

# Modèles temporels des systèmes logiques

Joseph Sifakis

### ▶ To cite this version:

Joseph Sifakis. Modèles temporels des systèmes logiques. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1974. Français. NNT: . tel-00010517

# HAL Id: tel-00010517 https://theses.hal.science/tel-00010517

Submitted on 11 Oct 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

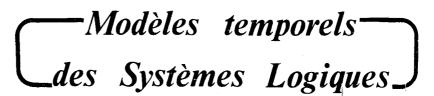
UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de Docteur Ingénieur

\* Informatique \*

par

Joseph SIFAKIS



Thèse soutenue le 21 mars 1974 devant la commission d'examen .

**Président** 

Monsieur J. KUNTZMANN

Examinateurs Madame G. SAUCIER

Monsieur C. BENZAKEN

Monsieur P. AZEMA Monsieur R. PERRET

## UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

## LISTE DES PROFESSEURS -----

Président : Monsieur Michel SOUTIF

Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

## PROFESSEURS TITULAIRES

MM. ANGLES D'AURIAC Paul

ARNAUD Georges

ARNAUD Paul

AUBERT Guy

AYANT Yves

Mme BARBIER Marie-Jeanne

MM. BARBIER Jean-Claude

BARBIER Reynold

BARJON Robert

BARNOUD Fernand

BARRA Jean-René

BARRIE Joseph

BENOIT Jean

BERNARD Alain

BESSON Jean

BEZES Henri

BLAMBERT Maurice

BOLLIET Louis

BONNET Georges BONNET Jean-Louis

BONNET-EYMARD Joseph

BONNIER Etienne

BOUCHERLE André

BOUCHEZ Robert

BOUSSARD Jean-Claude

BRAVARD Yves

BRISSONNEAU Pierre

BUYLE-BODIN Maurice

CABANAC Jean

CABANEL Jean

CALAS François

CARRAZ Gilbert

CAU Gabriel

CAUQUIS Georges

CHABAUTY Claude

CHARACHON Robert

CHATEAU Robert

CHENE Marcel

COEUR André

CONTAMIN Robert

COUDERC Pierre

CRAYA Antoine

Mécanique des fluides

Clinique des maladies infectieuses

Chimie

Physique

Physique approfondie

Electrochimie

Physique expérimentale Géologie appliquée

Physique nucléaire

Biosynthèse de la cellulose

Statistiques

Clinique chirurgicale

Radioélectricité

Mathématiques Pures

Electrochimie

Chirurgie générale

Mathématiques Pures

Informatique (IUT B)

Electrotechnique

Clinique ophtalmologique

Pathologie médicale

Electrochimie Electrométallurgie

Chimie et Toxicologie

Physique nucléaire

Mathématiques Appliquées

Géographie

Physique du solide

Electronique

Pathologie chirurgicale

Clinique rhumatologique et hydrologie

Anatomie

Biologie animale et pharmacodynamie

Médecine légale et Toxicologie

Chimie organique

Mathématiques Pures

Oto-Rhino-Laryngologie

Thérapeutique

Chimie papetière

Pharmacie chimique

Clinique gynécologique

Anatomie Pathologique

Mécanique

Matière médicale Mme DEBELMAS Anne-Marie MM. DEBELMAS Jacques Géologie générale Zoologie DEGRANGE Charles Métallurgie DESRE Pierre Physiologie animale DESSAUX Georges Mécanique appliquée DODU Jacques MOLIQUE Jean-Michel Physique des plasmas DREYFUS Bernard Thermodynamique Cristallographie DUCROS Pierre Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie DUGOIS Pierre Clinique neuro-psychiatrique FAU René Electrostatique FELICI Noël GAGNAIRE Didier Chimie physiquè GALLISSOT François Mathématiques Pures Mathématiques Pures GALVANI Octave Analyse numérique GASTINEL Noël Electroradiologie GEINDRE Michel GERBER Robert Mathématiques Pures Géologie GIRAUD Pierre Mathématiques Pures KLEIN Joseph Botanique et Physilogie végétale Mme KOFLER Lucie MM. KOSZUL Jean-Louis Mathématiques Pures Mécanique KRAVTCHENKO Julien Mathématiques appliquées KUNTZMANN Jean Thermodynamique LACAZE Albert Biologie végétale LACHARME Jean Physique LAJZEROWICZ Joseph Chirurgie générale LATREILLE René Biochimie pharmaceutique LATURAZE Jean LAURENT Pierre-Jean Mathématiques appliquées Clinique médicale B LEDRU Jean LLIBOUTRY Louis Géophysique Géographie LOUP Jean Mathématiques Pures Mle LUTZ Elisabeth Mathématiques Pures MM. MALGRANGE Bernard Clinique obstétricale MALINAS Yves MARTIN-NOEL Pierre Seméiologie médicale Géographie MASSEPORT Jean MAZARE Yves Clinique médicale A Minéralogie et Pétrographie MICHEL Robert MOURIQUAND Claude Histologie Chimie nucléaire MOUSSA André Physique du solide NEEL Louis Botanique OZENDA Paul Electrotechnique PAUTHENET René Mathématiques Pures PAYAN Jean-Jacques PEBAY-PEYROULA Jean-Claude Physique Servomécanismes PERRET René Physique industrielle PILLET Emile Chimie systématique RASSAT André RENARD Michel Thermodynamique REULOS René Physique industrielle RINALDI Renaud Physique Clinique de pédiatrie et de puériculture ROGET Jean SANTON Lucien Mécanique Microbiologie et Hygiène SEIGNEURIN Raymond Zoologie SENGEL Philippe Mécanique des fluides SILBERT Robert

Physique générale

SOUTIF Michel

MM. TANCHE Maurice TRAYNARD Philippe VAILLAND François VALENTIN Jacques VAUQUOIS Bernard Mme VERAIN Alice

M. VERAIN André Mme VEYRET Germaine MM. VEYRET Paul VIGNAIS Pierre

YOCCOZ Jean

Physiologie Chimie générale Zoologie

Physique nucléaire Calcul électronique Pharmacie galénique

Physique Géographie Géographie

Biochimie médicale

Physique nucléaire théorique

## PROFESSEURS ASSOCIES

MM. BULLEMER Bernhard HANO JUN-ICHI

STEPHENS Michaël

Physique Mathématiques Pures Mathématiques appliquées

### PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. BEAUDOING André

Mme BERTRANDIAS Françoise MM. BERTRANDIAS Jean-Paul BIAREZ Jean-Pierre

BONNETAIN Lucien Mme BONNIER Jane

MM. CARLIER Georges COHEN Joseph COUMES André DEPASSEL Roger DEPORTES Charles GAUTHIER Yves GAVEND Michel

GERMAIN Jean-Pierre

GIDON Paul GLENAT René HACQUES Gérard JANIN Bernard

Mme KAHANE Josette

MM. MULLER Jean-Michel PERRIAUX Jean-Jacques POULOUJADOFF Michel REBECQ Jacques

REVOL Michel REYMOND Jean-Charles

ROBERT André

DE ROUGEMONT Jacques

SARRAZIN Roger

SARROT-REYNAULD Jean

SIBILLE Robert SIROT Louis

Mme SOUTIF Jeanne

Pédiatrie

Mathématiques Pures

Mathematiques Pures
Mathématiques appliquées
Mécanique
Chimie minérale
Chimie générale
Biologie végétale
Electrotechnique
Radioélectricité
Mécanique des fluides
Chimie minérale
Sciences hiologiques

Sciences biologiques Pharmacologie

Mécanique

Géologie et Minéralogie

Chimie organique Calcul numérique

Géographie Physique

Thérapeutique Géologie et Minéralogie Electrotechnique Biologie (CUS) Urologie

Chirurgie générale Chimie papetière Neurochirurgie

Anatomie et chirurgie Géologie Construction mécanique Chirurgie générale Physique générale

## MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle AGNIUS-DELORD Claudine Physique pharmaceutique ALARY Josette Chimie analytique MM. AMBLARD Pierre Dermatologie AMBROISE-THOMAS Pierre Parasitologie ARMAND Yves Chimie BEGUIN Claude Chimie organique BELORIZKY Elie Physique BENZAKEN Claude Mathématiques appliquées BILLET Jean Géographie BLIMAN Samuel Electronique (EIE) BLOCH Daniel Electrotechnique Mme BOUCHE Liane Mathématiques (CUS) MM. BOUCHET Yves Anatomie BOUVARD Maurice Mécanique des fluides BRODEAU François Mathématiques (IUT B) BRUGEL Lucien Energétique BUISSON Roger Physique Orthopédie BUTEL Jean CHAMBAZ Edmond Biochimie médicale CHAMPETIER Jean Anatomie et organogénèse Biologie appliquée (EFP) CHIAVERINA Jean Biologie animale CHIBON Pierre Spectrométrie physique COHEN-ADDAD Jean-Pierre COLOMB Maurice Biochimie médicale CONTE René Physique COULOMB Max Radiologie CROUZET Guy Radiologie DURAND Francis Métallurgie Mathématiques (CUS) DUSSAUD René Mme ETERRADOSSI Jacqueline Physiologie MM. FAURE Jacques Médecine légale GENSAC Pierre Botanique GIDON Maurice Géologie GRIFFITHS Michaël Mathématiques appliquées Biochimie médicale GROULADE Joseph Hématologie HOLLARD Daniel HUGONOT Robert Hygiène et Médecine préventive IDELMAN Simon Physiologie animale IVANES Marcel Electricité JALBERT Pierre Histologie JOLY Jean-René Mathématiques Pures JOUBERT Jean-Claude Physique du solide JULLIEN Pierre Mathématiques Pures Physique générale KAHANE André KUHN Gérard Physique LACOUME Jean-Louis Physique Mme LAJZEROWICZ Jeannine Physique Physique atomique MM. LANCIA Roland LE JUMER Noël Electronique Mathématiques LEROY Philippe LOISEAUX Jean-Marie Physique nucléaire Physique nucléaire LONGEQUEUE Jean-Pierre LUU DUC Cuong Chimie organique Physiologie végétale MACHE Régis MAGNIN Robert Hygiène et Médecine préventive Mécanique MARECHAL Jean MARTIN-BOUYER Michel Chimie (CUS)

MM. MAYNARD Roger MICHOULIER Jean MICOUD Max MOREAU René NEGRE Robert PARAMELLE Bernard PECCOUD François PEFFEN René PELMONT Jean PERRET Jean PERRIN Louis

PFISTER Jean-Claude

PHELIP Xavier Mle RIERY Yvette MM. RACHAIL Michel RACINET Claude RENAUD Maurice RICHARD Lucien

Mme RINAUDO Marquerite

MM. ROMIER Guy SHOM Jean-Claude STIEGLITZ Paul STOEBNER Pierre VAN CUTSEM Bernard VEILLON Gérard VIALON Pierre VOOG Robert

> VROUSSOS Constantin ZADWORNY François

Physique du solide Physique (IUT A) Maladies infectieuses Hydraulique (INP) Mécanique

Pneumologie Analyse (IUT B) Métallurgie Physiologie animale

Neurologie

Pathologie expérimentale

Physique du solide Rhumatologie Biologie animale Médecine interne

Gynécologie et obstétrique

Chimie Botanique

Chimie macromoléculaire Mathématiques (IUT B)

Chimie générale Anesthésiologie

Anatomie pathologique Mathématiques appliquées

Mathématiques appliquées (INP)

Géologie

Médecine interne

Radiologie Electronique

#### MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM. BOUDOURIS Georges CHEEKE John GOLDSCHMIDT Hubert SIDNEY STUARD YACOUD Mahmoud

Radioélectricité Thermodynamique Mathématiques Mathématiques Pures Médecine légale

### CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme BERIEL Hélène

Mme RENAUDET Jacqueline

Physilogie Microbiologie

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur KUNTZMANN, qui a dirigé ce travail et qui, par son aide et ses conseils précieux, m'a permis de le mener à bien.

Je remercie vivement

Madame G. SAUCIER, Maître de Conférences à l'ENSIMAG, qui dirige l'équipe "Mathématiques du Hardware", au sein de laquelle ce travail a été effectué,

Monsieur le Professeur PERRET, directeur du Laboratoire d'Automatique de Grenoble,

Monsieur P. AZEMA, Maître de Recherches au C.N.R.S.

Monsieur C. BENZAKEN, Maître de Conférences à l'Université de Grenoble,

qui ont bien voulu faire partie du Jury.

Je tiens aussi à remercier mes amis de l'Equipe "Mathématiques du Hardware" pour les fructueux échanges d'idées qui ont jalonné ce travail, ainsi que Madame DUFFOURD et toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation matérielle de cette thèse.

## TABLE DES MATIERES

## CHAPITRE I

## ALGEBRE BOOLEENNE TEMPORISEE

- 1. QUANTITES BOOL. TEMPORISEES
- 1.1. Définitions
- 1.2. Règles pour effectuer les opérations entre Q.B.T.
- 1.3. Formes des Q.B.T.
- 2. FONCTIONS BOOL. TEMPORISEES
- 2.1. Définitions
- 2.2. Formes des Fonctions Booléennes Temporisées
- 2.2.1. Formes Booléennes
- 2.2.2. Formes Temporelles
- 3. AUTRES ALGEBRES TEMPORISEES
- 4. POLYNOMES BOOLEENS TEMPORELS
- 4.1. Définitions
- 4.2. Formes des P.B.T.
- 5. MINIMISATION DES FORMES
- 5.1. Monômes en infériorité irrédondante
- 5.2. Monômes premiers

- 6. EQUATIONS BOOLEENNES TEMPORELLES
- 7. RELATIONS TEMPORISEES
- 7.1. Les matrices définies dans V
- 7.2. Définition
- 7.3. Réseaux porteurs de P.B.T.

### CHAPITRE II

## GERBIERS D'OPERATEURS SUR V ET SUR $V_{+}$

- 1. 1'OPERATEUR  $\tau$
- 1.1. L'opérateur  $\tau$  sur V
- 1.2. L'opérateur  $\tau$  sur  $V_{+}$
- 1.3. Composition des opérateurs
- 1.4. Le monoïde x s
- 2. LE GERBIER  $(P_+, +, 0)$
- 2.1. Propriétés
- 2.2. Fermeture d'un opérateur de  $\mathrm{G}_+$  U  $\mathrm{G}_-$
- 2.2.1. Q.B.T. stabilisées
- 2.2.2. Calcul de la fermeture d'un opérateur de  ${\sf G}_+$
- 3. LES MATRICES DEFINIES SUR  $\mathbf{G}_+$  ET  $\mathbf{G}_-$

## CHAPITRE III

## ANNEAUX D'OPERATEURS

- 1. L'ANNEAU A,
- 1.1. Définition
- 1.2. La pseudo-fermeture d'un opérateur
- 1.2.1. Propriétés
- 1.2.2. Transformée d'une Q.B.T.
- 1.2.3. Calcul de la pseudo-fermeture d'un opérateur
- 2. LES MATRICES DEFINIES SUR  $A_{+}$
- 3. EQUATIONS BOOLEENNES A RETARDS
- 3.1. Cas général
- 3.2. Equations à retards linéaires
- 3.3. Cas particuliers
- 3.3.1. Système décrivant les transitions d'un automate linéaire
- 3.3.2. Système d'équations séquentielles résolues de ler ordre

## CHAPITRE IV

## SIMULATION DU FONCTIONNEMENT TEMPOREL DES SYSTEMES LOGIQUES

- 1. MODELES DYNAMIQUES
- 1.1. L'opérateur décalage asymétrique
- 1.2. Modèles temporels des relais
- 1.2.1. Relais à contacts ordinaires
- 1.2.2. Relais à contacts spéciaux
- 1.3. Modèles dynamiques des portes
- 1.3.1. Caractéristiques dynamiques
- 1.3.2. Le  $\Omega$  opérateur
- 2. SIMULATION DU FONCTIONNEMENT DES CIRCUITS COMBINATOIRES
- 2.1. Calcul de la réponse
- 2.2. Définitions
- 2.3. Découpage d'une Q.B.T.
- 2.4. Condition de non interférence de 2 entrées successives
- 3. SIMULATION DU FONCTIONNEMENT DES CIRCUITS SEQUENTIELS ASYNCHRONES
- 3.1. Algorithmes
- 3.2. Modèles décrivant le fonctionnement fiable d'un circuit asynchrone
- 3.3. Bascules synchrones
- 4. SIMULATION DU FONCTIONNEMENT DES CIRCUITS SEQUENTIELS SYNCHRONES
- 4.1. Algorithme
- 4.2. Modèles décrivant le fonctionnement d'un circuit sequentiel synchrone

### CHAPITRE V

# RESEAUX DE TRANSITION

- 1. RELATION DE TRANSITION
- 1.1. Définition
- 2. PROPAGATION DES MARQUES DANS UN RESEAU DE TRANSITION
- 2.1. Définitions
- 2.2. Solution d'un système décrivant la propagation des marques
- 2.2.1. Méthode itérative
- 2.2.2. Solution par élimination successive des variables
- 2.3. Calcul de A\*
- 3. EXPRESSIONS REGULIERES POOLEENNES

## CHAPITRE VI

## RESEAUX DE TRANSITION CODES-EQUATIONS SEQUENTIELLES

#### 1. PRELIMINAIRES

- 2. EXPRESSIONS SEQUENTIELLES DE 1er ORDRE PAR RAPPORT A CHAQUE VARIABLE
- 2.1. L'équation :  $g(X,Y, \tau^{-1} Y) = e_0$
- 2.1.1. Réseau associé
- 2.1.2. Méthode de résolution
- 2.1.3. Caractérisation des équations à partir du réseau associé
- 2.2. Opérations sur les réseaux de transition codés
- 2.2.1. Algèbre Booléenne des réseaux de transition codés
- 2.2.2. Le produit cartésien
- 2.2.3. Projection d'un réseau de transition codé
- 3. EXPRESSIONS SEQUENTIELLES D'UNE VARAIBLE D'ORDRE SUPERIEUR
- 3.1. Monômes séquentiels canoniques
- 3.2. Réseau associé à l'expression f (y,..., y(t+k), X)
- 3.3. Solution de l'équation  $\sum_{i} s_{i} M_{i}(y) = e_{0}$
- 4. EXPRESSION SEQUENTIELLES A PLUSIEURS VARIABLES
- 4.1. Monômes séquentiels canoniques
- 4.2. Réseau associé
- 4.3. Solution de l'équation :  $\sum_{\substack{i_1 \ i_2 \dots i_p}} s_{i_1 \dots i_p} \stackrel{M}{=} i_1 \dots i_p \quad (Y) = e_0$

## CHAPITRE VII

# RESEAUX DE CONTROLE DE PROCESSUS PARALLELES

- 1. RESEAUX DE CONTROLE DE PROCESSUS PARALLELES RESEAUX DE PETRI
- 2. CONCEPTION DES SYSTEMES A L'AIDE DES R.C.P.P.
- 2.1. Equivalence des R.C.P.P.
- 2.2. Réseaux de transition codé qui simule un R.C.P.P. abstrait
- 2.3. Générateur de marques
- 2.4. Conclusions

## INTRODUCTION

Ce travail est une contribution à la modélisation temporelle des systèmes logiques. La première partie (chapitres I, II, III) est consacrée à la définition des outils utilisés (algèbre temporisée, structures algébriques et d'opérateurs). La seconde partie présente des applications à des problèmes classiques et propose des modèles plus généraux.

Le chapitre I présente la théorie des algèbres booléennes temporisées. La notion de Quantité Booléenne Temporisée (Q.B.T.), qui est une application de R dans {0,1} est d'abord introduite, ainsi que l'algèbre booléenne sur l'ensemble des Q.B.T. Il faut noter ici, que le problème de la définition d'une algèbre booléenne sur l'ensemble des Q.B.T. a été traité dans une optique différente dans (2) et (3).

Les Fonctions Booléennes Temporisées (F.B.T.), définies ensuite, sont une généralisation des Q.B.T. car elles sont des applications de R dans un ensemble de fonctions booléennes.

Les Polynômes Booléens Temporels (P.B.T.) sont introduits de façon classique (voir par ex. (1)). Pour la minimisation des formes dans une Algèbre Booléenne Temporisée nous avons élaboré une théorie de consensus. On démontre qu'il existe deux types de consensus : consensus par rapport aux variables booléennes et consensus temporels. Deux algorithmes de recherche de la base première sont donnés. Dans le reste de ce chapitre des méthodes classiques sont utilisées pour résoudre des équations dans une algèbre B.T. et pour définir la notion de relation temporisée.

Le chapitre II est consacré aux définitions et aux propriétés de certaines structures mathématiques d'opérateurs temporels (applications internes de l'ensemble des Q.B.T.).

Les opérateurs de base sont les  $\tau$ -opérateurs (opérateurs retard); l'image d'une Q.B.T., y, pour un opérateur  $\tau^k$ ,  $(k \in R)$ , est obtenue en décalant y par k, à droite ou à gauche, suivant le signe de k. Il nous a paru intéressant de créer à partir des  $\tau$ -opérateurs, les opérateurs du type  $x\tau^k$  où x est une Q.B.T. Cette généralisation s'est avérée par la suite fructueuse, car elle nous a permis de trouver des structures plus intéressantes. Le gerbier  $G_+$ , traité jusqu'à la fin de ce chapitre, en est une. Ce gerbier est utilisé à la description des réseaux de transition (Chapitre V).

Au chapitre III nous définissons un anneau d'opérateurs qui est une généralisation de l'anneau des polynômes à retards, ("delay polynomials"), (28), (29), (33), destinés à traiter le cas des circuits linéaires synchrones, dont les coefficients de bouclage sont constants. On définit également une Transformée Discrète (4), (5), pour une Q.B.T. L'anneau d'opérateurs proposé est utilisé pour la solution des équations booléennes à retards.

Dans le chapitre IV nous étudions la simulation du fonctionnement temporel des circuits logiques en utilisant des outils définis dans les chapitres précédents. Dans un premier temps des modèles temporels d'éléments de circuits logiques (portes, relais) sont élaborés. Ces modèles tiennent compte des temps de propagation des signaux, ainsi que de la propagation des aléas. Des critères garantissant le "bon" fonctionnement temporel d'un système logique sont sonnés. Par la simulation du fonctionnement des circuits synchrones et asynchrones nous présentons des algorithmes illustrés par plusieurs exemples. Il nous semble, que la méthode proposée, grâce à l'utilisation de l'algèbre B.T. nous permet d'effectuer une simulation plus fine que les méthodes existantes. A la fin de ce chapitre nous présentons des modèles temporels permettant de décrire un circuit logique dont on a complètement simulé le fonctionnement.

Dans le chapitre V, un modèle général est proposé pour la description du fonctionnement temporel des systèmes logiques : les réseaux de transition. Ce sont des systèmes dont la transition d'un état à un autre, (sous certaines conditions), dure un temps non nul. Le gerbier  $G_+$ , défini au chapitre II, est utilisé pour décrire, sous la forme d'un système d'équations booléennes à retards, l'évolution d'un réseau de transition.

La méthode de résolution de ce système a amené à définir des Expressions Régulières Booléennes (E.R.B.) qui sont des expressions régulières sur l'ensemble des opérateurs  $x^k$ . On peut démontrer que, pour chaque E.R.B. il existe un réseau de transition qui la "reconnaît", (et inversement), et d'autre part, que pour tout réseau de transition, l'E.R.B., R, qu'il "reconnaît" y détermine une fonction de transfert (pour des Q.B.T. donnés aux entrées, on peut calculer, à l'aide de R, la réponse du réseau).

Dans le chapitre VI le problème de résolution des équations séquentielles, (10, est traité, en utilisant l'algèbre B.T. synchrone. Ce problème a fait l'objet de plusieurs études tant dans le cas déterministe, (8), (9), (10), (13), (14), que dans le cas général (10, (11), (13).

Nous croyons néanmoins, que l'utilisation des outils des chapitres I et II nous permet de mieux cerner le problème.

Nous démontrons qu'à toute équation séquentielle, quel que soit son ordre (fini), on peut associer un réseau de transition codé, sans qu'il soit nécessaire de la transformer par augmentation des variables. Chaque chemin de longueur infinie du réseau de transition associé à une équation séquentielle, en détermine une solution. De plus, nous avons essayé de mettre en évidence, la relation qui existe entre certaines propriétés du réseau associé à une équation, et sa solution.

Les Réseaux de Contrôle de Processus de Parallèles (R.C.P.P.), présentés dans le VIIe chapitre sont des modèles pour la description et la conception de gros systèmes logiques. Nous comparons le modèle proposé avec le réseau de Pétri. Une méthode de calcul de l'automate qui "simule" un R.C.P.P. ainsi que des méthodes de réalisation directe sont données.

#### CHAPITRE -I-

## ALGEBRE BOOLEENNE TEMPORISEE

## 1. QUANTITES BOOLEENNES TEMPORISEES

## 1.1. Définitions

<u>Définition 1</u>: Une Quantité Booléenne Temporisée (Q.B.T) consistera en la donnée d'une suite strictement croissante de valeurs réelles, tendant vers l'infini  $(t_1, t_2, \ldots t_i \ldots)$  et d'une suite de valeurs booléennes  $(b_0, b_1, \ldots, b_i \ldots)$ .

On interprètera ceci comme une fonction, f(t) du temps à valeurs booléennes, valant :

 $b_0$  pour  $t < t_1$ 

 $b_{i}$  pour  $t_{i} \le t < t_{i+1}$  , i = 1,2,3...

Il est claire, alors, qu'une Q.B.T. peut être définie par un ensemble d'intervalles fermés à gauche, ouverts à droite sur lesquels elle vaut 1. L'ensemble des Q.B.T. sera désigné par V.

Sur V on définit l'Algèbre de Boole induite pour les opérations :

- a) Addition (+): f(t) + g(t) = b(t) où  $b(t) : b(t) = 1 \iff f(t) = 1$  ou g(t) = 1; f(t), g(t),  $b(t) \in V$
- β) Multiplication (·) : f(t) g(t) = h(t) où h(t) :  $h(t) = 1 \iff f(t) = 1 \text{ et } g(t) = 1; f(t), g(t), h(t) \in V$
- $\gamma) \ \underline{\text{Complémentation}} \ (') : f'(t) = g(t) \ \text{où} \ g(t) :$   $f(t) = 1 \iff g(t) = 0 \ ; \ f(t), \ g(t) \ \epsilon \ V$

Nous appellerons (V, +, ., ') Algèbre Booléenne Temporisée.

- <u>Définition 2</u>: On appelle échelon une Q.B.T. f(t) telle que :  $\mathbf{3}$  i  $\epsilon$  R, f(t) = 0 pour t < i et f(t) = 1 pour t > i
- <u>Définition 3</u>: On appelle contre-échelon une Q.B.T. f(t) telle que :  $\exists j \in R$ , f(t) = 1 pour t < j et f(t) = 0 pour  $t \ge j$
- <u>Définition 4</u>: On appelle créneau une Q.B.T., f(t) telle que :  $\mathbf{j}$ i,  $j \in R$ , i < j,  $f(t) = pour i <math>\leq t < j$  et f(t) = 0 partout ailleurs.
- <u>Définition 5</u>: Les réels i,j des définitions 3), 4), 5) seront appelés respectivement front <u>montant</u> et front <u>descendant</u>. Le front descendant (respectivement le front montant) d'un échelon (contre-échelon) sera par définition +  $\infty$  (- $\infty$ ).

# 1.2. Règles pour effectuer les opérations entre Q.B.T.

Désignons par  $e_i$  l'échelon à front montant i et remarquons que l'ensemble des échelons  $\{e_i\}$  i  $\epsilon$  R est fermé pour les opérations d'addition et de multiplication :

$$e_k$$
 +  $e_n$  =  $e_{min(k,n)}$ 

$$e_k \cdot e_n = e_{max(k,n)}$$

Le complément d'un échelon  $e_i$ , désigné par  $e_i^!$ , est le contre-échelon à front descendant i.

On a :

$$e'_{k} + e'_{n} = e'_{max(k,n)}$$
 $e'_{k} \cdot e'_{n} = e'_{min(k,n)}$ 
 $e_{i} + e'_{i} = I$ 
 $e_{i} \cdot e'_{i} = B$ 

où I et B désignent respectivement le plus grand et le plus petit élément de l'Algèbre (I = 1 partout, B = 0 partout).

I - 3

De même le créneau à front montant i, et front descendant j, peut être représenté par le produit é e !

- Règle 1: La somme booléenne de deux créneaux se réduit en un seul si un front de l'un appartient à l'intervalle fermé des 2 fronts de l'autre.
- <u>Affirmation 1</u>: Toute Q.B.T. peut être représentée comme une somme de créneaux et d'échelons.

## 1.3. Formes des Q.B.T.

Etant donné une Q.B.T. comme une somme booélenne de créneaux, d'échelons et de contre-échelons, on peut en appliquant la règle 1, en obtenir une somme disjonctive comportant un nombre minimal de termes. On appellera cette forme : Forme Disjonctive Minimale.

Affirmation 2: La forme disjonctive minimale d'une Q.B.T. est unique.

Les termes d'une forme disjonctive peuvent être toujours ordonnés d'une telle façon que les indices des échelons et des contre-échelons qui la constituent apparaissent dans l'ordre croissant  $\mathbf{j}_1,\ \mathbf{j}_2,\dots\ \mathbf{j}_{2n-1},\mathbf{j}_{2n}\dots$  où  $\mathbf{j}_{2n-1}$  est un front montant et  $\mathbf{j}_{2n}$  est un front descendant.

Alors une Q.B.T. f comportant un nombre fini de termes peut se mettre sous la forme :

$$f = \sum_{n=1}^{m} e_{j_{2n-1}} e_{j_{2n}}^{!}$$
 (aI)

Remarquons que le complément f', d'une Q.B.T. f, a comme fronts montants les fronts descendants de f et inversement comme fronts descendants les fronts montants de f. Alors le complément f' de la Q.B.T. f décrite pour (aI) s'écrit:

$$f' = e_{j_1}' + \sum_{n=1}^{m-1} e_{j_{2n}} e_{j_{2n+1}}' + e_{j_{2m}}$$
 (bI)

En complémentant (bI) on obtient :

$$f = e_{j_1} (\prod_{n=1}^{m-1} (e_{j_{2n}}! + e_{j_{2n+1}})) e_{j_{2m}}! (CI)$$

Cette dernière forme de f sera appelée <u>conjonctive</u>. On peut également définir une forme conjonctive minimale en établissant une règle analogue à la règle 1 et démontrer qu'elle est unique.

Remarquons que le créneau e e peut être exprimé par la disjonc-  $j_{2n-1}$ 

tion 
$$e_{j_{2n-1}}$$
  $\bullet$   $e_{j_{2n}}$ 

Les termes de (aI) étant disjoints on peut exprimer f comme la disjonction :

$$f = \sum_{i \in A} \Theta e_i \quad \Theta \quad C \quad (dI)$$

où A est l'ensemble des fronts montants et fronts descendants de f C = I si f "commence" par un contre-échelon; sinon C = B.

Nous appellerons la forme (dI) forme à base d'échelons.

Exemple 1: 
$$e_1$$
  $e_5' + e_6$   $e_7'$ ,  $1 + e_9$   $e_{11}' + e_{13} =$ 

= 
$$e_1 (e_5' + e_6) (e_{7,1}' + e_9) (e_{11}' + e_{13}) =$$

$$=$$
  $e_1 \oplus e_5 \oplus e_6 \oplus e_{7,1} \oplus e_9 \oplus e_{11} \oplus e_{13}$ 

## 2. FONCTIONS BOOLEENNES TEMPORISEES

## 2.1. Définitions

Désignons par  $F_{p,n}$  l'ensemble de Fonctions Booléennes (F.B.) à p composantes et n variables booléennes simples.

<u>Définitions 6</u>: Une Fonction Booléenne Temporisée (F.B.T.) à p composantes et n variables consistera en la donnée d'une suite strictement croissante de réels  $(t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots)$  et d'une suite infinie de F.B. appartenant à  $F_{p,n}$ :  $(F_0, F_1, \ldots, F_i, \ldots)$ .

On interprètera ceci comme une fonction F(t) du temps valant :

$$F_0$$
 pour  $t < t_1$ 

$$F_{i}$$
 pour  $t_{i} \le t < t_{i+1}$ ,  $i = 1,2...$ 

L'ensemble des F.B.T. à p composantes et n variables booléennes sera désigné par  $v_{p,n}$ .

Nous définissons sur  $V_{p,n}$  l'algèbre booléenne induite pour les opérations :

Addition (+): F(t),  $G(t) \in V_{p,n}$ 

$$F(t) + G(t) = S(t) \iff \forall t_1 \in R, S(t_1) = F(t_1) + G(t_1)$$

Multiplication (.): F(t),  $G(t) \in V_{p,n}$ 

$$F(t)$$
.  $G(t) = S(t) <=>  $\forall t_1 \in R$ ,  $S(t_1) = F(t_1) G(t_1)$$ 

Complémentation (') :  $F(t)\epsilon V_{p,n}$ 

$$F'(t) = G(t) \le \forall t_1 \in R, F'(t_1) = G(t_1)$$

On appellera l'algèbre de Boole ( $V_{p,n}$ , +, ., ') Algèbre Booléenne Temporisée définie sur  $V_{p,n}$ .

REMARQUE 1:  $(V_{1,0}, +, \cdot, ') \sim (V, +, \cdot, ')$ 

REMARQUE 2 : L'Algèbre de Boole définie sur F est une sous algèbre de  $(v_{p,n},+,\cdot,'). \ \text{En fait une fonction booléenne G } \epsilon \ F_{p,n} \ \text{peut être considérée}$  comme une F.B.T. valant G sur  $I-\infty$ ,  $+\infty$ [

Nous désignons par le produit  $e_i$  G, G  $\epsilon$  F, ,la F.B.T. valant G pour t > i et zéro partout ailleurs.

De la même façon le produit e G désigne la F.B.T. valant G pour t < i et zéro partout ailleurs et e e G désigne la F.B.T. valant G pour i  $\leq$  t < j et zéro partout ailleurs.

## 2.2. Formes des F.B.T.

2.2.1. Formes Booléennes

Opérations mixtes : Dans (1) étant donné un vecteur booléen  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$  et

une quantité booléenne simple x, on définit les opérations mixtes :

$$x + x = \begin{pmatrix} x_1 + x \\ \vdots \\ x_p + x \end{pmatrix} \qquad x. x = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x \\ \vdots \\ x_p \cdot x \end{pmatrix}$$

On généralise ces opérations de la façon suivante : Si f est une F.B. simple et F  $\epsilon$  V  $_{p,n}$  étant décrite par  $(F_0, F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_i$ 

F + f et F.f étant décrites respectivement par :

$$(F_0 + f, F_1 + f, ..., F_i + f, ...), (t_1, t_2, ..., t_i, ...)$$

$$(F_0 f, F_1.f, ..., F_i f,...)$$
,  $(t_1, t_2,..., t_i,...)$ 

Si  $F_{p,n}$  ( $\psi_1,\psi_2,\dots\psi_n$ )  $\varepsilon$   $V_{p,n}$  (les  $\psi_i$  étant des variables booléennes on peut trouver deux formes canoniques par rapport à ces variables, en mettant chaque élément (qui est une F.B.) sous forme canonique; ensuite il suffit de factoriser chaque monôme ou monal à l'aide des opérations mixtes définies précédemment :

Ainsi on obtient :

$$F_{p,n}$$
 (  $\Psi_1, \dots \Psi_n$ ) =  $\sum \Psi_1 \qquad \Psi_2 \qquad \dots \qquad \Psi_n \qquad F_{p,n}$  (  $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ ) (eI)  $\alpha_i \in \{0,1\}$ 

$$F_{p,n} (\Psi_1, ..., \Psi_n) = \Pi (\Psi_1^{\alpha_1'} + \Psi_2^{\alpha_2'} + ... + \Psi_n^{\alpha_n'} + F_{p,n} (\alpha_1 ..., \alpha_n))$$
 (fI)
$$\alpha_i \in \{0,1\}$$

Nous appelerons (eI) Forme booléenne disjonctive et (fI) Forme booléenne conjonctive.

#### 2.2.2. Formes Temporelles

Soit  $F_{p,n}$  une F.B.T. définie par  $(t_1, t_2, \dots t_i, \dots), (F_0, F_1, F_i, \dots)$ . Alors on peut à l'aide de la remarque 2 la mettre sous la forme

$$F_{p,n} = \sum_{i=0}^{\infty} F_i e_{t_i} e'_{i+1}$$
, où  $e_{t_0} = I$  (gI)

Remarquons que cette forme comporte des termes disjoints le i-ème terme étant le produit de la F.B. représentant la F.B.T. dans l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  et du créneau correspondant. On appellera cette forme <u>Forme disjonctive temporelle</u> de la F.B.T.  $F_{p,n}$ .

De la dernière expression (gI) on déduit d'ailleurs :

$$F'_{p,n} = \sum_{i=0}^{\infty} F'_{i} e_{t} e'_{t+1}$$

D'où on obtient :

$$F_{p,n} = \prod_{i=0}^{\infty} (F_i + e'_{i} + e_{i+1})$$
 (hI)

L'expression (hI) décrit  $F_{p,n}$  comme un produit de termes dont le i-ème est la somme de la F.B. représentant  $F_{p,n}$  dans l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  et du complément du créneau correspondant.

On appellera cette forme Forme conjonctive temporelle.

On peut également trouver une <u>Forme à base d'échelons</u> pour toute F.B.T. à partir de (gI) de la façon suivante :

$$F_{p,n} = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \quad e_t \quad e_t' = \sum_{i=0}^{\infty} F_i \quad (e_t \oplus e_t) =$$

$$= F_0 I \oplus \sum_{i=0}^{\infty} (F_i \oplus F_{i+1}) e_{t_{i+1}}$$
 (iI)

Le passage de la forme (gI) à la forme (hI) et inversement est immédiat tandis que pour passer de la forme (gI) à la forme (iI) il faut calculer les disjonctions des éléments successifs de la suite ( $F_0$ ,  $F_1$ ,.. $F_i$ ..)

Le passage dans le sens inverse (d'une forme à base d'échelons à la forme (gI)) est encore plus laborieux car il faut effectuer :

$$x_0 \text{ I } \oplus x_1 \text{ e}_{t_1} \oplus x_2 \text{ e}_{t_2} \oplus \dots \oplus \dots =$$

$$= x_0 e_{t_1}' + (x_0 \oplus x_1) e_{t_1} e_{t_2}' + (x_0 \oplus x_1 \oplus x_2) e_{t_2} e_{t_3}' + \dots +$$

I - 9 -19-

#### 3. AUTRES ALGEBRES TEMPORISEES

Nous donnons la définition de deux algèbres temporisées dont on fera usage plus tard.

ALGEBRE SYNCHRONE: Une Quantité Booléenne Synchrone (Q.B.S.) est une Q.B.T. dont les fronts montants et descendants sont des entiers.

On désignera par  $V_S$  l'ensemble des Q.B.S.;  $(V_S, +, ., \cdot)$  est une sous algèbre de  $(V, +, ., \cdot)$  et sera appelé Algèbre Synchrone.

 $(V_+, +, ., ')$ : Nous représenterons par  $V_+$  l'ensemble des Q.B.T. f(t), telles que f(t) = 0 pour t < 0. Nous pouvons définir sur  $V_+$  une algèbre booléenne dont le plus grand élément sera désigné par  $e_0$  ( $e_0(t)$  = 1 pour t > 0). Son plus petit élément sera désigné par B également (B = 0 partout). L'algèbre synchrone définie sur  $V_+$  est exposée dans (21) et (22).

Il parait que cette algèbre soit plus appropriée pour le traitement des problèmes dont la solution se fait par méthodes de recurrence. C'est pourquoi elle sera utilisée dans les chapitres III, V, VI.

A remarquer que  $(V_+, +, ., ')$  n'est pas une sous algèbre de (V, +, ., '). En fait, si on considère que  $e_1 \in V_+$ , alors,  $(e_1)' = e_0 \oplus e_1 = e_0 e_1'$ . Si par contre,  $e_1 \in V$  alors  $e_1'$  est le contre échelon valant 1 pour t < 1.

#### 4. POLYNOMES BOOLEENS TEMPORELS

## 4.1. Définitions

- <u>Définition 7</u>: On appelle <u>variable booléenne temporelle</u> (V.B.T.) toute variable ayant comme support V.
- Définition 8 : Un monôme booléen temporel (M.B.T.) est toute expression de la forme  $\alpha \stackrel{\sim}{x}_1 \stackrel{\sim}{x}_2 \cdots \stackrel{\sim}{x}_q$  où  $\alpha$  est un créneau, échelon ou contre-échelon et les  $\stackrel{\sim}{x}_1$  sont des V.B.T. complémentées ou non. On appellera  $\alpha$ , tête de monôme et le produit  $m = \stackrel{\sim}{x}_1 \cdots \stackrel{\sim}{x}_q$  corps du monôme.

Un polynôme booléen temporel (P.B.T.) sera toute somme finie de monômes booléens temporels.

Il est clair qu'un P.B.T. à n V.B.T. représente une application de  $V^n$  dans V. Si on considère les V.B.T. d'un P.B.T. comme variables booléennes on a alors, une F.B.T. élément de  $V_{1,n}$ , c'est à dire une application de  $\{I,B\}^n$  dans V.

### 4.2. Formes des P.B.T.

Etant donné un P.B.T.  $f(x_1, x_2, ..., x_n)$  on peut par des méthodes bien connues (1) le mettre sous une des deux formes canoniques par rapport aux V.B.T.

$$f(x_1...x_n) = \sum_{b_i \in \{I,B\}} f(b_1, b_2,..., b_n) \prod_{k=1}^{n} x_k^{b_k}$$
 (jI)

$$f(x_{1},...,x_{n}) = \prod_{k=1}^{n} (f(b'_{1},b'_{2},...,b'_{n}) + \sum_{k=1}^{n} x_{k}^{b_{k}}) \quad (kI)$$

$$b_{i} \in \{I,B\} \quad \text{où} \quad x_{1}^{b_{i}} = x_{i} \text{ si } b_{i} = I, x'_{i} \text{ sinon}$$

Nous appellerons les formes (jI) et (kI) Forme canonique disjonctive (respectivement conjonctive) par rapport aux V.B.T.

I - 11 -21-

Soit  $\Sigma \alpha_i$  m, un P.B.T. (I, est un ensemble fini d'indices). Cherchons  $i \epsilon I$ 

une base complète orthogonale (23) pour l'ensemble  $\{\alpha_i\}_{i\in I}$  c'est à dire un ensemble de Q.B.T. $\{b_1,b_2,\dots b_n\}$  tel que chaque  $\alpha_i$  soit exprimable comme une combinaison booléenne pondérée des  $b_i$ , ceux-ci étant maximaux pour cette propriété et tels que  $\sum_{i=1}^{n}b_i=I$  i=1

Par exemple, si  $\{\alpha_i\}_{i \in I} = \{e_1 e_3', e_1, e_3 e_5'\}$ 

alors 
$$\{b_i\} = \{e'_1, e_1 e'_3, e_3 e'_5, e_5, \}$$

On peut alors exprimer ce P.B.T. par

$$f = \sum_{i=1}^{n} b_i h_i$$
 (11)

où h, est la somme des monômes m, tels que b,  $< \alpha_{i}$ 

Exemple 2 :  $e_1 e_3' x' y' + e_1 x + e_3 e_5' x' y =$ 

$$e_1' B + e_1 e_3' (x+y') + e_3 e_5' (x+y) + e_5 x$$

On appellera la forme (11) Forme disjonctive temporelle du P.B.T. f.

Etant donné un P.B.T. f, exprimé sous la forme (11) on peut en trouver une forme conjonctive temporelle après double complémentation.

$$f = \sum_{i=1}^{n} b_i h_i \Rightarrow f' = \sum_{i=1}^{n} b_i h_i' \Rightarrow f = \prod_{i=1}^{n} (b_i' + h_i) (mI)$$

Exemple 3 : Pour le P.B.T. de l'exemple précédent la forme conjonctive est :

$$f = e_1 (e_1' + e_3 + x + y') (e_3' + e_5 + x + y) (e_5' + x)$$

Forme à base d'échelons : Elle est obtenue à partir de la forme disjonctive en exprimant les  $b_i$  également sous la même forme :

Exemple 4: Pour le P.B.T. de l'exemple 2 la forme à base d'échelons est :  $e_1 (x + y^i) \oplus e_3 x^i \oplus e_5 x^i y$ .

### 5. MINIMISATION DES FORMES

- 5.1. Monômes en infériorité irrédondante

$$(\alpha m)$$
  $(\sum_{i \in I} \alpha_i m_i) = \alpha m$ 

et

- (  $\alpha$ m) (  $\Sigma$   $\alpha_i$   $m_i$ )  $\neq \alpha$ m pour  $\forall$ I' : I' $\subseteq$ I
- Propriété 1: Soit am en infériorité irrédondante avec  $\Sigma$  a i  $m_i$ . Alors toute lettre  $i \in I$  figurant dans am ne figure sous forme complémentée dans aucun des  $\alpha_i$   $m_i$  (1).
- Propriété 2: Soit a m en infériorité irrédondante avec  $\Sigma$  a m. Alors si une variable figure sous une seule forme dans l'ensemble des  $m_i$  elle figure dans m (1).
- Proposition 1: Soit  $\Sigma$   $\alpha_i$   $\alpha_i$  une somme de monômes B.T. dans laquelle les variables  $i \in I$  booléennes constituant les corps des monômes  $\alpha_i$   $\alpha_i$  figurent sous une seule forme. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des monômes en infériorité irrédondante avec  $\Sigma$   $\alpha_i$   $\alpha_i$  est que  $\Sigma$   $\alpha_i$  représente un créneau ou un échelon ou un contre-échelon. Alors, tout monôme en infériorité irrédondante avec  $\Sigma$   $\alpha_i$   $\alpha_i$  est de la forme ( $\Sigma$   $\alpha_i$ ) ( $\prod$   $\alpha_i$ )  $\alpha_i$ )  $\alpha_i$ 0  $\alpha_i$ 1 un produit de lettres ne figurant pas dans les  $\alpha_i$ 1 et le monôme ( $\Sigma$   $\alpha_i$ 1  $\alpha_i$ 2  $\alpha_i$ 3  $\alpha_i$ 4  $\alpha_i$ 5  $\alpha_i$ 6  $\alpha_i$ 6  $\alpha_i$ 7  $\alpha_i$ 8  $\alpha_i$ 9 est le consensus de cette somme.
- Démonstration : En effet, si  $\alpha m$  est en infériorité irrédondante avec  $\Sigma$   $\alpha_i$   $m_i$ , par is I la propriété 2,  $m < \prod$   $m_i$  =>  $m = (\prod_{i \in I} m_i) w$  (w, étant un produit de lettres ne figurant pas dans les  $m_i$ )

I - 13 -23-

On aura donc :

$$\alpha \ ( \bigcap_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \ \mathbf{m_i} ) \ \ \mathbf{w} \ ( \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \ \alpha_{\mathbf{i}} ) = \alpha \ ( \bigcap_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}} \ \mathbf{m_i} ) \ \mathbf{w}$$

$$\alpha \left( \prod_{i \in I} m_i \right) w \left( \sum_{i \in I'} \alpha_i \right) \neq \alpha \left( \prod_{i \in I} m_i \right) w$$

En donnant aux lettres figurant dans (  $\prod_{i \in I} m_i$  ) w des valeurs telles que (  $\prod_{i \in I} m_i$  ) w = 1 on obtient : i  $\in I$ 

$$\alpha (\Sigma \alpha_i) = \alpha$$
 $i \in I$ 

$$\alpha \left( \sum_{i \in I'} \alpha_i \right) \neq \alpha$$

Pour que la dernière relation soit vraie, il faut que  $\Sigma$   $\alpha$  soit un créneau is I ou un échelon ou un contre-échelon. En effet, dans le cas contraire,  $\alpha$  serait inférieur ou égal à un créneau, à un échelon ou un contre-échelon couvert par  $\Sigma$   $\alpha$  et il existerait au moins un I' tel que  $\Sigma$   $\alpha$  =  $\alpha$  is I'

De plus,  $\alpha$  ne peut pas être inférieur à  $\Sigma$   $\alpha$  pour la même raison. Donc  $i \in I$   $\alpha = \Sigma \alpha$  Inversement, il est facile de voir que si  $\Sigma$   $\alpha$  est un créneau ou un  $i \in I$  échelon ou un contre-échelon, alors tout monôme de la forme ( $\Sigma$   $\alpha$ ) ( $\prod$  m) w est en infériorité irrédondante avec  $\Sigma$   $\alpha$  m  $i \in I$  i

On appellera ce type de consensus, "consensus temporel".

Proposition 2: Soit  $\Sigma$   $\alpha$ , m, une somme de monômes B.T. dans laquelle au moins une iel variable booléenne figure sous les deux formes.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des monômes en infériorité irrédondante avec  $\Sigma$   $\alpha$  m sont iel i

- a)  $\prod_{\mbox{$i$}}\alpha_{\mbox{$i$}}$  représente un créneau ou un échelon ou un contre-échelon is  $\mbox{$I$}$
- b) Le consensus booléen de  $\Sigma$  m. existe i $\epsilon I$

I - 14 -24-

Alors tout monôme en infériorité irrédondante avec  $\Sigma$   $\alpha$  , m est inférieur au monôme;

(  $\prod_{i \in I} \alpha_i$  ) (consensus (  $\Sigma$  m  $_i$  )) qui est le consensus de cette somme.  $i \in I$ 

 $\frac{\text{D\'{e}monstration}}{\text{icI}}: \text{Soit m en inf\'{e}riorit\'e irr\'{e}dondante avec} \quad \sum_{i\in I} \alpha_i \quad \text{m}_i. \text{ Alors les lettres}$   $\text{icI} \quad \text{figurant sous une seule forme dans les m}_i, \text{ figurent dans m et les conditions}$   $\text{d'inf\'{e}riorit\'e irr\'{e}dondante sont \'equivalentes aux conditions suivantes}:$ 

$$\alpha m \left( \sum_{i \in I} \alpha_i u_i \right) = \alpha m$$

où  $u_i$  est le produit des lettres de  $m_i$  qui figurent dans les  $m_i$  sous les deux formes.

En donnant aux lettres constituant m des valeurs adéquates on obtient :

$$\alpha \left( \sum_{i \in I} \alpha_i u_i \right) = \alpha$$

$$\alpha (\sum_{i \in I'} \alpha_i u_i) \neq \alpha$$

La première relation signifie qu'il existe un intérvalle de temps dans lequel la fonction  $\Sigma$   $\alpha$  m est représentée par un élément C appartenant  $i \in I$ 

à V et  $\alpha$  < C De plus, pour que la dernière relation soit vraie, il faut que :

- a) C soit un créneau ou un échelon ou un contre-échelon
- b) α soit égal à C

Alors, toute tête de monôme appartenant à l'ensemble  $\{\alpha_i\}_{i\in I}$  doit être supérieure ou égale à C ;

Sinon, nous aurions alors  $\alpha_i$  m<sub>i</sub> < C <  $\Sigma$   $\alpha_i$  m<sub>i</sub> et  $\alpha_i$  m<sub>i</sub> ne figurerait pas dans la somme  $\Sigma$   $\alpha_i$  m<sub>i</sub> isI

I - 15 -25-

En conséquence, 
$$\alpha = C < \prod_{i \in I} \alpha_i$$

Alors les conditions d'infériorité irrédondante deviennent

$$Cm (\Sigma u_i) = Cm$$
 $i \in I$ 

Cm (
$$\sum_{i \in I} u_i$$
)  $\neq$  Cm

Comme les expressions Cm et  $\Sigma$  u sont indépendantes entre elles,  $i \in I$  il faudra que  $\Sigma$  u = 1 et  $\Sigma$  u  $\neq$  1 ce qui est vrai si et seulement si  $i \in I$  m est le consensus de  $\Sigma$  m (1)  $i \in I$ 

Inversement, si  $\prod_{i \in I} \alpha_i$  est un créneau, un échelon ou un contre-échelon, et si le consensus m de  $\sum_{i \in I} m_i$  existe, on peut voir que  $(\prod_{i \in I} \alpha_i)$  m est le consensus de  $\sum_{i \in I} \alpha_i$   $m_i$   $i \in I$ 

On appellera le consensus de ce type, "consensus par rapport aux variables booléennes".

REMARQUE 3 : Si le consensus d'une somme de monômes B.T. existe, il sera, ou bien un consensus temporel, ou bien un consensus par rapport aux variables booléennes, les deux cas étant mutuellement exclusifs.

#### 5.2. Monômes premiers

Nous conserverons la notion habituelle du monôme premier. On rappelle que si  $\alpha^m$  est un monôme premier de  $\Sigma$   $\alpha_i$   $m_i$ , alors, on peut iɛI extraire de  $\Sigma$   $\alpha_i$   $m_i$  au moins une somme partielle  $\Sigma$   $\alpha_i$   $m_i$  dont  $\alpha^m$  est le iɛI consensus (1).

Nous donnons ci-dessous un algorithme pour le calcul de tous les monômes premiers d'un polynôme B.T. donné sous la forme  $\Sigma$   $\alpha_i$  m par application de la méthode des consensus.

- Algorithme A : On part d'une file de monômes constituée de tous les monômes figurant dans la somme  $\sum_{i \in I} \alpha_i m_i$ 
  - 1) On forme les consensus temporels d'un monôme  $\alpha_i$  m, avec les monômes  $\alpha_j$  m, pour j>i
  - 2) Après la formation de tous les consensus temporels de  $\alpha_i$   $m_i$ , on compare chaque consensus formé aux monômes de la file et aux autres consensus formés. On supprime tout monôme qui est multiple d'un autre.
  - 3) On place les consensus trouvés à la file. On fait i:=i+1 et on revient à 1), si  $\alpha_i$  m n'est pas le dernier monôme de la file. Sinon, on passe à 4).
  - 4) On forme les consensus par rapport à une variable choisie  $\mathbf{x}_{\mathbf{j}}$ .
  - 5) Après la formation de tous les consensus par rapport à x. on compare chaque consensus formé aux monômes de la file et aux autres consensus formés. On supprime tout monôme qui est multiple d'un autre.
  - 6) On place les consensus non supprimés dans la file. On remplace j par j + 1 et on revient à 4). On s'arrête lorsque on a formé les consensus par rapport à toutes les variables.

Dans ce qui suit, on donne la démonstration de l'algorithme proposé.

#### Désignons pour :

- L, la liste des monômes initiaux
- $L^{t}$ , la liste des consensus temporels obtenus avant de passer au pas 4) de l'algorithme.
- L<sup>b</sup>, la liste des consensus sur les variables booléennes temporelles, obtenue en appliquant les pas 4), 5), 6) de l'algorithme sur la liste LU L<sup>t</sup>.
- Proposition 3: Le processus décrit par les pas 1), 2), 3) de l'algorithme donne tous les consensus temporels que l'on peut former à partir de la liste initiale, L, des monômes.

I - 17 -27-

 $\begin{array}{c} \underline{\text{D\'{e}monstration}}: \text{ Il suffit de d\'{e}montrer que le consensus temporel de } \alpha_k & \text{m}_k & \text{avec n'im-porte quel consensus temporel } (\alpha_{k_2} + \alpha_{k_3}) & \text{m}_k & \text{m}_k & \text{form\'{e} a partir des monômes} \\ & \alpha_{k_2} & \text{m}_{k_2} & \text{et } \alpha_{k_3} & \text{m}_{k_3} & \text{où k}_1 & \text{k}_2 & \text{et k}_1 & \text{k}_3, & \text{appartient a la liste LUL}^{t}. \\ \end{array}$ 

En fait, si le consensus  $(\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2} + \alpha_{k_3})$  m $_{k_1}$  m $_{k_2}$  m $_{k_3}$  existe, çà implique que  $(\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2})$  ou  $(\alpha_{k_1} + \alpha_{k_3})$  sont encore des créneaux ou des échelons ou des contre échelons.

Donc,  $(\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2})$   $m_{k_1}$   $m_{k_2}$  ou  $(\alpha_{k_1} + \alpha_{k_3})$   $m_{k_1}$   $m_{k_3}$  figurent dans la liste et par conséquent  $(\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2} + \alpha_{k_3})$   $m_{k_1}$   $m_{k_2}$   $m_{k_3}$  figurera dans la liste LUL<sup>t</sup> comme le consensus de  $(\alpha_{k_2} + \alpha_{k_3})$   $m_{k_2}$   $m_{k_3}$  avec au moins un des monômes  $(\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2})$   $m_{k_1}$   $m_{k_2}$  et  $(\alpha_{k_1} + \alpha_{k_3})$   $m_{k_1}$   $m_{k_3}$ 

Proposition 4: Tout consensus temporel entre un monôme de  $L^b$  et un monôme de  $LUL^t$  est couvert par un élément (au moins) de  $LUL^t$   $UL^b$ .

Si m<sub>t</sub> contient x (m<sub>t</sub> = m<sub>t</sub>\*  $\stackrel{\star}{\sim}$ ), alors le consensus temporel de  $\alpha_t$   $\stackrel{\star}{\sim}$  m<sub>t</sub>\* avec ou bien  $\alpha_r$  x m<sub>r</sub> ou bien  $\alpha_s$  x' m<sub>s</sub> existe, et il appartient à LUL<sup>t</sup>. De plus, ce consensus étant ou bien ( $\alpha_t$  +  $\alpha_s$ ) m<sub>s</sub> m<sub>t</sub> ou bien ( $\alpha_t$  +  $\alpha_r$ ) m<sub>r</sub> m<sub>t</sub> il couvre ( $\alpha_t$  +  $\alpha_r$   $\alpha_s$ ) m<sub>t</sub> m<sub>r</sub> m<sub>s</sub>.

Si par contre m<sub>t</sub> ne comporte la variable x sous aucune des deux formes, alors il existe les consensus temporels de  $\alpha_t$  m<sub>t</sub> avec a<sub>r</sub> x m<sub>r</sub> et  $\alpha_s$  x' m<sub>s</sub>;

Ces consensus étant respectivement  $(\alpha_t + \alpha_r) \times m_r m_t$  et  $(\alpha_t + \alpha_s) \times m_s m_t$  ils appartiennent à LUL<sup>t</sup>, donc le consensus par rapport à la variable x de ces derniers appartiendra à L<sup>b</sup> et sera exactement le monôme  $(\alpha_t + \alpha_r \alpha_s) m_t m_r m_s$ .

Proposition 5: Tout consensus temporel entre deux monômes de  $L^b$  est couvert par un élément (au moins) de  $LUL^t$   $UL^b$ .

En fait, ou bien le produit  $m_r$   $m_s$  ne contient pas y ou bien il le contient sous une seule forme. S'il le contient, alors  $(\alpha_t + \alpha_r \alpha_s)$   $m_r$   $m_s$   $m_t$  ou  $(\alpha_\omega + \alpha_r \alpha_s)$   $m_r$   $m_s$   $m_t$  est couvert par au moins un élément de LUL UL  $m_t$ . Pour des raisons tout à fait analogues, la proposition est vraie si le produit  $m_t$   $m_t$  contient x. Si finalement  $m_r$   $m_s$  ne contient pas y et  $m_t$   $m_t$  ne contient pas x, alors comme  $(\alpha_r \alpha_s + \alpha_t \alpha_\omega)$  est un créneau ou un échelon ou un contre échelon, les consensus temporels :

$$\begin{split} &(\alpha_{_{\bf r}}+\alpha_{_{\bf t}})\;\times\;y\;m_{_{\bf r}}\;m_{_{\bf t}},\;(\alpha_{_{\bf r}}+\alpha_{_{\bf w}})\;\times\;y'\;m_{_{\bf r}}\;m_{_{\bf w}}\;,\;(\alpha_{_{\bf s}}+\alpha_{_{\bf t}})\;\times'\;y\;m_{_{\bf s}}\;m_{_{\bf t}},\\ &(\alpha_{_{\bf s}}+\alpha_{_{\bf w}})\;\times'\;y'\;m_{_{\bf s}}\;m_{_{\bf w}}\;\text{figure ront dans la liste LUL$^{\rm t}$. En prenant les consensus de ces 4 monômes, par rapport à x et y, on trouve parmi ceux-ci: \\ &(\alpha_{_{\bf r}}\;\alpha_{_{\bf s}}+\alpha_{_{\bf t}}\;\alpha_{_{\bf w}})\;m_{_{\bf r}}\;m_{_{\bf s}}\;m_{_{\bf t}}\;m_{_{\bf w}}\;\text{qui appartient à L$^{\rm b}$}. \end{split}$$

Les propositions 3), 4) et 5) démontrent complètement l'algorithme.

Exemple 5 : Soit à calculer les monômes premiers du polynôme B.T. :  $e_1 e_2' \times y' + e_3' y + e_2 e_5' \times x' + e_3 \times y$ 

Par application de l'algorithme A on obtient :

$$L = e_1 e_2' \times y' / e_3' y / e_2 e_5' x' / e_3 x y$$

$$L^{t} = e_{5}^{t} x^{t}y / x y$$

$$L^{b} = e_{5}' y / e_{1} e_{2}' x$$

D'où la base complète :

$$e_1 e_2' x / e_5' y / e_2 e_5' x' / x y$$

REMARQUE 4: Soit A' l'algorithme obtenu à partir de l'algorithme précédent A, en exécutant dans l'ordre les pas 4, 5, 6 suivis des pas 1, 2, 3 et en substituant L<sup>t</sup> par L<sup>b</sup> et vice versa. Cet algorithme consiste à calculer d'abord les consensus booléens et ensuite les consensus temporels.

Nous allons démontrer que l'algorithme A' nous donne également l'ensemble des monômes premiers. La démonstration est faite de façon tout à fait analogue à la précédente par les 3 propositions suivantes :

<u>Proposition 3'</u>: Le processus décrit par les pas 1') 2') 3') de l'algorithme A' donne tous les consensus booléens que l'on peut former à partir de la liste initiale L des monômes.

Démonstration : Ce résultat est connu dans la théorie des consensus (1).

Proposition 4!: Tout consensus booléen entre un monôme de L<sup>t</sup> et un monôme de LUL<sup>b</sup> est couvert par un élément (au moins) de LUL<sup>b</sup> UL<sup>t</sup>.

<u>Démonstration</u>: Supposons que :

$$\alpha_{r} m_{r}, \alpha_{s} m_{s} \epsilon LUL^{b}, \alpha_{t} m_{t} = \alpha_{t} x' m_{t}^{*} \epsilon LUL^{b}$$

cons.temp.(
$$\alpha_r m_r, \alpha_s m_s$$
) = ( $\alpha_r + \alpha_s$ )  $m_r m_s \epsilon L^t$ 

Alors:  $\begin{aligned} &\text{cons.bool.} (\alpha_{r} \ \text{m}_{r}, \ \alpha_{t} \ \text{m}_{t}) = \alpha_{r} \ \alpha_{t} \ \text{m}_{r}^{\bigstar} \ \text{m}_{t}^{\bigstar} \ \epsilon \ \text{LUL}^{b} \\ &\text{et cons.temp.} (\alpha_{r} \ \alpha_{t} \ \text{m}_{r}^{\bigstar} \ \text{m}_{t}^{\bigstar}, \ \alpha_{s} \ \text{m}_{s}) = \\ &= (\alpha_{s} + \alpha_{r} \ \alpha_{t}) \ \text{m}_{r}^{\bigstar} \ \text{m}_{t}^{\bigstar} \ \text{m}_{s} \ (\epsilon \ \text{L}^{t}) \ \Rightarrow \alpha_{t}^{\ \prime} (\alpha_{r} + \alpha_{s}) \ \text{m}_{r}^{\bigstar} \ \text{m}_{t}^{\bigstar} \ \text{m}_{s} \end{aligned}$ 

Alors:  $\begin{aligned} &\operatorname{cons.bool.}(\alpha_{\mathbf{r}} \ \mathbf{m_r}, \ \alpha_{\mathbf{t}} \ \mathbf{m_t}) = \alpha_{\mathbf{r}} \ \alpha_{\mathbf{t}} \ \mathbf{m_r^{\bigstar}} \ \mathbf{m_t^{\bigstar}} \ \epsilon \ \mathsf{LUL^b} \\ &\operatorname{cons.bool.}(\alpha_{\mathbf{s}} \ \mathbf{m_s}, \ \alpha_{\mathbf{t}} \ \mathbf{m_t}) = \alpha_{\mathbf{s}} \ \alpha_{\mathbf{t}} \ \mathbf{m_s^{\bigstar}} \ \mathbf{m_t^{\bigstar}} \ \epsilon \ \mathsf{LUL^b} \\ &\operatorname{et} \ \mathsf{cons.temp.}(\alpha_{\mathbf{r}} \ \alpha_{\mathbf{t}} \ \mathbf{m_r^{\bigstar}} \ \mathbf{m_t^{\bigstar}}, \ \alpha_{\mathbf{s}} \ \alpha_{\mathbf{t}} \ \mathbf{m_s^{\bigstar}} \ \mathbf{m_t^{\bigstar}}) = \alpha_{\mathbf{t}} \ (\alpha_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{s}}) \ \mathbf{m_r^{\bigstar}} \ \mathbf{m_t^{\bigstar}} \ \mathbf{m_t^{\bigstar}} \ \epsilon \ \mathsf{L^t} \\ &\operatorname{Ce} \ \mathsf{dernier} \ \mathsf{est} \ \mathsf{\acute{e}gal} \ \mathsf{\grave{a}} \\ &\operatorname{cons.bool} \ (\ (\alpha_{\mathbf{r}} + \alpha_{\mathbf{s}}) \times \mathbf{m_r^{\bigstar}} \ \mathbf{m_s^{\bigstar}}, \ \alpha_{\mathbf{t}} \times \mathbf{m_t}) \end{aligned}$ 

Proposition 5' : Tout consensus booléen entre deux monômes de  $L^{t}$  est couvert par un élément (au moins) de  $LUL^{b}$   $UL^{t}$ .

#### Démonstration : On supposera que :

- 1)  $\alpha_{r} m_{r}$ ,  $\alpha_{s} m_{s}$ ,  $\alpha_{t} m_{t}$ ,  $\alpha_{\omega} m_{\omega} \epsilon LUL^{b}$
- 2) cons.temp. ( $\alpha_r m_r$ ,  $\alpha_s m_s$ ) = ( $\alpha_r + \alpha_s$ )  $m_r m_s \epsilon L^t$  cons.temp. ( $\alpha_t m_t$ ,  $\alpha_\omega m_\omega$ ) = ( $\alpha_t + \alpha_\omega$ )  $m_t m_\omega \epsilon L^t$

3) Le consensus booléen

cons.bool. ( 
$$(\alpha_r + \alpha_s) m_r m_s$$
,  $(\alpha_t + \alpha_\omega) m_t m_\omega$  ) existe

On va démontrer que le consensus donné en 3) ci-dessus est couvert par au moins un élément de  ${\it LUL}^{t}$ .

$$\underline{\text{ler_cas}}: \quad \alpha_r \quad m_r = \alpha_r \quad x \quad m_r^* \quad , \quad \alpha_s \quad m_s = \alpha_s \quad x \quad m_s^*$$

$$\alpha_t \quad m_t = \alpha_t \quad x' \quad m_t^* \quad , \quad \alpha_\omega \quad m_\omega = \alpha_\omega \quad x' \quad m_\omega^*$$

Alors:

cons.bool. (
$$\alpha_{r} \times m_{r}^{\star}$$
,  $\alpha_{t} \times m_{t}^{\star}$ ) =  $\alpha_{r} \alpha_{t} m_{r}^{\star} m_{t}^{\star} \varepsilon$  LUL<sup>b</sup> cons.bool. ( $\alpha_{s} \times m_{s}^{\star}$ ,  $\alpha_{t} \times m_{t}^{\star}$ ) =  $\alpha_{s} \alpha_{t} m_{s}^{\star} m_{t}^{\star} \varepsilon$  LUL<sup>b</sup> cons.bool. ( $\alpha_{r} \times m_{r}^{\star}$ ,  $\alpha_{\omega} \times m_{\omega}^{\star}$ ) =  $\alpha_{r} \alpha_{\omega} m_{r}^{\star} m_{\omega}^{\star} \varepsilon$  LUL<sup>b</sup> cons.bool. ( $\alpha_{s} \times m_{s}^{\star}$ ,  $\alpha_{\omega} \times m_{\omega}^{\star}$ ) =  $\alpha_{s} \alpha_{\omega} m_{s}^{\star} m_{\omega}^{\star} \varepsilon$  LUL<sup>b</sup>

On peut vérifier facilement que le consensus temporel des 4 derniers consensus appartient à  $\boldsymbol{L}^{t}$  et il est égal au

cons.bool.( 
$$(\alpha_r + \alpha_s) m_r m_s$$
,  $(\alpha_t + \alpha_\omega) m_t m_\omega$ )

2e\_cas:

$$\alpha_r m_r = \alpha_r \times m_r^*, \alpha_t m_t = \alpha_t \times m_t^*$$

$$\alpha_\omega m_\omega = \alpha_\omega \times m_\omega^*, m_s \text{ ne contient pas } x.$$

Alors :

$$\begin{aligned} & \operatorname{cons.bool}(\alpha_{\mathbf{r}} \ \mathbf{m_r}, \alpha_{\mathbf{t}} \ \mathbf{m_t}) = \alpha_{\mathbf{r}} \ \alpha_{\mathbf{t}} \ \mathbf{m_r}^{\bigstar} \ \mathbf{m_t}^{\bigstar} \ \epsilon \ \mathsf{LUL}^{b} \\ & \operatorname{cons.bool}(\alpha_{\mathbf{r}} \ \mathbf{m_r}, \alpha_{\omega} \ \mathbf{m_{\omega}}) = \alpha_{\mathbf{r}} \ \alpha_{\omega} \ \mathbf{m_r}^{\bigstar} \ \mathbf{m_{\omega}}^{\bigstar} \ \epsilon \ \mathsf{LUL}^{b} \\ & \operatorname{Le \ consensus \ temporel \ de \ } \alpha_{\mathbf{s}} \ \mathbf{m_s}, \ \alpha_{\mathbf{r}} \ \alpha_{\mathbf{t}} \ \mathbf{m_r}^{\bigstar} \ \mathbf{m_t}^{\bigstar}, \ \alpha_{\mathbf{r}} \ \alpha_{\omega} \ \mathbf{m_r}^{\bigstar} \ \mathbf{m_{\omega}}^{\bigstar} \ \mathsf{appartient} \end{aligned}$$
 à L<sup>t</sup> et il est égal à  $(\alpha_{\mathbf{s}} + \alpha_{\mathbf{r}} \ \alpha_{\mathbf{t}} + \alpha_{\mathbf{r}} \ \alpha_{\omega}) \ \mathbf{m_r}^{\bigstar} \ \mathbf{m_s} \ \mathbf{m_t}^{\bigstar} \ \mathbf{m_{\omega}}^{\bigstar}$ 

Ce dernier est supérieur à cons.bool 
$$((\alpha_r + \alpha_s) m_r m_s, (\alpha_t + \alpha_\omega) m_t m_\omega)$$

 $\underline{3e\_{cas}}: \quad \alpha_r m_r = \alpha_r \times m_r^*, \quad \alpha_t m_t = \alpha_t \times m_t^*, \quad m_s, \quad m_\omega$  sont indépendants de x.

Alors:

cons.bool. 
$$(\alpha_r m_r, \alpha_t m_t) = \alpha_r \alpha_t m_r^* m_t^* \in LUL^b$$

Le consensus temporel de  $\alpha_r$   $\alpha_t$   $m_r^*$   $m_t^*$ ,  $\alpha_s$   $m_s$ ,  $\alpha_\omega$   $m_\omega$  appartient à L<sup>t</sup> et il est égal à  $(\alpha_s + \alpha_\omega + \alpha_r \alpha_t)$   $m_r^*$   $m_s$   $m_t^*$   $m_\omega$ 

Ce dernier monôme est supérieur à cons.bool.(  $(\alpha_r + \alpha_s)$  m m m ,  $(\alpha_t + \alpha_\omega)$  m m m )

Exemple 5': Soit à calculer les monômes premiers de  $e_1$   $e_2'$  x y' +  $e_3'$  y +  $e_2$   $e_5'$  x' +  $e_3$  x y

Par application de l'algorithme A' on obtient :

$$L = e_1 e_2' \times y' / e_3' y / e_2 e_5' \times' / e_3 \times y$$

$$L^{b} = e_{1} e_{2} \times / e_{3} e_{5} y$$

$$L^{t} = e_{5}' x' y / x y / e_{5}' y$$

D'où la base complète :

$$e_{1}^{'}$$
  $e_{2}^{'}$  x / x y /  $e_{5}^{'}$  y /  $e_{2}^{'}$   $e_{5}^{'}$  x'

I - 23 -33-

#### 6. EQUATIONS BOOLEENNES TEMPORELLES

Un système d'équations booléennes temporelles sera un ensemble fini d'équations  $\{U_i = V_i\}$  les  $U_i$  et  $V_i$  étant des P.B.T. d'une V.B.T. X simple ou générale.

La théorie des équations booléennes étant bien connue, on se limitera à montrer comment elle s'applique en ce cas :

$$\{U_{i} = V_{i}\}_{i=1}^{n} \iff \{U_{i} \otimes V_{i} = I\}_{i=1}^{n} \iff \prod_{i=1}^{n} (U_{i} \otimes V_{i}) = I$$

ce qui se met sous la forme : f(X) = I.

<u>Proposition 6</u>: La solution de l'équation B.T.  $f(x_1, x_2, ..., x_n) = I$ , où f est un P.B.T. existe si et seulement si :

$$\Sigma f(b_1, b_2, \dots b_n) = I$$
  
 $b_i \epsilon' \{I,B\}$ 

Solution paramétrique : On cherche la solution de l'équation  $f(x_1, x_2, ..., x_n) = I$ 

On peut écrire :

$$f(x_1, ... x_n) = x_1 f(I, x_2, ... x_n) + x_1' f(B, x_2, ... x_n)$$

On en déduit :

$$x_1 = f'(B, x_2, ..., x_n) + u f(I, x_2, ..., x_n)$$

(u, est un paramètre Q.B.T) sous la condition de possibilité  $f(B, x_2, ..., x_n) + f(I, x_2, ..., x_n) = I$ 

Exemple 6 : Soit à résoudre

$$x y' + e_2 x y + e_3 x' = I$$

On trouve comme solution

$$y = e_2 u$$
,  $x = e_3^1 + \omega$ 

où u,  $\omega$  sont des paramètres Q.B.T.

#### Solution par passage à la forme de Lagrange

Toute équation B.T. peut se mettre sous la forme

$$\Sigma \quad c_{L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_n} \quad x_1^{L_1} \quad x_2^{L_2} \quad \dots \quad x_n^{L_n} = B$$

$$L_j \in \{I,B\}$$
(mI)

On peut en déduire des solutions particulières si la condition de possibilité  $\prod_{i=1}^{c} L_{1} L_{2} \dots L_{n}$  = B est vérifiée.

 $L_{j} \in \{I,B\}$ 

En fait, pour que le membre gauche de (mI) soit nul il faut que chaque terme de la somme soit nul. Cette dernière condition se traduit par un système d'inégalités dont la condition de compatibilité est précisément la condition de possibilité ci-dessus.

On illustrera le processus d'obtention des solutions particulières à l'aide d'un exemple.

#### Exemple 7: Soit à résoudre

$$e_1 e_2' x' y' + e_2 e_4' x y' + e_3 e_4' x' y + e_5 x y = B$$

La condition de possibilité est satisfaite

$$e_1 e_2' x' y' = B <=> (e_1 e_2' \le x) ou (e_1 e_2' \le y)$$

$$e_2 e_4' \times y' = B <=> (x \le e_2' + e_4)$$
 ou  $(e_2 e_4' \le y)$ 

$$e_3 e_4' x' y = B <=> (e_3 e_4' \le x) ou (y \le e_3' + e_4)$$

$$e_5 \times y$$
 = B <=>  $(x \le e_5')$  ou  $(y \le e_5')$ 

D'où, par les inégalités  $e_1$   $e_2'$  <  $\times$  ,  $e_2$   $e_4'$  < y , y <  $e_3'$  +  $e_4$  ,

$$y \le e_5'$$
 on peut prendre (par exemple)  $y = e_3'$ ,  $x = e_1 e_2'$ 

Les jeux des valeurs que l'on peut obtenir par ce système d'inégalités sont donnés par la solution paramétrique de l'équation.

I - 25 -35-

#### 7. RELATIONS TEMPORISEES

#### 7.1. Les Matrices définies dans V

Désignons par  $M_{m,n}$  l'ensemble des matrices  $m \times n$  définies dans V.

Pour A, D  $\epsilon$  M<sub>m,n</sub> on définit les opérations :

Somme booléenne :  $A + D = C / c_{ij} = a_{ij} + d_{ij}$ 

Multiplication booléenne : A D = C / c = a i d i i

Complémentation : A' = C / c = a';

Disjonction: A  $\Theta$  D = C /  $c_{ij} = a_{ij} \oplus d_{ij}$ 

Produit scalaire : a  $\epsilon$  V, D  $\epsilon$  M<sub>m,n</sub>, a D = C / c<sub>ij</sub> = a d<sub>ij</sub>

Produit matriciel : Cette opération s'effectuant par combinaison de deux opérations binaires élémentaires  $0_1$  et  $0_2$  on la désignera par :

$$A \stackrel{O_1}{\circ_2} D = C / c_{ij} = O_1 (a_{ik} O_2 d_{kj})$$
où  $A \in M_{m,n}$ ,  $D \in M_{n,s}$ 

Nous désignerons enfin par  $I_n$  la matrice unitaire d'ordre n et par  $B_{m,n}$  la matrice m x n dont tous les éléments sont B.

#### 7.2. Définitions

 $\underline{\text{D\'efinition 10}}: \text{Consid\'erons les univers U}_1, \text{U}_2, \dots \text{U}_m.$ 

Une relation temporisée R(t) à m positions définie sur cet ensemble d'univers consistera en la donnée d'un élément de V pour chaque m-uplet de  $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_m$ .

Par convention la relation R(t) sera vraie pour un m-uplet donné, durant les intervalles de temps pendant lesquels la Q.B.T. qui y est associée est égale à 1.

Il est clair qu'une telle relation est définie par une application  $f: U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_m \to V \text{ qui sera la fonction caractéristique de la relation. Les relations temporisées sont une généralisation des relations indépendantes du temps.}$ 

Soit en particulier R, une relation temporisée binaire sur l'ensemble  $P = \{p_1, p_2, \dots p_n\}$  dont la fonction caractéristique est  $f: P \times P \to V$ . Alors on peut définir la matrice A telle que  $a_{ij} = f(p_i, p_j)$ . Il est alors évident que la relation  $R^q$  ( $R^q = R^{q-1} \cap R$ ) aura comme matrice associée  $A^q$  ( $A^q = A^{q-1} \not \downarrow A$ ).

Cette somme converge et pour son calcul toutes les méthodes habituelles sont applicables.

#### 7.3. Réseaux porteurs de P.B.T.

<u>Définitions 11</u>: Un réseau porteur de P.B.T. consistera en la donnée d'un triplet (X, P, f) où

X : une variable B.T. générale (X =  $\begin{vmatrix} x \\ 1 \\ x \\ m \end{vmatrix}$  )

P : ensemble fini d'objets (P={ $p_1$ ,  $p_2$ ,...  $p_n$ } )

f : une application de P x P dans  $\mathcal{F}(X)$  où  $\mathcal{F}(X)$  est l'ensemble des P.B.T. de X.

Au triplet (X, P, f) on peut associer un réseau dont P est l'ensemble d'articulations et la branche  $(p_i, p_j)$  porte  $f(p_i, p_j)$ .

REMARQUE 5 : Un réseau porteur de P.B.T. génère pour chaque X  $\epsilon$  V une relation temporisée binaire sur P.

I - 27 -37-

Exemple 8 : Un réseau à relais idéaux peut être considéré comme un réseau porteur de P.B.T. Pour le réseau de la figure 1 on a :

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$
 P = {1, 2, 3, 4, 5}

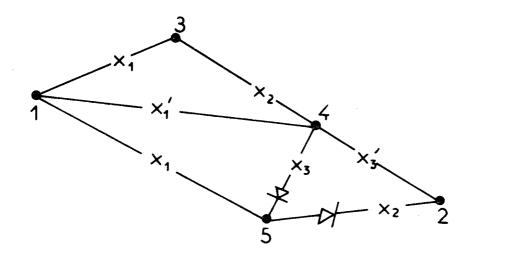


Figure 1

La conductibilité entre les articulations 1 et 2 est :  $x_2 + x_1' x_3'$ 

Pour des commandes données :

$$x_1 = e_{1,1} e_{2,5} + e_7 e_{9,1} + e_{10}$$

$$x_2 = e_1' + e_2 e_3' + e_5 e_7' + e_9 e_{11}'$$

$$x_3 = e_1' + e_3 e_{7,5}' + e_9 e_{11}'$$

On obtient en substituant à l'expression précédente

$$e_{1,1}^{\prime} + e_{2}^{\prime} e_{3}^{\prime} + e_{5}^{\prime} e_{7}^{\prime} + e_{9}^{\prime} e_{10}^{\prime}$$

Cette Q.B.T. détermine par les intervalles où elle vaut 1 les instants auxquels il existe un chemin entre 1 et 2.

#### CHAPITRE II

#### GERBIERS D'OPERATEURS SUR V ET V\_

#### 1) L'OPERATEUR $\tau$

1.1. L'opérateur T sur V

C'est à dire la multiplication d'une Q.B.T. g(t) par  $\tau^k$  donne la Q.B.T. que l'on obtient à partir de g(t) en additionnant k à ses fronts.

Propriété 1: Si f(t),  $g(t) \in V$ , alors,

$$\tau^k \left( f(t) + g(t) \right) = \tau^k f(t) + \tau^k g(t)$$

Propriété 2 : Si f(t),  $g(t) \in V$ , alors,

$$\tau^k (f(t) g(t)) = (\tau^k f(t)) (\tau^k g(t))$$

Propriété 3 : Si  $f(t) \in V$ , alors,

$$(\tau^k f(t))' = \tau^k f'(t)$$

Propriété 
$$\underline{4}$$
: Si  $f(t)$ ,  $g(t) \in V$ , alors

$$\tau^k (f(t) \oplus g(t)) = \tau^k f(t) \oplus \tau^k g(t)$$

Propriété 
$$5$$
: Si  $f(t) \in V$ , alors,

$$f(t) = \tau^k f(t+k)$$

REMARQUE 1: On peut facilement calculer l'image par  $\tau^k$  de toute Q.B.T. en additionnant k aux indices des échelons de ses 3 formes.

Les propriétés 1,2,3,4 se résument par la proposition suivante :

Proposition 1: Soit 
$$f(x_1, x_2, \dots x_n)$$
 un polynôme B.T.

Alors, 
$$\tau^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\tau^k x_1, \tau^k x_2, \ldots, \tau^k x_n)$$

1.2. L'opérateur  $\tau$  sur  $V_+$ 

<u>Définition 2</u>: Nous définissons l'ensemble des applications <u>internes</u> de  $V_+, \{\tau^k\}_{k \in \mathbb{R}}$ :

$$\tau^{k} g(t) = g(t-k) S(k)$$

où 
$$S(k) = \begin{cases} e_0 & \text{pour } k \leq 0 \\ e_k & \text{pour } k > 0 \end{cases}$$

Propriété 1': Si f(t),  $g(t) \in V_+$  alors,

$$\tau^{k} \left( f(t) + g(t) \right) = \tau^{k} f(t) + \tau^{k} g(t)$$

<u>Propriété 2'</u>: Si f(t),  $g(t) \in V_+$ , alors  $\tau^k (f(t) g(t)) = (\tau^k f(t))(\tau^k g(t))$ 

<u>Propriété 4'</u>: Si f(t),  $g(t) \in V_+$ , alors  $\tau^k \ (f(t) \ \textcircled{\#} \ g(t)) = \tau^k \ f(t) \ \textcircled{\#} \ \tau^k \ g(t)$ 

Propriété 3': Si  $f(t) \in V_+$  alors,  $(\tau^k f(t))' = \begin{cases} e_0 e_k' + \tau^k f'(t) & \text{si } k > 0 \\ \\ \tau^k f'(t) & \text{sinon} \end{cases}$ 

Propriété 5 ' : Si  $f(t) \in V_+$  alors,  $f(t) = \tau^k \ f(t+k) \ pour \ k < 0$   $f(t) = \tau^k \ f(t+k) + f_k \ pour \cdot k > 0$  où  $f_k$  est la restriction de f(t) dans l'intervalle [0,k]

Une proposition analogue à la précédente peut être énoncée pour les P.B.T. dont les variables sont définies sur  $V_+$ .

Dans ce cas :

$$\tau^{k} f(x_{1}, x_{2}, \dots x_{n}) = f(\tau^{k} x_{1}, \tau^{k} x_{2}, \dots, \tau^{k} x_{n}) pour k \leq 0$$

$$\tau^{k} f(x_{1}, x_{2}, \dots x_{n}) = e_{k} f(\tau^{k} x_{1}, \tau^{k} x_{2}, \dots, \tau^{k} x_{n}) pour k > 0$$

NOTA: Dans ce qui suit nous présentons la théorie des opérateurs τ définis sur V<sub>+</sub>. La théorie des opérateurs τ définis sur V est à des détails près pareille. Par conséquent, seulement les points où les deux théories diffèrent seront signalés

1.3. Composition des opérateurs τ.

Désignons par :

$$T_{+} = \{\tau^{k}; k \in R^{+} U \{0\} \}$$

$$T_{-} = \{\tau^{k}; k \in \mathbb{R}^{-} U \{0\} \}$$

0 : l'opération de composition des opérateurs  $\text{Alors } \tau^k \text{ O } \tau^m = \tau^{k+m} \quad \text{pour } \tau^k, \ \tau^m \in \mathit{T}_+ \text{ ou bien}$ 

$$\tau^k$$
,  $\tau^m \in T_{\underline{}}$ 

Proposition 2 :  $(T_+, 0)$  et  $(T_-, 0)$  sont des monoïdes d'applications internes de  $V_+$ .

 $\underline{\text{DEMONSTRATION}}: \qquad \text{En effet pour r, s } \epsilon \ T_{+} \ (\text{ou bien r, s } \epsilon \ T_{-}) \ \text{et x } \epsilon \ V_{+} \ \text{on a} :$  (r 0 s) x = r(s x)

II - 5 -42-

NOTA: Pour éviter les parenthèses multiples tout opérateur τ<sup>k</sup> non suivi d'une parenthèse ouvrante ne s'appliquera qu'à la Q.B.T. qui le suit immédiatement. Ainsi :

$$\tau a \quad \tau b = \tau(a) \quad \tau(b) = \tau(ab)$$

 $\tau a b = \tau(a) b$ 

<u>Définition 3</u>: Soit DE  $M_{m,n}$ . On définit le produit  $\tau^k$  D = C / c<sub>ij</sub> =  $\tau^k$  d<sub>ij</sub>

Proposition 3:  $T_+$  et  $T_-$  opèrent dans l'exsemble des matrices définies dans  $V_+$ 

1.4. Le monoïde xs

Considérons les ensembles d'applications internes de V<sub>+</sub>

$$P_{-} = \{xs; x\epsilon V_{+}, s\epsilon T_{-}\}$$

$$P_{+} = \{xs; x \in V_{+}, s \in T_{+}\}$$

C'est à dire dans les deux cas xs représente l'application interne de  $V_+$  qui est la composée d'une translation et d'un opérateur de  $T_-UT_+$ . Si on désigne par 0 l'opération de composition entre les éléments de  $P_-$  ou bien entre les éléments de  $P_+$  on peut constater que :

1) L'opération est interne

$$x_1 s_1 0 x_2 s_2 = x_1 (s_1 x_2) s_1 0 s_2$$

où  $x_1$ ,  $x_2 \in V_+$ ,  $s_1$ ,  $s_2 \in T_+$  ou bien  $s_1$ ,  $s_2 \in T_-$ .

2)  $(P_{-},0)$  et  $P_{+},0)$  sont des monoîdes et  $(T_{-},0)$ ,  $(T_{+},0)$  en sont respectivement des sous monoîdes.

- 3) Les monoîdes (P\_,0), (P\_+,0) opèrent dans  $V_+$ . En fait, (x<sub>1</sub> s<sub>1</sub> 0 x<sub>2</sub> s<sub>2</sub>) y = x<sub>1</sub> s<sub>1</sub> (x<sub>2</sub> s<sub>2</sub> y); y  $\epsilon$   $V_+$
- 4) Le monoïde  $(P_{,0})$  de  $V_{+}$  a un élément absorbant bilatéral auquel sont égaux tous les éléments de la forme  $B\tau^{k}$ . On désignera cet élément par  $B\tau^{0}$ .
- 5) Le monoïde  $(P_+,0)$  de  $V_+$  a un élément absorbant bilatéral, que l'on désignera également par  $B\tau^0$ , auquel sont égaux tous ses éléments de la forme  $x\tau^k$  où x est tel que x(t) = 0 pour t > k.
- 6) Les monoïdes  $(P_+,0), (P_-,0)$  de V ont un élément absorbant bilatéral, désigné par  $B\tau^0$ , auquel sont égaux tous leurs éléments de la forme  $B\tau^k$ .

#### 2) LE GERBIER $(P_+, +, 0)$

#### 2.1. Propriétés

On crée sur  $(P_-,0)$  et  $P_+,0$ ) deux gerbiers respectivement  $G_-$  et  $G_+$  en introduisant l'opération  $\div$  (addition des opérateurs). On choisit dans les deux cas comme élément blanc (25) BT $^0$  qui est l'absorbant bilatéral pour la composition (0).

Tout élément de G\_ et G\_ peut être considéré comme une application interne de  $V_+$  de la façon suivante :

$$(+ x_i s_i) y = \sum_i x_i s_i y, \qquad , \text{ où } y \in V_+, s_i \in T_+UT_-$$

Propriété 6: Si  $y_1$   $y_2$   $\in$   $V_+$  alors

<u>Propriété 7</u>:  $x_1 s + x_2 s = (x_1 + x_2) s$ ;  $s \in T_+ UT_-, x_1, x_2 \in V_+$ 

<u>Propriété 8</u>: Les gerbiers  $G_+$  et  $G_-$  opèrent dans  $V_+$ .

En fait, si + a s et + b r sont deux éléments de G ou DEMONSTRATION : bien de G\_, il suffit de démontrer que pour  $\forall y \in V_+$ 

On a :

=  $\sum_{i} a_{i} s_{i} (\sum_{j} b_{j} r_{j} y) = \sum_{i,j} a_{i} s_{i} (b_{j} r_{j} y) = \sum_{i,j} (a_{i} s_{i} o b_{j} r_{j}) y =$ 

Relation d'ordre sur G\_ et G\_ : Soient g\_ et g\_ deux opérateurs appartenant soit à  $G_{\perp}$  soit à  $G_{\perp}$ . On établit la relation d'ordre :

 $g_1 \Rightarrow g_2 \iff g_1 \times g_2 \times pour \forall \times \varepsilon V_+$ 

Conséquence :  $g_1 \ge g_2 \iff g_1 + g_2 = g_1$ 

Définition 4 : Un opérateur g, est appelé croissant si pour

$$\forall x, y \in V_+$$
  $x \geqslant y \Rightarrow g(x) \geqslant g(y)$ 

<u>Proposition 4</u>: Tout opérateur  $g \in G_{-} \cup G_{+}$  est croissant.

2.2. Fermeture d'un opérateur de G, U G

Définition 5 : Soit g & G<sub>+</sub> U G<sub>-</sub>. La fermeture de g, désignée par g<sup>\*</sup>, sera par définition la somme :

$$g^* = \tau^0 + g + g^2 + \dots + g^s + \dots + \dots$$
  
où  $g^s = g^{s-1} \circ g$ 

Propriété 9 :  $g^{t} > g$ 

Propriété 10 :  $(g^*)^* = g^*$ 

Propriété 11 :  $g_1 \ge g_2 \Rightarrow g_1^* \ge g_2^*$ 

Propriété 12 :  $g^* \circ g^* = g^*$ 

Propriété 13 :  $\tau^0 \neq g \circ g^* = \tau^0 \neq g^* \circ g = g^*$ 

Propriété 14 :  $(\tau^0 \neq g)^* = g^*$ 

REMARQUE 2: Par les propriétés 9, 10, 11 on constate qu'il s'agit bien d'une fermeture (30).

2.2.1. Q.B.T. stabilisées

Définition 6 : Une Q.B.T. simple f(t) sera appelée stabilisée s'il existe i, j  $\epsilon$  R, i < j tels que f(t) = 1 ou 0 pour t < i et t > j.

Le réel i (respectivement j) maximum (minimum) vérifiant la propriété précédente sera appelé seuil de stabilisation de f(t) à gauche (à droite) et, il sera désigné par ss f(t) (ss f(t)).

La <u>valeur stable</u> à gauche (respectivement à droite) d'une Q.B.T. stabilisée f(t) sera la valeur de celle là pour  $t < ss^-(f(t))$  ( $t > ss^+(f(t))$ ) et sera désignée par  $vs^-(f(t))$  ( $vs^+(f(t))$ ).

Une Q.B.T. stabilisée f(t) sera qualifiée <u>d'étendue</u> finie si  $vs^+$  (f(t)) =  $vs^-$  (f(t)) = 0

2.2.2. Calcul de la fermeture d'un opérateur de  $G_{\pm}^{\circ}$ 

Nous montrons ci-dessous comment on peut calculer la fermeture d'un élément de  $G_{+}$  dont les coefficients sont des Q.B.T. stabilisées.

<u>Définition 7</u>: Soit g  $\epsilon$  G<sub>+</sub> ,g = x<sub>1</sub> s<sub>1</sub> + x<sub>2</sub> s<sub>2</sub> + ... + x<sub>n</sub> s<sub>n</sub> . On désignera par w(g) le plus petit exposant de  $\tau$  dans l'opérateur.

Proposition 5: Soit 
$$x\tau^0 + g \in G_+$$
 avec  $w(g) > 0$ 

Alors  $x\tau^0 + g^* = g^*$ 

DEMONSTRATION: On a  $\tau^0 \dotplus g > x\tau^0 \dotplus g > g$ Par la propriété 11:  $(\tau^0 \dotplus g)^* > (x\tau^0 \dotplus g)^* > g^*$ et par la propriété 14:  $(x\tau^0 \dotplus g)^* = g^*$ 

<u>Proposition 6</u>: Soit  $g=x_1 s_1 + \ldots + x_m s_m$ ,  $g \in G_+$ ,  $G_+$  opérant sur  $V_+$ , tel que les  $x_i$  soient des Q.B.T. d'étendue finie. Alors  $g^*$  se stabilise.

DEMONSTRATION: Il suffit de démontrer la proposition dans le cas où w(g) > 0. soit  $i = \min_{i=1}^{m} \{ss^{-}(x_i)\}$   $s = \max_{i=1}^{m} \{ss^{+}(x_i)\}$  i=1Remarquons que si  $g^2 = y_1 r_1 + y_2 r_2 + \dots + y_k r_k$ 

A partir de cette remarque on déduit qu'il existe q tel que g  $q = Bt^0$  et  $q < \frac{s-i}{w(g)} + 1$ 

II - 11 -48-

### Calcul de $g^{*}$ dans le cas où g a des coefficients se terminant par un échelon.

Soit  $g = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \dots + x_m s_m$ ,  $g \in G_+$ , les  $x_i$  sont d'étendue finie ou bien se terminent par un échelon.

Si k est le front montant le plus grand des  $x_i$  on peut écrire tout  $a_i$  comme la somme  $x_i = y_i + Z_i$  où  $y_i$  est une Q.E.T. d'étendue finie et  $Z_i$  (éventuellement) l'échelon  $e_k$ . Donc on peut décomposer:  $g = g_1 + e_k g_2$  où  $g_1 = \frac{m}{i}$   $y_i$   $s_i$  et  $e_k$   $g_2 = \frac{m}{i}$   $e_k$   $s_i$ 

Par exemple :

$$g = (e_1 e'_2 + e_5) \tau^0 + (e_2 e'_{3,25} + e_7 e'_{9,1} + e_{10}) \tau$$

$$g_1 = (e_1 e'_2 + e_5 e'_{10}) \tau^0 + (e_2 e'_{3,25} + e_7 e'_{9,1}) \tau$$

$$g_2 = \tau^0 + \tau \quad ; \quad k = 10$$

Etant donné que  $g_1$  a tous ses coefficients d'étendue finie, par la proposition précédente il existe q tel que  $g_1^q$  =  $\mathrm{E}\tau^0$ 

Si on calcule les puissances successives de g, on trouve :

$$g^{2} = g_{1}^{2} + e_{k} g_{2} g_{1} + (e_{k} g_{2})^{2}$$

$$g^{3} = g_{1}^{3} + (e_{k} g_{2}) g_{1}^{2} + (e_{k} g_{2})^{2} g_{1} + (e_{k} g_{2})^{3}$$

$$g^{q-1} = g_{1}^{q-1} + (e_{k} g_{2}) g_{1}^{q-2} + (e_{k} g_{2})^{2} g_{1}^{q-3} + \dots + (e_{k} g_{2})^{q-1}$$

Mais comme  $g_1^q = B\tau^0$  il en résulte que :

$$g^q = (e_k g_2) o g^{q-1}$$
 et en général :

$$g^{i} = (e_{k} g_{2})^{i-q+1} g^{q-1}$$
 pour  $i > q$ 

Donc :

$$g^* = \tau^0 + g + g^2 + g^3 + ... + g^{q-2} + (\tau^0 + (e_k g_2) + (e_k g_2)^2 + ...) \circ g^{q-1}$$

Ce qui donne :

$$g^* = \tau^0 + g + g^2 + ... + g^{q-2} + (e_k g_2)^* \circ g^{q-1}$$

Remarquons que  $(e_k g_2)^n = (g_2)^{n-1} o(e_k g_2)$  pour  $n \ge 1$  et par conséquent on peut écrire :

$$g^* = {0 \atop \tau} + g + g^2 ... + g^{q-2} + g^{q-1} + (g_2)^* \circ (e_k g_2) \circ g^{q-1}$$

Lemme 1: Soient  $n_1$ ,  $n_2$ ,...  $n_p$  des entiers positifs et  $E = \{\lambda_1 \ n_1 + \lambda_2 \ n_2 + \dots + \lambda_p \ n_p \}_{\lambda_i} \in \mathbb{N}$  l'ensemble des entiers engendrés par l'expression  $\lambda_1 \ n_1 + \lambda_2 \ n_2 + \dots + \lambda_p \ n_p \ \text{où} \ \lambda_i \ \text{sont des paramètres définis dans les}$  entiers naturels. Alors il existe s,(s  $\in$  N),tel que chaque élément de E, supérieur ou égal à s,soit un multiple du PGCD  $(n_1, \ n_2, \dots \ n_p)$ .

Proposition 7: Soit  $g_2 = \tau^{n_1} + \tau^{n_2} + \ldots + \tau^{n_p}$  un élément de  $G_+$  où  $n_1, n_2, \ldots, n_p$  sont des entiers Alors  $g_2^{\pm}$  peut se mettre sous la forme  $g_2^{\pm} = A + ( \stackrel{\sim}{+} \tau^{S} + \delta i) \text{ où } A \text{ est une somme finie de } \tau^i \text{ avec} i < s \text{ et } \delta = PGCD \ (n_1, \ldots, n_p).$ 

 $\underline{\text{DEMONSTRATION}}: \qquad \text{Il suffit de remarquer que } g_2^{\bigstar} = \dot{\tau} \tau^{\dot{i}} \quad \text{où}$ 

 $E = \{\lambda_1 \quad n_1 + \lambda_2 \quad n_2 \dots + \lambda_p \quad n_p\} \quad \lambda_3 \in \mathbb{N} \quad \text{Alors par le lemme précédent}$ 

g\* peut se mettre sous la forme

$$g^* = A + ( + \tau^{s + \delta i})$$

$$i=0$$

REMARQUE 2 : Le lemme et la proposition précédente se généralisent pour  $n_i$  rationnels positifs.

Par conséquent, la fermeture de g, g  $\epsilon$   $G_+$ , dont les coefficients sont des Q.B.T. stabilisées et les exposants des rationnels positifs, peut se mettre sous la forme :

$$g^* = \tau^0 + g + ... + g^{q-1} + A O(e_k g_2) O g^{q-1} + (f + \tau^s + 0^{\delta i}(e_k g_2) O g^{q-1})$$

D'où la proposition :

Proposition 8: Soit  $g \in G_+$  dont les coefficients sont des Q.B.T. stabilisées et les exposants sont des rationnels positifs. Alors on peut calculer  $g^{t}$  en effectuant un nombre fini d'itérations.

Exemple 1: Soit g  $\varepsilon$  G<sub>+</sub>  $g = e'_2 \tau^{1,2} + (e_2 e'_3 + e_5) \tau^{1,5} + (e'_3 + e_4) \tau^{1,8}$ On a:  $g_1 = e'_2 \tau^{1,2} + e_2 e'_3 \tau^{1,5} + (e'_3 + e_4 e'_5) \tau^{1,8}$   $g_2 = \tau^{1,5} + \tau^{1,8} , k = 5$ 

Puissances successives de  $g_1$ :

$$g_1^2 = e_3^i \tau^{2,7} + e_4^i e_{4,8}^i \tau^{3,6}$$

$$g_1^3 = e_{4,8}^{\dagger} \tau^{4,5}$$

$$g_1^4 = BT^0$$
 . Donc  $q = 4$ 

D'autre part :

$$g_{2}^{*} = \tau^{0} + \tau^{1,5} + \tau^{1,8} + \tau^{3} + \tau^{3,3} + \tau^{3,6} + \tau^{4,5} + \tau^{4,8} + \tau^{5,1} + \tau^{5,4} + \tau^{5,4} + \tau^{6+0,3\lambda}) = A + (+ \tau^{5,4} + \tau^{6+0,3\lambda})$$

Donc g\* est donné par :

$$g^{*} = \tau^{0} + g + g^{2} + g^{3} + g_{2}^{*} \alpha (e_{5} g_{2}) 0 g^{3}$$

#### 3) LES MATRICES DEFINIES SUR $G_+$ et $G_-$

Les matrices carrées définies sur  $G_+$  et  $G_-$  forment respectivement des gerbiers  $G_M$  et  $G_{-M}$  par rapport aux opérations :

- 1) addition (+) : élément par élément
- 2) : produit matriciel

De plus, une matrice élément de  $G_M$  U  $G_{-M}$  peut être considérée comme une application interne de l'ensemble des matrices carrées de même ordre définies sur  $V_+$  si on définit le produit mixte.

$$A W = C$$

où 
$$W = ||w_{ij}||$$
,  $w_{ij} \in V_+$ ;  $A = ||a_{ij}||$ ,  $a_{ij} \in G_-$  ou bien  $a_{ij} \in G_+$ 

$$c = ||c_{ij}|| : c_{ij} = \sum_{k} a_{ik} w_{kj}$$

<u>Propriété 15</u> : (A + B) W = A W + B W

Propriété 16 :  $G_{\rm M}$  et  $G_{\rm -M}$  opèrent dans l'ensemble des matrices carrées de même ordre définies dans  $V_+$ .

Définition 8 : La fermeture d'une matrice carrée, A, A  $\epsilon$  G  $_M$  U G  $_{-M}$  sera par définition la somme :

$$A^* = I_n + A + A^2 + \dots + A^p + \dots + O^n$$

Proposition 9: Soit  $A \in G_M \cup G_{-M}$  dont les éléments  $a_{ij}$  ont des coefficients d'étendue finie. Alors  $A^{t}$  se stabilise.

<u>DEMONSTRATION</u>: Analogue à celle de la proposition 6.

 ${\hbox{{\tt NOTA}}}$  : Le problème du calcul de la fermeture d'une matrice A sera abordé dans le chapitre V.

#### CHAPITRE III

#### ANNEAUX D'OPERATEURS

Dans ce paragraphe, nous montrons comment à partir de  $P_+$  ou de  $P_-$  on peut définir un anneau d'opérateurs de V ou de  $V_+$ . L'anneau  $A_+$  décrit ci-dessous, généré à partir de  $P_+$  et opérant sur  $V_+$  semble être une généralisation de l'anneau des polynômes à retard ("delay polynomials") (28)(29).

#### 1) L'ANNEAU A

#### 1.1. Définition

Définition 1 : Soit  $\oplus$  une opération définie de la façon suivante :

Désignons par  $A_+$  l'ensemble des sommes finies que l'on peut former à partir des éléments de  $P_+$  et de cette opération :

$$A_{+} = \{x_{1} s_{1} \oplus x_{2} s_{2} \dots \oplus x_{n} s_{n}; x_{1} s_{1} \epsilon P_{+}\}$$

Nous interprèterons tout élément de  $\mathbf{A}_{+}$  comme une application interne de  $\mathbf{V}_{+}$  :

$$(x_1 s_1 \oplus x_2 s_2 \oplus \dots \oplus x_n s_n) y = x_1 s_1 y \oplus x_2 s_2 y \oplus \dots$$

$$\dots \oplus x_n s_n y \text{ où } y \in V_+$$

Il n'est pas difficile de constater que  $(A_+, \overset{\bullet}{\oplus}, 0)$  est un anneau non intègre tel que x s  $\overset{\bullet}{\oplus}$  x s = Bt $^0$ .

- 1.2. La pseudo-fermeture d'un opérateur de A<sub>+</sub>1.2.1. Propriétés
- <u>Définition 2</u>: Soit a  $\in$  A<sub>+</sub>, a = x<sub>1</sub> s<sub>1</sub>  $\stackrel{\cdot}{\oplus}$  x<sub>2</sub> s<sub>2</sub>  $\stackrel{\cdot}{\oplus}$  ...  $\stackrel{\cdot}{\oplus}$  x<sub>n</sub> s<sub>n</sub>, (x<sub>i</sub>  $\in$  V<sub>+</sub>, s<sub>i</sub>  $\in$  T<sub>+</sub>).

  On désignera par W(a) le plus petit exposant de  $\tau$  dans l'opérateur.
- Propriété 1: Pour  $a \in A_+$ , W(a) > 0  $\tau^0 \stackrel{\bullet}{•} a \circ \hat{a} = \tau^0 \stackrel{\bullet}{•} \hat{a} \circ a = \hat{a}$ Ce qui se met sous la forme plus intéressante :  $\tau^0 = (\tau^0 \stackrel{\bullet}{•} a) \circ \hat{a} = \hat{a} \circ (\tau^0 \stackrel{\bullet}{•} a)$
- Lemme 1 : Soit a  $\epsilon$  A<sub>+</sub> avec W(a) > 0

  Alors l'équation, Z = a Z, a une solution unique Z = B.
- DEMONSTRATION : Supposons qu'il existe une solution  $Z = Z_1 \neq B$ Alors puisque W(a) > 0 on aura  $SS^{-}(Z_1) < SS^{-}(a Z_1)$  et par conséquent  $Z_1 \neq a Z_1$ .
- Lemme 2 : Soit a  $\epsilon$  A<sub>+</sub>, W(a) > 0 et l'équation Z = x  $\oplus$  a Z, x  $\neq$  B. Alors elle a une solution unique qui est Z =  $\hat{a}$  x

 $\frac{\text{DEMONSTRATION}}{\text{Demonstration}}: \qquad \text{On peut vérifier que $\widehat{a}$ x est bien une solution. Soient $\Xi_1$, $\Xi_2$ \\ & \text{deux solutions, $\Xi_1 \neq \Xi_2$ .}$ 

Alors  $(\mathbf{Z}_1 \oplus \mathbf{Z}_2) = \mathbf{a}(\mathbf{Z}_1 \oplus \mathbf{Z}_2) \Rightarrow \mathbf{Z}_1 \oplus \mathbf{Z}_2 = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2$ .

Propriété 2: Soient a,  $b \in A_{+}$  W(a), W(b) > 0Alors  $\hat{a} \circ \hat{b} = (a + b + b \circ a)$ 

 $\underline{\text{DEMONSTRATION}}: \quad \text{Supposons que l'image de x, } x \in V_+, \quad \text{par} \quad \hat{\textbf{a}} \ 0 \ \hat{\textbf{b}} \text{ est } \textbf{Z} : \textbf{\Xi} = (\hat{\textbf{a}} \ 0 \ \hat{\textbf{b}}) \ x$   $\underline{\text{Posons}} \quad \textbf{Z}_1 = \hat{\textbf{b}} \ x$ 

Par les deux égalités précédentes on a :

 $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{x} \oplus \mathbf{b} \mathbf{Z}_1$  et  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 \oplus \mathbf{a} \mathbf{Z} => \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{a} \mathbf{Z}$ 

En substituant  $\mathbf{Z}_{1}$  dans la première équation on obtient :

 $\Xi$  = (a  $\bigoplus$  b  $\bigoplus$  b 0 a)  $\Xi$   $\bigoplus$  x

D'où Z = (a b b b 0 a) x

Donc  $\hat{a}$  0  $\hat{b}$  =  $(\hat{a} \oplus \hat{b} \oplus \hat{b} \oplus \hat{b})$  0  $\hat{a}$ 

Cas particulier :  $a = b : \hat{a} \cdot 0 \hat{a} = (\hat{a} \cdot 0 \hat{a})$ 

Exemple 1: Soit a =  $(e_1 \oplus e_2 \oplus e_5 \oplus e_7) \tau$ 

Alors

 $\hat{a} = \tau^0 \oplus (e_1 \oplus e_2 \oplus e_5 \oplus e_7) \tau \oplus (e_6 \oplus e_7) \tau^2$ 

et  $\hat{\mathbf{a}} \circ \hat{\mathbf{a}} = \tau^0 \quad \bullet \quad (\mathbf{e}_6 \quad \bullet \quad \mathbf{e}_7) \quad \tau^2$ 

On a d'autre part :

 $a \circ a = (e_6 \oplus e_7) \tau^2 \Rightarrow a \circ a = \tau^0 \oplus (e_6 \oplus e_7) \tau^2$ 

Propriété 3: Soit 
$$a \in A_{+}$$
  $W(a) > 0$ 

Alors  $(\hat{a})^{k} = (\tau^{0} \dot{\theta} (\tau^{0} \dot{\theta} a)^{k})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ 

DEMONSTRATION : Pour k = 1, c'est vrai

Supposons que pour k = n c'est également vrai :

$$(\hat{\mathbf{a}})^{n} = (\tau^{0} \oplus (\tau^{0} \oplus \mathbf{a})^{n})$$
alors,  $(\hat{\mathbf{a}})^{n+1} = \hat{\mathbf{a}} \circ (\tau^{0} \oplus (\tau^{0} \oplus \mathbf{a})^{n}) =$ 

$$= (\tau^{0} \oplus (\tau^{0} \oplus \mathbf{a})^{n+1}) \text{ par la propriété 20.}$$

Propriété 4: Soit 
$$a = x_1 s_1 \oplus x_2 s_2 \dots \oplus x_n s_n$$
,  $a \in A_+$ ,  $W(a) > 0$ ,  $k > 0$ .

Alors  $\tau^k$   $0 (x_1 s_1 \oplus x_2 s_2 \dots \oplus x_n s_n) = (\tau^k x_1 s_1 \oplus \dots \oplus \tau^k x_n s_n) \circ \tau^k$ 

DEMONSTRATION: Supposons que l'image de x, 
$$x \in V_+$$
, par  $\tau^k$  0  $\hat{a}$  est Z:  $Z = (\tau^k \ 0 \ \hat{a}) \ x$ 

Posons  $\hat{a} \ x = Z_1 \Rightarrow Z_1 = x \oplus (x_1 \ s_1 \oplus \dots \oplus x_n \ s_n) \ Z_1$ 

En multipliant par  $\tau^k$  on obtient:

 $\tau^k \ Z_1 = \tau^k \ x \oplus (\tau^k \ x_1 \ s_1 \oplus \dots \oplus \tau^k \ x_n \ s_n) \ (\tau^k \ Z_1)$ 

ou  $Z = \tau^k \ x \oplus (\tau^k \ x_1 \ s_1 \oplus \dots \oplus \tau^k \ x_n \ s_n) \ Z$ 

D'où  $Z = (\tau^k \ x_1 \ s_1 \oplus \dots \oplus \tau^k \ x_n \ s_n) \ (\tau^k \ x)$ 

Donc  $\tau^k \ 0 \ \hat{a} = (\tau^k \ x_1 \ s_1 \oplus \dots \oplus \tau^k \ x_n \ s_n) \ 0 \ \tau^k$ 

III - 5 -57-

1.2.2. Transformée d'une Q.B.T.

<u>Définition 4</u>: Une Q.B.T. f(t) sera appelée périodique s'il existe ket r,  $k \in R^+$  U  $\{0\}$ ,  $r \in R^+$  tels que  $e_k$   $f(t) = e_k$  f(t+r). Les plus petits k et r seront appelés respectivement <u>indice</u> et <u>période</u> de f(t).

Soit S un sous ensemble dénombrable de R<sup>†</sup>U {0}

On définit alors l'anneau commutatif  $A_{c}$  opérant dans  $V_{+}$ 

$$A_{c} = \{\tau^{k_{1}} \quad \theta \quad \tau^{k_{2}} \quad \theta \dots \quad \theta \quad \tau^{k_{n}} \quad \theta \dots; k, \epsilon \}$$

Cet anneau peut être considéré comme l'anneau des applications des sous ensembles démontrables de  $R^{\dagger}U$  {0} dans  $Z_2$ . L'anneau des séries formelles à retards défini pour le cas de l'algèbre synchrone, (voir par exemple (28), (29)), en est un cas particulier.

Il nous paraît intéressant de définir une <u>Transformée discrète</u> pour le cas asynchrone dans le sens (4) (5).

Dans ce qui suit on supposera connus les résultats de (4) (5). L'analogie entre la transformée définie et celle des références cidessous étant évidente, on se limitera à montrer comment certains résultats s'adaptent au cas de l'algèbre asynchrone.

REMARQUE 1 : Le sous anneau  $A_{C}^{\bigstar}$  des expressions de  $A_{C}$ , comportant un nombre fini de termes a des propriétés analogues à celles de l'anneau des polynômes  $E_{2}$  ( $\tau$ ) en ce qui concerne la divisibilité de deux expressions :

Si p, q  $\in A_c^{\bigstar}$ , on peut trouver r, s,  $\in A_c^{\bigstar}$ , uniques tels que p = q 0 s  $\bullet$  r avec max {exposants de r} < max {exp. de q}

On dira alors que p  $\equiv$  r (mod q)

Par exemple pour p =  $\tau^{5,3} \oplus \tau^{4,2} \oplus \tau^{3,1} \oplus \tau^{2,3} \oplus \tau^{0}$ q =  $\tau^{3} \oplus \tau^{0}$  on trouve

 $s = \tau^{2,3} \oplus \tau^{1,2} \oplus \tau^{0,1}$  et  $r = \tau^{1,2} \oplus \tau^{0,1} \oplus \tau^{0}$ 

De même on peut vérifier que  $\tau^{1,5}$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $\tau^{0,3}$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $\tau^{0}$  divise  $\tau^{6,3}$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $\tau^{0}$  puisque  $\tau^{6,3}$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $\tau^{0}$  = B $\tau^{0}$ (mod  $\tau^{1,5}$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $\tau^{0,3}$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $\tau^{0}$ )

En effet  $\tau^{6,3}$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $\tau^{0}$  (mod  $\tau^{1,5}$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $\tau^{0,3}$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $\tau^{0}$ ) =  $= (\tau^{0,3} \overset{\cdot}{\oplus} \tau^{0}) \circ (\tau^{0,3} \overset{\cdot}{\oplus} \tau^{0}) \circ (\tau^{0,3} \overset{\cdot}{\oplus} \tau^{0})$ 

 $0(\tau^{0,3} \oplus \tau^{0}) \circ \tau^{0,3} \oplus \tau^{0} \pmod{\tau^{1,5}} \oplus \tau^{0,3} \oplus \tau^{0}) =$ 

 $= (\tau^{1,2} \overset{\cdot}{\oplus} \tau^{0}) \mathbf{0} \tau^{0,3} \overset{\cdot}{\oplus} \tau^{0} \pmod{\tau^{1,5}} \overset{\cdot}{\oplus} \tau^{0,3} \overset{\cdot}{\oplus} \tau^{0}) =$ 

= B $\tau^0$  (mod  $\tau^{1,5}$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $\tau^{0,3}$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $\tau^0$ )

<u>Proposition 1</u>: Soit  $b \in A_c^{\bigstar}$ ,  $b = \tau^{\lambda 1} \stackrel{\cdot}{\bullet} \tau^{\lambda 2} \stackrel{\cdot}{\bullet} \dots \stackrel{\cdot}{\bullet} \tau^{\lambda n}$  W(b) > 0, où les  $\lambda_i$  sont des rationnels. Alors il existe p, rationnel positif tel que b divise  $\tau^p \stackrel{\cdot}{\bullet} \tau^0$ .

DEMONSTRATION: Supposons que  $\lambda_i = \frac{p_i}{q_i}$  ( $p_i \in N$ ,  $q_i \in N^+$ )

Soit M = PPCM ( $q_1, q_2, \dots q_n$ ) et  $L_i = M \lambda_i$  Alors pour le polynôme  $b_1 = \tau^{L_1} \stackrel{L}{\leftrightarrow} \tau^2 \stackrel{L}{\leftrightarrow} \dots \stackrel{L}{\Leftrightarrow} \tau^n$  il existe P tel que

 $\mathbf{b}_{1}$  /  $\boldsymbol{\tau}^{P}$  .  $\boldsymbol{\dot{e}}$   $\boldsymbol{\tau}^{0}$  et il est facile de voir que si

$$b_1 / \tau^P \stackrel{\bullet}{\oplus} \tau^0$$
 alors  $b / \tau^{P/M} \stackrel{\bullet}{\oplus} \tau^0$ 

Soit Z(t) un élément de  $V_+$  périodique de période r et d'indice k = 0 . Alors elle est la solution de l'équation

 $Z(t) = C(t) \oplus \tau^r Z(t)$  où C(t) est la description de la solution dans l'intervalle [0,r]

On peut écrire:

$$Z(\tau) = \frac{C(\tau)}{\tau^0 \ \dot{\oplus} \ \tau^r}$$
 ou bien  $Z(\tau) = \frac{C(\tau)}{\tau^0 \ \dot{\oplus} \ \tau^r}$ 

(les deux écritures étant équivalentes)

Nous donnons, sans démonstration, deux propositions précisant la nature des Q.B.T. à partir de leurs transformées.

# Proposition 2: Soit $s(t) \in V_+$ $Si \ s(\tau) \neq \operatorname{Bt}^0(\operatorname{mod} \tau^0 \ \ \boldsymbol{\oplus} \ \tau^r), \quad \max\{\exp \operatorname{sants} \ \operatorname{de} \ s(\tau)\} < r, \ s(t) \ \operatorname{se}$ $\operatorname{termine} \ \operatorname{par} \ \operatorname{un} \ \operatorname{\acute{e}chelon}, \ \operatorname{alors}, \ \underline{s(\tau)} \quad \operatorname{est} \ \operatorname{la} \ \operatorname{transform\acute{e}e}$ $\tau^0 \ \ \boldsymbol{\oplus} \ \tau^r$ $\operatorname{d'une} \ \operatorname{Q.B.T.} \ \operatorname{p\'eriodique} \ \operatorname{de} \ \operatorname{p\'eriode} \ \operatorname{2r} \ \operatorname{et} \ \operatorname{d'indice} \ 0.$

## Proposition 3: Soit $s(t) \in V_+$ $Si \ s(t) \not\equiv \operatorname{Bt}^0(\operatorname{mod} \ \tau^0 + \tau^r) \ et \ \operatorname{max} \{\operatorname{exposants} \ de \ s(\tau)\} > r,$ $alors, \quad \underline{s(\tau)} \quad \text{représente la transformée d'une Q.B.T.}$ $\tau^0 \not \in \tau^r$ $périodique \ de \ période \ r \ ou \ 2r \ et \ d'indice \ supérieure \ à 0.$

Exemple 1 : Effectuer la disjonction des Q.B.T. périodiques dont les transformées

sont 
$$s_1(\tau) = \frac{\tau^0}{\tau^0 \oplus \tau}$$
  $s_2(\tau) = \frac{\tau^0 \oplus \tau \oplus \tau^2}{\tau^0 \oplus \tau^4}$ 

On a : 
$$s_1(\tau)$$
  $\Leftrightarrow$   $s_2(\tau) = \frac{\tau^3}{\tau^0 \Leftrightarrow \tau^4} = \frac{\tau^3 \Leftrightarrow \tau^7}{\tau^0 \Leftrightarrow \tau^8}$ 

Exemple 2 : On cherche la Q.B.T. Z(t) qui a comme transformée

$$\Xi(\tau) = \frac{\tau \oplus \tau^3 \oplus \tau^{5,5} \oplus \tau^{7,3}}{\tau^0 \oplus \tau^{2,5}}$$

On a : 
$$\mathbb{Z}(\tau) = \tau^{2,3} \oplus \tau^{3} \oplus \tau^{4,8} \oplus \frac{\tau \oplus \tau^{2,3}}{\tau^{0} \oplus \tau^{2,5}}$$

D'où : 
$$Z(t) = e_{2,3} \oplus e_3 \oplus e_{4,8} \oplus \frac{e_1 \oplus e_{2,3}}{\tau^0 \oplus \tau^{2,5}} =$$

$$= e_1 \oplus e_3 \oplus e_{3,5} \oplus \frac{e_6 \oplus e_{7,3}}{\tau^0 \oplus \tau^{2,5}}$$

1.2.3. Calcul de la pseudo-fermeture d'un opérateur

<u>Proposition 4</u>: Soit  $a \in A_+$ , W(a) > 0,  $a = x_1 s_1 \in x_2 s_2 \in ... \in x_n s_n$  dont les coefficients sont des Q.B.T. d'étendue finie. Alors  $\hat{a}$  se stabilise.

DEMONSTRATION: Soit 
$$i = min \{ss^-(x)\}\ et j = max \{ss^+(x)\}\ p=1$$

Remarquons que si  $a^2 = y_1 s_1 \oplus y_2 s_2 \oplus \dots \oplus y_k s_k$ 

Alors min 
$$\{ss^{-}(y_{p})\} \ge i+W(a)$$
  
p=1

A partir de cette remarque on déduit qu'il existe q tel que :

$$a^q = Bt^0$$
 et  $q < \frac{i-j}{w(a)} + 1$ 

Calcul de la pseudo-fermeture de a dans le cas où ses coefficients se terminent par un échelon.

Soit a  $\varepsilon$  A<sub>+</sub>, W(a) > 0, a = x<sub>1</sub> s<sub>1</sub>  $\overset{\bullet}{\oplus}$  x<sub>2</sub> s<sub>2</sub>  $\overset{\bullet}{\oplus}$  ..  $\overset{\bullet}{\oplus}$  x<sub>n</sub> s<sub>n</sub> tel que les x<sub>1</sub> sont des Q.B.T. stabilisées.

On peut alors écrire :  $x_i = y_i \oplus Z_i$  où  $y_i$  est une Q.B.T. d'étendue finie et  $Z_i$  est (éventuellement) l'échelon  $e_k$  ( $k = \max_i \{ss^+(x_i)\}$ ).

Donc on peut décomposer :  $a = a_1 \oplus e_k a_2$  (Cf. Page 48) Etant donné que  $a_1$  a tous ses coefficients d'étendue finie, il existe

 $q : a_1^q = B\tau^0.$ 

Si on calcule les puissance successives de a on trouve

$$a^{i} = (e_{k} a_{2})^{i-q+1} 0 a^{q-1} pour i > q$$

Donc:  $\hat{\mathbf{a}} = \tau^0 \quad \hat{\boldsymbol{\Phi}} \quad \mathbf{a} \quad \hat{\boldsymbol{\Phi}} \quad \dots \quad \hat{\boldsymbol{\Phi}} \quad \mathbf{a}^{q-2} \quad \hat{\boldsymbol{\Phi}} \quad (\mathbf{e}_k \quad \mathbf{a}_2) \quad 0 \quad \mathbf{a}^{q-1}$ 

Remarquons que :  $(e_k a_2)^n = (a_2)^{n-1} (e_k a_2)$  pour n > 1

 $\texttt{D'où}: \hat{\bar{\mathbf{a}}} = \tau^0 \quad \stackrel{\bullet}{\oplus} \quad \text{a} \quad \stackrel{\bullet}{\oplus} \quad \dots \quad \stackrel{\bullet}{\oplus} \quad \text{a}^{q-2} \quad \stackrel{\bullet}{\oplus} \quad \text{a}^{q-1} \quad \stackrel{\bullet}{\oplus} \quad (\hat{\bar{\mathbf{a}}}_2) \circ (e_k \quad a_2) \circ a^{q-1}$ 

Etant donné que  $\mathbf{a}_2 \in \mathbf{A}_c$ , on sait calculer  $\mathbf{\hat{a}}_2 = \underbrace{\tau^0}_{\mathbf{\tau}^0 \oplus \mathbf{a}_2}$  et par conséquent on peut calculer  $\mathbf{\hat{a}}$  en effectuant un nombre fini d'itérations, d'où la proposition :

Proposition 5: Soit a  $\in A_+$ , W(a) > 0. Alors on peut calculer la pseudofermeture  $\hat{a}$  en effectuant un nombre fini d'itération si les coefficients de a sont des Q.B.T. stabilisées.

Exemple 3: Soit  $a = (e_0 \oplus e_3 \oplus e_{5,5})\tau^{1,75} \oplus e_5 \tau^2$   $a_1 = (e_0 \oplus e_3)\tau^{1,75} \oplus (e_5 \oplus e_{5,5})\tau^2$   $a_2 = \tau^{1,5} \oplus \tau^2 \qquad k = 5,5$   $a_1^2 = B\tau^0 \Rightarrow q = 2$ Donc  $\hat{a} = \tau^0 \oplus a \oplus (\hat{a}_2) \circ (e_k a_2) \circ a$ 

Pour calculer  $\hat{a}_2$ :

$$\hat{\mathbf{a}}_{2} = \frac{\tau^{0}}{\tau^{0} \div \tau^{1,75} \div \tau^{2}} = \frac{\mathbf{a}_{3}}{\tau^{0} \div \tau^{15,75}} = \overset{\circ}{\oplus} \tau^{15,75\lambda_{0}} \circ \mathbf{a}_{3}$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{2} = \tau^{0} \div \tau^{1,75} \div \tau^{2} \div \tau^{3,5} \div \tau^{4} \div \tau^{5,25} \div \tau^{5,50} \div \tau^{5,50} \div \tau^{5,50} \div \tau^{5,50} \div \tau^{5,50} \div \tau^{5,75} \div \tau^{6} \div \tau^{6} \div \tau^{7} \div \tau^{8} \div \tau^{8,75} \div \tau^{9} \div \tau^{9,75} \div \tau^{10} \div \tau^{10} \div \tau^{10,5} \div \tau^{11} \div \tau^{11,5} \div \tau^{12,25} \div \tau^{12,5} \div \tau^{12,75} \div \tau^{13,75}$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{2} = \frac{\tau^{0}}{\tau^{0} \div \tau^{1,75} \div \tau^{13,75}} \div \tau^{13,75} \div \tau^{$$

III - 11

-63-

D'où 
$$\hat{\mathbf{a}} = \tau^0 \oplus \mathbf{a} \oplus (\hat{\mathbf{b}} \quad \tau^{15,75\lambda} \mathbf{a}_3 \quad 0 \quad (\mathbf{e}_k \mathbf{a}_2) \quad 0 \quad \mathbf{a})$$

## 2) LES MATRICES DEFINIES SUR A

Soit A l'ensemble des matrices carées de même ordre n définies sur A\_+. Alors A\_M forme un anneau avec les opérations :

multiplication matricielle

Une matrice A élément de  $A_{\underline{M}}$  peut être considérée comme une application interne de l'ensemble de matrices carées de même ordre définies dans  $V_+$ , si on définit le produit:

A W = Z

où W = 
$$\|w_{ij}\|$$
,  $w_{ij} \in V_{+}$ , A  $\in A_{M}$ 

$$Z = \|z_{ij}\|$$
,  $z_{ij} = \sum_{k} a_{ik} w_{kj}$ 

<u>Propriété 5</u>: A, B  $\in$  A<sub>M</sub> , W une matrice de même ordre définie dans V<sub>+</sub>, alors  $(A \ \ \theta \ \ B) \ W = AW \ \ \theta \ \ BW$ 

<u>Propriété 6</u> :  ${\rm A_M}$  opère dans l'ensemble des matrices carées de même ordre définies dans  ${\rm V_+}.$ 

<u>Définition 6</u>: Soit  $A \in A_M$ ,  $A = \|a_{ij}\|$  une matrice d'opérateurs telle que  $W(a_{ij}) > 0$ On définit la <u>pseudofermeture</u> de A comme la somme :  $\widehat{A} = I_n \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^p \oplus \ldots$ 

où 
$$A^p = A^{p-1} \oplus A$$

<u>Proposition 6</u>: Soit  $A = ||a_{pq}||$  une matrice  $A \in A_M$  telle que  $W(a_{pq}) > 0$  et dont les coefficients des éléments  $a_{pq}$  sont des Q.B.T. d'étendue finie. Alors  $\hat{A}$  se stabilise.

<u>DEMONSTRATION</u>: Soit  $a_{pq} = x_{pq}^1 s_1 \oplus x_{pq}^2 s_2 \oplus \dots \oplus x_{pq}^n s_n$ 

et posons  $i = min \{ss^{-}(x_{pq}^{r})\}$   $j = max \{ss^{+}(x_{pq}^{r})\}$ 

Démonstration analogue à celle de la proposition 4.

Calcul de A dans le cas où les éléments de A ont comme coefficients des Q.B.T. stabilisées.

Soit A  $\epsilon$  A<sub>M</sub>, A =  $\|a_{ij}\|$  avec  $w(a_{ij}) > 0$  et telle que les coefficients de ses éléments sont des Q.B.T. stabilisées.

On peut alors écrire comme précédemment :  $A = A_1$   $\overset{\bullet}{\oplus}$   $e_k$   $A_2$  où

- A<sub>1</sub> est tel que les coefficients de ses éléments sont d'étendue finie.
- ${\rm A}_2$  est tel que ses éléments appartiennent à  ${\rm A}_{\rm c}.$
- k = max { ss<sup>+</sup> (a<sub>ij</sub> )} ij

Il existe alors q tel que  $A_1^q = ||B\tau^0||$  et on peut facilement déduire que

$$\hat{A} = I \oplus A \oplus \dots \bigoplus A^{q-1} \oplus (\hat{A}_2) \oplus (e_k A_2) \oplus A^{q-1}$$

Calcul de  $\hat{A}_2$ : Le déterminant de la matrice  $[\tau^0 \ I \ + \ A_2]$  est une somme finie :

 $\det \ (\boldsymbol{\tau}^0 \mathbf{I} + \mathbf{A}) = \boldsymbol{\alpha}_0 \ \boldsymbol{\tau}^0 \ \boldsymbol{\oplus} \ \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\tau}^{k_1} \ \boldsymbol{\oplus} \dots \boldsymbol{\oplus} \ \boldsymbol{\alpha}_m \ \boldsymbol{\tau}^m; \text{où les } \boldsymbol{\alpha}_i \in \{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{B}\}$ 

Pour  $\tau = B$  l'équation précédente donne :

de t (
$$\tau^0$$
I) =  $\tau^0$  Par conséquent de t ( $\tau^0$ I +  $A_2$ )  $\neq$  B $\tau^0$  et  $A_2$  = (I $\tau^0$  +  $A_2$ )<sup>-1</sup>

Donc

$$\widehat{A} = \tau^{0} I \quad \stackrel{\bullet}{\oplus} \quad A \quad \stackrel{\bullet}{\oplus} \quad \dots \quad \stackrel{\bullet}{\oplus} \quad A^{q-1} \quad \stackrel{\bullet}{\oplus} \quad (I \quad \stackrel{\bullet}{\oplus} \quad A_{2})^{-1} \quad \stackrel{\bullet}{\oplus} \quad (e_{k} \quad A_{2}) \quad \stackrel{\bullet}{\oplus} \quad A^{q-1}$$

D'où la proposition:

Proposition 7: Soit  $A \in A_M$ ,  $A = \|a_{ij}\|$ ,  $W(a_{ij}) > 0$ . Alors on peut calculer  $\widehat{A}$  en effectuant un nombre fini d'itérations si les coefficients des  $a_{ij}$  sont des Q.B.T. quasi constantes.

Exemple 4 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} (e_1 & \oplus & e_5 & \oplus & e_7) & \tau^{1,5} & (e_3 & \oplus & e_5 & \oplus & e_6) & \tau^{2,5} \\ (e_3 & \oplus & e_8) & \tau & e_2 & \tau^{3,5} \end{bmatrix}$$

$$A_{1} = \begin{bmatrix} (e_{1} & \bullet & e_{5} & \bullet & e_{7} & \bullet & e_{8}) & \tau^{1,5} & (e_{3} & \bullet & e_{5} & \bullet & e_{6} & \bullet & e_{8}) & \tau^{2,5} \\ (e_{3} & \bullet & e_{8}) & \tau & (e_{2} & \bullet & e_{8}) & \tau^{3,5} \end{bmatrix}$$

$$A_{2^{-}} = \begin{bmatrix} \tau^{1,5} & \tau^{2,5} \\ B\tau^{0} & \tau^{3,5} \end{bmatrix}$$
;  $k = 8$ 

$$I \overset{\bullet}{\bigoplus} A_{2} = \begin{bmatrix} \tau^{0} & \overset{\bullet}{\bigoplus} & \tau^{1,5} & \tau^{2,5} \\ B\tau^{0} & \tau^{0} & \overset{\bullet}{\bigoplus} & \tau^{3,5} \end{bmatrix}$$

$$(\det (I \overset{\bullet}{\bigoplus} A_{2}))^{-1} (\tau^{0} \overset{\bullet}{\bigoplus} \tau^{1,5} \overset{\bullet}{\bigoplus} \tau^{3,5} \overset{\bullet}{\bigoplus} \tau^{5})^{-1} \xrightarrow{a_{3}} \frac{a_{3}}{\tau^{0} \overset{\bullet}{\bigoplus} \tau^{21}}$$

$$= \overset{\overset{\circ}{\bigoplus}}{\bigoplus} \tau^{21} \overset{\lambda}{\longrightarrow} a_{3}$$

où 
$$a_3 = \tau^0$$
  $\div au^{1,5}$   $\div au^3$   $\div au^{3,5}$   $\div au^{4,5}$   $\div au^5$   $\div au^6$   $\div au^{6,5}$   $\div au^6$ 

$$\div au^7 \div au^{7,5} \div au^8 \div au^{8,5} \div au^9 \div au^{9,5} \div au^{10} \div au^{11} \div au^{11}$$

$$\div au^{11,5} \div au^{12,5} \div au^{13} \div au^{14,5} \div au^{16}$$

$$(I \div au_2)^{-1} = \hat{A}_2 = (\div au^{21\lambda}_{\lambda=0} \ a_3) \ 0 \left( \div au^{3,5} \div au^{3,5} \div au^{3,5} \div au^{1,5} \right)$$

#### 3) EQUATIONS BOOLEENNES A RETARDS

## Définition 7 : Une équation booléenne à retards sera toute équation de la forme

$$f(y(t+k_0), y(t+k_1), \dots y(t+k_n)) = e_0$$
 où : f est un P.B.T.,

 $k, \in R^+ \cup \{0\}$ , y(t) est une V.B.T.

Une équation booléenne à retards  $\underline{\text{mise sous forme résolue}}$  sera toute équation de la forme :

$$y(t+k_0) = f(y(t+k_1), ..., y(t+k_n)) où$$

f est un P.B.T., 
$$k_i \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
,  $k_0 > k_i$  pour  $1 \le i \le n$ 

Dans ce qui suit, on montre comment on peut résoudre certains types d'équations booléennes à retards par passage à la forme galoisienne et en utilisant l'anneau d'opérateurs A.

#### 3.1. Cas général

Soit une équation à retards mise sous forme résolue  $y(t+k_0) = f(y(t+k_1), ..., y(t+k_n))$  où :

f est un P.B.T.; y(t) est une V.B.T.;  $k_i \in R^+ \cup \{0\}$  et  $k_0 > k_i$ ,  $i \neq 0$ 

Nous proposons une méthode itérative de résolution d'une équation de ce type pour des conditions initiales  $y_{k_0}$ , données.  $(y_{k_0} \text{ est la description de y(t) à l'intervalle [0, <math>k_0$ ];  $y_{k_0} = (e_0 \oplus e_{k_0}) \text{ y(t)}$ . Il nous a été impossible de trouver des critères garantissant la

Il nous a été impossible de trouver des critères garantissant l convergence de la méthode, qui se résume ainsi :

- Exprimer: 
$$y(t+k_i) = \tau^{k_0-k_i} y(t+k_0) \oplus (e_{k_i} \oplus e_{k_0}) y_{k_0} (t)$$

- Mettre  $f(y(t+k_1)...y(t+k_n))$  sous forme galoisienne.

Alors l'équation donnée se met sous la forme

$$W = C \oplus g(W) \circ \hat{u}$$
:

$$W = y(t+k_0)$$

g : est une expression booléenne comportant des retards

C : est le terme constant, Q.B.T. simple.

- Calculer itérativement

$$W_0 = C$$

$$W_{i+1} = C \oplus g(W_i)$$
 pour  $i = 0,1,2,3,...$ 

Exemple 5: Considérons le registre à décalage nonlinéaire de la Fig. 1. On veut calculer y(t) pour  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}_0 \oplus \mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{e}_{2,25} \oplus \mathbf{e}_{2,7} \oplus \mathbf{e}_{3,75} \oplus \mathbf{e}_4 \oplus \mathbf{e}_6 \oplus \mathbf{e}_{7,25}$  et conditions initiales zéro

 $(y(t) = 0 \text{ pour } 0 \le t < 3,25)$ . On supposera que le retard de propagation à travers les portes et les fils est négligeable.

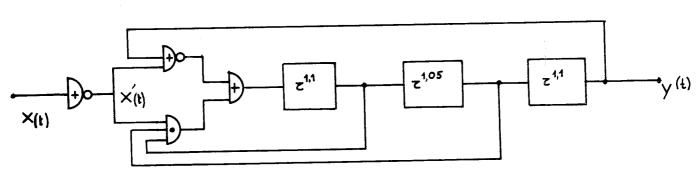


Fig.1

On a :

$$y(t+3,25) = y(t+2,15) y(t+1,1) x' \oplus y'(t) x$$

III - 17 -- 69-

Pour conditions initiales 0 :

$$Y = x \oplus x' \tau^{1,1} Y \tau^{2,15} Y \oplus x \tau^{3,25} Y (où Y = y(t+3,25))$$

$$Y_0 = x(t)$$

$$Y_1 = e_0 \oplus e_1 \oplus e_{2,25} \oplus e_{2,7} \oplus e_6 \oplus e_7 \oplus e_{8,15} \oplus e_{8,35}$$

$$Y_2 = Y_3 = e_0 \oplus e_1 \oplus e_{2,25} \oplus e_{2,7} \oplus e_6 \oplus e_{7,25}$$

Donc: 
$$y(t) = e_{3,25} \oplus e_{4,25} \oplus e_{5,5} \oplus e_{5,95} \oplus e_{9,25} \oplus e_{10,5}$$

#### 3.2. Equations à retards linéaires

Une équation à retards linéaires sera toute équation qui peut être mise sous la forme :

$$y(t) = C \oplus ay(t)$$

où a = 
$$f_1$$
  $\tau^{k_1}$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $f_2$   $\overset{k_2}{\tau}$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $\ldots$   $\overset{\cdot}{\oplus}$   $f_n$   $\overset{k_n}{\tau}$ 

avec f, des coefficients variables en général et  $k_i$   $\epsilon$   $R^+$ .

La solution unique est donnée par l'expression :

$$y(t) = \hat{a}C$$

Dans ce paragraphe nous montrons, comment en certains cas on peut calculer la solution quand les coefficients f<sub>i</sub> sont des Q.E.T. stabilisées données :

<u>ler cas</u>: Les  $f_i$  sont des Q.B.T. d'étendue finie. Alors il existe q fini tel que (a)  $f_i$  et on peut calculer la solution itérativement (proposition 4).

Soit à résoudre l'équation : Exemple 6:

$$Y = e_1 \oplus ((e_0 \oplus e_1 \oplus e_2 \oplus e_5)\tau^2 \oplus (e_2 + e_3 + e_6 + e_9)\tau^{3,5})Y$$

On calcule itérativement

$$Y_0 = e_1$$

$$Y_1 = e_1 \oplus e_3 \oplus e_5 \oplus e_6 \oplus e_9$$

$$Y_2 = Y_3 = Y = e_1 \oplus e_3 \oplus e_5 \oplus e_6 \oplus e_{6,5} \oplus e_{8,5} \oplus e_9$$

2e cas : Au moins , un des f se termine par un échelon et les exposants k, sont des rationnels. Dans ce cas le calcul de â C est possible par la proposition 5.

On peut en effet écrire  $a = a_1$   $\bigoplus$   $e_k$   $a_2$  où k est le front montant le plus grand des  $f_i$  et  $a_1$  a tous ses coefficients d'étendue finie. Par conséquent, il existe q fini tel que  $a_1^q = B\tau^0$  et  $(a)^{i} = (e_{k} a_{2})^{i} \bar{0}^{q+1} (a)^{q-1}$  pour i > q

On a donc :

$$\hat{\mathbf{a}} = \tau^0 \oplus \mathbf{a} \oplus \cdots \oplus \mathbf{a}^{q-2} \oplus (\mathbf{e}_k \mathbf{a}_2) \circ \mathbf{a}^{q-1}$$

Mais comme  $(e_k \ a_2)^n = (a_2)^{n-1} 0 \ (e_k \ a_2)$  pour n > 1

On obtient :

$$\hat{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\tau}^0 \quad \hat{\boldsymbol{\Theta}} \quad \mathbf{a} \quad \hat{\boldsymbol{\Theta}} \quad \dots \quad \hat{\boldsymbol{\Phi}} \quad \dots \quad \mathbf{a}^{q-2} \quad \hat{\boldsymbol{\Phi}} \quad \mathbf{a}^{q-1} \quad \hat{\boldsymbol{\Phi}} \quad (\hat{\mathbf{a}}_2) \quad 0 \quad (\mathbf{e}_k \quad \mathbf{a}_2) \quad 0 \quad \mathbf{a}^{q-1}$$

$$\mathbf{et} \quad \hat{\mathbf{a}} \quad \mathbf{C} = (\boldsymbol{\tau}^0 \quad \hat{\boldsymbol{\Phi}} \quad \mathbf{a} \quad \dots \quad \hat{\boldsymbol{\Phi}} \quad \mathbf{a}^{q-1}) \quad \mathbf{C} \quad + \quad (\hat{\mathbf{a}}_2) \quad 0 \quad ((\mathbf{e}_k \quad \mathbf{a}_2) \quad 0 \quad \mathbf{a}^{q-1}) \quad \mathbf{C} \quad (\mathbf{a}\mathbf{I}\mathbf{I}\mathbf{I})$$

Etant donné que  $a_2$  a tous ses coefficients égaux à  $e_0$ , il existe (pour la proposition 1) q, q  $\epsilon$  A tel que

$$(\tau^{0} \overset{\bullet}{\oplus} a_{2}) \circ q = \tau^{0} \overset{\bullet}{\oplus} \tau^{r} \quad Donc$$

$$(\hat{a}_{2}) = \frac{q}{\tau^{0} \overset{\bullet}{\oplus} \tau^{r}} = \overset{\bullet}{\bigoplus} \tau^{\lambda r} \circ q$$

Par conséquent, la solution sera périodique si 
$$((e_k \ a_2) \ 0 \ a^{q-1}) \ C \neq B\tau^0 \ (mod \ \tau^0 \ \ \ \ \tau^r)$$

## Exemple 7 : Soit à résoudre l'équation

$$y = e_1 \oplus ((e_0 \oplus e_1 \oplus e_2 \oplus e_5)\tau^2 \oplus (e_2 \oplus e_3 \oplus e_6 \oplus e_9 \oplus e_{10,5})\tau^{3,5})y$$

On a :

$$a_1 = (e_0 \oplus e_1 \oplus e_2 \oplus e_5)\tau^2 \oplus (e_2 \oplus e_3 \oplus e_6 \oplus e_9)\tau^3,$$

$$a_2 = \tau^{3,5}$$
  $k = 10,5$ 

Par l'exemple précédent (5) on a : q = 3

Calculons itérativement

$$y_0 = e_1$$

$$y_1 = e_1 \oplus (a_1 \oplus e_{10,5} a_2)e_1 = e_1 \oplus e_3 \oplus e_5 \oplus e_6 \oplus e_9 \oplus e_{10,5}$$

$$y_2 = e_1 \oplus e_3 \oplus e_5 \oplus e_6 \oplus e_{6,5} \oplus e_{8,5} \oplus e_9 \oplus e_{12,5} \oplus e_{14}$$

(remarquons que : 
$$y_2 = (\tau^0 \overset{\bullet}{\oplus} a \overset{\bullet}{\oplus} \dots \overset{\bullet}{\oplus} a^{q-1})$$
 C )

$$a^{q-1} C = y_1 \oplus y_2 = e_{6,5} \oplus e_{8,5} \oplus e_{10,5} \oplus e_{12,5} \oplus e_{14}$$

$$\bar{a}_2 = \frac{\tau^0}{\tau^0 + \tau^{3,5}}$$
;  $e_k a_2 = e_{10,5} \tau^{3,5}$ 

En substituant dans (a III):

$$y = \hat{a} C = e_1 \oplus e_3 \oplus e_5 \oplus e_6 \oplus e_{6,5} \oplus e_{8,5} \oplus e_9 \oplus e_{12,5} \oplus e_{14} \oplus$$

$$\bigoplus \frac{e_{10,5} \oplus e_{12} \oplus e_{14} \oplus e_{16} \oplus e_{17,5}}{\tau^{0} \oplus \tau^{3,5}}$$

ou bien

$$y = e_1 \oplus e_3 \oplus e_5 \oplus e_6 \oplus e_{6,5} \oplus e_{8,5} \oplus e_9 \oplus \underbrace{\begin{array}{c} e_{10,5} \oplus e_{12} \oplus e_{12,5} \\ \hline \tau^0 \oplus \tau^{3,5} \end{array}}$$

(réponse périodique k = 10,5, r = 7)

## Exemple 8 : Soit le registre à décalage linéaire de la Fig. 2

Si x(t) est la V.B.T. d'entrée, y(t) la V.B.T. de sortie et w(t) la V.B.T. associée à l'entrée du retard  $t^{1,1}$  son fonctionnement est décrit par le système : (on suppose le retard de propagation des signaux à travers les fils et les portes est zéro).

$$y(t) = w(t-1,1) \oplus w(t-3,3) \oplus w(t-6,7)$$

$$w(t) = w(t) \oplus w(t-3,3)$$

Si on suppose, zéro conditions initiales (w(t) = 0 pour  $0 \le t \le 6,7$ ) et on désigne par X, Y, W les transformées de x(t), y(t), w(t) on obtient

$$Y = (\tau^{1,1} \oplus \tau^{3,3} \oplus \tau^{6,7}) \circ W$$

$$W = X \oplus \tau^3$$
, 0 W

D'où Y = 
$$\frac{\tau^{1,1} + \tau^{3,3} + \tau^{6,7}}{\tau^{0} + \tau^{3,3}}$$
 0 X

Si on veut calculer la réponse du circuit pour

$$x(t) = e_0 \oplus e_{3,2} \oplus e_5 \oplus e_{7,1} \oplus e_{8,5} =>$$

$$=> x = \tau^0 \div \tau^{3,2} \div \tau^5 \div \tau^{7,1} \div \tau^{8,5}$$

On obtient

$$Y = (\tau^{15}, \overset{2}{\bullet} \tau^{13}, \overset{8}{\bullet} \tau^{11}, \overset{8}{\bullet} \tau^{11}, \overset{7}{\bullet} \tau^{10}, \overset{4}{\bullet} \tau^{9}, \overset{9}{\bullet} \tau^{9}, \overset{6}{\bullet} \tau^{9}, \overset{6}{\bullet} \tau^{8}, \overset{3}{\bullet} \overset{\bullet}{\bullet}$$

$$\mathring{\Phi}_{\tau^{8}}, \overset{7}{\bullet} \tau^{6}, \overset{7}{\bullet} \tau^{6}, \overset{7}{\bullet} \tau^{6}, \overset{1}{\bullet} \tau^{6}, \overset{1}{\bullet} \tau^{4}, \overset{3}{\bullet} \tau^{3}, \overset{4}{\bullet} \tau^{1}, \overset{1}{\bullet})/(\tau^{3}, \overset{3}{\bullet} \tau^{0})$$

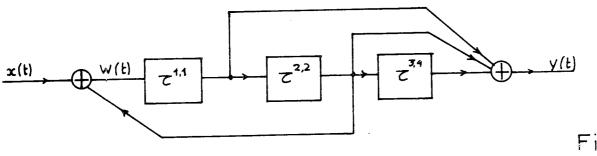


Fig. 2

III - 21 -73-

D'où

$$y(t) = e_{1,1} \oplus e_{3,3} \oplus e_{4,3} \oplus e_{4,4} \oplus e_{6,1} \oplus e_{6,5} \oplus e_{6,6} \oplus e_{6,7} \oplus e_{7,6} \oplus e_{7,7} \oplus e_{8,2} \oplus e_{8,3} \oplus e_{9,4} \oplus e_{9,6} \oplus e_{9,8} \oplus e_{10} \oplus e_{10,4} \oplus e_{10,9} \oplus e_{11} \oplus e_{11,5} \oplus e_{11,6} \oplus e_{11,7} \oplus e_{11,8} \oplus e_{12,7} \oplus e_{12,9} \oplus e_{13,1} \oplus e_{13,1} \oplus e_{16,4} \oplus e_{16,2} \oplus e_{15,2} \oplus e_{15,1} \oplus e_{15,4} \oplus e_{14,9} \oplus e_{14,8} \oplus e_{14,3} \oplus e_{14,2} \oplus e_{13,8} \oplus e_{13,7} \oplus e_{13,3} \oplus e_{14,2} \oplus e_{13,8} \oplus e_{13,7} \oplus e_{13,3} \oplus e_{14,2} \oplus e_{14,3} \oplus e_{14,2} \oplus e_{13,8} \oplus e_{13,7} \oplus e_{13,3} \oplus e_{14,2} \oplus e_{14,3} \oplus$$

(y(t) est périodique, de période 6,6 à partir de 13,3).

#### 3.3. Cas particuliers

3.3.1. Système décrivant les transitions d'un automate linéaire

Un système d'équations décrivant les transitions d'un automate linéaire est de la forme :

 $Y(t+1) = A \oplus D Y(t)$ 

où : A est une V.B.T. générale dépendant des entrées

Y(t) est une V.B.T. générale à déterminer

D est une matrice carée définie dans  $\{e_0, B\}$ .

On en déduit :

 $Y(t+1) = C \oplus D\tau Y(t+1) \circ \hat{u}$ 

 $C = A \oplus D^{-}Y_{01}(t); Y_{01}(t) = (e_{0} \oplus e_{1})^{-}Y(t)$ 

Posons Y(t+1) = Z; il nous reste à résoudre :

 $Z = C \oplus DT Z \Rightarrow Z = (E \oplus DT)^{-1} C$ où E est la matrice unitaire de A<sub>+</sub> (Cf. (5)). Exemple 9 : Soit à résoudre le système :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 & \mathbf{\Phi} & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{\Phi} & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Phi} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_0 & \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad \mathbf{\tau} \mathbf{Z}$$

On a:  $(E \oplus D\tau)^{-1} = (\tau^0 \oplus \tau \oplus \tau^2)^{-1} \circ \begin{bmatrix} \tau^0 & \tau & 1 \\ \tau & \tau^0 \oplus \tau \end{bmatrix}$ 

Ce qui donne :

$$\mathbf{z} = \begin{vmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{e}_0 & \mathbf{\Phi} & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_2 & \mathbf{\Phi} & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix}}{\tau^0 & \mathbf{\Phi} & \tau^3}$$

$$z_1 = e_1 \oplus \frac{e_0 \oplus e_1}{\tau^0 \oplus \tau^3}$$
,  $z_2 = e_1 \oplus \frac{e_1 \oplus e_2}{\tau^0 \oplus \tau^3}$ 

3.3.2. Système d'équations séquentielles résolues de ler ordre

Soit le système d'équations séquentielles résolues

$$\{y_{i}(t+1) = f_{i}(y_{1}(t), \dots y_{n}(t))\}\$$
 i=1

Pour des conditions initiales données on peut le mettre sous la forme :

$$\{z_{i} = a_{i,0} \oplus a_{i,1} \quad \tau u_{1} \oplus a_{i,2} \tau u_{2} \oplus \dots \oplus a_{i,2}^{n_{1}} \quad \tau u_{1} \}$$

où :  $Z_i = y_i(t+1)$ ;  $\{u_i\}$  est la base galoisienne pour l'eni=1

semble 
$$\{Z_i\}$$
 ,  $\{a_i,j\}$  est un ensemble de Q.B.T.  $i=1$ 

III - 23 -75-

En multipliant de façon adequate les équations du système précédent, on peut en déduire un système de la forme :

U = C & DT U

où 
$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ \vdots \\ u_{2^{\frac{n}{1}}} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a_{1}, 0 \\ \vdots \\ a_{n,0} \\ \vdots \\ a_{2^{\frac{n}{1}}} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,2^{\frac{n}{1}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2^{\frac{n}{1}},1} & \dots & a_{2^{\frac{n}{1}},2^{\frac{n}{1}}} \end{bmatrix}$$

La solution en est :  $U = (D\tau) C$ 

Si les éléments de D sont d'étendue finie, la solution se stabilise. Sinon, soit p le maximum des fronts montants des éléments de D se terminant par un échelon.

On peut alors écrire D =  $D_1$   $\oplus$   $e_p$   $D_2$  où  $D_1$  ne comporte que des éléments d'étendue finie et  $D_2$  est une matrice définie dans  $\{I,B\}$ 

Il existe alors k tel que  $(D_1\tau)^k = E\tau^0$ , et

$$(D\tau)^n = (e_p D_2 \tau)^{n-k+1} \bigoplus_{0}^{\bullet} (D\tau)^{k-1} \text{ pour } n > k$$

En remarquant que  $(e_pD_2\tau)^w = e_{p+w}D_2^w \tau^w$  la solution s'écrit :

$$(\widehat{D}\tau) C = \underset{i=0}{\overset{k-1}{\Sigma}} (D\tau)^{i} \quad \bigoplus (\underset{i=1}{\overset{\infty}{\Sigma}} \bullet D_{2}^{s} \tau^{s} (e_{p} (D\tau)^{k-1} C))$$

Si  $\mathbb{D}_2$  est périodique de période r et d'indice m la solution s'écrit :

$$Z = \stackrel{k-1}{\underset{i=0}{\longrightarrow}} (D\tau)^{i} C \bigoplus (\stackrel{m}{\underset{s=1}{\longrightarrow}} D_{2}^{s} \tau^{s} (e_{p} (D\tau)^{k-1} C)) \bigoplus$$

$$+ \frac{D_{2}^{m+1} \tau^{m+1} (\stackrel{\Sigma \Theta}{s=1} D_{2}^{s} \tau^{s} (e_{p} (D\tau)^{k-1}) C)}{\tau^{0} (p (D\tau)^{k-1}) C}$$

III - 24 -76-

Il en résulte que :

- 1) La solution du système se stabilise si D a tous ses éléments d'étendue finie ou bien si  $\mathbf{D}_2$  est nilpotente.
- 2) Sinon, la solution est en général périodique de période r ou 2r.

#### CHAPITRE -IV-

#### SIMULATION DU FONCTIONNEMENT TEMPOREL DES SYSTEMES LOGIQUES

Nous nous proposons d'exposer ici des méthodes de simulation temporelle du fonctionnement des circuits logiques en utilisant l'Algèbre B.T. Des modèles dynamiques sont proposés pour la modélisation des éléments des circuits logiques (relais, portes, bascules, compteurs).

Il est clair que la nature de l'outil utilisé ne nous permet pas la simulation exacte du fonctionnement, celui-ci étant une algèbre à 2 niveaux.

Nous croyons cependant, que les méthodes et modèles présentés, donnent une approximation "satisfaisante" du fonctionnement réel, en ce qui concerne la détection des aléas et leur propagation dans le circuit.

N.B. : Au cours de ce chapitre l'algèbre (V, +, ., ') sera utilisée.

## Hypothèses simplificatrices :

- 1) Un signal logique réel sera représenté par une Q.B.T. comme le montre la fig. 1.
- 2) Les retards de propagation à travers les fils étant petits devant les retards à travers les éléments fonctionnels on les supposera soit nuls, soit inclus dans ceux-ci.

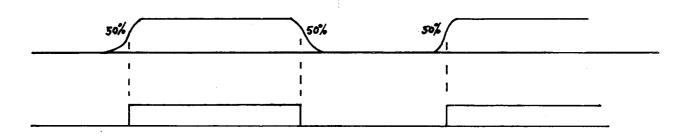


Figure 1

## 1. MODELES DYNAMIQUES

## 1.1. L'opérateur décalage asymétrique

Définition 1 : On définit l'opérateur  $\tau^{m,n}$ , décalage asymétrique où m,neR<sup>†</sup>.  $x \in V$   $\tau^{m,n} x = y$  où  $y \in V$  et est obtenu de la façon suivante :

- 1) On élimine toute variation 010 de x de largeur inférieure ou égale à |m-n| si m > n et toute variation 101 de largeur inférieure ou égale à |m-n| si m < n en obtenant  $x^*$ .
- 2) On décale par  $\,$  m les fronts montants de  $x^{\bigstar}$  et par  $\,$  n ses fronts descendants.

Il est facile de voir que si x ne comporte pas de variation de largeur inférieure ou égale à |m-n| on a:

$$\tau^{m,n}x = \begin{cases} \tau^{m}x & \tau^{n}x & \text{sim} > n \\ \tau^{m,n}x + \tau^{n}x & \text{sinon} \end{cases}$$

## 1.2. Modèles temporels des relais

#### 1.2.1. Relais à contacts ordinaires

Soit X(t) l'excitation d'un relais à contacts ordinaires (24). On désignera par x(t) la fonction caractéristique du contact de travail et par  $\overline{x}(t)$  la fonction caractéristique du contact de repos (Fig.2).

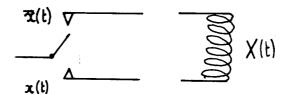


Figure 2

Supposons que le temps de parcours de la palette entre les deux contacts est de p unités de temps et que la palette quitte un contact avec un retard de i unités de temps par rapport aux fronts montants ainsi qu'aux fronts descendants de l'excitation (Fig. 3). Il en résulte que :

$$x(t) = \tau^{i+p,i} X$$

$$\overline{x}(t) = (\tau^{i,i+p}X)^{i}$$

Si on suppose que X ne comporte pas de variations de largeur inférieure ou égale à p alors :

$$x(t) = \tau^{i+p} x \quad \tau^{i} x$$

$$\overline{x}(t) = \tau^{i}X' \quad \tau^{i+p}X' =$$

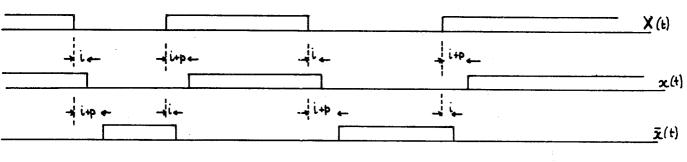


Figure 3

Remarquons que : x(t) = B

$$x(t) + \overline{x}(t) = \tau^{i}X \otimes \tau^{i+p}X$$

Par conséquent, dans les intervalles de temps où  $\tau^i X \oplus \tau^{i+p} X$  vaut 1, on risque d'avoir un mauvais fonctionnement dû aux aléas.

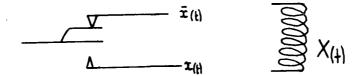
## 1.2.2. Relais à contacts spéciaux

Soit le relais à contacts spéciaux (24) de la Fig. 4. On suppose que si on applique une excitation, la palette libre vient s'appliquer contre le contact de travail avec un retard p et l'autre quitte le contact de repos avec un retard i+p par rapport au front montant de l'excitation.

Si on supprime l'excitation, la palette libre vient s'appliquer contre le contact de repos avec un retard p+i par rapport au front descendant de l'excitation (Fig. 5). Il en résulte que :

$$x(t) = \tau^{p,i+p}X$$

$$\overline{x}(t) = (\tau^{i+p,i}X)'$$



# Figure 4

Si on suppose que les variations de X sont de largeur supérieure à i, on a :

$$x(t) = \tau^{p}X + \tau^{i+p}X$$

$$\overline{\mathbf{x}}(t) = (\tau^{p} \mathbf{X})' + (\tau^{i+p} \mathbf{X})'$$

Remarquons que :

$$x(t) \overline{x}(t) = \tau^p X \oplus \tau^{i+p} X$$

$$x(t) + \overline{x}(t) = I$$

Par conséquent dans les intervalles de temps où  $\tau^p X \oplus \tau^{i+p} X$  vaut 1 on risque d'avoir un maivais fonctionnement dû aux aléas.

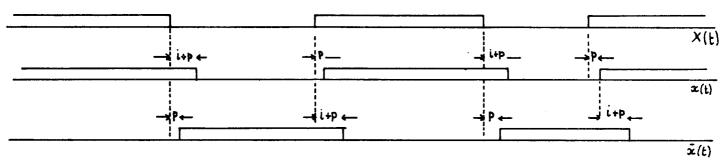


Figure 5

#### 1.3. Modèle dynamique des portes

#### 1.3.1. Caractéristiques dynamiques

Nous proposons 4 paramètres dont la donnée nous paraît suffisante pour pouvoir déterminer le fonctionnement temporel d'une porte.

- <u>Définition 2</u>: On appelle temps de propagation relatif au niveau logique 1, le réel m, désignant l'intervalle de temps séparant le front d'une excitation à l'entrée d'une porte et le front de la réponse due à cette entrée quand la sortie change de 0 à 1 (Fig. 6)
- <u>Définition 3</u>: On appelle temps de propagation relatif au niveau logique 0, le réel n, désignant l'intervalle de temps séparant le front de l'entrée et le front de sa réponse quand la sortie change de 1 à 0. (Fig. 6).

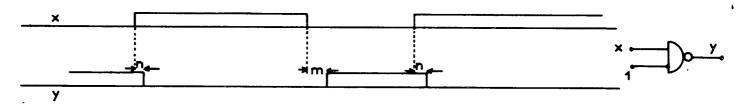


Figure 6

Expérimentalement on trouve que :

1) m  $\neq$  n en général et que la différence absolue |m-n| peut être considérable.

Par exemple: Pour un NAND SN7400 on donne les valeurs typiques(31):m=11ns n = 7ns; pour un NAND SN7412: m = 35ns n = 8ns.

2) Les valeurs m, n dépendent de plusieurs facteurs, les principaux étant la technologie utilisée, la façon dont une porte est interconnectée dans un circuit (fan in, fan out), le temps de montée et le temps de descente des signaux utilisés etc. C'est pourquoi les constructeurs donnent pour ces paramètres une valeur typique, une valeur maximum et une valeur minimum .

IV - 7

Il peut arriver qu'une variation à l'entrée d'une porte n'ait pas la durée suffisante pour l'exciter. Dans ce cas, la sortie varie mais sans atteindre le niveau logique qui correspond à la réponse de la porte idéale. Pour approximer donc, le fonctionnement réel d'une porte, il faut décaler par m les fronts montants de la réponse idéale et par n ses fronts descendants en éliminant les variations de petite durée qui ne se manifestent pas à la sortie de la porte réelle. Cette élimination se modélise bien dans le cas des relais ou en calculant  $\tau^{m,n}$  on "efface" certaines variations de durée inférieure ou égale à /m-n/.

Il s'avère (expérimentalement) que la donnée des paramètres m et n ne suffit pas pour la description du fonctionnement d'une porte en ce qui concerne la propagation des variations de petite durée.

C'est pourquoi on définit les deux paramètres suivants :

- Définition 4 : a) dm : Un réel positif désignant la largeur minimale d'une variation de la sortie de la porte réelle, du type 0 0 qui peut être reconnue comme telle.
  - b)  $\frac{d_n}{d_n}$ : Un réel positif désignant la longueur minimale d'une variation de la sortie de la porte réelle du type  $\frac{1}{n}$  qui peut être reconnue comme telle.

Les paramètres  $d_m$  et  $d_n$  dépendent des caractéristiques technologiques de la porte mais principalement du temps de montée et du temps de descente des signaux utilisés.

<u>Par exemple</u>: Il a été trouvé expérimentalement que pour un NAND SN7400 fonctionnant à vide, pour  $t_m = t_d = 10$ ns on a :  $d_m = 12$ ns

$$t_{m} = t_{d} = 3,5 \text{ ns on a: } d_{m} = 6,5 \text{ ns}$$

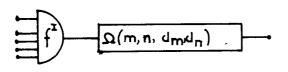
où on désigne par  $t_{\rm m}$  et  $t_{\rm d}$  le temps de montée et le temps de descente des signaux utilisés.

1.3.2. <u>Le  $\Omega$  -opérateur</u> : Nous définissons l'ensemble des applications internes de V :

$$\Omega$$
 (m,n,d<sub>m</sub>,d<sub>n</sub>) (x) = y; x,y $\epsilon$ V

- où y est obtenu à partir de x de la façon suivante :
- a) On calcule  $\tau^{m,n}x$
- b) On élimine toute variation de  $\tau^m$ ,  $^n$ x de type 010 de durée inférieure à  $d_m$  et toute variation du type 101 de largeur inférieure à  $d_n$ .

Le modèle dynamique : Soit  $f^I$  la fonction logique réalisée par une porte idéale, alors le <u>fonctionnement réel</u> de la porte sera décrit par  $\Omega(m,n,d_m,d_n)$  of I (Fig. 7)





Porte réelle

Porte idéale

Fig. 7

Exemple 1 : Soit une porte NAND à 2 entrées  $x_1$ ,  $x_2$  dont les paramètres dynamiques sont :

$$m = 11 \text{ns}, n = 7 \text{ns}, d_m = 5 \text{ns}, d_n = 7 \text{ns}, pour$$

$$x_1 = 10.40' + 60.80' + 90$$

$$x_2 = 12' + 30.50' + 70.95'$$

(Pour alléger l'écriture des Q.B.T. on représentera parfois e, par i).

## Réponse idéale :

$$x_1' + x_2' = 10' + 12 \cdot 30' + 40 \cdot 70' + 80 \cdot 90' + 95$$

## Réponse réelle :

$$\Omega(11,7,5,6)$$
 (x<sub>1</sub>' + x<sub>2</sub>') = 37' + 51\*77' + 91\*97' + 106

#### 2. SIMULATION DU FONCTIONNEMENT DES CIRCUITS COMBINATOIRES

## 2.1. Calcul de la réponse

<u>Définition 5</u>: Le <u>fonctionnement réel</u> d'un circuit logique consistera en la donnée de son schéma logique et des paramètres dynamiques de ses portes.

En particulier, un circuit combinatoire à n entrées et m sorties définit par son fonctionnement réel une application booléenne temporelle  $F:V^{n}\to V^{m}$ .

L'image par F d'un élément X  $\epsilon$  V peut être calculée en évaluant par couches les réponses des portes réelles.

Exemple 2 : Soit le circuit combinatoire de la figure 8. Les paramètres dynamiques de ses portes sont donnés par le tableau 1. Nous calculons sa réponse pour :

$$x_1 = 1' + 2 \cdot 3' + 4 \cdot 7'$$
  $x_2 = 1' + 5 \cdot 6' + 9 \cdot 10' + 11$   
 $x_3 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4' + 7$   $x_4 = 2' + 3 \cdot 5' + 6 \cdot 10'$ 

(évaluation <u>couche</u> par <u>couche</u>; les fronts desentrées sont exprimés en µs).

La réponse réelle est : 1,004' + 1,012\*2,008' + 3,012\*4,008' + 5,005\*6004' + 7,012\*10,004' + 10,020 (Fig. 9).

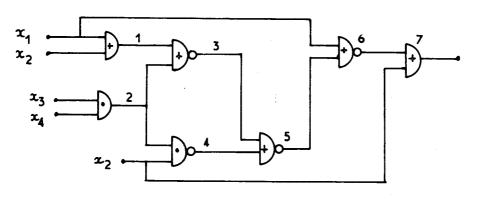


Fig. 8

						-	-				
		1	2	3	4	5	6		7		
m	(µs)	0,005	0,006	0,007	0,007	0,007	0,00	7 0	,007		
n	(µs)	0,002	0,002	0,006	0,006	0,006	0,00	4 0,	,004		m. p 4
d <sub>m</sub>	ր (րs)	0,003	0,004	0,004	0,005	0,004	0,00	3 0	,004		TAB. 1
d <sub>r</sub>	(μs)	0,004	0,005	0,004	0,006	0,004	0,00	5 0	,004		
				<i>\$111111</i>			<b>a</b>				
Ġ	i	5	ż	4	5	6	7	8	ġ	10	11
7////						2	•		9777		7////
0	1	Ž	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ווווי		77777	<b>7</b> ////	///a		<b>a</b>					
Ö	7	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
						F	Reponse	e idea	le		
<i></i>			V///	////		72			<i></i>		//////
Ŏ	1,004 1	0 <b>12 2,0</b> 0	3,012	4,008	<b>5,00</b> 5	6,004	7,012	7,012 8		10,004 100 20 11	
-						Rep	onse r	eelle	•		
						•	-			Figure 9	

## 2.2. Définitions

<u>Définition 6</u>: On étend la définition 6 Ch.II pour les Q.B.T. générales :

Une Q.B.T. générale sera appelée stabilisée si toutes ses composantes sont des Q.B.T. stabilisées.

Si 
$$F(t) = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_n \end{vmatrix}$$
 est une Q.B.T. générale stabilisée, alors  $SS^ F(t) = \begin{bmatrix} \Delta & n \\ min \\ i=1 \end{bmatrix}$   $\{SS^ \{f_i\}$   $\}$   $SS^+$   $\{f_i\}$   $\{SS^+$   $\{f_i\}$   $\}$   $\{SS^+$   $\{SS^+$   $\{f_i\}$   $\}$   $\{SS^+$   $\{SS^+$   $\{SS^+$   $\{SS^+\}$   $\{SS^+$   $\{SS^+\}$   $\{SS^+\}$ 

$$VS^{+} F(t) \stackrel{\triangle}{=} \begin{vmatrix} VS^{+} (f_{1}) \\ \vdots \\ VS^{+} (f_{n}) \end{vmatrix} \qquad VS^{-} F(t) \stackrel{\triangle}{=} \begin{vmatrix} VS^{-} (f_{1}) \\ \vdots \\ VS^{-} (f_{n}) \end{vmatrix}$$

Remarquons que d'après la définition  $^6$ .Ch. II, I et B sont des Q.B.T. stabilisées ayant  $VS^{\dagger}I = VS^{-}I = 1$ ,  $VS^{\dagger}B = VS^{-}B = 0$ .

On posera par définition :

$$SS^{\dagger}I = SS^{\dagger}B = -\infty$$
  $SS^{\Xi}I = SS^{\Xi}B = +\infty$ 

## <u>Définition 7</u>: Soit un circuit combinatoire à n entrées

$$X = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ x \\ n \end{bmatrix}$$
 et m sorties  $Z = \begin{bmatrix} z \\ 1 \\ z \\ m \end{bmatrix}$ 

Soit également  $d(x_i, z_j)$  le retard minimum pour qu'une transition à l'entrée  $x_i$  se manifeste à la sortie  $z_j$ . Nous posons :

$$\delta(x_i) = \min \{ d(x_i, z_j) \}$$

$$1 \le i \le m$$

et nous appellerons  $\delta(x_i)$  Durée minimale absolue de transfert d'une transition sur  $x_i$ .

De façon analogue, soit  $D(x_i, z_j)$  le retard maximum pour qu'une transition sur  $x_i$  se manifeste en  $z_j$ . Nous posons :

$$\Delta(x_i) = \max \{ D(x_i z_j) \}$$

$$1 \le j \le m$$

et nous appellerons  $\Delta(x_i)$ , <u>Durée maximale absolue de transfert d'une</u> transition sur  $x_i$ . Dans l'exemple qui suit, on montre comment on calcule  $\delta(x_i)$  et  $\Delta(x_i)$ .

Exemple 3: On veut calculer  $\delta(x_1)$  et  $\Delta(x_1)$  pour le circuit de la Fig. 10 dont les portes ont m = 11ns,n = 7ns.

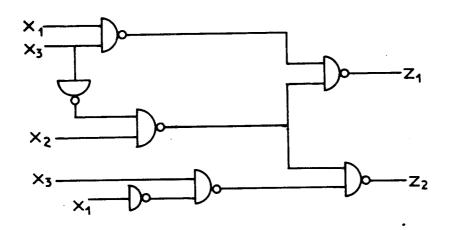


Figure 10

$$d(x_1,z_1) = 11 + 7 = 18 \text{ ns} = D(x_1,z_1)$$

$$d(x_1,z_2) = 7 + 11 + 7 = 25 \text{ ns}$$

$$D(x_1,z_2) = 11 + 7 + 11 = 29 \text{ ns}$$

$$\delta(x_1) = \min \{18, 25\} = 18 \text{ ns}$$

$$\Delta(x_1) = \max \{18, 29\} = 29 \text{ ns}$$

## 2.3. Découpage d'une Q.B.T.

Définition 8 : Soit U(t) une Q.B.T. simple ou générale et  $(t_1, t_2, \dots t_k)$  un ensemble ordonné et fini de réels, tel que son intersection avec l'ensemble des fronts de U(t) soit vide. Alors le découpage de U(t) relatif à l'ensemble  $(t_1, t_2, \dots t_k)$  est une liste de k+1 Q.B.T. définies par la règle R :

$$R : (U(t), (t_1, t_2, ... t_k)) \rightarrow (U_0, U_1, ... U_k)$$

où 
$$U_{i}(t) = \begin{cases} U(t) & \text{pour } t_{i} < t < t \\ U(t_{i}) & \text{pour } t \leq t_{i} \end{cases}$$

$$U(t_{i+1}) & \text{pour } t \geq t_{i+1}$$

En particulier : 
$$U_0(t) = \begin{cases} U(t) \text{ pour } t < t_1 \\ U(t_1) \text{ pour } t > t_1 \end{cases}$$

$$U_k(t) = \begin{cases} U(t) \text{ pour } t > t_k \\ U(t_k) \text{ pour } t \leq t_k \end{cases}$$

Exemple 4: Pour 
$$U(t) = \begin{bmatrix} e_1 & e_5' + e_7 \\ e_3 & e_7' + e_9 \end{bmatrix}$$

$$R(U(t), (1,5; 2; 7,1; 8)) \rightarrow (\begin{vmatrix} e_1 \\ B \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} I \\ B \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} e_5' + e_7 \\ e_3 & e_7' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} I \\ B \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} I \\ e_9 \end{vmatrix})$$

<u>Propriété 1</u>: Soit  $(U_0,U_1,\ldots,U_k)$  un découpage de la Q.B.T. U(t) relatif à l'ensemble  $(t_1,t_2,\ldots,t_k)$ 

Alors:

$$VS^{+}(U_{i}) = VS^{-}(U_{i+1})$$
et

 $pour \ i = 0, 1, ..., (k-1)$ 
 $SS^{+}(U_{i}) < SS^{-}(U_{i+1})$ 

La propriété précédente est caractéristique de tout découpage d'une Q.B.T. Il n'est pas difficile de démontrer que, étant donnée une liste  $(U_0,U_1,\ldots,U_k)$  dont les éléments sont des Q.B.T. ayant le même nombre de composantes et satisfaisant les relations de la propriété précédente,

on peut déterminer une Q.B.T. unique dont la liste est un découpage relatif à  $(t_1, t_2, \ldots t_k)$ 

où 
$$t_i \in \mathbf{l}SS^+(U_{i-1}), SS^-(U_i)\mathbf{l}$$

Nous montrons ci-dessous comment on peut reconstituer la Q.B.T. unique U(t) si on connaît un de ses découpages.

Définition 9 : Soit l'opération binaire  $\alpha$  (adjonction) interne dans V. Telle que

$$\text{Si } f_1, f_2 \in V, \text{SS}^+(f_1) < \text{SS}^-(f_2) \text{ et } \text{VS}^+(f_1) = \text{VS}^-(f_2) \text{ alors}$$

$$f_1 \alpha f_2 = \begin{cases} f_1 f_2 & \text{sinon} \\ f_1 + f_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans tous les autres cas, l'opération n'est pas définie. Nous étendons cette opération dans  $\textbf{V}^{\textbf{n}}$  :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \quad \alpha \quad \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} U_1 & \alpha & W_1 \\ \vdots & \vdots \\ U_n & \alpha & W_n \end{bmatrix}$$

<u>Proposition 1</u>: Si  $(U_0, U_1, \dots, U_k)$  est un découpage de la Q.B.T. U(t) alors  $U(t) = U_0 \quad \alpha \, U_1 \quad \alpha \, U_2 \dots \, \alpha \, U_k.$ 

Exemple 5 : On peut vérifier qu'à partir du découpage de la Q.B.T. U(t) donnée à l'exemple 4, on obtient par la proposition précédente U(t) :

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ B \end{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} I \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5' + e_7 \\ e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

 $\begin{array}{c} \underline{\textit{Proposition 2}} : \textit{Soient $U_1$, $U_2$ deux Q.B.T. telles que $U_1$ a $U_2$ existe et $G(X)$ un P.B.T. \\ \\ \textit{tel que X ait le même nombre de composantes que les $U_i$ (i=1,2)} \\ \\ \textit{Alors :} \qquad & G(U_1 \text{ a } U_2) = G(U_1) \text{ a } G(U_2) \\ \end{array}$ 

 $\frac{\text{D\'emonstration}}{\text{d\'epend que de U}_{i}(t_{0})}.$  Il suffit de remarquer que la valeur de  $G(U_{i})$  à l'instant  $t_{0}$  ne

La proposition suivante regroupe des résultats faciles à démontrer, qui nous seront utiles dans ce qui suit :

<u>Proposition 3</u>: Soit un circuit combinatoire à n entrées  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}$  et

m sorties  $Z = \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix}$  (X, Z sont des V.B.T) dont le fonctionnement réèl

est décrit pour l'application B.T.  $F:V^n\to V^m$  Désignons pour  $F^I$  l'application B.T. décrivant le fonctionnement du circuit idéal.

Alors :

- 1)  $\tau^k F(X) = F(\tau^k X)$
- 2)  $F^{I}(X)$  est un P.B.T. et si X est considéré comme variable booléenne alors  $F^{I}(X)$  est une fonction booléenne.
- 3) Si U  $\dot{\epsilon}$ { I,B}<sup>n</sup> et F(U) = W alors W  $\epsilon$  {I,B}<sup>m</sup> et F<sup>I</sup>(VS (U)) = VS (W)
- 4) Si  $U = \begin{bmatrix} U \\ i \\ U \\ n \end{bmatrix}$  est une Q.B.T. stabilisée, alors

$$VS^+F(U) = F^I(VS^+(U))$$

et

$$VS^{-}F(U) = F^{I}(VS^{-}(U))$$

5) Si 
$$U = \begin{vmatrix} U_1 \\ U_n \end{vmatrix}$$
 est une Q.B.T. telle que  $U_i \in \{ I, B \}$  pour  $1 < i < n$  et  $U_1$  est un échelon ou contre-échelon dont le front est K alors tous les fronts de  $F(U)$  appartiennent à l'intervalle 
$$[K + \delta(x_1), K + \Delta(x_1)]$$

Définition 10 : Soit F(X) une application B.T. décrivant le fonctionnement réel d'un circuit combinatoire et U une Q.B.T. ayant le même nombre de composantes que la V.B.T. X. Alors on dit qu'un découpage de U,  $(U_0, U_1, \ldots U_k)$  est fiable pour le circuit donné si :

$$F(U_0 \alpha U_1 \alpha \dots \alpha U_k) = F(U_0) \alpha F(U_1) \alpha \dots \alpha F(U_k)$$

Exemple 6 : Soit le circuit combinatoire de la Fig. 11 dont les portes sont des NAND ayant les mêmes caractéristiques dynamiques : m = 11ns, n = 7ns,  $d_{\rm m} = 5 \, \rm ns \, d_{\rm n} = 6 \, \rm ns$ 

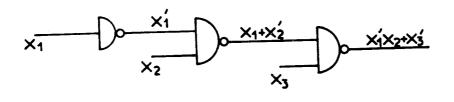


Figure 11

Pour l'entrée 
$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ I \\ 16 \end{bmatrix}$$
 le découpage

$$(U_0, U_1) = (\begin{bmatrix} 10 \\ I \\ B \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} B \\ I \\ 16 \end{bmatrix})$$
 n'est pas fiable

En fait 
$$f(U) = 23' + 38$$
,  $f(U_0) = I$ ,  $f(U_1) = I$   
et 23' + 38  $\neq$  I  $\alpha$  I = I

Par contre, pour le même circuit et pour l'entrée

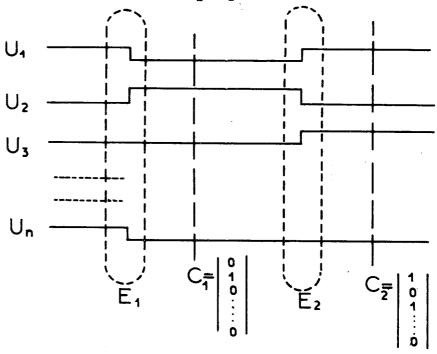
$$U = \begin{vmatrix} 10 \\ I \\ 33 \end{vmatrix}$$
 le découpage (  $\begin{vmatrix} 10 \\ I \\ B \end{vmatrix}$  ;  $\begin{vmatrix} B \\ I \\ 33 \end{vmatrix}$  ) est fiable

En effet 
$$f(U) = I$$
,  $f(U_1) = I$ ,  $f(U_2) = I$ 

## 2.4. Condition de non interférence de deux entrées successives

Soit F(X) une application B.T. décrivant le fonctionnement réel d'un circuit combinatoire et  $U(t) = \begin{bmatrix} u \\ 1 \\ u_n \end{bmatrix}$  une entrée Q.B.T. générale.

Soient également  $E_1$ ,  $E_2$  deux ensembles de transitions de U(t) qui génèrent deux combinaisons d'entrées  $C_1$ ,  $C_2$  successives (Fig. 12).



## Figure 12

Il est alors clair que les transitions d'un même ensemble doivent se produire simultanément si possible tandis que les deux ensembles  $\mathrm{E}_1$ ,  $\mathrm{E}_2$  doivent être suffisamment éloignés entre eux pour que le fonctionnement soit correct.

En fait, il se peut que le retard de propagation d'une transition de l'ensemble  $\rm E_1$  soit considérablement supérieur au retard de propagation d'une transition de  $\rm E_2$ . Ceci peut avoir comme résultat (dans le cas où  $\rm E_1$  et  $\rm E_2$  ne sont pas suffisamment éloignés entre eux) l'interférence de deux réponses qui devraient être discernables.

On peut donner une condition suffisante pour assurer la non interférence des réponses de deux entrées successives.

Soit  $(U^1, U^2)$  le découpage de U(t) entre  $E_1$  et  $E_2$   $((U^1, U^2) = (U(t), t_1)$  où  $t_1$  est supérieur aux fronts de  $E_1$  et inférieur aux fronts de  $E_2$ ).

Alors toute variation de sorties due aux transitions de l'ensemble  $\rm E_1$  ou à des transitions antérieures se manifestera en temps t :

t 
$$\leq \max_{i=1}^{n} \{(SS^{\dagger}(U_i^1) + \Delta(x_i))\}$$

De même toute variation des sorties dûe aux transitions de l'ensemble  $\rm E_1$  ou à des transitions postérieures se manifestera en temps  $\rm t$  :

t > 
$$\min_{i=1}^{n} \{(SS^{-}(U_{i}^{2}) + \delta(x_{i}))\}$$

Donc, pour qu'il n'y ait pas d'interférence aux sorties il est suffisant que :

On appellera cette condition : <u>Condition de non interférence</u>.

Par ce qui précède on déduit :

Proposition 4: Soit F(X) l'application B.T. décrivant le fonctionnement réel d'un circuit combinatoire, U une entrée Q.B.T., et  $E_1$ ,  $E_2$  deux ensembles de transitions de U(t) produisant deux combinaisons d'entrées successives. Alors une condition suffisante pour que les transitions des

sorties correspondant à  $E_1$  et  $E_2$  n'interfèrent pas, est que le découpage  $(U^1,U^2)$  de U(t) entre  $E_1$  et  $E_2$  soit tel que :

$$\max_{i=1}^{n} \{ (SS^{+}(U_{i}^{1}) + \Delta(x_{i})) \} < \min_{i=1}^{n} \{ (SS^{-}(U_{i}^{2}) + \delta(x_{i})) \}$$

IV - 19

- <u>Proposition 5</u>: Soit F(X) une application B.T. décrivant le fonctionnement réel d'un circuit combinatoire et  $U=U^1$   $\alpha$   $U^2$  une entrée. Alors si le découpage  $(U^1,U^2)$  satisfait la condition de non interférence ce découpage est fiable.
- REMARQUE: On peut calculer la réponse d'un circuit combinatoire pour une entrée  $U(t) \text{ en découpant à l'aide de la condition de non interférence en un découpage fiable } (U^1, U^2, \dots, U^k).$

Ceci est particulièrement intéressant quand U(t) est une Q.B.T. dont la forme minimale comporte un nombre important de créneaux. Nous illustrons l'idée par un petit exemple :

Exemple 7 : Soit le circuit de la Fig. 13, construit à partir des NAND ayant tous les mêmes caractéristiques dynamiques : m = 11ns , n = 7ns , dm = 5ns ,  $d_n = 6 \, \text{ns}$  .

$$\times_{1} \xrightarrow{\sum_{i=1}^{n} 0} \frac{x_{1}^{i} \times x_{2}^{i}}{x_{3}} \xrightarrow{\sum_{i=1}^{n} 0} \frac{x_{3}^{i} \times x_{1}^{i} \times x_{2}}{x_{3}} = \int_{0}^{\frac{n}{2}} (x_{1}, x_{2}, x_{3})$$
Figure 13

On a : 
$$\delta(x_1) = 7 + 11 + 7 = 25 \text{ ns}$$
 ,  $\Delta(x_1) = 29 \text{ ns}$  
$$\delta(x_2) = \Delta(x_2) = 7 + 11 = 18 \text{ ns}$$
 
$$\delta(x_3) = 7 \text{ ns}, \Delta(x_3) = 11 \text{ ns}$$

Si on prend comme entrée : 
$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \cdot 20' + 70 \\ 15 \cdot 30' + 60 \cdot 80' \\ 30' + 43 \end{bmatrix}$$

Alors son découpage : 
$$(U^{\frac{1}{2}}U^{\frac{2}{2}}) = (\begin{vmatrix} 10.20' \\ 15.30' \\ 30' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 70 \\ 60.80' \end{vmatrix})$$

est fiable puisqu'il vérifie la condition de non interférence :

Max {(20+29); (30+18); (30+11)} < Mir {(70+25); (60+18); (43+7)} => 49 < 50

Par conséquent :  $F(U) = F(U^{1}) \alpha F(U^{2})$ . On trouve :  $F(U^{1}) = 41 \quad F(U^{2}) = 50+78 \cdot 95' =>$ 

F(U) = 41.50+78.95

# 3. SIMULATION DU FONCTIONNEMENT DES CIRCUITS SEQUENTIELS ASYNCHRONES

# 3.1. Algorithmes

Définition 11 : Soit U(t) une Q.B.T. représentant une séquence de k+2 combinaisons d'entrées et  $E_0$ ,  $E_1$ ,...  $E_k$  des ensembles de transitions de U(t) tels que  $E_i$  contient les transitions par lesquelles on passe de la (i+1)-ième à la (i+2)-ième combinaison d'entrées. Soit également  $t_i$  un réel supérieur à tous les fronts des transitions de  $E_{i-1}$  et inférieur à tous les fronts des transitions de  $E_i$  (i = 1,2,...k). Alors le découpage (U(t),  $(t_1,t_2,...t_k)$ ) est le découpage en transitions simples de U(t). Ce découpage étant unique pour une entrée dont les  $E_i$  sont suffisamment distants dans le temps sera désigné par : D.T.S (U(t)) .

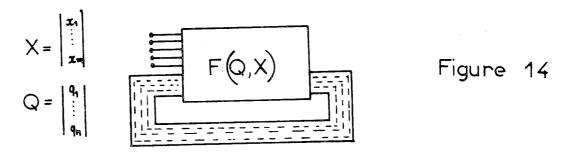
# Exemple 8:

D.T.S. 
$$\left( \begin{array}{c|c} e_1 & e_3' + e_4 \\ e_3' + e_6 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} e_1 \\ e_1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} e_3' \\ e_3' \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} e_4 \\ e_3' \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} e_4 \\ e_6 \end{array} \right)$$

Soit le circuit asynchrone séquentiel de la Fig. 14,

$$X = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ x \\ m \end{bmatrix}$$
 la V.B.T. associée à ses entrées primaires

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$
 la V.B.T. associée à ses boucles de réaction.



F(Q,X) l'application B.T. décrivant le fonctionnement réel du circuit combinatoire que l'on obtient en coupant les boucles de réaction.

On veut calculer la réponse de ce circuit pour une entrée donnée :

$$U(t) = \begin{vmatrix} U_1(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{vmatrix} \qquad (U \in V^n)$$

L'algorithme donné ci-dessous peut être appliqué sous les conditions suivantes :

## CONDITIONS 1:

- 1) Aucune entrée ne varie tant que le circuit évolue.
- 2) Tout changement des entrées doit se produire après la "stabilisation" du circuit, c'est à dire toute variation des entrées doit être suffisamment éloignée des variations antérieures des entrées primaires et secondaires pour qu'il n'y ait pas d'interférence.
- 3) Le circuit doit ne pas comporter des cycles : cette condition ne doit pas être nécessairement remplie pour pouvoir appliquer l'algorithme. Néanmoins, une fois que le circuit se met à osciller on ne peut pas continuer à simuler en variant les entrées à cause de la condition 1.

## ALGORITHME B:

1) Calculer D.T.S(U(t)) = 
$$(U^1, U^2, ..., U^k)$$
 et  $U^0 = \begin{pmatrix} U^0 \\ \vdots \\ U^0 \\ U^m \end{pmatrix} \in \{I, B\}^m$ 

tel que 
$$U_i^0 = I \text{ si VS}^-(U_i) = 1$$
, sinon  $U_i^0 = B$ .

Si un état initial n'est pas précisé, alors chercher  $Q^0 \in \{I,B\}^n$  tel que  $F(Q^0,U^0) = Q^0$ .

2) Calculer  $F(Q^p, X) = Q^{p+1}$  pour p = 0,1,2... et  $X := U^i$  jusqu'à stabilisation :  $F(Q^{S_i}, U^i) = Q^{S_i}$ .

Garder  $Q^{S_i}$ 

3) Si i < k alors faire

$$(Q^0 := \begin{vmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{vmatrix}, \text{ où } V_i = \{ \text{I si VS}^+ (Q^i) = 1, \text{ B sinon} \}; i := i+1;$$
 aller à 2)); sinon s'arrêter. La réponse est donnée par :  $Q^1 \alpha Q^2 \alpha \dots \alpha Q^k$ 

Démonstration : Les trois propositions suivantes démontrent complètement l'algorithme.

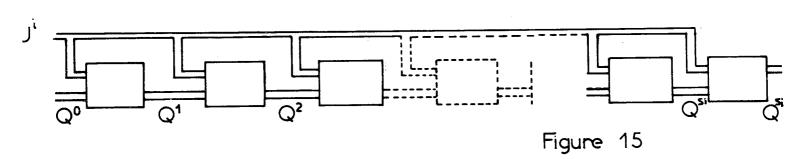
<u>Proposition 7</u>: Si  $F(Q^i, U^i) = Q^i, (U^i \in V^m, Q^i \in V^n)$ , alors  $VS^+(Q^i)$  est un état stable pour l'entrée  $VS^+(U^i)$ .

<u>Démonstration</u>: Si F<sup>I</sup> est le P.B.T. décrivant le fonctionnement idéal du circuit combinatoire que l'on obtient en coupant les boucles, on a par la proposition 3 :

$$F^{I}(VS^{+}(Q^{i}), VS^{+}(U^{i})) = VS^{+}(Q^{i})$$

Proposition 8 : La Q.B.T.  $Q^i$  calculée après application du pas 2) de l'algorithme, est la réponse réelle du circuit à partir de l'état initial  $Q^0$  et de l'entrée  $U^i$ .

<u>Démonstration</u>: Dans ce cas, le circuit de la Fig. 14 est équivalent à sa présentation spatio-temporelle. Fig 15



IV - 24 -100-

Le calcul itératif nous donne successivement les réponses des éléments de la chaine.

Si le circuit réel a un état stable par l'entrée  $U^{i}$  et à partir de  $Q^{0}$  on  $S_{i}$   $S_{i}$  trouvera après un nombre fini d'itération,  $Q^{i}$  tel que  $F(Q^{i}, U^{i}) = Q^{i}$  ce dernier étant la réponse réelle du circuit.

<u>Proposition 9</u>: La réponse réelle du circuit est donnée par  $Q^{S_1} \propto Q^{S_2} \propto \ldots \propto Q^{S_k}$ .

relatif à (t<sub>1</sub>) où t<sub>1</sub>:

 $t_1 \in \ ]SS^+ (Q^{S_1})$ ,  $SS^- (U^2)$  est fiable pour le circuit. Mais, étant donné que  $SS^- (Q^{S_2}) > SS^- (U^2)$  on en déduit que le découpage

(combinatoire).

On aura donc  $F(Q^{S_1} \alpha Q^{S_2}, U^1 \alpha U^2) = Q^{S_1} \alpha Q^{S_2}$  étant donné que  $F(Q^{S_1}, U^1) = Q^{S_1} \text{ et } F(Q^{S_2}, U^2) = Q^{S_2}.$ 

Par conséquent,  $Q^* = Q^{-1} \alpha Q^{-2}$ . Le résultat se généralise facilement.

#### EXEMPLES

Dans ce qui suit on illustre l'algorithme par un certain nombre d'exemples. Les résultats sont donnés par des tableaux dont les têtes de lignes correspondent aus équipotentielles et les têtes de colonnes aux entrées primaires.

Exemple 9 : Soit le compteur asynchrone mod2 décrit par le tableau  $\underline{2}$ . Le circuit élaborant  $q_1$  et  $q_2$  est donné en figure  $\underline{16}$ . Les portes sont des NAND ayant les mêmes paramètres dynamiques m = 22ns,n = 15ns,  $d_m = d_n = 5$ ns.

q <sub>1</sub> q <sub>2</sub>	х	x'
,00	01/0	00/0
11	10/0	11/0
01	01/0	11/0
10	10/0	00/1

TAB.2

Dans le tableau 3 nous simulons le fonctionnement pour x = 0.100 + 200.300'

On trouve :

$$Q^{S_1} = \begin{bmatrix} B \\ 37 \end{bmatrix}$$
  $Q^{S_2} = \begin{bmatrix} 159 \\ 137 + 159 \end{bmatrix}$ 

$$Q^{S_3} = \begin{bmatrix} I \\ 252 \end{bmatrix} \qquad Q^{S_4} = \begin{bmatrix} 337 \\ B \end{bmatrix}$$

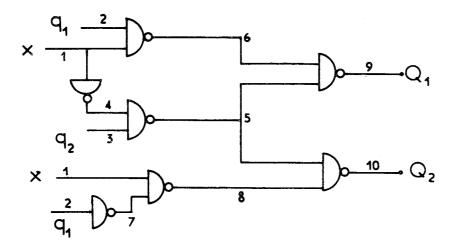


Figure 16

(Pour ne pas compliquer le schéma, une sortie secondaire est désignée par  $\mathbf{Q}_{\mathbf{i}}$  et les entrées secondaires correspondantes par  $\mathbf{q}_{\mathbf{i}}$ ).

COMPTEUR ASYNCHRONE MOD2

SIMULATION POUR x = 0.100'+200.300'

:C.I:

: 1 (x)		В	0		0		1001		1001	200		: 200		: 300		: 300
2(q <sub>1</sub> )		м	В		В		m		159	н		П		H		337
3(42)		<u>м</u>	В		37		н		137'+159:	н		252		ш		Д
<b>†</b>		н	15		15'		122		122	215'		215'		322		322
5		н	H		н		137		137	237		237		н		Н
9		·	Ι		н		Į		·	215'		215'		322		322
7	· ··	) H	H	+	Н	ļ	I		174'	В	·	B	ļ	B		361
8		Н	151		15'		122		122	Н		I		Н		H
: 9(01)		В.	m		Д		159		159 :	н		I		337		337
10(Q2)	· ··	_ m	37	+	37	13	137'+159	4	137'+159	252		252	ļ	В	ļ	В
											١		1			

TAB. 3

IV - 28 -104-

#### L'ALGORITHME B SANS COUPER LES BOUCLES

Il n'est pas difficile de constater que la détection d'un ensemble de boucles n'est pas nécessaire pour l'application de l'algorithme précédent. Nous en donnons une autre version qui peut être utilisée quand la détermination d'un ensemble de boucles n'est pas évidente:

### ALGORITHME B' :

Soit U(t) la Q.B.T. qui détermine les entrées.

1) Calculer la D.T.S  $(U(t)) = (U^1, U^2, \dots U^k)$ .

Numéroter les équipotentielles du circuit 1,2,... r sauf les entrées et associer à leur ensemble une liste de r Q.E.T. simples.

Calculer  $U^0 = \begin{bmatrix} U_1^0 \\ \vdots \\ U_m^0 \end{bmatrix}$   $\varepsilon \{I,B\}^m \text{ tel que } U_1^0 = I \text{ si VS}^- (U_1(t)) = 1 \text{ sinon } U_1^0 = B.$ 

Chercher un état global stable (si celui-ci n'est pas donné), c'est à dire une liste  $L^0 = (f_1^0, f_2^0, \dots, f_r^0)$  où  $f_i \in \{I,B\}$  pour  $1 \le i \le r$ 

tel que si on calcule la Q.B.T. portée par l'équipotentielle j pour 1 < j < r à partir des éléments de la liste  $L^0$  et de  $U^0$  on la trouve égale à  $f_j$ .

On fait i := 1  $L := L^0$ 

2) On calcule la Q.B.T. simple f<sup>\*</sup><sub>j</sub> portée par l'équipotentielle j pour 1 < j < r et à partir des éléments de la liste L<sup>0</sup> et de U<sup>i</sup>.
Si f<sup>\*</sup><sub>j</sub> ≠ f<sup>0</sup><sub>j</sub> on remplace f<sup>0</sup><sub>j</sub> par f<sup>\*</sup><sub>j</sub> dans la liste L<sup>0</sup>. On répète ce processus jusqu'à stabilisation. Soit L<sup>Si</sup> = (f<sup>i</sup><sub>1</sub>, ... f<sup>i</sup><sub>r</sub>) la liste ainsi obtenue. On mémorise la Q.B.T. générale Q<sup>Si</sup> dont les composantes sont les éléments de la liste L<sup>Si</sup> correspondant aux équipotentielles des sorties.

3) Si i < k alors faire : 
$$(L^0 := (V_1, V_2, \dots V_r) \text{ où } V_j = I \text{ si } VS^+ (f_j^i) = 1, V_j = B \text{ sinon};$$
 i := i+1; aller à 2)); sinon s'arrêter La réponse est  $Q^{S_1} \propto Q^{S_2} \propto \dots \propto Q^{S_k}$ 

Exemple 10: Soit la bascule R-S de la Fig. 17 dont les portes sont des NOR ayant 
$$m = 12 \text{ ns}$$
  $n = 8 \text{ ns}$   $d_m = 4 \text{ ns} = d_n$ . On veut calculer sa réponse  $U(t) = \begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50' \\ 100.150' \end{bmatrix}$  pour  $L^0 = (I,B)$  On trouve: 
$$L^1 = (8'; 20) \qquad L^2 = (B;I)$$

 $L^3 = (120; 108') L^4 = (I,B)$ 

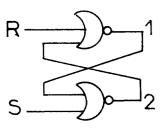
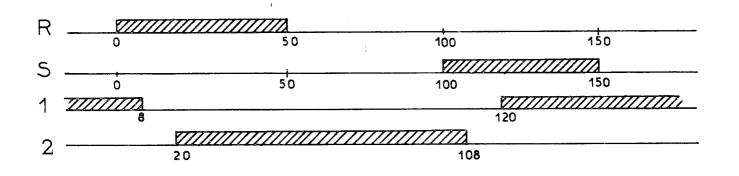
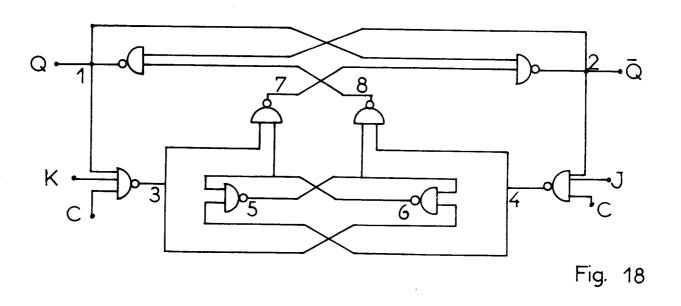


Figure 17



Exemple 11 : Soit la bascule J-K SN74H72 (31) de la Fig.  $\underline{18}$  dont les portes sont des NAND 74H01 ayant m = 10 ns n = 7 ns  $d_m = d_n = 4$  ns.



On veut calculer la réponse de la bascule pour :

$$U(t) = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.70' + 150.170' + 250.270' + 350.370' + 450.470' + 550.570' \\ 0.100' + 200.300' + 500' \\ 100.300' + 400.500' \end{bmatrix}$$

à partir de l'état  $q^0 = I$ 

On a :

D.T.S. 
$$(U(t)) = (\begin{bmatrix} B \\ O \\ B \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 50 \\ I \\ B \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 70 \\ I \\ B \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 100 \\ I \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 170 \\ B \\ I \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 170 \\ B \\ I \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 250 \\ I \\ I \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 270 \\ B \\ 300 \end{bmatrix}$$

$$(U(t)) = (\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 100 \\ B \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 100 \\ I \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ I \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ I \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 300 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ I \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 300 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 300 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 300 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 300 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 300 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 300 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 300 \end{bmatrix};$$

Nous montrons au tableau 4 comment on procède

40	<b>t</b>
	$\supset$
M	E
뮲	
A	<

		"			]	.	1	.	Ţ		1_
: U <sup>18</sup>	570'	H	В	: B 597	, 409 X	.	B 580	H .	ш	I :	1 587
U 17	550	н	B	В	Н	н	1 557	B 567'	I 5741	¥ 284	I
							+				+
0.16	19	500	5001	В	I	I	 	В	I	æ	I
: U <sup>15</sup> :	: 1024	 æ		I 504':	В 497	: 08h &	÷	 B		Z 487':	ı
: 0 <sup>14</sup> :	: 120	 B		. I	В	: 1 457':		:, h2h I:	B 476	н	18 th 8th
. u13	m 	B	00+		м			I	m	   H 	. B
.1 0,12	0 370'	1			. B					и 	. B
0 0 11 :	350	 B		I					M		н Н
, U <sup>10</sup>	м 	300.	3000	1	3041 B	Н.	I . 01	H	м	: :	287': B
6n :	3 270	H	H	B 297	) E 7 :		,, B 280		B	I :	: 1 28
an :	. 250	1	H	<u>aa</u>			1 257	B 267	1 274'	: JB 284	н
, n	м 	500	г	m	1 ; '	I : 0	I	<u>m</u>	н	, B	н 
on:	170'	щ 	н 	, <b>1</b> 204	. B 197	, B 180	H		ı ;	: <b>1</b> 187 :	∺
<sub>ج</sub> ۩:	150	м	н	н	m 	, 1 157	н	, 1 174 '	B 167	н 	:B 184
, U	 B	1000	1000		<u>α</u>		н	H	B :	н 	g :-
, u <sup>3</sup>	.02 : 0	. I			В.				3 B		 B
υ <sup>1</sup> υ <sup>2</sup>	. E : 50	. o .	 B	I .		H		I :	B :	I : I :	: B : B
o <sub>n.</sub> .	т 	ш 		1(Q); I	2(Q) B	н.		н	EG	H	 B

On trouve (Fig. 19):

 $Q = 204' + 297 \cdot 504' + 597$ 

 $\bar{Q} = 197 \cdot 304 \cdot +497 \cdot 604 \cdot$ 

(On désignera par  $\bar{\mathbb{Q}}$  la réponse qui dans le circuit idéal est le complément de  $\mathbb{Q}$ ).

- 1

IV - 33 -109-

3.2. Modèles décrivant le fonctionnement fiable d'un circuit asynchrone séquentiel

<u>Définition 12</u>: On appellera le fonctionnement d'un circuit asynchrone séquentiel fiable si les conditions 1 et 2 de l'algorithme <u>B</u> sont remplies.

<u>Définition 13</u>: Soient les applications:

$$L_{+}: \{e_{i}\}_{i \in \mathbb{R}} \stackrel{\circ}{U} \{e_{i}^{!}\}_{i \in \mathbb{R}} \rightarrow \{I,B\}$$

$$L_{-}: \{e_{i}\}_{i \in \mathbb{R}} \cup \{e_{i}^{!}\}_{i \in \mathbb{R}} \rightarrow \{I,B\}$$

telles que  $L_{+}$  (x) = I si x est un échelon, B sinon

 $L_{\perp}(x) = I si x est un contre-échelon, B sinon$ 

Notation : On désigne par flèche montante (†) le fait qu'une équipotentielle passe de 0 à 1 et pour flèche descendante le fait qu'une équipotentielle passe de 1 à 0.

Si on suppose que le fonctionnement d'un circuit asynchrone séquentiel est fiable et que l'on en a complètement simulé le fonctionnement, on peut décrire celui-ci par un tableau de transition ou un système d'équations.

Nous illustrons d'abord l'idée par un exemple.

Exemple 12 : Soit le compteur mod2 asynchrone dont on a complètement simulé le fonctionnement dans l'exemple 9. Son fonctionnement étant fiable, sa réponse ne dépend que de l'état présent et des fronts des entiers primaires.

On peut alors décrire son fonctionnement par le tableau 5.

		<b>_</b>	_		-	
:	x	:	:		:	
:	q <sub>1</sub> q <sub>2</sub>	:	:	<b>+</b>	:	
:		:	:		٠:	
:	В,В	:Β, τ <sup>37</sup> x	:	В,В	:	
:		:	:		:	TAB.
:	B,I	:B,I	:	$^{59}_{\tau}$ x', $\tau^{37}_{x+\tau}$ x'	:	
:		-	:		:	
:	I,B	:I,B	:	$\tau^{37}x$ , B	:	
:		:	:		:	
	I,I	: 1, $\tau^{52}x^{1}$	•	I,I		
••		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	_	~	-	

5

IV - 34 -110-

Ce tableau est équivalent au système d'équations

$$Q_1 = L_+(x)q_1 + L_-(x)(q_1 q_2' + q_1' q_2 - \tau^{59}x' + q_1 q_2' - \tau^{37}x)$$

$$q_2 = L_+(x) (q_1' q_2 + q_1' q_2' \tau^{37} x + q_1 q_2 \tau^{52} x') + L_-(x) q_1 q_2$$

où  $q_1, q_2 \in \{I,B\}$  et le doublet  $(q_1, q_2)$  désigne l'état présent

$$x \in \{e_i\}_{i \in \mathbb{R}} \cup \{e_i^i\}_{i \in \mathbb{R}}$$

 $Q_1$ ,  $Q_2$   $\epsilon\{e_i\}_{i\in\mathbb{R}}$   $U\{e_i^i\}_{i\in\mathbb{R}}$   $U\{I\}$   $U\{B\}$ ; le doublet  $(Q_1,Q_2)$  définit la réponse réelle.

On peut vérifier que l'on peut calculer la réponse réelle à partir du tableau ainsi qu'à partir des équations :

Pour U(t) = 
$$0.100' + 200.300'$$
,  $Q_1^0 = B$ ,  $Q_2^0 = B$  on a :

D.T.S. (U(t)) = (0; 100'; 200; 300')

Pour 
$$(q_1, q_2) = (B, B)$$
;  $U^1 = 0$ , on trouve  $Q_1^1 = B$   $Q_2^1 = 37$ 

Pour 
$$(q_1, q_2) = (B, I)$$
;  $U^2 = 100$ , on trouve  $Q_1^2 = 159$   $Q_2^2 = 137$  +159

Pour 
$$(q_1, q_2) = (I, I), U^3 = 200$$
, on trouve  $Q_1^5 = I Q_2^3 = 252$ 

Pour 
$$(q_1,q_2) = (I,B)$$
,  $U^4 = 300'$ , on trouve  $Q_1^4 = 337'$   $Q_2^4 = B$ 

D'où 
$$Q_1 = 159.337'$$
  $Q_2 = 37.137' + 159.252'$ 

Cette exemple montre comment on peut décrire le fonctionnement réel d'un circuit séquentiel asynchrone dont on a complètement simulé le fonctionnement fiable; c'est à dire dont on connaît la réponse à partir de tout état et pour toute variation des entrées.

Si on suppose que deux entrées du circuit ne peuvent pas varier simultanément (une seule peut changer de façon croissante ou décroissante, les autres restant invariables) on trouve qu'il y a m.  $2^m$  variations d'entrées possibles pour un circuit à m entrées. Dans ce cas,

le tableau de transition décrivant le fonctionnement réel d'un circuit séquentiel asynchrone comportera s lignes (où s est le nombre d'états) et m.  $2^m$  colonnes.

Exemple 13 : Pour la bascule R-S de l'exemple 10 on a les tableaux de transition 6 et 7 d'où on obtient les équations

$$Q_1 = L_+ (R) q_1 \tau^8 R' + (L_- (R) + L_- (S))q_1 + L_+ (S) (q_1 + q_1' \tau^{20} S)$$

$$Q_2 = L_+ (R) (q_2' \tau^{20} R + q_2) + (L_- (R) + L_- (S)) q_2 + L_+ (S) \tau^8 S'$$

: -	<b>Q</b> <sub>1</sub> <b>R</b> ,S	: ::	↑ <b>,</b> I	:	↑ <b>,</b> B	:	<b>↓,</b> I	:	<b>↓,</b> B	:	Ι,↑	:	Ι,↓	: B,↑	: B,↓	-:
:	В	:	_	:	В	:	_	:	В	: :	_	: :		: : τ <sup>20</sup> s	: : B	:
:	I	:	-	:	τ <sup>8</sup> R'	:	-	:	I	:	_	:	_	: I	: I	:

TAB. 6

												_					
:	R,S	:		:		:		:		:		:	:		:		-:
:		:		:		:				-:		-:-	 		- <u>-</u> -		-:
	В																
:		-:-		:		:		:		:		-:-	 		-:		-:
:	I	:	_	:	I	:	_	:	I	:	_	:	 :	τ <sup>8</sup> s'	:	I	:
:		_ <u>:</u> _		<u>:</u> -		<u>:</u> _		_ <u>:</u> .		<u>:</u> .	<b></b> -	_ <u>:</u> _	 _:		:		:

TAB. 7

Il est clair que l'utilisation des tableaux de transition ou des systèmes d'équations définis ci-dessus, devient partiellement intéressante dans le cas où le même élément séquentiel asynchrone apparaît plusieurs fois dans un circuit dont on veut simuler le fonctionnement.

Dans l'exemple qui suit, on fait la simulation temporelle d'un compteur asynchrone MOD4 construit à partir de bascules R-S.

Exemple 14: Soit le compteur asynchrone MOD4 décrit par le tableau 8. Le circuit élaborant q<sub>1</sub>,q<sub>2</sub>,q<sub>3</sub> construit à partir de bascules R-S dont le fonctionnement est simulé dans l'exemple 10, est donné en Fig. 19. Les portes sont des NOR ayant m = 12ns, n = 8ns d<sub>m</sub> = d<sub>r</sub> = 4 rs.

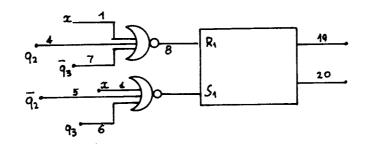
On simule son fonctionnement pour x = 0:100' + 200:300' + 400:500' +

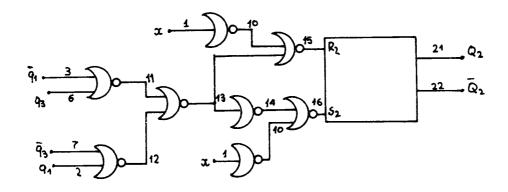
On simule son fonctionnement pour x = 0.100' + 200.300' + 400.500' + 600.700' à partir de l'état :

$$Q^0 = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}$$
 (tableau 9)

				_
:q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ,q <sub>3</sub> :	:	x :	x'	:
: 000		010/0	000/0	
: 110		100/0		· ; ;
: 101	:		101/0	:
: 011	:		011/0	- : :
: 010	: :	010/0	110/0	:
: 100	:		101/0	:
: 111	 : - <u>:</u>	111/0	011/0	- :
: 001	 :	001/0	000/1	:

TAB. 8





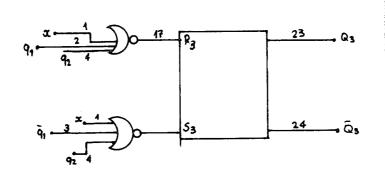


Figure 19

					1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1	1	1		1 1 1 1 1	1		1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1
: 3	132	н		н	н	 		ı	н 	520'	м	м 	е 	ш 
į H		120':	. E	щ	m			<u> </u>	<u> </u>	532	; ; ; ; ;		I .	
; ¬		   	i	228	മ	Д	м	0 7 7	н	H	ы.	628	а 	æ.
! "	В :	. B	 	240	<b>H</b>			4281		B	щ	0+9:	I :	
i ""	i		м	m	m m	332	 H	 	     			           		720
[ ]	ı	H	ı ı	Н	H	320':	В	В	ω .	. B	α !	. B	я :	. 732
, I		 m	 ! да	<u> </u>	æ		<b></b>	щ	512	512	608	. 909		EI.
=	112 :	112':	2081 :	208	m m	. B .	en En	Δ.	മ		E E		В .	<u>н</u> В
112	112	112	208	2081	312	312	1804	, 80 %	512	512	608	9		ea
	B	132 :	H	н	 	340,	. B	B	. B	. B .	В	. B	. B	19
į	g .	м	m B	<u> </u>	8	m		E E	1 1 1 1 1 1	532	н		       H 	740
	1	140, :	В	В	ធ	: 352 :	Н	H	I :	: 540'	В	. B		. 752
ļ		152	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	 	 	3601	м	  - 	і і і і	552	H		 	760'
	B	 B	220	220	320	320':	ω	<u>.</u> m	. B		620	: 620	. 726	726'
i	120'	120'		, EQ	e 1		420	420	520'	520'	മ	<u>я</u>	'T	æ
		 	 B	<b>B</b>	Ω			! ! ! ! ! ເມ	. B	. В	В	 B	: 712	712
į	 	 8		, m	312	312	80+	1084	м 	m	<u>B</u>			30
. i	132 :	132 :	I		I :			 	: 520'	: 520' :	<u>ப</u>	. B	т 1 т	Ω.
;; .	120'	120'		60	 			1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	532	532	I	т		н
		:     H	228':	228'	В	(H)	: 011 :	044	H		6281	: 628	1 23	ш
ļ	B	а.	240	240	 		428	428	   ED	м	049	649 :	н	н
	В :	B		B	. 332	: 332			. I		I	H	: 7201	726'
		 H	: ··	! ! ! ! H	320'	320'	ω.	; ; ;		 	æ	 	: 732	732

TAB. 9

COMPTEUR MOD4 ASYNCHRONE

# 3.3. Les bascules synchrones

Une bascule synchrone est un bistable à une entrée privilégiée (horloge) dont les sorties ne changent que juste après le front montant ou bien le front descendant de cette entrée. On appellera ce front, front d'excitation de la bascule. Le signal horloge est périodique et tel que le circuit puisse se stabiliser entre deux fronts d'excitation successifs.

Nous simulons ci-dessous le fonctionnement d'une bascule D synchrone. A remarquer que les sorties changent juste après le front montant de l'horloge, son front descendant ne provoquant aucun changement des sorties. Par contre, la bascule J-K de l'exemple 11 a le front d'excitation négatif.

Exemple 15: Soit la bascule D, SN7474 (31) de la Fig. 20 dont les portes sont des NAND ayant m = 11 ns,n = 7 ns,  $d_m = d_n = 5$ ns. On veut calculer la réponse  $Q = \begin{vmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{vmatrix}$  à partir de l'état global  $L^0 = (B,I,I,I,I,B)$  pour l'entrée  $U(t) = \begin{vmatrix} C \\ d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50.80'+150.180' \\ 0.100' \end{vmatrix}$ 

Le tableau  $\underline{10}$  donne les résultats obtenus par application de l'algorithme B'.

On trouve :  $Q_1 = 68 \cdot 175'$   $Q_2 = 75' + 168$ 

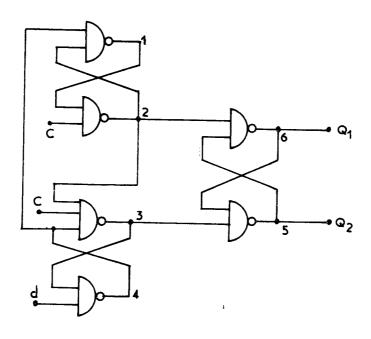


Figure 20

				<del>.</del>	. <b></b>		
		: <sup>B</sup> :	50	: 80°	: B	: 150	
d	: B	: 0 :	I	: <sup>I</sup>	: 100'	: B	: B
1	: B	: B 18	: I	: I	: <sup>1</sup> 118'	: B	: B
2	I	: I	<b>1</b> 57 ¹	: .B 91	: : <sup>I</sup>	: : <sup>I</sup>	: : :
						: . <b>I</b> 157'	:
4	: I	: <sup>7 7'</sup>	. B	: B	: 111	: I	: <sup>I</sup>
5(Q <sub>2</sub> )	: I	: I	: <b>1</b> 75'	: B	: B	: <sup>B</sup> 168	: <sup>I</sup>
6(Q <sub>1</sub> )	: B	: B	₽ 68	: : :	: : I		
	d  1  2  3  4  5(Q <sub>2</sub> )	d : B  1 : B  2 : I  3 : I  4 : I  5(Q <sub>2</sub> ) : I	c : B : B : B : d : B : O : C : C : C : C : C : C : C : C : C	c : B : B : 50  d : B : O : I  1 : B : B 18 : I  2 : I : I : I 57'  3 : I : I : I  4 : I : I 7' : B  5(Q <sub>2</sub> ) : I : I : I 75'	c	c B B 50 80' B  d B O I I 100'  1 B B 18 I I I 118'  2 I I I 757' B 91 I  4 I 77' B B B 111  5(Q <sub>2</sub> ) I I I 755' B B	c : B : B : 50 : 80' : B : 150  d : B : O : I : I : 100' : B  1 : B : B : B : I : I : I : I : I : I : I

TAB. 10

On peut également décrire le fonctionnement réel des bascules synchrones par un tableau de transition ou un système d'équations sous la condition suivante :

### CONDITION 2:

Soit  $t_0$  l'instant où se produit le front de l'horloge qui excite la bascule, alors les autres entrées doivent avoir une valeur stabilisée pendant un intervalle de temps  $[t_0-\Delta t_1, t_0+\Delta t_2]$  où les paramètres  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$  dépendent des caractéristiques technologiques de la bascule (voir par ex. (31)).

Notation : Etant donné que seulement les fronts montants ou bien les fronts descendants d'une horloge activent le circuit, on la représentera par une suite de réels périodique C, dont les éléments correspondent aux fronts d'excitation :  $C = (C_0, C_1, \dots, C_i, \dots)$   $C_i \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+$ 

$$C_{i+1} = C_i + r$$

$$U_{C}(t) = (U_{C}^{0}, U_{C}^{1}, ..., U_{C}^{i}, ...)$$
où
$$U_{C}^{i} = \begin{cases} e_{C} & \text{si } U(C_{i}) = 1 \\ B & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 16 : Pour C = (0,10,20,30,40,50,...)
$$U(t) = e_5 e'_{15} + e_{18} e'_{35} + e_{47}$$

$$U_C(t) = (B,e_{10},e_{20},e_{30},e_{40},e_{50},e_{60},...)$$

On étend la définition précédente pour une Q.B.T. générale

$$U(t) = \begin{vmatrix} U_1(t) \\ \vdots \\ U_n(t) \end{vmatrix} : \underline{L'\acute{e}chantillonnage} \ de \ U(t) \ suivant \ une \ horloge$$

$$C = (C_0, C_1, \dots, C_i, \dots) \text{ sera la suite générale.} \qquad \qquad U_C(t) = \begin{pmatrix} U_{\cdot 1_C}(t) \\ \vdots \\ U_{\cdot n_C}(t) \end{pmatrix})$$

Exemple 17: Pour 
$$U(t) = \begin{bmatrix} e_5 & e'_{37} + e_{73} \\ e_7 & e'_{22} + e_{35} & e'_{62} \end{bmatrix}$$

et C = (0,10,20,30,40,50,...)

$$U_{C}(t) = (\begin{vmatrix} B \\ B \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} e_{10} \\ e_{10} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} e_{20} \\ e_{20} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} e_{30} \\ B \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} B \\ e_{40} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} B \\ e_{50} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} e_{70} \\ B \end{vmatrix}; \end{vmatrix}$$

$$; \begin{vmatrix} e_{80} \\ B \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} e_{90} \\ B \end{vmatrix}; \dots )$$

N.B. Dans le cas où la seule entrée du circuit est son horloge  $C = (C_0, C_1, \dots, C_i, \dots)$  l'échantillonnage de cette entrée sera par définition  $C_i = (e_{C_0}, e_{C_1}, \dots, e_{C_i}, \dots)$ .

Les deux exemples suivants montrent comment à l'aide du formalisme introduit on peut décrire le fonctionnement des bascules synchrones.

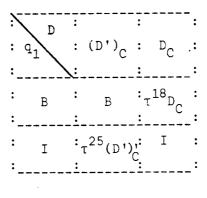
Exemple 18 : La réponse de la sortie q<sub>1</sub> de la bascule D dont le fonctionnement est simulé dans l'exemple 15 est décrit par le tableau 11 ou bien par l'équation

$$Q_1 = L_+ (D_0) (\tau^{18} (D_C) + q_1) + L_+ ((D')_C) q_1 \tau^{25} ((D')_C)$$

(On pose :  $L_+$  (B) = B )

où q<sub>1</sub> est défini dans {I,B}

 $\mathbf{Q}_{1}$  est défini dans {I,B}  $\mathbf{U} \left\{ \mathbf{e}_{i} \right\}_{i \in \mathbb{R}} \mathbf{U} \left\{ \mathbf{e}_{i}^{!} \right\}_{i \in \mathbb{R}}$ 



TAB. 11

Pour le même exemple on donnait :

$$C = (50,150,250,350,...)$$

$$D = e_0 e'_{100}$$

Pour calculer la réponse à partir du tableau ou de l'équation on évalue  $\mathbf{D}_{\mathbf{C}}$  et  $(\mathbf{D}^*)_{\mathbf{C}}$ 

$$D_{C} = (e_{50}, B, B, B, ...)$$

$$(D')_{C} = (B, e_{150}, e_{250}, e_{350},...)$$

Pour état initial 
$$q_1 = B$$
,  $D_C = e_{50}$ ,  $(D')_C = B$ 

On a 
$$Q_1^1 = L_+ (e_{50}) \tau^{18} e_{50} = e_{68}$$

Pour 
$$q_1 = I$$
,  $D_C = B_1(D')_C = e_{150}$  on a :

$$Q_1^2 = L_+ (e_{150}) \tau^{25} e_{150}^{\dagger} = e_{175}^{\dagger}$$

Pour 
$$q_1 = B$$
,  $D_C = B$ ,  $(D')_C = e_{250}$ 

on a : 
$$Q_1^3 = B$$

D'où la réponse : 
$$Q_1^1 \propto Q_1^2 \propto Q_1^3 \propto \ldots = e_{68} \propto e_{175}^{\prime} \propto B \propto B \ldots = e_{68} e_{175}^{\prime}$$

Exemple 19 : La réponse de la sortie  $q_1$  de la bascule J-K dont le fonctionnement est simulé à l'exemple  $\underline{11}$  est donnée par le tableau de transition TAB.  $\underline{12}$ , ou par l'équation :

$$Q_1 = q_1 (L_+ ((K')_C)) + L_+ (K_C) \tau^{34} (K_C)' + q_1' L_+ (J_C) \tau^{27} J_C$$

:₹			:	<del></del>	:	<del></del>	:	
:	<b>q</b> <sub>1</sub>	: (J	'K') <sub>C</sub> :	(JK') <sub>C</sub>	: (	J'K) <sub>C</sub>	: (	(JK) <sub>C</sub> :
:	В	:	В .	τ <sup>27</sup> (JK') <sub>C</sub>	:	В	τ27	(JK)
:-		: -:	:		· -:		· :	:
:	I	:	I :	I	:τ <sup>3</sup>	4(J!K) <sub>C</sub>	:τ <sup>34</sup>	(JK)¦ :
:_		÷	:		:		:	;

TAB. 12

Nous calculons  $q_1$  à partir de l'état initial  $q_1$  = I pour J =  $e_0$   $e_{100}^{\prime}$  +  $e_{200}$   $e_{300}^{\prime}$  +  $e_{500}$ 

$$K = e_{100} e'_{300} + e_{400} e'_{500}$$

$$\begin{array}{l} {\rm C} = (70,\ 170,\ 270,\ 370,\ 470,\ 570,\ 670,\dots) \\ {\rm comme\ dans\ 1'exemple\ 18,\ \grave{a}\ 1'aide\ de\ 1'équation\ précédente.} \\ {\rm On\ a:} \\ {\rm J_C} = ({\rm e_{70}},\ {\rm B,\ e_{270}},\ {\rm B,\ E,\ e_{570}},\ {\rm e_{670}},\ {\rm e_{770}},\dots) \\ {\rm K_C} = ({\rm B,\ e_{170}},\ {\rm e_{270}},\ {\rm B,\ E,\ e_{470}},\ {\rm B,\ B,\ B,\dots}) \\ {\rm (K')_C} = ({\rm e_{70}},\ {\rm B,\ B,\ e_{370}},\ {\rm B,\ e_{570}},\ {\rm e_{670}},\ {\rm e_{770}},\dots) \\ {\rm (K')_C} = ({\rm e_{70}},\ {\rm B,\ B,\ e_{370}},\ {\rm E,\ e_{570}},\ {\rm e_{670}},\ {\rm e_{770}},\dots) \\ {\rm Pour\ q_1} = {\rm I}\ \ ,\ {\rm J_C}^1 = {\rm e_{70}}\ ,\ {\rm K_C}^1 = {\rm B\ on\ a:} \ \ {\rm Q_1^1} = {\rm I} \\ {\rm Pour\ q_1} = {\rm I}\ \ ,\ {\rm J_C}^2 = {\rm B}\ ,\ {\rm K_C}^2 = {\rm e_{170}}\ {\rm on\ a:} \ \ {\rm Q_1^3} = {\rm e_{297}} \\ {\rm Pour\ q_1} = {\rm I}\ \ ,\ {\rm J_C}^5 = {\rm B}\ ,\ {\rm K_C}^5 = {\rm e_{470}}\ {\rm on\ a:} \ \ {\rm Q_1^5} = {\rm e_{504}} \\ {\rm Pour\ q_1} = {\rm B}\ \ ,\ {\rm J_C}^6 = {\rm e_{570}}, {\rm K_C}^6 = {\rm B\ on\ a:} \ \ {\rm Q_1^6} = {\rm e_{597}} \\ {\rm Pour\ q_1} = {\rm I}\ \ ,\ {\rm J_C}^7 = {\rm e_{670}}, {\rm K_C}^7 = {\rm B\ on\ a:} \ \ {\rm Q_1^6} = {\rm e_{597}} \\ {\rm Pour\ q_1} = {\rm I}\ \ ,\ {\rm J_C}^7 = {\rm e_{670}}, {\rm K_C}^7 = {\rm B\ on\ a:} \ \ {\rm Q_1^7} = {\rm I} \\ {\rm Pour\ q_1} = {\rm I}\ \ ,\ {\rm J_C}^7 = {\rm e_{670}}, {\rm K_C}^7 = {\rm B\ on\ a:} \ \ {\rm Q_1^7} = {\rm I} \\ {\rm Pour\ q_1} = {\rm I}\ \ ,\ {\rm J_C}^7 = {\rm e_{670}}, {\rm K_C}^7 = {\rm B\ on\ a:} \ \ {\rm Q_1^7} = {\rm I} \\ {\rm Pour\ q_1} = {\rm I}\ \ ,\ {\rm J_C}^7 = {\rm e_{670}}, {\rm K_C}^7 = {\rm B\ on\ a:} \ \ {\rm Q_1^7} = {\rm I} \\ {\rm Pour\ q_1} = {\rm I}\ \ ,\ {\rm J_C}^7 = {\rm e_{670}}, {\rm K_C}^7 = {\rm B\ on\ a:} \ \ {\rm Q_1^7} = {\rm I} \\ {\rm Pour\ q_1} = {\rm I}\ \ ,\ {\rm J_C}^7 = {\rm e_{670}}, {\rm K_C}^7 = {\rm B\ on\ a:} \ \ {\rm Q_1^7} = {\rm I} \\ {\rm Pour\ q_1} = {\rm I}\ \ ,\ {\rm J_C}^7 = {\rm e_{670}}, {\rm K_C}^7 = {\rm B\ on\ a:} \ \ {\rm Q_1^7} = {\rm I} \\ {\rm Pour\ q_1} = {\rm I}\ \ ,\ {\rm I}\ \ ,\$$

La réponse :

$$Q_1 = I \alpha e_{204}' \alpha e_{297} \alpha I \alpha e_{504}' \alpha e_{597} \alpha I = e_{204}' + e_{297}' e_{504}' + e_{597}'$$

IV - 45 -121-

# 4. SIMULATION DES SYSTEMES SEQUENTIELS SYNCHRONES

## 4.1. Algorithme

Les systèmes séquentiels synchrones étant un cas particulier des systèmes séquentiels asynchrones, on peut utiliser les algorithmes  $\underline{B}$  et  $\underline{B'}$  pour simuler leur fonctionnement.

Une simplification importante en est cependant possible si on suppose que le circuit a le temps de se stabiliser entre deux fronts d'excitations successifs de l'horloge.

Soit un circuit séquentiel synchrone dont  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$  sont des V.B.T. associées aux entrées (l'horloge exceptée). Associons la V.B.T.  $Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$ 

à l'ensemble des sorties de ses éléments de mémorisation synchrones.

Nous supposerons que le fonctionnement de ces derniers est donné, soit par leur schéma logique et les paramètres dynamiques de leurs portes, soit par un système d'équations ou un tableau de transitions comme dans le paragraphe précédent. (Dans ce cas, on doit supposer que la condition 2 doit être vraie pour les éléments de mémorisation).

#### ALGORITHME C :

Soit U(t) la Q.B.T. déterminant les entrées et  $C = (C_1, C_2, ..., C_i)$  l'horloge.

1) Calculer la D.T.S. 
$$(U(t)) = (U^1, U^2, \dots U^k)$$
 et  $U^0 = \begin{bmatrix} U_1^0 \\ \vdots \\ U_m^0 \end{bmatrix}$   $\varepsilon \{I, B\}^m$  tel que  $U_i^0 = I$  si  $VS^-(U_i(t)) = 1$ , sinon  $U_i^0 = B$ 

Numéroter les équipotentielles du circuit (entrées et horloge exceptées) : 1,2,...r et associer à leur ensemble une liste de r Q.B.T. simples L =  $(f_1, \ldots, f_r)$ .

Choisir 
$$Q^0 = \begin{bmatrix} q_1^0 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$
  $\varepsilon \{I,B\}^n$  et calculer  $L^0 = (f_1^0, \dots f_n^0)$  pour

horloge inactif à partir de  $Q^0$  et  $U^0$ .

Faire i := 1

IV - 46

-122-

- 2) Calculer  $Q^{i} = \begin{vmatrix} q^{i} \\ \vdots \\ q^{i} \\ \vdots \\ q^{n} \end{vmatrix}$  à partir de  $L^{0}$ ,  $U^{i}$  et C et ensuite L à partir de  $U^{i}$  et  $Q^{i}$ . Garder  $Q^{i}$ .
- 3) Si i < k alors faire ( $L^0 := (V_1, V_2, \dots v_r)$  où  $V_j = I$  si  $VS^+(f_j^i) = 1$ ,  $V_j = B$  sinon; i := i+1; aller à 2)); sinon s'arrêter. La réponse réelle est  $Q^1 \propto Q^2 \propto \dots \propto Q^k$ .
- N.B. Dans cet algorithme, pour avoir un critère d'arrêt commode, on suppose que l'horloge s'arrête après l'échantillonnage de la réponse du circuit dûe à U<sub>k</sub>. Si cette supposition n'est pas faite, il faut changer de critère d'arrêt puisqu'on risque de ne pas trouver une réponse périodique éventuelle.
- Exemple 20 : On veut simuler le fonctionnement du compteur mod13 (32) de la Fig. 20 dont le fonctionnement idéal est décrit par le tableau 13. Les portes sont des NAND avec m = 11 ns n = 7 ns et les bascules sont des J-K SN7470 (31) dont le fonctionnement est décrit par les équations :

$$\dot{Q} = q(L_{+} (K')_{C} + L_{+} (K_{C}) \tau^{18}(K_{C})') + q' L_{+} (J_{C}) \tau^{27}(J_{C})$$

$$\bar{Q} = q L_{+} (K_{C}) \tau^{27} (K_{C}) + q' (L_{+} ((J')_{C}) + L_{+} (J)_{C} \tau^{18} (\bar{J}_{C})'$$

(où  $\overline{Q}$  est la réponse de la sortie qui dans la bascule idéal correspond au complément de Q).

On donne C = (50, 150, 250, 350, 450, ...)

Nous simulons son fonctionnement à partir de l'état  $Q_1^0 = B$   $Q_2^0 = B$   $Q_3^0 = B$   $Q_4^0 = B$  dans le tableau <u>14</u>.

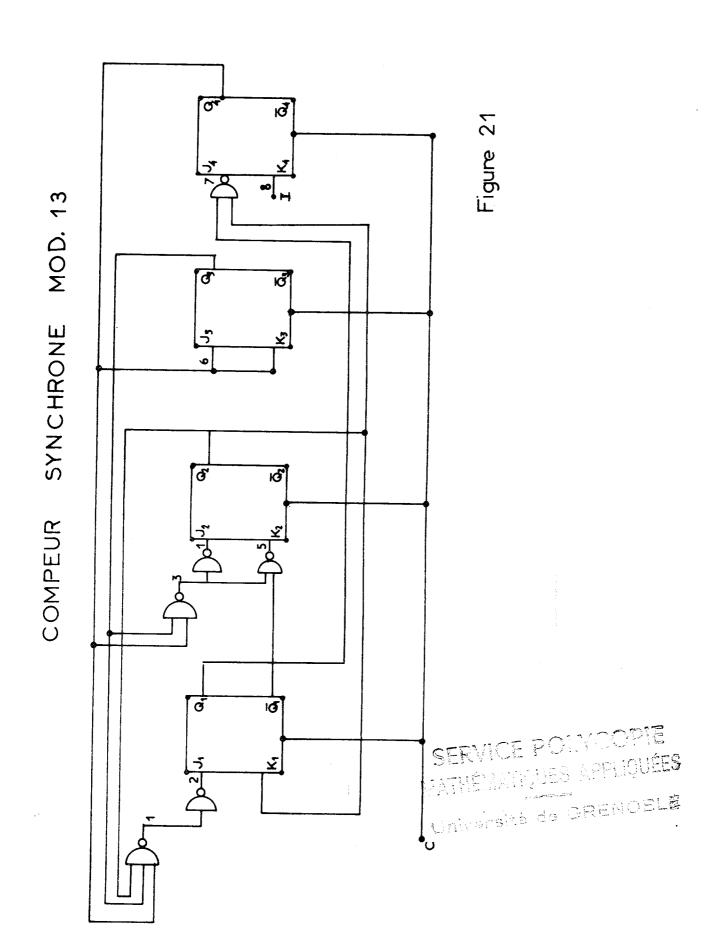


TABLEAU 13

	Ε'	TAT	PRI	ESENT		ETA	T.	SUIV	ANT	
:	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Q <sub>4</sub>	<del>-</del> -	 Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Q <sub>4</sub>	:
:	0	0	0	0	 	0	0	0	1	: _:
:	0	0	0	1	:	0	0	1	0	:
:	0	0	1	0	:	0	0	1	1	:
:	0	0	1	1	:- :	0	1	0	0	·-: :
:	0	1	0	0	 :	0	1	0	1	·-:
:	0	1	0	1	:	0	1	1	0	: :
:	0	1	1	0	:- :	0	1	1	1	: :
:	0	1	1	1	: :	1	0	0	0	:
:	1	0	0	0	:- :	1	0	0	1	: :
:	1	0	0	1	:	1	0	1	0	:
:	1	0	1	0	:-	1	0	1	1 	: :
:	1	0	1	1	:	1	1	0	0	:
:	1	1	0	0	:	0	0	0	0	: :
٠				· <del>-</del>	•		: ' -			•

MOD13	
SYNCHRONE	
COMPTEUR	

		. 20	150	250	350	05+ :	. 550	. 650	750	850	256 :	1050	1150	1250
į	а 	 ብ	м 	м 	മു	я		 B	777	н	H	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,		1266'
									. 7681			B	В	1277
	м 		177	hard.	368		577	н	768	 B	: 977		1168	B.
	м ·	: 77	. 168'	: 277	368		: 568	: 677	. 768'	: 877	. 968	: 1077	. 1168'	. B
		н .		I	H	H	I	. 684	779	H		H	н	
			<u>м</u>		B	 B		695	786'	B			 B	B
	н	<u> </u>	 	. 284	379	H	H	: 684	: 779		H .:	: 1084'	. 1179	1 ::
	<u>я</u>	В	В	295	386'	B	_ m	695	786,	æ		1095	1186	
	B	m		295	386'	да 	В.	695				I		12841
6(J <sub>3</sub> ,K <sub>3</sub> )	eg	77	168	277	368'	. 477	568'	677	768	877	1896	1077	1168	
	н	н	т	H		I	I .:	H	H	н		н	11841	: 1279
	H	H	, ,	-	H	I	H	П.,	H	H	l .	I	.	.   .

TAB. 14

# 4.2. Modèles decrivant le fonctionnement d'un circuit sequentiel synchrone

On peut décrire le fonctionnement d'un circuit séquentiel synchrone à l'aide d'un tableau de transition ou d'un système d'équations si les conditions <u>1</u> et <u>2</u> sont remplies. Le tableau de transition comportera 2<sup>n</sup> colonnes si le circuit a n entrées (l'horloge exceptée). En fait, dans le cas synchrone ce ne sont pas les fronts des variations des entrées qui influencent l'évolution du circuit mais les valeurs portées par certaines équipotentielles à l'instant de l'échantillonnage.

Toute évolution se produit juste après le front d'excitation de l'horloge qui sera utilisée comme référence pour déterminer les sorties.

Exemple 21: Nous donnons le tableau de transition et le système d'équations décrivant le fonctionnement du compteur mod13 de l'exemple précédent. La variable x du tableau 14 est définie dans l'ensemble  $\begin{pmatrix} e_{C_0}, e_{C_1}, e_{C_1}, \dots \end{pmatrix}$  où  $C = \begin{pmatrix} C_0, C_1, \dots, C_i, \dots \end{pmatrix}$ 

A partir du tableau de transition on trouve les équations :

$$Q_{1} = q_{1}' q_{2} q_{3} q_{4} \quad \tau^{27}x + q_{1} q_{2} q_{3}' q_{4}' \tau^{18}x' + q_{1} q_{2}'$$

$$Q_{2} = q_{2}' q_{3} q_{4} \quad \tau^{27}x + q_{2} q_{4} (q_{1}' q_{3} + q_{1} q_{3}') \tau^{18}x' + q_{1}' q_{2} (q_{3}' + q_{4}')$$

$$Q_{3} = (q_{1}' + q_{2}') \quad (q_{3}' q_{4} \tau^{27}x + q_{3} q_{4} \tau^{18}x' + q_{3} q_{4}')$$

$$Q_{4} = q_{4}' (q_{1}' + q_{2}') \tau^{27}x + (q_{1}' + q_{2}') q_{4} \tau^{18}x'$$

TABLEAU 14

· q <sub>1</sub> q <sub>2</sub>	q <sub>3</sub> q <sub>4</sub>	: x :
: B B B	В	: B, B, B, 27 x :
: B B B	I	: B, B, τ <sup>27</sup> x, τ <sup>18</sup> x' :
: B B I	B 	: B, B, I, τ <sup>27</sup> x :
: : B B I :	I 	: Β, τ <sup>27</sup> x, τ <sup>18</sup> x', τ <sup>18</sup> x':
: B I B	В	: B, I, B, τ <sup>27</sup> x ::
: B I B	I	: B, I, $\tau^{27}$ x, $\tau^{18}$ x':
: B I I	В	: B, I, I, τ <sup>27</sup> x :
: B I I :	I	: τ <sup>27</sup> x, τ <sup>18</sup> x', τ <sup>18</sup> x',τ <sup>18</sup> x'
: I B B	В	: : Ι, Β, Β, τ <sup>27</sup> χ
: :I B B	I	: : Ι, Β, τ <sup>27</sup> x, τ <sup>18</sup> x'
: I B I	В	: : Ι, Β, Ι, τ <sup>27</sup> χ
: I B I	I	: $1, \tau^{27}x, \tau^{18}x', \tau^{18}x'$
: I I B	В	:τ <sup>18</sup> x', τ <sup>18</sup> x', Β, Β

## CHAPITRE V

#### RESEAUX DE TRANSITION

# 1) RELATIONS DE TRANSITION

#### 1.1. Définition

<u>Définition 1</u>: Etant donné un ensemble P, une relation de transition sur P, consistera en la donnée d'une application  $f: P \times P \to R^{\dagger} \times V_{+}$ .

On appellera l'ensemble support, P = {  $p_1, p_2, \dots p_n$  } , ensemble de places.

Soit une relation de transition f :  $P \times P \rightarrow R^{\dagger} \times V_{+}$ , sur P.

Alors le doublet  $f(p_i,p_j) = (k_{ij},\psi_{ij})$  où  $k_{ij} \in R^+, \psi_{ij} \in V_+$  sera

interprété de la façon suivante :

"Une transition de p<sub>i</sub> à p<sub>j</sub> peut se produire tous les instants t tels que  $\psi_{ij}$  (t) = 1; la durée de cette transition sera de  $k_{ij}$  unités de temps".

#### 1.2. Composition des relations de transition

Considérons l'ensemble  $T_- \times V_+$ . Comme tout élément de  $T_-$  est un endomorphisme de  $V_+$  pour la multiplication on peut définir le produit semi-direct :  $(s_1,x_1) \star (s_2,x_2) = (s_1 \ 0 \ s_2, \ x_1 \ (s_1 \ x_2))$ 

où  $s_1, s_2 \in V_-$ ,  $x_1, x_2 \in V_+$ .

# <u>Lemme 1</u> : ( $T_{-} \times V_{+}$ , $\star$ ) est un monoide.

Soient  $(p_j,p_j)$  et  $(p_j,p_m)$  deux couples de places d'une relation de transition et  $(k_{ij},\psi_{ij})$ ,  $(k_{jm},\psi_{jm})$  les doublets décrivant les transitions correspondantes.

Alors le produit semi-direct :

$$(\tau^{-k}_{ij}, \psi_{ij}(t)) \star (\tau^{-k}_{jm}, \psi_{im}(t)) = (\tau^{-(k_{ij}+k_{jm})}, \psi_{ij}(t) \psi_{jm}(t+k_{ij}))$$

nous décrit par le doublet  $(k_{ij} + k_{jm}, \psi_{ij}(t) \psi_{jm}(t + k_{ij}))$  la transition composée de  $p_i$  à  $p_m$  en passant par  $p_j$ . En fait,  $k_{ij} + k_{ij}$  est le retard total que prend la transition composée, et la Q.B.T.

 $\psi_{ij}(t)$   $\psi_{jm}(t+k_{ij})$  nous donne par les intervalles où elle vaut 1 les instants auxquels on peut quitter  $p_i$  pour en atteindre  $p_m$  (en passant par  $p_j$  après  $k_{ij}$  +  $k_{jm}$  unités de temps). Le résultat précédent se généralise facilement :

Soit  $(p_i, p_i)$   $(p_i, p_i)$ ....  $(p_i, p_i)$  une chaine de doublets de  $P \times P$ .

Alors le produit semi-direct.

$$(\tau^{-k}i_1, i_2, \psi_{i_1}, i_2)$$
  $(\tau^{-k}i_2, i_3, \psi_{i_2}, i_3)$   $(\tau^{-k}i_1, i_2)$   $(\tau^{-k}i_1, i_2, i_3)$   $(\tau^{-k}i_1, i_2, i_3)$   $(\tau^{-k}i_1, i_2, i_3)$   $(\tau^{-k}i_2, i_3)$   $(\tau^{-k}i_3, i_3)$   $(\tau^{-k$ 

<u>Lemme 2</u>: Soit (s,x)  $\epsilon$  T\_ x V\_ (donc s x  $\epsilon$  P-)

Alors l'application  $\chi$ : T\_ x V\_  $\rightarrow$  P\_ définie par  $\chi$  (s,x) = x s est un épimorphisme du monoïde (T\_ x V\_ , \*) sur (P\_ , 0).

-130-

Etant donné que tous les doublets (k; B) sont interprétés de la même façon : "une transition ne peut pas se produire" il en résulte que l'utilisation du monoïde (P-,0) simplifie le calcul de la composée d'une relation de transition.

La composée d'une relation de transition et sa fermeture peuvent être calculées par des méthodes données dans (25) en utilisant comme algèbre de renseignement (G\_, +, 0).

# 2) PROPAGATION DES MARQUES DANS UN RESEAU DE TRANSITION

#### 2.1. Définitions

Définition 2 : Un réseau de transition sera par définition le triplet (X,P,f) où : X : ensemble fini de V.B.T, X =  $\{x_1,x_2,\dots x_n\}$ , appellées variables de contrôle ou variables d'entrée. On désignera par X également la

P : ensemble fini d'objets appelés places (P = {  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_n$  } )

f: une application f:  $P \times P \rightarrow R^{\dagger} \times \mathcal{F}(X)$  où  $\mathcal{F}(X)$  est l'ensemble des P.B.T. de X.

Au triplet (X,P,f) on associera un réseau dont P est l'ensemble d'articulations et la branche  $(p_i,p_j)$  porte  $f(p_i,p_j)$ . Il est d'ailleurs clair que pour chaque X appartenant à  $V_+$  un réseau de transition définit une relation de transition sur P.

Les réseaux de transition servent à modéliser un grand nombre de systèmes dont les états correspondent aux places et les conditions dans lesquelles le système évolue d'un état à l'autre dans un certain temps, aux transitions.

Un problème intéressant à voir est l'évolution du système à partir d'une place ou d'un ensemble de places. Pour pouvoir suivre cette évolution on supposera qu'à l'instant 0 chaque place initiale  $p_i$  émet un créneau de largeur unitaire C. Alors le créneau  $C\psi_{ij}(t)$  se

V - 4 -131-

propage vers la place  $p_j$  pour l'atteindre avec un retard  $k_{ij}$ . La propagation à partir de  $p_j$  se fait de la même façon. Nous appellerons ces signaux <u>marques</u>.

La propagation des marques dans un réseau de transition peut être suivie de la façon suivante :

On associe à chaque place  $p_i$  du réseau de transition une V.P.T.  $q_i$  telle que : soit

q<sub>i</sub>(t) est la somme booléenne des marques au moment où leurs fronts descendants atteignent la place p<sub>i</sub>. On dira alors que les V.B.T. q<sub>i</sub> sont définies par rapport aux places d'arrivée. soit,

 $q_i(t)$  est la somme booléenne des marques au moment où leurs fronts montants atteignent la place  $p_i$ . On dira alors que les variables B.T.  $q_i$  sont définies par <u>rapport aux places de départ</u>.

D'après la définition d'une marque comme un créneau, on peut constater que :

- 1) Une marque est un créneau de largeur variable en général, qui peut disparaître pendant sa propagation. Pour que les marques aient toujours une largeur multiple de l'unité de temps, il faut que les retards des transitions soient des entiers.
- 2) Un réseau de transition dont les marques ne périssent pas pendant leur propagation pour chaque X  $\epsilon$  V, sera appelé <u>défini</u>.

Il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau de transition soit défini est que

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}(X) = e_{0}, \text{pour } 1 \le i \le n, (où f(p_{i}, p_{j}) = (k_{ij}, \psi_{ij}(X))).$$

V - 5 -132-

3) A partir d'une place plusieurs transitions sont possibles. Un réseau de transition qui est <u>défini</u> et tel que à partir de chaque place une seule transition est possible à tout instant pour chaque valeur de X, sera appelé <u>déterministe</u>.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau de transition soit déterministe est que :

 $\psi_{\mathrm{ik}}$  (X)  $\psi_{\mathrm{ij}}$  (X) = B ,k  $\neq$  j ,1  $\leq$  i  $\leq$  n et qu'il soit défini.

- 2.2. Solution d'un système décrivant la propagation des marques
  - 2.2.1. Méthode itérative
- Lemme 3 : L'équation Q = AQ + Q<sub>0</sub> où A  $\epsilon$  G<sub>M</sub>, A =  $\|a_{ij}\|$  et Q<sub>0</sub> est une Q.B.T. générale, a une solution unique, A<sup>\*</sup> Q<sub>0</sub>, si W( $a_{ij}$ ) > 0 pour chaque élément  $a_{ij}$  de A.

DEMONSTRATION : Résultat connu (voir par ex. (27)).

Soit un réseau de transition (X,P,f).

Si on suppose que les variables q<sub>i</sub> associées à p<sub>i</sub> sont définies par rapport aux places d'arrivée, les valeurs des q<sub>i</sub> qui décrivent le déplacement des marques pour une configuration initiale sont données par le système:

 V - 6 -133-

Alors le système précédent s'exprime sous forme matircielle :  $Q = A^T \ Q + Q_0 \ , \ où \ A^T \ est \ la \ transposée de \ A.$ 

où 
$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$
  $Q_0 = \begin{bmatrix} q_{10} \\ \vdots \\ q_{n0} \end{bmatrix}$ 

La solution de ce dernier est :  $Q = (A^T)^* Q_0$ 

On peut calculer la solution itérativement en posant :

$$Q_{i} = A^{i} Q_{0}$$
 pour  $i = 1, 2, ...$ 

Ce qui donne :  $Q = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i$ 

# Exemple $\underline{1}$ : Soit le réseau de transition de la $\underline{\text{Fig. 1}}$

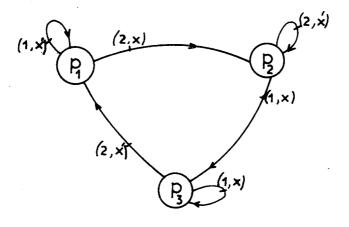


Figure 1

Le système décrivant les déplacements des marques est :

$$q_1 = \tau x' \tau q_1 + \tau^2 x' \tau^2 q_3 + q_{10}$$

$$q_2 = \tau^2 x \tau^2 q_1 + \tau^2 x' \tau^2 q_2 + q_{20}$$

$$q_3 = \tau \times \tau q_2 + \tau \times \tau q_3 + q_{30}$$

Pour 
$$x = e_1' + e_2' + e_4' + e_7' + e_8'$$
,  $q_{10} = e_1'$ ,  $q_{20} = B$ ,  $q_{30} = B$ 

On a :

$$\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1' \\ B \\ B \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} (e_2 e_3' + e_5 e_8' + e_9)\tau & B & (e_3 e_4' + e_6 e_9' + e_{10})\tau^2 \\ (e_2 e_3' + e_4 e_6' + e_9 e_{10}')\tau^2 & (e_3 e_4' + e_6 e_9' + e_{10})\tau^2 & B \\ B & (e_1 e_2' + e_3 e_5' + e_8 e_9')\tau & (e_1 e_2' + e_3 e_5' + e_8 e_9')\tau \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{vmatrix}$$

D'où on obtient par itération :

$$\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1' \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_2e_3' \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_2 \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_3 \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_3 \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_3 \\ B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_4 \\ B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B$$

Finalement: 
$$q_1 = e_1' + e_6 e_8'$$

$$q_2 = e_2 e_3' + \frac{e_9 e_{10}'}{\tau^0 r^2}$$

$$q_3 = e_3 e_5'$$

Note: Le fait que la solution ne peut comporter que des Q.B.T. stabilisées ou périodiques est justifié dans les pages suivantes.

2.2.2. Solution par élimination successive des variables

Soit 
$$\begin{vmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{10} \\ \vdots \\ q_{n0} \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{11}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{vmatrix}$$

Un système décrivant le déplacement des marques dans un réseau de transition. On peut appliquer la méthode de solution par élimination successive des variables proposée dans (26).

La méthode consiste à obtenir à partir du système initial Q =  $Q = A^{(0)} Q + Q_0^{(0)}$  des systèmes  $Q = A^{(k)} Q + Q_0^{(k)}$  tels que :

$$\mathbf{A}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \tau^{0} & \mathbf{B} \tau^{0} & \mathbf{a}_{1,k+1}^{(k)} & \cdots & \mathbf{a}_{1,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B} \tau^{0} & \mathbf{B} \tau^{0} & \mathbf{a}_{n,k+1}^{(k)} & \mathbf{a}_{nn}^{(k)} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_{0}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{10}^{(k)} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{n0}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Qui sont définis par :

$$q_{i0}^{(k)} = q_{i0}^{(k-1)} + a_{ik}^{(k-1)} \circ (a_{kk}^{(k-1)}) \circ q_{k0}^{(k-1)}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + a_{ik}^{(k-1)} \circ (a_{kk}^{(k-1)}) \circ a_{kj}^{(k-1)}$$

La solution est :  $Q = Q_0^{(n)}$ 

# Exemple 2 : Soit à résoudre le système

$$q_1 = b_1 + a_{11} q_1 + a_{12} q_2$$

$$q_2 = b_2 + a_{21} q_1 + a_{22} q_2$$

On en obtient successivement :

$$q_1 = a_{11}^{*} b_1 + (a_{12} + a_{11} 0 (a_{11})^{*} 0 a_{12}) q_2$$

$$q_2 = b_2 + a_{21} + a_{21}$$

2e élimination :

$$q_{1} = a_{11}^{*} 0b_{1} + (a_{11})^{*} 0 \ a_{12}^{*} 0 \ (a_{22}^{*} + a_{21}^{*} 0 \ (a_{11})^{*} 0 \ a_{12}^{*})^{*} \ (b_{2}^{*} + (a_{21}^{*} 0 \ (a_{11}^{*})^{*} b_{1}^{*}))$$

$$q_{2} = (a_{22}^{*} + a_{21}^{*} 0 \ (a_{11}^{*})^{*} 0 \ a_{12}^{*})^{*} \ 0 \ (b_{2}^{*} + a_{21}^{*} 0 \ (a_{11}^{*})^{*} b_{1}^{*})$$

# 2.3. Calcul de A\*

La méthode de solution par éliminations successives est également une méthode de calcul formel de la fermeture d'une matrice A de  $G_M$ , telle que  $W(a_{\frac{1}{2}})>0$ .

En fait, les solutions à l'exemple précédent se mettent sous la forme :

$$\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

où  $c_{11} = a_{11}^{*} + a_{11}^{*} \circ a_{12}^{*} \circ (a_{22}^{*} + a_{21}^{*} \circ (a_{11}^{*})^{*} \circ a_{12}^{*})^{*} \circ a_{21}^{*} \circ a_{11}^{*}$   $c_{12} = a_{11}^{*} \circ a_{12}^{*} \circ (a_{22}^{*} + a_{21}^{*} \circ (a_{11}^{*})^{*} \circ a_{12}^{*})^{*}$   $c_{21} = (a_{22}^{*} + a_{21}^{*} \circ (a_{11}^{*})^{*} \circ a_{12}^{*})^{*} \circ a_{21}^{*} \circ (a_{11}^{*})^{*}$   $c_{22} = (a_{22}^{*} + a_{21}^{*} \circ (a_{11}^{*})^{*} \circ a_{12}^{*})^{*}$ 

Alors: 
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

On peut donc exprimer la fermeture  $A^{\bigstar}$  (A  $\epsilon$   $G_M$ ,  $W(a_{ij}) > 0$ ) à partir des fermetures des éléments  $a_{ij}$  de A. Dans le cas où les coefficients des  $a_{ij}$  sont des Q.B.T. stabilisées et leurs exposants des rationnels, on peut la calculer par des méthodes données dans le chapitre II. Alors l'image par  $A^{\bigstar}$  d'une Q.B.T. générale stabilisée aura des composantes qui seront des Q.B.T. stabilisées ou périodiques.

D'où la proposition

<u>Proposition 1</u>: Soit  $A = \|a_{ij}\|$  une matrice de  $G_n$ ,  $W(a_{ij}) > C$ , telle que tous ses éléments ont comme coefficients des G.B.T. stahilisées et comme exposants des rationnels positifs.

Alors

- a) On peut calculer  $\textbf{A}^{t}$  en effectuant un nombre fini d'itérations
- b) Toute image pour A<sup>t</sup>, d'une Q.B.T. générale stabilisée, aura des composantes qui seront des Q.B.T. stabilisées ou périodiques.

V - 11 -138-

#### 3) EXPRESSIONS REGULIERES BOOLEENNES

<u>Définition 3</u>: Soit X une V.B.T. et  $F_X = \{f \ \tau^k; \ f \ \epsilon \ \mathbf{f}(X), \ k \ \epsilon \ R^t \ U \ \{0\}\}, \mathbf{f}(X)$ l'ensemble des P.B.T. de X.

Une Expression Régulière Booléenne (E.R.B.) sur un ensemble de V.B.T. X sera toute expression que l'on peut obtenir à partir de  $F_{\mathbf{x}}$  en effectuant un nombre fini de fois les opérations : composition (0), addition ( $\dot{\mathbf{+}}$ ) et fermeture ( $\mathbf{x}$ ).

<u>Définition 4</u>: Soit (X,P,f) un réseau de transition,  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  et A, D tels que A  $\subseteq$  P, D  $\subseteq$  P.

On dit que le réseau de transition (X,P,f) reconnaît l'E.R.B., R(X), si pour chaque  $X_0$  appartenant à  $V_+^m$  la Q.B.T. R ( $X_0$ ) e' définit par les intervalles où elle vaut 1, les instants d'arrivée des marques à toute place  $p_i$ ,  $p_i$   $\epsilon$  D pour conditions initiales :

$$q_{i0} = e_i' \iff p_i \in A$$

Nous appellerons A (resp. D) ensemble des places initiales (finales). L'analogie entre les expressions régulières et les E.R.B. est évidente pour ce qui précède. C'est pourquoi nous nous limitons à énoncer deux propositions établissant l'équivalence entre la notion de de l'E.R.B. et du réseau de transition; pour leurs démonstrations voir (27) page 215.

- Proposition 2: Toute solution d'un système décrivant les transitions des marques d'un réseau de transition (X,P,f) est une E.R.B. sur X.
- <u>Proposition 3</u>: Pour toute E.R.B. sur X on peut trouver un réseau de transition qui la reconnait.

V - 12 -139-

Exemple 3 : Soit le réseau de transition de la Fig. 2 dont p<sub>1</sub> est la place initiale et p<sub>2</sub> est la place finale. On cherche l'E.R.B. R(x) que le réseau reconnaît.

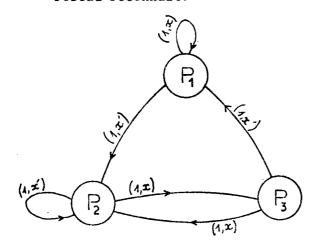


Fig. 2

Le système décrivant les déplacements d'une marque à partir de  $p_1$  est

$$q_1 = e_1' + \tau x \tau q_2 + \tau x' \tau q_3$$

$$q_2 = \tau x' \tau q_1 + \tau x' \tau q_2 + \tau x \tau q_3$$

$$q_3 = \tau x \tau q_2$$

D'où on obtient :

$$q_1 = e_1' + \tau x \tau q_1 + \tau x' \tau^2 x \tau^2 q_2$$

$$q_2 = \tau x' \tau q_1 + \tau x' \tau q_2 + \tau x \tau^2 x \tau^2 q_2$$

En résolvant par rapport à  $\mathbf{q}_1$  la première équation et substituant dans la deuxième, on a :

$$q_{2} = \tau x' \tau ((\tau x \tau)^{\frac{1}{2}} e_{1}^{1}) + (\tau x' (\tau^{2} x \tau)^{\frac{1}{2}} 0 (\tau^{2} x' \tau^{3} x \tau^{3}) + \tau x' \tau + \tau x \tau^{2} x \tau^{2}) q_{2}$$

D'où

$$\mathbf{q}_2 = (\tau \mathbf{x'} \ (\tau^2 \mathbf{x} \tau)^{\bigstar} \ 0 \ (\tau^2 \mathbf{x'} \tau^3 \mathbf{x} \tau^3) \ \dot{+} \ \tau \mathbf{x'} \tau \ \dot{+} \ \tau \mathbf{x} \tau^2 \mathbf{x} \tau^2)^{\bigstar} \ 0 \ (\tau \mathbf{x'} (\tau^2 \mathbf{x} \tau)^{\bigstar} \ 0 \ \tau) \mathbf{e}_1^{\prime}$$

Par conséquent :

$$R(x) = (\tau x'(\tau^2 x \tau)^{\frac{1}{2}} (\tau^2 x' \tau^3 x \tau^3) + \tau x' \tau + \tau x \tau^2 x \tau^2)^{\frac{1}{2}} 0 \quad (\tau x'(\tau^2 x \tau)^{\frac{1}{2}} 0 \tau)$$

Une méthode indirecte de résolution d'un système d'équations décrivant les déplacements d'une marque consiste à considérer le réseau de transition que ce système représente. Alors la Q.B.T.  $V_{ij}$  qui donne les instants auxquels une marque arrive de la place iniitale  $p_i$  à la place finale  $p_j$  est obtenue de la façon suivante :

- Soit  $\alpha$  l'opérateur qui correcpond à l'ensemble des chemins qui mènent de p à p sans passage intermédiaire par p .
- Soit  $\beta$  l'opérateur qui correspond à l'ensemble des chemins qui mènent de  $p_{\mbox{\scriptsize j}}$  à  $p_{\mbox{\scriptsize j}}.$

Alors 
$$V_{ij} = (\beta^* \circ \alpha) e_1$$

L'exemple suivant illustre la méthode :

Exemple 4: Pour l'exemple précédent, pour 
$$p_i = p_1$$

$$p_j = p_2 \text{ on a :}$$

$$\alpha = \tau x'\tau \cdot 0 \cdot (\tau x\tau)^* = \tau x' \cdot (\tau^2 x\tau)^* 0 \cdot \tau$$

$$\beta = \tau x'\tau + \tau x\tau^2 x\tau^2 + \tau x'\tau \cdot 0 \cdot ((\tau x\tau)^* 0 \cdot ((\tau x\tau)^* 0 \cdot (\tau x\tau))) =$$

$$= \tau x'\tau + \tau x\tau^2 x\tau^2 + \tau x' \cdot (\tau^2 x\tau)^* 0 \cdot (\tau^2 x'\tau^3 x\tau^3)$$

D'où:

$$(\beta^{\bigstar}0\alpha)e_{1}^{!} = (\tau x'\tau + \tau x\tau^{2}x\tau^{2} + \tau x' (\tau^{2}x\tau)^{\bigstar}0 (\tau^{2}x'\tau^{3}x\tau^{3}))^{\bigstar}0 (\tau x' (\tau^{2}x\tau)^{\bigstar}\tau)e_{1}^{!}$$

(Cf. exemple 5)

Notation : Soit R(X) une E.R.B sur X, X = 
$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \\ x_m \end{bmatrix}$$
  
Nous représenterons par  $G_R$  l'ensemble :  $G_R = \{R(X^0); \ \forall \ X^0 \in V_+^m \}$ 

<u>Définition 5</u>: Soient  $R_1(X_1)$  et  $R_2(X_2)$  deux expressions R.B.

On dit que  $R_1(X_1)$  est inférieure ou égale à  $R_2(X_2)((R_1(X_1) \subseteq R_2(X_2)))$  si pour  $\forall g_1 \in G_{R_1}$ ,  $\exists g_2$ ,  $g_2 \in G_{R_2}$ :  $g_1 \in g_2$ . Si  $R_1(X_1) \subseteq R_2(X_2)$ 

et  $R_2(X_2) \subseteq R_1(X_1)$  on dit que  $R_1(X_1)$  et  $R_2(X_2)$  sont équivalentes.

Les E.R.B. ont l'inconvénient principal des E.R. ordinaires : on ne sait pas décider si deux E.R.B. quelconques sont équivalentes.

En fait, si on calcule, pour l'exemple 3, et par la méthode suggérée en page 140, l'E.R.B. R(x) telle que  $q_3$  = R(x) e', on trouve :

$$\alpha = \tau x (\tau^2 x' \tau)^{\bigstar} 0 (\tau^2 x' (\tau^3 x \tau)^{\bigstar} \tau^2)$$

$$\beta = \tau x (\tau^{2} x' \tau)^{*} 0 (\tau^{2} x \tau^{2}) + \tau x (\tau^{2} x' \tau)^{*} 0 (\tau^{2} x' (\tau^{3} x \tau)^{*} 0 \tau^{3} x' \tau^{3})$$

D'où

$$R(x) = \beta^{*}_{0} \alpha = (\tau x (\tau^{2} x' \tau)^{*}_{0} (\tau^{2} x \tau^{2}) + \tau x (\tau^{2} x' \tau)^{*}_{0} (\tau^{2} x' (\tau^{3} x \tau)^{*}_{0})$$

$$0 \tau^{3}_{x'} \tau^{3})^{*}_{0} (\tau x (\tau^{2}_{x'} \tau)^{*}_{0} (\tau^{2}_{x'} (\tau^{3}_{x} \tau)^{*}_{\tau^{2}}))$$

On a d'ailleurs, par le système de l'exemple 3 :

 $q_3 = \tau x \tau q_2$  d'où on trouve :

$$R(x) = \tau x \tau \ 0 \ (\tau x' \ (\tau^2 x \tau)^{*} 0 \ (\tau^2 x' \tau^3 x \tau^3) + \tau x' \tau + \tau x \tau^2 x \tau^2)^{*} 0$$

$$0 \ (\tau x' \ (\tau^2 x \tau)^{*} 0 \tau)$$

Les deux E.R.B. sont équivalentes.

Soit (X,P,f) un réseau de transitions, 
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_m \end{bmatrix}$$
, A et D, deux

ensembles de places iniitales et finales et R(X) l'expression R.B. que ce réseau reconnaît. Alors R(X) définit le quintuplet (X,P,f,A,D) comme une application  $V_+^m \rightarrow V_+$ .

Exemple 5 : Soit le réseau de transition donné en exemple 3 avec  $A = p_1 D = p_2$ Nous calculons  $q_2(t)$  pour  $x = e_1' + e_2 e_3' + e_4 e_5' + e_7$ 

$$R(x) = \beta^{*} \ 0 \ \alpha = \tau x' \ (\tau^{2} x \tau)^{*} 0 \ (\tau^{2} x' \tau^{3} x \tau^{3}) + \tau x' \tau + \tau x \tau^{2} x \tau^{2})^{*} 0$$

$$0 \ (\tau x' \ (\tau^{2} x \tau)^{*} 0 \ \tau)$$

On calcule d'abord  $\beta(e_1^*)$ :

$$(\tau^2 x \tau)^*$$
  $(e_1 e_2') = e_1 e_2' + e_2 e_3'$ 

$$\tau x' (\tau^2 x \tau)^* (e_1 e_2') = e_2 e_3'$$

On calcule  $\beta$ :

$$\beta = (e_2 e_3' + e_4 e_5' + e_6 e_8') \tau + e_9 \tau^2 + e_7 e_8' \tau^3 + (e_4 e_5' + e_6 e_7') \tau^4$$

$$\beta (e_2 e_3^{\dagger}) = e_6 e_7^{\dagger}$$

$$(\beta \ 0 \ \beta) \ (e_2 \ e_3^{\dagger}) = \beta \ (e_6 \ e_7^{\dagger}) = e_7 \ e_8^{\dagger}$$

$$(\beta^2 \ 0 \ \beta^2) \ (e_2 \ e_3') = \beta.(e_7 \ e_8') = e_9 \ e_{10}'$$

$$(\beta \ 0 \ \beta^3) \ (e_2 \ e_3') = \beta \ (e_9 \ e_{10}') = e_{11} \ e_{12}'$$

$$(\beta \ 0 \ \beta^4) \ (e_2 \ e_3') = \beta \ (e_{11} \ e_{12}') = e_{13} \ e_{14}'$$

D'où 
$$q_2 = (\tau^0 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + .... +) e_2 e_3' =$$

$$= e_2 e_3' + e_6 e_8' + e_9 e_{10}' + e_{11} e_{12}' + \dots = e_2 e_3' + e_6 e_8' + e_8$$

$$+ \frac{e_9 e_{10}^{\prime}}{\tau^0 \oplus \tau^2}$$

VI - 1 -143-

## CHAPITRE VI

#### RESEAUX DE TRANSITION CODES - EQUATIONS SEQUENTIELLES

Introduction: Dans ce chapitre on essaie de mettre en évidence les liaisons entre la notion de l'équation séquentielle et celle du réseau de transition codé. Cette approche a été inspirée par la méthode de Wang, présentée dans (10) et a certaines analogies avec les méthodes proposées dans (11) et (12). Néanmoins, l'utilisation de l'algèbre B.T. nous a permis de voir comment certaines propriétés des réseaux de transition déterminent la nature des solutions des équations séquentielles et inversement. Le résultat principal est qu'à toute équation séquentielle de n'importe quel ordre fini, on peut associer un réseau de transition (sans la transformer en augmentant le nombre des variables). L'ensemble des chemins de longueur infinie détermine l'ensemble des solutions.

#### 1) PRELIMINAIRES

Au cours de deux chapitre qui suivent :

- a) L'algèbre B.T. utilisée, sera l'algèbre synchrone  $V_s$  définie dans  $V_+$ .
- b) On supposera que les réseaux de transition sont à retards unitaires; c'est à dire que toute transition s'effectue en une unité de temps. Le retard unitaire étant donc sous entendu, on définira un réseau de transition par (X,P,f) ou  $f: PxP \rightarrow \mathcal{F}(X)$  Nous désignerons par  $f_{ij}(X)$  le P.B.T.  $f(p_i,p_j)$  et nous supposerons que le système d'équation décrivant les transitions d'une marque sont toujours écrites par rapport aux places de départ.

$$q_{i}(t+1) = \sum_{j=1}^{n} f_{ji}(X) q_{j}(t), 1 \le i \le n$$

Soit A la matrice n x n telle que  $a_{ij} = f_{ij}(X)$ 

Alors le système précédent s'écrit en notation matricielle

$$Q(t+1) = A^{T_t} + Q(t)$$

Etant donné que  $Q(t) = \tau Q(t+1) + Q_0$  on en obtient :

$$Q(t+1) = A^{T} + \tau Q(t+1) + A^{t} + Q_{0}$$

$$D^{\dagger}ou Q(t) = Q_0 + \tau((A^{\dagger}\tau)^{*} (A^{\dagger} + Q_0)) (a VI)$$

Pour une valeur  $X_0 \epsilon \ V_s^m$  de X et à partir d'une place initiale on peut ainsi chercher le chemin (ou les chemins) d'une marque.

REMARQUE 1 : En particulier un chemin de longueur infinie (s'il existe) sera représenté par un vecteur Q $^{\infty}$   $\epsilon$   $V_{s}^{n}$  tel que :

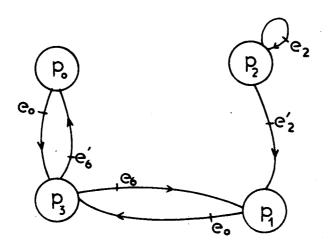


Fig.1

On trouve :

$$A^{T} = \begin{bmatrix} B & B & B & e_{6}' \\ B & B & e_{2}' & e_{6} \\ B & B & e_{2} & B \\ e_{0} & e_{0} & B & B \end{bmatrix} ; Q_{0} = \begin{bmatrix} B \\ B \\ e_{1}' \\ B \end{bmatrix}$$

$$Q^{\infty} = \begin{bmatrix} e_3 e_4^{\dagger} & \bullet & e_5 e_6^{\dagger} \\ e_1 e_2^{\dagger} & \bullet & \frac{e_7 e_8^{\dagger}}{\tau^{0} \bullet \tau^2} \\ e_1^{\dagger} & e_4^{\dagger} e_5^{\dagger} \\ e_2^{\bullet} & \bullet & \tau^{0} \bullet & \tau^2 \end{bmatrix}$$

REMARQUE 2 : Il est clair qu'un réseau de transition correspond à un semi automate (automate dont tous les états sont observables) dont la fonction de transition  $\delta$  est donnée par

$$\delta(q_i, X_b) = \{q_j; f_{ij}(X_b) = 1\}$$

# 2) EXPRESSIONS SEQUENTIELLES DE PREMIER ORDRE PAR RAPPORT A CHAQUE VARIABLE

2.1. L'équation : 
$$g(X,Y,\tau^{-1}Y) = e_0$$

#### 2.1.1. Réseau associé

Définition 1 : Toute expression booléenne de la forme

$$g(y_1(t), y_1(t+1), y_2(t), y_2(t+1), ..., y_r(t), y_r(t+1), X)$$

où 
$$Y(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_{\hat{r}}(t) \end{vmatrix}$$
 est une variable B.T.

$$X(t) = \begin{vmatrix} x_1^{(t+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(t)} \end{vmatrix}$$
 est un paramètre B.T.

sera appellée <u>expression</u> séquentielle de premier ordre, par rapport à chaque variable (ou d'ordre total r, celui-ci étant la somme des ordres partiels).

#### Notation:

Nous désignons par  $\bar{V}_r$  le vecteur binaire à r composantes qui représente (en binaire ) le chiffre décimal V et par  $m_i(Y) = Y_{\bar{V}}^{\times}$  (ce dernier étant le condensé multiplicatif de Y par rapport à  $\bar{V}_r$  (1)).

Proposition: Soit  $g(X,Y,\tau^{-1} Y)$  une expression séquentielle de ler ordre par rapport à chaque V.B.T.  $y_i$ . Alors on peut la mettre sous la forme canonique disjonctive

où les Cij(X) sont des P.B.T. de X.

DEMONSTRATION: Les termes sont disjoints et  $\Sigma m_i(Y) \tau^{-1}m_j(Y) = e_0$  $0 \le ij \le 2^{r-1}$ 

<u>Définition 2</u>: Un système d'équations séquentielles de premier ordre par rapport à chaque V.B.T. est un ensemble d'équations  $U_{i}(X,Y,\tau^{-1}Y) = V_{i}(X,Y,\tau^{-1}Y)$ .

REMARQUE 3 : Un tel système peut se ramener à une équation de la forme :  $g(X,Y,\tau^{-1}\ Y) \ = \ e_0$ 

<u>Proposition 2</u>: Tout système d'équations booléennes récurrentes, de n'importe quel ordre fini peut être réduit à une équation séquentielle de la forme :  $g(X,Y,\tau^{-1}|Y)=e_0$ .

DEMONSTRATION : voir (10) .

 $\frac{\text{Définition 3}}{\text{O} \leqslant ij \leqslant 2^{r-1}}: \text{Soit } g(X,Y,\tau^{-1}|Y) = \sum_{ij} C_{ij}(X) \text{ } m_i(Y) \text{ } \tau^{-1} \text{ } m_j(Y)$ 

une expression séquentielle mise sous forme canonique.

Alors, on peut y associer de façon biunivoque le réseau de transition (X,P,f) où

 $P = {m_{i}(Y)}^{2^{r-1}}$  et  $f_{ij}(X) = C_{ij}(X)$ .

On appellera ce réseau, réseau de transition associé à l'expression séquentielle  $g(X,Y,\tau^{-1}Y)$ .

Souvent on confondra une expression séquentielle et son réseau associé étant donné que les deux notions sont strictement équivalentes.

Exemple 2: L'expression séquentielle  $g(x,y,\tau^{-1} y) = xy'\tau^{-1} y' + y'\tau^{-1} y + x'y \tau^{-1} y + y \tau^{-1} y \text{ correspond}$  au réseau :



#### 2.1.2. Méthode de solution

Lemme 1 : Le système d'équations 
$$\{m_i(Y) = q_i\}$$
  $2^{r-1}$   $i=0$ 

où  $\{q_i\}$   $2^{r-1}$  est tel que  $\sum_{i=0}^{r} q_i = e_0$  et  $q_i = e_0$ 

pour i#j, a une solution unique :

$$\{y_{i} = \sum_{j=0}^{2^{r}-1} \alpha_{ij} q_{j}\}$$

$$i=1$$

$$\alpha_{ij} = \{ 0 \text{ sinon} \}$$

$$\frac{\text{DEMONSTRATION}}{\text{DEMONSTRATION}}: \text{ On peut vérifier que } \{y_i = \begin{bmatrix} 2^{r-1} & & r \\ \Sigma & \alpha_{ij} & q_j \end{bmatrix} \}_{i=1}^r$$

est une solution. De plus le système est équivalent à :

$$m_0(Y) (q_0'+q_1... + q_{2^{r_1}}) + m_1(Y) (q_0+q_1'+... + q_{2^{r_1}})+...+...+$$

+ 
$$m_{2r_1}(Y) (q_0+q_1 + ... + q_{r_2-2} + q_1') = B$$

La condition d'unicité de la solution donne (15) :

Pour  $\forall i,j,0 \leqslant i,j \leqslant 2^{\underline{r}}1$ 

$$(q_1 + \ldots + q_i + \ldots + q_j + \ldots + q_{2r_1})'$$
  $(q_1 + \ldots + q_i + \ldots + q_j + \ldots + q_{2r_1}) = B$ 

Donc le lemme est vrai.

Théorème 1: Tout chemin de longueur infinie d'une marque, défini par

chemin de longueur infinite à une marque, definit par 
$$Q = \begin{vmatrix} q_{1}^{\infty} \\ \vdots \\ q_{n}^{\infty} \end{vmatrix}$$
 dans le réseau de transition associé à 
$$2^{r}-1$$

 $\sum_{ij} (X_0) m_i(Y) \tau^{-1} m_j(Y), (où X_0 \varepsilon V^m), \ nous \ définit une solution \\ 0 \leq ij \leq 2^{\frac{r}{2}}1$ 

de l'équation  $\Sigma C_{ij}(X_0)$   $m_i(Y)_{\tau}^{-1}$   $m_j$   $(Y) = e_0$  par le système  $0 \le i, j \le 2^{r}1$ 

$$\{m_i(Y) = q_i^{\infty}\}_{i=0}^{2^{r} 1}$$

Inversement, toute solution de l'équation séquentielle précédente détermine un chemin de longueur infinie dans le réseau associé.

## DEMONSTRATION : Remarquons que :

Pour i,j arbitraires  $(0 \le i,j \le 2^{r}1)$ 

$$q_i^{\infty} \tau^{-1} q_j^{\infty} = B$$
 ou bien  $q_i^{\infty} \tau^{-1} q_j^{\infty} \neq B$  Si  $q_i^{\infty} \tau^{-1} q_j^{\infty} \neq B$ 

alors  $m_j(Y)$  est un successeur de  $m_i(Y)$  dans le chemin et par conséquent  $q_i^\infty \tau^{-1} q_j^\infty < C_{ij}(X_0)$ 

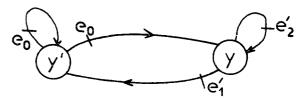
Donc la solution du système  $\{m_i(Y) = q_i^{\infty}\}_{i=0}^{2r-1}$  est bien une solution de l'équation séquentielle.

Inversement soit  $\{y_i^0\}_{i=1}^r$  une solution. Alors les  $m_i(Y^0)$  satisfont aux inégalités(b VI)sont disjoints et leur somme est  $e_0$ . Donc ils définissent un chemin de longueur infinie dans le réseau de transition associé.

Exemple 3: L'équation :  $y'\tau^{-1}y' + y'\tau^{-1}y + e_2'y\tau^{-1}y + e_1'y\tau^{-1}y' = e_0$ a comme solutions:

$$y = B$$
 et  $y = e_1$ 

Réseau associé : Fig. 2



Exemple 4 : Soit l'équation :

Fig. 2

$$\begin{aligned} & \mathbf{e}_{2} \ \mathbf{y}_{1} \ \mathbf{y}_{2}^{\mathbf{i}} \ \tau^{-1}(\mathbf{y}_{1}^{\mathbf{i}} \mathbf{y}_{2}^{\mathbf{i}}) \ + \ \mathbf{e}_{2}^{\mathbf{i}} \ \mathbf{y}_{1}^{\mathbf{i}} \ \mathbf{y}_{2}^{\mathbf{i}} \ \tau^{-1}(\mathbf{y}_{1}^{\mathbf{i}} \mathbf{y}_{2}) \ + \ \mathbf{y}_{1}^{\mathbf{i}} \ \mathbf{y}_{2} \ \tau^{-1}(\mathbf{y}_{1}^{\mathbf{i}} \mathbf{y}_{2}) \ + \\ & \mathbf{e}_{6} \ \mathbf{y}_{1} \ \mathbf{y}_{2} \ \tau^{-1}(\mathbf{y}_{1}^{\mathbf{i}} \mathbf{y}_{2}) \ + \ \mathbf{e}_{6}^{\mathbf{i}} \ \mathbf{y}_{1} \ \mathbf{y}_{2} \ \tau^{-1}(\mathbf{y}_{1}^{\mathbf{i}} \mathbf{y}_{2}^{\mathbf{i}}) \ + \ \mathbf{y}_{1}^{\mathbf{i}} \mathbf{y}_{2}^{\mathbf{i}} \ \tau^{-1}(\mathbf{y}_{1}^{\mathbf{i}} \mathbf{y}_{2}^{\mathbf{i}}) \ = \ \mathbf{e}_{0} \end{aligned}$$

Réseau associé : Fig. 1

Solution pour conditions initiales  $y_1 = e_1', y_2 = B$  (place initiale  $y_1, y_2'$ ):

$$y_1 = \frac{e_1'}{\tau^0 \cdot \bullet \tau^2}$$
  $y_2 = e_1 \cdot e_3' + e_4 \cdot e_5' + e_6$ 

 $\frac{Proposition \ 3}{\Sigma \ C_{ij}(X) \subseteq e_0}: \quad L'\'equation \ \Sigma \ C_{ij}(X_0) \ m_i(Y) \ \tau^{-1} m_j(Y) = e_0 \ n'a \ pas \ de \ solution \ si$ 

DEMONSTRATION : Evidente

2.1.3. Caractérisation des équations à partir du réseau associé

<u>Proposition 4</u>: Toute équation  $g(X,Y,\tau^{-1}Y)=e_0$ , déterministe, a une solution et une seule pour des conditions initiales précises.

DEMONSTRATION : En fait, à partir de chaque place la marque a un et un seul choix de transition.

Proposition 5: Toute équation séquentielle déterministe,

tions séquentielles résolu :

$$\tau^{-1} y_k = f_k(X, Y)$$
 1 < k < r et inversement.

D'ailleurs, la condition d'existence de solutions donne :

$$\Sigma$$
  $C_{ij}$   $m_i$  =  $e_0$  =  $\Sigma$   $(\Sigma$   $C_{ij})$   $m_i$  =  $e_0$  =>  $\Sigma$   $C_{ij}$  =  $e_0$ 

La solution unique est donnée par

$$\tau^{-1}y_k = \prod_{j \in I_k} (\Sigma \quad C_{ij} \quad m_i) = \sum_{i \in I_k} (\prod_{j \in I_k} C_{ij}) \quad m_i, \text{ où } I_k = 1'\text{ ensemble des}$$

chiffres décimaux V, tels que  $\bar{V}_n$  a sa k-ième composante égale à 0.

Inversement, étant donné le système

$$\tau^{-1}y_k = \sum_{0 \le i \le 2^{\frac{n}{2}}} \alpha_{ki} m_i \qquad 1 \le k \le r \qquad (c VI)$$

où 
$$\alpha_{ki} = \alpha_{ki}(X), m_i = m_i(Y)$$

On en déduit :

$$e_0 = \prod_{k=1}^{r} ((\sum_{i} \alpha_{ki} m_i) \tau^{-1} y_k + (\sum_{i} \alpha'_{ki} m_i) \tau^{-1} y'_k) =>$$

$$\Rightarrow \sum_{0 \le ij \le 2^{r_1}}^{m_j} (\alpha_{0i}, \alpha_{1i}, ..., \alpha_{2^{r_1}, i}) m_i(Y) \tau^{-1} m_j(Y) = e_0$$

La dernière expression séquentielle représente un réseau de transition déterministe.

Définition 5: Une équation séquentielle  $\Sigma C_{ij} m_i(Y) \tau^{-1} m_j(Y) = e_0$  sera appellée définie si le réseau associé est défini.

<u>Proposition 6</u>: Une équation séquentielle définie,  $\sum_{i,j} C_{i,j} m_i(Y) \tau^{-1} m_j(Y) = e_0$ 

est équivalente à un ensemble de systèmes d'équations récurrentes du type (c VI).

DEMONSTRATION: Voir démonstration de la proposition 5

VI - 10 -152-

Proposition 7: Une condition suffisante pour que  $\sum_{i,j} C_{i,j}(X) m_i(Y) \tau^{-1}_{m,j}(Y) = e_0$  a une solution pour chaque  $X \in V_s^m$  et à partir de chaque place initiale, est que le réseau associé soit défini.

DEMONSTRATION : En fait, à partir de chaque place une marque a au moins un choix de transition.

REMARQUE 4 : Nous n'avons pas pu trouver une C.N.S. sur les C. garantissant l'existence des solutions à partir de chaque place.

Exemple 5 : Le réseau associé à l'équation  $e_1'$  y' $\tau^{-1}$  y + y $\tau^{-1}$  y =  $e_0$  n'est pas défini.

Solutions :

Place initiale  $y' : y = e_1$ 

Place initiale  $y : y = e_0$ 

- 2.2. Opérations sur les réseaux de transition codés
  - 2.2.1. L'algèbre booléenne des réseaux de transition codés

Il n'est pas sans intérêt de considérer l'Algèbre Booléenne des Réseaux de transitions codés.

Au cours de ce travail nous avons eu connaissance de l'article de Beizer (16) sur le même sujet. Ce dernier propose la représentation d'un réseau de transition codé par un tableau semblable à un tableau de Karnough que l'on peut facilement déduire à partir de l'expression séquentielle associée. Il applique ce formalisme pour traiter le problème du test d'un réseau logique.

# <u>Définition de l'Algèbre 6</u> : Sur l'ensemble :

 $\{(x, \{m_i(y)\}_{i=0}^{2^{r}1}, f_j\}_{j}, \text{ ou sur l'ensemble des expressions séquentielles associées}$ 

-153-

Pour : 
$$R_1(X,Y) = \sum_{ij} c_{ij}^1(X) m_i(Y) \tau^{-1} m_j(Y)$$
  
 $R_2(X,Y) = \sum_{ij} c_{ij}^2(X) m_i(Y) \tau^{-1} m_j(Y)$ 

1°) Addition (+) : 
$$R_1(X,Y) + R_2(X,Y) = \sum_{ij} (c_{ij}^1(X) + c_{ij}^2(X)) m_i(Y) \tau^{-1} m_j(Y)$$

2°) Multiplication (.) : 
$$R_1$$
 (X,Y)  $R_2$  (X,Y) =  $\sum_{ij} C_{ij}^1(X) C_{ij}^2(X) m_i(Y) \tau^{-1} m_j(Y)$ 

3°) Complémentation('):(
$$R_1(X,Y)$$
)' =  $\sum_{ij} (C_{ij}^1(X))' m_i(Y) \tau^{-1} m_j(Y)$   
Relation d'ordre induit :  $R_1(X,Y) \subseteq R_2(X,Y) \iff C_{ij}^1(X) \subseteq C_{ij}^2(X)$ ,  $\forall i,j$ .

# REMARQUE 5 : Il est facile de voir que :

- 5a) Deux réseaux déterministes, éléments de l'algèbre, sont incomparables. (s'ils ne sont pas égaux).
- 5b) On peut exprimer tout réseau défini comme la somme de réseaux déterministes et inversement tout réseau déterministe comme le produit de réseaux définis.
- 5c)  $R_1$  (X,Y) C  $R_2$  (X,Y) <=> "Toute solution de  $R_1$  (X<sub>0</sub>,Y) =  $e_0$  est une solution de  $R_2$  (X<sub>0</sub>,Y) =  $e_0$  pour  $\forall$  X<sub>0</sub>  $\in$  V<sub>s</sub>"".

# 2.2.2. Le produit cartésien

L'opération du produit cartésien (20) des réseaux de transition codés s'exprime de façon assez simple par une opération entre les expressions séquentielles associées.

Définition 7: Soient 
$$G_1 = (X_1, \{m_i, (Y_1)\}_{i=0}^{2^{r}}, f_1)$$
 et  $G_2 = (X_2, \{m_i, (Y_2)\}_{i=0}^{2^{s}}, f_2)$  deux réseaux de transition codés avec  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$  (où  $Y_1, Y_2$  sont des V.B.T. générale à r et s composantes respectivement).

On définit le produit cartésien  $R_1 \times R_2$  comme le réseau de transition

$$R_1 \times R_2 = (X, \{m_i(Y)\}_{i=0}^{2^{r+s}}, f)$$
 avec

$$X = X_1 \cup X_2$$
;  $m_i(Y) = m_{i_1}(Y_1) m_{i_2}(Y_2)$ , où  $i = 2^s i_1 + i_2$ 

et f : 
$$P_1 \times P_2 \times P_1 \times P_2 \rightarrow \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2)$$

telle que : 
$$f((p_1, p_2), (p_1, p_2)) = (f_1, (p_1, p_1), f_2, (p_2, p_2))$$

 $\frac{\textit{Proposition 8}}{\textit{vement par les expressions séquentielles associées}}: \qquad \textit{Soient deux réseaux de transition codés $G_1$ et $G_2$ décrits respectivelles associées}$ 

$$R_{1}(X_{1},Y_{1}) = \sum_{0 \leq i,j \leq 2^{r_{1}}} C_{ij}(X_{1}) m_{i}(Y_{1}) \tau^{-1} m_{j}(Y_{1})$$

$$R_{2}(X_{2},Y_{1}) = \sum_{0 \leq pq \leq 2^{\frac{s}{2}}1} k_{p,q}(X_{2}) m_{p}(Y_{2}) \tau^{-1} m_{q}(Y_{2})$$

avec  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$  Alors le produit booléen des expressions  $R_1(X_1, Y_1)$ ,

 $R_2$  (X2,Y2) donne l'expression séquentielle associée au réseau  $G_1 \times G_2$ .

DEMONSTRATION :

Si on pose Y = 
$$(y_{11}, \dots y_{1r}, y_{21}, \dots y_{2s})$$
 le produit 
$$R_1(X_1, Y_1) \quad R_2(X_2, Y_2) \text{ donne} : \sum_{\substack{S, n \\ 0 \le S, n \le 2}} W_{s,n} \quad m_s(Y) \quad \tau^{-1} m_n(Y)$$

avec 
$$s = 2^{r}p+i$$
  $W_{s,n} = C_{ij} k_{pq}$ 

$$n = 2^{r}a+j$$

On peut voir que cette dernière expression est bien celle qui représente le produit cartésien des réseaux associés aux expressions  $R_1$   $(X_1,Y_1)$  et  $R_2$   $(X_2,Y_2)$ .

<u>Proposition 9</u>: Le produit cartésien de deux réseaux définis est un réseau défini.

<u>Proposition 10</u>: Le produit cartésien de deux réseaux de transition déterministes est un réseau déterministe.

DEMONSTRATION : Analogue à la précédente.

2.2.3. Projection d'un réseau de transition codé

telles que les composantes de chacune soient équivalentes par rapport à  $\pi$ . On dira alors, que Y est partitionné en deux sous-variables  $Y_1$ ,  $Y_2$  (noté Y =  $(Y_1,Y_2)$ ) et que  $Y_1$  est la projection de Y suivant  $Y_2$  (désigné par  $Y_1$  =  $P_{Y_2}$  (Y), réciproquement  $Y_2$  =  $P_{Y_1}$  (Y)).

De façon analogue, si Y =  $(Y_1, Y_2)$  on désignera par  $P_{Y_2}$  (V) l'entier qui représente la projection du vecteur  $\bar{V}_n$  suivant  $Y_2$ .

VI - 14 -156-

Inversement, étant donné Y =  $(Y_1, Y_2)$  et  $V_k$ , vecteur booléen à k composantes on désignera par  $S_n$   $(V_k)$  l'ensemble des vecteurs booléens à n composantes qui ont comme projection suivant  $Y_2$ , le vecteur  $V_k$ .

Il est facile de voir que :

$$P_{Y_{2}} (\sum_{0 \le ij \le 2^{r_{1}}} C_{ij} (X) m_{i}(Y) \tau^{-1} m_{j}(Y)) =$$

$$\sum_{0 \le r,s \le 2^{k_{1}}} P_{r,s} (X) m_{r}(Y_{1}) \tau^{-1} m_{s} (Y_{1})$$

où 
$$P_{r,s} = \sum_{i \in S_n(r)} C_{ij}(X)$$

$$j \in S_n(s)$$

$$\begin{cases} Y = (Y_1, Y_2) \\ k : Nb. \text{ de composantes de } Y_1 \end{cases}$$

REMARQUE 6: Si Y = (Y<sub>1</sub>,Y<sub>2</sub>), alors P<sub>Y<sub>1</sub></sub> (R (X,Y)) définit une partition  $\pi_1$  sur l'ensemble des coefficients {C<sub>ij</sub>}  $0 \le i,j \le 2^{n_1}$ , chaque bloc comportant  $2^{2n-2k}$  coefficients (au total  $2^{2k}$  blocs). Egalement P<sub>Y<sub>2</sub></sub> (R (X,Y)) définit une partition  $\pi_2$ , sur le même ensemble, à  $2^{2n-2k}$  blocs de cardinalité  $2^{2k}$  chacun. Le produit  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  est la partition 0 sur l'ensemble {C<sub>ij</sub>}  $0 \le i,j \le 2^{n_1}$  (voir exemple 6 page 158).

Proposition 11: Soit R (X,Y) un réseau de transition et Y =  $(Y_1,Y_2)$  une partition de Y Alors:  $P_{Y_1} (R (X,Y)) P_{Y_2} (R (X,Y)) > R (X,Y)$ 

VI - 15 -157-

 $\underline{\text{DEMONSTRATION}}: \qquad \text{Il suffit de remarquer que le coefficient de m}_{i}(Y) \ \tau^{-1} \ \text{m}_{j}(Y) \ \text{de la partie gauche de l'inégalité est le produit}:$ 

Chacune des sommes du produit contient le terme  $C_{ij}(X)$ . Donc l'inégalité est vraie.

REMARQUE 7: L'égalité se produit ssil'expression(d VI) est égale à  $C_{ij}(X)$  pour  $\forall i,j \in 2^{\frac{n}{2}}$ . Dans ce cas le réseau de transition correspondant à  $R(X,Y) = \sum_{0 \le ij \le 2^{\frac{n}{2}}} C_{ij}(X) m_i(Y) \tau^{-1} m_j(Y)$  est décomposable en parallèle et l'équation séquentielle  $R(X,Y) = e_0$  est équivalente au système  $P_{Y}(R(X,Y)) = e_0 P_{Y}(R(X,Y)) = e_0$ . On dit alors que R(X,Y) est décomposable pour la partition  $(Y_1,Y_2)$ .

La signification de la proposition 11 est la suivante : Etant donné un système séquentiel représenté par un réseau de transitions R (X,Y) (les  $y_i$  sont des variables internes) la projection  $P_{Y_2}$  (R (X,Y)) représente le "comportement" du réseau initial dont seulement les variables  $Y_1$  sont observables (Y = ( $Y_1$ , $Y_2$ )) (Cf. Beizer (16)).

Le produit  $P_{Y_1}$  (R (X,Y)).  $P_{Y_2}$  (R (X,Y)) correspond à une description "approximative" du réseau R (X,Y). L'égalité a lieu ssi  $Y_1$ ,  $Y_2$  sont mutuellement indépendants, ce qui correspond au cas de décomposition en parallèle du système initial.

Proposition 12: Un réseau de transition R (X,Y) =  $\sum_{ij} C_{ij}(X) m_i(Y) \tau^{-1} m_j(Y)$  est décomposable par rapport à toute partition de Y si  $\{C_{ij}(X)\}_{i,j}$  est un ensemble de fonctions orthogonales.

 $\frac{\text{DEMONSTRATION}}{\text{Dans ce cas l'expression(d VI)}} \text{ termes étant nuls à cause de l'orthogonalité.}$ 

Exemple 6 : Soit 
$$\Sigma$$
  $P_{r,s}$   $m_r(y_1,y_2)$   $\tau^{-1}$   $m_s(y_1,Y_2)$   $0 \le r \le 3$   $0 \le s \le 3$ 

$$\Sigma$$
 $0 \le p \le 1$ 
 $0 \le q \le 1$ 
 $p,q$ 
 $m_p(y_2)$ 
 $\tau^{-1}$ 
 $m_q(y_2)$ 

On a :

$$C_{00} = P_{00} + P_{02} + P_{20} + P_{22} \qquad k_{00} = P_{00} + P_{01} + P_{10} + P_{11}$$

$$C_{01} = P_{01} + P_{03} + P_{21} + P_{23} \qquad k_{10} = P_{20} + P_{21} + P_{30} + P_{31}$$

$$C_{10} = P_{10} + P_{30} + P_{12} + P_{32} \qquad k_{01} = P_{02} + P_{12} + P_{03} + P_{13}$$

$$C_{11} = P_{11} + P_{13} + P_{31} + P_{33} \qquad k_{11} = P_{22} + P_{23} + P_{32} + P_{33}$$

D'où:

$$\pi_{1} = (P_{00}, P_{02}, P_{20}, P_{22}; P_{01}, P_{03}, P_{21}, P_{23}; P_{10}, P_{30}, P_{12}, P_{32}; P_{11}, P_{13}, P_{31}, P_{33})$$

$$\pi_{2} = (P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}; P_{20}, P_{21}, P_{30}, P_{31}; P_{12}, P_{03}, P_{13}; P_{22}, P_{23}, P_{32}, P_{33})$$

$$\pi_{1} \cdot \pi_{2} = \text{la 0- partition sur } \{P_{r,s}\}_{\substack{0 < r < 3 \\ 0 < s < 3}}$$

<u>Lemme 2</u>: Si l'équation  $R_1(X_1,Y_1) = e_0$  n'a pas de solution à partir de la place  $m_1(Y_1)$ , alors l'équation  $R_1(X_1,Y_1)$ .  $R_2(X_2,Y_2) = e_0$  (où  $R_2(X_2,Y_2)$  est une expression séquentielle avec  $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ ) n'a pas de solution à partir de toute place codée par un monôme inférieur à  $m_1(Y_1)$ .

DEMONSTRATION: Supposons que l'équation  $R_1(X_1,Y_1)$   $R_2(X_2,Y_2)$  =  $e_0$  a une solution à partir de la place  $m_j(Y)$  (où  $Y = Y_1 \cup Y_2$ ) telle que  $m_j(Y) \subseteq m_i(Y_1)$  et que  $R_1(X_1,Y_1)$  =  $e_0$  n'a pas de solution à partir de  $m_i(Y_1)$ . Etant donné que  $R_1(X_1,Y_1)$   $R_2(X_2,Y_2)$  =  $e_0$  =>  $R_1(X_1,Y_1)$  =  $e_0$  et  $R_2(X_2,Y_2)$  =  $e_0$  et que  $R_1(X_1,Y_1)$   $R_2(X_2,Y_2)$  correspond au produit cartésien des réseaux  $R_1(X_1,Y_1)$  et  $R_2(X_2,Y_2)$  on déduit que l'équation doit avoir une solution à partir de la place  $m_i(Y_1)$ . Absurde.

Proposition 13: Soit l'équation  $R(X,Y) = e_0$  et  $Y = (Y_1,Y_2)$  une partition de Y. Si l'équation  $P_{Y_2}$   $(R(X,Y)) = e_0$  n'a pas de solution à partir de la place  $m_i(Y_1)$  alors l'équation  $R(X,Y) = e_0$  n'a pas de solution à partir de toute place  $m_j(Y)$  telle que :  $m_j(Y) \subseteq m_i(Y_1)$ .

# 3) EXPRESSIONS SEQUENTIELLES D'UNE VARIABLE D'ORDRE SUPERIEUR

Il est bien connu que l'on peut résoudre une équation séquentielle d'ordre partiel supérieur à 1 en se ramenant au cas d'une équation séquentielle d'ordre partiel 1 par rapport à chaque V.B.T. Nous proposons ici une méthode de résolution plus directe et moins encombrante.

- 3.1. Monômes Canoniques Séquentiels
- Définition 10: Une expression séquentielle d'ordre k d'une V.B.T. simple y, sera toute expression booléenne de la forme f(X,y(t), y(t+1),...y(t+k)) où X est un paramètre B.T.
- Proposition 14: Toute expression séquentielle d'ordre k d'une V.B.T.  $y, f(X, y(t), y(t+1), \dots y(t+k)), \text{a une forme canonique disjonctive}$   $\begin{matrix} k+1 \\ 2-1 \\ \Sigma \\ i=0 \end{matrix} \qquad \text{Si} \quad (X) \text{ M}_i(y) \text{ où}$   $i=0 \qquad \text{M}_i(y) = y^{\alpha_0} \tau^{-1} y^{\alpha_1} \tau^{-2} y^{\alpha_2} \dots \tau^{-k} y^{\alpha_k} \text{ avec } \overline{i}_{k+1} = \alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_k.$   $et y^{\alpha_j} = \{ y \text{ si } \alpha_j = 1 \\ y' \text{ sinon} \end{cases}$

$$\frac{\text{DEMONSTRATION}}{\text{M}_{i}(y)} : \quad \text{Il suffit de remarquer que} : \\ \text{M}_{i}(y) \text{M}_{j}(y) = \text{B}, \quad \text{pour i } \neq \text{j}, \quad 0 \leqslant \text{i,j} \leqslant 2^{k+\frac{1}{2}} \text{1} \\ \text{et} \quad \sum_{i=0}^{2^{k+\frac{1}{2}}} \text{M}_{i}(y) = \text{e}_{0}$$

On appellera  $M_{i}(y)$ , monôme canonique séquentiel d'ordre k.

<u>Définition 11</u>: On dit que la F.B.S. g(t) comporte la séquence  $\alpha_0$   $\alpha_1 \dots \alpha_n$ , où  $\alpha_i \in \{0,1\}, \text{ à partir de r, ren, si:}$   $\alpha_i = g(r+i) \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant n$ 

Par exemple la Q.B.S.  $e_1' + e_3 e_5' + e_7$  comporte la séquence 011 à partir de 2, et à partir de 6.

- <u>Proposition 15</u>: Soit  $M_i(y) = y^{\alpha_0} \tau^{-1} y^{\alpha_1} \tau^{-2} y^{\alpha_2} \dots \tau^{-k} y^{\alpha_k}$ , un monôme canonique séquentiel et  $W \in V_s$ . Alors,  $M_i(W) \neq B$  ssi W comporte une séquence égale à  $\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_k$ .
- <u>DEMONSTRATION</u>: Il suffit d'utiliser la définition d'une Q.B.S. comme une suite de 0 et de 1 (22).
- REMARQUE 8: Si  $M_1(W) \neq B$  et  $\alpha_0 = 1$ , alors  $M_1(W)$  est la Q.B.S. constituée à partir de tous les créneaux de largeur 1 de W qui sont suivis par une séquence  $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$  Si par contre  $M_1(W) \neq B$  et  $\alpha_0 = 0$  alors,  $M_1(W)$  est la F.B.S. constituée à partir de tous les créneaux de largeur 1 de W' qui sont suivis par la séquence  $\alpha_1' \alpha_2' \dots \alpha_k'$
- Exemple 7: Soit  $W = e_2 e_5' + e_6 e_7' + e_8$ Pour k = 2, on trouve:  $M_0(W) = e_1' \qquad M_1(W) = e_1 e_2' + e_5 e_6' + e_7 e_8'$   $M_2(W) = e_4 e_5' + e_6 e_7' \qquad M_3(W) = e_2 e_4' + e_8$ 
  - 3.2. Réseau associé à l'expression f(y(t), y(t+1),...y(t+k), X)
- Définition 12: Soit l'expression séquentielle  $\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} S_i(X) M_i(y)$ . On y associe un réseau de transition à  $2^k$  places que l'on désignera par les entiers  $0, 1, 2, \ldots, 2^{k-1}$ , ayant comme matrice d'incidence la matrice  $\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{2^k y 2^k}$  définie par :

VI - 20

Pour 
$$0 \le i \le 2^{k-1} = 1$$
  $a_{ij} = S_j$ , si  $j = 2i$  ou  $j = 2i + 1$ , sinon  $a_{ij} = B$   
Pour  $2^{k-1} \le i \le 2^{k} = 1$ ,  $a_{ij} = S_{j+2} = 1$ , si  $j = i - 2^{k-1} = 1$  ou  $j = i - (2^{k-1} = 1)$ , sinon  $a_{ij} = B$ 

Exemple 8 : Pour k = 1, k = 2 et k = 3 on obtient les matrices.

REMARQUE 9 : Le réseau de transition associé à une expression séquentielle d'une V.B.T. d'ordre k,a la propriété suivante :

A partir d'une place représentée par l'entier décimal r tel que  $\bar{r}_k = \alpha_1 \ \alpha_2, \ldots, \ \alpha_k$  on peut atteindre deux places u et v dont  $\bar{u}_k = \alpha_2, \ldots \ \alpha_k$  1 et  $\bar{v}_k = \alpha_2, \ldots \ \alpha_k$  0 par des branches portant respectivement  $s_k$  et  $s_k$  avec  $\bar{v}_{k+1} = \alpha_1 \ \alpha_2, \ldots \ \alpha_k$  1 et  $\bar{v}_{k+1} = \alpha_1 \ \alpha_2, \ldots \ \alpha_k$  0.

Par conséquent, si on part d'une place  $r^1$  avec  $\bar{r}_k^1 = \alpha_1 \dots \alpha_k$  et on atteint successivement les places  $r^2$ ,  $r^3$ ,...  $r^k$ . Ces places sont telles que le premier élément de  $\bar{r}_k^i$  soit égal à  $\alpha_i$ .

VI - 21 -163-

Pour ce qui précède il résulte que le réseau de transitions associé à une expression séquentielle d'ordre k est isomorphe au graphe des transitions de l'automate (registre à décalage) obtenu en mettant en série k retards unitaires Fig. 3.

Exemple 9: On donne le réseau de transition associé à une expression séquentielle pour k = 2 et k = 3.0n a remplacé les indices par les nombres binaires correspondants pour mieux montrer comment ils sont construits (Fig. 4).

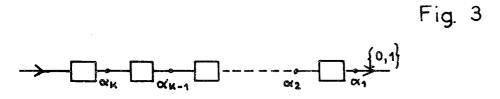
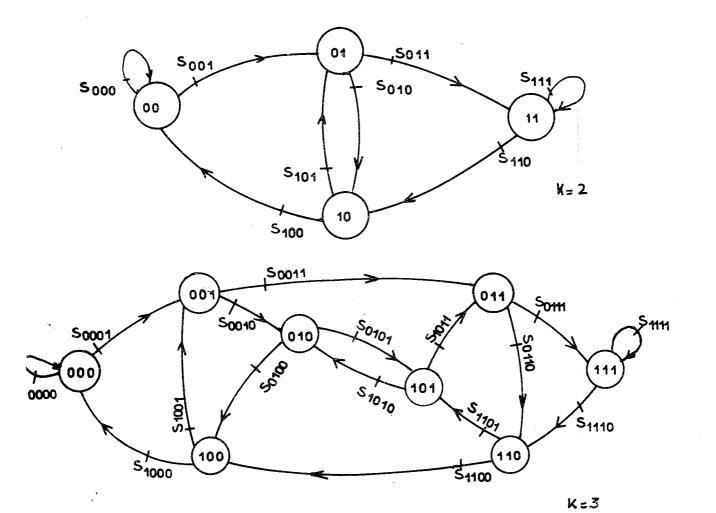


Fig. 4



3.3. Solution de l'équation 
$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} S_i M_i(y) = e_0$$

Théorème 2: Soit 
$$Q^{\infty} = \begin{vmatrix} q_0^{\infty} \\ \vdots \\ q_{2^{k-1}}^{\infty} \end{vmatrix}$$
 un chemin de longueur infinie du réseau associé  $2^{k+\frac{1}{2}}$ 

à l'expression séquentielle  $\sum_{i=0}^{S_iM_i(y)}, S_i \in V_s$ . Alors l'équation,

Inversement toute solution de cette équation définit un chemin de longueur infinie sur le réseau associé.

DEMONSTRATION : Soit I = (r<sup>1</sup>,r<sup>2</sup>,..., r<sup>m</sup>,...) un chemin de longueur infinie donné comme une suite de places du réseau de transition associé et W la Q.B.S :

 $\label{eq:weights} \begin{array}{lll} \textbf{W} = \alpha_0^{\textbf{i}} & \textbf{e}_1^{\textbf{i}} + \alpha_0^2 & \textbf{e}_1 & \textbf{e}_2^{\textbf{i}} + \alpha_0^3 & \textbf{e}_2 & \textbf{e}_3^{\textbf{i}} + \dots + \alpha_0^m & \textbf{e}_{m-1} & \textbf{e}_m^{\textbf{i}} + \dots & \textbf{où} & \alpha_0^{\textbf{i}} & \textbf{est} \\ \textbf{le premier \'el\'ement de $\vec{r}_k^{\textbf{i}}$.} \end{array}$ 

On va démontrer que W est une solution, c'est à dire  $\texttt{M}_{\texttt{i}}(\texttt{W}) \ \underline{\texttt{C}} \ \texttt{S}_{\texttt{i}} \ , \ \forall_{\texttt{i}} \ , \ \texttt{0} \leqslant \texttt{i} \leqslant \texttt{2}^{k+\frac{1}{2}} \texttt{1}$ 

Supposons que  $i_{k+1} = \beta_0 \beta_1 \dots \beta_k$ 

Si W ne comporte pas la séquence  $\beta_0$   $\beta_1 \cdots \beta_k$ , alors  $M_i(W) = B$  (et l'inégalité est vraie).

Si W comporte la séquence  $\beta_0$   $\beta_1 \dots \beta_K$ , alors, le chemin comporte une séquence de places successives dont les premiers éléments de code sont successivement  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,...,  $\beta_k$ . Par la remarque 8 cette séquence de places ne peut commencer que par la place codée  $\beta_0\beta_1 \dots \beta_{k-1}$  qui a comme successeur par  $S_i$  la place codée  $\beta_1\beta_2 \dots \beta_k$ , Fig. 5.



# Figure 5

Donc par la remarque 7 :  $M_{i}(W) \subseteq S_{i}$ 

Inversement, soit W une solution  $(M_i(W) \subseteq S_i, 0 \le i \le 2^{k+\frac{1}{2}}1)$  alors. elle nous détermine un chemin de longueur infinie.

Par la remarque 7, si  $M_i(W) \neq B$  avec  $\bar{i}_{k+1} = \alpha_0 \dots \alpha_k$  alors  $\mathbf{3}$  u :

- 1)  $M_{\mathbf{u}}(\mathbf{W}) \neq \mathbf{B}, \mathbf{où} \ \bar{\mathbf{u}}_{k+1} = \alpha_1 \dots \alpha_k$  1 ou bien  $\bar{\mathbf{u}}_{k+1} = \alpha_1 \dots \alpha_k$  0.
- 2) Tout créneau de  $M_{i}(W)$  est immédiatement suivi par un créneau de  $M_{i}(W)$ .

Soit  $M_{i}(W)$  tel que  $e'_{i} \subseteq M_{i}(W) \subseteq S_{i}$ .

Prenons la place dont le code est  $\alpha_0 \dots \alpha_{k-1}$  comme place initiale du chemin. Puisque  $e_1' \subseteq M_i(W)$ , il existe  $u(\bar{u}_{k+1} = \beta_0 \ \beta_1 \dots \beta_k)$  tel que  $e_1 \ e_2' \subseteq M_u(W)$  et  $\beta_i = \alpha_{i+1}$  pour  $i = 0, \dots, (k-1)$ . Par le fait que W est une solution on a  $M_u(W) \subseteq S_u$  et  $\alpha_1 \ \alpha_2 \dots \alpha_k$  est la 2eme place du chemin. On peut calculer les autres places par le même processus. Le chemin est de longueur infinie car la somme des  $M_j(W)$  est égale à  $e_0$ .

# Exemple 10 : Soit à résoudre l'équation :

$$e'_{1}$$
 y'  $\tau^{-1}$  y'  $\tau^{-2}$  y  $\tau^{-3}$  y +  $e_{2}$   $e'_{5}$  y'  $\tau^{-1}$  y  $\tau^{-2}$  y  $\tau^{-3}$  y' +

+  $e_{1}$  y  $\tau^{-1}$  y  $\tau^{-2}$  y'  $\tau^{-3}$  y +  $e'_{1}$  y'  $\tau^{-1}$  y'  $\tau^{-2}$  y  $\tau^{-3}$  y' +

+  $(e'_{1} + e_{2})$  y'  $\tau^{-1}$  y  $\tau^{-2}$  y'  $\tau^{-3}$  y +  $(e_{1} e'_{2} + e_{3})$  y  $\tau^{-1}$  y  $\tau^{-2}$  y  $\tau^{-3}$  y'=

=  $e_{0}$ 

Le réseau associé :

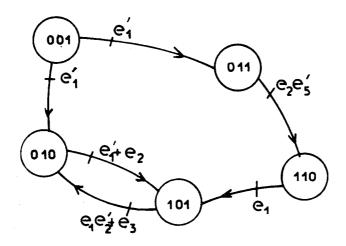


Fig 6

Solutions à partir de la place 001 (ce qui correspond à la condition initiale  $y_{03} = e_2 e_3^*$ ):

$$y = \frac{e_2 e_3'}{\tau^0 + \tau^2}$$
 et  $y = e_2 e_3' + \frac{e_3 e_4'}{\tau^0 + \tau^2}$ 

Solution à partir de la place 010 (ce qui correspond à la condition initiale  $y_{03} = e_1 e_2'$ ) :

$$y = \frac{e_1 e_2'}{\tau^0 \oplus \tau^2}$$

# Proposition 17:

Soit 
$$\sum_{i=0}^{2^{k+1}-1} S_i M_i(y) = \sum_{\alpha_i \in \{0, 1\}} \alpha_0, \alpha_1 \cdots \alpha_k M_{\alpha_0, \alpha_1} \cdots \alpha_k (y) = e_0$$

une équation séquentielle d'ordre k par rapport à y. Alors elle est équivalente à une équation séquentielle résolue,

$$\tau^{-k}$$
  $y = \sum_{i=0}^{2^{k}-1} C_{i} M_{i}(y)$ , ssi le réseau associé est déterministe.

DEMONSTRATION: On peut mettre l'équation donnée sous la forme :

$$\alpha_{i} \in \{0,1\}^{S} \alpha_{0} \cdots \alpha_{k-1}, 1^{M} \alpha_{0} \cdots \alpha_{k-1}$$
 (y)  $\tau^{-k} y + 1$ 

+ 
$$\sum_{\alpha, \epsilon \in \{0,1\}} s_{\alpha_0} \cdots \alpha_{k-1}, 0 M_{\alpha_0} \cdots \alpha_{k-1}$$
 (y)  $\tau^{-k}$  y' =  $e_0$ 

Pour qu'il existe une solution unique il est nécessaire et suffisant que (15) :

$$S_{\alpha_{0} \alpha_{1} \cdots \alpha_{k-1}, 1} + S_{\alpha_{0} \alpha_{1} \cdots \alpha_{k-1}, 0} = e_{0}$$

$$S_{\alpha_{0} \alpha_{1} \cdots \alpha_{k-1}, 1} + S_{\alpha_{0} \alpha_{1} \cdots \alpha_{k-1}, 0} = e_{0}$$

$$S_{\alpha_{0} \alpha_{1} \cdots \alpha_{k-1}, 1} + S_{\alpha_{0} \alpha_{1} \cdots \alpha_{k-1}, 0} = e_{0}$$

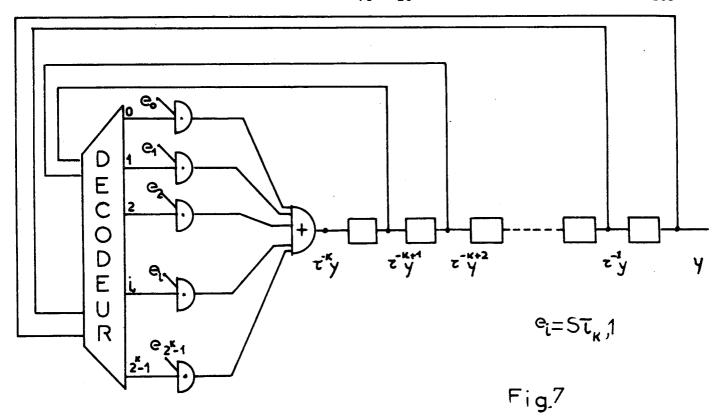
$$0 \le i \le k-1$$

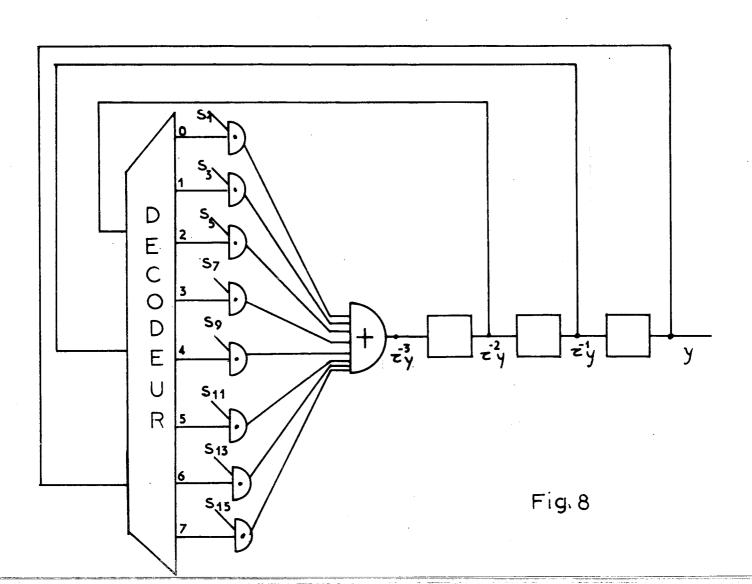
Définition 13 : On dira que l'équation  $\Sigma$  S M  $(y) = e_0$  est déterministe si son réseau associé est déterministe.

Corollaire : L'équation  $\Sigma$  S M (y) =  $e_0$  a une solution et une seule, pour des conditions initiales précisées, si elle est déterministe.

REMARQUE 9 : Toute équation déterministe représente un registre à décalage à k retards unitaires si k est l'ordre de l'équation. On peut définir une réalisation canonique pour tout registre à décalage comme le montre la figure (7). Les sorties du décodeur désignent les états du réseau de transition associé, tandis que les entrées e sont telles que : e = Sī\_k,1

Exemple 11 : A la figure 8, on donne la réalisation canonique d'un registre à décalage à 3 retards.





#### 4) EXPRESSIONS SEQUENTIELLES A PLUSIEURS VARIABLES

4.1. Monômes canoniques séquentiels

Nous généralisons les résultats du paragraphe précédent pour plusieurs variables.

<u>Définition 14</u>: Une expression séquentielle à p V.B.T. simples  $y_1, y_2, \dots, y_p$  est toute expression de la forme :

$$f(X, y_1(t), \dots, y_1(t+k_1), y_2(t), \dots, y_2(t+k_2), \dots, y_p(t), \dots, y_p(t+k_p)).$$

La somme  $\sum_{i=1}^{p} k_i = q$  est l'ordre de l'expression et  $k_i$  est l'ordre partiel de l'expression par rapport à la V.B.T. y.

<u>Proposition 18</u>: Toute expression séquentielle à p variables peut se mettre sous la forme canonique disjonctive :

$$0 < \alpha^{i} < 2^{k_{i} + \frac{1}{2}} 1 \quad \alpha^{1} \alpha^{2} \dots \alpha^{2} \quad \alpha^{1} \quad \alpha^{1} \quad \alpha^{1} \quad \alpha^{2} \quad \alpha^$$

Notation: Soit  $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_p \end{bmatrix}$  une V.B.T. Alors l'expression séquentielle

 $\underbrace{\text{M}}_{a}\underbrace{1}_{1}\underbrace{\text{M}}_{a}\underbrace{2}_{2}\underbrace{\text{M}}_{2}\underbrace{\text{M}}_{a}\underbrace{p}_{p}$  sera appelée monôme canonique séquentiel et sera désignée par  $\underbrace{\text{M}}_{a}\underbrace{1}_{a}\underbrace{2}_{a}\underbrace{2}_{a}\underbrace{n}_{a}\underbrace{p}_{p}$  (Y).

Définition 15 : Soit  $(V_1, V_2, \dots V_p)$  une liste de p séquences de valeurs booléennes.

On dira que la Q.B.S. W(t),  $W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ \vdots \\ W_p(t) \end{pmatrix}$  comporte  $(V_1, V_2, \dots V_p)$  à partir de r si  $W_1(t)$  comporte  $V_1$  à partir de r.

Proposition 19: Soit M  $_{a_1a_2}$   $_{a_2}$   $_{a_1a_2}$   $_{a_1a_2$ 

Alors  $M_{a^{1}a^{2}...a^{p}}$   $a^{p}$   $a^{1}a^{2}...a^{p}$   $a^{p}$   $a^{p}$ 

## 4.2. Réseau associé

Soit  $\Sigma$   $0 \le ij \le 2^k j^{+\frac{1}{2}}$   $i_1$   $i_2$   $i_p$   $i_1$   $i_2$   $i_p$   $i_p$ 

$$q = \sum_{i=1}^{p} k_i$$
.

On y associe un réseau de transitions à  $2^q$  places, chacune étant représentée par un p-uplet  $(a^1, a^2, \dots a^p)$  tel que  $0 < a^i < 2^{i-1}$  de la façon suivante :

Soit ( $a^1$ ,  $a^2$ ,...  $a^p$ ) une place et  $(a^i)_{k_i} = \alpha_1^i \quad \alpha_2^i \dots \alpha_{k_i}^i$  pour  $1 \le i \le p$ .

A partir de la place ( $a^1$ ,  $a^2$ ,...  $a^p$ ) on atteint la place ( $b^1$ ,  $b^2$ ,...  $b^p$ )

par la branche portant  $S_{C}^{1}$   $C^{2}$  ...  $C^{p}$ 

où 
$$C^{i}$$
:  $\overline{(C^{i})}_{k_{i}+1} = \alpha_{1}^{i} \dots \alpha_{k_{i}}^{i} \quad \text{avec } \gamma^{i} \in \{0,1\}$ 

$$b^{i} : \overline{(b^{i})}_{k_{i}} = \alpha_{2}^{i} \dots \alpha_{k_{i}}^{i} \quad \gamma^{i}$$

Exemple 11: Nous donnons la matrice d'incidence du réseau associé à deux V.B.T. la première étant d'ordre 1 et la seconde d'ordre 2. Nous donnons également le réseau associé en figure 9. (Les quantités portées par les branches sont omises).

	0,00	1,00	0,01	1,01	0,10	1,10	0,11	1,11
0,00	S <sub>00</sub> ,000	S <sub>01,000</sub>	S <sub>00,001</sub>	S <sub>01,001</sub>	В	В	В	. В
1,00	S <sub>10,000</sub>	S <sub>11,000</sub>	S <sub>10,001</sub>	S <sub>11,001</sub>	В	В	В	В
0,01	В	В	В	В	S <sub>00,010</sub>	S <sub>01,010</sub>	S <sub>00,011</sub>	S <sub>01,011</sub>
1,01	В	В	В	В	S 10,010	S <sub>11,010</sub>	S <sub>10,011</sub>	S 11,011
0,10	S <sub>00,100</sub>	S. 01,100	S <sub>00,101</sub>	S <sub>01,101</sub>	В	В	В	В
1,10	S <sub>10,100</sub>	S <sub>11,100</sub>	S <sub>10,101</sub>	S <sub>11,101</sub>	В	В	В	В
0,11	В	В	В	В	S <sub>00,110</sub>	S <sub>01,110</sub>	S <sub>00,111</sub>	S <sub>01,111</sub>
1,11	В	В	В	В	S <sub>10,110</sub>	S <sub>11,110</sub>	S <sub>10,111</sub>	s <sub>11,111</sub>

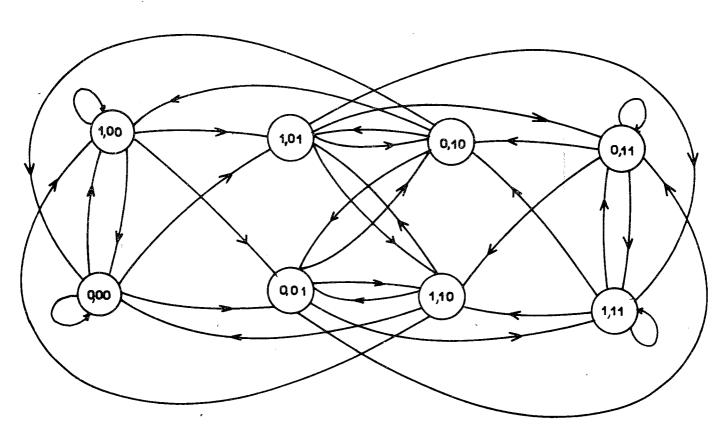


fig. 9

4.3. Solution de l'équation 
$$\Sigma$$
  $S_{i_1 i_2 \cdots i_p}$   $M_{i_1 i_2 \cdots i_p}$   $(Y) = e_0$ 

Théorème 3: Soit Q =

$$q ((2^{n-1}-1 \dots (2^{n-1}))$$

un chemin de longueur infinie du réseau associé à l'expression séquentielle  $S(Y) = \sum_{\substack{0 < i,j < 2^k j^{+\frac{1}{2}} 1}} S_i \dots i_p M_i \dots i_p (Y)$ 

Alors l'équation  $S(Y) = e_0$  a comme solution :

$$\{w_i = \sum_{\alpha_i^i = 1} q^{\alpha}(\alpha^i, \alpha^2, \dots \alpha^p)\}_{i=1}^p$$

(on pose : 
$$(a^{i})_{k} = \alpha_{1}^{i} \alpha_{2}^{i} \dots \alpha_{k_{1}}^{i}$$
)

Inversement toute solution de l'équation détermine un chemin de longueur infinie.

# DEMONSTRATION:

Soit W la Q.B.S. générale définie à partir d'un chemin de longueur infinie. Il faut démontrer que

$$M_{a^{1} a^{2} ... a^{p}}$$
 (W)  $\subseteq$   $S_{a^{1} a^{2} ... a^{p}}$  pour  $\begin{cases} 0 < a^{i} < 2^{i+1} - 1 \\ 1 < i < p \end{cases}$ 

Soit 
$$(a^{i})_{k_{i}+1} = \alpha_{0}^{i} \quad \alpha_{1}^{i} \dots \alpha_{k_{i}}^{i}$$
 pour  $1 \le i \le p$ 

Si W ne comporte pas  $((a^1)_{k_1+1}, (a^2)_{k_2+1}, \dots, (a^p)_{k_p+1})$  l'inégalité est vérifiée.

Sinon le chemin comporte deux places successives  $(b^1, b^2, \dots b^p)$  et  $(c^1, c^2, \dots c^p)$  (on suppose que  $(c^1, \dots c^p)$  est successeur immédiat de  $b^1, \dots b^p$ ) telles que :

$$\frac{(b^{i})_{k_{i}} = \alpha_{0}^{i} \quad \alpha_{1}^{i} \dots \alpha_{k_{i}-1}^{i}}{(c^{i})_{k_{i}} = \alpha_{1}^{i} \quad \alpha_{2}^{i} \dots \alpha_{k_{i}}^{i}}$$
pour 1 < i < p

VI - 31 -173-

Il en résulte que ( $c^1$ ,  $c^2$ ,...  $c^p$ ) est le successeur de la place ( $b^1$ ,  $b^2$ ,...  $b^p$ ) par la branche portant  $s_a^1$   $s_a^2$ ...  $s_a^p$ . Donc l'inégalité est vérifiée.

Pour la démonstration de l'inverse il suffit de remarquer que : Si W est une solution,  ${}^{M}_{a}{}^{1}_{a}{}^{2}\dots{}_{a}{}^{p}$  (W)  $\neq$  B, et

$$(a^{i})_{k_{i}+1} = \alpha_{0}^{i} \quad \alpha_{1}^{i} \dots \alpha_{k_{i}}^{i}$$
 pour 1  $\leq$  i  $\leq$  p, alors,

- 1)  $(b^1, b^2, \dots b^p)$  tel que  $M_b 1 \dots b^p$   $(W) \neq B$  avec,  $(b^i)_{k_i+1} = \alpha_1^i \quad \alpha_2^i \dots \alpha_{k_i}^i \quad \beta^i, \text{ où } \beta^i \in \{0,1\}$
- 2) Tout créneau de  ${}^{M}_{a}1_{a}^{2}..._{a}p$  (W) est immédiatement suivi par un créneau de  ${}^{M}_{b}1_{b}^{2}..._{b}p$  (W).

# Exemple 12 : Soit à résoudre l'équation :

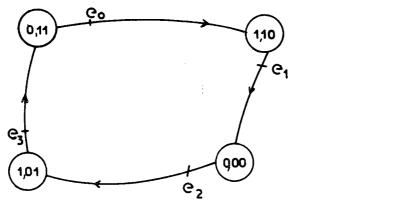
$$Y_{1}^{\prime} \tau^{-1} Y_{1} Y_{2} \tau^{-1} Y_{2} \tau^{-2} Y_{2}^{\prime} + e_{1} Y_{1} \tau^{-1} Y_{1}^{\prime} Y_{2} \tau^{-1} Y_{2}^{\prime} \tau^{-2} Y_{2}^{\prime} +$$

$$+ e_{2} Y_{1}^{\prime} \tau^{-1} Y_{1} Y_{2}^{\prime} \tau^{-1} Y_{2}^{\prime} \tau^{-2} Y_{2} + e_{3} Y_{1} \tau^{-1} Y_{1}^{\prime} Y_{2}^{\prime} \tau^{-1} Y_{2} \tau^{-2} Y_{2} = e_{0}$$

$$pour conditions initiales :$$

$$Y_{10} = B , Y_{20} = e_{2}^{\prime}$$

On construit le réseau de transition associé



On trouve :  $Y_1 = \frac{e_1 \quad e_2'}{\tau^0 \stackrel{\bullet}{\Phi} \tau^2}$ 

$$Y_2 = \frac{e_2'}{T^0 \oplus T}$$

fig 10

Pr8position 20:

Soit 
$$\Sigma$$

$$0 \le a^i \le 2^i - 1$$
 $S_{\alpha^1 \dots \alpha^p} A^{\alpha_1 \dots \alpha^p}$ 
(Y) =  $e_0$  une

équation séquentielle d'ordre partiel k; par rapport à y;

Alors, elle est équivalente à un système d'équations séquentielles résolu de la forme :

$$\tau^{-k}i \quad y_i = \sum_{\substack{0 \le b^i \le 2}} \sum_{i=1}^{C_{b^1} \dots b^p} M_{b^1} \dots b^p \quad (Y)$$

ssi le réseau associé est déterministe.

DEMONSTRATION

On peut mettre l'équation donnée sous la forme :

$$\sum_{\substack{k \\ 0 < d^{i} \leq 2^{\frac{1}{2}}1}} M_{d^{1} \dots d^{p}} (Y) \sum_{\substack{\alpha^{i} \in \{0,1\}}} S_{a^{1} a^{2} \dots a^{p}} \tau^{-k_{1}} y_{1}^{\alpha^{1}} \tau^{-k_{2}} y_{2}^{\alpha^{2}} \dots \tau^{-k_{p}} y_{p}^{\alpha} P = e_{0}$$

avec 
$$(\overline{d^i})_{k_i} = \delta_1^i \dots \delta_{k_i}^i$$
 et  $(\overline{a^i})_{k_i+1} = \delta_1^i \dots \delta_{k_i}^i$   $\alpha^i$ ; pour  $1 \le i \le p$ 

Pour que l'équation ait une solution par rapport à

$$\tau^{-k_1}$$
  $y_1$ ,  $\tau^{-k_2}$   $y_2$ ,...  $\tau^{-k_p}$   $y_p$  il faut que :

$$\sum_{\substack{0 \leq d^i \leq 2 \\ = 1}}^{k} M_{d^1 \dots d^p} (Y) \qquad \sum_{\substack{\alpha^i \in \{0,1\}}}^{S} S_{a^1 \dots a^p} = e_0$$

D'où: 
$$\Sigma$$
  $S_{a1...ap} = e_0$  pour  $\forall d^i$ ,  $0 \le d^i \le 2^{i-1}$  et  $1 \le i \le p$   $\alpha^i \in \{0,1\}$ 

Donc le réseau doit être défini.

La condition nécessaire et suffisante d'unicité de la solution se traduit par (15) :

Pour 
$$(c^1, \dots c^p) \neq (a^1, \dots a^p)$$
 tels que

$$(c^{i})_{k_{i}+1} = S_{1}^{i} \dots S_{k_{i}}^{i} \quad \gamma^{i} , \quad (a^{i})_{k_{i}+1} = S_{1} \dots S_{k_{i}}^{1} \quad \alpha^{i}$$

Ceci entraine :  $S_{c1...cp}$   $S_{a1...ap} = B$ 

Donc le réseau associé est déterministe.

La démonstration de l'inverse est facile à faire comme la condition de possibilité et la condition d'unicité de la solution sont des C.N.S.

# CHAPITRE VII

#### RESEAUX DE CONTROLE DE PROCESSUS PARALLELES

Les moyens dont on dispose pour la description des systèmes séquentiels s'avèrent inefficaces. En fait, les langages de programmation sont très peu structurés au point de vue mathématique. De même le modèle classique des automates s'avère particulièrement impuissant si on veut décrire un système séquentiel compliqué car il se peut que le nombre d'états soit considérablement grand.

C'est pourquoi de nombreux travaux ont été amorcés vers la recherche de moyens de description des systèmes séquentiels plus efficaces. La plupart de ces travaux ont été effectués dans le cadre du projet MAC (MIT) et ont été inspirés par les travaux de K.A. PETRI (14).

Dans ce qui suit, nous proposons un outil pour la conception et la description des systèmes de contrôle des processus parallèles. VII - 2 -177-

# 1) RESEAUX DE CONTROLE DE PROCESSUS PARALLELES - RESEAUX DE PETRI

Nous rappellons la définition du Réseau de Petri donnée dans (18).

<u>Définition 1</u>: Un réseau de Petri est un réseau de noeuds et d'étoiles défini par le quadruplet (T, P, B, P<sup>0</sup>) où T =  $\{t_1, \dots, t_m\}$  est un ensemble fini d'étoiles qui s'appellent transitions.

 $P = \{p_1 \dots p_m\}$  est un ensemble fini de noeuds appellés <u>places</u>

B =  $\{b_1, b_2...b_r\}$  est un ensemble fini de branches de la forme (x, y) qui connectent soit une place à une transition soit une transition à une place.

 $P^0:(P^0\subseteq P)$  Distribution initiale de marques et désigne par ses éléments les places portant initialement une marque.

<u>Fonctionnement</u>: Une place peut avoir <u>une marque</u>. On l'appelle pleine si elle en a une, <u>vide</u> dans le cas contraire.

Les places d'entrée d'une transition sont les places à partir desquelles émanent des branches vers cette transition. De façon analogue, les places de sortie d'une transition sont définies comme étant les places qui sont atteintes par des branches émanant de cette transition.

Une transition a lieu si toutes les places d'entrée sont pleines. Quand la transition a lieu on élimine les marques qui occupent les places d'entrée de cette transition et on pose une marque sur chaque place de sortie (de la même transition).

On représente une place par le symbole : 
une transition par : —

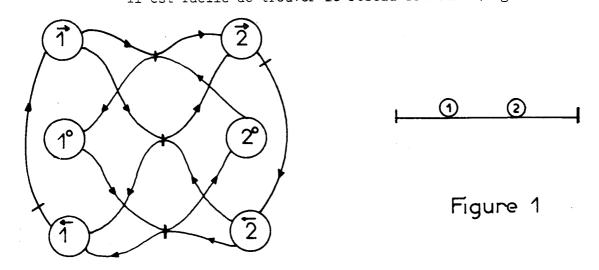
-178-

Exemple: (Holt (17)) 1 : Soient deux boules de billard se déplaçant sur la même trajectoire rectiligne et ayant la même masse (Fig. 1). Les deux extrémités renvoient les boules avec des chocs parfaitement élastiques. On veut construire le réseau de Pétri qui simule le fonctionnement du système.

Chaque boule a trois états :

o : immobile, ← : mouvement à gauche, → : mouvement à droite.

Il est facile de trouver le réseau de Pétri (Fig. 2).



# Figure 2

<u>Définition 2</u>: Un Réseau de contrôle de processus parallèles consistera en la donnée d'un 5-uplet (X, P, Q, f, P<sup>0</sup>) où

 $X = \{x_1 \dots x_m\}$ , ensemble fini de V.B.T. appelées variables d'entrée; On représentera par X é galement la V.B.T. générale  $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 

 $P = \{p_1 \dots p_n\}$ : ensemble fini d'objets appellés <u>places</u>

Q = V.B.T. générale dont les composantes sont en bijection avec les places Q =  $\begin{vmatrix} q_1 \\ q_n \end{vmatrix}$ 

VII - 4 -179-

f: Une application f:  $P \times P \to \mathcal{F}(Q,X)$  où  $\mathcal{F}(Q,X)$  l'ensemble des fonctions booléennes simples de Q et de X.

 $P^0$  :  $(P^0 \subseteq P)$  Ensemble des places initiales.

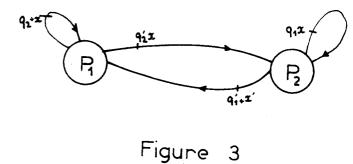
On appellera R.C.P.P. abstrait le quadruplet (X,P,Q,F)

A un R.C.P.P. abstrait on peut associer de façon biunivoque un réseau dont les articulations s'identifient avec les places et où la branche  $(p_i, p_j)$  porte  $f(p_i, p_j)$  que l'on désignera par  $f_{ij}$ .

Exemple 2 : Soit ( $\{x\}$ ,  $\{p_1, p_2\}$ ,  $\begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \end{vmatrix}$ , f) un R.C.P.P. où f est donné par

le tableau 1. Le graphe de la figure 3 est une représentation de ce R.C.P.P.

0	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>
P <sub>1</sub>	q <sub>2</sub> +x	q¦x
p <sub>2</sub>	q'+x'	q <sub>1</sub> ×



- <u>Définition 3</u>: On définit comme précédemment une marque comme l'être ayant les propriétés suivantes:
  - 1) Une marque existe à la place  $p_i$  à l'instant t  $\Leftrightarrow q_i(t) = 1$ .
  - 2) Une transition a lieu à partir de  $p_i$  vers  $p_i$  à un instant t si la place  $p_i$  a une marque à l'instant t et  $f_{ij}$  (Q(t), X(t)) = 1; sinon la marque disparaît. Toute transition dure une unité de temps.

VII - 5 -180-

Visiblement pour une entrée déterminée  $X_0 \in V_{m,0}$  et à partir d'une distribution initiale de marques, on peut définir, récursivement, la distribution des marques dans le réseau associé à la structure par le système :

$$\{q_{i}(t+1) = \sum_{j=1}^{n} f_{j,i} (Q(t), X(t)) q_{j}(t)\}^{n}$$
 $i=1$ 

On peut définir également une fonction de transitions,  $\delta_s$ , pour un R.C.P.P.  $\delta_s: \mathcal{P}(P) \times X \rightarrow \mathcal{P}(P)$ , où  $\mathcal{P}(P):$  ens. des parties de P.

Soient I, J des sous ens. de  $\{1, 2, ... n\}$ 

On désigne par  $P_I$ :  $P_I = \{p_i; i \in I \}$  et  $Q_I$  le vecteur booléen

dont la k-ième composante  $\mathbf{q}_{\mathrm{I}}^{k} = \left\{ egin{array}{c} 1 \text{ si } \mathbf{p}_{k} & \epsilon & \mathbf{p}_{\mathrm{I}} \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$ 

 $X_0$ : vecteur booléen désignant les entrées à un instant . Alors  $\delta_s(P_I,X_0)$  = {  $p_i$ ;  $f_{ij}(Q_I,X_0)$  = 1,  $i \in I$ }

REMARQUE 1 : On peut représenter tout réseau de Pétri comme un R.C.P.P. , en explicitant les conditions imposées par le fonctionnement (Fig. 4).

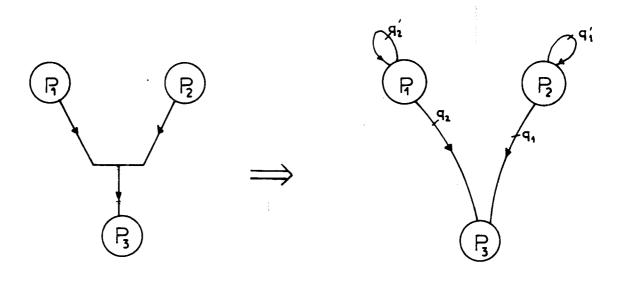


Figure 4

VII - 6 -181-

Ainsi le réseau de Pétri de l'exemple 1 est représentable par le R.C.P.P. de la figure 5. (On associe aux places  $\vec{1}, 1^0, \vec{1}, \vec{2}, 2^0, \vec{2}$  les variables a,b,c,d,e,f respectivement).

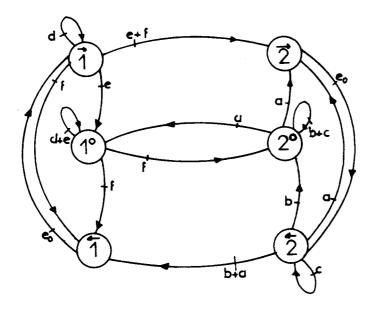
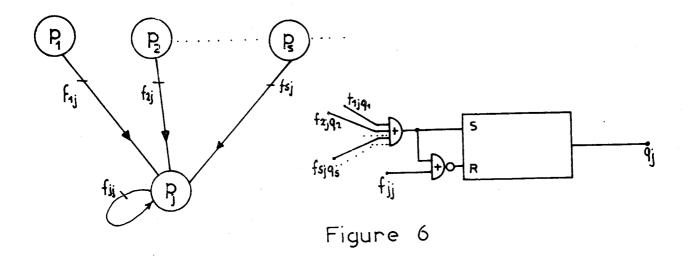


Figure 5

- 2) CONCEPTION DES SYSTEMES A L'AIDE DES R.C.P.P.
  - 2.1. Equivalence des R.C.P.P.

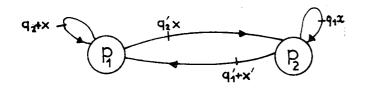
Réalisation d'une R.C.P.P.: On ne doute pas qu'une R.C.P.P. abstraite puisse être représentée par un réseau séquentiel où la présence, ou l'absence de marque est traduite par la présence ou non d'un 1 à la sortie d'un élément de mémorisation binaire qui correspond à une place.

Pour réaliser un R.C.P.P. avec des bascules R-S il suffit d'associer à chaque place une bascule, comme l'indique la figure 6.



REMARQUE 2 : L'équivalence définie est très stricte; cependant nous ne voyons pour l'instant l'intérêt de définir une notion plus générale.

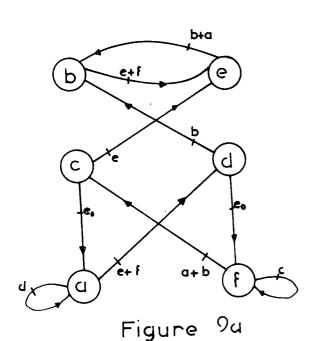
Exemple 3 : Les R.C.P.P. des figures 7 et 8 sont équivalents. Aussi le R.C.P.P de la remarque 1 est équivalent aux R.C.P.P. des figures 9a et 9b.



z P

Figure 7

Figure 8



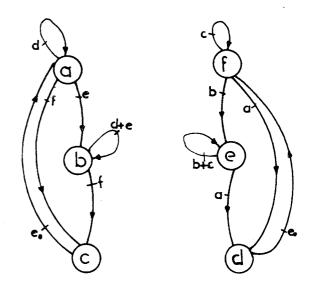


Figure 9b

2.2. Réseau de transition codé qui simule un R.C.F.P. abstrait

Etant donné un R.C.P.P. abstrait (X,P,Q,f) on peut à partir cu système des équations :

$${q_{i}(t+1) = \sum_{j=1}^{n} f_{ji} (Q(t), X(t)) q_{j}(t)}_{i=1}^{n}$$

définir un réseau de transition codé déterministe. On dit que ce réseau de transition simule le R.C.P.P. Evidemment deux R.C.F.P. équivalentes sont simulées par le même réseau de transition codé:

La fonction de transition  $\delta_{\rm t}$  du réseau de transition codé qui simule une R.C.P.P. est définie à partir de  $\delta_{\rm S}$  :

Si  $P_I \subseteq P$  on désigne par :  $m_I$  (Q) =  $q_1^{\alpha 1}$   $q_2^{\alpha 2}$  ...  $q_n^{\alpha n}$ 

où 
$$q_j^{\alpha i} = \{ q_j \text{ si } p_j \in P_I \\ q_j^i \text{ sinon } \}$$

$$\delta_{t_r}(m_I(Q), X_0) = m_J(Q) \iff \delta_{s}(P_I, X_0) = P_J$$

Dans ce qui suit, on donne un algorithme pour le passage à partir du système d'équation  $(\gamma)$  qui détermine les transitions d'une R.C.P.P. à l'expression séquentielle du réseau de transition codé qui la simule.

VII - 9 -184-

La justification de l'algorithme est basée directement sur la définition de  $\delta_{+n}$ .

Bien sûr la démonstration de la proposition 5 Ch. VI pourrait être utilisée dans le même but.

Algorithme 1: a) On forme un tableau à n lignes et  $2^n$  colonnes en mettant aux têtes de lignes les  $\tau^{-1}q_i$  et aux têtes de colonnes les  $m_i$  (Q).

b) On remplit la case (
$$\tau^{-1}q_i$$
,  $m_j$  (Q)) par la fonction de X,  
( $\sum_k f_k$  (Q,X)  $q_k$ )  $Q = Q_j$ , où  $Q_j$ :  $m_j$  ( $Q_j$ ) =  $e_0$ 

c) Pour l'ensemble des fonctions de la i-ème colonne on cherche une base orthogonale  $b_1^i$ ,  $b_2^i$  ...,  $b_r^i$  et on forme l'expression

$$s_i = m_i (Q) (b_1^i \tau^{-1} m_{i_1} (Q) + b_2^i \tau^{-1} m_{i_2} (Q) + ... + b_r^i \tau^{-1} m_{i_r} (Q))$$

m. (Q) : monôme canonique où q, figure sous la forme non complémentée ssi  $b_k^i$  est couvert par la fonction de la case ( $\tau^{-1}q_s$ ,  $m_i$  (Q)).

d) L'expression  $\sum_{i=0}^{2^{n}} s_{i}$  donne l'expression séquentielle i=0 associée au réseau de transition codé qui simule la R.C.P.P.

Exemple 4 : Soit le R.C.P.P. de la Fig. 10 :

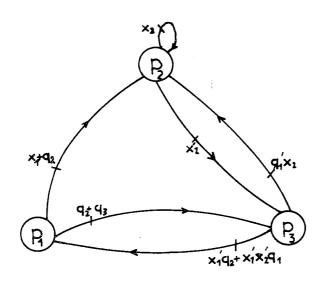


Figure 10

Les équations décrivant les transitions sont :

$$\tau^{-1}$$
  $q_1 = q_2$   $q_3$   $x_1' + x_1'$   $x_2'$   $q_1$   $q_3$ 

$$\tau^{-1}$$
  $q_2 = q_1$   $x_1 + q_1$   $q_2 + q_2$   $x_2 + q_1'$   $q_3$   $x_2$ 

$$\tau^{-1}$$
  $q_3 = q_3$   $x_2' + q_2$   $x_2' + q_1$   $q_2 + q_1$   $q_3$ 

On pose:  $x_1', x_2' \iff 0$ ,  $x_1', x_2 \iff 1$ ,  $x_1, x_2' \iff 2$ ,  $x_1, x_2 \iff 3$ D'où le tableau 2:

:q' q' q'3	:q' q' q <sub>3</sub>	: q' <sub>1</sub> q <sub>2</sub> q' <sub>3</sub>	: q' q <sub>2</sub> q <sub>3</sub> .	: q <sub>1</sub> q' <sub>2</sub> q' <sub>3</sub>	: q <sub>1</sub> q' <sub>2</sub> q <sub>3</sub>	: q <sub>1</sub> q <sub>2</sub> q' <sub>3</sub>	: q <sub>1</sub> q <sub>2</sub> q <sub>3</sub> :
: :	:	:	: 0,1	:	: <sub>0</sub>	: <sub>0</sub>	: 0,1 :
:	: 1,3						: 0,1,2,3 : :
:		0,2					: 0,1,2,3
· :	:	· ·	· -:	: :	:	:	<u>:</u> :

TAB. 2.

On dessine directement le réseau de transition codé qui la simule (Fig. 11).

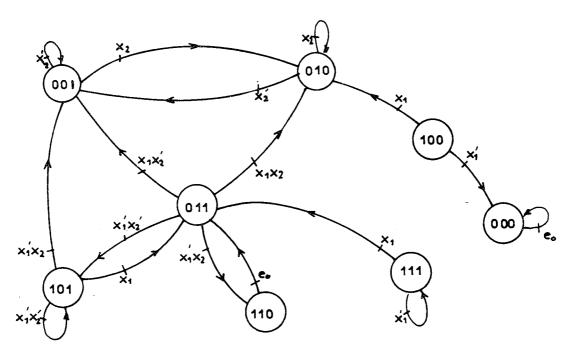


Figure 11

# REMARQUE 3 : a) Les expressions $\sum_{k} f_{ki} (Q,X)q_{k}$ du système

 $\{\tau^{-1} \ q_i = \sum_{k} f_{ki} (Q)X)q_k\}$  étant égales à B si  $\forall q_k = B$ , la

place  $m_0$  (Q) sera une place puits dans le réseau de transition qui simule un R.C.P.P.

b) La condition N.S. pour que le nombre des marques d'un R.C.P.P. soit non nul pour toute entrée X  $\epsilon$  V<sub>m,0</sub> et à partir de toute configuration initiale non vide, est que la somme des fonctions de chaque colonne, sauf de la 0-ième soit égale à e<sub>0</sub>. Uniquement dans ce cas m<sub>0</sub> (Q) n'est pas atteint.

c) L'algorithme présenté est inversible. On peut ainsi passer d'une R.C.P.P. à un réseau de transition codé qui la simule et inversement d'un réseau de transition codé, dont la place  $m_0$  (Q) est une place puits, à un R.C.P.P.

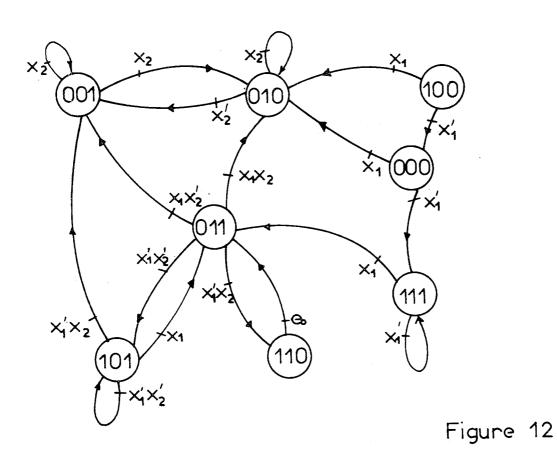
## 2.3. Générateur de marques

Pour qu'on puisse représenter tout réseau de transition codé par un R.C.P.P. on introduit la notion de place générateur de marques. Une place générateur de marques est une place qui comporte toujours une marque pour n'importe quelle configuration initiale et  $\forall$  entrée  $X_0 \in V_{m,0}$ . C'est à dire un générateur de marques appartiendra à toute configuration initiale et comportera une boucle portant  $e_0$ .

L'adjonction d'une place générateur de marques à un R.C.P.P., me change pas le nombre de places du réseau de transition qui la simule, comme une telle place ne correspond pas à un élément de mémorisation.

L'algorithme décrit est valable dans le cas où le R.C.P.P. comporte un générateur de marques (cas où la place  $m_0(Q)$  du réseau de transition n'est pas un état puits).

Exemple 5: Nous modifions le réseau de transition de l'exemple précédent en ajoutant les branches ((000),(010)) et ((000),(111)). Nous appliquons l'algorithme dans le sens inverse pour trouver un R.C.P.P. qui est simulé par ce réseau de transition (Fig. 12).

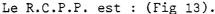


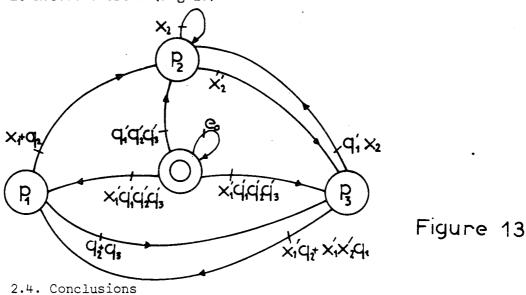
D'où le tableau 3 :

q' q' q' <sub>3</sub>	:	q¦ q¦ q	з <b>:</b> '	4'1 4 <sub>2</sub> 9	13 :	4 <sub>1</sub> 4 <sub>2</sub> 4 <sub>3</sub>	: (	4 <sub>1</sub> 4 <sub>2</sub> 4 <sub>3</sub>	;	q <sub>1</sub> q' <sub>2</sub> q <sub>3</sub>		q <sub>1</sub> q <sub>2</sub> q' <sub>3</sub>	: q <sub>1</sub> q <sub>2</sub> q <sub>3</sub>	, : -
													: 0,1	
	_:_		<b>:</b> _		<u>:</u> _		. <u>.</u> :	- <b></b>	<b>:</b> _		<u>:</u>	! 	. <b>:</b>	:
0,1,2,3	: :	1,3	:	1,3	:	1,3	: :	2,3	: <b>:</b> _	2,3	: _ <u>:</u> _	0,1,2,3	: 0,1,2,3	: ::
	:	0,2	:	0,2	:	0,2	:		:	0.1.2.3	:	0,1,2,3	: 0,1,2,3 :	:

<u>TAB. 3</u>

VII - 14 -189-





Les R.C.P.P. sont conçus comme un moyen de description des systèmes séquentiels plus fort que les outils ordinaires comme un R.C.P.P. à n places peut potentiellement décrire un automate à  $2^n$  états.

De plus, la conception des systèmes est beaucoup plus facile puisqu'un R.C.P.P. (comme un réseau de Pétri) traduit de façon directe son fonctionnement. En ce point il faut sans doute ajouter que l'utilisation d'un R.C.P.P. devient intéressante quand on a à décrire des processus qui se déroulent en parallèle.

Par rapport aux réseaux de Pétri, ça nous permet d'introduire des variables d'entrée sans nécessiter la complexité d'un système autonome.

De plus, les expressions qui conditionnent les transitions rendent la description plus concise que celle qu'on peut faire avec les réseaux de Pétri.

On donne un exemple simple :

Soit à représenter l'évolution suivante :

"Une marque arrive à  $p_1$  si une marque se trouvait à l'instant précédent à  $p_2$  et  $p_3$ , mais pas à  $p_1$ " (Fig 14).

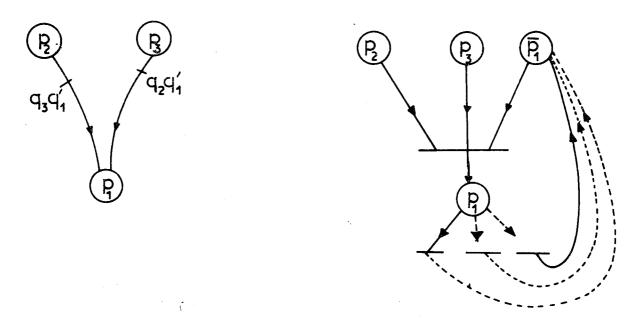


Figure 14

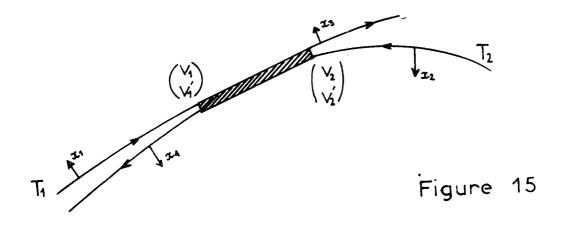
Pour décrire cette évolution par un réseau de Pétri, il faut créer une place "complémentaire",  $\bar{p}_1$ , de la place  $p_1$ ; c'est à dire une place qui a une marque ssi  $p_1$  n'en a pas.

Nous sommes donc obligés d'augmenter le nombre des places par rapport à la structure qui représente la même évolution. (Cette place  $\bar{p}_1$  appartient à l'ensemble des places d'entrée de la transition qui mène à  $p_1$  et est une place de sortie pour toutes les transitions

dont p<sub>1</sub> est une place d'entrée).

Nous donnons un exemple pour illustrer l'application des structures.

Exemple : On veut construire un automate qui commande le traffic à travers un tunnel à une seule voie ferrée qui est utilisé par des trains qui arrivent dans les deux sens (Fig. 15).



VII - 16 -191-

#### On suppose que l'on dispose :

- a) des signaux :
- I x<sub>1</sub> et x<sub>2</sub> désignant qu'un train s'approche du tunnel dans le sens 1 et 2 respectivement.
- II  $x_3$  et  $x_4$  désignant qu'un train vient de traverser le tunnel dans le sens 1 et 2 respectivement.
- b) deux feux  $(V_1, V_1^*)$   $(V_2, V_2^*)$  aux entrées du tunnel indiquant si l'entrée d'un train au tunnel est permise ou non.

On souhaite que le système de commande soit tel que :

- V<sub>1</sub> et V<sub>2</sub> s'il n'y a pas de train qui traverse le tunnel, ni de train en attente.
- $V_1^{\dagger}$  et  $V_2^{\dagger}$  s'il y a un train qui traverse le tunnel.
- Un train en attente dans le sens 1 a priorité par rapport à un train en attente dans le sens 2. On supposera qu'un seul train de chaque côté peut être considéré en état d'attente.

Le R.C.P.P. qui réalise cette commande est donné par la figure 16. On représente par :

a; : état d'attente du train T;

 $t_i$  : le train  $T_i$  traverse le tunnel

 $v_i$ : feu vert autorisant  $T_i$  de traverser le tunnel.

Construction de l'automate : Les fonctions  $V_1$  et  $V_2$  sont combinatoires. Le reste se décompose en deux automates  $A_1$  et  $A_2$  à 4 états chacun (Figures 17 et 18). L'automate de commande est donné par la figure 19 ( $C_1$ , $C_2$  sont des circuits combinatoires réalisant  $V_1$  et  $V_2$  respectivement).

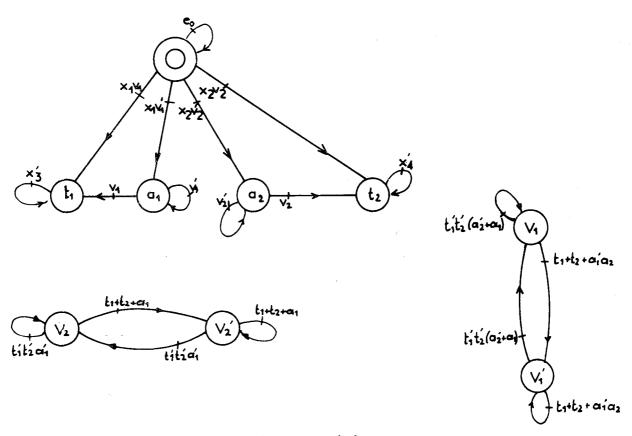


Figure 16

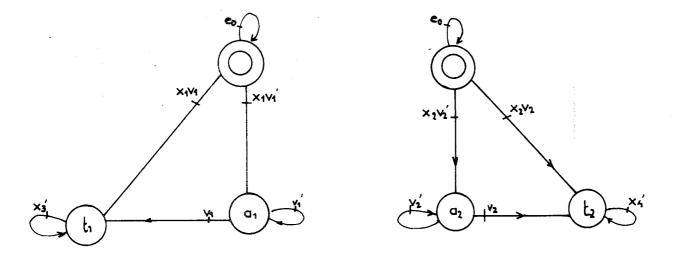
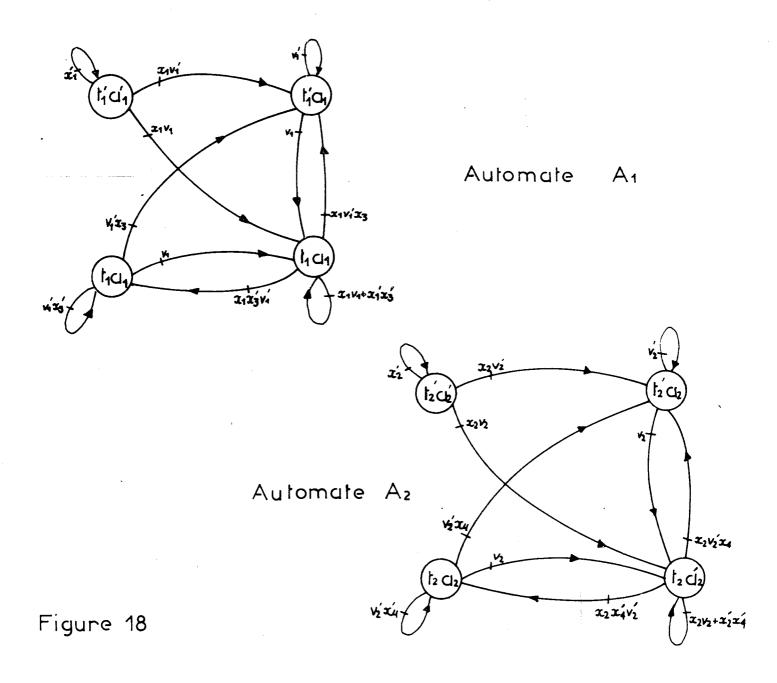


Figure 17



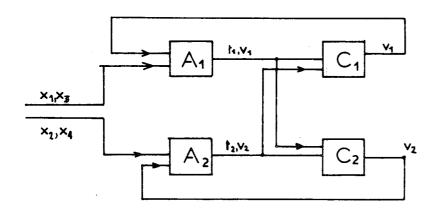


Figure 19

#### BIBLIOGRAPHIE

- (1) J. KUNTZMANN: "Algèbre de Boole", Dunod Paris 1968.
- (2) E. BLANCA: "L'introduction de la variable temps dans les expressions logiques", Automatisme, Tours XV,  $n^{\circ}$  6-7, juin-juillet 1971.
- (3) V.N. ROGINSKIY: "Dynamic Automata and Temporal Boolean Function", Engineering Cybernetics  $n^{\circ}2$ , 1970.
- (4) J. RICHALET : "Operational Calculus for Finite Rings", IEEE Trans. on C.T.,  $CT-12\ N^{\circ}$  4, Dec. 1965
- (5) A. GILL: "Linear Sequential Circuits", Mc GRAW Hill, 1966, pp. 81-108.
- (6) E.C. BERKELEY: "The Algebra of States and Events", The Scientific Monthly, Vol. 78 (1954) pp. 232-242.
- (7) J. FRIEDMAN: "Some results in Cherch's restricted recursive arithmetic", The journal of Symbolic Logic, Vol 22 (1957) pp. 337-342.
- (8) A. CHURCH: The journal of Symbolic Logic, Vol 20 (1955) pp. 286-287.
- (9) A.W. BURKS, J.B. WRIGHT: "Theory of Logical Nets", Proc. of the I.R.E. 1953, pp. 1357-1365.
- (10) H. WANE: "Circuit Synthesis by solving Sequential Boolean Equations" dans
  "A survey of Mathematical Logic", Science Press 1963.
- (11) S. EVEN, A.R. MEYER, "Sequential Boolean Equations", IEEE on C, C-18, n° 3
  March 1969, pp. 230-240.
- (12) J. W. ULRICH: "A note on the solution of Sequential Boolean Equations", IEEE on C, Feb. 1971, pp. 231-234.
- (13) M. GOTO, Y. KOMAMIYA: "Theory of Synthesis of Sequential Networks by means of the Solution of Logical Functional Equations and Logical Algebraic-Equations", Information Processing, Paris 1959, p. 426.
- (14) M.Y. EINGORIN: "Synthesis of discrete contrôl Systems in the basis of sets of Algebraic-Logic equations with delay", Izv. Vgss U cebn Zaved Radiodifizika, 6 (1963) pp. 810-832.

- (15) W.L. PARKER-BABERNSTEIN: "On uniquely solvable boolean equations", University of California Press Berkeley, Los Angeles, 1955.
- (16) B. BEIZER: "Towards a new theory of Sequential Switching Networks" IEEE on C C-19, no 10, Oct. 1970, pp. 939-956.
- (17) A.W. HOLT: "Information System Theory Project", Applied Data Research,
  Incorporated Princeton New Jersey.
- (18) SS. PATIL : "Coordination of asynchronous events", MAC TR-72, M.I.T. June 1970.
- (19) K.A. PETRI : "Kommunikation mit Automaton", Univ. de Bonn 1962.
- (20) C. BERGE : "Théorie des graphes et ses applications", Dunod, Paris 1963.
- (21) J. SIFAKIS : "Etude d'une Algèbre Booléenne Temporelle", C.R. Acad. Sc. Paris t. 275 C 18, Dec. 1972) série A - 1343.
- (22) J. SIFAKIS : "Etude d'une Algèbre Booléenne Temporelle", Revue Automatisme AFCET, juin 1973.
- (23) O.P. KUZNETZOV: "Orthogonal System of Boolean Function and their application to the analysis and systhesis of Logic Circuits", Automatika i Telemekhanika, no 10, pp.117-128, Oct. 1970.
- (24) J.P. PERIN, M. DENOUETTE, E. DALCIN: "Systèmes Logiques", Tome I, Paris, Dunod, 1967.
- (25) J. KUNTZMANN: "Théorie des Réseaux", Dunod 1972.
- (26) B.A. CARRE: "An Algebra for Network Routing Problems", J. Inst. Maths. Applics (1971), 7 pp. 273-294.
- (27) F.C. HENNIE: "Finite State Models for Logical Machines", John Wiley INC 1968.
- (28) B. FRIENDLAND: "Linear Modular Sequential Cricuits, IRE Trans", on CT, Vol CT-6 Mars 1959, pp. 45-60.
- (29) J. HARTMANIS: "Linear multivalued sequential coding networks", IRE trans. on CT, CT-6 Mars 1959, pp. 69-74.
- (30) J. KUNTZMANN: "Cours d'Algèbre", (Algèbre peu réversible), Grenoble, Oct. 1968.
- (31) "The integrated circuits catalogue", Texas Instrucments Inc.
- (32) Texas Instruments France : "Recueil 1971 de notes d'applications sur l'utilisation des circuits intégrés digitaux".
- (33) W.N. PETERSON: "Error correcting codes", M.I.T. Press 1961.