K} \cap \bar{\Omega}}} |\sigma| \frac{|v|_K|^2}{d(x_K, \partial\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\|e_\tau\|_{0, \Omega} + |e_\tau|_{\tau, \Omega} \lesssim h |u|_{2, \beta, \Omega} . \quad (2.3.1)$$

*Remarque 2.3.1.*  $|\cdot|_{\tau, \Omega}$  définit une norme sur  $\chi(\tau)$  (voir [33]).

Preuve:

Posons, pour  $K \in \mathcal{V}$ ,  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ :

$$\nu_{K, \sigma} := \{(1-t)x_K + tx : t \in [0, 1] \text{ et } x \in \sigma\} .$$

Définissons alors:

$$\nu_\sigma := \begin{cases} \nu_{K,\sigma} \cup \nu_{L,\sigma} & \text{si ils existent } K, L \in \mathcal{V} \text{ tels que } \sigma = \overline{K} \cap \overline{L} , \\ \nu_{K,\sigma} & \text{si il existe } K \in \mathcal{V} \text{ tel que } \sigma \subset \partial K \cap \partial\Omega . \end{cases}$$

Première étape: Montrons que :

$$|R_{K,\sigma}| \lesssim \frac{h}{(|\sigma|d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} |u|_{2,\beta,K} , \forall \sigma \in \mathcal{E}_K, \forall K \in \mathcal{V} , \quad (2.3.2)$$

$$\text{où } R_{K,\sigma} := \begin{cases} \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \nabla u \cdot n_{K,\sigma} ds & \text{si ils existent } K, L \in \mathcal{V} \text{ tels que } \sigma = \overline{K} \cap \overline{L} , \\ \frac{-u(x_K)}{d_\sigma} - \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \nabla u \cdot n_{K,\sigma} ds & \text{si il existe } K \in \mathcal{V} \text{ tel que } \sigma \subset \partial K \cap \partial\Omega , \end{cases}$$

$$\text{et } d_\sigma := \begin{cases} d(x_K, x_L) & \text{si ils existent } K, L \in \mathcal{V} \text{ tels que } \sigma = \overline{K} \cap \overline{L} , \\ d(x_K, \partial\Omega) & \text{si il existe } K \in \mathcal{V} \text{ tel que } \sigma \subset \partial K \cap \partial\Omega . \end{cases}$$

Cette 1<sup>ère</sup> étape constitue en fait une sorte de lemme qui nous servira dans l'étape suivante de la preuve où nous montrerons la majoration d'erreur à proprement parler.

Soit  $\sigma \in \mathcal{E}$ . Nous supposons que  $u \in C^2(\overline{\mathcal{T}}_\sigma)$ . En effet, vu que, par le théorème 3.2.2 de [99], nous avons  $C^\infty(\overline{\Omega})$  qui est dense dans  $W_2^2(\Omega, r^\beta)$ , où

$$W_2^2(\Omega, r^\beta) := \{v \in \mathcal{D}'(\Omega) : r^\beta D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq 2\} ,$$

étant donné que

$$H^{2,\beta}(\Omega) \hookrightarrow W_2^2(\Omega, r^\beta) ,$$

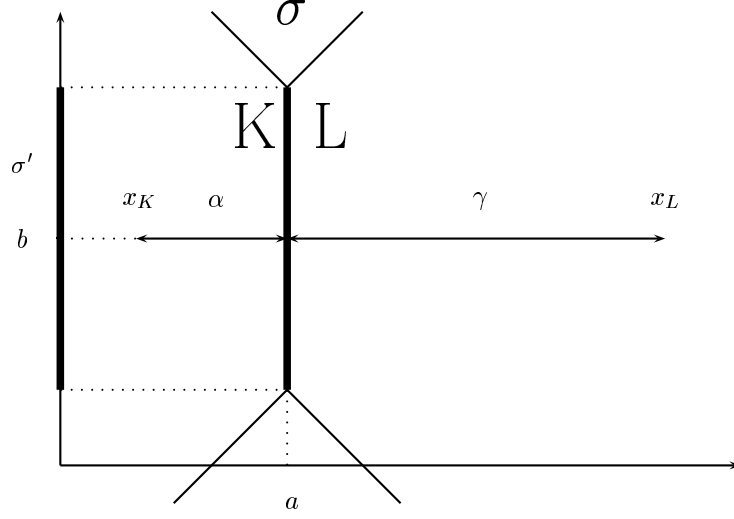
et vu que les membres de droite et de gauche de (2.3.2) sont continus par rapport à la norme standard de  $W_2^2(\Omega, r^\beta)$  (vu que  $W_2^2(\Omega, r^\beta) \hookrightarrow W^{2,p}(\Omega), \forall p \in ]1, \frac{2}{1+\beta}[$ ), nous pouvons donc démontrer (2.3.2) pour  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  et le déduire pour  $u \in H^{2,\beta}(\Omega)$ .

Nous distinguons les différents cas suivants :

$$\boxed{1^\circ \text{ cas}} \quad \underline{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \text{ avec } \sigma = \overline{K} \cap \overline{L}, K, L \in \mathcal{V}}$$

Nous supposons, sans perte de généralité, que  $\sigma = \{a\} \times \sigma'$ , où  $\sigma'$  est un segment de  $\mathbb{R}$ , et que  $x_K := (a - \alpha, b)^T$ ,  $x_L := (a + \gamma, b)^T$ , où  $b \in \sigma'$  et  $\alpha, \gamma > 0$  (voir figure 2.2).

Par des développements de Taylor d'ordre 2 de  $u$  en  $x_K$  et  $x_L$ , nous obtenons

FIG. 2.2 – *illustration du 1° cas*

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x_L) - u(s) = \nabla u(s) \cdot (x_L - s) \\ \quad + \int_0^1 H(u)(ts + (1-t)x_L) (x_L - s) \cdot (x_L - s) t \, dt, \forall s \in \sigma, \\ u(x_K) - u(s) = \nabla u(s) \cdot (x_K - s) \\ \quad + \int_0^1 H(u)(ts + (1-t)x_K) (x_K - s) \cdot (x_K - s) t \, dt, \forall s \in \sigma. \end{array} \right. \quad (2.3.3)$$

Nous soustrayons membre à membre les deux égalités de (2.3.3), en notant que  $x_L - x_K = n_{K,\sigma} d_\sigma$ , puis intégrons sur  $\sigma$ , d'où :

$$R_{K,\sigma} \leq B_{K,\sigma} + B_{L,\sigma}, \quad (2.3.4)$$

où :

$$B_{K,\sigma} := \frac{1}{|\sigma|d_\sigma} \int_\sigma \int_0^1 |||H(u)(ts + (1-t)x_K)||| \|s - x_K\|^2 t \, dt \, ds \quad (2.3.5)$$

et  $B_{L,\sigma}$  est définie en remplaçant  $x_K$  par  $x_L$  ( $|||\cdot|||$  désignant la norme matricielle associée à la norme vectorielle  $\|\cdot\|$ ). Nous passons en coordonnées cartésiennes dans (2.3.5). Le changement de variable s'écrit alors en reprenant les notations de la figure 2.2

$$D_{K,\sigma} : [0,1] \times \sigma \longrightarrow \nu_{K,\sigma}$$

$$(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t) x_{K,1} + ta \\ (1-t) x_{K,2} + ts \end{pmatrix}.$$

Le calcul du jacobien de ce changement de variable nous fournit que  $dz := dx dy = t(a - x_{K,1}) dt ds = t \alpha dt ds$ . En remarquant que  $|x_K - s| \leq h_K$ ,  $\forall s \in \sigma$ , nous en déduisons que

$$B_{K,\sigma} \leq \frac{h_K^2}{|\sigma| d_\sigma \alpha} \int_{\nu_{K,\sigma}} \|H(u)(z)\| dz. \quad (2.3.6)$$

A partir de maintenant, et dans le but d'alléger les notations, nous remplaçons la notation de la norme matricielle  $\| \cdot \|$  par  $|\cdot|$ . Procédons à l'étude de 2 sous-cas, selon que  $O$ , le point de singularité, soit situé ou non dans  $\bar{K}$ . Nous nous aiderons alors de (2.3.4) (l'estimée que nous allons prouver pour  $B_{K,\sigma}$  étant aussi vraie pour  $B_{L,\sigma}$ ) pour démontrer (2.3.2).

1° sous-cas:  $O \notin \partial K$

Nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivi de l'hypothèse (H3) au membre de droite de (2.3.6) pour obtenir :

$$\begin{aligned} B_{K,\sigma} &\leq \frac{h_K^2}{|\sigma| d_\sigma \alpha} \left( \int_{\nu_{K,\sigma}} r(z)^{-2\beta} dz \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\nu_{K,\sigma}} |r(z)^\beta H(u)(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{\text{hyp. (H3)}}{\leq} \xi \frac{h h_K}{|\sigma| d_\sigma \alpha} \left( \int_{\nu_{K,\sigma}} \inf_{x \in K} r(x)^{2\beta} r(z)^{-2\beta} dz \right)^{\frac{1}{2}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} \\ &\stackrel{\nu_{K,\sigma} \subset K}{\leq} \xi \frac{h h_K}{|\sigma| d_\sigma \alpha} \left( \int_{\nu_{K,\sigma}} \inf_{x \in \nu_{K,\sigma}} r(x)^{2\beta} r(z)^{-2\beta} dz \right)^{\frac{1}{2}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} \\ &\leq \xi \frac{h h_K}{|\sigma| d_\sigma \alpha} \left( \int_{\nu_{K,\sigma}} r(z)^{2\beta} r(z)^{-2\beta} dz \right)^{\frac{1}{2}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} \\ &= \xi \frac{h h_K}{|\sigma| d_\sigma \alpha} |\nu_{K,\sigma}|^{\frac{1}{2}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} \\ &= \xi \frac{h h_K}{|\sigma| d_\sigma \alpha} \left( \frac{\alpha |\sigma|}{2} \right)^{\frac{1}{2}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} \\ &\leq \xi \frac{h h_K}{(|\sigma| d_\sigma)^{\frac{1}{2}} d_\sigma} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} \\ &\leq \frac{h}{(|\sigma| d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}}, \end{aligned}$$

étant donné que  $d_\sigma := d(x_K, x_L) \geq \alpha \geq \frac{1}{\xi} h_K$  par l'hypothèse (H1). Par conséquent :

$$B_{K,\sigma} \lesssim \frac{h}{(|\sigma|d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} . \quad (2.3.7)$$

2° sous-cas :  $O \in \partial K$ .

Nous renvoyons à l'appendice A, où nous démontrons que, grâce à l'hypothèse (H2), nous avons :

$$B_{K,\sigma} \lesssim \frac{h}{(|\sigma|d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} . \quad (2.3.8)$$

Procédons à présent au bilan des deux sous-cas. Grâce à (2.3.7) et à (2.3.8), que nous utilisons dans (2.3.4), nous arrivons à

$$R_{K,\sigma} \lesssim \frac{h}{(|\sigma|d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} (|u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} + |u|_{2,\beta,\nu_{L,\sigma}}) , \forall \sigma \in \mathcal{E} : \sigma = \bar{K} \cap \bar{L} , K, L \in \mathcal{V} .$$

D' où :

$$R_{K,\sigma} \lesssim \frac{h}{(|\sigma|d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} |u|_{2,\beta,\nu_\sigma} , \forall \sigma \in \mathcal{E}_K : \sigma = \bar{K} \cap \bar{L} , K, L \in \mathcal{V} ,$$

c'est à dire (2.3.2).

2° cas :  $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$  avec  $\sigma \subset \partial K \cap \partial\Omega$ ,  $K \in \mathcal{V}$

Nous nous donnons les mêmes conventions qu'au 1° cas à savoir que  $\sigma := \{a\} \times \sigma'$ , où  $\sigma'$  est un segment de  $\mathcal{R}$ . De plus,  $x_K := x_\sigma - (2\alpha, 0)^T$ , où  $x_\sigma$  a été introduit à la définition 2.1.1 et  $\alpha > 0$  (voir figure 2.3).

Posons :

$$\begin{aligned} - \tilde{\sigma} &:= \left\{ \frac{1}{2}x_K + \frac{1}{2}x : x \in \sigma \right\} , \\ - I_\sigma &:= \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \nabla u \cdot n_{K,\sigma} \, ds , \\ - I_{\tilde{\sigma}} &:= \frac{1}{|\tilde{\sigma}|} \int_{\tilde{\sigma}} \nabla u \cdot n_{K,\tilde{\sigma}} \, ds , \\ - \nu_{\tilde{\sigma}}^1 &:= \{(1-t)x_K + t\tilde{x} : \tilde{x} \in \tilde{\sigma}, t \in [0,1]\} , \\ - \nu_{\tilde{\sigma}}^2 &:= \{(1-t)x_\sigma + t\tilde{x} : \tilde{x} \in \tilde{\sigma}, t \in [0,1]\} . \end{aligned}$$

$$\text{Introduisons à présent } R_{K,\tilde{\sigma}} := \frac{u(x_\sigma) - u(x_K)}{2\alpha} - I_{\tilde{\sigma}} ,$$

Nous faisons remarquer au lecteur que nous tenons compte de  $u(x_\sigma)$  car nous ne pouvons pas dire que ce terme vaut 0, l'argument de densité utilisé ne suffisant pas pour le dire. Nous raisonnons alors de manière identique au 1° cas mis à part que nous ne nous plaçons, non pas sur  $\sigma$ , mais sur  $\tilde{\sigma}$ . Nous obtenons alors :

$$R_{K,\tilde{\sigma}} \lesssim \frac{h_K}{|\tilde{\sigma}|\alpha} \left( \left| \int_{\nu_{\tilde{\sigma}}^1} H(u)(z) \, dz \right| + \left| \int_{\nu_{\tilde{\sigma}}^2} H(u)(z) \, dz \right| \right) . \quad (2.3.9)$$

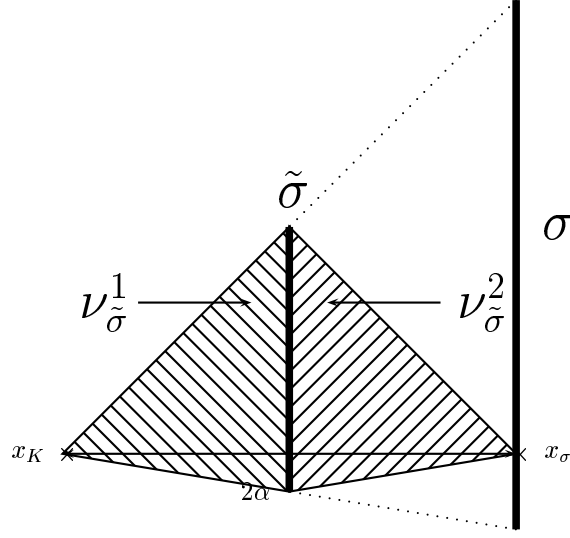


FIG. 2.3 –

De plus, en faisant un développement de Taylor d'ordre 1 de  $\nabla u \cdot n_{K,\sigma}(\cdot)$  sur  $\sigma$ , puis en appliquant un changement de variable, nous avons :

$$|I_\sigma - I_{\tilde{\sigma}}| \lesssim \frac{h_K}{|\sigma|^\alpha} \int_{E_\sigma} H(u)(z) dz, \quad (2.3.10)$$

où  $E_\sigma := \{(1-t)x_K + tx \ : \ x \in \sigma, t \in [\frac{1}{2}, 1]\}$ .

Il nous faut distinguer maintenant le cas où  $O$  appartient à  $\sigma$  du cas où  $O$  n'appartient pas à  $\sigma$ .

1° sous-cas :  $O \notin \sigma$

Nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux membres de droite de (2.3.9) et de (2.3.10), d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} |R_{K,\tilde{\sigma}}| \lesssim \frac{h}{(|\sigma|d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}}, \\ |I_\sigma - I_{\tilde{\sigma}}| \lesssim \frac{h}{(|\sigma|d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}}. \end{array} \right. \quad (2.3.11)$$

2° sous-cas :  $O \in \sigma$

Nous appliquons toujours l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux membres de droite de (2.3.9) et de (2.3.10) et nous obtenons :

$$\begin{cases} |R_{K,\bar{\sigma}}| \lesssim \frac{h_K}{|\sigma|d_\sigma} \left( \int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz \right)^{\frac{1}{2}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} , \\ |I_\sigma - I_{\bar{\sigma}}| \lesssim \frac{h_K}{|\sigma|d_\sigma} \left( \int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz \right)^{\frac{1}{2}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} . \end{cases} \quad (2.3.12)$$

En menant un calcul similaire à celui effectué dans l'appendice A, nous avons :

$$\int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz \lesssim |\sigma| \alpha h_K^{-2\beta} . \quad (2.3.13)$$

En utilisant (2.3.13) dans (2.3.12) et en tenant compte de l'hypothèse de raffinement de maillage (H2), nous arrivons à :

$$\begin{cases} |R_{K,\bar{\sigma}}| \lesssim \frac{h}{(|\sigma|d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} , \\ |I_\sigma - I_{\bar{\sigma}}| \lesssim \frac{h_K}{(|\sigma|d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} . \end{cases} \quad (2.3.14)$$

En conclusion de ces 2 sous-cas (c'est à dire les résultats (2.3.11) et (2.3.14)) et en remarquant que

$$|R_{K,\sigma}| \leq |R_{K,\bar{\sigma}}| + |I_\sigma - I_{\bar{\sigma}}| ,$$

nous avons que

$$|R_{K,\sigma}| \lesssim \frac{h}{(|\sigma|d_\sigma)^{\frac{1}{2}}} |u|_{2,\beta,\nu_{K,\sigma}} , \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext} .$$

En conclusion, nous pouvons dire que (2.3.2) est vrai pour tout  $\sigma \in \mathcal{E}$ .

2<sup>ème</sup> étape: Introduction de  $\|e_\tau\|_{0,\Omega}$ .

Montrons dans un premier temps que

$$|e_\tau|_{\tau,\Omega} \lesssim h |u|_{2,\beta,\Omega} . \quad (2.3.15)$$

Nous soustrayons (2.2.2) à (2.2.1), d'où :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} ( F_{K,\sigma} - \int_\sigma \nabla u \cdot n_{K,\sigma} ds ) = 0 , \forall K \in \mathcal{V} . \quad (2.3.16)$$

$$\text{Posons } F_{K,\sigma}^* := \begin{cases} \frac{|\sigma|}{d_\sigma} (u(x_L) - u(x_K)) \text{ pour } \sigma = \bar{K} \cap \bar{L} , K, L \in \mathcal{V} , \\ \frac{|\sigma|}{d_\sigma} (-u(x_K)) \text{ pour } \sigma \subset \bar{K} \cap \bar{\Omega} , K \in \mathcal{V} . \end{cases}$$

Grâce à (2.3.16), nous avons :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (-F_{K,\sigma}^* + F_{K,\sigma}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} (-F_{K,\sigma}^* + \int_{\sigma} \nabla u \cdot n_{K,\sigma} ds), \forall K \in \mathcal{V} \quad (2.3.17)$$

$$\text{Notons alors que } -F_{K,\sigma}^* + F_{K,\sigma} := \begin{cases} \frac{|\sigma|}{d_{\sigma}}(e_L - e_K) \text{ pour } \sigma = \bar{K} \cap \bar{L}, K, L \in \mathcal{V}, \\ \frac{|\sigma|}{d_{\sigma}}(-e_K) \text{ pour } \sigma \subset \bar{K} \cap \bar{\Omega} \quad K \in \mathcal{V}, \end{cases}$$

où nous rappelons que, pour tout  $K \in \mathcal{T}$ ,  $e_K := u(x_K) - u_K$ . Nous multiplions (2.3.17) par  $e_K$  et sommons sur  $K \in \mathcal{V}$ , d'où :

$$|e_{\tau}|_{\tau,\Omega}^2 = \sum_{K \in \mathcal{V}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| R_{K,\sigma} e_K.$$

Par suite :

$$|e_{\tau}|_{\tau,\Omega} \lesssim h |u|_{2,\beta,\Omega},$$

c'est à dire (2.3.15).

Nous utilisons alors l'inégalité de Poincaré discrète (voir le lemme 9.1 de [52] qui est valable même dans le cas où  $\Omega$  n'est pas convexe), plus précisément :

$$\|e_{\tau}\|_{0,\Omega} \leq \text{diam}(\Omega) |e_{\tau}|_{\tau,\Omega}. \quad (2.3.18)$$

(2.3.15) et (2.3.18) fournissent alors aisément (2.3.1).

■

## 2.4 Essais numériques

Posons  $\Omega := ]-1, 1[ \times ]-1, 1[ \setminus [0, 1[ \times [0, -1[$ .

Avec les notations de l'introduction, nous avons  $\omega := \frac{3\pi}{2}$ . Introduisons alors le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2\theta}{3}) \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4.1)$$

où  $(r, \theta)$  constitue les coordonnées polaires d'origine  $O$ . Nous démontrons aisément que  $u(r, \theta) := r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2\theta}{3})$  est la solution de (2.4.1) d'une part, et que  $u \in H^1(\Omega)$  mais que  $u \notin H^2(\Omega)$  d'autre part. Cependant  $u \in H^{2,\beta}(\Omega)$ , pour  $\beta > 1 - \frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{3}$ .

Nous implémentons alors (2.2.2) lorsque  $\tau$  est un maillage uniforme et lorsque  $\tau$  est un maillage  $\beta$ -raffiné pour  $\beta = \frac{1}{3}$  (voir figures 2.4 et 2.5). La table 2.1 présente alors les divers résultats obtenus sur les deux séries de



maillages. La figure 2.6 présente quant à elle la précision obtenue contre le temps CPU, précisons que, pour la résolution du système linéaire obtenu, nous avons utilisé la méthode du gradient conjugué préconditionné (avec SSOR).

Ces divers renseignements prouvent l'intérêt, dans le cadre de la méthode de Volumes Finis centrée cellule appliquée sur un domaine non convexe, d'un maillage  $\beta$ -raffiné par rapport à un maillage uniforme. En effet, tout d'abord, l'ordre de convergence optimal est rétabli par l'utilisation d'un maillage  $\beta$ -raffiné. De plus, à temps CPU égal, l'utilisation d'un maillage  $\beta$ -raffiné donne une erreur plus faible que pour un maillage uniforme.

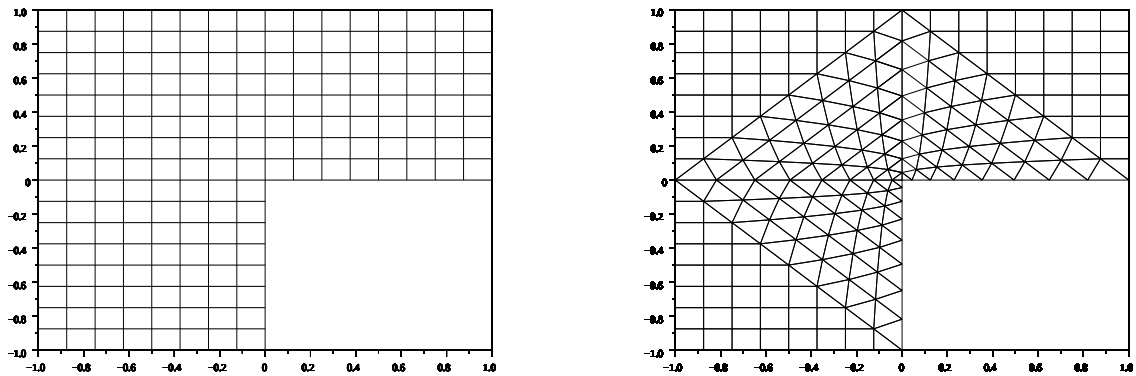


FIG. 2.4 – Maillage uniforme (à gauche) et  $\beta$ -raffiné (à droite) pour  $n = 8$

| $n$ | Maillage uniforme       |                          | Maillage $\beta$ -raffiné |                          |
|-----|-------------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|
|     | $\ e_\tau\ _{0,\Omega}$ | $ e_\tau _{\tau,\Omega}$ | $\ e_\tau\ _{0,\Omega}$   | $ e_\tau _{\tau,\Omega}$ |
| 2   | 3.59E-02                | 1.04E-01                 | 2.57E-02                  | 8.75E-02                 |
| 4   | 1.63E-02                | 7.02E-02                 | 9.02E-03                  | 4.65E-02                 |
| 8   | 6.86E-03                | 4.52E-02                 | 2.87E-03                  | 2.38E-02                 |
| 16  | 2.81E-03                | 2.87E-02                 | 8.65E-04                  | 1.20E-02                 |
| 32  | 1.14E-03                | 1.82E-02                 | 2.53E-04                  | 5.99E-03                 |
| 64  | 4.56E-04                | 1.15E-02                 | 7.23E-05                  | 3.00E-03                 |

TAB. 2.1 – Résultats pour les deux maillages

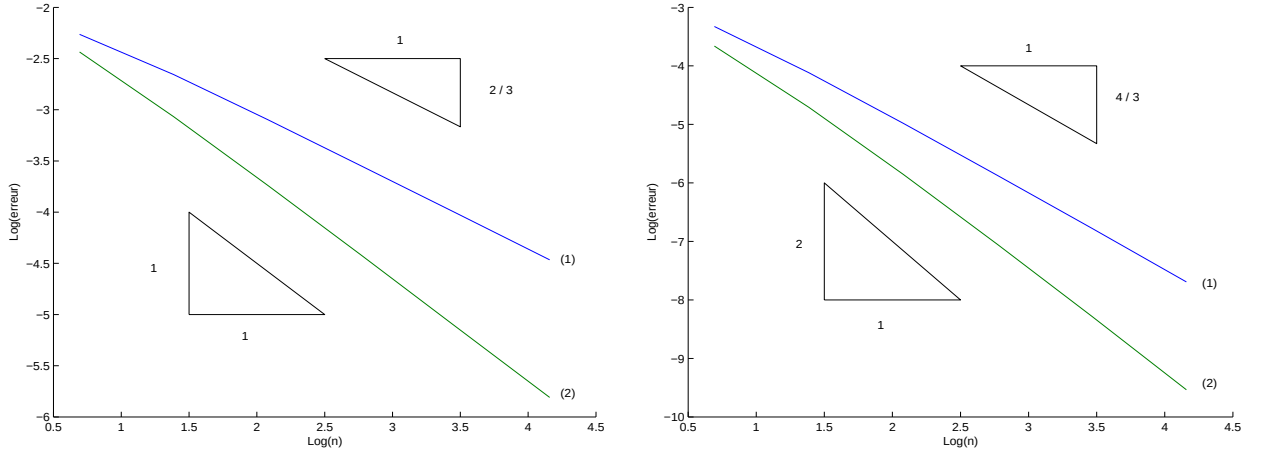


FIG. 2.5 – Comparaison des vitesses de convergence pour les normes  $|e_\tau|_{\tau, \Omega}$  (à gauche) et  $\|e_\tau\|_{0, \Omega}$  (à droite) sur les maillages uniformes (1) et  $\beta$ -raffinés

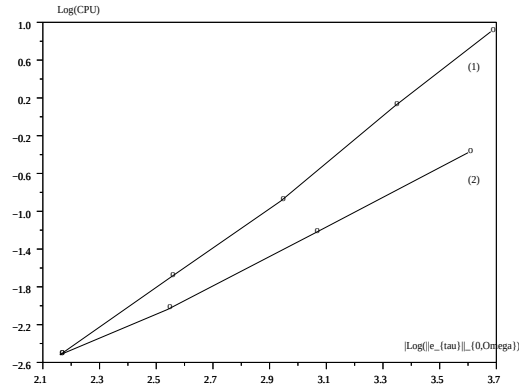


FIG. 2.6 – Erreur  $\|e_\tau\|_{0, \Omega}$  contre temps CPU pour les maillages uniformes (1) et  $\beta$ -raffinés (2)

*Remarque 2.4.1.* Sous certaines hypothèses très restrictives sur le maillage  $\tau$ , (2.3.1) peut être démontré d'une autre manière. En effet, en utilisant la technique de [9] (généralisée dans [1]), il peut être prouvé que le système linéaire (2.2.2) est obtenu à partir d'une formulation mixte de (2.1.1) pour laquelle des estimées d'erreur sur des maillages raffinés en présence de singularités ont été établies dans [41]. Une autre approche est également disponible dans [51].

*Remarque 2.4.2.* Afin d'être le plus complet possible, signalons plusieurs généralisations intéressantes de la méthode de Volumes Finis étudiées : Les cas de conditions de bord de Neumann et de Robin sont étudiées dans [53], le cas de raffinements de maillage de type A.M.R. sur un domaine rectangulaire est traité dans [25]. En outre, signalons [63, 64], où les auteurs obtiennent des estimées d'erreur pour la méthode de Volumes Finis centrée cellule sur des maillages raffinées (la technique de raffinement utilisée n'étant pas la même que la nôtre). De plus, le cas d'un opérateur elliptique plus général que le Laplacien sur un domaine non convexe de  $\mathbb{R}^2$

peut être traité en utilisant, d'une part les résultats de régularité de [46], et la discrétisation introduite dans [26, 52, 53, 65] d'autre part.



## Chapitre 3

# Méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur des éléments finis conformes en présence d'une singularité de coin

Nous considérons toujours le problème elliptique (2.1.1). Nous allons discrétiser (2.1.1) par une méthode d'Éléments-Volumes Finis ([8, 22, 57]). Le principe de la méthode consiste à construire une triangulation de  $\Omega$  qui constituera le maillage primal, puis à partir de celle-ci un ensemble de "boîtes" qui constitueront le maillage dual (ces "boîtes" seront en fait les équivalents des Volumes de Contrôle de la méthode de Volumes Finis centrée cellule).

Nous approcherons alors la solution  $u$  de (2.1.1) dans l'espace des éléments finis  $IP^1$ -conformes sur le maillage primal en discrétisant une formulation intégrale du problème par les Volumes Finis sur le maillage dual. Il est à noter que le principe de conservation du flux sur le maillage primal sera implicitement vérifié.

### 3.1 Notations-Définitions

Définissons tout d'abord le maillage primal de  $\Omega$ .

Soit  $T_h$  une triangulation de  $\Omega$ . Posons :

- $\rho_K :=$  diamètre du plus grand cercle inscrit dans  $K \in T_h$ ,
- $h_K :=$  diamètre du cercle circonscrit à  $K \in T_h$ ,
- $h := \max_{K \in T_h} h_K$ ,
- $E_h(K) :=$  ensemble des arêtes de  $K \in T_h$ ,

- $E_h :=$  ensemble des arêtes de  $\bar{\Omega}$ ,
- $E_h^{ext} :=$  ensemble des arêtes du maillage primal situés sur  $\partial\Omega$ ,
- $E_h^{in} :=$  ensemble des arêtes du maillage primal situés à l'intérieur de  $\Omega$ ,
- $Z_h(K) :=$  ensemble des sommets de  $K \in T_h$ ,
- $Z_h :=$  ensemble des sommets de  $\bar{\Omega}$ ,
- $Z_h^{ext} :=$  ensemble des sommets du maillage primal situés sur  $\partial\Omega$ ,
- $Z_h^{in} :=$  ensemble des sommets du maillage primal situés à l'intérieur de  $\Omega$ ,
- $m_e :=$  le milieu de l'arête  $e \in E_h$ ,
- $(\cdot, \cdot)_K :=$  le produit scalaire standard sur  $L^2(K)$ ,  $K \in T_h$ .

Définissons à présent le maillage dual de  $\Omega$ .

Soit  $K \in T_h$ .

Posons  $z_K$  un point quelconque inclus dans  $K$  et  $z \in Z_h(K)$ . Il existe donc  $e, l \in E_h(K)$  tels que  $z := \bar{e} \cap \bar{l}$ .

Convenons que

$$b_{z,K} := \text{Conv}[z_K, z, m_e, m_l] .$$

Nous définissons l'ensemble des éléments du maillage dual en posant :

$$B_h := \{ b_z : z \in Z_h \} ,$$

où  $b_z := \bigcup_{\substack{K \in T_h \\ z \in Z_h(K)}} b_{z,K}$  (voir figure 3.1).

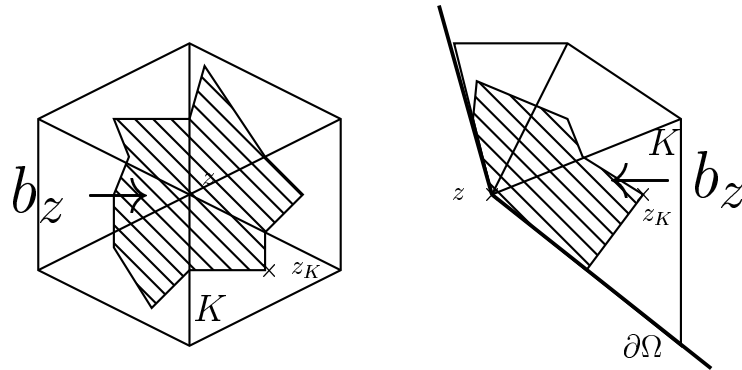


FIG. 3.1 – boîte  $b_z$  pour  $z \in Z_h^{in}$  et  $z \in Z_h^{ext}$

Introduisons :

- $X_h := \{v_h : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v_h|_K \in \mathbb{P}^1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} \cap C^0(\bar{\Omega})$ ,
- $X_h^0 := \{v_h \in X_h : v_h|_{\partial\Omega} \equiv 0\}$ .

$X_h^0$  est un espace d'approximation conforme dans le sens où la solution  $u$  de (2.1.1) est incluse dans  $H_0^1(\Omega)$  et  $X_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$  (voir [24]).

Introduisons enfin, pour  $z \in Z_h$ ,  $\chi_z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $\{\chi_z\}_{z \in Z_h}$  constitue la base canonique de  $X_h$ , ainsi que  $\bar{\chi}_z$ , la fonction indicatrice de  $b_z$ .

Nous appelons alors

- $\bar{X}_h := [\{\bar{\chi}_z\}_{z \in Z_h}]_{vect}$ ,
- $\bar{X}_h^0 := [\{\bar{\chi}_z\}_{z \in Z_h^{in}}]_{vect}$ .

Clairement pour  $v \in X_h$ , où  $v := \sum_{z \in Z_h} v(z) \chi_z$ , nous pouvons associer un unique élément  $\bar{v} := \sum_{z \in Z_h} v(z) \bar{\chi}_z \in \bar{X}_h$  et réciproquement. Définissons en dernier lieu les deux fonctionnelles suivantes qui nous seront utiles tout au long de cette section :

$$\begin{aligned}
 a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\
 (v, w) &\longmapsto \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx, \\
 \bar{a}_h : (H^2(\Omega) + X_h) \times (H^2(\Omega) + X_h) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\
 (v, w) &\longmapsto - \sum_{z \in Z_h} \int_{\partial b_z} w(z) \frac{\partial v}{\partial n_z} \, ds.
 \end{aligned}$$

### 3.2 Schéma numérique

Nous intégrons (2.1.1) sur l'ensemble des Volumes de Contrôle intérieurs à  $\Omega$ , c'est-à-dire sur  $\{b_z\}_{z \in Z_h^{in}}$ , puis appliquons la formule de la divergence. Nous obtenons ainsi

$$- \int_{\partial b_z} \frac{\partial u}{\partial n_z} \, ds = \int_{b_z} f(x) \, dx, \forall z \in Z_h^{in}, \quad (3.2.1)$$

où  $n_z$  est la normale unitaire sortante à  $b_z$ .

La formulation de (2.1.1) au sens des Éléments-Volumes Finis conformes est donc de trouver  $u_{BC} \in X_h^0$  vérifiant :

$$\bar{a}_h(u_{BC}, v_h) = (f, v_h)_{\Omega}, \forall v_h \in X_h^0. \quad (3.2.2)$$

*Remarque 3.2.1.* Nous avons tenu compte des conditions de bord en posant  $u_{BC}|_{\partial\Omega} \equiv 0$ .

Donnons la proposition suivante reliant les fonctionnelles  $a(\cdot, \cdot)$  et  $\bar{a}_h(\cdot, \cdot)$  :

**Proposition 3.2.1.** *Soient  $v_h, w_h \in X_h$ . Nous avons :*

$$a(v_h, w_h) = \bar{a}_h(v_h, w_h).$$

Preuve: Nous utilisons dans un premier temps la formule de Green pour passer d'une intégrale curviligne à une intégrale de surface. L'idée de la preuve consiste dans un second temps à exploiter le fait que  $v_h \in IP^1(K)$ ,  $\forall K \in T_h$ . Pour plus de précisions, le lecteur pourra se référer à la preuve du lemme 3 de [8]. ■

Nous énonçons alors la proposition d'existence et d'unicité de la solution de (3.2.2) :

**Proposition 3.2.2.** *Considérons les maillages  $T_h$  et  $B_h$  de  $\Omega$  fixés. Le système (3.2.2) admet alors une unique solution  $u_{BC} \in X_h^0$ .*

Preuve:

Fixons les maillages  $T_h$  et  $B_h$  de  $\Omega$ .

Étant donné que nous sommes en dimension finie, nous n'allons démontrer que l'injectivité du système linéaire (3.2.2). Dans ce but, nous posons  $f = 0$  et donc  $u_{BC}$  solution de :

$$-\int_{\partial b_z} \frac{\partial u_{BC}}{\partial n_z} ds = 0, \quad \forall z \in Z_h^{in}. \quad (3.2.3)$$

Montrons que  $u_{BC} \equiv 0$ .

Par (3.2.3), nous avons

$$\bar{a}_h(u_{BC}, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in X_h^0$$

↓

$$\bar{a}_h(u_{BC}, u_{BC}) = 0$$

↓ proposition 3.2.1

$$a(u_{BC}, u_{BC}) = 0,$$

↓

$$|\nabla u_{BC}|_{1,\Omega} = 0.$$

D'où, comme dans  $H_0^1(\Omega)$ ,  $\|\cdot\|_{1,\Omega} \lesssim |\cdot|_{1,\Omega}$  (voir [80]), nous avons  $u_{BC} = 0$ . ■

*Remarque 3.2.2.* nous pouvons, grâce à la proposition 3.2.1, reformuler (3.2.2) par :

$$a(u_{BC}, \chi_z) = \int_{\Omega} f \bar{\chi}_z dx, \quad \forall z \in Z_h^{in}.$$



La méthode d'Éléments-Volumes Finis apparaît alors, dans ce cas ci, comme une méthode d'Éléments Finis avec intégration approchée du second membre. La proposition 3.2.2 aurait donc pu être démontrée en utilisant cette remarque. Signalons cependant que ceci n'est plus vrai lorsque nous ajoutons au problème (2.1.1) un terme de convection ou de réaction.

### 3.3 Résultats préliminaires

Donnons dans un premier temps la

**Définition 3.3.1.** Soit  $T_h$  une triangulation de  $\Omega$  et  $\beta \in [0,1[$ .

Nous dirons que  $T_h$  est une triangulation régulière  $\beta$ -raffinée de  $\Omega$ , si il existe  $\xi > 0$ , telle que les 3 conditions suivantes soient vérifiées :

(H1') :  $\forall K \in T_h, 1 \leq \frac{h_K}{\rho_K} \leq \xi$ , autrement dit  $T_h$  est une triangulation régulière de  $\Omega$ ,

(H2') :  $\forall K \in T_h, h_K \leq \xi h^{\frac{1}{1-\beta}}$ , si  $K$  a un sommet en  $O$ ,

(H3') :  $\forall K \in T_h, h_K \leq \xi h \min\{1, \inf_K r^\beta\}$ , si  $K$  n'a pas de sommet en  $O$ ,

où  $r := r(z) = d(z, O)$ ,  $\forall z \in \bar{\Omega}$ . Tout comme dans le chapitre précédent, l'hypothèse (H3') ne s'applique que localement. En d'autres termes, si nous nous situons loin de la singularité, cette hypothèse est inutile.

*Remarque 3.3.1.* La condition (H1') est une condition qui permettra l'application de théorèmes de trace et de plongements de Sobolev tout comme dans les méthodes d'Éléments Finis. Les conditions (H2') et (H3') sont quant à elles des conditions de raffinements de maillage dues à la présence d'une singularité en  $O$ . Pour de plus amples informations sur ces conditions, ainsi que pour connaître le mode de construction de telles triangulations, le lecteur pourra se référer à [89, 46].

Donnons à présent le

**Lemme 3.3.1.** Soit  $T_h$  une triangulation de  $\Omega$  satisfaisant à la condition (H1') et  $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$ . Fixons  $K \in T_h$  et  $\sigma$  un segment inclus dans  $\bar{K}$ .

Alors :

$$\int_{\sigma} v^2 ds \lesssim \left( \frac{\|v\|_{0,K}^2}{h_K} + h_K |v|_{1,K}^2 \right), \forall v \in H^{1,\beta}(\Omega), \quad (3.3.1)$$

si  $K$  n'a pas de sommet en  $O$ .

$$\int_{\sigma} v^2 ds \lesssim \left( \frac{\|v\|_{0,K}^2}{h_K} + h_K^{1-2\beta} |v|_{1,\beta,K}^2 \right), \forall v \in H^{1,\beta}(\Omega), \quad (3.3.2)$$

si  $K$  a un sommet en  $O$ .

Preuve:

Nous ne démontrerons que (3.3.2), pour obtenir (3.3.1), il suffira de poser  $\beta := 0$ .

Soit  $K \in T_h$  avec  $O \in K$  et  $\hat{K}$  le triangle de référence. Nous avons alors

$$\|v\|_{0,\partial\hat{K}}^2 \lesssim \left( \|v\|_{0,\hat{K}}^2 + |v|_{1,\beta,\hat{K}}^2 \right), \forall \hat{v} \in H^{1,\beta}(\hat{K}), \quad (3.3.3)$$

grâce à la proposition 1.2.4.

Nous prolongeons maintenant  $\hat{\sigma}$  pour obtenir un second segment  $\hat{\sigma}_1$  tel que les extrémités de  $\hat{\sigma}_1$  appartiennent à  $\partial\hat{K}$ . Nous notons alors  $\hat{\mathcal{A}}$  le triangle inclus dans  $\hat{K}$ , tel que  $\hat{\sigma}_1$  soit un côté de  $\hat{\mathcal{A}}$  (voir figure 3.2).

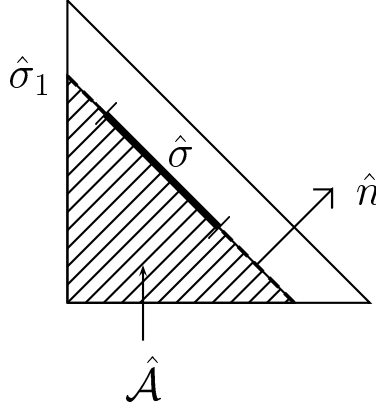


FIG. 3.2 – triangle  $\hat{K}$ ,  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\sigma}_1$  et  $\hat{\mathcal{A}}$

Par la formule de Green appliqué sur  $\hat{\mathcal{A}}$ , nous avons

$$\int_{\partial\hat{\mathcal{A}}} \hat{v}^2 \hat{n}_i \, d\hat{s} = \int_{\hat{\mathcal{A}}} \frac{\partial \hat{v}^2}{\partial \hat{x}_i} \, d\hat{x}, \forall i \in \{1,2\},$$

où, pour  $i \in \{1,2\}$ ,  $\hat{n}_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  composante de la normale extérieure sortante à  $\hat{\mathcal{A}}$ . Nous multiplions cette identité par  $\hat{n}_i|_{\hat{\sigma}_1}$  et sommons sur  $i = 1,2$ . Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\sigma}_1} \hat{v}^2 \, d\hat{s} &\leq 2 \int_{\partial\hat{\mathcal{A}} \setminus \hat{\sigma}_1} \hat{v}^2 \, d\hat{s} + 4 \int_{\hat{\mathcal{A}}} |\hat{v}| |\nabla \hat{v}| \, d\hat{x} \\ &\leq 2 \int_{\partial\hat{K}} \hat{v}^2 \, d\hat{s} + 4 \int_{\hat{K}} |\hat{v}| |\nabla \hat{v}| \, d\hat{x}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Or, l'inégalité de Hölder et le plongement (voir [46])

$$W^{1,p}(\hat{K}) \hookrightarrow L^q(\hat{K}), \forall p \geq \frac{4}{3}, \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

conduisent à

$$\int_{\hat{K}} |\hat{v}| |\nabla \hat{v}| \, d\hat{x} \leq \|\hat{v}\|_{0,q,\hat{K}} \|\nabla \hat{v}\|_{0,p,\hat{K}} \lesssim \|\hat{v}\|_{1,p,\hat{K}}^2, \forall p \geq \frac{4}{3}.$$

Nous utilisons à cet instant le plongement de la proposition 1.2.4 qui fournit, avec ce qui précède,

$$\int_{\hat{K}} |\hat{v}| |\nabla \hat{v}| \, d\hat{x} \lesssim \|\hat{v}\|_{1,\beta,\hat{K}}^2, \forall \beta < \frac{1}{2}.$$

Cette estimée, ainsi que (3.3.3) et (3.3.4), amènent à

$$\int_{\hat{\sigma}} \hat{v}^2 \, d\hat{s} \lesssim \|\hat{v}\|_{0,\hat{K}}^2 + |\hat{v}|_{1,\beta,\hat{K}}^2. \quad (3.3.5)$$

Nous introduisons à présent le changement de variable

$$\begin{aligned} \Phi_K : \quad \hat{K} &\longrightarrow K, \\ \hat{x} &\longmapsto B_K \hat{x} + b_K, \end{aligned}$$

avec, si  $K$  a pour sommet  $\left( \begin{smallmatrix} a_i \\ b_i \end{smallmatrix} \right)_{i=1}^3$ , alors :

$$\begin{aligned} B_K &:= \begin{pmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ b_2 - b_1 & b_3 - b_1 \end{pmatrix}, \\ b_K &:= \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où  $B_K$  satisfait  $|||B_K||| \sim h_K$  grâce à (H1'). Nous utilisons cette transformation, (3.3.5), ainsi que le fait que  $|\sigma| \leq h_K$  pour conclure et obtenir (3.3.2). ■

**Lemme 3.3.2.** *Soit  $T_h$  une triangulation de  $\Omega$  qui satisfait à l'hypothèse (H1') et  $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$ . Fixons  $K \in T_h$  avec  $s, p \in Z_h(K)$  (voir figure 3.3).*

*Nous avons alors :*

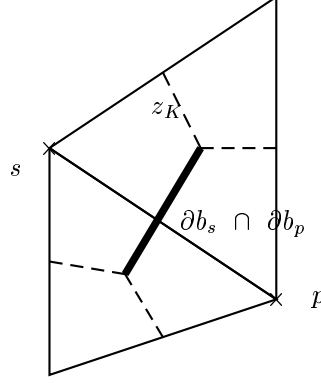
$$\left| \int_{\partial b_s \cap \partial b_p} \frac{\partial v}{\partial n_s} \, ds \right|^2 \lesssim \left( |v|_{1,K}^2 + h_K^2 |v|_{2,K}^2 \right), \forall v \in H^{2,\beta}(K), \quad (3.3.6)$$

si  $K$  n'a pas de sommet en  $O$ ,

$$\left| \int_{\partial b_s \cap \partial b_p} \frac{\partial v}{\partial n_s} \, ds \right|^2 \lesssim \left( |v|_{1,K}^2 + h_K^{2-2\beta} |v|_{2,\beta,K}^2 \right), \forall v \in H^{2,\beta}(K), \quad (3.3.7)$$

si  $K$  a un sommet en  $O$ ,

où dans (3.3.6) et (3.3.7),  $n_s$  désigne la normale unitaire sortante à  $b_s$  sur  $\partial b_s \cap \partial b_p$ .

FIG. 3.3 – triangle K et  $s, p \in Z_h(K)$ Preuve:

Pour  $K \in T_h$  et  $s, p \in Z_h(K)$ , nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, d'où

$$\left| \int_{\partial b_s \cap \partial b_p} \frac{\partial v}{\partial n_s} ds \right|^2 \lesssim h_K \int_{\partial b_s \cap \partial b_p} |\nabla v|^2 ds .$$

Nous concluons alors en utilisant les résultats (3.3.1) et (3.3.2). ■

### 3.4 Majoration d'erreur

**Théorème 3.4.1.** *Considérons  $u \in H^{2,\beta}(\Omega)$ , où  $\beta \in ]1 - \frac{\pi}{\omega}, \frac{1}{2}[$ , (resp.  $u_{BC} \in X_h^0$ ) solution de (2.1.1) (resp. (3.2.2)). Soit  $T_h$  une triangulation régulière  $\beta$ -raffinée de  $\Omega$ .*

*Alors, nous avons :*

$$\|u - u_{BC}\|_{1,\Omega} \lesssim h (|u|_{2,\beta,\Omega}^2 + \|f\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}} . \quad (3.4.1)$$

Preuve:

Notons avant tout que (3.2.1) et (3.2.2) impliquent que

$$\bar{a}_h(u - u_{BC}, v_h) = 0, \forall v_h \in X_h^0,$$

d'où

$$\bar{a}_h(u_{BC} - w_h, v_h) = \bar{a}_h(u - w_h, v_h), \forall v_h, w_h \in X_h^0. \quad (3.4.2)$$

Il vient alors que, pour  $w_h \in X_h^0$ :

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{v_h \in X_h^0 \\ v_h \neq 0}} \frac{\bar{a}_h(u - w_h, v_h)}{|v_h|_{1,\Omega}} &= \sup_{\substack{v_h \in X_h^0 \\ v_h \neq 0}} \frac{\bar{a}_h(u_{BC} - w_h, v_h)}{|v_h|_{1,\Omega}} \\
&\stackrel{\text{prop. 3.2.1}}{=} \sup_{\substack{v_h \in X_h^0 \\ v_h \neq 0}} \frac{a(u_{BC} - w_h, v_h)}{|v_h|_{1,\Omega}} \\
&\geq |u_{BC} - w_h|_{1,\Omega} ,
\end{aligned}$$

car  $u_{BC} - w_h \in X_h^0$ . D'où, par l'inégalité de Poincaré (voir [80]) :

$$\|u_{BC} - w_h\|_{1,\Omega} \lesssim \sup_{\substack{v_h \in X_h^0 \\ v_h \neq 0}} \frac{\bar{a}_h(u - w_h, v_h)}{|v_h|_{1,\Omega}} , \forall w_h \in X_h^0 . \quad (3.4.3)$$

Remarquons alors que, pour  $v_h, w_h \in X_h^0$  :

$$\bar{a}_h(u - w_h, v_h) = \sum_{z \in Z_h^{in}} v_h(z) \int_{\partial b_z} \frac{\partial(u - w_h)}{\partial n_z} ds .$$

Nous appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivi du lemme 1 de [8] au membre de droite de l'égalité précédente pour obtenir

$$|\bar{a}_h(u - w_h, v_h)| = \left| \sum_{s,p \in Z_h^{in}} (v_h(s) - v_h(p)) \int_{\partial b_s \cap \partial b_p} \frac{\partial(u - w_h)}{\partial n_s} ds \right|$$

$\Downarrow$

$$|\bar{a}_h(u - w_h, v_h)| \lesssim |v_h|_{1,\Omega} \left( \sum_{s,p \in Z_h^{in}} \left| \int_{\partial b_s \cap \partial b_p} \frac{\partial(u - w_h)}{\partial n_s} \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} , \forall v_h, w_h \in X_h^0 . \quad (3.4.4)$$

Nous majorons alors la sommation du membre de droite de (3.4.4) en utilisant le lemme 3.3.2. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
&|\bar{a}_h(u - w_h, v_h)| \\
&\lesssim |v_h|_{1,\Omega} \left( |u - w_h|_{1,\Omega}^2 + \sum_{\substack{K \in T_h \\ O \notin K}} h_K^2 |u|_{2,K}^2 + \sum_{\substack{K \in T_h \\ O \in K}} h_K^{2-2\beta} |u|_{2,\beta,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} , \forall v_h, w_h \in X_h^0 .
\end{aligned}$$

Nous utilisons à présent les hypothèses de raffinement de maillage  $(H1')$  et  $(H2')$  et aboutissons alors à :

$$|\bar{a}_h(u - w_h, v_h)| \lesssim |v_h|_{1,\Omega} \left( |u - w_h|_{1,\Omega}^2 + h^2 |u|_{2,\beta,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} , \forall v_h, w_h \in X_h^0 . \quad (3.4.5)$$

En combinant (3.4.3), (3.4.5) et en y posant  $w_h := Iu \in X_h^0$ , interpolé de Lagrange de  $u$  aux noeuds de  $T_h$ , nous arrivons à :

$$\|u_{BC} - Iu\|_{1,\Omega} \lesssim \|u - Iu\|_{1,\Omega} + h |u|_{2,\beta,\Omega} . \quad (3.4.6)$$

Nous utilisons en outre l'estimée d'erreur suivante (voir [46]) :

$$\|u - Iu\|_{1,\Omega} \lesssim h |u|_{2,\beta,\Omega} . \quad (3.4.7)$$

(3.4.1) s'obtient alors aisément en utilisant, d'une part une inégalité triangulaire, et d'autre part les résultats (3.4.6) et (3.4.7). ■

Nous allons à présent donner un théorème qui établit, sous certaines hypothèses supplémentaires, une majoration d'erreur quadratique sur  $\|u - u_{BC}\|_{0,\Omega}$ . L'idée de la preuve consiste à utiliser un argument de type Aubin-Nitsche.

**Théorème 3.4.2.** *Nous nous plaçons dans les conditions du théorème 3.4.1. De plus, nous supposons que  $f \in H^1(\Omega)$  et que, pour tout  $K \in T_h$ ,  $z_K$  est le barycentre de  $K$ .*

*Nous avons alors*

$$\|u - u_{BC}\|_{0,\Omega} \lesssim h^2 (|u|_{2,\beta,\Omega}^2 + \|f\|_{1,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}} . \quad (3.4.8)$$

Preuve:

Signalons tout d'abord que nous adopterons les notations et conventions de la preuve du théorème précédent. Considérons le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta \phi = u - u_{BC} \text{ dans } \Omega , \\ \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega . \end{cases} \quad (3.4.9)$$

Rappelons que l'estimée suivante s'applique (voir proposition 1.2.1)

$$|\phi|_{2,\beta,\Omega} + |\phi|_{1,\Omega} \lesssim \|u - u_{BC}\|_{0,\Omega} . \quad (3.4.10)$$

Or, par (3.4.9) :

$$\begin{aligned} \|u - u_{BC}\|_{0,\Omega}^2 &= -(u - u_{BC}, \Delta \phi)_\Omega \\ &= (\nabla(u - u_{BC}), \nabla \phi)_\Omega , \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green et en notant que  $(u - u_{BC})|_{\partial\Omega} \equiv 0$ . Il vient donc que

$$\|u - u_{BC}\|_{0,\Omega}^2 = a(u - u_{BC}, \phi - v) + a(u - u_{BC}, v), \forall v \in X_h^0. \quad (3.4.11)$$

Majorons les 2 termes du membre de droite de (3.4.11)

1. Majoration du terme  $a(u - u_{BC}, \phi - v)$ ,  $v \in X_h^0$ :

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$|a(u - u_{BC}, \phi - v)| \leq \|u - u_{BC}\|_{1,\Omega} \|\phi - v\|_{1,\Omega}. \quad (3.4.12)$$

2. Majoration du terme  $a(u - u_{BC}, v)$ ,  $v \in X_h^0$ :

$$a(u - u_{BC}, v) = a(u, v) - a(u_{BC}, v).$$

Nous remarquons alors que :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (\nabla u, \nabla v)_\Omega \\ &=_{v|_{\partial\Omega} \equiv 0} (-\Delta u, v)_\Omega \\ &= (f, v)_\Omega, \end{aligned}$$

par (2.1.1). De plus

$$\begin{aligned} a(u_{BC}, v) &= - \sum_{z \in Z_h^{in}} \int_{b_z} \frac{\partial u_{BC}}{\partial n_z} v(z) \, ds \\ &= (f, \bar{v})_\Omega, \end{aligned}$$

en appliquant la proposition 3.2.1 suivi de l'égalité (3.2.2).

Il en résulte que :

$$a(u - u_{BC}, v) = (f, v - \bar{v})_\Omega. \quad (3.4.13)$$

Afin de majorons le membre de droite de (3.4.13), nous notons tout d'abord que :

$$(f, v - \bar{v})_\Omega = \sum_{K \in T_h} (f, v - Q(v))_K,$$

où,  $\forall K \in Th$ ,  $Q(v)|_K := \sum_{z \in Z_h(K)} v(z) \bar{\chi}_z$ .

Posons pour tout  $K \in T_h$ ,  $\mathcal{M}_K^0(f) := \frac{1}{|K|} \int_K f \, dx$ , valeur moyenne de  $f$  sur  $K$ . Nous avons alors :

$$(f, v - \bar{v})_\Omega = \sum_{K \in T_h} (f - \mathcal{M}_K^0(f), v - Q(v))_K + \sum_{K \in T_h} (\mathcal{M}_K^0(f), v - Q(v))_K . \quad (3.4.14)$$

Or,  $\forall K \in T_h$ , par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left| (f - \mathcal{M}_K^0(f), v - Q(v))_K \right| &\leq \|f - \mathcal{M}_K^0(f)\|_{0,K} \|v - Q(v)\|_{0,K} \\ &\lesssim h_K^2 |f|_{1,K} |v|_{1,K} , \end{aligned}$$

par un argument de type Bramble-Hilbert (voir [80]). De plus,  $\forall K \in T_h$

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_K^0(f), v - Q(v))_K &= \mathcal{M}_K^0(f) \int_K (v - Q(v)) \, dx \\ &= \mathcal{M}_K^0(f) \left( \int_K v \, dx - \int_K Q(v) \, dx \right) \\ &= \mathcal{M}_K^0(f) \left( \int_K v \, dx - \frac{|K|}{3} \sum_{z \in Z_h(K)} v(z) \, dx \right) \\ &= 0 , \end{aligned}$$

par intégration numérique (voir [24]) et car  $z_K$  est le barycentre de  $K$ . Il en résulte donc, en utilisant les 2 résultats précédents dans (3.4.14), que

$$|(f, v - \bar{v})_K| \lesssim h^2 |f|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} .$$

Ceci fournit dans (3.4.13) :

$$|a(u - u_{BC}, v)| \lesssim h^2 |f|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} . \quad (3.4.15)$$

Nous utilisons à présent (3.4.12) et (3.4.15) dans (3.4.11). Par conséquent

$$\begin{aligned} \|u - u_{BC}\|_{0,\Omega}^2 &\lesssim \|u - u_{BC}\|_{1,\Omega} \|\phi - v\|_{1,\Omega} \\ &\quad + h^2 |f|_{1,\Omega} (|v - \phi|_{1,\Omega} + |\phi|_{1,\Omega}), \forall v \in X_h^0. \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

Il suffit à présent de poser dans (3.4.16)  $v := I\phi$ , interpolé de Lagrange de  $\phi$ . Cet interpolé vérifie une estimée analogue à (3.4.1). De ce fait, nous avons :



$$\begin{aligned}
\|u - u_{BC}\|_{0,\Omega}^2 &\lesssim \|u - u_{BC}\|_{0,\Omega} h |\phi|_{2,\beta,\Omega} \\
&\quad + h^2 |f|_{1,\Omega} (1 + h) (|\phi|_{1,\Omega} + |\phi|_{2,\beta,\Omega}) \\
&\stackrel{(3.4.10)}{\lesssim} \|u - u_{BC}\|_{0,\Omega} h (h|f|_{1,\Omega} + \|u - u_{BC}\|_{0,\Omega}) ,
\end{aligned}$$

ce qui permet, en utilisant le résultat du théorème 3.4.1, de conclure à l'estimée du théorème. ■

*Remarque 3.4.1.* Dans le cadre de la démonstration du théorème 3.4.2, il peut être prouvé qu'il est indispensable que, pour tout  $K \in T_h$ ,  $z_K$  soit le barycentre de  $K$  (voir [57]).

### 3.5 Essais numériques

Nous nous plaçons sur le même domaine  $\Omega$  et considérons la même équation que dans les essais numériques du chapitre 2. La figure 3.4 représentent les maillages utilisés (où nous précisons pour le maillage  $\beta$ -raffiné que  $\beta = \frac{1}{3}$ ), les résultats de ces tests étant donnés dans la table 3.1. La figure 3.5 donne la vitesse de convergence en fonction de  $n$  de  $u_{BC}$  vers  $u$  sur les deux séries de maillages (uniformes et raffinés) et illustre bien la nécessité de travailler avec un maillage  $\beta$ -raffiné afin de restaurer la vitesse de convergence optimale de la méthode étudiée. La figure 3.6 fournit la précision obtenue en fonction du temps de calcul nécessaire, là encore, l'avantage d'utiliser des maillages raffinés de manière adéquate est flagrante.

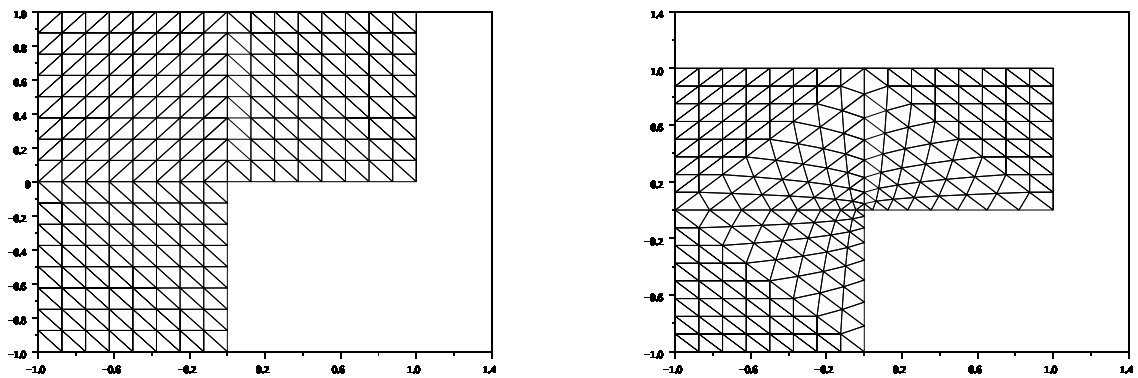


FIG. 3.4 – Maillage uniforme (à droite) et  $\beta$ -raffiné (à gauche) pour  $n = 8$

|     | Maillage uniforme           |                             | Maillage $\beta$ -raffiné   |                             |
|-----|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| $n$ | $\ u - u_{BC}\ _{0,\Omega}$ | $\ u - u_{BC}\ _{1,\Omega}$ | $\ u - u_{BC}\ _{0,\Omega}$ | $\ u - u_{BC}\ _{1,\Omega}$ |
| 2   | 3.03E-02                    | 2.44E-01                    | 2.43E-02                    | 2.07E-01                    |
| 4   | 1.36E-02                    | 1.52E-01                    | 8.43E-03                    | 1.13E-01                    |
| 8   | 5.96E-03                    | 9.67E-02                    | 2.69E-03                    | 6.15E-02                    |
| 16  | 2.53E-03                    | 6.14E-02                    | 8.16E-04                    | 3.33E-02                    |
| 32  | 1.05E-03                    | 3.89E-02                    | 2.40E-04                    | 1.78E-02                    |
| 64  | 4.32E-04                    | 2.46E-02                    | 6.88E-05                    | 9.48E-03                    |

TAB. 3.1 – normes  $\|u - u_{BC}\|_{0,\Omega}$  et  $\|u - u_{BC}\|_{1,\Omega}$  pour les deux maillages

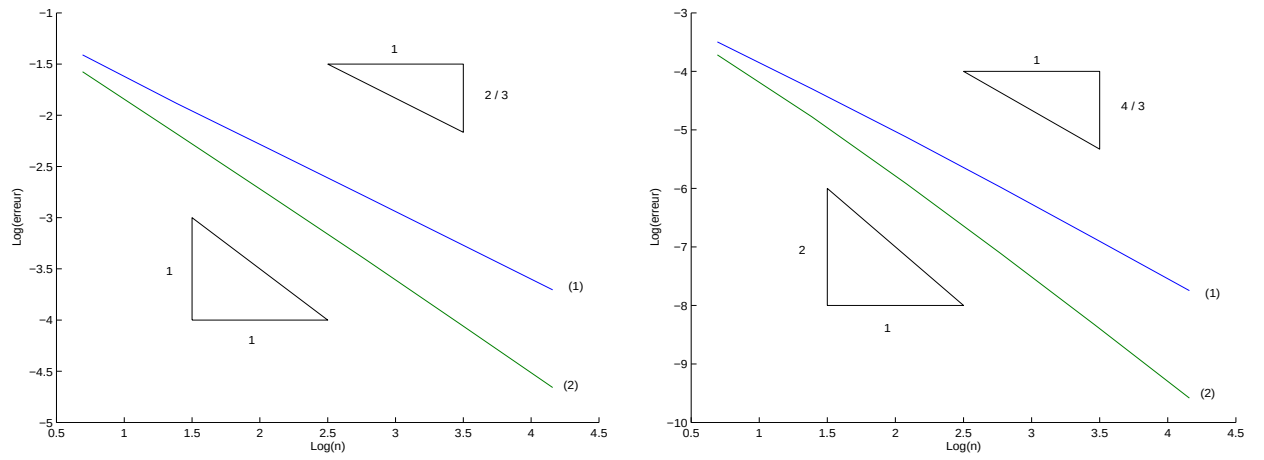


FIG. 3.5 – Comparaison des vitesses de convergence pour les normes  $\|u - u_{BC}\|_{1,\Omega}$  (à gauche) et  $\|u - u_{BC}\|_{0,\Omega}$  (à droite) dans le cas d'un maillage uniforme (1) et dans le cas d'un maillage  $\beta$ -raffiné (2)

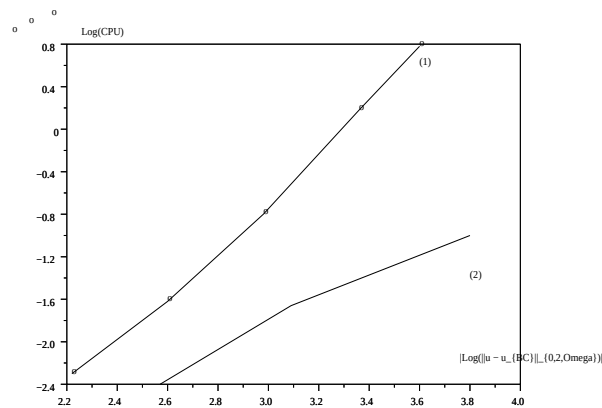


FIG. 3.6 – Précision obtenue contre temps CPU pour  $\|u - u_{BC}\|_{0,\Omega}$  dans le cas d'un maillage uniforme (1) et dans le cas d'un maillage  $\beta$ -raffiné (2)

*Remarque 3.5.1.* Nous attirons l'attention du lecteur sur les premières lectures sur la méthode étudiée dans ce chapitre, plus précisément [16], qui suppose que  $T_h$  consiste en triangles rectangles ou isocèles, [17] où les auteurs utilisent une technique de construction du maillage dual différente de celle employée ici, [94] qui travaille avec des éléments finis  $Q_1$  sur un maillage primal quadrangulaire et enfin [20] qui introduit une nouvelle approche pour obtenir une estimée a-priori.



## Chapitre 4

# Une méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur des éléments finis non conformes en présence d'une singularité de coin

Nous considérons toujours le problème (2.1.1). Nous allons cette fois-ci discrétiser (2.1.1) par une méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme. Le principe de la méthode consiste à construire une triangulation de  $\Omega$  qui constituera le maillage primal, puis à partir de celle-ci un ensemble de "boîtes" qui constitueront le maillage dual (ces "boîtes" seront en fait les équivalents des Volumes de Contrôle de la méthode de Volumes Finis centrée cellule). Tout comme pour la méthode précédente, nous approcherons alors la solution  $u \in H^{2,\beta}(\Omega)$ , où  $1 - \frac{\pi}{\omega} < \beta < \frac{1}{2}$ , dans l'espace des éléments non conformes sur le maillage primal en discrétisant une formulation intégrale du problème par Volumes Finis sur le maillage dual.

### 4.1 Notations

Le maillage primal consiste en une triangulation de  $\Omega$  pour laquelle nous adoptons les mêmes notations que dans la section 3.

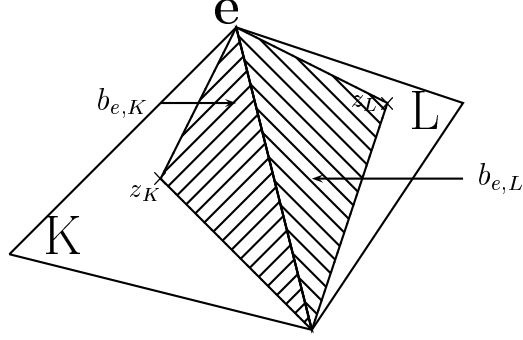
Construisons à présent le maillage dual de  $\Omega$

Soit, pour  $K \in T_h$ ,  $z_K$  un point quelconque inclus dans  $K$ . Pour  $e \in E_h(K)$ , appelons

$$b_{e,K} := \{(1-t)z_K + tx : x \in e, t \in [0,1]\},$$

que nous avons représentée sur la figure 4.1.

Posons alors :

FIG. 4.1 – exemple de boîte  $b_{e,K}$  pour  $K \in T_h$  et  $e \in E_h(K)$ 

$$b_e := \begin{cases} b_{e,K} \cup b_{e,L} & \text{si } \exists K, L \in T_h : e = \bar{K} \cap \bar{L} , \\ b_{e,K} & \text{si } \exists K \in T_h : e \subset \bar{K} \cap \partial\Omega . \end{cases}$$

Le maillage dual de  $T_h$  est alors défini par

$$B_h := \{b_e : e \in E_h\}.$$

Rappelons à présent quelques notions sur les éléments non conformes.

Nous notons  $S_h$ , l'espace des fonctions de  $IP^1(T_h)$  continues en  $m_e$  pour tout  $e \in E_h^{in}$ . Définissons alors

$$S_h^0 := \{v_h \in S_h : v_h(m_e) = 0, \forall e \in E_h^{ext}\}.$$

Introduisons en outre, pour  $e \in E_h^{in}$ , où  $e = \bar{K} \cap \bar{L}$  avec  $K, L \in T_h$ ,  $\phi_e : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in S_h$ , telle que :

$$\begin{cases} \text{supp}(\phi_e) = \bar{K} \cup \bar{L} , \\ \phi_e(m_e) = 1 , \\ \phi_e(m_l) = 0 , \forall l \in E_h \setminus \{e\} . \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Cette fonction est représentée sur la figure 4.2.

$\{\phi_e\}_{e \in E_h}$  forme une base de  $S_h$  (voir [95]). De plus, les fonctions  $v_h \in S_h$  sont dites "non conformes" dans le sens où  $S_h \not\subset H_0^1(\Omega)$ , espace auquel appartient la solution  $u$  de (2.1.1). Un exemple de fonctions de l'espace  $S_h$  est donnée sur la figure 4.5. En outre, plus de détails sur ces éléments non conformes sont disponibles dans [29]. Pour finir, nous introduisons les deux fonctionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} a_h : (H^1(\Omega) + S_h)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \sum_{K \in T_h} (\nabla v, \nabla w)_K , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_h : (H^2(\Omega) + S_h)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto - \sum_{e \in E_h^{in}} w(m_e) \int_{\partial b_e} \frac{\partial v}{\partial n_e} ds . \end{aligned}$$

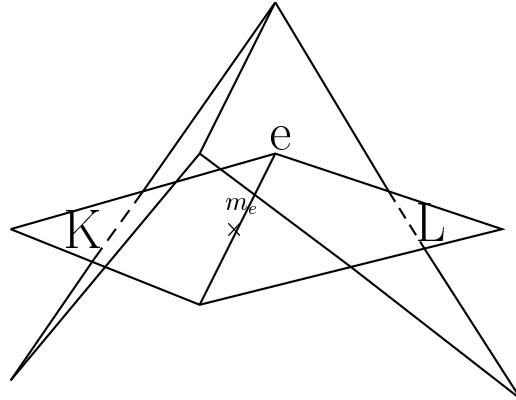


FIG. 4.2 – fonction de base  $\chi_e$  pour  $e \in E_h^{in}$

Enfin, nous convenons que pour  $v_h \in S_h$  telle que  $v_h := \sum_{e \in E_h} v_h(m_e) \phi_e$ , nous associons une unique fonction  $\bar{v}_h \in IP^0(B_h)$  définie par  $v_h := \sum_{e \in E_h} v_h(m_e) \bar{\phi}_{b_e}$ , où  $\bar{\phi}_e$  désigne l'indicatrice de la région  $b_e$ . Réciproquement, à toute fonction de  $IP^0(B_h)$ , nous associons une unique fonction de  $S_h$  de la même manière.

## 4.2 Schéma numérique

Reprenons (2.1.1) pour obtenir une formulation du problème au sens des Éléments-Volumes Finis. Plus précisément, en reprenant la première équation de (2.1.1), en l'intégrant sur  $b_e$ ,  $e \in E_h^{in}$ , et en appliquant la formule de Green, nous obtenons

$$- \int_{\partial b_e} \frac{\partial u}{\partial n_e} ds = \int_{b_e} f(x) dx, \forall e \in E_h^{in}, \quad (4.2.1)$$

où  $n_e$  est la normale unitaire sortante à  $b_e$ .

La formulation de (2.1.1) au sens des Éléments-Volumes Finis non conformes consiste donc à trouver  $u_{BN} \in S_h^0$  vérifiant :

$$- \int_{\partial b_e} \frac{\partial u_{BN}}{\partial n_e} ds = \int_{b_e} f(x) dx, \forall e \in E_h^{in}. \quad (4.2.2)$$

*Remarque 4.2.1.* Nous avons tenu compte des conditions de bord en posant  $u_{BN} \in S_h^0$ .

Nous allons à présent énoncer une proposition démontrée dans [19, 20] qui nous permettra de reformuler (4.2.2) afin de le rendre plus facilement implémentable. Donnons donc la

**Proposition 4.2.1.** *Soient  $v_h, w_h \in S_h$ . Nous avons alors :*

$$\bar{a}_h(v_h, w_h) = a_h(u_h, w_h).$$

Preuve: L'idée de la preuve est identique à celle de la preuve de la proposition 3.2.1. Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter au lemme 3.2 de [19].

■

**Proposition 4.2.2.** *Considérons les maillages  $T_h$  et  $B_h$  de  $\Omega$  fixés. Le système (4.2.2) admet alors une unique solution  $u_{BN} \in S_h^0$ .*

Preuve:

Introduisons :

$$\begin{aligned} F_h : S_h &\longrightarrow \mathbb{R} , \\ v_h &\longmapsto \sum_{e \in E_h} v_h(m_e) \int_{b_e} f \, dx . \end{aligned}$$

Clairement, (4.2.2) équivaut à trouver  $u_{BN} \in S_h^0$ , telle que  $\bar{a}_h(u_{BN}, v_h) = F_h(v_h)$ , pour tout  $v_h \in S_h^0$ .

Comme le problème (4.2.2) est posé sur un espace de dimension finie et est linéaire, il suffit de démontrer l'unicité de la solution  $u_{BN}$  de (4.2.2). Pour cela, fixons  $f = 0$  dans  $\Omega$ .

D' où

$$\bar{a}_h(u_{BN}, v_h) = 0, \forall v_h \in S_h^0$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{a}_h(u_{BN}, u_{BN}) = 0$$

$$\Updownarrow \text{ prop. 4.2.1}$$

$$a_h(u_{BN}, u_{BN}) = 0 ,$$

$$\Updownarrow$$

$$|u_{BN}|_{1,h} = 0 .$$

Or  $\|u_{BN}\|_{0,\Omega} \lesssim |u_{BN}|_{1,h}$  (voir le lemme 4.3.1), d'où,  $u_{BN} = 0$  dans  $\Omega$ , ce qui conclut notre preuve. ■

### 4.3 Résultats préliminaires

Cette section a pour but de démontrer quelques résultats indispensables pour la suite de notre travail.

**Lemme 4.3.1.** *Soit  $T_h$  une triangulation de  $\Omega$  qui satisfait à l'hypothèse (H1') (voir définition 3.3.1). Il existe alors  $C(\Omega, \beta) > 0$ , telle que :*

$$\|v_h\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega, \xi) |v_h|_{1,h} , \forall v_h \in (S_h^0)^2 .$$



Preuve: voir la proposition 4.13 de [95].

■

**Lemme 4.3.2.** *Soit  $T_h$  une triangulation de  $\Omega$  qui satisfait à l'hypothèse (H1') (voir définition 3.3.1) et  $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$ . Fixons  $K \in T_h$  et appelons  $e, l$ , deux de ses côtés (voir figure 4.3).*

*Nous avons alors :*

$$\left| \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \frac{\partial v}{\partial n_e} ds \right|^2 \lesssim |v|_{1,K}^2 + h_K^2 |v|_{2,K}^2, \quad \forall v \in H^{2,\beta}(K), \quad (4.3.1)$$

*si  $K$  n'a pas de sommet en  $O$ ,*

$$\left| \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \frac{\partial v}{\partial n_e} ds \right|^2 \lesssim |v|_{1,K}^2 + h_K^{2-2\beta} |v|_{2,\beta,K}^2, \quad \forall v \in H^{2,\beta}(K), \quad (4.3.2)$$

*si  $K$  a un sommet en  $O$ ,*

*où dans (4.3.1) et (4.3.2),  $n_e$  désigne la normale unitaire sortante à  $b_e$  sur  $\partial b_e \cap \partial b_l$ .*

Preuve:

Nous ne démontrerons que (4.3.2), (4.3.1) s'en déduisant aisément.

Soit  $K \in T_h$ , avec  $O \in \partial K$ .

Clairement, nous avons :

$$\left| \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \frac{\partial v}{\partial n_e} ds \right|^2 \leq C h_K \left( \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} |\nabla v|^2 ds \right), \quad \forall v \in H^2(K), \quad (4.3.3)$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

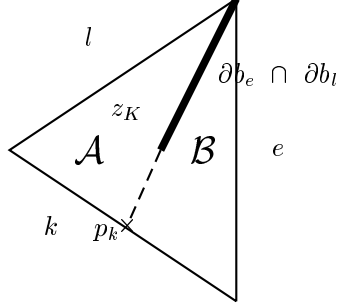
L'idée de la preuve est d'appliquer un théorème de trace au membre de droite de (4.3.3) mais dans un sous domaine de  $K$  bien choisi. Prolongeons donc le segment  $\partial b_e \cap \partial b_l$  jusqu'au troisième côté de  $K$  que nous nommons  $k$ , nous appelons  $p_k$  le point où ce prolongement rencontre  $k$  (la figure 4.3 résume la situation). Le triangle  $K$  se trouve, de ce fait, divisé en 2 sous triangles  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ .

Posons alors :

- $\rho_{\mathcal{A}} :=$  maximum des diamètres des cercles inscrits dans  $\mathcal{A}$ ,
- $\rho_{\mathcal{B}} :=$  maximum des diamètres des cercles inscrits dans  $\mathcal{B}$ .

Il est clair que  $\rho_{\mathcal{A}}$  ou  $\rho_{\mathcal{B}} \sim \rho_K$ . Nous convenons pour la suite que  $\rho_{\mathcal{A}} \sim \rho_K$ , c'est donc dans le sous triangle  $\mathcal{A}$  que nous allons travailler.

Nous avons alors, si nous désignons par  $h_{\mathcal{A}}$  le diamètre de la partie  $\mathcal{A}$ , que

FIG. 4.3 – triangle  $K$  et sous domaines  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ 

$$\begin{aligned}
\int_{\partial b_e \cap \partial b_l} |\nabla v|^2 \, ds &\leq \int_{\partial \mathcal{A}} |\nabla v|^2 \, ds \\
&\stackrel{\text{lemme 3.3.1}}{\leq} C(\xi) \left( \frac{\|\nabla v\|_{0,\mathcal{A}}^2}{h_{\mathcal{A}}} + h_{\mathcal{A}}^{1-2\beta} |\nabla v|_{1,\beta,\mathcal{A}}^2 \right), \\
&\leq C(\xi) \left( \frac{\|\nabla v\|_{0,K}^2}{h_K} + h_K^{1-2\beta} |\nabla v|_{1,\beta,K}^2 \right),
\end{aligned}$$

vu que  $\mathcal{A} \subset K$  et  $h_{\mathcal{A}} \sim h_K$ . Nous obtenons donc

$$\int_{\partial b_e \cap \partial b_l} |\nabla v|^2 \, ds \leq C(\xi) \left( \frac{|v|_{1,K}^2}{h_K} + h_K^{1-2\beta} |v|_{2,\beta,K}^2 \right).$$

En combinant ceci avec (4.3.3), nous aboutissons à l'estimée (4.3.2). ■

## 4.4 Majoration d'erreur

Dans cette section, nous établirons une majoration d'erreur linéaire du schéma numérique considéré et prouverons, sous certaines hypothèses supplémentaires, une majoration d'erreur quadratique.

**Théorème 4.4.1.** *Soient  $u \in H^{2,\beta}(\Omega)$ , où  $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$ , solution de (2.1.1) et  $T_h$  une triangulation régulière  $\beta$ -raffinée de  $\Omega$  (voir définition 3.3.1). Introduisons en outre  $u_{BN} \in S_h^0$  la solution de (4.2.2).*

*Alors, nous avons :*

$$\|u - u_{BN}\|_{1,h} \lesssim h \left( |u|_{2,\beta,\Omega}^2 + \|f\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4.1)$$

Preuve:

En tenant compte de (4.2.1) et de (4.2.2), nous obtenons

$$\bar{a}_h(u - u_{BN}, v_h) = 0, \forall v_h \in S_h^0$$

$\Downarrow$

$$\bar{a}_h(u - w_h, v_h) = \bar{a}_h(u_{BN} - w_h, v_h), \forall v_h, w_h \in S_h^0. \quad (4.4.2)$$

Or, pour  $w_h \in S_h^0$ , comme  $u_{BN} - w_h \in S_h^0$ , il vient que

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_{BN} - w_h)\|_{0,\Omega} &\leq \sup_{\substack{v_h \in S_h^0 \\ v_h \neq 0}} \frac{a_h(u_{BN} - w_h, v_h)}{|v_h|_{1,h}} \\ &\stackrel{\text{prop. 4.2.1}}{=} \sup_{\substack{v_h \in S_h^0 \\ v_h \neq 0}} \frac{\bar{a}_h(u_{BN} - w_h, v_h)}{|v_h|_{1,h}}. \end{aligned}$$

D' où, grâce à (4.4.2) :

$$\|\nabla(u - u_{BN})\|_{0,\Omega} \leq \sup_{\substack{v_h \in S_h^0 \\ v_h \neq 0}} \frac{\bar{a}_h(u - w_h, v_h)}{|v_h|_{1,h}}, \forall w_h \in S_h^0. \quad (4.4.3)$$

Développons quelque peu le terme au numérateur de (4.4.3) : Pour  $v_h, w_h \in S_h^0$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |\bar{a}_h(u - w_h, v_h)| &= \left| \sum_{e \in E_h^{in}} v_h(m_e) \int_{\partial b_e} \frac{\partial(u - w_h)}{n_e} ds \right| \\ &\leq \sum_{K \in T_h} \sum_{e, l \in E_h(K)} \left| v_h(m_e) - v_h(m_l) \right| \left| \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \frac{\partial(u - w_h)}{n_e} ds \right| \\ &\leq \left( \sum_{K \in T_h} \sum_{e, l \in E_h(K)} \left| v_h(m_e) - v_h(m_l) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left( \sum_{K \in T_h} \sum_{e, l \in E_h(K)} \left| \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \frac{\partial(u - w_h)}{n_e} ds \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

par l' inégalité de Cauchy-Schwarz. Il en résulte, grâce au lemme 3.5 de [20] (dont nous démontrons une variante plus précise dans le lemme 4.3.3), que

$$|\bar{a}_h(u - w_h, v_h)| \lesssim |v_h|_{1,h} \left( \sum_{K \in T_h} \sum_{e, l \in E_h(K)} \left| \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \frac{\partial(u - w_h)}{n_e} ds \right|^2 \right)^{1/2}, \forall v_h, w_h \in S_h^0. \quad (4.4.4)$$

Afin de majorer le membre de droite de (4.4.4), nous devons distinguer les différents cas suivants :

1<sup>o</sup> cas K a un sommet en O :

$u \in H^{2,\beta}(K)$ . Nous utilisons (4.3.2) qui nous fournit que :

$$\sum_{e,l \in E_h(K)} \left| \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \frac{\partial(u - w_h)}{n_e} ds \right|^2 \leq C (|u - w_h|_{1,K}^2 + h_K^{2-2\beta} |u|_{2,\beta,K}^2), \forall w_h \in S_h^0.$$

$\Downarrow$  hypothèse (H2')

$$\sum_{e,l \in E_h(K)} \left| \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \frac{\partial(u - w_h)}{n_e} ds \right|^2 \lesssim h^2 |u|_{2,\beta,K}^2 + \|u - w_h\|_{1,K}^2, \forall w_h \in S_h^0. \quad (4.4.5)$$

2<sup>o</sup> cas K n'a pas de sommet en O

$u \in H^2(K)$ , il suffit alors de reprendre la même démarche que dans le 1<sup>o</sup> cas en posant  $\beta := 0$  et de s' aider de (3.3.1), (4.3.1) et de l'hypothèse (H3') pour obtenir une estimée similaire à (4.4.5).

Nous reprenons (4.4.4), en tenant compte des résultats de notre disjonction des cas pour en majorer le membre de droite et obtenons

$$|\bar{a}_h(u - w_h, v_h)|^2 \lesssim |v_h|_{1,h}^2 \left( h^2 |u|_{2,\beta,\Omega}^2 + \|u - w_h\|_{1,h}^2 \right), \forall v_h, w_h \in S_h^0.$$

Ce qui précède ainsi que (4.4.3) fournissent alors

$$\|\nabla(u_{BN} - w_h)\|_{0,\Omega} \lesssim h |u|_{2,\beta,\Omega} + \|u - w_h\|_{1,h}, \forall w_h \in S_h^0. \quad (4.4.6)$$

Posons, dans (4.4.6),  $w_h := I_{CR}u$ , interpolé de Crouzeix-Raviart de  $u$ . Nous avons par le théorème 1 de [38] :

$$\|u - I_{CR}u\|_{1,h} \lesssim h (\|f\|_{0,\Omega}^2 + |u|_{2,\beta,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4.7)$$

L' inégalité (4.4.7) dans (4.4.6) donne :

$$\|\nabla(u_{BN} - I_{CR}u)\|_{0,\Omega} \lesssim h (\|f\|_{0,\Omega}^2 + |u|_{2,\beta,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où, grâce à l'inégalité de Poincaré discrète

$$\|u_{BN} - I_{CR}u\|_{1,h} \lesssim h (\|f\|_{0,\Omega}^2 + |u|_{2,\beta,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant alors une inégalité triangulaire ainsi que (4.4.7) et ce qui précède, nous obtenons (4.4.1). ■

**Théorème 4.4.2.** *Nous nous replaçons dans le contexte du théorème précédent. Supposons de plus que  $f \in H^1(\Omega)$  et que pour tout  $K \in T_h$ ,  $z_K$  est le barycentre de  $K$ .*

*Alors, nous avons :*

$$\|u - u_{BN}\|_{0,\Omega} \lesssim h^2 (|u|_{2,\beta,\Omega}^2 + \|f\|_{1,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}} . \quad (4.4.8)$$

Preuve:

Considérons tout d'abord le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta\phi = u - u_{BN} \text{ dans } \Omega , \\ \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega . \end{cases} \quad (4.4.9)$$

Nous utiliserons l'estimée suivante (voir [4]) :

$$|\phi|_{2,\beta,\Omega} + |\phi|_{1,\Omega} \lesssim \|u - u_{BN}\|_{0,\Omega} . \quad (4.4.10)$$

Notons tout d'abord que, par (4.4.9)

$$\begin{aligned} \|u - u_{BN}\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_{K \in T_h} (u - u_{BN}, -\Delta\phi)_K \\ &= \sum_{K \in T_h} (\nabla(u - u_{BN}), \nabla\phi)_K \\ &\quad - \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} (u - u_{BN}) \frac{\partial\phi}{\partial n} ds , \end{aligned}$$

où  $n$  désigne la normale unitaire sortante à  $K$ .

D' où :

$$\begin{aligned} \|u - u_{BN}\|_{0,\Omega}^2 &\leq |a_h(u - u_{BN}, \phi - v_h)| \\ &\quad + |a_h(u - u_{BN}, v_h)| \\ &\quad + \left| \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} (u - u_{BN}) \frac{\partial\phi}{\partial n} ds \right| , \forall v_h \in S_h^0 . \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Nous allons dans la suite majorer les 3 termes du membre de droite de (4.4.11).

1. Majoration du terme  $a_h(u - u_{BN}, \phi - v_h)$  pour  $v_h \in S_h^0$  :

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$|a_h(u - u_{BN}, \phi - v_h)| \leq |u - u_{BN}|_{1,h} |\phi - v_h|_{1,h} . \quad (4.4.12)$$

2. Majoration du terme  $a_h(u - u_{BN}, v_h)$  pour  $v_h \in S_h^0$ :

Notons dans un premier temps que

$$a_h(u - u_{BN}, v_h) = a_h(u, v_h) - \bar{a}_h(u_{BN}, v_h) , \quad (4.4.13)$$

par la proposition 4.2.1. Or

$$\begin{aligned} a_h(u, v_h) &= \sum_{K \in T_h} (\nabla u, \nabla v_h)_K \\ &= \sum_{K \in T_h} (f, v_h)_K + \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} v_h \frac{\partial u}{\partial n} ds , \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green et (2.1.1). De plus,

$$\bar{a}_h(u_{BN}, v_h) = \sum_{e \in E_h^{in}} v_h(m_e) \int_{b_e} f dx ,$$

car  $u_{BN}$  est solution de (4.2.2).

L'égalité (4.4.13) ainsi que ce qui précède fournissent

$$\begin{aligned} a_h(u - u_{BN}, v_h) &= \sum_{K \in T_h} (f, v_h)_K \\ &\quad + \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} v_h \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ &\quad - \sum_{e \in E_h^{in}} v_h(m_e) \int_{b_e} f dx \\ &\quad \Downarrow \\ a_h(u - u_{BN}, v_h) &= \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} v_h \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ &\quad + \sum_{K \in T_h} \int_K f (v_h - \bar{v}_h) dx . \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Nous allons à présent majorer les 2 termes du membre de droite de (4.4.14).

a. Majorons  $\sum_{K \in T_h} \int_K v_h \frac{\partial u}{\partial n} ds, v_h \in S_h^0$ :

Introduisons pour ceci, pour  $e \in E_h$ ,  $\mathcal{M}_e^0(\cdot)$  l'opérateur de projection orthogonale de  $L^2(e)$  vers  $\mathbb{P}^0(e)$ . Cet opérateur vérifie par définition la propriété suivante :

$$\int_e \mathcal{M}_e^0(v) w \, ds = \int_e v w \, ds, \forall w \in \mathbb{P}^0(e), \forall v \in L^2(e). \quad (4.4.15)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e \mathcal{M}_e^0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) v_h \, ds &= \sum_{\substack{e \in E_h^{in} \\ e = \bar{K} \cap \bar{L}}} \int_e \mathcal{M}_e^0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) (v_h|_K - v_h|_L) \, ds \\ &+ \sum_{\substack{e \in E_h^{ext} \\ e \subset \bar{K}}} \int_e \mathcal{M}_e^0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) v_h|_K \, ds \\ &= \sum_{\substack{e \in E_h^{in} \\ e = \bar{K} \cap \bar{L}}} |e| \mathcal{M}_e^0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) (v_h|_K - v_h|_L)(m_e) \\ &+ \sum_{\substack{e \in E_h^{ext} \\ e \subset \bar{K}}} |e| \mathcal{M}_e^0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) v_h|_K, \end{aligned}$$

par la formule des trapèzes (exacte sur  $\mathbb{P}^1(e)$ ) et le fait que  $\mathcal{M}_e^0(\frac{\partial u}{\partial n})$  est une constante sur  $e$ .

Or comme  $v_h$  est continue en  $m_e$ , si  $e \in E_h^{in}$ , et  $v_h(m_e) = 0$ , si  $e \in E_h^{ext}$ , il vient que

$$\sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e \mathcal{M}_e^0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) v_h \, ds = 0.$$

Par ce qui précède, nous obtenons

$$\sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} v_h \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e v_h \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \mathcal{M}_e^0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) \right) \, ds. \quad (4.4.16)$$

De la même manière

$$\sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e \mathcal{M}_e^0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) \phi \, ds = 0, \quad (4.4.17)$$

et

$$\sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e \frac{\partial u}{\partial n} \phi \, ds = 0, \quad (4.4.18)$$

car  $\phi|_{\partial\Omega} = 0$  et  $\phi \in H^{2,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$  (voir proposition 1.2.3).

Par (4.4.16), (4.4.17) et (4.4.18), nous avons :

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} v_h \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| \\
&= \left| \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e (v_h - \phi) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - M_e^0 \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right) ds \right| \\
&= \left| \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e \left( (v_h - \phi) - \mathcal{M}_e^0(v_h - \phi) \right) \left( \frac{\partial u}{\partial n} - \mathcal{M}_e^0 \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right) ds \right| ,
\end{aligned}$$

par (4.4.15). Par conséquent, grâce à la proposition 1.2.6,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} v_h \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| \\
&\lesssim \sum_{\substack{K \in T_h \\ O \in \partial K}} h_K^{1-\beta} |u|_{2,\beta,K} |v_h - \phi|_{1,K} + \sum_{\substack{K \in T_h \\ O \notin \partial K}} h_K |u|_{2,K} |v_h - \phi|_{1,K} .
\end{aligned}$$

Il s'en suit, par les hypothèses (H2') et (H3'), que :

$$\left| \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} v_h \frac{\partial u}{\partial n} ds \right| \lesssim h |u|_{2,\beta,\Omega} |v_h - \phi|_{1,h} . \quad (4.4.19)$$

b. Majorons  $\sum_{K \in T_h} \int_K f(v_h - \bar{v}_h) dx$  pour  $v_h \in S_h^0$  :

Introduisons pour cela, pour  $K \in T_h$ , la moyenne de  $f$  sur  $K$  définie par :

$$\mathcal{M}_K^0(f) := \frac{1}{|K|} \int_K f dx .$$

Nous avons alors, en passant sur le triangle de référence  $\hat{K}$ , que

$$\begin{aligned}
\int_K f(v_h - \hat{v}_h) dx &= |K| \left( \int_{\hat{K}} (\hat{f} - \mathcal{M}_{\hat{K}}^0(\hat{f})) (\hat{v}_h - \hat{\hat{v}}_h) d\hat{x} \right. \\
&\quad \left. + \int_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}}^0(\hat{f}) (\hat{v}_h - \hat{\hat{v}}_h) d\hat{x} \right) .
\end{aligned} \quad (4.4.20)$$

Or, comme  $\hat{z}_{\hat{K}}$  est la barycentre de  $\hat{K}$ , nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}}^0(\hat{f}) (\hat{v}_h - \hat{\hat{v}}_h) d\hat{x} &= \mathcal{M}_{\hat{K}}^0(\hat{f}) \left( \int_{\hat{K}} \hat{v}_h d\hat{x} - \frac{|\hat{K}|}{3} \sum_{e \in E_h(\hat{K})} \hat{v}_h(\hat{a}_i) \right) \\
&= \mathcal{M}_{\hat{K}}^0(\hat{f}) \frac{|\hat{K}|}{3} \left( \sum_{e \in E_h(\hat{K})} \hat{v}_h(\hat{a}_i) - \sum_{i=1}^3 \hat{v}_h(\hat{a}_i) \right) ,
\end{aligned}$$



en utilisant des formules d'intégration numérique exacte sur  $\mathbb{P}^1(\hat{K})$  (voir [24]).

Par conséquent

$$\int_{\hat{K}} \mathcal{M}_{\hat{K}}^0(\hat{f}) (\hat{v}_h - \hat{\bar{v}}_h) d\hat{x} = 0 . \quad (4.4.21)$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivi de la proposition 1.2.6, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\hat{K}} (\hat{f} - \mathcal{M}_{\hat{K}}^0(\hat{f}))(\hat{v}_h - \hat{\bar{v}}_h) d\hat{x} \right| &\leq \| \hat{f} - \mathcal{M}_{\hat{K}}^0(\hat{f}) \|_{0,\hat{K}} \| \hat{v}_h - \hat{\bar{v}}_h \|_{0,\hat{K}} \\ &\lesssim | \hat{f} |_{1,\hat{K}} | \hat{v}_h |_{1,\hat{K}} . \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

(4.4.21) et (4.4.22) fournissent alors dans (4.4.20) :

$$\left| \int_K f(v_h - \bar{v}_h) dx \right| \lesssim h_K^2 |v_h|_{1,K} |f|_{1,K} . \quad (4.4.23)$$

En tenant compte de (4.4.23) et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous arrivons alors à :

$$\left| \sum_{K \in T_h} \int_K f(v_h - \bar{v}_h) dx \right| \lesssim h^2 |v_h|_{1,h} |f|_{1,\Omega} . \quad (4.4.24)$$

Nous reprenons alors (4.4.14) et appliquons les inégalités (4.4.19) et (4.4.24) pour obtenir :

$$\begin{aligned} &|a_h(u - u_{BN}, v_h)| \\ &\lesssim h |u|_{2,\beta,\Omega} |\phi - v_h|_{1,h} + h^2 |v_h|_{1,h} |f|_{1,\Omega} . \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} &|a_h(u - u_{BN}, v_h)| \\ &\lesssim h (|u|_{2,\beta,\Omega} + |f|_{1,\Omega}) (|\phi - v_h|_{1,h} + h |\phi|_{1,h}) . \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

3. Majoration du terme  $\left| \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} (u - u_{BN}) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \right|$

Nous réitérons le raisonnement effectué en 2.a et réutilisons la proposition 1.2.6 pour obtenir :

$$\left| \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} (u - u_{BN}) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e \left( (u - u_{BN}) - \mathcal{M}_e^0(u - u_{BN}) \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} - \mathcal{M}_e^0 \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \right) ds \right| \\
&\lesssim \sum_{\substack{K \in T_h \\ O \in \partial K}} h_K^{1-\beta} |\phi|_{2,\beta,K} |u - u_{BN}|_{1,K} + \sum_{\substack{K \in T_h \\ O \notin \partial K}} h_K |\phi|_{2,K} |u - u_{BN}|_{1,K} .
\end{aligned}$$

D' où, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en tenant compte des hypothèses  $(H2')$  et  $(H3')$  :

$$\left| \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} (u - u_{BN}) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \right| \lesssim h |\phi|_{2,\beta,\Omega} |u - u_{BN}|_{1,h} . \quad (4.4.26)$$

Nous reprenons alors (4.4.11) en tenant compte des résultats des points 1., 2. et 3. (c'est à dire (4.4.12), (4.4.25) et (4.4.26)) et en posant  $v_h := \phi_h(\phi)$ , interpolé de Crouzeix-Raviart de  $\phi$ . Nous utilisons de plus l'estimée (4.4.10) qui nous permet d'obtenir (4.4.8). ■

## 4.5 Essais numériques

Nous nous plaçons sur le même domaine  $\Omega$  et considérons la même équation que dans le chapitre 3. Une illustration des maillages utilisés est donnée dans le chapitre précédent (voir figure 3.1). Les résultats de ces tests sont donnés dans la table 4.1 et la figure 4.4. Ces tests illustrent parfaitement la nécessité d'utiliser un maillage raffiné de manière adéquate en vu de rétablir un ordre de convergence optimal pour la méthode étudiée. En outre, nous montrons sur la figure 4.5 une illustration graphique des approximations obtenues sur un maillage uniforme et un maillage  $\beta$ -raffiné.

| $n$ | Maillage uniforme           |                        | Maillage $\beta$ -raffiné   |                        |
|-----|-----------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|
|     | $\ u - u_{BN}\ _{0,\Omega}$ | $\ u - u_{BN}\ _{1,h}$ | $\ u - u_{BN}\ _{0,\Omega}$ | $\ u - u_{BN}\ _{1,h}$ |
| 2   | 4.86E-02                    | 1.59E-01               | 3.67E-02                    | 1.38E-01               |
| 4   | 1.96E-02                    | 1.05E-01               | 1.10E-02                    | 7.84E-02               |
| 8   | 7.69E-03                    | 6.76E-02               | 3.22E-03                    | 4.33E-02               |
| 16  | 3.02E-03                    | 4.32E-02               | 9.29E-04                    | 2.35E-02               |
| 32  | 1.19E-03                    | 2.75E-02               | 2.65E-04                    | 1.26E-02               |
| 64  | 4.68E-04                    | 1.74E-02               | 7.45E-05                    | 6.70E-03               |

TAB. 4.1 – *normes  $\|u - u_{BN}\|_{0,\Omega}$  et  $\|u - u_{BN}\|_{1,h}$  pour les deux maillages*

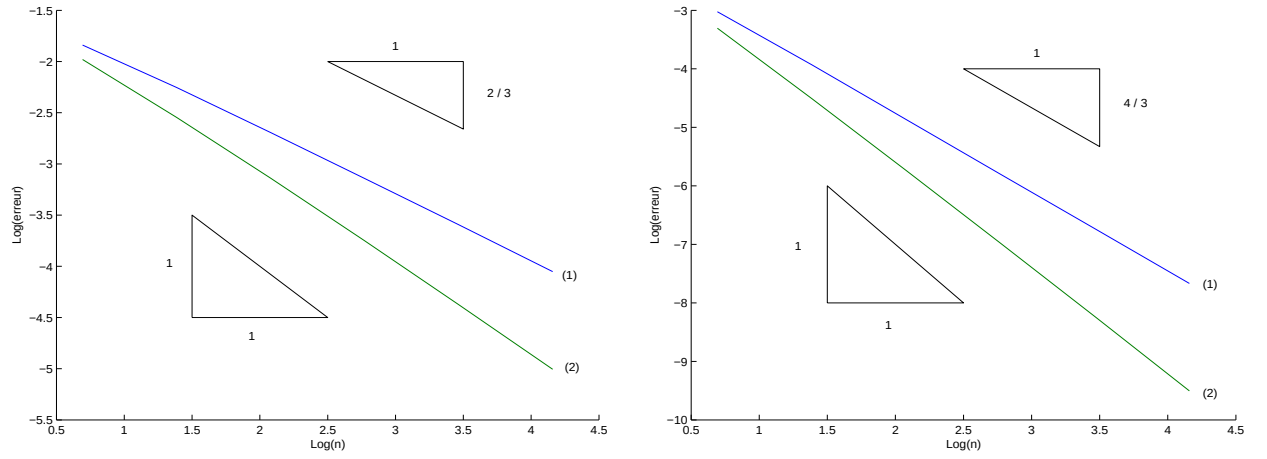


FIG. 4.4 – Comparaison des vitesses de convergence pour les normes  $\|u - u_{BN}\|_{1,h}$  (à gauche) et  $\|u - u_{BN}\|_{0,\Omega}$  (à droite) dans le cas d'un maillage uniforme (1) et dans le cas d'un maillage  $\beta$ -raffiné (2)

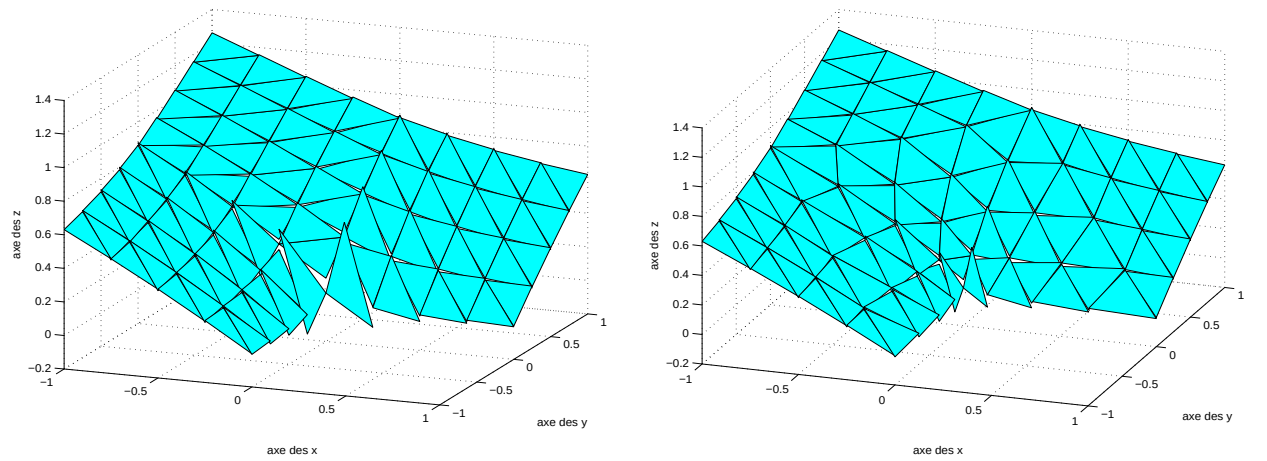


FIG. 4.5 – Représentation de la solution approchée sur un maillage uniforme (à gauche) et un maillage  $\beta$ -raffiné (à droite) pour  $n = 4$



## Chapitre 5

# Méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme raffinée en présence d'une singularité de coin pour le problème de Stokes

Ce chapitre traite de la discrétisation de l'équation de Stokes stationnaire par la méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme dans le cas où nous nous plaçons sur un domaine  $\Omega$  non convexe de  $\mathbb{R}^2$ .

Nous introduisons tout d'abord le problème plus précisément.

### 5.1 Position du problème et résultats de régularité

Soit  $\Omega$  un domaine du même type que celui introduit dans les chapitres précédents (voir chapitre 2 par exemple). Considérons le problème de Stokes, plus précisément : Trouver  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$  et  $p \in L_0^2(\Omega)$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega , \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega , \\ \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega , \end{array} \right. \quad (5.1.1)$$

où :

- $L_0^2(\Omega)$  représente l'ensemble des fonctions de carré intégrable et de moyenne nulle sur le domaine  $\Omega$ ,

- $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  constitue le champ de vitesse et  $p$  la pression (qui sont adimensionnées dans (5.1.1)),
- $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in (L^2(\Omega))^2$  désigne une densité de forces massiques extérieures,
- $\nu > 0$  représente la viscosité.

Nous introduisons alors la formulation variationnelle de (5.1.1), c'est à dire: Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega)$  tel que :

$$\begin{cases} \nu a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega, \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2, \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, \forall q \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (5.1.2)$$

où :

$$\begin{aligned} a : (H^1(\Omega))^2 \times (H^1(\Omega))^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto \sum_{i,j=1}^2 (D_j v_i, D_j w_i)_\Omega, \\ b : (H^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, q) &\longmapsto -(q, \operatorname{div} \mathbf{v})_\Omega. \end{aligned}$$

Donnons alors le

**Théorème 5.1.1.** *Le problème (5.1.2) admet une unique solution  $(\mathbf{u}, p) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega)$ . De plus  $(\mathbf{u}, p)$  est solution de (5.1.1) avec  $\mathbf{u} \in (H^{2,\beta}(\Omega))^2$  et  $p \in H^{1,\beta}(\Omega)$ , où  $\beta := 1 - \lambda$ ,  $\lambda$  étant la plus petite solution positive non nulle de*

$$\sin(\lambda\omega) = -\sin(\omega)\lambda. \quad (5.1.3)$$

Preuve: voir théorème II.1 de [90], ainsi que [32, 39, 6, 69]. Précisons que, suivant les résultats de [32],  $\beta := 1 - \lambda$ , où  $\lambda$  est le nombre complexe de plus petite partie réelle strictement positive solution de (5.1.3). [69] fournit alors que la valeur propre en question est réelle.

■

La solution  $(\mathbf{u}, p)$  de (5.1.1) présente en fait une singularité de coin en  $O$ . Dans le cadre des méthodes d'Éléments Finis, il faut donc, tout comme dans le cas du problème de Laplace, exploiter la régularité de celle-ci en vue d'obtenir un résultat de convergence optimal (voir pour les méthodes d'Éléments Finis [6, 38, 39, 41]).

Nous adoptons par la suite les mêmes conventions et notations que dans la section 4, c'est à dire que nous définissons un maillage primal  $T_h$ , un maillage dual  $B_h$  ainsi que l'espace  $S_h$  des fonctions non conformes sur le

maillage primal. Nous définissons de plus  $IP^0(T_h)$  comme l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur le maillage primal de  $\Omega$  (voir [29]). Suivant le même principe que dans [19, 23, 42], nous aurons  $T_h$  qui servira à définir l'espace d'approximations de la solution de (5.1.1) alors que  $B_h$  permettra la discrétisation de (5.1.1).

## 5.2 Schéma numérique

Pour approcher (5.1.1), nous fixons  $T_h$  une triangulation et  $B_h$  un maillage dual de  $\Omega$ .

Définissons en premier lieu :

$$\begin{aligned}
a_h : \quad & \left( (S_h)^2 + (H^1(\Omega))^2 \right)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\
& (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \longmapsto \sum_{i=1}^2 \sum_{K \in T_h} \int_K \nabla v_{h,i} \cdot \nabla w_{h,i} \, dx, \\
\bar{a}_h : \quad & \left( (S_h)^2 + (H^2(\Omega))^2 \right)^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\
& (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \longmapsto - \sum_{i=1}^2 \sum_{e \in E_h^{in}} \int_{\partial b_e} \frac{\partial v_{h,i}}{\partial \mathbf{n}_e} w_{h,i}(m_e) \, ds, \\
b_h : \quad & \left( (S_h)^2 + (H^1(\Omega))^2 \right) \times IP^0(T_h) \longrightarrow \mathbb{R} \\
& (\mathbf{v}_h, q_h) \longmapsto - \sum_{K \in T_h} \int_K q_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, dx, \\
\bar{b}_h : \quad & \left( (S_h)^2 + (H^2(\Omega))^2 \right) \times IP^0(T_h) \longrightarrow \mathbb{R} \\
& (\mathbf{v}_h, q_h) \longmapsto \sum_{e \in E_h^{in}} \int_{\partial b_e} q_h \bar{\mathbf{v}}_h(m_e) \cdot \mathbf{n}_e \, ds,
\end{aligned}$$

où, pour  $i \in \{1, 2\}$

- $n_{e,i}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\mathbf{n}_e$ , la normale unitaire sortante à  $b_e$  sur  $e \in E_h$ ,
- $v_{h,i}$  désigne ici et dans tout le reste du chapitre la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\mathbf{v}_h \in (L^2(\Omega))^2$ .

Nous multiplions dans un premier temps la  $1^{\text{ère}}$  équation de (5.1.1) par  $\bar{\phi}_{e,i} := \bar{\phi}_e$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $e \in E_h^{in}$  (voir la sous-section 4 pour la définition de  $\bar{\phi}_e$ ), et l'intégrons sur  $\Omega$ , d'où :

$$-\nu \int_{\Omega} \Delta u_i \bar{\phi}_{e,i} \, dx + \int_{\Omega} D_i p \bar{\phi}_{e,i} \, dx = \int_{\Omega} f_i \bar{\phi}_{e,i} \, dx, \forall i \in \{1, 2\}$$

$\Downarrow$

$$-\nu \int_{b_e} \Delta u_i \bar{\phi}_{e,i} \, dx + \int_{b_e} D_i p \bar{\phi}_{e,i} \, dx = \int_{b_e} f_i \bar{\phi}_{e,i} \, dx, \forall e \in E_h^{in}, \forall i \in \{1, 2\},$$

car  $\operatorname{supp}(\bar{\phi}_{e,i}) = \bar{b}_e$ . En utilisant la formule de Green, nous obtenons enfin

$$-\nu \int_{\partial b_e} \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}_e} \bar{\phi}_{e,i} ds + \int_{\partial b_e} p \bar{\phi}_{e,i} n_{e,i} ds = \int_{b_e} f_i \bar{\phi}_{e,i} dx, \forall e \in E_h^{in}, \forall i \in \{1,2\}. \quad (5.2.1)$$

Nous multiplions ensuite la 2<sup>nde</sup> équation de (5.1.1) par  $\phi_K$ , indicatrice de  $K \in T_h$ , et l'intégrons sur  $\Omega$  pour obtenir,  $\forall K \in T_h$  :

$$\int_{\Omega} \phi_K \operatorname{div} \mathbf{u} dx = 0. \quad (5.2.2)$$

En utilisant (5.2.1) et (5.2.2), nous avons que la formulation de (5.1.1) au sens des Éléments-Volumes Finis est de trouver  $(\mathbf{u}_B, p_B) \in (S_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \nu \bar{a}_h(\mathbf{u}_B, \mathbf{w}_h) + \bar{b}_h(\mathbf{w}_h, p_B) = (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{w}}_h)_{\Omega}, \forall \mathbf{w}_h \in (S_h^0)^2, \\ b_h(\mathbf{u}_B, q_h) = 0, \forall q_h \in IP^0(T_h), \end{cases} \quad (5.2.3)$$

où  $\bar{a}_h$ ,  $b_h$  et  $\bar{b}_h$  ont été données précédemment.

### 5.3 Résultats préliminaires

Dans cette partie, nous donnons quelques lemmes qui vont tout d'abord nous permettre dans un premier temps de changer la formulation de (5.2.3) puis ensuite d'énoncer un théorème d'existence et d'unicité de la solution  $(\mathbf{u}_B, p_B) \in (S_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$  de (5.2.3). Pour tout le reste de cette partie, nous supposons que  $T_h$  est une triangulation régulière  $\beta$ -raffinée de  $\Omega$  (voir hypothèses (H1'), (H2') et (H3') de la définition II.1).

**Lemme 5.3.1.**  $\forall (\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \in (S_h^0)^2 \times (S_h^0)^2$  :

$$\bar{a}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) = a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h).$$

Preuve: Conséquence directe de la proposition 4.2.1

■

**Lemme 5.3.2.**  $\forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in (S_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$  :

$$\bar{b}_h(\mathbf{v}_h, q_h) = b_h(\mathbf{v}_h, q_h).$$

Preuve:

Comme les 2 formes  $\bar{b}_h$  et  $b_h$  sont bilinéaires, il suffit de démontrer le lemme pour  $\mathbf{v}_h := \phi_{e,i}$ , où  $i \in \{1,2\}$  et  $e \in E_h^{in}$  et  $q_h := \phi_K$ , où  $K \in T_h$ .

Nous supposons que  $e \in E_h(K)$ , sinon l'énoncé est trivialement vrai.



$$\begin{aligned}
\bar{b}_h(\phi_{e,i}, \phi_K) &= \sum_{l \in E_h(K)} \int_{\partial b_l \cap \bar{K}} \phi_K \bar{\phi}_{e,i} n_{l,i} ds \\
&= \sum_{l \in E_h(K)} \left( - \int_l \phi_K \bar{\phi}_{e,i} n_{l,i} ds + \int_{b_{l,K}} D_i \phi_K \bar{\phi}_{e,i} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{b_{l,K}} \phi_K D_i \bar{\phi}_{e,i} dx \right) \\
&= - \sum_{l \in E_h(K)} \phi_K \phi_{e,i}(m_l) n_{l,i} |l| \\
&= - \sum_{l \in E_h(K)} \int_l \phi_K \phi_{e,i} n_{l,i} ds \\
&= - \int_K \phi_K D_i \phi_{e,i} dx \\
&= b_h(\phi_{e,i}, \phi_K) .
\end{aligned}$$

■

Pour terminer cette série de petits lemmes, nous énonçons la condition inf – sup pour le couple  $(S_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$  et l'inégalité de Poincaré pour les fonctions de  $(S_h^0)^2$ .

**Lemme 5.3.3.** [14, 29]

Il existe  $C(\Omega) > 0$ , telle que :

$$\sup_{\substack{\mathbf{w}_h \in (S_h^0)^2 \\ \mathbf{w}_h \neq 0}} \frac{|b_h(\mathbf{w}_h, q_h)|}{|\mathbf{w}_h|_{1,h}} \geq C(\Omega) \|q_h\|_{0,\Omega} , \forall q_h \in IP^0(T_h).$$

Preuve: L'idée de la preuve consiste à déterminer, pour  $q_h \in IP^0(T_h)$ , un élément  $\mathbf{w}_h \in (S_h^0)^2$  vérifiant

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{w}_h|_K = q_h|_K , \forall K \in T_h , \\ |\mathbf{w}_h|_{1,K} \leq \|q_h\|_{0,K} . \end{cases}$$

■

Nous modifions la formulation de (5.2.3) qui devient, grâce aux lemmes 5.3.1 et 5.3.2 :

Trouver  $(\mathbf{u}_B, p_B) \in (S_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \nu a_h(\mathbf{u}_B, \mathbf{w}_h) + b_h(\mathbf{w}_h, p_B) = (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{w}}_h)_\Omega , \forall \mathbf{w}_h \in (S_h^0)^2 , \\ b_h(\mathbf{u}_B, q_h) = 0 , \forall q_h \in IP^0(T_h) . \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Nous pouvons à présent énoncer le

**Théorème 5.3.4.** *Le système linéaire (5.3.1) admet une unique solution  $(\mathbf{u}_B, p_B) \in (S_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$ .*

Preuve:

Comme nous sommes en dimension finie, nous allons uniquement montrer que si  $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , alors  $\mathbf{u}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $p_B = 0$ .

Posons dans (5.3.1)  $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{w}_h := \mathbf{u}_B$ , d'où :

$$\begin{cases} \nu a_h(\mathbf{u}_B, \mathbf{u}_B) + b_h(\mathbf{u}_B, p_B) = 0, \\ b_h(\mathbf{u}_B, q_h) = 0, \forall q_h \in IP^0(T_h) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$|\mathbf{u}_B|_{1,h} = 0 \text{ car } p_B \in IP^0(T_h)$$

$\Downarrow$

$$\|\mathbf{u}_B\|_{0,\Omega} = 0,$$

grâce au lemme 4.3.1. Il est alors clair que  $\mathbf{u}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

En tenant compte de ce qui précède, (5.3.1) implique

$$b_h(\mathbf{w}_h, p_B) = 0, \forall \mathbf{w}_h \in (S_h^0)^2$$

$\Downarrow$

$$\sup_{\substack{\mathbf{w}_h \in (S_h^0)^2 \\ \mathbf{w}_h \neq 0}} \frac{|b_h(\mathbf{w}_h, p_B)|}{|\mathbf{w}_h|_{1,h}} = 0$$

$\Downarrow$

$$\|p_B\|_{0,\Omega} = 0,$$

grâce au lemme 5.3.3. Nous avons donc  $p_B = 0$ , ce qui conclut la preuve.

■

## 5.4 Majoration d'erreur

Nous donnons deux théorèmes : Le premier rétablira, par un raffinement de maillage, une vitesse de convergence linéaire sur la pression (en norme  $L^2$ ) et sur la vitesse (en norme  $H^1$ ), Le second rétablira, sous certaines hypothèses supplémentaires, une vitesse de convergence quadratique sur la vitesse (en norme  $L^2$ ).

**Théorème 5.4.1.** *Soit  $(\mathbf{u}, p) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^{2,\beta}(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega) \cap H^{1,\beta}(\Omega)$  la solution de (5.1.1), où  $\beta = 1 - \lambda$  ( $\lambda$  étant donné par (5.1.3)). Considérons de plus  $T_h$  une triangulation régulière  $\beta$ -raffinée de  $\Omega$  de pas  $h$ ,  $B_h$  un maillage dual de  $\Omega$  et  $(\mathbf{u}_B, p_B) \in (S_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$  la solution de (5.3.1).*

Nous avons alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{1,h} + \|p - p_B\|_{0,\Omega} \lesssim h \left( \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + |\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega} + |p|_{1,\beta,\Omega} \right).$$

Preuve:

Le théorème 5.3.4 garantit l'existence et l'unicité de la solution de (5.3.1). Nous introduisons dans un premier temps l'approximation de (5.1.1) par la méthode des Éléments Finis, plus précisément : Trouver  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in (S_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$  vérifiant

$$\begin{cases} \nu a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) + b_h(\mathbf{w}_h, p_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h)_\Omega, \forall \mathbf{w}_h \in (S_h^0)^2, \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in IP^0(T_h), \end{cases} \quad (5.4.1)$$

où  $a_h(.,.)$  et  $b_h(.,.)$  ont été données auparavant. En outre, il est bien connu que l'estimée suivante s'applique [39]

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,h} + \|p - p_h\|_{0,\Omega} \lesssim h \left( |\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega} + |p|_{1,\beta,\Omega} \right). \quad (5.4.2)$$

Nous soustrayons alors (5.4.1) à (5.3.1) et obtenons

$$\begin{cases} \nu a_h(\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) + b_h(\mathbf{w}_h, p_B - p_h) = (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{w}}_h - \mathbf{w}_h)_\Omega, \forall \mathbf{w}_h \in (S_h^0)^2, \\ b_h(\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in IP^0(T_h). \end{cases} \quad (5.4.3)$$

Introduisons à présent  $\mathbf{e}_h := \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_h$ . Nous posons alors  $\mathbf{w}_h := \mathbf{e}_h \in (S_h^0)^2$  dans (5.4.3), d'où

$$\begin{cases} \nu |\mathbf{e}_h|_{1,h}^2 + b_h(\mathbf{e}_h, p_B - p_h) = (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{e}}_h - \mathbf{e}_h)_\Omega, \\ b_h(\mathbf{e}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in IP^0(T_h). \end{cases} \quad (5.4.4)$$

Or  $p_B - p_h \in IP^0(T_h)$ , donc, en tenant compte des deux égalités de (5.4.4), nous avons

$$\nu |\mathbf{e}_h|_{1,h}^2 = (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{e}}_h - \mathbf{e}_h)_\Omega. \quad (5.4.5)$$

En utilisant un argument de type Bramble-Hilbert, nous avons

$$|(\mathbf{f}, \bar{\mathbf{e}}_h - \mathbf{e}_h)_\Omega| \leq C(\xi) h \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} |\mathbf{e}_h|_{1,h} . \quad (5.4.6)$$

En combinant (5.4.5) et (5.4.6), il vient que

$$|\mathbf{e}_h|_{1,h} \leq \frac{C(\xi)}{\nu} h \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} . \quad (5.4.7)$$

Nous reprenons alors la première équation de (5.4.3) et (5.4.6) qui impliquent, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$\frac{|b_h(\mathbf{w}_h, p_B - p_h)|}{|\mathbf{w}_h|_{1,h}} \leq \nu |\mathbf{e}_h|_{1,h} + C(\xi) h \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} , \forall \mathbf{w}_h \in (S_h^0)^2$$

$\Downarrow$

$$\sup_{\substack{\mathbf{w}_h \in (S_h^0)^2 \\ \mathbf{w}_h \neq 0}} \frac{|b_h(\mathbf{w}_h, p_B - p_h)|}{|\mathbf{w}_h|_{1,h}} \leq C(\Omega, \xi) h \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}$$

en utilisant (5.4.7). Nous utilisons le lemme 5.3.3 et obtenons alors

$$\|p_B - p_h\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega, \xi) h \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} . \quad (5.4.8)$$

En appliquant alors une simple inégalité triangulaire ainsi que (5.4.2), (5.4.7) et (5.4.8), le résultat du théorème est immédiat. ■

*Remarque 5.4.1.* Il est possible de discrétiser par la même méthode d'Éléments-Volumes Finis l'équation de Stokes généralisée (c'est à dire avec l'apport d'un terme de réaction) et d'obtenir une majoration d'erreur similaire à celle du théorème 5.4.1 (voir [23]).

*Remarque 5.4.2.* En utilisant le lemme 4.3.1 ainsi que (5.4.7), nous obtenons

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,h} \lesssim h \left( \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + |\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega} + |p|_{1,\beta,\Omega} \right) . \quad (5.4.9)$$

Nous donnons à présent un théorème donnant, sous certaines hypothèses appropriées, une vitesse de convergence quadratique (uniquement pour la vitesse) du schéma d'Éléments-Volumes Finis considéré, cette majoration étant nouvelle à notre connaissance.

**Théorème 5.4.2.** *Soit  $(\mathbf{u}, p) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^{2,\beta}(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega) \cap H^{1,\beta}(\Omega)$  la solution de (5.1.1). Considérons de plus  $T_h$  une triangulation régulière  $\beta$ -raffinée de  $\Omega$  de pas  $h$ ,  $B_h$  un maillage dual de  $\Omega$  et  $(\mathbf{u}_B, p_B) \in (S_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$  la solution de (5.3.1).*

Nous supposons de plus que  $\mathbf{f} \in (H^1(\Omega))^2$  et que pour tout  $K \in T_h$ ,  $z_K$  est le barycentre de  $K$  (pour la définition de  $z_K$ , pour  $K \in T_h$ , nous renvoyons le lecteur au chapitre 3 ou 4).

Nous avons alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{0,\Omega} \lesssim h^2 (|\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega} + |p|_{1,\beta,\Omega} + \|\mathbf{f}\|_{1,\Omega}).$$

Preuve:

Considérons le problème auxiliaire suivant

$$\begin{cases} -\nu \Delta \phi + \nabla q = \mathbf{u} - \mathbf{u}_B \text{ dans } \Omega , \\ \operatorname{div} \phi = 0 \text{ dans } \Omega , \\ \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega . \end{cases} \quad (5.4.10)$$

Nous remarquons tout d'abord que l'estimée suivante s'applique (voir le théorème II.1 de [90])

$$|\phi|_{1,\Omega} + |\phi|_{2,\beta,\Omega} + |q|_{1,\beta,\Omega} \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{0,\Omega} . \quad (5.4.11)$$

Nous considérons de plus  $(\phi_h, q_h) \in (S_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$  solution de

$$\begin{cases} \nu \sum_{K \in T_h} \sum_{i,j=1}^2 (D_j \phi_{h,i}, D_j w_{h,i})_K - \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (q_h, D_i w_{h,i})_K \\ \qquad \qquad \qquad = \sum_{i=1}^2 ((u - u_B)_i, w_{h,i})_\Omega , \forall \mathbf{w}_h \in (S_h^0)^2 , \\ \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (s_h, D_i \phi_{h,i})_K = 0 , \forall s_h \in IP^0(T_h) . \end{cases} \quad (5.4.12)$$

Signalons que, grâce à (5.4.2), l'estimée suivante s'applique

$$\|\phi - \phi_h\|_{1,h} + \|q - q_h\|_{0,\Omega} \lesssim h (|\phi|_{2,\beta,\Omega} + |q|_{1,\beta,\Omega}) . \quad (5.4.13)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{0,\Omega}^2 &= (\mathbf{u} - \mathbf{u}_B, -\nu \Delta \phi + \nabla q)_\Omega \\
&= \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 ((u - u_B)_i, -\nu \Delta \phi_i + D_i q)_K \\
&= \nu \sum_{K \in T_h} \sum_{i,j=1}^2 (D_j(u - u_B)_i, D_j \phi_i)_K \\
&\quad - \nu \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 ((u - u_B)_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}_K})_{\partial K}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i(u - u_B)_i, q)_K \\
&+ \sum_{K \in T_h} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_B) \mathcal{S} \mathbf{n}_K, q)_{\partial K} ,
\end{aligned}$$

grâce à la formule de Green ( $\mathbf{n}_K$  désignant la normale unitaire sortante à  $K \in T_h$ ). Il s'en suit que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^6 T_i , \quad (5.4.14)$$

où

$$\begin{aligned}
T_1 &:= \nu \sum_{K \in T_h} \sum_{i,j=1}^2 (D_j(u - u_B)_i, D_j(\phi - \phi_h)_i)_K, \\
T_2 &:= \nu \sum_{K \in T_h} \sum_{i,j=1}^2 (D_j(u - u_B)_i, D_j \phi_{h,i})_K \\
&\quad - \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i \phi_{h,i}, q - q_h)_K, \\
T_3 &:= -\nu \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 ((u - u_B)_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}_K})_{\partial K}, \\
T_4 &:= - \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i(u - u_B)_i - D_i \phi_{h,i}, q - q_h)_K, \\
T_5 &:= - \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i(u - u_B)_i, q_h)_K, \\
T_6 &:= \sum_{K \in T_h} ((\mathbf{u} - \mathbf{u}_B) \mathcal{S} \mathbf{n}_K, q)_{\partial K}.
\end{aligned}$$

L'essentiel de la preuve consistera à majorer tous ces termes.

a. Majorons  $T_1$  :

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned}
|T_1| &\leq \nu \left( \sum_{K \in T_h} \sum_{i,j=1}^2 \|D_j(u - u_B)_i\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left( \sum_{K \in T_h} \sum_{i,j=1}^2 \|D_j(\phi - \phi_h)_i\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \nu |\mathbf{u} - \mathbf{u}_B|_{1,h} |\phi - \phi_h|_{1,h}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors, à l'aide de (5.4.13) et du théorème 5.4.1 :

$$|T_1| \lesssim h^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{0,\Omega} \left( \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + |\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega} + |p|_{1,\beta,\Omega} \right). \quad (5.4.15)$$

b. Majorons  $T_2$  :

$$T_2 = \nu \sum_{K \in T_h} \sum_{i,j=1}^2 (D_j u_i, D_j \phi_{h,i})_K - \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i \phi_{h,i}, p)_K + \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i \phi_{h,i}, p - q)_K$$

$$-\left(\nu \sum_{K \in T_h} \sum_{i,j=1}^2 (D_j u_{B,i}, D_j \phi_{h,i})_K - \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i \phi_{h,i}, p_B)_K + \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i \phi_{h,i}, p_B - q_h)_K\right).$$

Dans un premier temps, nous remarquons que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^2 (D_i \phi_{h,i}, (p - q) - (p_B - q_h))_K \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^2 (D_i (\phi - \phi_h)_i, (p - q) - (p_B - q_h))_K \right|, \end{aligned}$$

car  $\operatorname{div} \phi = 0$ .

D'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \sum_{i=1}^2 (D_i \phi_{h,i}, (p - q) - (p_B - q_h))_K \right| \quad (5.4.16)$$

$$\leq |\phi - \phi_h|_{1,h} (\|p - p_B\|_{0,\Omega} + \|q - q_h\|_{0,\Omega}).$$

De plus, par (5.3.1)

$$\begin{aligned} & \nu \sum_{K \in T_h} \sum_{i,j=1}^2 (D_j u_{B,i}, D_j \phi_{h,i})_K - \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i \phi_{h,i}, p_B)_K \\ &= (\mathbf{f}, \bar{\phi}_h)_\Omega. \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

En outre

$$\begin{aligned} & \nu \sum_{K \in T_h} \sum_{i,j=1}^2 (D_j u_i, D_j \phi_{h,i})_K - \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i \phi_{h,i}, p)_K \\ &= -\nu \sum_{K \in T_h} \sum_{i,j=1}^2 (D_j^{(2)} u_i, \phi_{h,i})_K + \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (\phi_{h,i}, D_i p)_K \\ &+ \nu \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}_K}, \phi_{h,i} \right)_{\partial K} - \sum_{K \in T_h} (\phi_h \mathcal{S} \mathbf{n}_K, p)_{\partial K} \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

Remarquons alors que

$$\begin{aligned} & -\nu \sum_{K \in T_h} \sum_{i,j=1}^2 (D_j^2 u_i, \phi_{h,i})_K + \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (\phi_{h,i}, D_i p)_K \\ &= (\mathbf{f}, \phi_h)_\Omega. \end{aligned} \quad (5.4.19)$$



En procédant comme en (3.42) de [19], il vient que

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in T_h} (\phi_h \mathcal{S}_{\mathbf{n}_K}, p)_{\partial K} \\
&= \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e \phi_h \mathcal{S}_{\mathbf{n}_K} p \, ds \\
&= \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e (\phi_h \mathcal{S}_{\mathbf{n}_K} - \phi \mathcal{S}_{\mathbf{n}_K}) (p - \mathcal{M}_0^e(p)) \, ds,
\end{aligned}$$

où  $\mathcal{M}_0^e(\cdot)$  est l'opérateur de  $L^2(e)$ -projection sur  $\mathbb{P}^0(e)$ . Nous obtenons alors, par un argument de type Bramble-Hilbert, que

$$\left| \sum_{K \in T_h} (\phi_h \mathcal{S}_{\mathbf{n}_K}, p)_{\partial K} \right| \leq C h |p|_{1,\beta,\Omega} \|\phi - \phi_h\|_{1,h}. \quad (5.4.20)$$

En outre, en réutilisant les mêmes arguments que précédemment, nous obtenons

$$\left| \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}_K}, \phi_{h,i} \right)_{\partial K} \right| \leq C h |\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega} \|\phi - \phi_h\|_{1,h}. \quad (5.4.21)$$

Nous reprenons (5.4.14), (5.4.17), (5.4.18), (5.4.19), (5.4.20) et (5.4.21), nous aboutissons alors à

$$\begin{aligned}
|T_2| &\leq |(\mathbf{f}, \phi_h - \bar{\phi}_h)_\Omega| + (\|p - p_B\|_{0,\Omega} + \|q - q_h\|_{0,\Omega}) \|\phi - \phi_h\|_{1,h} \\
&\quad + C h (|p|_{1,\beta,\Omega} + \nu |\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega}) \|\phi - \phi_h\|_{1,h}.
\end{aligned} \quad (5.4.22)$$

Or, en raisonnant de la même manière que dans le point 2.b de la preuve du théorème du chapitre 4 (puisque  $\mathbf{f} \in (H^1(\Omega))^2$  et que pour tout  $K \in T_h$ ,  $z_K$  est le barycentre de  $K$ ) nous avons une estimée similaire à (4.4.23), c'est à dire :

$$|(\mathbf{f}, \phi_h - \bar{\phi}_h)_\Omega| \lesssim h^2 |\mathbf{f}|_{1,\Omega} (\|\phi - \phi_h\|_{1,h} + |\phi|_{1,h}). \quad (5.4.23)$$

(5.4.23) remplacé dans (5.4.22) fournit

$$\begin{aligned}
|T_2| &\lesssim h \left( h |\mathbf{f}|_{1,\Omega} + |p|_{1,\beta,\Omega} + \nu |\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega} \right. \\
&\quad \left. + \|p - p_B\|_{0,\Omega} + \|q - q_h\|_{0,\Omega} \right) \|\phi - \phi_h\|_{1,h} \\
&\quad + h^2 |\mathbf{f}|_{1,\Omega} |\phi|_{1,h}.
\end{aligned}$$

Nous utilisons (5.4.11), (5.4.13), ainsi que le théorème 5.4.1 et aboutissons à

$$|T_2| \lesssim h^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{0,\Omega} \left( \|\mathbf{f}\|_{1,\Omega} + |\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega} + |p|_{1,\beta,\Omega} \right). \quad (5.4.24)$$

c. Majorons  $T_3$  :

En reprenant le raisonnement du point 2.a. de la preuve du théorème du chapitre 4 (voir estimée 4.4.19), nous obtenons

$$\left| \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 ((u - u_B)_i, \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{n}_K})_{\partial K} \right| \lesssim h |\phi|_{2,\beta,\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{1,h},$$

ce qui implique que

$$|T_3| \lesssim \nu h |\phi|_{2,\beta,\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{1,h}.$$

Nous employons alors l'estimée (5.4.11), ainsi que la remarque 5.4.2 et le résultat du théorème 5.4.1 qui nous permettent de conclure à

$$|T_3| \lesssim h^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{0,\Omega} \left( \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + |\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega} + |p|_{1,\beta,\Omega} \right). \quad (5.4.25)$$

d. Majorons  $T_4$  :

Remarquons que, grâce à la seconde équation de (5.4.10), nous avons

$$\sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i \phi_{h,i}, q - q_h)_K = \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i (\phi_i - \phi_{h,i}), q - q_h)_K.$$

Nous appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz à ce qui précède et obtenons

$$\left| \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i \phi_{h,i}, q - q_h)_K \right| \leq |\phi - \phi_h|_{1,h} \|q - q_h\|_{0,\Omega}. \quad (5.4.26)$$

De plus, en appliquant toujours l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\left| \sum_{K \in T_h} \sum_{i=1}^2 (D_i (u - u_B)_i, q - q_h)_K \right| \leq |\mathbf{u} - \mathbf{u}_B|_{1,h} \|q - q_h\|_{0,\Omega}. \quad (5.4.27)$$

Par (5.4.26) et (5.4.27), il vient que

$$|T_4| \leq (|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B|_{1,h} + |\phi - \phi_h|_{1,h}) \|q - q_h\|_{0,\Omega}.$$

En utilisant (5.4.11), (5.4.13) et le résultat du théorème 5.4.1, nous avons

$$|T_4| \lesssim h^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{0,\Omega} \left( \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + |\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega} + |p|_{1,\beta,\Omega} \right). \quad (5.4.28)$$

e. Majorons  $T_5$  :

$$T_5 = - \sum_{K \in T_h} (\operatorname{div} \mathbf{u}, q_h)_K + \sum_{K \in T_h} (\operatorname{div} \mathbf{u}_B, q_h)_K .$$

Or, vu que  $q_h \in IP^0(T_h)$  et que,  $\forall K \in T_h$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{u}|_K = \operatorname{div} \mathbf{u}_B|_K = 0$ , nous en concluons que

$$T_5 = 0 . \quad (5.4.29)$$

f. Majorons  $T_6$  :

Remarquons que

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e \mathcal{M}_0^e(q) \mathbf{u} \mathbf{S} \mathbf{n}_K \, ds \\ &= \sum_{\substack{e \in E_h^{in} \\ e = \bar{K} \cap \bar{L}}} \mathcal{M}_0^e(q) \int_e (\mathbf{u} \mathbf{S} \mathbf{n}_K - \mathbf{u} \mathbf{S} \mathbf{n}_L) \, ds , \end{aligned}$$

car  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  sur  $\partial\Omega$ . D'où, comme  $\mathbf{u} \in (C^0(\bar{\Omega}))^2$

$$\sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e \mathcal{M}_0^e(q) \mathbf{u} \mathbf{S} \mathbf{n}_K \, ds = 0 .$$

De manière similaire

$$\sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e \mathcal{M}_0^e(q) \mathbf{u}_B \mathbf{S} \mathbf{n}_K \, ds = 0 ,$$

étant donné que  $\mathbf{u}_B$  est continue en  $m_e$  pour  $e \in E_h^{in}$ , nulle en  $m_e$  pour  $e \in E_h^{ext}$  et que  $\mathbf{u}_B|_e \in IP_1(e)$  pour  $e \in E_h$ .

Ces 2 remarques fournissent que

$$\begin{aligned} |T_6| &= \left| \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e \left( q - \mathcal{M}_0^e(q) \right) \left( (\mathbf{u} - \mathbf{u}_B) \mathbf{S} \mathbf{n}_K - \mathcal{M}_0^e((\mathbf{u} - \mathbf{u}_B) \mathbf{S} \mathbf{n}_K) \right) \, ds \right| \\ &\leq h |q|_{1,\beta,\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{1,h} . \end{aligned}$$

Par (5.4.11), le résultat du théorème 5.4.1 et la remarque 5.4.2, nous obtenons

$$|T_6| \lesssim h^2 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{0,\Omega} \left( \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + |\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega} + |p|_{1,\beta,\Omega} \right) . \quad (5.4.30)$$

Nous procédons ensuite à la synthèse de nos différents résultats, c'est à dire (5.4.15), (5.4.24), (5.4.25), (5.4.28), (5.4.29) ainsi que (5.4.30) que nous remplaçons dans (5.4.14), ceci nous permettant de conclure aisément au résultat du théorème.

■

## 5.5 Essais numériques

Posons  $\Omega := ]-1,1[^2 \setminus [0,1[ \times ]-1,0]$  ("L-shape"). Nous considérons le problème de Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega , \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega , \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega , \end{array} \right. \quad (5.5.1)$$

où

$$\begin{aligned} - \mathbf{u} &:= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} , \\ - \mathbf{f} &:= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, f_1, f_2 \in L^2(\Omega) , \\ - \mathbf{g} &:= \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, g_1, g_2 \in L^2(\partial\Omega) . \end{aligned}$$

Nous introduisons  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires standards de  $\mathbb{R}^2$  centrées en  $O$ . Introduisons les fonctions suivantes

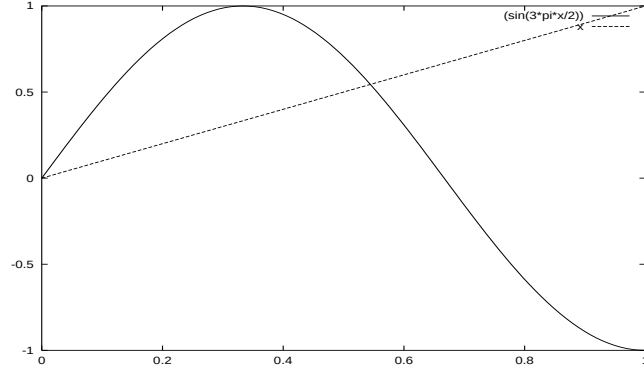
$$\begin{aligned} \phi_1(\theta) &:= -\sin(\lambda\theta)\cos(\omega) - \lambda\sin(\theta)\cos(\lambda(\omega - \theta) + \theta) \\ &\quad + \lambda\sin(\omega - \theta)\cos(\lambda\theta - \theta) + \sin(\lambda(\omega - \theta)) , \\ \phi_2(\theta) &:= -\sin(\lambda\theta)\sin(\omega) - \lambda\sin(\theta)\sin(\lambda(\omega - \theta) + \theta) \\ &\quad - \lambda\sin(\omega - \theta)\sin(\lambda\theta - \theta) , \\ \phi_p(\theta) &:= 2\lambda[\sin((\lambda - 1)\theta) + \sin((\lambda - 1)\theta - \lambda\omega)] , \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} - \omega &:= \frac{3\pi}{2} \text{ (angle intérieur à } \Omega \text{ en } O) , \\ - \lambda &\text{ est choisi comme étant la plus petite solution positive de (5.1.3), la figure 5.1 illustrant ce choix de } \lambda \\ &\text{ dans notre cas.} \end{aligned}$$

Numériquement, nous obtenons  $\lambda \approx 0.5445$ . Définissons alors

$$- u_1 := r^\lambda \phi_1(\theta) ,$$

FIG. 5.1 – Localisation de  $\lambda$ 

- $u_2 := r^\lambda \phi_2(\theta)$  ,
- $p := r^{\lambda-1} \phi_p(\theta)$  .

Ces fonctions sont tracées sur la figure 5.2. Nous avons alors que  $(\mathbf{u}, p)$  est la solution de (5.5.1) pour  $\mathbf{f} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{g}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}|_{\partial\Omega}$  (voir [6, 62]). En outre,  $(\mathbf{u}, p) \in (H^{2,\beta}(\Omega))^2 \times H^{1,\beta}(\Omega)$  pour  $\beta \in [1 - \lambda, 1[$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $h := \frac{1}{n}$ .

Pour  $T_h$  une triangulation quelconque de  $\Omega$ , nous introduisons  $(\mathbf{u}_B, p_B) \in (S_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$  la solution de (5.3.1). Nous implémentons cette solution sur deux maillages : un maillage uniforme et un maillage  $\beta$ -raffiné ( $\beta = 1 - \lambda \approx 0.4555$ ), tout deux de pas  $h$ . Ceux-ci sont représentés, pour  $n = 10$ , sur la figure 5.3. Précisons que ces solutions sont implémentées à l'aide de l'algorithme d'UZAWA (voir chapitre 5.2 de [95]) avec un critère d'arrêt fixé à  $10^{-12}$  sur la norme  $L^2$  de deux approximations successives de la pression.

La table 5.1 donne, pour différentes valeurs de  $n$ , l'erreur commise pour ces deux maillages. La figure 5.4 fournit enfin les divers taux de convergence de la méthode pour les maillages uniformes et  $\beta$ -raffinés. La figure 5.5 représente enfin l'approximation de la pression obtenue sur un maillage uniforme et un maillage  $\beta$ -raffiné.

Nous observons que, pour un maillage uniforme, l'ordre de convergence sur la pression et sur la vitesse n'est pas optimal. Seul l'utilisation d'un maillage  $\beta$ -raffiné garantit la restauration de cet ordre de convergence optimal (c'est à dire 2 pour la norme  $L^2$  de la vitesse et 1 pour les normes  $H^1$ -discrète de la vitesse et  $L^2$  de la pression).

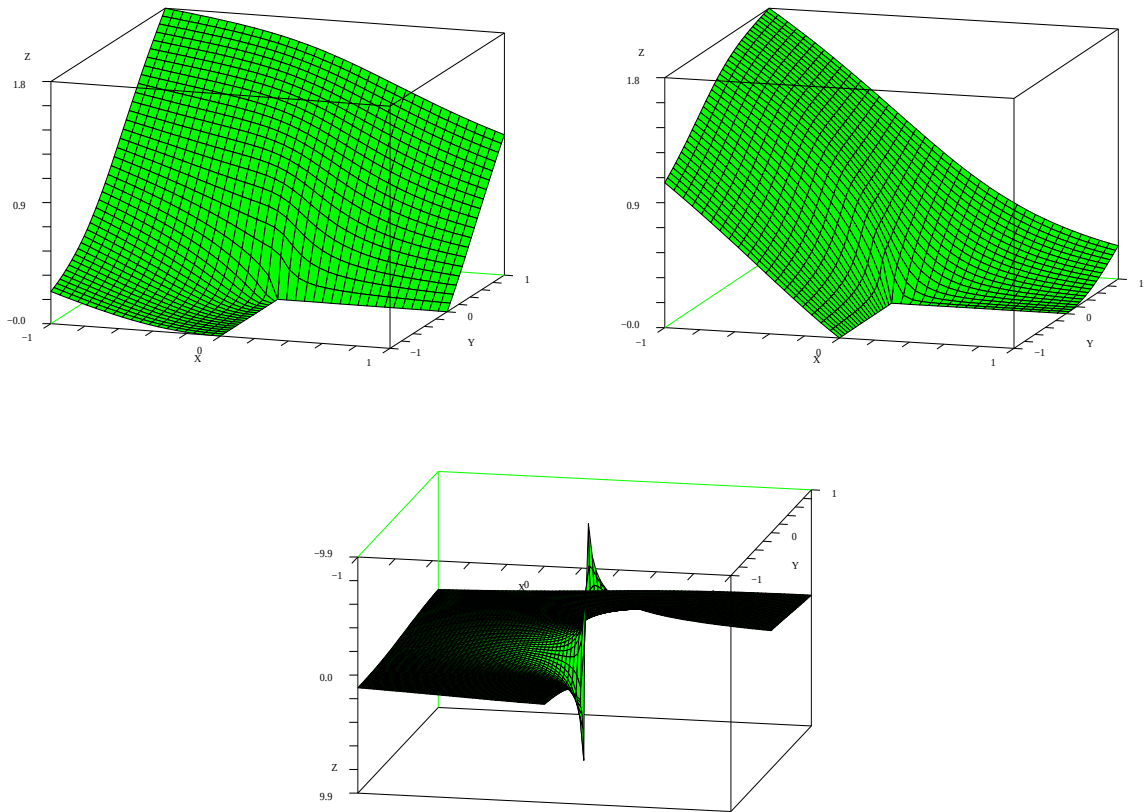


FIG. 5.2 – Représentation de  $\mathbf{u}$  (première composante en haut à gauche, seconde composante en haut à droite) et  $p$  (en bas)

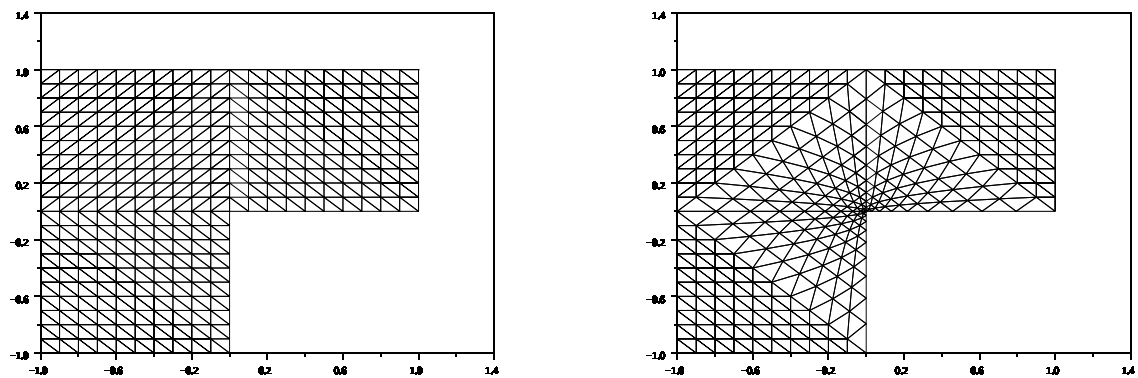
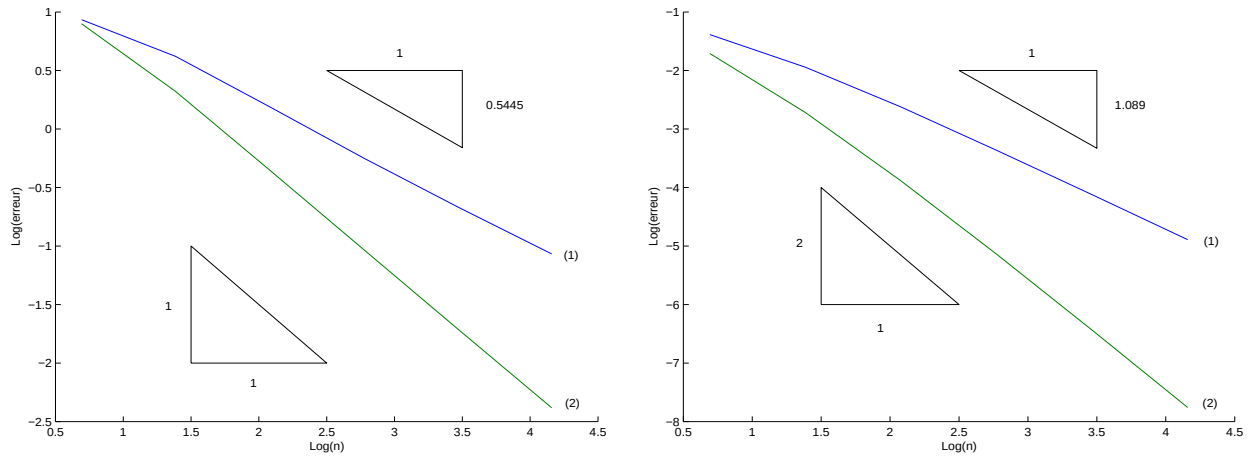
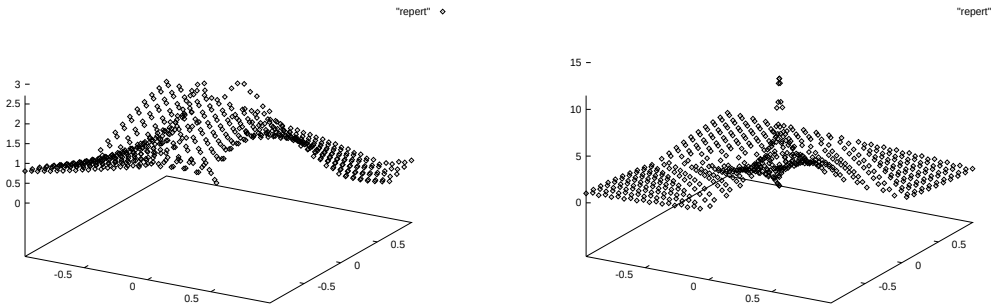


FIG. 5.3 – Illustration des maillages utilisés : uniforme (à gauche) et  $\beta$ -raffiné pour  $\beta = 1 - \lambda$  (à droite)

| $n$ | Maillage uniforme                          |                                            |                          | Maillage $\beta$ -raffiné                  |                                            |                          |
|-----|--------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------|
|     | $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_B\ _{0,\Omega}$ | $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_B\ _{1,\Omega}$ | $\ p - p_B\ _{0,\Omega}$ | $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_B\ _{0,\Omega}$ | $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_B\ _{1,\Omega}$ | $\ p - p_B\ _{0,\Omega}$ |
| 2   | $2,50 \cdot 10^{-1}$                       | $6,85 \cdot 10^{-1}$                       | $1,86 \cdot 10^0$        | $1,81 \cdot 10^{-1}$                       | $6,18 \cdot 10^{-1}$                       | $1,84 \cdot 10^0$        |
| 4   | $1,43 \cdot 10^{-1}$                       | $5,80 \cdot 10^{-1}$                       | $1,28 \cdot 10^0$        | $6,59 \cdot 10^{-2}$                       | $4,23 \cdot 10^{-1}$                       | $9,55 \cdot 10^{-1}$     |
| 8   | $7,25 \cdot 10^{-2}$                       | $4,42 \cdot 10^{-1}$                       | $7,67 \cdot 10^{-1}$     | $2,05 \cdot 10^{-2}$                       | $2,51 \cdot 10^{-1}$                       | $4,53 \cdot 10^{-1}$     |
| 16  | $3,46 \cdot 10^{-2}$                       | $3,18 \cdot 10^{-1}$                       | $4,62 \cdot 10^{-1}$     | $5,86 \cdot 10^{-3}$                       | $1,38 \cdot 10^{-1}$                       | $2,19 \cdot 10^{-1}$     |
| 32  | $1,62 \cdot 10^{-2}$                       | $2,23 \cdot 10^{-1}$                       | $2,91 \cdot 10^{-1}$     | $1,60 \cdot 10^{-3}$                       | $7,33 \cdot 10^{-2}$                       | $1,08 \cdot 10^{-1}$     |
| 64  | $7,51 \cdot 10^{-3}$                       | $1,54 \cdot 10^{-1}$                       | $1,90 \cdot 10^{-1}$     | $4,27 \cdot 10^{-4}$                       | $3,81 \cdot 10^{-2}$                       | $5,43 \cdot 10^{-2}$     |

TAB. 5.1 – Erreurs obtenues pour un maillage uniforme et un maillage  $\beta$ -raffinéFIG. 5.4 – Vitesses de convergence de  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{1,h} + \|p - p_B\|_{0,\Omega}$  (à gauche) et de  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_B\|_{0,\Omega}$  (à droite) pour un maillage uniforme (courbe (1)) et un maillage  $\beta$ -raffiné (courbe (2))FIG. 5.5 – Erreur ponctuelle sur la pression dans le cas d'un maillage uniforme (à gauche) et un maillage  $\beta$ -raffiné (à droite) pour  $n = 8$





## Chapitre 6

# Discrétisation de l'équation de Navier-Stokes par une méthode d'Éléments-Volumes non conforme sur un ouvert polygonal non-convexe de $\mathbb{R}^2$

Ce chapitre traite de la discrétisation de l'équation de Navier-Stokes par la méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur les éléments  $IP_1$ -non conformes (voir [8, 19, 20, 23, 42, 72, 87, 97]) dans le cas où nous nous plaçons sur un ouvert polygonal non convexe de  $\mathbb{R}^2$ .

Dans un premier temps, nous introduisons l'équation de Navier-Stokes incompressible sur le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  donné en introduction, donnons des théorèmes concernant l'existence et l'unicité de la solution et énonçons un théorème de régularité de celle-ci dans le cas non-convexe.

### 6.1 Position du problème et résultats de régularité

Soit  $\Omega$  le domaine de  $\mathbb{R}^2$  introduit dans les chapitres précédentes. Nous rappelons que l'angle intérieur en  $O$  est noté  $\omega$  (cet angle étant strictement supérieur à  $\pi$ , l'angle intérieur aux autres sommets de  $\Omega$  étant inférieur à  $\pi$ ).

Nous considérons sur  $\Omega$  l'équation de Navier-Stokes incompressible avec conditions au bord de Dirichlet, plus précisément : Trouver un champ de vitesse  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  et une pression  $p$  solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega , \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega , \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega , \end{array} \right. \quad (6.1.1)$$

où

–  $\nu > 0$  représente la viscosité,

–  $\mathbf{f} := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  désigne la densité de forces massiques.

Une forme plus explicite de (6.1.1) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta u_i + \sum_{j=1}^2 u_j D_j u_i + D_i p = f_i \quad \text{dans } \Omega, \forall i \in \{1,2\} , \\ \sum_{j=1}^2 D_j u_j = 0 \quad \text{dans } \Omega , \\ u_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \forall i \in \{1,2\}. \end{array} \right. \quad (6.1.2)$$

Introduisons à présent la formulation variationnelle de (6.1.1). Dans ce but, posons

$$\begin{aligned} a : (H^1(\Omega))^2 \times (H^1(\Omega))^2 &\longrightarrow \mathbb{R} , \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} D_i v_j D_i w_j \, dx , \\ c : (H^1(\Omega))^2 \times (H^1(\Omega))^2 \times (H^1(\Omega))^2 &\longrightarrow \mathbb{R} , \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &\longmapsto \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_j D_j v_i w_i \, dx , \\ b : L^2(\Omega) \times (H^1(\Omega))^2 &\longrightarrow \mathbb{R} , \\ (\mathbf{v}, p) &\longmapsto - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx . \end{aligned}$$

La formulation variationnelle de (6.1.1) s'énonce alors comme suit: Trouver  $(\mathbf{u}, p) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega)$  satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(p, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega} , \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2 , \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 , \forall q \in L_0^2(\Omega) , \end{array} \right. \quad (6.1.3)$$

où nous rappelons que

- $(.,.)_\Omega$  désigne le produit scalaire standard sur  $L^2(\Omega)$ ,
- $H_0^1(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions de  $H^1(\Omega)$  s'annulant sur  $\partial\Omega$ ,
- $L_0^2(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions de  $L^2(\Omega)$  de moyenne nulle sur  $\Omega$ .

Énonçons alors le

**Théorème 6.1.1.** [95]

*Si  $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$ , alors (6.1.3) admet une unique solution  $(\mathbf{u}, p) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega)$  pourvu que  $\frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu^2}$  soit "suffisamment petit".*

*Remarque 6.1.1.* Nous renvoyons à [95] pour comprendre ce que nous entendons par "suffisamment petit".

Nous énonçons à présent le théorème de régularité suivant

**Théorème 6.1.2.** [62, 32]

*Nous nous plaçons dans les conditions d'application du théorème précédent. Nous définissons en outre  $\lambda$  comme étant la plus petite solution positive de*

$$\sin(\lambda\omega) = -\lambda \sin(\omega) , \quad (6.1.4)$$

où  $\omega$  a été introduit précédemment.

*Alors, la solution  $(\mathbf{u}, p) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega)$  de (6.1.3) appartient à  $(H^{2,\beta}(\Omega))^2 \times H^{1,\beta}(\Omega)$ ,  $\forall \beta \in [1 - \lambda, 1)$ , et est solution de (6.1.1).*

## 6.2 Schéma numérique

La difficulté supplémentaire par rapport à la discrétisation de l'équation de Stokes provient du terme convectif (c'est à dire  $c(.,.,.)$  dans la formulation variationnelle (6.1.3)). En effet, la discrétisation de ce terme convectif doit être numériquement stable, facilement implémentable, mais aussi et surtout conservative en tant que méthode de Volumes Finis.

Nous allons exposer trois méthodes pour traiter le terme convectif. Nous ne préciserons pas la discrétisation des autres termes de (6.1.1), celle-ci étant identique à ce qui a été fait dans le chapitre I.4 traitant de l'équation de Stokes. En outre, signalons dès à présent que, dans toute la suite, nous utiliserons les notations et les résultats de ce même chapitre. Nous introduirons donc trois approximations  $(\mathbf{u}_C, p_C)$ ,  $(\mathbf{u}_{DA}, p_{DA})$  et  $(\mathbf{u}_{EV}, p_{EV})$ , toutes les trois dans  $(S_h^0)^2 \times P^0(T_h)$ , mais définies de manières différentes.

Nous multiplions le terme convectif de (6.1.1) par  $\bar{\phi}_{e,i}$ ,  $i \in \{1,2\}$  et l'intégrons sur  $b_e$ ,  $e \in E_h^{in}$ . Nous appliquons ensuite la formule de la divergence pour aboutir à

$$\int_{b_e} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \bar{\phi}_{e,i} dx = \int_{\partial b_e} u_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{b_e} ds, \forall i \in \{1,2\}, \forall e \in E_h^{in}, \quad (6.2.1)$$

où nous rappelons que  $\mathbf{n}_{b_e}$  désigne la normale unitaire sortante à  $b_e$ .

### 6.2.1 Première méthode : Schéma centré [42]

Nous discrétisons le terme convectif en prenant (6.2.1) où nous remplaçons  $u_i$  par  $u_{C,i}$ ,  $i \in \{1,2\}$ . La discrétisation de (6.1.1) par la méthode d'Éléments-Volumes Finis centrée s'énonce donc comme suit :

Trouver  $\mathbf{u}_C := \begin{pmatrix} u_{C,1} \\ u_{C,2} \end{pmatrix} \in (S_h^0)^2$  et  $p_C \in IP^0(T_h)$  vérifiant

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_C, \phi_{e,i}) + \int_{\partial b_e} u_{C,i} \mathbf{u}_C \cdot \mathbf{n}_{b_e} ds + b_h(\phi_{e,i}, p_C) = (f_i, \bar{\phi}_{e,i})_\Omega, \forall e \in E_h^{in}, \forall i \in \{1,2\}, \\ b_h(\mathbf{u}_C, \mathbb{1}_K) = 0, \forall K \in T_h, \end{cases} \quad (6.2.2)$$

où  $a_h(.,.)$  et  $b_h(.,.)$  ont été définies dans le chapitre précédent et où  $\mathbb{1}_K$  désigne l'indicatrice de  $K \in T_h$ .

### 6.2.2 Deuxième méthode : Schéma décentré amont [42]

Dans un premier temps, définissons, pour  $e \in E_h^{in}$ , l'ensemble des arêtes voisines de  $e$  par

$$V_e := \{ l \in E_h \setminus \{e\} \text{ tel qu'il existe } K \in T_h : e, l \in E_h(K) \text{ et } \partial b_e \cap \partial b_l \neq \emptyset \}.$$

(6.2.1) s'écrit alors

$$\int_{b_e} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \bar{\phi}_{e,i} = \sum_{l \in V_e} \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} u_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{b_e} ds, \forall i \in \{1,2\}, \forall e \in E_h^{in}. \quad (6.2.3)$$

Dans (6.2.3), nous approchons, tout comme dans la première méthode,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{b_e}$  par  $\mathbf{u}_{DA} \cdot \mathbf{n}_{b_e}$ .

L'originalité du schéma décentré amont consiste, dans un second temps, à approcher  $u_i$  sur  $\partial b_e \cap \partial b_l$ ,  $l \in V_e$ , non plus par  $u_{DA,i}$ , mais par  $u_{DA,i}^{+, \mathbf{u}}$ , où, pour  $i \in \{1,2\}$ ,  $\mathbf{v} \in (C^0(\partial b_e))^2$  et  $x \in \partial b_e \cap \partial b_l$

$$u_{DA,i}^{+, \mathbf{v}}(x) := \begin{cases} u_{DA,i}(m_e) & \text{si } \mathbf{v}_{DA} \cdot \mathbf{n}_{b_e}(x) > 0, \\ u_{DA,i}(m_l) & \text{si } \mathbf{v}_{DA} \cdot \mathbf{n}_{b_e}(x) < 0. \end{cases}$$

Notons qu'en toute rigueur, nous devrions écrire  $u_{DA,i}^{+, \mathbf{v}, e}$  au lieu de  $u_{DA,i}^{+, \mathbf{v}}$  (car ce terme dépend aussi de  $e$ ), mais nous nous permettons d'omettre ce détail afin d'alléger les notations. La discrétisation de (6.1.1) par la méthode d'Éléments-Volumes Finis décentrée amont est donc la suivante :

Trouver  $\mathbf{u}_{DA} := \begin{pmatrix} u_{D,1} \\ u_{D,2} \end{pmatrix} \in (S_h^0)^2$  et  $p_{DA} \in IP^0(T_h)$  vérifiant

$$\begin{cases} a_h(\mathbf{u}_{DA}, \phi_{e,i}) + \int_{\partial b_e} u_{DA,i}^{+, \mathbf{u}_{DA}} \mathbf{u}_{DA} \cdot \mathbf{n}_{b_e} ds + b_h(\phi_{e,i}, p_{DA}) = (f_i, \bar{\phi}_{e,i})_\Omega, \forall e \in E_h^{in}, \forall i \in \{1, 2\}, \\ b_h(\mathbf{u}_{DA}, \mathbb{1}_K) = 0, \forall K \in T_h. \end{cases} \quad (6.2.4)$$

*Remarque 6.2.1.* Ce type de discrétisation (basée sur le signe d'une certaine quantité, le plus généralement celui d'un flux) est appelé choix upstream (ou downstream) et est typiquement introduit dans le cadre de la discrétisation d'un terme de convection par les méthodes de Volumes Finis (voir [52, 72]). Ici, signalons que c'est un choix upstream qui a été pratiqué, celui-ci assurant le plus souvent la stabilité numérique du schéma ainsi obtenu.

### 6.2.3 Troisième méthode : Schéma d'Éléments Finis-Volumes Finis [97, 72, 87]

Le principe de cette méthode est identique à celui de la précédente à la différence près que le choix upstream ne s'y fait pas de la même manière. Plus précisément, pour  $e \in E_h^{in}$ ,  $l \in V_e$  et  $\mathbf{v} \in (L^2(\partial b_e))^2$ , définissons

$$u_{EV,i}^{+, \mathbf{v}} := \begin{cases} u_{EV,i}(m_e) & \text{si } \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{b_e} ds > 0, \\ u_{EV,i}(m_l) & \text{si } \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{b_e} ds < 0. \end{cases}$$

La discrétisation de (6.1.1) par la méthode d'éléments finis-volumes finis s'énonce donc comme suit :

Trouver  $\mathbf{u}_{EV} := \begin{pmatrix} u_{EV,1} \\ u_{EV,2} \end{pmatrix} \in (S_h^0)^2$  et  $p_{EV} \in IP^0(T_h)$  vérifiant

$$\begin{cases} a_h(u_{EV,i}, \phi_{e,i}) + \int_{\partial b_e} u_{EV,i}^{+, \mathbf{u}_{EV}} \mathbf{u}_{EV} \cdot \mathbf{n}_{b_e} ds + b_h(\phi_{e,i}, p_{EV}) = (f_i, \bar{\phi}_{e,i})_\Omega, \forall e \in E_h^{in}, \forall i \in \{1, 2\}, \\ b_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbb{1}_K) = 0, \forall K \in T_h. \end{cases} \quad (6.2.5)$$

Nous entamons à présent l'étude de l'existence, de l'unicité et des estimées d'erreur pour le dernier schéma numérique donné, c'est à dire le schéma d'éléments finis-volumes finis. Signalons dès à présent que le schéma décentré amont peut se traiter de manière similaire (voir notamment la remarque 6.3.3). En revanche, pour le schéma centré, l'existence et l'unicité d'une solution, ainsi que la démonstration d'une majoration d'erreur, semble encore un problème ouvert. Cependant les essais numériques menés pour cette méthode tendent à suggérer pour ce schéma des estimées similaires aux deux autres.

### 6.3 Existence et unicité de la solution approchée

Introduisons tout d'abord

$$(\hat{S}_h)^2 := \{ \mathbf{v}_h \in (S_h)^2 : \forall K \in T_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h|_K = 0 \} ,$$

$$(\hat{S}_h^0)^2 := \{ \mathbf{v}_h \in (\hat{S}_h)^2 : v_{h,i}(m_e) = 0, \forall e \in E_h^{ext}, \forall i \in \{1,2\} \} ,$$

$$\begin{aligned} c_h : \left( (H^1(\Omega))^2 + (S_h)^2 \right)^3 &\longrightarrow \mathbb{R} , \\ (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) &\longmapsto \sum_{i=1}^2 \sum_{e \in E_h} \int_{\partial b_e} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \, v_{h,i}^{+, \mathbf{u}_h} \, \bar{w}_{h,i} . \end{aligned}$$

Nous donnons tout d'abord quelques lemmes indispensables pour la suite de notre travail.

**Lemme 6.3.1.** *Pour  $\mathbf{u}_h \in (S_h^0)^2$  fixé,  $c_h(\mathbf{u}_h, \cdot, \cdot)$  est une forme bilinéaire sur  $\left( (H^1(\Omega))^2 + (S_h)^2 \right)^2$ .*

Preuve:

La preuve se déduisant aisément par le calcul, nous nous permettons de ne pas l'expliciter ici, nous insistons cependant sur le fait que  $c_h(\cdot, \cdot, \cdot)$  n'est pas linéaire sur son premier argument (contrairement à la discrétisation par éléments finis).

■

**Lemme 6.3.2.** *Pour tout  $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \in (\hat{S}_h)^2 \times (S_h)^2$ , nous avons*

$$c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq 0 .$$

Preuve:

Rappelons que, pour  $e \in E_h$ ,  $V_e$  désigne l'ensemble des arêtes voisines de  $e$ .

Soit  $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \in (\hat{S}_h)^2 \times (S_h)^2$ . Nous avons

$$\begin{aligned} c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{e \in E_h} \int_{\partial b_e} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \, v_{h,i}^{+, \mathbf{u}_h} \, \bar{v}_{h,i} \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{e \in E_h} \sum_{l \in V_e} \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \, v_{h,i}^{+, \mathbf{u}_h} \, v_{h,i}(m_e) \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{e \in E_h} \sum_{l \in V_e} \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \, v_{h,i}^{+, \mathbf{u}_h} \, v_{h,i}(m_e) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{e \in E_h} \sum_{l \in V_e} \left( \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \right) |v_{h,i}(m_e)|^2 , \end{aligned}$$

car  $\mathbf{u}_h$  est de divergence nulle sur tout  $K \in T_h$ . Nous obtenons alors

$$c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = \sum_{i=1}^2 \sum_{e \in E_h} \sum_{l \in V_e} \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \left( v_{h,i}^{+, \mathbf{u}_h}(m_e) - \frac{1}{2} |v_{h,i}(m_e)|^2 \right). \quad (6.3.1)$$

Or, remarquons à présent que, dans (6.3.1), les termes relatifs à  $e \in E_h$  et  $l \in V_e$  sont :

– Pour  $\int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \geq 0$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \left( |v_{h,i}(m_e)|^2 - \frac{1}{2} |v_{h,i}(m_e)|^2 \right) \\ & \quad + \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_l} \, ds \left( v_{h,i}(m_e) v_{h,i}(m_l) - \frac{1}{2} |v_{h,i}(m_l)|^2 \right) \\ &= \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \left( \frac{1}{2} |v_{h,i}(m_e)|^2 - v_{h,i}(m_e) v_{h,i}(m_l) + \frac{1}{2} |v_{h,i}(m_l)|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \left( v_{h,i}(m_e) - v_{h,i}(m_l) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \right| \left( v_{h,i}(m_e) - v_{h,i}(m_l) \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left| \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_l} \, ds \right| \left( v_{h,i}(m_l) - v_{h,i}(m_e) \right)^2 \right), \end{aligned}$$

– pour  $\int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds < 0$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \left( v_{h,i}(m_l) v_{h,i}(m_e) - \frac{1}{2} |v_{h,i}(m_e)|^2 \right) \\ & \quad + \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_l} \, ds \left( |v_{h,i}(m_l)|^2 - \frac{1}{2} |v_{h,i}(m_l)|^2 \right) \\ &= \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_l} \, ds \left( \frac{1}{2} |v_{h,i}(m_l)|^2 - v_{h,i}(m_l) v_{h,i}(m_e) + \frac{1}{2} |v_{h,i}(m_l)|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_l} \, ds \left( v_{h,i}(m_e) - v_{h,i}(m_l) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \right| \left( v_{h,i}(m_e) - v_{h,i}(m_l) \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left| \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_l} \, ds \right| \left( v_{h,i}(m_l) - v_{h,i}(m_e) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Nous en concluons, grâce à ce qui précède et (6.3.1), que

$$c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{e \in E_h} \sum_{l \in V_e} \left| \int_{\partial b_e \cap \partial b_l} \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}_{b_e} \, ds \right| \left( v_{h,i}(m_e) - v_{h,i}(m_l) \right)^2,$$

de sorte que  $c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq 0$ .

■

*Remarque 6.3.1.* Un lemme identique est aisément démontrable par les mêmes arguments pour le schéma décentré amont. En revanche, pour le schéma centré, si nous désignons par  $c_h^{DA}(\cdot, \cdot, \cdot)$  la fonctionnelle issue de la discrétisation du terme non linéaire de (6.1.1) par le schéma décentré amont et par  $c_h^C(\cdot, \cdot, \cdot)$  celle issue de la discrétisation du même terme par le schéma centré, nous pouvons uniquement montrer que,  $\forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in (S_h)^2, \forall \mathbf{w}_h \in (S_h^0)^2$

$$\left| c_h^{DA}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) - c_h^C(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \right| \lesssim h^{1-\kappa} \|\mathbf{u}_h\|_{1,h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,h} \|\mathbf{w}_h\|_{1,h}, \quad \forall \kappa \in ]0,1] .$$

*Remarque 6.3.2.* En remarquant d'une part que, dans (6.2.5),  $\mathbf{u}_{EV} = \sum_{i=1}^2 \sum_{e \in E_h^{in}} u_{EV,i}(m_e) \phi_{e,i} \in (\hat{S}_h^0)^2$  et en utilisant d'autre part les lemmes 6.3.1 de cette sous-partie et 3 de la précédente, nous aboutissons à l'estimée a-priori suivant :

$$\|\mathbf{u}_{EV}\|_{1,h} \leq C(\Omega) \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu} ,$$

qui sera utilisé par la suite.

Donnons à présent le théorème concernant l'existence et l'unicité de la solution de (6.2.5).

**Théorème 6.3.3.** *Le système (6.2.5) admet au moins une solution  $(\mathbf{u}_{EV}, p_{EV}) \in (S_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$ . De plus, cette solution est unique pourvu que  $\frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu^2}$  soit "assez petit".*

Preuve:

La preuve, tiré de [97], suit la démarche de [95]. En outre, nous y préciserons ce que nous entendons par "assez petit" dans l'énoncé du théorème 6.3.3.

Démontrons la première partie du théorème

Par le lemme 7 de [29], nous avons que  $(\mathbf{u}_{EV}, p_{EV}) \in (\hat{S}_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$  est solution de (6.2.5) si et seulement si  $\mathbf{u}_{EV}$  est solution de

$$\nu a_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h) + c_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega, \quad \forall \mathbf{v}_h \in (\hat{S}_h^0)^2 . \quad (6.3.2)$$

Démontrons alors l'existence d'une solution  $\mathbf{u}_{EV} \in (\hat{S}_h^0)^2$  à (6.3.2)

Introduisons dans ce but l'application  $\Lambda : (\hat{S}_h^0)^2 \longrightarrow (\hat{S}_h^0)^2$  défini par

$$\Lambda : \mathbf{u}_h \longmapsto \Lambda \mathbf{u}_h ,$$

où  $\Lambda \mathbf{u}_h$  désigne l'unique élément de  $(\hat{S}_h^0)^2$  vérifiant

$$a_h(\Lambda \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \nu a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega, \quad \forall \mathbf{v}_h \in (\hat{S}_h^0)^2 .$$

L'existence de  $\Lambda \mathbf{u}_h$  pour tout  $\mathbf{u}_h \in (\hat{S}_h^0)^2$  découle du théorème de représentation de Riesz.

Nous obtenons ainsi un endomorphisme  $\Lambda : \mathbf{u}_h \in (\hat{S}_h^0)^2 \longmapsto \Lambda \mathbf{u}_h \in (\hat{S}_h^0)^2$ .



Le lemme 2 de [97] fournit la continuité de  $\Lambda$ . De plus, nous avons, pour tout  $\mathbf{u}_h \in (\hat{S}_h^0)^2$

$$\begin{aligned} a_h(\Lambda \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) &= \nu a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + c_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) - (\mathbf{f}, \mathbf{u}_h)_\Omega \\ &\geq \nu |\mathbf{u}_h|_{1,h}^2 - (\mathbf{f}, \mathbf{u}_h)_\Omega, \end{aligned}$$

par application du lemme 6.3.1. Il vient donc, par utilisation du lemme 4.3.1, que

$$\begin{aligned} a_h(\Lambda \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) &\geq |\mathbf{u}_h|_{1,h} \left( \nu |\mathbf{u}_h|_{1,h} - C(\Omega) \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \right) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

dès que  $|\mathbf{u}_h|_{1,h} > \frac{C(\Omega) \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu}$ . Par simple application du lemme II.1.4 de [95], nous en déduisons qu'il existe  $\mathbf{u}_{EV} \in (\hat{S}_h^0)^2$  vérifiant

$$\Lambda \mathbf{u}_{EV} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\nu a_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h) + c_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{0,\Omega} = 0, \forall \mathbf{v}_h \in (\hat{S}_h^0)^2,$$

c'est à dire d'une solution à (6.3.2).

L'existence d'une solution  $(\mathbf{u}_{EV}, p_{EV}) \in (S_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$  à (6.2.5) est donc bien démontrée.

Démontrons le deuxième partie du lemme

Soient  $(\mathbf{u}_{EV1}, p_{EV1}), (\mathbf{u}_{EV2}, p_{EV2}) \in (\hat{S}_h^0)^2 \times IP^0(T_h)$  deux solutions de (6.2.5). Si nous posons  $\mathbf{u}_{EV} := \mathbf{u}_{EV1} - \mathbf{u}_{EV2}$  et que nous écrivons la première équation de (6.2.5) pour  $\mathbf{u}_{EV} \in (\hat{S}_h^0)^2$ , nous obtenons

$$\nu a_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}) = c_h(\mathbf{u}_{EV2}, \mathbf{u}_{EV2}, \mathbf{u}_{EV}) - c_h(\mathbf{u}_{EV1}, \mathbf{u}_{EV1}, \mathbf{u}_{EV})$$

$$\Downarrow$$

$$\nu |\mathbf{u}_{EV}|_{1,h}^2 \leq \left| c_h(\mathbf{u}_{EV2}, \mathbf{u}_{EV2}, \mathbf{u}_{EV}) - c_h(\mathbf{u}_{EV1}, \mathbf{u}_{EV2}, \mathbf{u}_{EV}) \right| + \left| c_h(\mathbf{u}_{EV1}, \mathbf{u}_{EV1}, \mathbf{u}_{EV}) \right|$$

$$\Downarrow$$

$$\nu |\mathbf{u}_{EV}|_{1,h}^2 \leq C(\Omega) \|\mathbf{u}_{EV}\|_{1,h}^2 (\|\mathbf{u}_{EV2}\|_{1,h} + \|\mathbf{u}_{EV1}\|_{1,h}),$$

grâce au lemme 2 de [97]. Nous obtenons alors, grâce à la remarque 6.3.2 d'une part et au lemme 4.3.1 d'autre part, que

$$\left( C_1(\Omega) \nu - C_2(\Omega) \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu} \right) \|\mathbf{u}_{EV}\|_{1,h}^2 \leq 0 .$$

Par conséquent, si  $\frac{C_1(\Omega)}{C_2(\Omega)} \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu^2} < 1$ , nous pouvons en déduire que  $\mathbf{u}_{EV} = 0$ . Une fois obtenue l'unicité pour l'approximation de la vitesse, celle pour l'approximation de la pression en est aisément déduite à l'aide de la condition inf-sup (lemme 5.3.3). ■

*Remarque 6.3.3.* En utilisant la remarque 6.3.1 et les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve précédente, nous pouvons établir un résultat identique à celui du théorème 6.3.3 pour le schéma décentré amont.

## 6.4 Majoration d'erreur

Nous réintroduisons tout d'abord la définition d'un maillage  $\beta$ -raffiné,  $\beta \in [0,1[$ , mais en la restreignant légèrement. Nous préciserons au moment adéquat la nature de cette restriction et à quel moment elle s'impose.

**Définition 6.4.1.** Soit  $T_h$  une triangulation de  $\Omega$  et  $\beta \in [0,1[$ .

Nous dirons que  $T_h$  est une triangulation régulière  $\beta$ -raffinée, si il existe  $\xi > 0$ , telle que les 3 conditions suivantes soient vérifiées :

(H1'') :  $\forall K \in T_h, 1 \leq \frac{h_K}{\rho_K} \leq \xi$ , autrement dit  $T_h$  est une triangulation régulière,

(H2'') :  $\forall K \in T_h, h_K \sim \xi h^{\frac{1}{1-\beta}}$ , si  $K$  a un sommet en  $O$ ,

(H3'') :  $\forall K \in T_h, h_K \sim \xi h \min\{1, \inf_K r^\beta\}$ , si  $K$  n'a pas de sommet en  $O$ ,

où  $r := r(z) = d(z, O)$ ,  $\forall z \in \bar{\Omega}$ .

*Remarque 6.4.1.* Les conditions (H2'') et (H3'') sont plus fortes que leurs équivalents dans les chapitres 4 et 5 (conditions (H2') et (H3')). En effet, ces nouvelles conditions donnent des équivalences entre  $h_K$ ,  $K \in T_h$  et  $h$  alors que précédemment nous nous contentions de simples majorations.

Avant d'aller plus loin, introduisons une fonctionnelle que nous retrouverons par la suite. Nous posons donc

$$\tilde{c}_h : \left( (H_0^1(\Omega))^2 + (S_h^0)^2 \right)^3 \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \longmapsto \sum_{i,j=1}^2 \sum_{K \in T_h} \int_K u_j D_j v_i w_i dx .$$

Nous donnons avant tout une série de petits lemmes indispensables pour la suite de notre travail.

**Lemme 6.4.1.** Soit  $\mathbf{v}_h \in (H_0^1(\Omega))^2 + (S_h^0)^2$ , Nous avons alors

$$\|\mathbf{v}_h\|_{0,q,\Omega} \lesssim |\mathbf{v}_h|_{1,h} , \forall q \in [1, \infty[ .$$

Preuve:

voir remarque 2.6 de [95].

■

**Lemme 6.4.2.** *Soit  $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in (H_0^1(\Omega))^2 + (S_h^0)^2$ . Nous avons alors :*

$$\left| \tilde{c}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) - \tilde{c}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \right| \lesssim |\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h|_{1,h} (|\mathbf{u}_h|_{1,h} + |\mathbf{v}_h|_{1,h}) |\mathbf{w}_h|_{1,h} .$$

Preuve:

Le point clé de ce lemme consiste à remarquer que

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{c}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) - \tilde{c}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \right| \\ &= \left| \tilde{c}_h(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) - \tilde{c}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) \right| . \end{aligned}$$

Nous obtenons alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{c}_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) - \tilde{c}_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \right| \\ & \lesssim \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{0,4,\Omega} |\mathbf{u}_h|_{1,h} \|\mathbf{w}_h\|_{0,4,\Omega} + \|\mathbf{v}_h\|_{0,4,\Omega} |\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h|_{1,h} \|\mathbf{w}_h\|_{0,4,\Omega} \\ & \lesssim |\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h|_{1,h} |\mathbf{u}_h|_{1,h} |\mathbf{w}_h|_{1,h} + |\mathbf{v}_h|_{1,h} |\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h|_{1,h} |\mathbf{w}_h|_{1,h} , \end{aligned}$$

par le lemme 6.4.1.

■

**Lemme 6.4.3.** *Soit  $(\mathbf{u}, p) \in (H^{2,\beta}(\Omega))^2 \times H^{1,\beta}(\Omega)$ ,  $\beta \in ]0,1[$ , la solution de (6.1.1),  $\mathbf{v}_h \in (\hat{S}_h^0)^2$  et  $T_h$  un maillage  $\beta$ -raffiné de  $\Omega$ . Nous avons alors*

$$\left| (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega - \tilde{c}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \nu a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \right| \leq C(\Omega) \tilde{C}(\nu, \mathbf{f}) h |\mathbf{v}_h|_{1,h} ,$$

où  $C(\Omega) \in \mathbb{R}_+^*$  est une constante ne dépendant que de  $\Omega$  et  $\tilde{C}(\nu, \mathbf{f}) := \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}^2}{\nu^2} + \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}^4}{\nu^6}$ .

Preuve:

Nous prenons l'égalité (6.1.1) que nous multiplions par  $\mathbf{v}_h \in (S_h^0)^2$  et intégrons ensuite sur  $K \in T_h$ , d'où, si nous désignons par  $\mathbf{n}_K$  la normale unitaire sortante à  $K$  sur  $\partial K$  :

$$\begin{aligned}
& \nu \int_{\partial K} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}_h \, dx - \int_{\partial K} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_K \, ds \\
& + \int_K (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}_h \, dx \\
& - \int_K p \operatorname{div} (\mathbf{v}_h) \, dx + \int_{\partial K} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K \, p \, ds \\
& = \int_K \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, dx, \forall K \in T_h
\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned}
& \left| (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega - \tilde{c}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \nu a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \right| \\
& = \left| - \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_K \mathbf{v}_h \, ds + \int_{\partial K} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_K \, p \, ds \right| \\
& \lesssim h |\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega} |\mathbf{v}_h|_{1,h} + h |p|_{1,\beta,\Omega} |\mathbf{v}_h|_{1,h},
\end{aligned}$$

en utilisant les mêmes arguments que dans le point (3.42) de [19] (que nous avons détaillé dans le chapitre 4). En utilisant alors le théorème 2.3 de [62], l'estimée du lemme découle immédiatement. ■

**Lemme 6.4.4.** *Soient  $T_h$  une triangulation régulière  $\beta$ -raffinée de  $\Omega$  et  $v_h \in S_h^0$ . Nous avons alors*

$$\|v_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq C(\kappa, \Omega) h^{-\kappa} \|v_h\|_{1,h}, \forall \kappa \in ]0,1].$$

Preuve:

Notons tout d'abord que

$$\begin{aligned}
\|v_h\|_{0,\infty,\Omega} &= \sup_{K \in T_h} \|v_h\|_{0,\infty,K} \\
&= \sup_{K \in T_h} \|\hat{v}_h\|_{0,\infty,\hat{K}} \\
&\lesssim \sup_{K \in T_h} |K|^{-\frac{1}{p}} \|v_h\|_{0,p,K} \\
&\leq C(\xi) \sup_{K \in T_h} h_K^{-\frac{2}{p}} \|v_h\|_{0,p,K},
\end{aligned}$$

où  $p \in \mathbb{N}^*$ , car  $|K| \geq \rho_K^2 \geq \frac{1}{\xi^2} h_K^2$ . Nous obtenons en résumé

$$\|v_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq C(p,\xi) \|v_h\|_{0,p,\Omega} \sup_{K \in T_h} h_K^{-\frac{2}{p}}, \forall p \geq 1. \quad (6.4.1)$$

Or, nous avons, grâce à (H1'') et (H2''),  $h_K \geq \xi h^{\frac{1}{1-\beta}}$ ,  $\forall K \in T_h$ . C'est à ce stade ci que nos restrictions supplémentaires s'imposent.

Nous en déduisons donc, avec ce qui précède, que

$$\|v_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq C(p, \xi) \|v_h\|_{0,p,\Omega} h^{\frac{-2A(\beta)}{p}}, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (6.4.2)$$

où  $A(\beta) := \frac{1}{1-\beta}$ .

De plus, nous avons par le lemme 6.4.1 que

$$\|v_h\|_{0,p,\Omega} \leq C(\Omega,\xi) |v_h|_{1,h}, \forall p \geq 1. \quad (6.4.3)$$

(6.4.2) et (6.4.3) permettent alors aisément de conclure que

$$\|v_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq C(p,\Omega) h^{-\kappa(p)} \|v_h\|_{1,h},$$

où  $\kappa(p) := \frac{2}{p(1-\beta)} \longrightarrow 0$  quand  $p \rightarrow +\infty$ .

■

*Remarque 6.4.2.* Un lemme similaire est donné dans [97] mais pour une triangulation uniforme. Nous retrouvons par le lemme 6.4.4 aisément ce résultat en posant dans la preuve de celui ci  $\beta := 0$ .

Donnons à présent le

**Théorème 6.4.5.** *Soit  $(\mathbf{u}, p)$ , resp.  $(\mathbf{u}_{EV}, p_{EV})$ , une solution de (6.1.1), resp. (6.2.5).*

*Si  $\frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu^2}$  est "assez petit", nous avons alors, d'une part unicité de la solution de (6.1.1), resp. (6.2.5), et d'autre part, sous les hypothèses (H1''), (H2'') et (H3''),*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}\|_{1,h} \leq C(\beta, \kappa, \Omega) A(\nu, \mathbf{f}) h^{1-\kappa}, \forall \kappa \in ]0,1], \\ \|p - p_{EV}\|_{0,\Omega} \leq C(\beta, \kappa, \Omega) B(\nu, \mathbf{f}) h^{1-\kappa}, \forall \kappa \in ]0,1], \end{array} \right. \quad (6.4.4)$$

où

$$B(\nu, \mathbf{f}) := \left( \nu + \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu} \right) A(\nu, \mathbf{f})$$

$$+ \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}$$

$$+ \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}^2}{\nu^2}$$

$$+ \tilde{C}(\nu, \mathbf{f}) ,$$

$$A(\nu, \mathbf{f}) := 1 + \tilde{C}(\nu, \mathbf{f}) + \frac{\tilde{C}(\nu, \mathbf{f})}{\nu}$$

$$+ \frac{1}{\nu} \left( \nu + \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu} \right) \tilde{C}(\nu, \mathbf{f})$$

$$+ \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}^2}{\nu^3} ,$$

$$\tilde{C}(\nu, \mathbf{f}) := \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}^2}{\nu^2} + \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}^4}{\nu^6} .$$

*Remarque 6.4.3.* La constante  $\tilde{C}(\nu, \mathbf{f})$  a déjà été introduite au lemme 6.4.3.

Preuve:

Nous préciserons dans la preuve ce que nous entendons par  $\frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu^2}$  "assez petit".

Estimée pour la vitesse:

Posons  $\mathbf{w}_h := \mathbf{u}_{EV} - \mathbf{v}_h$ , où  $\mathbf{v}_h$  est un élément quelconque de  $(\hat{S}_h^0)^2$ . Remarquons tout d'abord que, par (6.2.5)

$$\begin{aligned}
\nu |\mathbf{w}_h|_{1,h}^2 &= \nu \sum_{K \in T_h} (\nabla \mathbf{w}_h, \nabla \mathbf{w}_h)_K \\
&= (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{w}}_h - \mathbf{w}_h)_\Omega \\
&\quad + (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h)_\Omega - c_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{w}_h) \\
&\quad - \nu a_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \\
&\quad + \nu a_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \\
&= (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{w}}_h - \mathbf{w}_h)_\Omega \\
&\quad + (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h)_\Omega - c_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{w}_h) \\
&\quad - \nu a_h(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) \\
&\quad + \nu a_h(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \\
&\quad + \tilde{c}_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{w}_h) - \tilde{c}_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{w}_h) \\
&\quad + \tilde{c}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - \tilde{c}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_h) .
\end{aligned}$$

Or, par un argument de type Bramble-Hilbert, nous avons que

$$|(\mathbf{f}, \bar{\mathbf{w}}_h - \mathbf{w}_h)_\Omega| \leq h \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} |\mathbf{w}_h|_{1,h} .$$

De plus, en utilisant le lemme 6.4.2 et la remarque 6.3.2, nous avons

$$\left| \tilde{c}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - \tilde{c}_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{w}_h) \right| \leq C(\Omega) \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}\|_{1,h} \|\mathbf{w}_h\|_{1,h} ,$$

qui fournit, avec ce qui précède

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}_{EV} - \mathbf{v}_h|_{1,h} &\leq |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h|_{1,h} + h \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \\
&\quad + C(\Omega) \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu^2} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}|_{1,h} \\
&\quad + \frac{1}{\nu} \left( \left| \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{EV} - \mathbf{v}_h)_\Omega - \tilde{c}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{EV} - \mathbf{v}_h) - \nu a_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{EV} - \mathbf{v}_h)}{|\mathbf{u}_{EV} - \mathbf{v}_h|_{1,h}} \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{\tilde{c}_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV} - \mathbf{v}_h) - c_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV} - \mathbf{v}_h)}{|\mathbf{u}_{EV} - \mathbf{v}_h|_{1,h}} \right| \right) , \forall \mathbf{v}_h \in (\hat{S}_h^0)^2 .
\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

Nous posons alors dans (6.4.5),  $\mathbf{v}_h := \mathbf{u}_{EF}$ , l'approximation au sens des Éléments Finis de  $\mathbf{u}$  [62]. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
\left(1 - C(\Omega) \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu^2}\right) |\mathbf{u}_{EV} - \mathbf{u}_{EF}|_{1,h} &\leq \left(1 + C(\Omega) \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu^2}\right) |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{EF}|_{1,h} + h \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \\
&+ \frac{1}{\nu} \left( \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in (\hat{S}_h^0)^2 \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \left| \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega - \tilde{c}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \nu a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,h}} \right| \right. \\
&\left. + \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in (\hat{S}_h^0)^2 \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \left| \frac{\tilde{c}_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h) - c_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,h}} \right| \right). \tag{6.4.6}
\end{aligned}$$

La norme  $|\mathbf{u}_{EV} - \mathbf{u}_{EF}|_{1,h}$  apparaît alors dans (6.4.6) comme la somme d'une erreur d'interpolation (premier terme du membre de droite de (6.4.6)), d'une erreur de consistance (second terme du membre de droite de (6.4.6)) et d'une erreur d'approximation de  $\tilde{c}_h(.,.,.)$  par  $c_h(.,.,.)$  (troisième terme du membre de droite de (6.4.6)). Nous allons majorer ces trois termes.

– En utilisant le théorème 6.4 de [62], nous avons que

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{EF}|_{1,h} \leq C(\Omega) h \left( \tilde{C}(\nu, \mathbf{f}) + \frac{\tilde{C}(\nu, \mathbf{f})}{\nu} + \frac{1}{\nu} \left( \nu + \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu} \right) \tilde{C}(\nu, \mathbf{f}) \right),$$

où  $\tilde{C}(\nu, \mathbf{f})$  a été donnée dans l'énoncé du théorème.

– Grâce au lemme 6.4.3, nous obtenons que

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in (\hat{S}_h^0)^2 \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \left| \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega - \tilde{c}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \nu a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,h}} \right| \leq C(\Omega) \tilde{C}(\nu, \mathbf{f}) h,$$

– Par le lemme 3 de [97], la remarque 6.3.2, le lemme 6.4.4 et les hypothèses (H1'')-(H3''), nous obtenons

$$\sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in (\hat{S}_h^0)^2 \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \left| \frac{\tilde{c}_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h) - c_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,h}} \right| \leq C(\beta, \kappa, \Omega) h^{1-\kappa} \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}^2}{\nu^2}, \forall \kappa \in ]0,1].$$

Ces trois estimées utilisées dans (6.4.6) permettent, si  $C(\Omega) \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu^2} < 1$ , de conclure en ce qui concerne la majoration d'erreur de (6.4.4) sur la vitesse. Démontrons à présent la majoration d'erreur de (6.4.4) concernant la pression.

Estimée pour la pression :

Définissons

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_h : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}, \\
x &\longmapsto \tilde{p}_h(x) := \frac{1}{|K|} \int_K p \, dx \text{ si } x \in K, K \in \mathcal{T}_h,
\end{aligned}$$



la  $\mathbb{P}^0$ -projection de  $p$  sur  $T_h$ . En utilisant la proposition 1.2.6 et les hypothèses de raffinement de maillage, nous montrons aisément que

$$\|p - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega, \beta, \xi) h |p|_{1,\beta,\Omega} .$$

En outre, en utilisant le théorème 2.3 de [62], nous obtenons

$$\|p - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega, \beta, \xi) \left( \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}^2}{\nu^2} + \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}^4}{\nu^6} \right) . \quad (6.4.7)$$

En utilisant le lemme 5.3.3 (condition inf-sup), nous arrivons à

$$\|p_{EV} - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in (S_h^0)^2 \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \frac{(p_{EV} - \tilde{p}_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_\Omega}{|\mathbf{v}_h|_{1,h}} .$$

Nous remarquons alors que  $\forall \mathbf{v}_h \in (S_h^0)^2$ ,  $\forall K \in T_h$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{v}_h|_K \in \mathbb{P}^0(K)$  ce qui fournit que  $(\tilde{p}_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_\Omega = (p, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_\Omega$ . D'où

$$\|p_{EV} - \tilde{p}_h\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in (S_h^0)^2 \\ \mathbf{v}_h \neq 0}} \frac{(p_{EV} - p, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_\Omega}{|\mathbf{v}_h|_{1,h}} . \quad (6.4.8)$$

De plus, en utilisant (6.1.1) et (6.2.5), nous avons

$$\begin{aligned} (p - p_{EV}, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)_\Omega &= -\nu a_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h) \\ &\quad + c_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h) - c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \\ &\quad + (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h - \bar{\mathbf{v}}_h)_\Omega, \quad \forall \mathbf{v}_h \in (S_h^0)^2. \\ &\quad + \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_K \mathbf{v}_h \, ds \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

Pour majorer le premier et le dernier terme du membre de droite de (6.4.9), nous utilisons une inégalité de Cauchy-Schwarz, ainsi qu'un argument de type Bramble-Hilbert et la majoration d'erreur sur la vitesse obtenue précédemment. Le deuxième terme du membre de droite de (6.4.9) se majore quant à lui comme suit :

$$\begin{aligned} \left| \tilde{c}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - c_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h) \right| &\leq \left| \tilde{c}_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h) - c_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h) \right| \\ &\quad + \left| \tilde{c}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \tilde{c}_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h) \right| \\ &\leq C(\beta, \kappa, \Omega) h^{1-\kappa} \|\mathbf{u}_{EV}\|_{1,h}^2 \|\mathbf{v}_h\|_{1,h} \\ &\quad + C(\Omega) \tilde{C}(\nu, \mathbf{f}) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}\|_{1,h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,h} \|\mathbf{u}_{EV}\|_{1,h} , \end{aligned}$$

$\forall \kappa \in ]0,1]$ , par les lemmes 3 de [97] et 6.4.2. D'où

$$\begin{aligned} \left| \tilde{c}_h(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - c_h(\mathbf{u}_{EV}, \mathbf{u}_{EV}, \mathbf{v}_h) \right| &\leq C(\beta, \kappa, \Omega) h^{1-\kappa} \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}^2}{\nu^2} \|\mathbf{v}_h\|_{1,h} \\ &+ C(\Omega) \tilde{C}(\nu, \mathbf{f}) \frac{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}{\nu} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}\|_{1,h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,h}, \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

$\forall \kappa \in ]0,1]$ , en utilisant la remarque 6.3.2 et le lemme 6.1 de [62]. Le dernier terme de (6.4.9) est quant à lui majorer en utilisant un argument similaire à celui du point (3.42) de [19] (que le lecteur pourra retrouver dans le chapitre 4) qui fournit :

$$\left| \sum_{K \in T_h} \int_{\partial K} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_K \mathbf{v}_h \, ds \right| \lesssim C(\Omega) \tilde{C}(\nu, \mathbf{f}) \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} h.$$

Nous reprenons donc (6.4.8) en tenant compte de (6.4.7), (6.4.9), (6.4.10) et de la majoration précédente, ce qui nous permet d'obtenir l'estimée de (6.4.4) portant sur la pression. ■

## 6.5 Essais numériques

Nous nous plaçons sur le "L-shape" (c'est à dire  $] -1, 1[^2 \setminus ]0, 1[ \times ] -1, 0[$ ). En conséquence, nous avons  $\omega = \frac{3\pi}{2}$ . En outre, nous désignons par  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires standards sur  $\Omega$  et désignons par  $\lambda$  la plus petite solution positive de (6.1.4) (numériquement, nous trouvons  $\lambda \simeq 0.5445$ ).

Tout comme dans le chapitre précédent, nous introduisons les trois fonctions suivantes

$$\Phi_1(\theta) := -\sin(\lambda\theta) \cos(\omega) - \lambda \sin(\theta) \cos(\lambda(\omega - \theta) + \theta)$$

$$+ \lambda \sin(\omega - \theta) \cos(\lambda\theta - \theta) + \sin(\lambda(\omega - \theta)) ,$$

$$\Phi_2(\theta) := -\sin(\lambda\theta) \sin(\omega) - \lambda \sin(\theta) \sin(\lambda(\omega - \theta) + \theta)$$

$$+ \lambda \sin(\omega - \theta) \sin(\lambda\theta - \theta) ,$$

$$\Phi_p(\theta) := -2\lambda[\sin((\lambda - 1)\theta + \omega) + \sin((\lambda - 1)\theta - \lambda\omega)] .$$

Nous considérons alors le problème (6.1.1) avec  $\nu = 1$  et où  $\mathbf{f}$  et les conditions de bord sont calculées de telle manière que la solution exacte soit donnée par

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} r^\lambda \Phi_1(\theta) \\ r^\lambda \Phi_2(\theta) \end{pmatrix} ,$$

$$p = r^{\lambda-1} \Phi_p(\theta) .$$

Il est possible de démontrer qu'un tel choix implique bien l'unicité de la solution du problème considéré (voir [62]). Nous faisons remarquer que ce choix implique que  $(\mathbf{u}, p)$  est une solution du problème de Stokes homogène sur  $\Omega$  (voir sous-partie précédente).

Cette solution vérifie  $(\mathbf{u}, p) \in (H^{2,\beta}(\Omega))^2 \times H^{1,\beta}(\Omega)$ , où  $\beta := 1 - \lambda$ , c'est à dire qu'elle présente un comportement singulier en  $O$ .

Nous introduisons alors la solution approchée de (6.1.1) par la méthode d'Éléments-Volumes Finis, c'est à dire la solution du système (6.2.5) que nous implémentons sur deux types de maillage :

- Un maillage uniforme,
- Un maillage  $\beta$ -raffiné.

Précisons que, pour résoudre la non linéarité du problème discret, nous utilisons l'algorithme de PICARD où nous avons fixé un critère d'arrêt de  $10^{-8}$  (en norme  $L^2$ ). Nous donnons alors, pour différentes valeurs de  $n$ , les résultats de convergence obtenus sur chacun des maillages. Ces résultats figurent dans la table 6.1 pour laquelle nous précisons que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}\|_{0,\Omega,o/o} := \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}\|_{0,\Omega}}{|\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega}} ,$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}\|_{1,h,o/o} := \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}\|_{1,h}}{|\mathbf{u}|_{2,\beta,\Omega}} ,$$

$$\|p - p_{EV}\|_{0,\Omega,o/o} := \frac{\|p - p_{EV}\|_{0,\Omega}}{|p|_{1,\beta,\Omega}} .$$

La figure 6.1 illustre quant à elle les vitesses de convergence obtenues pour la vitesse et la pression. Au vu de ces résultats, l'utilisation d'un maillage  $\beta$ -raffiné dans le cas d'un domaine non-convexe s'avère indispensable afin de restaurer l'ordre de convergence optimal du schéma numérique considéré. Signalons, à titre indicatif, que les deux autres méthodes introduites dans ce chapitre donnent des résultats similaires sur les deux types de maillages utilisés.

| $n$ | Maillage uniforme                                 |                                              |                                 | Maillage $\beta$ -raffiné                         |                                              |                                 |
|-----|---------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------|
|     | $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}\ _{0,\Omega,o/o}$ | $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}\ _{1,h,o/o}$ | $\ p - p_{EV}\ _{0,\Omega,o/o}$ | $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}\ _{0,\Omega,o/o}$ | $\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}\ _{1,h,o/o}$ | $\ p - p_{EV}\ _{0,\Omega,o/o}$ |
| 2   | $8,14.10^{-2}$                                    | $3,04.10^{-1}$                               | $8,92.10^{-1}$                  | $6,28.10^{-2}$                                    | $2,80.10^{-1}$                               | $7,17.10^{-1}$                  |
| 4   | $4,70.10^{-2}$                                    | $2,40.10^{-1}$                               | $5,83.10^{-1}$                  | $2,40.10^{-2}$                                    | $1,79.10^{-1}$                               | $3,44.10^{-1}$                  |
| 8   | $2,39.10^{-2}$                                    | $1,77.10^{-1}$                               | $3,37.10^{-1}$                  | $8,15.10^{-3}$                                    | $1,03.10^{-1}$                               | $1,46.10^{-1}$                  |
| 16  | $1,14.10^{-2}$                                    | $1,26.10^{-1}$                               | $1,98.10^{-1}$                  | $2,75.10^{-3}$                                    | $5,60.10^{-2}$                               | $6,40.10^{-2}$                  |
| 32  | $5,35.10^{-3}$                                    | $8,73.10^{-2}$                               | $1,23.10^{-1}$                  | $1,00.10^{-3}$                                    | $2,95.10^{-2}$                               | $3,00.10^{-2}$                  |
| 64  | $2,50.10^{-3}$                                    | $5,98.10^{-2}$                               | $7,92.10^{-2}$                  | $4,07.10^{-4}$                                    | $1,54.10^{-2}$                               | $1,47.10^{-2}$                  |

TAB. 6.1 – Erreurs commises dans le cas d'un maillage uniforme et un maillage  $\beta$ -raffiné

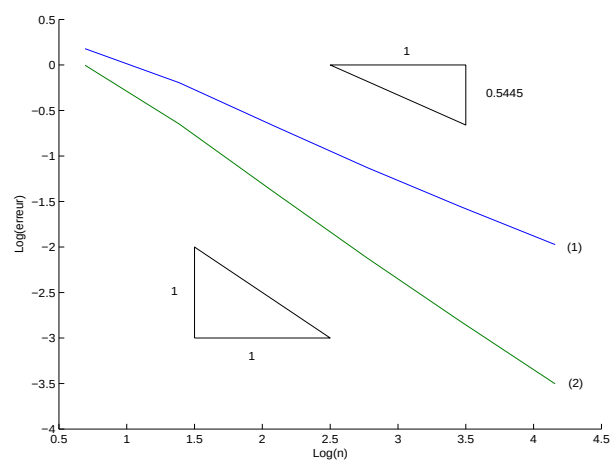


FIG. 6.1 –  $\log(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{EV}\|_{1,h,o/o} + \|p - p_{EV}\|_{0,\Omega,o/o})$  en fonction de  $\log(n)$  pour un maillage uniforme (ligne (1)) et un maillage  $\beta$ -raffiné (ligne (2))

## Chapitre 7

# Application de la méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme à quelques cas tests de la mécanique des fluides

Le chapitre précédent traitait de la discrétisation du système de Navier-Stokes stationnaire en dimension deux par une méthode d'Éléments-Volumes Finis ([42, 97]) dans le cadre de la présence d'une singularité de coin. Nous nous proposons à présent d'appliquer la méthode introduite à quelques cas tests de la mécanique des fluides. Rappelons que le système de Navier-Stokes stationnaire et incompressible en dimension deux se formule comme suit :

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Il faut trouver une fonction vectorielle  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (représentant le champ de vitesse adimensionné) et une fonction scalaire  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (représentant la pression adimensionnée) telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega , \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega , \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_D \text{ sur } \Gamma_D , \\ (\nabla \mathbf{u} - p Id) \cdot \mathbf{n}_\Omega = \mathbf{g}_N \text{ sur } \Gamma_N , \end{array} \right. \quad (7.0.1)$$

où

–  $Re \in \mathbb{R}_+^*$  est appelé nombre de Reynolds,

- $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ ,
- $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$  ,
- $\mathbf{g}_D \in (L^2(\Gamma_D))^2, \mathbf{g}_N \in (L^2(\Gamma_N))^2$  ,
- $\mathbf{n}_\Omega$  désigne la normale unitaire sortante à  $\Omega$  sur  $\partial\Omega$ .

Nous précisons que l'implémentation du schéma numérique introduit au chapitre précédent a été faite grâce à un schéma de sous-relaxation présenté dans [96, 30]. Résoudre un système de Navier-Stokes revient alors par cette technique à résoudre une suite de systèmes de Stokes généralisés (ou de Oseen).

## 7.1 Premier cas test : La cavité entraînée

Soit  $\Omega := ]0,1[^2$ . Nous reprenons le problème (7.0.1) avec

- $\Gamma_D := \partial\Omega$  ,
- $\mathbf{f} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  sur  $\Omega$  ,
- $\mathbf{g}_D := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \{1\} \times [0,1] , \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ partout ailleurs sur } \Gamma_D . \end{cases}$

La figure 7.1 résume la situation. Nous donnons alors la distribution des vecteurs vitesses et les isobares de pression de la solution approchée pour  $Re = 500$  et  $Re = 5000$  (voir figure 7.2). Conformément aux résultats de [95], nous constatons, pour un nombre de Reynolds assez grand, l'apparition de zones de recirculation secondaire du fluide en diverses zones de la cavité (la zone de recirculation principale se trouvant au "centre" de la cavité). En outre, nous observons un déplacement du centre du vortex principal pour les différentes valeurs de Reynolds testées [73]. Citons en outre [54, 18, 42, 43, 73, 95] où le lecteur pourra trouver plusieurs autres études numériques de ce cas test.

*Remarque 7.1.1.* A titre indicatif, signalons que nous avons utilisé deux maillages différents :

- Pour  $Re = 500$ , un maillage constitué de 2660 triangles et de 1404 noeuds raffiné aux coins supérieurs droit et gauche de la cavité (afin de palier la discontinuité de la solution en ces points),

- Pour  $Re = 5000$ , un maillage constitué de 2757 triangles et de 1450 noeuds raffiné aux coins inférieurs droit et gauche et au coin supérieur gauche de la cavité (pour capturer les zones de recirculation du fluide).

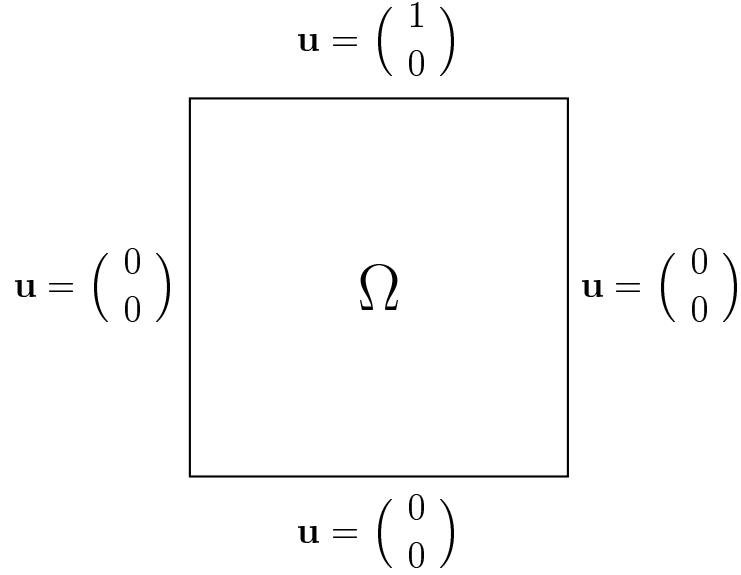


FIG. 7.1 – Présentation du domaine  $\Omega$  et des conditions de bord

## 7.2 Second cas test : La marche descendante

Soit  $\Omega := ]0,3[ \times ]0.5,1.5[ \cup ]3,22[ \times ]0,1.5[$ . Nous reprenons le problème (7.0.1) avec

- $\Gamma_N := \{22\} \times [0,1.5]$ ,

- $\Gamma_D := \partial\Omega \setminus \Gamma_N$ ,

- $\mathbf{f} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  sur  $\Omega$ ,

- $\mathbf{g}_D := \begin{cases} \begin{pmatrix} -6(y-1.5)(y-0.5) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur la partie (1) de } \partial\Omega \text{ (voir figure 7.3) ,} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ partout ailleurs sur } \Gamma_D , \end{cases}$

- $\mathbf{g}_N := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  sur  $\Gamma_N$ .

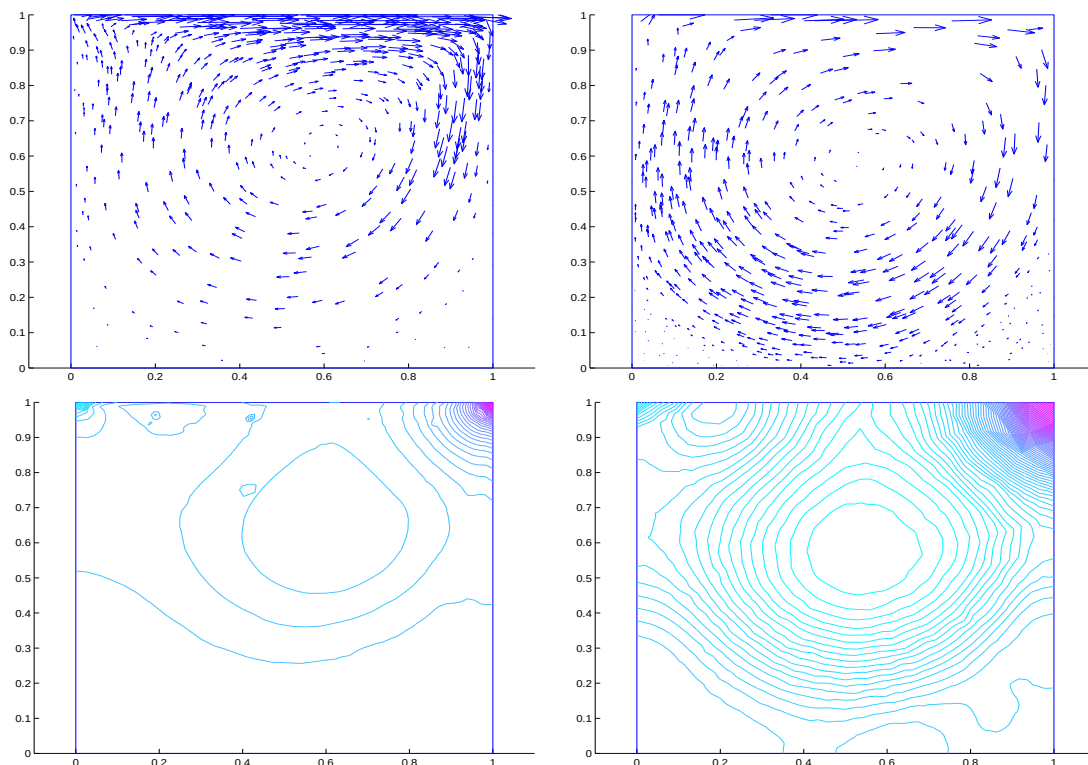
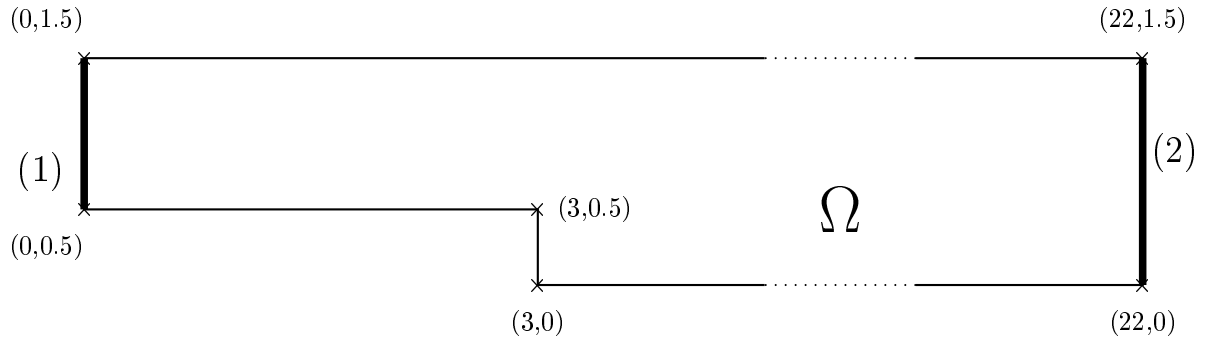
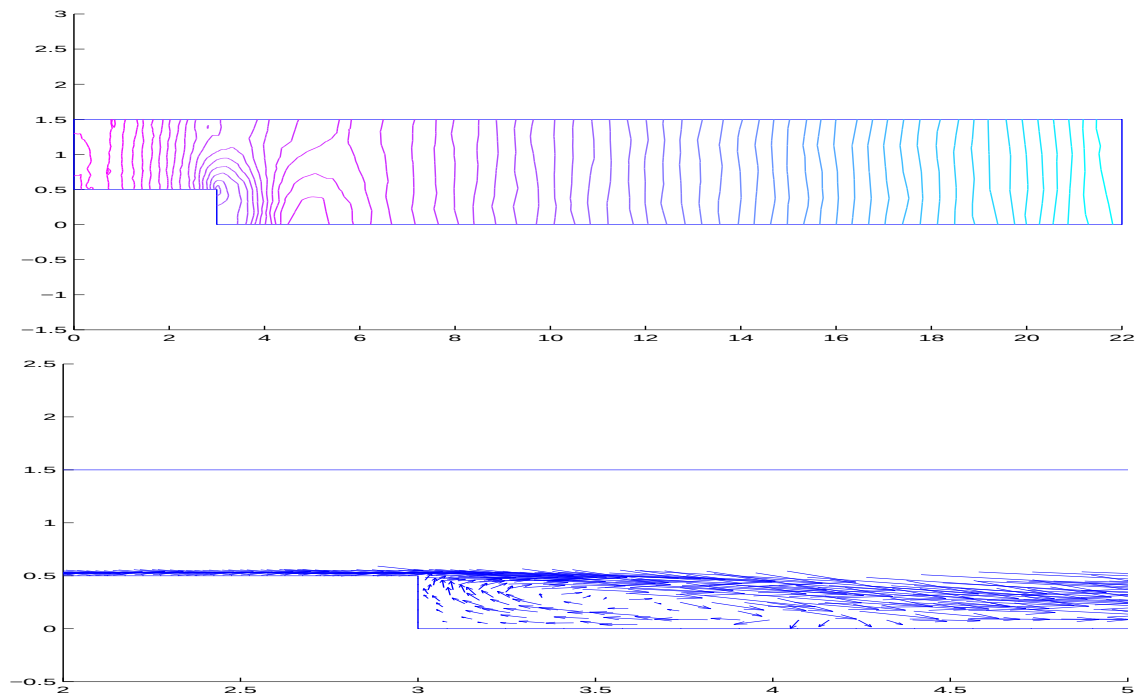


FIG. 7.2 – Vecteurs vitesses (en haut) et isobares de pression (en bas) pour  $Re = 500$  (à gauche) et  $Re = 5000$  (à droite)

Ce cas test simule l'arrivée suivant un profil d'entrée parabolique d'un fluide sur une marche descendante, la condition de Neumann (c'est à dire sur  $\Gamma_N$ ) signifie physiquement que le fluide est stabilisé à la sortie de la marche [7]. La figure 7.4 présente les résultats numériques obtenus par la méthode pour ce cas test à nombre de Reynolds  $Re = 100$ . Conformément à [7, 13, 43, 54, 73], nous observons la présence d'une zone de recirculation du fluide au niveau de la marche.

*Remarque 7.2.1.* Pour ce cas test, nous avons utilisé un maillage constitué de 2775 triangles et de 1524 noeuds raffiné au voisinage du point  $(3,0.5)$  pour palier l'effet de la singularité de coin de la solution au voisinage de ce point (voir chapitre 6).



FIG. 7.3 – Présentation du domaine  $\Omega$ FIG. 7.4 – Isobares de pression et zoom sur le point  $(3, 0.5)$  pour les vecteurs vitesse



## Deuxième partie

# Méthodes de Volumes Finis et anisotropie en dimension deux



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Position du problème

Soit

- $\Omega := ]0, a[ \times ]0, b[$ , où  $a$  et  $b \in \mathbb{R}_+^*$ ,
- $f \in L^2(\Omega)$ .

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\mu^2 \Delta u + u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

où  $\mu \in ]0, 1]$  est appelé paramètre de diffusion. De tels problèmes apparaissent dans des problèmes de thermodynamique ou lors de procédés de linéarisation (algorithme de Newton ou de sous-relaxation). En outre, le problème (1.1.1) peut être considéré comme un problème modèle dans le sens où nous pouvons facilement reproduire le même type de raisonnement que nous allons tenir mais pour des problèmes à terme de réaction non constant et/ou à terme convectif non nul.

Il est bien connu que dans le cas où  $\mu$  est "très petit" devant 1 (ce que nous noterons dans toute la suite de ce chapitre  $\mu \ll 1$ ), la solution  $u$  de (1.1.1) présente un comportement anisotrope. Plus précisément, si nous appelons  $M_\mu$  la couche d'épaisseur  $b_\mu := |\mu \ln(\mu)|$  incluse dans  $\Omega$  et de bord extérieur  $\partial\Omega$ , alors  $u$  ne varie sur  $M_\mu$  de manière significative que dans la direction perpendiculaire à  $\partial\Omega$  (voir [47, 49]). Ceci vient du fait que, pour  $\mu \ll 1$ , l'influence du terme de diffusion devient négligeable par rapport à celle du terme de réaction, mais que parallèlement nous avons  $u \in H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ . En d'autres termes, (1.1.1) est "presque équivalent" au problème

$$\begin{cases} u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Or  $f$  ne s'annulant pas nécessairement sur  $\partial\Omega$  et  $u$  devant être continue sur  $\bar{\Omega}$ , cette dernière présentera un caractère anisotrope sur  $M_\mu$ . Pour étayer notre propos, donnons l'exemple suivant :

*Exemple 1.1.1.* Posons  $\Omega := ]0,1[^2$  et  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$u(x,y) := e^{-\frac{x}{\mu}} + e^{-\frac{y}{\mu}} - 1 .$$

En outre, nous introduisons  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^4$  comme indiqué sur la figure 1.1.

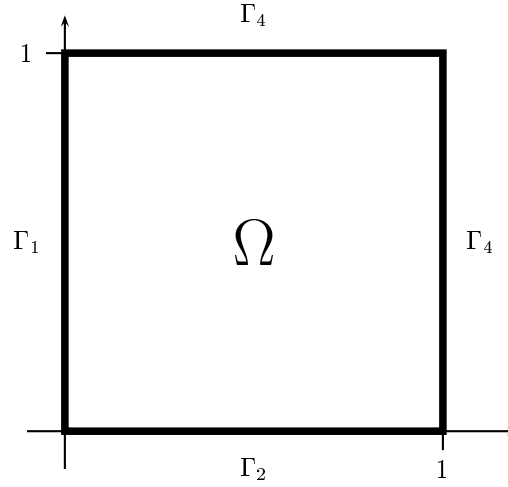


FIG. 1.1 – Illustration des notations de l'exemple 1.1.1

Nous avons clairement que  $u$  est la solution de

$$\begin{cases} -\mu^2 \Delta u + u = -1 \text{ dans } \Omega , \\ u = e^{-\frac{x}{\mu}} + e^{-\frac{y}{\mu}} - 1 \text{ sur } \partial\Omega . \end{cases} \quad (1.1.2)$$

De plus,

$$\begin{aligned} * \quad u|_{\Gamma_1} &= e^{-\frac{y}{\mu}} \underset{\mu \ll y < 1}{\sim} 0 , \\ * \quad u|_{\Gamma_2} &= e^{-\frac{x}{\mu}} \underset{\mu \ll x < 1}{\sim} 0 , \\ * \quad u|_{\Gamma_3} &= e^{-\frac{1}{\mu}} + e^{-\frac{y}{\mu}} - 1 \underset{\mu \ll y < 1}{\sim} -1 , \\ * \quad u|_{\Gamma_4} &= e^{-\frac{x}{\mu}} + e^{-\frac{1}{\mu}} - 1 \underset{\mu \ll x < 1}{\sim} -1 . \end{aligned}$$

En résumé, la solution  $u$  de (1.1.2) va "tendre", pour  $\mu \ll 1$ , à devenir la solution de  $u = -1$  dans  $\Omega$ , alors que  $u|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0$ . Or, celle-ci étant continue, elle présentera par conséquent un caractère anisotrope au voisinage des bords  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Cette anisotropie étant d'autant plus grande que  $\mu$  est petit (voir figure 1.2).

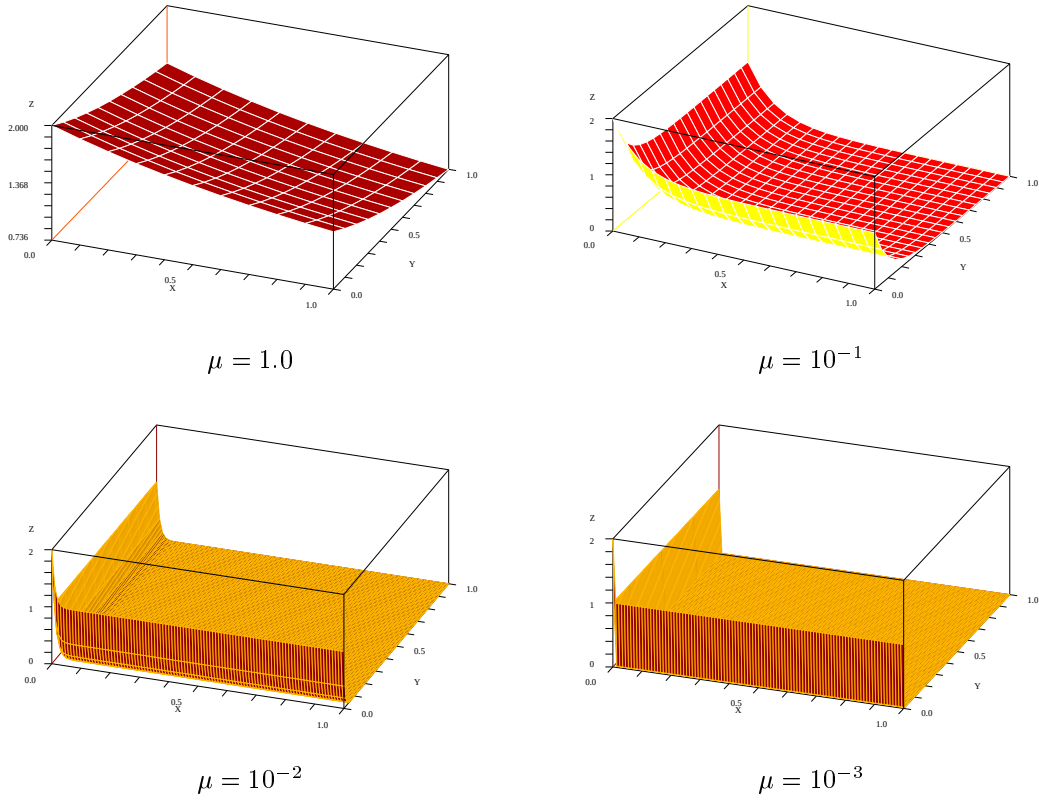


FIG. 1.2 – Solution de (1.1.2) pour différentes valeurs de  $\mu$

Il paraît alors logique de tenir compte de ce caractère anisotrope, prévisible, de la solution  $u$  en utilisant un maillage anisotrope.

## 1.2 Maillages anisotropes

Dans le cadre des travaux sur les diverses méthodes numériques apparaît la nécessité d'utiliser des maillages vérifiant, pour tout élément  $K$  de celui-ci,

$$1 \leq \frac{h_K}{\rho_K} \leq C, \quad (1.2.1)$$

où  $h_K$ , resp.  $\rho_K$ , désigne le diamètre du cercle circonscrit à  $K$ , resp. du plus grand cercle inscrit dans  $K$  (voir l'hypothèse 3.1.4.3 de [24] pour les Éléments Finis et la définition 3.4 de [52] ainsi que la condition (2.1) de [19] pour les Volumes Finis). Lorsque  $C$  est du même ordre de grandeur que 1, nous parlerons de maillages isotropes.

A l'inverse de ceux-ci, les maillages anisotropes, présentent la particularité d'être beaucoup plus fins dans la direction d'anisotropie de la solution que dans la direction perpendiculaire à celle-ci (voir les maillages utilisées pour les essais numériques dans les sections suivantes). Nous aurons donc  $C$  très grand devant 1, la vérification de l'hypothèse (1.2.1) tend donc à devenir critique. En fait, nous aurons

$$C := C(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} \infty .$$

D'un point de vue géométrique, ceci se traduit par l'utilisation de triangles (ou de Volumes de Contrôle plus généralement) pour lesquels nous avons  $h_1 \gg h_2$  où  $h_1$  désigne la longueur de la base et  $h_2$  la hauteur associée du triangle considéré (voir figure 1.3).

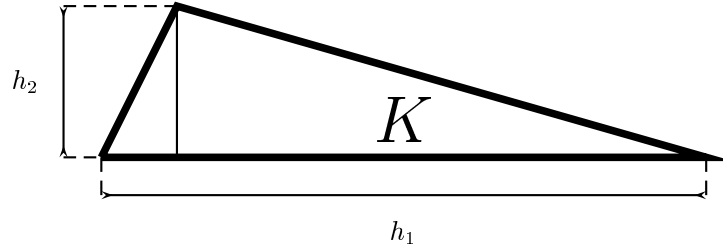


FIG. 1.3 – Triangle anisotrope  $K$  où  $h_1 \gg h_2$

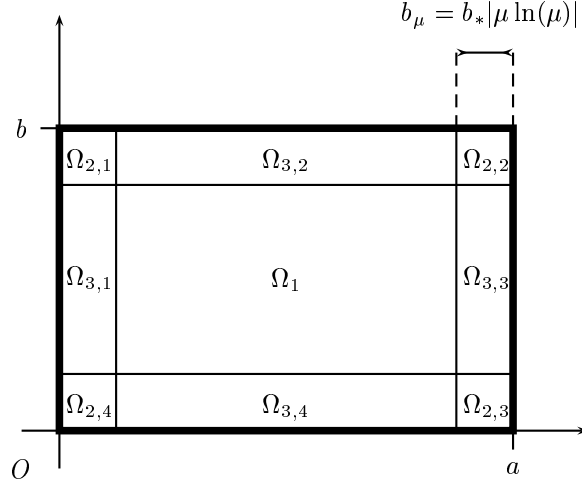
Cette dépendance de  $C$  vis à vis de  $\mu$  entraîne alors des estimées a-priori peu satisfaisantes que ce soit dans le cadre de l'utilisation de méthodes d'Éléments Finis ou de Volumes Finis. D'où la nécessité, dans le cadre de l'utilisation de maillages anisotropes, d'une étude où les estimées utilisées devront être plus précises que dans le cas isotrope au sens où nous traiterons séparément les dérivées dans les diverses directions (voir sous section 2.1.2 de [4]). Notre but est donc d'adapter ce qui a été fait sur l'anisotropie pour les méthodes d'Éléments Finis à diverses méthodes de Volumes Finis (centrée cellule, Éléments-Volumes Finis conformes et Éléments-Volumes Finis non conformes). Ajoutons que, dans le but de simplifier les démonstrations, les maillages utilisés seront toujours de type produit tensoriel sur la zone anisotrope (voir définitions de la section 1.3 et de la section 3.1.2 de [4]). Une généralisation à des maillages qui ne sont pas de ce type est possible mais nécessite l'utilisation d'hypothèses supplémentaires dites d'"angle maximal" et de "système de coordonnées" (voir [2, 3, 5, 6] pour plus de détails).

### 1.3 Comportement de la solution

Nous énonçons à présent des résultats de régularité sur les diverses dérivées de la solution  $u$  de (1.1.1).

Nous subdivisons tout d'abord  $\Omega$  comme indiqué sur la figure 1.4, où nous précisons que  $b_* > 0$ . Nous posons alors  $\Omega_i := \bigcup_{j=1}^4 \Omega_{i,j}$ ,  $\forall i \in \{2,3\}$ .



FIG. 1.4 – partition de  $\Omega$ 

**Théorème 1.3.1.** Soit  $u \in H^3(\Omega)$  la solution de (1.1.1), où  $f$  est analytique sur  $\bar{\Omega}$  et satisfait

$$\|\nabla^p f\|_{0,\infty,\Omega} \leq C_f \gamma_f p! , \forall p \in \mathbb{N} ,$$

où  $C_f, \gamma_f > 0$ . Alors, pour  $b_*$  choisi de manière adéquate,  $u$  vérifie

$$\|D^\alpha u\|_{0,\Omega_1}^2 \leq C , \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 : |\alpha| \leq 3 , \quad (1.3.1)$$

$$\|D^\alpha u\|_{0,\Omega_2}^2 \leq C \mu^{1-2|\alpha|} , \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 : |\alpha| \leq 3 , \quad (1.3.2)$$

$$\|D^\alpha u\|_{0,\Omega_3}^2 \leq C \mu^{1-2\alpha_2} , \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 : |\alpha| \leq 3 , \quad (1.3.3)$$

où  $C > 0$  ne dépend ni de  $u$ , ni de  $\mu$ .

Preuve:

Nous rappelons sommairement l'idée de la démonstration du théorème 1.3.1 qui nécessite l'utilisation de développements de Butuzov [15]. Nous supposons que la solution de (1.1.1) appartient à  $C^\infty(\bar{\Omega})$ .

Si nous désignons par  $u$  la solution de (1.1.1), nous commençons tout d'abord par écrire que:

$$u = U_{2n} + R_{2n} , \forall n \in \mathbb{N} ,$$

où  $\{U_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  est un ensemble de fonctions déterminées récursivement,  $U_0$  étant construite à partir de  $f$  (et du terme de réaction si celui-ci est non constant) et  $\{R_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  désigne un ensemble de restes. Le problème est que

ces restes ne sont pas négligeables près des quatre bords du domaine  $\Omega$  (même pour  $n$  grand). Nous déterminons alors  $\{E_{2n}^i\}_{i \in \llbracket 1,4 \rrbracket}_{n \in \mathbb{N}}$  de manière à corriger ce défaut (et à toujours vérifier (1.1.1)). Malheureusement, le résidu obtenu n'est alors pas négligeable mais près des quatre coins du domaine cette fois-ci. Nous déterminons donc  $\{Z_{2n}^i\}_{i \in \llbracket 1,4 \rrbracket}_{n \in \mathbb{N}}$  afin de rectifier ceci (et de toujours vérifier (1.1.1)). Au final, nous arrivons à :

$$u = U_{2n} + E_{2n}^i + Z_{2n}^i + R_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.3.4)$$

où  $\{R_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  désigne un ensemble de restes négligeables sur tout le domaine  $\bar{\Omega}$  pour  $n$  suffisamment grand. Plus précisément le théorème 2.1 de [49] fournit que :

$$|R_{2n}| \leq C_{2n} \mu^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.3.5)$$

avec  $\{C_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  un ensemble de constantes positives indépendantes de  $\mu$ .

Nous obtenons alors des estimées de majorations ponctuelles sur  $\{U_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{E_{2n}^i\}_{i \in \llbracket 1,4 \rrbracket}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{Z_{2n}^i\}_{i \in \llbracket 1,4 \rrbracket}_{n \in \mathbb{N}}$  qui permettent, grâce à (1.3.4) et (1.3.5) d'obtenir les inégalités suivantes pour  $u$  :

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x,y)| \leq C \Big( & (1 + \mu^{2-|\alpha|}) \\ & (\mu^{1-|\alpha|} + \mu^{-\alpha_2}) e^{-\frac{r_E(x,y)}{\mu}} \\ & \mu^{-|\alpha|} e^{-\frac{r_Z(x,y)}{\mu}} \Big), \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2, \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

où, pour  $(x,y) \in \bar{\Omega}$ ,  $r_E(x,y)$ , resp.  $r_Z(x,y)$ , désigne la distance au bord de  $\Omega$  le plus proche, resp. au sommet de  $\Omega$  le plus proche, et  $C$  désigne une constante positive indépendante de  $\mu$ .

Précisons en outre que (1.3.6) est donnée sous réserve de "conditions de compatibilité" sur les données du problème (1.1.1), celles-ci servant à assurer la différentiabilité de la solution  $u$ . (voir à ce sujet le paragraphe 3 de [49] ainsi que [46]). L'intégration de l'estimée (1.3.6) sur  $\{\Omega_i\}_{i \in \llbracket 1,3 \rrbracket}$  fournit alors l'énoncé du théorème 1.3.1. ■

## 1.4 Plan de la seconde partie

Cette partie se décomposera de la manière suivante : La section 2 présentera la méthode de Volumes Finis centrée cellule appliquée au problème (1.1.1) sur des maillages anisotropes. Nous démontrerons en particulier que l'utilisation de maillages anisotropes permet de restaurer l'ordre de convergence optimal de la méthode. Les sections 3 et 4 présenteront quant à elles l'application des méthodes d'Éléments-Volumes Finis conforme et

non-conforme au problème (1.1.1) sur des maillages anisotropes. Nous démontrerons que la méthode basée sur des éléments conformes est stable alors que la méthode basée sur des éléments non-conformes ne l'est pas. Afin de "stabiliser" la méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur des éléments non-conformes, nous utiliserons des éléments quadrangulaires ce qui nous présenterons dans le chapitre 5. Nous montrerons alors que l'ordre de convergence de la méthode est rétabli sur ce type d'éléments. Nous faisons dès à présent remarquer que les arguments utilisés dans les chapitres 3-5 sont faits pour autoriser une généralisation aux méthodes d'Éléments Finis. De plus, nous précisons que pour toute la suite de cette partie le paramètre  $\mu$  est supposé "petit" (concrètement inférieur à  $10^{-1}$ ). Par conséquent, les ordres de convergence donnés par les différents théorèmes de cette partie ne sont pas valables pour  $\mu$  "grand" (pour  $\mu$  d'ordre 1 en particulier).

Pour terminer cette introduction, précisons que le symbole  $a \lesssim b$  signifiera qu'il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $a$ ,  $b$ , ainsi que du maillage et de  $\mu$ , telle que  $a \leq C b$ .

## Notations importantes de la seconde partie

### Domaine

- $\Omega := ]0, a[ \times ]0, b[, \ a, b > 0$
- $\Gamma :=$  Bord de  $\Omega$
- $\{\Omega_i\}_{i=2}^3 :=$  Partition de  $\Omega$  (voir figure 1.4)

### Normes

$G$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p > 1$

- $|\cdot|_{m,p,G} := \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| = m}} \int_G |D^\alpha \cdot|^p dx \right)^{1/p}$
- $\|\cdot\|_{m,p,G} := \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| \leq m}} \int_G |D^\alpha \cdot|^p dx \right)^{1/p}$
- $|\cdot|_{m,G} := \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| = m}} \int_G |D^\alpha \cdot|^2 dx \right)^{1/2}$
- $\|\cdot\|_{m,G} := \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| \leq m}} \int_G |D^\alpha \cdot|^2 dx \right)^{1/2}$

### Espaces fonctionnels

$G$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p > 1$

- $C^m(G) := \{ v : G \longrightarrow \mathbb{R} : D^\alpha v \text{ continue sur } G, \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } |\alpha| = m \}$
- $W^{m,p}(G) := \{ v : G \longrightarrow \mathbb{R} : \|v\|_{m,p,G} < \infty \}$

- $H^m(G) := \{ v : G \rightarrow \mathbb{R} : \|v\|_{s,G} < \infty \}$
- $H_0^m(G) := \{ v \in H^m(G) : D^\alpha v|_{\partial G} \equiv 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } |\alpha| = m-1 \}$
- $\mathbb{P}^k(G) :=$  Espace des polynômes de degré au plus  $k \in \mathbb{N}$
- $X_h := \{ v_h \in \mathbb{P}^1(T_h) : v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \}$  ( $T_h$  désignant un maillage de  $\Omega$ )
- $X_h^0 := \{ v_h \in X_h : v_h|_{\partial\Omega} \equiv 0 \}$
- $S_h := \{ v_h \in \mathbb{P}^1(T_h) \text{ ou } \mathbb{Q}^1(T_h) : \int_e v_h|_K ds = \int_e v_h|_L ds, \forall e \in E_h \text{ avec } e = \bar{K} \cap \bar{L} \}$   
( $E_h$  désignant l'ensemble des arêtes du maillage  $T_h$ )
- $S_h^0 := \{ v_h \in S_h : \int_e v_h|_K ds = 0, \forall e \in E_h \text{ avec } e \subset \bar{K} \cap \partial\Omega \}$

## Divers

- $\mu :=$  Paramètre de diffusion ( $<< 1$ )
- $b_\mu :=$  Epaisseur de la couche anisotrope ( $\sim |\mu \ln(\mu)|$ )
- $h_K :=$  Diamètre d'une maille  $K$
- $\rho_K :=$  Maximum du diamètre des cercles inscrits dans une maille  $K$
- $h :=$  Pas du maillage  $T_h$  (i.e.  $\max_{K \in T_h} h_K$ )
- $h_1 :=$  longueur des mailles dans la direction isotrope ( $\sim h$ )
- $h_2 :=$  longueur des mailles dans la direction anisotrope ( $\sim |\mu \ln(\mu)|h$ )
- $|\alpha| := \sum_{i=1}^d |\alpha_i|, \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d), d \in \mathbb{N}^*$
- $\nabla^p := \{ D^\alpha \cdot \}_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| = p}}$
- $\mathbb{1}_G :=$  Indicatrice du domaine  $G \subset \mathbb{R}^2$
- $|G| :=$  Longueur ou aire du domaine  $G \subset \mathbb{R}^2$

- $\hat{K} :=$  Triangle ou carré de référence (i.e. de sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  ou  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,1)$ )
- $\mathcal{M}_G^0(\cdot) :=$  Opérateur de  $L^2(G)$ -projection,  $G$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$
- $\mathbf{n}_G :=$  Normale unitaire sortante à  $G \subset \mathbb{R}^2$  sur sa frontière
- $(p_1, p_2)^{(s_1, s_2)} := p_1^{s_1} p_2^{s_2}$

## Chapitre 2

# Méthode de Volumes Finis centrée cellule pour les problèmes de réaction-diffusion sur des maillages anisotropes

### 2.1 Notations-Définitions

Pour approcher le problème (1.1.1) sur  $\Omega$ , nous définissons avant tout un maillage admissible restreint anisotrope  $\tau$  de  $\Omega$ . Donnons donc la

**Définition 2.1.1.** Nous dirons que  $\tau = \bigcup_{i=1}^3 \tau_i$  est un maillage admissible restreint anisotrope de  $\Omega$  (de pas  $h$   $> 0$  si

(H1) :  $\tau_1$ , resp.  $\tau_2$ , est un maillage admissible restreint de  $\Omega_1$ , resp.  $\Omega_2$ , de pas  $h$ , resp.  $b_\mu h$  [52],

(H2) :  $\tau_3$  est un maillage admissible de  $\Omega_3$  de pas  $h_1 := h$ , resp.  $h_2 := b_\mu h$ , dans la direction parallèle, resp. perpendiculaire, à  $\partial\Omega$ ; ce maillage  $\tau_3$  vérifiant : Il existe  $\xi > 0$ , telle que

$$\forall K \in \tau_3, \forall \sigma \in \mathcal{E}_K$$

$$d(x_K, \sigma) \geq \begin{cases} \xi h_2 & \text{si } \sigma \text{ est parallèle à } \partial\Omega, \\ \xi h_1 & \text{si } \sigma \text{ est perpendiculaire à } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\mathcal{E}_K$  désigne l'ensemble des arêtes de  $K$  et  $x_K$  un point intérieur à  $K \in \tau$ . Pour la définition d'un maillage admissible, restreint ou non, nous renvoyons aux définitions 9.1 et 9.4 de [52]. Nous donnons

enfin la figure 2.1 pour donner un exemple de maillage  $\tau$  et la figure 2.2 pour illustrer l'hypothèse (H2).

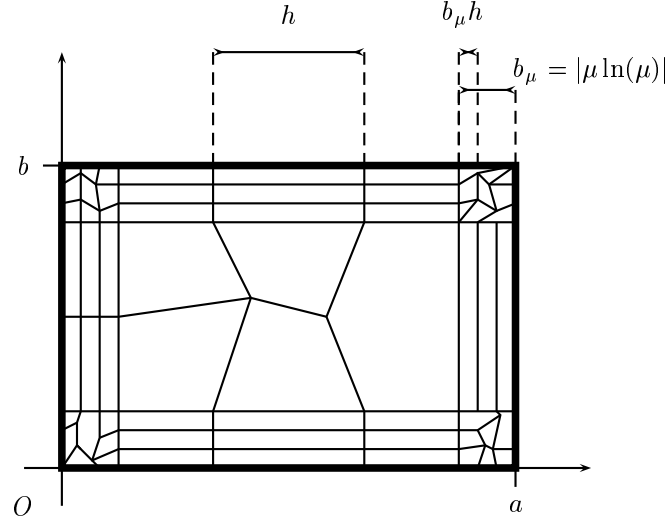


FIG. 2.1 – Exemple de maillage  $\tau$

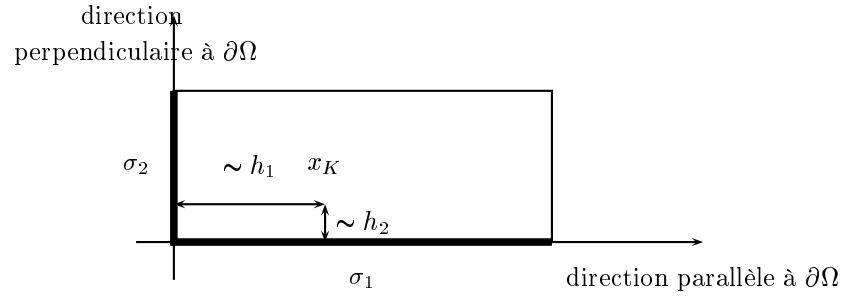


FIG. 2.2 – Exemple de Volume de Contrôle  $K \in \tau_3$

*Remarque 2.1.1.* Clairement, le maillage  $\tau_3$  est de type produit tensoriel. En outre un tel maillage où  $b_\mu \sim |\mu \ln(\mu)|$  est appelé maillage de type Shishkin (voir [3]).

Pour terminer cette courte introduction, nous donnons quelques notations inhérentes au reste de cette sous-partie.

- Pour  $K \in \tau$ ,  $n_K$  désigne la normale unitaire sortante à  $K$  sur la frontière de  $K$ ,
- Pour  $K \in \tau$  et  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ ,  $n_{K,\sigma}$  désigne la normale unitaire sortante à  $K$  sur  $\sigma$ ,
- $\mathcal{E} := \bigcup_{K \in \tau} \mathcal{E}_K$  (ensemble des arêtes du maillage),
- $\mathcal{E}_{int} := \{\sigma \in \mathcal{E} : \sigma \subset \Omega\}$  (ensemble des arêtes internes du maillage)



–  $\mathcal{E}_{ext} := \{ \sigma \in \mathcal{E} : \sigma \subset \partial\Omega \}$  (ensemble des arêtes de bord du maillage)

–  $\chi(\tau) := \{ v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \forall K \in \tau, v|_K \in IP^0(K) \}$ ,

–  $d_\sigma := \begin{cases} d(x_K, x_L) & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{int} \text{ avec } \sigma = \bar{K} \cap \bar{L} \text{ où } K, L \in \tau, \\ d(x_K, \partial\Omega) & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \text{ avec } \sigma \subset \bar{K} \cap \partial\Omega \text{ où } K \in \tau, \end{cases}$

– Pour  $v \in \chi(\tau)$ ,  $D_\sigma(v) := \begin{cases} v(x_K) - v(x_L) & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{int} \text{ avec } \sigma = \bar{K} \cap \bar{L} \text{ où } K, L \in \tau, \\ v(x_K) & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext} \text{ avec } \sigma \subset \bar{K} \cap \partial\Omega \text{ où } K \in \tau, \end{cases}$

–  $|\cdot|_{\tau, \mu, \Omega} : \chi(\tau) \longrightarrow \mathbb{R}$ ,

$$v \longmapsto \mu \left( \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \\ \sigma = \bar{K} \cap \bar{L}}} \frac{|\sigma|}{d(x_K, x_L)} |v(x_K) - v(x_L)|^2 + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \\ \sigma \subset \bar{K} \cap \partial\Omega}} \frac{|\sigma|}{d(x_K, \partial\Omega)} |v(x_K)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 2.2 Schéma numérique

Nous notons  $\{u_K\}_{K \in \tau}$  les inconnues. Nous intégrons (1.1.1) sur  $K \in \tau$  et utilisons la formule de Green pour obtenir :

$$-\mu^2 \int_{\partial K} \nabla u \cdot n_K \, ds + \int_K u \, dx = \int_K f \, dx, \forall K \in \tau. \quad (2.2.1)$$

Nous utilisons alors les approximations introduites dans le paragraphe 3.1 de [53], et obtenons, à partir de (2.2.1), le système suivant :

$$-\mu^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K, \sigma} + |K| u_K = \int_K f \, dx, \forall K \in \tau, \quad (2.2.2)$$

$$\text{où, pour } K \in \tau, F_{K, \sigma} := \begin{cases} |\sigma| \frac{u_L - u_K}{d(x_K, x_L)}, & \text{si } \sigma = \bar{K} \cap \bar{L} \text{ où } K, L \in \tau, \\ |\sigma| \frac{-u_K}{d(x_K, \partial\Omega)}, & \text{si } \sigma \subset \bar{K} \cap \partial\Omega \text{ où } K \in \tau. \end{cases}$$

Donnons alors la

**Proposition 2.2.1.** *Le système (2.2.2) admet une unique solution  $u_\tau := \{u_K\}_{K \in \tau} \in \chi(\tau)$ .*

Preuve: Comme nous sommes en dimension finie, il suffit de démontrer que si  $f \equiv 0$ , alors  $u_K = 0, \forall K \in \tau$ .

Pour ceci, nous multiplions (2.2.2) par  $u_K$  et sommons sur  $K \in \tau$ . Nous obtenons ainsi

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \\ \sigma = K \cap \bar{L}}} |\sigma| \frac{|u_L - u_K|^2}{d(x_K, x_L)} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \\ \sigma = \bar{K} \cap \partial\Omega}} |\sigma| \frac{|u_K|^2}{d(x_K, \partial\Omega)} + \sum_{K \in \tau} |K| |u_K|^2 = 0 ,$$

ce qui implique que  $u_K = 0, \forall K \in \tau$ . Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au lemme 9.2 de [52]

■

## 2.3 Majoration d'erreur

La stratégie de majoration d'erreur pour le schéma numérique considéré sur des maillages anisotropes suivra en grande partie celle appliquée dans la preuve du théorème 9.4 de [52], mais dans la même logique que dans [5], la dépendance des estimées envers les paramètres  $h$  et  $\mu$  sera précisée.

Nous établissons tout d'abord quelques résultats préliminaires.

**Lemme 2.3.1.** *Soient  $\tau$  un maillage admissible restreint anisotrope de  $\Omega$  de pas  $h > 0$  et  $u \in H^2(\Omega)$  vérifiant les estimées (1.3.1)-(1.3.3) de l'introduction.*

*Si nous posons, pour  $K \in \tau$ ,*

$$\tilde{e}_K := u(x_K) - \frac{1}{|K|} \int_K u \, dx ,$$

*alors*

$$\left( \sum_{K \in \tau} |K| |\tilde{e}_K|^2 \right)^{1/2} \lesssim \left( |u|_{1,p,\Omega_1} + \mu^{1/2} |\ln(\mu)|^2 \right) h , \forall p > 2 .$$

*Remarque 2.3.1.* Le plongement

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega) , \forall p > 2,$$

nous permet d'énoncer le lemme 2.3.1 [46].

Preuve:

1<sup>o</sup> cas:  $K \subset \Omega_i, i = 1, 2$

Nous appliquons le raisonnement utilisé dans [53]. Plus précisément, nous pratiquons un développement de Taylor d'ordre 1 avec reste intégral de  $u$  en  $x_K \in K$ , d'où

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{|K|} \int_K u \, dx - u(x_K) \right| \\ &= \frac{1}{|K|} \left| \int_K \int_0^1 \nabla u(tx + (1-t)x_K) \cdot \overrightarrow{x_K x} \, dt dx \right| \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|K|} \left| \int_K \|\overrightarrow{x_K x}\| \int_0^1 \nabla u(tx + (1-t)x_K) \cdot \overrightarrow{S}_{K,x} dt dx \right| ,$$

où,  $\forall K \in \tau_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $\forall x \in K$ ,  $\overrightarrow{S}_{K,x} := \frac{\overrightarrow{x_K x}}{\|\overrightarrow{x_K x}\|}$ . Nous appliquons alors l'inégalité de Hölder à ce qui précède, d'où :

$$|\tilde{e}_K| \leq \frac{h_K}{|K|} \int_0^1 \left( \int_{K_t} |\nabla u(tx + (1-t)x_K) \cdot \overrightarrow{S}_{K,x}|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{K_t} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} dt ,$$

où  $p > 2$  et, pour  $t \in [0, 1]$ ,  $K_t := \{ tx + (1-t)x_K : x \in K \}$ . Nous procédons au changement de variable  $z := tx + (1-t)x_K$ , où  $x_K \in K$ . Nous avons alors  $dz := t dt dx$  et  $|\nabla u(tx + (1-t)x_K) \cdot \overrightarrow{S}_{K,x}| = \frac{1}{t} |\nabla u(z)|$ , et donc :

$$\begin{aligned} |\tilde{e}_K| &\leq \frac{h_K}{|K|} \int_0^1 \frac{1}{t^{1+\frac{1}{p}}} |u|_{1,p,K_t} |K_t|^{\frac{p-1}{p}} dt \\ &\leq_{|K_t| \leq t|K|} \frac{h_K}{|K|^{\frac{1}{p}}} \int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{2}{p}}} |u|_{1,p,K_t} dt , \\ &\leq_{K_t \subset K} \frac{h_K}{|K|^{\frac{1}{p}}} \int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{2}{p}}} |u|_{1,p,K} dt , \\ &= \frac{h_K}{|K|^{\frac{1}{p}}} \frac{p}{p-2} |u|_{1,p,K} < \infty , \end{aligned}$$

$\forall p > 2$ . En posant  $C_p := \frac{p}{p-2}$ , nous obtenons donc, pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $p > 2$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \tau_i} |K| |\tilde{e}_K|^2 &\leq C_p^2 h_i^2 \sum_{K \in \tau_i} |K|^{1-\frac{2}{p}} |u|_{1,p,K}^2 \\ &\leq_{\text{Hölder}} C_p^2 h_i^2 \left( \sum_{K \in \tau_i} |K|^{(1-\frac{2}{p})(\frac{p}{p-2})} \right)^{\frac{p-2}{p}} \cdot \left( \sum_{K \in \tau_i} |u|_{1,p,K}^p \right)^{\frac{2}{p}} , \\ &\leq C_p^2 h_i^2 |\Omega_i|^{\frac{p-2}{p}} |u|_{1,p,\Omega_i}^2 . \end{aligned}$$

Nous obtenons avec ce qui précède :

$$\sum_{K \in \tau_1} |K| |\tilde{e}_K|^2 \lesssim h^2 |u|_{1,p,\Omega_1}^2 , \quad \forall p > 2 , \quad (2.3.1)$$

et

$$\sum_{K \in \tau_2} |K| |\tilde{e}_K|^2 \lesssim h_2^2 h^2 \mu |\ln(\mu)|^2 . \quad (2.3.2)$$

L'estimée (2.3.2) est obtenue via le plongement de Sobolev de la remarque 2.3.1 qui nous donne :

$$|u|_{1,p,\Omega_2}^2 \leq C(\Omega_2) |\Omega_2|^{-\frac{p-2}{p}} (\mu |\ln(\mu)|^2 |u|_{2,2,\Omega_2}^2 + |u|_{1,2,\Omega_2}^2), \forall p > 2.$$

### 2° cas : $K \subset \Omega_3$

$\Omega_3$  est un domaine anisotrope de  $\mathbb{R}^2$ , l'utilisation d'un plongement de Sobolev sur ce domaine en devient donc compromise. Cependant, les Volumes de Contrôle y étant des rectangles, nous pouvons utiliser des changements de variable et raisonner sur le carré de référence. Montrons dans un premier temps que :

$$|\tilde{e}_K|^2 \lesssim (|\hat{u}|_{1,\hat{K}}^2 + |\hat{u}|_{2,\hat{K}}^2), \forall K \in \tau, \quad (2.3.3)$$

où  $\hat{K}$  est le carré de référence et  $\hat{u} := u \circ \Phi_K$ , avec  $\Phi_K : \hat{K} \rightarrow K$  est l'application faisant passer de  $\hat{K}$  à  $K$  ( $F_K$  étant affine car nous considérons des éléments rectangulaires, comme il l'est prouvé dans le paragraphe 3.2 de [41]).

Soit  $K \in \tau$ .

Posons  $\bar{v} : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto u(x) - \frac{1}{|K|} \int_K u \, dx$ .

Clairement  $\bar{u}(x_K) = \tilde{e}_K$  et  $\frac{1}{|K|} \int_K \bar{u} \, dx = 0$ .

Or

$$\begin{aligned} |\bar{u}(x_K)|^2 &\leq \|\bar{u}\|_{\infty,K}^2 \\ &\leq \|\hat{u}\|_{\infty,\hat{K}}^2 \\ &\lesssim \|\hat{u}\|_{2,\hat{K}}^2, \text{ car } H^2(\hat{K}) \hookrightarrow C^0(\bar{\hat{K}}) \\ &\lesssim (|\hat{u}|_{1,\hat{K}}^2 + |\hat{u}|_{2,\hat{K}}^2) \text{ car } \hat{v} \in V, \end{aligned}$$

où  $V := \{v \in H^1(\hat{K}) : \int_{\hat{K}} \hat{v} \, d\hat{x} = 0\}$ . Or,  $V$  étant un fermé de  $H^1(\hat{K})$  et  $V \cap \mathcal{P}_0 = \{0\}$ , nous utilisons le théorème 3.48 de [80] pour obtenir l'équivalence des 2 normes  $|\cdot|_{1,\hat{K}}$  et  $\|\cdot\|_{1,\hat{K}}$  sur  $V$ . Cette estimée prouve donc (2.3.3).

Par changement de variable, nous avons alors

$$|\hat{u}|_{1,\hat{K}}^2 + |\hat{u}|_{2,\hat{K}}^2 \lesssim (|u|_{1,K}^2 + h_i^2 |u|_{2,K}^2),$$

$\tau_3$  étant un maillage anisotrope de  $\Omega_3$ , il faut donc séparer les différentes dérivées. Dans ce but, nous donnons l'inégalité suivante, dont la preuve peut être déduite du lemme 2.5 de [2] :

$$|D^\alpha \hat{v}| \lesssim \sum_{\substack{|s| = |\alpha| \\ s = (s_1, s_2)}} h^s |D^s v|, \forall v \in H^s(K), \forall \alpha \in \mathbb{N}^2. \quad (2.3.4)$$

Nous déduisons alors de (2.3.4)

$$|\hat{u}|_{1,\hat{K}}^2 \lesssim \frac{h_1}{h_2} \|D^{(1,0)}u\|_{0,K}^2 + \frac{h_2}{h_1} \|D^{(0,1)}u\|_{0,K}^2, \quad (2.3.5)$$

et

$$|\hat{u}|_{2,\hat{K}}^2 \lesssim \frac{h_1^3}{h_2} \|D^{(2,0)}u\|_{0,K}^2 + h_1 h_2 \|D^{(1,1)}u\|_{0,K}^2 + \frac{h_2^3}{h_1} \|D^{(0,2)}u\|_{0,K}^2, \quad (2.3.6)$$

où les dérivées sont exprimées dans la base orthonormale  $(x_1^i, x_2^i)$  de  $\Omega_{3,i}$ , où  $x_2^i$  est la direction de raffinement du maillage  $\tau_3$  sur  $\Omega_{3,i}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Nous reprenons alors (2.3.3) en nous aidant de l'inégalité (1.3.3) de l'introduction, de (2.3.6) et de (2.3.5) pour obtenir :

$$\sum_{K \in \tau_3} |K| |\tilde{e}_K|^2 \lesssim \mu |\ln(\mu)|^2 h^2 + \mu |\ln(\mu)|^4 h^4. \quad (2.3.7)$$

Sachant alors que  $\sum_{K \in \tau} |K| |\tilde{e}_K|^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{K \in \tau_i} |K| |\tilde{e}_K|^2$  et que  $\mu \ll 1$ , le résultat du lemme 1 se déduit aisément de (2.3.1), (2.3.2) et (2.3.7). ■

**Lemme 2.3.2.** *Soient  $\tau$  un maillage admissible restreint anisotrope de  $\Omega$  de pas  $h > 0$  et  $u \in H^2(\Omega)$  vérifiant les estimées (1.3.1)-(1.3.3) de l'introduction. Posons*

$$R_\sigma := \begin{cases} \left| \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \nabla u \cdot n_{K,\sigma} ds - \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} \right| & \text{si } \sigma = \bar{K} \cap \bar{L} \text{ où } K, L \in \tau, \\ \left| \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \nabla u \cdot n_{K,\sigma} ds - \frac{-u(x_K)}{d_\sigma} \right| & \text{si } \sigma \subset \bar{K} \cap \partial\Omega \text{ où } K \in \tau, \end{cases}$$

Nous avons alors

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_\sigma R_\sigma^2 \lesssim \frac{|\ln(\mu)|^2}{\mu} h^2.$$

Preuve:

Nous raisonnons tout d'abord pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$ , nous traiterons le cas  $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$  plus tard (voir remarque 2.3.2).

Nous avons donc, pour  $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$

$$R_\sigma := \left| \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \nabla u \cdot n_{K,\sigma} ds - \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} \right|,$$

où  $\sigma = \bar{K} \cap \bar{L}$  avec  $K, L \in \tau$ . Posons

$$- \nu_{K,\sigma} := \{(1-t)x_K + tx : t \in [0,1], x \in \sigma\},$$

$$- \nu_\sigma := \nu_{K,\sigma} \cup \nu_{L,\sigma}, \text{ où } \sigma = \bar{K} \cap \bar{L}.$$

Fixons  $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$ , où  $\sigma = \bar{K} \cap \bar{L}$ .

Nous supposons que  $u \in C^2(\nu_\sigma)$ , espace dense dans  $H^2(\nu_\sigma)$ . Nous pratiquons alors un développement de Taylor d'ordre 2 de  $u$  en  $x \in \sigma$ , d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x_L) - u(x) = \nabla u(x) \cdot (x_L - x) + \\ \int_0^1 H(u)(tx + (1-t)x_L) \cdot (x_L - x) \cdot (x_L - x)t \, dt, \\ u(x_K) - u(x) = \nabla u(x) \cdot (x_K - x) + \\ \int_0^1 H(u)(tx + (1-t)x_K) \cdot (x_K - x) \cdot (x_K - x)t \, dt, \end{array} \right. \quad (2.3.8)$$

Nous soustrayons membre à membre (2.3.8) en remarquant que  $x_L - x_K = n_{K,\sigma} d_\sigma$ , d'où

$$R_\sigma \leq B_{K,\sigma} + B_{L,\sigma}, \quad (2.3.9)$$

où

$$B_{K,\sigma} := \frac{1}{|\sigma|d_\sigma} \left| \int_0^1 H(u)(tx + (1-t)x_K) \cdot (x_K - x) \cdot (x_K - x)t \, dt \right|.$$

Nous supposons alors pour la suite de la preuve que  $\sigma = \tilde{\sigma} \times \{0\}$ , où  $\tilde{\sigma} \subset \mathbb{R}$  et que  $x_K := (0, b + \alpha)^T$ ,  $x_L := (0, b - \gamma)^T$ , où  $\alpha, \gamma > 0$  et  $b \in \tilde{\sigma}$  (voir figure 2.2 de la section 2).

Nous passons alors en coordonnées cartésiennes dans  $B_{K,\sigma}$  (nous avons  $dz = t \alpha \, dt dx$ ), d'où

$$B_{K,\sigma} = \frac{1}{|\sigma|d_\sigma \alpha} \left| \int_{\nu_{K,\sigma}} H(u)(z) \cdot (x_K - x) \cdot (x_K - x) \, dz \right|. \quad (2.3.10)$$

Pour majorer (2.3.10), nous distinguons les différents cas suivants :

1° cas :  $K \in \tau_i$ ,  $i = 1, 2$

$K$  se situe dans une zone où le maillage  $\tau$  est isotrope de pas  $h_i$  mais  $L$  peut être dans  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2$  ou dans  $\tau_3$  et donc deux sous cas sont possibles comme le montre les deux schémas de la figure 2.3.

Par (2.3.10) et le fait que  $\forall i \in \{1, 2\}$ ,  $\forall x \in \sigma$ ,  $|x_K - x| \leq h_i$ , nous avons

$$\begin{aligned} |B_{K,\sigma}| &\leq \frac{h_i^2}{|\sigma|d_\sigma \alpha} \int_{\nu_{K,\sigma}} |H(u)(z)| \, dz \\ &\lesssim \frac{h_i}{|\sigma|d_\sigma} |\nu_{K,\sigma}|^{\frac{1}{2}} |u|_{2,\nu_{K,\sigma}}, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que  $\alpha \geq \xi h_i$ . Nous obtenons alors

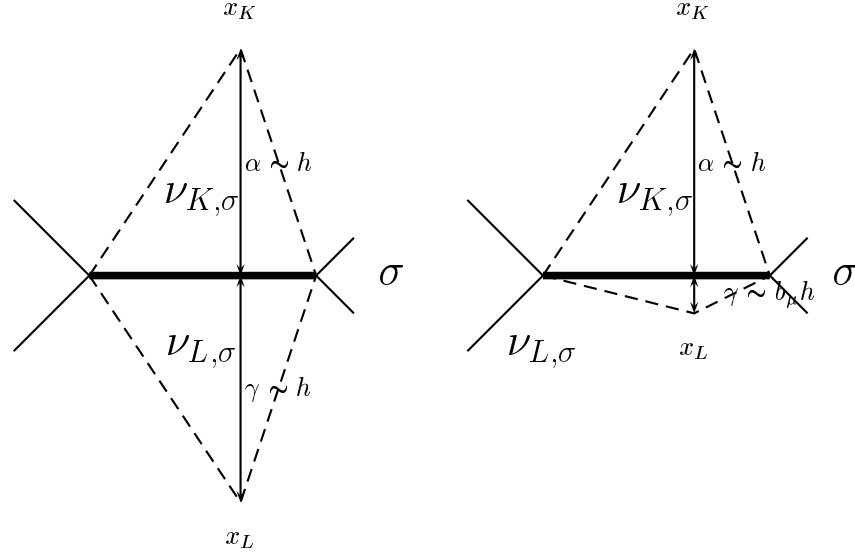


FIG. 2.3 – illustration des 2 sous cas possibles :  $\alpha \sim \gamma$  (à gauche) et  $\alpha \not\sim \gamma$  (à droite)

$$|B_{K,\sigma}| \lesssim \frac{h_i}{||\sigma|d_\sigma|^{\frac{1}{2}}}|u|_{2,\nu_{K,\sigma}}, \quad (2.3.11)$$

car  $|\nu_{K,\sigma}|^{\frac{1}{2}} \sim h_i \leq h_i^{\frac{1}{2}} (h_i + h_j)^{\frac{1}{2}} = ||\sigma|d_\sigma|^{\frac{1}{2}}, \forall j \in \{1,2\}$ .

### 2° cas : $K \in \tau_3$

$K$  se situe à présent dans une zone où le maillage  $\tau$  est anisotrope. La majoration de  $B_{K,\sigma}$  nécessite par conséquent plus de finesse, plus précisément, nous devons tenir compte du caractère anisotrope de  $u$  (exprimé par le point (1.3.3) de l'introduction).

Nous nous plaçons dans  $\Omega_{3,i}$  et nous donnons un repère orthonormal  $(x_1^i, x_2^i)$ , où  $x_2^i$  caractérise la direction de raffinement du maillage  $\tau_3$  de  $\Omega_{3,i}$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$ . Par la suite, nous omettrons l'indice  $i$ . Nous distinguons les 2 cas suivants

#### 1° sous cas : $\sigma$ est parallèle à $x_1$

Nous avons alors  $|\sigma| = h_1$  et  $\alpha = h_2$  comme le montre la figure 2.4.

Remarquons que  $d_\sigma \sim h_i + h_2$ ,  $i \in \{1,2\}$  et que, pour  $x \in \sigma$ ,  $x_K - x = (-x, \alpha)^T$  (nous commettons un abus de notation en confondant  $x$  et son abscisse).

Nous reprenons le membre de droite de (2.3.10) en tenant compte des remarques précédentes, d'où

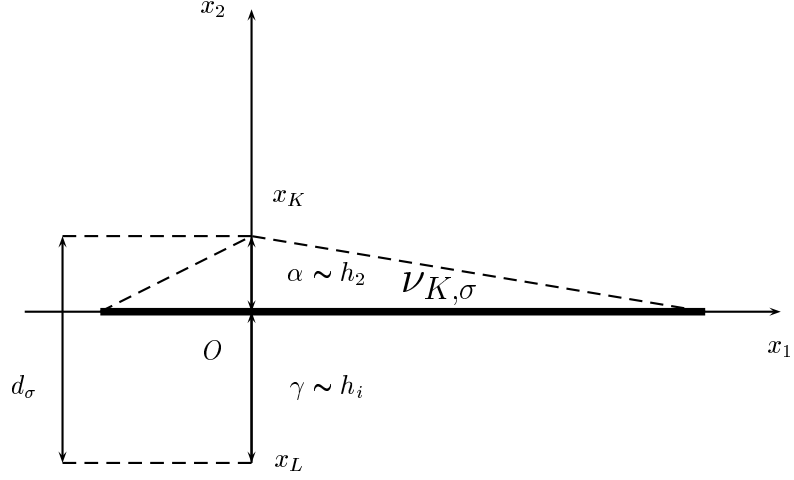


FIG. 2.4 – illustration du premier sous cas possible pour  $\sigma$  parallèle à  $(Ox_1)$

$$\begin{aligned}
|B_{K,\sigma}| &\lesssim \frac{1}{\|\sigma\|d_\sigma^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{h_1^{\frac{1}{2}}|h_i+h_2|^{\frac{1}{2}}h_2} \\
&\left( \int_{\nu_{K,\sigma}} |x^2 D^{(2,0)}(u)(z)| dz \right. \\
&+ \int_{\nu_{K,\sigma}} |x h_2 D^{(1,1)}(u)(z)| dz \\
&+ \left. \int_{\nu_{K,\sigma}} |h_2^2 D^{(0,2)}(u)(z)| dz \right) \\
&\lesssim \frac{1}{\|\sigma\|d_\sigma^{\frac{1}{2}}} \frac{|\nu_{K,\sigma}|^{\frac{1}{2}}}{h_1^{\frac{1}{2}}|h_i+h_2|^{\frac{1}{2}}h_2} \\
&\left( h_1^2 \|D^{(2,0)}u\|_{0,\nu_{K,\sigma}} \right. \\
&+ h_1 h_2 \|D^{(1,1)}u\|_{0,\nu_{K,\sigma}} \\
&+ \left. h_2^2 \|D^{(0,2)}u\|_{0,\nu_{K,\sigma}} \right),
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que  $|x| \lesssim h_1$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned}
|B_{K,\sigma}| &\lesssim \frac{1}{\|\sigma\|d_\sigma^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{h_1^{\frac{3}{2}}}{h_2^{\frac{1}{2}}} \|D^{(2,0)}u\|_{0,\nu_{K,\sigma}} \right. \\
&+ h_1^{\frac{1}{2}} h_2^{\frac{1}{2}} \|D^{(1,1)}u\|_{0,\nu_{K,\sigma}} + \left. \frac{h_2^{\frac{3}{2}}}{h_1^{\frac{1}{2}}} \|D^{(0,2)}u\|_{0,\nu_{K,\sigma}} \right),
\end{aligned}$$



car  $|\nu_{K,\sigma}| \sim \frac{h_1 h_2}{2}$  et  $\forall i \in \{1,2\}, h_i + h_2 \geq h_2$ .

2° sous cas :  $\sigma$  est parallèle à  $x_2$

Nous avons alors  $|\sigma| \sim h_2$  et  $\alpha \sim h_1$

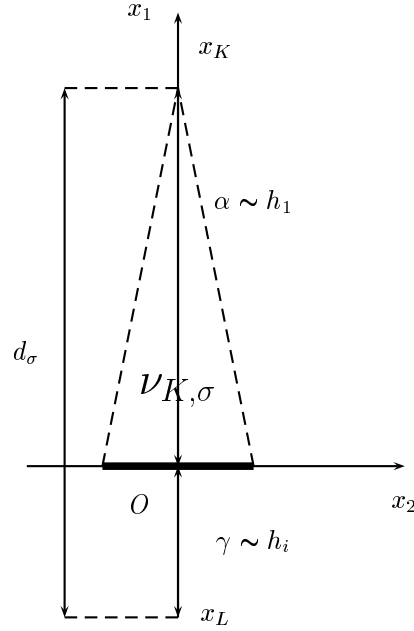


FIG. 2.5 – illustration du sous cas possible  $\sigma$  parallèle à  $(Ox_2)$

Nous raisonnons comme dans le 1° sous cas pour aboutir à

$$|B_{K,\sigma}| \lesssim \frac{1}{|\sigma| d_\sigma|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{h_2^{\frac{1}{2}} |h_i + h_1|^{\frac{1}{2}} h_1} \left( \int_{\nu_{K,\sigma}} |x^2 D^{(0,2)} u(z)| dz \right. \\ \left. + \int_{\nu_{K,\sigma}} |x h_1 D^{(1,1)} u(z)| dz + \int_{\nu_{K,\sigma}} |h_1^2 D^{(2,0)} u(z)| dz \right).$$

Il vient donc, en utilisant tout comme précédemment l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en remarquant que  $|\nu_{K,\sigma}| = \frac{h_1 h_2}{2}$ ,  $|x| \leq h_2$ , et  $\forall i \in \{1,2\}, h_i + h_1 \geq h_1 \geq h_2$

$$|B_{K,\sigma}| \lesssim \frac{1}{|\sigma| d_\sigma|^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{h_2^2}{h_1} \|D^{(0,2)} u\|_{0,\nu_{K,\sigma}} \right. \\ \left. + h_2 \|D^{(1,1)} u\|_{0,\nu_{K,\sigma}} + h_1 \|D^{(2,0)} u\|_{0,\nu_{K,\sigma}} \right).$$

Par l'étude de ces 2 sous cas, nous pouvons donc dire que

$$\begin{aligned}
|B_{K,\sigma}| \lesssim & \frac{1}{||\sigma|d_\sigma|^{\frac{1}{2}}|} \left( \frac{h_1^{\frac{3}{2}}}{h_2^{\frac{1}{2}}} \|D^{(2,0)}u\|_{0,\nu_{K,\sigma}} \right. \\
& \left. + h_1^{\frac{1}{2}} h_2^{\frac{1}{2}} \|D^{(1,1)}u\|_{0,\nu_{K,\sigma}} + \frac{h_2^2}{h_1} \|D^{(0,2)}u\|_{0,\nu_{K,\sigma}} \right), \forall \sigma \in \mathcal{E}_K, \forall K \in \tau_3.
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

*Remarque 2.3.2.* Pour le cas où  $\sigma \subset \partial K \cap \partial\Omega$ ,  $K \in \tau$ , nous posons

$$\tilde{\sigma} := \left\{ \frac{1}{2} x_K + \frac{1}{2} x : x \in \sigma \right\},$$

ainsi que  $\tilde{K}$ ,  $\tilde{L}$  comme indiqués sur la figure 2.6

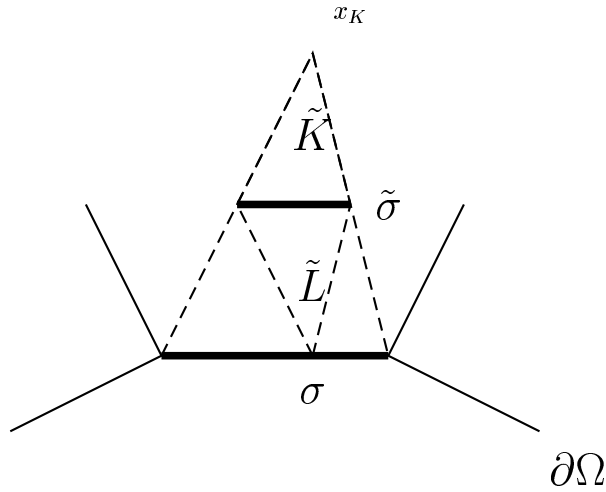


FIG. 2.6 – illustration du cas  $\sigma \subset \tilde{K} \cap \partial\Omega$ ,  $K \in \tau$

Si  $\sigma \subset \partial\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ), nous raisonnons comme dans le 1<sup>o</sup> cas; Si  $\sigma \subset \partial\Omega_3$ , nous raisonnons comme dans le 1<sup>o</sup> sous-cas du 2<sup>o</sup> cas. Nous obtiendrons alors une estimée similaire à (2.3.11) si  $\sigma \subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$  ou à (2.3.12) si  $\sigma \subset \partial\Omega_3$ .

Nous procédons à présent au bilan de notre disjonction des cas. Nous obtenons alors, grâce à (2.3.9)

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in \tau} |\sigma| d_{\sigma} R_{\sigma}^2 &\leq \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{int} \\ \sigma = \bar{K} \cap \bar{L}}} |\sigma| d_{\sigma} (B_{K,\sigma}^2 + B_{L,\sigma}^2) \\
&+ \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{ext} \\ \sigma \subset \bar{K}}} |\sigma| d_{\sigma} B_{K,\sigma}^2 \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{K \in \tau_i} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| d_{\sigma} B_{K,\sigma}^2 .
\end{aligned}$$

Ceci implique donc, par (2.3.11), (2.3.12) et la remarque 2.3.2

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma \in \tau} |\sigma| d_{\sigma} R_{\sigma}^2 &\lesssim h_1^2 \sum_{K \in \tau_1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |u|_{2,\nu_{K,\sigma}}^2 + h_2^2 \sum_{K \in \tau_2} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |u|_{2,\nu_{K,\sigma}}^2 \\
&+ \frac{h_1^3}{h_2} \sum_{K \in \tau_3} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \|D^{(2,0)} u\|_{0,\nu_{K,\sigma}}^2 \\
&+ h_1 h_2 \sum_{K \in \tau_3} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \|D^{(1,1)} u\|_{0,\nu_{K,\sigma}}^2 \\
&+ \frac{h_2^4}{h_1^2} \sum_{K \in \tau_3} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \|D^{(0,2)} u\|_{0,\nu_{K,\sigma}}^2 \\
&= h_1^2 |u|_{2,\Omega_1}^2 + h_2^2 |u|_{2,\Omega_2}^2 \\
&+ \frac{h_1^3}{h_2} \|D^{(2,0)} u\|_{0,\Omega_3}^2 \\
&+ h_1 h_2 \|D^{(1,1)} u\|_{0,\Omega_3}^2 \\
&+ \frac{h_2^4}{h_1^2} \|D^{(0,2)} u\|_{0,\Omega_3}^2 \\
&\lesssim h^2 + \frac{|\ln(\mu)|^2}{\mu} h^2 \\
&+ \frac{h^2}{|\ln(\mu)|} \\
&+ |\ln(\mu)| h^2 \\
&+ \mu |\ln(\mu)|^4 h^2 ,
\end{aligned}$$

par les estimées (1.3.1), (1.3.2) et (1.3.3) de l'introduction. Ceci fournit

$$\sum_{\sigma \in \tau} |\sigma| d_\sigma R_\sigma^2 \lesssim \frac{|\ln(\mu)|^2}{\mu} h^2 ,$$

dès que  $\mu$  est assez petit. Cette inégalité démontre bien l'énoncé du lemme. ■

Nous donnons à présent le théorème de majoration d'erreur suivant

**Théorème 2.3.3.** *Soient  $u \in H^2(\Omega)$  la solution de (1.1.1) vérifiant les estimées (1.3.1)-(1.3.3) et  $\tau$  un maillage admissible restreint anisotrope de  $\Omega$  de pas  $h > 0$  (voir définition 2.1.1). Considérons de plus  $\{u_K\}_{K \in \tau}$  la solution de (2.2.2).*

Définissons en outre  $e_\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$e_\tau(x) := \begin{cases} e_K := u(x_K) - u_K, & \text{si } \exists K \in \tau \text{ tel que } x \in K , \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Nous avons alors

$$|e_\tau|_{\tau, \mu, \Omega} + \|e_\tau\|_{0, \Omega} \lesssim h \left( |u|_{1, p, \Omega_1} + \mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)|^2 \right) , \forall p > 2 .$$

Preuve:

Nous soustrayons tout d'abord (2.2.2) à (2.2.1) et obtenons

$$\mu^2 \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K, \sigma} - \int_\sigma \nabla u \cdot n_{K, \sigma} ds \right) + |K| \left( \frac{1}{|K|} \int_K u dx - u_K \right) = 0 . \quad (2.3.13)$$

Posons alors, pour  $K \in \tau$  et  $\sigma \in \mathcal{E}_K$

$$- R_{K, \sigma} := \begin{cases} \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \nabla u \cdot n_{K, \sigma} ds - \frac{u(x_L) - u(x_K)}{d_\sigma} & \text{si } \sigma = \bar{K} \cap \bar{L} , K, L \in \tau , \\ \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \nabla u \cdot n_{K, \sigma} ds - \frac{-u(x_K)}{d_\sigma} & \text{si } \sigma \subset \bar{K} \cap \partial\Omega , K \in \tau , \end{cases}$$

$$- \tilde{e}_K := u(x_K) - \frac{1}{|K|} \int_K u dx .$$

Grâce à (2.3.13), nous avons

$$\mu^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \frac{|\sigma|}{d_\sigma} D_\sigma e_\tau + |K| e_K = \mu^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| R_{K, \sigma} + |K| \tilde{e}_K . \quad (2.3.14)$$

Nous multiplions alors (2.3.14) par  $e_K$ , sommons sur  $K \in \tau$  et obtenons

$$|e_\tau|_{\tau,\mu,\Omega}^2 + \|e_\tau\|_{0,\Omega}^2 \leq \mu^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| |D_\sigma| R_\sigma + \sum_{K \in \tau} |K| \tilde{e}_K e_K, \quad (2.3.15)$$

$$\text{où } R_\sigma := \begin{cases} |R_{K,\sigma}| = |R_{L,\sigma}|, \text{ avec } \sigma = \bar{K} \cap \bar{L}, K, L \in \tau, \\ |R_{K,\sigma}|, \text{ avec } \sigma = \bar{K} \cap \partial\Omega, K \in \tau. \end{cases}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à :

$$\begin{aligned} \mu^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| |D_\sigma| R_\sigma &\leq \mu^2 \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{|\sigma|}{d_\sigma} |D_\sigma|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_\sigma R_\sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |e_\tau|_{\tau,\mu,\Omega} \mu \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_\sigma R_\sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim |e_\tau|_{\tau,\mu,\Omega} \mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)| h, \end{aligned}$$

grâce au lemme 2.3.2. De plus, toujours par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \tau} |K| \tilde{e}_K e_K &\leq \left( \sum_{K \in \tau} |K| e_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{K \in \tau} |K| \tilde{e}_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \|e_\tau\|_{0,\Omega} h \left( |u|_{1,p,\Omega_1} + \mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)| \right), \forall p > 2, \end{aligned}$$

grâce au lemme 2.3.1.

En utilisant ces deux résultats dans (2.3.15), nous en déduisons aisément le résultat du théorème. ■

Nous donnons à présent une autre majoration d'erreur dont le résultat découle en fait du théorème précédent et d'arguments du type Bramble-Hilbert. Cependant, ce théorème possède l'avantage de présenter un résultat bien plus significatif que celui du théorème 2.3.3 (voir tests numériques).

**Théorème 2.3.4.** *Soient  $u \in H^2(\Omega)$  la solution de (1.1.1) vérifiant les points (1.3.1)-(1.3.3) et  $\tau$  un maillage admissible restreint anisotrope de  $\Omega$  de pas  $h > 0$  (voir définition 2.1.1). Considérons de plus  $\{u_K\}_{K \in \tau}$  la solution de (2.2.2). Nous avons alors*

$$\|u - u_K\|_{0,2,\Omega}^2 \lesssim h \left( |u|_{1,p,\Omega_1} + \mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)|^2 \right), \forall p > 2.$$

Preuve:

Comme il a été dit précédemment, la preuve du théorème 2.3.4 se base en grande partie sur le résultat du théorème 2.3.3 en prenant soin de séparer l'étude suivant le sous domaine de  $\Omega$  sur lequel nous travaillons.

Il suffit de montrer que, pour tout  $K \in \tau$ , nous avons :

$$\|u - u_K\|_{0,2,K} \lesssim \begin{cases} h (|u|_{1,p,\Omega_1} + h) , \forall p > 2 \text{ si } K \in \tau_1 , \\ h (\mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)| + \mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)|^2 h) \text{ si } K \in \tau_2 , \\ h (\mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)| + \mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)|^2 h) \text{ si } K \in \tau_3 , \end{cases}$$

le résultat du théorème se déduisant aisément de ces inégalités.

1° cas :  $K \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$

Dans un premier temps, il nous faut passer au triangle de référence  $\hat{K}$ , tout comme dans la preuve du lemme 1. Cependant, les Volumes de Contrôle inclus dans  $\tau_1 \cup \tau_2$  n'étant pas nécessairement triangulaire ou rectangulaire, cette application peut ne pas être définie. L'idée est alors, pour  $K \in \tau_1 \cup \tau_2$ , de diviser celui-ci en sous-domaines triangulaires où nous pourrions définir ce changement de base.

Dans ce but, pour tout  $K \in \tau_1 \cup \tau_2$ , nous divisons  $K$  en  $i_K := \text{Card}(\mathcal{E}_K)$  triangles  $K_j$  en joignant chaque sommet de  $K$  à  $x_K$  (voir figure 2.7).

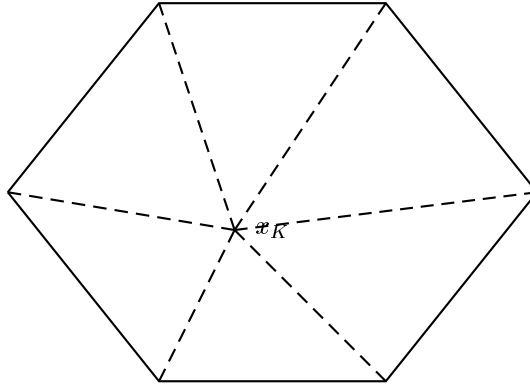


FIG. 2.7 – Illustration de la partition en triangles d'un Volume de Contrôle  $K \in \tau_1 \cup \tau_2$

Grâce aux hypothèses d'admissibilité sur le maillage (voir définitions 9.1 et 9.4 de [52]), nous avons :

$$\exists \rho > 0, \forall K \in \tau_1 \cup \tau_2, \forall j \in \{1, \dots, i_K\},$$

$$1 \leq \frac{h_{K_j}}{\rho_{K_j}} \leq \rho ,$$

où  $h_{K_j}$  désigne le diamètre du cercle circonscrit à  $K_j$  et  $\rho_{K_j}$  le diamètre du plus grand cercle inscrit dans  $K_j$ .

Nous avons alors, pour tout  $K \in \tau_1 \cup \tau_2$

$$\begin{aligned}
\int_K |u - u_K|^2 dx &= \sum_{j=1}^{i_K} \int_{K_j} |u - u_K|^2 dx \\
&\leq 2 \sum_{j=1}^{i_K} \int_{K_j} |u - u(x_K)|^2 dx \\
&\quad + 2 \int_K |u(x_K) - u_K|^2 dx .
\end{aligned}$$

Dans un premier temps, notons que, grâce au théorème 2.3.3 :

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{K \in \tau_i} \int_K |u(x_K) - u_K|^2 dx \lesssim h^2 (|u|_{1,p,\Omega_1}^2 + \mu |\ln(\mu)|^2) . \quad (2.3.16)$$

Dans un second temps, nous avons, en utilisant successivement un passage au triangle de référence et un argument de type Bramble-Hilbert,  $\forall K \in \tau_1 \cup \tau_2, \forall j \in \{1, \dots, i_K\}$

$$\begin{aligned}
\int_{K_j} |u - u(x_K)|^2 dx &= |K_j| \int_{\hat{K}} |\hat{u} - \hat{u}(x_{\hat{K}})|^2 d\hat{x} \\
&\lesssim |K_j| \left( |\hat{u}|_{1,\hat{K}}^2 + |\hat{u}|_{2,\hat{K}}^2 \right) \\
&\lesssim |K_j| \left( |u|_{1,K}^2 + h_{K_j} |u|_{2,K}^2 \right) .
\end{aligned}$$

Cette estimée fournit alors

$$\int_K |u - u(x_K)|^2 dx \lesssim h_i^2 |u|_{1,K}^2 + h_i^4 |u|_{2,K}^2, \forall K \in \tau_i, \forall i \in \{1, 2\}.$$

$\Downarrow$

$$\|u - u_K\|_{0,\Omega_i}^2 \lesssim h_i^2 |u|_{1,p,\Omega_i}^2 + h_i^4 |u|_{2,\Omega_i}^2, \forall p > 2, \forall i \in \{1, 2\},$$

ce qui fournit, avec les estimées (1.3.1)-(1.3.3) et le plongement  $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  :

$$\begin{cases} \|u - u_K\|_{0,\Omega_1} \lesssim h (|u|_{1,p,\Omega_1} + h), \forall p > 2, \\ \|u - u_K\|_{0,\Omega_2} \lesssim h (\mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)| + \mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)|^2 h). \end{cases} \quad (2.3.17)$$

Nous obtenons alors, par (2.3.16) et (2.3.17)

$$\|u - u_K\|_{0,\Omega_1 \cup \Omega_2} \lesssim h \left( |u|_{1,p,\Omega_1} + \mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)| \right), \forall p > 2. \quad (2.3.18)$$

En outre, en utilisant un raisonnement identique à celui effectué dans le second cas du lemme 2.3.1, nous obtenons

$$\|u - u_K\|_{0,\Omega_3} \lesssim h \left( \mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)| + \mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)|^2 h \right). \quad (2.3.19)$$

(2.3.18) et (2.3.19) fournissent alors aisément le résultat du théorème. ■

## 2.4 Essais numériques

Nous nous plaçons sur  $\Omega := ]0,1[^2$  et considérons la fonction donnée en introduction  $u_\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$u_\mu(x,y) := e^{-\frac{x}{\mu}} + e^{-\frac{y}{\mu}} - 1,$$

où  $\mu \in ]0,1[$ . Rappelons que  $u_\mu$  est alors la solution du problème elliptique suivant

$$\begin{cases} -\mu^2 \Delta u_\mu + u_\mu = -1 \text{ dans } \Omega, \\ u_\mu = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4.1)$$

où  $g$  est la restriction de  $u_\mu$  à  $\partial\Omega$  (nous renvoyons le lecteur à l'introduction pour bien comprendre le caractère anisotrope du problème considéré).

Nous comparons alors, pour différentes valeurs de  $\mu$ , la convergence obtenue par l'approximation  $u_\tau$  (la solution de (2.2.2)) de  $u$  pratiquée lorsque  $\tau$  est un maillage isotrope ( $b_\mu = 0.5$ ) et lorsque  $\tau$  est un maillage anisotrope ( $b_\mu = |\mu \ln(\mu)|$ ) (voir figure 2.8).

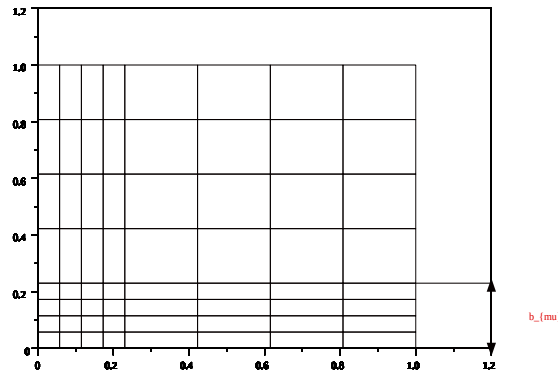


FIG. 2.8 – Illustration du maillage anisotrope utilisé avec  $b_\mu = |\mu \ln(\mu)|$  pour  $\mu = 10^{-1}$  et  $n = \frac{1}{h} := 4$

La table 2.1 donne, pour plusieurs valeurs de  $n$ , l'erreur  $\|e_\tau\|_{0,2,\Omega} + |e_\tau|_{\tau,\mu,\Omega}$  introduite précédemment dans le cas d'un maillage isotrope et d'un maillage anisotrope. Ces résultats justifient partiellement l'introduction de



maillages anisotropes pour le type de problèmes étudiés. En effet, pour  $\mu$  de l'ordre de grandeur de  $h$ , le taux de convergence dans le cas isotrope n'est pas optimal.

| $n$ | $\mu = 1.$ | $\mu = 0.1$   |                          | $\mu = 0.01$  |                          | $\mu = 10^{-6}$ |                          |
|-----|------------|---------------|--------------------------|---------------|--------------------------|-----------------|--------------------------|
|     |            | $b_\mu = 0.5$ | $b_\mu =  \mu \ln(\mu) $ | $b_\mu = 0.5$ | $b_\mu =  \mu \ln(\mu) $ | $b_\mu = 0.5$   | $b_\mu =  \mu \ln(\mu) $ |
| 4   | 4.51E-02   | 5.41E-02      | 2.70E-02                 | 2.27E-03      | 1.07E-02                 | 2.25E-03        | 8.95E-03                 |
| 8   | 1.68E-02   | 2.85E-02      | 1.16E-02                 | 6.21E-04      | 4.64E-03                 | 5.64E-04        | 2.26E-03                 |
| 16  | 6.13E-03   | 1.19E-02      | 4.54E-03                 | 5.53E-04      | 1.94E-03                 | 1.41E-04        | 5.78E-04                 |
| 32  | 2.21E-03   | 4.55E-03      | 1.68E-03                 | 1.38E-03      | 7.49E-04                 | 3.52E-05        | 1.52E-04                 |
| 64  | 7.88E-04   | 1.67E-03      | 6.10E-04                 | 1.43E-03      | 2.77E-04                 | 8.81E-06        | 4.20E-05                 |

TAB. 2.1 – norme  $(\|e_\tau\|_{0,2,\Omega}^2 + |e_\tau|_{\tau,\mu,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}}$  pour plusieurs valeurs de  $\mu$  pour les maillages isotropes et anisotropes

Cependant, pour  $\mu = 10^{-6}$ , nous réalisons les mêmes tests (voir dernière colonne de la table 2.1). Mais, contrairement à ce qui précède, comme  $\mu \ll h$ , le maillage anisotrope présente de moins bons résultats que le maillage isotrope (comme nous mesurons une erreur "ponctuelle" et que l'épaisseur de la couche anisotrope est nettement plus petite que  $h$ , il est compréhensible que ce cas amènera une convergence moins bonne pour le maillage anisotrope que pour le maillage isotrope). Cependant, lorsque nous tentons de reconstruire point par point la solution  $u_\mu$  de (2.4.1), nous constatons que le caractère continu de celle-ci n'est pas retranscrit par le maillage isotrope, alors qu'il l'est par le maillage anisotrope (voir figure 2.9 pour  $n = 50$  et  $\mu = 10^{-6}$ ). L'utilisation d'un maillage anisotrope est donc aussi nécessaire dans ce cas.

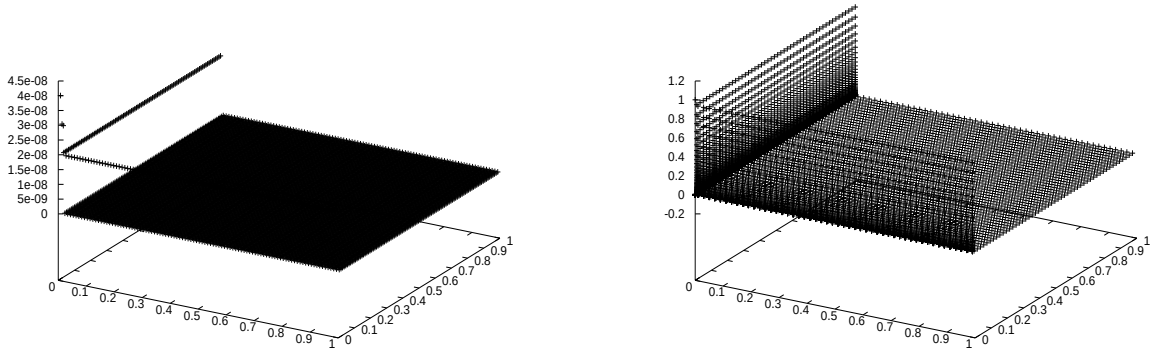


FIG. 2.9 – Solution de (2.4.1) pour  $b_\mu = 0.5$  (à gauche) et pour  $b_\mu = |\mu \ln(\mu)|$  (à droite)

La table 2.2 illustre par contre le résultat du théorème 2.3.4 et présente la norme de l'erreur entre la solution exacte de (2.4.1) et son approximation par la méthode de Volumes Finis centrée cellule pour différentes valeurs de  $n$  et de  $\mu$ .

En outre, une observation minutieuse de cette table 2.2 montre que, dans le cas anisotrope, la vitesse de convergence est de  $\mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)| h$  alors que le théorème 2.3.4 nous donne une vitesse de  $h$ . En fait, les résultats de [49] impliquent que  $|u|_{1,p,\Omega_1} \sim \mu$ ,  $\forall p > 1$ , si le gradient du terme de sollicitation est nul. Or, dans ce cas ci, le théorème 2.3.4 donne un ordre de convergence de  $\mu^{\frac{1}{2}} |\ln(\mu)| h$ .

| $n$ | $\mu = 10^{-1}$ |                          | $\mu = 10^{-3}$ |                          | $\mu = 10^{-5}$ |                          |
|-----|-----------------|--------------------------|-----------------|--------------------------|-----------------|--------------------------|
|     | $b_\mu = 0.5$   | $b_\mu =  \mu \ln(\mu) $ | $b_\mu = 0.5$   | $b_\mu =  \mu \ln(\mu) $ | $b_\mu = 0.5$   | $b_\mu =  \mu \ln(\mu) $ |
| 4   | 1.66E-01        | 7.19E-02                 | 2.64E-01        | 2.13E-02                 | 2.64E-01        | 3.25E-03                 |
| 8   | 8.06E-02        | 3.55E-02                 | 1.81E-01        | 1.06E-02                 | 1.82E-01        | 1.76E-03                 |
| 16  | 3.97E-02        | 1.76E-02                 | 1.26E-01        | 5.18E-03                 | 1.27E-01        | 8.64E-04                 |
| 32  | 1.97E-02        | 8.81E-03                 | 8.83E-02        | 2.56E-03                 | 8.90E-02        | 4.23E-04                 |
| 64  | 9.86E-03        | 4.40E-03                 | 6.12E-02        | 1.28E-03                 | 6.27E-02        | 2.10E-04                 |

TAB. 2.2 – norme  $L^2$  de l'erreur dans le cas isotrope pour différentes valeurs de  $\mu$  pour les maillages isotropes et anisotropes

Afin d'éviter ceci, nous procédons à un dernier essai numérique où nous considérons toujours le problème de réaction-diffusion perturbé (2.4.1) mais, cette fois ci, nous prenons comme solution la fonction

$$v_\mu(x,y) := u_\mu(x,y) + x^3 .$$

De ce fait , nous avons un second membre de gradient non nul. Nous donnons alors la table suivante présentant l'erreur dans le cas d'un maillage anisotrope ( $b_\mu := |\mu \ln(\mu)|$ ). Nous constatons alors une vitesse de convergence réduite par rapport au cas précédent, celle-ci étant de  $h$ . Ces tests confirment donc l'aspect optimal de l'estimée du théorème 2.3.4.

| $n$ | $\mu = 10^{-1}$ | $\mu = 10^{-3}$ | $\mu = 10^{-5}$ |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|
| 4   | 1.18E-01        | 1.23E-01        | 1.22E-01        |
| 8   | 5.86E-02        | 6.22E-02        | 6.17E-02        |
| 16  | 2.92E-02        | 3.11E-02        | 3.09E-02        |
| 32  | 1.46E-02        | 1.56E-02        | 1.55E-02        |
| 64  | 7.30E-03        | 7.79E-03        | 7.74E-03        |

TAB. 2.3 – norme  $L^2$  de l'erreur dans le cas anisotrope  $b_\mu := |\mu \ln(\mu)|$

*Remarque 2.4.1.* Citons [77, 78] où le lecteur pourra trouver des détails concernant les traitements par d'autres méthodes de Volumes Finis des problèmes dit de "convection-diffusion perturbés" (c'est à dire que le terme de diffusion devient encore négligeable mais par rapport au terme de convection cette fois).

## Chapitre 3

# Méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur des éléments conformes pour les problèmes de réaction-diffusion sur des maillages anisotropes

Le but de cette section est de discrétiser (1.1.1) par la méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur les éléments  $\mathbb{P}_1$ -conformes (voir [8]) sur un type de maillages anisotropes adaptés à ce genre de problème.

### 3.1 Notations-Définitions

Nous construisons dans un premier temps les deux maillages nécessaires à l'application des méthodes d'Éléments-Volumes Finis.

Construisons tout d'abord le maillage primal de  $\Omega$ .

Nous définissons  $\Omega_1$  et  $\{\Omega_{i,j}\}_{\substack{i \in \{2,3\} \\ j \in \{1,4\}}}$ , comme indiqué en introduction. Nous construisons alors une triangulation  $T_h$  de  $\Omega$  comme suit : Soit  $h > 0$  fixé

Nous construisons sur  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ) une triangulation régulière  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) de pas  $h_1 := h$  (resp.  $h_2 := b_\mu h$ ), c'est à dire que l'hypothèse suivante est vérifiée

$$(H) \quad \exists \rho > 0 : 1 \leq \frac{h_K}{\rho_K} \leq \rho, \forall K \in T_i, \forall i \in \{1,2\},$$

où, pour  $K \in T_h$ ,  $\rho_K$ , resp.  $h_K$ , est le diamètre du plus grand cercle inscrit dans  $K$ , resp. du cercle circonscrit à  $K$ .

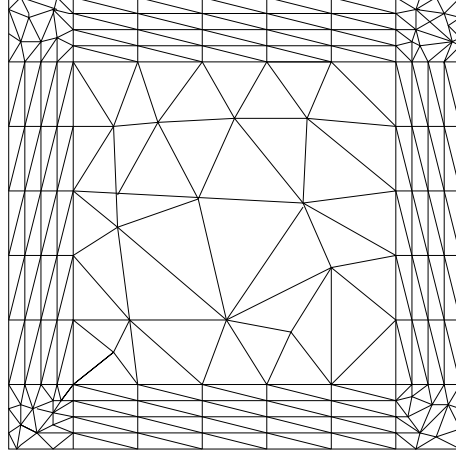


FIG. 3.1 – *Illustration d'un maillage anisotrope pour les méthodes d'Éléments-Volumes Finis*

Sur  $\Omega_3$ , nous introduisons tout d'abord un système de coordonnées cartésiennes locales  $(x_1, x_2)$ , où  $x_2$  caractérise la direction perpendiculaire au bord de  $\Omega$  (il est clair que cette base ne sera pas la même sur  $\Omega_{3,j}$ ,  $j \in \{1,4\}$ , mais nous nous permettons d'omettre l'indice  $j$  pour alléger les notations). Nous construisons alors un maillage anisotrope rectangulaire de pas  $h_1$ , resp.  $h_2$ , dans la direction  $x_1$ , resp.  $x_2$ . Nous coupons alors chacun des rectangles obtenus en deux parties suivant sa diagonale, nous obtenons ainsi une triangulation  $T_3$  de  $\Omega_3$  où chaque élément est un triangle rectangle de base  $h_1$  et de hauteur  $h_2$ . Ce maillage  $T_3$  est anisotrope dans le sens où pour  $\mu \ll 1$ , alors  $h_2 \ll h_1$  (c'est à dire que la vérification de l'hypothèse (H) est critique, de plus amples détails sont donnés en introduction).

La figure 3.1 représente un tel maillage de  $\Omega$ .

Définissons à présent le maillage dual de  $\Omega$  : Pour  $K \in T_h$ , nous définissons  $Z_h(K)$ , resp.  $E_h(K)$ , comme l'ensemble des sommets de  $K$ , resp. des arêtes de  $K$ . Nous posons alors

$$Z_h := \bigcup_{K \in T_h} Z_h(K) ,$$

$$E_h := \bigcup_{K \in T_h} E_h(K) .$$

Distinguons en outre  $Z_h^{in}$ , resp  $E_h^{in}$ , ensemble des sommets, resp. arêtes, de  $T_h$  inclus(es) dans  $\Omega$  et  $Z_h^{ext}$ , resp.  $E_h^{ext}$ , ensemble des sommets, resp. arêtes, situé(e)s sur  $\partial\Omega$ . De plus, pour  $e \in E_h$ , nous appelons  $m_e$  le milieu de  $e$  et pour  $K \in T_h$ , nous notons  $z_K$  le barycentre de  $K$  (contrairement à la section 3 nous choisissons dès à présent  $z_K$  barycentre de  $K$ ).

Pour  $K \in T_h$  et  $z \in Z_h(K)$  avec  $z = \bar{e} \cap \bar{l}$ , où  $e, l \in E_h(K)$ , nous posons

$$b_{z,K} := \text{Conv}[z_K, z, m_e, m_l].$$

Définissons le maillage dual  $B_h := \{b_z\}_{z \in Z_h}$ , où

$$b_z := \bigcup_{\substack{K \in T_h \\ z \in Z_h(K)}} b_{z,K} .$$

La figure 3.2 représente une telle boîte  $b_z$  pour  $z \in Z_h^{in}$  avec  $z \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_3$ .

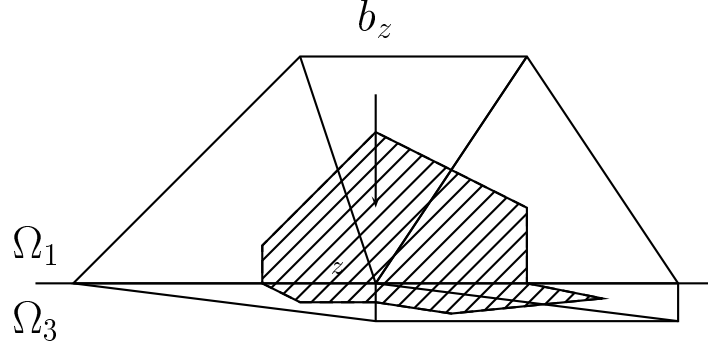


FIG. 3.2 –  $b_z$  pour  $z \in \partial\Omega_3 \cap \partial\Omega_1$

Introduisons,  $\{\phi_z\}_{z \in Z_h}$ , ensemble des fonctions de base des éléments  $IP_1$ -conformes.

Posons alors

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_z : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in b_z, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \end{aligned}$$

Convenons en outre que, si  $v = \sum_{z \in Z_h^{in}} v_z \phi_z$ , alors  $\bar{v} := \sum_{z \in Z_h^{in}} v_z \bar{\phi}_z$  et réciproquement. Définissons de plus :

- $X_h :=$  ensemble des fonctions  $IP^1$ -conformes sur le maillage primal  $T_h$ ,
- $X_h^0 :=$  ensemble des fonctions  $IP^1$ -conformes sur le maillage primal  $T_h$  valant 0 sur le bord de  $\Omega$ ,
- Pour  $z \in Z_h$ ,  $n_{b_z} :=$  la normale unitaire sortante à  $b_z$ ,
- $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(v, w) \longmapsto (\nabla v, \nabla w)_\Omega$ ,
- $\bar{a} : (H^2(\Omega) + X_h) \times (H^2(\Omega) + X_h) \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $(v, w) \longmapsto - \sum_{z \in Z_h} \int_{\partial b_z} \frac{\partial v}{\partial n_{b_z}} w(z) \, ds$ ,
- $||| \cdot ||| := \sqrt{|| \cdot ||_{0,\Omega}^2 + \mu^2 || \cdot ||_{1,\Omega}^2}$ .

Ces notations ne sont pour la majeure partie d'entre elles que des rappels de celles introduites dans la sous-partie 3.

### 3.2 Schéma numérique

Nous intégrons (1.1.1) sur  $b_z$ , pour  $z \in Z_h$ , pour obtenir, en utilisant la formule de Green

$$-\mu^2 \int_{\partial b_z} \nabla u \cdot n_{b_z} ds + \int_{b_z} u dx = \int_{b_z} f dx . \quad (3.2.1)$$

En tenant compte des conditions de bord de (1.1.1), la méthode d'Éléments-Volumes Finis conforme se formule comme suit :

Trouver  $u_{BC} \in X_h^0$  vérifiant :

$$-\mu^2 \int_{\partial b_z} \nabla u_{BC} \cdot n_{b_z} ds + \int_{b_z} \bar{u}_{BC} dx = \int_{b_z} f dx , \forall z \in Z_h^{in} . \quad (3.2.2)$$

*Remarque 3.2.1.* Il aurait semblé plus "naturel" de discrétiser le terme de réaction par  $\int_{b_z} u_{BC} dx$ , mais ceci aurait conduit à un système de matrice non symétrique (voir le paragraphe 4 de [8] et le lemme 3.2.1). Signalons à ce sujet que, pour la matrice du système considéré, l'ajout d'un terme de réaction n'induit, par rapport au cas de diffusion pure, que l'ajout de termes sur la diagonale (ce qui n'est pas le cas dans les méthodes d'Éléments Finis).

Nous commençons par la proposition suivante :

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $T_h$  le maillage primal de  $\Omega$  et  $B_h$  le maillage dual de  $\Omega$  associé à  $T_h$  (comme nous ne considérons que le cas où  $z_K$  est le barycentre de  $K$ ,  $\forall K \in T_h$ , le maillage dual de  $T_h$  est unique, contrairement au chapitre 3). Le système linéaire (3.2.2) admet alors une unique solution  $u_{BC} \in X_h^0$ .*

Preuve:

Comme nous sommes en dimension finie, il suffit d'établir l'injectivité du système linéaire (3.2.2). Supposons donc que  $f \equiv 0$  sur  $\Omega$ .

Nous multiplions (3.2.2) par  $\bar{u}_{BC}|_{b_z}$  et sommons sur  $z \in Z_h^{in}$ , d'où

$$-\mu^2 \sum_{z \in Z_h^{in}} \int_{\partial b_z} \frac{\partial u_{BC}}{\partial n_{b_z}} \bar{u}_{BC} ds + \int_{b_z} \bar{u}_{BC}^2 dx = 0$$

$\Downarrow$

$$\mu^2 |u_{BC}|_{1,\Omega}^2 + \|\bar{u}_{BC}\|_{0,\Omega}^2 = 0 ,$$

grâce à la proposition 3.2.1. Nous en déduisons alors que  $u_{BC} = 0$  sur  $\Omega$ .

■

### 3.3 Majoration d'erreur

Nous établissons tout d'abord quelques résultats préliminaires. Pour toute la suite du paragraphe, nous convenons que  $T_h$  vérifie l'hypothèse (H).

**Lemme 3.3.1.** *Soit  $u \in H^3(\Omega)$  vérifiant les hypothèses (1.3.1)-(1.3.3) et  $I_L u$  son interpolé de Lagrange. Nous avons alors :*

$$|||u - I_L u||| \lesssim h (\mu^{1/2} |\ln(\mu)| + h) .$$

Preuve: voir le théorème 2.8 de [3] ■

**Lemme 3.3.2.** *Soit  $u \in H^3(\Omega)$  vérifiant les hypothèses (1.3.1)-(1.3.3) et  $I_L u$  son interpolé de Lagrange. Nous avons alors :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u - \bar{I}_L u\|_{0,\Omega_1} \lesssim h , \\ \|u - \bar{I}_L u\|_{0,\Omega_2} \lesssim \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h , \\ \|u - \bar{I}_L u\|_{0,\Omega_3} \lesssim \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h . \end{array} \right.$$

Preuve: Se déduit par passage au triangle de référence. ■

**Lemme 3.3.3.** *Soit  $v_h \in X_h^0$ , nous avons alors*

$$\|v_h\|_{0,K} \sim \|\bar{v}_h\|_{0,K} , \forall K \in T_h .$$

Preuve:

Nous utilisons un changement de variable vers le triangle de référence  $\hat{K}$ . Nous devons donc à présent prouver que

$$\|\hat{v}_h\|_{0,\hat{K}} \sim \|\tilde{\bar{v}}_h\|_{0,\hat{K}} , \forall \hat{v}_h \in \mathbb{P}^1(\hat{K}) .$$

Or, l'espace des fonctions  $\mathbb{P}^1$  sur le triangle de référence  $\hat{K}$  est un espace de dimension finie et, sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, ce qui nous permet de conclure à l'énoncé du lemme. ■

**Théorème 3.3.4.** *Soit  $u \in H^3(\Omega)$  la solution de (1.1.1). Introduisons en outre  $T_h$  et  $B_h$ , les maillages primal et dual de  $\Omega$ , vérifiant l'hypothèse (H) et  $u_{BC}$  la solution de (3.2.2). Nous avons alors :*

$$|||u - u_{BC}||| \lesssim h . \tag{3.3.1}$$

Preuve:

Notons tout d'abord que

$$|||u - u_{BC}||| \leq |||u - I_L u||| + |||I_L u - u_{BC}|||, \quad (3.3.2)$$

où  $I_L u$  désigne l'interpolé de Lagrange de  $u$ . D'un autre côté, nous avons, pour tout  $v_h \in X_h^0$ ,

$$\begin{aligned} |||u_{BC} - v_h|||^2 &= \|u_{BC} - v_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu^2 |u_{BC} - v_h|_{1,\Omega}^2 \\ &\stackrel{\text{lemme 3.3.3}}{\lesssim} \|\bar{u}_{BC} - \bar{v}_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu^2 |u_{BC} - v_h|_{1,\Omega}^2 \\ &= (\bar{u}_{BC} - \bar{v}_h, \bar{u}_{BC} - \bar{v}_h)_\Omega + \mu^2 a(u_{BC} - v_h, u_{BC} - v_h) \\ &= (\bar{u}_{BC}, \bar{u}_{BC} - \bar{v}_h)_\Omega + \mu^2 a(u_{BC}, u_{BC} - v_h) \\ &\quad - (u, u_{BC} - v_h)_\Omega - \mu^2 a(u, u_{BC} - v_h) \\ &\quad + (u - \bar{v}_h, \bar{u}_{BC} - \bar{v}_h)_\Omega + \mu^2 a(u - v_h, u_{BC} - v_h) \\ &\quad + (u, u_{BC} - v_h)_\Omega - (u, \bar{u}_{BC} - \bar{v}_h)_\Omega \\ &= (f, \bar{u}_{BC} - \bar{v}_h)_\Omega \\ &\stackrel{\text{prop. 3.2.1}}{\text{et (3.2.2)}} \\ &\quad - (u, u_{BC} - v_h)_\Omega - \mu^2 a(u, u_{BC} - v_h) \\ &\quad + (u - \bar{v}_h, \bar{u}_{BC} - \bar{v}_h)_\Omega + \mu^2 a(u - v_h, u_{BC} - v_h) \\ &\quad + (u, u_{BC} - v_h)_\Omega - (u, \bar{u}_{BC} - \bar{v}_h)_\Omega \\ &\quad \Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |||u_{BC} - v_h|||^2 &= (f, u_{BC} - v_h)_\Omega \\ &\quad - (u, u_{BC} - v_h)_\Omega - \mu^2 a(u, u_{BC} - v_h) \\ &\quad + (u - \bar{v}_h, \bar{u}_{BC} - \bar{v}_h)_\Omega + \mu^2 a(u - v_h, u_{BC} - v_h) \\ &\quad + (u - f, u_{BC} - v_h)_\Omega - (u - f, \bar{u}_{BC} - \bar{v}_h)_\Omega, \quad \forall v_h \in X_h^0. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$



À présent, nous remarquons que, pour toute fonction  $w_h$  de  $X_h^0$ , nous avons :

$$\begin{aligned} (f, w_h)_\Omega &= (u, w_h)_\Omega - \mu^2 a(u, w_h) \\ &= (f, w_h)_\Omega - (u, w_h)_\Omega - \mu^2 (\nabla u, \nabla w_h)_\Omega \\ &= (f, w_h)_\Omega - (u, w_h)_\Omega + \mu^2 (\Delta u, w_h)_\Omega, \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green et le fait que  $w_h|_{\partial\Omega} \equiv 0$ . De ce fait, nous appliquons (1.1.1) pour obtenir :

$$(f, w_h)_\Omega - (u, w_h)_\Omega - \mu^2 a(u, w_h) = 0, \forall w_h \in X_h^0. \quad (3.3.4)$$

Cette identité utilisée dans l'égalité (3.3.3) dans laquelle nous posons  $v_h := I_L u$ , nous fournit que

$$\begin{aligned} |||u_{BC} - I_L u|||^2 &\leq |(u - \bar{I}_L u, \bar{u}_{BC} - \bar{I}_L u)_\Omega| + \mu^2 a(u - I_L u, u_{BC} - I_L u) \\ &\quad + |(u - f, u_{BC} - I_L u)_\Omega - (u - f, \bar{u}_{BC} - \bar{I}_L u)_\Omega| \\ &\quad \Downarrow \\ |||u_{BC} - I_L u||| &\leq \frac{|(u - \bar{I}_L u, \bar{u}_{BC} - \bar{I}_L u)_\Omega| + \mu^2 a(u - I_L u, u_{BC} - I_L u)}{|||u_{BC} - I_L u|||} \\ &\quad + \mu^2 \frac{|(\Delta u, u_{BC} - I_L u)_\Omega - (\Delta u, \bar{u}_{BC} - \bar{I}_L u)_\Omega|}{|||u_{BC} - I_L u|||}, \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

en utilisant (1.1.1). Nous allons majorer les deux membres du terme de droite de (3.3.5).

a. Majorons le premier terme du membre de droite de (3.3.5) :

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\begin{aligned} &|(u - \bar{u}_{BC}, \bar{I}_L u - \bar{I}_L u)_\Omega| + \mu^2 a(u - I_L u, u_{BC} - I_L u) \\ &\leq \|u - \bar{I}_L u\|_{0,\Omega} \|\bar{u}_{BC} - \bar{I}_L u\|_{0,\Omega} + \mu^2 |u - I_L u|_{1,\Omega} |u_{BC} - I_L u|_{1,\Omega} \\ &\lesssim h \|u_{BC} - I_L u\|_{0,\Omega} + \mu^{5/2} |\ln(\mu)| |u_{BC} - I_L u|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

grâce aux lemmes (3.3.1), (3.3.2) et (3.3.3). Nous obtenons donc

$$\frac{|(u - \bar{u}_{BC}, \bar{u}_{BC} - \bar{I}_L u)_\Omega| + \mu^2 a(u - u_{BC}, u_{BC} - I_L u)}{|||u_{BC} - I_L u|||} \lesssim h \quad (3.3.6)$$

b. Majorons le second terme du membre de droite de (3.3.5) :

Pour  $K \in T_h$  et  $v \in L^2(K)$ , nous désignons par  $\mathcal{M}_K^0(v)$  la  $L^2(K)$ -projection de  $v$ . Nous procédons comme suit :

$$\begin{aligned}
|(\Delta u, u_{BC} - I_L u)_\Omega - (\Delta u, \bar{u}_{BC} - \bar{I}_L u)_\Omega| &= \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{K \in T_h \\ K \subset \Omega_i}} (\Delta u - \mathcal{M}_K^0(\Delta u), u_{BC} - I_L u)_K \\
&\quad - (\Delta u - \mathcal{M}_K^0(\Delta u), \bar{u}_{BC} - \bar{I}_L u)_K \\
&\leq \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{K \in T_h \\ K \subset \Omega_i}} |(\Delta u - \mathcal{M}_K^0(\Delta u), u_{BC} - I_L u)_K| \\
&\quad + |(\Delta u - \mathcal{M}_K^0(\Delta u), \bar{u}_{BC} - \bar{I}_L u)_K| \\
&\stackrel{\text{Bramble-Hilbert}}{\lesssim} (1 + \frac{|\ln(\mu)|}{\mu^{3/2}}) h (\|u_{BC} - I_L u\|_{0,\Omega} + \|\bar{u}_{BC} - \bar{I}_L u\|_{0,\Omega}) , \\
&\stackrel{\text{lemme 3.3.3}}{\lesssim} (1 + \frac{|\ln(\mu)|}{\mu^{3/2}}) h \|u_{BC} - I_L u\|_{0,\Omega} ,
\end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\mu^2 \frac{|(\Delta u, u_{BC} - I_L u)_\Omega - (\Delta u, \bar{u}_{BC} - \bar{I}_L u)_\Omega|}{\|u_{BC} - I_L u\|} \lesssim \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h . \quad (3.3.7)$$

Les deux estimées (3.3.6) et (3.3.7) replacées dans (3.3.5), ainsi que (3.3.2) et le lemme 3.3.1 fournissent alors le résultat du théorème. ■

### 3.4 Essais numériques

Comme précédemment, nous nous plaçons sur  $\Omega := ]0,1[^2$  et considérons la fonction donnée en introduction  $u_\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$u_\mu(x, y) := e^{-\frac{x}{\mu}} + e^{-\frac{y}{\mu}} - 1 ,$$

où  $\mu \in ]0,1[$ . Rappelons que  $u_\mu$  est alors la solution du problème elliptique suivant

$$\begin{cases} -\mu^2 \Delta u_\mu + u_\mu = -1 \text{ dans } \Omega , \\ u_\mu = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4.1)$$

où  $g$  est la restriction de  $u_\mu$  sur  $\partial\Omega$ .

Nous comparons alors, pour différentes valeurs de  $\mu$ , la convergence obtenue par l'approximation  $u_{BC}$  de  $u$  pratiquée lorsque  $T_h$  est un maillage isotrope ( $b_\mu = 0.5$ ) et lorsque  $T_h$  est un maillage anisotrope ( $b_\mu = |\mu \ln(\mu)|$ ) (voir figure 3.3).

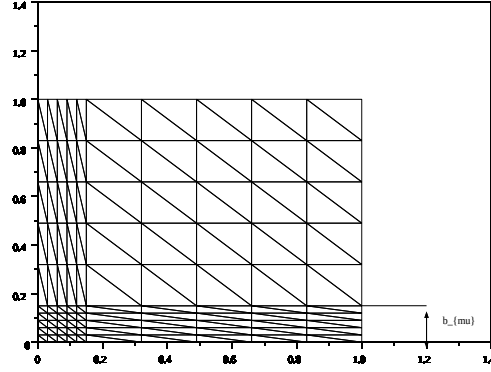


FIG. 3.3 – Illustration du maillage utilisé où  $b_\mu = |\mu \ln(\mu)|$  pour  $\mu = 10^{-1}$  et  $n = \frac{1}{h} := 5$

La table 3.1 contient, pour différentes valeurs de  $\mu$  et de  $b_\mu$ , l'erreur  $\|u - u_{BC}\|$  introduite précédemment (précisons que les maillages où  $b_\mu \sim |\mu \ln(h)|$  sont connus sous le nom de maillage de Shishkin et sont utilisés dans le cadre de méthodes de Différences Finies [75]). En outre, nous établissons une comparaison numérique entre la méthode d'Éléments-Volumes Finis et la méthode d'Éléments Finis : La table 3.2 fournit donc le nombre d'itérations nécessaires à la convergence du système issu de (3.2.2) et à son équivalent pour la méthode d'Éléments Finis ([2, 4]) pour une valeur de  $n$  fixé ( $n = 16$ ) et différentes valeurs de  $\mu$  (nous précisons que les systèmes ont été résolus à l'aide de l'algorithme du Gradient Conjugué Préconditionné).

| n       | $\mu = 10^{-1}$ |                  |                | $\mu = 10^{-3}$ |                  |                | $\mu = 10^{-5}$ |                  |                |
|---------|-----------------|------------------|----------------|-----------------|------------------|----------------|-----------------|------------------|----------------|
| $b_\mu$ | 0.5             | $ \mu \ln(\mu) $ | $ \mu \ln(h) $ | 0.5             | $ \mu \ln(\mu) $ | $ \mu \ln(h) $ | 0.5             | $ \mu \ln(\mu) $ | $ \mu \ln(h) $ |
| 4       | 8.09E-02        | 3.44E-02         | 4.53E-02       | 2.60E-01        | 1.14E-02         | 8.13E-02       | 2.60E-01        | 2.07E-03         | 8.15E-02       |
| 8       | 3.56E-02        | 1.63E-02         | 1.57E-02       | 1.80E-01        | 5.08E-03         | 2.85E-02       | 1.80E-01        | 9.31E-04         | 2.86E-02       |
| 16      | 1.68E-02        | 7.94E-03         | 9.21E-03       | 1.20E-01        | 2.36E-03         | 9.99E-03       | 1.30E-01        | 4.13E-04         | 1.01E-02       |
| 32      | 8.21E-03        | 3.93E-03         | 5.67E-03       | 8.43E-02        | 1.15E-03         | 3.51E-03       | 9.01E-02        | 1.94E-04         | 3.56E-03       |
| 64      | 4.07E-03        | 1.96E-03         | 3.38E-03       | 5.26E-02        | 5.69E-04         | 1.25E-03       | 6.35E-02        | 9.46E-05         | 1.26E-03       |

TAB. 3.1 – Erreur en fonction de  $n$  pour différentes valeurs de  $b_\mu$

|                        | $\mu = 1$ | $\mu = 10^{-1}$ | $\mu = 10^{-3}$ | $\mu = 10^{-5}$ |
|------------------------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Éléments-Volumes Finis | 62        | 73              | 203             | 177             |
| Éléments Finis         | 68        | 73              | 504             | 857             |

TAB. 3.2 – Nombre d'itérations nécessaires à la convergence du système pour les méthodes d'Éléments-Volumes Finis et d'Éléments Finis pour  $n = 16$

Nous tirons plusieurs conclusions de ces essais numériques :

1. Les résultats de la table 3.1 illustrent pleinement l'utilité des maillages anisotropes dans le cadre de la discrétisation de problèmes de réaction-diffusion perturbés afin d'obtenir un ordre de convergence satisfaisant.
2. Dans la table 3.1, si nous fixons  $n$  et comparons pour différentes valeurs de  $\mu$  l'erreur obtenue, nous obtenons que celle-ci dépend aussi de  $\mu$ , l'estimée du théorème 2.3.3 ne serait donc pas optimale.
3. Les maillages de Shishkin semble peu appropriés aux méthodes d'Éléments-Volumes Finis comme le montre les résultats de la table 3.1 . En effet, plus  $\mu$  est petit, moins les résultats apportés par ce type de maillage sont satisfaisants.
4. La table 3.2 illustre le fait que le système issu de la discrétisation de (1.1.1) par une méthode d'Éléments-Volumes Finis est plus rapide à résoudre que son équivalent par la méthode d'Éléments Finis. Ceci s'explique par le fait que, pour les méthodes d'Éléments-Volumes Finis, l'ajout d'un terme de réaction "alourdit" le poids de la diagonale ce qui n'est pas le cas pour les méthodes d'Éléments Finis.

*Remarque 3.4.1.* Il est possible de généraliser la méthode étudiée à un domaine  $\Omega$  polygonal convexe (non nécessairement rectangulaire) de  $\mathbb{R}^2$  et au cas où  $T_3$  n'est plus exclusivement composée de triangles rectangles. Cependant, ceci requiert dans un premier temps l'emploi d'hypothèses supplémentaires (dites "d'angle maximal" et de "système de coordonnées") et l'obtention d'estimées similaires à (1.3.1), (1.3.2) et (1.3.3) de l'introduction. Pour plus de détails sur ce point, le lecteur pourra se référer à [2].

*Remarque 3.4.2.* Signalons que des essais numériques ont été menés pour résoudre le problème (1.1.1) avec des éléments  $\mathbb{Q}^1$ -conformes sur des maillages anisotropes rectangulaires. Les résultats fournis sont alors identiques à ceux pour les éléments triangulaires.

## Chapitre 4

# Méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur des éléments non conformes pour les problèmes de réaction-diffusion sur des maillages anisotropes : cas des triangles

Le but de ce chapitre est de discrétiser (1.1.1) par la méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur des éléments non conformes (voir [19]) sur des maillages anisotropes adaptés à ce genre de problème : Les maillages anisotropes. Nous verrons dans ce chapitre que, sur des maillages triangulaires, la méthode d'Éléments-Volumes Finis, et plus généralement d'Éléments Finis, basée sur des éléments non conformes ne se prête pas à l'utilisation de maillages anisotropes. En effet, la discontinuité de ces éléments non conformes empêchera la bonne convergence de la méthode.

### 4.1 Notations-Définitions

Nous devons dans un premier temps construire deux maillages sur  $\Omega$  :

- Un maillage primal  $T_h$  qui servira à définir l'approximation de la solution  $u$  de (1.1.1) ,
- Un maillage dual  $B_h$  qui permettra la discrétisation de (1.1.1) .

Nous définissons dans un premier temps une triangulation régulière anisotrope  $T_h$  de  $\Omega$  de la même manière que dans la section 3 (voir définition 2.2). Nous construisons dans un second temps le maillage dual associé à

$T_h$ . Dans ce but, rappelons que, pour  $K \in T_h$ , nous définissons  $Z_h(K)$ , resp.  $E_h(K)$ , comme l'ensemble des sommets, resp. des arêtes, de  $K$ . Nous posons alors  $Z_h := \bigcup_{K \in T_h} Z_h(K)$  et  $E_h := \bigcup_{K \in T_h} E_h(K)$ . Distinguons en outre  $Z_h^{in}$ , resp.  $E_h^{in}$ , ensemble des sommets, resp. arêtes, de  $T_h$  inclus dans  $\Omega$  et  $Z_h^{ext}$ , resp.  $E_h^{ext}$ , ensemble des sommets, resp. arêtes, situés sur  $\partial\Omega$ . En outre, pour  $e \in E_h$ , nous appelons  $m_e$  le milieu de  $e$ .

Posons  $z_K$  le barycentre de  $K \in T_h$ . Pour  $K \in T_h$  et  $e \in E_h(K)$ , nous posons

$$b_{e,K} := \text{Conv}(\{z_K\} \cup e) .$$

Définissons alors le maillage dual par

$$B_h := \{b_e : e \in E_h\} ,$$

$$\text{où, pour } e \in E_h, b_e := \begin{cases} b_{e,K} \cup b_{e,L}, & \text{si ils existent } K, L \in T_h \text{ tels que } e = \bar{K} \cap \bar{L} , \\ b_{e,K}, & \text{si il existe } K \in T_h \text{ tel que } e = \partial\Omega \cap \bar{K} . \end{cases}$$

Introduisons enfin, pour  $e \in E_h$ ,  $\phi_e : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{P}_1(T_h)$  la fonction de base des éléments non conformes valant 1 en  $m_e$  et 0 en  $m_l$ ,  $l \in E_h \setminus \{e\}$ . Posons, de plus, pour  $e \in E_h$ ,  $\bar{\phi}_e$  la fonction indicatrice de  $b_e$ .

Convenons en outre que

- $S_h :=$  l'ensemble des fonctions  $\mathcal{P}^1$ -non conformes sur le maillage  $T_h$ ,
- $S_h^0 :=$  l'ensemble des fonctions  $\mathcal{P}^1$ -non conformes sur le maillage  $T_h$  valant 0 au milieu des arêtes situées sur le bord du domaine  $\Omega$ ,
- $\bar{S}_h :=$  l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur le maillage dual  $B_h$ ,
- $\bar{S}_h^0 :=$  l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur le maillage dual  $B_h$  et valant 0 au milieu des arêtes situées sur le bord du domaine  $\Omega$ ,
- pour  $e \in E_h$ ,  $n_{b_e}$  désigne la normale unitaire sortante à  $b_e$  sur  $\partial b_e$ ,
- $a_h : (H^1(\Omega) + S_h) \times (H^1(\Omega) + S_h) \longrightarrow \mathbb{R}$   

$$(v, w) \longmapsto \sum_{K \in T_h} (\nabla v, \nabla w)_K ,$$
- $\bar{a}_h : (H^2(\Omega) + S_h) \times (H^2(\Omega) + S_h) \longrightarrow \mathbb{R}$   

$$(v, w) \longmapsto - \sum_{e \in E_h} w(m_e) \int_{\partial b_e} \frac{\partial v}{\partial n_{b_e}} ds ,$$
- $||| \cdot ||| := \sqrt{(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}^2 + \mu^2 a_h(\cdot, \cdot)} .$

En outre, pour  $v = \sum_{e \in E_h} v_e \phi_e$ , nous posons  $\bar{v} := \sum_{e \in E_h} v_e \bar{\phi}_e$  et  $|v|_{1,h} := (\sum_{K \in T_h} |v|_{1,K})^{\frac{1}{2}}$ .

## 4.2 Schéma numérique

Nous intégrons (1.1.1) sur  $b_e$  pour  $e \in E_h$  et utilisons la formule de la divergence. Nous obtenons

$$-\mu^2 \int_{\partial b_e} \nabla u \cdot n_{b_e} ds + \int_{b_e} u dx = \int_{b_e} f dx, \forall e \in E_h, \quad (4.2.1)$$

où  $n_{b_e}$  est la normale unitaire sortante à  $b_e$ .

La méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme consiste donc à trouver  $u_{BN} \in S_h^0$ , vérifiant

$$-\mu^2 \int_{\partial b_e} \nabla u_{BN} \cdot n_{b_e} ds + \int_{b_e} \bar{u}_{BN} dx = \int_{b_e} f dx, \forall e \in E_h^{in}. \quad (4.2.2)$$

*Remarque 4.2.1.* Nous avons tenu compte des conditions de bord de (1.1.1) en imposant  $u_{BN} \in S_h^0$ , c'est à dire  $u_{BN}(m_e) = 0, \forall e \in E_h^{ext}$ .

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de (4.2.2), nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 4.2.1.** *Soient  $v_h, w_h \in S_h$ , nous avons alors*

$$\int_K \bar{v}_h \bar{w}_h dx = \int_K v_h w_h dx, \forall K \in T_h.$$

Preuve: Se vérifie par un calcul direct. ■

*Remarque 4.2.2.* Considérons la discrétisation de (1.1.1) à l'aide de la méthode des Éléments Finis non conformes (voir [29, 40]). Nous obtenons le système linéaire

$$A.U = F.$$

Si nous appelons maintenant  $\bar{A}$  la matrice issue du système (4.2.2), nous démontrons alors, grâce aux lemmes 4.2.1 et 4.2.1, que  $A = \bar{A}$ .

**Proposition 4.2.2.** *Soit  $T_h$ , resp.  $B_h$ , le maillage primal, resp. dual, de  $\Omega$ . Le système (4.2.2) admet alors une unique solution  $u_{BN} \in S_h^0$ .*

Preuve:

Posons dans (4.2.2)  $f \equiv 0$  et montrons que  $u_{BN} = 0$ .

Nous multiplions (4.2.2) par  $\bar{u}_{BN}|_{b_e}$ ,  $e \in E_h^{in}$ , et sommons sur  $e \in E_h^{in}$ . Nous obtenons ainsi

$$-\mu^2 \sum_{e \in E_h^{in}} \int_{\partial b_e} \nabla u_{BN} \cdot n_{b_e} \bar{u}_{BN} ds + \sum_{e \in E_h^{in}} \int_{b_e} |\bar{u}_{BN}|^2 dx = 0$$

$\Downarrow$

$$\mu^2 |u_{BN}|_{1,h}^2 + \|u_{BN}\|_{0,\Omega}^2 = 0,$$

par les lemmes 4.2.1 et 4.2.1. Ceci prouve bien que  $u_{BN} = 0$ . ■

### 4.3 Majoration d'erreur

Nous établissons tout d'abord quelques lemmes utiles pour la suite de notre travail.

**Lemme 4.3.1.** *Soit  $u \in H^3(\Omega)$  vérifiant les hypothèses (1.3.1)-(1.3.3). Nous nous plaçons sur  $T_h$ , un maillage régulier anisotrope de  $\Omega$  de pas  $h > 0$ , et considérons  $I_{CR}u$ , l'interpolé de Crouzeix-Raviart de  $u$  sur  $T_h$ . Nous avons alors*

$$|||u - I_{CR}u||| \lesssim \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h .$$

Preuve: Par les théorèmes 3.1 et 3.2 de [2] (où l'auteur travaille dans le contexte plus général des opérateurs de Scott et Zhang [93]), nous avons :

$$|u - I_{CR}u|_{m,K} \lesssim \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha| = 2-m}} h^\alpha |D^\alpha u|_{m,K} , \forall m = 0,1, \forall K \in T_h .$$

Nous utilisons alors les estimées (1.3.1)-(1.3.3). ■

**Lemme 4.3.2.** *Soit  $u \in H^3(\Omega)$  vérifiant les hypothèses (1.3.1)-(1.3.3). Nous nous plaçons sur  $T_h$ , un maillage régulier anisotrope de  $\Omega$  de pas  $h > 0$ , et considérons  $I_{CR}u$ , l'interpolé de Crouzeix-Raviart de  $u$  sur  $T_h$ . Nous avons alors*

$$\begin{cases} \|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,\Omega_1} \lesssim h , \\ \|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,\Omega_2} \lesssim \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h , \\ \|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,\Omega_3} \lesssim \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h . \end{cases}$$

Preuve:

Notons tout d'abord que :

$$\|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,\Omega_i} = \left( \sum_{\substack{K \in T_h \\ K \subset \Omega_i}} \|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} , \forall i \in \{1,2,3\} .$$

Nous allons donc majorer  $\|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,K}$  pour  $K \in T_h$  tel que  $K \subset \Omega_i$ ,  $i \in \{1,2,3\}$ .



$$\begin{aligned}
\|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,K}^2 &= \int_K |u - \bar{I}_{CR}u|^2 dx \\
&= |K| \int_{\hat{K}} |\hat{u} - \bar{I}_{CR}\hat{u}|^2 d\hat{x} \\
&\leq |K| \int_{\hat{K}} |\hat{D}^{(1,0)}\hat{u}|^2 + |\hat{D}^{(0,1)}\hat{u}|^2 d\hat{x} \\
&\leq \int_K \left| \frac{dx}{d\hat{x}} \right|^2 |D^{(1,0)}u|^2 + \left| \frac{dy}{d\hat{y}} \right|^2 |D^{(0,1)}u|^2 dx \\
&\leq \int_K h_1^2 |D^{(1,0)}u|^2 + h_2^2 |D^{(0,1)}u|^2 dx .
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,\Omega_1} \lesssim h \|D^{(1,0)}u\|_{0,\Omega_1} + h \|D^{(0,1)}u\|_{0,\Omega_1} , \\ \|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,\Omega_2} \lesssim b_\mu h \|D^{(1,0)}u\|_{0,\Omega_2} + b_\mu h \|D^{(0,1)}u\|_{0,\Omega_2} , \\ \|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,\Omega_3} \lesssim h \|D^{(1,0)}u\|_{0,\Omega_3} + b_\mu h \|D^{(0,1)}u\|_{0,\Omega_3} \end{array} \right.$$

$\Downarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,\Omega_1} \lesssim h |u|_{1,\Omega_1} , \\ \|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,\Omega_2} \lesssim \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h , \\ \|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,\Omega_3} \lesssim \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h , \end{array} \right.$$

en utilisant les estimées (1.3.1)-(1.3.3).

■

**Lemme 4.3.3.** *Considérons  $T_h$  un maillage régulier anisotrope de  $\Omega$  de pas  $h > 0$  et  $v \in S_h^0$ . Nous avons alors, pour  $K \in T_h$*

– si  $K \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ , alors :

$$|v|_{1,K} \lesssim |\nabla v| \lesssim |v|_{1,K} ,$$

– si  $K \subset \Omega_3$ , alors :

$$|\mu \ln(\mu)|^{1/2} |v|_{1,K} \lesssim |\nabla v| \lesssim \frac{1}{|\mu \ln(\mu)|^{1/2}} |v|_{1,K} .$$

Preuve

Soit  $v \in S_h^0$ . Dans le cas où  $K \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ , la triangulation  $T_h$  est régulière, le résultat correspondant est par conséquent fourni par le lemme 3.5 de [19].

Dans le cas où  $K \subset \Omega_3$ , nous avons alors, par changement de variable (voir l'estimée (8) de [3]),

$$\begin{aligned} |v|_{1,K}^2 &\lesssim |K| \left( \frac{1}{h_1^2} \|\hat{D}^{(1,0)} \hat{v}\|_{0,\hat{K}}^2 + \frac{1}{h_2^2} \|\hat{D}^{(0,1)} \hat{v}\|_{0,\hat{K}}^2 \right) \\ &\lesssim \frac{h_1}{h_2} |\hat{v}|_{1,\hat{K}}^2, \end{aligned}$$

car  $h_2 = |\mu \ln(\mu)|h \leq h = h_1$  et  $|K| = \frac{h_1 h_2}{2}$ . D'où, en utilisant le lemme 3.5 de [19]

$$\begin{aligned} |v|_{1,K}^2 &\lesssim \frac{1}{|\mu \ln(\mu)|} \sum_{\hat{e}_1, \hat{e}_2 \in E_h(\hat{K})} |\hat{v}(m_{\hat{e}_1}) - \hat{v}(m_{\hat{e}_2})|^2 \\ &\lesssim \frac{1}{|\mu \ln(\mu)|} \sum_{e_1, e_2 \in E_h(K)} |v(m_{e_1}) - v(m_{e_2})|^2, \end{aligned}$$

par passage du triangle de référence  $\hat{K}$  au triangle  $K$ .

La première partie de l'estimée est donc démontrée. La démonstration de la seconde partie étant identique, nous nous permettons de ne pas en expliciter la preuve. ■

Énonçons à présent le théorème de majoration d'erreur suivant

**Théorème 4.3.4.** *Considérons  $T_h$  un maillage régulier anisotrope de  $\Omega$  de pas  $h > 0$  et  $B_h$  son maillage dual associé. Soit  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , resp.  $u_{BN} \in S_h^0$ , la solution de (1.1.1), resp. (4.2.2). Nous supposons que  $u$  vérifie les points (1.3.1)-(1.3.3) de l'introduction et que  $f \in C^\infty(\Omega)$ . Nous avons alors*

$$|||u - u_{BN}||| \lesssim \frac{h}{\mu^{1/2} |\ln(\mu)|}.$$

*Remarque 4.3.1.* Nous prenons intentionnellement pour  $u$  et  $f$  des régularités "assez fortes". En effet, nous voulons montrer que le mauvais comportement de la méthode n'est pas dû à un manque de régularité des données ou de la solution de (1.1.1) mais bien au fait que nous travaillons sur des maillages anisotropes.

Preuve:

La preuve commence de la même manière que celle du théorème 3.3.4, à savoir que :

$$|||u - u_{BN}||| \leq |||u - I_{CR}u||| + |||I_{CR}u - u_{BN}|||, \quad (4.3.1)$$

de telle sorte que estimer l'erreur  $|||u - u_{BN}|||$  revient à estimer  $|||I_{CR}u - u_{BN}|||$ . Nous raisonnons alors toujours de manière similaire à ce qui a été fait dans la preuve du théorème 3.3.4 et obtenons une inégalité analogue à (3.3.3), plus précisément :

$$\begin{aligned}
|||u_{BN} - v_h|||^2 &= (f, u_{BN} - v_h)_\Omega \\
&\quad - (u, u_{BN} - v_h)_\Omega - \mu^2 a_h(u, u_{BC} - v_h) \\
&\quad + (u - \bar{v}_h, \bar{u}_{BN} - \bar{v}_h)_\Omega + \mu^2 a_h(u - v_h, u_{BN} - v_h) \\
&\quad + (u - f, u_{BN} - v_h)_\Omega - (u - f, \bar{u}_{BN} - \bar{v}_h)_\Omega, \forall v_h \in S_h^0.
\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned}
|||u_{BN} - I_{CR}u||| &\leq \sup_{v_h \in S_h^0} \frac{|(f, v_h)_\Omega - (u, v_h)_\Omega - \mu^2 a_h(u, v_h)|}{|||v_h|||}, \\
&\quad + \frac{\|u - \bar{I}_{CR}u\|_{0,\Omega} \|u_{BN} - I_{CR}u\|_{0,\Omega} + \mu^2 |u - I_{CR}u|_{1,h} |u_{BN} - I_{CR}u|_{1,h}}{|||u_{BN} - I_{CR}u|||} \\
&\quad + \mu^2 \frac{|(\Delta u, u_{BN} - I_{CR}u)_\Omega - (\Delta u, \bar{u}_{BN} - \bar{I}_{CR}u)_\Omega|}{|||u_{BN} - I_{CR}u|||},
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

en ayant posé  $v_h := I_{CR}u$ , l'interpolé de Crouzeix-Raviart de  $u$ . L'avant dernier terme du membre de droite de (4.3.2) est majoré en utilisant le lemme 4.3.2 tandis que le dernier l'est via des arguments similaires à ce qui a été fait dans le chapitre précédent ce qui nous fait aboutir à :

$$\begin{aligned}
|||u_{BN} - I_{CR}u||| &\lesssim h \\
&\quad + \sup_{v_h \in S_h^0} \frac{|(f, v_h)_\Omega - (u, v_h)_\Omega - \mu^2 a_h(u, v_h)|}{|||v_h|||}.
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Le second terme du membre de droite de (4.3.3) (qui était nul lorsque nous considérons les fonctions  $IP^1$ -conformes et qui traduit la discontinuité de l'élément utilisé va alors poser problème et entraîner un mauvais comportement de la méthode.

Nous avons donc, pour toute fonction  $v_h$  de  $S_h^0$ ,

$$\begin{aligned}
&(f, v_h)_\Omega - (u, v_h)_\Omega - \mu^2 a_h(u, v_h) \\
&= (f, v_h)_\Omega - (u, v_h)_\Omega - \mu^2 \sum_{K \in T_h} (\nabla u, \nabla v_h)_K
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (f, v_h)_\Omega - (u, v_h)_\Omega + \mu^2 \sum_{K \in T_h} (\Delta u, v_h)_K - \mu^2 \sum_{K \in T_h} (\nabla u \cdot n_K, v_h)_{\partial K} \\
&\stackrel{(1.1.1)}{=} \mu^2 \sum_{K \in T_h} (\nabla u \cdot n_K, v_h)_{\partial K} \\
&= \mu^2 \sum_{e \in E_h} \llbracket \nabla u \cdot n_e \cdot v_h \rrbracket_e,
\end{aligned}$$

où, pour  $e \in E_h$  et  $w$  une fonction quelconque  $\llbracket w \rrbracket_e$  désigne l'intégrale sur  $e$  du saut de  $w$  à travers  $e$ . Pour  $e \in E_h$  et  $w$  une fonction définie sur  $e$ , nous introduisons, comme en section 4,  $\mathcal{M}_0^e(w)$ , la  $L^2(e)$ -projection de  $w$ . En utilisant un argument classique (voir section 4), nous obtenons alors que

$$\begin{aligned}
&(f, v_h)_\Omega - (u, v_h)_\Omega - \mu^2 a_h(u, v_h) \\
&= \mu^2 \sum_{e \in E_h^{in}} \llbracket (\nabla u \cdot n_e - \mathcal{M}_0^e(\nabla u \cdot n_e)) (v_h - \mathcal{M}_0^e(v_h)) \rrbracket_e, \forall v_h \in S_h^0.
\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned}
&|(f, v_h)_\Omega - (u, v_h)_\Omega - \mu^2 a_h(u, v_h)| \\
&\leq \mu^2 \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{\substack{e \in E_h \\ e \subset \Omega_i}} \|\nabla u \cdot n_e - \mathcal{M}_0^e(\nabla u \cdot n_e)\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{\substack{e \in E_h \\ e \subset \Omega_i}} \|v_h - \mathcal{M}_0^e(v_h)\|_{0,e}^2 \right)^{1/2}, \forall v_h \in S_h^0.
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

En utilisant le lemme 4.3.3, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \sum_{\substack{e \in E_h \\ e \subset \Omega_1}} \|v_h - \mathcal{M}_0^e(v_h)\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \lesssim \frac{h^{1/2}}{\mu} \|v_h\|, \\ \left( \sum_{\substack{e \in E_h \\ e \subset \Omega_2}} \|v_h - \mathcal{M}_0^e(v_h)\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \lesssim \frac{h^{1/2} |\ln(\mu)|^{1/2}}{\mu^{1/2}} \|v_h\|, \\ \left( \sum_{\substack{e \in E_h \\ e \subset \Omega_3}} \|v_h - \mathcal{M}_0^e(v_h)\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \lesssim \frac{h^{1/2}}{\mu^{3/2} |\ln(\mu)|} \|v_h\|. \end{array} \right. \tag{4.3.5}$$

De plus, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l}
\|\nabla u \cdot n_e - \mathcal{M}_0^e(\nabla u \cdot n_e)\|_{0,e}^2 \lesssim h |u|_{2,K}^2, \forall e \in E_h, e \subset \bar{\Omega}_1, \\
\|\nabla u \cdot n_e - \mathcal{M}_0^e(\nabla u \cdot n_e)\|_{0,e}^2 \lesssim b_\mu h |u|_{2,K}^2, \forall e \in E_h, e \subset \bar{\Omega}_2, \\
\|\nabla u \cdot n_e - \mathcal{M}_0^e(\nabla u \cdot n_e)\|_{0,e}^2 \lesssim h (b_\mu^2 \|D^{(1,1)}u\|_{0,K}^2 + \|D^{(2,0)}u\|_{0,K}^2), \forall e \in E_h, e \subset \bar{\Omega}_3 : e // (Oy), \\
\|\nabla u \cdot n_e - \mathcal{M}_0^e(\nabla u \cdot n_e)\|_{0,e}^2 \lesssim h \left( \frac{1}{b_\mu} \|D^{(1,1)}u\|_{0,K}^2 + b_\mu \|D^{(0,2)}u\|_{0,K}^2 \right), \forall e \in E_h, e \subset \bar{\Omega}_3 : e // (Ox), \\
\|\nabla u \cdot n_e - \mathcal{M}_0^e(\nabla u \cdot n_e)\|_{0,e}^2 \lesssim h \left( \frac{1}{b_\mu} \|D^{(1,1)}u\|_{0,K}^2 + \frac{1}{b_\mu} \|D^{(2,0)}u\|_{0,K}^2 + b_\mu \|D^{(0,2)}u\|_{0,K}^2 \right), \\
\forall e \in E_h, e \subset \bar{\Omega}_3 : e \text{ non parallèle à } (Ox) \text{ ou } (Oy).
\end{array} \right. \quad (4.3.6)$$

où  $K$  désigne un triangle tel que  $e \subset \bar{K}$ . En utilisant (1.3.1)-(1.3.3) et (4.3.6), nous avons alors que

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left( \sum_{\substack{e \in E_h \\ e \subset \Omega_1}} \|\nabla u \cdot n_e - \mathcal{M}_0^e(\nabla u \cdot n_e)\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \lesssim h^{1/2}, \\
\left( \sum_{\substack{e \in E_h \\ e \subset \Omega_2}} \|\nabla u \cdot n_e - \mathcal{M}_0^e(\nabla u \cdot n_e)\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \lesssim \frac{|\ln(\mu)|^{1/2} h^{1/2}}{\mu}, \\
\left( \sum_{\substack{e \in E_h \\ e \subset \Omega_3}} \|\nabla u \cdot n_e - \mathcal{M}_0^e(\nabla u \cdot n_e)\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \lesssim \frac{h^{1/2} |\ln(\mu)|^{1/2}}{\mu^{1/2}}.
\end{array} \right. \quad (4.3.7)$$

Nous procédons donc au bilan de ces calculs en tenant compte de (4.3.5) et (4.3.7) dans (4.3.4), nous aboutissons alors à l'estimée du théorème. ■

*Remarque 4.3.2.* L'intérêt de la preuve du théorème 4.3.4 est de souligner l'origine du mauvais comportement de la méthode. En effet, nous observons que nous ne pouvons pas majorer correctement les termes provenant des arêtes incluses dans  $\Omega_3$  non parallèles à la direction d'anisotropie (c'est à dire les deux dernières inégalités de (4.3.6)).

## 4.4 Essais numériques

Nous allons considérer la même application numérique qu'aux sections précédentes. Plus précisément, nous nous plaçons sur  $\Omega := ]0,1[^2$  et considérons la fonction donnée en introduction  $u_\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$u_\mu(x, y) := e^{-\frac{x}{\mu}} + e^{-\frac{y}{\mu}} - 1 ,$$

où  $\mu \in ]0, 1[$ . Rappelons que  $u_\mu$  est alors la solution du problème elliptique suivant

$$\begin{cases} -\mu^2 \Delta u_\mu + u_\mu = -1 \text{ dans } \Omega , \\ u_\mu = g \text{ sur } \partial\Omega , \end{cases} \quad (4.4.1)$$

où  $g$  est la restriction de  $u_\mu$  à  $\partial\Omega$  (nous renvoyons le lecteur à l'introduction pour bien comprendre le caractère anisotrope du problème considéré).

Nous utilisons le même maillage primal  $T_h$  qu'à la section précédente. Nous comparons alors, pour différentes valeurs de  $\mu$ , la convergence obtenue par l'approximation  $u_{BN}$  de  $u$  pratiquée lorsque  $T_h$  est un maillage isotrope ( $b_\mu = 0.5$ ) et lorsque  $T_h$  est un maillage anisotrope ( $b_\mu = |\mu \ln(\mu)|$ ).

La table 4.1 contient, pour différentes valeurs de  $\mu$ , de  $n$  et de  $b_\mu$ , l'erreur commise. Nous confirmons donc bien le résultat du théorème 4.3.4. De plus, la figure 4.1 représente la solution approchée obtenue, nous y distinguons clairement le problème d'instabilité de la méthode dû à la discontinuité de l'élément  $IP^1$ -non conforme.

| $n$     | $\mu = 1.$ | $\mu = 10^{-1}$ |                          | $\mu = 10^{-3}$ |                          | $\mu = 10^{-5}$ |                          |
|---------|------------|-----------------|--------------------------|-----------------|--------------------------|-----------------|--------------------------|
| $b_\mu$ | 0.5        | 0.5             | $b_\mu =  \mu \ln(\mu) $ | 0.5             | $b_\mu =  \mu \ln(\mu) $ | 0.5             | $b_\mu =  \mu \ln(\mu) $ |
| 4       | 3.03E-03   | 3.85E-02        | 5.51E-02                 | 1.50E-01        | 1.02E-02                 | 1.50E-01        | 1.55E-03                 |
| 8       | 8.17E-04   | 1.47E-02        | 2.17E-02                 | 1.10E-01        | 1.06E-02                 | 1.00E-01        | 1.00E-03                 |
| 16      | 2.09E-04   | 4.25E-03        | 6.71E-03                 | 7.45E-02        | 1.20E-02                 | 7.45E-02        | 1.13E-03                 |
| 32      | 5.28E-05   | 1.11E-03        | 1.80E-03                 | 5.27E-02        | 1.25E-02                 | 5.27E-02        | 1.24E-03                 |
| 64      | 1.32E-05   | 2.82E-04        | 4.59E-04                 | 3.62E-02        | 1.22E-02                 | 3.73E-02        | 1.28E-03                 |

TAB. 4.1 – erreur  $\|u - u_{BN}\|_{0,\Omega}$  en fonction de  $n$  pour plusieurs valeurs de  $b_\mu$  et de  $\mu$

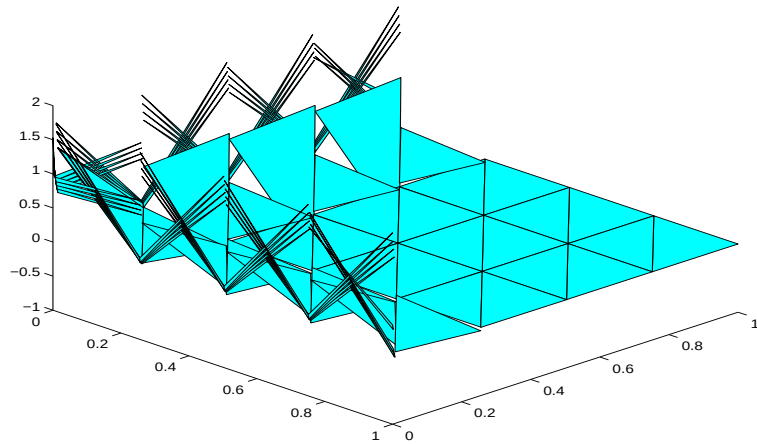


FIG. 4.1 – Solution approchée pour  $n = 8$ ,  $\mu = 10^{-3}$  et  $b_\mu = |\mu \ln(\mu)|$

## Chapitre 5

# Méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur des éléments non conformes pour les problèmes de réaction-diffusion sur des maillages anisotropes : cas des quadrangles

Comme nous l'avons montré dans la section précédente, la discrétisation de l'équation (1.1.1) par une méthode d'Éléments-Volumes Finis basée sur des éléments non conformes n'est pas stable sur des maillages anisotropes constitués de triangles. Notre but dans cette section consiste donc à "stabiliser" la méthode. La stratégie de stabilisation que nous avons adoptée consistera à mailler la zone anisotrope ( $\Omega_3$  dans les sous sections 2-4) non plus à l'aide de triangles mais avec des quadrangles. Nous démontrerons alors que la méthode ainsi construite redevient stable sur des maillages anisotropes. Afin de simplifier notre démonstration, nous allons supposer que les éléments du maillage sont uniquement des quadrangles, tout en sachant que les éléments quadrangulaires ne sont réellement indispensables que sur la partie anisotrope du domaine.

### 5.1 Notations-Définitions

Nous allons tout d'abord définir un maillage régulier quadrangulaire anisotrope de  $\Omega$ .

**Définition 5.1.1.** Nous dirons que  $T_h := \bigcup_{i=1}^3 T_{h,i}$  est un maillage régulier quadrangulaire anisotrope de  $\Omega$  de pas  $h$   $> 0$  si

- $T_{h,1}$ , resp.  $T_{h,2}$ , est un maillage régulier quadrangulaire de  $\Omega_1$ , resp.  $\Omega_2$  de pas  $h$ , resp.  $b_\mu h$  (voir remarque

2.1.1),

- $T_{h,3}$  est un maillage quadrangulaire de  $\Omega_3$  de pas  $h_1 := h$ , resp.  $h_2 := b_\mu h$ , dans la direction parallèle, resp. perpendiculaire, à  $\partial\Omega$ .

Définissons la maillage dual associé à  $T_h$ . Pour ceci, nous définissons  $E_h$ , resp.  $Z_h$ , comme étant l'ensemble des arêtes, resp. des sommets, du maillage primal  $T_h$ . De plus, pour  $e \in E_h$ ,  $m_e$  désigne le milieu de l'arête  $e$  et nous désignons par  $E_h^{in}$  l'ensemble des arêtes internes du domaine  $\Omega$ . Le maillage dual  $B_h := \{B_e\}_{e \in E_h}$  est alors construit en reliant les barycentres des éléments de  $T_h$  avec les extrémités des arêtes de  $T_h$  comme il l'est illustré sur la figure 5.1.

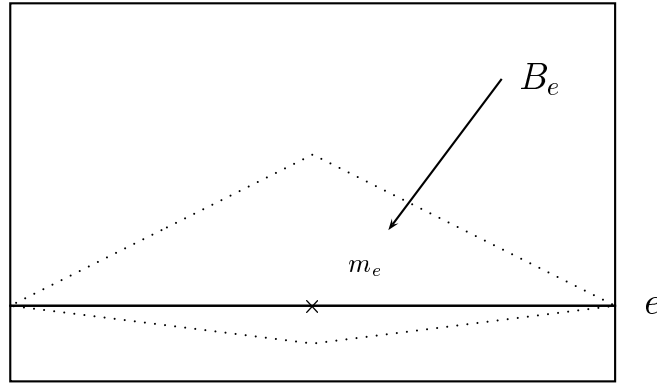


FIG. 5.1 – Illustration d'un élément du maillage dual

Nous introduisons à présent diverses espaces et fonctionnelles utiles dans la suite de ce chapitre. Pour  $K \in T_h$ , nous introduisons :

- $S_{h,1}(K) := IP^1(K) \cup x^2 - y^2$ ,
- $S_{h,2}(K) := IP^1(K) \cup x^2 - y^2$ ,
- $S_{h,3}(K) := IP^1(K) \cup z^2$ ,

où, pour  $S_{h,3}(\cdot)$ ,  $z$  désigne la direction perpendiculaire à la direction d'anisotropie (c'est à dire la direction parallèle au bord de  $\Omega$ ). Nous posons alors

$$S_h := \{ v_h \in S_{h,i}(K) , \forall i \in \{1,2,3\} , \forall K \in T_h , \text{ telle que } v_h \text{ soit continue en } m_e , \forall e \in E_h^{in} \} .$$

Nous définissons en outre  $S_h^0$ ,  $a_h(\cdot, \cdot)$  et  $||| \cdot |||$  de manière analogue à ce qui a été fait dans le chapitre 4.

Pour  $v_h \in S_h$ , nous allons définir  $\bar{v}_h$ . Nous introduisons avant tout, pour  $K \in T_h$  et  $e \in E_h(K)$ ,  $\mathbb{1}_{B_e, K}$ , l'indicatrice de la région  $B_e \cap K$ . Nous avons alors :

$$v_h|_K = \sum_{i=1}^4 v_{h,i} p_i , \forall K \in T_h ,$$



où  $\{p_i\}_{i=1}^4$  sont les fonctions de base de  $S_h$  sur  $K \in T_h$ . Nous posons alors :

$$\bar{v}_h|_K = \sum_{i=1}^4 v_{h,i} \mathcal{M}_K^0(p_i) \mathbb{1}_{B_{e,K}}, \forall K \in T_h,$$

où  $\mathcal{M}_K^0$  désigne la moyenne de  $p_i$  sur  $K$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$ . Cette définition de  $\bar{v}_h$ , pour  $v_h \in S_h$ , est faite pour assurer la véracité du lemme 5.3.1.

En dernier lieu, nous définissons, pour  $v_h \in S_h$ , un interpolé  $\tilde{v}_h$  dont nous nous servirons dans la preuve du lemme 5.3.5. Posons donc, pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\tilde{S}_h := \{ z_h \in L^2(\Omega) : z_h|_K \in [1, z]_{vect}, \forall K \in T_h, \int_e \llbracket z_h \rrbracket_e ds = 0, \forall e \in E_h^{in} \},$$

où  $z$  désigne la direction  $x$  sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  et la direction perpendiculaire au bord de  $\Omega$  sur  $\Omega_3$ .

**Définition 5.1.2.** Pour  $v_h \in S_h$ , nous définissons donc  $\tilde{v}_h \in \tilde{S}_h$  par :

$$\begin{cases} \int_e \tilde{v}_h ds = \int_e v_h ds, \forall e \in E_h : e \parallel (Ox), e \subset \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ \int_e \tilde{v}_h ds = \int_e v_h ds, \forall e \in E_h : e \parallel (Oz), e \subset \Omega_3, \end{cases}$$

où, sur  $\Omega_3$ ,  $z$  désigne la direction parallèle au bord de  $\Omega$ .

## 5.2 Schéma numérique

La méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme se formule comme suit : Trouver  $u_{BN} \in S_h^0$  telle que

$$\mu^2 a_h(u_{BN}, v_h) + (\bar{u}_{BN}, \bar{v}_h)_\Omega = (f, \bar{v}_h)_\Omega, \forall v_h \in S_h^0. \quad (5.2.1)$$

*Remarque 5.2.1.* Nous constatons que la discrétisation du terme de diffusion est identique à celle provenant de la méthode des Éléments Finis. Ceci permet, si nous considérons un maillage constitué de quadrangles et de triangles, de traiter identiquement et donc plus facilement le terme de diffusion.

Nous donnons alors la

**Proposition 5.2.1.** Soit  $T_h$ , resp.  $B_h$ , le maillage primal, resp. dual, de  $\Omega$ , alors le système (4.2.2) admet une unique solution  $u_{BN} \in S_h^0$ .

Preuve: La proposition se démontre de la même manière que la proposition 4.2.2.

■

## 5.3 Majoration d'erreur

Nous donnons dans un premier temps quelques lemmes.

**Lemme 5.3.1.** Soient  $v_h \in S_h$  et  $\bar{v}_h$  construit comme indiqué en introduction de section. Nous avons alors :

$$\int_K v_h \, dx = \int_K \bar{v}_h \, dx, \forall K \in T_h.$$

Preuve: En calculant directement les termes et en tirant partie de la définition de  $\bar{v}_h$ , le lemme se démontre aisément. ■

**Lemme 5.3.2.** Soient  $v_h \in S_h$  et  $\tilde{v}_h \in \tilde{S}_h$  donné par la définition 5.1.2. Nous avons alors

$$D_2 v_h|_K = D_2 \tilde{v}_h|_K, \forall K \in T_h,$$

où, si  $K \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ ,  $D_2$  fait référence à la dérivée suivant  $y$ , alors que si  $K \subset \Omega_3$ ,  $D_2$  fait référence à la dérivée suivant la direction perpendiculaire au bord de  $\Omega$ .

Preuve: Se démontre en passant sur le carré de référence puis en calculant directement les membres de droite et de gauche de l'égalité. ■

**Lemme 5.3.3.** Soit  $v_h \in S_h$  et  $\tilde{v}_h \in \tilde{S}_h$  donné par la définition 5.1.2. Nous avons alors

$$\int_K (v_h - \tilde{v}_h) \, dx dy = 0, \forall K \in T_h : K \subset \Omega_3.$$

Preuve: Se démontre toujours par un passage au carré de référence puis par un calcul direct en décomposant  $\hat{v}_h$  suivant la base de  $S_h(\hat{K})$  et  $\tilde{\hat{v}}_h$  suivant la base de  $\tilde{S}_h(\hat{K})$ . De plus, nous insistons sur le fait que si  $K \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ , alors l'égalité du lemme 5.3.3 n'est pas vraie, la base choisie sur  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  n'étant pas la même que celle sur  $\Omega_3$ . ■

**Lemme 5.3.4.** Soit  $v_h \in S_h$ . Nous avons alors :

$$\|v_h\|_{0,\Omega} \sim \|\bar{v}_h\|_{0,\Omega}.$$

Preuve: Se démontre de la même manière que le lemme 3.3.3. ■

Nous donnons à présent le lemme central de cette section :

**Lemme 5.3.5.** Soient  $T_h$  un maillage régulier quadrangulaire de  $\Omega$  de pas  $h > 0$  et  $B_h$  son maillage dual associé. Soient  $u \in H^3(\Omega)$  la solution de (1.1.1) vérifiant les estimées (1.3.1)-(1.3.3) et  $v_h \in S_h^0$ . Supposons de plus que  $f \in H^1(\Omega)$ . Nous avons alors

$$|\mu^2 a_h(u, v_h) + (u, v_h)_\Omega - (f, v_h)_\Omega| \lesssim h (|f|_{1,\Omega} + \mu^{1/2} |\ln(\mu)|) \|v_h\|.$$

Preuve:

Afin d'alléger les notations, nous allons poser pour toute la démonstration de ce lemme  $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} D_1 u \\ D_2 u \end{pmatrix}$  en convenant que sur les zones  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ ,  $D_1$ , resp.  $D_2$ , fait référence à la dérivée suivant  $x$ , resp.  $y$ , alors que dans la zone  $\Omega_3$ ,  $D_1$ , resp.  $D_2$ , fait référence à la dérivée suivant la direction parallèle au bord de  $\Omega$ , resp. la direction perpendiculaire au bord de  $\Omega$ . Soit  $v_h \in S_h^0$ , nous avons alors :

$$\begin{aligned}
& \mu^2 a_h(u, v_h) + (u, v_h)_\Omega - (f, v_h)_\Omega \\
&= \mu^2 \sum_{K \in T_h} (\eta_1, D_1 v_h)_K + \mu^2 \sum_{K \in T_h} (\eta_2, D_2 v_h)_K + (u, v_h)_\Omega - (f, v_h)_\Omega \\
&\stackrel{\text{lemme 5.3.2}}{=} \mu^2 \sum_{K \in T_h} (\eta_1, D_1 v_h)_K + \mu^2 \sum_{K \in T_h} (\eta_2, D_2 \tilde{v}_h)_K + (u, v_h)_\Omega - (f, v_h)_\Omega, \\
&\stackrel{\text{Green}}{=} \mu^2 \sum_{K \in T_h} (-D_1 \eta_1, v_h)_K + \mu^2 \sum_{K \in T_h} (-D_2 \eta_2, \tilde{v}_h)_K + (u, v_h)_\Omega - (f, v_h)_\Omega \\
&\quad + \mu^2 \sum_{K \in T_h} (\eta_1 n_{K,1}, v_h)_{\partial K} + \mu^2 \sum_{K \in T_h} (\eta_2 n_{K,2}, \tilde{v}_h)_{\partial K},
\end{aligned}$$

où  $n_K := \begin{pmatrix} n_{K,1} \\ n_{K,2} \end{pmatrix}$  désigne la normale unitaire sortante à  $K$  sur son bord. Nous arrivons donc, en utilisant (1.1.1), à :

$$\begin{aligned}
|\mu^2 a_h(u, v_h) + (u, v_h)_\Omega - (f, v_h)_\Omega| &\lesssim \left| \sum_{K \in T_h} (u - f, v_h - \tilde{v}_h)_K \right| \\
&\quad + \mu^2 \left| \sum_{K \in T_h} (D_1 \eta_1, v_h - \tilde{v}_h)_K \right| \\
&\quad + \mu^2 \left| \sum_{K \in T_h} (\eta_1 n_{K,1}, v_h)_{\partial K} \right| \\
&\quad + \mu^2 \left| \sum_{K \in T_h} (\eta_2 n_{K,2}, \tilde{v}_h)_{\partial K} \right|.
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

La suite du lemme va consister en la majoration des quatres membres du terme de droite de (5.3.1).

a. Majorons le premier terme du membre de droite de (5.3.1) :

Si  $K \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ , nous avons, pour  $K \in T_h$ ,

$$\begin{aligned}
|(u - f, v_h - \tilde{v}_h)_K| &\stackrel{(1.1.1)}{=} \mu^2 |(\Delta u, v_h - \tilde{v}_h)_K| \\
&\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \mu^2 \|\Delta u\|_{0,K} \|v_h - \tilde{v}_h\|_{0,K} \\
&\stackrel{\text{Bramble-Hilbert}}{\leq} \mu^2 \|\Delta u\|_{0,K} h_i |v_h|_{1,K}
\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{\substack{K \in T_h \\ K \subset \Omega_i}} |(u - f, v_h - \tilde{v}_h)_K| \lesssim \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h \|v_h\| . \quad (5.3.2)$$

Si  $K \subset \Omega_3$ , nous utilisons le lemme 5.3.3, nous pouvons dire que :

$$(g, v_h - \tilde{v}_h)_K = (g - \mathcal{M}_K^0(g), v_h - \tilde{v}_h)_K, \quad \forall K \in T_h, \quad \forall g \in H^1(\Omega),$$

où, pour  $K \in T_h$ ,  $\mathcal{M}_K^0(g)$  désigne la moyenne de  $g$  sur  $K$ . En utilisant alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivi d'un argument de type Bramble-Hilbert, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned}
|(g, v_h - \tilde{v}_h)_K| &\lesssim (h_1 \|D_1 g\|_{0,K} + h_2 \|D_2 g\|_{0,K}) \\
&\quad (\|v_h\|_{0,K} + \|\tilde{v}_h\|_{0,K}), \quad \forall K \in T_h \quad \forall g \in H^1(\Omega)
\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$|(g, v_h - \tilde{v}_h)_K| \lesssim (h_1 \|D_1 h\|_{0,K} + h_2 \|D_2 g\|_{0,K}) \|v_h\|_{0,K}, \quad \forall K \in T_h, \quad \forall g \in H^1(\Omega), \quad (5.3.3)$$

en nous aidant du lemme 5.3.4. En appliquant (5.3.3) pour  $g := u$  et pour  $g := f$  et en utilisant les estimées (1.3.1)-(1.3.3), nous obtenons :

$$\left| \sum_{K \in T_h} (u - f, v_h - \tilde{v}_h)_K \right| \lesssim (h \|f\|_{1,\Omega} + \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h) \|v_h\| . \quad (5.3.4)$$

Nous rassemblons alors les estimées (5.3.2) et (5.3.4) pour obtenir :

$$\left| \sum_{K \in T_h} (u - f, v_h - \tilde{v}_h)_K \right| \lesssim (h \|f\|_{1,\Omega} + \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h) \|v_h\| . \quad (5.3.5)$$

b. Majorons le second terme du membre de droite de (5.3.1) :

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons que :

$$|(D_1 \eta_1, v_h - \tilde{v}_h)_K| \leq \|D_1 \eta_1\|_{0,K} \|v_h - \tilde{v}_h\|_{0,K}, \forall K \in T_h. \quad (5.3.6)$$

Remarquons alors que, pour  $K \in T_h$  :

$$\begin{aligned} \|v_h - \tilde{v}_h\|_{0,K} &\lesssim |K|^{1/2} \|\hat{v}_h - \tilde{\hat{v}}_h\|_{0,\hat{K}} \\ &\lesssim |K|^{1/2} (\|\hat{v}_h - \tilde{\hat{v}}_h\|_{0,\hat{K}} \\ &\quad + \|\hat{D}_1(\hat{v}_h - \tilde{\hat{v}}_h)\|_{0,\hat{K}} + \|\hat{D}_2(\hat{v}_h - \tilde{\hat{v}}_h)\|_{0,\hat{K}}) \\ &\lesssim \begin{cases} h |v_h|_{1,h} \\ b_\mu h |v_h|_{1,h} \\ b_\mu h \|D_2 v_h\|_{0,K} \leq b_\mu h |v_h|_{1,h} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous utilisons alors ceci dans (5.3.6), ce qui nous fournit :

$$|\sum_{K \in T_h} (D_1 \eta_1, v_h - \tilde{v}_h)_K| \lesssim \frac{h}{\mu} \|v_h\|. \quad (5.3.7)$$

c. Majorons le troisième terme du membre de droite de (5.3.1) :

Pour  $e \in E_h$ , nous posons  $n_e := \begin{pmatrix} n_{e,1} \\ n_{e,2} \end{pmatrix}$  la normale à  $e$  et introduisons  $\mathcal{M}_e^0(\cdot)$  l'opérateur définissant la  $L^2(e)$ -projection. Nous avons :

$$\begin{aligned} |\sum_{K \in T_h} (\eta_1, n_{K,1} v_h)_{\partial K}| &= |\sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} n_{e,1} \int_e \llbracket \eta_1 \rrbracket_e \llbracket v_h \rrbracket_e ds| \\ &\leq \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} |n_{e,1}| \int_e \|\eta_1 - \mathcal{M}_e^0(\eta_1)\|_e \|v_h - \mathcal{M}_e^0(v_h)\|_e ds \\ &\leq \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} |n_{e,1}| \|\eta_1 - \mathcal{M}_e^0(\eta_1)\|_{0,e} \|v_h - \mathcal{M}_e^0(v_h)\|_{0,e} \\ &\lesssim \sum_{K \in T_h} |n_{e,1}| \frac{|e|}{|K|} \sum_{i=1}^2 h_i \|D_i \eta_1\|_{0,K} \sum_{i=1}^2 h_i \|D_i v_h\|_{0,K} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\left| \sum_{K \in T_h} (\eta_1 - n_{K,1}, v_h)_{\partial K} \right| \lesssim \frac{|\ln(\mu)|}{\mu} h \|v_h\|, \quad (5.3.8)$$

en utilisant les estimées (1.3.1)-(1.3.3).

d. Majorons le quatrième terme du membre de droite de (5.3.1) :

De la même manière que précédemment, nous pouvons écrire que ;

$$\begin{aligned} \left| \sum_{K \in T_h} (\eta_2 - n_{K,2}, \tilde{v}_h)_{\partial K} \right| &\leq \left| \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} |n_{e,2}| \int_e \llbracket \eta_2 - \mathcal{M}_e^0(\eta_2) \rrbracket_e \llbracket \tilde{v}_h - \mathcal{M}_e^0(\tilde{v}_h) \rrbracket_e ds \right| \\ &\leq \sum_{K \in T_h} \sum_{e \in E_h(K)} |n_{e,2}| \|\eta_2 - \mathcal{M}_e^0(\eta_2)\|_{0,e} \|\tilde{v}_h - \mathcal{M}_e^0(\tilde{v}_h)\|_{0,e} \\ &\lesssim \sum_{K \in T_h} |n_{e,2}| \frac{|e|}{|K|} \sum_{i=1}^2 h_i \|D_i \eta_2\|_{0,K} h_2 \|D_2 \tilde{v}_h\|_{0,K} \\ &\stackrel{\text{lemme 5.3.2}}{=} \sum_{K \in T_h} |n_{e,2}| \frac{h_2}{|K|} \sum_{i=1}^2 h_i \|D_i \eta_2\|_{0,K} h_2 \|D_2 v_h\|_{0,K} \\ &\quad \Downarrow \\ \left| \sum_{K \in T_h} (\eta_2 - n_{K,2}, \tilde{v}_h)_{\partial K} \right| &\lesssim \frac{|\ln(\mu)|^2}{\mu^{1/2}} h \|v_h\|, \quad (5.3.9) \end{aligned}$$

en utilisant les estimées (1.3.1)-(1.3.3).

Nous procédons à présent au bilan de nos quatre majorations précédentes (c'est à dire (5.3.5), (5.3.7), (5.3.8) et (5.3.9)) dont nous tenons compte dans (5.3.1) ce qui nous permet de conclure à l'énoncé du lemme. ■

*Remarque 5.3.1.* Soulignons dans l'énoncé du lemme précédent que, si  $f \equiv 0$  sur  $\Omega$  alors le résultat du lemme 5.3.5 peut être amélioré et devient donc :

$$|\mu^2 a_h(u, v_h) + (u, v_h)_\Omega - (f, v_h)_\Omega| \lesssim \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h \|v_h\|.$$

**Théorème 5.3.6.** Soient  $T_h$  un maillage régulier quadrangulaire de  $\Omega$  de pas  $h > 0$  et  $B_h$  le maillage dual associé. Soient  $u \in H^3(\Omega)$  la solution de (1.1.1) vérifiant les estimées (1.3.1)-(1.3.3) et  $u_{BN}$  la solution de (5.2.1). Supposons de plus que  $f \in H^1(\Omega)$ . Nous avons alors :

$$\|u - u_{BN}\| \lesssim (|f|_{1,\Omega} + \mu^{1/2} |\ln(\mu)|) h.$$

Preuve: La preuve de ce théorème commence comme celle du théorème 3.3.4. Pour  $v_h \in S_h^0$ , nous avons donc :

$$\begin{aligned}
|||u_{BN} - v_h|||^2 &= \|u_{BN} - v_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu^2 |u_{BN} - v_h|_{1,h}^2 \\
&\stackrel{\text{lemme 5.3.4}}{\lesssim} \|\bar{u}_{BN} - \bar{v}_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu^2 |u_{BN} - v_h|_{1,h}^2 \\
&= (u, \bar{u}_{BN} - \bar{v}_h)_\Omega + \mu^2 a_h(u_{BN}, u_{BN} - v_h) \\
&\quad - (u, u_{BN} - v_h)_\Omega - \mu^2 a_h(u, u_{BN} - v_h) \\
&\quad + (u - \bar{v}_h, \bar{u}_{BN} - \bar{v}_h)_\Omega + \mu^2 a_h(u - v_h, u_{BN} - v_h) \\
&\quad + (u, u_{BN} - v_h)_\Omega - (u, \bar{u}_{BN} - \bar{v}_h)_\Omega \\
&\stackrel{(5.2.1)}{\lesssim} (f, \bar{u}_{BN} - \bar{v}_h)_\Omega - (f, u_{BN} - v_h)_\Omega \\
&\quad + (f, u_{BN} - v_h)_\Omega \\
&\quad - (u, u_{BN} - v_h)_\Omega - \mu^2 a_h(u, u_{BN} - v_h) \\
&\quad + (u - \bar{v}_h, \bar{u}_{BN} - \bar{v}_h)_\Omega + \mu^2 a_h(u - v_h, u_{BN} - v_h) \\
&\quad + (u, u_{BN} - v_h)_\Omega - (u, \bar{u}_{BN} - \bar{v}_h)_\Omega
\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned}
|||u_{BN} - v_h||| &\lesssim \frac{|(f - u, u_{BN} - v_h)_\Omega - (f - u, \bar{u}_{BN} - \bar{v}_h)_\Omega|}{|||u_{BN} - v_h|||} \\
&\quad + \sup_{\substack{v_h \in S_h^0 \\ v_h \neq 0}} \frac{|(f, v_h)_\Omega - (u, v_h)_\Omega - \mu^2 a_h(u, v_h)|}{|||v_h|||} \\
&\quad + \|u - \bar{v}_h\|_{0,\Omega} + \mu |u - v_h|_{1,h}
\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned}
|||u_{BN} - I_L u||| &\lesssim \frac{|(f - u, u_{BN} - I_L u)_\Omega - (f - u, \bar{u}_{BN} - \bar{I}_L u)_\Omega|}{|||u_{BN} - I_L u|||} \\
&+ \sup_{\substack{v_h \in S_h^0 \\ v_h \neq 0}} \frac{|(f, v_h)_\Omega - (u, v_h)_\Omega - \mu^2 a_h(u, v_h)|}{|||v_h|||} \\
&+ \|u - \bar{I}_L u\|_{0,\Omega} + \mu |u - I_L u|_{1,h}
\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

où  $I_L u$  désigne l'interpolé de Lagrange de  $u$  sur le maillage  $T_h$  (cet interpolé appartenant bien à  $S_h^0$ ). Nous allons alors majorer les quatre membres du terme de droite de (5.3.10).

a. Majorons le premier terme du membre de droite de (5.3.10) :

En utilisant (1.1.1) et en définissant, pour  $K \in T_h$ ,  $\mathcal{M}_K^0(\cdot)$  comme étant l'opérateur de  $L^2$ -projection, nous aboutissons à :

$$\begin{aligned}
&\frac{|(f - u, u_{BN} - I_L u)_\Omega - (f - u, \bar{u}_{BN} - \bar{I}_L u)_\Omega|}{|||u_{BN} - I_L u|||} \\
= &\mu^2 \frac{|(\Delta u, u_{BN} - I_L u)_\Omega - (\Delta u, \bar{u}_{BN} - \bar{I}_L u)_\Omega|}{|||u_{BN} - I_L u|||} . \\
\stackrel{\text{lemme 5.3.1}}{=} &\mu^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{K \in T_h \\ K \subset \Omega_i}} \frac{|(\Delta u - \mathcal{M}_K^0(\Delta u), u_{BN} - I_L u)_K - (\Delta u - \mathcal{M}_K^0(\Delta u), \bar{u}_{BN} - \bar{I}_L u)_K|}{|||u_{BN} - I_L u|||} \\
\lesssim &\mu^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{K \in T_h \\ K \subset \Omega_i}} \frac{(h_1 \|D^{(3,0)}u\|_{0,K} + h_2 \|D^{(2,1)}u\|_{0,K} + h_1 \|D^{(2,1)}u\|_{0,K} + h_2 \|D^{(0,3)}u\|_{0,K})}{|||u_{BN} - I_L u|||} \\
&\frac{(\|u_{BN} - I_L u\|_{0,K} + \|\bar{u}_{BN} - I_L u\|_{0,K})}{|||u_{BN} - I_L u|||} \\
\stackrel{\text{lemme 5.3.4}}{\lesssim} &\mu^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{K \in T_h \\ K \subset \Omega_i}} \frac{(h_1 \|D^{(3,0)}u\|_{0,K} + h_2 \|D^{(2,1)}u\|_{0,K} + h_1 \|D^{(2,1)}u\|_{0,K} + h_2 \|D^{(0,3)}u\|_{0,K})}{|||u_{BN} - I_L u|||} \|u_{BN} - I_L u\|_{0,\Omega} \\
\stackrel{(1.3.1)-(1.3.3)}{\lesssim} &(\mu^2 + \mu^{1/2} |\ln(\mu)|) h \\
\leq &\mu^{1/2} |\ln(\mu)| h ,
\end{aligned}$$



ce qui implique que :

$$\frac{|(f - u, u_{BN} - I_L u)_\Omega - (f - u, \bar{u}_{BN} - \bar{I}_L u)_\Omega|}{\|u_{BN} - I_L u\|} \lesssim \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h . \quad (5.3.11)$$

b. Majorons le second membre de droite de (5.3.10) :

Comme  $f \in H^1(\Omega)$ , nous utilisons le résultat du lemme 5.3.5, nous avons :

$$\sup_{\substack{v_h \in S_h^0 \\ v_h \neq 0}} \frac{|(f, v_h)_\Omega - (u, v_h)_\Omega - \mu^2 a_h(u, v_h)|}{\|v_h\|} \lesssim h |f|_{1,\Omega} + \mu |\ln(\mu)|^{1/2} h . \quad (5.3.12)$$

c. Majorons le dernier membre de droite de (5.3.10) :

En utilisant le théorème 2 de [5] ainsi que le lemme 4.3.2 (donné pour des éléments triangulaires mais se généralisant aisément à des éléments quadrangulaires), nous avons que :

$$\|u - \bar{I}_L u\|_{0,\Omega} + \mu |u - I_L u|_{1,h} \lesssim |u|_{1,\Omega_1} h + \mu^{1/2} |\ln(\mu)| h .$$

Or, nous avons :

$$\begin{aligned} |u|_{1,\Omega_1} &\stackrel{(1.1.1)}{\leq} |f|_{1,\Omega_1} + \mu^2 |\Delta u|_{1,\Omega_1} \\ &\stackrel{(1.3.1)}{\lesssim} |f|_{1,\Omega_1} + \mu^2 \\ &\lesssim |f|_{1,\Omega} , \end{aligned}$$

ce qui fournit que :

$$\|u - \bar{I}_L u\|_{0,\Omega} + \mu |u - I_L u|_{1,h} \lesssim h (|f|_{1,\Omega} + \mu^{1/2} |\ln(\mu)|) . \quad (5.3.13)$$

Le bilan de ces majorations, c'est à dire (5.3.11)-(5.3.13), replacé dans (5.3.10) nous donne alors la majoration du théorème ([2, 5] nous fournissant une estimée similaire à 3.3.1 pour des éléments quadrangulaires). ■

## 5.4 Essais numériques

Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\mu^2 \Delta u_\mu + u_\mu = -1 \text{ dans } \Omega , \\ u_\mu = g \text{ sur } \partial\Omega , \end{cases} \quad (5.4.1)$$

où  $\Omega := ]0,1[^2$  et  $g$  est calculée de telle manière à ce que la solution de (5.4.1) soit donnée par

$$u_\mu := \exp(-x / \mu) .$$

Le maillage utilisé est alors illustré sur la figure 5.2

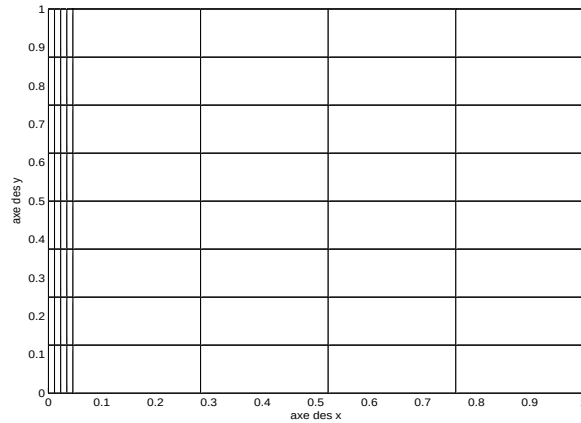


FIG. 5.2 – Maillage utilisé pour  $n = 4$ ,  $\mu = 10^{-1}$  et  $b_\mu = |\mu \ln(\mu)|$

La table 5.1 nous donne alors l'erreur commise pour diverses valeurs de  $n$  et  $\mu$ . Nous observons bien que l'erreur dépend de  $\mu$  (en effet  $\nabla f \equiv 0$  dans  $\Omega$ ).

| $n$ | $\mu = 1.$ | $\mu = 10^{-1}$ | $\mu = 10^{-3}$ | $\mu = 10^{-5}$ |
|-----|------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 2   | 2.91E-01   | 4.81E-01        | 1.40E-01        | 2.11E-02        |
| 4   | 1.54E-01   | 2.39E-01        | 7.10E-02        | 1.19E-02        |
| 8   | 7.27E-02   | 1.19E-01        | 3.47E-02        | 5.88E-03        |
| 16  | 3.63E-02   | 5.97E-02        | 1.71E-02        | 2.88E-03        |
| 32  | 1.82E-02   | 2.99E-02        | 8.54E-03        | 1.43E-03        |

TAB. 5.1 – erreur  $\|u - u_{BN}\|$  en fonction de  $n$  pour plusieurs valeurs de  $\mu$  ( $b_\mu = \mu |\ln(\mu)|$ )

Nous pratiquons le même test que précédemment mis à part que nous changeons la solution. Nous posons donc

$$u_\mu := \exp(-x / \mu) + x^2 + y^2 .$$

Nous n'avons alors plus  $\nabla f \equiv 0$  dans  $\Omega$ . La table 5.2 fournit l'erreur commise pour différentes valeurs de  $n$  et de  $\mu$ . Nous observons alors que la dépendance de l'erreur vis à vis de  $\mu$  est perdue. L'estimée du théorème 5.3.6 est dans ce sens bien optimal.

Nous reprenons à présent le premier test numérique mais nous décidons de comparer les résultats fournis par deux bases. Plus précisément, en nous plaçant sur le carré de référence, nous posons

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{B}}_1 := \{1, \hat{x}, \hat{y}, \hat{y}^2\} , \\ \mathcal{B}_2 := \{1, \hat{x}, \hat{y}, \hat{x}^2\} . \end{cases}$$

| $n$ | $\mu = 10^{-1}$ | $\mu = 10^{-3}$ | $\mu = 10^{-5}$ |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|
| 2   | 1.01E-00        | 1.17E-00        | 1.17E-00        |
| 4   | 5.08E-01        | 5.77E-01        | 5.76E-01        |
| 8   | 2.53E-01        | 2.86E-01        | 2.86E-01        |
| 16  | 1.27E-01        | 1.43E-01        | 1.43E-01        |
| 32  | 6.33E-02        | 7.15E-02        | 7.14E-02        |

TAB. 5.2 – erreur  $|||u - u_{BN}|||$  en fonction de  $n$  pour plusieurs valeurs de  $\mu$  ( $b_\mu = \mu |\ln(\mu)|$ )

Le résultat du théorème 5.3.6 ne s'applique que si nous choisissons la base  $\hat{\mathcal{B}}_1$ , les arguments développés dans la démonstration du théorème 5.3.6 ne marchant plus pour la base  $\hat{\mathcal{B}}_2$ . Néanmoins, nous désirons observer le comportement numérique d'une telle approche. Nous calculons donc l'erreur commise pour diverses valeurs de  $n$  et pour  $\mu = 10^{-3}$  ( $b_\mu = \mu |\ln(\mu)|$ ) et constatons que les résultats sont identiques.

| $n$ | $\mathcal{B}_1$ | $\mathcal{B}_2$ |
|-----|-----------------|-----------------|
| 2   | 1.17E-00        | 1.18E-00        |
| 4   | 5.77E-01        | 5.80E-01        |
| 8   | 2.87E-01        | 2.87E-01        |
| 16  | 1.43E-01        | 1.43E-01        |
| 32  | 7.15E-02        | 7.15E-02        |

TAB. 5.3 – erreur  $|||u - u_{BN}|||$  en fonction de  $n$  pour les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  pour  $\mu = 10^{-3}$  ( $b_\mu = \mu |\ln(\mu)|$ )



## Troisième partie

# Méthodes de Volumes Finis et singularités en dimension trois



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Position du problème

Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal borné de  $\mathbb{R}^3$ . Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} D_i D_j u = f \text{ dans } \Omega , \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega , \end{array} \right. \quad (1.1.1)$$

où

–  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$  ,

–  $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^3$  tel que

$$(i) \quad \exists C > 0 : \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 , \quad \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \xi_i \xi_j \geq C \|\xi\|_2^2 ,$$

$$(ii) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, a_{ij} = a_{ji} .$$

Il est bien connu que l'unique solution  $u \in H^1(\Omega)$  de (1.1.1) est incluse dans  $H^2(\Omega)$  si  $\Omega$  est convexe ce qui n'est plus le cas si  $\Omega$  ne l'est pas. Le but de ce chapitre est donc de traiter, comme il a été fait pour le cas bidimensionnel, le cas où  $\Omega$  n'est pas convexe. Plus précisément, notre but est d'étudier la discrétisation par plusieurs méthodes de Volumes Finis le problème (1.1.1) lorsque  $\Omega$  n'est pas convexe et d'illustrer la restauration pour ces méthodes d'un ordre de convergence optimal grâce à un raffinement de maillage judicieux.

Nous supposons donc dans toute la suite de ce chapitre, sauf mention contraire explicite, que  $\Omega$  est un ouvert polygonal borné non convexe de  $\mathbb{R}^3$ .

Dans un premier temps, nous donnerons des résultats de régularité sur la solution  $u$  de (1.1.1), nous introduirons ensuite deux cas particuliers qui feront l'objet de tests numériques pour les diverses méthodes de Volumes Finis présentées puis donnerons le plan de ce chapitre.

## 1.2 Espaces de Sobolev à poids - régularité de la solution

### 1.2.1 Présentation des espaces de Sobolev à poids

Nous définissons dans un premier temps  $\mathcal{S}(\Omega)$ , l'ensemble des sommets de  $\Omega$  où celui ci n'est pas convexe. Pour  $S \in \mathcal{S}(\Omega)$ , nous introduisons :

- $J_S :=$  Nombre d'arêtes adjacentes à  $S$ ,
- $\{A_{S,j}\}_{j=1}^{J_S} :=$  ensemble des arêtes de  $\Omega$  adjacentes au sommet  $S$ ,
- $r_S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, M \longmapsto d(S,M)$  ,
- $R_{S,j} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, M \longmapsto d(A_{S,j},M), j \in \{1, \dots, J_S\}$ ,
- $\chi_S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ , une fonction valant 1 dans un voisinage du sommet  $S$  et 0 ailleurs,
- $\chi_{S,j} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, j \in \{1, \dots, J_S\}$ , une fonction valant 1 dans un voisinage de l'arête  $A_{S,j}$  et 0 ailleurs,
- $\theta_{S,j}, j \in \{1, \dots, J_S\}, S \in \mathcal{S}(\Omega)$ , la distance angulaire à l'arête  $A_{S,j}$  définie par  $\sin(\theta_{S,j}) := \frac{r_S}{R_{S,j}}$ .  
Rappelons que, pour  $\theta_{S,j}$  assez petit, nous avons  $\theta_{S,j} \simeq \sin(\theta_{S,j})$ .

La figure 1.1 résume ces notations.

Introduisons en outre les fonctions suivantes :

$$r : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

$$M \longmapsto \min_{S \in \mathcal{S}(\Omega)} r_S(M) ,$$

$$R : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

$$M \longmapsto \min_{S \in \mathcal{S}(\Omega)} \min_{j \in \{1, \dots, J_S\}} R_{S,j}(M) ,$$



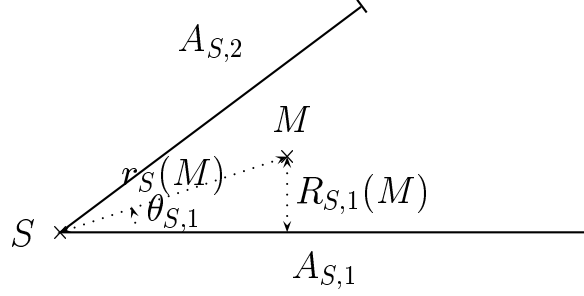


FIG. 1.1 – Illustration des notations utilisées

$$\theta: \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$M \longmapsto \sum_{s \in \mathcal{S}(\Omega)} \left( 1 - \sum_{j=1}^{J_S} \chi_{S,j} + \sum_{j=1}^{J_S} \theta_{S,j} \chi_{S,j} \right) + \left( 1 - \sum_{S \in \mathcal{S}(\Omega)} \chi_S \right) R.$$

Le lecteur pourra aisément vérifier les propriétés suivantes.

**Proposition 1.2.1.** *Pour  $M \in \Omega$ ,  $s \in \mathcal{S}(\Omega)$  et  $j \in \{1, \dots, J_S\}$ , nous avons*

- $\theta(M) = 0$  si  $M$  est loin de  $S$  et de  $A_{S,j}$ ,
- $\theta(M) = R_{S,j}$  si  $M$  est loin de  $S$  mais près de  $A_{S,j}$ ,
- $\theta(M) = 1$  si  $M$  est près de  $S$  mais loin de  $A_{S,j}$ ,
- $\theta(M) = \theta_{S,j}$  si  $M$  est près de  $S$  et de  $A_{S,j}$ .

*Remarque 1.2.1.* La notion de proximité d'un point  $M \in \Omega$  à une arête  $A_{S,j}$ ,  $j \in \{1, \dots, J_S\}$ ,  $S \in \mathcal{S}(\Omega)$  est à prendre au sens de la distance angulaire  $\theta_{S,j}(M)$  de ce point à l'arête  $A_{S,j}$ .

Nous définissons alors, pour  $m \in \mathbb{N}$  et  $\alpha, \beta \in [0, 1[$ , la semi-norme suivante [70, 71]

$$|v|_{m;\alpha,\beta,\Omega} := \left( \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^3 \\ |\gamma| = m}} \int_{\Omega} |r^\alpha \theta^\beta D^\gamma v|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ainsi que la norme qui en est issue

$$\|v\|_{m;\alpha,\beta,\Omega} := \left( \|v\|_{m-1,\Omega}^2 + |v|_{m;\alpha,\beta,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace de Sobolev à poids  $H^{m;\alpha,\beta}(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha, \beta \in [0,1[$ , est alors défini par

$$H^{m;\alpha,\beta}(\Omega) := \{v \in H^{m-1}(\Omega) : \|v\|_{m;\alpha,\beta,\Omega} < +\infty\}.$$

Afin d'être complet, donnons la

**Proposition 1.2.2.** *Soit  $m \in \mathbb{N}$  et  $\alpha, \beta \in [0,1[$ . Nous avons alors*

$$H^{m;\alpha,\beta}(\Omega) \hookrightarrow H^p(\Omega), \forall p < \min\{m - \frac{3\beta}{2}, m - \alpha\}. \quad (1.2.1)$$

Preuve:

Par le théorème 6.1 de [70], nous avons

$$H^{0;\alpha,\beta} \hookrightarrow L^s = W^{0,s}, \forall s < \min\{\frac{2}{\beta+1}, \frac{2}{\frac{2\alpha}{3}+1}\}. \quad (\star)$$

De plus, le théorème 1.14 de [81] fournit

$$W^{0,s} \hookrightarrow W^{p,2} = H^p, \forall p \leq \frac{3}{2} - \frac{3}{s}. \quad (\star\star)$$

Les deux plongements  $(\star)$  et  $(\star\star)$  fournissent alors le résultat escompté. ■

## 1.2.2 Régularité dans les espaces à poids

Énonçons à présent le

**Théorème 1.2.3.** *Soit  $u \in H^1(\Omega)$  la solution de (1.1.1). Il existe alors  $\alpha_0, \beta_0 \in [0,1[$  tels que*

$$u \in H^{2;\alpha,\beta}(\Omega), \forall \alpha \geq 1 - \alpha_0, \forall \beta \geq 1 - \beta_0.$$

*De plus,  $u$  admet la décomposition suivante*

$$u = u_0 + \sum_{S \in \mathcal{S}(\Omega)} u^S + \sum_{\substack{S \in \mathcal{S}(\Omega) \\ j \in \{1, \dots, J_S\}}} u^{S,j},$$

où

–  $u_0 \in H^2(\Omega)$  constitue la partie régulière,

- $u^S, S \in \mathcal{S}(\Omega)$ , constitue la partie singulière d'exposant  $\alpha_0$  relative à la singularité de sommet en  $S$ ,
- $u^{S,j}, j \in \{1, \dots, J_S\}, S \in \mathcal{S}(\Omega)$ , constitue la partie singulière d'exposant  $\beta_0$  relative à la singularité d'arête en  $A_{S,j}$ .

Preuve: voir [31, 70, 71].

■

*Remarque 1.2.2.* Dans le cadre d'un traitement a-priori des singularités de la solution  $u$  de (1.1.1), une connaissance de la valeur numérique des exposants singuliers  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  est indispensable, Or la détermination de ceux-ci est loin d'être évidente à part dans certains cas où une expression analytique ou numérique (voir [10, 68, 92, 4]) est possible.

### 1.2.3 Particularité du cas tridimensionnel

Contrairement au cas bidimensionnel, où les fonctions singulières entrant en jeu étaient  $C^0(\bar{\Omega})$ , ici, nous n'avons pas forcément  $H^{2,\alpha,\beta}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$  pour tout  $\alpha, \beta \in [0,1[$ . En effet, le plongement (1.2.1) fournit un exposant optimal  $p$  trop petit pour qu'ait lieu l'injection de Sobolev

$$H^p(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}) ,$$

qui n'est valable en dimension trois que pour  $p > \frac{3}{2}$ . Ceci pose des problèmes pour l'adaptation des techniques de majoration d'erreur des diverses méthodes de Volumes Finis que nous allons étudier :

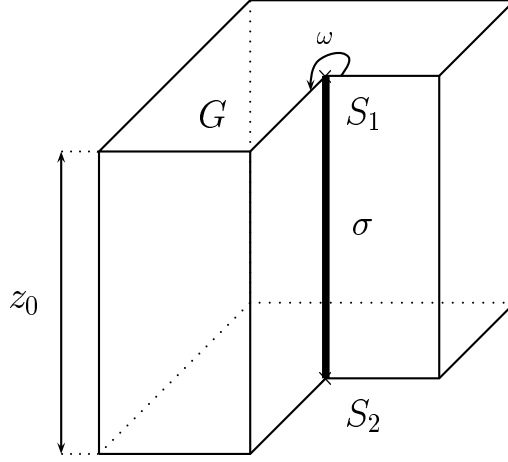
- Pour la méthode de Volumes Finis centrée cellule, l'estimée d'erreur de [52] fait intervenir les valeurs de  $u$  en certains points de  $\Omega$ , or ces valeurs ne peuvent pas être définies.
- Pour les méthodes d'Éléments-Volumes finis, la majoration de l'erreur d'approximation ne peut plus se faire à l'aide de l'interpolé de Lagrange (qui nécessite que soient définies les valeurs aux noeuds du maillage de la solution  $u$ ).

## 1.3 Cas particuliers

### 1.3.1 Domaine de type produit tensoriel

Nous considérons  $\Omega := G \times ]0, z_0[$ , où  $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$  et  $G$  est un ouvert non convexe de  $\mathbb{R}^2$ . Nous supposons sans restriction que  $G$  ne présente qu'une seule ouverture angulaire  $\omega > \pi$  (voir figure 1.2).

Les singularités de la solution  $u$  de (1.1.1) évoquées dans l'énoncé du théorème 1.2.3 sont alors explicitables de manière analytique (ceci vient du fait qu'une séparation des variables est possible pour paramétrer le voisinage des sommets de  $\Omega$ , ce qui n'est plus le cas pour un domaine non convexe quelconque). Plus précisément,  $u$

FIG. 1.2 – Exemple de domaine  $\Omega$  de type produit tensoriel

présente une singularité d'arête en  $\sigma$  d'exposant singulier  $\beta_0 := \frac{\pi}{\omega}$  et deux singularités de sommet en  $S_1$  et  $S_2$  d'exposant singulier  $\alpha_0 := \frac{\pi}{\omega}$ . Or, ces deux singularités de coin en  $S_1$  et  $S_2$  auront non seulement même exposant singulier mais aussi même expression analytique que la singularité d'arête en  $\sigma$  : Elles peuvent donc être "négligées" dans l'étude théorique et numérique du problème au profit de la seule singularité d'arête. La solution  $u$  se décompose alors comme suit :

$$u = u_0 + \lambda(z) R_{\sigma}^{\frac{\pi}{\omega}} \sin\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta_{\sigma}\right),$$

où

- $u_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \in H^2(\Omega)$ ,
- $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction régulière dépendant de  $z$  et des données du problème (1.1.1),
- Pour  $M \in \Omega$ ,  $(R_{\sigma}, \theta_{\sigma})$  sont les coordonnées polaires dans  $G$  de la projection orthogonale de  $M$  sur  $G$ .

De plus, nous avons [4, 3]

$$\begin{cases} \|D^{(0,0,1)}u\|_{1;0,0,\Omega} \lesssim \|f\|_{0,\Omega}, \\ \|D^{(1,0,0)}u\|_{1;0,\beta,\Omega}, \|D^{(0,1,0)}u\|_{1;0,\beta,\Omega} \lesssim \|f\|_{0,\Omega}. \end{cases}$$

Concrètement, la dérivée de  $u$  suivant l'axe  $(Oz)$  est incluse dans  $H^1(\Omega)$ , alors que les dérivées suivant les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  ne le sont pas. Ce type de comportement anisotrope (c'est à dire non identique dans toutes les directions de l'espace) nécessite un traitement numérique spécial à l'aide de maillages anisotropes [4, 3, 6]. Ces maillages présentent la particularité d'être plus raffinés dans certaines directions de l'espace que dans d'autres (voir figure 1.3).

De ce fait, un élément  $K$  d'un maillage anisotrope ne vérifie pas la condition de régularité

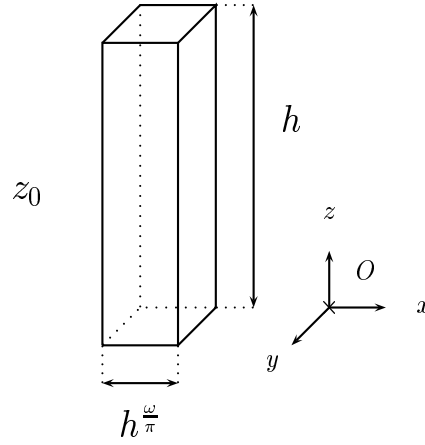


FIG. 1.3 – Exemple d'élément anisotrope

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq C ,$$

où  $C$  est une constante de  $\mathbb{R}_+^*$  et  $h_K$ , resp.  $\rho_K$ , désigne le diamètre du cercle circonscrit à  $K$ , resp. du plus grand cercle inscrit dans  $K$  (par exemple l'élément  $K$  de la figure 1.3 aura un rapport  $\frac{h_K}{\rho_K} = h^{1-\frac{\omega}{\pi}} \rightarrow +\infty$  quand  $h \rightarrow 0$  car  $\omega > \pi$ ). Un maillage ainsi défini permettra de restaurer l'ordre de convergence optimal perdu à cause de la singularité de la solution suivant le plan  $(Oxy)$ . Suivant l'axe  $(Oz)$ , L'ordre de convergence sera déjà optimal sans recourir à un raffinement de maillage vu que la solution n'est pas singulière suivant cette direction. Les maillages anisotropes permettent alors d'optimiser le nombre d'éléments utilisés ce qui apporte un gain de temps et d'espace mémoire.

### 1.3.2 Coin de Fichera

Soit  $\Omega := ]-1, +1[^3 \setminus [0,1[^3$  (voir figure 1.4).

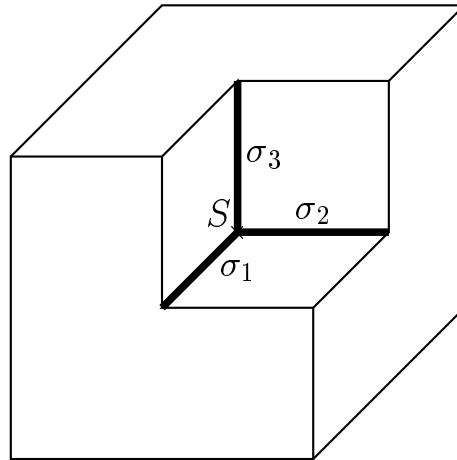


FIG. 1.4 – Coin de Fichera

Ce type de domaine est souvent appelé coin de Fichera [4]. Ce domaine fera l'objet du second test numérique

auquel nous procéderons pour chaque méthode de Volumes Finis considérées. La solution  $u$  de (1.1.1) présente, en outre de singularités d'arête en  $\{\sigma_i\}_{i=1}^3$  d'exposant  $\beta_0 = \frac{2}{3}$ , une singularité de sommet en  $S$  d'exposant  $\alpha_0 \simeq 0.45$  [10, 68, 92]. La difficulté algorithmique vient donc du fait que ce cas nécessite un raffinement anisotrope suivant les arêtes  $\sigma_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , et un raffinement standard en  $S$ , le raffinement global devant être ainsi optimisé (en terme de nombres d'éléments).

Ajoutons qu'une expression analytique de ces singularités est cette fois ci rendue impossible, en effet, nous ne pouvons paramétrer le voisinage de  $S$  à l'aide de variables indépendantes. En résumé, retenons que, dans ce cas ci, la solution  $u$  de (1.1.1) appartient à l'espace de Sobolev à poids  $H^{2;0.55,0.33}(\Omega)$ .

## 1.4 Plan de la troisième partie

Nous considérerons, tout comme dans le cas bidimensionnel, trois méthodes de Volumes Finis pour discrétiser le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4.1)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in L^2(\partial\Omega)$  et  $\Omega$  est un ouvert borné polygonal de  $\mathbb{R}^3$ . Il est à noter que l'étude du problème de Laplace n'est pas du tout restrictive vu qu'un simple changement de variables permet de se ramener de (1.1.1) à (1.4.1).

La section 2 présentera la méthode de Volumes Finis centrée cellule [52]. Il est à noter que nous aurons besoin dans ce chapitre d'un estimateur a-posteriori [100] que nous présenterons dans la section 5. Les méthodes d'Éléments-Volumes Finis (conforme et non conforme) seront quant à elles présentées dans les sections 3 et 4 [66, 67].

## Notations importantes de la troisième partie

### Domaine

- $\Omega :=$  Ouvert polygonal non convexe de  $\mathbb{R}^3$
- $\Gamma :=$  Bord de  $\Omega$
- $\mathcal{S}(\Omega) :=$  Ensemble des sommets où  $\Omega$  n'est pas convexe
- $J_S :=$  Nombre d'arêtes adjacentes à  $S \in \mathcal{S}$
- $\{A_{S,j}\}_{j=1}^{J_S} :=$  ensemble des arêtes de  $\Omega$  adjacentes au sommet  $S$

### Normes

$G$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p > 1$ ,  $\alpha, \beta \in [0,1]$

- $|\cdot|_{m,p,G} := \left( \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^3 \\ |\gamma| = m}} \int_G |D^\gamma \cdot|^p dx \right)^{1/p}$
- $\|\cdot\|_{m,p,G} := \left( \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^3 \\ |\gamma| \leq m}} \int_G |D^\gamma \cdot|^p dx \right)^{1/p}$
- $|\cdot|_{m,G} := \left( \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^3 \\ |\gamma| = m}} \int_G |D^\gamma \cdot|^2 dx \right)^{1/2}$
- $\|\cdot\|_{m,G} := \left( \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^3 \\ |\gamma| \leq m}} \int_G |D^\gamma \cdot|^2 dx \right)^{1/2}$
- $|\cdot|_{m;\alpha,\beta,G} := \left( \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^3 \\ |\gamma| = m}} \int_G |r^\alpha \theta^\beta D^\gamma \cdot|^2 dx \right)^{1/2}$
- $\|\cdot\|_{m,\beta,G} := \left( \|\cdot\|_{m-1,G}^2 + |\cdot|_{m,\beta,G}^2 \right)$

## Espaces fonctionnels

$G$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p > 1$

$$- C^m(G) := \{ v : G \longrightarrow \mathbb{R} : D^\gamma v \text{ continue sur } G, \forall \gamma \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } |\gamma| = m \}$$

$$- W^{m,p}(G) := \{ v : G \longrightarrow \mathbb{R} : \|v\|_{m,p,G} < \infty \}$$

$$- H^m(G) := \{ v : G \longrightarrow \mathbb{R} : \|v\|_{s,G} < \infty \}$$

$$- H_0^m(G) := \{ v \in H^m(G) : D^\gamma v|_{\partial G} \equiv 0, \forall \gamma \in \mathbb{N}^3 \text{ tel que } |\gamma| = m-1 \}$$

$$- H^{m;\alpha,\beta}(G) := \{ v \in H^{m-1}(G) : |v|_{m;\alpha,\beta,G} < \infty \}$$

$$- L^{2,\alpha,\beta}(G) := H^{0;\alpha,\beta}(G)$$

$$- IP^k(G) := \text{Espace des polynômes de degré au plus } k \in \mathbb{N}$$

$$- X_h := \{ v_h \in IP^1(T_h) : v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \} \text{ (} T_h \text{ désignant un maillage de } \Omega \text{)}$$

$$- X_h^0 := \{ v_h \in X_h : v_h|_{\partial\Omega} \equiv 0 \}$$

$$- S_h := \{ v_h \in IP^1(T_h) : \int_e v_h|_K ds = \int_e v_h|_L ds, \forall e \in E_h \text{ avec } e = \bar{K} \cap \bar{L} \}$$

( $E_h$  désignant l'ensemble des arêtes du maillage  $T_h$ )

$$- S_h^0 := \{ v_h \in S_h : \int_e v_h|_K ds = 0, \forall e \in E_h \text{ avec } e \subset \bar{K} \cap \partial\Omega \}$$

## Divers

$$- h_K := \text{Diamètre d'une maille } K$$

$$- \rho_K := \text{Maximum du diamètre des cercles inscrits dans une maille } K$$

$$- h := \text{Pas du maillage } T_h \text{ (i.e. } \max_{K \in T_h} h_K \text{)}$$

$$- |\gamma| := \sum_{i=1}^d |\gamma_i|, \forall \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d), d \in \mathbb{N}^*$$



- $\nabla :=$  Opérateur de gradient (i.e.  $\nabla v := \begin{pmatrix} \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial v / \partial z \end{pmatrix}$ )
- $\mathbb{1}_G :=$  Indicatrice du domaine  $G \subset \mathbb{R}^2$
- $|G| :=$  Longueur, aire ou volume du domaine  $G \subset \mathbb{R}^2$
- $\hat{K} :=$  Triangle de référence (i.e. de sommets  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  et  $(0,1)$ )
- $\mathcal{M}_G^0(.) :=$  Opérateur de  $L^2(G)$ -projection,  $G$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$
- $\mathbf{n}_G :=$  Normale unitaire sortante à  $G \subset \mathbb{R}^2$  sur sa frontière
- $r_S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, M \longmapsto d(S, M), S \in \mathcal{S}$
- $r : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, M \longmapsto \min_{S \in \mathcal{S}(\Omega)} r_S(M)$
- $R_{S,j} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, M \longmapsto d(A_{S,j}, M), j \in \{1, \dots, J_S\}, S \in \mathcal{S}$
- $\theta_{S,j} :=$  la distance angulaire à l'arête  $A_{S,j}, j \in \{1, \dots, J_S\}, S \in \mathcal{S}(\Omega)$  (i.e.  $\sin(\theta_{S,j}) := \frac{r_S}{R_{S,j}}$ )
- $\theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, M \longmapsto \begin{cases} \theta_{S,j} \text{ si } M \text{ est près de } S \text{ et de } A_{S,j} \\ R_{S,j} \text{ si } M \text{ est loin de } S \text{ et près de } A_{S,j} \\ 1 \text{ si } M \text{ est près de } S \text{ et loin de } A_{S,j} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}, j \in \{1, \dots, J_S\}, S \in \mathcal{S}$



## Chapitre 2

# Méthode de Volumes Finis centrée cellule et singularités en dimension trois

Nous considérons le problème (1.4.1). Nous allons dans un premier temps présenter la discrétisation de (1.4.1) par la méthode de Volumes Finis centrée cellule. Introduisons dans ce but les diverses notations et définitions qui nous seront utiles pour la suite de ce chapitre.

### 2.1 Notations-définitions

Donnons tout d'abord un équivalent tridimensionnel de la définition 2.1.1.

**Définition 2.1.1.** Nous appelons maillage admissible (de  $\Omega$ ), noté  $\tau$ , tout triplet  $(\mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ , où :

- a.  $\mathcal{V}$  désigne un ensemble d'ouverts polygonaux convexes de  $\Omega$  appelés Volumes de Contrôle,
- b.  $\mathcal{P} := \{x_K\}_{K \in \mathcal{V}}$  désigne un ensemble de points de  $\Omega$  tel que chaque Volume de Contrôle contienne un et un seul point de  $\mathcal{P}$ ,
- c.  $\mathcal{F}$  représente l'ensemble des faces des Volumes de Contrôle.

Ce triplet vérifiant :

1.  $\overline{\bigcup_{K \in \mathcal{V}} K} = \overline{\Omega}$ .

2. Pour tout Volumes de Contrôle  $K$  et  $L$  :

$$\overline{K} \cap \overline{L} = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{un sommet commun ou une arête complète,} \\ \text{une face complète de } K \text{ et de } L. \end{cases}$$

3. Soient  $x_K \in K$  et  $x_L \in L$  deux éléments de  $\mathcal{P}$ , où  $K, L \in \mathcal{V}$ .

Si  $\overline{K} \cap \overline{L} =: \sigma \in \mathcal{F}$ , alors le segment  $[x_K, x_L]$  coupe orthogonalement  $\sigma$ .

4. Si  $\sigma \in \mathcal{F}$  avec  $\sigma \subset \partial\Omega \cap \tilde{K}$ ,  $K \in \mathcal{V}$ , et si nous posons

$D_{K,\sigma} :=$  demi droite d'origine  $x_K$  perpendiculaire à  $\sigma$ , alors

$D_{K,\sigma} \cap \sigma =: \{x_\sigma\} \neq \emptyset$ .

Nous introduisons en outre

–  $\mathcal{F}_K :=$  l'ensemble des faces de  $K \in \mathcal{V}$ ,

–  $h_K :=$  le diamètre de  $K \in \mathcal{V}$ ,

–  $h := \max_{K \in \mathcal{V}} h_K$ ,

–  $N_{el} := \text{Card}(\mathcal{V})$ ,

–  $\chi(\tau) := \mathbb{P}^0(\tau)$ .

## 2.2 Schéma numérique

Donnons tout d'abord la figure 2.1 afin d'être plus clair dans notre explication.

Nous intégrons (1.4.1) sur  $K \in \tau$ , puis appliquons la formule de Green afin de nous ramener d'une intégrale de volume sur  $K$  à une intégrale de surface sur  $\partial K = \overline{\bigcup_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \sigma}$ .

Chaque intégrale sur  $\sigma := \overline{K} \cap \overline{L}$ ,  $K, L \in \tau$  est ensuite approchée par différences finies [52]. Nous obtenons ainsi le système d'équations suivant

$$-\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} F_{K,\sigma} = \int_K f, \forall K \in \tau, \quad (2.2.1)$$

où, pour  $\sigma \in \mathcal{F}_K$ ,  $K \in \mathcal{V}$ ,

$$F_{K,\sigma} := \begin{cases} \frac{u_L - u_K}{d(x_K, x_L)} & \text{si il existe } L \in \tau \text{ tel que } \sigma = \overline{K} \cap \overline{L} , \\ \frac{-u_K}{d(x_K, \partial\Omega)} & \text{si } \sigma = \overline{K} \cap \partial\Omega . \end{cases}$$

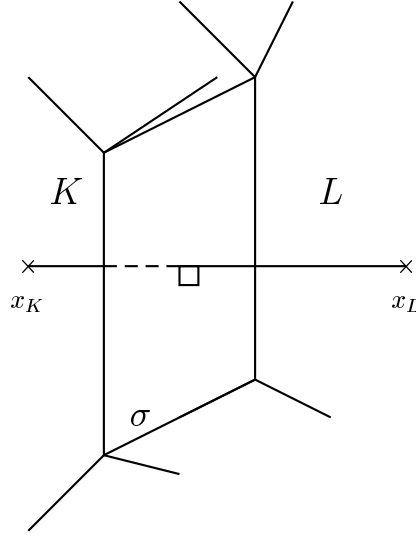


FIG. 2.1 – Interface  $\sigma$  entre deux Volumes de Contrôle  $K$  et  $L$

Nous donnons alors la

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $\tau := (\mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$  un maillage admissible de  $\Omega$ . Le système (1.4.1) admet alors une unique solution  $u_\tau \in \chi(\tau)$ .*

Preuve: voir le lemme 3.2 de [52].

■

Le paragraphe suivant est destiné à rappeler un résultat de convergence de  $u_\tau$  vers  $u$  dans le cas où  $u \in H^2(\Omega)$ .

### 2.3 Rappel de la majoration d'erreur dans le cas régulier ( $u \in H^2(\Omega)$ )

Nous allons exprimer les vitesses de convergence de  $u_\tau$  vers  $u$  en fonction de  $N_{el}$  et non en fonction de  $h$  comme il l'a été fait précédemment. En effet, ceci nous paraît plus en accord avec la ligne directrice de ce chapitre qui est plus numérique que les deux autres, l'expression de l'erreur en fonction du nombre de degrés de liberté de la méthode est alors plus logique. Introduisons tout d'abord l'hypothèse suivante

$$(H) \quad \exists \xi > 0 : d(x_K, \sigma) \geq \xi h_K, \forall \sigma \in \mathcal{F}_K, \forall K \in \mathcal{V}.$$

De plus, nous posons, pour  $v \in \chi(\tau)$ ,

$$|v|_{1,\tau}^2 := \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{F} \\ \sigma = \bar{K} \cap \bar{L}}} \frac{(v(x_L) - v(x_K))^2}{d(x_K, x_L)} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{F} \\ \sigma \subset \bar{K} \cap \partial\Omega}} \frac{v(x_K)^2}{d(x_K, \partial\Omega)},$$

et introduisons, pour  $v \in C^0(\bar{\Omega})$ , la fonction  $Iv$  définie par :

$$\begin{aligned} Iv : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \begin{cases} v(x_K) & \text{si il existe } K \in \mathcal{V} \text{ tel que } M \subset K, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous pouvons à présent donner le

**Théorème 2.3.1.** *Soit  $\tau := (\mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$  un maillage admissible du domaine  $\Omega$  vérifiant l'hypothèse (H). Considérons alors  $u \in H^2(\Omega)$  la solution de (1.4.1) et  $u_\tau$  la solution de (2.2.1). Nous avons alors :*

$$\begin{cases} |Iu - u_\tau|_{1,\tau} \lesssim N_{el}^{-1/3}, \\ \|u - u_\tau\|_{0,\Omega} \lesssim N_{el}^{-1/3}. \end{cases}$$

Preuve: voir le théorème 3.4 de [52].

■

Le but de cette section étant de prouver la nécessité d'un raffinement de maillage judicieux pour un domaine non convexe de  $\mathbb{R}^3$ , nous proposons à présent une série de tests numériques mettant en évidence ceci.

## 2.4 Essais numériques

Comme il l'a été évoqué en introduction, nous allons opérer deux tests numériques :

- Une première série de tests portera sur le "L-shape" 3d, où la solution  $u$  de (1.4.1) présente une singularité d'arête,
- Une seconde série de tests concernera le coin de "Fichera", pour lequel la solution  $u$  de (1.4.1) présente des singularités d'arêtes et une singularité de coin.

### 2.4.1 Tests sur le "L-shape" 3d

Nous posons  $\Omega := ]-1,1[ \setminus ]0,1[ \times ]-1,0[ \times ]0,1[$ . Nous considérons alors sur ce domaine  $\Omega$  l'équation suivante

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega , \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega , \end{cases} \quad (2.4.1)$$

où  $g$  est calculée de telle manière à ce que la solution de (2.4.1) soit donnée par

$$u(r, \theta, z) := z r^{2/3} \sin(2\theta/3) ,$$

$(r, \theta, z)$  désignant les coordonnées cylindriques. Nous renvoyons à l'introduction afin de bien comprendre le type de comportement singulier de cette fonction. Rappelons quand même que  $u$  présente une singularité de valeur  $\beta := \frac{1}{3}$  le long de l'arête  $(Oz)$  (voir figure 2.2).

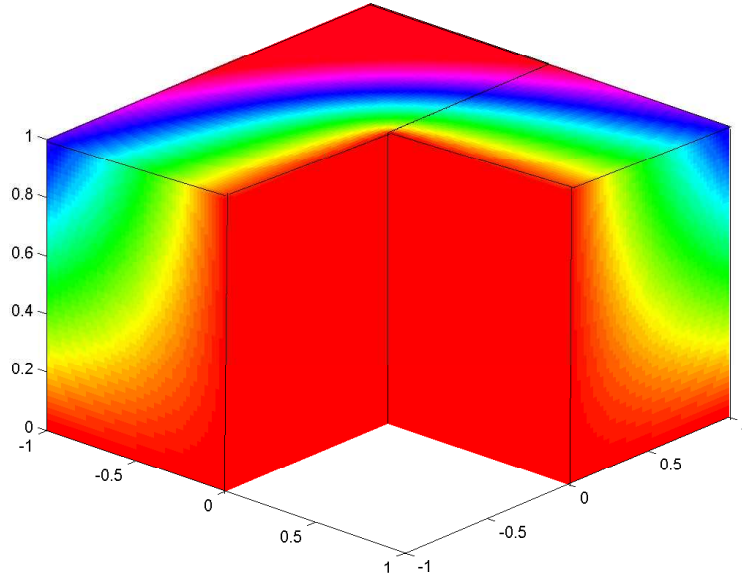


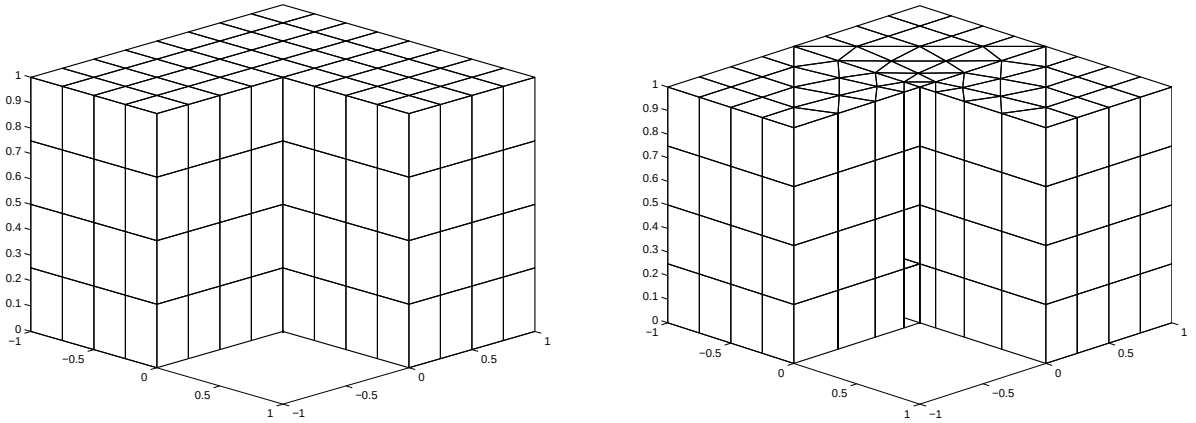
FIG. 2.2 – Représentation de la fonction  $u$

Nous implémentons la solution approchée de ce problème par la méthode de Volumes Finis centrée cellule sur deux séries de maillages :

- Une première série de maillage uniforme de paramètre  $n \in \mathbb{N}^*$  dont nous donnons une représentation pour  $n = 4$  en figure 2.3 à gauche,
- Une seconde série de maillages raffinés de paramètre  $n \in \mathbb{N}^*$  dont nous donnons une représentation pour  $n = 4$  en figure 2.3 à droite. Les noeuds de cette seconde série de maillages sont en fait obtenus en considérant les noeuds de la première série de maillages auxquels nous faisons subir la transformation  $\mathcal{H}$ , où  $\mathcal{H}$  est donnée par

$$\mathcal{H} : \quad \Omega \quad \longrightarrow \quad \Omega$$

$$(x,y,z) \quad \longmapsto \quad \begin{cases} (x|x|^{\frac{1}{1-\beta}-1}, y|y|^{\frac{1}{1-\beta}-1}, z) & \text{si } |x| + |y| < 1, \\ (x,y,z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

FIG. 2.3 – Maillage uniforme (à gauche) et raffiné (à droite) pour  $n = 4$ 

La table 2.1 présente alors les divers résultats obtenus sur la première et le seconde séries de maillages.

| $n$ | $\ Iu - u_\tau\ _{0,\Omega}$ | $ u - u_\tau _{1,\tau}$ | $\ u - u_\tau\ _{0,\Omega}$ | $N_{el}$ | $n$ | $\ Iu - u_\tau\ _{0,\Omega}$ | $ u - u_\tau _{1,\tau}$ | $\ u - u_\tau\ _{0,\Omega}$ | $N_{el}$ |
|-----|------------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------|-----|------------------------------|-------------------------|-----------------------------|----------|
| 2   | $9,64e-3$                    | $4,78e-2$               | $3,19e-1$                   | 24       | 2   | $1,17e-2$                    | $4,57e-2$               | $3,37e-1$                   | 42       |
| 4   | $4,84e-3$                    | $3,82e-2$               | $1,60e-1$                   | 192      | 4   | $4,17e-3$                    | $2,84e-2$               | $1,65e-1$                   | 312      |
| 8   | $2,26e-3$                    | $2,78e-2$               | $8,03e-2$                   | 1536     | 8   | $1,38e-3$                    | $1,61e-2$               | $8,19e-2$                   | 2400     |
| 16  | $9,89e-4$                    | $1,90e-2$               | $4,01e-2$                   | 12288    | 16  | $4,35e-4$                    | $8,56e-3$               | $4,08e-2$                   | 18816    |
| 25  | $5,68e-4$                    | $1,46e-2$               | $2,57e-2$                   | 46875    | 25  | $2,02e-4$                    | $5,60e-3$               | $2,61e-2$                   | 71250    |
| 32  | $4,16e-4$                    | $1,25e-2$               | $2,01e-2$                   | 98304    | 32  | $1,32e-4$                    | $4,41e-3$               | $2,04e-2$                   | 148992   |
| 40  | $3,13e-4$                    | $1,09e-2$               | $1,61e-2$                   | 192000   | 40  | $8,93e-5$                    | $3,55e-3$               | $1,63e-2$                   | 290400   |
| 50  | $2,35e-4$                    | $9,47e-3$               | $1,28e-2$                   | 375000   | 50  | $5,88e-5$                    | $2,85e-3$               | $1,30e-2$                   | 566250   |

TAB. 2.1 – Résultats pour les séries de maillages uniforme (à gauche) et raffinée (à droite)

Les figures 2.4 et 2.5 illustrent les taux de convergence obtenus en fonction du nombre de degrés de liberté  $N_{el}$  pour les maillages uniformes et raffinés. Nous constatons que l'utilisation d'un maillage raffiné de manière adéquate permet l'obtention d'un meilleur ordre de convergence pour la méthode par rapport aux maillages uniformes.

Nous donnons enfin la figure 2.6 représentant l'erreur ponctuelle entre  $u$  et son approximation pour  $n = 16$  sur le plan  $\mathcal{P}_\Omega := \{ (x,y,z) \in \Omega : x,z \geq 0 \text{ et } y = 0 \}$ . Nous constatons alors que l'erreur est bien concentrée le long de l'axe  $(Oz)$  et que, pour un maillage raffiné, celle-ci est bien moindre que pour un maillage uniforme.



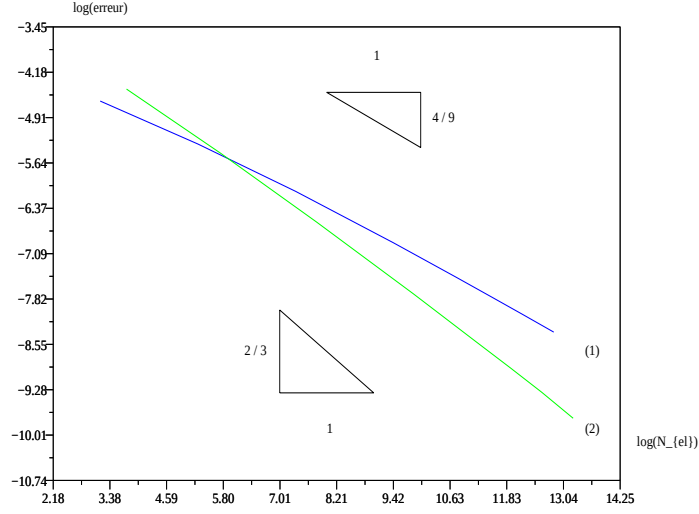


FIG. 2.4 – Vitesse de convergence de  $\|Iu - u_\tau\|_{0,\Omega}$  en fonction de  $N_{el}$  pour un maillage uniforme (courbe (1)) et un maillage raffiné (courbe (2))

### 2.4.2 Tests sur le coin de Fichera

Nous posons cette fois ci  $\Omega := ]-1,1[^2 \setminus [0,1[^3$ . Nous considérons alors le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Nous renvoyons à l'introduction pour plus de détails sur la régularité de la solution  $u$  de (2.4.2), précisons cependant que  $u$  présente une singularité de coin en  $O$  de valeur  $\alpha \approx 0.45$  et des singularités le long des arêtes du bord de  $\Omega$  ayant  $O$  comme origine de valeur  $\beta \approx \frac{2}{3}$ .

Nous utilisons, tout comme pour les tests précédents, deux séries de maillages (uniformes et raffinés) tout deux de paramètre  $n \in \mathbb{N}^*$ . La figure 2.7 illustrent ces deux types de maillages pour  $n = 4$ . Les noeuds du maillage raffiné sont obtenus à partir de ceux du maillage uniforme auxquels nous appliquons la transformation  $\mathcal{H}$  définie cette fois ci par

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \quad \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (x,y,z) &\longmapsto (x|x|^{\frac{1}{1-\beta}-1}, y|y|^{\frac{1}{1-\beta}-1}, z|z|^{\frac{1}{1-\beta}-1}). \end{aligned}$$

Cependant, nous ne disposons pas d'une expression analytique de la solution  $u$  de (2.4.2), il nous faut donc quantifier l'erreur à l'aide d'un estimateur a-posteriori. Nous prenons donc l'estimateur fournit dans la section 5. Brièvement, rappelons que cet estimateur quantifie l'erreur entre  $u$  et  $I_M u_\tau$ , qui est un interpolé bâti à partir de la solution approchée  $u_\tau$  de (2.2.1). La table 2.2 donnent les résultats obtenus pour les deux séries de maillages.

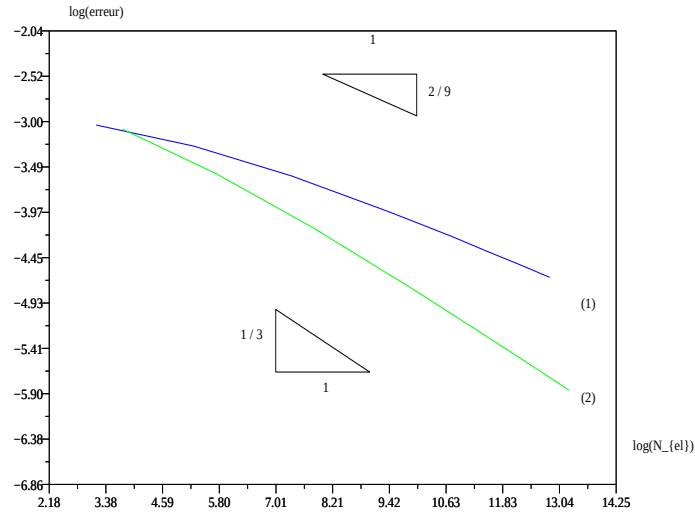


FIG. 2.5 – Vitesse de convergence de  $|Iu - u_T|_{1,\tau}$  pour en fonction de  $N_{el}$  un maillage uniforme (courbe (1)) et un maillage raffiné (courbe (2))

| $n$ | $\eta$ (maillage uniforme) | $\eta$ (maillage raffiné) | $N_{el}$ |
|-----|----------------------------|---------------------------|----------|
| 2   | 1,33e0                     | 1,31e0                    | 56       |
| 4   | 5,57e - 1                  | 5,37e - 1                 | 448      |
| 8   | 2,84e - 1                  | 2,07e - 1                 | 3584     |
| 16  | 1,69e - 1                  | 8,42e - 2                 | 28672    |
| 32  | 1,05e - 1                  | 3,77e - 2                 | 229376   |
| 40  | 9,03e - 2                  | 2,96e - 2                 | 448000   |

TAB. 2.2 – Résultats pour les deux séries de maillages

La figure 2.8 nous donnent alors les ordres de convergence de la méthode en fonction de  $N_{el}$  pour les deux types de maillage. Tout comme pour le cas précédent, nous constatons que l'utilisation d'un maillage judicieusement raffiné permet une nette amélioration de l'ordre de convergence de la méthode.

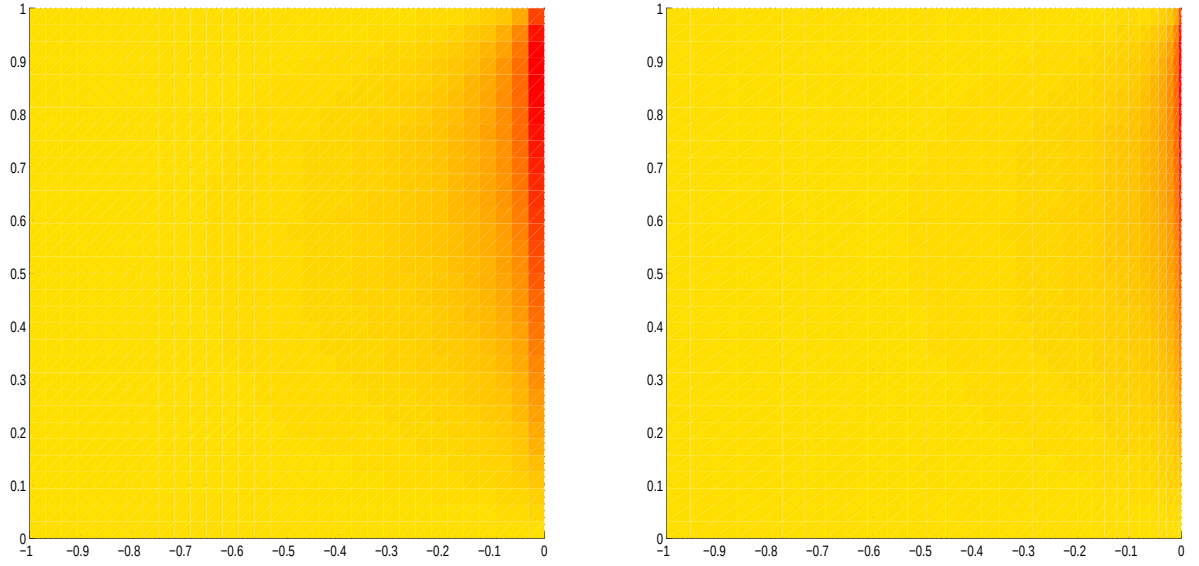


FIG. 2.6 – *Erreur ponctuelle pour un maillage uniforme (à gauche) et un maillage raffiné (à droite) pour  $n = 16$*

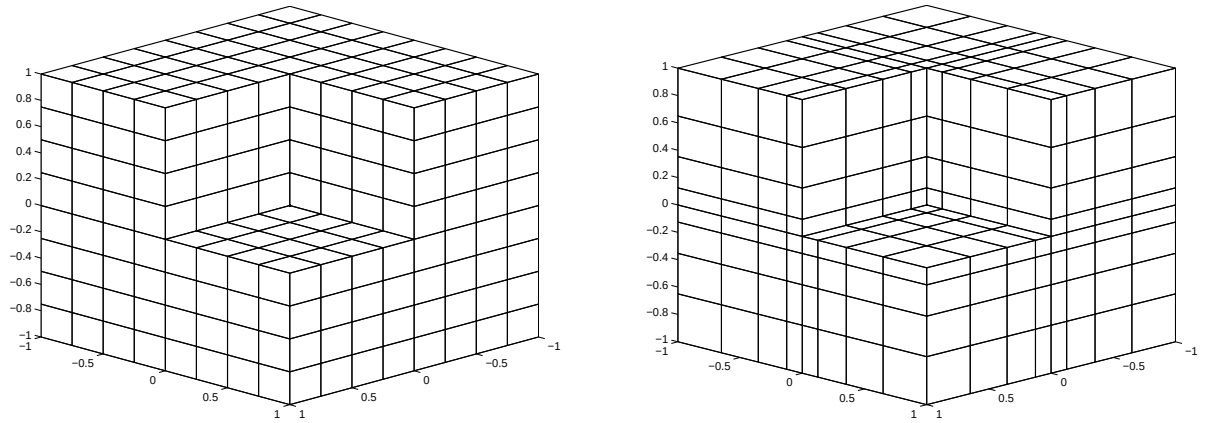


FIG. 2.7 – *Maillage uniforme (à gauche) et raffiné (à droite) pour  $n = 4$*

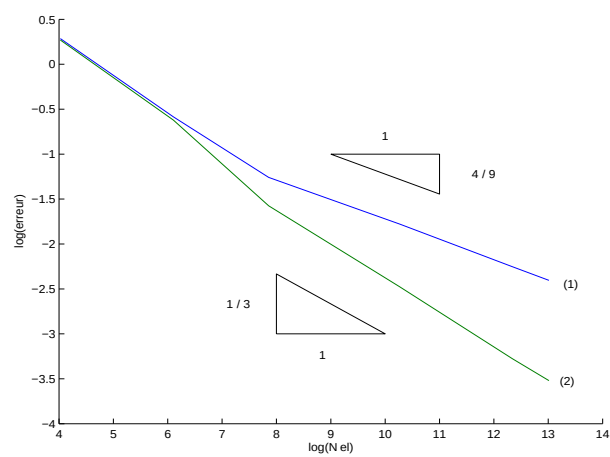


FIG. 2.8 – Convergence de  $\eta$  en fonction du  $\log(n)$  pour un maillage uniforme (courbe (1)) et un maillage raffiné (courbe (2)) en fonction du  $\log(N_{el})$

## Chapitre 3

# Méthode d'Éléments-Volumes Finis conforme et singularités en dimension trois

Le principe de la méthode présentée dans ce chapitre sera identique à ce qui a été fait en dimension deux (voir section 3) à savoir que l'idée sera d'approcher la solution  $u$  de (1.4.1) par une fonction  $IP^1$ -conforme sur un maillage primal  $T_h$  (où  $T_h$  est un maillage tétraédrique de  $\Omega$ ) mais en discrétisant ce même problème sur un maillage dual de  $T_h$ .

Nous introduirons dans un premier temps diverses notations et définitions indispensables à la suite de notre travail. Nous expliquerons ensuite le principe de la méthode et pratiquerons quelques tests numériques.

### 3.1 Notations-Définitions

Donnons tout d'abord la définition du maillage primal de  $\Omega$ .

Soit  $T_h$  un maillage de  $\Omega$  constitués d'éléments tétraédriques. Posons, pour  $K \in T_h$ ,

- $E_h(K) :=$  ensemble des arêtes de  $K$ ,
- $F_h(K) :=$  ensemble des faces de  $K$ ,
- $Z_h(K) :=$  ensemble des sommets de  $K$ ,
- $h_K :=$  diamètre de  $K$ ,

–  $\rho_K :=$  diamètre du plus grand cercle inscrit dans  $K$ .

Nous introduisons alors  $E_h := \bigcup_{K \in T_h} E_h(K)$ ,  $F_h := \bigcup_{K \in T_h} F_h(K)$ ,  $Z_h := \bigcup_{K \in T_h} Z_h(K)$ ,  $h := \max_{K \in T_h} h_K$  et  $N := \text{Card}(Z_h)$ .

De plus, pour  $z \in Z_h$ , nous posons  $T_h(z) := \{ K \in T_h : z \in \bar{K} \}$ . Nous définissons enfin  $Z_h^{in} := \{ z \in Z_h : z \in \Omega \}$ . Nous donnons en dernier lieu le critère de Delaunay, plus précisément :

$$(H) \quad 1 \leq \frac{h_K}{\rho_K} \leq C, \forall K \in T_h,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $T_h$ .

Définissons à présent le maillage dual de  $\Omega$ .

Pour  $K \in T_h$  et pour  $z \in Z_h(K)$ , nous construisons  $b_{z,K}$  en joignant entre eux les barycentres des faces, le milieu des arêtes et le barycentre  $z_K$  du tétraèdre  $K$ . La figure 3.1 représente une sous-boîte  $b_{z,K}$  ainsi construite.

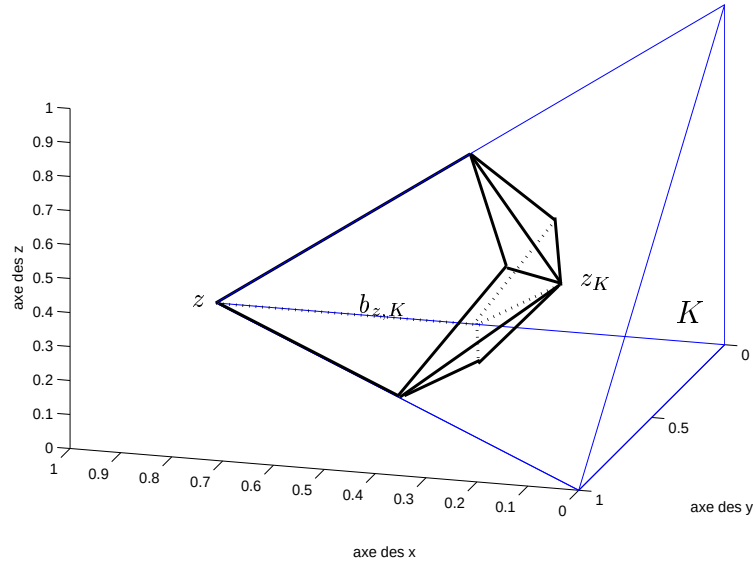


FIG. 3.1 – Illustration d'une sous-boîte  $b_{z,K}$  pour  $z \in Z_h(K)$  et  $K \in T_h$

Nous posons alors

$$b_z := \bigcup_{K \in T_h(z)} b_{z,K}, \quad z \in Z_h,$$

et définissons le maillage dual (au maillage primal  $T_h$ )  $B_h$  par

$$B_h := \{ b_z \}_{z \in Z_h}.$$

En vu d'être complet, introduisons quelques espaces de fonctions qui nous serviront par la suite. Posons donc

$$X_h := \{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_K \in IP^1(K), \forall K \in T_h \},$$

$$X_h^0 := \{ v_h \in X_h : v_h|_{\partial\Omega} \equiv 0 \}.$$

En outre, pour  $v_h \in X_h$ , nous associons  $\bar{v}_h \in IP^0(B_h)$  définie par

$$\bar{v}_h := \sum_{z \in Z_h} v_h(z) \mathbb{1}_{b_z}.$$

### 3.2 Schéma numérique

Nous intégrons (1.4.1) sur  $b_z$ ,  $z \in Z_h$ , d'où

$$-\int_{b_z} \Delta u \, dx = \int_{b_z} f \, dx$$

$\Downarrow$

$$-\int_{\partial b_z} \nabla u \cdot \mathbf{n}_z \, ds = \int_{b_z} f \, dx,$$

où  $\mathbf{n}_z$  désigne la normale unitaire sortante à  $b_z$  sur sa frontière.

Le problème approché lié à (1.4.1) s'écrit donc : Trouver  $u_{BC} \in X_h^0$  telle que

$$-\int_{\partial b_z} \nabla u_{BC} \cdot \mathbf{n}_z \, ds = \int_{b_z} f \, dx, \forall z \in Z_h^{in}. \quad (3.2.1)$$

Nous allons à présent modifier la formulation de (3.2.1) grâce à la

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $T_h$  un maillage tétraédrique de  $\Omega$ .*

*Soient, pour  $v$  et  $w \in Z_h$ ,  $\phi_v$  et  $\phi_w$  deux fonctions de base de l'espace  $X_h$  (c'est à dire étant continues sur  $\bar{\Omega}$ ,  $IP^1$  par morceaux sur  $T_h$  et valant 1 au sommet  $v$ , ou  $w$ , et 0 aux autres sommets du maillage).*

*Nous avons alors*

$$-\int_{\partial b_w} \nabla \phi_v \cdot \mathbf{n}_w \, ds = \int_{\Omega} \nabla \phi_v \cdot \nabla \phi_w \, dx.$$

Preuve: L'application de la formule de Green suffit à démontrer cette proposition. ■

Compte tenu de la proposition précédente, le problème discret (3.2.1) se reformule comme suit : Trouver  $u_{BC} \in X_h^0$  telle que

$$-\int_{b_z} \nabla u_{BC} \cdot \nabla v_h \, ds = \int_{\Omega} f \bar{v}_h \, dx, \forall v_h \in X_h^0. \quad (3.2.2)$$

### 3.3 Rappel de la majoration d'erreur dans le cas régulier ( $u \in H^2(\Omega)$ )

Nous allons donner dans un premier temps deux lemmes, puis ensuite nous donnerons une majoration de l'erreur entre la solution  $u$  de (1.4.1) et la solution  $u_{BC}$  de (3.2.2) dans le cas où la solution est régulière.

**Lemme 3.3.1.** *Soit  $v_h \in X_h$ . Nous avons alors :*

$$\int_K v_h \, dx = \int_K \bar{v}_h \, dx, \forall K \in T_h.$$

Preuve: Se déduit en passant sur le tétraèdre de référence et en procédant à un calcul direct. ■

**Lemme 3.3.2.** *Soit  $T_h$  un maillage de  $\Omega$  de pas  $h > 0$  vérifiant l'hypothèse (H). Considérons de plus  $v_h \in X_h$ . Nous avons alors :*

$$\|v_h - \bar{v}_h\|_{0,\Omega} \lesssim h |v_h|_{1,\Omega}.$$

Preuve: Nous décomposons la norme  $L^2$  sur  $\Omega$  en une somme de norme  $L^2$  sur  $K \in T_h$ . Nous utilisons ensuite un argument du type Bramble-Hilbert en nous servant du lemme 3.3.1. ■

Nous donnons alors le

**Théorème 3.3.3.** *Considérons  $T_h$  un maillage de  $\Omega$  de pas  $h > 0$  vérifiant l'hypothèse (H). Soient  $u \in H^2(\Omega)$  la solution de (1.4.1) et  $u_{BC} \in X_h^0$  la solution de (3.2.2). Nous avons alors :*

$$\begin{cases} |u - u_{BC}|_{1,\Omega} \lesssim N^{-1/3}, \\ \|u - u_{BC}\|_{0,\Omega} \lesssim N^{-2/3}. \end{cases}$$

Preuve: L'estimée du théorème se déduit aisément en utilisant la majoration d'erreur entre  $u$  et  $u_h$ , son approximation par la méthode des Éléments Finis, ainsi que les lemmes 3.3.1 et 3.3.2. ■

### 3.4 Essais numériques

Nous pratiquerons trois types de tests, à savoir :

- Un premier test sur le "L-shaped" 3d avec une première série de maillages uniformes et une seconde série de maillages raffinés de manière anisotrope le long de l'arête singulière, tout les maillages étant de type produit tensoriel.
- Un second test toujours sur le "L-shaped" 3d avec une première série de maillages uniformes et une seconde série de maillages raffinés le long de l'arête singulière, les maillages raffinés n'étant cependant plus anisotropes.



- Un troisième test sur le coin de Fichera avec une série de maillages uniformes et une autre série de maillages raffinés au voisinage des arêtes et du coin singulier.

### 3.4.1 Premiers tests sur le "L-shaped" 3d

Nous nous plaçons sur  $\Omega := (]-1,1[ \setminus [0,1[ \times ]-1,0]) \times ]0,1[$  (voir figure 1.2). Nous posons alors

$$u(r,\theta,z) := z \, r^{2/3} \sin(2\theta/3) ,$$

où  $(r,\theta,z)$  sont les coordonnées cylindriques standards (nous renvoyons à la figure 2.2 pour une représentation de  $u$ ).

Nous avons alors  $u$  qui est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega , \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega , \end{cases} \quad (3.4.1)$$

où  $g$  désigne la restriction de  $u$  sur  $\partial\Omega$ . Il est connu que  $u$  présente alors une singularité le long de l'arête  $(Oz)$  (nous renvoyons le lecteur à l'introduction de cette partie pour plus de détails sur cet aspect).

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le maillage uniforme  $T_{unif}^n$  est alors obtenu de la manière suivante: Nous subdivisons chaque arête du domaine en  $n$  segments, nous obtenons ainsi un maillage hexaédrique. Chaque élément hexaédrique de ce maillage est alors subdivisé en 6 tétraèdres ce qui permet d'obtenir le maillage désiré. La série de maillages raffinés  $\{T_{raff}^n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est obtenue en appliquant aux noeuds de la série  $\{T_{unif}^n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  la transformation suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \quad \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (x,y,z) &\longmapsto (|x|^{1/2}, |y|^{1/2}, z) . \end{aligned}$$

La figure 3.2 nous donne deux illustrations de ces maillages pour  $n = 4$ .

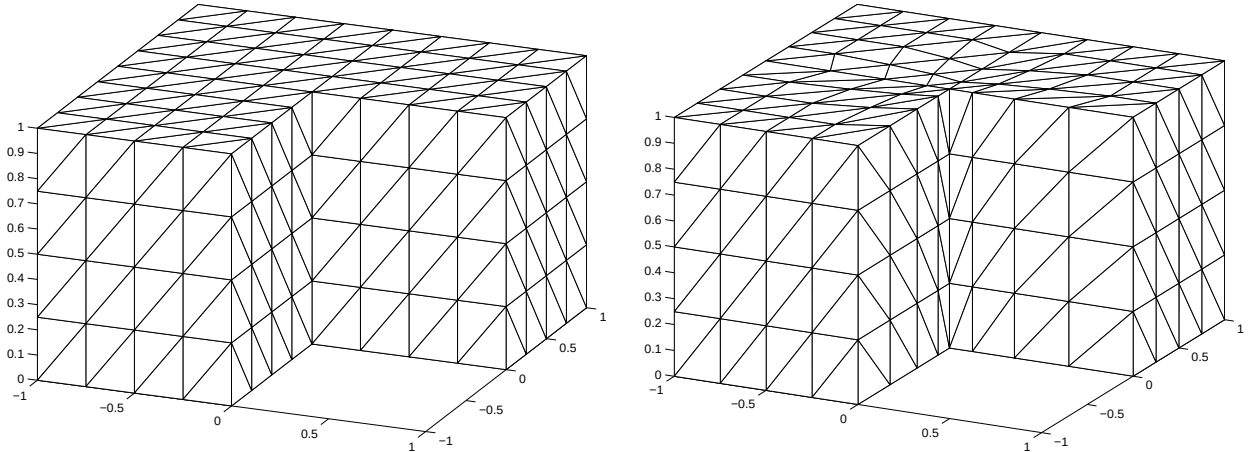


FIG. 3.2 – Exemple de maillage uniforme (à gauche) et de maillage raffiné (à droite) pour  $n = 4$

Nous implémentons alors le système issu de (3.2.2) sur les deux séries de maillages, la table 3.1 fournit les divers résultats obtenus. Nous précisons que, dans ces tableaux,  $N$  désigne le nombre de noeuds des maillages (qui correspond au nombre de degré de liberté de la méthode).

| $n$ | $N$    | Maillage uniforme           |                           | Maillage raffiné            |                           |
|-----|--------|-----------------------------|---------------------------|-----------------------------|---------------------------|
|     |        | $\ u - u_{BC}\ _{0,\Omega}$ | $ u - u_{BC} _{1,\Omega}$ | $\ u - u_{BC}\ _{0,\Omega}$ | $ u - u_{BC} _{1,\Omega}$ |
| 2   | 63     | $5,27e-02$                  | $4,27e-01$                | $5,08e-02$                  | $4,63e-01$                |
| 4   | 325    | $1,46e-02$                  | $2,41e-01$                | $1,34e-02$                  | $2,42e-01$                |
| 8   | 2025   | $4,36e-03$                  | $1,32e-01$                | $3,58e-03$                  | $1,26e-01$                |
| 16  | 14161  | $1,43e-03$                  | $7,44e-02$                | $9,54e-04$                  | $6,49e-02$                |
| 32  | 105633 | $5,05e-04$                  | $4,30e-02$                | $2,53e-04$                  | $3,34e-02$                |
| 64  | 815425 | $1,88e-04$                  | $2,54e-02$                | $6,69e-05$                  | $1,72e-02$                |

TAB. 3.1 – Résultats pour les deux séries de maillages

Les figures 3.3 et 3.4 nous permettent de mettre en évidence la dégradation du taux de convergence de la méthode sur la série de maillages uniformes d'une part (dûe à la singularité d'arête de la solution) et amélioration de celui ci sur la série de maillages raffinés d'autre part.

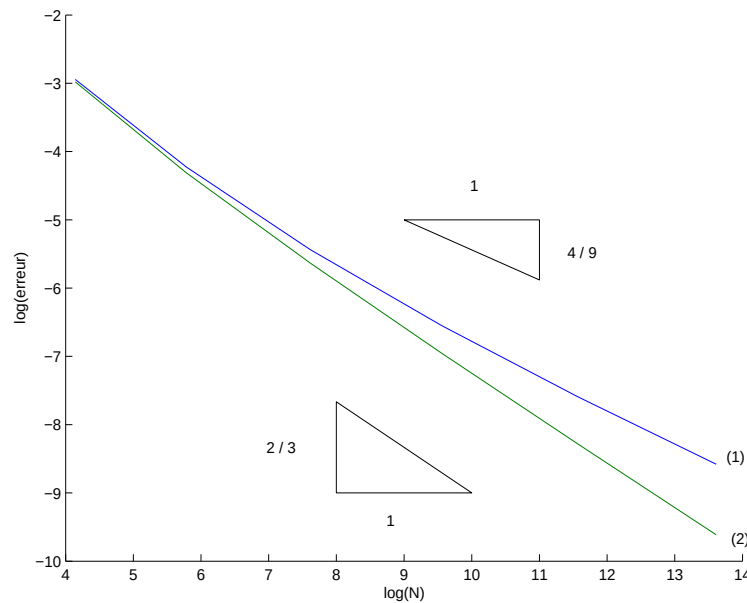


FIG. 3.3 – Taux de convergence de la méthode en fonction de  $N$  pour l'erreur  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$  sur un maillage uniforme (courbe (1)) et un maillage raffiné (courbe (2))

### 3.4.2 Seconds tests sur le "L-shape" 3d

Nous considérons le même problème que précédemment mais en considérant deux séries de maillages non structurés. Les maillages sont obtenus via un mailleur automatique (NETGEN), les maillages raffinés présentant un raffinement isotrope le long de l'arête singulière. L'intérêt d'un tel test est de voir le comportement de la méthode sur des maillages raffinés non anisotropes. La figure 3.5 fournit une illustration de ces deux types de maillage. La table 3.2 nous donne les résultats obtenus ( $N$  y désigne toujours le nombre de noeuds du maillage).

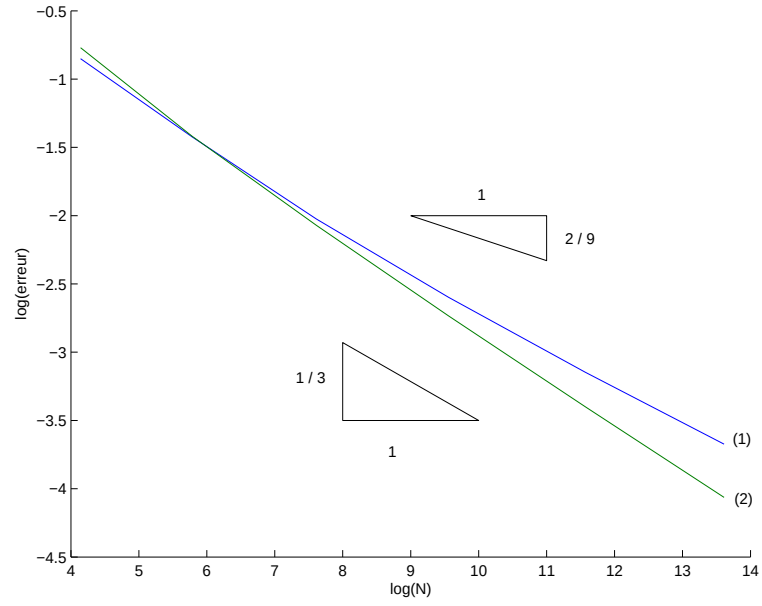


FIG. 3.4 – Taux de convergence de la méthode en fonction de  $N$  pour l'erreur  $|\cdot|_{1,\Omega}$  sur un maillage uniforme (courbe (1)) et un maillage raffiné (courbe (2))

Les figures 3.6 et 3.7 fournissent quant à elles les divers taux de convergence en fonction de  $N$ . Cependant, nous précisons que, pour obtenir ces résultats, nous avons sur-raffiné le maillage au voisinage de l'arête et que nous avons en contre partie déraffiné le maillage loin de l'arête. Nous obtenons donc quantitativement des résultats similaires à ceux obtenus sur la série de maillages précédents. Ceci ne se remarque pas dans les résultats car la solution  $u$  de (3.4.1) a de moins grandes variations si nous sommes "loins" de l'arête.

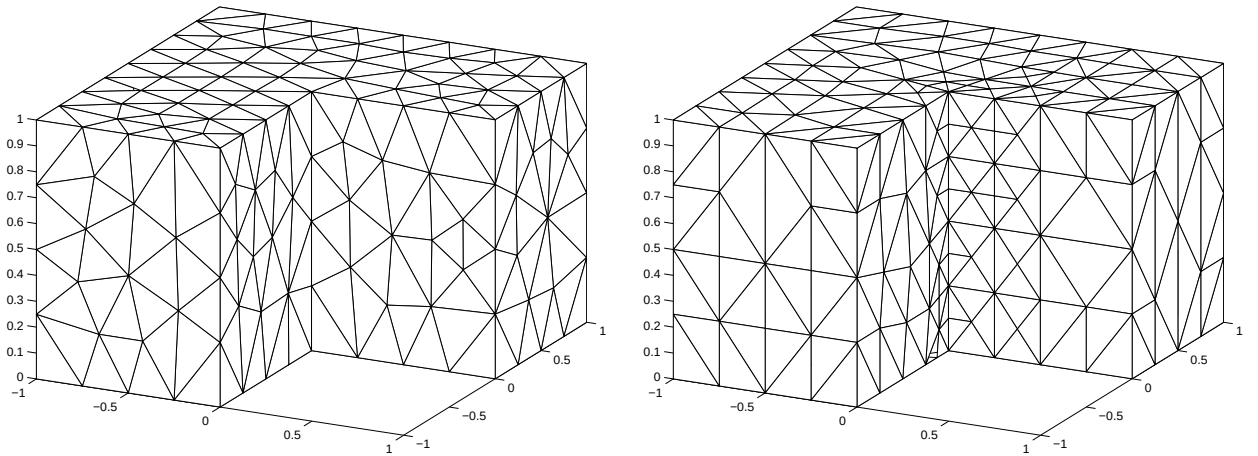
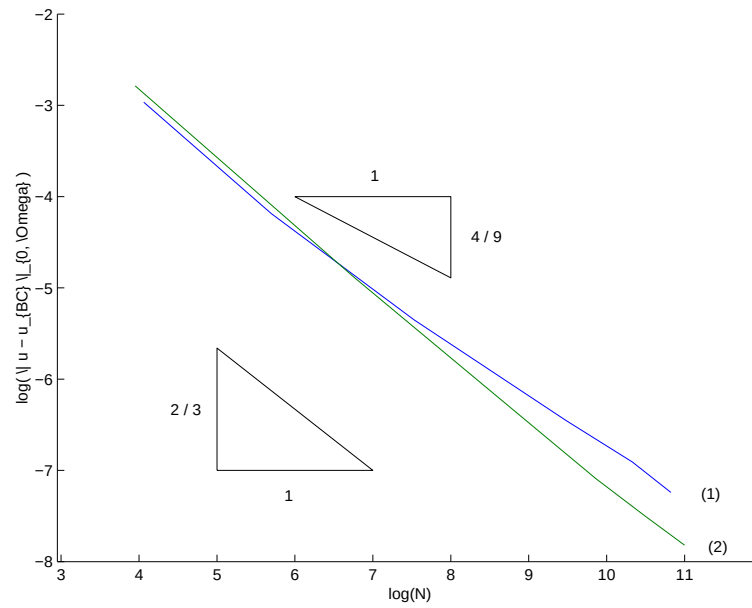


FIG. 3.5 – Exemple de maillage uniforme (à gauche) et de maillage raffiné (à droite)

| $N$   | $\ u - u_{BC}\ _{0,\Omega}$ | $ u - u_{BC} _{1,\Omega}$ |
|-------|-----------------------------|---------------------------|
| 58    | 5,15e-02                    | 3,91e-01                  |
| 298   | 1,52e-02                    | 2,18e-01                  |
| 1867  | 4,74e-03                    | 1,21e-01                  |
| 13141 | 1,57e-03                    | 6,73e-02                  |
| 30593 | 1,00e-03                    | 5,27e-02                  |
| 50155 | 7,16e-04                    | 4,54e-02                  |

| $N$   | $\ u - u_{BC}\ _{0,\Omega}$ | $ u - u_{BC} _{1,\Omega}$ |
|-------|-----------------------------|---------------------------|
| 52    | 6,16e-02                    | 4,68e-01                  |
| 866   | 7,54e-03                    | 1,53e-01                  |
| 3914  | 3,17e-03                    | 1,07e-01                  |
| 19145 | 8,34e-04                    | 5,17e-02                  |
| 35934 | 5,54e-04                    | 4,25e-02                  |
| 59793 | 4,02e-04                    | 3,65e-02                  |

TAB. 3.2 – Résultats pour les maillages uniformes (à gauche) et pour les maillages raffinés (à droite)

FIG. 3.6 – Taux de convergence de la méthode en fonction de  $N$  pour l'erreur  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$  sur un maillage uniforme (courbe (1)) et un maillage raffiné (courbe (2))

### 3.4.3 Tests sur le coin de Fichera

Nous nous plaçons cette fois ci sur le coin de Fichera, c'est à dire  $\Omega := ]-1, +1[^3 \setminus [0, +1[^3$  (voir figure 1.4). Nous considérons alors le problème suivant [2]

$$\begin{cases} -\Delta u = 1/r & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.4.2)$$

où  $r$  désigne la distance à l'origine.

La solution de (3.4.2) présente alors des singularités de coin et d'arête (l'introduction de cette partie expose plus en détails ceci). Nous considérons, tout comme pour les tests précédents, deux séries de maillages : une série de maillages uniformes  $\{T_{unif}^n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  et une série de maillages raffinés  $\{T_{raff}^n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , le maillage uniforme  $T_{unif}^n$  est obtenu comme suit : Nous divisons chaque arête du domaine en  $n$  segments, nous subdivisons alors chaque hexaèdre du maillage ainsi obtenu en 6 tétraèdres. Le maillage raffiné  $T_{raff}^n$  est obtenu en considérant le maillage uniforme  $T_{raff}^n$  auquel nous appliquons la transformation  $\mathcal{H}$  définie cette fois ci par

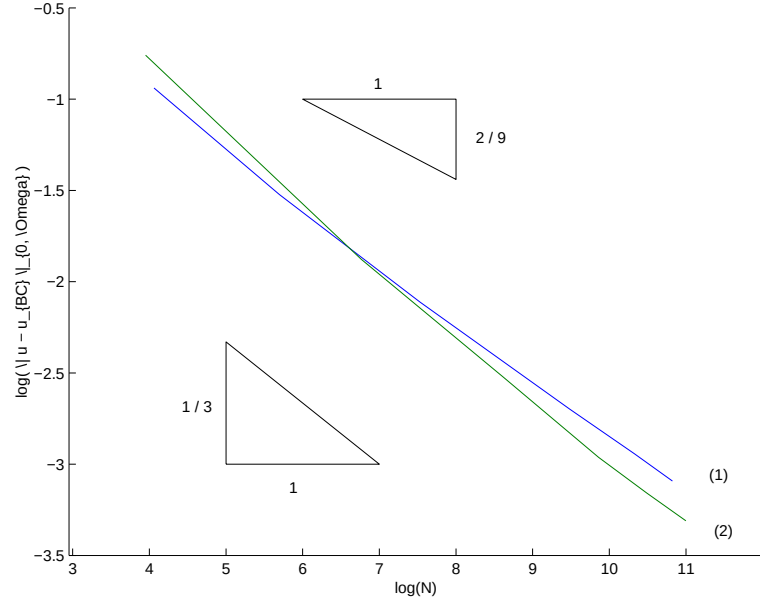


FIG. 3.7 – Taux de convergence de la méthode en fonction de  $N$  pour l'erreur  $|\cdot|_{1,\Omega}$  sur un maillage uniforme (courbe (1)) et un maillage raffiné (courbe (2))

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \quad \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (x,y,z) &\longmapsto (x|x|^{\frac{1}{2}}, y|y|^{\frac{1}{2}}, z|z|^{\frac{1}{2}}) . \end{aligned}$$

La figure 3.8 représente les maillages  $T_{unif}^4$  et  $T_{raff}^4$ .

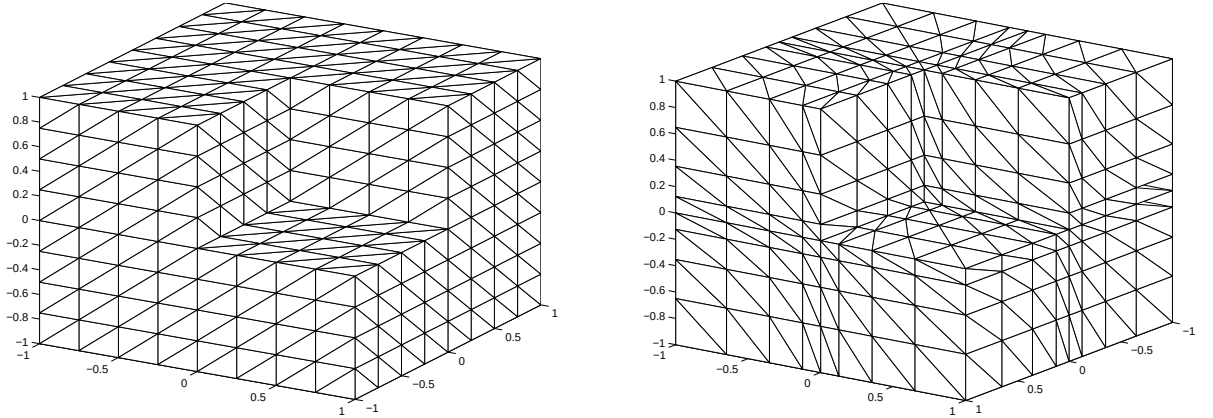
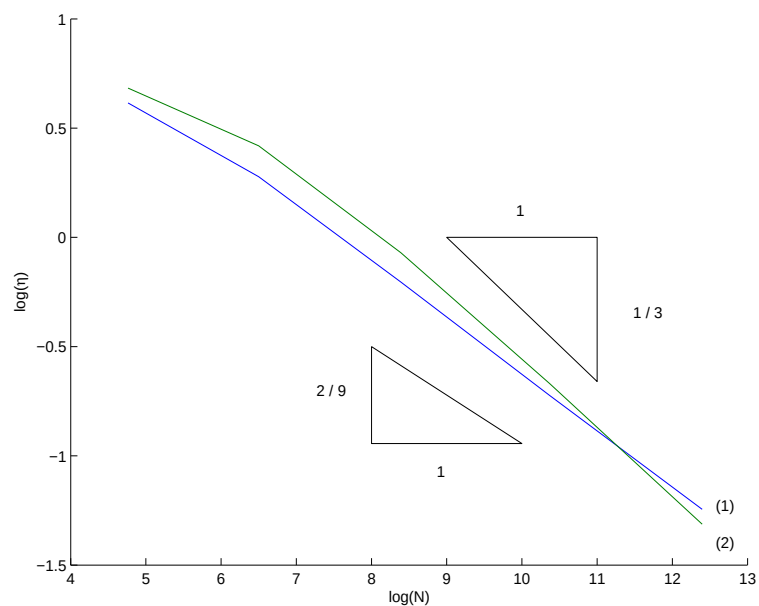


FIG. 3.8 – Exemple de maillage uniforme (à gauche) et de maillage raffiné (à droite) pour  $n = 4$

Pour estimer l'erreur en norme  $|\cdot|_{1,\Omega}$ , nous nous servons d'un estimateur d'erreur, noté  $\eta$  dans la suite de la section, explicité et étudié dans [59, 60] (la solution de 3.4.2 n'étant pas connue). La table 3.3 présente les divers résultats obtenus pour les maillages uniformes et raffinés. Les taux de convergence obtenus sont donnés sur la figure 3.9. Ces tests confirment donc bien que sur ce domaine la méthode d'Eléments-Volumes finis présente un taux de convergence moindre sur un maillage uniforme que sur un maillage judicieusement raffiné.

| $n$ | $N$    | $\eta_{unif}$ | $\eta_{raff}$ |
|-----|--------|---------------|---------------|
| 2   | 117    | $1,85e00$     | $1,98e00$     |
| 4   | 665    | $1,32e00$     | $1,52e00$     |
| 8   | 4401   | $8,15e-01$    | $9,32e-01$    |
| 16  | 31841  | $4,85e-01$    | $5,12e-01$    |
| 32  | 241857 | $2,88e-01$    | $2,69e-01$    |

TAB. 3.3 – Résultats pour les deux séries de maillages

FIG. 3.9 – Taux de convergence de l'estimateur  $\eta$  en fonction de  $N$  sur un maillage uniforme (courbe (1)) et un maillage raffiné (courbe (2))

## Chapitre 4

# Méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme et singularités en dimension trois

Nous considérons toujours le problème (1.4.1) que nous allons discrétiser à l'aide de la méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme. Notre but est de montrer, dans le cas où  $\Omega$  est non convexe, comment un raffinement de maillage judicieux permet de restaurer l'ordre de convergence optimal de la méthode.

### 4.1 Notations-Définitions

Nous nous donnons les mêmes notations et conventions qu'à la section précédente.

Le maillage primal  $T_h$  est toujours constitué de tétraèdres. Cependant, le maillage dual est construit de la manière suivante :

Pour  $K \in T_h$  et  $\sigma \in F_h(K)$ , nous définissons la sous-boîte  $b_{\sigma,K}$  par

$$b_{\sigma,K} := \{ t z_K + (1 - t) x : t \in [0,1], x \in \sigma \},$$

où  $z_K$  désigne le barycentre de  $K$  (voir figure 4.1).

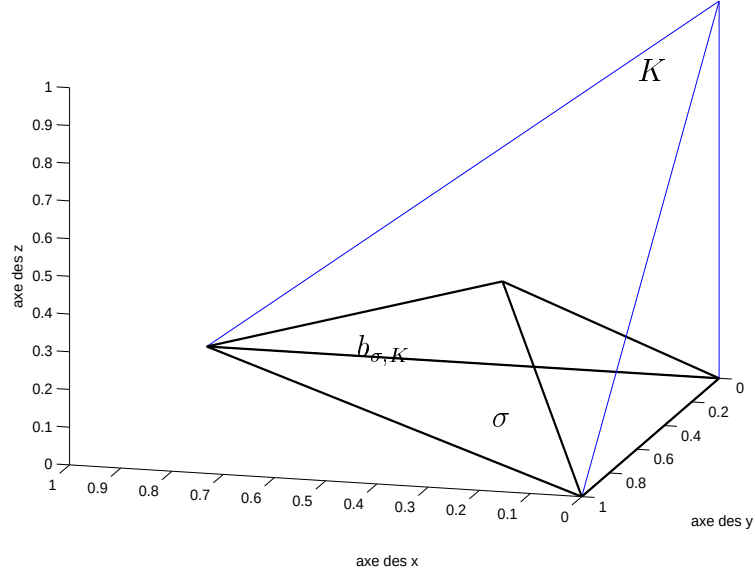


FIG. 4.1 – Illustration d'une sous-boîte  $b_{\sigma,K}$  pour  $\sigma \in F_h(K)$ ,  $K \in T_h$

Une boîte  $b_\sigma$  est alors définie par

$$b_\sigma := \bigcup_{K : \sigma \in F(K)} b_{\sigma,K}.$$

Le maillage dual  $B_h$  est alors constitué par l'ensemble des boîtes  $\{b_\sigma\}_{\sigma \in F_h}$ , c'est à dire

$$B_h := \{ b_\sigma : \sigma \in F_h \}.$$

En outre, pour  $\sigma \in F_h$ , nous définissons  $\mathbf{n}_\sigma$  comme la normale unitaire sortante à  $b_\sigma$  sur sa frontière.

Nous définissons en dernier lieu les différents espaces fonctionnels entrant en jeu, plus précisément

$$\begin{aligned} - S_h &:= \{ v_h \in P^1(T_h) : \int_\sigma v_h|_K ds = \int_\sigma v_h|_L ds, \forall \sigma \in F_h \text{ telle que } \sigma = \bar{K} \cap \bar{L}, K, L \in T_h \} \\ - S_h^0 &:= \{ v_h \in S_h : \int_\sigma v_h ds = 0, \forall \sigma \in F_h \text{ telle que } \sigma \subset \partial\Omega \}. \end{aligned}$$

Ces espaces n'étant pas inclus dans  $H^1(\Omega)$ , nous devons définir un "équivalent" de la semi-norme  $|\cdot|_{1,\Omega}$ , nous posons donc :

$$|\cdot|_{1,h} : S_h + H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$v_h \longmapsto \left( \sum_{K \in T_h} \|\nabla v_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}.$$

Enfin, pour tout  $v_h \in S_h$ , nous associons  $\bar{v}_h \in IP^0(B_h)$  définie par :



$$\bar{v}_h := \sum_{\sigma \in F_h} \mathcal{M}_\sigma^0(v_h) \mathbb{1}_{b_\sigma},$$

où, pour  $\sigma \in F_h$  et  $v \in L^2(\sigma)$ ,  $\mathcal{M}_\sigma^0(v)$  est défini comme la  $L^2(\sigma)$ -projection de  $v$ .

## 4.2 Schéma numérique

Le principe de la méthode est similaire à celui de la méthode d'Éléments-Volumes Finis conforme, à savoir que nous intégrons la première équation de (1.4.1) sur  $b_\sigma$ ,  $\sigma \in F_h$  et appliquons la formule de Green au membre de gauche ainsi obtenu, d'où

$$-\int_{\partial b_\sigma} \nabla u \cdot \mathbf{n}_\sigma \, ds = \int_{b_\sigma} f \, dx, \forall \sigma \in F_h. \quad (4.2.1)$$

La méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme consiste donc à trouver  $u_{BN} \in S_h^0$  telle que

$$-\int_{\partial b_\sigma} \nabla u_{BN} \cdot \mathbf{n}_\sigma \, ds = \int_{b_\sigma} f \, dx, \forall \sigma \in F_h. \quad (4.2.2)$$

Afin de reformuler (4.2.2), nous énonçons alors la

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $T_h$  un maillage tétraédrique de  $\Omega$ .*

*Soient, pour  $\sigma_1$  et  $\sigma_2 \in F_h$ ,  $\phi_{\sigma_1}$  et  $\phi_{\sigma_2}$  deux fonctions de base de l'espace  $S_h$  (c'est à dire  $IP^1$  par morceaux sur  $T_h$  et dont la moyenne sur la face  $\sigma_1$ , ou la face  $\sigma_2$ , vaut 1, la moyenne sur les autres faces de  $F_h$  étant nulle).*

*Nous avons alors*

$$-\int_{\partial b_{\sigma_1}} \nabla \phi_{\sigma_2} \cdot \mathbf{n}_{\sigma_1} \, ds = \int_{\Omega} \nabla \phi_{\sigma_1} \cdot \nabla \phi_{\sigma_2} \, dx.$$

La proposition précédente nous permet alors de reformuler le problème (4.2.2) par : Trouver  $u_{BN} \in S_h^0$  telle que

$$\int_{\Omega} \nabla u_{BN} \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f \bar{v}_h \, dx, \forall v_h \in S_h^0. \quad (4.2.3)$$

## 4.3 Rappel de la majoration d'erreur dans le cas régulier ( $u \in H^2(\Omega)$ )

Nous allons donner une majoration d'erreur entre la solution  $u$  de (1.4.1) et la solution  $u_{BN}$  de (4.2.3) dans le cas où  $u \in H^2(\Omega)$ . Dans ce but, nous donnons deux équivalents aux lemmes 3.3.1 et 3.3.2.

**Lemme 4.3.1.** *Soit  $v_h \in S_h$ . Nous avons alors :*

$$\int_K v_h \, dx = \int_K \bar{v}_h \, dx, \forall K \in T_h.$$

Preuve: Se déduit de la même manière que le lemme 3.3.1 .

■

**Lemme 4.3.2.** *Soit  $T_h$  un maillage de  $\Omega$  de pas  $h > 0$  vérifiant l'hypothèse (H). Considérons de plus  $v_h \in S_h$ . Nous avons alors :*

$$\|v_h - \bar{v}_h\|_{0,\Omega} \lesssim h |v_h|_{1,h} .$$

Preuve: Se déduit de la même manière que le lemme 3.3.2.

■

Donnons alors le

**Théorème 4.3.3.** *Soient  $u \in H^2(\Omega)$  la solution de (1.4.1) et  $u_{BN} \in S_h^0$  la solution de (4.2.3). Nous avons alors :*

$$\left\{ \begin{array}{l} |u - u_{BN}|_{1,h} \lesssim N^{-1/3} , \\ \|u - u_{BN}\|_{0,\Omega} \lesssim N^{-2/3} . \end{array} \right.$$

où  $N$  désigne le nombre de faces du maillage (qui correspond au nombre de degrés de liberté de la méthode).

Preuve: L'estimée du théorème se déduit aisément en utilisant la majoration d'erreur entre  $u$  et  $u_h$ , son approximation par la méthode des Éléments Finis, ainsi que les lemmes 4.3.1 et 4.3.2.

■

## 4.4 Essais numériques

Nous pratiquons uniquement un test sur le "L-shaped" 3d. Soit  $\Omega := ]-1, +1[ \times ]0, +1[ \times ]0, +1[$ . Nous considérons le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega , \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega , \end{array} \right. \quad (4.4.1)$$

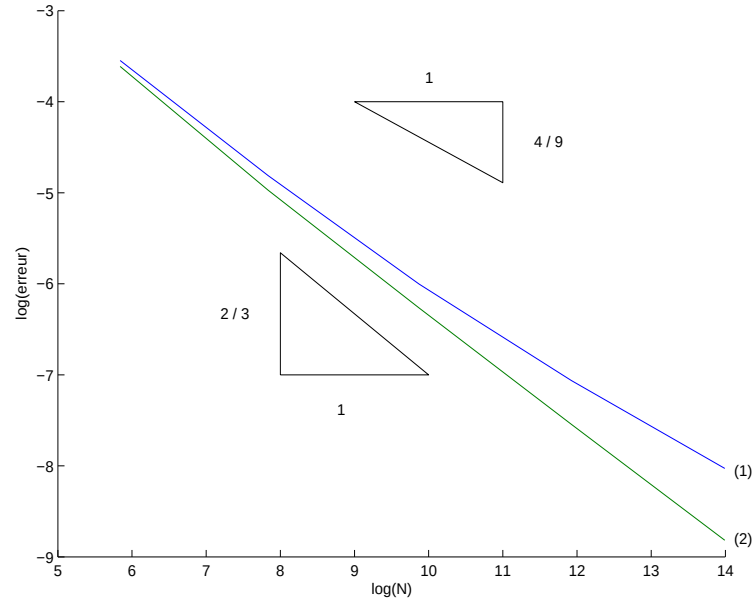
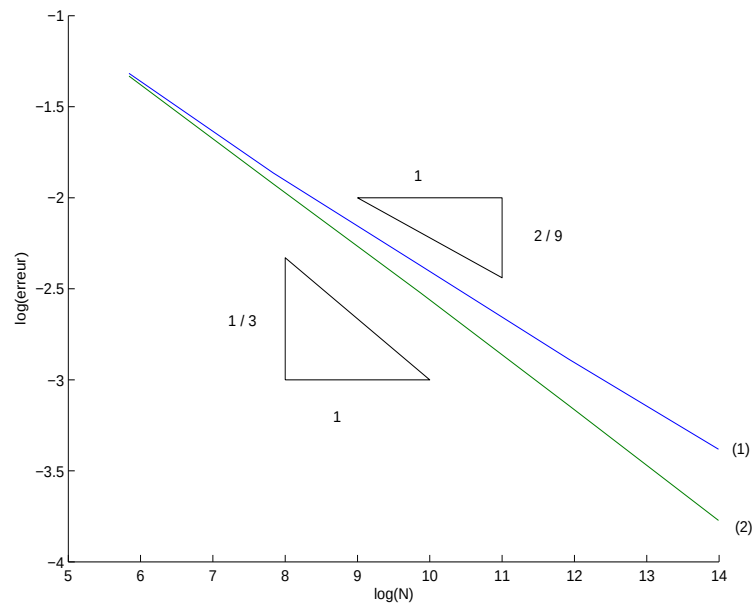
où  $g$  est calculée de telle manière à ce que la solution de (4.4.1) soit donnée par

$$u(r, \theta, z) := z r^{2/3} \sin(2\theta/3) .$$

Nous implémentons le système issu de (4.2.3) sur les mêmes maillages (uniformes et raffinés) que pour les premiers tests numériques de la sous-partie précédente (voir la figure 3.2 pour une illustration). Le tableau 4.1 fournit les divers résultats obtenus ( $N$  y désigne le nombre de faces du maillage), les figures 4.2 et 4.3 illustrent quant à elles les différents taux de convergence obtenus sur les deux séries de maillages uniformes et raffinés. Ces figures illustrent bien la nécessité d'utiliser un maillage raffiné par rapport à un maillage uniforme afin d'améliorer l'ordre de convergence de la méthode d'Eléments-Volumes Finis non conforme.

| $n$ | $N$     | Maillage uniforme           |                      | Maillage raffiné            |                      |
|-----|---------|-----------------------------|----------------------|-----------------------------|----------------------|
|     |         | $\ u - u_{BN}\ _{0,\Omega}$ | $ u - u_{BN} _{1,h}$ | $\ u - u_{BN}\ _{0,\Omega}$ | $ u - u_{BN} _{1,h}$ |
| 2   | 344     | $2,88e-02$                  | $2,68e-01$           | $2,70e-02$                  | $2,64e-01$           |
| 4   | 2528    | $8,13e-03$                  | $1,55e-01$           | $6,93e-03$                  | $1,46e-01$           |
| 8   | 19328   | $2,47e-03$                  | $9,23e-02$           | $1,90e-03$                  | $8,03e-02$           |
| 16  | 151040  | $8,56e-04$                  | $5,57e-02$           | $5,29e-04$                  | $4,32e-02$           |
| 32  | 1193984 | $3,26e-04$                  | $3,40e-02$           | $1,48e-04$                  | $2,30e-02$           |

TAB. 4.1 – Résultats pour les deux séries de maillages

FIG. 4.2 – Taux de convergence de la méthode en fonction de  $N$  pour l'erreur  $\| \cdot \|_{0,\Omega}$  sur un maillage uniforme (courbe (1)) et un maillage raffiné (courbe (2))FIG. 4.3 – Taux de convergence de la méthode en fonction de  $N$  pour l'erreur  $| \cdot |_{1,h}$  sur un maillage uniforme (courbe (1)) et un maillage raffiné (courbe (2))



## Chapitre 5

# Estimateur a-posteriori pour la méthode de Volumes Finis centrée cellule en 3D

Cette partie a pour but d'introduire et de tester numériquement un estimateur a-posteriori pour la méthode de Volumes Finis centrée cellule appliquée au problème de Laplace en 3D sur des maillages admissibles [52] isotropes ou anisotropes. En effet, dans le cadre de la section 2, l'introduction d'un estimateur a-posteriori (afin de quantifier l'erreur commise lorsque nous ne connaissons pas la solution du problème) s'est révélée indispensable. Nous donnons dans un premier temps quelques définitions et notations puis introduisons l'estimateur en question. Nous effectuons enfin quelques tests numériques.

### 5.1 Notations-Définitions

Soit  $\Omega$  un ouvert polygonal de  $\mathbb{R}^3$ . Introduisons  $\tau := (\mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$  un maillage admissible de  $\mathbb{R}^3$  [52], où

- $\mathcal{V}$  représente l'ensemble des Volumes de Contrôle de  $\tau$  qui seront dans notre cas toujours des hexaèdres (une généralisation à des Volumes de Contrôle tétraédriques est possible),
- $\mathcal{P} := \{x_K\}_{K \in \mathcal{V}}$  désigne un ensemble de points tel que chaque point soit inclus dans un et un seul Volume de Contrôle,
- $\mathcal{F}$  dénote l'ensemble des faces des Volumes de Contrôle du maillage  $\tau$ .

Nous soulignons le fait que ce maillage doit vérifier une condition d'orthogonalité explicitée dans [52]. Très brièvement, rappelons que cette condition stipule que pour une face interne  $\sigma = \bar{K} \cap \bar{L}$ , où  $K$  et  $L$  désignent deux Volumes de Contrôle, alors  $(x_K, x_L)$  doit être orthogonal à  $\sigma$ . Introduisons de plus

- $\mathcal{F}_K :=$  l'ensemble des faces du Volume de Contrôle  $K \in \mathcal{V}$ ,
- $\mathcal{S} :=$  l'ensemble des noeuds du maillage  $\tau$ ,
- $\mathcal{S}_K :=$  l'ensemble des sommets du Volume de Contrôle  $K \in \mathcal{V}$ ,
- $\mathcal{V}_P :=$  l'ensemble des Volumes de Contrôle  $K$  tels que  $P \in \mathcal{S}_K$ ,  $K \in \mathcal{V}$ ,
- $\mathbf{n}_{K,\sigma} :=$  la normale unitaire sortante au Volume de Contrôle  $K$  sur  $\sigma \in \mathcal{F}_K$ ,  $K \in \mathcal{V}$ ,
- $\omega_K :=$  l'ensemble des Volumes de Contrôle ayant une face commune avec  $K \in \mathcal{V}$ ,
- $|\cdot|_{1,h} := \left( \sum_{K \in \mathcal{V}} |\cdot|_{1,K}^2 \right)^{1/2} := \left( \sum_{K \in \mathcal{V}} \sum_{i=1}^3 \|D_i \cdot\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}$ ,
- $\chi(\tau) :=$  l'ensemble des fonctions constantes par morceaux sur le maillage  $\tau$ .

Considérons alors le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$ .

Nous introduisons la solution approchée de (5.1.1) par la méthode de Volumes Finis centrée cellule. Posons donc  $u_\tau \in \chi(\tau)$  la solution du système suivant

$$-\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} F_{K,\sigma}(u_\tau) = \int_K f \, dx, \quad \forall K \in \mathcal{V}, \quad (5.1.2)$$

où, pour  $v_h \in \chi(\tau)$ ,  $\sigma \in \mathcal{F}_K$ ,  $K \in \mathcal{V}$ ,

$$F_{K,\sigma}(v_h) := \begin{cases} \frac{u_L - u_K}{d(x_K, x_L)} & \text{si il existe } L \in \mathcal{V} \text{ tels que } \sigma = \bar{K} \cap \bar{L}, \\ \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma g \, ds - u_K & \text{si } \sigma \subset \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

*Remarque 5.1.1.* Le système (5.1.2) admet une unique solution  $u_\tau \in \chi(\tau)$ .

## 5.2 Introduction de l'estimateur

### 5.2.1 Interpolé

Il nous faut tout d'abord introduire un interpolé  $I_M u_\tau$  construit à partir de la solution  $u_\tau$  de (5.1.2) approchant mieux la solution  $u$  de (5.1.1). Le principe de construction de cet interpolé est le suivant : Soit  $\sigma \in \mathcal{F}_K$ ,  $K \in \mathcal{V}$ .  $F_{K,\sigma}(u_\tau)$  fournit alors une approximation du flux de  $u$  à travers  $\sigma$  extérieurement à  $K$ . L'idée est donc de construire l'interpolé  $I_M u_\tau$  de telle sorte à ce que le flux de celui ci sur  $\sigma$  soit égal à  $F_{K,\sigma}(u_\tau)$ . C'est sur l'erreur entre  $I_M u_\tau$  et  $u$  que va porter l'estimateur d'erreur que nous introduirons.

Soit  $\tau$  le maillage introduit précédemment,  $u$  la solution de (5.1.1) et  $u_\tau$  la solution de (5.1.2). Introduisons de plus l'élément de référence (tétraédrique ou hexaédrique)  $\hat{K}$  et  $M$  une base de fonctions de  $\hat{K}$  (nous restons à ce stade volontairement vague sur l'expression de  $M$ ).

Nous désignons alors par  $I_M u_\tau$  l'unique fonction de  $\Omega$  vers  $\mathbb{R}$  vérifiant pour tout  $K \in \mathcal{V}$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_M u_\tau \in [M]_{vect} , \\ \int_{\sigma} \nabla I_M u_\tau \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} ds = |\sigma| F_{K,\sigma} , \forall \sigma \in \mathcal{F}_K , \\ \text{pour } P \in \mathcal{S}_K, I_M u_\tau(P) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{L \in \mathcal{V}_P} \lambda_P^L u_\tau(x_L) \text{ si } P \in \Omega , \\ g(P) \text{ si } P \in \partial\Omega . \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.2.1)$$

où, pour  $P \in \mathcal{N}$ ,  $\{\lambda_P^L\}_{L \in \mathcal{V}_P}$  est déterminé de manière à produire une approximation au sens des moindres carrés (voir remarque 5.2.3).

*Remarque 5.2.1.* Nous commettons un léger abus de notation en écrivant " $I_M u_\tau \in M$ " (nous devrions plutôt faire appel au changement de base  $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ ), ceci afin d'alléger les notations.

*Remarque 5.2.2.* Il est clair que l'existence de l'interpolé  $I_M u_\tau$  dépend de l'adéquation entre le nombre de contraintes et le nombre d'éléments de la base  $M$ .

*Remarque 5.2.3.* Nous donnons, pour  $P \in \mathcal{N}$ , une expression des poids  $\{\lambda_P^L\}_{L \in \mathcal{V}_P}$  dont il est question dans la définition précédente. Précisons que ces poids sont une adaptation tridimensionnelle des poids donnés dans [27]. Soit  $P \in \mathcal{N}$  et  $K \in \mathcal{V}_P$ . Nous définissons  $\lambda_P^K$  le poids de l'interpolation de  $K$  en  $P$  par

$$\lambda_P^K := \left( \begin{array}{cccc} |\mathcal{V}_P| & R_1^P & R_2^P & R_3^P \\ R_1^P & I_{1,1}^P & I_{1,2}^P & I_{1,3}^P \\ R_2^P & I_{2,1}^P & I_{2,2}^P & I_{2,3}^P \\ R_3^P & I_{3,1}^P & I_{3,2}^P & I_{3,3}^P \end{array} \right)^{-1} \left( \begin{array}{c} 1 \\ x_K^1 \\ x_K^2 \\ x_K^3 \end{array} \right),$$

où

$$\begin{aligned}
- R_i^P &:= \sum_{L \in \mathcal{V}_P} (x_L^i - x_P^i) , \forall i \in \{1, 2, 3\} , \\
- I_{i,j}^P &:= \sum_{L \in \mathcal{V}_P} (x_L^i - x_P^i) (x_L^j - x_P^j) , \forall i, j \in \{1, 2, 3\} , \\
- x_L &= \begin{pmatrix} x_L^1 \\ x_L^2 \\ x_L^3 \end{pmatrix} , L \in \mathcal{V}_P , P \in \mathcal{N} , \\
- x_P &= \begin{pmatrix} x_P^1 \\ x_P^2 \\ x_P^3 \end{pmatrix} , P \in \mathcal{N} .
\end{aligned}$$

### 5.2.2 Estimateur

Nous donnons à présent l'expression de l'estimateur d'erreur utilisé. Dans ce but, introduisons

$$\begin{aligned}
r_K &:= f + \Delta I_M u_\tau , \forall K \in \mathcal{V} , \\
r_\sigma &:= \begin{cases} \|\nabla(I_M u_\tau|_K - I_M u_\tau|_L) \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma}\|_{0,\sigma} \\ \text{si ils existent } K, L \in \mathcal{V} \text{ tels que } \sigma = \bar{K} \cap \bar{L} , \\ 0 \text{ sinon ,} \end{cases} \\
s_\sigma &:= \begin{cases} \|\nabla(I_M u_\tau|_K - I_M u_\tau|_L) \wedge \mathbf{n}_{K,\sigma}\|_{0,\sigma} \\ \text{si ils existent } K, L \in \mathcal{V} \text{ tels que } \sigma = \bar{K} \cap \bar{L} , \\ \|\nabla(I_M u_\tau|_K - g) \wedge \mathbf{n}_{K,\sigma}\|_{0,\sigma} \text{ si } \sigma \subset \partial\Omega . \end{cases}
\end{aligned}$$

L'estimateur  $\eta_K$  sur un Volume de Contrôle  $K$  est alors défini par

$$\eta_K := h_{min,K} \left( \|r_K\|_{0,K}^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \frac{\|r_\sigma\|_{0,\sigma}^2 + \|s_\sigma\|_{0,\sigma}^2}{|\sigma|} \right)^{\frac{1}{2}} , \quad (5.2.2)$$

où  $h_{min,K} := \min_{\sigma \in \mathcal{F}_K} \frac{|K|}{|\sigma|}$  désigne la hauteur minimale du Volume de Contrôle  $K$ . L'estimateur d'erreur global  $\eta$  s'écrit quant à lui :

$$\eta := \left( \sum_{K \in \mathcal{V}} \eta_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.2.3)$$



*Remarque 5.2.4.* L'estimateur (5.2.2)-(5.2.3) est en fait une adaptation tridimensionnelle de l'estimateur introduit dans [82, 83]. Nous nous sommes pour cela aidés des travaux de [59, 60] qui présente un estimateur a-posteriori pour une méthode d'Éléments Finis en dimension trois.

Nous donnons à présent deux estimées standards aux méthodes a-posteriori. Ces deux estimées traduisent l'équivalence entre l'estimateur d'erreur construit précédemment et l'erreur  $|\cdot|_{1,h}$  entre  $u$  et  $I_M u_\tau$ .

**Théorème 5.2.1.** *Soit  $u$  la solution de (5.1.1). Nous nous donnons  $\tau = (\mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$  un maillage admissible et  $u_\tau$  la solution de (5.1.2). Considérons de plus  $I_M u_\tau$  l'interpolé construit, à partir de  $u_\tau$ , grâce à (5.2.1).*

*Nous avons alors*

$$|u - I_M u_\tau|_{1,h} \lesssim \eta + \xi ,$$

$$\eta_K \lesssim |u - I_M u_\tau|_{1,\omega_K} + \xi_K , \forall K \in \mathcal{V} ,$$

avec  $\xi := \left( \sum_{K \in \mathcal{V}} \xi_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  où  $\xi_K$ ,  $K \in \mathcal{V}$ , est un résidu dont nous nous permettons de ne pas détailler l'expression.

Preuve:

Voir [82, 59, 60].

### 5.3 Essais numériques

Pour les essais numériques, nous nous sommes placés sur divers domaines (cube unité et "L-shaped" 3d) en ne considérant que des Volumes de Contrôle hexaédriques. La base  $M$  choisie s'exprime alors, sur le cube de référence  $\hat{K}$ , comme suit :

$$M := \mathbb{Q}^2(\hat{K}) \cup \{x^3, y^3, z^3\} .$$

*Remarque 5.3.1.* Nous vérifions au passage que la dimension de  $M$  et le nombre de contraintes (données par (5.2.1)) sont bien égaux et valent 14.

Le but des essais numériques est de valider les estimées du théorème 5.2.1, la ligne directrice de ceux ci consistera donc, pour un maillage  $\tau := (\mathcal{V}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$  donné, à calculer  $u_\tau$  la solution de (5.1.2), à construire l'interpolé  $I_M u_\tau$  dont il a été question précédemment puis à implémenter les quantités suivantes

$$q_{up} := \frac{|u - I_M u_\tau|_{1,h}}{(\eta^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} ,$$

$$q_{low} := \max_{K \in \mathcal{V}} \frac{\eta_K}{(|u - I_M u_\tau|_{1,\omega_K}^2 + \xi_K^2)^{\frac{1}{2}}} .$$

### 5.3.1 Solution régulière

Nous nous plaçons sur  $\Omega := ]0,1[^3$  et considérons le problème (5.1.1) où la fonction  $f$  est calculée de telle manière à ce que la solution  $u$  soit donnée par

$$u(x,y,z) := x(1-x)y(1-y)z(1-z) .$$

Clairement  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ . Nous considérons en outre une série de maillage  $\tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , avec

- $\mathcal{V}_n :=$  L'ensemble des hexaèdres formés par la coupe de chaque arête de  $\Omega$  en  $n$  segments (voir figure 5.1),
- $\mathcal{P}_n := \{x_K\}_{K \in \mathcal{V}}$ , où, pour  $K \in \mathcal{V}_n$ ,  $x_K$  désigne le barycentre de  $K$ ,
- $\mathcal{F}_n :=$  L'ensemble des faces des Volumes de Contrôle.

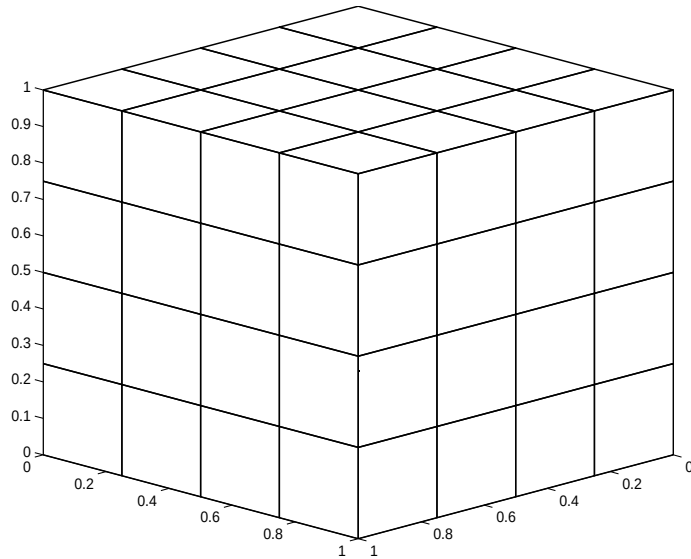
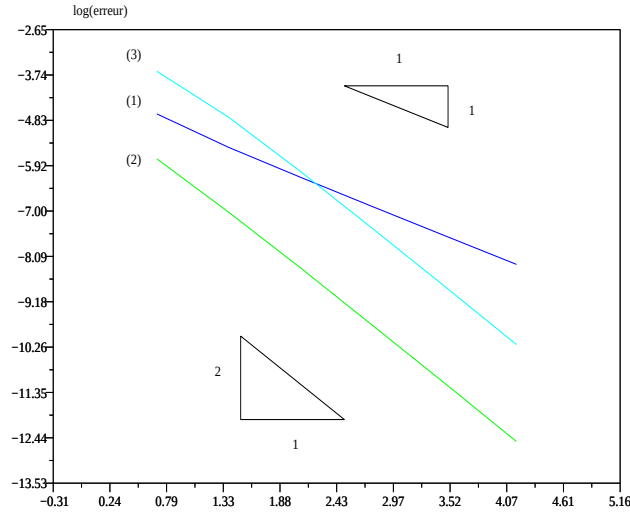


FIG. 5.1 – Illustration du maillage utilisé pour  $n = 4$

Constatons que les maillages utilisés sont uniformes. Pour  $n = 2, 4, 8, 16, 32$  et  $64$ , nous implémentons le système (5.1.2), déterminons  $u_\tau$  et  $I_M u_\tau$  puis calculons diverses erreurs ainsi que les estimateurs d'erreur locaux  $\{\eta_K\}_{K \in \mathcal{V}_n}$ . Ces résultats sont présentés dans la table 5.1. Les figures 5.2 et 5.3 illustrent divers taux de convergence obtenus, tandis que la figure 5.4 nous donne  $q_{low}$  et  $q_{up}$  en fonction de  $n$ .

| $n$ | $\ u - u_\tau\ _{0,\Omega}$ | $\ u - I_M u_\tau\ _{0,\Omega}$ | $ u - I_M u_\tau _{1,h}$ | $\eta$    | $q_{up}^n$ | $q_{low}^n$ |
|-----|-----------------------------|---------------------------------|--------------------------|-----------|------------|-------------|
| 2   | $9,32e-3$                   | $3,18e-3$                       | $2,59e-2$                | $1,55e-1$ | 0.1646     | 1.9675      |
| 4   | $4,18e-3$                   | $8,82e-4$                       | $8,60e-3$                | $5,61e-2$ | 0.1529     | 2.7416      |
| 8   | $2,04e-3$                   | $2,32e-4$                       | $2,34e-3$                | $1,57e-2$ | 0.1493     | 2.9350      |
| 16  | $1,01e-3$                   | $5,87e-5$                       | $5,98e-4$                | $4,03e-3$ | 0.1484     | 3.0029      |
| 32  | $5,05e-4$                   | $1,47e-5$                       | $1,50e-4$                | $1,02e-3$ | 0.1480     | 3.0141      |
| 64  | $2,53e-4$                   | $3,63e-6$                       | $3,71e-5$                | $2,54e-4$ | 0.1459     | 3.0024      |

TAB. 5.1 – Résultats pour le premier test

FIG. 5.2 – Vitesse de convergence de  $\|u - u_\tau\|_{0,\Omega}$  (courbe (1)),  $\|u - I_M u_\tau\|_{0,\Omega}$  (courbe (2)) et  $|u - I_M u_\tau|_{1,h}$  (courbe (3))

### 5.3.2 Solution singulière sur un maillage uniforme

Pour le second test, nous nous plaçons sur le "L-shaped" 3d, c'est à dire  $\Omega := ]-1,1[ \setminus ]0,1[ \times ]-1,0[ \times ]0,1[$ . Nous considérons alors le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.3.1)$$

où  $g$  est calculée de telle manière à ce que la solution  $u$  soit donnée par

$$u(r, \theta, z) := z r^{2/3} \sin(2\theta/3),$$

avec  $(r, \theta, z)$  les coordonnées cylindriques standards. Il est alors bien connu que  $u$  va présenter un comportement singulier le long de l'axe  $(Oz)$  [2, 31], ce comportement singulier se caractérisant par le fait que  $u \notin H^2(\Omega)$ . De plus, ce comportement singulier est dit anisotrope dans le sens où la dérivée de  $u$  par rapport à  $x$  et à  $y$  n'est pas incluse dans  $H^2(\Omega)$  mais que la dérivée par rapport à  $z$  elle est incluse dans  $H^2(\Omega)$ . En conséquence,

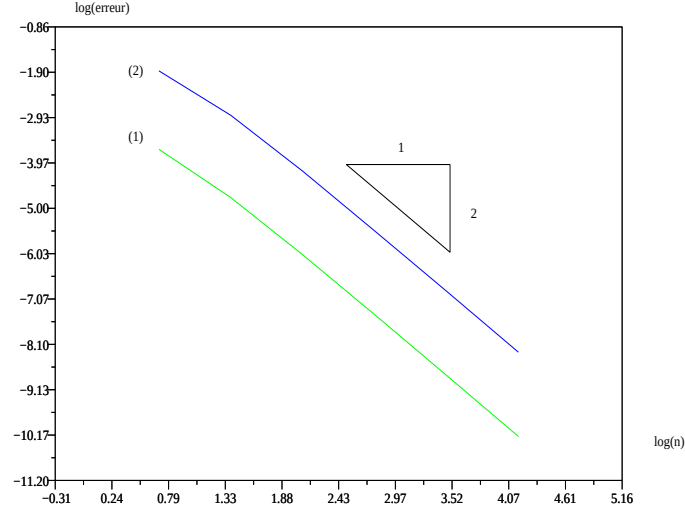


FIG. 5.3 – Vitesse de convergence de  $|u - I_M u_\tau|_{1,h}$  (courbe (1)) et  $\eta$  (courbe (2))

si nous utilisons un maillage uniforme, nous observerons une baisse du taux de convergence de la méthode de Volumes Finis centrée cellule (tout comme pour les méthodes d'Éléments Finis), ce test est donc idéal pour mesurer l'efficacité de l'estimateur d'erreur.

Nous introduisons donc à ce stade une série de maillage  $\tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , où

- $\mathcal{V}_n$  est illustré, pour  $n = 4$ , sur la figure 5.5,
- $\mathcal{P}_n := \{x_K\}_{K \in \mathcal{V}}$ , où, pour  $K \in \mathcal{V}_n$ ,  $x_K$  désigne comme précédemment le barycentre de  $K$ ,
- $\mathcal{F}_n$  est l'ensemble des faces des Volumes de Contrôle.

La triangulation introduite est donc uniforme. Tout comme pour le test précédent, nous donnons les résultats numériques obtenus (voir table 5.2), ainsi que divers taux de convergence obtenus (voir figures 5.6 et 5.7). La figure 5.8 nous fournit quant à elle les quantités  $q_{low}$  et  $q_{up}$  en fonction de  $n$ .

| $n$ | $\ u - u_\tau\ _{0,\Omega}$ | $\ u - I_M u_\tau\ _{0,\Omega}$ | $ u - I_M u_\tau _{1,h}$ | $\eta$    | $q_{up}^n$ | $q_{low}^n$ |
|-----|-----------------------------|---------------------------------|--------------------------|-----------|------------|-------------|
| 2   | $3,19e-1$                   | $1,54e-2$                       | $1,92e-1$                | $5,71e-1$ | 0.3365     | 2.2225      |
| 4   | $1,60e-1$                   | $5,20e-3$                       | $1,21e-1$                | $3,75e-1$ | 0.3241     | 3.1818      |
| 8   | $8,03e-2$                   | $2,10e-3$                       | $7,84e-2$                | $2,43e-1$ | 0.3228     | 3.2962      |
| 16  | $4,01e-2$                   | $9,10e-4$                       | $5,05e-2$                | $1,56e-1$ | 0.3238     | 3.1978      |
| 32  | $2,01e-2$                   | $3,89e-4$                       | $3,22e-2$                | $9,93e-2$ | 0.3248     | 3.0926      |
| 60  | $1,28e-2$                   | $2,21e-4$                       | $2,41e-2$                | $7,41e-2$ | 0.3255     | 3.0918      |

TAB. 5.2 – Résultats pour le second test

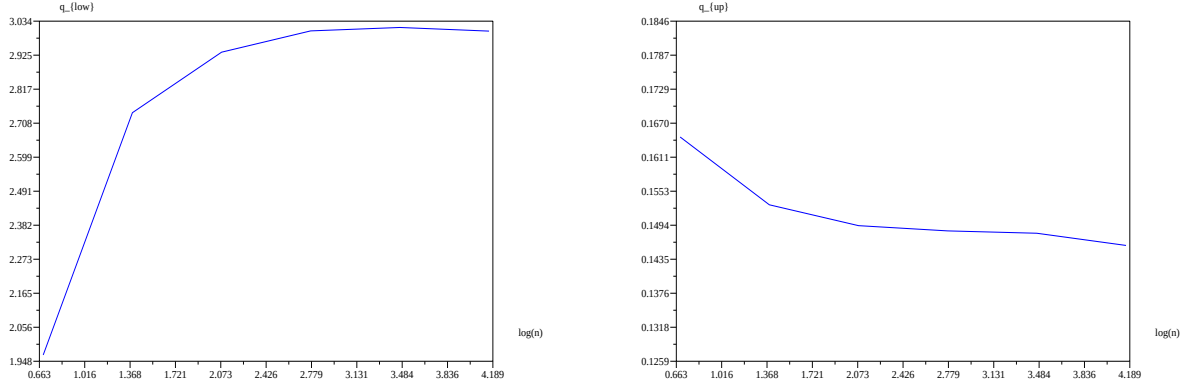


FIG. 5.4 –  $q_{low}$  (à gauche) et  $q_{up}$  (à droite) en fonction du  $\log(n)$

### 5.3.3 Solution singulière sur un maillage raffiné

Nous nous plaçons sur le même domaine  $\Omega$  que pour le test précédent, c'est à dire  $\Omega := (]-1,1[ \setminus ]0,1[ \times ]-1,0]) \times ]0,1[$ .

Nous considérons alors sur ce domaine  $\Omega$  le même problème que dans le test précédent, mais nous allons cette fois ci utiliser un maillage raffiné afin de traiter la singularité suivant l'axe  $(Oz)$ . Plus précisément, nous nous donnons le même maillage  $\tau_n$  que pour le test précédent; Cependant nous appliquons la transformation  $\mathcal{H}$  à chaque noeud de ce maillage, où  $\mathcal{H}$  est donnée par

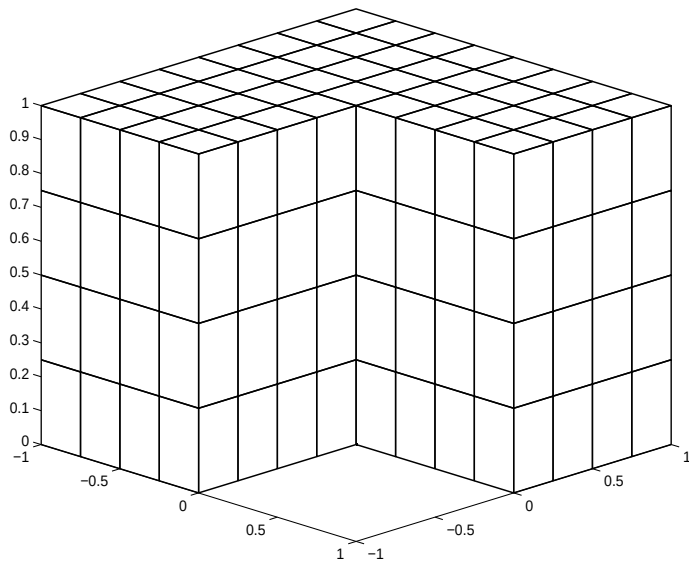
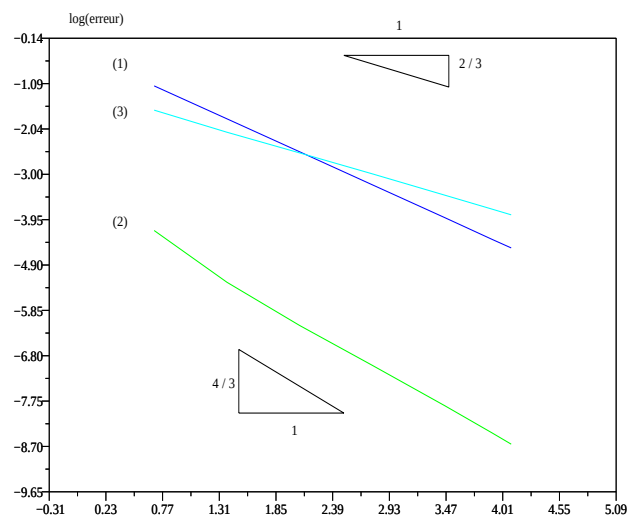
$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \quad \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (x,y,z) &\longmapsto (x|x|^{\frac{1}{2}}, y|y|^{\frac{1}{2}}, z) . \end{aligned}$$

Le maillage qui en est issu est illustré, pour  $n = 4$ , sur la figure 5.9. Nous constatons alors que ce maillage est anisotrope dans le sens où nous y trouvons des éléments très "aplatis", ce test est donc idéal pour tester la fiabilité de l'estimateur d'erreur (en fait, vu que la dérivée de la solution dans la direction  $(Oz)$  est incluse dans  $H^2(\Omega)$ , il est inutile de raffiner suivant celle ci).

Nous implémentons donc les mêmes quantités que pour le test précédent, les divers résultats sont présentés dans la table 5.3 et sur les figures 5.10, 5.11 et 5.12

| $n$ | $\ u - u_\tau\ _{0,\Omega}$ | $\ u - I_M u_\tau\ _{0,\Omega}$ | $ u - I_M u_\tau _{1,h}$ | $\eta$    | $q_{up}^n$ | $q_{low}^n$ |
|-----|-----------------------------|---------------------------------|--------------------------|-----------|------------|-------------|
| 2   | $3,37e-1$                   | $9,45e-3$                       | $1,58e-1$                | $4,65e-1$ | 0,3398     | 2,2400      |
| 4   | $1,65e-1$                   | $2,32e-3$                       | $8,08e-2$                | $2,52e-1$ | 0,3208     | 2,1777      |
| 8   | $8,19e-2$                   | $7,58e-4$                       | $4,16e-2$                | $1,31e-1$ | 0,3165     | 2,3993      |
| 16  | $4,08e-2$                   | $2,48e-4$                       | $2,12e-2$                | $6,69e-2$ | 0,3164     | 2,6493      |
| 32  | $2,04e-2$                   | $7,68e-5$                       | $1,07e-2$                | $3,38e-2$ | 0,3164     | 2,9010      |
| 50  | $1,30e-2$                   | $3,49e-5$                       | $6,85e-3$                | $2,17e-2$ | 0,3162     | 3,0220      |

TAB. 5.3 – Résultats pour le troisième test

FIG. 5.5 – Illustration du maillage utilisé pour  $n = 4$ FIG. 5.6 – Vitesse de convergence de  $\|u - u_\tau\|_{0,\Omega}$  (courbe (1)),  $\|u - I_M u_\tau\|_{0,\Omega}$  (courbe (2)) et  $|u - I_M u_\tau|_{1,h}$  (courbe (3))

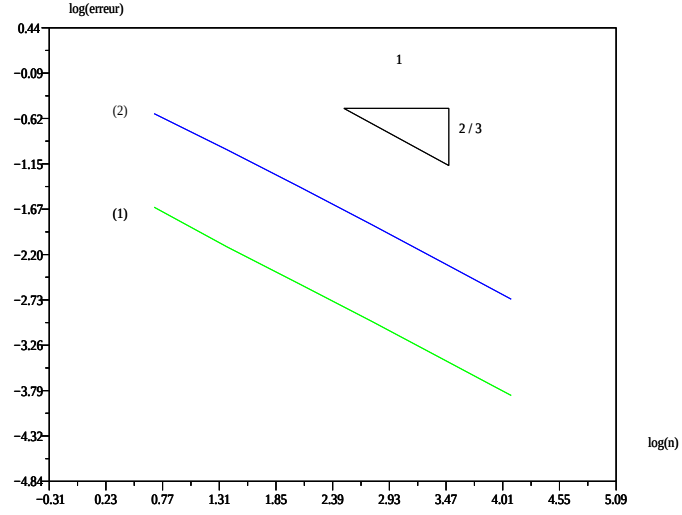


FIG. 5.7 – Vitesse de convergence de  $|u - I_M u_\tau|_{1,h}$  (courbe (1)) et  $\eta$  (courbe (2))

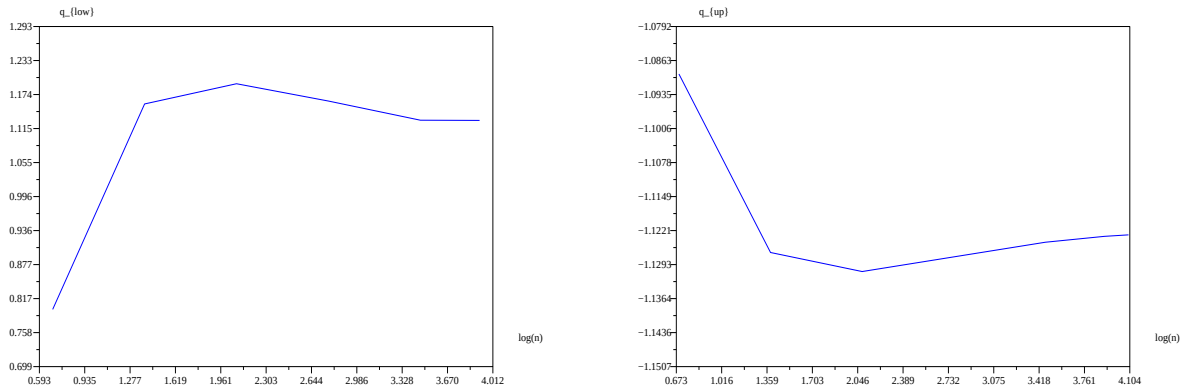
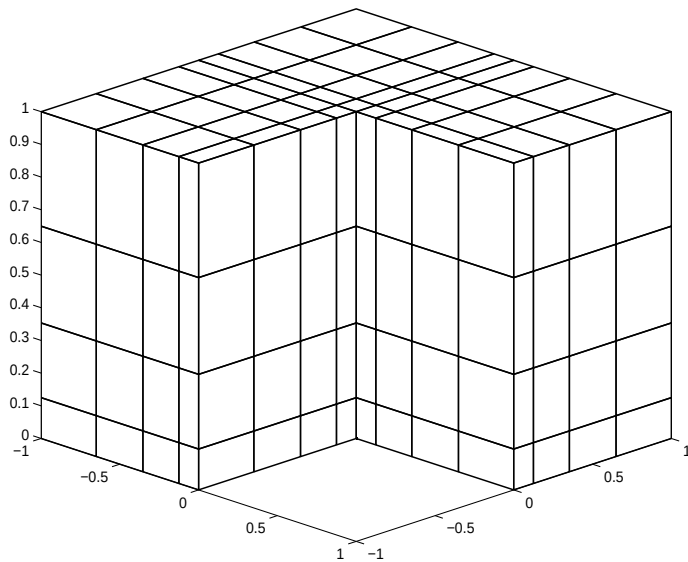
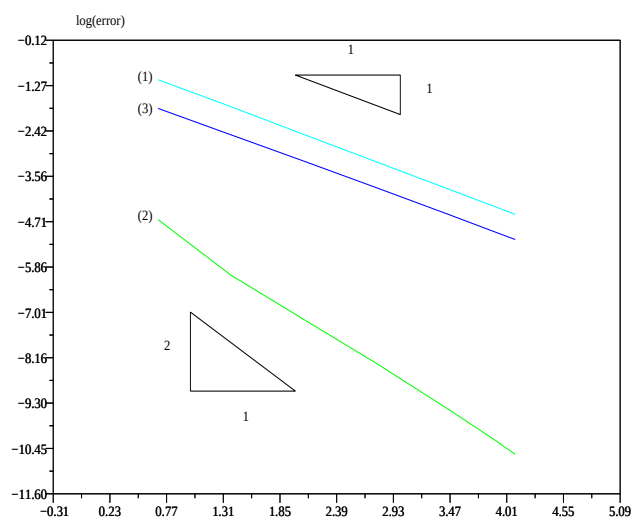


FIG. 5.8 –  $q_{low}$  (à gauche) et  $q_{up}$  (à droite) en fonction du  $\log(n)$

FIG. 5.9 – Illustration du maillage utilisé pour  $n = 4$ FIG. 5.10 – Vitesse de convergence de  $\|u - u_\tau\|_{0,\Omega}$  (courbe (1)),  $\|u - I_M u_\tau\|_{0,\Omega}$  (courbe (2)) et  $|u - I_M u_\tau|_{1,h}$  (courbe (3))



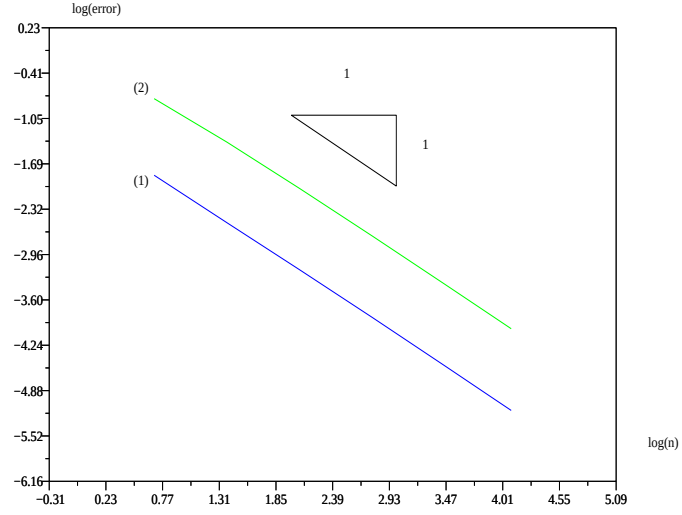


FIG. 5.11 – Vitesse de convergence de  $|u - I_M u_\tau|_{1,h}$  (courbe (1)) et  $\eta$  (courbe (2))

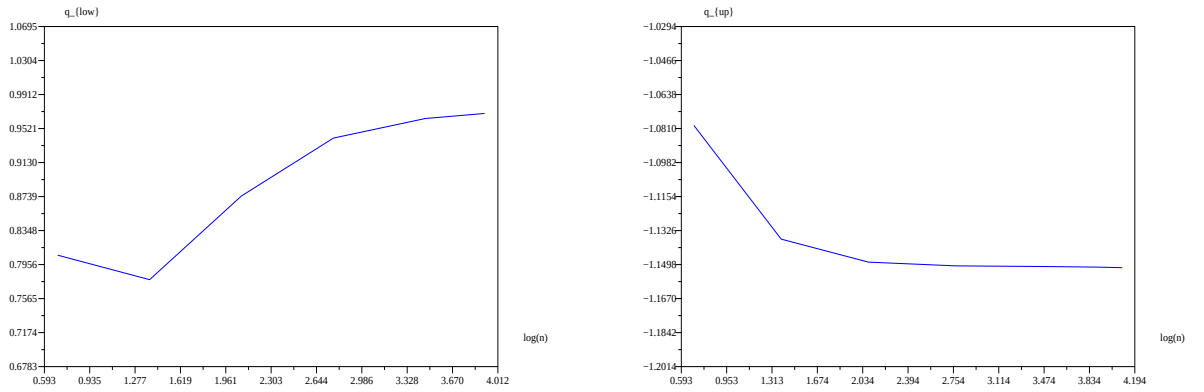


FIG. 5.12 –  $q_{low}$  (à gauche) et  $q_{up}$  (à droite) en fonction du  $\log(n)$

# Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la discrétisation par des méthodes de Volumes Finis (centrée cellule et Éléments-Volumes Finis) de problèmes elliptiques où apparaissent diverses singularités :

- dans la première partie, nous avons étudié la discrétisation du Laplacien sur un domaine non convexe de  $\mathbb{R}^2$ . Nous avons alors démontré comment un raffinement de maillage local permettait de restaurer l'ordre de convergence des diverses méthodes étudiées. Par ailleurs, nous nous sommes intéressés aux problèmes de Stokes et de Navier-Stokes sur un domaine non convexe de  $\mathbb{R}^2$ . Nous avons alors démontré que, pour une discrétisation par Éléments-Volumes Finis non conformes basée sur une approche amont, un raffinement de maillage local permettait là aussi de rétablir l'ordre de convergence initial de la méthode. Précisons que, depuis peu, les résultats de convergence valable pour le schéma amont ont été étendus à des schémas de type amont avec poids. Remarquons que l'utilisation d'arguments similaires permettrait de démontrer un résultat identique pour une discrétisation du système de Stokes et de Navier-Stokes à l'aide de la méthode d'Éléments-Volumes Finis conforme (en utilisant le couple  $IP^1$ -bulle /  $IP^1$  par exemple [42]). D'autre part, de récents travaux ont porté sur une discrétisation présentée dans [52] du problème de Stokes par une méthode de Volumes Finis centrée cellule [84]. Les auteurs y démontrent, sous certaines hypothèses, la convergence de la solution approchée vers la solution exacte. Cependant, les hypothèses introduites n'autorisent pas, dans le cas d'une solution non régulière, l'utilisation d'un raffinement de maillage optimal afin de restaurer l'ordre de convergence initial de la méthode. La solution choisie par les auteurs a donc consisté à déstructurer le schéma en adoptant une discrétisation par Volumes Finis diamant [27]. Les tests numériques pratiqués sur les systèmes de Stokes et de Navier-Stokes, la discrétisation du terme non linéaire s'inspirant de celle introduite dans [54], ont alors apporté des résultats satisfaisants.
- dans la seconde partie, nous avons traité le cas de problèmes de réaction diffusion singulièrement perturbés. Nous avons prouvé que les maillages anisotropes permettaient, pour les méthodes de Volumes Finis centrée cellule et d'Éléments-Volumes Finis conforme, de rétablir un ordre de convergence satisfaisant. De plus, pour la méthode d'Éléments-Volumes Finis non conforme, nous avons démontré que les maillages anisotropes triangulaires ne permettaient pas de restaurer l'ordre de convergence optimal de la méthode, mais que l'utilisation de maillages quadrangulaires assuraient la stabilité de la méthode. Le cas des problèmes de convection-diffusion perturbés devrait, quant à lui, se traiter de manière similaire (en utilisant les estimées théoriques de [2, 97]) et apporter les mêmes résultats. Concernant plus généralement les problèmes perturbés, de récents travaux (voir [83, 84] ou la section 5) ont porté sur la construction d'estimateur a-posteriori pour la méthode de Volumes Finis centrée cellule (voir aussi à ce sujet [58, 56] et plus généralement [11, 61, 66, 67, 1] pour les méthodes d'Éléments-Volumes Finis). Précisons que la difficulté majeure réside dans le fait de trouver un estimateur à la fois efficace et fiable [100]. Un développement intéressant consisterait à utiliser cet estimateur pour la méthode de Volumes Finis diamant ce qui autoriserait le remaillage du domaine.

- la troisième partie traite quant à elle de la discrétisation de problèmes elliptiques singuliers en dimension trois. Nous ne présentons que quelques tests numériques permettant d'illustrer le fait que, dans le cas d'une solution singulière, l'ordre de convergence obtenu sur des maillages raffinés judicieusement est meilleur que sur des maillages uniformes (centrée cellule et Éléments-Volumes Finis conforme et non conforme). L'obtention de résultats théoriques pour les méthodes d'Éléments-Volumes Finis ne semble pas poser de problème majeur (grâce à l'utilisation de techniques similaires à [2, 71]). Cependant, pour la méthode de Volumes Finis centrée cellule, le seul problème réside en l'obtention d'un équivalent au résultat de l'appendice A, ce qui nécessite une preuve très technique étant donné le très grand nombre de configurations possibles.

Comme nous pouvons le constater les développements et perspectives mathématiques concernant les méthodes de Volumes Finis sont nombreux et variés. Pour la plupart d'entre eux, ils consistent en trois grandes lignes directrices : la discrétisation de systèmes plus complexes (du type Navier-Stokes), l'introduction d'estimateurs a-posteriori et le passage à la dimension trois. Les travaux en cours suivent donc ces grands axes.

# Appendice A

Majoration de  $\int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz$ ,  $\sigma := \bar{K} \cap \bar{L}$ ,  $K, L \in \mathcal{V}$

Rappel :

$$-1 - \frac{\pi}{\omega} \leq \beta \leq \frac{1}{2}, \omega \in ]0, 2\pi[ ,$$

$$-h_K \leq \xi d(x_K, \sigma), \forall \sigma \in \mathcal{E}_K .$$

Nous voulons montrer que :

$$\int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz \leq C(\xi) \alpha |\sigma| h_K^{-2\beta} .$$

Introduisons en outre  $N$ , le nombre maximum de côtés des Volumes de Contrôle. Nous considérons que ce nombre ne dépend pas de  $h$ , le maximum des diamètres des Volumes de Contrôle.

Premier cas :  $O \in \partial K \cap \partial L$ ,  $O \in \bar{\sigma}$

La figure 5.13 illustre cette situation

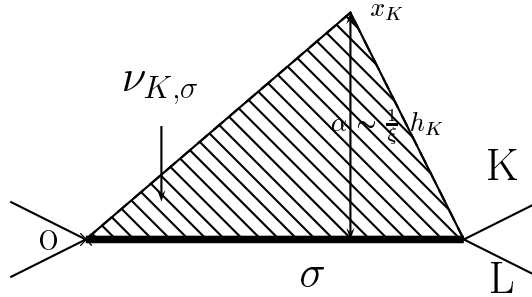


FIG. 5.13 – Illustration du premier cas

Nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz \\ & \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{|\sigma|} r^{1-2\beta} dr \\ & \leq \frac{\pi}{2} |\sigma| \int_0^{h_K} r^{-2\beta} dr , \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\int_{\nu_K, \sigma} r^{-2\beta} dz \leq C_1(\xi) \alpha |\sigma| h_K^{-2\beta}, \quad (5.3.2)$$

où  $C_1(\xi) := \frac{\pi \xi}{2}$ .

Second cas:  $O \in \partial K$ ,  $O \notin \bar{\sigma}$  et Il n'y a qu'un côté entre  $O$  et  $\sigma$ .

Premier sous-cas:  $(\sigma, \tilde{\sigma}) \leq \frac{\pi}{2}$

La figure 5.14 résume cette situation et donne les diverses notations utilisées.

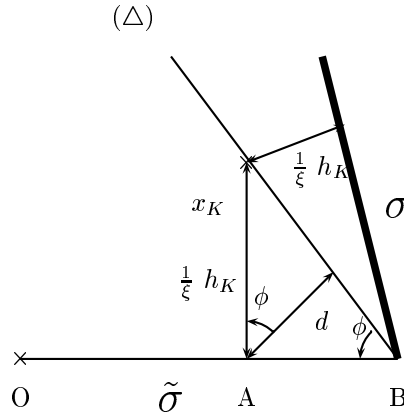


FIG. 5.14 – Illustration du premier sous-cas

En outre, nous posons  $x_K := \begin{pmatrix} x_{K,1} \\ x_{K,2} \end{pmatrix}$ .

Nous avons, avec les notations de la figure 5.14 :

$$- d = \frac{1}{\xi} h_K \cos(\phi),$$

$$- \arcsin\left(\frac{1}{\xi}\right) \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

**Lemme 5.3.1.** Soient  $(\Delta)$  une droite de  $\mathbb{R}^2$  d'équation  $ax + by + c = 0$  et  $M_0$  un point de  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors

$$d(\Delta, M_0) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Preuve:

Se déduit par un calcul direct.

■

En utilisant le lemme 5.3.1, nous avons que,  $\forall x \in \nu_{K,\sigma}$ ,

$$\begin{aligned} r(x) &\geq \frac{|\tilde{\sigma}| x_{K,2}}{\sqrt{(|\tilde{\sigma}| - x_{K,1})^2 + x_{K,2}^2}} \\ &= d \frac{|Ox_K B|}{|Ax_K B|}, \\ &\geq d, \end{aligned}$$

car l'aire de  $Ox_K B$  est plus grande que l'aire de  $Ax_K B$ . Or

$$d = x_{K,2} \cos(\phi) \geq \frac{1}{\xi} h_K \cos(\arcsin(\frac{1}{\xi})).$$

Ceci fournit donc

$$\int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz \leq C'_2(\xi) |\sigma| h_K^{1-2\beta}.$$

Deuxième sous-cas:  $(\sigma, \tilde{\sigma}) \geq \frac{\pi}{2}$

Nous donnons la figure 5.15.

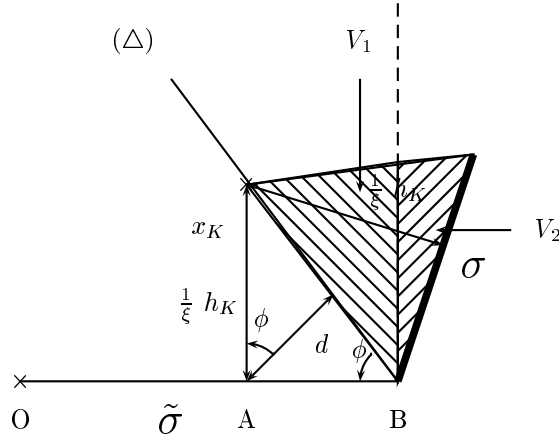


FIG. 5.15 – Illustration du second sous-cas

Nous avons toujours  $x_K := \begin{pmatrix} x_{K,1} \\ x_{K,2} \end{pmatrix}$ ,  $\arcsin(\frac{1}{\xi}) \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  et  $d = \frac{1}{\xi} h_K \cos(\phi)$ .

Nous posons de plus  $V_1$  et  $V_2$  comme indiqué en figure 5.15. Nous avons alors

$$\int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz = \int_{V_1} r^{-2\beta} dz + \int_{V_2} r^{-2\beta} dz.$$

Notons dans un premier temps que, avec les notations de la figure 5.15

$$\begin{aligned}
\int_{V_1} r^{-2\beta} dz &\leq d(\Delta, O)^{-2\beta} |V_1| \\
&= d^{-2\beta} \frac{|\sigma|^2 \tan(\frac{\pi}{2} - \phi)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\xi} h_K \cos(\phi) \right)^{-2\beta} |\sigma|^2 \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)} \\
&\leq \frac{\xi^{1+2\beta}}{2} h_K^{1-2\beta} |\sigma| \cos^{1-2\beta}(\phi) .
\end{aligned}$$

Dans un second temps, remarquons que :

$$\begin{aligned}
\int_{V_2} r^{-2\beta} dz &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^b r^{1-2\beta} dr \\
&\leq \frac{\pi}{2} |b-a| h_K^{1-2\beta} \\
&\leq \frac{\pi}{2} |\sigma| \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) h_K^{1-2\beta} \\
&\leq \frac{\pi}{2} |\sigma| h_K^{1-2\beta} .
\end{aligned}$$

car  $a := x_A = |\tilde{\sigma}|$  et  $b := |\tilde{\sigma}| + |\sigma| \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ . Comme  $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ , nous obtenons donc

Les deux raisonnements précédents fournissent donc

$$\int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz \leq C_2''(\xi) |\sigma| h_K^{1-2\beta} .$$

La conclusion des deux sous-cas est donc que

$$\int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz \leq C_2(\xi) |\sigma| h_K^{1-2\beta} , \quad (5.3.3)$$

où  $C_2(\xi) := \frac{\xi^{1+2\beta} + \pi}{2}$ .

Les estimées (5.3.2) et (5.3.3) donnent alors la majoration désirée pour le second cas modulo une constante.

Troisième cas:  $O \in \partial K$ ,  $O \notin \bar{\sigma}$  et il y a plus d'un côté entre  $O$  et  $\sigma$

Posons

–  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} :=$  le nombre de côtés entre  $O$  et  $\sigma$ ,

–  $M := \bar{\sigma}_m \cap \bar{\sigma}$ .

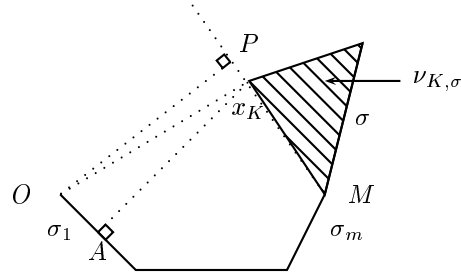


FIG. 5.16 – Illustration du premier sous-cas

Soit de plus  $P$  la projection orthogonale de  $O$  sur la droite  $(Mx_K)$ .

Premier sous-cas:  $P \notin \partial\nu_{K,\sigma}$  (voir figure 5.16).

Dans ce cas ci, nous avons clairement, avec les notations de la figure 5.16 :

$$d(O, \nu_{K,\sigma}) = |Ox_K| \geq |Ax_K| \geq \frac{h_K}{\xi}.$$

Il en résulte donc que

$$\int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz \leq \xi^{2\beta} |\sigma| h_K^{1-2\beta}. \quad (5.3.4)$$

Second sous-cas:  $P \in \partial\nu_{K,\sigma}$ .

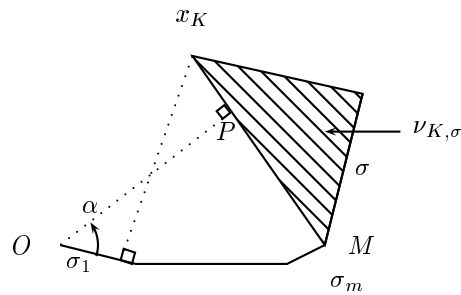


FIG. 5.17 – Illustration du second sous-cas

Nous notons  $\alpha$  l'angle entre la droite  $(OP)$  et la segment  $\sigma_1$  (voir figure 5.17).

Nous pratiquons alors une disjonction des cas :

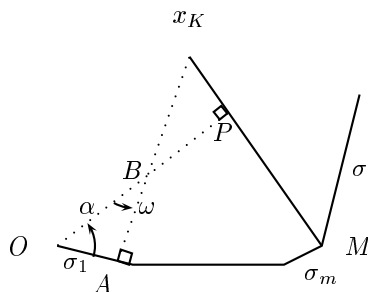
Premier sous-sous-cas:  $\alpha \geq \frac{\pi}{6}$ .

Nous donnons la figure 5.18 pour illustrer la situation :

Avec les notations de la figure 5.18, nous avons  $\omega \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ .

Remarquons alors que



FIG. 5.18 – *Illustration du premier sous-sous-cas*

$$\begin{aligned} |OP| &= |OB| + |BP| \\ &= \frac{|BA|}{\cos(\omega)} + |Bx_K| \cos(\omega) \\ &\geq |BA| \cos(\omega) + |Bx_K| \cos(\omega) \\ &= |Ax_K| \cos(\omega) \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{h_K}{\xi}, \end{aligned}$$

car  $\omega \leq \frac{\pi}{3}$ . Nous en déduisons que

$$\int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz \leq (2\xi)^{2\beta} |\sigma| h_K^{1-2\beta}. \quad (5.3.5)$$

Second sous-sous-cas:  $\alpha < \frac{\pi}{6}$ .

$$\text{Posons } \kappa := \kappa(N) := \frac{1}{4N} \text{ .}$$

La stratégie de majoration de  $\int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz$  pour ce sous-sous-cas sera la suivante : Nous distinguerons deux possibilités :

- $\exists j \in \{1, \dots, m\} : |\sigma_j| \geq \frac{\kappa h_K}{\xi}$ . Dans ce cas, nous montrerons que  $d(O, \nu_{K\sigma}) \sim \frac{h_K}{\xi}$ .
- $\forall j \in \{1, \dots, m\}, |\sigma_j| < \frac{\kappa h_K}{\xi}$ . Nous nous ramènerons alors à l'étude faite dans le second cas.

Première possibilité:  $\exists j \in \{1, \dots, m\} : |\sigma_j| \geq \frac{\kappa h_K}{\varepsilon}.$

Donnons la figure 5.19 afin d'être plus clair dans notre explication.

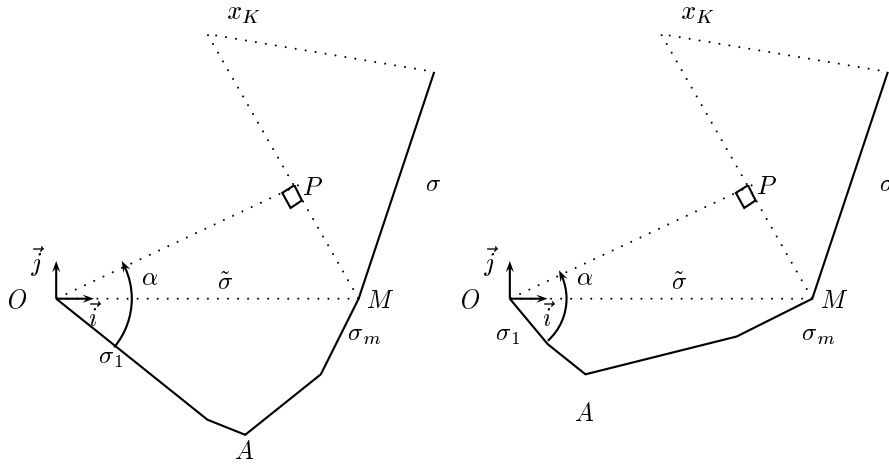


FIG. 5.19 – Illustrations de la première possibilité

Posons

- $J := \{ j \in \{1, \dots, m\} : |\sigma_j| \geq \frac{\kappa h_K}{N \xi} \} \neq \emptyset$ ,
- $j_{max} := j \in \{1, \dots, m\} : |\sigma_j| \geq |\sigma_i|, \forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,
- $\tilde{\sigma} := OM$ .

Nous nous donnons de plus un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , où  $\vec{i}$  est dans la même direction que  $\tilde{\sigma}$ . Nous notons  $A$  le point appartenant à  $\bigcup_{i=1}^m \bar{\sigma}_i$  et d'ordonnée minimale dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (voir figure 5.19). Appelons en outre, pour  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\alpha_j$  l'angle entre  $\sigma_j$  et  $\tilde{\sigma}$ .

Remarquons alors que si il existe  $j \in J$  tel que  $\sigma_j$  se trouve "à gauche" du point  $A$  (figure 5.19 à gauche), alors la convexité des Volumes de Contrôle implique que

$$|\tilde{\sigma}| \geq |\sigma_j| \cos(\alpha) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\kappa h_K}{\xi N}.$$

Sinon, nous avons nécessairement  $\sigma_{j_{max}}$  qui se trouve "à droite" du point  $A$  (figure 5.19 à droite). Nous obtenons donc, grâce à la convexité des Volumes de Contrôle, que

$$d(\tilde{\sigma}, A) \leq m \frac{\kappa h_K}{\xi N} \sin(\alpha) \leq \frac{\kappa h_K}{2 \xi},$$

car  $\alpha < \frac{\pi}{6}$ . D'où

$$\sin(\alpha_{j_{max}}) \leq \frac{\kappa h_K / 2 \xi}{\kappa h_K / \xi} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, nous avons

$$|\tilde{\sigma}| \geq |\sigma_{j_{max}}| \cos(\alpha_{j_{max}}) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\kappa h_K}{\xi}.$$

Ce petit raisonnement fournit que

$$|OP| \geq |\tilde{\sigma}| \cos(\alpha) \geq \frac{3}{4} \frac{\kappa h_K}{\xi} \min\{1, \frac{1}{N}\} = \frac{3}{4} \frac{\kappa h_K}{\xi N},$$

qui implique que

$$\int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz \leq \left( \frac{16 N^2 \xi}{3} \right)^{2\beta} |\sigma| h_K^{1-2\beta} . \quad (5.3.6)$$

Deuxième possibilité:  $\forall j \in \{1, \dots, m\} : |\sigma_j| < \frac{\kappa h_K}{\xi}$ .

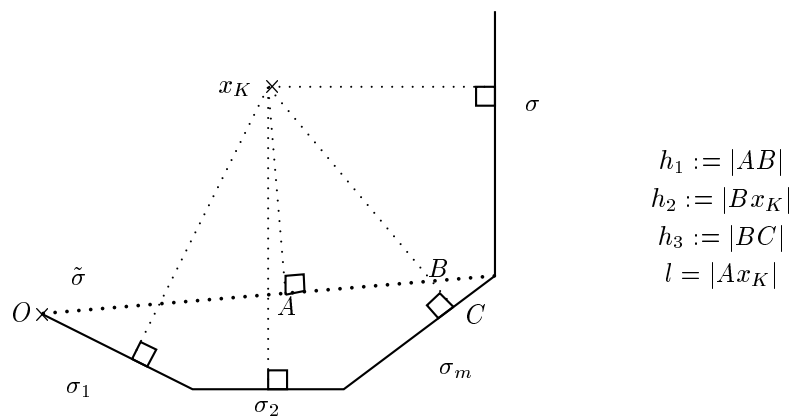


FIG. 5.20 – Illustration et notations de la seconde possibilité

Remarquons que, avec les notations de la figure 5.20

$$(i) \quad l^2 + h_1^2 = h_2^2,$$

$$(ii) \quad h_1 \leq \sum_{i=1}^m |\sigma_i| \leq \frac{1}{4} \frac{h_K}{\xi} ,$$

$$(iii) \quad h_2 \geq \frac{h_K}{\xi} - h_3 \; .$$

Or, en utilisant la convexité des Volumes de Contrôle, nous avons que

$$h_3 \leq \sum_{i=1}^m |\sigma_i| \leq \frac{1}{4} \frac{h_K}{\xi} .$$

En utilisant alors tour à tour (i), puis (ii) et (iii), nous obtenons que

$$\begin{aligned}
l^2 &\geq h_2^2 - h_1^2 \\
&\geq \left( \frac{h_K}{\xi} - h_3 \right)^2 - \frac{1}{16} \frac{h_K^2}{\xi^2} \\
&= \frac{h_K^2}{\xi^2} - 2 \frac{h_K}{\xi} h_3 + h_3^2 - \frac{1}{16} \frac{h_K^2}{\xi^2} \\
&\geq \frac{1}{2} \frac{h_K^2}{\xi^2} ,
\end{aligned}$$

en utilisant ce qui précède. Nous pouvons alors nous ramener à l'étude faite dans le second cas où, avec les notations de la figure 5.20,  $d(x_K, \tilde{\sigma}) = l \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h_K}{\xi}$ . Nous en déduisons que

$$\int_{\nu_{K,\sigma}} r^{-2\beta} dz \leq C(\xi) |\sigma| h_K^{1-2\beta} . \tag{5.3.7}$$

Les estimées (5.3.4), (5.3.5), (5.3.6) et (5.3.7) fournissent la majoration désirée pour le troisième cas.

# Appendice B

Le but de cet annexe est de prouver que l'estimée du lemme 6.4.4 est optimal. Cette estimée est directement issue de (6.4.1), il faut donc prouver que cette inégalité est optimale.

Rappelons que (6.4.1) consiste en : Soit  $T_h$  un maillage de  $\Omega$  et  $v_h \in S_h^0$  (où  $S_h^0$  désigne les fonctions  $IP^1$  par morceaux sur chaque maille du maillage, continues au milieu des arêtes internes du maillage et nulles au milieu des arêtes externes du maillage), nous avons alors

$$\|v_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq C(p,\xi) \|v_h\|_{0,p,\Omega} \sup_{K \in T_h} h_K^{-\frac{2}{p}}, \quad \forall p \geq 1. \quad (5.3.8)$$

Nous allons donc nous donner un maillage  $T_h$  et une fonction  $u_h$  de  $S_h^0$  vérifiant :

$$\|u_h\|_{0,\infty,\Omega} \sim C(p,\xi) \|u_h\|_{0,p,\Omega} \sup_{K \in T_h} h_K^{-\frac{2}{p}}, \quad \forall p \geq 1. \quad (5.3.9)$$

En effet, l'estimée ne pourra donc pas être améliorée (c'est à dire en remplaçant " $h_K^{-\frac{2}{p}}$ " par " $h_K^{-\frac{2}{p}+\varepsilon}$ ",  $\varepsilon > 0$ " dans (5.3.8)). Le maillage  $T_h$ , ainsi que diverses notations le concernant, sont donnés sur la figure 5.21.

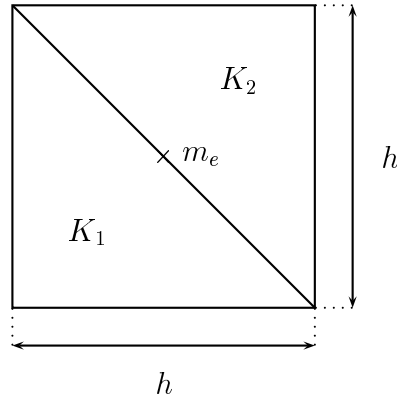


FIG. 5.21 – Maillage  $T_h$

Nous construisons sur ce maillage la fonction  $u_h$  qui est  $IP^1$  par morceaux sur  $K_1$  et  $K_2$  et valant  $C \in \mathbb{R}$  en  $m_e$  et 0 sur tout les autres milieux d'arêtes de  $T_h$ . Des calculs directs nous fournissent que

$$\begin{cases} \|u_h\|_{0,\infty,\Omega} = |C|, \\ \|u_h\|_{0,p,\Omega} = 2 |C| h^{2/p}. \end{cases}$$

Par conséquent,  $u_h$  vérifie (5.3.9) et l'estimée (5.3.8) est optimale.



# Bibliographie

- [1] A. Agouzal, B. Achchab, G. Buscaglia, F. Oudin : *Adaptive finite volume scheme for elliptic problems*, Rapport interne du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'université de Lyon I.
- [2] T. Apel (1999) : *Anisotropic finite elements : Local estimates and applications*, Advances in Numerical Mathematics, Teubner, Stuttgart, Habilitationsschrift.
- [3] T. Apel, G. Lube (1998) : *Anisotropic mesh refinement for a singularly perturbed reaction-diffusion model problem*, Appl. Numer. Math. **26**, p. 415-433.
- [4] T. Apel, S. Nicaise, J. Schöberl (2001) : *Crouzeix-Raviart type elements on anisotropic meshes*, Numer. Math., **2**, p. 195-223.
- [5] T. Apel (1998) : *Anisotropic interpolation error estimates for isoparametric quadrilateral finite elements*, Computing, **60**, p. 157-174.
- [6] T. Apel, S. Nicaise, J. Schröberl (2001) : *A non-conforming finite element method with anisotropic mesh grading for the Stokes problem in domains with edges*, IMA Journal of Numerical Analysis, **21**, p. 843-856.
- [7] B.F. Armaly, F. Durst, J.C.F. Pereira, B. Schöning (1983) : *Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow*, J. Fluid Mech., vol. 127, p. 473-496.
- [8] R.E. Bank, D.J. Rose (1987) : *Some error estimates for the box method*, SIAM J. Numer. Anal., **24**, p. 777-787.
- [9] J. Baranger, J.F. Maître , F. Oudin (1996) : *Connection between finite volume and mixed finite element methods*, Math. Mod. and Numer. Anal., **30**, n° 4, p. 445-465.
- [10] A.E. Beagles, J.R. Whiteman (1989) : *General conical singularities in three dimensionnal Poisson problems*, Math. Methods Appl. sci., **11**, p. 215-235.
- [11] A. Bergam, Z. Mghazli (2000) : *Estimateurs a-posteriori d'un schéma de Volumes Finis pour un problème non linéaire*, C.R. Acad. SC. Paris, **331**, p. 475-478.
- [12] E. Bertolazzi, G. Manzini (2004) : *A cell-centered second order accurate finite volume method for convection-diffusion problems on unstructured meshes*, Math. Models and Methods in Applied Sciences, vol. 14, n°8, p. 1235-1260.
- [13] S. Boivin, J.M. Hérard (1996) : *Un schéma de type volumes finis pour résoudre les équations de Navier-Stokes sur une triangulation*, Revue européenne des éléments finis, **5**, n° 5, p. 461-490.
- [14] S.C. Brenner, L.R. Scott (1994) : *The mathematical theory of finite element methods*, Springer Verlag.
- [15] V.F. Butuzov (1973) : *The asymptotic properties of solutions of the equation  $\mu^2 \Delta u + R^2(x,y) u = f(x,y)$  in a rectangle*, Differentsial'nye Uravniniya, **9**, p. 1274-1279.

- [16] Z. Cai (1991): *On the finite volume method*, Numer. Math., **58**, p. 713-735.
- [17] Z. Cai, J. Mandel, S. Mc Cormick (1991): *The finite volume-element method for diffusion equations on general triangulations*, SIAM J. Numer. Anal., **28**, p. 392-402.
- [18] C. Calgaro (1996): *Méthodes multi-résolution auto adaptives en éléments finis : Application aux équations de la mécanique des fluides*, Thèse de l'université de Paris Sud - centre d'Orsay, Paris.
- [19] P. Chatzipantelidis (1999): *A finite volume method based on the Crouzeix-Raviart element for elliptic PDE's in two dimensions*, Numer. Math., **82**, p. 409-432.
- [20] P. Chatzipantelidis (2002): *Finite volume methods for elliptic PDE's : a new approach*, Math. Mod. Numer. Anal., **36**, p. 307-324.
- [21] P. Chatzipantelidis, R.D. Lazarov (2002): *The Finite Volume-Element method in non convex polygonal domains*, Finite Volume for Complex Applications III, Hermès, p. 171-178.
- [22] S.H. Chou, Q. Li (1999): *Error estimates in  $L^2$ ,  $H^1$  and  $L^\infty$  in covolume methods for elliptic and parabolic problems : An unified approach*, Mathematics of Computation, **69**, p. 103-120.
- [23] S.C. Chou (1997): *Analysis and convergence of a covolume method for the generalized Stokes problem*, Math. of Comp. **66**, p. 85-104.
- [24] P. G. Ciarlet : *The finite element method for elliptic problems* , Studies in mathematics and its applications, North holland.
- [25] Y. Coudière, P. villedieu (2000): *Convergence rate of convection-diffusion equation on locally refined meshes*, Math. Mod. and Numer. Anal., **34**.
- [26] Y. Coudière, J.P. Vila, P. Villedieu (1999): *Convergence of a finite volume scheme for a two dimensionnal convection-diffusion problem*, Math. Mod. and Num. Anal, **33**, p. 493-516.
- [27] Y. Coudière (1999): *Analyse de schémas volumes finis sur maillages non structurés pour des problèmes linéaires hyperboliques et elliptiques*, thèse de l'université Paul Sabatier de Toulouse, Toulouse (France).
- [28] J.P. Croisille (1999): *Finite volume box schemes and mixed methods*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis (à paraître).
- [29] M. Crouzeix, P.A. Raviart (1973): *Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationnary Stokes equation I*, RAIRO-M<sup>2</sup>AN, **7**, p. 77-104.
- [30] M. Crouzeix (1974): *Etude d'une méthode de linéarisation. Résolution numérique des équations de Stokes stationnaires. Applications aux équations de Navier-Stokes stationnaires*, Cahiers de l'IRIA, n. 12.
- [31] M. Dauge (1988): *Elliptic boundary value problems on corner domains*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag.
- [32] M. Dauge (1989): *Elliptic Stationnary Stokes and Navier-Stokes systems on two and three dimensionnal domains with corners. Part I: Linearized equations*, SIAM J. Math. Anal., **20**, p. 27-52.
- [33] K. Djadel (2001): *Méthode des volumes finis*, mémoire de DEA de mathématiques appliquées de l'Université des Sciences et Techniques de Lille.
- [34] K. Djadel, S. Nicaise, J. Tabka (2003): *Some refined finite volume methods for elliptic problems with corner singularities*, International Journal of Finite Volume, **1**, disponible depuis <http://averoes.math.univ-paris13.fr/>.



- [35] K. Djadel, S. Nicaise (2004) : *Some refined Finite Volume Element methods for the Stokes and Navier-Stokes systems with corner singularities*, Journal of Numerical Mathematics, **12**, n°4, p. 258-284.
- [36] S. Nicaise, K. Djadel (2004) : *Convergence analysis of a finite volume method for the Stokes system using nonconforming arguments*, à paraître dans IMA Journal of Numerical Analysis.
- [37] S. Nicaise, K. Djadel (2004) : *Méthode d'Éléments-Volumes Finis appliquée au problème de Navier-Stokes stationnaire en dimension deux*, preprint du laboratoire MACS de Valenciennes.
- [38] H. El Bouzid, S. Nicaise : *Refined nonconforming finite element methods in polygonal domains*, thèse de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, Valenciennes (France).
- [39] H. El Bouzid, S. Nicaise (1996) : *Méthodes d'éléments finis mixtes raffinées pour le problème de Stokes*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 322, série I, p. 1075-1080.
- [40] El Bouzid, S. Nicaise (1997) : *Nonconforming finite element methods and singularities in polygonal domains*, Advances in Mathematical Sciences and its Applications, **7**, p. 935-962.
- [41] H. El Sossa : *Quelques méthodes d'éléments finis mixtes raffinées basées sur l'utilisation des champs de Raviart-Thomas*, thèse de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, Valenciennes (France).
- [42] P. Emonot (1992) : *Méthode d'éléments-volumes finis : Application aux équations de Navier-Stokes et résultats de convergence*, Thèse de l'université Claude Bernard - Lyon I, Lyon (France).
- [43] M. Farhloul (1991) : *Méthodes d'éléments finis mixtes et volumes finis*, Thèse de la faculté des sciences et de génie - université de Laval, Laval.
- [44] L. Fox (1979) : *Finite Differences and singularities on elliptic problems*, Numerical Methods for Partial Differential Equation, Clarendon Press, Oxford, p. 42-69.
- [45] V. Girault, P. A. Raviart (1981) : *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*, Lect. Notes in Math., vol. 749, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York.
- [46] P. Grisvard (1985) : *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and studies in Mathematics, **21**, Pitman, Boston.
- [47] H. Goering, A. Felgenhauer, G. Lube, H. G. Ross, L. Tobiska (1983) : *Singularly perturbed differential equations*, Akademik Verlag, Berlin.
- [48] W. Hackbush (1989) : *On first and second order box schemes*, Computing, **41**, p. 277-296.
- [49] H. Han, R. B. Kellog (1990) : *Differentiability properties of solutions of the equation  $-\epsilon\Delta u + ru = f(x,y)$  in a square*, SIAM J. Math. Anal., **21**, p. 394-408.
- [50] B. Heinrich (1987) : *Finite difference methods on irregular networks*, Int. Series of Num. Math., **82**, Birkhäuser Verlag, Basel.
- [51] B. Heinrich (1994) : *The box method for elliptic interface problems on locally refined meshes*, Numer. Fluid. Mech., **46**, p. 177-186.
- [52] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin (2000) : *Finite volume methods*, Handbook of numerical analysis, **7**, p. 723-1020, P.G. Ciarlet, J.L. Lions.
- [53] T. Gallouët, R. Herbin, M. H. Vignal (2000) : *Error estimates on the approximate finite volume solution of convection-diffusion equations with general boundary conditions*, SIAM J. Numer. Anal., **37**, p. 1935-1972.
- [54] R. Eymard, R. Herbin : *A finite volume scheme on general meshes for the steady Navier-Stokes problem in two space dimensions*, Int. J. Finite Volume.

- [55] R. Herbin, Ph. Blanc, R. Eymard (2004): *An error estimate for finite volume methods for the Stokes equations on equilateral meshes*, Num. Meth. PDE, vol. 20, n°6, p. 907-918.
- [56] R. Herbin, M. Ohlberger (2002): *A posteriori error estimate for Finite Volume approximation of convection-diffusion problems*, Finite Volume for Complex Applications III, Hermès, p. 777-784.
- [57] H. Juanguo, X. Shitong (1998): *On the finite volume element method for general self adjoint elliptic operator*, SIAM J. Numer. Anal., **35**, p. 1762-1774.
- [58] N. Jullian (2002): *An error indicator for cell-centered Finite Volumes for linear convection-diffusion problems*, Finite Volume for Complex Applications III, Hermès, p. 777-784.
- [59] G. Kunert (1999): *A posteriori error estimation for anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes*, thèse de l'université de Chemnitz, Chemnitz (Allemagne).
- [60] G. Kunert (2000): *An a posteriori residual error estimator for the finite element method on anisotropic tetrahedral meshes*, Numer. Math., **86**, p. 40-72.
- [61] G. Kunert, Z. Mghazli, S. Nicaise (2003): *A posteriori error estimation for a Finite Volume discretization on anisotropic meshes*, Preprint SFB393/03-016, TU Chemnitz.
- [62] J. Lazaar, S. Nicaise (2002): *A non-conforming finite element method with anisotropic mesh grading for the incompressible Navier-Stokes equations in domains with edges*, J. Lazaar, S. Nicaise, Calcolo, **39**, p. 123-168.
- [63] R.E. Ewing, R. D. Lazarov, P.S. Vassilevski (1991): *Local refinement techniques for elliptic problems on cell-center grids I: Error analysis*, Math. Comp., **56**, p. 437-461.
- [64] P.S. Vassilevski, S.I. Petrova, R.D. Lazarov (1992): *Finite difference schemes on triangular cell-centered grids with local refinement*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., **13**, p. 1287-1313.
- [65] R.D. Lazarov, I.D. Mishev, P.S. Vassilevski (1996): *Finite volume for convection-diffusion problems*, SIAM J. Numer. Anal., **33**, p. 31-55.
- [66] R.D. Lazarov, S.Z. Tomov (2001): *Adaptive finite volume element method for convection-diffusion-reaction problems in 3D*, Scientific computing and application (Eds P. Minev, Y. Wong and Y. Lin), Advances in Computation: Theory and Practice, Nova Science Publishing House, **7**, p. 91-106.
- [67] R.D. Lazarov, S.Z. Tomov (2002): *A posteriori error estimates for finite volume element approximations of convection-diffusion-reaction equations*, Comput. Geosciences, **6** (3-4), p. 483-503.
- [68] D. Leguillon, E. Sanchez-Palencia (1987): *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*, Paris, MASSON.
- [69] R. Lozi (1978): *Résultats numériques de régularité du problème de Stokes et du laplacien itéré dans un polygone*, RAIRO Analyse numérique, **12**, p. 267-282.
- [70] J.M.-S. Lubuma, S. Nicaise (1994): *Dirichlet problems in polyhedral domains I: Regularity of the solutions*, Math. Nachr., **168**, p. 243-261.
- [71] J.M.-S. Lubuma, S. Nicaise (1995): *Dirichlet problems in polyhedral domains II: Approximation by FEM and BEM*, J. of Computational and Applied Mathematics, **61**, p. 13-27.
- [72] M. Lukacova-Medvidova (1997): *Combined finite element-finite volume method convergence analysis*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **38**, p. 717-741.

- [73] G. Medic, B. Mohammadi (1999): *NSIKE: An incompressible Navier-Stokes solver for unstructured meshes*, Rapport de recherche n. 3644 de l'INRIA.
- [74] J. M. Melenk (2001): *hp finite element methods for singular perturbations*, Habilitation, T. H. Zürich.
- [75] J.J.H. Miller, O' Riordan, G.I. Shishkin (1996): *Fitted numerical methods for singular perturbation problems, error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions*, World Scientific Publishing Co.
- [76] I.D. Mishev (2002): *A new mixed Finite Volume method*, Finite Volume for Complex Applications III, Hermès, p. 777-784.
- [77] J.A. Mackenzie, K.W. Morton (1992): *Finite volume solutions of convection-diffusion test problems*, Math. of Comp., **60** p. 189-220.
- [78] K.W. Morton, *Finite volume methods and their analysis*, rapport n° 90/11 de Oxford university computing laboratory.
- [79] J. Necas (1967), *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris.
- [80] S. Nicaise: *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles*, Dunod.
- [81] S. Nicaise (1993): *Polygonal interface problems*, series "Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik", **39**, Peter Lang, Verlag.
- [82] S. Nicaise (2004): *A posteriori residual estimation of a cell-centered finite volume method*, Comptes Rendus Mathématiques, vol. 38, n° 5, p. 419-424.
- [83] S. Nicaise (2004): *Anisotropic a posteriori error estimation of some cell-centered finite volume methods for diffusion-convection-reaction problems*, preprint MACS, UVHC.
- [84] S. Nicaise, K. Djadel (2005): *Error estimates for some Finite Volume methods using nonconforming arguments*, IMA J. Numer. Anal., **25**, p. 523-548.
- [85] R. A. Nicolaides (1992): *Analysis and convergence of the MAC scheme I: The linear problem*, SIAM J. Num. Anal., **29**, n. 6, p. 1579-1591.
- [86] R. A. Nicolaides (1992): *Analysis and convergence of the MAC scheme II: Navier-Stokes equations*, SIAM J. Num. Anal., **65**, n. 213, p. 29-44.
- [87] K. Ohmori, T. Ushijima (1984): *A technique of upstream type applied to a linear nonconforming finite element approximation of convective diffusion equations*, RAIRO Numer. Anal., **18**, p. 309-332.
- [88] S. Ramadhyani, S.V. Patankar (1980): *Solution of the Poisson equation: Comparison of the Galerkin and control-volume methods*, Int. J. for Numer. Meth. in Eng, **15**, p. 1395-1418.
- [89] G. Raugel: *Résolution numérique par une méthode d'éléments finis du problème de Dirichlet pour le laplacien dans un polygone*, C. R. Acad. Sc. Paris, **286**, p. 791-794.
- [90] C. Bernardi, C. Raugel (1981): *Méthodes d'éléments finis mixtes pour les équations de Stokes et de Navier-Stokes dans un polygone non convexe*, Estratto da *Calcolo*, Vol. XVIII, fasc. III (Luglio).
- [91] C. Rosson (1988): *Comparison of cell-centered and cell-vertex finite volume schemes*, Note Numer. Fluid and Mech., **20**, p. 327-334.
- [92] H. Shmitz, K. Volk, W.L. Wendland (1993): *On three dimensional singularities of elastic fields near vertices*, Numer. Partial Differ. Equations, **9**, p. 323-337.

- [93] L. R. Scott, S. Zhang (1990): *Finite element interpolation of non-smooth functions satisfying boundary conditions*, Math. Comp., **54**, p. 483-493.
- [94] E. Süli (1991): *Convergence of finite volume schemes for Poisson's equation on nonuniform meshes*, **28**, p. 1719-1430.
- [95] R. Temam (1984): *Navier-Stokes equations*, North Holland, Amsterdam.
- [96] F. Thomasset (1981): *Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag.
- [97] L. Tobiska, F. Schieweck (1989): *A non-conforming finite element method of upstream type applied to the stationary Navier-Stokes equation*, M<sup>2</sup>AN, **23**, p. 627-647.
- [98] H.G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska (1996): *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations, Convection-Diffusion and Flow Problems*, Springer-Verlag, Berlin.
- [99] H. Triebel (1978): *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North Holland.
- [100] R. Verfürth (1996): *A review of a-posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques*, Wiley and Teubner, Chichester and Stuttgart.