



Axiomatisation de procédures d'agrégation de préférences

Bernard Debord

► To cite this version:

Bernard Debord. Axiomatisation de procédures d'agrégation de préférences. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1987. Français. NNT: . tel-00010237

HAL Id: tel-00010237

<https://theses.hal.science/tel-00010237>

Submitted on 22 Sep 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

**Université Scientifique Technologique et Médicale de
Grenoble**

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'USTMG
(arrêté ministériel 5 juillet 84)
Informatique et Mathématiques Appliquées

par

Bernard DEBORD

AXIOMATISATION DE PROCEDURES D'AGREGATION DE PREFERENCES.

Thèse soutenue le 29 octobre 87 devant la Commission d'Examen :

Président : G. Kreweras
Rapporteurs : B. Monjardet
M. Salles
Examineurs : J. P. Barthélémy
J. M. Laborde
H. Raynaud

Thèse préparée au sein du laboratoire LSD

UNIVERSITE Joseph FOURIER (GRENOBLE I)

Président de l'Université :
M. PAYAN Jean Jacques

Année Universitaire 1987 - 1988

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

PROFESSEURS DE 1ère Classe

ARNAUD Paul
ARVIEU ROBERT
AUBERT Guy
AURIAULT Jean-Louis
AYANT Yves
BARBIER Marie-Jeanne
BARJON Robert
BARNOUD Fernand
BARRA Jean-René
BECKER Pierre
BEGUIN Claude
BELORISKY Elie
BENZAKEN Claude
BERARD Pierre
BERNARD Alain
BERTRANDIAS Françoise
BERTRANDIAS Jean-Paul
BILLET Jean
BOELHER Jean-Paul
BONNIER Jane Marie
BOUCHEZ Robert
BRAVARD Yves
CARLIER Georges
CAUQUIS Georges
CHARDON Michel
CHIBON Pierre
COHEN ADDAD Jean-Pierre
COLIN DE VERDIERE Yves
CYROT Michel
DEBELMAS Jacques
DEGRANGE Charles
DEMAILLY Jean-Pierre
DENEUVILLE Alain
DEPORTES Charles
DOLIQUE Jean-Michel
DOUCE Roland
DUCROS Pierre
FONTAINE Jean-Marc
GAGNAIRE Didier
GERMAIN Jean-Pierre
GIRAUD Pierre
HICTER Pierre
IDELMAN Simon
JANIN Bernard
JOLY Jean-René
KAHANE André, détaché
KAHANE Josette
KRAKOWIAK Sacha

Chimie Organique
Physique Nucléaire I.S.N.
Physique C.N.R.S
Mécanique
Physique Approfondie
Electrochimie
Physique Nucléaire ISN
Biochimie Macromoléculaire Végétale
Statistiques-Mathématiques Appliquées
Physique
Chimie Organique
Physique
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Géographie
Mécanique
Chimie Générale
Physique Nucléaire ISN
Géographie
Biologie Végétale
Chimie Organique
Géographie
Biologie Animale
Physique
Mathématiques Pures
Physique du Solide
Géologie Générale
Zoologie
Mathématiques Pures
Physique
Chimie Minérale
Physique des Plasmas
Physiologie Végétale
Cristallographie
Mathématiques Pures
Chimie Physique
Mécanique,
Géologie
Chimie
Physiologie Animale
Géographie
Mathématiques Pures
Physique
Physique
Mathématiques Appliquées

LAJZEROWICZ Jeanine
 LAJZEROWICZ Joseph
 LAURENT Pierre-Jean
 LEBRETON Alain
 DE LEIRIS Joël
 LHOMME Jean
 LLIBOUTRY Louis
 LOISEAUX Jean-Marie
 LUNA Domingo
 MACHE Régis
 MASCLE Georges
 MAYNARD Roger
 OMONT Alain
 OZENDA Paul
 PAYAN Jean-Jacques
 PEBAY-PEYROULA Jean-Claude
 PERRIER Guy
 PIERRARD Jean-Marie
 PIERRE Jean-Louis
 RENARD Michel
 RINAUDO Marguerite
 ROSSI André
 SAXOD Raymond
 SENGEL Philippe
 SERGERAERT Francis
 SOUCHIER Bernard
 SOUTIF Michel
 STUTZ Pierre
 TRILLING Laurent
 VALENTIN Jacques
 VAN CUTSEM Bernard
 VIALON Pierre

Physique
 Physique
 Mathématiques Appliquées
 Mathématiques Appliquées
 Biologie
 Chimie
 Géophysique
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Mathématiques Pures
 Physiologie Végétale
 Géologie
 Physique du Solide
 Astrophysique
 Botanique (Biologie Végétale)
 Mathématiques Pures
 Physique
 Géophysique
 Mécanique
 Chimie Organique
 Thermodynamique
 Chimie CERMAV
 Biologie
 Biologie Animale
 Biologie Animale
 Mathématiques Pures
 Biologie
 Physique
 Mécanique
 Mathématiques Appliquées
 Physique Nucléaire I.S.N.
 Mathématiques Appliquées
 Géologie

PROFESSEURS de 2ème Classe

ADIBA Michel
 ANTOINE Pierre
 ARMAND Gilbert
 BARET Paul
 BLANCHI J.Pierre
 BLUM Jacques
 BOITET Christian
 BORNAREL Jean
 BRUANDET J.François
 BRUGAL Gérard
 BRUN Gilbert
 CASTAING Bernard
 CERFF Rudiger
 CHIARAMELLA Yves
 COURT Jean
 DUFRESNOY Alain
 GASPARD François
 GAUTRON René
 GENIES Eugène
 GIDON Maurice
 GIGNOUX Claude
 GILLARD Roland
 GIORNI Alain
 GONZALEZ SPRINBERG Gérardo
 GUIGO Maryse
 GUMUCHAIN Hervé
 GUITTON Jacques

Mathématiques Pures
 Géologie
 Géographie
 Chimie
 STAPS
 Mathématiques Appliquées
 Mathématiques Appliquées
 Physique
 Physique
 Biologie
 Biologie
 Physique
 Biologie
 Mathématiques Appliquées
 Chimie
 Mathématiques Pures
 Physique
 Chimie
 Chimie
 Géologie
 Sciences Nucléaires
 Mathématiques Pures
 Sciences Nucléaires
 Mathématiques Pures
 Géographie
 Géographie
 Chimie

HACQUES Gérard
 HERBIN Jacky
 HERAULT Jeanny
 JARDON Pierre
 JOSELEAU Jean-Paul
 KERCKHOVE Claude
 LONGEQUEUE Nicole
 LUCAS Robert
 MANDARON Paul
 MARTINEZ Francis
 NEMOZ Alain
 OUDET Bruno
 PECHER Arnaud
 PELMONT Jean
 PERRIN Claude
 PFISTER Jean-Claude
 PIBOULE Michel
 RAYNAUD Hervé
 RICHARD Jean-Marc
 RIEDTMANN Christine
 ROBERT Gilles
 ROBERT Jean-Bernard
 SARROT-REYNAULD Jean
 SAYETAT Françoise
 SERVE Denis
 STOECKEL Frédéric
 SCHOLL Pierre-Claude
 SUBRA Robert
 VALLADE Marcel
 VIDAL Michel
 VIVIAN Robert
 VOTTERO Philippe

Mathématiques Appliquées
 Géographie
 Physique
 Chimie
 Biochimie
 Géologie
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Physique
 Biologie
 Mathématiques Appliquées
 Thermodynamique CNRS - CRTBT
 Mathématiques Appliquées
 Géologie
 Biochimie
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Physique du Solide
 Géologie
 Mathématiques Appliquées
 Physique
 Mathématiques Pures
 Mathématiques Pures
 Chimie Physique
 Géologie
 Physique
 Chimie
 Physique
 Mathématiques Appliquées
 Chimie
 Physique
 Chimie Organique
 Géographie
 Chimie

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L' IUT 1

PROFESSEURS de 1^{ère} Classe

BUISSON Roger
 DODU Jacques
 NEGRE Robert
 NOUGARET Marcel
 PERARD Jacques

Physique IUT 1
 Mécanique Appliquée IUT 1
 Génie Civil IUT 1
 Automatique IUT 1
 EEA. IUT 1

PROFESSEURS de 2^{ème} classe

BOUTHINON Michel
 CHAMBON René
 CHEHIKIAN Alain
 CHENAVAS Jean
 CHOUTEAU Gérard
 CONTE René
 GOSSE Jean-Pierre
 GROS Yves
 KUHN Gérard, (Détaché)
 MAZUER Jean
 MICHOUPLIER Jean
 MONLLOR Christian
 PEFFEN René
 PERRAUD Robert
 PIERRE Gérard
 TERRIEZ Jean-Michel
 TOUZAIN Philippe
 VINCENDON Marc

EEA. IUT 1
 Génie Mécanique IUT 1
 EEA. IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 EEA.IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 EEA.IUT 1
 Métallurgie IUT 1
 Chimie IUT 1
 Chimie IUT 1
 Génie Mécanique IUT 1
 Chimie IUT 1
 Chimie IUT 1

PROFESSEURS DE PHARMACIE

AGNIUS-DELORD Claudine	Physique	Faculté La Tronche
ALARY Josette	Chimie Analytique	Faculté La Tronche
BERIEL Hélène	Physiologie et Pharmacologie	Faculté La Tronche
CUSSAC Max	Chimie Thérapeutique	Faculté La Tronche
DEMENGÉ Pierre	Pharmacodynamie	Faculté La Tronche
FAVIER Alain	Biochimie	C.H.R.G.
JEANNIN Charles	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan
LATURAZE Jean	Biochimie	Faculté La Tronche
LUU DUC Cuong	Chimie Générale	Faculté La Tronche
MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie	Faculté La Tronche
MARZIN Daniel	Toxicologie	Faculté Meylan
RENAUDET Jacqueline	Bactériologie	Faculté La Tronche
ROCHAT Jacques	Hygiène et Hydrologie	Faculté La Tronche
SEIGLE-MURANDI Françoise	Botanique et Cryptogamie	Faculté Meylan
VERAIN Alice	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE MEDECINE

PROFESSEURS CLASSE EXEPTIONNELLE ET 1ère CLASSE

AMBLARD Pierre	Dermatologie	C.H.R.G.
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie	C.H.R.G.
BEAUDOING André	Pédiatrie-Puericulture	C.H.R.G.
BEZEZ Henri	Orthopédie-Traumatologie	Hopital SUD
BONNET Jean-Louis	Ophthlalmologie	C.H.R.G.
BOUCHET Yves	Anatomie	Faculté La Merci
	Chirurgie Générale et Digestive	C.H.R.G.
BUTEL Jean	Orthopédie-Traumatologie	C.H.R.G.
CHAMBAZ Edmond	Biochimie	C.H.R.G.
CHAMPETIER Jean	Anatomie-Topographique	
	et Appliquée	C.H.R.G.
CHARACHON Robert	O.R.L.	C.H.R.G.
COLOMB Maurice	Immunologie	Hopital sud
COUDERC Pierre	Anatomic-Pathologique	C.H.R.G.
DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie	C.H.R.G.
DENIS Bernard	Cardiologie	C.H.R.G.
GAVEND Michel	Pharmacologie	Faculté La Merci
HOLLARD Daniel	Hématologie	C.H.R.G.
LATREILLE René	Chirurgie Thoracique et	
	Cardiovasculaire	C.H.R.G.
LE NOC Pierre	Bactériologie-Virologie	C.H.R.G.
MALINAS Yves	Gynécologie et Obstétrique	C.H.R.G.
MALLION Jean-Michel	Médecine du Travail	C.H.R.G.
MICOUD Max	Clinique Médicale et Maladies	
	Infectieuses	C.H.R.G.
MOURIQUAND Claude	Histologie	Faculté La Merci
PARAMELLE Bernard	Pneumologie	C.H.R.G.
PERRET Jean	Neurologie	C.H.R.G.
RACHAIL Michel	Hépat-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie	C.H.R.G.
SARRAZIN Roger	Clinique Chirurgicale	C.H.R.G.
STIEGLITZ Paul	Anestésiologie	C.H.R.G.
TANCHE Maurice	Physiologie	Faculté La Merci
VIGNAIS Pierre	Biochimie	Faculté La Merci

PROFESSEURS 2ème CLASSE

BACHELOT Yvan	Endocrinologie	C.H.R.G.
BARGE Michel	Neurochirurgie	C.H.R.G.
BENABID Alim Louis	Biophysique	Faculté La Merci
BENSA Jean-Claude	Immunologie	Hopital Sud
BERNARD Pierre	Gynécologie-Obstétrique	C.H.R.G.
BESSARD Germain	Pharmacologie	ABIDJAN
BOLLA Michel	Radiothérapie	C.H.R.G.
BOST Michel	Pédiatrie	C.H.R.G.
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie Adultes	Hopital Sud
BRAMBILLA Christian	Pneumologie	C.H.R.G.
CHIROSEL Jean-Paul	Anatomie-Neurochirurgie	C.H.R.G.
COMET Michel	Biophysique	Faculté La Merci
CONTAMIN Charles	Chirurgie Thoracique et	
	Cardiovasculaire	C.H.R.G.
CORDONNIER Daniel	Néphrologie	C.H.R.G.
COULOMB Max	Radiologie	C.H.R.G.
CROUZET Guy	Radiologie	C.H.R.G.
DEBRU Jean-Luc	Médecine Interne et Toxicologie	C.H.R.G.
DEMONGEOT Jacques	Biostatistiques et Informatique	Faculté La Merci
	Médicale	
DUPRE Alain	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
DYON Jean-François	Chirurgie Infantile	C.H.R.G.
ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie	Faculté La Merci
FAURE Claude	Anatomie et Organogénèse	C.H.R.G.
FAURE Gilbert	Urologie	C.H.R.G.
FOURNET Jacques	Hépatogastro-Entérologie	C.H.R.G.
FRANCO Alain	Médecine Interne	C.H.R.G.
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie	C.H.R.G.
GUIDICELLI Henri	Chirurgie Générale et Vasculaire	C.H.R.G.
GUIGNIER Michel	Thérapeutique et Réanimation	
	Médicale	C.H.R.G.
HADJIAN Arthur	Biochimie	Faculté La Merci
HALIMI Serge	Endocrinologie et Maladies	
	Métaboliques	C.H.R.G.
HOSTEIN Jean	Hépatogastro-Entérologie	C.H.R.G.
HUGONOT Robert	Médecine Interne	C.H.R.G.
JALBERT Pierre	Histologie-Cytogénétique	C.H.R.G.
JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	O.R.L.	C.H.R.G.
KOLODIE Lucien	Hématologie Biologique	C.H.R.G.
LETOUBLON Christian	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
MACHECOURT Jacques	Cardiologie et Maladies	
	Vasculaires	C.H.R.G.
MAGNIN Robert	Hygiène	C.H.R.G.
MASSOT Christian	Médecine Interne	C.H.R.G.
MOUILLON Michel	Ophthalmologie	C.H.R.G.
PELLAT Jacques	Neurologie	C.H.R.G.
PHELIP Xavier	Rhumatologie	C.H.R.G.
RACINET Claude	Gynécologie-Obstétrique	Hopital Sud
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie	C.H.R.G.
RAPHAEL Bernard	Stomatologie	C.H.R.G.
SCHAEERER René	Cancérologie	C.H.R.G.
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-Virologie	Faculté La Merci
SELE Bernard	Cytogénétique	Faculté La Merci
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie	C.H.R.G.
STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologique	C.H.R.G.
VROUSOS Constantin	Radiothérapie	C.H.R.G.

Résumé. Soient D (les données) et M (les modèles) deux ensembles de relations binaires sur un ensemble fini d'objets X . Le but de cet exposé est l'étude, d'un point de vue axiomatique, des (D,M) -procédures (ou multiprocédures) c'est à dire les applications qui à tout sous-ensemble fini de D associent un (ou plusieurs) élément de M .

La première partie contient la caractérisation axiomatique des procédures et multiprocédures qui ne dépendent que des matrices de préférences ainsi que la caractérisation de ces matrices pour différents ensembles de données.

La seconde partie est une étude d'une classe de multiprocédures qui généralisent la notion de fonction de choix.

Enfin, dans la troisième partie, sont développées les notions de procédures et de multiprocédures prudentes ainsi que des variantes séquentielles de la procédure de Borda.

Abstract. Let D (the data) and M (the models) be two sets of binary relations on X , a finite set of alternatives. This Ph. D. Thesis is an axiomatic study of the (D,M) -procedures (and multiprocedures) that is mappings from the finite subsets of D to M (or the non empty subsets of M).

In the first part is given an axiomatic characterization of procedures relying only on matrices of preferences, and also characterizations of those matrices for different sets of data.

In the second part we extend and then study the notion of choice function.

The third and last part deals with "prudent" procedures and multiprocedures, and sequential variations of Borda's procedure.

Mots clefs : décision multicritère, agrégation de préférences, fonction de choix, aide à la décision, axiomatique.

INTRODUCTION

Le cadre général de cet exposé est connu sous le nom d'agrégation de préférences individuelles en une préférence collective, problème rendu célèbre par Arrow [1951].

Plus précisément, un ensemble de v votants expriment leurs préférences sur un ensemble fini d'objets $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ par l'intermédiaire d'une relation binaire $R \subseteq X \times X$; R est choisie parmi un ensemble de relations binaires $\mathcal{D}$: l'ensemble des données. $R_1, R_2, \dots, R_v$ sont agrégées en une préférence collective : un élément (resp. plusieurs) choisi parmi un ensemble $\mathcal{M}$ de relations binaires : l'ensemble des modèles. Une $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -procédure (resp. multiprocédure d'agrégation) est une application $F : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathcal{M}$ (resp. $F : \mathcal{D}^* \rightarrow 2^{\mathcal{M}} - \emptyset$), avec $\mathcal{D}^* = \bigcup_{v \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^v$. Un élément $\Pi : (R_1, \dots, R_k, \dots, R_v)$ de $\mathcal{D}^*$ est appelé un $\mathcal{D}$ -profil, on lui associe trois matrices à n lignes et n colonnes :

$$E(\Pi) \text{ (matrice "électorale")} : \quad e_{ij}(\Pi) = |\{k / x_i R_k x_j\}| \quad (0 \leq e_{ij}(\Pi) \leq v) ;$$

$$M(\Pi) \text{ (matrice "majoritaire")} : \quad m_{ij}(\Pi) = 2e_{ij}(\Pi) - v \quad (-v \leq m_{ij}(\Pi) \leq v) ;$$

$$B(\Pi) \text{ (matrice de "Benjamin Franklin")} : \quad b_{ij}(\Pi) = e_{ij}(\Pi) - e_{ji}(\Pi) \quad (-v \leq b_{ij}(\Pi) \leq v).$$

L'exposé qui suit est la réunion des investigations que nous avons menées sur les $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -procédures (et multiprocédures) d'agrégation dont le résultat $F(\Pi)$ ne dépend que de $M(\Pi)$ ou bien de $B(\Pi)$.

Dans une première partie, nous caractériserons de manière axiomatique les procédures d'agrégation qui ne se réfèrent qu'à la matrice majoritaire ou la matrice de Benjamin Franklin pour déterminer la préférence collective ; nous caractériserons

aussi ces matrices pour différents ensembles de données (en particulier pour $\mathcal{D} = \mathcal{X} = \{\text{les ordres totaux}\}$ et $\mathcal{D} = \mathcal{T} = \{\text{les préordres totaux}\}$).

Dans une seconde partie, nous étendrons la notion de fonction de choix et mènerons une étude axiomatique de ces nouvelles procédures d'agrégation.

Dans la troisième et dernière partie, nous continuerons notre étude axiomatique pour deux procédures d'agrégation classiques : les $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédures d'agrégation et les $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation ; nous examinerons notamment les algorithmes consistant en l'application successive d'une fonction de choix.

De manière plus détaillée, nous pouvons résumer linéairement cet exposé comme suit.

Le **chapitre 1** contient les définitions et notations utilisées par la suite, ainsi que les liens principaux entre les problèmes que nous avons envisagés et des problèmes classiques d'agrégation de préférences.

Dans le **chapitre 2**, nous caractérisons les procédures F qui ne dépendent que de la matrice de Benjamin Franklin (c.a.d. $B(\Pi) = B(\Pi') \Rightarrow F(\Pi) = F(\Pi')$) ou de la matrice majoritaire.

Dans le **chapitre 3**, nous caractérisons pour divers ensembles $\mathcal{D}$ les matrices (n, n) qui sont des matrices de Benjamin Franklin ou des matrices majoritaires d'un $\mathcal{D}$ -profil.

Dans le **chapitre 4**, nous étudions une classe de procédures (et multiprocédures) qui associent à tout $\mathcal{D}$ -profil (avec $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}$) une (ou plusieurs) "k-élite" : une k-élite étant une relation binaire $Y \rightarrow$ formée par une clique Y à k-éléments dominant une partie stable à $n-k$ éléments ($\forall a, b \in X, aY \rightarrow b \Leftrightarrow a \in Y$).

Dans le **chapitre 5**, nous démontrons l'analogie de la caractérisation axiomatique de Young de la fonction de choix de Borda pour une multiprocédure définie au chapitre 4.

Dans les **chapitres 6 et 7**, nous étudions en détail les ordres et préordres prudents.

Le **chapitre 8** est consacré à des procédures qui peuvent être algorithmiquement décrite comme itération de certaines fonctions de choix.

L'**annexe** contient un document peu connu de Benjamin Franklin qui a été à l'origine

des recherches contenues dans la première partie.

★

★ ★

Je tiens à remercier tout particulièrement pour leur soutien et leur aide attentionnée Hervé Raynaud et Jean-Pierre Barthélémy. Le premier a su développer mon intérêt pour toute les structures "prudentes" ; le second m'a fait découvrir un autre aspect de l'agrégation des préférences : les structures "médiannes".

Chacun d'entre eux pourra reconnaître tout au long de cet exposé la marque de son influence, qui ne sera pas considérée, je l'espère, comme un manque d'originalité mais plutôt comme l'apport enrichissant de nos interactions.

Je tient à remercier aussi Bernard Monjardet et Maurice Salles pour leurs remarques constructives concernant l'élaboration du manuscrit final.

Je n'oublierais pas non plus toute l'équipe du LSD au sein duquel s'est effectué ce travail et dont l'ambiance amicale s'est révélée chaque jour plus précieuse.

Chapitre 1

PRELIMINAIRES ET NOTATIONS

Le but de ce premier chapitre est de poser le décor : notations, définitions, problèmes envisagés et références à des problèmes voisins.

Dans un premier temps, nous allons définir les modèles mathématiques que nous utiliserons pour représenter les préférences individuelles. Nous expliciterons ensuite le terme de procédure d'agrégation ainsi que le vocabulaire employé dans cet exposé. Les concepts de base étant clarifiés, nous définirons alors les différents problèmes qui ont retenu notre attention par l'intermédiaire de quelques procédures d'agrégation classiques.

1.1. MODELISATION DES PREFERENCES.

La première étape consiste en la définition d'un ensemble d'objets (actions, décisions, solutions, candidats...) sur lesquels portent les préférences individuelles. Ces objets peuvent être a priori en nombre fini ou infini ; nous nous sommes limités au cas où cet ensemble est fini. Désignons par n son cardinal, et par $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des n objets. Lorsque la notation en indice ne sera pas nécessaire, des objets quelconques de X seront désignés par $a, b, c, d, \dots$

Dans l'idéal, les préférences individuelles sur les objets de X peuvent être

représentées par l'intermédiaire d'une échelle numérique comme par exemple en théorie de l'utilité. A tout objet a est associé son utilité $u(a)$; a est préféré (au sens large) à b si et seulement si $u(a) \geq u(b)$. Pour tout couple d'objets, il est alors possible de définir l'intensité de la préférence de a sur b par $u(a) - u(b)$.

Les infinies variations de cette intensité permettent une grande finesse de traitement. De ce fait, la validité des résultats dépend directement de la qualité de l'évaluation des utilités.

Ce modèle est donc bien adapté lorsque les objets de X sont rangés sur une échelle numérique grâce à des instruments de mesure de précision suffisante (voitures rangées en fonction de leur vitesse, entreprises classées en fonction de leur chiffre d'affaire...). Par contre, si l'échelle est subjective (candidats à une élection classés par ordre de préférence, objets classés selon leur qualité esthétique) la construction d'une fonction d'utilité introduit des biais d'autant plus importants que cette fonction est soumise à de grandes variations sur de courtes durées.

Dans ce cas, le modèle est inadapté, qui plus est inapplicable, il est nécessaire d'en construire un autre.

Des modèles qui répondent à cette nécessité ont été introduits par Roy, plusieurs modalités de préférences y sont distinguées. Par exemple, lorsque l'intensité de préférence entre deux objets est trop faible pour être ressentie clairement, la notion de préférence faible est introduite. Une synthèse de ces problèmes peut être trouvée dans Roy [1985].

Pour notre part, nous modéliserons toute préférence individuelle sur les n objets par une relation binaire R sur X (c'est à dire un **sous-ensemble** du produit cartésien $X \times X$). Nous noterons en abrégé aRb lorsque $(a,b) \in R$, et $a \not R b$ lorsque $(a,b) \notin R$.

Pour tout couple d'objets, les quatre situations ci-dessous modélisent les quatre modalités de préférences :

aRb et $b \not R a$: a est préféré strictement à b ;

$a \not R b$ et bRa : b est préféré strictement à a ;

aRb et bRa : a et b sont indifférenciés ;

$a \not R b$ et $b \not R a$: a et b sont incomparables .

Cette hypothèse consiste simplement à rajouter la modalité d'incomparabilité à l'axiomatique de May [1952].

La relation R peut être naturellement décomposée en trois relations : la préférence stricte P ($aPb \Leftrightarrow aRb$ et $b \not R a$), l'indifférence E ($aEb \Leftrightarrow aRb$ et bRa), et l'incomparabilité I ($aIb \Leftrightarrow a \not R b$ et $b \not R a$) ; ces trois relations forment une partition de R , donc en particulier $R = P \cup E \cup I$.

Si R est une relation binaire, on notera $-R$ la relation inverse ; elle est obtenue en inversant les préférences strictes de R ($-R$ est souvent appelée relation réciproque de R). (L'utilisation de cette notation non classique se justifiera à l'usage.)

Des conditions supplémentaires sur les préférences individuelles se traduisent par des propriétés sur les relation binaires.

Une relation R sera dite :

réflexive si et seulement si $\forall a \in X \ aRa$

symétrique si et seulement si $\forall a, b \in X^2 \ aRb \Rightarrow bRa$;

antisymétrique si et seulement si $\forall a, b \in X^2 \ aRb$ et $bRa \Rightarrow a = b$;

transitive si et seulement si $\forall a, b, c \in X^3 \ aRb$ et $bRc \Rightarrow aRc$;

totale si et seulement si $\forall a, b \in X^2 \ aRb$ ou bRa .

D'autres propriétés (la transitivité négative par exemple) sont utiles dans des contextes différents.

Nous adopterons les définitions suivantes : un **ordre total** est une relation totale, antisymétrique, et transitive ; un **ordre partiel** est une relation réflexive, antisymétrique, et transitive ; un **préordre** est une relation totale et transitive ; une **relation d'équivalence** est une relation réflexive, symétrique, et transitive ; un **tournoi** est une relation totale et antisymétrique.

Nous désignerons respectivement par $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{C}$, l'ensemble des relations antisymétriques, relations totales (ou complètes), relations d'équivalence,

ordres totaux (linear orders), ordres partiels, préordres, relations réflexives, relations réflexives et symétriques, tournois.

Remarques.

1. Dans beaucoup de contextes, la notion de réflexivité n'est pas requise, ou même, est dépourvue de sens ; cependant, nous supposerons que toutes les préférences individuelles sont réflexives, car il en résulte une simplification des notations et des définitions.

2. Il est possible d'établir des correspondances entre les divers types de préférences individuelles exprimées par une fonction d'utilité, et diverses relations binaires ; à titre d'exemple :

R est un ordre total si et seulement si il existe une fonction u à valeurs réelles telle que :

$$aRb \Leftrightarrow u(a) > u(b) ;$$

$$a = b \Leftrightarrow u(a) = u(b).$$

R est un préordre total si et seulement si il existe une fonction u à valeurs réelles telle que :

$$aRb \Leftrightarrow u(a) \geq u(b).$$

R est un ordre partiel si et seulement si il existe une fonction u à valeurs réelles telle que :

$$aRb \Rightarrow u(a) > u(b) ;$$

$$a = b \Leftrightarrow u(a) = u(b).$$

Il serait possible d'élargir l'éventail des relations que nous avons considérées par les notions d'ordre d'intervalle (cf Fishburn [1970]) ou de quasi-ordre (introduit par Luce [1956]). De telles considérations sont intéressantes du point de vue de la modélisation des préférences individuelles, mais elles n'apportent aucune modification aux résultats de notre exposé.

Pour mémoire citons malgré tout :

R est un ordre d'intervalle si et seulement si il existe deux fonctions u et v à valeurs réelles telles que :

$$aRb \Leftrightarrow u(a) > u(b) + v(b).$$

R est un quasi-ordre si et seulement si il existe une fonction u et une constante v telles que :

$$aRb \Leftrightarrow u(a) > u(b) + v.$$

Pour plus de détails se référer à Fishburn [1972] (ou plus récemment à Chandon & Vincke [1981]).

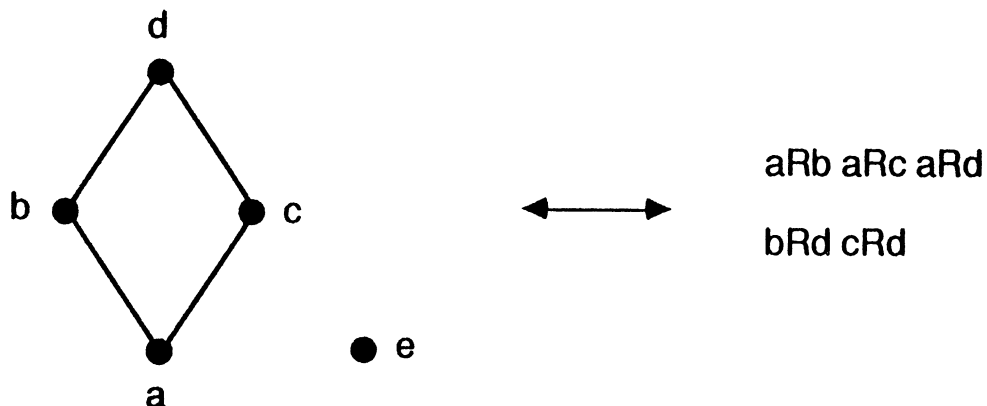
3. La modélisation des préférences individuelles par des relations binaires peut malgré tout rétablir la notion d'intensité de préférence. Cette extension astucieuse est exposée par Cook & Kress [1985].

Conventions.

Tout au long de cet exposé, les objets seront désignés par des lettres minuscules, les relations de préférence seront désignées par des lettres capitales ; les ensembles de relations par des lettres cursives.

Soient a, b, c, d, e cinq objets de X :

- 1- $abcde$ désignera l'ordre total où a est l'objet préféré à tous les autres, suivi de b puis de c puis de d , et enfin de e ;
- 2- un préordre sera noté de la même manière qu'un ordre total à ceci près que les objets formant une classe d' ex æquo seront entre parenthèses $(ab)(cd)e$ désignera le préordre où a et b sont premiers ex æquo, c et d troisième ex æquo, et e dernier ;
- 3- un ordre partiel sera désigné par son diagramme de Hasse :



- 4- $\{abc\}\{de\}$ désignera la relation d'équivalence à deux classes abc et de .

1.2. METHODES D'AGREGATION.

Les premières études de méthodes d'agrégation de préférences portent sur l'analyse des scrutins ; en effet, dès le dix huitième siècle, Borda [1781] et Condorcet [1785] étudiaient le problème de l'élection d'un candidat par un ensemble de votants (pour une compilation des différents problèmes liés à l'analyse du scrutin et leurs références historiques précises se référer à Black [1958] et Guilbaud [1952]).

La terminologie électorale est d'autant plus employée que tout problème d'agrégation peut se reformuler par l'intermédiaire d'un paradigme électoral ; nous parlerons donc de votants (pour désigner des juges, experts, critères, variables...), de majorité, d'oligarchie, de dictateur...

Tous ces termes seront employés dans un contexte mathématique précis, leur interprétation au sens du langage courant est une acrobatie intellectuelle bien téméraire à laquelle nous ne nous livrerons pas !

1.2.1. Notations et définitions.

Supposons donc qu'un ensemble de votants $V = \{1 \dots v\}$ expriment chacun leurs préférences selon une relation binaire sur X choisie parmi un ensemble de relations binaires $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}$.

$\mathcal{D}$ est l'ensemble des données grâce auxquelles la préférence collective va pouvoir être déterminée.

Les ensembles de données $\mathcal{D}$ dont nous parlerons posséderont toujours la propriété : $R \in \mathcal{D} \Rightarrow -R \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ représentera selon le contexte l'un des ensembles $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{O}, \mathcal{P}, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$.

DEFINITION 1.1 : On appelle $\mathcal{D}$ -profil sur X tout v -uplet $\Pi = (R_1, R_2, \dots, R_v)$ de v relations binaires de $\mathcal{D}$. (Par convention lorsque v est nul, le profil est vide.)

Notons $e_{ij}(\Pi)$ le nombre de votants du profil Π pour lesquels x_i et x_j sont en relation (x_i

est préféré strictement à x_j ou bien x_i et x_j sont indifférenciés). La matrice $E(\Pi) = (e_{ij}(\Pi))$ $i \neq j$, $i = 1..n$, $j = 1..n$ est connue sous le nom de **matrice électorale**, son utilisation remonte à Condorcet et son usage explicite à Dodgson [1876].

Cependant, deux autres matrices retiendront notre attention :

DEFINITION 1.2 : La matrice $M(\Pi) = (m_{ij}(\Pi))$ $i \neq j$, $i = 1..n$, $j = 1..n$ où $i \neq j \Rightarrow m_{ij}(\Pi) = 2e_{ij}(\Pi) - v$ sera appelée **matrice majoritaire** ; elle mesure, pour chaque paire d'objets, l'écart entre le nombre de voix obtenues et la majorité.

Un autre codage des informations contenues dans le profil Π est souvent utilisé :

DEFINITION 1.3 : La matrice $B(\Pi) = (b_{ij}(\Pi))$ $i \neq j$, $i = 1..n$, $j = 1..n$ où $i \neq j \Rightarrow b_{ij}(\Pi) = e_{ij}(\Pi) - e_{ji}(\Pi)$ sera appelée **matrice de Benjamin Franklin** (en abrégé **matrice de B-F**) ; elle mesure, pour chaque paire d'objets, le nombre de préférences de x_i sur x_j qui ne sont pas compensées par des préférences de x_j sur x_i .

Cette matrice à été employée sous des nom divers, nous avons décidé de lui donner le nom du plus ancien utilisateur (à notre connaissance). La référence relative à son utilisation est une lettre de Benjamin Franklin qui est reproduite en annexe.

Lorsque, dans le contexte, le profil Π auquel on se réfère est bien défini, nous abrègerons les notations $E(\Pi)$, $e_{ij}(\Pi)$, $M(\Pi)$, $m_{ij}(\Pi)$, $B(\Pi)$ et $b_{ij}(\Pi)$ en E , e_{ij} , M , m_{ij} , B et b_{ij} .

Ces différentes matrices seront désignées sous le nom générique de **matrices de préférences**.

1.2.2. $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ -procédure d'agrégation.

Si $\mathcal{D}$ représente l'ensemble des relations binaires admissibles pour l'ensemble des

votants, $\mathcal{D}^v$ représente l'ensemble des profils sur $\mathcal{D}$ à v composantes.

L'ensemble de tous les profils sera noté $\mathcal{D}^* = \bigcup_{v \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^v$.

Les préférences collectives appartiendront à un ensemble de modèles $\mathcal{M}$ choisi avant le vote. Nous supposerons que $\mathcal{M}$ est un ensemble de relations binaires tel que : $\exists r \in \mathbb{N} / \forall R \in \mathcal{M} \quad |\{a \in X / aRa\}| = r$. La nécessité de cette propriété est uniquement technique, la notion de réflexivité n'intervenant pas dans le calcul de la préférence collective.

DEFINITION 1.4 : Une $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -procédure d'agrégation (resp $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -multiprocédure d'agrégation) sera application $F : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathcal{M}$ (resp $F : \mathcal{D}^* \rightarrow 2^{\mathcal{M}} - \{\emptyset\}$).

Lorsque le contexte sera bien défini, nous parlerons tout simplement de procédure d'agrégation pour désigner les $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -procédures d'agrégation ou les $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -multiprocédures d'agrégation ou bien les deux !

Cette définition regroupe des modélisations très différentes de la notion d'agrégation, que l'on différencie en particulier les données et les modèles. Citons pour exemple deux procédures introduites par Arrow [1951] : les fonctions de bien être collectif qui sont en correspondance biunivoque avec les $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation, ou encore les fonctions de choix collectif (la correspondance sera explicitée en détail au chapitre 4).

Ce formalisme n'est pas gratuit, au contraire, nous allons pouvoir parler de l'information nécessaire au calcul du résultat $F(\Pi)$, sans avoir à particulariser la procédure d'agrégation employée.

Ce résultat peut dépendre uniquement de la matrice de B-F $B(\Pi)$, ou encore de la matrice majoritaire $M(\Pi)$, ou plus généralement de la matrice électorale $E(\Pi)$ ou plus généralement encore du profil Π .

Le paragraphe 3 met en évidence ces différentes possibilités par l'intermédiaire de

procédures d'agréations "classiques" dont certaines seront étudiées plus en détail dans des chapitres ultérieurs.

1.3. QUELQUES EXEMPLES DE PROCEDURES D'AGREGATION.

Une étude des procédures d'agrégation peut s'envisager du particulier au général ; aussi, commençons par fixer le nombre de votant à une valeur arbitraire v ; parlons de $(\mathcal{D}, \mathcal{R}, v)$ -procédures d'agrégation.

Une étape nécessaire à l'analyse d'une procédure d'agrégation F est alors la détermination de ses ensembles décisifs.

Nous dirons qu'un ensemble de votants $W \subseteq V$ est un **ensemble décisif** si et seulement si $\forall \Pi \in \mathcal{D}^V \forall (a,b) \in X^2 \forall k \in W a R_k b \Rightarrow a F(\Pi) b$ ou ce qui revient au même $\forall \Pi \in \mathcal{D}^V, \bigcap_{k \in W} R_k \subseteq F(\Pi)$.

Une procédure d'agrégation ne possède pas toujours d'ensemble décisif comme par exemple la $(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ -procédure d'agrégation sur $X = \{a,b,c,d\}$ qui à tout profil associe $F(\Pi) = abcd$.

A l'opposé, certaines procédures d'agrégation peuvent être définies uniquement par l'intermédiaire de leurs ensembles décisifs, nous les appellerons procédures majoritaires généralisées. Dans ce cas, si $\mathcal{W} \subseteq 2^X$ est l'ensemble des ensembles décisifs de F alors $F(\Pi) = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} \bigcap_{k \in W} R_k$

Cette définition impose des restrictions importantes aux ensembles de données et de modèles puisque intuitivement, intersecter des relations binaires interdit d'obtenir une relation $F(\Pi)$ totale, et réunir ensuite ces intersections va contre la transitivité du résultat. Ces procédures majoritaires généralisées sont caractérisées axiomatiquement par les divers théorèmes d'impossibilité dans la lignée du théorème d'Arrow. Sur le plan théorique, les articles de Barbut [1961] Monjardet [1978] et Barthélémy [1981] rendent compte de la situation.

EXEMPLE 1 : Oligarchies et dictatures.

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données stable par intersection et inclus dans l'ensemble des modèles $\mathcal{M}$. Soit $\emptyset \subset W \subseteq V$ posons $\mathcal{W} = \{W\}$. Une **oligarchie** est une $(\mathcal{D}, \mathcal{M}, v)$ -procédure d'agrégation définie par : $F(\Pi) = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} \bigcap_{k \in W} R_k = \bigcap_{k \in W} R_k$. Tout votant k de W possède le droit de veto puisqu'il est impossible que $aF(\Pi)b$ et que $bR_k a$. Une oligarchie au sens faible Guha [1972] serait définie par $F(\Pi) \subseteq \bigcap_{k \in W} R_k$.

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données stable inclus dans l'ensemble des modèles $\mathcal{M}$. Soit $W = \{k\} \subseteq V$ et $\mathcal{W} = \{W\}$. Une dictature (cf Mas-Colell & Sonnenschein [1972]) est une $(\mathcal{D}, \mathcal{M}, v)$ -procédure d'agrégation définie par : $F(\Pi) = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} \bigcap_{k \in W} R_k = R_k$. Remarquons que ce concept de dictature sont plus restrictif que la dictature au sens d'Arrow [1951] où $F(\Pi) \subseteq R_k$.

Dans ces deux cas, le résultat de la procédure d'agrégation nécessite la connaissance du profil Π ; les matrices E , M ou B ne sont pas suffisantes.

EXEMPLE 2 : La règle des quota.

Soit c une constante inférieure à v ; considérons les ensembles décisifs $\mathcal{W} = \{W \subseteq V / |W| \geq c\}$.

La **règle des quota** est la $(\mathcal{D}, \mathcal{R}, v)$ -procédure d'agrégation telle que :

$$F(\Pi) = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} \bigcap_{k \in W} R_k = \{ (x_i, x_j) \in X \times X / i = j \text{ ou } e_{ij} \geq c \}.$$

Cette procédure d'agrégation ne dépend que de la matrice électorale.

Dans le cas où c est égal à la partie entière de $(v + 2) / 2$, elle ne dépend que de la matrice majoritaire ; elle est alors appelée **règle majoritaire**.

Les procédures d'agrégation décrites jusqu'ici ne sont pas satisfaisantes sur bien des points :

- 1- le nombre de votants est fixé a priori ;
- 2- l'ensemble des modèles doit posséder la propriété très restrictive de stabilité par intersection ;

- 3- le résultat de F est construit en tenant compte de "quel votant a voté quoi" (ensembles décisifs) et non pas de "combien de votants ont voté quoi" (matrices de préférences).

Notons que la règle des quota peut cependant être définie lorsque le nombre de votants varie : si λ est un nombre positif inférieur ou égal à un, les ensembles majoritaires sont alors de la forme $\mathcal{W} = \{ W \subseteq V / |W| / v \geq \lambda \}$.

En particulier la règle majoritaire est parfaitement définie lorsque $\mathcal{D} = \mathcal{X}, \mathcal{T}$ ou $\mathcal{C}$ et $\mathcal{M} = \mathcal{C}$ ou bien pour $\mathcal{D} = \mathcal{Z}$ ou $\mathcal{J}$ et $\mathcal{M} = \mathcal{J}$.

Le fait que pour un ensemble de relations transitives et totales, la règle majoritaire ne soit définie pour tout profil que lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{C}$ (effet Condorcet) est très restrictif d'un point de vue pratique. Nous nous intéresserons à trois classes de procédures :

- 1- les procédures médianes ;
- 2- les procédures scores (plus précisément la procédure de Borda) ;
- 3- les procédures prudentes.

Lorsque la règle majoritaire s'applique, les procédures médianes et prudentes fournissent aussi ce résultat alors que ce n'est pas le cas de la procédure de Borda. Cependant cette procédure possède de nombreuses propriétés axiomatiques; c'est la raison de son intérêt.

Nous allons décrire ici ces trois classes de procédures en termes de problèmes d'optimisation, les différentes interprétations des procédés de construction, et leurs propriétés axiomatiques seront examinées en détail tout au long de cet exposé.

Si R est une relation binaire notons r sa fonction caractéristique ; si a et b sont deux éléments quelconques de X nous avons donc $r(a,b) = 1 \Leftrightarrow aRb$ et $r(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \not R b$.

EXEMPLE 3 : $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -multiprocédure médiane.

Cette procédure fut introduite par Kemeny [1959] en tant que $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure

d'agrégation. Cette méthode sélectionnait les ordres totaux L qui minimisaient $\sum_{k \leq v} \delta(R_k, L)$ où δ représente la distance de la différence symétrique. Ce principe peut être étendu à des relations binaires quelconques (pour une revue exhaustive des problèmes sur la multiprocédure médiane cf Barthélémy & Monjardet [1981]).

Dans le cas le plus général, $R_k \in \mathcal{D}$ et $R \in \mathcal{R}$, nous avons alors :

$$\delta(R_k, R) = |R_k \cup R| - |R_k \cap R| = \sum_{(x_i, x_j) \in X \times X} |r(x_i, x_j) - r_k(x_i, x_j)| ;$$

$$\delta(R_k, R) = n - r + \sum_{i \neq j} |r(x_i, x_j) - r_k(x_i, x_j)| ;$$

$$\delta(R_k, R) = n - r + \sum_{i \neq j} r(x_i, x_j)(1 - r_k(x_i, x_j)) + (1 - r(x_i, x_j))r_k(x_i, x_j) ;$$

$$\delta(R_k, R) = n - r + \sum_{i \neq j} [r(x_i, x_j)(1 - 2r_k(x_i, x_j)) + r_k(x_i, x_j)] .$$

Nous déduisons alors les égalités :

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq v} \delta(R_k, R) &= \sum_{k \leq v} [n - r + \sum_{i \neq j} [r(x_i, x_j)(1 - 2r_k(x_i, x_j)) + r_k(x_i, x_j)]] \\ &= v(n - r) + \sum_{i \neq j} \sum_{k \leq v} [r(x_i, x_j)(1 - 2r_k(x_i, x_j)) + r_k(x_i, x_j)] \\ &= v(n - r) + \sum_{i \neq j} [r(x_i, x_j)(v - 2e_{ij}) + e_{ij}] \\ &= v(n - r) + \sum_{i \neq j} e_{ij} + \sum_{i \neq j} r(x_i, x_j)(v - 2e_{ij}) \end{aligned}$$

$$\text{Soit finalement } \sum_{k \leq v} \delta(R_k, R) = v(n - r) + \sum_{i \neq j} e_{ij} - \sum_{i \neq j} m_{ij} r(x_i, x_j) .$$

La $(\mathcal{D}, \mathcal{J})$ -multiprocédure médiane est alors définie par :

$$F(\Pi) = \{R \in \mathcal{J} / \forall R' \in \mathcal{J}, \sum_{k \leq v} \delta(R_k, R) \leq \sum_{k \leq v} \delta(R_k, R')\}$$

Comme le terme $v(n - r) + \sum_{i \neq j} e_{ij}$ est une constante liée au profil et à l'ensemble des modèles choisi au départ, l'évaluation de $F(\Pi)$ ne dépend que de la matrice majoritaire.

Si on note $\gamma(\Pi, R) = \sum_{i \neq j} m_{ij} r(x_i, x_j)$, la $(\mathcal{D}, \mathcal{J})$ -multiprocédure médiane est définie de manière équivalente par : $F(\Pi) = \{R \in \mathcal{J} / \forall R' \in \mathcal{J}, \gamma(\Pi, R) \geq \gamma(\Pi, R')\}$.

Cette procédure a été caractérisée axiomatiquement par Levenglick et Young [1978].

En tant que problème d'optimisation, il est naturel d'envisager aussi les multiprocédures :

$$F'(\Pi) = \{R \in \mathcal{J} / \forall R' \in \mathcal{J}, \gamma(\Pi, R) \geq \gamma(\Pi, R')\} \text{ avec } \gamma(\Pi, R) = \sum_{i \neq j} b_{ij} r(x_i, x_j) ;$$

$$F''(\Pi) = \{R \in \mathcal{J} / \forall R' \in \mathcal{J}, \gamma''(\Pi, R) \geq \gamma''(\Pi, R')\} \text{ avec } \gamma''(\Pi, R) = \sum_{i \neq j} e_{ij} r(x_i, x_j) .$$

Nous reviendrons sur ces problèmes d'optimisation au chapitre 7. L'utilisation et l'interprétation de la distance de la différence symétrique sera examinée aux chapitres 4 et 7.

EXEMPLE 4 : $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure de Borda.

Soit $S(L)$ le vecteur score de L : $S_i(L) = k-1$ si et seulement si l'objet x_i occupe le k ième rang dans L (l'objet de rang 1 est le préféré). La $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure de Borda est définie par :

$F(\Pi) = \{L \in \mathcal{X} / \forall L' \in \mathcal{X}, \sum_{k=1..v} \|S(L_k) - S(L)\|^2 \leq \sum_{k=1..v} \|S(L_k) - S(L')\|^2\}$ où $\| \cdot \|$ représente la norme euclidienne.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1..v} \|S(L_k) - S(L)\|^2 &= \sum_{k=1..v} \sum_{i=1..n} [S_i(L_k) - S_i(L)]^2 \\ &= \sum_{k=1..v} \sum_{i=1..n} [S_i(L_k)]^2 - 2S_i(L_k)S_i(L) + [S_i(L)]^2 \end{aligned}$$

or $\sum_{i=1..n} [S_i(L_k)]^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2$; ce terme est constant et donc le problème d'optimisation initial est équivalent au nouveau problème d'optimisation :

$$F(\Pi) = \{L \in \mathcal{X} / \forall L' \in \mathcal{X}, \sum_{i=1..n} S_i(L) [\sum_{k=1..v} S_i(L_k)] \geq \sum_{i=1..n} S_i(L') [\sum_{k=1..v} S_i(L_k)]\}$$

Cette multiprocédure donne donc les rangs les plus faibles aux objets pour lesquels la somme des rangs sur les ordres du profil est la plus faible. Elle a été définie initialement par Borda [1781]. Nous verrons au chapitre 2 que le résultat $F(\Pi)$ de cette multiprocédure peut se calculer uniquement en fonction de la matrice $B(\Pi)$.

Diverses extensions de cette mutiprocédure seront exposées aux chapitres 4 et 8. Le problème de la caractérisation axiomatique de ces extensions (qui font suite aux travaux de Young [1974]) sera envisagé aux chapitres 5 et 8.

EXEMPLE 5 : $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -multiprocédure prudente.

Posons $\alpha(\Pi, R) = \min_{i \neq j} b_{ij} r(x_i, x_j)$. $\alpha(\Pi, R)$ est d'autant plus faible qu'il existe un couple d'objets pour lequel les préférences individuelles ne peuvent atteindre la majorité.

Suite à des travaux de Köhler [1978] et conformément à Debord & Raynaud [1986], nous définissons la $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -multiprocédure prudente par :

$$F(\Pi) = \{R \in \mathcal{M} / \forall R' \in \mathcal{M}, \alpha(\Pi, R) \geq \alpha(\Pi, R')\}.$$

L'interprétation de cette mutiprocédure, qui ne dépend que de la matrice de B-F, sera examinée dans le chapitre 4 et fera l'objet du chapitre 6.

De même que pour l'exemple 3, deux nouveaux problèmes d'optimisation se posent naturellement, le calcul de :

$$F'(\Pi) = \{R \in \mathcal{J} / \forall R' \in \mathcal{J}, \alpha'(\Pi, R) \geq \alpha'(\Pi, R')\} \text{ où } \alpha'(\Pi, R) = \min_{i \neq j} m_{ij} r(x_i, x_j)$$

$$F''(\Pi) = \{R \in \mathcal{J} / \forall R' \in \mathcal{J}, \alpha''(\Pi, R) \geq \alpha''(\Pi, R')\} \text{ où } \alpha''(\Pi, R) = \min_{i \neq j} e_{ij} r(x_i, x_j)$$

L'étude de ces procédures sera développée dans les chapitres 4, 6, 7, et 8 en particulierisant ensemble de données et de modèles.

PARTIE 1**CODAGE DES INFORMATIONS UTILES PAR DES
MATRICES DE PREFERENCE**

Le rôle de cette première partie est double :

- 1- caractériser axiomatiquement les procédures et multiprocédures d'agrégation qui ne dépendent, quant à la détermination de leur résultat $F(\Pi)$, que des matrices de préférence $B(\Pi)$ ou $M(\Pi)$;
- 2- caractériser les matrices de préférence $B(\Pi)$ et $M(\Pi)$ pour différents ensembles de données.

Toutes les propriétés énoncées dans cette première partie étant valables aussi bien pour les procédures, que pour les multiprocédures d'agrégation, nous ne les énoncerons que pour les premières.

Chapitre 2

AXIOMATISATION DES PROCEDURES D'AGREGATION NE DEPENDANT QUE DES MATRICES DE PREFERENCE

Le but de ce chapitre est de mettre en évidence les relations entre procédures d'agrégations qui ne dépendent que des matrices électorales, ou que des matrices majoritaires, ou bien encore que des matrices de B-F. De telles caractérisations permettent de mieux se rendre compte des différentes pertes d'informations entre le profil initial et la matrice utilisée.

2.1. PROPRIETES ALGEBRIQUES DES MATRICES DE PREFERENCE.

Introduisons d'abord les relations algébriques entre les profils.

Soit Π (resp. Π') un profil construit à partir de v (resp. v') relations binaires. Le profil $\Pi + \Pi'$ sera le profil constitué de la concaténation des $v + v'$ relations binaires qui constituent Π et Π' . Cette notation permet d'écrire simplement une condition qui nous servira très souvent :

CONDITION 2.1. Homogénéité :

Une procédure d'agrégation F est homogène si et seulement si pour tout $\mathcal{D}$ -profil Π , $F(\Pi + \Pi) = F(\Pi)$.

Introduisons la notion de profil inverse par le biais suivant : si $\Pi = (R_1, R_2, \dots, R_V)$ est un profil, on notera $-\Pi$ le profil $-\Pi = (-R_1, -R_2, \dots, -R_V)$.

Nous sommes maintenant en mesure de parler sans ambiguïté de la somme ou de la différence de deux profils ; et par conséquent de la multiplication d'un profil par un entier relatif.

Si A est une matrice notons A^t sa transposée.

Ces opérations algébriques sur les profils induisent des propriétés algébriques sur les matrices de préférences. Ces propriétés découlent directement des définitions des coefficients des différentes matrices, et en particulier des deux égalités $B(\Pi) = E(\Pi) - E(\Pi)^t$ et $2B(\Pi) = M(\Pi) - M(\Pi)^t$.

PROPRIETES :

Si Π et Π' sont deux profils quelconques alors nous avons les relations suivantes :

- 1- $E(\Pi + \Pi') = E(\Pi) + E(\Pi')$;
- 2- $M(\Pi + \Pi') = M(\Pi) + M(\Pi')$;
- 3- $B(\Pi + \Pi') = B(\Pi) + B(\Pi')$;
- 4- $E(-\Pi) = E(\Pi)^t$;
- 5- $M(-\Pi) = M(\Pi)^t$;
- 6- $B(-\Pi) = -B(\Pi)$.

Ces relations permettent de mieux comprendre la façon dont une relation binaire est codée pour les diverses matrices de préférence.

Pour chaque relation binaire (pour chaque votant), et pour chaque couple d'objets (x_i, x_j) sont associées les variables $e_{ijk} = e_{ij}(R_k)$, $m_{ijk} = m_{ij}(R_k)$, $b_{ijk} = b_{ij}(R_k)$. Leurs valeurs sont données par le tableau de correspondances suivant :

$x_i R_k x_j$ et $x_i \not R_k x_j$ (x_i est strictement préféré à x_j)	$e_{ijk} = 1$	$m_{ijk} = 1$	$b_{ijk} = 1$;
$x_i \not R_k x_j$ et $x_i R_k x_j$ (x_j est strictement préféré à x_i)	$e_{ijk} = 0$	$m_{ijk} = -1$	$b_{ijk} = -1$;
$x_i R_k x_j$ et $x_i R_k x_j$ (x_i et x_j sont indifférents)	$e_{ijk} = 1$	$m_{ijk} = 1$	$b_{ijk} = 0$;
$x_i \not R_k x_j$ et $x_i \not R_k x_j$ (x_i et x_j sont incomparables)	$e_{ijk} = 0$	$m_{ijk} = -1$	$b_{ijk} = 0$.

La préférence individuelle du votant k , R_k , sera donc définie par les $n(n-1)$ valeurs de e_{ijk} , (resp. m_{ijk} , b_{ijk}).

D'après les propriétés ci-dessus les coefficients des matrices de préférence E , M et B

peuvent être définis de manière équivalente par les égalités :

$$i \neq j \Rightarrow e_{ij} = \sum_{k=1}^v e_{ijk}$$

$$i \neq j \Rightarrow m_{ij} = \sum_{k=1}^v m_{ijk}$$

$$i \neq j \Rightarrow b_{ij} = \sum_{k=1}^v b_{ijk}$$

Remarquons que pour les matrices de B-F, l'inversion d'une relation de préférence revient à inverser le codage : pour un couple d'objets donné, la variable b_{ijk} est transformée en $-b_{ijk}$ dans la relation inverse.

Les propriétés décrites dans ci-dessus nous serviront constamment dans toutes les démonstrations.

PROPRIETE :

Une application immédiate de ces considérations nous permet de vérifier que le résultat de la $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure de Borda ne dépend que de $B(\Pi)$. En effet, $S_i(L_k)$ est égal au nombre d'objets préférés strictement à x_i dans L_k . Comme $\sum_{j \neq i} b_{ijk}$ est égal au nombre d'objets auxquels x_i est strictement préféré dans L_k , moins le nombre d'objets préférés strictement à x_i dans L_k , et que la somme du nombre d'objets préférés strictement à x_i et du nombre d'objets auxquels x_i est strictement préféré est égal à $n-1$, nous en déduisons que $2S_i(L_k) = n-1 - \sum_{j \neq i} b_{ijk}$. Par conséquent, $2 \sum_{k=1..v} S_i(L_k) = \sum_{k=1..v} [n-1 - \sum_{j \neq i} b_{ijk}] = v(n-1) - \sum_{j=1..n} b_{ij}$.

Posons $\beta_i(\Pi) = \sum_{j \neq i} b_{ij}$. F peut donc être définie par :

$$F(\Pi) = \{L \in \mathcal{X} / \forall L' \in \mathcal{X} \sum_{i=1..n} S_i(L) \beta_i(\Pi) \leq \sum_{i=1..n} S_i(L') \beta_i(\Pi) \}.$$

$F(\Pi)$ ne dépend que de $B(\Pi)$.

2.2. CINQ CONDITIONS AXIOMATIQUES.

Dans ce paragraphe, nous allons définir cinq conditions qui permettent de caractériser l'information utilisée par les procédures d'agrégation qui les vérifient.

2.2.1. Trois conditions d'anonymat.

La première condition, très classique, exprime que la procédure d'agrégation n'introduit aucune discrimination parmi les votants. Soit σ une permutation sur $1..v$ et $\Pi = (R_1, R_2, \dots, R_v)$ un profil, notons Π^σ le profil $(R_{\sigma(1)}, R_{\sigma(2)}, \dots, R_{\sigma(v)})$.

CONDITION 2.2. Anonymat :

Une procédure d'agrégation F est anonyme si et seulement si pour toute permutation σ , $F(\Pi) = F(\Pi^\sigma)$.

Si une procédure d'agrégation vérifie la condition 2.1 alors il est facile de vérifier que $F(\Pi + \Pi') = F(\Pi' + \Pi)$. Il est possible de commuter des profils sans changer le résultat de F .

Notons de plus que par définition de la somme de deux profils, il est toujours possible d'associer des profils sans changer le résultat de F . Pour toute procédure d'agrégation, $F(\Pi + (\Pi' + \Pi'')) = F((\Pi + \Pi') + \Pi'')$.

La deuxième condition indique que, pour une paire d'objets quelconque, l'opinion de n'importe quel votant a la même influence sur le résultat fourni par la procédure d'agrégation.

CONDITION 2.3. E-anonymat :

Une procédure d'agrégation F est dite E-anonyme si et seulement si :

$$E(\Pi) = E(\Pi') \Rightarrow F(\Pi) = F(\Pi')$$

La condition 2.3 est une généralisation de la précédente. Nous allons maintenant définir une troisième condition qui englobe elle-même la E-anonymat.

CONDITION 2.4. M-anonymat :

Une procédure d'agrégation F est dite **M-anonyme** si et seulement si :

$$M(\Pi) = M(\Pi') \Rightarrow F(\Pi) = F(\Pi')$$

Condition qui peut encore être généralisée par la suivante :

CONDITION 2.5. B-anonymat :

Une procédure d'agrégation F est dite **B-anonyme** si et seulement si :

$$B(\Pi) = B(\Pi') \Rightarrow F(\Pi) = F(\Pi')$$

L'enchaînement des différentes conditions peut être résumé par :

$$B\text{-anonymat} \Rightarrow M\text{-anonymat} \Rightarrow E\text{-anonymat} \Rightarrow \text{anonymat}$$

2.2.2. Deux conditions de stabilité.

Nous allons maintenant déterminer deux classes de profils qui, si on les ajoute à un profil quelconque, laissent stable le résultat de la procédure d'agrégation. Les conditions qui en résultent sont, d'un certain côté, similaires à la condition de "positive responsiveness" de May [1952]. Il s'agit, non pas de définir la plus petite modification du profil qui induit une modification du résultat, mais de définir quelles modifications le laissent inchangé.

Un profil Π vérifie la **propriété d'unité** si et seulement si : $\exists k \in \mathbb{N} / i \neq j \Rightarrow e_{ij} = k$.

Un profil Π vérifie la **propriété d'égalité** si et seulement si : $i \neq j \Rightarrow e_{ij} = e_{ji}$.

CONDITION 2.6. U-stabilité :

Une procédure d'agrégation F est **U-stable** si et seulement si : si Π est un profil quelconque alors pour tout profil Π_U vérifiant la propriété d'unité $F(\Pi + \Pi_U) = F(\Pi)$.

CONDITION 2.7. E-stabilité :

Une procédure d'agrégation F est **E-stable** si et seulement si : si Π est un profil quelconque alors pour tout profil Π_e vérifiant la propriété d'égalité $F(\Pi + \Pi_e) = F(\Pi)$.

Ces deux conditions sont liées par l'implication :

$$\text{E-stabilité} \Rightarrow \text{U-stabilité}.$$

Les conditions de stabilité peuvent paraître anodines, mais il ne s'agit que d'une illusion trompeuse. En effet, plaçons nous dans le cas où $\mathcal{D} = \mathcal{T}$. Soit R un préordre quelconque. La condition de U-stabilité impose que $\forall v \in \mathbb{N} \quad F(vX^2 + R) = F(R)$ ce qui revient à dire que si tous les votants considèrent les objets comme ex æquo à l'exception d'un "original", alors c'est l'opinion de cet "original" qui prévaudra ! Cette hypothèse peut néanmoins s'imposer lorsque le but recherché est de départager à tout prix les objets. C'est d'ailleurs exactement ce que prévoit la règle majoritaire (ce qui explique que dans les commissions "paritaires", le président a voix prépondérante en cas d'ex æquo).

Remarques.

1- L'égalité peut aussi être considérée comme une condition de "consistance faible". H. P. Young [1974] puis A. Levenglick & H. P. Young [1978] définissent la consistance par $F(\Pi) \cap F(\Pi') \neq \emptyset \Rightarrow F(\Pi + \Pi') = F(\Pi) \cap F(\Pi')$; et la "cancellation property" par : si Π est un profil qui vérifie la propriété d'égalité alors $F(\Pi) = \mathcal{A}$. Une procédure qui vérifie ces deux propriétés vérifie aussi la propriété d'égalité.

2- La propriété d'égalité peut aussi s'écrire : un profil Π vérifie la propriété d'égalité si et seulement si $E(\Pi) = E(-\Pi)$. Ceci ne signifie pas forcément que $\Pi = -\Pi$. La structure de tels profils est plus complexe, comme d'ailleurs la structure des profils vérifiant la propriété d'unité. L'exemple suivant illustre bien ce fait.

Soient les six ordres totaux sur quatre objets :

$$\begin{array}{lll} L_1 = b d c a & L_2 = c a d b & L_3 = d a c b \\ L_4 = b a c d & L_5 = c a d b & L_6 = d a c b \end{array}$$

Le profil $\Pi = 4L_1 + L_2 + 3L_3 + 4L_4 + 3L_5 + L_6$ vérifie la propriété d'unité (et donc aussi la propriété d'égalité).

2.2.3. Résultats.

THEOREME 2.1 : Soit F une procédure d'agrégation homogène. F est M -anonyme si et seulement si elle est U -stable et E -anonyme.

Preuve.

La condition nécessaire peut être vérifiée aisément.

Pour la condition suffisante soient Π et Π' deux $\mathcal{D}$ -profils de même matrice majoritaire. Sans perte de généralité supposons que $v \leq v'$. Comme $M(\Pi)$ est égal à $M(\Pi')$ alors $i \neq j \Rightarrow m_{ij}(\Pi) = m_{ij}(\Pi')$ donc $2e_{ij}(\Pi) - v = 2e_{ij}(\Pi') - v'$ donc v et v' on même parité. Posons $2k = v' - v$; on en déduit $e_{ij}(\Pi) = e_{ij}(\Pi') + k$.

Dans le cas où $X^2 \in \mathcal{D}$ (si $\mathcal{D}$ est égal à $\mathcal{T}$, $\mathcal{Z}$, ou $\mathcal{R}$), $e_{ij}(\Pi) = e_{ij}(\Pi' + kX^2)$ par E -anonymat nous avons donc $F(\Pi) = F(\Pi' + kX^2)$ et par U -anonymat $F(\Pi) = F(\Pi')$.

Dans le cas où $X^2 \notin \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ est alors égal à $\mathcal{C}$, $\mathcal{X}$, ou $\emptyset$) $\mathcal{D}$ contient toujours un ordre total L . $2e_{ij}(\Pi) = 2e_{ij}(\Pi') + 2k$ donc $e_{ij}(2\Pi) = e_{ij}(2\Pi' + kL - kL)$; par E -anonymat $F(2\Pi) = F(2\Pi' + kL - kL)$ par U -stabilité $F(2\Pi) = F(2\Pi')$ et par homogénéité $F(\Pi) = F(\Pi')$. La condition suffisante est démontrée.

♦

THEOREME 2.2 : Une procédure d'agrégation est B -anonyme si et seulement si elle est anonyme et E -stable.

Preuve.

Il est facile de vérifier la condition suffisante. En effet, par définition les coefficients de la matrice de B - F ne dépendent que de e_{ij} ; F est donc anonyme. De plus, si l'on fait la somme d'un profil vérifiant la propriété d'égalité et d'un profil quelconque, la matrice de B - F de ce dernier est identique à celle du résultat de la somme des deux profils ; la procédure d'agrégation fournit donc le même résultat ; elle est E -stable.

Pour la condition nécessaire, considérons deux profils Π et Π' qui sont associés à une même matrice de B - F . En d'autres termes, $\forall i \neq j \quad e_{ij}(\Pi) - e_{ji}(\Pi) = e_{ij}(\Pi') - e_{ji}(\Pi')$. Ce que l'on peut traduire en: $\forall i \neq j \quad e_{ij}(\Pi') + e_{ji}(\Pi) = e_{ji}(\Pi') + e_{ij}(\Pi)$. Soit $\Pi'' = -\Pi + \Pi'$, d'après la relation ci-dessus, Π'' vérifie la propriété d'égalité. Comme

F est E-stable, $F(\Pi) = F(\Pi + \Pi'') = F(\Pi + (-\Pi + \Pi')) = F((\Pi - \Pi) + \Pi')$. Comme F est anonyme $F((\Pi - \Pi) + \Pi') = F(\Pi' + (\Pi - \Pi))$. Le profil $\Pi - \Pi$ vérifie la propriété d'égalité, donc par E-stabilité, $F(\Pi') = F(\Pi' + (\Pi - \Pi))$. En réunissant ces cinq égalités, on obtient le résultat final : $F(\Pi) = F(\Pi')$. En résumé $B(\Pi) = B(\Pi') \Rightarrow F(\Pi) = F(\Pi')$, la condition nécessaire est bien démontrée.

♦

COROLLAIRE 2.1 : Une procédure d'agrégation est B-anonyme si et seulement si elle est E-anonyme et E-stable.

COROLLAIRE 2.2 : Une procédure d'agrégation est B-anonyme si et seulement si elle est M-anonyme et E-stable.

Remarquons que si $\mathcal{D}$ est un ensemble de relations symétriques (par exemple $\mathcal{D} = \mathcal{E}$) la relation d'E-stabilité imposerait que $F(\Pi)$ soit constante pour tout $\mathcal{D}$ -profil ; la condition de E-stabilité est donc inenvisageable pour ces procédures d'agrégation. Par contre, la condition d'U-stabilité garde tout son sens comme pour la procédure médiane qui est M-stable.

Ces conditions d'anonymat et de stabilité semblent néanmoins très raisonnables ; de fait, elles sont vérifiées par de nombreuses procédures d'agrégation. Citons, en suivant par exemple la terminologie définie par Fishburn [1977], les procédures d'agrégation de Borda, Condorcet, Copeland, Fishburn, Kemeny, Nanson, Schwartz, ainsi que les procédures définies par Arrow & Raynaud [1986] vérifient toutes les conditions d'anonymat et de stabilité.

*

* *

Ces différents théorèmes mettent en évidence les relations entre procédures d'agrégation E-anonymes, M-anonymes et B-anonymes. Pour un ensemble de données $\mathcal{D}$ fixé, il se pose donc le problème de la caractérisation des différentes matrices de préférence. Un raisonnement analogique laisserait supposer que ces problèmes de caractérisation sont reliés. Ils le sont effectivement ; néanmoins, ils présentent une grande différence de complexité. En effet, le chapitre 3 met en évidence la caractérisation de l'ensemble des matrices de B-F et des matrices majoritaires pour les ensembles de relations binaires $\mathcal{D}$ déjà cités alors que le problème de la caractérisation des matrices électorales reste ouvert lorsque $\mathcal{D}$ est égal à $\mathcal{T}$ ou, $\mathcal{X}$.

Chapitre 3

CARACTERISATION DES DIFFERENTES MATRICES DE PREFERENCES

Nous allons examiner les trois problèmes de caractérisation par ordre de complexité croissante. Mais auparavant introduisons quelques notations et propriétés matricielles qui simplifieront notre tâche.

3.1. NOTATIONS ET PROPRIETES.

Toutes les matrices que nous considérerons sont des matrices $n \times n$ à coefficients entiers relatifs dont les éléments diagonaux ne sont pas définis.

DEFINITION 3.1 : Soit donc $A = (a_{ij})_{i=1..n, j=1..n}$ une matrice telle que $\forall i \neq j \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}$;
A sera appelée matrice paire (resp. impaire) si et seulement si $\forall i \neq j \quad a_{ij}$ est pair (resp. $\forall i \neq j \quad a_{ij}$ est impair).

LEMME 3.1 : Soit Π un $\mathcal{D}$ -profil composé de v relations binaires,

- 1- si v est pair alors M est une matrice paire ;
- 2- si v est impair alors M est une matrice impaire ;

3- si $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$ alors $M = B$.

Preuve.

Par définition $m_{ij} = 2e_{ij} - v$ suivant la parité de v , l'une des propriétés 1 ou 2 est vérifiée. Si $\mathcal{D}$ est un ensemble de relations binaires totales et antisymétriques alors $\forall i \neq j, e_{ij} + e_{ji} = v$. De plus, par définition $b_{ij} = e_{ij} - e_{ji}$. On en déduit donc $b_{ij} = 2e_{ij} - v = m_{ij}$; ce qui démontre le lemme 3.1.

♦

Ces matrices vérifierons éventuellement les propriétés de :

somme nulle : $\forall i \neq j, a_{ij} + a_{ji} = 0$;

somme positive : $\forall i \neq j, a_{ij} + a_{ji} \geq 0$;

somme négative : $\forall i \neq j, a_{ij} + a_{ji} \leq 0$;

somme constante : $\exists m \in \mathbb{N} / \forall i \neq j, a_{ij} + a_{ji} = m$;

symétrie : $\forall i \neq j, a_{ij} = a_{ji}$.

Notons A_{ij} la matrice à somme nulle dont tous les éléments sont nuls sauf le coefficient de la ligne i et de la colonne j qui est égal à 1, et le coefficient de la ligne j et de la colonne i qui est égal à -1.

LEMME 3.2 : L'ensemble des matrices A_{ij} pour $1 \leq i, j \leq n$ est un système libre et générateur de l'ensemble des matrices à somme nulle muni de l'addition et de la multiplication par un entier relatif.

Preuve.

Elle est laissée au soin du lecteur.

Remarquons tout de même que l'ensemble des matrices à somme nulle muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire forme une structure de module sur l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Cette structure est l'analogie de celle d'espace vectoriel sur $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ mise en évidence et utilisée par Young [1974], mais l'extension au corps des rationnels ne s'impose pas ici.

Nous avons maintenant assez d'éléments pour démontrer les théorèmes de caractérisation.

3.2. CARACTERISATION DES MATRICES DE B-F.

Le problème des $\mathcal{E}$ -profils ne se posant pas, nous allons examiner successivement les cas des $\mathcal{X}$ -profils puis des $\mathcal{T}$ -profils et finalement des $\mathcal{O}$ -profils.

THEOREME 3.1 : Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données tel que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$. Une matrice A est une matrice de B-F obtenue à partir d'un $\mathcal{D}$ -profil si et seulement si A est une matrice paire à somme nulle ou une matrice impaire à somme nulle.

La condition nécessaire provient du lemme 3.1 ; la condition suffisante est obtenue en regroupant les 2 lemmes ci-dessous.

LEMME 3.3 : Si A est une matrice paire à somme nulle alors A est une matrice de B-F associée à un profil constitué d'ordres totaux.

Preuve.

Soit Π_{ij} (pour $i < j$) le profil constitué des deux ordres suivants:

$$x_1 \dots x_{i-1} \ x_{i+1} \dots x_{j-1} \ x_{j+1} \dots x_n \ x_i \ x_j ;$$

$$x_i \ x_j \ x_n \dots x_{j+1} \ x_{j-1} \dots x_{i+1} \ x_{i-1} \dots x_1 .$$

Soit B_{ij} sa matrice de B-F associée. Il est facile de vérifier que $B_{ij} = 2A_{ij}$.

Soit A une matrice à somme nulle dont tous les coefficients sont pairs.

$$\text{D'après le lemme 3.2 : } A = \sum_{i < j} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i < j} (a_{ij}/2) B_{ij}$$

$$A \text{ est donc la matrice de B-F associée au profil } \Pi = \sum_{i < j} (a_{ij}/2) \Pi_{ij} .$$

♦

LEMME 3.4 : Si A est une matrice impaire à somme nulle, alors A est une matrice de B-F associée à un profil constitué d'ordres totaux.

Preuve.

Soit A une matrice à somme nulle dont tous les coefficients sont impairs.

Soient C et D les matrices définies par:

si $i > j$ alors $c_{ij} = a_{ij} - 1$ et $d_{ij} = 1$;

si $i < j$ alors $c_{ij} = -c_{ji}$ et $d_{ij} = -1$.

Par construction $A = C + D$. Or C est une matrice à somme nulle dont tous les coefficients sont pairs ; C est donc une matrice de B-F associée à un profil constitué d'ordres totaux. Le profil constitué de l'unique ordre $x_1 x_2 \dots x_n$ admet D pour matrice de B-F associée. La somme des deux profils définis ci-dessus constitue donc un profil formé d'ordres totaux dont la matrice de B-F associée est A.

♦

La notion d'ordre total est très restrictive, puisque l'indifférence est la relation d'égalité.

La notion de préordre total constitue une première extension ; les objets ex aequo de la relation d'indifférence ne sont plus des singletons.

THEOREME 3.2 : Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données tel que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{D}$. Une matrice A est une matrice de B-F obtenue à partir d'un $\mathcal{D}$ -profil si et seulement si A est une matrice à somme nulle.

Preuve.

Si A est une matrice de B-F alors A est une matrice à somme nulle.

Réciproquement, soit A une matrice à somme nulle. Soit Π_{ij} ($i < j$), le profil constitué des deux préordres suivants:

$x_i x_j x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{j-1} x_{j+1} \dots x_n$;

$x_n \dots x_{j+1} x_{j-1} \dots x_{i+1} x_{i-1} \dots x_1 (x_i x_j)$.

Il est simple de vérifier que $B(\Pi_{ij}) = A_{ij}$.

D'après le lemme 3.2: $A = \sum_{i < j} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i < j} a_{ij} B(\Pi_{ij}) = B(\sum_{i < j} a_{ij} \Pi_{ij})$

A est donc la matrice de B-F associée au profil $\Pi = \sum_{i < j} a_{ij} \Pi_{ij}$.

♦

Remarques.

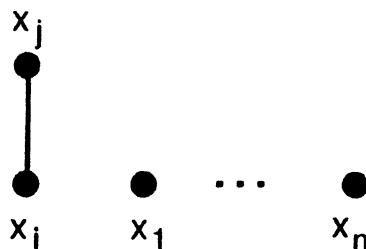
1- En d'autres termes, ce théorème indique que les résultats potentiels de la méthode d'agrégation ne seront pas accrus en relâchant la notion de préordre total ! Le problème de la caractérisation de $B(\Pi)$ reste entier si l'on impose aux relations considérées de ne pas être des préordres totaux.

2- Soit Π_θ un profil vérifiant la propriété d'égalité ; d'après la condition d'E-stabilité $F(X^2) = F(\Pi_\theta)$; et donc, du point de vue du résultat de la procédure d'agrégation, tous ces profils sont équivalents. En particulier, si l'ensemble des modèles $\mathcal{M}$ est l'ensemble des préordres, il est naturel de postuler $F(\Pi) = X^2$, on obtient la condition intéressante $F(\Pi_\theta) = X^2$ pour tout profil "égalitaire".

THEOREME 3.3 : Soit $\mathcal{D}$ un ensemble données tel que $0 \subseteq \mathcal{D}$. Une matrice A est une matrice de B-F obtenue à partir d'un $\mathcal{D}$ -profil si et seulement si A est une matrice à somme nulle.

Preuve.

Soit Π_{ij} ($i < j$), le profil constitué de l'ordre partiel :



Il est simple de vérifier que $B(\Pi_{ij}) = A_{ij}$.

La suite de la preuve est identique à celle du théorème précédent.

♦

Etendre la notion d'ordre total à l'une des notions d'ordre partiel ou de préordre revient donc à couvrir l'ensemble des résultats possibles de la méthode d'agrégation. En fait, moyennant certaines propriétés de la procédure d'agrégation, son étude restreinte aux $\mathcal{X}$ -profils est un paradigme suffisant pour la connaître sur tous les autres domaines $\mathcal{D}$ contenant $\mathcal{X}$.

THEOREME 3.4 : Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données qui contient $\mathcal{X}$. Si F est une $(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ -procédure d'agrégation anonyme, E-stable et homogène alors Il existe une unique extension de F à l'ensemble des $\mathcal{D}$ -profils qui vérifie ces deux conditions.

Preuve.

Soit F une procédure d'agrégation qui vérifie les deux conditions. Comme F est anonyme et E-stable, d'après le théorème 2.2, F est B-invariante. Soit Π un $\mathcal{D}$ -profil, $B(\Pi)$ est une matrice à somme nulle. $B(\Pi+\Pi)$ est une matrice à somme nulle dont tous les coefficients sont pairs d'après le lemme 3.1 c'est donc une matrice de $B-F$ d'un $\mathcal{X}$ -profil Π' : $B(\Pi+\Pi) = B(\Pi')$. Par B-invariance $F(\Pi+\Pi)$ est égal à $F(\Pi')$; et donc par homogénéité, $F(\Pi)$ est égal à $F(\Pi')$.

♦

La démonstration du théorème repose en partie sur l'hypothèse : la procédure d'agrégation vérifie la condition 2.1.

Les deux premières remarques ci-dessous nous amènent à penser qu'une méthode d'agrégation anonyme et E-stable ne peut être définie de manière satisfaisante sur les $\mathcal{T}$ -profils que si elle est homogène.

Remarques.

1- Soit Π le profil constitué du seul préordre $P = Y_1 Y_2 \dots Y_k$ où les Y_i constituent une partition de X . Soit Π' un profil constitué de v ordres totaux sur X , $L_1, L_2 \dots L_v$, tels que les L_i sont construits en prenant des orientations particulières de P et tels que la restriction de Π' à un Y_i quelconque vérifie la propriété d'égalité. Il est facile de vérifier que $B(\Pi') = vB(\Pi) = B(v\Pi)$. Si F est une procédure d'agrégation B-invariante alors d'après la condition 2.1 d'homogénéité $F(\Pi) = F(\Pi')$.

2- Soit Π un profil constitué de k préordres $P_1, P_2 \dots P_k$. Soit Π_i un profil constitué de v_i ordres totaux et construit à partir du préordre P_i selon la technique exposée ci-dessus. Soit Π_0 le profil défini par:

$$\Pi_0 = \sum_{i=1}^k \frac{\text{ppcm}(v_1 \dots v_k)}{v_i} \Pi_i$$

Il est facile de vérifier que $\text{ppcm}(v_1 \dots v_k) B(\Pi) = B(\Pi_0)$. Si F est homogène nous aurons $F(\Pi) = F(\Pi_0)$.

3- Les différents théorèmes sont démontrés en exhibant un profil avec un nombre v bien déterminé d'ordres totaux (par exemple $v = \sum_{i < j} |a_{ij}|/2$), ce qui soulève évidemment la question du v minimal (nous reviendrons sur ce point au paragraphe 3.4). On peut se poser une autre question, de réponse peut-être moins ardue : s'il existe un profil de matrice de B-F B , avec v ordres, en existe-t-il avec $v + k$ ordres ? (Evidemment oui pour k pair).

3.3. CARACTERISATION DES MATRICES MAJORITAIRES.

Toute matrice A peut se décomposer en sa partie positive $A_>$ et sa partie négative $A_<$.

Soit $A_>$ la matrice dont l'élément ij est égal à a_{ij} si $a_{ij} > 0$ et à 0 sinon.

Soit $A_<$ la matrice dont l'élément ij est égal à a_{ij} si $a_{ij} < 0$ et à 0 sinon.

$$A = A_> + A_<.$$

Rappelons que d'après le lemme 3.1 les matrices M sont paires ou bien impaires ; et que de plus elles coïncident avec les matrices de B-F pour les ensembles de données composés de relations totales et antisymétriques.

Nous en déduisons donc :

THEOREME 3.5 : Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données tel que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$. Une matrice A est une matrice majoritaire obtenue à partir d'un $\mathcal{D}$ -profil si et seulement si A est une matrice paire à somme nulle ou bien une matrice impaire à somme nulle.

THEOREME 3.6 : Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données tel que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}$. Une matrice A est une matrice majoritaire obtenue à partir d'un $\mathcal{D}$ -profil si et seulement si elle est paire à somme positive ou bien impaire à somme positive.

Preuve.

La condition nécessaire est immédiate. Puisque les relations binaires du profil sont totales nous avons l'implication $i \neq j \Rightarrow e_{ij} + e_{ji} \geq v$ et donc par conséquent $m_{ij} + m_{ji} = 2(e_{ij} + e_{ji} - v) \geq 0$.

Réciproquement, soit A une matrice paire à somme positive.

$$A = A_{<} + A_{>} = (A_{<} - A_{<}^t) + (A_{>} + A_{<}^t)$$

Posons $C = A_{<} - A_{<}^t$, C est une matrice à somme nulle dont les coefficients sont tous pairs ; posons $D = A_{>} + A_{<}^t$, D est une matrice dont tous les coefficients sont positifs et pairs.

D'après le théorème 3.1 C est une matrice majoritaire d'ordres totaux. Comme $\mathcal{L} \subset \mathcal{T} \subseteq \mathcal{D}$ notons Π un $\mathcal{T}$ -profil tel que $C = M(\Pi)$.

Soit Π_{ij} (pour $i \neq j$), le profil constitué des deux préordres :

$$(x_i \ x_j) \ x_1 \dots x_{i-1} \ x_{i+1} \dots x_{j-1} \ x_{j+1} \dots x_n ;$$

$$x_n \dots x_{j+1} \ x_{j-1} \dots x_{i+1} \ x_{i-1} \dots x_1 \ x_i \ x_j .$$

On vérifie que $M(\Pi_{ij})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de m_{ij} qui est égal à 2. Il en résulte donc la décomposition :

$$D = \sum_{i \neq j} d_{ij} / 2 \ M(\Pi_{ij}) = M(\sum_{i \neq j} d_{ij} / 2 \ \Pi_{ij})$$

E est donc la matrice majoritaire associée au profil $\Pi = \sum_{i \neq j} d_{ij} / 2 \ \Pi_{ij}$.

La matrice A est donc la matrice majoritaire du profil $\Pi' = \Pi + \sum_{i \neq j} -d_{ij} / 2 \ \Pi_{ij}$

Un argument identique à celui du lemme 3.4 permet de conclure dans le cas des matrices impaires à somme positive.

♦

THEOREME 3.7 : Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données tel que $0 \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$. Une matrice A est une matrice majoritaire obtenue à partir d'un $\mathcal{D}$ -profil si et seulement si A est paire à somme négative ou bien impaire à somme négative.

Preuve.

La condition nécessaire est immédiate. Puisque les relations binaires du profil sont antisymétriques nous avons l'implication $i \neq j \Rightarrow e_{ij} + e_{ji} \leq v$ et par conséquent $m_{ij} + m_{ji} = 2(e_{ij} + e_{ji} - v) \leq 0$.

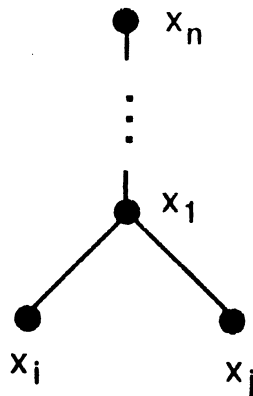
Réciproquement, soit A une matrice paire à somme négative.

$$A = A_{>} + A_{<} = (A_{>} - A_{>}^t) + (A_{<} + A_{>}^t)$$

Posons $C = A_{>} - A_{>}^t$, C est une matrice à somme nulle dont les coefficients sont tous pairs ; posons $D = A_{<} + A_{>}^t$, D est une matrice dont tous les coefficients sont négatifs et pairs.

D'après le théorème 3.1 C est une matrice majoritaire d'ordres totaux. Comme $\mathcal{X} \subset \mathcal{O} \subseteq \mathcal{D}$ notons Π un $\mathcal{O}$ -profil tel que $C = M(\Pi)$.

Soit Π_{ij} (pour $i \neq j$), le profil constitué de l'ordre total $x_n \dots x_{j+1} x_{j-1} \dots x_{i+1} x_{i-1} \dots x_1 x_j x_i$ et de l'ordre partiel défini par :



On vérifie que $M(\Pi_{ij})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de m_{ij} qui est égal à -2 . Il en résulte donc la décomposition :

$$D = \sum_{i \neq j} -d_{ij} / 2 M(\Pi_{ij}) = M\left(\sum_{i \neq j} -d_{ij} / 2 \Pi_{ij}\right)$$

E est donc la matrice majoritaire associée au profil $\Pi = \sum_{i \neq j} -d_{ij} / 2 \Pi_{ij}$.

La matrice A est donc la matrice majoritaire du profil $\Pi' = \Pi + \sum_{i \neq j} -d_{ij} / 2 \Pi_{ij}$

Un argument identique à celui du lemme 3.4 permet de conclure dans le cas des matrices impaires à somme négative.

♦

THEOREME 3.8 : Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données tel que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$. Une matrice A est une matrice majoritaire obtenue à partir d'un $\mathcal{D}$ -profil si et seulement si cette matrice est paire et symétrique ou bien impaire et symétrique.

Preuve.

Pour toute relation symétrique, $e_{ij} = e_{ji}$ donc $m_{ij} = m_{ji}$; M est donc une matrice

symétrique. De plus d'après le lemme 3.1 elle est paire ou impaire.

Réciproquement, considérons les cinq relations d'équivalence :

$$E_1 = \{x_i\} \{x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n\} ;$$

$$E_2 = \{x_j\} \{x_1 \dots x_{j-1} x_{j+1} \dots x_n\} ;$$

$$E_{3k} = \{x_i x_k\} \{x_1\} \dots \{x_n\} ;$$

$$E_{4k} = \{x_j x_k\} \{x_1\} \dots \{x_n\} ;$$

$$E_5 = \{x_i x_j\} \{x_1\} \dots \{x_n\} .$$

Et soit Π_{ij} le profil :

$$\Pi_{ij} = (n-1) E_1 + (n-1) E_2 + \sum_{k \neq i} E_{3k} + \sum_{k \neq j} E_{4k} + (2n-3) E_5 + (2n-3) X^2.$$

$$v = (n-1) + (n-1) + (n-1) + (n-1) + (2n-3) + (2n-3) = 8n-10$$

Calculons sa matrice majoritaire :

$$m_{ij} = 2(2n-3 + 2n-3) - 8n + 10 = -2$$

$$k \neq j \Rightarrow m_{ik} = 2(n-1 + n-1 + 2n-3) - 8n + 10 = 0$$

$$\text{et par raison de symétrie } k \neq i \Rightarrow m_{jk} = 0$$

$$k \neq i \neq j \text{ et } i < j \Rightarrow m_{kl} = 2(n-1 + n-1 + 2n-3) - 8n + 10 = 0.$$

Soit $\Pi'_{ij} = E_5 + X^2$; la matrice majoritaire de ce profil a tous ses coefficients nuls exceptés m_{ij} et m_{ji} qui sont égaux à 2.

Si A est une matrice paire symétrique, $A = A_{>} + A_{<}$.

Nous avons les égalités $A_{<} = \sum_{i < j} (-a_{<ij} / 2) M(\Pi'_{ij}) = M(\sum_{i < j} (-a_{<ij} / 2) \Pi'_{ij})$. $A_{<}$ est donc la matrice majoritaire du $\mathcal{D}$ -profil $\sum_{i < j} (-a_{<ij} / 2) \Pi_{ij}$. De même, $A_{>} = \sum_{i < j} (a_{>ij} / 2) M(\Pi_{ij}) = M(\sum_{i < j} (a_{>ij} / 2) \Pi_{ij})$. Comme $A = A_{>} + A_{<}$, A est donc la matrice majoritaire du $\mathcal{D}$ -profil $\sum_{i < j} [(-a_{<ij} / 2) \Pi'_{ij} + (a_{>ij} / 2) \Pi_{ij}]$.

Si A est une matrice symétrique impaire elle peut toujours s'écrire $A = C + M(X^2)$. C est une matrice symétrique paire donc il existe Π un $\mathcal{D}$ -profil tel que $C = M(\Pi)$ et donc $A = M(\Pi) + M(X^2) = M(\Pi + X^2)$ ce qui fini de démontrer le théorème.

♦

3.4. CARACTERISATION DES MATRICES ELECTORALES.

Le problème connu sous le nom de "caractérisation des matrices électorale" correspond à la caractérisation de E dans le cas des $\mathcal{L}$ -profils. Il a suscité de nombreuses études (G. Th. Guilbaud [1970], N. Megiddo [1977], H. P. Young [1978], T. Dridi [1981]...) mais le problème n'est pas résolu à ce jour. Le problème de reconnaissance associé est conjecturé NP-difficile.

Il en est de même pour les $\mathcal{T}$ -profils.

Cependant, pour les autres ensembles de données, une adaptation des résultats des paragraphes précédents fournit une solution immédiate. Par contre si le nombre de votants est fixé (comme c'est en fait le cas pour la caractérisation des matrices électorales pour les $\mathcal{L}$ -profils), le problème n'est résolu que dans le cas trivial des tournois.

L'exemple suivant illustre bien les remarques précédentes : la matrice $e_{xy} = e_{yz} = 2$, $e_{xz} = e_{zx} = 1$, $e_{yx} = e_{zy} = 0$, est une matrice électorale de deux tournois, mais non de deux ordres totaux, alors que la matrice B correspondante est une matrice de B-F pour un profil de quatre ordres totaux.

Les résultats seront énoncés sans démonstration.

Cas des $\mathcal{T}$ - profils.

Une matrice A est une matrice électorale de v tournois si et seulement si A est une matrice de somme constante v . En effet, soient $T_k = (t_{ijk})$ les matrices électorales associées à un tournoi, et qui sont définies par les relations :

$$i < j \text{ et } k \leq a_{ij} \Rightarrow t_{ijk} = 1 \text{ et } t_{jik} = 0 ;$$

$$i < j \text{ et } a_{ij} < k \Rightarrow t_{ijk} = 0 \text{ et } t_{jik} = 1 .$$

Par construction $A = T_1 + \dots + T_v$.

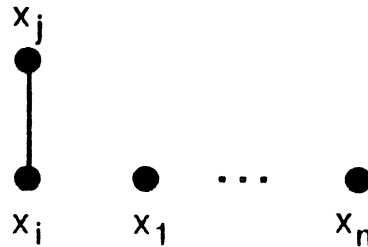
Cette caractérisation s'adapte bien évidemment aux cas des matrices majoritaires et des matrices de B-F ce qui met bien en évidence que tous les problèmes de caractérisations que nous avons étudiés ne sont pas triviaux uniquement à cause des

propriétés restrictives des ensembles de données. En effet, dans la plupart des cas les tounois T_i ne sont pas transitifs ; leur construction est d'autant plus aisée.

La même remarque s'appliquerait lorsque $\mathcal{D}$ est égal à $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{A}$.

Cas des 0-profils.

Une matrice A est une matrice électorale d'ordres partiels si et seulement si $i \neq j \Rightarrow a_{ij} + a_{ji} \leq v$. En effet, soit Π_{ij} le profil constitué de l'ordre partiel



$$A = E\left(\sum_{i < j} a_{ij} \Pi_{ij}\right).$$

Cas des $\mathcal{E}$ -profils.

Une matrice A est une matrice électorale de relations d'équivalence si et seulement si A est symétrique. Soit Π_{ij} le profil constitué de la relation d'équivalence $\{x_i, x_j\}$. $\{x_1\} \dots \{x_n\}$ on vérifie que $A = E\left(\sum_{i < j} a_{ij} \Pi_{ij}\right)$.

*
* *

Les conditions d'anonymat et d'E-stabilité permettent de définir une procédure d'agrégation comme une application dont l'ensemble de départ est l'ensemble des matrices de B-F. Il peut paraître surprenant que la variété des résultats de F ne soit pas accrue si les relations binaires sont étendues à des notions plus générales que les préordres (ou que les ordres si F est homogène).

La même remarque s'applique (mais de manière moins sensible) pour les

procédures d'agrégation E-anonymes et U-stables comme le montrent les différents théorèmes de caractérisations.

Ces remarques me suggèrent deux réponses. Premièrement, d'un point de vue pratique, le nombre de votants considérés est borné ; il est alors clair que l'ensemble des matrices majoritaires ou de B-F s'accroît strictement lorsque les votants expriment leurs préférences selon des relations de moins en moins restrictives (d'où l'intérêt pratique des ordres d'intervalle et des quasi-ordres). La variété des résultats augmente donc bien avec la liberté des votants.

D'un point de vue théorique, il est bien sûr intéressant de considérer des votants en nombre arbitrairement grand. Dans ce cas, il apparaît que les conditions de stabilité sont d'une importance déterminante -l'utilisation des matrices B ou M se traduisant par une perte d'information, et particulièrement du nombre v de votants. Les supprimer revient à rassembler les informations utiles dans la matrice électorale E, et la caractérisation de telles matrices est un problème non résolu à ce jour pour les $\mathcal{L}$ et $\mathcal{T}$ -profils!

PARTIE 2**UNE EXTENSION DE LA PROBLEMATIQUE DES
FONCTIONS DE CHOIX**

Cette partie est consacrée à l'étude d'une nouvelle classe de multiprocédures d'agrégation. Nous la développerons en liaison avec les trois thèmes exposés au chapitre 1 :

- 1- les multiprocédures prudentes ;
- 2- les multiprocédures médianes ;
- 3- la multiprocédure de Borda.

Nous mettrons en évidence le rapport entre les propriétés des multiprocédures et les différentes matrices de préférence : matrice majoritaires $M(\Pi)$, et matrices de Benjamin Franklin $B(\Pi)$.

L'ensemble des données sera toujours supposé contenir les ordres totaux ($\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D}$).

Chapitre 4

($\mathcal{D}, \mathcal{X}$)-MULTIPROCEDURES D'AGREGATION

Le choix d'un sous-ensemble de meilleurs objets parmi un ensemble d'objets en compétition est un problème déjà largement étudié. Malgré tout, un aspect particulier de cette problématique mériterait d'être plus amplement développé : la détermination d'un sous-ensemble de meilleurs objets de cardinal k fixé à l'avance.

Supposons, par exemple, que l'on veuille construire une équipe Y de k personnes et que l'on ait le choix parmi un ensemble X de n candidats. La notion de fonction de choix collectif Arrow [1951], ou celle de fonction de choix utilisée par Fishburn [1973], n'est plus adaptée à ce problème et ceci pour deux raisons principales : premièrement, le cardinal k de l'ensemble de choix recherché est fixé **à priori** ; deuxièmement, il est tout à fait possible que **plusieurs** ensembles de choix aussi satisfaisants les uns que les autres soient mis en évidence - ils sont autant d'alternatives possibles au choix.

Ce problème comporte une autre singularité : Y est considéré en tant qu'ensemble. Il paraît alors naturel que les relations entre éléments de Y ne soient pas prises en compte ; et d'autre part, que le choix de Y ne soit fondé que sur les relations des éléments de Y sur les éléments de $X-Y$. Certaines conditions axiomatiques spécifiques sont donc requises.

*

* *

Après avoir étendu la notion de fonction de choix à notre problème spécifique, nous présenterons deux axiomatiques qui préciseront la notion de "meilleurs objets". Pour chacune d'entre elles, nous étudierons les procédés de construction permettant de mettre en évidence ces meilleurs objets. Finalement, nous envisagerons ces différentes multiprocédures d'agrégation d'une manière duale qui nous servira lors du chapitre 8.

4.1 NOTATIONS ET DEFINITIONS.

Un nouveau type de relations binaires nous est apparu nécessaire pour notre exposé ; il modélise la notion intuitive d'élite. Cette notion s'inscrit dans un contexte plus général qui ne nous sera pas utile ici (cf Raynaud [1986]).

DEFINITION 4.1 : Soit Y un sous-ensemble de X , nous appellerons élite la relation binaire notée $Y \rightarrow$ telle que : $aY \rightarrow b \Leftrightarrow a \in Y$.

Dans une élite $Y \rightarrow$, tous les éléments de Y (qui sont indifférenciés) sont strictement préférés aux éléments de $X-Y$ (qui eux sont incomparables).

L'ensemble des élites sera noté $\mathcal{E}$ (good). L'ensemble des élites de cardinal k ($|Y| = k$) sera noté $\mathcal{E}_k$, ses éléments seront appelés k -élites.

Toute élite (notée $Y \rightarrow, Y' \rightarrow, Y'' \rightarrow \dots$) est en correspondance canonique avec un sous-ensemble de X (noté $Y, Y', Y'' \dots$) que nous appellerons aussi élite. Cette correspondance conserve des propriétés qui nous seront aussi utiles dans les chapitres 5 et 8.

PROPRIETES :

- 1- $Y \rightarrow \subseteq Y' \rightarrow \Leftrightarrow Y \subseteq Y'$;
- 2- $Y' \rightarrow \cap Y'' \rightarrow \in \mathcal{E}$ et si on note $Y \rightarrow = Y' \rightarrow \cap Y'' \rightarrow$ alors $Y = Y' \cap Y''$; ce que l'on peut noter en abrégé $Y' \rightarrow \cap Y'' \rightarrow = Y' \cap Y'' \rightarrow$;
- 3- $Y' \rightarrow \cup Y'' \rightarrow \in \mathcal{E}$ et si on note $Y \rightarrow = Y' \rightarrow \cup Y'' \rightarrow$ alors $Y = Y' \cup Y''$; ce que l'on peut noter en abrégé $Y' \rightarrow \cup Y'' \rightarrow = Y' \cup Y'' \rightarrow$;
- 4- $(\mathcal{E}, \cap, \cup)$ est un treillis distributif isomorphe à $(2^X, \cap, \cup)$.

Les propriétés ci-dessus justifient l'introduction du concept d'élite (en tant que relation binaire) alors qu'a priori l'ensemble des préordres à deux classes aurait pu tout aussi bien convenir ; mais il ne vérifie aucune de ces propriétés.

Les multiprocédures d'agrégation exposées dans l'introduction de ce chapitre seront modélisées par les $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédures d'agrégation ; c'est à dire les applications qui à tout $\mathcal{D}$ -profil associent un ensemble non vide de k -élites. ($\mathcal{D}$ représentera $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{X}, \mathcal{O}, \mathcal{T}, \mathcal{R}$, ou $\mathcal{T}$, il contiendra donc toujours les ordres totaux.)

Lorsque k est égal à un, les élites sont des singletons qui sont autant d'alternatives possibles au choix d'un meilleur objet. Cet ensemble de singletons peut être identifié à un ensemble d'objets, et permet donc de construire une fonction de choix au sens de Fishburn [1973] (une application qui à tout $\mathcal{D}$ -profil associe un sous-ensemble non vide de X). De cette manière, les 1-fonctions de choix sont en bijection avec les fonctions de choix.

Afin de déterminer une élite, la première question que l'on peut se poser est de savoir pour quels profils le résultat de la $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédure ne souffre aucune contestation. Nous y répondrons selon deux points de vue classiques ceux de Condorcet puis de Pareto.

4.2. PRINCIPE DE CONDORCET APPLIQUE AUX $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -MULTIPROCEDURES.

Dans ce paragraphe, nous supposons que si une majorité stricte de votants expriment que les éléments d'un sous-ensemble Y de X sont préférés aux éléments restants alors la préférence collective ira à l'élite $Y \rightarrow$. Formellement, cette condition peut être comprise de deux manières différentes :

DEFINITION 4.2 : Soit $Y \rightarrow$ une élite et Π un $\mathcal{D}$ -profil. $Y \rightarrow$ sera (strictement) Condorcet si et seulement si $\exists W \subseteq V / |W| > v/2$ et $k \in W$ $x_i \in Y \ x_j \in X-Y \Rightarrow x_i R_k x_j$ et $x_j \not R_k x_i$.

CONDITION 4.1. Condorcet (stricte) :

Une $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédure F est (strictement) Condorcet si et seulement si : lorsque Π est un $\mathcal{D}$ -profil contenant une k -élite (strictement) Condorcet $Y \rightarrow$ alors $F(\Pi) = \{Y \rightarrow\}$.

Cette condition appelle une justification puisqu'elle suppose l'unicité des k -élites Condorcet. Le lemme 4.1 et le corollaire 4.1 qui seront démontrés au paragraphe 4.1.1 la fourniront.

DEFINITION 4.3 : Soit $Y \rightarrow$ une élite et Π un $\mathcal{D}$ -profil. $Y \rightarrow$ sera faiblement Condorcet si et seulement si $\exists W \subseteq V / |W| > v/2$ et $k \in W$ $x_i \in Y \ x_j \in X-Y \Rightarrow x_i R_k x_j$.

CONDITION 4.2. Condorcet faible :

Une $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédure F est faiblement Condorcet si et seulement si : lorsque Π est un $\mathcal{D}$ -profil contenant une k -élite faiblement Condorcet

alors $F(\Pi) = \{ \text{k-élites faiblement Condorcet} \}$.

Un contre exemple à l'unicité des k-élites faiblement Condorcet est fourni par le profil constitué du seul préordre $x_1 \dots x_{k-1} (x_k \ x_{k+1}) x_{k+2} \dots x_n$ où $Y = \{x_1 \dots x_k\}$ et $Y' = \{x_1 \dots x_{k-1}, x_{k+1}\}$ sont deux k-élites faiblement Condorcet.

Nous avons bien sûr les deux implications :

$Y \rightarrow$ est une élite strictement Condorcet $\Rightarrow Y \rightarrow$ est une élite faiblement Condorcet

F est Condorcet $\Rightarrow F$ est faiblement Condorcet

Le nombre de profils où le résultat de F est obtenu directement par l'une des deux conditions ci-dessus est très restreint ; cependant, si des $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédures vérifient certaines conditions d'anonymat et de stabilité, des résultats sont déductibles pour des classes beaucoup plus vastes de profils.

4.2.1. Elites majoritaires.

Ce que nous appelons ici élite majoritaire correspond à ce que J. H. Smith [1973] désignait par "Condorcet Critérion". Nous avons préféré réserver ce terme pour une propriété directement visible de certains profils, et ne résultant pas de calculs sur les relations de préférences.

DEFINITION 4.4 : $Y \rightarrow$ sera dite élite (strictement) α -majoritaire si et seulement si : $\forall x_i \in Y \ \forall x_j \notin Y \quad b_{ij} \geq \alpha$

DEFINITION 4.5 : $Y \rightarrow$ sera dite élite faiblement α -majoritaire si et seulement si : $\forall x_i \in Y \ \forall x_j \notin Y \quad m_{ij} \geq \alpha$

Les élites strictement (resp. faiblement) 1-majoritaires seront appelées simplement élites strictement (resp. faiblement) majoritaires.

Ces deux définitions sont reliées comme on s'en doute aux définitions 4.2 et 4.3.

LEMME 4.1 : Toute élite faiblement Condorcet est faiblement majoritaire ; toute élite Condorcet est majoritaire.

Preuve.

Soit $Y \rightarrow$ une élite faiblement Condorcet ; par définition $\exists W \subseteq V / |W| > v/2$ et $k \in W$ $x_i \in Y$ $x_j \in X-Y \Rightarrow x_i R_k x_j$. Pour tout x_i élément de Y et pour tout x_j élément de $X-Y$ nous avons donc $e_{ij} > v/2$ et donc $m_{ij} = 2e_{ij} - v > 0$; $Y \rightarrow$ est une élite faiblement majoritaire.

Soit $Y \rightarrow$ une élite Condorcet ; par définition $\exists W \subseteq V / |W| > v/2$ et $k \in W$ $x_i \in Y$ $x_j \in X-Y \Rightarrow x_i R_k x_j$ et $x_j \not R_k x_i$. Pour tout x_i élément de Y et pour tout x_j élément de $X-Y$ nous avons donc $e_{ij} > v/2$ et $e_{ji} \leq v/2$ donc $b_{ij} = e_{ij} - e_{ji} > 0$; $Y \rightarrow$ est une élite majoritaire.

♦

THEOREME 4.1 : Soient $Y \rightarrow$ et $Y' \rightarrow$ deux élites majoritaires, si $|Y| \leq |Y'|$ alors $Y \rightarrow \subseteq Y' \rightarrow$.

Preuve.

1- Si $Y \rightarrow = Y' \rightarrow$ le théorème est bien vérifié.

2- Si $Y \rightarrow \neq Y' \rightarrow$ supposons que $Y \rightarrow$ ne soit pas incluse dans $Y' \rightarrow$ (et donc que Y n'est pas inclus dans Y'). Soit $C = Y' - Y$ et $D = Y - Y'$ comme Y n'est pas inclus dans Y' alors D n'est pas vide ; d'autre part comme le cardinal de Y' est supérieur ou égal au cardinal de Y et que $Y' \neq Y$ alors C n'est pas vide. Soit x_i un élément de C et x_j un élément de D .

$$x_i \in C \text{ et } x_j \in D \Rightarrow x_i \in Y' \text{ et } x_j \notin Y' \Rightarrow b_{ij} > 0$$

$$x_j \in D \text{ et } x_i \in C \Rightarrow x_j \in Y \text{ et } x_i \notin Y \Rightarrow b_{ji} > 0$$

donc $b_{ij} + b_{ji} > 0$ ce qui est en contradiction avec la propriété de somme nulle des matrices de B-F.

♦

COROLLAIRE 4.1 : S'il existe une k-élite majoritaire alors elle est unique.

Preuve.

Soient $Y \rightarrow$ et $Y' \rightarrow$ deux k-élite majoritaire. D'après le théorème précédent :

$$|Y| \leq |Y'| \Rightarrow Y \rightarrow \subseteq Y' \rightarrow ;$$

$$|Y'| \leq |Y| \Rightarrow Y' \rightarrow \subseteq Y \rightarrow.$$

donc $Y \rightarrow = Y' \rightarrow$.

♦

Les élites majoritaires sont donc emboîtées. Ce n'est pas le cas des élites faiblement majoritaires puisque ce n'est déjà pas vrai pour les k-élites faiblement Condorcet.

THEOREME 4.2 : Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données tel que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$. Un $\mathcal{D}$ -profil Π contient une k-élite faiblement majoritaire si et seulement si il existe un $\mathcal{D}$ -profil Π' contenant une k-élite faiblement Condorcet tel que $M(\Pi) = M(\Pi')$.

Preuve.

La condition nécessaire provient du lemme 4.1.

Pour la condition suffisante, rappelons avant tout que d'après le théorème 3.5 $M(\Pi)$ est une matrice paire ou impaire à somme nulle.

1- Examinons tout d'abord le cas simplifié où l'élite faiblement majoritaire de Π , $Y \rightarrow$, est telle qu'il existe une constante c telle que $\forall x_i \in Y \forall x_j \notin Y \quad m_{ij}(\Pi) = c > 0$ (c est un coefficient de $M(\Pi)$, il est donc de la parité de v).

Si $M(\Pi)$ est une matrice paire.

Soit Π_1 un profil sur Y dont la matrice majoritaire est la restriction de $M(\Pi)$ à Y . Soit Π_2 un profil sur $X-Y$ dont la matrice majoritaire est la restriction de $M(\Pi)$ à $X-Y$. Comme $M(\Pi)$ est paire, les deux profils sont composés d'un nombre pair d'ordres totaux. Puisque rajouter deux ordres opposés ne modifie pas les matrices majoritaires, on peut toujours se placer dans la situation où $|\Pi_1| = |\Pi_2| > c$. Soit Π_3 le $\mathcal{X}$ -profil sur X obtenu en concaténant $(|\Pi_1| + c)/2$ ordres de Π_1 devant $(|\Pi_1| + c)/2$ ordres de Π_2 , et

les $(|\Pi_1| - c)/2$ ordres restants de Π_2 devant les $(|\Pi_1| - c)/2$ ordres restants de Π_1 . Par construction, $M(\Pi_3)$ est égale à $M(\Pi)$; de plus, il est facile de vérifier que $Y \rightarrow$ est une k -élite faiblement Condorcet pour Π_3 .

Si $M(\Pi)$ est impaire.

Soit $Y \rightarrow$ une élite faiblement majoritaire, et soit L un ordre total où tous les éléments de Y sont strictement préférés aux éléments de $X - Y$. $M(\Pi - L)$ est une matrice paire ; la construction d'un profil Π'_3 exposée dans le cas précédent opère. Π'_3 est tel que $M(\Pi - L) = M(\Pi'_3)$ et donc $M(\Pi) = M(\Pi'_3 + L)$. Il est simple de vérifier que $Y \rightarrow$ est une k -élite faiblement Condorcet pour $\Pi_3 = \Pi'_3 + L$.

2- Plaçons nous maintenant dans le cas où $Y \rightarrow$ est une k -élite faiblement majoritaire quelconque de Π . Soit c le minimum des coefficients $m_{ij}(\Pi)$ tels que $x_i \in Y$ et $x_j \notin Y$. D'après la première partie de la démonstration, il est possible de construire un profil Π_3 pour lequel $Y \rightarrow$ est une k -élite faiblement Condorcet et dont la matrice majoritaire est identique à $M(\Pi)$ à ceci près que les coefficients de $M(\Pi_3)$ tels que $x_i \in Y$ et $x_j \notin Y$ sont tous identiques à la constante c . Considérons maintenant un coefficient m_{ij} tel que $x_i \in Y$ et $x_j \notin Y$ qui soit strictement supérieur à la constante c . m_{ij} et c sont de même parité donc $m_{ij} - c$ est pair. Sans perte de généralité, on peut supposer que $Y = \{x_1 \dots x_k\}$ et qu'il s'agit en fait du coefficient m_{kk+1} . Rajoutons à Π_3 les deux ordres suivants:

$$x_1 \dots x_n ;$$

$$x_n x_{n-1} \dots x_{k+2} x_k x_{k+1} x_{k-1} x_{k-2} \dots x_1.$$

Comme un des deux ordres place les éléments de Y en tête, $Y \rightarrow$ est toujours une k -élite faiblement Condorcet pour le nouveau profil. Le seul changement dans $M(\Pi_3)$ est que le coefficient m_{kk+1} est augmenté de deux unités (et le coefficient m_{k+1k} diminué de deux unités). De proche en proche, en rajoutant des paires d'ordres, il est donc possible de construire un profil Π' où $Y \rightarrow$ est une k -élite faiblement Condorcet et de même matrice majoritaire que Π .

♦

THEOREME 4.3 : Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données tel que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$. Un $\mathcal{D}$ -profil Π contient une k-élite faiblement majoritaire si et seulement si il existe un $\mathcal{D}$ -profil Π' contenant une k-élite faiblement Condorcet tel que $M(\Pi) = M(\Pi')$.

Preuve.

D'après le théorème 3.6 $M(\Pi)$ est une matrice paire ou impaire à somme positive.

La première partie de la démonstration du théorème précédent s'applique de la même manière ; il est possible de construire un profil Π_3 tel que :

$$\begin{aligned} \forall x_i \in Y \forall x_j \in Y \quad m_{ij}(\Pi_3) &= m_{ij}(\Pi) ; \\ \forall x_i \in Y \forall x_j \notin Y \quad 0 < m_{ij}(\Pi_3) = c \leq m_{ij}(\Pi) ; \\ \forall x_i \notin Y \forall x_j \in Y \quad m_{ij}(\Pi_3) &= -c ; \\ \forall x_i \notin Y \forall x_j \notin Y \quad m_{ij}(\Pi_3) &= m_{ij}(\Pi) ; \end{aligned}$$

où $Y \rightarrow$ est une k-élite faiblement Condorcet.

Et de même en rajoutant à Π_3 des couples d'ordres il est possible de construire Π_4 tel que :

$$\begin{aligned} \forall x_i \in Y \forall x_j \in Y \quad m_{ij}(\Pi_4) &= m_{ij}(\Pi) ; \\ \forall x_i \in Y \forall x_j \notin Y \quad 0 < m_{ij}(\Pi_4) &= m_{ij}(\Pi) ; \\ \forall x_i \notin Y \forall x_j \in Y \quad m_{ij}(\Pi_4) &= -m_{ij}(\Pi_4) \leq m_{ij}(\Pi) ; \\ \forall x_i \notin Y \forall x_j \notin Y \quad m_{ij}(\Pi_4) &= m_{ij}(\Pi) ; \end{aligned}$$

où $Y \rightarrow$ est une toujours une k-élite faiblement Condorcet.

Considérons maintenant un coefficient $m_{ij}(\Pi_4)$ tel que $x_i \notin Y$ et $x_j \in Y$ qui soit strictement inférieur à $m_{ij}(\Pi)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $Y = \{x_1 \dots x_k\}$ et qu'il s'agit en fait du coefficient m_{k+1k} . Rajoutons à Π_4 les deux préordres suivants :

$$\begin{aligned} x_1 \dots x_{k-1} (x_k x_{k+1}) x_{k+2} \dots x_n ; \\ x_n \dots x_1 . \end{aligned}$$

Comme un des deux préordres place les éléments de Y en tête, $Y \rightarrow$ est toujours une k-élite faiblement Condorcet. Le seul changement dans $M(\Pi_4)$ est que le coefficient m_{k+1k} est augmenté de deux unités. De proche en proche, en rajoutant des paires de

préordres, il est donc possible de construire un profil Π' où $Y \rightarrow$ est une k -élite faiblement Condorcet et de même matrice majoritaire que Π .

♦

THEOREME 4.4 : Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données tel que $0 \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$. Un $\mathcal{D}$ -profil Π contient une k -élite faiblement majoritaire si et seulement si il existe un $\mathcal{D}$ -profil Π' contenant une k -élite faiblement Condorcet tel que $M(\Pi) = M(\Pi')$.

Preuve.

D'après le théorème 3.7 $M(\Pi)$ est une matrice paire ou impaire à somme négative.

La première partie de la démonstration du théorème précédent s'applique de la même manière ; il est possible de construire un profil Π_4 tel que :

$$\forall x_i \in Y \forall x_j \in Y \quad m_{ij}(\Pi_4) = m_{ij}(\Pi) ;$$

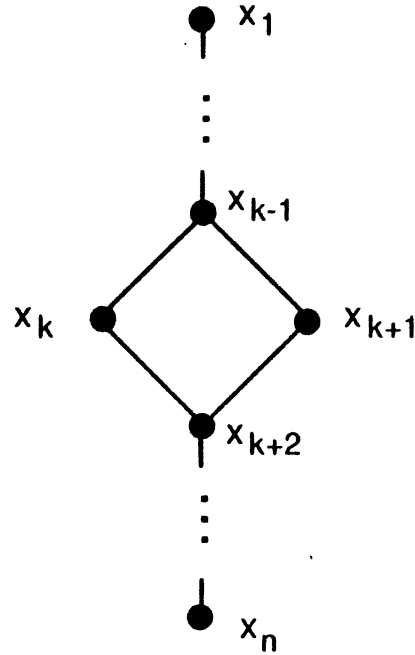
$$\forall x_i \in Y \forall x_j \notin Y \quad 0 < m_{ij}(\Pi_4) = m_{ij}(\Pi) ;$$

$$\forall x_i \notin Y \forall x_j \in Y \quad m_{ij}(\Pi_4) = -m_{ij}(\Pi_4) \geq m_{ij}(\Pi) ;$$

$$\forall x_i \notin Y \forall x_j \notin Y \quad m_{ij}(\Pi_4) = m_{ij}(\Pi) ;$$

où $Y \rightarrow$ est une k -élite faiblement Condorcet de Π_4 .

Considérons maintenant un coefficient $m_{ij}(\Pi_4)$ tel que $x_i \notin Y$ et $x_j \in Y$ qui soit strictement supérieur à $m_{ij}(\Pi)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $Y = \{x_1 \dots x_k\}$ et qu'il s'agit en fait du coefficient m_{k+1k} . Rajoutons à Π_4 l'ordre total $x_1 \dots x_n$ et l'ordre partiel :



$Y \rightarrow$ est toujours une k -élite faiblement Condorcet. Le seul changement dans $M(\Pi_4)$ est que le coefficient m_{k+1k} est diminué de deux unités. De proche en proche, en rajoutant des paires d'ordres partiels, il est donc possible de construire un profil Π' de même matrice majoritaire que Π où $Y \rightarrow$ est une k -élite faiblement Condorcet.

♦

COROLLAIRE 4.2 : Les théorèmes 4.2 et 4.4 peuvent être énoncés en remplaçant faiblement Condorcet par Condorcet. Par contre, ce n'est pas possible dans le théorème 4.3.

Preuve.

La première partie du corollaire provient du fait que les définitions d'élite Condorcet et d'élite faiblement Condorcet sont équivalentes lorsque l'ensemble de données $\mathcal{D}$ est composé de relations antisymétriques.

Pour la seconde partie nous allons fournir un contre exemple. Soit Π le profil constitué de deux fois le préordre $x_1 \dots x_{k-1} (x_k x_{k+1}) x_{k+2} \dots x_n$. L'élite $Y \rightarrow$ pour laquelle $Y = \{x_1 \dots x_k\}$ est une k -élite faiblement majoritaire. Supposons qu'il existe un profil Π' tel que $M(\Pi') = M(\Pi)$ où R soit une k -élite Condorcet de Π' .

$$m_{k+1k}(\Pi) = 2 \Rightarrow m_{k+1k}(\Pi') = 2e_{k+1k}(\Pi') - v' = 2 \Rightarrow e_{k+1k}(\Pi') = v'/2 + 1.$$

Comme Y est une k -élite Condorcet, $\exists W' \subseteq V' / |W'| > v'/2$ et $k \in W' \ x_i \in Y \ x_j \in X-Y \Rightarrow x_i R_k x_j$ et $x_j \not R_k x_i$ donc en particulier le nombre de votants qui préfèrent strictement x_{k+1} à x_k est inférieur à $v'/2$ d'où la contradiction.

♦

COROLLAIRE 4.3 : Un $\mathcal{D}$ -profil Π contient une k -élite majoritaire si et seulement si il existe un $\mathcal{X}$ -profil Π' contenant une k -élite Condorcet tel que $B(\Pi + \Pi) = B(\Pi')$.

Preuve.

Si $\mathcal{D} = \mathcal{X}$ la preuve découle du lemme 3.1 du théorème 4.1 et du corollaire 4.2.

Sinon comme $B(\Pi + \Pi)$ est une matrice paire alors il existe un $\mathcal{X}$ -profil Π'' tel que $B(\Pi'') = B(\Pi + \Pi)$. La partie si du corollaire s'applique et fournit la conclusion.

♦

Remarquons une fois de plus le rôle central joué par les ordres totaux (rappelons que nous avons supposé dans ce chapitre que l'ensemble des données contient toujours les ordres totaux).

En réunissant ces divers théorèmes, nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les résultats relatifs aux $(\mathcal{D}, \mathcal{G}_k)$ -multiprocédures et non pas simplement aux profils considérés.

Soit Π un $\mathcal{D}$ -profil.

- 1- Si F est une $(\mathcal{D}, \mathcal{G}_k)$ -multiprocédure faiblement Condorcet, E-anonyme, U-stable et homogène, et si $Y \rightarrow$ est une élite faiblement majoritaire alors $F(\Pi)$ est égal à l'ensemble des élites faiblement majoritaires de Π . De plus, lorsque $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{T}$ ou bien $\emptyset \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ alors $F(\Pi) = \{Y \rightarrow\}$.
- 2- Si F est une $(\mathcal{D}, \mathcal{G}_k)$ -multiprocédure Condorcet, anonyme, E-stable et homogène, et si $Y \rightarrow$ est une élite majoritaire alors $F(\Pi) = \{Y \rightarrow\}$.

Notons C et C_f (Condorcet et faiblement Condorcet) les $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédures telles que :

- 1- si $Y \rightarrow$ est une k -élite majoritaire alors $C(\Pi) = \{Y \rightarrow\}$; $C(\Pi) = \mathcal{S}_k$ sinon ;
- 2- si $Y \rightarrow$ est une k -élite faiblement majoritaire $C_f(\Pi) = \{k\text{-élites faiblement majoritaires}\}$; $C_f(\Pi) = \mathcal{S}_k$ sinon.

Malgré les résultats que nous venons de démontrer, le nombre de profils où les $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédures C et C_f sont discriminantes n'est pas suffisant pour les rendre opérationnelles. C'est pourquoi nous proposons une nouvelle extension du principe de Condorcet.

4.2.2. Principe de prudence.

Le principe de Condorcet revient dans une certaine mesure à n'accorder la préférence collective que lorsque un certain seuil de crédibilité (l'accord d'une majorité de votants) est atteint. Malheureusement, une telle cohérence des votes est rare, mais on peut supposer que si des informations jusque là indisponibles étaient rassemblées la cohérence serait rétablie. Ce rôle d'informateur privilégié peut être joué par la personne à qui incombe la nécessité de trancher : un président d'assemblée ou un décideur. Celui-ci vote alors avec un poids de plus en plus élevé jusqu'à ce le principe de Condorcet puisse être mis en œuvre.

Nous présentons deux conditions de prudence :

CONDITION 4.3. Prudence :

Soit p le plus petit entier naturel tel qu'il existe une relation binaire R de $\mathcal{D}$ pour laquelle $C(\Pi + pR) \neq \mathcal{S}_k$. Une $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédure F vérifie la condition de prudence si et seulement si :

$$Y \rightarrow \in F(\Pi) \Rightarrow \exists R \in \mathcal{D} \mid C(\Pi + pR) = \{Y \rightarrow\} .$$

CONDITION 4.4. Prudence faible :

Soit p le plus petit entier naturel tel qu'il existe une relation binaire R de

$\mathcal{D}$ pour laquelle $C_f(\Pi+pR) \neq \mathcal{E}_k$. Une $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédure F vérifie la condition de prudence si et seulement si :

$$Y \rightarrow \in F(\Pi) \Rightarrow \exists R \in \mathcal{D} \mid Y \rightarrow \in C_f(\Pi+pR).$$

Soit L un ordre total pour lequel tous les éléments de Y sont rangés avant tous les éléments de $X-Y$. Si $Y \rightarrow$ est un élément de $F(\Pi)$ et si F est prudente (resp. faiblement prudente) alors $\{Y \rightarrow\} = C(\Pi+pL)$ (resp. $Y \rightarrow \in C_f(\Pi+pL)$). Donc si x_i est élément de Y et x_j est élément de $X-Y$ l'inégalité suivante est vérifiée $b_{ij} + p > 0$ donc $b_{ij} > -p$ (resp. $m_{ij} > -p$). $Y \rightarrow$ est donc une k -élite α -majoritaire (resp. faiblement α -majoritaire) pour laquelle α est maximum.

$-p$ peut être interprété comme le seuil de crédibilité que doivent dépasser les coefficients de la matrice de préférence pour $x_i \in Y$ et $x_j \in X-Y$.

La condition 4.3 de prudence est donc à relier avec le problème d'optimisation présenté dans l'exemple 5 du paragraphe 1.3 dans le cas particulier $\mathcal{L} = \mathcal{E}_k$:

$$F(\Pi) = \{ Y \rightarrow \in \mathcal{L} \mid \forall Y' \rightarrow \in \mathcal{L}, \alpha(\Pi, Y \rightarrow) \geq \alpha(\Pi, Y' \rightarrow) \}$$

où cette fois ci $\alpha(\Pi, Y \rightarrow) = \min_{x_i \in Y, x_j \notin Y} b_{ij}$.

De même, la condition 4.4 de prudence faible se rattache au problème d'optimisation :

$$F(\Pi) = \{ Y \rightarrow \in \mathcal{L} \mid \forall Y' \rightarrow \in \mathcal{L}, \alpha'(\Pi, Y \rightarrow) \geq \alpha'(\Pi, Y' \rightarrow) \}$$

où cette fois ci $\alpha'(\Pi, Y \rightarrow) = \min_{x_i \in Y, x_j \notin Y} m_{ij}$.

Nous avons introduit un troisième problème d'optimisation :

$$F(\Pi) = \{ Y \rightarrow \in \mathcal{L} \mid \forall Y' \rightarrow \in \mathcal{L}, \alpha''(\Pi, Y \rightarrow) \geq \alpha''(\Pi, Y' \rightarrow) \}$$

où $\alpha''(\Pi, Y \rightarrow) = \min_{x_i \in Y, x_j \notin Y} b_{ij}$. Mais comme par définition, $m_{ij}(\Pi) = 2e_{ij}(\Pi) - v$ alors $F'(\Pi) = F''(\Pi)$.

Le problème de la détermination des k -élites α -majoritaires (resp. faiblement α -majoritaires) est donc posé, nous y répondrons partiellement.

DEFINITION 4.6 : Le graphe $b(\alpha) = (X, U)$ construit de la manière suivante: $(x_i, x_j) \in U \Leftrightarrow b_{ij} < \alpha$ sera appelé graphe minoritaire au seuil α .

Le graphe $m(\alpha) = (X, U)$ tel que $(x_i, x_j) \in U \Leftrightarrow m_{ij} < \alpha$ sera appelé graphe faiblement minoritaire au seuil α .

THEOREME 4.5 : Le graphe minoritaire au seuil α (resp. faiblement minoritaire) est fortement connexe si et seulement si il n'existe pas d'élites α -majoritaire $Y \rightarrow$ (resp. faiblement α -majoritaire) non triviales ($Y = \emptyset$ ou $Y = X$).

Preuve.

1- Supposons que le graphe minoritaire au seuil α (resp. faiblement minoritaire) soit fortement connexe. Soit Y un ensemble propre de X , x_i un élément de Y et x_j un élément de $Z = X - Y$. $b(\alpha)$ (resp. $m(\alpha)$) est fortement connexe donc il existe un chemin joignant x_i à x_j dont tous les arcs ont leur coefficient associé inférieur strictement à α . Donc il existe un arc (x_1, x_2) $x_1 \in Y$, $x_2 \in Z$ dont le coefficient associé est inférieur strictement à α . Y n'est donc pas une élite α -majoritaire (resp. faiblement α -majoritaire).

2- Supposons que le graphe minoritaire au seuil α (resp. faiblement minoritaire) ne soit pas fortement connexe. Il existe donc deux objets x_i et x_j tels qu'aucun chemin ne les joigne. Soit X_1 l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre à partir de x_i ; soit $Y_1 = X - X_1$. Par construction aucun arc de X_1 vers Y_1 ne figure dans $b(\alpha)$ (resp. $m(\alpha)$) ; tous ces coefficients associés aux arcs de X_1 vers Y_1 sont donc supérieurs ou égaux à α . X_1 est une élite α -majoritaire (resp. faiblement α -majoritaire).

♦

THEOREME 4.6 : Si $Y \rightarrow$ et $Y' \rightarrow$ sont deux élites α -majoritaires (resp. faiblement α -majoritaires) alors $Y \rightarrow \cap Y' \rightarrow$ et $Y \rightarrow \cup Y' \rightarrow$ sont des élites α -majoritaires (resp. faiblement α -majoritaires).

Preuve.

Soient $Y \rightarrow$ et $Y' \rightarrow$ deux élites α -majoritaires. Si $Y \cap Y' = \emptyset$ ou bien $Y \cup Y' = X^2$ le résultat est immédiat. Supposons donc que $Y \cap Y' \neq \emptyset$ et $Y \cup Y' \neq X^2$. Les matrices M et B ne

seront pas distinguées, leurs propriétés respectives n'intervenant pas dans la démonstration ; nous les désignerons par A.

1- Soit $x_i \in Y \cap Y'$ et $x_j \notin Y \cap Y'$

$$x_i \in Y \cap Y' \Rightarrow x_i \in Y \text{ et } x_i \in Y'$$

$$x_j \notin Y \cap Y' \Rightarrow x_j \notin Y \text{ ou } x_j \notin Y'$$

si $x_j \notin Y$ puisque $x_i \in Y$ alors $a_{ij} \geq \alpha$

si $x_j \notin Y'$ puisque $x_i \in Y'$ alors $a_{ij} \geq \alpha$

donc $Y \cap Y' \rightarrow$ est une élite α -majoritaire (resp. faiblement α -majoritaires).

2- Soit $x_i \in Y \cup Y'$ et $x_j \notin Y \cup Y'$

$$x_i \in Y \cup Y' \Rightarrow x_i \in Y \text{ ou } x_i \in Y'$$

$$x_j \notin Y \cup Y' \Rightarrow x_j \notin Y \text{ et } x_j \notin Y'$$

si $x_i \in Y$ puisque $x_j \notin Y$ alors $a_{ij} \geq \alpha$

si $x_i \in Y'$ puisque $x_j \notin Y'$ alors $a_{ij} \geq \alpha$

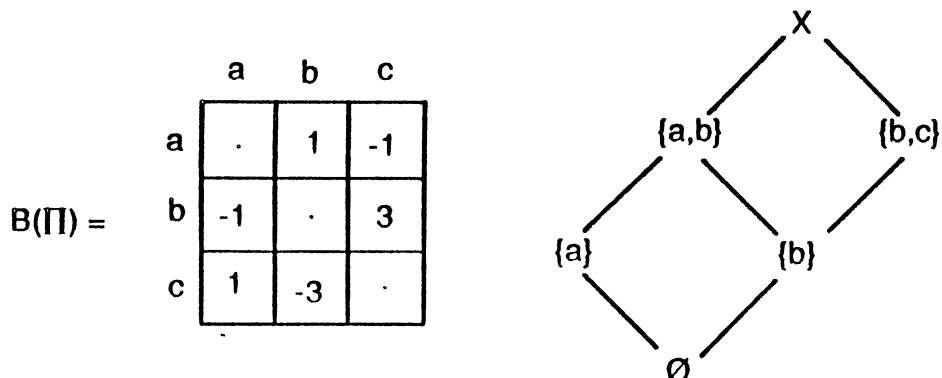
donc $Y \cup Y' \rightarrow$ est une élite α -majoritaire (resp. faiblement α -majoritaires).

♦

Remarques.

1- L'ensemble des élites α -majoritaires (resp. faiblement α -majoritaires) d'un profil Π , muni des relations d'intersection et de réunion est un sous-treillis distributif du treillis $(\mathcal{S}, \cap, \cup)$.

2- Pour un profil donné, et un α donné, il n'existe pas toujours une élite non triviale ($Y \neq \emptyset$ et $Y \neq X$) qui contienne toutes les autres ou qui soit contenue dans toutes les autres. Soit $X = \{a, b, c\}$, le $\mathcal{L}$ -profil $\Pi = (abc, abc, bca, bca, cab)$ est un contre exemple :



Pour $\alpha = -1$, les élites α -majoritaires sont $\emptyset \rightarrow$, $\{a\} \rightarrow$, $\{ab\} \rightarrow$, $\{bc\} \rightarrow$ et $X \rightarrow$.

4.2.3. Cas particulier des $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_1)$ -multiprocédures (fonctions de choix).

Dans le cas où l'on recherche un objet meilleur que les autres, c'est à dire lorsque l'on veut caractériser une $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_1)$ -multiprocédure prudente (resp. faiblement prudente), la tâche est beaucoup plus aisée. En effet, les coefficients sur lesquels se base la recherche des 1-élites α -majoritaires (resp. faiblement α -majoritaires) sont ceux qui sont contenus sur une ligne de la matrice de B-F (resp. matrice majoritaire). Rechercher les 1-élites α -majoritaires (resp. faiblement α -majoritaires) de seuil α est le plus élevé possible, revient à déterminer les objets x_i tels que le minimum des coefficients de la ligne i de la matrice de B-F (resp. matrice majoritaire) soit maximum.

4.3. PRINCIPE DE PARETO APPLIQUE AUX $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -MULTIPROCEDURES.

Soit F une $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédure.

4.3.1. Elites Pareto.

DEFINITION 4.7 : Une élite $Y \rightarrow$ sera dite (strictement) Pareto si et seulement si : $k \in V$, $x_i \in Y$, $x_j \notin Y \Rightarrow x_i R_k x_j$ et $x_j \not\bar{R}_k x_i$.

CONDITION 4.5. Pareto (stricte) :

Soit $Y \rightarrow$ une k -élite Pareto et Π un $\mathcal{D}$ -profil. F est Pareto si et seulement si $F(\Pi) = \{Y \rightarrow\}$.

Comme dans le paragraphe précédent nous pouvons aussi examiner la version faible de cette définition et de cette condition :

DEFINITION 4.8 : Une élite $Y \rightarrow$ sera dite faiblement Pareto si et

seulement si :

$$k \in V, x_i \in Y, x_j \notin Y \Rightarrow x_i R_k x_j.$$

CONDITION 4.6. Pareto faible:

Soit $Y \rightarrow$ une k -élite faiblement Pareto et Π un $\mathcal{D}$ -profil. F est Pareto si et seulement si $F(\Pi) = \{k\text{-élites faiblement Pareto}\}$.

Il est bien évident que le principe de Pareto (strict resp. faible) est beaucoup plus contraignant que le principe de Condorcet (strict resp. faible) en ce sens qu'il ne s'applique qu'à un nombre encore plus restreint de profils. Il peut néanmoins répondre à un besoin plus impérieux du respect des préférences individuelles. La préférence stricte d'un objet sur un autre exprimée par un votant est alors d'une crédibilité absolue qu'il ne s'agit de remettre en cause que contraint et forcé.

4.3.2. Principe médian.

Nous considérerons que la plus petite modification que peut subir une relation binaire R consiste à transformer $x_i R x_j$ en $x_i \bar{R} x_j$ ou bien l'inverse. Dans ce cas le nombre de modifications élémentaires pour transformer R en R' est égal à $\delta(R, R')$ où δ représente la distance de la différence symétrique.

Si $\Pi = (R_1 \dots R_V)$ et $\Pi' = (R'_1 \dots R'_V)$ sont deux $\mathcal{D}$ -profils, le nombre de modifications élémentaires pour transformer Π en Π' est donc égal à $\Delta(\Pi, \Pi') = \sum_{k \leq V} \delta(R_k, R'_k)$.

Soit $U(Y)$ l'ensemble des $\mathcal{D}$ -profils de même cardinal que Π et tels que l'élite $Y \rightarrow$ soit Pareto.

Soit $U'(Y)$ l'ensemble des $\mathcal{R}$ -profils de même cardinal que Π et tels que l'élite $Y \rightarrow$ soit faiblement Pareto.

Si le principe de Pareto (resp. Pareto faible) est érigé en idéal à atteindre, on peut penser que la préférence collective ira aux élites $Y \rightarrow$ telles que le nombre de modifications élémentaires pour transformer Π en un profil de $U(Y)$ (resp. $U'(Y)$) soit minimum ; notons $\Delta(\Pi, U(Y))$ la quantité $\min_{\Pi' \in U(Y)} \Delta(\Pi, \Pi')$ et $\Delta'(\Pi, U(Y))$ la quantité

$$\min_{\Pi' \in U'(Y)} \Delta(\Pi, \Pi').$$

CONDITION 4.7. Principe médian (strict) :

Soit Π un $\mathcal{D}$ -profil et F une $(\mathcal{D}, \mathfrak{S}_k)$ -multiprocédure. F vérifie le principe médian si et seulement si :

$$Y \rightarrow \in F(\Pi) \Rightarrow \forall Y' \rightarrow \in \mathfrak{S}_k \quad \Delta(\Pi, U(Y)) \leq \Delta(\Pi, U(Y')).$$

CONDITION 4.8. Principe médian (faible) :

Soit Π un $\mathcal{D}$ -profil et F une $(\mathcal{D}, \mathfrak{S}_k)$ -multiprocédure. F vérifie le principe médian faible si et seulement si :

$$Y \rightarrow \in F(\Pi) \Rightarrow \forall Y' \rightarrow \in \mathfrak{S}_k \quad \Delta'(\Pi, U(Y)) \leq \Delta'(\Pi, U(Y')).$$

Remarques.

- 1- Cette approche a déjà été décrite dans le cas des $(\mathcal{D}, \mathfrak{S}_1)$ -multiprocédures par D. Farkas et S. Nitzan [1979] .
- 2- Dans le cas particulier des $\mathcal{L}$ -profils, la distance entre deux ordres totaux L_1 et L_2 $\delta(L_1, L_2) = |\{ (a, b) \in X^2 \mid \text{le classement relatif de } (a, b) \text{ dans } L_1 \text{ diffère de son classement relatif dans } L_2 \}|$. $\delta(L_1, L_2)$ est aussi le double du nombre de permutations entre deux objets classés à des rangs consécutifs, nécessaires pour transformer L_1 en L_2 .
- 3- Les $(\mathcal{D}, \mathfrak{S}_k)$ -multiprocédures que nous allons étudier sont donc en relation étroite avec la $(\mathcal{D}, \mathcal{N})$ -multiprocédure médiane telle que nous l'avons définie dans l'exemple 3 du paragraphe 1.3.

Notons $\gamma(\Pi, Y \rightarrow)$ (resp. $\gamma'(\Pi, Y \rightarrow)$) la somme des coefficients de $B(\Pi)$ (resp. de $M(\Pi)$) correspondant aux couples d'objets (x_i, x_j) tels que $x_i \in Y$ et $x_j \in X - Y$.

DEFINITION 4. 9 : $Y \rightarrow$ sera dite k -élite médiane si et seulement si :

$$\forall Y' \rightarrow \in \mathfrak{S}_k, \gamma(\Pi, Y \rightarrow) \geq \gamma(\Pi, Y' \rightarrow).$$

DEFINITION 4.10 : $Y \rightarrow$ sera dite k -élite faiblement médiane si et seulement si :

$$\forall Y' \rightarrow \in \mathcal{E}_k, \gamma'(\Pi, Y \rightarrow) \geq \gamma'(\Pi, Y' \rightarrow).$$

THEOREME 4.7 : Soit F une $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédure faiblement médiane.
 $Y \rightarrow \in F(\Pi) \Rightarrow Y \rightarrow$ est une k -élite faiblement médiane.

Preuve.

Soit R'_k la relation binaire déduite de R_k par la construction :

$$x_i \in Y, x_j \in Y, x_i R_k x_j \Rightarrow x_i R'_k x_j ;$$

$$x_i \notin Y, x_j \notin Y, x_i R_k x_j \Rightarrow x_i R'_k x_j ;$$

$$x_i \in Y, x_j \notin Y \Rightarrow x_i R'_k x_j.$$

Soit Π' le profil obtenu à partir de Π par la construction précédente (Comme $\mathcal{D} = \mathcal{A}, \mathcal{E}, \mathcal{L}, \mathcal{O}, \mathcal{T}, \mathcal{R}$, ou $\mathcal{C}$, Π' est toujours un $\mathcal{D}$ -profil).

$$\delta(R_k, R'_k) = |R_k \cup R'_k| - |R_k \cap R'_k| ;$$

$$\delta(R_k, R'_k) = \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} (1 - e_{ijk}(\Pi) + e_{jik}(\Pi)) .$$

$$\delta(R_k, R'_k) = \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} (1 - b_{ijk}(\Pi)) .$$

Nous déduisons alors les égalités :

$$\begin{aligned} \Delta(\Pi, \Pi') &= \sum_{k \leq v} \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} (1 - b_{ijk}(\Pi)) \\ &= \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} \sum_{k \leq v} (1 - b_{ijk}(\Pi)) \\ &= \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} (v - b_{ij}(\Pi)) \\ &= vk(n-k) - \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} b_{ij}(\Pi) \\ &= vk(n-k) - \gamma(\Pi, Y \rightarrow) \end{aligned}$$

Il est simple de vérifier que $\Delta(\Pi, U(Y)) = \min_{\Pi' \in U(Y)} \Delta(\Pi, \Pi') = \Delta(\Pi, \Pi')$. $Y \rightarrow$ est donc une k -élite médiane.

♦

THEOREME 4.8 : Soit F une $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédure faiblement médiane.
 $Y \rightarrow \in F(\Pi) \Rightarrow Y \rightarrow$ est une k -élite faiblement médiane.

Preuve.

Soit R'_k la relation binaire déduite de R_k par la construction :

$$x_i R_k x_j \Rightarrow x_i R'_k x_j ;$$

$$x_i \in Y, x_j \notin Y, x_i \bar{R}_k x_j \Rightarrow x_i R'_k x_j.$$

Soit Π' le profil obtenu à partir de Π par la construction précédente (Π' n'est pas forcément un $\mathcal{D}$ -profil puisque les relations R'_k ne sont plus forcément transitives ni antisymétriques).

$$\text{Or, } \delta(R_k, R'_k) = |R_k \cup R'_k| - |R_k \cap R'_k| = \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} |e_{ijk}(\Pi) - e_{ijk}(\Pi')| ;$$

$$\delta(R_k, R) = \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} (1 - e_{ijk}(\Pi)) .$$

Nous déduisons alors les égalités :

$$\begin{aligned} \Delta(\Pi, \Pi') &= \sum_{k \leq v} \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} (1 - e_{ijk}(\Pi)) \\ &= \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} \sum_{k \leq v} (1 - e_{ijk}(\Pi)) \\ &= \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} (v - e_{ij}(\Pi)) \\ &= 1/2 [vk(n-k) - \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} m_{ij}(\Pi)] \\ &= 1/2 [vk(n-k) - \gamma(\Pi, Y \rightarrow)] \end{aligned}$$

Il est simple de vérifier que $\Delta'(\Pi, U(Y)) = \min_{\Pi' \in U'(Y)} \Delta'(\Pi, \Pi') = \Delta(\Pi, \Pi')$. $Y \rightarrow$ est donc une élite faiblement médiane.

♦

Les théorèmes 4.7 et 4.8 montrent bien le rapport entre l'exemple 3 du paragraphe 1.3 et les conditions 4.6 et 4.7. Une $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédure médiane peut être définie par le problème d'optimisation :

$$F(\Pi) \subseteq \{R \in \mathcal{S}_k / \forall R' \in \mathcal{S}_k, \gamma(\Pi, R) \geq \gamma(\Pi, R')\}$$

où cette fois ci $\gamma(\Pi, R) = \sum_{i \neq j} x_i R x_j b_{ij}$.

Une $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédure faiblement médiane peut être définie par le problème d'optimisation :

$$F(\Pi) \subseteq \{R \in \mathcal{S}_k / \forall R' \in \mathcal{S}_k, \gamma(\Pi, R) \geq \gamma(\Pi, R')\}$$

où cette fois ci $\gamma(\Pi, R) = \sum_{i \neq j} x_i R x_j m_{ij}$.

Quant au problème d'optimisation :

$$F(\Pi) \subseteq \{R \in \mathcal{R} / \forall R' \in \mathcal{R}, \gamma'(\Pi, R) \geq \gamma'(\Pi, R')\}$$

avec $\gamma'(\Pi, R) = \sum_{i \neq j} x_i R_{xj} m_{ij}$; il est équivalent au problème précédent puisque $m_{ij} = 2e_{ij} - v$.

La définition d'une multiprocédure sous la forme d'un problème d'optimisation permet de l'exposer rapidement ; pour une utilisation pratique, la détermination d'un procédé de construction est primordial.

Si, malheureusement, nos recherches n'ont pas abouti dans le cas des multiprocédures faiblement médianes, les multiprocédures médianes nous réservaient une surprise : les $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédures médianes sont en relation très étroite avec la $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure de Borda définie dans l'exemple 4 du paragraphe 1.3.

THEOREME 4.9 : $Y \rightarrow$ est une k -élite médiane si et seulement si il existe un ordre L solution de la $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure de Borda pour lequel les éléments de Y occupent les k premières positions de L .

Preuve.

Rappelons la notation introduite au paragraphe 2.1. Si x_i est élément quelconque de X , $\beta_i(\Pi)$ désignera la somme des coefficients de la i ème ligne de $B(\Pi)$.

$$\sum_{x_i \in Y} \beta_i(\Pi) = \sum_{x_i \in Y, x_j \in X-Y} b_{ij}(\Pi) = \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} b_{ij}(\Pi) + \sum_{x_i \in Y, x_j \in Y} b_{ij}(\Pi)$$

$$\sum_{x_i \in Y} \beta_i(\Pi) = \gamma(\Pi, Y \rightarrow) + c$$

c représente la somme des coefficients de la matrice de B-F du profil Π restreint à Y ; la propriété de somme constante des matrices de B-F entraîne donc que c est nul et donc que $\gamma(\Pi, Y \rightarrow) = \sum_{x_i \in Y} \beta_i(\Pi)$.

Rappelons que l'application de la $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure de Borda consiste à ranger les x_i en faisant croître leur rang en fonction des $\beta_i(\Pi)$, le meilleur rang correspondant à la somme $\beta_i(\Pi)$ maximale.

Le résultat découle alors directement de la définition 4.9.

♦

Nous pouvons donc légitimement appeler $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédure de Borda la multiprocédure définie par :

$$F(\Pi) = \{Y \rightarrow \in \mathcal{S}_k / \forall Y' \rightarrow \in \mathcal{S}_k, \gamma(\Pi, Y \rightarrow) \geq \gamma(\Pi, Y' \rightarrow)\}$$

où $\gamma(\Pi, Y \rightarrow) = \sum_{x_i \in Y} \beta_i(\Pi)$.

Le chapitre 5 sera consacré à son étude axiomatique, mais auparavant examinons quelques propriétés de dualité que nous exploiterons dans le chapitre 8.

4.4. UN MOT SUR LA DUALITE.

Toutes les propriétés que nous avons exposées jusqu'alors auraient pu être développée en utilisant la notion duale de rebut (cf H. Raynaud [1986]) :

DEFINITION 4.11 : Soit Y un sous-ensemble de X , nous appellerons rebut toute relation binaire notée $\leftarrow Y$ telle que : $a \leftarrow Y b \Leftrightarrow b \in Y$.

Tous les éléments de $X-Y$ (qui sont indifférenciés entre eux) sont strictement préférés aux éléments de Y (qui sont incomparables entre eux).

Nous noterons $\mathcal{B}_k$ (bad) l'ensemble des k -rebuts (rebuts $\leftarrow Y$ tels que $|Y| = k$).

Chaque définition, condition et propriété sur les élites permet de construire une définition, condition, propriété sur les rebuts grâce aux règles de passage :

- 1- si R est une relation binaire $-R$ est obtenue en inversant les préférences strictes de R .
- 2- si $\leftarrow Y$ est un rebut $-(\leftarrow Y)$ est une élite et $-(\leftarrow Y) = Y \rightarrow$;
- 3- $M(-\Pi) = M(\Pi)^t$;

4- $B(-\Pi) = -B(\Pi)$.

La clef de l'interprétation duale étant fournie, lorsque nous en aurons besoin, les propriétés duales seront énoncées sans aucune démonstration.

*
* * *

En guise de conclusion, nous insisterons sur la divergence, qui n'est peut être pas apparue clairement, entre approches prudentes et médianes.

Alors que les $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédures Condorcet sont toutes Pareto, aucune relation de ce type ne peut être mise en évidence entre approche prudente et médiane. Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et Π le profil composé de trois ordres identiques à $abcde$, et de deux identiques à $deabc$ illustre bien la différence entre une $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_3)$ -multiprocédure prudente F et une $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_3)$ -multiprocédure médiane F' . On vérifie en effet que la 3-élite $\{a, b, c\} \rightarrow$ est une 3-élite majoritaire et donc que $F(\Pi) = \{ \{a, b, c\} \rightarrow \}$; alors que la 3-élite $\{a, b, d\} \rightarrow$ est la seule 3-élite médiane et donc que $F'(\Pi) = \{ \{a, b, d\} \rightarrow \}$.

Chapitre 5

CARACTERISATION AXIOMATIQUE DE LA ($\mathcal{D}, \mathcal{S}_k$)-MULTIPROCEDURE DE BORDA

L'étude des ($\mathcal{D}, \mathcal{S}_k$)-multiprocédures médianes ayant focalisé une nouvelle fois notre attention sur la méthode de Borda [1781], il était naturel de tirer parti de la caractérisation de Young [1974]. Et d'autant plus tentant d'ailleurs, qu'une preuve uniquement combinatoire a été découverte par Hansson et Sahlquist [1976].

Nous allons voir en effet qu'une adaptation "naturelle" des conditions de Young, permet de caractériser la ($\mathcal{D}, \mathcal{S}_k$)-multiprocédure de Borda.

Dans une première partie nous étendons les conditions de Young aux ($\mathcal{D}, \mathcal{S}_k$)-multiprocédures. La deuxième partie met en évidence le rôle central joué par le "coefficient de Borda généralisé β_Y " pour les ($\mathcal{D}, \mathcal{S}_k$)-multiprocédures vérifiant ces conditions. La troisième partie étudie les propriétés des nombres β_Y . La quatrième et dernière partie démontre la caractérisation annoncée.

*

* *

Si p est une permutation sur $1 \dots n$ par abus de notation nous noterons $p(\Pi)$ (resp. $p(F(\Pi))$) le profil (resp. le résultat fourni par F) déduit de Π (resp. de $F(\Pi)$) en renumérotant les objets de X selon p .

$\mathcal{D}$ désignera un ensemble de données qui contient les ordres totaux, Π un $\mathcal{D}$ -profil, F une $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédure, $Y \rightarrow$ une k -élite (en tant que relation binaire) et Y le sous-ensemble de X de cardinal k associé canoniquement à $Y \rightarrow$.

5.1. DEFINITION DES CONDITIONS DE YOUNG.

Dans ce paragraphe, nous proposons une adaptation -à notre avis très naturelle- des conditions de Young aux $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédures. Nous avons adopté les traductions suivantes: Neutralité pour "Neutrality;" Egalité pour "Cancellation Property" ; Loyauté pour "Faithfulness"; Consistance pour "Consistency".

CONDITION 5.1. Neutralité :

F est neutre si et seulement si pour toute permutation p sur X , $F(p(\Pi)) = p(F(\Pi))$.

CONDITION 5.2. Egalité :

F est égalitaire si et seulement si pour tout profil Π vérifiant la propriété d'égalité, $F(\Pi) = \mathcal{S}_k$.

Cette condition peut aussi s'énoncer de la manière suivante : soit Π un profil, si tous les coefficients de $B(\Pi)$ sont nuls alors $F(\Pi) = \mathcal{S}_k$.

CONDITION 5.3. Loyauté :

F est loyale si et seulement si pour tout profil Π constitué d'un seul ordre total $x_1 x_2 \dots x_n$, $F(\Pi) = \{ \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \rightarrow \}$.

CONDITION 5.4. Consistance :

F est consistante si et seulement si pour tous profils Π et Π' tels que $F(\Pi) \cap F(\Pi') \neq \emptyset$, $F(\Pi + \Pi') = F(\Pi) \cap F(\Pi')$.

En particulier si $\Pi' = \Pi$, $F(\Pi + \Pi) = F(\Pi)$; F vérifie donc aussi la condition 2.1

d'homogénéité.

Rappelons ici que la méthode de Borda -considérée comme $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédure revient à choisir les k -élites telles que $\gamma(\Pi, Y \rightarrow)$ est maximum, $\gamma(\Pi, Y \rightarrow)$ étant défini par :

$$\gamma(\Pi, Y \rightarrow) = \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} b_{ij}.$$

D'après le théorème 4.9, $\gamma(\Pi, Y \rightarrow) = \sum_{x_i \in Y} \beta_i(\Pi)$. Pour des raisons de cohérence, nous noterons $\beta_Y(\Pi) = \sum_{x_i \in Y} \beta_i(\Pi) = \sum_{x_i \in Y, x_j \notin Y} b_{ij}$; $\beta_Y(\Pi)$ sera appelé coefficient de Borda généralisé.

THEOREME 5.1 : La $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédure de Borda est l'unique $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédure qui vérifie les conditions de neutralité, égalité, loyauté et consistance.

Il est facile de vérifier que la $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédure de Borda vérifie bien les quatre conditions de Young. Pour montrer qu'elle est la seule méthode les satisfaisant, nous allons montrer dans un premier temps que le coefficient de Borda généralisé joue un rôle central pour les $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédures neutres, égalitaires, loyales et consistantes.

5.2. QUELQUES CONSEQUENCES DES CONDITIONS DE YOUNG.

La première conséquence est une application directe de la remarque 1 du paragraphe 2.2.2.

LEMME 5.1 : Si F est égalitaire et consistante alors F est B-anonyme (F ne dépend que des coefficients de la matrice de $B-F$).

Preuve.

Soient Π et Π' deux profils qui ont même matrice de $B-F$; autrement dit, $\forall i \neq j, e_{ij}(\Pi) - e_{ji}(\Pi) = e_{ij}(\Pi') - e_{ji}(\Pi')$. On en déduit que $-\Pi + \Pi'$ et $\Pi - \Pi'$ vérifient la propriété d'égalité,

et donc $F(-\Pi+\Pi') = F(\Pi-\Pi) = \mathcal{E}_k$. Par conséquent, $F(\Pi) = F(\Pi) \cap \mathcal{E}_k = F(\Pi) \cap F(-\Pi+\Pi') = F(\Pi-\Pi+\Pi') = F(-\Pi+\Pi) \cap F(\Pi') = \mathcal{E}_k \cap F(\Pi') = F(\Pi')$ les troisième et quatrième égalités sont vérifiées car F est consistante.

♦

Remarquons en particulier que F est anonyme.

Nous allons maintenant introduire un outil permettant de mettre en évidence le rôle de $\beta_Y(\Pi)$. Soit $Y \rightarrow$ une k -élite. Soit $\mathfrak{P}(Y)$ l'ensemble des permutations sur X qui permutent les éléments de Y entre eux et les éléments de $X-Y$ entre eux.

Soit $\Pi_Y = \sum_{p \in \mathfrak{P}(Y)} p(\Pi)$

Dans un tel profil, toutes les différences entre éléments de Y d'une part, et éléments de $X-Y$ d'autre part, sont annihilées. D'autre part par construction, $\beta_Y(\Pi_Y) = (n-k)! k!$ $\beta_Y(\Pi)$. La matrice $B(\Pi_Y)$ prend alors une forme très simplifiée :

- 1- si $x_i \in Y$ et $x_j \in Y$ alors $b_{ij}(\Pi_Y) = 0$;
- 2- si $x_i \notin Y$ et $x_j \notin Y$ alors $b_{ij}(\Pi_Y) = 0$;
- 3- si $x_i \in Y$ et $x_j \notin Y$ alors $b_{ij}(\Pi_Y) = (n-k-1)! (k-1)! \beta_Y(\Pi)$.

LEMME 5.2 : Soit F une $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédure égalitaire, si $\beta_Y(\Pi) = 0$ alors $F(\Pi_Y) = \mathcal{E}_k$.

Preuve.

Si $\beta_Y(\Pi) = 0$ tous les coefficients de $B(\Pi_Y)$ sont nuls et comme F est égalitaire $F(\Pi_Y) = \mathcal{E}_k$.

♦

LEMME 5.3 : Soit F une $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédure égalitaire, loyale et consistante ; si $\beta_Y(\Pi) > 0$ alors $F(\Pi_Y) = \{Y \rightarrow\}$.

Preuve.

Sans perte de généralité supposons que $Y = \{x_1 \dots x_k\}$. Nous supposons aussi que $\beta_Y(\Pi)$ est pair; s'il ne l'est pas le même raisonnement s'applique avec le profil 2Π , ce

qui ne change rien puisque $(2\Pi)_Y = 2(\Pi_Y)$ et que $F(2(\Pi_Y)) = F(\Pi_Y)$.

Soit Π' le profil constitué des deux ordres $x_1 \dots x_k x_{k+1} \dots x_n$ et $x_k \dots x_1 x_n \dots x_{k+1}$.
Posons $\Pi'' = [\beta_Y(\Pi_Y) / 2 \text{ k } (n-k)] \Pi'$. Comme F est loyale $F(x_1 \dots x_k x_{k+1} \dots x_n) = F(x_k \dots x_1 x_n \dots x_{k+1}) = \{Y \rightarrow\}$; et comme F est consistante $F(\Pi') = \{Y \rightarrow\}$ et donc $F(\Pi'') = \{Y \rightarrow\}$. Or il est facile de vérifier que $B(\Pi_Y) = B(\Pi'')$ et donc le lemme 5.1 fournit la conclusion cherchée : $F(\Pi_Y) = \{Y \rightarrow\}$.

♦

LEMME 5.4: Soit F une $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédure égalitaire, loyale et consistante ; si $\beta_Y(\Pi) < 0$ alors $Y \rightarrow \notin F(\Pi_Y)$.

Preuve.

Si $\beta_Y(\Pi) < 0$ alors $\beta_Y(-\Pi) > 0$ et donc d'après le lemme 5.3 $F(-\Pi_Y) = \{Y \rightarrow\}$. Or comme F est égalitaire $F(\Pi_Y - \Pi_Y) = \mathcal{S}_k$ et donc par consistance $F(\Pi_Y) \cap F(-\Pi_Y) = \emptyset$. Il en résulte que $Y \rightarrow \notin F(\Pi_Y)$.

♦

Dans les lemmes suivants, F désignera une $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédure neutre, loyale, égalitaire et consistante.

LEMME 5.5 : Si $Y \rightarrow$ est un élément de $F(\Pi)$ alors :

- 1- $\beta_Y(\Pi) = 0 \Rightarrow F(\Pi) = \mathcal{S}_k$;
- 2- $\beta_Y(\Pi) > 0 \Rightarrow F(\Pi) \neq \mathcal{S}_k$;
- 3- $Y \rightarrow \in F(\Pi) \Rightarrow \beta_Y(\Pi) \geq 0$.

Preuve.

Soit $Y \rightarrow$ un élément de $F(\Pi)$. Si p est une permutation quelconque de $\mathfrak{P}(Y)$, par neutralité, $Y \rightarrow$ est élément de $F(p(\Pi))$.

Comme F est consistante $Y \rightarrow \in F(\Pi_Y) = \bigcap_{p \in \mathfrak{P}(Y)} F(p(\Pi))$

Les trois implications (1) (2) et (3) se déduisent facilement de l'égalité précédente et des lemmes 5.2, 5.3, et 5.4.

♦

Remarquons en particulier que : $F(\Pi) = \mathfrak{S}_k \Rightarrow \forall Y \rightarrow \in \mathfrak{S}_k \beta_Y(\Pi) = 0$.

LEMME 5.6 : $\forall Y \rightarrow \in \mathfrak{S}_k \quad \beta_Y(\Pi) = \beta_Y(\Pi') \Rightarrow F(\Pi) = F(\Pi')$.

Preuve.

$$\forall Y \rightarrow \in \mathfrak{S}_k \quad \beta_Y(-\Pi + \Pi') = -\beta_Y(\Pi) + \beta_Y(\Pi') = 0$$

D'après le lemme 5.5 $F(-\Pi + \Pi') = \mathfrak{S}_k$, et comme d'autre part $\Pi - \Pi$ vérifie la propriété d'égalité $F(\Pi - \Pi) = \mathfrak{S}_k$. Comme F est consistante :

$$F(\Pi) = F(\Pi) \cap \mathfrak{S}_k = F(\Pi) \cap F(-\Pi + \Pi') = F(\Pi - \Pi + \Pi')$$

$$F(\Pi') = \mathfrak{S}_k \cap F(\Pi') = F(-\Pi + \Pi) \cap F(\Pi') = F(\Pi - \Pi + \Pi')$$

ce qui démontre le lemme.

♦

En résumé, F ne dépend que des nombres $\beta_Y(\Pi)$.

5.3. PROPRIETES DES NOMBRES $\beta_Y(\Pi)$.

La condition du lemme 5.6 apparait difficile à vérifier ; en fait , il n'en est rien, puisque comme nous l'avons rappelé au paragraphe 5.1 :

$$\beta_Y(\Pi) = \sum_{x_i \in Y} \beta_i(\Pi).$$

Nous pouvons donc donner une nouvelle interprétation du lemme 5.6. En effet, si Π et Π' sont deux profils quelconques, il est bien évident que $\forall Y \rightarrow \in \mathfrak{S}_k \beta_Y(\Pi) = \beta_Y(\Pi')$ est équivalent à dire que $\forall x_i \in X \beta_i(\Pi) = \beta_i(\Pi')$. Le lemme peut donc se récrire :

LEMME 5.6' : $\forall x_i \in X \beta_i(\Pi) = \beta_i(\Pi') \Rightarrow F(\Pi) = F(\Pi')$.

Le résultat de l'application de F ne dépend donc que des $\beta_i(\Pi)$ comme la fonction de choix de Borda. Nous allons voir que la similarité ne s'arrête pas là.

LEMME 5.7 : $\sum_{Y \rightarrow \in \mathfrak{S}_k} \beta_Y(\Pi) = 0$.

Preuve.

Soit n_{ij} le nombre de k -élites telles que $x_i \in Y$ et $x_j \in X-Y$. n_{ij} est bien sûr égal au nombre de combinaisons à $k-1$ éléments parmi $n-2$; donc en particulier, n_{ij} est égal à n_{ji} .

$$\begin{aligned} \sum_{Y \rightarrow \in \mathcal{E}_k} \beta_Y(\Pi) &= \sum_{Y \rightarrow \in \mathcal{E}_k} \sum_{x_i \in Y, x_j \in X-Y} b_{ij} \\ &= \sum_{\{x_i, x_j\} \subseteq X} n_{ij} b_{ij} + n_{ji} b_{ji} \\ &= \sum_{\{x_i, x_j\} \subseteq X} n_{ij} (b_{ij} + b_{ji}). \end{aligned}$$

Grâce à la propriété de somme nulle des matrices de B-F le résultat est démontré.

♦

Remarquons finalement que, de part les propriétés des matrices de B-F, $\beta_Y(\Pi + \Pi') = \beta_Y(\Pi) + \beta_Y(\Pi')$ et que $\beta_Y(-\Pi) = -\beta_Y(\Pi)$.

5.4. CARACTERISATION.

Pour démontrer que la $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédure de Borda est la seule à satisfaire les quatre conditions du paragraphe 5.1, nous allons utiliser le schéma suivant : si Π est un profil quelconque nous allons déterminer un profil Π' qui nous permette de nous placer dans le cadre du lemme 5.6' et tel que Π' se décompose en une somme de profils "élémentaires" pour lesquels le résultat de F est connu ; par consistance, l'image de Π' sera déterminée et donc du même coup celle de Π .

Les deux lemmes suivants définissent les profils "élémentaires" en question ainsi que leur image par F .

LEMME 5.8 : Si E_i est le profil constitué des deux ordres $x_i x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n$ et $x_i x_n \dots x_{i+1} x_{i-1} \dots x_1$ alors $F(E_i) = \{Y \rightarrow \in \mathcal{E}_k / x_i \in Y\}$.

Preuve.

Soit $Y \rightarrow$ un élément de $\mathcal{E}_k$ pour lesquels x_i n'est pas contenu dans Y ; il est facile de vérifier que $\beta_Y(E_i) < 0$ et donc d'après le lemme 5.5, $Y \rightarrow$ n'est pas élément de $F(E_i)$.

Nous venons donc de démontrer l'inclusion $F(E_i) \subseteq \{Y \rightarrow \in \mathcal{E}_k / x_i \in Y\}$. Pour l'inclusion

réciproque, considérons un élément quelconque $Y \rightarrow$ de $F(E_i)$ (il existe toujours car $F(E_i)$ est non vide par définition) ; Y contient l'objet x_i . Considérons aussi une transposition t sur deux objets différents de x_i . L'application de t au profil E_i ne modifie pas $B(E_i)$, le lemme 5.1 et la neutralité de F permettent donc de déduire l'implication : $Y \rightarrow \in F(E_i) \Rightarrow t(Y \rightarrow) \in F(t(E_i)) = F(E_i)$. De transpositions en transpositions, nous pouvons donc démontrer l'inclusion réciproque.

♦

La matrice $B(E_i)$ est identique à celle du profil constitué du seul préordre x_i ($x_1 \dots x_n$) :

$$B(E_i) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} x_i \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \begin{array}{c} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{array} & 0 \\ \hline 1 \dots 1 & \cdot & 1 \dots 1 \\ \hline 0 & \begin{array}{c} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{array} & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

Les profils élémentaires ne seront pas les E_i mais en fait des profils équivalents à une somme de E_i ; plus précisément :

LEMME 5.9 : Considérons le profil $\Pi_i = E_1 + \dots + E_i$.

1- si $k \geq i$ alors $F(\Pi_i) = \{ Y \rightarrow \in \mathcal{F}_k / \{x_1 \dots x_i\} \subseteq Y \}$.

2- si $k \leq i$ alors $F(\Pi_i) = \{ Y \rightarrow \in \mathcal{F}_k / Y \subseteq \{x_1 \dots x_i\} \}$.

Preuve.

1- Comme $k \geq i$ $F(E_1) \cap \dots \cap F(E_i) = \{ Y \rightarrow \in \mathcal{F}_k / \{x_1 \dots x_i\} \subseteq Y \} \neq \emptyset$, la condition de consistance opère, et donc $F(\Pi_i) = F(E_1 + \dots + E_i) = F(E_1) \cap \dots \cap F(E_i)$. Le premier point est bien démontré.

2- Nous démontrerons le second point par induction sur i .

Si $i = n$ alors Π_i vérifie la propriété d'égalité ; l'axiome d'égalité implique donc $F(\Pi_n) = \mathcal{F}_k$. Supposons que le lemme soit démontré jusqu'au rang $j+1$; démontrons le au rang

j. Soit $Y \rightarrow$ un élément de $F(\Pi_j)$; supposons que Y ne soit pas inclus dans $\{x_1 \dots x_j\}$. Il existe donc un élément x_l de Y tel que l est strictement supérieur à j . Soit t la transposition qui échange x_l et x_{j+1} ; elle laisse $B(\Pi_j)$ inchangée. F étant neutre, on déduit $Y \rightarrow \in F(\Pi_j) \Rightarrow t(Y \rightarrow) \in F(t(\Pi_j)) = F(\Pi_j)$. De plus, x_{j+1} est élément de $t(Y \rightarrow)$ donc d'après le lemme précédent, $t(Y \rightarrow)$ est élément de $F(E_{j+1})$. Par consistance nous pouvons écrire l'égalité suivante: $F(\Pi_j + E_{j+1}) = F(\Pi_j) \cap F(E_{j+1})$. Comme $\Pi_j + E_{j+1} = \Pi_{j+1}$, on déduit que $F(\Pi_{j+1}) \subseteq F(E_{j+1})$, ce qui est faux par hypothèse.

♦

Le profil Π_j a la même matrice de B-F que le profil constitué des deux ordres totaux $x_1 \dots x_n$ et $x_1 \dots x_1 x_n \dots x_{i+1}$, ou du seul préordre $(x_1 \dots x_i) (x_{i+1} \dots x_n)$:

$$B(\Pi_j) = \begin{array}{c} x_1 \dots x_i \\ \vdots \\ x_i \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Nous supposerons dans la suite de ce chapitre que les objets de X sont indicés par $\beta_i(\Pi)$ décroissant; ce qui est toujours possible F étant neutre.

LEMME 5.10 : Soit Π un profil quelconque. Soit δ_i l'entier $\beta_i(\Pi) - \beta_{i+1}(\Pi)$. Les profils $n\Pi$ et $\Pi' = \delta_1 \Pi_1 + \dots + \delta_{n-1} \Pi_{n-1}$ sont dans le cadre d'application du lemme 5.6'.

Preuve.

$$\Pi' = [\beta_1(\Pi) - \beta_2(\Pi)] \Pi_1 + \dots + [\beta_i(\Pi) - \beta_{i+1}(\Pi)] \Pi_i + \dots + [\beta_{n-1}(\Pi) - \beta_n(\Pi)] \Pi_{n-1}$$

$$\Pi' = \beta_1(\Pi) \Pi_1 + \beta_2(\Pi) [\Pi_2 - \Pi_1] + \dots + \beta_i(\Pi) [\Pi_i - \Pi_{i-1}] + \dots + \beta_{n-1}(\Pi) [\Pi_{n-1} - \Pi_{n-2}] - \beta_n(\Pi) \Pi_{n-1}$$

Or $\Pi_i - \Pi_{i-1} = E_i$, et $B(-\Pi_{n-1}) = B(E_n)$. On en déduit que $B(\Pi') = \beta_1(\Pi) B(E_1) + \dots +$

$\beta_i(\Pi) B(E_i) + \dots + \beta_n(\Pi) B(E_n)$ et donc que $\beta_i(\Pi') = \beta_1(\Pi) \beta_i(E_1) + \dots + \beta_i(\Pi) \beta_i(E_i) + \dots + \beta_n(\Pi) \beta_i(E_n)$ ce que l'on peut récrire $\beta_i(\Pi') = -\beta_1(\Pi) - \dots - \beta_{i-1}(\Pi) + (n-1)\beta_i(\Pi) - \beta_{i+1}(\Pi) - \dots - \beta_n(\Pi)$. Comme d'après le lemme 5.7 $\beta_1(\Pi) + \dots + \beta_i(\Pi) + \dots + \beta_n(\Pi) = 0$ on en déduit $\beta_i(\Pi') = n\beta_i(\Pi) = \beta_i(n\Pi)$ ce qui démontre le lemme.

♦

La caractérisation annoncée découle directement du lemme 5.10 et de la propriété de consistance. En effet, $F(\Pi) = F(n\Pi) = F(\delta_1\Pi_1 + \dots + \delta_{n-1}\Pi_{n-1})$, et comme $F(\Pi_1) \cap \dots \cap F(\Pi_{n-1}) = \{\{x_1 \dots x_k\} \rightarrow\} \neq \emptyset$ on peut déduire par consistance que $F(\Pi) = \bigcap_{\delta_i \neq 0} F(\Pi_i)$ et donc que $F(\Pi) = \{Y \rightarrow \in \mathcal{E}_k / \forall Y' \rightarrow \in \mathcal{E}_k \beta_Y(\Pi) \geq \beta_{Y'}(\Pi)\}$.

Remarquons en guise de conclusion que la caractérisation de Young vient d'être étendue des $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_1)$ -multiprocédures (fonctions de choix) aux $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédures et ceci pour des ensembles de données soumis à l'unique contrainte de contenir les ordres totaux.

PARTIE 3

$(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -MULTIPROCEDURES

ET $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -PROCEDURES D'AGREGATION :

CONSIDERATIONS ALGORITHMIQUES ET

AXIOMATIQUES

Dans cette partie, nous examinerons deux classes de procédures d'agréations qui vérifient deux types de conditions :

- 1- des conditions de prudence ;
- 2- des conditions de consistance.

Ces procédures modéliseront le comportement d'une personne confrontée à un problème d'agréation ; cette personne fictive sera appelée "décideur multicritère".

Toutes les procédures F étudiées seront anonymes et E -stables ; autrement dit, $F(\Pi)$ ne dépendra que de la matrice de Benjamin Franklin $B(\Pi)$. Rappelons que d'après le théorème 3.1, si Π est un $\mathcal{X}$ -profil $B(\Pi)$ est une matrice paire à somme nulle ou bien une matrice impaire à somme nulle ; et d'après le théorème 3.2 $B(\Pi)$ est une matrice d'un $\mathcal{T}$ -profil si et seulement si elle est à somme nulle.

Chapitre 6**ORDRES ET PREORDRES PRUDENTS**

Supposons que v votants veuillent classer n objets selon un ordre total, chaque votant exprimant ses préférences sur les n objets selon un ordre total. Une première démarche consiste à appliquer la règle majoritaire. Mais lorsque le nombre d'objets et le nombre d'individus augmentent, celle-ci ne s'applique que rarement. Cependant, devant la nécessité de prendre une décision, un débat s'instaure, et généralement, une solution se "dégage d'un accord commun"!

La problématique exposée brièvement ci-dessus est très courante, et, malgré leur côté empirique et informel, des milliers de décisions sont prises sans être remises en cause. Une interprétation possible de cette apparente contradiction peut-être due à une forte structure hiérarchique sous-jacente à l'ensemble des votants considéré. En effet, en cas de non efficience de la règle majoritaire, une personnalité (chef d'entreprise, supérieur hiérarchique, président...) a tendance à forcer, ou du moins à fortement influencer, la décision finale. Son opinion personnelle prend alors un "poids" important qui fait basculer la majorité.

C'est ce comportement que nous avons modélisé ici.

Dans sa thèse, G. Köhler donne un algorithme pour calculer ces deux constantes et fournir un ordre prudent ; nous l'avons reproduit ci-dessous.

Etape r : Identifier dans chaque ligne de la matrice de B-F courante le plus petit b_{ij} . L'un au moins de ces minima est plus grand que tous les autres. En cas d'ex æquo on prend l'un quelconque d'entre eux. La ligne contenant ce minimum correspond à un objet qui sera classé au rang r de l'ordre total résultat. Si $r < n$, supprimer la ligne et la colonne correspondantes de la matrice de B-F, pour obtenir la matrice de B-F courante de l'étape $(r+1)$.

L'algorithme s'arrête lorsque la matrice de B-F est vide.

THEOREME 6.3 (Köhler, [1978]) : L'algorithme de Köhler fournit un ordre total prudent, et le plus petit des maxima successifs est égal à α .

Remarques.

- 1- α peut donc également être défini comme maximum des minima des coefficients de B-F des ordres sur X . α et β sont donc des coefficients particuliers de la matrice de B-F ; ils ont donc la même parité que n'importe quel autre coefficient de cette matrice.
- 2- Si un $\mathcal{X}$ -profil Π est donné, le calcul d'un ordre prudent L et des constantes α et β est un problème polynomial de l'ordre de n^3 .

6.1.2. Autre caractérisation des ordres prudents.

Le comportement décrit dans l'introduction de ce chapitre peut être modélisé par : soit p le plus petit entier naturel pour lequel il existe un ordre total L tel que l'application de la règle majoritaire au profil $\Pi' = \Pi + pL$ soit un ordre total ; le résultat de la procédure d'agrégation est $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL)$. Intuitivement p représente la pression minimale que doit exercer le décideur pour qu'un choix puisse se dégager.

Lorsque la règle majoritaire s'applique et donne L , alors la pression est nulle.

Le plus grand α tel que $\mathfrak{R}_\alpha$ contienne un ordre total sera noté α .

Le plus petit β tel que $\mathfrak{R}_{\beta+1}$ ne contienne pas de circuit sera noté β .

THEOREME 6.1 (Köhler[1978]) : Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- 1- L est un ordre prudent ;
- 2- $L \in \mathcal{X}$ et $x_i L x_j \Rightarrow b_{ij} \geq \alpha$;
- 3- $L \in \mathcal{X}$ et $b_{ij} \geq \beta+1 \Rightarrow x_i L x_j$
encore $L \in \mathcal{X}$ et $x_i \not L x_j \Rightarrow b_{ij} \leq \beta$.

Soit plus synthétiquement : L est prudent $\Leftrightarrow L \subseteq \mathfrak{R}_\alpha \Leftrightarrow \mathfrak{R}_{\beta+1} \subseteq L$.

THEOREME 6.2 (Köhler[1978]) : $\alpha + \beta = 0$.

LEMME 6.1 :

- 1- Si $\mathfrak{R}_1$ n'est pas un ordre total alors $\alpha \leq 0 \leq \beta$.
- 2- Si $\mathfrak{R}_1$ est un ordre total alors $\beta < 0 < \alpha$ et de plus
 $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}_{\beta+1}$.

Preuve.

1- Supposons que $\alpha > 0$; c'est à dire $\alpha \geq 1$. Dans ce cas, par définition, $\mathfrak{R}_\alpha$ contient un ordre total L , donc $x_i L x_j$ implique d'après le théorème 6.1 que $b_{ij} \geq 1$ donc, par somme nulle de B , $b_{ji} = -b_{ij} \leq -1$, donc $\mathfrak{R}_1 = L$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. α est négatif ou nul.

Etant donné que d'après le théorème 6.2 $\alpha + \beta = 0$, l'inégalité $\alpha \leq 0 \leq \beta$ est vérifiée.

2- En effet, par définition de α nous avons : $0 < \alpha$, et comme d'après le théorème 6.2 $\alpha + \beta = 0$ nous avons bien $\beta < 0 < \alpha$.

Par définition de $\mathfrak{R}_\alpha$ nous avons les inclusions $\mathfrak{R}_\alpha \subseteq \mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{R}_{\beta+1}$. Comme $\mathfrak{R}_1$ est un ordre total et que $\mathfrak{R}_\alpha$ contient un ordre total alors $\mathfrak{R}_\alpha = L = \mathfrak{R}_1$. $\mathfrak{R}_{\beta+1}$ est sans circuit et contient $\mathfrak{R}_1$ qui est un ordre, donc $\mathfrak{R}_{\beta+1} = \mathfrak{R}_1$. Donc en fin de compte :

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}_{\beta+1} .$$

♦

*

* *

Les résultats présents dans ce chapitre sont une extension de ceux de Arrow & Raynaud [1986] ; ils sont le fruit de la collaboration avec H. Raynaud (un lecteur intéressé peut les trouver sous une autre forme dans Debord & Raynaud [1986]).

Dans un premier paragraphe nous supposerons que les votants expriment leurs préférences selon un ordre total (Π est un $\mathcal{X}$ -profil), et que le résultat recherché est aussi un ordre total ; nous relirons cette problématique $((\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédures d'agrégation) à celle des ordres prudents. Dans un second paragraphe nous l'étendrons au cas où les votants expriment leurs préférences selon un préordre total, et où le résultat recherché est aussi pré-ordinal (problématique des $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation).

6.1. CAS DES PROFILS D'ORDRES TOTAUX.

Soit $\mathfrak{R}_a(\Pi)$ la relation binaire définie par : $x_i \mathfrak{R}_a(\Pi) x_j \Leftrightarrow b_{ij}(\Pi) \geq a$

La relation binaire $\mathfrak{R}_1(\Pi)$ est donc le résultat de la règle majoritaire.

Lorsque le profil de référence Π sera bien spécifié nous noterons simplement $\mathfrak{R}_a$.

6.1.1. Les ordres prudents, définition et propriétés.

A chaque couple (x_i, x_j) de L on peut associer son coefficient de B-F b_{ij} . Considérons l'ensemble des coefficients de B-F correspondant aux couples de L . Soit $\alpha(L)$ la valeur du plus petit d'entre eux : $\alpha(L) = \min_{x_i L x_j} b_{ij}$.

DEFINITION 6.1 : Un ordre total sur X , L , est prudent si et seulement si :

$$\forall L' \in \mathcal{X} \quad \alpha(L) \geq \alpha(L')$$

Si $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL)$ contient le couple (x_i, x_j) on est dans l'une des deux situations :

- 1- si $x_i L x_j$ alors $b_{ij}(\Pi + pL) = b_{ij}(\Pi) + p > 0$;
- 2- si $x_i \not L x_j$ x_j n'est pas dans L alors $b_{ij}(\Pi + pL) = b_{ij}(\Pi) - p > 0$.

THEOREME 6.4 : Si $\mathfrak{R}_1(\Pi)$ n'est pas un ordre total sur X et $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL)$ est un ordre alors $p \geq \beta + 1$.

Preuve.

Supposons que $p < \beta + 1$; soit encore $p \leq \beta$. Comme $\mathfrak{R}_1(\Pi)$ n'est pas un ordre total, alors d'après le lemme 6.1, $\beta \geq 0$.

1- Si $\beta = 0$ alors $p = 0$ ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL)$ est un ordre total.

2- Si $\beta > 0$ par construction $\mathfrak{R}_\beta$ contient au moins un circuit. Soit (x_i, x_j) un arc du circuit ; $b_{ij}(\Pi) \geq \beta > 0$.

Si $x_i L x_j$ alors $b_{ij}(\Pi + pL) = b_{ij}(\Pi) + p \geq \beta + p > 0$ donc (x_i, x_j) est élément de $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL)$.

Si $x_i \not L x_j$ alors $b_{ij}(\Pi + pL) = b_{ij}(\Pi) - p$, comme $p \leq \beta$ alors $b_{ij}(\Pi + pL) \geq 0$. De plus, si $b_{ij}(\Pi + pL) = 0$ alors de part la propriété de somme nulle - $b_{ji}(\Pi + pL) = b_{ji}(\Pi + pL) = 0$ donc ni (x_i, x_j) ni (x_j, x_i) n'appartiennent à $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL)$ ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL)$ est un ordre total. On a donc $b_{ij}(\Pi + pL) > 0$; (x_i, x_j) est élément de $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL)$.

Par conséquent, tous les arcs du circuit sont dans $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL)$ ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL)$ est un ordre total.

♦

COROLLAIRE 6.1 : Si $\mathfrak{R}_0(\Pi)$ n'est pas un préordre sur X et $\mathfrak{R}_0(\Pi + pL)$ est un préordre sur X alors $p \geq \beta + 1$.

Preuve.

Supposons que $p < \beta + 1$; soit encore $p \leq \beta$. Comme $\mathfrak{R}_0(\Pi)$ n'est pas un préordre et donc n'est pas un ordre total, nous savons d'après le lemme 6.1 que $\beta \geq 0$.

1- Si $\beta = 0$ alors $p = 0$ ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathfrak{R}_0(\Pi + pL)$ est un

préordre.

2- Si $\beta > 0$ par construction $\mathfrak{R}_\beta$ contient au moins un circuit. Soit (x_i, x_j) un arc du circuit ; $b_{ij}(\Pi) \geq \beta > 0$. Si $x_i L x_j$ alors $b_{ij}(\Pi + pL) = b_{ij} + p \geq \beta + p \geq 0$. De même, si $x_i \not L x_j$ alors $b_{ij}(\Pi + pL) = b_{ij}(\Pi) - p$, comme $p \leq \beta$ alors $b_{ij}(\Pi + pL) \geq 0$. Tous les arcs de ce circuit sont donc dans $\mathfrak{R}_0(\Pi + pL)$.

Comme $\mathfrak{R}_0(\Pi + pL)$ est un préordre tous les objets du circuit sont ex æquo. Donc en particulier, si (x_i, x_j) appartient au circuit alors (x_j, x_i) appartient à $\mathfrak{R}_0(\Pi + pL)$. Soit (x_i, x_j) un arc du circuit, par hypothèse $b_{ij}(\Pi) \geq \beta > 0$ donc $b_{ji}(\Pi) < 0$, donc $b_{ji}(\Pi) - p < 0$. La seule situation possible pour (x_j, x_i) appartienne à $\mathfrak{R}_0(\Pi + pL)$ est donc que x_j soit strictement préféré à x_i dans L . Donc, quel que soit (x_i, x_j) élément du circuit x_j est strictement préféré à x_i dans L ce qui est en contradiction avec le fait que L est un ordre total.

♦

Le fait de parler de majorité au sens large ne fait pas diminuer la pression à exercer sur le profil ; c'est pour cela que nous ne parlerons que de majorité au sens strict.

THEOREME 6.5 : Si $\mathfrak{R}_1(\Pi)$ n'est pas un ordre total alors $p = \beta + 1$.

Preuve.

D'après le théorème 6.4, il suffit de trouver un ordre L tel que $\mathfrak{R}_1(\Pi + (\beta + 1)L)$ soit un ordre total. Soit L un ordre prudent, montrons que $\mathfrak{R}_1(\Pi + (\beta + 1)L) = L$.

Si $x_i L x_j$ est dans L alors d'après le théorème 6.1 $b_{ij}(\Pi) \geq \alpha$ donc $b_{ij}(\Pi) + \beta + 1 \geq \alpha + \beta + 1$ et d'après le théorème 6.2 $b_{ij}(\Pi) + \beta + 1 \geq 1$ donc $b_{ij}(\Pi + (\beta + 1)L) = b_{ij}(\Pi) + \beta + 1 \geq 1$ et par conséquent (x_i, x_j) est élément de $\mathfrak{R}_1(\Pi + (\beta + 1)L)$.

Si $x_i \not L x_j$ alors $b_{ij}(\Pi) < \beta + 1$ donc $b_{ij}(\Pi) - \beta - 1 < 0$ donc $b_{ij}(\Pi + (\beta + 1)L) = b_{ij}(\Pi) - \beta - 1 < 0$ et par conséquent (x_i, x_j) n'est pas dans $\mathfrak{R}_1(\Pi + (\beta + 1)L)$.

♦

La pression minimale à exercer sur le profil de départ est donc nulle si la méthode

majoritaire s'applique, égale à $\beta+1$ sinon.

THEOREME 6.6 : Quel que soit l'ordre L choisi $\mathfrak{R}_{\beta+1} \subseteq \mathfrak{R}_1(\Pi+pL) \subseteq \mathfrak{R}_\alpha$.

Preuve.

Si $p = 0$ alors $\mathfrak{R}_1(\Pi)$ est un ordre total donc d'après le lemme 6.1, $\mathfrak{R}_1(\Pi+pL) = \mathfrak{R}_1(\Pi) = \mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}_{\beta+1}$.

Supposons maintenant que $p > 0$, d'après le théorème 6.5, $p = \beta+1$.

Si (x_i, x_j) est élément de $\mathfrak{R}_{\beta+1}$ alors $b_{ij}(\Pi) \geq \beta+1$ donc $b_{ij}(\Pi) - \beta - 1 \geq 0$; comme $b_{ij}(\Pi)$ et β ont même parité $b_{ij} - \beta - 1 > 0$. Donc si $x_i L x_j$ ou bien si $x_i \not L x_j$ alors $b_{ij}(\Pi+pL) > 0$ et donc (x_i, x_j) appartient à $\mathfrak{R}_1(\Pi+pL)$.

Si (x_i, x_j) est élément de $\mathfrak{R}_1(\Pi+pL)$ et de L alors $b_{ij}(\Pi) + \beta + 1 > 0$ donc $b_{ij}(\Pi) > -\beta-1 = \alpha - 1$ donc $b_{ij}(\Pi) \geq \alpha$. Si (x_i, x_j) est élément de $\mathfrak{R}_1(\Pi+pL)$ mais pas de L alors $b_{ij}(\Pi) - \beta - 1 \geq 0$ donc $b_{ij}(\Pi) \geq \beta+1$ et comme $\beta \geq 0$ $b_{ij}(\Pi) > 0 \geq \alpha$.

Quel que soit le cas de figure nous avons bien $\mathfrak{R}_{\beta+1} \subseteq \mathfrak{R}_1(\Pi+pL) \subseteq \mathfrak{R}_\alpha$.

♦

Remarque.

$\mathfrak{R}_1(\Pi+pL)$ n'est pas forcément un ordre; mais si c'est un ordre il est prudent. L'exemple suivant du (Arrow & Raynaud [1986]) résume très bien les différents cas de figure possibles: soit le profil $\Pi = \{abc, abc, bca, bca, cab\}$.

$$B(\Pi) = \begin{pmatrix} . & 1 & -1 \\ -1 & . & 3 \\ 1 & -3 & . \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que $\alpha = -1$ et $\beta = 1$; de plus comme $\mathfrak{R}_1(\Pi)$ n'est pas un ordre $p = \beta+1 = 2$. Les ordres prudents sont ceux qui contiennent $\mathfrak{R}_{\beta+1}$; il y a donc trois ordres prudents abc, bac, bca . Si L est prudent alors $\mathfrak{R}_1(\Pi+2L) = L$, par contre $\mathfrak{R}_1(\Pi+2cab)$ n'est ni un ordre ni un préordre, mais $\mathfrak{R}_1(\Pi+2acb) = abc$.

THEOREME 6.7 : L est un ordre prudent si et seulement si $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL) = L$.

Preuve.

D'après les théorèmes 6.1 et 6.6, si $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL)$ est un ordre total alors il est prudent. De plus la démonstration du théorème 6.5 utilise le fait que si L est un ordre prudent alors $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL) = L$.

♦

6.2. CAS D'UN PROFIL DE PREORDRES.

On suppose maintenant que les v votants rangent chacun, par préférence décroissante, les n objets de X selon un préordre sur X .

Pour des raisons que nous avons déjà explicitées au paragraphe 3.2, nous pensons qu'une procédure d'agrégation anonyme et E-stable ne peut raisonnablement être définie pour les $\mathcal{T}$ -profils que lorsqu'elle est homogène (condition 2.1). Nous modéliserons donc le comportement décrit dans l'introduction de ce chapitre par une $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation F anonyme, E-stable et homogène.

Dans ce cas, rappelons que d'après le théorème 3.4, si F est définie pour les $\mathcal{X}$ -profils, elle peut alors être étendue de manière unique à l'ensemble des $\mathcal{T}$ -profils.

Cette extension se fait par le biais suivant. Soit $\Pi = (P_1, \dots, P_v)$ un $\mathcal{T}$ -profil. Les préordres sont des relations binaires de dimension 2 ; chaque P_i peut donc être recouvert par exactement deux ordres totaux L_{i1} et L_{i2} ($P_i = L_{i1} \cup L_{i2}$). Soit $\Pi' = (L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}, \dots, L_{m1}, L_{m2})$, $2B(\Pi) = B(\Pi')$ et comme F est homogène alors $F(\Pi) = F(\Pi')$.

Utilisons cette méthode pour notre étude sur les ordres prudents.

6.2.1. Nouvelle caractérisation des ordres prudents.

Supposons qu'une personnalité essaie d'influencer le résultat final en donnant un poids p entier naturel minimum à son opinion, de façon que $\mathfrak{R}_1(\Pi + pL)$ soit un ordre total. Si on travaille avec le profil Π , on veut que $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi + p/2L)$ soit un ordre total ; ou de manière équivalente, on veut que $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi + pL)$ soit un ordre total $2p$ étant un entier.

Remarques.

- 1- Lorsque l'on travaille sur le profil Π la règle majoritaire sera définie par $\mathfrak{R}_{1/2}$ puisque la pression p pourra être un demi entier.
- 2- Comme Π est un L profil, d'après le théorème 3.2 $B(\Pi)$ est une matrice à somme nulle (certains coefficients peuvent être pairs et d'autres impairs).

Les résultats obtenus sont similaires à ceux du paragraphe 6.1 ; nous ne donnerons les démonstrations que lorsqu'elles varient par rapport à celles du paragraphe 6.1.

Le seul changement notoire est la valeur de la pression à exercer : **la pression minimale à exercer sur le profil Π de départ est nulle si la méthode majoritaire s'applique, égale à $\beta + 1/2$ sinon.**

Si $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi + pL)$ contient le couple (x_i, x_j) on est dans l'une des deux situations :

- 1- si $x_i L x_j$ est dans L alors $b_{ij} + p \geq 1/2 > 0$;
- 2- si $x_j \not L x_i$ n'est pas dans L alors $b_{ij} - p \geq 1/2 > 0$.

Comme dans le cas d'un $\mathcal{X}$ -profil, lorsque la règle majoritaire s'applique et donne L , alors la pression est nulle.

THEOREME 6.8 : Si $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi)$ n'est pas un ordre total sur X et $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi + pL)$ est un ordre total alors $p \geq \beta + 1/2$.

Preuve identique à celle du théorème 6.4.

COROLLAIRE 6.2 : Si $\mathfrak{R}_0(\Pi)$ n'est pas un préordre total sur X et $\mathfrak{R}_0(\Pi + pL)$ est un préordre total sur X alors $p \geq \beta + 1/2$.

Preuve identique à celle du corollaire 6.1.

Comme dans le paragraphe 6.1, le fait de parler de majorité au sens large ne fait pas diminuer la pression à exercer sur le profil ; une fois encore nous ne parlerons que de majorité au sens strict.

THEOREME 6.9 : Si $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi)$ n'est pas un ordre total alors $p = \beta + 1/2$.

Preuve.

D'après le théorème 6.8, il suffit de trouver un ordre L tel que $\mathfrak{R}_1(\Pi + (\beta + 1/2)L)$ soit un ordre total. Soit L un ordre prudent, montrons que $\mathfrak{R}_1(\Pi + (\beta + 1/2)L) = L$.

Si $x_i L x_j$ alors $b_{ij}(\Pi) \geq \alpha$ donc $b_{ij}(\Pi) + \beta + 1/2 \geq \alpha + \beta + 1/2 = 1/2$ donc (x_i, x_j) est élément de $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi + (\beta + 1/2)L)$.

Si $x_i \not L x_j$ alors $b_{ij}(\Pi) < \beta + 1$ donc $b_{ij}(\Pi) - \beta - 1/2 < 1/2$ comme $b_{ij}(\Pi)$ et β sont des entiers $b_{ij} - \beta - 1/2 < 0$ donc (x_i, x_j) n'est pas dans $\mathfrak{R}_1(\Pi + (\beta + 1/2)L)$.

♦

THEOREME 6.10 : Quel que soit l'ordre L choisi $\mathfrak{R}_{\beta+1} \subseteq \mathfrak{R}_{1/2}(\Pi + pL) \subseteq \mathfrak{R}_\alpha$.

Preuve.

Si $p = 0$ alors $\mathfrak{R}_1(\Pi)$ est un ordre total donc d'après le lemme 6.1, $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi + pL) = \mathfrak{R}_1(\Pi) = \mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}_{\beta+1}$.

Supposons maintenant que $p > 0$, d'après le théorème 6.9, $p = \beta + 1/2$.

Si (x_i, x_j) est élément de $\mathfrak{R}_{\beta+1}$ alors $b_{ij}(\Pi) \geq \beta + 1$ donc $b_{ij}(\Pi) - \beta - 1 \geq 0$ donc $b_{ij}(\Pi) - \beta - 1/2 \geq 1/2 > 0$. Donc que $x_i L x_j$ ou bien $x_i \not L x_j$, (x_i, x_j) appartient à $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi + (\beta + 1/2)L)$.

Si (x_i, x_j) est élément de $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi + (\beta + 1/2)L)$ et de L alors $b_{ij}(\Pi + (\beta + 1/2)L) = b_{ij}(\Pi) + \beta + 1/2 > 0$ donc $b_{ij}(\Pi) > -\beta - 1/2 = \alpha - 1/2$ donc comme $b_{ij}(\Pi)$ et α sont des entiers $b_{ij}(\Pi) \geq \alpha$. Si (x_i, x_j) est élément de $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi + (\beta + 1/2)L)$ mais pas de L alors $b_{ij}(\Pi +$

$(\beta+1/2)L) = b_{ij}(\Pi) - \beta - 1/2 \geq 0$ donc $b_{ij}(\Pi) \geq \beta+1/2$ et comme $\beta \geq 0$, $b_{ij}(\Pi) > 0 \geq \alpha$.

Quel que soit le cas de figure nous avons bien $\mathfrak{R}_{\beta+1} \subseteq \mathfrak{R}_{1/2}(\Pi+pL) \subseteq \mathfrak{R}_{\beta+1}$.

♦

THEOREME 6.11 : L est un ordre prudent si et seulement si $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi+pL) = L$.

Preuve identique à celle du théorème 6.7.

6.2.2. Les préordres prudents.

Si P est un préordre il peut être recouvert par deux ordres L et L' ce que l'on peut traduire par $P = L \cup L'$.

DEFINITION 6.2 : Soit P un préordre, L et L' deux ordres qui le recouvrent, P est prudent si et seulement si L et L' sont prudents.

Cette définition appelle une justification : si P est un préordre prudent alors quel que soit le recouvrement de P par deux ordres L'' et L''' alors L'' et L''' sont prudents. En effet, L et L' sont prudents donc d'après le théorème 6.1, $L \subseteq \mathfrak{R}_\alpha$ $L' \subseteq \mathfrak{R}_\alpha$ comme $L \cup L' = L'' \cup L'''$ alors $L'' \subseteq \mathfrak{R}_\alpha$ $L''' \subseteq \mathfrak{R}_\alpha$; L'' et L''' sont donc prudents.

Le théorème 6.1 peut donc s'étendre aux préordres.

PROPRIETE 6.1 : P est prudent $\Leftrightarrow \mathfrak{R}_{\beta+1} \subseteq P \Leftrightarrow P \subseteq \mathfrak{R}_\alpha$

De même la définition des ordres prudents permet de déduire une autre interprétation des préordres prudents. A chaque couple (x_i, x_j) de P on peut associer son coefficient de B-F b_{ij} . Considérons l'ensemble des coefficients de B-F correspondant aux couples de P . Soit α_P la valeur du plus petit d'entre eux $\alpha(P) = \min_{x_i P x_j} b_{ij}(\Pi)$.

PROPRIETE 6.2 : Un préordre P sur X est prudent si et seulement si pour tout autre préordre P' sur X : $\alpha(P) \geq \alpha(P')$.

Preuve.

Si $P = L \cup L'$ est un préordre prudent alors $\alpha(L) = \alpha(L') = \alpha(P)$. Comme L et L' sont prudents, quel que soit $P' = L'' \cup L'''$, L est un ordre prudent donc $\alpha(L) \geq \alpha(L'')$ et $\alpha(L) \geq \alpha(L''')$ donc $\alpha(L) \geq \alpha(P') = \min(\alpha(L''), \alpha(L'''))$.

Réciproquement, soit $P = L \cup L'$ un préordre tel que pour tout préordre P' $\alpha(P) \geq \alpha(P')$, comme $\alpha(P) = \min(\alpha(L), \alpha(L'))$ alors pour tout préordre P' $\alpha(L) \geq \alpha(P')$ et $\alpha(L') \geq \alpha(P')$. Ces relations sont vraies en particulier si P' est un ordre total donc par définition, L et L' sont prudents ; P est donc prudent.

♦

Remarque.

Si P désigne un préordre prudent, et L un ordre prudent, alors $\alpha(P) = \alpha(L) = \alpha$; α peut donc également être défini comme maximum des minima des coefficients de B-F des préordres sur X .

Le théorème 6.11 donne alors une interprétation des préordres prudents :

PROPRIETE 6.3 : soit $P = L \cup L'$ un préordre, P est prudent si et seulement si $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi + (\beta+1/2)L) = L$ et $\mathfrak{R}_{1/2}(\Pi + (\beta+1/2)L') = L'$.

*
* *

Les ordres et les préordres prudents nous paraissent justifier une étude plus poussée, notamment la détermination des procédures d'agrégation dont le résultat $F(\Pi)$ est un ordre ou un préordre prudent, et ceci pour trois raisons (Arrow & Raynaud [1986]) :

- 1- tout ordre ou préordre "imprudent" comportera au moins une préférence plus discutable ($b_{ij} < \alpha$) qu'un ordre ou préordre prudent ; il sera donc moins défendable ;
- 2- un ordre ou un préordre prudent inclura toutes les préférences les plus crédibles ($b_{ij} \geq \beta+1$) ;

3- il suffit d'une pression minimum pour "imposer" $F(\Pi)$; en particulier lorsque la règle majoritaire s'applique cette pression est nulle.

Une partie du chapitre 7 sera consacrée aux $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédures dont le résultat $F(\Pi)$ est prudent ; une partie du chapitre 8 sera consacrée aux $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures dont le résultat $F(\Pi)$ est prudent.

Chapitre 7

$(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -MULTIPROCEDURES D'AGREGATION

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure d'agrégation : la multiprocédure prudente que nous comparerons à la multiprocédure médiane (pour la définition exacte de ces deux procédures se référer au paragraphe 1.3). Deux questions seront abordées successivement : la détermination du cardinal de $F(\Pi)$ et la "proximité", au sens de la différence symétrique, des ordres résultats.

7.1 DEUX $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -MULTIPROCEDURES D'AGREGATION CLASSIQUES.

La $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -multiprocédure médiane a été définie au paragraphe 1.3 par le problème d'optimisation :

$$F(\Pi) = \{R \in \mathcal{M} / \forall R' \in \mathcal{M}, \gamma(\Pi, R) \geq \gamma(\Pi, R')\} \text{ avec } \gamma(\Pi, R) = \sum_{i \neq j} \text{ et } x_i R x_j \ m_{ij}(\Pi).$$

Nous avons aussi mentionné les multiprocédures :

$$F'(\Pi) = \{R \in \mathcal{M} / \forall R' \in \mathcal{M}, \gamma'(\Pi, R) \geq \gamma'(\Pi, R')\} \text{ avec } \gamma'(\Pi, R) = \sum_{i \neq j} \text{ et } x_i R x_j \ b_{ij}(\Pi) ;$$

$$F''(\Pi) = \{R \in \mathcal{M} / \forall R' \in \mathcal{M}, \gamma''(\Pi, R) \geq \gamma''(\Pi, R')\} \text{ avec } \gamma''(\Pi, R) = \sum_{i \neq j} \text{ et } x_i R x_j \ e_{ij}(\Pi).$$

Comme par définition de la matrice majoritaire, $m_{ij}(\Pi) = 2e_{ij}(\Pi) - v$ nous avons $\gamma(\Pi, R) = 2\gamma'(\Pi, R) - n(n-1)v/2$ et donc $F(\Pi) = F''(\Pi)$.

Dans le cas qui nous intéresse ici $\mathcal{D} = \mathcal{M} = \mathcal{X}$, comme d'après le lemme 3.1 $M(\Pi)$ est

égal à $B(\Pi)$, la $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure médiane se définit de manière équivalente par l'un des trois problèmes d'optimisation présentés.

De plus, Young & Levenglick [1978] en ont fourni une caractérisation axiomatique qui peut en fait s'étendre pour tout ensemble de données contenant les ordres totaux.

CONDITION 7.1. Young-Condorcet :

Soit L un ordre total de la forme $\dots x_j x_i \dots$ et L' l'ordre total obtenu à partir de L en échangeant x_i et x_j . F est Young-Condorcet si, pour tout couple d'objets de X :

- 1- $b_{ij}(\Pi) > 0 \Rightarrow L \in F(\Pi)$;
- 2- $b_{ij}(\Pi) = 0 \Rightarrow [L \in F(\Pi) \Leftrightarrow L' \in F(\Pi)]$.

THEOREME 7.1 (Young & Levenglick) : La $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure médiane est l'unique $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure qui soit neutre (condition 5.1), consistante (condition 5.4) et Young-Condorcet.

COROLLAIRE 7.1 : Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de données qui contient les ordres totaux. La $(\mathcal{D}, \mathcal{X})$ -multiprocédure médiane est l'unique $(\mathcal{D}, \mathcal{X})$ -multiprocédure qui soit neutre, consistante et Young-Condorcet.

Preuve.

La $(\mathcal{D}, \mathcal{X})$ -multiprocédure médiane vérifie bien les conditions.

Réciproquement, si $\mathcal{D} = \mathcal{X}$ le théorème précédent fournit la réponse. Sinon, soit Π_θ un profil qui vérifie la propriété d'égalité ; tous les coefficients de $B(\Pi_\theta)$ sont donc nuls. Comme par définition $F(\Pi_\theta)$ est non vide et que F est Young-Condorcet alors $F(\Pi_\theta) = \mathcal{X}$. Soit Π un profil quelconque, par consistance $F(\Pi + \Pi_\theta) = F(\Pi) \cap F(\Pi_\theta) = F(\Pi)$; F est donc E-stable. De manière symétrique on montre aussi que $F(\Pi_\theta + \Pi) = F(\Pi)$, et donc la démonstration du théorème 2.2 s'applique, F est donc B-anonyme. D'après le théorème 3.3 il existe donc une unique extension de F sur $\mathcal{D}$ ce qui démontre le corollaire.

♦

Malheureusement, la détermination de $F(\Pi)$ est un problème NP-difficile (comme d'ailleurs la détermination du résultat de la $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -multiprocédure médiane pour la plupart des ensembles de données $\mathcal{D}$ et de modèles $\mathcal{M}$, pour plus de précisions se référer à Wakabayashi [1986]).

Or l'évaluation du nombre d'ordres médians associés à un profil donné reste un problème ouvert et n'est accessible que par énumération, il nécessite une résolution informatique très couteuse en place mémoire et en temps de calcul. Une évaluation par simulation du cardinal de $F(\Pi)$ ne serait envisageable que pour de très petites valeurs de v et de n , ce qui lui enlève tout intérêt pratique.

Par contre, de tels résultats ne sont pas inaccessibles pour la $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure prudente. Le cardinal de $F(\Pi)$ sera noté $P(n, v, \Pi)$ (nombre d'ordres prudents d'un profil Π de v votants sur n objets) ; $P(n, v)$ représentera le nombre moyen d'ordres prudents pour l'ensemble des profils Π de v votants sur n objets. Une évaluation de $P(n, v)$ permettrait de savoir si la $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure prudente peut être employée comme moyen discriminant pour dégager un consensus, ou si une telle procédure doit être suivie d'une seconde procédure pour réduire le cardinal de $F(\Pi)$ à un nombre "raisonnable".

7.2. DENOMBREMENT DES ORDRES PRUDENTS.

L'évaluation du nombre d'ordres prudents associés à un profil Π est soumis à la seule contrainte du temps de calcul ; elle nous imposera un nombre d'objets maximum de 7.

L'approche la plus directe, et la plus satisfaisante, est de générer les $(n!)^v$ $\mathcal{X}$ -profils pour décompter ensuite le nombre d'ordres prudents et en déduire la valeur exacte de $P(n, v)$. Cependant le nombre de profils augmente très rapidement avec n et v : pour $n = v = 3$ il y a déjà 216 profils ; pour $n = 4$ et $v = 5$ il y en a plus de 7 millions. La génération de mille profils pour $n = 4$ et $v = 5$ nécessite 6 minutes de calcul ;

l'énumération complète prendrait donc approximativement 700 heures de calcul ! Pour avoir néanmoins une estimation de $P(n,v)$ nous avons généré 1000 profils tirés selon une loi uniforme (chacun des $n!$ ordres totaux a la même probabilité d'apparition) ; le nombre d'ordres prudents obtenus ont été rassemblés dans les deux tableaux TABLE I et TABLE II. TABLE I correspond aux simulations effectuées pour un nombre impair de votants ; TABLE II un nombre pair. Les résultats sont séparés car ils correspondent à deux hypothèses distinctes.

7.2.1. La simulation.

Le programme est écrit en Light Speed Pascal et a tourné sur Machintosh Plus.

Pour v et n donnés le programme génère 1000 profils Π ou plus exactement les mille matrices $B(\Pi)$. Pour chaque profil un ordre prudent L est calculé par l'algorithme de Köhler (cf paragraphe 6.1.1). Si on note $\beta = -\alpha(L)$ d'après le théorème 6.1 un ordre est prudent si et seulement si $\mathfrak{R}_{\beta+1} \subseteq L$. Le programme calcule alors le nombre d'ordres prudents en les énumérants.

Le programme a été testé en examinant les résultats plus finement de manière à déterminer le nombre de profils où un vainqueur de Condorcet apparaît, et de même pour compter le nombre de fois où la règle majoritaire fournit un ordre total. Les résultats obtenus sont bien en accord avec les simulations déjà existantes comme celles de David Klahr [1966] et celles de Colin D. Campbell & Gordon Tullock [1965].

7.2.2. Les résultats.

		nombre de votants (v)							
nombre d'objets (n)	P (n, v)	3	5	7	9	11	13	15	17
	3	1,305	1,301	1,297	1,255	1,207	1,193	1,153	1,187
	4	3,635	3,232	2,704	2,478	2,508	2,038	1,943	1,961
	5	20,190	14,345	10,280	7,955	5,968	6,155	5,556	4,800
	6	107,141	57,855	37,053	26,026	20,057	19,470	19,190	15,699
	7	581,456	237,815	119,454	80,346	74,214	79,803	76,753	65,460

TABLE I

P (n, v)		4	6	8	10	12	14	16
nombre d'objets (n)	3	2,211	1,903	1,801	1,765	1,664	1,635	1,592
	4	3,855	3,353	3,080	2,727	2,630	2,478	1,418
	5	7,846	7,641	6,424	7,738	7,539	5,908	5,644
	6	19,502	30,651	30,442	25,821	26,035	18,977	16,620
	7	56,571	190,166	176,312	134,336	109,803	77,326	67,123

TABLE II

Des temps de calculs prohibitifs nous ont interdit de continuer la simulation pour un nombre d'objets supérieur à 7. En effet le temps de calcul augmente de manière exponentielle avec le nombre d'objets : pour $v = 3$ avec un nombre d'objets égal à 3, 4, 5, 6, 7 et finalement 8, les durées d'une simulation sont respectivement de 2, 5, 17, 78, 260 et 1380 minutes. Le dernier chiffre étant une estimation puisque après 16 heures de calcul le programme n'avait examiné que 337 profils!

Par contre, les temps de calcul restent du même ordre de grandeur lorsque v augmente à n fixé. Nous avons donc donné une valeur arbitraire au nombre de votants maximum.

Afin de tester la précision des résultats nous avons fixé le nombre d'objets et de votants et effectué dix fois de suite la même simulation. Le tableau ci-dessous indique successivement, à n et v fixés, la durée de l'évaluation de $P(n,v)$ sur 1000 profils, les résultats de 10 simulations successives, enfin la moyenne et l'écart type de ces observations.

n	3	6	6
m	17	4	15
durée en mn	6	24	35
=====	===,===	==,===	==,===
simulation 0	1,166	14,816	20,651
simulation 1	1,153	19,541	16,885
simulation 2	1,138	18,781	19,191
simulation 3	1,215	18,363	20,175
simulation 4	1,172	18,788	20,151
simulation 5	1,149	17,636	18,293
simulation 6	1,139	19,137	18,886

simulation 7	1,143	16,700	17,263
simulation 8	1,197	14,552	16,214
simulation 9	1,152	17,357	16,849
=====	==,===	==,===	==,===
moyenne	1,162	17,567	18,456
ecart type	0,024	1,656	1,513

Notons $p(n,v) = P(n,v)/n!$; cette valeur peut être interprétée comme la probabilité d'un ordre d'être prudent. Les tableaux TABLE I et II peuvent se réécrire :

		nombre de votants (v)							
p(n,v)		3	5	7	9	11	13	15	17
nombre d'objets(n)	3	0,2175	0,2168	0,2162	0,2092	0,2012	0,1988	0,1922	0,1978
	4	0,1515	0,1347	0,1127	0,1032	0,1045	0,0849	0,0810	0,0817
	5	0,1682	0,1195	0,0857	0,0663	0,0497	0,0513	0,0463	0,0400
	6	0,1488	0,0803	0,0515	0,0361	0,0279	0,0270	0,0266	0,0218
	7	0,1154	0,0472	0,0237	0,0159	0,0147	0,0158	0,0152	0,0130

TABLE I'

p(n,v)		4	6	8	10	12	14	16
nombre d'objets(n)	3	0,3685	0,3172	0,3002	0,2942	0,2773	0,2725	0,2653
	4	0,1606	0,1397	0,1283	0,1136	0,1096	0,1032	0,0590
	5	0,0654	0,0637	0,0535	0,0645	0,0628	0,0492	0,0470
	6	0,0270	0,0426	0,0423	0,0359	0,0362	0,0264	0,0231
	7	0,0112	0,0377	0,0350	0,0267	0,0218	0,0153	0,0133

TABLE II'

Les résultats de cette simulation sembleraient indiquer que d'une part $p(n,v)$ diminue lorsque n augmente ; et que d'autre part, lorsque v augmente, $p(n,v)$ passe par un maximum pour décroître ensuite. Ces indications n'ont malheureusement pas été confirmées, ni infirmées, par des résultats théoriques.

7.3 "PROXIMITE" DES ORDRES RESULTATS $F(\Pi)$.

Si L est un ordre total sur X rappelons que :

- 1- $\alpha(L)$ est le plus petit coefficient de B-F associé à la relation binaire L ,

$$\alpha(L) = \min_{x_i L x_j} b_{ij}(\Pi) ;$$

- 2- L est un ordre prudent si et seulement si $\forall L' \in \mathcal{X}, \alpha(L) \geq \alpha(L')$

Les $n!$ ordres totaux sur X peuvent être regroupés en classes d'équivalence indicées par leur seuil $\alpha(L)$. Au seuil le plus élevé correspondent les ordres prudents.

Rappelons que le permutoèdre est le graphe dont les sommets sont les $n!$ ordres totaux. L et L' sont reliés par une arête si et seulement si ils ne diffèrent que d'une permutation d'objets de rangs consécutifs. La remarque 2 du paragraphe 4.2.1 fournit le lien entre le permutoèdre et la distance de la différence symétrique.

Toute plus courte chaîne entre L et L' sera dite tendue.

THEOREME 7.2 : Si L et L' sont deux ordres quelconques du permutoèdre alors il existe une chaîne tendue les joignant telle que si L_i est un sommet de cette chaîne alors $\alpha(L_i) \geq \min(\alpha(L), \alpha(L'))$.

Preuve par induction sur le nombre d'objets de X .

Si $n = 2$, il n'y a que deux ordres, la propriété est bien évidemment vérifiée.

Supposons maintenant la propriété vraie au rang n , et démontrons la au rang $n+1$.

Sans perte de généralité, notons $L = x_1 x_2 \dots x_{n+1}$. Soient o et o' les restrictions de L et L' aux objets $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, il existe une chaîne tendue $c = (o_1, o_2, \dots, o_k)$ reliant les ordres o et o' (on pose $o_1 = o$ et $o_k = o'$), telle que si o_i est un élément de cette chaîne alors $\alpha(o_i) \geq \min(\alpha(o), \alpha(o'))$. Soit k' le rang de x_1 dans l'ordre L' . Soit $C = (L_1, \dots, L_k, L'_2, \dots, L'_{k'})$ la chaîne dont les éléments L_i sont obtenus en plaçant en tête de o_i l'objet x_1 , et dont les éléments L'_j sont obtenus en incorporant l'objet x_1 en i ème position dans l'ordre o_k . C est une chaîne joignant $L = L_1$ et $L' = L'_{k'}$. Vérifions maintenant l'hypothèse de récurrence.

- 1- c est tendue, par construction $(L_1 \dots L_k)$ est donc tendue ; on remarque que x_1 reste toujours au premier rang. $(L'_2 \dots L'_{k'})$ est tendue puisque seule la position relative de

x_1 varie et que le rang de x_1 décroît de 1 exactement quand on passe d'un sommet de la chaîne à un sommet consécutif. Par conséquent C est tendue.

2- Soit o_i un élément de c , $\alpha(o_i) \geq \min(\alpha(o), \alpha(o'))$, comme $\alpha(o) \geq \alpha(L)$ et $\alpha(o') \geq \alpha(L')$ alors $\alpha(o_i) \geq \min(\alpha(L), \alpha(L'))$. De plus, comme en aucun cas les coefficients de B-F associés à la préférence de x_1 sur n'importe quel autre objet ne peuvent être inférieurs à $\alpha(L)$ nous avons bien $\alpha(L_i) \geq \min(\alpha(L), \alpha(L'))$. De même, comme tous les coefficients de B-F associés aux préférences de l'un quelconque des $k-1$ premiers objets de L' sur x_1 sont supérieurs à $\alpha(L')$, nous avons bien $\alpha(L'_i) \geq \min(\alpha(L), \alpha(L'))$.

♦

COROLLAIRE 7.2 : Si L et L' sont deux ordres prudents alors il existe une chaîne tendue C les joignant composée uniquement d'ordres prudents.

Preuve:

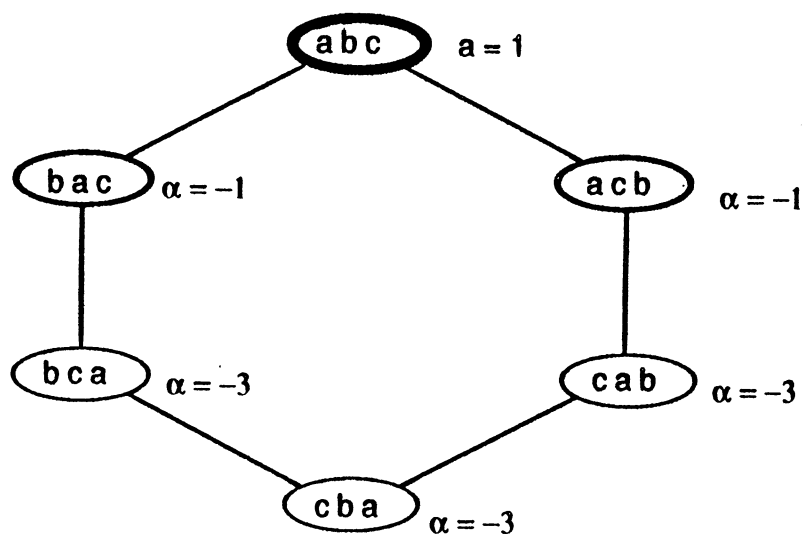
Elle se déduit directement du théorème et de la définition d'un ordre prudent.

♦

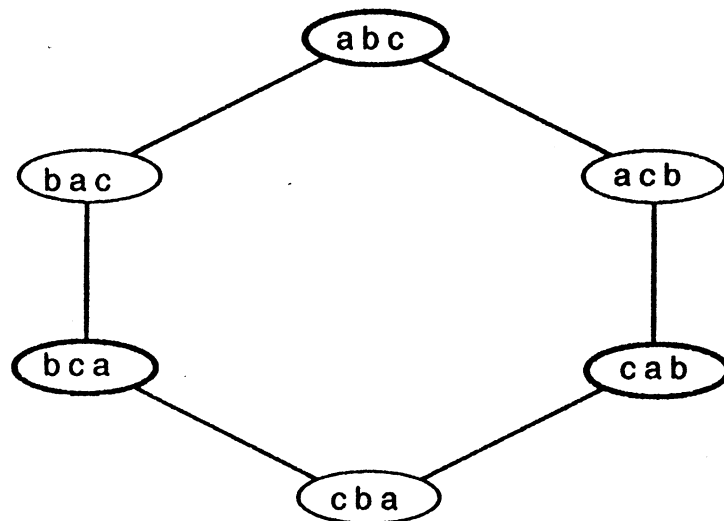
On pourrait penser que le corollaire 7.2 reste vrai si l'on considère l'ensemble des ordres qui ont un même seuil α . Il n'en est rien comme le prouvent les ordres bac et acb du contre exemple suivant. Soit $\Pi = \{abc, acb, bac\}$

$B(\Pi) =$

.	1	3
-1	.	1
-3	-1	.



Cette propriété de proximité des ordres solutions n'est pas vérifiée par les ordres médians. Pour le profil $\Pi = \{abc, bca, cab\}$ les trois ordres du profil sont les trois ordres médians; ils ne sont pas voisins entre eux.



COROLLAIRE 7.3 : Si L est un ordre quelconque et L' un ordre prudent, alors il existe une chaîne $C = (L_1 \dots L_k)$ les joignant telle que :

- 1- $L_1 = L$ et $L_k = L'$
- 2- $\forall i \in [1..k-1], \alpha(L_i) \leq \alpha(L_{i+1})$.

Preuve.

D'après le théorème 7.1. il existe une chaîne C_1 joignant L et L' telle que si L_i est un élément de cette chaîne alors $\alpha(L_i) \geq \min(\alpha(L), \alpha(L')) = \alpha(L)$. Soit k_1 le dernier indice pour lequel le point 2 du corollaire est vérifié. Si $L_{k_1} = L'$ le corollaire est démontré ; sinon $\alpha(L_{k_1}) < \alpha(L')$ on peut donc réappliquer le théorème et construire une chaîne C_2 de L_{k_1} à L' ... Comme $\alpha(L_{k_1+1}) > \alpha(L_{k_1})$, le processus s'arrête ; la chaîne C obtenue par concaténation des C_i vérifie bien le corollaire 7.3.

♦

Il existe donc une manière d'effectuer des permutations entre objets de rang consécutifs telle que chaque nouvelle permutation ne peut qu'augmenter le seuil de l'ordre considéré.

*

* *

La simulation décrite au paragraphe 7.1 semblerait indiquer que, statistiquement, le cardinal de $F(\Pi)$ pour la $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure prudente reste élevé et donc que l'ambiguïté quant au choix final demeure (malgré la propriété intéressante de proximité des ordres résultats).

Le chapitre suivant est consacré à l'étude d'une classe de procédures qui résolvent ce problème : les $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation.

Chapitre 8

$(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -PROCEDURES D'AGREGATION

Une préoccupation concrète et très courante des décideurs multicritères est d'effectuer le classement d'un ensemble d'objets en un **unique préordre** à partir de préférences individuelles exprimées elles aussi par des préordres. En effet, au lieu de présenter un ensemble de possibles qui a de quoi laisser perplexe, un choix clairement défini est à suivre.

Tout processus utilisé à cette fin, dans la terminologie d'Arrow [1951] toute fonction de bien-être collectif, peut être décrit par une $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation.

Cette notion étant née de la pratique, de nombreuses $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation ont été créées, et il nous a paru intéressant de confronter cette approche pragmatique avec la démarche axiomatique que nous avons menée jusqu'à présent. C'est ce que nous avons exposé dans le premier paragraphe.

De cette rencontre sont apparues des insuffisances de part et d'autre que nous avons essayer de combler. Le deuxième paragraphe comporte des développements axiomatiques qui nous ont parus nécessaires à une meilleure compréhension de certaines procédures. Ces axiomes nous ont eux même suggérés de nouvelles interprétations et de nouveaux algorithmes qui sont exposés dans les troisième et quatrième paragraphes.

Comme on peut le voir, les préoccupations qui ont motivé ce chapitre sont en grande partie pratiques, que le lecteur ne s'étonne pas de trouver des axiomes en relation avec ces préoccupations, qu'il ne s'étonne pas non plus des descriptions de $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation en termes d'algorithmes.

Tous les résultats en relation avec l'axiome de prudence sont présents dans Debord & Raynaud [1986], la présentation y est différente et peut contribuer à une meilleure compréhension.

*
* *
*

Mais avant de nous lancer dans cet exposé, nous allons d'abord préciser quelques notations et définitions.

Pour des raisons de cohérence (déjà amplement développées aux chapitres 1 et 3) nous nous limiterons à l'étude des $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation homogènes.

A toute $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation F peut être associée de manière canonique la $(\mathcal{T}, \mathcal{S}_1)$ -procédure d'agrégation (la fonction de choix) f définie par $f(\Pi) = \{ \{a\} \rightarrow \in \mathcal{S}_1 / a \text{ est rangé en première position dans } F(\Pi) \}$. De manière similaire, la $(\mathcal{T}, \mathcal{B}_1)$ -procédure d'agrégation (la fonction de rejet) f' peut être définie de manière canonique par $f'(\Pi) = \{ \leftarrow \{a\} \in \mathcal{B}_1 / a \text{ est rangé en dernière position dans } F(\Pi) \}$.

Les termes fonction de choix et fonction de rejet sont beaucoup plus imagés que ceux de $(\mathcal{T}, \mathcal{S}_1)$ -procédure d'agrégation et de $(\mathcal{T}, \mathcal{B}_1)$ -procédure d'agrégation, c'est pour cela que nous les utiliserons.

Les $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation seront notées par des majuscules, la minuscule correspondante désignera la fonction de choix associée, un prime supplémentaire indiquera la fonction de rejet associée.

8.1. QUELQUES CONDITIONS AXIOMATIQUES.

Nous avons repris ici les conditions axiomatiques les plus souvent mentionnées dans les études des procédures d'agrégation. Cette énumération n'est nullement exhaustive ; nous n'avons en fait mentionné que les axiomes qui nous sont apparus en rapport avec l'étude déjà menée sur les $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédures d'agrégation.

Rappelons la condition 5.1 de neutralité.

CONDITION 5.1. Neutralité :

F est neutre si et seulement si pour toute permutation p sur X , $F(p(\Pi)) = p(F(\Pi))$.

CONDITION 8.1. Egalité :

Soit Π un profil vérifiant la propriété d'égalité, F est égalitaire si et seulement si $F(\Pi) = x^2$.

CONDITION 8.2. Loyauté :

Soit Π le profil constitué du seul préordre P , F est loyale si et seulement si $F(\Pi) = P$.

CONDITION 8.3. Monotonie :

Si Π et Π' ne diffèrent que parce qu'un votant qui range a juste après b dans Π , inverse leur ordre dans Π' , alors pour tout c , $aF(\Pi)c$ implique $aF(\Pi')c$.

CONDITION 8.4. Croissance :

Si Π et Π' ne diffèrent que parce qu'un votant qui range a juste après b dans Π , inverse leur ordre dans Π' , alors pour tout c , $aF(\Pi)c$ implique $aF(\Pi')c$; de plus cette dernière préférence est stricte.

De même que pour les $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédures d'agrégation, le respect des élites majoritaires, puisque celles-ci sont emboîtées (cf paragraphe 4.1.1), peut constituer une condition souhaitable.

CONDITION 8.5. Smith-Condorcet :

Soit $Y \rightarrow$ une élite majoritaire, F est Smith-Condorcet si et seulement si tout objet de Y est classé dans $F(\Pi)$ strictement avant tout objet de $X-Y$.

D'autres conditions axiomatiques expriment que les similarités relevées dans les résultats de l'application de la $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation à deux profils donnés doivent se retrouver dans l'application de la procédure à la somme des deux profils. De telles conditions ne sont pas en contradiction avec le résultat préordinal de la $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation, en effet, les deux relations $F(\Pi)$ et $F(\Pi')$ étant transitives, $F(\Pi) \cap F(\Pi')$ l'est aussi. De telles conditions ont été étudiées par des auteurs comme Smith [1973], Fine & Fine [1973], Young [1974] [1978], Levenglick [1975] [1977], Dutta & Pattanaik [1978] pour n'insister que sur les précurseurs ; et récemment par Gehrlein & Fishburn [1982], mais aussi par Gehrlein, Gopinath, Lagarias & Fishburn [1982].

CONDITION 8.6. Séparabilité :

Si Π et Π' sont deux profils, alors $F(\Pi) \cap F(\Pi') \subseteq F(\Pi + \Pi')$; et de plus, si l'une des préférences $x F(\Pi) y$ ou $x F(\Pi') y$ est stricte alors x est préféré strictement à y dans $F(\Pi + \Pi')$.

CONDITION 8.7. Séparabilité faible :

Si Π et Π' sont deux profils, alors $F(\Pi) \cap F(\Pi') \subseteq F(\Pi + \Pi')$.

Mentionnons aussi une variante de la condition 5.4 adaptée aux $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation.

CONDITION 8.8. Consistance :

Solent Π et Π' deux profils tels que $F(\Pi) \cap F(\Pi')$ est un préordre alors $F(\Pi + \Pi') = F(\Pi) \cap F(\Pi')$.

Puisque $F(\Pi) \cap F(\Pi')$ est transitive, la condition de consistance peut aussi s'énoncer : soient Π et Π' deux profils tels que $F(\Pi) \cap F(\Pi')$ est une relation totale alors $F(\Pi + \Pi') = F(\Pi) \cap F(\Pi')$.

Nous avons les implications :

$$\text{séparabilité} \Rightarrow \text{séparabilité faible} \Rightarrow \text{consistance}.$$

Nous allons voir l'enchaînement de ces différentes propriétés.

Définissons une extension de la $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -multiprocédure de Borda explicitée dans l'exemple 4 du paragraphe 1.3.

Une fonction score généralisée (en tant que $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation) peut être définie comme suit : un objet se voit assigné un vecteur score à composantes réelles $s_j = (s_{j1}, \dots, s_{jn})$ chaque fois qu'un votant le place en j ème position ; pour chaque objet k les vecteurs scores ainsi assignés sont totalisés en un vecteur S_k ; les S_k sont rangés lexicographiquement ; les objets sont classés dans le même ordre. Remarquons que la fonction de choix associée à F est une fonction score telle que l'a définie Young [1974], ce qui justifie à posteriori le nom de fonction score généralisée, écart de langage par rapport au nom donné originellement par Smith.

THEOREME 8.1 (J. H. Smith[1973]) : Les seules $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation qui soient neutres, anonymes et séparables sont les fonctions score généralisées.

La condition de séparabilité apparaît donc comme une condition très forte, puisqu'elle entraîne la caractérisation de certaines $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation.

Une propriété remarquable des fonctions scores généralisée est la suivante :

THEOREME 8.2 : Soit F une fonction score généralisée, F est croissante si et seulement si F est loyale.

Preuve.

Soit F une fonction score généralisée. Soient a, b, c trois objets quelconques.

Soit L un ordre où b occupe la i ème position et a la $i+1$ ème; soit L' l'ordre déduit de L en permutant les objets a et c ; soit L'' l'ordre déduit de L en transposant a et b . Les profils $\Pi = \{L, L'\}$ et $\Pi' = \{L', L''\}$ se trouvent dans le cadre d'application de la condition de croissance, comme $S_a(\Pi) = S_c(\Pi)$, a et c sont rangés au même rang dans $F(\Pi)$, et donc par croissance a est rangé strictement avant c dans $F(\Pi')$. Nous avons donc $S_a(\Pi') = S_a(\Pi) - s_{i+1} + s_i > S_c(\Pi') = S_c(\Pi)$ et donc $s_i > s_{i+1}$. Si F est croissante alors $s_1 > \dots > s_n$.

Réciproquement, si Π et Π' ne diffèrent que parce qu'un votant qui range a juste après b dans Π , inverse leur ordre dans Π' , alors pour tout c distinct de a , $S_c(\Pi') = S_c(\Pi)$ et $S_a(\Pi') = S_a(\Pi) - s_{i+1} + s_i$. Comme $s_i > s_{i+1}$, $aF(\Pi)c$ (c'est à dire $S_a(\Pi) \geq S_c(\Pi)$) implique $aF(\Pi')c$; de plus cette dernière préférence est stricte.

En résumé, F est croissante si et seulement si $s_1 > \dots > s_n$.

Il est aisé de vérifier que F est loyale si et seulement si $s_1 > \dots > s_n$.

♦

Une autre conséquence est que le résultat d'une fonction score généralisée ne dépend que du nombre de fois où un objet est rangé à un rang donné. Dans le cas général, une fonction score généralisée ne dépend pas seulement des coefficients de B-F. Comme nous l'avons vu, une méthode d'agrégation dépend uniquement des coefficients de B-F si et seulement si elle est anonyme et E-stable. La condition de stabilité signifie que si Π est un profil quelconque alors pour tout profil Π_θ vérifiant la propriété d'égalité $F(\Pi) = F(\Pi + \Pi_\theta)$; ce qui suppose en particulier que $F(\Pi_\theta) = F(\emptyset)$. Dans le cas des $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation, il paraît nécessaire de supposer que $F(\emptyset) = X^2$, et donc, si l'on veut que F ne dépende que de $B(\Pi)$, de supposer que F est égalitaire.

Remarque.

Une fonction score généralisée peut aussi être définie comme $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation.

1- En effet, si Π représente un $\mathcal{X}$ -profil qui soit un carré latin; chaque objet occupe

une et une seule fois un rang k fixé et donc $F(\Pi) = X^2$.

2- Si Π est un profil constitué du seul préordre $P = Y_1 Y_2 \dots Y_k$ ou les Y_i représentent les classes d'ex æquo, associons le profil Π' constitué de $\text{ppcm}(|Y_1|, \dots, |Y_k|)$ ordres totaux où la restriction de Π' à Y_i est composée de $\text{ppcm}(|Y_1|, \dots, |Y_k|) / |Y_i|$ carrés latins sur les objets de Y_i . Il est naturel de poser $F(\Pi) = F(\Pi')$.

3- A tout $\mathcal{T}$ -profil Π associons le $\mathcal{L}$ -profil Π' où chaque préordre de Π est remplacé par l'ensemble d'ordres obtenus par la construction précédente. Posons $F(\Pi) = F(\Pi')$. Il serait fastidieux de calculer $F(\Pi)$ grace à $F(\Pi')$ mais le calcul de $F(\Pi)$ peut s'effectuer directement par la construction : chaque objet se voit assigner un vecteur score à composantes réelles $s' = \sum_{j=1, |Y|} s_{i+j-1} / |Y|$ chaque fois qu'un votant le place en i ème position parmi un ensemble d'ex æquo Y ; pour chaque objet k les vecteurs scores ainsi assignés sont totalisés en un vecteur S_k ; les S_k sont rangés lexicographiquement ; les objets sont classés dans le même ordre.

Si la $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure de Borda est la procédure qui à tout $\mathcal{T}$ -profil associe le préordre qui range les objets de X par $\beta_i(\Pi) = \sum_j b_{ij}(\Pi)$ décroissant alors :

THEOREME 8.3 : La seule $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation qui soit neutre, égalitaire, loyale et consistante est la $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure de Borda.

Preuve:

Ce théorème découle directement de l'étude sur les $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédures d'agrégation qui vérifient les même conditions (adaptées aux $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédures). Nous rappellerons le cheminement suivi sans donner les démonstrations. En premier lieu, si F est égalitaire et consistante alors $F(\Pi)$ ne dépend que des coefficients de B-F. En second lieu, si F est neutre, égalitaire, et consistante alors elle possède la propriété suivante:

$$\forall x_i \in X \beta_i(\Pi) = 0 \Rightarrow F(\Pi) = X^2.$$

(adaptation d'une propriété démontrée par Young [1974]). Posons $\delta_i = \beta_i(\Pi) - \beta_{i+1}(\Pi)$.

En troisième lieu, si l'on suppose que les objets de X sont indicés par β_i décroissant et que Π_i est le profil constitué du seul préordre $P_i = (x_1 \dots x_i)(x_{i+1} \dots x_n)$ alors

$F(\Pi) = \bigcap_{\delta_i \neq 0} F(\Pi_i)$ et donc par loyauté $F(\Pi) = \bigcap_{\delta_i \neq 0} P_i$ ce qui démontre le théorème.

♦

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, les conditions de séparabilité, séparabilité faible ou consistance, n'introduisent pas de différences (impossibilité ou augmentation du nombre de procédures solutions) dans l'axiomatique des procédures neutres, loyales, et égalitaires.

Remarquons aussi que la condition 2.2 d'anonymat disparaît ici puisque si F est égalitaire et consistante elle ne dépend que des coefficients de $B-F$, elle est donc anonyme.

COROLLAIRE 8.1 : la seule $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation qui soit neutre, séparable, loyale et égalitaire est la $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure de Borda.

Preuve.

Etant donné que si F est séparable alors elle est consistante, la seule $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation qui puisse vérifier ces propriétés ne peut être, d'après le théorème précédent, que la $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure de Borda. Il suffit donc de vérifier que celle-ci est bien séparable. La vérification est immédiate, en effet, si $x_i F(\Pi) x_j$ et $x_i F(\Pi') x_j$ alors $\beta_i(\Pi) \geq \beta_j(\Pi)$ et $\beta_i(\Pi') \geq \beta_j(\Pi')$ donc $\beta_i(\Pi + \Pi') = \beta_i(\Pi) + \beta_i(\Pi') \geq \beta_j(\Pi) + \beta_j(\Pi') = \beta_j(\Pi + \Pi')$. Le même raisonnement s'applique lorsque l'une des inégalités est stricte, la $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure de Borda est donc séparable.

♦

La propriété d'égalité réduit donc de façon draconienne le nombre de $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation neutres, anonymes, croissantes et séparables.

Néanmoins, si la condition d'égalité est jugée souhaitable, c'est la condition de consistance qu'il faudra relaxer afin de pouvoir modéliser plusieurs comportements possibles de notre décideur multicritère.

Par analogie avec l'étude des $(\mathcal{D}, \mathcal{S}_k)$ -multiprocédures d'agrégation, nous allons maintenant examiner la condition de prudence :

CONDITION 8.9. Prudence :

Le préordre résultat $F(\Pi)$ est prudent.

De part les résultats de la simulation exposée au chapitre précédent, nous savons déjà que l'introduction de cette condition ne permet pas de définir une $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation unique, là encore, de nouvelles conditions axiomatiques sont requises, mais cette fois afin de préciser le comportement du décideur multicritère.

Nous avons donc recherché parmi les comportements les plus fréquents des décideurs multicritères ceux qui permettraient à la fois d'élargir l'horizon des procédures consistantes, et de restreindre celui des procédures prudentes.

8.2. METHODES SEQUENTIELLES.

L'analyse du comportement des décideurs multicritères met en évidence trois attitudes paradigmatiques (cf Debord & Raynaud [1986]) :

- 1- la première consiste à ranger d'abord les objets qui sont indiscutablement les meilleurs, s'il en existe, et à itérer le processus sur les objets restants.
- 2- la seconde, par opposition, consiste à éliminer d'abord les plus mauvais objets, puis s'il reste encore des objets, à éliminer les plus mauvais parmi ceux-ci...
- 3- la troisième enfin, consiste à ranger simultanément les meilleurs objets et les pires et à recommencer avec les objets non encore rangés.

Ces trois comportements ont en commun deux propriétés.

Premièrement, les objets sont classés au cours d'un processus **séquentiel** qui range

à l'étape courante les objets qui apparaissent comme les plus nettement classables.

Deuxièmement, à un pas donné, l'identification des objets extrêmes du classement se fait **Indépendamment** des objets déjà classés. Par conséquent, les premiers et (ou) les derniers objets sont déterminés à partir de toute l'information disponible à l'origine. Puis, une fois ces objets éliminés, les objets rangés à leur suite sont eux aussi identifiés à travers un processus qui prend en compte toute l'information résiduelle, etc.

Il est clair cependant, qu'une telle diminution de l'information utilisée au cours du processus, ne peut satisfaire qu'un décideur qui focalise son attention sur l'identification des meilleurs objets ; ou au contraire privilégie l'élimination des pires ; à moins qu'il ne désire remplir ces deux objectifs simultanément.

Nous avons formalisé ces trois attitudes par trois conditions d'"indépendance séquentielle".

Soit Y un sous-ensemble de X , Π_Y et $F(\Pi)_Y$ représenteront respectivement les restrictions de Π et $F(\Pi)$ aux seuls objets de Y .

CONDITION 8.10. Indépendance A-séquentielle :

Soit Y l'ensemble des objets qui ne sont pas rangés au premier rang par F . Une $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation est dite **A-séquentielle** si et seulement si : $F(\Pi)_Y = F(\Pi_Y)$.

CONDITION 8.11. Indépendance Z-séquentielle :

Soit Y l'ensemble des objets qui ne sont pas rangés au dernier rang par F . Une $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation est dite **Z-séquentielle** si et seulement si : $F(\Pi)_Y = F(\Pi_Y)$.

CONDITION 8.12. Indépendance AZ-séquentielle :

Soit Y l'ensemble des objets qui ne sont rangés par F ni au premier, ni au dernier rang. Une $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation est dite

AZ-séquentielle si et seulement si : $F(\Pi)/Y = F(\Pi/Y)$.

Formellement, une $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation qui vérifie l'une des trois conditions d'indépendance séquentielle est déterminée par l'application successive de sa fonction de choix associée f (si F est A-séquentielle) ; de sa fonction de rejet associée f' si F est Z-séquentielle ; ou des deux simultanément si F est AZ-séquentielle. Autrement dit la relation binaire $F(\Pi)$ est obtenue en prenant l'union des différentes élites (qui est elle même une élite cf § 4.1) ou rebuts fournis par la fonction de choix ou de rejet.

Soit encore :

- 1- $A \rightarrow = \bigcup_{\{a\} \rightarrow \in f(\Pi)} \{a\} \rightarrow$
 $F(\Pi) = A \rightarrow \cup F(\Pi/X-A)$ si F est A-séquentielle ;
- 2- $\leftarrow Z = \bigcup_{\leftarrow \{z\} \in f'(\Pi)} \leftarrow \{z\}$
 $F(\Pi) = F(\Pi/X-Z) \cup \leftarrow Z$ si F est Z-séquentielle ;
- 3- $A \rightarrow = \bigcup_{\{a\} \rightarrow \in f(\Pi)} \{a\} \rightarrow$
 $\leftarrow Z = \bigcup_{\leftarrow \{z\} \in f'(\Pi)} \leftarrow \{z\}$
 $F(\Pi) = A \rightarrow \cup F(\Pi/X-A-Z) \cup \leftarrow Z$ si F est AZ-séquentielle.

Il est intéressant de remarquer que dans le cas des méthodes AZ-séquentielles, les fonctions de choix et de rejet associées sont **cohérentes entre elles** ; si un objet est à la fois choisi et rejeté alors il en est de même pour tous les autres objets ($A \cap Z \neq \emptyset \Rightarrow A = Z$).

DEFINITION 8.1 : Une fonction de choix f et une fonction de rejet f' sont dites **cohérentes entre elles** si et seulement si pour tout profil Π l'implication suivante est vérifiée : $\exists a \in X / \{a\} \rightarrow \in f(\Pi) \text{ et } \leftarrow \{a\} \in f'(\Pi) \Rightarrow \forall a \in X / \{a\} \rightarrow \in f(\Pi) \text{ et } \leftarrow \{a\} \in f'(\Pi)$.

Réciproquement, une fonction de choix et une fonction de rejet ne permettent de définir une méthode AZ-séquentielle que si elles sont cohérentes entre elles.

Prenons l'exemple des fonctions de choix et de rejet de Borda. Algorithmiquement, il

est possible définir $f(\Pi)$ comme la réunion des 1-élites $\{x_i \rightarrow\}$ pour lesquelles $\beta_i(\Pi)$ est maximum ; et $f'(\Pi)$ comme la réunion des 1-rebuts $\leftarrow\{x_i\}$ pour lesquels $\beta_i(\Pi)$ est minimum. Il en résulte donc que les fonctions de choix et de rejet de Borda sont cohérentes entre elles. Nous pouvons donc parler sans ambiguïté de la méthode de Borda A-séquentielle ou Z-séquentielle, ou encore AZ-séquentielle. Pour l'instant, de telles méthodes apparaissent comme des procédés algorithmiques, nous préciserons leurs propriétés axiomatiques dans le paragraphe suivant.

Notons que si F est une $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation quelconque, nombres de propriétés sont transmises de F à f et f' , et que dans le cas des méthodes séquentielles des propriétés des fonctions de choix se généralisent à la $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation.

LEMME 8.1 : F est égalitaire si et seulement si f est égalitaire.

Preuve.

évidente d'après les définitions.

♦

LEMME 8.2 : Les conditions de neutralité, loyauté, Smith-Condorcet se transmettent de F à f et f' . Lorsque F est A-séquentielle elles se transmettent de f à F (resp. de f' à F lorsque F est Z-séquentielle, resp. de f et f' à F si F est AZ-séquentielle).

Preuve.

Toutes ces preuves sont analogues ; les conditions nécessaires découlant des définitions, les conditions suffisantes se démontrant par induction sur le nombre de classe d'ex æquo du préordre résultat.

♦

Nous sommes maintenant en mesure de réaliser les deux objectifs que nous étions fixés à savoir concilier les desiderata des décideurs multicritères avec les conditions de

consistance et de prudence.

8.2.1. Condition de consistance.

La première difficulté résidait dans le fait que la condition de consistance restreignait notre décideur multicritère à un seul comportement possible. Pour tenir compte de l'indépendance séquentielle il est donc nécessaire de relaxer la condition de consistance. Nous en proposons trois versions :

CONDITION 8.13. A-consistance :

Solent Π_1 et Π_2 deux profils tels que $F(\Pi_1)$ et $F(\Pi_2)$ coïncident sur les k premiers objets, F est A-consistante si et seulement si $F(\Pi_1)$ et $F(\Pi_2)$ coïncident aussi avec les k premiers objets de $F(\Pi_1 + \Pi_2)$.

CONDITION 8.14. Z-consistance :

Solent Π_1 et Π_2 deux profils tels que $F(\Pi_1)$ et $F(\Pi_2)$ coïncident sur les k derniers objets, F est Z-consistante si et seulement si $F(\Pi_1)$ et $F(\Pi_2)$ coïncident aussi avec les k derniers objets de $F(\Pi_1 + \Pi_2)$.

CONDITION 8.15. AZ-consistance :

Solent Π_1 et Π_2 deux profils tels que $F(\Pi_1)$ et $F(\Pi_2)$ coïncident sur les j premiers et les k derniers objets, F est AZ-consistante si et seulement si $F(\Pi_1)$ et $F(\Pi_2)$ coïncident aussi avec les j premiers et les k derniers objets de $F(\Pi_1 + \Pi_2)$.

A titre d'exemple, dans le cas où F est A-consistante, si $F(\Pi_1) = abc$ et $F(\Pi_2) = (ab)c$ les deux résultats ne sont en accord que sur le premier objet et donc nous pouvons déduire que a est rangé en première position dans $F(\Pi_1 + \Pi_2)$. De même, si $F(\Pi_1) = a(bc)de$ et $F(\Pi_2) = a(bcde)$ alors a est rangé en première position dans $F(\Pi_1 + \Pi_2)$, b et c sont rangés deuxième ex æquo.

THEOREME 8.4 : Il existe une unique $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation qui soit neutre, égalitaire, loyale, A-séquentielle et A-consistante (resp. Z-séquentielle et Z-consistante, resp. AZ-séquentielle et AZ-consistante) : la méthode de Borda A-séquentielle (resp. la méthode de Borda Z-séquentielle, resp. la méthode de Borda AZ-séquentielle).

Preuve.

Nous allons uniquement du cas AZ-séquentiel, les autres s'en déduisant rapidement.

Si F est AZ-consistante il est facile de vérifier que f et f' sont consistantes. Si F est AZ-séquentielle et que f et f' sont consistantes on vérifie tout aussi facilement que F est AZ-consistante.

Grâce au lemme 8.2 nous sommes donc en mesure d'affirmer qu'étant donné une $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation AZ-séquentielle, celle-ci est neutre, égalitaire, loyale et AZ-consistante si et seulement si f et f' sont neutres, égalitaires, loyales et consistantes.

Comme d'après le théorème 5.1 la seule fonction de choix (resp. de rejet) qui vérifie ces propriétés est la fonction de choix (resp. de rejet) de Borda, le théorème est donc démontré.

♦

Les $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation ainsi décrites restent elles-mêmes très claires, et elles modélisent un comportement idéal souhaitée par le décideur.

Nous allons maintenant examiner l'influence des conditions d'indépendance séquentielle sur les $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation prudentes.

8.2.2. Condition de prudence.

Le lien entre indépendance séquentielle et prudence sera explicité dans le lemme 8.3 ; mais auparavant il est nécessaire d'établir la propriété suivante :

LEMME 8.3 : Si Y est un sous-ensemble de X , L un ordre prudent sur X et L' un ordre prudent sur Y alors $\alpha(L') \geq \alpha(L)$.

Preuve:

Soit L_Y la restriction de L aux éléments de Y . Soit L' un ordre prudent sur Y . Par construction $\alpha(L_Y) \geq \alpha(L)$. Par définition de la prudence $\alpha(L') \geq \alpha(L_Y)$ et donc $\alpha(L') \geq \alpha(L)$.

♦

LEMME 8.4 : Soit F une $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation prudente :

- 1- si $\{a\} \rightarrow \in f(\Pi)$ alors il existe un ordre prudent où a figure en première position ;
- 2- si $\leftarrow \{a\} \in f'(\Pi)$ alors il existe un ordre prudent où a figure en dernière position.

Lorsque F est AZ-séquentielle (resp. A-séquentielle; resp. Z-séquentielle) et que f et f' (resp. f ; resp. f') vérifient les propriétés précédentes alors F est prudente.

Preuve.

Nous allons démontrer le lemme dans le cas d'une fonction AZ-séquentielle ; au prix d'une modification minime, elle peut être étendue au deux autres définitions d'indépendance séquentielle.

La condition nécessaire découle des définitions.

Pour la condition suffisante, considérons un profil Π et F une $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation AZ-séquentielle. Formellement, $F(\Pi)$ peut être décrit comme le résultat d'un algorithme qui à chaque pas place les 1-élites de $f(\Pi)$ en tête de classement et les 1-rebuts de $f'(\Pi)$ en queue de classement. Plaçons nous à un pas donné de cet algorithme ; soit Y l'ensemble des objets non encore classés ; soit x_j un objet dont le rang est déterminé à ce pas ; soit x_j un objet quelconque de Y . L désignera un ordre prudent sur X ; L' un ordre prudent sur Y .

- 1 - Si $\{x_j\} \rightarrow$ est élément de $f(\Pi_Y)$ alors b_{jj} est supérieur ou égal à $\alpha(L')$, et d'après le lemme 8.3 $\alpha(L') \geq \alpha(L)$; par conséquent $b_{jj} \geq \alpha_L$.
- 2 - Si $\leftarrow \{x_j\}$ est élément de $f'(\Pi_Y)$ alors b_{jj} est supérieur ou égal à $\alpha(L')$, et d'après le lemme 8.3 $\alpha(L') \geq \alpha(L)$; par conséquent $b_{jj} \geq \alpha(L)$.

En conclusion, si $x_i F(\Pi) x_j$ alors $b_{ij} \geq \alpha(L)$, et par définition, $F(\Pi)$ est donc prudent.

♦

Une conséquence immédiate de ce lemme est que le nombre des $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation séquentielles et prudentes est très important (cf simulation du § 7.2). Cependant, pour un décideur multicritère, une telle $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation ne semble présenter d'intérêt pratique que lorsque sa fonction de choix associée (ou de rejet) l'est aussi. Vérifions que de telles exigences ne sont pas contradictoires.

LEMME 8.5 : Soit L un ordre prudent. Soit f une fonction de choix prudente. $\forall \{x_i\} \rightarrow \in f(\Pi) \quad \forall x_j \neq x_i, \quad b_{ij} \geq \alpha(L)$.

Preuve.

Soit :

- $\{x_i\} \rightarrow$ un élément quelconque de $f(\Pi)$;
- x_j un élément quelconque de $X - \{x_i\}$;
- x_k le premier élément de L ;
- x_l un élément de X pour lequel b_{kl} soit minimum (b_{kl} est le minimum de la ligne k de $B(\Pi)$).

Comme L est un ordre prudent, $b_{kl} \geq \alpha(L)$; de plus par construction de $f(\Pi)$, $b_{ij} \geq b_{kl}$; donc $b_{ij} \geq \alpha(L)$.

♦

LEMME 8.6 : Soit L un ordre prudent. Soit f' une fonction de rejet prudente. $\forall \leftarrow \{x_j\} \in f'(\Pi) \quad \forall x_i \neq x_j, \quad b_{ij} \geq \alpha(L)$.

Preuve.

Soit :

- $\leftarrow \{x_j\}$ un élément quelconque de $f'(\Pi)$;
- x_i un élément quelconque de $X - \{x_j\}$;
- x_k le dernier élément de L ;
- x_l un élément de X pour lequel b_{kl} soit maximum (b_{kl} est le maximum de la ligne k de $B(\Pi)$).

Comme L est un ordre prudent, $b_{lk} = -b_{kl} \geq \alpha(L)$; de plus par construction de $f'(\Pi)$,

$b_{ji} \leq b_{kl}$; donc $b_{ij} = -b_{ji} \geq -b_{kl}$ et par conséquent $b_{ij} \geq \alpha(L)$.

♦

Notre décideur multicritère est donc rassuré, une fois déterminées une fonction de choix f et une fonction de rejet f' prudentes et cohérentes entre elles, l'algorithme qui, à chaque pas classe en tête des objets non encore classés les 1-élites de la fonction de choix et en queue les 1-rebuts qui constituent $f'(\Pi)$, fournit un préordre résultat prudent.

Mais pourquoi opter pour telle ou telle fonction de choix ou de rejet prudente ? Une réponse possible est proposée dans le paragraphe suivant.

8.3. UNE CLASSE DE METHODES SEQUENTIELLES PRUDENTES.

Rappelons tout d'abord une propriété caractéristique des fonctions de choix prudentes. Une fonction de choix est prudente si et seulement si : $f(\Pi)$ est obtenu par réunion de 1-élites α -majoritaires α étant le plus grand possible. Ces 1-élites α -majoritaires sont les éléments pour lesquels le minimum de la ligne correspondante de $B(\Pi)$ est maximum.

Dès lors se pose la question : pourquoi privilégier telle 1-élite α -majoritaire par rapport à telle autre ? Ou encore, pourquoi privilégier telle ou telle fonction de choix prudente ? Une réponse possible est qu'un critère de nature hétérogène permet de départager ces 1-élites ex æquo. Ce critère permet donc d'"expliquer" la fonction de choix prudente.

Plus formellement :

DEFINITION 8.2 : Une fonction de choix f est prudente de critère hétérogène π si et seulement si $f(\Pi)$ est constitué des 1-élites α -majoritaires pour α maximum $\{x_i\} \rightarrow$ dont la valeur de x_i selon π est maximale.

Le même raisonnement est valable en ce qui concerne les fonctions de rejet

prudentes.

DEFINITION 8.2 : Une fonction de rejet f est prudente de critère hétérogène π si et seulement si $f'(\Pi)$ est constitué des 1-rebuts β -minoritaires pour β minimum $\leftarrow \{x_i\}$, dont la valeur de x_i selon π est minimale.

Le fait que les fonctions de choix et de rejet soient définies sur des critères hétérogènes distincts pose des problèmes de cohérence puisqu'un objet pourrait être à la fois choisi et rejeté!

Nous n'avons pas examiné ces $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation pour le moins bizarres ; nous supposons donc qu'un unique critère hétérogène intervient dans le choix ou le rejet .

Et dans ce cas :

LEMME 8.7 : Si une fonction de choix et une fonction de rejet sont prudentes et définies par rapport à un même critère hétérogène π alors elles sont cohérentes entre elles.

Preuve.

Supposons que x_i soit à la fois choisi et rejeté. Dans ce cas, le minimum de la i ème ligne de $B(\Pi)$ est égal à son maximum ; la i ème ligne de $B(\Pi)$ est donc nulle; et par définition d'une fonction de choix ou de rejet prudente, $B(\Pi)$ est donc nulle. De plus π est à la fois maximum et minimum pour x_i ; il en est donc de même pour n'importe quel objet x_j de X et donc, $\forall a \in X / \{a\} \rightarrow \in f(\Pi)$ et $\leftarrow \{a\} \in f'(\Pi)$.

♦

Cependant, dès l'instant où le respect de la condition de prudence est considéré comme un dogme, cela oblige à mettre au même rang tous les objets qui constituent une 1-élite α -majoritaire pour α maximum.

Le cas des fonctions de choix ou de rejet prudentes dont le cardinal de l'ensemble de choix ou de rejet est maximal, ou dit d'une autre manière, où le critère hétérogène π

classe tous les objets ex æquo, apparaît comme un cas central.

Dans le cas d'une méthode A-séquentielle, le résultat de la $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation pourrait apparaître alors comme purement "démagogique", puisqu'il met au premier rang toutes les objets que l'on n'a guère de raison de repousser plus loin. De manière symétrique, si la $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation est Z-séquentielle, le résultat pourrait alors apparaître comme "élitiste" puisque le plus grand nombre possible d'objets n'ayant pas de raison a priori d'être mieux classés sont rangés au dernier rang ! L'argument utilisé en "défaveur" d'un objet rejeté est de dire qu'il n'est préféré à n'importe quelle autre objet que par au plus β préordres.

Néanmoins, ces interprétations sont sujettes à une objection : la quantité d'information disponible au départ et effectivement utilisée pour ranger les éléments non rejetés sera réduite, et donc un tel modèle ne pourrait guère convenir à un décideur philosophiquement élitiste ou démagogue.

Néanmoins, l'introduction d'un critère de nature hétérogène s'intègre parfois très naturellement à la démarche du décideur multicritère comme dans l'exemple ci-dessous.

Supposons qu'une entreprise veuille classer des projets afin de choisir ceux à réaliser en priorité. Dans un premier dégrossissement du problème, l'espérance de profit sur la vie du projet classé peut être considérée comme un critère tout à fait qualitatif, où l'on trouvera, par exemple, cinq grandes catégories. Aucun critère hétérogène ne semble s'imposer. Par contre, si l'on en vient à départager des ex æquo trop nombreux, l'espérance du profit pourra être prise comme une variable ayant de très nombreuses modalités ; l'espérance du profit devient un critère numérique qu'il convient de traiter différemment des critères purement ordinaux. Parmi les ex æquo, seuls sont reconnus ceux pour lequel ce critère de nature hétérogène est maximal.

Trouver une fonction de choix adéquate peut être une tentative pour réduire le nombre des ex æquo du préordre résultat ; cet objectif nous a inspiré le paragraphe 8.4.

8.4. METHODES ITERATIVES.

Conformément à un document de L. Born et F. Guerra [1986], le critère de "finesse", qui est lié au nombre de classes d'ex æquo distinguées par l'algorithme, peut apparaître comme essentiel pour juger de la qualité d'une $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédure d'agrégation. Une possibilité d'amélioration de la "finesse" de nos algorithmes solution est l'itération des principes de calcul aux ensembles d'ex æquo, jusqu'à ce que cette itération produise un résultat stable.

Malheureusement, les algorithmes itératifs nous ont parus beaucoup plus difficilement axiomatisables que les algorithmes séquentiels. Le gain de finesse qu'il est possible d'obtenir nous a semblé bien maigre en comparaison avec la perte de certaines conditions souhaitables.

Nous nous sommes donc limités à des considérations uniquement algorithmiques et ceci à partir de deux fonctions de choix déjà envisagées : d'une part la fonction de choix de Borda ; d'autre part les fonctions de choix prudentes (condition 4.3) introduites au paragraphe 4.1.2.

La fonction de choix de Borda appliquée de manière itérative semble perdre toute propriété de consistance qui la rendait intéressante. L'exemple suivant rend bien compte de la situation : soit Π_1 le profil constitué de l'ordre abcd soit Π_2 un profil tel

$$\text{que } B(\Pi_1) = \begin{array}{cccc} & 2 & 10 & -4 \\ -2 & & -2 & 12 \\ -5 & 2 & & 14 \\ 4 & -6 & -14 & \end{array}$$

Il est aisé de vérifier que la fonction de choix de Borda itérée fournit abcd comme préordre résultat pour les deux profils Π_1 et Π_2 alors que pour $\Pi_1 + \Pi_2$ le résultat est acbd.

Nous n'avons donc pas poursuivi nos investigations plus en avant dans cette voie.

Par contre, l'itération de fonctions de choix prudentes conduit toujours à un préordre prudent puisqu'une méthode séquentielle conduit déjà à un préordre prudent et que toute orientation d'un préordre prudent est prudent. Malgré cette propriété encourageante, nous n'avons pas trouvé les conditions axiomatiques que vérifient les préordres résultats et qui permettraient de caractériser ces méthodes itératives.

*

* *

Les desiderata méthodologiques des décideurs multicritères, modélisés par les axiomes d'indépendance séquentielle, nous ont permis, via l'affaiblissement des conditions de consistance, de caractériser trois nouvelles $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation.

Ce n'est pas avec le même bonheur que nous avons étudié les $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -procédures d'agrégation prudentes, puisque qu'aucune caractérisation n'a vu le jour. Cependant, nous espérons que cette confrontation théorie-pratique permettra, par une meilleure compréhension du sujet, que plus malin que nous aboutisse au résultat!

REFERENCES

ARROW, K. J. [1951] **Social choice and Individual values**, Wiley, 2nd édition 1962, New York.

ARROW, K. J. & RAYNAUD, H. [1986] **Social choice and multicriterion decision making**, M.I.T. Press, Cambridge.

BARBUT, M. [1961] **Médiane, distributivité, éloignement**, Publications du Centre de Mathématique Sociale, E.P.H.E. 6^{ème} section, Paris et **Math. Sci. Hum.** 70 (1980), 5-31.

BARTHELEMY, J.P. [1982] "Arrow's theorem : unusual domains and extended codomains" **Mathematical Social Sciences**, 3, 79-89.

BARTHELEMY, J. P. & MONJARDET, B. [1981] "The median procedure in cluster analysis and social choice theory", **Mathematical Social Sciences**, 1, 235-267, North-Holland Publishing Company, Hollande.

BORDA, J. C. de [1781] " Mémoire sur les élections au scrutin" **Histoire de l'Académie Royale des Sciences**, Imprimerie Royale, Paris.

BORN, L. & GUERRA, F. [1986] "Essai de comparaison des méthodes multicritères", (mimeo), FUCAM, Mons (Belgique).

BLACK, D. [1958] **The theory of committees and elections**, University Press, Cambridge.

CAMPBELL, C. D. & TULLOCK G. [1965] A. "A measure of the importance of cyclical majorities" **Econ. J.**, 75, 853-857.

CONDORCET, [1785] **Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix**, Imprimerie Royale, Paris. (réimpression : Chelsea publishing, New York, 1972)

CHANDON, J. L. & VINCKE P. [1981] "La modélisation des préférences", **Analyse et agrégation des préférences**, Economica, Paris.

COOK, W. D. & KRESS, M. [1985] "Ordinal ranking and preference strength", **Mathematical Social Science**, 11, 290-300, North-Holland, Hollande.

DEBORD, B. [1987] "Axiomatisation de procédures d'agrégation de préférences", Thèse nouveau régime, Grenoble.

DEBORD, B. [1987] "Caractérisation des matrices des préférences nettes et méthodes d'agrégation associées", **Math. Sci. hum.**, 97, 5-17, Paris.

DEBORD, B. & RAYNAUD, H. [1986] "A la poursuite des théorèmes de possibilités : efforts, déceptions et récompenses", Rapport de recherche 618, Grenoble.

DODGSON, C. L. [1876] **A discussion of the various methods of procedure in conducting elections**, Princeton University Library. (réimpression par Black [1958])

DRIDI, T. [1981] "Sur les distributions binaires associées à des distributions ordinales", **Math. Sci. hum.**, 69.

DUTTA, B. & PATTANAIK, P. K. [1978] "On nicely consistent voting systems", **Econometrica**, 46, 163-170.

FARKAS, D. & NITZAN, S. [1979], "The borda's rule and pareto stability : a comment", **Econometrica**, 47 pp 1305-1306.

FINE, B. & FINE, K. [1974] "Social choice and individual ranking" I et II, **Rev. Econ. Stud.**, July 127-303 & October 128-459.

FISHBURN, P. C. [1970] **Utility theory for decision-making**, John Wiley and Sons, New York.

FISHBURN, P. C. [1972] **Mathematics of decision theory**, Mouton, The Hague, Paris.

FISHBURN, P. C. [1973] **The theory of social choice**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

FISHBURN P. C. [1977] "Condorcet social choice functions", **SIAM J. Appl. Math**, 33, 469-489.

GEHRLEIN, W. ; GOPINATH, B. ; LAGARIAS, J. C. ; FISHBURN P. C. [1982] "Optimal pairs of score vectors for positionnal scoring rules", **Appl. Math. Optim.** 8, n°4, 309-324.

GEHRLEIN, W. & FISHBURN P. [1982] "Scoring rule and majority agreements for large electorates with arbitrary preferences", **Math. Social Sci.** 2 n° 1, 23-33.

GUHA, A. S. [1972] "Neutrality monotonicity and the right of veto", **Econometrica**, 40 n° 5, 621-826.

GUILBAUD, G. Th. [1952] "Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation", **Economie Appliquée**, 5, 4 (réimprimé dans *Elements de la théorie des jeux*, Dunod, Paris, 1968).

- GUILBAUD, G. Th. [1970] "Préférences stochastiques", **Math. Sci. Hum.**, 32.
- HANSSON, B. & SALHLQUIST, H. [1976], "A proof technique for social choice with variable electorate", **J. Econ. Theory**, 13, 193-200.
- KEMENY, J. G. [1959] "Mathematics without numbers", **Daedalus**, 88, 577-591, Wesleyan University Press, Connecticut.
- KLAHR, D. A. [1966] "A computer simulation of the paradox of voting" **Amer. pol. sci. Rev.**, 60, 384-390.
- KOHLER, G. [1978] **Choix multicritère et analyse algébrique des données ordinales**, Thèse de troisième cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
- LEVENGLICK, A. [1975] "Fair and reasonable election systems", **Behavioral Sci.**, 20, 34-46.
- LEVENGLICK, A. [1977] **Characterisation of social decision functions**, Ph. D. thesis, Graduate school of the city University of New York, New York.
- LEVENGLICK, A. & YOUNG, H. P. [1978] "A consistent extension of Condorcet's election principle", **SIAM J. Appl. Math**, 35, 285-300.
- LUCE, D. [1956] "Semiorders and a theory utility discrimination" **Econometrica**, 24, 178-191.
- MAY, K. O. [1952] "A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision", **Econometrica**, 20, 680-684.

MEGIDDO, N. [1977] "Mixtures of order matrices and generalized order matrices", **Discrete Math.** ,19, 177-181.

MONJARDET, B. [1978] "Une autre preuve du théorème d'Arrow", **RAIRO Rech. Oper.**, 12, n°3, 291-296.

RAYNAUD, H. [1986] "Nouveaux théorèmes de possibilité en choix multicritère", Conférence faite au XVIII^e colloque Structures Economiques et Econométrie de Lyon, mai 1986, (mimeo), France.

ROY, B. [1985] **Méthodologie multicritère d'aide à la décision**, Economica, Paris.

SMITH, J. H. [1973] ,"Agregation of preferences with variable electorate", **Econometrica**, 41 pp 1027-1041.

YOUNG, H. P. [1974] "An axiomatization of Borda's rule", **Journal of Economic Theory** ,9, 43-52.

YOUNG, H. P. [1978] "On permutation and permutation polytopes", **Math. Programming Study** ,8, 128-140.

WAKABAYASHI, Y. [1986] **Aggregation of binary relations : algorithmic and polyhedral investigation**, Ph. D. Thesis, Université de Augsburg.

TABLE DES MATIERES

Introduction.....	3
Chapitre 1: Préliminaires et notations.....	7
1.1. Modélisation des préférences.....	7
1.2. Méthodes d'agrégation.....	12
1.2.1. Notations et définitions.....	12
1.2.2. $(\mathcal{D}, \mathcal{M})$ -procédures d'agrégation.....	13
1.3. Quelques exemples de procédures d'agrégation.....	15
 PARTIE 1 : Codage des informations utiles par des matrices de préférence.....	 21
 Chapitre 2 : Axiomatisation des procédures d'agrégation ne dépendant que des matrices de préférence.....	 23
2.1. Propriétés algébriques des matrices de préférence.....	23
2.2. Cinq conditions axiomatiques.....	26
2.2.1. Trois conditions d'anonymat.....	26
2.2.2. Deux conditions de stabilité.....	27
2.2.3. Résultats.....	29
 Chapitre 3 : Caractérisation des différentes matrices de préférences.....	 33
3.1. Notations et propriétés.....	33
3.2. Caractérisation des matrices de B-F.....	35
3.3. Caractérisation des matrices majoritaires.....	39
3.4. Caractérisation des matrices électorales.....	43

PARTIE 2 : Une extension de la problématique des fonctions de choix.....	47
Chapitre 4 : $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$-multiprocédures d'agrégation.....	49
4.1. Notations et définitions.....	50
4.2. Principe de Condorcet appliqué aux $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédures....	52
4.2.1. Elites majoritaires.....	53
4.2.2. Principe de prudence.....	61
4.2.3. Cas particulier des $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_1)$ -multiprocédures (fonctions de choix).....	65
4.3. Principe de Pareto appliqué aux $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$ -multiprocédures...	65
4.3.1 Elites Pareto.....	65
4.3.1. Principe médian.....	66
4.4. Un mot sur la dualité.....	71
Chapitre 5 : Caractérisation axiomatique de la $(\mathcal{D}, \mathcal{E}_k)$-multiprocédure de Borda....	73
5.1. Définition des conditions de Young.....	74
5.2. Quelques conséquences des conditions de Young.....	75
5.3. Propriétés des nombres $\beta_Y(\Pi)$	78
5.4. Caractérisation.....	79
PARTIE 3 : $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$-multiprocédures et $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-procédures d'agrégation : considérations algorithmiques et axiomatiques.....	83
Chapitre 6 : Ordres et préordres prudents.....	85
6.1. Cas des profils d'ordres totaux.....	86
6.1.1. Les ordres prudents, définition et propriétés.....	86
6.1.2. Autre caractérisation des ordres prudents.....	88

6.2. Cas d'un profil de préordres.....	92
6.2.1. Nouvelle caractérisation des ordres prudents.....	93
6.2.2. Les préordres prudents.....	95
Chapitre 7 : $(\mathcal{L}, \mathcal{L})$-multiprocédures d'agrégation.....	99
7.1. Deux $(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ -multiprocédures d'agrégation classiques.....	99
7.2. Dénombrement des ordres prudents.....	101
7.2.1. La simulation.....	102
7.2.2. Les résultats.....	102
7.3. "Proximité" des ordres résultats $F(\Pi)$	105
Chapitre 8 : $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$-procédures d'agrégation.....	109
8.1. Quelques conditions axiomatiques.....	111
8.2. Méthodes séquentielles.....	117
8.2.1. Condition de consistance.....	121
8.2.2. Condition de prudence.....	122
8.3. Une classe de méthodes séquentielles prudentes.....	125
8.4. Méthodes itératives.....	128
Références.....	131
Table des matières.....	137
Annexe.....	141

ANNEXE

London, Sept. 19 1772

Dear Sir,

In the affair of so much importance to you, where in you ask my advice, I cannot, for want of sufficient premises, advise you what to determine, but if you please I will tell you how. When those difficult cases occur, they are difficult, chiefly because while we have them under consideration, all the reasons pro and con are not present to the mind at the same time; but sometimes one set present themselves, and at other times another, the first being out of sight. Hence the various purposes or inclinations that alternately prevail, and the uncertainty that perplexes us.

To get over this, my way is to divide half a sheet of paper by a line into two columns; writing over the Pro, and over the other the Con. Then, during three or four days consideration, I put down under the different heads short hints of the different motives, that at different times occurs to me, for or against the measure. When I have thus got them all together in one view, I endeavor to estimate their weights; and when I find two, one on each side, that seem equal, I strike them both out. If I find a reason pro equal to some two reasons con, I strike out the three. If I judge some two reasons con, equal to three reasons pro, I strike out the five; and thus proceeding I find at length where the balance lies; and if, after a day or two of further consideration, nothing new that is of importance occurs on either side, I come to a determination accordingly. And, though the weight of reasons cannot be taken with the precision of algebraic quantities, yet when each is thus is considered, separately and comparatively, and the whole lies before me, I think I can judge better, and am less liable to make a rash step, and in fact I have found great advantage from this kind of equation, in what may be called moral or prudential algebra.

Wishing sincerely that you may determine for the best, I am ever, my dear friend,
yours most affectionately.

B. Franklin

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT 3ème CYCLE, DOCTORAT-INGENIEUR, DOCTORAT USTMG

Vu les dispositions de l'Arrêté du 16 avril 1974,

Vu les dispositions de l'Arrêté du 5 juillet 1984,

Vu les rapports de Mr. Bernard... MONJARDET.....

Mr. Maurice... SALLES.....

Mr. Bernard... DEBOAD..... est autorisé

à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade... de... Docteur....
de... l'Université... Scientifique... Technologique... et Médicale... de Grenoble
(arrêté ministériel du 5 juillet 1984)

14 OCT. 1984

Grenoble, le.....

Le Président de l'Université Scientifique
Technologique et Médicale



J. J. PAYAN

