

Problèmes spectraux inverses pour des opérateurs AKNS et de Schrödinger singuliers sur [0,1]

Frédéric Serier

▶ **To cite this version:**

Frédéric Serier. Problèmes spectraux inverses pour des opérateurs AKNS et de Schrödinger singuliers sur [0,1]. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2005. Français. NNT : . tel-00009719

HAL Id: tel-00009719

https://theses.hal.science/tel-00009719

Submitted on 9 Jul 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2005 N° B.U. : | | | | | | | | | | |

PROBLÈMES SPECTRAUX INVERSES POUR DES OPÉRATEURS AKNS ET DE SCHRÖDINGER SINGULIERS SUR [0,1]

Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes

Spécialité : Mathématiques et Applications

Présentée et soutenue publiquement par

Frédéric SERIER

le 24 Juin 2005 à l'Université de Nantes
devant le jury ci-dessous

Président	:	Didier Robert	Professeur (Université de Nantes)
Rapporteurs	:	Jean-Marc Delort	Professeur (Institut Galilée, Paris 13)
		Yves Dermenjian	Professeur (Université de Provence, Marseille)
Examinateurs	:	Benoît Grébert	Professeur (Université de Nantes)
		Jean-Claude Guillot	Professeur émérite (Institut Galilée, Paris 13)
		Ricardo Weder	Professeur (Universidad Nac. Aut. de Mexico)
Invités	:	Laurent Amour	Professeur (Université de Reims)
		François Nicoleau	MC-HDR (Université de Nantes)

Directeur de thèse : Benoît Grébert
Laboratoire : Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN)

N° E.D. : 0366-203

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Benoît Grébert, mon directeur de thèse, pour ses encouragements permanents, ses conseils et sa disponibilité. Je lui sais gré de m'avoir offert l'opportunité de travailler sur un sujet passionnant, ainsi que de s'être activement investi pour moi, notamment lors de la recherche de Post-Doc.

Je remercie Jean-Marc Delort et Yves Dermanjian d'avoir accepté de rapporter cette thèse et de faire partie du jury ; leurs conseils et remarques m'ayant permis d'en améliorer et d'éclaircir le contenu.

J'ai aussi beaucoup de gratitude envers Ricardo Weder et Jean-Claude Guillot, dont l'expérience, les connaissances et les diverses références qu'ils m'ont données, me permirent de mener à bien ce travail.

Je suis heureux de remercier Laurent Amour, François Nicoleau et Didier Robert pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de siéger dans le jury.

Je voudrais aussi remercier les membres du laboratoire de Mathématiques Jean Leray de l'Université de Nantes au sein duquel j'ai réalisé mon contrat. Merci aussi à toute l'équipe des thésards pour la bonne humeur et l'humour qui régnaient dans les couloirs.

Un très grand merci à Arnaud Sourisse, mon partenaire de bureau pendant ces trois années, dont j'ai pu apprécier la disponibilité et la gentillesse, mais aussi dont j'ai pu user (et même abuser...) des services qu'il est toujours prompt à rendre.

Merci à mes parents, dont l'attention, la vigilance (qui fut bien souvent nécessaire...) et l'intérêt m'ont permis d'en arriver là.

Pour finir, je n'oublie pas l'aiguillon qui n'a cessé de me stimuler au long de cette thèse ; de tout mon cœur, merci à toi, Karine, de m'avoir supporté, encouragé et motivé mais aussi d'avoir fait de ma vie ce qu'elle est.

Table des matières

Introduction **ix**

Principaux résultats **xi**
Cas de l'opérateur de Schrödinger xii
Cas du système AKNS xiii
Outils et ingrédients de la preuve xv

Notations **xix**

I Problèmes directs singuliers **1**

1 L'opérateur de Schrödinger radial **3**
1.1 Propriétés des solutions 3
1.2 Données spectrales 8
1.2.1 Éléments propres, gradients 8
1.2.2 Données complémentaires 11
1.3 Relations d'orthogonalité 13
1.4 Définition de l'application spectrale 14

2 L'opérateur AKNS « radial » **17**
2.1 Propriétés des solutions 18
2.2 Spectre : simplicité et localisation 23
2.2.1 Estimations $H^1_{\mathbb{C}}(0,1)$ 24
2.2.2 Estimations $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ 29
2.2.3 Localisation du spectre 30
2.3 Données spectrales : régularité, gradients 34
2.3.1 Régularité des valeurs propres 34
2.3.2 Données complémentaires 35
2.3.3 Relations d'orthogonalité 37
2.4 Définition de l'application spectrale 39

II Problèmes inverses singuliers 41

3 Opérateurs de transformations 43
3.1 Transformations pour Schrödinger . . . 44
3.2 Précision des asymptotiques . . . 47
3.3 Transformations pour AKNS . . . 49
3.4 Précision des asymptotiques . . . 56
3.4.1 Estimation de la solution régulière . . . 57
3.4.2 Estimation de la solution singulière . . . 59

4 Le problème inverse pour Schrödinger 65
4.1 L'inversion locale . . . 65
4.2 L'inversion globale . . . 74
4.3 Ensembles isospectraux . . . 75

5 Le problème inverse pour AKNS 77
5.1 L'inversion locale . . . 77
5.2 Injectivité pour les potentiels $H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$ . . . 86
5.3 Ensembles isospectraux . . . 91

III Application aux systèmes de Dirac singuliers 93

6 Problème direct 95
6.1 Pourquoi utiliser les opérateurs AKNS ? . . . 96
6.2 Opérateur de transformation matriciel . . . 97
6.3 Propriétés de l'opérateur transformé . . . 99

7 Un problème spectral inverse 103
7.1 Une condition équivalente d'injectivité . . . 103
7.2 Application à l'opérateur de Dirac radial . . . 105
7.3 Commentaire sur le résultat obtenu . . . 107

Conclusions et perspectives 109

IV Annexes 111

A Fonctions de Bessel 113
A.1 Représentations . . . 113
A.1.1 Expression en séries entières . . . 113
A.1.2 Expression trigonométrique . . . 114

A.2 Estimations et asymptotiques 115
A.2.1 Estimations usuelles 115
A.2.2 Estimations des fonctions de Green 116
A.3 Relations de récurrence 119
A.3.1 Dérivées 119
A.3.2 Intégrales 119
A.4 Lemmes techniques 120

B Inégalités de Hardy et séries **125**

C Fonction test orthogonale **129**

Bibliographie **133**

Introduction

Les problèmes considérés dans cette thèse sont associés à deux opérateurs. En premier lieu l'opérateur de Schrödinger radial, aussi appelé opérateur de Schrödinger singulier, noté H_a et défini par

$$\mathrm{H}_a(q) := -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a(a+1)}{x^2} + q(x),$$

puis dans un deuxième temps, le système AKNS (Ablowitz, Kaup, Newell, Segur) singulier, noté $\mathcal{H}_a(p,q)$ et défini par

$$\mathcal{H}_a(p,q) := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q(x) & p(x) \\ p(x) & q(x) \end{bmatrix}$$

où p et q sont des fonctions de la variable x à valeurs réelles. Les fonctions p et q sont aussi appelées potentiels. Le problème spectral inverse sera considéré sur l'intervalle unité pour des potentiels dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ avec le paramètre a entier positif.

Un des but en théorie spectrale inverse est de paramétrer globalement (ou à défaut localement) les potentiels par des données spectrales. Un autre est l'analyse des ensembles d'opérateurs ayant le même spectre, appelés ensembles isospectraux. La théorie spectrale inverse permet entre autres d'étudier la stabilité du potentiel vis à vis du spectre.

Parmi les motivations de ce travail, certaines ont des racines physiques à des échelles très éloignées les unes des autres. En effet, de tels problèmes spectraux inverses pour l'opérateur de Schrödinger radial interviennent en héliosismologie avec la détermination de la structure interne du soleil via les ondes acoustiques émises lors d'éruptions solaires. À l'autre bout de l'échelle, des problèmes spectraux inverses similaires à AKNS singulier apparaissent en chromodynamique quantique dans la détermination des propriétés ou mêmes d'existence de particules élémentaires formées de quarks (modèle hadronique).

Le travail effectué se découpe en deux parties. La première consiste en la résolution du problème direct associé à chacun des deux opérateurs. Nous

déterminons les solutions de chaque équation et leurs propriétés notamment par rapport aux potentiels. Puis nous déterminons les éléments propres, à savoir valeurs et vecteurs propres, ainsi que leur dépendance vis à vis des potentiels. Les limitations dues à la singularité explicite dans les équations seront mises en avant, notamment lors de l'obtention d'estimations asymptotiques.

La seconde partie portera sur la résolution de ces problèmes spectraux inverses. Dans un premier temps, nous introduirons les opérateurs dits de transformations nous permettant d'éliminer les difficultés induites par la singularité. Ces opérateurs nous permettrons ensuite le développement d'une théorie spectrale inverse pour les opérateurs singuliers considérés. Plus précisément, nous construirons un système de coordonnées pour les potentiels, bien adapté à l'étude des ensembles isospectraux.

Chacune de ces parties est divisée en deux « sections » , une portant sur l'opérateur de Schrödinger radial et l'autre sur le système AKNS singulier. Ces deux sections ont la même structure. Les répétitions d'arguments dans chacune de ces sections en permettent une lecture indépendante. Le choix de mettre en premier l'opérateur de Schrödinger est motivé par la connaissance d'un plus « large » public de résultats spectraux directs et inverses. Néanmoins, le travail réalisé dans cette thèse a d'abord été réalisé dans le cadre du système AKNS singulier puis appliqué à l'opérateur de Schrödinger radial.

Principaux résultats

Nous considérons un problème spectral inverse pour des équations de Sturm-Liouville sur l'intervalle unité avec une singularité explicite et non intégrable. De tels problèmes surviennent après décomposition de l'opérateur de Schrödinger radial $\mathrm{H} := -\Delta + q(\|X\|)$ agissant sur la boule unité de $\mathbb{R}^3$.

H est unitairement équivalent, après séparation des variables et utilisation des harmoniques sphériques (cf. [RS75], p. 160 − 161), à une famille d'opérateurs singuliers H_a avec $a \in \mathbb{N}$, définis par

$$\mathrm{H}_a\, y(x) := \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a(a+1)}{x^2} + q(x) \right) y(x) = \lambda\, y(x), \tag{0.0.1}$$

avec $x \in (0,1]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ et des conditions de bords de type Dirichlet ($y(0) = y(1) = 0$).

Une telle décomposition apparaît aussi pour l'opérateur de Dirac radial, il est néanmoins plus commode de considérer une famille $\mathcal{H}_a$ avec $a \in \mathbb{N}$ de systèmes AKNS singuliers agissant sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ dont la forme est

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{bmatrix} 0 & -a/x \\ -a/x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -q(x) & p(x) \\ p(x) & q(x) \end{bmatrix} \right) Y(x) = \lambda Y(x), \tag{0.0.2}$$

avec $Y = (Y_1, Y_2)$, $x \in (0,1]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et auxquels sont ajoutées les conditions de bords $Y_2(0) = Y_2(1) = 0$.

Nos résultats portent sur le paramétrage local des potentiels à l'aide de données spectrales : pour tout a, nous montrons que le spectre de l'opérateur considéré, noté λ^a, complété par une suite de constantes de normalisation, notée κ^a, forment un système de coordonnées locales $\lambda^a \times \kappa^a$ sur l'espace des potentiels.

Ces résultats sont nouveaux si $a \geq 2$ pour l'opérateur de Schrödinger et sont de plus globaux ; et nouveaux si $a \geq 1$ pour AKNS singulier.

Cas de l'opérateur de Schrödinger

Nous rappelons ici des résultats provenant ou pouvant être déduits de [Car97], [Car93], [GR88], [PT87], [RS01] et introduisons quelques notations utilisées au long de cette présentation.

Les résultats de Guillot et Ralston [GR88] pour $a = 1$ (transposant au cas singulier ceux de Pöschel et Trubowitz [PT87] pour $a = 0$) étendus à tout entier naturel a par Carlson dans [Car97] et [Car93], montrent que le spectre associé au problème Dirichlet associé à H_a (0.0.1) est réduit à une suite de valeurs propres $\{\lambda_{a,n}(q)\}_{n\geq 1}$. Réelles, simples, réelles-analytiques par rapport à q dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, celles-ci se comportent suivant l'asymptotique

$$\lambda_{a,n}(q) = \left(n + \frac{a}{2}\right)^2 \pi^2 + \int_0^1 q(t)dt - a(a+1) + \widetilde{\lambda}_{a,n}(q), \qquad \left(\widetilde{\lambda}_{a,n}(q)\right)_{n\geq 1} \in \ell^2_{\mathbb{R}}. \quad (0.0.3)$$

Soit $g_{a,n}(\cdot, q)$ leur vecteur propre normalisé associé et soit J_ν la fonction de Bessel de premier type d'ordre ν, nous définissons j_a, respectivement η_a, fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$, respectivement $\mathbb{C}^*$, par

$$j_a(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}}\, J_{a+1/2}(z), \qquad \eta_a(z) = (-1)^a \sqrt{\frac{\pi z}{2}}\, J_{-a-1/2}(z). \quad (0.0.4)$$

Les gradients des valeurs propres $\nabla_q \lambda_{a,n}$ vérifient

$$\nabla_q \lambda_{a,n}(t) = 2 j_a(\omega_{a,n}\, t)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \omega_{a,n}(q) = \sqrt{\lambda_{a,n}(q)}. \quad (0.0.5)$$

Par ailleurs ces estimations sont valables uniformément sur les bornés de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.

Les constantes de normalisation, ici aussi appelées vitesses terminales sont définies par

$$\kappa_{a,n}(q) = \ln \left| \frac{g_{a,n}{}'(1,q)}{g_{a,n}{}'(1,0)} \right|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1. \quad (0.0.6)$$

En suivant [PT87] à l'aide de [GR88], [Car97] et [Car93], nous montrons que chaque application $q \mapsto \kappa_{a,n}(q)$ est réelle-analytique sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Sur les bornés de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, $\nabla_q \kappa_{a,n}$ et $\kappa_{a,n}$ possèdent les comportements suivants

$$\nabla_q \kappa_{a,n}(t) = \frac{1}{\omega_{a,n}} j_a(\omega_{a,n}\, t)\eta_a(\omega_{a,n}\, t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (0.0.7)$$

$$\kappa_{a,n}(q) = \ell^2_1(n), \quad (0.0.8)$$

où

$$\Big(\Big[\forall n \geq 1, u_n = \ell_1^2(n)\Big] \Longleftrightarrow \Big[\,(n\,u_n)_{n\geq 1} \in \ell^2_{\mathbb{R}}\Big]\Big).$$

Définissons les coordonnées λ^a et κ^a par

$$\lambda^a(q) = \left(\int_0^1 q(t)dt, \left\{\widetilde{\lambda}_{a,n}(q)\right\}_{n\geq 1}\right), \qquad \kappa^a(q) = \left\{n\kappa_{a,n}(q)\right\}_{n\geq 1}. \quad (0.0.9)$$

Borg [Bor46] et Levinson [Lev49] ont montré que $\lambda^0 \times \kappa^0$ est injective dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Pöschel et Trubowitz [PT87] ont amélioré ce résultat en déterminant cette application comme un système réel-analytique de coordonnées globales de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Guillot et Ralston [GR88] ont étendu ces travaux à $\lambda^1 \times \kappa^1$. Puis Carlson [Car97] (mais aussi Zhornitskaya et Serov [ZS94]) a montré que pour tout *réel* $a \geq -1/2$, $\lambda^a \times \kappa^a$ est injective dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Nous complétons leurs travaux, pour tout entier naturel a, en réalisant $\lambda^a \times \kappa^a$ comme un système réel-analytique de coordonnées locales sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. En d'autres termes, notre travail consiste à prouver que pour tout $a \in \mathbb{N}$ et en tout point q de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, sa différentielle, notée $d_q\left(\lambda^a \times \kappa^a\right)$, réalise un isomorphisme entre $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ et $\mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \times \ell^2_{\mathbb{R}}$. En ajoutant ces derniers résultats, nous obtenons le premier résultat :

Théorème 1.
Pour tout $a \in \mathbb{N}$, l'application $\lambda^a \times \kappa^a$ est un difféomorphisme réel-analytique global sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.

De plus, la caractérisation du spectre réalisée par Carlson [Car93] montre que l'application λ^a est surjective de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ sur $\mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}}$.

Cas du système AKNS

Cette étude représente une partie importante du travail réalisé dans cette thèse. Les outils de base ainsi que l'essentiel des structures et formules pour $a = 0$ peuvent se trouver dans [GG93]. En ce qui concerne l'opérateur de Dirac radial, la construction des solutions, la régularité et d'autres propriétés il est possible de consulter [BGW95].

En utilisant une méthode itérative de Picard, nous construisons une base de solutions pour le problème AKNS singulier (0.0.2). La régularité, les formules des gradients et la simplicité des valeurs propres sont obtenues pour des potentiels $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Une partie difficile est la détermination d'asymptotiques pour les valeurs propres, vecteurs propres et gradients. Tout d'abord, nous les obtenons pour des potentiels $H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$, puis à l'aide d'un argument local, nous les étendons aux potentiels $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ (voir [GG93] dans le cas régulier).

En résumé, nous montrons que le problème (0.0.2) admet une suite de valeurs propres $\{\lambda_{a,n}(p,q)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, qui sont réelles et simples. Chaque application $(p,q) \mapsto \lambda_{a,n}(p,q)$ est réelle-analytique sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Les asymptotiques des valeurs propres et leurs gradients respectifs sont, localement uniformément sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, données par

$$\lambda_{a,n}(p,q) = \left(n + \operatorname{sgn}(n)\frac{a}{2}\right)\pi + \widetilde{\lambda}_{a,n}(p,q), \qquad \left(\widetilde{\lambda}_{a,n}(p,q)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2_{\mathbb{R}}, \quad (0.0.10)$$

$$\nabla_{(p,q)}\lambda_{a,n}(t) = \begin{bmatrix} -2j_{a-1}(\lambda_{a,n}\,t)j_a(\lambda_{a,n}\,t) \\ j_a(\lambda_{a,n}\,t)^2 - j_{a-1}(\lambda_{a,n}\,t)^2 \end{bmatrix} + \ell^2(n), \quad (0.0.11)$$

où sgn est la fonction signe et la notation $\ell^2(n)$ signifie pour une suite de fonctions que la suite des normes $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ est dans $\ell^2_{\mathbb{R}}$.

Une relation est valable localement uniformément signifie que pour tout $(p_0,q_0) \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que cette relation soit uniforme sur la boule $\|(p,q) - (p_0,q_0)\|_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)} < \varepsilon$. La perte d'uniformité est caractéristique du système AKNS et est effective (voir [GK01]). En effet, contrairement à l'équation de Schrödinger, il n'y a pas de décroissance explicite pour $|\lambda|$ grand (comparer par exemple les restes des estimations (0.0.5) et (0.0.11)). D'ailleurs, ceci rend techniquement les estimations difficiles à obtenir.

Ensuite en suivant [GG93], nous définissons les données complémentaires par

$$\kappa_{a,n}(p,q) = Y(1,\lambda_{a,n}(p,q),p,q)\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad n\in\mathbb{Z}. \quad (0.0.12)$$

Nous montrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application $(p,q) \mapsto \kappa_{a,n}(p,q)$ est réelle-analytique sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, et que les asymptotiques de $\kappa_{a,n}$ et de son gradient $\nabla_{(p,q)}\kappa_{a,n}$ sont données, localement uniformément sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, par

$$\kappa_{a,n}(p,q) = \frac{(-1)^n}{|n\pi|^a}\left(1+\widetilde{\kappa}_{a,n}(p,q)\right), \qquad (\widetilde{\kappa}_{a,n}(p,q))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2_{\mathbb{R}}, \quad (0.0.13)$$

$$\nabla_{(p,q)}\widetilde{\kappa}_{a,n}(t) = \begin{bmatrix} -\eta_{a-1}\left(\lambda_{a,n}\,t\right)j_a\left(\lambda_{a,n}\,t\right) - \eta_a\left(\lambda_{a,n}\,t\right)j_{a-1}\left(\lambda_{a,n}\,t\right) \\ -\eta_{a-1}\left(\lambda_{a,n}\,t\right)j_{a-1}\left(\lambda_{a,n}\,t\right) + \eta_a\left(\lambda_{a,n}\,t\right)j_a\left(\lambda_{a,n}\,t\right) \end{bmatrix} + \ell^2(n). \quad (0.0.14)$$

Comme pour l'opérateur de Schrödinger, nous définissons les coordonnées λ^a et κ^a par

$$\lambda^a(p,q) = \left\{\widetilde{\lambda}_{a,n}(p,q)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad \kappa^a(p,q) = \left\{\widetilde{\kappa}_{a,n}(p,q)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{0.0.15}$$

Grébert et Guillot [GG93] ont montré que $\lambda^0 \times \kappa^0$ forme un système de coordonnées locales sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. De plus, ils ont prouvé que sa restriction réalise un système de coordonnées globales sur $H^j_{\mathbb{R}}(0,1) \times H^j_{\mathbb{R}}(0,1)$, $j = 1, 2$.

Notre second résultat est l'extension aux problèmes AKNS singulier de ces systèmes de coordonnées, à savoir

Théorème 2.
Pour tout $a \in \mathbb{N}$, l'application $\lambda^a \times \kappa^a$ est un difféomorphisme local sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.
Restreinte à $H^1_{\mathbb{R}}(0,1) \times H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$, $\lambda^a \times \kappa^a$ est injective.

Outils et ingrédients de la preuve

Nous esquissons la preuve uniquement pour l'opérateur de Schrödinger radial. Les outils et méthodes sont similaires pour le système AKNS singulier considéré.

Nous utilisons une méthode classique adaptée de Pöschel et Trubowitz [PT87] par Guillot et Ralston [GR88]. La différentielle $d_q\left(\lambda^a \times \kappa^a\right)$ s'exprime à l'aide des gradients

$$d_q(\lambda^a \times \kappa^a)(v) = \Big(\langle 1, v\rangle, \Big(\Big\langle \nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n}, v \Big\rangle\Big)_{n\geq 1}, (\langle n\nabla_q \kappa_{a,n}, v\rangle)_{n\geq 1} \Big). \tag{0.0.16}$$

et la famille formée par ces gradients s'avère libre. Il est alors naturel de vouloir appliquer le résultat usuel suivant (cf. [PT87], Appendix D, Theorem 3) : *« une famille libre quadratiquement proche d'une base orthogonale dans un espace de Hilbert est une base »* ; précisément :

Lemme 1.
Soit $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H telle que

1. *il existe une base orthogonale $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\geq 1}$ de H pour laquelle*

$$\sum_{n\geq 1} \|f_n - e_n\|_H^2 < \infty,$$

2. *la famille $\mathcal{F}$ est libre au sens où aucun des f_n n'est dans l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les autres vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.*

Alors, l'application $\mathbf{F} : x \mapsto \{(x, f_n)\}_{n\geq 1}$ *est un isomorphisme d'espace de Hilbert de* H *sur* ℓ^2.

La singularité explicite de l'équation (0.0.1) engendre dans les asymptotiques (0.0.5) et (0.0.7) une famille de fonctions de type Bessel proche des gradients. Nous devrions montrer que celle-ci constitue une base hilbertienne de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\ldots$ chose ardue.

Pour éviter cela, la clé est donnée par le théorème suivant. Guillot et Ralston [GR88] ont les premiers introduit cette technique dite d'opérateurs de transformations qui transforme des produits scalaires avec les premières fonctions de Bessel sphériques en produits scalaires avec les fonctions Sinus ou Cosinus. Utilisée avec succès dans [SC93] et [CS94], cette idée a été étendue par Rundell et Sacks dans [RS01] grâce à une méthode itérative : tout d'abord créer un opérateur réduisant l'indice de la singularité de a à $a-1$ (c'est l'objet du Lemme 2), puis composer ces opérateurs pour atteindre $a = 0$ (c'est le but du Théorème 3). Pour des propriétés détaillées de ces opérateurs, consulter [RS01] lemmes 3.1 à 3.4.

Lemme 2.
Pour tout entier $a \geq 1$, *soit* $S_a : L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \longrightarrow L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *l'opérateur défini par*

$$S_a[f](x) = f(x) - 4a\, x^{2a-1} \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{2a}} dt, \quad f \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1),\ x \in (0,1). \tag{0.0.17}$$

1. S_a *est un isomorphisme linéaire entre* $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *et* ${N_a}^{\perp}$ *où*

$$N_a = \mathrm{Vect}\left\{t \mapsto t^{2a}\right\}.$$

2. *Soient* $\Phi_a(t) := j_a(t)^2$ *et* $\Psi_a(t) := j_a(t)\eta_a(t)$. *Nous avons*

$$\Phi_a = -S_a^*[\Phi_{a-1}], \quad \Psi_a = -S_a^*[\Psi_{a-1}]. \tag{0.0.18}$$

Théorème 3.
Pour $a \in \mathbb{N}$, *considérons* $T_a = (-1)^{a+1} S_a S_{a-1} \cdots S_1$ *avec* $T_0 = -\mathrm{Id}$.

1. *Pour tout* $q \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *nous avons les relations*

$$\langle 2\Phi_a(\lambda t) - 1,\, q\rangle = \langle \cos(2\lambda t),\, T_a[q]\rangle,$$
$$\langle \Psi_a(\lambda t),\, q\rangle = -\frac{1}{2}\langle \sin(2\lambda t),\, T_a[q]\rangle. \tag{0.0.19}$$

2. *Si* $a \geq 1$, T_a *définit un isomorphisme d'espace de Hilbert entre* $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *et* $(N_1 \oplus \cdots \oplus N_a)^{\perp}$.

Avec les estimations (0.0.5), (0.0.7), ces opérateurs permettent la factorisation de la différentielle qui s'exprime ainsi à l'aide d'une famille libre de vecteurs (0.0.21) proche d'une base trigonométrique de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Plus précisément, nous pouvons écrire grâce au Théorème 3 la factorisation

$$d_q(\lambda^a \times \kappa^a) = F \circ T_a$$

où F est l'opérateur donné par

$$F(w) = \Bigg(\langle -1, w\rangle, \{\langle \cos(2\omega_{a,n}t) + R_n(t), w\rangle\}_{n\geq 1}, \left\{ \left\langle \frac{-n}{2\omega_{a,n}} \left(\sin(2\omega_{a,n}t) + S_n(t)\right), w \right\rangle \right\}_{n\geq 1} \Bigg), \quad (0.0.20)$$

où R_n et S_n sont des $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

T_a étant un isomorphisme de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ sur $\left(\text{Vect}\left\{t^2, t^4, \ldots, t^{2a}\right\}\right)^{\perp}$, il nous faut obtenir l'inversibilité pour F de $\left(\text{Vect}\left\{t^2, t^4, \ldots, t^{2a}\right\}\right)^{\perp}$ dans $\mathbb{R}\times\ell^2_{\mathbb{R}}\times\ell^2_{\mathbb{R}}$. Pour cela, considérons $\mathbf{F}$ l'opérateur qui, à une fonction, associe ses coefficients de Fourier ou produits scalaires par rapport à la famille $\mathcal{F}$ suivante

$$\mathcal{F} = \{1\} \cup \left\{t^{2j}\right\}_{j\in[\![1,a]\!]} \cup \{\cos(2\omega_{a,n}t) + R_n(t)\}_{n\geq 1} \cup \left\{ \frac{-n}{2\omega_{a,n}} \left(\sin(2\omega_{a,n}t) + S_n(t)\right) \right\}_{n\geq 1}. \quad (0.0.21)$$

Nous obtenons l'indépendance linéaire de $\mathcal{F}$ dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ comme [GR88] (Lemma 8) et concluons à l'aide du lemme 1 avec les bases hilbertiennes

$$\mathcal{E} = \left\{ \sqrt{2}\cos\pi t, \sqrt{2}\sin\pi t, \ldots, \sqrt{2}\cos(2n+1)\pi t, \sqrt{2}\sin(2n+1)\pi t, \ldots \right\}, \quad (0.0.22)$$

si a est impair (comme Guillot et Ralston [GR88] pour $a = 1$), et

$$\mathcal{E} = \left\{ 1, \sqrt{2}\cos 2\pi t, \sqrt{2}\sin 2\pi t, \ldots, \sqrt{2}\cos 2n\pi t, \sqrt{2}\sin 2n\pi t, \ldots \right\}. \quad (0.0.23)$$

si a est pair (de même que Pöschel et Trubowitz [PT87] pour $a = 0$).

En ce qui concerne AKNS singulier, les outils de la preuve du Théorème 2 sont essentiellement les mêmes que pour Schrödinger : nous construisons l'application $\lambda^a \times \kappa^a$. Sa différentielle s'exprime aussi à l'aide des gradients (0.0.11) et (0.0.14). Nous définissons des opérateurs similaires à ceux du Théorème 3. Nous nous ramenons ainsi à une famille de fonctions trigonométriques de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ à laquelle nous appliquons le Lemme 1.

Notations

Nous définissions les différents signes ou symboles utilisées par la suite

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ représente respectivement le corps des réels et des complexes.
- $L^2_{\mathbb{K}}(0,1) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{K} : f \text{ mesurable }, \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$.
- $H^1_{\mathbb{K}}(0,1) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{K} : f, f' \in L^2_{\mathbb{K}}(0,1) \right\}$.
- Sur $\mathbb{K}^2$, soit $X = (Y,Z) \in \mathbb{K}^2$, $|X| = \max(|Y|,|Z|)$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$, $|A|$ représente la norme matricielle induite par celle utilisée ci-dessus.
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A^\top$ représente la matrice transposée.
- Soient u, v dans $\mathbb{K}^2$, $u \cdot v$ représente le produit scalaire usuel.
- Soient f, g dans $L^2_{\mathbb{K}}(0,1)$, $\langle f, g \rangle$ représente le produit scalaire usuel.
- Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ ou $\ell^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{Z})$ représentent l'ensemble des suites $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que

$$\sum_{n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}} |u_n|^p < \infty.$$

- $u_n = \ell^p(n)$ pour $u_n \in \mathbb{K}$ signifie que $(u_n)_n \in \ell^p_{\mathbb{K}}$.
- $u_n(x) = \ell^p(n)$ pour $x \mapsto u_n(x) \in L^\infty_{\mathbb{K}}(0,1)$ signifie que $(\|u_n\|_\infty)_n \in \ell^p_{\mathbb{K}}$.
- Soit A un opérateur borné d'un espace de Banach E, A^* représente son adjoint.
- Soit F un sous-ensemble d'un espace de Hilbert H, $F^\perp$ représente son orthogonal.
- Soit $X = (Y,Z) \in \mathbb{K}^2$, $X^\perp$ représente le vecteur $(Z, -Y)$. Remarquons que $X^\perp$ est un vecteur orthogonal à X et que

$$\left(X^\perp\right)^\perp = -X.$$

- $\delta_{n,m}$ représente le symbole de Kronecker.

Première partie

Problèmes directs singuliers

Chapitre 1

L'opérateur de Schrödinger radial

Nous considérons une famille H_a, $a \in \mathbb{N}$, d'opérateurs singuliers formulés en (1.0.1) avec conditions de Dirichlet. Ils proviennent de la décomposition suivant les harmoniques sphériques de l'opérateur de Schrödinger radial $\mathrm{H} := -\Delta + q$ agissant sur la boule unité de $\mathbb{R}^3$ (cf. [RS75], p. $160 - 161$).

Pour un potentiel $q \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, nous considérons le problème constitué de l'équation

$$\mathrm{H}_a y(x) := \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{a(a+1)}{x^2} + q(x) \right) y(x) = \lambda y(x), \quad x \in [0,1], \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.0.1}$$

avec conditions de bord de type Dirichlet, c'est à dire

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{1.0.2}$$

La résolution du problème spectral direct consiste en la détermination des éléments propres (λ, y) vérifiant les conditions (1.0.1)-(1.0.2). Beaucoup des résultats de cette partie proviennent ou peuvent être déduits de [GR88], [Car97]-[Car93] et [ZS94] ; néanmoins la structure en est donnée par l'ouvrage de Pöschel et Trubowitz [PT87].

1.1 Propriétés des solutions

Il est commode en travaillant avec l'opérateur de Schrödinger de réaliser un changement de variable spectrale. Nous introduisons donc la notation suivante

Notations. Notons $\omega := \lambda^{1/2}$. La détermination de la racine complexe est ici sans importance puisque les fonctions mettant en jeu ω seront toutes paires suivant cette variable.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous définissons de plus

$$(2n+1)!! := 1 \cdot 3 \cdots (2n+1) \left(= \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!} \right).$$

Une base élémentaire des solutions de (1.0.1) pour $q = 0$ est donnée par

$$u(x,\lambda) = \frac{(2a+1)!!}{\omega^{a+1}}\, j_a(\omega x), \quad v(x,\lambda) = -\frac{\omega^a}{(2a+1)!!}\, \eta_a(\omega x),$$

où j_a et η_a représentent des fonctions de Bessel sphériques (voir l'annexe A). Cette base de solutions est élémentaire au sens où son wronskien $\mathcal{W}(u,v)$ vaut 1. Leur comportement au voisinage de $x = 0$ suggère la dénomination suivante : $u(x,\lambda)$ est la solution dite « régulière », elle est analytique sur $[0,1] \times \mathbb{C}$; la solution $v(x,\lambda)$ est dite « singulière », elle est analytique sur $(0,1] \times \mathbb{C}$ et explose en $x = 0$. (cf. Annexe A.1.1))

Pour construire les solutions de (1.0.1), nous utilisons une méthode d'approximations successives de Picard à partir des solutions u et v. Nous suivons Guillot et Ralston [GR88] et ainsi que Zhornitskaya et Serov [ZS94]. Une construction légèrement différente est choisie par Carlson dans [Car93] (l'opérateur perturbé est donné par (1.0.1) pour $q = 0$ et $\lambda = 0$).

Considérons φ et $\widetilde{\psi}$ définies par

$$\varphi(x,\lambda,q) = \sum_{k\geq 0} \varphi_k(x,\lambda,q), \quad \widetilde{\psi}(x,\lambda,q) = \sum_{k\geq 0} \widetilde{\psi}_k(x,\lambda,q)$$

avec

$$\begin{cases} \varphi_0(x,\lambda,q) = u(x,\lambda), \\ \varphi_{k+1}(x,\lambda,q) = \displaystyle\int_0^x \mathcal{G}(x,t,\lambda) q(t) \varphi_k(t,\lambda,q)\, dt, \quad k \in \mathbb{N}; \end{cases} \tag{1.1.1}$$

$$\begin{cases} \widetilde{\psi}_0(x,\lambda,V) = v(x,\lambda), \\ \widetilde{\psi}_{k+1}(x,\lambda,q) = -\displaystyle\int_x^1 \mathcal{G}(x,t,\lambda) q(t) \widetilde{\psi}_k(t,\lambda,q)\, dt, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

La fonction $\mathcal{G}$ est appelée fonction de Green du problème et définie par

$$\mathcal{G}(x,t,\lambda) = v(x,\lambda)u(t,\lambda) - u(x,\lambda)v(t,\lambda), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,1). \tag{1.1.3}$$

Suit maintenant le résultat escompté :

Lemme 1.1.1. *Les séries définies par (1.1.1), respectivement par (1.1.2) convergent uniformément sur les bornés de $[0,1]\times\mathbb{C}\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, respectivement de $(0,1]\times\mathbb{C}\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ vers des solutions de (1.0.1). De plus, elles vérifient les équations intégrales*

$$\varphi(x,\lambda,q) = u(x,\lambda) + \int_0^x \mathcal{G}(x,t,\lambda)q(t)\varphi(t,\lambda,q)dt, \tag{1.1.4}$$

$$\widetilde{\psi}(x,\lambda,q) = v(x,\lambda) - \int_x^1 \mathcal{G}(x,t,\lambda)q(t)\widetilde{\psi}(t,\lambda,q)dt, \tag{1.1.5}$$

ainsi que les estimations

$$\begin{aligned} |\varphi(x,\lambda,q)| &\leq Ce^{|\operatorname{Im}\omega|x}\left(\frac{x}{1+|\omega|x}\right)^{a+1}, \\ \left|\widetilde{\psi}(x,\lambda,q)\right| &\leq Ce^{|\operatorname{Im}\omega|(1-x)}\left(\frac{1+|\omega|x}{x}\right)^{a}, \end{aligned}$$

où C est uniforme par rapport à q sur les bornés de $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$.

Preuve du lemme. Faisons la preuve pour φ, elle est semblable pour $\widetilde{\psi}$. L'estimation des fonctions de Bessel (A.2.1) donne

$$|u(x,\lambda)| \leq Ce^{|\operatorname{Im}\omega|x}\left(\frac{x}{1+|\omega|x}\right)^{a+1}. \tag{1.1.6}$$

La relation de récurrence (1.1.1) donne

$$\varphi_1(x,\lambda,q) = \int_0^x \mathcal{G}(x,t,\lambda)q(t)u(t,\lambda)dt, \tag{1.1.7}$$

qui, avec (1.1.6) et l'estimation de la résolvante (A.2.5), se majore par

$$|\varphi_1(x,\lambda,q)| \leq C^2e^{|\operatorname{Im}\omega|x}\left(\frac{x}{1+|\omega|x}\right)^{a+1}\int_0^x \frac{t|q(t)|}{1+|\omega|t}dt,$$

Par itérations successives puis par récurrence, il vient pour tout entier n

$$|\varphi_n(x,\lambda,q)| \leq \frac{C^{n+1}}{n!}e^{|\operatorname{Im}\omega|x}\left(\frac{x}{1+|\omega|x}\right)^{a+1}\left(\int_0^x \frac{t|q(t)|}{1+|\omega|t}dt\right)^n,$$

ce qui prouve la convergence uniforme de la série φ sur les bornés de $[0,1]\times\mathbb{C}\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, ainsi que la majoration. L'équation intégrale découle alors de (1.1.1). □

Corollaire 1.1.1. *Les solutions φ et $\widetilde{\psi}$ du problème (1.0.1) vérifient les estimations suivantes*

$$|\varphi(x,\lambda,q)-u(x,\lambda)| \leq Ce^{|\operatorname{Im}\omega|x}\left(\frac{x}{1+|\omega|x}\right)^{a+1}\int_0^x \frac{t|q(t)|}{1+|\omega|t}dt, \tag{1.1.8}$$

$$\left|\widetilde{\psi}(x,\lambda,q)-v(x,\lambda)\right| \leq Ce^{|\operatorname{Im}\omega|(1-x)}\left(\frac{1+|\omega|x}{x}\right)^{a}\int_x^1 \frac{t|q(t)|}{1+|\omega|t}dt. \tag{1.1.9}$$

En notant $'$ la dérivation par rapport à x, nous avons de plus

$$\varphi'(x,\lambda,q) = u'(x,\lambda)+\int_0^x \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x,t,\lambda)q(t)\varphi(t,\lambda,q)dt,$$
$$\widetilde{\psi}'(x,\lambda,q) = v'(x,\lambda)-\int_x^1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x,t,\lambda)q(t)\widetilde{\psi}(t,\lambda,q)dt,$$

ainsi que les estimations

$$|\varphi'(x,\lambda,q)-u'(x,\lambda)| \leq Ce^{|\operatorname{Im}\omega|x}\left(\frac{x}{1+|\omega|x}\right)^{a}\int_0^x \frac{t|q(t)|}{1+|\omega|t}dt, \tag{1.1.10}$$

$$\left|\widetilde{\psi}'(x,\lambda,q)-v'(x,\lambda)\right| \leq Ce^{|\operatorname{Im}\omega|(1-x)}\left(\frac{1+|\omega|x}{x}\right)^{a+1}\int_x^1 \frac{t|q(t)|}{1+|\omega|t}dt, \tag{1.1.11}$$

où C est uniforme par rapport à q sur les bornés de $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$.

Démonstration. Pour les premières estimations, il suffit de sommer les estimations obtenues dans la preuve du lemme en commençant à $k=1$. Les équations intégrales s'obtiennent simplement par dérivation et les estimations qui suivent en découlent directement grâce aux majorations (A.2.6) et (A.2.8) de $\mathcal{G}$ données en annexe A. □

Remarque 1. Remarquons au passage que pour $\omega \neq 0$, nous avons

$$0 \leq \frac{t}{1+|\omega|t} = \frac{1}{|\omega|}\frac{|\omega|t}{1+|\omega|t} \leq \frac{1}{|\omega|},$$

les estimations du corollaire sont des asymptotiques lorsque $|\omega|$ est grand.

Remarque 2. Ces estimations permettent d'obtenir l'estimation

$$\mathcal{W}(\lambda,q) = 1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \omega \to \infty. \tag{1.1.12}$$

Le wronskien de φ, $\widetilde{\psi}$, noté $\mathcal{W}(\lambda, q)$, est d'une part indépendant de x (par la structure de l'équation différentielle linéaire (1.0.1)) et, d'autre part, non nul puisque ces deux solutions de (1.0.1) ont un comportement inverse au voisinage de 0 ; nous pouvons définir la solution dite singulière par

$$\psi(x, \lambda, q) = \frac{\widetilde{\psi}(x, \lambda, q)}{\mathcal{W}(\lambda, q)}.$$

Remarque 3. Le comportement au voisinage de $x = 0$ de φ hérité de celui de u et la relation avec le wronskien donnent les conditions aux limites en 0 suivantes

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\varphi(x, \lambda, q)}{x^{a+1}} = 1, \quad \lim_{x \to 0^+} x^a \psi(x, \lambda, q) = 1. \tag{1.1.13}$$

Les relations obtenues par [GR88] pour $a = 1$ sont par conséquent maintenues pour de plus grandes valeurs entières du paramètre. Il est intéressant de consulter [Car97] et [ZS94] pour des valeurs réelles du paramètre (précisément pour $a \geq -\frac{1}{2}$), en particulier les valeurs non entières du paramètre permettent l'étude spectrale de l'opérateur de Schrödinger radial agissant sur la boule unité d'espace de dimension paire (ici l'opérateur agit sur $\mathbb{R}^3$).

La convergence uniforme des séries donnée par le lemme précédent permet d'obtenir la régularité des solutions φ et ψ. Nous pouvons énoncer le résultat de régularité suivant

Proposition 1.1.1 (Analyticité des solutions)**.**

(a) Pour tout $x \in [0, 1]$, $\varphi(x, \lambda, q)$ est analytique sur $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}(0, 1)$. De plus, elle est réelle sur $\mathbb{R} \times L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$.

(b) L'application

$$\varphi : (\lambda, q) \mapsto \varphi(\cdot, \lambda, q)$$

est analytique de $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}(0, 1)$ dans $H^2([0, 1], \mathbb{C})$.

(c) Pour tout $x \in (0, 1]$, $\psi(x, \lambda, q)$ est analytique sur $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}(0, 1)$.

Ayant la régularité de la solution régulière par rapport aux paramètres λ et q, intéressons-nous à ses « dérivées ». Pour cela, rappelons brièvement la notion de gradient dans un espace de Hilbert :

Remarque 4 (Rappel). Si E est un espace de Hilbert et F est la droite réelle ou complexe, et si $f : E \to F$ est différentiable, le gradient de f relativement à $x \in E$ est le représentant de Riesz de la différentielle de f au point x, c'est à dire

$$d_x f(v) = \left\langle v, \overline{\nabla_x f} \right\rangle_E, \quad \forall v \in E.$$

Il nous suffit donc de déterminer la différentielle de φ par rapport à q et λ. Son calcul est semblable à celui fait dans [PT87] ; formellement il suffit de différentier l'équation (1.0.1) et d'inverser la dérivation par rapport à x et par rapport à q. La justification se fait par densité en supposant q continu. Nous obtenons :

$$[d_q\varphi(x,\lambda,q)]\,(v) = \int_0^x \tilde{\mathcal{G}}(x,t,\lambda,q)v(t)\varphi(t,\lambda,q)dt,$$

où

$$\tilde{\mathcal{G}}(x,t,\lambda,q) = \psi(x,\lambda,q)\varphi(t,\lambda,q) - \varphi(x,\lambda,q)\psi(t,\lambda,q).$$

En écrivant cette relation sous forme de produit scalaire dans $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, nous obtenons la propriété suivante :

Proposition 1.1.2. *[Gradients de la solution régulière]*
Pour tout $v \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, nous avons

$$\nabla_q\,\varphi(x,\lambda,q)(t) = \varphi(t,\lambda,q)\,[\psi(x,\lambda,q)\varphi(t,\lambda,q) - \varphi(x,\lambda,q)\psi(t,\lambda,q)]\,\mathbb{1}_{[0,x]}(t), \tag{1.1.14}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(x,\lambda,q) = -\,[d_q\varphi(x,\lambda,q)]\,(1), \tag{1.1.15}$$

$$\nabla_q\,\varphi'(x,\lambda,q)(t) = \varphi(t,\lambda,q)\,[\psi'(x,\lambda,q)\varphi(t,\lambda,q) - \varphi'(x,\lambda,q)\psi(t,\lambda,q)]\,\mathbb{1}_{[0,x]}(t). \tag{1.1.16}$$

Rappelons que l'expression de la dérivée de φ par rapport à λ découle de celle du gradient par rapport à q en écrivant l'identité

$$\varphi(x,\lambda+\varepsilon,q) = \varphi(x,\lambda,q-\varepsilon).$$

1.2 Données spectrales

Dès maintenant, sauf précision, le potentiel q est supposé à valeurs réelles, c'est à dire

$$q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1).$$

1.2.1 Éléments propres, gradients

La détermination du spectre et le choix des fonctions propres associées sont réalisés suivant [PT87] ou [GR88]. Les conditions de bord données par (1.0.2) montrent l'identification du spectre associé au problème (1.0.1)-(1.0.2) avec l'ensemble des zéros de la fonction holomorphe $\lambda \mapsto \varphi(1,\lambda,q)$. Les

résultats de Zhornitskaya et Serov [ZS94] donnent la simplicité et la localisation des valeurs propres de manière semblable à [PT87] et [GR88]. La régularité et l'expression du gradient de chaque valeur propre est obtenue dans [Car93].

Notations. L'ensemble des valeurs propres pour le problème de Schrödinger singulier considéré est représenté par la suite $(\lambda_{a,n}(q))_{n\geq 1}$. Pour chaque entier $n \geq 1$, $g_n(t,q)$ représente le vecteur propre associé à $\lambda_{a,n}(q)$ normalisé par

$$g_n(t,q) = \frac{\varphi(t,\lambda_{a,n}(q),q)}{\|\varphi(\cdot,\lambda_{a,n}(q),q)\|_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)}}$$

Précisons maintenant les résultats présentés ci-dessus avec le théorème suivant :

Théorème 1.2.1. *Soit $q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, les valeurs propres du problème (1.0.1) avec les conditions de Dirichlet (1.0.2) forment une suite strictement croissante $\lambda^a(q) = (\lambda_{a,n}(q))_{n\geq 1}$ d'applications réelle-analytiques sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ qui vérifient*

$$\lambda_{a,n}(q) = \left(n + \frac{a}{2}\right)^2 \pi^2 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{1.2.1}$$

$$\nabla_q \lambda_{a,n}(t) = g_n(t,q)^2. \tag{1.2.2}$$

Corollaire 1.2.1.
Pour $q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, nous avons uniformément sur les bornés de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ les comportements

$$g_n(t,q) = \sqrt{2} j_a(\omega_{a,n}(q)\, t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1.2.3}$$

$$\nabla_q \lambda_{a,n}(t) = 2 j_a(\omega_{a,n}(q)\, t)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1.2.4}$$

$$\lambda_{a,n}(q) = \left(n + \frac{a}{2}\right)^2 \pi^2 + \mathcal{O}(1). \tag{1.2.5}$$

Démonstration. L'estimation (1.1.8) s'écrit pour $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x,\lambda,q) = \frac{(2a+1)!!}{\omega^{a+1}} j_a(\omega x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\left(\frac{x}{1+|\omega| x}\right)^{a+1}\right). \tag{1.2.6}$$

Ainsi,

$$\int_0^1 \varphi(t,\lambda,q)^2 dt = \frac{[(2a+1)!!]^2}{\omega^{2a+2}} \int_0^1 \left[j_a(\omega t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\left(\frac{|\omega| x}{1+|\omega| x}\right)^{a+1}\right)\right]^2 dt.$$

L'estimation (A.2.1) pour la fonction de Bessel j_a implique l'égalité

$$\left[j_a(\omega t)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\left(\frac{|\omega|x}{1+|\omega|x}\right)^{a+1}\right)\right]^2 = j_a(\omega t)^2+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\left(\frac{|\omega|x}{1+|\omega|x}\right)^{2a+2}\right),$$

puis

$$\int_0^1 \varphi(t,\lambda,q)^2 dt = \frac{[(2a+1)!!]^2}{\omega^{2a+2}}\left[\int_0^1 j_a(\omega t)^2 dt+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right].$$

La relation (A.3.9) conduit à

$$\int_0^1 \varphi(t,\lambda,q)^2 dt = \frac{1}{2}\frac{[(2a+1)!!]^2}{\omega^{2a+2}}\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right]. \tag{1.2.7}$$

En utilisant simultanément les estimations (1.2.6) et (1.2.7), sachant que $\omega_{a,n}(q)=\left(n+\frac{a}{2}\right)\pi+\mathcal{O}(1)$, les relations (1.2.3) et (1.2.4) sont prouvées.

Pour déterminer l'asymptotique (1.2.5) utilisons la relation

$$\begin{aligned}
\lambda_{a,n}(q)-\lambda_{a,n}(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\lambda_{a,n}(tq)\right)dt = \int_0^1 \langle \nabla_{tq}\lambda_{a,n}, q\rangle\, dt,\\
&= \iint_{[0,1]^2} 2j_a(\omega_{a,n}(tq)x)^2 q(x)dx\,dt+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),\\
&= \int_0^1 q(t)dt\\
&\quad+\iint_{[0,1]^2}\left[2j_a(\omega_{a,n}(tq)x)^2-1\right]q(x)dx\,dt+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

La majoration (A.2.1) montre que la seconde intégrale ci-dessus est bornée. D'après [RS01] Éq. (2.10), l'asymptotique des valeurs propres est

$$\lambda_{a,n}(0)=\left(n+\frac{a}{2}\right)^2\pi^2-a(a+1)+\ell^2(n),$$

ce qui prouve l'estimation (1.2.5) annoncée. □

L'asymptotique obtenue n'est pas vraiment optimale, mais à ce point nous ne pouvons obtenir mieux sans faire plus de travail. Suivant [GR88], nous devrons développer un outil permettant entre autres de traiter le terme en intégrale double dans l'expression

$$\begin{aligned}
\lambda_{a,n}(q) = \lambda_{a,n}(0)&+\int_0^1 q(t)dt\\
&+\iint_{[0,1]^2}\left[2j_a(\omega_{a,n}(tq)x)^2-1\right]q(x)dx\,dt+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

déterminée ci-dessus pour l'estimation des valeurs propres.

1.2.2 Données complémentaires

La résolution du problème spectral inverse nécessite la connaissance de quantités complémentaires. En effet, dans le cas $a = 0$ (cf. [PT87]) comme dans le cas $a = 1$ (cf. [GR88]), la seule donnée des valeurs propres est insuffisante pour déterminer entièrement le potentiel q associé. Néanmoins des résultats partiels (théorème de Borg) sont connus, mais nous verrons cela par la suite dans le chapitre consacré au problème spectral inverse pour l'opérateur de Schrödinger singulier.

Suivons les travaux cités ci-avant et définissons les données additionnelles nécessaires.

Définition 1.2.1. Nous appellerons constantes de normalisation ou vitesses terminales les quantités $\kappa_{a,n}$ définies pour tout entier $n \geq 1$ par

$$\kappa_{a,n}(q) = \ln \left| \frac{\varphi'(1, \lambda_{a,n}(q), q)}{u'(1, \lambda_{a,n}(0))} \right|. \tag{1.2.9}$$

Définissons de plus les fonctions $a_n(t, q)$ par

$$a_n(t, q) = \varphi(t, \lambda_{a,n}(q), q)\psi(t, \lambda_{a,n}(q), q). \tag{1.2.10}$$

Remarque 5. Le logarithme dans la définition des $\kappa_{a,n}$ est choisi pour commodité. D'autre part, le quotient est toujours défini et non nul (résolution du problème de Cauchy associé).

Donnons maintenant quelques propriétés de ces constantes :

Théorème 1.2.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $q \mapsto \kappa_{a,n}(q)$ est réelle-analytique sur $L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$. Son gradient est donné par*

$$\nabla_q \kappa_{a,n}(t) = -a_n(t, q) + \nabla_q \lambda_{a,n}(t) \int_0^1 a_n(s, q)ds, \tag{1.2.11}$$

et vérifie l'estimation uniforme sur les bornés de $[0, 1] \times L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$

$$\nabla_q \kappa_{a,n}(t) = \frac{1}{\omega_{a,n}} j_a(\omega_{a,n}t)\eta_a(\omega_{a,n}t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{1.2.12}$$

Preuve. La régularité de $\kappa_{a,n}$ provient de celle de $\lambda_{a,n}$ et de φ. L'expression de son gradient est un simple calcul utilisant la formule de dérivation composée ainsi que les expressions des gradients données à la proposition 1.1.2.

Déterminons l'asymptotique du gradient. Les estimations (1.1.8)-(1.1.9) ainsi que l'asymptotique du wronskien donnée par (1.1.12) donnent

$$a_n(x,q) = \left[u(x,\lambda_{a,n}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega_{a,n}}\left(\frac{x}{1+|\omega_{a,n}x|}\right)^{a+1}\right)\right] \times \left[v(x,\lambda_{a,n}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega_{a,n}}\left(\frac{1+|\omega_{a,n}x|}{x}\right)^{a}\right)\right],$$

puis les définitions de u et v conduisent à

$$a_n(x,q) = \frac{-1}{\omega_{a,n}}\left[j_a(\omega_{a,n}x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega_{a,n}}\left[\frac{|\omega_{a,n}|x}{1+|\omega_{a,n}x|}\right]^{a+1}\right)\right] \times \left[\eta_a(\omega_{a,n}x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega_{a,n}}\left[\frac{1+|\omega_{a,n}x|}{|\omega_{a,n}|x}\right]^{a}\right)\right].$$

Les contrôles (A.2.1) et (A.2.2) des fonctions de Bessel entraînent

$$a_n(t,q) = \frac{-1}{\omega_{a,n}} j_a(\omega_{a,n}x)\eta_a(\omega_{a,n}x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{{\omega_{a,n}}^2}\right).$$

Maintenant, nous avons

$$\int_0^1 a_n(t,q)dt = \frac{-1}{\omega_{a,n}}\int_0^1 j_a(\omega_{a,n}t)\eta_a(\omega_{a,n}t)dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{{\omega_{a,n}}^2}\right).$$

L'identité (A.3.10) conduit à l'estimation donnée pour le gradient. □

Comme nous l'avons remarqué précédemment pour l'asymptotique des valeurs propres, contrairement au cas $a = 0$, obtenir une estimation correcte des vitesses terminales est plus difficile. En effet, utilisons la relation

$$\kappa_{a,n}(q) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\kappa_{a,n}(tq)\right) dt.$$

Par dérivation composée, il vient

$$\kappa_{a,n}(q) = \int_0^1 \langle \nabla_{tq}\kappa_{a,n}, q\rangle_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)}\, dt.$$

L'asymptotique (1.2.12), uniforme sur les bornés de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ (en particulier sur $\{tq : t \in [0,1]\}$), entraîne l'estimation

$$\kappa_{a,n}(q) = \iint_{[0,1]^2} \frac{j_a\big(\omega_{a,n}(tq)x\big)\eta_a\big(\omega_{a,n}(tq)x\big)}{\omega_{a,n}(tq)}\, q(x)dx\, dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (1.2.13)$$

Nous obtenons ainsi l'estimation

$$\kappa_{a,n}(q) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1.2.14}$$

perdant ainsi la précision du terme $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ présent ci-dessus. À l'instar de Guillot et Ralston [GR88] dans le cas $a = 1$, il nous sera nécessaire d'éviter cet écueil. Nous introduirons pour cela des opérateurs de transformations.

Auparavant, finissons l'étude du problème direct avec les propriétés des gradients.

1.3 Relations d'orthogonalité

Proposition 1.3.1. *Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $n, m \geq 1$, nous avons*

1. $\left\langle {g_n}^2, \frac{d}{dx}{g_m}^2 \right\rangle = 0,$
2. $\left\langle a_n, \frac{d}{dx}{g_m}^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\delta_{n,m},$
3. $\left\langle a_n, \frac{d}{dx}a_m \right\rangle = 0.$

Démonstration. D'un point de vue formel, la preuve est la même que celle donnée dans [PT87]. Nous ne montrons alors que la première relation. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n, m \geq 1$, par intégration par parties, nous avons

$$\left\langle {g_n}^2, \frac{d}{dx}{g_m}^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[{g_n}^2 \left({g_m}^2\right)' - {g_m}^2 \left({g_n}^2\right)'\right] dt = \int_0^1 g_n g_m \mathcal{W}(g_n, g_m) dt.$$

Si $n = m$, la relation est clairement nulle. Supposons maintenant $n \neq m$ et utilisons l'identité

$$\frac{d}{dx}\mathcal{W}(g_n, g_m) = (\lambda_{a,n} - \lambda_{a,m}) g_n g_m$$

pour obtenir

$$\left\langle {g_n}^2, \frac{d}{dx}{g_m}^2 \right\rangle = \frac{1}{2(\lambda_{a,n} - \lambda_{a,m})}\left[\mathcal{W}(g_n, g_m)^2\right]_0^1 = 0.$$

□

Comme dans le cas régulier ($a = 0$), nous pouvons déduire des propriétés algébriques sur les vecteurs en relation avec les différents gradients et fonctions propres. Rappelons d'abord la définition de famille libre dans un espace de Hilbert.

Définition 1.3.1. Une famille infinie de vecteurs $(u_k)_{k\geq 1}$ d'un espace de Hilbert est dite libre ou ses vecteurs sont indépendants si chaque vecteur de la famille n'est pas dans l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par tous les autres vecteurs de la famille. C'est à dire :

$$\forall k \geq 1\,, \quad u_k \notin \overline{\mathrm{Vect}\,(u_j | j \geq 1, j \neq k)}.$$

Remarque 6. Cette notion de liberté de vecteurs n'est pas algébrique. Elle est à mettre en parallèle avec la notion de base hilbertienne. Rappelons qu'un espace vectoriel normé admettant une base dénombrable de vecteurs n'est jamais complet.

Nous obtenons suivant [PT87] les propriétés suivantes :

Corollaire 1.3.1. *[Familles libres]*

(a) Les vecteurs 1, $\{{g_n}^2 - 1\}_{n\geq 1}$ *sont linéairement indépendants, ainsi que les vecteurs* $\left\{\dfrac{d}{dx}{g_n}^2\right\}_{n\geq 1}$. *De plus ces deux familles sont orthogonales.*

(b) Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $n, m \geq 1$ *nous avons*

(i) $$\left\langle \nabla_q \kappa_{a,n}, \frac{d}{dx}\left(\nabla_q \kappa_{a,m}\right)\right\rangle = 0,$$

(ii) $$\left\langle \nabla_q \kappa_{a,n}, \frac{d}{dx}\left(\nabla_q \lambda_{a,m}\right)\right\rangle = \frac{1}{2}\delta_{n,m},$$

(iii) $$\left\langle \nabla_q \lambda_{a,n}, \frac{d}{dx}\left(\nabla_q \lambda_{a,m}\right)\right\rangle = 0.$$

(c) Les vecteurs 1, $(\nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n})_{n\geq 1}$ *et* $(\nabla_q \kappa_{a,n})_{n\geq 1}$ *forment une famille libre de* $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.

Le résultat attendu, à savoir que les familles ci-dessous forment des bases de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, ne s'obtient pas aussi « aisément »que dans le cadre sans singularités. En effet, cette propriété repose sur la proximité d'une base de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ au sens des asymptotiques. Ici, les familles de vecteurs se trouvent proches de famille de fonctions de Bessel dont les propriétés géométriques ne sont pas faciles à obtenir. Nous utiliserons pour éviter ce problème les opérateurs de transformation cités ci-avant.

1.4 Définition de l'application spectrale

Pour l'opérateur de Schrödinger, l'application spectrale usuelle (voir en autres [PT87], [GR88], [ZS94]...) est construite pour réaliser une correspondance entre les potentiels q, paramétrant le problème de Dirichlet associé

à $H_a(q)$, et les données spectrales, autrement dit les valeurs propres et les constantes de normalisation. Étant commode de travailler entre espace de Hilbert, nous utilisons les asymptotiques (1.2.1) et (1.2.14) pour introduire la suite $\widetilde{\lambda}_{a,n}(q)$ telle que

$$\lambda_{a,n}(q) = \left(n + \frac{a}{2}\right)^2 \pi^2 + \int_0^1 q(t)dt - a(a+1) + \widetilde{\lambda}_{a,n}(q), \quad n \geq 1,$$

et définir l'application spectrale $\lambda^a \times \kappa^a : L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \to \mathbb{R} \times \ell^\infty_{\mathbb{R}} \times \ell^\infty_{\mathbb{R}}$ par

$$\left[\lambda^a \times \kappa^a\right](q) = \left(\int_0^1 q(t)dt, \left(\widetilde{\lambda}_{a,n}(q)\right)_{n\geq 1}, \left(n\kappa_{a,n}(q)\right)_{n\geq 1}\right). \tag{1.4.1}$$

La régularité de $\lambda^a \times \kappa^a$ s'obtient de la même manière que dans [PT87] (voir aussi [GR88] dans le cas $a = 1$). Donnons ce résultat sous la forme suivante :

Théorème 1.4.1. *L'application $\lambda^a \times \kappa^a$ est réelle-analytique de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ à valeurs dans $\mathbb{R} \times \ell^\infty_{\mathbb{R}} \times \ell^\infty_{\mathbb{R}}$. Sa différentielle est donnée par*

$$d_q(\lambda^a \times \kappa^a)(v) = \left(\langle 1, v\rangle, \left(\left\langle \nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n}, v\right\rangle\right)_{n\geq 1}, \left(\langle n\nabla_q \kappa_{a,n}, v\rangle\right)_{n\geq 1}\right).$$

Rappelons à nouveau que l'espace d'arrivée de l'application spectrale n'est pas optimal. L'amélioration de ce résultat passe par la construction d'opérateurs de transformations.

Mais avant cela, passons au second problème spectral étudié : celui associé à l'opérateur de AKNS « radial » ou singulier.

Chapitre 2

L'opérateur AKNS « radial »

Pour des potentiels $(p, q) \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, le problème considéré est le suivant

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix} + V(x) \right) Y(x) = \lambda Y(x), \quad x \in [0,1], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.0.1}$$

où $Y = (Y_1, Y_2)$ et

$$V(x) = \begin{bmatrix} -q(x) & p(x) \\ p(x) & q(x) \end{bmatrix}, \tag{2.0.2}$$

avec les conditions de bord suivantes

$$Y_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad Y(1) \cdot u_\beta = 0 \quad \text{où} \quad u_\beta = \begin{bmatrix} \sin\beta \\ \cos\beta \end{bmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.0.3}$$

Le problème (2.0.1)-(2.0.3) est appelé problème de type AKNS « radial » ou singulier. C'est un problème aux valeurs propres pour l'opérateur sous-jacent.

La résolution du problème direct consiste en la détermination des couples $(\lambda, Y(x))$ solutions du problème et de leurs propriétés, notamment vis-à-vis du couple de potentiels (p, q).

La dénomination radial pour le système AKNS est en réalité héritée de l'opérateur de Dirac dont la décomposition dans le cadre de potentiel radial engendre une famille d'opérateurs définis en (2.0.1) où le potentiel V est défini comme suit

$$V(x) = \begin{bmatrix} q(x) + m & 0 \\ 0 & q(x) - m \end{bmatrix}.$$

Le choix d'étude du problème AKNS singulier a été « guidé » par les difficultés techniques rencontrées lors de l'étude de l'opérateur de Dirac radial (il semble notamment que la trace de la matrice V joue un rôle important, rendant par exemple les calculs plus difficiles même quand $a = 0$).

2.1 Propriétés des solutions

Dans toute cette section, V représente une matrice 2×2 à coefficients dans $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$. Une base élémentaire des solutions de (2.0.1) pour $V = 0$ est donnée par

$$R(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda^a}\begin{bmatrix} j_{a-1}(\lambda x) \\ -j_a(\lambda x)\end{bmatrix}, \quad S(x,\lambda) = \lambda^a \begin{bmatrix} -\eta_{a-1}(\lambda x) \\ \eta_a(\lambda x)\end{bmatrix},$$

où j_a et η_a représentent des fonctions de Bessel sphériques (voir l'annexe A). Cette base de solutions est élémentaire au sens où son wronskien vaut 1. Le nom choisit pour ces solutions reflète leur comportement au voisinage de $x = 0$: $R(x,\lambda)$ est la solution dite « régulière », elle est analytique sur $[0,1] \times \mathbb{C}$; la solution $S(x,\lambda)$ est dite « singulière », elle est analytique sur $(0,1] \times \mathbb{C}$ et explose en $x = 0$.

Pour construire les solutions de (2.0.1), nous utilisons une méthode d'approximations successives de Picard à partir des solutions R et S. Nous suivons d'un point de vue formel Pöschel et Trubowitz [PT87] ; et d'un point de vue plus précis (concernant la singularité en $x = 0$) Guillot et Ralston [GR88] et Blancarte, Grébert et Weder [BGW95].

Considérons $\mathcal{R}$ et $\tilde{\mathcal{S}}$ définies par

$$\mathcal{R}(x,\lambda,V) = \sum_{k\geq 0} R_k(x,\lambda,V), \quad \tilde{\mathcal{S}}(x,\lambda,V) = \sum_{k\geq 0} S_k(x,\lambda,V)$$

avec

$$\begin{cases} R_0(x,\lambda,V) = R(x,\lambda), \\ R_{k+1}(x,\lambda,V) = \displaystyle\int_0^x \mathcal{G}(x,t,\lambda)V(t)R_k(t,\lambda,V)dt, \quad k \in \mathbb{N}; \end{cases} \tag{2.1.1}$$

$$\begin{cases} S_0(x,\lambda,V) = S(x,\lambda), \\ S_{k+1}(x,\lambda,V) = -\displaystyle\int_x^1 \mathcal{G}(x,t,\lambda)V(t)S_k(t,\lambda,V)dt, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

La matrice $\mathcal{G}$ est appelée fonction de Green du problème et définie par

$$\mathcal{G}(x,t,\lambda) = [R(x,\lambda), S(x,\lambda)][R(t,\lambda), S(t,\lambda)]^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

où $[R(x,\lambda), S(x,\lambda)]$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $R(x,\lambda)$ et $S(x,\lambda)$. Rappelons que la matrice $[R(x,\lambda), S(x,\lambda)][R(t,\lambda), S(t,\lambda)]^{-1}$ est la résolvante de système différentiel linéaire (2.0.1) pour $V = 0$.

$\mathcal{G}$ s'exprime malgré tout de façon plus agréable (voir [Bar67]) en

$$\mathcal{G}(x,t,\lambda) = S(x,\lambda)R(t,\lambda)^\top - R(x,\lambda)S(t,\lambda)^\top. \tag{2.1.3}$$

Suit maintenant le résultat escompté :

Lemme 2.1.1. *Les séries définies par (2.1.1) et respectivement par (2.1.2) convergent uniformément sur les bornés de* $[0,1]\times\mathbb{C}\times(L^2_{\mathbb{C}}(0,1))^4$ *et respectivement de* $(0,1]\times\mathbb{C}\times(L^2_{\mathbb{C}}(0,1))^4$ *vers des solutions de (2.0.1). De plus, elles vérifient les équations intégrales*

$$\mathcal{R}(x,\lambda,V) = R(x,\lambda) + \int_0^x \mathcal{G}(x,t,\lambda)V(t)\mathcal{R}(t,\lambda,V)dt,$$
$$\tilde{\mathcal{S}}(x,\lambda,V) = S(x,\lambda) - \int_x^1 \mathcal{G}(x,t,\lambda)V(t)\tilde{\mathcal{S}}(t,\lambda,V)dt,$$

ainsi que les estimations

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}(x,\lambda,V)| &\leq Ce^{|\operatorname{Im}\lambda|x}\left(\frac{x}{1+|\lambda|x}\right)^a, \\ \left|\tilde{\mathcal{S}}(x,\lambda,V)\right| &\leq Ce^{|\operatorname{Im}\lambda|(1-x)}\left(\frac{1+|\lambda|x}{x}\right)^a, \end{aligned}$$

où C *est uniforme par rapport à* V *sur les bornés de* $(L^2_{\mathbb{C}}(0,1))^4$.

Preuve du lemme. Faisons la preuve pour $\mathcal{R}$, elle est semblable pour $\mathcal{S}$. L'estimation des fonctions de Bessel (A.2.1) donne

$$|R(x,\lambda)| \leq Ce^{|\operatorname{Im}\lambda|x}\left(\frac{x}{1+|\lambda|x}\right)^a. \tag{2.1.4}$$

La relation de récurrence (2.1.1) donne

$$R_1(x,\lambda,V) = \int_0^x \mathcal{G}(x,t,\lambda)V(t)R(t,\lambda)dt, \tag{2.1.5}$$

qui, avec (2.1.4) et l'estimation de la résolvante (A.2.9), se majore par

$$|R_1(x,\lambda,V)| \leq C^2e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}\left(\frac{x}{1+|\lambda|x}\right)^a\int_0^x |V(t)|dt,$$

Par itérations successives puis par récurrence, il vient pour tout entier n

$$|R_n(x,\lambda,V)| \leq \frac{C^{n+1}}{n!}e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}\left(\frac{x}{1+|\lambda|x}\right)^a\left(\int_0^x |V(t)|dt\right)^n,$$

ce qui prouve la convergence uniforme de la série $\mathcal{R}$ sur les bornés de $[0,1]\times\mathbb{C}\times(L^2_{\mathbb{C}}(0,1))^4$, ainsi que la majoration. L'équation intégrale découle alors de (2.1.1). □

Le wronskien de $\mathcal{R}$, $\tilde{\mathcal{S}}$, noté $\mathcal{W}(\lambda, V)$ et déterminé par

$$\mathcal{W}(\lambda, V) := \mathcal{W}\left(\mathcal{R}(x,\lambda,V), \tilde{\mathcal{S}}(x,\lambda,V)\right) = \det\left(\mathcal{R}(x,\lambda,V), \tilde{\mathcal{S}}(x,\lambda,V)\right),$$

est, d'une part, indépendant de x (par la structure de l'équation différentielle linéaire (2.0.1)) et, d'autre part, non nul puisque ces deux solutions de (2.0.1) ont un comportement inverse au voisinage de 0 ; nous pouvons définir la solution dite singulière par

$$\mathcal{S}(x,\lambda,V) = \frac{\tilde{\mathcal{S}}(x,\lambda,V)}{\mathcal{W}(\lambda,V)}.$$

Remarque 7. Les équations intégrales impliquent les estimations suivantes

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}(x,\lambda,V) - R(x,\lambda)| &\leq Ce^{|\operatorname{Im}\lambda|x}\left(\frac{x}{1+|\lambda|x}\right)^a \int_0^x |V(t)|dt, \\ \left|\tilde{\mathcal{S}}(x,\lambda,V) - S(x,\lambda)\right| &\leq Ce^{|\operatorname{Im}\lambda|(1-x)}\left(\frac{1+|\lambda|x}{x}\right)^a \int_x^1 |V(t)|dt, \end{aligned}$$

où C est uniforme par rapport à V sur les bornés de $\left(L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\right)^4$. Ces estimations permettent d'obtenir, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé,

$$\mathcal{W}(\lambda,V) = \mathcal{W}(\lambda,0) + o(1) = 1 + o(1), \quad V \to 0. \tag{2.1.6}$$

Remarque 8. Le comportement au voisinage de $x = 0$ de $\mathcal{R}$ hérité de celui de R et la relation avec le wronskien donnent les conditions aux limites en 0 suivantes

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^a}\mathcal{R}(x,\lambda,V) = \frac{1}{(2a-1)!!}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \tag{2.1.7}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \mathcal{S}(x,\lambda,V) = (2a-1)!!\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}. \tag{2.1.8}$$

La condition de bord $Y_2(0) = 0$ permet donc de sélectionner la solution « physique » au sens où celle-ci reste bornée au voisinage de l'origine.

La convergence uniforme des séries donnée par le lemme précédent permet d'obtenir la régularité des solutions $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$. Nous pouvons énoncer le résultat de régularité suivant

Proposition 2.1.1 (Analyticité des solutions)**.**

(a) Pour tout $x \in [0,1]$, $\mathcal{R}(x,\lambda,V)$ est analytique sur $\mathbb{C} \times \left(L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\right)^4$. De plus, elle est réelle sur $\mathbb{R} \times \left(L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\right)^4$.

(b) L'application

$$\mathcal{R} : (\lambda, V) \mapsto \mathcal{R}(\cdot, \lambda, V)$$

est analytique de $\mathbb{C} \times \left(L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\right)^4$ *dans* $H^1([0,1], \mathbb{C}^2)$.

(c) Pour tout $x \in (0,1]$, $\mathcal{S}(x, \lambda, V)$ *est analytique sur* $\mathbb{C} \times \left(L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\right)^4$.

Il nous est maintenant possible de parler de la différentielle de $\mathcal{R}$ par rapport à V. Son calcul est semblable à celui fait dans [PT87] ; formellement il suffit de différentier l'équation (2.0.1) et d'inverser la dérivation par rapport à x et par rapport à V. La justification se fait par densité en supposant V continu. Nous obtenons :

Proposition 2.1.2 (Différentielle et gradient de la solution régulière)**.** *Pour tout* $v \in \left(L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\right)^4$, *nous avons*

$$\left[d_V \mathcal{R}(x, \lambda, V)\right](v) = \int_0^x \tilde{\mathcal{G}}(x, t, \lambda, V) v(t) \mathcal{R}(t, \lambda, V) dt, \tag{2.1.9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}(x, \lambda, V) = -\left[d_V \mathcal{R}(x, \lambda, V)\right](\mathrm{Id}), \tag{2.1.10}$$

où

$$\tilde{\mathcal{G}}(x, t, \lambda, V) = [\mathcal{R}(x, \lambda, V), \mathcal{S}(x, \lambda, V)][\mathcal{R}(t, \lambda, V), \mathcal{S}(t, \lambda, V)]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encore une fois, pour simplifier l'écriture et les calculs ultérieurs, nous remarquons l'identité

$$\tilde{\mathcal{G}}(x, t, \lambda, V) = \mathcal{S}(x, \lambda, V)\mathcal{R}(t, \lambda, V)^\top - \mathcal{R}(x, \lambda, V)\mathcal{S}(t, \lambda, V)^\top.$$

Notations. Les solutions de (2.0.1) étant vectorielles, nous choisissons de nommer les différentes composantes par :

$$\mathcal{R}(x, \lambda, p, q) = \begin{bmatrix} Y_1(x, \lambda, p, q) \\ Z_1(x, \lambda, p, q) \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{S}(x, \lambda, p, q) = \begin{bmatrix} Y_2(x, \lambda, p, q) \\ Z_2(x, \lambda, p, q) \end{bmatrix}.$$

Introduisons aussi les éléments

$$a(x, \lambda, p, q) = -\Big[Y_1(x, \lambda, p, q) Z_2(x, \lambda, p, q) + Z_1(x, \lambda, p, q) Y_2(x, \lambda, p, q)\Big],$$

$$b(x, \lambda, p, q) = \Big[Y_1(x, \lambda, p, q) Y_2(x, \lambda, p, q) - Z_1(x, \lambda, p, q) Z_2(x, \lambda, p, q)\Big].$$

Nous précisons dans le cadre AKNS, la proposition précédente avec le corollaire ci-après. Mais tout d'abord définissons les gradients d'une fonction à plusieurs variables dans un espace de Hilbert.

Définition 2.1.1 (Gradients-$L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$)**.**
Soit $f : (p,q) \mapsto f(p,q)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(H \times H, \mathbb{C})$ où H est un espace de Hilbert. La différentielle de f en (p,q), notée $d_{p,q}f$ est une application linéaire continue sur $H \times H$ qu'il est possible d'écrire sous la forme

$$d_{p,q}f(v_1,v_2) = D_pf(v_1) + D_qf(v_2), \quad (v_1,v_2) \in H \times H.$$

D_pf (resp. D_qf) est la différentielle partielle de f par rapport à p (resp. q).

Nous appellerons gradient partiel de f par rapport à p (resp. q), noté $\dfrac{\partial f}{\partial p}$ (resp. $\dfrac{\partial f}{\partial q}$) le représentant de Riesz de la forme linéaire D_pf (resp. D_qf). C'est à dire que nous avons

$$D_pf(v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial p}, v \right\rangle_H, \quad \left(\text{ resp. } D_qf(v) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial q}, v \right\rangle_H \right), \quad \forall v \in H.$$

Le vecteur $\nabla_{p,q}f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial p}, \dfrac{\partial f}{\partial q} \right)$ sera appelé le gradient-$L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ de f.

Remarque 9. Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, nous utiliserons la même notation pour le gradient-$L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, où chaque gradient partiel aura pour coordonnées les gradients partiels de chaque composante de f suivant la même variable.

Corollaire 2.1.1 (Gradient pour AKNS)**.** *Pour tout* $(p,q) \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$*, nous avons*

$$\left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p}(x,\lambda,p,q)\right](t) = \mathbb{1}_{[0,x]}(t)\Big[\mathcal{S}(x,\lambda,p,q)\left[2Y_1(t,\lambda,p,q)Z_1(t,\lambda,p,q)\right] + \mathcal{R}(x,\lambda,p,q)a(t,\lambda,p,q)\Big], \quad (2.1.11)$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q}(x,\lambda,p,q)\right](t) = \mathbb{1}_{[0,x]}(t)\Big[\mathcal{S}(x,\lambda,p,q)\left[Z_1(t,\lambda,p,q)^2 - Y_1(t,\lambda,p,q)^2\right] + \mathcal{R}(x,\lambda,p,q)b(t,\lambda,p,q)\Big], \quad (2.1.12)$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}(x,\lambda,p,q)\right] = \int_0^x \Big[-\mathcal{S}(x,\lambda,p,q)\left[Y_1(t,\lambda,p,q)^2 + Z_1(t,\lambda,p,q)^2\right] + \mathcal{R}(x,\lambda,p,q)\left[Y_1(t,\lambda,p,q)Y_2(t,\lambda,p,q) + Z_1(t,\lambda,p,q)Z_2(t,\lambda,p,q)\right]\Big]dt. \quad (2.1.13)$$

2.2 Spectre : simplicité et localisation

La condition en $x = 0$ nous permet de sélectionner une solution colinéaire à $\mathcal{R}$. La condition en $x = 1$ entraîne la quantification du spectre, c'est à dire une limite dans le choix de valeurs propres permettant la résolution du problème (2.0.1)-(2.0.3).

Notations. Introduisons $D(\lambda, V)$ définie par la condition de bord en $x = 1$ via :

$$D(\lambda, V) = \mathcal{R}(1, \lambda, V) \cdot u_\beta. \tag{2.2.1}$$

Pour tout $u = (a, b) \in \mathbb{C}^2$, définissons le vecteur $u^\perp$ par

$$(a, b)^\perp = (b, -a). \tag{2.2.2}$$

En particulier, si u est réel, u et $u^\perp$ sont orthogonaux.

Nous pouvons dès lors obtenir une nouvelle formulation pour les valeurs propres du problème :

Proposition 2.2.1 (Simplicité du spectre)**.**
D est analytique par rapport à λ et V. Les racines de $\lambda \mapsto D(\lambda, V)$ sont exactement les valeurs propres du problème (2.0.1)-(2.0.3).
Si de plus la matrice V est réelle, elles sont simples.

Preuve. L'analyticité de D provient de celle de $\mathcal{R}$. Les solutions $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ forment une base pour les solutions de (2.0.1), il en découle ainsi l'équivalence entre valeurs propres du système et zéros de $\lambda \mapsto D(\lambda, V)$.
Supposons maintenant V à valeurs réelles et considérons λ_0 une valeur propre du problème. La simplicité des valeurs propres repose sur l'identité

$$\|\mathcal{R}(\cdot, \lambda_0, V)\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)} = -(\mathcal{R}(1, \lambda_0, V) \cdot {u_\beta}^\perp) \frac{\partial D}{\partial \lambda}(\lambda_0, V). \tag{2.2.3}$$

En effet, d'après (2.1.9) et (2.1.10) nous avons

$$\frac{\partial D}{\partial \lambda}(\lambda_0, V) = -\left(\mathcal{S}(1, \lambda_0, V) \cdot u_\beta\right) \|\mathcal{R}(\cdot, \lambda_0, V)\|^2_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)},$$

il suffit ensuite de recalculer le wronskien de $\mathcal{R}(1, \lambda_0, V)$ et $\mathcal{S}(1, \lambda_0, V)$ exprimés dans la base orthonormée $\left\{u_\beta, {u_\beta}^\perp\right\}$ pour obtenir la relation :

$$\left(\mathcal{R}(1, \lambda_0, V) \cdot {u_\beta}^\perp\right) \left(\mathcal{S}(1, \lambda_0, V) \cdot u_\beta\right) = 1.$$

□

À partir de ce point, la matrice V est définie par (2.0.2), correspondant à l'opérateur de type AKNS.

Cherchons maintenant à préciser les valeurs propres en les localisant. Pour ce faire nous suivons la méthode usuelle, présentée par exemple dans [PT87] : grâce à des estimations montrant que pour $|\lambda|$ grand, la solution $\mathcal{R}(x,\lambda,V)$ est proche de la solution $R(x,\lambda)$ (dans un sens à préciser) et grâce à un argument de fonctions analytiques (théorème de Rouché), les valeurs propres du problème (2.0.1)-(2.0.3) sont « proches » de celles pour $V=0$. Or, contrairement au cas de Schrödinger, la fonction de Green pour l'opérateur considéré n'a pas de décroissance explicite par rapport à $|\lambda|$ quand λ est grand. En comparant les estimations du lemme 2.1.1 et celles de la remarque 7, nous pouvons constater que le comportement vis-à-vis de λ est le même.

Il nous faut donc travailler un peu plus pour obtenir un résultat. Cette étape supplémentaire est inhérente à l'opérateur AKNS, en effet même dans le cas régulier ($a=0$, voir [GG93]), il est nécessaire de demander de la régularité sur le potentiel V pour avoir de la décroissance suivant λ et ainsi discuter la localisation des valeurs propres.

2.2.1 Estimations $H^1_{\mathbb{C}}(0,1)$

Les estimations qui suivent sont obtenues pour des potentiels V à valeurs complexes. Ceci nous permet un peu de liberté, notamment pour obtenir plus de régularité des valeurs propres dans le cas réel (réelle-analyticité).

Cette section est essentiellement calculatoire. Elle met en jeu diverses propriétés des fonctions de Bessel. Le but étant de conserver le maximum d'information dans les majorations (comportement asymptotique pour $|\lambda|\to\infty$, comportement proche de $x=0$ et cela uniformément par rapport aux différents paramètres).

Théorème 2.2.1. *Soit* $(p,q)\in\left(H^1_{\mathbb{C}}(0,1)\right)^2$, *alors*

$$\left|\mathcal{R}(x,\lambda,p,q)-R(x,\lambda)\right|\leq C\|V\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)}\left[\frac{x}{1+|\lambda x|}\right]^{a+1}\times\ln\left[2+|\lambda x|\right]e^{|\operatorname{Im}\lambda|x+C\|V\|_2},\quad(2.2.4)$$

uniformément sur $[0,1]\times\mathbb{C}\times\left(H^1_{\mathbb{C}}(0,1)\times H^1_{\mathbb{C}}(0,1)\right)$, *où* $\|V\|^2_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)}=\|p\|^2_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)}+\|q\|^2_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)}$.

Preuve du théorème 2.2.1.
L'idée de la preuve repose sur la démonstration de la convergence de la série définissant $\mathcal{R}$: une majoration semblable à (2.2.4) est obtenue pour

$R_1(x,\lambda,p,q)$, puis l'application de la relation de récurrence (2.1.1) la propage à $R_n(x,\lambda,p,q)$ pour tout entier $n \geq 1$. La sommation de ces majorations abouti alors sur l'estimation annoncée.

Avec la relation (2.1.3), l'expression

$$R_1(x,\lambda,p,q) = \int_0^x \mathcal{G}(x,t,\lambda)V(t)R_0(t,\lambda)dt$$

devient :

$$\begin{aligned}
R_1(x,\lambda,p,q) &= S_0(x,\lambda)\int_0^x R_0(t,\lambda)^\top V(t)R_0(t,\lambda)dt \\
&\quad - R_0(x,\lambda)\int_0^x S_0(t,\lambda)^\top V(t)R_0(t,\lambda)dt \\
&= S_0(x,\lambda)\int_0^x \Big[q(t)\Big(R_0^2(t,\lambda)^2 - R_0^1(t,\lambda)^2\Big) \\
&\qquad\qquad + 2p(t)R_0^1(t,\lambda)R_0^2(t,\lambda)\Big]dt \\
&\quad - R_0(x,\lambda)\int_0^x \Big[q(t)\Big(S_0^2(t,\lambda)R_0^2(t,\lambda) - S_0^1(t,\lambda)R_0^1(t,\lambda)\Big) \\
&\qquad\qquad + p(t)\Big(S_0^1(t,\lambda)R_0^2(t,\lambda) + S_0^2(t,\lambda)R_0^1(t,\lambda)\Big)\Big]\,dt.
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire $R_1(x,\lambda,p,q) = \frac{1}{\lambda^a}\left[X(q) + Y(p)\right]$ où

$$\begin{aligned}
X(q) &= \begin{bmatrix} -\eta_{a-1}(\lambda x) \\ \eta_a(\lambda x)\end{bmatrix}\int_0^x \Big\{[j_a(\lambda t)]^2 - [j_{a-1}(\lambda t)]^2\Big\}q(t)dt \\
&\quad + \begin{bmatrix} j_{a-1}(\lambda x) \\ -j_a(\lambda x)\end{bmatrix}\int_0^x \Big[\eta_a(\lambda t)\, j_a(\lambda t) - \eta_{a-1}(\lambda t)\, j_{a-1}(\lambda t)\Big]q(t)dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y(p) &= \begin{bmatrix} \eta_{a-1}(\lambda x) \\ -\eta_a(\lambda x)\end{bmatrix}\int_0^x \Big[2j_{a-1}(\lambda t)\, j_a(\lambda t)\Big]p(t)dt \\
&\quad - \begin{bmatrix} j_{a-1}(\lambda x) \\ -j_a(\lambda x)\end{bmatrix}\int_0^x \Big[\eta_{a-1}(\lambda t)\, j_a(\lambda t) + \eta_a(\lambda t)\, j_{a-1}(\lambda t)\Big]p(t)dt.
\end{aligned}$$

Majoration de $X(q)$:

L'expression de $X(q)$ fait intervenir deux intégrales que nous définissons par :

$$\begin{aligned}
I(q) &:= \int_0^x \Big\{[j_{a-1}(\lambda t)]^2 - [j_a(\lambda t)]^2\Big\}q(t)dt, \\
J(q) &:= \int_0^x \Big[\eta_{a-1}(\lambda t)\, j_{a-1}(\lambda t) - \eta_a(\lambda t)\, j_a(\lambda t)\Big]q(t)dt.
\end{aligned}$$

En les intégrant par parties, il vient

$$I(q) = \frac{1}{\lambda}\left\{ j_{a-1}(\lambda x)\, j_a(\lambda x)\, q(x) - \int_0^x j_{a-1}(\lambda t)\, j_a(\lambda t)\, q'(t)dt \right\},$$
$$J(q) = \frac{1}{\lambda}\left\{ j_a(\lambda x)\, \eta_{a-1}(\lambda x)\, q(x) - \int_0^x j_a(\lambda t)\, \eta_{a-1}(\lambda t)\, q'(t)dt \right\}.$$

Ainsi

$$X(q) = \frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} 0 \\ -j_a(\lambda x) \end{bmatrix} q(x) + \frac{1}{\lambda}\int_0^x \begin{bmatrix} -\eta_{a-1}(\lambda x)\, j_{a-1}(\lambda t) + j_{a-1}(\lambda x)\, \eta_{a-1}(\lambda t) \\ \eta_a(\lambda x)\, j_{a-1}(\lambda t) - j_a(\lambda x)\, \eta_{a-1}(\lambda t) \end{bmatrix} j_a(\lambda t)\, q'(t)dt.$$

Les estimations (A.2.1),(A.2.9) et l'inégalité de Sobolev (cf. [Bre83])

$$\|q\|_\infty \leq C\|q\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)}$$

donnent

$$|X(q)| \leq \frac{C}{|\lambda|}\left(\frac{|\lambda x|}{1+|\lambda x|}\right)^{a+1} e^{|\operatorname{Im}\lambda| x}\|q\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)}. \tag{2.2.5}$$

Majoration de $Y(p)$:

Comme précédemment pour $X(p)$, introduisons

$$K(p) := \int_0^x \Big[2 j_{a-1}(\lambda t)\, j_a(\lambda t)\Big] p(t)dt,$$
$$L(p) := \int_0^x \Big[\eta_{a-1}(\lambda t)\, j_a(\lambda t) + \eta_a(\lambda t)\, j_{a-1}(\lambda t)\Big] p(t)dt.$$

En utilisant les notations des lemmes A.4.1 et A.4.2, une intégration par parties donne :

$$Y(p) = \begin{bmatrix} \eta_{a-1}(\lambda x) \\ -\eta_a(\lambda x) \end{bmatrix}\left(\left[\frac{1}{\lambda}F_1(\lambda t)p(t)\right]_0^x - \frac{1}{\lambda}\int_0^x F_1(\lambda t)p'(t)dt\right) - \begin{bmatrix} j_{a-1}(\lambda x) \\ -j_a(\lambda x) \end{bmatrix}\left(\left[\frac{1}{\lambda}F_2(\lambda t)p(t)\right]_0^x - \frac{1}{\lambda}\int_0^x F_2(\lambda t)p'(t)dt\right).$$

Nous pouvons maintenant déterminer les estimations sur $Y(p)$.

Pour $|\lambda x| \leq 1$. Grâce aux estimations A.2.1,A.2.2 et aux points *(i)* des lemmes A.4.1 et A.4.2, il vient :

$$|Y(p)| \leq \frac{C}{|\lambda|}\left(\frac{|\lambda x|}{1+|\lambda x|}\right)^{a+1} \|p\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)} e^{|\operatorname{Im}\lambda| x}.$$

Pour $|\lambda x| \geq 1$. Considérons seulement la seconde composante du $Y(p)$, la preuve sera identique pour la première. Les termes à estimer sont de la forme :

$$g(x,t) := \eta_a(\lambda x)\, F_1(\lambda t) - j_a(\lambda x)\, F_2(\lambda t), \quad 0 \leq t \leq x.$$

Si $|\lambda t| \leq 1$.
Comme pour le cas $|\lambda x| \leq 1$, suit l'estimation

$$|g(x,t)| \leq 2C \left(\frac{|\lambda x|}{1+|\lambda x|}\right)^{a+1} e^{|\operatorname{Im}\lambda| x}.$$

Si $|\lambda t| \geq 1$.
Grâce aux points *(ii)* des lemmes A.4.1 et A.4.2 et aux expressions (A.1.5) et (A.1.6), il vient :

$$\begin{aligned}
&g(x,t) = \eta_a(\lambda x) r_a(\lambda t) \\
&- a\left[\cos\left(\lambda x - \frac{a\pi}{2}\right) \operatorname{ci}(2\lambda t) + \sin\left(\lambda x - \frac{a\pi}{2}\right) \operatorname{Si}(2\lambda t)\right] P_a(\lambda x) \\
&+ a\left[\sin\left(\lambda x - \frac{a\pi}{2}\right) \operatorname{ci}(2\lambda t) - \cos\left(\lambda x - \frac{a\pi}{2}\right) \operatorname{Si}(2\lambda t)\right] I_a(\lambda x) \\
&\quad + \left(P_a(\lambda x) p_a(\lambda t) - I_a(\lambda x) q_a(\lambda t)\right) \cos\left[\lambda(x-2t) - \frac{a\pi}{2}\right] \\
&\quad - \left(P_a(\lambda x) q_a(\lambda t) + I_a(\lambda x) p_a(\lambda t)\right) \sin\left[\lambda(x-2t) - \frac{a\pi}{2}\right],
\end{aligned}$$

les fonctions ci et Si étant définies dans ces lemmes. (Pour alléger, l'indéterminée X est remplacée par $1/X$.) Le premier terme se majore aisément par $Ce^{|\operatorname{Im}\lambda| x}$ grâce à (A.2.2). Les deux derniers termes ci-dessus se majorent uniformément par $Ce^{|\operatorname{Im}\lambda|(x-2t)}$ sur le domaine considéré. Reste à estimer le terme

$$h(x,t) := \cos\left(\lambda x - \frac{a\pi}{2}\right) \operatorname{ci}(2\lambda t) + \sin\left(\lambda x - \frac{a\pi}{2}\right) \operatorname{Si}(2\lambda t).$$

Or, d'après [wola] et [wolb] nous avons

$$\begin{aligned}
\operatorname{ci}(z) &= -\gamma - \frac{\log(z^2)}{2} + \frac{\sin z}{z}\left(1 + \mathcal{O}_1\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \\
&\quad - \frac{\cos z}{z^2}\left(1 + \mathcal{O}_2\left(\frac{1}{z^2}\right)\right), \\
\operatorname{Si}(z) &= \frac{\pi\sqrt{z^2}}{2z} - \frac{\cos z}{z}\left(1 + \mathcal{O}_1\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \\
&\quad - \frac{\sin z}{z^2}\left(1 + \mathcal{O}_2\left(\frac{1}{z^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, il vient

$$\begin{aligned} h(x,t) = &- \left[\gamma + \frac{\log(2\lambda t)^2}{2}\right]\cos\left(\lambda x - \frac{a\pi}{2}\right) \\ &+ \frac{\pi\sqrt{(2\lambda t)^2}}{2\lambda t}\sin\left(\lambda x - \frac{a\pi}{2}\right) \\ &- \frac{1}{2\lambda t}\left(1 + \mathcal{O}_1\left(\frac{1}{(2\lambda t)^2}\right)\right)\sin\left[\lambda(x-2t) - \frac{a\pi}{2}\right] \\ &- \frac{1}{(2\lambda t)^2}\left(1 + \mathcal{O}_2\left(\frac{1}{(2\lambda t)^2}\right)\right)\cos\left[\lambda(x-2t) - \frac{a\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Les trois dernier termes se majorent aussi uniformément par $Ce^{|\operatorname{Im}\lambda|(x-2t)}$ sur le domaine considéré ; le premier terme lui est majoré par $C\ln|\lambda t|e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}$.

En conclusion, nous avons pour $Y(p)$ l'estimation

$$|Y(p)| \leq \frac{C}{|\lambda|}\left(\frac{|\lambda x|}{1+|\lambda x|}\right)^{a+1} \ln\left[2+|\lambda|x\right]\|p\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)}e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}. \tag{2.2.6}$$

Les estimations (2.2.5)-(2.2.6) et la relation de concavité

$$\frac{|x|+|y|}{2} \leq \sqrt{\frac{|x|^2+|y|^2}{2}} \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

donnent

$$|R_1(x,\lambda,p,q)| \leq \frac{C}{|\lambda|^{a+1}}\left(\frac{|\lambda x|}{1+|\lambda x|}\right)^{a+1} \ln\left[2+|\lambda|x\right]\|V\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)}e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}. \tag{2.2.7}$$

Par itérations successives puis par récurrence, la relation (2.1.1) combinée avec (2.2.7) donne pour tout entier n

$$\begin{aligned} |R_{n+1}(x,\lambda,V)| \leq \frac{1}{|\lambda|^{a+1}}\left(\frac{|\lambda|x}{1+|\lambda|x}\right)^{a+1} &\ln\left[2+|\lambda|x\right]\|V\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)}e^{|\operatorname{Im}\lambda|x} \\ &\times \frac{C^{n+1}}{n!}\left(\int_0^x \big(|p(t)|+|q(t)|\big)dt\right)^n. \end{aligned}$$

En sommant cette estimation, la relation (2.2.4) suit. □

Remarque 10. L'estimation de $R_1(x,\lambda,p,q)$ est en fait un peu plus précise :

$$R_1(x,\lambda,p,q) = -\frac{1}{\lambda^a}\begin{bmatrix}\eta_{a-1}(\lambda x)\\ -\eta_a(\lambda x)\end{bmatrix}K(p) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{|\lambda x|}{1+|\lambda x|}\right)^{a+1}\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}}{|\lambda|^{a+1}}\right).$$

L'idéal serait de se débarrasser si possible du terme logarithmique provenant de l'estimation de $K(p)$. Cela semble relativement ardu : il faudrait contrôler à chaque itération le terme correspondant et obtenir son comportement asymptotique après sommation. D'autre part rien n'empêche a priori ce terme de se comporter effectivement de cette manière.

2.2.2 Estimations $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$

Pour passer des estimations $H^1_{\mathbb{C}}(0,1)$ aux estimations $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, nous devons utiliser un lemme auxiliaire (cf. [AG96], [Mis79] et [GKP02]).

Lemme 2.2.1. *Soit $V_0 \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$; soit $r_0 \geq 0$ et soit $V_\epsilon \in H^1_{\mathbb{C}}(0,1) \times H^1_{\mathbb{C}}(0,1)$ tel que $\|V_0 - V_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$. Alors, pour tout $V \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ tel que $\|V - V_0\|_2 < r_0$ et pour tout $(x,\lambda) \in [0,1] \times \mathbb{C}^*$, nous avons*

$$|\mathcal{R}(x,\lambda,p,q) - R(x,\lambda)| \leq C\left(r_0 + \varepsilon + \frac{\ln|\lambda|}{|\lambda|}\|V_\varepsilon\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)}\right) \times \left(\frac{x}{1+|\lambda x|}\right)^a e^{|\operatorname{Im}\lambda|x + C\|V\|_2}. \quad (2.2.8)$$

Preuve du lemme. Comme $V_\epsilon \in H^1_{\mathbb{C}}(0,1) \times H^1_{\mathbb{C}}(0,1)$, l'estimation (2.2.7) obtenue dans la preuve du théorème 2.2.1 devient

$$|R_1(x,\lambda,V_\varepsilon)| \leq \frac{C}{|\lambda|^{a+1}}\left(\frac{|\lambda x|}{1+|\lambda x|}\right)^{a+1} \ln[2+|\lambda|x]\|V_\varepsilon\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)} e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}.$$

En utilisant $\|V_0 - V_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$ et $\|V - V_0\|_2 < r_0$ dans (2.1.5), les estimations (A.2.9) et (A.2.1) entraînent

$$|R_1(x,\lambda,p,q) - R_1(x,\lambda,V_\varepsilon)| \leq \frac{C}{|\lambda|^a}\left(\frac{|\lambda x|}{1+|\lambda x|}\right)^a (r_0+\varepsilon) e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}.$$

En combinant ces deux inégalités, nous obtenons

$$|R_1(x,\lambda,p,q)| \leq C\left(\frac{x}{1+|\lambda x|}\right)^a \left(r_0 + \varepsilon + \frac{\ln[2+|\lambda|x]}{|\lambda|}\|V_\varepsilon\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)}\right) e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}.$$

L'itération de cette majoration avec la relation de récurrence (2.1.1) nous permet d'avoir pour $n \in \mathbb{N}$

$$|R_{n+1}(x,\lambda,p,q)| \leq \frac{C^{n+1}}{n!}\left(r_0 + \varepsilon + \frac{\ln[2+|\lambda|x]}{|\lambda|}\|V_\varepsilon\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)}\right) \times \left(\frac{x}{1+|\lambda x|}\right)^a e^{|\operatorname{Im}\lambda|x}\left(\int_0^1 |V(t)|dt\right)^n,$$

ce qui, après sommation, donne l'estimation (2.2.8). □

Grâce au Lemme 2.2.1, nous obtenons pour la solution régulière l'estimation basique suivante :

Proposition 2.2.2. *Soit* $(p,q) \in \left(L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\right)^2$, *alors uniformément sur* $[0,1]$,

$$\mathcal{R}(x,\lambda,p,q) = R(x,\lambda) + o\left[\left(\frac{x}{1+|\lambda x|}\right)^a e^{|\operatorname{Im}\lambda| x}\right], \quad |\lambda| \to \infty. \tag{2.2.9}$$

Preuve de la proposition. D'après le Lemme 2.2.1 avec $r_0 = 0$, pour un $\delta > 0$ donné, il existe $\lambda_\delta > 0$ tel que

$$|\mathcal{R}(x,\lambda,p,q) - R(x,\lambda)| \leq \delta \left(\frac{x}{1+|\lambda x|}\right)^a e^{|\operatorname{Im}\lambda| x + C\|V\|_2}.$$

□

Remarquons au passage que l'uniformité par rapport aux potentiels (p,q) sur les bornés de $\left(H^1_{\mathbb{C}}(0,1)\right)^2$ est perdue. Nous n'avons plus a priori qu'une estimation ponctuelle. En réalité, c'est le résultat du Lemme 2.2.1 qui est important : l'estimation obtenue est localement uniforme. C'est à dire que pour tout couple de potentiel $(p,q) \in \left(L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\right)^2$, il existe un « petit »voisinage sur lequel l'estimation (2.2.9) est uniforme.

2.2.3 Localisation du spectre

Le lemme qui va suivre est fondamental pour deux raisons. La première, il permet d'obtenir un comportement asymptotique des valeurs propres ; la seconde, nous obtenons une numérotation localement uniforme par rapport à V de ces valeurs propres, c'est à dire que nous n'avons pas de problème pour déterminer l'origine de leur numérotation.

Théorème 2.2.2 (Lemme de comptage)**.**
Soit $(p_0,q_0) \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *et un entier* $N_0 > 0$ *tels que pour tout* $(p,q) \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *avec* $\|(p,q) - (p_0,q_0)\|_{L^2_{\mathbb{C}}(0,1)} < \varepsilon$, *les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- *Pour tout* $|n| > N_0$, $\lambda \mapsto D(\lambda,p,q)$ *a exactement une racine dans la boule ouverte* $\left|\lambda - \left(n\pi + \frac{a\pi}{2} + \beta\right)\right| < \frac{\pi}{2}$,
- $\lambda \mapsto D(\lambda,p,q)$ *possède exactement* $2N_0 + 1 - a$ *racines comptées avec multiplicité dans la boule ouverte* $\left|\lambda - \left(\frac{a\pi}{2} + \beta\right)\right| < \left(N_0 + \frac{1}{2}\right)\pi$,
- $\lambda \mapsto D(\lambda,p,q)$ *n'a aucune autre racine ailleurs.*

Preuve du lemme 2.2.2. Soit $\varepsilon > 0$, d'après l'estimation (2.2.4) et les notations du Lemme 2.2.1 nous avons

$$|\mathcal{R}(1,\lambda,p,q) - R(1,\lambda)| \leq \frac{Ce^{|\operatorname{Im}\lambda|+C\|V\|_2}}{|\lambda|^a}\left(2\varepsilon + \frac{\ln|\lambda|}{|\lambda|}\|V_\varepsilon\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)}\right).$$

L'expression des fonctions de Bessel via la relation (A.1.5) implique l'asymptotique uniforme sur $|\lambda| > 1$ suivante

$$R(1,\lambda) = \frac{1}{\lambda^a}\begin{bmatrix}\cos\left(\lambda - \frac{a\pi}{2}\right)\\ -\sin\left(\lambda - \frac{a\pi}{2}\right)\end{bmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|^{a+1}}\right), \tag{2.2.10}$$

ce qui, avec l'estimation précédente, donne

$$\left|\lambda^a D(\lambda,p,q) - \sin\left(\beta + \frac{a\pi}{2} - \lambda\right)\right| \leq \left(2\varepsilon + \frac{\ln|\lambda|}{|\lambda|}\|V_\varepsilon\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)} + \frac{1}{|\lambda|}\right) \times Ce^{C\|V\|_2}e^{|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

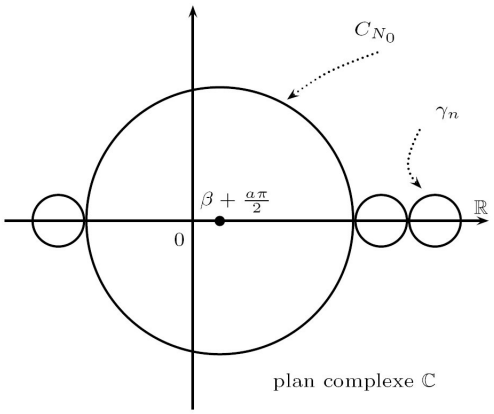
Définissons les contours suivants :

– Pour $n \in \mathbb{Z}$, le cercle γ_n d'équation

$$\left|\lambda - \left(n\pi + \frac{a\pi}{2} + \beta\right)\right| = \frac{\pi}{2}.$$

– Pour $n \in \mathbb{N}$, le cercle C_n d'équation

$$\left|\lambda - \left(\frac{a\pi}{2} + \beta\right)\right| = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi.$$



Choisissons maintenant $\varepsilon > 0$ tel que

$$Ce^{C\|V\|_2}2\varepsilon < \frac{1}{8}.$$

D'autre part sur chacun des contours considérés, la minoration

$$|\lambda| > \left(N_0 + \frac{1}{2}\right)\pi - \left|\frac{a\pi}{2} + \beta\right| \quad \text{(voir le schéma ci-dessus)}$$

et la décroissance sur $]e,\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ nous permettent de choisir $N_0 > 0$ tel que

$$Ce^{C\|V\|_2}\frac{\ln|\lambda|}{|\lambda|}\|V_\varepsilon\|_{H^1_{\mathbb{C}}(0,1)} < \frac{1}{8}.$$

Nous obtenons ainsi l'estimation suivante

$$\left|\lambda^a D(\lambda,p,q) - \sin\left(\beta+\frac{a\pi}{2}-\lambda\right)\right| < \frac{1}{4}\,e^{|\operatorname{Im}\lambda|} = \frac{1}{4}\,e^{|\operatorname{Im}\left(\lambda-\frac{a\pi}{2}-\beta\right)|}.$$

L'estimation suivante obtenue dans [PT87]

$$e^{|\operatorname{Im} z|} < 4|\sin z| \quad \text{pour} \quad |z-k\pi| \geq \frac{\pi}{4},$$

appliquée à chacun des contours considérés γ_n et C_{N_0}, avec $z = \lambda - \frac{a\pi}{2} - \beta$, conduit à l'estimation

$$\left|\lambda^a D(\lambda,p,q) - \sin\left(\beta+\frac{a\pi}{2}-\lambda\right)\right| < \left|\sin\left(\beta+\frac{a\pi}{2}-\lambda\right)\right|.$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème de Rouché qui permet d'affirmer que les fonctions analytiques $\lambda \mapsto \lambda^a D(\lambda,p,q)$ et $\lambda \mapsto \sin\left(\beta+\frac{a\pi}{2}-\lambda\right)$ ont le même nombre de racines, comptées avec multiplicité, à l'intérieur de chacun des contours. Pour montrer qu'il n'y en a pas ailleurs, il suffit de considérer un autre contour C_N où $N > N_0$ et d'appliquer à nouveau le théorème de Rouché. □

Nous pouvons maintenant numéroter les valeurs propres. Nous choisissons pour cela de noter, pour $n > N_0$, la valeur propre enfermée dans γ_n par $\lambda_{a,n}(p,q)$. Ensuite, numérotons de manière lexicographique les $2N_0+1-a$ racines comprises dans C_{N_0}, c'est à dire pour $k = a-N_0,\dots,N_0-1$:

$$\operatorname{Re}\lambda_{a,k}(p,q) < \operatorname{Re}\lambda_{a,k+1}(p,q)$$
$$\text{ou}$$
$$\operatorname{Re}\lambda_{a,k}(p,q) = \operatorname{Re}\lambda_{a,k+1}(p,q) \text{ et } \operatorname{Im}\lambda_{a,k}(p,q) \leq \operatorname{Im}\lambda_{a,k+1}(p,q).$$

La numérotation devant être « continue », la valeur propre comprise dans γ_{-n}, pour $n > N_0$, est $\lambda_{a,-n+a}$. Autrement dit, pour $n > N_0 - a$, $\lambda_{a,-n}$ est la valeur propre entourée par $\gamma_{-(n+a)}$.

Cette localisation permet d'obtenir les estimations localement uniformes sur $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$

$$\lambda_{a,n}(p,q) = \left(n+\frac{a}{2}\right)\pi+\beta+\mathcal{O}(1), \quad n\to\infty, \tag{2.2.11}$$
$$\lambda_{a,-n}(p,q) = -\left(n+\frac{a}{2}\right)\pi+\beta+\mathcal{O}(1), \quad n\to\infty. \tag{2.2.12}$$

Grâce à l'estimation (2.2.9) de la Proposition 2.2.2 nous pouvons préciser l'asymptotique :

Proposition 2.2.3. *Soit* $(p,q) \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$.

$$\lambda_{a,n}(p,q) = \left(n + \operatorname{sgn}(n)\frac{a}{2}\right)\pi + \beta + o(1) \quad , \quad |n| \to +\infty. \tag{2.2.13}$$

Démonstration. En effet, la relation (2.2.9) évaluée en $x = 1$ et la définition (2.2.1) de $D(\lambda, p, q)$ donnent

$$D(\lambda,p,q) = R(1,\lambda)\cdot u_\beta + o\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|^a}\right)$$

et l'estimation (2.2.10) implique

$$D(\lambda,p,q) = \frac{1}{\lambda^a}\sin\left(\beta + \frac{a\pi}{2} - \lambda\right) + o\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|^a}\right). \tag{2.2.14}$$

D'après le lemme de comptage, les valeurs propres vérifient l'estimation

$$\lambda_{a,n}(p,q) = \left(n + \operatorname{sgn}(n)\frac{a}{2}\right)\pi + \beta + \mathcal{O}(1)\,, \quad |n| \to \infty, \tag{2.2.15}$$

la localisation donnant de plus

$$|\mathcal{O}(1)\,| < \frac{\pi}{2}. \tag{2.2.16}$$

En évaluant l'estimation (2.2.14) en $\lambda = \lambda_{a,n}(p,q)$, l'asymptotique (2.2.15) nous permet d'obtenir

$$0 = \frac{1}{{\lambda_{a,n}}^a}\sin\left(\mathcal{O}(1)\right) + o\left(\frac{1}{|\lambda_{a,n}|^a}\right). \tag{2.2.17}$$

Par identification et grâce à l'encadrement (2.2.16), l'estimation voulue suit. □

Remarques

Les différents résultats donnés ci-avant sont à mettre en parallèle avec le cas régulier ($a = 0$) pour l'opérateur de AKNS

– Les asymptotiques pour les potentiels $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ ainsi que la localisation des valeurs propres sont seulement localement uniformes. Ceci est inhérent à l'opérateur lui même et non à la singularité. Il est donné dans [GK01] deux potentiels de même norme dont les valeurs propres n'ont pas la même numérotation.

– Un phénomène nouveau, relatif à cette numérotation est la « perte » de a valeurs propres localisée autour de l'origine. Ceci étant, ce « trou » dans la suite des valeurs propres se montrera utile ultérieurement pour montrer en particulier l'inversibilité de la différentielle de l'application spectrale.
– Néanmoins, cela reste consistant avec les résultats obtenus dans le cadre de l'opérateur de Schrödinger radial. En effet, remarquons que les estimations (2.2.11) et (2.2.12) donnent

$$[\lambda_{a,\pm n}(p,q)]^2 = \left(n+\frac{a}{2}\right)^2 \pi^2 \left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \to \infty,$$

c'est à dire que le carré des valeurs propres de l'opérateur de Dirac-AKNS radial sont asymptotiquement celles de l'opérateur de Schrödinger (voir l'estimation (1.2.1)).

2.3 Données spectrales : régularité, gradients

À partir de maintenant, nous considérons les potentiels (p,q) réels. Ainsi, la suite des valeurs propres $(\lambda_{a,n}(p,q))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels strictement croissante. Définissons alors pour chacune d'entre elles les éléments suivants :

Notations. Nous définissons

$$\mathcal{R}_n(t,p,q) = \mathcal{R}(t,\lambda_{a,n}(p,q),p,q) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_n(t,p,q) = \mathcal{S}(t,\lambda_{a,n}(p,q),p,q).$$

Soit $G_n(t,p,q)$ le vecteur propre normalisé associé à $\lambda_{a,n}(V)$ défini par

$$G_n(t,p,q) = \frac{\mathcal{R}_n(t,p,q)}{\|\mathcal{R}_n(\cdot,p,q)\|_2}.$$

Considérons le vecteur défini par

$$A_n(x,p,q) = (a_n(x,p,q), b_n(x,p,q))$$

avec $a_n(x,p,q) = a(x,\lambda_{a,n}(p,q),p,q)$ et $b_n(x,p,q) = b(x,\lambda_{a,n}(p,q),p,q)$, a et b étant définis page 21.

2.3.1 Régularité des valeurs propres

La régularité des valeurs propres ainsi que l'expression des gradients suivent comme dans [GG93] et [PT87]. La proposition suivante en est une illustration.

Proposition 2.3.1. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application $(p,q) \mapsto \lambda_{a,n}(p,q)$ est réelle-analytique sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Son gradient est donné par*

$$\nabla_{p,q}\lambda_{a,n} = \left(\frac{\partial\lambda_{a,n}}{\partial p}, \frac{\partial\lambda_{a,n}}{\partial q}\right) \text{ où } \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda_{a,n}}{\partial p} = 2\,G_{n,1}(t,p,q)\,G_{n,2}(t,p,q), \\ \dfrac{\partial\lambda_{a,n}}{\partial q} = G_{n,2}(t,p,q)^2 - G_{n,1}(t,p,q)^2. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Démonstration. D'une part, la relation (2.2.3) donne

$$\frac{\partial D}{\partial\lambda}(\lambda_{a,n}(p,q),p,q) \neq 0.$$

D'autre part, la continuité de $(p,q) \mapsto \mathcal{R}(1,\lambda,p,q)$ et le lemme de comptage impliquent la continuité de $(p,q) \mapsto \lambda_{a,n}(p,q)$. Ainsi, l'application du théorème des fonctions implicites à D réelle-analytique sur $\mathbb{R} \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ donne la réelle-analyticité de $(p,q) \mapsto \lambda_{a,n}(p,q)$.
Pour déterminer le gradient de $\lambda_{a,n}(p,q)$, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial p}\left(D(\lambda_{a,n}(p,q),p,q)\right) \\ &= \frac{\partial\lambda_{a,n}}{\partial p}\left(\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\lambda}(1,\lambda_{a,n},p,q)\cdot u_\beta\right) + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial p}(1,\lambda_{a,n},p,q)\cdot u_\beta. \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant les relations (2.1.11) et (2.1.13) (en rappelant que les termes en facteur de $\mathcal{R}(x,\lambda,p,q)$ disparaissent puisqu'ils se retrouvent en facteur de $\mathcal{R}(1,\lambda_{a,n},p,q)\cdot u_\beta = D(\lambda_{a,n},p,q) = 0$), il vient

$$\begin{aligned} 0 = -\frac{\partial\lambda_{a,n}}{\partial p}\left(\mathcal{S}(1,\lambda_{a,n},p,q)\cdot u_\beta\right)\int_0^1 \left[Y_1(x,\lambda_{a,n},p,q)^2 + Z_1(x,\lambda_{a,n},p,q)^2\right]dt \\ + \left(\mathcal{S}(1,\lambda_{a,n},p,q)\cdot u_\beta\right) 2Y_1(t,\lambda_{a,n},p,q)Z_1(t,\lambda_{a,n},p,q). \end{aligned}$$

En faisant de même pour le gradient suivant q, nous obtenons le résultat. □

2.3.2 Données complémentaires

À l'instar de la méthode développée par [PT87], ou simplement en suivant [GG93], il est nécessaire d'ajouter des données supplémentaires aux valeurs propres pour espérer obtenir un paramétrage complet de $\left(L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\right)^2$. En effet, la condition de bord en $x = 1$ qui définit chaque valeur propre est une relation d'orthogonalité suivant une direction. Il est raisonnable de penser que la connaissance d'une donnée suivant la direction orthogonale sera complémentaire.

Définition 2.3.1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nous introduisons la suite définie par

$$\kappa_{a,n}(p,q) = \mathcal{R}_n(1,p,q)\cdot {u_\beta}^\perp. \tag{2.3.2}$$

Les nombres $\kappa_{a,n}(p,q)$ seront appelés constantes de normalisation

Suivant [GG93], nous obtenons :

Proposition 2.3.2. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application $(p,q) \mapsto \kappa_{a,n}(p,q)$ est réelle-analytique sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Son gradient est*

$$\frac{\nabla_{p,q}\kappa_{a,n}}{\kappa_{a,n}} = A_n(x,p,q) + \Big\langle \mathcal{R}_n(\cdot,p,q), \mathcal{S}_n(\cdot,p,q)\Big\rangle \nabla_{p,q}\lambda_{a,n}(p,q). \tag{2.3.3}$$

Démonstration. La régularité de $\kappa_{a,n}$ provient de celle de $\mathcal{R}$ et $\lambda_{a,n}$. En notant

$$\nabla_{p,q}\kappa_{a,n}(p,q) = \left(\frac{\partial \kappa_{a,n}}{\partial p}, \frac{\partial \kappa_{a,n}}{\partial q}\right),$$

puis en utilisant les expressions des différents gradients, nous obtenons de même que dans [GG93] les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa_{a,n}}{\partial p} &= \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}(1,\lambda_{a,n},p,q)\cdot {u_\beta}^\perp\right]\frac{\partial \lambda_{a,n}}{\partial p} + \kappa_{a,n}\, a_n(x,p,q) \\
&\quad + \left[\mathcal{S}_n(1,p,q)\cdot {u_\beta}^\perp\right] 2\, Y_1(x,\lambda_{a,n},p,q) Z_1(x,\lambda_{a,n},p,q), \\
\frac{\partial \kappa_{a,n}}{\partial q} &= \left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}(1,\lambda_{a,n},p,q)\cdot {u_\beta}^\perp\right]\frac{\partial \lambda_{a,n}}{\partial q} + \kappa_{a,n}\, b_n(x,p,q) \\
&\quad + \left[\mathcal{S}_n(1,p,q)\cdot {u_\beta}^\perp\right]\left(Z_1^2(x,\lambda_{a,n},p,q) - Y_1^2(x,\lambda_{a,n},p,q)\right),
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
\nabla_{p,q}\kappa_{a,n} = \kappa_{a,n}A_n(x,p,q) + \Bigg(&\left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}(1,\lambda_{a,n},p,q)\cdot {u_\beta}^\perp\right] \\
&+ \left[\mathcal{S}_n(1,p,q)\cdot {u_\beta}^\perp\right]\|\mathcal{R}_n(\cdot,p,q)\|^2\Bigg)\nabla_{p,q}\lambda_{a,n}.
\end{aligned}$$

L'expression du gradient (2.1.10), nous permet d'obtenir l'égalité

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}(1,\lambda_{a,n},p,q)\cdot {u_\beta}^\perp = &-(\mathcal{S}_n(1,p,q)\cdot {u_\beta}^\perp)\int_0^1 \mathcal{R}_n(t,p,q)^\top \mathcal{R}_n(t,p,q)dt \\
&+ \kappa_{a,n}\int_0^1 \mathcal{S}_n(t,p,q)^\top \mathcal{R}_n(t,p,q)dt
\end{aligned}$$

qui implique le résultat. □

Précisons le comportement de ces constantes de normalisation avec la proposition suivante.

Proposition 2.3.3. *Soit* $(p,q) \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$.

$$\kappa_{a,n}(p,q) = \frac{(-1)^n}{\left(\left[|n| + \frac{a}{2}\right]\pi\right)^a}(1+o(1)) = \frac{(-1)^n}{|n\pi|^a}(1+o(1)) \quad , \quad |n| \to +\infty. \tag{2.3.4}$$

Preuve de la proposition. L'estimation de la solution régulière (2.2.9) introduite dans la définition de $\kappa_{a,n}$ conduit à

$$\kappa_{a,n} = \frac{1}{{\lambda_{a,n}}^a}\Big(j_{a-1}\left(\lambda_{a,n}\right)\cos\beta + j_a\left(\lambda_{a,n}\right)\sin\beta + o(1)\Big).$$

L'expression (A.1.5) entraîne alors

$$\kappa_{a,n} = \frac{1}{{\lambda_{a,n}}^a}\Big(\cos\Big(\lambda_{a,n} - \frac{a\pi}{2} - \beta\Big) + o(1)\Big).$$

Maintenant, en utilisant l'estimation (2.2.13), nous obtenons

$$\begin{aligned}\kappa_{a,n} &= \frac{1}{(n+\operatorname{sgn} n\frac{a}{2})^a\pi^a}\left(\cos\left(n\pi + (\operatorname{sgn}(n)-1)\frac{a\pi}{2}\right) + o(1)\right), \\ &= \frac{(-1)^n}{(n+\operatorname{sgn} n\frac{a}{2})^a\pi^a}\left(\cos\left[a\pi\frac{\operatorname{sgn}(n)-1}{2}\right] + o(1)\right).\end{aligned}$$

La connaissance du signe de n permet finalement d'obtenir le résultat. □

2.3.3 Relations d'orthogonalité

Les relations qui suivent, en particulier le résultat du corollaire, nous confortent dans le choix des constantes de normalisation. Les données ajoutées ne font pas doublon avec l'information donnée par les valeurs propres.

Suivant [GG93], nous obtenons

Proposition 2.3.4. *Pour tout* $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$, *nous avons*

1. $\left\langle \nabla_{p,q}\lambda_{a,j}, \nabla_{p,q}{\lambda_{a,k}}^{\perp}\right\rangle = 0$,
2. $\left\langle A_j(\cdot,p,q), \nabla_{p,q}{\lambda_{a,k}}^{\perp}\right\rangle = \delta_{j,k}$,
3. $\left\langle A_j(\cdot,p,q), A_k(\cdot,p,q)^{\perp}\right\rangle = 0$.

Preuve de la proposition. La preuve est formellement identique à celle proposée dans [GG93]. Nous ne montrons donc que le premier point. Pour $j = k$, l'égalité est évidente. Supposons $j \neq k$ et considérons le wronskien de G_j et G_k. Nous avons en notant $G_k = (G_{k,1}, G_{k,2})$,

$$\mathcal{W}(G_j, G_k) = G_{j,1}G_{k,2} - G_{j,2}G_{k,1}.$$

Un calcul simple montre que

$$\frac{d}{dx}\mathcal{W}(G_j, G_k) = (\lambda_{a,j} - \lambda_{a,k})\left(G_{j,1}G_{k,1} + G_{j,2}G_{k,2}\right).$$

Maintenant, nous avons

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla_{p,q}\lambda_{a,j}, \nabla_{p,q}\lambda_{a,k}{}^{\perp} \right\rangle &= \int_0^1 (\nabla_{p,q}\lambda_{a,j}) \cdot (\nabla_{p,q}\lambda_{a,k})^{\perp}\, dt, \\
&= \int_0^1 \Big[(2G_{j,1}G_{j,2})\left(G_{k,2}^2 - G_{k,1}^2\right) \\
&\qquad - \left(G_{j,2}^2 - G_{j,1}^2\right)(2G_{k,1}G_{k,2}) \Big] dt, \\
&= \frac{2}{\lambda_{a,j} - \lambda_{a,k}} \int_0^1 \left[\mathcal{W}(G_j, G_k)\frac{d}{dx}\mathcal{W}(G_j, G_k) \right] dt, \\
&= \frac{1}{\lambda_{a,j} - \lambda_{a,k}} \left[\mathcal{W}(G_j, G_k)^2 \right]_0^1 = 0.
\end{aligned}$$

□

Afin d'éviter d'éventuelles ambiguïtés, avant d'énoncer le corollaire, donnons la définition suivante.

Définition 2.3.2. Une famille infinie de vecteurs $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ d'un espace de Hilbert est dite libre ou ses vecteurs sont indépendants si chaque vecteur de la famille n'est pas dans l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par tous les autres vecteurs de la famille. C'est à dire :

$$\forall k \in \mathbb{Z}\,, \quad u_k \notin \overline{\mathrm{Vect}\,(u_j | j \in \mathbb{Z}, j \neq k)}.$$

Remarque 11. Au sens algébrique du terme, une famille dénombrable de vecteurs ne peut pas être une base dans un espace de Banach.

Corollaire 2.3.1. *Pour tout $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$, nous avons*

1. $\left\langle \nabla_{p,q}\kappa_{a,j}, \nabla_{p,q}\kappa_{a,k}{}^{\perp} \right\rangle = 0$,
2. $\left\langle \nabla_{p,q}\kappa_{a,j}, \nabla_{p,q}\lambda_{a,k}{}^{\perp} \right\rangle = \kappa_{a,j}(p, q)\delta_{j,k}$.

Les vecteurs $(\nabla_{p,q}\lambda_{a,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ *et* $(\nabla_{p,q}\kappa_{a,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ *forment une famille libre dans* $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.

Démonstration. Les deux relations d'orthogonalité s'obtiennent en utilisant la relation (2.3.3) ainsi que la proposition précédente. Pour l'indépendance hilbertienne de la famille, considérons par exemple $\nabla_{p,q}\lambda_{a,k}$. Les relations d'orthogonalité donnent d'une part

$$\left\langle \nabla_{p,q}\lambda_{a,k}, \nabla_{p,q}\kappa_{a,k}{}^{\perp}\right\rangle \neq 0$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla_{p,q}\lambda_{a,j}, \nabla_{p,q}\kappa_{a,k}{}^{\perp}\right\rangle &= 0, \qquad \text{pour tout } j\neq k,\\ \left\langle \nabla_{p,q}\kappa_{a,j}, \nabla_{p,q}\kappa_{a,k}{}^{\perp}\right\rangle &= 0, \qquad \text{pour tout } j\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Autrement dit

$$\begin{cases} \nabla_{p,q}\lambda_{a,k} \notin \left(\mathrm{Vect}\left\{\nabla_{p,q}\kappa_{a,k}\right\}\right)^{\perp},\\ \overline{\mathrm{Vect}\left\{\nabla_{p,q}\lambda_{a,j}, j\neq k; \nabla_{p,q}\kappa_{a,j}, j\in\mathbb{Z}\right\}} \subset \left(\mathrm{Vect}\left\{\nabla_{p,q}\kappa_{a,k}\right\}\right)^{\perp}. \end{cases}$$

En faisant le même raisonnement pour $\nabla_{p,q}\kappa_{a,k}$, nous montrons que la famille considérée est libre dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. □

2.4 Définition de l'application spectrale

Nous souhaitons que l'application spectrale établisse une correspondance entre les potentiels (p,q), qui sont les paramètres du problème, et les données spectrales, ici les valeurs propres et les constantes de normalisation. Pour une étude fonctionnelle de cette application, il est préférable qu'elle agisse entre espaces de Banach. Or, les estimations (2.2.13) et (2.3.4) montrent un comportement asymptotique « affine » des données considérées.

Nous introduisons alors les éléments $\widetilde{\lambda}_{a,n}(p,q)$ et $\widetilde{\kappa}_{a,n}(p,q)$ tels que

$$\begin{aligned}\lambda_{a,n}(p,q) &= \left(n+\mathrm{sgn}(n)\frac{a}{2}\right)\pi+\beta+\widetilde{\lambda}_{a,n}(p,q).\\ \kappa_{a,n}(p,q) &= \frac{(-1)^n}{\left[\left(|n|+\frac{a}{2}\right)\pi\right]^a}\left(1+\widetilde{\kappa}_{a,n}(p,q)\right).\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant définir l'application spectrale $\lambda^a\times\kappa^a : L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\to c_0(\mathbb{Z})\times c_0(\mathbb{Z})$ par

$$\left[\lambda^a\times\kappa^a\right](p,q) = \left((\widetilde{\lambda}_{a,n}(p,q))_{n\in\mathbb{Z}}, (\widetilde{\kappa}_{a,n}(p,q))_{n\in\mathbb{Z}}\right), \tag{2.4.1}$$

où $c_0(\mathbb{Z})$ est l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui tendent vers 0 pour $|n| \to \infty$.

Contrairement au cas de Schrödinger présenté précédemment, il ne nous est pas encore possible de donner la régularité et le gradient de l'application $\lambda^a \times \kappa^a$. En effet suivant [PT87] ou [GR88], pour montrer sa régularité il est d'une part nécessaire de montrer la régularité de chacune des composantes, ce que nous avons fait, mais d'autre part, nous avons besoin d'uniformité sur les asymptotiques, ce qui nous fait défaut.

En d'autres termes, il nous faut faire un peu plus de travail dans cette direction. Pour cela, nous aurons besoin des opérateurs de transformation développés dans la seconde partie.

Deuxième partie

Problèmes inverses singuliers

Chapitre 3

Opérateurs de transformations

L'idée d'opérateurs de transformation pour la résolution de problèmes spectraux inverses a été introduite par Guillot et Ralston lors de l'étude de l'opérateur de Schrödinger singulier avec $a = 1$. Ce problème comme nous l'avons vu précédemment, fait intervenir des produits scalaires avec des fonctions de Bessel, alors que dans le cas régulier ($a = 0$), ces fonctions ne sont autre que les fonctions Sinus et Cosinus. L'idée de l'existence d'opérateur transformant ces produits scalaires faisant intervenir des fonctions de Bessel en produits scalaires avec les fonctions trigonométriques provient de deux constats :

- premièrement, les fonctions de Bessel sphériques sont asymptotiquement égales aux fonctions trigonométriques,
- et deuxièmement, ces fonctions s'expriment en combinaison de fonctions Sinus et Cosinus (voir les relations (A.1.5) et (A.2.2)), ce qui signifie ,modulo quelques calculs, qu'il est possible d'exprimer cette transformation. (cf. [GR88])

Maintenant, l'utilisation de cette méthode pour calculer l'expression et déterminer les propriétés de l'opérateur en question pour chaque a s'avère fastidieuse et difficile (voir les expressions de ces opérateurs pour $a = 2$ et 3 dans [RS01] équation (3.9)).

La stratégie à adopter est plus raisonnable : au lieu de déterminer un opérateur agissant entre vecteurs associés à l'opérateur H_a et ceux associés à l'opérateur H_0, les résultats de Carlson et Shubin dans [CS94] ainsi que le point de vue développé par Rundell et Sacks dans [RS01], mènent à considérer des transformations agissant entre les vecteurs associés aux opérateurs H_a et H_{a-1}. Cette méthode est payante puisque ces opérateurs élémentaires s'avèrent assez simples à étudier, et de plus, l'opérateur cherché n'est autre que la composée de tous ces opérateurs élémentaires.

3.1 Transformations pour Schrödinger

Nous rappelons ici les résultats donnés dans [RS01] sur ces opérateurs de transformation. Le premier lemme permet de réduire la singularité, c'est à dire de passer de vecteurs relatifs à H_a à ceux relatifs à H_{a-1}. Le second lemme compose ces transformations pour se ramener au cas sans singularité, autrement dit nous passons de l'opérateur H_a à l'opérateur H_0.

Nous apportons deux précisions par rapport à [RS01]. Premièrement nous ajoutons des propriétés pour les vecteurs associés aux gradients de $\kappa_{a,n}$, c'est à dire les vecteurs Ψ_a définis ci-après ; et deuxièmement nous ajoutons des propriétés de transformation pour la famille des vecteurs Φ'_a, Ψ'_a qui auront leur utilité pour l'expression de l'inverse de la différentielle de $\lambda^a \times \kappa^a$.

Notations. Notons Φ_a et Ψ_a les fonctions définies par

$$\Phi_a(x) = j_a(x)^2 \quad \text{et} \quad \Psi_a(x) = j_a(x)\eta_a(x), \quad x \in [0,1].$$

Remarque 12. À l'aide des relations de récurrence sur les dérivées des fonctions de Bessel données à l'Annexe A, nous avons pour $x \in [0,1]$

$$\Phi'_a(x) = 2j_a(x)j_{a-1}(x) - \frac{2a}{x} j_a(x)^2, \tag{3.1.1}$$

$$\Psi'_a(x) = j_{a-1}(x)\eta_a(x) + j_a(x)\eta_{a-1}(x) - \frac{2a}{x} j_a(x)\eta_a(x). \tag{3.1.2}$$

Lemme 3.1.1. *Pour tout entier $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$ définissons l'opérateur S_a agissant de $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ par*

$$S_a[f](x) = f(x) - 4a\, x^{2a-1} \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{2a}} dt \tag{3.1.3}$$

Nous avons les propriétés suivantes :

(i) L'adjoint de S_a est

$$S_a^*[g](x) = g(x) - \frac{4a}{x^{2a}} \int_0^x t^{2a-1} g(t) dt. \tag{3.1.4}$$

(ii) La famille $\{S_a\}$ commute par paire :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \quad S_a S_b = S_b S_a.$$

(iii) S_a est borné sur $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$.

(iv) *S_a est un isomorphisme entre $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ et $(x \mapsto x^{2a})^{\perp}$.*
Son inverse est donné par l'opérateur continu de $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ défini par

$$A_a[g](x) = g(x) - \frac{4a}{x^{2a+1}} \int_0^x t^{2a} g(t)dt.$$

(v) *Les fonctions Φ_a et Ψ_a vérifient*

$$\Phi_a = -S_a^*[\Phi_{a-1}] \quad et \quad \Psi_a = -S_a^*[\Psi_{a-1}], \tag{3.1.5}$$

ainsi que

$$\Phi_a' = -A_a[\Phi_{a-1}'] \quad et \quad \Psi_a' = -A_a[\Psi_{a-1}']. \tag{3.1.6}$$

Lemme 3.1.2. *Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ définissons l'opérateur T_a par*

$$T_a = (-1)^{a+1} S_a S_{a-1} \cdots S_1. \tag{3.1.7}$$

Alors

(i) *T_a est un opérateur borné, injectif de $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ tel que :*
Pour tout $q \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\int_0^1 \big[2\Phi_a(\lambda t) - 1\big] q(t)dt = \int_0^1 \cos(2\lambda t) T_a[q](t)dt, \tag{3.1.8}$$

$$\int_0^1 \Psi_a(\lambda t) q(t)dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 \sin(2\lambda t) T_a[q](t)dt. \tag{3.1.9}$$

(ii) *L'adjoint de T_a vérifie*

$$2\Phi_a(\lambda x) - 1 = T_a^* \left[\cos(2\lambda x)\right], \quad \Psi_a(\lambda x) = T_a^* \left[-\frac{1}{2}\sin(2\lambda x)\right] \tag{3.1.10}$$

et son noyau est

$$\ker(T_a^*) = \mathrm{Vect}\left\{x^2, x^4, \ldots, x^{2a}\right\}.$$

(iii) *T_a définit un isomorphisme entre $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ et $(\ker(T_a^*))^{\perp}$.*
Son inverse est donné par l'opérateur continu de $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ défini par

$$B_a[f] := (-1)^{a+1} A_a A_{a-1} \cdots A_1,$$

il vérifie de plus

$$\Phi_a'(\lambda x) = B_a\left[-\sin(2\lambda x)\right], \quad \Psi_a'(\lambda x) = B_a\left[-\cos(2\lambda x)\right] \tag{3.1.11}$$

La preuve de ces résultats repose sur les propriétés des fonctions de Bessel pour l'aspect calcul et sur des inégalités de Hardy (voir l'annexe B) pour les assertions concernant la continuité, l'espace d'arrivée... Pour la preuve complète nous renvoyons à [RS01]. Donnons néanmoins la preuve des éléments nouveaux à savoir ceux traitant de Ψ_a.

Preuve.

- [**Preuve de la relation** (3.1.5)]
  Calculons la dérivée suivante

$$\begin{aligned}\left(x^{2a}\left[\Psi_a+\Psi_{a-1}\right]\right)' &= 2ax^{2a-1}\left[\Psi_a+\Psi_{a-1}\right]+x^{2a}\left[\Psi_a'+\Psi_{a-1}'\right],\\ &= x^{2a-1}\Big[2a\big(j_a\eta_a+j_{a-1}\eta_{a-1}\big)+x(j_a'\eta_a+j_a\eta_a')+x(j_{a-1}'\eta_{a-1}+j_{a-1}\eta_{a-1}')\Big].\end{aligned}$$

  En utilisant les relations de récurrences (A.3.1) et (A.3.4), il vient

$$x(j_a'\eta_a+j_a\eta_a')=x(j_a\eta_{a-1}+j_{a-1}\eta_a)-2aj_a\eta_a.$$

  Avec les relations (A.3.2) et (A.3.5), nous obtenons

$$x(j_{a-1}'\eta_{a-1}+j_{a-1}\eta_{a-1}')=2aj_{a-1}\eta_{a-1}-x(j_a\eta_{a-1}+j_{a-1}\eta_a).$$

  Il vient ensuite l'égalité

$$\left(x^{2a}\left[\Psi_a+\Psi_{a-1}\right]\right)'=4ax^{2a-1}j_{a-1}(x)\eta_{a-1}(x)=4ax^{2a-1}\Psi_{a-1},$$

  qui, après intégration entre $[0,x]$, entraîne la relation $\Psi_a=-S_a^*[\Psi_{a-1}]$.
- [**Preuve de la relation** (3.1.6)]
  Cette relation suit de la même manière, c'est à dire en dérivant les expressions $x^{2a+1}\left({\Phi_a}'+{\Phi_{a-1}}'\right)$ et $x^{2a+1}\left({\Psi_a}'+{\Psi_{a-1}}'\right)$.
- [**Preuve de la relation** (3.1.10)]
  Nous avons pour tout entier $a\geq 1$, la relation $\Psi_a=-S_a^*[\Psi_{a-1}]$. Il vient par conséquent

$$\Psi_a=(-1)^a\,S_a^*\cdots S_1^*[\Psi_0]=-T_a^*[\Psi_0].$$

  Or, $\Psi_0(x)=j_0(x)\eta_0(x)=\sin(x)\cos(x)$ et la relation annoncée suit.
- [**Preuve de la relation** (3.1.11)]
  De même que précédemment, nous avons pour tout entier $a\geq 1$, la relation ${\Psi_a}'=-A_a[{\Psi_{a-1}}']$, il vient par conséquent

$${\Psi_a}'=(-1)^a\,A_a\cdots A_1[{\Psi_0}']=-B_a[{\Psi_0}'].$$

  Or, ${\Psi_0}'(x)=\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)'=\cos(2x)$ et la relation annoncée suit.

□

3.2 Précision des asymptotiques

Il nous est maintenant possible de donner des asymptotiques plus précises concernant les données spectrales.

Proposition 3.2.1. *Les estimations suivantes sont valables uniformément sur les bornés de* $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$

$$\lambda_{a,n}(q) = \left(n + \frac{a}{2}\right)^2 \pi^2 + \int_0^1 q(t)dt - a(a+1) + \ell^2(n), \tag{3.2.1}$$

$$n\kappa_{a,n}(q) = \ell^2(n). \tag{3.2.2}$$

Démonstration. Il nous suffit (voir (1.2.8) et (1.2.13)) de déterminer le comportement des intégrales I_n et J_n suivantes

$$I_n(q) = \iint_{[0,1]^2} \Big[2j_a(\omega_{a,n}(tq)x)^2 - 1\Big] q(x)dx\,dt,$$

$$J_n(q) = \iint_{[0,1]^2} \frac{j_a\big(\omega_{a,n}(tq)x\big)\eta_a\big(\omega_{a,n}(tq)x\big)}{\omega_{a,n}(tq)}\, q(x)dx\,dt.$$

Utilisons les relations (3.1.8) et (3.1.9) pour obtenir

$$I_n(q) = \iint_{[0,1]^2} \cos\big(2\omega_{a,n}(tq)x\big) T_a[q](x)dx\,dt,$$

$$J_n(q) = -\iint_{[0,1]^2} \frac{\sin\big(2\omega_{a,n}(tq)x\big)}{2\omega_{a,n}(tq)}\, T_a[q](x)dx\,dt.$$

Le comportement asymptotique de $\omega_{a,n}$:

$$\omega_{a,n} = \left(n + \frac{a}{2}\right)\pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{(uniforme sur les bornés de } L^2_{\mathbb{R}}(0,1))$$

nous permettent d'obtenir

$$I_n(q) = \int_0^1 \cos\big((2n+a)\pi x\big) T_a[q](x)dx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$J_n(q) = \frac{-1}{(2n+a)\pi} \int_0^1 \sin\big((2n+a)\pi x\big)\, T_a[q](x)dx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ce qui montre que les suites $(I_n(q))_{n\geq 1}$ et $(nJ_n(q))_{n\geq 1}$ sont dans $\ell^2_{\mathbb{R}}$. De plus, la continuité de T_a assure l'uniformité du résultat sur les bornés de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. □

Donnons aussi deux asymptotiques qui nous seront utiles pour la suite.

Notations. Pour tout entier $n \geq 1$, nous posons

$$V_{a,n}(x,q) = 2\left[\frac{d}{dx}\nabla_q \lambda_{a,n}\right] \quad \text{et} \quad W_{a,n}(x,q) = -2\left[\frac{d}{dx}\nabla_q \kappa_{a,n}\right]. \tag{3.2.3}$$

Proposition 3.2.2. *Uniformément sur* $[0,1]$ *et les bornés de* $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$*, nous avons*

$$V_{a,n}(x,q) = 4\omega_{a,n}\left(\Phi_a{}'(\omega_{a,n}x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{3.2.4}$$

$$W_{a,n}(x,q) = -2\Psi_a{}'(\omega_{a,n}x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.2.5}$$

Remarquons que ces estimations asymptotiques coïncident avec celles du cas $a = 0$ données dans [PT87].

Preuve de la proposition. Nous faisons la preuve pour la première estimation, la second se montre de la même manière.

Nous avons, par l'expression du gradient des valeurs propres,

$$V_{a,n}(x,q) = 2\frac{d}{dx}\left(g_n(x,q)^2\right) = 4g_n(x,q)g_n'(x,q).$$

L'estimation (1.1.10) alliée à (1.2.7) et (1.1.12) entraîne

$$g_n{}'(x,q) = \sqrt{2}\omega_{a,n} j_a{}'(\omega_{a,n}x) + \mathcal{O}(1).$$

L'asymptotique (1.2.3) nous permet alors d'écrire

$$V_{a,n}(x,q) = 4\omega_{a,n}\left(2j_a(\omega_{a,n}x)j_a{}'(\omega_{a,n}x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

ce qui nous donne le résultat. □

Nous sommes ainsi revenus dans le cadre standard, ou plutôt habituel, de l'étude de problèmes spectraux inverses puisque l'application spectrale $\lambda^a \times \kappa^a$ agit entre $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ et $\mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \times \ell^2_{\mathbb{R}}$. Nous allons maintenant construire pour le système AKNS radial des opérateurs comparables.

3.3 Transformations pour AKNS

Tout comme dans le cas de l'opérateur de Schrödinger radial, il est possible de construire des opérateurs permettant en quelque sorte la réduction de la singularité. La méthode de construction est essentiellement la même que précédemment si ce n'est que les opérateurs agissent sur des fonctions vectorielles et non plus scalaires.

Il sera intéressant de comparer ces opérateurs et de constater qu'ils ont des propriétés similaires. La différence principale, mise à part la forme matricielle, tenant dans l'écriture d'opérateurs « inverses » qui possède une structure plus claire (ce qui est attendu, le modèle générique des équations différentielles linéaires étant d'ordre 1 matriciel).

Introduisons d'abord quelques notations.

Notations. Pour la suite, introduisons les vecteurs U_n et V_n pour $n \in \mathbb{N}$ définis par

$$U_n(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x^n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V_n(x) = \begin{bmatrix} x^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad x \in [0,1].$$

Donnons maintenant l'analogue « AKNS » du lemme 3.3.1.

Lemme 3.3.1. *Pour tout entier $a \in \mathbb{N}$, définissons l'opérateur*

$$\begin{array}{rccc} S_{a+1} : & L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1) & \longrightarrow & L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \\ & (p,q) & \longmapsto & \Big(S_{a,1}[p]\,, S_{a,2}[q]\Big) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \textit{avec} \quad S_{a,1}[p](x) &= p(x) - 2(2a+1)x^{2a} \int_x^1 \frac{p(t)}{t^{2a+1}} dt, \\ \textit{et} \quad S_{a,2}[q](x) &= q(x) - 2(2a+1)x^{2a+1} \int_x^1 \frac{q(t)}{t^{2a+2}} dt. \end{aligned}$$

Posons de plus $S_0 := \mathrm{Id}_{L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)}$. Nous avons les propriétés suivantes :

(i) L'adjoint de S_{a+1} est ${S_{a+1}}^*[f,g] = \Big({S_{a,1}}^*[f]\,, {S_{a,2}}^*[g]\Big)$ où

$$\begin{aligned} {S_{a,1}}^*[f](x) &= f(x) - \frac{2(2a+1)}{x^{2a+1}} \int_0^x t^{2a} f(t) dt, \\ {S_{a,2}}^*[g](x) &= g(x) - \frac{2(2a+1)}{x^{2a+2}} \int_0^x t^{2a+1} g(t) dt. \end{aligned}$$

(ii) La famille $\{S_a\}$ commute par paire : $S_a S_b = S_b S_a$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.

(iii) S_a est borné sur $L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$.

(iv) *Soit* $N_{a+1} := \ker {S_{a+1}}^*$, *alors* $N_{a+1} = \mathrm{Vect}(U_{2a}, V_{2a+1})$.

(v) S_{a+1} *est un isomorphisme entre* $L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *et* ${N_{a+1}}^{\perp}$. *Son inverse est donné par l'opérateur continu de* $L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *défini par*

$$A_{a+1}[f,g] := \Big({S_{a,2}}^*[f] \, , {S_{a,1}}^*[g] \Big).$$

(vi) *Les fonctions* Φ_a *et* Ψ_a *définies par*

$$\Phi_a(x) = \begin{bmatrix} -2j_{a-1}(x)j_a(x) \\ j_a(x)^2 - j_{a-1}(x)^2 \end{bmatrix}$$

et

$$\Psi_a(x) = \begin{bmatrix} -\eta_{a-1}(x)j_a(x) - \eta_a(x)j_{a-1}(x) \\ -\eta_{a-1}(x)j_{a-1}(x) + \eta_a(x)j_a(x) \end{bmatrix}$$

satisfont les relations

$$\Phi_{a+1} = -{S_{a+1}}^*[\Phi_a] \quad \text{et} \quad \Psi_{a+1} = -{S_{a+1}}^*[\Psi_a].$$

Preuve du lemme 3.3.1. Nous ne considérons que la première composante de S_a, les preuves étant identiques pour l'autre.

(i) Cette partie est aisément vérifiée par un calcul direct.

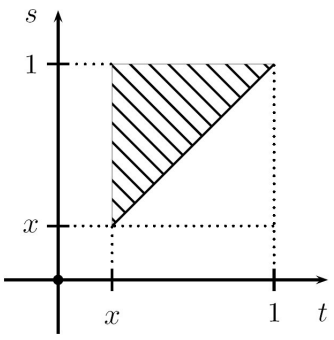
(ii) Soient $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ distincts (le cas $a = b$ est évident). Nous avons

$$\begin{aligned} S_{a,1}S_{b,1}[f](x) &= S_{b,1}[f](x) - 2(2a+1)x^{2a} \int_x^1 \frac{S_{b,1}[f](t)}{t^{2a+1}} dt \\ &= f(x) - 2(2b+1)x^{2b} \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{2b+1}} dt \\ &\qquad - 2(2a+1)x^{2a} \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{2a+1}} dt \\ &\qquad + 4(2a+1)(2b+1)x^{2a} \int_x^1 \int_t^1 \frac{t^{2b}}{t^{2a+1}} \frac{f(s)}{s^{2b+1}} ds \, dt. \end{aligned}$$

Les trois premiers termes ci-dessus forment une expression symétrique en a, b. Il suffit de montrer que le dernier terme, noté $J_{a,b}$, l'est aussi. Or, nous avons

$$J_{a,b}(x) = 4(2a+1)(2b+1)x^{2a} \int_{[0,1]^2} \mathbb{1}_{[x,1]}(t) \, \mathbb{1}_{[t,1]}(s) \frac{t^{2b}}{t^{2a+1}} \frac{f(s)}{s^{2b+1}} ds \, dt.$$

À l'aide du schéma ci-contre, pour tout x dans $[0,1]$, l'égalité suivante est valable



$$\forall (t,s) \in [0,1]\times[0,1],\quad \mathbb{1}_{[x,1]}(t)\,\mathbb{1}_{[t,1]}(s) = \mathbb{1}_{[x,1]}(s)\,\mathbb{1}_{[x,s]}(t),$$

ce qui nous permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} J_{a,b}(x) &= 4(2a+1)(2b+1)x^{2a}\int_{[0,1]^2}\mathbb{1}_{[x,1]}(s)\,\mathbb{1}_{[x,s]}(t)\frac{t^{2b}}{t^{2a+1}}\frac{f(s)}{s^{2b+1}}ds\,dt,\\ &= 4(2a+1)(2b+1)x^{2a}\int_x^1\frac{f(s)}{s^{2b+1}}\int_x^s\frac{t^{2b}}{t^{2a+1}}dt\,ds,\\ &= 4(2a+1)(2b+1)x^{2a}\int_x^1\frac{f(s)}{s^{2b+1}}\left[\frac{t^{2b-2a}}{2b-2a}\right]_x^s ds,\\ &= \frac{2(2a+1)(2b+1)}{b-a}\left(x^{2a}\int_x^1\frac{f(s)}{s^{2a+1}}ds - x^{2b}\int_x^1\frac{f(s)}{s^{2b+1}}ds\right). \end{aligned}$$

(iii) Soit $p \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, nous avons

$$\left|\frac{1}{x^{2a+1}}\int_0^x t^{2a}p(t)dt\right| \le \frac{1}{x}\int_0^x |p(t)|dt$$

qui, avec l'inégalité de Hardy (B.0.1), donne

$$\left\|\frac{1}{x^{2a+1}}\int_0^x t^{2a}p(t)dt\right\|_2 \le 2\|p\|_2.$$

${S_{a,1}}^*$ est alors borné et il en va de même pour $S_{a,1}$.

(iv) Supposons que ${S_{a,1}}^*[f] = 0$. Nous avons

$$x^{2a+1}f(x) = 2(2a+1)\int_0^x t^{2a}f(t)dt,$$

qui donne $xf'(x) = (2a+1)f(x)$ puis $f(x) = \lambda x^{2a+1}$.

(v) La continuité de A_{a+1} découle de celle de S^*_{a+1}.
Un calcul direct montre que ${S_{a,2}}^*(S_{a,1}[f]) = f$ pour tout $f \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, en particulier nous obtenons l'injectivité de S_{a+1}.

Maintenant nous savons d'une part que l'image de S_{a+1} est incluse dans ${N_{a+1}}^{\perp}$ et, d'autre part, un calcul direct donne pour tout couple $(f,g) \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$

$$S_{a+1}(A_{a+1}[f,g])(x) = \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} - 2(2a+1) \begin{bmatrix} x^{2a} \\ 0 \end{bmatrix} \int_0^1 \begin{bmatrix} t^{2a+1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} dt - 2(2a+1) \begin{bmatrix} 0 \\ x^{2a+1} \end{bmatrix} \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 \\ t^{2a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} dt.$$

En particulier, pour tout $(f,g) \in {N_{a+1}}^{\perp}$, nous avons

$$S_{a+1}(A_{a+1}[f,g]) = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix},$$

ce qui prouve que l'image de S_{a+1} est égale à ${N_{a+1}}^{\perp}$, d'où le résultat.

(vi) Soit $\phi_a(x) = -2j_{a-1}(x)j_a(x)$. Les relations de récurrence (A.3.1), (A.3.2) et (A.3.3) vérifiées par la fonction de Bessel sphérique j_a permettent le calcul de la dérivée de

$$I_a := x^{2a+1}\left(\phi_{a+1}(x) + \phi_a(x)\right).$$

$$\begin{aligned} {I_a}' &= -2(2a+1)x^{2a}\left[j_a(x)j_{a+1}(x) + j_{a-1}(x)j_a(x)\right] \\ &\quad -2x^{2a}\big[x{j_a}'(x)j_{a+1}(x) + j_a(x)x{j_{a+1}}'(x) \\ &\qquad + x{j_{a-1}}'(x)j_a(x) + j_{a-1}(x)x{j_a}'(x)\big] \\ &= -2(2a+1)x^{2a}\left[j_a(x)j_{a+1}(x) + j_{a-1}(x)j_a(x)\right] \\ &\quad -2x^{2a}\Big[\Big((a+1)j_a(x) - xj_{a+1}(x)\Big)j_{a+1}(x) \\ &\qquad + j_a(x)\Big(xj_a(x) - (a+1)j_{a+1}(x)\Big) \\ &\qquad + \Big(aj_{a-1}(x) - xj_a(x)\Big)j_a(x) \\ &\qquad + j_{a-1}(x)\Big(xj_{a-1}(x) - aj_a(x)\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Ainsi, il vient

$$\begin{aligned} {I_a}' &= -2(2a+1)x^{2a}\left[j_a(x)j_{a+1}(x) + j_{a-1}(x)j_a(x)\right] \\ &\quad -2x^{2a}\left[xj_{a-1}(x)^2 - xj_{a+1}(x)^2\right] \\ &= -2(2a+1)x^{2a}\left[j_a(x)j_{a+1}(x) + j_{a-1}(x)j_a(x)\right] \\ &\quad -2x^{2a}\left[j_{a-1}(x) - j_{a+1}(x)\right](2a+1)j_a(x) \\ &= 2(2a+1)x^{2a}\phi_a(x). \end{aligned}$$

En intégrant l'égalité ainsi obtenue, nous obtenons la relation désirée :

$$\phi_{a+1} = -{S_{a,1}}^* [\phi_a] .$$

Soient $\psi_a(x) = -\eta_{a-1}(x)j_a(x) - \eta_a(x)j_{a-1}(x)$ et

$$J_a := x^{2a+1} \left(\psi_{a+1}(x) + \psi_a(x)\right).$$

De même, les relations de récurrence (A.3.4), (A.3.5) et (A.3.6), vérifiées par la fonction de Bessel sphérique η_a nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} J_a &= x^{2a+1}\Big[-\eta_a(x)j_{a+1}(x) - \eta_{a+1}(x)j_a(x) \\ &\qquad\qquad - \eta_{a-1}(x)j_a(x) - \eta_a(x)j_{a-1}(x)\Big] \\ &= -x^{2a}\left[\eta_a(x)x\big(j_{a+1}(x) + j_{a-1}(x)\big) + j_a(x)x\big(\eta_{a+1}(x) + \eta_{a-1}(x)\big)\right] \\ &= -2(2a+1)x^{2a}\,\eta_a(x)j_a(x), \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} J_a' &= -2(2a+1)\left[2ax^{2a-1}\,\eta_a(x)j_a(x) + x^{2a}\big(\eta_a'(x)j_a(x) + \eta_a(x)j_a'(x)\big)\right] \\ &= -2(2a+1)\left[2ax^{2a-1}\,\eta_a(x)j_a(x) + x^{2a-1}j_a(x)\big(x\eta_{a-1}(x) - a\eta_a(x)\big)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + x^{2a-1}\eta_a(x)\big(xj_{a-1}(x) - aj_a(x)\big)\right] \\ &= 2(2a+1)x^{2a}\psi_a(x). \end{aligned}$$

Le résultat suit comme précédemment par intégration.

□

Lemme 3.3.2. *Pour tout $a \in \mathbb{N}$ définissons l'opérateur T_a par*

$$T_a = (-1)^{a+1} S_a S_{a-1} \cdots S_1 \quad , \quad T_0 = -S_0. \tag{3.3.1}$$

Notons $T_a[f,g] = \left(T_a^1[f], T_a^2[g]\right)$, alors

(i) T_a est un opérateur borné, injectif de $L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ tel que pour tous $p, q \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$

$$\int_0^1 \Phi_a(\lambda t) \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} \sin(2\lambda t) \\ \cos(2\lambda t) \end{bmatrix} \cdot T_a[p,q](t)dt, \tag{3.3.2}$$

$$\int_0^1 \Psi_a(\lambda t) \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt = \int_0^1 \begin{bmatrix} \cos(2\lambda t) \\ -\sin(2\lambda t) \end{bmatrix} \cdot T_a[p,q](t)dt. \tag{3.3.3}$$

(ii) *L'adjoint de* T_a, $T_a^*[f,g] = \left(T_a^{1*}[f], T_a^{2*}[g]\right)$ *vérifie*

$$\Phi_a(\lambda x) = T_a^* \begin{bmatrix} \sin(2\lambda x) \\ \cos(2\lambda x) \end{bmatrix} \text{ et } \Psi_a(\lambda x) = T_a^* \begin{bmatrix} \cos(2\lambda x) \\ -\sin(2\lambda x) \end{bmatrix} \tag{3.3.4}$$

et

$$\mathrm{Ker}(T_a^*) = \bigoplus_{k=1}^{a} N_k.$$

(iii) T_a *définit un isomorphisme entre* $L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *et* $\left(\bigoplus_{k=1}^{a} N_k\right)^{\perp}$.
Son inverse est donné par l'opérateur continu de $L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *défini par*

$$B_a[f,g] := \left(T_a^{2*}[f], T_a^{1*}[g]\right).$$

Preuve du lemme 3.3.2.

(i) Le caractère borné et injectif de T_a découle de (3.3.1) et du lemme 3.3.1. Soient $(f,g) \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ et $\lambda \neq 0$, posons $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. Si λ est réel, à l'aide d'un simple changement de variables nous obtenons

$$S_a^*[f,g](\lambda x) = S_a^*[f_\lambda, g_\lambda](x).$$

Si λ est complexe, nous obtenons le même résultat pour (f,g) holomorphes sur $\mathbb{C}$ en écrivant

$$\begin{aligned} {S_{a,1}}^*[f_\lambda](x) &= f(\lambda x) - \frac{2(2a+1)}{x^{2a+1}} \int_0^x t^{2a} f(\lambda t) dt, \\ &= f(\lambda x) - \frac{2(2a+1)}{(\lambda x)^{2a+1}} \int_0^x (\lambda t)^{2a} f(\lambda t) \lambda dt, \\ &= f(\lambda x) - \frac{2(2a+1)}{(\lambda x)^{2a+1}} \int_{\overset{\frown}{[0,\lambda x]}} z^{2a} f(z) dz, \end{aligned}$$

or, f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, l'intégrale ci-dessus ne dépend pas du chemin simple emprunté et nous pouvons donc écrire

$${S_{a,1}}^*[f_\lambda](x) = f(\lambda x) - \frac{2(2a+1)}{(\lambda x)^{2a+1}} \int_0^{\lambda x} t^{2a} f(t) dt = {S_{a,1}}^*[f](\lambda x).$$

Les relations (vi) du lemme 3.3.1 donnent alors

$$\Phi_a(\lambda x) = -S_a^*[\Phi_{a-1}(\lambda x)] \text{ et } \Psi_a(\lambda x) = -S_a^*[\Psi_{a-1}(\lambda x)]$$

et ainsi

$$\Phi_a(\lambda x) = -T_a^*[\Phi_0(\lambda x)] \text{ et } \Psi_a(\lambda x) = -T_a^*[\Psi_0(\lambda x)].$$

Les expression de Φ_0 et Ψ_0 donnent alors les relations (3.3.2), (3.3.3) et (3.3.4).

(ii) En conséquence de la propriété (ii) du lemme 3.3.1, les S_k^* commutent, ce qui donne l'inclusion

$$\bigoplus_{k=1}^{a} N_k \subset \ker(T_a^*).$$

D'autre part, un calcul direct montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n et V_n sont vecteurs propres de ${S_{a+1}}^*$, via l'identité

$${S_{a+1}}^*(U_n) = \frac{n-2a}{n+2a+2} U_n \text{ et } {S_{a+1}}^*(V_n) = \frac{n-2a-1}{n+2a+1} V_n.$$

Ainsi, il est facile de montrer que tout élément de $\ker(T_a^*)$ est combinaison linéaire des U_{2i}, V_{2i+1} pour $i = 0, \ldots, a-1$. En effet,

$$\text{si } X \in \ker(T_a^*), \quad S_a^*(S_{a-1}^* \cdots S_1^*(X)) = 0.$$

Donc,

$$S_{a-1}^* \cdots S_1^*(X) \in N_a = \ker(S_a^*),$$

c'est à dire

$$S_{a-1}^* \cdots S_1^*(X) = \alpha_1 U_{2a-2} + \beta_1 V_{2a-1}, \quad (\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C}^2.$$

Puis, la remarque précédente concernant les vecteurs propres donne

$$\exists (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C}^2, \quad S_{a-1}^* \cdots S_1^*(X) = (S_{a-1}^* \cdots S_1^*)\left(\alpha_2 U_{2a-2} + \beta_2 V_{2a-1}\right),$$

puis, $X - (\alpha_2 U_{2a-2} + \beta_2 V_{2a-1}) \in \ker T_{a-1}^*$, et ainsi de suite...

(iii) La preuve est semblable à celle pour S_a.

□

3.4 Précision des asymptotiques

Nous allons maintenant combler le retard par rapport à l'opérateur de Schrödinger. En effet, nous sommes maintenant en mesure de préciser les asymptotiques des diverses grandeurs qui nous intéressent.

Les estimations qui suivent sont délicates à obtenir puisqu'elles doivent à nouveau rendre compte du comportement asymptotique quand n est grand ainsi que du comportement d'annulation ou de singularité quand x est proche de 0.

Au préalable, donnons un résultat classique pour l'étude des asymptotiques pour les problèmes spectraux associés à des équations de type AKNS ou Z-S(Zakharov-Shabat), qui, contrairement au cas d'équations du type Sturm-Liouville, n'ont pas de propriétés de décroissance de la résolvante quand $|\lambda|$ tend vers l'infini. Il généralise en quelque sorte la propriété de sommation des coefficients de Fourier d'une fonction de $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$.

Lemme 3.4.1 (Lemme A.1. de [AG96](Voir aussi [Mis79]))**.**

$$\left(\int_0^1 f(t)e^{2\imath\pi(k+\varepsilon_k)t}dt\right)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$$

uniformément par rapport à $(f,(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}})$ *sur les bornés de* $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\times\ell^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$.

Introduisons à ce sujet la notation suivante :

Notations. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de fonctions de $L^\infty_{\mathbb{C}}(0,1)$. L'égalité

$$f_n(x) = \ell^2(n), \quad x\in[0,1], \quad n\in\mathbb{Z}$$

signifie que

$$(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}).$$

Remarque 13. Il est aussi possible de définir cette notation pour des suites de fonctions de $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, mais celles qui apparaissent dans notre étude sont bornées et de plus la comparaison des normes suivantes

$$\|f\|_{L^2_{\mathbb{C}}(0,1)} \le \|f\|_\infty, \quad f\in L^\infty_{\mathbb{C}}(0,1)$$

permet de s'affranchir de cette précision.

3.4.1 Estimation de la solution régulière

Théorème 3.4.1. *Uniformément sur* $[0,1]$ *et localement uniformément sur* $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *nous avons l'estimation :*

$$\left|\mathcal{R}(x,\lambda_{a,n}(p,q),p,q)-R(x,\lambda_{a,n}(p,q))\right|\leq C\left[\frac{x}{1+|\lambda_{a,n}|x}\right]^a\ell^2(n),\quad |n|\to\infty, \tag{3.4.1}$$

et localement uniformément sur $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$

$$\lambda_{a,n}(p,q)=\left(n+\operatorname{sgn}(n)\frac{a}{2}\right)\pi+\beta+\ell^2(n),\quad |n|\to\infty. \tag{3.4.2}$$

Preuve du théorème 3.4.1.
Nous montrons d'abord pour $R_1(x,\lambda_{a,n}(p,q),p,q)$ une majoration similaire à l'estimation (3.4.1). Pour cela, rappelons que

$$R_1(x,\lambda,p,q)=\frac{X(q)+Y(p)}{\lambda^a}$$

avec

$$\begin{aligned}
X(q)=&\begin{bmatrix}-\eta_{a-1}(\lambda x)\\ \eta_a(\lambda x)\end{bmatrix}\int_0^x\left\{[j_a(\lambda t)]^2-[j_{a-1}(\lambda t)]^2\right\}q(t)dt\\
&+\begin{bmatrix}j_{a-1}(\lambda x)\\ -j_a(\lambda x)\end{bmatrix}\int_0^x\Big[\eta_a(\lambda t)\,j_a(\lambda t)-\eta_{a-1}(\lambda t)\,j_{a-1}(\lambda t)\Big]q(t)dt,\\
Y(p)=&\begin{bmatrix}\eta_{a-1}(\lambda x)\\ -\eta_a(\lambda x)\end{bmatrix}\int_0^x\Big[2j_{a-1}(\lambda t)\,j_a(\lambda t)\Big]p(t)dt\\
&-\begin{bmatrix}j_{a-1}(\lambda x)\\ -j_a(\lambda x)\end{bmatrix}\int_0^x\Big[\eta_{a-1}(\lambda t)\,j_a(\lambda t)+\eta_a(\lambda t)\,j_{a-1}(\lambda t)\Big]p(t)dt.
\end{aligned}$$

Avec les notations du lemme 3.3.1, nous avons

$$\begin{aligned}
R_1(x,\lambda,p,q)=&\frac{1}{\lambda^a}\begin{bmatrix}-\eta_{a-1}(\lambda x)\\ \eta_a(\lambda x)\end{bmatrix}\int_0^1\Phi_a(\lambda t)\cdot\begin{bmatrix}\mathbb{1}_{[0,x]}(t)p(t)\\ \mathbb{1}_{[0,x]}(t)q(t)\end{bmatrix}dt\\
&+\frac{1}{\lambda^a}\begin{bmatrix}j_{a-1}(\lambda x)\\ -j_a(\lambda x)\end{bmatrix}\int_0^1\Psi_a(\lambda t)\cdot\begin{bmatrix}\mathbb{1}_{[0,x]}(t)p(t)\\ \mathbb{1}_{[0,x]}(t)q(t)\end{bmatrix}dt.
\end{aligned}$$

L'estimation (2.2.11) implique que $\lambda_{a,n}=n\pi+\varepsilon_n$ avec $(\varepsilon_n)_n\in\ell^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$. Ainsi, le lemme 3.3.2 et le lemme 3.4.1 donnent uniformément sur $[0,1]$ et localement uniformément sur $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$:

$$\left(\int_0^1\Phi_a(\lambda_{a,n}t)\cdot\begin{bmatrix}\mathbb{1}_{[0,x]}(t)p(t)\\ \mathbb{1}_{[0,x]}(t)q(t)\end{bmatrix}dt\right)_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}),$$

$$\left(\int_0^1\Psi_a(\lambda_{a,n}t)\cdot\begin{bmatrix}\mathbb{1}_{[0,x]}(t)p(t)\\ \mathbb{1}_{[0,x]}(t)q(t)\end{bmatrix}dt\right)_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}),$$

c'est à dire

$$R_1(x,\lambda_{a,n}(p,q),p,q) = \frac{1}{{\lambda_{a,n}}^a}\begin{bmatrix}-\eta_{a-1}(\lambda_{a,n}x)\\ \eta_a(\lambda_{a,n}x)\end{bmatrix}\ell^2(n) + \frac{1}{{\lambda_{a,n}}^a}\begin{bmatrix}j_{a-1}(\lambda_{a,n}x)\\ -j_a(\lambda_{a,n}x)\end{bmatrix}\ell^2(n).$$

Les estimations usuelles permettent la majoration

$$\left|\frac{1}{{\lambda_{a,n}}^a}\begin{bmatrix}j_{a-1}(\lambda_{a,n}x)\\ -j_a(\lambda_{a,n}x)\end{bmatrix}\ell^2(n)\right| \leq C\left(\frac{x}{1+|\lambda_{a,n}|x}\right)^a\ell^2(n). \tag{3.4.3}$$

Le premier terme est plus délicat ; décomposons l'intervalle $[0,1]$ en deux :

$|\lambda_{a,n}x| \geq 1$ **:** Nous savons qu'uniformément sur $[0,1]$,

$$\int_0^1 \Phi_a(\lambda_{a,n}t)\cdot\begin{bmatrix}\mathbb{1}_{[0,x]}(t)p(t)\\ \mathbb{1}_{[0,x]}(t)q(t)\end{bmatrix}dt = \ell^2(n)$$

or

$$1 = \frac{1+|\lambda_{a,n}|x}{1+|\lambda_{a,n}|x} \leq \frac{2|\lambda_{a,n}|x}{1+|\lambda_{a,n}|x},$$

donc

$$\left|\int_0^1 \Phi_a(\lambda_{a,n}t)\cdot\begin{bmatrix}\mathbb{1}_{[0,x]}(t)p(t)\\ \mathbb{1}_{[0,x]}(t)q(t)\end{bmatrix}dt\right| \leq \left(\frac{2|\lambda_{a,n}|x}{1+|\lambda_{a,n}|x}\right)^{2a}\ell^2(n).$$

$|\lambda_{a,n}x| \leq 1$ **:** Les estimations usuelles donnent

$$\left|\int_0^1 \Phi_a(\lambda_{a,n}t)\cdot\begin{bmatrix}\mathbb{1}_{[0,x]}(t)p(t)\\ \mathbb{1}_{[0,x]}(t)q(t)\end{bmatrix}dt\right| \leq C\left(\frac{|\lambda_{a,n}|x}{1+|\lambda_{a,n}|x}\right)^{2a}\int_0^x\begin{bmatrix}|p(t)|\\ |q(t)|\end{bmatrix}dt,$$

avec $C>0$ uniforme en x et n, puis

$$\left|\int_0^1 \Phi_a(\lambda_{a,n}t)\cdot\begin{bmatrix}\mathbb{1}_{[0,x]}(t)p(t)\\ \mathbb{1}_{[0,x]}(t)q(t)\end{bmatrix}dt\right| \leq C\left(\frac{|\lambda_{a,n}|x}{1+|\lambda_{a,n}|x}\right)^{2a}\int_0^{|\lambda_{a,n}|^{-1}}\begin{bmatrix}|p(t)|\\ |q(t)|\end{bmatrix}dt.$$

Le lemme B.0.3 donne la majoration souhaitée.

En combinant les deux estimations uniformes, nous obtenons uniformément sur $[0,1]$ et localement uniformément sur $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$:

$$\left|\int_0^1 \Phi_a(\lambda_{a,n}t)\cdot\begin{bmatrix}\mathbb{1}_{[0,x]}(t)p(t)\\ \mathbb{1}_{[0,x]}(t)q(t)\end{bmatrix}dt\right| \leq C'\left(\frac{|\lambda_{a,n}|x}{1+|\lambda_{a,n}|x}\right)^{2a}\ell^2(n). \tag{3.4.4}$$

Les estimations usuelles avec (3.4.3) et (3.4.4) donnent

$$\left|R_1(x,\lambda_{a,n}(p,q),p,q)\right| \leq \left(\frac{x}{1+|\lambda_{a,n}|x}\right)^a \ell^2(n),$$

puis en remarquant que toutes les estimations et relations nous ayant permis d'obtenir cette dernière sont linéaires par rapport aux potentiels (en « oubliant »formellement la dépendance des valeurs propres), nous avons

$$\left|R_1(x,\lambda_{a,n}(p,q),p,q)\right| \leq \left(\frac{x}{1+|\lambda_{a,n}|x}\right)^a \ell^2(n)\|V\|_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)}$$

localement uniformément sur $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ et uniformément sur $[0,1]$.

En utilisant la relation de récurrence et l'estimation de $\mathcal{G}(x,t,\lambda)$, il suit uniformément sur $[0,1]$ et localement uniformément sur $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$:

$$\left|R_{k+1}(x,\lambda_{a,n}(p,q),p,q)\right| \leq \frac{C^k}{k!}\left(\int_0^x (|p(t)|+|q(t)|)\,dt\right)^k \times \left(\frac{x}{1+|\lambda_{a,n}|x}\right)^a \ell^2(n)\|V\|_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)}.$$

D'où le résultat. L'estimation pour les valeurs propres découle directement de celle de $\mathcal{R}(x,\lambda_{a,n}(p,q),p,q)$ et des estimations (2.2.11)-(2.2.12). □

3.4.2 Estimation de la solution singulière

Théorème 3.4.2. *Soit $(p,q)\in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, alors uniformément sur $(0,1]$ et localement uniformément sur $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ nous avons :*

$$\left|\mathcal{S}(x,\lambda_{a,n}(p,q),p,q) - S(x,\lambda_{a,n}(p,q))\right| \leq C\left[\frac{1+|\lambda_{a,n}|x}{x}\right]^a \ell^2(n). \quad (3.4.5)$$

Preuve du théorème 3.4.2. Tout comme pour la solution régulière, nous montrons tout d'abord pour $S_1(x,\lambda_{a,n}(p,q),p,q)$ une estimation semblable à

(3.4.5). Nous avons

$$\begin{aligned}
S_1(x,\lambda,p,q) &= -\int_x^1 \mathcal{G}(x,t,\lambda)V(t)S(t,\lambda)dt,\\
&= -S(x,\lambda)\int_x^1 R(t,\lambda)^\top V(t)S(t,\lambda)dt\\
&\quad + R(x,\lambda)\int_x^1 S(t,\lambda)^\top V(t)S(t,\lambda)dt,\\
&= -S(x,\lambda)\int_x^1 \Big[q(t)\Big(R^2(t,\lambda)S^2(t,\lambda) - R^1(t,\lambda)S^1(t,\lambda)\Big)\\
&\qquad\qquad +p(t)\Big(R^1(t,\lambda)S^2(t,\lambda) + R^2(t,\lambda)S^1(t,\lambda)\Big)\Big]\,dt\\
&\quad + R(x,\lambda)\int_x^1 \Big[q(t)\Big(S^2(t,\lambda)^2 - S^1(t,\lambda)^2\Big)\\
&\qquad\qquad + p(t)\Big(2S^1(t,\lambda)S^2(t,\lambda)\Big)\Big]dt.
\end{aligned}$$

Avec les notations du lemme 3.3.1 et en introduisant Υ_a défini par

$$\Upsilon_a(x) = \begin{bmatrix} -2\eta_{a-1}(\lambda t)\,\eta_a(\lambda t) \\ \eta_a(\lambda t)^2 - \eta_{a-1}(\lambda t)^2 \end{bmatrix},$$

nous avons

$$\begin{aligned}
S_1(x,\lambda,p,q) = \lambda^a \begin{bmatrix} -\eta_{a-1}(\lambda x) \\ \eta_a(\lambda x) \end{bmatrix} \int_x^1 \Psi_a(\lambda t)\cdot\begin{bmatrix} p(t) \\ q(t)\end{bmatrix} dt +\\
\lambda^a \begin{bmatrix} j_{a-1}(\lambda x) \\ -j_a(\lambda x) \end{bmatrix} \int_x^1 \Upsilon_a(\lambda t)\cdot\begin{bmatrix} p(t) \\ q(t)\end{bmatrix} dt.
\end{aligned}$$

En utilisant (3.3.3) et le lemme 3.4.1, il vient

$$\left(\int_x^1 \Psi_a(\lambda_{a,n}t)\cdot\begin{bmatrix} p(t) \\ q(t)\end{bmatrix} dt\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}).$$

Puis les estimations usuelles nous donnent uniformément sur $[0,1]$ et localement uniformément sur $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$,

$$\left|{\lambda_{a,n}}^a \begin{bmatrix} -\eta_{a-1}(\lambda_{a,n}x) \\ \eta_a(\lambda_{a,n}x) \end{bmatrix} \int_x^1 \Psi_a(\lambda_{a,n}t)\cdot\begin{bmatrix} p(t) \\ q(t)\end{bmatrix} dt\right| \le C\left(\frac{1+|\lambda_{a,n}|x}{x}\right)^a \ell^2(n)$$

Reste à estimer le second terme. Décomposons l'intervalle $[0,1]$ en deux :

$|\lambda_{a,n}|x \geq 1$ **:** Les asymptotiques sur les fonctions de Bessel donnent uniformément pour $z \in \mathbb{C}, |z| \geq 1$

$$\Upsilon_a(z) = \begin{bmatrix} \cos(2z - a\pi) \\ \sin(2z - a\pi) \end{bmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{2|\operatorname{Im} z|}}{z}\right).$$

Ainsi,

$$\int_x^1 \Upsilon_a(\lambda_{a,n}t) \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt = \int_x^1 \begin{bmatrix} \cos(2\lambda_{a,n}t - a\pi) \\ \sin(2\lambda_{a,n}t - a\pi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt + \int_x^1 \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda_{a,n}t}\right) \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt.$$

D'après le lemme 3.4.1, le premier terme est dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ uniformément par rapport à $x \in [0,1]$. En remarquant que

$$\left| \int_x^1 \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda_{a,n}t}\right) \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt \right| \leq C_1 \int_{1/|\lambda_{a,n}|}^1 \frac{1}{|\lambda_{a,n}|t} \left(|p(t)| + |q(t)|\right) dt,$$

avec C_1 uniforme en n et x sur l'intervalle considéré, le lemme B.0.4 donne

$$\left| \int_x^1 \Upsilon_a(\lambda_{a,n}t) \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt \right| \leq C_1 \ell^2(n) \leq C_1 \left(\frac{1 + |\lambda_{a,n}|x}{|\lambda_{a,n}|x}\right)^{2a} \ell^2(n).$$

$|\lambda_{a,n}|x \leq 1$ **:** Écrivons

$$\int_x^1 \Upsilon_a(\lambda_{a,n}t) \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt = \int_x^{|\lambda_{a,n}|^{-1}} \Upsilon_a(\lambda_{a,n}t) \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt + \int_{|\lambda_{a,n}|^{-1}}^1 \Upsilon_a(\lambda_{a,n}t) \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt.$$

Le second terme revient au cas précédent. Pour le premier, les estimations usuelles donnent

$$\left| \int_x^{|\lambda_{a,n}|^{-1}} \Upsilon_a(\lambda_{a,n}t) \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt \right| \leq C \left(\frac{1 + |\lambda_{a,n}|x}{|\lambda_{a,n}|x}\right)^{2a} \int_x^{|\lambda_{a,n}|^{-1}} \begin{bmatrix} |p(t)| \\ |q(t)| \end{bmatrix} dt.$$

Avec la majoration $\int_x^{|\lambda_{a,n}|^{-1}} |p(t)|dt \leq \int_0^{1/|\lambda_{a,n}|} |p(t)|dt$ et le lemme B.0.3, il vient

$$\left| \int_x^1 \Upsilon_a(\lambda_{a,n}t) \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt \right| \leq C_2 \left(\frac{1 + |\lambda_{a,n}|x}{|\lambda_{a,n}|x}\right)^{2a} \ell^2(n),$$

$C_2 > 0$ uniforme en $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Nous obtenons alors

$$\left| \int_x^1 \Upsilon_a(\lambda_{a,n} t) \cdot \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} dt \right| \leq C \left(\frac{1 + |\lambda_{a,n}| x}{|\lambda_{a,n}| x} \right)^{2a} \ell^2(n),$$

puis

$$|S_1(x, \lambda_{a,n}(p,q), p, q)| \leq \left(\frac{1 + |\lambda_{a,n}| x}{x} \right)^{a} \ell^2(n).$$

Tout comme pour la solution régulière, la relation de récurrence et l'estimation de $\mathcal{G}(x,t,\lambda)$ donnent

$$|S_{k+1}(x, \lambda_{a,n}(p,q), p, q)| \leq \frac{C^k}{k!} \left(\int_x^1 (|p(t)| + |q(t)|)\, dt \right)^k \left(\frac{1 + |\lambda_{a,n}| x}{x} \right)^{a} \ell^2(n),$$

puis

$$\tilde{\mathcal{S}}(x, \lambda_{a,n}(p,q), p, q) = S(x,\lambda) + \mathcal{O}\left(\left[\frac{1 + |\lambda_{a,n}| x}{x} \right]^{a} \right) \ell^2(n).$$

Ensuite le calcul du wronskien suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\lambda_{a,n}(p,q), p, q) &= \mathcal{W}(\lambda_{a,n}(p,q), 0) + \ell^2(n) \\ &= 1 + \ell^2(n) \end{aligned}$$

nous donne l'asymptotique avec la relation $\mathcal{S}(x,\lambda,p,q) = \dfrac{\tilde{\mathcal{S}}(x,\lambda,p,q)}{\mathcal{W}(\lambda,p,q)}$. □

Nous pouvons maintenant déduire de cela diverses asymptotiques qui seront utiles pour la suite.

Corollaire 3.4.1. *Les estimations suivantes sont valables uniformément sur* $[0,1]$ *et localement uniformément sur* $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ *pour* $|n| \to \infty$.

$$G_n(x,p,q) = \begin{bmatrix} j_{a-1}(\lambda_{a,n} x) \\ -j_a(\lambda_{a,n} x) \end{bmatrix} + \ell^2(n), \tag{3.4.6}$$

$$\nabla_{p,q} \lambda_{a,n}(p,q) = \Phi_a(\lambda_{a,n} x) + \ell^2(n), \tag{3.4.7}$$

$$\kappa_{a,n}(p,q) = \frac{(-1)^n}{\left[\left(|n| + \frac{a}{2} \right) \pi \right]^a} \left[1 + \ell^2(n) \right] = \frac{(-1)^n}{|n\pi|^a} \left[1 + \ell^2(n) \right], \tag{3.4.8}$$

$$A_n(x,p,q) = \Psi_a(\lambda_{a,n} x) + \ell^2(n), \tag{3.4.9}$$

$$\frac{\nabla_{p,q} \kappa_{a,n}(p,q)}{\kappa_{a,n}(p,q)} = \Psi_a(\lambda_{a,n} x) + \ell^2(n). \tag{3.4.10}$$

Preuve.
◇ Pour (3.4.6), il suffit de calculer la norme de $\mathcal{R}_n(\cdot,p,q)$. D'après (3.4.1),

$$\|\mathcal{R}_n(\cdot,p,q)\|^2 = \frac{1}{{\lambda_{a,n}}^{2a}}\left(\int_0^1 \left[j_{a-1}\left(\lambda_{a,n}x\right)^2 + j_a\left(\lambda_{a,n}x\right)^2\right]dx + \ell^2(n)\right).$$

La relation (A.3.7) pour a et $a-1$ puis l'asymptotique (A.3.9) donnent

$$\|\mathcal{R}_n(\cdot,p,q)\|^2 = \frac{1}{{\lambda_{a,n}}^{2a}}\left(1+\ell^2(n)\right). \tag{3.4.11}$$

◇ (3.4.7) découle directement de (2.3.1) et (3.4.6).
◇ L'estimation (3.4.8) se démontre de même que (2.3.4) en utilisant cette fois les estimations précédentes.
◇ Les relations (3.4.1),(3.4.5) et la définition de A_n donnent (3.4.9).
◇ D'après (2.3.3), il faut estimer le produit scalaire entre R_n et S_n. Les relations (3.4.1) et (3.4.5), puis les asymptotiques des fonctions de Bessel conduisent à

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{R}_n(\cdot,p,q), \mathcal{S}_n(\cdot,p,q)\right\rangle &= \left\langle R(\cdot,\lambda_{a,n}(p,q)), S(\cdot,\lambda_{a,n}(p,q))\right\rangle + \ell^2(n),\\ &= -\int_0^1 \left[j_{a-1}\left(\lambda_{a,n}x\right)\eta_{a-1}\left(\lambda_{a,n}x\right) + j_a\left(\lambda_{a,n}x\right)\eta_a\left(\lambda_{a,n}x\right)\right]dx + \ell^2(n),\end{aligned}$$

puis en utilisant (A.3.8) au rang $a-1$ et a puis l'asymptotique (A.3.10), il vient

$$\left\langle \mathcal{R}_n(\cdot,p,q), \mathcal{S}_n(\cdot,p,q)\right\rangle = \ell^2(n). \tag{3.4.12}$$

□

Nous pouvons maintenant préciser l'espace d'arrivée de l'application spectrale pour l'opérateur AKNS singulier. Elle est donc définie comme suit :

$$\begin{array}{rccc}\lambda^a\times\kappa^a: & L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z})\times\ell^2(\mathbb{Z})\\ & (p,q) & \longmapsto & \left((\widetilde{\lambda}_{a,n}(p,q))_{n\in\mathbb{Z}}, (\widetilde{\kappa}_{a,n}(p,q))_{n\in\mathbb{Z}}\right),\end{array}$$

Et ainsi, de même que pour l'opérateur de Schrödinger radial, en suivant [PT87] et [GR88], les résultats d'analyticité et d'asymptotiques localement uniformes entraînent le théorème :

Théorème 3.4.3.
L'application $\lambda^a\times\kappa^a$ est réelle-analytique sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.
Sa différentielle est donnée par l'application linéaire de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ dans $\ell^2(\mathbb{Z})\times\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$d_{p,q}(\lambda^a\times\kappa^a)(v) = \left(\left(\langle\nabla_{p,q}\lambda_{a,n}, v\rangle\right)_{n\in\mathbb{Z}}, \left(\langle\nabla_{p,q}\widetilde{\kappa}_{a,n}, v\rangle\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right).$$

Chapitre 4

Le problème inverse pour Schrödinger

Nous avons montré jusqu'ici que l'application $\lambda^a \times \kappa^a$ définie par

$$(\lambda^a \times \kappa^a)(q) = \left(\int_0^1 q(t)dt, \left\{ \widetilde{\lambda}_{a,n}(q) \right\}_{n\geq 1}, \{ n\kappa_{a,n}(q) \}_{n\geq 1} \right),$$

est réelle-analytique de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ dans $\mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \times \ell^2_{\mathbb{R}}$ et que sa différentielle est donnée par

$$d_q(\lambda^a \times \kappa^a)(v) = \Big(\langle 1, v \rangle, \Big(\Big\langle \nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n}, v \Big\rangle \Big)_{n\geq 1}, \big(\langle n\nabla_q \kappa_{a,n}, v \rangle \big)_{n\geq 1} \Big).$$

4.1 L'inversion locale

Le premier pas vers la résolution d'un problème spectral inverse avec contrôle de la stabilité par rapport aux données est la résolution du problème linéarisé. Le théorème suivant, résultat central dans ce travail, donne la solution du problème linéarisé :

Théorème 4.1.1.
$d_q(\lambda^a \times \kappa^a)$ est un isomorphisme de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ dans $\mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \times \ell^2_{\mathbb{R}}$.

Preuve du théorème 4.1.1. La preuve reprend la structure et les arguments développés dans [GR88].

Les relations d'orthogonalité du corollaire 1.3.1 nous permettent d'affirmer que la famille

$$\{1\} \cup \left\{ \nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n} \right\}_{n\geq 1} \cup \{ \nabla_q \kappa_{a,n} \}_{n\geq 1}$$

est libre. Notons r_n et s_n les fonctions telles que

$$r_n(x) = \nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n}(x) - (2\Phi_a(\omega_{a,n}x) - 1)\,, \tag{4.1.1}$$

$$s_n(x) = \nabla_q \kappa_{a,n}(x) - \frac{1}{\omega_{a,n}} \Psi_a(\omega_{a,n}x). \tag{4.1.2}$$

En utilisant le lemme 3.1.2, nous avons pour tout $v \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$,

$$\left\langle \nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n}, v \right\rangle = \int_0^1 \left(\cos\left(2\omega_{a,n}t\right) + R_n(t)\right) T_a[v](t)dt, \tag{4.1.3}$$

$$\langle \nabla_q \kappa_{a,n}, v \rangle = \frac{-1}{2\omega_{a,n}} \int_0^1 \left(\sin\left(2\omega_{a,n}t\right) + S_n(t)\right) T_a[v](t)dt, \tag{4.1.4}$$

avec

$$R_n = B_a^*[r_n] \text{ et } \frac{-S_n}{2\omega_{a,n}} = B_a^*[s_n]. \tag{4.1.5}$$

Rappelons de plus que $T_a[1] = -1$, en particulier

$$\langle 1, v \rangle = \int_0^1 v(t)dt = \int_0^1 -T_a[v](t)dt. \tag{4.1.6}$$

Notons F l'opérateur définit par

$$F(w) = \Bigg(\langle -1, w \rangle\,, \left\{ \langle \cos\left(2\omega_{a,n}t\right) + R_n(t), w \rangle \right\}_{n\geq 1}\,, \left\{ \left\langle \frac{-n}{2\omega_{a,n}} \left(\sin\left(2\omega_{a,n}t\right) + S_n(t)\right), w \right\rangle \right\}_{n\geq 1} \Bigg),$$

de telle sorte que $d_q(\lambda^a \times \kappa^a)(v) = F \circ T_a[v]$. D'après le lemme 3.1.2, T_a est inversible de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ dans $\left(\text{Vect}\left\{x^2, x^4, \ldots, x^{2a}\right\}\right)^{\perp}$. Nous devons donc montrer que F est inversible de $\left(\text{Vect}\left\{x^2, x^4, \ldots, x^{2a}\right\}\right)^{\perp}$ dans $\mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \times \ell^2_{\mathbb{R}}$. Suivant [GR88], il nous faut prouver l'inversibilité de l'opérateur $\mathbf{F}$ de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ dans $\mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \times \ell^2_{\mathbb{R}}$, envoyant les fonctions de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ sur leurs coefficients de Fourier (ou dit plus simplement, les produits scalaires contre chaque élément de la famille considérée) par rapport à la famille

$$\mathcal{F} = \{1\} \cup \left\{t^{2j}\right\}_{j\in[\![1,a]\!]} \cup \left\{\cos\left(2\omega_{a,n}t\right) + R_n(t)\right\}_{n\geq 1} \cup \left\{ \frac{-n}{2\omega_{a,n}} \left(\sin\left(2\omega_{a,n}t\right) + S_n(t)\right) \right\}_{n\geq 1}. \tag{4.1.7}$$

Cela découlera du lemme suivant :

Lemme 4.1.1 ([PT87] : Appendix D, theorem 3)**.**
Soit $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace de Hilbert H vérifiant les deux conditions

(a) il existe une base orthogonale $\mathcal{E} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H pour laquelle

$$\sum \|f_n - e_n\|_2^2 < \infty.$$

(b) les f_n sont linéairement indépendant au sens où aucun d'entre eux n'est dans l'adhérence de l'espace engendré par les autres.

Alors $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base et l'application $\mathbf{F} : x \mapsto \{(f_n, x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est inversible de H dans $\ell^2_{\mathbb{R}}$.

En considérant les bases hilbertiennes

$$\mathcal{E} = \left\{\sqrt{2}\cos\pi x, \sqrt{2}\sin\pi x, \ldots, \sqrt{2}\cos(2n+1)\pi x, \sqrt{2}\sin(2n+1)\pi x, \ldots\right\},$$

si $a = 2\mathfrak{a} + 1$ avec $\mathfrak{a} \in \mathbb{N}$ (comme Guillot et Ralston pour $a = 1$), et

$$\mathcal{E} = \left\{1, \sqrt{2}\cos 2\pi x, \sqrt{2}\sin 2\pi x, \ldots, \sqrt{2}\cos 2n\pi x, \sqrt{2}\sin 2n\pi x, \ldots\right\},$$

si $a = 2\mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{a} \in \mathbb{N}$ (comme Pöschel et Trubowitz pour $a = 0$), les estimations (1.2.4) et (1.2.12) utilisées avec (4.1.1) et (4.1.2) montrent que

$$\|r_n\|_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \quad \|s_n\|_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis la continuité de B_a^* et les relations données en (4.1.5) impliquent que

$$\|R_n\|_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \quad \|S_n\|_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui entraîne la condition (a) après renormalisation. Le résultat du lemme 4.1.2 donnant la condition (b) complétera la preuve. □

Remarque 14. Il est encore intéressant de noter le « saut »de numérotation créé par le terme dominant dans l'asymptotique des valeurs propres (le terme $(n + a/2)^2\pi^2$), saut qui est d'ailleurs comblé par les éléments du noyau de l'opérateur de transformation.

Il est aussi intéressant de constater que la parité de a joue sur le choix de la base de référence. Cela est à comparer avec le résultat pour l'opérateur AKNS.

Donnons maintenant le lemme nous permettant de terminer la preuve du résultat. Encore une fois, les ingrédients proviennent principalement de [GR88].

Lemme 4.1.2. *La famille $\mathcal{F}$ définie en (4.1.7) est libre dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.*

Démonstration. Les relations (4.1.3) et (4.1.4) peuvent s'écrire

$$T_a^* \left(\cos\left(2\omega_{a,n}t\right) + R_n(t)\right) = \nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n}$$

et

$$T_a^* \left(\frac{-1}{2\omega_{a,n}} \left(\sin\left(2\omega_{a,n}t\right) + S_n(t)\right)\right) = \nabla_q \kappa_{a,n}.$$

La continuité de T_a^* et la liberté de la famille $\{1\} \cup \left\{\nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n}\right\}_{n\geq 1} \cup \left\{\nabla_q \kappa_{a,n}\right\}_{n\geq 1}$ impliquent l'indépendance hilbertienne de la famille

$$\{1\} \cup \left\{\cos\left(2\omega_{a,n}t\right) + R_n\right\}_{n\geq 1} \cup \left\{\frac{-1}{2\omega_{a,n}} \left(\sin\left(2\omega_{a,n}t\right) + S_n\right)\right\}_{n\geq 1}.$$

Soit $k \in [\![1, a]\!]$, notons W_k la fonction définie par $W_k(t) = t^{2k}$. Montrons que W_k n'est pas dans l'adhérence de $\mathrm{Vect}\left(\mathcal{F} \setminus \{W_k\}\right)$. (Il faudrait montrer successivement que $W_k \notin \overline{\mathrm{Vect}\left(\mathcal{F} \setminus \{W_j, j \in [\![k, a]\!]\}\right)}$, cela n'est pas nécessaire puisqu'il suffit de prendre $\alpha_m^{(j)} = 0$ pour $m \in [\![k, a]\!]$ dans l'expression suivante.)
Pour cela supposons le contraire : il existe pour $j \in \mathbb{N}$ une suite de vecteurs

$$W_k^{(j)}(t) = \alpha_0^{(j)} + \sum_{\substack{m\in[\![1,a]\!] \\ m\neq k}} \alpha_m^{(j)} W_m(t) + \sum_{n\in[\![1,N_j]\!]} a_n^{(j)} \left(\cos\left(2\omega_{a,n}t\right) + R_n(t)\right) + \sum_{n\in[\![1,N_j]\!]} b_n^{(j)} \frac{-1}{2\omega_{a,n}} \left(\sin\left(2\omega_{a,n}t\right) + S_n(t)\right),$$

avec $N_j < \infty$, $\alpha_m^{(j)}, a_n^{(j)}, b_n^{(j)} \in \mathbb{R}$ et tels

$$W_k^{(j)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} W_k \text{ dans } L^2_{\mathbb{R}}(0,1).$$

Puisque $T_a^*(W_m) = 0$ pour $m = 1, \ldots, a$, la suite

$$w^{(j)} := T_a^*(W_k^{(j)}) = -\alpha_0^{(j)} + \sum_{n\in[\![1,N_j]\!]} a_n^{(j)} \nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n} + b_n^{(j)} \nabla_q \kappa_{a,n}$$

converge vers 0 dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ quand $j \to \infty$, et les relations d'orthogonalité du corollaire 1.3.1 donnent alors

$$\alpha_0^{(j)} = \int_0^1 w^{(j)}(t)dt \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{4.1.8}$$

$$a_n^{(j)} = -2\int_0^1 w^{(j)}(t)\frac{d}{dx}\left(\nabla_q \kappa_{a,n}\right)dt \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{4.1.9}$$

$$b_n^{(j)} = -2\int_0^1 w^{(j)}(t)\frac{d}{dx}\left(\nabla_q \lambda_{a,n}\right)dt \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.1.10}$$

Considérons maintenant une fonction $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty([0,1],\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $[\delta,1]$ pour un $\delta > 0$ telle que

$$\langle \omega, W_m\rangle = \delta_{k,m}, \quad m \in [\![1,a]\!]$$

et

$$\langle B_a[\omega],1\rangle = 0 \quad \text{i.e.} \quad \langle \omega,1\rangle = c(k,a)\langle \omega, W_k\rangle .^{\text{i}}$$

La régularité de ω et son support impliquent d'une part que

$$\int_0^1 \omega(t)\cos\left(2\omega_{a,n}t\right)dt, \int_0^1 \omega(t)\sin\left(2\omega_{a,n}t\right)dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^N}\right), \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

et d'autre part que $B_a[\omega]$ est $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ et à support dans $[\delta,1]$. (Il suffit de regarder l'expression de A_a pour s'en convaincre.)
Tout comme pour [GR88], en insérant l'estimation (1.1.8) dans l'expression intégrale (1.1.4) puis en utilisant (1.2.7) ainsi que les contrôles (A.2.1) et (A.2.5) nous obtenons l'estimation uniforme sur $[0,1]$ suivante

$$\begin{aligned} r_n(x) = \frac{1}{\|\varphi_n\|_2^2}\left(2u(x,\lambda_{a,n})\int_0^x \mathcal{G}(x,t,\lambda_{a,n})q(t)u(t,\lambda_{a,n})dt\right) \\ + \left(\frac{1}{\|\varphi_n\|_2^2} - \frac{2(\lambda_{a,n})^{a+1}}{((2a+1)!!)^2}\right)u(x,\lambda_{a,n})^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

qui entraîne, grâce au lemme 4.1.3, que la famille

$$\left\{\left\langle \omega, \left[\cos\left(2\omega_{a,n}t\right) + R_n(t)\right]\right\rangle\right\}_{n\geq 1} \text{ est sommable.}$$

[i] Le terme $c(k,a)$ représente la composante suivant W_k du vecteur $B_a^*[1]$. Il peut se calculer par récurrence sur a : $B_a^*[1] = -1 + \sum_{m=1}^a c(m,a)W_m$. En particulier $c(1,a) = a(a+1)$ (idem [GR88] pour $a = 1$).

Passons maintenant au terme relatif à s_n. Nous avons d'après la relation (4.1.2) et l'expression (1.2.11)

$$\begin{aligned} s_n(x) &= -a_n(x,q) + \nabla_q \lambda_{a,n}(x) \int_0^1 a_n(t,q)dt - \frac{1}{\omega_{a,n}} \Psi_a(\omega_{a,n}x), \\ &= -a_n(x,q) + (2\Phi_a(\omega_{a,n}x) + r_n(x)) \int_0^1 a_n(t,q)dt - \frac{1}{\omega_{a,n}} \Psi_a(\omega_{a,n}x), \\ &= -a_n(x,q) + 2\Phi_a(\omega_{a,n}x) \int_0^1 a_n(t,q)dt \\ &\qquad + r_n(x) \int_0^1 a_n(t,q)dt - \frac{1}{\omega_{a,n}} \Psi_a(\omega_{a,n}x). \end{aligned}$$

En injectant les estimations (1.1.8) et (1.1.9) dans les expressions intégrales (1.1.4) et respectivement (1.1.5), puis en utilisant (A.2.1), (A.2.2), (A.2.5), (A.2.7) ainsi que l'estimation du wronskien (1.1.12) nous obtenons l'estimation uniforme sur $[0,1]$ suivante

$$\begin{aligned} s_n(x) = &- v(x,\lambda_{a,n}) \int_0^x \mathcal{G}(x,t,\lambda_{a,n}) q(t) u(t,\lambda_{a,n}) dt \\ &+ u(x,\lambda_{a,n}) \int_x^1 \mathcal{G}(x,t,\lambda_{a,n}) q(t) v(t,\lambda_{a,n}) dt \Big\} \tilde{s}_n(x) \\ &+ 2\Phi_a(\omega_{a,n}x) \int_0^1 a_n(t,q)dt \\ &+ r_n(x) \int_0^1 a_n(t,q)dt \\ &+ \frac{1}{\omega_{a,n}} \Psi_a(\omega_{a,n}x) \left(W^{-1} - 1\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

qui, à l'aide du lemme 4.1.4, donne la sommabilité de la famille

$$\left\{ n \int_0^1 \omega(t) \frac{-1}{2\omega_{a,n}} \left(\sin\left(2\omega_{a,n}t\right) + S_n(t)\right) dt \right\}_{n\geq 1}.$$

Nous pouvons alors achever la preuve en écrivant que

$$\begin{aligned} \left\langle \omega, W_k^{(j)} \right\rangle = \alpha_0^{(j)} \langle \omega, 1 \rangle &+ \sum_{n \in [\![1,N_j]\!]} a_n^{(j)} \langle \omega, (\cos\left(2\omega_{a,n}t\right) + R_n(t)) \rangle \\ &+ \sum_{n \in [\![1,N_j]\!]} b_n^{(j)} \left\langle \omega, \frac{-1}{2\omega_{a,n}} \left(\sin\left(2\omega_{a,n}t\right) + S_n(t)\right) \right\rangle \end{aligned}$$

puis en appliquant le théorème de convergence dominée sachant de plus les majorations uniformes suivantes, déduites des estimations (3.2.4)-(3.2.5) et des relations (4.1.8)-(4.1.10),

$$\left|a_n^{(j)}\right| \leq C \quad \text{et} \quad \left|b_n^{(j)}\right| \leq Cn.$$

Cela nous permet d'obtenir

$$\left\langle \omega, W_k^{(j)} \right\rangle \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

qui est contradictoire avec le choix de ω. □

Lemme 4.1.3. *La famille*

$$\{\langle \omega, R_n\rangle\}_{n\geq 1} \quad \textit{est sommable.}$$

Démonstration. Notons $r_{n,1}$ et $r_{n,2}$ les premiers et second termes de l'expression (4.1.11). En rappelant que

$$\langle \omega, R_n\rangle = \langle \omega, B_a^*[r_n]\rangle = \langle B_a[\omega], r_n\rangle,$$

il nous suffit de prouver la sommabilité des familles $\{\langle B_a[\omega], r_{n,j}\rangle\}$, $j = 1, 2$. Occupons nous d'abord de $r_{n,2}$:

$$\begin{aligned}\langle B_a[\omega], r_{n,2}\rangle &= \left\langle B_a[\omega], \left(\frac{1}{\|\varphi_n\|_2^2} - \frac{2(\lambda_{a,n})^{a+1}}{((2a+1)!!)^2}\right) u(x,\lambda_{a,n})^2 \right\rangle, \\ &= \left\langle B_a[\omega], \left(\frac{((2a+1)!!)^2}{2(\lambda_{a,n})^{a+1}\|\varphi_n\|_2^2} - 1\right) 2j_a(\omega_{a,n}x)^2 \right\rangle.\end{aligned}$$

L'estimation (1.2.7) entraîne alors

$$\langle B_a[\omega], r_{n,2}\rangle = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega_{a,n}}\right)\left\langle B_a[\omega], 2j_a(\omega_{a,n}x)^2\right\rangle$$

qui, en utilisant l'hypothèse donnée sur $B_a[\omega]$, s'écrit

$$\langle B_a[\omega], r_{n,2}\rangle = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega_{a,n}}\right)\left\langle B_a[\omega], 2j_a(\omega_{a,n}x)^2 - 1\right\rangle$$

et l'application du lemme 3.1.2 donne le résultat.
En ce qui concerne $r_{n,1}$, écrivons comme ci-dessus

$$\begin{aligned} r_{n,1}(x) &= \frac{1}{\|\varphi_n\|_2^2}\left(2u(x,\lambda_{a,n})\int_0^x \mathcal{G}(x,t,\lambda_{a,n})q(t)u(t,\lambda_{a,n})dt\right) \\ &= \frac{2((2a+1)!!)^2}{(\omega_{a,n})^{2a+2}\|\varphi_n\|_2^2}\, j_a(\omega_{a,n}x)\int_0^x \mathcal{G}(x,t,\lambda_{a,n})q(t)j_a(\omega_{a,n}t)dt.\end{aligned}$$

Les estimations (A.2.1) et (A.2.5) nous permettent d'obtenir que

$$\int_0^x \mathcal{G}(x,t,\lambda_{a,n})q(t)j_a(\omega_{a,n}t)dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega_{a,n}}\right) \tag{4.1.13}$$

ainsi, avec (1.2.7), il vient

$$r_{n,1}(x) = 4j_a(\omega_{a,n}x)\int_0^x \mathcal{G}(x,t,\lambda_{a,n})q(t)j_a(\omega_{a,n}t)dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En utilisant l'expression de $\mathcal{G}(x,t,\lambda)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\langle B_a[\omega], r_{n,1}\rangle = &\\ &\frac{4}{\omega_{a,n}}\int_0^1 B_a[\omega](x)j_a(\omega_{a,n}x)^2\int_0^x q(t)j_a(\omega_{a,n}t)\eta_a(\omega_{a,n}t)dtdx\\ &-\frac{4}{\omega_{a,n}}\int_0^1 B_a[\omega](x)j_a(\omega_{a,n}x)\eta_a(\omega_{a,n}x)\int_0^x q(t)j_a(\omega_{a,n}t)^2dtdx\\ &+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Or, $B_a[\omega]$ est à support dans $[\delta,1]$, $\delta>0$ donc en utilisant les relations (A.1.5) et (A.1.6) nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle B_a[\omega], r_{n,1}\rangle = &\\ &\frac{2}{\omega_{a,n}}\int_0^1 B_a[\omega](x)(1-\cos(2\omega_{a,n}x-a\pi))\int_0^x q(t)j_a(\omega_{a,n}t)\eta_a(\omega_{a,n}t)dtdx\\ &-\frac{2}{\omega_{a,n}}\int_0^1 B_a[\omega](x)\sin(2\omega_{a,n}x-a\pi)\int_0^x q(t)j_a(\omega_{a,n}t)^2dtdx\\ &+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

En intégrant par parties les termes en facteurs de $\cos(\omega_{a,n}x)$ et $\sin(\omega_{a,n}x)$, il vient

$$\begin{aligned}\langle B_a[\omega],\, r_{n,1}\rangle = &\frac{2}{\omega_{a,n}}\int_0^1 B_a[\omega](x)\int_0^x q(t)j_a(\omega_{a,n}t)\eta_a(\omega_{a,n}t)dtdx\\ &+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Enfin, en inversant l'ordre d'intégration et en utilisant les propriétés de l'opérateur de transformation, nous obtenons la relation

$$\langle B_a[\omega],\, r_{n,1}\rangle = \frac{-1}{\omega_{a,n}}\int_0^1 \sin(2\omega_{a,n}t)T_a\left[t\mapsto q(t)\int_t^1 B_a[\omega](x)dx\right]dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

qui nous permet de conclure. □

Lemme 4.1.4. *La famille*

$$\{\langle \omega, S_n\rangle\}_{n\geq 1} \text{ est sommable.}$$

Démonstration. Rappelons que

$$\langle \omega, S_n\rangle = 2\omega_{a,n}\langle \omega, B_a^*[s_n]\rangle = 2\omega_{a,n}\langle B_a[\omega], s_n\rangle.$$

La preuve est similaire à celle du lemme 4.1.3 pour le terme $\tilde{s}_n$: il suffit d'utiliser l'hypothèse sur ω pour remplacer dans le produit scalaire $\langle B_a[\omega], \tilde{s}_n\rangle$ $2\Phi_a(\lambda_{a,n}x)$ par $2\Phi_a(\lambda_{a,n}x) - 1$ afin d'utiliser l'opérateur de transformation ; pour les deux premiers termes de $\tilde{s}_n$, il suffit comme précédemment d'utiliser le support de $B_a[\omega]$, les asymptotiques déduites de (A.1.5) et (A.1.6), d'intégrer par parties les termes en $\cos(2\omega_{a,n}x)$ ou $\sin(2\omega_{a,n}x)$ et enfin d'inverser l'ordre d'intégration pour utiliser les opérateurs de transformation.

Le terme suivant $\tilde{s}_n$ dans (4.1.12) s'estime grâce r_n ; reste le dernier terme noté $\hat{s}_n$. Nous avons

$$\begin{aligned}\langle B_a[\omega], \hat{s}_n\rangle &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\int_0^1 B_a[\omega](t) j_a(\lambda_{a,n}t)\,\eta_a(\lambda_{a,n}t)\,dt \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\int_\delta^1 B_a[\omega](t)\sin(2\omega_{a,n}t)dt + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

qui montre que la sommabilité de $\left\{n\langle B_a[\omega], \hat{s}_n\rangle\right\}_{n\geq 1}$ et le résultat. □

Énonçons maintenant le corollaire.

Corollaire 4.1.1. *L'application $\lambda^a \times \kappa^a$ est un difféomorphisme local en tout point de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ dans $\mathbb{R}\times\ell^2_{\mathbb{R}}\times\ell^2_{\mathbb{R}}$. De plus, l'inverse de la différentielle en un point $q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}\times\ell^2_{\mathbb{R}}\times\ell^2_{\mathbb{R}}$ sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ donnée par*

$$(d_q(\lambda^a\times\kappa^a))^{-1}(\eta_0,\eta,\xi) = \eta_0 + \sum_{n\geq 1}\eta_n W_{a,n} + \sum_{n\geq 1}\frac{\xi_n}{n}V_{a,n}.$$

Preuve. Le premier point découle directement du théorème et du théorème d'inversion locale.

Considérons maintenant $(\eta_0,\eta,\xi)\in\mathbb{R}\times\ell^2_{\mathbb{R}}\times\ell^2_{\mathbb{R}}$ et posons

$$u = \eta_0 + \sum_{n\geq 1}\eta_n W_{a,n} + \sum_{n\geq 1}\frac{\xi_n}{n}V_{a,n}.$$

La continuité de l'opérateur B_a, les estimations (3.2.4) et (3.2.5) ainsi que les relations (3.1.11) donnent

$$\frac{1}{n}V_{a,n}(x,q) = B_a\left[\frac{4\omega_{a,n}}{n}\sin(2\omega_{a,n}x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

et

$$W_{a,n}(x,q) = B_a\left[-2\cos(2\omega_{a,n}x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

La définition des suites ξ et η, l'estimation des valeurs propres et la continuité de l'opérateur de transformation B_a assurent alors la convergence dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ de la série définissant u.

Les relations d'orthogonalité du corollaire 1.3.1 donnent, d'une part,

$$\langle 1, u\rangle = \eta_0,$$

et, d'autre part, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\left\langle \nabla_q \widetilde{\lambda}_{a,n}, u\right\rangle = \eta_n, \quad \langle n\nabla_q \kappa_{a,n}, u\rangle = \xi_n.$$

Par conséquent, nous avons $d_q\left(\lambda^a \times \kappa^a\right)(u) = (\eta_0, \eta, \xi)$, ce qui prouve le corollaire. □

4.2 L'inversion globale

Nous rappelons ci-après le résultat obtenu par Zhornitskaya et Zerov dans [ZS94] et étendu par Carlson dans [Car97]. Le résultat obtenu par les premiers est l'injectivité pour le problème inverse associé à l'opérateur H_a avec un réel $a \geq -\frac{1}{2}$ avec conditions de Dirichlet et des potentiels $L^1([0,1],\mathbb{R})$. Le résultat du second est valable pour les mêmes valeurs du paramètre a, avec des potentiels $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ et des conditions aux limites généralisées, l'apport supplémentaire (pour notre utilisation) est la continuité de l'application λ^a entre les espaces $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ et $\mathbb{R}\times\ell^2_{\mathbb{R}}$ ainsi que la détermination des conditions aux limites associées.

Théorème 4.2.1. *Pour tout $a \geq -\frac{1}{2}$, l'application $\lambda^a \times \kappa^a$ est injective.*

Nous en déduisons maintenant le résultat suivant :

Théorème 4.2.2. *L'application $\lambda^a \times \kappa^a$ est un difféomorphisme global de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ dans $\mathbb{R}\times\ell^2_{\mathbb{R}}\times\ell^2_{\mathbb{R}}$.*

4.3 Ensembles isospectraux

Pour $q_0 \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, nous définissons l'ensemble des potentiels de même spectre de Dirichlet par

$$\mathrm{Iso}(q_0) = \left\{ q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) : \lambda^a(q) = \lambda^a(q_0) \right\}.$$

Viennent alors, comme dans [PT87], les propriétés suivantes :

Théorème 4.3.1. *Soit $q_0 \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, alors*

(a) $\mathrm{Iso}(q_0)$ *est une sous-variété réelle-analytique de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ comprise dans l'hyperplan des fonctions de moyenne $\int_0^1 q_0(t)dt$.*

(b) En tout point q de $\mathrm{Iso}(q_0)$*, l'espace tangent à* $\mathrm{Iso}(q_0)$ *est*

$$T_q \,\mathrm{Iso}(q_0) = \left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{\xi_n}{n} V_{a,n} : \xi \in \ell^2_{\mathbb{R}} \right\}$$

et l'espace normal est

$$N_q \,\mathrm{Iso}(q_0) = \left\{ \eta_0 + \sum_{n\geq 1} \eta_n (g_n^2 - 1) : (\eta_0, \eta) \in \mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Preuve du théorème. Elle suit comme celle donnée dans [PT87].

(a) Soit $q_0 \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ et $q \in \mathrm{Iso}(q_0)$. D'après le corollaire 4.1.1, l'application $\lambda^a \times \kappa^a : L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \to \mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \times \ell^2_{\mathbb{R}}$ est un difféomorphisme réel-analytique localement au voisinage de q. C'est à dire qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V} \subset L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ de q et un ouvert $\mathcal{W} \subset \mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \times \ell^2_{\mathbb{R}}$ tels que $\lambda^a \times \kappa^a : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ soit un isomorphisme réel-analytique. Il est alors clair que

$$\left(\lambda^a \times \kappa^a\right)\left(\mathcal{V} \cap \mathrm{Iso}(q_0)\right) = \mathcal{W} \cap \left(\left\{\lambda^a(q_0)\right\} \times \ell^2_{\mathbb{R}}\right).$$

Donc $\mathrm{Iso}(q_0)$ est bien une sous-variété réelle-analytique de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.

(b) Rappelons que $T_q \,\mathrm{Iso}(q_0) = \left(d_q \left(\lambda^a \times \kappa^a\right)\right)^{-1} \left(\left\{0_{\mathbb{R}\times\ell^2_{\mathbb{R}}}\right\} \times \ell^2_{\mathbb{R}}\right)$. Le corollaire 4.1.1 donne le résultat. Ensuite, d'après le corollaire 1.3.1, les vecteurs $\{1, {g_n}^2 - 1 : n \geq 1\}$ forment une famille libre qui est orthogonale à la famille libre $(V_{a,n})_{n\in\mathbb{Z}}$, ce qui montre l'inclusion

$$\left\{ \eta_0 + \sum_{n\geq 1} \eta_n (g_n^2 - 1) : (\eta_0, \eta) \in \mathbb{R} \times \ell^2_{\mathbb{R}} \right\} \subset N_q \,\mathrm{Iso}(q_0).$$

D'autre part, tout vecteur orthogonal à la famille $\{1, {g_n}^2 - 1 : n \geq 1\}$ est, d'après la forme de la différentielle, dans le noyau $d_q\lambda^a$, ce qui nous donne l'autre inclusion et donc l'égalité.

□

Donnons pour conclure le résultat de caractérisation des spectres de Dirichlet pour les opérateurs H_a montré par Carlson dans [Car93]

Théorème 4.3.2 ([Car93] Theorem 1.1)**.** *Pour tout $a \in \mathbb{N}$, une suite de nombres réels $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est l'ensemble des valeurs propres pour le problème de Dirichlet associé à l'opérateur H_a si et seulement si elle vérifie les deux conditions :*

- *pour tout entier $n \geq 1$, $\lambda_n < \lambda_{n+1}$,*
- *pour tout entier $n \geq 1$, $\lambda_n = \left(n + \frac{a}{2}\right)^2 \pi^2 + C + r_n$,*

où C est une constante réelle et la suite r_n vérifie $\sum {r_n}^2 < \infty$.

Chapitre 5

Le problème inverse pour AKNS

Rappelons que dans le cas régulier, Grébert et Guillot [GG93] ont montré que l'application $\lambda^0 \times \kappa^0$ est un système de coordonnées locales sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, ou autrement dit, un difféomorphisme local. Leurs travaux ont aussi montré que la restriction de cette application définit un système de coordonnées globales sur $H^j_{\mathbb{R}}(0,1) \times H^j_{\mathbb{R}}(0,1)$ pour $j = 1$ et 2.

Motivés par ces résultats et bien évidement aussi par ceux obtenus pour l'opérateur de Schrödinger dans le cas singulier ([GR88], [Car93], [CS94],...) nous présentons les résultats obtenus pour l'opérateur AKNS singulier.

5.1 L'inversion locale

Nous savons maintenant que l'application $\lambda^a \times \kappa^a$ est réelle-analytique sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, et que sa différentielle s'exprime de la manière suivante :

$$d_{p,q}(\lambda^a \times \kappa^a)(v) = \Big(\left(\langle \nabla_{p,q}\lambda_{a,n}, v\rangle\right)_{n\in\mathbb{Z}}, \left(\langle \nabla_{p,q}\widetilde{\kappa}_{a,n}, v\rangle\right)_{n\in\mathbb{Z}} \Big).$$

Et enfin, le théorème central

Théorème 5.1.1.
$d_{p,q}(\lambda^a \times \kappa^a)$ est un isomorphisme de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ dans $\ell^2(\mathbb{Z}) \times \ell^2(\mathbb{Z})$.

Preuve du théorème 5.1.1. En rappelant la relation de colinéarité

$$\nabla_{p,q}\widetilde{\kappa}_{a,n} = (-1)^n \left[\left(|n| + \frac{a}{2}\right)\pi\right]^a \nabla_{p,q}\kappa_{a,n},$$

le corollaire 2.3.1 implique que les vecteurs $(\nabla_{p,q}\lambda_{a,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(\nabla_{p,q}\widetilde{\kappa}_{a,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une famille libre de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Notons r_n et s_n les vecteurs

tels que

$$r_n(x) = \nabla_{p,q}\lambda_{a,n}(x) - \Phi_a(\lambda_{a,n}x), \tag{5.1.1}$$
$$s_n(x) = \nabla_{p,q}\widetilde{\kappa}_{a,n}(x) - \Psi_a(\lambda_{a,n}x). \tag{5.1.2}$$

En utilisant le lemme 3.3.2, nous avons pour tout $v \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$,

$$\left\langle \nabla_{(p,q)}\lambda_{a,n}(V), v \right\rangle = \int_0^1 \left(\begin{bmatrix} \sin(2\lambda_{a,n}t) \\ \cos(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + R_n(t) \right) \cdot T_a[v](t)dt, \tag{5.1.3}$$
$$\left\langle \nabla_{(p,q)}\widetilde{\kappa}_{a,n}(V), v \right\rangle = \int_0^1 \left(\begin{bmatrix} \cos(2\lambda_{a,n}t) \\ -\sin(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + S_n(t) \right) \cdot T_a[v](t)dt, \tag{5.1.4}$$

avec $R_n = B_a^*[r_n]$ et $S_n = B_a^*[s_n]$. Notons F l'opérateur défini par

$$F(w) = \left(\left\{ \left\langle \begin{bmatrix} \sin(2\lambda_{a,n}t) \\ \cos(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + R_n(t), w \right\rangle \right\}_{n\in\mathbb{Z}}, \left\{ \left\langle \begin{bmatrix} \cos(2\lambda_{a,n}t) \\ -\sin(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + S_n(t), w \right\rangle \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \right),$$

de telle sorte que $d_{p,q}(\lambda^a \times \kappa^a)(v) = F \circ T_a[v]$. D'après le lemme 3.3.2, T_a est inversible de $L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ dans $\left(\bigoplus_{k=1}^{a} N_k \right)^{\perp}$. Nous devons donc montrer que F est inversible de $\left(\bigoplus_{k=1}^{a} N_k \right)^{\perp}$ dans $\ell^2(\mathbb{Z}) \times \ell^2(\mathbb{Z})$. Pour cela, suivant [GR88], nous allons montrer que l'opérateur $\mathbf{F}$ envoyant les fonctions de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ sur leurs coefficients de Fourier (ou, autrement dit, les produits scalaires contre chaque élément de la famille considérée) par rapport à la famille

$$\mathcal{F} = \left(\{U_{2k}\}_{k=0}^{a-1}, \left\{ \begin{bmatrix} \sin(2\lambda_{a,n}t) \\ \cos(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + R_n(t) \right\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{V_{2k+1}\}_{k=0}^{a-1}, \left\{ \begin{bmatrix} \cos(2\lambda_{a,n}t) \\ -\sin(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + S_n(t) \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \right), \tag{5.1.5}$$

est une application inversible de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ dans $\ell^2(\mathbb{Z}) \times \ell^2(\mathbb{Z})$. Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant ([PT87] : Appendix D, theorem 3).

Lemme 5.1.1. *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite d'un espace de Hilbert H telle que*

(a) il existe une base orthogonale $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de H pour laquelle $\sum \|f_n - e_n\|_2^2 < \infty$, et

(b) les f_n sont linéairement indépendant au sens où aucun d'entre eux n'est dans l'adhérence de l'espace engendré par les autres.

Alors $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base et l'application $\mathbf{F} : x \mapsto \{(f_n, x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est inversible de H dans $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Les estimations (3.4.7), (3.4.8) et (3.4.10) entraînent

$$r_n = \ell^2(n) \quad \text{et} \quad s_n = \ell^2(n).$$

De la continuité de B_a^* suivent

$$R_n = \ell^2(n) \quad \text{et} \quad S_n = \ell^2(n)$$

qui impliquent, en considérant la base orthogonale (voir la remarque 15 ci-dessous)

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \sin\left(2\left((n+\frac{a}{2})\pi+\beta\right)t\right) \\ \cos\left(2\left((n+\frac{a}{2})\pi+\beta\right)t\right) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\left(2\left((n+\frac{a}{2})\pi+\beta\right)t\right) \\ -\sin\left(2\left((n+\frac{a}{2})\pi+\beta\right)t\right) \end{bmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (5.1.6)$$

et en numérotant correctement chaque famille (voir la remarque 16), la condition (a). Le lemme 5.1.2 donne le (b), ce qui complète la preuve. □

Remarque 15. La famille $\mathcal{F}_0$ est une base comme image par l'isométrie H de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ donnée par

$$H(F,G)(t) = \begin{bmatrix} \cos\left((a\pi+2\beta)t\right) & \sin\left((a\pi+2\beta)t\right) \\ -\sin\left((a\pi+2\beta)t\right) & \cos\left((a\pi+2\beta)t\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(t) \\ G(t) \end{bmatrix}$$

de la base de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \sin(2n\pi t) \\ \cos(2n\pi t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(2n\pi t) \\ -\sin(2n\pi t) \end{bmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Remarque 16. Il est ici intéressant de se rappeler le résultat du lemme de comptage qui montrait un "trou" dans la numérotation des valeurs propres. C'est justement ce trou qui nous permet d'ajuster correctement les familles de gradients et les éléments du noyau de l'opérateur de transformation. C'est bien ici qu'est en quelque sorte comblé ce vide.

Précisons maintenant de quelle façon sont indicés et associés les éléments de chacune des familles $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}$. Notons $f^0_{n,1}$ et $f^0_{n,2}$ définis par (5.1.6), c'est à dire que nous avons

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ f^0_{n,1},\ f^0_{n,2},\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nous prenons maintenant pour $\mathcal{F}$ une numérotation adaptée, à savoir que nous posons

$$\mathcal{F} = \{f_{n,1},\ f_{n,2},\ n \in \mathbb{Z}\}$$

en prenant pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{n,1}(t) = \begin{bmatrix} \sin(2\lambda_{a,n}t) \\ \cos(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + R_n(t) \quad \text{et} \quad f_{n,2}(t) = \begin{bmatrix} \cos(2\lambda_{a,n}t) \\ -\sin(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + S_n(t),$$

pour $n \in [\![-a, -1]\!]$,

$$f_{n,1} = U_{-2n-2} \quad \text{et} \quad f_{n,2} = V_{-2n-1},$$

et enfin pour tout entier $n \leq -a-1$,

$$f_{n,1}(t) = \begin{bmatrix} \sin(2\lambda_{a,n+a}t) \\ \cos(2\lambda_{a,n+a}t) \end{bmatrix} + R_{n+a}(t) \ \text{ et } \ f_{n,2}(t) = \begin{bmatrix} \cos(2\lambda_{a,n+a}t) \\ -\sin(2\lambda_{a,n+a}t) \end{bmatrix} + S_{n+a}(t).$$

Notons que l'asymptotique (3.4.2) donne pour $n \leq -a-1$

$$\begin{aligned} \lambda_{a,n+a}(p,q) &= \left((n+a) + \operatorname{sgn}(n+a)\frac{a}{2}\right)\pi + \beta + \ell^2(n), \\ &= \left((n+a) - \frac{a}{2}\right)\pi + \beta + \ell^2(n) = \left(n + \frac{a}{2}\right)\pi + \beta + \ell^2(n). \end{aligned}$$

Pour montrer la liberté de la famille $\mathcal{F}$, formalisons légèrement avec la proposition suivante

Proposition 5.1.1. *Soient $(E_{n,1}, E_{n,2})_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille libre de vecteurs de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) Relation de dualité : il existe une famille bornée $(F_{n,1}, F_{n,2})_{n\in\mathbb{Z}}$ de vecteurs de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, telle que

$$\langle E_{n,j}, F_{m,j}\rangle = 0, \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \quad j = 1,2.$$

$$\langle E_{n,1}, F_{m,2}\rangle = \langle E_{n,2}, F_{m,1}\rangle = \delta_{n,m}, \quad \forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2.$$

(ii) Asymptotiques :

$$E_{n,1} = T_a^*\left(\begin{bmatrix} \sin(2\lambda_{a,n}t) \\ \cos(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + e_{n,1}\right),\ E_{n,2} = T_a^*\left(\begin{bmatrix} \cos(2\lambda_{a,n}t) \\ -\sin(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + e_{n,2}\right)$$

avec $(\|e_{n,j}\|_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)})_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$, $j = 1,2$.

(iii) Sommabilité : pour tout $\omega \in \mathcal{C}^\infty_0([0,1], \mathbb{R}^2)$,

$$(\langle \omega, e_{n,j}\rangle)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}), \quad j = 1,2.$$

Alors, la famille suivante est libre dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$

$$\mathcal{F} = \Bigg(\{U_{2k}\}_{k=0}^{a-1}, \left\{ \begin{bmatrix} \sin(2\lambda_{a,n}t) \\ \cos(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + e_{n,1}(t) \right\}_{n\in\mathbb{Z}}, \\ \{V_{2k+1}\}_{k=0}^{a-1}, \left\{ \begin{bmatrix} \cos(2\lambda_{a,n}t) \\ -\sin(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + e_{n,2}(t) \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \Bigg).$$

Démonstration. Nous montrons tout d'abord que la famille $\mathcal{F}$ est libre. La continuité de T_a^* d'une part et la liberté de la famille $\{E_{n,1}, E_{n,2}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ impliquent l'indépendance hilbertienne de la famille

$$\left\{ \begin{bmatrix} \sin(2\lambda_{a,n}t) \\ \cos(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + e_{n,1}(t) \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \left\{ \begin{bmatrix} \cos(2\lambda_{a,n}t) \\ -\sin(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + e_{n,1}(t) \right\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Soit $k \in [\![0, 2a-1]\!]$, notons W_k le vecteur défini par $W_k = U_k$ si k est pair et $W_k = V_k$ sinon. Montrons que W_k n'est pas dans l'adhérence de $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F} \setminus \{W_k\})$. (En toute rigueur, il faudrait montrer successivement que $W_k \notin \overline{\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F} \setminus \{W_j, j \in [\![k, 2a-1]\!]\})}$, mais ce n'est pas nécessaire puisque cela revient à prendre $\alpha_m^{(j)} = 0$ pour $m \in [\![k, 2a-1]\!]$ dans l'expression qui suit.)
Pour cela supposons le contraire : il existe pour $j \in \mathbb{N}$ une suite de vecteurs

$$W_k^{(j)}(t) = \sum_{\substack{m\in[\![0,2a-1]\!] \\ m\neq k}} \alpha_m^{(j)} W_m(t) + \sum_{n\in[\![-N_j,N_j]\!]} a_n^{(j)} \left(\begin{bmatrix} \sin(2\lambda_{a,n}t) \\ \cos(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + e_{n,1}(t) \right) \\ + \sum_{n\in[\![-N_j,N_j]\!]} b_n^{(j)} \left(\begin{bmatrix} \cos(2\lambda_{a,n}t) \\ -\sin(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + e_{n,2}(t) \right),$$

avec $N_j < \infty$, $\alpha_m^{(j)}, a_n^{(j)}, b_n^{(j)} \in \mathbb{R}$ et tels

$$W_k^{(j)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} W_k \text{ dans } L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1).$$

Puisque $T_a^*(W_m) = 0$ pour $m = 1, \ldots, 2a$, la suite

$$w^{(j)} := T_a^*(W_k^{(j)}) = \sum_{n\in[\![-N_j,N_j]\!]} a_n^{(j)} E_{n,1} + b_n^{(j)} E_{n,2}$$

converge vers 0 dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ quand $j \to \infty$. Les propriétés de dualité données par *(i)* entraîne que

$$a_n^{(j)} = \int_0^1 w^{(j)} \cdot F_{n,2}\, dt \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{5.1.7}$$

$$b_n^{(j)} = \int_0^1 w^{(j)} \cdot F_{n,1}\, dt \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{5.1.8}$$

mais aussi que les suites $(a_n^{(j)})$ et $(b_n^{(j)})$ sont uniformément bornées par rapport à n et j.

Considérons maintenant (voir l'Annexe C) une fonction $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty([0,1],\mathbb{R}^2)$ dont le support est inclus dans $[\delta,1]$ pour un $\delta > 0$ et telle que

$$\langle \omega, W_m \rangle = \delta_{k,m}, \quad m \in [\![0, 2a-1]\!].$$

La régularité de ω et son support impliquent que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \omega(t) \cdot \begin{bmatrix} \sin(2\lambda_{a,n}t) \\ \cos(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} dt, \int_0^1 \omega(t) \cdot \begin{bmatrix} \cos(2\lambda_{a,n}t) \\ -\sin(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^N}\right).$$

L'hypothèse de *(iii)* montre que les familles

$$\left\{ \left\langle \omega, t \mapsto \begin{bmatrix} \sin(2\lambda_{a,n}t) \\ \cos(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + e_{n,1}(t) \right\rangle \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

et

$$\left\{ \left\langle \omega, t \mapsto \begin{bmatrix} \cos(2\lambda_{a,n}t) \\ -\sin(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + e_{n,2}(t) \right\rangle \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

sont sommables. Nous pouvons alors achever la preuve en écrivant que

$$\begin{aligned} \left\langle \omega, W_k^{(j)} \right\rangle = &\sum_{n\in[\![-N_j,N_j]\!]} a_n^{(j)} \left\langle \omega, \left(\begin{bmatrix} \sin(2\lambda_{a,n}t) \\ \cos(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + e_{n,1}(t) \right) \right\rangle \\ &+ \sum_{n\in[\![-N_j,N_j]\!]} b_n^{(j)} \left\langle \omega, \left(\begin{bmatrix} \cos(2\lambda_{a,n}t) \\ -\sin(2\lambda_{a,n}t) \end{bmatrix} + e_{n,2}(t) \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

puis en appliquant le théorème de convergence dominée qui montre que

$$\left\langle \omega, W_k^{(j)} \right\rangle \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et donne la contradiction avec le choix de ω. La famille $\mathcal{F}$ est par conséquent libre. □

Lemme 5.1.2. *La famille $\mathcal{F}$ définie en (5.1.5) est libre dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.*

Preuve. Nous appliquons la proposition 5.1.1 en considérant les vecteurs suivants

$$\begin{aligned} E_{n,1} = \nabla_{p,q}\lambda_{a,n}, \quad E_{n,2} = \nabla_{p,q}\widetilde{\kappa}_{a,n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ F_{n,1} = \nabla_{p,q}\lambda_{a,n}{}^{\perp}, \quad F_{n,2} = -\nabla_{p,q}\widetilde{\kappa}_{a,n}{}^{\perp}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

La proposition et le corollaire de la section 2.3.3 nous assurent que la famille $(E_{n,1}, E_{n,2})_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre et que la condition *(i)* est vérifiée.

Les relations (5.1.3), (5.1.4) et les estimations (3.4.7), (3.4.10) nous permettent de vérifier la condition *(ii)* avec

$$e_{n,1} = {B_a}^*[r_n], \quad e_{n,2} = {B_a}^*[s_n],$$

où r_n et s_n sont définis en (5.1.1) et (5.1.2).

Il nous reste à prouver la condition *(iii)*.
Soit $\omega \in \mathcal{C}_0^\infty([0,1],\mathbb{R}^2)$ dont le support est inclus dans $[\delta,1]$ pour un $\delta > 0$. $B_a[\omega]$ est $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}^2)$ et à support dans $[\delta,1]$. (Il suffit de regarder l'expression de S_a^* donnée au lemme 3.3.1 pour s'en convaincre.)
Notons $\varepsilon_n = (\varepsilon_n^1, \varepsilon_n^2)$ la fonction définie par

$$\varepsilon_n(x,V) = \mathcal{R}_n(x,V) - R(x,\lambda_{a,n}(V)).$$

Remplaçons dans chaque composante de $\nabla_{p,q}\lambda_{a,n}$ (cf.(2.3.1)). Il vient

$$\begin{aligned} 2G_{n,1}(x,V)G_{n,2}(x,V) &= 2\big(R_1(x,\lambda_{a,n})+\varepsilon_n^1\big)\big(R_2(x,\lambda_{a,n})+\varepsilon_n^2\big)\|\mathcal{R}_n(\cdot,p,q)\|_2^{-2}, \\ &= \Big(2R_1(x,\lambda_{a,n})R_2(x,\lambda_{a,n}) + 2R_1(x,\lambda_{a,n})\,\varepsilon_n^1 + 2R_2(x,\lambda_{a,n})\,\varepsilon_n^2 \\ &\qquad + \varepsilon_n^1\varepsilon_n^2\Big)\|\mathcal{R}_n(\cdot,p,q)\|_2^{-2}. \end{aligned}$$

D'après (3.4.1), nous avons

$$\big|\varepsilon_n^j(x)\big| \le \left(\frac{x}{1+|\lambda_{a,n}|x}\right)^a \ell^2(n), \quad j = 1,2.$$

En utilisant de plus (3.4.11), nous obtenons

$$\begin{aligned} 2G_{n,1}(x,V)G_{n,2}(x,V) &= -2j_a(\lambda_{a,n}x)j_{a-1}(\lambda_{a,n}x)(1+\ell^2(n)) \\ &\quad + 2{\lambda_{a,n}}^a\Big(j_{a-1}(\lambda_{a,n}x)\,\varepsilon_n^2 - j_a(\lambda_{a,n}x)\,\varepsilon_n^1\Big) + \ell^1(n) \end{aligned}$$

et il vient de même

$$\begin{aligned} G_{n,2}(x,V)^2 - G_{n,1}(x,V)^2 &= \big(j_a(\lambda_{a,n}x)^2 - j_{a-1}(\lambda_{a,n}x)^2\big)(1+\ell^2(n)) \\ &\quad + 2{\lambda_{a,n}}^a\Big(-j_{a-1}(\lambda_{a,n}x)\,\varepsilon_n^1 - j_a(\lambda_{a,n}x)\,\varepsilon_n^2\Big) + \ell^1(n), \end{aligned}$$

ce qui donne l'estimation, uniforme pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} r_n(x,V) &= 2{\lambda_{a,n}}^a\Big[j_{a-1}\left(\lambda_{a,n}x\right)\varepsilon_n(x,V)^\perp - j_a\left(\lambda_{a,n}x\right)\varepsilon_n(x,V)\Big] \\ &\quad + \Phi_a(\lambda_{a,n}x)\ell^2(n) + \ell^1(n). \end{aligned}$$

À l'aide de l'estimation uniforme sur $[\delta, 1]$,

$$j_a\left(\lambda_{a,n}x\right) = \sin\left(\lambda_{a,n}x - \frac{a\pi}{2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda_{a,n}}\right),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle \omega, e_{n,1}\rangle &= \langle \omega, {B_a}^*[r_n]\rangle = \langle B_a[\omega], r_n\rangle \\
&= \int_0^1 \cos\left(\lambda_{a,n}t - \frac{a\pi}{2}\right) 2{\lambda_{a,n}}^a \varepsilon_n(t,V)^\perp \cdot B_a[\omega](t)dt \\
&\quad - \int_0^1 \sin\left(\lambda_{a,n}t - \frac{a\pi}{2}\right) 2{\lambda_{a,n}}^a \varepsilon_n(t,V) \cdot B_a[\omega](t)dt \\
&\quad + \left\langle \ell^2(n) B_a[\omega], \Phi_a(\lambda_{a,n}x)\right\rangle + \ell^1(n).
\end{aligned}$$

Maintenant, remarquons avec le lemme 3.4.1, que pour tout $f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, nous avons uniformément sur les bornés de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$,

$$\left|\int_0^1 \cos\left(\lambda_{a,n}x\right) f(t)dt\right| = \|f\|_2 \left|\int_0^1 \cos\left(\lambda_{a,n}x\right) \frac{f(t)}{\|f\|_2}dt\right| \leq \|f\|_2\, \ell^2(n),$$

ce qui donne, par exemple, l'estimation

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \sin\left(\lambda_{a,n}t - \frac{a\pi}{2}\right) 2{\lambda_{a,n}}^a \varepsilon_n(t,V) \cdot B_a[\omega](t)dt\right| &\leq 2\ell^2(n)\|{\lambda_{a,n}}^a \varepsilon_n \cdot B_a[w]\|_2, \\
&\leq 2\ell^2(n)\ell^2(n)\|B_a[w]\|_2, \\
&\leq \ell^1(n)\|B_a[w]\|_2.
\end{aligned}$$

De même, en utilisant l'opérateur de transformation, il vient

$$\left\langle \ell^2(n) B_a[\omega], \Phi_a(\lambda_{a,n}x)\right\rangle = \ell^1(n).$$

En d'autres termes, nous obtenons $\langle \omega, e_{n,1}\rangle = \ell^1(n)$.

Comme auparavant, notons $\Sigma_n = (\Sigma_n^1, \Sigma_n^2)$ défini par

$$\Sigma_n(x,V) = \mathcal{S}_n(x,V) - S(x,\lambda_{a,n}),$$

où, avec (3.4.5), nous avons

$$\left|\Sigma_n^j(x)\right| \leq \left(\frac{1+|\lambda_{a,n}|x}{x}\right)^a \ell^2(n), \quad j = 1,2.$$

Dans un premier temps, il vient à l'aide de la définition de $A_n(x,p,q)$ et des estimations (3.4.1) et (3.4.5),

$$\begin{aligned} A_n(x,p,q) &= \Psi_a(\lambda_{a,n}x) \\ &\quad - \frac{1}{{\lambda_{a,n}}^a}\big(j_{a-1}(\lambda_{a,n}x)\Sigma_n(x,V)^\perp - j_a(\lambda_{a,n}x)\Sigma_n(x,V)\big) \\ &\quad + {\lambda_{a,n}}^a\big(\eta_{a-1}(\lambda_{a,n}x)\varepsilon_n(x,V)^\perp - \eta_a(\lambda_{a,n}x)\varepsilon_n(x,V)\big) + \ell^1(n), \end{aligned}$$

ce qui donne, en utilisant (2.3.3) avec l'estimation (3.4.12),

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_{p,q}\kappa_{a,n}}{\kappa_{a,n}} &= \Psi_a(\lambda_{a,n}x) + \ell^2(n)\Psi_a(\lambda_{a,n}x) \\ &\quad - \frac{1}{{\lambda_{a,n}}^a}\big(j_{a-1}(\lambda_{a,n}x)\Sigma_n(x,V)^\perp - j_a(\lambda_{a,n}x)\Sigma_n(x,V)\big) \\ &\quad + {\lambda_{a,n}}^a\big(\eta_{a-1}(\lambda_{a,n}x)\varepsilon_n(x,V)^\perp - \eta_a(\lambda_{a,n}x)\varepsilon_n(x,V)\big) + \ell^1(n). \end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} s_n(x) &= -\frac{1}{{\lambda_{a,n}}^a}\big(j_{a-1}(\lambda_{a,n}x)\Sigma_n(x,V)^\perp - j_a(\lambda_{a,n}x)\Sigma_n(x,V)\big) \\ &\quad + {\lambda_{a,n}}^a\big(\eta_{a-1}(\lambda_{a,n}x)\varepsilon_n(x,V)^\perp - \eta_a(\lambda_{a,n}x)\varepsilon_n(x,V)\big) \\ &\qquad + \ell^2(n)\Psi_a(\lambda_{a,n}x) + \ell^2(n)\Psi_a(\lambda_{a,n}x) + \ell^1(n). \end{aligned}$$

et avec les mêmes arguments que précédemment, nous obtenons la sommabilité de la famille

$$\big\{\langle\omega, e_{n,2}\rangle\big\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

La proposition 5.1.1 nous donne alors le résultat. □

Avant de donner le corollaire à ce théorème, introduisons quelques notations afin d'alléger les écritures.

Notations. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, nous posons

$$X_{a,n}(p,q) = \frac{-\nabla_{p,q}{\kappa_{a,n}}^\perp}{\kappa_{a,n}(p,q)}, \quad Y_{a,n}(p,q) = \frac{(-1)^n\,\nabla_{p,q}{\lambda_{a,n}}^\perp}{\big[\big(|n| + \frac{a}{2}\big)\,\pi\big]^a\,\kappa_{a,n}(p,q)}.$$

Remarquons qu'avec les diverses estimations du corollaire 3.4.1, nous avons les asymptotiques

$$X_{a,n}(p,q) = -\Psi_a(\lambda_{a,n}x)^\perp + \ell^2(n),\ Y_{a,n}(p,q) = \Phi_a(\lambda_{a,n}x)^\perp + \ell^2(n). \quad (5.1.9)$$

Corollaire 5.1.1. *L'application $\lambda^a \times \kappa^a$ est un difféomorphisme local en tout point de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ dans $\ell^2(\mathbb{Z}) \times \ell^2(\mathbb{Z})$. De plus, l'inverse de la différentielle en un point (p,q) de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ est l'application linéaire de $\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) \times \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ donnée par*

$$\left(d_{p,q}\left(\lambda^a \times \kappa^a\right)\right)^{-1}(\xi,\eta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi_n X_{a,n} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta_n Y_{a,n}.$$

Preuve. Le premier point découle directement du théorème et de la définition d'un difféomorphisme local. Considérons maintenant $(\xi,\eta) \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) \times \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ et posons

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi_n X_{a,n} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta_n Y_{a,n}.$$

Via la relation (3.3.4), l'opérateur de transformation nous permet d'écrire les estimations (5.1.9) sous la forme

$$X_{a,n}(p,q) = B_a\left[\begin{bmatrix}\sin(2\lambda_{a,n}x)\\ \cos(2\lambda_{a,n}x)\end{bmatrix} + \ell^2(n)\right],$$

$$Y_{a,n}(p,q) = B_a\left[\begin{bmatrix}\cos(2\lambda_{a,n}x)\\ -\sin(2\lambda_{a,n}x)\end{bmatrix} + \ell^2(n)\right].$$

La continuité de l'opérateur B_a et la définition des suites ξ et η, nous assurent la convergence dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ de la série ainsi définie. Les relations d'orthogonalité de la section 2.3.3 donnent pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\langle \nabla_{p,q}\lambda_{a,n}, u\rangle = \xi_n \quad \text{et} \quad \langle \nabla_{p,q}\widetilde{\kappa}_{a,n}, u\rangle = \eta_n.$$

Par conséquent, nous avons $d_{p,q}\left(\lambda^a \times \kappa^a\right)(u) = (\xi,\eta)$, ce qui prouve le corollaire. □

5.2 Injectivité pour les potentiels $H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$

Théorème 5.2.1. *L'application $\lambda^a \times \kappa^a$ est injective sur $H^1_{\mathbb{R}}(0,1) \times H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$.*

En adaptant la méthode utilisée dans [Car97] (lemma 3.3) pour l'injectivité du problème spectral inverse associé l'opérateur de Schrödinger radial, nous avons besoin d'introduire une solution à (2.0.1) avec condition initiale en $x = 1$.

Lemme 5.2.1. *Soit $\rho(x,\lambda,V)$ la solution de (2.0.1) déterminée par la condition de bord :*

$$\rho(1,\lambda,V) = \begin{bmatrix}\cos\beta\\ -\sin\beta\end{bmatrix}. \tag{5.2.1}$$

La fonction ρ vérifie les propriétés suivantes :

(i) *Pour* $V = (p,q) \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ *et pour tout* $\delta > 0$, *uniformément pour* $x \in [\delta, 1]$,

$$\left| \rho(x,\lambda,V) - \begin{bmatrix} \cos\left(\lambda(1-x) - \beta\right) \\ \sin\left(\lambda(1-x) - \beta\right) \end{bmatrix} \right| \leq K(x) e^{|\operatorname{Im}\lambda|(1-x)}$$

où

$$K(x) = \exp\left[\int_x^1 \left(|p(t)| + |q(t)| + \frac{a}{t} \right) dt \right]$$

(ii) *Pour* $V = (p,q) \in H^1 \times H^1$ *et pour tout* $\delta > 0$, *uniformément pour* $x \in [\delta, 1]$,

$$\left| \rho(x,\lambda,V) - \begin{bmatrix} \cos\left(\lambda(1-x) - \beta\right) \\ \sin\left(\lambda(1-x) - \beta\right) \end{bmatrix} \right| \leq C_a \frac{K(x)}{\lambda x} (\|V\|_{H^1} + 1) e^{|\operatorname{Im}\lambda|(1-x)}$$

(iii) *Pour tout* $x \in (0,1]$, $\rho(x,\lambda,V)$ *est analytique sur* $\mathbb{C} \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$.

(iv) *Pour* $n \in \mathbb{Z}$ *et* $\lambda = \lambda_{a,n}(V)$, ρ *vérifie l'identité*

$$\mathcal{R}_n(x,V) = \kappa_{a,n}(V) \rho(x, \lambda_{a,n}(V), V). \tag{5.2.2}$$

Preuve du lemme.
Les points (i), (ii) et (iii) suivent directement d'une méthode d'itération de Picard en incluant la singularité dans le potentiel (c'est à dire que la solution est construite sur la base du système AKNS régulier). Nous construisons (cf. [GG93]) ρ sous la forme

$$\rho(x,\lambda,V) = \rho_0(x,\lambda) + \sum_{n \geq 1} \rho_n(x,\lambda,V)$$

où

$$\begin{cases} \rho_0(x,\lambda,V) := \rho(x,\lambda) = \begin{bmatrix} \cos\left(\lambda(1-x) - \beta\right) \\ \sin\left(\lambda(1-x) - \beta\right) \end{bmatrix}, \\ \rho_{n+1}(x,\lambda,V) = -\displaystyle\int_x^1 \mathcal{G}_0(x,t,\lambda) V_a(t) \rho_n(t,\lambda,V) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{G}_0(x,t,\lambda) = \begin{bmatrix} \sin(\lambda(x-t)) & -\cos(\lambda(x-t)) \\ \cos(\lambda(x-t)) & \sin(\lambda(x-t)) \end{bmatrix}$$

et

$$V_a(t) = \begin{bmatrix} -q(t) & p(t) - a/t \\ p(t) - a/t & q(t) \end{bmatrix}.$$

Nous avons, pour $x \in]0,1]$, les estimations uniformes

$$|\rho_0(x,\lambda)| \leq e^{|\operatorname{Im}\lambda|(1-x)}$$

et, pour $0 < x \leq t \leq 1$,

$$|\mathcal{G}_0(x,t,\lambda)| \leq e^{|\operatorname{Im}\lambda|(t-x)}.$$

Il vient alors

$$|\rho_1(x,\lambda,V)| \leq e^{|\operatorname{Im}\lambda|(1-x)} \int_x^1 \left(|p(t)| + |q(t)| + \frac{a}{t}\right) dt$$

et par itération puis récurrence

$$|\rho_n(x,\lambda,V)| \leq \frac{1}{n!} e^{|\operatorname{Im}\lambda|(1-x)} \left[\int_x^1 \left(|p(t)| + |q(t)| + \frac{a}{t}\right) dt\right]^n.$$

Cette estimation nous donne la convergence uniforme de série définissant ρ sur $[\delta, 1]$, et par conséquent les points (i) et (iii). Pour obtenir le point (ii), il suffit d'intégrer par parties $\rho_1(x,\lambda,V)$ en y dérivant V_a ce qui donne

$$|\rho_1(x,\lambda,V)| \leq C_a \frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|(1-x)}}{\lambda x} \left(\|V\|_{H^1} + 1\right)$$

puis d'itérer cette estimation comme précédemment.

Preuve du point (iv) :
pour $\lambda = \lambda_{a,n}(V)$, d'après (2.0.3) et (5.2.1), les vecteurs $\rho(1, \lambda_{a,n}(V), V)$ et $\mathcal{R}(1, \lambda_{a,n}(V))$ sont colinéaires. Les fonctions $\rho(x, \lambda_{a,n}(V), V)$ et $\mathcal{R}(x, \lambda_{a,n}(V))$ étant solutions de (2.0.1) pour la même valeur de λ sont aussi colinéaires, c'est à dire qu'il existe $C_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{R}_n(x,V) = C_n\, \rho(x, \lambda_{a,n}(V), V).$$

Maintenant, en utilisant à nouveau (2.0.3) et (5.2.1) ainsi que (2.3.2), il vient

$$\kappa_{a,n}(V) = C_n.$$

□

Preuve du théorème 5.2.1. La méthode présentée ici est essentiellement celle donnée dans [PT87]. Soient $V, W \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ tels que $(\lambda^a \times \kappa^a)(V) = (\lambda^a \times \kappa^a)(W)$, en d'autres termes pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\lambda_{a,n}(V) = \lambda_{a,n}(W), \tag{5.2.3}$$
$$\kappa_{a,n}(V) = \kappa_{a,n}(W). \tag{5.2.4}$$

Soit $u \in \mathbb{R}^2$, introduisons la fonction

$$f(x,\lambda,V,W) = \frac{[\mathcal{R}(x,\lambda,V)\cdot u - \mathcal{R}(x,\lambda,W)\cdot u]\,[\rho(x,\lambda,V)\cdot u - \rho(x,\lambda,W)\cdot u]}{D(\lambda,V)}.$$

Pour tout $x \in (0,1]$, $\lambda \mapsto f(x,\lambda,V,W)$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles ne sont autres que $\lambda_{a,n}(V), n \in \mathbb{Z}$. Déterminons ses résidus. Puisque les pôles sont simples et $f(\lambda) = h(\lambda)/g(\lambda)$, l'expression des résidus est

$$\mathrm{Res}(f,\lambda_{a,n}(V)) = \frac{h(\lambda_{a,n}(V))}{g'(\lambda_{a,n}(V))}.$$

La relation (5.2.3) donne tout d'abord

$$\mathcal{R}(x,\lambda_{a,n}(V),W) = \mathcal{R}(x,\lambda_{a,n}(W),W) = \mathcal{R}_n(x,W),$$

puis avec la relation (5.2.2) nous obtenons successivement

$$\rho(x,\lambda_{a,n}(V),V) = \frac{1}{\kappa_{a,n}(V)}\mathcal{R}_n(x,V),$$

$$\rho(x,\lambda_{a,n}(V),W) = \rho(x,\lambda_{a,n}(W),W) = \frac{1}{\kappa_{a,n}(W)}\mathcal{R}_n(x,W).$$

Enfin, l'égalité (5.2.4) donne

$$\mathrm{Res}(f,\lambda_{a,n}(V)) = \frac{[\mathcal{R}_n(x,V)\cdot u - \mathcal{R}_n(x,W)\cdot u]^2}{\kappa_{a,n}(V)\frac{\partial D}{\partial\lambda}(\lambda_{a,n}(V),V)}$$

qui, à l'aide de (2.2.3), devient

$$\mathrm{Res}(f,\lambda_{a,n}(V)) = -\frac{[\mathcal{R}_n(x,V)\cdot u - \mathcal{R}_n(x,W)\cdot u]^2}{\|\mathcal{R}_n(\cdot,V)\|_2^2}.$$

Les résidus de f sont donc tous de même signe. Nous allons montrer qu'ils sont tous nuls. Pour cela, nous utilisons le lemme de [PT87] suivant

Lemme 5.2.2. *Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ telle que*

$$\sup_{|\lambda|=r_n} |f(\lambda)| = o\left(\frac{1}{r_n}\right)$$

où (r_n) est une suite non-bornée de réels strictement positifs. Alors, la somme des résidus de f est nulle.

Soit $N > 0$ un entier et C_N le cercle défini par

$$\left|\lambda - \left(\frac{a\pi}{2} + \beta\right)\right| = \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Estimons $|\lambda f(x, \lambda, V, W)|$ sur C_N. Les estimations (2.2.4) et (2.2.9) et le lemme (5.2.1) donnent, pour N assez grand,

$$|\mathcal{R}(x, \lambda, V) \cdot u - \mathcal{R}(x, \lambda, W) \cdot u| \leq C(\|V\|_{H^1} + \|W\|_{H^1}) e^{|\operatorname{Im}\lambda| x} \frac{\ln|\lambda|}{|\lambda|^{a+1}},$$

$$|\rho(x, \lambda, V) \cdot u - \rho(x, \lambda, W) \cdot u| \leq \frac{K(x)}{|\lambda| x} (\|V\|_{H^1} + \|W\|_{H^1}) e^{|\operatorname{Im}\lambda|(1-x)},$$

$$|D(\lambda, V)| \geq |R(1, \lambda) \cdot u_\beta| - |(\mathcal{R}(1, \lambda, V) - R(1, \lambda)) \cdot u_\beta| \geq \frac{C}{|\lambda|^a} e^{|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Il vient alors l'estimation uniforme sur $[\delta, 1]$:

$$|\lambda f(\lambda, V, W)| \leq C \frac{\ln|\lambda|}{|\lambda|}.$$

Ainsi, pour tout $\gamma > 0$, nous avons trouvé $N_0 > 0$ tel que pour tout entier $N \geq N_0$

$$\sup_{\lambda \in C_N} |\lambda f(x, \lambda, V, W)| < \alpha,$$

en d'autre termes le lemme 5.2.2 est vérifié. Les résidus de f étant tous de même signe, ils sont donc tous nuls. Nous avons alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tout $u \in \mathbb{R}^2$, tout $x \in [\delta, 1]$ et pour tout $\delta \in (0, 1]$,

$$\mathcal{R}_n(x, V) \cdot u - \mathcal{R}_n(x, W) \cdot u = 0,$$

ce qui implique, avec la continuité en $x = 0$ des vecteurs propres $\mathcal{R}_n$, l'égalité

$$\mathcal{R}_n(x, V) = \mathcal{R}_n(x, W), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Puis, en remplaçant dans (2.0.1), nous en déduisons que

$$(V(x) - W(x))\mathcal{R}_n(x, V) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

D'où $V = W$ presque partout sur $[0, 1]$. □

Le passage à l'injectivité dans le cadre $L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$ n'est pas possible avec une telle méthode. Les estimations localement uniformes ne sont pas suffisantes pour effectuer un contrôle correct permettant l'application du lemme 5.2.2. L'argument manquant est un argument de type non local. Nous savons que l'application $\lambda^a \times \kappa^a$ est réelle-analytique sur $L^2_{\mathbb{R}}(0, 1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$, injective sur un sous-espace dense (en l'occurrence $H^1_{\mathbb{R}}(0, 1) \times H^1_{\mathbb{R}}(0, 1)$). Un argument tel que *l'application $\lambda^a \times \kappa^a$ est propre* nous permettrait de conclure.

5.3 Ensembles isospectraux

Pour $(p_0, q_0) \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, nous définissons l'ensemble des potentiels de même spectre par

$$\mathrm{Iso}(p_0, q_0) = \left\{(p,q) \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1) : \lambda^a(p,q) = \lambda^a(p_0,q_0)\right\}.$$

Donnons quelques caractéristiques de ces ensembles appelés isospectraux.

Théorème 5.3.1. *Soit $(p_0, q_0) \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, alors*

(a) $\mathrm{Iso}(p_0, q_0)$ *est une sous-variété réelle-analytique de* $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.

(b) En tout point (p,q) de $\mathrm{Iso}(p_0, q_0)$, *l'espace tangent à* $\mathrm{Iso}(p_0, q_0)$ *est*

$$T_{p,q}\,\mathrm{Iso}(p_0,q_0) = \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta_n Y_{a,n}(p,q) \ : \eta \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})\right\}$$

et l'espace normal est

$$N_{p,q}\,\mathrm{Iso}(p_0,q_0) = \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta_n Y_{a,n}(p,q)^{\perp} \ : \eta \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})\right\}.$$

Preuve du théorème.

(a) Soit $(p_0, q_0) \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ et $(p,q) \in \mathrm{Iso}(p_0,q_0)$. D'après le corollaire 5.1.1, l'application $\lambda^a \times \kappa^a : L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \to \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) \times \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ est un difféomorphisme réel-analytique localement au voisinage de (p,q). C'est à dire qu'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V} \subset L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ de (p,q) et un ouvert $\mathcal{W} \subset \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}) \times \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})$ tels que $\lambda^a \times \kappa^a : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ soit un isomorphisme réel-analytique. Il est alors clair que

$$(\lambda^a \times \kappa^a)\left(\mathcal{V} \cap \mathrm{Iso}(p_0,q_0)\right) = \mathcal{W} \cap \left(\{\lambda^a(p_0,q_0)\} \times \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})\right).$$

Donc $\mathrm{Iso}(p_0, q_0)$ est bien une sous-variété réelle-analytique de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.

(b) Rappelons que $T_{p,q}\,\mathrm{Iso}(p_0,q_0) = \left(d_{p,q}\left(\lambda^a \times \kappa^a\right)\right)^{-1}\left(\left\{0_{\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})}\right\} \times \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})\right)$. Le corollaire 5.1.1 donne le résultat. Ensuite, les vecteurs $(Y_{a,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une famille libre (puisque $(\nabla_{p,q}\lambda_{a,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ en est une) qui est orthogonale à la famille libre $({Y_{a,n}}^{\perp})_{n\in\mathbb{Z}}$. Nous obtenons alors l'inclusion

$$\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta_n Y_{a,n}(p,q)^{\perp} \ : \eta \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z})\right\} \subset N_{p,q}\,\mathrm{Iso}(p_0,q_0).$$

D'autre part, tout vecteur orthogonal à la famille $({Y_{a,n}}^{\perp})_{n\in\mathbb{Z}}$ est, par définition des $Y_{a,n}$, orthogonal à la famille des gradients $(\nabla_{p,q}\lambda_{a,n})_{n\in\mathbb{Z}}$, c'est à dire, d'après l'expression de la différentielle, dans le noyau de $d_{p,q}\lambda^a$, ce qui donne l'autre inclusion.

□

Troisième partie

Application aux systèmes de Dirac singuliers

Chapitre 6

Problème direct

L'équation de Dirac régissant le comportement stationnaire en temps d'une particule de masse $m \geq 0$, relativiste, de spin-$\frac{1}{2}$, soumise à un potentiel électrique dans $\mathbb{R}^3$ est donnée par le système suivant (avec la convention $\hbar = c = 1$, [Tha92]) :

$$H\psi(X) = E\psi(X), \quad X \in \mathbb{R}^3, \quad E \in \mathbb{C},$$

$$H = -i\sum_{j=1}^{3} \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \beta m + V(X)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^4}, \quad V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

où α_j, $j = 1, 2, 3$ et β sont des matrices 4×4 suivantes,

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2} & 0 \\ 0 & -\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2} \end{bmatrix},$$

où σ_j, $j = 1, 2, 3$ représentent les matrices de Pauli définies par

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dans le cas d'un potentiel électrique radial, *ie.* $V(X) = q(\|X\|_{\mathbb{R}^3})$, avec $q \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, en utilisant une méthode de séparation de variables semblable à celle réalisée pour l'opérateur de Schrödinger radial, nous sommes amenés à étudier la famille d'opérateurs suivante

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{bmatrix} q(x) + m & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & q(x) - m \end{bmatrix} \right) Y(x) = EY(x), \quad x \in [0,1]. \tag{6.0.1}$$

Les conditions de bords choisies pour ce problème proviennent de la chromodynamique quantique. La particule considérée est un hadron ou système

hadronique (groupe de quarks soumis à l'interaction forte) de masse m. La modélisation physique choisie est celle dite du MIT-bag : le hadron est représenté par la boule unité de $\mathbb{R}^3$ (plus généralement, une partie bornée de $\mathbb{R}^3$) à la surface de laquelle sont imposées des conditions de bord du type

$$Y_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad Y(1) \cdot u_\beta = 0 \quad \text{où} \quad u_\beta = \begin{bmatrix} \sin\beta \\ \cos\beta \end{bmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{6.0.2}$$

La condition en 0 nous permet de sélectionner la solution physique, au sens où celle-ci n'explose pas à l'origine. Cette introduction justifie en quelque sorte physiquement le choix d'étudier des systèmes AKNS singuliers présentés précédemment.

6.1 Pourquoi utiliser les opérateurs AKNS ?

Comme pour l'opérateur de AKNS, à l'aide des solutions de l'équation (6.0.1) pour $q = 0$, il est possible de construire via une méthode d'approximations successives une base de solutions pour l'équation (6.0.1). Malheureusement, cette méthode a le sérieux désavantage de nous obliger de réaliser un changement de variable spectrale défini par

$$E^2 = k^2 + m^2,$$

ce qui nous obligerait à nous placer sur des surfaces de Riemann de $\mathbb{C}^2$ associées à la fonction $\sqrt{k^2 + m^2}$ (voir par exemple [BGW95]). Cela pose problème pour l'étude et l'application des propriétés relatives à k (en particulier la localisation des valeurs propres via le théorème de Rouché ne pourra se faire de part la présence des coupures du plan complexe introduites par la racine carrée).

Afin d'éviter cet écueil, nous avons choisi d'intégrer la masse au potentiel q : à la place des potentiels $(q+m, q-m)$ nous considérons (q_1, q_2). Ce choix apparemment anodin n'est en réalité valable que si la variable d'espace se situe dans un domaine borné d'espace, c'est à dire que les constantes, et en particulier la masse, sont intégrables.

Les résultats obtenus dans le cadre de l'opérateur AKNS radial nous permettent de déduire les propriétés suivantes :

- existence et régularité d'une base de solutions $\{\mathcal{R}(x, E, q), \mathcal{S}(x, E, q)\}$ pour l'équation (6.0.1),
- détermination des différentielles et des gradients
- simplicité des valeurs propres du problème (6.0.1)-(6.0.2) pour les potentiels réels ($q \in L^2_{\mathbb{R}}(0, 1)$).

Comme pour l'opérateur AKNS, les asymptotiques des valeurs propres ainsi que leur localisation et toutes les estimations qui en découlent sont difficiles à obtenir. Elles sont même plus difficiles à obtenir : le fait d'avoir une matrice potentiel avec une trace non-nulle entraîne des difficultés lors de calculs pour déterminer les estimations. Un autre problème lié à cela est la numérotation des valeurs propres qui doit se faire à partir d'un choix. Dans le cas d'un opérateur de Dirac régulier et pour avoir un exemple de ces difficultés, il est intéressant de consulter l'article de [Wat99] dans lequel la numérotation est déduite d'un choix sur un angle de Prüffer associé au problème.

Ces difficultés qui ont occupé une grande partie du temps imparti pour cette thèse peuvent être détournées. Nous introduisons pour cela une autre classe d'opérateurs que nous présentons dans la section suivante.

6.2 Opérateur de transformation matriciel

L'idée d'opérateur de transformation matricielle nous est inspirée par Levitan et Sargsjan dans [LS91] qui montrent qu'un système matriciel du type

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dx} + V(x)\right) Y(x) = EY(x),$$

avec une matrice réelle symétrique V peut s'écrire canoniquement sous l'une des deux formes suivantes :

– soit sous une forme d'un système AKNS

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{bmatrix} -q(x) & p(x) \\ p(x) & q(x) \end{bmatrix}\right) Y(x) = EY(x),$$

– soit sous une forme d'une équation de Dirac

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{bmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{bmatrix}\right) Y(x) = EY(x).$$

Nous utilisons cette idée dans le cadre de problèmes avec singularité exprimés par (2.0.1) et (2.0.3) avec des matrices V symétriques réelles. Avant de présenter l'opérateur en question, introduisons quelques notations :

Notations. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, R_θ représente la matrice de la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$, à savoir

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{6.2.1}$$

Et afin d'alléger les écritures, nous posons

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.2.2}$$

et

$$D_a = B\frac{d}{dx} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.2.3}$$

Définition 6.2.1. Pour toute matrice V réelle, symétrique à coefficients dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, M_V est l'opérateur unitaire sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ déterminé pour tout $x \in [0,1]$ par

$$M_V(F,G)(x) := R_{\theta(x)} \begin{bmatrix} F(x) \\ G(x) \end{bmatrix}, \quad (F,G) \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \times L^2_{\mathbb{R}}(0,1) \tag{6.2.4}$$

où

$$\theta(x) = Q(x) - Q(1)\,x, \quad Q(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \operatorname{Tr} V(t)\,dt. \tag{6.2.5}$$

M_V est appelé opérateur de transformation matriciel.

Précisons la manière dont agit cet opérateur avec le résultat suivant.

Théorème 6.2.1. *Soit Y une solution de l'équation de Dirac singulière*

$$(D_a + V)\,Y = E\,Y, \tag{6.2.6}$$

où V est une matrice symétrique réelle à coefficients dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, i.e.

$$V = \begin{bmatrix} q_1 & p \\ p & q_2 \end{bmatrix}, \quad (p, q_1, q_2) \in \left(L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\right)^3.$$

Alors, X défini par $Y = M_V(X)$ est solution du système AKNS singulier suivant

$$(D_a + M^a(V))\,X = \Big(E - Q(1)\Big)X, \tag{6.2.7}$$

où

$$M^a(V) = \begin{bmatrix} -\tilde{q} & \tilde{p} \\ \tilde{p} & \tilde{q} \end{bmatrix} \tag{6.2.8}$$

avec

$$\tilde{q}(x) = \frac{q_2(x) - q_1(x)}{2}\,\cos(2\,\theta(x)) - p(x)\,\sin(2\,\theta(x)) + \frac{a}{x}\,\sin\left(2\,\theta(x)\right), \tag{6.2.9}$$

$$\tilde{p}(x) = \frac{q_2(x) - q_1(x)}{2} \sin(2\,\theta(x)) + p(x)\,\cos(2\,\theta(x)) - \frac{a}{x}\left(\cos\left(2\,\theta(x)\right) - 1\right) \quad (6.2.10)$$

et réciproquement.

Démonstration. Il suffit d'insérer l'expression $Y = M_V(X)$ dans (6.2.6) et de constater que l'opérateur réciproque de M_V est donné par

$$(M_V)^{-1}(Y)(x) = R_\theta(x)^\top Y(x) = R_{-\theta(x)}Y(x).$$

□

Notons au passage que la phase θ est choisie pour obtenir un opérateur avec une matrice de potentiels $M^a(V)$ à trace nulle. Donnons maintenant quelques propriétés de cette matrice M^a et de l'opérateur transformé.

6.3 Propriétés de l'opérateur transformé

Proposition 6.3.1.
Pour tout $a \in \mathbb{N}$, M^a est définie en tant qu'application réelle-analytique, via les relations (6.2.8), (6.2.9) et (6.2.10), par

$$\begin{array}{rccc} M^a : & E^3 & \longrightarrow & E^2 \\ & (p, q_1, q_2) & \longmapsto & (\tilde{p}, \tilde{q}) \end{array} \quad (6.3.1)$$

avec $E = L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ et $E = H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$.

Démonstration. Remarquons que, d'après sa définition, θ possède un cran de régularité de plus que (q_1, q_2), à savoir que $\theta \in H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$ si $(q_1, q_2) \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ et $\theta \in H^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ si $(q_1, q_2) \in H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$. D'autre part, quand $a = 0$, il est clair d'après les relations (6.2.9) et (6.2.10) que $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$ ont la même régularité que celle de q_1, q_2, p.

Supposons maintenant $a \in \mathbb{N}^*$ et faisons la preuve pour $\tilde{q}$, elle est similaire pour $\tilde{p}$. Supposons dans un premier temps que $(p, q_1, q_2) \in \left(L^2_{\mathbb{R}}(0,1)\right)^3$. D'après les remarques précédentes et l'expression de $\tilde{q}$, il nous suffit de montrer que $\frac{a}{x}\sin\left(2\,\theta(x)\right)$ est dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. Or au voisinage de $x = 0$, nous avons

$$\sin\left(2\,\theta(x)\right) = 2\,\theta(x) + \mathcal{O}\left(\theta(x)^3\right) = 2\,\theta(x) + \mathcal{O}\left(x^{3/2}\right)$$

ainsi

$$\frac{a}{x}\sin\left(2\,\theta(x)\right) = \frac{a}{x}\int_0^x (q_1(t) + q_2(t))dt + \mathcal{O}\left(1\right).$$

L'inégalité de Hardy intégrale (B.0.1) pour $p = 2$ appliquée à $q_1 + q_2$ s'écrit

$$\left\| \frac{a}{x} \int_0^x |q_1(t) + q_2(t)| dt \right\|_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)} \leq 2a \|q_1 + q_2\|_{L^2_{\mathbb{R}}(0,1)},$$

ce qui nous donne le résultat.

Si de plus $(p, q_1, q_2) \in (H^1_{\mathbb{R}}(0,1))^3$, comme précédemment il suffit de montrer que $\frac{a}{x} \sin(2\,\theta(x))$ est dans $H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$. Puisque nous avons

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{x} \sin(2\,\theta(x))\right)' &= \frac{2a}{x}\,\theta'(x) \cos(2\,\theta(x)) - \frac{a}{x^2} \sin(2\,\theta(x)) \\ &= \frac{a}{x}\left(2\theta'(x) \cos(2\,\theta(x)) - \frac{1}{x} \sin(2\,\theta(x))\right), \end{aligned}$$

les estimations suivantes, au voisinage de $x = 0$,

$$\begin{aligned} \sin(2\,\theta(x)) &= 2\,\theta(x) + \mathcal{O}\left(\theta(x)^3\right) = 2\,\theta(x) + \mathcal{O}\left(x^3\right), \\ \cos(2\,\theta(x)) &= 1 + \mathcal{O}\left(\theta(x)^2\right) = 1 + \mathcal{O}\left(x^2\right), \end{aligned}$$

nous permettent d'obtenir

$$\left(\frac{a}{x} \sin(2\,\theta(x))\right)' = \frac{2a}{x}\left(\theta'(x) - \frac{1}{x}\,\theta(x)\right) + \mathcal{O}(x).$$

Mais, à l'aide d'un développement de Taylor, nous pouvons écrire

$$\theta(x) = x\theta'(0) + \int_0^x \int_0^t \theta"(s) ds dt,$$

et en intégrant par parties le second terme, il vient

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{x} \sin(2\,\theta(x))\right)' &= \frac{2a}{x}\left(\theta'(x) - \theta'(0) - \frac{1}{x} \int_0^x \int_0^t \theta"(s) ds dt\right) + \mathcal{O}(x), \\ &= \frac{2a}{x} \int_0^x \theta"(t) dt - \frac{2a}{x^2} \int_0^x \int_0^t \theta"(s) ds dt + \mathcal{O}(x), \\ &= \frac{2a}{x^2} \int_0^x t\theta"(t) dt + \mathcal{O}(x). \end{aligned}$$

L'inégalité de Hardy (B.0.1) donne à nouveau le résultat. La régularité de M_a provient de l'expression régulière obtenu pour $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$. □

Remarque 17. M^a est invariante par changement de trace, plus précisément

$$\forall C \in \mathbb{R}, \quad M^a(V + C\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}) = M^a(V).$$

Il nous est maintenant possible de résoudre le problème spectral direct pour (6.2.6)-(6.0.2). En effet, il suffit simplement de remarquer que les conditions de bord généralisées (6.0.2) sont conservées puisque

$$R_{\theta(0)} = R_{\theta(1)} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}\,.$$

Le théorème 6.2.1 nous permet de déduire que E est une valeur propre du problème (6.2.6)-(6.0.2) si et seulement si $E - Q(1)$ est une valeur propre du problème (6.2.7)-(6.0.2). Grâce aux résultats obtenus pour les opérateurs AKNS singuliers nous déduisons le théorème suivant :

Théorème 6.3.1.
Pour toute matrice symétrique V à coefficient dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, le problème (6.2.6) avec conditions de bord (6.0.2) admet pour spectre une suite de valeurs propres $E^a(V) = (E_{a,n}(V))_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) *$E^a(V)$ est réelle, strictement croissante.*

(ii) *Les valeurs propres $E_{a,n}$ sont réelles-analytiques par rapport à V, indexées par*

$$E_{a,n}(V) = \lambda_{a,n}(\tilde{p},\tilde{q}) + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{Tr}\, V(t)dt, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{6.3.2}$$

et possèdent sur $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ l'asymptotique localement uniforme

$$E_{a,n}(V) = \left(n + \mathrm{sgn}(n)\frac{a}{2}\right)\pi + \beta + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{Tr}\, V(t)dt + \ell^2(n). \tag{6.3.3}$$

(iii) *En notant $F_n(\cdot, V)$ le vecteur propre normalisé associé à $\lambda_{a,n}(V)$, nous avons*

$$F_n(\cdot, V) = M_V(G_n(\cdot, \tilde{p}, \tilde{q})).$$

(iv) *La suite des constantes de normalisation $\kappa^a(V) = (\kappa_{a,n}(V))_{n\in\mathbb{Z}}$ définie comme en (2.3.2) vérifie*

$$\kappa_{a,n}(V) = \kappa_{a,n}(\tilde{p},\tilde{q}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Chapitre 7

Un problème spectral inverse

Comme nous l'avons fait précédemment, des propriétés d'inversibilité locales ou globales d'une application spectrale nous déduisons la résolution de problèmes spectraux inverses. À l'aide du théorème 6.3.1, cette application spectrale, notée $E^a \times \kappa^a$, agissant entre $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)^3$ et $\mathbb{R} \times \ell^2(\mathbb{Z})^2$, est définie par

$$\left(E^a \times \kappa^a\right)(V) = \left(\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{Tr} V(t)dt, \left[\left(\lambda^a \times \kappa^a\right) \circ M^a\right](V)\right). \tag{7.0.1}$$

La contrepartie de l'opérateur de transformation matriciel introduit dans le chapitre précédent est sa dépendance vis à vis du potentiel. La résolution du problème spectral inverse linéarisé, i.e. l'inversibilité de la différentielle de $E^a \times \kappa^a$, est rendue plus difficile à cause de la composition par M_a. Précisément, la détermination des espaces entre lesquels les différentielles sont inversibles n'est pas aisée, même dans le cadre plus restreint de l'opérateur de Dirac radial.

Les problèmes inverses considérés ici sont alors réduits à l'injectivité de l'application spectrale. Les résultats obtenus pour AKNS nous restreignent au cas des potentiels $H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$.

7.1 Une condition équivalente d'injectivité

Le théorème suivant est une extension d'un résultat de Watson [Wat99] à des problèmes de Dirac singuliers. Nous obtenons une relation liant les potentiels de deux problèmes de Dirac singuliers (6.2.6)-(6.0.2) avec mêmes données spectrales.

Théorème 7.1.1.
Soient V_1 et V_2 deux matrices réelles symétriques à coefficients dans $H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$ telles que

$$(E^a \times \kappa^a)(V_1) = (E^a \times \kappa^a)(V_2).$$

Alors

$$\int_0^1 \operatorname{Tr} V_1(t)dt = \int_0^1 \operatorname{Tr} V_2(t)dt \tag{7.1.1}$$

et

$$V_1 R_{(\theta_1-\theta_2)} = R_{(\theta_1-\theta_2)}V_2 - BR_{(\theta_1-\theta_2)}{}' - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix} (R_{(\theta_1-\theta_2)} - R_{(\theta_1-\theta_2)}{}^{\top}). \tag{7.1.2}$$

Et réciproquement.

Démonstration. La première relation provient de la définition de l'application spectrale. La régularité donnée par la proposition 6.3.1 et l'injectivité donnée par théorème 5.2.1 montrent que

$$(E^a \times \kappa^a)(V_1) = (E^a \times \kappa^a)(V_2) \Leftrightarrow M^a(V_1) = M^a(V_2).$$

En conservant les expressions matricielles lors du passage de la relation (6.2.6) à (6.2.7), nous obtenons

$$BX' + R_{\theta_j}{}^{\top}\left\{BR_{\theta_j}{}' + V_j R_{\theta_j} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix} R_{\theta_j}\right\} X = EX. \tag{7.1.3}$$

Remarquons, d'une part, que $\frac{d}{d\theta}(R_\theta) = BR_\theta$, ce qui donne

$$R_{\theta_j}{}' = \theta_j' BR_{\theta_j} = (Q_j' - Q_j(1))\, BR_{\theta_j}, \tag{7.1.4}$$

et, d'autre part, que

$$R_{\theta_j}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix} R_{\theta_j} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.1.5}$$

Sachant $B^2 = -\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}$, la relation (7.1.3) devient

$$D_a X + R_{\theta_j}{}^{\top}\left\{(V_j - Q_j')\, R_{\theta_j} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix}\left(R_{\theta_j} - R_{\theta_j}{}^{\top}\right)\right\} X = (E - Q(1))\, X. \tag{7.1.6}$$

La relation $M_a(V_1) = M_a(V_2)$ équivaut à

$$R_{\theta_1}{}^{\top}\left\{(V_1 - Q_1')\,R_{\theta_1} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix}\left(R_{\theta_1} - R_{\theta_1}{}^{\top}\right)\right\}$$
$$= R_{\theta_2}{}^{\top}\left\{(V_2 - Q_2')\,R_{\theta_2} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix}\left(R_{\theta_2} - R_{\theta_2}{}^{\top}\right)\right\} \quad (7.1.7)$$

Ensuite, comme $R_{\theta_1}R_{\theta_2}{}^{\top} = R_{(\theta_1-\theta_2)}$, la relation (7.1.7) s'écrit

$$(V_1 - Q_1')\,R_{(\theta_1-\theta_2)} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix}\left(R_{(\theta_1-\theta_2)} - R_{\theta_1}{}^{\top}R_{\theta_2}{}^{\top}\right)$$
$$= R_{(\theta_1-\theta_2)}\,(V_2 - Q_2') + R_{\theta_1}R_{\theta_2}{}^{\top}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix}\left(R_{\theta_2} - R_{\theta_2}{}^{\top}\right)R_{\theta_2}{}^{\top} \quad (7.1.8)$$

Mais avec la relation de commutation (7.1.5), nous obtenons

$$R_{\theta_1}R_{\theta_2}{}^{\top}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix}\left(R_{\theta_2} - R_{\theta_2}{}^{\top}\right)R_{\theta_2}{}^{\top}$$
$$= R_{\theta_1}R_{\theta_2}{}^{\top}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix}R_{\theta_2}{}^{\top}\left(R_{\theta_2} - R_{\theta_2}{}^{\top}\right),$$
$$= R_{\theta_1}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix}\left(R_{\theta_2} - R_{\theta_2}{}^{\top}\right),$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x} & 0 \end{bmatrix}\left(R_{(\theta_1-\theta_2)}{}^{\top} - R_{\theta_1}{}^{\top}R_{\theta_2}{}^{\top}\right).$$

Et en utilisant la formule de dérivation (7.1.4), avec l'expression ci-dessus nous obtenons la relation (7.1.2). □

La relation (7.1.2) est identique dans le cas régulier ($a = 0$) à celle donnée par Watson (cf. relation (1.8) [Wat99]). Malheureusement, celle-ci ne nous donne pas plus d'informations quant à l'injectivité. Néanmoins, nous pouvons préciser le résultat dans le cas de l'opérateur de Dirac radial.

7.2 Application à l'opérateur de Dirac radial

Théorème 7.2.1. *Soit $(a, m) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N} \setminus (0, 0)$. Supposons que q_j, $j = 1, 2$ soient des potentiels $H^1_{\mathbb{R}}(0, 1)$ ayant mêmes données spectrales, c'est à dire*

$$(E^a \times \kappa^a)\,(q_1) = (E^a \times \kappa^a)\,(q_2),$$

alors $q_1 = q_2$ dans $H^1_{\mathbb{R}}(0, 1)$.

Ici, pour $q \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, $E^a \times \kappa^a$ est implicitement définie par

$$(E^a \times \kappa^a)(q) := (E^a \times \kappa^a)\left(\begin{bmatrix} q+m & 0 \\ 0 & q-m \end{bmatrix}\right)$$

Démonstration. Soit $j = 1, 2$. Pour l'opérateur de Dirac radial, nous avons

$$V_j = \begin{bmatrix} q_j + m & 0 \\ 0 & q_j - m \end{bmatrix}.$$

La matrice transformée $M^a(q_j) := M^a(V_j)$ est alors déterminée par

$$\begin{aligned} \tilde{q_j}(x) &= -m\,\cos(2\,\theta_j(x)) + \frac{a}{x}\,\sin(2\,\theta_j(x)), \\ \tilde{p_j}(x) &= -m\,\sin(2\,\theta_j(x)) - \frac{a}{x}\,(\cos(2\,\theta_j(x)) - 1) \end{aligned}$$

où

$$\theta_j(x) = Q_j(x) - Q_j(1)x \quad \text{avec} \quad Q_j(x) = \int_0^x q_j(t)dt.$$

La relation d'injectivité obtenue pour l'opérateur AKNS singulier

$$M^a(V_1) = M^a(V_2)$$

est équivalente au système

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{q_1} & = & \tilde{q_2} \\ \tilde{p_1} & = & \tilde{p_2} \end{array} \right. ,$$

c'est à dire

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -m\left[\cos(2\,\theta_1) - \cos(2\,\theta_2)\right] + \dfrac{a}{x}\left[\sin(2\,\theta_1) - \sin(2\,\theta_2)\right] & = & 0 \\ -\dfrac{a}{x}\left[\cos(2\,\theta_1) - \cos(2\,\theta_2)\right] - m\left[\sin(2\,\theta_1) - \sin(2\,\theta_2)\right] & = & 0 \end{array} \right. .$$

Le déterminant du système valant

$$m^2 + \frac{a^2}{x^2} \neq 0,$$

nous en déduisons

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \cos(2\,\theta_1) & = & \cos(2\,\theta_2) \\ \sin(2\,\theta_1) & = & \sin(2\,\theta_2) \end{array} \right. \Leftrightarrow \theta_2(x) = \theta_1(x) + 2k_x\pi, k_x \in \mathbb{Z}.$$

La continuité de θ_j prouve que k_x est indépendant de x et la limite nulle de θ_j quand x tends vers 0 nous permet d'obtenir l'égalité

$$\forall x \in [0,1], \quad \theta_1(x) = \theta_2(x).$$

Enfin, le relation (7.1.1) nous donne l'égalité prouvant le théorème

$$\forall x \in [0,1], \quad q_1(x) = q_2(x).$$

□

Remarque 18. Le cas $a = 0$ et $m = 0$ est dégénéré (voir [Hor01]). En effet, nous obtenons $M^0(V) = 0$, ce qui signifie que le spectre associé à cette opérateur n'est autre que la suite

$$\left(n\pi + \beta + \int_0^1 q(t)dt\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Autrement dit, le spectre ne détermine rien de plus que la moyenne du potentiel. D'autre part, il est aisé de calculer les vecteurs propres $Y(x, E, q)$ qui ne sont que

$$Y(x, E, q) = \begin{bmatrix} \cos(Ex - Q(x)) \\ -\sin(Ex - Q(x)) \end{bmatrix}$$

et de ce fait les constantes de normalisation sont

$$\kappa_{0,n}(q) = Y(1, E_n, q) \cdot {u_\beta}^\top = (-1)^n,$$

elle n'apportent donc aucune information sur le potentiel.

7.3 Commentaire sur le résultat obtenu

Il semble, au vu des résultats somme toute similaires aux problèmes inverses réguliers, que le théorème 7.2.1 soit loin d'être optimal . En effet, dans le cas régulier ($a = 0$) les travaux de Horváth [Hor01] étendus par Kiss [Kis04] montrent que l'opérateur de Dirac possède une propriété d'injectivité spectrale analogue au théorème de Borg pour l'opérateur de Schrödinger. Celle-ci se formule par un résultat de type théorème d'Ambarzumian [Amb29] :

Théorème 7.3.1 (Horvàth [Hor01] $0 < m \leq \frac{1}{2}$; Kiss [Kis04] $m > 0$)**.**
Soit $q \in \mathcal{C}^0_{\mathbb{R}}(0,1)$ et $m > 0$. Soit $(\lambda_n(q))_{n\in\mathbb{Z}}$ le spectre du problème aux valeurs propres

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{bmatrix} q(x)+m & 0 \\ 0 & q(x)-m \end{bmatrix}\right) Y(x) = \lambda Y(x).$$

avec les conditions de bords $Y_2(0) = Y_2(1) = 0$.
Si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda_n(V) = \lambda_n(0)$, alors $V = 0$.

Conclusions et perspectives

Le problème spectral inverse pour les opérateurs de Sturm-Liouville singuliers provenant de l'équation de Schrödinger radiale est maintenant terminé, nous avons déterminé pour chaque entier a la correspondance entre les potentiels et les données spectrales ainsi que les ensembles isospectraux associés. Pour le système AKNS singulier, le problème spectral inverse local est résolu, les variétés isospectrales sont décrites. L'injectivité dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ reste en suspens, néanmoins, le résultat pour les potentiels $H^1_{\mathbb{R}}(0,1)$ et son application à l'opérateur de Dirac radial permettent d'être optimiste à ce sujet.

Diverses voies restent à explorer, notamment pour l'opérateur de Schrödinger radial. Dans l'optique du livre de Pöschel et Trubowitz [PT87], quelques applications numériques peuvent être aisément déduites, en particulier la construction d'une classe de potentiels isospectraux. En effet, Guillot et Ralston [GR88] ont étendus à $a = 1$ les calculs de flots engendrés sur les variétés isospectrales par les vecteurs tangents. Le travail réalisé ici permet d'espérer la validité de cette proposition pour de plus grandes valeurs de a. D'autre part, le résultat de difféormorphisme obtenu ici nous assure une certaine stabilité pour ces calculs.

D'un point de vue plus physique, l'étude du problème inverse avec deux spectres associés à des valeurs de a différentes est intéressante mais semble ardue. Néanmoins, motivés par les résultats de rigidité spectrale de Carlson et Shubin [CS94] (l'intersection de deux variétés isospectrales associées à des valeurs de a différentes est localement de dimension finie), Rundell et Sacks [RS01] ont pu posé quelques jalons.

D'un point de vue mathématique, ces travaux devraient s'appliquer à l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) $v_t + v_{xxx} - 6vv_x = 0$, notamment afin d'obtenir le caractère bien posé dans des espaces peu réguliers. En effet, ce problème est lié à l'étude de problème spectraux inverses pour des opérateurs de Hill, $H_q := -\frac{d^2}{dx^2} + q$, avec potentiel singulier : les travaux, entre autres, de Kappeler et Topalov [KT03]-[KT04] permettent d'étendre l'étude spectrale pour q dans $H^{-1}_{\mathbb{R}}(0,1)$; or, nous avons considéré ici une famille de potentiels

$q_a = q + \frac{a(a+1)}{x^2}$, pour q dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, i.e. q_a appartient à $H^{-3/2}_{\mathbb{R}}(0,1)\ldots$

Pour l'opérateur AKNS singulier, les problèmes d'injectivité restent encore à traiter. Dans le cas régulier, des théorèmes de type Borg (deux spectres déterminent le potentiel) ou de type Hochstadt-Liebermann (un spectre et une information partielle sur le potentiel le déterminent) sont obtenus par Del Rio et Grébert [dRG01]. Il pourrait être possible d'étendre ces résultats mais la difficulté d'obtenir des estimations suffisamment précises et globales risque d'être un frein.

En revanche, l'étude parallèle menée ici laisse à penser que des problèmes d'intersection de variétés isospectrales, d'application numérique découlant de flots engendrés par les vecteurs tangents sur les variétés isospectrales, peuvent se prêter à investigation. La possibilité d'étudier les applications à l'équation de Schödinger non-linéaire $\imath\partial_t\psi = -\partial_x^2\psi + 2\kappa|\psi|^2\psi, \kappa \in \mathbb{R}$ avec donnée initiale singulière n'est pas à écarter.

Pour terminer, le problème inverse le plus ouvert concerne l'opérateur de Dirac radial, les méthodes développées dans cette thèse n'ayant mené pour l'instant qu'à des impasses. Malgré cela, il semble qu'un résultat du type théorème d'Ambarzumian (un potentiel continu associé à un opérateur de Dirac ayant les mêmes valeurs propres que l'opérateur de Dirac libre est nul), obtenu dans le cas régulier par Horváth [Hor01] puis par Kiss [Kis04], puisse être atteint.

Quatrième partie

Annexes

Annexe A

Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel (ou leurs produits) que nous considérons possèdent des comportement bien maîtrisés en 0 et en l'infini. Or la variable ($z = \lambda x$, avec $|\lambda| \to \infty$ et $x \in [0, 1]$) utilisée pour ces fonctions de Bessel est à la fois destinée à tendre vers 0 et vers ∞. Ces deux comportements entrent donc en compétition. Ce qui suit montre comment les contrôler simultanément avec une seule et même estimation. Nous montrerons d'ailleurs certaines d'entre-elles, relatives aux fonctions de Green, fortement utilisées dans la littérature mais rarement prouvée ou référencées (à notre connaissance). Les relations basiques sur les fonctions de Bessel proviennent de [EMOT81].

A.1 Représentations

Les fonctions de Bessel sphériques j_a et η_a sont définies à partir des fonctions de Bessel usuelles via

$$j_a(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{a+1/2}(z), \quad \eta_a(z) = (-1)^a \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{-a-1/2}(z), \tag{A.1.1}$$

J_ν représentant la fonction de Bessel de premier type et d'ordre ν. Il est aussi possible d'utiliser l'écriture équivalente suivante pour η_a

$$\eta_a(z) = -\sqrt{\frac{\pi z}{2}} Y_{a+1/2}(z), \tag{A.1.2}$$

Y_ν étant la fonction de Bessel de second type et d'ordre ν.

A.1.1 Expression en séries entières

Les expressions des solutions de l'équation sans potentiel ne sont pas singulières en $\lambda = 0$. Il suffit d'écrire en série entière les fonctions de Bessel

sphériques comme suit :

$$j_a(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{a+1} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+a+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \tag{A.1.3}$$

$$\eta_a(z) = (-1)^a \left(\frac{2}{z}\right)^{a} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\sqrt{\pi}}{\Gamma(k-a+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \tag{A.1.4}$$

pour obtenir, dans le cas de l'opérateur de Schrödinger, où $\omega = \sqrt{\lambda}$,

$$u(x,\lambda) = \frac{(2a+1)!!}{\omega^{a+1}} j_a(\omega x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{a+1} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\sqrt{\pi}(2a+1)!!}{\Gamma(k+a+3/2)} \left(\frac{\omega x}{2}\right)^{2k}$$

et

$$v(x,\lambda) = \frac{-\omega^a}{(2a+1)!!}\eta_a(\omega x) = \left(\frac{-2}{x}\right)^{a} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^{k+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(k-a+1/2)(2a+1)!!} \left(\frac{\omega x}{2}\right)^{2k}.$$

Les expressions ci-dessus ne font intervenir que des puissances paires de ω, c'est à dire des puissances entières de λ ; il n'y a donc pas à préciser la détermination de la racine complexe. Les expressions ci-dessus montrent bien que u et v sont analytiques sur $[0,1]\times\mathbb{C}$ et respectivement sur $(0,1]\times\mathbb{C}$.

Dans le cadre du système AKNS, nous obtenons de même les expressions

$$R(x,\lambda) = \left(\frac{x}{2}\right)^{a} \begin{bmatrix} \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+a+1/2)} \left(\frac{\lambda x}{2}\right)^{2k} \\ -\sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+a+3/2)} \left(\frac{\lambda x}{2}\right)^{2k+1} \end{bmatrix}$$

et

$$S(x,\lambda) = (-1)^a \left(\frac{2}{x}\right)^{a} \begin{bmatrix} \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\sqrt{\pi}}{\Gamma(k-a+3/2)} \left(\frac{\lambda x}{2}\right)^{2k+1} \\ \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k\sqrt{\pi}}{\Gamma(k-a+1/2)} \left(\frac{\lambda x}{2}\right)^{2k} \end{bmatrix}$$

qui montrent que R, respectivement S, est analytique sur $[0,1]\times\mathbb{C}$, respectivement $(0,1]\times\mathbb{C}$.

A.1.2 Expression trigonométrique

Les expressions trigonométriques suivantes nous permettent d'une part d'obtenir des relations explicites faciles à majorer sur des domaines non-bornés contrairement aux expressions en séries entières, et d'autre part elles

donnent tout de suite des estimations asymptotiques en puissance de la variable quand celle-ci tend vers l'infini. D'après [EMOT81] formule (1) section 7.11 p.78,

$$j_a(z) = \sin\Big(z - \frac{a\pi}{2}\Big) P_a(1/z) + \cos\Big(z - \frac{a\pi}{2}\Big) I_a(1/z), \tag{A.1.5}$$

et [EMOT81] formule (2) section 7.11 p.78,

$$\eta_a(z) = \cos\Big(z - \frac{a\pi}{2}\Big) P_a(1/z) - \sin\Big(z - \frac{a\pi}{2}\Big) I_a(1/z) \tag{A.1.6}$$

où P_a et I_a sont des polynômes respectivement pair et impair donnés par

$$P_a(z) = \sum_{m=0}^{\leq \frac{a}{2}} (-1)^m \big(a + 1/2, 2m\big)(2z)^{2m} \qquad (P_a(0) = 1) \tag{A.1.7}$$

et

$$I_a(z) = \sum_{m=0}^{\leq \frac{a-1}{2}} (-1)^m \big(a + 1/2, 2m + 1\big)(2z)^{2m+1} \quad (I_a(0) = 0) \tag{A.1.8}$$

où (ν, m) représente le symbole de Hankel :

$$(\nu, m) = \frac{\Gamma(\nu + 1/2 + m)}{m!\Gamma(\nu + 1/2 - m)}. \tag{A.1.9}$$

A.2 Estimations et asymptotiques

A.2.1 Estimations usuelles

Donnons quelques propriétés de ces fonctions de Bessel : (voir par exemple [BGW95] ou [Bar67])

– leur comportement au voisinage de 0 est le suivant

$$\begin{aligned} j_a(z) &= \frac{z^{a+1}}{(2a+1)!!} + \mathcal{O}\left(z^{a+3}\right), \\ \eta_a(z) &= \frac{(2a-1)!!}{z^a} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{a-2}}\right). \end{aligned}$$

– elles vérifient les majorations uniformes sur $\mathbb{C}$ suivantes que nous appellerons *estimations usuelles* (voir la preuve ci-après), qui reflètent à la fois le comportement proche de 0 et de l'infini :

$$|j_a(z)| \leq Ce^{|\operatorname{Im} z|} \left(\frac{|z|}{1+|z|}\right)^{a+1}, \tag{A.2.1}$$

$$|\eta_a(z)| \leq Ce^{|\operatorname{Im} z|} \left(\frac{1+|z|}{|z|}\right)^{a}. \tag{A.2.2}$$

Preuve des estimations usuelles. Il suffit de faire la preuve pour (A.2.1), elle est semblable pour (A.2.2). Utilisons pour cela un découpage :
Pour $|z| \leq 1$, en notant C_a la norme infinie sur le disque unité de la série entière intervenant dans la relation (A.1.3) nous obtenons la majoration

$$|j_a(z)| \leq C_a \left|\frac{z}{2}\right|^{a+1}.$$

Puis en remarquant d'une part, que

$$1 = \left(\frac{1+|z|}{1+|z|}\right)^{a+1} \leq \left(\frac{2}{1+|z|}\right)^{a+1}, \quad \forall |z| \leq 1 \tag{A.2.3}$$

et d'autre part, que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$e^{|\operatorname{Im} z|} > 1,$$

nous obtenons pour tout $|z| \leq 1$

$$|j_a(z)| \leq C_a \left(\frac{|z|}{1+|z|}\right)^{a+1} e^{|\operatorname{Im} z|}.$$

Pour $|z| > 1$, la relation (A.1.5) nous permet d'obtenir

$$|j_a(z)| \leq C'_a e^{|\operatorname{Im} z|}.$$

Puis, en remarquant que

$$1 = \left(\frac{1+|z|}{1+|z|}\right)^{a+1} \leq \left(\frac{2|z|}{1+|z|}\right)^{a+1}, \quad \forall |z| \geq 1, \tag{A.2.4}$$

nous obtenons l'estimation annoncée. □

A.2.2 Estimations des fonctions de Green

Les estimations de ces fonctions de Green associées à chaque opérateur considéré ici s'obtiennent toutes de la même manière, cela vient du fait qu'elles ont des expressions semblables en terme de fonctions de Bessel. Pour avoir une idée de leur obtention, nous montrerons l'estimation (A.2.5) et (A.2.7).

Estimation de la résolvante pour Schrödinger :
Pour $0 \leq t \leq x$, nous avons

$$|\mathcal{G}(x,t,\lambda)| \leq C \left(\frac{x}{1+|\omega|x}\right)^{a+1} \left(\frac{1+|\omega|t}{t}\right)^{a} \exp\left(|\operatorname{Im} \omega|(x-t)\right) \tag{A.2.5}$$

et

$$\left|\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x,t,\lambda)\right| \leq C\left(\frac{x}{1+|\omega|x}\right)^a \left(\frac{1+|\omega|t}{t}\right)^a \exp\left(|\operatorname{Im}\omega|(x-t)\right). \quad \text{(A.2.6)}$$

Pour $x \leq t \leq 1$

$$|\mathcal{G}(x,t,\lambda)| \leq C\left(\frac{1+|\omega|x}{x}\right)^a \left(\frac{t}{1+|\omega|t}\right)^{a+1} \exp\left(|\operatorname{Im}\omega|(t-x)\right) \quad \text{(A.2.7)}$$

et

$$\left|\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x,t,\lambda)\right| \leq C\left(\frac{1+|\omega|x}{x}\right)^{a+1} \left(\frac{t}{1+|\omega|t}\right)^{a+1} \exp\left(|\operatorname{Im}\omega|(t-x)\right), \quad \text{(A.2.8)}$$

Estimation de la résolvante pour AKNS :
Pour $0 \leq t \leq x$

$$|\mathcal{G}(x,t,\lambda)| \leq Ce^{|\operatorname{Im}\lambda|(x-t)}\left(\frac{x}{1+|\lambda|x}\right)^a \left(\frac{1+|\lambda|t}{t}\right)^a. \quad \text{(A.2.9)}$$

Pour $x \leq t \leq 1$

$$|\mathcal{G}(x,t,\lambda)| \leq Ce^{|\operatorname{Im}\lambda|(t-x)}\left(\frac{1+|\lambda|x}{x}\right)^a \left(\frac{t}{1+|\lambda|t}\right)^a. \quad \text{(A.2.10)}$$

Preuve de (A.2.5).
Rappelons que d'après (1.1.3), nous avons pour tout $(x,t) \in (0,1)^2$

$$\mathcal{G}(x,t,\lambda) = \frac{1}{\omega}\left(j_a(\omega x)\eta_a(\omega t) - \eta_a(\omega x)j_a(\omega t)\right).$$

Plaçons nous dans le cas où $0 \leq t \leq x \leq 1$ et comme pour les estimations usuelles, nous utilisons un découpage.
Pour $|\omega|x \leq 1$, les estimations usuelles nous permettent d'obtenir

$$|\mathcal{G}(x,t,\omega)| \leq \frac{C}{|\omega|}\left(\left(\frac{|\omega|x}{1+|\omega|x}\right)^{a+1}\left(\frac{1+|\omega|t}{|\omega|t}\right)^a + \left(\frac{1+|\omega|x}{|\omega|x}\right)^a\left(\frac{|\omega|t}{1+|\omega|t}\right)^{a+1}\right).$$

La croissance et la décroissance respective sur $\mathbb{R}_+^*$ des fonctions $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ et $t \mapsto \frac{1+t}{t}$ nous permettent de déduire

$$|\mathcal{G}(x,t,\omega)| \leq \frac{2C}{|\omega|}\left(\frac{|\omega|x}{1+|\omega|x}\right)^{a+1}\left(\frac{1+|\omega|t}{|\omega|t}\right)^a = 2C\left(\frac{x}{1+|\omega|x}\right)^{a+1}\left(\frac{1+|\omega|t}{t}\right)^a$$

en utilisant à nouveau $e^s \geq 1$ pour tout $s \geq 0$, nous obtenons l'estimation uniforme pour $|\omega|x \leq 1$,

$$|\mathcal{G}(x,t,\omega)| \leq 2C\left(\frac{x}{1+|\omega|x}\right)^{a+1}\left(\frac{1+|\omega|t}{t}\right)^{a} e^{|\operatorname{Im}\omega|(x-t)}$$

Supposons maintenant $|\omega|x \geq 1$. Les relations (A.1.5) et (A.1.6) nous permettent d'écrire que (nous omettons les inverses dans l'évaluation des polynômes ci-dessous afin d'alléger)

$$\mathcal{G}(x,t,\lambda) = \frac{1}{\omega}\Big([P_a(\omega x)P_a(\omega t) + I_a(\omega x)I_a(\omega t)]\sin[\omega(x-t)] \\ - [P_a(\omega x)I_a(\omega t) - I_a(\omega x)P_a(\omega t)]\cos[\omega(x-t)]\Big). \quad \text{(A.2.11)}$$

Si de plus, $|\omega|t \geq 1$, les expressions (A.1.7) et (A.1.8) sont bornées et nous obtenons alors

$$|\mathcal{G}(x,t,\lambda)| \leq \frac{C}{|\omega|}e^{|\operatorname{Im}\omega|(x-t)}.$$

En utilisant (A.2.4) et en remarquant que pour tout $s > 0$, $1 \leq 1 + \frac{1}{s}$, nous obtenons

$$|\mathcal{G}(x,t,\lambda)| \leq \frac{C'}{|\omega|}\left(\frac{|\omega|x}{1+|\omega|x}\right)^{a+1}\left(1+\frac{1}{|\omega|t}\right)^{a} e^{|\operatorname{Im}\omega|(x-t)},$$

ce qui nous donne à nouveau l'estimation attendue.

Reste le cas $|\omega|t \leq 1 \leq |\omega|x$. Des expressions (A.1.7) et (A.1.8), nous pouvons déduire que

$$|P_a(\omega t)|\,,\ |I_a(\omega t)| \leq \frac{C}{|\omega t|^a} \leq C\left(\frac{1+|\omega t|}{|\omega t|}\right)^{a}$$

et comme précédemment que

$$|P_a(\omega x)|\,,\ |I_a(\omega x)| \leq C.$$

La relation (A.2.11) se majore en conséquence par

$$|\mathcal{G}(x,t,\lambda)| \leq \frac{C}{|\omega|}\left(\frac{1+|\omega|t}{|\omega|t}\right)^{a} e^{|\operatorname{Im}\omega|(x-t)}$$

qui, combiné avec (A.2.4), donne l'estimation annoncée. □

A.3 Relations de récurrence

A.3.1 Dérivées

Ces relations sont déduites des équations (54) à (56) section 7 .2.8 pp.11-12 de [EMOT81] et des expressions (A.1.1).

$$xj_a{}'(x) = xj_{a-1}(x) - aj_a(x), \tag{A.3.1}$$

$$xj_{a-1}{}'(x) = aj_{a-1}(x) - xj_a(x), \tag{A.3.2}$$

$$j_a(x) = \frac{x}{2a+1}\left(j_{a-1}(x) + j_{a+1}(x)\right). \tag{A.3.3}$$

$$x\eta_a'(x) = x\eta_{a-1}(x) - a\eta_a(x), \tag{A.3.4}$$

$$x\eta_{a-1}'(x) = a\eta_{a-1}(x) - x\eta_a(x), \tag{A.3.5}$$

$$\eta_a(x) = \frac{x}{2a+1}\left(\eta_{a-1}(x) + \eta_{a+1}(x)\right). \tag{A.3.6}$$

A.3.2 Intégrales

À l'aide du changement de variable $x = \omega t$ et en utilisant les formules de dérivations ci-dessus, nous obtenons les relations intégrales suivantes :

$$\int_0^1 j_a(\omega t)^2 dt = \frac{1}{2}\left[j_a(\omega)^2 - j_{a-1}(\omega)j_{a+1}(\omega)\right], \tag{A.3.7}$$

$$\int_0^1 j_a(\omega t)\eta_a(\omega t)dt = \frac{1}{2}\left[j_a(\omega)\eta_a(\omega) - j_{a+1}(\omega)\eta_{a-1}(\omega)\right]. \tag{A.3.8}$$

Grâce aux expressions trigonométriques précédentes, nous déduisons les estimations pour $\omega \in \mathbb{R}, |\omega| \to +\infty$

$$\int_0^1 j_a(\omega t)^2 dt = \frac{1}{2}\left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right], \tag{A.3.9}$$

$$\int_0^1 j_a(\omega t)\eta_a(\omega t)dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{A.3.10}$$

A.4 Lemmes techniques

Tout d'abord, nous aurons besoin de deux lemmes techniques :

Lemme A.4.1. *Soit $F_1(z)$ la primitive sur $\mathbb{C}$ de $f_1(z) = 2j_{a-1}(z)j_a(z)$ qui s'annule en 0 , alors*

(i) $|F_1(z)| \leq C\left(\dfrac{|z|}{1+|z|}\right)^{2a+2}$ *pour* $|z| \leq 1$;

(ii) $F_1(z) = -a\,\mathrm{ci}(2z) + p_a\left(\dfrac{1}{z}\right)\cos(2z) + q_a\left(\dfrac{1}{z}\right)\sin(2z) + r_a\left(\dfrac{1}{z}\right)$ *pour* $|z| \geq 1$.

$\mathrm{ci}(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{\cos t - 1}{t}\,dt$ *et* p_a, q_a, r_a *sont des polynômes respectivement pair, impair et pair.*

Lemme A.4.2. *Soit $f_2(z) = \eta_{a-1}(z)j_a(z) + \eta_a(z)j_{a-1}(z)$. Alors, sa primitive sur $\mathbb{C}$ s'annulant en 0, notée $F_2(z)$, vérifie*

(i) $|F_2(z)| \leq C\dfrac{|z|}{1+|z|}$ *pour* $|z| \leq 1$;

(ii) $F_2(z) = a\,\mathrm{Si}(2z) - p_a\left(\dfrac{1}{z}\right)\sin(2z) + q_a\left(\dfrac{1}{z}\right)\cos(2z)$ *pour* $|z| \geq 1$.

$\mathrm{Si}(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{\sin t}{t}\,dt$ *et* p_a *et* q_a *sont les polynômes du lemme précédent.*

Preuves des lemmes A.4.1 et A.4.2

Preuve du lemme A.4.1.

– Nous avons (voir [EMOT81] formule (48)p.11)

$$f_1(z) = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\gamma_m(a)}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2a+1+2m}$$

où

$$\gamma_m(a) = \frac{\pi\,(2a+2m)!}{\Gamma(a+m+3/2)\Gamma(a+m+1/2)(2a+m)!}.$$

Ainsi, par intégration nous obtenons

$$\begin{aligned} F_1(z) &= 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(2a+2+2m)}\,\gamma_m(a)\left(\frac{z}{2}\right)^{2a+2+2m} \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)^{2a+2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(a+m+1)}\,\gamma_m(a)\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \end{aligned}$$

Sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ la série entière ci-dessus se majore uniformément par une constant $C_1 > 0$, il vient alors l'estimation

$$|F_1(z)| \leq C_1 \left(\frac{|z|}{2}\right)^{2a+2}.$$

D'autre part, pour tout complexe z tel que $|z| \leq 1$ nous avons

$$1 = \frac{1+|z|}{1+|z|} \leq \frac{2}{1+|z|}.$$

Les deux précédentes inégalités donnent donc

$$|F_1(z)| \leq C_1 \left(\frac{|z|}{2}\right)^{2a+2} \left(\frac{2}{1+|z|}\right)^{2a+2} \leq C_1 \left(\frac{|z|}{1+|z|}\right)^{2a+2}.$$

– Plaçons nous sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| \geq 1\}$. En utilisant l'expression (A.1.5), nous obtenons

$$\begin{aligned} f_1(z) =& \left[I_{a-1}(z^{-1})P_a(z^{-1}) + P_{a-1}(z^{-1})I_a(z^{-1})\right]\cos(2z - a\pi) \\ &+ \left[P_a(z^{-1})P_{a-1}(z^{-1}) - I_{a-1}(z^{-1})I_a(z^{-1})\right]\sin(2z - a\pi) \\ &+ P_{a-1}(z^{-1})I_a(z^{-1}) - I_{a-1}(z^{-1})P_a(z^{-1}) \end{aligned}$$

En d'autres termes, $f_1(z) = \tilde{I}_a\left(\frac{1}{z}\right)\cos(2z) + \tilde{P}_a\left(\frac{1}{z}\right)\sin(2z) + \tilde{J}_a\left(\frac{1}{z}\right)$ où $\tilde{P}_a$, respectivement $\tilde{I}_a$ et $\tilde{J}_a$, est un polynôme pair, respectivement impairs et de degré au plus $2a-1$. Il suffit ensuite de chercher $F_1(z)$ sous la forme

$$F_1(z) = -a\,\mathrm{ci}(2z) + p_a\left(\frac{1}{z}\right)\cos(2z) + q_a\left(\frac{1}{z}\right)\sin(2z) + r_a\left(\frac{1}{z}\right).$$

En dérivant, il vient

$$\begin{aligned} F_1'(z) = \; & -a\frac{\cos 2z - 1}{z} + \left[\frac{-1}{z^2}{p_a}'\left(\frac{1}{z}\right) + 2q_a\left(\frac{1}{z}\right)\right]\cos(2z) \\ & + \left[\frac{-1}{z^2}{q_a}'\left(\frac{1}{z}\right) - 2p_a\left(\frac{1}{z}\right)\right]\sin(2z) + \frac{-1}{z^2}{r_a}'\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

L'identification des coefficients donne

$$(*)\begin{cases} \tilde{I}_a &= -X^2{p_a}' + 2q_a - aX \\ \tilde{P}_a &= -X^2{q_a}' - 2p_a \\ \tilde{J}_a &= -X^2{r_a}' + aX \end{cases}$$

En notant $p_a = \sum_{0\le k\le d(a)} p_k X^k$, $q_a = \sum_{0\le k\le d(a)} q_k X^k$ et $r_a = \sum_{0\le k\le d(a)} r_k X^k$, le système $(*)$ devient

$$(*)\begin{cases} \tilde{I}_a &= 2q_0 + (2q_1 - a)X + \sum_{k=2}^{d(a)+1} (2q_k - (k-1)p_{k-1})X^k \\ \tilde{P}_a &= -2p_0 - 2p_1 X - \sum_{k=2}^{d(a)+1} (2p_k + (k-1)q_{k-1})X^k \\ \tilde{J}_a &= aX - \sum_{k=2}^{d(a)+1} (k-1)r_{k-1}X^k \end{cases}$$

La dernière équation permet de déterminer entièrement r_a et sa parité (détermination termes à termes) puis l'identification des degrés donne $d(a) \le 2(a-1)$. Restent ensuite les deux premières équations couplées. En notant $\tilde{I}_a = \sum_{1\le j\le a} \alpha_j X^{2j-1}$ et $\tilde{P}_a = \sum_{0\le j\le a} \beta_j X^{2j}$, il vient

$$(**)\begin{cases} 2q_0 = 0 & \\ 2q_1 - a = \alpha_1 & \\ 2q_{2j} - (2j-1)p_{2j-1} = 0 & 1 \le j \le a-1 \\ 2q_{2j+1} - 2jp_{2j} = \alpha_j & 1 \le j \le a-1 \\ 2p_0 = -\beta_0 & \\ p_1 = 0 & \\ 2p_{2j} + (2j-1)q_{2j-1} = -\beta_j & 1 \le j \le a-1 \\ 2p_{2j+1} + 2jq_{2j} = 0 & 1 \le j \le a-1 \end{cases},$$

d'où $p_{2j+1} = q_{2j} = 0$ pour tout $j = 0, \dots, a-1$ ce qui donne la parité de p_a et q_a ; reste alors le système

$$(***)\begin{cases} 2q_1 - a = \alpha_1 & \\ 2p_0 = -\beta_0 & \\ 2q_{2j+1} - 2jp_{2j} = \alpha_j & 1 \le j \le a-1 \\ 2p_{2j} + (2j-1)q_{2j-1} = -\beta_j & 1 \le j \le a-1 \end{cases}$$

qui détermine totalement les polynômes p_a et q_a. D'où le lemme.

□

Preuve du lemme A.4.2.

– De même que précédemment, sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z| \le 1\}$ il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$|F_2(z)| \le C_1 \left(\frac{|z|}{1+|z|}\right) e^{2|\operatorname{Im} z|}.$$

– Maintenant, plaçons nous sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| \geq 1\}$. En utilisant la relation (A.1.6), il vient

$$\begin{aligned} f_2(z) =& \Big(P_{a-1}(z)P_a(z) - I_{a-1}(z)I_a(z)\Big)\cos(2z - a\pi) \\ & - \Big(I_a(z)P_{a-1}(z) + I_{a-1}(z)P_a(z)\Big)\sin(2z - a\pi) \end{aligned}$$

En d'autres termes, $f_2(z) = \tilde{P}_a(z)\cos(2z) - \tilde{I}_a(z)\sin(2z)$ où $\tilde{P}_a$ et $\tilde{I}_a$ sont les polynômes du lemme précédent. D'où le lemme.

□

Annexe B

Inégalités de Hardy et séries

Rappelons tout d'abord les deux inégalités de Hardy classiques que nous utilisons ici (cf. [HLP88]). Pour tout $p > 1$ et f mesurable, non nulle, nous avons

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^1 |f(t)|^p dt \tag{B.0.1}$$

et pour $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, non nulle

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \right)^p < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} |a_k|^p. \tag{B.0.2}$$

Les lemmes techniques mettent en jeu différentes inégalités de Hardy afin de montrer la convergence $\ell^2_{\mathbb{R}}$ de suites définies à l'aide d'intégrales. Ils sont issus de l'article de Carlson [Car97] qui les a utilisés à une autre fin (continuité de l'application $\lambda^a : q \to \ell^2_{\mathbb{R}}$ dans le cas $a \geq \frac{-1}{2}$ *réel*). Nous en montrons ici une version légèrement étendue via la condition (B.0.3). Cette condition implique que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive, strictement croissante et admet les comportement asymptotiques suivants :

$$z_n = \mathcal{O}(n) \quad \text{et} \quad n = \mathcal{O}(z_n)\,.$$

L'hypothèse $C_1 > 0$ est maximale. Il suffit de considérer la fonction constante égale à 1 et la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sqrt{n+1}\,)_{n\in\mathbb{N}}$. En revanche, remarquons que la borne C_2 n'est pas nécessaire pour le premier lemme, quant au second lemme elle est suffisante mais non nécessaire. Considérer par exemple la fonction constante égale à 1 et la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemme B.0.3 ([Car97]). *Soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ et soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant la condition*

$$z_0 > 0 \quad et \quad \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad C_1 \leq z_{n+1} - z_n \leq C_2. \tag{B.0.3}$$

Alors, uniformément sur les bornés de $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$,

$$\left(\int_0^{1/z_n} |f(t)| dt \right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}).$$

Preuve du lemme B.0.3. Quitte à re-numéroter la suite, nous pouvons supposer $z_0 > 1$.

Soit $F(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} |f(t)| dt$, F est positive et décroissante. Soit $c_n = F(z_n)$, montrons que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty \quad \Leftrightarrow \int_{z_0}^{\infty} |F(x)|^2 dx < \infty.$$

Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(z_{n+1} - z_n) F(z_{n+1})^2 \leq \int_{z_n}^{z_{n+1}} F(x)^2 dx < (z_{n+1} - z_n) F(z_n)^2,$$

en sommant nous obtenons l'encadrement

$$C_1 \sum_{n=1}^{n+1} {c_n}^2 \leq \int_{z_0}^{z_{n+1}} F(x)^2 dx < C_2 \sum_{n=0}^{n} {c_n}^2$$

qui prouve l'équivalence. Reste à montrer que $\int_{z_0}^{\infty} |F(x)|^2 dx < \infty$. En posant $u = 1/x$, nous avons

$$\int_{z_0}^{\infty} |F(x)|^2 dx = \int_0^{1/z_0} \left| \frac{F(1/u)}{u} \right|^2 du \leq \int_0^1 \left| \frac{1}{u} \int_0^u f(t) dt \right|^2 du,$$

l'inégalité de Hardy (B.0.1) nous permet de conclure. □

Lemme B.0.4 ([Car97]). *Soit $f \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$ et soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant la condition*

$$z_0 > 0 \quad et \quad \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad C_1 \leq z_{n+1} - z_n \leq C_2.$$

Alors, uniformément sur les bornés de $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$,

$$\left(\int_{1/z_n}^1 \left| \frac{f(t)}{z_n t} \right| dt \right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}).$$

Preuve du lemme B.0.4. Soit $d_n = \int_{1/z_n}^{1} \left|\frac{f(t)}{z_n t}\right| dt$, nous pouvons écrire

$$d_n = \frac{1}{n}\frac{n}{z_n}\left[\int_{1/z_1}^{1}\left|\frac{f(t)}{t}\right| dt + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{1/z_{k+1}}^{1/z_k}\left|\frac{f(t)}{t}\right| dt\right].$$

L'hypothèse (B.0.3) implique que le terme $\frac{n}{z_n}$ n'affecte pas la convergence (il est borné). Posons $a_0 = \int_{1/z_1}^{1}\left|\frac{f(t)}{t}\right| dt$ et

$$a_k = \int_{1/z_{k+1}}^{1/z_k}\left|\frac{f(t)}{t}\right| dt, \quad k > 0;$$

en d'autre termes

$$d_n = \frac{n}{z_n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right).$$

Notons $p_0^2 = \int_{1/z_1}^{1} |f(t)|^2\, dt$ et

$$p_k^2 = \int_{1/z_{k+1}}^{1/z_k} |f(t)|^2\, dt, \quad k > 0.$$

Remarquons que $\sum_{k\geq 1} p_k^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt < +\infty$. Maintenant pour $k > 0$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|a_k|^2 \leq \left(\int_{1/z_{k+1}}^{1/z_k} \frac{1}{t^2} dt\right) p_k^2 = (z_{k+1} - z_k)\, p_k^2 \leq C_2 p_k^2.$$

La suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc dans $\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$. En utilisant l'inégalité de Hardy (B.0.2) pour $p = 2$:

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)^2 \leq 4\sum_{n\geq 0} a_n^2,$$

nous pouvons conclure que la suite d_n est dans $\ell^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$. □

Annexe C

Fonction test orthogonale

Le résultat du lemme suivant montre l'existence d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $[0,1]$ non-nulle, orthogonale à une famille finie de monômes. Le lemme présenté est associé aux résultats concernant le système AKNS radial, mais il est valable aussi pour l'opérateur de Schrödinger radial (il suffit de considérer une seule des deux composantes dans l'énoncé ci-dessous).
Considérons les $2a$ vecteurs suivants :

$$v_k(t) = \begin{cases} t^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ t^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases} \quad \text{pour } k = 0, \dots, 2a-1.$$

Lemme C.0.5. *Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $k \in [0, 2a-1]$, il existe une fonction $w \in \mathcal{C}_0^\infty([0,1])$ non identiquement nulle telle vérifiant les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} w \in [\mathrm{Vect}(v_m : m = 0, \dots, 2a-1\,; m \neq k)]^\perp \\ \displaystyle\int_0^1 w(t) \cdot v_k(t)\, dt \neq 0. \end{cases}$$

Preuve du lemme. Supposons pour abréger la preuve que k est pair ($k = 2p$). Considérons un réel $\delta \in]0, 1/4[$ et $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty([0,1])$ telle que :

$$\begin{cases} 0 \leq \chi \leq 1, \\ \mathrm{supp}(\chi) = [\delta, 1-\delta], \\ \chi \equiv 1 \text{ sur } [2\delta, 1-2\delta]. \end{cases}$$

Introduisons pour $(\lambda_0, \dots, \lambda_{a-1}) \in \mathbb{R}^a$ la fonction

$$w(t) = \left(\sum_{j=0}^{a-1} \lambda_j v_{2j}(t) \right) \chi(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

le but étant de montrer qu'il existe un a-uplet $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{a-1})$ non-nul pour lequel w vérifie les conditions du lemme.
Les expressions de v_k et w impliquent

$$\langle w, v_{2q+1} \rangle = 0 \text{ pour } q = 0, \ldots, a-1,$$

les conditions à vérifier par w deviennent

$$\sum_{j=0}^{a-1} \langle v_{2q}, v_{2j}\chi \rangle \, \lambda_j = \delta_p(q), \quad p = 0, \ldots, a-1.$$

Nous avons donc un système linéaire d'ordre a à inverser. Notons A la matrice du système linéaire, $A = \Big(\langle v_{2i}, v_{2j}\chi \rangle \Big)_{i,j}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \langle v_{2i}, v_{2j}\chi \rangle &= \langle v_{2i}, v_{2j} \rangle - \langle v_{2i}, v_{2j}(1-\chi) \rangle \\ &= \frac{1}{2(i+j)-1} - \int_0^1 t^{2(i+j)}(1-\chi(t))dt. \end{aligned}$$

Les propriétés de χ implique l'encadrement

$$2\delta \leq \int_0^1 t^{2(i+j)}(1-\chi(t))dt \leq 4\delta,$$

en d'autres termes, nous obtenons

$$A = A_0 + \mathcal{O}(\delta)$$

où A_0 est le matrice suivante de terme générique $1/(2(i+j)-1)$. Pour conclure, il suffit tout d'abord d'utiliser la multilinéarité du déterminant pour obtenir

$$\det(A) = \det(A_0) + \mathcal{O}(\delta).$$

Or $\det(A_0)$ est un déterminant de type Cauchy non-nul ; il suffit alors de choisir $\delta > 0$ suffisamment petit pour affirmer que le déterminant de A est non-nul. □

Bibliographie

[AG96] L. Amour and J.-C. Guillot, *Isospectral sets for AKNS systems on the unit interval with generalized periodic boundary conditions*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), no. 1, 1–27. MR MR1371229 (96k :34184)

[Amb29] V. Ambarzumian, *Über eine frage der eigenwerttheorie*, Z.Phys. **53** (1929), no. 3, 690.

[Bar67] M.-C. Barthélemy, *Contribution à l'étude de la diffusion par un potentiel central dans la théorie de l'électron de Dirac. I, II, III*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.) 6 (1967), 365-393 ; ibid. (N.S.) 7 (1967), 115-148 ; ibid. (N.S.) **14** (1967), 56–67. MR MR0277202 (43 #2939)

[BGW95] H. Blancarte, B. Grébert, and R. Weder, *High- and low-energy estimates for the Dirac equation*, J. Math. Phys. **36** (1995), no. 3, 991–1015. MR MR1317420 (96a :81137)

[Bor46] G. Borg, *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte*, Acta Math. **78** (1946), 1–96. MR MR0015185 (7,382d)

[Bre83] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications]. MR MR697382 (85a :46001)

[Car93] R. Carlson, *Inverse spectral theory for some singular Sturm-Liouville problems*, J. Differential Equations **106** (1993), no. 1, 121–140. MR MR1249180 (94k :34027)

[Car97] ———, *A Borg-Levinson theorem for Bessel operators*, Pacific J. Math. **177** (1997), no. 1, 1–26. MR MR1444769 (98b :34029)

[CS94] R. Carlson and C. Shubin, *Spectral rigidity for radial Schrödinger operators*, J. Differential Equations **113** (1994), no. 2, 338–354. MR MR1297661 (95i :34154)

[dRG01] R. del Rio and B. Grébert, *Inverse spectral results for AKNS systems with partial information on the potentials*, Math. Phys. Anal. Geom. **4** (2001), no. 3, 229–244. MR MR1871427 (2002k :34170)

[EMOT81] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions. Vol. II*, Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Melbourne, Fla., 1981, Based on notes left by Harry Bateman, Reprint of the 1953 original. MR MR698780 (84h :33001b)

[GG93] B. Grébert and J.-C. Guillot, *Gaps of one dimensional periodic AKNS systems*, Forum Math. **5** (1993), no. 5, 459–504. MR MR1232720 (95d :34135)

[GK01] B. Grébert and T. Kappeler, *Estimates on periodic and Dirichlet eigenvalues for the Zakharov-Shabat system*, Asymptot. Anal. **25** (2001), no. 3-4, 201–237. MR MR1853394 (2002j :34147)

[GKP02] B. Grébert, T. Kappeler, and J. Pöschel, *Normal form theory for NLS equation : A preliminary report*, 2002.

[GR88] J.-C. Guillot and J. V. Ralston, *Inverse spectral theory for a singular Sturm-Liouville operator on* $[0, 1]$, J. Differential Equations **76** (1988), no. 2, 353–373. MR MR969430 (89k :34030)

[HLP88] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1988, Reprint of the 1952 edition. MR MR944909 (89d :26016)

[Hor01] M. Horváth, *On a theorem of Ambarzumian*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **131** (2001), no. 4, 899–907. MR MR1855003 (2002f :34204)

[Kis04] M. Kiss, *An n-dimensional Ambarzumian type theorem for Dirac operators*, Inverse Problems **20** (2004), no. 5, 1593–1597. MR MR2109137

[KT03] T. Kappeler and P. Topalov, *Riccati representation for elements in* $H^{-1}(\mathbb{T})$ *and its applications*, Pliska Stud. Math. Bulgar. **15** (2003), 171–188. MR MR2071691 (2005d :47081)

[KT04] ———, *Global fold structure of the Miura map on* $L^2(\mathbb{T})$, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 39, 2039–2068. MR MR2062735 (2005b :37151)

[Lev49] N. Levinson, *The inverse Sturm-Liouville problem*, Mat. Tidsskr. B. **1949** (1949), 25–30. MR MR0032067 (11,248e)

[LS91] B. M. Levitan and I. S. Sargsjan, *Sturm-Liouville and Dirac operators*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 59, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991, Translated from the Russian. MR MR1136037 (92i :34119)

[Mis79] T. V. Misjura, *Characterization of the spectra of the periodic and antiperiodic boundary value problems that are generated by the Dirac operator. I,II*, Teor. Funktsiĭ Funktsional. Anal. i Prilozhen. (1978-[1979]), no. 30-[31], 90–101, iv [102–109, 168].

[PT87] J. Pöschel and E. Trubowitz, *Inverse spectral theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 130, Academic Press Inc., Boston, MA, 1987. MR MR894477 (89b :34061)

[RS75] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975. MR MR0493420 (58 #12429b)

[RS01] W. Rundell and P. E. Sacks, *Reconstruction of a radially symmetric potential from two spectral sequences*, J. Math. Anal. Appl. **264** (2001), no. 2, 354–381. MR MR1876738 (2002m :34013)

[SC93] C. Shubin Christ, *An inverse problem for the Schrödinger equation with a radial potential*, J. Differential Equations **103** (1993), no. 2, 247–259. MR MR1221905 (94c :35171)

[Tha92] B. Thaller, *The Dirac equation*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[Wat99] B. A. Watson, *Inverse spectral problems for weighted Dirac systems*, Inverse Problems **15** (1999), no. 3, 793–805. MR MR1694351 (2000d :34184)

[wola] *http ://functions.wolfram.com/06.37.06.0006.01*.

[wolb] *http ://functions.wolfram.com/06.38.06.0006.01*.

[ZS94] L. A. Zhornitskaya and V. S. Serov, *Inverse eigenvalue problems for a singular Sturm-Liouville operator on* $[0, 1]$, Inverse Problems **10** (1994), no. 4, 975–987. MR MR1286632 (95h :34026)

Problèmes spectraux inverses pour des opérateurs AKNS et de Schrödinger singuliers sur [0,1].

Mots clés.——— Problèmes spectraux inverses, Schrödinger radial, AKNS singulier, Dirac radial, fonctions de Bessel, opérateur de transformation, ensemble isospectral.

Résumé.——— Deux opérateurs sont étudiés dans cette thèse : l'opérateur de Schrödinger radial, issu de la mécanique quantique non relativiste ; puis le système AKNS singulier, adaptation de l'opérateur de Dirac radial provenant de la mécanique quantique relativiste. La première partie consiste en la résolution du problème direct associé à chacun des deux opérateurs : détermination des valeurs et vecteurs propres, ainsi que leur dépendance vis à vis des potentiels. La présence de fonctions de Bessel due à la singularité explicite induit des difficultés lors de la détermination d'asymptotiques. La seconde partie porte sur la résolution de ces problèmes spectraux inverses. À l'aide d'opérateurs de transformations nous évitons les difficultés induites par la singularité. Ils nous permettent de développer une théorie spectrale inverse pour les opérateurs singuliers considérés. Précisément, nous construisons une application spectrale bien adapté à l'étude de la stabilité du problème inverse ainsi qu'à l'étude des ensembles isospectraux. Un résultat d'injectivité est aussi obtenu pour les opérateurs AKNS et de Dirac singuliers avec potentiels réguliers.

Inverse spectral problems for singular AKNS and Schrödinger operators on [0,1].

Keywords.—— Inverse spectral problem, radial Schrödinger, singular AKNS, radial Dirac, Bessel functions, transformation operator, isospectral sets.

Abstract.—— Two operators are studied in this thesis : the radial Schrödinger operator, extracted from the non-relativistic quantum mechanic, and the singular AKNS system, adaptation of the radial Dirac equation coming from relativistic quantum mechanic. In the first part, the direct spectral problem is solved for each equation : we obtain eigenvalues, eigenfunctions and their properties about potentials. Limitations caused by the explicit singularity are pointed out : problems risen by Bessel functions appear inside straightforward calculations for asymptotics and estimations. The second part deals with the resolution of these inverse spectral problems. Thanks to the transformation operators, we avoid difficulties created by the singularity. They help us to develop an inverse spectral theory for the singular operators considered. Precisely, we construct a spectral map adapted to study the inverse spectral problem's stability and isospectral sets study. Moreover, a one-to-one result is deduced for singular AKNS and Dirac operators with more regular potentials.