Etude d'une classe d'équations différentielles affines par morceaux modélisant des réseaux de régulation biologique

Etienne Farcot

▶ **To cite this version:**

Etienne Farcot. Etude d'une classe d'équations différentielles affines par morceaux modélisant des réseaux de régulation biologique. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2005. Français. NNT : . tel-00010463

HAL Id: tel-00010463
https://theses.hal.science/tel-00010463

Submitted on 6 Oct 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité: "mathématiques appliquées"

préparée au laboratoire de modélisation et calcul (LMC)
dans le cadre de **l'Ecole Doctorale "mathématiques, sciences et technologies de l'information, informatique"**

présentée et soutenue publiquement

par

Etienne FARCOT

le 20 juillet 2005

Titre :

Étude d'une classe d'équations différentielles affines par morceaux modélisant des réseaux de régulation biologique

---

Directeur de thèse : Jean DELLA DORA

JURY

M.	Jacques DEMONGEOT	, Président
M.	Roderick EDWARDS	, Rapporteur
M.	Víctor FAIRÉN	, Rapporteur
M.	Jean DELLA DORA	, Directeur de thèse
M.	Hidde de JONG	, Examinateur

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Jean Della Dora, mon directeur de thèse. J'en garderai le souvenir d'un professeur de mathématiques exemplaire. Fidèle aux preceptes anciens, qui veulent que logos *ne puisse être transmis sans* eros*, il ne m'aura pas seulement appris à faire des mathématiques, il m'aura appris à les aimer. Je le remercie aussi de m'avoir proposé un sujet de thèse aussi passionnant et ouvert.*

Je remercie les rapporteurs, Roderick Edwards et Víctor Fairén, d'avoir accepté la lourde tâche de lire cette thèse jusque dans ses détails, et d'en tirer un compte-rendu. Plusieurs discussions avec Roderick, par mails ou de vive voix, m'auront apporté un secours inestimable pendant l'élaboration de ce mémoire.

Je remercie Jacques Demongeot, professeur UJF, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements vont également à Hidde de Jong, qui a bien voulu jouer le rôle d'examinateur, et avec qui j'ai eu le plaisir et le bénéfice de discuter à plusieurs reprises au long de cette thèse.

Mes amis, ma famille, proches ou non des mathématiques appliquées, doivent recevoir ici mes remerciements aussi. Ceux qui étaient présents à la soutenance, bien sûr, et tous les autres qui se reconnaîtront. Difficile toutefois, de ne pas citer mes plus proches collègues, formés dans le bureau 14 : Olivier, Antoine, et le plus tenace, dernier maître du bureau : Laurent. Difficile également d'omettre Nicolas, à qui je dois bien des discussions physico-mathématiques, depuis de nombreuses années. Thierry également, qui me fit découvrir les polytopes, il y a quelques années déjà.

Pour finir c'est à Marine, qui m'a supporté – dans les deux sens du terme – ces derniers mois, pour son affection et sa patience, que j'adresse mes derniers remerciements.

Table des matières

I Modéliser les grands réseaux de régulation biologique 9

1 Introduction non mathématique 11
1.1 Généralités sur la modélisation en biologie et motivation de ce travail 11
1.2 Aspects biologiques et épistémologiques de la régulation génétique 14
1.2.1 Principe de la régulation génétique 14
1.2.2 Depuis les années 60 : de la découverte à l'ingénierie des réseaux 18

2 Formalisations du problème 21
2.1 Quelques classes de modèles 21
2.2 Modèles différentiables incluant des sigmoïdes 22
2.3 Modèles discrets 26
2.4 Modèles affines par morceaux 35
2.4.1 Premières définitions 35
2.4.2 Système discret associé à un système affine par morceaux 40
2.4.3 Systèmes différentiables associés à un système affine par morceaux . . . 42
2.4.4 Sous-classes des systèmes affines par morceaux 44
2.4.5 Récapitulatif 46

3 Principaux problèmes soulevés par les modèles mathématiques 47
3.1 Questions liées à la biologie 48
3.1.1 Boucles de rétroaction 48
3.1.2 Analyse qualitative, identification, validation de modèles 51
3.2 Sur la définition des solutions d'un système affine par morceaux 52
3.2.1 Perturbations singulières d'un système continu ou différentiable 53
3.2.2 Solutions de Filippov 57
3.3 Attracteurs observés, outils de caractérisation 61
3.3.1 Points d'équilibre réguliers et singuliers 62
3.3.2 Cycles limites 63
3.3.3 Attracteurs apériodiques 64
3.3.4 Étude globale du portrait de phase et classification des systèmes 67
3.4 Pouvoir algorithmique des réseaux génétiques affines par morceaux 72

II Dynamiques régulières du modèle affine par morceaux 75

4 Dynamique en temps discret sur un espace continu 77

4.1 Application de transition globale 77
4.1.1 Propriétés locales 78
4.1.2 Domaine de définition d'une application globale 80
4.2 Itérés de l'application de transition le long des trajectoires 84
4.3 Analyse des orbites périodiques 88

5 Partition des boîtes de l'espace des phases 95
5.1 Partition d'une boîte seule 95
5.1.1 Définitions et notations 95
5.1.2 Propriétés 98
5.2 Description minimale de la partition d'une boîte 100

6 Discrétisation de l'espace et codage des trajectoires 105
6.1 Systèmes dynamiques symboliques associés à un système affine par morceaux . 105
6.2 Comparaison des entropies topologiques 111

III Etude de systèmes spécifiques 117

7 Méthodes numériques et algorithmes employés 119
7.1 Simulation de trajectoires 119
7.2 Détection de cycles, analyse de stabilité 122
7.3 Génération de réseaux aléatoires 123

8 Exemples et résultats 129
8.1 Résultats de simulations représentatifs 129
8.2 Un exemple particulier : triple boucle dans $\mathbb{R}^3$ 135

IV Conclusion et annexes 141

A Rappels sur les polytopes 145

B Rappels sur la dynamique symbolique 153

Bibliographie 163

Notations employées

De manière générale (mais pas tout à fait systématique...), on a employé les conventions résumées dans le tableau qui suit :

type d'objet	*type de caractères*	*exemple*
vecteurs	minuscules	x
composantes des vecteurs	minuscules indicées	x_i
ensembles de vecteurs	majuscules doublées	$\mathbb{D}$
applications entre vecteurs	majuscules	F
ensembles d'applications	majuscules calligraphiées	$\mathscr{C}^\infty$
graphes	majuscules sans sérif	G

Par ailleurs, les lettres t, u, v, w, x, y, z ont été réservées aux variables continues, et a, b, c, d aux variables discrètes. Les indices ont été repérés en général par les lettres i, j, k, l, m. D'autre part, les notations suivantes ont été choisies :

- $\mathbb{R}$ désigne la droite réelle.
- $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs.
- $\mathbb{R}_+^*$ désigne les positifs stricts.
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers.
- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
- Pour un entier $n \geqslant 1$, $\mathbb{N}_n = \{1 \dots n\}$.
- Pour $\mathbb{E}$ un ensemble quelconque et $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}^n$ est l'ensemble produit $\mathbb{E} \times \overset{n \text{ fois}}{\dots} \times \mathbb{E}$. Ses vecteurs sont des vecteurs colonnes.
- Pour $\mathbb{E}$ un ensemble quelconque et $n, m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}^{n \times m}$ est l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes, à coefficients dans $\mathbb{E}$.
- Pour une matrice M, M^T désigne la matrice transposée.
- Id est la matrice ou l'application identité, selon le contexte.
- Pour $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ deux ensembles quelconques, $\mathbb{F}^{\mathbb{E}}$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.
- Pour $\mathbb{E}$ un ensemble quelconque, $\mathscr{P}(\mathbb{E})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{E}$.
- Pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathtt{sgn}(x) \in \{-1, 0, 1\}^n$ désigne le vecteur signe de x.
- $\mathbf{e}_i = (\delta_i^j)_{j \in N_n}$ est le i^{eme} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Pour A un ensemble quelconque, $\#A$ désigne le cardinal de A.
- Pour A un sous-ensemble d'un ensemble E, A^c désigne le complémentaire de A dans E : $A^c = E \setminus A$.
- $\mathring{A}$ est l'intérieur d'un ensemble A. Sauf mention contraire, cet intérieur est relatif.
- $\overline{A}$ est l'adhérence d'un ensemble A.
- ∂A est la frontière d'un ensemble A : $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.
- $\vee$ et $\wedge$ désignent respectivement le «ou» et le «et» logiques.

Première partie

Modéliser les grands réseaux de régulation biologique

Chapitre 1
Introduction non mathématique

1.1 Généralités sur la modélisation en biologie et motivation de ce travail

Avant d'aborder plus en détails le modèle mathématique étudié dans ce mémoire, il convient de rappeler ce qui est aujourd'hui connu des phénomènes modélisés. Ceux-ci concernent un domaine de la biologie qui est sans doute parmi les plus actifs de nos jours, soit la biologie moléculaire. Au sein de cette branche du savoir, les connaissances biologiques actuelles sont caractérisées par un haut degré de précision, concomitant à l'usage de technologies de pointe. De ces deux aspects découle une grande abondance de résultats et publications, comme en témoigne le célèbre projet de décryptage du génome. Ce dernier n'est qu'un ensemble de données cohérentes parmi les diverses productions de la microbiologie moderne. Il est typique à cet égard de constater que le vocable «donnée» vient bien souvent remplacer celui de «connaissance», en ces matières. Ainsi, le spécialiste peut désormais accéder aux résulats expérimentaux les plus fins et les plus récents concernant une macromolécule ou un organisme vivant étudié en laboratoire, via un base de données accessible sur internet. Ajoutées à ses propres recherches, ces données lui permettront de décrire avec une très grande précision certains mécanismes biologiques, intégrant de plus en plus de composantes, à une échelle de précision de plus en plus fine au fur et à mesure que les données expérimentales s'accumulent.
Une telle richesse de connaissances nous montre un réel de plus en plus complexe, composé d'une multitude d'objets interagissant selon des mécanismes multiples et évolutifs. Un modèle mathématique qui prendrait en compte la totalité des processus aujourd'hui décrits via l'expérimentation serait impraticable, pour une machine comme pour l'esprit d'un mathématicien. Dans ces circonstances, le langage parlé, agrémenté de termes techniques, pourrait sembler plus approprié pour décrire et analyser de tels systèmes en détails. Néanmoins, le langage mathématique se prête mieux que tout autre au jeu des combinaisons, énumérations et transformations abstraites, dévoilant par là certaines structures et certains invariants du réel qui échappent à l'appréhension directe. La physique et les mathématiques appliquées en général, témoignent de l'efficacité (déraisonnable, dit-on...)

des modèles mathématiques, c'est-à-dire de la mise en correspondance d'un phénomène réel et d'un résultat mathématique, constitué de symboles et de figures pour l'essentiel. Les mathématiques serviraient en quelque sorte à produire des signifiants universels, susceptibles de donner du sens nouveau en les confrontant aux signifiés que la nature ne cesse de nous fournir. En poursuivant cette image un peu simpliste, le signifié sera ici la régulation génétique, et le signifiant mathématique une classe de systèmes d'équations différentielles affines par morceaux. De tels systèmes fournissent une information de nature topologique, étant définis comme une version approchée de systèmes lisses non linéaires. En tant que tels, ils permettent un traitement analytique beaucoup plus avancé que les systèmes différentiables, ce qui se paie d'une perte de l'information quantitative, numérique, qu'apportent ces derniers.

Un fait d'importance, toutefois, est que la pertinence des modèles plus quantitatifs est assez largement douteuse. Ceux-ci sont en effet issus de simplifications des équations de la cinétique chimique, reposant sur des hypothèses de type quasi-stationnarité. De telles hypothèses limitent la précision des équations, mais sont assez réalistes, et largement employées. Plus gênant est le fait que les équations différentielles de la cinétique chimique supposent la présence d'une quantité importante, molaire, des réactants. Or nous verrons que certaines substances agissent à très faible concentration (quelques molécules) dans le contexte de la régulation génétique. De plus, si un délicat travail d'expérimentation permet de valider, avec une bonne précision, ces équations pour des systèmes *in vitro*, les systèmes vivants sont tout autres, en interaction permanente avec de nombreux stimuli extérieurs, que l'éprouvette dissimule. On sait l' importance des thèses d'I. Prigogine, qui souligne le fait que les systèmes réels sont en général éloignés de l'équilibre thermodynamique.

Ce dernier fait est commun à la majorité des systèmes biologiques : ce sont des systèmes ouverts, en contact avec de multiples autres systèmes évoluant en parallèle. Ceci entraîne une variabilité intrinsèque des grandeurs caractéristiques du vivant, qui sont essentiellement qualitatives. Les modèles mathématiques en biologie ne peuvent être ceux de la physique, et doivent s'appuyer sur des principes d'une autre nature. Les critères que propose René Thom pour modéliser des phénomènes biologiques méritent ici d'être rappelés. Au paradigme physique de minimisation d'une énergie, il ajoute celui de stabilité d'un système. La notion de stabilité qu'il développe est profonde, et ne saurait être résumée que grossièrement. Il lui adjoint celle de généricité [1], soulignant par là le fait que les phénomènes observés, en tant qu'attracteurs [2] d'une certaine dynamique, se présentent de manière répétée à l'observateur, et doivent donc correspondre à un comportement «fréquent» dans l'espace des systèmes. Thom utilise d'autres notions, et sa pensée et riche et complexe. Ce qui suit est donc une interprétation naïve et simplifiée de ce qui peut se lire dans [120, 121, 122, 123].

Les dynamiques des différents systèmes vivants sont en concurrence permanente. Ainsi, seules les dynamiques stables relativement aux perturbations subsistent, et peuvent être observées. Pour un système donné, le monde extérieur peut être vu comme un ensemble de paramètres de contrôle, de sorte c'est la notion de stabilité structurelle qui est ici en jeu, c'est-à-dire la stabilité par rapport aux perturbations du système lui-même, au sein d'un espace fonctionnel. Ceci permet de justifier l'approximation faite par Leon Glass, d'équations lisses par d'autres équations, affines par morceaux, qui s'obtiennent par pas-

1. Une propriété est générique si elle est vérifiée par une intersection dénombrable d'ouverts denses.

2. Dans toute la suite de ce mémoire, le terme *attracteur* désignera l'ensemble ω-limite d'au moins un point de l'espace d'états, pour un système dynamique (discret ou continu en temps, et en espace). Si davantage de précisions sont nécessaires, elles seront données au cas par cas.

sage à une limite de certains paramètres des équations de départ. Ce qui est ici souhaité, c'est la conservation de propriétés de nature topologique lors de ce passage à la limite. En particulier, on attend que les ensembles singuliers d'un système dynamique restent topologiquement conjugués après perturbation (assez souvent, on doit bien sûr se contenter d'équivalences plus faibles que la conjugaison topologique). Ils sont dans l'approche thomienne le lieu caractéristique du système. Dans cette optique, Thom met en évidence l'existence de singularités «universelles» pour les dynamiques obtenues par minimisation d'un potentiel $\mathscr{C}^\infty$, de l'espace-temps usuel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, avec < 5 paramètres : ce sont les 7 catastrophes élémentaires, auxquelles tout ensemble minimal stable peut se ramener par équivalence topologique. Les travaux de C. Zeeman font usage de ces outils pour modéliser des phénomènes réels, et ont donné lieu à ce qu'on appelle désormais *théorie des catastrophes*. On sait qu'un telle théorie s'appuie de manière centrale sur la stabilité structurelle des systèmes dynamiques. Les espoirs qu'elle apportent furent en conséquence fortement atténués, par la preuve par Smale du fait que les systèmes dynamiques structurellement stables ne forment pas un ensemble dense parmi tous les systèmes dynamiques différentiables, à la fin des années 1960.
Thom se place généralement dans $\mathscr{C}^\infty$, tandis que le modèle qui est abordé dans ce mémoire n'est pas continu. Ainsi, alors que pour Thom les singularités, avec leur caractère discret, sont la manifestation d'une évolution essentiellement continue, les aspects discrets sont ici donnés a priori, dans un modèle mettant en jeu des aspects à la fois discrets et continus. Cette approche est donc mathématiquement assez disjointe de celle de Thom. Les difficiles mathématiques qu'il emploie n'apparaîtront donc pas telles quelles, mais on gardera certaines de ses conceptions comme référence. Notamment, un point de vue géométrique sur la structure des attracteurs et de leur bassin sera adopté.

Les réseaux de régulation génétique peuvent être situés non seulement comme exemple de système vivant, mais aussi comme instance typique de ce qu'il est désormais courant d'appeler un système complexe. Ce terme désigne ce qui peut être décrit abstraitement comme un ensemble d'éléments de même nature, structuré par des interactions définissant un graphe, éventuellement orienté. Ce type de système englobe par exemple les réseaux de neurones, les réseaux métaboliques, les sociétés humaines ou animales, les réseaux de distribution électrique, internet... Leur taille importante se prête assez bien à un traitement de type physique statistique [4]. S'en déduisent des propriétés génériques de nature probabiliste, qui ne seront pas abordées dans ce mémoire. Il est à noter que le type de propriétés qu'une telle approche met en évidence est valide pour des systèmes réels très variés. Par exemple, la connectivité de ces structures complexes est supposée suivre une loi de puissance [4] pour une large gamme de systèmes réels.

Après ces considérations générales, on peut se demander quel est l'intérêt spécifique de modèles mathématiques pour les réseaux de régulation génétique. A la lumière de ce qui précède, il paraît souhaitable qu'un tel modèle fournisse une information qualitative, dont la teneur ne soit pas sensible aux valeurs numériques exactes des paramètres. Il est souhaitable également que soit prise en compte l'organisation spécifique des interactions. En effet, les connaissances biologiques actuelles permettent des hypothèses assez précises sur la structure d'un graphe d'interaction génétique, plus pertinentes que des considérations très générales sur les systèmes complexes. Enfin, un réseau génétique n'étant jamais isolé, mais en constant échange avec un milieu que la modélisation est contrainte d'ignorer, on doit considérer un système dissipatif.

Partant de ces présupposés, on peut construire un modèle. L'objectif naturel serait alors une analyse des dynamiques admissibles, et de la dépendance qu'elles entretiennent avec les paramètres du modèle. Autrement dit, il serait idéal de fournir une description précise des attracteurs, et des bifurcations survenant lorsque sont modifiés les coefficients des équations. Ceci fait, il resterait à interpréter biologiquement cette description formelle.
Tout ceci forme bien sûr un projet trop vaste, et tient lieu surtout d'objectif de travail, dans la direction duquel des résultats même partiels paraissent intéressants. De tels résultats ont été obtenus ces dernières années, ce qui a motivé la poursuite des recherches dans le cadre de ce travail de thèse. Il est par exemple possible de décrire mathématiquement des faits tels que l'homéostasie ou la différenciation cellulaire, et de les relier à la structure du graphe d'interaction (cf. section 3.1.1). Le problème de l'identification, tout comme des questions purement mathématiques, sont encore largement ouverts. La technologie des biopuces permet d'obtenir une image de l'état d'un grand nombre de gènes à un instant donné. Associée à des méthodes statistiques, des modèles discrets de réseaux génétiques, des méthodes d'analyse d'image et des connaissances biologiques sur la structure des systèmes, elles peuvent aboutir à l'extraction d'une matrice d'interaction d'un système biologique réel [30]. Cette dernière peut être reliée au nombre d'attracteurs du système, grâce aux résultats concernant les réseaux discrets et les boucles de retroaction (cf. sections 2.3, 3.1.1).
Il est temps maintenant d'entrer dans le vif du sujet, en décrivant le phénomène de régulation génétique, et certains modèles mathématiques existants.

1.2 Aspects biologiques et épistémologiques de la régulation génétique

1.2.1 Principe de la régulation génétique

La présentation biologique donnée dans cette partie ne prétend en aucun cas à l'exhaustivité, ni au détail biologique le plus fin. Le lecteur cherchant un aperçu biologique plus précis pourra se reporter à un ouvrage spécialisé, e.g. [82]. Les mécanismes seront ici décrits de façon naïve et quelque peu abstraite. Ainsi, ce sont des phénomènes biologiques généraux, et en quelque sorte idéalisés qui vont être présentés. Chaque système biologique réel comportera des aspects très spécifiques, qui débordent le cadre ainsi donné, sans toutefois lui ôter toute validité.
Très sommairement, une cellule peut être vue comme une petit poche organique, dont la membrane est structurée en deux couches de lipides, auxquelles viennent se greffer de nombreuses protéines permettant des échanges avec le milieu ambiant. Ces protéines membranaires peuvent jouer le rôle de capteur, d'enzyme ou encore de pore. Une enzyme est une protéine particulière, dont le rôle est de catalyser des réactions chimiques spécifiques (en se liant à une substance spécifique, appelée *substrat*). De nombreuses autres molécules (cf. infra pour quelques unes d'entre elles) sont présentes dans la cellule, dont l'organisation interne est très complexe, et aujourd'hui encore incomplètement connue. Pour un rapide aperçu de certaines contraintes physiques portant sur cette organisation, nous renvoyons à [28]
La taille d'une cellule va de l'ordre du μm pour une bactérie, jusqu'à quelques dizaines de μm pour les cellules de plantes. Les cellules animales se trouvent entre ces deux extrêmes.

Il existe des cellules de taille exceptionnelle : les fibres musculaires ou végétales peuvent atteindre 30 cm, et les neurones jusqu'à 1 m.
A l'intérieur se trouve le cytoplasme qui est surtout constitué d'eau. Il n'en contient pas moins un nombre conséquent de protéines et autres organelles [3] (ou organites). Il est le lieu principal du métabolisme de la cellule. Ceci inclus notamment les voies de *transduction du signal*[4], la glycolyse [5], les recepteurs intracellulaires, et les facteurs de transcription [6]. Ces dernières protéines sont un élément clé de la régulation génétique. Leur fonction peut être activée ou désactivée par d'autres protéines, souvent comme étape finale de la transduction du signal.
Certaines cellules, dites *eucaryotes*, possèdent un noyau, qui contient l'ADN, et le nucléole, qui sert à fabriquer les ribosomes. La fonction de ces derniers sera bientôt expliquée. Les cellules sans noyau sont dites *procaryotes*. Ce sont généralement des bactéries, qui sont constituées d'une unique cellule ; la plus étudiée est sans doute Escherichia coli. Leur organisation est différente des eucaryotes. En particulier, il n'est pas rare que leur membrane soit munie de flagelles ou de poils permettant respectivement des déplacements et des regroupements de plusieurs cellules.
Quelle que soit la cellule considérée, la fabrication de protéine s'y déroule en deux étapes successives :

1. **transcription** de l'ADN en ARNm
2. **traduction** de l'ARNm en protéine

Ce mécanisme est si universel qu'on l'appelle parfois **dogme central** de la biologie moléculaire. Ces deux étapes peuvent être détaillées un peu.
L'ADN (acide désoxyribonucléique) est une macromolécule lourde, constituée de polymères de nucléotides. Ces derniers sont des molécules formées de l'association d'un nucléoside avec de l'acide phosphorique. Un nucléoside est constitué d'un sucre (un pentose) et d'une base azotée. Cette dernière peut être de deux types, dits purique et pyrimidique. Une base purique peut donner lieu à deux types de nucléotides : l'adénine notée A, et la guanine notée G. Une base pyrimidique peut donner lieu à trois types de nucléotides : la cytosine C, la thymine T, et l'uracine U. Il est bien connu que l'ADN est formé de deux séquences complémentaires des nucléotides A, C, G et T, appariées deux à deux selon le schéma :

- A est complémentaire de T
- G est complémentaire de C

La molécule d'ARN est proche de l'ADN : le pentose est différent, et U remplace T. Elle est de plus constituée d'un seul brin.
Sur l'ADN comme sur l'ARN, trois nucléotides successifs constituent un *codon*, dont le rôle sera précisé avec le principe de la traduction.

La transcription peut maintenant être décrite : les deux brins de l'ADN sont séparés le long d'une séquence encadrée par des codons spécifiques. En considérant les choses de manière simplifiée, une telle séquence est ce qu'on appelle un gène. Une enzyme, l'ARN polymérase (ARNp), parcourt alors cette séquence le long d'un des brins. Ce faisant, elle génère un brin d'ARN dit messager, ARNm, complémentaire du brin d'ADN parcouru. C'est un copie exacte du gène qui est ainsi effectuée lors de la transcription (comme son

3. Ce terme désigne génériquement toute partie élémentaire différenciée de la cellule.
4. Désigne l'enchaînement de réactions modifiant un stimulus reçu par la cellule.
5. Réaction exploitant le glucose pour produire de l'énergie.
6. Protéines se liant en un site spécifique de l'ADN pour contrôler sa transcription en ARNm.

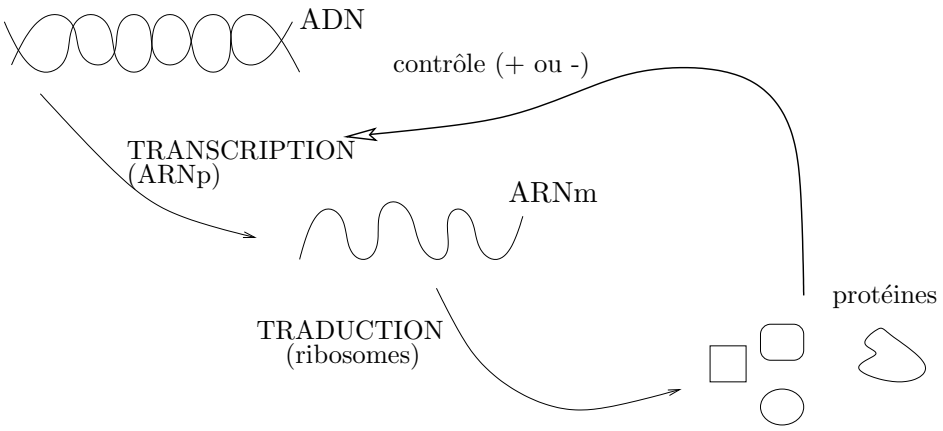


FIG. 1.1 – *Schéma simplifié de la synthèse des protéines, incluant le rôle retroactif des facteurs de transcription.*

nom pouvait l'indiquer).

La traduction peut alors avoir lieu, après transport de l'ARNm hors du noyau dans le cas des eucaryotes. Cette étape est effectuée par des organelles complexes, les ribosomes. Ils sont formés d'ARN et de protéines. Selon un mécanisme trop sophistiqué pour être détaillé ici, les ribosomes sont le lieu d'assemblage des polypeptides. Ces derniers sont de longues chaînes d'acides aminés, blocs de base de toutes les protéines. Les acides aminés sont au nombre de 20, et chacun d'entre eux est décrit sur l'ADN (ou l'ARNm) par un codon. L'ARNm est parcouru par un ribosome (en réalité, c'est plutôt l'ARNm qui se déplace, le ribosome restant à peu près immobile [28]), qui assemble les acides aminés au fur et à mesure que sont rencontrés les codons.

Les deux étapes précédentes permettent la synthèse de toutes les protéines d'un être vivant, même sommaire, à partir de son ADN. En particulier les protéines de structure, constituant les cellules et les liquides intersticiels, ainsi que les enzymes et les facteurs de transcription. Ces derniers peuvent lorsqu'ils sont activés se fixer sur l'ADN pour activer ou inhiber la transcription d'une séquence. Ainsi se constitue une véritable boucle de retroaction, du produit de cette synthèse en deux étapes vers sa source. C'est ce processus qui est à la base des réseaux de régulation génétique : un facteur de transcription peut contrôler la synthèse d'un autre facteur, lui même contrôlant la synthèse d'une enzyme agissant sur le premier facteur, ou ailleurs dans la cellule. De cette façon peuvent se former des réseaux d'interactions positives et négatives entre molécules, via l'ADN. Il faudrait pour plus de rigueur parler de contrôle transcriptionnel. Il existe en effet d'autres mécanismes de contrôle lors de l'étape de traduction. Ils sont plus compliqués et moins bien connus, et seront dans une large mesure ignorés par la suite.
La synthèse des protéines est résumée sommairement sur la figure 1.1.

A titre culturel, on peut mentionner le premier système de régulation génétique mis en évidence. Il s'agit de l'*opéron lactose* chez E. Coli, décrit pour la première fois au début des années 1960 par François Jacob et Jacques Monod [76]. Un *opéron* est un ensemble de gènes contigus, dont la transcription est contrôlée simultanément. Ce contrôle est le fait d'un facteur de transcription, codé par un *gène régulateur*. Ce facteur de transcrip-

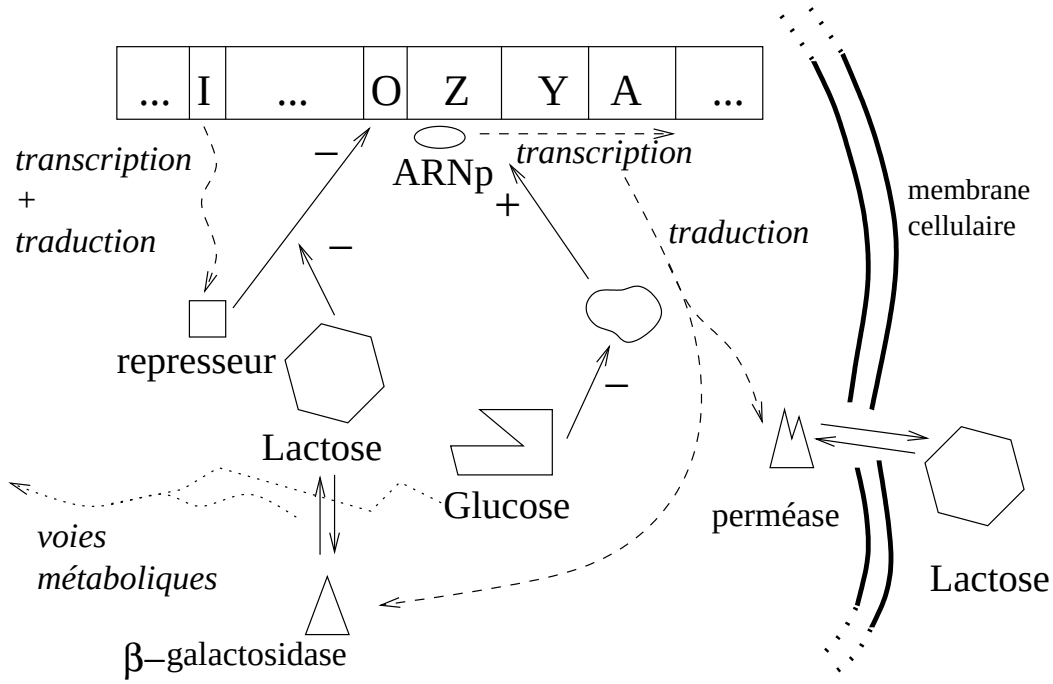


FIG. 1.2 – *Schéma simplifié des interactions de l'opéron lactose. On voit que globalement, le lactose active la transcription de l'opéron, tandis que le glucose l'inhibe. Ceci est en accord avec les besoins de la cellule. Les formes et tailles relatives des différentes protéines sont fantaisistes. En simplifiant beaucoup, la fonction de la perméase est de permettre le passage à travers la membrane de lactose extra-cellulaire, tandis que la β-galactosidase dégrade le lactose en une molécule proche du glucose, et qui comme celui-ci est utilisée dans la glycolyse.*

tion a une affinité avec une zone de l'ADN située au début de l'opéron dans le sens de la transcription : l'*opérateur*. Dans le cas de l'opéron lactose, ce sont trois gènes qui forment l'opéron. On les note Z, Y et A. Le gène régulateur est noté I. La zone cible du facteur de transcription, sur l'ADN, est notée O (pour opérateur).
Sans détailler davantage, deux de ces gènes (le rôle du troisième est mal connu) codent pour des enzymes nécessaires à la dégradation du sucre lactose en glucose : Z code la β-galactosidase et Y la perméase. Cette dégradation a une utilité pour la vie de la cellule en l'absence de glucose, qui entre directement dans le cycle de la glycolyse. Or le facteur de transcription lié à cet opéron inhibe la transcription : c'est un *represseur*. Il se trouve désactivé par la présence de lactose, qui modifie sa conformation géométrique (on parle de réaction allostérique). Par ailleurs une autre molécule, qui n'est pas à proprement parler un facteur de transcription, active la transcription de l'opéron, et est absente en présence de glucose (elle est utilisée dans la glycolyse). Le petit réseau ainsi constitué sera sans doute plus clairement appréhendé sur la figure 1.2.

Cet exemple est l'un des plus simples qui se trouvent dans la nature, et l'on voit qu'il met en jeu un certain nombre de paramètres. Le schéma 1.2 est de plus très simplifié par rapport à la réalité. Notamment, le contrôle transcriptionnel n'est pas uniquement dû aux facteurs de transcriptions, et ceux-ci ne sont pas forcément contrôlés par une protéine. Ainsi, un réseau n'est jamais purement génétique, et l'on doit tenir compte des réactions métaboliques environnantes. Si l'on pousse davantage le souci de précision, on

est rapidement confronté à d'immenses réseaux, incluant des dynamiques et des échelles de temps variés. On va tenter dans la partie suivante de suivre les progrès biologiques de ces dernières décennies concernant la connaissance et la compréhension de ces réseaux génétiques et métaboliques. Ceci afin de mieux cerner la nature exacte des phénomènes qui seront modélisés dans la partie mathématique.

1.2.2 Depuis les années 60 : de la découverte à l'ingénierie des réseaux

C'est comme on l'a vu au début des années 60 que sont mis en évidence les mécanismes de régulation agissant lors de la synthèse des protéines. Le fonctionnement des virus bactériens (ou *phages*) est soumis à des principes similaires : ils intègrent le code génétique nécessaire à leur propre reproduction au sein de l'ADN de la bactérie infectée. Ce code est soumis à un contrôle retroactif, de sorte qu'il peut être exprimé (menant à la destruction de la cellule par éclatement) ou non. On parle respectivement de forme *lytique* et *lysogénique*. Tout comme la synthèse de la β-galactosidase et de la perméase peut être induite par un signal chimique (la présence de lactose), le passage de la forme lysogénique à la frome lytique peut être déclenché par un rayonnement ultra-violet. Ainsi, les mécanismes génétiques sous-jacents sont basés sur des principes communs, en particulier la régulation, et la possibilité d'induction par un stimulus approprié.
Ces découvertes valent en 1965 le prix Nobel à Jacob, Monod et Lwoff. Elles indiquent que les processus de la génétique, loin de se résumer au schéma simpl(ist)e ADN $\rightarrow$ protéine, participent plutôt de la cybernétique, telle qu'introduite par N. Wiener. Dans cette théorie des systèmes, les principes de boucle de retroaction et d'information sont centraux, et les mathématiques sont un outil privilégié d'analyse. On pense bien sûr au travail célèbre de Von Neumann sur la théorie des automates reproducteurs [128], dont le schéma de description codée préfigure de manière étonnante le fonctionnement de l'ADN (Von Neumann propose ce modèle en 1948 ; Watson et Crick obtiennent le prix Nobel en 1962).
Au delà de l'aspect strictement mathématique de ces notions, il est remarquable que ces découvertes ont lieu alors que le structuralisme est très en vogue [103], et que nombre de disciplines tentent de dégager les relations en jeu dans les systèmes qu'elles étudient. Il s'agit alors d'expliquer les systèmes par la structure des interactions qu'ils englobent, plus que par la nature de leurs constituants. Si cette conception a été fort critiquée depuis, en particulier pour son ignorance des spécificités et de l'évolution historique de tout système, elle n'en demeure pas moins source d'inspiration, et la notion de graphe d'interaction reste une clé pour la compréhension des réseaux génétiques (et des réseaux en général). Par ailleurs, les travaux de R. Thom, dont on a vu qu'ils étaient un modèle encore très inspirant dans le cadre de ce travail, sont fortement liés à ce courant de pensée [102], et ils échappent assez largement aux critiques mentionnées de par le rôle central qu'y joue la dynamique des systèmes. Son point de vue sur cette approche structuraliste, tel qu'exposé dans [122], chap. VII («Biologie et structuralisme»), mérite d'être rappelé sommairement. L'approche structuraliste est essentiellement basée sur une description par des diagrammes de relations entre éléments d'un système, apportant par là une information essentiellement qualitative et statique. Thom situe ce type de description à l'extrémité la plus simplifiée et abstraite d'une échelle des modèles, dont l'autre extrême serait l'approche de type physique statistique déjà mentionnée. Cette dernière se place en effet au niveau d'observation le plus fin, et accède ainsi à une information quantitative. La complexité des systèmes réels impose toutefois à cette approche un traitement réductionniste des éléments en interaction, et les quantités qu'elle dévoile sont de nature statistique. Entre ces deux extrêmes, Thom

suppose une famille continue de modèles susceptibles d'apporter des connaissances de nature intermédiaire entre celles mentionnées, famille dans laquelle apparaîssent ses modèles catastrophistes. Il semble concevable d'inclure également le modèle affine par morceaux abordé dans cette thèse à ce niveau intermédiaire de modélisation, où le quantitatif est très approché, mais où une description de la dynamique des structures d'interaction (et pas seulement de leur état «en moyenne») peut être envisagée.

Très rapidement après l'exposition du concept d'opéron par Jacob et Monod, des modèles mathématiques sont proposés pour décrire la dynamique d'un opéron. Ce sont souvent des systèmes d'équations différentielles non linéaires, dont la résolution et l'analyse questionnent aujourd'hui encore les mathématiciens appliqués [87, 88, 127, 131, 133]. Parallèlement à cette étude de systèmes locaux, les découvertes en biologie moléculaire se multiplient très rapidement. Les moyens informatiques évoluant à la vitesse que l'on sait, des bases de données de grande taille voient le jour, démontrant bien vite l'existence de réseaux de régulation vastes et complexes. La compréhension biologique classique du vivant est bien vite dépassée, et de nombreux champs techniques et théoriques sont requis pour déchiffrer une quantité de données devenue trop abondante. L'informatique et l'électronique sont bien sûr des outils précieux, à la fois comme moyens d'analyse et comme champs techniques maîtrisés, où des réseaux de grande taille sont fréquents. Ainsi depuis le milieu des années 1990, l'analogie entre circuits électroniques et réseaux de gènes a permis à plusieurs équipes de chercheurs de simuler des réseaux génétiques à l'aide de circuits électroniques [73, 91, 90].
L'analogie entre ces deux types de systèmes, l'un biologique et l'autre technique et manufacturé, va au-delà de la seule structure de graphe sous-jacente aux interactions d'éléments nombreux. On a vu en effet que les gènes régulés sont transcrits ou non, selon la présence ou l'absence d'un inducteur spécifique. Le passage d'un état à l'autre se fait de manière rapide, si bien que le mécanisme en jeu est de type «tout ou rien», naturellement codé par un paramètre booléen (ou pris dans un ensemble fini discret). Alors, le contrôle coordonné par plusieurs inducteurs se représente très bien par une fonction booléenne, et peut donc s'écrire à l'aide des fonctions logiques de base de type ET, OU, négation... Il y a donc une similitude assez poussée entre un réseau génétique et un réseau de portes logiques.
Outre la simulation des réseaux biologiques par des circuits, beaucoup plus rapides et économiques à construire que des expériences sur le vivant, cette analogie amène bien sûr à voir les choses dans l'autre sens : un réseau de gènes peut être compris comme une sorte de machine à calculer organique. Quels types de calculs peuvent servir à des organismes vivants ? Quelle complexité algorithmique doit-on attendre dans ces réseaux ? Des modèles mathématiques semblent fort adaptés à ce type de questions, qui seront abordées section 3.4

Les prédictions sur les réseaux génétiques apportées par les modèles mathématiques, alliées a la maîtrise technique des biologistes, ont permis déjà la synthèse de réseaux génétiques en laboratoire [13, 49, 53], dont le comportement dynamique est en accord avec la théorie. En particulier, les phénomènes d'oscillations stables et de multistationnarité ont été mis en évidence dans ces travaux. Les développements les plus récents dans le domaine des réseaux de régulation en biologie cellulaire s'apparentent ainsi de plus en plus à une véritable ingénierie des réseaux, où l'informatique et les mathématiques appliquées ne sont pas en reste [109, 73, 93]. Ce champ de recherches multidisciplinaires est extrêmement actif, donnant lieu notamment à une littérature pléthorique. A titre indicatif, une recherche

avec les mots clefs `gene regulatory networks mathematical model`, dans le moteur de recherche Google, retourne près de 60000 pages web. En ajoutant `pdf`, plus de 30000 liens vers des documents pdf sont retournés. On comprendra, dans ces circonstances, que la bibliographie fournie dans cette thèse est nécessairement partielle par rapport à ce qui peut se lire sur les modèles mathématiques de régulation génétique en général. Certaines références généralistes fournissent des bibliographies très étendues [73, 114]. L'article [35], paru en 2002, est une revue de la littérature disponible fournissant plusieurs centaines de références, avec un texte de synthèse sur les différentes modélisation existantes.

Chapitre 2
Formalisations du problème

Dans ce chapitre sont d'abord rappelées les grandes classes de modèles de réseaux génétiques, leur justification et le contexte où elles s'avèrent le plus utiles. Différents textes de synthèse sont disponibles dans la littérature, plus détaillés que la très courte notice qui suit [32, 35, 58, 114, 130]. En effet, la complexité des phénomènes de régulation génétique donne lieu à des modélisations variées. Certaines sont ainsi fort éloignées du propos de ce texte, et seront mentionnées sans autre précision, à titre culturel.
Dans un second temps, une présentation plus détaillée est fournie pour trois classes de modèles :

- des modèles de type équations différentielles ordinaires, avec un second membre différentiable comportant des termes de type sigmoïdes,
- des modèles discrets en temps et en espace,
- des modèles affines par morceaux, qui sont l'objet d'étude principal dans ce mémoire.

Quelques définitions et propriétés sont fournies dans les trois cas, puis des liens sont établis entre ces trois classes de modèles.

2.1 Quelques classes de modèles

Il semble important de signaler le grand nombre de modèles à caractère informatique, et qui en tant que tels sont plus des langages de description et de manipulation, que des modèles propices aux démonstrations mathématiques. De tels langages sont bien souvent basés sur un schématisme visuel, de type graphe. Etant en général implémentés ils peuvent être utilisés avec des données expérimentales. On peut citer [2], qui fournit un formalisme diagrammatique, [132] qui donne un outil de visualisation et d'analyse des réseaux booléens de type Kauffman, ou encore [6] qui donne un modèle général basé sur les systèmes hybrides. Enfin, l'outil GNA (pour *Genetic Network Analyzer*), développé par l'INRIA, repose sur le modèle linéaire par morceaux considéré dans ce mémoire [38]. Cet outil est basé sur une approche qualitative, qui sera expliquée plus en détails au chapitre 3. Bien d'autres outils peuvent être trouvés, parfois associés à des bases de données biologiques.

Les systèmes hybrides considérés en toute généralité incluent les modèles affines par morceaux comme cas particulier. Informellement, un système hybride est un système dynamique faisant intervenir simultanément des variables discrètes et des variables continues. Ils sont un outil actuellement utilisé pour modéliser des réseaux biochimiques [6, 56, 85]. Les questions abordées par la suite seront valides dans un cadre plus restreint que celui, très vaste, des systèmes hybrides (voir e.g. [5, 59, 113] pour des textes d'introduction sur la théorie et l'algorithmique de ces systèmes).
Les modèles stochastiques [57, 92] sont également assez répandus. Les équations aux dérivées partielles, les équations différentielles qualitatives ou à retard apparaissent de façon récurrente (cf. [35, 114]). Bien sûr, certains modèles combinent ces approches, donnant lieu par exemple à des systèmes hybrides stochastiques, ou à des équations aux dérivées partielles avec retard. Tous ces types de modèles sont plus proches de la réalité biologique que ce qui sera considéré par la suite. Les processus biochimiques sont connus pour être largement marqués par les effets de bruits et d'incertitude, qui justifient l'emploi d'outils stochastiques. L'utilisation des dérivées partielles et des retards est quant à elle particulièrement justifiée dans le cadre des cellules eucaryotes, dont la structure organisée est sensible au phénomène de diffusion, et au transport non instantané de molécules. Les cellules procaryotes sont aussi décrites plus exactement par des modèles incluant ce type d'aspects.
La principale limitation de toutes ces approches provient justement de leur degré de précision. Rendant les modèles difficiles à manipuler analytiquement, et chers en temps de calcul pour ce qui est d'une approche numérique, ils sont en pratique utiles pour des systèmes de dimension «petite» (rarement au-delà de quelques dizaines d'équations). Nous verrons que des modèles en apparence plus simplistes comme celui de Glass ont l'avantage d'être adaptés pour des systèmes ayant un grand nombre de variables. Or les réseaux génétiques et métaboliques sont de grande taille (le génome d'un organisme est souvent d'un ordre de grandeur de 10^4). Le modèle qui est au centre de ce mémoire est donc conçu pour répondre à d'autres types de questions que ceux mentionnés ici.

Deux modèles classiques peuvent maintenant être présentés. Ces modèles seront réemployés directement dans l'étude du modèle affine par morceaux, qui est introduit à leur suite. Aussi, la formulation qui en est donnée est conçue pour ces emplois ultérieurs. Elle est suivie d'une analyse superficielle, qui doit également dégager certaines notions utiles par la suite.

2.2 Modèles différentiables incluant des sigmoïdes

Dans les modèles continus de réseaux génétiques, les variables d'intérêt sont des concentrations en protéines, ARNm et autres molécules intervenant dans les mécanismes de régulation. Leur évolution est décrite par un système d'équations différentielles ordinaires, dont le second membre est classiquement composé de deux termes, ce qui s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = G(x) - \Lambda x, \tag{2.1}$$

où $x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n_+$ est un vecteur de concentrations. L'espace d'états $\mathbb{U}$ est un borné de $\mathbb{R}^n_+$, souvent rectangulaire. $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $(\lambda_1 \dots \lambda_n) \in (\mathbb{R}^*_+)^n$ sont des taux de dégradation. Les termes correspondant

modélisent la dégradation des différentes espèces, et tiennent donc compte simultanément des phénomènes de dégradation, de diffusion, et de dilution (due à la croissance). La fonction $G : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ représente le taux de production des différentes espèces. La régulation est ici traduite par le fait que le taux de production de chaque variable est déterminé par un ensemble d'éléments du réseau (y compris elle-même, éventuellement). G est une fonction nettement non linéaire.
Ceci entraîne qu'un système de la forme (2.1) ne possède généralement pas de solution analytique, et son étude s'appuie donc habituellement sur une approche numérique, associée à des considérations qualitatives sur la dynamique qu'il engendre. Ceci relève du contexte très riche des systèmes dynamiques non linéaires, au sujet desquels de nombreux ouvrages peuvent faire référence. On peut citer [9], qui est un classique sur les équations différentielles, [23] pour un traitement assez informel (sans démonstrations), orienté calcul numérique, [42] comme bon prérequis mathématique à la lecture de [120], ou encore [43, 67] pour des traitements assez complets et accessibles des outils mathématiques de la théorie des dynamiques non linéaires ou chaotiques. Le livre [24], créé par des physiciens et disponible sur internet, est également très bien fait. En ce qui concerne l'application de ce type d'équations à la biologie, on peut mentionner [98, 111].
Cette théorie des dynamiques non linéaires est toutefois un contexte trop vaste pour être ici pertinente dans toute sa généralité. Les systèmes tels que (2.1) sont en effet très spécifiques ; chaque composante G_i de G est une fonction $\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$, qui peut être exprimée en général au moyen de la fonction dite de Hill :

$$h^+(x_j,\ \theta_j, p_j) = \frac{x_j^{p_j}}{x_j^{p_j} + \theta_j^{p_j}}. \tag{2.2}$$

L'indice j indique que h^+ s'applique à une coordonnée du vecteur x des concentrations. Toutefois, pour alléger les notations, on omet cet indice dans ce qui suit : on note $h^+(x,\ \theta, p)$.
La fonction de Hill admet deux paramètres : θ est une valeur seuil, et p un exposant biologiquement lié à la coopérativité [1], et mathématiquement à la «raideur» de la fonction. Lorsque $p = 1$, on parle de fonction de Michaelis-Menten. Cette fonction décrit l'action catalytique d'une enzyme dans le cas le plus simple : sans coopérativité, sur un substrat unique. Le cas $p < 1$ correspond à une coopérativité négative. Le cas $p > 1$ correspond à une coopérativité positive. La courbe est alors une sigmoïde (en forme de s), dont la pente augmente avec l'exposant p. Ceci est représenté sur la figure 2.1.

Les fonctions de la forme (2.2) sont très courantes dans la cinétique des réactions biochimiques. Dans le contexte de la régulation génétique, la coopérativité est la norme, de sorte que les fonctions de régulation sont très souvent des sigmoïdes. Les sigmoïdes peuvent être représentées par d'autres classes de fonctions que les fonctions de Hill (2.2). Elles sont très souvent paramétrées par un réel p et un seuil θ, et tendent vers la fonction de Heaviside au seuil θ [2] lorsque $p \to \infty$ (ou parfois $p \to 0$). Parmi ces classes de fonctions, on peut mentionner les fonctions de la forme : $\frac{1}{1+e^{-p(x-\theta)}}$, $\tanh(p(x-\theta))$, $\arctan(p(x-\theta))$, qui sont typiques. Dans un cadre plus général, une sigmoïde peut ne pas être donnée explicitement, mais seulement définie par une série d'hypothèses portant sur ses limite (et

1. Il peut arriver qu'une enzyme admette plusieurs substrats. Lorsque sa liaison avec l'un d'entre eux modifie son affinité aux suivants, on parle de coopérativité.

2. Traditionnellement, la fonction de Heaviside vaut 0 sur $\mathbb{R}_-^*$, et 1 sur $\mathbb{R}_+$. Tout au long de ce mémoire, sa valeur change en un seuil θ, et non en 0.

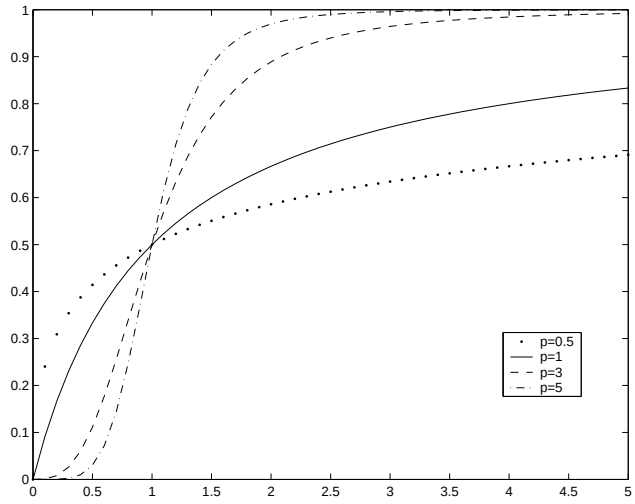


FIG. 2.1 – *Fonction de Hill, pour différentes valeurs du coefficient* p. *Le seuil est fixé à* 1. *En ce seuil, toutes les fonctions sont à la moitié de leur valeur maximale. La pente à l'origine vaut* 0 *pour* $p > 1$ *et* $\frac{1}{\theta}$ *pour* $p = 1$. *La dérivée n'est pas définie en* 0 *pour* $p < 1$.

celles de sa dérivée) aux extrémités de son domaine, et l'existence d'un paramètre pour lequel elle tend vers la fonction de Heaviside. Ceci est en particulier l'approche développée dans [106, 107, 108]. Il en sera question de façon plus détaillée au chapitre 3. Dans cette partie, on se restreint volontairement aux fonctions de Hill pour deux raisons. Tout d'abord, ces fonctions ont une justification biologique, notamment l'exposant de Hill, qui est lié à la coopérativité. Par ailleurs, diverses études (surtout numériques) [60, 64, 83, 84, 105], montrent que la forme exacte des sigmoïdes utilisées n'est pas déterminante, et que des fonctions différentes conduisent couramment à des dynamiques similaires.
On notera $h^-(x,\ \theta, p) = 1 - h^+(x,\ \theta, p)$. Les fonctions taux de production G_i s'écrivent alors comme combinaisons linéaires, produits et compositions de termes de la forme $h^\pm(x_j,\ \theta_j, p_j)$.
Au vu du rôle central des fonctions de Hill, on peut noter ici quelques aspects formels d'intérêt. On ne considère que la fonction de Hill croissante, le cas de h^- s'en déduisant aisément. A θ et p fixés, $h^+ : x \mapsto h^+(x,\ \theta, p)$ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de $[0, +\infty[\to [0, 1[$. De plus,

$$\frac{\partial h^+}{\partial x}(x,\ \theta, p) = \frac{p\, x^{p-1}\theta^p}{(\theta^p + x^p)^2} = \frac{p}{x} h^+(x,\ \theta, p) h^-(x,\ \theta, p)$$

$$\frac{\partial h^+}{\partial p}(x,\ \theta, p) = \frac{x^p \theta^p \left(\ln x - \ln \theta\right)}{(\theta^p + x^p)^2}$$

La réciproque de h^+, vue comme fonction de y, s'écrit :

$$(h^+)^{-1}(y,\ \theta, p) = \frac{\theta\, y^{\frac{1}{p}}}{(1-y)^{\frac{1}{p}}}$$

On peut expliciter davantage les applications G_i.
A chaque variable est associé un ensemble de seuils, qu'on notera pour $i \in \mathbb{N}_n$:

$$\Theta_i = \{\theta_{i0} < \theta_{i1} < \theta_{i2} < \cdots < \theta_{iq_i}\}. \tag{2.3}$$

Les seuils extrémaux θ_{i0} et θ_{iq_i} définissent les bords du domaine $\mathbb{U}$. On convient de l'égalité $\theta_{i0} = 0$. A chaque seuil θ_{ij} intérieur à $\mathbb{U}$ (i.e. $j \in \mathbb{N}_{q_i-1}$) correspond également un coefficient de Hill p_{ij}.

Ceci posé, on peut donner une forme générale pour les fonctions taux de production :

$$G_i(x) = \mathcal{G}_i\left(h^+(x_1,\, \xi_{11}),\, \ldots,\, h^+(x_1,\, \xi_{1q_1}),\, \ldots,\, h^+(x_n,\, \xi_{n1}),\, \ldots,\, h^+(x_n,\, \xi_{nq_n})\right) \quad (2.4)$$

où l'on a noté les couples de paramètres $\xi_{ij} = (\theta_{ij}, p_{ij})$, qui sont fixés dans l'écriture ci-dessus.
$\mathcal{G}_i : \mathbb{R}_+^{\sum_i q_i} \to \mathbb{R}_+$ est une application qui décrit les interactions à l'échelle du système complet : les fonctions de Hill décrivent la dynamique des interactions entre variables, i.e. à un niveau local, tandis que $\mathcal{G}_i$ décrit quelles sont les variables qui entrent en interaction. La relation $h^+ = 1 - h^-$ permet de n'utiliser que des fonctions h^+ dans l'expression (2.4).

Le seul choix d'écrire les applications G_i comme composées des $\mathcal{G}_i$ avec des fonctions de Hill restreint la classe des systèmes étudiés. En effet, cette écriture interdit dans l'expression de $G_i(x)$ l'occurence de termes de l'une des deux formes : $h^\pm(x_j, h^\pm(x_k, \xi_{kl}), p_{jm})$ et $h^\pm(x_j, \theta_{jm}, h^\pm(x_k, \xi_{kl}))$. De telles composées peuvent apparaître dans certains modèles de réseaux métaboliques [27]. L'étude qui en découle est fort difficile, et les termes de cette forme restent peu fréquents ; ils correspondent biologiquement à des mécanismes de contrôle du type *inhibition* (ou *activation*) d'*inhibition* (ou d'*activation*). Ceci est un phénomène assez exceptionnel, dont on ignorera donc l'existence dans ce qui suit.
Ce cas rare exclu, les fonctions de Hill peuvent être multipliées (traduisant l'action coordonnée d'éléments du réseau), et les produits obtenus être transformés par combinaisons linéaires (traduisant la concomittance d'actions de la forme précédente). En accord avec ce type d'hypothèses, une classe assez répandue pour les fonctions $\mathcal{G}_i$, dans le contexte de la régulation biochimique, est constituée par les fonctions multi-affines [11, 14].
Même en se restreignant à une telle classe, voire à des $\mathcal{G}_i$ encore plus simples, la non linéarité des fonctions de Hill limite fortement tout traitement analytique d'un système d'équations tel que (2.1). Restent les outils d'analyse numérique, dont les performances sont indéniables pour des modèles spécifiques, mais qui permettent rarement de vérifier des propriétés théoriques de classes entières de système. A cet égard, les modèles affines par morceaux, qui seront introduits en section 2.4, sont souvent conçus comme une approximation des modèles ici considérés. Approximation qui, bien que moins réaliste en tant que modèle, est plus propice à un travail analytique.

Pour conclure cette section, un objet important mérite d'être présenté. En général, chaque espèce est affectée par un sous-ensemble strict des éléments du réseau. Autrement dit, l'écriture (2.4) est surdéterminée : $\mathcal{G}_i$ ne dépend pas de tous ses $\sum_i q_i$ arguments. Pour préciser ceci, la notion de graphe d'interaction est souvent pertinente. On rappelle que la matrice jacobienne de G en un point x est définie par :

$$JG(x) = \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1\ldots n} \quad (2.5)$$

Remarque 2.1. *Dans l'équation (2.1), le terme de dégradation ne correspond généralement pas à des interactions entre espèces du réseau, ce qui explique qu'on considère la jacobienne de G seule, et non celle du second membre complet.*

Alors, en chaque point x de l'espace des phases, on définit un graphe d'interaction de façon très naturelle par :

Définition 2.2 (graphe d'interaction). $\mathsf{GI}(x) = (V, E)$ *est un graphe orienté dont les sommets représentent les variables* x_i *:* $V = \mathbb{N}_n$*.*
Les arêtes de $E \subset V \times V$ *sont données par les couples* (j, i) *tels que* $JG_{ij}(x) \neq 0$*.*

Chaque arête de ce graphe peut de plus être accompagnée du signe du terme correspondant dans $JG(x)$, voire du terme lui-même pour en quantifier l'effet sur le système.
Le graphe ainsi défini est une donnée essentielle concernant la structure d'un réseau. Ses liens avec la dynamique définie par (2.1) seront précisés section 3.1.1. On peut observer dès maintenant que ce graphe dépend a priori de la position x dans l'espace d'états. Comme la structure de signe de JG est d'importance, ceci suggère de partitionner l'espace en régions dans lesquelles le signe de chaque JG_{ij} est constant.
Pour avoir une information plus globale sur le système, on peut également considérer un graphe d'interaction $\mathsf{GI}(G)$ qui ne dépende pas de x, en définissant ses arêtes comme :

$$\left\{(j, i) \in \mathbb{N}_n^2 \mid \exists x \in \mathbb{U},\, JG_{ij}(x) \neq 0\right\}.$$

En d'autres termes, ce graphe est obtenu en superposant tous les $\mathsf{GI}(x)$ pour x parcourant son domaine $\mathbb{U}$.

2.3 Modèles discrets

Les modèles précédents sont des systèmes dynamiques continus, sur un espace de phases continu. On sait que l'analyse des orbites récurrentes de ces systèmes correspond celle d'un système dynamique discret sur un espace continu (e.g. une section de Poincaré). Un autre type de modèle est ici abordé, qui consiste en une dynamique discrète sur un espace discret. Biologiquement, on a vu que le fonctionnement d'un réseau génétique pouvait être considéré comme analogue à celui d'un circuit de portes logiques. C'est cette hypothèse qui est à la base des modèles discrets : chaque gène y est décrit par un ensemble fini d'états (niveaux d'expression). L'état global du réseau évolue en temps discret, chaque état déterminant le suivant selon une loi explicite.
Dans un contexte un peu général, ce type de modèles peut être abordé avec des points de vue assez variés. On peut citer [110] pour une approche métrique, [128] pour une approche de type automates, [129] qui emploie les outils et méthodes de la physique (notamment statistique). Dans le contexte des réseaux génétiques, Stuart Kauffman est connu pour avoir développé des modèles booléens synchrones [79, 80], et René Thomas pour ses études sur les modèles logiques généralisés (i.e. à plus de deux états), notamment asynchrones [119, 124].
Dans la mesure où les réseaux de régulation discrets seront réutilisés par la suite, on en donne ici une formulation adaptée à ces usages subséquents. En particulier, un point de vue géométrique, consistant à plonger le graphe orienté portant la dynamique dans $\mathbb{N}^n$, lui-même vu comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, permettra d'établir un lien assez naturel avec les modèles affines par morceaux. Ainsi le domaine, discret et fini, qui sert d'espace d'états dans cette classe de systèmes est choisi comme suit :

$$\mathbb{D} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{N}_{q_i}. \tag{2.6}$$

n est le nombre de variables, c'est-à-dire de gènes dans le réseau modélisé. Pour $i \in \mathbb{N}_n$, q_i est un entier désignant le nombre d'états discrets que peut prendre le gène i. Pour $q_i = 2$ on est donc dans le cadre des modèles booléens, à deux états. De façon générale, on notera les éléments de $\mathbb{D}$ comme des chaînes de caractères, et non comme des vecteurs, de manière à alléger autant que possible l'écriture.
La dynamique synchrone est à première vue donnée par les itérés d'une application $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, qui à un vecteur $a \in \mathbb{D}$ associe $F(a) = (F_1(a) \dots F_n(a))$. Nous allons voir toutefois qu'une telle dynamique est bien peu réaliste, et que certaines notions supplémentaires doivent être introduites. Néanmoins, toutes les constructions qui vont suivre peuvent être entièrement déduites du l'application F et de son domaine $\mathbb{D}$. De plus F peut être interprétée biologiquement comme une représentation des interactions du réseau, interprétation que nous développerons davantage dans cette section. Ainsi,

Définition 2.3 (réseau génétique discret (RGD)). *Un tel réseau est défini comme le couple $\mathfrak{R} = (\mathbb{D}, F)$, où $\mathbb{D}$ est un ensemble discret de la forme (2.6), i.e. un produit de n ensembles finis, et $F = (F_1 \dots F_n) : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.*

Pour F quelconque, le successeur d'un état du réseau peut être a priori arbitraire dans $\mathbb{D}$. Cependant, il est plus réaliste de contraindre les possibilités de succession entre états du système.
Tout d'abord, les valeurs $1 \dots q_i$ prise par un gène i représentent des niveaux d'expression. De tels niveaux d'expressions représentent l'activité d'un gène, c'est-à-dire la concentration d'ARNm ou de protéine qu'il permet de générer. Le passage d'un niveau à un autre est donc dans la réalité un phénomène non instantané, mais s'écoulant de manière continue. Il semble donc raisonnable de n'autoriser que des changements de ± 1 pour chaque coordonnée de a, à chaque pas de temps. Ainsi, le successeur d'un état $a \in \mathbb{D}$ du réseau peut être défini comme :

$$\textsc{succ}(F, a) = a + \mathtt{sgn}(F(a) - a). \tag{2.7}$$

On note $\textsc{succ}_i(F, a)$ la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de ce successeur. Si l'application F est claire dans un contexte donné, on notera parfois $\textsc{succ}(a)$ pour abréger $\textsc{succ}(F, a)$

Par ailleurs, les gènes réels changent d'état de façon non simultanée, ce qui nécessite la définition d'une dynamique asynchrone. Celle-ci doit permettre de ne modifier que certaines des coordonnées du vecteur d'état à chaque pas de temps. De ce point de vue, la successeur défini en (2.7) est un successeur synchrone. Pour formaliser une dynamique asynchrone, et donc plus réaliste, on introduit la notion suivante :

Définition 2.4 (application partielle). *Soient $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, et $I \subset \mathbb{N}_n$.*
L'application partielle d'indices I, notée $\widetilde{F}^I$, est donnée par :

$$\widetilde{F}^I(a) = \sum_{i \in I} F_i(a)\mathbf{e}_i + \sum_{i \in \mathbb{N}_n \setminus I} a_i \mathbf{e}_i.$$

$\widetilde{F}^I$ est donc l'application ayant les mêmes composantes que F pour les indices dans I, et laissant les autres coordonnées inchangées. On peut remarquer que $\widetilde{F}^{\varnothing}$ est l'application identité, et $\widetilde{F}^{\mathbb{N}_n} = F$.
En un point a, on ne peut distinguer les applications partielles $\widetilde{F}^I$ pour plusieurs ensembles

I, différant seulement en des indices i tels que $F_i(a) = a_i$. De façon à reduire ce genre d'ambiguité on note, pour $\pm \in \{-, +\}$:

$$\begin{array}{rccl} I^{\pm}: & \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbb{N}_n) \\ & a & \longmapsto & I^{\pm}(a) = \{i \in \mathbb{N}_n \mid \textsc{succ}_i(F, a) - a_i = \pm 1\}. \end{array}$$

Puis $I(a) = I^-(a) \cup I^+(a)$. Cette union est bien sûr disjointe.
On a alors :

Proposition 2.5. *$\widetilde{F}^{I(a)}(a) = F(a)$, et plus généralement,*

$$\widetilde{F}^{J}(a) = F(a)\,, \qquad \text{pour tout } J \supseteq I(a).$$

De plus, pour $J \subsetneq I(a)$, on a toujours $\widetilde{F}^{J}(a) \neq F(a)$.

démonstration.
Ces propriétés proviennent directement du fait que $i \in I(a)$ si et seulement si $\mathtt{sgn}(F_i(a) - a_i) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $F_i(a) \neq a_i$. La définition d'application partielle permet de conclure. □

Par ailleurs, les ensembles d'indices $I^{\pm}(a)$ permettent de donner une formulation explicite et simple de la fonction successeur :

$$\textsc{succ}(F, a) = a - \sum_{i \in I^-(a)} \mathbf{e}_i + \sum_{i \in I^+(a)} \mathbf{e}_i. \tag{2.8}$$

Une unique condition initiale pour un réseau génétique discret $(\mathbb{D}, F)$ peut donner lieu à différentes dynamiques. Celles-ci sont déterminées par un choix des variables mises à jour à chaque pas de temps. En attendant une discussion plus détaillée sur ce choix des mises à jour, on peut donner une description abstraite des trajectoires.

Définition 2.6 (trajectoire d'un RGD). *Une* trajectoire*, dans un RGD peut s'écrire sous la forme générique suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a^0 & \in & \mathbb{D} \\ a^{k+1} & = & \textsc{succ}(\widetilde{F}^{I_k}, a^k), \qquad I_k \subset \mathbb{N}_n. \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Pour une même condition initiale a^0, plusieurs choix des mises à jour I_k sont bien sûr possibles. On note le temps k en exposant pour éviter toute confusion avec les coordonnées a_i des éléments a de $\mathbb{D}$.

Le choix de la suite $(I_k)_k$ ci-dessus est comme on l'a dit déterminant. De plus, il sera souvent plus pertinent de restreindre le choix d'une telle suite à un sous-ensemble strict de $(\mathscr{P}(\mathbb{N}_n))^{\mathbb{N}}$. Nous rediscuterons de ce choix un peu plus loin, mais deux types fort répandus de restrictions sur cette suite peuvent être mentionnés dès maintenant. Ces deux choix définissent des *dynamiques* pour un RGD, c'est-à-dire des ensembles de trajectoires admissibles.

Définition 2.7 (dynamiques (a)synchrones). *La dynamique synchrone (resp. asynchrone), dans un RGD $(\mathbb{D}, F)$ est l'ensemble des trajectoires de la forme (2.9) de ce réseau discret, telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \mathbb{N}_n$ (resp. $\#I_k = 1$).*

Au vu de la proposisition 2.5, une trajectoire synchrone peut de manière équivalente être définie par la condition $I_k = I(a^k)$, $\forall k$.
La probabilité que deux gènes voient leur niveau d'expression changer de façon parfaitement simultanée est bien faible. Aussi, la dynamique asynchrone, pour laquelle une variable exactement est mise à jour à chaque pas de temps, est sans doute la plus réaliste, comme il est dit notamment dans [119, 124, 126].

Les définitions d'application partielle et de successeur étant utilisées conjointement dans l'équation (2.9), il semble intéressant de vérifier qu'elles sont compatibles, dans le sens suivant :

Proposition 2.8. *Considérant* $\mathrm{SUCC}(F,\cdot) : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, *on a* $\widetilde{\mathrm{SUCC}}^I(F,a) = \mathrm{SUCC}(\widetilde{F}^I, a)$.

démonstration.
On applique les définitions, qui nous donnent :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{SUCC}}^I(F,a) &= \sum_{i\in I} \mathrm{SUCC}_i(F,a)\mathbf{e}_i + \sum_{i\in\mathbb{N}_n\setminus I} a_i\mathbf{e}_i \\
&= \sum_{i\in I} \big(a_i + \mathtt{sgn}(F_i(a) - a_i)\big)\mathbf{e}_i + \sum_{i\in\mathbb{N}_n\setminus I} a_i\mathbf{e}_i \\
&= a + \sum_{i\in I} \mathtt{sgn}(F_i(a) - a_i)\mathbf{e}_i \\
&= a + \mathtt{sgn}\left(\sum_{i\in I} (F_i(a) - a_i)\mathbf{e}_i\right) \\
&= a + \mathtt{sgn}\left(\sum_{i\in I} F_i(a)\mathbf{e}_i + \sum_{i\notin I} a_i\mathbf{e}_i - a\right)
\end{aligned}$$

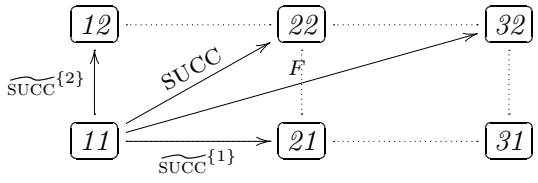
Cette dernière quantité est bien $\mathrm{SUCC}(\widetilde{F}^I, a)$. □

Avant de poursuivre, illustrons les notions introduites sur un exemple simple.

Exemple 2.9.
On considère une application F *sur* $\mathbb{D} = \mathbb{N}_3 \times \mathbb{N}_2$, *telle que* $F(11) = 32$.

application	*image de* 11
F	32
$\widetilde{F}^{\{1\}}$	31
$\widetilde{F}^{\{2\}}$	12
SUCC	22
$\widetilde{\mathrm{SUCC}}^{\{1\}}$	21
$\widetilde{\mathrm{SUCC}}^{\{2\}}$	12

Graphiquement, ceci peut être représenté ainsi :



On voit dans cet exemple une représentation graphique de $\mathbb{D}$, *sur laquelle des flèches relient le point* 11 *à ses images par différentes applications, partielles ou non. On voit notamment que l'application* $\mathrm{SUCC}(F,\cdot)$ *peut être conçue géométriquement comme une projection de* F *sur un voisinage de rayon* 1 *des points où on l'applique : cette application définit des déplacements dans* $\mathbb{D}$ *d'une longueur de* 1 *au plus dans chaque direction, le sens et la direction de ces déplacements étant dictés par* F. *On a donc bien une certaine*

continuité entre un point a et son successeur $\text{SUCC}(F, a)$*, comme désiré.*

La représentation graphique de l'exemple précédent correspond en fait à une construction usuelle dans le cadre des réseaux génétiques discrets :

Définition 2.10 (graphe de transitions d'états). $\mathsf{GT}(\mathbb{D}, F) = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *est un graphe orienté dont les sommets sont les états du réseau :* $\mathcal{V} = \mathbb{D}$.
Les arêtes sont les couples (antécédent, image) pour une dynamique de la forme (2.9) :

$$\mathcal{E} = \left\{ \left(a, \text{SUCC}(\widetilde{F}^I, a) \right) \mid a \in \mathbb{D},\ I \subset I(a),\ I \neq \varnothing \text{ si } I(a) \neq \varnothing \right\} \subset \mathbb{D} \times \mathbb{D}.$$

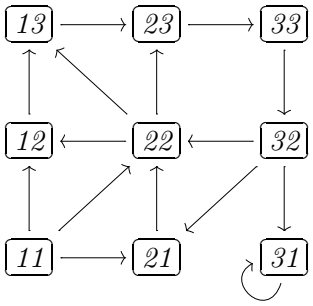
Au vu de la proposition 2.5, l'ensemble des arêtes issues d'un sommet a serait inchangé en remplaçant $I \subset I(a)$ par $I \subset \mathbb{N}_n$, ci-dessus. Le fait d'exclure $I = \varnothing$ quand $I(a)$ n'est pas vide permet de ne pas introduire de points fixes factices dans la dynamique (on a vu en effet que $\widetilde{F}^{\varnothing} = Id$).

Cette définition sera sans doute plus claire, illustrée par un second exemple :

Exemple 2.11.
F définie sur $\mathbb{D} = \mathbb{N}_3 \times \mathbb{N}_3$ est donnée par le tableau de gauche, de même que $\text{SUCC}(F, \cdot)$ *et $I(\cdot)$. Le graphe de transition est déduit de ce tableau.*

a	$F(a)$	$\text{SUCC}(F, a)$	$I(a)$
11	32	22	$\{1, 2\}$
12	13	13	$\{2\}$
13	23	23	$\{1\}$
21	23	22	$\{2\}$
22	13	13	$\{1, 2\}$
23	33	33	$\{1\}$
31	31	31	$\varnothing$
32	21	21	$\{1, 2\}$
33	31	32	$\{2\}$

Graphe de transition $\mathsf{GT}(\mathbb{D}, F)$



On voit que les chemins infinis dans ce graphe $\mathsf{GT}(\mathbb{D}, F)$ correspondent au trajectoires du RGD $(\mathbb{D}, F)$, telles que définies en (2.9). On abrégera parfois en *graphe de transitions*, ou encore *graphe d'itérations* l'appellation de ce graphe, usant ainsi des différents termes rencontrés dans la littérature pour désigner cet objet.
Le graphe GT aurait pu servir de définition pour la dynamique d'un RGD. Donné en tant que tel, comme ensemble de sommets et d'arêtes, il ne permet toutefois pas de restituer de façon simple une application $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ bien déterminée. Or c'est cette application qui est bien souvent la donnée de départ lorsqu'on analyse un modèle inspiré de phénomènes biologiques réels (ce qui n'est pas le cas des deux exemples donnés plus haut).
Pour analyser le comportement dynamique d'un réseau discret néanmoins, le seul graphe GT nous est une information suffisante. Considérons donc un graphe orienté tel que défini en 2.10. Il génère un ensemble de trajectoires de la forme (2.9), dont la réunion forme un *espace de décalage*, ou *espace de shift*, dans la terminologie de la dynamique symbolique.

Nous renvoyons à l'annexe B pour les définitions et résultats de cette théorie dont nous aurons l'usage. On note Σ_{GT} l'espace de shift constitué des mots infinis sur l'alphabet $\mathbb{D}$ donnés par les chemins infinis sur GT, i.e. l'ensemble des trajectoires de la forme (2.9) :

$$\Sigma_{\mathsf{GT}} = \left\{ \mathbf{a} = \left(a^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}} \mid \forall k,\, (a^k, a^{k+1}) \in \mathcal{E} \right\}.$$

Il est connu que Σ_{GT} est un *shift de type fini* (cf. annexe B), comme tous les shifts obtenus au moyen d'un graphe orienté [86]. Ainsi, on peut faire agir l'opérateur de décalage σ sur cet espace :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \sigma(\mathbf{a})^k = a^{k+1},$$

obtenant un système dynamique symbolique $(\Sigma_{\mathsf{GT}}, \sigma)$.
Lors de la définition des trajectoire d'un RGD, en (2.9), on a laissé en suspens la question du choix d'une séquence $\mathbf{I} = (I_k)_k$ d'ensembles d'indices mis à jour, ne traitant que les cas synchrone et asynchrone. L'ensemble où les suites $\mathbf{I}$ prennent leurs valeurs est $\mathscr{P}(\mathbb{N}_n)$, que l'on notera plus sobrement $\mathscr{P}_n$. Cet ensemble est fini, et l'espace $\mathscr{P}_n^{\mathbb{N}}$ est donc un décalage plein. On note encore σ l'opérateur de shift sur cet espace. On peut donc considérer les stratégies de mise à jour $\mathbf{I}$ comme un système dynamique symbolique en tant que tel. De façon à comparer ce système dynamique avec le système $(\Sigma_{\mathsf{GT}}, \sigma)$ décrivant les trajectoires du RGD, on va en fait considérer l'espace

$$\Sigma_I = \mathbb{D}.\mathscr{P}_n^{\mathbb{N}} = \left\{ a.\mathbf{I} \mid a \in \mathbb{D},\ \mathbf{I} \in \mathscr{P}_n^{\mathbb{N}} \right\},$$

muni de l'opérateur de décalage suivant :

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\sigma}: & \Sigma_I & \longrightarrow & \Sigma_I \\ & a^0.I_0I_1I_2\ldots & \longmapsto & \textsc{succ}(\widetilde{F}^{I_0}, a^0).I_1I_2\ldots \end{array} \tag{2.10}$$

On vérifie aisément que $(\Sigma_I, \widetilde{\sigma})$ constitue un système dynamique symbolique usuel, en munissant $\mathbb{D}$ comme $\mathscr{P}_n$ de la topologie discrète, et Σ_I de la topologie produit. Les éléments de Σ_I sont constitués d'une condition initiale a^0, suivie des ensembles d'indices mis à jour le long d'une trajectoire du RGD issue de a^0. On peut alors montrer que $(\Sigma_{\mathsf{GT}}, \sigma)$ admet un plongement dans $(\Sigma_I, \widetilde{\sigma})$, i.e. une injection continue commutant avec l'opérateur de décalage. Ce plongement est induit par l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{I}: & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathscr{P}_n \\ & (a,b) & \longmapsto & \mathcal{I}(a,b) = \{i \in \mathbb{N}_n \mid a_i \neq b_i\}. \end{array}$$

Par définition, un couple $(a,b) \in \mathcal{E}$ vérifie $b = \textsc{succ}(\widetilde{F}^I, a)$ pour un certain $I \subset I(a)$. On déduit alors de la proposition 2.5 que $\mathcal{I}(a,b)$ est exactement cet ensemble I. Plus généralement, pour $b = \textsc{succ}(\widetilde{F}^I, a)$ et $I \subset \mathbb{N}_n$, on a : $\mathcal{I}(a,b) = I \cap I(a)$.
Le résultat suivant est valable pour la distance $\rho(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sup_k \frac{\delta(a^k,b^k)}{2^k}$, telle que définie en annexe B.

Proposition 2.12. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \psi: & \Sigma_{\mathsf{GT}} & \longrightarrow & \Sigma_I \\ & \mathbf{a} = a^0.a^1a^2\ldots & \longmapsto & \psi(\mathbf{a}) = a^0.\,\mathcal{I}(a^0,a^1)\,\mathcal{I}(a^1,a^2)\ldots \end{array} \tag{2.11}$$

est une isométrie, elle est donc continue et injective. De plus, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{\mathsf{GT}} & \xrightarrow{\psi} & \Sigma_I \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\widetilde{\sigma}} \\ \Sigma_{\mathsf{GT}} & \xrightarrow{\psi} & \Sigma_I \end{array}$$

commute, i.e. $\psi \circ \sigma = \widetilde{\sigma} \circ \psi$. L'application ψ est donc un plongement.

démonstration.
Soient $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Sigma_{\mathsf{GT}}$, tels que $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2^{-K}$, avec $K \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Alors $K = \inf\{k \mid a^k \neq b^k\}$, i.e. pour tout $k < K$, on a $a^k = b^k$, et $a^K \neq b^K$ (pour $K = \infty$, on ignore cette dernière équation).
Par suite, pour tout $0 \leqslant k < K$ on a $\mathcal{I}(a^{k-1}, a^k) = \mathcal{I}(b^{k-1}, b^k)$, d'où l'on déduit

$$\rho\big(\psi(\mathbf{a}), \psi(\mathbf{b})\big) \leqslant 2^{-K}.$$

Si $K = \infty$, i.e. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ on a donc $\psi(\mathbf{a}) = \psi(\mathbf{b})$.
Sinon on a $a^K \neq b^K$, et $a^{K-1} = b^{K-1}$.
Alors par définition de GT et $\mathcal{I}$, on a

$$a^K = \textsc{succ}(\widetilde{F}^{\mathcal{I}(a^{K-1}, a^K)}, a^{K-1}) \qquad \text{et} \qquad b^K = \textsc{succ}(\widetilde{F}^{\mathcal{I}(a^{K-1}, b^K)}, a^{K-1}).$$

Que a^K et b^K soient différents entraîne donc $\mathcal{I}(a^{K-1}, a^K) \neq \mathcal{I}(a^{K-1}, b^K) = \mathcal{I}(b^{K-1}, b^K)$, c'est-à-dire $\psi(\mathbf{a})^K \neq \psi(\mathbf{b})^K$, ce qui prouve que ψ est une isométrie.
Reste à montrer que ψ commute avec l'opérateur de décalage. Ceci vient par simple reécriture des équations (2.10) et (2.11) définissant respectivement $\widetilde{\sigma}$ et ψ, en un point $\mathbf{a} = a^0.a^1a^2\ldots$ quelconque dans Σ_{GT} :

$$\begin{aligned} \psi \circ \sigma(\mathbf{a}) &= \psi(a^1.a^2\ldots) \\ &= a^1.\mathcal{I}(a^1, a^2)\,\mathcal{I}(a^2, a^3)\ldots \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma} \circ \psi(\mathbf{a}) &= \widetilde{\sigma}(a^0.\mathcal{I}(a^0, a^1)\,\mathcal{I}(a^1, a^2)\ldots) \\ &= \textsc{succ}(\widetilde{F}^{\mathcal{I}(a^0, a^1)}, a^0).\mathcal{I}(a^1, a^2)\ldots \end{aligned}$$

Et par définition de GT, on a $a^1 = \textsc{succ}(\widetilde{F}^{\mathcal{I}(a^0, a^1)}, a^0)$, ce qui achève la démonstration. □

De cette proposition, on déduit une borne supérieure pour l'entropie topologique d'un RGD. Cette dernière est bien sûr définie comme étant celle du système dynamique symbolique induit par le graphe de transition GT.

Corollaire 2.13. *L'entropie topologique d'un réseau génétique discret est majorée par la dimension de son espace d'états :*

$$h(\Sigma_{\mathsf{GT}}, \sigma) \leqslant n. \tag{2.12}$$

démonstration.
L'existence du plongement ψ assure : $h(\Sigma_{\mathsf{GT}}, \sigma) \leqslant h(\Sigma_I, \widetilde{\sigma})$.
Or le nombre de mots de longueur k de $\Sigma_I = \mathbb{D} \times \mathscr{P}_n^{\mathbb{N}}$ est donné par :

$$\#\mathcal{L}_k(\Sigma_I) = \#\mathbb{D}(2^n)^{k-1} + (2^n)^k = (\#\mathbb{D} + 2^n)\, 2^{n(k-1)}.$$

Cette quantité est obtenue en distinguant les mots commençant par un symbole $a \in \mathbb{D}$, et ceux constitués uniquement de symboles dans l'alphabet à $\#\mathscr{P}_n = 2^n$ symboles. Alors,

$$\log \#\mathcal{L}_k(\Sigma_I) = \log(\#\mathbb{D} + 2^n) + n(k-1) \sim nk \quad \text{pour } k \to \infty.$$

On a donc : $h(\Sigma_I, \widetilde{\sigma}) = n$. □

Ce corollaire appelle deux remarques. Tout d'abord, l'entropie du sous-shift Σ_{GT} est toujours majorée par celle du shift plein $\mathbb{D}^{\mathbb{N}}$. Cette dernière est égale à

$$\log \#\mathbb{D} = \log \prod_{i=1}^{n} q_i.$$

Dès lors que le système n'est pas binaire, il existe au moins un $q_i > 2$, et la quantité ci-dessus est strictement supérieure à n. Le corollaire précédent fourni donc une borne plus fine que celle, immédiate, obtenue en considérant le shift plein, i.e. le système symbolique d'entropie maximale. On remarquera au passage que la borne obtenue est l'entropie du shift plein sur l'espace d'états d'un système binaire.
D'autre part, les deux résultats qui précèdent montrent que l'ensemble des stratégies de mise à jour, conçu comme un système dynamique, génère des trajectoires plus complexes (du point de vue de l'entropie topologique) que le système dynamique donné par le réseau génétique discret lui-même. Ceci n'est pas très surprenant, si l'on observe que dans la définition (2.9) une trajectoire est entièrement déterminée par la donnée de a^0 et de la stratégie $\mathbf{I}$ des mises à jour, pour F fixée. Ainsi, toute la complexité d'un trajectoire est portée par le choix de $\mathbf{I}$, ce que traduisent plus formellement la proposition 2.12 et son corollaire.

Pour conclure sur les techniques de dynamique symbolique, signalons enfin que le système $(\Sigma_I, \widetilde{\sigma})$ des stratégies de mise à jour est un moyen pratique de définir des classes de dynamiques. Notamment, les dynamiques synchrones et asynchrones de la définition 2.7 sont respectivement donnée par :

$$\Sigma_{\mathtt{s}} = \Sigma_{\mathtt{s}}(\mathsf{GT}) = \psi^{-1}\left(\{a.\,\mathbb{N}_n\mathbb{N}_n \dots \mid a \in \mathbb{D}\}\right) = \psi^{-1}\left(\mathbb{D}.\,\left\{(\mathbb{N}_n)_{k\in\mathbb{N}}\right\}\right),$$

et

$$\Sigma_{\mathtt{a}} = \Sigma_{\mathtt{a}}(\mathsf{GT}) = \psi^{-1}\left(\mathbb{D}.\,\left\{\mathbf{I} \in \mathscr{P}_n^{\mathbb{N}} \mid \forall k \in \mathbb{N},\, \exists i \in \mathbb{N}_n,\, I_k = \{i\}\right\}\right).$$

Les deux sous-ensembles de Σ_I dont on considère ci-dessus l'image réciproque par ψ sont clairement $\widetilde{\sigma}$-invariants et fermés, i.e. ce sont des sous-shifts de Σ_I. Par injectivité de ψ, les dynamiques correspondantes dans GT sont conjuguées à celles engendrées par $\widetilde{\sigma}$ sur ces deux sous-shifts. Celui donnant les dynamiques synchrones est notamment fini, en bijection avec $\mathbb{D}$, ce qui traduit le déterminisme des dynamiques synchrones, et le fait qu'elle ne peuvent donner lieu qu'à des trajectoires périodiques (incluant des points fixes). Ainsi, l'entropie topologique des dynamiques synchrones est nulle, et celle des dynamiques

asynchrones peut être majorée. Pour ces dernières en effet, le nombre de mots de longueur p de $\psi(\Sigma_{\mathtt{a}})$ est $(\#\mathbb{D}+n)n^{p-1}$ (calculé comme dans la démonstration du corollaire 2.13), et de l conjugaison $(\Sigma_{\mathtt{a}},\sigma) \sim (\psi(\Sigma_{\mathtt{a}}),\widetilde{\sigma})$, on déduit facilement

$$h\left(\Sigma_{\mathtt{a}},\sigma\right) \leqslant \log n.$$

De manière plus générale, on pourra définir des classes de dynamiques d'un RGD données par des ensembles de stratégies de mise à jour. Lorsque ces derniers ensembles sont des sous-shifts de Σ_I, ils sont topologiquement conjugués au sous-shift de $(\Sigma_{\mathsf{GT}},\sigma)$ constitué de leur image réciproque par ψ.

Pour conclure cette section, on définit un deuxième graphe associé à un RGD : le graphe d'interactions. Celui-ci a déjà été défini dans le cadre des modèles différentiables. Pour donner une définition similaire dans le cas discret on a besoin de la notion de jacobienne d'une application discrète. Une telle matrice peut être définie dans le cas booléen de façon assez naturelle (cf. [110]) : le coefficient d'indices (i,j) vaut 1 si F_i change de valeur lorsque a_j change de valeur, et 0 sinon. Ce n'est pas aussi simple si les variables peuvent prendre plus de deux valeurs. En effet en un point $a \in \mathbb{D}$, il faut a priori considérer les différences à gauche et à droite pour chaque coordonnée, et chaque composante de $F \in \mathscr{E}$; pour $i,j \in \mathbb{N}_n$:

$$\Delta_j^- F_i(a) = F_i(a) - F_i(a-\mathbf{e}_j) \qquad \text{et} \qquad \Delta_j^+ F_i(a) = F_i(a+\mathbf{e}_j) - F_i(a). \tag{2.13}$$

La différence à gauche n'est pas définie pour $a_j = 1$, de même que la différence à droite pour $a_j = q_j$. Ainsi, dans le cas booléen où $q_j = 2$, la différence à gauche n'est définie qu'en $a_j = 2$, et celle à droite en $a_j = 1$ seulement. De plus, ces deux valeurs coïncident : en ne notant que la valeur de a_j en argument de F_i (les autres coordonnées de x peuvent être quelconques), on a en effet $\Delta_j^+ F_i(1) = \Delta_j^- F_i(2) = F_i(2) - F_i(1)$. Cette quantité est la différence booléenne mentionnée plus haut, si l'on substitue $\{0,1\}$ à $\{1,2\}$ et que l'on effectue les calculs dans l'anneau de Boole.
Pour chaque couple (i,j), il y a donc a priori deux différences de la forme (2.13) dans le cas général ($q_i > 2$). Néanmoins, l'observation faite pour le cas booléen peut être généralisée en remarquant l'identité :

$$\forall j \in \mathbb{N}_n,\ \forall a \in \mathbb{D},\ a_j < q_j, \quad \Delta_j^+ F_i(a) = \Delta_j^- F_i(a+\mathbf{e}_j).$$

Ainsi, la distinction opérée en (2.13) est superflue : les différences de la forme $\Delta_j^+ F_i$ pourraient suffirent. On conservera toutefois les différences à gauche et à droite, qui nous semblent plus faciles à interpréter que l'emploi de la différence à droite d'un voisin de gauche pour décrire la différence à gauche. Deux jacobiennes discrètes sont donc définies.

Définition 2.14 (jacobienne discrète). *Pour $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, on note JF^- et JF^+ les matrices jacobiennes à gauche et à droite respectivement. Elle ne sont pas définies en tout point de $\mathbb{D}$:*

$$\textit{Pour } (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \quad \left| \begin{array}{ll} \forall a \in \prod_{i=1}^n \{2 \dots q_i\}, & JF_{ij}^-(a) = \Delta_j F_i^-(a) \\ \forall a \in \prod_{i=1}^n \mathbb{N}_{q_i-1}, & JF_{ij}^+(a) = \Delta_j F_i^+(a) \end{array} \right.$$

On peut comme dans la section précédente introduire un graphe d'interaction, dont la définition est presque analogue à 2.2. La différence provient seulement du fait que les

deux jacobiennes doivent être prises en compte, sauf sur les bords du domaine $\mathbb{D}$.

Définition 2.15 (graphe d'interaction : cas discret). $\mathsf{GI}(a) = (V, E)$ *est un graphe orienté dont les sommets représentent les variables* $a_i : V = \mathbb{N}_n$.
Pour $a \in \prod_{i=1}^{n} \{2 \dots q_i - 1\}$, *les arêtes de* $E \subset V \times V$ *sont données par les couples* (j, i) *tels que*

$$JF_{ij}^{-}(a) \neq 0 \quad \vee \quad JF_{ij}^{+}(a) \neq 0.$$

S'il existe un $j \in \mathbb{N}_n$ *tel que* $a_j = 1$ *(resp.* $a_j = q_j$*), la seule condition* $JF_{ij}^{+}(a) \neq 0$ *(resp.* $JF_{ij}^{-}(a) \neq 0$*) entraîne* $(j, i) \in E$ *(dans les deux cas, l'autre jacobienne discrète n'est pas définie).*

L'importance de ce graphe sera soulignée section 3.1.1.

2.4 Modèles affines par morceaux

Dans cette section, on présente enfin le modèle qui est le sujet central de cette thèse. Il s'agit d'une formulation sous forme d'équations différentielles affines par morceaux, pouvant à ce titre être située à un niveau intermédiaire entre les modèles continus et discrets présentés précédemment. On en donne ici une définition générale, suivie de quelques résultats simples, qui seront utiles par la suite.
Historiquement, c'est Leon Glass qui le premier propose l'usage d'équations affines par morceaux pour décrire les réseaux de régulation génétique, au début des années 1970 [63, 62]. De ce fait, il est courant désormais d'appeler «réseaux de Glass» , ou «systèmes de Glass», cette forme particulière d'équations affines par morceaux.
Ces équations sont conçues comme une approximation des systèmes non linéaires usuels, tirant parti des outils d'analyse des systèmes booléens [60]. Ce modèle est donc dès son origine une sorte de compromis entre précision de la description et maniabilité analytique. Il a vocation à fournir une information surtout qualitative. Ses rapports avec les deux classes de modèles entre lesquelles il se situe furent largement précisés depuis son invention. On montrera dans cette section que ce modèle peut être obtenu de façon équivalente par passage à la limite des coefficients de Hill dans une famille de systèmes différentiables de la forme (2.1), ou à partir d'un unique système discret, RGD tel que défini en 2.3.

2.4.1 Premières définitions

Commençons par donner la forme générale de ces systèmes. Le principe de modélisation est semblable au cas continu : on a affaire à un système d'équations différentielles dont le second membre comprend un terme de production et un terme de dégradation :

$$\frac{dx}{dt} = \Gamma(x) - \Lambda x. \tag{2.14}$$

Λ est la même matrice diagonale que dans (2.1). De même, $x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}_{+}^{n}$ est un vecteur de concentrations. L'application taux de production $\Gamma : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ est constante par morceaux. Sa définition est donc associée à une partition de $\mathbb{U}$, donnée par des seuils exactement

identiques à ceux associés aux modèles différentiables. On rappelle ici la notation choisie pour de tels seuils :

$$\Theta_i = \{\theta_{i0} < \theta_{i1} < \cdots < \theta_{iq_i}\}, \tag{2.15}$$

pour $i \in \mathbb{N}_n$.
Chaque θ_{ij} est un réel positif. Le domaine où est défini le système peut être choisi ainsi : $\mathbb{U} = \prod_i [0, \theta_{iq_i}]$. A chaque jeu de seuils $(\theta_{1a_1}, \ldots, \theta_{na_n})$, un pavé peut être associé :

$$B_a = B_{a_1 \ldots a_n} = \prod_{i=1}^{n} [\theta_{ia_i - 1}, \theta_{ia_i}]. \tag{2.16}$$

Une telle région sera indifféremment appelée pavé, boîte, rectangle ou cube (avec le préfixe n- lorsqu'il sera utile d'en préciser la dimension). Le pavage de l'espace ainsi constitué est illustré sur la figure 2.2. Les multi-indices repérant ces boîtes appartiennent à :

$$\mathbb{D} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{N}_{q_i},$$

ce qui permet dès maintenant d'entrevoir le lien entre les systèmes de Glass et les systèmes discrets de la section 2.3. On peut dans cet esprit introduire ici l'application de discrétisation suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{d} : & \bigcup\limits_{a \in \mathbb{D}} \mathring{B}_a & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & x & \longmapsto & a \text{ tel que } x \in \mathring{B}_a \end{array} \tag{2.17}$$

Cette application est bien définie car les $\mathring{B}_a$ sont disjoints. On note $\mathbf{d}_i$ les composantes de $\mathbf{d}$, pour $i \in \mathbb{N}_n$.

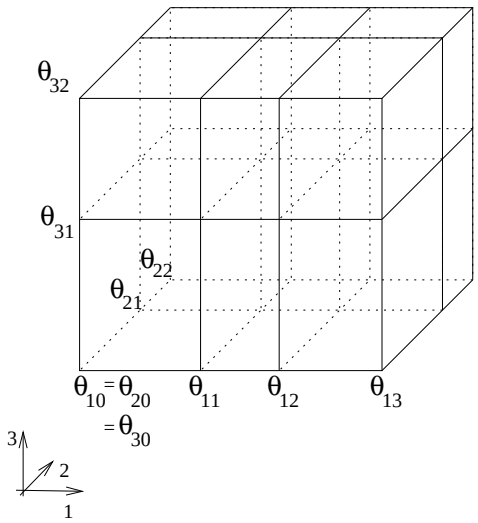


FIG. 2.2 – *Pavage d'un système à trois variable, pour lequel* $q_1 = 3$, $q_2 = 2$ *et* $q_3 = 2$, *c'est-à-dire* $\mathbb{D} = \mathbb{N}_3 \times \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_2$.

Il sera également pratique de représenter les seuils bordant une boîte à l'aide des applications suivantes, pour $i \in \mathbb{N}_n$:

$$\begin{array}{rccl} \theta_i^- : & \mathbb{D} & \to & \Theta_i \setminus \{\theta_{iq_i}\} \\ & a & \mapsto & \theta_{ia_i - 1} \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \theta_i^+ : & \mathbb{D} & \to & \Theta_i \setminus \{\theta_{i0}\} \\ & a & \mapsto & \theta_{ia_i} \end{array}$$

Ainsi, $\theta_i^-(a)$ (resp. $\theta_i^+(a)$) est le seuil inférieur (resp. supérieur) dans la direction i, pour la boîte B_a.

Dans chaque boîte de la forme (2.16), la fonction Γ est constante. Elle n'est pas définie a priori sur la frontière d'une boîte B_a. Cette ambiguité peut être levée de différentes façons, qui seront précisées dans le chapitre 3.

Remarque 2.16. *On pourrait donner une version plus générale des équations 2.14, dans laquelle la matrice Λ est non pas constante, mais constante par morceaux. Néanmoins, comme on le verra dans la suite de cette section, c'est l'aspect constant par morceaux des quantités $\frac{\gamma_i}{\lambda_i}$ qui détermine l'essentiel de la dynamique. Le choix de λ_i constants permettra donc d'alléger les notations, sans perte trop importante de généralité.*

Décrivons maintenant les solutions d'un système de Glass. Au vu de la définition de Γ, pour tout $x \in \mathring{B}_a$, avec $a \in \mathbb{D}$, l'équation (2.14) est réduite à un système d'équations différentielles affines, avec une matrice diagonale. La solution d'un tel système est connue, et s'écrit, en notant $(\gamma_1 \dots \gamma_n)^T$ la valeur constante de $\Gamma(x)$ dans la boîte considérée :

$$\varphi^a(x,t) := x(t) = f + e^{-\Lambda t}(x - f). \tag{2.18}$$

On a noté $\varphi^a : B_a \times \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ le flot associé au champ de vecteur de la boîte B_a.
Pour une condition initiale $x \in B_a$, et en notant

$$f = (f_1 \dots f_n)^T = \left(\frac{\gamma_1}{\lambda_1} \dots \frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^T \tag{2.19}$$

Λ étant diagonale, chaque composante $x_i(t)$ est simplement donnée par :

$$x_i(t) = f_i + e^{-\lambda_i t}(x_i - f_i), \qquad i \in \mathbb{N}_n.$$

Il apparaît clairement que le vecteur f est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le flot ci-dessus, et que chaque composante $x_i(t)$ tend vers f_i comme une fonction strictement monotone de t. Ainsi, la trajectoire issue de x se dirige vers f, jusqu'à rencontrer la frontière de B_a. Par monotonie, une telle intersection est possible si et seulement si il existe une valeur seuil comprise entre x_i et f_i, pour un $i \in \mathbb{N}_n$. Autrement dit, si et seulement si $f \notin B_a$. Si une telle intersection a lieu, Γ prend une nouvelle valeur associée à une boîte adjacente à B_a, et f également. La solution issue de x peut alors être prolongée continûment par un nouveau morceau de trajectoire se dirigeant vers ce nouveau point f, et le même processus est répété tout au long des trajectoires. En raison de sa nature attractive, un point f associé à un boîte est habituellement appelé *point focal*. Etant constant dans chaque boîte, elle-même univoquement déterminée par son indice a, on notera $f(a)$ le point associé à la boîte B_a.
On peut énumérer les situations possibles au niveau d'une boîte, en fonction de la disposition du point focal. Si ce point appartient à $\mathring{B}_a$, c'est un point d'équilibre asymptotiquement stable. S'il appartient à $\mathbb{U} \setminus B_a$, toutes les trajectoires issues de $\mathring{B}_a$ s'en échappent en temps fini. Le cas $f \in \partial B_a$ est plus problématique. Il est donc exclu par hypothèse en général, ce qui n'est pas trop réducteur si l'on considère que la frontière des boîtes est une région de mesure (de Lebesgue) nulle dans $\mathbb{U}$. Une hypothèse supplémentaire concernant les points focaux est d'exclure le cas $f \notin \mathbb{U}$. Ceci afin d'assurer la conservativité du

système, et le caractère borné des trajectoires. Ces deux restrictions peuvent se résumer en :

H1. $\forall a \in \mathbb{D},\ f(a) \in \bigcup_{b\in\mathbb{D}} \mathring{B}_b.$

Sauf mention contraire, cette hypothèse sera faite dans toute la suite de ce mémoire. On a dit plus haut que dans le cas $f \notin B_a$, les trajectoires s'échappent en temps fini, ce qui mérite d'être précisé. Seules les directions i telles que $x_i(t)$ peut rencontrer un seuil sont ici importantes. On les distingue donc :

$$\begin{array}{rcccl} I_{out}(B_a) & = & I^-_{out}(B_a) & \bigcup & I^+_{out}(B_a) \\ & = & \{i \in \mathbb{N}_n \mid f_i < \theta^-_i(a)\} & \bigcup & \{i \in \mathbb{N}_n \mid f_i > \theta^+_i(a)\} \end{array}$$

On omettra la dépendance à B_a lorsque le contexte permet de lever toute ambiguité. I^+_{out} (resp. I^-_{out}) est l'ensemble des directions selon lesquelles le flot peut sortir de B_a en croissant (resp. décroissant) avec le temps. On a pour chacune de ces directions une facette (parfois appelée *mur*) de sortie associée, d'équation $x_i = \theta^-_i(a)$ ou $x_i = \theta^+_i(a)$. Par monotonie du flot, tout point x d'une telle facette est un *point de sortie*, c'est-à-dire un point x vérifiant : $(x \in B_a) \wedge (\forall t > 0,\ \varphi^a(x, [0, t[\,) \not\subset B_a)$.
Pour chaque $i \in I_{out}$, le temps nécessaire pour atteindre le mur de sortie correspondant depuis un point $x \in B_a$ est donné par :

$$\tau_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_i} \ln\left(\dfrac{f_i - x_i}{f_i - \theta^-_i(a)}\right) & \text{si} \quad i \in I^-_{out}, \\ \dfrac{1}{\lambda_i} \ln\left(\dfrac{f_i - x_i}{f_i - \theta^+_i(a)}\right) & \text{si} \quad i \in I^+_{out}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Cette distinction entre I^+_{out} et I^-_{out} sera nécessaire à plusieurs reprises, compliquant inutilement l'exposé. En effet, notons :

$$\alpha^-_i(x) = \frac{f_i - \theta^-_i(a)}{f_i - x_i}, \qquad \text{et} \qquad \alpha^+_i(x) = \frac{f_i - \theta^+_i(a)}{f_i - x_i}.$$

Puis, comme I^-_{out} et I^+_{out} sont disjoints, pour chaque $i \in I_{out}$ le signe $\pm_i \in \{-, +\}$ tel que $i \in I^{\pm_i}_{out}$ est bien déterminé. On obtient ainsi une notation plus compacte :

$$\text{pour } i \in I_{out}, \quad \tau_i(x) = \frac{-1}{\lambda_i} \ln\left(\alpha^{\pm_i}_i(x)\right).$$

On notera $\mp_i$ l'opposé de $\pm_i$.

De façon générale, le temps de sortie est donné par :

$$\tau(x) = \min_{i \in I_{out}} \{\tau_i(x)\}. \tag{2.21}$$

En termes de flot, pour une condition initiale $x \in B_a$, l'application $\varphi^a(x, .) : t \mapsto \varphi^a(x, t)$ est à image dans B_a pour $t \in [0, \tau(x)]$.
En réinjectant cette quantité $\tau(x)$ dans l'équation du flot (2.18), on obtient le point de sortie issu de x comme une fonction explicite de ce dernier. Autrement dit, on a une *application de sortie*, ou *application de transition* $B_a \to \partial B_a$, $x \mapsto \varphi^a(x, \tau(x))$, pour chaque $a \in \mathbb{D}$. En pratique, ces applications sont itérées de boîte en boîte le long des

trajectoires, si bien que les itérés eux-mêmes sont sur la frontière d'une boîte, sauf peut-être pour la condition initiale. Cette dernière peut être choisie sur une facette sans perte de généralité, ce qui donne une application de transition que l'on peut expliciter :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}^a : & \partial B_a & \longrightarrow & \partial B_a \\ & x & \longmapsto & \mathcal{M}^a x = f + A(x)(x - f). \end{array} \tag{2.22}$$

Où $f = f(a)$, et $A(x)$ est la matrice diagonale dont les coefficients sont $e^{-\lambda_i \tau(x)}$, avec $i \in \mathbb{N}_n$. Pour une direction de sortie $s \in \mathbb{N}_n$, i.e. $\tau(x) = \tau_s(x)$, les coefficents de $A(x)$ peuvent également s'écrire :

$$A_{ii}(x) = \left(\frac{f_s - \theta_s^{\pm_s}(a)}{f_s - x_s} \right)^{\frac{\lambda_i}{\lambda_s}}$$

Il est ainsi possible de ramener un système d'équations différentielles tel que (2.14) à l'étude du système dynamique discret obtenu en calculant les itérés des $\mathcal{M}^a$ sur l'union des frontières ∂B_a. Ceci sera détaillé au chapitre 4. Une illustration en est donnée sur la figure 2.3.

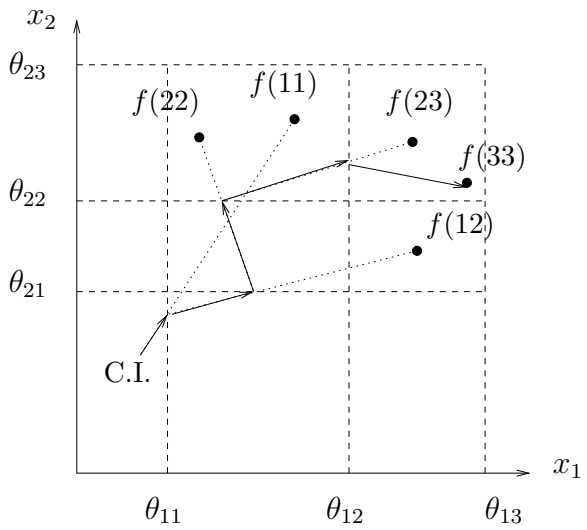


FIG. 2.3 – *Principe de calcul d'une orbite à partir des itérés d'applications de transition $\mathcal{M}^a$. Dans chaque boîte, les trajectoires se dirigent vers le point focal associé, jusqu'à rencontrer un hyperplan seuil. Le procédé est alors réitéré, avec le point focal de la dernière boîte atteinte. Sur cet exemple, $f(33) \in \mathring{B}_{33}$, et la trajectoire représentée converge vers ce point d'équilibre asymptotiquement stable.Les trajectoires sont rectilignes dans chaque boîte, ce qui n'est le cas que lorsque tous les taux de dégradation λ_i sont égaux, voir section 2.4.2.*

En toute généralité $\tau(x)$, qui est défini comme minimum sur i des $\tau_i(x)$, peut être atteint pour plusieurs indices i simultanément. Ceci correspond géométriquement au fait que $\mathcal{M}^a x$ appartient à l'intersection de plusieurs facettes de B_a, c'est-à-dire à une face de dimension $k < n - 1$. L'énumération des cas (i.e. des k) possibles est envisageable, et ces aspects combinatoires seront abordés ultérieurement (chapitre 3).

Comme annoncé en début de section, on va maintenant associer à chaque système affine par morceaux de la forme (2.14) un unique système discret de la forme donnée à la définition 2.3, et une famille de systèmes différentiables de la forme (2.1).

2.4.2 Système discret associé à un système affine par morceaux

On a vu que l'application Γ d'un système affine par morceaux de la forme (2.14) est constante sur chaque boîte B_a, pour $a \in \mathbb{D}$. Ne tenant pas compte pour l'instant des frontières de boîte, on peut décomposer cette application à l'aide de l'application de discrétisation $\mathbf{d}$ (2.17) :

$$\Gamma : \bigcup_{a\in\mathbb{D}} \mathring{B}_a \xrightarrow{\mathbf{d}} \mathbb{D} \xrightarrow{\widetilde{\Gamma}} \bigcup_{a\in\mathbb{D}} B_a \ , \tag{2.23}$$

où l'ensemble image de l'application $\widetilde{\Gamma}$ est strictement inclus dans la réunion des boîtes ; on restreint son image à :

$$\widetilde{\Gamma}\left(\mathbb{D}\right) \subset \bigcup_{a\in\mathbb{D}} B_a \setminus \Lambda \bigcup_{a\in\mathbb{D}} \partial B_a, \tag{2.24}$$

de telle sorte qu'aucun point focal (2.19) ne se trouve sur une frontière de boîte, conformément à l'hypothèse **H1**.
L'application des taux de production Γ étant constante par morceaux, la restriction $\Gamma|_{\mathring{B}_a}$ est constante pour chaque a. Ainsi, l'application $\widetilde{\Gamma}$ ci-dessus est déterminée de manière unique par l'égalité suivante :

$$\forall a \in \mathbb{D}, \forall x \in \mathring{B}_a, \quad \widetilde{\Gamma}(a) = \Gamma(x) = \Gamma|_{\mathring{B}_a}.$$

On en déduit que l'application f, qui à un indice de boîte a associe le point focal correspondant, peut s'écrire ainsi :

$$f = \Lambda^{-1}\widetilde{\Gamma}.$$

L'application discrète $F = \mathbf{d} \circ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ envoie alors chaque indice de boîte sur l'indice de la boîte contenant son point focal, dite *boîte focale*. Elle est bien définie, dès lors que le domaine (2.24) est exclu de l'ensemble image de $\widetilde{\Gamma}$, ce que **H1** garantit. Cette application est déterminée de manière unique par les paramètres Λ, Γ et Θ d'un système affine par morceaux. Un tel système permet donc de construire un réseau génétique discret unique $(\mathbb{D}, F)$, de la forme donnée à la définition 2.3. Nous renvoyons donc à la section 2.3 pour ce qui concerne l'étude de ce système.
Chaque système discret de cette forme peut en revanche être obtenu à partir d'une infinité de systèmes affines par morceaux. En effet, pour toute application $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\mathbf{d}^{-1} \circ F$ associe à chaque indice de boîte a l'intérieur d'une boîte entière : $\mathring{B}_{F(a)}$. Ainsi, toute application f donnant les points focaux telle que $f(a) \in \mathring{B}_{F(a)}$ donnera lieu au même réseau discret. De plus, pour chaque application f ainsi choisie, une infinité de couples $\widetilde{\Gamma}$, Λ peuvent être choisis de telle façon que $f = \Lambda^{-1}\widetilde{\Gamma}$.
Nous allons maintenant donner les résultats simples qui concernent la comparaison d'un système affine par morceaux et du système discret $(\mathbb{D}, F)$ qui lui est associé. Des résultats très similaires peuvent être trouvés dans [115].

L'application successeur associée à F, telle que définie en (2.7) prend ici la forme spécifique suivante :

$$\begin{array}{rccl} \textsc{succ}(F,\cdot): & \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & a & \longmapsto & a + \mathtt{sgn}\big(\mathbf{d}\circ f(a) - a\big) \end{array} \tag{2.25}$$

On abrégera $\textsc{succ}(F,\cdot)$ en $\textsc{succ}(\cdot)$ dans la suite de cette section, F étant fixée.

Remarquons que les ensembles d'indices $I^{\pm}(a)$, et $I^{\pm}_{out}(B_a)$ coïncident. En effet, un indice i appartient à $I^{\pm}(a)$ si et seulement si $F_i(a) \neq a_i$. Pour $F = \mathbf{d}\circ f$, ceci est équivalent à $f_i(a) \notin]\theta_i^-(a), \theta_i^+(a)[$, c'est-à-dire $i \in I^{\pm}_{out}(B_a)$.
De plus, les composantes non-nulles de $\textsc{succ}(a) - a = \mathtt{sgn}\big(\mathbf{d}\circ f(a) - a\big)$ sont exactement de la forme $\pm_i 1$, pour $i \in I(a)$. En effet, $\pm_i$ a été défini dans la section précédente comme le signe tel que $i \in I^{\pm_i}_{out}$. Or ce signe est $+$ si $f_i > \theta_i^+$, et $-$ si $f_i < \theta_i^-$, ce qui est bien le signe de $\mathbf{d}_i \circ f(a) - a$.

On peut énoncer deux propriétés simples en termes de comparaison des dynamiques.

Proposition 2.17.

$$F(a) = a \iff \textsc{succ}(a) = a \iff f(a) \in \mathring{B}_a.$$

démonstration.
Par définition, $F(a) = a$ si et seulement si $\mathbf{d}\circ f(a) = a$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathtt{sgn}\big(\mathbf{d}\circ f(a) - a\big) = (0\ldots0)$, c'est-à-dire $\textsc{succ}(a) = a$.
Enfin $\mathbf{d}\circ f(a) = a$ est encore équivalent à $f(a) \in \mathring{B}_a$, par définition de $\mathbf{d}$. □

Autrement dit, les points fixes de F et de $\textsc{succ}$ sont confondus, et correspondent exactement aux points focaux situés dans leur propre boîte, qui sont comme on l'a vu des points d'équilibre asymptotiquement stables.

Proposition 2.18. *Pour $I \subset \mathbb{N}_n$ quelconque,*

$$\widetilde{\textsc{succ}}^I(a) = b \neq a \iff \exists x \in \mathring{B}_a, \quad \mathcal{M}^a x = \varphi^a(x, \tau(x)) \in B_a \cap B_b.$$

démonstration.
Prouvons l'implication $\Rightarrow$.
Par définition, $\widetilde{\textsc{succ}}^I(a) = b$ équivaut à $b_i = a_i + \mathtt{sgn}\big(\mathbf{d}_i \circ f(a) - a_i\big)$, pour $i \in I$. Seuls les $i \in I \cap I(a)$ sont tels que $a_i \neq b_i$. Pour de tels i, $f_i \notin]\theta_i^-(a), \theta_i^+(a)[$. D'après la section précédente, le mur porté par $\{x_i = \theta_i^{\pm_i}\}$ est atteignable par la composante φ_i^a du flot. Reste à garantir l'existence d'un point x intérieur à B_a tel que toutes ces composantes atteignent un tel mur simultanément. Qu'une telle intersection se produise est encore équivalent à :

$$\exists x \in \mathring{B}_a,\ \forall i \in I \cap I(a), \quad \tau_i(x) = \min_{j \in I(a)} \tau_j(x)$$

Or au vu de (2.20), les fonctions τ_j ont pour image

$$\tau_j\left([\theta_j^-(a), \theta_j^+(a)]\right) = \left[\tau_j(\theta_j^{\pm_j}), \tau_j(\theta_j^{\mp_j})\right] = \left[0, \tau_j(\theta_j^{\mp_j})\right],$$

qui est d'intérieur non vide d'après **H1**. Ainsi, pour $\tau^* = \min_j \tau_j(\theta_j^{\mp_j})$, l'intervalle $[0, \tau^*]$ est d'intérieur non vide, et est inclus dans les ensembles images de toutes les fonctions τ_j. On peut alors choisir des valeurs $\vartheta_1 = \cdots = \vartheta_k < \vartheta_{k+1} \ldots$, telles que les k premières sont minimales, et ce pour un k arbitraire. Toutes ces valeurs ayant un antécédent par toutes les fonctions τ_j, on a un vecteur $x \in \mathring{B}_a$ tel que $\tau_j(x_j) = \vartheta_j$ pour tout j. En supposant sans perte de généralité que $I \cap I(a) = \mathbb{N}_k$, l'image par $\mathcal{M}^a$ de ce point est alors par construction dans l'intersection de murs requise.
Réciproquement, si un point x est envoyé par $\mathcal{M}^a$ sur une intersection de la forme $B_a \cap B_b$, la forme (2.18) du flot entraîne que les coordonnées f_i de $f(a)$ soient hors de $]\theta_i^-(a), \theta_i^+(a)[$ pour $b_i \neq a_i$. Par monotonie, elles doivent de plus être à gauche de cet intervalle si $b_i < a_i$ et à droite sinon. Autrement dit, $\widetilde{\text{SUCC}}^I(a) = b$, et $\Leftarrow$ est démontrée. □

Cette proposition signifie qu'un élément $a \in \mathbb{D}$ admet un successeur b si et seulement si une trajectoire issue de B_a atteint B_b.

Les deux résultats fournis ici ne donnent qu'une information valable pour un unique pas de temps. A cette échelle, les systèmes affines par morceaux et discret ont des dynamiques similaires. En ce qui concerne des trajectoires entières, ou des attracteurs, la comparaison est moins évidente. Elle est le problème principal du chapitre 6.

2.4.3 Systèmes différentiables associés à un système affine par morceaux

Observons que les systèmes différentiables de la forme (2.1) et les systèmes affines par morceaux de la forme (2.14) ne diffèrent que par les fonctions taux de production, dès lors que les ensembles de seuils Θ_i sont supposés identiques pour les deux types de modèles. On fixe dans cette section une telle fonction Γ constante par morceaux, associée à un système affine par morceaux.
Rappelons l'expression choisie dans le cas différentiable, à l'équation (2.4) :

$$G_i(x) = \mathcal{G}_i\left(h^+(x_1,\, \xi_{11}),\, \ldots,\, h^+(x_1,\, \xi_{1q_1}),\, \ldots,\, h^+(x_n,\, \xi_{n1}),\, \ldots,\, h^+(x_n,\, \xi_{nq_n})\right)$$

où $\xi_{ij} = (\theta_{ij}, p_{ij})$ sont les paramètres de la fonction de Hill h^+, eq. (2.2), cette dernière tendant vers la fonction de Heaviside au seuil θ_{ij} lorsque $p_{ij} \to +\infty$. Plus précisément, notons :

$$p = \min_{i \in \mathbb{N}_n, j \in \mathbb{N}_{q_i}} p_{ij}.$$

Alors, lorsque $p \to +\infty$, pour tout $x \in \mathbb{U}$,

$$\mathbf{h}(x) = (h^+(x,\, \xi_{11}) \ldots h^+(x,\, \xi_{nq_n})) \longrightarrow \overline{\mathbf{h}} = \overline{\mathbf{h}}(x) \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}^{\sum_i q_i}.$$

avec

$$\begin{cases} \overline{h}_{ij} = 1 & \text{si et seulement si} \quad x_i > \theta_{ij-1}, \\ \overline{h}_{ij} = \frac{1}{2} & \text{si et seulement si} \quad x_i = \theta_{ij-1}, \\ \overline{h}_{ij} = 0 & \text{si et seulement si} \quad x_i < \theta_{ij-1} \end{cases}$$

Les seuils θ_{ij} sont ordonnés à i fixé, et de plus $\theta_{i0} = 0$ pour tout i, et x_i est toujours positif. On a donc

$$\begin{cases} \overline{h}_{ij} = 1 \Longrightarrow \forall j' \leqslant j, \quad \overline{h}_{ij'} = 1, \\ \overline{h}_{i1} = 1. \end{cases} \qquad (\star)$$

Alors, pour $x \in \bigcup_{a\in\mathbb{D}} \mathring{B}_a$, $\overline{\mathbf{h}}(x)$ appartient au sous-ensemble de $\{0,1\}^{\sum_i q_i}$ satisfaisant l'implication $(\star)$. Notons $\mathscr{D}^\star$ ce sous-ensemble. On vérifie sans difficulté qu'il est en bijection avec $\mathbb{D} = \prod_{i=1}^n \mathbb{N}_{q_i}$, via par exemple la bijection suivante :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathscr{D}^\star & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & \overline{\mathbf{h}} & \longmapsto & \Big(\max\{j \in \mathbb{N}_{q_i} \mid \overline{h}_{ij} = 1\}\Big)_{i\in\mathbb{N}_n} \end{array}$$

Cette bijection est telle que pour $x \in \bigcup_{a\in\mathbb{D}} \mathring{B}_a$, on a

$$\Phi \circ \overline{\mathbf{h}}(x) = \mathbf{d}(x),$$

où $\mathbf{d}$ est l'application de discrétisation définie en (2.17). En effet, on a par construction, pour $i \in \mathbb{N}_n$:

$$\big[\Phi \circ \overline{\mathbf{h}}(x)\big]_i = j \iff x_i > \theta_{ij-1} \quad \text{et} \quad x_i < \theta_{ij}.$$

Ceci signifie exactement que la composante i de $\Phi \circ \overline{\mathbf{h}}(x)$ est la coordonnée a_i de l'indice de la boîte $B_{a_1\cdots a_n}$ contenant x en son intérieur. Or cet indice est $\mathbf{d}(x)$, par définition de $\mathbf{d}$.

On a vu dans la partie précédente que Γ peut s'écrire $\widetilde{\Gamma} \circ \mathbf{d}$, pour une application $\widetilde{\Gamma} : \mathbb{D} \to \bigcup_a B_a$ uniquement déterminée. Alors, la composée :

$$\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\Gamma} \circ \Phi : \ \mathscr{D}^\star \xrightarrow{\Phi} \mathbb{D} \xrightarrow{\widetilde{\Gamma}} \bigcup_{a\in\mathbb{D}} B_a \tag{2.26}$$

est uniquement déterminée par le choix de $\widetilde{\Gamma}$, et donc de Γ.

On a vu par ailleurs qu'une classe de fonctions répandue pour le choix de $\mathcal{G}$ est formée des applications multi-affines, c'est-à-dire affines en chacune de leurs variables. Or il est connu que de telles applications sont entièrement déterminées par la connaissance des images de tous les points à coordonnées booléennes (voir [14]). Ainsi, si $\mathcal{G}$ est choisie multi-affine, elle est entièrement déterminée par ses valeurs aux points de $\{0,1\}^{\sum_i q_i}$.

Plus précisément, en notant $\kappa_{\mathbf{k}}$ la valeur prise en $\mathbf{k} = (k_{11}\dots k_{nq_n}) \in \{0,1\}^{\sum_i q_i}$, il est prouvé dans [14] que l'unique application multi-affine $\mathcal{G}$ satisfaisant $\mathcal{G}(\mathbf{k}) = \kappa_{\mathbf{k}}$ en tout $\mathbf{k}$ est donnée par :

$$\mathcal{G}(h_{11}\dots h_{nq_n}) = \sum_{\mathbf{k}} \kappa_{\mathbf{k}} \prod_{i,j} h_{ij}^{k_{ij}} (1-h_{ij})^{1-k_{ij}}.$$

Par analogie, on construit l'application multi-affine suivante :

$$\mathcal{G}(h_{11}\dots h_{nq_n}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathscr{D}^\star} \widetilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}) \prod_{i,j} h_{ij}^{k_{ij}} (1-h_{ij})^{1-k_{ij}}, \tag{2.27}$$

où $\widetilde{\mathcal{G}}$ est l'application définie en (2.26). Ainsi, l'équation (2.27) fournit l'unique application multi-affine telle que $\mathcal{G} \circ \mathbf{h}$ prend les mêmes valeurs que Γ lorsque l'on passe à la limite $p \to +\infty$, et qui vaut 0 aux points booléens que $\overline{\mathbf{h}}$ n'atteint pas.

Les seuils θ_{ij} étant les mêmes pour les systèmes différentiables et les systèmes affines par morceaux, la procédure ci-dessus permet donc d'associer à une application Γ, et donc à un système affine par morceaux, une unique application $\mathcal{G}$. On en déduit une famille de systèmes différentiables, donnée par l'ensembles des $G = \mathcal{G} \circ \mathbf{h}$ de la forme (2.4), rappelée en début de section, pour toutes les valeurs positives des coefficients de Hill p_{ij}. Ces derniers sont donc les seuls paramètres du système différentiable obtenu dans cette section à partir d'un système affine par morceaux. Les relations entre les dynamiques de ces deux types de modèles ont été étudiées, ce dont il sera rendu compte au chapitre 3.

2.4.4 Sous-classes des systèmes affines par morceaux

L'hypothèse **H1** ne sera pas levée par la suite. Un autre type d'hypothèse peut être donné : certaines restrictions imposées à la classe générale de systèmes de Glass donnée par l'équation (2.14) permettent de définir des sous-classes, dont l'étude est plus aisée. On peut d'ores et déjà citer la classe des **systèmes de Glass binaires**, définie par l'hypothèse

H2 (réseau binaire). $\forall i \in \mathbb{N}_n,\ q_i = 2.$

Pour de tels systèmes, chaque Θ_i est de la forme $\{0, \theta_{i1}, \theta_{i2}\}$. Les θ_{i1} sont les seuls seuils susceptibles d'être franchis par des trajectoires, et il est courant d'appliquer une translation au système pour ramener ces seuils à 0, avec pour conséquence une nette simplification de l'analyse. Cette sous-classe de systèmes est de loin la plus étudiée. Dans le cadre de ce mémoire, on ne se restreindra pas aux réseaux de Glass binaires, sauf mention contraire.
Une autre hypothèse très souvent appliquée est la suivante :

H3 (taux de dégradation uniformes). $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Lambda = \lambda Id.$

Bien que peu réaliste, cette hypothèse est très répandue. Elle permet en effet de beaucoup simplifier le traitement mathématique, et repose sur la stabilité structurelle supposée des systèmes biologiques : ce qui est démontré pour $\Lambda = \lambda Id$ est supposé vérifié pour un voisinage de λId dans $\mathbb{R}_+^{n\times n}$. Ce fait n'est pas démontré précisément à ce jour.
D'un point de vue géométrique, cette hypothèse implique que dans chaque boîte, les morceaux de trajectoires sont rectilignes, comme on peut le déduire de l'équation (2.18). Ceci se traduit notamment par le fait que l'application de transition (2.22) est dans chaque boîte B_a une projection centrale, de centre f, sur la frontière de B_a. En effet, **H3** implique que $A(x)$ est proportionnelle à l'identité dans l'équation (2.22), i.e. elle se ramène à un terme scalaire, qu'on notera $\alpha(x)$. Sous **H3** :

$$\mathcal{M}^a x = f + \alpha(x)(x - f), \tag{2.28}$$

où

$$\text{Pour } i \in I_{out}, \quad \alpha_i(x) = \frac{f_i - \theta_i^{\pm_i}(a)}{f_i - x_i} \qquad \text{puis} \qquad \alpha(x) = \max_{i \in I_{out}} \{\alpha_i(x)\}. \tag{2.29}$$

Dans la mesure où $\alpha_i(x)$ ne dépend que de la coordonnée x_i, on se permettra de noter abusivement $\alpha_i(x_i)$. On peut remarquer dès maintenant que cette fonction de x_i est continue (et même $\mathscr{C}^\infty$), de domaine $[\theta_i^-(a),\ \theta_i^+(a)]$, et d'image un compact strictement inclus dans $[0, 1]$.
Pour $i \in I_{out}^+$, i.e. $\pm_i = +$, elle est croissante, et son image est

$$[\frac{f_i - \theta_i^+(a)}{f_i - \theta_i^-(a)}, 1] \subsetneq [0, 1]. \tag{2.30}$$

Pour $i \in I_{out}^-$, i.e. $\pm_i = -$, elle est décroissante et son image est

$$[\frac{f_i - \theta_i^-(a)}{f_i - \theta_i^+(a)}, 1] \subsetneq [0, 1]. \tag{2.31}$$

Enfin, une troisième hypothèse permettant de définir une sous-classe des systèmes de la forme (2.14) est suffisamment répandue pour être rappelée. Elle consiste à interdire certaines configurations problématiques, qui seront abordées plus en détails au chapitre 3, et qu'on schématise sur la figure 2.4. Ces configurations peuvent être décrites de façon informelle. Etant données deux boîtes adjacentes, c'est-à-dire dont l'intersection est une facette commune, on considère la composante du champ de vecteurs normale à cette facette dans chacune des deux boîtes. Si cette composante est de signe opposé de part et d'autre de la facette, il y a une indétermination sur cette dernière, du type *mur blanc*, ou *mur noir*. Pour toutes les autres configurations possibles au voisinage d'une facette, on parlera de *mur transparent* (cette terminologie est introduite au milieu des années 1990 par Plahte, Mestl et Omholt [104]).

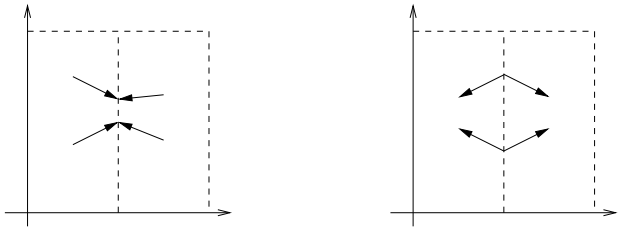


FIG. 2.4 – *Les deux ambiguïtés causées par l'autorégulation dans le cas de deux boîtes dans le plan. Dans chaque boîte, les flèches représentent le champ de vecteurs (dirigé vers un point focal unique pour chaque boîte). Ces deux situations sont souvent appelées* **mur noir** *(à gauche) et* **mur blanc** *(à droite).*

Avec les notations dont on dispose ici, cette hypothèse peut se formuler comme suit.

H4 (pas d'autorégulation). *Pour tout $a \in \mathbb{D}$, et tout $i \in \mathbb{N}_n$, tout voisin $a' = a \pm \mathbf{e}_i$ de a dans $\mathbb{D}$ est tel que :*

$$\Big(\mathbf{d}_i(f(a)) - a_i\Big)\Big(\mathbf{d}_i(f(a')) - a'_i\Big) > 0,$$

ou

$$\mathbf{d}_i(f(a)) = a_i \quad \textit{et} \quad \Big(\mathbf{d}_i(f(a')) - a'_i\Big)(a_i - a'_i) > 0,$$

ou encore :

$$\mathbf{d}_i(f(a')) = a'_i \quad \textit{et} \quad \Big(\mathbf{d}_i(f(a)) - a_i\Big)(a'_i - a_i) > 0.$$

Plus simplement, ces hypothèses sont équivalentes au fait que tous les murs sont transparents.

Que les indices de boîtes vérifient une identité de la forme $a' = a \pm \mathbf{e}_i$ est équivalent au fait que l'intersection $W = B_a \cap B_{a'}$ est un mur, inclus dans un hyperplan de la forme $\{x_i = \theta_i\}$. La première condition correspond au cas où les points focaux des deux boîtes adjacentes B_a et $B_{a'}$ sont tous deux "hors de leur boîte dans la direction i". Autrement dit, c'est le cas $i \in I(a) \cap I(a')$, qui entraîne que des trajectoires peuvent s'échapper des deux boîtes selon la direction i. L'inégalité proposée assure alors que le flot est bien défini au mur W (i.e. ce mur est transparent). Les deux autres cas correspondent respectivement aux situations $i \notin I(a) \wedge i \in I(a')$, et $i \notin I(a') \wedge i \in I(a)$. Considérant par exemple le premier cas, l'hypothèse **H1** entraîne que la composante φ_i^a du flot dans B_a est non nulle dans un voisinage de W, et s'éloigne de ce mur pour approcher $f_i(a)$. L'inégalité proposée

assure alors que le flot $\varphi_i^{a'}$ provenant de $B_{a'}$ va dans ce sens également, interdisant ainsi que W soit un mur blanc. On notera que si $i \notin I(a') \wedge i \notin I(a)$, alors W est nécessairement un mur blanc, ce que nous avons exclu avec les conditions ci-dessus.

Biologiquement, cette dernière hypothèse signifie que le réseau est supposé sans autorégulation, dans le sens suivant : si une variable x_i traverse un seuil θ_i (i.e. l'indice de boîte a_i change), la $i$ème composante de sa vitesse ne change pas de signe. Autrement dit, un réactant dans le réseau ne modifie pas son propre taux de production, au moins qualitativement.

2.4.5 Récapitulatif

En résumé, on a donné dans cette section la définition d'un système affine par morceaux général, avec l'équation (2.14). L'application taux de production Γ a été définie comme constante par morceaux, les morceaux en question étant des n-rectangles ouverts. Elle n'est pour l'instant pas définie univoquement sur les frontières de ces rectangles. On a ensuite montré comment les trajectoires peuvent être construites dans chaque boîte, introduisant l'application de transition $\mathcal{M}^a$ associée à une boîte B_a.
On a montré comment associer à chaque système affine par morceaux une famille de systèmes différentiables de la forme (2.1), paramétrée par la seule donnée de ses exposants de Hill. Auparavant, on a également associé un unique réseau génétique discret à chaque système affine par morceaux, pour lequel le choix d'une stratégie de mise à jour des variables n'a pas été explicité. Ceci sera traité dans le chapitre 6.
Dans les deux cas, les systèmes associés à un modèle affine par morceaux ont été seulement définis, et la question de leur dynamique a été laissée en suspens. Elle sera étudiée dans les prochains chapitres. De façon à structurer cette étude, les systèmes affines par morceaux peuvent faire l'objet d'une taxonomie sommaire, établie sur la base des hypothèses de travail formulées au début de la présente sous-section. On peut récapituler ces hypothèses :

- **H1** sera supposée vraie dans toute la suite.

Les trois hypothèses suivantes serviront de critère de classification :

- **H2** définit la classe des réseaux binaires.
- **H3** définit la classe des réseaux à taux de dégradation uniformes.
- **H4** définit la classe des réseaux sans autorégulation, i.e. sans mur blanc ni mur noir.

Bien sûr, ces trois critères peuvent être combinés, ce qui définit 8 classes de systèmes, de la plus générale donnée sans hypothèse, à la plus simplifiée supposant **H2**, **H3** et **H4** satisfaites. C'est cette dernière classe de système qui est la plus étudiée, et que désigne en général dans la littérature le terme *système de Glass* (voir e.g. [45, 81] pour cette question de vocabulaire). Toutefois, on usera parfois de ce terme pour désigner des systèmes plus généraux, en particulier non binaires. En effet, une des contributions de ce mémoire est que l'hypothèse **H2** ne sera que très occasionellement requise. On s'efforcera bien sûr d'éviter toute équivoque, et les hypothèses employées seront rappelées chaque fois que cela sera nécessaire.

Chapitre 3

Principaux problèmes soulevés par les modèles mathématiques

Comme le chapitre précédent peut le suggérer, les systèmes affines par morceaux de la forme (2.14), que nous rappelons :

$$\frac{dx}{dt} = \Gamma(x) - \Lambda x, \tag{3.1}$$

soulèvent des questions variées. On peut distinguer deux grands types de problèmes, correspondant respectivement à l'échelle des familles de modèle, et à l'échelle des modèles eux-mêmes. Autrement dit, le premier type de questions se traduit géométriquement dans des espaces fonctionnels, et le second type dans des espaces de phases (que nous appellerons également espaces d'états). Ces deux catégories de questions sont grossièrement :

- Quels sont les points communs des modèles affines par morceaux avec les autres types de modèles ? Quelles sont les propriétés spécifiques au cas affine par morceaux ?

- Quelles dynamiques peut générer un système de la forme (3.1) ? Comment décrire et caractériser ses attracteurs ?

Bien sûr, ces deux problèmes ne sont pas indépendants. En particulier, à l'échelle des classes de modèles, aucune taxonomie ne saurait se passer d'une caractérisation, même élémentaire, des dynamiques admissibles pour chaque modèle. D'autre part, un aspect essentiel, qui est masqué dans les deux questions précédentes, est le problème de la validité biologique des équations de la forme (3.1). D'un point de vue théorique, la nature classificatoire des réponses appelées par les questions ci-dessus est à confronter aux connaissances actuelles sur les réseaux de régulation biologique, et au «catalogue» de phénomènes qu'elles constituent. D'un point de vue plus pratique, les questions de validation et d'identification de modèles à partir de données expérimentales sont donc cruciales.
Dans ce chapitre, nous allons résumer les résultats disponibles dans la littérature, en suivant un ordre thématique inspiré par la discussion précédente, et par les publications cor-

respondantes dont nous avons eu connaisance. Dans une première section, nous discutons de problèmes ayant directement trait à la biologie, théorique tout d'abord, section 3.1.1, puis expérimentale dans la sous-section suivante 3.1.2. Les sections 3.2 et 3.3 sont plus techniques. La première concerne la défintion des solutions d'un système de la forme (3.1) a l'intersection de plusieurs murs, ainsi qu'au niveau des murs blancs et noirs (voir section 2.4.4). La seconde traite de l'analyse des attracteurs de systèmes de la forme (3.1), avec les problèmes que cela soulève en termes de localisation, caractérisation et classification.

3.1 Questions liées à la biologie

3.1.1 Boucles de rétroaction

Une question transverse, en ce sens qu'elle se pose indépendamment de la classe de modèle considérée, est celle des boucles de retroaction, et de leur influence sur la dynamique des systèmes. Cette question, que se posent les automaticiens et les cybernéticiens depuis les origines de leur discipline est apparue assez tôt dans le contexte des réseaux de régulation génétique, sous une forme ad hoc. Elle s'appuie sur l'interprétation suivante des modèles mathématiques : la coexistence de plusieurs attracteurs stables pour un même système dynamique (appelée dans ce contexte *multistationnarité*) traduit le phénomène de différenciation cellulaire. Cette interprétation est attribuée à M. Delbrück (fin des années 1940), ou plus anciennement à C.H Waddington (fin des années 1930). On trouvera une discussion sur la paternité de cette idée dans [122], au chapitre XII («Une théorie dynamique de la morphogénèse»). Pour une illustration (mathématisée) sur un exemple simple de la portée biologique de cette notion de multistationnarité, on pourra par exemple se reporter à [22].
Dans le même ordre d'idées, l'homéostasie, ou aptitude d'un organisme à maintenir certaines quantités autour d'une valeur stable, se traduit mathématiquement par la présence d'un attracteur stable, point d'équilibre ou cycle limite oscillant autour de la valeur à maintenir.
Dans la mesure où la structure des interactions est souvent une information reconstituable à partir des données d'expérience, traitées informatiquement [3, 8, 101], la question de ses liens avec la multistationnarité et la stabilité des attracteurs s'est posée naturellement à plusieurs reprises, jusqu'à devenir un problème très étudié.

Tout comme dans le contexte de la cybernétique ou de l'automatique, les boucles de retroaction se sont vite avérées déterminantes pour le fonctionnement des réseaux d'interaction biologiques. On attribue généralement à René Thomas la formulation explicite de ces questions, dont une synthèse était parue dans le livre [124] au début des années 1990, et qui ont depuis donné lieu à de nombreuses autres études [1].

En résumant, René Thomas a formulé deux conjectures qui sont, de façon informelle :

(1) l'existence d'une boucle de retroaction positive est une condition nécessaire à la mul-

1. La bibliographie de René Thomas étant abondante sur ces questions, qui ne sont pas l'objet principal de cette thèse, nous renvoyons à sa page web pour davantage de références : `http://www.ulb.ac.be/cenoliw3/PERSO-PAGES/rthomas.html`

tistationnarité d'un système.

(2) l'existence d'une boucle de retroaction négative est une condition nécessaire à l'existence d'au moins un attracteur stable dans l'espace d'états d'un système.

Pour être plus précis, une boucle de retroaction est un circuit fermé dans le graphe d'interaction GI (voir définitions 2.2 et 2.15). Que l'on traite de modèles discrets ou continus les arêtes de GI sont définies à partir des coefficients non nuls d'une matrice jacobienne. Elles peuvent donc être pondérées par la valeur de ces coefficients. En particulier, une arête (j, i) est dite positive ou négative selon que le coefficient $JF_{ij} \neq 0$ correspondant est positif ou négatif. Le signe d'une boucle est celui du produit des poids associés aux arêtes le composant. Une boucle est donc négative si et seulement si elle comporte un nombre impair d'arêtes négatives.
Les résultats mathématiques publiés à propos des conjectures de Thomas concernent essentiellement les modèles différentiables, tels qu'à la section 2.2. Bien souvent, la forme donnée à ces modèles est plus générale que celle que nous avons fournie dans cette section 2.2, et l'on suppose seulement que le vecteur d'état $x \in \mathbb{R}^n$ satisfait une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \tag{3.2}$$

où F est régulière, c'est-à-dire la plupart du temps $\mathscr{C}^r$, avec $r \geqslant 1$.
La forme (3.2) dépasse largement le seul cadre des modèles de réseaux de régulation génétique, et présente donc un intérêt mathématique certain, en sus de l'interprétation qui peut être faite, en biologie théorique, de la coexistence de multiples attracteurs et de leur stabilité.
Résumons sommairement les résultats dont nous avons connaissance. Nous ne prétendons pas à l'exhaustivité, et une recherche bibliographique plus approfondie (parmi les publications existant en théorie des systèmes et en informatique, entre autres) fournirait bien d'autres références que celles citées dans la suite (notamment, la bibliographie de R. Thomas, voir note 1). Les premières approches formelles sont dues comme nous l'avons dit à R. Thomas, et sont expliquées et discutées au moyen d'exemples dans le livre [124], co-écrit avec R. D'Ari. Depuis cette époque, plusieurs preuves formelles ont été apportées aux conjectures **(1)** et **(2)**. Citons Plahte, Mestl et Omholt [106], qui fournissent l'une des premières démonstrations d'une version formalisée des deux conjectures, dans le cas où F est $\mathscr{C}^1$. Peu après, Gouzé [70] (dans le même numéro paraît [29] qui précise le rôle des boucles de retroaction dans les réseaux biologiques et l'interprétation des conjectures de Thomas et leurs avatars) et Snoussi [117] proposent d'autres démonstrations, valables sous des hypothèses similaires. S'appuyant sur des outils de géométrie différentielle, une démonstration de la conjecture **(1)** est donnée par Cinquin et Demongeot [25, 26], dans le cadre plus général où l'espace d'états est une variété différentiable, et non plus $\mathbb{R}^n$. Plus récemment, une démonstration de la même conjecture **(1)** est également fournie par Soulé [118], sous des hypothèses plus faibles de régularité de l'application F.
Pour finir, signalons deux articles de R. Thomas et M. Kaufman parus en 2001 [125, 126], qui traitent de cette question des boucles de retroaction dans le contexte général des systèmes dynamiques non linéaires. Une nouvelle conjecture y est proposée de manière informelle : une condition nécessaire à l'existence de dynamiques chaotiques est fournie par l'existence d'une boucle dont le signe varie en fonction de la position dans l'espace d'états, ou la coexistence d'une boucle positive et d'une boucle négative.

Ces conjectures pourraient être formalisées sans difficulté dans un cadre booléen ou discret, en s'appuyant par exemple sur les notions de jacobienne discrète et de graphe d'intéraction d'un système discret telles que celles définies à la section 2.3. Relativement peu de résultats de cette nature sont parus (à notre connaissance) jusqu'à ce jour. On peut citer [7, 30], où est déterminé le nombre maximal de points fixes dans un réseau booléen synchrone (les points fixes d'un réseau asynchrone sont les mêmes, seuls les bassins d'attraction changent), pour un nombre fixé de boucles dans le graphe d'interactions. Selon la répartition des signes de ces boucles, et le fait qu'elles sont d'intersection vide ou non, des bornes sont données pour le nombre de points d'équilibres. Le lien avec les conjectures de Thomas semble assez clair.

Pour conclure cette section, on peut se demander dans quelle mesure les conjectures de Thomas peuvent être formalisées (et démontrées) pour des modèle affines par morceaux. Pour ceux-ci en effet, la jacobienne est nulle presque partout, et n'est pas définie aux points appartenant à un hyperplan seuil. Bien sûr, la famille de systèmes différentiables associée à un système affine par morceaux (section 2.4.3) entre dans le cadre où les preuves sont les plus abouties et variées. Toutefois, la comparaison des points d'équilibres de cette famille de systèmes et de ceux du système affine par morceaux est loin d'être évidente, comme nous le verrons dans la section 3.2. De plus, cette famille est paramétrée par les coefficients de Hill, qui peuvent être arbitraire. Pour différents choix de ces coefficients, il est possible d'altérer les valeurs relatives des différentes fonctions de Hill. Plus précisément, le terme i, j de la jacobienne s'écrit :

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{q_j} \frac{dh_{jk}}{dx_j}(x_j)\frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial h_{jk}}(\mathbf{h}(x))$$

pour $\mathbf{h}(x) = (h_{11}(x_1) \dots h_{nq_n}(x_n))$ où $h_{ij}(x_i) = h(x_i,\ \theta_{ij}, p_{ij})$, h étant la fonction de Hill croissante (voir équation 2.4). Rappelons que la dérivée de cette fonction s'écrit :

$$\frac{dh_{jk}}{dx_j}(x_j) = \frac{p_{jk}\, x_j^{p_{jk}-1}\theta_{jk}^{p_{jk}}}{(\theta_{jk}^{p_{jk}} + x_j^{p_{jk}})^2} = \frac{p_{jk}}{x_j} h_{jk}(x_j)\Big(1 - h_{jk}(x_j)\Big).$$

On voit apparaître un coefficient p_{jk} devant cette dérivée, qui est toujours positive. D'autre part, $\dfrac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial h_{jk}}$ ne dépend pas des paramètres des fonctions h_{jk}. Son argument $\mathbf{h}$ est modifié par d'éventuelles perturbations des p_{jk}, mais si plusieurs des dérivées partielles de $\mathcal{G}_i$ ont des signes différents, il est clair que le signe de $\dfrac{\partial G_i}{\partial x_j}$ peut varier lorsque l'on modifie les valeurs relatives des exposants p_{jk} (par exemple pour $\mathcal{G}$ ayant des dérivées partielles constantes). La structure du graphe d'interaction – et en particulier, l'existence et le signe des boucles de retroaction – est donc sensible à ces paramètres. Il semble par conséquent fort difficile d'établir un lien entre les interactions dans un modèle affine par morceaux et celles effectives dans la famille de modèles différentiables associée.
Le plus naturel semble donc de définir le graphe d'interaction d'un modèle affine par morceaux comme étant celui de l'unique modèle discret associé (section 2.4.2). Ce graphe n'est pas arbitraire : un arête (j, i) y correspond au fait que si la variable x_j change d'état (i.e. sort de l'intervalle $]\,\theta_j^-, \theta_j^+\,[\ni x_j$), alors la variable x_i tend elle-même vers une valeur limite située hors de son propre état. Ceci correspond donc à une interaction qualitative, plus

forte que la non annulation d'une jacobienne usuelle (i.e. la jacobienne d'une application différentiable).
En ce qui concerne la formalisation et l'étude des conjectures de Thomas, on est donc ramenés au cas des modèles discrets, dont on a vu qu'il est un domaine encore assez ouvert aux recherches. Nous terminons donc cette section par une ouverture, plutôt que par des définitions ou résultats achevés. Soulignons seulement qu'une démonstration des conjectures de Thomas pour les systèmes affines par morceaux pourrait être conçue comme critère de validité de ces systèmes, en tant qu'ils modélisent des réseaux de régulation biologique.

3.1.2 Analyse qualitative, identification, validation de modèles

La question des boucles de retroaction a été beaucoup étudiée ces dernières années, en bonne partie sans doute parce qu'elle rejoint les préoccupations des biologistes, et dépasse donc le seul cadre des recherches mathématiques. Un autre aspect transverse, est celui de la validité de modèles tels que ceux présentés au chapitre précédent. C'est en confrontant ces modèles à l'expérience que l'on peut éprouver leurs limites, afin de les améliorer, ou d'en faire des outils de contrôle et d'aide à la compréhension des systèmes biologiques de régulation.
Cette question, qui en fait se ramifie en une multitude de problèmes théoriques et pratiques, est de première importance. Nous ne pouvons prétendre l'épuiser ici, où nous nous limitons à un bref récapitulatif des méthodes employées avec les modèles discrets, différentiables et affines par morceaux.
Tout d'abord, on peut distinguer deux types de données expérimentales produites par la biologie moderne, requérant des techniques d'analyse spécifiques. Il s'agit d'une part des données massives, de type biopuces, et d'autre part des données plus classiques issues d'expériences sur des systèmes de plus petite taille.
Les premières sont nécessairement imprécises, et ne se prêtent qu'à des travaux basés sur une approche qualitative, c'est-à-dire associée à une modélisation discrète (voir e.g. [8]). La question principale que posent de telles données est celle de l'identification de réseaux, autrement dit de la reconstitution de la structure du graphe d'interaction. Une limitation sérieuse est le grand nombre de variables (plusieurs milliers), et le petit nombre de mesures faites au cours du temps. Le développement d'algorithmes d'identification de réseaux à partir de données incomplètes fait l'objet de recherches actives depuis quelques années. Devant la très grand richesse combinatoire des modèles discrets, l'efficacité des meilleurs algorithmes est limitée par un nombre de calculs exponentiel [3, 33]. D'autres techniques, reposant sur une modélisation linéaire par morceaux et non plus booléenne, ont été proposées récemment par Perkins, Hallett et Glass, qui les ont testées sur un modèle de la morphogénèse d'*arabidopsis thaliana*, ainsi que sur de grands réseaux aléatoires [101]. Il semble que de telles méthodes soient tout à fait compétitives.

En ce qui concerne les données associées à des réseaux de taille plus raisonnable, sur lesquels les mesures peuvent être plus nombreuses et plus précises, l'emploi de modèles différentiables est répandue. Les paramètres de ces modèles sont alors ajustés à l'aide des données d'expérience. Ce type d'étude s'appuie presque toujours sur l'emploi coordonné de méthodes numériques et d'analyse qualitative d'équations différentielles ordinaires. Les références étant nombreuses, on peut renvoyer au livre classique [98], ainsi qu'à quelques

articles représentatifs de ce type d'approche [100, 112, 127, 131, 133].
Les modèles affines par morceaux se sont également avéré utiles à plusieurs reprises, par exemple pour l'étude du déclenchement de la sporulation chez *bacillus subtilis* [39], ou de la réponse d'*escherichia coli* à un stress nutritionnel [41]. L'approche employée dans ces études consiste à ramener les équations en question à un graphe de transitions, représentant le comportement qualitatif des solutions. Détaillons quelque peu ces techniques, développées surtout par de Jong et ses collaborateurs [34, 37, 40]. Cette procédure est assez proche de la représentation par un système discret, telle que définie à la section 2.4.2. Plusieurs différences notables doivent toutefois être soulignées. Tout d'abord, les paramètres des équations sont considérés comme des grandeurs qualitatives, dans le sens où ils sont seulement soumis à des contraintes de type inégalités, et ne se voient pas attribuer de valeur fixe. D'autre part, de façon à tenir compte des phénomènes d'autorégulation, les arêtes du graphe de transition sont non seulement les boîtes, mais également toutes leurs faces de dimension inférieure (i.e. toutes les intersections possibles d'hyperplans seuils). Dans les faces de dimension $n-1$ ou moins, la dynamique est décrite au moyen d'une inclusion différentielle, solution au sens de Filippov des équations de départ (voir section suivante). En réalité, les solutions au sens de Filippov sont surapproximées, pour faciliter l'analyse et l'implémentation. Cette dernière a été accomplie, donnant lieu à l'outil d'analyse GNA [38], développé en java.

Après cette première section portant surtout sur les problèmes liés à la modélisation et à l'utilisation pratique des outils mathématiques, nous abordons dans les deux sections qui suivent des questions plus techniques, posées par les modèles eux-mêmes.

3.2 Sur la définition des solutions d'un système affine par morceaux

Dans la section 2.4.1, on a décrit la construction d'une application $\mathcal{M}^a$, équation (2.22), associée à un système de la forme (3.1). Cette application envoie chaque point d'une boîte B_a sur la première intersection de l'orbite issue de ce point avec la frontière ∂B_a. On a ensuite mentionné la possibilité d'itérer de telles applications de boîte en boîte, ce qui est l'objet du chapitre 4. Au niveau d'une intersection H de plusieurs murs, on avait cependant remarqué que le choix de l'application $\mathcal{M}^a$, est indéterminé, l'indice a pouvant être celui de l'une quelconque des boîtes contenant H. En supposant bien définie une trajectoire, on constate par ailleurs que l'ensemble ω-limite de certaines d'entre elles est un point, situé sur une telle intersection H (voir figure 4.3).
De plus, on a caractérisé les notions de murs *blancs* et *noirs*, qui sont exclus si l'hypothèse **H4** est satisfaite. Sur de tels murs, la dynamique est indéterminée, les champs de vecteurs affines définis de part et d'autre étant de sens opposé, dans la direction normale au mur. En l'absence d'autres constructions, tout point d'un mur noir W est stationnaire puisque, dans les deux boîtes portant ce mur, les trajectoires issues d'un voisinage ouvert convergent toutes vers W (voir figure 2.4). On a vu également que les murs non transparents correspondent biologiquement au phénomène d'autorégulation. Un tel phénomène est très fréquent dans les systèmes biologiques réels, et ne doit donc pas être exclu systématiquement. Autrement dit, l'hypothèse **H4** est une restriction sévère, qu'il serait bon de lever.

Toute cette discussion montre qu'il serait souhaitable de prolonger le domaine de définition des trajectoires aux murs blancs et noirs, ainsi qu'à l'intersection de plusieurs murs. En particulier, il est important de savoir caractériser les points d'équilibres appartenant à un mur, ou à l'intersection de plusieurs d'entre eux. Suivant la terminologie introduite par Snoussi et Thomas [116], qui est restée en usage, de tels points d'équilibre seront appelés *points d'équilibre singuliers*. Les autres points d'équilibres sont donc dits *réguliers*.
Deux techniques différentes on été proposées pour définir les solutions sur tous les murs, et sur leurs intersections. Elles sont résumées dans les deux sections qui suivent.

3.2.1 Perturbations singulières d'un système continu ou différentiable

La première technique employée consiste à considérer un système d'équation différentielles ordinaires à second membre régulier (au moins continu), et à perturber ce système pour obtenir un système affine par morceaux. Cette perturbation se fait habituellement en faisant tendre un (ou plusieurs) paramètre(s) vers 0. Avec ce passage à la limite, certaines fonctions de régulation tendent vers la fonction de Heaviside. Le problème consiste alors à étudier le comportement des attracteurs lors de ce passage à la limite. En pratique, les attracteurs situés "loin" des hyperplans seuils, ne posent pas de difficulté. Ceux situés dans un voisinage critique de tels hyperplans requièrent en revanche une analyse plus prudente, et des outils plus élaborés.

Les premiers emplois d'un technique de ce type paraissent au milieu des années 1990 dans [104, 105], où Plahte, Mestl et Omholt définissent une classe de fonctions de régulation continues qu'ils appellent *logoïdes*. Ces fonctions sont un intermédiaire entre les sigmoïdes de type Hill et les fonctions de Heaviside. Elles sont continues, et croissent strictement de 0 à 1 sur un intervalle de la forme $]\theta-\frac{\delta}{2},\theta+\frac{\delta}{2}[$, où θ est une valeur seuil, et δ un paramètre. Lorsque ce paramètre tend vers 0, toute fonction logoïde tend vers la fonction de Heaviside. Notant $Z(x) = Z(x,\ \theta,\delta)$ une logoïde de paramètres δ et θ, telle que représentée sur la figure 3.1, les auteurs cités considèrent des systèmes dont la forme générale peut s'écrire :

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{G}\left(\mathbf{Z}(x)\right) - \left(\Lambda + \mathcal{H}\left(\mathbf{Z}(x)\right)\right) x \tag{3.3}$$

où $\mathbf{Z}(x) = (Z_{11}(x_1)\dots Z_{nq_n}(x_n))$, avec $Z_{ij}(x_i) = Z(x_i,\ \theta_{ij},\delta_{ij})$. Le terme Λ est une matrice diagonale à coefficients positifs, qui assure la dissipativité du système. Pour alléger, on suppose à partir de maintenant que tous les termes δ_{ij} sont égaux, et on note δ leur valeur commune, strictement positive.
La forme (3.3) est semblable à (2.1), à ceci près que les taux de dégradation ne sont pas supposés constants, et que les logoïdes se substituent aux sigmoïdes. On a vu dans la remarque 2.16 que le fait de choisir des taux de dégradation constants ou constants par morceaux ne modifie que peu l'étude qui s'ensuit. Ainsi, il est possible d'associer un système de la forme (3.3) à un système affine par morceaux, de façon très similaire à ce qui a été décrit pour les systèmes différentiables.

L'espace d'états d'un système tel que (3.3) se décompose en régions *singulières* et *régulières*. Un région singulière est un produit d'intervalles $I_1 \times \cdots \times I_n$, dont l'un au moins est de la forme $]\theta_{ij} - \frac{\delta}{2}, \theta_{ij} + \frac{\delta}{2}[$. Dans ce dernier cas, on parle de δ-intervalle. Les régions singulières sont appelées Δ-régions dans [104, 105]. Les δ sont choisis de façon à ce

que deux δ-intervalles soient toujours d'intersection vide. Dans chaque région singulière, on appelle *variables primaires* les x_i appartenant à un δ-intervalle, et *variables secondaires* les autres variables. Lorsque p est le nombre de variables primaires, on dit que la Δ-région est de dimension p (ou de δ-dimension p). Une illustration est donnée sur la figure 3.1.

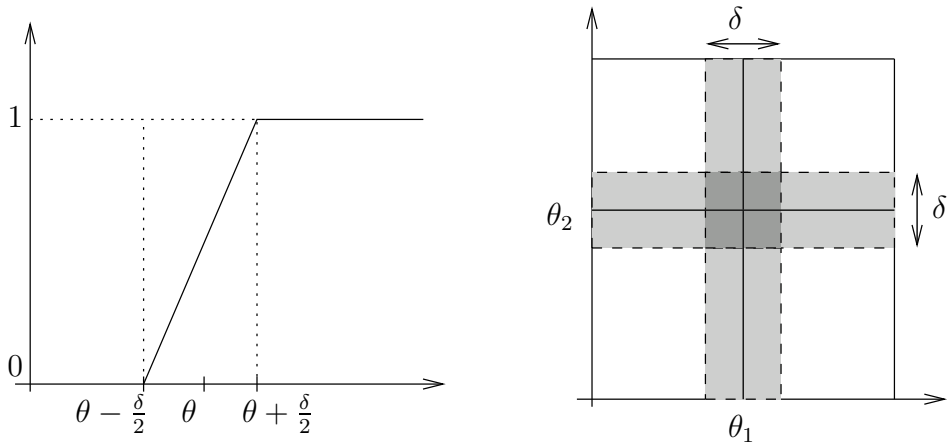


FIG. 3.1 – *Exemple de logoïde (à gauche), et pavage de l'espace de phases d'un système plan avec un seuil par variable (à droite). Le régions singulières sont grisées : en gris clair ces régions ont une variable primaire (i.e. sont de δ-dimension 1), celle en gris foncé en a deux (i.e. est de δ-dimension 2). Dans les régions en blanc, les logoïdes ont une valeur constante, et la dynamique est donc gouvernée par un système affine d'équations différentielles, dont le terme linéaire est diagonal. Ceci est identique au cas affine par morceaux. Lorsque $\delta \to 0$, une Δ-région singulière de δ-dimension p tend vers une intersection de p murs, i.e. vers une face de boîte de dimension $n - p$. Le système tend vers un système affine par morceaux identique à ceux définis section 2.4.*

Dans ce contexte de modélisation, on cherche alors à determiner les attracteurs d'un système de la forme (3.3), et leur comportement lorsque $\delta \to 0$. Dans [104], les résultats démontrés concernent surtout les points d'équilibres. Les points réguliers ont un comportement identique dans un système affine par morceaux et dans un système avec logoïdes. Le cas des points singuliers est bien sûr plus difficile. Il est montré que ceux-ci ne peuvent apparaître que si le système avec logoïdes de la forme (3.3) comporte des points d'équilibres situés dans des Δ-régions. Ces derniers sont difficiles à expliciter en général, mais les points singuliers qu'ils engendrent lorsque $\delta \to 0$ peuvent souvent être déterminés. Réciproquement, étant donné un système affine par morceaux, chacun de ses points d'équilibre singuliers peut être obtenu par passage à la limite $\delta \to 0$, pour une large classe de systèmes avec logoïdes, i.e. $\delta > 0$, comportant des points d'équilibres situés dans des Δ-régions. Les points d'équilibres singuliers asymptotiquement stables coexistent dans un système affine par morceaux et dans un système avec logoïdes, et se confondent à la limite $\delta \to 0$, à condition de considérer une Δ-région n'intersectant aucun mur noir. Enfin, une trajectoire périodique ne traversant que des murs transparents dans un système avec $\delta > 0$ tend vers une trajectoire périodique d'un système affine par morceaux lorsque $\delta \to 0$.
Le fait que les murs noirs, et donc l'autorégulation, soient une limitation aux résultats ci-dessus est à remarquer. Ceci tend à montrer que l'approximation des fonctions de régulation continues par des fonctions de Heaviside perd de sa validité en présence d'autorégulation.

Poursuivant cette étude dans [105], les mêmes auteurs définissent la classe générale des systèmes avec logoïdes de la forme (3.3) de façon précise, puis montrent qu'il est possible de calculer la jacobienne du système dans une Δ-région. Cette jacobienne est la somme d'une matrice diagonale à termes strictement négatifs, et d'une matrice de rang p, où p est la δ-dimension de la Δ-région considérée. Cette dernière matrice est proportionnelle à un terme $\frac{1}{\delta}$. Ainsi, lors du passage à la limite $\delta \to 0$, la jacobienne devient équivalente à cette matrice. La stabilité d'un point d'équilibre singulier est donc exactement celle de cette matrice. D'autre part, la non annulation des lignes ou colonnes d'un sous-matrice de la jacobienne calculée fournit une condition nécessaire à l'existence de points d'équilibres singuliers. Cette condition est l'exacte transposition d'une condition formulée par Snoussi et Thomas en termes de boucles de retroaction (voir section 3.3.1).

Dans la mesure où les résultats obtenus pour les systèmes avec logoïdes sont peu sensibles à la forme exacte de ces fonctions, il était supposé possible de les étendre aux systèmes avec sigmoïdes (e.g. fonctions de Hill, voir section 2.2). Un tel travail fut accompli par les mêmes auteurs. Dans [107], la classe générale de systèmes de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \mathbf{Z}), \tag{3.4}$$

où F est analytique en x et $\mathbf{Z}$, est étudiée. Ce dernier vecteur est composé de fonctions sigmoïdes : $Z_{ij} = S(x_i,\ \theta_{ij}, q_{ij})$. S est une fonction analytique et inversible, d'inverse analytique. Elle est de plus soumise à une liste de six hypothèses, assurant notamment sa monotonie, le fait qu'elle tend ponctuellement vers la fonction de Heaviside pour $q \to 0$, et le fait que sa dérivée est proportionnelle à $\frac{1}{q}$ (voir le cas des logoïdes, et de la jacobienne associée). Retenons que ces hypothèses sont vérifiées par les fonctions de Hill, écrites sous la forme

$$S(x,\ \theta, q) = \frac{x^{1/q}}{x^{1/q} + \theta^{1/q}},$$

de sorte que c'est à la limite $q \to 0$ que cette fonction tend vers la fonction de Heaviside au seuil θ.
Posant $q = \max_{i,j} q_{ij}$, l'objectif est d'étudier le comportement de (3.4) lorsque $q \to 0$. Étendant les définitions liées aux systèmes avec logoïdes, les notions de variables primaires et secondaires sont définies. Pour ceci, on définit tout d'abord un point d'équilibre singulier comme suit : x est un point d'équilibre de (3.4), noté $x(q)$ pour représenter sa dépendance au paramètre q. Notant $x^0 = \lim_{q\to 0} x(q)$, $x(q)$ est dit singulier s'il existe un i tel que $x_i^0 = \theta_i$, pour un certain seuil θ_i. Les variables primaires d'un point d'équilibre singulier sont alors celles qui tendent vers une valeur seuil lorsque $q \to 0$. Dans ce nouveau contexte, le nombre de variables primaires est appelé *degré de singularité* du point $x(q)$. Toutes les autres variables, appelées ici encore secondaires, sont tels que les sigmoïdes qui en dépendent tendent vers une valeur booléenne B_s. Pour un point x, de variables primaires $x_p \to \theta_p$ (x_p et θ_p sont des vecteurs), et de variables secondaires $x_s \to B_s$ (idem), on définit la *région singulière* $SR(p, B_s)$ comme étant l'ensemble des $\widetilde{x}$ de même limite que x lorsque $q \to 0$. Les *régions régulières* sont celles pour lesquelles aucune variable ne tend vers une valeur seuil. Ces régions sont très similaires à celles définies pour les fonctions logoïdes, et représentées figure 3.1.
Suite à ces définitions, les auteurs de [107] décrivent une méthode générale d'étude des points d'équilibres singuliers de (3.4), de leur comportement et de leur stabilité lorsque $q \to 0$. Cette étude à des points communs avec le cas des logoïdes, avec la différence notable

que les sigmoïdes sont analytiques, alors que les logoïdes sont seulement continues. Ainsi, il est notamment possible avec les sigmoïdes d'écrire des développements à des ordres supérieurs à 1, alors que seule la jacobienne des logoïdes peut être évaluée, en certains points. Ces méthodes sont appliquées à un modèle de l'homéostasie du fer cellulaire des mammifères, également modélisée et étudiée dans [100].
Retenons que les modèles différentiables que nous avons définis aux sections 2.2 et 2.4.3 entrent parfaitement dans le cadre mis en place dans l'article [107].

Pour finir sur l'étude du passage à la limite SIGMOÏDE → HEAVISIDE, mentionnons l'article [108] paru en 2005, et dû à Plahte et Kjøglum. Les systèmes étudiés sont légèrement plus spécifiques que les précédents, et s'écrivent

$$\frac{dx}{dt} = F(\mathbf{Z},\ q, P) - G(\mathbf{Z},\ q, P)x, \tag{3.5}$$

où $\mathbf{Z}$ est un vecteur de sigmoïdes identique à celui des systèmes de la forme (3.4). Ces sigmoïdes sont exprimées à partir d'une *sigmoïde de base* Z_i, au moyen de la relation

$$Z_{ij} = \frac{Z_i^{q/q_{ij}}}{Z_i^{q/q_{ij}} + (1 - Z_i)^{q/q_{ij}}}.$$

Le réel $q \in]0, q_0]$ est un paramètre global de raideur des sigmoïdes (analogue des exposants de Hill), et $P = \{p_{ij}\}$ un ensemble de paramètres représentant la raideur relative des différentes sigmoïdes : $p_{ij} = q/q_{ij}$. Les notions de domaines singuliers et réguliers sont analogues au cas d'équations de la forme (3.4).
Le domaine où sont choisis les q_{ij} est noté $]0, q_{ij}^0]$. Le passage à la limite qui est considéré est alors plus subtil que précédemment, les différents paramètres p_{ij} pouvant tendre vers des valeurs distinctes, conduisant à des états stationnaires distincts. Plus explicitement, chaque $q_{ij} = q_{ij}(q)$ est supposé différentiable en la variable q, avec les conditions $q_{ij}^0 = q_{ij}(q_0)$ et $q_{ij}^0(0) = 0$. De plus, les limites suivantes

$$p_{ij}^* = \lim_{q \to 0} \frac{q}{q_{ij}(q)}$$

sont supposées exister, $P^* = \{p_{ij}^*\}$ étant appelé *relative Hill exponent limit set*, et désigné par l'acronyme RHEL.
Pour un choix fixé de P^*, et une solution (où l'on ne fait pas figurer explicitement les conditions initiales) $x(t,\ q, P)$ de l'équation (3.5), un solution $x(t,\ 0, P^*)$ de l'équation différentielle affine par morceaux obtenue à partir de (3.5) lorsque $q \to 0$ est définie par Plahte et Kjøglum comme la limite

$$x(t,\ 0, P^*) = \lim_{q \to 0} x(t,\ q, P).$$

Un point important de cette définition, est que différents choix de P^* définissent a priori différentes solutions du système affine par morceaux, limite de (3.5). Ceci est à rapprocher de la notion d'inclusion différentielle, traitée à la section suivante 3.2.2.
Les notions de domaines réguliers et singuliers sont définies de manière plus détaillée que dans les études précédentes. Les variables anciennement appelées primaires et secondaires sont désormais dites respectivement *régulières* et *commutantes* (*switching*). Nous conservons dans la suite l'appellation plus ancienne. Sans entrer dans les détails formels, il est

possible avec cette définition de considérer les solutions du système affine par morceaux, y compris dans les hyperplans seuils. Ceci se fait par un changement de variable de la forme :

$$x_s = S^{-1}(Z_s,\ \theta_s, q), \tag{3.6}$$

où S est une sigmoïde, et qui donne lieu à des phénomènes de couche limite au voisinage des seuils. Des techniques de perturbations singulières sont utilisées pour traiter ces problèmes. Intuitivement, le changement de variable ci-dessus a pour effet de "dilater" les domaines singuliers dans les directions de leurs variables primaires. Géométriquement, ceci donne une partition en quelque sorte duale, où les domaines à p variables primaires, apparaissent comme des pavés de dimension $n - p$, lorsque $q > 0$. A la limite $q \to 0$, les domaines singuliers sont contractés en des hyperplans seuils (ou des intersections de tels hyperplans). Cet "effet de zoom" sur les régions singulières permet d'y définir des solutions.
Le dénommé "résultat principal" de cet article peut maintenant être énoncé. Il requiert des hypothèses de régularité des différentes fonctions que nous ne détaillons pas, renvoyant à [108]. Sous ces hypothèses, notons $x(t,\ q, P)$ une solution de l'équation (3.5), pour $q > 0$. Alors, sur toute séquence finie de domaines réguliers et singuliers, $x(t,\ q, P)$ approche uniformément la solution $x(t,\ 0, P^*)$, obtenue en utilisant le changement de variable (3.6), puis des techniques de perturbations singulières dans ces différents domaines, et en raccordant continûment les solutions ainsi obtenues. Un résultat est également fourni concernant les cycles limites. Etant donnée une orbite périodique $\Gamma(0, P^*)$ obtenue par un passage à la limite $q \to 0$ sur une solution de (3.5), il existe une valeur $q_1 > 0$ telle que (3.5) admet une orbite périodique $\Gamma(q, P)$ pour tout $q \in]0, q_1[$, avec $\Gamma(q, P) \to \Gamma(0, P^*)$. Ce résultat requiert des hypothèses de transversalité d'une section de Poincaré, et d'hyperbolicité d'un point fixe d'une application de premier retour. Il y a également correspondance des points d'équilibres, pour $q = 0$ et pour un ensemble non vide de valeurs > 0 de q.
Illustrée sur des exemples, cette méthode met en évidence la possibilité de définir des solutions d'équations affines par morceaux sur des hyperplans seuils et leurs intersections. Ces solutions peuvent "glisser" le long de ces hyperplans, et s'arrêter sur des points d'équilibres singuliers. Ces derniers peuvent correspondre à un ensemble de plusieurs points d'équilibre dans le système (3.5), avec $q > 0$, qui se trouvent confondus à la limite $q \to 0$. Ces équilibres multiples peuvent être assez élaborés, et inclure par exemple des foyers stables et des points selles, reliés par des orbites hétéroclines. Pour différentes valeurs de q, ce équilibres peuvent de plus être qualitativement différents (i.e. des bifurcations peuvent se produire lorsque q varie). Ceci montre donc que les système avec sigmoïdes peuvent donner lieu en général à des dynamiques nettement plus complexes que les systèmes affines par morceaux. Dans ces derniers, les zones de forte non linéarité des premiers – où peuvent se produire des dynamiques non triviales – sont contractées, simplifiant les dynamiques en ces régions.

3.2.2 Solutions de Filippov

Une autre méthode pour définir rigoureusement les solutions de systèmes affines par morceaux sur les murs noirs ou les intersections de plusieurs murs a été proposée par Gouzé et Sari [71]. Elle a donné lieu à une implémentation par de Jong, les mêmes auteurs et leurs collaborateurs [36]. Le principe de cette approche fait appel à une notion de solution généralisée d'équations différentielles à second membre discontinu, due à A.F Filippov [50]. Ce mathématicien, et d'autres (spécialement des chercheurs russes), ont développé une

théorie des équations différentielles présentant des discontinuités pour répondre aux besoins d'ingénieurs et d'automaticiens, qui avaient couramment à traiter de telles équations. L'ouvrage [50] est une synthèse des résultats et outils ainsi créés. Des notions similaires apparaissent dans la littérature sur les systèmes hybrides, dont les équations différentielles à second membre discontinu sont un cas particulier.

Plusieurs notions de solutions sont définies dans [50], notamment pour des systèmes présentant des entrées. N'ayant pas à traiter de telles situations, nous nous contentons de rappeler la notion de solution, dite dans la suite *au sens de Filippov*, qui est la plus adaptée aux systèmes affines par morceaux de la forme (3.1). Cette notion est celle retenue dans [71].
Dans un contexte plus général que le notre, considérons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, continue par morceaux (i.e. continue sauf sur un ensemble M de mesure de Lebesgue nulle). Dans [50] f dépend aussi du temps, ce que nous omettons ici, n'en ayant pas l'usage. Filippov étudie des systèmes de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{3.7}$$

Une solution de cette équation est alors, par définition, une fonction $x(t)$ absolument continue[2], qui vérifie

$$\frac{dx}{dt} \in F(x) \tag{3.8}$$

presque partout. Pour tout x, $F(x)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Les différentes notions de solution proposées par Filippov dans [50] sont autant de choix de cette application multivaluée[3] F. Celle qui convient dans notre contexte est la plus simple, définie par :

$$F(x) = \overline{\text{conv}} \left\{ \lim_{\substack{x^* \to x \\ x^* \notin M}} f(x^*) \right\}. \tag{3.9}$$

$\overline{\text{conv}}$ est l'adhérence de l'enveloppe convexe, qu'on appelera aussi enveloppe convexe fermée. Une fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vérifiant l'inclusion différentielle (3.8) est appelée *sélection* de cette inclusion. Pour une multi-application $F : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, il est possible de définir certaines notions de continuité. Elles sont définies au moyen des distances suivantes, sur $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}(X,Y) &= \sup\limits_{x\in X} \inf\limits_{y\in Y} \|x-y\|_2 \\ \mathrm{d}_H(X,Y) &= \max\{\mathrm{d}(X,Y),\ \mathrm{d}(Y,X)\} \qquad \text{(distance de Hausdorff).} \end{cases}$$

Alors F est dite

- *semi-continue supérieurement* si $\mathrm{d}\left(F(x), F(y)\right) \to 0$ quand $x \to y$.
- *continue* si $\mathrm{d}_H\left(F(x), F(y)\right) \to 0$ quand $x \to y$.

2. Une fonction f absolument continue peut être définie comme étant l'intégrale de Lebesgue d'une fonction $g \in L^1$. Pour ces deux fonctions, l'égalité $f' = g$ est vraie presque partout (f' est la dérivée de f).
3. On parlera aussi de multi-application, ou encore d'application multivoque.

Pour assurer l'existence de sélections absolument continues de (3.8), c'est-à-dire de solutions de (3.7) il faut que F soit en tout point non vide, convexe et fermée, et qu'elle soit semi-continue supérieurement. On dit alors que F satisfait les *conditions de base* (*basic conditions*).
Ces conditions de base assurent l'existence d'une solution de (3.7), mais pas l'unicité. Celle-ci peut être obtenue en ajoutant des conditions supplémentaires. En particulier, ceci est possible si l'ensemble M de discontinuité est une réunion d'(hyper)surfaces[4]. Dans toute la suite, nous faisons cette hypothèse sur la structure de M. Alors si, pour chaque surface S de M, les projections normales à S des champs de vecteurs (continus) définis par f de part et d'autre de S ne s'annulent en aucun point, on a unicité de la solution. Si $F(x)$ est un singleton pour tout x, on retrouve le cas classique des équations différentielles.
En règle générale toutefois, l'unicité n'est pas assurée au niveau d'une surface de discontinuité S. Sur cette surface, une solution de (3.7) est donc définie par une inclusion, admettant plusieurs sélections. Cette inclusion s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} \in F(x) \cap S.$$

Lorsque l'intersection ci-dessus est vide, l'équation (3.7) n'admet aucune solution sur la surface S. Il est possible que cette intersection soit réduite à un point, et l'on a alors existence et unicité de la solution sur S (ou le sous-ensemble de S sur lequel l'intersection est un singleton).

Les équations affines par morceaux de la forme (3.1) correspondent bien aux cadre défini par Filippov, et dont nous venons de rappeler quelques résultats basiques. La fonction notée ci-dessus f, est ici :

$$x \longmapsto \Gamma(x) - \Lambda x,$$

où Γ est constante par morceaux. Elle est donc bien continue sauf sur un ensemble de mesure nulle. Cet ensemble de discontinuité de Γ est la réunion des hyperplans $H_{ij} = \{x \mid x_i = \theta_{ij}\}$, pour $i \in \mathbb{N}_n$ et $j \in \mathbb{N}_{q_i}$. Avec les définitions de la section 2.4, il sera plus pratique de traiter cet ensemble de discontinuité comme la réunion des murs de boîtes. Sous l'hypothèse **H1**, le domaine $\mathbb{U} = \bigcup_a B_a$ est en effet une région invariante et attractive, de sorte qu'il est inutile de tenir compte des hyperplans H_{ij} entiers. Alors, il sera pratique de concevoir le domaine $\mathbb{U}$ comme support du complexe cubique (voir annexe A) formé par l'ensemble des boîtes B_a, équation (2.16), et de toutes leurs faces de dimension comprise entre -1 et n (rappelons que $\varnothing$ est conventionellement de dimension -1, et apparaît ici uniquement pour satisfaire la définition d'ensemble cubique). On note $\mathcal{C}(\mathbb{U})$ ce complexe cubique. On rappelle également (annexe A) que le *squelette* $SK(B_a)$ de la boîte B_a est l'ensemble de toutes ses faces (i.e. $\mathcal{C}(\mathbb{U}) = \bigcup_a SK(B_a)$).

Appliquées à ce cas particulier, les notions précédentes permettent de définir une solution aux systèmes de Glass, en tout point de $\mathbb{U}$. Cette solution est comprise au sens de Filippov, i.e. c'est une inclusion différentielle, dont [36, 71] fournissent une analyse. En bref, ces deux articles montrent que les solutions au sens de Filippov sont, dans chaque

4. On appellera hypersurface, ou simplement surface, un ensemble S de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}$, où $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, pour $p \leqslant n$. On définit la régularité de S comme étant celle de h. Si h est affine, S est un hyperplan. On emploiera abusivement ce terme pour des sous-espaces affines de dimension inférieure à $n-1$. Cette dimension sera signalée par un préfixe, si nécessaire

face $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{U})$, des trajectoires dirigées vers un *ensemble focal*, qui est défini comme l'enveloppe convexe fermée des points focaux des boîtes contenant la face $\mathcal{F}$. Rappelons que dans une boîte B_a, Γ est constante, de valeur $\widetilde{\Gamma}(a)$, équation (2.23). Alors, on vérifie que la forme générale (3.9) s'écrit pour nos systèmes particuliers, dans une face $\mathcal{F}$:

$$F(x) = \overline{\text{conv}} \left\{ \widetilde{\Gamma}(a) - \Lambda x \mid \mathcal{F} \in SK(B_a) \right\}. \tag{3.10}$$

En effet, dans chaque intérieur de boîte $\mathring{B}_a$, Γ est constante, si bien que la limite de $\Gamma(x^*)$, pour $x^* \to x$ et $x^* \in \mathring{B}_a$ est égale à cette constante $\widetilde{\Gamma}(a)$. Les frontières ∂B_a étant incluses dans le domaine de discontinuité de Γ, seules les limites précédentes doivent être prises en compte pour appliquer la définition (3.9), ce qui nous donne exactement l'ensemble (3.10).

L'*ensemble focal* (aussi appelé ensemble stationnaire cible (*target equilibrium set*) dans [36]) de $\mathcal{F}$ peut alors être défini. Lorsque la face $\mathcal{F}$ est une boîte B_a,

$$\mathbf{f}(B_a) = \{f(a)\},$$

où $f(a)$ est le point focal de la boîte B_a. Lorsque $\mathcal{F}$ est une face de $\mathcal{C}(\mathbb{U})$ de dimension strictement inférieure à n :

$$\mathbf{f}(\mathcal{F}) = \text{aff}(\mathcal{F}) \cap \overline{\text{conv}} \{ f(a) \mid \mathcal{F} \in SK(B_a) \}, \tag{3.11}$$

où $\text{aff}(S)$ est l'enveloppe affine d'un ensemble S (voir annexe A). Remarquons que l'expression ci-dessus inclut le cas précédent, par $\text{aff}(B_a) = \mathbb{R}^n$. Cet ensemble focal joue alors un rôle similaire à celui du point focal pour les trajectoires classiques (i.e. pas au sens de Filippov) : l'inclusion

$$\frac{dx}{dt} \in F(x),$$

où $F(x)$ est l'application multivoque définie en (3.10), admet des sélections absolument continues dès lors que $F(x)$ est non-vide. Dans ce cas, on vérifie que pour $x(t) \in \mathcal{F}$,

$$\frac{dx}{dt} = 0 \iff x(t) \in \mathbf{f}(\mathcal{F}),$$

en écrivant explicitement la combinaison convexe

$$\frac{dx}{dt} = \sum_a \nu_a (\Gamma(a) - \Lambda x), \qquad \sum_a \nu_a = 1, \quad \nu_a \geqslant 0,$$

puis en posant $\frac{dx}{dt} = 0$.
Ainsi, tout point de $\mathbf{f}$ est un point d'équilibre, tout comme le point focal f dans le cas classique.
Il est de plus montré dans l'annexe de [36] que les solutions (au sens de Filippov) définies dans une face $\mathcal{F}$ de dimension strictement inférieure à n (appelée dans cet article *switching domains*) convergent de façon monotone vers la projection sur $\mathbb{U}$ de l'ensemble focal $\mathbf{f}(\mathcal{F})$. On entend par là que chaque coordonnée $x_i(t)$ d'une solution $x(t)$ est monotone par rapport à t, et tend vers l'ensemble

$$\pi_i \left(\mathbf{f}(\mathcal{F}) \right) = \{ y_i \in [0, \theta_{iq_i}] \mid y = (y_1 \dots y_n) \in \mathbf{f}(\mathcal{F}) \}.$$

L'ensemble focal joue donc un rôle analogue à celui du point focal : les solutions au sens de Filippov tendent vers l'ensemble focal de la face les contenant. Si elles atteignent cet

ensemble, elles se trouvent dans un état d'équilibre. Sinon, elles intersectent la frontière de $\mathcal{F}$ en temps fini. Au point d'intersection, la solution est dans une nouvelle face, dont on peut calculer l'ensemble focal, puis le processus est réitéré.
Cette procédure assure l'existence de solutions en tout point, mais par leur unicité en général. Pour avoir unicité, la méthode la plus naturelle consiste à choisir une solution à l'aide de critères imposés par la modélisation. Ce choix d'une solution spécifique est à rapprocher de la méthodologie développée par Plahte et Kjøglum [108], qui est expliquée dans la section précédente. Il est supposé que l'ensemble de solutions définies au sens de Filippov est très similaire à l'ensemble des solutions obtenues par passage à la limite SIGMOÏDES $\rightarrow$ HEAVISIDE dans un système différentiable. Cette supposition, qui mérite d'être formulée plus précisément, n'est pas démontrée à ce jour.

Pour conclure cette section, on peut remarquer que l'introduction de solutions au sens de Filippov par [36, 71] permet de définir rigoureusement des trajectoires sur les murs noirs. Sur un mur en effet, il existe deux boîtes voisines. L'ensemble focal est donc l'enveloppe convexe fermée de deux points focaux, et c'est par conséquent un segment. De plus par définition d'un mur noir, ce segment intersecte nécessairement l'hyperplan seuil portant le mur noir. Le mur étant de dimension $n-1$, cette intersection est réduite à un point. On a donc une solution unique sur un tel mur, dite *solution glissante* (*sliding mode*). Ce type de phénomène est courant en théorie du contrôle.
Outre les solutions glissantes sur les murs noirs, Gouzé et Sari [71] étudient les points d'équilibres singuliers (voir les sections précédente et suivante) à la lumière de la théorie de Filippov. Ils montrent que ceux-ci sont bien représentés par les solutions au sens de Filippov. En particulier, les solutions glissantes peuvent atteindre un point d'équilibre situé sur un mur noir, ce qui est plus juste que de considérer le mur entier comme stationnaire, comme le faisaient les études les plus anciennes. La stabilité des points d'équilibres a également été étudiée depuis. Il sera question de ces travaux dans la prochaine section.

Les solutions au sens de Filippov permettent de construire un graphe de transitions similaire à celui de la section 2.4.2, dont les sommets sont toutes les faces de $\mathcal{C}(\mathbb{U})$. Cette construction permet une analyse qualitative des équations différentielles affines par morceaux de la forme (3.1), similaire à celle obtenue en construisant un réseau génétique discret à partir d'un tel système. Toutes les trajectoires définies au sens de Filippov sont représentées par un chemin dans ce graphe, mais certains chemins du graphe ne correspondent en revanche à aucune trajectoire [36], tout comme dans le cas classique (voir en particulier le chapitre 6). Un avantage important de cette technique est qu'elle permet de faire apparaître explicitement les points d'équilibre singuliers dans le graphe de transition, ce que ne permet pas la construction de la section 2.4.2.

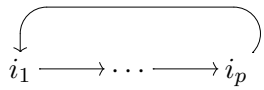
3.3 Attracteurs observés, outils de caractérisation

Un des aspects essentiels dans l'étude de systèmes de la forme (3.1) est l'analyse des attracteurs qu'ils présentent. La dynamique de ces systèmes étant confinée dans le domaine $\mathbb{U} = \prod_i [0, \theta_{iq_i}]$ d'après l'hypothèse **H1**, des ensembles compacts invariants y sont nécessairement présents. Comme d'usage, on distingue trois grands types d'attracteurs : les points d'équilibres, les orbites périodiques et les orbites apériodiques. Parmi ces dernières,

on généralement une distinction supplémentaire entre les orbites chaotiques et celles qui ne le sont pas, bien qu'il n'existe pas de définition universellement reconnue du chaos. Une des plus répandue est par exemple donnée par Devaney [43], sous forme de trois conditions à vérifier [5].
Dans les trois prochaines sections, on rappelle brièvement les travaux parus sur chacun des trois types d'attracteurs mentionnés ci-dessus. Dans une quatrième section, on traite des travaux portant de manière plus globale sur la structure du portrait de phase complet.

3.3.1 Points d'équilibre réguliers et singuliers

Les points d'équilibres réguliers sont comme on l'a vu les points focaux situés dans leur propre boîte. Leur étude ne pose aucun problème particulier, et nous n'en parlons donc pas davantage dans cette section.
On a déjà défini la notion de point d'équilibre singulier à la section 3.2 : ce sont les points d'équilibres situés sur un hyperplan seuil. Les deux principales approches développées pour les étudier ont été présentées dans la section précédente.
On peut mentionner encore trois résultats. Tout d'abord, Snoussi et Thomas introduisent en 1993 la notion d'état caractéristique d'une boucle de retroaction (*feedback loop characteristic state*) [116] . Un tel état est défini à partir d'une boucle de retroaction



dans le graphe d'interaction. Supposant que l'interaction $i_j \to i_{j+1}$ se fait en un seuil noté θ_{i_j}, le résultat présenté dans cet article est le suivant : les seuls points d'équilibres singuliers possibles sont ceux situés sur une intersection de la forme

$$\{x_{i_1} = \theta_{i_1}\} \cap \cdots \cap \{x_{i_p} = \theta_{i_p}\},$$

pour $i_1, \ldots, i_p$ formant une boucle de retroaction telle que décrite ci-dessus, ou apparaissant dans la réunion de plusieurs boucles distinctes (i.e. d'intersection vide deux à deux). Ce résultat permet théoriquement de localiser tous les points d'équilibres, sans avoir à évaluer toutes les faces de $\mathcal{C}(\mathbb{U})$. Il représente donc une économie précieuse dans l'exploration de ces faces, dont le nombre augment exponentiellement avec la dimension du système. Remarquons que ce résultat est l'exact analogue de celui obtenu par Plahte et al. dans [105], décrit par eux à l'aide de la jacobienne des fonctions logoïdes, et que nous avons mentionné à la section 3.2.

Un article de Devloo, Hansen et Labbé, paru en 2003 [31], introduit une fonction, appelée *image function*, dont l'évaluation permet de localiser efficacement tous les points d'équilibre d'un système similaire à ceux introduits par René Thomas. Ces travaux s'appuient sur des techniques de programmation par contraintes. Nous n'en présentons pas les détails ici, ces méthodes ne s'appliquant qu'indirectement aux systèmes affines par morceaux. Leur intérêt est néanmoins indéniable, pour les mêmes raisons d'économie que le

5. *i*). Existence d'un ensemble dense de points ayant un orbite périodique. *ii*). Sensibilité aux conditions initiales. *iii*). Transitivité topologique. Une définition moins restrictive – due à C. Robinson – ne demande pas *i*), et est liée à la positivité de l'entropie topologique, voir annexe B.

résultat de Snoussi et Thomas.

Enfin, un papier récent de Casey, de Jong et Gouzé [21] traite de la stabilité des points d'équilibre. Ce travail repose sur la notion de solution au sens de Filippov, et sur le graphe de transitions qui en découle (voir section précédente). Ces auteurs énoncent plusieurs théorèmes de stabilité et d'instabilité de points d'équilibre singuliers, reposant sur des hypothèses purement qualitatives, portant sur la structure locale du graphe de transition (incluant toutes les facettes de $\mathcal{C}(\mathbb{U})$). Ils proposent également une conjecture du même type que leurs théorèmes.

3.3.2 Cycles limites

Les orbites périodiques de systèmes affines par morceaux de la forme (3.1) ont été étudiées dès les premiers travaux sur de tels systèmes. Par ordre chronologique, les auteurs traitant de orbites périodiques de façon générale sont Glass et Pasternack [64, 65], puis Mestl, Plahte et Omholt [94], et enfin Edwards [45]. Pour résumer, ces travaux reposent sur l'étude des points fixes de la composée d'applications de transition le long d'un cycle. Les hypothèses **H2** et **H3** assurent que cette application de premier retour peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{M}x = \frac{Ax}{1 + \langle \psi, x \rangle}, \tag{3.12}$$

et que les points fixes de $\mathcal{M}$ sont déterminés par les valeurs propres de la matrice A. Nous avons généralisé ces résultats au cas où l'hypothèse **H2** n'est pas requise, c'est-à-dire pour des systèmes non binaires. Nous renvoyons donc à la section 4.3 pour une présentation détaillée de ces questions.

Mentionnons un résultat qui n'est pas détaillé dans la section 4.3, et qui est démontré dans [64, 65]. Dans ces articles, un lien est établi entre les cycles du graphe de transitions et les cycles limite d'un modèle linéaire par morceaux associé (le résultat concerne les réseaux binaires, et l'unique seuil de chaque variable est fixé à 0).
Un *attracteur cyclique* est un cycle C de GT tel que toute arête de ce graphe adjacente à C pointe dans la direction de C. La dimension d'un tel cycle est celle du plus petit cube de GT qui contient C (dans le cas binaire, GT est naturellement porté par le n-cube $\{0,1\}^n$). Alors, les auteurs montrent que si C est un attracteur cyclique de dimension n, l'une des deux affirmations suivante est vraie :

- •) il existe un cycle limite stable dans l'ensemble de boîtes associé au cycle C, que l'on note $\Phi(\mathsf{C}) \subset \mathbb{R}^n$, et toutes les trajectoires dans cet ensemble de boîtes convergent vers ce cycle limite.
- •) toutes les trajectoires dans $\Phi(\mathsf{C})$ convergent vers l'origine $0_{\mathbb{R}^n}$.

Ce résultat apparaît comme un cas particulier de l'étude menée dans [45], et étendue dans la section 4.3 de ce mémoire. La discrimination entre les deux possibilités ci-dessus peut être faite en étudiant les valeurs propres de la matrice A de l'application de premier retour associée au cycle C, équation (3.12).

3.3.3 Attracteurs apériodiques

Outre les points d'équilibre et les orbites périodiques, il est avéré que les systèmes dynamique définis par des équations de la forme (3.1) peuvent présenter des attracteurs non périodiques. De tels attracteurs sont dits *apériodiques* de façon générale, ce qui inclut plusieurs types – qualitativement assez distincts – d'attracteurs. Le type le plus étudié est celui des attracteurs dits *chaotiques*. On sait qu'un tel vocable prend des définitions variables. Toute une panoplie d'outils est donc disponible pour caractériser de telles dynamiques (cf. par exemple [24, 43, 67]), dont on peut dire très grossièrement qu'elles correspondent aux ensembles ω-limite portant des dynamiques sensibles au conditions initiales, tout en étant bornées.

L'étude de tels ensembles repose, comme souvent, sur un usage important des techniques d'analyse numérique, et de simulation. Parmir les références les plus anciennes soulevant la question des dynamiques chaotiques dans les réseaux de Glass, on peut citer les deux papiers qu'il publie au début des années 1990 avec J. Lewis [83, 84]. Plusieurs simulations numériques mettent en évidence la présence d'orbites chaotiques dans des systèmes de dimension supérieure à 6 (jusqu'à 50), tandis que seule la coexistence de plusieurs cycles limites stables est démontrée pour un réseau de dimension 5. Ces papiers traitent le cas binaire, i.e. sous **H2**, des réseaux affines par morceaux de la forme (3.1), et ils montrent notamment que cette classe de systèmes inclut les modèles de réseaux neuronaux dus à Hopfield. Ces derniers correspondent à une fonction Γ particulière. Ils introduisent la plupart des techniques qui seront employées par la suite dans les études de ce type de phénomènes, et qui sont assez classiques en théorie des systèmes dynamiques non linéaire.
En résumant, l'approche usuelle consiste à considérer dans un premier temps les trajectoires d'un système sur le graphe de transition GT. La présence dans ce graphe de structures formées de plusieurs boucles imbriquées (structures que nous appelons *irrationnelles* dans le chapitre 6), est une condition nécessaire à la présence d'orbite apériodiques. Une telle structure S étant repérée, des simulations peuvent être menées, qui mettent en évidence trois types de phénomènes :

- •) la multistationnarité, avec coexistence de plusieurs attracteurs (cycles ou foyers stables), associés à différents cycles présents dans S.
- •) l'existence d'un unique attracteur périodique, pouvant parcourir plusieurs boucles de S, et être de longueur considérable (plusieurs centaines de boîtes).
- •) l'existence d'un attracteur apériodique, présentant dans certains cas plusieurs aspects caractéristiques du chaos.

Les deux premiers cas renvoient à l'étude des cycles limites, et donc à la section précédente. Rappelons toutefois le travail de Gedeon [54], qui traite une classe de systèmes binaire de dimension 4, dont le graphe de transitions contient deux boucles partageant une paire de sommets. Notons $(1, p)$ une orbite périodique parcourant 1 fois l'une des deux boucles, puis p fois la seconde, et ceci indéfiniment. Gedeon montre que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe de valeurs de paramètres pour lesquelles le système étudié présente une orbite périodique de type $(1, p)$ (ou de type $(p, 1)$). Il montre également qu'aucune valeur des paramètres ne conduit à une orbite (p, q), pour $p > 1$ et $q > 1$.

Le dernier cas de la liste ci-dessus est abordé numériquement dans les deux articles [83,

84]. Étant donné un sous-graphe de GT, plusieurs réseaux continus sont simulés, correspondant à autant de valeurs des paramètres. De façon notable, les modèles simulés incluent notamment des sigmoïdes (représentées par des fonctions arctan), dont le paramètre de raideur est modifié de le sens de la limite SIGMOÏDE $\rightarrow$ HEAVISIDE (voir section 3.2). Les diagrammes de bifurcation présentés sont dans certains cas fort complexes, faisant apparaître des séquences de bifurcations similaires à celles communément appelées *route vers le chaos*. Cet aspect n'est pas développé au-delà de l'évidence numérique.

Une autre technique consiste à étudier une application de premier retour sur un hyperplan H transverse à l'orbite apériodique numériquement détectée. Les comportements statistiques en temps et en espace de cette application sont comparées comme suit : un histogramme représente la répartition des valeurs prises par une coordonnée du vecteur d'états (e.g. x_1) pour deux types de simulation. D'une part, une unique trajectoire est considérée, et les valeurs de x_1 sont celles des intersections successives de l'orbite étudiée avec H. D'autre part, plusieurs trajectoires sont calculées, pour différentes conditions initiales, et les valeurs de x_1 sont celles que prend cette variable lors de la $k^{\text{ème}}$ intersection avec H pour ces différentes conditions initiales. Plusieurs choix de l'entier k sont traités. Dans tous ces cas, les histogrammes obtenus sont très ressemblants, ce qui indique l'existence probable d'une unique densité invariante ergodique[6], ce qui est caractéristique des systèmes chaotiques. Ici encore, seule une caractérisation numérique est proposée.
Des projections planes des attracteurs observés apparaissent comme des ensembles visuellement semblables à ce qu'on appelle couramment des *attracteurs étranges*. Un exemple représentatif de ce type de projection est donné sur la figure 3.2. Ce dernier attracteur est tiré de l'article [95], publié en 1996 par Mestl, Lemay et Glass. L'apport principal de cet article est la mise en évidence de cet attracteur, qui apparaît dans le système à 4 variables ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= 2(X_2\bar{X}_3 + \bar{X}_2X_3) - 1.2546 - x_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= 2(\bar{X}_1\bar{X}_4 + X_1X_4) - 1.3762 - x_2(t) \\
\frac{dx_3}{dt} &= 2\bar{X}_1\bar{X}_2 - 0.8024 - x_3(t) \\
\frac{dx_4}{dt} &= 2(\bar{X}_1\bar{X}_3 + X_3) - 1.2682 - x_4(t)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Les majuscules X_i représentent la fonction de Heaviside $H(x_i)$, et les termes $\bar{X}_i$ représentent $1 - X_i$, la version décroissante de la fonction de Heaviside.

6. Selon un théorème de Birkhoff, les moyennes en temps et en espace d'une transformation ergodique sont égales.

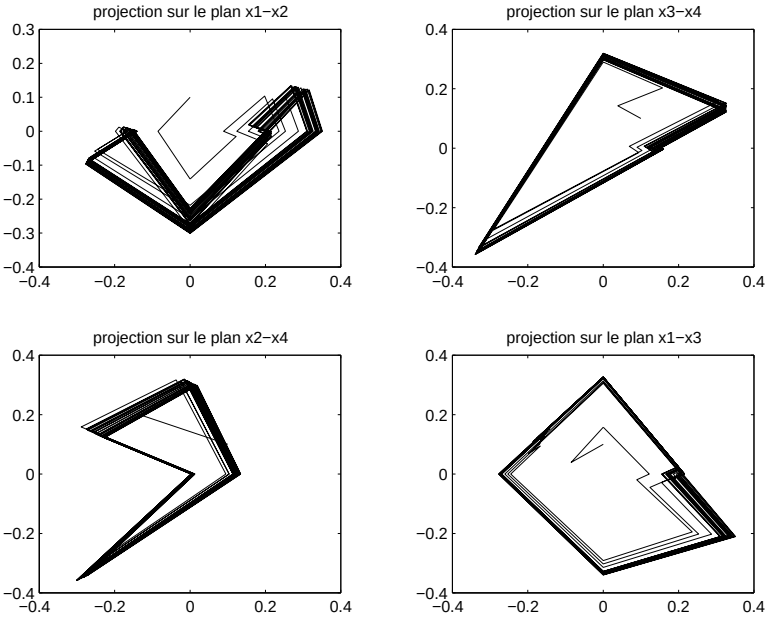


FIG. 3.2 – *Projections de l'attracteur étrange du système (3.13). condition initiale : (0.0001 0.1 0.1 0.1), 300 transitions. Simulation effectuée en Matlab (cf. chapitre 7)*

Mathématiquement plus rigoureux que les précédents, ce travail caractérise l'attracteur de la figure 3.2 aux moyens d'une approche à la fois numérique et analytique. Différents outils sont employés pour caractériser cet attracteur. Son exposant de Lyapunov dominant est évalué numériquement : il est strictement positif, ce qui est caractéristique du chaos.

Le sous-graphe de GT associé à cet attracteur est constitué de deux boucles à 10 sommets, notées $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, qui ne diffèrent qu'en un seul sommet (qui correspond à une boîte, de dimension 4, dans l'espace des phases). Un mur W (de dimension 3) situé à l'intersection de deux boîtes communes aux cycles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, est choisi comme section de Poincaré, et la dynamique en temps discret de l'application de premier retour $\mathcal{M}^{10}$ sur ce mur est étudiée précisément (au moyen d'outils mathématiques semblables à ceux présentés au chapitre 4, en particulier). Notant $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$, les applications respectivement associées aux deux cycles, et $D_{\mathcal{A}}$, $D_{\mathcal{B}}$ leurs domaines de définition respectifs, il apparaît que chacune présente un point d'éqilibre hyperbolique instable, situé dans son domaine. Sans entrer trop dans les détails, les auteurs de [95] mettent en évidence la présence d'une région invariante de W, dans laquelle se trouve un point homocline transverse (qui est explicitement calculé), i.e. un point situé à l'intersection transverse[7] des variétés stable et instable d'un point d'équilibre hyperbolique. Ce type d'intersection est connu pour entraîner la présence d'un sous-ensemble de Cantor invariant, conjugué à un décalage plein (voir annexe B). Cet ensemble peut néanmoins être instable, et donc ne pas influencer le comportement asymptotique du système. L'analyse présentée garantit néanmoins la présence de sensibilité aux conditions initiales dans la région invariante de W considérée, et donc de chaos.
Un dernier fait notable, s'exprimant en termes de dynamique symbolique, est que parmi les mots sur l'alphabet $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ admissibles le long de l'attracteur étudié, aucune occurence

7. Deux variétés sont dites transverses, ou transversales, en un point lorsque leurs espaces tangents en ce point sont supplémentaires [42].

de $\mathcal{BB}$ n'est possible, alors que plusieurs $\mathcal{A}$ consécutifs peuvent apparaître. Ceci suggère un rapport avec le *décalage du nombre d'or*[8]. Cet aspect est développé dans le papier plus récent de Edwards, Siegelmann, Aziza et Glass [46]. Nous renvoyons au chapitre 6 pour un traitement systématique de la dynamique symbolique des réseaux affines par morceaux.

Suite à cet article plusieurs autres attracteurs étranges sont mis en évidence et étudiés dans les systèmes de Glass. Les deux papiers d'Edwards [45, 47] en sont de bons exemples. Le premier traite de l'étude des systèmes de Glass de façon assez générale, tandis que le second est principalement destiné à en décrire les dynamiques chaotiques : il contient plusieurs exemples détaillés, et reprend notamment celui traité dans [95].
Dans les deux papiers ci-dessus, Edwards présente une méthode pour la détection et la caractérisation des orbites apériodiques de systèmes binaires. Les bases théoriques de cette méthode sont développées plus complétement dans [48]. Le principe est le suivant : tout cycle limite d'un système de Glass (binaire) est caractérisé par un point fixe d'une application de la forme (3.12), dont le domaine de définition est défini par un cône polyédrique (cf. [45], et le chapitre 4 de ce mémoire). Les points fixes sont obtenus par une analyse des valeurs et vecteurs propres de la matrice au numérateur de (3.12). Considérant par exemple deux cycles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ayant au moins une boîte commune, à chaque mot $\mathbf{w}$ sur l'alphabet $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ est associé un domaine (éventuellement vide), qui est l'ensemble de points traversant la séquence de cycles caractérisée par $\mathbf{w}$ (ce domaine est l'équivalent des domaines notés $D_{\mathbf{a}}$ dans le chapitre 6). En notant

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}\, x = \frac{Ax}{1 + \langle \psi, x \rangle} \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}\, x = \frac{Bx}{1 + \langle \phi, x \rangle},$$

les applications de premier retour associées aux deux cycles, il apparaît que la matrice au numérateur de l'application associé à un mot $\mathbf{w}$ de la forme $\mathcal{ABBAAB}$ est le produit $ABBAAB$. Ainsi, les questions théoriques soulevées concernent la présence de vecteurs propres d'un produit de la forme précédente, dans un cône invariant par A et B. Ce type de questions est formulé précisément dans [48], et résolu dans les cas où A et B commutent, ainsi que pour les systèmes de dimension 2.

3.3.4 Étude globale du portrait de phase et classification des systèmes

Nous avons vu dans les trois sections précédentes les types d'attracteurs les plus répandus dans les systèmes affines par morceaux de la forme (3.1). Naturellement, deux questions plus globales peuvent être posées :

- Quelle est la structure globale du portrait de phase d'un système donné ?
- Parmi tous les systèmes, lesquels présentent l'un des trois type d'attracteurs exposés dans les sections précédentes ? Dans quelles proportions sont présents ces trois types d'attracteurs ?

La première question a été principalement abordée par Gedeon [55]. La réponse qu'il apporte est la suivante : considérant le graphe de transitions, il décompose ce graphe en composantes fortement connexes. Il montre alors que cette décomposition induit une

8. Ce terme désigne le décalage de type fini sur l'aphabet $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$, dont l'ensemble de mots interdits est réduit à $\mathcal{BB}$. L'entropie de ce décalage est $h = \log \mu > 0$, où μ est le nombre d'or (cf. [86], p.102).

décomposition de Morse. Une telle décomposition est définie comme étant un ensemble fini

$$\mathcal{M} = \{M(q) \mid q \in (\mathcal{P}, >)\}$$

de compacts invariants disjoints, indexés par un ensemble fini muni d'un ordre partiel strict $>$. Pour tout $x \in \mathbb{U} \setminus \bigcup_q M(q)$, il existe un couple $q > r \in \mathcal{P}$ tel que

$$\omega(x) \in M(r), \qquad \alpha(x) \in M(q),$$

où $\alpha(x)$ et $\omega(x)$ sont les ensembles α et ω-limite de x.
La décomposition de Morse proposée par Gedeon est valide pour les systèmes binaires, et s'applique à ce qu'il appelle *ray-flow*. Cette construction repose sur l'observation de [94], selon laquelle des trajectoires issues d'une même demi-droite passant par l'origine restent colinéaires. En simplifiant, le *ray-flow* est la projection du flot sur la sphère unité, qui en vertu de cette propriété est équivalente au flot des systèmes binaires.
Gedeon prouve de plus que certaines composantes connexes soumises à des conditions de structure, ne peuvent contenir d'autres attracteurs que des cycles limites et des points d'équilibres.

La seconde question, qui porte sur l'ensemble des systèmes, a été abordée à plusieurs reprises. La plupart des études menées consistent à effectuer un grand nombre de simulations numériques sur des réseaux aléatoires, puis à étudier les données obtenues au moyen d'outils statistiques. Les études de ce type sont principalement les suivantes [66, 77, 96].
La dernière de ces références évalue surtout l'influence de la connectivité, i.e. le nombre moyen d'arêtes entrantes dans le graphe d'interaction (nombre moyen de variables dont dépendent les composantes γ_i de l'application taux de production). Il en résulte que de fortes connectivités ($K \in \{9, \ldots, 15\}$ dans un réseau de 64 variables) conduisent systématiquement à des comportements chaotiques. Ces derniers sont caractérisés par l'existence d'un exposant de Lyapunov strictement positif.
La référence [66] évalue l'influence de la connectivité et d'un biais forçant une variable booléenne (une fonction de Heaviside présente dans le second membre des systèmes) à la valeur 1. Comme dans le cas précédent, il apparaît que des connectivités élevées sont génératrices de chaos (ici caractérisé par un exposant de Lyapunov positif, et l'absence de cycle de longueur inférieure à 3000 boîtes). Une valeur critique est donnée par une relation entre les deux paramètres évalués, au-delà de laquelle se présentent des dynamiques chaotiques.
L'étude [77] décrit de façon plus détaillée l'influence des deux paramètres que sont la taille du réseau N et sa connectivité K, non seulement sur l'apparition du chaos, mais également sur la présence de points d'équilibres stables, de foyers, et d'orbites périodiques. Pour ces dernières, la longueur et la période des cycles est également retenue. Il ressort de ce travail, que à K fixé, une augmentation du nombre de variables N accroît la probabilité de présence d'orbites périodiques et chaotiques (ces dernières étant largement minoritaires). Inversement, à N fixé, une augmentation de K diminue le nombre de points d'équilibres stables, au profit des foyers stables situés à l'intersection de plusieurs seuils. Les connectivités considérées sont relativement faibles, et il semble que le nombre de cycles et d'orbites chaotiques soit maximal pour K valant 2 ou 3.
Ces trois études considèrent des réseaux binaires, à taux de dégradation uniformes, et sans autorégulation, i.e. **H2**, **H3** et **H4** sont supposées. Comme dans tous les travaux parus, **H1** est également supposée vraie. Enfin, les références [77, 96] considèrent des équations

appartenant à la sous-classe des réseaux dits *booléens*[9].
Notons que d'autres études proposent également des résultats de simulations numériques sur de grands ensembles de réseaux [12, 44]. Toutefois, ces simulations y apparaissent pour étayer un propos plus spécifique que les trois références précédentes, dont les données numériques sont le sujet même. Nous discuterons ces deux derniers articles plus en détails dans la suite.

Un dernier aspect assez développé concerne la classification des attracteurs pouvant apparaître dans le portrait de phases d'un système affine par morceaux. Un papier de Glass de 1975 [63] considère une version discrète de cette classification. Il considère des systèmes binaires, dont le graphe de transition GT peut donc être plongé sur le n-cube $\{0,1\}^n$. Usant des symétries de ce cube et de résultats antérieurs [61], il définit des classes d'équivalences pour ces attracteurs. Il compte 4 classes d'équivalences en 2 dimensions, et 112 en 3 dimensions. En ajoutant un critère tenant compte la dynamique du système linéaire par morceaux associé, ces deux nombres tombent respectivement à 3 et 13. L'essence de ce critère supplémentaire est que certaines configurations discrètes non équivalentes donnent cependant lieu aux mêmes dynamiques. Par exemple lorsqu'il existe un point fixe dans GT, correspondant à un point focal situé dans sa propre boîte, et aucun cycle, toute les trajectoires convergent vers ce point fixe, indépendamment de propriétés additionnelles de symétrie.
Poursuivant ce type d'analyse, Edwards et Glass [44] précisent le nombre de classes d'équivalences de la forme précédente (sans le second critère), et montrent qu'il augmente extrêmement vite avec la dimension de l'espace. Un minorant de ce nombre est en effet

$$\frac{2^{n2^{n-1}}}{n!2^n},$$

lorsque n est la dimension. Pour donner un ordre d'idée, ce nombre est de l'ordre de 3×10^{20} pour $n=5$, et le nombre de classes d'équivalence en est très proche.
Les auteurs illustrent leur propos au moyen de simulations numériques : un million de réseaux de $\mathbb{R}^4$, choisis sans autorégulation et dans la classe booléenne (voir note de bas de page 9). Il résulte de cette étude que même avec seulement 4 variables et des hypothèses restrictives sur les paramètres, une très grande diversité des dynamiques est observée. En effet, le nombre de réseaux binaires distincts dans $\mathbb{R}^4$, modulo les symétries du 4-cube, et 11223994. Pour chaque réseau parmi cette multitude, une infinité de valeurs peut être choisie pour les paramètres Γ et Λ. Parmi le million de réseaux booléens analysés, les attracteurs détectés sont répartis comme suit :

points d'équilibres de la forme $f(a) \in B_a$	555633
foyers	435410
orbites périodiques	5668
orbites périodiques dégénérées	2654
autres	635

(3.14)

où les orbites «autres» sont supposées chaotiques. Les cycles dégénérés sont ceux intersectant plusieurs seuils simultanément. En ce qui concerne les cycles détectés, différents critères qualitatifs sont employés pour tenter une classification. Il en ressort une grande

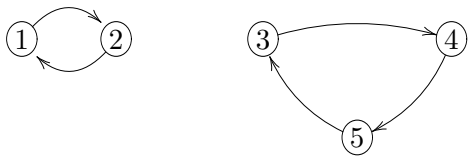
9. La classe des réseaux booléens est constituée des réseaux binaires, i.e. sous **H2**, dont tous les seuils sont fixés à 0, et dont tous les points focaux appartiennent à $\{-1,+1\}^n$.

diversité au sein même de ces attracteurs.

Dans [12], Bagley et Glass se fixent comme objectif de compter et classifier les attracteurs de réseaux génétiques discrets et continus. Les modèles discrets considérés sont ceux introduits par S. Kauffman [60, 79], i.e. ils sont de la forme décrite à la section 2.3, dans le cas où les variables sont booléennes et les dynamiques synchrones. Les modèles continus sont formulés à l'aide de sigmoïdes ou de fonctions de Heaviside, avec l'hypothèse que ces deux types de formulations produisent des dynamiques très similaires. Dans premier temps, l'étude du cas booléen est menée, s'appuyant sur des simulations numériques. Ces simulations ont pour but de reproduire certaines conjectures de S. Kauffman – elles-mêmes basées sur des études numériques – portant sur le nombre moyen d'attracteurs dans un réseau booléen de connectivité 2 [78]. Pour un réseau à n variables, ces conjectures annoncent un nombre moyen de $\sqrt{n}$ attracteurs, et une longueur moyenne des attracteurs cycliques également en $\sqrt{n}$, pour n grand [10]. En résumant un discussion assez détaillée, on peut dire que ces conjectures sont globalement confirmées par les simulations de ces auteurs, à condition de considérer la longueur médiane de cycles, et non leur longueur moyenne.
Suite à cette étude du cas booléen, les modèles continus sont traités. Un essai de classification de leurs attracteurs est effectué, reposant sur la structure discrète sous-jacente aux modèles continus de réseaux génétiques (i.e. l'unique modèle discret associé à un modèle continu, voir section 2.4.2). Deux critères de classification des attracteurs sont explicités : la longueur des cycles, dans le cas périodique, et l'utilisation de patrons de la forme

$$0\,0\,1\,*\,*\,1\,0\,*\,0\,*\,1\,0\,0\,1\,*\,*\,*, \tag{3.15}$$

où les $*$ représentent des variables dont la valeur n'est pas fixée. Les autres variables sont fixées, et définissent donc un sous-espace de l'espace des phases. Dans ce sous-espace, les variables non fixées peuvent définir plusieurs attracteurs. Notamment, des sous-ensembles de ces variables sont fournis par les composantes connexes du graphe d'interaction. Ceci sera mieux illustré par un exemple. Considérons un réseau à 5 variables dont le graphe d'interaction GI est de la forme :



où les variables x_1 et x_2 forment un sous-réseau indépendant dont les attracteurs sont deux points d'équilibre stables $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ et $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, et les variables x_4, x_5 et x_6 un autre sous-réseau donnant lieu à un cycle limite stable $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$. Alors le réseau total a deux attracteurs périodiques : $x^* \times \mathcal{C}$ et $\bar{x} \times \mathcal{C}$. Lorsque plusieurs attracteurs sont périodiques, les produits de la forme précédente doivent également tenir compte des déphasages possibles entre ces cycles, ce qui donne lieu à plus d'attracteurs du réseau global que le seul produit du nombre d'attracteurs des sous-réseaux indépendants. Cette méthode de classification ne paraît pas sans rapport avec les travaux liant boucles de retroaction et dynamiques d'un réseau (section 3.1.1).

10. Cette conjecture est souvent comparée aux grandeurs caractéristiques de l'espèce humaine : environ 40000 gènes, et $200 = \sqrt{40000}$ cellules différenciées, ces dernières étant généralement conçues comme des attracteurs stables du réseau génétique complet d'un organisme pluri-cellulaire.

Un dernier fait notable est la mise en évidence, dans ce même article [12], d'un attracteur quasi périodique dans un réseau à 9 variables avec des sigmoïdes, et d'un attracteur chaotique dans un réseau à 50 variables. Ce dernier coexiste avec une orbite périodique, ces deux attracteurs ayant le même patron de la forme (3.15), suggérant que ce critère purement discret est insuffisant pour discriminer correctement les attracteurs d'un réseau continu. Il semble toutefois vain de chercher à tirer des informations fines sur les attracteurs continus d'un réseau à partir de sa seule structure discrète, et cet exemple ne diminue en rien l'intérêt des méthodes de classification proposées dans [12].

Dans [81], Killough et Edwards étudient les bifurcations dans un système de Glass. Cet article est le seul à traiter systématiquement de ces questions. De part la nature linéaire par morceaux des réseaux de Glass, une certaine classification des bifuractions est possible, selon qu'elles affectent la structure discrète d'un système, ou seulement sa part continue. S'appuyant sur un théorème de caractérisation des cycles limites de systèmes de Glass (dont une généralisation au cas non binaire est donnée par les propositions 4.8 et 4.11 de ce mémoire), les auteurs de [81] proposent de distinguer quatre types de bifurcations.
Le théorème sur les cycles qu'ils emploient peut être rappelé simplement : on se donne une application de transition $\mathcal{M}$ d'une séquence périodique de boîtes, de la forme (3.12). On note C le cône polyédrique sur lequel cette application est définie en tant qu'application de premier retour. Alors, $\mathcal{M}$ admet un point fixe x^* si et seulement si $x^* \in C$, et que ce point est un vecteur propre de la matrice A apparaissant au numérateur de $\mathcal{M}$, associé à une valeur propre μ supérieure à 1. La stabilité (asymptotique) de x^* est équivalente au fait que la valeur propre μ soit (strictement) dominante.
Les classes de bifurcations sont alors directement inspirées de ce théorème et de ses hypothèses. Ce sont les suivantes :

(1) *double-switching bifurcation* : x^* atteint ∂C.
(2) *cycle-collapse bifurcation* : la valeur propre μ atteint la valeur critique 1.
(3) *cycle-destabilizing bifurcation* : la valeur propre μ devient inférieure en module à une autre valeur propre de A
(4) *structural bifurcation* : un point focal atteint une valeur seuil, et change de boîte.

La bifurcation (3), de destabilisation de cycle peut être raffinée davantage, selon que l'on a affaire à des valeurs propres complexes ou réelles, et dans ce dernier cas positives ou négatives. De même, certaines bifurcations de la forme (1), qui correspondent au fait que l'orbite de x^* traverse simultanément plusieurs seuils, peuvent donner lieu à des ambiguïtés. Celles-ci dépendent des dynamiques des boîtes dont l'intersection est traversée par l'orbite de x^*, et sont liées aux concept de solutions au sens de Filippov (voir section 3.2). La bifurcation (2) correspond à un passage cycle $\rightarrow$ foyer, de type *bifurcation de Hopf.*
Tous ces types de bifurcations sont étudiés en détails, usant notamment de concept issus de la théorie des systèmes dynamiques présentant des discontinuités (avec les "C-bifurcations"). Il semble en résumé que les bifurcations du type (1) soient les plus courantes. D'autre part les bifurcations de systèmes de Glass sont comparées avec celles, plus classiques, de systèmes à second membre différentiable (avec des sigmoïdes). On sait que dans ces derniers, la cascade de bifurcations menant d'un cycle limite à un attracteur chaotique est souvent très organisée, et se fait graduellement. Dans le cas des systèmes de Glass, il est montré dans [81] que des phénomènes chaotiques peuvent apparaître de façon soudaine. Intuitivement, ceci est lié au fait que les fonctions de Heaviside "com-

priment" sur une valeur seuil le comportement non-linéaire des fonctions sigmoïdes (voir section 3.2), substituant cette seule valeur seuil à un intervalle ouvert, où un paramètre peut varier continûment. Un dernier fait peut être mentionné : la coexistence d'un attracteur chaotique stable et d'un cycle limite stable dans un système de $\mathbb{R}^6$ est mise en évidence dans [81], prouvant une fois encore que les systèmes affines par morceaux peuvent générer des dynamiques fort complexes et variées.

3.4 Pouvoir algorithmique des réseaux génétiques affines par morceaux

Les trajectoires d'un système affine par morceaux traversant des séquences de boîtes, chaque système engendre naturellement un langage, défini par le graphe de transitions GT. Outre les questions de dynamique symbolique, cette aptitude a été traitée du point de vue informatique, démontrant que les réseaux de Glass ont un pouvoir algorithmique remarquable.

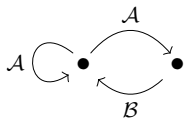
Ben-Hur et Siegelmann [16] montrent qu'une sous-classes des systèmes de Glass binaires peut simuler toute machine de Turing à mémoire bornée. Cette sous-classe est constituée des réseaux booléens (voir note de bas de page 9), et tels que toute boîte admet au plus une direction de sortie. Le principe de simulation est le suivant : les variables d'un système sont dissociées en trois ensembles :

- un ensemble de variables joue le rôle d'entrées,
- un autre ensemble de variables joue le rôle des sorties,
- la dernière variable sert de condition d'arrêt. Fixée à un valeur inférieure à son seuil lors de l'initialisation, elle indique l'arrêt du calcul lorsqu'elle franchit ce seuil.

En considérant la suite des boîtes traversées depuis une certaine condition initiale, il est possible de considérer les langages pouvant être reconnus par un automate tel que celui construit avec cette procédure. Usant de ce type de techniques, les auteurs montrent que toute machine de Turing à mémoire finie peut être simulée. Ceci est d'autant plus remarquable que les systèmes affines par morceaux qu'ils considèrent sont soumis à des restrictions très sévères, interdisant notamment tout attracteur plus complexe qu'un cycle limite ou un point d'équilibre stable.
La capacité des modèles affines par morceaux qui est ici considérée est celle de *reconnaître* un langage. Si les dynamiques chaotiques n'apportent aucune capacité supplémentaire de ce point de vue (tout langage reconnu par un système chaotique peut aussi l'être par un système non chaotique), il est suggéré dans [16] que des dynamiques complexes pourraient être avantageusement considérées du point de vue des langages qu'elles peuvent *générer*.

Edwards, Siegelmann, Aziza et Glass [46] considèrent cette aptitude et la rapprochent des questions de dynamique symbolique. Cet aspect est surtout développé au moyen d'un exemple, fourni par l'attracteur étrange présenté dans [95], et dont les équations sont rappelées en (3.13). Dans ce système, la valeur 1.2546 apparaissant dans la première équation est remplacée par un paramètre c. On rappelle que l'attracteur associé à ces équations, figure 3.2, est constitué de deux boucles, qu'on peut noter $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Pour la valeur ci-dessus de c, les auteurs montrent que la dynamique symbolique de cet attracteur est un

sous-décalage du shift du nombre d'or, de graphe associé :



(3.16)

Lorsque c varie, le langage induit par l'attracteur subit des modifications, passant d'un décalage d'entropie positive tel que (3.16), à un décalage d'entropie nulle, associé à un attracteur périodique. Lors de ce passage, certaines valeurs de c donnent lieu à un attracteur comportant quatre boucles : les deux précédentes, et deux nouvelles (i.e. traversant des séquences de boîtes nouvelles), notées $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. L'orbite périodique est associée au cycle de symboles $\mathcal{ABCABD}$, correspondant à 56 boîtes successives, et répété ad infinitum.
L'analyse détaillée de la dynamique symbolique de cet attracteur montre qu'il s'agit d'une approche fructueuse. Il est toutefois difficile en général de décrire précisément le langage associé à un attracteur. Le décalage (3.16), notamment, est seulement un sur-ensemble des dynamiques qualitatives de l'attracteur étudié, et il n'est pas prouvé si l'inclusion est stricte, ou si certaines valeurs de c conduisent à l'égalité des deux espaces de décalage.
Une suggestion est faite dans [46], enfin, à propos de l'identification des réseaux génétiques (voir section 3.1.2). Il est proposé en effet d'employer le langage induit par un attracteur, pour reconstituer un partie du graphe d'interaction GI d'un réseau. La diversité des mots induits par un unique attracteur permet en effet, à l'aide de mesures répétées au cours du temps, de reconstituer un grand nombre d'interactions, ce que ne permettent pas les dynamiques plus simples ; orbites périodiques ou points d'équilibre. Cette suggestion n'est toutefois pas complètement formalisée, et reste un idée à exploiter plus minutieusement.
Il ressort de cet article que la caractérisation des dynamiques symboliques d'un système affine par morceaux présentant du chaos est donc un problème encore assez ouvert, mais prometteur. Certains éclaircissements sont fournis au chapitre 6, notamment une formalisation rigoureuse du codage des trajectoires dans un système sans autorégulation, ainsi que certaines propriétés liées à l'entropie topologique.

Ceci est à rapprocher du travail de Namikawa et Hashimoto [99], qui comparent les propriétés de systèmes dynamiques symboliques en termes de génération de langage. Ce travail traite de deux types de complexité :

- dynamique, caractérisée en termes d'entropie topologique.
- algorithmique, caractérisée en termes de langages formels.

Etant donnés un ensemble fini $\mathcal{A}$, et une famille finie $\mathscr{F}$ d'applications $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, ils comparent les complexités des deux types ci-dessus pour des systèmes dynamiques symboliques définis sur $\mathscr{F}$, et ceux qu'ils engendrent sur $\mathcal{A}$. On entend par là qu'un sous-décalage (voir annexe B) $\mathcal{F} \subset \mathscr{F}^{\mathbb{Z}}$ engendre le sous-décalage de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ suivant

$$\Sigma_{\mathcal{F}} = \left\{ \mathbf{a} = (a_i)_i \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid \exists\, (f_i)_i \in \mathcal{F},\ \forall i,\ a_{i+1} = f_i(a_i) \right\}.$$

Il apparaît que les deux types de complexité ci-dessus sont complémentaires, et qu'une plus grande complexité algorithmique correspond à une plus faible complexité dynamique. En terme d'entropie, on a en effet

$$h(\Sigma_{\mathcal{F}}, \sigma) \leqslant h(\mathcal{F}, \sigma), \tag{3.17}$$

alors qu'il est possible de construire un décalage $\mathcal{F}$ dont le langage est récursivement énumérable [11], alors que celui de $\Sigma_{\mathcal{F}}$ ne l'est pas. Autrement dit, le langage induit par $\mathcal{F}$ est strictement plus simple que celui induit par $\Sigma_{\mathcal{F}}$, alors que les complexités relatives de ces deux décalages, évaluées en termes d'entropie, conduisent à une conclusion inverse.

Ces questions appellent des développements qui nous méneraient bien au-delà de notre propos, est concernent l'informatique théorique et la théorie de la complexité. On pourra par exemple consulter les références [10, 17] pour des résultats généraux sur le pouvoir algorithmique des systèmes dynamiques – notamment ceux définis par morceaux.
Remarquons seulement que l'inégalité (3.17) est l'exact analogue, dans un contexte plus général, de l'inégalité proposée au corollaire 2.13, entre les entropies d'un réseau génétique discret et du décalage induit par ses stratégies de mise à jour. En effet, chaque stratégie $\mathbf{I} = (I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est équivalente à une suite d'applications partielles $\left(\widetilde{F}^{I_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. Aussi, l'inégalité du corollaire 2.13 est un cas particulier de (3.17), lorsque $\mathscr{F} = \{\widetilde{F}^I \mid I \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_n)\}$, et que les suites sont indexées par $\mathbb{N}$ au lieu de $\mathbb{Z}$ (ce qui ne change pas la validité de l'inégalité (3.17)).

11. Nous renvoyons à [99] pour la définition, qui est un peu longue, et ne nous est pas indispensable ici. Retenons que, dans la hiérarchie de Chomsky, cette classe de langages formels est la plus générale.

Deuxième partie

Dynamiques régulières du modèle affine par morceaux

Chapitre 4

Dynamique en temps discret sur un espace continu

Comme il a été dit au chapitre 2, la grande majorité des résultats théoriques et numériques concernant les réseaux affines par morceaux s'applique à la classe restreinte des réseaux binaires, à taux de dégradation uniformes, et sans autorégulation, i.e. satisfaisant les trois hypothèses **H2**, **H3** et **H4** définies dans ce même chapitre. Cette dernière classe est celle que désigne habituellement le terme *réseaux de Glass*. Une des références les plus complètes concernant l'analyse de cette classe de systèmes est due à R. Edwards [45]. Cet article récapitule des résultats plus anciens sur le sujet, et en apporte de nouveaux. De façon générale, une des questions les plus centrales concernant les systèmes de Glass est de caractériser les attracteurs d'un système donné.
Dans la section 2.4, une application de transition définie sur la frontière des boîtes partitionnant l'espace des phases a été définie, équation (2.22). Nous allons dans ce chapitre préciser la définition de cette application, en donner certaines propriétés, et fournir une première caractérisation de son domaine de définition à l'échelle de l'espace des phases entier. En particulier, la dernière section 4.3 est consacrée à l'étude des orbites périodiques, et étend l'analyse menée dans [45] au cas de réseaux non binaires, i.e. ne vérifiant pas forcément **H2**.

4.1 Application de transition globale

Dans cette section, on considère un système de la forme (2.14), qu'on rappelle :

$$\frac{dx}{dt} = \Gamma(x) - \Lambda x,$$

satisfaisant la seule hypothèse **H4**, i.e. sans autorégulation.

4.1.1 Propriétés locales

Rappelons que l'application de transition est définie dans un boîte B_a, pour $a \in \mathbb{D}$, par $\mathcal{M}^a x = \varphi^a(x, \tau(x))$, avec

$$\varphi^a(x,t) := x(t) = f + e^{-\Lambda t}(x - f),$$

où f est le point focal de B_a : $f = f(a)$. Ceci s'écrit aussi, lorsque $f \notin \mathring{B}_a$:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}^a : & \partial B_a & \longrightarrow & \partial B_a \\ & x & \longmapsto & \mathcal{M}^a x = f + A(x)(x - f), \end{array} \tag{4.1}$$

où $A(x)$ est la matrice diagonale dont les coefficients sont

$$A_{ii}(x) = e^{-\lambda_i \tau(x)} = \left(\frac{f_s - \theta_s^{\pm_s}(a)}{f_s - x_s} \right)^{\frac{\lambda_i}{\lambda_s}}.$$

Ci-dessus, $s \in \mathbb{N}_n$ est une direction de sortie : $\tau(x) = \tau_s(x)$ (voir eq. (2.21) pour la définition du temps de sortie τ).
On a vu également que le flot est une fonction monotone du temps selon chacune des n directions, pour une condition initial fixée. On en a déduit les directions potentielles de sortie, qu'on rappelle :

$$\begin{array}{rcccl} I_{out}(a) & = & I^-_{out}(a) & \bigcup & I^+_{out}(a) \\ & = & \{i \in \mathbb{N}_n \mid f_i < \theta_i^-(a)\} & \bigcup & \{i \in \mathbb{N}_n \mid f_i > \theta_i^+(a)\}. \end{array}$$

Le signe $\pm_i \in \{-,+\}$ tel que $i \in I^{\pm_i}_{out}$ étant univoquement déterminé pour tout $i \in I_{out}$, on usera de la notation $\pm_i(a)$, ou $\pm_i$ seulement lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible, pour le désigner dans la suite. Le signe opposé étant tout aussi bien défini, on le notera $\mp_i$.
Les directions de $I_{out}(a)$ sont les seules suivant lesquelles le flot peut rencontrer le frontière de B_a à partir d'une condition initiale en son intérieur. De la monotonie du flot, on déduit que les régions de la frontière atteignables depuis l'intérieur sont des facettes entières, qu'on appelle souvent *murs* dans la littérature. On les notera dans la suite :

$$W_i^{\pm}(a) = \{x \mid x_i = \theta_i^{\pm}(a)\} \cap B_a, \quad \text{pour } i \in \mathbb{N}_n. \tag{4.2}$$

Ainsi, un mur $W_i^{\pm}(a)$ est atteignable depuis $\mathring{B}_a$ si, et seulement si, $i \in I_{out}(a)$, et $\pm = \pm_i$. Tout point d'un mur ne satisfaisant pas cette condition s'en échappe instantanément, en direction de $\mathring{B}_a$. On distingue donc les deux régions, dites respectivement *sortante* et *entrante* :

- $\partial B_a^{out} = \bigcup_{i \in I_{out}} W_i^{\pm_i} = \{x \in B_a \,|\, \tau(x) = 0\}$
- $\partial B_a^{in} = \overline{\partial B_a \setminus \partial B^{out}} = \bigcup_{i \in I_{out}} W_i^{\mp_i} \cup \bigcup_{i \notin I_{out}} (W_i^- \cup W_i^+)$.

Certains arguments a ont été omis, pour alléger l'écriture. Les notions définies jusqu'ici sont illustrées sur les figures 4.1 et 4.2.

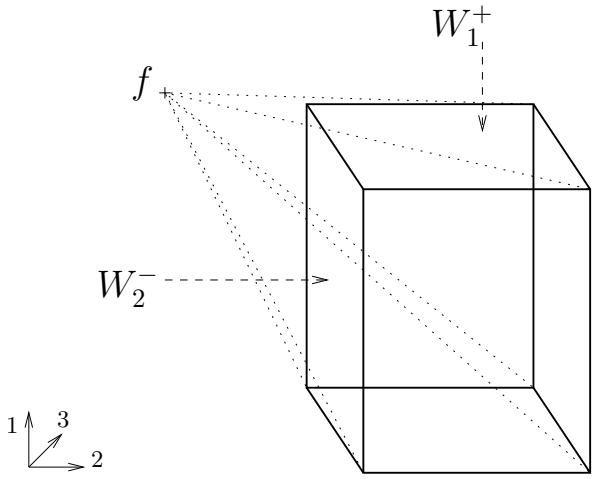


FIG. 4.1 – *Une boîte dans $\mathbb{R}^3$, avec deux murs sortants : W_1^+ et W_2^-. Ainsi, $I_{out} = \{1, 2\}$, $\pm_1 = +$, et $\pm_2 = -$. Ainsi $\partial B_a^{out} = W_1^+ \cup W_2^-$.*

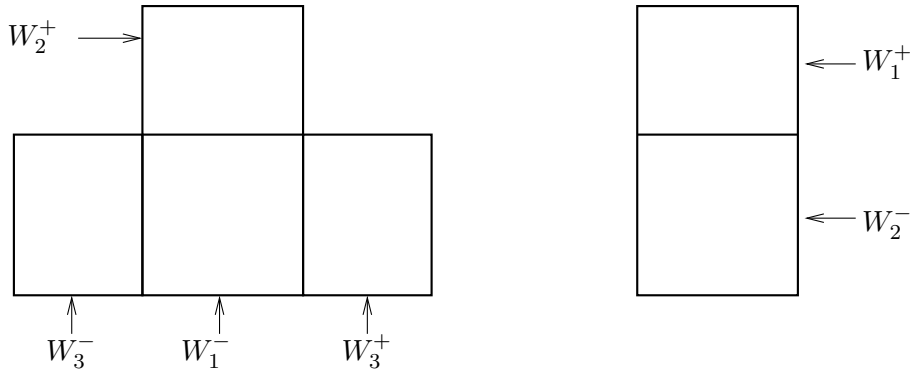


FIG. 4.2 – *Représentation dans le plan des deux régions ∂B_a^{in} (à gauche) et ∂B^{out} (à droite). La frontière de la boîte représentée figure 4.1 a été "dépliée". L'échelle est arbitraire, le point de vue est celui du point focal.*

On peut maintenant énoncer une première propriété, immédiate :

$$\partial B_a^{out} = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) \in \mathring{B}_a.$$

Dans le cas où $\partial B_a^{out} \neq \varnothing$, on peut montrer qu'une restriction de l'application $\mathcal{M}^a$ est bijective. Plus exactement, on a le résultat suivant :

Proposition 4.1. *Supposons $\partial B_a^{out} \neq \varnothing$. Alors la restriction au départ et à l'arrivée suivante*

$$\mathcal{M}^a : \partial B_a^{in} \longrightarrow \partial B_a^{out},$$

que l'on note toujours $\mathcal{M}^a$ de façon abusive, est un homéomorphisme.

démonstration.
On omet dans cette démonstration l'indice de boîte $a \in \mathbb{D}$, qui est fixé.
Par définition, $\mathcal{M}x = \varphi(x, \tau(x))$, où φ est le flot associé à un système dynamique affine. Ainsi, $\mathcal{M}$ est continue si et seulement si τ l'est. Or $\tau = \min_{i \in I_{out}} \tau_i$, et les τ_i sont des fonctions continues, comme nous l'avons vu dans la section 2.4.1. Ainsi τ, et donc $\mathcal{M}$ est continue.

L'injectivité découle du fait que x et $\mathcal{M}x$ sont par construction deux points d'une même orbite de φ, et de la monotonie des composantes de ce dernier par rapport au temps.
La surjectivité, découle de la discussion précédant lé définition de ∂B_a^{out}, qui est clairement l'ensemble image de $\mathcal{M}$ considérée sans restriction de domaine.
Etant donné que les régions B_a^{in} et ∂B_a^{out} sont clairement compactes, la continuité de l'application réciproque résulte d'un théorème classique de topologie : une bijection continue entre compacts est un homéomorphisme. □

Tout comme l'application $\mathcal{M}^a$ prend une forme plus simple sous l'hypothèse des taux de dégradation uniforme **H3**, sa réciproque s'écrit sous cette même hypothèse :

$$(\mathcal{M}^a)^{-1}\, y = f + \beta(y)(y - f). \tag{4.3}$$

avec

$$\forall i \in \mathbb{N}_n,\ \beta_i(y) = \max(\alpha_i^{\mp i}(y)), \quad \text{et} \quad \beta(y) = \min_{i\in\mathbb{N}_n}\{\beta_i(y)\}. \tag{4.4}$$

Ceci s'obtient de façon strictement identique à l'expression (2.28), en considérant le flot en temps inversé $\varphi(x, -t) = f + e^{\Lambda t}(x - f)$ au lieu de $\varphi(x, t) = f + e^{-\Lambda t}(x - f)$.

4.1.2 Domaine de définition d'une application globale

Dans la section précédente, on a considéré l'application de transition, qui à un point de l'espace d'états associe sa première intersection avec un frontière de boîte, à l'échelle d'un boîte seule. On a montré que si cette boîte a au moins une direction de sortie, cette application de transition est localement un homéomorphisme. Concernant les boîtes sans direction de sortie, leur point focal est situé en leur intérieur : c'est un point d'équilibre asymptotiquement stable. Il semble naturel alors de définir l'application de transition au niveau de telles boîtes comme une application constante, d'image ce point focal f. En de tels points, on perd donc l'injectivité de l'application de transition. De plus, la frontière $\partial\mathbb{U}$ du domaine entier n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{U}$, d'après l'hypothèse **H1**. En effet, supposer un antécédent à un tel point impliquerait l'existence d'un point focal extérieur à $\mathbb{U}$. En conclusion, il n'est pas possible en général d'obtenir une application de transition inversible en tout point de l'espace d'états. On ne considèrera donc dans cette section que les itérés de $\mathcal{M}$, et non ceux de son inverse : on traite donc d'un système dynamique à temps croissant.

Traitons tout d'abord le cas des boîtes sans successeur. On note :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \{a \in \mathbb{D} \mid f(a) \in \mathring{B}_a\} \\ &= \{a \in \mathbb{D} \mid \mathbf{d}(f(a)) = a\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

l'ensemble des indices de boîte terminaux.
Dans le cas d'un indice $a \notin \mathcal{T}$, $\mathcal{M}^a$ est définie sur ∂B_a^{in}. Dans le cas d'un indice terminal, on a $\partial B_a^{in} = \partial B_a$ et on a vu qu'il est naturel de définir $\mathcal{M}^a$ comme l'application constante d'image $f(a)$. De façon à pouvoir itérer cette application locale, on ajoute $\{f(a)\}$ à son domaine de définition, et on définit en ce point : $\mathcal{M}^a f(a) = f(a)$.

Alors, pour une boîte quelconque, avec ou sans successeur, on définit le domaine suivant :

$$\begin{array}{lcll} Dom(\mathcal{M}^a) & = & \partial B_a^{in} & \text{pour } a \in \mathbb{D} \setminus \mathcal{T}, \text{ et} \\ Dom(\mathcal{M}^a) & = & \partial B_a^{in} \cup \{f(a)\} & \text{pour } a \in \mathcal{T}. \end{array} \tag{4.6}$$

Ceci peut s'abréger en : $Dom(\mathcal{M}^a) = \partial B_a^{in} \cup \left(\mathring{B}_a \cap \{f(a)\}\right)$.
On définit ensuite l'application de transition locale :

$$\mathcal{M}^a : x \in Dom(\mathcal{M}^a) \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} f(a) + A(x)(x - f(a)) & \text{si } a \in \mathbb{D} \setminus \mathcal{T} \\ f(a) & \text{si } a \in \mathcal{T} \end{array} \right. \tag{4.7}$$

où la première ligne est exactement l'équation (4.1).

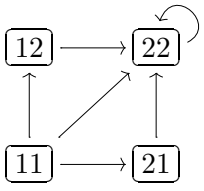
Remarquons qu'un mur est soit l'intersection $W = \partial B_a \cap \partial B_b$ de deux frontières de boîtes, soit l'intersection d'une boîte unique avec le bord $\partial\mathbb{U}$ du domaine entier. Dans la mesure où $\partial\mathbb{U}$ n'a pas d'antécédent par le flot, on peut sans perte d'information ne considérer que le premier cas. L'hypothèse **H4** d'absence d'autorégulation peut maintenant être invoquée. Selon cette dernière, si un mur W est sortant pour la boîte d'indice b : $W \subset \partial B_b^{out}$, alors il est entrant pour la boîte d'indice a : $W \subset \partial B_a^{in}$. En effet, ∂B_a^{in} et ∂B_a^{out} forment une partition de la frontière ∂B_a (qui est l'union des murs de B_a), et $W \subset \partial B_a^{out}$ contredirait l'hypothèse **H4**. En conséquence, on a :

$$\bigcup_{a\in\mathbb{D}} \partial B_a = \bigcup_{a\in\mathbb{D}} \partial B_a^{in}. \tag{4.8}$$

Des équations (4.6) et (4.8) on déduit que :

$$\bigcup_{a\in\mathbb{D}} Dom(\mathcal{M}^a) = \bigcup_{a\in\mathbb{D}} \partial B_a \cup \bigcup_{a\in\mathcal{T}} \{f(a)\}$$

est un domaine de définition envisageable pour une application de transition globale.
Un problème subsiste néanmoins. Tout $x \in \bigcup_a Dom(\mathcal{M}^a)$ est dans le domaine d'une application locale au moins. Il se peut qu'un tel x appartienne au domaine de deux applications locales ou plus, ce qui pose bien sûr un problème de bonne définition. Le lieu de telles ambiguïtés est clairement inclus dans l'ensemble des faces de boîtes de codimension 2 ou plus. Par faces de boîtes, on entend produit cartésien de la forme $F = \prod_{i=1}^n F_i$ où chaque F_i est de l'une des formes suivantes : $\{\theta_{ia_i}\}$, $\{\theta_{ia_i+1}\}$, ou $[\theta_{ia_i}, \theta_{ia_i+1}]$ (voir annexe A pour plus de détails sur cette notion). La dimension d'un telle face est le nombre de F_i qui ne sont pas des singletons. Sa codimension est le nombre de singleton, i.e. $n - \dim F$.
On note $\mathscr{F}_2$ l'union des faces de codimension 2. Que le lieu où le choix de l'application locale est ambigu soit inclus dans $\mathscr{F}_2$ est immédiat. L'inclusion réciproque est fausse en général, comme on peut le constater sur un exemple simple. Considérons en effet, un système plan binaire : ses boîtes sont indicées par $\mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_2 = \{11, 12, 21, 22\}$. Supposons que tous les points focaux soient situés dans la boîte B_{22}. Ainsi, l'unique réseau discret associé à ce système (cf. partie 2.4.2) admet le graphe de transition suivant :



Hormis la frontière $\partial\mathbb{U}$, l'ensemble $\mathscr{F}_2$ contient uniquement la 0-face composée du seul point de coordonnées $(\theta_{11}, \theta_{21})$, intersection des 4 boîtes. Comme les champs de vecteurs de toutes ces boîtes sont dirigés vers $\mathring{B}_{22}$, le flot en ce point n'est pas ambigu, et entre dans cette boîte, pour se diriger vers le point d'équilibre asymptotiquement stable $f(B_{22})$. D'autres exemples moins triviaux, pour lesquels les points focaux ne se trouvent pas tous dans la même boîte, conduisent également à un flot bien défini en une face de $\mathscr{F}_2$.
La caractérisation des cas menant à une ambiguïté n'est pas évidente, et reste à accomplir. Celle-ci doit très certainement être formulable de façon combinatoire : en une face F la répartition des points focaux de toutes les boîtes contenant F en leur frontière doit fournir un critère suffisant. En l'absence d'un tel critère, et pour simplifier l'analyse, nous avons choisi d'exclure la totalité de l'ensemble sous-jacent à $\mathscr{F}_2$ du domaine de définition d'une application globale. Puisqu'une telle application doit être itérée indéfiniment sur son domaine, il faut également exclure tout les antécédents de $\mathscr{F}_2$ par des applications locales. En résumé, on peut définir le domaine suivant :

$$\mathscr{D} = \bigcup_{a\in\mathbb{D}} Dom(\mathcal{M}^a) \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{M}^{-k}(\mathscr{F}_2) \setminus \partial\mathbb{U}, \tag{4.9}$$

où l'application globale de transition est définie par exemple à l'aide de fonctions indicatrices ($\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, et 0 sinon) :

$$\mathcal{M}x = \sum_{a\in\mathbb{D}} \mathbf{1}_{Dom(\mathcal{M}^a)}(x)\, \mathcal{M}^a x. \tag{4.10}$$

Dans la définition (4.9) du domaine $\mathscr{D}$, les ensembles $\mathcal{M}^{-k}(\mathscr{F}_2)$ sont des images réciproques de $\mathscr{F}_2$ par le $k^{\text{ème}}$ itéré de $\mathcal{M}$. Implicitement, cela suppose donc que tous les itérés précédents sont bien définis. L'ensemble $\mathscr{D}$ devrait donc en toute rigueur être défini de manière inductive. L'ensemble exclu des frontières de boîtes est constitué des antécédents de $\mathscr{F}_2$ en temps (i.e. nombre d'itérations) fini, et il est donc de mesure nulle.

Remarque 4.2. *Dans la dernière phrase du paragraphe précédent, on confond temps fini et nombre fini d'itérations. Si cette confusion est évitée dans le contexte du paragraphe en question, il n'en est pas de même pour un système affine par morceaux de la forme que nous étudions. En effet, Edwards a montré [45] que ces systèmes peuvent présenter des trajectoires traversant une séquence infinie de boîtes en un temps fini. Il montre que de telles trajectoires convergent toujours vers une face de $\mathscr{F}_2$, comme l'orbite représentée sur la figure 4.3. Formulé autrement ceci signifie que les temps de sortie le long d'une trajectoire forment une série convergente, ou encore que le système hybride que consitue le réseau affine par morceaux présente une exécution Zénon, cf. [59, 113]. Ce phénomène n'est cependant pas systématique pour les trajectoires telles que sur la figure 4.3, mais mérite d'être mentionné pour éviter les équivoques.*

La topologie de l'ensemble $\mathscr{D}$ mérite d'être discutée. Tout d'abord, ce n'est pas un ensemble fermé dans $\bigcup_a Dom(\mathcal{M}^a)$, et donc ce n'est pas un ensemble compact. Il est en effet facile de construire une suite de point de $\mathscr{D}$ convergeant dans $\bigcup_a Dom(\mathcal{M}^a)$, mais pas dans $\mathscr{D}$ lui-même. En particulier, un telle suite peut être une orbite du système dynamique $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$, dont l'ensemble ω-limite n'est pas inclus dans $\mathscr{D}$. Les exemples les plus flagrants de telles orbites sont donnés par les foyers stables situés à l'intersection de plusieurs facettes, tel qu'illustré figure 4.3. En général, le domaine $\mathscr{D}$ n'est pas non plus ouvert. En

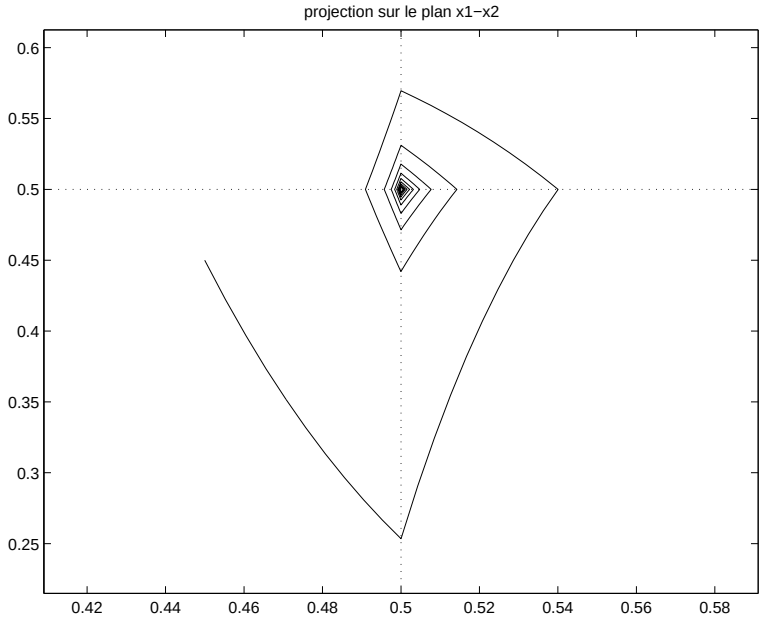


FIG. 4.3 – *$\mathscr{D}$ n'est pas fermé : les intersection successives de cette trajectoire avec des hyperplans (ici, des droites) seuils appartiennent à $\mathscr{D}$, et convergent vers un point hors de cet ensemble.*

effet, ce domaine admet comme complémentaire $\bigcup_k \mathcal{M}^{-k}(\mathscr{F}_2)$, qui n'est a priori pas fermé, étant une union infinie de fermés. Le cardinal de $\mathscr{F}_2$ étant fini, la seule possibilité pour que cette union soit effectivement infinie, et non fermée, est l'existence d'une séquence périodique de faces traversées par un ensemble d'orbites. On peut par exemple considérer une orbite périodique – ou seulement récurrente – instable $\mathcal{O}$. Il existe alors un voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{O})$ de cette orbite, tel que pour $x \in \mathcal{V}$, la trajectoire $\left(\mathcal{M}^k x\right)_k$ s'échappe de $\mathcal{V}$ lorsque $k \to +\infty$, et admet $\mathcal{O}$ comme ensemble α-limite, i.e. comme ensemble des valeurs d'adhérence lorsque $k \to -\infty$. Par continuité des solutions d'un système d'équations différentielles affines par rapport aux conditions initiales, il peut exister des points $x \in \mathcal{V}$ dont l'orbite rencontre une intersection de seuils, i.e. une face appartenant à $\mathscr{F}_2$, en temps fini. Tous les points d'un telle orbite sont donc dans le complémentaire $\mathscr{D}^c$. Cependant, la suite $\mathcal{M}^{-k}x$ est adhérente à $\mathcal{O}$, qui est incluse dans $\mathscr{D}$. Une suite extraite de cette dernière est donc à valeur dans $\mathscr{D}^c$, et converge dans le complémentaire de ce domaine, qui n'est donc pas fermé. Le seul obstacle à la construction d'un tel contre-exemple serait l'absence d'orbites périodiques instables. Or il est avéré que de telles orbites existent. Ceci apparaîtra plus précisément dans la proposition 4.11. Plus concrètement, l'exemple d'attracteur étrange proposé dans [95] – et discuté dans la partie 3.3 – présente un cycle limite instable explicite. En l'absence de configurations de ce type, faisant intervenir un ensemble invariant instable inclus dans $\mathscr{D}$, ce dernier ensemble est ouvert.

Enfin, $\mathscr{D}$ n'est pas une partie connexe. Ceci provient de ce que $\mathscr{D}$ est inclus dans la réunion des murs de boîtes, privés de leur frontière. Ces intérieurs relatifs de murs sont clairement disjoints. De plus $\mathscr{D}$ est d'intersection non vide avec chacun d'entre eux, sans quoi l'union $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{M}^{-k}(\mathscr{F}_2)$ doit recouvrir un mur, ce qui contredit le fait que cet ensemble est de mesure nulle. Les composantes connexes de $\mathscr{D}$ seront explicitées à la section 6.1.

L'ensemble $\mathscr{D}$ ainsi construit a donc une topologie non triviale en général. Ce n'est pas, comme on l'a vu, le plus grand domaine sur lequel une application de transition globale $\mathcal{M}$ puisse être définie, avec tous ses itérés, mais la définition formelle d'un tel domaine maximal est loin d'être évidente. De plus, sur ce domaine $\mathcal{M}$ est continue. En effet, cette application telle que définie en (4.10) est continue par morceaux, l'ensemble de ses points de discontinuité étant donné par les frontières de murs.
De cette façon le couple $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$ est un système dynamique à temps discret au sens usuel, défini pour des temps croissants seulement.

Dans le cas des taux de dégradation uniformes, c'est-à-dire sous l'hypothèse **H3**, les itérés de $\mathcal{M}$ peuvent être explicités. Ceci fait l'objet des deux sections suivantes. Ces deux sections concernent donc des systèmes satisfaisant les hypothèses **H1**, **H3** et **H4**.

4.2 Itérés de l'application de transition le long des trajectoires

Sous l'hypothèse **H3**, rappelons que sur la région entrante d'un boîte B_a, l'application de transition s'écrit :

$$\mathcal{M}x = f(a) + \alpha(x)\Big(x - f(a)\Big) = f(a) + \frac{\theta_\iota^{\pm_\iota} - f_\iota(a)}{x_\iota - f_\iota(a)}\Big(x - f(a)\Big), \tag{4.11}$$

où ι est une direction de sortie pour x, et $\theta_\iota^{\pm_\iota}$ le seuil de sortie associé. La fonction $\alpha(x) = \alpha(x_\iota)$ est bien telle que définie en (2.29).
Comme la fonction α (qui dépend de la boîte courante B_a, ce qu'on ne fait pas apparaître dans les notations pour les alléger) est définie comme un max, plusieurs application successives de $\mathcal{M}$ à des points d'un même mur peuvent suivre des séquences de murs distinctes. A chaque séquence de murs traversés successivement correspond un ensemble de conditions initiales. Ceci peut être explicité davantage. Soit $\mathbf{a} = a^0 \dots a^{k+1}$ une liste d'éléments de $\mathbb{D}$, tels que les murs suivants sont bien définis, pour $j \in \mathbb{N}_k \cup \{0\}$:

$$W^j = \partial B_{a^j}^{out} \cap \partial B_{a^{j+1}}^{in}.$$

Alors on note

$$D_{\mathbf{a}} \doteq \bigcap_{i=0}^{k} \mathcal{M}^{-i}(W^i), \tag{4.12}$$

l'ensemble des conditions initiales dont les k premiers itérés par $\mathcal{M}$ appartiennent aux murs W^j définis plus haut. Il peut arriver bien sûr qu'un tel domaine $D_{\mathbf{a}}$ soit vide.
Une description plus constructive de ces ensembles sera fournie dans la proposition 4.6.
Etant donné un domaine $D_{\mathbf{a}}$, les k premiers itérés de $\mathcal{M}$ sont bien définis, et suivent la même séquence de boîtes. On ne tiendra pas compte dans la suite de cette section des itérés de $\mathcal{M}$ rencontrant une boîte terminale, i.e. contenant son propre point focal. On a en effet dans ce cas un point fixe de $\mathcal{M}$, et il n'est pas utile de considérer les itérés suivants. Par suite, étant donnée une liste $\mathbf{a}$ comme précédemment, on peut noter $f^1 \dots f^k$ les points focaux des boîtes successivement intersectées par le flot, i.e. $f^j = f(a^j)$. De même, les indices $\iota_1, \dots, \iota_k$ désignent les directions de sorties dans chacune de ces boîtes.
La première itération est illustrée sur la figure 4.4, pour une bonne compréhension de cette

numérotation.

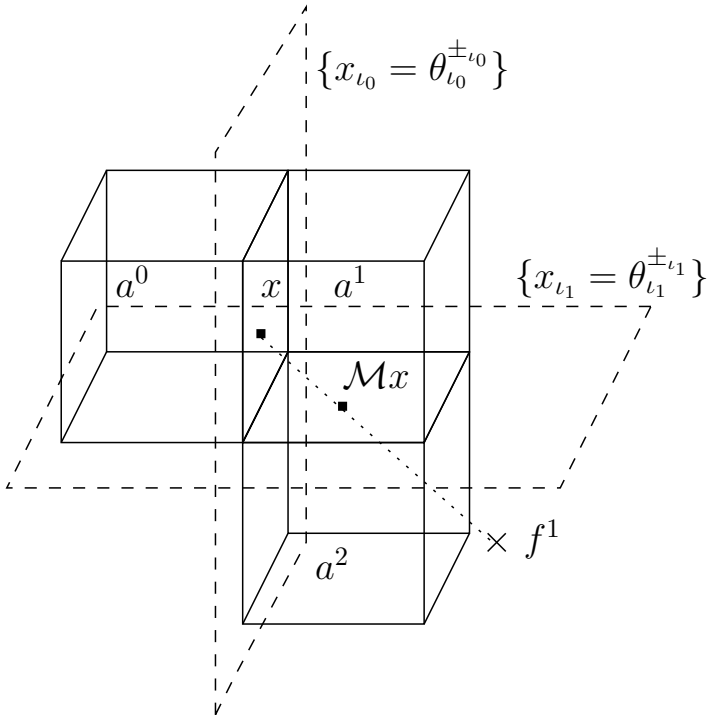


FIG. 4.4 – *Première iteration de $\mathcal{M}$ le long d'une séquence de boîtes $a^0a^1\dots a^k$. On peut transposer le schéma ci-dessus à l'étape j (le cas présent est $j=0$). On a alors $\mathcal{M}^j x \in W^j = \partial B^{out}_{a^j} \cap \partial B^{in}_{a^{j+1}}$, ce mur étant porté par l'hyperplan $\{x_{\iota_j} = \theta_{\iota_j}^{\pm_{\iota_j}}(a^j)\}$. L'itéré suivant $\mathcal{M}^{j+1}x$ se trouve à l'intersection de la trajectoire issue de $\mathcal{M}^j x$, qui converge vers f^{j+1}, et du mur W^{j+1}.*

On peut alors donner une forme matricielle à l'expression (4.11), de même qu'à celle définissant les itérés de $\mathcal{M}$ sur le domaine $D_{\mathbf{a}}$.

Proposition 4.3. *En tout point x d'un domaine $D_{\mathbf{a}}$ tel que défini en (4.12), on a*

$$\forall x \in D_{\mathbf{a}}, \qquad \mathcal{M}^k x = f^k + \Delta_{\iota_k} \frac{F^{(k)}(x - f^1)}{\langle F^{(k)}(x-f^1), \mathbf{e}_{\iota_k}\rangle}, \tag{4.13}$$

où l'on use de l'abréviation suivante :

$$\Delta_{\iota_k} = \theta_{\iota_k}^{\pm_{\iota_k}} - f^k_{\iota_k}, \tag{4.14}$$

et où la matrice $F^{(k)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est définie comme le produit suivant, effectué de droite à gauche :

$$\begin{aligned} F^{(k)} &= \prod_{j=1}^{\overleftarrow{k-1}} \Big[(f^j - f^{j+1})\mathbf{e}_{\iota_j}^T + \Delta_{\iota_j} Id\Big] \\ &= \Big[(f^{k-1} - f^k)\mathbf{e}_{\iota_{k-1}}^T + \Delta_{\iota_{k-1}} Id\Big] \dots \Big[(f^1 - f^2)\mathbf{e}_{\iota_1}^T + \Delta_1 Id\Big], \end{aligned} \tag{4.15}$$

pour $k \geqslant 2$, et $F^{(1)} = Id$.

démonstration.
On procède par récurrence sur k. L'équation (4.11) fournit l'initialisation.
Supposons maintenant qu'à un certain rang k, $\mathcal{M}^k$ s'écrit comme dans (4.13). Alors pour x tel que, sur le mur W^k, la direction de sortie de l'itéré $\mathcal{M}^k x$ soit ι_{k+1}, on peut exprimer $\mathcal{M}^{k+1}x$ à l'aide de (4.11) :

$$\mathcal{M}^{k+1}x \;=\; f^{k+1} + \frac{\Delta_{\iota_{k+1}}}{(\mathcal{M}^k x)_{\iota_{k+1}} - f^{k+1}_{\iota_{k+1}}} \left(\mathcal{M}^k x - f^{k+1}\right),$$

expression dans laquelle l'hypothèse de récurrence peut être injectée avant calculs :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{k+1}x &= f^{k+1} + \Delta_{\iota_{k+1}} \frac{f^k + \Delta_{\iota_k} \dfrac{F^{(k)}(x-f^1)}{\langle F^{(k)}(x-f^1), \mathbf{e}_{\iota_k}\rangle} - f^{k+1}}{\left\langle f^k + \Delta_{\iota_k} \dfrac{F^{(k)}(x-f^1)}{\langle F^{(k)}(x-f^1), \mathbf{e}_{\iota_k}\rangle} - f^{k+1}, \mathbf{e}_{\iota_{k+1}} \right\rangle} \\
&= f^{k+1} + \Delta_{\iota_{k+1}} \frac{(f^k - f^{k+1})\mathbf{e}_{\iota_k}^T F^{(k)}(x-f^1) + \Delta_{\iota_k} F^{(k)}(x-f^1)}{\left\langle (f^k - f^{k+1})\mathbf{e}_{\iota_k}^T F^{(k)}(x-f^1) + \Delta_{\iota_k} F^{(k)}(x-f^1), \mathbf{e}_{\iota_{k+1}} \right\rangle} \\
&= f^{k+1} + \Delta_{\iota_{k+1}} \frac{F^{(k+1)}(x-f^1)}{\langle F^{(k+1)}(x-f^1), \mathbf{e}_{\iota_{k+1}}\rangle}
\end{aligned}$$

où $F^{(k+1)} = \left[(f^k - f^{k+1})\mathbf{e}_{\iota_k}^T + \Delta_{\iota_k} Id\right] F^{(k)}$, en accord avec (4.15). □

Il est possible de montrer que la matrice $F^{(k)}$ donnée en (4.15) est inversible.

Proposition 4.4. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice $F^{(k)}$ est inversible, dès lors que* **H1** *est satisfaite.*

démonstration.
Dans l'expression (4.15), $F^{(k)}$ est un produit de matrices carrées $n \times n$, qui ont toutes une unique colonne comportant des éléments non nuls hors diagonale. Développant le long de cette colonne, le déterminant de la matrice j de ce produit s'écrit :

$$\begin{aligned}
\det\left((f^j - f^{j+1})\mathbf{e}_{\iota_j}^T + \Delta_{\iota_j} Id\right) &= (\Delta_{\iota_j})^{n-1}(\Delta_{\iota_j} + f^j_{\iota_j} - f^{j+1}_{\iota_j}) \\
&= (\theta^{\pm_j}_{\iota_j} - f^j_{\iota_j})^{n-1}(\theta^{\pm_j}_{\iota_j} - f^{j+1}_{\iota_j}),
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$\det(F^{(k)}) = \prod_{j=1}^{k-1} (\Delta_{\iota_j})^{n-1}(\theta^{\pm_j}_{\iota_j} - f^{j+1}_{\iota_j}), \tag{4.16}$$

qui est différent de 0 d'après **H1**. □

Remarquons maintenant que l'expression (4.13) de la proposition 4.3 suppose que le dénominateur $\langle F^{(k)}(x-f^1), \mathbf{e}_{\iota_k}\rangle$ est non nul. On peut voir que cette condition est automatiquement satisfaite et exprimant les itérés de $\mathcal{M}$ sous une autre forme. Cette deuxième écriture est inspirée de l'observation de R. Edwards [45], selon laquelle le temps écoulé

entre une condition initiale x et son image $\mathcal{M}^k x$ peut apparaître explicitement dans la formulation de $\mathcal{M}^k$. Dans [45], ce fait est prouvé pour les systèmes binaires. Il demeure valide sans l'hypothèse **H2**.

Proposition 4.5. *Notons $\tau^j(x) = \tau(\mathcal{M}^{j-1}x)$ le temps écoulé durant l'intersection de la $j^{ème}$ boîte. Alors pour tout entier k,*

$$\exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{k} \tau^j(x)\right) = \frac{\Delta_{\iota_1} \dots \Delta_{\iota_k}}{\langle F^{(k)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_k}\rangle}. \tag{4.17}$$

démonstration.
Rappelons tout d'abord que $\alpha(x) = e^{-\lambda\tau(x)}$, dans l'équation (4.11). On en déduit l'égalité suivante :

$$\mathcal{M}^j x - f^j = e^{-\lambda\tau^j(x)}(\mathcal{M}^{j-1}x - f^j) = \Delta_{\iota_j} \frac{F^{(j)}(x - f^1)}{\langle F^{(j)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_j}\rangle}.$$

En projetant cette expression sur $\mathbf{e}_{\iota_j}$, le scalaire $e^{-\lambda\tau^j(x)}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$e^{-\lambda\tau^j(x)} = \frac{\Delta_{\iota_j}}{\langle \mathcal{M}^{j-1}x - f^j, \mathbf{e}_{\iota_j}\rangle}.$$

Or d'après (4.13) et (4.15), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{j-1}x - f^j &= \frac{\left[(f^{j-1} - f^j)\mathbf{e}_{\iota_{j-1}}^T + \Delta_{j-1} Id\right] F^{(j-1)}(x - f^1)}{\langle F^{(j-1)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_{j-1}}\rangle} \\ &= \frac{F^{(j)}(x - f^1)}{\langle F^{(j-1)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_{j-1}}\rangle}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

d'où il vient

$$e^{-\lambda\tau^j(x)} = \frac{\Delta_{\iota_j}\langle F^{(j-1)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_{j-1}}\rangle}{\langle F^{(j)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_j}\rangle}.$$

L'équation (4.17) s'obtient alors comme produit de termes de la forme ci-dessus. □

Il est clair que dans l'équation (4.17), la somme apparaissant dans l'exponentielle est égale au temps écoulé le long de l'orbite issue de x, entre les points x et $\mathcal{M}^k x$. Ainsi, le produit scalaire intervenant dans cette équation ne peut être nul que si ce temps est infini, et négatif. Une telle éventualité étant exclue, on a bien vérifié la non annulation de $\langle F^{(k)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_k}\rangle$.

De la proposition 4.5 on déduit une expression de $\mathcal{M}^k$ équivalente à (4.13) :

$$\mathcal{M}^k x = f^k + \frac{\exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{k} \tau^j(x)\right)}{\Delta_{\iota_1} \dots \Delta_{\iota_{k-1}}} F^{(k)}(x - f^1). \tag{4.19}$$

Il est maintenant possible d'expliciter les domaines $D_{\mathbf{a}}$, tels que définis en (4.12), sous la forme d'un système d'inégalités.

Proposition 4.6. *Pour* $\mathbf{a} = a^0 \dots a^{k+1}$*, l'ensemble* $D_{\mathbf{a}}$*, tel qu'en (4.12) est défini de façon équivalent par les inégalités suivantes. Pour* $j \in \mathbb{N}_k$ *:*

$$\forall i \in I_{out}(a^j) \setminus \{\iota_j\}, \qquad \frac{1}{\Delta_i \Delta_{\iota_1} \dots \Delta_{\iota_j}} \left[\Delta_{\iota_j} \mathbf{e}_i^T - \Delta_i \mathbf{e}_{\iota_j}^T\right] F^{(j)}(x - f^1) > 0, \tag{4.20}$$

auxquelles doivent être ajoutées les $2(n-1)$ *inégalités définissant le mur* $W^0 \supset D_{\mathbf{a}}$*.*
$\theta_i^{\pm_i} = \theta_i^{\pm_i}(a^j)$ *désigne le seuil de sortie dans la directions* i *pour la boîte* B_{a^j}*, et* Δ_i *est similaire à l'abréviation (4.14) :* $\theta_i^{\pm_i} - f_i^j$*.*
Comme, pour chaque i*,* $x - f^1$ *est multiplié à gauche par un vecteur ligne de dimensions* $1 \times n$ *dans l'inequation (4.20), le système d'inéquations associé à chaque* j *peut être écrit sous forme matricielle :* $C^{(j)}(x - f^1) > 0$*. Les lignes de* $C^{(j)}$ *sont données par (4.20).*

démonstration.
La nécessité des inéquations définissant W^0 ne requiert aucune démonstration.
Les autres inégalités sont équivalentes à

$$\tau_i(\mathcal{M}^{j-1}x) > \tau_{\iota_j}(\mathcal{M}^{j-1}x),$$

ce qui signifie que ι_j est la direction de sortie de B_{a^j}, pour la condition initiale $\mathcal{M}^{j-1}x$.
En effet, notons $x^j \doteq \mathcal{M}^j x$ pour plus de concision. L'inégalité ci-dessus s'écrit alors aussi :

$$\frac{x_i^{j-1} - f_i^j}{\Delta_i} - \frac{x_{\iota_j}^{j-1} - f_{\iota_j}^j}{\Delta_{\iota_j}} > 0,$$

ceci devant être vérifié pour $i \in I_{out}(a^j) \setminus \{\iota_j\}$. De façon équivalente :

$$\frac{1}{\Delta_i \Delta_{\iota_j}} \left[\Delta_{\iota_j} \mathbf{e}_i^T - \Delta_i \mathbf{e}_{\iota_j}^T\right] (x^{j-1} - f^j) > 0.$$

Alors, par (4.19) et $x^{j-1} - f^j = e^{\lambda \tau^j(x)}(x^j - f^j)$, on aboutit à :

$$x^{j-1} - f^j = \frac{\exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{j-1} \tau^i(x)\right)}{\Delta_{\iota_1} \dots \Delta_{\iota_{j-1}}} F^{(j)}(x - f^1),$$

l'inéquation (4.20) s'ensuit, l'exponentielle étant strictement positive. □

4.3 Analyse des orbites périodiques

Un cas particulier d'intérêt, lorsqu'on étudie les itérés de $\mathcal{M}$, est celui des orbites périodiques. Cette section suit de très près l'analyse des orbites périodiques menées par Edwards dans [45]. Cette dernière référence traite cependant du cas de réseaux binaires, alors que **H2** n'est pas requise ici. Si la méthode employée pour cette étude est la même que dans [45], le détail en est donc différent, et relève d'un cadre plus général.
Les orbites périodiques correspondent nécessairement à une séquence cyclique de boîtes, ce qui nous amène à considérer dans cette section le cas d'une séquence de la forme

$$a^0, a^1, \dots, a^\ell = a^0,$$

telle que $D_{\mathbf{a}} \neq \varnothing$, en notant $\mathbf{a} = a^0 \dots a^{\ell-1} a^0$.
De la proposition 4.3 on déduit l'expression suivante

$$\mathcal{M}^\ell x = f^0 + \Delta_{\iota_0} \frac{F^{(\ell)}(x - f^1)}{\langle F^{(\ell)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0} \rangle} \in W^0, \tag{4.21}$$

pour tout $x \in D_{\mathbf{a}} \subset W^0$.
La périodicité de $\mathbf{a}$ conduit à considérer une suite de murs, points focaux et directions de sortie W^j, f^j et ι_j où j est considéré modulo ℓ. De même pour Δ_{ι_j}. Il est clair cependant que $F^{(\ell)} \neq F^{(0)}$.
Remarquons que la restriction $\mathcal{M}^\ell|_{D_{\mathbf{a}}}$ n'est pas une application de premier retour de Poincaré en général. En effet, cette application envoie les points de $D_{\mathbf{a}}$ sur W^0, de telle sorte que certains points ont leur image hors de $D_{\mathbf{a}}$. Ces derniers ont alors une image par $\mathcal{M}^\ell$ qui est a priori hors de W^0. Toutefois, s'il existe une orbite périodique le long de la séquence de boîtes indexée par $\mathbf{a}$ il est clair qu'un point fixe de $\mathcal{M}^\ell$ lui est associé, et que ce point fixe appartient à $D_{\mathbf{a}}$. De tels points fixes sont comme on va le voir fortement liés aux vecteurs propres de la matrice $F^{(\ell+1)}$. Si μ est valeur propre d'une matrice M, on convient de noter $E_\mu(M)$ l'espace propre associé. Noté sans argument E_μ désignera $E_\mu(F^{(\ell+1)})$.
Le lemme suivant sera utile par la suite.

Lemme 4.7. *Soient μ une valeur propre de $F^{(\ell+1)}$, et $v \in E_\mu$.*
Supposons

$$f^1 + \mathbb{R}v \cap \{x \mid x_{\iota_0} = \theta_{\iota_0}^{\pm_{\iota_0}}\} \neq \varnothing. \tag{4.22}$$

Alors,

$$\langle F^{(\ell)} v, \mathbf{e}_{\iota_0} \rangle \neq 0.$$

démonstration.
On raisonne par l'absurde, supposant $\langle F^{(\ell)} v, \mathbf{e}_{\iota_0} \rangle = 0$.
Ceci entraîne

$$\begin{aligned} F^{(\ell+1)} v &= \left[(f^0 - f^1) \mathbf{e}_{\iota_0}^T + \Delta_{\iota_0} Id \right] F^{(\ell)} v \\ &= \Delta_{\iota_0} F^{(\ell)} v, \end{aligned}$$

si bien que

$$\langle F^{(\ell+1)} v, \mathbf{e}_{\iota_0} \rangle = 0. \tag{4.23}$$

Alors comme $F^{(\ell+1)} v = \mu v$, avec $\mu \neq 0$ (d'après la proposition 4.4), et en notant $v = y - f^1$ on déduit $y_{\iota_0} = f^1_{\iota_0}$.
Un telle égalité reste valide en tout point de la droite affine $f^1 + \mathbb{R}(y - f^1)$. En particulier, si un point de cette droite appartient à l'hyperplan apparaissant dans (4.22), on obtient : $y_{\iota_0} = \theta_{\iota_0}^{\pm_{\iota_0}} = f^1_{\iota_0}$, qui contredit l'hypothèse **H1**. □

On peut maintenant énoncer un résultat concernant les points fixes de $\mathcal{M}^\ell$.

Proposition 4.8. *Soit $\mu \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $F^{(\ell+1)}$, et $v \in E_\mu = E_\mu(F^{(\ell+1)})$.*
Alors le point

$$x^* = f^1 + \frac{\mu}{\langle F^{(\ell)} v, \mathbf{e}_{\iota_0} \rangle} v \tag{4.24}$$

est un point fixe de $\mathcal{M}^\ell$ dès lors que les deux conditions suivantes sont réalisées :

$$\frac{\mu}{\Delta} > 1, \qquad et \qquad x^* \in D_{\mathbf{a}}, \tag{4.25}$$

où l'on a noté

$$\Delta = \prod_{j=1}^{\ell} \Delta_{\iota_j}. \tag{4.26}$$

démonstration.
Tout d'abord, on applique une translation à l'expression (4.21) :

$$\mathcal{M}^\ell x - f^1 = f^0 - f^1 + \Delta_{\iota_0} \frac{F^{(\ell)}(x - f^1)}{\langle F^{(\ell)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle},$$

ce qui, comme on a pu le voir en (4.18), s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\ell x - f^1 &= \frac{1}{\langle F^{(\ell)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle} \left[(f^0 - f^1)\mathbf{e}_{\iota_0}^T + \Delta_{\iota_0} Id\right] F^{(\ell)}(x - f^1) \\ &= \frac{F^{(\ell+1)}(x - f^1)}{\langle F^{(\ell)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

D'où l'on déduit que si x^* est un point fixe de $\mathcal{M}^\ell$, alors $x^* - f^1$ est un vecteur propre de $F^{(\ell+1)}$, associé à la valeur propre $\langle F^{(\ell)}(x^* - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle$.
Réciproquement, si $v = y - f^1$ est un vecteur propre, $v \in E_\mu$, alors y est un point fixe seulement si :

$$\mu = \langle F^{(\ell)} v, \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle.$$

Ainsi,

$$x^* = f^1 + \frac{\mu}{\langle F^{(\ell)} v, \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle} v$$

est un point fixe de $\mathcal{M}^\ell$, pourvu qu'il appartienne à son domaine $D_{\mathbf{a}}$.
A première vue, il faut de plus que l'expression ci-dessus soit bien définie, et que

$$\langle F^{(\ell)} v, \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle \neq 0.$$

En fait, d'après le lemme 4.7, ceci est impliqué par $x^* \in D_{\mathbf{a}}$. En effet, on a

$$D_{\mathbf{a}} \subset W^0 \subset \{x \mid x_{\iota_0} = \theta_{\iota_0}^{\pm_{\iota_0}}\},$$

d'où $x^* \in D_{\mathbf{a}} \implies x^* \in f^1 + \mathbb{R}v \cap \{x \mid x_{\iota_0} = \theta_{\iota_0}^{\pm_{\iota_0}}\} \neq \varnothing$.
La seconde condition dans (4.25), qui concerne la valeur propre μ, provient de (4.17), dans la proposition 4.5, qu'on applique ici en usant de l'abréviation (4.26) :

$$\exp\left(-\lambda \sum_{j=1}^{\ell} \tau^j(x)\right) = \frac{\Delta}{\langle F^{(\ell)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle}.$$

Comme le produit scalaire apparaissant ci-dessus est la valeur propre associée à un éventuel point fixe, et que les temps $\tau^j(x)$ sont clairement positifs, la condition souhaitée découle immédiatement. □

On peut remarquer que le signe de la quantité Δ, qui est attachée à un cycle limite, est parfaitement déterminé par la parité de la demi-longueur $\frac{\ell}{2}$ de ce cycle. Au passage, on remarque donc aussi que la longueur ℓ est nécessairement paire.
Pour vérifier ceci, il suffit de constater qu'un cycle correspond à une séquence périodique de murs traversés par le flot. Or si le flot traverse un mur, associé au seuil $\theta_{\iota_j}^{\pm_{\iota_j}}$, en croissant dans la direction ι_j, il doit traverser l'hyperplan $\{x_{\iota_j} = \theta_{\iota_j}^{\pm_{\iota_j}}\}$ contenant ce mur en décroissant dans la direction ι_j en un point ultérieur de la même orbite, pour revenir au point de départ. Le fait de croiser l'hyperplan en croissant selon la direction ι_j se traduit par $\Delta_{\iota_j} < 0$, et le fait de devoir le retraverser en sens inverse par l'existence d'un m tel que $\Delta_{\iota_{j+m}} > 0$. Comme Δ est le produit de tous les Δ_j, on déduit simultanément la parité de ℓ et l'identité suivante :

$$\mathrm{sign}(\Delta) = (-1)^{\frac{\ell}{2}}.$$

Une autre remarque doit être faite : dans la condition (4.25) portant sur μ, le cas $\frac{\mu}{\Delta} = 1$ est exclu. Ceci mérite d'être souligné car Δ est une valeur propre potentielle de $F^{(\ell+1)}$, avec pour vecteur propre tout vecteur $\mathbf{e}_i$ de la base canonique, pour i une direction selon laquelle aucun mur n'est intersecté le long du cycle. De telles directions propres sont données par l'équation (4.15), d'après laquelle les i n'apparaissant pas comme direction de sortie ι_j correspondent à des colonnes de $F^{(\ell+1)}$ nulles hors diagonale, et de terme diagonal Δ.

Les cas de points fixes multiples, et de valeurs propres de multiplicité géométrique strictement supérieure à 1, donnent lieu aux résultats qui suivent.

Proposition 4.9. *Soient x^* et y^* deux points fixes distincts de $\mathcal{M}^\ell$.*
Alors la droite affine $x^* + \mathbb{R}(y^* - x^*) = \{\nu x^* + (1-\nu)y^* \mid \nu \in \mathbb{R}\}$ portée par ces deux points est invariante par application de $\mathcal{M}^\ell$.

démonstration.
D'après la proposition 4.8, $x^* - f^1$ et $y^* - f^1$ sont vecteurs propres de $F^{(\ell+1)}$, de valeurs propres $\mu(x^*) = \langle F^{(\ell)}(x^* - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle$ et $\mu(y^*) = \langle F^{(\ell)}(y^* - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle$ respectivement. Alors, pour un réel ν, en notant $z = \nu x^* + (1-\nu)y^*$ un point de la droite portée par les deux points fixes, on a :

$$\langle F^{(\ell)}(z - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle = \nu\mu(x^*) + (1-\nu)\mu(y^*).$$

Puis l'image de z s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^\ell z &= f^1 + \frac{F^{(\ell+1)}(z - f^1)}{\langle F^{(\ell)}(z - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle} \\
&= f^1 + \frac{\nu F^{(\ell+1)}(x^* - f^1)}{\langle F^{(\ell)}(z - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle} + \frac{(1-\nu) F^{(\ell+1)}(y^* - f^1)}{\langle F^{(\ell)}(z - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle} \\
&= f^1 + \frac{\nu\mu(x^*)}{\langle F^{(\ell)}(z - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle}(x^* - f^1) + \frac{(1-\nu)\mu(y^*)}{\langle F^{(\ell)}(z - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle}(y^* - f^1).
\end{aligned}$$

Comme la somme des coefficients de $x^* - f^1$ et $y^* - f^1$ vaut 1, $\mathcal{M}^\ell z$ est un point de la droite $x^* + \mathbb{R}(y^* - x^*)$, qui est par conséquent invariante. □

Il est bien évident que la droite affine de la proposition précédente n'est pas invariante dans sa totalité, et que seule son intersection avec le domaine $D_{\mathbf{a}}$ de $\mathcal{M}^\ell$ doit être considérée. Hors de $D_{\mathbf{a}}$, en effet, $\mathcal{M}^\ell$ applique les points selon une séquence de murs autre que $\mathbf{a}$, et a donc une expression différente.

Proposition 4.10. *Soit μ une valeur propre de $F^{(\ell+1)}$, dont l'espace propre associé est de dimension au moins 2.*
Alors l'ensemble des points fixes donnés par des vecteurs de cet espace propre est un sous-espace affine.
démonstration.
Ceci découle directement de la proposition précédente 4.9. En effet, si $\dim E_\mu \geqslant 2$, et que l'on considère deux vecteurs distincts $v = x^* - f^1$ et $w = y^* - f^1$ de cet espace, avec x^* et y^* comme points fixes associés.
Alors avec les notations adoptées dans la preuve de la proposition 4.9,

$$\mu(x^*) = \mu(y^*) = \mu = \langle F^{(\ell)}(z - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle.$$

Ainsi, dans la dernière équation de cette preuve, on aboutit à $\mathcal{M}^\ell z = z$. Autrement dit, non seulement la droite affine portée par les points fixes x^* et y^* est invariante, mais elle est en plus entièrement constituée de points fixes. L'enveloppe affine (cf. annexe A pour une définition) des points fixes est donc entièrement constituée de points fixes. □

La même remarque que pour la proposition 4.9 s'applique ici encore, et l'on doit considérer l'intersection du sous-espace affine avec $D_{\mathbf{a}}$.

La proposition 4.8 permet de caractériser les points fixes de $\mathcal{M}^\ell$ en termes de vecteurs propres de $F^{(\ell+1)}$. Il est également possible d'analyser la stabilité de ces points fixes.

Proposition 4.11. *Soient μ une valeur propre de $F^{(\ell+1)}$, et $v \in E_\mu$ tel que le point x^* défini comme dans la proposition 4.8 soit un point fixe de $\mathcal{M}^\ell$.*
Alors ce point fixe est asymptotiquement stable si pour toute autre valeur propre η de $F^{(\ell+1)}$ on a l'inégalité

$$|\mu| > |\eta|.$$

Si cette inégalité est large, x^* est stable, sinon il est instable.
démonstration.
La jacobienne de $\mathcal{M}^\ell$ en un point x se calcule à partir de l'expression (4.27) :

$$J\mathcal{M}^\ell_x = \frac{F^{(\ell+1)}}{\langle F^{(\ell)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle} - \frac{F^{(\ell+1)}(x - f^1)\mathbf{e}_{\iota_0}^T F^{(\ell)}}{\langle F^{(\ell)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle^2},$$

ce qui se simplifie dans le cas d'un point fixe x^* :

$$J\mathcal{M}^\ell_{x^*} = \frac{F^{(\ell+1)}}{\langle F^{(\ell)}(x^* - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle} - \frac{(x^* - f^1)\mathbf{e}_{\iota_0}^T F^{(\ell)}}{\langle F^{(\ell)}(x^* - f^1), \mathbf{e}_{\iota_0}\rangle}.$$

Appliquons cette jacobienne à $x^* - f^1$:

$$J\mathcal{M}^\ell_{x^*}(x^* - f^1) = (x^* - f^1) - (x^* - f^1) = 0.$$

Etant donné un eventuel point fixe y^* distinct du précédent, on a également :

$$\begin{aligned} J\mathcal{M}^\ell_{x^*}(y^*-x^*) &= J\mathcal{M}^\ell_{x^*}(y^*-f^1) - J\mathcal{M}^\ell_{x^*}(x^*-f^1) \\ &= \frac{F^{(\ell+1)}(y^*-f^1)}{\langle F^{(\ell)}(x^*-f^1),\mathbf{e}_{\iota_0}\rangle} - \frac{(x^*-f^1)\mathbf{e}_{\iota_0}^T F^{(\ell)}(y^*-f^1)}{\langle F^{(\ell)}(x^*-f^1),\mathbf{e}_{\iota_0}\rangle} \\ &= \frac{\langle F^{(\ell)}(y^*-f^1),\mathbf{e}_{\iota_0}\rangle(y^*-f^1)}{\langle F^{(\ell)}(x^*-f^1),\mathbf{e}_{\iota_0}\rangle} - \frac{(x^*-f^1)\langle F^{(\ell)}(y^*-f^1),\mathbf{e}_{\iota_0}\rangle}{\langle F^{(\ell)}(x^*-f^1),\mathbf{e}_{\iota_0}\rangle} \\ &= \frac{\langle F^{(\ell)}(y^*-f^1),\mathbf{e}_{\iota_0}\rangle}{\langle F^{(\ell)}(x^*-f^1),\mathbf{e}_{\iota_0}\rangle}(y^*-x^*). \end{aligned}$$

Ainsi, x^*-f^1 est un vecteur propre de cette jacobienne, associé à la valeur propre 0. De même, tous les vecteurs de la forme y^*-x^* sont également vecteurs propres de $J\mathcal{M}^\ell$. De plus, si l'on note $\mu(x^*)$ la valeur propre de $F^{(\ell+1)}$ associée à la direction propre qui porte x^*-f^1, la valeur propre de $J\mathcal{M}^\ell$ associée au vecteur y^*-x^* est exactement

$$\left|\frac{\mu(y^*)}{\mu(x^*)}\right|. \tag{4.28}$$

Si toutes les valeurs propres de $F^{(\ell+1)}$ sont associées à des points fixes de $\mathcal{M}^\ell$, on a donc également tous les vecteurs propres de $J\mathcal{M}^\ell$. En fait, il n'est pas nécessaire de considérer des points fixes de $\mathcal{M}^\ell$, comme on peut le voir dans les calculs ci-dessus : il suffit de considérer des vecteurs propres de $F^{(\ell+1)}$ de la forme x^*-f^1 (et y^*-f^1), dont la valeur propre est égale à $\langle F^{(\ell)}(x^*-f^1),\mathbf{e}_{\iota_0}\rangle$ (et $\langle F^{(\ell)}(y^*-f^1),\mathbf{e}_{\iota_0}\rangle$). Autrement dit, la condition $x^*\in D_{\mathbf{a}}$ n'intervient pas explicitement dans le fait de lier les vecteurs propres de $F^{(\ell+1)}$ et ceux de $J\mathcal{M}^\ell$. La seule limitation possible au fait d'obtenir tous les vecteurs propres de $J\mathcal{M}^\ell$ serait donc l'existence d'une valeur propre multiple pour $F^{(\ell+1)}$. Si cette multiplicité est géométrique, la proposition 4.10 assure l'existence d'un sous-espace affine dans lequel $J\mathcal{M}^\ell$ admet des vecteurs propres de valeur propre de la forme $\dfrac{\mu(x^*)}{\mu(x^*)}=1$. Enfin, si $F^{(\ell+1)}$ admet une valeur propre de multiplicité algébrique strictement supérieure à sa multiplicité géométrique, on peut invoquer la continuité des valeurs propres de $J\mathcal{M}^\ell$ par rapport aux variations de $\mathcal{M}^\ell$ (voir [45]). Ainsi, on peut partir d'une application perturbée $\widetilde{\mathcal{M}}^\ell$ telle que $\widetilde{F}^{(\ell+1)}$ admet des valeurs propres de multiplicités géometrique et algébrique égales, fournissant donc celles de $J\widetilde{\mathcal{M}}^\ell$. En faisant tendre $\widetilde{\mathcal{M}}^\ell$ vers $\mathcal{M}^\ell$, comme $\mathcal{M}^\ell$ dépend continûment de $F^{(\ell+1)}$ on vérifie bien que les valeurs propres de $J\mathcal{M}^\ell$ sont données par celles de $F^{(\ell+1)}$, dans ce cas encore.
Comme la stabilité d'un point fixe x^* de $\mathcal{M}^\ell$ est classiquement déterminée en comparant les valeurs propres de $J\mathcal{M}^\ell_{x^*}$ à 1, on a le critère souhaité via (4.28). □

En résumé, on a fourni dans cette section un exact analogue des résultats de [45] concernant les itérés de $\mathcal{M}$ et les orbites périodiques, élargissant leur validité au cadre de réseaux non nécessairement binaires. Cette généralisation de résultats existant repose sur les mêmes méthodes que celles employée dans [45], et chaque proposition de cette section trouve son analogue dans cette référence. On peut toutefois mentionner rapidement les différences.
Tout d'abord, le point essentiel est que là où intervenaient des espaces vectoriels, on doit ici manipuler des espaces affines. Notamment, l'expression de $\mathcal{M}^\ell$ est plus compliquée,

et ses points fixes se trouvent dans des translatés des espaces propres de $F^{(\ell+1)}$, et non plus dans ces espaces propres eux-mêmes. Les valeur propres de cette matrice doivent ici être comparées à la quantité Δ, qui est déterminée par les points focaux et seuils de la trajectoire, au lieu d'être comparée à 1 dans le cas binaire.
Par ailleurs, dans le cas binaire, l'unique seuil dans chaque direction est préalablement ramené à 0 par translation. Il s'ensuit qu'une ligne et une colonne la matrice $F^{(\ell+1)}$ peuvent être supprimées sans perte d'information : à chaque itération, une coordonée du vecteur x est nulle. Ici, plusieurs seuils peuvent être rencontrés dans chaque direction, si bien qu'il est indispensable de conserver tous les coefficients de $F^{(\ell+1)}$. Ceci permet d'expliquer le fait qu'une valeur propre de la jacobienne est toujours nulle (cf. preuve de la proposition 4.11) : la dynamique se déroulant essentiellement de mur en mur, i.e. sur un espace de dimension $n-1$, conserver n composantes introduit un dégénerescence. De façon un peu anecdotique, on peut rapprocher l'emploi d'une coordonnée apparemment superflue de l'usage des coordonnées homogènes en géometrie projective. En effet, on a vu que dans le contexte présent, où **H3** s'applique, $\mathcal{M}$ est dans chaque boîte une transformation projective. Cette transformation étant différente dans chaque boîte, la coordonnée supplémentaire (qui définit l'hyperplan seuil sur lequel on projette) doit être conservée dans chaque boîte au lieu d'être homogénéisée à 1 comme en géometrie projective.
Pour finir, mentionnons un résultat valable dans le seul contexte binaire : les trajectoires issues d'une même demi-droite passant par l'origine restent sur cette demi-droite. Cette propriété permet donc de projeter les trajectoires sur la sphère unité sans perte d'information. Une telle technique a permis de prouver l'absence de dynamiques chaotiques dans les systèmes binaires de dimension 3 [94], et d'étudier en détails les orbites périodiques d'une classe de systèmes de dimension 4 [54].

Chapitre 5

Partition des boîtes de l'espace des phases

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur l'effet de l'application de transition $\mathcal{M}$ à l'échelle d'un seule boîte. En effet, une telle étude locale permet d'énumérer toutes les configurations possibles, à isomorphisme combinatoire près (cf. annexe A pour une définition). Un telle étude serait très vite impraticable pour les itérés de $\mathcal{M}$, qui peuvent suivre un nombre de chemins augmentant exponentiellement avec le nombre d'itérations. Outre l'exhaustivité, on obtiendra certaines propriétés dont les conséquences en terme de codage seront démontrées au chapitre 6.
Les résultats démontrés dans ce chapitre requièrent les hypothèses **H1** et **H4**.

5.1 Partition d'une boîte seule

Pour distinguer les propriétés qualitatives possibles de $\mathcal{M}$, on choisi de se baser sur les transitions admissibles entre une boîte et les boîtes voisines. Autrement dit, on va s'attacher à décrire au mieux les ensembles $D_{\mathbf{a}}$ introduits dans le chapitre précédent, équation (4.12), pour des $\mathbf{a}$ formés de trois éléments de $\mathbb{D}$, dont un est l'indice de la boîte considérée.

5.1.1 Définitions et notations

Comme on considère une unique boîte, on abrégera systématiquement B_a en B dans ce chapitre. De même, l'indice a sera omis dans toutes les notations où il intervient normalement : seuils, murs, points focaux, ensemble I_{out} des directions de sortie etc...
La dynamique dans la boîte B est rudimentaire : $\mathcal{M}$ envoie ∂B^{in} sur ∂B^{out}. D'un point de vue plus combinatoire, cependant, on va expliciter l'intersection des images des murs constituant ∂B^{in} avec les murs constituant ∂B^{out}. Similairement, on va considérer aussi

l'intersection des image réciproques des murs formant ∂B^{out} avec les murs formant ∂B^{in}. Les ensembles qui vont nous intéresser dans ce chapitre sont donc les suivants :

$$\begin{array}{rcl} D_{ij}^{\pm} & = & W_i^{\pm} \bigcap \mathcal{M}^{-1}(W_j^{\pm_j}) \quad \text{pour } i \in \mathbb{N}_n \setminus I_{out},\ j \in I_{out}. \\ D_{ij} & = & W_i^{\mp_i} \bigcap \mathcal{M}^{-1}(W_j^{\pm_j}) \quad \text{pour } i,j \in I_{out}. \end{array} \tag{5.1}$$

and

$$\begin{array}{rcl} R_{ij}^{\pm} & = & \mathcal{M}(W_i^{\pm}) \bigcap W_j^{\pm_j} \quad \text{pour } i \in \mathbb{N}_n \setminus I_{out},\ j \in I_{out}. \\ R_{ij} & = & \mathcal{M}(W_i^{\mp_i}) \bigcap W_j^{\pm_j} \quad \text{pour } i,j \in I_{out}. \end{array} \tag{5.2}$$

Ainsi, $D_{ij}^{\pm}$ est une abréviation pour le domaine $D_{\mathbf{a}}$, où $\mathbf{a} = a \mp \mathbf{e}_i, a, a \pm_j \mathbf{e}_j$ ($\mp$ est l'opposé de $\pm$), tel que défini en (4.12). De même, D_{ij} abrège $D_{\mathbf{a}}$, où $\mathbf{a} = a \mp_i \mathbf{e}_i, a, a \pm_j \mathbf{e}_j$. On rappelle que pour une direction de sortie i, le signe $\pm_i \in \{-,+\}$ est tel que $i \in I_{out}^{\pm_i}$, tandis que $\mp_i$ est son opposé.
Les ensembles R_{ij}, $R_{ij}^{\pm}$ ne sont pas exactement de la forme $D_{\mathbf{a}}$, mais les images par $\mathcal{M}$ de tels ensembles. En fait, on a la

Proposition 5.1.

$$\begin{array}{rcll} R_{ij}^{\pm} & = & \mathcal{M}(D_{ij}^{\pm}) & \textit{pour } i \in \mathbb{N}_n \setminus I_{out},\ j \in I_{out}. \\ R_{ij} & = & \mathcal{M}(D_{ij}) & \textit{pour } i,j \in I_{out}. \end{array}$$

Si de plus **H3** *est vérifiée, i.e. les taux de dégradation sont uniformes, les complexes polytopaux formés respectivement par les D_{ij}^{ε} et les R_{ij}^{ε} (avec $\varepsilon \in \{\ ,+,-\}$) sont combinatoirement isomorphes. En particulier, chaque couple de la forme D_{ij}^{ε}, R_{ij}^{ε} est formé de deux polytopes combinatoirement isomorphes (voir annexe A pour les définitions).*

démonstration.
Les deux égalités proviennent de ce que $\mathcal{M} : \partial B^{in} \to \partial B^{out}$ est bijective. L'injectivité de $\mathcal{M}$ entraîne en effet $\mathcal{M}(A \cap B) = \mathcal{M}(A) \cap \mathcal{M}(B)$, pour tous sous-ensembles A et B du domaine de $\mathcal{M}$. La surjectivité, d'autre part, entraîne $\mathcal{M}(\mathcal{M}^{-1}(A)) = A$ pour tout A inclus dans l'image de $\mathcal{M}$. Il suffit pour conclure d'appliquer ces propriétés aux définitions (5.1) et (5.2).

Sous **H3**, nous avons vu au chapitre 2, équation 2.28, que les trajectoires sont rectilignes dans chaque boîte et que $\mathcal{M}|_B$ est une transformation projective. Les murs étant des polytopes, ($(n-1)$-rectangles), et les transformations projectives conservant la structure de polytope [74, 134], les ensembles (5.1) et (5.2) sont des polytopes. De même, les ensembles de la forme $B \cap \mathcal{M}^{-1}(W_i^{\pm_i})$, pour $i \in I_{out}$, sont des polytopes.
L'existence d'un isomorphisme combinatoire provient du fait que le diagramme de Schlegel est un tel isomorphisme (voir annexe A, définition A.14 et propriété A.15) et que, à j fixé, le complexe formé par les R_{ij}^{ε} et leurs faces de dimensions inférieures est exactement le diagramme de Schlegel du polytope $B \cap \mathcal{M}^{-1}(W_j^{\pm_j})$, basé sur $W_j^{\pm_j}$. Ayant montré que $\mathcal{M}$ est projective, il reste pour prouver cette affirmation, à s'assurer que le point focal f est *derrière* le mur $W_j^{\pm_j}$ (voir définition A.13) vu comme une face de $B \cap \mathcal{M}^{-1}(W_j^{\pm_j})$. Soit donc x un point intérieur à ce dernier polytope. x est alors intérieur à B. Les seuls hyperplans de B susceptibles de séparer x et f sont par définition ceux portant les $W_i^{\pm_i}$, pour $i \in I_{out}$. Par suite, x et f sont de part et d'autre de l'hyperplan seuil portant $W_j^{\pm_j}$, et les seuls autres hyperplans susceptibles de séparer ces points sont ceux portant des facettes de $\mathcal{M}^{-1}(W_j^{\pm_j})$ qui ne sont pas des facettes de B. Ces dernières sont clairement les

séparatrices entre $\mathcal{M}^{-1}(W_j^{\pm_j})$ et les ensembles de la forme $\mathcal{M}^{-1}(W_i^{\pm_i})$, pour $i \in I_{out} \setminus \{j\}$. Une telle séparatrice est portée par l'hyperplan affinement engendré par la $(n-2)$-face $W_j^{\pm_j} \cap W_i^{\pm_i}$ et le point f. Cet hyperplan contient donc f, et ne sépare pas x et f. □

Une première illustration des ensembles de la forme (5.1), (5.2) est fournie par les figures 5.1 et 5.2. Sur ces figures, l'hypothèse **H3** est supposée pour simplifier la représentation. En général cependant, les frontières des régions intérieures aux murs de boîte ne sont pas affines.

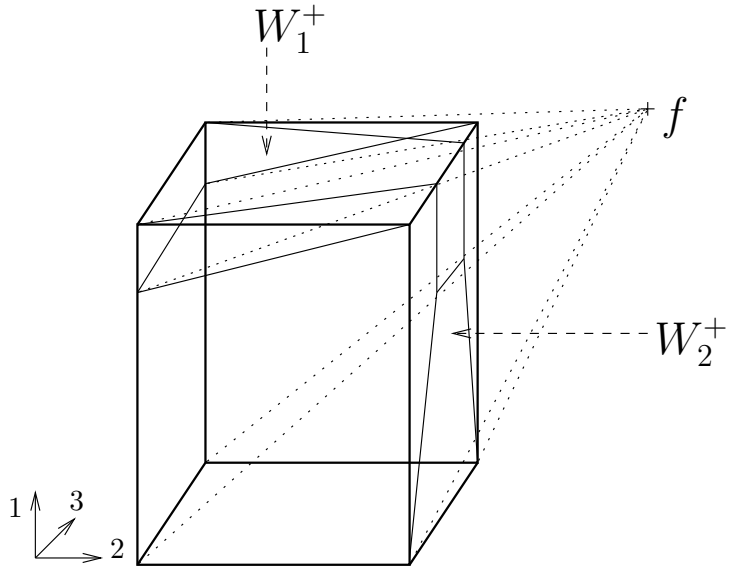


FIG. 5.1 – *Un boîte dans* $\mathbb{R}^3$*, avec deux murs sortants:* W_1^+ *et* W_2^+*. Ainsi,* $I_{out} = \{1,2\}$*, et* $\pm_1 = \pm_2 = +$*.*

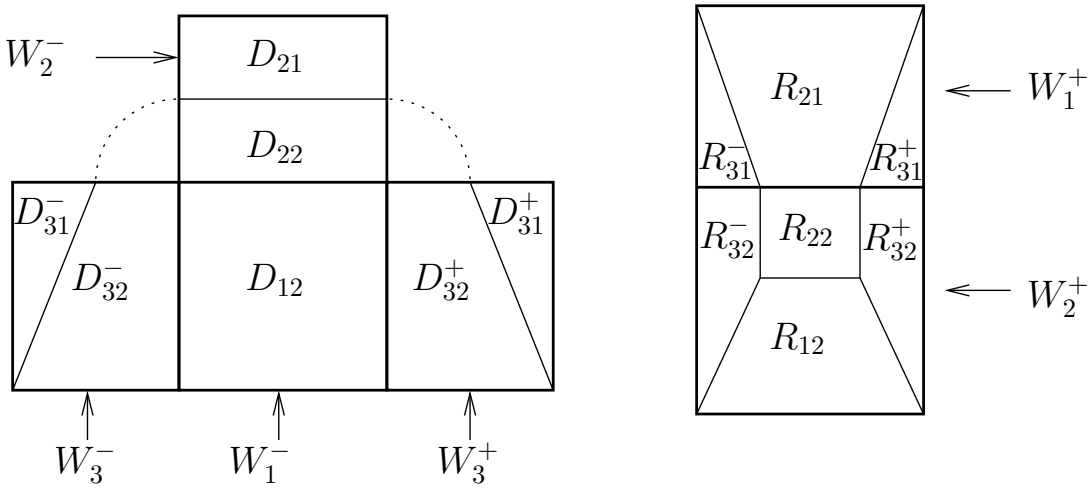


FIG. 5.2 – *Partition de* ∂B^{in} *(à gauche, point de vue intérieur à* B*) et* ∂B^{out} *(à droite, vu de l'extérieur de* B*). Les lignes pointillées sur la représentation "dépliée" de* ∂B^{in} *relient des points confondus dans* $\mathbb{R}^3$*. L'échelle est arbitraire.*

Nota Bene. Ayant montré l'isomorphisme des régions R_{ij}^{ε} et D_{ij}^{ε}, on ne s'occupe plus que des D_{ij}^{ε} dans la suite de ce chapitre. Toutes les propriétés énoncées pour ces derniers

sont valables pour les R^{ε}_{ij} également, sauf mention contraire.

5.1.2 Propriétés

Une première propriété, visible sur les figures 5.1 et 5.2, est que les ensembles D^-_{ij} et D^+_{ij}, i.e. avec $i \notin I_{out}$, sont translatés l'un de l'autre.

Proposition 5.2. $D^+_{ij} = D^-_{ij} + (\theta^+_i - \theta^-_i)\,\mathbf{e}_i$.
démonstration.
Soit $x \in W^-_i$, et $x' = x + (\theta^+_i - \theta^-_i)$.
Montrons que $x \in D^-_{ij}$ si et seulement si $x' \in D^+_{ij}$.
$x \in D^-_{ij}$ si et seulement si l'orbite issue de x sort de B selon la direction j, i.e. $\tau(x) = \tau_j(x)$. Comme x et x' ont toutes leurs coordonnées égales, sauf $x_i = \theta^-_i$ et $x'_i = \theta^+_i$, et comme $i \notin I_{out}$ (cf. (5.1)), le temps de sortie $\tau(x)$ ne dépend pas de x_i. On a donc $\tau(x) = \tau(x') = \tau_j(x')$, ou de façon équivalente $\mathcal{M}x' \in W^{\pm_j}_j$, i.e. $x' \in D^+_{ij}$. □

On montre maintenant que toutes les transitions entre murs entrants et sortants ne sont pas admissibles. Ce résultat sera essentiel dans le chapitre 6.

Lemme 5.3. *Il existe au plus un $i \in I_{out}$, tel que $\mathring{D}_{ii} \neq \varnothing$.*
démonstration.
Supposons $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $\mathring{D}_{ii} \neq \varnothing$. Alors il existe un point $x^* \in W^{\mp_i}_i$, c'est-à-dire tel que $x^*_i = \theta^{\mp_i}_i$ et également tel que $\mathcal{M}x^* \in W^{\pm_i}_i$, c'est-à-dire vérifiant le fait que $\tau(x^*) = \tau_i(x^*_i) = \tau_i(\theta^{\mp_i}_i)$ est un minimum, strict car x^* est dans l'intérieur relatif de D_{ii} :

$$\forall k \in I_{out},\, k \neq i, \quad \tau_i(x^*_i) < \tau_k(x^*_k). \tag{5.3}$$

Une autre propriété de τ_i est que $\tau_i(\theta^{\mp_i}_i)$ est le maximum de l'ensemble $\big\{\tau_i(x_i) \mid x_i \in [\theta^-_i, \theta^+_i]\big\}$. On déduit ceci des équations (2.30) et (2.31) donnant les images des fonctions $\alpha^{\pm}_i$, et de la décroissance de τ_i par rapport à $\alpha^{\pm_i}_i$, équation (2.21). Ainsi, on a :

$$\forall i \in I_{out}, \quad \tau_i(x^*_i) = \tau_i(\theta^{\mp_i}_i) = \max_{x_i \in [\theta^-_i, \theta^+_i]} \tau_i(x_i)$$

De cette identité et de (5.3), on déduit une condition nécessaire à $\mathring{D}_{ii} \neq \varnothing$:

$$\forall k \in I_{out},\, k \neq i, \quad \max_{x_i \in [\theta^-_i, \theta^+_i]} \tau_i(x_i) < \max_{x_k \in [\theta^-_k, \theta^+_k]} \tau_k(x_k),$$

qui ne peut clairement être satisfaite par plus d'un indice $i \in I_{out}$. □

Remarque 5.4. *D'après le lemme précédent, le nombre d'indices i tels que $\mathring{D}_{ii} \neq \varnothing$ est 0 ou 1. Le cas où ce nombre est nul est rare, dans le sens où il correspond à un ensemble de paramètres de mesure nulle. Cet ensemble est défini par l'égalité de toutes les valeurs maximales des fonctions τ_i, c'est-à-dire des quantités $\tau_i(\theta^{\mp_i}_i)$, pour $i \in I_{out}$, dans le cas $\#I_{out} \geqslant 2$. Lorsque I_{out} ne contient qu'un élément ou aucun, il y a autant de directions sortantes i que de $\mathring{D}_{ii} \neq \varnothing$.*

Le lemme 5.3 limite les trajectoires admissibles entre murs. Le résultat suivant montre qu'il n'y a pas d'autre restriction de la même forme.

Proposition 5.5. *Pour tous $i \in \mathbb{N}_n$, $j \in I_{out}$, $i \neq j$, et $\varepsilon \in \{\ ,+,-\}$,* $\quad \mathring{D}_{ij}^{\varepsilon} \neq \varnothing$.

démonstration.
Pour $i \notin I_{out}$, la proposition 5.2 montre que D_{ij}^{-} et D_{ij}^{+} ne diffèrent que par une translation, si bien qu'il suffit de ne considérer que l'un de ces deux ensembles. Rappelons que $\mp_i$ n'est défini que pour $i \in I_{out}$. Une convention pratique pour mener cette démonstration sera, lorsque $i \notin I_{out}$, de définir $\mp_i$ comme l'un quelconque des deux signes $-, +$. Ainsi $\mp_i$ est bien défini pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, et il nous suffit de montrer formellement que

$$W_i^{\mp_i} \cap \mathcal{M}^{-1}(W_j^{\pm_j}) \tag{5.4}$$

est d'intérieur relatif non vide, pour $i \in \mathbb{N}_n$ et $j \in I_{out}$.
De même $\theta_i^{\mp_i}$ désigne l'un quelconque des deux seuils θ_i^-, θ_i^+, lorsque $i \notin I_{out}$.
L'intérieur relatif d'un ensemble de la forme (5.4) est donné par l'égalité

$$x_i = \theta_i^{\mp_i},$$

et les inégalités

$$\tau_j(x_j) \ < \ \tau_k(x_k) \quad \text{ pour } k \in I_{out} \setminus \{j\}.$$

Par (2.30) et (2.31), l'image de α_k est de la forme $[\alpha_k^{\pm_k}(\theta_k^{\mp_k}), 1]$, pour $k \in I_{out}^{\pm_k}$. La borne supérieure 1 provient de $\alpha_k^{\pm_k}(\theta_k^{\pm_k}) = 1$.
Les seuils successifs étant disctincts dans toutes les directions, l'image de α_k est toujours d'intérieur non vide. Ainsi, par (2.20) chaque τ_k admet aussi un intervalle image d'intérieur non vide, donné par

$$[0, \frac{-1}{\lambda_k} \ln(\alpha_k^{\pm_k}(\theta_k^{\mp_k}))].$$

En notant

$$\tau^* = \min_{k \in I_{out}} \frac{-1}{\lambda_k} \ln(\alpha_k^{\pm_k}(\theta_k^{\mp_k})),$$

on obtient donc un segment $[0, \tau^*]$ de longueur non nulle, contenu dans les ensembles images de toutes les fonctions τ_k, pour $k \in I_{out}$. Le cardinal $\#I_{out}$ étant fini, on peut toujours choisir un ensemble de points dans l'intervalle précédent, de la forme : $\vartheta_1 > \cdots > \vartheta_{\#I_{out}}$. Ce choix effectué, il existe un x_j dans le domaine de la fonction τ_j, tel que $\tau_j(x_j) = \vartheta_{\#I_{out}}$. Tous les autres ϑ_p ayant un antécédent x_p par l'un des τ_k, $k \in I_{out} \setminus \{j\}$. Ainsi, $\tau_j(x_j) = \tau(x)$, et tout point $x \in W_i^-$ dont les coordonnées indexées par I_{out} sont ainsi construites appartient à l'intérieur relatif de l'ensemble défini en (5.4). □

Remarque 5.6. *La condition $i \neq j$, dans laquelle réside la différence essentielle avec le lemme 5.3, peut ne pas ressortir clairement dans la démonstration ci-dessus. Elle est employée dans le fait de choisir x_j dans le segment $[\theta_j^-, \theta_j^+]$ entier, alors que la valeur x_i est fixée à $\theta_i^{\mp_i}$.*

5.2 Description minimale de la partition d'une boîte

La proposition 4.6 caractérise les ensembles $D_{\mathbf{a}}$, au moyen d'un système d'inégalités. Ce système est en général redondant, i.e. certaines inéquations peuvent en être enlevées sans modifier l'ensemble qu'il définit. De plus, les inégalités données requièrent l'hypothèse **H3** des taux de dégradation uniformes. Dans le cas particulier simple des ensembles (5.1) et (5.2), on peut aller plus loin et donner un système minimal (i.e. sans redondance), et valable indépendamment de l'hypothèse **H3**.

Proposition 5.7. *Pour presque toute valeur des paramètres (i.e. valeurs seuils et coordonnées des points focaux), les ensembles D_{ij}^{ε} définis en (5.1), sont des cellules bornées dont la frontière est différentiable par morceaux. Leur intérieur (relatif) est défini sans redondance par le système suivant :*

$$\begin{cases} x_i = \theta_i^{\varepsilon}, & \\ \theta_k^- < x_k < \theta_k^+, & k \in (\mathbb{N}_n \setminus I_{out}) \setminus \{i\} \\ \alpha_k(\theta_k^{\mp_k}) < \alpha_k(x_k) < \alpha_j(x_j)^{\frac{\lambda_k}{\lambda_j}}, & k \in I_{out} \setminus \{i,j\} \\ \alpha_j(x_j) < 1. & \end{cases}$$

Les inéquations suivantes peuvent également être requises, sous certaines conditions :

- *Si $D_{jj} \neq \varnothing$, l'inéquation $\alpha_j(\theta_j^{\mp_j}) < \alpha_j(x_j)$ doit être ajoutée au système précédent.*
- *Si $i \in I_{out}$ et $D_{ii} \neq \varnothing$, l'inéquation $\alpha_i(\theta_i^{\mp_i})^{\frac{1}{\lambda_i}} < \alpha_j(x_j)^{\frac{1}{\lambda_j}}$, doit être ajoutée.*

Par convention ε désigne $\mp_i$ lorsque $i \in I_{out}$, et $\varepsilon \in \{+,-\}$ sinon.

démonstration.
La première ligne, égalité sur x_i, garantit $D_{ij}^{\varepsilon} \subset W_i^{\varepsilon}$.

Les variables x_k, pour $k \notin I_{out}$, sont sans influence sur le temps de sortie. Par conséquent, elles doivent uniquement satisfaire les inégalités

$$\theta_k^- < x_k < \theta_k^+.$$

Réciproquement, ces inégalités sont nécessaires pour assurer $x \in B$. Lorsque $i \notin I_{out}$, il est clair que x_i n'apparaît pas dans de telles inéquations.

Les variables x_k, pour $k \in I_{out}$, doivent quant à elles vérifier deux types de contraintes. Tout d'abord, elles doivent être comprises entre les deux valeurs seuil θ_k^- et θ_k^+. Les fonctions α_k étant continues et monotones, de domaine $[\theta_k^-, \theta_k^+]$ et d'image $[\alpha_k(\theta_k^{\mp_k}), 1]$, quel que soit $k \in I_{out}$, ces inégalités sur les seuils peuvent s'écrire de façon équivalente

$$\forall k \in I_{out} \setminus \{i\}, \qquad \alpha_k(\theta_k^{\mp_k}) < \alpha_k(x_k) < \alpha_k(\theta_k^{\pm_k}) = 1. \tag{5.5}$$

Ensuite, pour $k \neq j$, le temps de sortie associé $\tau_k(x_k)$ doit être supérieur à $\tau_j(x_j)$, étant donné que D_{ij}^{ε} est inclus dans $\mathcal{M}^{-1}(W_j^{\pm_j})$. Rappelons que par (2.20), les temps de sortie sont égaux à

$$\tau_k(x_k) = -\frac{1}{\lambda_k} \ln(\alpha_k(x_k)).$$

Alors, $\tau_k(x_k) > \tau_j(x_j)$ entraîne

$$\forall k \in I_{out} \setminus \{j\}, \qquad \alpha_k(x_k) < \alpha_j(x_j)^{\frac{\lambda_k}{\lambda_j}}. \tag{5.6}$$

De $\alpha_j(x_j) < 1$ et de l'inégalité ci-dessus, on tire

$$\alpha_k(x_k) < 1.$$

Cette dernière est donc redondante dans (5.5), dès lors que $k \in I_{out} \setminus \{j\}$, mais ne l'est pas pour x_j.
Pour $k \in I_{out}$, et $k \neq i, j$, l'inégalité entre x_k et le seuil $\theta_k^{\mp k}$ n'est par contre par redoublée par une inégalité de la forme (5.6). Ainsi $\alpha_k(\theta_k^{\mp k}) < \alpha_k(x_k)$ doit apparaître dans le système, pour $k \in I_{out} \setminus \{i\}$.
La dernière inégalité qui doit être discutée est celle donnant une borne inférieure à la quantité $\alpha_j(x_j)$. Pour ce faire, rappelons que d'après la démonstration du lemme 5.3, $\mathring{D}_{kk} \neq \varnothing$ admet

$$\forall k' \in I_{out} \setminus \{k\}, \qquad \alpha_k(\theta_k^{\mp k})^{\frac{1}{\lambda_k}} > \alpha_{k'}(\theta_{k'}^{\mp k'})^{\frac{1}{\lambda_{k'}}}, \tag{5.7}$$

comme ensemble de conditions nécessaires. Ce lemme garantit de plus que pour presque toute valeur donnée aux paramètres, il existe exactement un k tel que $\mathring{D}_{kk} \neq \varnothing$. Nous supposons donc maintenant que cette propriété est vérifiée.
On distingue deux cas.

- Si $i \notin I_{out}$: la $i^{\text{ème}}$ variable n'apparaît pas dans les inéquations (5.6).
  Si $D_{jj} = \varnothing$, il existe (pour presque toutes les valeurs de paramètres) un $k \in I_{out} \setminus \{j\}$ pour lequel $D_{kk} \neq \varnothing$. On en déduit

  $$\alpha_j(\theta_j^{\mp j})^{\frac{1}{\lambda_j}} < \alpha_k(\theta_k^{\mp k})^{\frac{1}{\lambda_k}},$$

  puis (5.5) et (5.6) entraînent

  $$\alpha_j(\theta_j^{\mp j}) < \alpha_j(x_j).$$

  Cette dernière inégalité est donc nécessaire uniquement si $D_{jj} \neq \varnothing$, et dans ce cas elle ne peut être supprimée du système.
- Si $i \in I_{out}$: par (5.6),

  $$\alpha_i(\theta_i^{\mp i})^{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} < \alpha_j(x_j), \tag{5.8}$$

  ce qui peut être redondant avec

  $$\alpha_j(\theta_j^{\mp j}) < \alpha_j(x_j), \tag{5.9}$$

  que l'on a déduit de (5.5). Alors, si $D_{kk} \neq \varnothing$ pour un indice $k \neq i, j$, les deux bornes inférieures potentielles de $\alpha_j(x_j)$ sont majorées par $\alpha_k(\theta_k^{\mp k})^{\frac{\lambda_j}{\lambda_k}}$, d'après (5.7). Par (5.6) cette quantité minore $\alpha_j(x_j)^{\frac{1}{\lambda_j}}$, et donc (5.8) et (5.9) sont toutes deux redondantes.
  Si en revanche $D_{ii} \neq \varnothing$ ou $D_{jj} \neq \varnothing$ (ou les deux dans le cas $i = j$), une borne inférieure non redondante est respectivement donnée par (5.8) ou (5.9).

Le système donné dans l'énoncé de la proposition résume la discussion précédente. □

Le système donné dans la proposition 5.7 est bien constitué d'inégalités affines dans le cas où tous les λ_i sont égaux, i.e. D_{ij}^{ε} est un polytope dans ce cas. Ceci était connu, le système fournit une description de ces polytopes en termes d'intersection de demi-espaces, chacun d'entre eux définissant une facette (car le système est non redondant, cf. [134]).

L'expression d'un système définissant les domaines R_{ij}^{ε} s'obtient à partir du système de la proposition précédente, mais de façon non triviale. On prend donc la peine de détailler un tel système.

Proposition 5.8. *Pour tous i, j, et ε, l'ensemble R_{ij}^{ε} peut être décrit par un système d'inéquations sans redondance. Ce système est obtenu directement à partir de celui définissant D_{ij}^{ε}, en employant les régles de transcription proposées dans le tableau suivant. On désigne par x un point de D_{ij}^{ε}, et par y un point de R_{ij}^{ε}.*

	(in)équation pour D_{ij}^{ε}	$\leftrightarrow$	(in)équation pour R_{ij}^{ε}
égalité	$x_i = \theta_i^{\varepsilon}$	$\leftrightarrow$	$y_j = \theta_j^{\pm_j}$
$k \notin I_{out}$	$x_k < \theta_k^{+}$	$\leftrightarrow$	$y_k - f_k < \beta_i(y_i)^{-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}}(\theta_k^{+} - f_k)$
	$x_k > \theta_k^{-}$	$\leftrightarrow$	$y_k - f_k > \beta_i(y_i)^{-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}}(\theta_k^{-} - f_k)$
$k \in I_{out} \setminus \{i, j\}$	$\alpha_k(x_k) < \alpha_j(x_j)^{\frac{\lambda_k}{\lambda_j}}$	$\leftrightarrow$	$\beta_k(y_k) < \beta_k(\theta_k^{\pm_k})$
	$\alpha_k(x_k) > \alpha_k(\theta_k^{\mp_k})$	$\leftrightarrow$	$\beta_k(y_k) > \beta_i(y_i)^{\frac{\lambda_k}{\lambda_i}}$
	$\alpha_j(x_j) < 1$	$\leftrightarrow$	$\beta_i(y_i) > 1$
si $D_{jj} \neq \varnothing$	$\alpha_j(x_j) > \alpha_j(\theta_j^{\mp_j})$	$\leftrightarrow$	$\beta_i(y_i)^{\frac{\lambda_k}{\lambda_i}} < \beta_j(\theta_j^{\pm_j})$
si $D_{ii} \neq \varnothing$	$\alpha_j(x_j) > \alpha_i(\theta_i^{\mp_i})^{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}}$	$\leftrightarrow$	$\beta_i(y_i) < \beta_i(\theta_i^{\pm_i})$

Les fonctions β_k sont celles définies en (4.4), et intervenant dans la définition de $\mathcal{M}^{-1}$.

démonstration.
Soit $x \in D_{ij}^{\varepsilon}$, et $y = \mathcal{M}x \in R_{ij}^{\varepsilon} = \mathcal{M}(D_{ij}^{\varepsilon})$.
Les égalités $x_i = \theta_i^{\varepsilon}$ et $y_j = \theta_j^{\pm_j}$ proviennent directement des définitions de D_{ij}^{ε} et R_{ij}^{ε}.
Ensuite l'équation (4.4) et la définition de $\mathcal{M}^{-1}$, conduisent aux égalités suivantes :

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \qquad \begin{cases} x_k &= f_k + \beta_i(y_i)^{\frac{\lambda_k}{\lambda_i}}(y_k - f_k), \\ y_k &= f_k + \alpha_j(x_j)^{\frac{\lambda_k}{\lambda_i}}(x_k - f_k). \end{cases} \tag{5.10}$$

D'où l'on déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \qquad \alpha_j(x_j)^{\frac{\lambda_k}{\lambda_j}} = \beta_i(y_i)^{-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}}. \tag{5.11}$$

Les fonctions β_k sont définies dans l'équation (4.4), pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.
Comme les équations (5.10) entraînent que $\theta_k^{-} < x_k < \theta_k^{+}$ est équivalent à

$$\theta_k^{+} - f_k > \beta_i(y_i)^{\frac{\lambda_k}{\lambda_i}}(y_k - f_k) > \theta_k^{-} - f_k,$$

le cas $k \in I_{out}$ est démontré.
Toutes les autres règles s'appliquent à $k \in I_{out}$. L'usage de la notation $\mp_k$ permet d'écrire :

$$\beta_k(y_k) = \frac{\theta_k^{\mp_k} - f_k}{y_k - f_k}.$$

Alors toutes les règles s'obtiennent par application directe de (5.10) et (5.11). Quelques calculs simples montrent en effet en partant de ces identités que les expressions de part et d'autre d'un symbole $\leftrightarrow$ sont équivalentes.
Les deux dernières règles sont un cas particulier des précédentes, traité à part car elles ne s'appliquent que sous certaines conditions. □

La proposition 5.7 permet de compter les morceaux différentiables de la frontière (sous **H3**, les facettes) des régions D_{ij}^{ε}. Ces morceaux sont donnés en remplaçant une inégalité exactement par une égalité dans le système sans redondance décrivant ces ensembles. Les frontières des R_{ij}^{ε} ont bien sûr le même nombre de morceaux différentiables. On appelle de tels morceaux *facettes* dans la suite, même dans le cas où **H3** n'est pas satisfaite. Ce sont des régions de dimension $n-2$.

Proposition 5.9. *Tout D_{ij}^{ε} possède $2\,(n-1)$ facettes, sauf si $i \notin I_{out}$ ou $D_{ii} = \varnothing$, et simultanément $D_{jj} = \varnothing$, auquel cas il possède $2(n-1)-1$ facettes.*

Cette proposition ne nécessite pas de preuve, étant un simple décompte des inégalités données dans la proposition 5.7. Elle fournit un critère simple pour distinguer les configurations qui ne sont pas combinatoirement isomorphes. Dans cet ordre d'idée, les figures 5.3 et 5.4 viennent ici compléter les figures précédentes 5.1 et 5.2, en faisant intervenir 3 directions de sorties.

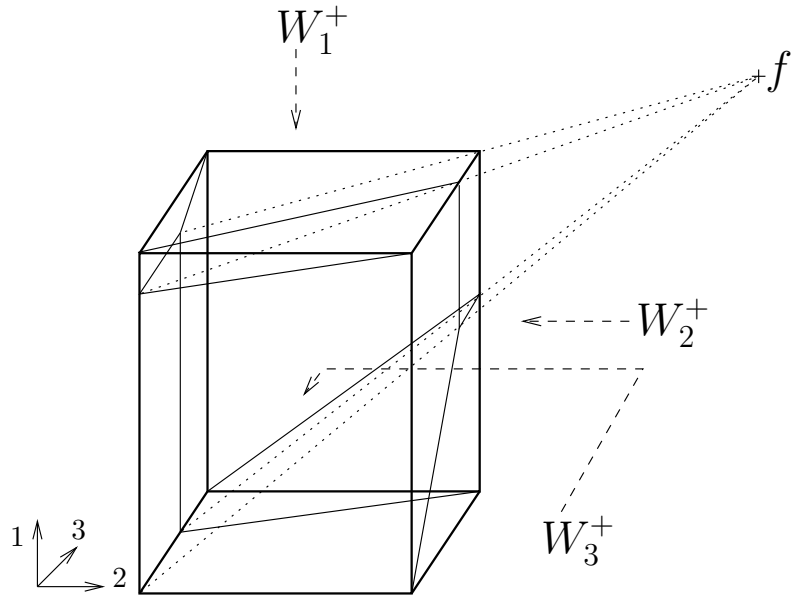


FIG. 5.3 – *Un boîte dans $\mathbb{R}^3$, ayant trois murs sortants : W_1^+, W_2^+ et W_3^+. Les lignes pointillées relient les sommets de D_{22} et leurs images, i.e. les sommets de R_{22}.*

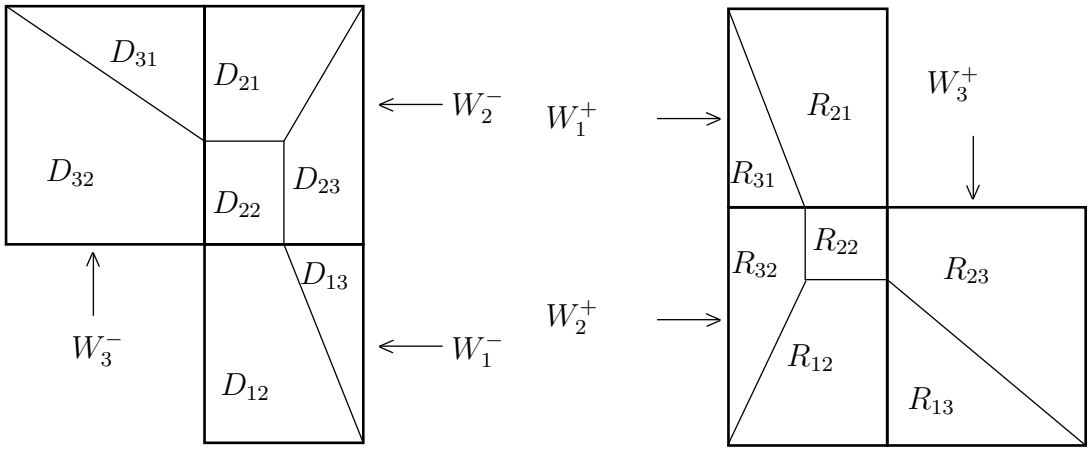


FIG. 5.4 – *Partitions de ∂B^{in} (sur la gauche, vue depuis l'intérieur de B) et ∂B^{out} (sur la droite, vue depuis l'extérieur de B). L'échelle est arbitraire.*

On peut notamment vérifier le lemme 5.3 sur ces deux paires de figures : dans les deux cas, il y a au moins deux directions sortantes, dont un seule fournit un ensemble de la forme D_{ii} d'intérieur non vide (dans les deux cas, il s'agit de D_{22}).
En outre les figures 5.1 et 5.2 d'une part, et 5.3 et 5.4 d'autre part, illustrent les différentes situations possibles pour les ensembles D_{ij}^{ε}, en ce qui concerne le nombre de leurs facettes. Il est possible que toutes les situations discriminées par la proposition 5.9 soient présentes dans une même boîte, mais ceci requiert au moins 4 dimensions. En effet un tel exemple doit contenir une région D_{ii} d'intérieur non vide, ayant $2(n-1)$ facettes. Il doit également comporter des ensembles D_{jk}, avec $j, k \in I_{out} \setminus \{i\}$, qui ont $2(n-1)-1$ facettes. Ceci nécessite 3 directions sortantes, comme dans les figures 5.3 et 5.4. Ainsi, pour doter cet exemple d'une direction non sortante m, telle que les deux régions $D_{mi}^{\pm}$ ont $2(n-1)$ facettes (comme les $D_{32}^{\pm}$ de la figure 5.2) et $D_{mj}^{\pm}$, $D_{mk}^{\pm}$ n'en ont que $2(n-1)-1$ (comme les $D_{31}^{\pm}$ de la figure 5.2), il faut une quatrième coordonnée.
Cette discussion justifie l'écriture des systèmes d'inéquations fournis par les propositions 5.7 et 5.8. En effet, il apparaît ici que certaines configurations non équivalentes combinatoirement peuvent être distinguées grâce à cette description. Que de telles configurations puissent n'apparaître que dans des espaces de dimension supérieure motive a posteriori le travail de nature calculatoire proposé dans ce chapitre : l'algèbre compense ici le défaut de visualisation.

Chapitre 6

Discrétisation de l'espace et codage des trajectoires

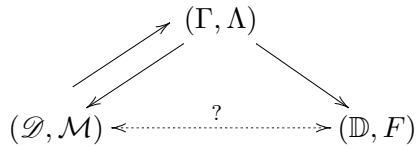
Dans ce chapitre, on aborde des questions relatives à la dynamique symbolique des modèles affines par morceaux de réseaux génétiques. Pour une introduction rapide à la dynamique symbolique, nous renvoyons à l'annexe B. Celle-ci décrit notamment les principes généraux du codage des trajectoires d'un système dynamique quelconque, au moyen d'un système dynamique symbolique. Ces principes sont appliqués dans ce qui suit au système dynamique $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$ défini au chapitre 4. Un élément essentiel étant le choix d'une partition de l'espace d'états $\mathscr{D}$ du système que l'on cherche à étudier, il sera également fait usage des résultats obtenus dans le chapitre 5, sur la partition des frontières de boîtes portant $\mathscr{D}$.
Dans la première section, différents systèmes dynamiques symboliques associés au codage des trajectoires de $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$ sont définis. Les entropies topologiques de ces codages sont comparées dans une deuxième section.
Les hypothèses requises dans ce chapitre sont **H1** et **H4**.

6.1 Systèmes dynamiques symboliques associés à un système affine par morceaux

La partition sous-jacente aux systèmes affines par morceaux de la forme que nous étudions permet naturellement d'associer un *graphe de transitions* à chaque paire $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$, conformément à la définition 2.10. Ce graphe, que l'on a noté $\mathsf{GT}(\mathbb{D}, F)$ est défini pour un réseau génétique discret $(\mathbb{D}, F)$ (définition 2.3). Or on a vu à la section 2.4.2 qu'il est possible d'associer un unique couple $(\mathbb{D}, F)$ à chaque système de la forme (2.14), qu'on rappelle :

$$\frac{dx}{dt} = \Gamma(x) - \Lambda x.$$

Les trajectoires d'un tel système qui sont bien définies pour tout temps t peuvent à leur tour être ramenées à un unique système dynamique $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$, comme on l'a montré au chapitre 4. Les notations employées dans ce paragraphe désignerons donc des systèmes associés les uns autres dans la suite de ce chapitre. Schématiquement, les relations entre ces systèmes peuvent être représentées ainsi :



Qui se lit : le système affine par morceaux défini par la donnée de l'application Γ et de la matrice diagonale Λ détermine de manière unique chacun des deux autres systèmes. Le système $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$ permet de reconstruire les orbites du système initial de manière univoque. Les relations entre ce système et $(\mathbb{D}, F)$ sont toutefois peu claires pour l'instant. L'objet de ce chapitre est justement de préciser ces relations.

Rappelons que le graphe $\mathsf{GT}(\mathbb{D}, F)$ contient a priori des arêtes $(a, \textsc{succ}(\widetilde{F}^I, a))$ pour tout $I \subset I(a)$ non vide, sauf si $I(a)$ lui-même est vide. Ce dernier cas est équivalent d'après la proposition 2.17 à l'existence d'un équilibre asymptotiquement stable en $f(a) \in \mathring{B}_a$. Il correspond par définition de $\mathcal{T}$, aux élément $a \in \mathcal{T}$.
Pour $I(a) \neq \varnothing$, la proposition 2.18 nous assure que la présence de l'arête $(a, \textsc{succ}(\widetilde{F}^I, a))$ dans $\mathsf{GT}(\mathbb{D}, F)$ est équivalente à l'existence d'un $x \in \mathring{B}_a$ tel que $\mathcal{M}^a x \in B_{a+\epsilon}$, où

$$\epsilon = \sum_{i \in I} \mathtt{sgn}(F_i(a) - a_i)\, \mathbf{e}_i = \sum_{i \in I} \pm_i \mathbf{e}_i.$$

Pour $\#I > 1$, ceci correspond exactement aux éléments ayant été exclus du domaine $\mathscr{D}$, équation (4.9). Ainsi, les orbites de $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$ correspondent dans GT aux seules arêtes pour lesquelles $\#I = 1$, c'est-à-dire aux dynamiques asynchrones, définition 2.7. Nous avons vu dans la section 2.3 que ces dynamiques forment un espace de décalage.
Cet espace de décalage est constitué des mots infinis sur l'alphabet $\mathbb{D}$, donnés par les chemins infinis sur le sous-graphe de GT ayant mêmes sommets, c'est-à-dire les éléments de $\mathbb{D}$, et dont les arêtes sont :

$$\mathcal{E}_{\mathtt{a}} = \Big\{(a, a \pm_i \mathbf{e}_i) \mid a \in \mathbb{D} \setminus \mathcal{T},\, i \in I(a)\Big\} \cup \Big\{(a, a) \mid a \in \mathcal{T}\Big\}.$$

On note $\mathsf{GT}_{\mathtt{a}}$ ce graphe de transition associé aux seules dynamiques asynchrones du RGD $(\mathbb{D}, F)$. L'espace de shift qu'il engendre est noté $\Sigma_{\mathtt{a}}$, et σ est l'opérateur de décalage sur cet espace. La comparaison entre les dynamiques des systèmes $(\mathbb{D}, F)$ et $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$ peut donc maintenant être précisée : elle consiste à comparer les deux systèmes dynamiques $(\Sigma_{\mathtt{a}}, \sigma)$ et $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$. Comme d'usage, on va donc chercher une application de codage telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \overset{?}{\dashrightarrow} & \Sigma_{\mathtt{a}} \\ {\scriptstyle \mathcal{M}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ \mathscr{D} & \overset{?}{\dashrightarrow} & \Sigma_{\mathtt{a}} \end{array} \tag{6.1}$$

Selon les propriétés supplémentaires d'une telle application de codage (continuité, injectivité, surjectivité), on aura une comparaison plus ou moins précise de ces deux systèmes

dynamiques topologiques.

Un tel codage repose habituellement sur une partition de l'espace $\mathscr{D}$. Ici, l'espace des phases où est plongé $\mathscr{D}$ est dès sa définition partitionné par la donnée des boîtes B_a, $a \in \mathbb{D}$. De plus, on dispose d'une application de discrétisation $\mathbf{d}$ qui envoie l'intérieur de ces boîtes sur l'alphabet $\mathbb{D}$. Cependant $\mathscr{D}$ est contenu dans l'union des frontières de boîtes (et des points focaux situés dans leur boîte), c'est-à-dire dans le complémentaire du domaine de $\mathbf{d}$. L'application que nous cherchons ne peut donc être induite directement par $\mathbf{d}$.
Une partition de $\mathscr{D}$ peut pourtant être dérivée directement du découpage de l'espace en boîtes : celle donnée par les murs de ces boîtes. $\mathscr{D}$ est en effet inclus dans la réunion des facettes de boîtes, et des points focaux $f(a)$, $a \in \mathcal{T}$. Or, sous l'hypothèse **H4**, toutes les facettes de boîtes sont données par une intersection de la forme $\partial B_a^{out} \cap \partial B_b^{in}$. Ainsi, il existe pour chaque $x \in \mathscr{D}$ une unique paire $(a,b) \in \mathbb{D}^2$ telle que $x \in \partial B_a^{out} \cap \partial B_b^{in}$, ou un unique $a \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \partial B_a \cup \{f(a)\}$. Par suite, l'application suivante est bien définie :

$$\Phi(x) = \begin{cases} (a,b) & \text{si} \quad x \in \partial B_a^{out} \cap \partial B_b^{in}. \\ (a,a) & \text{si} \quad x \in \partial B_a \cup \{f(a)\}, \text{ avec } a \in \mathcal{T}. \end{cases}$$

Clairement, $\Phi : \mathscr{D} \to \mathcal{E}_{\mathsf{a}}$ est surjective. Remarquons au passage que $\Phi^{-1}(a,b)$ sera un moyen concis de dénoter l'intérieur relatif du mur situé à l'intersection de deux boîtes adjacentes B_a et B_b, en respectant l'orientation du flot, et en ne gardant que les points de ce mur appartenant aussi à $\mathscr{D}$.
Comme Φ est à valeur dans l'ensemble des arêtes de GT_{a}, et que Σ_{a} est défini à partir de ses sommets, on est amené à considérer un nouvel espace de décalage. Celui-ci est obtenu à partir de l'application β_2, définie dans l'exemple B.5. Il est constitué de mots infinis sur l'alphabet formé des arêtes de GT_{a} :

$$\Sigma_{\mathsf{a}}^{[2]} = \beta_2\left(\Sigma_{\mathsf{a}}\right) = \left\{ \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon^0.\epsilon^1\epsilon^2 \dots \;\middle|\; \forall k,\, \epsilon^k = \begin{bmatrix} \epsilon_{\mathrm{i}}^k \\ \epsilon_{\mathrm{f}}^k \end{bmatrix} \in \mathcal{E}_{\mathsf{a}} \;\wedge\; \epsilon_{\mathrm{f}}^k = \epsilon_{\mathrm{i}}^{k+1} \right\}.$$

On a noté ϵ_{i}^k et ϵ_{f}^k respectivement le sommet initial et le sommet terminal de l'arête ϵ^k.

Suivant la procédure générale décrite dans [51] pour coder les trajectoires d'un système dynamique topologique tel que $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$, on introduit tout d'abord l'application :

$$\begin{array}{rccl} \xi : & \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathscr{D}^{\mathbb{N}} \\ & x & \longmapsto & \xi(x) = \left(x, \mathcal{M}x, \mathcal{M}^2x, \dots\right). \end{array}$$

Comme $\mathcal{M}$ est continue sur $\mathscr{D}$, on peut invoquer [51], qui garantit que ξ est continue, injective, et commute avec l'opérateur de décalage sur $\mathscr{D}^{\mathbb{N}}$, noté σ. Ainsi, $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$ et $(\xi(\mathscr{D}), \sigma)$ sont conjugués. Ce dernier système dynamique peut être conçu comme définissant une dynamique symbolique sur un alphabet indénombrable. De ce point de vue, il est nettement moins simple à analyser qu'un système dynamique symbolique usuel. La conjugaison obtenue est néanmoins un résultat fort. La notation σ pour l'opérateur de décalage sur cet espace, bien qu'un peu abusive, ne devrait pas produire d'ambiguïté par la suite.

Ensuite, Φ induit naturellement une application définie ainsi :

$$\begin{array}{rccl} \Phi_\infty : & \mathscr{D}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \Sigma_{\mathsf{a}}^{[2]} \\ & \mathbf{x} = \left((x^k)_{k\in\mathbb{N}}\right) & \longmapsto & \Phi_\infty(\mathbf{x}) = \left(\Phi(x^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

Cette fois-ci, Φ_∞ transforme des mots infinis sur un alphabet indénombrable en mots infinis sur un alphabet fini. C'est donc cette application qui constitue la véritable étape d'approximation dans la procédure de codage des trajectoires. On vérifiera sans difficulté que Φ_∞ commute avec l'opérateur de décalage : $\Phi_\infty \circ \sigma = \sigma \circ \Phi_\infty$ (où σ agit respectivement sur $\mathscr{D}^{\mathbb{N}}$ et $\Sigma_{\mathbf{a}}^{[2]}$).
En combinant les deux étapes de cette procédure, on aboutit à l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi = \Phi_\infty \circ \xi : & \mathscr{D} & \longrightarrow & \Sigma_{\mathbf{a}}^{[2]} \\ & x & \longmapsto & \left(\Phi(\mathcal{M}^k x)\right)_{k\in\mathbb{N}}, \end{array}$$

qui semble un bon candidat pour compléter le diagramme (6.1) donné en début de section. Une caractérisation intéressante de ϕ peut être établie. Pour ce faire, on étend la définition d'ensembles $D_{\mathbf{a}}$, équation (4.12). Ces derniers ont été introduits pour des mots $\mathbf{a}$ finis sur l'alphabet $\mathbb{D}$. Pour éviter certaines ambiguïtés, on ajoutera parfois un $^\infty$ à la notation $D_{\mathbf{a}}$:

$$D_{\mathbf{a}}^\infty = D_{\mathbf{a}} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}^{-i}\left(\Phi^{-1}(a^i, a^{i+1})\right). \tag{6.2}$$

On notera alors $D_{\mathbf{a}}^k = D_{a^0\dots a^k} = \bigcap_{i=0}^k \mathcal{M}^{-i}\left(\Phi^{-1}(a^i, a^{i+1})\right)$, pour $k \in \mathbb{N}$.
Pour la sous-classe des systèmes satisfaisant **H3**, des domaines tels qu'en (6.2), définis pour $\mathbf{a} \in \Sigma_{\mathtt{a}}$, sont caractérisés par un ensemble infini d'inégalités semblables à celles fournies à la proposition 4.6, dans le cas d'un $\mathbf{a}$ de longueur finie.

Proposition 6.1. *L'application ϕ est constante sur chaque domaine $D_{\mathbf{a}}$ tel que defini à l'équation (6.2). Ces derniers sont les composantes connexes de $\mathscr{D}$. Par suite, ϕ est continue.*

démonstration.
Soit $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon^k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Sigma_{\mathtt{a}}^{[2]}$. On note $\mathbf{a} = \beta_2^{-1}(\boldsymbol{\epsilon}) \in \Sigma_{\mathtt{a}}$.
L'image réciproque de $\boldsymbol{\epsilon}$ par Φ_∞ est le produit de murs suivant :

$$\Phi_\infty^{-1}(\boldsymbol{\epsilon}) = \prod_{k\in\mathbb{N}} \Phi^{-1}(\epsilon^k).$$

Ce produit est inclus dans l'ensemble image de ξ, et par définition de ξ son image réciproque est exactement $D_{\mathbf{a}}$. Ceci se résume en :

$$\xi^{-1} \circ \Phi_\infty^{-1}(\boldsymbol{\epsilon}) = \phi^{-1}(\boldsymbol{\epsilon}) = D_{\mathbf{a}}.$$

Autrement dit, les antécédents par ϕ des éléments de $\Sigma_{\mathtt{a}}^{[2]}$ sont les ensembles $D_{\mathbf{a}}$: ϕ est bien constante sur de tels domaines.
Par ailleurs, chaque ensemble $\Phi^{-1}(a^0, a^1)$, pour $(a^0, a^1) \in \mathcal{E}_{\mathtt{a}}$, est soit un sous-ensemble de l'intérieur relatif d'un mur, soit un point focal situé dans sa propre boîte. Dans les deux cas, il est disjoint de tout autre ensemble de la même forme. Ainsi, les composantes connexes de $\mathscr{D}$ sont nécessairement incluses dans de telles régions. Pour un mot infini $\mathbf{a} = (a^0, a^1 \dots)$, on a $D_{\mathbf{a}} \subset \Phi^{-1}(a^0, a^1)$. Alors, par définition de $\mathscr{D}$, équation (4.9), qu'on rappelle :

$$\mathscr{D} = \bigcup_{a\in\mathbb{D}} Dom(\mathcal{M}^a) \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{M}^{-k}(\mathscr{F}_2) \setminus \partial\mathbb{U},$$

il apparaît que les seuls obstacles à la connexité d'un sous-ensemble de $\Phi^{-1}(a^0, a^1)$ sont les images réciproques $\mathcal{M}^{-k}(\mathscr{F}_2)$. Or les éléments de $\mathscr{F}_2$ sont les intersections de deux murs

ou plus. Par suite, toute région intersectant quelque $\mathcal{M}^{-k}(\mathscr{F}_2)$, pour un $k \in \mathbb{N}$, contient des points dont les images par $\mathcal{M}^k$ se trouvent sur des murs différents. Ce qui revient à dire que les composantes connexes sont les ensembles de points suivant le même itinéraire en termes de murs rencontrés, i.e. les images réciproques de ϕ, lesquelles sont comme on l'a prouvé dans un premier temps les régions $D_{\mathbf{a}}$. □

On peut résumer les constructions précédentes, en complétant le diagramme (6.1), laissé inachevé :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \phi & & & & \\ & \overset{\xi}{\nearrow} & & \overset{\Phi_\infty}{\nearrow} & & \overset{\beta_2}{\nwarrow} & \\ \mathscr{D} & \longrightarrow & \xi(\mathscr{D}) & \dashrightarrow & \Sigma_{\mathbf{a}}^{[2]} & \longleftarrow & \Sigma_{\mathbf{a}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{M}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ \mathscr{D} & \longrightarrow & \xi(\mathscr{D}) & \dashrightarrow & \Sigma_{\mathbf{a}}^{[2]} & \longleftarrow & \Sigma_{\mathbf{a}} \\ & \underset{\xi}{\searrow} & & \underset{\Phi_\infty}{\searrow} & & \underset{\beta_2}{\swarrow} & \\ & & \phi & & & & \end{array} \tag{6.3}$$

On voit sur ce diagramme que l'opérateur de décalage est noté σ, quel que soit l'espace de décalage sur lequel il s'applique. Cet abus de notation sera compensé par le contexte où seront employés ces différents opérateurs, contexte qui lèvera toute ambiguité.
Les flèches en pointillés repèrent la non inversibilité de Φ_∞, qui se répercute sur l'application composée ϕ. Plus que non inversible, ϕ n'est en général ni injective, ni surjective, comme l'illustrent la figure 6.1 et sa légende. Les deux carrés, à droite et à gauche de ce diagramme, représentent par contre des conjugaisons topologiques.

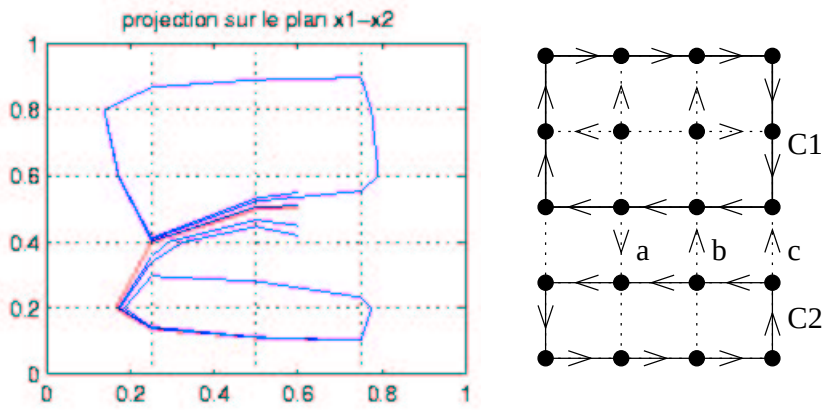


FIG. 6.1 – *Exemple de système plan, comportant deux cycles limites. L'espace d'états est figuré à gauche, et le graphe de transition asynchrone à droite. Sur ce dernier,* $C1$ *et* $C2$ *abrègent des séquences de murs évidentes.* a *et* b *tiennent également lieu d'abréviations pour des symboles de* $\mathcal{A}^2 = (\mathbb{N}_4 \times \mathbb{N}_5)^2$. *Le défaut d'injectivité de l'application* ϕ *est illustré par le fait que les deux cycles limites sont attractifs pour un ensemble important d'orbites de* $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$, *qui suivent la même suite de murs. L'absence de surjectivité apparaît quant à elle en observant que tous les mots du langage régulier* $(C1^*\mathrm{a}C2^*\mathrm{b})^*$ *sont dans le langage induit par* $\Sigma_{\mathbf{a}}^{[2]}$, *alors qu'aucune trajectoire de* $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$ *ne traverse les deux cycles* $C1$ *et* $C2$.

Remarque 6.2. *Dans le graphe de transition de la figure 6.1, certaines arêtes ne sont pas orientées. Ces arêtes correspondent en fait à des murs blancs dans l'espace d'états,*

dont la présence à l'intérieur de cycles du plan est nécessaire. De tels murs sont moins problématiques que les murs noirs, car ils sont instables, et donc non atteignables. Leur inévitable présence dans une configuration comme celle illustrée ici suggère que l'hypothèse **H4** *devrait être affaiblie, et autoriser les murs blancs, de façon à ne pas exclure trop de dynamiques intéressantes. En dimension supérieure, toutefois, des configurations impliquant un ou plusieurs cycles peuvent être construites sans faire apparaître de mur blanc.*

L'absence d'injectivité de ϕ est un défaut inévitable, dû au fait que les ensembles $D_{\mathbf{a}}$, images réciproques de ϕ, ne sont en général pas réduits à un point. La non surjectivité, d'autre part, signifie que certains chemins infinis dans $\mathsf{GT}_{\mathtt{a}}$ ne correspondent pas à une trajectoire de $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$. Ayant déjà remarqué au chapitre 4 que certains ensembles $D_{\mathbf{a}}$ peuvent être vides pour $\mathbf{a}$ de longueur finie, l'existence de trajectoires artefactuelles dans $(\Sigma_{\mathtt{a}}, \sigma)$ n'est aucunement surprenante. Il semble intéressant, par contre, d'étudier l'ensemble $\phi(\mathscr{D}) \subsetneq \Sigma_{\mathtt{a}}^{[2]}$, et l'action de l'opérateur σ sur cet ensemble. En effet, $\phi(\mathscr{D})$ est par construction l'ensemble des éléments de $\Sigma_{\mathtt{a}}^{[2]}$ qui codent une trajectoire de $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$. On appelera donc *trajectoires admissibles* (pour le système affine par morceaux caractérisé par Γ et Λ) les éléments de $\phi(\mathscr{D})$.
Avant tout autre développement, il n'est possible d'étudier des trajectoires dans $\phi(\mathscr{D})$ que si cet ensemble est un sous-décalage de $\Sigma_{\mathtt{a}}^{[2]}$, i.e. s'il est σ-invariant et fermé. Comme il est rappelé dans l'annexe B, ceci est équivalent au fait que $\phi(\mathscr{D})$ est un sous-ensemble de $\Sigma_{\mathtt{a}}^{[2]}$ caractérisé par une collection de mots interdits. Or d'après la proposition 6.1, $\phi(\mathscr{D})$ est l'image par β_2 de l'ensemble des mots infinis $\mathbf{a}$ tels que $D_{\mathbf{a}}^{\infty} \neq \varnothing$. Ainsi, les mots interdits dans $\phi(\mathscr{D})$ sont ceux pour lesquels le domaine associé $D_{\mathbf{a}}^{\infty}$, composante connexe de $\mathscr{D}$, est vide. Si $D_{\mathbf{a}}^{k} = \varnothing$ pour un entier k, le mot $a^0 \dots a^k$ est interdit dans $\phi(\mathscr{D})$. Si en revanche pour tout entier k, l'ensemble $D_{\mathbf{a}}^{k}$ est non vide, mais que $D_{\mathbf{a}}^{\infty} = \bigcap_k D_{\mathbf{a}}^{k} = \varnothing$, on a un mot infini interdit, ce qui contrevient à la définition d'espace de décalage. Ainsi, $\phi(\mathscr{D})$ est bien σ-invariant d'après (6.3), mais ce n'est généralement pas un fermé de $\Sigma_{\mathtt{a}}^{[2]}$. Le système dynamique que l'on étudie est donc l'action de σ sur l'adhérence $\overline{\phi(\mathscr{D})}$. Cet ensemble est caractérisé dans la proposition ci-dessous, qui corrobore la discussion précédente.

Proposition 6.3.

$$\overline{\phi(\mathscr{D})} = \beta_2\left(\left\{\mathbf{a} \in \Sigma_{\mathtt{a}} \mid \forall k \in \mathbb{N},\ D_{\mathbf{a}}^{k} \neq \varnothing\right\}\right).$$

démonstration.
On raisonne par double inclusion. Montrons d'abord $\subset$.
Partant de la définition $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sup_k \frac{\delta(a^k, b^k)}{2^k}$, on montre facilement l'équivalence suivante :

$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leqslant \varepsilon \iff \forall k \leqslant -\log \varepsilon, \qquad a^k = b^k$$

pour un réel $\varepsilon > 0$ arbitraire, et log le logarithme en base 2.
Soit maintenant $\mathbf{a}$ tel que $\beta_2(\mathbf{a}) \in \overline{\phi(\mathscr{D})}$. Par continuité de β_2, il existe donc une suite $\mathbf{a}_k$ d'éléments de $\beta_2^{-1}(\phi(\mathscr{D}))$, telle que $\rho(\mathbf{a}, \mathbf{a}_k) \to 0$ quand $k \to \infty$. Ceci s'écrit encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geqslant 0,\ \forall k \geqslant N, \qquad \rho(\mathbf{a}, \mathbf{a}_k) \leqslant \varepsilon.$$

Cette dernière inégalité est à son tour équivalente à

$$\forall i \leqslant -\log \varepsilon, \qquad a_k^i = a^i,$$

et donc pour de tels i, $D^i_{\mathbf{a}_k} = D^i_{\mathbf{a}}$. La suite $(\mathbf{a}_k)_k$ étant à valeurs dans $\phi(\mathscr{D})$, on a $D^i_{\mathbf{a}_k} \neq \varnothing$ par la proposition 6.1, ce qui achève de démontrer $\subset$.
On montre maintenant l'inclusion réciproque $\supset$.
Soit donc $\mathbf{a} \in \Sigma_{\mathtt{a}}$, tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k_{\mathbf{a}} \neq \varnothing$. Deux cas se présentent. Si $D^\infty_{\mathbf{a}} \neq \varnothing$, alors par la proposition 6.1 on obtient $\beta_2(\mathbf{a}) \in \phi(\mathscr{D}) \subset \overline{\phi(\mathscr{D})}$. Si par contre $D^\infty_{\mathbf{a}} = \varnothing$, l'hypothèse de non vacuité des domaines $D^k_{\mathbf{a}}$, ainsi que leur définition, nous assurent de l'existence d'une suite $(x^k)_k$ d'éléments de $\mathscr{D}$ dont les images par ϕ, notées $\epsilon^k = \phi(x^k) \in \phi(\mathscr{D})$ vérifient :

$$\forall i \leqslant k, \qquad \epsilon^i_k = (\beta_2(\mathbf{a}))_i \,.$$

Alors au moyen de l'équivalence donnée au début de cette démonstration, on déduit que $\rho(\beta_2(\mathbf{a}), \epsilon_k) \to 0$ quand $k \to \infty$. On a donc bien $\beta_2(\mathbf{a}) \in \overline{\phi(\mathscr{D})}$. □

On a donc maintenant un système dynamique symbolique $(\overline{\phi(\mathscr{D})}, \sigma)$, qui est un sous-décalage de $(\Sigma^{[2]}_{\mathtt{a}}, \sigma)$. Comme on l'a vu, ϕ n'est pas surjective en général, et on a donc affaire à un sous-décalage strict. De ceci, on peut déduie l'inégalité large

$$h\left(\overline{\phi(\mathscr{D})}, \sigma\right) \leqslant h\left(\Sigma^{[2]}_{\mathtt{a}}, \sigma\right) = h\left(\Sigma_{\mathtt{a}}, \sigma\right)$$

sur les entropies topologiques des deux systèmes. Nous allons améliorer cette comparaison dans la section qui suit.

6.2 Comparaison des entropies topologiques

Nous allons montrer dans cette section que lorsque le graphe de transitions asynchrones $\mathsf{GT}_{\mathtt{a}}$ contient un sous-graphe incluant plusieurs cycles d'intersection non vide, et que ce sous-graphe est la structure «la plus complexe» contenue dans $\mathsf{GT}_{\mathtt{a}}$, on, en fait une inégalité stricte entre l'entropie topologique de $(\Sigma^{[2]}_{\mathtt{a}}, \sigma)$ et celle des dynamiques admissibles pour un réseau affine par morceaux. La démonstration de ce résultat requiert un lemme. Il est démontré dans [86] en tant que téhorème 4.4.7, p.123. On rappelle que μ_A désigne la valeur propre de Perron d'une matrice A à coefficients positifs (voir annexe B). Cette valeur propre est le maximum des valeurs propres dominantes des composantes irréductibles de A. Alors, on sait que l'entropie du système dynamique symbolique induit par la graphe orienté de matrice d'adjacence A est égale à $h = \log \mu_A$.

Lemme 6.4. *Soient A une matrice irréductible, et $0 \leqslant B \leqslant A$, telle que $B_{ij} < A_{ij}$ pour un couple d'indices i, j. Alors $\mu_B < \mu_A$.*

La notation $B \leqslant A$ signifie que pour tous les indices i, j, on a $B_{ij} \leqslant A_{ij}$.

Rappelons également que lorsque A est la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G, on définit une relation d'équivalence $\leftrightsquigarrow$ par

$$i \leftrightsquigarrow j \iff \exists p, q \in \mathbb{N}, (A^p)_{ij} \neq 0 \text{ et } (A^q)_{ji} \neq 0,$$

i.e. c'est la relation dont les classes d'équivalence sont les composantes fortement connexes de G. Une telle composante peut être soit un sommet seul, soit un cycle, soit une structure

plus complexe composée de plusieurs boucles partageant un sommet au moins. Dans les deux premiers cas, qui ne génèrent que des mots périodiques, on parlera de *composante rationnelle*, et dans le dernier cas de *composante irrationnelle*.
On note $[a]$ la classe d'équivalence d'un sommet a de $\mathsf{GT_a}$ pour la relation $\leftrightsquigarrow$, et on indexe la matrice d'adjacence de $\mathsf{GT_a}$ par l'ensemble $\mathbb{D}$ des sommets, plutôt que par des entiers. Il serait possible de numéroter les éléments de $\mathbb{D}$, et ceci de façon canonique. Néanmoins, une telle numérotation ne facilite pas la lisibilité, et nous l'abandonnons donc.

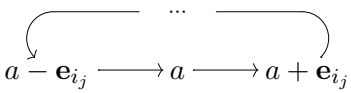
Théorème 6.5.
Soit $\mathsf{GT_a}$ le graphe de transition asynchrone de l'unique système discret $(\mathbb{D}, F)$ associé à un réseau affine par morceaux, de système en temps discret $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$.
Si, dans toute composante fortement connexe irrationnelle de $\mathsf{GT_a}$, il existe un sommet $a \in \mathbb{D}$, tel que pour au moins deux directions $i_1, i_2 \in I_{out}(a)$, on a pour $j \in \{1, 2\}$,

$$a - \mathbf{e}_{i_j} \in [a] \qquad et \qquad a + \mathbf{e}_{i_j} \in [a].$$

Alors,

$$h\left(\overline{\phi(\mathscr{D})}, \sigma\right) < h\left(\Sigma_{\mathsf{a}}, \sigma\right).$$

démonstration.
On suppose sans perte de généralité que $\pm_{i_j} = +$, pour $j \in \{1, 2\}$.
Comme i_1 et i_2 sont deux directions de sortie pour a, et comme **H4** interdit l'existence de murs blancs, on déduit que les couples $(a - \mathbf{e}_{i_j}, a)$ et $(a, a + \mathbf{e}_{i_j})$, pour les deux valeurs de j, sont des arêtes de $\mathsf{GT_a}$. On a donc quatre arêtes, dont les sommets sont tous par hypothèse dans la même composante fortement connexe. Il existe donc un chemin de $a + \mathbf{e}_{i_j}$ à $a - \mathbf{e}_{i_j}$, pour les deux valeurs de j. Le graphe contient donc deux boucles de la forme



ayant (au moins) le sommet a en commun.
Les composantes rationnelles induisent des systèmes dynamiques d'entropie nulle. En effet, elles ne génèrent que des mots périodiques. L'entropie topologique étant toujours une grandeur positive ou nulle, celle de Σ_{a} est donc nécessairement égale à $\log \mu_{A_{[a]}}$, pour le a ci-dessus, ou un autre sommet satisfaisant les mêmes hypothèses. A partir de maintenant, $[a]$ désigne la classe d'équivalence de valeur propre de Perron maximale : $\mu_A = \mu_{A_{[a]}}$.

Alors, le lemme 5.3 nous garantit que l'un au plus des deux domaines $D_{i_1 i_1}(a)$, $D_{i_2 i_2}(a)$ est d'intérieur non vide, avec la notation fournie en (5.1) pour ces domaines. En d'autres termes, l'un des deux mots de longueur 2 :

$$\begin{bmatrix} a - \mathbf{e}_{i_j} \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a + \mathbf{e}_{i_j} \end{bmatrix}, \qquad j \in \{1, 2\},$$

est interdit dans le sous-décalage $\overline{\phi(\mathscr{D})}$. Posons par exemple

$$D_{i_1 i_1} = \varnothing.$$

Cette restriction portant sur les 2-mots, on est amené à considérer $\Sigma_{\mathsf{a}}^{[2]}$ plutôt que le décalage induit par $\mathsf{GT_a}$, c'est-à-dire Σ_{a}. Ces deux espace étant conjugués, ils ont même

entropie. De plus, $\Sigma_{\mathsf{a}}^{[2]}$ peut également être décrit au moyen d'un graphe orienté, dont les sommets sont les arêtes de GT_{a}, et les arêtes sont exactement les couples (e, f) d'arêtes de GT_{a} telles que le sommet initial de f coïncide avec le sommet final de e. On note $\mathsf{GT}_{\mathsf{a}}^{[2]}$ ce nouveau graphe. On peut vérifier sans difficulté que les composantes rationnelles de GT_{a} correspondent à des composantes de même nature dans $\mathsf{GT}_{\mathsf{a}}^{[2]}$, bien que leur nombre puisse différer dans ces deux graphes. De même, les composantes irrationnelles engendrent des composante irrationnelles dans $\mathsf{GT}_{\mathsf{a}}^{[2]}$. On en déduit que dans ce dernier graphe, la composante qui correspond à $[a]$ est donnée par la classe d'équivalence $[(a - \mathbf{e}_{i_j}, a)] = [(a, a + \mathbf{e}_{i_j})]$, où j prend ses deux valeurs.
On note $A^{[2]}$ la matrice d'adjacence de $\mathsf{TG}^{[2]}$. Ses indices sont alors des couples d'arêtes de $\mathcal{E}_{\mathsf{a}}$. Cette matrice admet une composante irréductible dont les indices sont dans la classe associée à $[(a - \mathbf{e}_{i_j}, a)]$. On note $A_{[a]}^{[2]}$ cette sous-matrice irréductible. Ses coefficients d'indices $(a - \mathbf{e}_{i_j}, a), (a, a + \mathbf{e}_{i_j})$ sont égaux à 1, pour les deux valeurs de j. Remplaçant le coefficient d'indices $(a - \mathbf{e}_{i_1}, a), (a, a + \mathbf{e}_{i_1})$ par 0. On obtient une nouvelle matrice $B_{[a]}^{[2]}$. Cette matrice vérifie

$$\mu_{B_{[a]}^{[2]}} < \mu_{A_{[a]}^{[2]}},$$

en vertu du lemme 6.4.
Ayant supposé $D_{i_1 i_1} = \varnothing$, il est clair que $\overline{\phi(\mathscr{D})}$ est un sous-décalage du shift induit par la matrice $B^{[2]}$, obtenue en remplaçant certaines entrées de $A^{[2]}$ par 0 comme décrit ci-dessus, pour toutes les $\leftrightsquigarrow$ classes irrationnelles. Il vient alors,

$$h\left(\overline{\phi(\mathscr{D})}, \sigma\right) \leqslant \log \mu_{B^{[2]}}. \tag{6.4}$$

La valeur propre de Perron de $A^{[2]}$ coïncide avec celle de A, ces deux matrices engendrant des shifts de même entropie. Cette valeur propre est de plus par hypothèse celle de la sous-matrice $A_{[a]}^{[2]}$. La valeur propre de Perron de $B^{[2]}$, d'autre part, est celle de l'une de ses composantes irréductibles $B_{[b]}^{[2]}$, où $[b]$ peut a priori être différent de $[a]$. Dans tous les cas, on a la séquence d'inégalités suivante :

$$\mu_{B^{[2]}} = \mu_{B_{[b]}^{[2]}} < \mu_{A_{[b]}^{[2]}} \leqslant \mu_{A_{[a]}^{[2]}} = \mu_{A^{[2]}} = \mu_A.$$

Par (6.4), on a donc finalement :

$$h\left(\overline{\phi(\mathscr{D})}, \sigma\right) < \log \mu_A = h\left(\Sigma_{\mathsf{a}}, \sigma\right).$$

□

En pratique, le graphe de transition GT_{a} est une structure immense, dont l'exploration complète est impossible. En effet, ce graphe possède 2^n sommets dans le cas binaire, davantage dans le cas non-binaire, et le nombre n de variables est amené à prendre des valeurs de l'ordre de la centaine ou du millier, voire de la dizaine de milliers (l'être humain, par exemple, possède 30000 gènes). Ainsi, on restreint presque toujours l'étude à un sous graphe invariant (c'est-à-dire sans arête sortante), ou dont on sait que la région correspondante dans $\mathscr{D}$ porte un ensemble $\mathcal{M}$-invariant. Par exemple, il est intéressant de considérer une composante fortement connexe de GT_{a}, et d'étudier la dynamique qu'il engendre. Ceci

est notamment à rapprocher de la décomposition de Morse proposée par T. Gedeon [55] pour les systèmes binaires (voir chapitre 3), qui est induite par la décomposition de $\mathsf{GT_a}$ en composantes fortement connexes. Si dans l'une de ces composantes il existe une boîte de la forme donnée dans le théorème 6.5, alors la restriction de la dynamique à la région correspondante de l'espace des phases est strictement plus simple (i.e. son entropie topologique est inférieure) que celle portée par la composante en question.

Plus généralement, le théorème 6.5 signifie que le taux de croissance du nombre de mots générés par $\mathsf{GT_a}$, en fonction de leur longueur, est strictement supérieur à celui des mots admissibles pour un système affine par morceaux de graphe de transition $\mathsf{GT_a}$. Asymptotiquement, la diversité des dynamiques admissibles pour un modèle affine par morceaux est donc négligeable par rapport à celle du graphe donné sans restriction. Autrement dit, le seul graphe $\mathsf{GT_a}$ fournit un très grand nombre de trajectoires artefactuelles. Ce résultat est seulement valide pour des graphes comportant une boîte particulière, ayant deux directions de sortie selon lesquelles il existe également des trajectoires entrantes. Dans son cadre de validité, il s'agit toutefois d'un théorème assez général, dans la mesure où il ne fait aucune hypothèse sur les paramètres du système affine par morceaux, autre que celles liées à la structure du graphe des transitions. En somme, les hypothèses portent sur la seule donnée des ensembles de directions sortantes $I^-(a)$ et $I^+(a)$, pour chacun des indices de boîtes $a \in \mathbb{D}$. De plus, les hypothèses du théorème portent sur la structure locale du graphe de transition, pour en déduire une information sur l'entropie topologique, qui est une caractéristique globale d'un système dynamique.
Une limitation doit encore être mentionnée : le type de boucles imbriquées pour lesquelles le théorème 6.5 est valide ne peut aparaître que pour un système non binaire. En effet, il faut au moins trois états dans chacune des deux directions i_1, i_2 mentionnées dans l'énoncé du théorème. Il est cependant connu que les systèmes non binaires sont bien souvent plus réalistes lorsqu'il s'agit de modéliser des phénomènes biologiques réels.

Un dernier point mérite d'être discuté avant de conclure ce chapitre. Il s'agit de la notion d'entropie topologique. En effet, cette notion est bien définie pour un système dynamique topologique dont l'espace d'états est compact (cf. annexe B). En particulier, sa définition n'est pas problématique pour les systèmes symboliques, et on a même vu un moyen simple de la calculer pour les systèmes sofiques. Ainsi, l'entropie $h\left(\overline{\phi(\mathscr{D})}, \sigma\right)$ que l'on a majorée dans le théorème 6.5 ne pose aucun problème de définition. L'information qu'elle apporte sur le comportement du système $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$ est en revanche plus difficile à déterminer. On a vu en effet que l'application de codage ϕ n'est en général pas injective. On peut donc seulement affirmer que $(\phi(\mathscr{D}), \sigma)$ est un facteur du système $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$. En supposant une entropie bien définie pour ce dernier, on peut seulement déduire du diagramme (6.3) qu'elle est minorée par celle du premier système. Si tel est le cas, l'inégalité fournie par le théorème 6.5 n'apporte donc aucune information supplémentaire sur la dynamique du système $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$. De plus, on a vu que $\phi(\mathscr{D})$ n'est pas fermé en général, et c'est donc sur son adhérence qu'une entropie a été évaluée.
Pour un système tel que $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$ cependant, la définition même d'entropie topologique est délicate. Le domaine $\mathscr{D}$ n'est en effet pas compact. Il serait possible de travailler avec un domaine compact, mais alors l'application ne serait plus continue, mais continue par morceaux. Dans notre contexte, les deux formulations :

(*i*) application continue sur un espace non compact,

(ii) application continue par morceaux sur un espace compact,

sont équivalentes. Ceci nous amène donc à considérer la littérature portant sur les systèmes dynamiques (en temps discret) continus par morceaux, et sur les possibilités de les représenter par des systèmes symboliques. De tels systèmes sont abordés dans la référence [51], déjà citée dans ce chapitre. La définition de l'entropie pour les applications continues par morceaux n'est pas discutée dans [51], mais le codage des trajectoires y est défini comme dans l'annexe B, à partir d'une partition. Celle-ci est donnée par les régions sur lesquelles la restriction de l'application à itérer est continue. C'est exactement le type de codage que nous avons adopté, et c'est également celui employé pour une classe de systèmes plus spécifique est beaucoup étudiée : les isométries par morceaux [68, 69]. Ces derniers systèmes ont fait l'objet de recherches récentes, essentiellement parce qu'ils sont de définition simple, tout en générant des dynamiques complexes, faisant notamment intervenir des régions fractales. Ces régions forment le complémentaire (ou la frontière) de l'ensemble régulier que nous avons appelé $\mathscr{D}$ (ou son analogue dans le contexte des isométries par morceaux), ce qui tend à confirmer que la structure de cet ensemble est complexe. Pour revenir à l'entropie, il est prouvé que de tels systèmes ont une entropie nulle [20] [1]. La définition d'entropie employée dans cette démonstration est, transposée avec nos notations : $h\left(\overline{\phi(\mathscr{D})}, \sigma\right)$. Autrement dit cette dernière est admise dans la littérature comme définition d'entropie topologique de $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$. Si certaines notions d'entropies existent pour des espaces généraux (non nécessairement compacts), elles restent essentiellement théoriques [18, 75, 97], et sont aujourd'hui encore l'objet de recherches. Dans ce contexte, il semble acceptable de considérer $h\left(\overline{\phi(\mathscr{D})}, \sigma\right)$ comme étant *l'entropie topologique d'un système affine par morceaux*. La construction de ϕ détaillée dans ce chapitre, comme la discussion qui précède, montrent toutefois que cette définition d'entropie est en partie discutable.

1. La démonstration proposée dans [20] repose sur une notion de différentielle généralisée. La propriété essentielle est alors qu'une isométrie par morceaux n'admet qu'un nombre fini de telles différentielles. Ceci ne peut s'appliquer aux transformations par morceaux telles que $\mathcal{M}$. Cette impossibilité est heureuse, car une telle extension de la preuve de [20] aurait rendu le théorème 6.5 trivial.

Troisième partie

Etude de systèmes spécifiques

Chapitre 7

Méthodes numériques et algorithmes employés

Dans ce chapitre sont abordées les questions relatives à l'analyse numérique et algorithmique de systèmes affines par morceaux, de la forme (2.14). Les algorithmes usuellement employés pour l'étude de ces systèmes reposent sur la reformulation des équations différentielles (2.14) sous forme d'un système dynamique en temps discret, telle que détaillée au chapitre 4.
Le premier emploi explicite de simulations numériques basées sur cette formulation est dû à Glass et Pasternack [65], à la fin des années 1970. Si de nombreuses études s'appuyant sur le calcul numérique des trajectoires ont été publiées depuis (voir en particulier la section 3.3.4), les méthodes employées n'ont guère varié. L'exception notable est donnée par les traitements récents de systèmes incluant des éléments autorégulés, i.e. des murs noirs (voir section 3.2). L'une de ces méthodes, basée sur la notion de solution d'équations différentielles due à Filippov, a été implémentée par les auteurs qui l'ont introduite dans un outil général d'analyse qualitative de réseaux génétiques [38]. Dans le cadre d'une analyse numérique – et donc quantitative – les solutions au sens de Filippov, qui sont des inclusions différentielles, requièrent des méthodes d'implémentation spécifiques, que nous n'avons pas développées. Les méthodes présentées dans ce chapitre sont donc valides pour simuler et étudier des systèmes sans autorégulation, i.e. soumis à l'hypothèse **H4**.
L'hypothèse **H1** est, on le rappelle, toujours supposée vérifiée.

7.1 Simulation de trajectoires

La simulation de trajectoires d'un système dynamique à n variables, de la forme (2.14), qu'on rappelle :

$$\frac{dx}{dt} = \Gamma(x) - \Lambda x, \tag{7.1}$$

consiste à calculer les itérés de l'application de transition $\mathcal{M}$, définie à la section 2.4.1, et étudiée plus en détails sous **H3** au chapitre 4. Rappelons que dans une boîte B_a, cette application s'écrit :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}^a = \mathcal{M}|_{B_a} : & \partial B_a & \longrightarrow & \partial B_a \\ & x & \longmapsto & \mathcal{M}^a x = f + A(x)(x-f), \end{array} \tag{7.2}$$

où $A(x)$ est la matrice diagonale, dont le terme général admet plusieurs expressions équivalentes (voir section 2.4.1) :

$$\begin{aligned} A_{ii}(x) &= \left(\max_{j \in I(a)} \left(\frac{f_j - \theta_j^{\pm_j}(a)}{f_j - x_j} \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right)^{\lambda_i} \\ &= \left(\max_{j \in I(a)} \left(\alpha_j(x_j) \right)^{\frac{1}{\lambda_j}} \right)^{\lambda_i} \\ &= \left(\alpha_s(x_s) \right)^{\frac{\lambda_i}{\lambda_s}} \\ &= e^{-\lambda_i \tau_s(x)} = e^{-\lambda_i \tau(x)}. \end{aligned}$$

Il ressort de cette formulation que le calcul de cette application se ramène au calcul successif des quantités suivantes :

1 ensemble des directions de sortie $I(a)$.

2 direction effective de sortie depuis le point x : $s = s(x,a) = \arg\max_j \left(\alpha_j(x_j) \right)^{\frac{1}{\lambda_j}}$.

3 expression de la matrice $A(x)$.

Il est clair que chacune de ces étapes requiert au plus un nombre $\propto n$ d'opérations élémentaires. Une fois les trois quantités ci-dessus calculées, l'image d'un point $x^0 \in B_a$ peut être évaluée, au moyen de (7.2). On peut alors calculer l'image par $\mathcal{M}$ du nouveau point obtenu, $x^1 = \mathcal{M}x^0$, et répéter ce processus un nombre fixé de fois.
L'algorithme ainsi obtenu est donc une simple boucle `for`. Deux cas particuliers peuvent toutefois être traités spécifiquement :

- les intersections simultanées de plusieurs,
- les points d'équilibres de la forme $f(a) \in \mathring{B}_a$.

Dans ce dernier cas, il est en effet inutile de poursuivre les calculs : $f(a)$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable, qui est atteint en temps infini par la trajectoire calculée.
Le premier cas correspond à un point du complémentaire de l'ensemble $\mathscr{D}$ défini au chapitre 4, et sur lequel $\mathcal{M}$ est continue. Il se traduit par le fait que la quantité $s(x,a)$ calculée en 2 est un sous-ensemble de $\mathbb{N}_n$ à au moins deux éléments. Dans le contexte de la simulation nous choisissons, comme tous les auteurs, de définir les orbites en ces points, en prenant comme successeur de la boîte courante, la boîte obtenue en mettant à jour toutes les directions de l'ensemble $s(x,a)$.
Ce choix de mise à jour semble le moins arbitraire : toutes les variables x_j, pour $j \in s(x,a)$, atteignent une valeur seuil, et donc un nouvel état qualitatif. Par conséquent, l'évolution

qualitative – la transition sur le graphe GT – traduit cette évolution simultanée de plusieurs variables. Notons que si de telles transitions sont rares en général, elles se produisent de façon beaucoup plus courante lorsque les systèmes simulés présentent, pour des raisons pratiques, certaines symétries. Ainsi, elles se produisent par exemple assez fréquemment avec des systèmes booléens (voir note de bas de page 9 du chapitre 3).

Un algorithme simple peut ainsi être proposé pour le calcul d'un trajectoire dans un système dont les fonctions taux de production Γ, et point focal f sont supposées connues, ainsi que la matrice Λ et les valeurs de seuils Θ_i. Il accepte une condition initiale x^0 et un nombre maximal d'itérations en entrée, et retourne les intersections successives de l'orbite issue de x^0 avec des murs.

Entrée :	$x \in \mathbb{R}^n$, nbiter.
Sortie :	$X \in \mathbb{R}^{n\times \texttt{nbiter}}$, a$\in \mathbb{D}^{\texttt{nbiter}}$, $T \in \mathbb{R}^{\texttt{nbiter}}$.
Initialisation	% Evaluer a[0] tel que $x \in B_{\texttt{a[0]}}$. a[0]$\leftarrow \mathbf{d}(x)$. $X[0] \leftarrow x$.
Pour	$i = 1 \cdots$ nbiter, % Effectuer les étapes (1) à (3), % directions de sortie potentielles : • $S \leftarrow \left\{ j \mid f_j(\texttt{a[i-1]}) \notin]\theta_j^-(\texttt{a[i-1]}), \theta_j^+(\texttt{a[i-1]})[\right\}$ Si $S = \varnothing$ Print "Point d'équilibre dans $\cdots$ $\cdots$ la boîte d'indice " a[i-1] Sortie de la boucle Pour FinSi % temps de sortie et directions de sortie effectives : • $T[i] \leftarrow \min_{s\in S} \tau_s(x_s)$ • $S' \leftarrow \arg\min_{s\in S} \tau_s(x_s)$ % boîte suivante : • $a[i] \leftarrow a + \sum_{j\in S'} \pm_j \mathbf{e}_j$ $X[i] \leftarrow f\big(\texttt{a[i-1]}\big) + \exp\big(-\Lambda T[i]\big)\Big(X[i-1] - f\big(\texttt{a[i-1]}\big)\Big)$
FinPour	

TAB. 7.1 – *Algorithme de calcul des trajectoires d'un système affine par morceaux. Remarquons que le temps de sortie est égal à $\tau_j(x_j)$, pour tout j faisant partie des directions de sortie effectives, dont l'ensemble est stocké dans la variable S'.*

Plusieurs remarques peuvent être faites sur l'algorithme proposé, et écrit en pseudo-code dans le tableau 7.1.
Tout d'abord, seules les intersections de murs sont calculées. Dans le cas où Λ est propor-

tionnelle à l'identité, i.e. sous **H3**, les trajectoires dans chaque boîte sont des segments rectilignes. Ainsi, la donnée des deux intersections d'une trajectoire avec ∂B_a détermine entièrement la trajectoire dans B_a, sous cette hypothèse. Dans ce cas néanmoins, la forme particulière des itérés de $\mathcal{M}$, présentée dans l'équation (4.13), proposition 4.3, suggère l'emploi d'une procédure spécifique. En effet, on rappelle que $\mathcal{M}^k$ s'écrit dans ce cas, en usant de l'abréviation $\Delta_{\iota_k} = \theta_{\iota_k}^{\pm_{\iota_k}} - f_{\iota_k}^k$:

$$\mathcal{M}^k x = f^k + \Delta_{\iota_k} \frac{F^{(k)}(x - f^1)}{\langle F^{(k)}(x - f^1), \mathbf{e}_{\iota_k} \rangle}, \tag{7.3}$$

sur un domaine où les orbites suivent la même séquence de boîtes, et avec une matrice $F^{(k)}$ définie récursivement par

$$F^{(1)} = Id \qquad \text{et} \qquad F^{(k+1)} = \Big[(f^k - f^{k+1}) \mathbf{e}_{\iota_k}^T + \Delta_{\iota_k} Id \Big] F^{(k)},\ k \geqslant 1. \tag{7.4}$$

L'analyse des orbites périodiques est de plus équivalente à l'étude des valeurs propres d'une matrice de la forme ci-dessus.
Dans le cadre d'une étude sous l'hypothèse **H3**, il semble donc judicieux, dans l'algorithme 7.1, d'utiliser la formule (7.4) à chaque pas de la boucle `Pour`, et d'en déduire l'intersection de mur $X[i]$ à partir de l'équation (7.3), plutôt qu'en utilisant la formule du flot dans la boîte courante.
La matrice $F^{(\texttt{nbiter})}$ pourrait également être ajoutée aux sorties de l'algorithme, avec ses intermédiaires $F^{(k)}$, pour $k \leqslant$ `nbiter`. Ces $F^{(k)}$ peuvent en effet être réemployés ultérieurement pour l'analyse des orbites périodiques, dont il est question dans la section suivante.

Sans cette hypothèse **H3** les sorties X, T et `a` de l'algorithme permettent de calculer a posteriori tout point de l'orbite de x via la formule explicite du flot dans une boîte :

$$x(t) = f(\texttt{a[i]}) + \exp\big(-\Lambda\,(t - T[i])\big)\Big(X[i] - f(\texttt{a[i]})\Big),$$

où i est tel que $T[i]$ est la plus grande valeur du tableau T inférieure à t.

Les deux versions de l'algorithme, l'une dédiée aux systèmes satisfaisant **H3** et l'autre valide quelle que soit la matrice Λ, ont été implémentées en Matlab. Leur utilisation sera illustrée sur des exemples dans le chapitre 8. Notons ici, que conformément à la remarque 2.16, le choix d'une matrice Λ constante par morceaux, et non constante, n'a pas d'influence sur le bon fonctionnement de l'algorithme 7.1. Ainsi, nos implémentations permettent l'emploi de matrices constantes par morceaux.

7.2 Détection de cycles, analyse de stabilité

Dans le cas où des systèmes à taux de dégradation uniformes sont étudiés, les résultats de la section 4.3 peuvent être utilisés de façon pratique. Si cette hypothèse n'est pas satisfaite, il peut tout de même être intéressant d'étudier les orbites périodiques éventuelles de façon numérique. Il n'existe toutefois pas d'expression simple de l'application de premier retour dans ce contexte, ce qui exclut le type de traitement spécifique que permettent les

systèmes où $\Lambda = \lambda Id$. Nous supposons donc dans cette section que **H3** est satisfaite.
Le principe d'analyse de telles orbites est assez systématique et naturel, allant de l'échelle d'observation la plus grossière à l'échelle la plus fine :

(1) à partir de simulations, rechercher une séquence périodique dans la liste de boîtes, a fournie par l'algorithme 7.1.

(2) à partir d'une séquence a périodique de période ℓ, évaluer l'application de premier retour $\mathcal{M}^\ell$, équation (7.3).

(3) calculer les valeurs et vecteurs propres de la matrice $F^{(\ell+1)}$.

Une fois l'étape (3) effectuée, on peut appliquer à la lettre les propositions de la section 4.3. Ainsi, si un vecteur propre v est associé à une valeur propre μ telle que $\dfrac{\mu}{\Delta} > 1$, il fournit un point fixe potentiel de $\mathcal{M}^\ell$, d'après la proposition 4.8. Il reste à vérifier que ce point, d'expression

$$x^* = f^1 + \frac{\mu}{\langle F^{(\ell)} v, \mathbf{e}_{\iota_0} \rangle} v,$$

appartient au domaine $D_{\mathbf{a}}$. Cette vérification est effectuée à partir des matrices $F^{(j)}$ et des quantités Δ_{ι_j}, pour les $j \leqslant \ell$ tels que a^j admet plusieurs directions de sortie. En vertu de la proposition 4.6, l'appartenance à $D_{\mathbf{a}}$ est en effet équivalente à la satisfaction d'un ensemble d'inégalités linéaires, de la forme :

$$\forall i \in I_{out}(a^j) \setminus \{\iota_j\}, \qquad \frac{1}{\Delta_i \Delta_{\iota_1} \dots \Delta_{\iota_j}} \left[\Delta_{\iota_j} \mathbf{e}_i^T - \Delta_i \mathbf{e}_{\iota_j}^T \right] F^{(j)} (x^* - f^1) > 0,$$

pour j parcourant la séquence périodique $a^0 \cdots a^{\ell-1} a^\ell = a^0$ détectée en (2). Ainsi, il faut avoir évalué Δ_{ι_ℓ} et $F^{(\ell)}$ à l'étape (2), ainsi que $F^{(\ell+1)}$ à l'étape (3). Il faut également évaluer les intermédiaires Δ_{ι_j} et $F^{(j)}$ pour vérifier l'appartenance à $D_{\mathbf{a}}$.
Toutes ces valeurs sont comme on l'a vu nécessairement calculées par l'algorithme 7.1. Il suffit donc de les stocker en mémoire lors du parcours de la boucle principale de cet algorithme, pour obtenir toutes les données utiles à l'analyse des orbites périodiques.

Après avoir vérifé $x^* \in D_{\mathbf{a}}$, on peut conclure sur la stabilité du point fixe x^*, selon que μ est une valeur propre dominante ou non.

En résumé, toutes les quantités nécessaires à la localisation et à l'analyse des points fixes d'une application de Poincaré sont donc calculables simplement à partir des sorties de l'algorithme 7.1. Ici encore les routines Matlab adéquates ont été implémentées, et nous renvoyons au chapitre suivant, pour une illustration sur des exemples.

7.3 Génération de réseaux aléatoires

Comme on a pu le voir à la section 3.3.4, il est assez souvent fait usage de réseaux aléatoires, pour étudier certaines propriétés générales de classes de modèles. L'immense nombre de réseaux qualitativement distincts (voir section 3.3.4) proscrit en effet toute

exhaustivité, ce qui suggère l'emploi de méthodes statistiques. Celles-ci sont donc fréquemment appliquées à des jeux de simulations, obtenus pour des ensembles de systèmes générés aléatoirement. Les méthodes employées pour construire de tels jeux de données varient selon les résultats statistiques désirés, et doivent être décrites avec quelques détails. A notre connaissance, les seules études statistiques de ce type portent sur des systèmes de Glass soumis à des hypothèses restrictives assez fortes [66, 77, 96], e.g. à des systèmes de Glass booléens (voir note de bas de page 9, chapitre 3).
La raison essentielle de ces restrictions provient de la très grande taille du graphe de transition GT d'un réseau affine par morceaux de dimension élevée : le nombre de sommets de ce graphe augmente exponentiellement avec la dimension. Or le caractère qualitatif, ainsi que l'existence d'algorithmes de simulation peu coûteux (voir section précédente), conduisent naturellement à étudier des systèmes en grandes dimensions. Comme une application taux de production Γ est déterminée par l'application $\widetilde{\Gamma} : \mathbb{D} \to \bigcup_a B_a$ (voir section 2.4.2), il est nécessaire de connaître les valeurs de cette application en tout point de $\mathbb{D}$, i.e. pour chaque sommet de GT. Il est par conséquent impossible, en pratique, de représenter une telle application, à moins de la soumettre à des hypothèses simplificatrices. Il est usuel, bien sûr, de considérer des hypothèses motivées par des considérations de nature physique ou biologique. Certaines restrictions toutefois, comme l'absence d'autorégulation, s'expliquent essentiellement par un souci de simplification mathématique ou algorithmique, et ne correspondent pas aux phénomènes réels.

On peut résumer l'approche la plus courante pour créer un réseau aléatoire, dont les premiers emplois sont dus à S. Kauffman [80], dans le cadre de réseaux discrets, synchrones et booléens. L'hypothèse sous-jacente à cette technique est parfaitement justifiée par les connaissances actuelles sur les réseaux génétiques réels : elle consiste à supposer que la connectivité globale du réseau [1] est bornée, et plutôt faible. En pratique, on suppose couramment que cette connectivité est de l'ordre de 2 ou 3 pour des réseaux réels.
Ainsi, supposant une connectivité K, on procède en deux étapes. Tout d'abord, K entrées sont choisies aléatoirement pour chaque variable, parmi les n possibles (ou $n-1$ si l'autorégulation est exclue). Ensuite, une application booléenne $\{0,1\}^K \to \{0,1\}$ est choisie pour chacune des composantes de $\mathbf{d} \circ \widetilde{\Gamma}$. Le nombre de valeurs booléennes à générer est donc $n2^K = O(n)$, au lieu de $n2^n$ pour une application booléenne quelconque [2]. Pour K faible, les valeurs en question peuvent donc être stockées en mémoire, même lorsque n atteint des valeurs de l'ordre de la centaine ou du millier, ce qui est inconcevable dans le cas général.
Chaque fonction booléenne ainsi générée est exactement l'analogue discret F d'une application Γ, décrit à la section 2.4.2. Une infinité de fonctions Γ fournit la même application discrète F, comme on l'a vu dans cette section. Le choix d'un telle fonction revient à sélectionner une valeur $\Gamma|_{\mathring{B}_a} = \widetilde{\Gamma}(a)$ pour chaque $a \in \mathbb{D}$, cette valeur étant à choisir dans la boîte d'indice $F(a)$. Ceci est habituellement contourné en se restreignant à la classe des réseaux booléens. En effet pour ceux-ci, la valeur de $\widetilde{\Gamma}(a) \in \{-1,1\}^n$ est uniquement déterminée par celle de la boîte $B_{F(a)}$ qui la contient. Nous avons plutôt opté, dans nos propres simulations, pour un choix aléatoire de chaque valeur $\widetilde{\Gamma}(a)$, soumis à une loi de répartition uniforme dans la boîte $B_{F(a)}$.
Ce choix est principalement justifié par le fait que les réseaux que nous avons traités ne

1. Le nombre de variables dont dépendent effectivement les composantes γ_i de l'application taux de production Γ, ou de façon équivalente le degré entrant du graphe d'interactions GI.

2. Que cette quantité soit un $O(n)$ est bien sûr vérifié uniquement lorsque $K \ll n$.

sont pas binaires. Il eût été possible d'adopter une convention, prenant par exemple l'isobarycentre des sommets de la boîte $B_{F(a)}$, pour chaque $\widetilde{\Gamma}(a)$. Ce choix n'est en effet guère plus arbitraire que celui de la classe booléenne. Pour cette dernière néanmoins, l'unicité du seuil dans chaque direction conduit assez naturellement à le translater en 0, ne faisant que déplacer une symétrie intrinsèque au système. En présence de plusieurs seuils, les longueurs des côtés de boîtes, de la forme $\theta_i^+(a) - \theta_i^-(a)$, sont variées. Ainsi, pour conduire à une certaine uniformité, il faudrait non seulement translater, mais également renormaliser par homothétie la taille des différentes boîtes. Une telle procédure semble d'une complexité de mise en œuvre comparable à celle de la simulation d'une répartition uniforme (qui est pré-programmée dans la majorité des logiciels de calcul numérique). L'absence d'études portant sur les systèmes non binaires dans la littérature, et donc de résultats auxquels comparer directement les nôtres, a finalement conduit à ce choix de valeurs $\widetilde{\Gamma}(a)$ suivant une loi uniforme.

Une méthode a été implémentée en Matlab, afin de générer une fonction Γ aléatoire, utilisable par l'algorithme 7.1 et sa variante adaptée aux systèmes sous **H3**. En pratique, on génère la fonction $\widetilde{\Gamma} : \mathbb{D} \to \bigcup_a B_a$, (voir équation (2.23)), d'où l'on déduit $\Gamma = \widetilde{\Gamma} \circ \mathbf{d}$ de façon immédiate.
Cette méthode génère une application de connectivité K fixée, choisie assez faible (lorsque n prend des valeurs élevées). Ceci est décrit dans le paragraphe précédent dans le cas binaire, la généralisation au cas non binaire se fait sans difficulté : un ensemble $I(i) \subset \mathbb{N}_n$ de K entrées est généré pour chaque composante $\widetilde{\Gamma}_i$, comme dans le cas booléen, et l'on génère ensuite une application d'un ensemble fini dans un autre, de la forme

$$\prod_{\jmath \in I(i)} \mathbb{N}_{q_\jmath} \to \mathbb{N}_{q_i},$$

au lieu d'une application booléenne $\{0,1\}^K \to \{0,1\}$. Dans, les deux cas, il s'agit de générer un tableau d'entiers, et il n'y a donc pas de différence de fond entre les cas booléen, et à plus de deux états. Chaque entrée de ce tableau, repérée par un élément de $(\bar{a}_i)_i \in \prod_{\jmath \in I(i)} \mathbb{N}_{q_\jmath}$, est un entier $b_i \in \mathbb{N}_{q_i}$, auquel on associe une valeur aléatoire $\bar{\gamma}_i$ dans $[\theta_{ib_i-1}, \theta_{ib_i}]$ (avec une loi de repartition uniforme). Alors, pour tout $a \in \mathbb{D}$ dont les coordonnées dans $I(i)$ sont fixées à la valeur $\bar{a}_i$, la fonction $\widetilde{\Gamma}_i$ prend la valeur $\bar{\gamma}_i$ en a. Cette procédure est décrite dans la table 7.2. Notons que certaines restrictions doivent être imposées aux valeurs notées $\bar{\gamma}_i$, pour respecter l'hypothèse **H1** : elles doivent être hors de $\lambda_i \Theta_i$ (où Θ_i est l'ensemble des seuils dans la direction i, équation (2.3)). Ceci n'apparaît pas explicitement dans la table 7.2, mais a été pris en compte lors de l'implémentation.

La procédure ci-dessus permet de générer une application Γ constante par morceaux, représentée en machine par les tableaux I et $\widetilde{\Gamma}_i$. Ces tableaux contiennent au total

$$nK + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \in I(i)} q_j,$$

nombres entiers ou décimaux. Dans le cas où tous les q_i sont égaux à une valeur q, ce nombre est $n(K + q^K)$, qui est donc linéaire en n lorsque $K \ll n$. L'application Γ ainsi stockée peut être appelée par l'algorithme 7.1, via des appels à la fonction point focal $f = \Lambda^{-1}\Gamma$. Ceci a donné lieu à des jeux de simulations décrits dans le chapitre suivant.

Entrée : $K, n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{D} = \prod_i \mathbb{N}_{q_i}$

Sortie : $I \in (\mathbb{N}_n)^{K \times n}$
$\widetilde{\Gamma}_i : \prod_{\mathrm{j} \in I(i)} \mathbb{N}_{q_j} \to \bigcup_a B_a,$ `pour` $i \in \mathbb{N}_n$

Pour $i = 1 \cdots$ `nbiter,`

`% un ensemble de` K `éléments de` $\mathbb{N}_n$ `est généré.`
$I(i) \leftarrow$ `rand(`$\mathscr{P}_K(\mathbb{N}_n)$`)`

`% un tableau est généré.`
Pour $(\bar{a}_j)_j \in \prod_{\mathrm{j} \in I(i)} \mathbb{N}_{q_j}$

$b_i \leftarrow$ `rand(`$\mathbb{N}_{q_i}$`)`

$\widetilde{\Gamma}_i$`[`$(\bar{a}_j)_j$`]`$\leftarrow$ `rand(`$[\theta_{ib_i-1}, \theta_{ib_i}]$`)`

FinPour

FinPour

TAB. 7.2 – *Génération d'une application* $\widetilde{\Gamma} : \mathbb{D} \to \bigcup_a B_a$ *aléatoire, de connectivité* K *fixée. Que ce soit sur un ensemble fini, discret, ou sur un ensemble continu, la fonction notée* `rand` *génère un élément aléatoire, suivant une loi de répartition uniforme. De telles fonctions sont notamment disponibles en Matlab. Notons que pour exclure l'autorégulation, i.e. satisfaire* **H4**, *il suffit de générer des ensembles d'entrées* $I(i)$ *ne contenant pas* i.

En pratique, la représentation des composantes $\widetilde{\Gamma}_i$ comme des tableaux à K entrées n'est pas la mise en œuvre la plus simple. En effet, un parcours de ce type de tableau correspond par exemple à K boucles `for` imbriquées. La connectivité K étant une entrée de l'algorithme 7.2, on conçoit qu'une autre implémentation doit être envisagée. Nous avons opté pour une structure de liste, obtenue par un recodage de $\mathbb{D} = \prod_i \mathbb{N}_{q_i}$, qui est un ensemble produit, sur l'ensemble d'entiers $\mathbb{N}_{\#\mathbb{D}}$. Ces deux ensembles finis étant de même cardinal, ils sont en bijection. Une telle bijection peut être donnée explicitement :

$$\begin{array}{rrcl} \Psi : & \mathbb{D} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{N}_{q_i} & \longrightarrow & \mathbb{N}_{\#\mathbb{D}} \\ & a = (a_1 \dots a_n) & \longmapsto & a_n + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} (a_j - 1) \prod_{k>j} q_k. \end{array} \tag{7.5}$$

Dans le cas binaire, tous les q_i sont égaux à 2, et la relation ci-dessus est équivalente au calcul de l'entier dont l'écriture en base 2 est $(a_1 - 1) \dots (a_n - 1)$, les a_i étant à valeur dans $\mathbb{N}_2 = \{1, 2\}$. On a en effet $\prod_{k>j} q_k = 2^{n-j}$, et la formule ci-dessus est donc égale dans ce cas à :

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - 1) 2^{n-j},$$

qui est l'expression habituelle d'un nombre entier en base 2.

De façon plus générale, Ψ peut être vue comme un numérotation des éléments de $\mathbb{D}$, classés selon l'ordre lexicographique. En effet, pour cet ordre, la première occurence de a_j à la place j se fait seulement lorsque les éléments situés aux places $k > j$ ont pris toutes

leurs valeurs $a_j - 1$ fois. Or $a_{j+1} \dots a_n$ peut prendre $q_{j+1} \dots q_n$ valeurs, ce qui permet d'obtenir la somme dans la formule (7.5), en ajoutant bien sûr a_n. Un exemple permettra sans doute de mieux saisir l'action de Ψ sur $\mathbb{D}$.

Exemple 7.1.
On explicite la numérotation Ψ dans le cas $n = 3$, et $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 2$:

$a = a_1a_2a_3$	111	112	121	122	131	132	211	212	221	222	231	232
$\Psi(a)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Dans ce tableau, on voit que a_1 garde la valeur 1 tant que a_2a_3 n'a pas parcouru 1 fois l'ensemble $\mathbb{N}_{q_2} \times \mathbb{N}_{q_3}$, au niveau du trait vertical, ce qui représente $q_2q_3 = 6$ valeurs. Ainsi, la première occurrence $a_1 = 2$ se fait pour $\Psi(a) = (2-1)q_2q_3 + 1 = 7$. De même, a_2 ne prend la valeur 3 que losrque a_3 a parcouru son domaine $\mathbb{N}_2$ deux fois, i.e. pour $\Psi(a) = (3-1)q_3 + 1 = 5$.

Pour chaque ensemble produit $\prod_{j \in I(i)} \mathbb{N}_{q_j}$, on peut définir une application $\Psi^{(i)}$ exactement similaire à celle définie en (7.5) :

$$\Psi^{(i)}(a_{i_1} \dots a_{i_K}) = a_{i_K} + \sum_{j=1}^{K-1} (a_{i_j} - 1) \prod_{m>j} q_{i_m}, \qquad \text{où} \quad I(i) = \{i_1 \dots i_K\}.$$

Grâce à cette fonction, il est possible de stocker les entrées de $\widetilde{\Gamma}_i$ dans une liste

$$L_i = [b_1, b_2, \cdots, b_{q_{i_1} \dots q_{i_K}}].$$

Un appel de $\widetilde{\Gamma}_i$ en un point a dont les coordonnées sont $a_{i_1} \dots a_{i_K}$, pour $I(i) = \{i_1 \dots i_K\}$, est alors équivalent à la sélection de $L_i[\Psi^{(i)}(a_{i_1} \dots a_{i_K})]$.

Chapitre 8
Exemples et résultats

Ce chapitre est consacré à l'étude de simulations numériques et d'exemples, dont la visée principale est d'illustrer les chapitres précédents. Il est divisé en deux sections. Dans la première, les résultats de simulations menées sur des ensembles de réseaux générés aléatoirement sont présentés. Les conclusions qui en découlent sont de nature statistique, et portent essentiellement sur la probabilité d'occurrence des différents types d'attracteurs possibles, parmi l'ensemble des systèmes.
La deuxième section est consacrée à l'étude d'un exemple spécifique, constitué par un système dont le graphe de transition contient une composante fortement connexe irrationnelle, du type défini dans les hypothèses du théorème 6.5. Le but de det exemple est donc principalement d'illustrer ce théorème.
Les hypothèses auxquels sont soumis les systèmes pourront varier. **H1** et **H4** seront systématiquement requises. Tout usage des autres hypothèses sera signalé dans le texte, lorsque nécessaire.

8.1 Résultats de simulations représentatifs

On a vu dans le chapitre précédent une procédure permettant de générer aléatoirement une application Γ constante par morceaux, et donc un système dynamique affine par morceaux de la forme traitée dans ce mémoire :

$$\frac{dx}{dt} = \Gamma(x) - \Lambda x.$$

Dans la partie 3.3.4, on a également mentionné différentes études statistiques parues au sujet des réseaux de la forme ci-dessus [12, 44, 66, 77, 96]. Toutes ces études concernent des systèmes binaires, c'est-à-dire tels que pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $q_i = 2$. L'une des principales questions abordées dans ces études est celle de l'influence relative de la connectivité K et du nombre de variables n sur les dynamiques observables. A titre d'exemple, la répartition des différents types d'attracteurs du jeu de un million de réseaux à 4 variables simulés

dans [44] est rappelée sur le tableau de l'équation(3.14).

Les attracteurs présents dans les systèmes binaires et non binaires étant de même nature, et les outils servant à les caractériser étant également très similaires – notamment en ce qui concerne l'analyse des orbites périodiques – il nous a semblé intéressant de mener une étude sur des ensembles aléatoires de réseaux affines par morceaux non binaires, afin de comparer les dynamiques «en moyenne» de ces réseaux.
La génération aléatoire de réseaux est donnée par l'algorithme de la table 7.2, et la matrice des taux de dégradation Λ a toujours été choisie égale à l'identité. Etant donné un système ainsi généré, il est possible de calculer des trajectoires de ce système grâce à l'algorithme 7.1. Comme on l'a vu à la section 3.3, les attracteurs peuvent être classifiés sommairement en quatre classes représentées sur la figure 8.1 :

- •) points d'équilibres asymptotiquement stables, de la forme $f(a) \in \mathring{B}_a$, que nous appellerons *nœuds*[1],
- •) foyers, situés à l'intersection de plusieurs murs,
- •) orbites périodiques,
- •) autres.

Les constructions de la section 4.3 sur les orbites périodiques peuvent, comme on l'a vu au chapitre précédent, être implémentées et appliquées à des exemples numériques. De même, les nœuds sont détectés directement par l'algorithme 7.1. Enfin, les foyers peuvent être repérés automatiquement avec l'ordre de précision que permettent les machines actuelles, en vérifiant que la norme $\mathcal{M}^{k+1}x - \mathcal{M}^k x$ tend vers 0 avec k, le long d'une orbite $\left\{\mathcal{M}^k x\right\}$ parcourant une séquence périodique de boîtes. Seules les orbites «autres » ne peuvent être caractérisées de façon automatique.
De telles orbites sont généralement considérées comme chaotiques. Il n'est pas exclu toutefois que ces trajectoires soient en fait périodiques, de période très longue, en termes de nombre de boîtes traversées. Elles peuvent également être quasi-périodique[2], ce qui est un phénomène difficile à caractériser numériquement. Ceci explique pourquoi de telles orbites sont habituellement confondues avec des trajectoires chaotiques.

Dans le même esprit que les travaux mentionnés à la section 3.3, nous avons mené quelques études numériques sur des ensembles de réseaux générés aléatoirement, selon la procédure 7.2. La différence essentielle avec les études déjà parues tient au fait que les réseaux générés et analysés ne sont pas binaires. Pour toutes nos simulations, on a choisi des systèmes à trois états discrets par direction : $\mathbb{D} = \prod_i \mathbb{N}_3$. De tels systèmes seront dits *ternaires* dans la suite.

La table (8.1) ci-dessous récapitule les résultats obtenus pour des systèmes dans $\mathbb{R}^4$, sans auto-régulation, pour les différentes connectivités K possibles. Pour chaque valeur de K, 10000 réseaux ont été générés, puis une condition initiale aléatoire a été calculée. L'algorithme 7.1 a été appliqué à cette condition initiale pour 1000 pas de temps, ou moins si un nœud était rencontré. Les itérés calculés ont ensuite été envoyés en entrée d'une

1. En accord avec l'emploi du terme *node* dans la littérature anglophone, notamment [44].

2. Une orbite est dite *quasi-périodique* si elle s'écrit comme somme d'orbites périodiques dont les périodes sont incommensurables [23]. Une telle écriture n'est pas unique, mais le nombre p des orbites périodiques apparaissant dans la somme est uniquement déterminé. De telles trajectoires sont alors portées par un p-tore, qui est un ensemble ω-limite du système dynamique dont elles sont solutions.

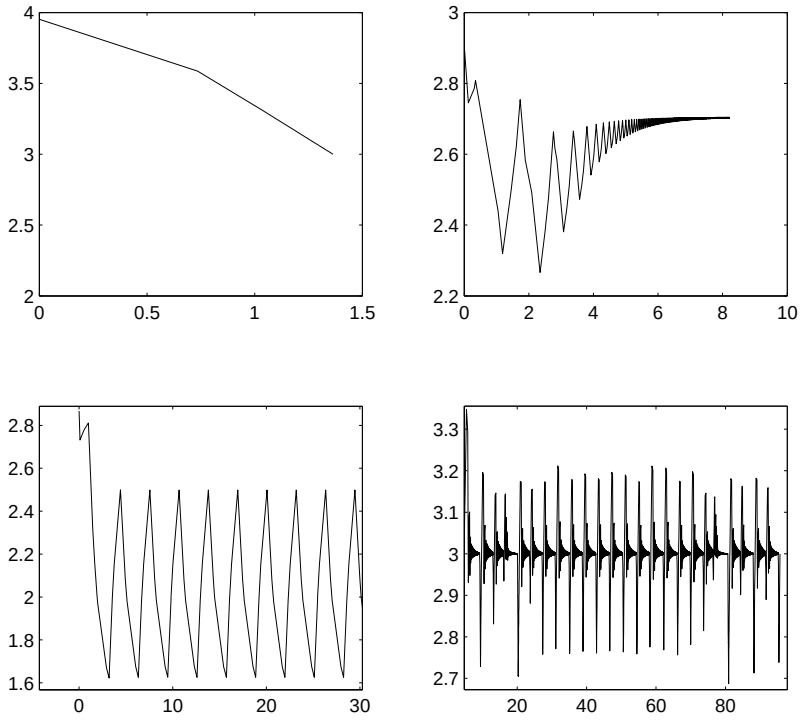


FIG. 8.1 – *Les quatre types d'orbites rencontrés, ici obtenus dans des systèmes à* 4 *variables. Dans chaque cas, la première des quatre coordonnées du vecteur d'états est représentée en fonction du temps. En haut à gauche, un noeud : l'algorithme s'arrête dès que le noeud est détecté, et il faut donc ajouter une branche d'exponentielle tendant vers la limite* f_1 *pour présenter l'orbite entière. En haut à droite, un foyer stable. En bas à gauche, un cycle limite stable. En bas à droite, aucune sous-séquence périodique n'est détectée parmi 10 000 itérations de l'algorithme 7.1.*

routine d'analyse d'orbites périodiques, cf. section 7.2. Si au bout de ces 1000 itérations, aucun attracteur n'était détecté, 4000 itérations supplémentaires ont été calculées, puis envoyées à leur tour en entrée de la routine précédente. Les nombres d'attracteurs de chaque type ainsi détectés sont alors répartis ainsi :

K	1	2	3
nœuds	8799	5728	4514
foyers	949	2367	2336
orbites périodiques	873	2007	1996
autres	100	253	260

(8.1)

Ces résultats doivent être discutés, notamment en comparaison de la table (3.14), reprise de [44], et qui concerne on le rappelle 1 million de réseaux booléens[3], avec $n = 4$ et $K = 2$. En effet, si les nombres d'attracteurs sont bien ordonnés de la même façon – nœuds, foyers, cycles, autres – les proportions ne sont pas identiques. En particulier, le nombre d'attracteurs périodiques est assez nettement supérieur à ce qui est observé dans le cas de réseaux booléens, de même que le nombre d'attracteurs indéterminés.

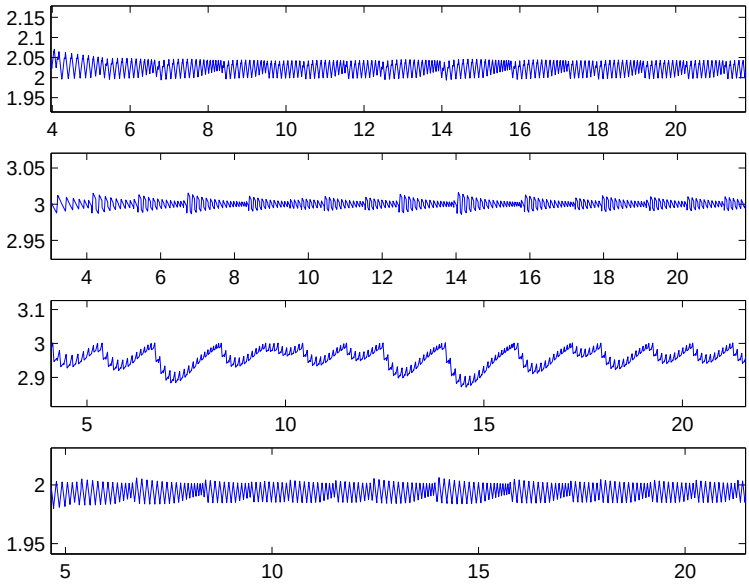


FIG. 8.2 – *Une orbite récurrente non périodique apparaissant dans un réseau de dimension* 4. *Aucun cycle limite n'est détecté dans cette portion de trajectoire calculée en Matlab. La nature exacte de l'orbite ainsi simulée reste indéterminée : régime transitoire précédant un point d'équilibre ou un cycle limite, orbite quasi-périodique, chaos ?*

En ce qui concerne ces derniers, un fait notable est le nombre d'itérations valant au plus 5000 qui ont été calculées pour chaque condition initiale, contre 30000 dans [44]. Ceci, ajouté au fait que des réseaux non binaires sont susceptibles de donner lieu à des régimes transitoires plus longs, de même qu'à des orbites périodiques plus longues, suggère que

3. On rappelle que les réseaux booléens sont définis par l'existence d'un seul seuil par direction, fixé à 0, par des points focaux à valeurs dans $\{-1, +1\}^n$, et des taux de dégradation tous égaux à 1.

certaines trajectoires classées «autres» dans notre étude ne sont pas chaotiques. Ceci, déjà inévitable dans le cas booléen doit se produire avec des proportions plus importantes dans notre contexte. Toutefois, l'existence d'orbites présentant de nombreuses caractéristiques du chaos est, tout comme dans le cas binaire, avérée. La figure 8.2 fournit l'exemple d'une trajectoire classée «autre» dans le tableau (8.1).

Concernant le plus grand nombre d'orbites périodiques, plusieurs facteurs permettent de l'expliquer. Tout d'abord, le fait de traiter des réseaux non binaires est bien sûr déterminant. En effet, les foyers apparaissent à l'intersection de plusieurs boîtes formant une boucle dans le graphe de transitions. Dans le cas non binaire, des boucles dans ce graphe peuvent traverser des séquences de boîtes dont deux sont d'intersection vide. Une telle boucle donnera donc lieu à un trajectoire périodique, plutôt qu'à un foyer. Ceci tend à augmenter la probabilité d'occurence d'orbites périodiques dans les réseaux non binaires. Cette analyse est corroborée par l'étude d'orbites périodiques spécifiques, qui s'avèrent assez complexe, du fait des multiples seuils traversés dans chaque direction. La figure 8.3 représente une trajectoire périodique apparaissant dans un système ternaire de $\mathbb{R}^4$. On voit que cette orbite traverse plusieurs seuils dans les différentes directions, un phénomène impossible dans le contexte des systèmes binaires.

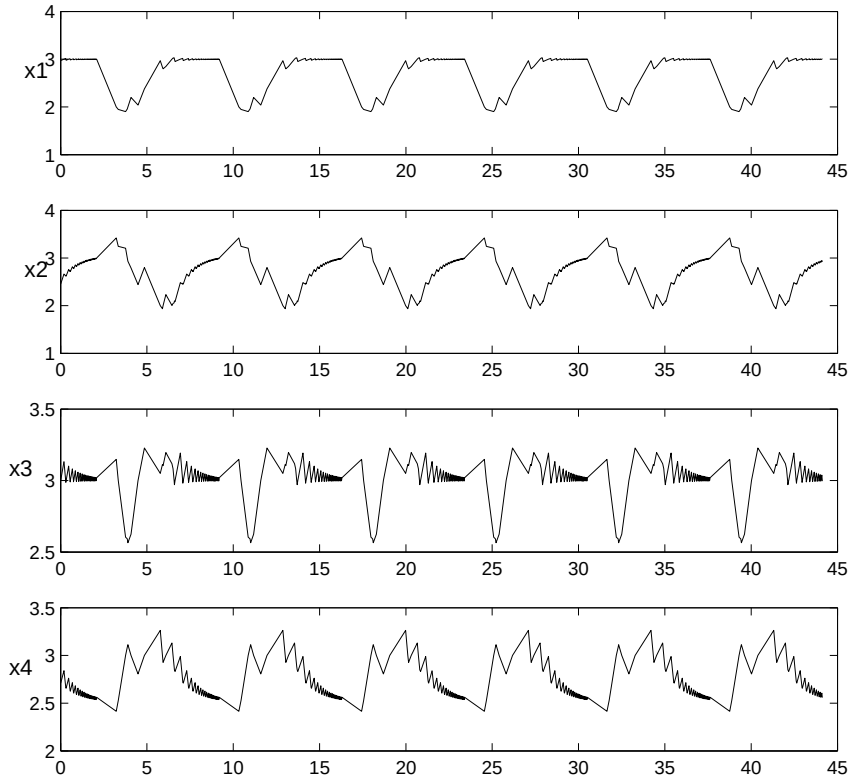


FIG. 8.3 – *Une orbite périodique stable d'un réseau ternaire dans $\mathbb{R}^4$: chaque coordonnée est représentée en fonction du temps. Ce cycle travers 94 boîtes successives. Les seuils sont 2 et 3 dans chaque direction. Un fait intéressant est que certaines boîtes sont traversées plusieurs fois par cette orbite, qui est donc composée de plusieurs boucles imbriquées dans* GT.

Remarquons que la longueur importante du cycle de la figure 8.3 n'est aucunement étonnante, des cycles très longs (plusieurs centaines de boîtes) ayant été observés dans les réseaux booléens [44].
Par ailleurs, la répartition uniforme des points focaux au sein des boîtes lors de la génération d'un réseau aléatoire est une procédure assez distincte de la génération d'un réseau booléen, au sein de la classe des réseaux binaires. Il n'est donc pas anormal d'observer des comportements différents du cas booléen dans cette étude de réseaux ternaires, générés avec la méthode de la table 7.2.

On peut remarquer ici que le total de attracteurs détectés, pour chaque ligne du tableau (8.1), n'est jamais égal à 10000. Ceci tient essentiellement à deux faits. Tout d'abord, la routine d'analyse des orbites périodiques retourne tous les points fixes de l'application de transition associée à une séquence périodique de boîtes, c'est-à-dire tous les vecteurs propres fournissant un point fixe appartenant au domaine de cette application, cf. section 7.2. Ainsi, une unique trajectoire peut permettre de détecter plusieurs orbites, non asymptotiquement stables. En particulier, il est courant qu'un cycle limite stable contienne un foyer instable en son intérieur, ou réciproquement qu'un foyer stable contienne un cycle instable – ou semi-stable – dans son bassin d'attraction. Ceci explique le nombre supérieur à 10000 d'attracteurs parfois obtenu. D'autre part, certaines trajectoires ont été rejetées de l'analyse, car peu fiables numériquement. Ceci provient principalement du fait que certaines matrices de la forme $F^{(\ell+1)}$ sont presque singulières. Un calcul de leurs valeurs propres serait inconséquent, et les simulations présentant des coefficients inférieurs à 10^{-15} ont été ignorées pour contrer ce type d'imprécisions. Ceci explique le nombre inférieur à 10000 d'attracteurs obtenus pour $K = 3$.

Pour finir, l'influence de la connectivité doit être abordée. L'étude la plus proche de celle menée ici se trouve dans [77], et concerne des réseaux booléens sans autorégulation. Ici encore, le nombre de cycles limites que nous observons est assez nettement supérieur à celui du cas booléen, pour les trois valeurs de la connectivité K. En accord avec cette étude, toutefois, le nombre de nœuds décroît lorsque K augmente, au profit du nombre de foyers. Toujours en accord avec cette étude, nous observons dans le tableau (8.1) que le nombre maximal de cycles est atteint pour $K = 2$. Enfin, on observe le même ordre pour les nombres des différents types d'attracteurs, quelle que soit la connectivité.
L'étude fournie par [77] est plus large, et analyse également l'influence de la dimension, pour des réseaux de toutes dimensions entre 3 et 9. Nous n'avons pas mené d'étude aussi complète. Il ressort du cas de la dimension 4, que la différence principale apportée par l'ajout de seuils est la présence plus importante d'orbites périodiques stables. Notons que quelques milliers de simulations effectuées sur des systèmes aléatoires de dimension 3 n'ont donné lieu qu'à des trajectoires non chaotiques. Ceci pousse à conjecturer que les systèmes non binaires de dimension 3 ne peuvent donner lieu à des trajectoires chaotiques, ce qui est seulement démontré pour des systèmes binaires de $\mathbb{R}^3$, comme nous l'avons déjà signalé dans ce mémoire [94]. Nous ne pouvons toutefois nous appuyer sur autre chose que des simulations numériques pour vérifier cette conjecture, qui appelle donc des travaux ultérieurs.

8.2 Un exemple particulier : triple boucle dans $\mathbb{R}^3$

Outre les études portant sur de grands nombres de réseaux aléatoires, l'analyse de systèmes particuliers est possible, spécialement en dimension peu élevée. Nous considérons dans cette partie des systèmes définis dans $\mathbb{R}^3$, caractérisés par un graphe de transitions GT_a présentant une composante fortement connexe irrationnelle du type défini dans le théorème 6.5. Cette classe de systèmes nous permettra donc d'illustrer ce théorème, essayant de tirer avantage des possibilités de visualisation que présente la dimension 3.
Plus précisément, on suppose que GT_a contient trois cycles $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$, $\mathcal{C}^3$, ayant un unique sommet a en commun :

$$\mathcal{C}^i = \quad a \longrightarrow a^{i1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow a^{i\ell-1} \tag{8.2}$$

avec $a^{i1} = a + \mathbf{e}_i$. On convient que $a^{i0} = a$, quel que soit i. On suppose de plus que toutes les composantes fortement connexes distinctes de $[a] = [a^{i1}] = [a^{i2}] = [a^{i3}]$ sont rationnelles, cf. chapitre 6. Dans la suite, on identifiera les cycles $\mathcal{C}^i$, et les séquences de boîtes correspondantes.
La structure supposée de la composante $[a]$ implique que $I(a) = I^+(a) = \mathbb{N}_3$, tout comme l'exemple représenté sur les figures 5.3 et 5.4. Par ailleurs, le lemme 5.3 entraîne que l'une au plus des régions D_{ii} est d'intérieur non vide. On pose donc

$$D_{11} \neq \varnothing \quad \text{et} \quad D_{22} = D_{33} = \varnothing. \tag{8.3}$$

Dans un premier temps, on considère le cas où $\bigcup_i \mathcal{C}^i$ est une région invariante, en imposant que a soit le seul sommet ayant plusieurs successeurs. Enfin, on suppose que les trois cycles ont la même longueur ℓ, ce qui apparaît implicitement dans (8.2). Ainsi, la composée $\mathbf{M} = \mathcal{M}^\ell|_{\partial B_a^{in}} : \partial B_a^{in} \to \partial B_a^{in}$ est bien définie, et c'est une application de premier retour au sens usuel.

Ces seules hypothèses définissent une famille de graphes de transitions, dont chacun est associé à une infinité de modèles affines par morceaux, comme on l'a vu dans la partie 2.4.2. On peut appliquer le théorème 6.5 à cet ensemble de systèmes. A cet effet rappelons que l'entropie topologique vérifie l'identité suivante :

$$h(X, \sigma^\ell) = \ell\, h(X, \sigma), \tag{8.4}$$

pour tout système dynamique (X, σ), et tout entier ℓ, cf. annexe B. Ainsi, l'inégalité stricte énoncée dans le théorème 6.5 pour les systèmes dynamiques $(\overline{\phi(\mathscr{D})}, \sigma)$ et $(\Sigma_\mathsf{a}, \sigma)$ est vérifiée si et seulement si la même inégalité tient pour les systèmes à ℓ pas de temps $(\overline{\phi(\mathscr{D})}, \sigma^\ell)$ et $(\Sigma_\mathsf{a}, \sigma^\ell)$. Le graphe de transitions de ce dernier est bien défini : il a pour matrice d'adjacence A^ℓ, si A est la matrice d'adjacence du graphe de transitions GT_a. On note donc $\mathsf{GT}_\mathsf{a}^\ell$ ce graphe orienté. Le sous-ensemble de $\mathsf{GT}_\mathsf{a}^\ell$ induit par l'union des cycles $\bigcup_i \mathcal{C}^i$ n'est pas fortement connexe. Cependant, l'identité $\sigma^\ell(a) = a$, et le fait que pour tout $i \in \mathbb{N}_3$ et tout $j \in \{0 \dots \ell - 1\}$

$$(\sigma^\ell)^{-1}(a^{ij}) = \{a^{1j}, a^{2j}, a^{3j}\},$$

entraînent que ce sous-graphe se décompose en composantes fortement connexes de la

forme suivante :

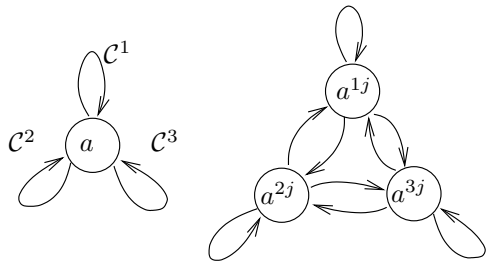


FIG. 8.4 – *Sous-graphe de* TG^ℓ *associé à l'union de cycles* $\bigcup_i \mathcal{C}^i$. *Le sommet* a *est un point fixe, mais il existe trois arêtes* $a \to a$, *données par les trois cycles* $\mathcal{C}^i$. *Pour tout* $j \in \mathbb{N}_{\ell-1}$, *les trois sommets* a^{1j}, a^{2j}, a^{3j} *forment une composante fortement connexe de la forme représentée à droite.*

En associant le symbole i à chaque cycle $\mathcal{C}^i$, on aboutit à un étiquetage des graphes orientés de la figure 8.4, qui donne lieu à un décalage sofique, cf. annexe B. Les arêtes du graphe de gauche sont déjà étiquetées. Quant au graphe de droite, une arête est munie de l'étiquette i si et seulement si son sommet initial est a^{ij}. En effet lorsque $j \geqslant 1$, le seul successeur de a^{ij} est a^{ij+1}, d'après (8.2) et les hypothèses formulées plus haut. Dans les deux cas, on a affaire au décalage plein à 3 symboles : $(\mathbb{N}_3)^{\mathbb{N}}$. L'entropie (topologique) de ce décalage est $\log 3$. D'après (8.4) on a donc

$$h\left(\Sigma_{\mathtt{a}}, \sigma\right) = \frac{1}{\ell} \log 3.$$

Concernant les trajectoires de $(\overline{\phi(\mathscr{D})}, \sigma)$, on peut tenir compte du fait que

$$D_{22} = D_{33} = \varnothing. \tag{8.5}$$

En effet, ceci entraîne que a^{2j} (resp. a^{3j}) n'est en fait pas atteignable via les cycles dont le dernier sommet est $a - \mathbf{e}_2$ (resp. $a - \mathbf{e}_3$). Ceci provenant du fait que le premier sommet suivant a dans un cycle $\mathcal{C}^i$ est comme on l'a choisi $a + \mathbf{e}_i$. De cette dernière hypothèse on déduit aisément que pour tout $i \in \mathbb{N}_3$ il existe un $j \in \mathbb{N}_3$ tel que $a^{i\ell-1} = a - \mathbf{e}_j$. Le fait que a soit l'unique sommet commun au trois cycle implique de plus que ces trois indices j sont distincts. Autrement dit, il existe une permutation $\pi \in \mathfrak{S}_3$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}_3$, $a^{i\ell-1} = a - \mathbf{e}_{\pi(i)}$. Alors, (8.5) implique que les arêtes $\left(a^{\pi^{-1}(2)j}, a^{2j}\right)$ et $\left(a^{\pi^{-1}(3)j}, a^{3j}\right)$ sont superflues dans $\mathsf{GT}_{\mathtt{a}}$.
Ainsi, au lieu d'une matrice d'adjacence 3×3 entièrement composée de 1, cet espace de décalage est inclus dans le décalage induit par le graphe associé à une matrice d'adjacence dont les entrées $\pi^{-1}(2), 2$ et $\pi^{-1}(3), 3$ sont nulles et toutes les autres égales à 1. Il y a donc $C_3^2 = 3$ cas possibles, obtenus d'après les 6 valeurs possibles de π, en tenant compte des symétries du graphe de transition. Les trois valeurs propres dominantes [4] correspondantes sont (calculs effectués à l'aide de Maple9.5) :

$$1 + \sqrt{2} \approx 2.41421,$$

$$1 + \frac{\sqrt[3]{108 + 12\sqrt{69}} + \sqrt[3]{108 - 12\sqrt{69}}}{6} \approx 2.32472,$$

4. En vertu du théorème de Perron-Frobenius, voir annexe B, ces matrices à coefficients positifs ou nuls admettent toutes une valeur propre réelle strictement positive, égale à leur rayon spectral.

et

$$1 + \frac{\sqrt[3]{28 + 84\sqrt{3}i} + \sqrt[3]{28 - 84\sqrt{3}i}}{6} \approx 2.24698.$$

Dans les trois cas, la valeur obtenue est bien strictement inférieure à 3, ce qui est une illustration du lemme 6.4.
Par suite, et en notant μ la valeur propre prenant l'une des trois valeurs ci-dessus, on a la majoration

$$h\left(\overline{\phi(\mathscr{D})}, \sigma\right) \leqslant \frac{1}{\ell} \log(\mu),$$

qui est strictement inférieure à l'entropie de $\mathsf{GT}_\mathtt{a}$, donnée plus haut.

L'inégalité stricte obtenue, cas particulier de l'énoncé du théorème 6.5, et valide indépendamment des valeurs précises des paramètres du système dynamique $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$. Les seules hypothèses concernent en effet le graphe de transitions $\mathsf{GT}_\mathtt{a}$. En (8.3), on a de plus supposé $D_{11} \neq \varnothing$ ce qui, d'après le lemme 5.3 est toujours vrai pour un unique D_{ii}. La même hypothèse appliquée à $i = 2$ ou $i = 3$ aurait bien sûr conduit à une inégalité identique.

Il semble maintenant naturel d'étudier la dynamique de systèmes $(\mathscr{D}, \mathcal{M})$ dont le graphe de transitions satisfait les hypothèses précédentes. En particulier, la borne supérieure $\frac{1}{\ell} \log(\mu)$ est strictement positive pour les trois valeurs possibles de μ, ce qui est caractéristique de systèmes chaotiques.
Dans cet esprit, nous avons mené une série de simulations numériques, sur des exemples dont le graphe de transitions est celui de la figure 8.5. Ce graphe satisfait les hypothèses données au début de cette partie. Il correspond à la permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc à la matrice d'adjacence

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

dont la valeur propre dominante est la deuxième de la liste fournie plus haut dans le texte, valant à peu près 2.32472. Dans la suite, le symbole μ désigne cette valeur.
Tous les points focaux ont été fixés de façon à garantir cette forme du graphe $\mathsf{GT}_\mathtt{a}$, avec des valeurs générées aléatoirement. Seul le point focal $f(a) = f(222)$ – qui est celui de l'unique boîte dans $\bigcup_i \mathcal{C}^i$ ayant plusieurs successeurs – a été modifié dans une série d'expériences numériques.

Un millier de valeurs de ce point ont été générées, réparties aléatoirement dans la boîte B_{333}, en accord avec la figure 8.5. Pour chacune de ces valeurs, une trajectoire a été calculée pour 10 conditions initiales différentes, choisies uniformément dans B_{222}, puis 200 itérations de l'algorithme 7.1 ont été calculées. Dans tous les cas, ces simulations ont aboutit à des trajectoires non chaotiques, comprenant un à trois cycles limites. Un exemple représentatif des cas comportant trois cycles est donné sur la figure 8.7. Ceci suggère donc que l'entropie topologique de systèmes dont le graphe $\mathsf{GT}_\mathtt{a}$ est celui de la figure 8.5 est

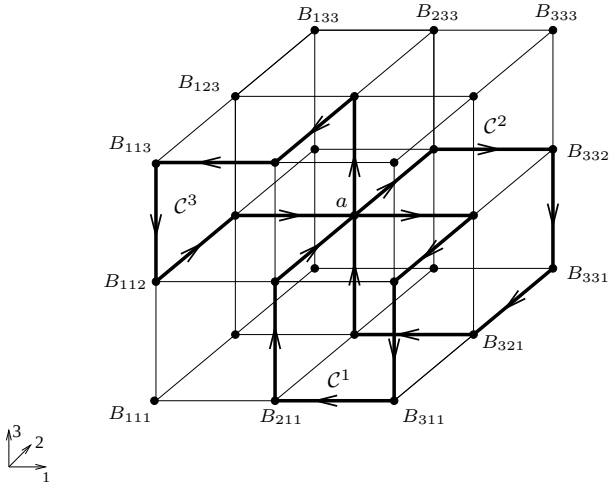


FIG. 8.5 – *Un graphe de transition* GT_a *spécifique, pour lequel les hypothèses formulées au début de cette partie sont vérifiées. Les arêtes dont l'orientation n'est pas figurée sont dirigées vers l'union* $\bigcup_i \mathcal{C}^i$*. Certaines d'entre elles ne sont pas univoquement orientées : elles correspondent à des murs blancs dans l'espace des phases d'un système continu. Ceci peut être évité dans* $\mathbb{R}^3$*, en augmentant le nombre de seuils dans chaque direction. Ce nombre de seuils est ici limité à* 2 *par variable, de façon à simplifier l'analyse et la présentation. Pour ce nombre de seuils,* 3 *cycles de longueur* $\ell = 6$ *ne peuvent être obtenus sans mur blanc. Ces derniers sont néanmoins sans influence sur les trajectoires incluses dans* $\bigcup_i \mathcal{C}^i$*. Seules certaines boîtes sont numérotées, pour alléger la figure.*

non seulement majorée par $\frac{1}{\ell}\log(\mu)$, mais que l'on a en fait une entropie nulle.
Si la présence de chaos dans les systèmes binaires à trois dimension est impossible [94], il ne paraît pas impossible que les systèmes non binaires puissent générer des comportements chaotiques. Dans l'exemple de la figure 8.5 toutes les boîtes sauf B_{222} ont un unique successeur, i.e. une région sortante réduite à un unique mur. Les images des 5 murs entrants d'une telle boîte sur son unique face de sortie sont de la forme représentée sur la figure 8.6. On voit notamment que l'aire de $R_{11} = W_1^+ \cap \mathcal{M}(W_1^-) = \mathcal{M}(W_1^-)$ est strictement inférieure à celle de W_1^-.

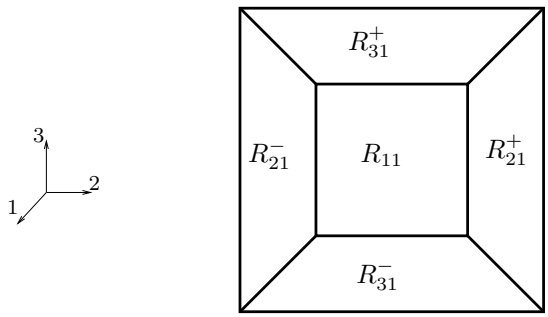


FIG. 8.6 – *Exemple de région sortante* ∂B_a^{out}*, pour une boîte sortante ayant un unique successeur. Ici, on a* $I(a) = I^+(a) = \{1\}$*, de sorte que* $\partial B_a^{out} = W_1^+(a)$*. Voir les chapitres 4, et surtout 5, pour les notations employées.*

L'image de ce domaine R_{11} sera à son tour contenue dans un autre domaine, de l'une des deux formes apparaissant sur la figure 8.6 : R_{ii}, contenu dans l'intérieur d'un mur, ou $R_{ij}^{\pm}$, adjacent à la frontière d'un mur. Itérant $\mathcal{M}$ le long du cycle $\mathcal{C}^1$, on constate que l'image

résultant $\mathbf{M}(W_1^-)$ sera strictement incluse dans l'intérieur relatif $\mathring{W}_2^-$, et contractée dans toutes les directions, $\mathcal{C}^1$ – entièrement constitué de boîtes ayant un unique successeur, en dehors de B_a – étant porté dans $\mathsf{GT_a}$ par un cube plein, i.e. de dimension 3. Il en est de même des images $\mathbf{M}(W_2^-) \subset \mathring{W}_3^-$ et $\mathbf{M}(W_3^-) \subset \mathring{W}_1^-$, calculées respectivement le long des cycles $\mathcal{C}^2$ et $\mathcal{C}^3$, qui sont tous deux également portés par des cubes pleins.
L'action de l'application $\mathbf{M}$ est donc contractante selon toutes les directions, et ses eventuels points fixes n'admettent notamment pas de variété instable : ils ne sont pas hyperboliques. Il semble dans ces conditions que seuls des cycles limites, des nœuds et de foyers puissent être observés, en accord avec la figure 8.7.

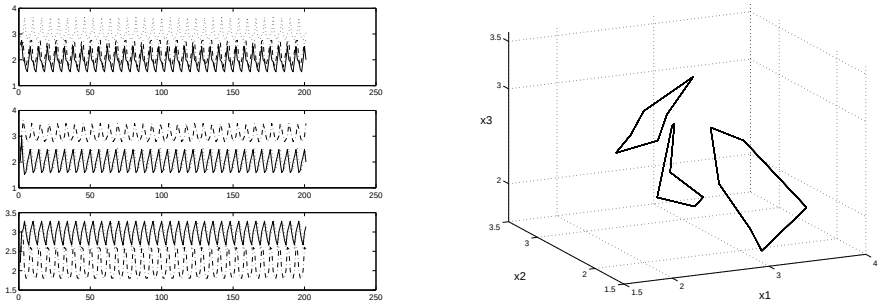


FIG. 8.7 – *Coexistence de trois cycles limites stables. A gauche, les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ en fonction du temps, pour trois conditions initiales. A droite, les trajectoires correspondant à ces trois conditions initiales, représentées dans $\mathbb{R}^3$ sans le régime transitoire (i.e. les premières itérations de l'algorithme 7.1), pour faciliter la visualisation. Les seuils intérieurs au domaine $\mathbb{U}$ sont $\{2, 3\}$ dans chacune des trois directions. Numériquement, le calcul des applications de premier retour et de valeurs propres associées indiquent que ces trois cycles limites sont stables.*

Pour conclure cette partie, on rappelle que le graphe $\mathsf{GT_a}$, figure 8.5, induit un système dynamique symbolique d'entropie topologique strictement positive. Le théorème 6.5 nous assure que l'entropie de tout système affine par morceaux présentant ce graphe de transition est en fait strictement inférieure à celle obtenue par $\mathsf{GT_a}$ seul. Puis il apparaît qu'une telle entropie est très certainement nulle dans ce cas. Ceci vient appuyer la conjecture formulée à la fin de la partie précédente, selon laquelle les réseaux de dimension 3 ne présentent pas de trajectoire chaotique, même lorsqu'ils ne sont pas binaires. Une voie de recherche, pour démentir cette conjecture, consisterait à analyser des systèmes pour lesquels d'autres boîtes que B_a admettent plusieurs successeurs. En effet, on peut observer sur les figures 5.2 et 5.4 du chapitre 5, que l'image d'un mur peut être dilatée dans une direction, et contractée dans l'autre, lorsqu'une boîte admet au moins deux successeurs : c'est le cas de W_3^- sur ces deux figures. Ceci pourrait permettre d'engendrer des points fixes hyperboliques de $\mathbf{M}$, qui peuvent à leur tour donner lieu à des orbites homoclines, génératrices de chaos (voir la partie 3.3, et la discussion sur le système (3.13) présentant du chaos). Cette suggestion reste entièrement à formaliser, ce qui tient lieu d'ouverture pour des travaux futurs.
Enfin, pour des dimensions supérieures ou égales à 4, l'existence d'orbites chaotiques est avérée. Il semble donc possible d'observer de telles dynamiques en une région associée à un sous-graphe de $\mathsf{GT_a}$ satisfaisant les hypothèses données au début de cette partie, prises sous une forme plus générale. Une telle forme devra ne supposer que l'existence de plusieurs boucles partageant un sommet a dans $\mathsf{GT_a}$, satisfaisant les hypothèses du théorème 6.5. Autrement dit, les cycles $\mathcal{C}^i$ donnés en (8.2) peuvent notamment être au nombre de n, si n est la dimension de l'espace d'états considéré. Le début de l'analyse menée dans cette

partie se généralise sans difficulté à de tels systèmes de dimension quelconque. L'entropie d'une composante formée de n boucles de longueur ℓ partageant un unique sommet est notamment :

$$\frac{1}{\ell} \log n.$$

Le travail nouveau doit concerner d'éventuelles trajectoires apériodiques de systèmes affines par morceaux possédant un tel graphe de transitions. Ici encore, c'est à de futurs travaux que renvoie cette discussion.

Quatrième partie

Conclusion et annexes

Conclusion et perspectives

Le travail présenté dans cette thèse concerne un classe particulière de systèmes d'équations différentielles affines par morceaux, utilisées en biologie. Plus spécifiquement, ces équations servent comme modèles des réseaux de régulation génétique, et de leur comportement dynamique.

Dans une première partie, les phénomènes biologiques modélisés par ces équations sont décrits sommairement. Ces phénomènes ayant été découverts à une époque assez récente, et faisant l'objet de recherches nombreuses et variées, les grands courants de ces travaux ont été rappelés au chapitre 1.
Parmi ces recherches, la modélisation mathématique est un objet d'attention majeur depuis une trentaine d'années au moins, prenant des formes diverses. Le chapitre 2 est donc consacré à une présentation des principales classes de modèles rencontrées dans la littérature sur les réseaux génétiques. L'accent a été mis sur trois classes de modèles :

- les systèmes d'équations différentielles ordinaires faisant intervenir des sigmoïdes,
- les modèles discrets en temps et en espace,
- les modèles affines par morceaux.

Un formalisme spécifique à notre propos est exposé dans ce chapitre, qui permet d'établir des liens explicites entre les trois classes de modèles ci-dessus. Certains résultats nouveaux sont proposés concernant la dynamique symbolique des modèles discrets. Ce chapitre s'achève sur la définition des sous-classes les plus étudiées de modèles affines par morceaux.
Dans le chapitre 3, un récapitulatif des travaux parus sur les modèles affines par morceaux est proposé. Ces modèles étant très souvent rapprochés des formalisations discrètes ou différentiables, ces travaux prennent des directions variées, en particulier basées sur les connaissances concernant ces deux autres classes de modèles.

Dans une seconde partie, un travail de nature théorique est proposé, dont l'objet principal est de préciser les relations entre modèles affines par morceaux et modèles purement discrets. Dans ce but, une reformulation des premiers en termes d'itérations d'une application notée $\mathcal{M}$ sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ est proposée au chapitre 4. Dans ce chapitre, on étend l'analyse des orbites périodiques à une classe de systèmes plus large que ce qui peut se trouver dans la littérature : la classe des réseaux non binaire, définie au chapitre 2.

La structure, polyédrique, du domaine de $\mathcal{M}$ est analysée plus en détail au chapitre 5, à l'aide d'outils de géométrie combinatoire rappelés en annexe A. En particulier, un lemme est énoncé dans ce chapitre, dont les répercussions en termes de dynamique symbolique sont analysées au chapitre 6.
La cadre de la dynamique symbolique – dont les aspects qui nous sont utiles seront trouvés en annexe B – s'avère en effet particulièrement adapté pour décrire les liens entre modèles purement discrets et modèles affines par morceaux. De plus, ce cadre étant également propice à l'étude de dynamique chaotiques, il permet de borner la complexité de celles-ci pour des systèmes affines par morceaux. Cette borne, stricte, est fournie dans le théorème 6.5, et provient justement des modèles purement discrets.

Dans une troisième partie enfin, des résultats de nature numérique sont présentés. Dans le chapitre 7, les principaux algorithmes employés sont décrits. Ils concernent la simulation de trajectoires, l'analyse des orbites périodiques et de leur stabilité, ainsi que la génération de systèmes aléatoires. Ces algorithmes ont été implémentés en Matlab, ce qui donne lieu à des jeux de données qui sont proposés et étudiés au chapitre 8.
Ces données concernent tout d'abord un ensemble de plusieurs milliers de réseaux aléatoires de dimension 4. Elles sont comparées à des travaux de même nature disponibles dans la littérature. Dans un second temps, un exemple plus spécifique est étudié, avec le but principal d'illustrer le théorème 6.5. Cet exemple, ainsi que le jeu de simulations précédent, nous conduisent à conjecturer l'absence de chaos dans les systèmes non binaires en dimension 3.

Outre les travaux qu'appelle cette conjecture, de nombreuses perspectives s'ouvrent à l'issue de ce travail de thèse.
Tout d'abord, l'extension de résultats théoriques à des classes de systèmes plus larges semble indispensable. Les deux limitations principales que nous avons dû nous fixer sont l'absence d'autorégulation, et l'uniformité des taux de dégradation. C'est la première de ces deux restrictions qui est la plus excessive en termes de modélisation, et qui doit donc être traitée en priorité. Les travaux existants ont recours à la notion de solution d'équations différentielles discontinues due à Filippov pour traiter l'autorégulation. Les méthodes de dynamiques symbolique, de par leur nature qualitative, se prêtent assez bien à l'étude de dynamiques provenant d'applications multivaluées. Ainsi, il paraît souhaitable d'étendre les techniques du chapitre 6 à des systèmes dont les solutions sont définies au sens de Filippov. Cet aspect implique également le développement d'outils numériques et algorithmiques spécifiques.
Une autre direction pour de futurs travaux est l'étude des dynamiques chaotiques dans les systèmes affines par morceaux non binaires. Bien que largement étudiées, ces trajectoires sont en effet encore incomplètement comprises, et ont surtout été analysées dans le contexte des réseaux binaires. L'étude de réseau non binaires est donc à poursuivre de ce point de vue, et l'absence de chaos conjecturée à la fin du chapitre 8 pour ces systèmes en dimension 3 reste à démontrer, ou à infirmer par l'exposition d'un contre-exemple.

Annexe A
Rappels sur les polytopes

On rappelle dans cette annexe quelques définitions et résultats de base concernant les polytopes convexes. Le lecteur désireux d'une présentation plus détaillée pourra se reporter à [52, 74] pour des textes succincts, ou à l'une des références [15, 72, 134] pour un point de vue plus complet. La littérature sur le sujet abonde, les polytopes apparaissant naturellement dans des cadres variés, comme la géométrie affine, la géométrie algébrique, la topologie, ou encore la programmation linéaire et l'optimisation combinatoire pour un versant plus applicatif. Ils sont donc étudiés de façon purement théorique aussi bien que d'un point de vue algorithmique, étant de par leur nature discrète et finie implémentables sur un ordinateur.
Dans cette étude sur les systèmes de Glass, on a fait appel à certaines notions sur les polytopes sans les définir rigoureusement, ce qui est le propos de cette annexe. Les résultats seront ici donnés sans démonstration. De façon informelle, la notion de polytope généralise aux dimensions supérieures les polygones du plan, et les polyèdres de $\mathbb{R}^3$.
Dans toute la suite $\mathbb{R}^n$ est un espace affine, et la notion de sous-espace - point et hyperplan notamment - est également à prendre au sens affine.
En règle générale toutefois, les définitions et propriétés données seront indépendantes de la position exacte des polytopes dans $\mathbb{R}^n$. Elles concerneront donc la nature intrinsèque des polytopes, et seront de nature plutôt combinatoire. On peut donner deux définitions :

Définition A.1 ($\mathcal{V}$-polytope). *Pour $X \subset \mathbb{R}^n$ fini : $X = \{x^i,\ i = 1 \dots N\}$*

$$P = \mathrm{conv}(X) = \{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x^i \mid \lambda_i \geqslant 0\,,\ \sum_i \lambda_i = 1\}.$$

Définition A.2 ($\mathcal{H}$-polytope). *Pour $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$*

$$P = P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b\},$$

(où l'inégalité est à prendre ligne à ligne), est un polyèdre. Un polytope est un polyèdre borné.

On remarque au passage qu'un polytope, en tant que fermé borné de $\mathbb{R}^n$, est un ensemble compact.
Un résultat essentiel est alors le fait que ces deux définitions de polytopes sont équivalentes. On attribue ce résultat à Weyl, Minkowski, entre autres.

Théorème A.3. *Tout $\mathcal{V}$-polytope peut être décrit par un ensemble fini d'inégalités affines. Réciproquement, tout $\mathcal{H}$-polytope de $\mathbb{R}^n$ peut être décrit comme enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^n$.*

On omettra donc les préfixes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$, sauf pour insister sur une représentation particulière si le contexte s'y prête.
On définit la dimension d'un polytope comme étant celle de l'espace affine qu'il engendre, cette dernière étant celle de l'epace vectoriel direction. On désignera parfois par n-polytope un polytope de dimension n. On rappelle pour cela la définition :

Définition A.4 (sous-espace affine engendré). *par un ensemble de points X :*

$$\mathrm{aff}(X) = \{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x^i \mid x^1 \dots x^N \in X\,,\ \sum_i \lambda_i = 1\}.$$

C'est le plus petit sous-espace affine contenant X. On l'appelle aussi parfois enveloppe affine.

Par ailleurs, l'image d'un polytope par une application affine de la forme $x \mapsto Ax + b$ est un polytope, et l'intersection d'un polytope et d'un sous-espace affine également. Deux poytopes P et Q sont dits *affinement équivalents* s'il existe une application affine ϕ telle que $\phi(P) = Q$, et la restriction $\phi : \mathrm{aff}(P) \to \mathrm{aff}(Q)$ est une bijection.
De même qu'un polyèdre est structuré en sommets, arêtes et faces, on peut décomposer un n-polytope P en faces de dimension k pour $k = -1 \dots n$, avec la convention que $\varnothing$ est une face de dimension -1, et P est l'unique face de dimension n. Une face de dimension k sera appelée k-face en général, et il est courant d'appeler *sommets* les 0-faces, *arêtes* les 1-faces, et *facettes* les $n-1$-faces. De façon générale, une k-face de P est un k-polytope inclus dans la frontière de P. Pour chaque $k \in \{-1 \dots n\}$ on notera $SK_k(P)$ l'ensemble des k-faces de P (le *k-squelette* de P), et $SK(P) = \bigcup_k SK_k(P)$.
Intuitivement, une face est l'intersection du polytope considéré avec un hyperplan affine. Cependant, une intersection quelconque ne sera pas en général une face, et pour choisir correctement l'hyperplan intersecté on utilise la notion d'hyperplan d'appui (*support hyperplane*). On rappelle qu'un hyperplan affine peut être défini sous la forme

$$H = H(v, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v\rangle = b\}$$

où $\langle .\,, .\rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. On note alors

$$H^- = H^-(v, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v\rangle \leqslant b\}$$

le demi espace fermé de bord H, et $H^+ = H^+(v, b)$ le demi espace obtenu en changeant le sens de l'inégalité. Alors,

Définition A.5 (hyperplan d'appui). *Hyperplan affine H tel que $P \cap H \neq \varnothing$ et $P \subset H^-$*

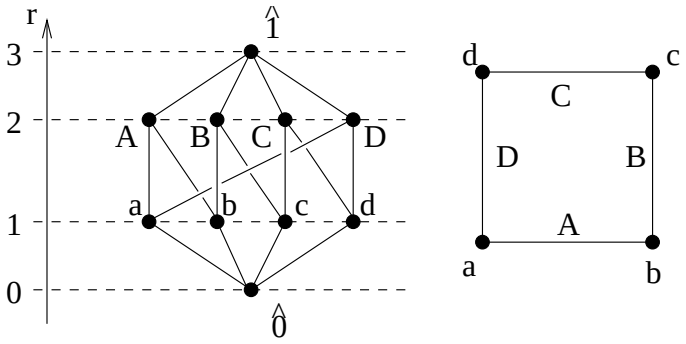


FIG. A.1 – *Representation en graphe du treillis gradué associé au carré (2-cube)*

On pourrait de façon équivalente choisir des demi espaces de la forme H^+, ou encore des demi espaces de signe quelconque, du fait de l'égalité $H(v,b) = H(-v,-b)$. Pour un hyperplan support, on dit que l'inégalité définissant le demi espace contenant P est *valide* pour P. Alors, on sait de plus que $H \cap P$ est une face de P.
D'un point de vue un peu plus algébrique, les faces d'un polytope sont alors structurées d'une façon particulière. Rappelons à cet effet les définitions suivantes :

Définition A.6 (ensemble partiellement ordonné gradué (graded poset)). *Ensemble ordonné $(P, \geqslant)$ admettant un unique maximum $\hat{1}$, un unique minimum $\hat{0}$ et une fonction* rang $r : P \to \mathbb{N}$ *telle que :*

- $r(\hat{0}) = 0$ *et* $p < q \Rightarrow r(p) < r(q)$
- $p < q$ *et* $r(p) - r(q) > 1 \Rightarrow \exists t \in P,\ p < t < q$

Définition A.7 (treillis (lattice)). *Ensemble partiellement ordonné tel que tout couple (p,q) admet un minimum, donné par la relation $p \wedge q$ (meet), et un maximum $p \vee q$ (join).*

Définition A.8 (atome, coatome). *Soit L un treillis gradué. On appelle :*

- atomes *les éléments minimaux de $L \setminus \{\hat{0}\}$ (éléments de rang 1)*
- coatomes *les éléments maximaux de $L \setminus \{\hat{1}\}$ (éléments de rang $r(\hat{1}) - 1$)*

L est atomique *si tout élément est* join *d'un ensemble d'atomes*
L est coatomique *si tout élément est* meet *d'un ensemble de coatomes.*

Dans le cas des polytopes, les faces ont naturellement une structure de treillis, en prenant $\subset$ comme ordre partiel : $(SK(P), \subset)$ est donc le treillis des faces de P. Plus précisément, on a:

Théorème A.9. *Les treillis de faces de polytopes convexes sont finis, gradués, atomiques et coatomiques.*
$G \wedge H$ est l'intersection des faces G et H
$G \vee H$ est l'intersection de toutes les facettes contenant G et H.
La fonction rang est : $r(G) = dim(G) + 1$.
Les atomes sont les sommets, et les coatomes les facettes.

On peut maintenant parler d'*isomorphisme combinatoire* entre polytopes, désignant par là le fait pour deux polytopes d'avoir des treillis de faces isomorphes (en tant que treillis). Le *type combinatoire* d'un polytope est alors la classe d'équivalence pour la relation induite par cet isomorphisme.
Le treillis $SK(P)$ possède bien d'autres propriétés, de nature combinatoire mais interprétable géométriquement, que nous ne rappelerons pas car elles ne nous intéressent pas directement. On peut cependant mentionner quelques faits, assez intuitifs :

Propriété A.10. *Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope, et F une face quelconque. Alors :*

- *les faces de F sont exactements les faces de P incluses dans F :* $\forall k \in \{-1 \dots n\},\ SK_k(F) = SK_k(P) \cap F$
- $F = P \cap \mathrm{aff}(F)$
- *toute intersection de faces de P est un face P (ie. $SK(P)$ est stable par $\cap$)*

De nombreuses constructions sur les polytopes sont possibles, et certaines grandes classes de ces compacts sont bien décrites. Comme on se limite ici aux polytopes en tant qu'ils interviennent dans l'analyse des systèmes de Glass, on va maintenant expliciter certains objets et transformations utiles à notre étude.
Le polytope le plus simple est comme son nom peut l'indiquer le *n-simplexe*, ici dénoté Δ_n. C'est l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants, c'est-à-dire tels que Δ_n est de dimension n. Toutes les faces d'un simplexe sont elles-même des simplexes de dimension inférieure. Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont respectivement un segment, un triangle et un tetraèdre. Cet objet est particulièrement utile de le cadre du calcul numérique, car il permet de définir un champ de vecteurs de façon univoque étant donnée sa valeur aux sommets du simplexe. Ceci en fait la cellule de base des discrétisations de type élément fini. De même en géométrie algorithmique, la triangulation est bien souvent le type de discrétisation privilégié, en particulier pour la calcul du volume [19]. Tout ceci à titre d'exemple informatif.
Dans le cadre des systèmes de Glass, c'est le cube qui sert de brique de base pour la décomposition de l'espace d'états. A contrario des simplexes, les cubes forment un ensemble stable pour le produit cartésien.
Considérons donc le n-cube unité $\mathcal{C}_n = [0,1]^n = \mathrm{conv}(\{0,1\}^n)$ (parfois appelé *hypercube* pour $n > 3$), qui est obtenu à partir d'une boîte d'un système de Glass par simple changement d'échelle. Les deux formes données pour définir $\mathcal{C}_n$ montrent de suite que ce cube possède $2n$ facettes (données par des équations $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ pour $i = 1 \dots n$), et 2^n sommets (les points de coordonnées dans $\{0,1\}^n$).
Les faces non vides du n-cube sont des k-cubes, pour $k = 0 \dots n$, obtenues en fixant $n-k$ composantes à 0 ou 1, les autres à valeur dans $[0,1]$. On en déduit que le nombre de k-faces est $C_n^k 2^{n-k}$. Outre ces aspects combinatoires, le cube est caractérisé d'un point de vue plus géométrique par un groupe de symétries miroir (ie. par rapport à un hyperplan). Nous ne développerons pas cet aspect, qui est essentiellement l'œuvre de H.S.M. Coxeter dans ses études sur les polytopes réguliers, et donne lieu à une théorie algébrique qui va bien au-delà de ce travail.
Le 4-cube $\mathcal{C}_4$ peut-être projeté dans $\mathbb{R}^3$ de façon visuellement assez parlante grâce au schématisme du diagramme de Schlegel, mentionné dans le texte. Dans le cas général, ce diagramme se fait sur la frontière d'un polytope, qui est une structure un peu plus générale que celle de polytope : c'est un complexe polyédrique (cas particulier du concept

plus abstrait encore de complexe cellulaire, qui est un ingrédient essentiel de la topologie algébrique). On adapte la définition donnée dans [72, 134], en choisissant les polytopes comme cellules de base au lieu des polyèdres. On n'a en effet rencontré que des polyèdres bornés.

Définition A.11 (complexe polytopal). *Collection finie $\mathscr{C}$ de polytopes de $\mathbb{R}^n$ telle que :*

- *$P \in \mathscr{C} \Rightarrow SK(P) \subset \mathscr{C}$, i.e. toutes les faces de P appartiennent au complexe $\mathscr{C}$.*
- *$P, Q \in \mathscr{C} \Rightarrow P \cap Q$ est une face commune de P et Q (ie. $P \cap Q \in SK(P) \cap SK(Q)$).*

La dimension *de $\mathcal{C}$ est alors le maximum des dimensions de ses éléments. L'ensemble sous-jacent est souvent noté $|\mathcal{C}| = \bigcup_{P \in \mathcal{C}} P$.*
Si toutes les faces de $\mathcal{C}$ sont des cubes, on parle de complexe cubique

Un complexe polytopal ne possède pas la structure de treillis ordonné gradué d'un polytope en général, car il ne possède pas d'élément maximal unique pour l'inclusion. En ajoutant un maximum artificiel, on obtient bien une telle structure.
Plus précisément, un complexe $\mathscr{C}$ hérite du treillis de faces de chacun des polytopes le composant. On gradue ce treillis de la même façon qu'un polytope, par la dimension. Dans le cadre des complexes polytopaux, on étend facilement la notion de k-squelette, comme ensemble des polytopes de dimension k appartenant à $\mathscr{C}$. Ceci peut s'écrire : $SK_k(\mathscr{C}) = \{P \in \mathscr{C} \mid dim(P) = k\}$. $\mathscr{C}$ est alors exactement l'union de ses k-squelettes, pour $k \in \{-1 \dots n\}$. On peut également considérer $SK_k(\mathscr{C})$ comme réunion de tous les $SK_k(P)$, pour $P \in \mathscr{C}$ de dimension $\geqslant k$.

Exemple A.12. *P étant un polytope,*

- *L'ensemble $SK(P)$ de ses faces est un complexe polytopal.*
- *L'ensemble $SK(\partial P)$ des faces de sa frontière, est un complexe polytopal inclus dans le précédent (dont l'ensemble sous-jacent est $\partial P \cup P$).*
- *Le pavage en boîtes de l'espace d'états d'un système de Glass est un complexe cubique, avec des cubes de la forme $\prod_{i=1}^{n} [\theta_{ij_i}, \theta_{ij_i+1}]$.*
- *De même, la collection des frontières de ces boîtes (dont l'ensemble sous-jacent à été choisi comme domaine de l'application de transition $\mathcal{M}$), et de toutes leurs faces, est aussi un complexe cubique.*

On va maintenant expliciter la construction du diagramme de Schlegel, en s'inspirant encore une fois de [134].

Définition A.13. *Soit P un n-polytope, F une face propre de P et $x \in \mathrm{int}(P)$.*
On note $H_1, \dots H_p$ les hyperplans affines définissant les facettes de P (et donc P lui-même).
Un point y_F est dit derrière *F si x et y_F se trouvent de part et d'autre de tous les hyperplans H_i contenant F, et du même côté de tous les H_j ne contenant pas F.*
On en trouvera une illustration plane sur la figure A.2.

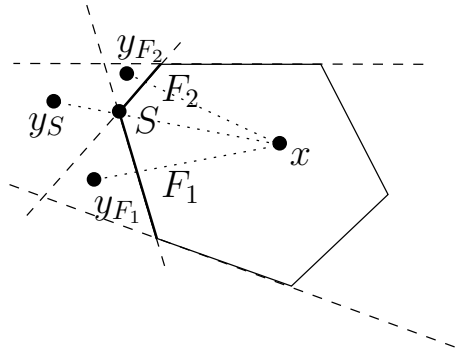


FIG. A.2 – *Illustration : les points $y_.$ sont "derrière" les faces indiquées par leur indice*

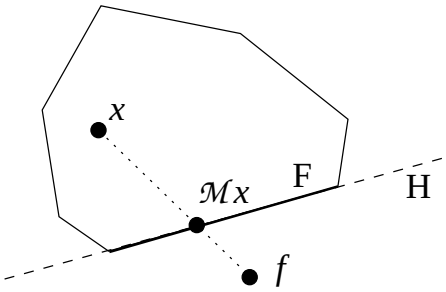


FIG. A.3 – *Image par l'application $\mathcal{M}$ associée au point f, situé* derriére *la face F, d'un point x intérieur au polytope (ici un polygone).*

Le diagramme de Schlegel fait également intervenir une transformation projective, qui est l'exacte analogue de l'application de transition définie en (2.28), dans le cas de taux de dégradation uniformes. On la redéfinit ici pour un polytope quelconque P, et une facette F de P. On suppose que F est définie par l'inégalité $\langle a, x\rangle \leqslant b$ (avec les notations précédentes : $F = H(a,b) \cap P$ et $P \subset H^-(a,b)$). Pour un point f situé derrière F, et $x \in P$,

$$\mathcal{M}x = f + \frac{b - \langle a, f\rangle}{\langle a, x\rangle - \langle a, f\rangle}(x - f)$$

Cette application, schématisée sur la figure A.3, est strictement identique à l'application de transition dans un réseau de Glass, f jouant ici le rôle du point focal.

On peut maintenant définir le :

Définition A.14 (diagramme de Schlegel). *de P basé sur la facette F :*

$$\mathcal{D}(P,F) = \Big\{\mathcal{M}(G) \mid G \in L(P) \setminus \{P,F\}\Big\} \subset F$$

Ce diagramme a la propriété suivante, déjà mentionnée plus haut.

Propriété A.15. *$\mathcal{D}(P,F)$ est une subdivision polytopale de F combinatoirement équivalente au complexe polytopal $\mathcal{C}(\partial P \setminus \{F\})$.*

Où par *subdivision polytopale de F* on entend : complexe polytopal ayant F comme ensemble sous-jacent ; par exemple, une triangulation est une subdivision simpliciale.
Le diagramme de Schlegel a été initialement introduit comme outil de visualisation de polytopes en dimension 4, via une projection sur une de leurs facettes (qui sont de dimension

3). On trouvera des exemples de diagrammes de Schlegel sur la figure A.4.

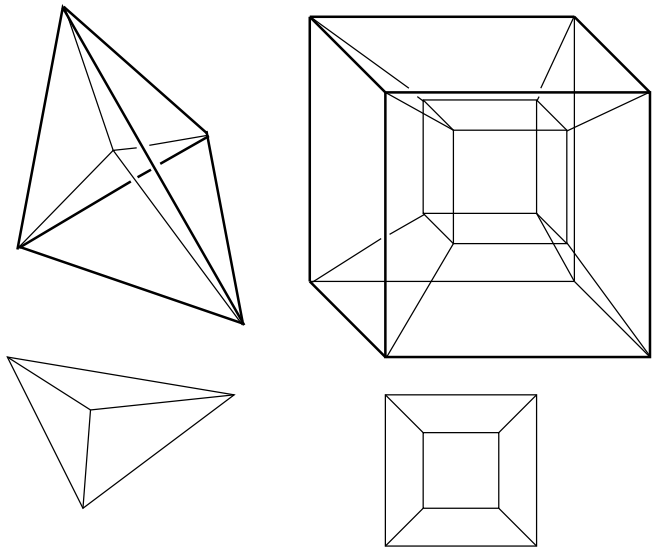


FIG. A.4 – *Quelques exemples de diagrammes de Schlegel : pour les simplexes Δ_4 et Δ_3 (à gauche), et les cubes $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_3$ (à droite). Ces polytopes sont réguliers : toutes leurs k-faces sont affinement isomorphes à k fixé. Ainsi la facette sur laquelle on projette est ici indifférente.*

Il est à noter que l'équivalence entre $\mathcal{D}(P, F)$ et $\mathcal{C}(\partial P \setminus \{F\})$ est uniquement combinatoire, et qu'on n'a notamment pas d'équivalence affine entre ces deux complexes. Ceci provient essentiellement du fait que l'application $\mathcal{M}$ est non linéaire.

Annexe B

Rappels sur la dynamique symbolique

Cette annexe est destinée à fournir un rapide aperçu des outils et résultats de base de la théorie des systèmes dynamiques symboliques. Elle est principalement conçue comme complément au chapitre 6, où il est fait usage de notions ici définies. La dynamique symbolique a des origines assez anciennes, et s'est vue employée depuis dans des contextes variés. Le court compendium ici fourni est donc, comme le précédent sur les polytopes, très partiel en comparaison de la littérature, prolifique, sur le sujet et ses ramifications. Les résultats sont fournis sans démonstration.
Historiquement, il semble que J. Hadamard soit le premier, en 1898, à employer des méthodes semblables à celles ici présentées, pour décrire les lignes géodésiques de surfaces à courbure négative. Le principe de base de cette approche est schématisé sur la figure B.1. Depuis cette époque, de nombreux développements ont vu le jour, et cette théorie s'est appliquée à des systèmes dynamiques variés. Parmi les domaines où la dynamique symbolique s'applique avec succès ont peut citer les itérations de fonctions de l'intervalle, les automorphismes du tore, les billards, les systèmes dynamiques non linéaires ou chaotiques, ou encore le codage, les langages formels et les automates finis, avec des points de vue plus ou moins applicatifs. Dans le contexte des dynamiques non linéaire, on peut mentionner l'usage de cette méthode pour coder la dynamique du célèbre «fer à cheval» de Smale, et montrer que c'est un système chaotique. Pour une présentation accessible sur les systèmes dynamiques non linéaires, ou la dynamique symbolique est traitée, on renvoie à la référence en ligne [24], ou aux livres [43, 67]. Le texte [86] est notre référence principale. Ce livre est consacré entièrement à la dynamique symbolique, et à ses applications en théorie du codage. Il contient de très nombreuses références.

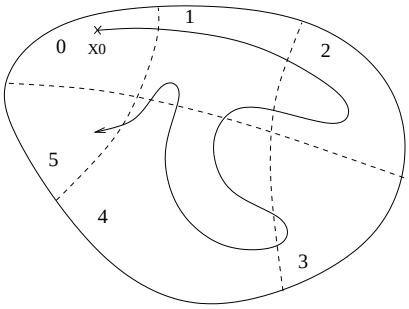


FIG. B.1 – *Présentation schématique d'un usage courant de la dynamique symbolique ; le mot 0121434145 code le morceau de trajectoire représenté.*

Le terme *dynamique symbolique* renvoie à un type particulier de systèmes dynamiques discrets. Ces systèmes ont un espace d'états de la forme $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ (ou $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$), où $\mathcal{A}$ est un ensemble fini : un «alphabet», dont les éléments sont donc souvent appelés des symboles. La dynamique sur un tel espace de suites, ou «mots infinis» sur $\mathcal{A}$, est définie par une application de décalage (*shift* en anglais), définie comme suit :

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \\ & \mathbf{a} = (a^i)_{i\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & \Big([\sigma(\mathbf{a})]^i = a^{i+1}\Big)_{i\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

où les suites peuvent naturellement être indexées par $\mathbb{N}$ au lieu de $\mathbb{Z}$, avec pour conséquence la non-inversibilité de σ. Comme l'emploi de la dynamique symbolique au chapitre 6 concerne des système non inversibles, on se place à partir de maintenant dans $\Sigma_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Le système $(\Sigma_{\mathcal{A}}, \sigma)$ est appelé *full shift* dans la littérature anglophone. On appelera ici *shift plein* ce système. Un système dynamique symbolique général est de la forme $(\Sigma, \sigma|_\Sigma)$, où le sous-ensemble Σ satisfait certaines conditions de fermeture. Ces conditions peuvent prendre deux formes équivalentes.
Chaque élément d'un shift Σ étant un mot infini $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \cdot \omega_1\omega_2 \ldots$, on est naturellement amené à considérer le langage dont les éléments sont les mots $\omega_p \ldots \omega_{p+q}$ apparaissant dans une suite $\boldsymbol{\omega} \in \Sigma$. On note $\mathcal{L}_p(\Sigma)$ l'ensemble des mots de longueur p apparaissant dans les éléments de Σ, et $\mathcal{L}(\Sigma) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_p(\Sigma)$.
La première caractérisation est la suivante :

Définition B.1 (espace de décalage (shift space)). *Un espace de décalage est un sous-ensemble $\Sigma \subset \Sigma_{\mathcal{A}}$ caractérisé par un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\Sigma_{\mathcal{A}})$ de mots finis sur $\mathcal{A}$, qui n'apparaissent pas dans les éléments de Σ : $\mathcal{L}(\Sigma) = \mathcal{F}^c = \mathcal{L}(\Sigma_{\mathcal{A}}) \setminus \mathcal{F}$.*
On appelle souvent $\mathcal{F}$ ensemble des blocs interdits de Σ.

On usera parfois de la terminologie anglophone dans la suite. Une abréviation pratique de "espace de décalage" sera "décalage" (shift), ou "sous-décalage" (subshift) lorsqu'il s'agit d'un sous-espace strict de $\Sigma_{\mathcal{A}}$.
La définition ci-dessus permet d'introduire immédiatement une classe importante de décalages : les *décalages de type fini* (subshift of finite type). Ce sont ceux pour lesquels l'ensemble des mots interdits $\mathcal{F}$ est fini. De façon informelle, les décalages de type fini sont les espaces de mots infinis définis comme chemins infinis sur un graphe orienté, dont les arêtes fournissent les symboles (pour être plus exact, pour représenter tous les décalages finis par de tels graphes, il faut que les arêtes codent pour des mots, et non pour des

symboles seuls, cf. [86] p.41).
Notons ici qu'un espace de décalage est entièrement déterminé par son langage : la donnée de $\mathcal{L}(\Sigma)$ et celle de Σ sont équivalentes, les mots interdits de Σ étant ceux de $\mathcal{L}(\Sigma)^c$ (complémentaire dans $\mathcal{L}(\Sigma_\mathcal{A})$). Tout langage ne définit cependant pas un espace de décalage. Ceux qui engendrent un tel espace doivent vérifier certaines conditions (voir [86], p.10).

Proposition B.2 (langage d'un espace de décalage). *Soit $\mathcal{L}$ un langage sur l'alphabet $\mathcal{A}$. C'est un langage de shift space si et seulement si, pour tout $w \in \mathcal{L}$:*
(a) tout sous-mot de w appartient à $\mathcal{L}$,
(b) il existe deux mots non vides de $\mathcal{L}$, u et v, tels que $uwv \in \mathcal{L}$.
L'unique espace de décalage de langage $\mathcal{L}$ est alors celui dont les mots interdits sont ceux du complémentaire $\mathcal{L}^c$.

La deuxième caractérisation des espaces de décalage est de nature topologique. Bien souvent, $\mathcal{A}$ est muni de la topologie discrète, donnée par la distance discrète : $\delta(a,b) = 1$ si $a \neq b$ et 0 si $a = b$. $\Sigma_\mathcal{A}$ est alors doté de la topologie produit, donnée par la distance :

$$\mathrm{d}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\delta(a^k,b^k)}{2^k}.$$

A laquelle on préfère parfois cette distance, qui lui est équivalente :

$$\rho(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\delta(a^k,b^k)}{2^k}.$$

On a maintenant donner une deuxième définition d'espace de décalage, équivalente à la précédente (voir [86], p. 179 pour une démonstration de cette équivalence).

Définition B.3 (espace de décalage (shift space)). *Un espace de décalage est un sous-ensemble $\Sigma \subset \Sigma_\mathcal{A}$ compact, et σ-invariant (i.e. $\sigma(\Sigma) \subset \Sigma$).*

On peut montrer que $\Sigma_\mathcal{A}$ est lui-même un compact. Il s'ensuit qu'il est suffisant pour un sous-espace Σ d'être fermé et σ-invariant, pour être un espace de décalage.

Un fait remarquable maintenant, est que σ est une application continue pour l'une quelconque des distances d, ρ. En effet, on montre facilement

$$\rho\Big(\sigma(\mathbf{a}),\sigma(\mathbf{b})\Big) = 2\rho(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

et σ est donc 2-lipschitzienne pour ρ.
Notant abusivement $\sigma = \sigma|_\Sigma$ pour plus de concision, (Σ,σ) est donc un système dynamique topologique (i.e. Σ est un espace topologique) en temps discret. Supposant qu'il approche un autre système dynamique (X,f), où X est un espace topologique et f une application continue sur cet espace, on cherche classiquement à comparer les dynamiques de ces deux systèmes au moyen d'une application continue $\phi : X \to \Sigma$, telle que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & \Sigma \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ X & \xrightarrow{\phi} & \Sigma \end{array} \tag{B.1}$$

commute, c'est-à-dire $\phi \circ f = \sigma \circ \phi$. On distingue alors les trois notions suivantes :

Définition B.4 (facteur, plongement, conjugaison). *Si l'application ϕ telle que le diagramme B.1 commute est*

- *surjective on dit que (Σ, σ) est un facteur de (X, f), et ϕ un code facteur (factor code) de X sur Σ. On dit aussi que ϕ est une semi-conjugaison, et que (X, f) est une extension de (Σ, σ).*
- *injective on dit que ϕ est un plongement (embedding) de X dans Σ.*
- *bijective, on dit que (Σ, σ) et (X, f) sont topologiquement conjugués (topologically conjugate), et l'on note $(\Sigma, \sigma) \sim (X, f)$.*

Toutes ses définitions s'appliquent pour deux systèmes dynamiques topologiques, et pas seulement aux systèmes symboliques.

Les espaces considérés étant généralement compacts, si ϕ, qui est continue, est aussi bijective alors c'est un homéomorphisme. Ce cas, qui est celui de la conjugaison topologique, est le résultat le plus fort qu'on puisse obtenir pour comparer deux systèmes dynamiques topologiques. En particulier il est connu que ϕ envoie toute orbite de (X, f) sur une orbite de (Σ, σ), et les propriétés suivantes sont invariantes par conjugaison : points fixes, orbites périodiques et leur période, orbites denses, transitivité topologique, entropie topologique (cf. infra).

On donne maintenant un exemple de conjugaison entre deux sous-décalages qui, outre son intérêt illustratif, nous sera utile dans le chapitre 6.

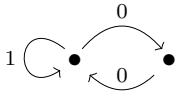
Exemple B.5. *Soit (Σ, σ) un sous-shift sur l'alphabet $\mathcal{A}$. On définit l'espace des p-mots $\Sigma^{[p]}$ de Σ (pth higher-block shift space) au moyen de l'application suivante :*

$$\beta_p : \mathbf{a} = a^0.a^1a^2\ldots \longmapsto \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ \vdots \\ a^{p-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 \\ a^3 \\ \vdots \\ a^{p+1} \end{bmatrix} \cdots$$

Alors, $\Sigma^{[p]} = \{\beta_p(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in \Sigma\}$ est un espace de décalage sur l'alphabet $\mathcal{A}^p$. Les symboles de cet alphabet ont été écrits verticalement ci-dessus, ce qui est usuel et permet une meilleure lisibilité. De plus, β_p est une conjugaison topologique entre ces deux espaces. Intuitivement, ceci est à relier au fait que deux blocs apparaissant successivement dans l'équation ci-dessus ont $p-1$ symboles en commun. Ainsi, un mot infini et son image par β_p sont une donnée équivalente : l'un permet de construire l'autre de façon univoque. Nous renvoyons à [86] pour une démonstration formelle (facile) de nos affirmations.
Une conséquence de cette conjugaison concerne les décalages de type fini. On a défini ces derniers comme induits par un graphe orienté dont les arêtes fournissent l'alphabet. Ils peuvent de manière équivalente être définis à partir d'un graphe orienté dont les sommets sont l'alphabet. En effet, un arête étant une paire orientée de sommets, la conjugaison $\beta_{[2]}$ établit l'équivalence de ces deux définitions.

Outre les décalages de type fini, une autre classe importante est constituée par les *décalages sofiques* (sofic shifts). Ici encore, plusieurs caractérisations peuvent en être données. L'une d'entre elle, pratique, est la suivante : les décalages sofiques sont les facteurs

des décalages de type fini (cf. [86], p.70). Ce sont également les décalages définis comme ensemble de chemins infinis sur un graphe orienté étiqueté, les étiquettes étant définies comme une application des arêtes du graphe sur un alphabet fini. Autrement dit, les shifts sofiques sont les shifts dont le langage est accepté par un automate fini (dont tous les états sont initiaux et terminaux).
Au vu de ces caractérisations, cet ensemble contient strictement les décalages de type finis. Un exemple de décalage strictement sofique (i.e. sofique, mais pas de type fini) est donné par le *décalage pair* (even shift) : sur l'alphabet $\{0,1\}$, il est constitué des séquences telles que deux 1 successifs sont séparés par un nombre pair de 0. L'ensemble $\mathcal{F} = \{10^{2p+1}1 \mid p \in \mathbb{N}\}$ de mots interdits dans cet espace est infini. Le décalage pair est cependant bien décrit par le graphe ci-dessous :



Un autre caractérisation encore, est de définir les shifts sofiques comme sous-ensembles de $\Sigma_{\mathcal{A}}$ définis par un ensemble *régulier* de mots interdits. On voit bien encore que les shifts de type fini forment un sous-ensemble strict des shifts sofiques.
La classe des décalages sofique est notamment intéressante parce qu'il est possible pour cette classe d'évaluer une grandeur importante : l'*entropie topologique*.
Cette quantité est définie pour un système dynamique toplogique général (X, f), avec X compact.

Définition B.6 (entropie topologique - cas général). *Deux séquences finies de points de X : $(x_0, ..., x_p)$ et $(y_0, ..., y_p)$ sont dites ε-distinguables si :*

$$\exists j \in \{0, ..., p\},\ d(x_j, y_j) > \varepsilon,$$

où d est une distance sur X.
On note $N(p, \varepsilon)$ le nombre maximal de segments d'orbites de longueur p qui sont ε-distinguables (bien défini car X est compact et f continue).
Alors, on définit l'entropie topologique par :

$$h(X, f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{p \to +\infty} \frac{\log N(p, \varepsilon)}{p}.$$

De façon conventionnelle, le log ci-dessus est choisi à base 2. En général, on note plutôt $h(f)$, et l'on parle d'entropie topologique de l'application f. Nous conserverons toutefois la notation ci-dessus, principalement parce qu'il arrivera qu'on use abusivement de la même notation pour une application et sa restriction à un sous-ensemble de son domaine. Ceci en particulier pour l'application de décalage σ.
Cette définition se prête assez peu aux investigations numériques, telle quelle. Intuitivement, l'entropie h mesure le taux de croissance asymptotique du nombre d'orbites discernables : ce nombre est équivalent à 2^{hp}, pour $p \to \infty$, lorsque p est la longueur des segments d'orbites. Il est prouvé qu'un système ayant une entropie topologique strictement positive satisfait aussi les définitions les plus courantes de système chaotique (e.g. dépendance sensible aux conditions initiales [1] et transitivité topologique [2]).

1. $\exists \eta > 0, \forall x \in X, \forall\ \mathcal{V}(x)$ un voisinage ouvert de $x, \exists y \in \mathcal{V}(x), \exists p > 0,\ d(f^p(x), f^p(y)) > \eta$.
2. $\forall\ U, V$ ouverts, $\exists p > 0, f^p(U) \cap V \neq \varnothing$.

Dans le cas d'un système dynamique symbolique, la définition précédente prend une forme plus simple :

$$h(\Sigma, \sigma) = \lim_{p \to \infty} \frac{\log \#\mathcal{L}_p(\Sigma)}{p}.$$

Par exemple, on déduit de cette expression que l'entropie (on omettra sans ambiguité possible l'épithète topologique) du décalage plein sur un alphabet à N symboles est $\log N$. Comme $1 \leqslant \#\mathcal{L}_p(\Sigma) \leqslant N^p$ pour Σ non vide, on l'encadrement $1 \leqslant h(\Sigma, \sigma) \leqslant \log N$.

On peut maintenant donner quelques propriétés de l'entropie topologique :

– $h(X, f^p) = ph(X, f)$ pour $p \in \mathbb{N}$ (et $f^p = f \circ \cdots \circ f$).

– si (Y, g) est un facteur de (X, f), alors $h(Y, g) \leqslant h(X, f)$.

– si (X, f) admet un plongement dans (Y, g), alors $h(X, f) \leqslant h(Y, g)$.

– si $(X, f) \sim (Y, g)$, alors $h(Y, g) \ = h(X, f)$.

Cette dernière propriété, d'invariance par conjugaison, est l'un des intérêts majeurs de cette quantité. Un autre intérêt est la possibilité de calculer cette entropie pour une large classe de système : les systèmes sofiques définis plus haut.
Pour montrer comment ce calcul est possible, quelques notions supplémentaires doivent être introduites (elle sont pour l'essentiel reprises de [86], chapitre 4).
Dans le cas où un système dynamique symbolique est défini par un graphe orienté (éventuellement étiqueté) G, on note Σ_{G} l'espace de décalage correspondant.

Considérons un graphe orienté $\mathsf{G} = (V, E)$, doté de n sommets : on identifie V et $\mathbb{N}_n$. La *matrice d'adjacence* $A = A(\mathsf{G}) \in \{0, 1\}^{n \times n}$ est définie par : $A_{ij} = 1$ si et seulement si $(i, j) \in E$. Il est alors connu que

$$(A^p)_{ij} = k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{il existe } k \text{ chemins de longueur } p \text{ de } i \text{ à } j \text{ dans } \mathsf{G}.$$

Notamment, la trace $\mathrm{Tr}(A^p)$ est donc égale au nombre de points périodiques de période p. On définit la relation d'équivalence suivante sur V :

$$i \rightsquigarrow j \iff \exists p, q \in \mathbb{N}, (A^p)_{ij} \neq 0 \text{ et } (A^q)_{ji} \neq 0,$$

qui admet comme classes d'équivalence les *composantes fortement connexes* de G, parfois appelées aussi *composantes irréductibles*. La matrice d'un graphe fortement connexe est dite *irréductible*. L'irréductibilité d'un graphe est équivalente à la transitivité topologique du système dynamique $(\Sigma_{\mathsf{G}}, \sigma)$.
On rappelle maintenant une version d'un théorème célèbre :

Théorème B.7 (Perron-Frobenius). *Soit $A \neq 0$ une matrice irréductible. Alors A admet un vecteur propre v_A positif, associé à une valeur propre simple, strictement positive μ_A. Si η est un autre valeur propre de A, alors $|\eta| \leqslant \mu_A$. Tout vecteur propre positif de A est un multiple de v_A.*

Le point essentiel, en ce qui nous concerne ici, est l'existence d'une valeur propre dominante et positive μ_A, pour A irréductible.
Étant donnée une matrice A à coefficients positifs, il est possible de mettre A sous forme triangulaire par blocs, les blocs diagonaux étant les matrices d'adjacence des composantes fortement connexes de G. De tels blocs sont appelés *composantes irréductibles* de A. Pour ceci, on construit un graphe orienté dont les sommets sont ces composantes fortement connexes. Un arête (I, J) dans ce graphe est définie par l'existence d'un $i \in I$ et d'un $j \in J$, tels que $i \rightsquigarrow j$, où $i \rightsquigarrow j$ est bien sûr défini par $\exists p \in \mathbb{N}, (A^p)_{ij} \neq 0$. Ce nouveau graphe est alors sans cycle, ce qui se traduit par le fait que sa matrice d'adjacence peut être mise sous forme triangulaire. Cette procédure, et le calcul du polynôme caractéristique d'un matrice triangulaire par blocs, conduisent au résultat suivant :

Théorème B.8. *On soit A la matrice d'adjacence d'un graphe G.*
Soient $A_1, \ldots, A_k$ les composantes irréductibles de A. On appelle valeur propre de Perron *de A la valeur propre suivante : $\mu_A = \max_{i \in \mathbb{N}_k} \mu_{A_i}$.*
On a alors

$$h(\Sigma_{\mathsf{G}}, \sigma) = \log \mu_A.$$

On remarquera notamment que μ_A est le rayon spectral de A.
D'autres invariants par conjugaison peuvent être calculés pour les systèmes dynamiques symboliques : on a vu plus haut que le nombre de points périodiques en est un (en prenant garde que $\mathrm{Tr}(A^p)$ "compte" aussi tous les points périodiques dont la période divise p). On peut également mentionner les fonctions zêta qui sont souvent étudiées (cf. [24, 86]).

Maintenant qu'on a montré comment calculer l'entropie d'un système sofique, on va conclure cette annexe en présentant une méthode générale permettant de ramener un système dynamique topologique à un système symbolique. Le principe de cette méthode est celui représenté sur la figure B.1.
On se donne donc un système dynamique topologique (X, f). En général X est compact et f continue. On se donne également une partition

$$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_N\}$$

de X, où les P_i sont des ouverts disjoints, et $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_N} \overline{P}_i = X$. On code alors les trajectoires de (X, f) au moyen de l'alphabet $\mathcal{A} = \mathbb{N}_N$. Un mot $a_1 \ldots a_p \in \mathcal{A}^p$ sur cet alphabet est dit *admissible* si

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}_p} f^{-i}(P_{a_i}) \neq \varnothing.$$

Un mot infini est dit admissible si tous les mots finis apparaissant dans sa séquence le sont. On définit alors Σ comme l'ensemble des mots infinis admissibles : (Σ, σ) est un système dynamique symbolique approchant (X, f).
Un cas particulier essentiel est le suivant : pour $\mathbf{a} \in \Sigma$ on note

$$D_p(\mathbf{a}) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}_p} f^{-i}(P_{a_i}),$$

qui est un sous-ensemble de X (c'est exactement l'ensemble $D_{\mathbf{a}}$ défini à l'équation (4.12), pour un $\mathbf{a}$ de longueur p).

Par compacité de X, l'intersection

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{D}_p(\mathbf{a})$$

est non vide. Dans le cas où c'est un singleton notons ϕ l'application qui à $\mathbf{a}$ associe le point composant ce singleton. On dit alors que $\mathcal{P}$ fournit une *représentation symbolique de* (X, f). Si de plus Σ est de type fini, on dit que $\mathcal{P}$ est une *partition de Markov*. Il est bien sûr difficile en général de construire une telle partition, et l'on pourrait même se demander s'il est seulement possible d'en construire une. Plusieurs exemples attestent qu'une telle construction est possible : les itérations d'une fonction de l'intervalle, les automorphismes du tore de dimension deux $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, ou encore les difféomorphismes hyperboliques de type axiome A sont les exemples les plus fameux pour lesquels des partitions de Markov ont été proposées. Nous renvoyons à [1] pour une étude détaillée et accessible sur les partitions de Markov.

Lorsque $\mathcal{P}$ fournit une représentation symbolique de (X, f), l'application ϕ est un code facteur de (Σ, σ) sur (X, f). Ce code facteur conserve certaines propriétés intéressantes, qui peuvent donc être étudiées dans (Σ, σ) au lieu du système initial. Parmi ces propriétés on recense :

- la transitivité topologique.
- le mixage topologique.
- la densité de l'ensemble des points périodiques.

La propriété de mixage topologique, plus forte que celle de transitivité, admet les carcatérisations suivantes :

- Pour un système dynamique topologique (X, f) :

$$\forall\, U, V \text{ ouverts}, \exists p_0 > 0, \forall p \geqslant p_0,\ f^p(U) \cap V \neq \varnothing.$$

- Pour un espace de décalage :

$$\forall (u, v) \in \left(\mathcal{L}(\Sigma)\right)^2, \exists p_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant p_0, \exists w \in \mathcal{L}_p(\Sigma),\ uwv \in \mathcal{L}(\Sigma).$$

- Pour un espace de décalage défini par un graphe, de matrice d'adjacence A :

$$\exists p > 0,\ \forall i, j, \quad (A^p)_{ij} > 0.$$

La dernière propriété définit une matrice dite *primitive*. La valeur propre de Perron μ_A d'une telle matrice est strictement dominante : toute autre valeur propre η est telle que $|\eta| < \mu_A$.
Toutes ces propriétés sont spécialement intéressantes dans le cas de dynamiques chaotiques, ou en tout cas assez complexes. Le fait de pouvoir les caractériser simplement explique en bonne partie la popularité des méthodes de dynamique symbolique dans le contexte de l'analyse du chaos et des phénomènes non linéaires.

Pour conclure cette annexe, mentionnons l'existence de versions probabilistes de la dynamique topologique (et donc symbolique). Sans entrer dans les détails, de tels systèmes sont de la forme $(X, \mathcal{B}, m, f)$, où $(X, \mathcal{B}, m)$ est un espace probabilisé, et $f : X \to X$

une application préservant la mesure m (i.e. $\forall B \in \mathcal{B}, m\left(f^{-1}(B)\right) = m(B)$). La *théorie ergodique* traite de tels systèmes, pour lesquels les notions présentées plus haut ont un équivalent, défini en termes de mesure (grosso modo, on demande aux propriétés d'être vérifiées presque partout au sens de m). Notamment, l'entropie d'un tel système est définie relativement à une mesure f-invariante (i.e. préservée par f), et porte le nom d'*entropie métrique*. Historiquement, cette notion d'entropie a précédé celle d'entropie topologique, en ce qui concerne l'étude des systèmes dynamiques [3]. Nous n'en détaillons pas la définition, n'ayant pas l'usage de cette notion. Retenons seulement que l'entropie topologique est la borne supérieure, pour toutes les mesures f-invariantes, des entropies métriques associées (ce résultat est appelé *principe variationnel*).

3. L'entropie topologique est définie en 1965 par Adler, Konheim et McAndrew. La notion probabiliste d'entropie est introduite essentiellement par Kolmogorov et Sinai à la fin des années 1950, tandis que celle relative à la théorie du codage est due à Shannon, à la fin des années 1940.

Bibliographie

[1] R.L. Adler, *Symbolic dynamics and Markov partitions*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 35, No. 1, 1-56, (1998).

[2] P. Agarwal, *The cell programming language*, Artificial Life, 2(1):37-77 (1995).

[3] T. Akutsu, S. Miyano, S. Kuhara, *Identification of genetic networks from a small number of gene expression patterns under the Boolean network model*, Pacific Symposium on Biocomputing, 4:17-28 (1999).

[4] R. Albert, A.L. Barabási, *Statistical mechanics of complex networks*, Reviews of Modern Physics 74, 47 (2002).

[5] R. Alur, C. Courcoubetis, N. Halbwachs, T.A. Henzinger, P.-H. Ho, X. Nicollin, A. Olivero, S. Yovine, *The algorithmic analysis of hybrid systems*, Theoretical Computer Science, 138:3-34 (1995).

[6] R. Alur, C. Belta, F. Ivančić, V. Kumar, M. Mintz, G.J. Pappas, H. Rubin, J. Schug, *Hybrid modeling and simulation of biomolecular networks*, HSCC 2001, LNCS 2034, pp.29-32 (2001).

[7] J. Aracena, S. Ben Lamine, M.A. Mermet, O. Cohen, J. Demongeot, *Mathematical mmodelling in genetic networks: relationships between the genetic expression and both chromosomic breakage and positive circuits*, Proceedings of the 1st IEEE International Symposium on Bioinformatics and Biomedical Engineering, pp. 141-149 (2000).

[8] J. Aracena, J. Demongeot, *Mathematical methods for inferring regulatory networks interactions: application to genetic regulation*, Acta Biotheoretica, 52:391-400 (2004).

[9] V.I. Arnold, *Équations Différentielles Ordinaires*, Éditions Mir, Moscow, (1974).

[10] E. Asarin, O. Maler, A. Pnueli, *Reachability analysis of dynamical systems having piecewise-constant derivatives*, Theoretical Computer Science 138:35-65, (1995).

[11] E. Asarin, T. Dang, *Abstraction by Projection and Application to Multi-affine Systems*, HSCC 2004, LNCS 2993, pp.32-47 (2004).

[12] R.J. Bagley, L. Glass, *Counting and classifying attractors in high dimensional dynamical systems*, J. Theor. Biol. 183:269-284 (1996).

[13] A. Becksei, L. Serran, *Engineering stability in gene networks by autoregulation*, Nature, 405:590-93 (2000).

[14] C. Belta, L. Habets, V. Kumar, *Control of multi-affine systems on rectangles with applications to hybrid biomolecular networks*, 41st IEEE Conference on Decision and Control, pp. 534-539 (2002).

[15] M. Berger, *Géometrie - 1,3* Cedic : Fernand Nathan, Paris (1978).

[16] A. Ben-Hur, H.T. Siegelmann, *Computation in gene networks*, Chaos, 14(1):145-151 (2004).

[17] O. Bournez, M. Cosnard, *On the computational power of dynamical systems and hybrid systems*, Theoretical Computer Science 168 (2) :417-459 (1996).

[18] R. Bowen, *Topological entropy for noncompact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 184,. 125-136 (1973).

[19] B. Bueler, A. Enge, K. Fukuda, *Exact volume computation for polytopes : a practical study*, In. G. Kalai and G. Ziegler, eds. Polytopes Combinatorics and Computation, DMV-Seminar 29. Birkhäuser Verlag (2000).

[20] J. Buzzi, *Piecewise isometries have zero topological entropy*, Ergod. Theor. and Dyn. Sys. 21:1371-1377 (2001).

[21] R. Casey, H. de Jong, J.-L. Gouzé, *Piecewise-linear models of genetic regulatory networks: Equilibria and their stability*, INRIA RR-5353 (2004).

[22] J.L. Cherry, F.R. Adler, *How to make a biological switch*, J. Theor. Biol. 203:117-133 (2000).

[23] L.O. Chua, T.S. Parker, *Practical numerical algorithms for chaotic systems*, Springer, (1989).

[24] P. Cvitanovic', R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner and G. Vattay, *Chaos: Classical and Quantum*, `ChaosBook.org` (Niels Bohr Institute, Copenhagen 2003).

[25] 0. Cinquin, J. Demongeot, *Roles of positive and negative feedback in biological systems*, C.R. Biol. 325(11):1085-1095 (2002).

[26] 0. Cinquin, J. Demongeot, *Positive and negative feedback: striking a balance between necessary antagonists*, J. Theor. Biol. 216(2):229-241 (2002).

[27] G. Curien, S. Ravanel, and R. Dumas, *A kinetic model of the branch-point between the methionine and threonine biosynthesis pathways in arabidopsis thaliana*, Eur. J. Biochem., 270(23):4615–4627, (2003).

[28] A. Danchin, *By way of introduction: some constraints of the cell physics that are usually forgotten, but should be taken into account for* in silico *genome analysis*, Biochimie, 78, pp. 299-301 (1996).

[29] J. Demongeot, *Multistationarity and cell differentiation*, J. Biol. Sys. 6:1-2 (1998).

[30] J. Demongeot, J. Aracena, F. Thuderoz, T.-P. Baum, O. Cohen, *Genetic regulation networks: circuits, regulons and attractors*, C. R. Biologies 326 (2003).

[31] V. Devloo, P. Hansen, M. Labbé, *Identification of all steady states in large networks by logical analysis*, Bull. Math. Biol. 65(6), pp. 1025-1051 (2003).

[32] P. D'haesleer, S. Liang, R. Somogyi, *Gene expression data analysis and modeling*, Tutorial notes from Pacific Symposium on Biocomputing (1999).

[33] P. D'haesleer, S. Liang, and R. Somogyi, *Genetic networks inference: from coexpression clustering to reverse engineering*, Bioinformatics, 16(8):707, (2000).

[34] H. de Jong, M. Page, *Qualitative simulation of large and complex genetic regulatory systems*, ECAI2000, p.141-145, IOS Press (2000).

[35] H. de Jong, *Modeling and simulation of genetic regulatory systems : a literature review*, Journal of Computational Biology 9(1):67-103 (2002).

[36] H. de Jong, J.-L. Gouzé, C. Hernandez, M. Page, T. Sari, and J. Geiselmann, *Dealing with discontinuities in the qualitative simulation of genetic regulatory networks*, ECAI 2002, p.191-195, IOS Press (2002).

[37] H. de Jong, J.-L. Gouzé, C. Hernandez, M. Page, T. Sari, and J. Geiselmann, *Hybrid modeling and simulation of genetic regulatory networks: A qualitative approach*, HSCC 2003, LNCS 2623, pp. 267-282 (2003).

[38] H. de Jong, J. Geiselmann, C. Hernandez, M. Page *Genetic Network Analyzer: Qualitative simulation of genetic regulatory networks*, Bioinformatics, 19(3):336-344 (2003).

[39] H. de Jong, J. Geiselmann, G. Batt, C. Hernandez, M. Page, *Qualitative simulation of the initiation of sporulation in Bacillus subtilis*, Bulletin of Mathematical Biology, 66(2):261-300 (2004).

[40] H. de Jong, J.L. Gouzé, C. Hernandez, M. Page, T. Sari, J. Geiselmann, *Qualitative simulation of genetic regulatory networks using piecewise-linear models*, Bulletin of Mathematical Biology, 66(2):301-340 (2004).

[41] G. Batt, H. de Jong, J. Geiselmann, M. Page, D. Ropers, D. Schneider, *Qualitative analysis and verification of hybrid models of genetic regulatory networks: Nutritional stress response in Escherichia coli*, HSCC 2005, LNCS 3414, pp. 134-150 (2005).

[42] M. Demazure, *Catastrophes et bifurcations*, Paris : Hermès (1989).

[43] R.L. Devaney *An introduction to chaotic dynamical systems* Addison-Wesley studies in nonlinearity, Redwood City, Addison-Wesley (1989).

[44] R. Edwards, L. Glass, *Combinatorial explosion in model gene networks*, Chaos, 10(3):691-704 (2000).

[45] R. Edwards, *Analysis of continuous-time switching networks*, Physica D 146:165-199 (2000).

[46] R. Edwards, H.T. Siegelmann, K. Aziza, L. Glass, *Symbolic dynamics and computation in model gene networks*, Chaos, 11(1):160-169 (2001).

[47] R. Edwards, *Chaos in neural and gene networks with hard switching*, Differential Equations and Dynamical Systems, 9:187-220 (2001).

[48] R. Edwards, J.J. MacDonald, M.J. Tsatsomeros, *On matrices with common invariant cones with applications in neural and gene networks*, Linear Algebra and its Applications, accepted (2004).

[49] M.B. Elowitz, S. Leibler, *A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators*, Nature, 403:335-338 (2000).

[50] A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Mathematics and Its Applications (Soviet Series), vol. 18, Kluwer Academic, Dordrecht, (1988).

[51] X.-C. Fu, W. Lu, P. Ashwin, J. Duan. *Symbolic representation of iterated maps*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 18:119-147 (2001).

[52] K. Fukuda, *Frequently asked questions in polyhedral computation*, `http://www.ifor.math.ethz.ch/ fukuda/polyfaq/polyfaq.html` (2000).

[53] T.S. Gardner, C.R. Cantor, J.J. Collins, *Construction of a genetic toggle switch in Escherichia Coli*, Nature, 403:339-342 (2000).

[54] T. Gedeon, *Attractors in continuous time switching networks*, Communications on Pure and Applied Analysis (CPAA) vol. 2, No. 2, 187-209, (2003).

[55] T. Gedeon, *Global dynamics of neural nets with infinite gain*, Physica D, 146:200-212 (2000).

[56] R. Ghosh, C. Tomlin, *Lateral Inhibition through Delta-Notch Signaling: A Piecewise Affine Hybrid Model*, HSCC 2001, LNCS 2034, 232-246 (2001).

[57] M.A. Gibson, J. Bruck, *A probabilistic model of a prokaryotic gene and its regulation*, In Computational Modeling of Genetic and Biochemical Networks (eds. J.M. Bower and H. Bolouri) MIT Press (2001).

[58] M.A. Gibson, E. Mjolness, *Modeling the activity of single genes*, in Computational Methods for Molecular and Cellular Biology, eds. J. M. Bower and H. Bolouri, MIT Press (2004). Also avail. as Technical Report JPL-ICTR-99-3 (1999).

[59] A. Girard, *Analyse algorithmique des systèmes hybrides*, Thèse de Doctorat, INPG, Grenoble (2004).

[60] L. Glass, S. Kauffman, *The logical analysis of continuous non-linear biochemical control networks*, J. Theor. Biol. 39:103-129 (1973).

[61] L. Glass, *A combinatorial analog of the Poincaré index theorem*, J. Comb. Theory (B) 15:264-268 (1973).

[62] L. Glass, *Combinatorial and topological methods in nonlinear chemical kinetics*, J. Chem. Phys. 63:1325-1335 (1975).

[63] L. Glass, *Classification of biological networks by their qualitative dynamics*, J. Theor. Biol. 54:85-107 (1975).

[64] L. Glass, J.S. Pasternack, *Prediction of limit cycles in mathematical models of biological oscillations*, Bull. Math. Biol. 40:27-44 (1978).

[65] L. Glass, J.S. Pasternack, *Stable oscillations in mathematical models of biological control systems*, J. Math. Biology, 6:207-223 (1978).

[66] L. Glass, C. Hill, *Ordered and disordered dynamics in random networks*, Europhys. Lett. 41(6):599-604 (1998).

[67] P. Glendinning, *Stability, Instability and Chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*, Cambridge Texts in Applied Mathematics (1994).

[68] A. Goetz, *Sofic subshifts and piecewise isometric systems*, Ergod. Theor. and Dyn. Sys., 19:1485-1501 (1999).

[69] A. Goetz, *An emerging area of dynamical systems*, in Trends in Mathematics: Fractals in Graz 2001, Birkhauser Verlag, (2002).

[70] Gouzé, J.-L., *Positive and negative circuits in dynamical systems*, Journal Biol. Syst., 6(1):11–15 (1998).

[71] J.L. Gouzé, T. Sari, *A class of piecewise linear differential equations arising in biological models*, Dynamical systems, 17:299–316 (2003).

[72] B. Grunbaum, *Convex Polytopes*, Interscience, New York, 1967. 2nd edition : Graduate Texts in Mathematics 221, Springer-Verlag New York (2003).

[73] J. Hasty, D. McMillen, F. Isaac, J.J. Collins, *Computational studies of gene regulatory networks : in numero molecular biology*, Nature Reviews Genetics, 2:268-279 (2001).

[74] M. Henk, J. Richter-Gebert, G.M. Ziegler, *Basic properties of convex polytopes*, in CRC Handbook of discrete and computational geometry, J.E. Goodman, J.O'Rourke, editors, Boca Raton, New York, CRC Press (1997).

[75] J.E. Hofer, *Topological entropy for noncompact spaces*, Michigan Math. J. 21, no. 3, 235-242 (1975).

[76] F. Jacob et J. Monod, *Genetic regulatory mechanisms in the synthesis of proteins*, J. Mol. Biol. 3:318 (1961).

[77] K. Kappler, R. Edwards, L. Glass, *Dynamics in high-dimensional model gene networks*, Signal Processing 83, 789-798 (2003).

[78] S. Kauffman, *Metabolic stability and epigenesis in randomly connected nets*, J. Theor. Biol. 22:437-467 (1969).

[79] S. Kauffman, *The large scale structure and dynamics of gene control circuits: an ensemble approach*, J. Theor. Biol., 44:167-174 (1974).

[80] S. A. Kauffman, *The origins of order*, Oxford University Press (1993).

[81] D.B. Killough, R. Edwards, *Bifurcations in Glass networks*, International Journal of Bifurcation and Chaos 15:395-423 (2005).

[82] B. Lewin, *Genes VII*, Oxford University Press, Oxford (1999).

[83] J. Lewis, L. Glass. *Steady states, limit cycles, and chaos in models of complex biological networks*, International Journal of Bifurcation and Chaos 1, 477-483 (1991).

[84] J.E. Lewis, L. Glass, *Nonlinear and symbolic dynamics of neural networks*, Neural Computation 4:621-642 (1992).

[85] P. Lincoln, A. Tiwari, *Symbolic Systems Biology: Hybrid Modeling and Analysis of Biological Networks*, HSCC 2004, LNCS 2993, pp.660-672 (2004).

[86] D. Lind, B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding* Cambridge , New York , Melbourne, Cambridge University Press (1995).

[87] M.C. Mackey, M. Santillán, N. Yildirim, *Modeling operon dynamics : the tryptophan and lactose operons as paradigms*, C. R. Biologies 327: 211-224 (2004).

[88] J.M. Mahaffy, E.S. Savev *Stability analysis for mathematical models of the lac operon*, Quart. Appl. Math. 57, 37-53 (1999).

[89] R. Maimon, S. Browning, *Diagrammatic notation and computational structure of gene networks*, in Proceedings of the Second International Conference on Systems Biology, pp. 311-317 (2001).

[90] J. Mason, P.S. Linsay, J.J. Collins, L. Glass, *Evolving complex dynamics in electronic models of genetic networks*, Chaos, 14(3):707-715 (2004).

[91] H.H. McAdams, L. Shapiro, *Circuit simulation of genetic networks*, Science 269:650-656 (1995).

[92] H.H. McAdams, A. Arkin, *Stochastic mechanisms for gene expression*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 94:814-19 (1997).

[93] H.H. McAdams, A. Arkin, *Towards a circuit engineering discipline*, Curr. Biol. 10:R318-R320 (2000).

[94] T. Mestl, E. Plahte, S.W. Omholt, *Periodic solutions of piecewise-linear differential equations*, Dyn. Stab. Syst. 10(2):179-193 (1995).

[95] T. Mestl, C. Lemay, L. Glass, *Chaos in high-dimensional neural and gene networks*, Physica D, 98:33-52 (1996).

[96] T. Mestl, R.J. Bagley, L. Glass, *Common chaos in arbitrarily complex feedback networks*, Physical Review Letters 79(4):653-656 (1997).

[97] M. Misiurewicz, *On Bowen's definition of topological entropy*, Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. A, 10, 827–833 (2004).

[98] J.D. Murray, *Mathematical biology*, Springer Berlin (1989).

[99] J. Namikawa, T. Hashimoto, *Dynamics and computation in functional shifts*, Nonlinearity 17:1317-1336 (2004).

[100] S.W. Omholt, X. Kefang, Ø. Andersen, E. Plahte, *Description and analysis of switchlike regulatory networks exemplified by a model of cellular iron homeostasis*, J. Theor. Biol. 195:339-350 (1998).

[101] T.D. Perkins, M. Hallett, L. Glass, *Inferring models of gene expression dynamics*, J. Theor. Biol., 230:289-299 (2004).

[102] J. Petitot, *La généalogie morphologique du structuralisme*, Numéro spécial en hommage à Claude Lévi-Strauss (M. Augé ed.), Critique, 620-621, 97-122 (1999).

[103] J. Piaget, *Le structuralisme*, Que sais-je? 1311 (1968).

[104] E. Plahte, T. Mestl, S.W. Omholt, *Global analysis of steady points for systems of differential equations with sigmoid interaction*, Dyn. Stab. Syst. 9(4):275-291 (1994).

[105] E. Plahte, T. Mestl, S.W. Omholt, *A mathematical framework for describing and analysing gene regulatory networks*, J. Theor. Biol., 176:291-300 (1995).

[106] E. Plahte, T. Mestl, S.W. Omholt, *Feedback loops, stability and multistationarity in dynamical systems*, Journal of Biological Systems 3:409 - 413 (1995).

[107] E. Plahte, T. Mestl, S.W. Omholt, *A methodological basis for description and analysis of systems with complex switch-like interactions*, J. Math. Bio. 36:321-348 (1998).

[108] E. Plahte, S. Kjøglum, *Analysis and generic properties of gene regulatory networks with graded response functions*, Physica D, 201:150-176 (2005).

[109] C.V. Rao, A.P. Arkin, *Control motifs for intracellular regulatory networks*, Annu. Rev. Biomed. Eng. 3:391-419 (2001).

[110] F. Robert, *Les systèmes dynamiques discrets*, Springer, Collection : Mathématiques et applications ; 19 (1995).

[111] R. Rosen, *Dynamical system theory in biology. Vol. 1, Stability theory and its applications*, Wiley-Interscience (1970).

[112] M. Santillan, M.C. Mackey, *Why the lysogenic state of l phage is so stable: a mathematical modelling approach*, Biophy. J. 86, 75-84 (2004).

[113] S.N. Simic, K.H. Johansson, J. Lygeros, S. Sastry, *Towards a geometric theory of hybrid systems*, HSCC 2000, LNCS 1790, pp. 421-436 (2000).

[114] P. Smolen, D.A. Baxter, J.H. Byrne, *Modeling transcriptional control in gene networks - Methods, recent results, and future directions*, Bull. Math. Biol. 62:247-292 (2000).

[115] E.H. Snoussi, *Qualitative dynamics of piecewise-linear differential equations: a discrete mapping approach*, Dyn. Stab. Syst. 4(3-4):189-207 (1989).

[116] E.H. Snoussi, R. Thomas, *Logical identification of all steady states: the concept of feedback loop characteristic states*, Bull. Math. Biol. 55(5):973-991 (1993).

[117] E.H. Snoussi, *Necessary conditions for multistationarity and stable periodicity*, J. Biol. Sys., 6(1):3-9 (1998).

[118] C. Soulé, *Graphic requirements for multistationarity*, Complexus, 1:123-133 (2003).

[119] D. Thieffry, R. Thomas, *Qualitative analysis of gene networks*, Pacific Symp. Biocomp. 98, 3:77-88 (1998).

[120] R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogénèse : essai d'une théorie générale des modèles*, Paris : InterEditions (1977).

[121] R. Thom, *Paraboles et catastrophes*, Flammarion, Paris (1983).

[122] R. Thom, *Modèles mathématiques de la morphogenèse*, Bourgois, 10-18, 1974, réed., (1980).

[123] R. Thom, *Prédire n'est pas expliquer*, Flammarion, (1991).

[124] R. Thomas, R. D'Ari, *Biological Feedback*, CRC-Press, Boca Raton, Florida (1990).

[125] R. Thomas, M. Kaufman , *Multistationarity, the basis of cell differentiation and memory. I. Structural conditions of multistationarity and other nontrivial behavior*, Chaos, 11:170-179 (2001).

[126] R. Thomas and M. Kaufman , *Multistationarity, the basis of cell differentiation and memory. II. Logical analysis of regulatory networks in terms of feedback circuits*, Chaos, 11:180-195 (2001).

[127] J.M.G. Vilar, C.C. Guet, S. Leibler, *Modeling network dynamics: the lac operon, a case study*, J. Cell Biology 161: 471-476 (2003).

[128] J. Von Neumann, *Théorie générale et logique des automates*, Champ Vallon (1996).

[129] G. Weisbuch, *Dynamique des systèmes complexes*, Editions du CNRS (1989).

[130] L.F.A. Wessels, E.P. van Someren, M.J.T Reinders, *A comparison of genetic network models*, Pac. Symp. on Biocomputing, 6:508-519, (2001).

[131] P. Wong, S. Gladney, J.D. Keasling, *Mathematical model of the lac operon: Inducer exclusion, catabolite repression, and diauxic growth on glucose and lactose*, Biotechnol. Prog. 13: 132-143 (1997).

[132] A. Wuensche, *Genomic regulation modeled as a network with basins of attraction*, Pac. Symp. on Biocomputing, pp. 89-102, (1998).

[133] N. Yildirim, M.C. Mackey, *Feedback regulation in the lactose operon: A mathematical modeling study and comparison with experimental data*, Biophysical Journal 84: 2841-2851 (2003).

[134] G.M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Mathematics 152, Springer-Verlag, New York (1995).