



HAL
open science

Contribution sur les forces d'histoire exercées sur des inclusions solides ou fluides à faibles nombres de Reynolds

Mustapha Abbad

► **To cite this version:**

Mustapha Abbad. Contribution sur les forces d'histoire exercées sur des inclusions solides ou fluides à faibles nombres de Reynolds. Mécanique [physics.med-ph]. Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, 2003. Français. NNT: . tel-00010661

HAL Id: tel-00010661

<https://theses.hal.science/tel-00010661>

Submitted on 17 Oct 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'INPL

Spécialité :

Mécanique et Énergétique

par

Mustapha ABBAD

Contribution sur les forces d'histoire exercées sur des inclusions solides ou fluides à faibles nombres de Reynolds

Soutenue publiquement le 05 mars 2003
devant la commission d'examen :

Présidente :

R. GATIGNOL Professeur Université de Paris VI

Rapporteurs :

A. CARTELLIER Chargé de Recherche (habilité) au CNRS INP de Grenoble
D. LHUILLIER Directeur de Recherche au CNRS Université de Paris VI

Examineurs :

D. BERNARDIN Chargé de Recherche au CNRS INP de Lorraine
M. LANCE Professeur Université de Claude
Bernard Lyon I
M. SOUHAR Professeur INP de Lorraine

Invité :

O. SERO-GUILLAUME Directeur de Recherche au CNRS INP de Lorraine

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur Daniel LHUILLIER, Directeur de Recherche, Université VI, Paris

Monsieur Alain CARTELLIER, Chargé de Recherche, LEGI/ENSHMG, Grenoble

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur ABBAD Mustapha

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

**"Contribution sur les forces d'histoire exercées sur des inclusions solides ou fluides à
faibles nombres de Reynolds. "**

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Mécanique et Energétique** »

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 5 4 5 0 1
VANCEUVRE CEDEX

Fait à Vandoeuvre, le 20 février 2003

Le Président de l'IN.P.T.

L. SCHUFFENECKER



Titre : *Contribution sur les forces d'histoire exercées sur des inclusions solides ou fluides à faibles nombres de Reynolds*

Résumé

L'objectif principal consiste en une étude théorique et expérimentale sur l'effet de la force d'histoire exercée sur une inclusion fluide ou solide en mouvement accéléré dans un milieu visqueux. Cette force dite aussi force de mémoire est souvent négligée dans le bilan de quantité de mouvement. Elle dépend essentiellement de la diffusion de vorticité à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion ainsi que de la géométrie de celle-ci. Elle s'exprime généralement sous une forme intégrale retenant toute l'histoire de l'accélération de la particule, et donne une forme intégro-différentielle à l'équation du mouvement. Dans un premier temps, nous avons considéré des inclusions sphériques et nous avons pu déterminer les expressions analytiques de cette force pour chaque type d'inclusion : liquide, gazeuse ou solide. Ceci a été effectué par la détermination des champs hydrodynamiques à l'aide d'une méthode générale basée sur la formulation de la fonction de courant en séries de fonctions de Gegenbauer. A l'aide d'une installation expérimentale originale, nous avons pu valider les résultats théoriques et mesurer avec précision les effets de mémoire significatifs sur les trajectoires des particules sphériques oscillantes pour des nombres de Reynolds faibles et intermédiaires. Dans un second temps, nous avons utilisé les techniques des perturbations régulières pour étendre la formulation théorique suivie dans le cas des particules sphériques, et déterminer ainsi l'expression de la traînée instationnaire exercée sur une inclusion fluide ellipsoïdale oscillante. Le résultat obtenu a permis de mettre en évidence un *nouveau terme d'histoire* dû principalement à la géométrie de la particule et à son écart à la sphéricité.

Mots clés : *Force d'histoire. Force de Basset. Sphère solide. Goutte. Bulle., Particule fluide Ellipsoïdale. Oscillations. Faibles nombres de Reynolds.*

Title : *Contribution on the history forces acting on solid or fluid inclusions at small Reynolds numbers*

Abstract

The goal of this work is to carry out theoretical and experimental studies on the effects of the history force acting on fluid or solid inclusions moving in a viscous medium. This force also called as the memory force is often neglected in the momentum balance. It depends mainly on the vorticity diffusion in the internal and the external flows as well as on the geometry of the inclusion. It is generally expressed in an integral form retaining all the history of the acceleration of the particle, and gives an integro-differential form to the equation of the motion. Initially, we considered spherical inclusions and we determined the analytical expressions of this force for each particle type: viscous, gaseous or solid. This was carried out by the determination of the hydrodynamic fields by using a general method based on the formulation of the stream functions in series of the Gegenbauer functions. By using an original experimental installation, we validated the theoretical results and we measured precisely the significant memory effects on the trajectories of oscillating spherical particles at low and intermediate Reynolds numbers. In the second time, we used techniques of the regular perturbations to extend the theoretical formulation followed in the case of the spherical particles, and to determine the expression of the unsteady drag acting on an oscillating ellipsoidal droplet. The obtained results enabled us to highlight a *new history term* acting on the spheroid which is due to the geometry of the particle and its variation from the spherical shape.

Keywords : *History force. Basset Force. Rigid sphere. Drop., Bubble. Ellipsoidal fluid particle. Oscillations. Low Reynolds numbers.*

*À mes parents
À mes frères et sœurs*

*À Stéphanie
et à ma petite Inès.*

Avant propos

Ce travail a été mené au sein du Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA) sous la direction de Monsieur M. Souhar, Professeur à l'ENSEM-INP de Lorraine, à qui je tiens à adresser ma profonde gratitude pour m'avoir accueilli dans son équipe depuis mon stage de D.E.A. J'ai apprécié la sympathie et la grande disponibilité avec lesquelles il m'a dirigé tout au long de cette thèse. Je le remercie pour ses conseils, ses encouragements ainsi que de m'avoir fait bénéficier de ses compétences scientifiques qui m'ont été d'une aide inestimable pour la réalisation de ce manuscrit.

Je remercie également Monsieur D. Bernardin, Chargé de Recherche au LEMTA-CNRS INP de Lorraine, d'avoir accepté de co-diriger cette thèse. Je lui témoigne ici ma profonde reconnaissance pour sa disponibilité et les débats fructueux que nous avons eu ensemble.

J'adresse mes respectueux remerciements à Madame R. Gatignol, Professeur à l'Université de Paris VI. J'ai été très sensible à l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je tiens aussi à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur A. Cartellier, Chargé de Recherche au CNRS-LEGI-INP de Grenoble, et à Monsieur D. L'huillier, Directeur de Recherche au CNRS-LMM-Paris VI qui m'ont fait le privilège de rapporter sur ce travail. Je les remercie profondément pour toutes les remarques et les suggestions qu'ils m'ont formulées et qui m'ont été d'une très grande utilité.

J'adresse aussi mes remerciements à Monsieur M. Lance, Professeur à l'Université de Claude Bernard Lyon I, et à Monsieur O. Séro-Guillaume, Directeur de Recherche au CNRS-LEMTA-INP de Lorraine d'avoir accepté de faire partie du jury, de juger ce travail et de me communiquer leurs remarques pertinentes.

Mes remerciements sont aussi adressés à toute l'équipe des techniciens du laboratoire notamment J. P. Boutroux et D. Lallemand pour leur aide efficace dans la réalisation de l'installation expérimentale.

Je remercie mes collègues chercheurs pour leur gentillesse et les moments agréables que nous avons pu savourer ensemble, tout particulièrement, K. Chetehouna, M. Haboussi, T. Lamara, K. M'rabet, J-R. Angellila, A. Abdulwahab, S. Ramazani, F. Candelier et M. Bergman.

Je ne voudrai pas manquer d'effectuer la tache impossible qui est de remercier toutes les secretaires du laboratoire, notamment Mlle D. Simonigh, Mme C. Denis et Mme M-H Zoberman pour leur efficacité et leur gentillesse.

Je tiens aussi à remercier les gouvernements algérien et français de l'aide financière qu'ils m'ont accordé en m'octroyant une bourse.

Enfin, je remercie toute ma famille pour son aide inestimable, en particulier Stéphanie car sans son soutien, sa patience et son dévouement, ce travail n'aurait pas pu être achevé.

Mustapha ABBAD.
Nancy, Mars 2003.

Sommaire

Sommaire

Nomenclature	2
Liste des figures	5
Introduction générale	10
Chapitre 1 : Étude Bibliographique sur les actions hydrodynamiques exercées sur les inclusions solides et fluides	
Introduction.....	13
1.1 Inclusion solide.....	15
1.1.1 Mouvements stationnaires	15
1.1.1.1 Sphère solide en écoulement uniforme	15
1.1.1.2 Sphère solide en écoulement non uniforme	18
1.1.1.3 Sphère solide en rotation dans un fluide en repos	19
1.1.1.4 Sphère solide en translation et en Rotation simultanées	20
1.1.1.5 Inclusion solide non sphérique.....	24
1.1.2 Mouvements instationnaires	25
1.1.2.1 Ecoulements uniformes	25
1.1.2.2 Écoulements non uniformes	32
1.2 Inclusion fluide.....	37
1.2.1 Conditions de continuité à l'interface fluide-fluide	37
1.2.2 Principaux régimes de formes	39
1.2.3 Mouvements Stationnaires.....	41
1.2.3.1 Sphère fluide en écoulement uniforme	41
1.2.3.2 Effets des surfactants sur le comportement de l'inclusion	46
1.2.4 Mouvements instationnaires.....	48
1.2.4.1 Ecoulement uniforme.....	48
1.3 Définition des objectifs de ce travail	51

Chapitre 2: Dispositif expérimental et technique d'exploitation des mesures

Introduction.....	55
2.1 Système mécanique.....	58
2.1.1 Approximation du mouvement sinusoïdal.....	59
2.2 Colonne du fluide et système d'injection des bulles	61
2.3 Système d'acquisition d'images	62
2.4 Procédure d'enregistrement d'une trajectoire	63
2.5 Exploitation des essais.....	64
2.5.1 Traitement d'images	65
2.5.2 Traitement numérique des données expérimentales	67
2.5.2.1 Mesure de la viscosité.....	67
2.5.2.2 Mesure de la vitesse terminale	69
2.5.2.3 Caractéristiques des trajectoires oscillantes	71
2.6 Précautions nécessaires et incertitudes attendues	74
2.6.1 Incertitudes attendues.....	74
2.6.2 Précautions nécessaires.....	75
Conclusions.....	76

Chapitre 3: Mouvement instationnaire d'une inclusion sphérique solide ou fluide à faibles nombres de Reynolds

Introduction.....	78
3.1 Position du problème.....	79
3.2 Détermination des champs hydrodynamiques	81
3.2.1 Solution générale des équations de Stokes.....	81
3.2.2 Application pour une goutte sphérique.....	86
3.3 Force totale exercée sur la sphère fluide.....	93
3.4 Comportements asymptotiques de la traînée	97
3.4.1 Limite d'une sphère rigide.....	97
3.4.2 Limite d'une bulle sphérique.....	98
3.4.3 Limite des faibles et grandes fréquences.....	100
3.5 Données expérimentales complémentaires.....	103
3.6 Cas des faibles nombres de Reynolds.....	104
3.6.1 Mouvement sans oscillation	104
3.6.2 Mouvement avec oscillations	104
3.7 Cas des nombres de Reynolds intermédiaires	108
3.7.1 Équation du mouvement de la sphère	108
3.7.2 Discussion des résultats	109
3.7.2.1 Nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité	109
3.7.2.2 Nombres de Reynolds supérieurs.....	110
Conclusions.....	112

Illustration des résultats	114
----------------------------------	-----

Chapitre 4: Mouvement instationnaire d'une inclusion fluide ellipsoïdale

Introduction.....	134
4.1 Force exercée sur un obstacle axisymétrique	136
4.2 Écoulement autour d'une inclusion fluide ellipsoïdale.....	141
4.2.1 Position du problème	141
4.2.2 Équation de surface de l'inclusion.....	142
4.2.3 Champ de vitesses et de contraintes à l'interface	144
4.2.4 Conditions aux limites à l'interface	144
4.2.5 Détermination des champs hydrodynamiques	145
4.3 Force de résistance de l'ellipsoïde	155
4.3.1 Limite d'un ellipsoïde rigide	159
4.3.2 Limite d'une bulle gazeuse ellipsoïdale	159
4.3.3 Comportement temporel du nouveau terme de mémoire	161
Conclusion	163

Conclusion générale et perspectives	165
--	------------

Références	168
-------------------------	------------

Annexe A: Champ hydrodynamique autour d'une sphère solide oscillante

A.1 Champs hydrodynamiques.....	179
A.2 Vitesse de la sphère.....	183

Annexe B: Fonctions de Gegenbauer

B.1 Equation différentielle de Gegenbauer.....	186
B.2 Mouvement stationnaire d'une ellipsoïde solide.....	189

Nomenclature

Nomenclature

Lettres romaines

A_c	Nombre d'accélération
C_D	Coefficient de traînée
C_m	Coefficient de la masse ajoutée
C_h	Coefficient d'histoire
D	Taille caractéristique de l'écoulement
F_D	Force de traînée
F_m	Force de la masse ajoutée
F_h	Force d'histoire
F_n	Fonction de Gegenbauer d'ordre n et de première espèce
H_n	Fonction de Gegenbauer d'ordre n et de deuxième espèce
I_n	Fonction modifiée de Bessel de première espèce
K_n	Fonction modifiée de Bessel de deuxième espèce
P	Pression motrice (totale)
P_n	Polynôme de Legendre d'ordre n et de première espèce
Q_n	Polynôme de Legendre d'ordre n et de deuxième espèce
Re	Nombre de Reynolds
Rz	Résidu: différence entre les trajectoires mesurées et les trajectoires modèles
Sl	Nombre de Strouhal
St	Nombre de Stokes
T	Température
$\bar{\mathbf{T}}$	Tenseur de contraintes
U_f	Vitesse d'oscillations de la sphère
U_{fx}	Amplitude de la vitesse d'oscillations de la sphère
U_m	Vitesse moyenne de la sphère

U_t	Vitesse terminale de la sphère
V_{pl}	Vitesse du repère relatif (plateau oscillant)
a	Rayon de la sphère
b	Amplitude du plateau
e	Excentricité entre les demi-axes de l'ellipsoïde (écart à la sphéricité)
k_i, k_e	Longueur caractéristique de diffusion
p	Pression de l'écoulement
r	Coordonnée sphérique radiale
t	Temps
\mathbf{v}	Champ de vitesse
x, y, z	Coordonnées cartésiennes

Lettres grecques

α_1	Paramètre de perturbation de l'écoulement instationnaire
β, θ	Coordonnées sphériques tangentielles
γ	Rapport des densités des fluides intérieur et extérieur
γ_{pl}	Accélération du plateau
$\delta_{i,e}$	Profondeur de pénétration
ε	Paramètre de perturbation de la sphère
ζ	Vorticité
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
ξ	Déformation de la sphère
ρ	Densité du fluide
σ	Tension superficielle
τ_{0i}, τ_{0e}	Temps caractéristiques de diffusion
$\tau_{rr}, \tau_{r\theta}$	Contraintes radiales et tangentielles en coordonnées sphériques
ϕ_μ	Rapport des viscosités dynamiques
ψ, Ψ	Fonctions de courant
ω	Fréquence (angulaire) d'oscillations du repère relatif

Indices et exposants

*	Grandeur dimensionnelle
\overline{xx}	Grandeur moyenne

Liste des figures

Liste des figures

- 1.1 Système de coordonnées sphérique (sphère centrée à l'origine).
- 1.2 Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds.
- 1.3 Écoulement de cisaillement autour d'une sphère.
- 1.4 Coefficient de portance calculé par Dandy & Dwyer (1990).
- 1.5 Coefficient de traînée calculé par Dandy & Dwyer (1990).
- 1.6 Coefficients de traînée moyens de la sphère dans un écoulement pulsé pour différentes fréquences de pulsation.
- 1.7 Erreur relative entre le coefficient de traînée calculé par Chang et Maxey et celui de Basset.
- 1.8 Comparaison des coefficients de traînée entre la simulation numérique de Chang & al. (1994), Odar & Hamilton (1964) et Basset (1888).
- 1.9 Écoulement en présence de l'inclusion.
- 1.10 Écoulement non perturbé.
- 1.11 Schéma simplifié d'une interface fluide-fluide.
- 1.12 Formes des inclusions fluides en mouvement, en milieu infini.
- 1.13 Lignes de courant en écoulement de Stokes autour d'une sphère fluide.
- 1.14 Coefficients de traînée pour les bulles dans les liquides purses.
- 1.15 Modélisation du front de stagnation arrière.
- 2.1 Vue d'ensemble de l'installation expérimentale.
- 2.2 Schéma général du dispositif expérimental.
- 2.3 Mesure de la fréquence d'oscillations du plateau.
- 2.4 Mouvement de la bielle.

- 2.5 Comparaison du mouvement du plateau avec un mouvement sinusoïdal.
- 2.6 Comparaison des spectres de fréquences du mouvement du plateau et de celui d'une sinusoïdale parfaite.
- 2.7 Colonne du fluide et système d'injections des bulles.
- 2.8 Mouvement d'une bille solide, bulle d'air et goutte de glycérine dans l'huile de silicone.
- 2.9 Coefficient de traînée de la sphère.
- 2.10 Mouvement d'une bille solide en polyamide dans l'huile de silicone.
- 2.11 Résidu résultant de l'optimisation du mouvement de la bille.
- 2.12 Déplacement du plateau à 5 Hz.
- 2.13 Résidu résultant de l'optimisation du mouvement du plateau.
- 2.14 Déplacement d'une bulle d'air dans l'huile de silicone.
- 3.1 Position schématique du problème.
- 3.2 Système de coordonnées sphériques.
- 3.3 Examen du déterminant du système d'équations (3.65).
- 3.4 Lignes de courant pour une demi-période d'oscillations.
- 3.5 Comparaison des fonctions de courant pour différents nombres de Stokes.
- 3.6 Comparaison des forces d'histoire et de l'effet de la masse ajoutée pour une goutte oscillante.
- 3.7 Amplitude de la force de la masse ajoutée, des forces d'histoire et de la traînée totale exercées sur une goutte sphérique.
- 3.8 Comparaison des noyaux des forces d'histoire subies par une sphère solide et une bulle gazeuse.
- 3.9 Mesures de la viscosité.
- 3.10 Mouvement rectiligne d'une bulle d'air dans l'huile de silicone (1).
- 3.11 Mouvement rectiligne d'une goutte de glycérine dans l'huile de silicone (1).
- 3.12 Modélisation des oscillations d'une bille en téflon dans la glycérine.
- 3.13 Modélisation des oscillations d'une goutte de glycérine dans l'huile de silicone.
- 3.14 Vitesses d'oscillations de la sphère.

- 3.15 Vitesses terminales moyennes de la sphère.
- 3.16 Vitesses maximales de la sphère.
- 3.17 Déphasages entre la sphère et le plateau.
- 3.18 Vitesse de la sphère au début de son mouvement.
- 3.19 Vitesse de la sphère après l'atteinte de la vitesse terminale moyenne.
- 3.20 Vitesses terminales moyennes de la sphère.
- 3.21 Amplitudes des vitesses de la sphère.
- 3.22 Déphasages entre la sphère et le plateau oscillant.
- 3.23 Chute libre d'une bille solide dans l'eau.
- 3.24 Ascension d'une goutte d'huile de silicone (1) dans l'eau.
- 3.25 Résidu pour la goutte d'huile de silicone (1) dans l'eau.
- 3.26 Spectres des fréquences des oscillations du plateau.
- 3.27 Oscillations d'une bille solide dans l'eau.
- 3.28 Oscillations d'une goutte d'huile de silicone (1) dans l'eau.
- 3.29 Nombre de Strouhal du détachement tourbillonnaire derrière une bille solide en fonction de la fréquence d'oscillations du plateau.
- 3.30 Nombre de Strouhal du détachement tourbillonnaire derrière une goutte d'huile de silicone (1) dans l'eau en fonction de la fréquence d'oscillations du plateau.
- 3.31 Vitesses terminales moyennes de la sphère.
- 3.32 Amplitudes des vitesses de la sphère.
- 3.33 Déphasages entre la sphère et le plateau oscillant.
- 4.1 Noyaux d'histoire utilisés dans la relation (4.4).
- 4.2 Corps axisymétrique et systèmes de coordonnées cartésiennes, sphériques, cylindriques et curvilignes.
- 4.3 Bornes d'intégration sur la surface de l'inclusion.
- 4.4 Inclusion fluide ellipsoïdale en mouvement oscillatoire.
- 4.5 Lignes de courant et d'iso-vorticité pour une demi-période d'oscillations.
- 4.6 Vorticité sur la frontière de l'inclusion.

- 4.7 Comparaison des vorticités pariétales entre l'inclusion ellipsoïdale et la sphère équivalente.
- 4.8 Force de la masse ajoutée et différentes forces d'histoire exercées sur l'ellipsoïde.
- 4.9 Amplitude des forces d'histoire exercées sur l'ellipsoïde en fonction du nombre de Stokes.
- 4.10 Comparaison des amplitudes des forces d'histoire et des traînées totales exercées sur un ellipsoïde gazeux et sur la bulle sphérique équivalente.

Introduction générale

Introduction générale

Le travail présenté ici, s'inscrit dans le cadre du thème de recherche en écoulements diphasiques à phase dispersée, liquide-liquide ou gaz-liquide.

L'étude de ce type d'écoulement est l'un des problèmes particulièrement difficiles, auquel sont confrontés actuellement, les mécaniciens des fluides, notamment dans la prédiction du comportement de la phase dispersée et dans la détermination des différentes actions qu'elle subit de la part de la phase continue.

Les informations que l'on peut tirer de l'étude d'un tel écoulement, s'avèrent cruciales dans plusieurs domaines scientifiques et divers processus industriels, tels que les systèmes en ébullition, les émulsions, la dispersion des polluants dans l'atmosphère, les chambres à combustion ou encore les réacteurs agités.

Généralement, lorsqu'on s'intéresse à chacune de ces applications, on a souvent affaire à la détermination des actions hydrodynamiques exercées sur une ou plusieurs inclusions en mouvement dans un écoulement accéléré. L'approche actuelle de la plupart des descriptions lagrangiennes tient compte du poids de l'inclusion, des forces de pression, de l'effet de la masse ajoutée, de la traînée quasi-stationnaire et de la portance. Malheureusement, cette approche présente un grand inconvénient, du fait qu'elle néglige souvent la force d'histoire, dite aussi "*force de Basset*". Cette force de "*mémoire*" dépend essentiellement de la diffusion de la vorticité dans le fluide environnant et traduit l'effet des perturbations de l'écoulement, causées par l'accélération de l'inclusion. Sa comptabilisation dans le bilan des forces, donne à l'équation du mouvement de la particule une forme intégro-différentielle du premier ordre ce qui nécessite une grande mémoire lors d'une résolution numérique, notamment pour le cas des nombre de Reynolds intermédiaires. Par contre en la négligeant, la résolution se facilite mais peut entraîner des erreurs considérables dans l'évaluation de la trajectoire et de la vitesse de l'inclusion.

Pour mettre le point sur la défaillance de cette modélisation, le présent travail s'intéresse essentiellement à l'étude théorique et expérimentale de l'influence du

terme d'histoire sur le mouvement d'une inclusion sphérique ou non, liquide, gazeuse ou solide, dans un fluide visqueux infini, à faibles et moyens nombres de Reynolds.

Dans le chapitre 1, nous effectuerons une étude bibliographique, en rappelant quelques définitions et en recensant les travaux antérieurs concernant les actions hydrodynamiques exercées sur des particules solides ou fluides.

Dans le chapitre 2, nous décrirons le dispositif expérimental que nous avons conçu et réalisé pour cette étude. Nous présenterons également la méthodologie utilisée en détaillant le principe et la mise en œuvre des techniques de mesures des trajectoires de l'inclusion, ainsi que ceux de l'exploitation des trajectoires enregistrées. Nous insisterons également sur les précautions nécessaires et les précisions que nous pouvons attendre pour ces expériences délicates.

Dans le chapitre 3, nous présenterons dans une première partie, une étude théorique, où nous déterminerons les champs hydrodynamiques autour d'une particule sphérique fluide oscillante dans un milieu visqueux infini. Dans la limite des faibles nombres de Reynolds, nous établirons la solution générale des équations instationnaires de Stokes en utilisant une méthode différente, basée sur la formulation en série polynomiale de la fonction de courant. A partir de la traînée totale exercée sur la sphère liquide, nous déduirons celles exercées sur une bulle gazeuse ou une sphère solide. Nous mettrons également le point sur les forces d'histoire subies par chaque type d'inclusion et nous étudierons leurs comportements asymptotiques aux temps courts et aux temps longs. Dans une deuxième partie, nous présenterons les résultats expérimentaux concernant la vitesse de l'inclusion à de faibles et moyens nombres de Reynolds. Ces mesures seront ensuite traitées et comparées avec nos résultats théoriques, obtenus en négligeant et en comptabilisant la force d'histoire dans le bilan de quantité de mouvement.

Dans le chapitre 4, nous nous intéresserons aux mouvements oscillatoires d'une inclusion fluide ellipsoïdale à faibles nombres de Reynolds. En étendant la méthode des résolutions des équations de Stokes utilisée au chapitre 3, nous déterminerons, à l'aide d'un schéma de perturbation régulier, les champs hydrodynamiques ainsi que la traînée instationnaire totale que subie l'ellipsoïde. Nous montrerons également que la perturbation de la forme sphérique de la particule engendre un nouveau terme d'histoire, différent de celui trouvé pour une sphère fluide.

Enfin, dans la conclusion générale, nous résumerons les principales contributions de cette étude et nous présenterons les éventuelles perspectives.

Chapitre 1

Chapitre 1

Étude bibliographique sur les actions hydrodynamiques exercées sur les inclusions solides et fluides

Introduction

La description précise du mouvement des particules solides ou fluides dans les milieux visqueux est d'une importance fondamentale pour la modélisation des écoulements diphasiques. Elle nécessite une bonne connaissance des différentes forces exercées sur une inclusion par le milieu environnant. D'une façon générale, un obstacle se déplaçant dans un fluide visqueux incompressible, est soumis de la part de celui-ci à l'ensemble des forces de pression et de viscosité, qui se réduisent en un couple \mathbf{M} et une force résultante \mathbf{F} . Celle-ci peut se décomposer, de façon classique, en deux forces distinctes: une traînée \mathbf{F}_D dirigée par la vitesse relative, et une portance \mathbf{F}_L perpendiculaire à la vitesse. L'écoulement induit par le mouvement de l'obstacle est gouverné par les équations de Navier-Stokes (1.1) et celle de la continuité (1.2) :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_e} \nabla p + \mathbf{f}_v + \nu_e \Delta \mathbf{v} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

où ρ_e et ν_e représentent respectivement, la densité et la viscosité cinématique du fluide environnant. \mathbf{v} est le champ de vitesse induit, p la pression et \mathbf{f}_v est la résultante des forces volumiques par unité de masse. Cette force dérive d'un potentiel et peut être définie par : $\nabla p_0 = \rho_e \mathbf{f}_v$ (dans le cas des forces de pesanteur, $\mathbf{f}_v \equiv \mathbf{g}$, et ∇p_0 représente le gradient de pression hydrostatique). Le système d'équations (1.1) et (1.2) ne peut être résolu analytiquement du fait de sa non-linéarité qui réside dans les

termes d'inertie $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Alors, depuis plus d'un siècle, plusieurs auteurs ont procédé à sa résolution en adoptant différentes hypothèses leur permettant d'avoir une solution exacte. En général, la simplification de ce système dépend des spécificités du phénomène à étudier. Elle consiste d'abord à écrire les équations de Navier-Stokes sous une forme adimensionnelle, et ensuite, à examiner l'ordre de grandeur de chacun de ces termes. Pour cela, on considère les variables caractéristiques de l'écoulement D , U et τ représentant respectivement, la taille de l'inclusion, sa vitesse et le temps de variation de cette vitesse. Les équations (1.1) et (1.2) prennent alors les formes adimensionnelles suivantes :

$$Sl \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{v}^* \quad (1.3)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (1.4)$$

$$\text{avec} \quad t^* = t/\tau \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{v}/U \quad p^* = (p - p_0)/\rho_e U^2 \quad \nabla^* = D\nabla \quad (1.5)$$

L'équation du mouvement (1.3) met en évidence deux paramètres importants: le nombre de Reynolds Re et le nombre de Strouhal Sl . Le premier caractérise le rapport des forces d'inertie et des forces visqueuses. On peut le définir comme suit :

$$\frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}|}{\nu_e |\Delta \mathbf{v}|} \sim Re = \frac{UD}{\nu_e} \quad (1.6)$$

Étant très petit : $Re \ll 1$, ou de l'ordre de l'unité : $Re \sim O(1)$, le nombre de Reynolds nous permet de donner une approximation des termes d'inertie ou de les négliger devant ceux de la viscosité. Quant au nombre de Strouhal, il mesure l'importance des effets d'instationnarité par rapport aux effets convectifs. Il est donné par :

$$\frac{|\partial \mathbf{v} / \partial t|}{|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}|} \sim Sl = \frac{D}{U\tau} \quad (1.7)$$

Le produit de ces deux paramètres donne lieu à un autre groupe de nombres sans dimension qui prend en compte la comparaison entre les termes d'instationnarité et les termes visqueux. Dans la littérature, il est souvent connu sous le nom de "*nombre de Stokes*". Noté St , il est défini par :

$$\frac{|\partial \mathbf{v} / \partial t|}{\nu_e |\Delta \mathbf{v}|} \sim St = ReSl = \frac{D^2}{\nu_e \tau} \quad (1.8)$$

La combinaison de ces trois grandeurs nous permet généralement de situer le problème étudié et de le placer dans les catégories des écoulements rampants, potentiels, stationnaires ou instationnaires. Et par conséquent, il nous permet de

procéder à la résolution du système d'équations qui traduit au mieux le phénomène et qui en donne la meilleure approximation.

Concernant la force totale \mathbf{F} , plusieurs études théoriques et expérimentales ont été effectuées afin de prédire la trajectoire de l'inclusion. Toutefois, l'évaluation exacte des différentes forces agissant sur l'inclusion reste un problème particulièrement difficile, et non entièrement élucidé. En particulier, dans les mouvements instationnaires où les forces d'histoire sont souvent négligées. Pour bien cerner ce problème, nous consacrons ce chapitre bibliographique au recensement et à la présentation des divers travaux traitant des actions hydrodynamiques agissant sur une particule solide ou fluide, se déplaçant dans un milieu visqueux. Pour limiter l'exposé, nous considérerons uniquement les cas des faibles et moyens nombres de Reynolds, où nous aborderons différents types de mouvements pour les deux configurations : uniformes et non-uniformes.

1.1 Inclusion solide

1.1.1 Mouvements stationnaires

Dans cette partie, nous examinerons les écoulements pour lesquels les profils de vitesses sont quasi-stationnaires. Le temps caractéristique de l'écoulement sera très grand de telle façon à avoir des faibles nombres de Strouhal $Sl \ll 1$.

1.1.1.1 Sphère solide en écoulement uniforme

Le premier résultat connu pour une sphère solide de rayon a , ayant un mouvement rectiligne avec une vitesse quasi-constante \mathbf{U} , est attribué à G.G. Stokes (1851). En adoptant l'hypothèse des faibles nombres de Reynolds, et en négligeant les termes d'inertie, il a pu linéariser les équations de Navier-Stokes (1.1) et les écrire sous la forme (1.9) dite "*équations stationnaires de Stokes*" :

$$\nabla p - \rho_e \mathbf{f}_v = \mu_e \Delta \mathbf{v} \quad (1.9)$$

où $\mu_e = \rho_e \nu_e$ est la viscosité dynamique du fluide. L'écoulement est supposé uniforme et en repos à l'infini, il doit satisfaire les conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} \quad \text{quand} \quad r = a \quad (1.10a)$$

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{quand} \quad r \rightarrow \infty \quad (1.10b)$$

$$Re = \frac{2aU}{\nu_e} \ll 1 \quad (1.11)$$

où r est la coordonnée radiale du système des coordonnées sphériques (O, r, θ, φ) , liée au centre de la sphère, tel qu'il est indiqué sur la figure 1.1. Stokes a montré que l'expression de la force de traînée exercée sur la sphère par le fluide environnant s'écrit sous la forme suivante dite "formule de Stokes" :

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\mu_e a \mathbf{U} \quad (1.12)$$

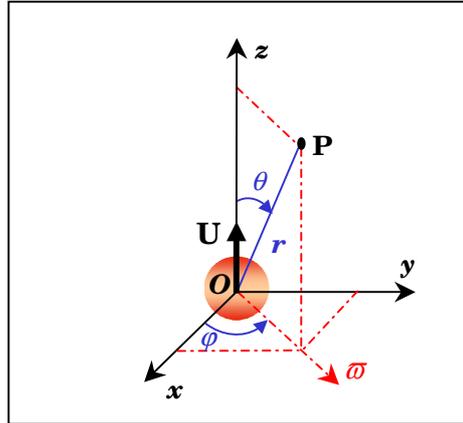


Figure 1.1 : Système de coordonnées sphériques. (la sphère centrée à l'origine)

D'un point de vue rigoureux, la solution de Stokes n'est valide que pour des faibles nombres de Reynolds $Re \ll 1$. Elle décrit bien l'écoulement près de la sphère, mais à une distance suffisamment grande, elle est incorrecte du fait que les forces d'inertie deviennent du même ordre que les forces visqueuses et ne peuvent plus être négligées. Whitehead (1889) a essayé de l'améliorer pour des nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité $Re_p \sim O(1)$. La méthode qu'il a proposée, est basée sur l'approximation des termes $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ par $(\mathbf{v}_{st} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{st}$, où \mathbf{v}_{st} est le champ de vitesse issu de la solution de Stokes. Cette procédure itérative ne lui a pas permis de résoudre l'écoulement correctement, à cause de la divergence du champ de vitesse loin de la sphère. Ce phénomène apparaît aussi dans l'étude des écoulements uniformes autour des obstacles de longueur caractéristique finie, il est connu sous le nom du "paradoxe de Whitehead". Oseen (1910) a étendu cette méthode et a réussi à établir une première approximation de ce type d'écoulement en proposant d'écrire les termes d'inertie sous la forme: $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Ainsi, il a pu donner une nouvelle expression de la force de traînée telle que :

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\mu_e a \mathbf{U} \left(1 + \frac{3}{16} Re\right) \quad (1.13)$$

Il est clair que la formule d'Oseen (1.13) donne une meilleure approximation de la force de résistance que celle de Stokes (1.12), mais sa description de l'écoulement

donne une estimation erronée des termes d'inertie près de l'obstacle. Proudman & Pearson (1957) ont relevé ce problème, en utilisant la méthode de raccordement asymptotique pour raccorder les deux solutions (Stokes-Oseen), et ont donné à la force \mathbf{F}_D un ordre d'approximation plus élevé :

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\mu_e a \mathbf{U} \left(1 + \frac{3}{16} Re + \frac{9}{160} Re^2 \ln(Re) + O(Re^2) \right) \quad (1.14)$$

On peut signaler aussi, qu'avant l'apparition de la méthode de développement asymptotique, Goldstein (1929) avait trouvé en utilisant simplement l'équation d'Oseen, la traînée \mathbf{F}_D en termes successifs de Re^2 , Re^3 et Re^4 . Ensuite, Chester & Breach (1969) ont poussé plus loin les calculs de Proudman & Pearson et leurs résultats ont aboutit à l'expression suivante :

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\mu_e a \mathbf{U} \left(1 + \frac{3}{16} Re + \frac{9}{160} Re^2 \ln(Re + \frac{3}{2} \ln 2 + Eu - \frac{323}{360}) + \frac{27}{640} Re^3 \ln(Re) + O(Re^3) \right) \quad (1.15)$$

où $Eu = 0.5772$ est la constante d'Euler. Les résultats concernant la traînée stationnaire sur la sphère sont représentés sur la figure 1.2. Les coefficients de traînée C_D relatifs aux expressions précédentes peuvent être obtenus par :

$$C_D = \frac{|\mathbf{F}_D|}{\frac{1}{2} \pi a^2 \rho_e U^2} \quad (1.16)$$

Les courbes illustrées sur la figure 1.2 montrent que la solution de Goldstein, celle Proudman & Pearson ainsi que celle de Chester & Breach donnent une meilleure évaluation du coefficient de traînée pour des nombres de Reynolds proches de l'unité. Mais au-delà de cette limite, et précisément pour $Re > 4$, ces résultats divergent plus rapidement que celui d'Oseen en comparaison avec les mesures expérimentales de Roos & al. (1971). Cette défaillance est rattrapée par les études numériques et les méthodes d'optimisations où le coefficient de traînée est donné par des expressions empiriques. Parmi les nombreuses corrélations rapportées par Clift & al. (1978), nous retenons dans le tableau 1.1, les plus pertinentes qui présentent une déviation inférieure à 5 % par rapport aux observations expérimentales.

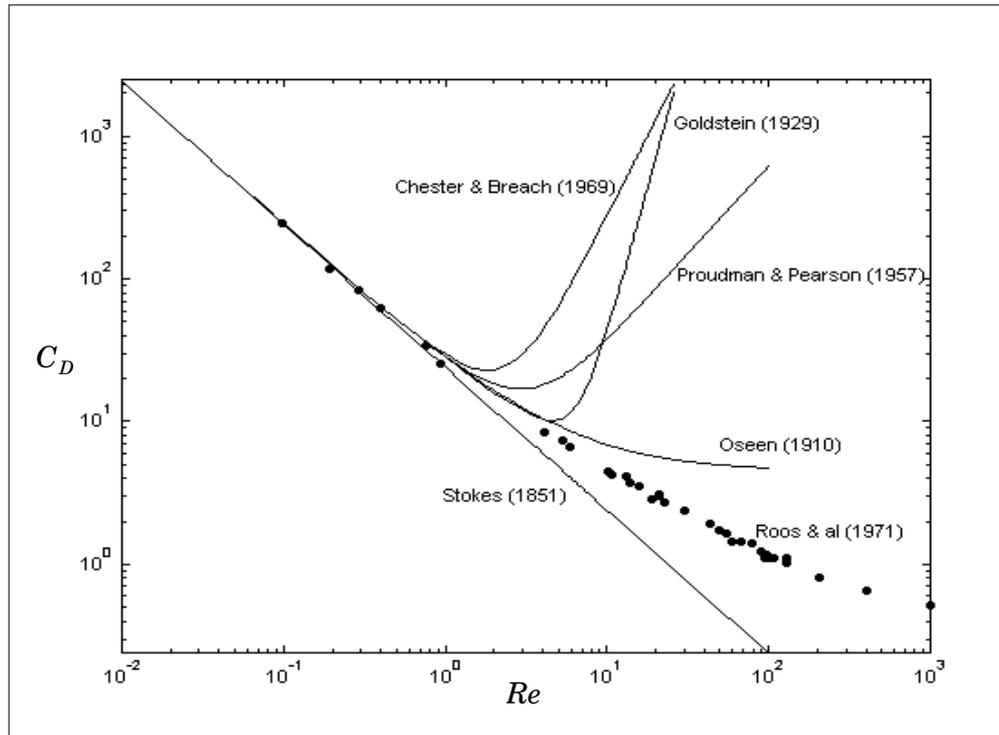


Figure 1.2 : Coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds.

Auteur	Nombre de Reynolds	Corrélation
Clift & Gauvin (1970)	$Re < 800$	$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.15Re^{0.687})$
Tanaka & Linoya (1970)	$260 \leq Re \leq 1500$	$\text{Log}_{10} C_D = 1.6435 - 1.1242L + 0.1558L^2$ $L = \text{Log}_{10} Re$
Morsi & Alexander (1972)	$10^3 \leq Re \leq 510^3$	$C_D = 0.3571 + 148.62Re^{-1} - 47500Re^{-2}$

Tableau 1.1 : Corrélations décrivant le coefficient de traînée de la sphère

1.1.1.2 Sphère solide en écoulement non uniforme

Dans le cas des écoulements non-uniformes, le problème devient plus complexe car le champ de vitesse loin de l'inclusion n'est plus constant et dépend du vecteur position \mathbf{r} , où $r = |\mathbf{r}|$. La première étude de ce problème a été faite par Faxén (1924). A l'aide d'un développement en série des équations de Stokes, il a donné l'expression de la force de traînée et le couple \mathbf{M} exercés sur une particule sphérique solide. Si on

désigne par $\mathbf{U}_\infty(\mathbf{r})$ la vitesse de l'écoulement non perturbé qui aurait lieu en l'absence de l'inclusion, les expressions de la force ainsi que du couple seront données par "les formules de Faxén" suivantes :

$$\mathbf{F}_D = 6\pi\mu_e a \left((\mathbf{U}_{\infty o} - \mathbf{U}) + \frac{1}{6} a^2 (\Delta \mathbf{U}_\infty)_o \right) \quad (1.17)$$

$$\mathbf{M} = 4\pi\mu_e a^3 [\nabla \wedge \mathbf{U}_\infty]_o \quad (1.18)$$

L'indice "o" dénote les caractéristiques de l'écoulement non perturbé au centre de la sphère. On note que ces mêmes relations ont été trouvées par Oseen (1927) en utilisant le tenseur de Green, puis, par Pères (1929) à l'aide du théorème de réciprocité entre deux solutions des équations de Stokes. L'expression (1.17) peut aussi s'exprimer sous la forme intégrale suivante :

$$\mathbf{F}_D = 6\pi\mu_e a (4\pi a^2)^{-1} \int_S (\mathbf{U}_\infty(\mathbf{r}) - \mathbf{U}) dS \equiv 6\pi\mu_e \bar{\mathbf{U}}^S \quad (1.19)$$

où $\bar{\mathbf{U}}^S$ est le champ de vitesse relatif moyen sur la surface S de la sphère. L'équivalence entre (1.17) et (1.19) peut être vérifiée en développant (1.19) au voisinage du centre de l'inclusion ($\mathbf{r} = 0$), sachant que pour un écoulement de Stokes stationnaire, on a pour tout $n \geq 2$, $\Delta^{2n} \mathbf{U}_\infty(\mathbf{r}) = 0$.

1.1.1.3 Sphère solide en rotation dans un fluide en repos

Un autre mouvement peut être rencontré en pratique dans le cas d'une sphère de centre fixe, en rotation dans un fluide en repos avec une vitesse angulaire constante $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$. Dans ce cas, l'écoulement sera caractérisé par le nombre de Reynolds de rotation Re_Ω appelé aussi "nombre de Taylor", tel que :

$$Re_\Omega = \frac{\Omega a^2}{\nu_e} \quad (1.20)$$

Pour les faibles valeurs de Re_Ω , le problème a été résolu par Stokes, qui a établi l'expression du couple \mathbf{M} s'exerçant sur la sphère ainsi que son coefficient $C_{M\Omega}$ correspondant :

$$\mathbf{M} = -8\pi\mu_e a^3 \boldsymbol{\Omega} \quad (1.21)$$

$$C_{M\Omega} = \frac{|\mathbf{M}|}{\frac{1}{2} \rho_e \pi a^5 \Omega^2} = \frac{16}{Re_\Omega} \quad (1.22)$$

Théoriquement, ces expressions ne sont valides que pour $Re_\Omega \ll 1$, mais l'expérience a montré qu'elles peuvent être suffisamment précises pour $Re_\Omega \leq 10$. En prenant compte des effets d'inertie, et pour $Re_\Omega \leq 10$, Takagi (1977) a utilisé la méthode du développement asymptotique et a établi l'expression suivante :

$$\frac{Re_\Omega C_{M\Omega}}{16} = 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{Re_\Omega}{10} \right)^2 - 0.00754 \left(\frac{Re_\Omega}{10} \right)^4 - 0.00535 \left(\frac{Re_\Omega}{10} \right)^6 + O(Re_\Omega^8) \quad (1.23)$$

Pour la gamme de $50 \leq Re_\Omega \leq 10^3$, Dennis & al. (1980) ont effectué une étude numérique et ont montré que l'expression du coefficient du couple $C_{M\Omega}$ peut être approchée par l'expression empirique suivante :

$$C_{M\Omega} = \frac{1}{\pi} (6.45 Re_\Omega^{-1/2} + 32.1 Re_\Omega^{-1}) \quad (1.24)$$

1.1.1.4 Sphère solide en translation et en Rotation simultanées

Dans le cas d'une sphère effectuant un mouvement de translation et de rotation simultanées, il est intéressant de distinguer deux types d'écoulements : écoulements sans cisaillement et écoulements de cisaillement.

Écoulements sans cisaillement

On considère que la sphère effectue un mouvement de translation et de rotation avec des vitesses respectives \mathbf{U} et $\boldsymbol{\Omega}$. La translation est supposée parallèle à la vitesse du fluide à l'infini \mathbf{U}_∞ , tandis que la vitesse de rotation est dans le plan perpendiculaire. A condition que les nombres de Reynolds Re et Re_Ω soient tous deux suffisamment faibles, ce problème peut être traité comme étant la superposition de ces deux mouvements. Le nombre de Reynolds de translation est basé ici sur la vitesse relative $\mathbf{U}_r = \mathbf{U}_\infty - \mathbf{U}$, tel que $Re = 2a |\mathbf{U}_r| / \nu_e$.

En écoulement uniforme, la force de traînée ainsi que le couple exercés sur l'inclusion seront ceux de Stokes, donnés respectivement par les relations (1.12) et (1.21). En écoulement non-uniforme, le même raisonnement conduit à utiliser la formule de Faxén (1.17) pour la traînée, tandis que le couple \mathbf{M} sera exprimé par :

$$\mathbf{M} = 8\pi\mu_e a^3 \left(\frac{1}{2} [\nabla \wedge \mathbf{U}_\infty]_o - \boldsymbol{\Omega} \right) \quad (1.25)$$

En tenant compte des effets d'inertie et en supposant que Re et Re_Ω sont du même ordre et inférieurs à l'unité, Rubinow & Keller (1961) ont utilisé le développement asymptotique raccordé pour résoudre les équations de Navier Stokes et ont montré

que la force totale agissant sur la sphère, en écoulement uniforme, s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{F} = -6\pi\mu_e a \mathbf{U}_r \left(1 + \frac{3}{16} Re\right) + \rho_e \pi a^3 (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{U}_r) + O(\pi a U_r Re) \quad (1.26)$$

Dans l'expression (1.26), on remarque qu'en plus de la traînée \mathbf{F}_D obéissant à la formule d'Oseen (1.13), la sphère est soumise à une autre force perpendiculaire à la vitesse dite "*portance*", et notée \mathbf{F}_L (deuxième terme de 1.26). En ce qui concerne le couple \mathbf{M} , il sera exprimé à l'ordre $O(Re)$ par la même formule (1.21) donnée par Stokes. A partir de ce résultat, Rubinow & al. ont montré qu'à cet ordre de précision $O(Re)$, les mouvements de translation et de rotation de l'inclusion sont indépendants et n'ont pas d'influence l'un sur l'autre. Pour des grands nombres de Reynolds Re , la force de portance \mathbf{F}_L devient de plus en plus significative et provoque une grande influence sur la trajectoire de la sphère. Ce phénomène est connu sous le nom de "*l'effet de Magnus*", observé la première fois par Magnus (1853) dans le cas d'un cylindre en rotation. Dans la nature, cet effet peut être illustré par l'exemple de la déviation d'une balle de tennis ou de golf causée par l'action d'une portance importante.

Écoulements de cisaillement

Le problème des inclusions solides se déplaçant dans un écoulement de cisaillement a été abordé par Saffman (1965, 1968). Il a considéré le cas d'une sphère en translation et en rotation avec les vitesses respectives \mathbf{U} et $\boldsymbol{\Omega}$ dans un écoulement de cisaillement unidirectionnel à gradient de vitesse constant G , tel qu'il est indiqué sur la figure 1.3. La vitesse de translation de la sphère est supposée parallèle à la vitesse de l'écoulement non perturbé: $\mathbf{U}_\infty = (U_\infty + Gx) \mathbf{e}_z$. Sous les hypothèses suivantes :

$$Re \ll Re_G^{1/2} \ll 1 \quad \text{et} \quad Re_\Omega \ll 1 \quad (1.27)$$

$$\text{avec} \quad Re_G = \frac{(2a)^2 |G|}{\nu} \quad (1.28)$$

où Re_G est le nombre de Reynolds de cisaillement, et à l'aide de la technique des perturbations, Saffman a montré que la force de portance \mathbf{F}_L agissant sur la sphère s'écrit comme suit :

$$\mathbf{F}_L = 3.23\mu_e a (U_\infty - U_p) \sqrt{Re_G} \cdot \text{sign}(G) \cdot \mathbf{e}_x \quad (1.29)$$

et par conséquent, le coefficient de portance C_L sera :

$$C_L = \frac{|\mathbf{F}_L|}{\frac{1}{2} \rho_e \pi a^2 |\mathbf{U}_r|^2} \approx 4.1125 \frac{\sqrt{Re_G}}{Re} \quad (1.30)$$

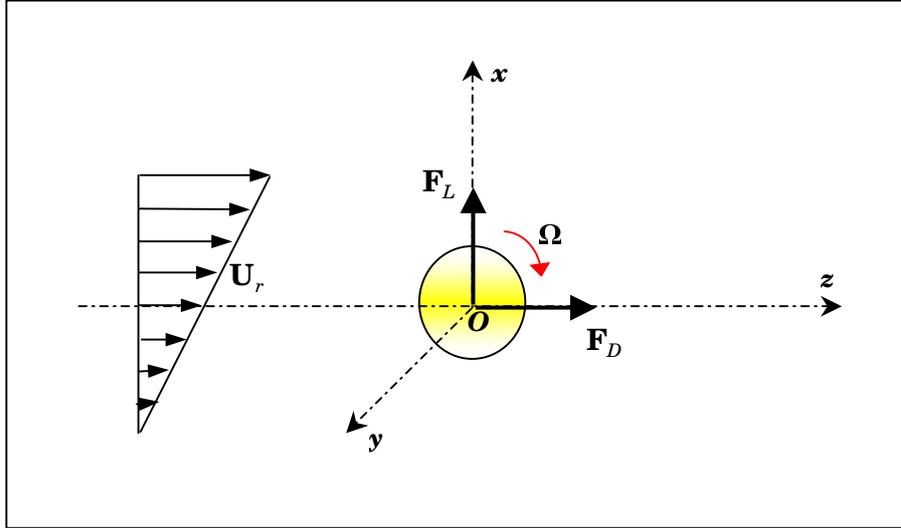


Figure 1.3 : Ecoulement de cisaillement autour d'une sphère

Pour le cas des nombres de Reynolds intermédiaires, Dandy & Dwyer (1990) ont effectué une étude numérique pour les gammes: $0.1 \leq Re \leq 100$ et $0.005 \leq G^* \leq 0.1$, où G^* est le taux de cisaillement adimensionnel défini par :

$$G^* = \frac{1}{2} \frac{Re_G}{Re} \quad (1.31)$$

Sur la figure 1.4, ils ont montré que pour $40 \leq Re \leq 100$, le coefficient de portance C_L est pratiquement constant à G^* fixé, et ne suit pas la relation de Saffman (1.29) qui ne reste valable que pour $Re \leq 0.1$. A partir de ces résultats et pour Re quelconque, Mei (1992) a proposé d'écrire l'expression empirique suivante du coefficient de portance C_L rapporté à celui de Saffman C_{LS} :

$$\frac{C_L}{C_{LS}} = \begin{cases} \left(1 - 0.3314\sqrt{G^*}\right) \exp\left(-\frac{Re}{10}\right) + 0.3314\sqrt{G^*} & \text{si } Re \leq 40 \\ 0.0524\sqrt{G^* Re} & \text{si } Re > 40 \end{cases} \quad (1.32)$$

En ce qui concerne le coefficient de traînée, Dandy & al. l'ont également calculé pour trois valeurs du taux de cisaillement G^* (0.1, 0.2 et 0.4) pour $1 \leq Re \leq 100$. Ils ont trouvé que la valeur du C_D est très proche de celle qui aurait lieu pour un écoulement uniforme, tel qu'il est montré sur la figure 1.5. Pour $Re = 20$, leur résultat

conduit à $C_{D(G^*=0.1)} \approx 0.98 C_{D,unif}$. Cette proportionnalité avec l'écoulement uniforme est de l'ordre de 0.99 pour $G^* = 0.2$ et près de l'unité pour $G^* = 0.4$.

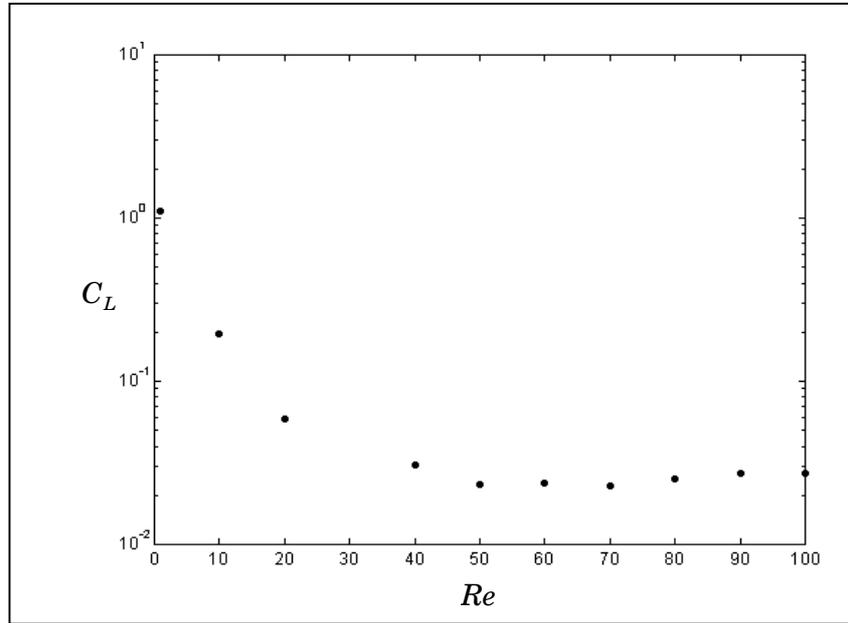


Figure 1.4 : Coefficient de portance calculé par Dandy & Dwyer (1990) pour $G^* = 0.1$

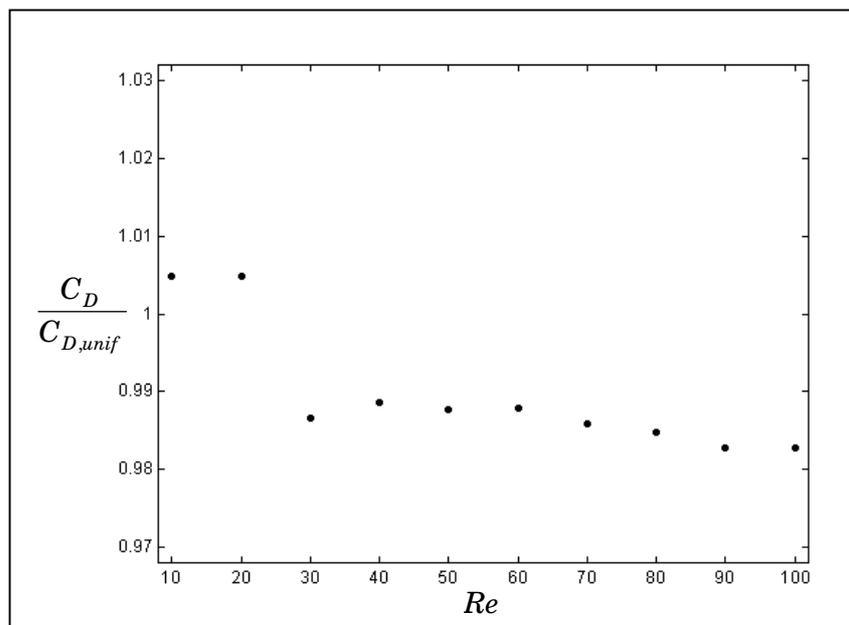


Figure 1.5 : Coefficient de traînée calculé par Dandy & Dwyer (1990) pour $G^* = 0.1$

1.1.1.5 Inclusion solide non sphérique

Souvent, dans l'industrie comme dans la nature, on a affaire à des inclusions de formes irrégulières. En général, ces formes non sphériques sont difficiles à exprimer dans un système de coordonnées simple, et par conséquent, la résolution des équations de Navier-Stokes devient plus complexe. L'un des exemples les plus importants est le cas des particules sphériques légèrement déformées ou ellipsoïdes. Sampson (1891) a déterminé l'écoulement stationnaire, axisymétrique, à faibles nombres de Reynolds induit par le mouvement d'un corps rigide approximativement sphérique ayant une vitesse \mathbf{U} . Il a proposé d'exprimer la surface de la particule en coordonnées sphériques, comme suit :

$$r(\theta) = a(1 + \xi(\theta)) \quad (1.33)$$

$$\text{avec} \quad \xi(\theta) = \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m P_m(\cos(\theta)) \ll 1 \quad (1.34)$$

tel que a est le rayon de l'inclusion initialement sphérique, P_m est le polynôme de Legendre de première espèce et d'ordre m , α_m est un paramètre arbitraire de l'ordre de l'unité et ε est un paramètre de perturbation très petit devant l'unité. Cette approche lui a permis d'établir une première approximation de la traînée exercée sur l'inclusion s'exprimant par :

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\mu_e a \mathbf{U} \left(1 + \varepsilon(\alpha_0 - \frac{1}{5}\alpha_2) + O(\varepsilon^2) \right) \quad (1.35)$$

Il est intéressant de remarquer que dans la relation (1.35), seuls les termes correspondant à $m=0$ et $m=2$ contribuent dans l'expression de la force \mathbf{F}_D . Cela est dû à la nature des conditions aux limites à l'infini qui s'expriment en termes de P_0 et P_2 . En terme de la fonction de courant ψ , et en utilisant la technique des forces ponctuelles, Payne & Pell (1960) ont donné une formule générale donnant la force \mathbf{F}_D agissant sur l'inclusion en écoulement axisymétrique :

$$\mathbf{F}_D = -8\pi\mu_e \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r(\psi - \psi_\infty)}{\varpi^2} \mathbf{e}_z \quad (1.36)$$

où ψ_∞ est la valeur de la fonction de courant loin de la particule et $r^2 = \varpi^2 + z^2$ (figure 1.1). Brenner (1964) a généralisé ce résultat en utilisant la solution générale des équations de Stokes initialement développée par Lamb (1932). Pour une sphère légèrement déformée, il a exprimé l'équation de la surface en série de fonctions harmoniques telles que :

$$r(\theta, \varphi) = a \left(1 + \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\theta, \varphi) \right) \quad \text{avec} \quad \varepsilon \ll 1 \quad (1.37)$$

Ainsi, au premier ordre de ε , il a établi l'expression de la force de résistance donnée par :

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\mu_e a \mathbf{U} - 6\pi\mu_e a \varepsilon \left(\mathbf{U} f_0 - \frac{1}{10} (\mathbf{U} \cdot \nabla) \nabla (r^2 f_2) \right) + O(\varepsilon^2) \quad (1.38)$$

1.1.2 Mouvements instationnaires

A présent, nous considérerons que le terme de l'accélération eulerienne $\partial \mathbf{v} / \partial t$ dans l'équation (1.3), n'est plus négligeable devant les termes convectifs et les termes visqueux. Ceci peut être traduit par une forte variation de la vitesse caractéristique de l'écoulement.

1.1.2.1 Ecoulements uniformes

Le mouvement instationnaire des particules rigides dans les fluides newtoniens a attiré l'intérêt de plusieurs auteurs dès le 19^{ème} siècle. En utilisant différentes approches, un grand nombre d'équations ont été proposées pour décrire le mouvement de la particule dans des situations diverses. Boussinesq (1885), Basset (1888) et Oseen (1927) ont traité, indépendamment, le mouvement rectiligne et instationnaire d'une sphère rigide dans un fluide incompressible en repos. Sous l'hypothèse $Re \ll 1$, ils ont déterminé la force hydrodynamique totale exercée sur la sphère, telle que :

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\mu_e a \mathbf{U} - \frac{1}{2} \rho_e \mathcal{V} \frac{d\mathbf{U}}{dt} - 6a^2 \sqrt{\pi\rho_e \mu_e} \int_{-\infty}^t \frac{d\mathbf{U}/d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau \quad (1.39)$$

où a , $\mathcal{V} = 4\pi a^3/3$ et $\mathbf{U}(t)$ sont respectivement, le rayon, le volume et la vitesse de la sphère. Le premier terme dans cette relation est la traînée instantanée de Stokes, donnée par la relation (1.12) et qui est responsable de la vitesse terminale de l'inclusion. Le deuxième terme correspond à la contribution de la masse ajoutée, dite aussi *masse virtuelle*. Il est indépendant de la viscosité, et dû à l'accélération d'un volume du fluide sous l'effet de l'accélération de la sphère. Ce volume égal à $0.5\mathcal{V}$ est le même déjà prédit dans la théorie des écoulements à potentiels. Quant au dernier terme, il représente la force d'histoire dite de "Basset", bien que ce soit Boussinesq qui l'ait mis en évidence trois ans auparavant. Il résulte de la diffusion de la vorticité dans l'écoulement. Il se présente sous forme d'intégrale et tient compte de l'histoire de l'accélération de l'inclusion aux instants passés.

La relation (1.39) a été obtenue en négligeant les termes d'inertie dans les équations de Navier-Stokes. Sa validité pour décrire le mouvement de la particule est donc justifiée dans le cas où $Re \ll 1$. Dans les situations où les termes non linéaires (d'inertie) jouent un rôle non négligeable dans la configuration de l'écoulement, aucune solution analytique exacte n'existe réellement. Odar et Hamilton (1964, 1966) ont tenté d'étendre l'utilisation de la relation (1.39) pour des nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité. Leurs études consistaient à mesurer expérimentalement la force totale exercée sur une sphère effectuant un mouvement oscillatoire dans un fluide visqueux en repos. Le mouvement de l'inclusion est guidé par un dispositif mécanique lui permettant d'osciller dans son plan autour de la position initiale. La force que subit la sphère est mesurée au moyen de jauges de contrainte miniatures fixées à l'intérieur de la sphère. Dans la gamme $Re \leq 62$, où leurs expériences ont été réalisées, Odar & Hamilton ont proposé d'écrire la force de résistance de la sphère en multipliant les termes de la relation (1.39) par des coefficients empiriques, telle que :

$$\mathbf{F}_D = -\frac{1}{2}C_{D_s}\pi a^2 \rho_e |\mathbf{U}| \mathbf{U} - \frac{1}{2}C_m \rho_e \gamma \frac{d\mathbf{U}}{dt} - 6C_h a^2 \sqrt{\pi \rho_e \mu_e} \int_0^t \frac{d\mathbf{U}/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \quad (1.40)$$

le coefficient C_{D_s} correspond à celui de la traînée quasi stationnaire, il peut être déterminé à partir des lois empiriques données par le tableau 1.1. Les coefficients C_m et C_h sont déterminés en considérant que la sphère effectue son mouvement avec une vitesse $U = -A_0 \omega \sin(\omega t)$ où ω est la fréquence (angulaire) des oscillations. Dans ce cas, la force \mathbf{F}_D va s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_D| = F_D &= \frac{1}{2}C_{D_s}\pi a^2 \rho_e A_0^2 \omega^2 |\sin(\omega t)| |\sin(\omega t)| \\ &+ \frac{1}{2}C_m \rho_e \gamma A_0 \omega^2 \cos(\omega t) \\ &+ 6C_h \pi a^2 (\rho_e \mu_e \omega / 2)^{1/2} A_0 \omega^{3/2} (\cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Connaissant la force totale pour la valeur $\omega t = 3\pi/4$, la force d'histoire s'annule et la force de la masse ajoutée ainsi que le coefficient correspondant C_m peuvent être déduits. De la même manière, la détermination du coefficient C_h se fait à partir des positions $\omega t = \pi/2$ et $\omega t = \pi/4$, correspondant respectivement à l'accélération nulle et à la valeur maximale de la force d'histoire. Finalement Odar & Hamilton ont établi les corrélations suivantes :

$$C_m = 2.1 - 0.132 \frac{A_c^2}{(1 + 0.12A_c^2)} \quad (1.42)$$

$$C_h = 0.48 + 0.52 \frac{A_c^3}{(1 + A_c)^3} \quad (1.43)$$

A partir de ce résultat, ils ont montré que, contrairement au coefficient de traînée, les coefficients de la masse ajoutée et d'histoire ne dépendent pas du nombre de Reynolds mais du *nombre d'accélération* A_c , qui mesure le rapport des forces dues à l'accélération locale et celles dues l'accélération convective :

$$\frac{\partial \mathbf{v} / \partial t}{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}} \sim \frac{|dU/dt|}{|U|^2 / (2a)} = A_c \quad (1.44)$$

$$\text{tel que pour : } A_c \rightarrow \infty \quad \text{on a} \quad C_m \rightarrow 1, C_h \rightarrow 1 \quad (1.45)$$

Ces résultats vont être vite contredits par une autre étude expérimentale faite par Karanfilian & Kotas (1978) dans la gamme $10^2 \leq Re \leq 10^4$. En utilisant un dispositif similaire a celui d'Odar & Hamilton, ils ont conclu, contrairement à ces derniers, que $C_m = C_h = 1$, tel qu'il a été prédit théoriquement par Basset pour $Re \ll 1$. Cependant, ils ont constaté une dispersion importante de leurs mesures causée par l'utilisation des termes de la masse ajoutée et d'histoire. Ceci les a conduit à inclure les effets instationnaires du mouvement de la sphère dans un coefficient de traînée globale, donné par la relation:

$$C_D = C_{Ds} (1 + A_c^{-1})^{1.2} \quad (1.46)$$

Les résultats expérimentaux obtenus par Odar & Hamilton et Karanfilian & Kotas indiquent que pour des nombres de Reynolds intermédiaires, la traînée exercée sur la sphère augmente sous l'effet de l'accélération de l'inclusion. Temkin & Kim (1980) et Temkin & Mehta (1982) ont étudié le mouvement d'une sphère dans un tube à chocs. Et contrairement aux auteurs précédents, ils ont remarqué que le coefficient de traînée C_D diminue sous l'effet de l'accélération. Pour $9 \leq Re \leq 115$, ils ont établi l'expression suivante :

$$C_D = C_{Ds} - 0.048A_{c0} \quad \text{pour} \quad -45 < A_{c0} < 3 \quad (1.47a)$$

$$C_D = C_{Ds} - 3.829A_{c0}^{-1} - 0.204 \quad \text{pour} \quad 5.9 < A_{c0} < 25 \quad (1.47b)$$

avec A_{c0} est le nombre d'accélération lié au rapport des densités de l'inclusion et du fluide environnant $\gamma = \rho_i / \rho_e$, tel que :

$$A_{c0} = (\gamma - 1)A_c \quad (1.48)$$

En plus de ces trois études expérimentales, on peut aussi citer celles réalisées par Schoenborn (1975): oscillations du fluide autour d'une sphère fixe, Marchildon & Gauvin (1979): chute d'une bille rigide dans l'air et Tsuji & al. (1991): écoulement pulsé autour d'une sphère. Ces derniers auteurs ont mesuré la force exercée sur une balle de tennis fixée dans une soufflerie. Pour $8000 \leq Re \leq 16000$, leurs résultats illustrés sur la figure 1.6, pour différentes fréquences de pulsations, montrent clairement que le coefficient de traînée de la sphère en écoulement accéléré est supérieur à celui trouvé en écoulement stationnaire. Confirmant ainsi, l'approche d'Odar & al.

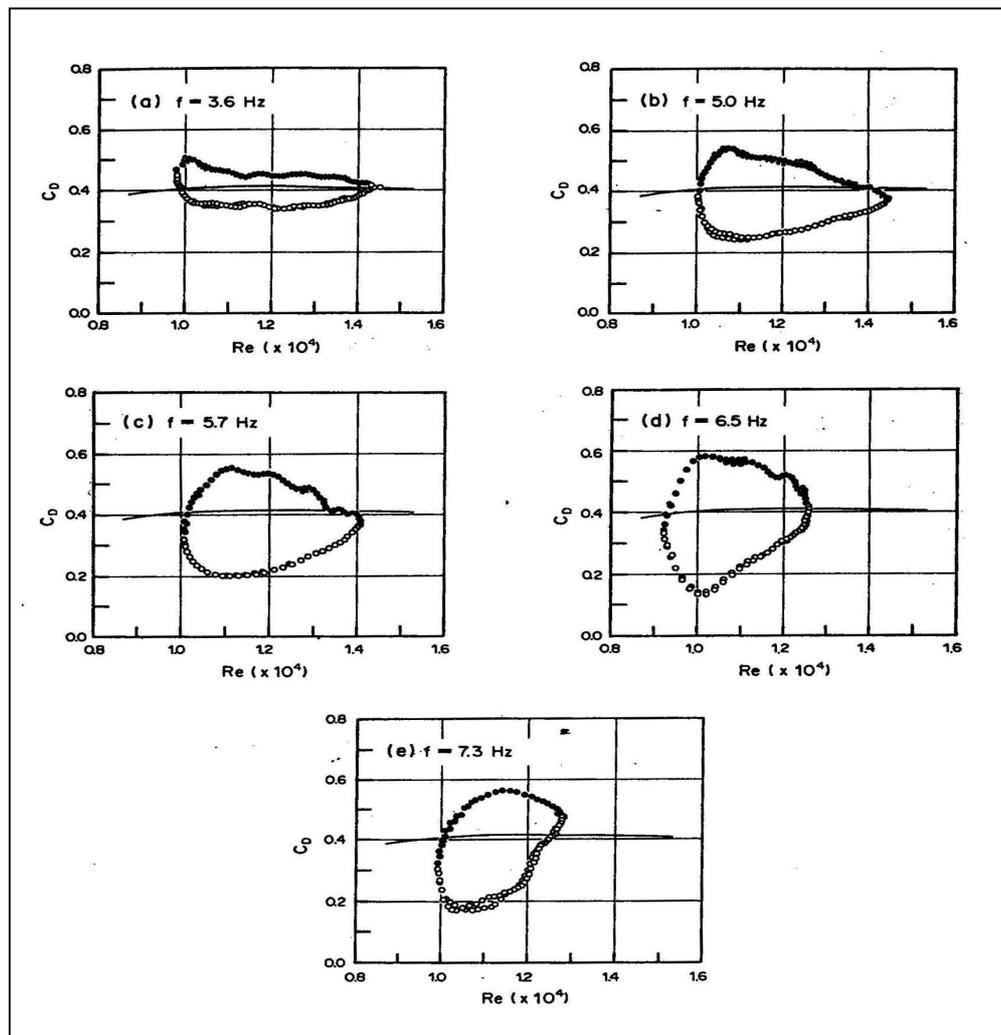


Figure 1.6 : Coefficients de traînée moyens de la sphère dans un écoulement pulsé pour différentes fréquences de pulsation. Tsuji & al. (1991).

\circ : Ecoulement décéléré, \bullet : Ecoulement accéléré,
 — : Courbe standard des coefficients de traînée

Il faut signaler enfin, que excepté Odar & Hamilton, les différents auteurs n'arrivent pas à séparer quantitativement les contributions des différentes forces exercées sur l'inclusion, à savoir, la traînée stationnaire, la force de la masse ajoutée et la force d'histoire. Les limites de leurs dispositifs expérimentaux les ont conduit à exprimer leurs résultats sous forme d'un coefficient de traînée corrélé avec le nombre de Reynolds et le nombre d'accélération.

En ce qui concerne les solutions numériques ou les approches asymptotiques, Bentwich & Miloh (1978) et Sano (1981) ont étudié l'écoulement induit par le mouvement brusque d'une sphère rigide ayant une vitesse $\mathbf{UH}(t)$, où $H(t)$ est la fonction d'Heaviside. En reprenant le développement asymptotique raccordé de Proudman & Pearson (1957), Sano a pu déterminer la force de résistance \mathbf{F}_D par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_D = -6\pi\mu_e a \mathbf{U} & \left\{ H(t) + \frac{1}{3} \delta(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \right. \\ & + \frac{3}{8} Re \left(\left(1 + \frac{4}{Re^4 t^2} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} Re t^{1/2} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{(\pi t)^{1/2} Re} \left(1 - \frac{2}{Re^2 t} \right) \exp \left(\frac{1}{4} Re^2 t \right) - \frac{8}{3(\pi t)^{1/2} Re} \right) \right. \\ & \left. + \frac{9}{40} Re^2 \ln Re \right\} + O(Re^2) \end{aligned} \quad (1.49)$$

où t est mis sous une forme adimensionnelle par le temps caractéristique de diffusion $\tau_0 = a^2/\nu_e$, et $\delta(t)$ représente la distribution de Dirac. A partir de ce résultat, Sano a montré que pour des temps longs ($t \rightarrow \infty$), la traînée instationnaire exercée sur la sphère varie avec un taux de t^{-2} , au lieu d'une variation suivant $t^{-1/2}$ comme l'a prédit Basset. Quelques années plus tard, Mei, Lawrence & Adrian (1991) ont effectué une étude numérique sur un écoulement oscillant autour d'une sphère fixe, pour $1 \leq Re \leq 50$. En supposant que la vitesse du fluide à l'infini \mathbf{U} ait une faible amplitude, ils ont remarqué aussi que la force hydrodynamique \mathbf{F}_D varie selon $t^{-1/2}$ quand $\omega \rightarrow \infty$, et selon t^{-2} quand $\omega \rightarrow 0$, où ω est la fréquence d'oscillations du fluide. Ils ont conclu qu'en tenant compte des termes d'inertie dans la résolution des équations de Navier-Stokes, la force de Basset n'est plus valide et le noyau $(t - \tau)^{-1/2}$ doit être remplacé par $(t - \tau)^{-2}$ pour des temps longs. Pour confirmer ce résultat, Mei & Adrian (1992) ont réexaminé le même écoulement, en considérant le cas des faibles fréquences: $Sl \ll Re \ll 1$, tel que $Sl = a\omega/U$ est le nombre de Strouhal. La nouvelle force d'histoire qu'ils ont proposée est donnée par :

$$\mathbf{F}_h(t) = -6\pi\mu_e a \int_{-\infty}^t \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} K(t-\tau, \tau) d\tau \quad (1.50)$$

$$\text{avec } K(t-\tau, \tau) \approx \left\{ \left(\frac{\pi}{\tau_0} (t-\tau) \right)^{1/4} + \left(\frac{\pi}{16\tau_0^2} \left(\frac{Re(\tau)}{0.75 + 0.105Re(\tau)} \right)^3 (t-\tau)^2 \right)^{1/2} \right\}^{-2} \quad (1.51)$$

où $Re(\tau) = 2a|\mathbf{U}(\tau)|/\nu_e$. Dans le cas d'un nombre de Strouhal quelconque, Lovalenti & Brady (1993) ont repris le même problème que Mei & al, et à l'aide d'un développement asymptotique à faibles nombres de Reynolds, ils ont montré que la force d'histoire donnée par les relations (1.50) et (1.51) n'est valable que pour $Re \leq 0.5$. Au-delà de cette limite, ils ont trouvé que le noyau $K(t-\tau, \tau)$ varie exponentiellement pour des temps longs, contrairement aux résultats de Mei & al. où la variation est algébrique. En conclusion, ils ont reformulé la force de traînée totale exercée sur la sphère comme suit :

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\mu_e a \mathbf{U} - \frac{1}{2} \rho_e \gamma \frac{d\mathbf{U}}{dt} - 6a^2 \sqrt{\pi\mu_e \rho_e} \int_{-\infty}^t \frac{\mathbf{U}(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} G(U, t, \tau) d\tau \quad (1.52)$$

$$\text{avec } G(U, t, \tau) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4|\mathbf{A}|^2} \left(\frac{\pi^{1/2}}{2|\mathbf{A}|} \operatorname{erf}(|\mathbf{A}|) - \exp(-|\mathbf{A}|^2) \right) \quad (1.53)$$

$$\text{et } \mathbf{A} = \frac{1}{2\sqrt{\nu_e(t-\tau)}} \int_{\tau}^t \mathbf{U}(\tau') d\tau' \quad (1.54)$$

Dans une étude numérique récente, Chang & Maxey (1994) ont utilisé les méthodes spectrales pour déterminer l'écoulement oscillant autour d'une sphère rigide fixe. En supposant les conditions suivantes :

la vitesse du fluide à l'infini : $U(t) = A_0 \omega \sin(\omega t)$

le nombre de Reynolds: $Re = 2aA_0\omega/\nu_e \leq 20$

le nombre de Strouhal: $Sl = a/A_0 \leq 10$.

ils ont comparé les coefficients de traînée C_D , C_{DB} et C_{DOH} issus, respectivement, de leurs résultats numériques, de la formule de Basset (1.40) et de la relation d'Odar & Hamilton (1.41).

Sur la figure 1.7, ils ont illustré l'erreur relative entre les coefficients de traînée C_D et C_{DB} pour $Re = 0.1$ et $Sl = 10$. Il ont constaté que dans de telles conditions, la force de traînée obtenue par la résolution des équations de Navier-Stokes complètes et

celle donnée par la relation de Basset (1.39) sont assez proches à une erreur près de l'ordre de $O(10^{-3})$. Ainsi, ils ont confirmé que la force d'histoire de Basset reste correcte pour les grandes fréquences et les nombres de Reynolds finis.

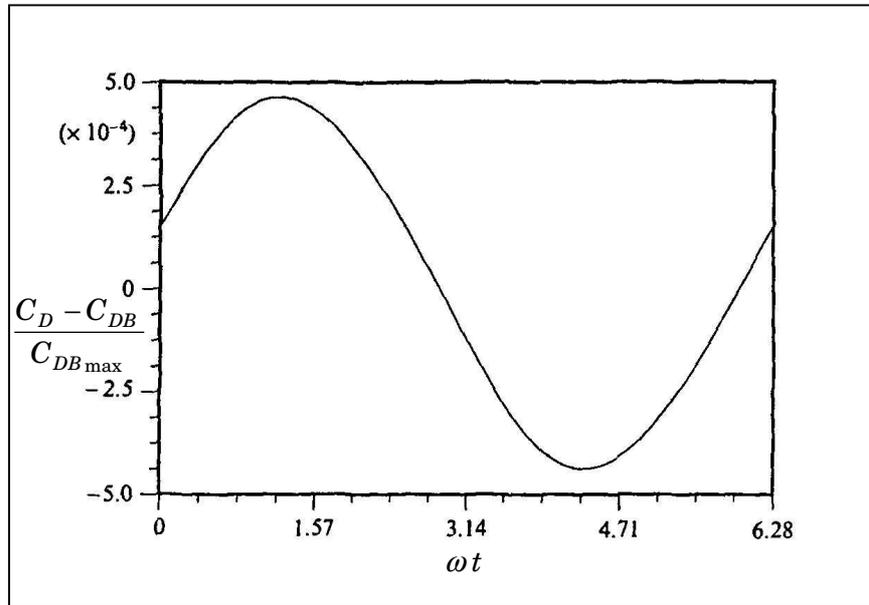


Figure 1.7 : Erreur relative entre le coefficient de traînée calculé par Chang et Maxey et celui de Basset $Re = 0.1, Sl = 10$

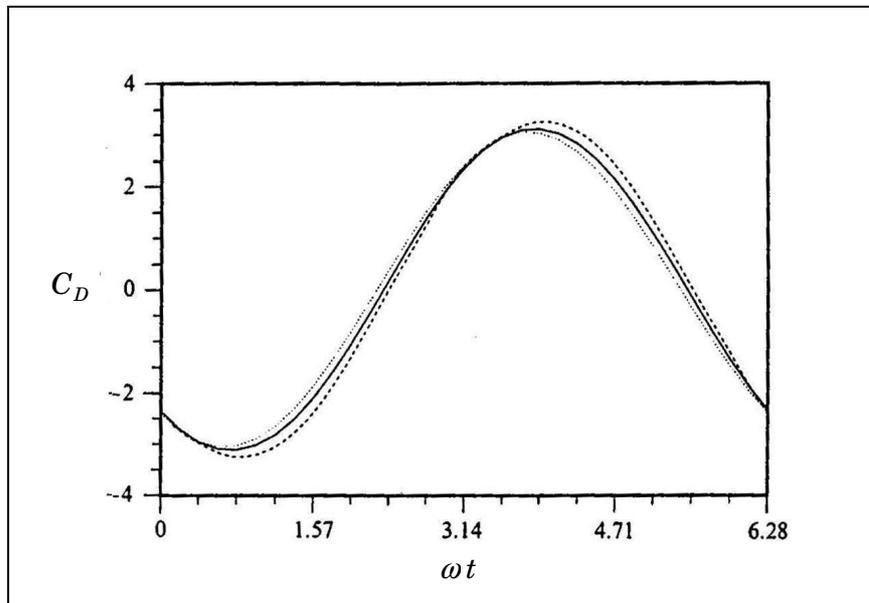


Figure 1.8 : Comparaison des coefficients de traînée entre la simulation numérique de Chang & al. (1994), Odar & al. (1964) et Basset (1888) $Re = 16.7, Sl = 0.625$
 (—): Chang & Maxey, (.....): Basset, (----): Odar & Hamilton

Sur la figure 1.8, ils ont comparé les trois coefficients de traînées C_D , C_{DB} et C_{DOH} dans le cas où $Re = 16.7$ et $Sl = 0.625$. Ils ont remarqué que le coefficient de traînée de Basset est plus proche de leurs résultats numériques en comparaison avec ceux d'Odar & al. Ceci, selon eux, est dû probablement aux erreurs commises par Odar & al. lors de l'évaluation des coefficients empiriques C_m et C_h donnée par les formules (1.42) et (1.43).

1.1.2.2 Écoulements non uniformes

Considérons maintenant le cas d'une sphère rigide de rayon a se déplaçant dans un écoulement instationnaire et non uniforme. Ce problème a été abordé par Tchen (1947), Corsin & Lumley (1956), Maxey & Riley (1983) et Gatignol (1983). En utilisant des méthodes analytiques et des hypothèses différentes, ils ont étendu le développement initial de Faxén (1924) et ont déterminé la force totale \mathbf{F} exercée sur la sphère dans un tel écoulement.

En ce qui suit, nous allons reprendre la formulation suivie par Gatignol afin de mieux comprendre l'origine des différentes contributions que ces auteurs ont mis en évidence. Dans un référentiel absolu \mathcal{R}^a centré en O^a , on note respectivement par \mathbf{r}^a , $\mathbf{v}^a(\mathbf{r}^a, t)$ et $p(\mathbf{r}^a, t)$ le vecteur position, la vitesse du fluide au point \mathbf{r}^a et la pression. La sphère ayant un centre O de vecteur position \mathbf{r}_o^a , se déplace à partir du repos avec une vitesse de translation $\mathbf{U}(t)$. S et \mathcal{V} représentent respectivement sa surface et son volume. Dans ce référentiel, les équations de Navier-Stokes, l'équation de la continuité et les conditions aux limites s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{v}^a}{\partial t} + (\mathbf{v}^a \cdot \nabla_a) \mathbf{v}^a = -\frac{1}{\rho_e} \nabla_a p + \mathbf{f}_v + \nu_e \Delta_a \mathbf{v}^a \quad (1.55)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^a = 0 \quad (1.56)$$

$$\mathbf{v}^a(\mathbf{r}^a, t) = \mathbf{U}(t) \quad \text{quand } \mathbf{r}^a = \mathbf{r}_o^a \quad (1.57a)$$

$$\mathbf{v}^a(\mathbf{r}^a, t) \rightarrow \mathbf{U}_\infty(\mathbf{r}^a, t) \quad \text{quand } |\mathbf{r}^a| \rightarrow \infty \quad (1.57b)$$

$$p(\mathbf{r}^a, t) \rightarrow p_\infty(\mathbf{r}^a, t) \quad \text{quand } |\mathbf{r}^a| \rightarrow \infty \quad (1.57c)$$

Pour résoudre ce système, il est plus commode de l'exprimer dans un autre référentiel \mathcal{R} lié au centre O de l'inclusion (figure a). Soit $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ le champ de vitesse du fluide dans \mathcal{R} , si la sphère ne possède pas de rotation propre, on peut écrire les lois de composition suivantes :

$$\mathbf{r}^a = \mathbf{r} + \mathbf{r}_o^a(t) \tag{1.58}$$

$$\mathbf{v}^a(\mathbf{r}^a, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{U}(t) \tag{1.59}$$

$$\left(\frac{D\mathbf{v}^a}{Dt} \right)_{\mathcal{R}^a} = \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right)_{\mathcal{R}} + \frac{d\mathbf{U}}{dt} \tag{1.60}$$

où $D\mathbf{v}/Dt$ représente la dérivée particulière du champ de vitesse \mathbf{v} , telle que: $D\mathbf{v}/Dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$.

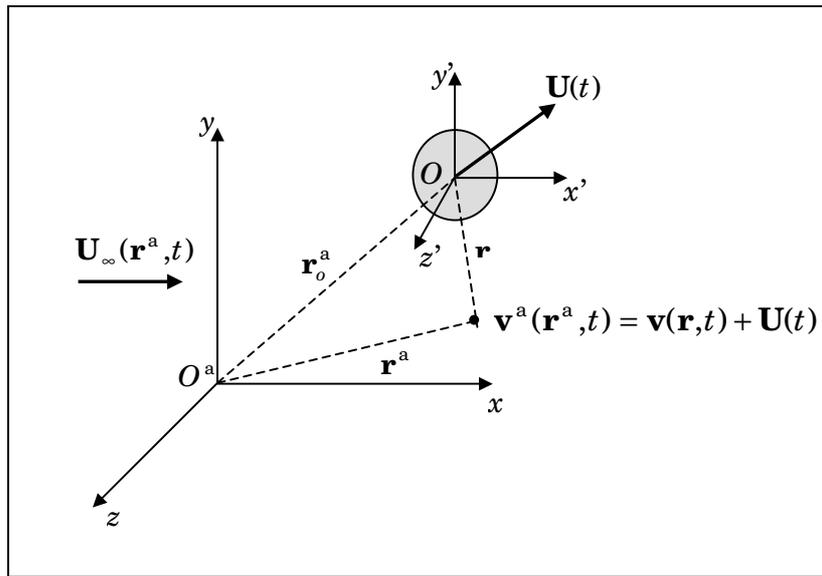


Figure 1.9 : Ecoulement en présence de l'inclusion

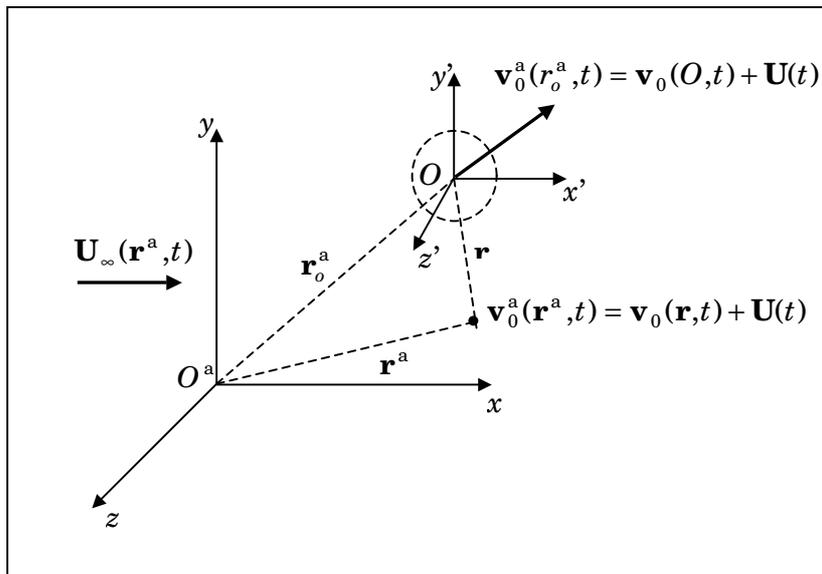


Figure 1.10 : Ecoulement non perturbé

Le champ de vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ vérifie alors :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_e} \nabla p + \mathbf{f}_v + \nu_e \Delta \mathbf{v} - \frac{d\mathbf{U}}{dt} \quad (1.61)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.62)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{quand } |\mathbf{r}| = a \quad (1.63a)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{U}_\infty(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}_\infty(\mathbf{r}^a, t) - \mathbf{U}(t) \quad \text{quand } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (1.63b)$$

$$p(\mathbf{r}, t) = p_\infty(\mathbf{r}, t) \quad \text{quand } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (1.63c)$$

Ce problème peut être considéré comme la superposition de deux problèmes (Pb_0) et (Pb_1) qui correspondent respectivement à l'écoulement non perturbé qui existerait en l'absence de l'inclusion (figure 1.9) et à la perturbation apportée par la présence de la sphère (figure 1.10). Ceci peut s'exprimer en posant :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) \quad (1.64)$$

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0(\mathbf{r}, t) + p_1(\mathbf{r}, t) \quad (1.65)$$

par conséquent, l'écoulement non perturbé (Pb_0) sera gouverné par :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho_e} \nabla p_0 + \mathbf{f}_v + \nu_e \Delta \mathbf{v}_0 - \frac{d\mathbf{U}}{dt} \quad (1.66)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0 \quad (1.67)$$

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{U}_\infty(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}_\infty(\mathbf{r}^a, t) - \mathbf{U}(t) \quad \text{quand } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (1.68a)$$

$$p_0(\mathbf{r}, t) = p_\infty(\mathbf{r}, t) \quad \text{quand } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (1.68b)$$

et pour l'écoulement perturbé (Pb_1), on aura :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 = -\frac{1}{\rho_e} \nabla p_1 + \mathbf{f}_v + \nu_e \Delta \mathbf{v}_1 \quad (1.69)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad (1.70)$$

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) \quad \text{quand } |\mathbf{r}| = a \quad (1.71a)$$

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t), p_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0 \quad \text{quand } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (1.71b)$$

La force totale exercée sur l'inclusion sera déterminée par l'intégration sur la surface de la sphère des contraintes résultantes des deux contributions: (Pb_0) et (Pb_1) , telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 &= \int_S \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{v}, p) \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \int_S \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{v}_0, p_0) \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_S \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{v}_1, p_1) \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned} \quad (1.72)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire sortant en un point de la surface de l'inclusion, et $\overline{\mathbf{T}}$ est le tenseur de contraintes totales. Celui-ci s'exprime en fonction de la pression p et du tenseur des contraintes visqueuses $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ comme suit :

$$\overline{\mathbf{T}} = -p\overline{\mathbf{I}} + \overline{\boldsymbol{\tau}} \quad (1.73)$$

Maxey & Riley ont linéarisé les équations de l'écoulement perturbé en négligeant les termes d'inertie sous les hypothèses: $2a|\mathbf{U}_\infty - \mathbf{U}|/v_e \ll 1$ et $a/L \ll 1$, où L est la longueur caractéristique de l'écoulement perturbé. L'intégration de la relation (1.72) leur a permis d'établir l'expression de la force de traînée \mathbf{F}_D , suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_D &= \rho_e \gamma \left(\frac{D\mathbf{v}_0^a}{Dt} \right)_o - 6\pi\mu_e a (\mathbf{U} - \mathbf{v}_0^a - \frac{\alpha^2}{6} \nabla_a^2 \mathbf{v}_0^a)_o \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho_e \gamma \frac{d}{dt} (\mathbf{U} - \mathbf{v}_0^a - \frac{\alpha^2}{10} \nabla_a^2 \mathbf{v}_0^a)_o \\ &\quad - 6a^2 \sqrt{\pi\rho_e\mu_e} \int_0^t \frac{d}{d\tau} (\mathbf{U} - \mathbf{v}_0^a - \frac{\alpha^2}{6} \nabla_a^2 \mathbf{v}_0^a)_o \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} \end{aligned} \quad (1.74)$$

Dans la relation (1.74), il faut distinguer la différence entre la dérivée par rapport au temps de l'écoulement non perturbé: $d\mathbf{v}_0^a/dt = \partial\mathbf{v}_0^a/\partial t + (\mathbf{U} \cdot \nabla_a)\mathbf{v}_0^a$, et la dérivée suivant un élément de fluide $D\mathbf{v}_0^a/Dt = \partial\mathbf{v}_0^a/\partial t + (\mathbf{v}_0^a \cdot \nabla_a)\mathbf{v}_0^a$. Le premier terme dans l'expression de la force \mathbf{F}_D correspond à la force de Tchen due au gradient de pression dans l'écoulement non perturbé. Les termes restants représentent respectivement, la traînée quasi-stationnaire, l'effet de la masse ajoutée et la force d'histoire qui font intervenir la vitesse relative $\mathbf{v}_0^a - \mathbf{U}$ entre le champ \mathbf{v}_0^a et la vitesse de l'inclusion. Les termes supplémentaires en $\nabla_a^2 \mathbf{v}_0^a$ proviennent de la non-uniformité de l'écoulement sur la surface de la sphère ou à l'intérieur de son volume de contrôle.

Gatignol (1983) a traité le cas où la sphère effectuerait un mouvement de translation et de rotation simultanées avec les vitesses respectives $\mathbf{U}(t)$ et $\mathbf{\Omega}(t)$. Sa formulation du problème a été effectuée sous l'hypothèse des faibles nombres de Reynolds dans l'écoulement général \mathbf{v} , tel que :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_e} \nabla p + \mathbf{f}_v + \nu_e \Delta \mathbf{v} - \frac{d\mathbf{U}}{dt} - \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \wedge \mathbf{r} \quad (1.75)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.76)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{quand } |\mathbf{r}| = a \quad (1.77a)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \sim \mathbf{U}_\infty(\mathbf{r}^a, t) - \mathbf{U}(t) - \mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r} \quad \text{quand } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (1.77b)$$

$$p(\mathbf{r}, t) \sim p_\infty(\mathbf{r}, t) \quad \text{quand } |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (1.77c)$$

En utilisant le théorème de réciprocité, Gatignol a donné la force de résistance \mathbf{F}_D ainsi que le moment \mathbf{M} par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_D = \rho_e \gamma \frac{d\mathbf{v}^v}{dt} - 6\pi\mu_e a (\mathbf{U} - \mathbf{v}^s) - \frac{1}{2} \rho_e \gamma \left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}^v}{dt} \right) \\ - 6a^2 \sqrt{\pi\rho_e\mu_e} \int_{-\infty}^t \left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}^v}{dt} \right) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \frac{2}{5} a^2 \rho_e \gamma \frac{d\mathbf{\Omega}^v}{dt} - 8\pi\mu_e a^3 (\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}^s) \\ - \frac{8}{3} a^4 \sqrt{\pi\rho_e\mu_e} \int_{-\infty}^t \frac{d(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}^s)/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \\ + \frac{8}{3} \pi\mu_e a^3 \int_{-\infty}^t \frac{d(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}^s)}{d\tau} \exp\left(-\frac{\nu_e(t-\tau)}{a^2}\right) \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\nu_e(t-\tau)}{a^2}} d\tau \end{aligned} \quad (1.79)$$

Il faut noter que les différences essentielles entre l'expression de la force de traînée (1.78) et celle donnée par Maxey & Riley (1.74) résident en deux points. Le premier concerne la force de Tchen et la masse ajoutée qui, selon Gatignol, font intervenir les dérivées d/dt au lieu de D/Dt . Cette différence est due principalement, à la linéarisation par Gatignol des deux écoulements (Pb_0) et (Pb_1), alors que le résultat de Maxey & Riley est général car aucune hypothèse n'a été faite sur (Pb_0). Le second point de différence concerne les corrections de Faxén qui sont implicites dans le résultat de Gatignol. Ces termes peuvent être obtenus par le développement limité au

voisinage du centre de la sphère, des vitesses moyennes volumiques et surfaciques \mathbf{v}^v et \mathbf{v}^s , données par :

$$\mathbf{v}^v = (4\pi a^3/3)^{-1} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}_0^a(\mathbf{r}^a, t) d\mathcal{V} \quad (1.80)$$

$$\mathbf{v}^s = (4\pi a^2)^{-1} \int_S \mathbf{v}_0^a(\mathbf{r}^a, t) dS \quad (1.81)$$

Les quantités similaires correspondant aux vitesses de rotations $\mathbf{\Omega}^v$ et $\mathbf{\Omega}^s$ dans la relation (1.79), sont définies par:

$$\mathbf{\Omega}^v = (8\pi a^5/15)^{-1} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r}^a - \mathbf{r}_o^a) \wedge \mathbf{v}_0^a(\mathbf{r}^a, t) d\mathcal{V} \quad (1.82)$$

$$\mathbf{\Omega}^s = (8\pi a^4/3)^{-1} \int_S (\mathbf{r}^a - \mathbf{r}_o^a) \wedge \mathbf{v}_0^a(\mathbf{r}^a, t) dS \quad (1.83)$$

1.2 Inclusion fluide

1.2.1 Conditions de continuité à l'interface fluide-fluide

Le problème du mouvement des inclusions fluides (bulles ou gouttes) dans les écoulements visqueux est nettement plus compliqué que celui des particules rigides. Cela est dû principalement à la nature déformable de l'inclusion et aux conditions aux limites que doivent satisfaire les deux champs de vitesses, à l'intérieur et à l'extérieur de celle-ci. En dépit des divers travaux effectués dans ce contexte, il est encore difficile de prévoir d'une façon précise l'évolution des formes de ces particules et les caractéristiques du champ hydrodynamique que leurs mouvements engendrent. Parmi les nombreux paramètres qui conditionnent l'étude du mouvement de ces inclusions, on cite : les propriétés physiques des deux fluides: porteur et suspendu, le volume et la vitesse de l'inclusion, la gravité, les effets de parois et les éventuelles impuretés qui peuvent affecter le fluide environnant et modifier les caractéristiques de l'interface.

En ce qui suit, nous désignons respectivement les caractéristiques des écoulements à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion par les indices "i" et "e", tel qu'il est indiqué sur la figure 1.11. L'indice "int" sera attribué à l'interface des deux fluides. Aussi, on définit pour chaque phase: continue et dispersée, le tenseur de contraintes $\bar{\bar{\mathbf{T}}} = -p\bar{\bar{\mathbf{I}}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$, où $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ est le tenseur d'identité, $\bar{\bar{\boldsymbol{\tau}}}$ est tenseur des contraintes visqueuses et p est la pression. On désigne aussi par \mathbf{v} le champ de vitesse relatif à la vitesse de

l'inclusion \mathbf{U} , et respectivement par \mathbf{n} et \mathbf{s} les vecteurs unitaires normal et tangentiel en un point P de l'interface.

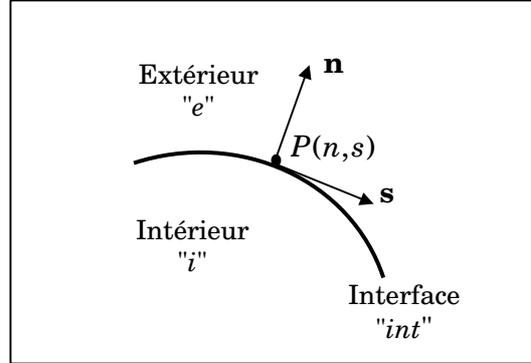


Figure 1.11 : Schéma simplifié d'une interface fluide-fluide

Pour un écoulement incompressible, isotherme et axisymétrique, les conditions aux limites que doivent satisfaire les champs hydrodynamiques des deux phases: continue et dispersée, à l'interface fluide-fluide, sont issues des trois conditions principales suivantes:

Condition de transfert de masse

Elle traduit l'imperméabilité de la surface de séparation des deux phases, c'est à dire que les deux fluides sont immiscibles. En désignant par \mathbf{V}_{int} la vitesse de propre de l'interface, on peut écrire:

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{int}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.84)$$

$$(\mathbf{v}_e - \mathbf{V}_{int}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.85)$$

Condition du saut de quantité de mouvement

La contrainte totale agissant sur l'interface est due principalement aux effets de la tension superficielle σ . Elle peut se décomposer en un effort normal provoquant la courbure de l'inclusion et un autre tangentiel, dû à la variation spatiale de σ sur l'interface, tel que:

$$\overline{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{n} - \overline{\mathbf{T}}_i \cdot \mathbf{n} = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \mathbf{n} + \nabla_s \sigma \quad (1.86)$$

où R_1 et R_2 représentent les rayons principaux de la courbure au point considéré et ∇_s désigne le gradient surfacique. En décomposant le tenseur des contraintes visqueuses tel que: $\overline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{n} = \tau_{nn} \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_{ns}$, la relation (1.86) s'exprime comme suit:

$$\mathbf{n} \cdot (\overline{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{n} - \overline{\mathbf{T}}_i \cdot \mathbf{n}) \equiv (p_i - p_e) + (\tau_{nn_e} - \tau_{nn_i}) = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.87)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{ns_e} - \boldsymbol{\tau}_{ns_i} = \nabla_s \sigma \quad (1.88)$$

Condition du saut d'énergie

En considérant que la tension superficielle est constante sur toute l'interface ($\nabla_s \sigma = 0$), et en négligeant sa contribution dans le bilan d'énergie, on peut écrire :

$$(\overline{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_e - (\overline{\mathbf{T}}_i \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_i = 0 \quad (1.89)$$

en conséquence, cela se réduit aux conditions de continuité des vecteurs de contrainte et de vitesse tangentielle :

$$\boldsymbol{\tau}_{ns_e} - \boldsymbol{\tau}_{ns_i} = 0 \quad (1.90)$$

$$\mathbf{v}_{s_e} - \mathbf{v}_{s_i} = 0 \quad (1.91)$$

1.2.2 Principaux régimes de formes

Lors du mouvement d'une bulle d'air ou d'une goutte dans un milieu infini, on peut constater trois grandes catégories de formes que peuvent adopter ces inclusions : sphérique, ellipsoïdale ou une forme de calotte. La transition d'une forme à l'autre dépend des propriétés physico-chimiques des deux fluides. Sa localisation peut être déterminée, à un Reynolds Re_e donné, par d'autres nombres adimensionnels définis ci-dessous:

Nombre de Eötvös Eo : appelé aussi nombre de "Bond", il est mis en évidence dans le cas d'un mouvement effectué dans un champ de pesanteur, où il mesure l'importance des forces de gravité par rapport aux effets de la tension superficielle :

$$Eo = \frac{\Delta \rho g a^2}{\sigma} \quad \text{où} \quad \Delta \rho = |\rho_e - \rho_i| \quad (1.92)$$

Nombre de Weber We : il représente le rapport des forces d'inertie et ceux de la tension superficielle. Son utilisation est justifiée dans le cas des mouvements à

nombres de Reynolds intermédiaires où les effets d'inertie sont dominants. Il est défini par :

$$We = \frac{2\rho_e U^2 a}{\sigma} \quad (1.93)$$

Nombre de Capillarité Ca : pour les écoulements rampants où les effets d'inertie sont négligeables, ce nombre nous permet de mesurer le rapport des forces visqueuses et de la tension superficielle :

$$Ca = \frac{\mu_e U}{\sigma} \quad (1.94)$$

Nombre de Morton M : Ce paramètre caractérise exclusivement les propriétés physiques des deux fluides. Il est défini par la relation suivante :

$$M = \frac{\mu_e g \Delta \rho}{\rho_e^2 \sigma^3} \quad (1.95)$$

Grace & al. (1978) ont effectué une étude expérimentale laborieuse et ont établi un diagramme regroupant de nombreux résultats concernant les régimes de formes d'une inclusion fluide se déplaçant sous l'effet de la gravité dans un fluide visqueux. Ce graphique, présenté sur la figure 1.12, donne une corrélation en fonction des nombres de Eötvös, de Reynolds et de Morton. Il considère uniquement les inclusions newtoniennes, isolées et non influencées par les effets de paroi. Les résultats obtenus ne sont pas applicables aux valeurs extrêmes des rapports de densités ρ_i/ρ_e et de viscosités μ_i/μ_e (cas des chutes de gouttes dans l'air). On y constate que pour des faibles nombres de Reynolds $Re_e \ll 1$, la forme de la particule fluide reste sphérique indépendamment du nombre de Reynolds de la phase dispersée Re_i et de la valeur de la tension superficielle. Cette sphéricité tend à disparaître dès que le nombre de Morton approche de l'unité $M \geq 1$. Ces deux configurations seront détaillées respectivement dans les chapitres 3 et 4. Pour des nombres de Reynolds intermédiaires et des grands nombres de Eötvös, la particule devient ellipsoïdale aplatie et peut avoir une forme de calotte sphérique ou elliptique. La transition entre le régime sphérique et ellipsoïdal est en quelque sorte très chaotique et sa localisation s'avère délicate car elle dépend fortement du degré d'impureté de la phase continue. En pratique, la valeur du nombre de Reynolds pour laquelle l'inclusion perd sa forme sphérique est très différente et varie entre 2 et 250 suivant la nature du fluide porteur.

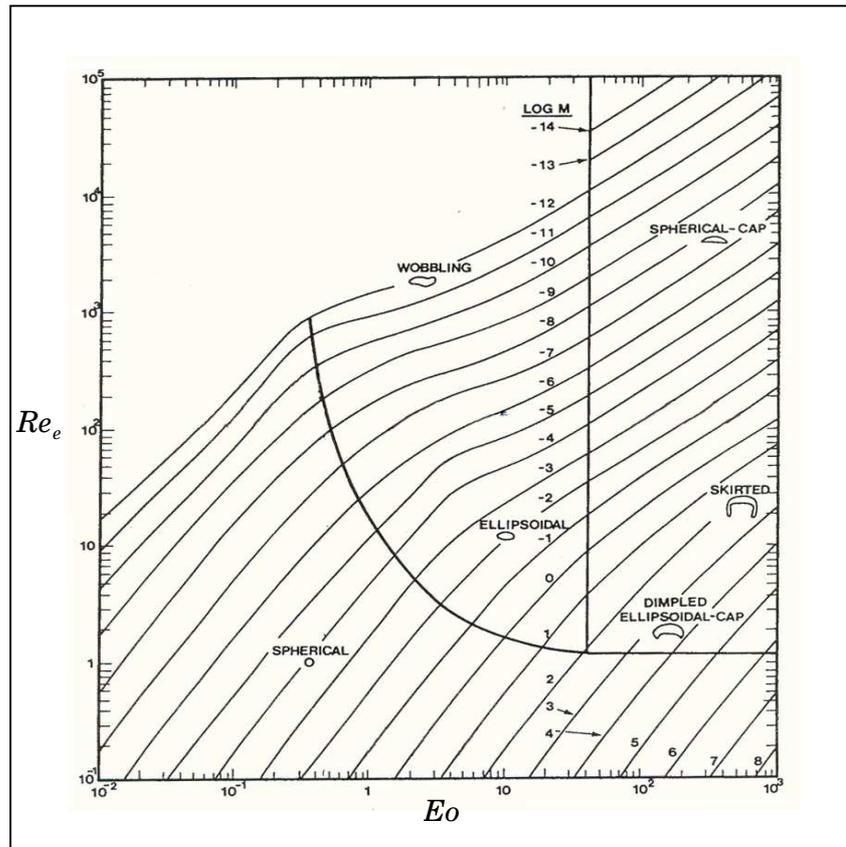


Figure 1.12 : Formes des inclusions fluides en mouvement en milieu infini. Grace & al. (1978), p 27.

1.2.3 Mouvements Stationnaires

1.2.3.1 Sphère fluide en écoulement uniforme

Les premières études concernant le mouvement stationnaire des particules fluides ont été effectuées par Hadamard (1911) et Rybczynski (1911). Pour des faibles nombres de Reynolds, ils ont déterminé l'écoulement de Stokes à l'intérieur et à l'extérieur d'une goutte sphérique et visqueuse de rayon a . Leurs résultats aboutissent à l'expression suivante de la traînée exercée sur la goutte par le fluide environnant :

$$\mathbf{F}_D = -4\pi\mu_e a \mathbf{U} \frac{2 + 3\phi_\mu}{2 + 2\phi_\mu} \quad (1.96)$$

où \mathbf{U} est la vitesse de translation de la particule et $\phi_\mu = \mu_i / \mu_e$ est le rapport des viscosités dynamiques. Dans la relation (1.96), les cas limites où $\phi_\mu \rightarrow 0$ et $\phi_\mu \rightarrow \infty$,

correspondent respectivement à la traînée exercée sur une bulle d'air et celle exercée sur une sphère rigide. Pour un écoulement autour d'une goutte fixe, la solution d'Hadamard-Rybczynski est illustrée sur la figure 1.13, qui met en évidence les "tourbillons sphériques de Hill" à l'intérieur de l'inclusion.

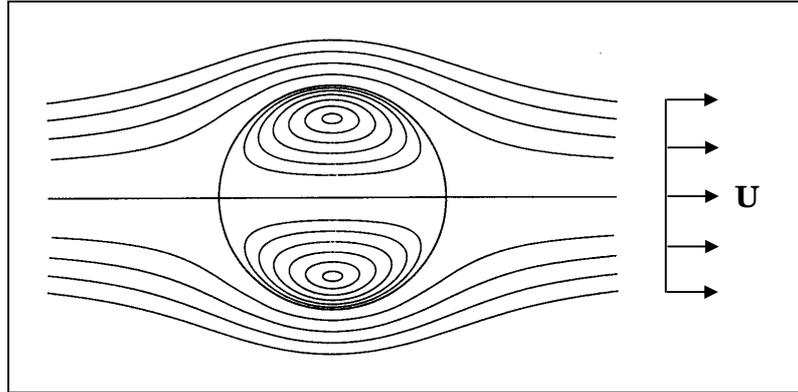


Figure 1.13 : Lignes de courant de l'écoulement de Stokes autour d'une sphère fluide

Théoriquement, la solution d'Hadamard-Rybczynski n'est valide que pour des faibles nombres de Reynolds $Re_e \ll 1$, où la particule fluide garde une forme sphérique. Taylor & Acrivos (1964) ont examiné le cas de $Re_e \sim O(1)$ où l'inclusion peut se déformer sous l'effet des termes d'inertie. Dans un système de coordonnées sphériques, ils ont exprimé l'interface de l'inclusion comme suit :

$$r(\theta) = a(1 + \xi(\theta)) \quad \text{tel que} \quad \max|\xi(\theta)| \ll 1 \quad (1.97)$$

où a est le rayon de la sphère équivalente et $\xi(\theta)$ est l'éventuelle déformation de la goutte. En utilisant la méthode des perturbations singulières, ils ont établi la relation suivante, exprimant la force de résistance \mathbf{F}_D :

$$\mathbf{F}_D = -2\pi\mu_e a \mathbf{U} \left[\left(\frac{2+3\phi_\mu}{1+\phi_\mu} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{2+3\phi_\mu}{1+\phi_\mu} \right)^2 Re_e + \frac{1}{160} \left(\frac{2+3\phi_\mu}{1+\phi_\mu} \right)^3 Re_e^2 \ln Re_e + \frac{\lambda We}{10(1+\phi_\mu)^2} (3\phi_\mu^2 - \phi_\mu + 8) + O(Re_e^2) \right] \quad (1.98)$$

$$\text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{4(1+\phi_\mu)^3} \left[\left(\frac{81}{80} \phi_\mu^3 + \frac{57}{20} \phi_\mu^2 + \frac{103}{40} \phi_\mu + \frac{3}{4} \right) - \frac{\gamma-1}{12} (1+\phi_\mu) \right] \quad (1.99)$$

où We est le nombre de Weber et $\gamma = \rho_i/\rho_e$ est le rapport des densités de la goutte et du fluide environnant. A partir de la condition aux limites (1.87), ils ont aussi déterminé la déformation $\xi(\theta)$ en terme des polynômes de Legendre P , telle que :

$$\xi(\theta) = -\frac{\lambda}{2} We P_2(\cos(\theta)) - \frac{3\lambda(11\phi_\mu + 10)}{280(\phi_\mu + 1)} \frac{We^2}{Re_e} P_3(\cos(\theta)) + O(We^2/Re_e) \quad (1.100)$$

Ce résultat ainsi que les observations expérimentales de Haberman & Morton (1953) leur ont permis de conclure que l'inclusion, initialement sphérique, se déforme en un ellipsoïde aplati à l'ordre de $O(We)$, et ensuite, prend la forme d'une calotte sphérique à l'ordre de $O(We^2/Re_e)$.

Pour des nombres de Reynolds intermédiaires $Re_e \sim O(10) - O(100)$, plusieurs études ont été faites en utilisant différentes approches, telles que la théorie de la couche limite, la méthode de Galerkin ou encore les approximations numériques basées sur les méthodes des différences finies et des éléments finis.

Le premier à s'être attaqué au problème d'une bulle de gaz sphérique en translation uniforme à grands nombres de Reynolds, a été Levich (1949, 1962). En utilisant la théorie de la couche limite, il a supposé qu'au-delà d'une fine couche enrobant la surface extérieure de la bulle, l'écoulement du fluide environnant peut être considéré comme irrotationnel. A partir du bilan d'énergie mécanique, il a calculé la dissipation visqueuse dans l'écoulement, et a estimé, au premier ordre, la force de résistance de la bulle donnée par :

$$\mathbf{F}_D = -12\pi\mu_e a \mathbf{U} \quad (1.101)$$

Moore (1963) à repris la même formulation proposée par Levich en tenant compte des contributions de la couche limite et du sillage dans le calcul de la dissipation de l'énergie. Ainsi, il a obtenu un ordre supérieur de la force exercée sur la bulle, donnée par :

$$\mathbf{F}_D = -12\pi\mu_e a \mathbf{U} \left(1 - \frac{2.211}{\sqrt{Re_e}} + O(Re_e^{-5/6}) \right) \quad (1.102)$$

Dans le cas des gouttes sphériques, l'étude devient plus complexe que celle des bulles gazeuses, puisque l'écoulement à l'intérieur de l'inclusion n'est plus négligeable et doit être pris en compte. Hamielec & al. (1963) ont abordé ce problème, et ont appliqué la méthode de Galerkin pour le mouvement d'une sphère fluide dans la gamme $Re_e \leq 500$. Cette méthode est basée sur une formulation polynomiale de la fonction de courant pour satisfaire toutes les conditions aux limites, et permet d'écrire les

équations de Navier-Stokes sous une forme intégrale. Leur résultat a aboutit à l'expression suivante de la force de traînée :

$$\mathbf{F}_D = -8\pi\mu_e\alpha\mathbf{U}\left(0.0953\frac{(783\phi_\mu^2 + 2142\phi_\mu + 1080)}{(60 + 29\phi_\mu)(4 + 3\phi_\mu)}Re_e^{0.26}\right) \quad (1.103)$$

Cependant, la relation (1.103) n'est valide que pour $4 \leq Re_e \leq 100$, puisque les termes d'inertie ont été négligés dans l'écoulement intérieur. Chao (1963) a essayé d'améliorer ces solutions, en particulier, celle de Levich en perturbant aussi l'écoulement rotationnel de Hill à l'intérieur de la goutte et en raccordant à l'interface les champs de vitesse et les contraintes des deux phases. Ainsi, en intégrant la contrainte totale sur la surface de la bulle, il a proposé l'expression suivante de la traînée :

$$\mathbf{F}_D = -8\pi\mu_e\alpha\mathbf{U}\left(1 + 2\phi_\mu - 0.314\frac{1 + 4\phi_\mu}{\sqrt{Re_e}}\right) \quad (1.104)$$

Malheureusement, ce résultat est aussi incorrect du fait que la contribution de la perturbation de pression n'ait pas été comptabilisée. Quelques années plus tard, Harper & Moore (1968), ont réussi à rattraper ces lacunes et ont montré que la force \mathbf{F}_D peut s'écrire, à l'ordre $O(Re_e^{-3/2})$, comme suit :

$$\mathbf{F}_D = -12\pi\mu_e\alpha\mathbf{U}\left(1 + \frac{3\phi_\mu}{2} + \frac{(2 + 3\phi_\mu)^2}{\sqrt{Re_e}}(B_1 + B_2 \ln Re_e)\right) \quad (1.105)$$

où B_1 et B_2 sont des constantes dépendant des rapports des viscosités ϕ_μ et des rapports des densités γ , et dont quelques valeurs sont rapportées dans le tableau 1.2.

$\phi_\mu\gamma$	25	4.0	1.0	0.25	0.04	0
B_1	-0.608	-0.652	-0.660	-0.642	-0.622	-0.553
B_2	0.00286	0.00877	0.0142	0.0160	0.0119	0

Tableau 1.2 : Quelques valeurs des coefficients B_1 et B_2 en fonction du produit des rapports $\phi_\mu\gamma$ donnés par Harper & Moore (1968)

Autre que la méthode de Galerkin et la théorie de la couche limite, plusieurs études numériques ont été effectuées en utilisant les techniques des différences finies et des éléments finis. Parmi, on peut citer celle de Haas & al. (1972) qui ont proposé la corrélation suivante donnant le coefficient de traînée exercée sur une bulle sphérique pour $Re_e > 2$:

$$C_D = \frac{|\mathbf{F}_D|}{\frac{1}{2}\pi\alpha^2\rho_e|\mathbf{U}|^2} = 14.9Re_e^{-0.78} \quad (1.106)$$

cette formule donne une excellente approximation aux résultats numériques de LeClair et Hamielec (1971) ainsi que ceux trouvés, ultérieurement, par Brabston et Keller (1975). Pour étendre ce résultat au cas des gouttes sphériques, Rivkind & al. (1976) ont utilisé aussi la méthode des différences finies pour résoudre les équations de Navier-Stokes, à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion. Pour différents rapports de viscosités ϕ_μ , et dans la gamme $2 \leq Re_e \leq 100$, ils ont conclu que le nombre de Reynolds intérieur Re_i n'a aucun effet sur la valeur du coefficient de traînée C_D , dont l'expression est donnée par :

$$C_D = \frac{1}{1 + \phi_\mu} (\phi_\mu C_{D(solide)} + C_{D(bulle)}) \quad (1.107)$$

Dans une étude complémentaire à celle de Rivkind & al, Oliver & Chung (1985, 1987) ont utilisé la méthode de troncation pour examiner numériquement l'écoulement autour d'une goutte sphérique. Pour $Re_e \leq 2$ et $0.1 \leq \phi_\mu \leq 10$, ils ont montré que, le coefficient C_D s'écrit comme suit :

$$C_D = \frac{8}{Re_e} \frac{2 + 3\phi_\mu}{1 + \phi_\mu} \left(1 + 0.05 \frac{2 + 3\phi_\mu}{1 + \phi_\mu} Re_e \right) \quad (1.108)$$

On peut signaler aussi que dans une étude faite récemment, Magnaudet & al. (1995) ont montré que pour un écoulement stationnaire autour d'une bulle d'air sphérique, le coefficient de traînée est bien décrit par la loi de Moore (1.102) pour $Re_e \geq 50$, tandis que pour la gamme $Re_e \leq 50$, il ont proposé la relation suivante :

$$C_D = \frac{16}{Re_e} (1 + 0.15Re_e^{0.5}) \quad (1.109)$$

D'après une synthèse faite par Clift & al (1978), la figure 1.14 compare quelques résultats, mentionnés ci-dessus, concernant le coefficient de traînée pour une bulle gazeuse dans des liquides purs. On y constate que les différentes approches théoriques confirment l'infériorité du coefficient de traînée C_D de la bulle par rapport à celui d'une sphère rigide. Les observations expérimentales sont en bon accord avec la théorie de la couche limite pour des nombres de Reynolds intermédiaires: $Re_e \geq 50$, mais présentent une certaine dispersion pour $5 \leq Re_e \leq 50$.

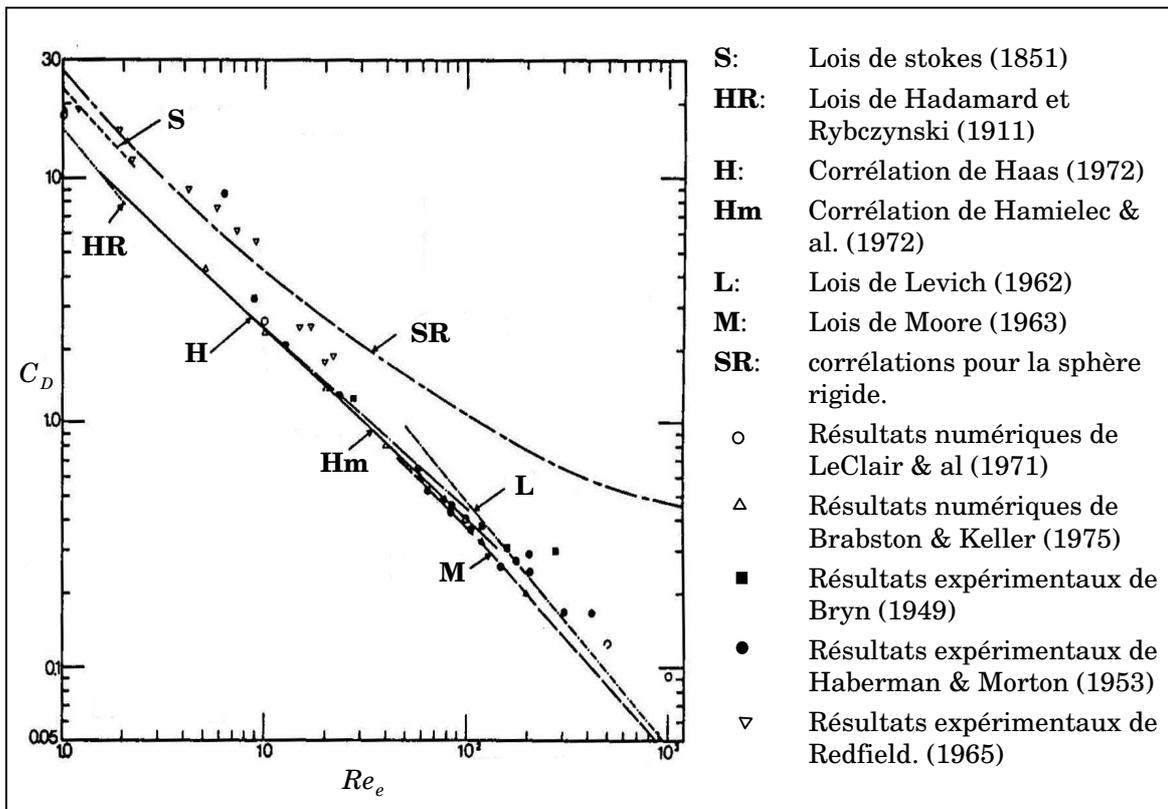


Figure 1.14 : Coefficients de traînée pour les bulles dans les liquides purs d'après Grace & al. (1978), p 133.

1.2.3.2 Effets des surfactants sur le comportement de l'inclusion

Théoriquement, Hadamard et Rybczynski ont prédit par la relation (1.96), que la vitesse terminale d'une bulle sphérique est 1.5 fois supérieure à celle d'une sphère rigide, ayant la même taille et la même densité. Cependant, expérimentalement, il est souvent observé qu'en plus de l'absence de la recirculation interne, les petites inclusions fluides se déplacent avec des vitesses qui tendent, plutôt, à obéir à la loi de Stokes (1.12). Ce phénomène a fait l'objet de plusieurs études, notamment celles de Bond & Newton (1928), Haberman & Morton (1953) et Elzinga et Banchemo (1961) qui ont montré que la formule d'Hadamard-Rybczynski ne commence à être valide que lorsque le diamètre de la goutte atteint environ 5 à 10 mm. Levich (1962) a expliqué ce comportement de la goutte par la présence des impuretés dans le système, qui s'accumulent sur l'interface de l'inclusion et causent une chute de la tension superficielle. En effet, lors du mouvement de la goutte, ces impuretés viennent s'installer dans la partie arrière de l'interface en laissant le front de l'inclusion relativement propre. Ceci produit un gradient de tension superficielle le long de

l'interface et génère une contrainte tangentielle qui réduit la mobilité de l'interface et diminue la vitesse terminale de l'inclusion.

En présence d'impuretés, la modélisation théorique du comportement d'une goutte sphérique en mouvement consiste à diviser l'interface en deux zones: une interface fluide correspondant à la partie avant de l'inclusion, et une interface solide correspondant à la partie arrière, appelée aussi "*front de stagnation*", comme le montre la figure 1.15. Cette théorie a été proposée la première fois par Savic (1953) et revue ensuite, par Davis & Acrivos (1966). Leurs études respectives sont limitées aux cas des bulles d'air en écoulements rampants. Elles consistent à exprimer la vitesse terminale de l'inclusion U_t comme suit :

$$U_t = U_{ts} Y(\theta_c) \quad \text{avec} \quad U_{ts} = \frac{2}{9} \frac{ga^2 \Delta\rho}{\mu_e} \quad (1.110)$$

où U_{ts} est la vitesse terminale de Stokes d'une sphère rigide équivalente à la bulle. $Y(\theta_c)$ est une fonction qui mesure le retard de la bulle dû à la rigidité partielle de l'interface. Elle dépend de l'angle de contamination θ_c que fait l'extrémité du front de stagnation avec l'axe de révolution de l'inclusion: (figure 1.15). D'après une étude asymptotique faite par Harper (1973) pour des faibles angles de $3\pi/4 \leq \theta_c \leq \pi$, la fonction $Y(\theta_c)$ peut être estimée par :

$$Y(\theta_c) = \frac{9\pi}{2(3\pi + 2\theta_c^3)} \quad (1.111)$$

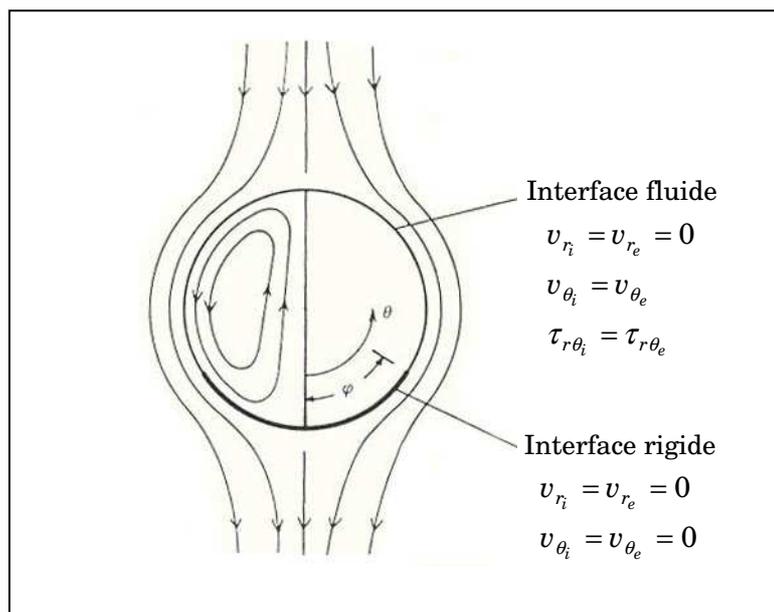


Figure 1.15 : modélisation du front de stagnation arrière

Sadhal & Johnson (1983) ont étendu ce résultat au cas des particules liquides, et ont établi une solution exacte du problème pour un angle θ_c quelconque. Ils ont montré que pour $Re_e \ll 1$, la force de traînée exercée sur une goutte sphérique ayant une interface impure, est donnée par :

$$\mathbf{F}_D = -4\pi\mu_e a \mathbf{U} \left(\frac{2+3\phi_\mu}{2+2\phi_\mu} + \frac{1}{4\pi(1+\phi_\mu)} (2\theta_c + \sin\theta_c - \sin 2\theta_c - \frac{1}{3} \sin 2\theta_c) \right) \quad (1.112)$$

Oguz & Sadhal (1987) ont repris le même problème et l'ont résolu pour des nombres de Reynolds de l'ordre $Re_e \sim O(1)$. En tenant compte des effets d'inertie dans l'écoulement, ils ont utilisé la technique des perturbations singulières et ont établi à l'ordre $O(Re_e^2)$, l'expression de la force \mathbf{F}_D exercée sur la goutte, telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_D = & -\frac{2\pi\mu_e a \mathbf{U}}{(1+\phi_\mu)} \left((2+3\phi_\mu) + C_1(\theta_c) \right) \\ & \times \left\{ 1 + \frac{Re_e}{16(1+\phi_\mu)} \left[(2+3\phi_\mu) + C_1(\theta_c) + \frac{C_2(\theta_c)}{10(1+\phi_\mu)^2} \left((4+5\phi_\mu) - C_1(\theta_c) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.113)$$

où les fonctions $C_1(\theta_c)$ et $C_2(\theta_c)$ sont définies par :

$$C_1(\theta_c) = \frac{1}{2\pi} \left(2\theta_c + \sin\theta_c - \sin 2\theta_c - \frac{1}{3} \sin 3\theta_c \right) \quad (1.114)$$

$$\begin{aligned} C_2(\theta_c) = \frac{1}{\pi} \left\{ 4(\cos 2\theta_c + \cos \theta_c) \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2(\theta_c/2) \right) \sin \theta_c \right. \\ \left. - 2 \left(\frac{1}{4} \sin 4\theta_c + \sin \theta_c \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.115)$$

1.2.4 Mouvements instationnaires

1.2.4.1 Écoulement uniforme

Le nombre de travaux théoriques et expérimentaux consacrés à l'influence de l'accélération sur le mouvement des particules fluides reste encore plus réduit que celui des inclusions solides. Il faut noter que plusieurs auteurs ont étendu, pendant longtemps, l'utilisation du résultat de Basset-Boussinesq (1.39) et celui d'Odar & Hamilton (1.40) pour décrire la traînée instationnaire exercée sur des bulles gazeuses ou sur des gouttes visqueuses. Malgré la grande différence entre les conditions aux limites que doit satisfaire l'écoulement en présence d'une inclusion fluide et celles desquelles la relation (1.39) est obtenue, cette hypothèse d'extension a été adoptée par

Hughes & Gilliland (1952), Hill & al. (1963), Hubbard & al. (1975), Moore & Sieverding (1975) ou encore Gyarmathy (1982).

En utilisant les conditions aux limites adéquates, la première étude traitant du mouvement accéléré d'une bulle sphérique dans un milieu visqueux en repos a été réalisée par Sy & al (1970, 1971) et Morrison & Stewart (1976). A l'aide d'un développement dans l'espace de Laplace, ces derniers auteurs ont établi une expression de la traînée agissant sur la bulle ($\gamma = \rho_i / \rho_e \approx 0$, $\phi_\mu = \mu_i / \mu_e \approx 0$) donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_D + \frac{a}{3(\pi\nu_e)^{1/2}} \int_0^t \frac{d\mathbf{F}_D/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = -4\pi\mu_e a \mathbf{U} - \frac{1}{2}\rho_e \gamma \frac{d\mathbf{U}}{dt} \\ - 4a^2 \sqrt{\pi\rho_e\mu_e} \int_0^t \frac{d\mathbf{U}/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau - \frac{2}{9}a^4 \rho_e \sqrt{\pi/\nu_e} \int_0^t \frac{d^2\mathbf{U}/d\tau^2}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \end{aligned} \quad (1.116)$$

La relation (1.116), valable pour des faibles nombres de Reynolds, donne la force \mathbf{F}_D d'une manière implicite sous la forme d'une équation intégral-différentielle. Dans son côté droit, on reconnaît les deux premiers termes correspondant respectivement à la traînée instantanée d'Hadamard-Rybczynski et à la force de la masse ajoutée. Le troisième terme est similaire à la force d'histoire de Basset multipliée par le coefficient $2/3$. Quant au dernier terme, Morrison & Stewart considèrent qu'il provient du mouvement du fluide sur la surface de la bulle de sorte qu'il n'ait pas d'équivalent pour une sphère solide. Dans le but de séparer la contribution de la force d'histoire, on peut reformuler (1.116) comme suit :

$$\mathbf{F}_D = -4\pi\mu_e a \mathbf{U} - \frac{1}{2}\rho_e \gamma \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{F}_h \quad (1.117)$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{F}_h + \frac{a}{3(\pi\nu_e)^{1/2}} \int_0^t \frac{d\mathbf{F}_h/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = -\frac{8}{3}a^2 \sqrt{\pi\rho_e\mu_e} \int_0^t \frac{d\mathbf{U}/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \quad (1.118)$$

Il s'ensuit que la force d'histoire n'est connue que comme une solution d'une équation intégral-différentielle. Cette situation complique sévèrement la résolution de l'équation du mouvement de la particule et présente numériquement des problèmes d'instabilités.

Chisnell (1987) a essayé de généraliser le travail de Morrison & al. en considérant le cas d'une goutte visqueuse sphérique. En supposant que les nombres de Reynolds à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion soient suffisamment faibles, il a déterminé la vitesse de la goutte $U(s)$ dans l'espace de Laplace. Elle s'exprime comme suit :

$$\frac{U(s) - U_0}{U_{HR} - U_0} = \frac{3(2 + 3\phi_\mu)}{2(1 + \phi_\mu)} \left\{ \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) s_e^2 + \frac{9}{2} \left(\frac{1}{1 + s_e} + \frac{T_1}{2T_1 + \phi_\mu T_2} \right)^{-1} \right\}^{-1} \quad (1.119)$$

avec
$$U(s) = \int_0^\infty U(t) \exp(-st) dt \quad (1.120)$$

$$T_1 = 3s_i \cosh s_i + (3 + s_i^2) \sinh s_i \quad (1.121)$$

$$T_2 = (6 + 3s_i^2) \sinh s_i - (6 + s_i^2) \cosh s_i \quad (1.122)$$

$$s_i = \sqrt{s/v_i}, \quad s_e = \sqrt{s/v_e} \quad (1.123)$$

où U_0 est la vitesse initiale de la goutte, et U_{HR} est la vitesse terminale d'Hadamard-Rybczynski issue du mouvement stationnaire de l'inclusion, donnée par:

$$U_{HR} = \frac{2(1 + \phi_\mu)(\gamma - 1)a^2 g}{3(2 + 3\phi_\mu)v_e} \quad (1.124)$$

En vertu de la complexité de la relation (1.119), Chisnell n'a pas pu l'inverser dans le domaine temporel et a calculé numériquement la force exercée sur la goutte à partir de l'équation du mouvement :

$$F_D(t) = \rho_e \gamma \left(\gamma \frac{dU(t)}{dt} - (\gamma - 1)g \right) \quad (1.125)$$

Dans le but de déterminer explicitement la force de résistance de la goutte dans un écoulement à faibles nombres de Reynolds, Kim & Karrilla (1991) et Yang & Leal (1991) ont utilisé l'analyse de Fourier et le théorème de réciprocity et ont exprimé la force hydrodynamique F_D dans le domaine fréquentiel comme suit :

$$F_D(\omega) = 6\pi\mu_e a U(\omega) \left(1 + k_e + \frac{k_e^2}{9} - \frac{(1 + k_e)^2}{3 + k_e + \phi_\mu g(k_e)} \right) \quad (1.126)$$

avec
$$g(k_e) = \frac{k_e(6 + k_e^2) - 3(2 + k_e^2)\tanh(k_e)}{(3 + k_e^2)\tanh(k_e) - 3k_e} \quad (1.127)$$

$$k_e = \sqrt{-i\omega a^2/v_e} \quad (1.128)$$

Cependant, ce résultat est en contradiction avec celui de Chisnell (1.119). Celui ci considère que la détermination de l'écoulement nécessite deux temps caractéristiques de diffusion, correspondant aux mouvements des fluides à l'intérieur et à l'extérieur

de l'inclusion s_i et s_e , tandis que la relation (1.126) ne prend en compte que celui du mouvement extérieur. Ce problème a été corrigé ultérieurement par Galindo & Gerbeth (1993) qui ont suggéré d'écrire la fonction g dans (1.126) en fonction de la variable $k_i = \sqrt{-i\omega a^2/\nu_i}$ au lieu de k_e . Ainsi, la force de traînée exercée sur la goutte sera exprimée dans le domaine fréquentiel comme suit :

$$F_D(\omega) = 6\pi\mu_e a U(\omega) \left(1 + k_e + \frac{k_e^2}{9} - \frac{(1 + k_e)^2}{3 + k_e + \phi_\mu g(k_i)} \right) \quad (1.129)$$

Il est à noter que l'expression analytique de la force \mathbf{F}_D exercée sur la sphère fluide ne peut pas être obtenue dans le domaine temporel. Ceci est dû principalement à l'existence de deux différents temps caractéristiques pour décrire l'écoulement. On remarque aussi que la relation (1.129) met en évidence, comme pour la sphère rigide, la traînée quasi-stationnaire, la force d'histoire de Basset et la force de la masse ajoutée correspondant respectivement aux trois premiers termes. Le dernier terme caractérise une autre force dont la signification physique reste jusqu'à maintenant non expliquée.

Sur le plan expérimental, il est pratiquement impossible de mesurer directement la force de traînée exercée sur une inclusion fluide en mouvement accéléré. Tam (1981) a mesuré simultanément dans un écoulement instationnaire la vitesse instantanée d'une bulle et celle du liquide environnant. Cependant, les résultats obtenus n'ont permis qu'une comparaison quantitative avec les lois de traînée déduite des études stationnaires. Aucune information précise n'a pu être obtenue concernant l'effet de l'accélération sur la force de résistance. Fourgotis & al. (1988) ont effectué une étude expérimentale concernant la force de la masse ajoutée subie par une bulle ascendante dans un fluide en repos. Le principe de l'expérience est basé sur le résultat de Darwin (1953) pour le mouvement d'une sphère rigide : le volume du fluide entraîné par une sphère en mouvement rectiligne accéléré dans un écoulement potentiel de fluide parfait est égal au volume $0.5C_m \mathcal{V}$ qui doit être déplacé par le corps avec l'accélération dU/dt . Fourgotis & al. ont donc mesuré ce volume et leurs résultats ont montré que le coefficient C_m reste pratiquement constant et égal à l'unité dans la gamme $500 \leq \text{Re}_e \leq 1000$. Au-delà de cette limite, ils ont constaté que C_m augmente probablement à cause de la déformation de l'inclusion et les résultats correspondants ne peuvent pas être représentatifs pour des inclusions fluides.

1.3 Définition des objectifs de ce travail

En vertu de l'étude bibliographique que nous venons d'exposer, il existe encore une certaine ambiguïté concernant la contribution des différentes forces exercées sur une

particule par le milieu environnant. Parmi ces actions hydrodynamiques, on note la force d'histoire, au sujet de laquelle on possède le moins de connaissances. Elle est supposée connue pour une sphère solide, mais il s'avère que pour des nombres de Reynolds intermédiaires, elle doit posséder un noyau différent de celui établi par Basset (1888), et qui varie plus rapidement pour les temps longs. Ce phénomène étudié numériquement par plusieurs auteurs reste à valider expérimentalement. En ce qui concerne les sphères fluides, on a longtemps considéré que la bulle ou la goutte en mouvement avait le même comportement qu'une sphère solide. Or, elle subit une force d'histoire tout à fait différente, puisqu'elle fait apparaître un terme supplémentaire dû probablement à la recirculation interne. Ce qui d'ailleurs n'est pas surprenant à cause de la grande différence dans les conditions aux limites à l'interface, entre les deux cas.

Le premier objectif de cette étude consiste à examiner expérimentalement le mouvement oscillatoire d'une particule sphérique solide ou fluide. (bulle gazeuse ou goutte visqueuse). Un accent particulier sera mis sur la contribution quantitative du terme d'histoire dans l'équation du mouvement.

Il faut noter qu'expérimentalement, il est très difficile d'observer l'effet de l'histoire de l'accélération sur la trajectoire d'une inclusion effectuant un mouvement instationnaire rectiligne. En effet, lors d'un tel mouvement, la vitesse terminale est vite atteinte et le terme de mémoire devient négligeable devant la traînée stationnaire. Alors, il nous a paru légitime d'envisager dans cette étude un mouvement oscillatoire pour lequel l'accélération de la particule reste persistante ainsi que les forces qui en dépendent. La configuration que nous avons choisi dans cette étude diffère de celles des expériences d'Odar & Hamilton (1964) ou de Karanfilian & Kotas (1978). Au lieu d'une sphère guidée dans ses oscillations, nous avons opté pour des particules ayant simultanément un mouvement rectiligne sous l'effet de la gravité et un mouvement oscillatoire généré par un système mécanique.

Ce travail va comporter, en premier lieu, une étude théorique dans laquelle nous allons déterminer l'écoulement induit par le mouvement oscillatoire des deux types d'inclusions à faibles nombres de Reynolds et dans un champ de gravité. Les forces de résistances totales exercées sur une bille solide, goutte visqueuse et bulle gazeuse seront évaluées par l'intégration des tenseurs de contraintes aux différentes interfaces. Nous examinerons aussi leurs comportements asymptotiques respectifs pour les faibles et les grandes fréquences d'oscillations.

Les résultats théoriques concernant les forces hydrodynamiques seront vérifiés expérimentalement au moyen d'une installation que nous avons conçue à cet effet. Les mesures des déplacements des inclusions sont effectuées à l'aide d'un système d'acquisition d'images rapide. Des expériences sont réalisées à faibles nombres de

Reynolds pour pouvoir évaluer quantitativement la contribution du terme de mémoire dans le bilan des forces. Aussi d'autres essais à moyens nombres de Reynolds sont effectués qui ont pour but de vérifier les corrélations trouvées dans la littérature récente donnant une approximation de cette force.

Dans la dernière partie de cette étude, nous allons étendre la méthode adoptée dans la première partie pour déterminer l'écoulement induit par le mouvement instationnaire des inclusions ellipsoïdales visqueuses. En se limitant aux cas des faibles nombres de Reynolds et de Weber, et à l'aide d'un schéma de perturbation autour de la forme sphérique, la force hydrodynamique totale subie par la particule sera déterminée ainsi que ses comportements dans le domaine fréquentiel.

Chapitre 2

Chapitre 2

Dispositif expérimental et technique d'exploitation des mesures

Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons en détail tous les constituants de l'installation expérimentale que nous avons conçue pour cette étude. Nous présenterons également le protocole suivi pour l'enregistrement et l'exploitation des trajectoires des inclusions étudiées. Nous décrivons par la suite, les techniques du traitement numérique utilisées pour la détermination la plus précise possible de la vitesse de l'inclusion, ainsi que les caractéristiques de son mouvement oscillatoire: vitesse moyenne, fréquence d'oscillations, amplitude et déphasage.

La mesure de la vitesse obtenue à partir des trajectoires enregistrées, conditionne l'obtention de la force totale exercée par le fluide environnant sur la particule. Et par conséquent, elle nous permet d'examiner de plus près l'effet de la force d'histoire sur ces trajectoires ainsi que son importance par rapport aux autres forces prises en compte dans le bilan de quantité de mouvement.

On notera aussi les précautions nécessaires qu'il faudra prévoir au cours de la manipulation et lors du dépouillement des résultats. Le respect de certaines consignes nous permet de réduire les incertitudes et d'atteindre l'objectif principal que l'on s'était fixé, à savoir l'évaluation quantitative du terme d'histoire pour la gamme des petits et moyens nombres de Reynolds.

Le schéma représentatif de l'installation expérimentale est montré sur les figures 2.1 et 2.2. En général, ce dispositif est constitué de trois parties essentielles: la colonne du fluide environnant, munie d'un système d'injection des bulles d'air ou des gouttes, un système mécanique sur lequel est fixée la colonne et qui permet d'assurer

un mouvement oscillatoire de l'inclusion, et enfin un système d'acquisitions d'images permettant de suivre la particule dans son mouvement et de mesurer sa trajectoire.



Figure 2.1: Vue d'ensemble de l'installation expérimentale

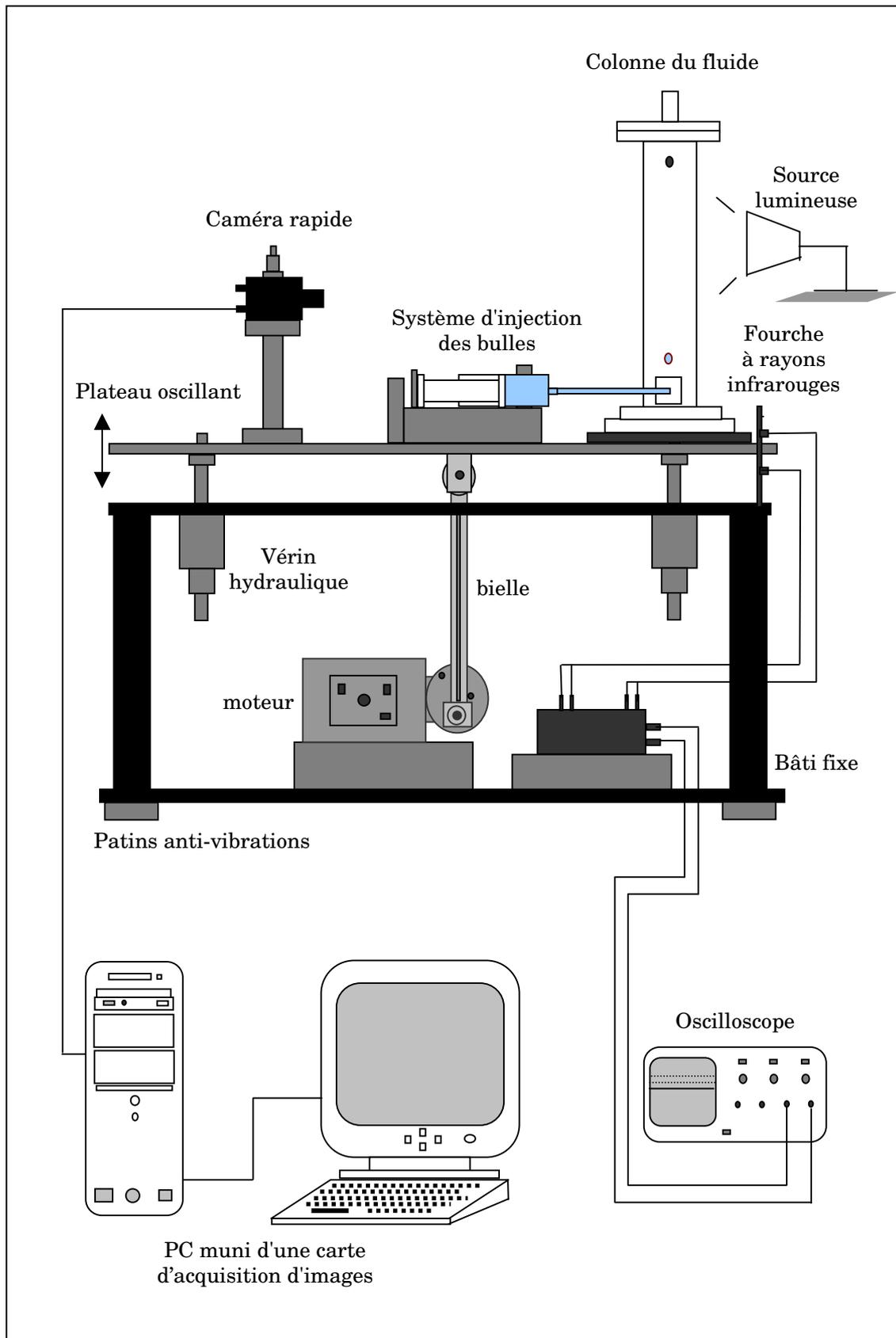


Figure 2.2: Schéma général du dispositif expérimental

2.1 Système mécanique

Ce système comporte un support lourd et fixe en acier: $80 \times 40 \times 55 \text{ cm}$, ainsi qu'un plateau "léger" en dural: $80 \times 40 \times 10 \text{ cm}$, pouvant effectuer un mouvement d'oscillation dans le plan vertical, comme il est indiqué sur la figure 2.2. Ce mouvement est réalisé grâce à quatre vérins hydrauliques fixés au bâti et à un moteur électrique, type *MULTIFIX, MC 2000 PEC* pouvant tourner jusqu'à 6200 tr/min . Ce moteur est muni d'un réducteur auquel est fixé un disque en acier.

Le mouvement de rotation du moteur est transformé en mouvement oscillatoire du plateau à l'aide d'une bielle en dural de longueur de 50 cm , fixée d'un côté au disque en acier, et de l'autre côté au dos du plateau. L'amplitude des oscillations est contrôlée grâce à des orifices percés sur le disque à des distances différentes de son centre, de telle façon à avoir des courses allant de 10 à 40 mm . La fréquence d'oscillations est comprise entre 1 et 10 Hz . Elle est mesurée au moyen d'une fourche à rayons infrarouges et d'une vis fixée au milieu de l'épaisseur du plateau: figure 2.3. Lors de la mise en marche du système, la fréquence de coupure des rayons par cette vis nous donne celle des oscillations du plateau, lue à l'aide d'un oscilloscope. Pour minimiser les vibrations qui peuvent affecter le système et qui sont dues en général, aux mouvements du plateau et à la rotation du moteur à grandes vitesses, des patins anti-vibrations sont fixés de chaque côté du bâti.

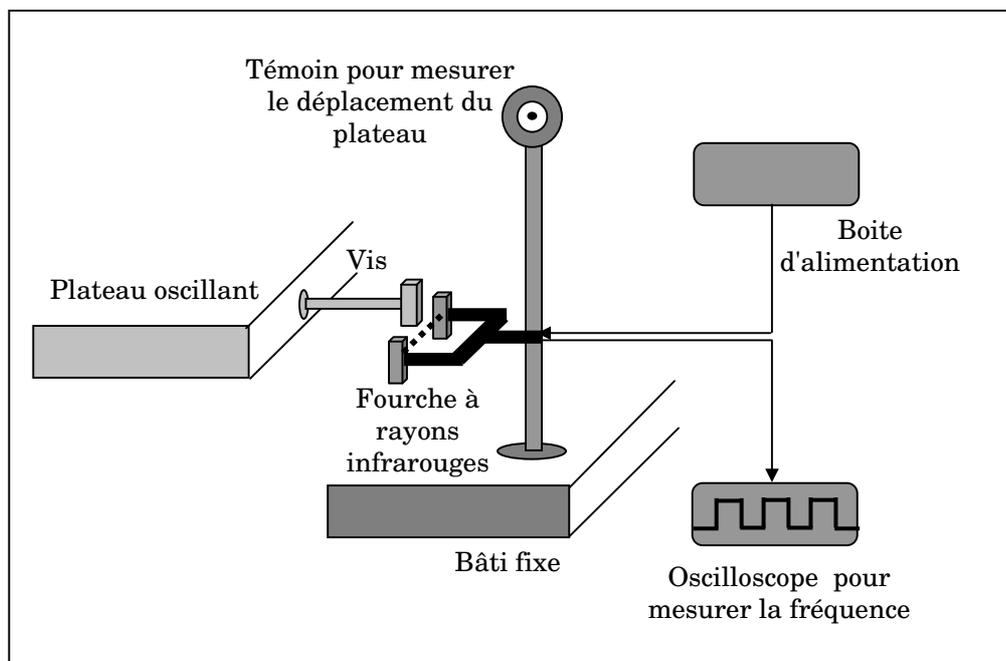


Figure 2.3: Technique de mesure de la fréquence d'oscillations du plateau

2.1.1 Approximation du mouvement sinusoïdal

En réalité, la rotation du disque et de la bielle ne produit pas un déplacement sinusoïdal parfait du plateau. En se référant à la figure 2.4, on suppose que la bielle de longueur L est fixée aux points P et D, correspondant respectivement aux cotés liés au plateau et au disque de centre O_d . Dans le repère (O, y, z) , lié à la position médiane de P, on peut écrire:

$$(z_p + L - b \sin(\omega t))^2 + (b \cos(\omega t))^2 = L^2 \quad (2.1)$$

où b , ω et z_p représentent respectivement, la distance $O_d D$, la vitesse angulaire du disque et la position du point P sur l'axe (Oz) . L'introduction du rapport $R = b/L$, nous permet de reformuler l'équation (2.1) comme suit:

$$Z_p^2 + 2Z_p \left(\frac{1}{R} - \sin(\omega t) \right) + \left(1 - \frac{2}{R} \sin(\omega t) \right) = 0 \quad (2.2)$$

avec: $Z_p = z_p/b$ (2.3)

dont la racine est donnée par:

$$Z_p = \sin(\omega t) - \frac{1}{R} \left(1 - \sqrt{1 - R^2 \cos^2(\omega t)} \right) \quad (2.4)$$

Dans nos conditions expérimentales, le rapport R est de l'ordre de 10^{-2} , très petit devant l'unité, ce qui nous permet d'approcher le déplacement du plateau par:

$$Z_p \approx \sin(\omega t) - \frac{R}{2} \cos^2(\omega t) + O(R^3) \quad (2.5)$$

Ainsi, l'accélération $\gamma_p = d^2 z_p / dt^2$ du point P s'écrit:

$$\Gamma_p = \frac{\gamma_p}{b\omega^2} \approx -\sin(\omega t) + R \cos(2\omega t) + O(R^3) \quad (2.6)$$

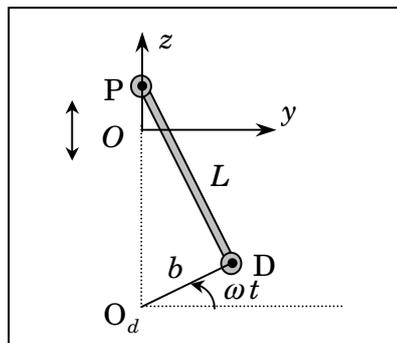


Figure 2.4: Mouvement de la bielle

En désignant respectivement le déplacement et l'accélération adimensionnels parfaits qu'aurait dû avoir le point P par Z_{p0} et Γ_{p0} :

$$Z_{p0} = -\Gamma_{p0} = \sin(\omega t) \quad (2.7)$$

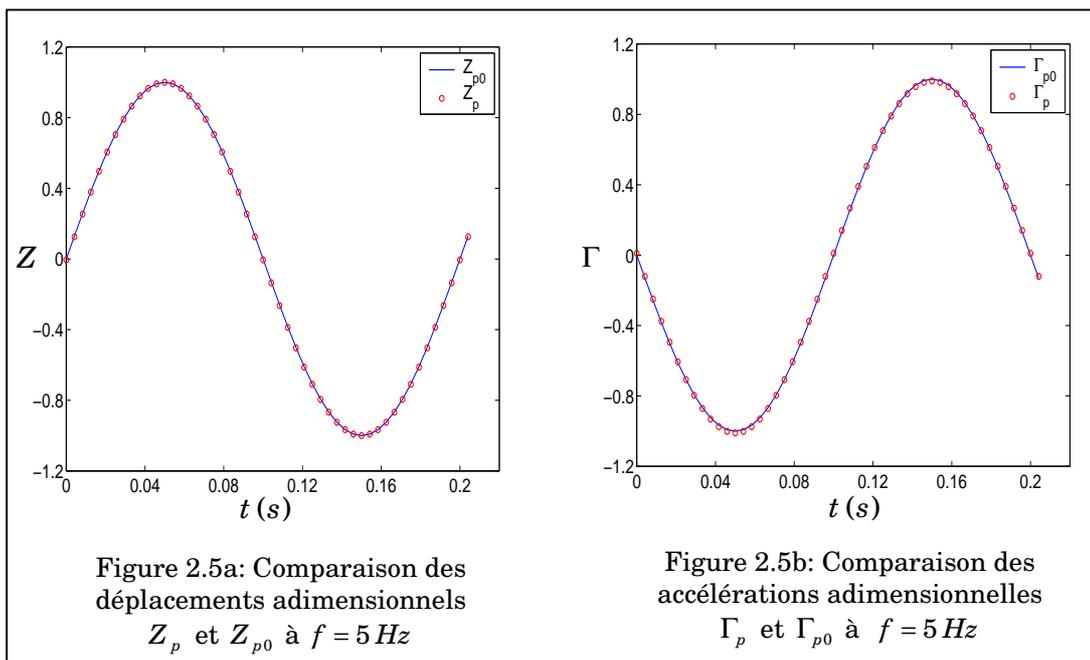
le résidu maximal entre Z_p et Z_{p0} ainsi que celui entre Γ_p et Γ_{p0} seront donnés par :

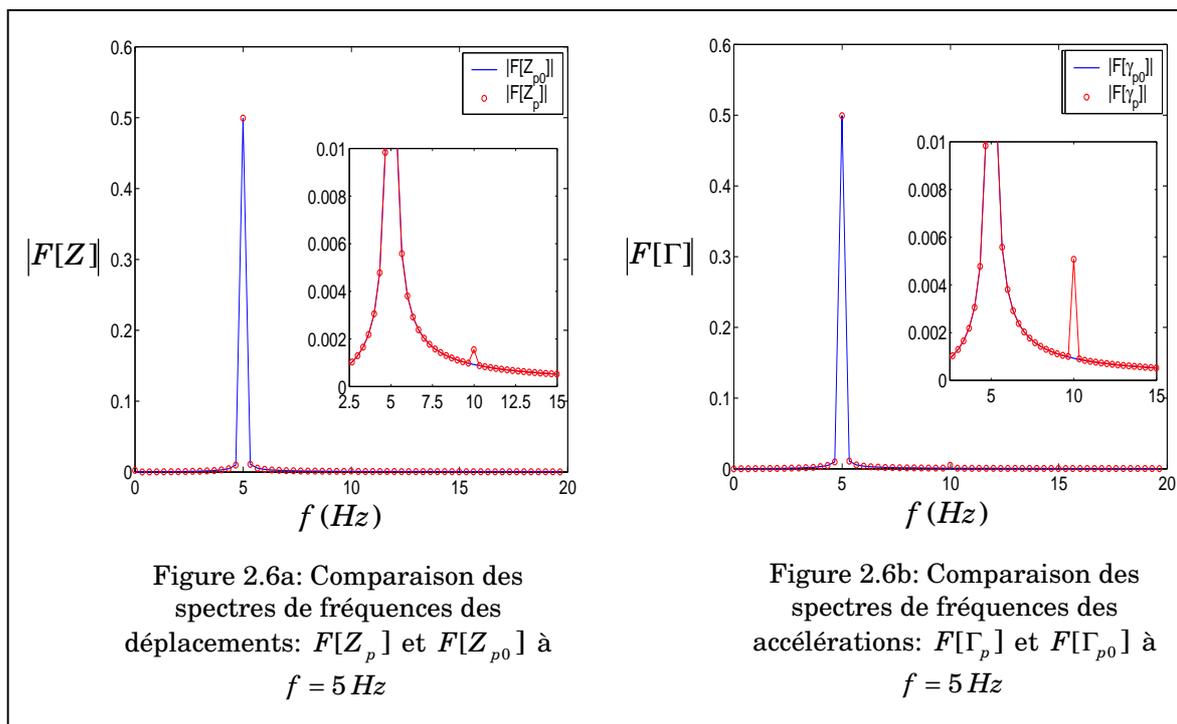
$$Rd_{z,\max} = \max |Z_p - Z_{p0}| \approx \frac{R}{2} \quad (2.8)$$

$$Rd_{\Gamma,\max} = \max |\Gamma_p - \Gamma_{p0}| \approx R \quad (2.9)$$

Nous remarquons que $Rd_{z,\max}$ et $Rd_{\Gamma,\max}$ dépendent uniquement du rapport R , et qu'il sont respectivement de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$ et 10^{-2} dans nos conditions expérimentales. Pour un exemple d'oscillations de 5 Hz , nous effectuons respectivement sur les figure 2.5a et 2.5b une comparaison entre les déplacements Z_p et Z_{p0} ainsi que les accélération Γ_p et Γ_{p0} . Nous y constatons clairement que les approximations Z_{p0} et Γ_{p0} décrivent correctement le mouvement du point P et les résidus n'engendre pratiquement aucun écart d'amplitude, ni aucun déphasage. Cela se confirme aussi sur les figures 2.6a et 2.6b où sont illustrés les spectres de fréquences $F[Z_p]$, $F[Z_{p0}]$, $F[\Gamma_p]$ et $F[\Gamma_{p0}]$. Par conséquent, dans ce qui suit, nous allons considérer que le mouvement du plateau est décrit par la fonction sinusoïdale :

$$z_{pl}(t) = b \sin(\omega t) \quad (2.10)$$





2.2 Colonne du fluide et système d'injection des bulles

Sur le plateau oscillant (repère relatif), nous avons fixé une cuve parallélépipédique en plexiglas transparent (pour la prise des photographies), ayant une base carrée de 10 cm de côté et une hauteur de 80 cm , comme le montre la figure 2.7. Cette cuve est remplie d'un fluide visqueux, en l'occurrence l'huile de silicone ou la glycérine dont les caractéristiques seront précisées dans le chapitre 3, lors des discussions des résultats. Elle est munie sur sa surface supérieure d'une ouverture de 2 cm de diamètre permettant d'une part, le lâché des inclusions solides, et d'autre part, de diminuer les oscillations de la surface libre du fluide. Aussi, pour éviter la propagation des vibrations parasites à l'intérieur du fluide, la base de la cuve a été séparée de la surface du plateau par un morceau de caoutchouc. Pour le changement éventuel du fluide, et la vidange de la colonne, un orifice de drainage est percé en bas de sa paroi.

Afin d'étudier le mouvement ascendant des inclusions fluides, nous avons glissé en bas de la colonne, et suivant le plan perpendiculaire à son axe, un tube fin de 5 mm de diamètre troué à sa paroi, fermé d'un côté, et lié à un système d'injection de l'autre côté. Les trous dont dispose ce tube sont au nombre de quatre et de diamètres différents allant de 0.1 mm jusqu'à 0.4 mm . Cela nous permet de varier les tailles des inclusions étudiées. Le système d'injection est constitué d'une seringue pleine d'air

(dans le cas d'étude du mouvement des bulles), d'un moteur pas à pas, d'un piston et de flexibles reliés par des vannes. Le moteur tournant à vitesse constante permet de faire avancer très régulièrement le piston et l'aiguille dans la seringue pour obtenir des bulles d'air isolées et de diamètres identiques.

Il faut noter que pour des fréquences d'oscillations dépassant 5 Hz , les vibrations du système empêchent le détachement régulier des inclusions gazeuses et créent un train de micro bulles dont le diamètre diminue avec la fréquence. Pour effectuer tous les essais avec le même diamètre, nous injectons d'abord l'inclusion à une fréquence nulle (position arrêt du moteur), ensuite, nous démarrons le système dont la fréquence désirée a été préalablement réglée.

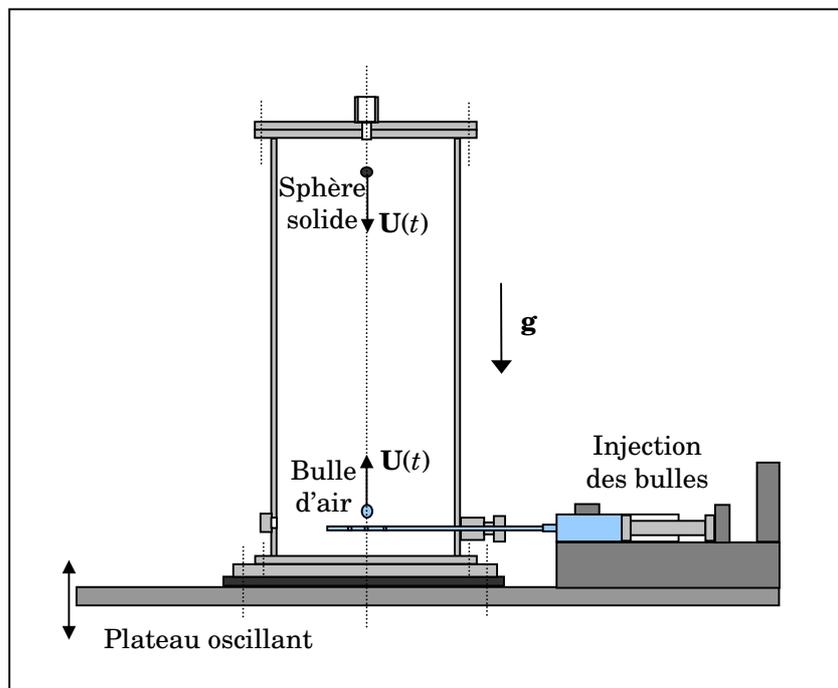


Figure 2.7: Colonne du fluide et système d'injection des bulles

2.3 Système d'acquisition d'images

Pour suivre le mouvement de l'inclusion dans le fluide, tout en se plaçant dans le repère relatif, nous avons fixé une caméra CCD rapide sur un support réglable en hauteur, qui à son tour, est assemblé au plateau oscillant. Le rôle de ce support réside dans la possibilité d'ajuster la position verticale de la caméra pour correspondre à un champ de vision dans lequel la particule aurait atteint sa vitesse terminale moyenne. La caméra utilisée est de type JAI CV-M30, ayant une fréquence maximale de 360 images par seconde. Elle peut travailler en 8 modes différents dont chacun nous permet une prise d'images avec une fréquence donnée. Les caractéristiques de ces

modes de fonctionnement ainsi que les tailles d'images possibles sont détaillées sur le tableau 2.1.

Le signal vidéo sortant de la caméra est acquis à l'aide d'une carte d'acquisition de type IC-PCI-AM-FA de IMAGING TECHNOLOGY, placée dans un ordinateur et pilotée par le logiciel ITEX de IMASYS. La liaison entre la caméra et la carte d'acquisition est assurée au moyen d'un câble spécial. Le contrôle de l'acquisition et l'enregistrement des séquences du mouvement de l'inclusion sont effectués à partir du programme IMAVIEW de IMASYS. A titre indicatif, pour une séquence de durée de 3 secondes, filmée avec une fréquence d'échantillonnage de 120 Hz (mode 6 dans le tableau 2.1), le système d'acquisition nous permet de suivre la particule en mouvement avec 360 images de 640×240 pixels. Si cette particule oscille avec une fréquence de 5 Hz, la séquence enregistrée doit contenir 15 périodes, ce que nous avons jugé suffisant pour détecter l'évolution du mouvement oscillatoire de l'inclusion.

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
Vitesse	Normale				Double			
Taille de l'image (Pixels)	640×480	640×240	640×111	640×67	640×480	640×240	640×111	640×67
Fréq. d'images (im/s)	30	60	120	180	60	120	240	360
Rapport d'aspect	1:1	1:2	1:2	1:3	1:1	1:2	1:2	1:3

Tableau 2.1 : Caractéristiques des modes de fonctionnement de la caméra

2.4 Procédure d'enregistrement d'une trajectoire

L'enregistrement des trajectoires d'une inclusion dans la colonne (sphère solide, bulle d'air ou goutte) se fait dans les mêmes conditions, pour les deux cas suivant :

Une trajectoire "sans oscillation" notée dans ce qui suit par "S.O."

Une trajectoire "avec oscillations" notée dans ce qui suit par "A.O."

Les essais S.O. nous permettent de comparer la vitesse terminale moyenne de l'inclusion avec celle obtenue dans le cas A.O. Après toutes les préparations nécessaires, nous effectuons l'enregistrement en respectant la procédure suivante :

- La fixation judicieuse de la caméra sur le plateau oscillant de telle façon à éviter les vibrations qui peuvent l'affecter. La position de la caméra doit être à une distance convenable de la colonne afin d'avoir un champ de vision clair qui nous permettra de suivre le mouvement de la particule ainsi que celui du plateau pendant une durée suffisante.
- Allumage de la source lumineuse derrière la colonne et vérification du contraste dans l'image tout en réglant l'ouverture du diaphragme de la caméra.
- Prise d'une image de référence en introduisant une règle graduée dans le plan vertical en suivant l'axe où se déplace l'inclusion. Cette procédure nous permet d'une part de déterminer la taille réelle de l'image, et d'autre part, de régler le zoom pour faciliter la détection des contours.
- Mesure de la température du fluide dans la colonne, afin de vérifier la viscosité qu'on mesurera par la suite.
- Mesure de la viscosité du fluide par le lâché d'une sphère solide, de diamètre petit. Son déplacement nous permettra de déduire sa vitesse terminale et par conséquent la viscosité du fluide.
- Procéder aux essais sans oscillation et ensuite à ceux avec oscillations, après avoir fixé les paramètres du plateau : fréquence et amplitude.

Chaque série de mesures se compose de plusieurs séquences (3 ou 4 essais afin de vérifier la reproductibilité) destinées à la mesure de la viscosité du fluide, des trajectoires de l'inclusion sans oscillation, et enfin, les trajectoires avec oscillations en balayant une gamme de fréquences comprises entre 1 et 10 *Hz*. Les séquences ainsi enregistrées doivent être très claires de façon à obtenir la meilleure précision possible lors du dépouillement. Compte tenu des étapes détaillées ci-dessus, il nous faut environ une heure pour effectuer une série complète. Cette estimation ne tient pas compte du temps nécessaire au traitement d'images et de signaux que nous devons faire ultérieurement, et qui seront détaillés dans les paragraphes qui suivent.

2.5 Exploitation des essais

Une fois les séquences enregistrées, le dépouillement des essais se fait en deux étapes distinctes. Dans la première, nous procédons à un traitement d'images, dans lequel nous déterminons les trajectoires de l'inclusion ainsi que celles du plateau oscillant. La seconde étape consiste à effectuer un traitement numérique dans lequel nous filtrons les mesures et les exploitons afin de les comparer aux résultats obtenus théoriquement et à ceux issus des travaux antérieurs.

2.5.1 Traitement d'images

La détermination des positions de l'inclusion et du plateau à un instant donné, se fait au moyen d'un logiciel spécialisé en traitement d'images nommé OPTIMAS. En général, cela consiste à repérer dans chaque image de la séquence le centre de gravité de l'inclusion.

Nous procédons d'abord à la correction des dimensions du champ de vision en utilisant l'image de référence prise précédemment. En vertu de la convexité du champ de vision, la vérification de l'exactitude de ces dimensions peut se faire en mesurant, dans différents endroits de l'image, le diamètre déjà connu d'une sphère solide en mouvement dans la cuve. La mesure du diamètre de la bille s'obtient par l'extraction de son contour du fond de l'image. En effet, en réglant le niveau d'ouverture du diaphragme de la caméra ainsi que l'éclairage émis par le projecteur derrière la colonne, nous créons une différence de niveau de gris entre les pixels occupés par l'inclusion et ceux occupés par le fluide. La spécification d'un intervalle du niveau de gris au logiciel nous permet alors de détecter automatiquement le contour délimitant la particule, dont le centre sera déduit et noté par le point "A", tel qu'il est indiqué sur la figure 2.8.

Afin de comparer le mouvement de l'inclusion avec celui du plateau oscillant, nous avons fixé sur le support, où la fourche à rayons infrarouges est maintenue, un témoin de forme d'anneau, figure 2.3. Etant dans le même champ de vision que l'inclusion, et en suivant le même raisonnement que précédemment, différence du niveau de gris, nous pouvons extraire le contour de son creux dont le centre sera noté par le point B sur la figure 2.8. La position du plateau ainsi mesurée est à priori erronée vu que le témoin n'est pas sur le même axe que celui où se déplace l'inclusion. La correction de ces mesures est facile à faire lors du traitement numérique puisqu'on connaît préalablement la taille réelle de l'image et l'amplitude du plateau.

Les coordonnées du centre de gravité de la particule ainsi que celles du creux du témoin seront rapportées dans des fichiers pour faire l'objet d'un traitement numérique.

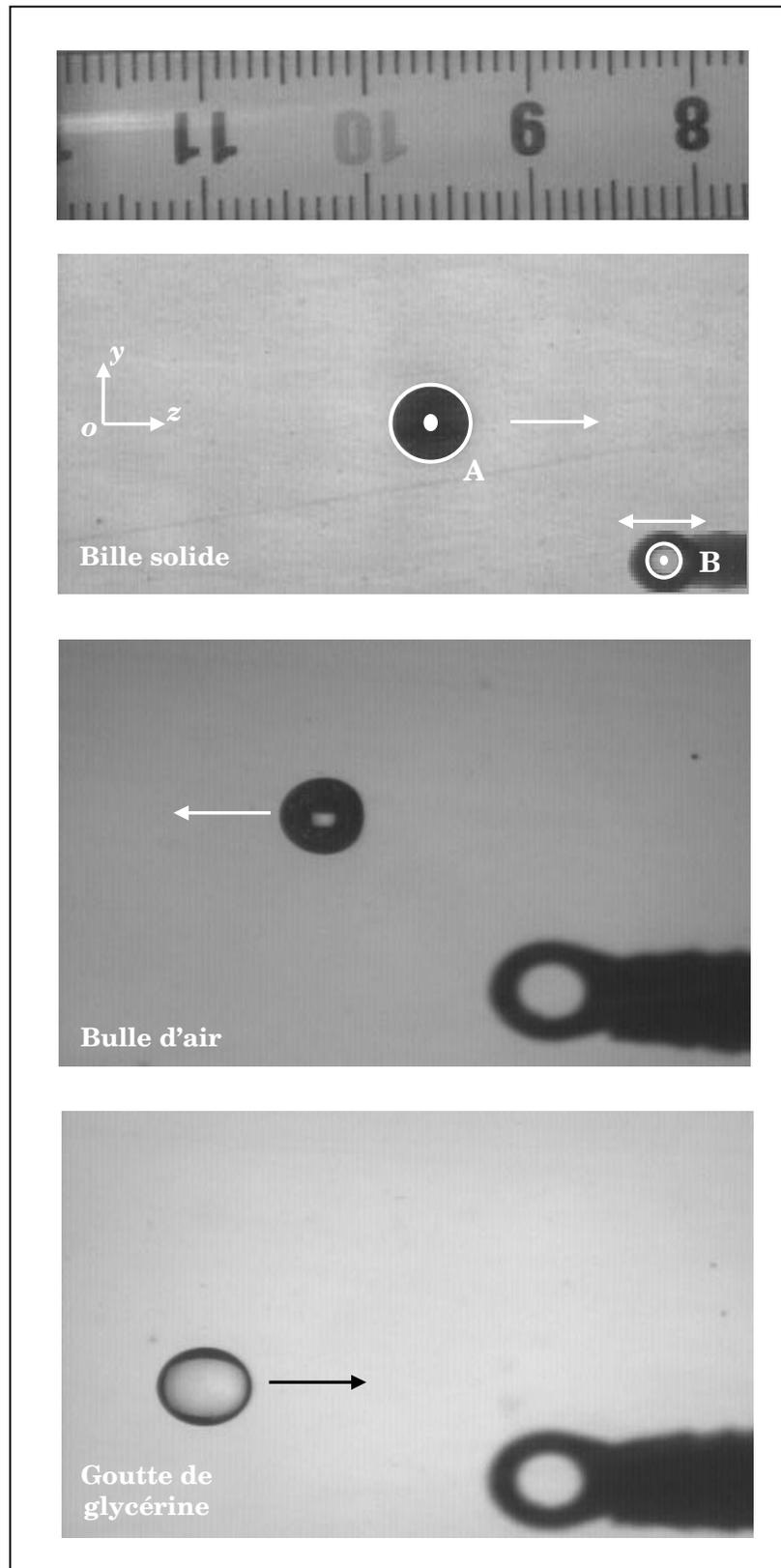


Figure 2.8: Exemples d'images des mouvements d'une bille solide, bulle d'air et goutte de glycérine dans l'huile de silicone

2.5.2 Traitement numérique des données expérimentales

Dans cette étape du traitement, nous procédons d'abord au calcul de la viscosité cinématique ν_e du fluide environnant de densité ρ_e , et de la vitesse terminale de l'inclusion pour les trajectoires sans oscillation. Ensuite, nous déterminons les caractéristiques des déplacements oscillatoires, en l'occurrence, la fréquence d'oscillations, la vitesse moyenne, l'amplitude des oscillations et le déphasage avec le mouvement du plateau.

2.5.2.1 Mesure de la viscosité

Pour mesurer la viscosité du fluide dans la colonne, nous avons utilisé une bille solide dont les caractéristiques sont données par le fournisseur et vérifiées préalablement. Nous désignons par ρ_i , a et \mathcal{V} respectivement, sa densité, son rayon et son volume. La sphère se déplace dans le fluide environnant avec une vitesse $U(t)$, son équation de mouvement s'écrit d'une manière générale comme suit :

$$\rho_i \mathcal{V} \frac{dU(t)}{dt} = (\rho_i - \rho_e) \mathcal{V} g - F_D(t) \quad (2.11)$$

Après un temps d'établissement t_e , de l'ordre de quelques dixièmes de seconde, la sphère atteint sa vitesse terminale U_t tel que :

$$\frac{dU(t)}{dt} \approx 0 \quad \text{et} \quad U(t) \approx U_t \quad \text{quand} \quad t \geq t_e \quad (2.12)$$

et en exprimant la force F_D en fonction du coefficient de traînée C_D , l'équation du mouvement (2.11) devient pour tout instant $t \geq t_e$:

$$(\rho_i - \rho_e) \mathcal{V} g - \frac{1}{2} \pi a^2 \rho_e C_D U_t^2 = 0 \quad (2.13)$$

l'expression générale du coefficient C_D peut s'écrire sous la forme empirique suivante:

$$C_D = \frac{24}{Re_t} (1 + a_1 Re_t^{a_2}) \quad \text{tel que} \quad Re_t = \frac{2aU_t}{\nu} \quad (2.14)$$

où les coefficients a_1 et a_2 ont été proposés par Clift & Gauvin (1970) et donnés dans le tableau 2.2. La figure 2.9 représente la courbe "standard" de variation du coefficient de traînée de la sphère, en fonction du nombre de Reynolds, établie à partir de tous les résultats expérimentaux connus. On y constate que dans la gamme de $Re_t < 1000$, où nous avons effectué toutes nos expériences, la corrélation (2.14) reste tout à fait

satisfaisante et n'engendre qu'une déviation de l'ordre de 4 % par rapport aux observations expérimentales.

En substituant la relation (2.14) dans (2.13), nous pouvons déterminer facilement la viscosité cinématique du fluide, par la résolution de l'équation suivante par l'une des méthodes itératives classiques telle que celle de Newton-Raphson :

$$1 + a_1 Re_t^{a_2} - a_3 Re_t = 0 \quad (2.15)$$

avec
$$a_3 = \frac{(\rho_i - \rho_e)ag}{9\rho_e U_t^2} \quad (2.16)$$

	$Re_t \leq 0.1$	$0.1 < Re_t < 1000$
a_1	0	0.15
a_2	—	0.687

Tableau 2.2: Coefficients a_1 et a_2 utilisés dans la relation (2.11)

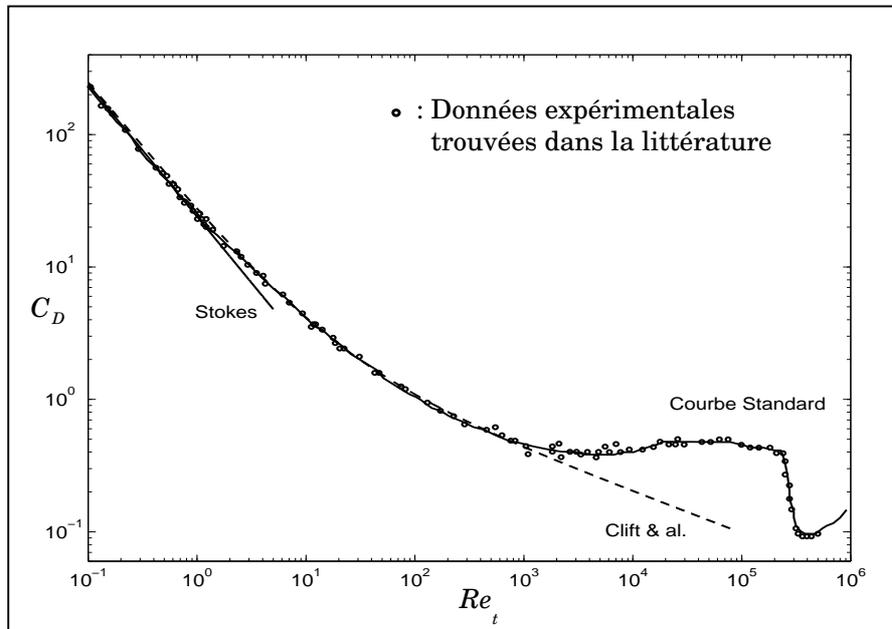


Figure 2.9: Coefficient de traînée de la sphère solide

2.5.2.2 Mesure de la vitesse terminale

Puisque l'acquisition du signal vidéo a été effectuée après que l'inclusion ait atteint sa vitesse terminale, la trajectoire enregistrée $z_{exp}(t)$ aura donc la forme d'une évolution linéaire. La vitesse de l'inclusion U_t peut alors être déterminée en utilisant la méthode des moindres carrés linéaires. Pour cela, on définit une fonction modèle $z_m(t)$ donnée par :

$$z_m(t) = U_t t + z_{m0} \quad \text{avec} \quad z_{m0} = z_m(t=0) \quad (2.17)$$

où le temps initial $t=0$ correspond à la prise de la première photographie. L'optimisation consiste à déterminer les paramètres U_t et z_m en minimisant l'écart quadratique EQ entre $z_{exp}(t)$ et $z_m(t)$ tel que:

$$EQ = \sum_{i=1}^n (z_{exp_i} - z_{m_i})^2 \quad (2.18)$$

$$\text{avec} \quad \frac{\partial EQ}{\partial U_t} = \frac{\partial EQ}{\partial z_{m0}} = 0 \quad (2.19)$$

L'exactitude de la fonction modèle $z_m(t)$ calculée à partir de la relation (2.16), est justifiée en examinant le résidu $Rz = z_{exp} - z_m$, qui doit être une variable aléatoire ayant une moyenne nulle. On peut aussi juger la qualité du modèle en calculant le coefficient de corrélation Cr entre les deux variables: observée et estimée, qui doit être près de l'unité :

$$Cr = \frac{\sum_{i=1}^n (z_{m_i} - \bar{z})^2}{\sum_{i=1}^n (z_{exp_i} - \bar{z})^2} \sim 1 \quad (2.20)$$

où \bar{z} désigne la moyenne du signal observé. La figure 2.10 illustre un exemple de la trajectoire rectiligne d'une bille sphérique en polyamide de rayon $a = 2.5 \text{ mm}$ et de densité $\rho_i = 1.13 \text{ g/cm}^3$, se déplaçant dans l'huile de silicone $\rho_e = 0.965 \text{ g/cm}^3$. On remarque que le mouvement de l'inclusion est décrit correctement par la courbe de lissage z_m . Sa vitesse est de l'ordre de 5 mm/s correspondant à un nombre de Reynolds terminal de $Re_t = 0.047$. La viscosité du fluide obtenue est $\nu_e = 5 \text{ cm}^2/\text{s}$ confirmant ainsi les mesures effectuées au moyen du viscosimètre du type rotatif à contraintes imposées. Le résidu Rz résultant, montré sur la figure 2.11, est aléatoire, a une moyenne nulle et suit une loi de probabilité gaussienne. Le coefficient de corrélation correspondant est de l'ordre de $Cr = 0.99$.

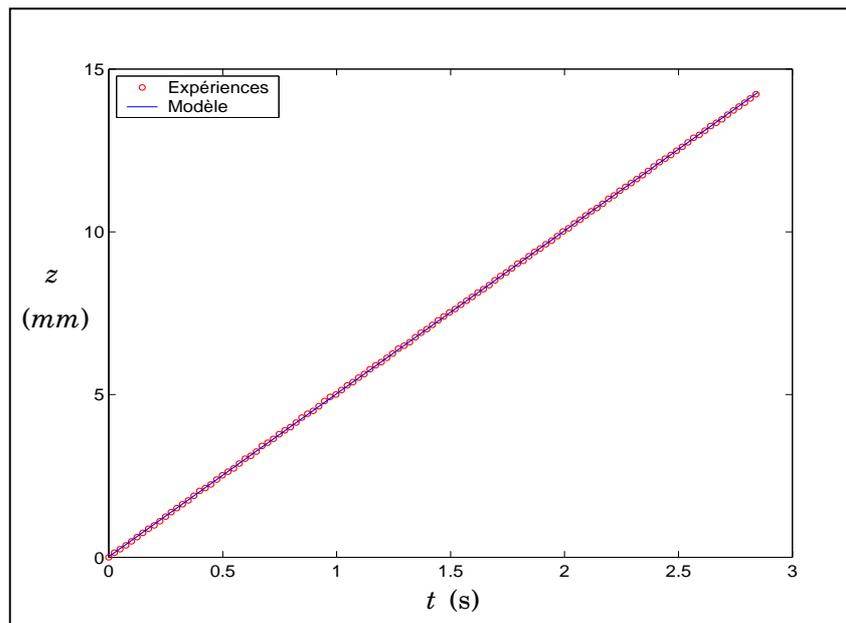


Figure 2.10: Mouvement d'une bille solide en polyamide dans l'huile de silicone, $Re_t = 0.05$.

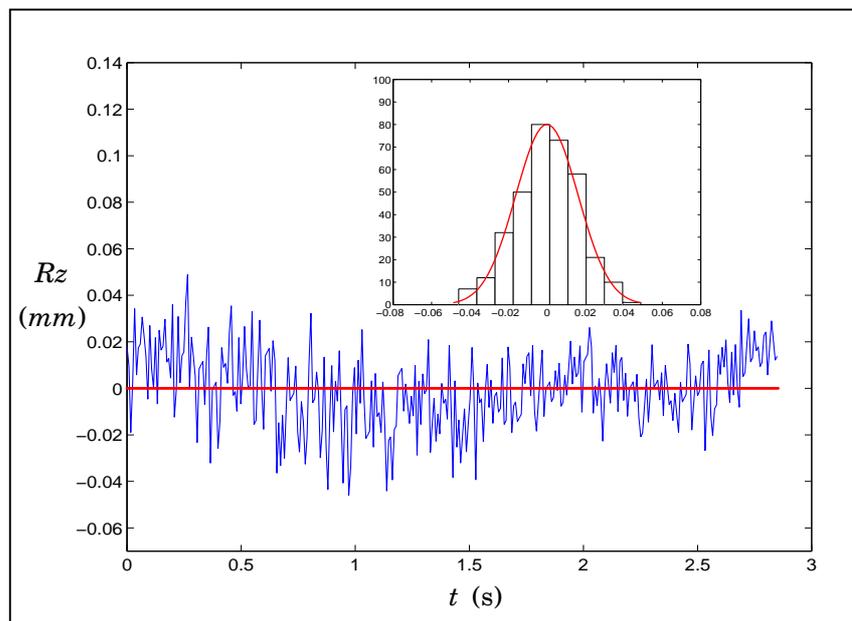


Figure 2.11 : Résidu résultant de l'optimisation du mouvement de la bille

2.5.2.3 Caractéristiques des trajectoires oscillantes

Théoriquement, le mouvement du plateau est sinusoïdal, son amplitude b est déjà connue. Sa fréquence d'oscillations f_{exp} est lue à partir d'un oscilloscope lié à la fourche à rayons infrarouges. L'examen de l'exactitude de cette fréquence est effectué par optimisation, en utilisant la méthode des moindres carrés non linéaire. Nous définissons alors une fonction modèle $z_{pl_m}(t)$ donnée par :

$$z_{pl_m}(t) = b \sin(2\pi f_m t) \quad (2.21)$$

comme précédemment, la détermination de la fréquence f_m consiste à minimiser l'écart quadratique entre le déplacement mesuré et le déplacement optimisé, tel que :

$$\min_f \frac{1}{2} \left\| z_{pl_m}(f_m, t) - z_{pl_{exp}}(t) \right\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (z_{pl_{m_i}} - z_{pl_{exp_i}})^2 \quad (2.22)$$

la solution du système matriciel (2.21) est obtenue au moyen d'un algorithme d'optimisation à grande échelle. La subroutine de MATLAB utilisée pour le calcul des paramètres est un algorithme dit de "région de confiance" qui est basé sur la méthode réflexive de Newton. A chaque itération, il calcule la solution approximative d'un système d'équations par la méthode du gradient conjugué pré-conditionné : PCG, (voir Coleman & Li 1996).

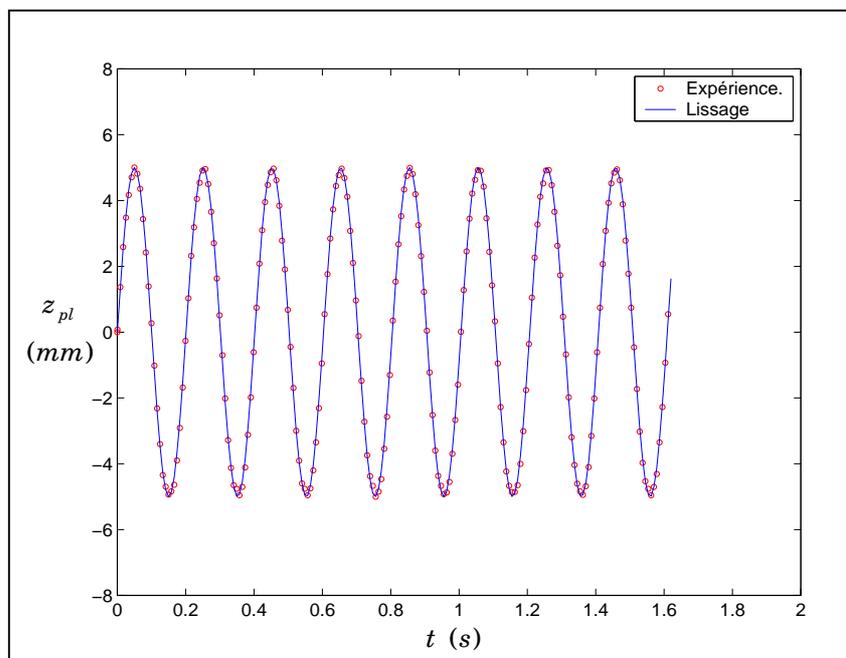


Figure 2.12: Déplacement du plateau à 5 Hz

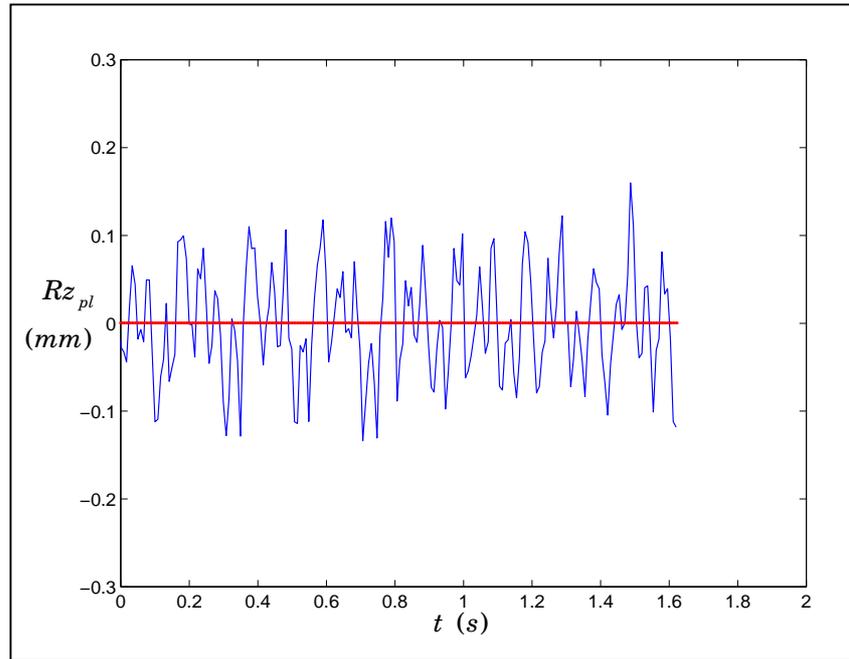


Figure 2.13: Résidu résultant de l'optimisation du mouvement du plateau à 5 Hz

La figure 2.12 présente un exemple du déplacement du plateau avec une fréquence d'oscillations, mesurée par oscilloscope de l'ordre de $f_{exp} = 5 \text{ Hz}$. Le lissage obtenu à partir de la relation (2.22) nous donne une fréquence $f_m = 4.9709 \text{ Hz}$. On remarque que l'écart entre la valeur modélisée et la valeur expérimentale est très faible, de l'ordre de 0.58 %. Le résidu maximal entre les deux courbes, figure 2.13, présente dans cet exemple 3.2 % de la valeur de l'amplitude qui est fixée à 5 mm. A cause des fluctuations des valeurs de la fréquence affichées sur l'oscilloscope, dues probablement à son temps de réponse, nous utiliserons lors de nos calculs, la valeur obtenue par optimisation.

En vertu des observations expérimentales et de l'étude théorique basée sur l'hypothèse de superposition des écoulements quasi-stationnaires et fluctuants, induits par le mouvement de la sphère, et dont les détails seront exposés dans le chapitre 3, le déplacement de l'inclusion à faibles nombres de Reynolds sera composé d'une translation sous l'effet de la gravité et d'une fluctuation due au mouvement du plateau. Il sera donc modélisé par la relation suivante :

$$z_m(t) = U_{tm}t + z_0 + z_1 \sin(2\pi f_m t + \varphi) \quad (2.23)$$

où U_{tm} , z_1 et φ désignent respectivement, la vitesse terminale moyenne de la sphère, l'amplitude de ses oscillations et son déphasage par rapport aux mouvements du plateau. En considérant que la position de l'inclusion dans la première image acquise correspond à l'origine de l'axe Oz , la quantité z_0 sera donc exprimée comme suit :

$$z_0 = -z_1 \sin(\varphi) \quad (2.24)$$

Dans le cas des nombres de Reynolds intermédiaires $Re \sim 250$, la théorie prédit des détachements tourbillonnaires périodiques en aval de l'inclusion. Ceci causera, sans doute, des modifications dans la trajectoire qu'il faudra prendre en compte. En considérant que l'amplitude des oscillations transversales du sillage est très faible devant les oscillations longitudinales, la trajectoire de l'inclusion restera rectiligne et pourra être modélisée par :

$$z_m(t) = U_{tm}t + z_0 + z_1 \sin(2\pi f_m t + \varphi) + z_t \sin(2\pi f_t t + \varphi_t) \quad (2.25)$$

où z_t , f_t et φ_t représentent respectivement l'amplitude longitudinale du sillage, sa fréquence et son déphasage. La même procédure utilisée pour la détermination de la fréquence f_m , nous permet de déterminer tous les paramètres cités ci-dessus. La vitesse de l'inclusion peut alors être déduite facilement par dérivation des modèles continus:

$$U_m(t) = \frac{dz_m(t)}{dt} \quad (2.26)$$

Sur la figure 2.14, on montre un exemple du mouvement ascendant d'une bulle d'air sphérique dans l'huile de silicone avec une fréquence d'oscillations de 4 Hz et un nombre de Reynolds de l'ordre de 0.3. On y constate que le lissage effectué sur la courbe expérimentale décrit correctement le comportement de la bulle. L'examen du résidu résultant dans cet exemple ne dépasse pas les 3 % de l'amplitude de la bulle. Il peut atteindre les 10 % pour les nombres de Reynolds moyens.

Il est à noter que les exemples présentés dans ce chapitre sont à titre indicatif, pour montrer l'exactitude de la méthode du traitement numérique. L'intégralité des résultats ainsi que les critiques correspondantes seront présentés en détail dans le chapitre 3.

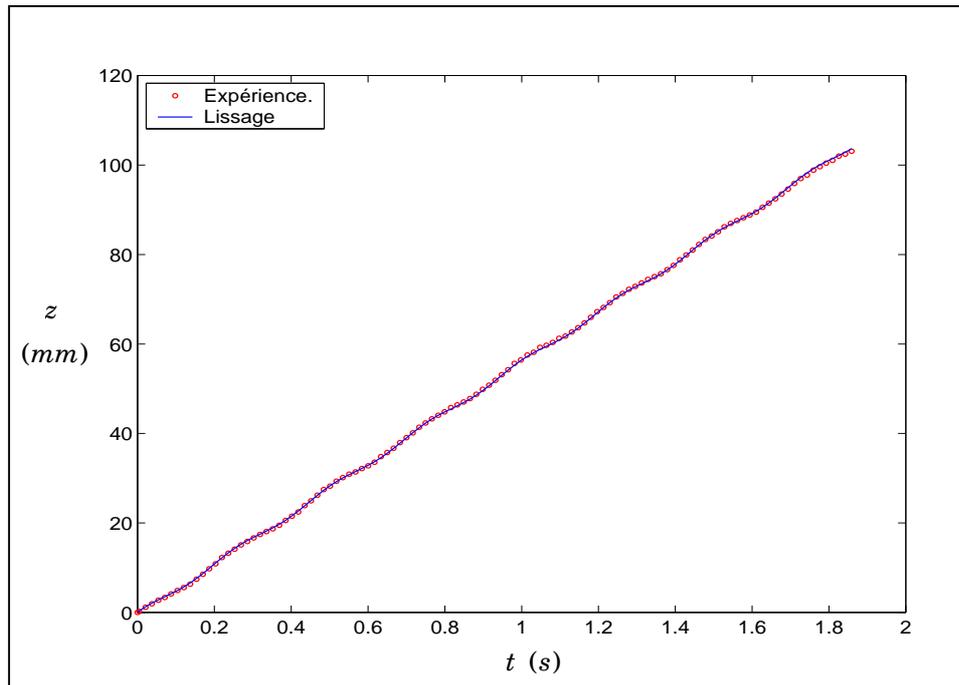


Figure 2.14: Déplacement d'une bulle d'air dans l'huile de silicone

2.6 Précautions nécessaires et incertitudes attendues

2.6.1 Incertitudes attendues

L'estimation de la précision que l'on peut attendre des résultats de nos expériences doit prendre en compte en premier lieu, l'incertitude liée au procédé d'obtention des trajectoires. En effet, la détermination des coordonnées y, z des positions de l'inclusion et le plateau oscillant dépendent essentiellement de l'éclairage du champ de vision ainsi que de la qualité de l'extraction des contours. Les essais ont montré qu'une combinaison adéquate entre ces deux points nous permet de réduire l'erreur sur les coordonnées à moins d'un centième de millimètre.

Les vitesses du plateau et de l'inclusion ont été déterminées par dérivation des trajectoires optimisées. L'optimisation doit donc être faite avec la meilleure précision possible, car elle a une grande influence pour le calcul des caractéristiques du mouvement de l'inclusion que sont la vitesse moyenne, l'amplitude des oscillations, ainsi que le déphasage avec le mouvement du plateau. Ces valeurs vont nous permettre par la suite, d'évaluer l'importance de la force d'histoire agissant sur l'inclusion par rapport aux autres forces : la traînée quasi-stationnaire, l'effet de la masse ajoutée et les forces de pression. Pour avoir les trajectoires modèles les plus précises, nous avons utilisé les algorithmes les plus efficaces parmi une large gamme proposée par la bibliothèque d'optimisation du logiciel MATLAB.

En tenant compte de la qualité des images acquises, les vibrations parasites qui peuvent affecter l'installation lors des essais à des grandes fréquences, l'erreur commise sur la mesure des diamètres des inclusions fluides ainsi que les remarques mentionnées ci-dessus, on peut estimer globalement à 2% l'incertitude commise sur la vitesse du plateau, à 3% pour l'inclusion à faibles nombres de Reynolds et à 7% pour des nombres de Reynolds intermédiaires.

2.6.2 Précautions nécessaires

Pour réduire au minimum les incertitudes qui peuvent affecter nos mesures expérimentales, il est nécessaire de prendre, dans l'ensemble des opérations à effectuer lors des manipulations et de l'exploitation, un certain nombre de précautions dont nous allons citer les plus pertinentes:

Au cours de la manipulation :

Il s'avère indispensable de procéder avant chaque série de mesures au nettoyage du dispositif, notamment à celui de l'injection des bulles où la tuyauterie ne doit présenter aucune fuite afin d'avoir des bulles identiques.

La colonne doit être remplie au maximum, pour que la trajectoire de l'inclusion ne soit pas faussée par les perturbations causées par l'oscillation de la surface libre. Le fluide doit être en repos avant le lâché de l'inclusion, et lors de la mise en marche du plateau oscillant, il doit osciller en bloc.

Le fluide doit aussi être propre de toutes impuretés pour ne pas changer les caractéristiques de l'interface fluide-fluide.

Il faut prévoir de mesurer la température du fluide dans la colonne plusieurs fois pour vérifier s'il y a eu des variations de la viscosité.

L'inclusion doit avoir une trajectoire rectiligne suivant l'axe de la colonne afin d'éviter les effets de paroi.

Les bulles d'air ou les gouttes injectées doivent être isolées pour éviter toutes interactions entre les inclusions.

La position de la caméra doit être ajustée de telle façon à correspondre à un champ de vision où l'inclusion se déplace avec une vitesse moyenne constante.

Au cours du traitement :

Le plus grand soin doit être apporté à la détection des contours et à la détermination des coordonnées des positions de l'inclusion et du plateau. Cela est conditionné par la qualité de l'éclairage et la différence du niveau de gris sur l'image.

Conclusions

Nous avons décrit dans ce chapitre l'installation expérimentale qui a été réalisée pour l'étude du mouvement oscillatoire des inclusions solides ou fluides dans un milieu visqueux. Nous avons détaillé aussi les procédures à mettre en œuvre pour l'enregistrement des trajectoires et leurs exploitations.

Le dispositif expérimental présenté nous permet de valider l'étude théorique que nous avons menée et d'examiner la force d'histoire agissant sur les inclusions fluides ou solides en mouvement, à faibles et moyens nombres de Reynolds. Les déplacements du repère oscillant et de l'inclusion sont obtenus discrètement, à l'aide d'un système vidéo et d'un traitement d'images. Leurs formes continues ont été déterminées par lissage en utilisant la méthode des moindres carrés linéaires pour les trajectoires sans oscillation "S.O" et non linéaires pour les trajectoires oscillantes "A.O".

L'incertitude commise sur la détermination des vitesses reste globalement faible et satisfaisante. Elle nous permet désormais de comparer en toute clarté, nos observations expérimentales avec l'étude théorique, faite en négligeant le terme d'histoire et puis en le prenant en compte dans l'équation du mouvement de l'inclusion. Les résultats correspondants seront détaillés dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Chapitre 3

Mouvement instationnaire d'une inclusion sphérique solide ou fluide à faibles nombres de Reynolds

Introduction

Dans ce chapitre, on se propose d'effectuer une étude théorique et expérimentale sur le mouvement instationnaire d'une inclusion sphérique solide ou fluide dans un milieu visqueux oscillant.

Dans un premier temps, nous procéderons à la détermination des champs hydrodynamiques autour de la sphère, à la limite des faibles nombres de Reynolds. La méthode utilisée pour résoudre les équations instationnaires de Stokes sera générale et basée sur une formulation en série polynomiale de la fonction de courant. La solution obtenue sera donc valable pour toute inclusion axisymétrique solide ou fluide, sous réserve d'une troncature adéquate de la série. Par intégration du tenseur des contraintes, nous établirons l'expression de la traînée instationnaire exercée sur chaque type d'inclusion. Nous nous intéresserons tout particulièrement aux expressions exactes des forces d'histoire, qui sont restées longtemps soit méconnues soit négligées et également à leurs comportements asymptotiques.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présenterons les résultats de l'étude expérimentale que nous avons menée dans la gamme des faibles et moyens nombres de Reynolds. Nous examinerons l'effet du terme d'histoire sur la trajectoire de l'inclusion et son importance dans l'équation du mouvement. La comparaison de nos résultats sera effectuée avec ceux issus de la résolution de l'équation du mouvement de la particule dans les deux cas suivants: sans et avec force d'histoire. Pour les faibles nombres de Reynolds, nous utiliserons les expressions exactes des termes d'histoire que nous avons trouvées théoriquement. Quant aux nombres de Reynolds

intermédiaires, nous ferons référence aux études numériques les plus récentes, telle que celle de Mei & al. (1994) exposée au chapitre premier.

3.1 Position du problème

On considère une particule sphérique rigide ou fluide indéformable, de rayon a , se déplaçant dans une colonne de largeur $l_c \gg a$ pleine d'un fluide visqueux incompressible. Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, cette colonne est fixée sur un plateau oscillant avec une fréquence (angulaire) ω et une vitesse $\mathbf{V}_{pl}(t)$: figure 3.1. La sphère aura donc un mouvement de translation et d'oscillations avec une vitesse $\mathbf{U}(t)$, telle que:

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_m + \mathbf{U}_f(t) = -U(t) \mathbf{e}_z \quad (3.1)$$

$$\mathbf{V}_{pl}(t) = -V_{pl} \mathbf{e}_z \quad (3.2)$$

où \mathbf{U}_m est la vitesse moyenne de la translation sous l'effet de la gravité, et \mathbf{U}_f est la vitesse fluctuante induite par les oscillations du plateau. On désigne respectivement par ρ , ν et μ associées aux indices "i" et "e", la densité, la viscosité cinématique et la viscosité dynamique des fluides à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion. Dans le cas d'une sphère solide, les viscosités intérieures (ν_i, μ_i) ainsi que l'écoulement intérieur ne sont pas considérés.

En se référant au repère *relatif* (O, x, y, z) se déplaçant avec le centre de la sphère O , les écoulements intérieur et extérieur seront décrits par le système d'équations (1.3), (1.4) et (1.5). Sous la condition des faibles nombres de Reynolds, ce système se reformule comme suit:

$$Sl \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} = -\nabla^* P^* + \frac{2}{Re} \Delta^* \mathbf{v}^* \quad (3.3)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (3.4)$$

avec $t^* = \omega t$, $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}/U_m$, $\nabla^* = a\nabla$, $P^* = P/(\rho U_m^2)$ (3.5)

et $Re = \frac{2aU_m}{\nu} \ll 1$, $Sl = \frac{a\omega}{U_m}$ (3.6)

La pression motrice P^* dans (3.3) est définie par:

$$P^* = p^* - \frac{g a z^*}{U_m^2} f_a(t^*) \quad (3.7)$$

où la fonction $f_a(t)$ dépend des accélérations du plateau, de l'inclusion, et de la pesanteur, telle que:

$$f_a(t^*) = g_0 + \frac{\omega U_m}{g} \left(\frac{dV_{pl}^*}{dt^*} + \frac{dU^*}{dt^*} \right) \quad (3.8)$$

$$\text{tel que } g_0 = \begin{cases} -1 & \text{pour une particule descendante} \\ +1 & \text{pour une particule ascendante} \end{cases} \quad (3.9)$$

Dans la suite de l'exposé, nous omettrons l'indice (*) des grandeurs adimensionnelles, et la résolution de ce système d'équations sera complétée par les conditions aux limites propres à chaque type d'inclusion (rigide ou fluide).

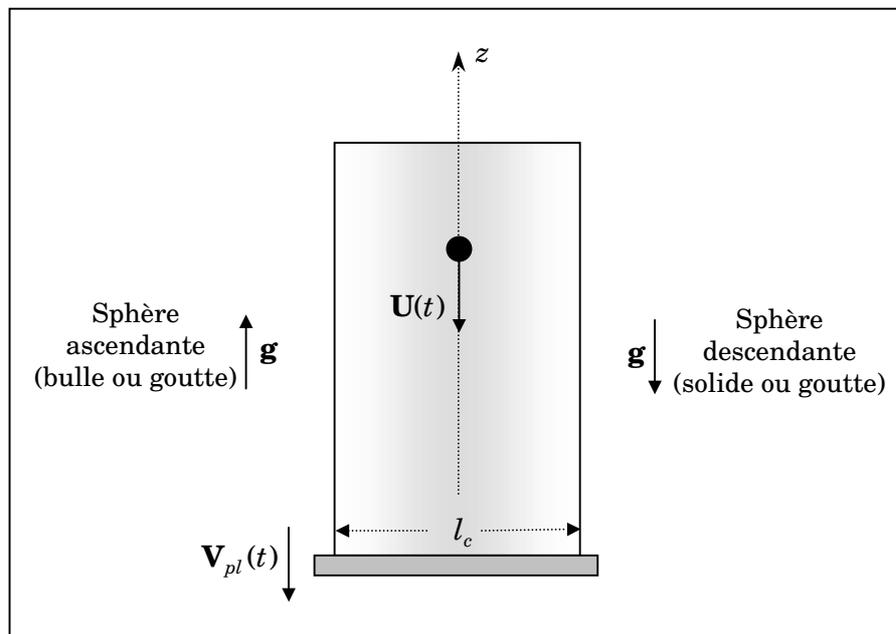


Figure 3.1: Position schématique du problème

3.2 Détermination des champs hydrodynamiques

3.2.1 Solution générale des équations de Stokes

Compte tenu de la symétrie de l'écoulement, l'introduction du système de coordonnées sphériques (O, r, θ, φ) , (figure 3.2), nous permet de lier le champ de vitesse $\mathbf{v}(r, \beta, t)$ et la fonction de courant $\Psi(r, \beta, t)$ par:

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (3.10)$$

avec
$$v_r = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} \quad (3.11)$$

$$v_\theta = -\frac{(1 - \beta^2)^{-1/2}}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (3.12)$$

et
$$\beta = \cos \theta \quad (3.13)$$

Pour résoudre ce problème, nous supposons que la fluctuation U_f est très faible devant le mouvement moyen U_m . Ainsi, la vitesse de l'inclusion peut s'écrire de la manière suivante:

$$U(t) = \mathcal{R}e \left\{ 1 + \alpha_1 e^{-it} \right\} \quad (3.14)$$

où $\alpha_1 \ll 1$ caractérise l'amplitude des oscillations de la sphère et $\mathcal{R}e$ dénote la partie réelle de la variable complexe considérée. Le mouvement global sera donc traité comme étant la superposition de l'écoulement stationnaire dû à la translation U_m et l'écoulement instationnaire dû à la fluctuation U_f . Par conséquent, en ignorant l'opérateur $\mathcal{R}e$, et en adoptant un schéma de perturbation régulier, le champ de vitesse, la fonction de courant ainsi que le tenseur de contraintes vont s'exprimer comme suit:

$$\mathbf{v}(r, \beta, t) = \mathbf{v}_0(r, \beta) + \alpha_1 \mathbf{v}_1(r, \beta) e^{-it} + O(\alpha_1^2) \quad (3.15)$$

$$\Psi(r, \beta, t) = \psi_0(r, \beta) + \alpha_1 \psi_1(r, \beta) e^{-it} + O(\alpha_1^2) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{T}(r, \beta, t) = \mathbf{T}_0(r, \beta) + \alpha_1 \mathbf{T}_1(r, \beta) e^{-it} + O(\alpha_1^2) \quad (3.17)$$

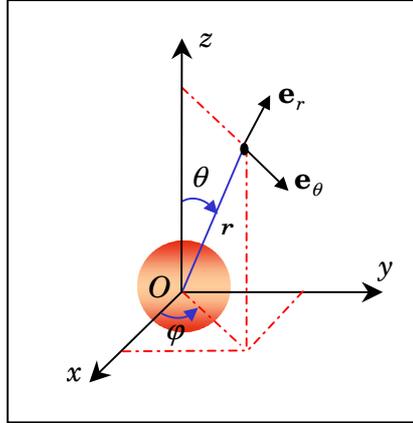


Figure 3.2 : Système de coordonnées sphériques.

Dans l'équation du mouvement (3.3), l'élimination du terme de la pression P s'effectue par l'introduction de la vorticité ζ :

$$\zeta = \nabla \wedge \mathbf{v} = -\frac{\mathcal{D}^2 \Psi}{r(1-\beta^2)^{-1/2}} \mathbf{e}_\varphi \quad (3.18)$$

avec

$$\mathcal{D}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\beta^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \quad (3.19)$$

ainsi, la substitution de la relation (3.18) dans (3.3) nous donne l'équation générale suivante à résoudre:

$$\mathcal{D}^2 \left(\mathcal{D}^2 - \frac{ReSl}{2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi = 0 \quad (3.20)$$

et en vertu du schéma (3.16), on aura à résoudre séparément pour:

l'écoulement de base (stationnaire)

$$\mathcal{D}^4 \psi_0 = 0 \quad (3.21)$$

l'écoulement fluctuant

$$\mathcal{D}^2 (\mathcal{D}^2 - k^2) \psi_1 = 0 \quad (3.22)$$

avec

$$k = \left(-i \frac{ReSl}{2} \right)^{1/2} = \left(-i \frac{\omega a^2}{\nu} \right)^{1/2} = \frac{1-i}{\delta} \quad (3.23)$$

où k est une longueur caractéristique dépendant de la "profondeur adimensionnelle de pénétration" $\delta = (2\nu/\omega a^2)^{1/2}$. Physiquement, cette dernière désigne la couche d'épaisseur $a\delta$, enrobant la sphère, et dans laquelle la vorticité est fortement diffusée. En introduisant les rapports des densités γ et des viscosités ϕ_μ , la liaison entre la couche intérieure et extérieure est définie par:

$$k_i = (\gamma/\phi_\mu)^{1/2} k_e \quad (3.24)$$

$$\text{avec} \quad \gamma = \rho_i/\rho_e \quad \text{et} \quad \phi_\mu = \mu_i/\mu_e \quad (3.25)$$

En procédant à la séparation des variables polaires r et β , les fonctions de courant ψ_j dans (3.21) et (3.22), peuvent s'écrire sous la forme:

$$\psi_j(r, \beta) = f_j(r) h(\beta) \quad \text{avec} \quad j = 0 \quad \text{et} \quad 1 \quad (3.26)$$

Aussi, comme il est souvent le cas dans la résolution de l'équation de Laplace, nous utilisons la méthode de séparation des opérateurs de Stokes \mathcal{D}^2 . En effet, pour l'écoulement stationnaire, Happel & Brenner (1958), ont décomposé la fonction de courant ψ_0 en une solution homogène $\psi_0^{(1)}$ et une solution particulière $\psi_0^{(2)}$, telles que:

$$\psi_0 = \psi_0^{(1)} + \psi_0^{(2)} \quad (3.27)$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{D}^2 \psi_0^{(1)} = 0 \quad (3.28)$$

$$\mathcal{D}^2 \psi_0^{(2)} = W \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^2 W = 0 \quad (3.29)$$

compte tenu de la forme (3.26), l'équation homogène (3.28), peut s'écrire comme suit:

$$\frac{r^2}{f_0^{(1)}} \frac{d^2 f_0^{(1)}}{dr^2} = -\frac{(1-\beta^2)}{h} \frac{d^2 h}{d\beta^2} = C^{te} = n(n-1) \quad (3.30)$$

Afin de garder la fonction de courant finie aux pôles, la constante de séparation a été choisie entière et égale à $n(n-1)$. La même procédure appliquée à la solution particulière $\psi_0^{(2)}$, nous amène à remplacer le système d'équations (3.28) et (3.29) par:

$$r^2 \frac{d^2 f_0^{(1)}}{dr^2} - n(n-1)f_0^{(1)} = 0 \quad (3.31)$$

$$r^2 \frac{d^2 f_0^{(2)}}{dr^2} - n(n-1)f_0^{(2)} = \lambda_n r^{n+2} + \kappa_n r^{-n+3} \quad (3.32)$$

$$(1 - \beta^2) \frac{d^2 h}{d\beta^2} + n(n-1)h = 0 \quad (3.33)$$

Pour l'écoulement fluctuant, un raisonnement similaire à celui de Happel & Brenner, nous permet d'étendre cette méthode et de décomposer la fonction de courant ψ_1 en une partie potentielle $\psi_1^{(1)}$ et une partie de diffusion $\psi_1^{(2)}$, telles que:

$$\psi_1 = \psi_1^{(1)} + \psi_1^{(2)} \quad (3.34)$$

$$\text{avec } \mathcal{D}^2 \psi_1^{(1)} = 0 \quad (3.35)$$

$$(\mathcal{D}^2 - k^2) \psi_1^{(2)} = 0 \quad (3.36)$$

en terme des fonctions $f_1^{(1)}$ et $f_1^{(2)}$, ce système s'écrira comme suit:

$$r^2 \frac{d^2 f_1^{(1)}}{dr^2} - n(n-1)f_1^{(1)} = 0 \quad (3.37)$$

$$r^2 \frac{d^2 f_1^{(2)}}{dr^2} - [k^2 r^2 + n(n-1)]f_1^{(2)} = 0 \quad (3.38)$$

$$(1 - \beta^2) \frac{d^2 h}{d\beta^2} + n(n-1)h = 0 \quad (3.39)$$

On remarque que pour les deux écoulements, les équations (3.31) et (3.37), relatives aux solutions homogènes $f_j^{(1)}$, ont la même forme. Leur solution est donc donnée d'une manière générale par:

$$f_{jn}^{(1)}(r) = a_{jn}^{(1)} r^n + b_{jn}^{(1)} r^{-n+1}, \quad j = 0 \text{ et } 1 \quad (3.40)$$

La solution particulière $f_0^{(2)}$ de l'écoulement de base sera déduite de la relation (3.40) et prendra la forme:

$$f_{0n}^{(2)}(r) = a_{0n}^{(2)} r^n + b_{0n}^{(2)} r^{-n+1} + c_{0n}^{(2)} r^{n+2} + d_{0n}^{(2)} r^{-n+3} \quad (3.41)$$

pour l'écoulement fluctuant, l'équation (3.38) est celle de Bessel modifiée d'ordre $n-1$. Sa solution s'écrit:

$$f_{1n}^{(2)}(r) = (kr)^{1/2} \left(c_{1n}^{(2)} \mathcal{I}_{n-1/2}(kr) + d_{1n}^{(2)} \mathcal{K}_{n-1/2}(kr) \right) \quad (3.42)$$

où \mathcal{I} et \mathcal{K} représentent respectivement les fonctions modifiées de Bessel, de première et de deuxième espèce. Finalement, il reste à résoudre l'équation (3.33), commune pour les deux écoulements. Elle est nommée équation de Gegenbauer

d'ordre n et de degré $-1/2$. Similaire à l'équation de Legendre, sa solution générale est donnée par:

$$h_n(\beta) = \eta_n \mathcal{F}_n(\beta) + \chi_n \mathcal{H}_n(\beta) \quad (3.43)$$

où \mathcal{F}_n et \mathcal{H}_n , sont les fonctions de Gegenbauer d'ordre n et de degré $-1/2$, de première et de deuxième espèce. Elles sont liées aux polynômes de Legendre $P_n(\beta)$ et $Q_n(\beta)$ par les relations:

$$\mathcal{F}_n = \frac{P_{n-2} - P_n}{2n-1} \quad \mathcal{H}_n = \frac{Q_{n-2} - Q_n}{2n-1} \quad \forall n \geq 2 \quad (3.44)$$

et

$$\frac{d\mathcal{F}_n}{d\beta} = -P_{n-1} \quad \frac{d\mathcal{H}_n}{d\beta} = -Q_{n-1} \quad (3.45)$$

Les caractéristiques de ces fonctions ainsi que l'équation différentielle générale de Gegenbauer seront détaillées dans l'annexe B. Pour les quatre premiers ordres, ces fonctions sont définies par:

$$\mathcal{F}_0 = -\mathcal{H}_1 = 1 \quad \mathcal{F}_1 = -\mathcal{H}_0 = \beta \quad (3.46)$$

$$\mathcal{F}_2(\beta) = \frac{1}{2}(1 - \beta^2) \quad \mathcal{F}_3(\beta) = \frac{1}{2}\beta(1 - \beta^2) \quad (3.47)$$

$$\mathcal{H}_n(\beta) = \frac{1}{2}\mathcal{F}_n(\beta) \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} + \mathcal{M}_n(\beta) \quad \forall n \geq 2 \quad (3.48)$$

tel que

$$\mathcal{M}_2(\beta) = \frac{1}{2}\beta \quad \mathcal{M}_3(\beta) = \frac{1}{6}(3\beta^2 - 2) \quad (3.49)$$

Il est à remarquer que la fonction $\mathcal{H}_n(\beta)$ est singulière aux points $\beta = \pm 1$, ce qui nous donne une fonction de courant infinie en $\theta = 0$ et π . Pour relever ce problème, nous considérons que les coefficients χ_n dans (3.43) sont nuls, et nous écrivons les solutions générales des deux écoulements comme suit:

$$\psi_j^m(r, \beta) = \sum_{n=2}^{\infty} f_{jn}^m(r) \mathcal{F}_n(\beta) \quad (3.50)$$

où l'indice m prendra les caractères "i" et "e" pour les écoulements à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion, tandis que l'indice j aura les valeurs 0 et 1 pour distinguer la solution de base et la perturbation. Les fonctions $f_{jn}^m(r)$ seront donc pour l'écoulement stationnaire:

$$f_{0n}^m(r) = A_{0n}^m r^n + B_{0n}^m r^{-n+1} + C_{0n}^m r^{n+2} + D_{0n}^m r^{-n+3} \quad (3.51)$$

et pour la perturbation, l'écriture explicite des fonctions de Bessel nous donne:

$$f_{1n}^m(r) = A_{1n}^m r^n + B_{1n}^m r^{-n+1} + k_m^{-n+2} r^n \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{n-1} \left(C_{1n}^m \frac{\sinh(k_m r)}{k_m r} + D_{1n}^m \frac{\exp(-k_m r)}{k_m r} \right) \quad (3.52)$$

En vertu de la relation (3.12), la vitesse tangentielle v_θ est infinie pour $n = 0$ et $n = 1$ aux points $\beta = \pm 1$. Cela nous conduit à ne retenir, dans la somme (3.50), que les termes correspondants à $n \geq 2$. Il est à noter aussi que les solutions que nous venons d'établir sont générales pour tout écoulement axisymétrique à faibles nombres de Reynolds. Elles sont valables aussi bien lorsque la sphère est solide que lorsqu'elle est fluide, puisque à ce stade, nous n'avons fait intervenir aucune condition aux limites pour déterminer les constantes A_{jn}^m , B_{jn}^m , C_{jn}^m et D_{jn}^m .

Dans la suite de cette partie théorique, nous allons nous intéresser essentiellement au cas d'une sphère fluide. Les résultats concernant le champ hydrodynamique autour de la sphère solide seront présentés dans l'annexe A. Quant à la force de traînée, nous la déduirons à partir du cas de la goutte, en faisant tendre le rapport des viscosités vers l'infini ($\phi_\mu \rightarrow \infty$).

3.2.2 Application pour une goutte sphérique

Pour une goutte sphérique, les champs hydrodynamiques stationnaires et instationnaires sont soumis aux conditions aux limites suivantes:

- les champs de vitesses intérieurs doivent être finis au centre de la goutte.
- les écoulements à l'intérieur et à l'extérieur doivent satisfaire les conditions de continuité à l'interface, établies au chapitre 1 pour une tension superficielle σ constante.
- l'écoulement extérieur doit être uniforme loin de l'inclusion, avec une vitesse $U(t)$.

En vertu des relations d'orthogonalité des polynômes de Legendre et des fonctions de Gegenbauer définies dans l'annexe B, ces conditions se résument pour chaque composante n comme suit:

au centre de la goutte: $r = 0$

$$\frac{f_{jn}^i}{r^2} \quad \text{doit être finie} \quad (3.53)$$

sur la frontière de la goutte: $r = 1$

$$f_{jn}^i = f_{jn}^e = 0 \quad (3.54)$$

$$\frac{df_{jn}^i}{dr} = \frac{df_{jn}^e}{dr} \quad (3.55)$$

$$\phi_\mu \left(\frac{d^2 f_{jn}^i}{dr^2} - 2 \frac{df_{jn}^i}{dr} \right) = \left(\frac{d^2 f_{jn}^e}{dr^2} - 2 \frac{df_{jn}^e}{dr} \right) \quad (3.56)$$

loin de la goutte: $r \rightarrow \infty$

$$\frac{f_{jn}^e}{r^2} \rightarrow 1 \quad (3.57)$$

A partir de la première condition (3.53), et pour les deux solutions intérieures, on déduit que:

$$B_{jn}^i = D_{jn}^i = 0 \quad \text{pour } j = 0, 1 \quad \text{et } \forall n \geq 2 \quad (3.58)$$

pour l'écoulement extérieur, la condition (3.57) exige que les coefficients A_{jn}^e et C_{jn}^e prennent les valeurs suivantes:

$$A_{j2}^e = 1 \quad \text{pour } j = 0, 1 \quad (3.59)$$

$$A_{jn}^e = 0 \quad \text{pour } j = 0, 1 \quad \text{et } \forall n \geq 3 \quad (3.60)$$

$$C_{jn}^e = 0 \quad \text{pour } j = 0, 1 \quad \text{et } \forall n \geq 2 \quad (3.61)$$

A ce stade, le nombre de constantes restantes est réduit à quatre pour chaque solution et chaque composante n . Elles seront déterminées à l'aide des conditions aux limites à la frontière de l'inclusion. Les systèmes d'équations à résoudre seront donc pour:

les solutions de base

pour $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ -2\phi_\mu & 4\phi_\mu & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{02}^i \\ C_{02}^i \\ B_{02}^e \\ D_{02}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

pour $n \geq 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ n & n+2 & n-1 & n-3 \\ \phi_\mu n(n-3) & \phi_\mu(n+2)(n-1) & (1-n)(2+n) & n(3-n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{0n}^i \\ C_{0n}^i \\ B_{0n}^e \\ D_{0n}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

les perturbations

pour $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & G_2^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & G_2^e \\ 2 & H_2^i & 1 & -H_2^e \\ -2\phi_\mu & \phi_\mu F_2^i & -4 & -F_2^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12}^i \\ C_{12}^i \\ B_{12}^e \\ D_{12}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

pour $n \geq 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & G_n^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & G_n^e \\ 2 & H_n^i & 1 & -H_n^e \\ -2\phi_\mu & \phi_\mu F_n^i & -4 & -F_n^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12}^i \\ C_{12}^i \\ B_{12}^e \\ D_{12}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

où les quantités G_n^m , H_n^m et F_n^m sont données, en terme des fonctions de Bessel, par:

$$G_n^i(k_i) = \left(\frac{\pi k_i}{2}\right)^{1/2} \mathcal{J}_{n-1/2}(k_i) \quad \text{et} \quad G_n^e(k_e) = -\left(\frac{2k_e}{\pi}\right)^{1/2} \mathcal{K}_{n-1/2}(k_e) \quad (3.66)$$

$$H_n^m(k_m) = \left(\frac{d}{dr} G_n^m(k_m r)\right)_{r=1} \quad (3.67)$$

$$F_n^m(k_m) = \left(\frac{d^2}{dr^2} G_n^m(k_m r) - 2\frac{d}{dr} G_n^m(k_m r)\right)_{r=1} \quad (3.68)$$

Les systèmes d'équations (3.63) et (3.65) sont homogènes et sans second membre. Pour retrouver la solution stationnaire d'Hadamard-Rybczynski, le déterminant de la matrice des coefficients dans (3.63) doit être différent de zéro. En effet, il ne peut s'annuler que pour $\phi_\mu = -1$ et $n = 1/2$, alors qu'on a $\phi_\mu \geq 0$ et $n \geq 3$. Quant à l'écoulement fluctuant, il est très difficile de démontrer que le déterminant (Det), dans

(3.65), est non nul, à cause de sa dépendance des quatre variables $St = Re_e Sl$, ϕ_μ , γ et n . Cependant, pour $\gamma = 1.5$, $0 < (St, \phi_\mu) \leq 10^2$ et $n \leq 30$, nous avons résolu numériquement l'équation $|\text{Det}| = 0$. Sous ces conditions, le résultat obtenu a montré que $|\text{Det}| \neq 0$ comme l'indique la figure 3.3 qui traite l'exemple de $n = 3$. Par conséquent, on peut conclure que les systèmes (3.63) et (3.65) n'ont que des solutions triviales nulles, telles que:

$$A_{jn}^i = C_{jn}^i = B_{jn}^e = D_{jn}^e = 0 \quad \forall n \geq 3 \quad \text{et} \quad j = 0, 1 \quad (3.69)$$

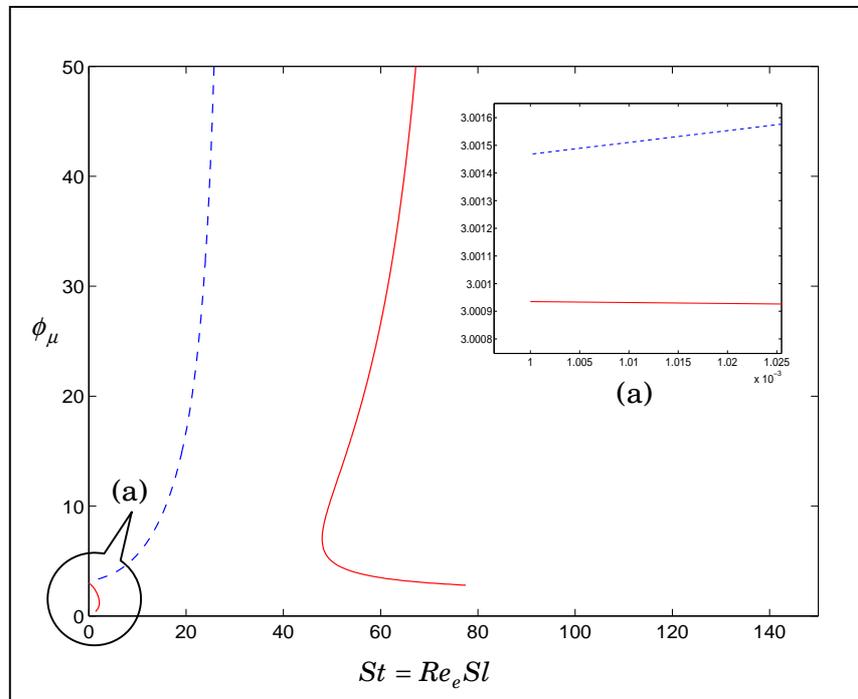


Figure 3.3: Examen du déterminant (Det) du système d'équations (3.65) pour $\gamma = 1.5$ et $n = 3$

—: $\text{Re}(\text{Det}) = 0$ - - - -: $\text{Im}(\text{Det}) = 0$

Finalement, seul le cas où $n = 2$ est à considérer, et la résolution des systèmes d'équations (3.62) et (3.64), nous permet d'écrire les fonctions de courant à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion, comme suit:

pour $0 \leq r \leq 1$

$$\Psi^i(r, \beta, t) = \left(\frac{1}{2(1 + \phi_\mu)} (r^4 - r^2) + \alpha_1 \left(A_{12}^i r^2 + C_{12}^i (\cosh(k_i r) - \frac{\sinh(k_i r)}{k_i r}) \right) e^{-it} \right) \mathcal{F}_2(\beta) \quad (3.70)$$

pour $r \geq 1$

$$\Psi^e(r, \beta, t) = \left(\frac{1}{2(1 + \phi_\mu)} (2(1 + \phi_\mu) r^2 - (2 + 3\phi_\mu) r + \phi_\mu r^{-1}) + \alpha_1 \left(r^2 + B_{12}^e r^{-1} - D_{12}^e (1 + \frac{1}{k_e r}) e^{-k_e r} \right) e^{-it} \right) \mathcal{F}_2(\beta) \quad (3.71)$$

A partir de ces relations, nous sommes donc en mesure d'exprimer toutes les caractéristiques de cet écoulement aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la goutte. Par conséquent, le gradient de pression ainsi que les contraintes radiales et tangentielles seront donnés par:

$$\mu_e \nabla P^m = -\frac{2\mu_m}{Re_e} \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r(1 - \beta^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\mathcal{D}^2 \Psi^m - ik_m^2 \frac{\partial \Psi^m}{\partial t} \right) \quad (3.72)$$

$$\mu_e \tau_{rr}^m = \frac{8\mu_m}{Re_e} \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\Psi^m - \frac{r}{2} \frac{\partial \Psi^m}{\partial r} \right) \quad (3.73)$$

$$\mu_e \tau_{r\theta}^m = -\frac{4\mu_m}{Re_e} \frac{(1 - \beta^2)^{-1/2}}{r^3} \left(r^2 \frac{\partial^2 \Psi^m}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial \Psi^m}{\partial r} - (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \Psi^m}{\partial \beta^2} \right) \quad (3.74)$$

où $m = i$ ou e . Afin de montrer l'évolution temporelle de l'écoulement à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion, nous avons étudié le cas des oscillations d'une goutte de glycérine dans de l'huile de silicone: $\gamma = 1.3$ et $\phi_\mu = 4.4$. Les lignes de courant Ψ_1^m correspondantes sont présentées sur la figure 3.4 pour une demi-période d'oscillations à un nombre de Stokes $St = Re_e Sl = 5$. Le comportement des fonctions $f_{12}^m(r)$ en fonction du nombre de Stokes est illustré sur la figure 3.5. Les exemples (a) et (b) correspondent respectivement aux mouvements d'une goutte d'eau dans l'huile de silicone: $\gamma = 1.04$, $\phi_\mu = 5.2 \cdot 10^{-3}$, et dans l'air: $\gamma = 833.3$, $\phi_\mu = 55.5$. On constate que pour une distance égale à deux fois le rayon de la sphère, le rapport moyen des fonctions extérieures et intérieures f_{12}^e/f_{12}^i est d'environ 25 dans le premier exemple et de 10^3 dans le second. Contrairement à l'évolution monotone f_{12}^e , la fonction

intérieure f_{12}^i présente un minimum localisé au point d'abscisse $r_0(\omega)$. La position de ce point sur l'axe équatorial $\theta = \pi/2$ correspond au centre des vortex de Hill où la vitesse fluctuante du fluide est nulle $v_{r_{i_1}} = v_{\theta_{i_1}} = 0$. On constate que pour des grandes fréquences (temps courts), r_0 est proche de la frontière de l'inclusion, alors que pour des faibles fréquences (temps longs), cette position va se déplacer pour tendre vers sa valeur finale $r_0 = 1/\sqrt{2}$ qu'on peut déduire à partir de la solution stationnaire $df_{02}^i/dr = 0$.

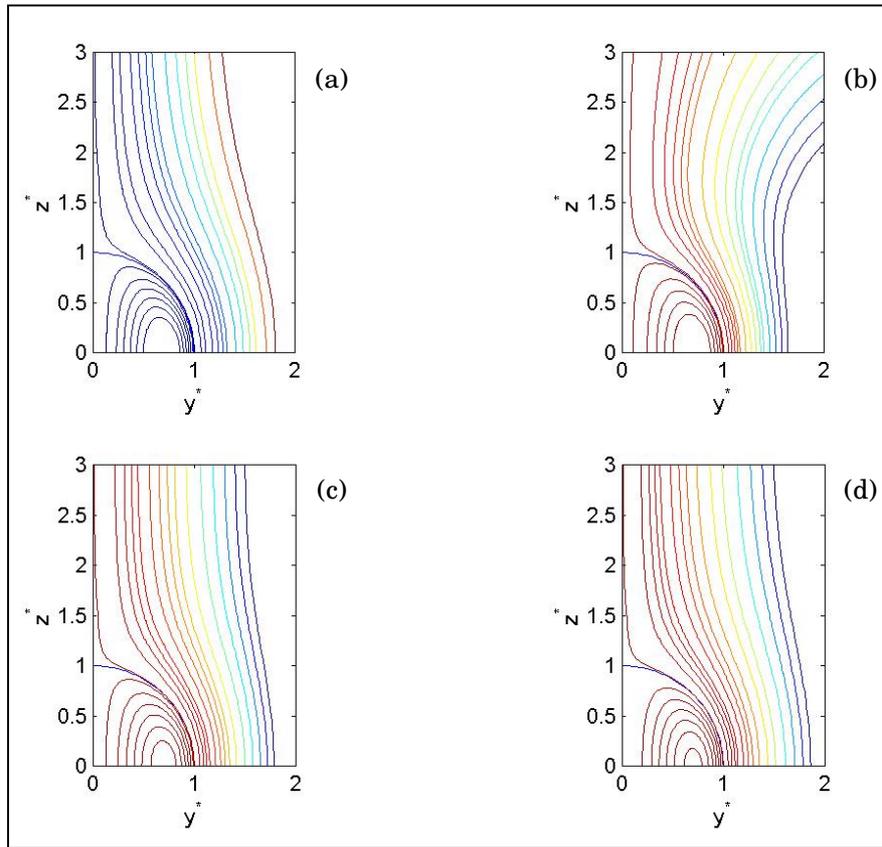


Figure 3.4: Lignes de courant Ψ_1 pour une demi-période d'oscillations: $St = 5$, $\phi_\mu = 4.4$, $\gamma = 1.3$. (a): $t^* = \pi/4$, (b): $t^* = \pi/2$, (c): $t^* = 3\pi/4$, (d): $t^* = \pi$

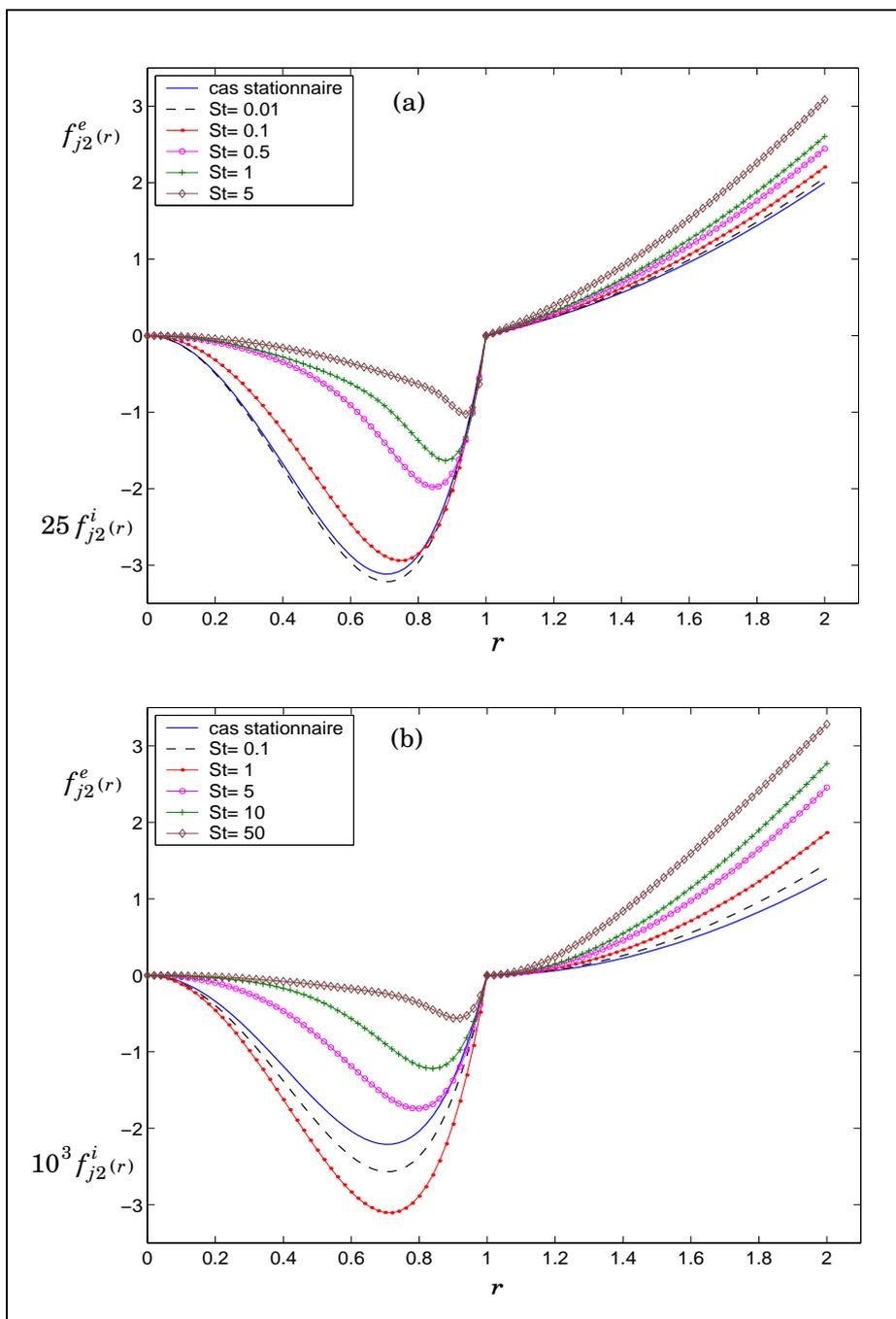


Figure 3.5: Comparaison des fonctions de courant f_{02}^m et f_{12}^m pour différents nombres de Stokes St

(a) : $\phi_\mu = 5.2 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 1.04$. (b) : $\phi_\mu = 55.5$, $\gamma = 833.3$

3.3 Force totale exercée sur la sphère fluide

La force totale \mathbf{F} exercée par le fluide extérieur sur la goutte peut être déterminée par l'intégration du tenseur de contrainte $\overline{\mathbf{T}}$ sur la surface de la sphère, telle que:

$$\mathbf{F} = \iint_{(S)} [(-p^e + \tau_{rr}^e)_{r=1} \mathbf{e}_r + (\tau_{r\theta}^e)_{r=1} \mathbf{e}_\theta] dS \quad (3.75)$$

Etant donné que l'écoulement est axisymétrique, la force \mathbf{F} est dirigée parallèlement à la vitesse de l'inclusion $\mathbf{U}(t)$, dans la direction positive de l'axe (Oz) . Sachant que $dS = -2\pi d\beta$, l'expression (3.75) s'écrira:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z = F_z = -2\pi \int_{-1}^{+1} [\beta(-p^e + \tau_{rr}^e)_{r=1} - (1 - \beta^2)^{1/2} (\tau_{r\theta}^e)_{r=1}] d\beta \quad (3.76)$$

L'évaluation de la pression et des contraintes sur la surface de la sphère à partir des relations (3.7), (3.72), (3.73) et (3.74), ainsi que la multiplication de l'intégrale (3.76) par la quantité $\rho_e \alpha^2 U_m^2$, nous permet d'exprimer la force F_z par:

$$F_z = \frac{4}{3} \pi \alpha^3 \rho_e g \left(1 - \frac{\gamma_{pl}(t)}{g} \right) + F_D(t) \quad (3.77)$$

où le premier terme tient compte des effets de la poussée d'Archimède et de la force d'inertie due à l'accélération du plateau $\gamma_{pl} = dV_{pl}/dt$. Quant au deuxième terme, il représente la traînée totale et s'exprime par:

$$F_D(t) = 6\pi\mu_e \alpha \left\{ \frac{2 + 3\phi_\mu}{3(1 + \phi_\mu)} U_m + \left(1 + k_e + \frac{k_e^2}{9} - \frac{(1 + k_e)^2}{3 + k_e + \phi_\mu Q(k_i)} \right) U_f \right\} \quad (3.78)$$

$$\text{avec} \quad Q(k_i) = \frac{k_i(6 + k_i^2) - 3(2 + k_i^2) \tanh k_i}{(3 + k_i^2) \tanh k_i - 3k_i} \quad (3.79)$$

D'une manière classique, la force F_D peut se décomposer en une traînée quasi stationnaire F_{HR} , la force de la masse ajoutée F_m et une force d'histoire F_h dont les expressions sont établies comme suit :

Traînée quasi-stationnaire d'Hadamard-Rybczynski

Tenant compte de la relation (3.1), la force F_{HR} est responsable de la vitesse terminale moyenne de l'inclusion, elle aura une forme similaire que celle établie par

Hadamard et Rybczynski (1911) pour un écoulement stationnaire et uniforme, elle est obtenue en faisant tendre k_i et k_e vers zéro (temps longs)¹ dans la relation (3.78) :

$$F_{HR}(t) = 4\pi\mu_e a \frac{2 + 3\phi_\mu}{2 + 2\phi_\mu} U(t) \quad (3.80)$$

Force de la masse ajoutée

Le troisième terme de la contribution de l'écoulement fluctuant dans la relation (3.78), est indépendant de la viscosité du fluide intérieur, il met en évidence l'effet de la masse ajoutée de la sphère. Tenant compte de la définition (3.23) et sachant que $dU(t)/dt = -i\omega U_f(t)$, on peut écrire :

$$F_m(t) = \frac{1}{2} \rho_e \mathcal{V} \frac{dU(t)}{dt} \quad \text{avec} \quad \mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi a^3 \quad (3.81)$$

Force d'histoire

En vertu des relations (3.80) et (3.81), la force d'histoire s'exprime comme suit :

$$F_h(t) = 6\pi\mu_e a \left(-\frac{1}{3(1+\phi_\mu)} + k_e - \frac{(1+k_e)^2}{3+k_e+\phi_\mu Q(k_i)} \right) U_f(t) \quad (3.82)$$

elle peut être décomposée en deux termes mettant en évidence la force F_{hB} proportionnelle à k_e similaire à celle de Basset et une autre force d'histoire F_{hn} qui dépend des deux temps caractéristiques de diffusion $\tau_{0m} = a^2/\nu_m$, ($m = "i"$ ou $"e"$), tel que :

$$F_{hB}(t) = 6\pi\mu_e a \frac{\phi_\mu}{1+\phi_\mu} k_e U_f(t) \quad (3.83)$$

$$\text{et} \quad F_{hn}(t) = 6\pi\mu_e a L_0(k_i, k_e, \phi_\mu) U_f(t) \quad (3.84)$$

$$\text{avec} \quad L(k_i, k_e, \phi_\mu) = \frac{1+3k_e}{3(1+\phi_\mu)} - \frac{(1+k_e)^2}{3+k_e+\phi_\mu Q(k_i)} \quad (3.85)$$

Il faut noter que la décomposition de la force d'histoire totale (3.82) n'a pas de sens physique². Cependant elle écrite ainsi pour mettre en évidence le nouveau terme

¹ Je remercie le Docteur D. Lhuillier de la manière pertinente qu'il m'a formulée pour la décomposition de la traînée totale (3.78).

² Confirmant ainsi la remarque du Docteur D. Lhuillier, que la force d'histoire doit être considérée global telle qu'elle est donnée par la relations (3.82).

(3.84) caractérisant la différence des effets de mémoire entre une sphère solide et une sphère fluide.

Ainsi, en adoptant une méthode générale pour la détermination des écoulements axisymétriques, on a pu trouver la même expression de la traînée instationnaire (1.129), que celle établie dans le domaine fréquentiel par Galindo et Gerbeth (1993). Il est à noter que cette méthode, initialement développée par Sampson (1891) pour un écoulement stationnaire, est entendue ici pour un écoulement accéléré. Son utilisation devient plus commode dans le cas des inclusions à géométrie plus complexe que la sphère, où la résolution des équations de Stokes en coordonnées sphériques s'avère plus difficile. Une application de cette méthode pour une inclusion fluide elliptique sera exposée dans le dernier chapitre.

Pour une goutte sphérique oscillante: $\gamma = 1.3$, $\phi_\mu = 4.4$ avec un nombre de Stokes $St = 5$, la figure 3.6 montre une comparaison entre l'effet de la masse ajoutée F_m , la force de Basset F_{hB} et la nouvelle force d'histoire F_{hn} rapportées à la traînée de Stokes $6\pi\mu_e a U_f$. Sous ces conditions, on remarque que l'effet de l'accélération de la goutte est important et produit des termes d'histoire dominants devant la force de la masse ajoutée. En augmentant la fréquence d'oscillations, la figure 3.7 indique que les amplitudes de F_{hB} augmentent d'une façon monotone et plus rapide que F_{hn} . La contribution de ce dernier terme, dans la force d'histoire totale F_h , est de l'ordre de 32% lorsque $St = 0.2$ et de 18% quant $St = 15$. Concernant la traînée totale F_D , on constate aussi que le déphasage qui existe entre les différentes actions que subie la sphère ne l'empêche pas de s'accroître avec l'accélération.

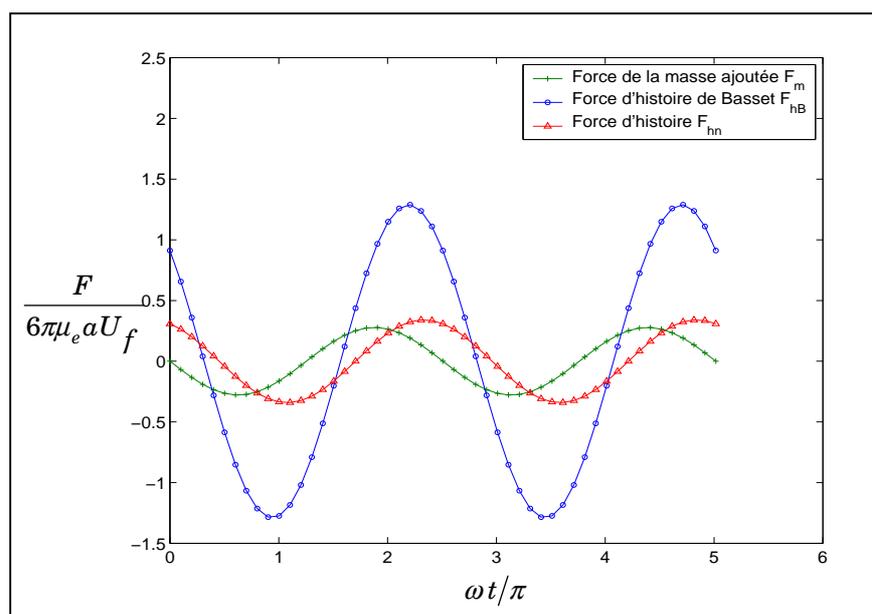


Figure 3.6: Comparaison des forces d'histoire et de l'effet de la masse ajoutée pour une goutte oscillante: $Re_e Sl = 5$, $\gamma = 1.3$, $\phi_\mu = 4.4$

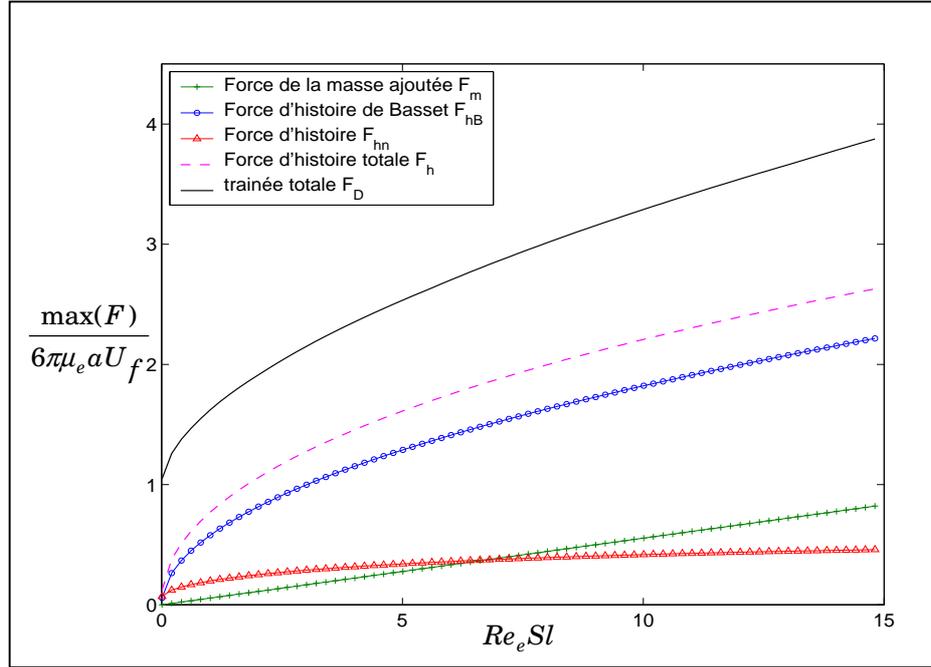


Figure 3.7: Amplitude de la force de la masse ajoutée, des forces d'histoire et de la trainée totale exercée sur une goutte sphérique
 $\gamma = 1.3 \quad \phi_\mu = 4.4$

Au cours de la détermination des champs hydrodynamiques, la relation (1.88) traduisant l'équilibre des pressions et des contraintes normales à l'interface, n'a pas été utilisée et doit être satisfaite. Dans ce genre de problème, cette condition sert uniquement aux calculs de la déformation de l'inclusion. Puisqu'on s'intéresse au cas d'une sphère fluide indéformable, la relation (1.87) s'écrit:

$$(p_i - p_e)_{r=a} + (\tau_{rr_e} - \tau_{rr_i})_{r=a} = \frac{2\sigma}{a} \quad (3.86)$$

où σ est la tension superficielle supposée constante sur toute la surface de l'inclusion. Tenant compte des relations (3.72) et (3.73), cette condition prend la forme:

$$\frac{2\sigma}{a} = C^{te} + \rho_e U_m^2 \beta \left\{ (1-\gamma) \frac{ga}{U_m^2} \left(1 - \frac{\gamma_{pl}(t)}{g}\right) + \frac{3}{Re_e} \frac{2+3\phi_\mu}{1+\phi_\mu} - \frac{2\alpha_1}{Re_e} \left(\frac{1}{2} k_e^2 B_{12}^e + D_{12}^e (k_e^2 + k_e) e^{-k_e} - \phi_\mu k_i^2 \right) e^{-i\omega t} \right\} \quad (3.87)$$

où C^{te} est une constante d'intégration des pressions. La substitution de B_{12}^e et D_{12}^e issus de la résolution du système (3.64) nous permet d'avoir:

$$\frac{2\sigma}{a} = C^{te} - \frac{3\beta}{4\pi\alpha^2} \left(\gamma(\rho_i - \rho_e)g \left(1 - \frac{\gamma_{pl}(t)}{g}\right) - F_D(t) - \rho_i \gamma \frac{dU(t)}{dt} \right) \quad (3.88)$$

Le terme entre parenthèses dans (3.88), constitue l'équation du mouvement de l'inclusion, il est donc nul, et par identification, on aura $C^{te} = 2\sigma/a$. Ce résultat implique qu'en écoulement instationnaire à faibles nombres de Reynolds $Re_e \ll 1$, la goutte reste parfaitement sphérique indépendamment de la valeur de σ .

3.4 Comportements asymptotiques de la traînée

3.4.1 Limite d'une sphère rigide

Pour une sphère rigide, le rapport des viscosités est considéré infini $\phi_\mu \rightarrow \infty$. A cette limite, la fonction L définie par la relation (3.85) tend vers zéro, et la traînée totale s'exprime par:

$$F_D(t) = 6\pi\mu_e a U(t) + \frac{1}{2} \rho_e \gamma \frac{dU(t)}{dt} + 6\pi\mu_e a \left(\frac{1}{\delta_e} (U - U_m) + \frac{\tau_{0e} \delta_e}{2} \frac{dU(t)}{dt} \right) \quad (3.89)$$

$$\text{avec} \quad \delta_e = (2/\tau_{0e} \omega)^{1/2} \quad \text{et} \quad \tau_{0e} = \alpha^2 / \nu_e \quad (3.90)$$

Dans le cas où la bille effectue un mouvement rectiligne avec une vitesse arbitraire $U(t)$, la forme générale du terme d'histoire peut être obtenue à partir du résultat (3.89). En effet, en considérant que l'oscillation avec la fréquence ω n'est qu'une seule composante de la vitesse $U(t)$, on peut écrire:

$$U(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{U}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{et} \quad \bar{U}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) e^{i\omega t} dt \quad (3.91)$$

où $\bar{U}(\omega)$ est la transformée de Fourier de $U(t)$. Ainsi, la force d'histoire dans (3.89) s'écrit pour chaque composante ω :

$$\bar{F}_{hB}(\omega) = 6\pi\mu_e a (\tau_{0e})^{1/2} \left(\frac{-i\omega \bar{U}(\omega)}{(-i\omega)^{1/2}} \right) \quad (3.92)$$

Dans le domaine temporel, la force d'histoire de Basset $F_{hB}(t)$ sera donc la partie réelle de la transformée inverse de $\bar{F}_{hB}(\omega)$, où on aura:

$$F_{hB}(t) = 6\pi\mu_e a \int_{-\infty}^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} K_B(t-\tau) d\tau \quad \text{avec} \quad K_B(t) = \sqrt{\frac{\tau_{0e}}{\pi t}} \quad (3.93)$$

Pour une sphère commençant son mouvement à partir du repos avec une vitesse initiale $U(0)$, le changement de variable $s = -i\omega$ nous permet d'utiliser la transformée inverse de Laplace au lieu de celle de Fourier, et la force de Basset devient:

$$F_{hB}(t) = 6\pi\mu_e a \left(\int_0^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} K_B(t-\tau) d\tau + U(0)K_B(t) \right) \quad (3.94)$$

3.4.2 Limite d'une bulle sphérique

Dans le cas d'une bulle gazeuse sphérique, la recirculation intérieure est quasiment absente et la viscosité μ_i est très faible devant celle du fluide environnant. Le calcul de la limite de la traînée totale quand $\phi_\mu \rightarrow 0$, nous donne :

$$F_D(t) = 4\pi\mu_e a U(t) + \frac{1}{2} \rho_e \mathcal{V} \frac{dU(t)}{dt} + \frac{8\pi\mu_e a}{9\delta_e^2 + 6\delta_e + 2} \left((2 + 3\delta_e)(U - U_m) + \frac{3\tau_{0e}\delta_e^3}{2} \frac{dU(t)}{dt} \right) \quad (3.95)$$

si la bulle se déplace avec une vitesse arbitraire $U(t)$, la même procédure suivie pour la sphère solide nous permet d'établir la forme intégrale de la force d'histoire, telle que:

$$F_h(t) = 8\pi\mu_e a \int_{-\infty}^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} K_{bg}(t-\tau) d\tau \quad (3.96)$$

où le noyau $K_{bg}(t)$ est donné par:

$$K_{bg}(t) = \exp(9t/\tau_{0e}) \operatorname{erfc}(3\sqrt{t/\tau_{0e}}) \quad (3.97)$$

Il est à noter que la forme du noyau (3.97) peut être obtenue en manipulant l'expression implicite (1.119) établie par Morrison & Stewart pour une bulle sans vitesse initiale. Dans le but de comparer les termes de mémoire exercées sur la sphère solide et la bulle, nous avons tracé sur la figure 3.8, les noyaux K_B et K_{bg} . Quantitativement, les différences majeures entre ces deux fonctions résident dans leurs variations et les valeurs qu'elles possèdent à l'instant initial ($t = 0$). En effet, le noyau de Basset varie algébriquement et reste singulier à $t = 0$, alors que K_{bg} varie exponentiellement et possède une valeur initiale égale à l'unité. Ce comportement confirme que l'effet de l'accélération sur la traînée exercée sur la bulle est faible en comparaison avec une sphère rigide ayant le même diamètre et le même rapport de

densité avec le fluide environnant. D'après Abramowitz & Stegun (1965), le comportement temporel, du noyau K_{bg} , s'écrit:

$$K_{bg} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(9t/\tau_{0e})^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)} & \text{quand } t/\tau_{0e} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{\pi t/\tau_{0e}}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n (9t/\tau_{0e})^{n+1/2}} & \text{quand } t/\tau_{0e} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.98)$$

tel que pour $n = 3$, on trouve:

$$K_{bg} = \begin{cases} 1 - \frac{6}{\sqrt{\pi}} (t/\tau_{0e})^{1/2} + 9(t/\tau_{0e}) - \frac{36}{\sqrt{\pi}} (t/\tau_{0e})^{3/2} + O((t/\tau_{0e})^2) & \text{pour } t/\tau_{0e} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{\pi t/\tau_{0e}}} - \frac{1}{54} (t/\tau_{0e})^{-3/2} + \frac{1}{324} (t/\tau_{0e})^{-5/2} - \frac{5}{5832} (t/\tau_{0e})^{-7/2} \\ + O((t/\tau_{0e})^{-9/2}) & \text{pour } t/\tau_{0e} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.99)$$

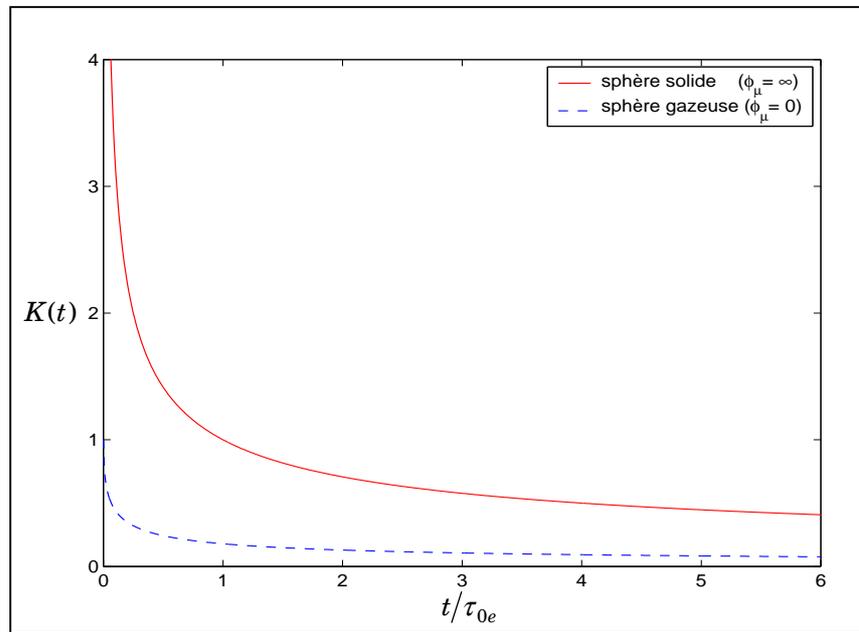


Figure 3.8: Comparaison des noyaux $K_B(t)$ et $K_{bg}(t)$ des forces d'histoire subies par une sphère solide et une bulle gazeuse

Les relations (3.98) et (3.99) confirment une fois de plus la différence qui existe entre les comportements des noyaux K_B et K_{bg} . Car, il faut souligner que le noyau de

Basset est souvent utilisé pour exprimer la force d'histoire de la bulle sous prétexte qu'elle est indéformable et se comporte comme une inclusion solide.

3.4.3 Limite des faibles et grandes fréquences

D'après les relations (3.83), (3.84) et (3.85), la force d'histoire totale exercée sur une goutte sphérique oscillante, peut s'écrire:

$$F_h(t) = 6\pi\mu_e a \left\{ \left(\frac{\phi_\mu}{(1+\phi_\mu)\delta_e} + L_r \right) (U - U_m) + \frac{\tau_{0e}\delta_e}{2} \left(\frac{\phi_\mu}{(1+\phi_\mu)} - \delta_e L_i \right) \frac{dU(t)}{dt} \right\} \quad (3.100)$$

$$\text{avec } L_r = \mathcal{R}e \{L\} \quad \text{et} \quad L_i = \mathcal{I}m \{L\} \quad (3.101)$$

dans le cas où cette goutte aurait une vitesse non périodique, l'analyse de Fourier nous permet de reformuler $F_h(t)$ comme suit:

$$F_h(t) = 6\pi\mu_e a \frac{\phi_\mu}{1+\phi_\mu} \int_{-\infty}^t \frac{dU}{d\tau} K_B(t-\tau) d\tau + 6\pi\mu_e a \int_{-\infty}^t \frac{dU}{d\tau} K_{sf}(t-\tau) d\tau \quad (3.102)$$

où le noyau supplémentaire $K_{sf}(t)$ peut s'exprimer d'une manière générale par:

$$K_{sf}(t) = \mathcal{R}e \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{L(k_e, \gamma, \phi_\mu)}{k_e^2} e^{-i\omega t} d\omega \right\} \quad (3.103)$$

Malheureusement, vu la complexité de la fonction L et sa dépendance des deux longueurs caractéristiques k_i et k_e , la transformée inverse de Fourier (3.103) ne peut pas être effectuée analytiquement. Cependant, il serait très intéressant d'examiner le comportement asymptotique du noyau K_{sf} pour des temps courts (grandes fréquences) et des temps longs (faibles fréquences).

Temps courts

Pour des temps courts ($t/\tau_{0e} \rightarrow 0$), le développement asymptotique de la relation (3.103) s'écrit:

$$K_{sf}(t) = A_{c1} \sqrt{\frac{\tau_{0e}}{\pi t}} + A_{c2} + 2A_{c3} \sqrt{\frac{t}{\pi \tau_{0e}}} + O(t) \quad (3.104)$$

où les constantes A_{c1} , A_{c2} et A_{c3} s'expriment en fonction du rapport de densités γ et celui des viscosités cinématiques $q = \sqrt{\gamma/\phi_\mu}$ par:

$$A_{c1} = \frac{(q-1)q\gamma}{(q^2+\gamma)(q+\gamma)} \quad (3.105)$$

$$A_{c2} = \frac{1}{3} \frac{(q-6)q\gamma^2 - (4q-3)q\gamma + 4q^4}{(q^2+\gamma)(q+\gamma)^2} \quad (3.106)$$

$$A_{c3} = -\frac{(q^2-3)\gamma^2 - (4q^2+3)q\gamma + 4q^4}{q(q+\gamma)^3} \quad (3.107)$$

La relation (3.105) nous montre que pour deux fluides ayant la même viscosité cinématique $\nu_i = \nu_e$, le nouveau noyau K_{sf} peut avoir une valeur finie valant A_{c2} à l'instant $t = 0$. Pour $\gamma > 4/5$, cette valeur initiale est négative et le noyau n'aura plus une variation monotone comme dans les cas de la bulle et de la sphère rigide.

Dans le cas de la chute d'une goutte sphérique sous l'effet de la gravité, avec une vitesse initiale U_0 , la résolution de l'équation du mouvement indique que l'inclusion commence son mouvement avec une vitesse:

$$U(t) = U_0 + 2(1-U_0) \frac{(\gamma-1)gt}{2\gamma+1} \left(1 - 12 \frac{\phi_\mu q}{(2\gamma+1)(1+\phi_\mu q)} \sqrt{\frac{t/\tau_{0e}}{\pi}} + O(t) \right) \quad (3.108)$$

Temps longs

De la même manière que précédemment, le noyau K_{sf} peut être approché à la limite des temps longs $t/\tau_{0e} \rightarrow \infty$ par la formule suivante:

$$K_{sf}(t) = \frac{4+3\phi_\mu}{9(1+\phi_\mu)^2} \sqrt{\frac{\tau_{0e}}{\pi t}} + O(t^{-1}) \quad (3.109)$$

en tenant compte de la relation (3.102), la force d'histoire totale s'exprime dans ce cas par:

$$F_h(t) = \frac{2}{3} a^2 \sqrt{\pi \rho_e \mu_e} \left(\frac{2+3\phi_\mu}{1+\phi_\mu} \right)^2 \int_{-\infty}^t \frac{dU(\tau)/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \quad (3.110)$$

A cette limite, on remarque que la force d'histoire de la goutte ne dépend pas du rapport des densités γ . Autrement dit, elle est indépendante du temps caractéristique de diffusion $\tau_{0i} = a^2/\nu_i$. Ce comportement peut probablement être interprété par la différence des échelles de longueurs entre l'intérieur et l'extérieur de l'inclusion. En effet, vu la petitesse de la goutte devant le milieu où elle se déplace, la vorticit e int erieure sera enti erement diffus ee aux temps longs. Ainsi, son effet devient

négligeable devant celui qui se produit dans le fluide environnant. Et par conséquent, il est logique qu'à ce stade, la force d'histoire ne dépende que du temps caractéristique extérieur.

Si on reprend l'exemple précédent de la chute d'une goutte sphérique, au stade final de l'accélération, la vitesse $U(t)$ approche sa valeur terminale de la manière suivante:

$$U(t) = U_{HR} \left(1 - \frac{2 + 3\phi_\mu}{3(1 + \phi_\mu)} (1 - U_0/U_{HR}) \sqrt{\frac{\tau_{0e}}{\pi t}} + O(t^{-1}) \right) \quad (3.111)$$

où U_{HR} est la vitesse terminale d'Hadamard-Rybczynski:

$$U_{HR} = \frac{2(1 + \phi_\mu)}{3(2 + 3\phi_\mu)} (\gamma - 1) \tau_{0e} g \quad (3.112)$$

Dans cette première partie théorique, nous venons de déterminer l'écoulement, à faibles nombres de Reynolds, induit par le mouvement oscillatoire et rectiligne d'une inclusion sphérique solide, gazeuse ou liquide. Tout particulièrement, nous avons mis le point sur la force d'histoire qui reste sans doute la plus problématique. Cette force qui a une origine à la fois visqueuse et inertielle, retient toute l'histoire de l'accélération de la particule jusqu'à l'instant présent t . Elle est restée longtemps connue sous sa forme historique et classique établie pour une sphère solide par Boussinesq (1885), Basset (1888) et Oseen (1927). C'est à dire une forme d'un produit de convolution de l'accélération du glissement et un noyau variant en $t^{-1/2}$.

Pour une sphère fluide, dans la littérature, la force d'histoire est souvent négligée, ou bien considérée comme étant la même que celle exercée sur une sphère solide. Cette dernière approximation est faite sous une justification qui admet qu'à cause des impuretés dans le fluide environnant, l'interface fluide-fluide se solidifie et que la goutte se comporte comme une bille rigide.

Sur le plan expérimental, les études traitant du mouvement des particules dans un milieu visqueux infini se limitent essentiellement à la détermination du coefficient de traînée. Quant à celles qui mesurent la force d'histoire, elles restent très rares pour une bille solide, et inexistantes pour une inclusion fluide. Car, il faut noter que pour un mouvement rectiligne de l'inclusion, il est difficile de mesurer une action dépendant de l'accélération. En effet, après un temps d'établissement relativement court, la sphère atteint sa vitesse terminale et la force d'histoire devient négligeable. Ainsi, dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons jugé légitime d'effectuer une étude expérimentale sur un mouvement oscillatoire de l'inclusion. Dans ce cas, l'accélération est toujours présente et la force d'histoire est persistante. Le but de nos

expériences, dont le principe a été exposé dans le chapitre précédent, consiste en l'étude de l'influence du terme de d'histoire sur le mouvement d'une particule solide ou fluide à faibles et moyens nombres de Reynolds.

3.5 Données expérimentales complémentaires

Afin de pouvoir explorer les gammes du nombre de Reynolds Re_e désirées, nous avons disposé lors de nos expériences d'un ensemble de billes de diamètre variant de 4 à 10 mm et de densité ρ_i données dans le tableau 3.1. Pour les fluides extérieurs et la création des gouttes, nous avons combiné quatre fluides newtoniens: la glycérine bidistillée à 99 %, l'eau et deux types d'huiles de silicone. Leurs densités ainsi que leurs viscosités mesurées à 20°C sont dressées dans le tableau 3.2. En ce qui concerne le repère relatif (plateau oscillant), la majorité de nos essais ont été effectués à une amplitude fixe, $b = 5 \text{ mm}$ et des fréquences d'oscillations comprises entre 2 et 8.5 Hz.

Bille	ρ_i (kg/m ³)
Téflon	2200
Polyacétale	1410
Polyamide	1130

Tableau 3.1: Densités des billes utilisées

Fluide	ρ (kg/m ³)	ν (m ² /s)	μ (kg/m.s)
Glycérine	1257	$6.90 \cdot 10^{-4}$	0.867
Huile de silicone (1)	962	$4.95 \cdot 10^{-4}$	0.476
Huile de silicone (2)	962	$2.01 \cdot 10^{-4}$	0.193
Eau	1000	10^{-6}	0.001

Tableau 3.2: Propriétés des fluides utilisés, viscosités mesurées à 20°C

3.6 Cas des faibles nombres de Reynolds

3.6.1 Mouvement sans oscillation

Comme nous l'avons mentionné au chapitre précédent, les viscosités des fluides utilisés ont été déterminées en mesurant expérimentalement la vitesse terminale U_t d'une bille solide de rayon a et de densité ρ_i connus. Pour chaque essai, la valeur de ν_e est déduite à partir de la relation (2.15). Quant à la valeur finale utilisée lors de notre traitement numérique, elle est obtenue en moyennant quatre essais identiques. Sur les figures 3.9 (a), (b) et (c), (section "illustration des résultats" à la fin du chapitre), nous donnons un exemple de mesure pour chaque fluide à une température de 20°C. Nous avons remarqué que l'erreur relative moyenne entre les valeurs obtenues par cette méthode et celles mesurées au moyen du viscosimètre est de l'ordre de 2%.

Sur les figures 3.10 et 3.11, nous avons représenté les trajectoires rectilignes d'une bulle d'air de rayon $a = 2.25 \text{ mm}$ et d'une goutte de glycérine $a = 1.9 \text{ mm}$ dans l'huile de silicone (1). Ces essais ont été effectués à des nombres de Reynolds respectifs de l'ordre de 0.51 et de 0.041. Ils sont comparés aux trajectoires théoriques issues de la solution stationnaire d'Hadamard & Rybczynski, et à celles issues de la solution de Stokes, pour une sphère solide ayant le même rayon et la même densité que la sphère fluide. Nous constatons que la vitesse terminale de l'inclusion est proche de celle d'Hadamard à 5% près pour la bulle et 2% pour la goutte. Ainsi, nous pouvons conclure que les systèmes dans lesquels nous travaillons sont propres et ne contiennent pas d'impuretés qui peuvent modifier l'état de l'interface fluide-fluide.

3.6.2 Mouvement avec oscillations

En se référant au schéma 3.1, l'équation du mouvement de la sphère, à faibles nombres de Reynolds, peut s'écrire d'une manière générale:

$$\begin{aligned} \rho_i \gamma \frac{dU}{dt} = & |\rho_i - \rho_e| \gamma g \left(1 - A_0 \frac{\gamma_{pl}(t)}{g} \right) - 6\pi\mu_e a A_1 U(t) - \frac{1}{2} \rho_e \gamma \frac{dU(t)}{dt} \\ & - 6\pi\mu_e a \left(f_{hr}(U(t) - U_m) - \frac{\tau_{0e} \delta_e^2}{2} f_{hi} \frac{dU(t)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (3.113)$$

et en vertu de la relation (2.21), l'accélération du repère relatif (plateau oscillant) s'exprime par:

$$\gamma_{pl}(t) = \frac{dV_{pl}}{dt} = -b \omega^2 \sin(\omega t) \quad (3.114)$$

les constantes A_0 et A_1 figurant dans (3.113) dépendent du type d'inclusion, elles sont définies par:

$$\text{avec } A_0 = \begin{cases} -1 & \text{si } \rho_i < \rho_e \text{ particule ascendante} \\ +1 & \text{si } \rho_i > \rho_e \text{ particule descendante} \end{cases} \quad (3.115)$$

$$A_1 = \begin{cases} 1 & \text{pour une sphère solide} \\ \frac{2}{3} & \text{pour une sphère gazeuse} \\ \frac{2+3\phi_\mu}{3(1+\phi_\mu)} & \text{pour une sphère liquide} \end{cases} \quad (3.116)$$

Quant aux fonctions d'histoire f_{hr} , et f_{hi} , elles peuvent être déduites à partir de la relation (3.100), telle que:

$$f_{hr} = \mathcal{R}_e\{f_h\} \quad \text{et} \quad f_{hi} = \mathcal{I}_m\{f_h\} \quad (3.117)$$

$$\text{avec } f_h = \begin{cases} k_e & \text{sphère solide} \\ \frac{4}{3} \frac{k_e}{3+k_e} & \text{sphère gazeuse} \\ \frac{1}{3(1+\phi_\mu)} + k_e - \frac{(1+k_e)^2}{3+k_e+\phi_\mu Q(k_i)} & \text{sphère liquide} \end{cases} \quad (3.118)$$

Afin de comparer l'étude théorique avec nos essais expérimentaux, l'équation du mouvement (3.113) a été résolue, pour chaque type d'inclusion, en deux cas distincts: en négligeant, et en comptabilisant la force d'histoire. Ainsi, les solutions obtenues décrivent la vitesse de la sphère comme suit:

$$U(t) = C_0 \exp(-C_1 t) + U_m + U_{fx} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.119)$$

où U_m , U_{fx} et φ représentent respectivement, la vitesse moyenne, l'amplitude de la vitesse et le déphasage avec le mouvement du plateau. Quant à C_0 et C_1 , ce sont des constantes dépendantes des caractéristiques du mouvement et de l'inclusion (fréquence, vitesse initiale...).

Aux faibles nombres de Reynolds, le premier terme dans (3.119) s'éteint au bout de quelques dixièmes de seconde (temps d'établissement t_e), et la vitesse de la particule

prendra la forme définie par (3.1). Dans ce cas, U_m tendra vers la vitesse terminale U_t qu'aurait la sphère en chute libre sous l'effet de la gravité, telle que:

$$U_m \approx U_t = U_{St}/A_1 \quad \text{quand } t \geq t_e \quad (3.120)$$

où U_{St} est la vitesse terminale de Stokes donnée par:

$$U_{St} = (2/9)\tau_{0e}g |\gamma - 1| \quad (3.121)$$

Il est à noter que la vitesse moyenne U_m pourrait être calculée par la résolution de l'équation du mouvement sans oscillation suivante:

$$\begin{aligned} \rho_i \mathcal{V} \frac{dU}{dt} = & |\rho_i - \rho_e| \mathcal{V} g - 6\pi\mu_e a A_1 U(t) - \frac{1}{2} \rho_e \mathcal{V} \frac{dU(t)}{dt} \\ & - 6\pi\mu_e a \int_0^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} K(t - \tau) d\tau - 6\pi\mu_e a K(t) U_0 \end{aligned} \quad (3.122)$$

où le noyau $K(t)$ s'exprime en fonction du type d'inclusion par les relations (3.93), (3.97) ou (3.103). Malheureusement, cette équation donne un résultat erroné au stade final de l'accélération de l'inclusion. En effet, pour une bille solide, la vitesse $U(t)$ s'exprime comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{U(t)}{U_{St}} = & 1 - \mathcal{Re} \left(\frac{r_1 + U_0 r_2}{r_1 - r_2} \exp(r_2^2 t^*) \operatorname{erfc}(r_2 \sqrt{t^*}) \right. \\ & \left. - \frac{r_2 + U_0 r_1}{r_1 - r_2} \exp(r_1^2 t^*) \operatorname{erfc}(r_1 \sqrt{t^*}) \right) \end{aligned} \quad (3.123)$$

où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique:

$$r^2 + B r + B = 0 \quad (3.124)$$

$$\text{avec } B = 9/(2\gamma + 1) \quad \text{et} \quad t^* = t/\tau_{0e} \quad (3.125)$$

(voir détails dans l'annexe A, figure A.4). Comme le montre la figure A.4, le noyau de Basset varie très lentement et empêche la particule d'atteindre sa vitesse terminale U_{St} . Pour éviter ce problème, nos mesures expérimentales ont été effectuées après que la sphère ait atteint sa vitesse terminale U_t . De plus, l'hypothèse de superposition de l'écoulement stationnaire et de l'écoulement fluctuant, exige que U_t soit indépendante de la fréquence d'oscillations. Par conséquent, dans l'équation (3.113), U_m peut être remplacée directement par U_t .

Expérimentalement, les valeurs de U_m , U_{fx} et φ sont déterminées par minimisation de l'écart quadratique entre la trajectoire mesurée et la trajectoire modèle (2.20). Sur les figures 3.12 et 3.13, nous présentons deux exemples de modélisation correspondant respectivement aux oscillations d'une bille solide: ($Re_e = 0.064$, $\gamma = 1.75$ et $f = 2.5 \text{ Hz}$), et d'une goutte sphérique ($Re_e = 0.041$, $\gamma = 1.306$, $\phi_\mu = 1.82$ et $f = 6 \text{ Hz}$). Nous pouvons constater que le déplacement mesuré de l'inclusion est décrit correctement par la courbe de lissage. Ainsi, la détermination de la vitesse de la sphère est facilement déduite par la dérivée du signal continu (courbe du lissage). Sur la figure 3.14 nous effectuons une comparaison entre les solutions de l'équation (3.113) pour chaque type d'inclusion (bille, bulle et goutte) et nos mesures expérimentales. Nous traçons les vitesses d'oscillations adimensionnelles U_f/U_{St} en fonction du temps caractéristique $\omega t/\pi$. Nous remarquons qu'en négligeant les termes d'histoire, nous commettons une erreur considérable dans l'estimation de la vitesse de la particule. Cette erreur affecte d'une manière apparente l'amplitude de la vitesse $U_{fx} = \max(U_f)$ ainsi que le déphasage φ entre le mouvement du plateau et celui de l'inclusion. Sur les figures 3.16 et 3.17, nous montrons l'évolution de cette erreur en fonction de la fréquence d'oscillations. Nous traçons respectivement les rapports U_{fx}/U_{St} et φ/π en fonction de la profondeur $\delta_e = \sqrt{2/\tau_{0e}\omega}$ (inverse de la fréquence adimensionnelle). Nous pouvons constater que nos mesures sont en bon accord avec la solution de l'équation complète (3.113). En ignorant le terme d'histoire, l'erreur commise dans la prédiction de l'amplitude de la vitesse ainsi que dans le déphasage, augmente considérablement avec la fréquence d'oscillations. A titre d'exemple, pour une épaisseur $\delta_e \approx 3$, nous avons enregistré une déviation de 35% dans l'amplitude de la vitesse pour la sphère solide et la goutte, et de l'ordre de 25% pour la bulle d'air. Pour le déphasage, cet écart est pratiquement égal à 15% pour les trois types d'inclusions. Ces résultats montrent qu'à des faibles nombres de Reynolds, et à des nombres de Stokes $St = 4/\delta_e^2 \geq 0.1$, la force d'histoire joue un rôle important dans l'équation du mouvement, et le fait de la négliger peut causer une estimation erronée dans la trajectoire de l'inclusion. En ce qui concerne les vitesses moyennes U_m , les mesures illustrées sur la figure 3.15 confirment notre modélisation théorique, et montrent que la vitesse terminale de la sphère n'est pas affectée par les oscillations. Les incertitudes commises dans les valeurs de U_m sont très proches de celles enregistrées dans les trajectoires sans oscillation. C'est à dire une moyenne de 2% pour la sphère solide et la goutte, et de 5% pour la bulle d'air.

3.7 Cas des nombres de Reynolds intermédiaires

3.7.1 Équation du mouvement de la sphère

Pour des nombres de Reynolds intermédiaires, l'équation du mouvement de l'inclusion peut aussi être modélisée par la forme générale (3.113), où le coefficient A_1 s'exprime dans ce cas comme suit:

$$A_1 = \frac{C_D}{C_{DSt}} = a_0 (1 + a_1 Re_e^{a_2}(t)) \quad (3.126)$$

avec $C_{DSt} = 24/Re_e$ (coefficient de traînée de Stokes) (3.127)

$$Re_e(t) = \frac{2a|U(t)|}{\nu_e} \quad (3.128)$$

D'après les relations (1.102), (1.109) et (2.14), les coefficients a_0 , a_1 et a_2 seront définis pour une sphère solide et une bulle gazeuse par le tableau 3.3. Pour la sphère liquide, nous utiliserons la corrélation de Rivkind & al, donnée par la formule (1.107), et qui se résume comme suit:

$$A_1 = \frac{1}{1 + \phi_\mu} (\phi_\mu A_{1(bulle)} + A_{1(bulle)}) \quad (3.129)$$

Inclusion	a_0	a_1	a_2
Bille	1	0.15	0.687
Bulle ($Re_e \leq 50$)	2/3	0.15	0.5
Bulle ($Re_e > 50$)	2	-2.211	-0.5

Tableau 3.3: Coefficient a_0 , a_1 et a_2 utilisés pour le calcul de A_1 dans (3.126).

Quant à l'évaluation théorique de la vitesse terminale $U_m = U_t$, elle s'effectue par la résolution numérique de l'équation:

$$|\rho_i - \rho_e| \gamma g - 6\pi\mu_e a A_1 U_t = 0 \quad (3.130)$$

Pour justifier l'utilisation de la forme de l'équation (3.113) dans le cas des nombres de Reynolds intermédiaires, nous l'avons résolu pour un exemple de $Re_e = 324$, $\gamma = 1.13$ et $f = 3 \text{ Hz}$ dans les deux cas: avec et sans terme d'histoire. Ces deux solutions ont été comparées ensuite avec celles de l'équation:

$$\begin{aligned} \rho_i \gamma \frac{dU}{dt} = & |\rho_i - \rho_e| \gamma g \left(1 - A_0 \frac{\gamma_{pl}(t)}{g} \right) - 6\pi\mu_e a A_1 U(t) - \frac{C_m}{2} \rho_e \gamma \frac{dU(t)}{dt} \\ & - 6\pi\mu_e a C_h \int_0^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} K(t-\tau) d\tau - 6\pi\mu_e a C_h K(t) U_0 \end{aligned} \quad (3.131)$$

obtenue pour trois formes différentes:

- Forme originale de Basset avec $C_m = C_h = 1$ et un noyau variant en $1/\sqrt{t}$.
- Forme d'Odar et Hamilton (1964) définie au chapitre 1 par les relations (1.40), (1.42), (1.43) et (1.44).
- Forme Mei & al avec un terme d'histoire défini par les relations (1.50) et (1.51).

Les vitesses de la sphère sont illustrées sur les figures 3.18 et 3.19, qui correspondent respectivement au début du mouvement et après l'atteinte de la vitesse terminale moyenne. Nous remarquons clairement qu'à la limite des temps courts, la solution de Basset, celle d'Odar & Hamilton ainsi que celle de Mei & al décrivent de la même façon le mouvement de la sphère. D'autre part, la solution de l'équation (3.113) ainsi que celle obtenue en négligeant le terme d'histoire surestiment la vitesse de l'inclusion. Cette défaillance de l'équation (3.113) est d'ailleurs très logique puisque nous avons forcé la solution à avoir une vitesse terminale à un stade prématuré du mouvement.

Au stade final de l'accélération, nous constatons que les solutions de Basset et la solution d'Odar & Hamilton fournissent des vitesses terminales inférieures à celles des autres solutions. Quant à l'équation (3.113), elle donne le même résultat que celui de Mei & al et prédit la bonne vitesse moyenne. On peut aussi remarquer que la différence entre les quatre solutions tenant compte du terme d'histoire, réside essentiellement dans l'évaluation des vitesses moyennes. Pour les amplitudes et les déphasages, elles donnent pratiquement les mêmes résultats. Il faut rappeler que le but de cette comparaison, est de justifier l'utilisation de la forme (3.113) pour des temps longs. Ceci est particulièrement bénéfique dans le cas de la goutte, puisque nous ne connaissons pas la forme intégrale exacte de la force d'histoire.

3.7.2 Discussion des résultats

3.7.2.1 Nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité

Pour des nombres de Reynolds de l'ordre de l'unité, nous avons enregistré les oscillations d'une sphère solide en polyamide ($a = 5.5 \text{ mm}$, $\gamma = 1.17$ et $Re_e = 2.5$), d'une bulle d'air ($a = 3 \text{ mm}$ et $Re_e = 4.37$) et d'une goutte de glycérine ($a = 4 \text{ mm}$,

$\gamma = 1.306$, $\phi_\mu = 4.5$ et $Re_e = 2$) dans l'huile de silicone (2). Sur la figure 3.20, nous présentons les mesures des vitesses terminales moyennes. Les résultats obtenus montrent que la solution de l'équation (3.113) donne une bonne prédiction du mouvement moyen de la sphère. L'écart relatif entre nos mesures et les prédictions théoriques est de l'ordre de 5% pour les trois inclusions. Quant aux amplitudes des vitesses: figures 3.21, ainsi qu'aux déphasages entre le mouvement de l'inclusion et celui du repère oscillant: figures 3.22, nos expériences indiquent que l'effet d'histoire est toujours présent dans cette gamme de Re_e . En négligeant la force d'histoire, les erreurs commises dans l'évaluation de U_{fx} sont aussi importantes que dans le cas de $Re_e < 1$. Pour une fréquence d'oscillations de 8.5 Hz, la surestimation de U_{fx} peut atteindre jusqu'à 60% pour la sphère solide et la goutte ($\delta_e \approx 0.52$) et 50% pour la bulle d'air ($\delta_e \approx 1.2$) et la goutte ($\delta_e \approx 0.71$)

3.7.2.2 Nombres de Reynolds supérieurs

Les essais que nous avons réalisés dans ce cas, concernent une bille solide en polyéthylène ($a = 2.5 \text{ mm}$, $\gamma = 1.41$ et $Re_e = 709$) et une goutte d'huile de silicone (1) ($a = 2.4 \text{ mm}$, $\gamma = 0.962$, $\phi_\mu = 476$ et $Re_e = 260$) en mouvement dans l'eau.

Mouvement sans oscillation

Pour un mouvement libre de ces inclusions (sans oscillation du plateau), les séquences que nous avons enregistrées montrent que ces inclusions dévient de leurs trajectoires rectilignes tout en oscillant. Ce comportement est attendu dans cette gamme de Re_e . Il peut être expliqué par la génération périodique des tourbillons en aval de l'inclusion et qui se produit, généralement pour une sphère solide à partir de $Re_e = 250$.

Sur les figures 3.23a-b et 3.24a-b nous avons tracé les déplacements de ces particules ainsi que les spectres de fréquences des résidus $Rz = z_{exp} - z_m$ issus de la différence des mesures expérimentales z_{exp} et des pentes moyennes z_m . Vu la durée limitée des séquences enregistrées, nous n'avons pas pu voir plusieurs périodes de ces oscillations. Mais en réalisant plusieurs essais identiques, nous avons remarqué que les mesures sont reproductibles et le résidu se produit avec la même fréquence, comme le montre la figure 3.25. Les fréquences d'oscillations des sillages derrière ces particules sont de l'ordre de $f_t \approx 2.5 \text{ Hz}$ pour la sphère solide et $f_t \approx 0.4 \text{ Hz}$ pour la goutte d'huile. Les nombres de Strouhal correspondant $Sl_t = 2af_t/U_t$ sont respectivement de l'ordre de 0.054 et de 0.029.

On note que les oscillations montrées sur les figures 3.23 et 3.24 sont plus faibles que celles trouvées dans le cas d'une sphère fixe, par Sakamoto & Hahniu (1995) et qui indiquent un nombre de Strouhal de l'ordre de 0.2 à $Re_e = 500$. Mais d'après une étude expérimentale récente de Mordant & Pinton (2000) mesurant la vitesse d'une bille solide en chute libre dans l'eau, ces auteurs ont trouvé un nombre de Strouhal de l'ordre de 0.05 pour le même nombre de Reynolds. Afin de vérifier nos mesures nous avons effectué d'autres essais à $Re_e = 350$ et $Re_e = 500$, et nous avons mesuré respectivement des fréquences de 0.6 Hz et 1.2 Hz correspondant à un Strouhal légèrement supérieur à ceux de Mordant & : de l'ordre de 0.02 et de 0.037. En ce qui concerne la sphère fluide nous n'avons pas pu vérifier notre valeur de Sl_v , car il n'existe pas d'étude antérieure dans ce domaine.

Mouvement oscillatoire

En faisant osciller le repère relatif, les trajectoires enregistrées des deux inclusions (la bille et la goutte) montrent que leur mouvement est aussi affecté par les fluctuations périodiques. En se référant au chapitre 2, nous avons mentionné que dans un tel mouvement de la particule, le déplacement mesuré z_{exp} serait modélisé par la relation (2.22), tel que:

$$z_m(t) = \bar{z}(t) + z_f(t) + z_t(t) \quad (3.132)$$

$$\bar{z}(t) = U_t t + z_0, \quad z_f(t) = z_{fx} \sin(2\pi f_m t + \varphi) \quad \text{et} \quad z_t(t) = z_{tx} \sin(2\pi f_t t + \varphi_t) \quad (3.133)$$

où \bar{z} est le mouvement moyen de l'inclusion, $z_f(t)$ l'oscillation due aux mouvements du plateau et $z_t(t)$ l'oscillation due au détachement tourbillonnaire. Sur les figures 3.27a-b-c et 3.28a-b-c, nous avons tracé, respectivement, pour les deux particules, les courbes $z_f(t) + z_t(t)$, leurs spectres de fréquences et les fluctuations $z_f(t)$ à une fréquence de 7 Hz pour la sphère solide et à 6 Hz pour la goutte d'huile. Nous remarquons que les fréquences d'émissions des tourbillons f_t sont les mêmes que celles mesurées dans le cas où $z_f = 0$. Les nombres de Strouhal, illustrés sur les figures 3.29 et 3.30 restent donc constants, indépendamment des oscillations du plateau. En ce qui concerne l'amplitude du sillage, on peut constater sur les figures 3.27-b et 3.28-b, que dans le cas de la goutte, z_{tx} est nettement plus grande que z_{fx} . Ceci semble logique à cause de la légèreté de la goutte qui dévie plus facilement de sa trajectoire qu'une sphère solide.

Il faut noter qu'afin de s'assurer que les fluctuations f_t ne sont pas dues à des fréquences parasites qui peuvent affecter la chaîne d'acquisition, nous avons tracé,

sur la figure 3.26, les spectres de fréquences du déplacement mesuré du plateau $F[z_{pl}]$. Nous y constatons que la seule fréquence enregistrée est bien celle du plateau qui effectue un mouvement sinusoïdal.

En ce qui concerne l'effet de la force d'histoire sur les mouvements de la bille et de la goutte, nous avons résolu l'équation (3.113) avec et sans terme d'histoire. Les vitesses obtenues ont été comparées avec nos mesures en ignorant le mouvement dû aux fluctuations du sillage. Pour les vitesses terminales, figure 3.31, nos expériences sont en bon accord avec celles trouvées en utilisant les corrélations empiriques (3.126), avec un écart relatif de 7% pour la sphère solide et de 12% pour la goutte.

Pour les vitesses d'oscillations U_{fx} , la figure 3.32 montre que théoriquement, l'effet de la force d'histoire fait diminuer l'amplitude de la vitesse de la sphère de 15% à 20%. Cependant, les résultats expérimentaux obtenus pour les deux types d'inclusions restent partagés entre les deux cas et ne nous permettent pas de juger quantitativement l'influence du terme d'histoire. En effet, à de tels nombres de Reynolds, le mouvement réel de la sphère ne peut plus être considéré comme harmonique à une seule fréquence, et les fluctuations z_f et z_t ne peuvent être découplées. Les déphasages mesurés entre la sphère et le repère relatif, figure 3.33, le confirment puisqu'ils se situent au-dessus des prédictions théoriques avec un écart jugé important. Par conséquent, l'équation du mouvement (3.113) ainsi que celle de Mei & al doivent être revues pour une gamme de Reynolds plus large en tenant compte de la vraie structure de l'écoulement et de l'instabilité du sillage.

Conclusions

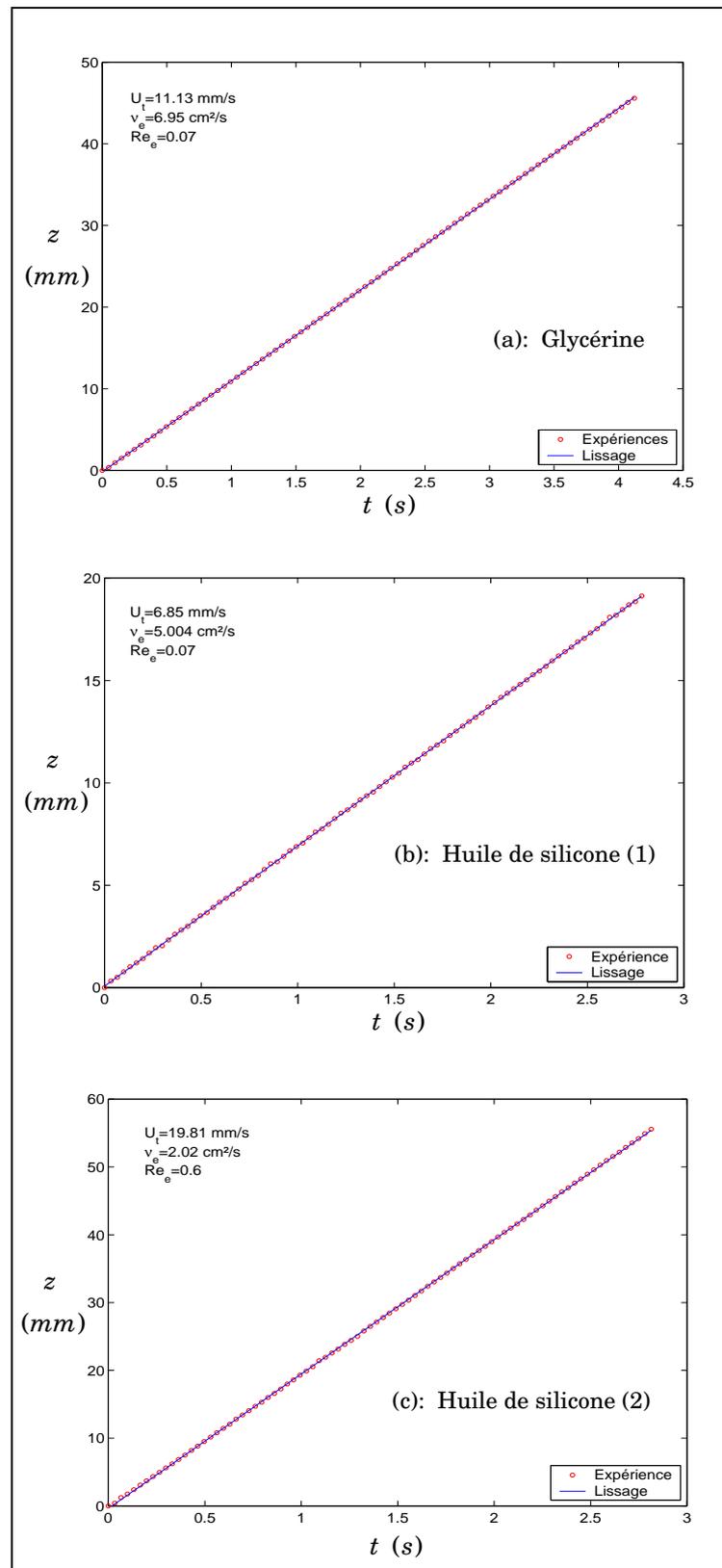
Dans la première partie de ce chapitre, nous avons étudié le mouvement oscillatoire d'une inclusion sphérique solide, gazeuse ou liquide dans un fluide visqueux infini. Sous l'hypothèse des faibles nombres de Reynolds, nous avons cherché la solution générale des équations instationnaires de Stokes, sous la forme d'une série des polynômes de Gegenbauer. L'application des conditions aux limites adéquates sur la surface de chaque type d'inclusion nous a permis de tronquer la série et de déterminer les champs hydrodynamiques qui en résultent.

Par intégration du tenseur de contraintes sur la frontière d'une goutte sphérique, nous avons obtenu l'expression de la traînée totale exercée par le fluide environnant sur celle-ci. En faisant tendre le rapport des viscosités vers zéro et vers l'infini, nous avons pu établir l'expression de la traînée exercée sur une bulle gazeuse, et retrouver celle de Stokes pour une sphère solide. En examinant les forces de traînée pour un mouvement rectiligne, nous avons trouvé que les forces d'histoire possèdent des noyaux ayant des expressions et des comportements asymptotiques qui diffèrent d'un

type d'inclusion à l'autre. Autrement dit, la force d'histoire classique de Basset ne peut être appliquée sur une sphère fluide, comme il est souvent le cas dans la littérature. En effet dans un écoulement diphasique liquide-liquide, cette force de mémoire dépend des deux temps caractéristiques de diffusion: à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. Quant à la bulle gazeuse, nous avons vu que malgré l'absence du temps caractéristique intérieur τ_{0i} dans l'expression de la traînée, le noyau de la force d'histoire varie exponentiellement et plus rapidement en comparaison avec celui de Basset.

Sur le plan expérimental nous avons montré qu'à faibles et moyens nombres de Reynolds, la force d'histoire joue un rôle important dans l'équation du mouvement de l'inclusion. Au même titre, soit pour une inclusion solide, gazeuse ou liquide, le fait de négliger le terme de mémoire, simplifie énormément la résolution de l'équation du mouvement, mais aussi conduit à des erreurs considérables dans l'estimation de la trajectoire et de la vitesse de la sphère. D'autre part, pour des nombres de Reynolds $250 \leq Re_e \leq 1000$, nous avons montré que la structure de l'écoulement devient plus complexe et que le mouvement de la sphère est fortement influé par l'évolution périodique du sillage. Par conséquent les équations du mouvement utilisées ne décrivent pas correctement le mouvement complet de la sphère puisqu'elles sont développées pour un mouvement rectiligne, et donc, ne fournissent que des informations concernant le mouvement moyen.

Illustration des résultats

Figure 3.9: Mesures de la viscosité à $T = 20^\circ\text{C}$

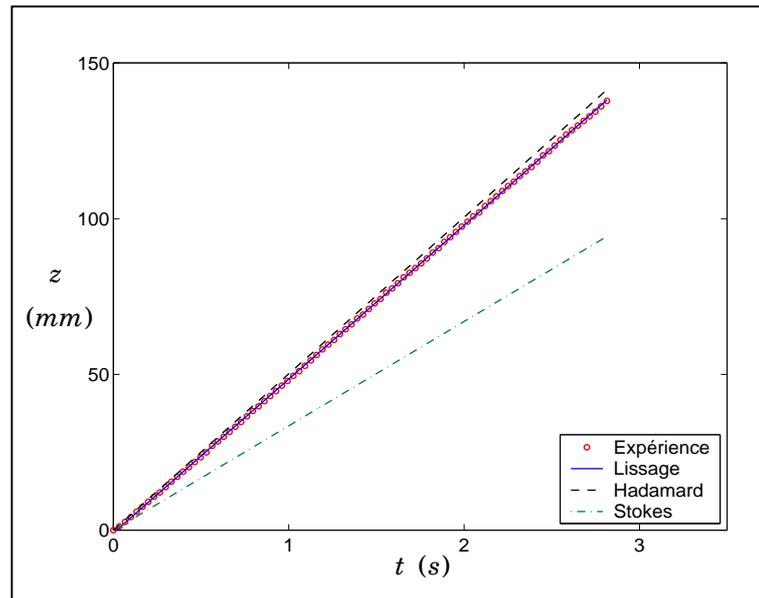


Figure 3.10: Mouvement rectiligne d'une bulle d'air dans l'huile de silicone (1), $a = 2.25 \text{ mm}$, $Re_e = 0.51$

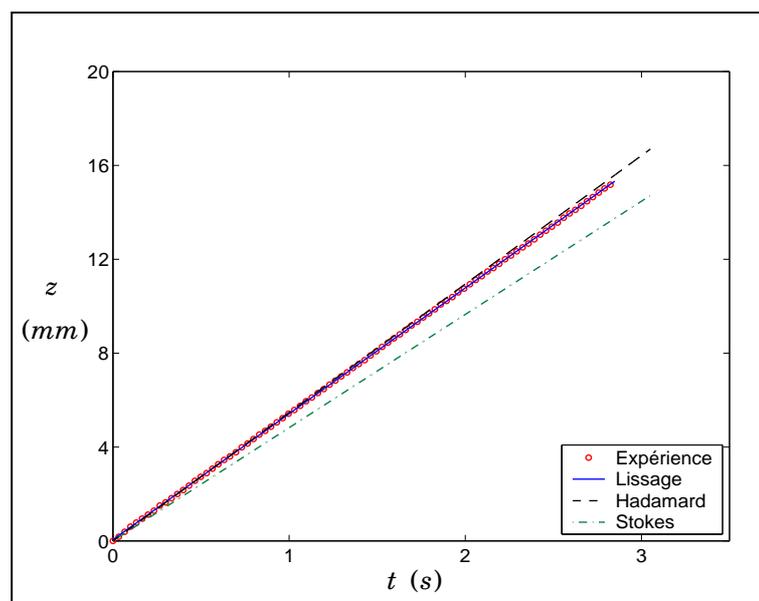


Figure 3.11: Mouvement rectiligne d'une goutte de glycérine dans l'huile de silicone (1), $a = 1.9 \text{ mm}$, $Re_e = 0.041$

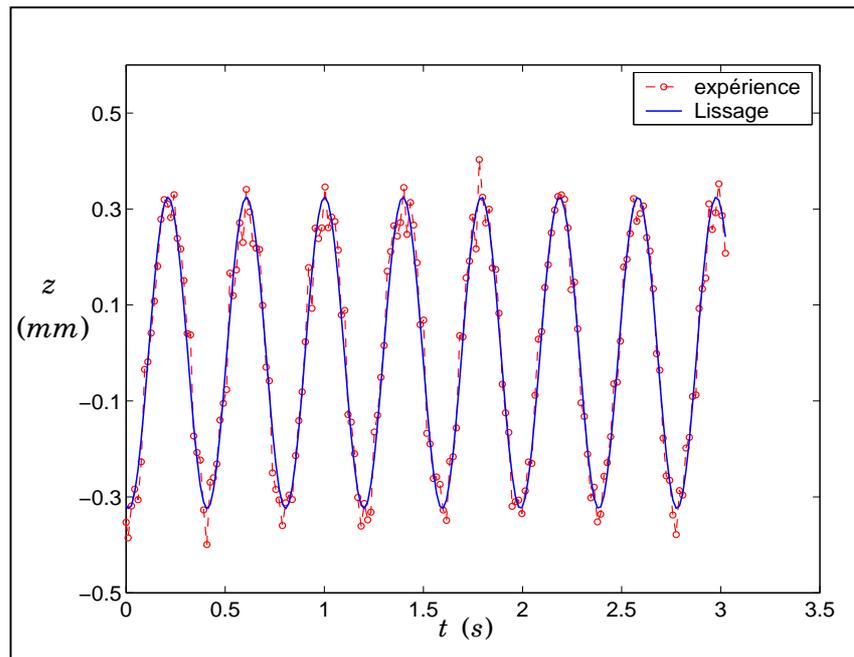


Figure 3.12: Modélisation des oscillations d'une bille en téflon dans la glycérine, $a = 2.25 \text{ mm}$, $Re_e = 0.064$, $f = 2.5 \text{ Hz}$

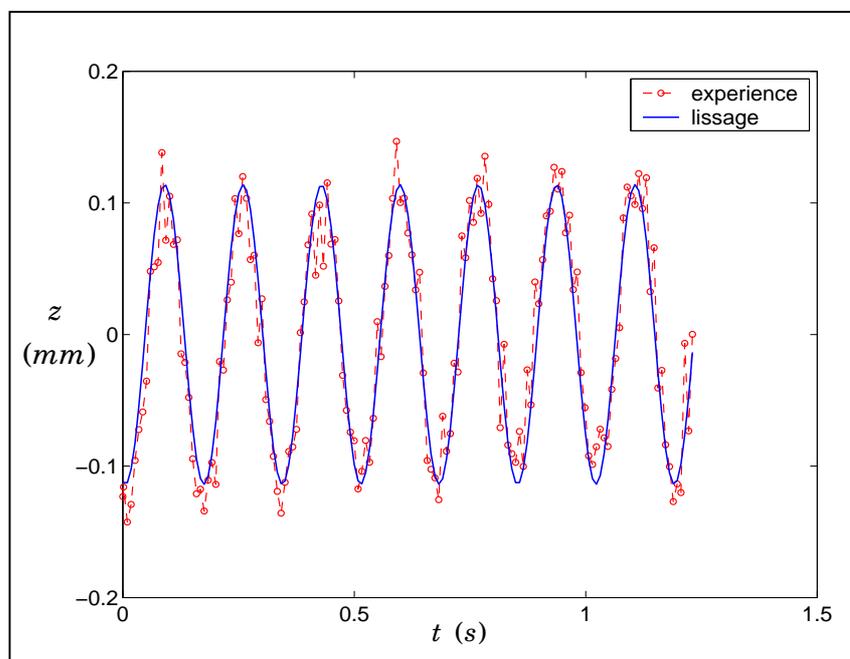


Figure 3.13: Modélisation des oscillations d'une goutte de glycérine dans l'huile de silicone (1), $a = 1.9 \text{ mm}$, $Re_e = 0.041$, $f = 6 \text{ Hz}$

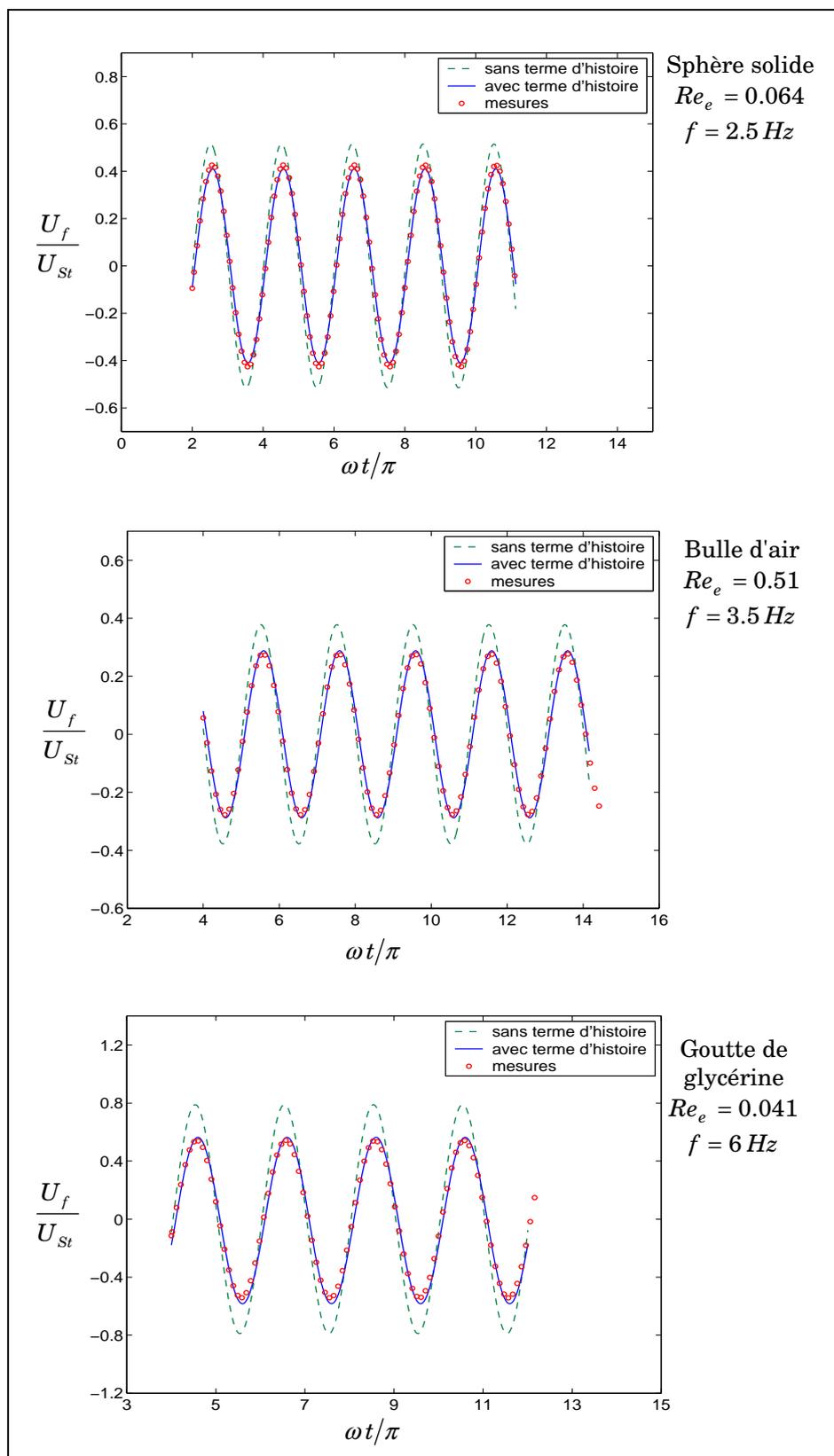


Figure 3.14: Vitesses d'oscillations de la sphère

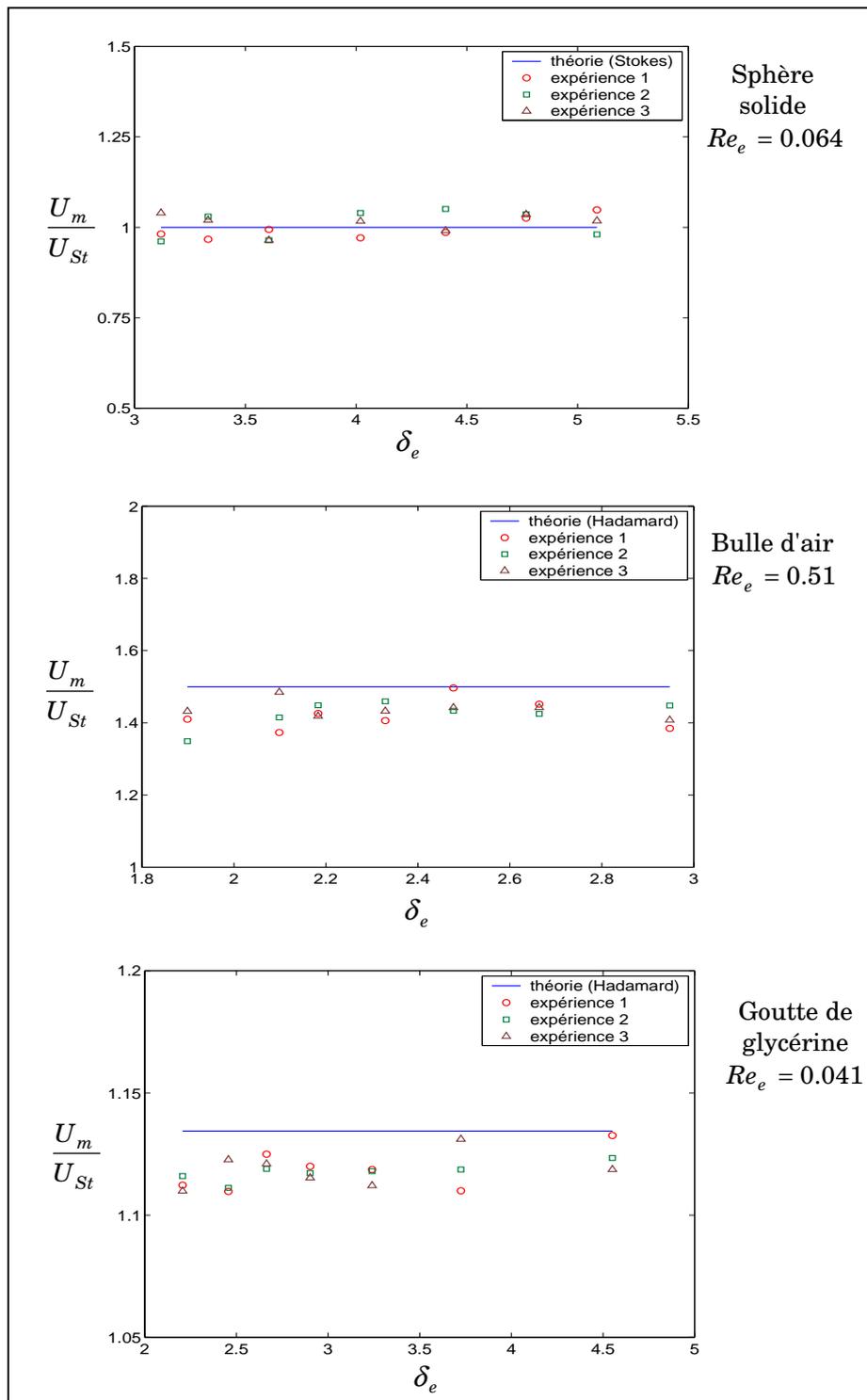


Figure 3.15: Vitesses terminales moyennes de la sphère

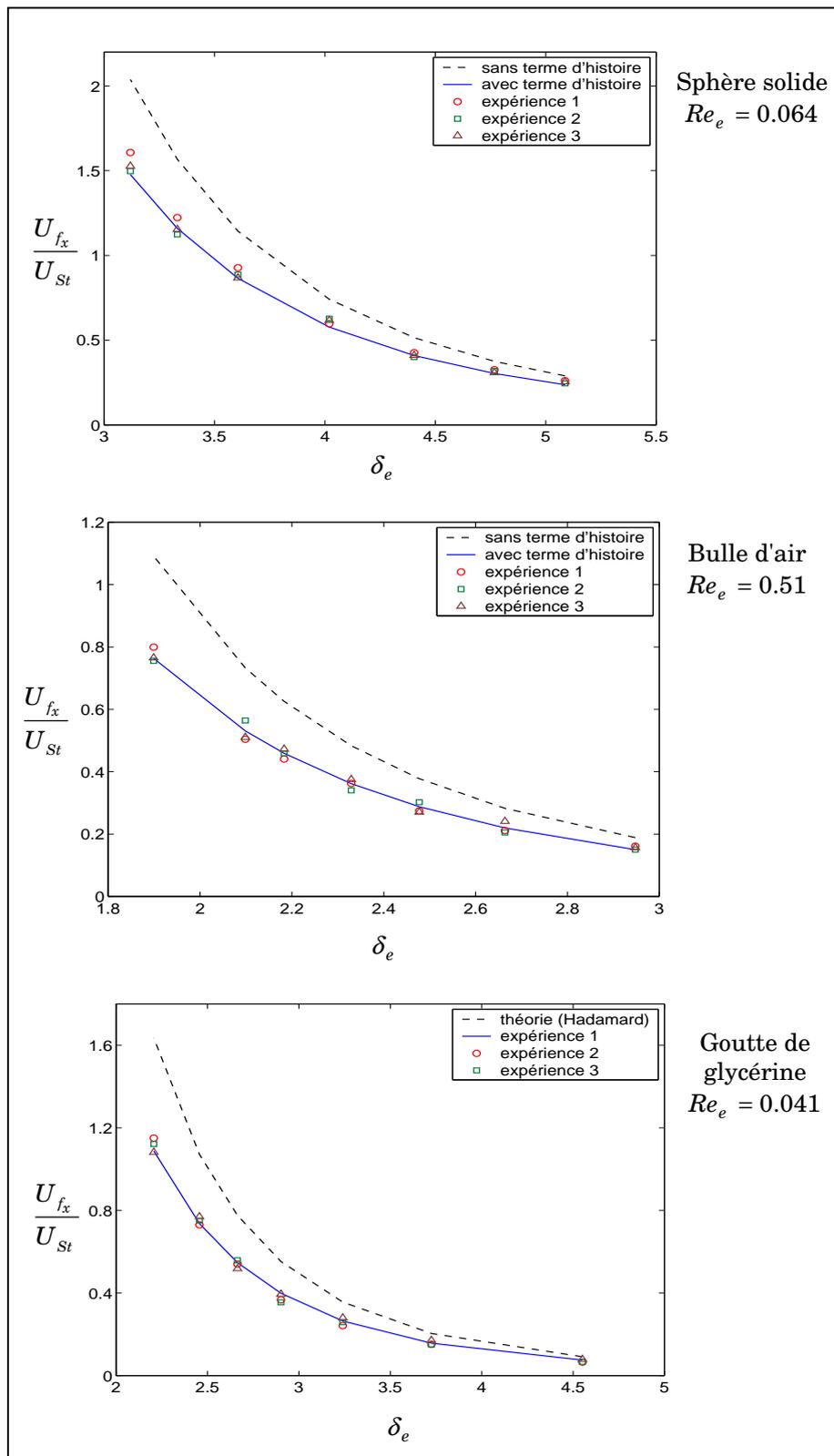


Figure 3.16: Vitesses maximales de la sphère

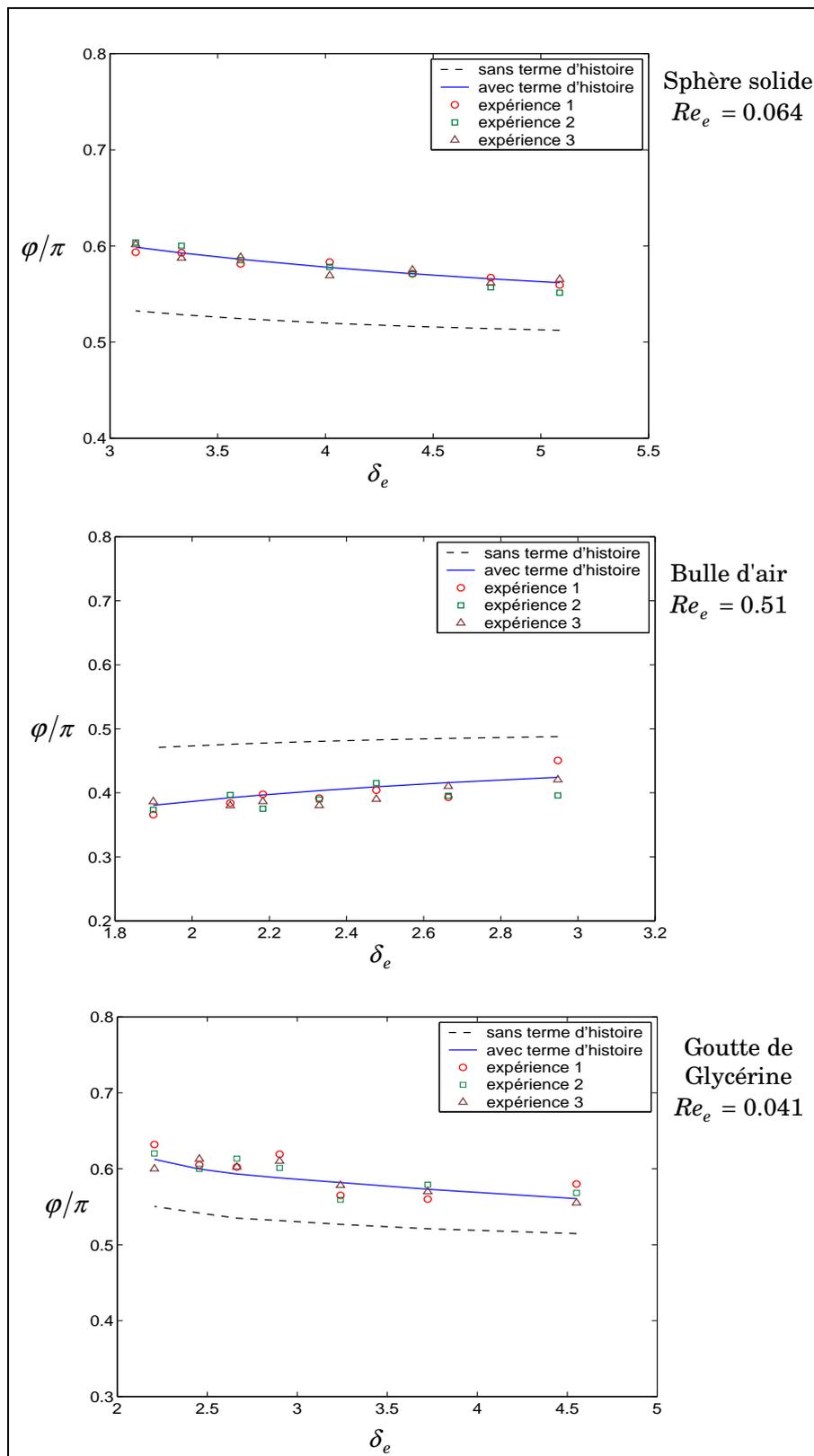


Figure 3.17: Déphasages entre la sphère et le plateau

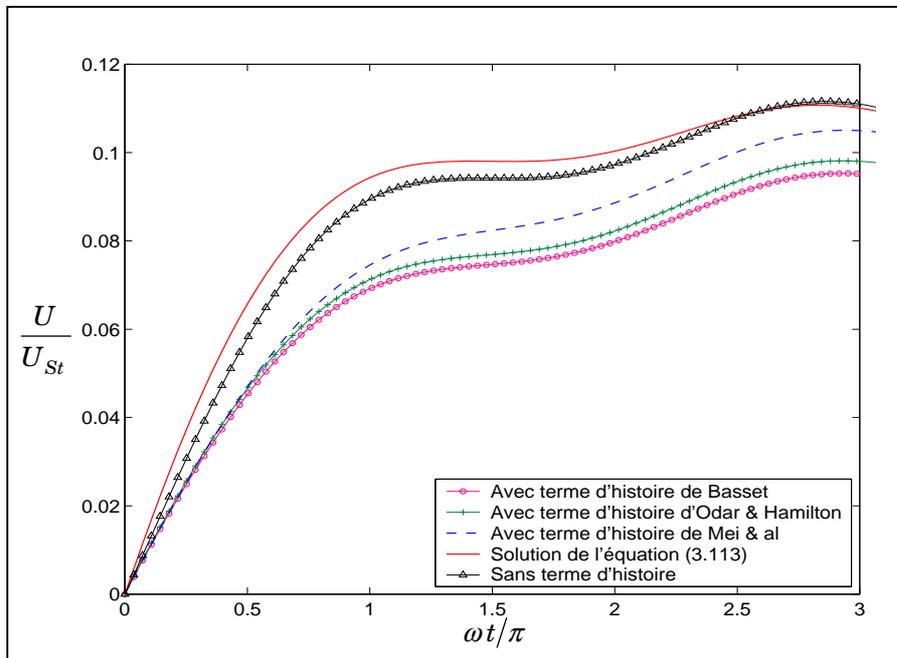


Figure 3.18: Vitesse de la sphère au début de son mouvement
 $Re_e = 324$, $\gamma = 1.3$, $f = 3 \text{ Hz}$

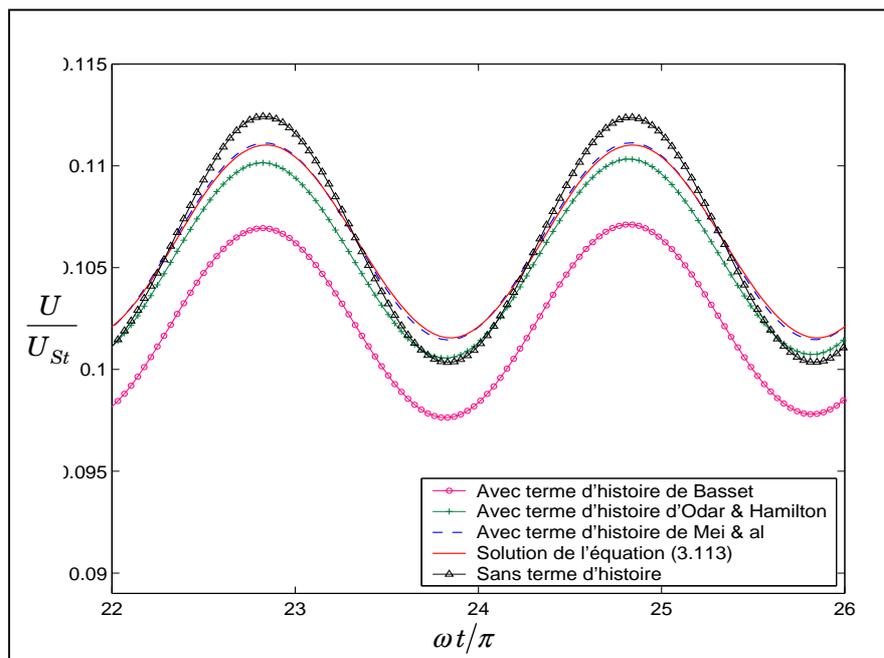


Figure 3.19: Vitesse de la sphère après l'atteinte de la vitesse terminale moyenne, $Re_e = 324$, $\gamma = 1.3$, $f = 3 \text{ Hz}$

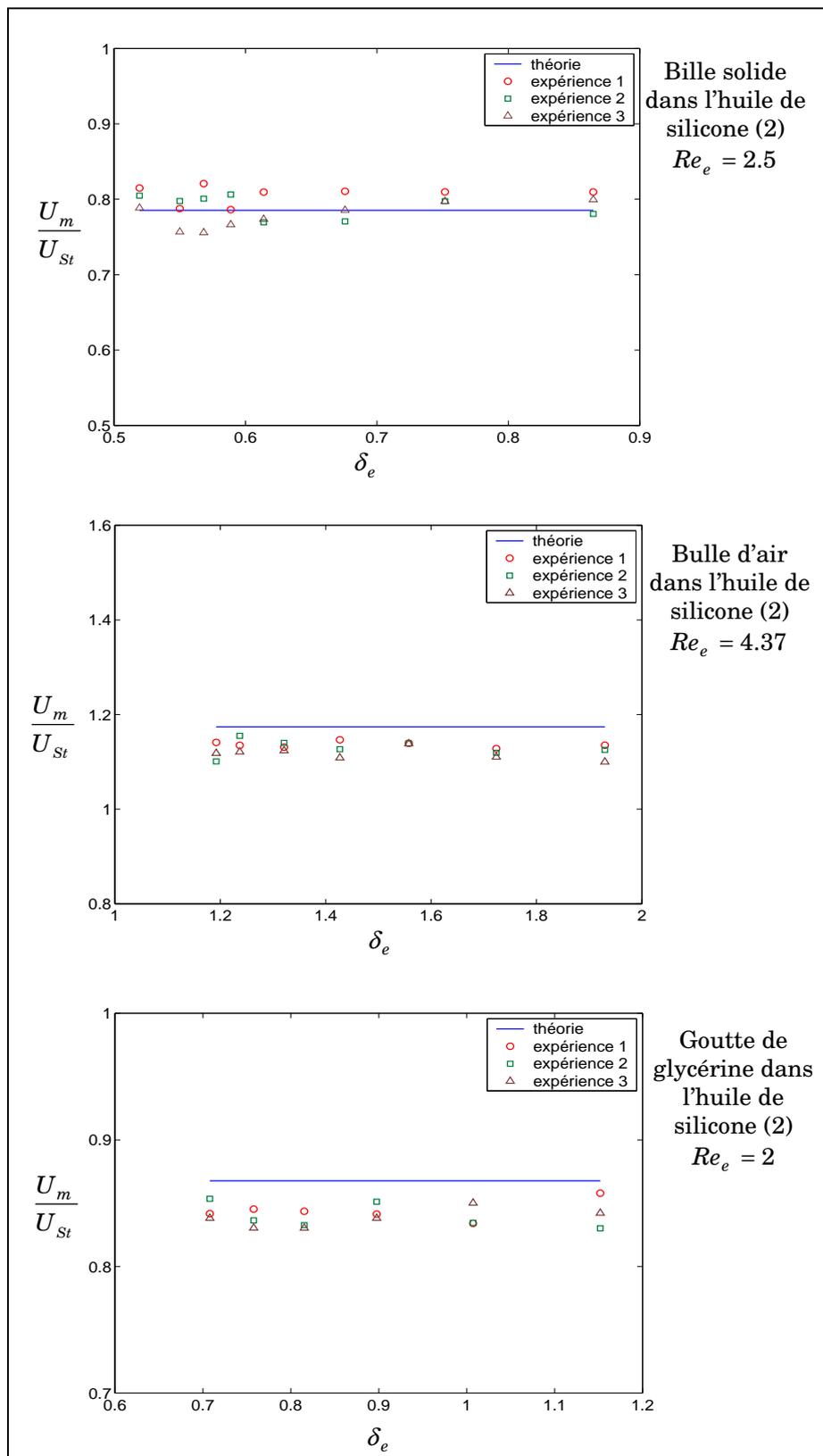


Figure 3.20: Vitesses terminales moyennes de la sphère

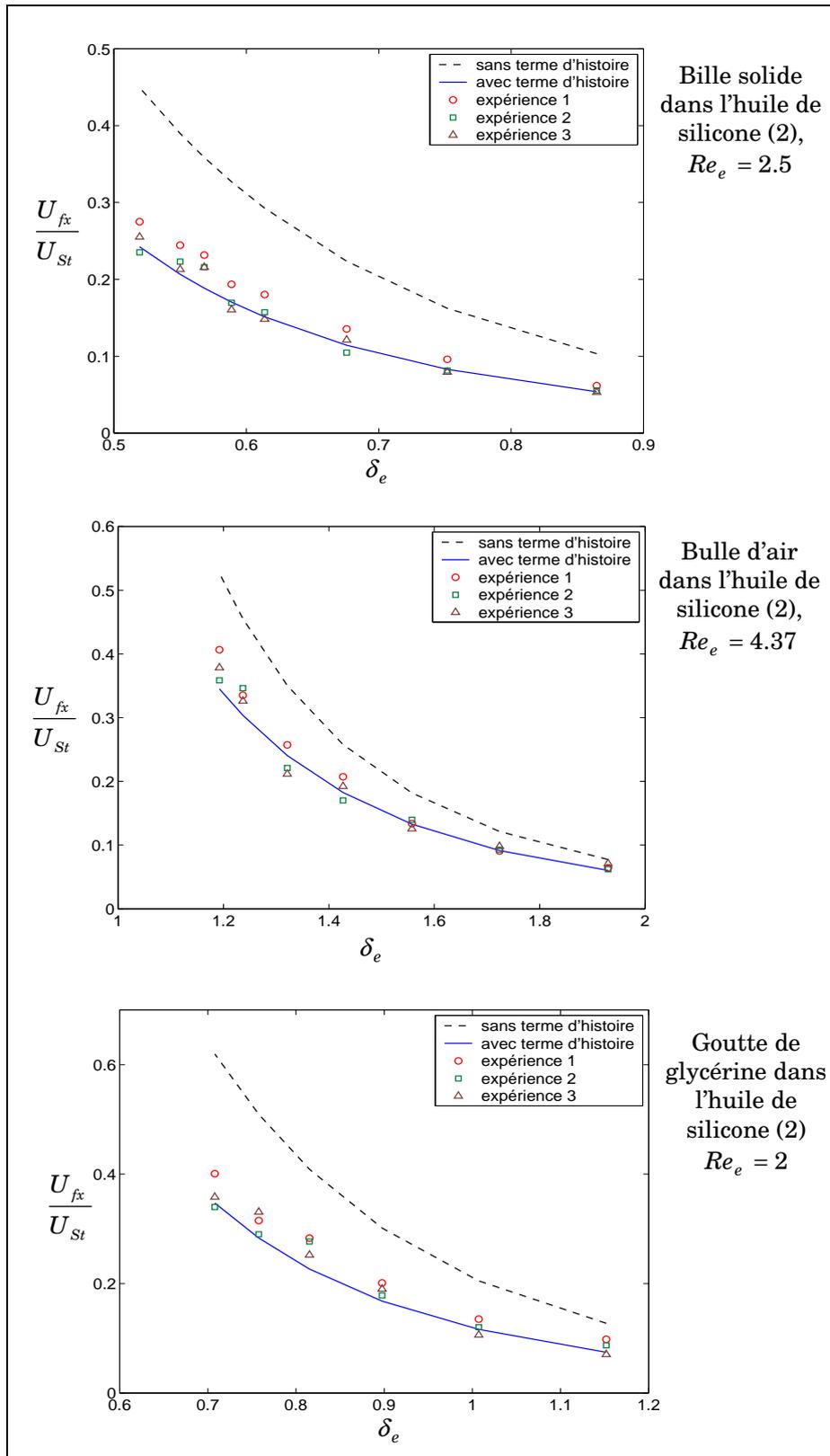


Figure 3.21: Amplitudes des vitesses de la sphère

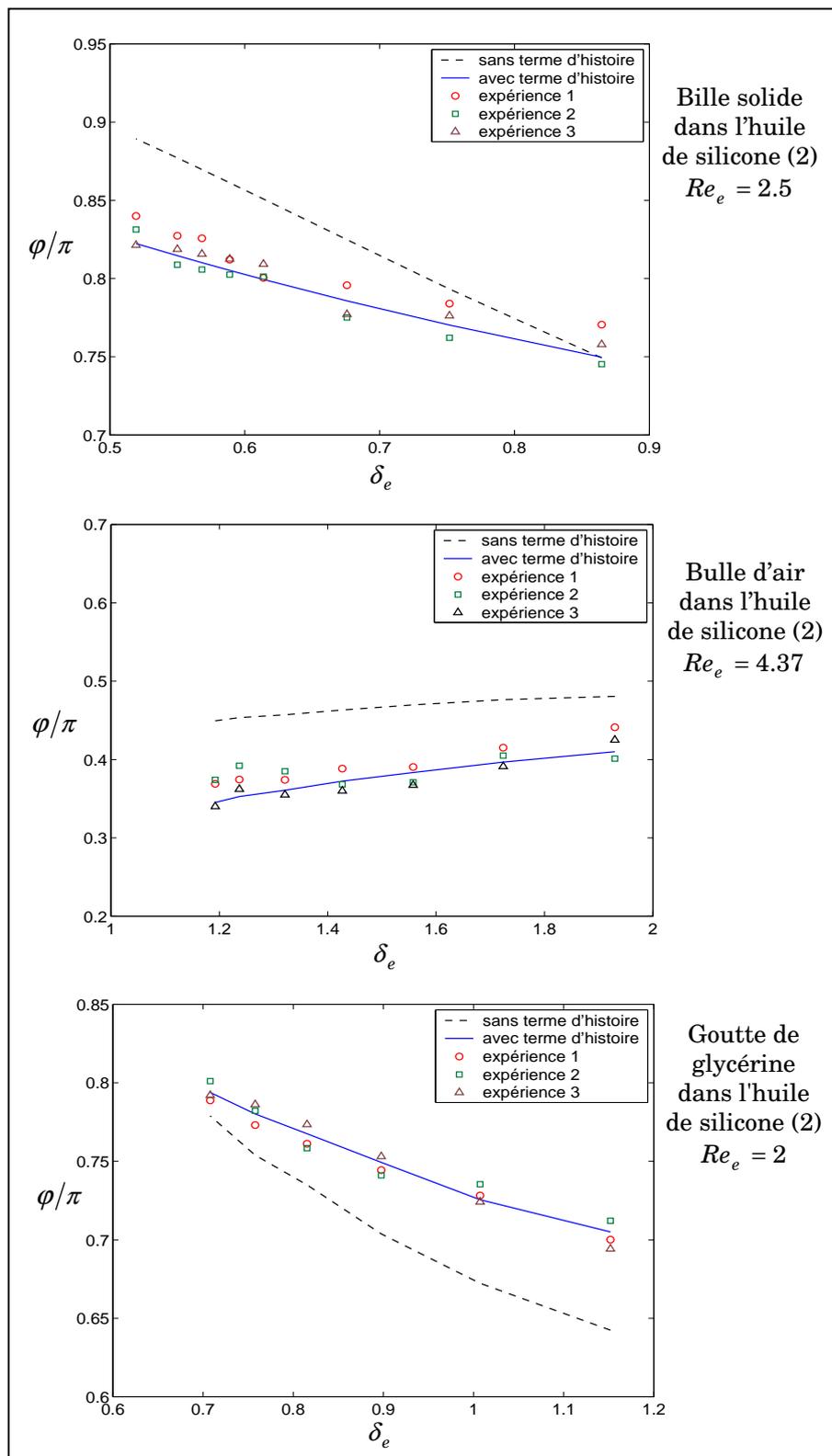


Figure 3.22: Déphasages entre la sphère et le plateau oscillant

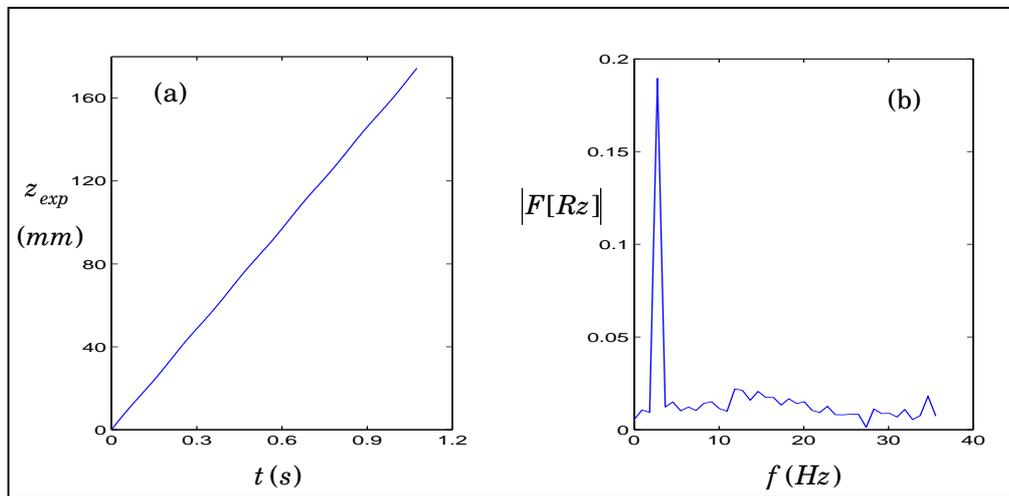


Figure 3.23: Chute libre d'une bille solide dans l'eau
 $Re_e = 709$

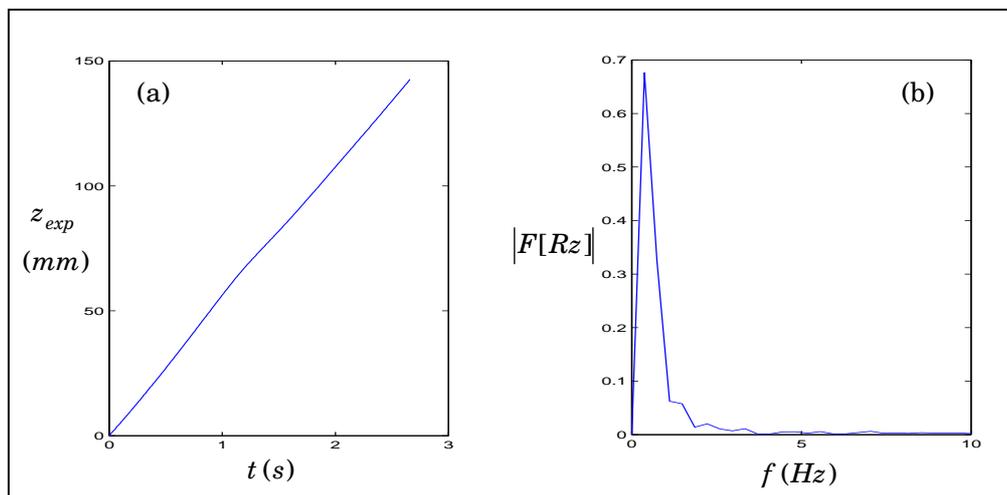


Figure 3.24: Ascension d'une goutte d'huile de silicone (1)
 dans l'eau, $Re_e = 260$

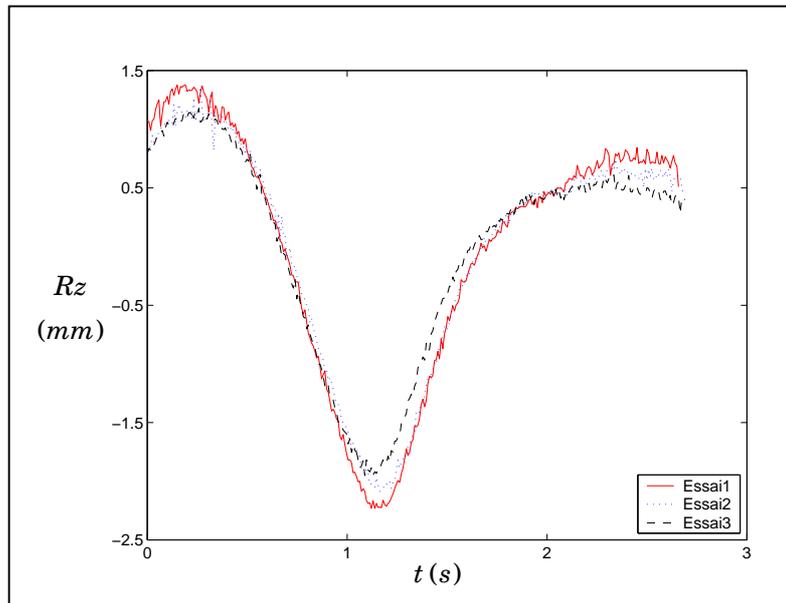


Figure 3.25: Résidu $Rz = z_{exp} - z_m$ pour la goutte d'huile de silicone (1) dans l'eau, $Re_e = 260$

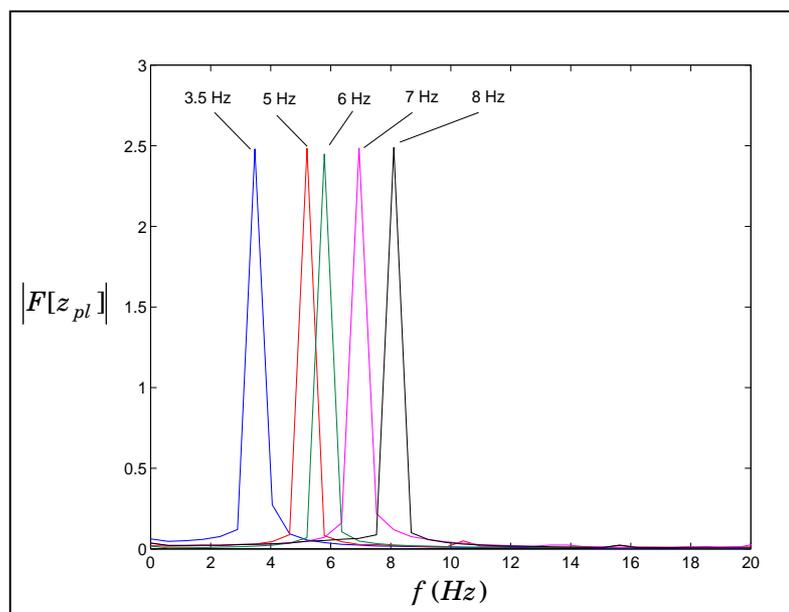


Figure 3.26: Spectres des fréquences des oscillations du plateau

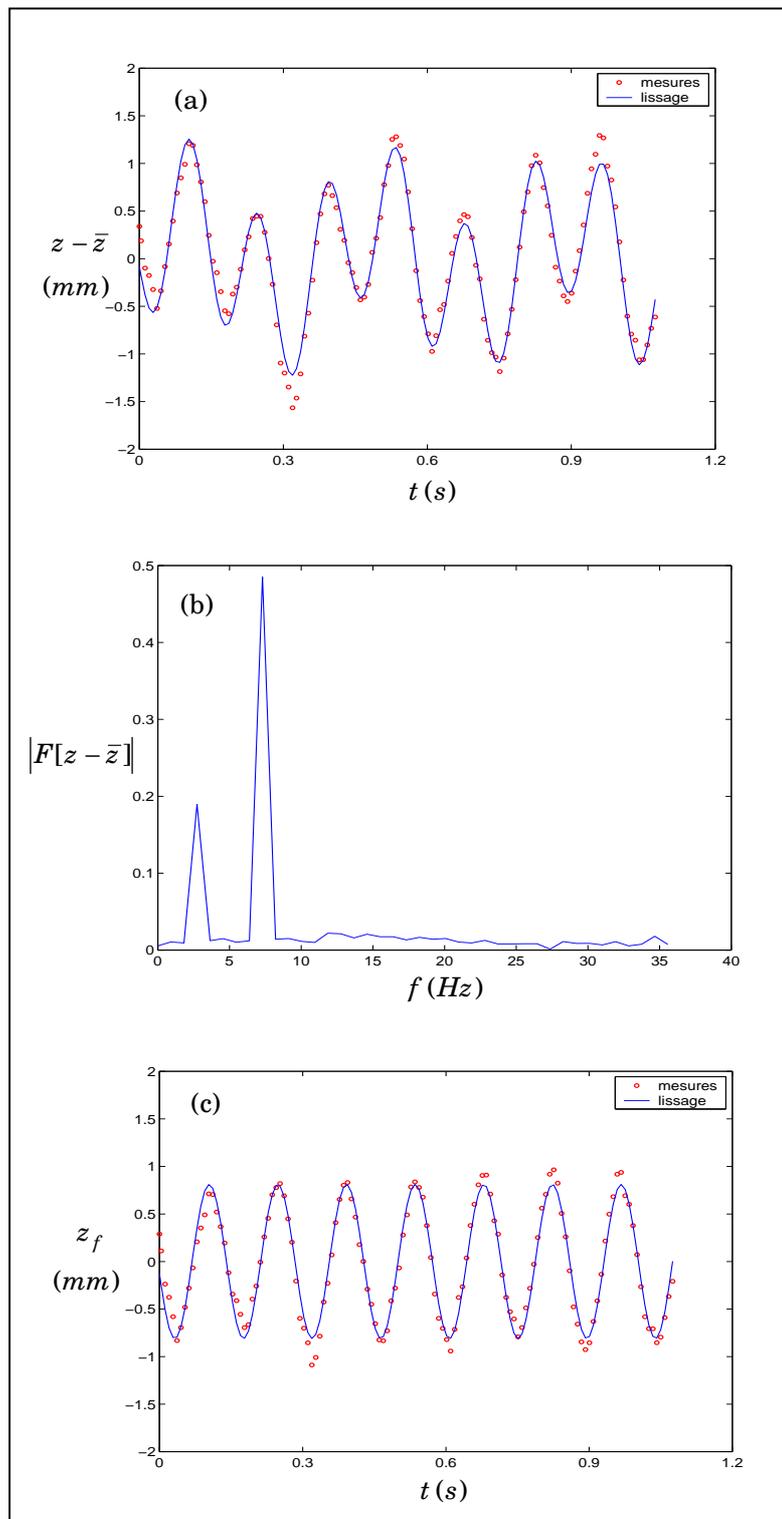


Figure 3.27: Oscillations d'une bille solide dans l'eau
 $Re_e = 709$, fréquence du plateau: 7 Hz

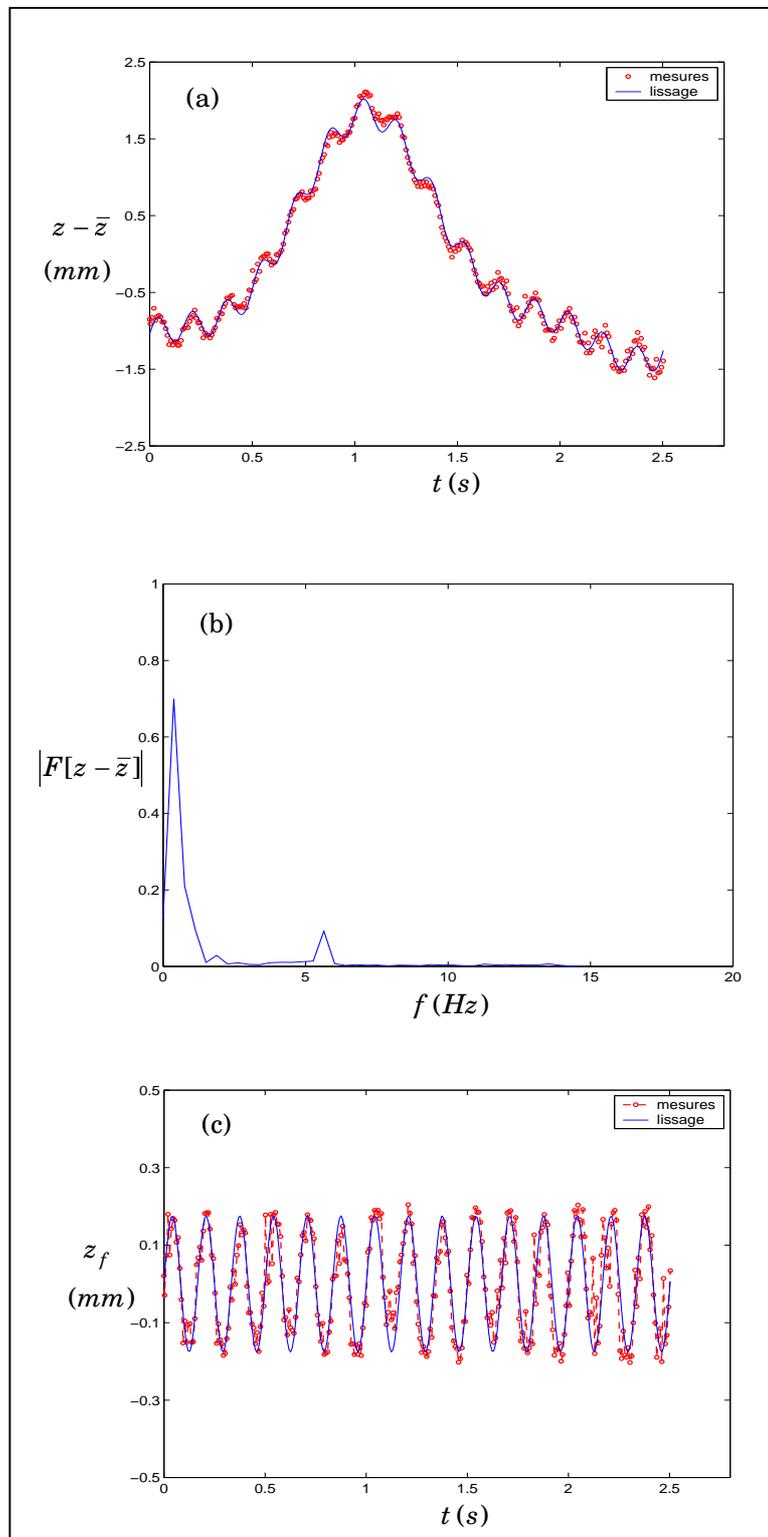


Figure 3.28: Oscillations d'une goutte d'huile de silicone (1) dans l'eau, $Re_e = 260$, fréquence du plateau: 6 Hz

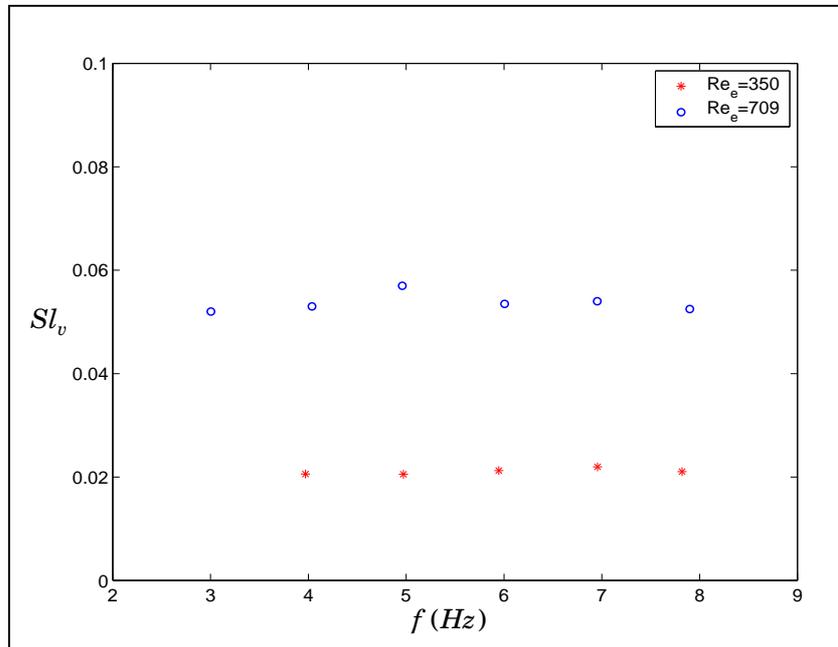


Figure 3.29: Nombre de Strouhal du détachement tourbillonnaire derrière une bille solide en fonction de la fréquence d'oscillations du plateau.

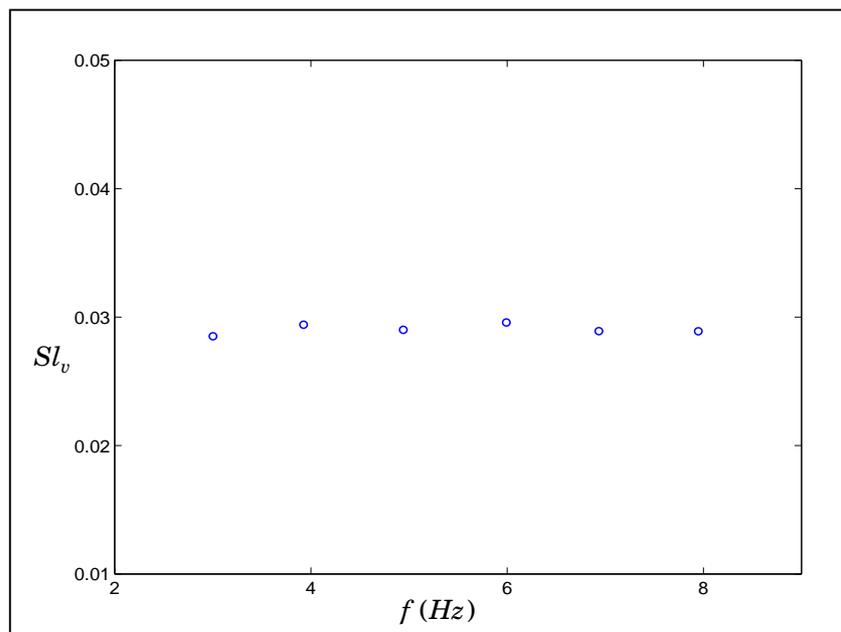


Figure 3.30: Nombre de Strouhal du détachement tourbillonnaire derrière une goutte d'huile de silicone (1) dans l'eau, en fonction de la fréquence d'oscillations du plateau, $Re_e = 260$.

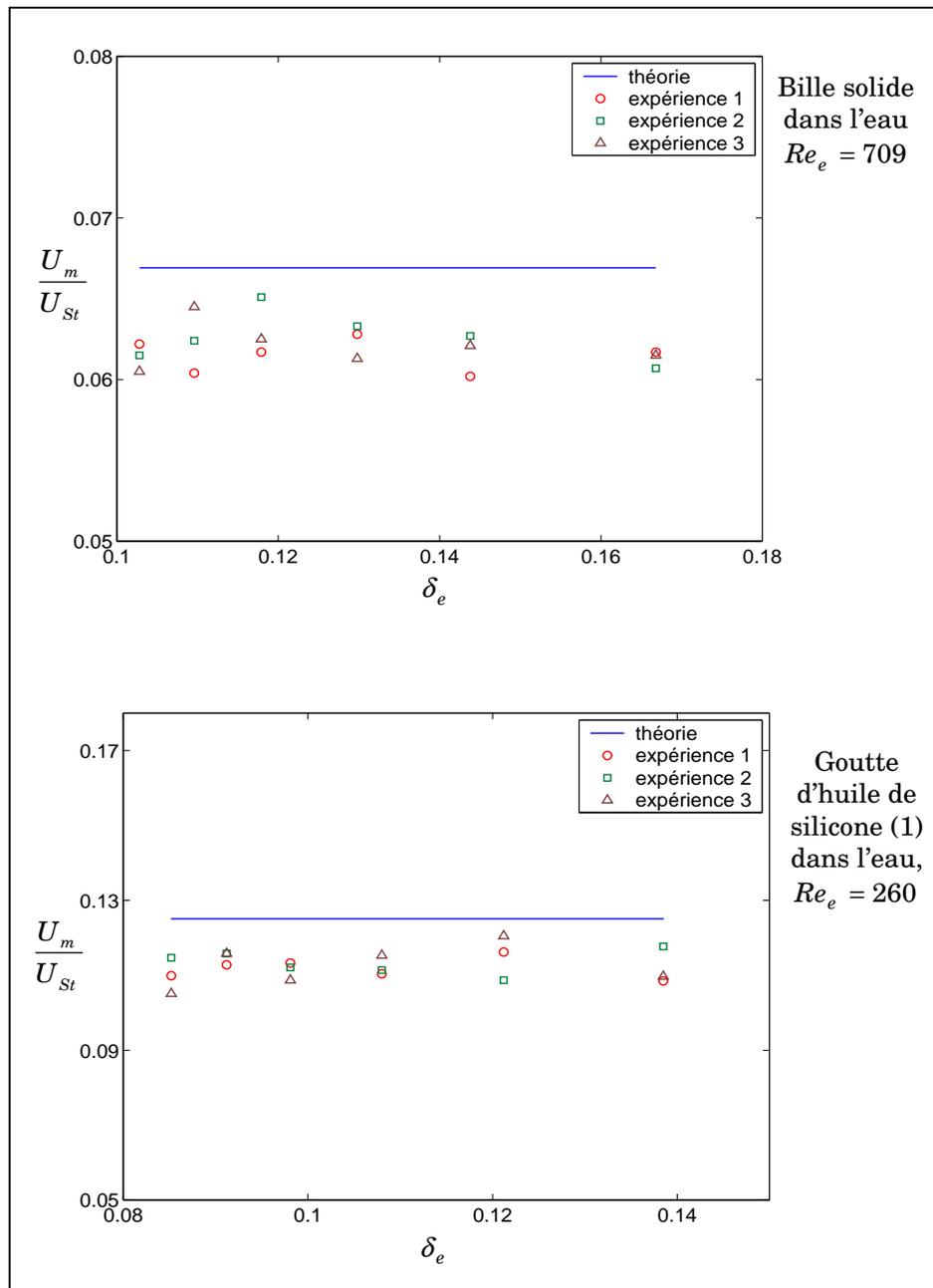


Figure 3.31: Vitesses terminales moyennes de la sphère

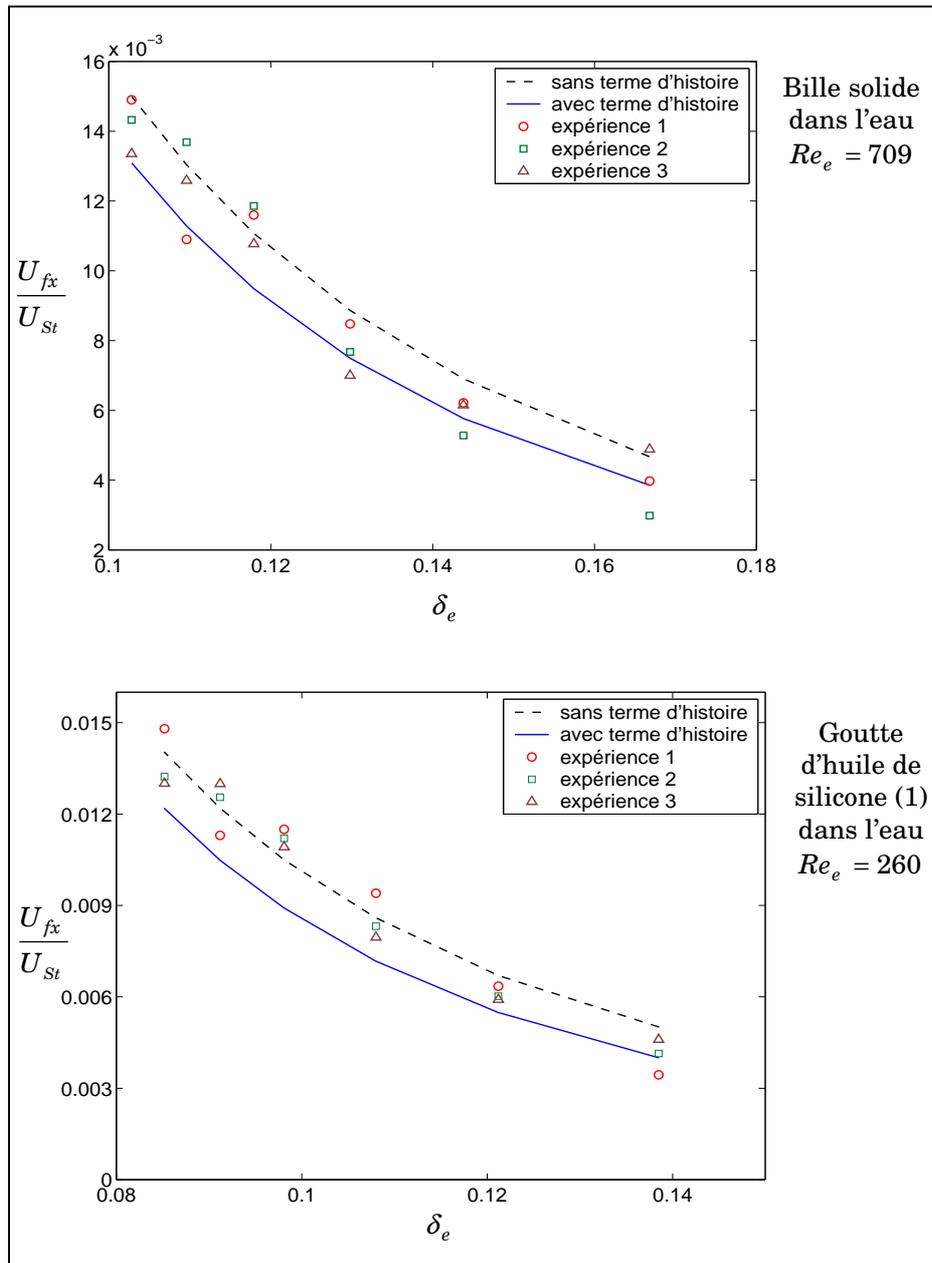


Figure 3.32: Amplitudes des vitesses de la sphère

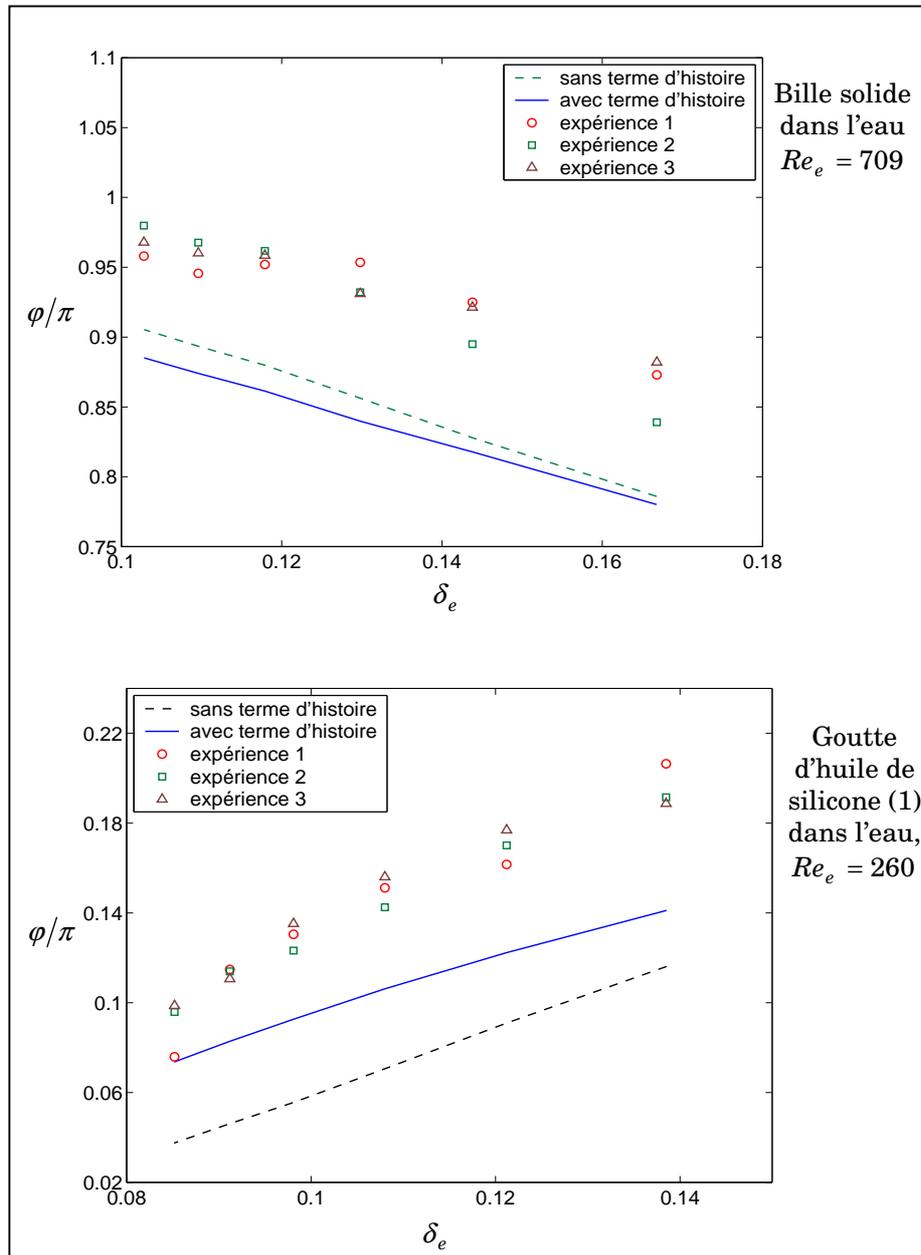


Figure 3.33: Déphasages entre la sphère et le plateau oscillant

Chapitre 4

Chapitre 4

Mouvement instationnaire d'une inclusion fluide ellipsoïdale

Introduction

Dans la majorité des situations qu'on rencontre dans la nature, les inclusions en mouvement dans un milieu infini se présentent rarement sous forme sphérique. Cependant, elles peuvent adopter des géométries diverses présentant certaines symétries axiales ou planes. En ingénierie, on a souvent affaire à des particules axisymétriques, telles que les ellipsoïdes, fortement présentes en écoulements diphasiques à nombres de Morton intermédiaires: mouvements des bulles d'air dans l'eau ou des gouttes d'eau dans l'air. D'un point de vue mathématique, la résolution des équations de Navier-Stokes se complique de plus en plus à mesure qu'on s'éloigne de la configuration sphérique. Ceci est dû essentiellement à l'orientation de la particule qui produit une forte modification de l'écoulement, et aussi à l'ambiguïté du choix de la taille caractéristique de l'inclusion dont sont basés les paramètres adimensionnels tels que le nombre de Reynolds et le nombre de Strouhal. Pour relever ces problèmes, plusieurs auteurs ont procédé à l'extension des résultats obtenus pour le cas d'une sphère, afin de déterminer la force de traînée subit par de telles inclusions. En effet, Lai & Mockros (1972) ont généralisé le résultat de Basset (1.39) et ont établi l'approximation suivante donnant la force de résistance instationnaire exercée sur un ellipsoïde solide de volume \mathcal{V} de demi-axes a_0 et b_0 :

$$\mathbf{F}_D = -C_1 6\pi\mu_e b_0 \mathbf{U} - C_2 \frac{1}{2} \rho_e \mathcal{V} \frac{d\mathbf{U}}{dt} - C_3 6b_0^2 \sqrt{\pi\rho_e\mu_e} \int_{-\infty}^t \frac{d\mathbf{U}/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \quad (4.1)$$

dans la relation (4.1), b_0 est défini comme étant le demi-axe équatorial, perpendiculaire à la direction du mouvement, et les constantes C_1 , C_2 et C_3 sont données par des relations dépendant de l'excentricité $e = a_0/b_0$.

$$C_1 \approx C_3^{1/2} \approx 0.2(4 + e) \quad (4.2)$$

$$C_2 = \begin{cases} \frac{2(e \cos^{-1} e - (1 - e^2)^{1/2})}{(e^2(1 - e^2)^{1/2} - e \cos^{-1} e)} & \text{si } e < 1 \\ \frac{2[e \ln(e + (e^2 - 1)^{1/2}) - (e^2 - 1)^{1/2}]}{e^2(e^2 - 1)^{1/2} - e \ln(e + (e^2 - 1)^{1/2})} & \text{si } e > 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Quelques années plus tard, Lawrence & Weinbaum (1986, 1988) ont traité le cas d'une sphère rigide légèrement déformée en mouvement dans un écoulement rampant. A l'aide d'un schéma de perturbation autour de la forme sphérique, ils ont montré que l'excentricité e de l'inclusion peut produire une modification importante des différentes forces exercées sur l'inclusion. Cependant, l'originalité de leur travail réside dans la présence d'un nouveau terme de mémoire autre que celui de Basset et qui varie plus rapidement que ce dernier et dû uniquement à la non-sphéricité de la particule. Pour le cas d'un ellipsoïde aplati de demi-axes a_0 et $b_0 = a_0(1 + \varepsilon)$ où ε est un paramètre très petit devant l'unité ($\varepsilon \ll 1$), ils ont formulé la force de traînée \mathbf{F}_D comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_D = & -6\pi\mu_e a_0 \left(1 + \frac{4}{5}\varepsilon + \frac{2}{175}\varepsilon^2\right) \mathbf{U} - \frac{1}{2} \rho_e \mathcal{V}_0 \left(1 + \frac{16}{5}\varepsilon + \frac{604}{175}\varepsilon^2\right) \frac{d\mathbf{U}}{dt} \\ & - 6a_0^2 \sqrt{\pi\rho_e\mu_e} \left(1 + \frac{8}{5}\varepsilon + \frac{116}{175}\varepsilon^2\right) \int_0^t \frac{d\mathbf{U}/d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \\ & - \frac{48}{175} \varepsilon^2 a_0^2 \sqrt{\pi\rho_e\mu_e} \int_0^t \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} K_n(t-\tau) d\tau + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (4.4)$$

où $\mathcal{V}_0 = 4\pi a_0^3/3$ correspond au volume de la sphère de rayon a_0 , quant au noyau $K_n(t)$ dans le dernier terme de (4.4), il est défini par :

$$K_n(t) = \mathcal{I}_n \left\{ \sqrt{\pi\alpha/3} \exp(\alpha t) \operatorname{erfc} \sqrt{\alpha t} \right\} \quad \text{et} \quad \alpha = 3(1 + i\sqrt{3})/2 \quad (4.5)$$

Sur la figure 4.1, nous montrons la variation des noyaux respectifs aux deux intégrales d'histoire dans la relation (4.4). On y remarque que les deux fonctions varient différemment et présentent un écart relativement important pour des temps

longs. Quant au temps courts ($t \rightarrow 0$), la fonction $K_n(t)$ est finie contrairement à celle de Basset $t^{-1/2}$.

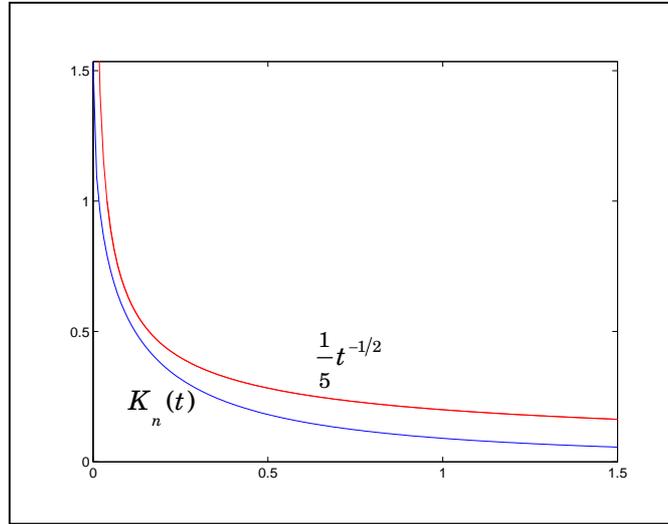


Figure 4.1 : Noyaux d'histoire $t^{-1/2}$ et $K_n(t)$ utilisés dans la relation (4.4)

Inspirés par ce résultat, nous allons suivre dans ce chapitre, le même raisonnement que Lawrence & Weinbaum pour étendre le problème au cas d'une particule fluide ellipsoïdale en mouvement oscillatoire à faibles nombres de Reynolds. Dans un premier temps, nous exprimerons en termes de la fonction de courant la formule générale de la traînée instationnaire exercée sur une inclusion axisymétrique. Ensuite, par un schéma de perturbations régulières et une formulation adéquate des conditions aux limites à l'interface fluide-fluide, nous déterminerons l'écoulement à l'intérieur et à l'extérieur de la particule. Enfin, dans la dernière partie, nous étudierons le comportement de la force de traînée en fonction de la fréquence d'oscillations et nous étendrons son expression dans le cas où l'inclusion effectue son mouvement avec une vitesse arbitraire.

4.1 Force exercée sur un obstacle axisymétrique

Dans un fluide newtonien infini, nous considérons le mouvement instationnaire d'un corps axisymétrique \mathcal{B} sous l'effet de la gravité. Dans le système de coordonnées (O, x, y, z) se déplaçant avec l'obstacle et lié en son centre d'inertie, l'écoulement induit, est gouverné par le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (4.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.7)$$

$$P = p + \rho g z \left(1 - \frac{1}{g} \frac{dU(t)}{dt}\right) \quad (4.8)$$

où $U(t)$ est la vitesse de l'obstacle dirigée dans le sens négatif de l'axe de symétrie (Oz), tel qu'il est indiqué sur la figure 4.2.

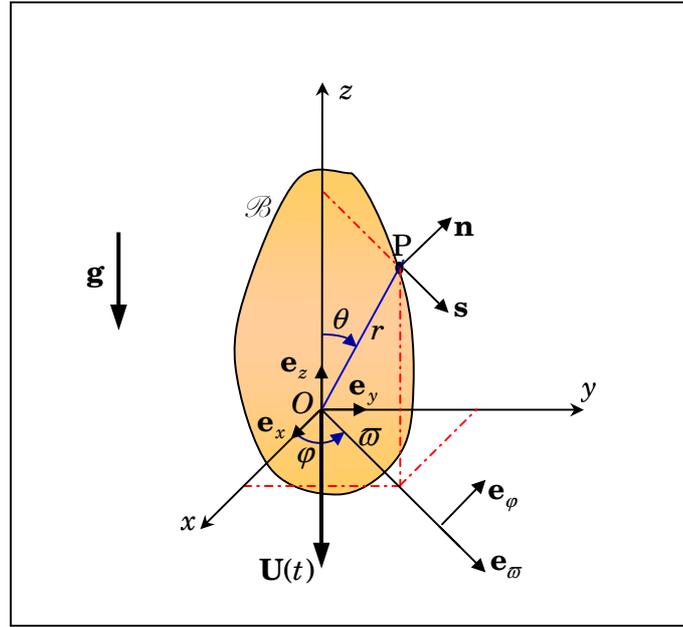


Figure 4.2 : Corps axisymétrique \mathcal{B} et systèmes de coordonnées cartésiennes (x, y, z) , sphériques (r, θ, φ) , cylindriques (ϖ, φ, z) et curvilignes (n, s, φ) ,

L'écoulement est supposé à faibles nombres de Reynolds: $Re = DU/\nu \ll 1$, où D est la taille caractéristique de l'inclusion. En raison de la symétrie du problème, le champ de vitesse \mathbf{v} peut être lié à la fonction de courant Ψ par la relation suivante :

$$\mathbf{v} = \nabla \wedge \left(\frac{\Psi}{\varpi} \mathbf{e}_\varphi \right) \quad (4.9)$$

avec $\varpi = (x^2 + y^2)^{1/2}$ correspondant à la coordonnée cylindrique du système (O, ϖ, φ, z) ayant les vecteurs unitaires $(\mathbf{e}_\varpi, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$. Pour déterminer la force hydrodynamique subit par l'obstacle, il est souvent commode d'écrire la vitesse du fluide sur la surface de l'inclusion. Pour cela, on définit en un point P de \mathcal{B} un système de coordonnées curvilignes locales (n, s, φ) où \mathbf{n} , \mathbf{s} et \mathbf{e}_φ représenteront les vecteurs unitaires

correspondants : normal, tangentiel et azimutale. Dans ce système, la vitesse \mathbf{v} et l'opérateur ∇ seront exprimés comme suit :

$$\mathbf{v} = v_n \mathbf{n} + v_s \mathbf{s} \quad (4.10)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{s} + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (4.11)$$

et en vertu de la relation (4.11) les composantes du champ de vitesse seront données par:

$$v_n = \frac{1}{\varpi} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \quad (4.12)$$

$$v_s = -\frac{1}{\varpi} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \quad (4.13)$$

Pour un fluide visqueux incompressible, le tenseur de contraintes est donné par la relation générale:

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = -p \overline{\overline{\mathbf{I}}} + \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \quad (4.14)$$

en un élément de surface δS de vecteur normal extérieur \mathbf{n} , le vecteur de contrainte \mathbf{T}_n prend la forme :

$$\mathbf{T}_n = \overline{\overline{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{n} = \left(-p + 2\mu \frac{\partial v_n}{\partial n} \right) \mathbf{n} + \mu \left(\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n} \right) \mathbf{s} \quad (4.15)$$

la manipulation de premier terme de la relation (4.15), nous permet d'écrire :

$$\mathbf{T}_n = -p \mathbf{n} + 2\mu \left(\frac{\partial v_n}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial v_n}{\partial s} \mathbf{s} \right) + \mu \left(\frac{\partial v_s}{\partial n} - \frac{\partial v_n}{\partial s} \right) \mathbf{s} \quad (4.16)$$

d'après les relations (4.11) et (4.12), le deuxième terme du vecteur de contrainte \mathbf{T}_n devient :

$$2\mu \left(\frac{\partial v_n}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial v_n}{\partial s} \mathbf{s} \right) = 2\mu \nabla \left(\frac{1}{\varpi} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right) \quad (4.17)$$

quant au dernier terme, il s'exprime en fonction de la vorticité ζ comme suit :

$$\zeta = \nabla \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_s}{\partial n} - \frac{\partial v_n}{\partial s} \right) \mathbf{e}_\varphi = -\frac{1}{\varpi} \mathcal{D}^2(\Psi) \mathbf{e}_\varphi \quad (4.18)$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{D}^2 = \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \bar{\omega} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial s} \right) \quad (4.19)$$

$$\text{et} \quad \mu \left(\frac{\partial v_s}{\partial n} - \frac{\partial v_n}{\partial s} \right) \mathbf{s} = \mu (\zeta \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{s} = -\frac{\mu}{\bar{\omega}} \mathcal{D}^2(\Psi) \mathbf{s} \quad (4.20)$$

finalemt, la contribution du tenseur de contraintes visqueuses s'exprime au moyen de la fonction de courant comme suit :

$$\boldsymbol{\tau}_n = \overset{=}{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{n} = 2\mu \nabla \left(\frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right) - \frac{\mu}{\bar{\omega}} \mathcal{D}^2(\Psi) \mathbf{s} \quad (4.21)$$

en ce qui concerne le terme de la pression P , il peut être lié à la fonction de courant Ψ à partir des équations de Stokes (4.6) :

$$\nabla P = -\mu \nabla \wedge \zeta - \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (4.22)$$

$$\text{où} \quad \Delta \mathbf{v} = -\nabla \wedge \zeta = \frac{1}{\bar{\omega}} \left(\frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{D}^2 \Psi) \mathbf{n} - \frac{\partial}{\partial n} (\mathcal{D}^2 \Psi) \mathbf{s} \right) \quad (4.23)$$

finalemt, d'après les relations (4.12) et (4.13) on aura :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\mu}{\bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathcal{D}^2 \Psi - \frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \rho g f_a(t) \frac{\partial z}{\partial s} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{\mu}{\bar{\omega}} \frac{\partial}{\partial n} \left(\mathcal{D}^2 \Psi - \frac{1}{v} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \rho g f_a(t) \frac{\partial z}{\partial n} \quad (4.25)$$

où $f_a(t)$ représente le rapport de l'accélération de l'inclusion et de la pesanteur, il peut être déduit de la relation (4.8) :

$$f_a(t) = 1 - \frac{1}{g} \frac{dU(t)}{dt} \quad (4.26)$$

En tenant compte de la symétrie de l'écoulement, l'intégration du tenseur de contraintes sur toute la surface de l'obstacle donne lieu à une force totale \mathbf{F} , dont la seule composante non nulle est dirigée suivant la direction positive de l'axe de révolution (Oz) :

$$F_z = \iint_{\mathcal{B}} \mathbf{T}_n \cdot \mathbf{e}_z \, dS = \iint_{\mathcal{B}} T_{nz} \, dS \quad (4.27)$$

dans ce cas la composante T_{nz} est donnée par :

$$T_{nz} = -p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z) + 2\mu(\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \left(\frac{1}{\varpi} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \right) - \frac{\mu}{\varpi} \mathcal{D}^2(\Psi)(\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_z) \quad (4.28)$$

sachant que :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial \varpi}{\partial s} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_\varpi \quad (4.29)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_\varpi = \frac{\partial \varpi}{\partial n} = -\frac{\partial z}{\partial s} = -\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_z \quad (4.30)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial z}, \quad v_\varpi = -\frac{1}{\varpi} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \quad (4.31)$$

$$-p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z) = -p \frac{\partial \varpi}{\partial z} = -\frac{1}{2\varpi} \left(\frac{\partial}{\partial s} (\varpi^2 p) - \varpi^2 \frac{\partial p}{\partial s} \right) \quad (4.32)$$

$$\delta S = 2\pi\varpi \delta s \quad (4.33)$$

la force F_z va s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} F_z = \pi \int_{P_0}^{P_1} \varpi^2 \frac{\partial p}{\partial s} ds + 2\pi\mu \int_{P_0}^{P_1} (\mathcal{D}^2 \Psi) \frac{\partial \varpi}{\partial n} ds \\ - \pi \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial}{\partial s} (\varpi^2 p) ds - 4\pi\mu \int_{P_0}^{P_1} \frac{\partial}{\partial s} (\varpi v_\varpi) ds \end{aligned} \quad (4.34)$$

l'intégration de la relation (4.34) s'effectue sur la surface de l'obstacle entre les points P_0 et P_1 constituant l'intersection de la surface de l'inclusion \mathcal{B} avec l'axe de révolution (Oz), tel qu'il est illustré sur la figure 4.3. Ces deux points correspondent à la valeur nulle de ϖ , et par conséquent, les deux dernières intégrales de la relation (4.34) vont s'annuler et la force F_z deviendra :

$$F_z = \pi \int_{P_0}^{P_1} \varpi^2 \frac{\partial p}{\partial s} ds + 2\pi\mu \int_{P_0}^{P_1} (\mathcal{D}^2 \Psi) \frac{\partial \varpi}{\partial n} ds \quad (4.35)$$

En remplaçant la quantité $\partial p / \partial s$ par sa valeur donnée par l'expression (4.25), et après certaines simplifications, la force de traînée totale exercée sur l'obstacle sera donnée en termes de la fonction de courant, comme suit :

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z = -\pi\mu \int_{P_0}^{P_1} \varpi^3 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\mathcal{D}^2 \Psi}{\varpi^2} \right) ds + \pi\rho \int_{P_0}^{P_1} \varpi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) ds + \pi\rho g f_a(t) \int_{P_0}^{P_1} \varpi^2 \frac{\partial \varpi}{\partial n} ds \quad (4.36)$$

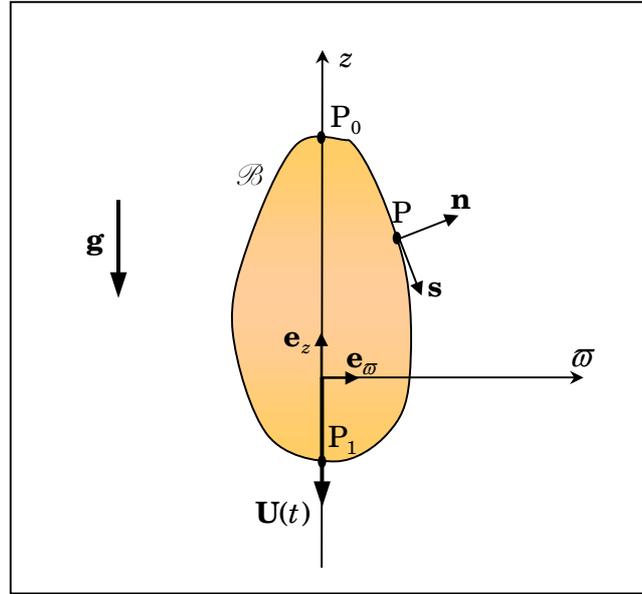


Figure 4.3 : Bornes d'intégration sur la surface de l'inclusion

4.2 Écoulement autour d'une inclusion fluide ellipsoïdale

4.2.1 Position du problème

Considérons à présent une inclusion fluide visqueuse \mathcal{E} effectuant un mouvement oscillatoire autour de sa position initiale O , avec une vitesse $U(t) = U_f \cos(\omega t)$. En respectant la même configuration spatiale que celle du corps \mathcal{B} mentionné dans le paragraphe précédent (figure 4.2), l'inclusion est supposée avoir une forme axisymétrique et approximativement sphérique : forme ellipsoïdale aplatie de demi-axes a_0 et b_0 où $a_0 < b_0$, comme le montre la figure 4.4. Les écoulements à l'intérieur (indice "i") et à l'extérieur (indice "e") de la particule sont décrits par les équations (4.6) et (4.7), et soumis aux conditions suivantes :

$$Re_e = \frac{2a_0 U_f}{\nu_e} \ll 1 \quad \text{avec} \quad a_0 < b_0 \quad (4.37)$$

$$Re_e Sl \sim O(1) \quad \text{avec} \quad Sl = \frac{a_0 \omega}{U_f} \quad (4.38)$$

$$M = \frac{\mu_e g (\rho_i - \rho_e)}{\rho_e^2 \sigma^3} \sim O(1) \quad (4.39)$$

où Sl est le nombre de Strouhal et M est le nombre de Morton. Etant de l'ordre de l'unité, ce dernier paramètre adimensionnel dépend de la tension superficielle σ , et

nous permet, en combinaison avec le nombre de Reynolds, de justifier la forme ellipsoïdale aplatie de l'inclusion (diagramme 1.12 de Clift & al.)

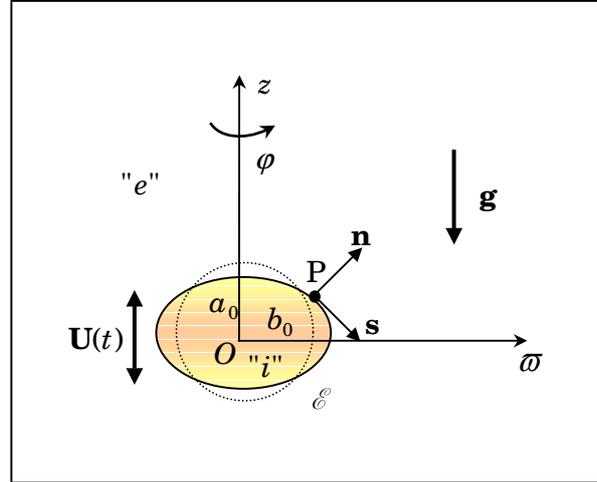


Figure 4.4 : Inclusion fluide ellipsoïdale en mouvement oscillatoire.

4.2.2 Équation de surface de l'inclusion

Compte tenu de la légère déformation de l'inclusion par rapport à la forme sphérique, on peut écrire son équation de surface dans le référentiel (O, ϖ, φ, z) , comme suit :

$$\frac{\varpi^2}{b_0^2} + \frac{z^2}{a_0^2} = 1 \quad (4.40)$$

$$\text{tel que} \quad b_0 = a_0(1 + \varepsilon) \quad (4.41)$$

où ε est un paramètre arbitraire de perturbation très petit devant l'unité: $\varepsilon \ll 1$. Sous l'hypothèse (4.41), l'équation de la surface peut se reformuler en coordonnées sphériques (r, θ, φ) par la relation suivante :

$$\frac{r}{a_0} = \left(\frac{(1 + \varepsilon)^2}{1 - \beta^2 + (1 + \varepsilon)^2 \beta^2} \right)^{1/2} \quad (4.42)$$

$$\text{avec} \quad \beta = \cos \theta \quad (4.43)$$

Le développement en séries de Taylor au voisinage de $\varepsilon \rightarrow 0$, nous permet d'écrire (4.45) sous la forme :

$$\frac{r}{\alpha_0} = 1 + 2\varepsilon \mathcal{F}_2(\beta) - \frac{3}{5}\varepsilon^2(\mathcal{F}_2(\beta) + 4\mathcal{F}_4(\beta)) + O(\varepsilon^3) \quad (4.44)$$

où $\mathcal{F}_n(\beta)$ représente la fonction de Gegenbauer de première espèce, d'ordre n et de degrés $-1/2$. Les caractéristiques de cette fonction sont détaillées dans l'annexe B, où on a pour $n = 2, 3$, et 4 :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= 1, & \mathcal{F}_1 &= -\beta, & \mathcal{F}_2 &= \frac{1}{2}(1 - \beta^2) \\ \mathcal{F}_3 &= \frac{1}{2}\beta(1 - \beta^2), & \mathcal{F}_4 &= \frac{1}{8}(1 - \beta^2)(5\beta^2 - 1) \end{aligned} \quad (4.45)$$

En ne retenant que la perturbation du premier ordre, l'équation (4.44) s'écrit d'une manière générale :

$$\Theta(r, \beta) = r - \alpha_0(1 + \xi(\beta)) = 0 \quad (4.46)$$

$$\text{tel que } |\xi(\beta)| = |2\varepsilon \mathcal{F}_2(\beta)| \ll 1 \quad (4.47)$$

La détermination du vecteur unitaire normal au point P de l'interface, se fait à partir de la relation suivante :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\Theta}{\|\nabla\Theta\|} \quad (4.48)$$

$$\text{où } \nabla\Theta = \mathbf{e}_r + (1 - \beta^2)^{1/2} \frac{\alpha_0}{r} \frac{d\xi}{d\beta} \mathbf{e}_\theta \quad (4.49)$$

L'hypothèse des faibles déformations nous permet d'approcher la composante tangentielle du vecteur $\nabla\Theta$ par :

$$\tan \alpha \equiv -(1 - \beta^2)^{1/2} \frac{\alpha_0}{r} \frac{d\xi}{d\beta} = -\frac{(1 - \beta^2)^{1/2}}{(1 + \xi)} \frac{d\xi}{d\beta} \sim -(1 - \beta^2)^{1/2} \frac{d\xi}{d\beta} \quad (4.50)$$

et par conséquent, le vecteur normal \mathbf{n} et le vecteur tangentiel \mathbf{s} au point P s'écriront ainsi:

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{e}_r - \sin \alpha \mathbf{e}_\theta \quad (4.51)$$

$$\mathbf{s} = \sin \alpha \mathbf{e}_r + \cos \alpha \mathbf{e}_\theta \quad (4.52)$$

4.2.3 Champ de vitesses et de contraintes à l'interface

Etant donné que l'écoulement est axisymétrique, les composantes v_n et v_s des champs de vitesses à la frontière de l'inclusion sont exprimées en coordonnées sphériques par la substitution des relations (4.51) et (4.52) dans (4.10). On aura donc :

$$v_n = v_r + v_\theta (1 - \beta^2)^{1/2} \frac{d\xi}{d\beta} \quad (4.53)$$

$$v_s = v_\theta - v_r (1 - \beta^2)^{1/2} \frac{d\xi}{d\beta} \quad (4.54)$$

de la même manière, le vecteur de contrainte T_n , défini par la relation (4.15), peut s'écrire :

$$\overline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_n = T_{nn} \mathbf{n} + T_{ns} \mathbf{s} \quad (4.55)$$

avec
$$T_{nn} = -p + \tau_{nn} = -p + \tau_{rr} + 2\tau_{r\theta} (1 - \beta^2)^{1/2} \frac{d\xi}{d\beta} \quad (4.56)$$

$$T_{ns} = \tau_{ns} = \tau_{r\theta} - (\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}) (1 - \beta^2)^{1/2} \frac{d\xi}{d\beta} \quad (4.57)$$

où τ_{rr} , $\tau_{\theta\theta}$ et $\tau_{r\theta}$ représentent les composantes du tenseur de contraintes visqueuses en coordonnées sphériques. Elles sont définies comme suit :

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (4.58)$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \quad (4.59)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (4.60)$$

4.2.4 Conditions aux limites à l'interface

Dans le but d'établir les conditions aux limites que doivent satisfaire les deux champs hydrodynamiques (intérieur et extérieur) à la frontière de l'inclusion, nous supposons que celle-ci reste ellipsoïdale aplatie avec une tension superficielle constante sur toute la surface. Aussi nous négligeons toutes oscillations propres de l'interface qui peuvent être produites par le mouvement de l'inclusion.

Pour les conditions d'imperméabilité (1.84) et (1.85), la substitution de la relation (4.55) nous permet d'écrire :

$$v_{r_i} + v_{\theta_i} (1 - \beta^2)^{1/2} \frac{d\xi}{d\beta} = 0 \quad (4.61)$$

$$v_{r_e} + v_{\theta_e} (1 - \beta^2)^{1/2} \frac{d\xi}{d\beta} = 0 \quad (4.62)$$

En ce qui concerne les conditions du saut de quantité de mouvement (1.87) et (1.88), elles peuvent se reformuler de la manière suivante :

$$(p_i - p_e) + (\tau_{rr_e} - \tau_{rr_i}) + 2(\tau_{r\theta_e} - \tau_{r\theta_i})(1 - \beta^2)^{1/2} \frac{d\xi}{d\beta} = \frac{2\sigma}{a} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.63)$$

$$(\tau_{r\theta_e} - \tau_{r\theta_i}) - ((\tau_{rr_e} - \tau_{rr_i}) - (\tau_{\theta\theta_e} - \tau_{\theta\theta_i}))(1 - \beta^2)^{1/2} \frac{d\xi}{d\beta} = 0 \quad (4.64)$$

où les rayons principaux de courbure R_1 et R_2 sont donnés, d'après Landau & Lifschitz (1959), par:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{a_0} \left(2 - 2\xi - \frac{d}{d\beta} \left((1 - \beta^2) \frac{d\xi}{d\beta} \right) \right) \quad (4.65)$$

Finalement, la condition du saut d'énergie (1.90) devient :

$$(v_{\theta_e} - v_{\theta_i}) \left(\tau_{r\theta_e} - (\tau_{rr_e} - \tau_{\theta\theta_e})(1 - \beta^2)^{1/2} \frac{d\xi}{d\beta} \right) = 0 \quad (4.66)$$

4.2.5 Détermination des champs hydrodynamiques

En vertu de la nature oscillatoire harmonique du mouvement de l'inclusion, la dépendance par rapport au temps peut être séparée en introduisant les variables adimensionnelles ψ^* , \mathbf{v}^* et \mathbf{T}^* qui correspondent respectivement à la fonction de courant, le champ de vitesse et le tenseur de contraintes, tels que :

$$\Psi(r, \theta, t) = \text{Re} (\psi^*(r^*, \theta) e^{-it^*}) a_0^2 U_f \quad (4.67)$$

$$\mathbf{v}(r, \theta, t) = \text{Re} (\mathbf{v}^*(r^*, \theta) e^{-it^*}) U_f \quad (4.68)$$

$$\mathbf{T}(r, \theta, t) = \text{Re} (\mathbf{T}^*(r^*, \theta) e^{-it^*}) \rho U_f^2 \quad (4.69)$$

$$\text{avec} \quad r^* = r/a_0 \quad \text{et} \quad t^* = \omega t \quad (4.70)$$

où l'opérateur \mathcal{R}_e dénote ici la partie réelle de la quantité considérée, et qui sera ignoré tout comme l'indice (*) dans le but d'alléger l'écriture. Sous ces considérations, le système d'équations (4.6) et (4.7) va se réduire à :

$$\mathcal{D}^2(\mathcal{D}^2 - k^2)\psi = 0 \quad (4.71)$$

$$k = (-i\omega a_0^2/\nu)^{1/2} \quad (4.72)$$

Pour simplifier la résolution de (4.71), il est très commode de déplacer les conditions aux limites à l'interface de $r = 1 + \xi(\beta)$ à $r = 1$, en développant la fonction de courant ψ en séries de Taylor au voisinage de 1, tel que :

$$\psi(r, \beta; \varepsilon) = \psi_0(r, \beta) + \varepsilon\psi_1(r, \beta) + O(\varepsilon^2) \quad (4.73)$$

Comme il a été détaillé dans le chapitre 3, la décomposition de la fonction de courant en partie potentielle et en partie de diffusion nous permet d'avoir les solutions générales suivantes :

$$\psi(r, \beta; \varepsilon) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_{0n}(r)\mathcal{F}_n(\beta) + \varepsilon \sum_{l=2}^{+\infty} f_{1l}(r)\mathcal{F}_l(\beta) + O(\varepsilon^2) \quad (4.74)$$

où les fonctions $f_{jn}(r)$ sont données pour l'écoulement à l'intérieur et à l'extérieur de l'ellipsoïde, comme suit :

écoulement intérieur ("i")

$$f_{jn}^i(r) = A_{jn}^i r^n + B_{jn}^i r^{-n+1} + E_{jn}^i k_i^{-n+2} \left(r^n \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{n-1} \left(\frac{\sinh(k_i r)}{k_i r} \right) \right) \quad (4.75)$$

écoulement extérieur ("e")

$$f_{jn}^e(r) = A_{jn}^e r^n + B_{jn}^e r^{-n+1} + E_{jn}^e k_e^{-n+2} \left(r^n \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{n-1} \left(\frac{\exp(-k_e r)}{k_e r} \right) \right) \quad (4.76)$$

où A, B , et E sont des constantes à déterminer. D'après la condition aux limites de l'écoulement uniforme loin de l'inclusion, la fonction de courant ψ vérifie :

$$\psi = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad \text{quand } r \rightarrow \infty \quad (4.77)$$

mais en revenant au repère absolu où on a le champ de vitesse $\mathbf{v}^{ab} = \mathbf{v} + \mathbf{U}(t)$ et une fonction de courant correspondante ψ^{ab} , la condition (4.77) doit être satisfaite par les deux fluides à la frontière de l'ellipsoïde, tel que :

$$\psi_{r=1+\xi(\beta)}^{ab} = -\frac{1}{2}r^2 \sin^2 \theta \quad (4.78)$$

en tenant compte des formules (4.45) ainsi que de la relation (4.47), nous pouvons écrire:

$$\psi_{r=1+\xi(\beta)}^{ab} = -\mathcal{F}_2(\beta) - \frac{8}{5}\varepsilon(\mathcal{F}_2(\beta) - \mathcal{F}_4(\beta)) + O(\varepsilon^2) \quad (4.79)$$

ce résultat nous permet alors de limiter les sommes dans la relation (4.74) pour $n = 2$ et $l = 2$ et 4 . Ainsi, la fonction de courant se décompose de la manière suivante:

$$\psi_0(r, \beta) = f_{02}(r)\mathcal{F}_2(\beta) \quad (4.80)$$

$$\psi_1(r, \beta) = \psi_{12}(r, \beta) + \psi_{14}(r, \beta) \quad (4.81)$$

avec
$$\psi_{12}(r, \beta) = f_{12}(r)\mathcal{F}_2(\beta) \quad (4.82)$$

$$\psi_{14}(r, \beta) = f_{14}(r)\mathcal{F}_4(\beta) \quad (4.83)$$

La condition aux limites au centre de l'inclusion ($r = 0$) exige que le champ de vitesse intérieur soit fini. Ceci nous permet désormais de déduire que :

$$B_{02}^i = B_{12}^i = B_{14}^i = 0 \quad (4.84)$$

de la même façon, l'uniformité de l'écoulement loin de l'inclusion: $r \rightarrow \infty$, traduite par la condition (4.77) implique que :

$$A_{02}^e = 1 \quad (4.85)$$

$$A_{12}^e = A_{14}^e = 0 \quad (4.86)$$

finalement les fonctions f_{jn} données définies prennent les formes suivantes:

écoulement intérieur: $0 \leq r \leq 1 + \xi(\beta)$

$$f_{02}^i(r) = A_{02}^i r^2 + E_{02}^i \left(\cosh(k_i r) - \frac{\sinh(k_i r)}{k_i r} \right) \quad (4.87)$$

$$f_{12}^i(r) = A_{12}^i r^2 + E_{12}^i \left(\cosh(k_i r) - \frac{\sinh(k_i r)}{k_i r} \right) \quad (4.88)$$

$$f_{14}^i(r) = A_{14}^i r^4 + E_{14}^i \left(\cosh(k_i r) - 6 \frac{\sinh(k_i r)}{k_i r} + 15 \frac{\cosh(k_i r)}{k_i r} - 15 \frac{\sinh(k_i r)}{k_i r} \right) \quad (4.89)$$

écoulement extérieur: $r \geq 1 + \xi(\beta)$

$$f_{02}^e(r) = r^2 + \frac{B_{02}^e}{r} - E_{02}^e \left(1 + \frac{1}{k_e r} \right) \exp(-k_e r) \quad (4.90)$$

$$f_{12}^e(r) = \frac{B_{12}^e}{r} - E_{12}^e \left(1 + \frac{1}{k_e r} \right) \exp(-k_e r) \quad (4.91)$$

$$f_{14}^e(r) = \frac{B_{14}^e}{r^3} - E_{14}^e \left(1 + \frac{6}{k_e r} + \frac{15}{k_e^2 r^2} + \frac{15}{k_e^3 r^3} \right) \exp(-k_e r) \quad (4.92)$$

Pour déterminer le reste des constantes, les conditions aux limites à l'interface données par les relations (4.53) jusqu'à (4.66) nous donne les douze équations suivantes à résoudre:

à l'ordre 0

$$f_{02}^i = 0 \quad (4.93)$$

$$f_{02}^e = 0 \quad (4.94)$$

$$\frac{df_{02}^i}{dr} = \frac{df_{02}^e}{dr} \quad (4.95)$$

$$\phi_\mu \left(\frac{d^2 f_{02}^i}{dr^2} - 2 \frac{df_{02}^i}{dr} \right) = \left(\frac{d^2 f_{02}^e}{dr^2} - 2 \frac{df_{02}^e}{dr} \right) \quad (4.96)$$

à l'ordre 1

$$5 f_{12}^i + 4 \frac{df_{02}^i}{dr} = 0 \quad (4.97)$$

$$5 f_{14}^i - 4 \frac{df_{02}^i}{dr} = 0 \quad (4.98)$$

$$5 f_{12}^e + 4 \frac{df_{02}^e}{dr} = 0 \quad (4.99)$$

$$5f_{14}^e - 4 \frac{df_{02}^e}{dr} = 0 \quad (4.100)$$

$$5 \frac{df_{14}^i}{dr} - 4 \frac{d^2 f_{02}^i}{dr^2} = 5 \frac{df_{14}^e}{dr} - 4 \frac{d^2 f_{02}^e}{dr^2} \quad (4.101)$$

$$\frac{df_{14}^i}{dr} + \frac{df_{12}^i}{dr} = \frac{df_{14}^e}{dr} + \frac{df_{12}^e}{dr} \quad (4.102)$$

$$\left(\frac{d^2 f_{14}^e}{dr^2} - 2 \frac{df_{14}^e}{dr} + 12f_{14}^e + \frac{d^2 f_{12}^e}{dr^2} - 2 \frac{df_{12}^e}{dr} + 17f_{12}^e \right) = \phi_\mu \left(\frac{d^2 f_{14}^i}{dr^2} - 2 \frac{df_{14}^i}{dr} + 12f_{14}^i + \frac{d^2 f_{12}^i}{dr^2} - 2 \frac{df_{12}^i}{dr} + 17f_{12}^i \right) \quad (4.103)$$

$$\left(\frac{5}{2} \left(\frac{d^2 f_{14}^e}{dr^2} - 2 \frac{df_{14}^e}{dr} - 6f_{14}^e \right) - 2 \left(\frac{d^3 f_{02}^e}{dr^3} - 3 \frac{d^2 f_{02}^e}{dr^2} \right) \right) = \phi_\mu \left(\frac{5}{2} \left(\frac{d^2 f_{14}^i}{dr^2} - 2 \frac{df_{14}^i}{dr} - 6f_{14}^i \right) - 2 \left(\frac{d^3 f_{02}^i}{dr^3} - 3 \frac{d^2 f_{02}^i}{dr^2} \right) \right) \quad (4.104)$$

Le système d'équations qui en résulte, et qui met en évidence les constantes recherchées est donné comme suit:

à l'ordre 0

$$A_{02}^i + G_1^i E_{02}^i = 0 \quad (4.105)$$

$$B_{02}^e - G_1^e E_{02}^e = -1 \quad (4.106)$$

$$B_{02}^e - G_2^e E_{02}^e + 2A_{02}^i + G_2^i E_{02}^i = 2 \quad (4.107)$$

$$4B_{02}^e - (G_3^e + 2G_2^e)E_{02}^e + \phi_\mu (2A_{02}^i - (G_3^i - 2G_2^i)E_{02}^i) = 2 \quad (4.108)$$

à l'ordre 1

$$5A_{12}^i + 5G_1^i E_{12}^i = -8A_{02}^i - 4G_2^i E_{02}^i \quad (4.109)$$

$$5A_{14}^i + 5H_1^i E_{14}^i = 8A_{02}^i + 4G_2^i E_{02}^i \quad (4.110)$$

$$5B_{12}^e - 5G_1^e E_{12}^e = -8 + 4B_{02}^e - 4G_2^e E_{02}^e \quad (4.111)$$

$$5B_{14}^e - 5H_1^e E_{14}^e = 8 - 4B_{02}^e + 4G_2^e E_{02}^e \quad (4.112)$$

$$15B_{14}^e - 5H_2^e E_{14}^e + 20A_{14}^i + 5H_2^i E_{14}^i = -8 - 8B_{02}^e + 4G_3^e E_{02}^e + 8A_{02}^i + 4G_3^i E_{02}^i \quad (4.113)$$

$$B_{12}^e - G_2^e E_{12}^e + 3B_{14}^e - H_2^e E_{14}^e + 2A_{12}^i + G_2^i E_{12}^i + 4A_{14}^i + H_2^i E_{14}^i = 0 \quad (4.114)$$

$$21B_{12}^e - (G_3^e + 2G_2^e + 17G_1^e)E_{12}^e + 30B_{14}^e - (H_3^e + 2H_2^e + 12H_1^e)E_{14}^e - \phi_\mu \left(15A_{12}^i + (G_3^i - 2G_2^i + 17G_1^i)E_{12}^i + 16A_{14}^i + (H_3^i - 2H_2^i + 12H_1^i)E_{14}^i \right) = 0 \quad (4.115)$$

$$45B_{12}^e - 45G_1^e E_{12}^e + 75B_{14}^e - \frac{5}{2}(H_3^e + 2H_2^e + 12H_1^e)E_{14}^e - \phi_\mu \left(45A_{12}^i + 45G_1^i E_{12}^i + 40A_{14}^i + \frac{5}{2}(H_3^i - 2H_2^i + 12H_1^i)E_{14}^i \right) = -12 - 24B_{02}^e + 2(G_4^e + 3G_3^e)E_{02}^e - 12A_{02}^i + 2(G_4^i + 3G_3^i)E_{02}^i \quad (4.116)$$

où les fonctions $G_j^{i,e}$ et $H_j^{i,e}$ dépendantes des paramètres k_i et k_e sont données par les relations suivantes:

paramètres de l'écoulement intérieur

$$G_1^i = \cosh k_i - \frac{1}{k_i} \sinh k_i \quad (4.117)$$

$$G_2^i = -\cosh k_i + (k_i + \frac{1}{k_i}) \sinh k_i \quad (4.118)$$

$$G_3^i = (k_i^2 + 2) \cosh k_i - (k_i + \frac{1}{k_i}) \sinh k_i \quad (4.119)$$

$$G_4^i = -(k_i^2 + 6) \cosh k_i + (k_i^3 + 3k_i + \frac{6}{k_i}) \sinh k_i \quad (4.120)$$

$$H_1^i = (1 + \frac{15}{k_i^2}) \cosh k_i - (\frac{6}{k_i} + \frac{15}{k_i^3}) \sinh k_i \quad (4.121)$$

$$H_2^i = -(6 + \frac{45}{k_i^2}) \cosh k_i + (k_i + \frac{21}{k_i} + \frac{45}{k_i^3}) \sinh k_i \quad (4.122)$$

$$H_3^i = (k_i^2 + 27 + \frac{180}{k_i^2}) \cosh k_i - (6k_i + \frac{87}{k_i} + \frac{180}{k_i^3}) \cosh k_i \quad (4.123)$$

paramètres de l'écoulement extérieur

$$G_1^e = (1 + \frac{1}{k_e}) e^{-k_e} \quad (4.124)$$

$$G_2^e = (k_e + 1 + \frac{1}{k_e})e^{-k_e} \quad (4.125)$$

$$G_3^e = (k_e^2 + k_e + 2 + \frac{2}{k_e})e^{-k_e} \quad (4.126)$$

$$G_4^e = (k_e^3 + k_e^2 + 3k_e + 6 + \frac{6}{k_e})e^{-k_e} \quad (4.127)$$

$$H_1^e = (1 + \frac{6}{k_e} + \frac{15}{k_e^2} + \frac{15}{k_e^3})e^{-k_e} \quad (4.128)$$

$$H_2^e = (k_e + 6 + \frac{21}{k_e} + \frac{45}{k_e^2} + \frac{45}{k_e^3})e^{-k_e} \quad (4.129)$$

$$H_3^e = (k_e^2 + 6k_e + 27 + \frac{87}{k_e} + \frac{180}{k_e^2} + \frac{180}{k_e^3})e^{-k_e} \quad (4.130)$$

Afin de suivre l'évolution de l'écoulement autour de l'inclusion, nous avons tracé sur la figure 4.5 les lignes de courant ainsi que les lignes d'iso vorticité pour une demi période d'oscillation correspondant à $Re_e = 0.05$, $Sl = 15$, $\phi_\mu = 3$, $\gamma = 1.3$ et une déviation $\varepsilon = 0.2$. Sous les mêmes conditions, la figure 4.6 présente les distributions de vorticité sur les deux cotés de l'interface fluide-fluide. On remarque, comme dans le cas d'une goutte sphérique, que la symétrie est toujours respectée et que la déformation de l'inclusion $\xi(\beta)$ ne modifie pas la configuration spatiale de l'écoulement. Cependant, comme le montre la figure 4.7, où apparaît la comparaison entre la vorticité sur l'ellipsoïde et celle obtenue sur la sphère équivalente du même volume, on constate que la vorticité en amont et en aval de l'ellipsoïde varie lentement. Ce effet dû à la déformation est important à l'intérieur de l'inclusion tandis qu'à l'extérieur, il prend fin lorsque $\theta \geq \pi/4$. Pour les deux types de particules, les valeurs maximales de la vorticité sont atteintes à $\theta = \pi/2$ avec une légère différence dans l'écoulement intérieur et un écart relativement important à l'extérieur. Cette différence dans le comportement de la vorticité entre le cas de la sphère fluide et l'ellipsoïde illustre clairement l'effet de la déformation sur la force de résistance qui va sûrement se répercuter sur le terme d'histoire qu'on calculera dans ce qui suit.

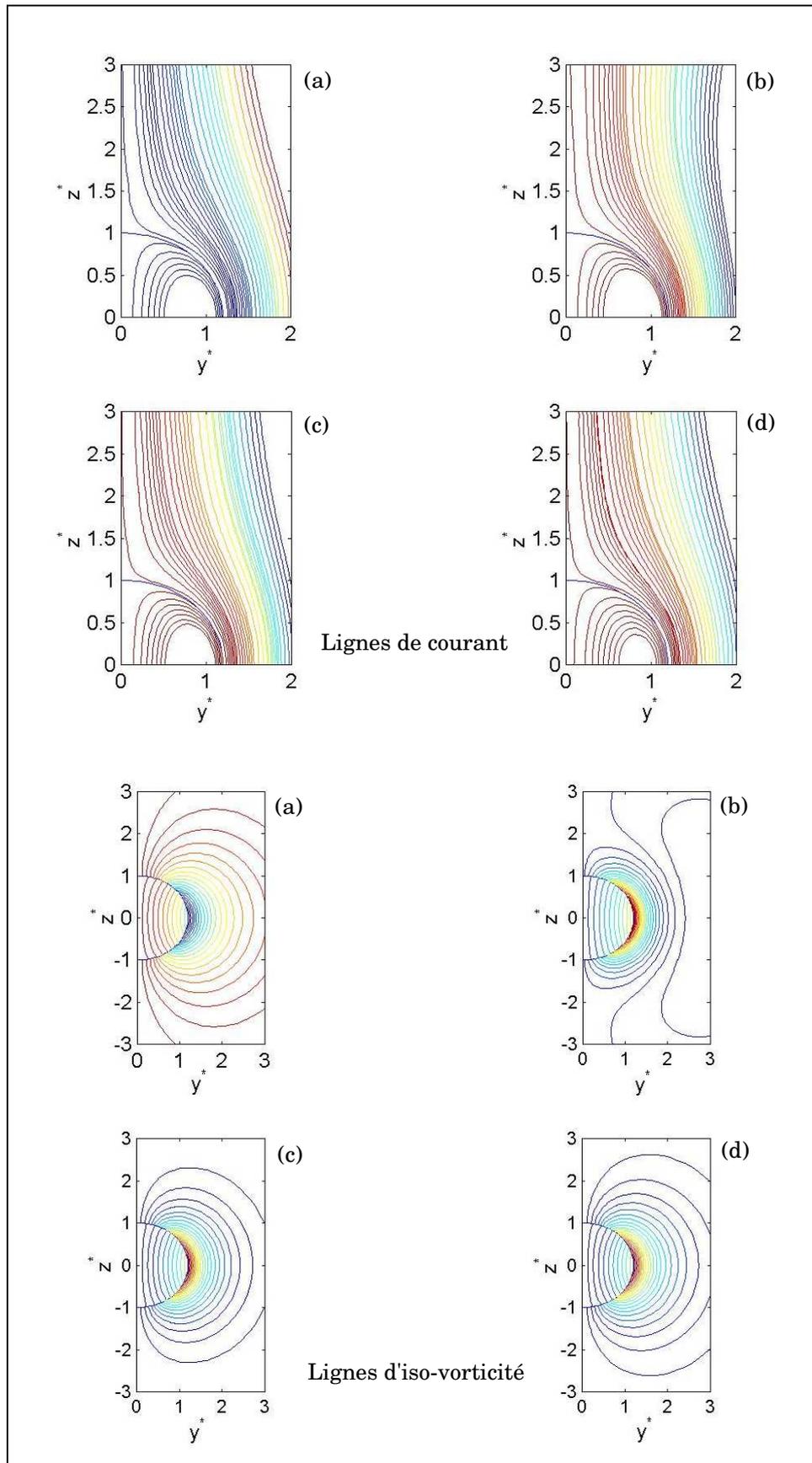


Figure 4.5 : Lignes de courant et d'iso-vorticité pour une demi-période d'oscillations: $Re_e = 0.05$, $Sl = 15$, $\phi_\mu = 3$, $\gamma = 1.3$. (a): $t^* = \pi/4$, (b): $t^* = \pi/2$, (c): $t^* = 3\pi/4$, (d): $t^* = \pi$

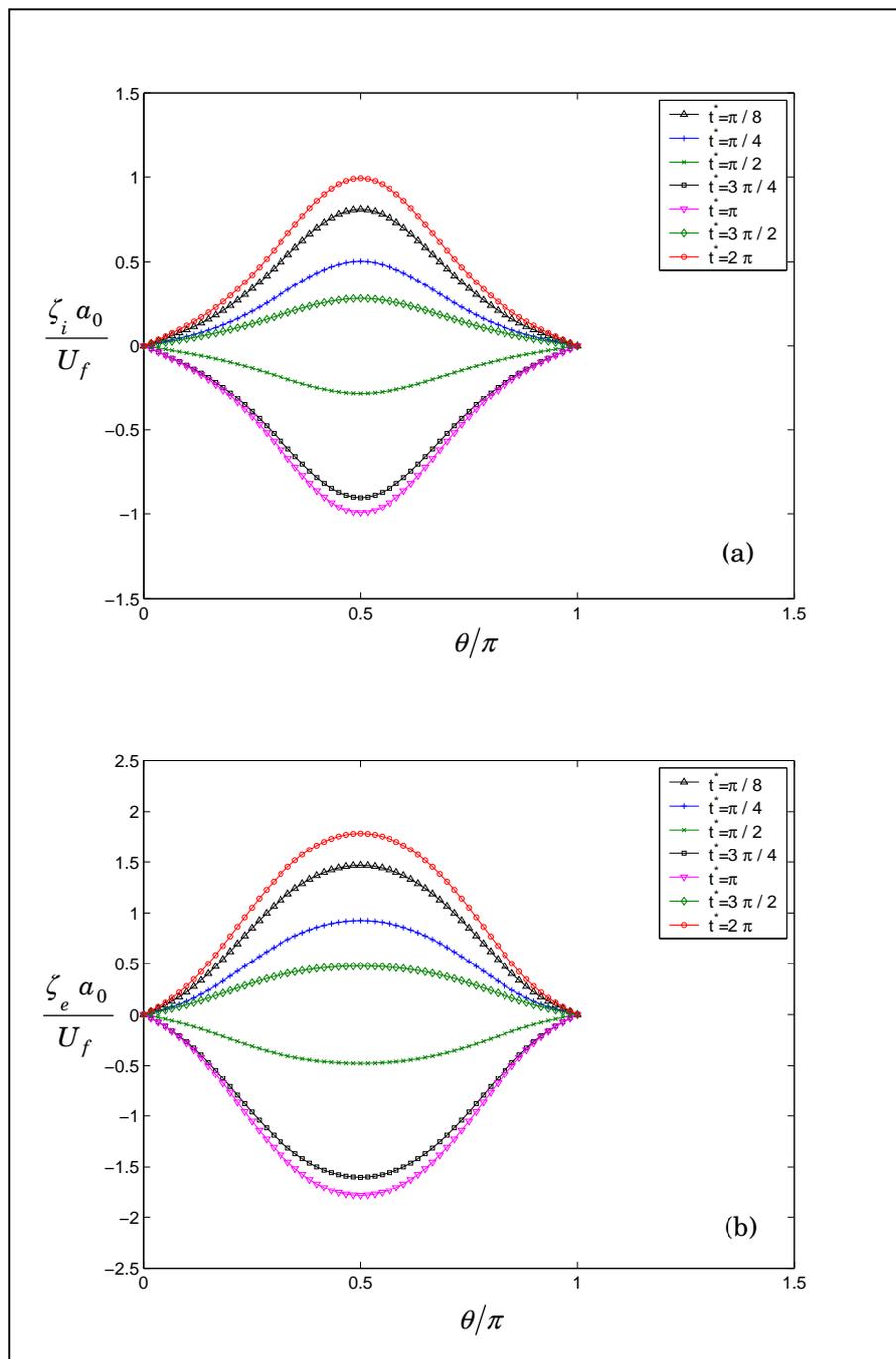


Figure 4.6 : Vorticité sur la frontière de l'inclusion:
 $Re_e = 0.05$, $Sl = 15$, $\phi_\mu = 3$, $\gamma = 1.3$.

(a): intérieur, (b): extérieur

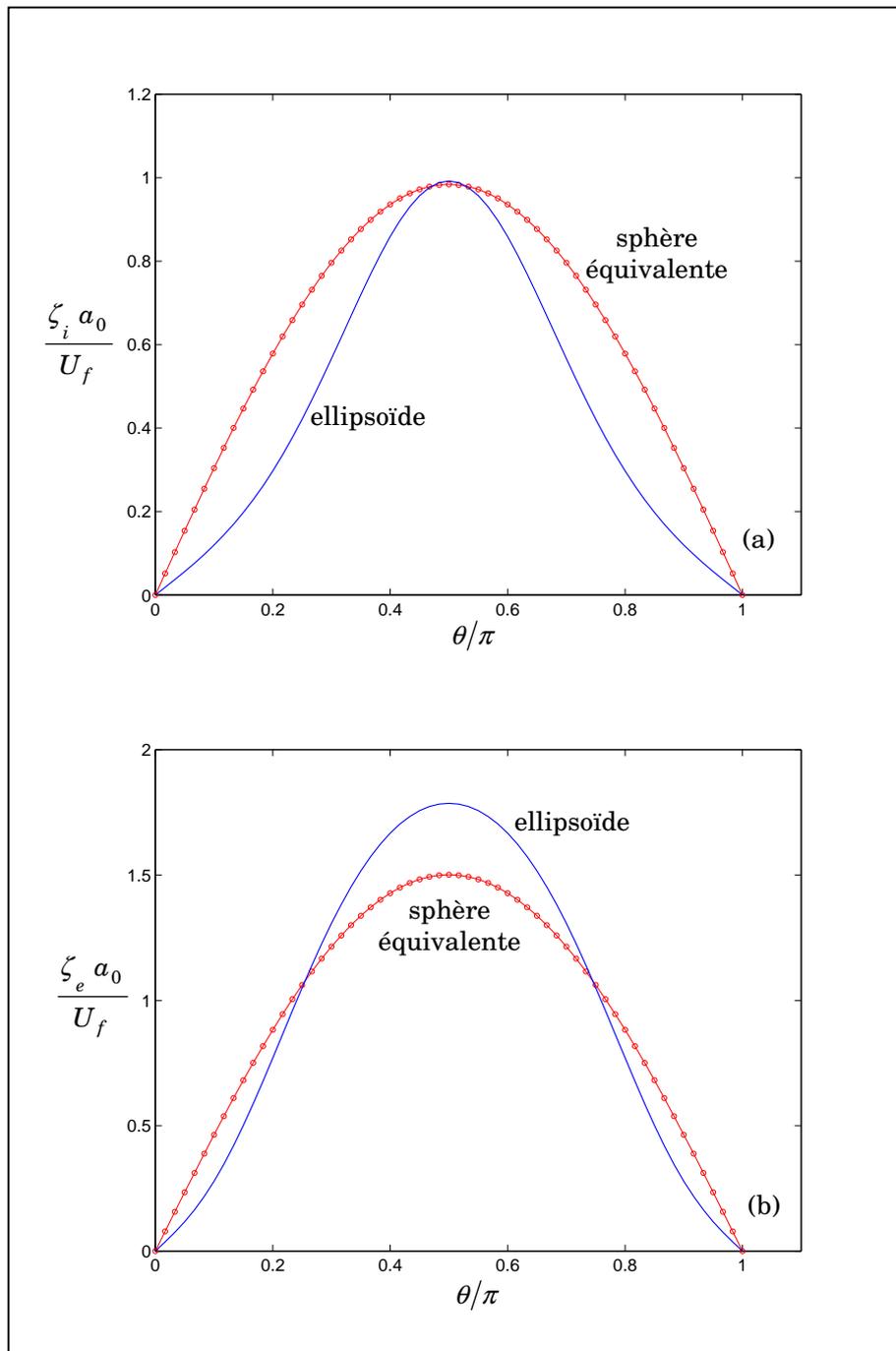


Figure 4.7 : Comparaison des vorticités pariétales entre l'inclusion ellipsoïdale et la sphère équivalente:

$$Re_e = 0.05, Sl = 15, \phi_\mu = 3, \gamma = 1.3, t^* = 2\pi.$$

(a): intérieur, (b): extérieur

4.3 Force de résistance de l'ellipsoïde

Après la détermination des champs hydrodynamiques, l'objectif principal de ce chapitre consiste à évaluer la contribution de la déformation $\xi(\beta)$ dans la traînée exercée sur la particule fluide. Pour cela, nous allons d'abord évaluer l'action totale du fluide extérieur à partir de la formule générale (4.36). En mouvement oscillatoire, cette force s'exprime sous la forme adimensionnelle suivante :

$$F_z(t) = \frac{\pi a_0 g}{U_f^2} \int_{P_0}^{P_1} \varpi^2 \frac{\partial \varpi}{\partial n} ds + F_D(t) \quad (4.131)$$

où on distingue séparément l'action de la pesanteur g et la traînée instationnaire $F_D(t)$, tel que:

$$F_D(t) = \frac{2\pi e^{-it}}{Re_e} \left(k_e^2 \int_{P_0}^{P_1} (\varpi \frac{\partial \psi_e}{\partial n} - \varpi^2 \frac{\partial \varpi}{\partial n}) ds - \int_{P_0}^{P_1} \varpi^3 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\mathcal{D}^2 \psi_e}{\varpi^2} \right) ds \right) \quad (4.132)$$

En tenant compte de la superposition des fonctions de courant ψ_0 et ψ_1 ainsi que des transformations:

$$\varpi = r(1 - \beta^2)^{1/2} \quad (4.133)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \approx \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(1 - \beta^2)}{r} \frac{d\xi}{d\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \quad (4.134)$$

$$ds \approx -r(1 - \beta^2)^{-1/2} d\beta \quad (4.135)$$

L'intégration des relations (4.131) et (4.132) sur la surface de l'ellipsoïde, s'effectuera entre les points P_0 et P_1 correspondants à $\beta = [-1, 1]$. Après un calcul laborieux et relativement long que l'on ne détaillera pas ici, ainsi que la multiplication du résultat final par la quantité $\rho_e a_0^2 U_f^2$, la poussée d'Archimède traduite par le premier terme de (4.131) sera donnée par :

$$F_p = \rho_e g \mathcal{V} \quad (4.136)$$

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi a_0^3 (1 + \varepsilon)^2 \quad (4.137)$$

Quant à la traînée totale $F_D(t)$, elle prend la forme :

$$F_D(t) = F_{D_0}(t) + \varepsilon F_{D_1}(t) + O(\varepsilon^2) \quad (4.138)$$

où $F_{D_0}(t)$ correspond à la traînée due à l'écoulement de base, et possède une forme identique à celle exercée sur une sphère fluide oscillante (deuxième terme de (3.78)). Quant à la traînée $F_{D_1}(t)$, elle est due essentiellement à la déformation de cette sphère. Ces deux forces s'expriment respectivement par :

$$F_{D_0}(t) = 6\pi\mu_e a_0 \left(1 + k_e + \frac{k_e^2}{9} - \frac{(1+k_e)^2}{3+k_e + \phi_\mu Q(k_i)} \right) U_f e^{-i\omega t} \quad (4.139)$$

$$F_{D_1}(t) = \frac{24}{5} \varepsilon \pi\mu_e a_0 \left(1 + 2k_e + \frac{4}{9}k_e^2 - \frac{2k_e(1+k_e)}{3+k_e + \phi_\mu Q(k_i)} - \frac{\phi_\mu(1+k_e)^2(Q^2(k_i) - 3 - k_i^2)}{(3+k_e + \phi_\mu Q(k_i))^2} \right) U_f e^{-i\omega t} \quad (4.140)$$

avec
$$Q(k_i) = \frac{k_i(6+k_i^2) - 3(2+k_i^2)\tanh k_i}{(3+k_i^2)\tanh k_i - 3k_i} \quad (4.141)$$

Par analogie au résultat de Lawrence & Weinbaum (1986, 1988), la force de traînée totale $F_D(t)$ peut être écrite sous la forme d'une somme mettant en évidence les différentes contributions physiques liées à la vitesse et à l'accélération de l'ellipsoïde :

$$F_D(t) = F_{HR}(t) + F_m(t) + F_h(t) \quad (4.142)$$

où on peut distinguer respectivement la traînée quasi-stationnaire, la force de la masse ajoutée ainsi que la force d'histoire. Leurs expressions sont données par les parties réelles des formules suivantes:

traînée quasi-stationnaire d'Hadamard-Rybczynski corrigée

Elle est responsable de la vitesse terminale de l'inclusion, elle reste la seule force exercée sur l'ellipsoïde aux temps très longs¹. Elle sera obtenue en calculant la limite de (4.138) pour $\omega \rightarrow 0$. Sachant que $U(t) = U_f e^{-i\omega t}$, on aura :

¹ Je remercie le Docteur D. Lhuillier de la manière pertinente qu'il m'a formulée pour la décomposition de la traînée totale exercée sur l'ellipsoïde.

$$F_{HR}(t) = 4\pi\mu_e\alpha_0 \left(\frac{2+3\phi_\mu}{2(1+\phi_\mu)} + \frac{2}{5}\varepsilon \frac{3\phi_\mu^2+4\phi_\mu+3}{(1+\phi_\mu)^2} \right) U(t) \quad (4.143)$$

On remarque que dans le cas d'un ellipsoïde rigide ($\phi_\mu \rightarrow \infty$), cette force s'exprime par la formule de Sampson (1.35) pour $\alpha_0 = \alpha_2 = 1$, et reste, au premier ordre de ε , identique à celle Lawrence & Weinbaum (4.4) .

Force de la masse ajoutée

Elle est indépendante des viscosités des fluides et proportionnelle à $k_e^2 = -i\alpha\alpha_0^2/v_e$. Sachant que $dU/dt = -i\omega U(t)$, elle aura la forme suivante :

$$F_m(t) = \frac{1}{2}\rho_e\gamma_0\left(1 + \frac{16}{5}\varepsilon\right)\frac{dU}{dt} \quad \text{avec} \quad \gamma_0 = \frac{4}{3}\pi\alpha_0^3 \quad (4.144)$$

Force d'histoire

En vertu des relations (4.142), (4.143) et (4.144), la force d'histoire totale peut s'écrire comme suit :

$$F_h(t) = 6\pi\mu_e\alpha_0\left(1 + \frac{8}{5}\varepsilon\right)\left(\frac{\phi_\mu}{1+\phi_\mu}k_e + L_0(k_i, k_e, \phi_\mu)\right)U(t) \\ + \frac{24}{5}\varepsilon\pi\mu_e\alpha_0L_1(k_i, k_e, \phi_\mu)U(t) \quad (4.145)$$

où les fonctions L_0 et L_1 sont données par les relations suivantes :

$$L_0(k_i, k_e, \phi_\mu) = \frac{1+3k_e}{3(1+\phi_\mu)} - \frac{(1+k_e)^2}{3+k_e+\phi_\mu Q(k_i)} \quad (4.146)$$

$$L_1(k_i, k_e, \phi_\mu) = -\frac{2}{3(1+\phi_\mu)^2} + \frac{2(1+k_e)}{3+k_e+\phi_\mu Q(k_i)} - \frac{\phi_\mu(1+k_e)^2(Q^2(k_i)-k_i^2-3)}{(3+k_e+\phi_\mu Q(k_i))^2} \quad (4.147)$$

Il à remarquer que dans le cas d'une goutte sphérique oscillante ($\varepsilon = 0$), la relation (4.145) se réduit à la forme (3.82). Une telle écriture de la force d'histoire exercée sur l'ellipsoïde fluide nous permet de mettre en évidence *un nouveau terme de mémoire* dépendant de la fonction L_1 et dû essentiellement à l'écart à la sphéricité de l'inclusion. Ce résultat nous permet aussi de constater que la nouvelle force d'histoire (4.147) se manifeste dès le premier ordre de la perturbation. Or, dans le cas d'un ellipsoïde rigide : relation (4.4), l'apparition du nouveau terme de mémoire ne se fait qu'à l'ordre de $O(\varepsilon^2)$. Ce résultat n'est pas du tout surprenant du fait de la différence

évidente dans les conditions aux limites à l'interface entre les deux cas. En effet, la superposition de la nature instationnaire de l'écoulement à l'intérieur et à l'extérieur de la particule fluide, ainsi que la perturbation apportée sous l'effet de la déformation ne peut qu'augmenter la traînée et accentuer sa dépendance à l'histoire de l'accélération.

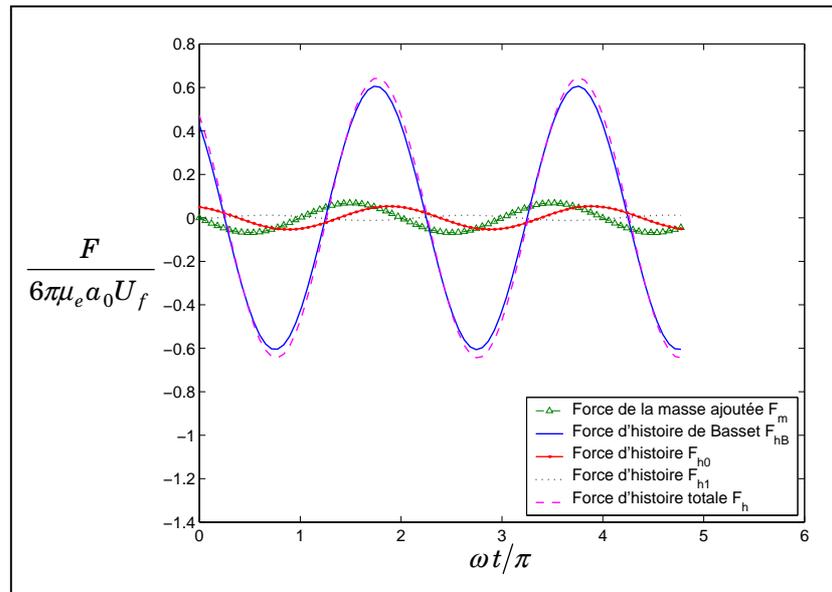


Figure 4.8 : Force de la masse ajoutée et les différentes forces d'histoire exercées sur l'ellipsoïde: $\varepsilon = 0.2$, $Re_e = 0.05$, $Sl = 15$, $\phi_\mu = 3$, $\gamma = 1.3$

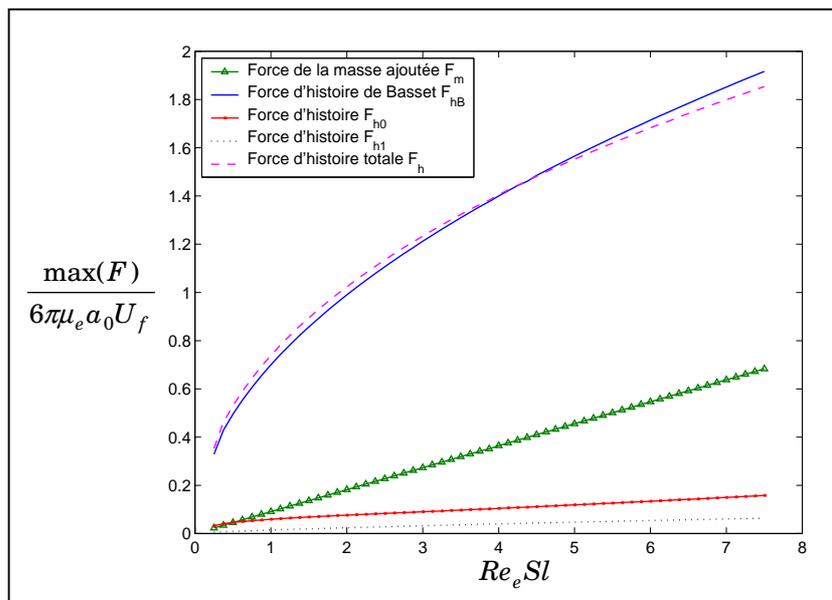


Figure 4.9 : Amplitude des forces d'histoire exercées sur l'ellipsoïde en fonction du nombre de Stokes: $\varepsilon = 0.2$, $\phi_\mu = 3$, $\gamma = 1.3$

En notant par F_{hB} la force d'histoire de Basset proportionnelle à k_e dans la relation (4.145), par F_{h0} la force d'histoire dépendant de la fonction L_0 et par F_{h1} la force d'histoire dépendant de la fonction L_1 , les évolutions temporelles de ces trois actions ainsi que celle de la masse ajoutée sont présentées sur la figure 4.8. Sous les conditions $Re_e = 0.05$, $Sl = 15$, $\phi_\mu = 3$ et $\gamma = 1.3$, on remarque que le terme F_{hB} reste dominant et présente une amplitude de 60% de la traînée stationnaire de Stokes ($6\pi\mu_e\alpha_0U_f$). Quant aux autres termes d'histoire F_{h0} et F_{h1} , malgré leurs faibles contributions dans ce cas, il reste non négligeable avec une amplitude proche de celle l'effet de la masse ajoutée. En augmentant la fréquence d'oscillations, ces termes de s'accroissent comme le montre la figure 4.9.

4.3.1 Limite d'un ellipsoïde rigide

Pour une particule solide, le rapport des viscosités dynamiques est considéré infini $\phi_\mu \rightarrow \infty$ et le calcul de la limite de la fonction $L_0(k_i, k_i\phi_\mu)$ et $L_1(k_i, k_i\phi_\mu)$ données par (4.146) et (4.147) s'effectuent en n'utilisant qu'une seule profondeur de pénétration k , tel que:

$$k_i = qk_e \quad \text{et} \quad q = (\gamma/\phi_\mu)^{1/2} \quad (4.148)$$

on aura donc:

$$\lim_{\phi_\mu \rightarrow \infty} L_0(k_e, \gamma, \phi_\mu) = \lim_{\phi_\mu \rightarrow \infty} L_1(k_e, \gamma, \phi_\mu) = 0 \quad (4.149)$$

ce résultat nous permet alors de retrouver celui de Lawrence et Weinbaum (4.4) pris au premier ordre de ε où la force d'histoire totale sera :

$$F_h(t) = 6\pi\mu_e\alpha_0\left(1 + \frac{8}{5}\varepsilon\right)k_eU(t) \quad (4.150)$$

4.3.2 Limite d'une bulle gazeuse ellipsoïdale

Dans ce cas, la recirculation interne est supposée absente et le rapport de viscosité est négligeable: $\phi_\mu \rightarrow 0$. A cette limite, on aura :

$$\lim_{\phi_\mu \rightarrow 0} L_0(k_e, \gamma, \phi_\mu) = \lim_{\phi_\mu \rightarrow 0} L_1(k_e, \gamma, \phi_\mu) = \frac{4k_e}{3(3+k_e)} \quad (4.151)$$

et la force d'histoire totale sera donc :

$$F_h(t) = 8\pi\mu_e a_0 \left(1 + \frac{12}{5}\varepsilon\right) \frac{k_e}{3+k_e} U(t) \quad (4.152)$$

Dans le but d'étendre ces résultats pour une vitesse arbitraire $\mathbf{U}(t)$ de la bulle, nous allons supposer que la fréquence ω ne représente qu'une seule composante des oscillations harmoniques effectuées par l'inclusion, tel que:

$$U(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (4.153)$$

en tenant compte des résultats obtenus au chapitre 3 concernant la force F_{h0} , la transformée inverse de Fourier de tous les termes de (4.138) conduit à l'expression suivante de la traînée totale exercée sur une bulle gazeuse ellipsoïdale:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_D = & -4\pi\mu_e a_0 \left(1 + \frac{6}{5}\varepsilon\right) \mathbf{U}(t) - \frac{1}{2}\rho_e \gamma \left(1 + \frac{6}{5}\varepsilon\right) \frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} \\ & - 8\pi\mu_e a_0 \left(1 + \frac{12}{5}\varepsilon\right) \int_{-\infty}^t \frac{d\mathbf{U}(\tau)}{d\tau} K_g(t-\tau) d\tau + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.154)$$

$$\text{avec} \quad K_g(t) = \exp(9t/\tau_0) \operatorname{erfc}(3\sqrt{t/\tau_0}) \quad (4.155)$$

où $\tau_0 = a_0^2/\nu_e$ est le temps caractéristique de diffusion dans le fluide environnant. Ce résultat nous permet de conclure, qu'à cet ordre de la perturbation, et à cause de l'absence de la recirculation à l'intérieur de l'inclusion, la déviation par rapport à la forme sphérique n'engendre aucun nouveau noyau dans la force d'histoire globale.

Sur la figure 4.10, nous effectuons une comparaison entre la force de traînée totale exercée sur une inclusion ellipsoïdale gazeuse et celle subie par la bulle équivalente. Nous traçons également, dans les deux cas, l'évolution des forces d'histoire en fonction du nombre de Stokes $St = Re_e Sl$. Ces courbes montrent que malgré la faible déviation $\varepsilon = 0.2$, la théorie de la sphère équivalente est invalide puisqu'elle sous-estime le coefficient de traînée de l'ellipsoïde en donnant une erreur relative qui augmente avec la fréquence d'oscillations et qui peut atteindre jusqu'à 20 %.

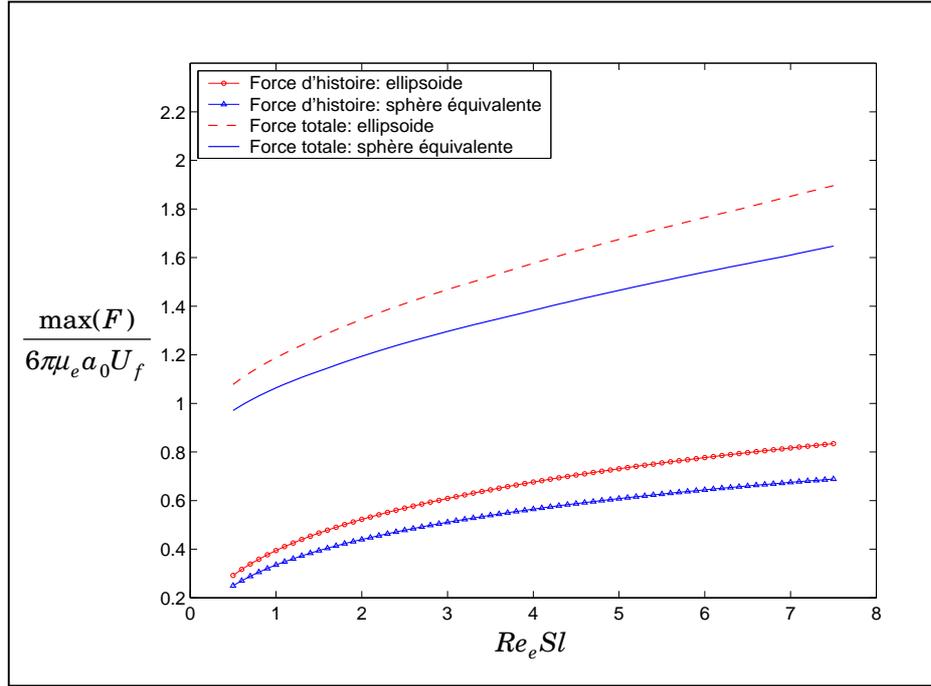


Figure 4.10 : Comparaison des amplitudes des forces d'histoire et des traînées totales exercées sur un ellipsoïde gazeux et sur la bulle sphérique équivalente

4.3.3 Comportement temporel du nouveau terme de mémoire

Vu la complexité des fonctions L_0 et L_1 et leurs dépendances des deux temps caractéristiques de diffusion τ_{0i} et τ_{0e} , l'analyse de Fourier ne nous permet pas de transformer les termes F_{h0} et F_{h1} dans le domaine temporel pour une vitesse arbitraire de la particule. Cependant, d'après les relations (4.139) et (4.140), on peut s'attendre à la forme suivante de la traînée totale:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_D = & -4\pi\mu_e a_0 \left(\frac{2+3\phi_\mu}{2(1+\phi_\mu)} + \frac{2}{5}\varepsilon \frac{3\phi_\mu^2+4\phi_\mu+3}{(1+\phi_\mu)^2} \right) \mathbf{U}(t) - \frac{1}{2}\rho_e \gamma_0 \left(1 + \frac{16}{5}\varepsilon\right) \frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} \\
 & - 6\pi\mu_e a_0 \left(1 + \frac{8}{5}\varepsilon\right) \int_{-\infty}^t \frac{d\mathbf{U}(\tau)}{d\tau} \left(\frac{\phi_\mu}{1+\phi_\mu} K_B(t-\tau) + K_0(t-\tau) \right) d\tau \\
 & - \frac{24}{5}\pi\mu_e a_0 \varepsilon \int_{-\infty}^t \frac{d\mathbf{U}(\tau)}{d\tau} K_1(t-\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{4.156}$$

où $K_B(t) = (\tau_0/\pi t)^{1/2}$, $K_0(t)$ et $K_1(t)$ représentent respectivement le noyau de Basset, le noyau de la force F_{h0} et celui correspondant à F_{h1} . Puisque les deux premiers termes sont détaillés dans le chapitre 3 par les relation (3.104) et (3.109), nous allons

examiner le comportement temporel de $K_1(t)$ dans les limites des temps courts et des temps longs.

Limite des temps courts: ($t \rightarrow 0$)

En effet, pour des grandes fréquences, le développement asymptotique de la fonction L_1 nous donne:

$$F_{h1} = \frac{24}{5} \varepsilon \pi \mu_e \alpha_0 \left(A_{c11} + \frac{A_{c12}}{k_e} \right) U_f e^{-i\omega t} + O(k_e^{-2}) \quad (4.157)$$

et la transformée inverse de Fourier permet d'évaluer le noyau K_1 en fonction des coefficients A_c dépendants du rapport de viscosités q et de densités γ , tel que:

$$K_1(t) = A_{c11} + 2A_{c12} \sqrt{\frac{t}{\pi \tau_0}} + O(t) \quad (4.158)$$

avec

$$A_{c11} = \frac{4}{3} - \frac{2\gamma}{\gamma+q} - \frac{3\gamma}{(\gamma+q)^2} + \frac{4\gamma}{3(\gamma+q^2)} - \frac{2\gamma^2}{3(\gamma+q^2)^2} \quad (4.159)$$

$$A_{c12} = -4 - \frac{6}{\gamma q} + \frac{2(3+5\gamma^2)}{\gamma(\gamma+q)} - \frac{6(\gamma^2-2\gamma-1)}{(\gamma+q)^2} - \frac{18\gamma^2}{(\gamma+q)^3} \quad (4.160)$$

Limite des temps longs: ($t \rightarrow \infty$)

Pour des faibles fréquences, le développement de fonction L_1 au voisinage de $\omega = 0$ donne:

$$F_{h1} = \frac{24}{5} \varepsilon \pi \mu_e \alpha_0 A_{l11} k_e U_f e^{-i\omega t} + O(k_e^2) \quad (4.161)$$

cela nous permet d'écrire le noyau K_1 dans le domaine temporel comme suit:

$$K_1(t) = A_{l11} \sqrt{\frac{\tau_0}{\pi t}} + O(t^{-1})$$

avec

$$A_{l11} = \frac{2(2+3\phi_\mu)(1-\phi_\mu)}{9(1+\phi_\mu)^3} \quad (4.162)$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu déterminer l'écoulement induit par les oscillations d'une inclusion fluide ellipsoïdale à faibles nombres de Reynolds. Nous avons également montré qu'une faible déviation par rapport à la forme sphérique peut causer un changement significatif dans la distribution de vorticité sur la surface de l'ellipsoïde. Ce phénomène influe aussi sur l'expression de la force de résistance et engendre un terme d'histoire supplémentaire dû uniquement à la perturbation de la forme.

L'expression exacte de la traînée a été établie dans le cas d'un mouvement oscillatoire harmonique. Pour un mouvement rectiligne, avec une vitesse arbitraire, la complexité de l'expression du nouveau terme d'histoire et sa dépendance des deux temps caractéristiques de l'écoulement à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion la rend difficile à établir dans le domaine temporel. Sa transformée inverse de Fourier ne peut donc être effectuée que numériquement. Nous avons pu remarquer que pour une bulle gazeuse ellipsoïdale, le nouveau terme d'histoire disparaît, contrairement au cas d'un ellipsoïde fluide où ce terme est relativement important et présente 10% de la force d'histoire globale.

Cette étude ne présente qu'une première approximation du comportement d'une inclusion non sphérique, puisque les termes d'inerties ont été négligés lors de la résolution des équations de Navier-Stokes. Néanmoins, l'expression de la traînée totale exercée sur l'ellipsoïde peut toujours être utilisée en envisageant des coefficients de correction comme dans le cas d'une sphère solide étudiée par Odar & Hamilton.

**Conclusion
générale et
perspectives**

Conclusion générale et perspectives

Le travail présenté a débuté par la conception d'un dispositif expérimental permettant de mesurer le déplacement instantané d'une particule solide, liquide ou gazeuse, dans un repère oscillant. Les trajectoires de ces inclusions ont été mesurées par prises de photographies à l'aide d'une caméra CDD rapide, travaillant avec une fréquence d'échantillonnage allant jusqu'à 360 images par seconde. Les fréquences d'oscillations du repère relatif sont de 1 à 10 Hz et la gamme du nombre de Reynolds exploré est comprise entre 0.04 et 710. Nous avons aussi mis en place des outils d'acquisition et de traitement d'images pour la détection du contour de l'inclusion et la détermination des coordonnées de son centre de gravité.

Les résultats obtenus peuvent être regroupés en deux catégories principales: particules sphériques et particules ellipsoïdales.

Concernant les inclusions sphériques, nous avons pu établir la solution générale des équations instationnaires de Stokes sous une forme de série infinie des fonctions de Gegenbauer. L'ordre de troncation de cette série dépend essentiellement de la géométrie de l'inclusion et est égale à 2 pour une sphère. En s'intéressant essentiellement à une goutte sphérique oscillante, nous avons déterminé l'expression de la traînée totale qu'elle subie de la part du fluide environnant. Pour des limites extrêmes du rapport des viscosités, nous avons établi également la force hydrodynamique exercée sur une bulle gazeuse ($\phi_\mu \rightarrow 0$) et celle exercée sur une sphère solide ($\phi_\mu \rightarrow \infty$).

Nous avons pu voir aussi que les forces d'histoire subies par chaque type d'inclusion sont tout à fait différentes les unes des autres et ne se comportent pas de la même façon dans la limite des faibles et grandes fréquences d'oscillations. Pour un mouvement rectiligne et uniforme de ces inclusions, l'expression de la force d'histoire est désormais connue pour une bulle gazeuse. Malheureusement, pour une sphère liquide, cette force n'est établie que dans le domaine fréquentiel et sa dépendance des

temps caractéristiques de diffusion des deux écoulements: intérieur et extérieur, nous empêche de l'établir dans le domaine temporel.

Expérimentalement, nous avons montré qu'à faibles nombres de Reynolds, la force de mémoire joue un rôle considérable dans l'équation du mouvement de chaque type d'inclusion. Sa contribution dans la traînée totale peut atteindre jusqu' à 20% en écoulement oscillatoire, tout en dépassant celle de l'effet de la masse ajoutée. Nous avons montré également qu'en la négligeant, la vitesse de la sphère sera surestimée en moyenne de 20 à 30%, ce qui engendre des prédictions erronées de sa trajectoire.

Pour des nombres de Reynolds intermédiaires, nous avons pu voir que si nous nous plaçons à des Reynolds de quelques dizaines, la force d'histoire est toujours présente et influe énormément sur les amplitudes des vitesses de la sphère ainsi que le déphasage avec le repère oscillant. Quant aux nombres de Reynolds supérieurs à 250, nous avons pu remarquer que théoriquement, la différence des solutions de l'équation du mouvement de l'inclusion avec et sans terme d'histoire, est nettement moins importante que dans le cas des faibles nombres de Reynolds. De plus, nous avons observé que la génération périodique des tourbillons en aval de la sphère, n'est pas prise en compte dans l'équation du mouvement et nous empêche de voir clairement l'influence du terme d'histoire.

Pour les particules ellipsoïdales, nous avons étendu l'étude théorique faite au chapitre 3, et nous avons déterminé les champs hydrodynamiques, à l'intérieur et à l'extérieur d'une inclusion ellipsoïdale, fluide, oscillante. En examinant l'expression de la traînée subie par celle ci, nous avons montré que la déviation de la particule de sa forme sphérique, engendre un nouveau terme d'histoire jusqu'à maintenant inconnu. L'expression exacte de ce terme a été établie pour un mouvement oscillatoire harmonique. Mais, pour une vitesse arbitraire, pour les mêmes raisons que pour la sphère fluide, c'est à dire sa dépendance aux deux temps caractéristiques de diffusion, l'expression de ce terme de mémoire supplémentaire ne peut être connue que numériquement. Cependant, par une étude asymptotique aux limites des temps courts et des temps longs, nous avons pu donner des formules générales de la nouvelle force d'histoire et prédire ainsi son comportement.

Les perspectives envisagées pour performer cette étude se résument en deux points principaux : le premier consiste à l'examen expérimental du mouvement d'une inclusion sphérique dans le cas des faibles fréquences et des moyens nombres de Reynolds, et proposer ainsi un noyau de la force d'histoire en tenant compte du caractère réel de l'écoulement, notamment les oscillations du sillage en aval de la particule. Quant au deuxième point, il consiste au développement d'une solution semi-analytique de l'écoulement autour d'une particule fluide non-sphérique en examinant la déformation instantanée de la particule sans l'imposer.

Références

Références

*ABBAD, M. & SOUHAR, M. 2001 L'effet du terme d'histoire sur le mouvement des particules sphériques rigides ou fluides dans un milieu visqueux en repère oscillant. *XV^{ème} Congrès Français de Mécanique, 3-7 Septembre 2001, Nancy, France.*

*ABBAD, M. & SOUHAR, M. 2001 Experimentation on the history force on rigid or fluid particles at low-Reynolds number in an oscillating frame. *Proceeding of fourth International Conference on Multiphase Flow, ICMF'2001, May 27- June 1, New Orleans, Louisiana, U.S.A.*

ABRAMOWITZ, M & STEGUN, I. A. 1965 Handbook of Mathematical Functions, *Dover*.

ALASSAR, R. S. & BADR, H. M. 1997 Oscillating viscous flow over a sphere. *Computers & Fluids*. **26** (7), 661-682.

ALBANO, A. M., BEDEAUX, D. & MAZUR, P. 1975 On the motion of a sphere with arbitrary slip in a viscous incompressible fluid. *Physica* **80 A**, 89-97.

ASMOLOV, E. S. 2001 Flow past a sphere undergoing unsteady rectilinear motion and unsteady drag at small Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **446**, 95-119.

BASSET, A. B. 1888 Treatise on hydrodynamics. *Deighton Bell, London*.

BEN SALEM, M. & OESTERLE, B. 1998 A shear flow around a spinning sphere: numerical study at moderate Reynolds numbers. *Int. J. Multiphase Flow* **24** (4), 563-585.

BENTWICH, M. & MILOH, T. 1978 The unsteady matched Stokes-Oseen solution for the flow past a sphere. *J. Fluid Mech.* **88**, 17-32.

BHAGA, D. & WEBER, M. E. 1981 Bubbles in viscous liquids: shapes, wakes and velocities. *J. Fluid Mech.* **105**, 61-85.

* Une petite erreur de formulation a été commise dans ces deux papiers qui n'entache pas beaucoup les résultats. Cette erreur a été corrigée.

- BOUSSINESQ 1885 Sur la résistance qu'oppose un liquide indéfini en repos. *C. R. Acad. Sci., Paris* **100**, 935-937.
- BOND, W. N. & NEWTON, D. A. 1928 Bubbles, drops and Stokes law. *Phil. Mag.* **24**, 89.
- BOZZANO, G. & DENTE, M. 2001 Shape and terminal velocity of single bubble motion: a novel approach. *Comp. Chem. Eng.* **25**, 571-576.
- BRABSTON, D. C. & KELLER, H. B. 1975 Viscous flows past spherical gas bubbles. *J. Fluid Mech.* **69** (1), 179-189.
- BUI DINH, T. 1992 Etude expérimentale des actions hydrodynamiques sur une sphère en translation et rotation dans une gamme de nombres de Reynolds intermédiaires. *Thèse de doctorat de l'I.N.P de Lorraine, France.*
- CHANG, E. J. & MAXEY, M. R. 1994 Unsteady flow about a sphere at low to moderate Reynolds number. Part 1. Oscillatory motion. *J. Fluid Mech.* **277**, 347-379.
- CHAO, B. T. 1963 Motion of spherical gas bubbles in a viscous liquid at large Reynolds numbers. *Phys. Fluids.* **5** (1), 69-79.
- CHAPLIN, J. R. 1999 History forces and the unsteady wake of a cylinder. *J. Fluid Mech.* **393**, 99-121.
- CHESTER, W. & BREACH, D. R. 1969 On the flow past a sphere at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **37**, 751-760.
- CHI, B. K. & LEAL, L. G. 1989 A theoretical study of the motion of a viscous drop toward a fluid interface at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **201**, 123-146.
- CHISNELL, R. F. 1987 The unsteady motion of a drop moving vertically under gravity. *J. Fluid Mech.* **176**, 443-464.
- CHONOWSKI, A. & ANGELINO, H. 1972 Etude en régime non laminaire du mouvement d'une goutte dans un milieu pulsé. *Can. J. Chem. Eng.* **50**, 23-30.
- CLIFT, R., GRACE, J. R. & WEBER, M. E. 1978 Bubbles, Drops, and Particles. *Academic Press, New York.*
- COIMBRA, C. F. M. & RANGEL, R. H. 1998 General solution of the particle momentum equation in unsteady Stokes flows. *J. Fluid Mech.* **370**, 53-72.
- CORRSIN, S. & LUMLEY, J. L. 1956 On the equation of motion of a particle in a turbulent fluid. *Appl. Sci. Research. A.* **6**, 114-116.
- DANDY, D. S. & DWYER, H. A. 1990 A sphere in shear flow at finite Reynolds number: effect of shear on particle lift, drag, and heat transfer. *J. Fluid Mech.* **216**, 381-410.

- DAVIS, R. E. & ACRIVOS, A. 1966 The influence of surfactants on the creeping motion of bubbles. *Chem. Eng. Sci.* **21** (8), 681-685.
- DENNIS, S. C. R., SINGH, S. N. & INGHAM, D. B. 1980 The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **102** (2), 257-279.
- ELZINGA, E. R. & BANCHERO, J. T. 1961 Some observations on the mechanics of drops in liquid-liquid systems. *AIChE Journal* **7**, 394-399.
- ESMAEELI, A. & TRYGGVASON, G. 1998 Direct numerical simulations of bubbly flows. Part 1. Low Reynolds number arrays. *J. Fluid Mech.* **337**, 313-345.
- FAXEN, H. 1924 Der widerstand gegen die bewegung einer starren kugel in einer zahren flussigkeit, die zwischen zwei parallelen, ebener wanden eigenschlossen ist. *Arkiv Mat. Astron. Fys.* **18**, (29).
- FERREIRA, J. M. & CHHABRA, R. P. 1998 Accelerating motion of a vertically falling sphere in incompressible Newtonian media: an analytical solution. *Powder Technol.* **97**, 6-15.
- FOURGIOTIS, A., NACIRI, A. & LANCE, M. 1988 Mouvement d'une bulle isolée dans un liquide turbulent et dans un liquide en rotation uniforme. *Colloque Euromech. 234, Toulouse, France.*
- GALINDO, V. & GERBETH, G. 1993 A note on the force on an accelerating spherical drop at low Reynolds number. *Phys. Fluids A* **5**, (12), 3290-3292.
- GATIGNOL, R. 1983 The Faxén formulae for a rigid particle in an unsteady non-uniform Stokes flow. *J. Mec. Théo. Appl.* **1** (2), 143-160.
- GAVZE, E. 1990 The accelerated motion of rigid bodies in non-steady Stokes flow. *Int. J. Multiphase Flow* **16** (1), 153-166.
- GOLDSTEIN, J. S. 1929 Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics. *Proc. Camb. Philos. Soc.* **26**.
- GORODZOV, V. A. 1975 Slow motions of a liquid drop in a viscous liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **6**, 32-37.
- GYARMATHY, G. 1982 The spherical droplet in gaseous carrier streams: review and synthesis. *Multiphase Sci. & Tech.* **1**, Hemisphere, Washington.
- HAAS, U., SCHMIDT-TRAUB, H. & BRAUER, H. 1972 Umstomung kugelformiger Blasen mit innerer Zirculation. *Chem. Ing. Techn.* **44** (18), 1060-1068.

- HABERMAN, W. L. & MORTON, R. K. 1953 An experimental investigation of the drag and shape of air bubbles rising in various liquid. *The David M. Taylor Model Basin, Report 802*, 55.
- HADAMARD, J. 1911 Mouvement permanent lent d'une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. *C. R. Acad. Sci.* **152** (25), 1735-1738.
- HAPPEL, J. & BRENNER, H. 1991 Low Reynolds number hydrodynamics. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*.
- HARPER, J. F. & MOORE, W. 1968 The motion of a spherical liquid drop at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **32**, 367-391.
- HARPER, J. F. 1973 On bubbles with small immobile adsorbed films rising in liquids at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **58** (part 3), 539-545.
- HETSRONI, G., HABER, S. & WACHOLDER, E. 1970 The flow fields in and around a droplet moving axially within a tube. *J. Fluid Mech.* **41**, 689-705.
- HILL, P. G., WITTING, H. & DEMETRI, E. P. 1963 Condensation of metal vapors during rapid expansion. *ASME J. Heat Transfer* **85**, 303-317.
- HJELMFELT, A. T. & MOCKROS, L. F. 1966 Motion of discrete particles in a turbulent fluid. *Appl. Sci. Res.* **16**, 149-161.
- HUBBARD, G. L., DENNY, V. E. & MILLS, A. F. 1975 Droplet evaporation effects of transients and variable properties. *Int. J. Heat & Mass Transfer.* **18**, 1003-1008.
- HUGHES, R. R. & GILLILAND, E. R. 1952 The mechanics of drops. *Chem. Eng. Prog.* **48**, 497-504.
- KANEDA, Y. 1980 A generalization of Faxén's theorem to nonsteady motion of an almost spherical drop in an arbitrary flow of a compressible fluid. *Physica* **101 A**, 407-422.
- KARANFILIAN, S. K. & KOTAS, T. J. 1978 Drag on a sphere in unsteady motion in a liquid at rest. *J. Fluid Mech.* **87** (part 1), 85-96.
- KIM, S. & KARRILA, S. J. 1991 Microhydrodynamics: principles and selected applications. *Butterworth-Heinemann, Boston*.
- KIM, I., ELGHOBASHI, S. & SIRIGANO, W. A. 1998 On the equation for spherical-particle motion: effect of Reynolds and acceleration numbers. *J. Fluid Mech.* **367**, 221-253.
- KONOPLIV, N. 1971 Gravitationally induced acceleration of spheres in a creeping flow. A heat transfer analogy. *AIChE Journal* **17** (6), 1502-1503.

- KUROSE, R. & KOMORI, S. 1999 Drag and lift forces on a rotating sphere in a linear shear flow. *J. Fluid Mech.* **384**, 183-206.
- LAMB, H. 1932 Hydrodynamics. 6^{ème} edition, *Camb. Univ. Press*.
- LAWRENCE, C. J. & WEINBAUM, S. 1986 The force on an axisymmetric body in linearized, time-dependent motion: a new memory term. *J. Fluid Mech.* **171**, 209-218.
- LAWRENCE, C. J. & WEINBAUM, S. 1988 The unsteady force on a body at low Reynolds number; the axisymmetric motion of a spheroid. *J. Fluid Mech.* **189**, 463-489.
- LECLAIR, B. P. & HAMIELEC, A. E. 1971 Viscous flow through particle assemblages at intermediate Reynolds numbers. A cell model for transport in bubble swarms. *Can. J. Chem. Eng.* **49** (6), 713-720.
- LEE, S. 2000 A numerical study of the unsteady wake behind a sphere in a uniform flow at moderate Reynolds numbers. *Computers & Fluids* **29**, 639-667.
- LEE, S. & WILCZAK, J. M. 2000 The effects of shear flow on the unsteady wakes behind a sphere at moderate Reynolds numbers. *Fluid Dynamics Research* **27**, 1-22.
- LEGENDRE, D. & MAGNAUDET, J. 1997 A note on the lift force on a spherical bubble or drop in a low-Reynolds-number shear flow. *Phys. Fluids* **9** (11), 3572-3574.
- LEGENDRE, D. & MAGNAUDET, J. 1998 The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow. *J. Fluid Mech.* **368**, 81-126.
- LEVICH, V. G. 1949 Mouvement d'une bulle pour des grands nombres de Reynolds. *Zhur. Eksp. Theoret. Fiz.* **19**, 18-24.
- LEVICH, V. G. 1962 Physicochemical hydrodynamics. *Prentice Hall, Englewood Cliffs*.
- LIANG, L. & MICHAELIDES, E. E. 1992 The magnitude of Basset forces in unsteady multiphase flow computations. *J. Fluids Eng.* **114**, 417-419.
- LIAO, S. J. 2002 An analytic approximation of the drag coefficient for the viscous flow past a sphere. *Int. J. Non-Linear Mech.* **37**, 1-18.
- LOEWENBERG, M. 1993 Stokes resistance, added mass, and Basset force for arbitrarily oriented, finite-length cylinders. *Phys. Fluid A* **5** (3), 765-767.
- LOVALENTI, P. M. & BRADY, J. F. 1993 The force on a bubble, drop or particle in arbitrary time-dependent motion at small Reynolds number. *Phys. Fluids A* **5** (9), 2104-2116.
- LOVALENTI, P. M. & BRADY, J. F. 1993 The force on a sphere in a uniform flow with small-amplitude oscillations at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **256**, 607-614.

- LOVALENTI, P. M. & BRADY, J. F. 1993 The hydrodynamic force on a rigid particle undergoing arbitrary time-dependent motion at small Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **256**, 561-605.
- LU, N. Q., OGUZ, H. N. & PROSPERETTI, A. 1989 The oscillations of a small floating bubble. *Phys. Fluid A* **1** (2), 252-260.
- MAGNAUDET, J. , RIVERO, M. & FABRE, J. 1995 Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part 1. Steady straining flow. *J. Fluid Mech.* **284**, 97-135.
- MAGNAUDET, J. & LEGENDRE, D. 1998 The viscous drag force on a spherical bubble with time-dependent radius. *Phys. Fluid A* **10** (3), 550-554.
- MARCHILDON, E. K. & GAUVIN, W. H. 1979 Effects of acceleration, deceleration and particle shape on single-particle drag coefficients in still air. *AIChE Journal.* **25** (6), 938-948.
- MAXEY, M. R. & RILEY, J. J. 1983 Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Phys. Fluid* **26** (4), 883-889.
- MAXEY, M. R. 1987 The motion of small spherical particles in a cellular flow field. *Phys. Fluid* **30** (7), 1915-1928.
- MAZUR, P. & BEDEAUX, D. 1974 A generalization of Faxén's theorem to nonsteady motion of a sphere through an incompressible fluid in arbitrary flow. *Physica* **76**, 235-246.
- MEI, R., LAWRENCE, C. J. & ADRIAN, R. J. 1991 Unsteady drag on a sphere at finite Reynolds number with small fluctuations in the free-stream velocity. *J. Fluid Mech.* **233**, 613-631.
- MEI, R. & ADRIAN, R. J. 1992 Flow past a sphere with an oscillation in the free-stream velocity and unsteady drag at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **237**, 323-341.
- MEI, R. & KLAUSNER, J. F. 1992 Unsteady force on a spherical bubble at finite Reynolds number with small fluctuations in the free-stream velocity. *Phys. Fluids A* **4** (1), 63-70.
- MEI, R. 1992 An approximate expression for the shear lift force on a spherical particle at finite Reynolds number. *Int. J. Multiphase Flow* **18** (1), 145-147.
- MEI, R. 1993 History force on a sphere due to a step change in the free-stream velocity. *Int. J. Multiphase Flow.* **19** (3), 509-525.
- MEI, R. 1994 Flow due to an oscillating sphere and an expression for unsteady drag on the sphere at finite Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **270**, 133-174.

- MEI, R., KLAUSNER, J. F. & LAWRENCE, C. J. 1994 A note on the history force on a spherical bubble at finite Reynolds number. *Phys. Fluids A* **6** (1), 418-420.
- MICHAELIDES, E. E. 1988 On the drag coefficient and the correct integration of the equation of motion of particles in gases. *J. Fluid Eng.* **110**, 339-341.
- MICHAELIDES, E. E. 1992 A novel way of computing the Basset term in unsteady multiphase flow computations. *Phys. Fluids A* **7** (7), 1579-1582.
- MICHAELIDES, E. E. & FENG, Z. G. 1995 The equation of motion of a small viscous sphere in an unsteady flow with interface slip. *Int. J. Multiphase Flow* **21** (2), 97-135.
- MICHAELIDES, E. E. & FENG, Z. G. 1996 Analogies between the transient momentum and energy equations of particles. *Prog. Energy Combust. Sci.* **22**, 147-162.
- MICHAELIDES, E. E. 1997 Review. The transient equation of motion for particles, bubbles, and droplets. *J. Fluid Eng.* **119**, 233-247.
- MOORE, D. W. 1963 The boundary layer on a spherical gas bubble. *J. Fluid Mech.* **16**, 161-176.
- MOORE, M. J. & SIEVERDING, C. H. 1975 Two-phase steam flow in turbines and separators. *Hemisphere, Washington*.
- MORAGA, F. J., BONETTO, F. J. & LAHEY, R. T. 1999 Lateral forces on spheres in turbulent uniform shear flow. *Int. J. Multiphase Flow* **25**, 1321-1372.
- MORDANT, N. & PINTON, J. F. 2000 Velocity measurement of a setting sphere. *Eur. Phys. J. B.* **18**, 343-352.
- MORRISSON, F. A. & STEWART, M. B. 1976 Small bubble motion in an accelerating liquid. *J. Appl. Mech.* **43**, 399-403.
- OCKENDON, J. R. 1968 The unsteady motion of a small sphere in a viscous liquid. *J. Fluid Mech.* **34** (part 2), 229-239.
- ODAR, F. & HAMILTON, W. S. 1964 Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **18**, 302-314.
- OGUZ, H. N. & SADHAL S. S. 1987 Growth and collapse of translating compound multiphase drops: analysis of fluid mechanics and heat transfer. *J. Fluid Mech.* **179**, 105-136.
- OGUZ, H. N. & SADHAL, S. S. 1988 Effects of soluble and insoluble surfactants on the motion of drops. *J. Fluid Mech.* **194**, 563-579.
- OGUZ, H. N. & PROSPERETTI, A. 1989 Surface-tension effects in the contact of liquid surfaces. *J. Fluid Mech.* **203**, 149-171.

- OLIVER, D. L. R. & CHUNG, J. N. 1985 Steady flows in inside and around a fluid sphere at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **154**, 215-230.
- OLIVER, D. L. R. & CHUNG, J. N. 1987 Flow about a sphere at low to moderate Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* **117**, 1-18.
- OSEEN, C. W. 1910 Über die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. *Ark. Mat. Astron. Fysik.* **6** (29).
- OSEEN, C. 1927 Hydrodynamik. *Akademische Verlag, Leipsig*.
- PARK, W. C., KLAUSNER, J. F. & MEI, R. 1995 Unsteady forces on spherical bubbles. *Experiments in Fluids* **19**, 161-172.
- PAYNE, L. E. & PELL, W.H. 1960 The Stokes flow problem for a class of axially symmetric bodies. *J. Fluid Mech.* **7**, 529.
- PROSPERETTI, A. 1980 Free oscillations of drops and bubbles: the initial-value problem. *J. Fluid Mech.* **100** (part 2), 333-347.
- PROUDMAN, I. & PEARSON, J. R. A. 1957 Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **25**, 237-262.
- RIVERO, M. 1991 Etude par simulation numérique des forces exercées sur une inclusion sphérique par un écoulement accéléré. *Thèse de doctorat de l'I.N.P de Toulouse, France*.
- ROOS, F. W. & Willmarth, W. W. 1971 Some Experimental Results on Sphere and Disk Drag. *AIAA Journal*, **9**, (2), 285-291.
- RUBINOW, S. I. & KELLER, J. B. 1961 The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.* **11**, 447-459.
- RUZICKA, M. C. 2000 On bubbles rising in line. *Int. J. Multiphase Flow* **26**, 1141-1181.
- RYVKIND, V. Y. & RYSKIN, G. 1976 Flow structure in motion of a spherical drop in a fluid medium at intermediate Reynolds number. *Fluid Dynamics.* **11**, 5-12.
- SADHAL, S. S & JOHNSON, R. E. 1983 Stokes flow past bubbles and drops partially coated with thin films. Part 1. Stagnant cap of surfactant film- exact solution. *J. Fluid Mech.* **126**, 237-250.
- SADHAL, S. S., AYYASWAMY, P. S. & CHUNG, J. N. 1991 Transport Phenomena with drops and bubbles. *Springer, U.S.A.*
- SAFFMAN, P. G. 1965 The lift on a small sphere in a slow shear flow. *J. Fluid Mech.* **22** (2), 385-400.
- SAFFMAN, P. G. 1968 Corrigendum. *J. Fluid Mech.* **31** (3), 624.

- SAMPSON, R. A. 1891 On Stoke's current function. *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **182**, 449.
- SANGANI, A. S., ZANG, D. Z. & PROSPERETTI, A. 1991 The added mass, Basset, and viscous drag coefficients in nondilute bubbly liquids undergoing small-amplitude oscillatory motion. *Phys. Fluids A* **3** (12), 2955-2967.
- SANO, T. 1981 Unsteady flow past a sphere at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **112**, 433-441.
- SCHOENEBOERN, P. R. 1975 The interaction between a single sphere and a oscillating fluid. *Int. J. Multiphase Flows.* **2**, 307-317.
- SHERWOOD, J. D. 2000 Potential flow around a deforming bubble in a Venturi. *Int. J. Multiphase Flow* **26**, 2005-2047.
- SNABRE, P. & MAGNIFOTCHAM, F. 1998 Recirculation flow induced by a bubble stream rising in a viscous liquid. *Eur. Phys. J. B* **4**, 379-386.
- STOKES, G. G. 1851 On the effect of the internal friction of fluids on the motion of a pendulum. *Trans. Camb. Phil. Society* **9**, 8-106.
- STONE, H. A. 1993 An interpretation of the translation of drops and bubbles at high Reynolds numbers in terms of the vorticity field. *Phys. Fluids A* **5** (10), 2567-2569.
- SY, F., TAUNTON, J. W. & LIGHTFOOT, N. 1970 Transient creeping flow around spheres. *AIChE Journal* **16** (3), 386-391.
- SY, F. & LIGHFOOT, N. 1971 Transient creeping flow around fluid spheres. *AIChE Journal* **17**, 177-181.
- TAKAGI, H. 1977 Viscous flow induced by slow rotation of a sphere. *J. Phys. Soc. Japan.* **42** (1), 319-325.
- TAM, P. D. 1981 De la traînée instationnaire sur une petite bulle. *Thèse de doctorat ès Sciences de l'I.N.P de Grenoble, France.*
- TAYLOR, T. D. & ACRIVOS, A. 1964 On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **18**, 466-476.
- TCHEN, C. M. 1947 Mean values and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid. *Doctorat dissertation, Delft, Holland.*
- TEMKIN, S. & METTA, H. K. 1982 Droplet drag in a accelerating and decelerating flow. *J. Fluid Mech.* **116**, 297-313.
- THIZON, P. 1977 Contribution à l'étude théorique et expérimentale des effets de parois sur le comportement de bulles en ascension dans un fluide visqueux. *Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers, France.*

-
- THOMAS, P. J. 1992 On the influence of the Basset history force on the motion of a particle through a fluid. *Phys. Fluid A* **4** (9), 2090-2093.
- TSUJI, Y., KATO, N. & TANAKA, K. 1991 Experiments on the unsteady drag and wake of a sphere at high Reynolds numbers. *Int. J. Multiphase Flow* **17** (3), 343-354.
- VAN DER GELD, C. W. M. 1997 Measurement and prediction of solid sphere trajectories in accelerated gas flow. *Int. J. Multiphase Flow* **23** (2), 357-376.
- VOJIR, D. J. & MICHAELIDES, E. E. 1994 Effect of the history term on the motion of rigid spheres in a viscous fluid. *Int. J. Multiphase Flow* **20** (3), 547-556.
- WHITEHEAD, A. N. 1889 Second approximation to viscous fluid motion. A sphere moving steadily in a straight line. *Quart. J. Math.* **23**, 143-152.
- YANG, S. M. & LEAL, L. G. 1991 A note on memory-integral contributions to the force on an accelerating spherical drop at low Reynolds number. *Phys. Fluids A* **3** (7), 1822-1824.

Annexe A

Annexe A

Champ hydrodynamique autour d'une sphère solide oscillante

A.1 Champs hydrodynamiques

Pour déterminer le champ hydrodynamique autour d'une sphère solide oscillante, nous allons reprendre la formulation du problème, définie au chapitre 3. La forme générale de la fonction de courant $\Psi(r, \beta, t)$ obtenue est:

$$\Psi(r, \beta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(f_{0n}(r) + \alpha_1 f_{1n}(r) e^{-it} \right) \mathcal{F}_n(\beta) + O(\alpha_1^2) \quad (\text{A.1})$$

avec
$$f_{0n}(r) = A_{0n} r^n + B_{0n} r^{-n+1} + C_{0n} r^{n+2} + D_{0n} r^{-n+3} \quad (\text{A.2})$$

$$f_{1n}(r) = A_{1n} r^n + B_{1n} r^{-n+1} + k_e^{-n+2} r^n \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{n-1} \left(C_{1n} \frac{\sinh(k_e r)}{k_e r} + D_{1n} \frac{\exp(-k_e r)}{k_e r} \right) \quad (\text{A.3})$$

les fonctions f_{jn} ($j=0$ et 1) doivent vérifier séparément les conditions aux limites suivantes:

sur la surface de la sphère: $r = 1$

$$\frac{df_{jn}}{dr} = f_{jn} = 0 \quad (\text{A.4})$$

loin de la sphère: $r \rightarrow \infty$

$$\frac{f_{jn}}{r^2} \rightarrow 1 \quad (\text{A.5})$$

De la même façon que pour la sphère fluide, cette dernière condition exige que:

$$A_{j2} = 1 \quad \text{pour } j = 0, 1 \quad (\text{A.6})$$

$$A_{jn} = 0 \quad \text{pour } j = 0, 1 \quad \text{et } \forall n \geq 3 \quad (\text{A.7})$$

$$C_{jn} = 0 \quad \text{pour } j = 0, 1 \quad \text{et } \forall n \geq 2 \quad (\text{A.8})$$

Quant à la condition (A.4), elle nous permet de déterminer les constantes B_{jn} et D_{jn} par la résolution des systèmes d'équations suivants:

solutions de base

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{02}^e \\ D_{02}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{pour } n = 2 \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-n & 3-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{0n}^e \\ D_{0n}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } n \geq 3 \quad (\text{A.10})$$

perturbations

$$\begin{pmatrix} 1 & G_2^e \\ -1 & H_2^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{12}^e \\ D_{12}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{pour } n = 2 \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & G_n^e \\ 1-n & H_n^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1n}^e \\ D_{1n}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } n \geq 3 \quad (\text{A.12})$$

avec

$$G_n(k_e) = -\left(\frac{2k_e}{\pi}\right)^{1/2} \mathcal{K}_{n-1/2}(k_e) \quad (\text{A.13})$$

$$H_n(k_e) = \left(\frac{d}{dr} G_n(k_e r)\right)_{r=1} \quad (\text{A.14})$$

Pour $n \geq 3$, le système d'équations (A.10) n'a qu'une solution triviale nulle, puisque son déterminant est égal à 2 $\forall n$. Quant au système (A.12), le déterminant dépend de l'ordre n et du nombre de Stokes St , il est donné en terme des fonctions de Bessel par:

$$\text{Det} = -\left(\frac{2k_e}{\pi}\right)^{1/2} \left((2n-1)\mathcal{K}_{n-1/2}(k_e) - k_e \mathcal{K}_{n+1/2}(k_e) \right) \quad \text{où } k_e = \sqrt{-i St/2} \quad (\text{A.15})$$

Pour $3 \leq n \leq 20$ et $10^{-3} \leq St \leq 10^2$, nous avons démontré numériquement que l'équation $|\text{Det}| = 0$ n'a pas de solution (figure A.1). Cela nous conduit donc à conclure que:

$$B_{jn} = D_{jn} = 0 \quad \forall n \geq 3 \quad \text{et} \quad j = 0, 1 \quad (\text{A.16})$$

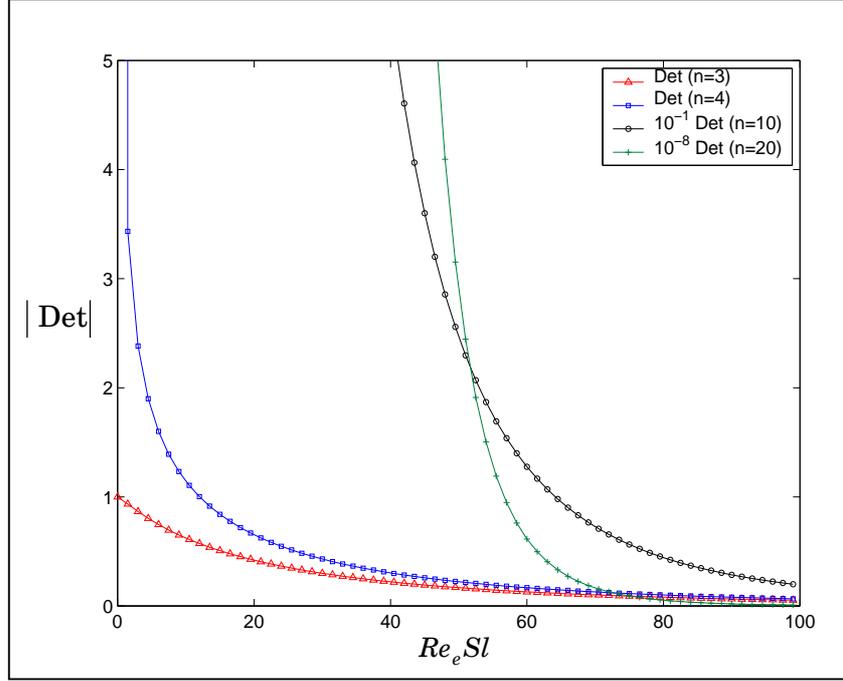


Figure A.1: Examen du déterminant (Det) du système d'équations (A.12) pour $n = 3, 4, 10$ et 20

Finalement, le seul ordre à considérer est $n = 2$, correspondant aux solutions adimensionnelles bien connues de Stokes:

$$\begin{aligned} \Psi(r, \beta, t) = & \left(\left(r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2}r^{-1} \right) \right. \\ & \left. + \alpha_1 \left(r^2 - \left(1 + \frac{3}{k_e} + \frac{3}{k_e^2}\right)r^{-1} + \frac{3}{k_e} \left(1 + \frac{1}{k_e r}\right) e^{-k_e(r-1)} \right) e^{-it} \right) \mathcal{F}_2(\beta) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

L'aspect de l'écoulement, induit par les oscillations de la sphère ainsi que la distribution de vorticité, est illustré sur les figures (A.2) et (A.3).

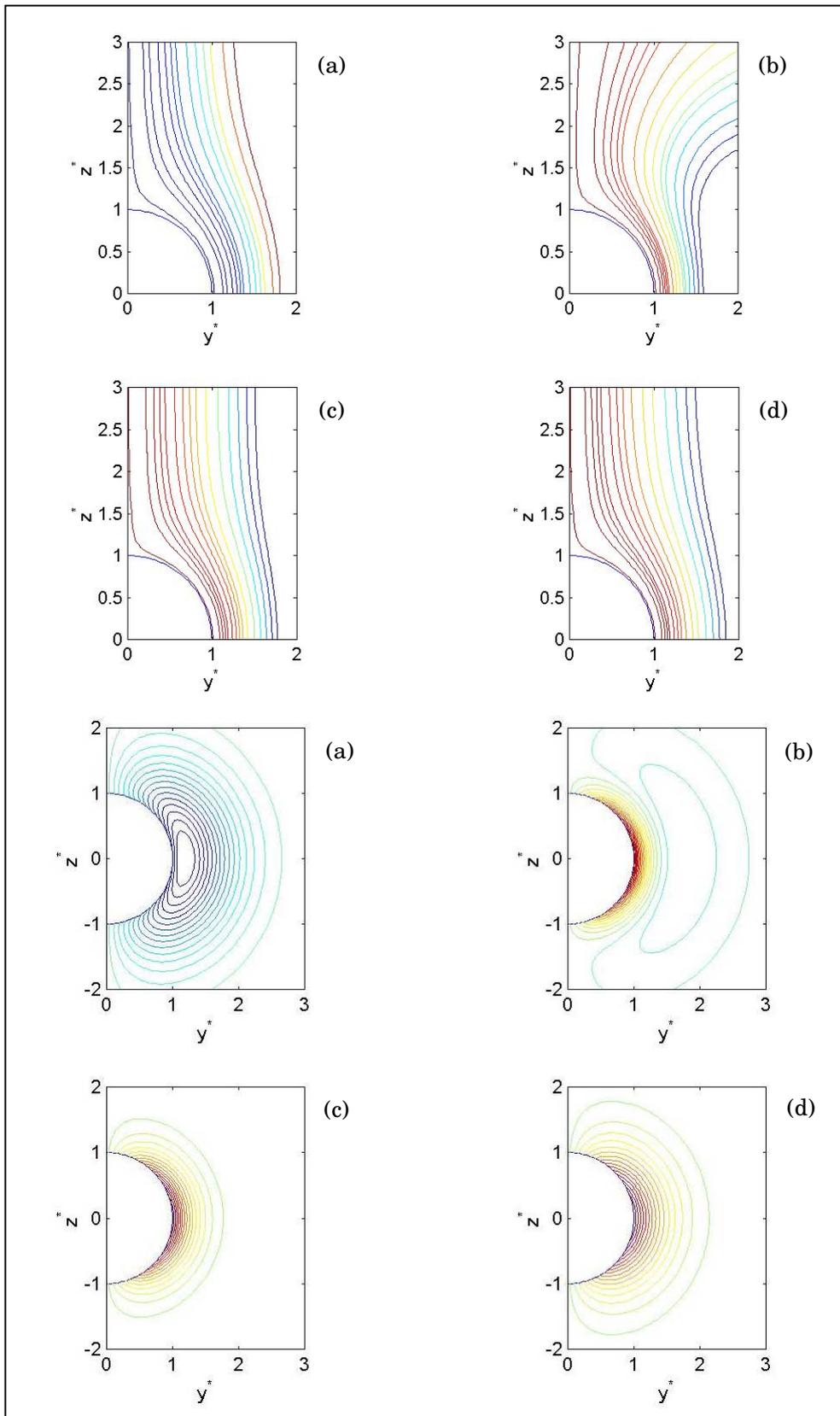
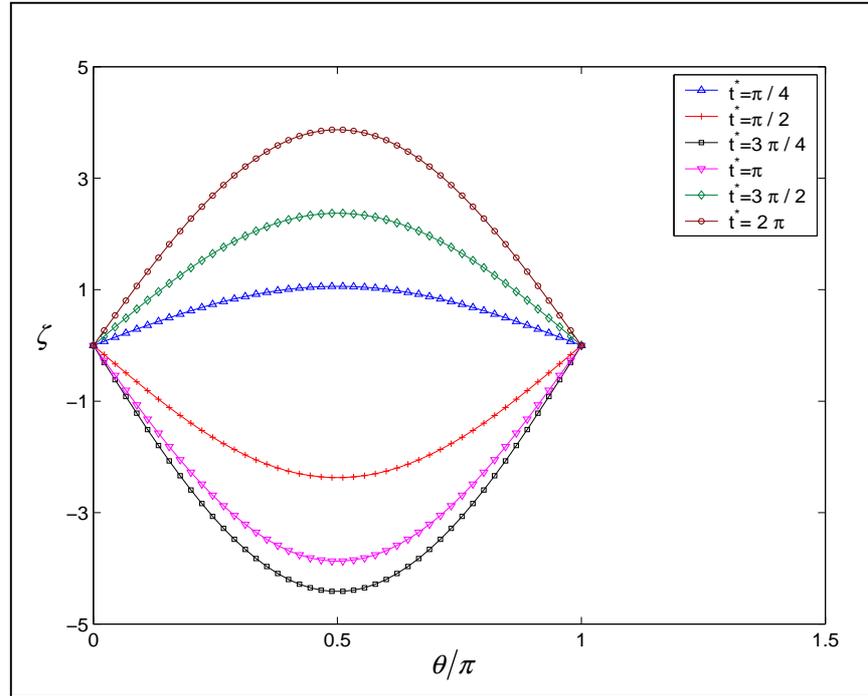


Figure A.2: Lignes de courant Ψ_1 et d'iso vorticité ζ_1 pour une demi-période d'oscillations: $St = 10$, (a): $t^* = \pi/4$, (b): $t^* = \pi/2$, (c): $t^* = 3\pi/4$, (d): $t^* = \pi$


 Figure A.3: Distribution de la vorticité sur la surface de la sphère $St = 10$

A.2 Vitesse de la sphère

Pour une sphère solide commençant son mouvement à partir du repos, avec une vitesse initiale U_0 , son équation du mouvement adimensionnel s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante:

$$\frac{1}{B} \frac{dU}{dt} + U + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{dU/d\tau}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = 1 - \frac{U_0}{\sqrt{\pi t}} \quad \text{avec} \quad B = 9/(2\gamma + 1) \quad (\text{A.18})$$

dans (A.18), le temps et la vitesse sont adimensionnalisés respectivement par le temps caractéristique de diffusion $\tau_{0e} = a^2/\nu$ et la vitesse terminale de Stokes U_{St} , donnée par:

$$U_{St} = (2/9)(\gamma - 1)g\tau_{0e} \quad (\text{A.19})$$

la résolution de l'équation (A.18) dans le domaine de Laplace nous permet d'obtenir sans difficulté, la vitesse de la sphère:

$$U(t) = 1 - \operatorname{Re} \left(\frac{r_1 + U_0 r_2}{r_1 - r_2} \exp(r_2^2 t) \operatorname{erfc}(r_2 \sqrt{t}) - \frac{r_2 + U_0 r_1}{r_1 - r_2} \exp(r_1^2 t) \operatorname{erfc}(r_1 \sqrt{t}) \right) \quad (\text{A.20})$$

où r_1 et r_2 représentent les racines de l'équation caractéristique:

$$r^2 + B r + B = 0 \quad (\text{A.21})$$

dans le cas où (A.21) aurait une racine double r_0 , la vitesse de la sphère s'exprimerait par:

$$U(t) = 1 + (7 + U_0) \exp(4 t) \operatorname{erfc}(2\sqrt{t}) - 4\sqrt{t/\pi} \quad (\text{A.22})$$

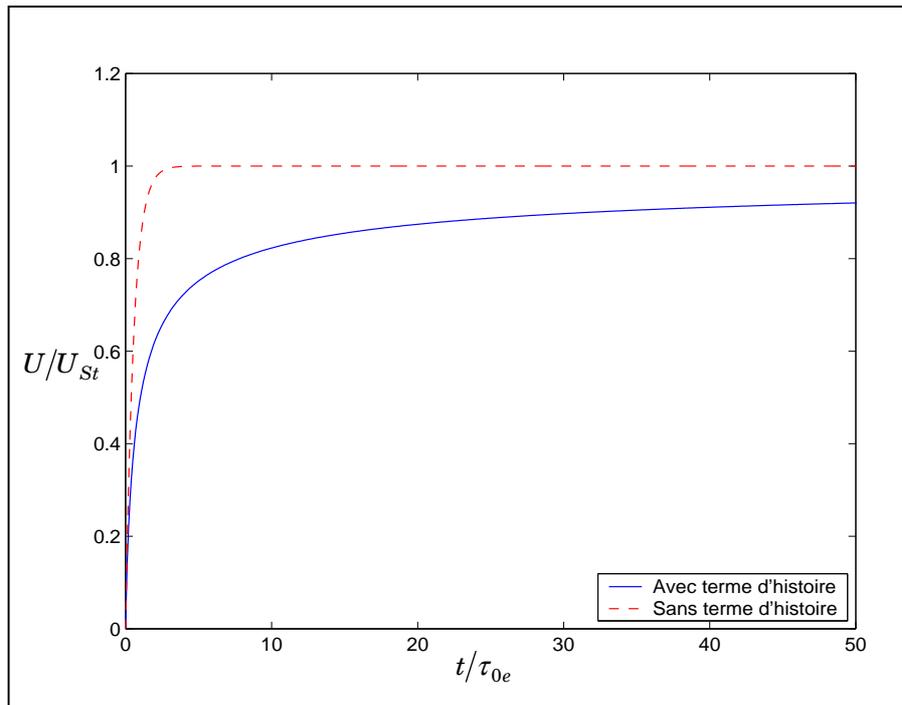


Figure A.4: Vitesse d'une sphère solide: $\gamma = 2$

Annexe B

Annexe B

Fonctions de Gegenbauer

B.1 Equation différentielle de Gegenbauer

L'équation différentielle de Gegenbauer est une forme généralisée de l'équation de Legendre. Elle est donnée par:

$$(1-x^2) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - (2\alpha+1)x \frac{dy(x)}{dx} + n(n+2\alpha)y(x) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Sa solution peut s'écrire d'une manière générale comme suit:

$$y(x) = A_0 \mathcal{F}_n^\alpha(x) + B_0 \mathcal{H}_n^\alpha(x) \quad (\text{B.2})$$

où \mathcal{F}_n^α et \mathcal{H}_n^α sont les fonctions de Gegenbauer d'ordre n et de degré α , respectivement, de première et de deuxième espèce. Pour $\alpha = 1/2$, l'équation (B.1) correspondra à celle de Legendre d'ordre n :

$$(1-x^2) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - 2x \frac{dy(x)}{dx} + n(n+1)y(x) = 0 \quad (\text{B.3})$$

avec
$$y(x) = A_1 P_n(x) + B_1 Q_n(x) \quad (\text{B.4})$$

où P_n et Q_n représentent respectivement les polynômes de Legendre de première et de deuxième espèce. Pour $\alpha = -1/2$, on retrouve l'équation (3.33) abordée au chapitre 3, telle que:

$$(1-x^2) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + n(n-1)y(x) = 0 \quad (\text{B.5})$$

En vertu de (B.2), sa solution sera donc:

$$y(x) = A_0 \mathcal{F}_n^{-1/2}(x) + B_0 \mathcal{H}_n^{-1/2}(x) \quad (\text{B.6})$$

Pour relier les fonctions \mathcal{F}_n^α et \mathcal{H}_n^α aux polynômes de Legendre, l'équation de Gegenbauer (B.1) peut s'exprimer aussi sous la forme suivante:

$$(1-x^2) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - (2\alpha_1 - 3)x \frac{dy(x)}{dx} + (m+1)(m+2\alpha_1 - 1)y(x) = 0 \quad (\text{B.7})$$

où (B.3) correspondra à $\alpha_1 = 1/2$ et $m = n$, tandis que (B.5) est retrouvée pour $\alpha_1 = 3/2$ et $m = n - 2$. La solution générale de (B.7) s'écrit:

$$y(x) = (1-x^2)^{\alpha_1-1/2} (A C_m^{\alpha_1}(x) + B D_m^{\alpha_1}(x)) \quad (\text{B.8})$$

Les fonctions $C_m^{\alpha_1}$ et $D_m^{\alpha_1}$ s'expriment en fonction des polynômes associés de Legendre P_m^l et Q_m^l par:

$$P_m^l(x) = (-1)^l (1-x^2)^{l/2} [1.3.5\dots(2l-1)] C_{m-l}^{l+1/2} \quad (\text{B.9a})$$

$$Q_m^l(x) = (-1)^l (1-x^2)^{l/2} [1.3.5\dots(2l-1)] D_{m-l}^{l+1/2} \quad (\text{B.9b})$$

avec
$$P_m^l(x) = (-1)^l (1-x^2)^{l/2} \frac{d^l}{dx^l} P_m(x) \quad (\text{B.9c})$$

$$Q_m^l(x) = (-1)^l (1-x^2)^{l/2} \frac{d^l}{dx^l} Q_m(x) \quad (\text{B.9d})$$

La substitution de $\alpha_1 = 3/2$, $m = n - 2$ et $l = 1$, dans (B.8) et (B.9), donne la solution générale de (B.5) suivante:

$$\begin{aligned} y(x) &= (1-x^2) (A C_{n-2}^{3/2} + B C_{n-2}^{3/2}) = (1-x^2) \left(A_1 \frac{dP_{n-1}}{dx} + B_1 \frac{dQ_{n-1}}{dx} \right) \\ &= A_0 \mathcal{F}_n^{-1/2} + B_0 \mathcal{H}_n^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Finalement, l'utilisation des relations de récurrence de P_n et Q_n nous permet d'établir les formules suivantes pour tout $n \geq 2$:

$$A_0 = n(n-1)A_1 \quad B_0 = n(n-1)B_1 \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{F}_n^{-1/2} = \frac{P_{n-2} - P_n}{2n-1} \quad \mathcal{H}_n^{-1/2} = \frac{Q_{n-2} - Q_n}{2n-1} \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{d}{dx} \mathcal{F}_n^{-1/2} = -P_n \quad \frac{d}{dx} \mathcal{H}_n^{-1/2} = -Q_n \quad (\text{B.13})$$

Afin d'alléger l'écriture dans ce qui suit, l'indice $(-1/2)$ des fonctions \mathcal{F} et \mathcal{H} sera ôté. Pour les deux premiers ordres $n = 0$ et $n = 1$, elles sont définies par:

$$\mathcal{F}_0 = -\mathcal{H}_1 = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1 = -\mathcal{H}_0 = x \quad (\text{B.14})$$

pour $n \geq 2$, la fonction de première espèce est donnée par la formule explicite suivante du type Rodriguez:

$$\mathcal{F}_n(\beta) = \frac{-1}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left(\frac{x^2-1}{2} \right)^{n-1} \quad (\text{B.15})$$

telles que pour $n = 2, 3, 4$ et 5 on trouve:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(x) &= \frac{1}{2}(1-x^2) & \mathcal{F}_3(x) &= \frac{1}{2}x(1-x^2) \\ \mathcal{F}_4(x) &= \frac{1}{8}x(1-x^2)(5x^2-1) & \mathcal{F}_5(x) &= \frac{1}{8}x(1-x^2)(7x^2-3) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

en ce qui concerne la fonction de deuxième espèce, elle est déterminée par:

$$\mathcal{H}_n(x) = \frac{1}{2} \mathcal{F}_n(x) \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \mathcal{M}_n(x) \quad (\text{B.17})$$

avec

$$\mathcal{M}_n(x) = - \sum_{l=n/2}^{(n+1)/2} \frac{(2n-4l+1)}{(2l-1)(n-l)} \left(1 - \frac{(2l-1)(n-l)}{n(n-1)} \right) \mathcal{F}_{n+1-2l}(x) \quad (\text{B.18})$$

telle que pour $n = 2, 3, 4$ et 5 les polynômes \mathcal{M}_n prennent les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2(x) &= \frac{1}{2}x & \mathcal{M}_3(x) &= \frac{1}{6}(3x^2-2) \\ \mathcal{M}_4(x) &= \frac{1}{24}x(15x^2-13) & \mathcal{M}_5(x) &= \frac{1}{120}x(105x^4-115x^2+16) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

la fonction de Gegenbauer \mathcal{H}_n est singulière aux pôles $x = \pm 1$, tandis que \mathcal{F}_n est régulière et orthogonale dans $[-1, 1]$, telle que:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mathcal{F}_n \mathcal{F}_m}{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{2}{n(n-1)(2n-1)} & \text{si } n = m \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

avec

$$\int_{-1}^{+1} \mathcal{F}_n dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \text{ et } 2 \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

En vertu de ces définitions, on peut alors écrire toute fonction arbitraire $f(x)$ sous la forme:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathcal{F}_n(x) \quad (\text{B.22})$$

$$\text{avec} \quad \alpha_n = \frac{1}{2} n(n-1)(2n-1) \int_{-1}^{+1} \frac{\mathcal{F}_n \mathcal{F}_m}{1-x^2} dx \quad (\text{B.23})$$

à partir des relations de recurrence des polynômes de Legendre, on peut établir:

$$(n+1) \mathcal{F}_{n+1} - (2n-1)x \mathcal{F}_n + (n-2) \mathcal{F}_{n-1} = 0 \quad (\text{B.24})$$

Il est à noter qu'afin de résoudre les équations de Stokes en coordonnées sphériques, l'utilisation de ces fonctions facilite énormément la détermination des écoulements axisymétriques autour des obstacles à géométries complexes. En effet Happel & Brenner ont donné un grand domaine d'applicabilité des fonctions de Gegenbauer pour résoudre l'écoulement de Stokes stationnaire, dans un tube de Venturi, dans un diffuseur conique ou bien autour d'une sphère solide, se déplaçant près d'une plaque plane.

B.2 Mouvement stationnaire d'une ellipsoïde solide

Dans le cas des ellipsoïdes, nous avons vu au chapitre 1 que la solution stationnaire à été établie par Sampson (1891) en utilisant les polynômes de Legendre. Mais en vertu de la relation d'orthogonalité (B.20) et (B.22), nous pouvons écrire la surface d'un ellipsoïde solide comme suit:

$$r_s(\beta) = 1 + \alpha_m \mathcal{F}_m(\beta) \quad \text{avec} \quad \beta = \cos \theta \quad (\text{B.25})$$

En terme de la fonction de courant, la solution adimensionnelle des équations stationnaires de Stokes obtenue au chapitre 3, est donnée par la relation (3.51):

$$\Psi(r, \beta) = \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n+1} + C_n r^{n+2} + D_n r^{-n+3}) \mathcal{F}_n(\beta) \quad (\text{B.26})$$

avec les conditions aux limites:

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad \text{quand} \quad r = r_s(\beta) \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\Psi}{r^2} = \mathcal{F}_2(\beta) \quad \text{quand} \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{B.28})$$

La substitution des conditions aux limites ainsi que l'utilisation de la relation de récurrence pour $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_m \mathcal{F}_2 = & -\frac{(m-2)(m-3)}{2(2m-1)(2m-3)} \mathcal{F}_{m-2} + \frac{m(m-1)}{(2m+1)(2m-3)} \mathcal{F}_m \\ & - \frac{(m+1)(m+2)}{2(2m-1)(2m+1)} \mathcal{F}_{m+2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

nous permettent d'exprimer la fonction de courant comme suit:

$$\begin{aligned} \Psi(r, \beta) = & \left(r^2 - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2r} \right) \mathcal{F}_2(\beta) \\ & - \frac{3}{4} \alpha_m \left\{ \frac{(m-2)(m-3)}{(2m-1)(2m-3)} (r^{-m+3} - r^{-m+5}) \mathcal{F}_{m-2}(\beta) \right. \\ & - \frac{2m(m-1)}{(2m+1)(2m-3)} (r^{-m+1} - r^{-m+3}) \mathcal{F}_m(\beta) \\ & \left. + \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+1)(2m+1)} (r^{-m-1} - r^{-m+1}) \mathcal{F}_{m+2}(\beta) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, un ellipsoïde légèrement aplati correspond à $m = 2$ et $\alpha_2 = 2\varepsilon$. Cela nous permet alors d'écrire:

$$\Psi(r, \beta) = \left(r^2 - \frac{3}{2} \left(1 + \frac{4}{5} \varepsilon \right) r + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{12}{5} \varepsilon \right) r^{-1} \right) \mathcal{F}_2(\beta) - \frac{6}{5} \varepsilon (r^{-3} - r^{-1}) \mathcal{F}_4(\beta) \quad (\text{B.31})$$

Ainsi, la force de traînée exercée sur l'ellipsoïde peut être facilement obtenue, à partir de la formule de Payne & Pell, donnée au chapitre 1 par:

$$\mathbf{F}_D = -8\pi\mu_e a_0 \mathbf{U} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(\Psi - r^2 \mathcal{F}_2)}{2r^2 \mathcal{F}_2} = -6\pi\mu_e a_0 \left(1 + \frac{4}{5} \varepsilon \right) \mathbf{U} \quad (\text{B.32})$$

où a_0 est le plus petit demi-axe de l'ellipsoïde.