



# Mécanique statistique des systèmes autogravitants

Julien Siebert

► **To cite this version:**

Julien Siebert. Mécanique statistique des systèmes autogravitants. Astrophysique [astro-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2005. Français. tel-00009667

**HAL Id: tel-00009667**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00009667>**

Submitted on 4 Jul 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE THEORIQUE ET HAUTES ENERGIES

**THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE  
PARIS 6**

Spécialité : **PHYSIQUE THEORIQUE**

présentée par

**Julien SIEBERT**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Paris 6**

Sujet :

*Mécanique statistique  
des gaz autogravitants*

Soutenue le 24 juin 2005 devant le jury composé de :

M.	Hector DE VEGA,	directeur de thèse
M.	Claudio DESTRI,	rapporteur
M <sup>me</sup>	Norma SÁNCHEZ ,	rapporteur
M.	Vladimir DOTSENKO,	examinateur



*A mes grands-parents*



## *Remerciements*

Je suis reconnaissant à Laurent Baulieu de m'avoir accueilli au LPTHE dont il était le directeur et à Hector de Vega d'avoir dirigé mon travail de thèse avec beaucoup de compétence. Je me félicite que Norma Sánchez, Claudio Destri et Vladimir Dotsenko aient accepté d'être membres de mon jury de thèse; nous avons eu des discussions très intéressantes et très fructueuses. J'exprime ma gratitude à Valérie Sabouraud pour l'aide administrative qu'elle m'a apportée. Je remercie tous les professeurs qui m'ont fait aimé la physique.

Je remercie tous ceux qui m'ont soutenu pendant mon doctorat. Mes pensées vont à ma famille, à ma soeur Laurence et surtout à mes parents qui sont si chers à mon coeur. Je salue mes amis et particulièrement, parmi eux, Gaël Lapeyronnie, Florence Renard, Nicolas Gallaud, Roger Gottlieb et Jean-François Richard. Je n'oublie pas de remercier mon ami, le docteur en médecine, Christian Lejeune. J'ai également des pensées amicales pour Jonathan Ortiz et Gwendoline Petroffe.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Hydrostatique</b>	<b>9</b>
1.1 Exemples . . . . .	9
1.2 Equilibre hydrostatique . . . . .	11
1.3 Equilibre thermodynamique . . . . .	13
1.4 Grandeurs physiques . . . . .	15
1.4.1 Le paramètre $\eta$ . . . . .	15
1.4.2 L'équation d'état . . . . .	18
1.4.3 L'énergie . . . . .	20
1.4.4 Chaleurs spécifiques . . . . .	20
1.4.5 Compressibilités . . . . .	22
1.5 Cas limites . . . . .	23
1.5.1 Développement à haute température . . . . .	24
1.5.2 Développement autour de la sphère singulière . . . . .	25
1.6 Stabilité . . . . .	27
1.6.1 Ensemble microcanonique et ensemble canonique . . . . .	27
1.6.2 Stabilité de la sphère isotherme . . . . .	30
1.6.3 Instabilités gravitationnelles en astrophysique . . . . .	32
<b>2 Mécanique statistique</b>	<b>33</b>
2.1 Ensemble microcanonique . . . . .	34
2.1.1 Nombre de microétats . . . . .	34
2.1.2 Grandeurs physiques . . . . .	36
2.2 Ensemble canonique . . . . .	37
2.2.1 Fonction de partition . . . . .	37
2.2.2 Grandeurs physiques . . . . .	38
2.3 Champ moyen . . . . .	40
2.3.1 L'ensemble canonique . . . . .	40
2.3.2 L'ensemble microcanonique . . . . .	44
2.4 Calculs Monte Carlo . . . . .	46
2.4.1 Algorithme de Metropolis . . . . .	46
2.4.2 Résultats dans l'ensemble canonique . . . . .	47
2.4.3 Résultats dans l'ensemble microcanonique . . . . .	48



<b>3</b>	<b>Systèmes autogravitants comportant plusieurs sortes de particules</b>	<b>51</b>
3.1	Hydrostatique . . . . .	51
3.1.1	Equilibre thermodynamique . . . . .	52
3.1.2	Grandeurs physiques . . . . .	55
3.1.3	Stabilité . . . . .	58
3.1.4	Lois d'échelle . . . . .	61
3.2	Mécanique statistique . . . . .	61
3.2.1	Fonction de partition . . . . .	62
3.2.2	Grandeurs physiques . . . . .	63
3.2.3	Champ moyen . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Systèmes autogravitants en présence de la constante cosmologique</b>	<b>71</b>
4.1	La constante cosmologique . . . . .	72
4.1.1	La constante cosmologique et l'énergie noire . . . . .	72
4.1.2	Gravitation non relativiste . . . . .	72
4.2	Hydrostatique . . . . .	74
4.2.1	Equilibre hydrostatique . . . . .	74
4.2.2	Equilibre thermodynamique . . . . .	74
4.2.3	Les paramètres $\eta$ et $\xi$ . . . . .	76
4.2.4	Densité de la sphère isotherme . . . . .	78
4.2.5	Stabilité de la sphère isotherme . . . . .	79
4.3	Mécanique statistique . . . . .	79
4.3.1	Fonction de partition . . . . .	80
4.3.2	Champ moyen . . . . .	81
4.3.3	Calculs Monte Carlo . . . . .	82
4.4	Limite $R_\Lambda \gg 1$ . . . . .	83
4.5	Discussions . . . . .	84
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>87</b>
	<b>Appendices</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Gaz autogravitants polytropiques</b>	<b>91</b>
A.1	Les transformations polytropiques . . . . .	91
A.2	Les étoiles . . . . .	92
A.3	Equilibre hydrostatique . . . . .	92
<b>B</b>	<b>Théorie de Jeans</b>	<b>95</b>
B.1	Equation de propagation . . . . .	95
B.2	Relation de dispersion . . . . .	96
B.3	Instabilité dans les fluides homogènes isothermes . . . . .	97
	<b>Bibliographie</b>	<b>99</b>

# Introduction

La formation de structures dans l'univers est gouvernée par la gravitation [1, 2]. Les systèmes autogravitants sont des systèmes de particules qui interagissent entre elles par la gravité ; ils peuvent décrire les distributions de galaxies et le milieu interstellaire et notamment expliquer leur structure autosimilaire [3]. Les étoiles sont aussi décrites par les systèmes autogravitants (avec des effets quantiques) [4, 5]. Nous allons nous intéresser aux systèmes autogravitants thermalisés et nous allons présenter la mécanique statistique des systèmes autogravitants (ne comportant que des particules identiques) [6, 7, 8] pour décrire ensuite des systèmes autogravitants avec des particules différentes.

Nous sommes habitués à étudier les systèmes de particules en interaction à courte portée. Ces systèmes sont homogènes à l'équilibre thermodynamique. Leur énergie et d'autres grandeurs thermodynamiques comme leur entropie, leur énergie libre,... sont extensives, c'est à dire qu'elles sont proportionnelles au nombre de particules  $N$  du système. Dans la limite thermodynamique usuelle où le nombre de particules  $N$  et le volume  $V$  tendent vers l'infini et où le rapport  $\frac{N}{V}$  est fini, les ensembles microcanonique, canonique et grand-canonique donnent les mêmes résultats physiques. Comme conséquence de l'interaction à longue portée, les systèmes autogravitants ont des propriétés différentes. Ils ne sont pas homogènes à l'équilibre thermodynamique quoique leur énergie, leur entropie, leur énergie libre,... soient extensives (elles sont proportionnelles au nombre de particules  $N$  du système). La limite thermodynamique  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  avec  $\frac{N}{V^{\frac{1}{3}}}$  fini est la limite thermodynamique pertinente pour décrire les systèmes autogravitants thermalisés car dans cette limite l'énergie thermique dont la valeur caractéristique est  $NT$  et l'énergie autogravitationale dont la valeur caractéristique est  $\frac{Gm^2N^2}{V^{\frac{1}{3}}}$  sont du même ordre ( $G$  est ici la constante de gravitation,  $m$  la masse des particules et  $T$  la

température). Lorsque l'énergie thermique domine l'énergie autogravitationnelle, le système se comporte comme un gaz parfait. Lorsque l'énergie autogravitationnelle domine l'énergie thermique, le système collapse sous l'effet de l'autogravité; c'est d'ailleurs ce qui arrive pour ces systèmes dans la limite standard  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  avec  $\frac{N}{V}$  fini. La limite thermodynamique du gaz autogravitant  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  avec  $\frac{N}{V^{\frac{1}{3}}}$  fini est une limite thermodynamique diluée; en effet, la densité moyenne  $\frac{N}{V}$  tend vers 0 comme  $N^{-2}$  avec  $N \rightarrow \infty$ . Pour les systèmes autogravitants les ensembles statistiques ne sont pas équivalents; dans l'ensemble microcanonique, un système autogravitant peut exister avec une chaleur spécifique négative alors que dans l'ensemble canonique, il doit avoir une chaleur spécifique positive.

Les systèmes autogravitants thermalisés peuvent exister sous deux phases qui ne peuvent pas coexister, une phase gazeuse et une phase collapsée. Dans l'approche du champ moyen, la fonction de partition est évaluée pour  $N \rightarrow \infty$  par une intégrale fonctionnelle sur la densité; le poids de chaque densité dans l'intégrale fonctionnelle est l'exponentielle d'une "action" effective proportionnelle à  $N$ . On applique l'approximation de point col en cherchant la densité de point col qui rend l'action effective extrémale. Lorsque l'action effective est minimale, la densité de point col domine l'intégrale fonctionnelle et l'approche du champ moyen ainsi définie décrit exactement la phase gazeuse dans la limite thermodynamique autogravitante ( $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  avec  $\frac{N}{V^{\frac{1}{3}}}$  fini). La densité de point col est solution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. En fait, la densité de point col correspond à la densité d'un fluide autogravitant à l'équilibre hydrostatique obéissant localement à l'équation d'état des gaz parfaits: en chaque point  $\vec{q}$  du système, la pression  $P(\vec{q})$  et la densité de masse  $\rho_m(\vec{q})$  sont liées par la relation

$$P(\vec{q}) = \frac{T}{m} \rho_m(\vec{q}) \tag{1}$$

où  $T$  est la température constante et  $m$  est la masse des particules. Le système se comporte comme un fluide autogravitant en équilibre hydrostatique, les forces gravitationnelles engendrées par l'ensemble du système autogravitant et les forces de pression se compensant en chaque point; l'approche hydrostatique des système autogravitants [4, 5, 9, 10, 11, 12,

13, 14] se déduit donc de la mécanique statistique dans l'approche du champ moyen. La mécanique statistique dans l'approche du champ moyen détermine l'équation d'état (1) alors que dans l'approche hydrostatique, l'équation d'état n'est pas déterminée, elle doit être supposée. Il est raisonnable que le système autogravitant obéisse localement à l'équation d'état des gaz parfaits dans cette limite diluée. En symétrie sphérique, l'équation de la densité devient une équation différentielle du second ordre, appelée équation de Lane-Emden. Chacune de ses solutions correspond à une configuration d'équilibre qui dépend des conditions imposées au système (température  $T$ , rayon  $Q$  de la paroi sphérique qui enferme le système, pression  $P$  exercée sur la paroi). On peut, par exemple, représenter ces configurations d'équilibre sur le diagramme de phase (fig.1.1) où est tracée la courbe  $f(\eta^R)$  avec

$$f = \frac{PV}{NT} \quad (2)$$

et

$$\eta^R = \frac{Gm^2N}{QT} . \quad (3)$$

Sur ce diagramme, chaque point représente une configuration d'équilibre, le point  $(\eta^R = 0, f = 1)$  représentant la limite des hautes températures où l'autogravité (les interactions mutuelles entre particules) est négligeable devant l'agitation thermique et où le système se comporte comme un gaz parfait (homogène). Pour les autres configurations,  $f$  est inférieur à 1 car l'autogravité a pour effet d'attirer les particules vers le centre, ce qui fait diminuer la pression sur la paroi. Les grandeurs thermodynamiques s'expriment en fonction de  $\eta^R$  et de  $f$ . Les configurations d'équilibre sont identiques dans l'ensemble microcanonique, dans l'ensemble canonique et dans l'ensemble grand-canonique, mais leur stabilité est différente dans ces trois ensembles. Ceci vient du fait que les contraintes imposées au système sont différentes dans ces ensembles ; l'énergie est fixe dans l'ensemble microcanonique mais n'est pas fixe dans l'ensemble canonique. Dans l'ensemble canonique (respectivement microcanonique), les configurations d'équilibre stable ont leur compressibilité isotherme (respectivement adiabatique) positive et sont compris sur le diagramme de phase (fig.1.1) entre le point  $(\eta^R = 0, f = 1)$  et le point où la compressibilité isotherme (respective-

ment adiabatique) diverge en devenant négative. Les calculs Monte Carlo montrent que le champ moyen décrit la phase gazeuse avec une grande précision. Dans l'ensemble canonique (respectivement microcanonique), la transition de la phase gazeuse vers la phase collapsée s'opère lorsque la compressibilité isotherme (respectivement adiabatique) diverge en devenant négative, en conformité avec les prévisions du champ moyen. La transition de phase se traduit par une grande discontinuité de la pression avec une pression négative dans la phase collapsée.

Le milieu interstellaire est constitué de plusieurs sortes d'atomes (hydrogène, hélium, ...) et de molécules (dihydrogène, monoxyde de carbone, ...) et les distributions de galaxies sont constituées de galaxies de masses différentes. Nous avons donc étudié la mécanique statistique des systèmes autogravitants comportant  $n$  sortes de particules ( $N_1$  particules de masse  $m_1$ ,  $N_2$  particules de masse  $m_2, \dots$ ,  $N_n$  particules de masse  $m_n$ ) [15]. La limite thermodynamique pertinente est telle que les nombres de particules  $N_i$  et le volume  $V$  tendent vers l'infini et les rapports  $\frac{N_i}{V^{\frac{1}{3}}}$  sont finis. Nous avons développé l'approche du champ moyen de la mécanique statistique qui décrit exactement la phase gazeuse dans cette limite thermodynamique. La mécanique statistique dans l'approche du champ moyen montre que le système se comporte comme un mélange de gaz autogravitants différents obéissant chacun localement à l'équation des gaz parfaits : en chaque point  $\vec{q}$ , la pression partielle  $P_i$  et la densité de masse partielle  $\rho_{m_i}$  des particules de masse  $m_i$  sont liées par la relation

$$P_i(\vec{q}) = \frac{T}{m_i} \rho_{m_i}(\vec{q}) . \quad (4)$$

Chaque gaz autogravitant est en équilibre hydrostatique (en chaque point, les forces gravitationnelles exercées sur les particules de masse  $m_i$  par la totalité du système et les forces de pression exercées sur les particules de masse  $m_i$  par les particules de masse  $m_i$  voisines se compensent). Les densités partielles sont solutions d'un système de  $n$  équations aux dérivées partielles du second ordre qui se réduit à une seule équation aux dérivées partielles du second ordre et qui en symétrie sphérique devient une équation différentielle du second ordre. Chacune de ses solutions correspond à une configuration d'équilibre qui dépend des conditions imposées au système (température  $T$ , rayon  $Q$  de la paroi sphérique qui enferme le

système, pression partielle  $P_i$  exercée sur la paroi par les particules de masse  $m_i$ ). Ces configurations d'équilibre sont représentées par les points du diagramme de phase constitué par les courbes  $f_1(\eta_1^R, N_2, \dots, N_n)$ , ...,  $f_i(N_1, \dots, N_{i-1}, \eta_i^R, N_{i+1}, \dots, N_n)$ , ...,  $f_n(N_1, \dots, \eta_n^R)$  où

$$f_i = \frac{P_i V}{N_i T} \quad (5)$$

et

$$\eta_i^R = \frac{G m_i^2 N_i}{Q T} . \quad (6)$$

L'énergie, l'entropie, l'énergie libre, les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant ainsi que les compressibilités isothermes et adiabatiques sont calculées en fonction de  $f_1, \dots, f_n$  et de  $\eta_1^R, \dots, \eta_n^R$ . Nous avons trouvé que ces grandeurs thermodynamiques sont extensives ; dans la limite  $N_1 \rightarrow \infty, N_2 \rightarrow \infty, \dots, N_n \rightarrow \infty$ , chaque grandeur s'exprime comme la somme d'un terme proportionnel à  $N_1$ , d'un terme proportionnel à  $N_2, \dots$  et d'un terme proportionnel à  $N_n$ . Par l'étude des densités partielles, nous avons montré que les particules les plus lourdes subissant plus intensément les effets attractifs de l'autogravité sont plus nombreuses près du centre de la sphère tandis que les particules les plus légères sont plus nombreuses près de la paroi. Nous avons analysé la stabilité de ces systèmes dans l'ensemble canonique et dans l'ensemble microcanonique. Nous avons montré que les systèmes autogravitants comportant deux sortes de particules obéissent à des lois d'échelle liant leur masse  $M$  et leur taille  $q$

$$M(q) \sim q^d$$

où la dimension fractale  $d$  est inférieure ou égale à 3. La dimension fractale  $d$  est en générale dépendante de la composition du mélange (c'est à dire de  $\frac{N_1}{N_2}$ ). Cependant aux points critiques du système où la chaleur spécifique à volume constant diverge, la dimension fractale est indépendante de la composition du mélange et vaut 1.6.... Ceci manifeste l'"universalité" des propriétés du système à l'approche du régime critique.

Les récentes observations astrophysiques ont montré que l'univers est rempli de ce qui est appelé l'énergie noire et qu'on modélise par la constante cosmologique des équations de la relativité générale [16, 17, 18]. Elle

agit comme une densité d'énergie uniforme ayant une action gravitationnelle répulsive sur la matière. Il est donc important d'étudier son influence sur les systèmes autogravitants. Nous avons étudié la mécanique statistique des systèmes autogravitants (une seule sorte de particules) en présence de la constante cosmologique [19, 20]. Nous avons trouvé que la limite thermodynamique pertinente des systèmes autogravitants en présence de la constante cosmologique est la limite où le nombre de particules  $N$  et le volume  $V$  tendent vers l'infini et où la constante cosmologique  $\Lambda$  tend vers 0 avec  $\frac{N}{V^{\frac{2}{3}}}$  et  $\Lambda V^{\frac{2}{3}}$  finis. L'énergie de la constante cosmologique dans le système a pour valeur caractéristique  $\Lambda V$ , tandis que l'énergie thermique a pour valeur caractéristique  $NT$  et l'énergie autogravitationnelle a pour valeur caractéristique  $\frac{Gm^2N^2}{V^{\frac{2}{3}}}$ . Pour que l'énergie de la constante cosmologique soit de même ordre que l'énergie thermique il faut que  $\Lambda V$  soit de l'ordre de  $N$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ ; or le rapport  $\frac{N}{V^{\frac{2}{3}}}$  est fini lorsque  $N \rightarrow \infty$  et  $V \rightarrow \infty$  pour que l'énergie thermique et l'énergie autogravitationnelle soient de même ordre. La quantité  $\Lambda V^{\frac{2}{3}}$  doit donc être finie lorsque  $\Lambda \rightarrow 0$  et  $V \rightarrow \infty$  pour que l'énergie de la constante cosmologique, l'énergie autogravitationnelle et l'énergie thermique soient de même ordre. Dans cette limite thermodynamique diluée, l'approche du champ moyen décrit exactement la phase gazeuse et montre que le système se comporte comme un gaz en équilibre hydrostatique obéissant localement à l'équation des gaz parfaits (1). En chaque point, les forces gravitationnelles attractives exercées par l'ensemble du système autogravitant, les forces gravitationnelles exercées par la constante cosmologique et les forces de pression se compensent. La densité de masse est solution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre qui en symétrie sphérique devient une équation différentielle du second ordre. Chaque solution correspond à une configuration d'équilibre dépendant des conditions imposées au système (température  $T$ , rayon  $Q$  de la paroi sphérique qui enferme le système, pression  $P$  exercée sur la paroi par les particules, constante cosmologique  $\Lambda$ ). Les configurations d'équilibre sont représentées sur le diagramme de phase (fig.4.1) où sont tracées les courbes  $f(\eta^R, R_\Lambda)$ . Les paramètres  $\eta^R$  et  $f$  sont définis par les équations (2) et (3);  $R_\Lambda$  est le rapport entre l'énergie de la constante cosmologique et la masse de la matière

$$R_\Lambda = \frac{2\Lambda V}{mN} . \quad (7)$$

La constante cosmologique exerce une action gravitationnelle répulsive sur la matière qui s'oppose à l'action attractive de l'autogravité. En absence de la constante cosmologique ( $R_\Lambda = 0$ ), la densité comme fonction de la distance  $q$  par rapport au centre de la sphère ( $0 \leq q \leq Q$ ) est une fonction décroissante. En présence de la constante cosmologique, la densité peut être soit décroissante, soit uniforme, soit croissante. Lorsque  $R_\Lambda < 1$ , les effets attractifs de l'autogravité l'emportent sur les effets répulsifs de la constante cosmologique ; la densité est une fonction décroissante de  $q$ . Lorsque  $R_\Lambda = 1$ , les effets attractifs de l'autogravité et les effets répulsifs de la constante cosmologique se compensent exactement ; la densité est une fonction uniforme de  $q$  et le système se comporte comme un gaz parfait (la pression  $P$  est uniforme et vérifie la loi des gaz parfaits  $\frac{PV}{NT} = 1$ ). Lorsque  $R_\Lambda > 1$ , les effets répulsifs de la constante cosmologique l'emportent sur les effets attractifs de l'autogravité ; la densité est une fonction croissante de  $q$ . Nous avons calculé les grandeurs thermodynamiques ; nous avons trouvé qu'elles sont extensives (proportionnelles au nombre de particules  $N$ ). Nous avons déterminé la zone de stabilité de ce système suivant  $R_\Lambda$ . Nous avons fait des calculs Monte Carlo pour ce système [20]. Ces calculs Monte Carlo dans l'ensemble canonique montrent que le champ moyen décrit très bien la phase gazeuse et que la transition de la phase gazeuse vers la phase collapsée s'opère lorsque la compressibilité isotherme diverge en devenant négative. Nous avons également étudié le cas limite  $R_\Lambda \gg 1$  où l'autogravité est négligeable devant la constante cosmologique. Les particules sont soumises à des forces harmoniques dont la pulsation au carré est négative. Dans ce cas limite, le système est exactement soluble ; nous avons calculé les grandeurs thermodynamiques et nous avons trouvé que toutes les configurations d'équilibre sont stables.

Dans les deux premiers chapitres, nous présentons les systèmes auto-gravitants thermalisés constitués par une seule sorte de particules. Dans le premier chapitre est exposée l'hydrostatique des systèmes auto-gravitants. Nous établissons l'équation vérifiée par la densité, nous calculons les grandeurs thermodynamiques et nous explorons la stabilité du système. Dans le deuxième chapitre, la mécanique statistique des systèmes auto-gravitants dans l'ensemble microcanonique et dans l'ensemble canonique est présentée. Nous montrons que dans l'approche du champ moyen, l'hy-



drostatique est déduite et que l'équation d'état est dérivée; il s'agit de l'équation locale des gaz parfaits inhomogènes. Nous exposons enfin les calculs Monte Carlo.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les résultats obtenus sur les systèmes autogravitants constitués de plusieurs sortes de particules. Dans l'approche du champ moyen, nous dérivons les équations d'état, nous établissons les équations des densités partielles, calculons les grandeurs thermodynamiques, faisons l'analyse de la stabilité du système et étudions ses lois d'échelle.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons les résultats obtenus sur les systèmes autogravitants en présence de la constante cosmologique. Dans l'approche du champ moyen, nous dérivons l'équation d'état, établissons l'équation de la densité et étudions la stabilité des configurations d'équilibre dans l'ensemble canonique. Nous exposons le cas limite  $R_\Lambda \gg 1$ . Nous présentons les calculs Monte Carlo.

# Chapitre 1

## Hydrostatique

Un système autogravitant est un système de particules qui interagissent entre elles par la gravitation. On se limite ici à la gravitation newtonienne. Il existe sous deux phases qui ne peuvent pas coexister ensemble, une phase gazeuse et une phase collapsée. L'outil adéquat pour étudier les propriétés de ce système à l'équilibre thermodynamique est la mécanique statistique (chapitre 2). L'approche du champ moyen dans laquelle le système se comporte comme un gaz autogravitant isotherme en équilibre hydrostatique et obéit localement à l'équation d'état des gaz parfaits décrit exactement la phase gazeuse dans la limite thermodynamique où le nombre de particules  $N$  et le volume  $V$  sont tels que  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  et  $\frac{N}{V^{2/3}}$  est fini. Dans la limite thermodynamique standard où  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  et  $\frac{N}{V}$  est fini, le système est dans sa phase collapsée. Nous allons étudier dans ce chapitre l'hydrostatique des gaz autogravitants parce qu'elle décrit exactement la phase gazeuse dans la limite thermodynamique. Nous allons voir que l'on peut appliquer le gaz autogravitant à l'équilibre thermodynamique à au moins deux types d'objets astrophysiques : le milieu interstellaire et les distributions de galaxies.

### 1.1 Exemples

Le gaz autogravitant à l'équilibre thermodynamique décrit tous les objets astrophysiques thermalisés dans lesquels les interactions gravitationnelles jouent un rôle prépondérant. Le milieu interstellaire est constitué de nuages de gaz et de poussières situés dans le plan des galaxies. C'est dans ces nuages que se forment les étoiles par effondrement gravitationnel.

Le milieu interstellaire n'est pas homogène, les nuages le formant ont des tailles diverses, leur taille étant inversement proportionnelle à leur densité. Les nuages les moins denses contiennent de l'hydrogène atomique  $HI$ , les plus denses contiennent de l'hydrogène moléculaire  $H_2$  et des molécules formées à partir d'éléments plus lourds comme le monoxyde de carbone  $CO$ . Le milieu interstellaire a une structure très intéressante. En effet, les observations des raies moléculaires [21, 22] ont permis d'obtenir des informations sur la masse et la dynamique de ces nuages. Il a été mis en évidence, pour des régions ayant une longueur  $l$  comprise entre  $10^{-2}$  parsecs et 100 parsecs que la dispersion interne des vitesses  $\Delta v$  et la masse  $M$  obéissent à des lois de puissance

$$M \sim l^{d_H} \quad , \quad \Delta v \sim l^{d_v} \quad (1.1)$$

avec des dimensions fractales  $d_H$  et  $d_v$  vérifiant

$$1.4 \leq d_H \leq 2 \quad , \quad 0.3 \leq d_v \leq 0.6 \quad .$$

De telles relations montrent que le milieu interstellaire a une structure auto-similaire se répétant à toutes les échelles [23]. Cette structure est hiérarchique, les grands nuages sont fragmentés en de plus petits nuages condensés, ceux-ci étant fragmentés en de plus petits nuages encore plus condensés et ainsi de suite sur au moins 5 à 10 ordres de grandeurs. La limite supérieure de cette clusterisation est de 100 parsecs, ce qui correspond à un million de masses solaires. Des nuages de taille supérieure ne peuvent pas exister car ils seraient détruits par les forces de marées galactiques. La limite inférieure est limitée par la résolution des télescopes, il semble qu'elle puisse être repoussée jusqu'à  $10^{-4}$  parsecs, ce qui correspond à une masse de l'ordre de celle de Jupiter. L'autosimilarité du milieu interstellaire sur une échelle de tailles aussi larges a suscité de nombreuses tentatives d'explication [22]. La physique du milieu interstellaire est complexe (formation d'étoiles, explosion de supernovae, vent stellaire...). On peut cependant poser comme hypothèse que l'essentiel de la physique du milieu interstellaire vient des interactions gravitationnelles entre les particules qui le composent. On peut supposer que le milieu interstellaire est thermalisé sur de larges échelles. Le système autogravitant isotherme est donc utile et plein de sens pour la description du milieu interstellaire [3]. Or, il a été montré que les gaz autogravitants à l'équilibre thermodynamique obéissent à des lois d'échelle

sur la masse et la vitesse analogues à celles de la relation (1.1) [7]. Les gaz autogravitants à l'équilibre thermodynamique sont donc aptes à décrire et expliquer la structure autosimilaire du milieu interstellaire. Les gaz autogravitants s'appliquent aussi aux distributions de galaxies, chaque galaxie étant considérée comme un point matériel interagissant avec les autres galaxies par l'intermédiaire de la gravité ; cependant, les galaxies ne sont pas thermalisées. Comme le milieu interstellaire, les galaxies s'organisent en structure hiérarchique du groupe de galaxies qui est la structure la plus petite, en passant par l'amas de galaxies jusqu'au superamas de galaxies qui est la structure la plus grande. La structure des distributions de galaxies est autosimilaire et leur masse et taille sont reliées par une loi de puissance analogue à celle du milieu interstellaire (1.1) avec une dimension  $d_H \sim 1.7$  et ce pour une échelle allant jusqu'à  $10^9$  années lumières [24]. Au delà, la dimension fractale tend vers 3 car l'expansion de l'univers l'emporte sur l'autogravité et l'univers devient homogène. Le fait que le milieu interstellaire et les distributions de galaxies aient le même type de structure autosimilaire, avec les mêmes lois d'échelle, plaide en faveur de la gravité comme cause de ce phénomène universel. Ceci motive très fortement l'étude des gaz autogravitants. Nous allons présenter les gaz autogravitants en équilibre hydrostatique.

## 1.2 Equilibre hydrostatique

Dans l'approche hydrostatique, le gaz autogravitant est divisé en éléments de fluide, chaque élément de fluide subissant deux forces qui se compensent :

- les forces gravitationnelles exercées par la totalité du gaz autogravitant
- les forces de pression exercées par les éléments de fluide qui lui sont voisins.

Le gaz autogravitant est alors en équilibre hydrostatique ; l'équilibre des forces de pression et des forces gravitationnelles s'appliquant sur un élément de volume unité centré autour du point  $\vec{q}$  s'écrit [25]

$$-\vec{\nabla}_{\vec{q}}P + \rho_m(\vec{q}) \vec{g}(\vec{q}) = 0 \quad (1.2)$$

où  $P$  est la pression du gaz au point  $\vec{q}$ ,  $\rho_m$  est la densité de masse au point  $\vec{q}$  et

$$\vec{g}(\vec{q}) = -G \int d^3\vec{q}' \rho_m(\vec{q}') \frac{\vec{q} - \vec{q}'}{|\vec{q} - \vec{q}'|^3} \quad (1.3)$$

est le champ gravitationnel engendré au point  $\vec{q}$  par le gaz autogravitant. En utilisant l'équation de Poisson du champ gravitationnel

$$\vec{\nabla}_{\vec{q}} \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho_m(\vec{q}) , \quad (1.4)$$

on obtient la relation suivante qui est la condition d'équilibre hydrostatique d'un gaz autogravitant

$$\vec{\nabla}_{\vec{q}} \left( \frac{1}{\rho_m} \vec{\nabla}_{\vec{q}} P \right) = -4\pi G \rho_m(\vec{q}) . \quad (1.5)$$

Nous allons souvent considérer les gaz autogravitants en symétrie sphérique que nous allons appeler sphères autogravitantes. A cause de la symétrie sphérique, toutes les grandeurs physiques ne dépendent que de la distance  $q$  par rapport au centre de la sphère. Soit  $M(q)$  la masse à l'intérieur de la sphère de rayon  $q$  :

$$M(q) = \int_0^q du 4\pi u^2 \rho_m(u) . \quad (1.6)$$

En symétrie sphérique l'intégration du champ (1.3) donne

$$g(q) = -\frac{G M(q) \rho_m(q)}{q^2} .$$

En utilisant l'équation (1.2), on a

$$\frac{dP}{dq} = -\frac{G M(q) \rho_m(q)}{q^2} .$$

On remarque d'après cette relation qu'une sphère autogravitante en équilibre hydrostatique a une pression qui décroît en s'éloignant du centre ( $\frac{dP}{dq} < 0$ ). Les forces de pression sont donc orientées vers l'extérieur, elles s'opposent aux forces gravitationnelles qui tendent à contracter la sphère autogravitante vers son centre. La condition d'équilibre hydrostatique (1.5) devient en symétrie sphérique

$$\frac{1}{q^2} \frac{d}{dq} \left( \frac{q^2}{\rho_m(q)} \frac{dP}{dq} \right) = -4\pi G \rho_m(q) . \quad (1.7)$$

Cette relation exprime la condition d'équilibre hydrostatique d'une sphère autogravitante. L'équation (1.7) est la limite newtonienne de la condition d'équilibre hydrostatique d'un fluide autogravitant en relativité générale (voir par exemple [26]).

Nous allons présenter maintenant les gaz autogravitants à l'équilibre thermodynamique ; ce sont les gaz autogravitants isothermes en équilibre hydrostatique.

### 1.3 Equilibre thermodynamique

La condition d'équilibre hydrostatique (1.5) ne suffit pas pour décrire un gaz autogravitant. Pour déterminer la densité de masse et la pression, il faut l'équation d'état reliant ces deux grandeurs. Nous allons nous intéresser aux gaz autogravitants à l'équilibre thermodynamique (dans l'annexe I, on présente un autre type de gaz autogravitant, le gaz autogravitant polytropique). En hydrostatique, il faut postuler l'équation d'état tandis que dans l'approche de mécanique statistique du gaz autogravitant, son équation d'état est dérivée (chapitre 2). La mécanique statistique, dans l'approche du champ moyen, montre que le gaz autogravitant vérifie la condition d'équilibre hydrostatique (1.5), dans la limite thermodynamique autogravitante où le nombre de particules  $N$  et le volume  $V$  tendent vers l'infini avec  $\frac{N}{V^{\frac{1}{3}}}$  fini. Dans cette limite thermodynamique diluée la densité moyenne  $\frac{N}{V}$  se comporte comme  $N^{-2}$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ . L'approche de mécanique statistique permet de dériver l'équation d'état du système. Elle montre que la pression et la densité de masse du gaz autogravitant obéissent, en chaque point  $\vec{q}$ , à l'équation d'état des gaz parfaits (1)

$$P(\vec{q}) = \frac{T}{m} \rho_m(\vec{q})$$

où  $m$  est la masse de chacune des particules du gaz qui sont supposées ici identiques et où  $T$  est la température du gaz isotherme. A partir de cette équation et de l'équation (1.5), on obtient l'équation de la densité du gaz autogravitant à l'équilibre thermodynamique

$$\vec{\nabla}_{\vec{q}}^2 (\ln \rho_m) + \frac{4\pi G m}{T} \rho_m(\vec{q}) = 0. \quad (1.8)$$

En posant pour la densité

$$\rho_m = \rho_o e^{\chi} \quad (1.9)$$

où  $\rho_o$  est une constante et en introduisant le rayon vecteur sans dimension  $\vec{\lambda}$  défini par

$$\vec{q} = a \vec{\lambda} \quad , \quad a = \sqrt{\frac{T}{4\pi G m \rho_o}} \quad , \quad (1.10)$$

on trouve l'équation suivante

$$\vec{\nabla}_{\vec{\lambda}}^2 \chi + e^{\chi(\vec{\lambda})} = 0 \quad . \quad (1.11)$$

Nous verrons dans le chapitre 2 que cette équation correspond au point col de la fonction de partition dans l'approche du champ moyen. Dans le cas de la symétrie sphérique, on appelle le gaz autogravitant en équilibre thermodynamique sphère isotherme [4, 5]. L'équation (1.11) devient

$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{d}{d\lambda} \left( \lambda^2 \frac{d\chi}{d\lambda} \right) + e^{\chi} = 0 \quad . \quad (1.12)$$

Cette équation correspond à l'équation de Lane-Emden isotherme dans l'approche hydrostatique [4]. On peut poser que  $\rho_o$  est la densité au centre et en déduire la première condition initiale

$$\chi(\lambda = 0) = 0 \quad . \quad (1.13)$$

Pour que l'équation (1.12) soit régulière à l'origine, on impose la deuxième condition initiale

$$\frac{d\chi}{d\lambda}(\lambda = 0) = 0 \quad . \quad (1.14)$$

L'équation (1.11) est covariante par la transformation d'échelle suivante : si  $\chi(\vec{\lambda})$  est solution de cette équation alors, étant donné une constante  $C$ , la fonction

$$\chi^*(\vec{\lambda}) = \chi(C \vec{\lambda}) + 2 \ln C$$

est aussi solution de cette équation. Dans le cas de la symétrie sphérique, cette propriété de covariance s'énonce de cette façon : si  $\chi(\lambda)$  est solution de l'équation de Lane-Emden isotherme (1.12) alors la fonction

$$\chi^*(\lambda) = \chi(C \lambda) + 2 \ln C \quad (1.15)$$

est aussi solution de l'équation de Lane-Emden isotherme. Grâce à cette propriété, on peut déduire toute une famille de solutions à partir d'une solution. Par exemple, les solutions régulières ( $\chi'(0) = 0$ ) sont engendrées par la solution vérifiant  $\chi(0) = 0$ . Appliquer cette transformation à la solution dont les conditions aux limites sont (1.13) et (1.14) revient à redéfinir la constante  $\rho_o$  dans l'équation (1.9). On va maintenant montrer que les solutions telles que  $\chi(0)$  est fini vérifient nécessairement  $\chi'(0) = 0$  [5]. D'après (1.12) on a

$$\frac{d^2(\lambda\chi)}{d^2\lambda} = -\lambda e^{\chi(\lambda)}$$

donc

$$\left(\frac{d\chi}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2(\lambda\chi)}{d^2\lambda}\right)_{\lambda=0} = -\frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} [\lambda e^{\chi(\lambda)}] .$$

Si  $\chi(0)$  est fini alors on a bien  $\chi'(0) = 0$ .

Dans la section suivante, nous allons exposer le calcul de quelques grandeurs physiques de la **sphère isotherme** qui est le gaz autogravitant à l'équilibre thermodynamique en symétrie sphérique, à partir des solutions de l'équation de Lane-Emden isotherme (1.12).

## 1.4 Grandeurs physiques

Nous allons présenter le calcul de quelques grandeurs physiques de la sphère isotherme.

### 1.4.1 Le paramètre $\eta$

On suppose que le système qui est composé de  $N$  particules de masse  $m$  et dont la masse totale est  $M = mN$  est contenu dans un volume  $V$ . Introduisons le paramètre sans dimension  $\eta = \frac{G m M}{V^{\frac{1}{3}} T} = \frac{G m^2 N}{V^{\frac{1}{3}} T}$ . Le paramètre  $\eta$  est le rapport entre deux énergies caractéristiques d'une particule en interaction avec le système,  $\frac{G m M}{V^{\frac{1}{3}}}$  qui est de l'ordre de son énergie gravitationnelle et  $T$  qui est de l'ordre de son énergie cinétique. Lorsque  $\eta$  tend



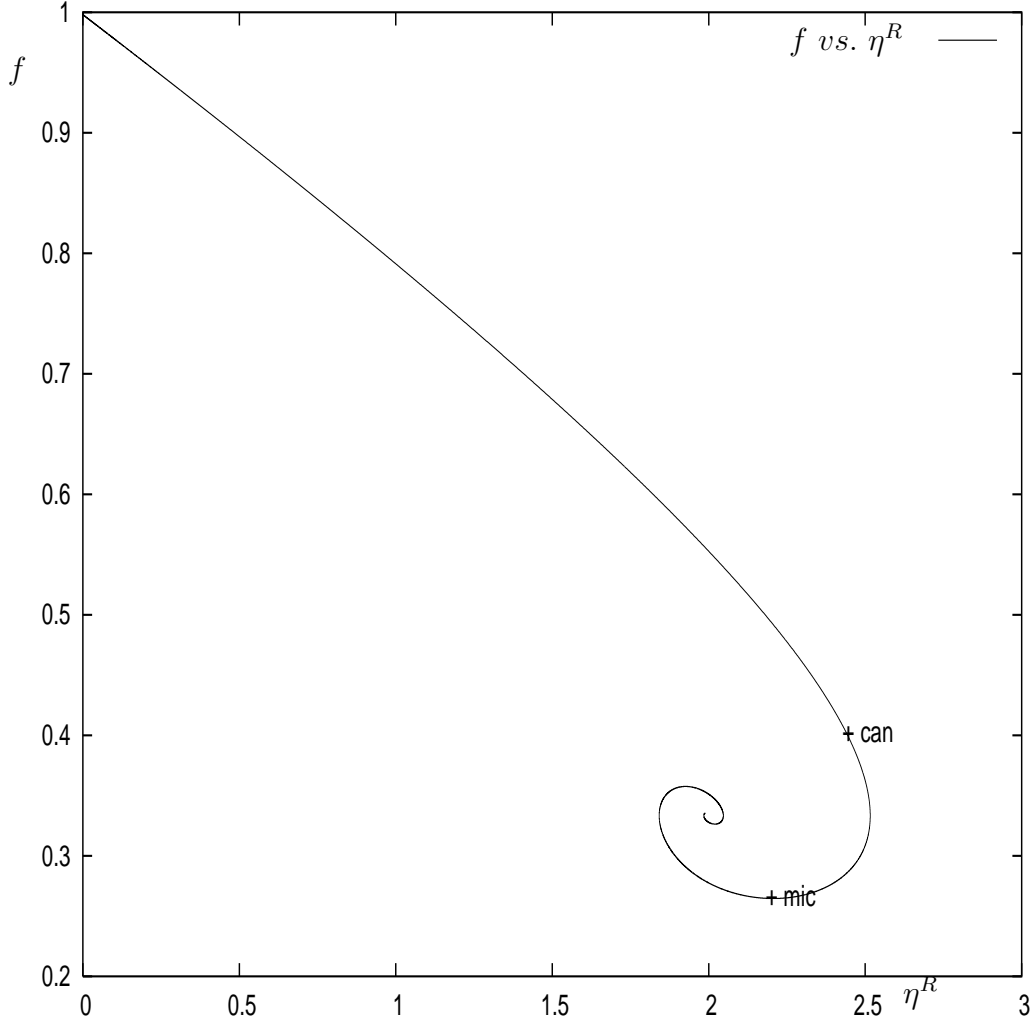


FIG. 1.1 – La courbe  $f(\eta^R)$  où  $f = \frac{PV}{NT}$  (voir équation (1.18) ) et  $\eta^R = \frac{G m^2 N}{Q T}$  (voir équation (1.17) ). Le point  $(\eta^R = 0, f = 1)$  correspond à la limite des basses densités et des hautes températures où les effets de la gravitation sont négligeables et où le système est homogène. Le paramètre  $\eta^R$  atteint sa valeur maximale au point  $(\eta^R = 2.51\dots, f = \frac{1}{3})$  ; il s'agit du point de température minimale où la chaleur spécifique à volume constant diverge en devenant négative. Le point  $(\eta^R = 2, f = \frac{1}{3})$  correspond à la limite des hautes densités où le système est infiniment dense au centre de la sphère. La courbe a la forme d'une spirale qui s'enroule autour du point  $(\eta^R = 2, f = \frac{1}{3})$ . Les configurations comprises entre le point  $(\eta^R = 0, f = 1)$  et le point  $(\eta^R = 2.43\dots, f = 0.40\dots)$  sont stables dans l'ensemble canonique. Le point  $(\eta^R = 2.43\dots, f = 0.40\dots)$  représenté par le symbole  $+can$  est le point d'instabilité dans l'ensemble canonique. Les configurations comprises entre le point  $(\eta^R = 0, f = 1)$  et le point  $(\eta^R = 2.14\dots, f = 0.26\dots)$  sont stables dans l'ensemble microcanonique. Le point  $(\eta^R = 2.14\dots, f = 0.26\dots)$  représenté par le symbole  $+mic$  est le point d'instabilité dans l'ensemble microcanonique.

vers 0, son énergie cinétique l'emporte largement sur son énergie gravitationnelle et le système se comporte comme un gaz parfait ; c'est le cas des systèmes terrestres usuels. Lorsque  $\eta$  est de l'ordre de 1, l'énergie gravitationnelle de la particule est du même ordre que son énergie cinétique et la gravité joue un rôle important dans la physique du système. Lorsque  $\eta \rightarrow \infty$ , l'énergie gravitationnelle de la particule l'emporte largement sur son énergie cinétique et le système s'effondre immédiatement sur lui-même. Voilà pourquoi la limite thermodynamique pertinente des systèmes auto-gravitants est  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  avec  $\frac{N}{V^{\frac{1}{3}}}$  fini. Pour cette limite,  $\eta$  est fini et l'autogravité joue un rôle important. Par contre, la limite thermodynamique standard  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  avec  $\frac{N}{V}$  fini, correspond pour les systèmes autogravitants à  $\eta \rightarrow \infty$  où le système s'effondre sur lui-même. Il a été estimé que  $\eta \sim 1$  pour le milieu interstellaire [3, 6]. Ceci confirme que l'autogravité joue un rôle très important dans la physique du milieu interstellaire.

Calculons  $\eta$  à partir des solutions de l'équation de Lane-Emden (1.12) dans le cas de la sphère isotherme. La masse contenue à l'intérieur du volume  $V$  est

$$M = m N = \int_V d^3\vec{q}' \rho_m(\vec{q}').$$

En utilisant les équations (1.8) et le théorème de Green-Ostrogradski sur le volume  $V$ , on trouve que la masse est proportionnelle à une intégrale sur la surface de la paroi entourant le volume  $V$

$$M = -\frac{T}{4\pi G m} \oint \vec{d}S \vec{\nabla}_{\vec{q}} \ln \rho_m.$$

Dans le cas de la symétrie sphérique où le volume est une sphère de rayon  $Q$ , le paramètre  $\eta^R = \frac{G m^2 N}{Q T} = \eta \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$  défini dans l'introduction par la relation (3) vaut

$$\eta^R = -Q \left( \frac{d}{dq} (\ln \rho_m) \right)_{q=Q}. \quad (1.16)$$

D'après la relation (1.9) et en introduisant le rayon réduit  $\lambda = \sqrt{\frac{4\pi G m \rho_0}{T}} Q$  ( éq. (1.10)), on obtient

$$\eta^R = \frac{G m^2 N}{Q T} = -\lambda \chi'(\lambda). \quad (1.17)$$

Nous allons maintenant déterminer l'équation d'état de la sphère isotherme.

### 1.4.2 L'équation d'état

Les équations (1), (1.9), (1.10) et (1.17) permettent de déduire la valeur du paramètre  $f$  défini dans l'introduction par la relation (2)

$$f = \frac{P V}{N T} = -\frac{1}{3} \frac{\lambda e^{\chi(\lambda)}}{\chi'(\lambda)} \quad (1.18)$$

où  $P$  est la pression du gaz sur la paroi et  $V = \frac{4\pi Q^3}{3}$  est le volume du système. Ce paramètre détermine l'équation d'état du gaz sur la paroi. Montrons que  $f$  comme fonction de  $\eta^R$  obéit à une équation différentielle du premier ordre. D'après les équations (1.12), (1.17) et (1.18), on a

$$\frac{1}{f} \frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} (3 - 3f - \eta^R), \quad \frac{1}{\eta^R} \frac{d\eta^R}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} (3f - 1).$$

On en déduit que  $f$  comme fonction du paramètre  $\eta^R$  obéit à l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$\frac{\eta^R}{f} \frac{df}{d\eta^R} = -\frac{3f + \eta^R - 3}{3f - 1}. \quad (1.19)$$

L'équation différentielle (1.19) correspond à une équation d'Abel de premier type. La condition initiale de cette équation différentielle est  $f(\eta^R = 0) = 1$ , ce qui correspond à la limite des basses densités et des hautes températures où la sphère isotherme tend à se comporter comme un gaz parfait homogène. Grâce à sa propriété de covariance (1.15), l'équation de Lane-Emden isotherme qui est une équation différentielle du second ordre a été réduite en l'équation du premier ordre (1.19) d'inconnue  $f(\eta^R)$ . Ce résultat a été obtenu car la grandeur  $\eta^R = -\lambda \chi'(\lambda)$  définie par la relation (1.17) et la grandeur  $f = -\frac{1}{3} \frac{\lambda e^{\chi(\lambda)}}{\chi'(\lambda)}$  définie par la relation (1.18) sont invariantes par la transformation d'échelle (1.15).

La courbe  $f(\eta^R)$  (fig.1.1) constitue le diagramme de phase de la sphère isotherme. Chaque point du diagramme représente une configuration d'équilibre, solution de l'équation de Lane-Emden isotherme (éq.(1.12)). Le point  $(\eta^R = 0, f = 1)$  correspond à la limite des basses densités et des hautes températures où les effets de la gravitation sont négligeables et où le système est homogène. Le paramètre  $\eta^R$  atteint sa valeur maximale au point  $(\eta^R = 2.51\dots, f = \frac{1}{3})$ ; il s'agit du point de température minimale où la chaleur spécifique à volume constant diverge en devenant négative. Le point  $(\eta^R = 2, f = \frac{1}{3})$  correspond à la limite des hautes densités où le système est infiniment dense au centre de la sphère. Les configurations comprises entre le point  $(\eta^R = 0, f = 1)$  et le point  $(\eta^R = 2.43\dots, f = 0.40\dots)$  sont stables dans l'ensemble canonique. Le point  $(\eta^R = 2.43\dots, f = 0.40\dots)$  représenté par le symbole  $+can$  est le point d'instabilité dans l'ensemble canonique. Les configurations comprises entre le point  $(\eta^R = 0, f = 1)$  et le point  $(\eta^R = 2.14\dots, f = 0.26\dots)$  sont stables dans l'ensemble microcanonique. Le point  $(\eta^R = 2.14\dots, f = 0.26\dots)$  représenté par le symbole  $+mic$  est le point d'instabilité dans l'ensemble microcanonique.

Déterminons la pression à l'intérieur de la sphère. Plaçons nous à un rayon  $q$  inférieur au rayon  $Q$  de la paroi sphérique. D'après l'équation (1.10), à ce rayon  $q$  correspond un rayon réduit  $\lambda_q = \frac{q}{Q} \lambda$ . On en déduit d'après les équations (1) et (1.9) que la densité de masse et la pression au rayon  $q$  sont telles que

$$\frac{m P(q)}{T \rho_o} = \frac{\rho_m(q)}{\rho_o} = e^{\chi(\frac{q}{Q} \lambda)} . \quad (1.20)$$

Introduisons le contraste qui est le rapport de la pression au centre de la sphère et de la pression sur la paroi de la sphère

$$C = \frac{P(0)}{P(Q)} = e^{-\chi(\lambda)} . \quad (1.21)$$

La fonction  $\chi(\lambda)$  solution de l'équation de Lane-Emden isotherme (1.12) est négative et décroissante. On en déduit que le contraste est une grandeur supérieure à 1 et croissante avec  $\lambda$ . Chaque configuration d'équilibre de la sphère isotherme, solution de l'équation de Lane-Emden isotherme est déterminée par une et une seule valeur de  $\lambda$ , elle est donc déterminée par une et une seule valeur du contraste.

Nous allons maintenant calculer l'énergie.

### 1.4.3 L'énergie

Pour calculer l'énergie, nous allons appliquer le théorème du viriel [27]. Considérons un corps thermalisé dont l'énergie potentielle d'interaction  $E_P$  est une fonction homogène d'ordre  $n$  des coordonnées des particules et qui a comme énergie cinétique  $E_c$ , comme énergie totale  $E = E_c + E_P$  et comme pression de paroi  $P$ . On a la relation suivante

$$2 E_c - n E_P = (n + 2) E_c - n E = 3 PV .$$

Pour un gaz autogravitant, l'énergie potentielle d'interaction est d'ordre  $n = -1$ , on a donc

$$2 E_c + E_P = E_c + E = 3 PV . \quad (1.22)$$

En supposant que le gaz est monoatomique, on a  $E_c = \frac{3}{2} N T$ . D'après l'équation (1.18), on obtient le résultat suivant pour l'énergie

$$\frac{E}{NT} = 3 \left( f - \frac{1}{2} \right) . \quad (1.23)$$

Introduisons le paramètre  $\epsilon^R = \frac{Q E}{G m^2 N^2}$  qui est le quotient de son énergie  $E$  et de l'énergie  $\frac{G m^2 N}{Q}$  qui est de l'ordre de son énergie gravitationnelle. D'après les équations (1.17) et (1.23), on a

$$\epsilon^R = \frac{q E}{G m^2 N^2} = 3 \frac{f - \frac{1}{2}}{\eta^R} . \quad (1.24)$$

Alors que  $\eta^R$  est le paramètre pertinent dans l'ensemble canonique,  $\epsilon^R$  est le paramètre pertinent dans l'ensemble microcanonique.

Calculons maintenant la chaleur spécifique à volume constant et la chaleur spécifique à pression constante.

### 1.4.4 Chaleurs spécifiques

Effectuons d'abord le calcul de la chaleur spécifique à volume constant  $c_v = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$ . En utilisant les équations (1.17) et (1.23), on trouve

$$c_v = 3 \left[ f(\eta^R) - \eta^R f'(\eta^R) - \frac{1}{2} \right] .$$

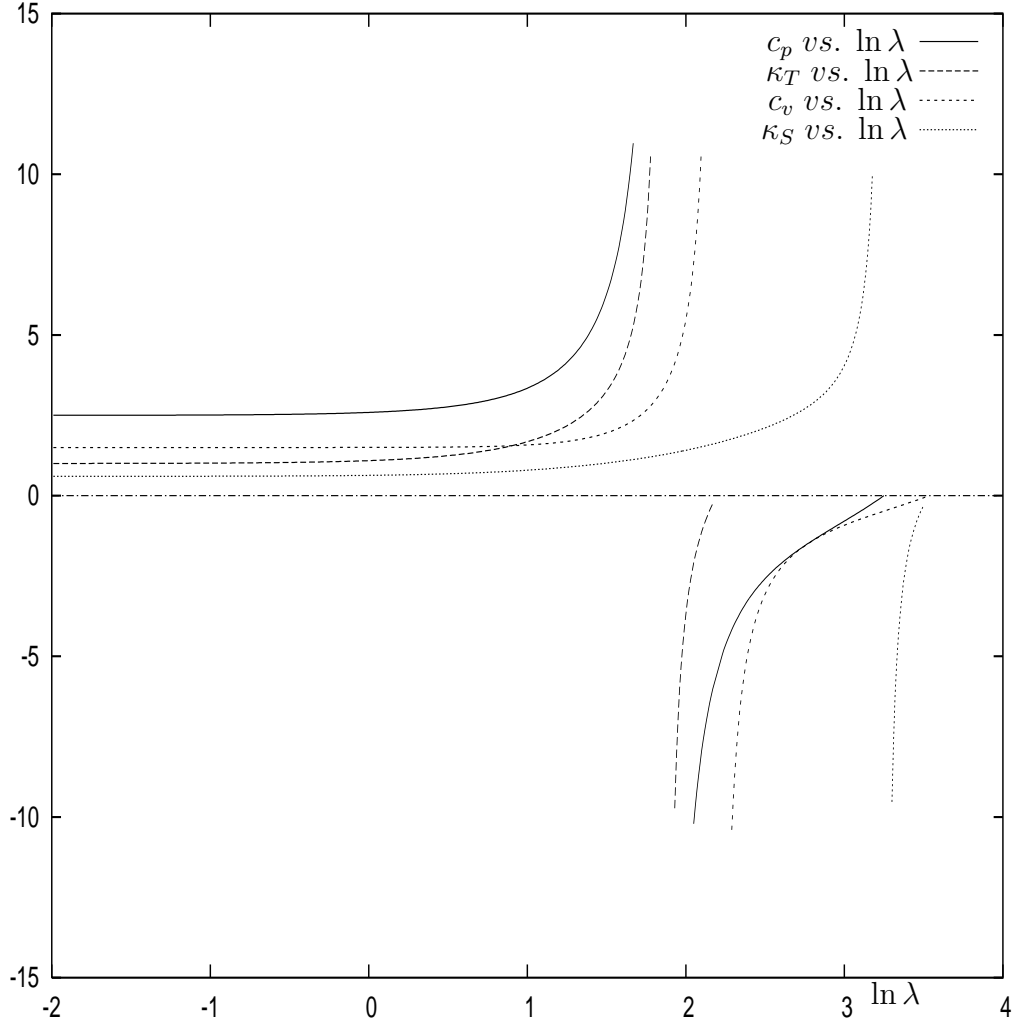


FIG. 1.2 – La chaleur spécifique à volume constant  $c_v$ , la chaleur spécifique à pression constante  $c_p$ , la compressibilité isotherme  $\kappa_T$  et la compressibilité adiabatique  $\kappa_S$  en fonction de  $\ln \lambda$  défini par l'équation (1.10). La chaleur spécifique à volume constant est positive pour  $0 \leq \lambda < 8.99$ , diverge pour  $\lambda = 8.99$ , est négative pour  $8.99 < \lambda < 34.2$  et s'annule en redevant positive pour  $\lambda = 34.2$ . La chaleur spécifique à pression constante est positive pour  $0 \leq \lambda < 6.5$ , diverge pour  $\lambda = 6.5$ , est négative pour  $6.5 < \lambda < 25.8$  et s'annule en redevant positive pour  $\lambda = 25.8$ . La compressibilité isotherme est positive pour  $0 \leq \lambda < 6.5$  et diverge en devenant négative pour  $\lambda = 6.5$ , c'est à dire pour la même valeur où la chaleur spécifique à pression constante diverge. La compressibilité adiabatique est positive pour  $0 \leq \lambda < 25.8$  et diverge en devenant négative pour  $\lambda = 25.8$ , c'est à dire pour la même valeur où la chaleur spécifique à pression constante s'annule.

En utilisant l'équation (1.19), on obtient

$$c_v = 6f - \frac{7}{2} + \eta^R + \frac{\eta^R - 2}{3f - 1}. \quad (1.25)$$

Grâce aux équations (1.17) et (1.18), on trace  $c_v$  (fig.1.2) en fonction du rayon réduit  $\lambda$  (1.10). La chaleur spécifique à volume constant est positive pour  $0 \leq \lambda < 8.99$ , diverge pour  $\lambda = 8.99$ , est négative pour  $8.99 < \lambda < 34.2$  et s'annule en redevenant positive pour  $\lambda = 34.2$ .

Effectuons maintenant le calcul de la chaleur spécifique à pression constante  $c_p = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_P$ .

En utilisant la formule [27]

$$c_p = c_v - \frac{T}{N} \frac{\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2}{\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T}$$

et les équations (1.17) et (1.18), on a

$$c_p = -\frac{3}{2} + 4f(\eta^R) \frac{f(\eta^R) - \eta^R f'(\eta^R)}{f(\eta^R) + \frac{\eta^R}{3} f'(\eta^R)}.$$

En utilisant l'équation (1.19), on obtient

$$c_p = -\frac{3}{2} + 12f + \frac{24(\eta^R - 2)f}{6f - \eta^R}. \quad (1.26)$$

Grâce aux équations (1.17) et (1.18), on trace  $c_p$  (fig.1.2) en fonction du rayon réduit  $\lambda$  (1.10). La chaleur spécifique à pression constante est positive pour  $0 \leq \lambda < 6.5$ , diverge pour  $\lambda = 6.5$ , est négative pour  $6.5 < \lambda < 25.8$  et s'annule en redevenant positive pour  $\lambda = 25.8$ .

Nous allons enfin calculer la compressibilité isotherme et la compressibilité adiabatique.

### 1.4.5 Compressibilités

La compressibilité isotherme et la compressibilité adiabatique ont pour expression respective

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T, \quad \kappa_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S.$$

Elles expriment la variation de la pression par rapport au volume respectivement à température constante et entropie constante.

Calculons la compressibilité isotherme pour les configurations d'équilibre de la sphère isotherme. En utilisant les équations (1.17) et (1.18), on trouve que la compressibilité isotherme est égale à

$$\frac{NT}{V} \kappa_T = \frac{1}{f(\eta^R) + \frac{\eta^R}{3} f'(\eta^R)} .$$

En utilisant l'équation (1.19), on a

$$\frac{NT}{V} \kappa_T = \frac{3}{2f} \left[ 1 + \frac{\eta^R - 2}{6f - \eta^R} \right] . \quad (1.27)$$

Grâce aux équations (1.17) et (1.18) on trace  $\kappa_T$  (fig.1.2) en fonction du rayon réduit  $\lambda$  (1.10). La compressibilité isotherme est positive pour  $0 \leq \lambda < 6.5$  et diverge en devenant négative pour  $\lambda = 6.5$ , c'est à dire pour la même valeur où la chaleur spécifique à pression constante diverge.

La compressibilité adiabatique vérifie la relation [27]

$$\kappa_S = \frac{c_v}{c_p} \kappa_T .$$

En utilisant les équations (1.25), (1.26) et (1.27), on en déduit

$$\frac{NT}{V} \kappa_S = \frac{3}{f} \frac{12f^2 + (2\eta^R - 11)f + 1}{48f^2 + (8\eta^R - 38)f + \eta^R} . \quad (1.28)$$

Grâce aux équations (1.17) et (1.18), on trace  $\kappa_S$  (fig.1.2) en fonction du rayon réduit  $\lambda$  (1.10). La compressibilité adiabatique est positive pour  $0 \leq \lambda < 25.8$  et diverge en devenant négative pour  $\lambda = 25.8$ , c'est à dire pour la même valeur où la chaleur spécifique à pression constante s'annule.

Nous allons maintenant explorer le comportement de la sphère isotherme dans deux cas limites.

## 1.5 Cas limites

Nous allons voir la limite  $\lambda \rightarrow 0$  qui correspond aux basses densités et aux hautes températures puis la limite  $\lambda \rightarrow \infty$  qui correspond aux hautes densités.



### 1.5.1 Développement à haute température

Développons la solution de l'équation de Lane-Emden (1.12) près de  $\lambda = 0$  en utilisant les conditions initiales (1.13) et (1.14). On trouve

$$\chi(\lambda) = -\frac{1}{6} \lambda^2 + \frac{1}{120} \lambda^4 + \frac{1}{1890} \lambda^6 + O(\lambda^8). \quad (1.29)$$

D'après l'équation (1.21), le développement du contraste qui est le rapport de la pression au centre de la sphère et de la pression sur la paroi de la sphère est

$$C = 1 + \frac{1}{6} \lambda^2 + \frac{1}{180} \lambda^4 + O(\lambda^6).$$

Le développement pour  $\lambda$  petit correspond aux contrastes proches de 1 par valeurs supérieures, c'est à dire à des configurations d'équilibre de la sphère isotherme presque homogènes. D'après l'équation (1.17), le développement du paramètre  $\eta^R$  est

$$\eta^R = \frac{1}{3} \lambda^2 - \frac{1}{30} \lambda^4 + \frac{1}{315} \lambda^6 + O(\lambda^8).$$

En se référant à la définition de  $\eta^R$  (1.17), le développement pour  $\lambda$  petit correspond aux hautes températures. En utilisant les équations (1.18) et (1.29), on trouve le développement de  $f$

$$f = \frac{P V}{N T} = 1 - \frac{1}{15} \lambda^2 + \frac{19}{3150} \lambda^4 + O(\lambda^6). \quad (1.30)$$

On en déduit la condition limite de l'équation différentielle (1.19)

$$f(\eta^R = 0) = 1$$

et le développement de  $f$  en  $\eta^R$

$$f(\eta^R) = 1 - \frac{1}{5} \eta^R - \frac{1}{175} (\eta^R)^2 + O[(\eta^R)^3]. \quad (1.31)$$

D'après les équations (1.23), (1.30) et (1.31), le développement de l'énergie  $E$  est

$$\frac{E}{N T} = \frac{3}{2} - \frac{1}{5} \lambda^2 + O(\lambda^4) = \frac{3}{2} - \frac{3}{5} \eta^R + O[(\eta^R)^2].$$

D'après l'équation (1.20), la pression du gaz en un rayon  $q$  inférieur au rayon  $Q$  de la paroi est telle que

$$\frac{m P(q)}{T \rho_o} = 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{q}{Q} \lambda \right)^2 + O \left[ \left( \frac{q}{Q} \lambda \right)^4 \right]. \quad (1.32)$$

Pour les hautes températures ( $\lambda \rightarrow 0$ ) :  $E \sim \frac{3}{2}NT$  et  $P \sim \frac{T\rho_o}{m}$ , l'énergie cinétique l'emporte largement sur l'énergie potentielle autogravitante et la pression suit la loi des gaz parfaits ; le système se comporte donc comme un gaz parfait homogène. Les corrections par rapport à la loi des gaz parfaits dans l'équation (1.32) sont négatives puisque la force gravitationnelle est attractive.

Nous allons maintenant explorer la limite  $\lambda \rightarrow \infty$  de la sphère isotherme qui correspond à la limite des contrastes infinis. Cette limite approche une solution singulière de l'équation de Lane-Emden isotherme (1.12).

### 1.5.2 Développement autour de la sphère singulière

Présentons la limite  $\lambda \rightarrow \infty$  de la sphère isotherme [5]. L'équation de Lane-Emden (1.12) a une solution singulière

$$\chi_S(\lambda) = \ln \frac{2}{\lambda^2}.$$

Cette solution diverge pour  $\lambda = 0$ , elle ne vérifie donc pas les conditions aux limites (1.13) et (1.14). On appelle cette solution de l'équation de Lane-Emden (1.12) solution singulière et la sphère isotherme correspondante sphère singulière. D'après les équations (1.17) et (1.18), les valeurs des paramètres  $\eta^R$  et  $f$  sont pour la sphère singulière

$$\eta^R = \eta_S = 2, \quad f = f_S = \frac{1}{3}.$$

Etudions maintenant le comportement des solutions de l'équation (1.12) au voisinage de la solution singulière. En posant

$$\chi = \chi_S + z$$

la fonction  $z$  vérifie l'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} + 2 e^z - 2 = 0 .$$

Comme  $z \ll 1$ , on a

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} + 2 z = 0 .$$

La solution de cette équation est

$$z = A e^{\frac{t}{2}} \cos \left( \frac{\sqrt{7}}{2} t + \delta \right)$$

où  $A$  et  $\delta$  sont des constantes d'intégration. On a donc

$$\chi(\lambda) = \ln \frac{2}{\lambda^2} + \frac{A}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \cos \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \ln \lambda - \delta \right) .$$

La solution  $\chi$  approche de la solution singulière  $\chi_S$  pour  $\lambda \rightarrow \infty$ . En utilisant la relation (1.9), on trouve que la densité est

$$\rho_m = \rho_o \frac{2}{\lambda^2} \exp \left[ \frac{A}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \cos \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \ln \lambda - \delta \right) \right] .$$

Pour  $\lambda \rightarrow \infty$  la densité se développe en

$$\rho_m = \rho_o \frac{2}{\lambda^2} \left[ 1 + \frac{A}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \cos \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \ln \lambda - \delta \right) \right] (\lambda \rightarrow \infty) .$$

D'après cette équation et l'équation (1.21), on voit que la limite  $\lambda \rightarrow \infty$  correspond aux configurations d'équilibre de la sphère isotherme dont le contraste tend vers l'infini. On trouve que les paramètres  $\eta^R$  (1.17) et  $f$  (1.18) se développent pour  $\lambda \rightarrow \infty$  en

$$\eta^R = 2 \left[ 1 + \frac{A}{4 \lambda^{\frac{1}{2}}} \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \ln \lambda - \delta \right) + \sqrt{7} \sin \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \ln \lambda - \delta \right) \right] \right]$$

et

$$f = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{A}{4 \lambda^{\frac{1}{2}}} \left[ 3 \cos \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \ln \lambda - \delta \right) - \sqrt{7} \sin \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \ln \lambda - \delta \right) \right] \right].$$

On voit que la courbe  $f(\eta^R)$  s'enroule en spirale autour du point singulier  $\eta_S = 2$ ,  $f_S = \frac{1}{3}$  (fig.1.1).

Nous allons maintenant étudier la stabilité du gaz autogravitant à l'équilibre thermodynamique. Notons tout de suite que dans la limite  $\lambda \rightarrow \infty$  étudiée dans ce paragraphe, le gaz autogravitant est instable.

## 1.6 Stabilité

Nous avons déterminé les configurations d'équilibre hydrostatique du gaz autogravitant à l'équilibre thermodynamique. Elles sont solutions de l'équation (1.11) et constituent l'approche du champ moyen de la mécanique statistique des systèmes autogravitants. Nous allons présenter dans cette section l'étude de la stabilité de ces configurations d'équilibre [9, 10, 11, 12]. Lorsque ces configurations sont instables, le système cesse d'obéir à l'équation (1.11); les particules s'effondrent sous l'effet de l'autogravité et collapsent en un point de densité infinie. Cette étude a mis en évidence que les régions de stabilité des configurations d'équilibre sont différentes suivant l'ensemble statistique dans lequel on se place. Nous nous limitons ici à l'ensemble microcanonique où le système est isolé thermiquement et à l'ensemble canonique où le système est placé dans un bain thermique.

### 1.6.1 Ensemble microcanonique et ensemble canonique

L'ensemble microcanonique et l'ensemble canonique ne donnent pas le même résultat en ce qui concerne la stabilité des configurations d'équilibre. Ceci s'explique par le comportement de grandeurs physiques comme les chaleurs spécifiques et les compressibilités.

## Chaleurs spécifiques des gaz autogravitants

Les gaz autogravitants à l'équilibre thermodynamique ont des configurations d'équilibre de chaleur spécifique négative (fig.1.2 dans le cas de la symétrie sphérique). Cette propriété implique que le gaz a un comportement inhabituel pour les systèmes terrestres, il devient plus chaud quand il perd de l'énergie.

Dans l'ensemble canonique, ce comportement est source d'instabilité car le gaz échange de l'énergie avec le thermostat. Supposons que la température du gaz soit plus grande que la température du thermostat, un transfert d'énergie s'opère du gaz vers le thermostat. Comme la chaleur spécifique du gaz est négative, la température du gaz ne cesse de monter et l'écart de température entre le gaz et le thermostat ne cesse de s'accroître. Aucun état d'équilibre ne peut être atteint. Les configurations d'équilibre de chaleur spécifique négative sont donc instables dans l'ensemble canonique. Dans l'ensemble microcanonique, la situation est différente car le gaz est isolé thermiquement.

Nous sommes habitués aux systèmes de particules en interaction à courte portée qui sont homogènes à l'équilibre thermodynamique. Pour ces systèmes, l'ensemble canonique et l'ensemble microcanonique donnent les mêmes résultats dans la limite thermodynamique standard où le nombre de particules  $N$  et le volume  $V$  vérifient  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  avec  $\frac{N}{V}$  fini. L'énergie de ces systèmes est extensive (elle est proportionnelle au nombre de particules  $N$  et donc au volume  $V$  dans la limite thermodynamique). On peut les diviser en sous-parties ; chaque sous-partie est en contact thermique avec le reste du système agissant comme un thermostat. Elle peut donc être considérée comme étant dans l'ensemble canonique, même si le système est isolé par rapport à l'extérieur. Les ensembles canonique et microcanonique sont donc équivalents pour ces systèmes et leur chaleur spécifique doit être positive. Les systèmes autogravitants sont des systèmes de particules en interaction à longue portée qui ne sont pas homogènes à l'équilibre thermodynamique. La limite thermodynamique standard  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  avec  $\frac{N}{V}$  fini n'est pas pertinente. La limite thermodynamique pertinente des systèmes autogravitants est  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  avec  $\frac{N}{V^{3/2}}$  qui est fini. Leur énergie est extensive, elle est proportionnelle au nombre de particules  $N$  mais n'est plus proportionnelle au volume  $V$  dans la limite thermodynamique autogravitante. L'ensemble ca-

nonique et l'ensemble microcanonique ne donnent pas les mêmes résultats en ce qui concerne la stabilité des configurations d'équilibre des gaz autogravitants ; ils ont des configurations d'équilibre stable avec une chaleur spécifique négative dans l'ensemble microcanonique [11, 12].

En revanche, pour tous les systèmes autogravitants ou non la chaleur spécifique d'un système est toujours positive dans l'ensemble canonique. Soit un système placé dans un bain thermique à la température  $T$  et ayant des niveaux d'énergie  $E_i$ . Son énergie moyenne est

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_i E_i \exp(-\beta E_i)}{\sum_i \exp(-\beta E_i)}$$

où  $\beta = \frac{1}{T}$  est le facteur de Boltzmann. Sa chaleur spécifique est égale au carré des fluctuations de l'énergie. En effet,

$$c = \frac{d \langle E \rangle}{dT} = -\beta^2 \frac{d \langle E \rangle}{d\beta} = \beta^2 \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle .$$

La chaleur spécifique d'un système est toujours positive dans l'ensemble canonique. Une telle contrainte sur le signe de la chaleur spécifique n'existe pas dans l'ensemble microcanonique.

Nous allons maintenant voir les propriétés des compressibilités isotherme et adiabatique.

## Compressibilités des gaz autogravitants

La compressibilité d'un fluide mesure le rapport entre sa variation de volume  $V$  et sa variation de pression  $P$ . Son expression est

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} .$$

Lorsque  $\kappa > 0$ , on a  $\frac{\partial V}{\partial P} < 0$ , c'est à dire que le fluide diminue de volume quand on le comprime plus, un tel comportement est normal pour un fluide. Par contre lorsque  $\kappa < 0$ , on a  $\frac{\partial V}{\partial P} > 0$ , c'est à dire que le fluide diminue de volume quand on le comprime moins, un tel comportement est anormal pour un fluide et il conduit à une instabilité analogue à celle de Jeans [28] pour un fluide autogravitant homogène (voir annexe B). Ainsi l'étude du signe de  $\kappa$  permet de savoir si les configurations d'équilibre des systèmes

autogravitants sont des configurations d'équilibre stables ou instables. Le système est stable lorsque  $\kappa > 0$  et instable lorsque  $\kappa < 0$ .

Dans l'ensemble canonique où la température est constante, c'est la compressibilité isotherme qui doit être positive et dans l'ensemble microcanonique où l'entropie est constante, c'est la compressibilité adiabatique qui doit être positive.

Nous allons déterminer les configurations d'équilibre stable de la sphère isotherme dans ces deux ensembles.

### 1.6.2 Stabilité de la sphère isotherme

Chaque configuration d'équilibre de la sphère isotherme est caractérisée par une valeur du rayon réduit  $\lambda$  (1.10), et à chaque valeur de  $\lambda$  correspond une valeur du contraste  $C$  (1.21) qui est le rapport de la pression au centre de la sphère et de la pression à la périphérie de la sphère. La limite  $\lambda \rightarrow 0$  correspond au gaz parfait homogène pour laquelle  $C \rightarrow 1$ , il s'agit de la limite des basses densités. La limite  $\lambda \rightarrow \infty$  correspond à la sphère singulière pour laquelle  $C \rightarrow \infty$ , il s'agit de la limite des hautes densités. Nous allons déterminer la zone de stabilité de la sphère isotherme, c'est à dire les valeurs du rayon réduit  $\lambda$  et celles du contraste pour lesquelles les configurations d'équilibre sont stables et déterminer les points qui correspondent à ces valeurs dans le diagramme de phase (fig.1.1).

Déterminons d'abord la zone de stabilité dans l'ensemble canonique.

#### Stabilité de la sphère isotherme dans l'ensemble canonique

La zone de stabilité dans l'ensemble canonique correspond aux valeurs du rayon réduit  $\lambda$  comprises entre 0 et 6.5..., c'est à dire aux valeurs du contraste  $C$  comprises entre 1 et 14.1.... Ces configurations d'équilibre stable correspondent à la partie supérieure du diagramme de phase (fig.1.1) du point  $(\eta^R = 0, f = 1)$  au point  $(\eta^R = 2.43..., f = 0.40...)$ . Ces configurations sont stables dans l'ensemble canonique car les chaleurs spécifiques et la compressibilité isotherme sont positives (fig1.2). En revanche, pour  $\lambda = \lambda_{can} = 6.5...$  ( $C = 14.1..., \eta^R = \eta_{can} = 2.43..., f = 0.40...$ ), la chaleur spécifique à pression constante et la compressibilité isotherme divergent en devenant négatives. Cette configuration est le point d'instabilité de la sphère isotherme dans l'ensemble canonique. D'après les équations (1.17),

(1.18) et (1.27), les équations définissant  $\eta_{can}$  et  $\lambda_{can}$  sont

$$6 f(\eta_{can}) = \eta_{can} . \quad (1.33)$$

et

$$e^{\chi(\lambda_{can})} - \frac{(\chi'(\lambda_{can}))^2}{2} = 0$$

Déterminons maintenant la zone de stabilité dans l'ensemble microcanonique.

### Stabilité de la sphère isotherme dans l'ensemble microcanonique

La zone de stabilité dans l'ensemble microcanonique correspond aux valeurs du rayon réduit  $\lambda$  comprises entre 0 et 25.8..., c'est à dire aux valeurs du contraste  $C$  comprises entre 1 et 389. Ces configurations d'équilibre stable correspondent à toute la partie supérieure du diagramme de phase (fig.1.1) du point  $(\eta^R = 0, f = 1)$  au point  $(\eta^R = 2.51..., f = \frac{1}{3})$  et à la inférieure du diagramme du point  $(\eta^R = 2.51..., f = \frac{1}{3})$  au point  $(\eta^R = 2.14..., f = 0.26...)$ . Ces configurations sont stables dans l'ensemble microcanonique car la compressibilité adiabatique est positive (fig1.2). Pour  $\lambda = \lambda_{mic} = 25.8$  ( $C = 389, \eta^R = \eta_{mic} = 2.14..., f = 0.26...$ ), la compressibilité adiabatique diverge en devenant négative. Cette configuration est le point d'instabilité de la sphère isotherme dans l'ensemble microcanonique. On peut remarquer aussi que la chaleur spécifique à pression constante s'anule en redevenant positive. D'après les équations (1.17), (1.18) et (1.28), les équations définissant  $\eta_{mic}$  et  $\lambda_{mic}$  sont

$$48f(\eta_{mic})^2 + (8\eta_{mic} - 38)f(\eta_{mic}) + \eta_{mic} = 0 . \quad (1.34)$$

et

$$48\lambda_{mic}^2 e^{2\chi(\lambda_{mic})} + 3 \left[ 8\lambda_{mic}\chi'(\lambda_{mic}) + 38 \right] \lambda_{mic} e^{\chi(\lambda_{mic})} \chi'(\lambda_{mic}) - 9\lambda_{mic}[\chi'(\lambda_{mic})]^2 = 0 .$$

Les configurations d'équilibre correspondant à la la partie supérieure du diagramme de phase (fig.1.1) du point  $(\eta^R = 2.43..., f = 0.40...)$  au point



( $\eta^R = 2.51\dots, f = \frac{1}{3}$ ) et à la partie inférieure du diagramme du point ( $\eta^R = 2.51\dots, f = \frac{1}{3}$ ) au point ( $\eta^R = 2.14\dots, f = 0.26\dots$ ) ont une chaleur spécifique à pression constante négative. Elles sont stables dans l'ensemble microcanonique et instables dans l'ensemble canonique. La zone de stabilité dans l'ensemble microcanonique est plus étendue que dans l'ensemble canonique car le système y subit plus de contraintes. Ces résultats sur la stabilité de la sphère isotherme, déduits du comportement des chaleurs spécifiques et des compressibilités sont confirmés par les calculs Monte Carlo faits dans l'ensemble canonique et dans l'ensemble microcanonique [6].

### 1.6.3 Instabilités gravitationnelles en astrophysique

On voit donc que l'ensemble statistique joue un rôle important dans la physique des gaz autogravitants. On doit donc déterminer dans quel ensemble statistique se trouvent les objets astrophysiques que l'on étudie. Les nuages interstellaires et les distributions de galaxies sont baignés par le rayonnement de fond micro-onde qui joue le rôle de thermostat. On doit donc utiliser l'ensemble canonique pour les étudier. Les étoiles sont des systèmes isolés, on doit donc utiliser l'ensemble microcanonique pour les étudier. Les instabilités gravitationnelles permettent d'expliquer la formation des étoiles dans les nuages interstellaires [29, 30]. Les instabilités gravitationnelles jouent aussi un rôle important dans la formation de structures hiérarchiques dans les distributions de galaxies, les amas et les superamas de galaxies.

# Chapitre 2

## Mécanique statistique

La mécanique statistique des systèmes autogravitants est l'objet de ce chapitre. Nous nous placerons dans le formalisme de Gibbs [6, 7, 13, 14] plutôt que dans le formalisme de Boltzmann [11, 12]. Elle a été étudiée dans l'ensemble microcanonique, dans l'ensemble canonique et dans l'ensemble grand-canonique [6, 7, 8]. La mécanique statistique dans l'approche du champ moyen décrit exactement la phase gazeuse dans la limite thermodynamique autogravitante où le nombre de particules  $N$  et le volume  $V$  tendent vers l'infini et où  $\frac{N}{V^{3/2}}$  est fini. Elle montre que le gaz autogravitant obéit à l'équation d'équilibre hydrostatique (1.11) et obéit localement à l'équation d'état des gaz parfaits. Nous allons présenter la mécanique statistique dans l'ensemble microcanonique et dans l'ensemble canonique. Dans la limite thermodynamique autogravitante, la fonction de partition est approchée par une intégrale fonctionnelle sur la densité. Le poids statistique de chaque densité est l'exponentielle d'une "action effective" proportionnelle à  $N$ . Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , on applique l'approximation de point col qui constitue l'approche du **champ moyen**. Les points col sont identiques dans l'ensemble microcanonique et dans l'ensemble canonique. Ils correspondent aux configurations d'équilibre hydrostatique des systèmes autogravitants isothermes dont la densité de masse obéit à l'équation (1.11). Si le poids statistique de la densité dans l'intégrale fonctionnelle diminue pour de petites fluctuations autour du point col, alors le point col domine l'intégrale et le champ moyen est valide dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . Par contre, si le poids statistique de la densité dans l'intégrale fonctionnelle augmente pour de petites fluctuations autour du point col alors le point col ne domine pas l'intégrale et le champ moyen n'est pas valide dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . Les calculs Monte Carlo [6] confirment les hypothèses du premier chapitre

sur la stabilité des configurations d'équilibre. Dans l'ensemble canonique, le champ moyen cesse d'être valide lorsque la compressibilité isotherme diverge et devient négative. Dans l'ensemble microcanonique, le champ moyen cesse d'être valide lorsque la compressibilité adiabatique diverge et devient négative. Dans ces conditions, il faut étudier le système par des calculs Monte Carlo. Pour ces points d'instabilité, les calculs Monte Carlo montrent qu'une transition de phase se produit de la phase gazeuse vers la phase collapsée.

## 2.1 Ensemble microcanonique

Etudions la mécanique statistique dans l'ensemble microcanonique d'un gaz thermiquement isolé dans un volume  $V$  et d'énergie  $E$ , composé de  $N$  particules de masse  $m$  interagissant entre elles par la gravité. Calculons d'abord le nombre de microétats.

### 2.1.1 Nombre de microétats

Le hamiltonien du gaz dont les particules ont comme positions  $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N$  et comme impulsions  $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$ , est

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + E_P(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N) \quad , \quad E_P = -G m^2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{|\vec{q}_i - \vec{q}_j|_A} \quad (2.1)$$

où le premier terme est l'énergie cinétique et le deuxième terme  $E_P$  est l'énergie potentielle. Comme les forces non gravitationnelles dominent à courte distance dans les systèmes physiques qui nous intéressent (nuages interstellaires, distributions de galaxies), on a introduit le cut-off suivant

$$|\vec{q}_i - \vec{q}_j|_A = |\vec{q}_i - \vec{q}_j| \quad \text{si} \quad |\vec{q}_i - \vec{q}_j| \geq A$$

et

$$|\vec{q}_i - \vec{q}_j|_A = -A \quad \text{si} \quad |\vec{q}_i - \vec{q}_j| < A . \quad (2.2)$$

Le nombre de microétats en fonction de l'énergie  $E$  est

$$\Omega(E) = \frac{1}{N!} \int \prod_{l=1}^N \frac{d^3 \vec{q}_l d^3 \vec{p}_l}{(2\pi)^3} \delta \left[ E - \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} - E_P(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N) \right]. \quad (2.3)$$

Par convention, la constante de Planck  $\hbar$  est choisie égale à 1. Notez que le cut-off à courte distance  $A$  permet d'éviter la divergence de  $\Omega(E)$  qui ne serait pas défini mathématiquement. En effectuant le changement de variable polaire sur les impulsions  $\rho^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m}$  et en intégrant sur les angles, on trouve

$$\Omega(E) = \frac{1}{N!} \frac{3N}{\Gamma\left(\frac{3N}{2} + 1\right)} \left(\frac{m}{2\pi^2}\right)^{\frac{3N}{2}} \int \prod_{l=1}^N d^3 \vec{q}_l \int d\rho \rho^{3N-1} \delta(E - E_P - \rho^2).$$

On introduit les positions sans dimension

$$\vec{r}_l = \frac{\vec{q}_l}{V^{\frac{1}{3}}},$$

l'énergie potentielle sans dimension

$$u(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = - \frac{V^{\frac{1}{3}}}{G m^2 N} E_P(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^\alpha} \quad (2.4)$$

avec  $\alpha = \frac{A}{V^{\frac{1}{3}}} \ll 1$  et le paramètre

$$\epsilon = \frac{E V^{\frac{1}{3}}}{G m^2 N^2}. \quad (2.5)$$

On trouve que le nombre de microétats  $\Omega(E)$  est égal au produit du nombre de microétats  $\Omega_{GP}$  du gaz parfait (GP) d'énergie  $E$  et de volume  $V$  contenant  $N$  particules de masse  $m$  par une intégrale sur les positions des particules  $\Omega_{int}$  qui contient l'information sur l'interaction gravitationnelle, ainsi :

$$\begin{aligned} \Omega(E) &= \Omega_{GP} \Omega_{int}, \\ \Omega_{GP} &= \frac{1}{N!} \frac{3N}{2} \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{\frac{3N}{2}} V^N E^{\frac{3N}{2} - 1}, \\ \Omega_{int} &= \epsilon^{\frac{3N}{2} - 1} \int \prod_{l=1}^N d^3 \vec{r}_l \left( \epsilon + \frac{u(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{N} \right)^{\frac{3N}{2} - 1} \theta\left(\epsilon + \frac{u}{N}\right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

La présence de la fonction de Heavyside  $\theta(\epsilon + \frac{u}{N})$  impose que l'énergie potentielle doit être inférieure à l'énergie totale  $E$ . Connaissant le nombre de microétats (éq.(2.6)), nous en déduisons l'entropie  $S = \ln \Omega(E)$  et toutes les grandeurs physiques.

### 2.1.2 Grandeurs physiques

L'entropie du système est

$$S = \ln \Omega(E) = \ln \Omega_{GP} + \ln \Omega_{int} . \quad (2.7)$$

Elle s'exprime comme la somme de deux termes. Le premier terme  $S_{GP} = \ln \Omega_{GP}$  est l'entropie d'un gaz parfait d'énergie  $E$  et de volume  $V$  composé de  $N$  particules. Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , on obtient la formule de Sackur-Tetrode [31]

$$S_{GP} = N \left[ \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{m E}{3\pi N} \right) + \frac{5}{2} \right] .$$

Le deuxième terme de l'équation (2.7) contient l'information sur l'interaction gravitationnelle entre les particules.

A partir de l'entropie, on calcule la température  $T$  et la pression de paroi  $P$  par les relations thermodynamiques standard  $\frac{1}{T} = \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V,N}$  et  $P = T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_{E,N}$ . En utilisant les équations (2.5), (2.6) et (2.7), on trouve

$$\frac{1}{T} = \frac{3 N}{2 E} + \frac{\epsilon}{E} \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\ln \Omega_{int}) = \frac{3 N}{2 E} \left[ 1 - \frac{2}{3 N} \right] \left\langle \frac{1}{\epsilon + \frac{u(\cdot)}{N}} \right\rangle \epsilon + \frac{1}{E} \quad (2.8)$$

où

$$\left\langle \frac{1}{\epsilon + \frac{u(\cdot)}{N}} \right\rangle = \frac{\int_{volume\ unite} \prod_{l=1}^N d^3 \vec{r}_l \left( \epsilon + \frac{u}{N} \right)^{\frac{3N}{2} - 2} \theta\left(\epsilon + \frac{u}{N}\right)}{\int_{volume\ unite} \prod_{l=1}^N d^3 \vec{r}_l \left( \epsilon + \frac{u}{N} \right)^{\frac{3N}{2} - 1} \theta\left(\epsilon + \frac{u}{N}\right)} .$$

Grâce aux équations (2.5), (2.6) et (2.7), on trouve l'équation d'état

$$\frac{P V}{N T} = 1 + \frac{\epsilon}{3 N} \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\ln \Omega_{int}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 N} + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2}{3 N} \right] \left\langle \frac{1}{\epsilon + \frac{u(\cdot)}{N}} \right\rangle \epsilon . \quad (2.9)$$

En combinant les équations (2.8) et (2.9), on retrouve le théorème du viriel (1.22)

$$3 P V = \frac{3}{2} N T + E .$$

Nous allons maintenant nous placer dans l'ensemble canonique.

## 2.2 Ensemble canonique

Etudions la mécanique statistique dans l'ensemble canonique d'un système de volume  $V$  composé de  $N$  particules de masse  $m$  interagissant entre elles par la gravité. Il est placé dans un bain thermique à la température  $T$  et une pression  $P$  s'applique sur la paroi qui l'enferme.

### 2.2.1 Fonction de partition

La fonction de partition est

$$Z = \frac{1}{N!} \int \prod_{l=1}^N \frac{d^3 \vec{q}_l d^3 \vec{p}_l}{(2\pi)^3} e^{-\frac{H}{T}} \quad (2.10)$$

où  $H$  est le hamiltonien du gaz défini dans la section précédente par l'équation (2.1). Remarquons que le cut-off à courte distance dans l'énergie potentielle permet de définir mathématiquement les intégrales dans  $Z$ . En calculant les intégrales gaussiennes sur les impulsions et en introduisant les positions sans dimension des particules  $\vec{r}_l = \frac{\vec{q}_l}{V^{1/3}}$ , on trouve que la fonction de partition  $Z$  est égale à la fonction de partition  $Z_{GP}$  du gaz parfait (GP) de température  $T$  et de volume  $V$  contenant  $N$  particules de masse  $m$  fois une intégrale sur les positions des particules  $Z_{int}$  qui contient l'information sur l'interaction gravitationnelle, c'est à dire précisément :

$$\begin{aligned} Z &= Z_{GP} Z_{int} , \\ Z_{GP} &= \frac{1}{N!} \left( \frac{m T}{2\pi} \right)^{\frac{3N}{2}} V^N , \\ Z_{int} &= e^{\Phi_N(\eta)} = \int_{\text{volume unite}} \prod_{l=1}^N d^3 \vec{r}_l e^{\eta u(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)} . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le paramètre  $\eta$  vaut

$$\eta = \frac{G m^2 N}{T V^{\frac{1}{3}}} \quad (2.12)$$

et  $u$  est l'énergie potentielle sans dimension définie par l'équation (2.4). Connaissant la fonction de partition  $Z$  (éq.(2.11)), nous allons maintenant en déduire l'énergie libre  $F = -T \ln Z$  et toutes les grandeurs physiques.

### 2.2.2 Grandeurs physiques

L'énergie libre  $F = -T \ln Z$  est d'après l'équation (2.11)

$$F = F_{GP} - T \Phi_N(\eta) \quad (2.13)$$

où  $F_{GP} = -T \ln Z_{GP}$  est l'énergie libre du gaz parfait de température  $T$  et de volume  $V$  contenant  $N$  particules de masse  $m$ . Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , on obtient [31]

$$F_{GP} = -NT \ln \left[ \frac{eV}{N} \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

D'après les équations (2.11), (2.12) et (2.13), la pression  $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$  qui s'exerce sur le système est

$$P = \frac{NT}{V} - \frac{\eta}{3} \frac{T}{V} \Phi'_N(\eta). \quad (2.14)$$

D'après les équations (2.11) et (2.12), l'énergie moyenne  $\langle E \rangle = -\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)_{V,N}$  où  $\beta = \frac{1}{T}$  est

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} NT - T \eta \Phi'_N(\eta). \quad (2.15)$$

En combinant les équations (2.14) et (2.15), on retrouve le théorème du viriel (1.22)

$$3 P V = \frac{3}{2} N T + \langle E \rangle .$$

Introduisons la grandeur  $f$

$$f(\eta) = \frac{PV}{NT} = 1 - \frac{\eta}{3N} \Phi'_N(\eta). \quad (2.16)$$

Il s'agit de l'équation d'état du système. Dans la limite  $\eta \rightarrow 0$  (gaz parfait), on a  $f(\eta = 0) = 1$  et  $\Phi_N(\eta = 0) = 0$ . En intégrant la relation (2.16), on a

$$\Phi_N(\eta) = 3 N \int_0^\eta dx \frac{1 - f(x)}{x}. \quad (2.17)$$

On peut exprimer toutes les grandeurs thermodynamiques en fonction de la grandeur  $f(\eta)$  grâce à cette équation. D'après l'équation (2.13), l'énergie libre est

$$F = F_{GP} - 3NT \int_0^\eta dx \frac{1 - f(x)}{x}. \quad (2.18)$$

L'énergie moyenne est en utilisant l'équation (2.15)

$$\langle E \rangle = 3 NT \left[ f(\eta) - \frac{1}{2} \right]. \quad (2.19)$$

On en déduit la valeur de l'entropie  $S = \frac{E-F}{T}$

$$S = S_{GP} + 3 N \left[ f(\eta) - 1 + \int_0^\eta dx \frac{1 - f(x)}{x} \right]. \quad (2.20)$$

Calculons la chaleur spécifique à volume constant et la chaleur spécifique à pression constante. D'après l'équation (2.20), la chaleur spécifique à volume constant  $c_v = \frac{T}{N} \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N}$  vaut

$$c_v = 3 \left[ f(\eta) - \eta f'(\eta) - 1 \right]. \quad (2.21)$$

D'après les équations (2.12), (2.14) et (2.21), la chaleur spécifique à pression constante [27]

$$c_p = c_v - \frac{T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,N}^2}{N \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T,N}}$$

devient

$$c_p = -\frac{3}{2} + \frac{4 f(\eta)[f(\eta) - \eta f'(\eta)]}{f(\eta) + \frac{1}{3}\eta f'(\eta)}. \quad (2.22)$$

On peut aussi calculer la compressibilité isotherme et la compressibilité adiabatique. En utilisant les équations (2.12) et (2.14), la compressibilité isotherme  $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N}$  s'exprime suivant



$$\frac{NT}{V} \kappa_T = \frac{1}{f(\eta) + \frac{1}{3}\eta f'(\eta)}. \quad (2.23)$$

La compressibilité adiabatique [27]

$$\kappa_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{S,N} = \frac{c_v}{c_p} \kappa_T,$$

d'après les équations (2.21), (2.22) et (2.23) vaut

$$\frac{NT}{V} \kappa_S = \frac{3[f(\eta) - \eta f'(\eta) - \frac{1}{2}]}{8f(\eta)[f(\eta) - \eta f'(\eta)] - 3[f(\eta) + \frac{1}{3}\eta f'(\eta)]}. \quad (2.24)$$

Nous allons maintenant exposer l'approximation de champ moyen qui est exacte dans la limite  $N \rightarrow \infty$  et qui, nous allons le voir, conduit à l'hydrostatique présentée dans le premier chapitre.

## 2.3 Champ moyen

Présentons le champ moyen dans l'ensemble canonique puis dans l'ensemble microcanonique.

### 2.3.1 L'ensemble canonique

On va se placer dans la limite  $N \rightarrow \infty$ . Nous allons montrer que dans cette limite, la fonction de partition (2.11) devient une intégrale fonctionnelle sur la densité dont le poids statistique de chaque densité est l'exponentielle d'une "action effective" proportionnelle à  $N$  [19], en utilisant l'approche exposée dans réf.[32]. Pour cela, on va diviser le volume unité d'intégration de la fonction de partition (2.11) en  $M$  cellules ( $1 \ll M \ll N$ ) de volume  $\frac{1}{M}$  suffisamment grandes pour contenir un grand nombre de particules et suffisamment petites pour que le potentiel gravitationnel puisse être considéré comme uniforme dans chaque cellule. L'intégration sur les positions  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  devient une somme discrète sur le nombre de particules  $n_1, \dots, n_M$  par cellule. On a

$$e^{\Phi_N(\eta)} \stackrel{N \gg 1}{\simeq} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_M} \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_M!} \delta(N - \sum_a n_a) \left(\frac{1}{M}\right)^N \\ \times \exp\left(\frac{\eta}{N} \sum_{a,b} n_a u_{ab} n_b\right)$$

où

$$u_{ab} = \frac{1}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^\alpha},$$

$\vec{r}_a$  et  $\vec{r}_b$  étant la position respective du centre de la cellule  $a$  et du centre de la cellule  $b$ . Le volume d'intégration élémentaire  $\prod_{l=1}^N d^3 \vec{r}_l$  devient  $\left(\frac{1}{M}\right)^N$  et  $\frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_M!}$  est le nombre de combinaisons qui ne sont pas équivalentes pour placer les  $n_1, n_2, \dots, n_m$  particules dans chaque cellule. En utilisant la formule de Stirling  $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$  pour  $n \rightarrow \infty$ , on a

$$e^{\Phi_N(\eta)} \stackrel{N \gg 1}{\simeq} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_M} \delta(N - \sum_a n_a) \\ \times \exp\left[-\sum_a n_a \ln\left(\frac{n_a M}{N}\right) + \frac{\eta}{2N} \sum_{a \neq b} n_a u_{ab} n_b\right].$$

Introduisons la densité de particules  $\rho(\vec{r})$  qui vaut  $\frac{n_a M}{N}$  sur la cellule  $a$ . On obtient

$$\delta(N - \sum_a n_a) \stackrel{N \gg 1}{\simeq} \delta\left[N\left(1 - \int d^3 \vec{r} \rho(\vec{r})\right)\right] \\ = \int \frac{db}{2\pi} \exp\left[iNb\left(\int d^3 \vec{r} \rho(\vec{r}) - 1\right)\right].$$

L'intégrale  $e^{\Phi_N(\eta)}$  se transforme en une intégrale fonctionnelle sur la densité de particules  $\rho(\vec{r})$

$$e^{\Phi_N(\eta)} \stackrel{N \gg 1}{\simeq} \int D\rho(\cdot) \frac{db}{2\pi} \exp[-N s_c(\rho(\cdot), b)] \quad (2.25)$$

avec l' "action effective"

$$s_c(\rho(\cdot), b) = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \ln \rho(\vec{r}) - \frac{\eta}{2} \int \frac{d^3\vec{r} d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') + ib \left[ 1 - \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \right]. \quad (2.26)$$

L'intégrale fonctionnelle (2.25) est dominée pour  $N \rightarrow \infty$  par le point col de l' "action effective" (2.26) qui vérifie les relations suivantes

$$\frac{\partial s_c}{\partial b}(\rho_{col}, b_{col}) = 0 \quad , \quad \frac{\delta s_c}{\delta \rho(\cdot)}(\rho_{col}, b_{col}) = 0 .$$

La première relation impose la normalisation de la densité

$$\int d^3\vec{r} \rho_{col}(\vec{r}) = 1 . \quad (2.27)$$

La seconde relation impose que la densité soit solution de l'équation de point col

$$\ln \rho_{col}(\vec{r}) - \eta \int \frac{d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_{col}(\vec{r}') = a_{col} . \quad (2.28)$$

$a_{col} = i b_{col} - 1$  est un multiplicateur de Lagrange associé à la condition de normalisation de la densité (2.27). En appliquant le Laplacien à l'équation de point col et en introduisant la fonction  $\Phi(\vec{r}) = \ln \rho_{col}(\vec{r})$ , on trouve

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}^2 \Phi(\vec{r}) + 4 \pi \eta e^{\Phi(\vec{r})} = 0 . \quad (2.29)$$

Il s'agit de l'équation de Liouville avec un signe opposé par rapport à l'équation en théorie des champs sans gravité. Le signe ici correspond à l'attraction de la force gravitationnelle et la théorie avec l'instabilité est le secteur physique. La densité sans dimension  $\rho_{col}(\vec{r}) = e^{\Phi(\vec{r})}$  est liée à la densité de masse  $\rho_m(\vec{q})$  introduite dans le chapitre 1 par les relations

$$\rho_m(\vec{q}) = \frac{m N}{V} \rho_{col}(\vec{r}) = \frac{m N}{V} e^{\Phi(\vec{r})} \quad , \quad \vec{q} = V^{\frac{1}{3}} \vec{r} . \quad (2.30)$$

En utilisant les équations (2.12) et (2.30), on trouve que l'équation de point col est identique à l'équation d'équilibre hydrostatique (1.11)

$$\vec{\nabla}_{\vec{q}}^2 \ln \rho_m + \frac{4 \pi G m}{T} \rho_m(\vec{q}) = 0 .$$

Les solutions de point col sont donc équivalentes aux configurations d'équilibre hydrostatique du système autogravitant isotherme obéissant à l'équation des gaz parfaits. Rappelons qu'en hydrostatique, on devait supposer l'équation d'état. Dans la limite thermodynamique diluée où  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  et  $\frac{N}{V^{\frac{1}{3}}}$  est fini, la mécanique statistique démontre que le gaz obéit à l'équation d'état des gaz parfaits (1) ; ce résultat a été déterminé grâce aux informations microscopiques de la mécanique statistique données par les forces de Newton s'exerçant entre les particules. D'après l'équation (2.30), la pression au point  $\vec{q} = V^{\frac{1}{3}} \vec{r}$  est

$$P(\vec{q}) = \frac{NT}{V} \rho_{col}(\vec{r}) . \quad (2.31)$$

Dans le cas de la symétrie sphérique, la grandeur  $f = \frac{PV}{NT}$  (éq. (2.16)) coïncide avec la grandeur introduite dans l'équation (1.18) introduite dans le cadre de l'hydrostatique et obéissant à l'équation différentielle (1.19). On a

$$\frac{PV}{NT} = f .$$

L'équation (1.19) s'intègre de cette manière

$$3 \int_0^{\eta^R} \frac{dx}{x} (1 - f(x)) = 3 [f(\eta^R) - 1] + \eta^R - \ln f(\eta^R) .$$

En utilisant les équations (2.18) et (2.20), on en déduit que l'énergie libre et l'entropie vérifient les relations suivantes

$$\frac{F - F_{GP}}{NT} = 3 [1 - f(\eta^R)] - \eta^R + \ln f(\eta^R) , \quad (2.32)$$

$$\frac{S - S_{GP}}{N} = 6 [f(\eta^R) - 1] + \eta^R - \ln f(\eta^R) . \quad (2.33)$$

En utilisant les équations (2.19), (2.21), (2.22), (2.23) et (2.24), on retrouve les expressions de l'énergie, de la chaleur spécifique à volume constant, de la chaleur spécifique à pression constante, de la compressibilité isotherme

et de la compressibilité adiabatique des configurations d'équilibre hydrostatique.

Nous allons maintenant présenter l'approche du champ moyen dans l'ensemble microcanonique.

### 2.3.2 L'ensemble microcanonique

Exprimons l'intégrale sur les positions  $\Omega_{int}$  dans le nombre de microétats défini par l'équation (2.6) en terme de l'intégrale  $e^{\Phi_N(\eta)}$  définie par l'équation (2.11). Pour cela, on utilise la transformation de Fourier suivante [33]

$$x^\lambda \theta(x) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \frac{d\omega}{(i\omega)^{\lambda+1}}. \quad (2.34)$$

D'après les équations (2.6), (2.11) et (2.34), on a

$$\Omega_{int} = \Gamma\left(\frac{3N}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega \epsilon + \Phi_n(\frac{i\omega}{N}) - \frac{3N}{2} \ln(i\omega)}$$

où  $\epsilon = \frac{E V^{\frac{1}{3}}}{G m^2 N^2}$  (éq.(2.5)). On introduit la variable d'intégration  $\eta = \frac{i\omega}{N}$

$$\Omega_{int} = N\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right) \int_{\gamma} \frac{d\eta}{2\pi i} e^{N\eta \epsilon + \Phi_n(\eta) - \frac{3N}{2} \ln(N\eta)}$$

où le contour d'intégration  $\gamma$  est un contour parallèle à l'axe des imaginaires purs. En utilisant la formule de Stirling pour la fonction  $\Gamma$ , on trouve que pour  $N \gg 1$

$$\Omega_{int} = \int_{\gamma} \frac{d\eta}{2\pi i} e^{N\eta \epsilon + \Phi_n(\eta) - \frac{3N}{2} \ln(\eta)}. \quad (2.35)$$

En utilisant la représentation de l'intégrale sur les positions  $e^{\Phi_n(\eta)}$  par l'intégrale fonctionnelle (2.25), on obtient

$$\Omega_{int} = \int D\rho(\cdot) \frac{db}{2\pi} \frac{d\eta}{2\pi i} \exp[-N s_{mic}(\rho(\cdot), b, \eta)] \quad (2.36)$$

avec l' "action effective"

$$\begin{aligned}
s_{mic}(\rho(\cdot), b, \eta) &= \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \ln \rho(\vec{r}) - \frac{\eta}{2} \int \frac{d^3\vec{r} d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') \\
&\quad + ib [1 - \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r})] + \frac{3}{2} \ln \eta - \eta \epsilon . \quad (2.37)
\end{aligned}$$

On a transformé le nombre de microétats en une intégrale fonctionnelle sur la densité. L'intégration sur  $b$  contraint la normalisation de la densité comme dans la fonction de partition (2.25). L'intégration sur  $\eta$  contraint l'énergie comme cela doit être le cas dans l'ensemble microcanonique.

Comme pour la fonction de partition (2.25), on va appliquer au nombre de microétats (2.36) l'approximation de point col. L'intégrale fonctionnelle (2.36) est dominée pour  $N \rightarrow \infty$  par les extrema de l' "action effective" (2.37) qui vérifient les relations suivantes

$$\frac{\partial s_{mic}}{\partial b} = 0 \quad , \quad \frac{\delta s_{mic}}{\delta \rho(\cdot)} = 0 \quad , \quad \frac{\partial s_{mic}}{\partial \eta} = 0 .$$

Comme dans l'ensemble canonique, la première relation impose la normalisation de la densité (2.27) et la deuxième relation impose que la densité soit solution de l'équation de point col (2.28). La troisième relation impose la contrainte suivante sur  $\eta$

$$\epsilon = \frac{3}{2\eta} - \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{r} d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') . \quad (2.38)$$

En utilisant les équations (2.5), (2.12) et (2.30), cette relation devient

$$E = \frac{3}{2}NT + \frac{G}{2} \int \frac{d^3\vec{q} d^3\vec{q}'}{|\vec{q} - \vec{q}'|} \rho_m(\vec{q}) \rho_m(\vec{q}') .$$

Ainsi la relation (2.38) contraint l'énergie dans l'ensemble microcanonique. Les points col sont les mêmes dans l'ensemble microcanonique et dans l'ensemble canonique et vérifient la condition d'équilibre hydrostatique (1.11). L'approximation de champ moyen dans l'ensemble canonique et l'approximation de champ moyen dans l'ensemble microcanonique correspondent donc aux configurations d'équilibre de l'hydrostatique quand  $N \rightarrow \infty$  .

## 2.4 Calculs Monte Carlo

L'algorithme de Metropolis [34] a été appliqué aux systèmes autogravitants isothermes dans un cube de volume  $V$  dans l'ensemble canonique et dans l'ensemble microcanonique, pour un nombre de particules allant jusqu'à 2000 [6]. Un cut-off à courte distance  $\alpha$  ( $\alpha \sim 10^{-3} - 10^{-6}$ ) a été introduit dans l'interaction gravitationnelle.

### 2.4.1 Algorithme de Metropolis

L'algorithme de Metropolis permet de simuler la thermalisation d'un système et de calculer les moyennes thermodynamiques de ces grandeurs physiques. Plaçons-nous dans l'ensemble canonique, le système étant en contact avec un thermostat à la température  $T$ . Pour plus d'explications, on peut se référer au livre de Binder et Heerman [35]. La fonction de partition  $Z$  du système (éq. (2.11)) est le produit de la fonction de partition du gaz parfait  $Z_{GP}$  et de l'intégrale sur les coordonnées des particules  $e^{\Phi_N(\eta)}$

$$Z = Z_{GP} e^{\Phi_N(\eta)} \quad , \quad e^{\Phi_N(\eta)} = \int_{\text{volume unite}} \prod_{l=1}^N d^3\vec{r}_l e^{\eta u(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)} .$$

A l'équilibre thermodynamique, chaque configuration du système  $x = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  a une probabilité d'avoir lieu, qui est

$$P_{eq}(x) = \frac{e^{\eta u(x)}}{e^{\Phi_N(\eta)}} = \frac{e^{-\frac{E_P}{T}}}{e^{\Phi_N(\eta)}}$$

où  $E_P = -T\eta u(x)$  est l'énergie potentielle de la configuration  $x$  du système. Expliquons maintenant comment on simule la thermalisation du système à partir de multiples transformations d'une configuration initiale prise au hasard. Une transformation de la configuration  $x = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  consiste à changer au hasard la position de l'une des particules. Soit  $W(x \rightarrow x')$  la probabilité de transition d'une transformation d'une configuration  $x$  vers une nouvelle configuration  $x'$ . Si

$$P_{eq}(x) W(x \rightarrow x') = P_{eq}(x') W(x' \rightarrow x)$$

alors la probabilité de la configuration  $x$  tend vers la probabilité d'équilibre  $P_{eq}(x)$  après un grand nombre de transformations. On doit donc avoir

$$\frac{W(x \rightarrow x')}{W(x' \rightarrow x)} = e^{\eta \delta u} = e^{-\frac{\delta E_P}{T}}$$

où  $\delta E_P = -T\eta \delta u = -T\eta (u(x') - u(x))$  est la variation d'énergie potentielle entre les deux configurations  $x$  et  $x'$ . On peut choisir par exemple

$$W(x \rightarrow x') = e^{\eta \delta u} \quad \text{si} \quad \delta u < 0 \quad (\delta E > 0)$$

$$W(x \rightarrow x') = 1 \quad \text{si} \quad \delta u > 0 \quad (\delta E < 0).$$

Présentons maintenant l'algorithme de Metropolis

1. On sélectionne au hasard un changement de configuration  $x \rightarrow x'$ .
2. On calcule la variation d'énergie potentielle  $\delta u$  correspondant à ce changement de configuration .
3. On calcule la probabilité de transition  $W$  correspondant à ce changement de configuration .
4. On tire au sort un nombre  $z$  entre 0 et 1.
5. Si  $z < W$  alors on effectue le changement de configuration  $x \rightarrow x'$ , sinon, on conserve la configuration  $x$ .

Ce processus constitue un "tour" Monte Carlo. Au bout d'un grand nombre de "tours", le système est à l'équilibre thermodynamique. A partir de là, on effectue  $M$  tours supplémentaires et on calcule la moyenne statistique d'une grandeur  $A$  grâce à l'équation suivante

$$\langle A \rangle = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M A(x_l),$$

chaque configuration  $x_l$  intervenant avec la probabilité  $P_{eq}(x_l)$ .

### 2.4.2 Résultats dans l'ensemble canonique

Présentons les résultats des calculs Monte Carlo des systèmes autogravitants thermalisés dans l'ensemble canonique.

Il y a deux phases distinctes :

- une phase gazeuse pour  $\eta^R < 2.43\dots$
- une phase collapsée pour  $\eta^R > 2.43\dots$

Dans la phase gazeuse, les calculs Monte Carlo sont insensibles au cut-off à courte distance de la gravité et reproduisent remarquablement bien les



résultats du champ moyen à partir d'un nombre de particules assez bas ( $N \geq 200$ ). Pour  $\eta^R \simeq 2.43$ , il y a une brutale transition de phase. La pression devient grande et négative. Les particules sont aspirées vers le centre et tout le système collapse en un corps très dense. Le point de collapse  $\eta^R \simeq 2.43$  obtenu par les calculs Monte Carlo correspond au point d'instabilité  $\eta_{can} = 2.43\dots$  (eq.(1.33)) de l'ensemble canonique prévu dans le chapitre 1 où la chaleur spécifique à pression constante  $c_p$  et la compressibilité isotherme  $\kappa_T$  divergent.

### 2.4.3 Résultats dans l'ensemble microcanonique

Présentons maintenant les résultats des calculs Monte Carlo des systèmes autogravitants thermalisés dans l'ensemble microcanonique. Comme dans l'ensemble canonique, les calculs Monte Carlo reproduisent remarquablement bien les résultats du champ moyen à partir d'un nombre de particules  $N \geq 200$ . Le point de collapse obtenu par les calculs Monte Carlo est le point  $\eta^R \simeq 2.17$  dans la partie inférieure du diagramme de phase  $f(\eta^R) = \frac{PV}{NT}$  (fig.1.1). Ce point est très proche du point d'instabilité de l'ensemble microcanonique  $\eta_{mic} = 2.14\dots$  (eq.(1.34)) prévu dans le chapitre 1 où la chaleur spécifique à pression constante  $c_p$  s'annule et la compressibilité adiabatique  $\kappa_S$  diverge. Il se produit à ce point la transition de la phase gazeuse vers la phase collapsée et les calculs Monte Carlo montrent que la phase collapsée prend la forme d'un coeur-halo où les particules sont très condensées au centre et où un halo de particules demeure à la périphérie du système. Dans l'ensemble canonique, la phase collapsée a la forme d'un corps très dense où sont concentrées toutes les particules. La phase collapsée prend donc des formes différentes dans l'ensemble microcanonique et dans l'ensemble canonique.

Les calculs Monte Carlo reproduisent remarquablement bien les résultats du champ moyen et permettent d'étudier la phase collapsée. Tous les résultats dans la phase gazeuse sont insensibles au cut-off à courte distance. Le calcul de la fonction de partition est moins sensible à la singularité à courte distance en  $\frac{1}{r^2}$  de l'interaction gravitationnelle que la résolution des équations du mouvement de Newton pour  $N$  particules. La détermination du mouvement classique de  $N$  particules interagissant par la gravitation

ou la résolution des équations de Boltzman comprenant l'interaction gravitationnelle à  $N$  particules demandent des algorithmes sophistiqués pour éviter de trop longs calculs numériques [36]; elles donnent des informations sur le comportement dynamique en dehors de l'équilibre thermique. Cependant les calculs Monte Carlo sont largement suffisants pour décrire les systèmes autogravitants et en donnent une compréhension approfondie.



# Chapitre 3

## Systèmes autogravitants comportant plusieurs sortes de particules

Nous avons jusque là considéré les systèmes autogravitants composés par des particules ayant toutes la même masse. Dans l'univers, les systèmes que l'on peut considérer comme autogravitants sont souvent composés de particules ayant des masses différentes. C'est le cas, d'une part des nuages interstellaires composés de plusieurs types d'atomes et de molécules, c'est le cas, d'autre part des distributions de galaxies, les galaxies ayant des masses différentes. Il est donc important d'étudier les systèmes autogravitants à l'équilibre thermodynamique composés de plusieurs sortes de particules, chaque sorte de particules ayant une masse différente. Nous allons étudier d'abord l'hydrostatique d'un mélange de gaz autogravitants, chaque gaz autogravitant étant composé par des particules ayant la même masse et obéissant localement à l'équation d'état des gaz parfaits. Ensuite, nous allons étudier la mécanique statistique des systèmes autogravitants composés de plusieurs sortes de particules et montrer que l'approximation de champ moyen conduit à l'hydrostatique d'un mélange de gaz autogravitants et permet de dériver les équations d'état du système [15].

### 3.1 Hydrostatique

Considérons un système autogravitant isotherme constitué par un mélange de gaz obéissant localement à l'équation d'état des gaz parfaits. Il est composé de gaz de  $N_i$  particules de masse  $m_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Etant donné la densité de masse  $\rho_{m_i}(\vec{q})$  des particules de masse  $m_i$  au point  $\vec{q}$ , la pression partielle des particules de masse  $m_i$  au point  $\vec{q}$  est (4)

$$P_i(\vec{q}) = \frac{T}{m_i} \rho_{m_i}(\vec{q}) .$$

Présentons maintenant la condition d'équilibre hydrostatique qui s'applique à ce mélange de gaz autogravitants isothermes.

### 3.1.1 Equilibre thermodynamique

Nous allons exprimer l'équilibre de chacun des gaz de particules de masse  $m_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Pour que les particules de masse  $m_i$  soient en équilibre hydrostatique, il faut que les forces de pression s'appliquant sur elles compensent les forces gravitationnelles s'appliquant sur elles. Cette condition (partielle) d'équilibre hydrostatique s'écrit

$$-\vec{\nabla}_{\vec{q}} P_i + \rho_{m_i}(\vec{q}) \vec{g}(\vec{q}) = 0 \quad (3.1)$$

où  $\vec{g}(\vec{q})$  est le champ gravitationnel au point  $\vec{q}$  engendré par l'ensemble du mélange. En introduisant la pression totale

$$P(\vec{q}) = \sum_{i=1}^n P_i(\vec{q}) \quad (3.2)$$

et la densité totale

$$\rho_m(\vec{q}) = \sum_{i=1}^n \rho_{m_i}(\vec{q}) \quad (3.3)$$

et en faisant la somme sur  $i$  des équations (3.1), on retrouve la condition générale d'équilibre d'un système autogravitant isotherme (1.2)

$$\vec{\nabla}_{\vec{q}} P = \rho_m(\vec{q}) \vec{g}(\vec{q}) .$$

Nous allons déduire une relation simple entre les densités des différents gaz de particules. En utilisant les équations (4) et (3.1), on obtient

$$\frac{1}{m_i} \vec{\nabla}_{\vec{q}} (\ln \rho_{m_i}) = -\frac{1}{T} \vec{g}(\vec{q}) . \quad (3.4)$$

On a donc

$$\frac{1}{m_i} \vec{\nabla}_{\vec{q}} (\ln \rho_{m_i}) = \frac{1}{m_j} \vec{\nabla}_{\vec{q}} (\ln \rho_{m_j}) .$$

Soit  $\rho_{o_i}$  la densité des particules de masse  $m_i$  en un point quelconque, par exemple au point  $\vec{q} = \vec{0}$ . On a alors la relation suivante entre les densités partielles

$$\left(\frac{\rho_{m_i}}{\rho_{o_i}}\right)^{\frac{1}{m_i}} = \left(\frac{\rho_{m_j}}{\rho_{o_j}}\right)^{\frac{1}{m_j}} . \quad (3.5)$$

Nous allons déterminer l'équation vérifiée par les densités partielles. En utilisant l'équation de Poisson du champ gravitationnel

$$\vec{\nabla}_{\vec{q}} \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho_m(\vec{q})$$

et les équations (3.3) et (3.4), on obtient l'équation suivante pour chaque densité partielle

$$\frac{1}{m_i} \vec{\nabla}_{\vec{q}}^2 (\ln \rho_{m_i}) = -\frac{4\pi G}{T} \sum_{j=1}^n \rho_{m_j}(\vec{q}) . \quad (3.6)$$

Introduisons le rayon vecteur sans dimension  $\vec{\lambda}$  défini par

$$\vec{q} = a \vec{\lambda} \quad , \quad a = \sqrt{\frac{T}{4\pi G m \rho_o}} \quad (3.7)$$

où  $m$  et  $\rho_o$  sont des constantes arbitraires ayant respectivement la dimension d'une masse et d'une densité de masse. On pose pour la densité des particules de masse  $m_i$

$$\rho_m = \rho_{o_i} e^{\chi_i(\vec{\lambda})} , \quad (3.8)$$

ce qui impose la condition aux limites pour la fonction  $\chi_i$

$$\chi_i(\vec{0}) = 0 . \quad (3.9)$$

En utilisant les équations (3.6), (3.7) et (3.8) et en introduisant les paramètres sans dimension

$$\mu_i = \frac{m_i}{m} \quad , \quad \nu_i = \frac{\rho_{o_i}}{\rho_o} , \quad (3.10)$$

on obtient les équations suivantes

$$\frac{1}{\mu_i} \vec{\nabla}_{\vec{\lambda}}^2 \chi_i + \sum_{j=1}^n \nu_j e^{\chi_j(\vec{\lambda})} = 0. \quad (3.11)$$

Ces équations déterminent les configurations d'équilibre d'un mélange de gaz autogravitants isothermes. En utilisant les relations (3.5), (3.9) et (3.10), on trouve que pour tout  $i, j$

$$\frac{\chi_i(\vec{\lambda})}{\mu_i} = \frac{\chi_j(\vec{\lambda})}{\mu_j}.$$

Ainsi les quantités  $\frac{\chi_i(\vec{\lambda})}{\mu_i}$  sont indépendantes de  $i$ . On peut donc poser que toutes les quantités  $\frac{\chi_i(\vec{\lambda})}{\mu_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont égales à une fonction  $\chi$

$$\frac{\chi_i(\vec{\lambda})}{\mu_i} = \chi(\vec{\lambda}). \quad (3.12)$$

Les  $n$  équations (3.11) se réduisent alors à une seule équation

$$\vec{\nabla}_{\vec{\lambda}}^2 \chi + \sum_{j=1}^n \nu_j e^{\mu_j \chi(\vec{\lambda})} = 0. \quad (3.13)$$

Dans le cas de la symétrie sphérique, les équations (3.11) deviennent

$$\frac{1}{\mu_i} \frac{1}{\lambda^2} \frac{d}{d\lambda} \left( \lambda^2 \frac{d\chi_i}{d\lambda} \right) + \sum_{j=1}^n \nu_j e^{\chi_j(\lambda)} = 0 \quad (3.14)$$

et l'équation (3.13) devient

$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{d}{d\lambda} \left( \lambda^2 \frac{d\chi}{d\lambda} \right) + \sum_{j=1}^n \nu_j e^{\mu_j \chi(\lambda)} = 0. \quad (3.15)$$

Les équations (3.14) constituent les équations de la **sphère isotherme avec plusieurs sortes de particules**. La première condition initiale est

$$\chi_i(\lambda = 0) = 0. \quad (3.16)$$

Pour que les équations soient régulières en 0, on impose la deuxième condition initiale

$$\frac{d\chi_i}{d\lambda}(\lambda = 0) = 0. \quad (3.17)$$

Les équations (3.11) sont covariantes par la transformation d'échelle suivante, à savoir que si les fonctions  $\chi_i(\vec{\lambda})$  sont solutions de ces équations, alors, étant donné une constante  $C$ , les fonctions

$$\chi_i^*(\vec{\lambda}) = \chi_i(C \vec{\lambda}) + 2 \ln C \quad (3.18)$$

sont aussi solutions de ces équations. Cette symétrie a pour origine l'invariance d'échelle du potentiel de Newton, elle est donc valable quelles que soient les masses des particules. Cependant la transformation (3.18) ne respecte pas la condition aux limites (3.9) si bien que l'équation (3.13) n'est pas invariante par cette transformation.

Connaissant la solution des équations (3.14), on en déduit les densités et toutes les grandeurs physiques de la sphère isotherme, comme la température et les pressions partielles.

### 3.1.2 Grandeurs physiques

Nous allons déterminer quelques grandeurs physiques de la sphère isotherme en fonction des solutions des équations (3.14).

#### Les paramètres $\eta_i$

On suppose que le système est composé de  $N_i$  particules de masse  $m_i$  et qu'il est contenu dans le volume  $V$ . Introduisons les paramètres sans dimension

$$\eta_i = \frac{G m_i^2 N_i}{V^{\frac{1}{3}} T}. \quad (3.19)$$

Pour que l'on puisse considérer le système comme autogravitant, il faut que l'autogravité et l'agitation thermique jouent toutes les deux un rôle important dans la physique du système; pour cela, il faut que les paramètres  $\eta_i$  soient de l'ordre de 1. La limite thermodynamique pertinente est donc  $N_i \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  avec  $\frac{N_i}{V^{\frac{1}{3}}}$  fini [15]. Pour  $\eta_i \rightarrow 0$ , l'agitation thermique l'emporte largement sur l'autogravité et le système se comporte comme un



mélange de gaz parfait. Pour  $\eta_i \rightarrow \infty$ , l'autogravité l'emporte largement sur l'agitation thermique et le système s'effondre sur lui-même.

Calculons les paramètres  $\eta_i$  en fonction des solutions des équations (3.14). La conservation de la masse de chaque sorte de particules impose la relation suivante

$$m_i N_i = \int_V d^3\vec{q}' \rho_{m_i}(\vec{q}').$$

Plaçons nous en symétrie sphérique, le volume du système étant une sphère de rayon  $Q$ . En utilisant les équations (3.7), (3.8), (3.10) et (3.19), les paramètres  $\eta_i^R = \eta_i \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$  définis dans l'introduction par la relation (6) vérifient la relation suivante

$$\eta_i^R = \frac{G m_i^2 N_i}{Q T} = \frac{\mu_i \nu_i}{\lambda} \int_0^\lambda d\lambda' \lambda'^2 e^{\chi_i(\lambda')}. \quad (3.20)$$

D'après les équations (3.10), (3.14) et (3.20), on obtient

$$\sum_{j=1}^n \frac{\eta_j^R}{\mu_j} = \frac{G m M}{Q T} = -\frac{1}{\mu_i} \lambda \chi_i'(\lambda). \quad (3.21)$$

On a introduit la masse totale du système  $M = \sum_{i=1}^n m_i N_i$ .

### Les fonctions $f_i$

Introduisons les fonctions sans dimension  $f_i = \frac{P_i V}{N_i T}$  définis dans l'introduction par la relation (5) où  $P_i$  est la pression partielle des particules de masse  $m_i$  sur la paroi de la sphère. D'après les équations (4), (3.7), (3.8), (3.10) et (3.20), on a

$$f_i = \frac{P_i V}{N_i T} = \frac{\mu_i \nu_i}{3\eta_i^R} \lambda^2 e^{\chi_i(\lambda)} = \frac{1}{3} \frac{\lambda^3 e^{\chi_i(\lambda)}}{\int_0^\lambda d\lambda' \lambda'^2 e^{\chi_i(\lambda')}}. \quad (3.22)$$

D'après l'équation (3.2), la pression totale du gaz sur la paroi vaut

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{N_i V}{T} f_i. \quad (3.23)$$

Montrons que les fonctions  $f_i$ , comme fonctions de  $N_1, N_2, \dots, N_{i-1}, \eta_i^R, N_{i+1}, \dots, N_n$ , sont solutions d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. La dérivée partielle de  $f_i$  par rapport à  $\eta_i^R$  est telle que

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial \eta_i^R} \right)_{N_j \neq i} = \frac{\left( \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \right)}{\left( \frac{\partial \eta_i^R}{\partial \lambda} \right)}.$$

D'après les équations (3.14), (3.20), (3.21) et (3.22), il en résulte que

$$\frac{1}{f_i} \left( \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \right) = -\frac{1}{\lambda} \left( 3f_i + \mu_i \sum_{j=1}^n \frac{\eta_j^R}{\mu_j} - 3 \right)$$

et

$$\frac{1}{\eta_i^R} \left( \frac{\partial \eta_i^R}{\partial \lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} (3f_i - 1).$$

On en déduit que  $f_i$  obéit à l'équation suivante

$$\frac{\eta_i^R}{f_i} \left( \frac{\partial f_i}{\partial \eta_i^R} \right) = -\frac{3f_i + \mu_i \sum_{j=1}^n \frac{\eta_j^R}{\mu_j} - 3}{3f_i - 1}. \quad (3.24)$$

Pour  $\eta_i^R = 0$ , le système se comporte comme un mélange idéal de gaz parfaits. On a donc  $f_i(N_1, N_2, \dots, N_{i-1}, \eta_i^R = 0, N_{i+1}, \dots, N_n) = 1$ .

Plaçons nous maintenant à un rayon  $q$  inférieur au rayon  $Q$  de la paroi. D'après l'équation (3.7), à ce rayon  $q$  correspond un rayon réduit  $\lambda_q = \frac{q}{Q} \lambda$ . On en déduit d'après les équations (4) et (3.8) que la densité de masse des particules de masse  $m_i$  et la pression partielle au rayon  $q$  sont telles que

$$\frac{m_i P_i(q)}{T \rho_{o_i}} = \frac{\rho_{m_i}(q)}{\rho_{o_i}} = \exp \left[ \chi_i \left( \frac{q}{Q} \lambda \right) \right]. \quad (3.25)$$

Introduisons le contraste partiel du gaz des particules de masse  $m_i$  qui est le quotient de la pression partielle au centre de la sphère et de la pression partielle sur la paroi de la sphère

$$C_i = \frac{P_i(0)}{P_i(Q)} = e^{-\chi_i(\lambda)}. \quad (3.26)$$

Le contraste total qui est le quotient de la pression totale au centre de la sphère et de la pression totale sur la paroi de la sphère est, d'après les équations (3.2) , (3.10) et (3.25)

$$C = \frac{P(0)}{P(Q)} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{\mu_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{\mu_i} e^{\chi_i(\lambda)}} . \quad (3.27)$$

## L'énergie

Pour calculer l'énergie, nous allons appliquer le théorème du viriel (1.22)

$$E_c + E = 3 PV$$

qui lie l'énergie cinétique  $E_c$ , l'énergie totale  $E$  et la pression totale de paroi  $P$  (3.23). En supposant que toutes les particules sont monoatomiques, on a  $E_c = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n N_i T$ . D'après l'équation (3.22), on obtient le résultat suivant pour l'énergie

$$\frac{E}{T} = 3 \sum_{i=1}^n N_i \left( f_i - \frac{1}{2} \right) . \quad (3.28)$$

Nous allons maintenant analyser les instabilités du mélange de gaz autogravitants isothermes.

### 3.1.3 Stabilité

Les solutions des équations (3.11) sont les configurations d'équilibre hydrostatique du mélange de gaz autogravitants à l'équilibre thermodynamique. Ils sont déduits de l'approximation de champ moyen et décrivent la phase gazeuse . Comme pour le gaz autogravitant composé par une seule sorte de particules, l'étude de la stabilité des configurations d'équilibre du mélange de gaz autogravitants donne des résultats différents suivant que l'on se place dans l'ensemble microcanonique ou dans l'ensemble canonique car les conditions sur les chaleurs spécifiques et les compressibilités sont différentes dans ces deux ensembles.

Nous allons calculer la chaleur spécifique à volume constant  $c_v = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$  et la chaleur spécifique à pression constante  $c_p = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_P$  de la sphère isotherme. Effectuons d'abord le calcul de la chaleur spécifique à volume constant. En utilisant les équations (3.20) et (3.28), on trouve

$$c_v = 3 \sum_{i=1}^n N_i \left[ f_i - \eta_i^R \left( \frac{\partial f_i}{\partial \eta_i^R} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (3.29)$$

En utilisant l'équation (3.24), on obtient

$$c_v = \sum_{i=1}^n N_i \left[ 6f_i - \frac{7}{2} + \mu_i \sum_{j=1}^n \frac{\eta_j^R}{\mu_j} + \frac{\mu_i \sum_{j=1}^n \frac{\eta_j^R}{\mu_j} - 2}{3f_i - 1} \right]. \quad (3.30)$$

Effectuons maintenant le calcul de la chaleur spécifique à pression constante. En utilisant la formule [27]

$$c_p = c_v - \frac{T}{N} \frac{\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V^2}{\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T}$$

et les équations (3.20), (3.22) et (3.29) on trouve

$$c_p = -\frac{3}{2} \sum_{i=1}^n N_i + 4 \sum_{i=1}^n N_i f_i \frac{\sum_{i=1}^n N_i \left[ f_i - \eta_i^R \left( \frac{\partial f_i}{\partial \eta_i^R} \right) \right]}{\sum_{i=1}^n N_i \left[ f_i + \frac{\eta_i^R}{3} \left( \frac{\partial f_i}{\partial \eta_i^R} \right) \right]}. \quad (3.31)$$

En utilisant l'équation (3.24), on a

$$c_p = -\frac{3}{2} \sum_{i=1}^n N_i + 12 \sum_{i=1}^n N_i f_i \frac{\sum_{i=1}^n N_i f_i \frac{6f_i - 4 + \mu_i \sum_{j=1}^n \frac{\eta_j^R}{\mu_j}}{3f_i - 1}}{\sum_{i=1}^n N_i f_i \frac{6f_i - \mu_i \sum_{j=1}^n \frac{\eta_j^R}{\mu_j}}{3f_i - 1}}. \quad (3.32)$$

Nous allons calculer maintenant la compressibilité isotherme  $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ . En utilisant les équations (3.20) et (3.22), on trouve

$$\frac{T}{V} \kappa_T = \frac{1}{\sum_{i=1}^n N_i \left[ f_i + \frac{1}{3} \eta_i^R \left( \frac{\partial f_i}{\partial \eta_i^R} \right) \right]}. \quad (3.33)$$

En utilisant l'équation (3.24), on a

$$\frac{T}{V} \kappa_T = \frac{3}{\sum_{i=1}^n N_i f_i \left[ \frac{6f_i - \mu_i \sum_{j=1}^n \frac{\eta_j^R}{\mu_j}}{3f_i - 1} \right]} . \quad (3.34)$$

On obtient la compressibilité adiabatique  $\kappa_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$  par la relation [27]

$$\kappa_S = \frac{c_p}{c_v} \kappa_T .$$

On trouve, en utilisant les équations (3.29), (3.31) et (3.33),

$$\frac{T}{V} \kappa_S = \frac{3}{4 \sum_{i=1}^n N_i \left( f_i + \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{4} \frac{\left( \sum_{i=1}^n N_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n N_i \left[ f_i - \eta_i^R \left( \frac{\partial f_i}{\partial \eta_i^R} \right) - \frac{1}{2} \right]}} . \quad (3.35)$$

En utilisant l'équation (3.24), on obtient

$$\frac{V}{T \kappa_S} = \frac{1}{3} \left[ 4 \sum_{i=1}^n N_i \left( f_i + \frac{1}{8} \right) + \frac{3}{4} \frac{\left( \sum_{i=1}^n N_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n N_i \left[ 6f_i - \frac{7}{2} + \mu_i \sum_{j=1}^n \frac{\eta_j^R}{\mu_j} + \frac{\mu_i \sum_{j=1}^n \frac{\eta_j^R}{\mu_j} - 2}{3f_i - 1} \right]} \right] . \quad (3.36)$$

Dans l'ensemble canonique, les configurations d'équilibre stable doivent avoir une compressibilité isotherme positive et des chaleurs spécifiques positives.

Dans l'ensemble microcanonique, les configurations d'équilibre stable doivent avoir une compressibilité adiabatique positive.

Nous avons étudié les configurations d'équilibre de la sphère isotherme du mélange d'hydrogène et d'hélium [15]. Il serait intéressant de calculer

les chaleurs spécifiques et les compressibilités pour étudier la stabilité de ce système.

### 3.1.4 Lois d'échelle

Nous avons montré que les mélanges de gaz autogravitants isothermes constitués de deux sortes de particules obéissent à des lois d'échelle sur la masse d'une sphère de rayon  $q$  [15]

$$M(q) \sim q^{d_H} .$$

Pour  $\eta_1^R = \eta_2^R = 0$  (hautes températures), on retrouve le gaz parfait ( $d_H = 3$ ). Pour chaque valeur de  $\frac{N_1}{N_2}$ , les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  atteignent leurs valeurs maximales pour un couple  $(\eta_1^R, \eta_2^R)$ . Ces couples  $(\eta_1^R, \eta_2^R)$  définissent une ligne de point critique où la chaleur spécifique à volume constant diverge. On trouve que  $d_H \sim 1.6$  pour tous les points de cette ligne de point critique ; cette valeur est donc indépendante de  $\frac{N_1}{N_2}$ , c'est à dire de la composition du mélange. Ceci manifeste l'“universalité” des propriétés du système à l'approche du régime critique.

Nous avons présenté dans cette section l'hydrostatique des mélanges des gaz autogravitants isothermes. Nous allons étudier dans la prochaine section la mécanique statistique des gaz autogravitants composés de deux sortes de particules.

## 3.2 Mécanique statistique

Présentons la mécanique statistique des systèmes autogravitants composés de deux sortes de particules dans l'ensemble canonique [15]. Lorsque les nombres  $N_1$  et  $N_2$  des deux sortes de particules tendent vers l'infini, la fonction de partition est approchée par une intégrale fonctionnelle sur les deux densités de particules. Le poids statistique des densités est l'exponentielle d'une "action effective". On applique l'approximation de point col qui est l'approche du champ moyen. Les points col correspondent aux configurations d'équilibre hydrostatique dont les densités de masse partielles obéissent aux équations (3.11). L'approche du champ moyen décrit la phase gazeuse dans la limite thermodynamique autogravitante où les nombres  $N_1$  et  $N_2$  des deux sortes de particules et le volume  $V$  tendent

vers l'infini et où  $\frac{N_1}{V^{\frac{1}{3}}}$  et  $\frac{N_2}{V^{\frac{1}{3}}}$  sont finis. Elle montre que, dans cette limite thermodynamique diluée, le système se comporte comme un mélange des gaz autogravitants isothermes en équilibre hydrostatique. Elle montre aussi que le système obéit localement aux équations d'état des gaz parfaits (4). Dans l'approche hydrostatique, les équations d'état ne sont pas déterminés et elles doivent être supposées.

### 3.2.1 Fonction de partition

On considère un gaz autogravitant dans un volume  $V$  et placé dans un bain thermique à la température  $T$  constitué de  $N_1$  particules de masse  $m_1$  et de  $N_2$  particules de masse  $m_2$ . Les particules de masse  $m_1$  et les particules de masse  $m_2$  exercent respectivement sur la paroi une pression partielle  $P_1$  et une pression partielle  $P_2$ . Soit  $\vec{q}_{i,1}$  et  $\vec{p}_{i,1}$  ( $1 \leq i \leq N_1$ ) les positions et les impulsions des particules de masse  $m_1$  et  $\vec{q}_{i,2}$  et  $\vec{p}_{i,2}$  ( $1 \leq i \leq N_2$ ) les positions et les impulsions des particules de masse  $m_2$ . Le hamiltonien du système est

$$\begin{aligned}
H &= E_c + E_P \\
E_c &= \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\vec{p}_{i,1}^2}{2 m_1} + \sum_{i=1}^{N_2} \frac{\vec{p}_{i,2}^2}{2 m_2} \\
E_P &= - \sum_{1 \leq i < j \leq N_1} \frac{G m_1^2}{|\vec{q}_{i,1} - \vec{q}_{j,1}|_A} - \sum_{1 \leq i < j \leq N_2} \frac{G m_2^2}{|\vec{q}_{i,2} - \vec{q}_{j,2}|_A} \\
&\quad - \sum_{1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2} \frac{G m_1 m_2}{|\vec{q}_{i,1} - \vec{q}_{j,2}|_A}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

où  $E_c$  est l'énergie cinétique et  $E_P$  est l'énergie potentielle. Notons que cut-off défini dans le deuxième chapitre (2.2) et introduit dans  $E_P$  permet éviter la divergence de la fonction de partition

$$Z = \frac{1}{N_1! N_2!} \int \prod_{l=1}^{N_1} \frac{d^3 \vec{q}_{l,1} d^3 \vec{p}_{l,1}}{(2\pi)^3} \int \prod_{l=1}^{N_2} \frac{d^3 \vec{q}_{l,2} d^3 \vec{p}_{l,2}}{(2\pi)^3} e^{-\frac{H}{T}} . \tag{3.38}$$

En calculant les intégrales gaussiennes sur les impulsions et en introduisant les positions sans dimension des particules  $\vec{r}_{l,1} = \frac{\vec{q}_{l,1}}{V^{\frac{1}{3}}}$  et  $\vec{r}_{l,2} = \frac{\vec{q}_{l,2}}{V^{\frac{1}{3}}}$ , on

trouve que la fonction de partition  $Z$  est égale au produit de la fonction de partition  $Z_{GP}$  du mélange idéal de gaz parfaits (GP) de température  $T$  et de volume  $V$  contenant  $N_1$  particules de masse  $m_1$  et  $N_2$  particules de masse  $m_2$ , par une intégrale sur les positions des particules  $Z_{int}$  qui contient l'information sur l'interaction gravitationnelle :

$$\begin{aligned} Z &= Z_{GP} Z_{int} , \\ Z_{GP} &= \frac{1}{N_1!} \left( \frac{m_1 T}{2\pi} \right)^{\frac{3N_1}{2}} V^{N_1} \times \frac{1}{N_2!} \left( \frac{m_2 T}{2\pi} \right)^{\frac{3N_2}{2}} V^{N_2} , \\ Z_{int} = e^{\Phi_{N_1, N_2}} &= \int \prod_{1 < l < N_1, 1 < k < N_2} d^3\vec{r}_{l,1} d^3\vec{r}_{k,2} e^{\eta_1 u_{11} + \eta_2 u_{22} + \sqrt{\eta_1 \eta_2} u_{12}} . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Les paramètres  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont définis par les équations

$$\eta_1 = \frac{G m_1^2 N_1}{T V^{\frac{1}{3}}} , \quad \eta_2 = \frac{G m_2^2 N_2}{T V^{\frac{1}{3}}} \quad (3.40)$$

et  $u_{11}$ ,  $u_{22}$  et  $u_{12}$  sont respectivement l'énergie potentielle d'interaction des particules de masse  $m_1$  entre elles, l'énergie potentielle d'interaction des particules de masse  $m_2$  entre elles et l'énergie potentielle d'interaction des particules de masse  $m_1$  avec les particules de masse  $m_2$

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{1}{N_1} \sum_{1 \leq i < j \leq N_1} \frac{1}{|\vec{r}_{i,1} - \vec{r}_{j,1}|_\alpha} , \\ u_{22} &= \frac{1}{N_2} \sum_{1 \leq i < j \leq N_2} \frac{1}{|\vec{r}_{i,2} - \vec{r}_{j,2}|_\alpha} \end{aligned}$$

et

$$u_{12} = \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}} \sum_{1 \leq i \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2} \frac{1}{|\vec{r}_{i,1} - \vec{r}_{j,2}|_\alpha} .$$

Connaissant la fonction de partition, on peut en déduire l'énergie libre  $F = -T \ln Z$  et toutes les grandeurs physiques.

### 3.2.2 Grandeurs physiques

L'énergie libre  $F = -T \ln Z$  est, d'après l'équation (3.39)



$$F = F_{GP} - T \Phi_{N_1, N_2}(\eta_1, \eta_2) \quad (3.41)$$

où  $F_{GP} = -T \ln Z_{GP}$  est l'énergie libre du mélange idéal de gaz parfaits de température  $T$  et de volume  $V$  contenant  $N_1$  particules de masse  $m_1$  et  $N_2$  particules de masse  $m_2$  [31]. Dans la limite  $N_1 \rightarrow \infty$  et  $N_2 \rightarrow \infty$ , il est bien connu que [31]

$$F_{GP} = -N_1 T \ln \left[ \frac{eV}{N_1} \left( \frac{m_1 T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right] - N_2 T \ln \left[ \frac{eV}{N_2} \left( \frac{m_2 T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \right].$$

D'après les équations (3.39), (3.40) et (3.41), la pression  $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T, N_1, N_2}$  qui s'exerce sur le système est

$$P = \frac{T}{V} \left[ (N_1 + N_2) - \frac{\eta_1}{3} \left( \frac{\partial \Phi_{N_1, N_2}}{\partial \eta_1} \right) - \frac{\eta_2}{3} \left( \frac{\partial \Phi_{N_1, N_2}}{\partial \eta_2} \right) \right]. \quad (3.42)$$

Introduisons les grandeurs  $f_1$  et  $f_2$

$$\begin{aligned} f_1(\eta_1, N_2) &= 1 - \frac{\eta_1}{3} \left( \frac{\partial \Phi_{N_1, N_2}}{\partial \eta_1} \right) \\ f_2(N_1, \eta_2) &= 1 - \frac{\eta_2}{3} \left( \frac{\partial \Phi_{N_1, N_2}}{\partial \eta_2} \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Dans la limite  $\eta_1 \rightarrow 0$  et  $\eta_2 \rightarrow 0$  (gaz parfait), on a  $f_1(\eta_1 = 0, N_2) = 1$  et  $f_2(N_1, \eta_2 = 0) = 1$ . En intégrant la relation (3.43), on obtient

$$\begin{aligned} \Phi_{N_1, N_2}(\eta_1, \eta_2) &= 3 N_1 \int_0^{\eta_1} dx \frac{1 - f_1(x, N_2)}{x} \\ &\quad + 3 N_2 \int_0^{\eta_2} dx \frac{1 - f_2(N_1, x)}{x}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

On peut exprimer toutes les grandeurs thermodynamiques en fonction des grandeurs  $f_1$  et  $f_2$  grâce à cette équation. D'après l'équation (3.41), l'énergie libre est

$$\begin{aligned}
F &= F_{GP} - 3 N_1 T \int_0^{\eta_1} dx \frac{1 - f_1(x, N_2)}{x} \\
&\quad - 3 N_2 T \int_0^{\eta_2} dx \frac{1 - f_2(N_1, x)}{x}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

L'énergie moyenne est en utilisant la relation  $\langle E \rangle = F - T \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$

$$\langle E \rangle = 3 N_1 T \left[ f_1 - \frac{1}{2} \right] + 3 N_2 T \left[ f_2 - \frac{1}{2} \right]. \tag{3.46}$$

On en déduit que l'entropie  $S = \frac{E-F}{T}$  s'exprime suivant

$$\begin{aligned}
S &= S_{GP} + 3 N_1 \left[ f_1 - 1 + \int_0^{\eta_1} dx \frac{1 - f_1(x, N_2)}{x} \right] \\
&\quad + 3 N_2 \left[ f_2 - 1 + \int_0^{\eta_2} dx \frac{1 - f_2(N_1, x)}{x} \right]
\end{aligned} \tag{3.47}$$

où

$$S_{GP} = N_1 \left[ \ln \frac{V}{N_1} + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{m_1 T}{2\pi} \right) + \frac{5}{2} \right] + N_2 \left[ \ln \frac{V}{N_2} + \frac{3}{2} \ln \left( \frac{m_2 T}{2\pi} \right) + \frac{5}{2} \right]$$

est l'entropie du mélange idéal de gaz parfaits de température  $T$  et de volume  $V$  contenant  $N_1$  particules de masse  $m_1$  et  $N_2$  particules de masse  $m_2$  [31].

Nous allons maintenant exposer l'approximation de champ moyen qui, nous allons le voir, conduit à l'hydrostatique que nous avons présentée dans la première partie de ce chapitre et qui est exacte dans la limite  $N_1 \rightarrow \infty$  et  $N_2 \rightarrow \infty$ .

### 3.2.3 Champ moyen

Dans la limite thermodynamique autogravitante ( $N_1 \rightarrow \infty$ ,  $N_2 \rightarrow \infty$  et  $V \rightarrow \infty$  avec  $\frac{N_1}{V^{3/2}}$  et  $\frac{N_2}{V^{3/2}}$  finis), on applique l'approximation de champ moyen. L'intégrale  $Z_{int}$  devient une intégrale fonctionnelle sur la densité  $\rho_1(\vec{r})$  des particules de masse  $m_1$  et la densité  $\rho_2(\vec{r})$  des particules de masse  $m_2$

$$Z_{int} = \int D\rho_1(\cdot) D\rho_2(\cdot) \frac{db_1}{2\pi} \frac{db_2}{2\pi} \exp[-s_c(\rho_1(\cdot), \rho_2(\cdot), b_1, b_2)] \quad (3.48)$$

avec l' "action effective"

$$\begin{aligned} s_c = & - N_1 \frac{\eta_1}{2} \int \frac{d^3\vec{r} d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_1(\vec{r}) \rho_1(\vec{r}') \\ & - N_2 \frac{\eta_2}{2} \int \frac{d^3\vec{r} d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_2(\vec{r}) \rho_2(\vec{r}') \\ & - \sqrt{N_1 N_2} \sqrt{\eta_1 \eta_2} \int \frac{d^3\vec{r} d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_1(\vec{r}) \rho_2(\vec{r}') \\ & + N_1 \int d^3\vec{r} \rho_1(\vec{r}) \ln \rho_1(\vec{r}) \\ & + N_2 \int d^3\vec{r} \rho_2(\vec{r}) \ln \rho_2(\vec{r}) \\ & + ib_1 N_1 \left[ 1 - \int d^3\vec{r} \rho_1(\vec{r}) \right] + ib_2 N_2 \left[ 1 - \int d^3\vec{r} \rho_2(\vec{r}) \right] \end{aligned} \quad (3.49)$$

Les intégrations sur la position  $\vec{r}$  se font sur le volume unité. L'intégrale fonctionnelle (3.48) est dominée pour  $N_1 \rightarrow \infty$  et  $N_2 \rightarrow \infty$  par le point col de l' "action effective" (3.49) qui vérifie les relations suivantes

$$\frac{\partial s_c}{\partial b_1}(\rho_{col,1}, \rho_{col,2}, b_{col,1}, b_{col,2}) = 0 \quad , \quad \frac{\partial s_c}{\partial b_2}(\rho_{col,1}, \rho_{col,2}, b_{col,1}, b_{col,2}) = 0 \quad ,$$

$$\frac{\delta s_c}{\delta \rho_1(\cdot)}(\rho_{col,1}, \rho_{col,2}, b_{col,1}, b_{col,2}) = 0 \quad , \quad \frac{\delta s_c}{\delta \rho_2(\cdot)}(\rho_{col,1}, \rho_{col,2}, b_{col,1}, b_{col,2}) = 0 \quad .$$

Les deux premières relations imposent la normalisation des deux densités

$$\int d^3\vec{r} \rho_{col,1}(\vec{r}) = 1 \quad , \quad \int d^3\vec{r} \rho_{col,2}(\vec{r}) = 1 \quad . \quad (3.50)$$

Les deux dernières relations imposent que les deux densités soient solutions des équations de point col suivantes

$$\begin{aligned}
\ln \rho_{col,1}(\vec{r}) &= \eta_1 \int \frac{d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_{col,1}(\vec{r}') \\
&\quad + \mu \eta_2 \int \frac{d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_{col,2}(\vec{r}') + a_{col,1} \\
\ln \rho_{col,2}(\vec{r}) &= \frac{1}{\mu} \eta_1 \int \frac{d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_{col,1}(\vec{r}') \\
&\quad + \eta_2 \int \frac{d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_{col,2}(\vec{r}') + a_{col,2} . \tag{3.51}
\end{aligned}$$

$a_{col,1} = i b_{col,1} - 1$  et  $a_{col,2} = i b_{col,2} - 1$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés à la condition de normalisation des deux densités (3.50). On a introduit le rapport  $\mu = \frac{m_1}{m_2}$ . En appliquant le Laplacien aux équations de point col et en introduisant les fonctions  $\Phi_1(\vec{r}) = \ln \rho_{col,1}(\vec{r})$  et  $\Phi_2(\vec{r}) = \ln \rho_{col,2}(\vec{r})$ , on trouve

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_{\vec{r}}^2 \Phi_1(\vec{r}) + 4 \pi \eta_1 e^{\Phi_1(\vec{r})} + 4 \pi \mu \eta_2 e^{\Phi_2(\vec{r})} &= 0 \\
\vec{\nabla}_{\vec{r}}^2 \Phi_2(\vec{r}) + 4 \pi \frac{1}{\mu} \eta_1 e^{\Phi_1(\vec{r})} + 4 \pi \eta_2 e^{\Phi_2(\vec{r})} &= 0 . \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Les densités sans dimension  $\rho_{col,1}(\vec{r}) = e^{\Phi_1(\vec{r})}$  et  $\rho_{col,2}(\vec{r}) = e^{\Phi_2(\vec{r})}$  sont liées aux densités de masse  $\rho_{m_1}(\vec{q})$  et  $\rho_{m_2}(\vec{q})$  introduites dans la première partie de ce chapitre par les relations

$$\begin{aligned}
\rho_{m_1}(\vec{q}) &= \frac{m_1 N_1}{V} \rho_{col,1}(\vec{r}) = \frac{m_1 N_1}{V} e^{\Phi_1(\vec{r})} , \\
\rho_{m_2}(\vec{q}) &= \frac{m_2 N_2}{V} \rho_{col,2}(\vec{r}) = \frac{m_2 N_2}{V} e^{\Phi_2(\vec{r})} , \\
\vec{q} &= V^{\frac{1}{3}} \vec{r} . \tag{3.53}
\end{aligned}$$

En utilisant les équations (3.40) et (3.53), on trouve que les équations de point col sont identiques aux équations d'équilibre hydrostatique (3.11)

$$\frac{1}{m_1} \vec{\nabla}_{\vec{q}}^2 \ln \rho_{m_1} + \frac{4 \pi G}{T} [\rho_{m_1}(\vec{q}) + \rho_{m_2}(\vec{q})] = 0$$

et

$$\frac{1}{m_2} \vec{\nabla}_{\vec{q}}^2 \ln \rho_{m_2} + \frac{4 \pi G}{T} [\rho_{m_1}(\vec{q}) + \rho_{m_2}(\vec{q})] = 0 .$$

Les solutions de point col sont donc identiques aux configurations d'équilibre hydrostatique des mélanges des gaz autogravitants isothermes. Dans la limite thermodynamique autogravitante ( $N_1 \rightarrow \infty$ ,  $N_2 \rightarrow \infty$  et  $V \rightarrow \infty$  avec  $\frac{N_1}{V^{2/3}}$  et  $\frac{N_2}{V^{2/3}}$  finis), la mécanique statistique montre que le système obéit aux équations d'état des gaz parfaits (4) et aux équations d'équilibre hydrostatique (3.11).

D'après l'équation (3.53), la pression partielle des particules de masse  $m_1$  et la pression partielle des particules de masse  $m_2$  au point  $\vec{r}$  sont

$$P_1(\vec{q}) = \frac{N_1 T}{V} \rho_{col,1}(\vec{r}) \quad , \quad P_2(\vec{q}) = \frac{N_2 T}{V} \rho_{col,2}(\vec{r}) . \quad (3.54)$$

Dans le cas de la symétrie sphérique, les fonctions  $f_1 = \frac{P_1 V}{N_1 T}$  et  $f_2 = \frac{P_2 V}{N_2 T}$  (éqs. (3.43)) coïncident avec les fonctions  $f_1$  et  $f_2$ , introduites dans les équations (3.22) dans le cadre de l'hydrostatique. Rappelons que ces fonctions  $f_1$  et  $f_2$  obéissent aux équations aux dérivées partielles (3.24). On a

$$\frac{P_1 V}{N_1 T} = f_1 \quad , \quad \frac{P_2 V}{N_2 T} = f_2 .$$

Les équations (3.24) s'intègrent de cette manière

$$3 \int_0^{\eta_1^R} \frac{dx}{x} [1 - f_1(x, N_2)] = 3 [f_1(\eta_1^R, N_2) - 1] + (\eta_1^R + \mu \eta_2^R) - \ln f_1(\eta_1^R, N_2)$$

et

$$3 \int_0^{\eta_2^R} \frac{dx}{x} [1 - f_2(N_1, x)] = 3 [f_2(N_1, \eta_2^R) - 1] + \left( \frac{\eta_1^R}{\mu} + \eta_2^R \right) - \ln f_2(N_1, \eta_2^R) .$$

En utilisant les équations (3.41) et (3.47), on en déduit que l'énergie libre et l'entropie vérifient les relations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{F - F_{GP}}{T} &= N_1 [3 (1 - f_1) - (\eta_1^R + \mu \eta_2^R) + \ln f_1] \\ &\quad + N_2 \left[ 3 (1 - f_2) - \left( \frac{\eta_1^R}{\mu} + \eta_2^R \right) + \ln f_2 \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

et

$$S - S_{GP} = N_1 [6 (f_1 - 1) + (\eta_1^R + \mu \eta_2^R) - \ln f_1] \\ + N_2 \left[ 6 (f_2 - 1) + \left( \frac{\eta_1^R}{\mu} + \eta_2^R \right) - \ln f_2 \right]. \quad (3.56)$$

En généralisant les relations (3.55) et (3.56) pour  $n$  sortes de particules, on a

$$\frac{F - F_{GP}}{T} = \sum_{i=1}^n N_i \left[ 3 (1 - f_i) - \mu_i \sum_{j=1}^n \frac{\eta_j^R}{\mu_j} + \ln f_i \right] \quad (3.57)$$

et

$$S - S_{GP} = \sum_{i=1}^n N_i \left[ 6 (f_i - 1) + \mu_i \sum_{j=1}^n \frac{\eta_j^R}{\mu_j} - \ln f_i \right]. \quad (3.58)$$

Il serait intéressant d'étudier la validité du champ moyen, en calculant les petites fluctuations autour du point col comme ceci a été fait dans le cas avec des particules identiques [7]. Des calculs Monte Carlo nous permettraient de vérifier que le champ moyen décrit bien la phase gazeuse; ils nous permettraient aussi de déterminer la transition de la phase gazeuse vers la phase collapsée. On pourrait comparer les résultats des calculs Monte Carlo avec les résultats sur la stabilité des configurations d'équilibre hydrostatique déduits dans la première partie de ce chapitre à partir du comportement des chaleurs spécifiques et des compressibilités, pour voir s'ils coïncident.

Il serait aussi intéressant d'étudier la mécanique statistique des systèmes autogravitants composés de plusieurs sortes de particules dans l'ensemble microcanonique et dans l'ensemble grand-canonique.



# Chapitre 4

## Systèmes autogravitants en présence de la constante cosmologique

De récentes observations astrophysiques ont mis en évidence que l'univers est rempli d'une énergie noire que l'on modélise par la constante cosmologique  $\Lambda$  des équations d'Einstein de la relativité générale. Nous présentons la limite non relativiste des équations d'Einstein avec la constante cosmologique et nous étudions la mécanique statistique des systèmes autogravitants en présence de la constante cosmologique. Pour un système autogravitant en présence de la constante cosmologique  $\Lambda$ , comportant  $N$  particules dans un volume  $V$ , l'énergie thermique est de l'ordre de  $N$ , l'énergie autogravitante (due aux seules interactions gravitationnelles entre particules) est de l'ordre de  $\frac{N^2}{V^{\frac{2}{3}}}$  et l'énergie de la constante cosmologique est de l'ordre de  $\Lambda V$ . Pour que ces trois énergies soient de même importance, il faut que  $N \sim V^{\frac{1}{3}}$  et  $\Lambda \sim V^{-\frac{2}{3}}$ . La limite thermodynamique pertinente est donc  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  et  $\Lambda \rightarrow 0$  avec  $\frac{N}{V^{\frac{1}{3}}}$  et  $\Lambda V^{\frac{2}{3}}$  finis. Dans cette limite thermodynamique, nous avons montré que l'approche du champ moyen décrit exactement la phase gazeuse [19]. Nous avons faits des calculs Monte Carlo dans l'ensemble canonique [20]; ils confirment que le champ moyen décrit très bien la phase gazeuse et qu'il cesse d'être valable lorsque la compressibilité isotherme diverge en devenant négative; une transition s'opère alors de la phase gazeuse vers la phase collapsée. Les calculs Monte Carlo permettent d'étudier la phase collapsée.



## 4.1 La constante cosmologique

Nous présentons dans cette section la constante cosmologique et la limite non relativiste des équations d'Einstein avec la constante cosmologique.

### 4.1.1 La constante cosmologique et l'énergie noire

La constante cosmologique a été introduite par Einstein dans les équations de la relativité générale en 1917 [37]. Elle permet d'obtenir un univers homogène statique comme solution de ces équations. Les observations du redshift de la lumière émise par les galaxies ont mis en évidence que les galaxies s'éloignent les unes des autres et que l'univers est actuellement en expansion [38]. Des solutions des équations de la relativité générale sans la constante cosmologique décrivent un univers homogène dynamique en conformité avec ces observations [39]. Cependant, de récentes observations basées sur la mesure de la lumière d'un type de supernovae de luminosité intrinsèque pratiquement uniforme ont mis en évidence qu'aujourd'hui les trois-quart de l'énergie de l'univers ne sont pas constitués de matière et de rayonnement mais d'une énergie appelée **énergie noire** [16, 17, 18]. Ses propriétés observées actuellement sont proches de celles modélisées par la constante cosmologique. La constante cosmologique  $\Lambda$  agit comme une densité d'énergie uniforme extrêmement faible, ayant un effet répulsif sur la matière ; elle a pour effet d'accélérer l'expansion de l'univers. Son importance vient du fait qu'elle remplit tout l'univers.

### 4.1.2 Gravitation non relativiste

Présentons les modifications qu'apporte la constante cosmologique à la gravitation non relativiste. Les équations de la relativité générale sont [40]

$$R^\beta_\alpha = 8\pi G \left( T^\beta_\alpha - \frac{\delta^\beta_\alpha}{2} T^\gamma_\gamma \right) \quad (4.1)$$

où  $R^\beta_\alpha$  est le tenseur de Ricci et  $T^\beta_\alpha$  est le tenseur d'énergie-impulsion. En considérant que la matière est non relativiste, c'est à dire que sa pression est négligeable devant sa densité de masse  $\rho_m$ , le tenseur d'énergie-impulsion en présence de la constante cosmologique  $\Lambda$  a pour expression

$$T_{\alpha}^{\beta} = \rho_m \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 0} + \Lambda \delta_{\alpha}^{\beta}.$$

Dans la limite non relativiste, la composante 00 des équations de la relativité générale (4.1) devient [19]

$$\vec{\nabla}_{\vec{q}} \cdot \vec{g} + 4\pi G (\rho_m(\vec{q}) - 2\Lambda) = 0. \quad (4.2)$$

Il s'agit de l'équation reliant au point de position  $\vec{q}$  le champ gravitationnel  $\vec{g}$  à la densité de masse  $\rho_m$  en présence de la constante cosmologique  $\Lambda$ . Pour  $\Lambda = 0$ , on retrouve l'équation de Poisson de la gravitation newtonienne (1.4). Le champ gravitationnel s'intègre de la manière suivante

$$\vec{g}(\vec{q}) = -G \int d^3\vec{q}' \rho_m(\vec{q}') \frac{\vec{q} - \vec{q}'}{|\vec{q} - \vec{q}'|^3} + \frac{8\pi G\Lambda}{3} \vec{q}, \quad (4.3)$$

le premier terme attractif étant la contribution de la matière et le second terme répulsif étant la contribution de la constante cosmologique. La constante d'intégration est choisie nulle dans l'équation (4.3), ce qui revient à éliminer les champs gravitationnels extérieurs en plaçant le centre de masse au point  $\vec{q} = \vec{0}$ . Le potentiel gravitationnel au point  $\vec{q}$  défini par  $\vec{g}(\vec{q}) = -\vec{\nabla}_{\vec{q}} V$  vaut

$$V(\vec{q}) = -G \int \frac{d^3\vec{q}' \rho_m(\vec{q}')}{|\vec{q} - \vec{q}'|} - \frac{4\pi G\Lambda}{3} \vec{q}^2.$$

Le hamiltonien d'un système autogravitant en présence de la constante cosmologique dont les particules ont comme masses  $m_1, \dots, m_N$ , comme positions  $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N$  et comme impulsions  $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N$ , est

$$\begin{aligned} H &= E_c + E_P \\ E_c &= \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2 m_i} \\ E_P &= -G \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|\vec{q}_i - \vec{q}_j|} - \frac{4\pi G\Lambda}{3} \sum_{i=1}^N m_i \vec{q}_i^2, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$E_c$  étant l'énergie cinétique et  $E_P$  l'énergie potentielle.

Présentons maintenant l'hydrostatique des gaz autogravitants en présence de la constante cosmologique qui est déduite de l'approximation de champ moyen de la mécanique statistique.

## 4.2 Hydrostatique

Le système autogravitant en présence de la constante cosmologique existe sous deux phases qui ne peuvent pas coexister ensemble, une phase gazeuse et une phase collapsée. Nous allons présenter l'hydrostatique d'un gaz autogravitant isotherme en présence de la constante cosmologique qui est déduite de l'approche du champ moyen de la mécanique statistique. Dans la limite thermodynamique où le nombre de particules  $N$ , le volume  $V$  et la constante cosmologique  $\Lambda$  vérifient  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  et  $\Lambda \rightarrow 0$  avec  $\frac{N}{V^{\frac{2}{3}}}$  fini et  $\Lambda V^{\frac{2}{3}}$  fini, l'approche du champ moyen décrit exactement la phase gazeuse du système.

### 4.2.1 Equilibre hydrostatique

Rappelons qu'un gaz autogravitant est en équilibre hydrostatique si les forces de pression et les forces gravitationnelles se compensent, ce qui se traduit par la relation (1.2)

$$-\vec{\nabla}_{\vec{q}}P + \rho_m(\vec{q}) \vec{g}(\vec{q}) = 0$$

entre la pression  $P$  du gaz au point  $\vec{q}$ , la densité de masse  $\rho_m$  au point  $\vec{q}$  et le champ gravitationnel  $\vec{g}$  engendré par le gaz autogravitant au point  $\vec{q}$ . Son expression est donnée par l'équation (4.3) lorsqu'il est en présence de la constante cosmologique. En utilisant l'équation du champ gravitationnel (4.2), on obtient la relation suivante qui est la condition d'équilibre hydrostatique d'un gaz autogravitant en présence de la constante cosmologique

$$\vec{\nabla}_{\vec{q}} \left( \frac{1}{\rho_m} \vec{\nabla}_{\vec{q}}P \right) = -4\pi G (\rho_m(\vec{q}) - 2\Lambda). \quad (4.5)$$

### 4.2.2 Equilibre thermodynamique

Dans la limite thermodynamique ( $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  et la  $\Lambda \rightarrow 0$  avec  $\frac{N}{V^{\frac{2}{3}}}$  et  $\Lambda V^{\frac{2}{3}}$  fini), l'approche du champ moyen de la mécanique statistique

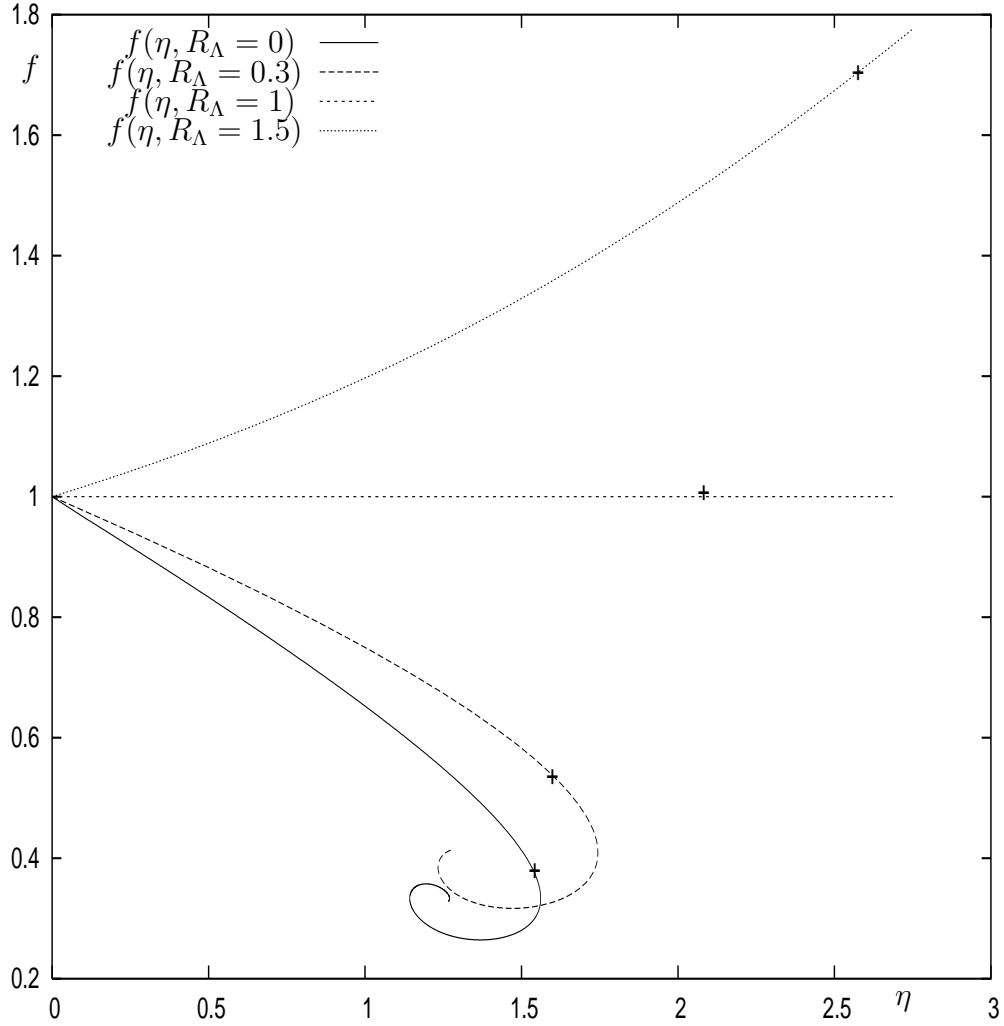


FIG. 4.1 – La courbe  $f(\eta, R_\Lambda)$  pour  $R_\Lambda = 0, 0.3, 1, 1.5$  par l’approche du champ moyen où  $f = \frac{PV}{NT}$  (voir équation (4.11) ),  $\eta = \frac{G m^2 N}{v^{\frac{1}{3}} T} = \eta^R \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$  (voir équation (4.8) ) et  $R_\Lambda = \frac{2\Delta V}{mN}$  (voir équation (7)). Les configurations d’équilibre stable dans l’ensemble canonique sont représentées par les points compris entre le point  $(\eta = 0, f = 1)$  et le point  $(\eta = \eta_o(R_\Lambda), f_o(R_\Lambda) = f(\eta_o(R_\Lambda), R_\Lambda))$  représenté par un  $+$ . Pour ces configurations, les chaleurs spécifiques et la compressibilité isotherme sont positives. Au point  $(\eta_o(R_\Lambda), f_o(R_\Lambda))$ , la chaleur spécifique à pression constante et la compressibilité isotherme divergent en devenant négatives; il s’agit du point d’instabilité de la sphère isotherme dans l’ensemble canonique. On a  $\eta_o(R_\Lambda = 0) = 1.510\dots$ ,  $\eta_o(R_\Lambda = 0.3) = 1.63\dots$ ,  $\eta_o(R_\Lambda = 1) = 2.04\dots$  et  $\eta_o(R_\Lambda = 1.5) = 2.55\dots$  .

décrit exactement la phase gazeuse. Elle montre que localement la pression et la densité de masse obéissent à l'équation d'état des gaz parfaits (1) [19]

$$P(\vec{q}) = \frac{T}{m} \rho_m(\vec{q})$$

où  $m$  est la masse de chacune des particules du gaz qui sont supposées ici identiques et où  $T$  est la température constante. A partir de cette équation et de l'équation (4.5), on obtient l'équation de la densité du gaz autogravitant à l'équilibre thermodynamique

$$\vec{\nabla}_{\vec{q}}^2 (\ln \rho_m) + \frac{4\pi G m}{T} (\rho_m(\vec{q}) - 2\Lambda) = 0. \quad (4.6)$$

En symétrie sphérique, les grandeurs physiques ne dépendent que de la distance  $q$  par rapport au centre de la sphère. L'équation (4.6) devient

$$\frac{1}{q^2} \frac{d}{dq} (q^2 \ln \rho_m) + \frac{4\pi G m}{T} (\rho_m(q) - 2\Lambda) = 0. \quad (4.7)$$

Il s'agit de l'équation de la sphère isotherme en présence de la constante cosmologique. La constante cosmologique a brisé la covariance de l'équation de la densité par la transformation d'échelle (1.15). On ne peut plus réduire cette équation du second ordre à une équation du premier ordre comme c'est le cas lorsque  $\Lambda = 0$ .

### 4.2.3 Les paramètres $\eta$ et $\xi$

Considérons un système autogravitant isotherme de température  $T$  en présence de la constante cosmologique  $\Lambda$ . Il est composé de  $N$  particules de masse  $m$  dont la masse totale  $M = mN$  est contenue dans un volume  $V$ . Ce système a deux paramètres significatifs sans dimension. Le premier paramètre est

$$\eta = \frac{G m M}{V^{\frac{1}{3}} T} = \frac{G m^2 N}{V^{\frac{1}{3}} T} \quad (4.8)$$

défini dans le chapitre 1. On rappelle que le paramètre  $\eta$  est le quotient de deux énergies caractéristiques d'une particule en interaction avec l'ensemble du système autogravitant. Ces deux énergies caractéristiques sont  $\frac{G m M}{V^{\frac{1}{3}}}$  qui est de l'ordre de son énergie gravitationnelle d'interaction avec

l'ensemble du système autogravitant et  $T$  qui est de l'ordre de son énergie cinétique. Le deuxième paramètre est

$$\xi = \frac{2G m \Lambda V^{\frac{2}{3}}}{T} . \quad (4.9)$$

Ce paramètre est le quotient entre deux énergies caractéristiques d'une particule en interaction avec la constante cosmologique. Ces deux énergies caractéristiques sont  $2G m \Lambda V^{\frac{2}{3}}$  qui est de l'ordre de son énergie gravitationnelle d'interaction avec  $\Lambda$  et  $T$  qui est de l'ordre de son énergie cinétique.

Le rapport entre ces deux paramètres

$$R_\Lambda = \frac{\xi}{\eta} = \frac{2\Lambda V}{M}$$

est le rapport déjà défini dans l'introduction (équ.(7)) entre la quantité d'énergie de la constante cosmologique et la masse de matière dans le système ; il exprime l'importance relative de la constante cosmologique et de la matière dans le système.

La limite thermodynamique pertinente des systèmes autogravitants en présence de la constante cosmologique  $\Lambda$  est  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda \rightarrow 0$  avec  $\frac{N}{V^{\frac{1}{3}}}$  et  $\Lambda V^{\frac{2}{3}}$  finis. Pour cette limite,  $\eta$  et  $\xi$  sont d'ordre unité ( $R_\Lambda \sim 1$ ) et l'autogravité des particules (les interactions gravitationnelles mutuelles des particules) et la constante cosmologique jouent toutes les deux un rôle important. Lorsque  $\eta$  et  $\xi$  tendent vers 0, l'énergie cinétique du système l'emporte largement sur son énergie gravitationnelle et le système se comporte comme un gaz parfait. Lorsque  $\xi \rightarrow 0$  et  $\eta$  est fini ( $R_\Lambda \sim 0$ ), les effets de la constante cosmologique sont négligeables devant ceux de l'autogravité des particules et on retrouve les systèmes autogravitants étudiés dans les premiers chapitres. Le cas où les effets de l'autogravité des particules sont négligeables devant ceux de la constante cosmologique ( $\eta \rightarrow 0$  et  $\xi$  est fini,  $R_\Lambda \gg 1$ ) est présenté plus loin dans ce chapitre.

Exprimons la différence  $\eta - \xi$  à partir des solutions de l'équation (4.6) dans le cas de la sphère isotherme. A partir de l'expression de la masse contenue à l'intérieur du volume  $V$

$$M = m N = \int_V d^3\vec{q}' \rho_m(\vec{q}') ,$$

de l'équation (4.6) et du théorème de Green-Ostrogradski sur le volume  $V$ , on trouve que

$$\oint \vec{d}S \vec{\nabla}_{\vec{q}} \ln \rho_m + \frac{4\pi G m}{T} (mN - 2\Lambda V) = 0 ,$$

la surface d'intégration étant la paroi entourant le système. Dans le cas de la symétrie sphérique où le volume est une sphère de rayon  $Q$ , la différence des paramètres  $\eta^R = \eta \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$  et  $\xi^R = \xi \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$  est

$$\eta^R - \xi^R = -Q \left( \frac{d}{dq} (\ln \rho_m) \right)_{q=Q} . \quad (4.10)$$

La présence de la constante cosmologique a pour effet de transformer l'équation (1.16) en l'équation (4.10) en substituant le paramètre  $\eta^R$ , proportionnelle à la masse de matière  $M$ , par la différence  $\eta^R - \xi^R$ , proportionnelle à la différence entre la masse de matière  $M$  et l'énergie  $2\Lambda V$  de la constante cosmologique.

#### 4.2.4 Densité de la sphère isotherme

Nous allons considérer un gaz autogravitant à l'équilibre thermodynamique en symétrie sphérique (sphère isotherme). Le système est contenu dans une sphère de rayon  $Q$  sur la paroi de laquelle est exercée la pression  $P$ . Nous allons étudier les variations de la densité de masse en fonction du rayon  $q$  ( $0 \leq q \leq Q$ ) [19]. En l'absence de la constante cosmologique, la densité de matière de la sphère isotherme est toujours une fonction décroissante du rayon  $q$ , ceci est dû à l'effet attractif de l'autogravité des particules. En présence de la constante cosmologique, il y a compétition entre l'effet attractif de l'autogravité des particules et l'effet répulsif de la constante cosmologique. Pour les configurations d'équilibre stable de la sphère isotherme, les variations de la densité ont trois comportements :

-pour  $R_\Lambda < 1$ , la densité est une fonction décroissante du rayon  $q$ . Les effets de l'autogravité l'emportent sur ceux de la constante cosmologique.

-pour  $R_\Lambda = 1$ , la densité est une fonction uniforme du rayon  $q$ . Les effets de l'autogravité et de la constante cosmologique se compensent et le système se comporte comme un gaz parfait. Le système décrit l'univers homogène et statique d'Einstein dans une version non relativiste.

-pour  $R_\Lambda > 1$ , la densité est une fonction croissante du rayon  $q$ . Les effets de la constante cosmologique l'emportent sur ceux de l'autogravité.

Introduisons la grandeur sans dimension  $f$  (fig.4.1)

$$f(\eta, R_\Lambda) = \frac{PV}{NT} = \frac{V}{mN} \rho_m(Q) \quad (4.11)$$

en rappelant que la pression sur la paroi  $P$  et la densité sur la paroi  $\rho_m(Q)$  sont liées localement par l'équation d'état des gaz parfaits (1).

#### 4.2.5 Stabilité de la sphère isotherme

Nous avons déterminé la stabilité des configurations d'équilibre de la sphère isotherme, solutions de l'équation (4.7), dans l'ensemble canonique [20]. Etant donné une valeur de  $R_\Lambda$ , ces configurations d'équilibre stables correspondent aux points du diagramme de phase (fig.4.1) du point  $(\eta = 0, f = 1)$  au point  $(\eta = \eta_o(R_\Lambda), f_o(R_\Lambda) = f(\eta_o(R_\Lambda), R_\Lambda))$ . Pour ces configurations, les chaleurs spécifiques et la compressibilité isotherme sont positives. Au point  $(\eta_o(R_\Lambda), f_o(R_\Lambda))$ , la chaleur spécifique à pression constante et la compressibilité isotherme divergent en devenant négatives. Cette configuration est le point d'instabilité de la sphère isotherme dans l'ensemble canonique. Le paramètre  $\eta_o$  est une fonction croissante de  $R_\Lambda$ , la présence de la constante cosmologique a pour effet d'étendre la stabilité du gaz autogravitant. Par exemple, on a  $\eta_o(R_\Lambda = 0) = 1.510\dots$ ,  $\eta_o(R_\Lambda = 0.3) = 1.63\dots$ ,  $\eta_o(R_\Lambda = 1) = 2.04\dots$  et  $\eta_o(R_\Lambda = 1.5) = 2.55\dots$ .

Présentons maintenant la mécanique statistique des systèmes autogravitants en présence de la constante cosmologique.

### 4.3 Mécanique statistique

Nous avons développé la mécanique statistique des systèmes autogravitants en présence de la constante cosmologique dans l'ensemble canonique. L'approche du champ moyen décrit exactement la phase gazeuse dans la limite thermodynamique autogravitante ( $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$   $\Lambda \rightarrow 0$  avec  $\frac{N}{V^{\frac{1}{3}}}$  et  $\Lambda V^{\frac{2}{3}}$  finis). Le champ moyen montre que le système obéit à l'équation (4.6) de l'hydrostatique et permet d'obtenir l'équation d'état du système, celle-ci correspondant localement à l'équation d'état des gaz



parfaits (1)[19]. En revanche, en hydrostatique l'équation d'état n'est pas dérivée et doit être supposée.

### 4.3.1 Fonction de partition

Considérons un gaz de  $N$  particules de masse  $m$  dans un volume  $V$ . Il est placé dans un thermostat à la température  $T$  et une pression  $P$  s'applique sur la paroi enfermant le système. Les particules interagissent entre elles par la gravité et sont en présence de la constante cosmologique. La fonction de partition est

$$Z = \frac{1}{N!} \int \prod_{l=1}^N \frac{d^3 \vec{q}_l d^3 \vec{p}_l}{(2\pi)^3} e^{-\frac{H}{T}}$$

avec

$$\begin{aligned} H &= E_c + U, \\ E_c &= \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m}, \\ E_P &= -Gm^2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{|\vec{q}_i - \vec{q}_j|_A} - \frac{4\pi Gm\Lambda}{3} \sum_{i=1}^N \vec{q}_i^2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$H$  étant le hamiltonien de l'équation (4.4) avec des particules identiques. En calculant les intégrales gaussiennes sur les impulsions et en introduisant les positions sans dimension des particules  $\vec{r}_l = \frac{\vec{q}_l}{V^{\frac{1}{3}}}$ , on trouve que la fonction de partition  $Z$  est égale au produit de la fonction de partition  $Z_{GP}$  du gaz parfait (GP) de température  $T$  et de volume  $V$  contenant  $N$  particules de masse  $m$  par une intégrale sur les positions des particules  $Z_{int}$  qui contient l'information sur l'interaction gravitationnelle et la constante cosmologique

$$\begin{aligned} Z &= Z_{GP} Z_{int} \\ Z_{GP} &= \frac{V^N}{N!} \left( \frac{m T}{2\pi} \right)^{\frac{3N}{2}} \\ Z_{int} &= \int_{\text{volume unite}} \prod_{l=1}^N d^3 \vec{r}_l e^{\eta u_p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) + \frac{2\pi}{3} \xi u_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Les paramètres  $\eta$  et  $\xi$  sont définis par les équations (4.8) et (4.9),  $u_P$  est l'énergie potentielle sans dimension due à l'autogravité des particules et  $u_N$  est l'énergie potentielle sans dimension due à la constante cosmologique

$$u_P(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^\alpha}, \quad u_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^2.$$

### 4.3.2 Champ moyen

Dans l'approximation de champ moyen, l'intégrale  $Z_{int}$ (4.13) devient une intégrale fonctionnelle sur la densité  $\rho(\vec{r})$

$$Z_{int} = \int D\rho(.) \frac{db}{2\pi} \exp[-N s_c(\rho(.), b)] \quad (4.14)$$

avec l' "action effective"

$$s_c(\rho(.), b) = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \ln \rho(\vec{r}) - \frac{\eta}{2} \int \frac{d^3\vec{r} d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') - \frac{2\pi}{3} \xi \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \vec{r}^2 + ib \left[ 1 - \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \right]. \quad (4.15)$$

L'intégrale fonctionnelle (4.14) est dominée pour  $N \rightarrow \infty$  par le point col de l' "action effective" (4.15) qui vérifie les relations suivantes

$$\frac{\partial s_c}{\partial b}(\rho_{col}, b_{col}) = 0, \quad \frac{\delta s_c}{\delta \rho(.)}(\rho_{col}, b_{col}) = 0.$$

La première relation impose la normalisation de la densité

$$\int d^3\vec{r} \rho_{col}(\vec{r}) = 1. \quad (4.16)$$

La seconde relation impose que la densité soit solution de l'équation de point col

$$\ln \rho_{col}(\vec{r}) - \eta \int \frac{d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_{col}(\vec{r}') - \frac{2\pi}{3} \xi \vec{r}^2 = a_{col}, \quad (4.17)$$

$a_{col} = ib_{col} - 1$  étant un multiplicateur de Lagrange associé à la condition de normalisation de la densité (4.16). En appliquant le Laplacien à l'équation

de point col (4.17) et en introduisant la fonction  $\Phi(\vec{r}) = \ln \rho_{col}(\vec{r})$ , on trouve que

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}^2 \Phi(\vec{r}) + 4 \pi \left( \eta e^{\Phi(\vec{r})} - \xi \right) = 0. \quad (4.18)$$

La densité sans dimension  $\rho_{col}(\vec{r}) = e^{\Phi(\vec{r})}$  est liée à la densité de masse  $\rho_m(\vec{q})$  introduite en hydrostatique par la relation

$$\rho_m(\vec{q}) = \frac{m N}{V} \rho_{col}(\vec{r}) \quad , \quad \vec{q} = V^{\frac{1}{3}} \vec{r}. \quad (4.19)$$

En utilisant les équations (4.8), (4.9) et (4.19), on trouve que l'équation de point col est identique à l'équation d'équilibre hydrostatique (4.6). Les solutions de point col du système sont donc équivalentes aux configurations d'équilibre hydrostatique du système autogravitant isotherme avec constante cosmologique. Dans la limite thermodynamique ( $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  et  $\Lambda \rightarrow 0$  avec  $\frac{N}{V^{\frac{1}{3}}}$  et  $\Lambda V^{\frac{2}{3}}$  finis), la mécanique statistique montre que le système obéit à l'équation d'équilibre hydrostatique (4.6) et à l'équation d'état locale des gaz parfaits inhomogènes (1).

### 4.3.3 Calculs Monte Carlo

Nous avons effectué des calculs Monte Carlo ( $500 \leq N \leq 2000$ ) [20] qui confirment que la phase gazeuse est bien décrite par le champ moyen et qui permettent d'étudier la phase collapsée et la transition de la phase gazeuse vers la phase collapsée. Conformément à nos prévisions, celle-ci a bien lieu lorsque la compressibilité isotherme diverge en devenant négative. Nous avons effectué les calculs Monte Carlo dans un cube et dans une sphère, ce qui nous a permis d'étudier l'influence de la forme de la paroi sur les systèmes autogravitants. En présence de la constante cosmologique, les résultats sont dépendants de la forme de la paroi, alors qu'en l'absence de la constante cosmologique, les résultats sont moins dépendants de la forme de celle-ci. L'action de la constante cosmologique étant plus importante au niveau de la paroi qu'au centre du système, la forme de celle-ci a d'avantage d'influence en présence de la constante cosmologique.

Présentons maintenant la limite  $R_\Lambda \gg 1$  (eq.(7)) où la constante cosmologique domine l'autogravité.

## 4.4 Limite $R_\Lambda \gg 1$

Nous considérons le cas où la constante cosmologique domine l'autogravité ( $R_\Lambda \gg 1$ ) [19]. Le hamiltonien (4.12) où l'énergie potentielle autogravitante a été négligée devient

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} - \frac{4\pi Gm\Lambda}{3} \sum_{i=1}^N \vec{q}_i^2 .$$

En symétrie sphérique, la fonction de partition s'exprime (sans approximation de champ moyen) suivant

$$Z = \frac{V^N}{N!} \left( \frac{m T}{2\pi} \right)^{\frac{3N}{2}} e^{-N\alpha(\xi^R)} \quad (4.20)$$

avec  $\xi^R = \xi \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}}$  (eq.(4.9)) et

$$e^{-\alpha(\xi^R)} = 3 \int_0^1 dy y^2 \exp\left( \frac{\xi^R}{2} y^2 \right) . \quad (4.21)$$

La grandeur  $f$  définie par l'équation (4.11) vaut

$$f(\xi^R) = e^{\alpha(\xi^R)} e^{\frac{\xi^R}{2}} . \quad (4.22)$$

D'après l'équation (4.21), elle vérifie l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{\xi^R}{f} \frac{df}{d\xi^R} = \frac{3}{2} (1 - f) + \frac{\xi^R}{2} \quad (4.23)$$

avec la condition limite

$$f(\xi^R = 0) = 1 .$$

En utilisant les équations (4.20) et (4.22), la fonction de partition s'exprime suivant

$$Z = \frac{V^N}{N!} \left( \frac{m T}{2\pi} \right)^{\frac{3N}{2}} e^{N\frac{\xi^R}{2}} f^{-N} . \quad (4.24)$$

On en déduit l'énergie libre  $F$ , l'énergie  $E$ , la pression sur la paroi  $P$ , l'entropie  $S$ , la chaleur spécifique  $c_v$  et la compressibilité isotherme  $\kappa_T$  en fonction de la grandeur  $f$  en utilisant les équations (4.22) et (4.24)

$$\frac{F - F_{GP}}{NT} = \alpha(\xi^R) = \ln f(\xi^R) - \frac{\xi^R}{2} \quad , \quad \frac{E}{NT} = \frac{3}{2} [2 - f(\xi^R)] \quad ,$$

$$\frac{PV}{NT} = f(\xi^R) \quad , \quad \frac{S - S_{GP}}{N} = \frac{3}{2} [1 - f(\xi^R)] - \ln f(\xi^R) + \frac{\xi^R}{2} \quad ,$$

$$c_v = \frac{3}{4} \xi^R f(\xi^R) + \frac{3}{2} [1 - f(\xi^R)] [1 + \frac{3}{2} f(\xi^R)]$$

et

$$[\kappa_T]^{-1} = f(\xi^R) \left[ f(\xi^R) - \frac{\xi^R}{3} \right] \quad .$$

Les grandeurs  $F_{GP}$  et  $S_{GP}$  sont respectivement l'énergie libre et l'entropie du gaz parfait d'énergie  $E$  et de volume  $V$  composé de  $N$  particules. Toutes les configurations ont une compressibilité isotherme positive, elles sont stables dans l'ensemble canonique. La densité de masse  $\rho_m$  s'exprime en fonction de la distance  $q$  par rapport au centre de la sphère ( $0 \leq q \leq Q$ ) et de la constante cosmologique suivant

$$\frac{V \rho_m(q)}{mN} = e^{\alpha(\xi^R)} \exp \left[ \frac{\xi^R}{2} \left( \frac{q}{Q} \right)^2 \right] \quad .$$

A cause de l'effet répulsif de la constante cosmologique, la densité de masse est une fonction croissante du rayon  $q$ .

Discutons maintenant de l'importance de la constante cosmologique dans les objets astrophysiques autogravitants.

## 4.5 Discussions

L'importance de la constante cosmologique est mesurée par le rapport (7) entre l'énergie de la constante cosmologique et la masse de la matière. Plus un système est dense et plus l'importance de la constante cosmologique est faible. A l'échelle de l'univers qui est homogène, ce rapport vaut

4. A partir d'une échelle de distance inférieure à  $10Mpc$ , l'univers a une structure fragmentée en éléments de plus en plus denses en matière. Plus la structure étudiée est petite et plus l'importance de la constante cosmologique (qui est répartie de manière uniforme) est faible relativement à la matière. Elle est négligeable pour le milieu interstellaire mais doit être prise en compte pour les structures de galaxies les plus grandes que sont les amas et les superamas.



# Conclusions et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié la mécanique statistique des systèmes autogravitants comportant plusieurs sortes de particules et la mécanique statistique des systèmes autogravitants en présence de la constante cosmologique. Ces deux contributions sont entièrement nouvelles. Pour ces deux types de systèmes autogravitants, nous avons développé l'approche du champ moyen qui décrit exactement les phases gazeuses de ces systèmes dans leurs limites thermodynamiques pertinentes respectives. Pour les systèmes autogravitants comportant plusieurs sortes de particules, cette limite thermodynamique est la limite où les nombres de particules  $N_i$  et le volume  $V$  tendent vers l'infini et où les rapports  $\frac{N_i}{V^{\frac{1}{3}}}$  sont finis. Pour les systèmes autogravitants en présence de la constante cosmologique, cette limite thermodynamique est la limite où le nombre de particules  $N$  et le volume  $V$  tendent vers l'infini où la constante cosmologique  $\Lambda$  tend vers 0 et où les rapports  $\frac{N}{V^{\frac{1}{3}}}$  et  $\Lambda V^{\frac{2}{3}}$  sont finis. Dans leur limite thermodynamique respective, l'approche du champ moyen montre que ces systèmes autogravitants obéissent aux équations de l'hydrostatique et à une équation d'état qui localement est l'équation d'état des gaz parfaits. Nous avons calculé les grandeurs thermodynamiques de ces systèmes. Nous avons analysé leur stabilité. Nous avons effectué des calculs Monte Carlo pour le système autogravitant en présence de la constante cosmologique dans l'ensemble canonique. Ils montrent que le champ moyen décrit très bien la phase gazeuse et que la transition de la phase gazeuse vers la phase collapsée a lieu dans l'ensemble canonique lorsque la compressibilité isotherme diverge. Il serait intéressant de faire des calculs Monte Carlo dans l'ensemble microcanonique pour vérifier, conformément à nos prévisions que la transition de phase arrive dans cet ensemble lorsque la compressibilité adiabatique diverge. Il faudrait également faire des calculs Monte Carlo pour les systèmes autogravitants comportant plusieurs sortes de particules. Nous



avons montré que les systèmes autogravitants comportant plusieurs sortes de particules obéissent à des lois d'échelle sur leur masse. Le milieu interstellaire qui est composé de plusieurs sortes d'atomes et de molécules a donc ses lois d'échelle sur sa masse reproduites par les systèmes autogravitants comportant plusieurs sortes de particules. Par son action répulsive, la constante cosmologique augmente la stabilité des systèmes autogravitants.

Nous avons étudié dans cette thèse la mécanique statistique et l'hydrostatique des systèmes autogravitants. Il serait intéressant de développer l'hydrodynamique des systèmes autogravitants qui vérifient les équations (B.1) et (B.2). Dans l'annexe B, nous exposons la théorie des perturbations par rapport à un fluide autogravitant homogène statique. Il serait utile d'étudier la théorie des perturbations avec comme ordre zéro un gaz autogravitant en équilibre hydrostatique. Ce serait un autre moyen d'étudier la stabilité des gaz autogravitants en équilibre hydrostatique ; ce serait aussi un moyen d'étudier leur collapse. L'hydrodynamique des systèmes autogravitants est actuellement étudiée en cosmologie pour montrer comment se forment les structures à partir d'un fond homogène de matière dans l'univers en expansion. La théorie des perturbations par rapport au modèle d'Einstein-de Sitter [26] qui est le modèle d'univers plat en expansion dominé par la matière a été étudiée [41, 42]. Pour les temps infinis, cette théorie des perturbations diverge, il serait intéressant d'appliquer le groupe de renormalisation dynamique [43] pour explorer le comportement de la théorie pour les temps infinis et prévoir ainsi l'évolution des structures dans l'univers.

# Appendices



# Annexe A

## Gaz autogravitants polytropiques

Nous allons présenter brièvement les gaz autogravitants polytropiques qui jouent un rôle important dans la compréhension de la physique des étoiles [4, 5, 26, 44, 45, 46]. Nous allons tout d'abord présenter les transformations polytropiques que subissent ces systèmes.

### A.1 Les transformations polytropiques

Une transformation polytropique [4] est une transformation thermodynamique où la variation de chaleur est proportionnelle à la variation de température. En considérant une transformation polytropique infinitésimale, les variations de chaleur et de température  $dQ$  et  $dT$  sont liées par la relation suivante

$$dQ = c dT$$

où  $c$  est une constante appelée chaleur spécifique de la transformation polytropique. On voit que les transformations adiabatiques sont des cas particuliers de transformations polytropiques avec  $c = 0$ .

Les gaz parfaits obéissent à l'équation d'état (1)

$$P(\vec{q}) = \frac{T}{m} \rho_m(\vec{q})$$

qui relie la pression  $P$ , la température  $T$ , la densité de masse  $\rho_m$  et la masse  $m$  d'une particule du gaz. Pour un gaz parfait subissant une transformation polytropique, la relation entre la pression  $P$  et la densité de masse  $\rho_m$  est de la forme [5]

$$P = K \rho_m^\gamma \quad (\text{A.1})$$

où  $K$  est une constante et où le coefficient polytropique  $\gamma$  est

$$\gamma = \frac{c_p - c}{c_v - c}, \quad (\text{A.2})$$

$c_p$  et  $c_v$  étant respectivement la chaleur spécifique à pression constante et la chaleur spécifique à volume constant. Pour les transformations adiabatiques ( $c = 0$ ), on retrouve la valeur bien connue du coefficient adiabatique  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  [27].

En outre, en utilisant l'équation des gaz parfaits (1) et en introduisant la température polytropique  $T_\gamma$ , température pour laquelle la densité de masse  $\rho_m$  est égale à 1, on trouve que la constante  $K$  est égale à

$$K = \frac{T_\gamma}{m}.$$

Nous allons voir maintenant que les étoiles sont des gaz autogravitants polytropiques.

## A.2 Les étoiles

Les réactions thermonucléaires qui se déroulent au coeur des étoiles constituent leur source de chaleur. Celle-ci se propage du centre chaud vers la périphérie plus froide puis est rayonnée à l'extérieur des étoiles. Il est raisonnable de supposer que les étoiles sont en équilibre convectif, ce qui veut dire que les transferts de chaleur du centre chaud de l'étoile vers la périphérie plus froide se font par convection, les transferts par conduction étant négligeables devant ceux-ci. Ainsi chaque élément de gaz conserve sa chaleur et se transforme donc adiabatiquement dans l'étoile. Ainsi les étoiles peuvent être considérées comme des gaz autogravitants polytropiques. Nous allons maintenant déterminer l'équation de la densité des gaz autogravitants polytropiques en équilibre hydrostatique.

## A.3 Equilibre hydrostatique

Nous allons déterminer l'équation de la densité d'un gaz autogravitant polytropique en équilibre hydrostatique et obéissant à l'équation d'état

(A.1). En utilisant cette équation et l'équation (1.5), on obtient

$$\vec{\nabla}_{\vec{q}}^2 (\rho_m^{\gamma-1}) = -\frac{4\pi G m}{T_\gamma} \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho_m(\vec{q}) .$$

En introduisant l'indice polytropique

$$n = \frac{1}{\gamma-1} = \frac{c_v - c}{c_p - c_v} , \quad (\text{A.3})$$

en posant pour la densité

$$\rho_m = \rho_o \theta^n$$

où  $\rho_o$  est une constante, et en introduisant le rayon vecteur sans dimension  $\vec{\lambda}$  défini par

$$\vec{q} = a \vec{\lambda} \quad , \quad a = \sqrt{\frac{T_\gamma (n+1) \rho_o^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G m}} ,$$

on trouve l'équation des systèmes autogravitants polytropiques

$$\vec{\nabla}_{\vec{\lambda}}^2 \theta + \theta^n(\lambda) = 0 . \quad (\text{A.4})$$

Dans le cas de la symétrie sphérique, cette équation devient

$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{d}{d\lambda} \left( \lambda^2 \frac{d\theta}{d\lambda} \right) + \theta^n = 0 . \quad (\text{A.5})$$

Cette équation qui est l'équation de la sphère polytropique est appelée équation de Lane-Emden d'indice  $n$ . Si l'indice est le même dans toute la sphère, on peut poser que  $\rho_o$  est la densité au centre et en déduire la première condition initiale à savoir

$$\theta(\lambda = 0) = 1 .$$

Pour que l'équation soit régulière en 0, on impose la deuxième condition initiale

$$\frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda = 0) = 0 .$$

En la résolvant, on en déduit la densité et toutes les grandeurs physiques comme la température et la pression, comme pour la sphère isotherme.



# Annexe B

## Théorie de Jeans

La théorie de Jeans [2, 26, 28] montre comment se forment des condensations de matière à partir d'un fond de matière homogène. Cette théorie dont le but est d'expliquer la formation des galaxies est particulièrement intéressante par sa simplicité. Lorsque de petites variations de densité se propagent sinusoidalement, le système est stable. Par contre, lorsque ces petites variations croissent exponentiellement, le système devient instable. Déterminons tout d'abord l'équation de propagation de ces petites perturbations.

### B.1 Equation de propagation

Soit un fluide autogravitant de densité de masse  $\rho_m$ , de pression  $P$ , de vitesse  $\vec{v}$  et créant un champ de gravitation  $\vec{g}$ . Le fluide est régi par les équations de la mécanique des fluides (équation de continuité et équation d'Euler)

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left( \vec{v} \times \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_m} \vec{\nabla} P + \vec{g} \quad (\text{B.1})$$

et les équations de la gravitation newtonienne

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = \vec{0} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4 \pi G \rho_m . \quad (\text{B.2})$$

Les perturbations au premier ordre sont déterminées par rapport à un fluide statique uniforme où les effets de la gravitation sont ignorés. Pour le fluide statique, on a



$$\rho_m = \rho_0 = \text{constante} \quad , \quad P = P_0 = \text{constante} \quad , \quad \vec{v} = \vec{0} \quad , \quad \vec{g} = \vec{0} .$$

Considérons une perturbation de ce fluide statique uniforme. Soit respectivement  $\rho_1$ ,  $P_1$ ,  $\vec{v}_1$  et  $\vec{g}_1$  la densité de masse, la pression, la vitesse et le champ de gravitation de cette perturbation. Au premier ordre, les équations de la mécanique des fluides et les équations de la gravitation newtonienne deviennent

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} P_1 + \vec{g}_1$$

et

$$\vec{\nabla} \times \vec{g}_1 = \vec{0} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4 \pi G \rho_1 .$$

On introduit la vitesse du son du fluide  $v_s$  [25]

$$v_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho_m} \sim \frac{P_1}{\rho_1} .$$

Combinant ces équations, on trouve l'équation de propagation suivante pour la densité

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = v_s^2 \vec{\nabla}^2 \rho_1 + 4 \pi G \rho_0 \rho_1 . \quad (\text{B.3})$$

Nous allons en déduire la relation de dispersion de ces petites perturbations.

## B.2 Relation de dispersion

Les ondes planes

$$\rho_1(\vec{q}, t) \propto \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{q} - \omega t)]$$

sont solutions de l'équation de propagation avec la relation de dispersion entre la pulsation  $\omega$  et le vecteur d'onde  $\vec{k}$

$$\omega^2 = \vec{k}^2 v_s^2 - 4 \pi G \rho_0 . \quad (\text{B.4})$$

On introduit le vecteur d'onde de Jeans

$$k_J = \frac{\sqrt{4 \pi G \rho_0}}{v_s}$$

qui est le vecteur d'onde pour lequel la pulsation  $\omega$  (B.4) s'annule. En introduisant la longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  et la longueur d'onde de Jeans

$$\lambda_J = \frac{2 \pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi v_s^2}{G \rho_0}}, \quad (\text{B.5})$$

on a

$$\omega^2 = 4 \pi v_s^2 \left( \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_J^2} \right). \quad (\text{B.6})$$

Pour les longueurs d'onde plus petites que la longueur d'onde de Jeans ( $\lambda < \lambda_J$ ), on a  $\omega^2 > 0$ . La perturbation varie sinusoidalement. Il n'y a pas formation de condensation.

Pour les longueurs d'onde plus grandes que la longueur d'onde de Jeans ( $\lambda > \lambda_J$ ), on a  $\omega^2 < 0$ . La perturbation croît exponentiellement avec le temps. Il y a donc formation de condensations.

Nous allons maintenant voir le cas des fluides homogènes isothermes.

### B.3 Instabilité dans les fluides homogènes isothermes

Des condensations se forment seulement à partir de perturbations ayant atteint une taille critique qui est la longueur de Jeans  $\lambda_J$ . Des perturbations sphériques se condensent si leur rayon  $Q$  est supérieur à  $\frac{\lambda_J}{2}$ . Considérons un milieu homogène isotherme composé par un gaz parfait de particules de masse  $m$  à la température  $T$ . La vitesse du son au carré est  $v_s^2 = \frac{T}{m}$  et la masse de la perturbation sphérique de rayon  $Q$  est  $M = m N = \frac{4 \pi Q^3}{3} \rho_0$ . D'après la relation (B.5), on en déduit, dans ce cas que la valeur de notre paramètre  $\eta^R = \frac{G m^2 N}{Q T}$  (1.17) est

$$\eta^R = \frac{4 \pi G \rho_0 Q^2}{3 v_s^2} = \frac{4}{3} \left( \frac{\pi Q}{\lambda_J} \right)^2. \quad (\text{B.7})$$

Des condensations sphériques se forment lorsque son rayon  $Q$  est supérieur ou égal à la moitié de la longueur de Jeans  $\lambda_J$ . D'après la relation (B.7), la valeur de  $\eta^R$  à partir de laquelle la perturbation se condense est

$$\eta_J = \frac{\pi^2}{3} = 3.29\dots \quad (\text{B.8})$$

Pour  $\eta^R < \eta_J$ , la perturbation oscille sinusoidalement, elle ne se condense pas. Pour  $\eta^R > \eta_J$ , la perturbation s'effondre sur elle même , il y a formation de condensation. La théorie linéaire de Jeans donne pour  $\eta^R$  la valeur d'instabilité  $\eta_J$  (B.8). La valeur du paramètre  $\eta^R$  pour laquelle la sphère isotherme collapse dans l'ensemble canonique est  $\eta_{can} = 2.43\dots$  (éq.(1.33)).

# Bibliographie

- [1] P.J.E.Peebles, The large scale structure in the universe, Princeton Univ. Press (1980).  
T.Padmanabhan, Structure formation in the universe, Cambridge Univ. Press (1993).  
J.A.Peacock, Cosmological Physics, Cambridge Univ. Press (1998).
- [2] J.Binney et S.Tremaine, Galactic Dynamics, Princeton Univ. Press (1988).
- [3] H.J.de Vega,N.Sánchez and F.Combes, Phys.Rev. D, **54**,6008 (1996).  
H.J.de Vega,N.Sánchez and F.Combes, Nature, **383**, 56 (1996).
- [4] R.Emden, Gaskugeln, Teubner, Leipzig und Berlin (1907).
- [5] S. Chandrasekhar, 'An introduction to the study of stellar structure', Chicago Univ. Press (1939).
- [6] H.J.de Vega et N.Sánchez, Nucl.Phys.B, **625**, 409 (2002).
- [7] H.J.de Vega et N.Sánchez, Nucl.Phys.B, **625**, 460 (2002).
- [8] H.J.de Vega et N.Sánchez, Nucl.Phys.B, **711**, 604 (2005).
- [9] R.Ebert, Z.Astrophys., **37**, 217 (1955).
- [10] W.B.Bonnor, MNRAS, **116**, 351, (1956).
- [11] V.A.Antonov, Vest.leningr.gos.Univ. **7**, 135 (1962).
- [12] D.Lynden-Bell et R.Wood, MNRAS, **138**, 495 (1968).  
D.Lynden-Bell et R.M.Lynden-Bell, MNRAS, **181**, 405 (1977).
- [13] G.Horwitz et J.Katz, Astrophys.J., **211**, 226 (1977).  
J.Katz, MNRAS, **183**, 765 (1978) et **189**, 817 (1979).
- [14] T.Padmanabhan, Phys.Rep., **188**, 285 (1991).
- [15] H.J.de Vega et J.A.Siebert, Phys. Rev.E, **66**, 016112 (2002).

- [16] P.J.E.Peebles, Principles of Physical cosmology, Princeton (1993).  
P.J.E.Peebles et B.Ratra, Revs. Mod. Phys. **75**, 559 (2003).
- [17] Phase transitions in the early universe : theory and observations, Ecole Internationale D.Chalonge, édité par H.J.de Vega, Isaak Khalatnikov et N.Sánchez, Kluwer Academic Publisher (2001).
- [18] S.Dodelson, Modern Cosmology, Academic Press (2003).
- [19] H.J. de Vega, J.A. Siebert, Nucl. Phys.B **707**, 529 (2005).
- [20] H.J. de Vega, J.A. Siebert, astro-ph/0410147.
- [21] R.B.Larson, MNRAS, **194**, 809 (1981).
- [22] J.M.Scalo, in Interstellar Processes, édité par D.J.Hollenbach et H.A.Thronson (Reidel, Dordrecht, 1987), p.349.
- [23] B.Mandelbrot, Les objets fractals, Flammarion (1975).
- [24] D.W.Hogg et al., astro-ph/0411197  
J.Yadav et al., astro-ph/, 0504315
- [25] L.Landau et E.Lifshitz, Mécanique des fluides, editions Mir, Moscou (1971).
- [26] S.Weinberg, Gravitation and cosmology, John Wiley and sons, New York (1972).
- [27] L.Landau et E.Lifshitz, Physique statistique, editions Mir, Moscou (1967).
- [28] J.Jeans, Phil. Trans. Roy. Soc., **199A**, 49 (1902).  
J.Jeans, Astronomy and Cosmology (seconde édition), Dover publications, New York (1961).
- [29] F.Hoyle, Astrophys.J., **118**, 513 (1953).
- [30] C.Hunter, Astrophys.J., **136**, 594 (1962).
- [31] B.Diu, C.Guthmann, D.Lederer et B.Roulet, Eléments de physique statistique, ed. Hermann, Paris(1989).
- [32] L.N.Lipatov, JETP, **45**, 216 (1977).
- [33] I.M.Gelfand et G.E.Shilov, Distribution Theory, Vol.1, Academic Press, New York, 1980.
- [34] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller. J. Chem. Phys., **21**, 1087 (1953).

- [35] K.Binder et D.W.Heerman, Monte Carlo simulations in Statistical Physics, Springer Series in Solid State, 80, 1988.
- [36] par exemple, W.Dehnen, MNRAS, **324**, 273 (2001).
- [37] A. Einstein, (1917) Sitz. Preuss. Akad. d. Wiss. Phys.-Math 142.
- [38] E.Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **15**, 198 (1929).
- [39] A.Friedman, Z.Phys. **10**, 377 (1922) et **21**, 326 (1924).
- [40] L.Landau et E.Lifshitz, Théorie des champs, éditions Mir, Moscou (1971).
- [41] F.Moutarde et al., ApJ, **382**, 377 (1991).
- [42] T.Büchert, MNRAS, **254**, 729 (1992).  
T.Büchert et J.Ehlers, MNRAS, **264**, 375 (1993).  
T.Büchert, MNRAS, **267**, 811 (1994).
- [43] N.Goldenfeld, Lectures on phase transitions and the renormalization group, ed. Addison-Wesley (1992).
- [44] J.H.Lane, Amer.J.Sci., **50**, 57 (1870).  
A.Ritter, Wiedemann Annalen, **5**, 543 (1878).  
W.Thomson, Phil. Mag., **22**, 287 (1887).
- [45] F.K.Liu, MNRAS, **281**, 1197 (1996).
- [46] M.Honda et Y.S.Honda, MNRAS, **341**, 164 (2003).









## Abstract

The self-gravitating systems are formed by particles interacting through gravity. They describe structure formation in the universe. As a consequence of the long range interaction of gravity, they are inhomogeneous even at thermal equilibrium. They can be in a gaseous phase or in a collapsed phase. We formulate the statistical mechanics of the self-gravitating systems. The thermodynamic limit where the number of particles  $N$  and the volume  $V$  tends to infinity with  $\frac{N}{V^{\frac{1}{3}}}$  fixed is relevant for the gaseous phase. The domains of stability of the gaseous phase are different in the microcanonical ensemble and in the canonical ensemble. The instability of the gaseous phase leads to its collapse into a phase of infinite density. In the thermodynamic limit, the mean field approach gives an exact description of the gaseous phase. After introducing the self-gravitating systems with one kind of particles (chapter 1 and 2), we study the self-gravitating systems with several kinds of particles (chapter 3) and the self-gravitating systems in the presence of the cosmological constant (chapter 4). We formulate for these two types of self-gravitating systems the statistical mechanics and the mean field approach describing the gaseous phase. We find the equation governing the density of particles. We explicitly compute thermodynamic quantities and find that they are extensive (proportional to  $N$ ). We obtain the domain of stability of the gaseous phase. In the self-gravitating systems with several kinds of particles the density of the light particles is flatter than the density of the heavy particles. Scaling exponent of the self-gravitating systems with several kinds of particles are computed. The cosmological constant acts as an uniform density of energy with a repulsive gravitational effect on the matter. The particle density is a decreasing (increasing) function of the radial distance when the self-gravity dominates over the cosmological constant (and vice-versa). Monte Carlo simulations show that the mean field describes the gaseous phase with an excellent accuracy. They allow to study the collapsed phase and confirm that the phase transition happens when the isothermal compressibility diverges. The presence of the cosmological constant extends the domain of stability of the gaseous phase.

## Résumé

Les systèmes autogravitants sont constitués de particules interagissant mutuellement par la gravité ; ils décrivent la formation de structures dans l'univers. Comme conséquence de l'interaction à longue portée, les systèmes autogravitants ne sont pas homogènes même à l'équilibre thermodynamique. Ils peuvent exister sous une phase gazeuse ou sous une phase collapsée. La mécanique statistique des systèmes autogravitants est présentée. La limite thermodynamique où le nombre de particules  $N$  et le volume  $V$  tendent vers l'infini avec  $\frac{N}{V^{\frac{1}{3}}}$  fini est pertinente pour décrire la phase gazeuse. Les domaines de stabilité de la phase gazeuse sont différents dans l'ensemble microcanonique et dans l'ensemble canonique ; l'instabilité de la phase gazeuse entraîne son collapse dans une phase de densité infinie. L'approche du champ moyen de la mécanique statistique décrit exactement la phase gazeuse dans la limite thermodynamique. Après avoir présenté les systèmes autogravitants ne comportant que des particules identiques (chapitre 1 et chapitre 2), nous avons étudié les systèmes autogravitants comportant plusieurs sortes de particules (chapitre 3) et les systèmes autogravitants en présence de la constante cosmologique (chapitre 4). Pour ces deux types de systèmes autogravitants, nous avons développé la mécanique statistique puis nous avons développé l'approche du champ moyen décrivant la phase gazeuse. Nous avons trouvé l'équation vérifiée par la densité de particules, nous avons explicitement calculé les grandeurs thermodynamiques et nous avons montré qu'elles sont extensives (elles sont proportionnelles au nombre de particules  $N$ ). Nous avons déterminé le domaine de stabilité de la phase gazeuse. Dans les systèmes autogravitants comportant plusieurs sortes de particules, la densité des particules légères est moins contrastée que la densité des particules lourdes. Nous avons calculé les exposants d'échelle des systèmes autogravitants comportant plusieurs sortes de particules. La constante cosmologique agit comme une densité d'énergie uniforme ayant un effet gravitationnel répulsif sur la matière. La densité de particules est une fonction décroissante (croissante) de la distance radiale lorsque l'autogravité domine la constante cosmologique (et vice-versa). Nous avons effectué des calculs Monte Carlo pour les systèmes autogravitants en présence de la constante cosmologique. Ils permettent d'étudier la phase collapsée ; ils confirment que la phase gazeuse est décrite avec une grande précision par le champ moyen et ils montrent que la transition vers la phase collapsée s'opère lorsque la compressibilité isotherme diverge. La présence de la constante cosmologique étend la stabilité de la phase gazeuse.