



Nouvelles variations sur des théorèmes d'Abel et Lie

Bruno Fabre

► **To cite this version:**

Bruno Fabre. Nouvelles variations sur des théorèmes d'Abel et Lie. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2000. Français. tel-00008886

HAL Id: tel-00008886

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00008886>

Submitted on 28 Mar 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nouvelles variations sur les théorèmes d'Abel et Lie

par *Bruno Fabre*

soutenue le 4 décembre 2000

devant un Jury composé de

C. Peskine (président)

D. Barlet (rapporteur)

M. Passare (rapporteur)

H. Skoda

P. Mazet

G. Henkin

Remerciements

Je remercie Messieurs Henkin et Mazet qui ont suivi mon travail durant ma thèse, m'ont encouragé et m'ont aidé dans la mise en forme de ce travail par leurs critiques. Je remercie Messieurs Peskine, Zak et Chardin pour les discussions enrichissantes qu'ils ont daigné m'accorder, m'apportant un jugement précieux dans le domaine de la géométrie algébrique, ainsi que M. Hénaut pour plusieurs discussions sur la théorie des tissus. Je suis reconnaissant à M. Passare et M. Skoda pour m'avoir permis d'exposer cette thèse à l'état d'ébauche dans leur séminaire aux universités de Stockholm et de Paris. Que mes collègues Dinh, Dingoyan, Rigat et Sarkis soient aussi chaleureusement remerciés pour l'ambiance de travail qui règne dans notre bureau. Enfin, je remercie Mme Orion, notre secrétaire, pour les excellentes conditions de travail au long de ces quatre années.

Table des Matières

0	Introduction	4
1	Généralisations du théorème d'Abel.	19
1.1	Les faisceaux de formes différentielles sur un espace analytique.	19
1.1.1	Sur les résidus de formes méromorphes	27
1.2	Préliminaires autour du théorème de Bézout; l'espace des paramètres T	33
1.3	Sur une généralisation du théorème d'Abel	36
1.3.1	Un calcul explicite de la transformée d'Abel d'une forme de degré maximal lorsque Y est intersection complète .	37
1.4	D'autres généralisations du théorème d'Abel	41
1.4.1	Transformation d'Abel par rapport à une sous-variété de T	41
1.4.2	Transformation d'Abel dans un ouvert T -concave . . .	42
1.4.3	Sur les pôles de la transformée d'Abel d'une forme méromorphe	44
1.4.4	Sur la transformation de Radon	45
1.4.5	La transformée d'Abel par rapport à diverses transformations projectives d'une variété fixée	46
2	Autour du théorème de Lie.	48
2.1	Le théorème de Lie généralisé.	48
2.1.1	Cas des courbes planes par rapport aux droites.	49
2.1.2	Cas des courbes de \mathbb{P}_N par rapport aux hyperplans. . .	50
2.1.3	Cas des courbes de \mathbb{P}_N par rapport aux hypersurfaces de degré k arbitraire.	51
2.1.4	Cas où est Y de dimension quelconque : prolongement de Y	51
2.1.5	Cas où Y est de dimension quelconque : prolongement de la forme ω	52
2.2	D'autres généralisations du théorème de Lie.	54

2.2.1	Sur la transformation de Radon.	55
2.2.2	Prolongement de la forme ω dans un domaine plus grand.	55
2.2.3	Transformation d'Abel sur une sous-variété de l'espace des paramètres T	56
2.2.4	Le théorème de Lie dans le cas d'une variété \mathcal{C}^∞	56
3	Le système différentiel d'Abel et ses variétés intégrales.	58
3.1	Cas des courbes.	60
3.1.1	Interprétation différentielle du théorème de Riemann- Roch	60
3.1.2	Cas des courbes planes.	65
3.1.3	Cas des courbes intersections complètes.	72
3.1.4	Cas des courbes canoniques.	72
3.2	Cas des intersections complètes de dimension quelconque.	73
3.3	Cas des variétés canoniques.	78
4	Sur le support des 0-cycles complets.	80
4.1	Cas des courbes: $n = 1$	80
4.2	Sur le supports des 0-cycles complets en dimension supérieure.	84
5	Appendice.	87
5.1	Formes lisses, holomorphes et méromorphes sur un espace analytique réduit de dimension pure.	87
5.2	Les tissus et le théorème d'Abel.	88
5.3	Anneaux et modules gradués.	89
5.4	Fonction de Hilbert d'un groupe de points.	91
5.5	Sur la puissance symétrique $Y^{(p)}$	91
5.6	Résidus et identité de Jacobi.	92
5.6.1	Résidu sur une hypersurface réduite.	92
5.6.2	Courant résiduel sur une intersection complète de codi- mension p	92
5.6.3	Résidu ponctuel	93
5.6.4	Identité de Jacobi	93
5.7	Théorème de Bézout	94
5.8	Application d'Abel-Jacobi	94

Chapitre 0

Introduction

(...) Et pourtant, tant est grande en mathématiques la puissance de l'idée, on rapprochera éternellement les noms d'Abel et de Galois de ceux des premiers mathématiciens de tous les temps

Sophus Lie

Les deux premières parties de ce mémoire cherchent à généraliser le théorème d'Abel et le théorème de Lie, ce dernier pouvant être considéré comme une réciproque du théorème d'Abel. La plus récente généralisation des théorèmes d'Abel et Lie peut être trouvée dans l'article d'Henkin et Passare intitulé "Abelian differentials on singular varieties and variations on a theorem of Lie-Griffiths" (Inv. Math., vol.135, 1999, [32]). Les jalons les plus importants dans les généralisations du théorème de Lie sont posés par Poincaré ([54]), Blaschke ([11]), Wirtinger ([62]), Griffiths ([23]), Henkin ([37]). Nous poussons la généralisation plus loin dans la même direction.

Commençons par quelques rappels généraux. On se placera toujours dans ce qui suit dans un espace projectif complexe. L'espace projectif complexe de dimension N se notera \mathbb{P}_N . On peut le voir comme l'espace des droites de \mathbb{C}^{N+1} passant par l'origine; un point de \mathbb{P}_N est donc défini par un élément d'une telle droite autre que l'origine, un multiplet (x_0, \dots, x_N) non nul, déterminé à un facteur multiplicatif non nul près; les x_i ($0 \leq i \leq N$) sont des *coordonnées homogènes* de ce point, noté $(x_0 : \dots : x_N)$. On a donc une projection $\pi : \mathbb{C}^{N+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_N$ définie par $\pi((x_0, \dots, x_N)) = (x_0 : \dots : x_N)$. Un ouvert U de \mathbb{P}_N sera un ensemble tel que $\pi^{-1}(U)$ soit ouvert pour la topologie d'espace vectoriel normé de \mathbb{C}^{N+1} . Les points de coordonnée x_0 non nulle pourront s'identifier à des points de \mathbb{C}^N en définissant

$$y_1 = x_1/x_0, \dots, y_N = x_N/x_0 \quad (0).$$

Les y_i seront alors appelés les *coordonnées affines* de ce point, l'ensemble des points vérifiant $x_0 = 0$ étant alors appelé *hyperplan à l'infini*. Plus

généralement, un *système de coordonnées homogènes* est un système de $N + 1$ formes linéaires indépendantes sur \mathbb{C}^{N+1} , qui correspond donc à une matrice $(N + 1) \times (N + 1)$ inversible de changement de coordonnées. A tout système de coordonnées homogènes on associe un système de coordonnées affines par la formule (0). Une sous-variété linéaire H de dimension p (ou p -plan) est définie par l'annulation de $N - p$ formes linéaires indépendantes; si $p = 1$, H sera une droite, si $p = 2$ un plan, si $p = N - 1$ un hyperplan. Tout hyperplan H est un hyperplan à l'infini dans un certain système de coordonnées homogènes; à un tel système de coordonnées on associe canoniquement une bijection $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{P}_N - H$ par une formule analogue à la formule (0); cette bijection, et parfois son image, sera appelée *carte affine*. Ces cartes munissent donc \mathbb{P}_N d'une structure de variété analytique; comme les changements de carte sont rationnels, il est raisonnable de dire qu'une forme holomorphe définie sur un ouvert de \mathbb{P}_N est *rationnelle* si son expression dans l'une des cartes affines est rationnelle¹.

Un sous-ensemble analytique X dans un ouvert U d'une variété analytique sera défini localement dans un voisinage ouvert U_x d'un point $x \in X$ par l'annulation d'un nombre fini de fonctions holomorphes dans U_x . Les fonctions holomorphes qui s'annulent sur X au voisinage de x définissent un idéal \mathcal{I}_x de \mathcal{O}_x (l'anneau des fonctions holomorphes au voisinage de x). Un vecteur v d'origine $x \in X$ est dit tangent à X (en x) si $f \in \mathcal{I}_x \Rightarrow df.v = 0$. L'ensemble des vecteurs tangents à X en x définit une sous-variété linéaire $T_x X$ de \mathbb{P}_N , qu'on appelle l'espace tangent à X en x . La limite inférieure des dimensions de ces espaces tangents dans tous les voisinages de x est la *dimension de X en x* , notée $\dim_x(X)$. Si $\dim_x(X) = \dim(T_x X)$, on dira que le point x est régulier; si $\dim_x(X) < \dim(T_x X)$, le point sera dit singulier. L'ensemble des points singuliers resp. réguliers se notera $Sing(X)$ resp. $Reg(X)$. On appellera *de Zariski* un ouvert de X dont le complémentaire est un sous-ensemble analytique (fermé) de X . Une propriété de $x \in X$ sera vérifiée pour x "générique" si elle est vérifiée pour x appartenant à un ouvert de Zariski de X . X est de dimension pure n si elle est de dimension n en tout point régulier (donc en tout point). X est dit irréductible si il ne s'écrit pas dans U comme réunion de deux sous-ensembles analytiques non vides distincts. Il est facile de voir que $Reg(X)$ est un ouvert de Zariski de X , qu'on peut munir d'une structure de variété analytique, d'après la version complexe du théorème des fonctions implicites. Deux sous-ensembles analytiques X et Y se coupent transversalement en un point $x \in X \cap Y$ si les espaces tangents $T_x X$ et $T_x Y$ se coupent transversalement, i.e. si

$$\dim(T_x X \cap T_x Y) = \max(\dim T_x X + \dim T_x Y - N, 0).$$

¹Par définition tout point de \mathbb{P}_N a au moins une coordonnée homogène x_j non nulle; c'est donc un point "fini" pour le système de coordonnées homogènes obtenu en échangeant x_0 et x_j , d'où un système de $N + 1$ cartes.

Sur une variété analytique, on peut définir le fibré vectoriel analytique tangent T ; une q -forme (lisse, régulière, ...) est alors une section (lisse, régulière, ...) du fibré $\Lambda^q(T^*)$. On peut définir plus généralement sur un sous-ensemble analytique X différents faisceaux de formes qui nous seront utiles : les formes lisses, régulières, méromorphes, de Barlet (ou abéliennes; le terme de forme abélienne sera plutôt utilisé sur des variétés projectives). Une forme est donc lisse (resp. régulière,...) sur X si elle est lisse (resp. régulière,...) au voisinage de tout point de X . Il reste à expliciter la définition locale des formes lisses (resp. régulières,...).

Commençons par la définition des formes lisses. Une forme ω sera dite lisse en $x \in X$ si elle s'écrit dans un voisinage ouvert $U_x \cap X$ de x dans X comme la restriction à X d'une forme lisse ω' dans un voisinage ouvert U_x de x dans U . Une forme lisse sera dite régulière (ou holomorphe) en x si dans la définition précédente on peut choisir ω' holomorphe. Deux formes seront considérées comme identiques si elles sont identiques sur un ouvert dense de Zariski de X . Une forme *génériquement régulière* est une forme régulière en dehors d'un sous-ensemble analytique fermé $V \subset X$ d'intérieur vide. Une telle forme sera dite méromorphe si en tout point $x \in V$, il existe une fonction régulière en x telle que $f\omega$ soit régulière en x . Là encore, deux formes méromorphes seront considérées comme identiques si elles sont égales sur un ouvert dense de Zariski (et donc sur la partie de $Reg(X)$ où elles sont toutes deux régulières).

D'après [38], on peut associer à une forme méromorphe ω sur X un courant sur U (i.e. une forme linéaire continue sur l'espace des formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans U , soit l'espace des *formes test*) noté $\omega \wedge [X]$ et défini par la formule:

$$\omega \wedge [X](\phi) = (\omega \wedge [X], \phi) = \int_X \omega \wedge \phi.^2$$

L'opérateur $\bar{\partial} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \wedge d\bar{z}_i$ est défini sur l'espace des formes test. Si le courant $\omega \wedge [X]$ (bien défini car ω est méromorphe) est $\bar{\partial}$ -fermé, i.e. si $\omega \wedge [X](\bar{\partial}\phi) = 0$ pour toute forme test ϕ , la forme méromorphe ω sera dite de Barlet (ou abélienne) sur X . Toute forme régulière est de Barlet, et toute forme de Barlet est régulière sur $Reg(X)$.

Soit Y un sous-ensemble analytique fermé de \mathbb{P}_N . Un théorème de Chow, montre que Y peut être définie globalement comme le lieu des zéros d'un nombre fini de polynômes homogènes f_1, \dots, f_M . Les équations $f_1 = 0, \dots, f_M =$

²La signification de cette intégrale est non triviale, car $\omega \wedge \phi$ n'est pas en général dans L^1 sur $Reg(X)$, et de plus le support de ϕ peut intersecter $Sing(X)$. Nous expliquerons plus en détail au chapitre suivant comment, grâce à Herrera, on peut tout de même donner un sens à cette intégrale lorsque ω est méromorphe, même lorsque X est singulière.

0 forment alors un *système d'équations homogènes* de Y . On dira que Y est une variété projective (ou algébrique) de \mathbb{P}_N . La forme ω génériquement régulière sera dite rationnelle si elle s'écrit comme restriction à Y d'une forme rationnelle dans l'espace projectif. Le même théorème de Chow énonce que toute forme méromorphe sur Y est rationnelle.

Nous donnons ci-après les énoncés des deux théorèmes d'Abel et de Lie dans la forme qui nous permettra de les généraliser.

Une droite de \mathbb{P}_2 admet une équation homogène de la forme $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, le point $(a_0 : a_1 : a_2)$ détermine biunivoquement cette droite, et l'ensemble des droites de \mathbb{P}_2 est donc également un espace projectif, que l'on notera \mathbb{P}_2^* . Sur les droites ne passant pas par le point $(0 : 1 : 0)$, i.e. vérifiant $a_1 \neq 0$, on introduit les coordonnées affines $a = -a_2/a_1, b = -a_0/a_1$; on note $\Delta_{a,b}$ la droite d'équation $x_1 = a.x_2 + b.x_0$, soit $x = ay + b$ avec $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$.

Soit Y une courbe algébrique de degré d du plan \mathbb{P}_2 , éventuellement singulière et/ou réductible. Si l'on choisit bien les coordonnées homogènes x_0, x_1, x_2 , on peut supposer que la courbe Y n'a pas de composante parallèle aux axes; de plus, qu'elle ne passe pas par le point $(0 : 1 : 0)$. Dans la carte affine associée, de coordonnées $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$, l'équation de Y est de la forme : $f(x, y) = 0$, où f est un polynôme de degré d sans facteurs multiples, et dont le coefficient en x^d est non nul. De plus, les fonctions $\partial_x f(x, y)$ ou $\partial_y f(x, y)$ ne s'annulent identiquement sur aucune composante de Y .

De l'équation $\partial_x f \cdot dx + \partial_y f \cdot dy = 0$ sur Y on déduit que les 1-formes rationnelles s'écrivent sur Y :

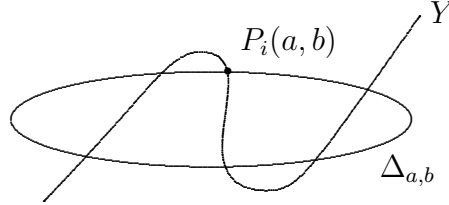
$$\omega = \frac{p(x, y)}{\partial_y f} dx = -\frac{p(x, y)}{\partial_x f} dy$$

avec pour $p(x, y)$ une fonction rationnelle arbitraire. On verra dans le prochain chapitre que les 1-formes abéliennes sur Y sont les formes qui s'écrivent sous la forme précédente avec pour $p(x, y)$ un polynôme de degré $\leq d-3$. La droite $\Delta_{a,b}$ intersecte alors Y en d points distincts finis,

$$P_i(a, b) = (x_i = ay_i + b, y_i), i = 1, \dots, d$$

pour toutes les valeurs de (a, b) n'annulant pas le discriminant $\Delta(a, b)$ du polynôme en y $f(a.y + b, y)$ ni son coefficient en y^d , les y_i étant alors les d racines distinctes de ce polynôme (remarquons que si le polynôme admet plus de d racines avec multiplicités, il s'annule identiquement, ce qui signifie que la droite $\Delta_{a,b}$ est contenue dans Y). L'ensemble U_Y des droites qui rencontrent Y en d points distincts est donc le complémentaire d'une courbe algébrique de \mathbb{P}_2^* (d'équation $\Delta(a, b) = 0$). Les droites de U_Y coupent Y transversalement; en particulier, les points d'intersections $P_i(a, b)(i = 1, \dots, d)$ sont réguliers

sur Y . Soit $\Delta_{a_0, b_0} \in U_Y$; alors on peut choisir la carte affine de \mathbb{P}_2 de sorte que les points d'intersection de Δ_{a_0, b_0} et de Y soient finis et définir dans un voisinage U de (a_0, b_0) d applications holomorphes $P_i(a, b) = (x_i(a, b) = a.y_i(a, b) + b, y_i(a, b))$ ($1 \leq i \leq d$) de U dans Y paramétrant les d points d'intersections de la droite $\Delta_{a, b}$ avec Y .



Considérons une 1-forme $\omega = r(x, y)dx$ génériquement régulière sur Y . On notera alors $P_i^*(\omega)$ ou $\omega(P_i(a, b)) = r(x_i(a, b), y_i(a, b))d(x_i(a, b))$ l'image réciproque de ω par l'application P_i . Nous appellerons *transformée d'Abel* de ω ³ et nous noterons $\mathcal{A}(\omega)$ la forme différentielle génériquement régulière définie sur U_Y par $\mathcal{A}(\omega) = \sum_{i=1}^d \omega(P_i(a, b)) = s_1(a, b)da + s_2(a, b)db$, où s_1 et s_2 sont holomorphes sur U_Y en dehors d'un nombre fini de droites. Alors :

Théorème d'Abel

Si ω est rationnelle, $\mathcal{A}(\omega)$ est rationnelle, i.e. $s_1(a, b)$ et $s_2(a, b)$ sont rationnelles. De plus, si ω est abélienne, $\mathcal{A}(\omega)$ est nulle.

La première assertion découle très simplement du fait galoisien qu'une fonction rationnelle symétrique des racines de l'équation (en y) $f(a.y+b, y) = 0$ est une fonction rationnelle des coefficients de cette équation. La deuxième découle de la forme explicite des formes abéliennes données ci-dessus, ainsi que de l'identité de Jacobi (cf.[42]) :

Identité de Jacobi

Dans \mathbb{C}^2 , soit g_1, g_2 2 polynômes de degrés respectifs s_1, s_2 s'annulant en $s = s_1 s_2$ points P^ν ($1 \leq \nu \leq s$) distincts (et uniquement en ces points). Soit $K(x, y)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $s_1 + s_2 - 3$. Alors :

$$\sum_{\nu=1}^s \frac{K(x, y)}{\det\left(\frac{D(g_1, g_2)}{D(x_1, x_2)}\right)}(P^\nu) = 0.$$

Les théorèmes de Poincaré-Blaschke et de Henkin ci-après nous permettent d'inverser le théorème d'Abel.

Supposons donnés un hyperplan $H_{t_0} \subset \mathbb{P}_N, t_0 \in \mathbb{P}_N^*$, d points distincts P_i^0 ($1 \leq i \leq d$) sur H_{t_0} et d germes irréductibles de courbes holomorphes (P_i^0, Y_i) coupant cet hyperplan transversalement, sur chacun desquels est

³Griffiths appelle aussi *trace* de ω la transformée d'Abel de ω . Nous réservons ici le terme de trace pour l'image directe d'une forme par un morphisme fini.

définie une forme holomorphe *non nulle* ω (on peut désigner les formes par le même nom car on peut supposer les Y_i disjoints). On peut définir d applications analytiques $P_i : U \rightarrow Y_i$ dans un voisinage ouvert $U \subset \mathbb{P}_N^*$ de t_0 et la *transformée d'Abel* de ω par la formule précédente : $\mathcal{A}(\omega) = \sum_{i=1}^d P_i^*(\omega)$. On peut alors énoncer :

Théorème de Poincaré-Blaschke ([54],[10])

Si $\mathcal{A}(\omega) = 0$, les Y_i appartiennent à une même courbe algébrique $\underline{Y} \subset \mathbb{P}_N$ de degré d et ω se prolonge de manière unique en une forme abélienne $\underline{\omega}$ sur \underline{Y} .

Le théorème a été démontré par Blaschke pour $N = 2$ dans [10]. Henkin a généralisé le théorème au cas où on suppose seulement la transformée d'Abel rationnelle dans [33] ou [37]; il a aussi fait ressortir que les formes de transformée d'Abel nulle sont précisément les formes abéliennes ⁴.

Le théorème de Poincaré-Blaschke appliqué au cas $d = 2N$ permet de démontrer le théorème suivant, d'après Saint-Donat ([58]) et Little (cf.[47]) :

Théorème de Lie-Wirtinger ([45],[62])

Soit V un germe d'hypersurface analytique régulière dans \mathbb{C}^σ , centré à l'origine, qui admet une double représentation comme hypersurface de translation, i.e. on a sur V :

$$z_1 = \sum_{\lambda=1}^{\pi-1} f_{1,\lambda}(t_\lambda) = - \sum_{\lambda=\pi}^{2\pi-2} f_{1,\lambda}(t_\lambda)$$

...

$$z_\pi = \sum_{\lambda=1}^{\pi-1} f_{\pi,\lambda}(t_\lambda) = - \sum_{\lambda=\pi}^{2\pi-2} f_{\pi,\lambda}(t_\lambda)$$

où les $f_{\lambda,i}(1 \leq i \leq \pi, 1 \leq \lambda \leq 2\pi - 2)$ sont des applications analytiques du disque unité $\Delta \subset \mathbb{C}$, vérifiant $f_{i,\lambda}(0) = 0$. Alors on peut définir $2\pi - 2$ germes de courbes $Y_j(1 \leq j \leq 2\pi - 2)$ paramétrés par

$$Y_j : t_j \mapsto (f'_{1,j}(t_j) : \dots : f'_{\pi,j}(t_j))(1 \leq j \leq 2\pi - 2).$$

On suppose que les vecteurs $(f'_{1,i}(0), \dots, f'_{\pi,i}(0))(1 \leq i \leq 2\pi - 2)$ sont deux à deux linéairement indépendants et que les vecteurs $(f''_{1,i}(0), \dots, f''_{\pi,i}(0))(1 \leq i \leq 2\pi - 2)$ ne sont pas tangents à V . Alors ces $2\pi - 2$ germes de courbes Y_j font partie d'une même courbe algébrique Y et pour chaque $i(1 \leq i \leq \pi)$ les $f'_{i,j} dt_j(1 \leq j \leq 2\pi - 2)$ se recollent en une même 1-forme abélienne ω_i sur

⁴Il appelle "holomorphes" les formes que nous appelons de Barlet ou abéliennes.

Y ⁵. D'après la première condition, on peut exprimer sur V au voisinage de 0 les t_i comme des fonctions du point $z \in V$, qu'on notera $t_i(z)$. Supposons de plus que si l'on fixe t_j ($2 \leq j \leq \pi - 1$) et que l'on varie t_1 , de sorte que l'on obtient une courbe $x(t_1) \subset V$, aucun des t_j ($\pi \leq j \leq 2\pi - 2$) ne reste constant sur cette courbe. Alors les π 1-formes ω_i ($1 \leq i \leq \pi$) forment une base de l'espace vectoriel des 1-formes abéliennes sur cette courbe algébrique Y ⁶. De plus V est inclus dans l'ensemble des zéros d'une fonction thêta associée à la courbe algébrique Y .

Lie a démontré le premier l'énoncé précédent pour $\pi = 3$ d'une manière assez compliquée, en utilisant des équations aux dérivées partielles (cf. [45]), puis il a traité partiellement le cas $\pi = 4$. Darboux en a simplifié la démonstration dans le cas $\pi = 3$ (cf.[17]) en introduisant l'équation des "ondes de choc" $\frac{\partial \tau}{\partial q} = \tau \frac{\partial \tau}{\partial p}$ qui jouera un grand rôle par la suite dans les travaux de Henkin sur le sujet. Wirtinger ([62]) en a par la suite trouvé une démonstration pour toute les valeurs de π . Poincaré a le premier fait ressortir que le théorème ci-dessus découle d'un cas particulier du théorème qui le précède (cf. [54]); il a aussi remarqué (cf. [53]) que le corollaire précédent permet, grâce à un théorème de Riemann, de caractériser parmi les fonctions thêta celles dont les périodes proviennent de courbes algébriques comme celles dont l'ensemble des zéros a la propriété de double translation, donnant une réponse au problème de Schottky, qui est le problème général de la caractérisation des jacobiniennes de courbes algébriques parmi les variétés abéliennes (pour des détails cf. Little [47]). Saint-Donat a de plus remarqué que l'énoncé précédent admet comme corollaire le théorème de Torelli suivant lequel deux surfaces de Riemann compactes non hyperelliptiques sont isomorphes ssi il existe un isomorphisme entre leurs variétés jacobiniennes qui transporte le diviseur thêta de l'une sur le diviseur thêta de l'autre (on peut ainsi voir que le théorème de Torelli reste valable pour les courbes singulières et/ou réductibles qui sont telles que la paramétrisation du diviseur thêta- plus exactement de son relèvement à \mathbb{C}^π , en normalisant de sorte à ce que l'hypersurface associée passe par l'origine- sous la forme ci-dessus, est unique à permutation près des termes dans la somme).

Le théorème de Poincaré-Blaschke a également des applications dans la théorie des tissus. Pour introduire à ces applications, nous renvoyons au troisième chapitre ("Abel's Theorem in der Gewebegeometrie") du livre de

⁵Les deux conditions ci-dessus signifient resp. que si H_0 est l'hyperplan de $\mathbb{P}_{\pi-1}$ correspondant à l'espace tangent à V en 0 , alors les points $(f'_{1,i}(0) : \dots : f'_{\pi,i}(0))$ ($1 \leq i \leq 2\pi - 2$) sont distincts sur H_0 et H_0 coupe les Y_j transversalement.

⁶Les 1-formes abéliennes sur Y s'identifient alors de façon naturelle aux formes linéaires sur $\mathbb{P}_{\pi-1} : Y$ est linéairement normale et $\omega_Y^1 \simeq \mathcal{O}_Y(1)$. On dit alors que la courbe Y est une courbe *canonique*. La dernière condition nous permet d'éviter par exemple que Y soit la projection d'une courbe canonique appartenant à un $\mathbb{P}_k, k > \pi - 1$ (cf.[47]).

Blaschke et Bol intitulé "Geometrie der Gewebe" (cf.[10]), où l'on peut trouver la démonstration du théorème de Poincaré-Blaschke. Nous renvoyons aussi à l'article de Hénaut (cf. [31]) et à l'exposé de Beauville dans le séminaire Bourbaki (cf. [7]). Nous donnons quelques notions de base sur les tissus dans l'Appendice. Le théorème de Poincaré-Blaschke implique que tout tissu linéaire ayant une relation abélienne est algébrique. Il y a dans le cas des courbes un isomorphisme entre l'espace des relations abéliennes du tissu associé et l'espace des formes abéliennes sur la courbe (cf. [31]). On peut montrer (cf.[10]) que tout d -tissu de codimension 1 dans \mathbb{C}^N admet au plus $\pi(d, N) = (d - N) + (d - 2N + 1) + (d - 3N + 2) + \dots$ relations abéliennes (on arrête la somme lorsque les termes ne sont plus positifs). Chern et Griffiths (cf. [25]) ont montré que si $N \geq 3$, tout d -tissu de codimension 1 dans \mathbb{C}^N de rang maximal $\pi(d, N)$ et vérifiant certaines conditions de "position générale" est linéarisable, donc algébrique d'après le théorème de Poincaré-Blaschke. D'autre part, il existe des courbes irréductibles de degré d non dégénérées et de genre arithmétique $\pi(d, N)$ ⁷ dans \mathbb{P}_N : ce sont les *courbes de Castelnuovo*. Ciliberto a montré dans [14] que toute courbe de Castelnuovo lisse admet une unique série linéaire de degré d et de dimension N , la série définie par les sections hyperplanes. Peut-être reste-t-il encore à mettre à jour tous les liens qui existent entre ces deux résultats.

Les théorèmes de Poincaré-Blaschke et Henkin admettent des généralisations lorsque Y est de dimension arbitraire; le cas de la transformée d'Abel nulle a été traité par Griffiths, puis le cas de la transformée d'Abel rationnelle est le sujet de l'article déjà cité d'Henkin et Passare (cf.[32]). A notre tour nous généralisons l'énoncé de Henkin et Passare. Le théorème suivant se ramène à celui de Henkin et Passare lorsque tous les k_i sont égaux à 1. Si tous les k_i sont égaux entre eux, on peut se ramener au "cas linéaire" étudié par Henkin et Passare par l'application de Veronese; dans le cas contraire, la généralisation est non triviale. On se fixe un *multidegré*, i.e. un ensemble de n entiers k_1, \dots, k_n , que l'on peut supposer rangés dans l'ordre croissant : $k_1 \leq \dots \leq k_n$, et on considère un système de n équations homogènes :

$$Q_1 = 0, \dots, Q_n = 0, \deg(Q_i) = k_i, 1 \leq i \leq n$$

Les coefficients du polynôme Q_i définissent un point t_i d'un espace projectif \mathbb{P}_{N_i} ; on pose $H_{t_i} = \{Q_i = 0\}$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in T = \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$, $H_t = H_{t_1} \cap \dots \cap H_{t_n}$. Soit Y une variété algébrique de dimension pure n de \mathbb{P}_N . Comme on le verra dans le chapitre suivant, pour tout t dans un ouvert de Zariski U_Y de T , H_t coupe Y en exactement kd points distincts (qui sont nécessairement réguliers sur Y) avec $k = k_1 \dots k_n$ et d un entier

⁷Le genre arithmétique est ici la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel des 1-formes abéliennes.

qu'on appellera le degré de Y . De plus on peut définir dans un voisinage U_t de tout point $t = (t_1, \dots, t_n) \in U_Y$ kd applications holomorphes $P_i (1 \leq i \leq kd)$ de U_t dans Y , telles que $\{P_i(t)\} = H_{t_1} \cap \dots \cap H_{t_n} \cap Y$. Soit ω une q -forme régulière sur un ouvert de Zariski $Y - W$ de Y , avec $1 \leq q \leq n$. On définit la transformée d'Abel $\mathcal{A}(\omega) = \sum_{i=1}^{kd} P_i^*(\omega)$, qui est régulière au voisinage de tout $t \in U_Y$ tel que H_t ne rencontre pas W . Alors :

Théorème d'Abel généralisé

Pour que $\mathcal{A}(\omega)$ soit rationnelle sur T , il est nécessaire et suffisant que ω soit rationnelle sur Y . Pour que $\mathcal{A}(\omega)$ soit holomorphe sur T (i.e. nulle, car T n'a pas de q -forme holomorphe pour $q \geq 1$), il est nécessaire et suffisant que ω soit abélienne sur Y .

On peut comme dans le cas des courbes planes donner de la suffisance une démonstration qui repose sur la théorie de Galois pour le cas rationnel, et sur l'identité de Jacobi (cf. Appendice) pour le cas abélien.

Nous pouvons encore généraliser le théorème d'Abel, suivant la méthode de Henkin. Appelons T -concave un ouvert U de \mathbb{P}_N réunion des variétés algébriques H_t pour t appartenant à un ouvert connexe $U^* \subset T$. On considère Y un sous-ensemble analytique de U de dimension pure n .

Tout t d'un ouvert de Zariski U_Y de U^* coupe Y transversalement en un nombre constant α de points distincts. On peut donc définir localement dans un voisinage ouvert U_t de tout point $t \in U_Y$ α applications analytiques $P_i : U_t \rightarrow Y (1 \leq i \leq \alpha)$ telles que

$$\{P_1(t), \dots, P_\alpha(t)\} = H_t \cap Y.$$

Si ω est une forme holomorphe sur un ouvert de Zariski $Y - W$ de $Reg(Y)$, on définit sa transformée d'Abel par

$$\mathcal{A}(\omega) = P_1^*(\omega) + \dots + P_\alpha^*(\omega)$$

qui est visiblement holomorphe sur un ouvert de Zariski $U_{Y-W} \subset U_Y$ de T .

Théorème 1 *Pour que $\mathcal{A}(\omega)$ soit méromorphe (resp. holomorphe) sur T , il est nécessaire et suffisant que ω soit méromorphe (resp. de Barlet) sur Y .*

Nous indiquerons à la fin du deuxième chapitre d'autres généralisations possibles du théorème d'Abel.

On peut "inverser" le théorème d'Abel (généralisé) de la manière suivante. On reprend les notations précédentes : on note H_{t_i} l'hypersurface définie par $Q_{t_i} = 0, t_i \in \mathbb{P}_{N_i}, t = (t_1, \dots, t_n)$ et $H_t = H_1 \cap \dots \cap H_n$. Donnons-nous n équations

$$Q_{t_1^0} = 0, \dots, Q_{t_n^0} = 0, \deg(Q_{t_i^0}) = k_i, 1 \leq i \leq n$$

définissant une intersection complète réduite H_{t^0} . On se donne α points distincts $p_i^0 (1 \leq i \leq \alpha)$ sur H_{t^0} puis α germes de sous-ensembles analytiques

de dimension n (p_i^0, Y_i), chaque Y_i coupant H_{t^0} transversalement au point p_i^0 ; on se donne aussi pour chaque i ($1 \leq i \leq \alpha$) une q -forme méromorphe *non nulle* ω_i sur Y_i ($1 \leq q \leq n$). On peut alors définir dans un voisinage U_{t^0} de $t^0 \in T$ α applications $P_i(t)$ ($1 \leq i \leq \alpha$) telles que $H_t \cap Y = \{P_i(t)\}$ et une q -forme méromorphe sur U_{t^0} :

$$\mathcal{A}(\omega) = P_1^*(\omega_1) + \dots + P_\alpha^*(\omega_\alpha).$$

Alors on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 2 *Si $\mathcal{A}(\omega)$ est rationnelle, alors*

1. α est un multiple de $k = k_1 \dots k_n$; posons $\alpha = kd$.
2. $Y = \cup_{i=1}^{kd} Y_i$ est incluse dans une variété algébrique $\underline{Y} \subset \mathbb{P}_N$ de degré d .
3. ω se prolonge à \underline{Y} en une forme rationnelle $\underline{\omega}$. De plus si $\mathcal{A}(\omega)$ est nulle, $\underline{\omega}$ est abélienne.

Pour la démonstration de ce théorème, nous nous ramenons en faisant baisser la dimension de Y par des sections au théorème de Henkin dans le plan dont la démonstration se trouve dans [33].

On peut "inverser" le théorème d'Abel d'une autre manière; c'est ce qui fera l'objet de la troisième partie de ce mémoire. La notion de *0-cycle* va nous permettre de présenter les choses de façon plus condensée. Un *0-cycle* effectif de degré p est intuitivement un p -uplet (P_1, \dots, P_p) auquel on a enlevé l'ordre des points; on le notera $P_1 + \dots + P_p$, et son *support* est l'ensemble $\{P_1, \dots, P_p\}$.

Soit Y une variété algébrique irréductible de dimension pure n dans \mathbb{P}_N . L'ensemble des *0-cycles* effectifs de degré p sur Y s'identifie d'après ce qui précède au quotient de Y^p par l'action du groupe des permutations \mathcal{S}_p . On peut mettre en bijection de façon naturelle cet ensemble avec une variété algébrique $Y^{(p)}$ d'un espace projectif complexe \mathbb{P}_M , qui est la variété quotient de Y^p par \mathcal{S}_p ; on a alors un morphisme fini $Y^p \rightarrow Y^{(p)}$ (cf. Appendice). Une famille analytique (locale) V (de degré p et de dimension s) de *0-cycles* de Y est un germe de sous-ensemble analytique irréductible (de dimension s) de $Y^{(p)}$. Soit ω une forme (différentielle) rationnelle sur Y . Alors $\sum_{i=1}^p \pi_i^*(\omega)$ est une forme rationnelle sur Y^p ; elle est invariante par l'action du groupe symétrique et définit donc une forme rationnelle $\tilde{\omega}$ sur $Y^{(p)}$. Si pour toute forme abélienne ω sur Y , la restriction de $\tilde{\omega}$ à V est nulle, V s'appellera une variété intégrale abélienne (v.i.a.). Une v.i.a. sera dite *complète* si elle n'est pas contenue dans une v.i.a. de dimension supérieure. D'après le théorème d'Abel généralisé, n équations de degrés resp.

k_1, \dots, k_n définissent une v.i.a. (pas forcément complète) dans $Y^{(kd)}$ avec $k = k_1 \dots k_n$. Réciproquement, toute v.i.a. de degré et dimension donnés peut-elle être décrite géométriquement comme intersection de Y avec une famille de variétés algébriques de dimension complémentaire ?

Supposons d'abord que Y est une courbe algébrique. Dans le cas où Y est une courbe lisse, on verra que les v.i.a. complètes de degré p et de dimension s se prolongent et forment des sous-variétés analytiques globales de $Y^{(p)}$; ce sont des *séries linéaires complètes* (de degré p et de dimension s) suivant la terminologie classique en géométrie algébrique. On continuera d'employer le mot série linéaire dans le cas où la courbe Y est singulière, dans un sens plus fort que le sens utilisé parfois. Une famille rationnelle de 0-cycles est donnée par l'adhérence dans $Y^{(p)}$ de l'image d'une application rationnelle $\mathbb{P}_k \rightarrow Y^{(p)}$. Une série linéaire est une famille rationnelle qui est en même une v.i.a. (Une famille rationnelle détermine une variété intégrale pour le système obtenu avec les formes finies -ou L^2 - mais pas toujours pour le système obtenu à partir des formes abéliennes lorsque Y est singulière). Deux 0-cycles seront *linéairement équivalents* si ils appartiennent à une même série linéaire, ou ce qui revient au même, comme on le verra par la suite, à une même v.i.a.. Le théorème 4 se reformule dans le cas des courbes planes en disant qu'il y a sur une courbe plane de degré d une unique série linéaire de degré d et de dimension 2, la série des sections de Y par les droites du plan, et que cette série linéaire est complète. Dans le cas des courbes planes on démontrera dans ce même chapitre des résultats plus précis sur la description géométrique des série linéaires complètes de degré et dimension donnés, grâce au *caractère numérique* d'un groupe de points, objet introduit par Gruson et Peskine (cf.[51]).

Théorème 3 *Soit $Y \subset \mathbb{P}_2$ une courbe algébrique irréductible de degré d , $\Gamma \in Y^{(\alpha)}$ un 0-cycle de degré α à support dans la partie régulière. Posons $\alpha = kd - r$, où $r < d$, et $[\Gamma]$ la série linéaire complète passant par Γ . Alors $\dim([\Gamma]) \leq s(\alpha)$, où $s(\alpha) = k(k+3)/2 - r$ si $r \leq k+1$, et $s(\alpha) = (k-1)(k+2)/2$ si $r \geq k+2$. De plus,*

1. *Si $r \leq k$, $\dim([\Gamma]) = s(\alpha) = k(k+3)/2 - r$ si, et seulement si Γ est contenu dans une courbe H de degré k , i.e. si il existe un groupe de points Γ' de degré r (qui est alors unique) tel que $[\Gamma]$ est la série linéaire résiduelle de Γ' par rapport aux courbes de degré k passant par Γ' . $[\Gamma]$ est alors sans point fixe.*
2. *Si $r = k+1$, $\dim([\Gamma]) = s(\alpha) = (k-1)(k+2)/2$, dans deux (et seulement deux) cas :*
 - i) *Dans le premier cas, Γ contient l'intersection Γ'' de Y avec une courbe de degré $k-1$; le groupe de points résiduel $\Gamma' = \Gamma - \Gamma''$ est la partie fixe de la série $[\Gamma]$;*

ii) Dans le second cas, Γ est contenu dans une courbe H de degré k , et il existe un groupe de points Γ' non aligné de degré r (qui est alors unique) tel que $[\Gamma]$ est la série linéaire résiduelle de Γ' par rapport aux courbes de degré k passant par Γ' . $[\Gamma]$ est alors sans point fixe.

3. Si $r \geq k + 2$, $\dim([\Gamma]) = s(\alpha) = (k - 1)(k + 2)/2$, si, et seulement si $\Gamma = \Gamma''' + \Gamma''$ où Γ''' est l'intersection de Y avec une courbe de degré $k - 1$. Alors $[\Gamma]$ contient comme points fixes le groupe de points $\Gamma'' \subset \Gamma$.

On a aussi quelques résultats en dimension supérieure sur la description géométrique des v.i.a.; le théorème suivant peut donc être considéré comme une forme réciproque du théorème d'Abel généralisé, dans le cas où Y est une hypersurface et tous les k_i ($1 \leq i \leq n$) sont égaux à 1; il a été énoncé par Griffiths (cf.[23]) dans le cas $n = 2, d = 5$ sans démonstration :

Théorème 4 Soit $Y \subset \mathbb{P}_{n+1}$ une hypersurface algébrique irréductible de degré $d \geq n + 3$. Soit H^0 une droite de \mathbb{P}_{n+1} coupant Y transversalement, et $\Gamma = Y \cap H^0 \in Y^{(d)}$. Alors les droites H d'un voisinage de H^0 définissent une v.i.a. complète en Γ . Réciproquement, considérons une famille analytique de 0-cycles $V \subset Y^{(d)}$ de dimension $\geq n + 1$. Si la famille est abélienne et vérifie certaines conditions de position générale, les éléments de cette famille sont alignés. En particulier, les sections de Y par les droites définissent l'unique v.i.a. de dimension $2n$ telle que les "biprojections" soient ouvertes (cette condition sera expliquée ultérieurement); et cette v.i.a. est complète.

Remarquons que Hénaut (cf. [31]) a montré pour les d -tissus de codimension n de \mathbb{C}^{2n} dont le n -rang est maximal un résultat analogue à celui de Chern et Griffiths pour les d -tissus normaux de codimension 1 et de 1-rang maximal $\pi(d, N)$ dans \mathbb{C}^N . Il a montré en effet :

Tout tissu de degré d et de codimension n dans \mathbb{C}^{2n} dont le n -rang est maximal (donc égal à C_{d-1}^{n+1}) est linéarisable (donc algébrisable d'après le théorème de Griffiths).

Il est remarquable que l'on puisse énoncer un théorème analogue à celui de Ciliberto, lorsqu'on peut énoncer un théorème analogue à celui de Chern-Griffiths.

Ce théorème sera "généralisé" au cas où Y est une intersection complète de type (d_1, \dots, d_m) dans \mathbb{P}_{n+m} avec $d_1 + \dots + d_m = n + m + 2$. La condition $d_1 + \dots + d_m = n + m + 2$ vient du fait qu'en codimension $m \geq 2$, des difficultés apparaissent dans la démonstration si $d_1 + \dots + d_m > n + m + 2$, que nous n'avons pas réussi à surmonter jusqu'à maintenant.

Théorème 5 Soit Y une intersection complète irréductible, de multidegré (d_1, \dots, d_m) , réduite (i.e. de degré $d = d_1 \dots d_m$) dans \mathbb{P}_{n+m} , avec $d_1 +$

$\dots + d_m = n + m + 2$. Soit $\Gamma = P_1 + \dots + P_d$, où les $P_i (1 \leq i \leq d)$ sont des points lisses distincts sur Y . Si il passe par $\Gamma \in Y^{(d)}$ une v.i.a. V de dimension supérieure à $n + m$ vérifiant certaines conditions de position générale (explicitées ultérieurement), alors Γ est contenu dans un sous-espace linéaire de dimension m (et donc les 0-cycles de V sont des intersections de Y avec des sous-espaces linéaires de dimension m).

On peut également généraliser le théorème à d'autres cas de variétés canoniques ⁸ :

Théorème 6 Soit Y une variété canonique irréductible de dimension n et de degré $d = nm + m + 2$ dans \mathbb{P}_{n+m}^9 . Soit $\Gamma = P_1 + \dots + P_d$, où les $P_i (1 \leq i \leq d)$ sont des points lisses distincts sur Y . Si par $\Gamma \in Y^{(d)}$ il passe une v.i.a. V de dimension $nm + n$, telle que les "projections d'ordre $m + 1$ " sont ouvertes sur V , Γ appartient à un sous-espace linéaire de dimension m .

Remarquons après Hénaut que là encore (et ici d'une manière assez simple, grâce à l' "application de Poincaré" (cf.[31])), tout tissu de codimension n dans \mathbb{C}^{nm+n} , de degré $d = nm + m + 2$ et de n -rang maximal (donc ici $n + m + 1$) est linéarisable.

La quatrième et dernière partie, destinée aux applications géométriques du théorème d'Abel, utilise une forme "intégrale" du théorème d'Abel, qui fait intervenir les *intégrales abéliennes* ¹⁰, qui se déduit du théorème d'Abel direct pour les 1-formes abéliennes par intégration.

Soit $Y \subset \mathbb{P}_N$ une variété projective irréductible de dimension n . Nous dirons qu'un 0-cycle $\Gamma \in Y^{(p)}$ est *complet*, ainsi que son support, s'il s'écrit comme l'intersection de Y avec une autre variété algébrique de dimension complémentaire. Etant donné un ensemble $K \subset Y$, on peut se demander si K contient un ensemble complet de points. Le théorème d'Abel sous sa forme intégrale va nous permettre de répondre à la question, dans certains cas particuliers.

⁸On appellera canonique une variété linéairement normale (cf. Appendice) telle que $\omega_Y^n \simeq \mathcal{O}_Y(1)$; les variétés du théorème précédent sont canoniques car elles sont projectivement normales (d'après le théorème d'équidimensionnalité de Macaulay, les variétés intersection complète sont projectivement normale, cf. Appendice) et $\omega_Y^n \simeq \mathcal{O}_Y(1)$ d'après la formule d'adjonction.

⁹De telles variétés existent; ce sont des "variétés de Castelnuovo", cf.[29]. Les intersections complètes du théorème précédent, bien que canoniques, ne sont pas toujours de Castelnuovo : il suffit pour le voir de considérer une intersection complète de type (3, 3) dans \mathbb{P}_4 .

¹⁰On peut considérer les intégrales abéliennes comme des intégrales de 1-formes rationnelles *fermées* ω sur Y le long d'un chemin γ sur Y évitant les pôles de ω .

Supposons pour commencer que Y est une courbe algébrique lisse. Comme l'a remarqué Bogomolov dans [12], étant donnée un ouvert U sur Y , tout 0-cycle sur Y de degré supérieur à un degré donné n_0 (n_0 dépendant de l'ouvert U) admet un 0-cycle linéairement équivalent à support dans U . Cette remarque est à l'origine du théorème suivant :

Théorème 7 *i) Tout ouvert non vide U d'une courbe algébrique irréductible $Y \subset \mathbb{P}_N$ auquel on ajoute les points singuliers de Y contient un ensemble complet de points.*

ii) Si la courbe algébrique Y est singulière, presque tout point de Y admet un voisinage dont le complémentaire rencontre toute hypersurface algébrique. Plus précisément, il existe un fonction ϕ harmonique sur la partie régulière de Y , deux ouverts disjoints $U_1 = \{\phi > 0\}$ et $U_2 = \{\phi < 0\}$, dont la réunion est $Y - C - S$, où $C = \{\phi = 0\}$ est une courbe analytique réelle et S est le lieu singulier de Y , et dont l'adhérence de chacun rencontre toute les hypersurfaces algébriques.

Appelons *distingué* un point qui est le support d'un 0-cycle complet. Alors on peut montrer avec les mêmes outils :

Théorème 8 *Si le genre géométrique $g(Y)$ est supérieur à deux, Y a un nombre fini de points distingués.*

On peut facilement généraliser le théorème 7 en effectuant des sections hyperplanes :

Théorème 9 *Soit Y une variété algébrique irréductible de \mathbb{P}_N de dimension ≥ 2 . Alors :*

1. *Pour tout ouvert non vide U de Y , $U \cup \text{Sing}(Y)$ contient le support d'un 0-cycle complet.*
2. *Il existe des compacts de Stein $K \subset Y$ rencontrant toute hypersurface algébrique.¹¹*

Cela permet de répondre par la négative à une question posée par plusieurs mathématiciens au cours des années 70 (cf. Hirai [40], Hirschowitz [41]):

Etant donné un compact de Stein $K \subset \mathbb{P}_N$, existe-t-il toujours une hypersurface algébrique contenue dans son complémentaire ?

S. Nemirovski a par la suite répondu à cette question par une toute autre méthode (cf. [48]).

¹¹Rappelons qu'un espace analytique réduit est de Stein si on peut le représenter comme une sous-ensemble analytique d'un espace affine \mathbb{C}^M , et qu'un compact est *de Stein* si il admet un système fondamental de voisinages ouverts de Stein.

On peut par ailleurs généraliser la démonstration du théorème 7 en dimension supérieure, pourvu que la variété Y soit “fortement singulière” (dans un sens qui sera précisé; en particulier, il faut que le lieu singulier ne soit pas de codimension ≥ 2).

Théorème 10 *Si $Y \subset \mathbb{P}_N$ une variété projective fortement singulière de dimension $n \geq 2$. Presque tout point de Y admet un voisinage dont le complémentaire rencontre toute les sous-variétés Y de dimension complémentaire $N - n$ qui coupent Y proprement (i.e. en un nombre fini de points). Plus précisément, il existe un fonction ψ pluriharmonique sur la partie régulière de Y , deux ouverts disjoints $U_1 = \{\psi > 0\}$ et $U_2 = \{\psi < 0\}$ (qui sont Levi-plats mais ne sont pas de Stein), dont la réunion est $Y - C - S$, où $C = \{\psi = 0\}$ est une hypersurface analytique réelle et S est le lieu singulier de Y , et dont l’adhérence de chacun rencontre toute les variétés algébriques de codimension n qui coupent Y proprement.*

Chapitre 1

Généralisations du théorème d'Abel.

1.1 Les faisceaux de formes différentielles sur un espace analytique.

Soit X un espace analytique réduit de dimension pure n . On appellera ici, par commodité, espace analytique un espace analytique réduit et paracompact, de sorte qu'à tout recouvrement ouvert on puisse associer une partition de l'unité. On pourra se reporter à l'Appendice pour la définition des faisceaux de q -formes (différentielles) *lisses* (ou C^∞), *holomorphes* (ou *régulières*), *méromorphes*. Rappelons juste ici qu'une forme lisse ou une forme régulière sur X est nulle si et seulement si elle est nulle sur la partie régulière de X .¹

On va préciser ce qu'on entend par une forme *finie* (ou L^2 -*holomorphe*) et une forme *de Barlet* (ou *abélienne*) sur X .

X peut être réalisée localement comme sous-ensemble analytique d'un ouvert U de \mathbb{C}^N ; il suffit donc de donner les définitions lorsque X est un sous-ensemble analytique (réduit de dimension pure) d'un ouvert U de \mathbb{C}^N . On note $Reg(X)$ la partie régulière de X , $Sing(X)$ sa partie singulière. On parlera de fonctions pour les 0-formes. On note $\mathcal{E}_X^{r,s}$ le faisceau des formes lisses de type (r, s) , et $\mathcal{E}_X^q = \bigoplus_{r+s=q} \mathcal{E}_X^{r,s}$ le faisceau des formes lisses de degré q . On note Ω_X^q le faisceau des q -formes régulières sur X (pour $q = 0$, ce faisceau, noté aussi \mathcal{O}_X , s'appelle le faisceau structural de X). On définit une topologie sur l'espace des formes lisses à support compact $\mathcal{E}_c(X)$ (dites

¹Nous préférons la qualification de régulière, pour indiquer qu'il n'y a pas de torsion, et réservons le nom de formes holomorphes pour les sections du faisceau de Grothendieck-Grauert, où une forme peut être nulle sur $Reg(X)$ sans l'être sur X .

formes test) de la manière suivante : ψ_k converge vers ψ si on peut trouver des représentants $\tilde{\psi}_k$ de ψ_k et $\tilde{\psi}$ de ψ dans U tels que $\tilde{\psi}_k$ converge vers $\tilde{\psi}$ (i.e. les composantes des formes et les dérivées des composantes convergent uniformément sur tout compact de U), et si de plus il existe un compact $K \subset X$ contenant les supports de tous les ψ_k .

Un *courant* est une forme linéaire α sur l'espace des formes test, telle que $\alpha(\psi_k) \rightarrow \alpha(\psi)$ si $\psi_k \rightarrow \psi$.² Un courant est de degré q (resp. de bidegré (r, s)) s'il s'annule sur les formes de degré $\neq n - q$ (resp. de bidegré $\neq (n - r, n - s)$). La différentielle d définit un opérateur sur l'espace des formes lisses sur X , ainsi que les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$; on a : $d = \partial + \bar{\partial}$.

Une forme semi-méromorphe ψ est une forme lisse sur un ouvert de Zariski dense $X - V$ de X , telle que en tout point x de V il existe une fonction régulière f_x telle que $f_x \cdot \psi$ se prolonge en une forme lisse au voisinage de x .

Toute forme semi-méromorphe ψ sur X définit un courant sur X d'après Herrera-Lieberman (cf. [38] ou [39]), noté $[\psi]$, et défini par la formule : $[\psi](\mu) = \int_X \psi \wedge \mu^3$.

On définit les opérateurs $d, \partial, \bar{\partial}$ sur l'espace des courants de degré q par les formules : $(d\alpha)(\mu) = (-1)^{q+1}\alpha(d\mu)$, $(\partial\alpha)(\mu) = (-1)^{q+1}\alpha(\partial\mu)$, $(\bar{\partial}\alpha)(\mu) = (-1)^{q+1}\alpha(\bar{\partial}\mu)$. Ces opérations étendent les opérateurs définis dans le cas des formes \mathcal{C}^∞ , comme on peut le voir par intégration par parties.

Un courant α est $\bar{\partial}$ -fermé si $\bar{\partial}\alpha = 0$.

La forme semi-méromorphe ψ sera dite $\bar{\partial}$ -fermée si le courant associé $[\psi]$ est $\bar{\partial}$ -fermé. Une forme méromorphe ω qui est $\bar{\partial}$ -fermée sera appelée "forme de Barlet"⁴. Le faisceau (de Barlet) des q -formes de Barlet sur X sera noté ω_X^q .

On identifiera toujours sur X deux formes égales sur un ouvert dense de Zariski (donc définissant le même courant).

Lemme 1 *Soit S un sous-ensemble analytique fermé d'intérieur vide de X , contenant $Sing(X)$. Soit T un courant de X de type $(q, 0)$ dont la restriction*

²Localement, il suffira de limiter l'ordre des dérivées des coefficients à un nombre fixé pour avoir la convergence.

³L'intégrale $\int_X \psi \wedge \mu$ n'est pas définie de manière évidente, car ψ n'est pas forcément localement intégrable. On la définit de la manière suivante. Soit V une boule ouverte contenue dans U ; en utilisant des partitions de l'unité, il suffit de définir l'intégrale $\int_{X \cap V} \psi \wedge \mu$ pour μ forme test de $X \cap V$. On peut supposer que ψ est dans V la restriction à $V \cap X$ d'une forme semi-méromorphe $\tilde{\psi}$ dans V , avec $\tilde{\psi} = \phi/g$, où ϕ est une fonction lisse dans V et g est une fonction holomorphe dans V s'annulant sur les singularités de $X \cap V$ (une telle fonction holomorphe existe car V étant une boule, $Sing(X \cap V)$ est définie par l'annulation d'un nombre fini de fonctions holomorphes dans V). Alors d'après [39], l'intégrale suivante admet une limite lorsque ϵ tend vers 0 : $\int_{X \cap V \cap \{|g| > \epsilon\}} \psi \wedge \mu$. De plus, cette limite ne dépend pas du choix de g .

⁴Le faisceau des formes de Barlet a été introduit par Barlet dans [4].

à $X - S$ est $\bar{\partial}$ -fermé. Alors il existe une unique forme méromorphe ω , telle que $T|_{X-S} = [\omega]$. De plus, si T est $\bar{\partial}$ -fermé sur X , ω est de Barlet sur X , et T coïncide avec $[\omega]$ sur la partie régulière de X .

On peut se ramener aux courants de bidegré $(0, 0)$, i.e. aux distributions. On sait que dans un ouvert de \mathbb{C}^n , de même que toute distribution annulée par le laplacien est représentée par une fonction harmonique, toute distribution $\bar{\partial}$ -fermée est représentée par une fonction holomorphe (cf. par exemple [28], p. 380). Ainsi, on sait que le courant T est représenté en dehors de S par une forme holomorphe ω . De plus d'après [32] l'existence du courant T implique que ω peut être prolongée en une forme méromorphe ω sur X tout entier. Localement, le courant valeur principale associé $[\omega]$ est tel que $T - [\omega]$ est à support dans une hypersurface $H \subset S$ (définie localement) en dehors de laquelle ω est holomorphe. Le courant $\bar{\partial}(T - [\omega]) = -\bar{\partial}[\omega]$ est alors écrit à la fois comme $\bar{\partial}T'$, avec $T' = T - [\omega]$ courant à support dans S , et comme $-\bar{\partial}[\omega]$, qui peut s'écrire $Res_S(\omega)$. Le théorème 3.1 d'unicité de la décomposition de [19] implique alors que $\bar{\partial}[\omega] = 0$, i.e. ω est de Barlet. ⁵ ■

On peut aussi définir le faisceau des formes qui ont (localement) un prolongement holomorphe sur une désingularisation locale de X , et donc sur toute désingularisation locale. Nous appellerons ces formes les "formes finies".⁶ Une forme régulière est finie, une forme finie est de Barlet, mais on peut exhiber des formes de Barlet non finies, ainsi que des formes finies non régulières.

La différentielle d'une forme lisse, régulière, finie, de Barlet, méromorphe est une forme du même type⁷. Le produit extérieur d'une forme de Barlet

⁵On a $\bar{\partial}T = \bar{\partial}\omega$. Mais on ne sait pas si T coïncide avec $[\omega]$ autour de $Sing(X)$, car on ne sait pas si il existe des courants de bidegré $(q, 0)$ $\bar{\partial}$ -fermés à support dans $Sing(X)$. Barlet montre dans son article l'existence d'un morphisme surjectif du faisceau des courants $\bar{\partial}$ -fermés de type $(q, 0)$ sur X dans ω_X^q . Il pose la question, non résolue à ce jour, de savoir si le noyau, qui est l'ensemble des courants $\bar{\partial}$ -fermés de bidegré $(q, 0)$ à support dans la partie singulière, est nul.

⁶Griffiths a remarqué dans [23] que ces formes peuvent être définies par une condition intrinsèque d'avoir une norme L^2 finie pour un certain produit hermitien sur l'espace des formes. Dans son article, Griffiths appelle les formes que nous appelons de Barlet "formes de première espèce par rapport à la famille des espaces linéaires de codimension n ", signifiant par là que ce sont précisément les formes dont la transformée d'Abel est nulle; il appelle (L^2 -)holomorphes les formes que nous appelons finies. L'avantage du terme "fini" est qu'il s'applique à des tenseurs plus généraux.

⁷La différentielle pouvant être prise ici à la fois au sens des courants, ou au sens des formes (méromorphes), car $[d\omega] = d[\omega]$. Il n'en est plus de même pour les formes méromorphes générales : c'est ce qui donne naissance aux résidus. Sur une variété algébrique, la différentielle d'une forme finie est nulle; il n'en est pas de même pour les formes de Barlet.

par une forme régulière est de Barlet. Il n'en est pas de même du produit extérieur d'une forme de Barlet par une forme finie.

Soit $x \in X$. On appellera "paramétrisation locale" en x (de degré k) la donnée d'un voisinage ouvert U_x de x , d'un morphisme ⁸ propre, surjectif et fini (de degré k) $\phi : U_x \rightarrow P$ où P est un polydisque (ouvert) de \mathbb{C}^n . On appellera multiplicité de x dans X et on notera $mult_x(X)$ le degré minimal d'une telle paramétrisation locale. En particulier, un point de X est régulier ssi $mult_x(X) = 1$, toute paramétrisation locale étant alors une carte au voisinage de x .

Soit $\phi : U_x \rightarrow P$ une paramétrisation locale en x . Soit ω une forme génériquement régulière sur U_x . Alors il existe des hypersurfaces analytiques $Z \subset P$ et $Z' = \phi^{-1}(Z) \subset U_x$ telles que $\phi : U_x - Z' \rightarrow P - Z$ soit un revêtement de degré k , et que ω soit régulière sur $U_x - Z'$. On peut définir une forme régulière sur $P - Z$, appelée *image directe* ou *trace* de ω et notée $\phi_*(\omega)$ de la manière suivante : $\phi_*(\omega) = \sum_{i=1}^k \phi_i^*(\omega)$ où ϕ_i sont k inverses locaux de ϕ en dehors de Z ⁹. On peut voir facilement que la trace $\phi_*(\omega)$ d'une forme de Barlet sur U_x est holomorphe sur P pour toute paramétrisation locale $\phi : U_x \rightarrow P$, d'après le lemme 1, et comme le courant $[\phi_*(\omega)]$ coïncide avec $\phi_*([\omega])$ sur $P - Z$.

Cette implication admet une réciproque (cf. [4]) :

Proposition 1 *Soit $\phi : U_x \rightarrow P$ une paramétrisation locale en x . Soit ω une q -forme génériquement régulière sur U_x . Si dans cette paramétrisation $\phi_*(\omega_x \wedge v_x)$ est holomorphe au voisinage de $\pi(x)$ pour tout germe v_x de forme régulière en x , alors ω est de Barlet en x .*

Remarque 1 On peut montrer que dans la proposition précédente, il suffit d'un nombre fini de "formes test" v_x pour conclure que ω est de Barlet en x .

Dans [4], Barlet construit aussi un isomorphisme de ω_X^q sur le faisceau \mathcal{O}_X -cohérent $Hom_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^{n-q}, \omega_X^n)$.

Cela implique que dans la proposition précédente, il suffit en fait de vérifier l'holomorphie de la trace pour les germes v_x de degré $n - q$.

Pour $q = n$, on a donc $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \omega_X^n) \simeq \omega_X^n$, et le faisceau de Barlet ω_X^n s'identifie au faisceau dualisant de Grothendieck sur X $Ext_{\mathcal{O}_U}^p(\mathcal{O}_X, \Omega_U^{n+p})$, où p est la codimension de X dans U .

Supposons maintenant que X est donné comme sous-ensemble analytique de dimension pure n dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$. Toute application linéaire affine surjective

⁸Un morphisme $\pi : X \rightarrow Y$ est une application continue telle que pour tout $x \in X$, l'image réciproque $g \circ \pi$ d'une fonction g régulière en $\pi(x)$ est régulière en x . Il découle de la définition que la restriction d'un morphisme à un sous-espace analytique définit également un morphisme.

⁹Les formes définies localement se recollent, car la forme est invariante par monodromie.

π de \mathbb{C}^{n+p} dans \mathbb{C}^n définit une projection de X dans \mathbb{C}^n (parallèlement à $\text{Ker}(\pi)$).

On peut associer à π une projection de la manière suivante. Soit H une sous-variété affine de \mathbb{C}^{n+p} qui coupe $\text{Ker}(\pi)$ transversalement. Alors, en tout point $P \in \mathbb{C}^{n+p}$, la fibre $\pi^{-1}(P)$ de π va couper H en un unique point. Si l'on fait un autre choix pour le n -plan de projection, soit H' , on voit qu'on obtient ainsi un isomorphisme affine de H sur H' . Réciproquement, on peut faire correspondre à un automorphisme linéaire de H un changement du n -plan de projection.

La propriété pour une projection π de donner une paramétrisation locale en $x \in X$ est une propriété ouverte, i.e. si π définit une paramétrisation locale en x , il en sera de même de $\pi + u$, où est une application linéaire affine voisine de 0.

Soit donc $x \in X$, et π une application linéaire affine de \mathbb{C}^{n+p} dans \mathbb{C}^n . On suppose que π définit une paramétrisation locale en x . Soit $H \subset \mathbb{C}^{n+p}$ un n -plan de projection pour π (qui coupe $\text{Ker}(\pi)$ transversalement). Pour toute application linéaire affine u voisine de 0, on pose $\pi_u = \pi + u$; π_u définit une projection linéaire p_u de \mathbb{C}^{n+p} sur H . On peut donc définir une trace $p_{u*}(\omega)$ sur H pour ω génériquement régulière en x . La perturbation u correspond pour p_u à un changement de direction de projection. Autrement dit, la variété linéaire de codimension $n + 1$ qui est le centre de projection varie dans un ouvert de la grassmannienne des sous-variétés de codimension n de l'hyperplan à l'infini.

La propriété suivante est fondamentale et découle des travaux de Barlet sur la classe fondamentale (cf. [5]) :

Lemme 2 *Supposons que pour toute application linéaire u voisine de 0, $\pi_{u*}(\omega)$ est holomorphe au voisinage de $\pi_u(x)$; i.e. que pour toute projection sur H p_u voisine de p $p_{u*}(\omega)$ est holomorphe au voisinage de $p_u(x)$ (on dira que la trace est holomorphe pour "un ouvert de projections"). Alors ω est de Barlet en x .*

Lemme 3 *Soit X un sous-ensemble analytique fermé de dimension pure n dans un ouvert U de \mathbb{P}^N , ω une q -forme régulière sur Y en dehors d'un sous-ensemble analytique fermé $W \subset Y$ contenant $\text{Sing}(Y)$. Soit $p : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^M$ ($n \leq M \leq N$) une projection qui transporte Y dans un sous-ensemble analytique \underline{Y} de même dimension dans $\underline{U} = p(U)$. Si $p_{u*}(\omega)$ pour un ouvert de projections $p_u : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^M$ se prolonge en une forme de Barlet sur \underline{Y} , alors ω se prolonge en une forme de Barlet sur Y .*

On peut se ramener par projections composées au cas où $M = n = \dim(Y)$. Le lemme est alors un conséquence du lemme précédent. ■

Corollaire 1 Soit $Y \subset \mathbb{P}_N$ une variété algébrique de dimension pure n . Supposons que l'image directe d'une forme rationnelle ω sur Y est nulle sur \mathbb{P}_n pour un ouvert de projections $\phi : Y \rightarrow \mathbb{P}_n$ sur un sous-espace linéaire de dimension n . Alors il s'ensuit que ω est abélienne.

Lemme 4 Les coefficients de l'équation d'une hypersurface de degré k définissent un point d'un espace projectif \mathbb{P}_{N_k} ; on note H_t l'hypersurface associée au point t . Soit X un sous-ensemble analytique de dimension pure n d'un ouvert U de \mathbb{C}^N . Soit ω une forme génériquement régulière dans un voisinage ouvert $U_x \subset X$ de $x \in X$. On suppose $x \in X \cap H_{t_1^0}$, et $H_{t_1^0}$ coupe X transversalement en x (i.e. $\text{mult}_x(H_{t_1^0} \cap X) = \text{mult}_x(X)$). Si pour tout t_1 dans un voisinage de t_1^0 , $\omega_{H_{t_1}}$ se prolonge en une forme de Barlet sur $U_x \cap H_{t_1}$, alors ω est de Barlet en x .

On peut supposer $k = 1$ par l'application de Veronese. D'après les hypothèses, on peut trouver $H_{t_2^0}, \dots, H_{t_n^0} \in \mathbb{P}_N^*$ tels que $H_{t_1^0} \cap \dots \cap H_{t_n^0}$ coupe X avec la multiplicité $\text{mult}_x(X)$. Soit $Q_1^0 = \alpha_1^0, \dots, Q_n^0 = \alpha_n^0$ des équations affines de $H_{t_1^0}, \dots, H_{t_n^0}$, où le membre de gauche ne contient pas de terme constant. L'application qui à $y \in X$ associe $Q_1^0(y), \dots, Q_n^0(y)$ définit une paramétrisation locale en x . De plus, si l'on fait varier les coefficients \tilde{t}_i^0 des Q_i^0 dans un voisinage ouvert suffisamment petit, on obtient une famille de paramétrisations locales en x , $\pi_{\tilde{t}}$, qui correspondent à un ouvert de projections. D'après le lemme précédent, il suffit donc de vérifier que la trace de ω est holomorphe au voisinage de $\pi_{\tilde{t}}(x)$ pour \tilde{t} dans un voisinage ouvert de \tilde{t}_0 .

Tout d'abord, on sait que ω est génériquement régulière sur U_x . Donc la trace $\pi_{\tilde{t}*}(\omega)$ est génériquement holomorphe au voisinage de $\pi_{\tilde{t}}(x)$. Considérons maintenant $Q'_1 = Q_1 + \mu_2 \cdot Q_2 + \dots + \mu_n \cdot Q_n$, où les μ_i sont proches de 0. D'après l'hypothèse, la trace $\pi_{\tilde{t}*}(\omega)$ se prolonge holomorphiquement sur les hyperplans de $\pi_{\tilde{t}}(U_x)$ d'équations $Q'_1 = s$, pour s dans un voisinage de $Q'_1(x)$.

On en déduit que $\pi_{\tilde{t}*}(\omega)$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de $\pi_{\tilde{t}}(x)$, ce qu'il fallait démontrer : la trace est holomorphe pour un ouvert de projections.

■

Lemme 5 On se place dans les hypothèses du lemme précédent; on suppose de plus que la forme ω est de degré maximal. Si pour t_1 dans un voisinage de t_1^0 , $\text{res}_{Q_{t_1}=0}(\omega/Q_{t_1})$ est de Barlet sur $U_x \cap \{Q_{t_1} = 0\}$ (où $Q_{t_1} = 0$ est une équation affine de $H_{t_1} = 0$), alors ω est de Barlet en x .

On peut se ramener au cas où $k = 1$ par le plongement de Veronese. Le principe de la démonstration est le même que pour le lemme précédent.

D'après les hypothèses, on peut trouver $H_{t_2^0}, \dots, H_{t_n^0} \in \mathbb{P}_N^*$ tels que $H_{t_1^0} \cap \dots \cap H_{t_n^0}$ coupe X avec la multiplicité $mult_x(X)$. Alors Soit $Q_{\tilde{t}_1} = \alpha_1, \dots, Q_{\tilde{t}_n} = \alpha_n$ des équations affines de H_{t_1}, \dots, H_{t_n} . On note $t = (t_1 = (\tilde{t}_1, \alpha_1), \dots, t_n = (\tilde{t}_n, \alpha_n)) \in (P_N^*)^n$ les paramètres d'une sous-variété linéaire, t^0 les paramètres de H^0 , $U^* \subset (P_N^*)^n$ un voisinage de t^0 . D'après l'hypothèse, $res_{Q_{t_1}=0}(\omega/Q_{t_1})$ est holomorphe sur Y pour t_1 au voisinage de t_1^0 dans $U_1^* \subset \mathbb{P}_N^*$. Les polynômes $Q_{\tilde{t}_1}, \dots, Q_{\tilde{t}_n}$ définissent comme ci-dessus des paramétrisations locales $\pi_{\tilde{t}}$ en x .

On a la formule : $\pi_{\tilde{t}*}(\omega) = \mu(t) d\alpha_1 \wedge \dots \wedge d\alpha_n$, avec

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^{\alpha} res_{Q_{\tilde{t}_1}=\alpha_1, \dots, Q_{\tilde{t}_n}=\alpha_n} \left(\frac{\omega}{(Q_{\tilde{t}_1} - \alpha_1) \dots (Q_{\tilde{t}_n} - \alpha_n)} \right)$$

Mais on a donc aussi :

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^{\alpha} res_{Q_{\tilde{t}_2}=\alpha_2, \dots, Q_{\tilde{t}_n}=\alpha_n} \frac{res_{Q_{\tilde{t}_1}=\alpha_1} \frac{\omega}{(Q_{\tilde{t}_1} - \alpha_1)}}{(Q_{\tilde{t}_2} - \alpha_2) \dots (Q_{\tilde{t}_n} - \alpha_n)}$$

Il s'ensuit d'après l'hypothèse que lorsque $t_1 \in U_1^*$ est fixé (i.e. les coefficients de Q_{t_1} sont fixés), $\mu(t)$ est holomorphe par rapport à t_2, \dots, t_n . De plus, on sait que $\mu(t)$ est génériquement régulière au voisinage de $\alpha = \pi_{\tilde{t}}(x)$ (car ω est génériquement régulière sur U_x). On en conclut comme ci-dessus que $\mu(t)$ est holomorphe au voisinage de $\alpha = \pi_{\tilde{t}}(x)$, ce qui implique que "la trace est holomorphe pour un ouvert de projections". Donc ω est de Barlet en x d'après le lemme 2. ■

Lemme 6 *On se place dans les hypothèses du lemme précédent, si ce n'est qu'on ne suppose plus que la forme ω est de degré maximal. Si la trace $\pi_{\tilde{t}*}(\omega)$ est holomorphe sur $\pi_{\tilde{t}}(U_x)$ pour les paramétrisations locales en x $\pi_{\tilde{t}}$ données par \tilde{t} dans un voisinage ouvert de \tilde{t}_0 , alors ω est de Barlet en x .*

Le raisonnement se fait par récurrence sur la dimension de Y . Supposons d'abord forme ω est de degré maximal. Alors le fait que la trace est holomorphe pour cette famille de projection implique par l'hypothèse de récurrence que le résidu de $res_{\{Q_{t_1}=0\}}(\omega/Q_{t_1})$ est de Barlet sur les sections $\{Q_{t_1} = 0\} \cap U_x$ pour t_1 dans un voisinage de t_1^0 . Le lemme précédent 5 implique alors que ω est de Barlet en x .

Si ω n'est pas de degré maximal, le raisonnement est le même sauf que l'on considère $\omega|_{Q_{t_1}}$ au lieu de $res_{\{Q_{t_1}=0\}}(\omega/Q_{t_1})$, et que l'on utilise le lemme 4 au lieu du lemme 5. ■

Lemme 7 Soit \tilde{X} un sous-ensemble analytique d'un ouvert $U \subset \mathbb{P}_N$ de dimension pure n , qui se décompose en la réunion de deux sous-ensembles analytiques X et X' de même dimension. Soit ω une q -forme méromorphe sur X et ω' une q -forme méromorphe sur X' . Alors il existe une unique forme méromorphe $\tilde{\omega}$ sur \tilde{X} , qui coïncide avec ω resp. ω' sur X resp. X' . De plus, si ω et ω' sont de Barlet, il en est de même de $\tilde{\omega}$.

On suppose que ω et ω' sont de Barlet. Alors, en prolongeant ω (resp. ω') par 0 sur X' (resp. X), on vérifie qu'on définit bien un courant $\bar{\partial}$ -fermé $[\omega]$ (resp. $[\omega']$) dans $\tilde{X} = X \cup X'$. La forme égale sur $Reg(X \cup X')$ à ω ou ω' suivant qu'on est sur $Reg(X)$ ou $Reg(X')$, admet donc un courant associé qui se prolonge sur $X \cup X'$ tout entier en un courant $\bar{\partial}$ -fermé, $[\omega] + [\omega']$; i.e. cette forme est une forme de Barlet. Le cas méromorphe s'en déduit, car le problème est local : en multipliant localement par une fonction régulière, on obtient des formes régulières, donc de Barlet. ■

Lemme 8 Considérons une forme ω_1 qui est de Barlet sur Y , et ω' de Barlet sur Y' . Alors sur $Y \times Y'$, la forme $\pi^*(\omega) \wedge \pi'^*(\omega')$ est encore de Barlet, où $\pi : Y \times Y' \rightarrow Y$ et $\pi' : Y \times Y' \rightarrow Y'$ sont les projections.

On peut le voir par des paramétrisations locales. Une autre manière de le voir est la suivante. On peut approcher toute forme lisse ϕ sur $Y \times Y'$ par une somme de produits extérieurs $\phi_1 \wedge \phi_2$ où ϕ_1 est une forme sur Y et ϕ_2 une forme sur Y' . Si $\mu = \bar{\partial}\phi$, par la continuité de l'opérateur $\bar{\partial}$,

$$\int_{Y \times Y'} \pi^*(\omega) \wedge \pi'^*(\omega') \wedge \mu$$

peut s'approcher par la somme d'intégrales du type

$$\int_{Y \times Y'} \pi^*(\omega) \wedge \bar{\partial}\phi_1 \wedge \pi'^*(\omega') \wedge \phi_2$$

et du type

$$\int_{T \times Y} \pi^*(\omega) \wedge \phi_1 \wedge \pi'^*(\omega') \wedge \bar{\partial}\phi_2$$

qui sont visiblement nulles d'après l'hypothèse et le théorème de Fubini.

■

Proposition 2 Soit X et Y deux espaces analytiques réduits de dimension pure n , et $f : X \rightarrow Y$ une application analytique propre et surjective. f est alors génériquement finie, i.e. il existe localement des hypersurfaces analytiques $Z \subset U_Y$ et $Z' = f^{-1}(Z) \subset f^{-1}(U_Y) \subset X$ telles que Z' contient le lieu

singulier de U_X , Z contient le lieu singulier de U_Y , et $f : U_X - Z' \rightarrow U_Y - Z$ soit un revêtement non ramifié de degré k . On peut donc définir sur une image directe (une trace) sur les formes génériquement régulières sur X , à valeur dans les formes génériquement régulières sur Y . Alors, la trace d'une forme méromorphe sur X est une forme méromorphe sur Y , la trace d'une forme de Barlet sur X est une forme de Barlet sur Y .

Pour la trace d'une forme de Barlet, le résultat est dans ([4], p. 200). L'application f étant propre, elle définit une image directe de l'espace des courants sur X à valeur dans l'espace des courants sur Y , par $f_*(\alpha)(\phi) = \alpha(f^*(\phi))$. On peut construire l'image directe localement : on se donne U_Y, U_X, Z, Z' d'après les définitions ci-dessus. Si ω est méromorphe sur U_X , elle définit d'après ce qui précède un courant sur U_X , et son image directe sur U_Y coïncide sur $Y - Z$ avec le courant défini par la forme qui est la trace de ω associée au revêtement non ramifié. D'après la caractérisation des formes méromorphes donnée dans le lemme 1 la trace de ω sur $U_Y - Z$ se prolonge sur U_Y en une fonction méromorphe $f_*(\omega)$. Il est facile de voir qu'alors les courants $f_*([\omega])$ et $[f_*(\omega)]$ coïncident sur Y .

Supposons maintenant ω de Barlet. Alors

$$f_*([\omega])(\bar{\partial}\phi) = [\omega](\bar{\partial}(f^*(\phi))) = 0$$

donc la trace de ω , définie localement en dehors d'hypersurfaces analytiques, se prolonge en une forme de Barlet, toujours d'après le lemme 1. La propriété de stabilité des formes de Barlet par image directe sera référée comme "propriété de Barlet". ■

1.1.1 Sur les résidus de formes méromorphes

Soit X un espace analytique réduit de dimension pure n . On trouvera quelques rappels sur les résidus en Appendice. Nous allons établir quelques propriétés relatives aux résidus. Soit Z un diviseur de X , défini par un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X , des fonctions régulières $f_i \in \mathcal{O}_{U_i}$, telles que $f_i/f_j, f_j/f_i \in \mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$. Le support de Z , noté \mathcal{Z} , est défini par l'annulation des f_i ; on suppose qu'aucune composante de \mathcal{Z} n'est contenue dans $Sing(X)$. Le diviseur trivial, pour lequel toutes les f_i sont égales à 1, est noté 0^{10} . On définit sur X le faisceau des formes méromorphes à pôle (simple) sur Z , noté $\omega_X^q(Z)$, de la manière suivante : ω , de Barlet en dehors de \mathcal{Z} définira une section de ce faisceau au voisinage de x si pour une fonction (U_x, f_x) définissant Z au

¹⁰Dans la terminologie classique, ce que nous appelons diviseur correspond à un "diviseur de Cartier effectif". On peut définir une addition des diviseur en multipliant les équations locales, ce qui justifie la notation 0 pour le diviseur trivial.

voisinage de x (et donc pour toute fonction définissant Z au voisinage de x) la forme $f_x \omega$ est de Barlet sur U_x ¹¹.

Si Z est un diviseur arbitraire, on définit d'après Herrera (cf.[39]) pour $\psi \in \omega^q(Z+W)$, où W est diviseur intersectant Z proprement (i.e. les fonction définissant resp. Z et W en un point de $\mathcal{Z} \cap \mathcal{W}$ forment une suite régulière), le courant résiduel $Res_{\mathcal{Z}}(\psi)$ (cf. Appendice). Pour $W = 0$, on a : $Res_{\mathcal{Z}}(\psi) = \bar{\partial}[\psi]$.

On peut définir le faisceau $R_Z^q(W)$ des q -courants Z -résiduels de la manière suivante : un q -courant Z -résiduel est définie par la donnée d'un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de X , d'une $(q+1)$ -forme méromorphe $\omega_i \in \omega_X^{q+1}(Z+W)$ sur chaque U_i telles que $\omega_i - \omega_j \in \omega_X^{q+1}(W)(U_i \cap U_j)$. Le courant défini localement sur U_i par $Res_{\mathcal{Z}}(\omega_i)$ se recolle alors en un courant global sur X .

On a $\bar{\partial}[\omega] = Res_{\mathcal{Z}}(\omega)$ pour les formes $\omega \in \omega_X^{q+1}(Z)$ et avoir un résidu nul sur Z est équivalent à être de Barlet sur X .

Supposons que Z est un diviseur réduit, i.e. pour un certaines choix des données (U_i, f_i) , les fonctions qui définissent Z localement définissent aussi l'idéal de son support \mathcal{Z} . On définit le faisceau $\mathcal{M}_X^q(\log(\mathcal{Z}))$ des q -formes méromorphes à pôle logarithmique sur Z de la manière suivante : un forme méromorphe ψ au voisinage de x a un pôle logarithmique sur Z si localement on peut écrire :

$$g_x \cdot f_x \cdot \psi = \psi' \wedge df_x + f_x \cdot \psi''$$

où f_x définit \mathcal{Z} en x , g_x ne s'annule identiquement sur aucune composante de \mathcal{Z}_x , et ψ', ψ'' sont des formes régulières en x . Le résidu de ψ sur \mathcal{Z} est alors défini par $res_{\mathcal{Z}}(\psi) = \psi' / g_x|_{\mathcal{Z}}$. Si de plus $f_x \cdot \omega$ est de Barlet en x , on dira que ω un germe (en x) du faisceau $\omega_X^q(\log(\mathcal{Z}))$.

Remarque 2 $\omega_X^q(\log(\mathcal{Z}))_x$ s'identifie aux germes de formes qui s'écrivent α/f , avec $\alpha|_{Reg(\mathcal{Z})} = 0$ et α de Barlet au voisinage de x .

Alors l'opération $res_{\mathcal{Z}}$ de résidu sur \mathcal{Z} définit une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \omega_X^{q+1} \rightarrow \omega_X^{q+1}(\log(\mathcal{Z})) \rightarrow \omega_{\mathcal{Z}}^q \rightarrow 0$$

La surjectivité locale de $res_{\mathcal{Z}}$ est montrée dans [32]. D'autres part les formes de $\omega_X^{q+1}(\log(\mathcal{Z}))$ ayant un résidu nul sur Z sont précisément les formes de Barlet sur X . Dans notre cas il suffit de vérifier que sur les formes $\omega \in \omega_X^{q+1}(\log(\mathcal{Z}))$, $\bar{\partial}[\omega] = res_{\mathcal{Z}}(\omega) \wedge [\mathcal{Z}]$, ce que l'on fait facilement en écrivant les formules.

On peut généraliser ce qui précède en codimension supérieure.

¹¹Si f'_x est une autre fonction définissante, f'_x/f_x est régulière, donc $f'_x \omega$ est aussi de Barlet.

Soit Z une *intersection complète de codimension p* , définie localement dans un ouvert $U_i \subset X$ comme l'ensemble des zéros de p fonctions régulières f_1^i, \dots, f_p^i définissant une suite régulière sur U_i , telles que $f_1^i/f_1^j, \dots, f_p^i/f_p^j$ et $f_1^j/f_1^i, \dots, f_p^j/f_p^i$ appartiennent $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$. On note \mathcal{Z} le support de Z , i.e. le sous-ensemble analytique de X définie dans U_i par $f_1^i = \dots, f_p^i = 0$. On note Z_1, \dots, Z_p les diviseurs associés aux données $(U_i, f_1^i), \dots, (U_i, f_p^i)$ et $Z = Z_1 \cap \dots \cap Z_p$; on dit que les diviseurs Z_1, \dots, Z_p se coupent proprement.

On note $\omega_X^q(Z)$ le faisceau $\omega_X^q(Z_1 + \dots + Z_p)$.

L'opération Res_Z est toujours bien définie d'après [39] sur le faisceau $\omega_X^{q+p}(W \cap Z)$, où W est un diviseur qui définit avec Z une intersection complète de codimension $(p+1)$ $W \cap Z$ sur X (cf. Appendice).

Un q -courant Z -résiduel est défini par la donnée d'un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de X , d'une forme méromorphe $\omega_i \in \omega_X^{q+p}(Z \cap W)(U_i)$ sur U_i avec $\omega_i - \omega_j \in \mathcal{Q}_Z^{q+p}(W)(U_i \cap U_j)$, où \mathcal{Q}_Z^{q+p} est le sous-faisceau de $\omega_X^{q+p}(Z)$ formé des formes dont le résidu Res_Z s'annule. Les courants résiduels associés à ω_i et ω_j coïncident sur $U_i \cap U_j$, de sorte qu'on a un courant global défini sur X , de bidegré $(q+p, p)$, qu'on appellera q -courant Z -résiduel. Le faisceau R_Z^q est le faisceau dont la fibre en $x \in X$ est l'ensemble des courants résiduels de bidegré $(p+q, p)$ s'écrivant dans un voisinage ouvert U_x de x sous la forme $Res_Z \frac{\omega}{f_1 \dots f_p}$, où ω est de Barlet sur U_x et les $f_i (1 \leq i \leq p)$ sont des fonctions définissantes de Z dans U_x .

On a donc une suite exacte :

$$\mathcal{Q}_Z^{q+p} \rightarrow \omega_X^{q+p}(Z) \rightarrow R_Z^q \rightarrow 0$$

La fibre en x du noyau \mathcal{Q}_Z^{q+p} peut être décrite de la manière suivante. Soit U_x un voisinage ouvert de Stein de x , dans lequel Z est défini par les fonctions f_1, \dots, f_p . Les formes de $\mathcal{Q}_Z^{q+p}(U)$ sont les formes $\mu \in \omega_X^{q+p}(Z)$ qui telles que $g_x \cdot \mu = \sum_{k=1}^p \frac{\mu_k}{f_1 \dots f_{k-1} f_{k+1} \dots f_p}$, où μ_k sont des $(p+q)$ -formes régulières en x et f_1, \dots, f_p, g_x forment une suite régulière ¹².

Supposons Z réduit, i.e. par un certain choix des données $(U_i, f_1^i, \dots, f_p^i)$ définissant Z , les fonctions définissantes f_1^i, \dots, f_p^i engendrent l'idéal de $\mathcal{Z} \cap U_i$ pour tout i .

Soit f_1, \dots, f_p définissant Z en x ; une forme méromorphe ω aura un pôle logarithmique sur Z en x si

$$g \cdot f_1 \dots f_p \omega - \omega' \wedge df = f_1 \alpha_1 + \dots + f_p \alpha_p$$

où ω' et les α_i sont des formes régulières, et f_1, \dots, f_p, g forment une suite régulière dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Alors on définit : $res_Z(\omega) = \omega'/g_{\mathcal{Z}}$. Si de plus $f_1 \dots f_p \omega$

¹²La description des formes de \mathcal{Q}_Z^{q+p} est donnée par exemple dans [20].

est de Barlet en x , on dira que ω définit un germe du faisceau $\omega_X^{q+p}(\log(Z))$ en x . res_Z définit alors un morphisme surjectif :

$$\omega_X^{q+p}(\log(Z))(W) \rightarrow \omega_Z^q(\mathcal{Z} \cap W) \rightarrow 0$$

où $\mathcal{Z} \cap W$ est le diviseur défini sur \mathcal{Z} par W . Cela est montré dans [32].

Pour une forme méromorphe ω dont le pôle W coupe Z proprement, on définit le courant $\omega \wedge [Z]$ en posant :

$$\omega \wedge [Z](\phi) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^p Res_Z(\omega \wedge \frac{df_1 \dots \wedge df_p}{f_1 \dots f_p})(\phi)$$

En particulier, lorsque Z est réduit, on a : $\omega \wedge [Z] = \omega|_{\mathcal{Z}} \wedge [Z]$.

Lemme 9 *Soit Z une intersection complète de codimension p sur X . De plus, soit W un diviseur de X , intersectant Z proprement, i.e. définissant avec Z une intersection locale de codimension $(p+1)$ $W \cap Z$. Alors l'opération Res_Z de résidu sur Z définit une suite exacte de faisceaux*

$$0 \rightarrow \mathcal{Q}_Z^{q+p}(W) \rightarrow \omega_X^{q+p}(W \cap Z) \rightarrow R_Z^q(W \cap Z) \rightarrow 0$$

Si $\omega \notin \mathcal{Q}_{(W \cap Z)}^{q+p}$, alors $Res_Z(\omega)$ a un pôle sur $Z \cap W$ (i.e. n'est pas dans R_Z^q).

De même, si $\omega \in \omega_X^q(W)$, alors $\omega \wedge [Z]$ est dans $R_Z^q(W)$. De plus si $\omega \in \omega_X^q(W) \setminus \omega_X^q$, alors $\omega \wedge [Z] \notin R_Z^q$.

La suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{Q}^{q+p}(Z)(W) \rightarrow \omega_X^{q+p}(W \cap Z) \rightarrow R_Z^q(Z \cap W) \rightarrow 0$$

dans le cas où $W \neq 0$ se déduit du cas où $W = 0$ signalé ci-dessus en remarquant que si W est défini par la fonction g dans U , alors $Res_Z(\omega/g) = [1/g].Res_Z(\omega)$, car W intersecte Z proprement. Le cas de la "restriction" $\wedge [Z]$ se déduit du cas du résidu, d'après la formule donnée ci-dessus. ■

Remarque 3 La restriction d'une forme de Barlet sur X à un sous-ensemble analytique localement intersection complète Y dont les équations sont génériquement réduites est de Barlet d'après ce qui précède. Si Y n'est pas localement intersection complète, on verra que ce n'est pas toujours le cas.

Proposition 3 *On suppose X lisse. Soit $q \geq 0$. Soit $Z = Z_1 \cap \dots \cap Z_p$ une intersection complète de codimension p sur X . On note, pour $K = (i_1, \dots, i_k)$ une suite strictement croissante d'entiers compris entre 1 et p , $\mathcal{Z}^K = \mathcal{Z}_{i_1} \cup$*

$\dots \cup \mathcal{Z}_{i_k}$, et $\Omega_X^{q+p}(*\mathcal{Z}^K)$ le faisceau des formes à pôles dans \mathcal{Z}^K . On suppose $H^{p-k}(\Omega_X^{q+p}(*\mathcal{Z}^K)) = 0$, pour toutes les suites K de longueur comprise entre 1 et $p-1$.

Alors, étant donné un courant résiduel défini sur U_i comme $Res_Z(\omega_i)$, avec $\omega_i \in H^0(\omega_X^{q+p}(Z))$, on peut choisir toutes les ω_i comme étant la restriction d'une même forme méromorphe ω définie sur X , ssi α est $\bar{\partial}$ -exact.

En particulier si on a (en plus) $H^{p+1}(\Omega_X^q) = 0$ pour tout $p \leq n-1$, on obtient une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{Q}_Z^{q+p}(W)) \rightarrow H^0(\omega_X^{q+p}(W \cap Z)) \rightarrow H^0(\omega_Z^q(W \cap Z)) \rightarrow 0$$

La première partie de l'énoncé est dans [20].

Etablissons maintenant la suite exacte. Si $W = 0$ elle découle directement de la première partie. Supposons maintenant $W \neq 0$. Supposons le courant α défini sur U_i par $Res_Z(\omega_i)$ avec $\omega \in \omega^{p+q}(Z \cap W)$. Alors on considère le courant $\bar{\partial}\alpha$. Il appartient à $R_{W \cap Z}^{q-1}$, et on applique la suite exacte dans le cas $W = 0$ pour exprimer $\bar{\partial}\alpha$ comme résidu sur $W \cap Z$ d'une forme méromorphe globale ψ sur X . Alors $\omega_i - \psi$ a un résidu nul sur $Z \cap W$, donc s'écrit comme somme de formes méromorphes ayant seulement des pôles dans p des hypersurfaces $\mathcal{Z}_i (1 \leq i \leq p)$, W , donc le courant $\alpha - Res_Z(\psi)$ est dans R_Z^q . Toujours d'après le cas $W = 0$, on peut donc écrire d'abord $\alpha - Res_Z(\psi)$, puis $\alpha = \alpha - Res_Z(\psi) + Res_Z(\psi)$, comme résidu sur Z d'une forme méromorphe globale de $H^0(\omega_X^{q+p}(W \cap Z))$. ■

Remarque 4 La suite exacte précédente signifie que $H^1(\mathcal{Q}_Z^{q+p}) = 0$. Lorsque X est de Stein, elle est donc automatiquement vérifiée. D'autre part, les conditions du théorème sont vérifiées lorsque $X \subset \mathbb{P}_N$ est une variété algébrique lisse et les Z_i des sections de X par des hypersurfaces algébriques se coupant proprement sur X (cf.[20]).

Lorsque $X = \mathbb{P}_N$, et Y est une intersection complète, on peut écrire explicitement de la manière suivante les éléments de $H^0(\omega_{\mathbb{P}_N}^N(Y))$, qui correspondent aux formes abéliennes de degré maximal sur Y :

Lemme 10 Soit Y une variété algébrique de dimension pure n dans \mathbb{P}_N , intersection complète de m hypersurfaces Y_1, \dots, Y_m d'équations homogènes respectives $F_1 = 0, \dots, F_m = 0$, $\deg(F_i) = d_i (1 \leq i \leq m)$. Les éléments de $H^0(\omega_{\mathbb{P}_N}^N(Y))$ s'écrivent sous la forme :

$$\alpha = \frac{S\mu_N}{F_1 \dots F_m}$$

avec S un polynôme homogène de degré $\deg(S) = d_1 + \dots + d_m - N - 1$ et μ_N est la forme de Newton sur $\mathbb{P}_N : \mu_N = \sum_{i=0}^N X_i \wedge_{j \neq i} dX_j$. Si Y est réduite, dans presque toute carte affine, de coordonnées $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ ($n + m = N$, $n = \dim(Y)$) on peut écrire $\text{res}_Y(\alpha)$ sous la forme :

$$\omega = \frac{s(x, y)}{\det\left(\frac{Df}{Dy}\right)} dx$$

où on a posé $dx = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ et $dy = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m$ et s est un polynôme de degré $\leq d_1 + \dots + d_m - N - 1$.

Remarque 5 Supposons l'intersection complète Y réduite. D'après l'égalité :

$$\frac{Df}{Dx} dx + \frac{Df}{Dy} dy = 0$$

on a :

$$dy = -\left(\frac{Df}{Dy}\right)^{-1} \frac{Df}{Dx} dx$$

On peut donc écrire le résidu de toute forme rationnelle (donc toute forme rationnelle sur Y) sous la forme :

$$\omega = \frac{s(x, y)}{\det\left(\frac{Df}{Dy}\right)} dx$$

où $s(x, y)$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule sur aucune composante de Y . Si $s(x, y)$ est un polynôme dans une carte, il n'en sera pas forcément de même dans une autre; la condition sur le degré $\leq d_1 + \dots + d_m - N - 1$ donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse garder dans l'expression le numérateur $s(x, y)$ polynômial quelque soit le choix d'une carte affine générique.

Démonstration du lemme

Il est d'abord facile de voir que les formes explicites de l'énoncé précédent sont bien dans $H^0(\omega_{\mathbb{P}_N}^N(Y))$. Ensuite, on remarque que $H^0(\omega_{\mathbb{P}_N}^N(Y))$ et l'espace des formes $\alpha = \frac{S \mu_N}{F_1 \dots F_m}$ avec $\deg(S) = d_1 + \dots + d_m - N - 1$ ont la même dimension, car la forme μ_N définit un isomorphisme de faisceaux $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(l - N - 1) \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}_N}(l) \rightarrow 0$ pour tout l et $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(l)) = 0$ pour tout l . ■

Rappelons que toute sous-ensemble analytique fermé de \mathbb{P}_N est une variété algébrique, et que toute forme méromorphe sur une variété algébrique de \mathbb{P}_N est rationnelle : c'est le théorème de Chow, dont on trouvera une démonstration simple dans [23].

1.2 Préliminaires autour du théorème de Bézout; l'espace des paramètres T .

Soit Y une variété algébrique de dimension pure n de l'espace projectif complexe \mathbb{P}_N . Une sous-variété linéaire générique de \mathbb{P}_N de codimension n coupe Y en un nombre constant d de points, qu'on appellera le degré de Y . Dans ce paragraphe, on supposera Y irréductible.

Soit (k_1, \dots, k_n) un système de n entiers, que l'on supposera rangés dans l'ordre croissant. Les systèmes de n équations homogènes $Q_1 = 0, \dots, Q_n = 0$ avec $\deg(Q_i) = k_i$ peuvent être paramétrés par leurs coefficients; chaque équation définissant la même hypersurface lorsqu'on la multiplie par un scalaire non nul, on peut paramétrer l'ensemble de ces systèmes d'équations par

$$T = \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$$

avec $N_i = C_{N+k_i}^N - 1$. Dans la suite, on pose $k = k_1 \dots k_n$. Soit n équations $Q_1 = 0, \dots, Q_n = 0$, avec $\deg(Q_i) = k_i$. Soit $(t_i^0, t_i^1, \dots, t_i^{N_i})$ l'ensemble des coefficients du polynôme Q_i , $t_i = (t_i^0 : \dots : t_i^{N_i}) \in \mathbb{P}_{N_i}$ le point correspondant, $H_{t_i} = \{Q_i = 0\}$; soit $t = (t_1, \dots, t_n)$ et H_t l'intersection des H_{t_i} . Le théorème de Bézout nous dit que pour $t \in T$, lorsque $H_t \cap Y$ est finie, le nombre de points d'intersections, comptés avec multiplicités, est égal à kd (cf. Appendice). Si les n équations $Q_i = 0$ déterminent des hypersurfaces H_{t_i} telles que la variété $H_t = H_{t_1} \cap \dots \cap H_{t_n}$ soit de dimension pure $N - n$, H_t sera qualifiée d'*intersection complète*. L'intersection complète H_t sera de plus dite *réduite* si son degré est égal au produit $k = k_1 \dots k_n$. Les remarques contenues dans le lemme suivant nous seront utiles :

Lemme 11 *On note p et q les projections respectives de $T \times \mathbb{P}_N$ sur T et sur \mathbb{P}_N , ainsi que leur restrictions sur les sous-variétés de $T \times \mathbb{P}_N$. Soit C_Y la sous-variété de $T \times \mathbb{P}_N$ définie par $(t, P) \in C_Y$ ssi $P \in Y \cap H_t$. Premièrement, la sous-variété $C_Y \subset T \times \mathbb{P}_N$ est irréductible, et a la même dimension que T . Deuxièmement, la projection $p : C_Y \rightarrow T$ est un morphisme propre et surjectif, génériquement fini de degré kd avec $k = k_1 \dots k_n$. Enfin, C_Y est une intersection complète dans $T \times Y$, définie par les équations $Q_1 = 0, \dots, Q_n = 0$. Enfin, il existe un sous-ensemble analytique $S \subset T$ de codimension au moins deux tel $p : C_Y - p^{-1}(S) \rightarrow T - S$ soit un morphisme fini.*

Démonstration du lemme

Notons d'abord que C_Y est une sous-variété algébrique de $T \times \mathbb{P}_N$, car elle est définie par un système d'équations homogènes, les équations qui définissent Y et les équations $Q_i(t_i, P) = 0$ ($1 \leq i \leq n$). Montrons d'abord que C_Y est irréductible. Chaque équation $Q_i(t_i, P) = 0$ définit pour $P \in Y$

fixé un hyperplan dans \mathbb{P}_{N_i} , de sorte que la fibre de la projection $q : C_Y \rightarrow Y$ est isomorphe à

$$T' = \mathbb{P}_{N_1-1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n-1}$$

On peut voir que $q : C_Y \rightarrow Y$ définit C_Y comme un T' -fibré sur Y , et a la même dimension que T . Y étant irréductible, il en est de même de C_Y . La projection $p : C_Y \rightarrow T$ est un morphisme, car c'est la restriction d'un morphisme $T \times \mathbb{P}_N \rightarrow T$. La projection $p : C_Y \rightarrow T$ est propre car c'est une application continue entre deux espaces compacts. Enfin, p est surjective car tout système d'équations $Q_i(t_i, p) = 0$ définit au moins un point sur Y . C_Y d'après sa définition est l'intersection de $T \times Y \subset T \times \mathbb{P}_N$ avec la sous-variété $C \subset T \times \mathbb{P}_N$ définie par les équations $Q_1(P) = 0, \dots, Q_n(P) = 0$; pour raison de dimensions, l'intersection est complète. Comme T et C_Y ont la même dimension, la projection $p : C_Y \rightarrow T$ est génériquement finie. On peut montrer que le degré de p est kd de la manière suivante. On considère le cas particulier où les hypersurfaces H_{t_i} sont réunion de k_i hyperplans *génériques*. Alors, H_t sera une réunion de k sous-espaces linéaires *génériques* de codimension n , qui couperont donc chacun Y en d points distincts. H_t coupera donc Y en kd points (si l'on prend en compte les multiplicités), et donc $p^{-1}(t)$ définit sur C_Y un 0-cycle de degré kd .

La dernière assertion découle du fait que premièrement, l'ensemble des points $t \in T$ où la fibre est finie est un ouvert, et deuxièmement le complémentaire de cet ouvert ne peut contenir localement d'hypersurface analytique pour des raisons de dimension. ■

Dans la suite on note $Y^{(p)}$ la puissance symétrique p -ième de Y , quotient de Y^p par le groupe des permutations \mathcal{S}_p (cf. Appendice).

Lemme 12 *Soit Z et Z' deux espaces analytiques réduits irréductibles de même dimension. On suppose que Z est un sous-ensemble analytique (localement fermé) d'une variété algébrique. Soit $\mu : Z \rightarrow Z'$ un morphisme propre et surjectif. On note $\mathbb{C}(Z)$ (resp. $\mathbb{C}(Z')$) le corps des fonctions méromorphes sur Z (resp. sur Z'). Si s est le degré de μ , alors $\mathbb{C}(Z)$ est une extension algébrique de degré s de $\mathbb{C}(Z')$.*

Tout d'abord, $\mu_* \circ \mu^* = s \cdot \text{Id}_{\mathbb{C}(Z')}$, où μ_* est la trace des fonctions rationnelles associée au morphisme μ . μ^* définit donc une injection de $\mathbb{C}(Z')$ dans $\mathbb{C}(Z)$. Donc, toute base de transcendance de $\mathbb{C}(Z')$ se prolonge en une base de transcendance de $\mathbb{C}(Z)$.

Soit $f \in \mathbb{C}(Z)$. Non seulement la trace $p_*(f) = \sum_{i=1}^{kd} \mu_i^*(f)$ est méromorphe sur Z' (les μ_i sont les inverses locaux de μ) mais les fonctions symétriques des $\mu_i^*(f)$ sont méromorphes sur Z' ¹³. Donc f vérifie une équation de degré

¹³Ceci peut se voir par des moyens de croissance polynômiale. Il est clair en effet que

s à coefficients dans $\mathbb{C}(Z')$. $\mathbb{C}(Z)$ doit donc être une extension *algébrique* de $\mathbb{C}(Z')$.

D'autre part, Z est contenue dans une variété algébrique. Donc on peut trouver $f \in \mathbb{C}(Z)$ qui prend des valeurs différentes sur les s points distincts d'une fibre générique (prendre d'abord des fonctions qui séparent les points deux à deux, puis prendre une combinaison linéaire de ces fonctions).

Donc le degré de l'extension ne peut être moins que s , et de plus $\mathbb{C}(Z) = \mathbb{C}(Z')[f]$ pour tout f prenant des valeurs distinctes au s points distincts d'une fibre.

Remarquons que ce lemme implique, si Z et Z' sont contenus dans des variétés algébriques, que si l'on a montré que toute fonction méromorphe sur Z' est rationnelle, que toute fonction méromorphe sur Z est rationnelle.

Plus généralement :

Remarque 6 Si dans les conditions du lemme précédent, le morphisme $\mu : Z \rightarrow Z'$ s'étend en un morphisme $\tilde{\mu} : \tilde{Z} \rightarrow \tilde{Z}'$, les fonctions méromorphes sur \tilde{Z} coïncident avec les fonctions méromorphes sur Z dont la trace se prolonge sur \tilde{Z}' .

■

On déduit de ce lemme :

Lemme 13 $\mathbb{C}(C_Y)$ est une extension algébrique de degré kd de $\mathbb{C}(T)$. Les $P_i(t)$ (qu'on peut définir localement d'après ce qui précède) sont des fonctions algébriques de t , i.e. dans un système de coordonnées affines, les coordonnées de $P_i(t)$ sont des fonctions algébriques de t . De plus, $\mathbb{C}(C_Y) \simeq \mathbb{C}(T)[P_1(t), \dots, P_{kd}(t)] \simeq \mathbb{C}(T)[x(P_1(t))]$, où x est une coordonnée affine bien choisie.

Soit p et q les projections de C_Y sur T et sur Y . Pour x une coordonnée affine générale, $x \circ q$ est une fonction rationnelle sur C_Y , les $x \circ q(p_i(t)) = x(P_i(t))$ (p_i désignent les inverses locaux de p) prennent en général kd valeurs différentes, donc $x \circ q$ ne peut pas vérifier une équation de degré $< kd$ (remarquons que $x(P_i(t))$ vérifie exactement la même équation que $x \circ q$). On doit donc avoir $\mathbb{C}(C_Y) \simeq \mathbb{C}(T)[x \circ q] \simeq \mathbb{C}(T)[x(P_i(t))]$, ce qui termine la démonstration.

■

Lemme 14 L'application $\phi : T \rightarrow Y^{(kd)}$ qui à t associe $H_t \cap Y = P_1(t) + \dots + P_{kd}(t)$ est rationnelle.

les fonctions symétriques des $\mu_i^*(f)$ sont régulières sur un ouvert de Zariski $Z' - W$ de Z' , et que la croissance autour de W peut être contrôlée par le fait que f est rationnelle.

Soit f une fonction rationnelle sur $Y^{(kd)}$; il nous faut montrer que $\phi^*(f)$ est rationnelle sur T . En tout point $t \in T$ où la fibre $p^{-1}(t)$ est finie, on peut vérifier que ϕ est régulière (i.e. est un morphisme au voisinage de t). f étant méromorphe, $\phi^*(f)$ sera donc méromorphe en dehors d'un ensemble de codimension au moins deux; d'après Hartogs, elle sera donc rationnelle sur T . ■

Proposition 4 *L'ensemble des $t \in T$ tels que H_t est une intersection complète réduite est un ouvert de Zariski T_{red} de T .*

En effet, soit $L_0 \subset \mathbb{P}_N$ une sous-variété linéaire de dimension n . On a vu ci-dessus qu'au voisinage d'un $t_0 \in T$ générique on peut définir k points d'intersection $\{P_i(t)(1 \leq i \leq k)\} = H_t \cap L_0$. Ceci implique que l'intersection $H_{t_0} \cap L_0$ est transverse; on peut donc également définir k fonctions $\{P_i^L(1 \leq i \leq k)\} = H_{t_0} \cap L$ lorsque L varie au voisinage de L_0 . Cela implique que le degré de H_{t_0} est égal à k , car sur un ouvert de Zariski de l'espace des sous-variétés linéaires de dimension n , L doit couper H_{t_0} en un nombre de points égal à son degré. ■

1.3 Sur une généralisation du théorème d'Abel

D'après le lemme 11, pour t_0 dans un ouvert de Zariski $U_Y \subset T_{red}$ de T , on peut définir dans un voisinage V_{t_0} de t_0 kd applications holomorphes $P_i(t)(1 \leq i \leq kd)$ de V_{t_0} dans Y , telles que $Y \cap H_t = \{P_1(t), \dots, P_{kd}(t)\}$ pour tout $t \in V_{t_0}$ ¹⁴. Pour tout ouvert $\Omega \subset Reg(Y)$, on peut définir un ouvert $U_\Omega \subset U_Y$ par : $t \in U_\Omega \Leftrightarrow P_i(t) \in \Omega(1 \leq i \leq kd)$. Si Ω est de Zariski dans Y , il en est de même de U_Ω dans T . Lorsque Y n'est pas irréductible, on peut appliquer ce qui précède sur chaque composante de Y . Les applications P_i sont encore localement définies sur un ouvert de Zariski de T , et il est facile de voir quels sont les énoncés du paragraphe précédent qui se généralisent.

On ne suppose plus Y irréductible. Soit ω une q -forme régulière ($q \geq 1$) sur un ouvert de Zariski $Y - Z$ de $Reg(Y)$; alors sa transformée d'Abel $\mathcal{A}(\omega) = \sum_{i=1}^{kd} P_i^*(\omega)$ est holomorphe sur U_{Y-Z} . En effet, chaque terme $P_i^*(\omega)$ est holomorphe au voisinage d'un point donné de U_{Y-Z} et la somme étant invariante par monodromie, elle définit une forme globale par prolongement analytique.

On a en fait :

Proposition 5 *Si ω est rationnelle sur Y , $\mathcal{A}(\omega) = \sum_{i=1}^{kd} P_i^*(\omega)$ est rationnelle sur T ; de plus si ω est abélienne, $\mathcal{A}(\omega)$ est nulle.*

¹⁴ U_Y est le lieu où la projection $p : C_Y \rightarrow T$ admet kd inverses locaux.

Nous nous sommes attachés à donner dans ce paragraphe une démonstration "algébrique", utilisant principalement une expression explicite de la transformée d'Abel ainsi que l'identité de Jacobi (cf. Appendice); elle sera valable si on remplace \mathbb{C} par un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Cette démonstration nous permettra d'exhiber des sous-variétés de T sur lesquelles la restriction de la transformée d'Abel de formes rationnelles non abéliennes sur Y s'annulent; ce qui est intéressant dans le cadre de l'inversion du théorème d'Abel. On donnera ensuite, à la fin du chapitre, la démonstration d'un énoncé beaucoup plus général (sur \mathbb{C}), en utilisant la théorie des courants.

Démonstration de la proposition

Soit $m = N - n$ la codimension de Y . Commençons par démontrer le cas rationnel, qui est plus simple. La transformée d'Abel étant additive, on peut se ramener au cas où Y est irréductible. Soit ω une forme rationnelle sur Y , holomorphe sur $Y - Z \subset \text{Reg}(Y)$. Considérons la forme ω' sur Y^{kd} définie par $\sum_{i=1}^{kd} \pi_i^*(\omega)$, où π_i sont les différentes projections sur Y . Soit $\pi : Y^{kd} \rightarrow Y^{(kd)}$ l'application quotient. La forme ω' étant invariante par l'action du groupe symétrique, elle définit une forme rationnelle $\tilde{\omega} = \frac{\pi_*(\omega')}{(kd)!}$ sur $Y^{(kd)}$. On a :

$$\mathcal{A}(\omega) = \phi^*(\tilde{\omega})$$

En effet, dans un voisinage ouvert de $t \in U_{Y-Z}$ on peut définir un application $\phi' : U_t \rightarrow Y^{kd}$. Alors on peut poser $P_i = \pi_i \circ \phi'$, d'où $P_i^*(\omega) = \phi'^* \circ \pi_i^*(\omega)$ et $\mathcal{A}(\omega) = \phi'^*(\omega')$. Mais on a

$$\phi^*(\tilde{\omega}) = \phi'^* \circ \pi^*(\pi_*(\omega')/kd!) = \phi'^*(\omega')$$

car $\pi^* \circ \pi_* = (kd!)Id_{Y^{kd}}$ sur les formes symétriques. Le théorème est alors une simple conséquence du lemme 14, et du fait que l'image réciproque d'une forme rationnelle $\tilde{\omega}$ par une application rationnelle ϕ dont l'image n'est pas contenue dans le pôle de $\tilde{\omega}$ est rationnelle.

Traitons maintenant le cas où ω est abélienne (Griffiths a déjà traité le cas où ω est finie). Pour cela, nous allons d'abord donner une expression explicite de la transformée d'Abel dans un cas particulier :

1.3.1 Un calcul explicite de la transformée d'Abel d'une forme de degré maximal lorsque Y est intersection complète

Soit $m = N - n$ la codimension de Y . Plaçons-nous d'abord dans le cas où la sous-variété Y est une intersection complète réduite, de type (d_1, \dots, d_m) et de degré $d = d_1 \dots d_m$, et où la forme rationnelle ω est de degré maximal.

Nous nous proposons maintenant de calculer explicitement la transformée d'Abel d'une forme rationnelle de degré maximal. Pour cela plaçons-nous dans un système de coordonnées affines, à la fois dans T (i.e. dans chaque \mathbb{P}_{N_i} on se donne un système de coordonnées affines) et dans \mathbb{P}_N , où l'on choisit un système de coordonnées de sorte à ce que les formes rationnelles et abéliennes puissent s'écrire explicitement d'après le lemme 10. Soit

$$t_I = (t_1 = t_{1,i_1}, \dots, t_n = t_{n,i_n}), 1 \leq i_j \leq N_j$$

et

$$(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

de tels systèmes de coordonnées affines. On note t_I avec $I = (i_1, \dots, i_n)$ un choix de n coordonnées affines dans T , et V_I une sous-variété de T où toutes les coordonnées affines sont fixées, sauf les t_I . Les équations de Y s'écrivent $f_1 = 0, \dots, f_m = 0$ tandis que les équations de H_t s'écrivent $Q_1 = 0, \dots, Q_m = 0$. Soit

$$M = \begin{pmatrix} \frac{DQ}{Dx} & \frac{DQ}{Dy} \\ \frac{Df}{Dx} & \frac{Df}{Dy} \end{pmatrix}$$

où l'on note : $\frac{DQ}{Dx}$ la matrice $(\frac{\partial Q_i}{\partial x_j})$, etc. ... ; et pour I fixé :

$$N_I = \begin{pmatrix} \frac{Dx}{Dt_I} & 0 \\ \frac{Dy}{Dt_I} & Id \end{pmatrix}$$

Sur V_I , on a :

$$M \cdot N_I = \begin{pmatrix} -\frac{DQ}{Dt_I} & \frac{DQ}{Dy} \\ 0 & \frac{Df}{Dy} \end{pmatrix}$$

d'après les deux relations

$$\frac{Df}{Dx} dx + \frac{Df}{Dy} dy = 0$$

et

$$\frac{DQ}{Dx} dx + \frac{DQ}{Dy} dy + \frac{DQ}{Dt_I} dt_I = 0$$

On a donc la relation suivante :

$$\det\left(\frac{Dx}{Dt_I}\right) \cdot \det\left(\frac{D(Q, f)}{D(x, y)}\right) = (-1)^n \cdot \det\left(\frac{DQ}{Dt_I}\right) \cdot \det\left(\frac{Df}{Dy}\right)$$

Soit ω une forme rationnelle sur Y ; écrivons-la, d'après la remarque 5, sous la forme : $\omega = \frac{s(x,y)}{\det(\frac{Df}{Dy})} dx$. D'après ce qui précède, $\mathcal{A}(\omega) = \sum_I \phi_I(t) dt_I$, avec

$$\phi_I(t) = \sum_{\nu=1}^{kd} \frac{s}{\det(\frac{Df}{Dy})} \det\left(\frac{Dx}{Dt_I}\right)(P_\nu(t)) = (-1)^n \sum_{\nu=1}^{kd} \frac{s \cdot \det(\frac{DQ}{Dt_I})}{\det(\frac{D(Q,f)}{D(x,y)})}(P_\nu(t))$$

Remarquons que le degré de $\det(\frac{DQ}{Dt_I})$ est inférieur à $k_1 + \dots + k_n$, la dérivation partielle par rapport à un coefficient t_i ne pouvant que diminuer le degré des polynômes Q_j .

Supposons ω abélienne. D'après le lemme 10, on peut supposer que $s(x, y)$ est un polynôme de degré $\leq d_1 + \dots + d_{N-n} - N - 1$. Il nous faut montrer que pour tout I , $\phi_I(t)$ est nulle. Cela découle immédiatement de l'identité de Jacobi :

Identité de Jacobi

Dans \mathbb{C}^N , soit g_1, \dots, g_N N polynômes de degrés respectifs s_1, \dots, s_N s'annulant en $s = s_1 \dots s_N$ points P^ν distincts (et uniquement en ces points). Soit $K(x_1, \dots, x_N)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $s_1 + \dots + s_N - N - 1$. Alors :

$$\sum_{\nu=1}^s \frac{K}{\det(\frac{D(g_1, \dots, g_N)}{D(x_1, \dots, x_N)})}(P^\nu) = 0$$

(cf. Appendice).

La démonstration est donc terminée dans le cas où la variété Y est intersection complète réduite, si la forme ω est abélienne de degré maximal.

Fin de la démonstration dans le cas des formes de degré maximal

Supposons maintenant que Y n'est pas intersection complète. Alors on peut l'inclure dans une variété intersection complète de même dimension n :

Lemme 15 *Pour toute variété algébrique Y de dimension pure n dans \mathbb{P}_N , il existe une variété de même dimension Y' , que l'on dira résiduelle, telle que $Y \cup Y'$ soit une intersection complète réduite.*

Considérons d'abord une hypersurface réduite de plus petit degré d_1 contenant Y , soit H_1 . Ensuite, soit d_2 le plus petit degré d'une hypersurface H_2 contenant Y sans contenir aucune composante de H_1 , et telle que $H_1 \cap H_2$ soit réduite. Alors $H_1 \cap H_2$ est une intersection complète réduite de codimension 2 et contenant Y ; on définit d_{i+1} le plus petit degré d'une hypersurface H_{i+1} contenant Y sans contenir aucune composante de $H_1 \cap \dots \cap H_i$ et telle que $H_1 \cap \dots \cap H_{i+1}$ soit réduite. Alors si $m = N - n$, $H_1 \cap \dots \cap H_m$ est une intersection complète réduite de dimension n contenant Y . ■

D'après ce qui précède, la transformée d'Abel d'une forme abélienne de degré maximal sur l'intersection complète $\tilde{Y} = Y \cup Y'$ est nulle. Or, en prolongeant sur \tilde{Y} la forme ω définie sur Y par 0 sur Y' , on obtient une forme abélienne sur \tilde{Y} d'après le lemme 7, soit $\tilde{\omega}$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\mathcal{A}(\tilde{\omega})$ est égale à $\mathcal{A}(\omega)$ là où elle est définie.

Fin de la démonstration dans le cas des formes de degré non maximal

Pour terminer la démonstration dans le cas où la forme ω n'est pas de degré maximal, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 16 *Soit une forme différentielle holomorphe ω définie sur un ouvert*

$$U \subset \mathbb{C}^{N_1} \times \mathbb{C}^{N_2} \times \dots \times \mathbb{C}^{N_n}$$

Si ω s'annule quand on fixe s paramètres $t_{j_1} \in \mathbb{C}^{N_{j_1}}, t_{j_s} \in \mathbb{C}^{N_{j_s}}$, et qu'elle est de degré $\leq n - s$, elle s'annule identiquement.

Démonstration du lemme

Considérons une forme de degré $q \leq n - s$:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_q \leq n, 1 \leq j_k \leq N_{i_k}} f_{I,J}(t_1, \dots, t_n) dt_{i_1, j_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_q, j_q}$$

Alors soit un terme de la somme $f_{I,J}(t_1, \dots, t_n) dt_{i_1, j_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_q, j_q}$; dans les indices $i_k (1 \leq k \leq q)$ il y a au moins s entiers $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_s \leq n$ qui n'apparaissent pas. Par hypothèse, la forme est nulle lorsqu'on fixe $t_{\alpha_1, 1}, \dots, t_{\alpha_s, 1}$, donc en particulier sur une telle sous-variété linéaire $f(t_1, \dots, t_n) = 0$. Mais tout point (t_1, \dots, t_n) appartient à une telle sous-variété linéaire; donc tout terme de la somme est nul, donc ω l'est aussi. ■

Supposons donc que la forme ω , abélienne sur Y , soit de degré $q = n - s$ non maximal. Alors, si on fixe s paramètres t_i , la restriction de ω sur la section de Y par ces s hypersurfaces (qui génériquement se couperont transversalement sur Y) sera de degré maximal et abélienne d'après le lemme 9; on pourra donc appliquer le raisonnement précédent pour montrer que la transformée d'Abel par rapport aux $n - s$ paramètres t_i restants est nulle. Le lemme précédent permet de conclure si l'on remarque que cette transformée d'Abel de la restriction s'identifie à la restriction (à la sous-variété linéaire de T correspondant à fixer s paramètres) de la transformée d'Abel. ■

1.4 D'autres généralisations du théorème d'Abel

1.4.1 Transformation d'Abel par rapport à une sous-variété de T

Considérons l'expression donnée ci-dessus pour la transformée d'Abel d'une forme de degré maximal sur une intersection complète réduite Y dans une carte affine :

$$\mathcal{A}(\omega) = \sum_I \phi_I(t) dt_I$$

avec

$$\phi_I(t) = \sum_{\nu=1}^{kd} \frac{s}{\det(\frac{Df}{Dy})} \det\left(\frac{Dx}{Dt_I}\right)(P_\nu(t)) = \sum_{\nu=1}^{kd} \frac{(-1)^n s \cdot \det(\frac{DQ}{Dt_I})}{\det(\frac{D(Q,f)}{D(x,y)})}(P_\nu(t))$$

Supposons que seuls les coefficients des termes de degré non maximal des polynômes Q_i varient (les monômes de degré k_i sont fixés), ce qui correspond à une sous-variété linéaire T' de T . Alors le degré de $\det(\frac{DQ}{Dt_I})$ est inférieur à $k_1 + \dots + k_n - n$, et d'après l'identité de Jacobi il suffit que $\deg(s) \leq d_1 + \dots + d_m - m - 1$ pour que la transformée d'Abel soit nulle. Si $\deg(s) = d_1 + \dots + d_m - m - 1$, ω a un pôle à l'infini d'ordre n et pourtant sa transformée d'Abel sur T' s'annule. Si les k_i sont tous égaux à 1, cette transformée d'Abel correspond à une trace par rapport à une projection.

Si seulement les coefficients des termes de degré non maximal de la première équation $Q_1 = 0$ varient, il suffit d'avoir $\deg(s) \leq d_1 + \dots + d_m - N$ (i.e. la forme a un pôle d'ordre au plus 1 à l'infini) pour que la transformée d'Abel s'annule.

Remarquons que le théorème d'Abel direct peut s'étendre si l'on fixe un nombre fini r de points sur la partie régulière de Y . Il est important que ces points soient sur la partie régulière; sinon, seule la transformée d'une forme *finie* est holomorphe.

Considérons pour simplifier la transformée d'Abel par rapport aux droites de \mathbb{P}_2 . Soit $Y \subset \mathbb{P}_2$ une courbe singulière, contenant un noeud $P \in Y$ (i.e. un point double au voisinage duquel l'équation de la courbe peut s'écrire $xy = 0$ pour un choix de coordonnées locales x, y).

On considère la variété d'incidence Λ définie comme l'ensemble des couples $(t, x) \in T \times Y$ vérifiant $x \in H_t$, où $P \in Y$ est un point fixé sur Y , et T est l'ensemble des droites $t \in \mathbb{P}_2^*$ passant par P . Soit $C_Y = (T \times Y) \cap \Lambda$; si $P \in \text{Sing}(Y)$, C_Y contient tous les couples (t, P) , où t est une droite passant par P ; C_Y n'est plus irréductible, c'est la réunion de la "droite singulière" $q^{-1}(P)$ de $Y \times T$, et de C'_Y , l'ensemble des couples $(t, x) \in T \times Y$ vérifiant $x \in H_t$ si $x \neq P$ et H_t est l'une des deux tangentes à Y en P si $x = P$. On a

$\sum_{i=1}^{d-2} P_i^*(\omega) = p_*((q^*(\omega))|_{C'_Y})$, mais bien que $q^*(\omega)$ soit de Barlet sur $T \times Y$, sa restriction sur C'_Y n'est pas nécessairement de Barlet!

1.4.2 Transformation d'Abel dans un ouvert T -concave

Dans la variété $T = \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$ paramétrant les intersections complètes $H_t, t \in T$ de multidegré (k_1, \dots, k_n) , on considère un ouvert connexe U^* et $U \subset \mathbb{P}_N$ l'ouvert de \mathbb{P}_N réunion des H_t . L'ouvert U sera appelé T -concave, par analogie avec les ouverts linéairement concaves de [32]. On considère un sous-ensemble analytique fermé Y de U de dimension pure n . On considère la variété d'incidence $C_Y = \{(t, p), t \in U^*, p \in H_t \cap Y\}$, avec les deux projections $p : C_Y \rightarrow U^*$ et $q : C_Y \rightarrow Y$.

On remarque que :

i) p est un morphisme propre. En effet, p est la restriction du morphisme d'incidence : $\tilde{p} : \Lambda \rightarrow T$ à C_Y , et \tilde{p} est propre car c'est une application continue entre deux espaces compacts;

ii) C_Y est une intersection complète sur $U^* \times Y$, car C_Y est de dimension pure $\dim(T)$; de plus, les équations $Q_1 = 0, \dots, Q_n = 0$ donne des équations définissantes de C_Y génériquement réduites;

iii) p est surjectif, car par hypothèse par tout point P de U (donc de Y) il existe $t \in U^*$ tel que $P \in H_t$.

En particulier, p est génériquement fini.

Soit α le degré de p , et $U_Y \subset U^*$ l'ouvert de Zariski sur lequel p admet α inverses locaux $p_i (1 \leq i \leq \alpha)$. Pour tout $t \in U_Y$, H_t coupe Y transversalement en un nombre constant α de points distincts. On peut donc définir localement dans un voisinage ouvert U_{t_0} de tout point $t_0 \in U_Y$ α applications analytiques $P_i = q \circ p_i : U_{t_0} \rightarrow Y (1 \leq i \leq \alpha)$ telles que

$$\{P_1(t), \dots, P_\alpha(t)\} = H_t \cap Y.$$

Si ω est une forme régulière sur un ouvert de Zariski $Y - W$ de $Reg(Y)$, on définit sa transformée d'Abel par

$$\mathcal{A}(\omega) = P_1^*(\omega) + \dots + P_\alpha^*(\omega)$$

qui est visiblement holomorphe sur un ouvert de Zariski $U_{Y-W} \subset U_Y$ de U^* .

Théorème 1 *Pour que $\mathcal{A}(\omega)$ soit méromorphe (resp. holomorphe) sur U^* , il est nécessaire et suffisant que ω soit méromorphe (resp. de Barlet) sur Y .*

Traisons d'abord le cas de la suffisance. On utilise premièrement le fait que si ω est méromorphe (resp. de Barlet) sur Y , $q^*(\omega)$ est méromorphe (resp. de Barlet) sur $U^* \times Y$ (d'après le lemme 8). Ensuite, la restriction de $q^*(\omega)$

à C_Y doit être méromorphe (resp. de Barlet) d'après le lemme 9, car C_Y est intersection complète génériquement réduite sur $U^* \times Y$. Enfin, la propriété de Barlet nous permet de conclure que la trace par p , qui est $\mathcal{A}(\omega)$, doit être méromorphe (resp. holomorphe).

Montrons maintenant la nécessité. Supposons d'abord $\mathcal{A}(\omega)$ holomorphe. Soit \tilde{W} l'ensemble des points $t \in U^*$ tels que H_t rencontre W . Soit $x \in W - \text{Sing}(Y)$. On peut trouver t_0 sur \tilde{W} tel que x soit de multiplicité 1 dans $H_{t_0} \cap Y$ et soit l'unique point de $H_{t_0} \cap W$. Alors, le fait que $\mathcal{A}(\omega)$ se prolonge en t_0 implique que ω se prolonge holomorphe en $x = P_s(t_0)$.

Il reste à montrer que ω doit être de Barlet aux points singuliers de Y .

Soit \tilde{S} , l'ensemble des points $t \in U^*$ tels que H_t rencontre $\text{Sing}(Y)$. Soit $x \in \text{Sing}(Y)$; pour des raisons de dimension, un point générique t_0 de \tilde{S} correspond à une H_{t_0} qui rencontre $\text{Sing}(Y)$ en un seul point x et de plus tel que la multiplicité en x de $H_{t_0} \cap Y$ soit égale à la multiplicité s de x sur Y ¹⁵. De plus, on peut choisir t_0 en dehors de S'' , l'ensemble des $t \in U^*$ tels que $H_t \cap Y$ n'est pas fini, qui est de codimension au moins deux.

Plaçons-nous dans une carte affine contenant x .

Plaçons-nous, dans T , dans un voisinage ouvert U_{t_0} de t_0 . Le fait de ne faire varier que les termes constants dans les équations affines $\tilde{Q}_i = 0$ définit une fibration de U_{t_0} en sous-variétés linéaires de dimension n . *Alors dans T chacune de ces sous-variété linéaires L de dimension n définit une paramétrisation locale de Y en x , et $\mathcal{A}(\omega)_L$ est la trace de ω pour cette paramétrisation.* En effet, les autres coefficients des \tilde{Q}_i étant fixés, il est facile d'exprimer les termes constants en fonction du point $P \in Y$. En choisissant un voisinage de x $U_x \subset Y$ et un voisinage de U_{t_0} suffisamment petits, on obtiendra ainsi une famille de paramétrisations locales de Y en x , pour lesquelles la trace de ω est holomorphe. Cela implique que ω est de Barlet d'après le lemme 6.

Donc lorsque $\mathcal{A}(\omega)$ est holomorphe, ω est de Barlet. Supposons maintenant $\mathcal{A}(\omega)$ méromorphe. Aux points où Y est lisse, la première partie de la démonstration s'applique, par des arguments de croissance polynômiale, pour montrer que ω est méromorphe. Soit maintenant $x \in \text{Sing}(Y)$, et soit $f_x = 0$ une équation de W au voisinage U_x de x . Alors, soit t_0 tel que :

- i) H_{t_0} coupe Y en x avec la multiplicité $s = \text{mult}_x(Y)$.
- ii) H_{t_0} ne coupe pas W en dehors de U_x .

Alors, on considère la transformation d'Abel "restreinte" à (U_x, ω_{U_x}) au voisinage de t_0 . $f_x^s \cdot \omega$ aura une transformée d'Abel "restreinte" holomorphe pour s assez grand. D'après ce qui précède, $f_x^s \omega$ sera de Barlet, donc

¹⁵La multiplicité de x sur Y est la multiplicité d'intersection en x de Y avec un sous-espace linéaire générique de codimension n passant par x , ou encore le degré de la paramétrisation locale associée à une projection générique.

méromorphe, sur U_x , ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 7 La démonstration en fait nous donne plus. Supposons par exemple ω de degré maximal. On voit qu'étant donné un ouvert affine Ω , il suffit que le "terme constant" de la transformation d'Abel (i.e. le terme correspondant à varier seulement les termes constants dans les polynômes Q_i) soit holomorphe sur $\tilde{\Omega} = \{t/H_t \cap Y \subset \Omega\}$ pour que la forme soit de Barlet dans l'ouvert affine $\Omega \cap Y$.

1.4.3 Sur les pôles de la transformée d'Abel d'une forme méromorphe

On peut définir de la manière suivante une transformation d'Abel sur les diviseurs de Y . Le morphisme $p : C_Y \rightarrow U^*$ est fini en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 2 S'' , et sur $U^* - S''$ le morphisme est localement inversible en dehors d'une hypersurface analytique S' On pose $S = S' \cup S''$, $U_Y = U^* - S$.

Soit W un diviseur de $Y \subset U$, de support \mathcal{W} . Soit $t \in U^* - S''$. On suppose que H_t ne rencontre pas \mathcal{W} , ou ne le rencontre qu'en un seul de ses points d'intersections $Y \cap H_t$, soit x et que $\text{mult}_x(H_t \cap Y) = \text{mult}_x(Y)$. Ces conditions sont vérifiées pour t en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension au moins deux.

On considère un ouvert affine U_x sur Y contenant ce point. Alors dans cet ouvert, W est défini par une fonction régulière f . Alors on définit dans un voisinage de t U_t la fonction $f_t = P_1^*(f) \dots P_s^*(f)$, avec $s = \text{mult}_x(Y)$. Alors, f_t est bien définie sur U_t , car elle est invariante par monodromie et elle est localement bornée. On peut voir que les couples (U_t, f_t) définissent un diviseur en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension au moins 2 de U^* . Ce diviseur s'étend donc en un diviseur sur U^* noté \tilde{W} . Son support $\tilde{\mathcal{W}}$ est l'ensemble des t pour lesquels H_t rencontre le support \mathcal{W} de W .

La transformation d'Abel des formes méromorphes sur Y est loin d'être surjective dans l'ensemble des formes méromorphes sur U^* : les ensembles $\tilde{\mathcal{W}}$ ci-dessus ont la propriété très particulière d'être fibrés par des sous-variétés linéaires T_x' de codimension n , qui correspondent aux t tels que H_t passent par $x \in \mathcal{W}$ ¹⁶.

On peut améliorer l'énoncé du théorème précédent :

Théorème 1 Si $\omega \in H^0(\omega_Y^q(W))$, alors

$$\mathcal{A}(\omega) \in H^0(\omega_{U^*}^q(\tilde{W}))$$

¹⁶Pour une description de l'image de la transformation d'Abel, cf. [32].

Démonstration du théorème

Soit $t \in U^* - S''$. On suppose que H_t ne rencontre \mathcal{W} qu'en un seul de ses points d'intersections $Y \cap H_t$, soit x et que $\text{mult}_x(H_t \cap Y) = \text{mult}_x(Y)$. Considérons sur U_t la forme génériquement définie par

$$\alpha = f_t \cdot \mathcal{A}(W) = P_1^*(f) \dots P_s^*(f)(P_1^*(\omega) + \dots + P_\alpha^*(\omega))$$

On peut supposer que $P_{s+1}^*(\omega) + \dots + P_\alpha^*(\omega)$ est holomorphe sur U_t . On a :

$$f_t \cdot (P_1^*(\omega) + \dots + P_s^*(\omega)) = P_1^*(f\omega)P_2^*(f) \dots P_s^*(f) + \dots + P_1^*(f)P_2^*(f) \dots P_s^*(f\omega)$$

Le terme de droite étant localement borné et invariant par monodromie, il se prolonge sur U_t , donc la forme α se prolonge en une forme holomorphe sur U_t .

Cela termine la démonstration.

1.4.4 Sur la transformation de Radon

On peut aussi généraliser de la manière suivante la transformation d'Abel d'un ouvert T -concave U de domaine dual U^* . On considère un ouvert connexe $U^* \subset T$, $U \subset \mathbb{P}_N$ le domaine dual et $\Lambda_U \subset U^* \times U$ la variété d'incidence, définie par les équations $Q_1 = 0, \dots, Q_n = 0$, avec les projections $p : \Lambda_U \rightarrow U^*$ et $q : \Lambda_U \rightarrow U$.

Soit F une forme lisse $\bar{\partial}$ -fermée de type $(N - n + q, N - n)$ sur U . On considère son image réciproque par q qui est une forme de même bidegré $(N - n + q, N - n)$ sur Λ_U , et définit donc un courant sur Λ_U . On lui associe son image directe par p (qui est propre) et on vérifie qu'on obtient un courant de type $(q, 0)$ sur U^* , qui est $\bar{\partial}$ -fermé comme F ; c'est donc une q -forme holomorphe. Nous noterons $\mathcal{R}(F)$ cette forme et nous appellerons \mathcal{R} la transformation de Radon. On vérifie que l'image d'une forme lisse F $\bar{\partial}$ -exacte est nulle, pour des raisons de bidegré. On appellera aussi transformée de Radon la transformée obtenue sur les classes de cohomologie par passage au quotient.

On a alors :

Proposition 6 *Si $q = 0$, on a :*

$$\mathcal{R}(F) = \int_{H_t} F$$

Considérons maintenant un courant α $\bar{\partial}$ -fermé de type $(N - n + q, N - n)$ dans U . On peut trouver un représentant lisse F $\bar{\partial}$ -fermé qui lui est $\bar{\partial}$ -cohomologue. On définit la transformée de Radon de α comme étant celle

de F (qui ne dépend pas du représentant choisi). Evidemment, la transformée de Radon ne dépend donc que de la classe de $\bar{\partial}$ -cohomologie du courant.

Alors, si F est $\bar{\partial}$ -cohomologue au courant $\omega \wedge [Y]$, avec ω est de Barlet sur Y , on a : $\mathcal{R}(F) = \mathcal{A}(\omega)$.

C'est une assertion locale sur U^* : il suffit de le vérifier dans un voisinage U_t de chaque $t \in U^*$. De plus, il suffit de le vérifier sur un ouvert de Zariski de U_t , car deux formes holomorphes égales sur un ouvert de Zariski sont égales partout. Donc, il suffit de montrer l'assertion lorsqu'il y a un seul terme dans la transformée d'Abel. Alors, l'assertion découle de l'écriture locale $\omega \wedge [Y]$ comme courant résiduel d'une forme méromorphe.

Le théorème d'Abel pour les formes de Barlet est donc un cas particulier du fait que $\mathcal{R}(\alpha)$ est une q -forme holomorphe sur U^* pour α courant $\bar{\partial}$ -fermé de type $(N - n + q, N - n)$ sur U .

Le problème, étudié dans [37] (p.249) dans le cas $n = 1, q = 1$, de la caractérisation des classes de cohomologies de $H^{N-n+q, N-n}(U)$ représentables par un courant $\omega \wedge [Y]$ avec ω de Barlet sur Y , par leur transformée de Radon, se généralise dans ce cadre.

Remarquons que si U^* est T tout entier, la transformée d'un q -courant résiduel $\bar{\partial}$ -fermé par la transformée de Radon est nulle. Cela n'implique pas que l'on obtient ainsi de nouvelles relations abéliennes sur le tissu associé, car si le q -courant résiduel α n'est pas représenté par une forme abélienne, la restriction de $\mathcal{R}(\alpha)$ sur les feuilles $\{P_i(t) = Cte\}$ ne s'annule pas nécessairement.

1.4.5 La transformée d'Abel par rapport à diverses transformations projectives d'une variété fixée

Soit $Z \subset \mathbb{P}_N$ une variété algébrique réduite de codimension n , de degré k , intersectant Y transversalement (donc en kd points distincts de $Reg(Y)$ d'après le théorème de Bézout). Etant donné l'ensemble des transformations projectives singulières (non nécessairement inversibles) $T = \mathbb{P}(M_{N+1}(\mathbb{C}))$, on peut associer à $t \in T$ la variété transformée Z^t définie comme l'ensemble des x tels que $t.x \in Z$ (on se place dans \mathbb{C}^{N+1} pour que la définition de $t.z$ ait toujours un sens; on identifie Z à son cône associé dans \mathbb{C}^{N+1}). On peut définir comme précédemment une application rationnelle $T \rightarrow Y^{(kd)}$ qui à un $t \in T$ générique associe $Y \cap Z^t$, et localement au voisinage d'un $t \in T$ générique kd applications analytiques $P_i : T \rightarrow Y$. Alors on définit la transformée d'Abel d'une q -forme rationnelle ω sur Y par la formule locale $\mathcal{A}(\omega) = \sum_{i=1}^{kd} P_i^*(\omega)$; on vérifie par le même procédé qu'auparavant que ces formes locales se recollent en une forme rationnelle globale sur T . De plus, si ω est abélienne sur Y , sa transformée d'Abel $\mathcal{A}(\omega)$ est holomorphe (donc

nulle si $q > 0$) sur T (on peut le voir par la transformée de Radon). ■

Chapitre 2

Autour du théorème de Lie.

2.1 Le théorème de Lie généralisé.

On se donne une intersection complète réduite $H_{t_0} \subset \mathbb{P}_N$ de type (k_1, \dots, k_n) , définie par l'intersection de n hypersurfaces H_{t_1}, \dots, H_{t_n} d'équations respectives $Q_1^0 = 0, \dots, Q_n^0 = 0$. On se donne sur H_{t_0} α points distincts $P_i^0 \in H_{t_0}$ et α germes de variétés analytiques lisses et irréductibles de dimension n $Y_i (1 \leq i \leq \alpha)$, coupant chacun transversalement H_{t_0} en P_i^0 . On peut alors définir dans un voisinage de $t_0 \in T$ α applications analytiques $P_i (1 \leq i \leq \alpha)$ telles que les $P_i(t)$ soient les (uniques, en restreignant au besoin les Y_i) points d'intersection des Y_i avec H_t .

On suppose définie sur chaque germe Y_i une forme différentielle méromorphe ω_i non nulle de degré $q (1 \leq q \leq n)$. On considère le sous-ensemble analytique local $Y = \cup_{i=1}^{\alpha} Y_i$ et la forme méromorphe ω sur Y dont la restriction à Y_i est ω_i . La transformée d'Abel sur U du couple (Y, ω) est alors par définition : $\mathcal{A}(\omega) = \sum_{i=1}^{\alpha} P_i^*(\omega_i)$, qui est méromorphe dans un voisinage de t_0 .

Théorème 2 *On suppose que $\mathcal{A}(\omega)$ est rationnelle (resp. nulle). Alors α est un multiple de $k = k_1 \dots k_n$; de plus Y est incluse dans une variété algébrique \underline{Y} de degré $d = \alpha/k$ et ω se prolonge à \underline{Y} en une forme rationnelle (resp. abélienne) $\underline{\omega}$.*

Remarque 8 Supposons que les α germes Y_i fassent partie a priori d'une sous-variété algébrique $X \subset \mathbb{P}_N$ de degré d , et que la transformée d'Abel $\mathcal{A}(\omega) = \sum_{i=1}^{\alpha} P_i^*(\omega)$ soit rationnelle. Supposons de plus que $\alpha < kd$. Alors $\alpha = kd'$ avec $d' < d$ et X admet une composante irréductible \underline{Y} de degré

¹d'après la version complexe du théorème des fonctions implicites, et comme l'intersection est transverse.

d' . En particulier, si dans le théorème d'Abel direct on ne prend pas tous les termes de la somme, la somme ne peut pas être rationnelle si Y est irréductible. En fait, une telle somme partielle est une forme "algébrique" : c'est la "trace partielle" d'une forme rationnelle sur la variété d'incidence C_Y au-dessus de T .

On peut énoncer une réciproque de ce résultat dans le cas $n = 1$, qui a été démontrée par S. Collion ([16]) : si la transformée d'Abel est algébrique (i.e. les coefficients $\phi_I(t)$ de la forme $\mathcal{A}(\omega) = \sum_I \phi_I(t) dt^I$ sont des fonctions algébriques de t), alors Y est incluse dans une sous-variété algébrique \tilde{Y} et ω est la restriction à Y d'une forme algébrique sur \mathbb{P}_N .

Transformons l'énoncé du théorème en un énoncé équivalent : Soit $U^* \subset T$ un ouvert connexe, $U = \cup_{t \in U^*} H_t$. On se donne un sous-ensemble analytique Y de dimension pure n dans U , et une q -forme ω génériquement régulière sur Y ($1 \leq q \leq n$). Soit α le nombre de points d'intersection de Y avec H_t pour $t \in U^*$ générique. Si $\mathcal{A}(\omega)$ est rationnelle (resp. nulle), $Y = \underline{Y} \cap U$, et $\omega = \underline{\omega}_Y$, où \underline{Y} est une variété algébrique de degré $d = \alpha/k$, et $\underline{\omega}$ une forme rationnelle (resp. abélienne) sur \underline{Y} .

Démonstration du théorème.

On se place dans les hypothèses de l'énoncé précédent. La démonstration se fait en quatre étapes : d'abord dans le cas où Y est une courbe plane et $T = \mathbb{P}_2^*$, ce cas est déjà traité par [33]; puis le cas où Y est une courbe de \mathbb{P}_N et $T = \mathbb{P}_N^*$ s'y ramène par projection. Le cas où Y est une courbe de \mathbb{P}_N et T est l'espace \mathbb{P}_{N_k} des hypersurfaces de degré k dans \mathbb{P}_N se ramène au cas précédent par l'application de Veronese. La dernière étape, pour Y de dimension arbitraire et un multidegré (k_1, \dots, k_n) arbitraire, consiste à faire un raisonnement par récurrence sur la dimension n de Y en fixant la première équation $Q_1 = 0$ de $H_t = \{Q_1, \dots, Q_n = 0\}$.

2.1.1 Cas des courbes planes par rapport aux droites.

La démonstration se trouve dans [33]. Nous rappelons ici le schéma de la démonstration pour la commodité du lecteur. La transformée d'Abel par rapport aux droites d'équation $y + ax + b = 0$ est une 1-forme fermée $\mathcal{A}(\omega) = \sum_{\nu=1}^{\alpha} r(a, b)^{\nu} da + s(a, b)^{\nu} db$ avec si on pose $f_{\nu} = s^{\nu}/r^{\nu}$ les équations $\partial_a f_{\nu} = f_{\nu} \cdot \partial_b f_{\nu}$.

Ces équations impliquent que si $\mathcal{A}(\omega)$ est rationnelle, son ensemble polaire est la réunion d'un nombre fini de droites dans \mathbb{P}_2^* .

Le lemme fondamental est alors le suivant : si la transformée d'Abel se prolonge holomorphiquement dans un domaine connexe $\tilde{U}^* \supset U^*$, alors dans un domaine $\tilde{U} = \cup_{t \in \tilde{U}^*} H_t$ la courbe Y et la forme ω se prolongent.

Il suffit pour conclure de se rappeler que toute courbe analytique de \mathbb{P}_2 moins un nombre fini de points se prolonge grâce à théorème de Remmert

(cf. [30]). Soit \underline{Y} la courbe algébrique contenant Y . La rationalité de $\mathcal{A}(\omega)$ permet alors de vérifier que le prolongement $\underline{\omega}$ de ω à \underline{Y} doit être rationnel, d'après le théorème 1; de même si $\mathcal{A}(\omega)$ est nul, $\underline{\omega}$ est abélienne.

2.1.2 Cas des courbes de \mathbb{P}_N par rapport aux hyperplans.

On se ramène au cas des courbes *planes* par récurrence sur la dimension N de l'espace ambiant. Il est clair qu'on peut supposer la somme $\sum_{i=1}^{\alpha} P_i^*(\omega)$ minimale, dans le sens qu'aucune somme partielle n'est rationnelle : le cas général s'en déduit aisément. On se donne un hyperplan H non contenu dans U . Considérons une projection sur H π_P , définie par un point de projection $P \in U$ extérieur à $Y \cup H$ et telle que la restriction de π_P sur Y soit propre. On définit U' l'ouvert tracé sur H par l'ensemble des $H_t, t \in U^*, P \in H_t$. Alors $\pi_P(Y)$ est une courbe analytique $Y' \subset U'$, U' est réunion d'hyperplans. L'hypothèse de récurrence nous dit ² que $Y' = \underline{Y}' \cap U'$ avec \underline{Y}' de degré $\alpha = d$, et que $\omega' = \pi_{P*}(\omega)$ se prolonge en une forme $\underline{\omega}'$ sur \underline{Y}' , qui est rationnelle ou holomorphe suivant l'hypothèse. Y est donc contenue dans le cône C_P de sommet P et de base \underline{Y}' . En faisant varier le centre de projection P , on obtient une variété algébrique $\cap_P C_P$ contenant Y . De plus, il est facile de voir que $\cap_P C_P \cap U = Y$, car pour tout point Q de U en dehors de Y , on peut trouver un centre de projection P tel que la droite reliant P et Q ne coupe pas Y . $\cap_P C_P$ est donc de dimension 1, et si \underline{Y} est la plus petite variété algébrique contenant Y , on a encore $\underline{Y} \cap U = Y$ (en particulier \underline{Y} est de degré $d = \alpha$). On a donc prolongé la courbe, il reste à prolonger la forme.

Soit π une projection générique. On a $\underline{Y}' = \pi(\underline{Y})$. Remarquons que la somme étant supposée minimale, \underline{Y} est irréductible, donc on peut supposer que la projection générique \underline{Y}' l'est aussi. Alors, $\pi : \underline{Y} \rightarrow \underline{Y}'$ est une application birationnelle de \underline{Y} sur \underline{Y}' . Posons $\underline{\omega} = \pi^*(\underline{\omega}')$. Alors $\underline{\omega}$ est l'image réciproque par une application rationnelle d'une forme rationnelle; c'est donc une forme rationnelle; de plus elle coïncide avec les ω sur les Y .

Si la somme n'est pas minimale, on recolle les formes rationnelles obtenues sur la réunion des courbes algébriques obtenues en exprimant $\mathcal{A}(\omega)$ comme une somme de sommes minimales.

Dans le cas de la transformée d'Abel nulle, $\pi_*(\underline{\omega})$ est abélienne sur $\pi(\underline{Y})$ "pour un ouvert de projections"; d'après le lemme 3, $\underline{\omega}$ est abélienne, ce qui termine la démonstration.

²puisque la transformée d'Abel de $\pi_{P*}(\omega)$ dans la projection s'identifie à la restriction de la transformée d'Abel de ω par rapport à la sous-variété de \mathbb{P}_N^* correspondant aux hyperplans passant par P ; elle est donc rationnelle ou nulle suivant l'hypothèse

2.1.3 Cas des courbes de \mathbb{P}_N par rapport aux hypersurfaces de degré k arbitraire.

Supposons donnés α germes de courbes $Y_i (i = 1, \dots, \alpha)$ transverses à une hypersurface de degré k dans \mathbb{P}_N . L'application $v_k : \mathbb{P}_N \rightarrow \mathbb{P}_{C_{N+k}^k - 1}$ est définie en coordonnées homogènes par $v_k(x_0, \dots, x_N) = (x^I)_{|I|=k}$. La transformée d'Abel relativement aux Y_i et un ouvert U dans l'espace des hypersurfaces de degré k de \mathbb{P}_N s'identifie à la transformée d'Abel relativement aux $Y'_i = v_k(Y_i)$ et l'ouvert correspondant de l'espace des hyperplans de $\mathbb{P}_{C_{N+k}^k - 1}$. Ainsi, pour les courbes, on se ramène au cas linéaire par le plongement de Veronese. En effet, comme les germes Y'_i de $\mathbb{P}_{C_{m+k}^k}$ sont contenus dans une variété de Veronese, la courbe \underline{Y}' contenant les Y'_i dont le paragraphe précédent affirme l'existence est aussi contenue dans cette variété de Veronese; en particulier son degré α est multiple de k ; on peut poser $\alpha = kd$ et $\underline{Y}' = v_k(\underline{Y})$, alors \underline{Y} est une courbe de \mathbb{P}_N de degré $\alpha/k = d$ contenant les Y_i , et l'image réciproque d'une forme rationnelle (resp. abélienne) sur \underline{Y}' par l'isomorphisme de Veronese v_k est rationnelle (resp. abélienne) sur \underline{Y} .

2.1.4 Cas où est Y de dimension quelconque : prolongement de Y .

On raisonne par récurrence sur la dimension de Y .

On a besoin pour la démonstration du théorème des deux lemmes suivants :

Lemme 17 *Soit U_{t_0} un voisinage ouvert de $t_0 \in U^*$. Soit $t = (t_1, \dots, t_n)$, $H_t = H_{t_1} \cap \dots \cap H_{t_n}$, avec $\{Q_i = 0\}$ les équations affines de H_{t_i} . Si $\mathcal{A}(\omega)$ est méromorphe (resp. rationnelle, holomorphe, nulle), il en est de même de $\mathcal{A}'(\omega|_{Q_1^0=0})$ et de $\mathcal{A}'(\text{res}_{Q_1^0=0} \frac{\omega}{Q_1^0})$, où \mathcal{A}' est la transformée d'Abel obtenue en gardant t_1 fixe ($t_1 = t_1^0$).*

Démonstration du lemme

Si $\mathcal{A}(\omega)$ est nul (resp. rationnel), il en est de même de la restriction de cette forme à la sous-variété linéaire de T d'équation $t_1 = t_1^0$. Mais cette restriction est précisément la transformée d'Abel (par rapport aux $n-1$ facteurs variables restants) de la restriction de ω à la section $Y \cap H_{t_1}$. L'argument pour le résidu est légèrement plus subtil. On se restreint à la sous-variété de U correspondant à l'image de $Q_1 = Q_1^0 + t$. Alors $P_i^*(Q_1^0) = -t$ ne dépend pas de i et de $\omega/Q_1^0 = \omega' \wedge dQ_1^0/Q_1^0 + \omega''$ on déduit

$$\sum_{i=1}^{\alpha} -P_i^*(\omega)/t = \sum_{i=1}^{\alpha} P_i^*(\omega') \wedge dt/t + P_i^*(\omega'')$$

Mais $\mathcal{A}'(\omega'_{\mathcal{Q}_1^0=0})$ n'est autre que la restriction de $\sum_{i=1}^{\alpha} P_i^*(\omega')$ à $t = 0$, donc le résidu de la forme $-\sum_{i=1}^{\alpha} P_i^*(\omega)/t$ sur $t = 0$ (qui est, selon l'hypothèse, méromorphe, rationnelle, holomorphe, nulle). ■

Lemme 18 *Soit Γ une variété maximale complexe de dimension réelle $2n-1$ dans \mathbb{P}_{n+m} . Supposons que pour toute section par une hypersurface S_{t_1} de degré k_1 , au voisinage d'une hypersurface fixée S_0 , la variété $\Gamma_{t_1} = \Gamma \cap S_{t_1}$ soit le bord d'un sous-ensemble analytique X_{t_1} de \mathbb{P}_{n+m} . Alors Γ est le bord d'un sous-ensemble analytique X de \mathbb{P}_{n+m} .*

Pour la démonstration de ce lemme, on peut se reporter à l'article de Dolbeault et Henkin, [36]. ■

Considérons $\Gamma = -\partial Y$, le signe négatif signifiant que la variété est orientée dans le sens contraire au sens induit par l'opérateur de bord. Pour montrer que le problème du bord est résoluble pour Γ , i.e. qu'il existe une sous-ensemble analytique X de \mathbb{P}_N dont le bord est égal à Γ , on utilise le lemme précédent. Alors, $\underline{Y} = X \cup Y \cup \Gamma$ est analytique d'après Harvey (cf. [30]); elle est algébrique d'après le théorème de Chow déjà mentionné. Son degré d est égal à α/k ($k = k_1 \dots k_n$) car pour un voisinage de H^0 toutes les intersection complètes de multidegré (k_1, \dots, k_n) coupent \underline{Y} en α points, et de plus elles ne coupent pas \underline{Y} en dehors de Y ; alors, d'après le théorème de Bézout, $\alpha = kd$.

Soit donc \underline{Y} la sous-variété de degré d contenant Y ; il reste maintenant à prolonger la forme méromorphe ω sur Y en une forme $\underline{\omega}$ rationnelle ou holomorphe sur \underline{Y} , suivant que la transformée d'Abel est rationnelle ou nulle.

Il suffit de prolonger ω méromorphiquement sur un ouvert de Zariski de \underline{Y} . On conclura en utilisant le théorème d'Abel généralisé (théorème 1). On se place dans une carte affine $\mathbb{C}^N \subset \mathbb{P}_N$. On considère sur T l'ensemble \tilde{U}^* des $t \in T$ tels que H_t coupe \underline{Y} en kd points distincts de $Reg(\underline{Y}) \cap \mathbb{C}^N$ et tels que $\mathcal{A}(\omega)$ est holomorphe au voisinage de t . \tilde{U}^* est connexe, car enlever un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 1 conserve la connexité. Il suffit de prolonger ω sur $Reg(\underline{Y}) \cap \mathbb{C}^N$.

2.1.5 Cas où Y est de dimension quelconque : prolongement de la forme ω .

Soit t_1 un point quelconque de \tilde{U}^* . Soit t_0 le paramètre définissant H_0 . On peut, en modifiant au besoin t_0 , supposer que ω est holomorphe au voisinage de $H_0 \cap Y = \{P_1(t_0), \dots, P_{kd}(t_0)\}$, i.e. la forme ω est holomorphe au voisinage de chacun des $P_i(t_0)$. On considère un chemin γ reliant t_1 et t_0 dans \tilde{U}^* . Alors

on va prolonger holomorphiquement ω en une forme $\underline{\omega}$ dans un voisinage de $\cup_{t \in \gamma} H_t \cap \underline{Y}$ de la manière suivante.

Si la forme ω est de degré maximal, il faut la prolonger en sachant que son résidu $\text{res}_{Q_n=0} \omega / Q_n$ se prolonge; si la forme ω n'est pas de degré maximal, il faut la prolonger en sachant que sa restriction sur les sections $Q_n = 0$ se prolonge.

On se ramène au problème du prolongement local d'une fonction holomorphe de la manière suivante. Comme l'intersection est transverse, on peut prendre en un point $P_i(t)$ les polynômes (affines) Q_1, \dots, Q_n comme coordonnées locales sur \underline{Y} , soit x_1, \dots, x_n . Alors on écrit $\underline{\omega} = \sum_I p_I dx_I$. Remarquons qu'on peut faire varier l'équation $Q_n = 0$ sans faire varier l'intersection complète $Q_1 = 0, \dots, Q_n = 0$, en choisissant l'équation $Q_n + \mu_1 Q_1 + \dots + \mu_{n-1} Q_{n-1} = 0$, et en faisant varier les μ_i dans un voisinage de 0. En degré maximal, il n'y a qu'un seul coefficient, et l'hypothèse implique que ce coefficient se prolonge sur les sections $x_n + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_{n-1} x_{n-1} = 0$. En degré non maximal, ce sont les restrictions de la forme $\sum_I p_I dx_I$ sur les sections $x_n + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_{n-1} x_{n-1} = 0$ qui se prolongent. Le prolongement holomorphe local des coefficients p_I de $\underline{\omega}$ comme fonctions holomorphes est alors une conséquence du lemme suivant :

Lemme 19 *Considérons un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ de frontière ∂U , μ une forme holomorphe sur U de degré $< n$. On se place en un point p de ∂U , et U_p un voisinage ouvert de p , et S_{t_0} un hyperplan contenant p , de paramètre $t_0 \in \mathbb{P}_n^*$. On suppose que pour t dans un voisinage ouvert de t_0 , la forme μ_{S_t} , qui est holomorphe sur $(U \cap U_p) \cap S_t$ se prolonge en une forme holomorphe sur $(U \cup U_p) \cap S_t$. Alors, μ se prolonge en une forme holomorphe dans un voisinage de p .*

Le cas des formes se déduit sans difficulté du cas des fonctions. Supposons que μ est une fonction. Le prolongement en tant que fonction peut se faire dans un premier temps en choisissant une famille d'hyperplans parallèles. Le fait que le prolongement est holomorphe est alors une conséquence du théorème d'Osgood, en choisissant n familles indépendantes d'hyperplans parallèles.

On a donc prolongé la forme ω au voisinage $P_1(t_1)$. Il faut vérifier qu'il n'y a pas de multivaluation par monodromie, i.e. que si on prend un autre chemin que γ de t_0 à t_1 , tout en arrivant au même point de \underline{Y} en t_1 , le prolongement obtenu au voisinage de $P_1(t_1)$ est le même. Si on a obtenu deux valeurs distinctes ω_1 et ω_2 au voisinage de $P_1(t_1)$, la différence $\omega' = \omega_1 - \omega_2$ a transformée d'Abel nulle, ce qui implique $\omega_1 = \omega_2$ d'après ce qu'on a déjà vu (sinon, $\alpha' = 1$ doit être multiple de k , donc $k = 1$, et $\omega_1 - \omega_2$ serait holomorphe sur une sous-variété linéaire de \mathbb{P}_N contenue dans Y , donc nulle). On peut de la même manière prolonger ω au voisinage de chaque

$P_i(t_1), (1 \leq i \leq kd)$. On aura donc finalement, en prenant toutes les valeurs de $t_1 \in \tilde{U}^*$, prolongé la forme ω dans un ouvert de Zariski de \underline{Y} , ce qui termine la démonstration.

■

D'après l'expression explicite obtenue pour la transformation d'Abel en degré maximal, le théorème précédent se reformule comme une "inversion" du théorème global de résidus :

Corollaire 2 *Soit $\underline{Y} \subset \mathbb{P}_N$ une variété algébrique irréductible de degré d . Supposons données α n -formes $\omega_\nu (1 \leq \nu \leq \alpha)$ au voisinage de α points de \underline{Y} , contenus dans une intersection complète de type (k_1, \dots, k_n) , définie par les équations $Q_i^0 = 0 (1 \leq i \leq n)$. Supposons que la somme :*

$$\sum_{\nu=1}^{\alpha} \text{res}_{(Q_1/s_1 \dots Q_n/s_n)} \omega_\nu$$

soit rationnelle (resp. nulle) au voisinage de (t_1^0, \dots, t_n^0) (comme fonction des coefficients t_j), où s_j est le monôme $\frac{\partial}{\partial t_j^{i_j}}(Q_j)$, quel que soit le choix des n coefficients $t_1^{i_1}$ dans $Q_1, \dots, t_n^{i_n}$ dans Q_n . Alors $\alpha = k_1 \dots k_n \cdot d$ et les α formes ω_ν se recollent en une n -forme rationnelle (resp. abélienne) sur \underline{Y} .

D'autre part, le théorème admet également la conséquence suivante :

Corollaire 3 *Soit \underline{Y} une variété algébrique de dimension pure, H_1, \dots, H_{n-1} $n-1$ hypersurfaces algébriques se coupant proprement sur \underline{Y} ; on pose $C = Y \cap H_1 \cap \dots \cap H_{n-1}$. Alors toute forme méromorphe (res. de Barlet) ω dans un voisinage ouvert de C se prolonge en une forme rationnelle (resp. abélienne) sur \underline{Y} .*

En effet, soit H_n une autre hypersurface algébrique, coupant C en un nombre fini de points. Alors, si t_1^0, \dots, t_n^0 sont les paramètres des hypersurfaces H_1, \dots, H_n , la transformée d'Abel de ω est méromorphe (resp. holomorphe) sur T au voisinage de la sous-variété linéaire $t_1 = t_1^0, \dots, t_{n-1} = t_{n-1}^0$; $\mathcal{A}(\omega)$ est donc rationnelle (resp. nulle), et le théorème s'applique. ■

2.2 D'autres généralisations du théorème de Lie.

On a vu que le théorème énoncé dans le paragraphe précédent est le résultat de généralisations du théorème de Lie. Il est probable que la généralisation peut être poussée plus loin. Nous indiquons diverses généralisations possibles :

2.2.1 Sur la transformation de Radon.

On se place dans le même contexte qu'au paragraphe 1.4.2: Y est un sous-ensemble analytique de U de dimension pure n , ω une forme de Barlet sur Y . On suppose $n = N - 1$, i.e. Y est une hypersurface analytique. On considère un q -courant résiduel sur Y , qui définit donc un courant α $\bar{\partial}$ -fermé dans U . On peut donc considérer sa transformée de Radon $\mathcal{R}(\alpha)$.

On suppose que U est tel que la transformée de Radon est injective pour $q > 0$. Pour des conditions sur U pour l'injectivité de la transformation de Radon, on pourra consulter [35] et [34].

Alors :

Proposition 7 *Si $\mathcal{R}(\alpha) = 0$, Y se prolonge en variété algébrique \underline{Y} et α en un courant $\underline{\alpha}$ résidu d'une $(q + 1)$ -forme méromorphe μ à pôle sur \underline{Y} .*

En effet, supposons $\mathcal{R}(\alpha) = 0$. Alors α est $\bar{\partial}$ -exact d'après l'injectivité de \mathcal{R} . D'autre part, on sait que α s'écrit localement comme résidu d'une forme méromorphe $\alpha = \text{Res}_Y \alpha_i$ sur U_i . Alors, si $\alpha = \bar{\partial}\mu$, $\mu - \omega_i$ est $\bar{\partial}$ -fermé, donc représenté par une forme holomorphe μ_i . Alors $\omega = \omega_i + \mu_i$ est une forme méromorphe définie sur U tout entier. Mais ω s'étend en une forme méromorphe μ sur \mathbb{P}_N , car l'ouvert U est T -concave, d'après le corollaire 3. La conclusion en découle. ■

2.2.2 Prolongement de la forme ω dans un domaine plus grand.

Soit un ouvert connexe $\tilde{U}^* \subset T = \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_k}$ paramétrant une famille d'intersections complètes, et U^* un ouvert connexe contenu dans un autre ouvert connexe \tilde{U}^* . Soit \tilde{Y} un sous-ensemble analytique de \tilde{U} de dimension pure n , $Y = \tilde{Y} \cap U$, ω une forme méromorphe (resp. de Barlet) sur Y . On suppose que la transformée d'Abel de ω , qui est méromorphe (resp. holomorphe) sur U^* d'après le paragraphe 1.4.2, se prolonge en une forme méromorphe (resp. holomorphe) sur \tilde{U}^* . Alors :

Proposition 8 *La forme méromorphe (resp. de Barlet) ω sur Y se prolonge en une forme méromorphe (resp. de Barlet) sur \tilde{Y} .*

La démonstration est pratiquement la même que celle du théorème précédent.

■ Le problème plus délicat est le suivant : si l'on ne suppose pas a priori $Y \subset U$ contenu dans un sous-ensemble analytique $\tilde{Y} \subset \tilde{U}$, est-ce que, sous les hypothèses de la proposition précédente, le sous-ensemble analytique $Y \subset$

U se prolonge en un sous-ensemble analytique $\tilde{Y} \subset \tilde{U}$ (et donc la forme méromorphe (resp. de Barlet) ω sur Y en une forme méromorphe (resp. de Barlet) sur \tilde{Y}) ? On voit que la solution du problème dépend de la solution du problème du bord dans des ouverts T -concaves. Le problème a été résolu affirmativement par Henkin (cf.[32]) dans le cas où tous les k_i sont égaux .

2.2.3 Transformation d'Abel sur une sous-variété de l'espace des paramètres T .

On a vu que la transformée d'Abel par rapport aux sous-espace linéaire passant par certains points est nulle, bien que la forme ne soit pas abélienne.

D'autre part, on peut interpréter le contre-exemple de Bol (cf. par exemple [31]) de la manière suivante. On peut, en plus des 4 points fixés P_1, \dots, P_4 , rajouter une droite fixée Δ . A chaque point P du plan, on associe 5 coniques : 4 d'entre elles sont les coniques passant par P_i, P et contenant Δ ; la cinquième est l'unique conique passant par P_1, \dots, P_4 et P . On définit ainsi cinq applications de $\mathbb{P}_2 - \{P_1, \dots, P_4\}$ à valeur dans \mathbb{P}_5^* (considéré comme l'espace l'espace des coniques); il est facile de voir que l'image de chacune des ses applications est une droite (correspondant aux coniques passant par 4 points fixés; on peut voir que quatre de ces droites forment un quadrilatère plan, la cinquième ne coupant pas ce plan); et plus, les 6 1-relations abéliennes sur le tissu associé définissent localement 6 différentielles sur la courbe algébrique Y qui est la réunion des 5 droites. Les relations abéliennes expriment alors que la transformée d'Abel de chacune de ces différentielles, restreinte à surface de \mathbb{P}_5 correspondant au plongement de Veronese, est nulle. On a donc une différentielle non rationnelle (correspondant à la relation abélienne contenant le logarithme) dont la transformée d'Abel est nulle.

2.2.4 Le théorème de Lie dans le cas d'une variété \mathcal{C}^∞ .

On pourra sur cette question consulter l'article de Henkin et Passare (cf.[32], th. 5).

Il faut mentionner que la démonstration de Blaschke, qui ne marche pas dans le cas rationnel, marche cependant avec des hypothèses de régularité moins fortes sur Y et ω . Le théorème de Blaschke s'énonce dans le cadre d'une courbe réelle de classe \mathcal{C}^∞ . Soit $y = ax + b$ l'équation des droites. Il construit une fonction $f(x, y, a)$ sur la variété d'incidence, qui pour une droite fixée $\Delta_{a,b}$ a des pôles exactement sur $Y \cap \Delta_{a,b}$ et montre ensuite, grâce au fait que la transformée d'Abel est nulle, que cette fonction ne dépend pas de a . Sa démonstration repose sur un théorème de Kneser suivant lequel une fonction $f(x, y)$ qui est rationnelle en y lorsqu'on fixe x et rationnelle en x lorsqu'on

fixe y est rationnelle par rapport aux deux variables x, y . La fonction $f(x, y)$ étant rationnelle, son ensemble polaire est algébrique et nous donne la courbe algébrique \tilde{Y} contenant Y .

Cette généralisation est particulièrement importante si l'on s'intéresse à la théorie des tissus, rappelons en effet que le théorème de Lie appliqué dans ce cadre permet de montrer que tout tissu linéaire admettant une relation abélienne est algébrique (cf. Appendice).

Chapitre 3

Le système différentiel d'Abel et ses variétés intégrales.

Ce qui suit peut être considéré comme une autre manière d' "inverser" le théorème d'Abel. Soit $Y \subset \mathbb{P}_N$ une variété algébrique *irréductible* de dimension n . Considérons un sous-ensemble analytique irréductible $Z \subset T \times Y$, tel que la projection $p : Z \rightarrow T$ soit un morphisme propre et surjectif entre deux espaces de même dimension (donc génériquement fini). On peut alors définir la transformée d'une forme rationnelle sur Y : si q est la projection de Z sur Y , c'est $p_*((q^*(\omega)|_Z))$. En prenant par exemple $T = \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$ et la famille Z comme étant la famille des (t, p) avec $p \in Y \cap H_t$, on obtient la transformée d'Abel du chapitre précédent. On a vu que dans ce cas la transformée d'Abel des formes différentielles abéliennes (resp. rationnelles) de degré q ($1 \leq q \leq n$) est nulle (resp. rationnelle). Cela reste valable pour d'autres familles de 0-cycles (correspondant par exemple aux sous-variétés de $\mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n}$ correspondant aux H_t passant par certains point fixés, ou encore lorsque prend pour T l'ensemble des transformations projectives et pour Z l'ensemble des $p \in Y \cap X^t$ où X est une variété algébrique de dimension complémentaire).

Nous allons maintenant voir comment l'annulation de la transformée d'Abel de toutes les formes abéliennes sur Y (ou de seulement une partie, par exemple les formes de degré maximal) pour certaines familles de 0-cycles entraîne des propriétés géométriques sur les 0-cycles de cette famille ¹. Même si l'énoncé est encore local dans le sens où la famille de 0-cycles peut être

¹Nous n'avons pas encore examiné le cas rationnel. On pourrait imaginer que, lorsque T est un ouvert d'une variété algébrique T' , le fait que la transformée d'Abel $\mathcal{A}(\omega)$ soit rationnelle pour toute forme rationnelle ω sur Y implique que la famille de 0-cycles soit algébrique, i.e. que Z est un ouvert d'une sous-variété algébrique Z' de $T' \times Y$.

paramétrée par un ouvert $T \subset \mathbb{C}^p$ arbitrairement petit, la variété algébrique Y est fixée; elle est de plus supposée irréductible.

Soit donc $Z \subset T \times Y$ comme ci-dessus. On peut définir en dehors d'un sous-ensemble $S \subset T$ de codimension au moins deux une application analytique $T \setminus S \rightarrow Y^{(s)}$. L'image dans $Y^{(s)}$ nous donne un sous-ensemble analytique V . L'annulation de la transformée d'Abel peut se reformuler de la manière suivante.

Soit ω une forme différentielle rationnelle sur Y . On peut définir sur Y^s une forme rationnelle en posant : $G_s(\omega) = \pi_1^*(\omega) + \dots + \pi_s^*(\omega)$, les π_i ($1 \leq i \leq s$) étant les différentes projections de la puissance cartésienne Y^s sur Y . Le revêtement ramifié $\pi : Y^s \rightarrow Y$ nous permet de définir l'image directe $\pi_*(\alpha)$ d'une forme définie α sur Y^s : d'après la proposition 2, $\pi_*(\alpha)$ est méromorphe (resp. abélienne) si α l'est. On notera $G_{(s)}(\omega)$ l'image directe de la forme $G_s(\omega)$. Alors le fait que $\mathcal{A}(\omega)$ s'annule sur Z équivaut à dire que $G_{(s)}(\omega)$ s'annule sur V (i.e. sur la partie régulière de V).

Un système différentiel (analytique) sur un espace analytique réduit de dimension pure n X est la donnée pour tout q ($1 \leq q \leq n$) d'un espace vectoriel de formes différentielles méromorphes de degré q sur X . Etant donné un point régulier Γ de X , une variété intégrale pour ce système différentiel en Γ est un germe en Γ de sous-ensemble analytique irréductible de X sur lequel la restriction de toutes les formes différentielles du système régulières au voisinage de Γ s'annulent.

Etant donné un entier s , nous appellerons *système différentiel d'Abel* (sur $Y^{(s)}$) le système différentiel sur $Y^{(s)}$ défini par les formes $G_{(s)}(\omega)$ provenant des formes *abéliennes* ω sur Y (ces formes sont abéliennes). On appellera variété intégrale abélienne (on notera v.i.a.) les variétés intégrales associées, i.e. les sous-ensembles analytiques irréductibles (localement fermés) V de $Y^{(s)}$ vérifiant $G_{(s)}(\omega)|_V = 0$ pour toute forme abélienne ω . La v.i.a. est dite *complète* si elle n'est pas contenue dans une v.i.a. de dimension plus grande.

Le théorème d'Abel direct revient à dire dans ce langage que certaines familles de 0-cycles décrites géométriquement sont des v.i.a.².

Ce chapitre est destiné à établir la réciproque de ce résultat dans certains cas particuliers : comment certaines v.i.a. de degré donné (une v.i.a. dans $Y^{(s)}$ sera dite de degré s) et de dimension donnée (la dimension d'une

²On a vu que le théorème d'Abel direct peut s'étendre si l'on fixe un nombre fini r de points sur la partie régulière de Y : si l'on se restreint aux transformations projectives laissant fixes un nombre fini r de points de $(Y - S) \cap Z$, ou bien aux intersections complètes qui contiennent r points réguliers donnés, on obtient une v.i.a. dans $X^{(\alpha)}$, $\alpha = kd - r$. On peut en fait montrer que tout fibré vectoriel holomorphe de rang n E sur Y , dont les sections globales n'admettent pas de points fixes dans la partie singulière de Y définissent une v.i.a. : il suffit pour cela de montrer, d'après ce qu'on a vu, que le graphe de la famille dans $\mathbb{P}(H^0(E))$ est localement intersection complète. Dans le cas n , la v.i.a. est complète.

v.i.a. est sa dimension en tant que sous-variété de $Y^{(s)}$) peuvent être décrites géométriquement.

Remarque 9 Supposons Y lisse. Alors les formes $G_{(s)}(\omega), \omega \in H^0(Y, \omega_Y^\bullet)$ engendrent $H^0(Y^{(s)}, \omega_{Y^{(s)}}^\bullet)$ par produit extérieur, comme il ressort de la formule de Künneth. Alors on voit qu'un sous-ensemble analytique irréductible V de $Y^{(s)}$ sera une v.i.a. ssi toutes les formes abéliennes de $Y^{(s)}$ s'annulent sur V .

On remarque que pour tout q , l'espace vectoriel des q -formes abéliennes sur Y , est de dimension finie. Ce fait peut se montrer au moins de 3 manières : comme application d'un théorème de Cartan-Serre, par la théorie des tissus (cf. [31]), qui donne une majoration du nombre de q -formes abéliennes linéairement indépendantes, ou enfin par l'expression explicite des formes holomorphes comme résidus globaux.

On utilisera à plusieurs reprises le polynôme de Hilbert d'une variété algébrique de \mathbb{P}_N ; pour la définition de ce polynôme on pourra se reporter à l'Appendice.

3.1 Cas des courbes.

Supposons que Y est une courbe irréductible de \mathbb{P}_N , éventuellement singulière.

Dans tout ce qui suit, π désigne la dimension de l'espace vectoriel des 1-formes abéliennes sur Y , que nous appellerons différentielles abéliennes.

3.1.1 Interprétation différentielle du théorème de Riemann-Roch

Soit $Y^{(p)}$ la puissance symétrique p -ième de Y , $(\omega_j)_{(1 \leq j \leq \pi)}$ une base de l'e.v. des différentielles abéliennes sur Y . La matrice de Brill-Noether est la matrice suivante, que l'on peut associer à un p -uplet (P_1, \dots, P_p) de points réguliers de Y , après avoir choisi des coordonnées locales z_i en chaque point P_i de sorte que $\omega_j(P_i) = f_j^i(z_i) dz_i$, où f_j^i est une fonction régulière en P_i . Si les points sont distincts, la matrice de Brill-Noether est définie par³ :

$$M = (f_j^i(0))_{(1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \pi)}$$

³La matrice est définie à une permutation des colonnes près.

Si les points ne pas distincts, la matrice de Brill-Noether fait intervenir les dérivées des coefficients $f_j^i(z_i)$. Si par exemple $P_1 = \dots = P_l$ (les autres points étant distincts de P_1), on remplace

$$f_j^1(0), f_j^2(0), \dots, f_j^l(0)$$

par

$$f_j^1(0), f_j^{1'}(0), \dots, f_j^{1^{(l-1)}}(0).$$

On a :

Lemme 20 *Par un 0-cycle $\Gamma = P_1 + \dots + P_p$ où les P_i sont p points réguliers de Y , il passe dans $Y^{(p)}$ une v.i.a. complète, dont la dimension est égale à p moins le rang de la matrice de Brill-Noether en Γ .*

On peut voir que les v.i.a. complètes correspondent aux fibres de l'application d'Abel-Jacobi $Y^{(p)} \rightarrow J(Y)$ (cf. Appendice), et que la matrice de Brill-Noether en un point est la matrice jacobienne de cette application. En particulier, les v.i.a. complètes sont "globales", i.e. ce sont des sous-variétés algébriques de $Y^{(p)}$. Le lemme énonce que pour l'application d'Abel-Jacobi, le rang de la matrice jacobienne le long d'une fibre est constant et nous donne la codimension de cette fibre. ■

Le lemme précédent se reformule comme suit : si $|D|$ est la v.i.a. complète passant par Γ , on a :

$$\dim(|D|) - i(D) = \deg(D) - \pi$$

où $i(D)$ est la dimension du \mathbb{C} -e.v. des différentielles abéliennes ω "qui s'annulent" en $D = n_1.P_1 + \dots + n_s.P_s$ (i.e. si on écrit $\omega = f(z_i)dz_i$ au voisinage de P_i , avec z_i une coordonnée locale en P_i , $f(z_i)$ s'annule avec $(n_i - 1)$ premières dérivées). Une famille rationnelle de 0-cycles de degré p et de dimension s sur une courbe Y peut être définie de la manière suivante : soit $\Lambda \subset \mathbb{P}_s \times Y$ une sous-variété algébrique de dimension s telle que $\pi_1 : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}_s$ soit un morphisme génériquement fini de degré p . Alors on peut définir en dehors d'une sous-variété algébrique $S \subset \mathbb{P}_s$ de codimension deux un morphisme $\mu : \mathbb{P}_s - S \rightarrow Y^{(p)}$. L'adhérence de $\mu(\mathbb{P}_s - S)$ dans $Y^{(p)}$ est une sous-variété algébrique, qui sera appelée une famille rationnelle de 0-cycles; deux 0-cycles d'une telle famille seront dits *rationnellement équivalents*. Deux 0-cycles de degré p de $Reg(Y)$ seront dits *linéairement équivalents* si il existe un morphisme fini $Y \rightarrow \mathbb{P}_1$ de degré p tel que $D = \phi^{-1}(\alpha)$ et $D' = \phi^{-1}(\beta)$, pour deux points $\alpha, \beta \in \mathbb{P}_1$.

Il découle de la propriété de Barlet que deux 0-cycles linéairement équivalents appartiennent à une même v.i.a. complète. On verra ci-dessous que la réciproque

est vraie : deux 0–cycles qui appartiennent à une même v.i.a. sont linéairement équivalents.

Deux 0–cycles linéairement équivalents sont rationnellement équivalents; mais si la courbe est singulière, il se peut que deux 0–cycles rationnellement équivalents ne soient pas linéairement équivalents (exemple : deux 0–cycles de degré $d - k$ définis sur une courbe plane singulière Y de degré d par l’intersection de Y avec deux droites génériques passant par un point de multiplicité $k > 1$). On appelle *série linéaire* une famille rationnelle qui est en même temps une v.i.a. . Une série linéaire est *complète* si elle n’est pas contenue dans une série linéaire de dimension supérieure.

On a vu au chapitre précédent :

Proposition 9 *Une condition nécessaire et suffisante pour qu’une forme rationnelle ω sur Y soit abélienne est que sa trace pour tout morphisme $Y \rightarrow \mathbb{P}_1$ soit nulle.*

Cela implique que les ”formes régulières” définies dans Serre (cf.[59]) sont les même que les différentielles abéliennes utilisées ici. Nous établirons cependant à nouveau par une autre méthode certains théorèmes de [59], en particulier le théorème d’Abel, pour la clarté de l’exposé, et aussi parceque nous pensons que le point de vue légèrement différent adopté ici est susceptible d’être utilisé lorsque Y est de dimension supérieure ⁴.

On peut trouver par exemple dans Serre ([59], prop.3,p.73) le calcul du polynôme de Hilbert de Y :

Lemme 21 *Le polynôme de Hilbert de Y est égal à $\phi_Y(l) = d.l + 1 - \pi$, où d est le degré de Y .*

On en déduit :

Lemme 22 *Pour k assez grand, les hypersurfaces de degré k définissent sur Y une série linéaire complète.*

D’après le théorème d’Abel direct, les hypersurfaces de degré donné k définissent une série linéaire V' . Pour k assez grand, cette série linéaire est en fait complète. V étant une v.i.a. , elle est incluse dans la v.i.a. complète V passant par Γ . Pour montrer que $V = V'$, il suffit de montrer que $\dim(V) = \dim(V')$.

Alors, considérons $\Lambda \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(k)) \times Y$ définie par $(t, x) \in \Lambda \Leftrightarrow t(x) = 0$. Λ définit pour $k \gg 0$ une série linéaire de degré kd et de dimension $kd - \pi$, d’après la valeur du polynôme de Hilbert, et le fait que $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(k))$ définissent le même 0–cycle ssi ils sont proportionnels dans $A_Y(l)$.

⁴Nous pensons particulièrement ici à la description des v.i.a. complètes, qui semble reliée à la conjecture de Bloch.

D'autre part, le rang de la matrice de Brill-Noether en un 0-cycle générique de la série est π , car un tel 0-cycle ne peut pas être contenu dans l'ensemble des zéros d'une différentielle abélienne (encore une fois, écrire les formes abéliennes comme des résidus globaux). On a donc aussi $\dim(V) = kd - \pi$. ■

On en déduit :

Lemme 23 *La v.i.a. complète passant par $\Gamma \in Y^{(p)}$ est une famille rationnelle (donc, une série linéaire complète).*

Soit V la v.i.a. complète passant par Γ . Considérons une hypersurface $H = \{h = 0\}$ de degré assez grand l contenant Γ . Alors si R est le 0-cycle tel que $\Gamma + R = Y \cap H$ (on peut supposer R à support dans la partie régulière de Y), et Γ' un élément de V , $\Gamma' + R$ est un élément de la v.i.a. complète passant par $\Gamma + R$, et donc est intersection de Y avec une hypersurface H' de degré l passant par R . L'ensemble des hypersurfaces de degré l contenant R définit donc une série linéaire de 0-cycles contenant V , et donc est égale à V . ■

Remarque 10 Le lemme précédent signifie en particulier que si on a une famille algébrique $\Lambda \subset T \times Y$ de 0-cycles dont l'image est une v.i.a. complète de dimension s , alors on peut trouver un paramétrage rationnel $\Lambda' \subset \mathbb{P}_s \times Y$ qui donne la même image. De plus, il ressort de la description donnée de la série linéaire complète passant par Γ que celle-ci s'identifie à la clôture de l'ensemble des 0-cycles de $\text{Reg}(Y)$ linéairement équivalents à Γ .

Lemme 24 *Il existe un plus petit entier m_0 tel que pour $m \geq m_0$ l'application*

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(m))$$

est surjective.

En effet, considérons (s) le diviseur des zéros associé à une section $s \in H^0(\mathcal{O}_Y(k))$. On a vu que pour k assez grand, la série linéaire associée à $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(k))$ est complète; or elle est visiblement contenue dans la série linéaire associée à $H^0(\mathcal{O}_Y(k))$, et les deux séries linéaires sont donc confondues. Mais si deux sections définissent le même diviseur, elles diffèrent d'une constante multiplicative. ■

Remarque 11 On peut améliorer le résultat du lemme précédent. Si Y est intersection complète on peut prendre $m_0 = 0$; dans le cas général on peut prendre $m_0 = d - N + 1$. Cela est montré dans [52].

Soit m_0 l'entier dont le lemme précédent affirme l'existence. Alors on a :

Proposition 10 *Soit $k \geq m_0$. Soit Γ un 0-cycle de Y contenu dans l'intersection de Y avec une hypersurface S de degré k ne coupant pas $\text{Sing}(Y)$; on pose $\Gamma + \Gamma' = Y \cap S$. Alors la série linéaire complète passant par Γ est définie par l'intersection de Y avec les hypersurfaces de degré k contenant Γ' .*

Soit V la série linéaire complète passant par Γ . Soit $\Gamma'' \in V$, à support dans la partie régulière de Y . De la manière dont on a décrit ci-dessus la série linéaire complète passant par Γ , il ressort qu'il existe un morphisme $r : Y \rightarrow \mathbb{P}_1$ qui vérifie $(r) = r^{-1}(0) - r^{-1}(\infty) = \Gamma'' - \Gamma$ (r est le rapport de deux polynômes homogènes de degrés assez grand, ne s'annulant pas sur $\text{Sing}(Y)$). Alors si s est le polynôme homogène de degré k définissant S , $s.r$ est une section de $H^0(\mathcal{O}_Y(k))$, donc d'après le lemme la restriction à Y d'un polynôme homogène s' de degré k ; cela signifie que $\Gamma'' + \Gamma'$ est l'intersection de Y avec l'hypersurface S' associée à s' . Si l'on prend toutes les hypersurfaces de degré k passant par Γ' , on obtient donc la série linéaire complète passant par Γ . ■

Définition 1 *Un 0-cycle Γ de degré p est dit spécial si la dimension de la v.i.a. complète passant par Γ est supérieure à la dimension de la v.i.a. passant par un point générique de $Y^{(p)}$; cette dimension générique est $p - \pi$ si $p \geq \pi$, 0 sinon.*

On suppose maintenant que le faisceau ω_Y^1 est localement libre de rang un, et définit donc un fibré linéaire sur Y noté K_Y (c'est le cas si par exemple Y est localement intersection complète, comme nous le montre l'expression explicite des formes de Barlet par des résidus).

L'application canonique de Y est l'application de Y dans $\mathbb{P}_{\pi-1}$ relative à ce fibré.

Alors, en tant que fibré de rang 1 sur Y , les différentielles définissent une série linéaire. Plus précisément :

Lemme 25 *Les différentielles abéliennes sur Y définissent une série linéaire complète de dimension $\pi - 1$ et de degré $2\pi - 2$.*

Tout d'abord, que les différentielles abéliennes définissent une série linéaire en tant que fibré, d'après le théorème d'Abel (on a utilisé ici que le faisceau ω_Y^1 est localement libre); deux différentielles abéliennes définissant le même 0-cycle sont multiples l'une de l'autre, la dimension de la famille est donc $\pi - 1$. Cette série linéaire est complète : si $(\omega) = D$ et D' est linéairement équivalent à D , $(s) = D' - D$ où $s : Y \rightarrow \mathbb{P}_1$ est un morphisme; alors sw est une différentielle abélienne qui a pour 0-cycle associé D' . Enfin, si p est le degré de la série linéaire, on sait d'après Riemann-Roch que la codimension

de la série est $\pi - 1$ (il existe une forme qui s'annule sur le 0-cycle générique) et de plus sa dimension est $\pi - 1$, donc son degré est $2\pi - 2$. ■

Pour que $\Gamma \in X^{(p)}$ soit spécial (i.e. qu'il existe une différentielle abélienne non nulle ω qui s'annule sur Γ (en tant que section d'un fibré), il faut donc que $p \leq 2\pi - 2$.

Soit ω une différentielle abélienne générique, qui s'annule en un 0-cycle (ω) de degré $2\pi - 2$ de $Reg(Y)$. On divise le 0-cycle (ω) en deux parties, $(\omega) = D + D'$. Alors on a d'après Riemann-Roch :

$$\dim(|D|) - i(D) = \deg(D) - \pi$$

où $i(D)$ est la dimension de l'e.v. des différentielles abéliennes qui s'annulent en D ; on a de plus :

$$\dim(|D'|) - i(D') = \deg(D') - \pi$$

D'autre part :

Lemme 26 *On a $\dim(|D|) = i(D') - 1$.*

En effet, à tout 0-cycle de $D'' \in |D|$, il correspond une différentielle abélienne ω telle que $(\omega) = D'' + D'$; en effet, $D + D'$ étant spécial, il en est de même de tout élément de la série linéaire complète qui passe par $D + D'$; or $D'' + D'$ est l'un de ces éléments. Réciproquement, à toute différentielle abélienne dont le 0-cycle contient D' correspond un 0-cycle D'' qui est linéairement équivalent à D , d'après le théorème d'Abel, donc qui appartient à la série linéaire complète passant par D . ■

On arrive à la version suivante de Riemann-Roch :

$$\dim(|D|) = \deg(D) - \pi + \dim(|D'|) + 1$$

On notera souvent g_p^s pour désigner une série linéaire de degré p et de degré s sur Y .

3.1.2 Cas des courbes planes.

Soit Y une courbe plane *irréductible* de degré d . On sait que $\pi = (d - 1)(d - 2)/2$. On se donne un groupe de points spécial Γ de degré α sur $Reg(Y)$ (donc $\alpha \leq d(d - 3)$)⁵. Le théorème suivant nous montre comment lorsque Γ est spécial, la dimension de la série linéaire complète passant par Γ nous donne des informations géométriques sur Γ :

⁵Sur $Reg(Y)$, les notions de 0-cycles (effectifs), diviseurs (effectifs) et groupes de points s'identifient.

Théorème 3 Posons $\alpha = kd - r$, où $r < d$, et $[\Gamma]$ la série linéaire complète passant par Γ . Alors $\dim([\Gamma]) \leq s(\alpha)$, où $s(\alpha) = k(k+3)/2 - r$ si $r \leq k+1$, et $s(\alpha) = (k-1)(k+2)/2$ si $r \geq k+2$. De plus,

1. Si $r \leq k$, $\dim([\Gamma]) = s(\alpha) = k(k+3)/2 - r$ si, et seulement si Γ est contenu dans une courbe H de degré k , i.e. si il existe un groupe de points Γ' de degré r (qui est alors unique) tel que $[\Gamma]$ est la série linéaire résiduelle de Γ' par rapport aux courbes de degré k passant par Γ' . $[\Gamma]$ est alors sans point fixe.
2. Si $r = k+1$, $\dim([\Gamma]) = s(\alpha) = (k-1)(k+2)/2$, dans deux (et seulement deux) cas :
 - i) Dans le premier cas, Γ contient l'intersection Γ'' de Y avec une courbe de degré $k-1$; le groupe de points résiduel $\Gamma' = \Gamma - \Gamma''$ est la partie fixe de la série $[\Gamma]$;
 - ii) Dans le second cas, si, et seulement si Γ est contenu dans une courbe H de degré k , i.e. si il existe un groupe de points Γ' non aligné de degré r (qui est alors unique) tel que $[\Gamma]$ est la série linéaire résiduelle de Γ' par rapport aux courbes de degré k passant par Γ' . $[\Gamma]$ est alors sans point fixe.
3. Si $r \geq k+2$, $\dim([\Gamma]) = s(\alpha) = (k-1)(k+2)/2$, si, et seulement si $\Gamma = \Gamma''' + \Gamma''$ où Γ''' est l'intersection de Y avec une courbe de degré $k-1$. Alors $[\Gamma]$ contient comme points fixes le groupe de points $\Gamma'' \subset \Gamma$.

Dans le cas où $r = 0$, le théorème précédent est un cas particulier d'un théorème de Ciliberto (cf. [14]) affirmant l'unicité des séries linéaires de degré d et de dimension n dans le cas des courbes non dégénérées de degré d dans \mathbb{P}_N de genre maximal $\pi(d, N)$; la méthode de sa démonstration repose sur un théorème de Castelnuovo. Notre preuve repose sur les trois lemmes ci-dessous. La démonstration du premier lemme repose sur l'utilisation de la *matrice de Brill-Noether* définie ci-dessus; la démonstration des deux lemmes suivants repose sur le *caractère numérique relatif* d'un groupe de points (cf. [51]), qui sera défini ci-dessous.

Lemme 27 $\alpha - \phi_\Gamma(d-3)$ est précisément la dimension de la série linéaire complète $[\Gamma]$ passant par Γ , où ϕ_Γ est la fonction de Hilbert de Γ .

Soit $i(\Gamma)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des différentielles abéliennes qui contiennent Γ dans leur lieu des zéros; $i(\Gamma)$ est l'*indice de spécialité* de Γ . D'après le lemme 20, on a : $\dim([\Gamma]) = \alpha - \pi + i(\Gamma)$; il ne nous reste plus qu'à montrer que $i(\Gamma) = \pi - \phi_\Gamma(d-3)$. D'après l'expression explicite des différentielles abéliennes (cf. lemme 10), les différentielles abéliennes sont les formes qui

s'écrivent $\omega = \frac{f(x,y)}{(\partial_y f)} dx$ où f est un polynôme de degré $\leq d-3$. Donc $i(\Gamma)$ est aussi la dimension du \mathbb{C} -e.v. des polynôme de degré $d-3$ s'annulant sur Γ . On a donc $\phi_\Gamma(d-3) = \pi - i(\Gamma)$, ce qui termine la démonstration. ■

Introduisons maintenant le caractère numérique relatif d'un groupe de points Γ de Y .

On suppose choisi un système (Y_0, Y_1, Y_2) de coordonnées homogènes dans \mathbb{P}_2 tel que le point $Y_0 = Y_1 = 0$ n'appartienne pas à Y . Soit $R = \mathbb{C}[Y_0, Y_1]$.

Les anneaux homogènes respectifs A_Γ et A_Y de Γ et Y peuvent être considérés de façon naturelle comme des R -modules gradués. Alors $\{1, \dots, y_2^{d-1}\}$, avec $y_2 = Y_2 \text{ mod } I_Y$, est un système de générateurs du R -module A_Y . Le morphisme surjectif

$$\bigoplus_{i=0}^{d-1} R[-i] \rightarrow A_Y$$

est un isomorphisme d'après le théorème des syzygies gradués (cf. Appendice).

Le morphisme

$$\nu : A_Y \simeq \bigoplus_{i=0}^{d-1} R[-i] \rightarrow A_\Gamma$$

défini par

$$\nu((a_0(Y_0, Y_1), \dots, a_{d-1}(Y_0, Y_1))) = a_0 + a_1.x_2 + \dots + a_{d-1}.x_2^{d-1}$$

est donc un morphisme surjectif de R -modules gradués, avec $x_2 = y_2 \text{ mod } I_{\Gamma/Y}$. Le noyau de ce morphisme (qui est $I_{\Gamma/Y}$) est donc engendré (comme R -module) par des éléments de la forme $L_i = \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_{ij} y_2^j$. Il n'y a pas de relations entre ces générateurs, toujours d'après le théorème des syzygies gradués. On en déduit la suite exacte de R -modules :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{d-1} R[-m_i] \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{d-1} R[-i] \rightarrow A_\Gamma \rightarrow 0$$

La suite d'entiers (m_0, \dots, m_{d-1}) (que l'on range dans l'ordre croissant) est appelée *caractère numérique relatif* de Γ^6 . Elle doit satisfaire aux deux conditions : $\sum_{i=0}^{d-1} (m_i - i) = \alpha$ et $m_{i+1} \leq m_i + 1$.

La première condition est une conséquence du fait que pour $l \gg 0$ la fonction de Hilbert de Γ vaut $\deg(\Gamma)$, et aussi d'après la suite exacte précédente :

$$\phi_\Gamma(l) = \sum_{i=0}^{d-1} (l - i) - (l - m_i) = \sum_{i=0}^{d-1} (m_i - i)$$

La seconde condition se montre de la manière suivante.

⁶On l'appelle "caractère numérique relatif" (à Y), car la définition donnée dans Gruson-Peskine suppose en fait que la courbe Y est une courbe de degré minimal contenant Γ .

La multiplication par y_2 dans A_Y laisse stable $I_{\Gamma/Y}$ et donc nous permet d'écrire :

$$y_2.L_i = \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_{ij} L_j$$

avec $\alpha_{ij} \in R(m_i - m_j + 1)$. Supposons par exemple $m_{i+1} \leq m_i + 1$ pour $i < k$ et $m_{k+1} > m_k + 1$. Alors $\alpha_{ij} = 0$ pour $0 \leq i \leq k$ et $j > k$; autrement dit, le sous- R -module de $I_{\Gamma/Y}$ engendré par L_0, \dots, L_k est stable par multiplication par y_2 . D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de la matrice α_{ij} ($0 \leq i, j \leq k$), qui est de degré $k + 1$, annule y_2 . Par conséquent Y contiendrait une composante irréductible de degré $k + 1$, ce qui est impossible car Y est irréductible et $k \leq d - 2$. Donc la suite m_0, \dots, m_{d-1} est "connexe". On peut donner l'interprétation suivante des deux entiers extrémaux m_0 et m_{d-1} : m_0 est le plus petit degré d'une courbe contenant Γ et ne contenant pas Y , m_{d-1} est tel que la fonction de Hilbert ϕ_{Γ} de Γ soit constante à partir de $m_{d-1} - 1$.

On a le lemme fondamental suivant :

Lemme 28 *Soit Γ et Γ' deux groupes de points de Y , résiduels l'un de l'autre par rapport à une courbe de degré k , i.e. on suppose $\Gamma + \Gamma' = H \cap Y$, où H est une hypersurface de degré k qui ne coupe pas $\text{Sing}(Y)$. Alors entre les caractères numériques relatifs m_i et m'_i de Γ et de Γ' , on a la relation :*

$$m_{d-1-i} + m'_i = k + d - 1$$

Nous nous référerons à ce lemme comme étant la "propriété de Gorenstein". Considérons la suite exacte (graduée) de A_Y -modules gradués :

$$0 \rightarrow I_{\Gamma/Y} \rightarrow A_Y \rightarrow A_{\Gamma} \rightarrow 0$$

Appliquons à cette suite exacte le foncteur $\text{Hom}_{A_Y}(\bullet, I_{\Gamma+\Gamma'/Y})$. On a : $I_{\Gamma+\Gamma'/Y} \simeq A_Y[-k]$. De plus, $\text{Hom}_{A_Y}(I_{\Gamma/Y}, I_{\Gamma+\Gamma'/Y}) = I_{\Gamma'/Y}$, $\text{Hom}_{A_Y}(A_Y, I_{\Gamma+\Gamma'/Y}) = A_Y[-k]$, et $\text{Hom}_{A_Y}(A_{\Gamma}, I_{\Gamma+\Gamma'/Y}) = 0$. On obtient donc la suite exacte de A_Y -modules :

$$0 \rightarrow A_Y[-k] \rightarrow I_{\Gamma'/Y} \rightarrow \text{Ext}_{A_Y}^1(A_{\Gamma}, I_{\Gamma+\Gamma'/Y}) \rightarrow 0$$

$\text{Ext}_{A_Y}^1(A_{\Gamma}, I_{\Gamma+\Gamma'/Y})$ n'est autre que le module dualisant $\Omega_{\Gamma}[-d - k - 3]$ de A_{Γ} (car $I_{\Gamma+\Gamma'/Y} \simeq A_Y[-k]$, et $\Omega_Y \simeq A_Y[d - 3]$). On a donc :

$$0 \rightarrow A_Y[d - 3] \rightarrow I_{\Gamma'/Y}[k + d - 3] \rightarrow \Omega_{\Gamma} \rightarrow 0$$

On peut aussi considérer la suite exacte précédente comme une suite exacte de R -modules, avec $A_Y \simeq \bigoplus_{i=0}^{d-1} R[-i]$ et $I_{\Gamma'/Y} \simeq \bigoplus_{i=0}^{d-1} R[-m'_i]$.

D'autre part, on a aussi la suite exacte de R -modules :

$$0 \rightarrow I_{\Gamma/Y} \rightarrow A_Y \rightarrow A_{\Gamma} \rightarrow 0$$

Si l'on applique le foncteur $Hom_R(\bullet, R[-2])$, on obtient :

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{d-1} R[i-2] \rightarrow \bigoplus_{i=0}^{d-1} R[m_i-2] \rightarrow \Omega_{\Gamma} \rightarrow 0$$

On peut donc exprimer de deux manières différentes la fonction de Hilbert de Ω_{Γ} , en fonction de m_i-2 et en fonction de $d+k-3-m'_{d-1-i}$. De plus, deux ensembles distincts de m_i déterminent deux fonctions de Hilbert différentes. On en déduit que les deux suites d'entiers (m_i-2) et $(k+d-3-m'_{d-1-i})$ sont égales, et comme elles sont rangées dans l'ordre croissant, on en déduit la relation annoncée. ■

Lemme 29 Soit $\Gamma \in Y^{(\alpha)}$. On pose $\alpha = kd - r$, avec $r < d$. Soit Δ le résiduel de r points alignés dans l'intersection de Y avec une courbe de degré k ⁷. Soit $A_{\Delta} = \sum_{i=0}^{\infty} A_{\Delta}(i)$ l'anneau homogène de Δ , ϕ_{Δ} la fonction de Hilbert de Δ . Alors on a :

1.

$$(\forall l) \phi_{\Delta}(l) \leq \phi_{\Gamma}(l)$$

2. Si

$$(\forall l) \phi_{\Delta}(l) = \phi_{\Gamma}(l)$$

Γ est aussi le résiduel de r points alignés dans l'intersection de Y avec une courbe de degré k .

3. Si $\phi_{\Delta}(i) = \phi_{\Gamma}(i)$, alors :

i) Si $i \leq k + d - r - 3$, on a :

$$(\forall j \leq i) \phi_{\Delta}(j) = \phi_{\Gamma}(j)$$

ii) Si $i = k + d - r - 2$, on a :

$$(\forall j \geq i) \phi_{\Delta}(j) = \phi_{\Gamma}(j)$$

ou bien :

$$(\forall j \leq i) \phi_{\Delta}(j) = \phi_{\Gamma}(j).$$

i) Si $i \geq k + d - r - 1$, on a :

$$(\forall j \geq i) \phi_{\Delta}(j) = \phi_{\Gamma}(j)$$

⁷Il suffit de prendre $d - r$ points sur une section linéaire générique, et $(k - 1)d$ points sur une section par une courbe générique de degré $k - 1$.

Démonstration du lemme.

Le caractère numérique relatif (n_0, \dots, n_{d-1}) de Δ vérifie bien sûr $n_0 = k$. De plus, d'après Gruson-Peskine (cf.[51]), on a $n_{d-1} = k + d - 1$ si $r = 0$, et $n_{d-1} = k + d - 2$ si $r > 0$. On obtient, avec les deux conditions $\sum_{i=0}^{d-1} (n_i - i) = \alpha$ et $n_{i+1} \leq n_i + 1$:

1. si $\alpha = kd(r = 0)$

$$n_0 = k, \dots, n_{d-1} = k + d - 1$$

2. si $r > 0$

$$n_0 = k, n_1 = k + 1, \dots, n_{d-r-1} = k + d - r - 1$$

$$n_{d-r} = k + d - r - 1, n_{d-r+2} = k + d - r, \dots, n_{d-1} = k + d - 2$$

De ces valeurs des n_i et des conditions $m_{i+1} \leq m_i + 1$ et $\sum_{i=0}^{d-1} (m_i - i) = \alpha$ on déduit $m_0 \geq k = n_0$ et si $m_i < n_i$ alors $m_j \leq n_j$ pour $j \geq i$.

De la suite exacte

$$0 \rightarrow \oplus_{i=0}^{d-1} R[-m_i] \rightarrow \oplus_{i=0}^{d-1} R[-i] \rightarrow A_\Gamma \rightarrow 0$$

on déduit la fonction de Hilbert de Γ :

$$\phi_\Gamma(l) = \sum_{i=0}^{d-1} (l - i + 1)_+ - (l - m_i + 1)_+$$

avec $s_+ = s$ si $s > 0$ et 0 sinon; de même

$$\phi_\Delta(l) = \sum_{i=0}^{d-1} (l - i + 1)_+ - (l - n_i + 1)_+$$

On a donc :

$$\phi_\Gamma(l) - \phi_\Delta(l) = \sum_{i=0}^{d-1} (l - n_i + 1)_+ - (l - m_i + 1)_+$$

Les égalités précédentes signifient que la différence $\phi_\Gamma(l) - \phi_\Delta(l)$ est l'aire qui sépare les graphes des fonctions $j_\Gamma(i) = m_i$ et $j_\Delta(i) = n_i$, en dessous de la droite horizontale $j = l + 1$. Comme $m_0 \geq k = n_0$ (d'après le degré de Γ) et comme si $m_i < n_i \Rightarrow \forall j \geq i, m_j \leq n_j$, cette différence $\phi_\Gamma(l) - \phi_\Delta(l)$ est

d'abord nulle (jusque $k - 1$) puis est croissante et enfin décroît jusqu'à zéro; donc

$$(\forall i)\phi_\Gamma(i) \geq \phi_\Delta(i)$$

En particulier, on a : $m_0 \leq n_0$.

Considérons $\mu_\Gamma(l) = \phi_\Gamma(l) - \phi_\Gamma(l - 1)$, et $\mu_\Delta(l) = \phi_\Delta(l) - \phi_\Delta(l - 1)$; on considère les graphes de μ_Γ et μ_Δ . L'aire totale située sous les graphes de μ_Γ et μ_Δ est α . Les graphes sont d'abord croissants, puis décroissants, et enfin s'annulent resp. en $m_{d-1} + 2$ et $n_{d-1} + 2$. De plus, les deux graphes coïncident au moins jusqu'à $l = k - 1$.

Alors le fait que les caractères numériques soient connexes implique que le graphe de μ_Γ , si il est distinct de celui de μ_Δ , se comporte de la manière suivante : il commence par passer au-dessus de celui de μ_Δ , pour passer ensuite en-dessous, puis revenir coïncider (éventuellement sur l'axe horizontal). Autrement dit, le graphe de μ_Γ est une "perturbation" de celui de μ_Δ . Supposons $\phi_\Gamma(i) = \phi_\Delta(i)$, i.e. que l'aire située sous les graphes μ_Γ et μ_Δ à gauche de la droite $l = i$ est la même pour les deux graphes. Cela signifie ou bien que la perturbation est contenue $l < i$, ou bien qu'elle est contenue $l > i$.

Supposons que $i \leq d + k - r - 3$. On peut voir alors que la perturbation ne peut pas être contenue à gauche. En effet, on aurait coïncidence des graphes à droite, ce qui impliquerait coïncidence partout d'après les deux conditions sur les m_i . De même, supposons $i \geq d + k - r - 1$. On ne peut alors avoir coïncidence à gauche, pour la même raison.

Supposons enfin que les deux graphes coïncident partout. Alors Γ est contenu dans une courbe de degré k . On déduit de la valeur de m_{d-1} que le résiduel Γ' de Γ est contenu dans une droite, par la propriété de Gorenstein. La démonstration du lemme est terminée. ■

Démonstration du théorème.

Le calcul nous donne : $\alpha - \phi_\Delta(d - 3) = (k - 1)(k + 2)/2$ si $r > k$, et $\alpha - \phi_\Delta(d - 3) = k(k + 3)/2 - r$ si $r \leq k$. On a donc la dimension de la série linéaire complète passant par Δ . Supposons $\dim(\Gamma) = \dim(\Delta)$; alors d'après le lemme 27, $\phi_\Gamma(d - 3) = \phi_\Delta(d - 3)$.

Supposons $r \leq k$. Le lemme 29 nous permet de conclure que $\phi_\Gamma(k) = \phi_\Delta(k)$, car $k \leq d - 3$ par hypothèse; donc $m_0 = k$ et Γ est sur une courbe X de degré k .

On peut donc écrire $X \cap Y = \Gamma + \Gamma'$, où Γ' est un groupe de points de degré r sur Y .

Le fait que si $r \leq k$ $[\Gamma]$ n'a pas de points fixes vient du fait que tout groupe de points R de degré $\leq k + 1$ impose des conditions indépendantes sur les courbes de degré k (cf. Appendice); donc $\Gamma' + P$ impose des conditions indépendantes sur les courbes de degré k pour tout point P de Γ , ce qui signifie qu'une courbe de degré k passant par Γ' ne passe de façon nécessaire par aucun point de Γ .

Enfin supposons que $r = k + 1$, et que Γ' n'est pas aligné, alors $\phi_{\Gamma'+P}(1) = 3$; comme la fonction de Hilbert est strictement croissante jusqu'à ce qu'elle soit constante (cf. Appendice), $\phi_{\Gamma'+P}(k) \geq k + 2 = r + 1$, donc $\Gamma' + P$ impose des conditions indépendantes sur les courbes de degré k pour tout point P de Γ , ce qui signifie que $[\Gamma]$ n'a pas de points fixes.

Si $r > k + 1$, soit X une courbe de degré m_0 passant par Γ , et $X \cap Y = \Gamma + \Gamma'$. On doit avoir d'après le lemme 29 que $m_{d-1} = n_{d-1} = d + k - 3$. D'après la propriété de Gorenstein, on en déduit que le caractère numérique de Γ' vérifie $m'_0 + m_{d-1} = m_0 + d - 1$, donc $m'_0 = m_0 - k + 1$ et que Γ' est contenue dans une courbe de degré $m_0 - k + 1$. Mais on a $m_0(m_0 - k + 1) < \deg(\Gamma') = d(m_0 - k + 1) - (d - r)$, on en déduit donc que la courbe X' de degré m'_0 contenant Γ' et X ont une composante commune. En répétant le raisonnement après avoir retiré cette composante, on obtient en fait que X' est contenue dans X . On en déduit que Γ contient l'intersection de Y avec une courbe de degré $m_0 - m'_0 = k - 1$. $[\Gamma]$ doit contenir comme points fixes les $d - r$ autres points de Γ (qui sont contenus dans l'intersection de Y avec X'). On a alors $m_0 = k$ ssi $m'_0 = 1$. ■

3.1.3 Cas des courbes intersections complètes.

Pour des résultats d'unicité sur les séries linéaires de degré d et de dimension N d'une courbe intersection complète de degré d dans \mathbb{P}_N , on pourra consulter [13].

Par ailleurs, la *gonalité* d'une courbe algébrique Y est le minimum des entiers s tel qu'il existe un morphisme de degré s de Y dans \mathbb{P}_1 ; ou ce qui revient au même, tel qu'il existe une série linéaire de degré s de dimension ≥ 1 . Dans le cas d'une courbe intersection complète dans \mathbb{P}_3 , Basili ([6]) a démontré un résultat sur la gonalité, qui se généralise probablement pour des courbes intersections complètes de $\mathbb{P}_N, N > 3$:

Soit Y une intersection complète lisse irréductible de type (d_1, d_2) dans \mathbb{P}_3 , de gonalité k . Alors pour toute série linéaire complète de degré k et de dimension 1 sur Y , il existe un groupe de points $\Gamma' = Y \cap D$ de degré $d_1 d_2 - k$ sur Y , intersection de Y avec une droite D , tel que cette série linéaire soit décrite en prenant les groupes de points résiduels de Γ' dans l'intersection des plans contenant D avec Y .

3.1.4 Cas des courbes canoniques.

Soit Y une courbe canonique dans \mathbb{P}_N , i.e. l'image par l'application canonique d'une courbe dont les différentielles abéliennes définissent un fibré. On sait alors que Y est de degré $2N$, il y a une unique série linéaire de degré $2N$

et de dimension N : la série canonique, déterminée par les section hyperplane. On peut énoncer un résultat analogue à celui de Basili sur la gonalité :

Proposition 11 *Si k est la gonalité de Y , et g_k^1 une série linéaire de degré k et de dimension 1 sur Y , alors il existe une sous-variété linéaire H de codimension 2 qui coupe Y en un groupe Γ' de $2N - k$ points, et telle que la série linéaire g_k^1 est décrite en prenant les résiduels de Γ' dans les intersections de Y avec les hyperplans contenant H .*

En effet, le nombre de différentielles abéliennes indépendantes s'annulant sur un élément Γ de g_k^1 est d'après le lemme 20 égal à $N + 1 - k + 1$; Γ est donc contenu dans un \mathbb{P}_{k-2} . Les résiduels de Γ dans les intersections de Y avec les hyperplans contenant ce \mathbb{P}_{k-2} déterminent donc sur Y une série linéaire de dimension $N - k + 1$ et de degré $2N - k$. Si Γ est un élément de cette dernière série linéaire, il y a donc au moins 2 différentielles abéliennes indépendantes s'annulant sur Γ , donc Γ' est dans une sous-variété linéaire H de codimension 2. La série linéaire décrite en prenant les résiduels de Γ' dans l'intersection de Y avec les hyperplans passant par H contient Γ et est de dimension 1, c'est donc g_k^1 .

3.2 Cas des intersections complètes de dimension quelconque.

Pour commencer, considérons le cas des hypersurfaces : soit Y une hypersurface de \mathbb{P}_{n+1} de degré $d \geq n + 3$, et Γ un ensemble de d points lisses distincts sur Y . On peut se ramener pour simplifier, les points de Γ étant distincts, à l'étude de v.i.a. sur les produits cartésiens Y^p (qui sont les images réciproques des v.i.a. sur les produits symétriques $Y^{(p)}$).

Théorème 4 *Si il passe par Γ dans Y^d une v.i.a. V de dimension supérieure à $n + 1$ vérifiant l'une des deux conditions suivantes :*

1. *V est de dimension $n + 1$ et les projections $\pi_i : V \subset Y^d \rightarrow Y (1 \leq i \leq d)$ sont ouvertes; de plus, les vecteurs tangents aux d courbes $C_i \subset V$ passant par Γ correspondant à fixer les projections $\pi_i : Y^d \rightarrow Y$ engendrent l'espace tangent à V en Γ .*
2. *V est de dimension $2n$ et les biprojections $\pi_{ij} : V \subset Y^d \rightarrow Y^2$ sont ouvertes.*

Alors, Γ est contenu dans une droite (et donc les d -uplets de V sont des intersections de Y avec des droites).

Démonstration du théorème

Nous avons besoin pour la démonstration de l'objet suivant, que l'on appellera encore matrice de Brill-Noether si Y est de dimension > 1 :

Définition 2 (Matrice de Brill-Noether) *Soit Y une variété algébrique de dimension n . Soit $\omega_1, \dots, \omega_\pi$ une base des n -formes abéliennes de degré maximal sur Y . Soit P_1, \dots, P_s s points distincts. Posons $\omega_j = \phi_j \cdot dz_i (1 \leq j \leq \pi)$; où z_i est un système de coordonnées locales en $P_i (1 \leq i \leq s)$. La matrice de Brill-Noether associée est la matrice scalaire $s \times \pi : [\phi_j(P_i)]_{(1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq \pi)}$.*

Dans notre cas (Y est une hypersurface), on peut choisir comme fonctions ϕ_j les monômes de degré $\leq d-n-2$ en x_1, \dots, x_n, y car $\omega_j = f_j(x, y)/\partial_y f \cdot dx(P_i)$.

■

Démonstration du théorème

Les hypothèses de position générale nous permettent d'obtenir $n + 1$ relations linéaires indépendantes entre les colonnes de la matrice de Brill-Noether.

Supposons qu'on soit dans la première hypothèse. On peut supposer V lisse en Γ . Alors, si t_1, \dots, t_{n+1} sont des coordonnées locales de V en Γ , on a :

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(P_i) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{j-1} \wedge dt_{j+1} \wedge \dots \wedge dt_{n+1}$$

et le fait que la famille est abélienne nous donne les relations :

$$\sum_{i=1}^d a_{ij} \phi_j(P_i) = 0 (j = 1, \dots, n+1)$$

D'après l'hypothèse, les d vecteurs $(a_{ij})_{1 \leq j \leq n+1}$ génèrent \mathbb{C}^{n+1} ; donc les $n + 1$ relations précédentes sont indépendantes. Supposons qu'on soit dans la deuxième hypothèse. Alors il faut montrer que $d - n$ colonnes arbitrairement choisies dans la matrice de Brill-Noether sont linéairement dépendantes. Montrons par exemple que les $d - n$ dernières colonnes sont dépendantes. Il suffit de choisir dans

$$dz_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_{1i} dx_i(P_1), \dots$$

$$dz_n = \sum_{i=1}^n \lambda_{ni} dx_i(P_n)$$

des valeurs de λ_{ij} telles que

$$dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge dx(P_{n+1}) \neq 0$$

L'existence d'une matrice λ_{ij} découle de l'énoncé suivant, dont la démonstration est simple :

Supposons donnés, dans \mathbb{C}^{2n} , $(n+1)$ espaces $\mathbb{C}^{n,i}$ ($1 \leq i \leq n+1$) deux à deux en somme directe. On peut trouver n points $p_i \in \mathbb{C}^{n,i}$ ($1 \leq i \leq n$) qui engendrent un \mathbb{C}^n disjoint avec $\mathbb{C}^{n,n+1}$

Il suffit en effet de faire dans \mathbb{C}^{2n} quotient par $\mathbb{C}^{n,n+1}$ pour que l'énoncé devienne trivial.

Dans une hypothèse comme dans l'autre, le rang de la matrice de Brill-Noether est donc au plus $d-n-1$. Les points P_i étant distincts, on peut choisir un système de coordonnées affines où toutes les valeurs $y(P_i)$ ($1 \leq i \leq d$) sont distinctes. Alors les monômes $1, \dots, y^{d-1}$ sont linéairement indépendants sur Γ ; en effet, d'après le calcul des déterminants de Vandermonde

$$\det(y^j(P_i)) = \prod_{i_1 < i_2} (y(P_{i_1}) - y(P_{i_2}))$$

En particulier les lignes correspondant aux monômes $1, \dots, y^{d-n-2}$ sont linéairement indépendantes. Le rang de la matrice de Brill-Noether étant égal à $d-n-1$, toutes les lignes de la matrice correspondant aux autres monômes en dépendent donc linéairement. On va montrer que ces relations entre les lignes de la matrice nous donnent les relations linéaires recherchées.

On a en particulier les relations

$$x_i = a_{i,0} + \dots + a_{i,d-n-2} y^{d-n-2} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.1)$$

et

$$y.x_i = a_{i,0}^1 + \dots + a_{i,d-n-2}^1 y^{d-n-2} \quad (1 \leq i \leq n)$$

En multipliant les premières relations par y et en les soustrayant aux deuxièmes (la i -ième à la i -ième), on obtient les n équations:

$$0 = a_{i,0}^1 + (a_{i,1}^1 - a_{i,0})y + \dots + (a_{i,d-n-2}^1 - a_{i,d-n-3})y^{d-n-2} - a_{i,d-n-2}y^{d-n-1} \quad (1 \leq i \leq n)$$

Comme on sait (par Vandermonde) que les monômes $1, y, \dots, y^{d-n-1}$ sont linéairement indépendants, on obtient que $a_{i,d-n-2} = 0$ ($1 \leq i \leq n$). En multipliant les relations (3.1) (où l'on sait maintenant que le dernier terme est nul) par y^2 , et en les soustrayant (la i -ième à la i -ième) aux relations

$$y^2.x_i = a_{i,0}^2 + \dots + a_{i,d-n-2}^2 y^{d-n-2} \quad (1 \leq i \leq n)$$

on obtient $a_{i,d-n-3} = 0$ ($1 \leq i \leq n$). De manière générale, en multipliant les relations (3.1) par y^k ($1 \leq k \leq d-n-3$) et en les soustrayant aux relations

$$y^k.x_i = a_{i,0}^k + \dots + a_{i,d-n-2}^k y^{d-n-2} \quad (1 \leq i \leq n)$$

on obtient $a_{i,d-n-2-k+1} = 0$ ($1 \leq i \leq n$). Les équations (3.1) sont donc en fait linéaires. On obtient ainsi que x_1, \dots, x_n dépendent linéairement de y , ce qui signifie que Γ est sur une droite. ■

Remarque 12 Dans ce cas, à partir du fait que le rang de la matrice de Brill-Noether en Γ est $d - n - 1$, on peut conclure d'une autre manière que Γ est aligné. En effet, on sait que la fonction de Hilbert de Γ est strictement croissante jusqu'à ce qu'elle soit égale à $\deg(\Gamma)$ (cf. Appendice); si elle vaut $d - n - 1$ en $d - n - 2$, c'est donc qu'elle est ≤ 2 en Γ , et que par conséquent Γ est aligné.

On peut en utilisant le même type de raisonnement démontrer la proposition suivante :

Proposition 12 *Considérons le système différentiel sur Y^d provenant des formes méromorphes ayant un pôle d'ordre au plus n sur une section Y' de Y par un hyperplan H . Dans un certain système de coordonnées affines, on peut supposer que H est l'hyperplan à l'infini, et que si $f(x, y) = 0$ est l'équation de Y , les formes en question s'écrivent : $\frac{p(x, y)}{\partial_y f(x, y)} dx$, où $p(x, y)$ est un polynôme de degré $\leq d - 2$. Alors, si $p \in H - Y$, les droites passant par p définissent par intersection avec Y une variété intégrale pour ce système différentiel, d'après l'expression explicite de la transformation d'Abel.*

Réciproquement, soit $V \subset Y^d$ une variété intégrale de dimension n pour ce système différentiel, avec des projections ouvertes. Alors il existe un point $p \in H - Y$ tel que les éléments de V soient des intersections de Y avec des droites passant par p .

Comme corollaire de ce qui précède, on retrouve le résultat suivant, énoncé dans ([28], p. 178) pour des hypersurfaces lisses comme corollaire du théorème de Lefschetz :

Corollaire 4 *Soit Y et Y' deux hypersurfaces irréductibles de \mathbb{P}_N de degré $d \geq N + 2$, non nécessairement lisses. Si il y a un morphisme surjectif ϕ de Y dans Y' , ce morphisme est induit par une transformation de l'espace projectif ambiant \mathbb{P}_N .*

Si ω est une forme abélienne sur Y , son image directe $\phi_*(\omega)$ est abélienne sur Y' . De plus, comme $\deg(Y) = \deg(Y')$, on obtient ainsi toutes les formes abéliennes sur Y' . Donc, si V est une v.i.a. de dimension $2n$ dans X^d , qui a les "biprojections ouvertes", la sous-variété V' de X'^d obtenue à partir de V en appliquant ϕ , est une v.i.a. de la même dimension et ayant aussi les biprojections ouvertes. D'après notre théorème, si V est l'image de la grassmannienne par l'application qui à une droite associe son intersection avec Y , l'image de V sera l'image de la grassmannienne par l'application qui à une droite associe son intersection avec Y' ; on associe ainsi à une droite une autre droite, et de plus aux droites passant par $p \in Y$ correspondent des droites passant par $\phi(p) \in \phi(Y)$. On définit donc ainsi une application de la

grassmannienne des droites dans elle-même, et qui est telle que l'image des droites passant par un point nous donne des droites passant par un point; on peut montrer qu'une telle transformation est induite par une transformation de l'espace projectif \mathbb{P}_N . On peut donc associer à ϕ une transformation de l'espace projectif qui transforme Y en Y' . ■

Remarque 13 *Si l'on montre qu'au polynôme homogène f de degré d qui définit l'hypersurface Y correspond un nombre fini de transformations linéaires P vérifiant $f(P.x) = \lambda f(x)$ pour une certaine constante λ , il s'ensuit que Y admet un nombre fini d'automorphismes.*

On peut énoncer un théorème analogue au théorème précédent si $Y \subset \mathbb{P}_{n+m}$ est une intersection complète de type (d_1, \dots, d_m) avec $m \geq 2$, mais il nous faut une restriction sur les degrés d_i :

Théorème 5 *Soit Y une intersection complète réduite de type (d_1, \dots, d_m) dans \mathbb{P}_{n+m} , avec $d_1 + \dots + d_m = n + m + 2$, de degré $d = d_1 \dots d_m$. Si il passe par Γ dans Y^d une variété intégrale abélienne V de dimension $n + m$ vérifiant la condition de position générale suivante : Les projections $\pi_i : V \subset Y^d \rightarrow Y$ ($1 \leq i \leq d$) sont ouvertes; de plus, les n -plans normaux $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(P_i)$ ($1 \leq i \leq d$) aux feuilles $P_i = \text{Cte}$ engendrent en chaque point de V l'espace des n -vecteurs. Alors Γ est contenu dans un sous-espace linéaire de dimension m (et donc les d -uplets de V sont des intersections de Y avec des sous-espaces linéaires de dimension m).*

Corollaire 5 *Soit Y et Y' deux intersection complètes Y de type (d_1, \dots, d_m) de \mathbb{P}_{n+m} vérifiant $d_1 + \dots + d_m = n + m + 2$. Si il y a un morphisme surjectif de Y dans Y' , ce morphisme est induit par une transformation de l'espace projectif ambiant \mathbb{P}_{n+m} .*

Ce corollaire se démontre de la même manière que le corollaire analogue énoncé précédemment.

Démonstration du théorème

Soit M la matrice de Brill-Noether associée à Γ ; on peut supposer $M = (p_j(P_i))$, où les p_j sont tous les monômes de degré $\leq d_1 + \dots + d_m - n - m - 1$ sur Y d'après 10. On peut supposer que Γ est lisse sur V . D'après l'hypothèse de position générale, le nombre de relations linéaires indépendantes entre les colonnes de M est égal à C_{n+m}^n , dimension de l'espace vectoriel des n -vecteurs en un point lisse de V . Or ceci est précisément d moins le nombre de monômes

$$y_1^{i_1} \dots y_m^{i_m}, i_1 < d_1, \dots, i_m < d_m, i_1 + \dots + i_m \leq d_1 + \dots + d_m - m - n - 1$$

D'après l'hypothèse on a $d_1 + \dots + d_m - m - n - 1 = 1$, donc ces $d - C_{n+m}^n = m + 1$ monômes sont linéairement indépendants sur Γ pour un bon choix de coordonnées affines, donc $1, y_1, \dots, y_m$ fournissent $(m + 1)$ lignes indépendantes de M . Cela signifie, d'après le rang de la matrice M , que les autres lignes de M en dépendent linéairement. D'après l'hypothèse $d_1 + \dots + d_m - m - n - 1 = 1$, on obtient n relations linéaires, qui sont indépendantes. Γ est donc contenu dans un sous-espace linéaire de dimension m .

Remarque 14 Nous n'avons pas réussi à montrer sans restriction sur les d_i que les relations ci-dessus obtenues entre les colonnes de la matrice de Brill-Noether du fait de la présence d'une v.i.a. de dimension $\geq N$ passant par Γ sont en fait linéaires.

Remarque 15 Dans le cas de la famille définie par les intersections des m -plans avec Y , on peut voir de la manière suivante que le nombre de relations entre les colonnes de la matrice de Brill-Noether est égal au nombre de monômes en y_1, \dots, y_m de degré inférieur à n (ce qui est très inférieur au nombre de n -formes sur la grassmannienne).

Ecrivons les équations des m -plans sous la forme canonique :

$$x_1 = a_{1,1}y_1 + \dots + a_{m,1}y_m + b_1, \dots, x_n = a_{1,n}y_1 + \dots + a_{m,n}y_m + b_n$$

Alors, si $\omega_j = \phi_j \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, on a :

$$\mathcal{A}(\omega_j) = \sum_{i=1}^d \phi_j(P_i) \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial b_j}\right) (db_1 \wedge \dots \wedge db_n) + \sum_{I,K} \alpha_{I,K}(P_i) \cdot \bigwedge_{i \in I} db_i \wedge \bigwedge_{j \notin I} da_{j,k_j}$$

où $\alpha_{I,K}$ est un monôme en y_1, \dots, y_m de degré $\leq n$; de plus tous les monômes de degré $\leq n$ apparaissent en tant que coefficients; de plus ces monômes peuvent être supposé indépendants sur les points P_i pour un bon choix de coordonnées affines. Les relations $\mathcal{A}(\omega_i) = 0$ ($1 \leq i \leq \pi$) nous donnent donc exactement C_{n+m}^n relations entre les colonnes de la matrice de Brill-Noether.

3.3 Cas des variétés canoniques.

Soit $Y \subset \mathbb{P}_{n+m}$ une variété canonique de dimension n et de degré $d = nm + m + 2$ (le degré est automatiquement $2m + 2$ si $n = 1$). On peut sur une telle variété prendre pour matrice de Brill-Noether en un p -uplet $\Gamma = (P_1, \dots, P_p)$ contenu dans une carte affine prendre la matrice $[l_i(P_j)]$ ($1 \leq i \leq n + m + 1, 1 \leq j \leq p$) où les $l_0 = 1$ et les l_i ($1 \leq i \leq n + m + 1$) sont toutes les coordonnées de la carte affine.

Théorème 6 *Si par $\Gamma \in Y^d$ il passe une variété intégrale abélienne V de dimension $nm + n$, Γ appartient à un sous-espace linéaire de dimension m .*

Démonstration du théorème

Si $n = 1$, i.e. si Y est une courbe canonique, le résultat est déjà connu. Si $n \geq 2$, le lemme suivant, appliqué à $E = T_\Gamma(V)^*$ et $E_i = \text{Vect}\{dx_1(P_i), \dots, dx_n(P_i)\}$ (l'hypothèse est vérifiée), implique tout ensemble de $m + 2$ colonnes de la matrice de Brill-Noether est lié. Cela implique que Γ est contenu dans un sous-espace linéaire \mathbb{P}_m .

Lemme 30 *Soit $E_1, E_2, \dots, E_{nm+1}$ $nm+1$ sous-espaces vectoriels de dimension n d'un espace vectoriel E de dimension $nm + n$, tels que la somme de $m + 1$ E_i distincts égale E . Alors on peut trouver $e_1 \in E_1, \dots, e_{nm} \in E_{nm}$ tels*

$$E = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_{nm}\} \oplus E_{nm+1}$$

On peut montrer le lemme ainsi : Soit E' le quotient de E par E_{nm+1} , $E'_i = E_i/E_{nm+1}$. Cet espace est de dimension nm , et la somme de m E'_i est égale à E' . Il suffit de montrer qu'on peut prendre une base de E' e'_1, \dots, e'_{nm} avec $e'_i \in E'_i$. C'est une conséquence du fait suivant : Si on a nm espaces projectifs linéaires $\mathbb{P}_{n-1}^i = \mathbb{P}(E'_i)$ ($1 \leq i \leq nm$) dans $\mathbb{P}_{nm-1} = \mathbb{P}(E')$ tels que pour tout choix de $P_i \in \mathbb{P}_{n-1}^i$ les P_i sont contenus dans un hyperplan de \mathbb{P}_{nm-1} , alors les \mathbb{P}_{n-1}^i sont tous contenus dans un hyperplan (et donc ne sont pas disjoints).

Remarque 16 Nous ne savons pas si dans le cas où $n \geq 2$ le théorème reste vrai sous l'hypothèse plus faible où, sans supposer a priori la sous-variété Y canonique, nous supposons juste qu'elle a pour degré $d = nm + m + 2$ et $\pi(d, n + m) = n + m + 1$ formes abéliennes linéairement indépendantes de degré maximal.

Chapitre 4

Sur le support des 0–cycles complets.

On se donne une variété algébrique irréductible $Y \subset \mathbb{P}_N$ de dimension n et degré d . On sait d'après Bézout que l'intersection avec Y d'une sous-variété de dimension complémentaire $N - n$ et de degré k , si elle est discrète, définit un groupe de kd points, donc un 0–cycle $\in Y^{(kd)}$.

Définition 3 *On appelle complet un 0–cycle qui s'écrit comme l'intersection de Y avec une variété de dimension complémentaire. Le support d'un 0–cycle complet sera également qualifié de complet.*

Tout 0–cycle Γ peut être "complété" dans le sens où, prenant l'hypersurface H_1 de plus petit degré k_1 contenant Γ et ne contenant pas Y , puis de plus petit degré H_2 contenant Γ et pas $H_1 \cap Y$, et ainsi de suite, on obtient un 0–cycle Γ' , appelé résiduel de Γ par rapport à $H = H_1 \cap \dots \cap H_n$, tel que $\Gamma + \Gamma' = H \cap Y$.

Etant donné un sous-ensemble E de Y , on peut se poser la question de savoir quelles propriétés de E (la pseudo-concavité, le fait d'être d'intérieur non vide, ou de contenir certaines sous-variétés de Y ...) impliquent le fait de contenir le support d'un 0–cycle complet.

Les intégrales abéliennes jouent un rôle important dans l'étude ce problème.

4.1 Cas des courbes: $n = 1$.

Soit $Y \subset \mathbb{P}_N$ une courbe algébrique irréductible. On pourra consulter en Appendice quelques notions de base sur la jacobienne généralisée $J(Y)$, l'application d'Abel-Jacobi, le module des périodes, etc

- Théorème 7** 1. Soit p un point de Y . Alors tout voisinage U de p auquel on ajoute les singularités de Y contient un ensemble complet de points.
2. Supposons Y singulière. Soit $E \subset Y$ l'ensemble des points dont tout voisinage contient le support d'un 0-cycle complet. E est contenu dans une courbe réelle de Y .

L'exemple suivant illustre le théorème; il m'a été communiqué par M. Mazet. Dans la suite, on appellera *distingué* un point qui est le support d'un 0-cycle complet.

Exemple 1 Considérons la cubique Y d'équation $y^2 = x^3$. L'ensemble E se réduit au point à l'infini, qui est l'unique point d'intersection de Y avec la droite à l'infini.

Considérons la cubique Y d'équation $y^2 = x^2(x+1)$. Les points distingués correspondent aux points de paramètre $t = i \cdot \tan(\alpha\pi)$ avec α rationnel, dans le paramétrage $x = t^2 - 1, y = t^3 - t$ (plus le point à l'infini) et E correspond aux points de paramètre imaginaire pur.

Soit $J(Y) = \mathbb{C}^\pi / \Lambda$ la jacobienne généralisée de Y (Λ est le "module des périodes" correspondant au choix d'une base des différentielles abéliennes).

Soit $\phi : Y \rightarrow J(Y)$ l'application d'Abel-Jacobi de Y , supposée normalisée de telle façon que l'image de la section hyperplane soit nulle. On peut étendre ϕ par \mathbb{Z} -linéarité sur l'ensemble des diviseurs de Y .

Démonstration du théorème, première partie.

On sait que l'application d'Abel-Jacobi $\phi_\pi : Y^{(\pi)} \rightarrow J(Y)$ est un morphisme propre génériquement fini de degré 1 entre espace de mêmes dimension, donc est birationnelle. En particulier, si U est un ouvert de Y , l'image de $U^{(\pi)}$ par ϕ contient un ouvert de $J(Y)$.

Considérons d'abord le cas où Y est lisse. Comme l'ensemble N de points de torsion de $J(Y)$ est dense dans $J(Y)$ (N correspond aux points rationnels dans l'isomorphisme de groupes de Lie réels $J(Y) \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2\pi}$), il existe $x \in \phi_\pi(U^{(\pi)}) \cap N$. Alors, il existe n tel que $n \cdot x = 0$; on peut de plus choisir n de sorte que $n\pi$ soit un multiple de d , soit $n\pi = kd$.

Soit m_0 tel que

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(m))$$

est surjective pour $m \geq m_0$ (cf. lemme 24). Alors, si $\Gamma \in Y^{(\pi)}$ est un antécédent de x par ϕ_π , $n\Gamma$ est l'intersection de Y avec une courbe de degré k si on prend n de sorte que $k \geq m_0$.

Considérons maintenant le cas où Y est singulière. Soit U un ouvert de Y . Soit $\mu : Y' \rightarrow Y$ une désingularisation de Y ; soit $g < \pi$ le genre de Y' . Soit $S = \text{Sing}(Y)$, $S' = \mu^{-1}(S)$ (en tant que diviseur de Y'), H' l'image

réciproque par μ d'une section hyperplane $H \subset Y - S$ de Y et $U' = \mu^{-1}(U)$. Alors d'après le raisonnement précédent il existe des entiers n et k et un point $x \in U'^{(g)}$ tels que $n(g + \deg(S')) = kd$ et $\phi'(n(x + S') - kH') = 0$, où ϕ' est l'application d'Abel-Jacobi de Y' . Cela implique d'après le théorème d'Abel que pour n assez grand qu'il y a une fonction rationnelle r' sur Y' telle que $(r') = n(x + S') - kH'$. Alors $r = r' \circ \mu^{-1}$ est nécessairement régulière aux points singuliers de Y pour n assez grand; si l est une forme linéaire définissant H , $l^k.r \in H^0(\mathcal{O}_Y(k))$. Le lemme 24 nous permet de conclure. ■

Démonstration du théorème, deuxième partie

On suppose ϕ normalisé de sorte que $\phi(H) = 0$.

Lemme 31 *L'image par ϕ de l'ensemble des points distingués est contenue dans l'ensemble N des points de torsion de $J(Y)$. Soit E l'ensemble des points dont tout voisinage contient un ensemble complet de points. On a $E = \phi^{-1}(\bar{N})$.*

Si un point a une image par ϕ qui est de torsion dans $J(Y)$, il admet un multiple qui est linéairement équivalent à un multiple de la section hyperplane, et d'après le lemme 24, ce point est distingué. Réciproquement, si ce point P est distingué, et qu'il est intersection de Y avec une autre courbe algébrique de degré k , l'image de $kd.P$ par l'application d'Abel-Jacobi ϕ est nulle d'après le théorème d'Abel; donc $kd.\phi(P) = 0$.

Montrons maintenant la deuxième partie du lemme. Considérons \mathbb{C}^π en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel. Alors on peut compléter $Vect(\Lambda) = \mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_{2\pi-\delta}$ en une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C}^π ; soit $e_{2\pi-\delta+1}, \dots, e_{2\pi}$ les vecteurs qui complètent. Soit $e_1^*, \dots, e_{2\pi}^*$ la base duale. Comme $e_{2\pi-\delta+1}^*, \dots, e_{2\pi}^*$ s'annulent sur Λ , ces formes linéaires passent au quotient et définissent des fonctions sur $J(Y)$, qu'on notera de la même manière. Alors \bar{N} est défini par les équations $e_{2\pi-\delta+1}^* = 0, \dots, e_{2\pi}^* = 0$. Supposons que P n'ait pas son image dans \bar{N} . Alors l'ensemble des points $Q \in Y$ vérifiant $e_{2\pi}^*(\phi(Q)) > 0$, quitte à renuméroter les indices, est un voisinage ouvert de P , qui visiblement ne contient pas le support d'un 0-cycle complet, pour des raisons de convexité.

Réciproquement, si P a son image dans \bar{N} , pour tout voisinage ouvert U_P de P , $\phi_\pi(U_P^{(\pi)})$ contient un point de N , donc U_P contient le support d'un 0-cycle complet. ■

La démonstration du lemme précédent nous permet d'achever la démonstration du théorème.

Soit i tel que $2\pi - \delta + 1 \leq i \leq 2\pi$. On sait que $\phi(Y)$ génère $J(Y)$ (cf. Appendice), donc e_i^* ne peut être constante sur $\phi(Y)$. De plus e_i^* est évidemment harmonique (dans le sens de partie réelle d'une fonction holomorphe) sur $J(Y)$, donc $e_i^* \circ \phi$ est harmonique dans le même sens et non constante sur $Reg(Y)$. Donc $e_i^* \circ \phi = 0$ définit une courbe réelle analytique

sur Y . D'autre part, on a vu que E doit être contenu dans $e_i^* \circ \phi = 0$, ce qui termine la démonstration. ■

Rappelons qu'un ensemble algébrique de \mathbb{P}_N est rationnellement convexe si son complémentaire est réunion d'hypersurfaces algébriques, ou (ce qui est équivalent) si pour tout point extérieur à cet ensemble il existe un fonction rationnelle régulière sur l'ensemble et dont le module en ce point dépasse le module de la valeur de la fonction en tout point de cet ensemble.

Corollaire 6 1. Si Y est lisse, tout fermé de Y strictement inclus dans Y est rationnellement convexe.

2. Il existe des disques analytiques lisses dans \mathbb{P}_N rencontrant toutes les hypersurfaces algébriques.

La première partie est une application directe du théorème précédent.

Pour la deuxième partie, considérons encore la cubique pararamétrée par les équations $x = t^2 - 1, y = t(t^2 - 1)$. La courbe a un unique point singulier en $x = y = 0$. Donc, l'image de $|t - 1| \geq \epsilon$ est lisse et rencontre toutes les courbes algébriques de \mathbb{P}_2 si $\epsilon < 1$ d'après ce qu'on a vu (on a vu que $Re(t) \leq 0$ rencontre toutes les courbes algébriques de \mathbb{P}_2). ■

Remarque 17 Si l'on considère la courbe réelle lisse γ image de $Re(t) = 0$, dans l'exemple précédent, le problème du bord ne peut être résolu pour γ dans le complémentaire d'aucune courbe algébrique. Pourtant, dans \mathbb{P}_2 , γ admet deux solutions (ou bien au moins une si l'on pose le problème avec l'orientation), correspondant resp. à $Re(t) > 0$ et à $Re(t) < 0$ (suivant l'orientation).

Théorème 8 Soit P_1, \dots, P_s un nombre fini de points sur Y . Si le genre géométrique g (i.e. le genre de la normalisée) est ≥ 2 , il existe un nombre fini de points Q tels que $\{P_1, \dots, P_s, Q\}$ soit le support d'un 0-cycle complet.

Démonstration Soit Y' la normalisée de Y , $\phi' : Y' \rightarrow J(Y')$ l'application d'Abel-Jacobi. La démonstration utilise le théorème de Raynaud (cf.[55]) suivant lequel si C' est l'immersion de Y' dans sa jacobienne $J(Y')$, alors l'intersection de Y' avec tout sous-groupe de $J(Y')$ de rang fini sur \mathbb{Q} est finie. Supposons Q régulier. Si $\{P_1, \dots, P_s, Q\}$ est le support d'un 0-cycle complet, si $\{P'_1, \dots, P'_k, Q'\}$ sont les points correspondants sur Y' (un point singulier pourra correspondre à plusieurs points sur Y'), et Q'_1, \dots, Q'_d sont les points sur Y' d'une section hyperplane de Y ne rencontrant pas $Sing(Y)$, alors le point $\phi'(Q')$ appartient au \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par $\phi'(P'_1), \dots, \phi'(P'_k), \phi'(Q'_1), \dots, \phi'(Q'_d)$ d'après le théorème d'Abel. Le théorème de Raynaud nous dit qu'il n'y a pour $\phi'(Q')$ qu'un nombre fini de solutions, donc pour Q' aussi, et finalement aussi pour Q .

Remarque 18 Certaines courbes lisses de genre ≥ 2 possèdent des points distingués. Par exemple, considérons la courbe de Fermat $Y \subset \mathbb{P}_2$ d'équation homogène $x^d + y^d = z^d$, avec $d \geq 4$. Alors les points dont l'une des coordonnées x, y ou z est nulle (qu'on appellera *points d'osculation*) sont des points distingués. Par exemple, la droite d'équation $x = z$ ne coupe Y que dans le point c de coordonnées homogènes $x = 1, y = 0, z = 1$. D'après le théorème d'Abel, un point p est distingué ssi $\phi(p) - \phi(c)$ est de torsion dans la jacobienne de Y . Dans le cas des courbes de Fermat, Coleman (cf. [15]) a montré que les seuls points distingués sont les points d'osculation. Remarquons que les points d'osculation sont des points d'inflexion, mais que l'inverse n'est pas vrai : pour $m = 4$, il y a 12 points d'osculation et 24 points d'inflexion. De manière générale, pour une courbe plane Y de degré d , si le 0-cycle kdP est complet avec $k \leq d - 3$ alors le point P est un point de Weierstrass. Si on prend sur une cubique un "point distingué d'ordre 4", le point correspondant sur la quartique n'est pas de Weierstrass.

4.2 Sur le supports des 0-cycles complets en dimension supérieure.

Soit Y sous-variété algébrique irréductible de \mathbb{P}_N de dimension ≥ 2 et de degré d .

Le premier théorème du paragraphe précédent admet pour corollaire le théorème suivant :

Théorème 9 *Soit $Y \subset \mathbb{P}_N$ une variété algébrique irréductible de dimension ≥ 2 . Alors :*

1. *Pour tout ouvert non vide U de Y , $U \cup \text{Sing}(Y)$ contient le support d'un 0-cycle complet.*
2. *Il existe des compacts de Stein $K \subset Y$ rencontrant toute hypersurface algébrique.*

Démonstration du théorème, première partie.

Soit H une sous-variété linéaire de \mathbb{P}_N de dimension $N - n + 1$. On peut choisir H de sorte que la section $H \cap Y$ soit une courbe algébrique C qui rencontre U , et telle que $\text{Sing}(C) \subset \text{Sing}(Y)$. Alors on sait d'après ce qui précède que dans H il existe une hypersurface algébrique H' qui ne rencontre C que dans $\text{Sing}(C) \cup U \cap C$. H' peut être considéré dans \mathbb{P}_N comme une intersection complète de codimension n ; donc $H' \cap Y$ est un 0-cycle complet, dont le support est contenu dans $U \cup \text{Sing}(Y)$.

Démonstration du théorème, deuxième partie.

Soit H une sous-variété linéaire de \mathbb{P}_N de dimension $N - n + 1$. On peut choisir H de sorte que la section $H \cap Y$ soit une courbe singulière irréductible. Alors on sait d'après le paragraphe précédent qu'il existe des ouverts de $Y \cap H$ non denses rencontrant toutes les hypersurfaces algébriques. Or, on sait que tout ouvert non compact d'une courbe algébrique irréductible de \mathbb{P}_M est de Stein. La conclusion découle alors du théorème de Siu (cf.[60]).

■ Il est naturel de se demander si le complémentaire de tout ouvert de Stein sur une surface algébrique $Y \subset \mathbb{P}_3$, qui d'après ce qui précède ne contient pas nécessairement l'intersection de Y avec une autre surface algébrique, contiendrait pourtant l'intersection de Y avec une courbe algébrique. Nous ne connaissons pas la réponse à cette question, mais nous pouvons dire du moins que si la réponse est positive, le degré de la courbe doit être suffisamment élevé, et d'autant plus élevé que le degré d de la surface Y est élevé. En effet, un théorème de Noether-Lefschetz (cf. [22] ou [44]) énonce que sur une surface "générique" X de degré $k \geq 4$ (i.e. sur un ouvert dense de l'espace des surfaces de degré k), tout diviseur effectif s'écrit comme l'intersection de X avec une autre surface; en particulier le degré de toute courbe contenue dans X est un multiple de k , et X ne contient pas de droite. Soit X une telle surface générique coupant Y proprement (i.e. en une courbe) ainsi que toutes les droites (en un nombre fini de points). Alors, si $d > k$, $X \cap Y$ ne peut contenir l'intersection de Y avec une droite. En effet, une telle droite couperait X en d points, donc serait contenue dans X , ce qui est exclu.

Remarquons que pour avoir sur Y un ouvert de Stein rencontrant toutes les droites par la méthode précédente, il faut que $d \geq 5$. Si $d = 4$, toute courbe contenue sur Y admet une quadrisécante; mais nous ne savons pas si tout ouvert de Stein de Y admet une droite dans son complémentaire.

Si $\dim(Y) > 1$, la dimension π du \mathbb{C} -e.v. des 1-formes abéliennes fermées (encore appelées différentielles abéliennes) ¹ sur Y s'appelle l'irrégularité de Y . Posons la définition suivante : Y sera dite *fortement singulière* si le module des périodes Λ n'engendre pas \mathbb{C}^π en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel. En particulier, on doit avoir $\pi > 0$ et la codimension de $Sing(Y)$ dans Y doit être égale à 1.

Théorème 10 *Si Y est fortement singulière, presque tout point de Y admet un voisinage dont le complémentaire rencontre toute les sous-variétés Y de dimension complémentaire $N - n$ qui coupent Y proprement (i.e. en un nombre fini de points). Plus précisément, il existe une fonction ψ pluriharmonique sur la partie régulière de Y , deux ouverts disjoints $U_1 = \{\psi > 0\}$ et*

¹A priori, une 1-forme abélienne n'est plus, comme dans le cas lisse, nécessairement fermée, si la forme n'est pas de degré maximal. La condition de fermeture est nécessaire pour pouvoir définir le module des périodes.

$U_2 = \{\psi < 0\}$, dont la réunion est $Y - C - S$, où $C = \{\psi = 0\}$ est une hypersurface analytique réelle et S est le lieu singulier de Y , et dont l'adhérence de chacun rencontre toute les variétés algébriques de codimension n qui coupent Y proprement.

La démonstration est pratiquement identique à celle que nous avons donnée lorsque $\dim(Y) = 1$. La fonction ψ est la composée d'une forme l \mathbb{R} -linéaire s'annulant sur le module des périodes Λ , avec l'application locale $\phi : Y \rightarrow \mathbb{C}^\pi$ que l'on peut définir par

$$\phi(P) = \left(\int_{P_0}^P \omega_1, \dots, \int_{P_0}^P \omega_\pi \right) + \alpha$$

où $(\omega_i)_{1 \leq i \leq \pi}$ est une base de l'e.v. des différentielles abéliennes et P_0 un point arbitraire sur Y . Bien que ϕ ne soit pas globalement définie sur Y , la composée $\psi = l \circ \phi$ est bien définie. Etant la composée d'une application holomorphe et d'une fonction pluriharmonique, elle est elle-même pluriharmonique. Le théorème découle alors du fait que si une variété algébrique $Z \subset \mathbb{P}_N$ de codimension n et de degré k coupe Y transversalement, les transformations projectives Z^t de Z définissent une v.i.a. dans $Y^{(kd)}$ comme on l'a vu auparavant. De plus il existe une transformation projective singulière t qui transforme Z en une réunion de k sous-espaces linéaires de dimension $N - n$ qui coupe Y transversalement (cf. [61]). On peut donc choisir la constante α de sorte que $\phi(P_1(t)) + \dots + \phi(P_{kd}(t)) = 0$ pour tout t tel que Z^t coupe Y proprement en kd points $P_1(t), \dots, P_{kd}(t)$, d'après le théorème d'Abel. Le théorème s'en déduit. ■

Chapitre 5

Appendice.

5.1 Formes lisses, holomorphes et méromorphes sur un espace analytique réduit de dimension pure.

Soit d'abord U un ouvert de \mathbb{C}^N , de coordonnées x_1, \dots, x_N . Une q -forme différentielle de classe \mathcal{C}^∞ sur V est une expression de la forme

$$\omega = \sum_{I=(i_1, \dots, i_r), i_1 < \dots < i_r, J=(j_1, \dots, j_s), j_1 < \dots < j_s, r+s=q} r_{I,J}(x) dx^I \wedge d\bar{x}^J$$

où $dx^I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$ (resp. $d\bar{x}^J = d\bar{x}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{x}_{j_s}$) est une r -forme \mathbb{C} -linéaire (resp. s -forme \mathbb{C} -antilinéaire) de \mathbb{C}^N dans \mathbb{C} , et les $r_{I,J}$ sont des fonctions \mathcal{C}^∞ à valeurs dans \mathbb{C} . Le terme $r_{I,J}(x) dx^I \wedge d\bar{x}^J$ s'appellera forme de type (r, s) .¹ On peut décomposer toute forme de degré q de façon unique comme une somme de formes de type (r, s) , $r + s = q$. Sur V une q -forme méromorphe (resp. holomorphe) est une expression de la forme

$$\omega = \sum_{I=(i_1, \dots, i_q), i_1 < \dots < i_q}^N r_I(x) dx^I$$

où $dx^I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}$ et où les r_i sont des fonctions méromorphes (resp. holomorphe) sur V ; les pôles de ω sont les pôles des r_I . On note $\mathcal{E}_U^{r,s}$ le faisceau

¹Les formes $dx^I \wedge d\bar{x}^J$ définissent une base de l'espace des formes \mathbb{R} -linéaires de degré q sur le complexifié \mathbb{C}^{2N} de l'espace réel sous-jacent à \mathbb{C}^N .

des formes \mathcal{C}^∞ de type (r, s) , et $\mathcal{E}_U^q = \bigoplus_{r+s=q} \mathcal{E}_U^{r,s}$ le faisceau des formes lisses de degré q .

Soit maintenant X un espace analytique réduit de dimension pure n . X peut être réalisée localement comme un sous-ensemble analytique d'un ouvert U de \mathbb{C}^N ; on se place dans cette situation, car les notions à définir sont locales. Soit donc X est un sous-ensemble analytique de dimension pure n d'un ouvert U de \mathbb{C}^N . On note $Reg(X)$ la partie régulière de X , $Sing(X)$ sa partie singulière. On parlera de fonctions pour les 0-formes. On note $i : Reg(X) \rightarrow U$ l'injection canonique. Par définition, une forme lisse ϕ définie sur un ouvert $V \subset U$ sera nulle sur X si $i^*(\phi)$.

Il revient au même de dire que $\phi \wedge [X] = 0$ sur V , où $[X]$ est le courant d'intégration de Lelong sur U .

On définit ainsi le sous-faisceau $\mathcal{N}_X^{r,s} \subset \mathcal{E}_U^{r,s}$ des formes qui s'annulent sur X . Le faisceau $i^*(\mathcal{E}_U^{r,s}/\mathcal{N}_X^{r,s})$, noté $\mathcal{E}_X^{r,s}$, est le faisceau des formes différentielles lisses sur X .

Une q -forme lisse de type (r, s) sur X est donc une forme $\omega \in \mathcal{C}^\infty$ sur la partie régulière de X qui s'écrit dans un voisinage de tout $x \in X$ comme la restriction sur X d'une forme ω' lisse de type (r, s) dans un voisinage ouvert $U_x \subset U$ de x (i.e. $\omega = i^*(\omega')$ sur $Reg(x) \cap U_x$); en particulier deux formes lisses qui sont égales sur $Reg(X)$ sont égales.

On note $\mathcal{E}_X^q = \bigoplus_{r+s=q} \mathcal{E}_X^{r,s}$ le faisceau des formes lisses de degré q .

Les opérateurs $\partial, \bar{\partial}, d = \partial + \bar{\partial}$ définis sur U sont aussi définis sur X car ils commutent avec l'image réciproque i^* , où i est l'inclusion $i : Reg(X) \rightarrow U$.

De même, une q -forme *régulière* sur X est une forme régulière (i.e. holomorphe) sur $Reg(X)$ qui s'écrit au voisinage de tout $x \in X$ comme restriction sur X d'une forme régulière (i.e. holomorphe) dans un voisinage ouvert de $U_x \subset U$. En particulier, c'est une forme lisse.

On note Ω_X^q le faisceau des q -formes régulières sur X (pour $q = 0$, ce faisceau, noté aussi \mathcal{O}_X , s'appelle le faisceau structural de X). C'est un faisceau \mathcal{O}_X -cohérent.

Enfin, une forme méromorphe sur X est une forme méromorphe sur $Reg(X)$ qui s'écrit au voisinage de tout $x \in X$ comme restriction sur X d'une forme méromorphe dans un voisinage ouvert de $U_x \subset U$ (dont le pôle coupe X proprement).

On note \mathcal{M}_X^q le faisceau des q -formes méromorphes sur $Reg(X)$.

5.2 Les tissus et le théorème d'Abel.

Un tissu réel (resp. complexe) de degré d et de codimension n dans un ouvert U de \mathbb{R}^N (resp. \mathbb{C}^N) consiste en d feuilletages de U par des sous-variétés C^∞ (resp. sous-variétés analytiques) de codimension n dans U .

Un feuilletage est défini localement au voisinage de $x \in U$ par les fibres d'une application C^∞ (resp. analytique) d'un voisinage ouvert $U_x \subset U$ de x à valeurs dans \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n), $u : x \rightarrow u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$ vérifiant $du_x = du_1 \wedge \dots \wedge du_n \neq 0$, de sorte qu'on peut d'après le théorème d'inversion locale compléter u_1, \dots, u_n en un système de coordonnées locales au voisinage de x . $du_x \in \Lambda^n(T_x^*)$ est défini à un scalaire multiplicatif près; le $(n-1)$ -plan associé dans $\mathbb{P}(T_x^*)$ s'appelle la normale au feuilletage en x . On suppose $N = mn$. Supposons que notre tissu soit donné localement au voisinage de x par d feuilletages $u^1 = Cte, \dots, u^d = Cte$; une relation abélienne est une relation de la forme :

$$\sum_{i=1}^d f_i(u^i) du^i = 0$$

L'espace vectoriel des relations abélienne est de dimension finie sur \mathbb{R} (resp. sur \mathbb{C}); sa dimension s'appelle le $(n-)$ rang du tissu. Chern et Griffiths (cf. [26]) ont donné une majoration pour le rang du tissu : le rang est inférieur à $\pi(d, m, n)$. On peut en déduire grâce au théorème d'Abel que $\pi(d, m, n)$ est aussi une majoration pour la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel des formes abéliennes sur une sous-variété algébrique non-dégénérée (i.e. non contenue dans un hyperplan) de degré d et de dimension n dans \mathbb{P}_{n+m-1} . Il se trouve que cette borne est effectivement atteinte : il existe des sous-variétés irréductibles non dégénérées de dimension n et de degré d dans \mathbb{P}_{n+m-1} ayant exactement $\pi(d, m, n)$ n -formes abéliennes indépendantes : on les appelle *variétés de Castelnuovo* (cf. [29]).

5.3 Anneaux et modules gradués.

Soit Y un sous-variété algébrique de \mathbb{P}_N ; par définition, Y admet un système d'équations homogènes $f_1(x) = \dots = f_M(x) = 0$. Les polynômes homogènes qui s'annulent sur Y engendrent un idéal I_Y de $R = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]$ appelé l'*idéal de Y* ; l'anneau quotient $A_Y = R/I_Y$ est l'anneau *homogène* ou *gradué* de Y ; l'anneau gradué de \mathbb{P}_N est donc R . On note $A_Y(l)$ l'ensemble des éléments de A_Y dont un représentant est homogène de degré l dans R . Dire que l'anneau est gradué signifie que $A_Y(n).A_Y(m) \subset A_Y(n+m)$ et que $A_Y = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} A_Y(l)$.

Plus généralement, un R -module M sera dit gradué si $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ et si pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ on a $R_m.M_n \subset M_{n+m}$. Les éléments de M_n sont alors appelés homogènes de degré n . On note $M[t]$ le R -module gradué défini par $M[t]_n = M_{t+n}$. Un morphisme de R -modules gradués $f : M \rightarrow N$ est un morphisme de R -modules qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $f(M_n) \subset N_n$.

Le théorème des syzygies gradués, qui remonte à Hilbert, s'énonce alors de la manière suivante.

On note $A_n = \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ un anneau de polynômes à $n + 1$ variables sur \mathbb{C} et M un A -module gradué *de type fini*, i.e. admettant un nombre fini de générateurs. Si $m_i, n_{ij} (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i)$ sont des entiers, et si

$$0 \rightarrow N \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq m_n} A_n[-n_{nj}] \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq m_1} A_n[-n_{1j}] \rightarrow \\ \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq m_0} A_n[-n_{0j}] \rightarrow M \rightarrow 0$$

est une suite exacte à homomorphismes de degré 0, alors il existe des entiers m_{n+1} et n_{n+1j} avec $1 \leq j \leq m_{n+1}$ tels que $N \simeq \bigoplus_{1 \leq j \leq m_{n+1}} A_n[-n_{n+1j}]$.

On trouvera une démonstration de ce théorème, dans le cas d'un module sur un anneau local, par exemple dans [28], p.694. Il est facile de se ramener au cas local : il suffit de localiser par l'idéal maximal engendré par x_0, \dots, x_N .

Soit Y une sous-variété algébrique de \mathbb{P}_N d'idéal I_Y . Son anneau $A_Y = A_N/I_Y$ est muni de manière naturelle d'une structure de A_N -module. La fonction de Hilbert de Y est définie par $\phi_Y(l) = \dim_{\mathbb{C}}(A_Y(l))$. D'après le théorème des syzygies gradués, il existe un polynôme P_Y , appelé *polynôme de Hilbert* de Y , tel que $\phi_Y(l) = P_Y(l)$ pour $l \gg 0$. Le degré n de P_Y est égal à la dimension de Y . Le coefficient dominant est égal à $d(Y)/n!$, où $d(Y)$ est le degré de Y .

On a la suite exacte

$$\mathcal{I}_Y \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_N} \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

qui donne pour tout $l \geq 0$ une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{I}_Y(l)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(l)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(l)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_Y(l)) \rightarrow 0$$

car

$$H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(l)) = 0$$

Une variété algébrique est linéairement normale si la restriction

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(l)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(l))$$

est surjective; elle est projectivement normale si la restriction est surjective pour tout $l \geq 0$.

Un théorème (le théorème d'équidimensionnalité) de Macaulay nous dit que lorsque Y est une intersection complète réduite, Y est projectivement normale. Il suffit pour le voir de se placer successivement sur toutes cartes affines associées à un système de coordonnées projectives.

5.4 Fonction de Hilbert d'un groupe de points.

Si Γ est un groupe de points, la suite exacte précédente :

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{I}_\Gamma(l)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(l)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_\Gamma(l)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}_\Gamma(l)) \rightarrow 0$$

nous donne, comme $\dim_{\mathbb{C}}(H^0(\mathcal{O}_\Gamma(l)))$ est constamment égale à $\deg(\Gamma)$: $\phi_\Gamma(l) = \deg(\Gamma) - h^1(\mathcal{I}_\Gamma(l))$ avec $h^1(\mathcal{I}_\Gamma(l)) = \dim(H^1(\mathcal{I}_\Gamma(l)))$. C'est pourquoi $h^1(\mathcal{I}_\Gamma(l))$ s'appelle le nombre de conditions imposées sur les hypersurfaces de degré l . On peut montrer que si $\phi_\Gamma(l) \neq \deg(\Gamma)$ alors $\phi_\Gamma(l+1) > \phi_\Gamma(l)$; autrement dit $h^1(\mathcal{I}_\Gamma(l))$ est une fonction strictement décroissante jusqu'à ce qu'elle s'annule.

5.5 Sur la puissance symétrique $Y^{(p)}$

On peut définir une variété quotient du produit cartésien Y^p par le groupe symétrique Σ_p . D'après Serre (cf.[59]) on peut en effet former le quotient d'une variété algébrique par un groupe fini arbitraire, pourvu que l'action du groupe soit telle que l'orbite d'un point soit toujours contenue dans un ouvert affine.

On peut regarder ce quotient comme une sous-variété algébrique d'un espace projectif par la méthode suivante. Y étant une sous-variété analytique de \mathbb{P}_N , on peut considérer $Y^{(p)}$ comme une sous-variété analytique de $\mathbb{P}_N^{(p)}$, celle-ci pouvant être plongée dans un espace projectif \mathbb{P}_k de la manière suivante. On considère les polynômes homogènes de degré p . Alors aux p points de \mathbb{P}_N on peut associer un polynôme homogène de degré p qui est produit de p formes linéaires :

$$\phi(u) = (u_0x_0(P_1) + \dots + u_Nx_N(P_1)) \dots (u_0x_0(P_p) + \dots + u_Nx_N(P_p))$$

Les coordonnées des points P_i étant déterminés à un scalaire multiplicatif près, les coordonnées de ce polynôme de degré p sont déterminées à un scalaire multiplicatif près; le point de \mathbb{P}_k ($k = C_{N+p}^p - 1$) associé par projectivisation nous donne donc un morphisme $Y^p \rightarrow \mathbb{P}_k$ qui passe au quotient, et nous donne un isomorphisme entre la puissance symétrique $Y^{(p)}$ et la sous-variété de \mathbb{P}_k image associée. Ainsi, si Y est une variété projective, il en est de même de $Y^{(p)}$.

5.6 Résidus et identité de Jacobi.

5.6.1 Résidu sur une hypersurface réduite.

Soit X une variété analytique de dimension n , V une hypersurface réduite de X . Désignons par $\omega_X^n(V)$ le faisceau des n -formes méromorphes à pôle simple sur V . Les sections de $\omega_X^n(V)$ s'écrivent localement sous la forme : $\omega = g(z)dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n/f(z)$, où $f(z) = 0$ est une équation locale de V dans X et $g(z)$ une fonction méromorphe dont les pôles ne contiennent pas V . On peut définir l'opération res_V de résidu sur V sur les sections de $\omega_X^n(V)$ de la manière suivante. Dans l'écriture locale donnée précédemment, on pose : $\omega' = (-1)^i \frac{g(z)}{\partial f}{\partial z_i} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{i-1} \wedge dz_{i+1} \wedge \dots \wedge dz_n$ pour tout i tel que $\frac{\partial f}{\partial z_i} \neq 0$.

La restriction de ω' à V ne dépend pas de l'équation locale choisie, ni du choix des coordonnées locales. Le morphisme de faisceaux associée s'appelle "résidu sur V ".

Plus généralement, si la forme ω est à "pôle logarithmique" sur V , i.e. $\omega = \omega'/f$, avec $\omega'_V = 0$ et f est une équation de V génériquement réduite, on définit ainsi $res_V(\omega)$: on écrit $g\omega = \omega' \wedge df/f + \omega''$, où ω', ω'' sont régulières et (f, g) définit une suite régulière; alors $res_V(\omega) = \omega'/g_V$.

On peut définir un autre résidu, noté Res_V , de la manière suivante.

On associe à une forme méromorphe ω à pôle sur $g = 0$ le courant résiduel $Res_V(\omega)$:

$$\alpha \mapsto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \alpha \wedge \omega$$

où $\Gamma_\epsilon = \{|f| = \epsilon_1, |g| \geq \epsilon_2\}$, et où on fait tendre le couple $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ de manière adéquate (cf.[39]).

Alors, si la forme ω est à "pôle logarithmique" sur V , i.e. $\omega = \omega'/f$, avec $\omega'_V = 0$ et f est une équation de V génériquement réduite, alors le courant résiduel $Res_V(\omega)$ coïncide avec $res_V(\omega) \wedge [V]$, où $res_V(\omega)$ est la forme "résidu sur V " de ω définie précédemment.

5.6.2 Courant résiduel sur une intersection complète de codimension p .

On se place dans ce qui suit dans un ouvert U de \mathbb{C}^N . On associe des courants à des formes méromorphes de la manière suivante. On appelle les courants de cette forme des "courants résiduels". On considère une forme ω s'écrivant sous la forme : $\omega = \frac{\omega'}{f_1 \dots f_p g}$, avec (f_1, \dots, f_p, g) définissant une suite régulière, et ω' une forme holomorphe. On note Z_i défini par la fonction f_i , et $Z = Z_1 \cap \dots \cap Z_p$ une *intersection complète de codimension p* (il est à noter que

l'ordre des Z_i importe). Alors on définit :

$$Res_Z(\omega)(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0} \int_{T_\epsilon(f) \cap \{|\eta| > \delta\}} \omega \wedge \alpha$$

avec $T_\epsilon(f) = \{|f_1| = \epsilon_1, \dots, |f_p| = \epsilon_p\}$ La limite est ici prise en faisant tendre le vecteur $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p, \delta)$ vers 0 de manière adéquate (pour des précisions, cf. [39]).

On voit donc que si ω s'écrit sous la forme $\frac{\omega'}{f_1 \dots f_{k-1} f_{k+1} \dots f_p}$ où $g \cdot \omega'$ est holomorphe, $Res_Z(\omega) = 0$. On a une réciproque de ce résultat : si $Res_Z(\omega) = 0$, $g \cdot \omega$ s'écrit sous la forme $\sum_{k=1}^p \frac{\omega'_k}{f_1 \dots f_{k-1} f_{k+1} \dots f_p}$ où les ω'_k sont des formes holomorphes sur U .

Si $p = 1$, et $g = 1$, on a $Res_Z(\omega) = \bar{\partial}[\omega]$, où $[\omega]$ est le courant "valeur principale" associé à ω .

5.6.3 Résidu ponctuel

Supposons données N fonctions f_1, \dots, f_N ayant à l'origine $0 \in \mathbb{C}^N$ un zéro isolé. On considère la N -forme méromorphe $\omega = \frac{g(x)}{f_1(x) \dots f_N(x)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_N$. Soit γ le n -cycle réel défini par

$$\gamma = \{x : |f_i(x)| = \epsilon_i (1 \leq i \leq N)\}$$

et orienté par la condition :

$$d(\arg(f_1)) \wedge \dots \wedge d(\arg(f_N)) \geq 0$$

Alors par définition :

$$res_{\{0\}}(\omega) = \int_\gamma \omega$$

5.6.4 Identité de Jacobi

Citons le théorème des résidus tel qu'il est démontré dans Griffiths (cf. [28], p.656) : Soit M une variété compacte de dimension N , D_1, \dots, D_N des hypersurfaces (non nécessairement réduites) dont l'intersection est un groupe de points Γ . Soit ω une N -forme méromorphe dont le diviseur polaire est $(D_1) + \dots + (D_N)$, où (D_i) est le diviseur associé à l'hypersurface D_i . Alors $\sum_{P \in \Gamma} res_P(\omega) = 0$.

Alors l'identité de Jacobi provient du théorème global des résidus, si l'on remarque que, si l'on pose $\mu = \sum_{i=0}^N x_i \wedge_{j \neq i} dx_j$, la forme rationnelle

$$\omega = \frac{p(x)\mu}{f_1 \dots f_N}$$

dont on vérifie qu'elle passe au quotient, a pour pôle précisément la somme des diviseurs $D_i : \{f_i = 0\}$.

Identité de Jacobi

Dans \mathbb{C}^N , soit g_1, \dots, g_N N polynômes de degrés respectifs s_1, \dots, s_N s'annulant en $s = s_1 \dots s_N$ points P^ν distincts (et uniquement en ces points). Soit $K(x_1, \dots, x_N)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $s_1 + \dots + s_N - N - 1$. Alors :

$$\sum_{\nu=1}^s \frac{K}{\det\left(\frac{D(g_1, \dots, g_N)}{D(x_1, \dots, x_N)}\right)}(P^\nu) = 0$$

5.7 Théorème de Bézout

Soit Y et Y' deux variétés algébriques de \mathbb{P}_N de dimensions complémentaires. Alors, si Y et Y' se coupent en un nombre fini de points, la somme des multiplicités d'intersection de ces points est égale au produit des degrés de Y et Y' .

On pourra consulter par exemple [61]. L'idée est la suivante. On peut supposer Y' irréductible. On considère les diverses transformations projectives Y^t de Y ; on montre d'abord qu'elles se coupent génériquement en un nombre constant de points distincts, égal au produit des degrés de Y et Y' . Le cas général est alors une conséquence du principe de la conservation du nombre, suivant lequel si P est un point d'intersection isolé de Y et Y' , on peut associer à P une multiplicité d'intersection de sorte que lorsque t tend vers l'identité, on peut trouver k points dans l'intersection $Y^t \cap Y'$ qui tendent vers P .

5.8 Application d'Abel-Jacobi

Soit $Y \subset \mathbb{P}_N$ une courbe algébrique irréductible. Soit $\omega_1, \dots, \omega_\pi$ une base des 1-formes holomorphes sur Y .

On a vu qu'il est équivalent de dire que D et D' sont linéairement équivalents (i.e. qu'il existe un morphisme de Y dans \mathbb{P}_1 qui admet D et D' comme fibres particulières) et que D et D' font partie d'une même v.i.a.; cette équivalence est en fait la forme la plus proche de la version "officielle" du théorème d'Abel (cf. par exemple [56]), qui s'exprime ainsi :

Théorème d'Abel

Soit $D = P_1 + \dots + P_p$ et $D' = P'_1 + \dots + P'_p$ deux 0-cycles de même degré. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe des chemins γ_i d'origine P_i et d'extrémité P'_i , tels que

$$\sum_{1 \leq i \leq p} \int_{\gamma_i} \omega_j = 0$$

2. D et D' sont linéairement équivalents.

Etant donné un chemin γ sur Y , on définit le π -uplet

$$\left(\int_{\gamma} \omega_1, \dots, \int_{\gamma} \omega_{\pi} \right)$$

L'ensemble de ces π -uplets où γ décrit l'ensemble des chemins fermés sur Y est un \mathbb{Z} -module Λ . Λ est discret (en particulier de rang $\leq 2\pi$). Supposons en effet qu'il existe des cycles ayant pour images des vecteurs arbitrairement proches de 0. Soit $D = P_1 + \dots + P_{\pi}$ un diviseur de degré π non spécial. Alors on peut associer à un diviseur $D' = Q_1 + \dots + Q_{\pi}$, Q_i dans un voisinage de P_i le vecteur

$$\phi(D') = \sum_{i=1}^{\pi} \left(\int_{P_i}^{Q_i} \omega_1, \dots, \int_{P_i}^{Q_i} \omega_{\pi} \right)$$

Lorsque D' décrit un voisinage de D , l'image décrit un voisinage de l'origine. En particulier, il existe un cycle γ dont l'image est dans ce voisinage de l'origine. Par conséquent, D et D' sont linéairement équivalents, ce qui implique, comme D est non spécial, $D = D'$. Le \mathbb{Z} -module Λ est donc discret, de rang $\leq 2\pi$. On peut définir la variété quotient $J(Y) = \mathbb{C}^{\pi} / \Lambda$; $J(Y)$ s'appelle la jacobienne (généralisée si Y est singulière) de Y . ■

Λ est discret, donc son rang sur \mathbb{Z} est aussi le rang sur \mathbb{R} du \mathbb{R} -e.v. qu'il engendre. Soit $2\pi - \delta$ le rang de Λ , engendré par les $2\pi - \delta$ vecteurs

$$\left(\int_{\gamma_i} \omega_1, \dots, \int_{\gamma_i} \omega_{\pi} \right) (1 \leq i \leq 2\pi - \delta)$$

où δ est un entier.

Supposons que Y est lisse. Alors si pour toute forme holomorphe ω sur Y on a $\int_{\Gamma} \omega = 0$ alors γ est homologue à 0. On a donc $\delta = 0$.

Retournons au cas général.

On peut définir une application ϕ (dite d'Abel-Jacobi) de Y dans $J(Y) = \mathbb{C}^{\pi} / \Lambda$, par

$$\phi(p) = \left(\int_{p_0}^p \omega_1, \dots, \int_{p_0}^p \omega_{\pi} \right) + \alpha \text{ mod } \Lambda$$

où p_0 est un point de Y et α une constante arbitraire. On peut ensuite définir pour tout $k > 0$ une application ϕ (ou parfois ϕ_k pour préciser) de $Y^{(k)}$ dans $J(Y)$, en posant

$$\phi(p_1 + \dots + p_k) = \phi(p_1) + \dots + \phi(p_k).$$

D'après le théorème d'Abel-Rosenlicht, les fibres de l'application d'Abel-Jacobi correspondent aux séries linéaires complètes.

Bibliographie

- [1] N.H. Abel, Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes, Oeuvres Complètes, Christiania, vol.1,p.145-211, 1826
- [2] N.H. Abel, Sur la comparaison des fonctions transcendentes, Oeuvres Complètes, Christiania, vol.2
- [3] N.H. Abel, Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendentes, Oeuvres Complètes, Christiania, vol.1,p.515-517,1829
- [4] D. Barlet, Le faisceau ω_X sur un espace analytique X , Lectures Notes in Math., Springer, 670, 1978
- [5] D. Barlet, Le théorème d'intégration sur un ensemble analytique complexe de P. Lelong, Séminaire de géométrie analytique, Publication de l'Institut Henri Cartan, 5 (deuxième partie), Nancy, 1-6, 1982
- [6] B. Basili, Indice de Clifford des intersections complètes de l'espace, Bull. Soc. math. France, 124, p.61-95,1996
- [7] A. Beauville, Géométrie des tissus, Séminaire Bourbaki, exposé 531, 1979
- [8] Bézout, Théorie générale des équations algébriques, Paris, 1779
- [9] J.-E. Björk, Residue currents and \mathcal{D} -modules on complex manifolds, manuscript, Stockholm University, 1996
- [10] Blaschke et Bol, Geometrie der Gewebe, Springer Verlag,1938
- [11] Blaschke, Results and problems about n -webs of curves in a plane, Bull. Amer. Math. Soc. 38,p.828-830,1932

- [12] F.A. Bogomolov, On the diameter of plane algebraic curves, *Math. Res. Lett.*,1,p.95-98,1994
- [13] C.Ciliberto, R. Lazarsfeld, On the uniqueness of certain linear series on some classes of curves, *Complete intersections*, Acireale, Lecture Notes 1092, Springer-Verlag, p.198-213,1983
- [14] C. Ciliberto, Alcune applicazioni di un classico procedimento di Castelnuovo, *Pubbl. Ist. Mat. "R. Caccioppoli" Univ. Napoli*, 39,1983
- [15] R. F. Coleman, The cuspidal torsion packet on the Fermat curve, *J. reine angew. Math.* 496, p.73-81,1998
- [16] S. Collion, Transformation d'Abel et formes différentielles algébriques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t.323, Serie I, p.1237-1242,1996
- [17] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. I,2e éd., Chap. X, Gauthier-Villars, p.151-161,1914
- [18] P. Dingoyan, Un phénomène de Hartogs dans les variétés projectives, *Math. Z.* 232, p.217-240, 1999
- [19] A. Dickenstein, C. Sessa, Canonical representatives in moderate cohomology, *Invent. math.* 80, p. 417-434, 1985
- [20] A. Dickenstein, M. Herrera, C. Sessa, On the global lifting of meromorphic forms, *Manuscripta Math.*, vol. 47, p.31-45, 1984
- [21] B. Fabre, Sur l'intersection d'une surface de Riemann avec des hypersurfaces algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, p.371-376, 1996
- [22] M. Green, A new proof of the explicit Noether-Lefschetz theorem, *J. Differential geometry*, 27 ,p.155-159,1988
- [23] P. Griffiths, Variations on a theorem of Abel, *Inv. Math.*,35,p. 321-390,1976
- [24] P. Griffiths, On Abel's differential equations, *Johns Hopkins Centennial lectures*, Supplement to the American journal of mathematics,1976
- [25] S.S. Chern et P. Griffiths, Abel's theorem and webs, *Jber. d. Dt. Math.-Verein.* 80, p.13-110, 1978; Errata : *Jber. d. Dt. Math.-Verein.* 83, p.78-83,1981
- [26] S.S. Chern and P. Griffiths, An Inequality for the Rank of a Web and Webs of Maximum Rank, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, vil. 5, p. 539-557, 1978

- [27] P. Griffiths, Complex Analysis and Algebraic Geometry, Bulletin of the American Mathematical Society, vol.1,n.4,p. 595-625, 1979
- [28] P. Griffiths, J. Harris, Principles of algebraic geometry, John Wiley and sons, 1994
- [29] J. Harris, A bound on the geometric genus of projective varieties, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 8, p. 35-68, 1981
- [30] R. Harvey, Holomorphic chains and their boundaries, Proc. Symp. Pure Math.,30, p.309-382,1977
- [31] A. Hénaut, Sur la géométrie des tissus, preprint de l'université de Bordeaux, 1998
- [32] G. Henkin et M. Passare, Holomorphic forms on singular varieties and variations on Lie-Griffiths theorem, Inv. Math. 135,p.297-328, 1999
- [33] G. Henkin, La transformation de Radon pour la cohomologie de Dolbeault et un théorème d'Abel inverse, C.R. Acad. Sci. Paris, 315,p.973-978,1992
- [34] G.M. Henkin et P.L. Polyakov, Residue integral formulas and the Radon transform for differential forms on q -linearly concave domains, Math. Ann. 286, p. 225-254, 1990
- [35] S.G. Gindikin and G.M. Khenkin, Integral geometry for $\bar{\partial}$ -cohomology in q -linear concave domains in CP^n , Functional Analysis and its Applications, vol. 12, p. 247-261, 1978
- [36] P. Dolbeault et G. Henkin, Chaines holomorphes de bord donné dans CP^n , Bull. Soc. math. France, 125, p.383-445,1997
- [37] G. Henkin, The Abel-Radon transform and several complex variables, Proceedings of the conference in honour of Gunning and Kohn, Princeton, 1992, Ann. of Math. Stud., vol. 137, p.223-275,1995
- [38] M.E. Herrera et D.I. Lieberman, Residues and principal values on complex spaces, Math. Ann. 194, p.259-294, 1971
- [39] M.E. Herrera et N.R. Coleff, Les courants résiduels associés à une forme méromorphe, Lecture Notes 633, Springer Verlag,1978
- [40] E. Hirai, Domaine d'holomorphic sur un espace projectif complexe, J. Math. Kyoto Univ., 10-1, p.83-102,1970

- [41] A. Hirschowitz, Entre les hypersurfaces et les ensembles pseudoconcaves, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (4),27,p. 873-887, 1973
- [42] K. Jacobi, Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum inter duas variables prepositorum, J. Reine Andew. Math. 14, p.281-288, 1835
- [43] J. King, The currents defined by analytic varieties, Acta mathematica, 127, p. 185-220, 1971
- [44] A.F. Lopez, Noether-lefschetz theory and Picard group of projective surfaces, Memoirs of the AMS, 438, 1991
- [45] S. Lie, Ges.Abhandlungen, Zweiter Band, zweiter Teil, Teubner, Leipzig
- [46] N. Tschebotarow, Über Flächen, welche Imprimitivitätssysteme in Bezug auf eine gegebene kontinuierliche Transformationsgruppe enthalten, Sbornik 34, 1927.
- [47] J. Little, translation Manifolds and the Schottky Problem, Proc. of Symposia in pure Mathematics, 49, 1989.
- [48] S. Nemirovski, Stein domains on algebraic varieties, Math. Notes 60, p.218-221, 1996.
- [49] M. Noether, Über die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curven mit nichtadjungierten Curven, Math. Ann. vol. 15, 1879.
- [50] M. Passare, Residues, currents, and their relation to ideals of holomorphic functions, Math. Scand. 62, p. 75-152, 1988.
- [51] L.Gruson et C. Peskine, Genre des courbes de l'espace projectif, Lectures Notes 687, Springer Verlag, p. 31-59, 1977.
- [52] Gruson, Lazarsfeld, Peskine, On a theorem of Castelnuovo and the equations defining space curves, Invent. Math. 72, p.491-506, 1983.
- [53] H. Poincaré, Oeuvres, vol. IV, Remarques diverses sur les fonctions abéliennes, p.384-468 (p.430),1895.
- [54] H. Poincaré, Oeuvres, vol. VI, Sur les surfaces de translations, p.13-37, 1901.
- [55] M. Raynaud, Courbes sur une variété abélienne et points de torsion, Invent. Math. 71, p.203-233, 1983.

- [56] M. Rosenlicht, Generalized Jacobian Varieties, *Ann. of Math.*, 59,1954.
- [57] W. Rothstein, Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Funktionen, *Math. Z.* 53, p.84-95, 1950.
- [58] B. Saint-Donat, Variétés de translation et théorème de Torelli, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 280, série A, p.1611-1612,1975.
- [59] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, 1975.
- [60] Y. T. Siu, Every Stein subvariety admits a Stein neighborhood, *Invent. Math.*, p. 89-100, 38, 1976.
- [61] B.L. van der Waerden, *Zur algebraische Geometrie*, XIV, 1937, in *Zur algebraische Geometrie*, selected papers, Springer Verlag 1983.
- [62] W. Wirtinger, Lie's translationmannigfaltigkeiten und das Abel's Integral, *Monatsh. Math.* 46, p. 384-431, 1938.