



Méthode des lignes de courant appliquée à la modélisation des bassins

Bilal Atfeh

► To cite this version:

Bilal Atfeh. Méthode des lignes de courant appliquée à la modélisation des bassins. Modélisation et simulation. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2003. Français. NNT : . tel-00008599

HAL Id: tel-00008599

<https://theses.hal.science/tel-00008599>

Submitted on 19 Jul 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE, AIX-MARSEILLE I

THÈSE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Présentée par

Bilal ATFEH

Méthode des lignes de courant appliquée à la modélisation des bassins

Directeur de thèse **Thierry GALLOUËT**
Co-Directeur de thèse **Johannes WENDEBOURGE**

Rapporteurs

M. Fayssal BENKHALDOUN Professeur à l'université Paris 13
M. Martin BLUNT Professeur à l'université de

JURY

M. Fayssal BENKHALDOUN	Professeur à l'université Paris 13
M. Pierre FABRIE	Professeur à l'université de Bordeaux 1
M. Thierry GALLOUËT	Professeur à l'université de Provence
M. Dominique GUÉRILLOT	Ingénieur de recherche à l'IFP
M. Benoit NOETINGER	Ingénieur de recherche à l'IFP
M. Johannes WENDEBOURGE	Ingénieur recherche à SHELL

Remerciement..

Tout d'abord je tiens à remercier Johannes Wendebourg, pour sa contribution à ce travail, pour ses conseils et son aide précieuse, sa disponibilité. Je tiens à exprimer mon admiration devant sa passion pour la géologie et la patience avec laquelle il m'a initié à ce domaine, sans oublier la simplicité de ses explications. Je le remercie enfin pour son soutien moral et sa gentillesse.

Je remercie Sylvie Wolf et Isabelle Faille pour leur encouragement, conseils, leur écoute, la patience avec laquelle elles ont répondu à mes nombreuses questions. Tout simplement merci pour tout ce que vous avez fait pour moi.

Merci également à Thierry Gallouet d'avoir accepté de diriger ce travail, et de m'avoir facilité le contact avec l'IFP, l'accès aux outils informatiques, et ses conseils précieux.

Je tiens à remercier Françoise Willien et Stéphane Requant pour l'aide qu'ils m'ont apportée pour l'utilisation du code Visco3D.

Je tiens à remercier Gérard Henry pour l'aide qu'il m'a apporté pour l'informatique, pour le mal qu'il s'est donné à résoudre mes innombrables problèmes informatiques, et surtout l'augmentation régulière et gratuite de mon quota.....

Merci aussi à Philippe Blanc pour son aide informatique.

Il m'est impossible de citer tous ceux qui m'ont aidé aussi bien à l'IFP qu'au CMI, je tiens à exprimer ma gratitude aux personnes qui de près ou de loin ont contribué à ce travail.

En dehors du cadre universitaire, je tiens à remercier mon ami Lorenzo de m'avoir accueilli souvent chez lui à Paris et aussi pour ses authentiques recettes de pâtes à l'italiennnnnne !!!!

Enfin, arrivé au bout de mon chemin scolaire, je ne peux pas oublier mes enseignant(e)s (y compris mon père) dans mon village Kadmous à l'école primaire et au collège, mes pensées vont pour eux, et en particulier ma prof de maths au collège Mme. Hana Youssef

Table des Matières

1	Introduction	7
1.1	Introduction	7
1.1.1	Formation et évolution géométrique du bassin	7
1.1.2	Evolution thermique de bassin	8
1.1.3	Formation et migration des hydrocarbures	8
1.2	Modélisation des bassins sédimentaires	9
1.3	Objectif de la thèse	10
1.3.1	Application de la méthode des lignes de courant au cas bassin	10
1.3.2	Etude théorique de la méthode des lignes de courant:	11
1.4	Plan du mémoire	12
2	Méthode des lignes de courant. Application à un problème de conservation	13
2.1	Introduction	14
2.1.1	Définitions :	14
2.1.2	Quelques résultats	15
2.2	La méthode des lignes de courant appliquée à une équation de conservation	16
2.2.1	Présentation du problème	16
2.2.2	Résultats théoriques	16
2.2.3	Le problème 1-D vérifié sur une ligne de courant	17
2.3	Problème discret	17
2.3.1	Notation du maillage de Ω	17
2.3.2	Maillage sur les lignes de courant	18
2.3.3	Discretisation en temps, double maillage en temps	19
2.4	Passage entre les lignes de courant et les mailles	20
2.4.1	Définitions des espaces $\mathcal{E}_I$, $\mathcal{E}_L$ et $\mathcal{E}_M$	20
2.4.2	Définitions des applications de passage entre $\mathcal{E}_M$ et $\mathcal{E}_L$	21
2.4.3	Projection de $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{E}_M$ et $\mathcal{E}_L$	23
2.5	Algorithme pour la méthode des lignes de courant	24
2.5.1	Solution approchée du problème $(\mathcal{P})$ sur une ligne de courant	24
2.5.2	L'algorithme:	26
2.6	Stabilité L^∞ et résultat de convergence	26
2.6.1	Stabilité L^∞	27
2.6.2	Résultat de convergence	27
2.7	Vitesse non stationnaire	30
2.7.1	Le problème modifié	30
2.7.2	L'algorithme:	31
2.7.3	Estimation de l'erreur	31
2.8	La méthode volume fini	33
2.8.1	Le schéma numérique volume fini	33
2.9	Tests numériques	35
2.9.1	Vitesse stationnaire	35
2.9.2	Vitesse non stationnaire.. . . .	43

2.10	Vitesse avec divergence non nulle	50
2.10.1	Test numérique, Test 6	51
2.11	Remarques générales	54
2.11.1	Le cas où u est BV	54
2.11.2	Schéma non conservatif	54
3	Vers la modélisation des bassins	55
3.1	Introduction	56
3.1.1	Notations	56
3.1.2	Modèle mathématique	57
3.1.3	Vitesse totale	58
3.1.4	Conditions initiales et conditions aux limites	59
3.1.5	Résultats théoriques:	59
3.2	Méthodes numériques	60
3.2.1	Résolution de l'équation de la pression. Schéma à 9 points	60
3.2.2	Résolution numérique-Méthode IMPES	64
3.2.3	Résolution numérique-Méthode des lignes de courants:	66
3.3	Résumé et quelques remarques	69
3.3.1	Le test du pas du temps:	69
3.3.2	Raffinement du maillage sur les lignes de courants	69
3.3.3	Algorithme	71
3.4	Tests numériques	73
3.4.1	Données communes entre les tests	73
3.4.2	Milieu homogène	74
3.4.3	Milieu non homogène	75
3.4.4	Test avec terme source	77
3.5	Remarques sur les tests numériques	89
4	Application de la méthode des lignes de courant à un cas plus complet	91
4.1	Introduction	92
4.2	Les équations mathématiques du modèle	93
4.2.1	Lois de conservation dans le bassin	93
4.2.2	Loi de Darcy	93
4.2.3	Transferts thermiques	94
4.2.4	Perméabilités intrinsèques	94
4.2.5	Perméabilités relatives	95
4.2.6	Pression capillaire	96
4.2.7	Viscosités	98
4.2.8	Compaction	98
4.2.9	Génération des hydrocarbures	99
4.2.10	Conditions aux limites	100
4.2.11	Conditions initiales	101
4.3	Discretisation des équations	102
4.3.1	Notions du maillage	102
4.3.2	Discretisation de l'équation de conservation de la phase α	102
4.3.3	Equation de l'équilibre mécanique	104
4.3.4	Compaction	104
4.4	Calcul des saturations, schéma IMPES	105
4.4.1	Equation de la pression,	105
4.4.2	Calcul des saturations	105
4.4.3	Gestion du pas de temps	105
4.5	Méthode des lignes de courants	106
4.5.1	Résolution numérique de l'équation de la saturation	107
4.5.2	Equation sur une ligne de courant:	107

4.5.3	Résolution numérique de l'équation (4.31)	109
4.6	Conservation des bilans des fluides	111
4.7	Test numérique	112
4.7.1	Données du test	112
4.7.2	Nombre de résolutions de l'équation de pression	112
4.7.3	Bilan	113
4.7.4	Les figures	114
4.7.5	Principe retenu pour tracer les lignes de courants:	114
Conclusions		119
5	Conclusions	121
Annexes		123
A	Méthodes numériques pour les tracés des lignes de courants	125
A.1	Introduction	126
A.2	Maillages Cartésiens	126
A.3	Maillage triangulaire	128
A.4	Cas D'un Trapèze	130
A.4.1	Première méthode	130
A.4.2	Seconde méthode	132
A.5	Tests numériques	134
A.6	Trajectoires particulières	140
B	Démonstration du lemme (2.5.3)	143
C	Unités physiques	149
Bibliographie		153

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

La modélisation de bassin est utilisée en exploration pétrolière afin de mieux comprendre le système pétrolier d'un bassin sédimentaire et mieux estimer la probabilité de la présence et les incertitudes sur les volumes d'hydrocarbures en place.

Cette modélisation est une modélisation numérique des phénomènes physiques et chimiques qui déterminent la présence et la quantité des fluides pétroliers dans les gisements.

Dans l'étude d'un bassin sédimentaire, on peut distinguer trois types de phénomènes physiques:

- Formation et évolution géométrique du bassin.
- Evolution thermique de bassin.
- Formation et migration des hydrocarbures.

1.1.1 Formation et évolution géométrique du bassin

Un bassin sédimentaire est un milieu poreux de grandes dimensions, dont la durée de formation peut s'étaler sur une période allant d'une dizaine de millions d'années à quelques centaines de millions d'années.

Les facteurs les plus importants qui sont à l'origine de sa formation sont:

1. Dépôt de sédiments

Les sédiments sont transportés par l'eau et déposés en milieu marin et fluvial. Ils consistent en grès, argile ou en carbonates biogéniques avec une porosité initiale au moment du dépôt qui varie entre 50 et 80 %. Les sédiments sont déposés à la surface de la terre dans les formations géologiques dont l'âge devient successivement plus jeune jusqu'à la topographie actuelle. Ainsi une surface géologique a à la fois une profondeur et un âge associé. Le taux de sédimentation est donné par son épaisseur et l'âge du toit et de la base d'une couche sédimentaire. Il peut être très variable, entre zéro et plus d'un kilomètre par million d'années.

2. Compaction

Les sédiments sont ensuite compactés sous le poids de la colonne sédimentaire au dessus. Pendant la compaction, la porosité diminue et l'eau qui se trouve dans les pores est expulsée. Plusieurs phénomènes physiques se superposent pendant la compaction. Avec la porosité l'épaisseur d'une couche sédimentaire diminue également. Si la perméabilité ne permet pas une expulsion de l'eau, une partie du poids de la colonne sédimentaire est supportée par l'eau et sa pression augmente ce qui introduit une sous- compaction avec des porosités anormalement élevées. Si par contre l'eau peut être évacuée normalement, la porosité suit une courbe caractéristique. Cette courbe dépend principalement de la composition minérale du sédiment et de sa distribution de taille de grains

3. Subsidence-érosion

Au fur et à mesure que les sédiments sont apportés au bassin et qu'ils se compactent sous le poids des

sédiments sus-jacents, ils sont enfouis et subissent une subsidence qui est accompagnée par une augmentation de la pression et de la température. Le niveau de la mer n'est pas constant pendant le temps géologique, ce qui crée ou détruit l'espace disponible pour la sédimentation. Des phénomènes tectoniques, qui ont une origine dans la croûte terrestre, peuvent accélérer ou ralentir la subsidence de la base du bassin, voire inverser la subsidence ce qui mène à un soulèvement du bassin et une érosion au sommet. Subsidence et érosion mènent à une déformation, à grand échelle par des failles qui découpent les bassins en plusieurs compartiments, et à petite échelle par des fractures qui vont influencer l'écoulement des fluides.

1.1.2 Evolution thermique de bassin

Chaque roche sédimentaire a une histoire d'enfouissement, c.-à-d., au cours de la formation du bassin, une roche sédimentaire après son dépôt peut être enfouie (subsidence), ou remontée vers la surface du bassin.

Ce phénomène est accompagné par un changement de température, une augmentation pour un enfouissement, et une diminution pour une remontée. Ceci est dû à la variation de la température en fonction de la profondeur.

Une roche sédimentaire a donc une histoire thermique, et cette histoire joue un rôle très important pour la formation des hydrocarbures.

1.1.3 Formation et migration des hydrocarbures

Le phénomène physico-chimique qui intéresse le plus le pétrolier dans les bassins sédimentaires est le sort des hydrocarbures. Parfois, les formations géologiques contiennent une quantité considérable de matière organique (les roches mères) qui a été déposée dans des conditions spéciales favorisant la préservation de la matière organique pendant l'enfouissement.

Avec l'augmentation de la température, cette matière (le kérogène) devient instable thermiquement et craque en hydrocarbures avec une cinétique qui peut être quantifiée expérimentalement. Si suffisamment d'hydrocarbures ont été générés, ceux-ci coalescent en donnant une phase de fluide hydrocarbures continue qui est différente de l'eau et commence à bouger sous l'effet de la gravité, sa densité étant inférieure à celle de l'eau (entre 700 et 900 Kg/m³, la densité de l'eau étant 1000Kg/m³). Si le craquage thermique est plus avancé, les hydrocarbures générés sont plus légers, avec une densité encore plus faible (100-200 Kg/m³). Les gisements des fluides pétroliers (huile ou gaz) se trouvent principalement dans des formations géologiques à forte porosité et perméabilité, qui sont différentes des roches mères.

Parfois la distance entre les deux est très élevée (des dizaines à centaines de kilomètres) ce qui montre l'efficacité de la migration des hydrocarbures dans les bassins sédimentaires. Les chemins de migration empruntés par les hydrocarbures et la vitesse avec laquelle ils se déplacent au cours du temps géologique dépendent de la géométrie des couches sédimentaires et des propriétés pétrophysiques des sédiments (porosité, perméabilité, capillarité) et des fluides hydrocarbures (densité, viscosité).

C'est l'interaction très complexe au cours du temps géologique entre l'évolution géométrique du bassin sédimentaire (le conteneur), les phénomènes de la génération des hydrocarbures dans les roches mères (les termes source) et les propriétés d'écoulement des phases fluides (les contenus) qui détermine la localisation et la quantité des hydrocarbures dans les gisements.

Pour résumer, la formation des hydrocarbures et leur migration sont dues à l'enchaînement de plusieurs causes, dont les principales sont:

- La présence de roches riches en matière organique (kérogène) dans le bassin.
 - Une histoire thermique permettant la « cuisson » du kérogène dans les sédiments riches en kérogène. Une roche sédimentaire riche en kérogène et qui a atteint un stade mature, c.-à-d les bonnes conditions de température et de temps nécessaires à la formation d'huile et de gaz, est appelée une **roche-mère**.
 - Des pressions, surtout provoquées par la compaction, et une quantité d'huile dans les pores de la roche suffisantes pour permettre l'expulsion de l'huile en dehors de la roche-mère. Cette étape est appelée **migration primaire**.
 - L'existence près de la roche-mère des couches perméables (drains) dans lesquelles l'huile et le gaz expulsés peuvent se déplacer. Cette étape est appelée **migration secondaire**.
-

- Enfin, la présence dans le bassin de pièges, permettant l'accumulation des hydrocarbures.

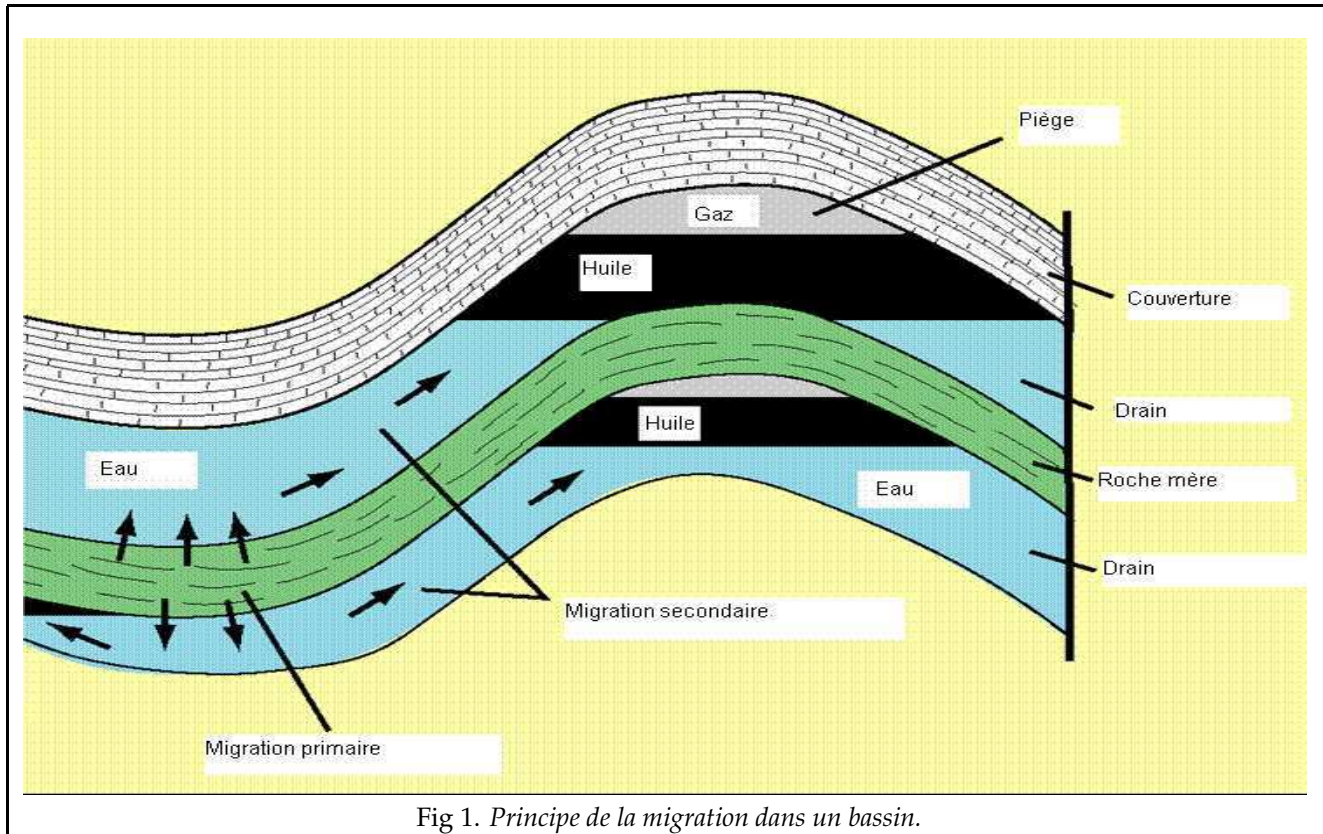


Fig 1. Principe de la migration dans un bassin.

1.2 Modélisation des bassins sédimentaires

La modélisation des bassins formalise les phénomènes physiques et chimiques énumérés ci-dessus dans des équations mathématiques et les résolvent conjointement de manière numériques. C'est la seule méthode pour quantifier les phénomènes à l'échelle géologique de temps et d'espace car une expérimentation est totalement exclue étant donné les durées et les dimensions. Cependant, en vue de la complexité du problème et de la multitude des paramètres, les incertitudes sont considérables quant à la compréhension et à la formalisation des phénomènes étudiés.

La modélisation est alors principalement utilisée pour tester l'effet d'un certain nombre de phénomènes et de paramètres soupçonnés d'être influents.

Les équations ¹ dans les modèles de bassins sont les suivantes:

1. L'équation de l'évolution de la géométrie du bassin dans le temps
2. L'équation du comportement de la matrice minérale (La compaction)
3. L'équation de la chaleur (Température)
4. L'équation du craquage du kérogène en hydrocarbures
5. L'équation de l'écoulement polyphasique dans un milieu poreux

Ces équations sont fortement non linéaires et le système final obtenu est très complexe, cette complexité rend très difficile une étude mathématique sur les inconnues et leur comportement, et aussi sur l'existence de solutions pour ces équations.

¹Les équations mathématiques seront données dans les chapitres 3 et 4 de ce mémoire.

1.3 Objectif de la thèse

La modélisation de bassins représente un système naturel très complexe, non linéaire et fortement interdépendant ce qui donne des modèles très élaborés et coûteux en temps de calcul.

Etant donné l'incertitude sur les objets géologiques et physiques qui entrent dans ces modèles, il est nécessaire de ne pas seulement quantifier la réponse la plus probable calée aux observations physiques mais aussi son incertitude, ce qui demande un grand nombre de simulations répétitives. Il est alors indispensable d'optimiser le temps de calcul par des méthodes numériques efficaces qui donnent un compromis acceptable entre rapidité et précision de la solution.

Cette thèse a comme but principal de développer la méthode des lignes de courant appliquée aux problèmes de la modélisation des bassins qui est supposée accélérer le calcul par rapport aux méthodes classiques (D'après les résultats obtenus dans le cas réservoir). Cette méthode pourra ensuite être appliquée d'une façon répétitive afin de calculer les incertitudes sur les résultats, soit avec des méthodes d'échantillonnage aléatoire (méthodes Monte Carlo), soit avec des méthodes d'échantillonnage sélectif (plans d'expériences). Cette application aux incertitudes ne fait pas partie de cette thèse parce qu'elle a déjà été montrée ailleurs ([40]).

Il sera aussi question dans cette thèse de faire une étude théorique de cette méthode dans un cadre plus simple, afin de montrer quelques résultats sur cette méthode (stabilité, convergence,...).

1.3.1 Application de la méthode des lignes de courant au cas bassin

De nombreux travaux sur la méthode des lignes de courant appliquée à des problèmes issus de la physique, en particulier dans la simulation des réservoirs, ont montré son efficacité.

Rappelons brièvement ce qu'est la simulation des réservoirs : Il s'agit de traiter le même phénomène physique que dans le cas des bassins, i.e. l'écoulement en milieu poreux. On retrouve des lois physiques en commun avec le bassin (conservation de la masse, loi de Darcy, ...).

Mais on peut aussi constater des différences entre ces deux modèles, signalons ici les plus importantes d'entre elles:

1. Echelle de temps:

L'échelle du temps en réservoir est une échelle humaine, i.e. la durée de simulation est de l'ordre de la dizaine d'années, tandis que l'échelle du temps dans le modèle du bassin est géologique, la durée de modélisation est de l'ordre du million d'années.

2. Echelle de l'espace:

Les dimensions de l'espace en réservoir sont de l'ordre de la dizaine de kilomètres, tandis qu'elles sont de l'ordre de centaines de kilomètres en bassin.

3. Terme source:

Dans le modèle du réservoir on n'a plus de génération d'huile mais uniquement une accumulation d'huile qu'on cherche à extraire. Les termes sources sont ici les puits d'injection et de production, ces puits sont bien localisés, et engendrent un flux important qui constitue le facteur essentiel dans le mouvement de l'huile vers les puits. Tandis que dans le modèle du bassin on a une génération d'huile moins localisée et plus lente ce qui donnera un flux moins important.

4. Gravité et pression capillaire:

Souvent, la pression capillaire, et parfois même la gravité, sont négligées dans les modèles de réservoirs, car en générale la migration de l'huile se fait essentiellement grâce au flux engendré entre les puits d'injection et de production, tandis qu'en bassin ces deux forces sont des facteurs très importants dans la migration de l'huile, surtout pour la migration secondaire.

5. Compaction:

Compte tenu de l'échelle de temps en réservoir, on considère que la porosité ne dépend pas du temps et on ne tient pas compte de la compaction, et donc le domaine reste fixé au cours du temps. En revanche, dans le cas du bassin, comme on l'a signalé, au cours de sa formation les sédiments se déposent au fur à mesure du temps ensuite ils se compactent. Ce phénomène se traduit aussi par une variation au cours du temps de la porosité, et cette variation est un facteur important dans le modèle de bassin.

En plus, avec la compaction la géométrie est variable dans le temps dans le cas des bassins.

Ces différences jouent un rôle important dans l'étude mathématique (et numérique), en fait, le système d'équations mathématiques obtenu dans le cas réservoir représente plusieurs simplifications par rapport au cas bassin ([22]). On trouve dans la littérature plus de résultats mathématiques sur ce système, on peut citer par exemple ([1],[18]), mais aussi le travail de A.Monier dans sa thèse ([27]) et A.Michel dans sa thèse ([26]). Plusieurs méthodes numériques sont déjà utilisées pour la simulation des réservoirs par exemple des méthodes des différences finies ([7]) ou éléments finis ([18]), ou encore la méthode des volumes finis ([20],[26],[22]). On peut aussi trouver d'autres méthodes 'moins classiques', par exemple la méthode des tubes de courant qui donne des bons résultats surtout en 2d ([33],[34],[30]), et aussi la méthode de double maillage ([37],[35]). La méthode des lignes de courant est utilisée avec succès dans la simulation des réservoirs. Cette méthode permet d'avoir un gain du temps de calcul significatif par rapport aux méthodes classiques, mais aussi elle donne la possibilité de traiter des maillages beaucoup plus gros que les simulateurs conventionnels ([10],[12],[13]). Le gain de temps de calcul obtenu par cette méthode est dû au fait que l'équation 3d de la saturation de l'huile (quantité de l'huile présente dans le domaine) est transformée en une série d'équations 1d le long des courbes tracées dans le réservoir, qui sont les lignes de courant par rapport à la vitesse totale. Ceci permet d'avoir plus de précision mais aussi des pas du temps plus grands entre deux mises à jours de la pression ([10], voir aussi chapitres 3 et 4 de ce mémoire).

Vu les points communs entre ces deux systèmes bassin et réservoir, il est naturel de poser la question:

Peut-on appliquer cette méthode dans le cas d'un bassin?

En fait, les points de différences entre les deux modèles et en particuliers les trois derniers sont des points très sensibles pour cette méthode, et ils génèrent plusieurs obstacles, on reviendra sur ces difficultés en détail dans les parties (3 et 4), mais nous allons parler de deux points d'entre eux: les difficultés liées à la compaction et celles liées à l'absence de terme source.

Les difficultés qu'on peut avoir dans le cas bassin:

- **Compaction:**
 1. Comme on l'a signalé, le gain de temps de calcul dans la méthode des lignes de courant est dû en grande partie au fait de passer d'une équation 3d à une équation 1d. Ce passage est justifié par le fait que le champ de vitesse totale est à divergence nulle, or avec la compaction cette relation n'est plus vérifiée. Donc les questions qu'on se pose:
 - Peut-on encore passer d'une équation 3d à 1d?
 - Si oui quel schéma numérique prendre pour l'équation 1d?
 2. La deuxième difficulté liée à la compaction, c'est une géométrie variable au cours du temps, ce qui imposera plus de mises à jour du champ de vitesse totale. Donc la question est:
 - Peut-on arriver à trouver un compromis entre la variation de la géométrie et prendre un grand pas de temps entre deux mises à jour de la vitesse ?
 De plus, avec la compaction on peut avoir des maillages très déformés, ce qui posera des difficultés pour tracer correctement les lignes de courant.
- **Terme source:**

Dans la simulation des réservoirs, le fait d'avoir des puits d'injection donne des informations sur le nombre de lignes de courant à tracer et l'endroit où on doit les tracer (points d'origines) mais aussi une définition précise de la condition à limite pour chaque équation 1d le long de la ligne de courant. Dans le cas de bassin, on n'a pas ce type d'informations. Alors les questions seront:

 - Comment trouver des critères pour tracer les lignes de courant (le nombre à tracer et l'endroit pour les tracer)?
 - Quelle condition à la limite doit-on prendre pour l'équation 1d?

1.3.2 Etude théorique de la méthode des lignes de courant:

Cette question dans ce travail a été motivée par les premiers résultats que j' ai obtenus sur cette méthode appliquée à des cas simples de problèmes de conservation. Car sur plusieurs tests numériques j'ai eu des bons résultats avec cette

méthode à la fois au niveau précision mais aussi sur l'ordre de convergence par rapport à la taille du maillage. Au niveau théorique, il n'y a pas de résultats sur cette méthode (convergence vers la solution du problème, estimation de l'erreur...).

Donc on s'est intéressé à cette question. Plus précisément le problème qu'on traitera est:

$$\partial_t u + \operatorname{div}(f(u)\vec{V}(x, t)) = 0, \quad x \in \Omega, t \in [0, T[.$$

avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et $T > 0$. Cette équation est complétée de la condition initiale $u(., 0) = u_0(.)$ et aussi des conditions aux limites imposées sur le bord de Ω .

On sait que ce problème admet une solution entropique unique ([9]), mais aussi que des schéma numériques convergent vers cette solution, par exemple le schéma volume fini ([39]).

Pour répondre à cette question on a commencé à traiter le cas où $\vec{V}$ ne dépend pas du temps, dans ce cas on a eu un résultats de convergence mais avec des hypothèses très fortes sur la solution du problème (il faut que u soit de classe C^2).

Dans le cadre de cette thèse on se limite avec ce résultat obtenu (cf. chapitre 2).

1.4 Plan du mémoire

Ce mémoire comporte trois parties,

- **Partie 1**
Dans la première partie, on donnera les principes de la méthode des lignes de courant appliquée à un problème de conservation avec une vitesse stationnaire et un résultat théorique dans ce cas, ensuite on présentera l'extension de cette méthode dans le cas où la vitesse dépend du temps, et aussi le schéma numérique dans le cas où la divergence n'est pas nulle. Cela sera suivi par des séries de tests numériques pour valider cette méthode.
- **Partie 2**
Dans cette partie, on appliquera la méthode des lignes de courant sur des cas simplifiés du modèle bassin. En particulier on traitera la présence de la pression capillaire ainsi que la question sur les données aux limites pour les problèmes 1d à résoudre sur les lignes de courant, mais sans tenir compte de la compaction. Ensuite nous donnerons les résultats de simulations numériques obtenus, pour valider nos choix de schémas numériques
- **Partie 3**
Dans cette partie on appliquera la méthode des lignes de courant à un modèle plus réaliste et complet de modélisation de bassin, en particulier on ajoutera la compaction. Cette méthode sera implantée dans un code de modélisation de bassin développé à l'IFP (Visco3D) et on fera quelques tests de simulation avec ce code.

Chapitre 2

Méthode des lignes de courant. Application à un problème de conservation

2.1 Introduction

2.1.1 Définitions :

Soit Ω un ouvert régulier borné de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$), et $\vec{V} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$, on suppose que $\vec{V}$ vérifie:

$$\operatorname{div}(\vec{V}(x)) = 0, \forall x \in \Omega.$$

Définition 2.1.1 Les lignes de courant (courbes intégrales) sont les lignes de champ de vecteurs $\vec{V}$, elles sont définies comme étant tangentes en chaque point p de la ligne au vecteur $\vec{V}(p)$.

Ainsi, une ligne de courant peut être vue comme la trajectoire d'une particule qui se déplace dans $\overline{\Omega}$ à une vitesse égale en chaque point p de la ligne à $\vec{V}(p)$.

Définition 2.1.2 Temps de vol

Soit C une ligne de courant par rapport à $\vec{V}$. On fixe $p_0 \in C$ avec $\vec{V}(p_0) \neq \vec{0}$, pour tout point $p \in C$, on définit le temps de vol entre p_0 et p (noté $\tau(p_0, p) \in \mathbb{R}$), par le temps nécessaire pour qu'une particule (qui se déplace sur C à une vitesse égale à $\vec{V}$) en partant de p_0 arrive à p . De plus $\tau(p_0, p)$ est unique.

Grâce à cette définition, on peut définir un paramétrage q de C (qui dépend de $\vec{V}$ et p_0) de la façon suivante:

$$\begin{cases} q : I_C \subset \mathbb{R} \rightarrow \overline{\Omega} \\ \tau \rightarrow p = q(\tau), \quad \text{tel que: } \tau(p_0, p) = \tau. \end{cases} \quad (2.1)$$

En fait, q est la solution du problème de Cauchy suivant: Trouver $(I_C \subset \mathbb{R}, q : I_C \rightarrow \overline{\Omega})$, solution maximale de:

$$\begin{cases} \frac{dq}{d\tau}(\tau) = \vec{V}(q(\tau)), \\ q(0) = p_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Comme $\vec{V}$ est de classe C^1 sur Ω , alors ce problème admet une solution maximale unique, de plus $q \in C^2(I_C, \Omega)$. Dans la suite on appelle p_0 le **point d'origine** de C , et I_C l'**intervalle de définition** de C .

Remarque 2.1.1 Dans la définition, on a supposé que $\vec{V}(p_0) \neq \vec{0}$, plus généralement si C n'est pas réduit à un point, alors: pour tout point $p \in C$, on a $\vec{V}(p) \neq \vec{0}$.

Proposition 2.1.1 ([41]) Soit C une ligne de courant tracée dans $\overline{\Omega}$, telle que son intervalle de définition soit de mesure finie dans $\mathbb{R}$. Alors, quitte à changer le point d'origine de C , on peut supposer que $I_C = [0, \tau_{\max}]$ avec $\tau_{\max} \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans les tests numériques, on aura toujours des lignes de courant dont les intervalles de définition sont de mesure finie dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1.2 Dans certains cas on arrête le tracé de la ligne pour éviter que son intervalle de définition soit de mesure non finie dans $\mathbb{R}$ (voir partie "tracé des lignes de courant" annexe-A).

Dans la suite chaque ligne de courant sera caractérisée par son point d'origine, son intervalle de définition et q .

Définition 2.1.3 Longueur sur une ligne de courant

Soit C une ligne de courant tracée dans Ω par rapport à $\vec{V}$. Soient $p_1 = q(\tau_1)$, $p_2 = q(\tau_2)$, deux points sur C , on définit la distance $l(p_1, p_2)$ entre p_1 et p_2 par rapport à C , par:

$$l(p_1, p_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\vec{V}(q(\tau))| d\tau.$$

Comme $\vec{V} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, alors il existe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, tel qu'on a: $|\vec{V}(x)| \leq \beta, \forall x \in \overline{\Omega}$, en fait, on peut prendre $\beta = \|\vec{V}\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}$.

Lemme 2.1.2 Soient p_1, p_2 deux points de C , comme ci-dessus. Alors:

$$|l(p_1, p_2)| \leq \beta |\tau_2 - \tau_1|.$$

2.1.2 Quelques résultats

Soient l_1, l_2 deux lignes de courant tracées dans $\overline{\Omega}$ par rapport à $\vec{V}$. Alors on a le résultat suivant:

Proposition 2.1.3 ([41]) Soient l_1 et l_2 comme ci-dessus, alors soit $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ soit $l_1 \cap l_2 = l_1 = l_2$.

Ce résultat nous dit que deux lignes de courant **ne se coupent jamais**, en particulier en chaque point de $\overline{\Omega}$ passe une et une seule ligne de courant. Ce résultat est utile lors du traçage des lignes de courant, et permet de classer les méthodes de traçage des lignes de courant.

Une fois une ligne de courant tracée dans $\overline{\Omega}$, on peut définir pour chaque fonction (définie sur $\overline{\Omega}$) sa "trace" sur la ligne, plus précisément, soit C une ligne de courant (C est donnée par (p, I_C, q)), pour toute fonction $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ on lui associe $u_C \in C(I_C, \mathbb{R})$ définie par:

$$\forall \tau \in I_C, u_C(\tau) = u(q(\tau)). \quad (2.3)$$

Supposons de plus que $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, alors on a le résultat suivant:

Lemme 2.1.4 Soit u_C définie sur I_C par la relation (2.3). Alors on a:

1. $u_C \in C^1(I_C, \mathbb{R})$ et u'_C est donnée par:

$$\forall \tau \in I_C, \partial_\tau u_C(\tau) = \vec{\nabla} u(q(\tau)) \cdot \vec{V}(q(\tau)), \quad (2.4)$$

2. pour toute fonction $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a:

$$\forall \tau \in I_C, \partial_\tau f(u_C(\tau)) = \text{div}((f(u)\vec{V})(q(\tau))). \quad (2.5)$$

Démonstration du lemme 2.1.4:

Comme $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $q \in C^1(I_C, \Omega)$, alors $u_C = u \circ q \in C^1(I_C, \mathbb{R})$. Et la dérivée de u_C est donnée par:

$$\begin{aligned} u'_C(\tau) &= \vec{\nabla} u(q(\tau)) \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau}(\tau) \\ &= \vec{\nabla} u(q(\tau)) \cdot \vec{V}(q(\tau)). \end{aligned}$$

D'autre part si on a $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors $f \circ u_C \in C^1(I_C, \mathbb{R})$ et $(f \circ u_C)'(\tau) = f'(u_C(\tau))u'_C(\tau)$, ce qui nous donne:

$$\begin{aligned} \text{div}(f(u)\vec{V})(q(\tau)) &= (f'(u)\vec{\nabla} u \cdot \vec{V})(q(\tau)) + (f(u)\text{div}(\vec{V}))(q(\tau)) \\ &= f'(u(q(\tau)))\vec{\nabla} u(q(\tau)) \cdot \frac{d\vec{q}}{d\tau}(\tau) \quad (\text{car } \text{div}(\vec{V}) = 0) \\ &= (f \circ u_C)'(\tau). \end{aligned}$$

D'où le résultat. •

2.2 La méthode des lignes de courant appliquée à une équation de conservation

2.2.1 Présentation du problème

Soit Ω un ouvert régulier polygonal de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3), $I =]0; T[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}_+$ ($T > 0$). On note $Q = \Omega \times I$, $\Sigma = \partial\Omega \times I$, $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times I$ et $\Sigma_- = \{(x, t) \in \Sigma : \vec{V}(x) \cdot \vec{n}(x) \leq 0\}$, $\vec{n}$ est la normale extérieure à Ω au point x . On considère le problème suivant: Trouver $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ solution de:

$$(\mathcal{P}) = \begin{cases} \partial_t u(x, t) + \operatorname{div}(f(u(x, t))\vec{V}(x)) = 0 & , \quad \forall (x, t) \in Q \\ u(x, 0) = u_0(x) & , \quad \forall x \in \Omega \\ u(r, t) = g(r, t) & , \quad \forall (r, t) \in \Sigma_- \end{cases}$$

Avec f , $\vec{V}$, u_0 et g sont données et vérifient les hypothèses (D) :

(D1) $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, vérifie: $f' > 0$.

(D2) $\vec{V} \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, et $\vec{V}$ vérifie:

$$\forall x \in \overline{\Omega}, \operatorname{div}(\vec{V}(x)) = 0, \quad (2.6)$$

$$\text{il existe } \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \overline{\Omega}, \eta_1 \leq |\vec{V}(x)| \leq \eta_2, \quad (2.7)$$

on prend $\eta_2 = \beta = \|\vec{V}\|_{L^\infty(\Omega)}$.

(D3) u_0 et g sont supposées assez régulières (de classe C^2).

Dans la suite on note:

$$A = \max\{\sup_{\Omega}(u_0), \sup_{\Sigma_-}(g)\}, \quad (2.8)$$

$$B = \min\{\inf_{\Omega}(u_0), \inf_{\Sigma_-}(g)\}. \quad (2.9)$$

2.2.2 Résultats théoriques

Pour l'étude de ce type de problème on introduit la notion de solution entropique, cela permet d'avoir l'unicité de la solution ([16], [24]). En plus la solution entropique est la solution d'origine physique parmi les solutions faibles.

Définition 2.2.1 La solution entropique

Soit $u \in L^\infty(Q)$. On dit que u est une solution entropique du problème (P) si: pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, et pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, $\phi \geq 0$, on a:

$$\begin{aligned} & \int_Q (|u(x, t) - \kappa| \partial_t \phi(x, t) + |f(u(x, t)) - f(\kappa)| \vec{V}(x) \cdot \vec{\nabla} \phi(x, t)) dx dt \\ & + \int_{\Omega} |u_0(x) - \kappa| \phi(x, 0) dx - \int_{\Sigma} |f(g(r, t)) - f(\kappa)| \phi(r, t) \vec{V}(r) \cdot \vec{n}(r) d\gamma(r) dt \geq 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Où $\mathcal{D} = \{\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \phi = 0 \text{ sur } \Sigma - \Sigma_-\}$, et $d\gamma$ la mesure de Ledesgue ($d - 1$) dimensionnelle sur $\partial\Omega$.

Avec cette définition, on a le résultat suivant:

Théorème 2.2.1 ([9]) Sous les hypothèses (D). Le problème (P) admet une unique solution entropique, notée u , et $u \in L^1 \cap BV(Q)$.

Remarque 2.2.1 La définition de la solution entropique donnée ci-dessus tient compte du fait que la fonction f est croissante. On a pris cette hypothèse car dans le problème physique qu'on va traiter, f est croissante. Pour le cas général voir ([38]).

Théorème 2.2.2 ([38]) Soit $u \in L^\infty(Q)$ la solution entropique du problème $(\mathcal{P})$. Alors:

$$B \leq u(x, t) \leq A, \quad p.p (x, t) \in Q. \quad (2.11)$$

A et B sont données en (2.9) et (2.8).

Dans la suite on suppose que $u \in C^2(\overline{Q})$, en effet pour pouvoir déterminer le problème que u résout sur une ligne de courant, il est essentiel que la solution u soit de classe C^1 . On a préféré prendre u de classe C^2 pour avoir une estimation de l'ordre de h (voir partie 2.6.2).

2.2.3 Le problème 1-D vérifié sur une ligne de courant

Soit C une ligne de courant tracée dans $\overline{\Omega}$, dont $p \in \overline{\Omega}$ est le point d'origine, on suppose que $C = \{q(\tau) : \tau \in I_C \subset \mathbb{R}\}$. On définit une nouvelle fonction v de la façon suivante:

$$v(\tau, t) = u(q(\tau), t), \quad \forall (\tau, t) \in I_C \times I. \quad (2.12)$$

En dérivant v par rapport à t , on trouve:

$$\partial_t v(\tau, t) = \partial_t u(q(\tau), t).$$

D'autre part, d'après le lemme (2.1.4), on a:

$$\partial_\tau f(v(\tau, t)) = \text{div}((f(u)\vec{V})(q(\tau), t)).$$

Comme u est la solution du problème $(\mathcal{P})$, on trouve que v vérifie:

$$\partial_t v(\tau, t) + \partial_\tau f(v(\tau, t)) = 0, \quad \forall (\tau, t) \in I_C \times I. \quad (2.13)$$

La méthode des lignes de courant consiste à résoudre cette équation le long de chaque ligne de courant tracée dans Ω .

2.3 Problème discret

On donne dans cette partie les notations de maillage qu'on utilisera dans toute la suite de ce mémoire.

2.3.1 Notation du maillage de Ω

Soit $\mathcal{M}$ un maillage de Ω . Pour chaque maille p de $\mathcal{M}$, on note:

1. $m(p)$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ de la maille p ,
2. $\mathcal{N}(p)$ l'ensemble des mailles voisines de p dans $\mathcal{M}$,
3. σ_{pq} l'arête commune entre p et $q \in \mathcal{N}(p)$,
4. $\mathcal{A}$ l'ensemble des arêtes dans $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{A} = \{\sigma_{pq}, p \in \mathcal{M}, q \in \mathcal{N}(p)\}, \quad (2.14)$$

5. $\mathcal{A}_\partial$ l'ensemble des arêtes incluses dans $\partial\Omega$.

6. $\mathcal{A}_\Sigma^-$ l'ensemble des arêtes incluses dans Σ_- .

7. $m(\sigma)$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^{d-1}$ de l'arête σ .

On suppose que $\mathcal{M}$ vérifie:

- Pour deux mailles p et q distinctes dans $\mathcal{M}$, soit $m(\overline{p} \cap \overline{q}) = 0$, soit $\overline{p} \cap \overline{q} = \overline{\sigma}$ pour un $\sigma \in \mathcal{A}$.
- Pour tout $\sigma \in \mathcal{A}$, σ est incluse dans un hyperplan de $\mathbb{R}^d$.

- $\overline{\partial\Omega} = \cup_{\sigma \in \mathcal{A}_\partial} \overline{\sigma}$.
- Si $\sigma \in \mathcal{A}_\partial$, alors soit $\overline{\sigma} \subset \mathcal{A}_\partial^-$, soit $\overline{\sigma} \subset \mathcal{A}_\partial - \mathcal{A}_\partial^-$.

On note $h = \sup_{K \in \mathcal{M}} \{\text{diam}(K)\}$, h définit le pas de maillage. Il est clair que:

$$\forall K \in \mathcal{M}, m(K) \leq Ch^d, \quad (2.15)$$

Avec $C = 2^d m(B(0, 1))$, $B(0, 1)$ la boule unité dans $\mathbb{R}^d$.

Par la suite, on appellera **maillage régulier** sur Ω tout maillage de Ω vérifiant les conditions ci-dessus.

2.3.2 Maillage sur les lignes de courant

On suppose dans cette partie qu'on a déjà un maillage régulier de Ω . Soit $N_{\mathcal{L}} \in \mathbb{N}^*$. On se donne $N_{\mathcal{L}}$ points $p_l \in \overline{\Omega}$, de chaque point p_l on trace une ligne de courant l . On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des lignes de courant tracées dans Ω .

Soit $l \in \mathcal{L}$. l sera caractérisée par un triplet (p^l, I_l, q^l) , tel que:

1. $p^l \in \partial\Omega$ est le point d'origine de l (cf proposition 2.1.1)
2. I_l est de mesure finie dans $\mathbb{R}$ (cf remarque 2.1.2). De plus, on suppose qu'il existe une constante $C_{\Omega, V} \in \mathbb{R}_+^*$ qui ne dépend que de Ω et $\vec{V}$, telle que:

$$\forall l \in \mathcal{L}, |I_l| < C_{\Omega, V}. \quad (2.16)$$

3. $q^l : I_l = [0, \tau_{max}^l] \rightarrow \Omega$, q^l est un paramétrage de l , c-à-d q^l solution de:

$$\begin{cases} \frac{dq^l}{d\tau}(\tau) = \vec{V}(q^l(\tau)), & \forall \tau \in I_l, \\ q^l(0) = p^l. \end{cases}$$

Un maillage sur une ligne de courant désignera un maillage sur son intervalle de définition, plus précisément, soit $l \in \mathcal{L}$, on se donne une subdivision $\Gamma^l = (\tau_i^l)_{0 \leq i \leq N_l}$ de I_l , on note:

$$\begin{cases} \Delta_i^l = \tau_{i+1}^l - \tau_i^l, & 0 \leq i \leq N_l - 1, \\ \Delta^l = \max\{\Delta_i^l, 0 \leq i \leq N_l - 1\}. \end{cases}$$

Δ^l est donc le pas du maillage sur l , on note aussi $q_i^l = q(\tau_i^l)$ et h_i^l la longueur de l'arc $\widehat{q_i^l q_{i+1}^l}$ sur l , donnée par:

$$h_i^l = \int_{[\tau_i^l, \tau_{i+1}^l]} |\vec{V}(q^l(\tau))| d\tau.$$

D'après le lemme 2.1.2, on a $h_i^l \leq \Delta_i^l \beta$, on note aussi $h_l = \sup_j (h_j^l)$.

On introduit les notations qu'on utilisera dans la suite pour le passage entre le maillage $\mathcal{M}$ et l'ensemble des lignes de courant.

Soit $(K, l) \in \mathcal{M} \times \mathcal{L}$, on notera:

- $I_K = \{l \in \mathcal{L}, l \cap K \neq \emptyset\}$, l'ensemble des lignes de courant qui passent dans la maille K .
- $J_l = \{K \in \mathcal{M}, l \in I_K\}$, l'ensemble des mailles qui croisent le chemin de l .
- $I_{K,l} = \{0 \leq j \leq N_l - 1, \text{Im}(q^l|_{[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l]}) \subseteq K\}$ (cf remarque 2.3.1 ci-dessus).

On définit pour chaque maille K la notion de “temps de vol” (α_K) dans K , qui est donnée par:

$$\alpha_K = \sum_{l \in I_K} \Delta_K^l,$$

avec:

$$\Delta_K^l = \sum_{j \in I_{Kl}} \Delta_j^l.$$

On fait les hypothèses suivantes (HML):

(HML1) Pour chaque maille $K \in \mathcal{M}$: $\alpha_K > 0$, autrement dit:

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad I_K \neq \emptyset.$$

Donc, dans chaque maille passe au moins une ligne de courant.

(HML2) $\exists 0 < c_{\inf} \leq c_{\max} < \infty$, tel que:

$$\forall l \in \mathcal{L}, \forall j \in \{0, \dots, N_l - 1\} : c_{\inf} h \leq \Delta_j^l \leq \Delta^l \leq c_{\max} h.$$

(HML3) Pour $h < 1$, on suppose que: $\exists c_{NLDC} \in \mathbb{R}_+^*$, tel que :

$$N_{\mathcal{L}} \leq c_{NLDC} / h^{d-1},$$

en général $N_{\mathcal{L}}$ est proportionnel au nombre d’arêtes dans $\mathcal{A}_{\bar{\mathcal{D}}}$.

(HML4) Pour chaque ligne de courant $l \in \mathcal{L}$, $(l \cap \mathcal{A}) \subseteq (q_i^l)_i$.

Remarque 2.3.1 L’hypothèse (HML4) sur les points d’intersection entre les lignes de courant et l’ensemble des arêtes de $\mathcal{M}$ nous donne:

$$\forall (l, j) \in \mathcal{L} \times \{0, \dots, N_l - 1\}, \exists ! K \in \mathcal{M} : \text{Im}(q^l|_{[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l]}) \subseteq K.$$

2.3.3 Discrétisation en temps, double maillage en temps

On se donne $N_T \in \mathbb{N}^*$, on pose $DT = T/N_T$, on considère une discrétisation $(t^i)_{0 \leq i \leq N_T}$ de $[0, T]$, donnée par:

$$\forall i \in \{0, \dots, N_T\}, \quad t^i = i \times DT.$$

DT correspond à l’intervalle de temps dans lequel on résout l’équation sur les lignes de courant, mais aussi le passage des données entre $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (cf partie 2.4 ci-après). Dans le cas où la vitesse ne dépend pas du temps on peut prendre $DT = T$ (i.e $N_T = 1$). En revanche, lorsque $\vec{V}$ est une fonction du temps aussi, on prendra $DT < T$ (i.e $N_T > 1$), dans ce cas DT est aussi le pas du temps entre deux mises à jour de la vitesse (cf partie 2.7), bien sûr le choix de N_T dépend du $\partial_t \vec{V}$. Dans la suite on appellera DT le **grand pas de temps** (puisqu’il y aura des petits pas du temps sur chaque ligne de courant).

Pour chaque ligne de courant $l \in \mathcal{L}$, on se donne $N^l \in \mathbb{N}^*$ et on définit le pas de temps sur l (le petit pas de temps) par: $k^l = DT/N^l$. Le choix de N^l dépend de $\|f'\|_{\infty}$ et du maillage sur l (i.e Δ^l). Ainsi sur chaque ligne de courant on peut avoir un pas du temps différent.

Remarque 2.3.2 On choisit N^l de sorte qu’on a:

$$\forall i \in \{0, \dots, N_l - 1\}, \quad k^l \leq \Delta_i^l / \|f'\|_{\infty},$$

c’est une condition (CFL) pour assurer la convergence du schéma numérique sur la ligne de courant (cf partie 2.5.1).

Donc, dans cette méthode on a deux maillages en temps: le premier est sur l’intervalle $[0, T]$ dont le pas de temps (grand pas de temps) est choisi en fonction de la vitesse, surtout si la vitesse dépend du temps. Le second est un maillage sur chaque grand pas de temps, dont le pas de temps varie entre les lignes de courant.

Remarque 2.3.3 Bien que dans le cas où la vitesse ne dépend pas du temps on puisse prendre $N_T = 1$, on a préféré étudier dans cette partie le cas général (i.e. $N_T \geq 1$) pour comprendre davantage l’influence de ce paramètre sur cette méthode (cf. théorème 2.6.3), et en particulier dans le passage d’information entre les lignes de courant et les mailles (cf. partie ci-après).

2.4 Passage entre les lignes de courant et les mailles

Comme pour toutes les méthodes numériques, il faut définir les espaces de fonctions dans lesquels on travaille. Dans cette partie on donne les définitions des espaces qu'on utilisera dans la suite, essentiellement on aura l'espace des fonctions définies sur Ω ($\mathcal{E}_M$) et pour chaque ligne de courant il y aura l'espace des fonctions définies sur cette ligne ($\mathcal{E}_l$). On introduit aussi l'espace $\mathcal{E}_L$ qui est le produit des espaces $\mathcal{E}_l$ afin de faciliter le calcul des estimations.

2.4.1 Définitions des espaces $\mathcal{E}_l$, $\mathcal{E}_L$ et $\mathcal{E}_M$

Pour $l \in \mathcal{L}$, on définit $\mathcal{E}_l$ l'espace des fonctions constantes par morceaux sur l par rapport au maillage donné sur l :

$$\mathcal{E}_l = \{\varphi : l \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tq } \exists (\varphi_j)_{0 \leq j < N_l} \in \mathbb{R}^{N_l} : \varphi \circ q^l(\tau) = \sum_{j=0}^{N_l-1} \varphi_j 1_{[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l[}(\tau)\}.$$

Avec $1_{[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l[}(\tau) = 1$ si $\tau \in [\tau_j^l, \tau_{j+1}^l[$ et 0 sinon.

Pour $\varphi \in \mathcal{E}_l$, on définit:

$$\|\varphi\|_l = \sum_{j=0}^{N_l-1} \Delta_j^l |\varphi_j| \quad (2.17)$$

Ceci définit une norme sur $\mathcal{E}$ équivalente à la norme L^1 sur l .

Remarque 2.4.1 Le choix de Δ_j^l dans la définition de la norme à la place de h_j est fait pour deux raisons :

1. Comme la vitesse est régulière, alors au niveau mathématique c'est équivalent (cf. lemme 2.4.1 ci après)
2. Au niveau pratique (calcul numérique) il est beaucoup plus facile d'évaluer Δ_j^l que h_j (cf. partie de traçage des lignes de courant, annexe A).

Lemme 2.4.1 Soit $\varphi \in \mathcal{E}_l$. Alors:

$$\|\varphi\|_{L^1(l)} \leq \beta \|\varphi\|_l \quad (2.18)$$

Démonstration du lemme 2.4.1:

D'après la définition de $\mathcal{E}_l$, il existe $(\varphi_j)_{0 \leq j < N_l}$ tel que :

$$\forall \tau \in I_l : \varphi \circ q^l(\tau) = \sum_j \varphi_j 1_{[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l[}(\tau).$$

Ce qui donne:

$$\begin{aligned} \int_l |\varphi| dl &= \int_{I_l} |\varphi \circ q^l(\tau)| \|\vec{V}(q^l(\tau))\| d\tau \\ &= \sum_{j=0}^{N_l-1} |\varphi_j| h_j^l \end{aligned}$$

D'autre part, on a:

$$\forall l \in \mathcal{L}; \forall j \in \{0, \dots, N_l - 1\} : h_j^l \leq \beta \Delta_j^l$$

Ce qui termine la démonstration. •

Remarque 2.4.2 On peut identifier $\mathcal{E}_l$ à l'ensemble des fonctions définies sur I_l constantes par morceaux sur le maillage Γ^l . En fait les deux espaces sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions égales à N_l .

On définit aussi sur l'ensemble des lignes de courant $\mathcal{L}$, l'espace suivant:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = \{\Phi = (\varphi^l)_{0 \leq l \leq N_{\mathcal{L}}}, \varphi^l \in \mathcal{E}_l\}.$$

On munit $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ définie par:

$$\forall \Phi = (\varphi^l) \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}, \|\Phi\|_{\mathcal{L}} = \sum_{l \in \mathcal{L}} \|\varphi^l\|_l. \quad (2.19)$$

On définit sur Ω l'espace $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ des fonctions constantes par morceaux sur les mailles de $\mathcal{M}$, c-à-d,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \sum_{K \in \mathcal{M}} \varphi_K 1_K(x), \varphi_K \in \mathbb{R}\}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, on définit la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, par:

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}} = \sum_{K \in \mathcal{M}} \alpha_K |\varphi_K|,$$

avec α_K le temps de vol dans la maille K , $\alpha_K = \sum_{l \in I_K} \Delta_K^l$.

Cette norme dépend du maillage $\mathcal{M}$ et aussi de l'ensemble $\mathcal{L}$, elle est équivalente à la norme L^1 habituelle sur $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, plus précisément, on a:

Lemme 2.4.2 Soit $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. Alors:

$$\int_{\Omega} |\varphi| dx \leq \frac{2^d m(B(0,1)) h^{d-1}}{c_{inf}} \|\varphi\|_{\mathcal{M}}, \quad (2.20)$$

où $B(0,1)$ est la boule unité dans $\mathbb{R}^d$.

Démonstration du lemme 2.4.2:

D'après les hypothèses de maillage on a:

$$\forall K \in \mathcal{M}, \alpha_K \geq c_{inf} h \geq \frac{c_{inf} m_K}{2^d m(B(0,1)) h^{d-1}}.$$

Ce qui donne:

$$\forall K \in \mathcal{M}, m_K \leq \frac{2^d m(B(0,1)) h^{d-1}}{c_{inf}} \alpha_K.$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi| dx &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K |\varphi| dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{M}} m_K |\varphi_K| \\ &\leq \frac{2^d m(B(0,1)) h^{d-1}}{c_{inf}} \sum_{K \in \mathcal{M}} \alpha_K |\varphi_K| = \frac{2^d m(B(0,1)) h^{d-1}}{c_{inf}} \|\varphi\|_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. •

2.4.2 Définitions des applications de passage entre $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$

Le passage des informations entre $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ est une étape très importante dans cette méthode, car cela permet d'initialiser les problèmes 1d à résoudre sur chaque ligne de courant et aussi de projeter les solutions numériques obtenues sur l'ensemble des lignes de courant sur le maillage $\mathcal{M}$ pour avoir une solution numérique constante par maille (cf. remarque 2.4.3).

Définition 2.4.1 Pour toute fonction $\psi \in \mathcal{E}_M$ on lui associe une fonction $\mathcal{L}(\psi) \in \mathcal{E}_L$, définie par:

$$\forall l \in \mathcal{L}, \mathcal{L}(\psi)_j^l = \psi_K, \text{ si } j \in I_{K,l} \quad (2.21)$$

et inversement, si $\Phi = (\phi^l)_l \in \mathcal{E}_L$, on définit une fonction $\mathcal{M}(\Phi) \in \mathcal{E}_M$ par:

$$\forall K \in \mathcal{M}, \mathcal{M}(\Phi)_K = \sum_{l \in I_K} \omega_l \left(\sum_{j \in I_{K,l}} (\Delta_j^l / \Delta_K^l) \phi_j^l \right) \quad (2.22)$$

Avec:

$$\omega_l = \frac{\Delta_K^l}{\alpha_K} \quad (2.23)$$

Proposition 2.4.3 Les fonctions $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ sont linéaires, continues et 1-Lipschitziennes, de plus on a:

$$\forall \Phi \in \mathcal{E}_M, \mathcal{M} \circ \mathcal{L}(\Phi) = \Phi, \quad (2.24)$$

$$\forall \Phi \in \mathcal{E}_M, \|\Phi\|_M = \|\mathcal{L}(\Phi)\|_L, \quad (2.25)$$

$$\forall \Psi \in \mathcal{E}_L, \|\mathcal{M}(\Psi)\|_M \leq \|\Psi\|_L. \quad (2.26)$$

Démonstration:

Il est clair que les deux fonctions $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ sont linéaires, d'où leur continuité car $\mathcal{E}_M$ et $\mathcal{E}_L$ sont des $\mathbb{R}$ -ev de dimensions finies.

Soit $\phi = \sum_{K \in \mathcal{M}} \phi_K 1_K \in \mathcal{E}_M$. D'après la définition de l'application $\mathcal{L}$, on a:

$$\forall l \in \mathcal{L}, \mathcal{L}(\phi)_j^l = \phi_K, \text{ si } j \in I_{K,l}.$$

D'où, pour tout $K \in \mathcal{M}$, on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{L}(\phi))_K &= \sum_{l \in I_K} \frac{\Delta_K^l}{\alpha_K} \left(\sum_{j \in I_{K,l}} \frac{\Delta_j^l}{\Delta_K^l} (\mathcal{L}(\phi))_j^l \right) \\ &= \sum_{l \in I_K} \frac{1}{\alpha_K} \left(\sum_{j \in I_{K,l}} \Delta_j^l \phi_K \right) \\ &= \frac{\phi_K}{\alpha_K} \sum_{l \in I_K} \Delta_j^l = \phi_K, \end{aligned}$$

On en déduit que: $\mathcal{M}(\mathcal{L}(\phi)) = \phi$. D'où la relation (2.24).

De même, on a:

$$\begin{aligned} \|\phi\|_M &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \alpha_K |\phi_K| \\ &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \alpha_K \left(\sum_{l \in I_K} \frac{\Delta_K^l}{\alpha_K} \left(\sum_{j \in I_{K,l}} \frac{\Delta_j^l}{\Delta_K^l} |\mathcal{L}(\phi)_j^l| \right) \right) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{l \in I_K} \left(\sum_{j \in I_{K,l}} \Delta_j^l |\mathcal{L}(\phi)_j^l| \right) \\ &= \sum_{l \in \mathcal{L}} \sum_j \Delta_j^l |\mathcal{L}(\phi)_j^l| = \|\mathcal{L}(\phi)\|_L. \end{aligned}$$

D'où la relation (2.25).

Soit $\psi = (\psi^l)_l \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$. On a :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(\psi)\|_{\mathcal{M}} &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \alpha_K |\mathcal{M}(\psi)_K| \\ &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \alpha_K \left| \sum_{l \in I_K} \frac{\Delta_K^l}{\alpha_K} \left(\sum_{j \in I_{Kl}} \frac{\Delta_j^l}{\Delta_K^l} \psi_j^l \right) \right| \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{l \in I_K} \left(\sum_{j \in I_{Kl}} \Delta_j^l |\psi_j^l| \right) \\ &= \sum_{l \in \mathcal{L}} \sum_j \Delta_j^l |\psi_j^l| = \|\psi\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

D'où la relation (2.26).

D'après les relations (2.25) et (2.26) on déduit que les applications $\mathcal{M}$ et $\mathcal{L}$ sont 1-Lipschitziennes, ce qui termine la démonstration.

Remarque 2.4.3 Dans le problème physique qui nous intéresse, nous sommes obligés d'avoir une valeur constante par maille de u (u sera la saturation) pour pouvoir calculer la vitesse à l'instant suivant (i.e. résoudre l'équation de la pression). C'est pour cette raison qu'on fait ce passage entre $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, et donc on ne peut pas se contenter d'une solution numérique définie sur les lignes de courant.

2.4.3 Projection de $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$

Afin de pouvoir faire des estimations d'erreur entre la solution numérique obtenue par la méthode des lignes de courant et la solution exacte du problème, on introduit dans cette partie les définitions des projections d'une fonction de classe C^1 sur Ω dans les espaces $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, et on donne quelques lemmes qu'on utilisera par la suite pour montrer la convergence (cf. partie 2.6.2).

Définition 2.4.2 Pour toute fonction $\theta \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, on définit :

- $\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ définie par :

$$\forall K \in \mathcal{M}, (\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta))_K = \frac{1}{m_K} \int_K \theta(x) dx \quad (2.27)$$

- $\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta) = (\theta^l)_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ définie par :

$$\forall l \in \mathcal{L}, \forall 0 \leq j \leq N_l - 1 : \theta_j^l = \frac{1}{\Delta_j^l} \int_{[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l]} \theta(q^l(\tau)) d\tau \quad (2.28)$$

Lemme 2.4.4 Soit $\theta \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, on définit $\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta)$ et $\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta)$ comme (2.27-2.28). Alors :

Il existe $c_\theta > 0$ qui dépend de $\|\vec{\nabla} \theta\|_\infty$, $\vec{V}$ et Ω , tel que :

$$\|\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta) - \mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta))\|_{\mathcal{L}} \leq c_\theta N_{\mathcal{L}} h$$

Démonstration du lemme 2.4.4 :

Soit $l \in \mathcal{L}$. Notons $u = (\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta))_l$ et $v = (\mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta)))_l$, d'après la définition de la norme sur l , on a :

$$\|u - v\|_l = \sum_{0 \leq j \leq N_l - 1} \Delta_j^l |u_j - v_j|,$$

soit $j \in \{0, \dots, N_l - 1\}$ il existe une seule maille $K \in \mathcal{M}$, telle que $\text{Im}(q^l_{[\tau_j, \tau_{j+1}]}) \subset K$. Donc :

$$u_j = \frac{1}{m(K)} \int_K \theta(x) dx, \quad v_j = \frac{1}{\Delta_j^l} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \theta(q^l(\tau)) d\tau,$$

donc $|u_j - v_j| \leq \|\vec{\nabla} \theta\|_\infty h$, car θ est de classe C^1 . Ce qui nous donne:

$$\|u - v\|_l \leq \sum_{0 \leq j \leq N_l - 1} \Delta_j^l \|\vec{\nabla} \theta\|_\infty h \leq |I_l| \|\vec{\nabla} \theta\|_\infty h.$$

D'autre part, d'après la relation (2.16), on a $|I_l| < C_{\Omega, V}$ pour tout $l \in \mathcal{L}$, avec $C_{\Omega, V}$ une constante dans $\mathbb{R}_+^*$ qui dépend de Ω et de la vitesse $\vec{V}$.

Notons $c_\theta = C_{\Omega, V} \|\vec{\nabla} \theta\|_\infty$. D'après ce qui précède, on déduit:

$$\|\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta) - \mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta))\|_{\mathcal{L}} = \sum_{l \in \mathcal{L}} \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta))_l - (\mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta)))_l\|_l \leq c_\theta N_{\mathcal{L}} h.$$

D'où le résultat. •

Lemme 2.4.5 Soit $\theta \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, on définit $\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta)$ et $\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta)$ comme (2.27-2.28). Pour tout $v = (v^l)_l \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, on a:

$$\|\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta) - \mathcal{M}(v)\|_{\mathcal{M}} \leq \|\mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta)) - \mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta)\|_{\mathcal{L}} + \|\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta) - v\|_{\mathcal{L}}$$

Démonstration du lemme 2.4.5:

D'après la proposition (2.4.3), on a :

$$\mathcal{M} \circ \mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta)) = \mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta),$$

d'autre part, en utilisant la relation (2.26), on en déduit:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta) - \mathcal{M}(v)\|_{\mathcal{M}} &= \|\mathcal{M}(\mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta)) - v)\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|\mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(\theta)) - v\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

On ajoute et soustrait $\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(\theta)$ pour avoir le résultat désiré. •

2.5 Algorithme pour la méthode des lignes de courant

On commence d'abord par donner le schéma numérique sur une ligne de courant, ensuite on donnera l'algorithme.

2.5.1 Solution approchée du problème ($\mathcal{P}$) sur une ligne de courant

Soit $l \in \mathcal{L}$ une ligne de courant ($l = (p^l, I_l, q^l)$), et u la solution du problème ($\mathcal{P}$). L'équation de u est réduite sur l au problème 1-d suivant (voir 2.2.3):

$$\partial_t v + \partial_\tau f(v) = 0 \tag{2.29}$$

Avec v définie en (2.12).

On suppose qu'on a deux instants $t^n = nDT$ et $t^{n+1} = (n+1)DT$ (avec $t^{n+1} \leq T$), on suppose de plus qu'à l'instant t^n on a une solution approchée du problème ($\mathcal{P}$) notée $u^{app}(t^n) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$.

On cherche à construire une solution approchée du problème (2.29) sur $[0, \tau_{max}^l] \times [t^n, t^{n+1}]$. Pour cela, on se donne une discrétisation $(\sigma^i)_{0 \leq i \leq N^l}$ de $[t^n, t^{n+1}]$, donnée par:

$$\forall i \in \{0, \dots, N^l\}, \quad \sigma^i = t^n + i \times k^l.$$

Les données initiales (à $\sigma^0 = t^n$) sur l sont données par $(\mathcal{L}(u^{app}(t^n)))_l, \mathcal{L}(u^{app}(t^n)) \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ défini par la relation (2.21). La solution numérique est construite avec un schéma volume fini ([20]):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall (j, s) \in \{0, \dots, N_l - 1\} \times \{0, \dots, N^l - 1\}, & v_j^{s+1} - v_j^s = \frac{k^l}{\Delta_j^l} (f_{j-1}^s - f_j^s), \\ \forall j \in \{0, \dots, N_l - 1\}, & v_j^0 = \mathcal{L}(u^{app}(t^n))_j^l, \\ \forall s \in \{0, \dots, N^l - 1\}, & v_{-1}^s = g(p^l, \sigma^s). \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Avec g est une donnée du problème ($\mathcal{P}$) (voir aussi hypothèse (D)), v_j^s est l'approximation de v sur $[\tau_j^l, \tau_{j+1}^l] \times [\sigma^s, \sigma^{s+1}]$, $f_j^s = f(v_j^s)$ est l'approximation de $f(v(\tau_j, \sigma^s))$. k^l est le pas de temps sur la ligne de courant l , k^l vérifie la condition suivante (CFL):

$$\forall j \in \{0, \dots, N_l - 1\}, k^l \leq \frac{\Delta_j^l}{\|f'\|_{\infty}}.$$

Remarque 2.5.1 Le choix du schéma (2.30), est dû au fait que f est une fonction croissante, $f' \geq 0$.

$v^{app,l}$ sera définie de la façon suivante:

$$v^{app,l}(\tau, \sigma) = v_j^s, \text{ si } (\tau, \sigma) \in [\tau_j, \tau_{j+1}] \times [\sigma^s, \sigma^{s+1}].$$

Lemme 2.5.1 ([39]) Supposons que $\mathcal{L}(u^{app}(t^n))_l$ vérifie: pour tout j , $B \leq \mathcal{L}(u^{app}(t^n))_l^j \leq A$ (A et B sont définis en (2.8) et (2.9)). Alors $v^{app,l}$ vérifie:

$$\forall (\tau, \sigma) \in [0, \tau_{\max}^l] \times [t^n, t^{n+1}], B \leq v^{app,l}(\tau, \sigma) \leq A.$$

Remarque 2.5.2 Si on note $v^{app,l}(\sigma^i) = v^{app,l}(\cdot, \sigma^i)$, on peut voir pour tout $i \in \{0, \dots, N^l\}$ $v^{app,l}(\sigma^i)$ comme un élément de $\mathcal{E}_l$.

Afin de pouvoir faire des estimations d'erreurs sur la méthode des lignes de courant, on introduit $w^{n,l}$ défini sur $[t^n, t^{n+1}] \times [0, \tau_{\max}^l]$ solution du même schéma numérique (2.30) mais avec comme donnée initiale $(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u(\cdot, t^n)))_l$.

Lemme 2.5.2 Soient $v^{app,l}, w^{n,l}$ définies par le schéma (2.30). Alors:

$$\|w^{n,l}(t^{n+1}) - v^{app,l}(t^{n+1})\|_l \leq \|w^{n,l}(t^n) - v^{app,l}(t^n)\|_l.$$

Démonstration du lemme 2.5.2:

Pour simplifier l'écriture, on pose $w = w^{n,l}$ et $v = v^{app,l}$. Pour tout $(j, s) \in \{-1, \dots, N_l - 1\} \times \{0, \dots, N^l\}$, on définit:

$$U_j^s = w_j^s - v_j^s,$$

avec $w_{-1}^s = v_{-1}^s = g(p^l, \sigma^s)$. On définit aussi:

$$F_j^s = \begin{cases} \frac{f(w_j^s) - f(v_j^s)}{w_j^s - v_j^s} & \text{si } w_j^s \neq v_j^s, \\ f'(w_j^s) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vu que $f' \geq 0$, on a $F_j^s \geq 0$ et $F_j^s \leq \|f'\|_{\infty}$.

Comme w et v vérifient le schéma (2.30), on en déduit que:

$$\forall (j, s) \in \{1, \dots, N_l - 1\} \times \{0, \dots, N^l - 1\}, \Delta_j^l U_j^{s+1} = (\Delta_j^l - k^l F_j^s) U_j^s + k^l F_{j-1}^s U_{j-1}^s.$$

k^l est choisi tel qu'on a $k^l * \|f'\|_{\infty} \leq \Delta_j^l$ pour tout j (CFL), alors on a $(\Delta_j^l - k^l F_j^s) \geq 0$, ce qui donne:

$$\forall (j, s) \in \{0, \dots, N_l - 1\} \times \{0, \dots, N^l - 1\}, \Delta_j^l |U_j^{s+1}| \leq (\Delta_j^l - k^l F_j^s) |U_j^s| + k^l F_{j-1}^s |U_{j-1}^s|.$$

En faisant la somme sur j dans la relation précédente, on obtient:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{N_l-1} \Delta_j^l |U_j^{s+1}| &\leq \sum_{j=0}^{N_l-1} \Delta_j^l |U_j^s| - k^l \sum_{j=0}^{N_l-1} F_j^s |U_j^s| + k^l \sum_{j=0}^{N_l-1} F_{j-1}^s |U_{j-1}^s| \\
 &= \sum_{j=0}^{N_l-1} \Delta_j^l |U_j^s| - k^l \sum_{j=0}^{N_l-1} F_j^s |U_j^s| + k^l \sum_{j=-1}^{N_l-2} F_j^s |U_j^s| \\
 &= \sum_{j=0}^{N_l-1} \Delta_j^l |U_j^s| - k^l F_{N_l-1}^s |U_{N_l-1}^s| \leq \sum_{j=0}^{N_l-1} \Delta_j^l |U_j^s|,
 \end{aligned}$$

autrement dit, $\|U^{s+1}\|_l \leq \|U^s\|_l$. Par récurrence sur s , on trouve que $\|U^{N^l}\|_l \leq \|U^0\|_l$, i.e $\|w^{n,l}(t^{n+1}) - v^{app,l}(t^{n+1})\|_l \leq \|w^{n,l}(t^n) - v^{app,l}(t^n)\|_l$, d'où le résultat. •

Le résultat suivant donne une estimation d'erreur entre v la solution du problème (2.29) et $w^{n,l}$,

Lemme 2.5.3 Soient v et $w^{l,n}$ définies comme ci-dessus. Alors il existe une constante $c_{vf} \in \mathbb{R}_+^*$, qui dépend de f , u (et ses dérivées d'ordre 1 et 2), et g telle que:

$$\|v(., t^{n+1}) - w^{l,n}(t^{n+1})\|_{L^1(I_l)} \leq c_{vf} h_l. \quad (2.31)$$

Démonstration du lemme 2.5.3:

La démonstration de ce lemme est donnée en annexe B. •

Remarque 2.5.3 Dans le lemme 2.5.3, on utilise l'hypothèse que u (la solution du problème) est de classe C^2 , pour avoir une estimation de l'erreur de l'ordre de h_l .

2.5.2 L'algorithme:

L'algorithme pour construire une solution approchée du problème ($\mathcal{P}$) par la méthode LDC est le suivant:

1. Pour $n = 0$, on calcule $u^{app}(t^0) = \mathbb{P}_M(u_0) \in \mathcal{E}_M$.
2. Tant que $n < N_T$, faire:
 - (a) Pour tout $l \in \mathcal{L}$, on Calcule $(v^{app,l}(t^{n+1}))$, i.e résout l'équation (2.29) sur $I_l \times [t^n, t^{n+1}[$ par le schéma (2.30), avec comme donnée initiale $\mathcal{L}(u^{app}(t^n))_l$,
 - (b) déterminer $v^{app}(t^{n+1}) = (v^{app,l}(t^{n+1}))_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$,
 - (c) on calcule $u^{app}(t^{n+1}) = \mathcal{M}(v^{app}(t^{n+1})) \in \mathcal{E}_M$ (voir relation 2.22).
3. $n = n + 1$

Remarque 2.5.4 Par construction de u^{app} , on a : $\forall n \in \{0, \dots, N_T\}$, $u^{app}(t^n) \in \mathcal{E}_M$.

La solution approchée obtenue par cette méthode sera donnée par:

$$u^{app}(x, t) = u^{app}(t^n)_K, \quad \text{si } (x, t) \in K \times [t^n, t^{n+1}[. \quad (2.32)$$

2.6 Stabilité L^∞ et résultat de convergence

L'objectif de cette partie est de montrer quelques propriétés du schéma "numérique lignes de courant". On désignera par ($\mathcal{H}$) les hypothèses suivantes:

($\mathcal{H}1$) Les données du problème ($\mathcal{P}$) vérifient les hypothèses (D).

(H2) Le maillage $\mathcal{M}$ sur Ω est régulier.

(H3) La relation (2.16) est vérifiée.

(H4) Les hypothèses (HML) entre le maillage $\mathcal{M}$ et les maillages sur les lignes de courant sont vérifiées.

(H5) Sur chaque ligne de courant la condition (CFL) est vérifiée, pour le schéma numérique sur la ligne de courant (cf remarque 2.3.2).

2.6.1 Stabilité L^∞

En général, on demande aux schémas numériques qu'on applique pour traiter les problèmes physiques de satisfaire certaines conditions, en particulier on attend des solutions numériques physiquement acceptables. Par exemple si u désigne une saturation comprise entre 0 et 1, on veut que la solution numérique soit aussi comprise entre 0 et 1.

Proposition 2.6.1 *Sous les hypothèses (H). Soit u^{app} la solution numérique définie par la méthode lignes de courant, alors*

$$\forall k \in \{0, \dots, N_T\}, B \leq u^{app}(t^k) \leq A.$$

B et A sont définies en (2.9) et (2.8).

Démonstration de la proposition 2.6.1:

On va remonter cette relation par récurrence sur n . Pour $n = 0$ la relation est vraie car $u^{app}(t^0) = \mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u_0)$ et $B \leq u_0 \leq A$. Supposons que $n > 0$ et que la relation est vraie pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, montrons la pour n . D'après la définition de $u^{app}(t^n)$ on a pour tout $K \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} (u^{app}(t^n))_K &= (\mathcal{M}(v^{app}(t^n)))_K \\ &= \sum_{l \in I_K} \frac{\Delta_K^l}{\alpha_K} \left(\sum_{j \in I_{K,l}} \frac{\Delta_j^l}{\Delta_K^l} (v^{app,l}(t^n))_j \right) \end{aligned}$$

Or d'après le lemme (2.5.1), on a $(v^{app,l}(t^n))_j \in [B, A]$ pour tout j et l . D'autre part on a $\frac{\Delta_j^l}{\Delta_K^l} \in]0, 1]$ et $\frac{\Delta_K^l}{\alpha_K} \in]0, 1]$. Ce qui implique que $(u^{app}(t^n))_K \in [B, A]$. Ceci est vrai pour tout $K \in \mathcal{M}$, on en déduit que $B \leq u^{app}(t^n) \leq A$. D'où le résultat. •

2.6.2 Résultat de convergence

Soit u la solution exacte du problème $(\mathcal{P})$, qu'on suppose de classe C^2 sur Q . Pour $t \in [0, T[$ on définit $\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t) = \mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u(\cdot, t)) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ comme en (2.27), et $\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u)(t) = \mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u(\cdot, t)) \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ comme en (2.28).

Lemme 2.6.2 *Soit u la solution du problème $(\mathcal{P})$ et u^{app} la solution approchée obtenue par la méthode lignes de courant. On suppose que $u \in C^2(Q)$ et que les hypothèses (H) sont vérifiées, on se donne $0 < n \leq N_T$. Alors on a:*

$$\|(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u) - u^{app})(t^n)\|_{\mathcal{M}} \leq (c_u + c_{vf} c_{max} \beta) \times n \times N_{\mathcal{L}} h$$

Avec $c_u \in \mathbb{R}_+^*$ qui dépend de $\|\vec{\nabla}_x u\|_{L^\infty}$, et $c_{vf} \in \mathbb{R}_+^*$ dépend de $\|\vec{\nabla} u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, g , f , u (et ses dérivées d'ordre 1 et 2) et $\vec{V}$.

Remarque 2.6.1 *Le lemme précédent (2.6.2), nous donne une estimation sur la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, mais pas un résultat de convergence. En particulier, si $d = 2$, on a $N_{\mathcal{L}} \leq \frac{c}{h}$, avec $c \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui nous donne:*

$$\|(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u) - u^{app})(t^n)\|_{\mathcal{M}} \leq n \times C.$$

Démonstration du lemme 2.6.2:

D'abord, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on note:

$$\begin{aligned} A^k &= \|\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^k) - u^{app}(t^k)\|_{\mathcal{M}}, \\ B^k &= \|\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u)(t^k) - \mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u))(t^k)\|_{\mathcal{L}}, \\ C^n &= \|\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u)(t^n) - v^{app}(t^n)\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

D'après le lemme (2.4.5), et comme $u^{app}(t^n) = \mathcal{M}(v^{app})(t^n)$, on a:

$$\begin{aligned} A^n &= \|\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^n) - \mathcal{M}(v^{app})(t^n)\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u)(t^n) - \mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u))(t^n)\|_{\mathcal{L}} + \|\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u)(t^n) - v^{app}(t^n)\|_{\mathcal{L}} \\ &= B^n + C^n. \end{aligned}$$

En introduisant $W^{n-1} = (w^{n-1,l})_{l \in \mathcal{L}}$ (définie en 2.5.1), on a :

$$C^n \leq \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^{n-1})(t^n)\|_{\mathcal{L}} + \|(W^{n-1} - v^{app})(t^n)\|_{\mathcal{L}}. \quad (2.33)$$

D'autre part, grâce au lemme (2.5.2), on a:

$$\|(W^{n-1} - v^{app})(t^n)\|_{\mathcal{L}} \leq \|(W^{n-1} - v^{app})(t^{n-1})\|_{\mathcal{L}}.$$

Or, d'après la définition de W^{n-1} et v^{app} , on a:

$$\begin{aligned} W^{n-1}(t^{n-1}) &= \mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u)(t^{n-1}); \\ v^{app}(t^{n-1}) &= \mathcal{L}(u^{app})(t^{n-1}). \end{aligned}$$

Donc d'après la proposition (2.4.3):

$$\begin{aligned} \|(W^{n-1} - v^{app})(t^{n-1})\|_{\mathcal{L}} &= \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - \mathcal{L}(u^{app}))(t^{n-1})\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - \mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)))(t^{n-1})\|_{\mathcal{L}} + \|(\mathcal{L}(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)) - \mathcal{L}(u^{app}))(t^{n-1})\|_{\mathcal{L}} \\ &\leq B^{n-1} + \|(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u) - u^{app})(t^{n-1})\|_{E_{\mathcal{M}}} \\ &= B^{n-1} + A^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

En utilisant les relations (2.33) et (2.34), on trouve:

$$C^n \leq \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^{n-1})(t^n)\|_{\mathcal{L}} + A^{n-1} + B^{n-1},$$

donc,

$$A^n \leq B^n + \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^{n-1})(t^n)\|_{\mathcal{L}} + A^{n-1} + B^{n-1}.$$

Or $A^0 = 0$ (d'après la définition de $u^{app}(t^0)$), alors par récurrence on trouve:

$$A^n \leq 2 \sum_{k=0}^{n-1} B^k + \sum_{k=0}^{n-1} \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^k)(t^{k+1})\|_{\mathcal{L}}. \quad (2.35)$$

Estimation de B^k :

D'après le lemme (2.4.4), il existe une constante $c_u \in \mathbb{R}_+^*$, qui dépend de $\|\vec{\nabla}_x u\|_{L^\infty(\bar{\Omega} \times (0,T))}$, telle que:

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, B^k \leq c_u N_{\mathcal{L}} h. \quad (2.36)$$

Estimation de $\|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^k)(t^{k+1})\|_{\mathcal{L}}$:

D'après le lemme (2.5.3), il existe une constante $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$, qui dépend de $\|\vec{\nabla}_x u_0\|_{\infty}, g, \vec{V}, u$ et f , telle que:

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^k)(t^{k+1})\|_{\mathcal{L}} \leq c_2 \sum_{l \in \mathcal{L}} h_l. \quad (2.37)$$

D'après l'hypothèse (H2):

$$\forall l \in \mathcal{L}, h_l \leq \beta \Delta \leq c_{\max} \beta h \quad (2.38)$$

En remplaçant (2.38) dans (2.37), on a:

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \|(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}(u) - W^k)(t^{k+1})\|_{\mathcal{L}} \leq c_2 c_{\max} \beta N_{\mathcal{L}} h. \quad (2.39)$$

En remplaçant (2.36) et (2.39) dans (2.35), on trouve:

$$\|(\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u) - u^{app}(t^n))\|_{\mathcal{M}} \leq (c_u h + c_{vf} c_{\max} \beta) \times n \times N_{\mathcal{L}} h \quad (2.40)$$

D'où le résultat. •

Théorème 2.6.3 Soit u la solution du problème $(\mathcal{P})$. Soit u^{app} la solution approchée du problème $(\mathcal{P})$ obtenue par la méthode des lignes de courant. On suppose que $u \in C^1(Q)$ et que les hypothèses $(\mathcal{H})$ sont vérifiées. Alors, il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que:

$$\int_{\Omega} |u(x, T) - u^{app}(T)| dx \leq c N_T h.$$

Avec c dépendant de $u_0, g, f, \vec{V}, u$ et du maillage défini sur Ω (i.e $c_{\max}, c_{NLDC}, \dots$)

Démonstration:

Soit $\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(T) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, défini en (2.27). Alors:

$$\int_{\Omega} |u(x, T) - u^{app}(T)| dx \leq \int_{\Omega} |u(x, t^{N_T}) - \mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^{N_T})| dx + \int_{\Omega} |\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^{N_T}) - u^{app}(t^{N_T})| dx \quad (2.41)$$

Or, comme $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, il existe $c_{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}_+^*$ dépendant de $\|\vec{V}_x u(\cdot, T)\|_{L^\infty(\Omega)}$, tel que:

$$\int_{\Omega} |u(x, t^{N_T}) - \mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^{N_T})| dx \leq c_{\mathcal{M}} h \quad (2.42)$$

D'autre part, on a:

$$\int_{\Omega} |\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^{N_T}) - u^{app}(t^{N_T})| dx \leq \frac{h^{d-1}}{c_{\inf}} \|\mathbb{P}_{\mathcal{M}}(u)(t^{N_T}) - u^{app}(t^{N_T})\|_{\mathcal{M}}. \quad (2.43)$$

En utilisant (H3) et la relation (2.40), la relation (2.43) devient (on suppose que $h \leq 1$):

$$\int_{\Omega} |u^{exa} - u^{app}(t^{N_T})| dx \leq (c_{\inf} \times c_{NLDC} (c_{\mathcal{M}} + c_{vf} c_{\max} \beta)) N_T h \quad (2.44)$$

(2.44)+(2.42) dans (2.41) donne:

$$\int_{\Omega} |u(x, T) - u^{app}(T)| dx \leq c N_T h$$

Avec $c = (c_{\inf} \times c_{NLDC} (c_{\mathcal{M}} + c_{vf} c_{\max} \beta)) + c_{\mathcal{M}}$.

Pour N_T fixé (ou $N_T \leq \frac{\epsilon(h)}{h}$, avec $\epsilon(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0), on a:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u^{app}(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} = 0$$

2.7 Vitesse non stationnaire

Les équations du système $(\mathcal{P})$ sont souvent issues de la physique, et en général la vitesse dépend aussi du temps, dans cette partie on donnera l'algorithme de la méthode des lignes de courant lorsque la vitesse varie avec le temps. On considère le problème suivant: Trouver $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ solution de:

$$(\mathcal{P}_1) = \begin{cases} \partial_t u(x, t) + \operatorname{div}(f(u(x, t)) \vec{V}(x, t)) = 0 & , \quad \forall (x, t) \in Q \\ u(x, 0) = u_0(x) & , \quad \forall x \in \Omega \\ u(r, t) = g(r, t) & , \quad \forall (r, t) \in \Sigma_- \end{cases}$$

Avec $\vec{V}$, f , g et u_0 qui sont données et vérifient les hypothèses suivantes:

- $\vec{V} \in C^1(\mathbb{R}^d \times I, \mathbb{R}^d)$, et $\vec{V}$ vérifie:

$$\forall (x, t) \in Q, \operatorname{div}_x(\vec{V}(x, t)) = 0, \quad (2.45)$$

$$\text{il existe } \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, t) \in \overline{\Omega}, \eta_1 \leq |\vec{V}(x, t)| \leq \eta_2. \quad (2.46)$$

- f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 strictement croissante.
- g et u_0 sont supposées assez régulières.

Le système $(\mathcal{P}_1)$ admet une solution entropique, de plus cette solution est unique ([9]).

Comme la vitesse varie avec le temps, on ne peut plus appliquer l'algorithme de la méthode des lignes de courant expliqué auparavant. Ceci est dû à plusieurs raisons, dont les principales sont:

1. Les trajectoires des lignes de courant dépendront du temps, car la vitesse en dépend aussi. Ainsi pour une ligne de courant son paramétrage est de la forme $q = q(\tau, t)$.
2. On ne peut pas déterminer le problème 1d à résoudre sur une ligne de courant.

Pour surmonter cette difficulté on va approcher la vitesse par une vitesse constante par morceaux sur un maillage de l'intervalle de temps considéré, ensuite à chaque période de temps où la vitesse est supposée constante on résout un problème approché du système $(\mathcal{P}_1)$.

2.7.1 Le problème modifié

On se donne $N_T \in \mathbb{N}^*$, et on pose $DT = T/N_T$. DT est le grand pas du temps, et pour $n \in \{0; \dots, N_T\}$ on note $t^n = n \times DT$. On considère le système suivant:

$$(\mathcal{P}_1^n) = \begin{cases} \partial_t \bar{u}^n(x, t) + \operatorname{div}(f(\bar{u}^n(x, t)) \vec{V}(x, t^n)) = 0 & , \quad \forall (x, t) \in Q^n \\ \bar{u}^n(x, t^n) = U^n(x) & , \quad \forall x \in \Omega \\ \bar{u}^n(r, t) = g(r, t) & , \quad \forall (r, t) \in \Sigma_-^n \end{cases}$$

Avec:

- $Q^n = \{(x, t) \in Q, t \in [t^n, t^{n+1}]\}$,
- $\Sigma_-^n = \{(x, t) \in \Sigma_-, t \in [t^n, t^{n+1}]\}$,
- U^n est la donnée initiale à l'instant t^n .

D'après le théorème (2.2.1) le problème $(\mathcal{P}_1^n)$ admet une solution entropique unique. Dans ce problème la vitesse est constante en temps, donc on va pouvoir appliquer la méthode des lignes de courant pour calculer une solution approchée de $\bar{u}^n$.

2.7.2 L'algorithme :

1. Pour $n = 0$, on pose $u^{app}(t^0) = \mathbb{P}(u_0) \in \mathcal{E}_M$
2. Si $n \in \{1; \dots; N_T\}$,
 - (a) $U^{n-1} = u^{app}(t^{n-1})$,
 - (b) on trace les lignes de courant par rapport à $\vec{V}(\cdot, t^{n-1})$,
 - (c) on construit une solution approchée ($\bar{u}^{n-1}$) du problème $(\mathcal{P}_1^{n-1})$, par la méthode LDC (cf partie 2.5.2), qu'on notera $\bar{u}^{app}(t^n)$.
3. $u^{app}(t^n) = \bar{u}^{app}(t^n)$
4. $n = n + 1$, et on revient à l'étape 2.

Et la solution approchée du système $(\mathcal{P}_1)$ est donnée par:

$$u^{app}(x, t) = (\bar{u}^{app}(t^n))_K, \quad \text{si } (x, t) \in K \times [t^n, t^{n+1}[. \quad (2.47)$$

2.7.3 Estimation de l'erreur

Dans cette partie on va essayer d'avoir une idée de l'estimation de l'erreur, il s'agit d'un calcul formel et non d'une démonstration mathématique, ceci afin de comprendre davantage le choix qu'il faut faire sur le grand pas du temps. Soit $n \in \{0; \dots, N_T - 1\}$. Notons :

- $\bar{v}^n$ la solution exacte de $(\mathcal{P}_1^n)$ avec $U^n(x) = u(x, t^n)$.
- $\bar{u}^n$ la solution exacte de $(\mathcal{P}_1^n)$ avec $U^n(x) = u^{app}(t^n)$.

Remarque 2.7.1 $\bar{v}^n$ et $\bar{u}^n$ ne sont pas forcément des fonctions continues sur Q , même si on suppose que u est très régulière sur Q .

D'autre part $u^{app}(t^n)$ n'est pas de classe C^1 sur Ω , néanmoins, $u^{app}(t^n)$ est de classe $C^1(\Omega)$ par morceaux.

Remarque 2.7.2 Pour le problème $(\mathcal{P}_1^n)$, on sait que les hypothèses du théorème (2.6.3) ne sont pas satisfaites dans ce cas (cf remarque 2.7.1) mais on va supposer qu'elles restent valables.

Il est clair que:

$$\begin{aligned} \|(u - u^{app})(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)} &\leq \|(u - \bar{v}^n)(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)} \\ &\quad + \|(\bar{v}^n - \bar{u}^n)(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)} + \|(\bar{u}^n - \bar{u}^{app})(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Or:

- D'après le théorème (2.6.3) (cf remarque 2.7.2): il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$, telle que:

$$\|(\bar{u}^n - \bar{u}^{app})(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)} \leq Ch,$$

h étant le pas de maillage.

Dans le cadre de ce travail on va admettre l'estimation ci-dessus.

- A l'instant t^{n+1} , on a:

$$\|(\bar{v}^n - \bar{u}^n)(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)} \leq \|(\bar{v}^n - \bar{u}^n)(\cdot, t^n)\|_{L^1(\Omega)},$$

d'autre part, $\bar{v}^n(\cdot, t^n) = u(\cdot, t^n)$ et $\bar{u}^n(\cdot, t^n) = u^{app}(\cdot, t^n)$. Donc:

$$\|(\bar{v}^n - \bar{u}^n)(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)} \leq \|(u - u^{app})(\cdot, t^n)\|_{L^1(\Omega)}.$$

En notant pour $n \in \{0, \dots, N_T - 1\}$:

$$A^n = \|(u - u^{app})(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)},$$

$$B^n = \|(u - \bar{v}^n)(\cdot, t^{n+1})\|_{L^1(\Omega)}.$$

On trouve:

$$A^n \leq A^{n-1} + B^n + Ch.$$

Comme $A^0 = 0$, alors par récurrence, on trouve:

$$\|(u - u^{app})(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} \leq (N_T Ch + \sum_{0 \leq k < N_T} B^k). \quad (2.48)$$

Remarque 2.7.3 Si $\partial_t \vec{V} = 0$, par unicité de la solution entropique, on a $u = \bar{v}^n$ p.p sur Q^n , en particulier $B^n = 0$ pour tout n . Donc on retrouve le résultat du théorème (2.6.3), à savoir:

$$\|(u - u^{app})(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} \leq N_T Ch.$$

Dans l'estimation qu'on a obtenue ci-dessus, on a une partie qui ne dépend pas de h ($\sum_k B^k$), cette partie ne dépend que de N_T (ou DT). Pour que la méthode des lignes de courant converge ou qu'elle donne de bons résultats, il faut des conditions sur le grand pas de temps (DT), c'est à dire sur l'intervalle de temps dans lequel on met à jour la vitesse.

Pour l'étude de $\sum_k B^k$, on peut montrer facilement que chaque B^k , tend vers 0 lorsque DT tend vers 0. Le problème est que B^k tend vers 0 à une vitesse de l'ordre DT , donc ceci ne donne pas que $\sum_k B^k$ tend vers 0. En fait, $\sum_k B^k$ reste borné.

On aurait pu prendre dans le problème modifié une autre approximation de la vitesse, par exemple:

$$\vec{V}(x)^n = \frac{1}{DT} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \vec{V}(x, s) ds,$$

Un tel choix peut (peut être) conduire à de meilleures estimations, mais dans le problème physique qui nous intéresse, on ne peut pas prendre cette approximation de la vitesse, car $\vec{V}$ est donnée à t^n uniquement.

Il y a aussi une deuxième possibilité pour réduire le somme des B^k , qui consiste à prendre le grand pas de temps variable en fonction de $\partial_t \vec{V}$, i.e DT petit lorsque la variation de la vitesse par rapport au temps est grande, et DT grand dans le cas contraire. Mais pour les tests numériques de cette partie, on a utilisé un pas de temps fixe.

Remarque 2.7.4 On utilisera un pas de temps variable dans les tests numériques sur la simulation des bassins, (cf partie 3.4), dont le choix à chaque étape est fait en fonction de la variation de la saturation et non pas de la vitesse.

Dans les tests numériques qui suivent, on verra qu'on peut trouver un N_T pour lequel la méthode donne de bons résultats.

2.8 La méthode volume fini

La méthode de volume fini est très utilisée dans la modélisation des problèmes physiques, en particulier dans la modélisation des bassins. Cette méthode est très adaptée à la modélisation numérique des lois de conservation, car les schémas numériques volume fini sont conservatifs et robustes.

Principes de cette méthode:

1. Les fonctions sont approchées par des fonctions constantes par mailles.
2. Le système discret est obtenu en intégrant les équations sur chaque maille du maillage.

Pour plus de détails sur cette méthode voir ([20],[16]), pour le cas où Ω est borné voir ([25],[38]) et aussi ([22],[26]) pour la modélisation de bassin et de réservoir.

On donnera le schéma numérique pour construire une solution approchée du problème $(\mathcal{P}_1)$.

2.8.1 Le schéma numérique volume fini

On se donne un maillage $\mathcal{M}$ de Ω , on suppose que $\mathcal{M}$ vérifie toutes les hypothèses données dans (2.3.1). Pour chaque maille $p \in \mathcal{M}$ on note $\mathcal{A}_p = \{\sigma \in \mathcal{A}, \sigma \subset \partial p\}$. D'après les hypothèses sur $\mathcal{M}$, si $\sigma \in \mathcal{A}_p$ soit $\sigma \in \mathcal{A}_\partial$, soit il existe $q \in \mathcal{M}$ tel que $\sigma = \sigma_{pq}$. Enfin on note $\vec{n}_p$ la normale extérieure à ∂p sortant de p .

On considère aussi une subdivision $(t^n)_{0 \leq n \leq N}$ de $[0, T]$, de la forme $t^n = n \times dt$ avec $dt = \frac{T}{N}$.

Pour toute maille $p \in \mathcal{M}$ et $\sigma \in \mathcal{A}_p$, et $n \in \{0, \dots, N\}$, on définit:

$$V_{p,\sigma}^n = \frac{1}{dt} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma} \vec{V}(x, t) \cdot \vec{n}_p(x) d\gamma(x) dt.$$

La solution discrète $(u_p^n)_{p \in \mathcal{M}, n \in \{0, \dots, N\}}$ est définie par le schéma suivant:

$$u_p^0 = \frac{1}{m(p)} \int_p u_0(x) dx, \quad \forall p \in \mathcal{M}, \quad (2.49)$$

$$m(p) \frac{u_p^{n+1} - u_p^n}{dt} + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} f_{p,\sigma}^n V_{p,\sigma}^n = 0, \quad \forall p \in \mathcal{M}, n \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.50)$$

Avec $f_{p,\sigma}^n$ définie par:

- Si σ est une arête intérieure, c.-à-d, il existe $q \in \mathcal{N}(p)$ tel que $\sigma = \sigma_{pq}$, alors on pose:

$$f_{p,\sigma}^n = \begin{cases} f(u_p^n) & \text{Si } V_{p,\sigma}^n \geq 0, \\ f(u_q^n) & \text{Sinon} \end{cases} \quad (2.51)$$

- Si σ est une arête extérieure, c.-à-d, $\sigma \in \mathcal{A}_\partial$, alors on pose:

$$f_{p,\sigma}^n = \begin{cases} f(u_p^n) & \text{Si } V_{p,\sigma}^n \geq 0, \\ f(g_\sigma^n) & \text{Sinon} \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\text{Avec } g_\sigma^n = \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} g(x, t^n) d\gamma(x).$$

La solution approchée du problème $(\mathcal{P}_1)$ est définie par:

$$u_{h,dt}(x, t) = u_p^n, \quad \text{si } (x, t) \in p \times [t^n, t^{n+1}[. \quad (2.53)$$

On suppose de plus que dt vérifie une condition CFL, c'est à dire, il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ qui dépend de f et $\vec{V}$, telle que:

$$dt \leq ch. \quad (2.54)$$

Remarque 2.8.1 Le choix du décentrement dans (2.51) et (2.52) (décentrement amont) est dû au fait que la fonction f est croissante. Dans le cas général on remplace $f_{p,\sigma}^n V_{p,\sigma}^n$ par $F_{p,\sigma}^n(u_p, u_\sigma)$, appelé flux numérique. Pour plus de détails voir ([20],[38]).

Remarque 2.8.2 Il est clair que si $\sigma = \sigma_{pq}$ alors on a:

$$f_{p,\sigma}^n V_{p,\sigma}^n = -f_{q,\sigma}^n V_{q,\sigma}^n,$$

La solution approchée définie par le schéma volume fini (2.49) et (2.50) vérifie la stabilité L^∞ . Plus précisément on a:

Proposition 2.8.1 ([38]) Soit $u_{h,dt}$ la solution approchée du problème $(\mathcal{P}_1)$ définie par (2.49) et (2.50), on suppose que (2.54) est vérifiée. Alors :

$$A \leq u_{h,dt}(x, t) \leq B, \quad p(x, t) \in Q.$$

B et A sont définies en (2.9) et (2.8).

On sait que, sous les hypothèses (D), le problème $(\mathcal{P}_1)$ admet une solution entropique faible u , et que cette solution est unique.

Théorème 2.8.2 ([38]) Soit $u_{h,dt}$ la solution approchée du problème $(\mathcal{P}_1)$ définie par (2.49) et (2.50), on suppose que (2.54) est vérifiée. Alors, $u_{h,dt}$ converge vers u lorsque h tend vers 0 dans $L^p(Q)$, $p \in [1, \infty[$.

Le résultat précédent nous donne la convergence de la solution approchée vers u , mais pas une estimation de l'erreur ou l'ordre de la convergence. On sait ([20]) que lorsque $\Omega = \mathbb{R}^d$ on a une estimation de l'erreur de l'ordre $h^{1/4}$ ($\sqrt{h}$ si le maillage est cartésien). En revanche pour le problème sur un domaine borné, i.e avec des données aux bords, il n'y a pas "encore" de résultats sur l'estimation de l'erreur (pour $d > 1$).

Dans certains tests numériques, on fera la comparaison des résultats de la méthode lignes de courant avec les résultats de la méthode volume fini.

Remarque 2.8.3 Dans les tests numériques de cette partie, et pour rester compatible avec les choix de la méthode lignes de courant, on a pris comme approximation de $V_{p,\sigma}$ la valeur:

$$V_{p,\sigma}^n = \int_{\sigma} \vec{V}(x, t^n) \cdot \vec{n}_p(x) d\gamma(x).$$

2.9 Tests numériques

Dans cette partie, on donne quelques résultats de simulations numériques obtenues avec la méthode lignes de courant.

On commence par donner les notations des normes qu'on utilisera dans la suite pour faire les comparaisons. Soit $Q \in \mathcal{E}_M$, $Q = \sum_K q_K 1_K$, on définit:

$$\begin{aligned}\|Q\|_1 &= \sum_{K \in \mathcal{M}} m(K) |q_K|, \\ \|Q\|_2 &= \left(\sum_{K \in \mathcal{M}} m(K) |q_K|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|Q\|_\infty &= \sup_{K \in \mathcal{M}} \{|q_K|\}.\end{aligned}$$

Il est clair que $\|\cdot\|_\alpha$ ($\alpha \in \{1; 2; \infty\}$), définit une norme sur $\mathcal{E}_M$.

Si u est la solution du problème $(\mathcal{P})$, et $\bar{u} \in \mathcal{E}_M$ une solution approchée, alors on définit:

$$Er_\alpha(\bar{u}) = \|\bar{u} - \mathbb{P}_M(u)\|_\alpha, \quad \alpha \in \{1; 2; \infty\}. \quad (2.55)$$

Les tests numériques sont divisés en deux parties, la première avec une vitesse stationnaire, la seconde avec vitesse non stationnaire.

Les objectifs de ces tests sont:

1. étudier la convergence de la méthode en fonction de h , h le pas de maillage, et aussi l'ordre de convergence (**Test 1**)
2. étudier la sensibilité de la méthode par rapport au maillage donné sur Ω , (**Test 1Bis**, **Test 2**)
3. étudier la sensibilité de la méthode par rapport au grand pas de temps lorsque la vitesse ne dépend pas du temps, (**Test 3**).
4. étudier la sensibilité de la méthode par rapport au grand pas de temps lorsque la vitesse dépend du temps, (**Test 4**, **Test 5**).

Remarque 2.9.1 • Dans les tests qui suivent (sauf test3), on a pris $f(x) = x$.

- Pour les résultats numériques, l'échelle considérée est linéaire (et non logarithmique), car notre but est de montrer qu'on a une convergence de l'ordre de h et non de calculer l'ordre.

2.9.1 Vitesse stationnaire

Dans cette première partie des tests on considère une vitesse qui ne dépend pas du temps, i.e. on reste dans les hypothèses du résultat de convergence. Le but de ces tests dans un premier temps est de voir l'évolution de l'erreur en fonction de h (h le pas de maillage) et la vitesse de convergence à N_T fixée. Ensuite on fait varier N_T pour voir l'influence du grand pas de temps DT ($DT = T/N_T$) sur la vitesse de convergence.

Ordre de convergence. Test1

On considère $\Omega =]1, 11[\times]0, 10[\subset \mathbb{R}^2$ et $I = [0, 1[$ l'intervalle du temps, et les autres données du test sont:

- On suppose que la vitesse est donnée par:

$$\forall (x, y) \in \bar{\Omega}, \vec{V}(x, y) = (x, -y),$$

ainsi $\vec{V}$ vérifie les relations (3.7) et (2.7),

- pour les données initiales à $t = 0$, on prend:

$$\forall (x, y) \in \Omega, u_0(x, y) = y/x,$$

- pour les conditions aux limites, on suppose que:

$$g(x_r, y_r, t) = \frac{y_r}{x_r} e^{2t}, \forall (x_r, y_r, t) \in \Sigma_-.$$

Avec ces données, la solution du problème ($\mathcal{P}$) est donnée par:

$$\forall (x, y, t) \in Q = \Omega \times I, u(x, y, t) = \frac{y}{x} e^{2t}.$$

Ainsi à l'instant T , les normes de u dans Ω sont:

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} = 885.909, \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)} = 128.627.$$

Dans ce cas on prend un maillage cartésien de Ω , constitué de carrés de taille $d = 10/n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Trois séries de simulations sont faites, avec $N_T = 1, 2, 10$.

Liste des figures

- Fig-2 représente Er_1 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_1)$
- Fig-3 représente Er_2 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_2)$

Sur les deux figures, on constate que:

1. A N_T fixé, l'erreur tend vers 0 lorsque h tend vers 0, avec une convergence de l'ordre h (à partir de $h = 0.2$ pour $N_T = 10$).
2. A h fixé, l'erreur augmente avec N_T , en revanche on remarque qu'à partir d'un certain h (ici $h = 0.1$) la différence devient très petite, c.-à-d l'erreur due à la "moyennisation" lorsque h diminue devient négligeable devant l'erreur du schéma numérique.

Comportement par rapport au maillage $\mathcal{M}$. Test1Bis

Pour ce test on reprend les mêmes données que dans le test précédent, mais avec un maillage non cartésien de Ω , constitué de trapèzes (voir Fig-7), dans le but de voir l'influence du maillage initial $\mathcal{M}$ de Ω sur la méthode des lignes de courant.

Remarque 2.9.2 Ce maillage est choisi de cette façon car dans le problème physique qui nous intéresse, on utilise souvent un maillage dont les volumes de contrôle sont des trapèzes (en 2D).

Deux séries de tests sont faites avec $N_T = 1$ et $N_T = 2$.

Liste des figures

- Fig-7 représente le maillage sur Ω , ainsi que les lignes de courant tracées dans Ω
- Fig-4 représente Er_1 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_1)$
- Fig-5 représente Er_2 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_2)$

On remarque qu'on a toujours une convergence de l'ordre de h (à partir de $h = 0.2$ pour Er_2), et que la méthode se comporte bien pour ce maillage.

Contrairement à la méthode volume fini, qui dépend beaucoup du maillage $\mathcal{M}$, la méthode des lignes de courant est beaucoup moins dépendante du maillage $\mathcal{M}$. En fait, la sensibilité de cette méthode au maillage donné sur Ω est limitée seulement au traçage des lignes de courant, et la régularité qu'on demande au maillage $\mathcal{M}$ sert seulement à assurer le bon traçage des lignes de courant.

On verra (cf Annexe A) qu'il y a plusieurs méthodes pour tracer les lignes de courant lorsque les mailles de $\mathcal{M}$ ne sont pas des rectangles.

Comportement par rapport au maillage $\mathcal{M}$. Test 2

On considère $\Omega =]0, 2000[\times]0, 2000[\subset \mathbb{R}^2$ et $I = [0, 30[$ l'intervalle du temps, et les autres données du test sont:

- On suppose que la vitesse est donnée par:

$$\forall (x, y) \in \overline{\Omega}, \vec{V}(x, y) = 1000((x_1 - x_1^2)(1 - 2y_1), -(y_1 - y_1^2)(1 - 2x_1)),$$

avec $x_1 = x/2000$, $y_1 = y/2000$. $\vec{V}$ vérifie $\text{div}(\vec{V}) = 0$ et $\vec{V}(x, y) = 0$ si $(x, y) \in \partial\Omega$

- pour les données initiales à $t = 0$, on prend:

$$\forall (x, y) \in \Omega_1 =]1250, 1500[^2, u_0(x, y) = 1,$$

Dans ce cas, on n'a pas la solution exacte du problème. Afin de faire une estimation de la solution approchée donnée par la méthode lignes de courant, on construit une solution approchée de ce problème par la méthode volume fini sur un maillage très fin de Ω (2000×2000 mailles). Ensuite on projette cette solution de référence sur le maillage grossier (40 × 40 mailles) et on compare avec la solution lignes de courant. En même temps on a construit une solution approchée de ce problème sur le maillage grossier par la méthode volume fini.

Les résultats de comparaison avec la solution de référence:

	N_2	Er_2	N_1	ER_1
ref	4.035	0.000	25.000	00.000
ldc	3.987	1.185	25.059	08.357
impes	1.423	3.368	25.000	35.255

On remarque sur les résultats de comparaison que la solution approchée donnée par la méthode lignes de courant est beaucoup plus précise que celle donnée par la méthode volume fini. Il est clair que la solution volume fini est influencée par le fait que le maillage sur Ω n'est pas adapté au champ de vitesse. Cependant la méthode des lignes de courant se comporte bien et elle n'est pas influencée par le maillage.

Schéma des lignes de courant non conservatif!

Dans le test précédent, on a $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$, où $\vec{n}$ est la normale extérieure à Ω . Ce qui donne par intégration de l'équation vérifiée par u sur Ω :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t u(x, t) dx &= - \int_{\Omega} \text{div}(f(u(x, t)) \vec{V}(x)) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} f(u) \vec{V} \cdot \vec{n} d\gamma = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\forall t \in [0, T], \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u_0(x) dx.$$

Or dans ce test, la solution approchée donnée par la méthode des lignes de courant ne vérifie pas cette relation ($|\int_{\Omega} u_{ldc}(x, 30) dx - \int_{\Omega} u_0(x) dx| = 0.059$), contrairement à celle donnée par la méthode volume fini.

Dependance par rapport à N_T , Test3

On considère $\Omega =]0, 1[^2 \subset \mathbb{R}^2$ et $I = [0, 1[$ l'intervalle du temps, et les autres données du test sont:

- On suppose que la vitesse est donnée par:

$$\forall (x, y) \in \overline{\Omega}, \vec{V}(x, y) = (1, 1),$$

- pour les données initiales à $t = 0$, on prend:

$$\forall (x, y) \in \Omega, u_0(x, y) = y + x,$$

- pour les conditions aux limites, on suppose que:

$$g(x_r, y_r, t) = \frac{y_r + x_r}{(t + 1)}, \forall (x_r, y_r, t) \in \Sigma_-.$$

- la fonction f est donnée par : $f(u) = u^2/4$.

Avec ces données, la solution du problème $(\mathcal{P})$ est donnée par:

$$\forall (x, y, t) \in Q = \Omega \times I, u(x, y, t) = \frac{x + y}{(t + 1)}.$$

Ainsi à l'instant T , les normes de u dans Ω sont:

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} = 0.5, \quad \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)} = 0.50054.$$

Dans ce cas on prend un maillage cartésien de Ω , constitué de carrés de taille $d = 1/n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Deux séries de simulations sont faites, avec $N_T = 1$ et $N_T = \frac{n}{2} = \frac{c}{h}$, où h est le pas du maillage ($h = \sqrt{2}d$) et $c = 1/\sqrt{2}$.

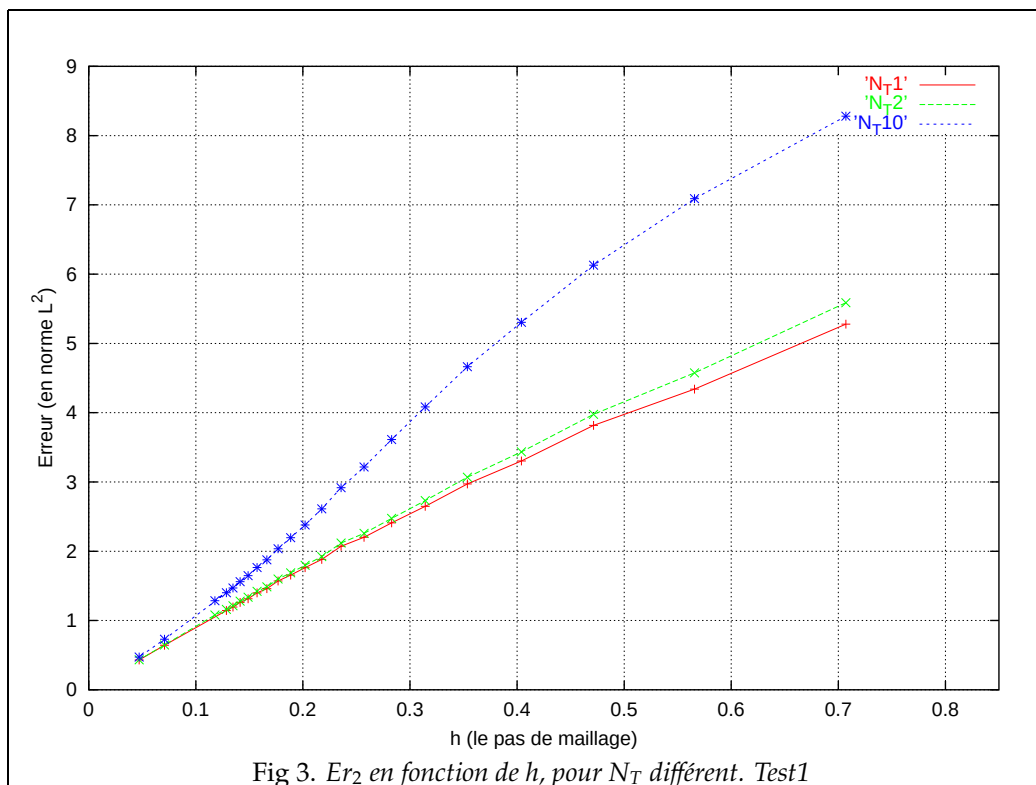
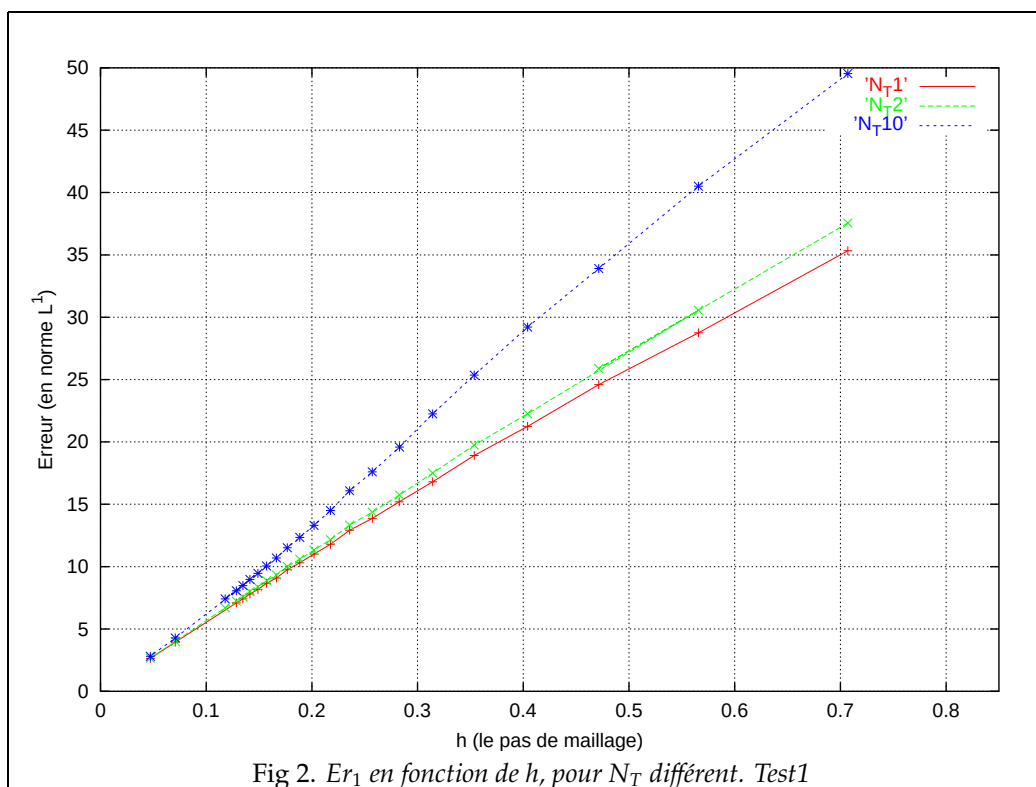
Liste des figures

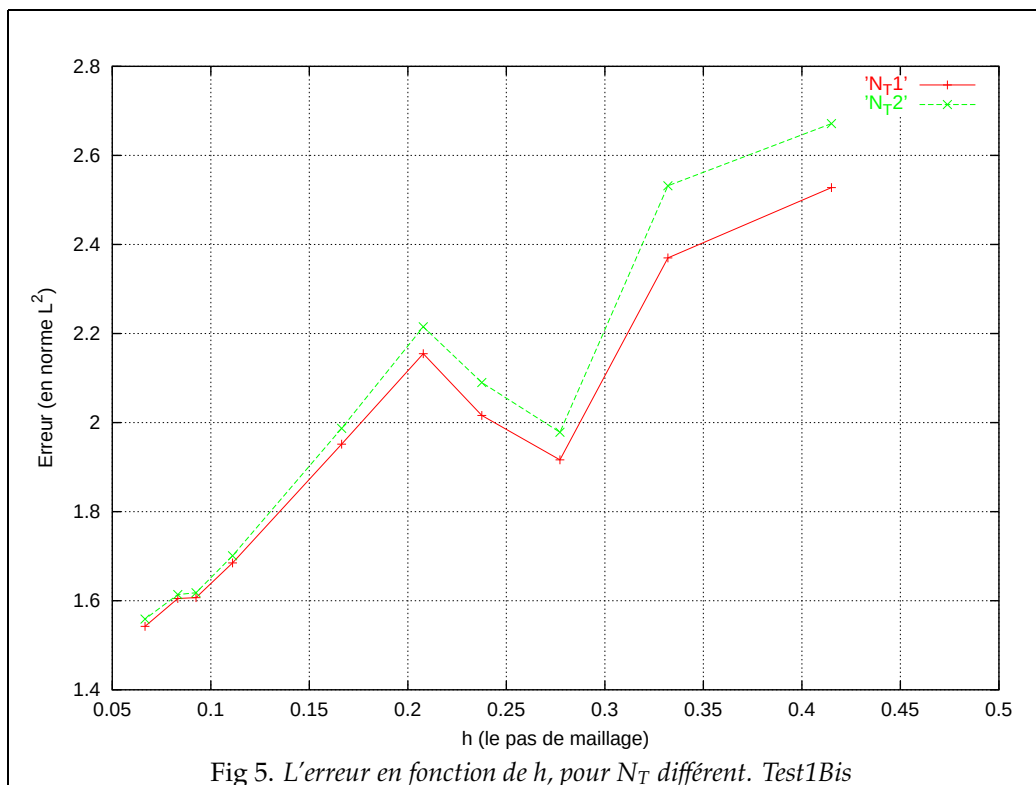
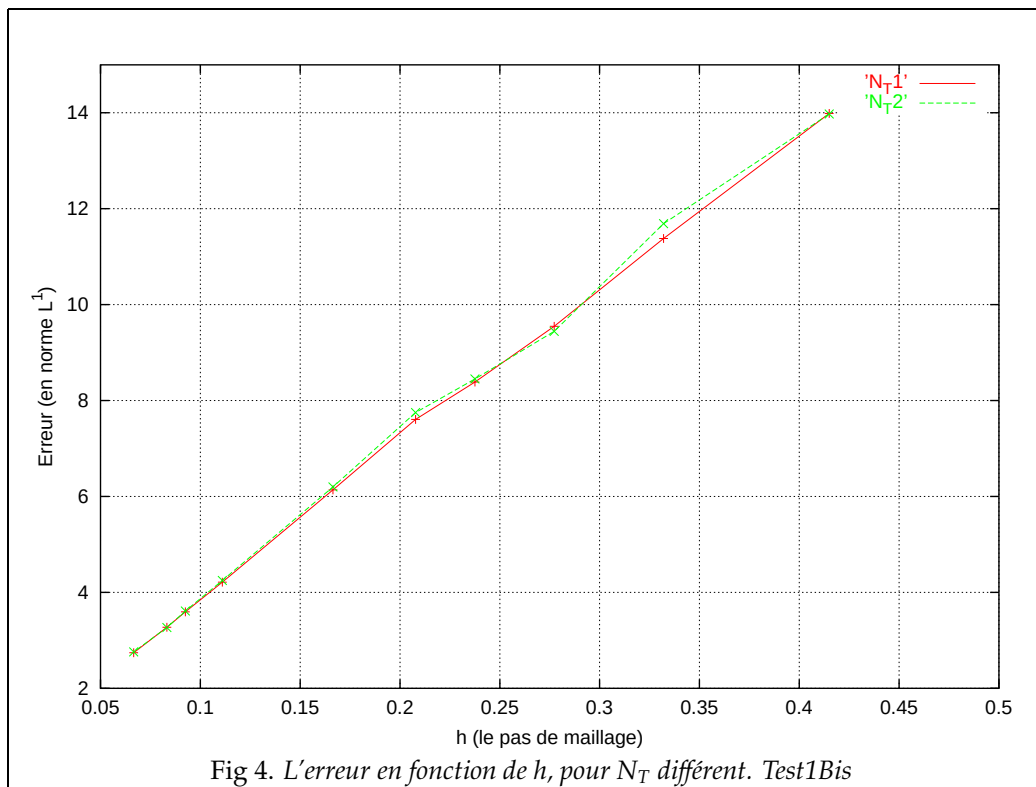
- Fig-12 représente Er_1 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_1)$

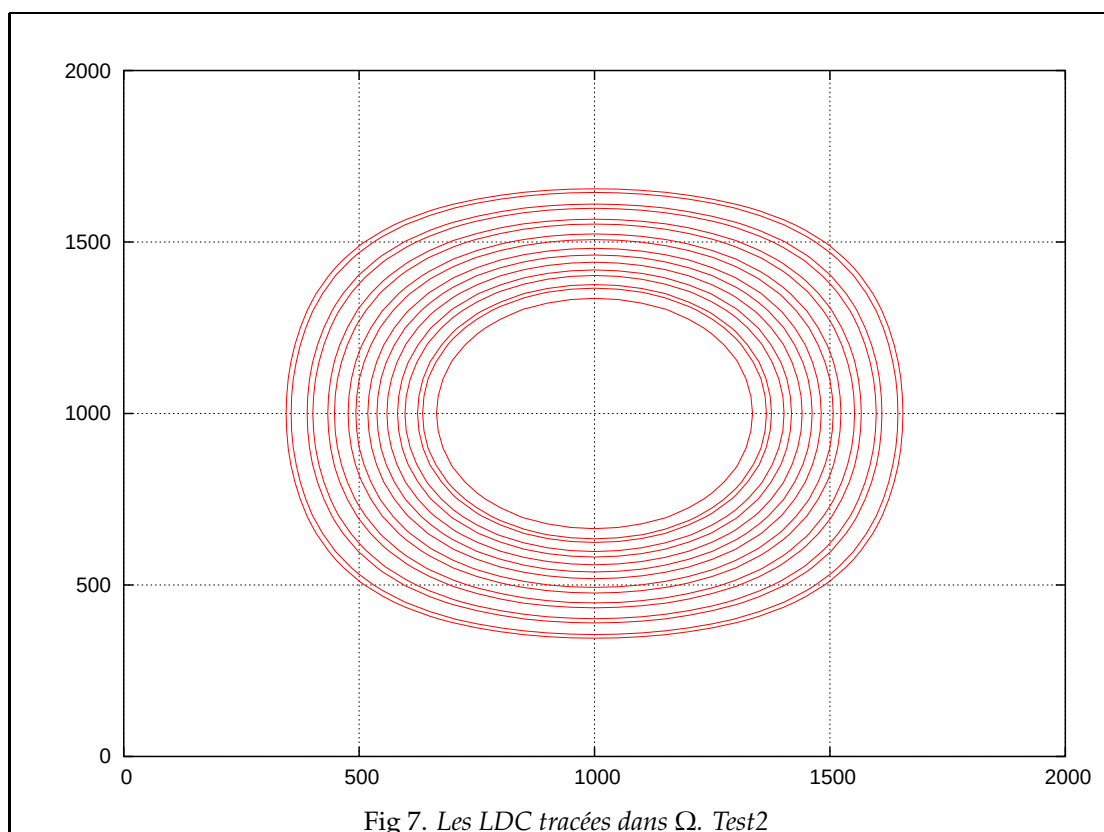
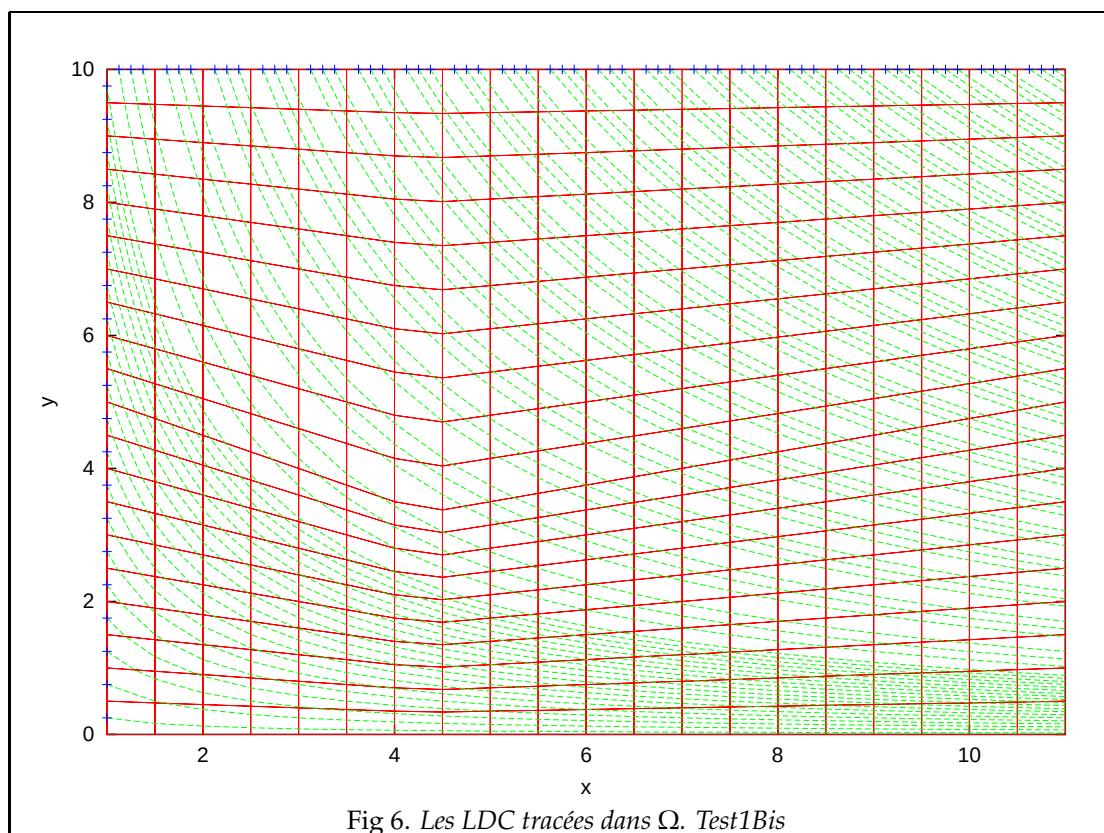
Sur cette figure, on constate que:

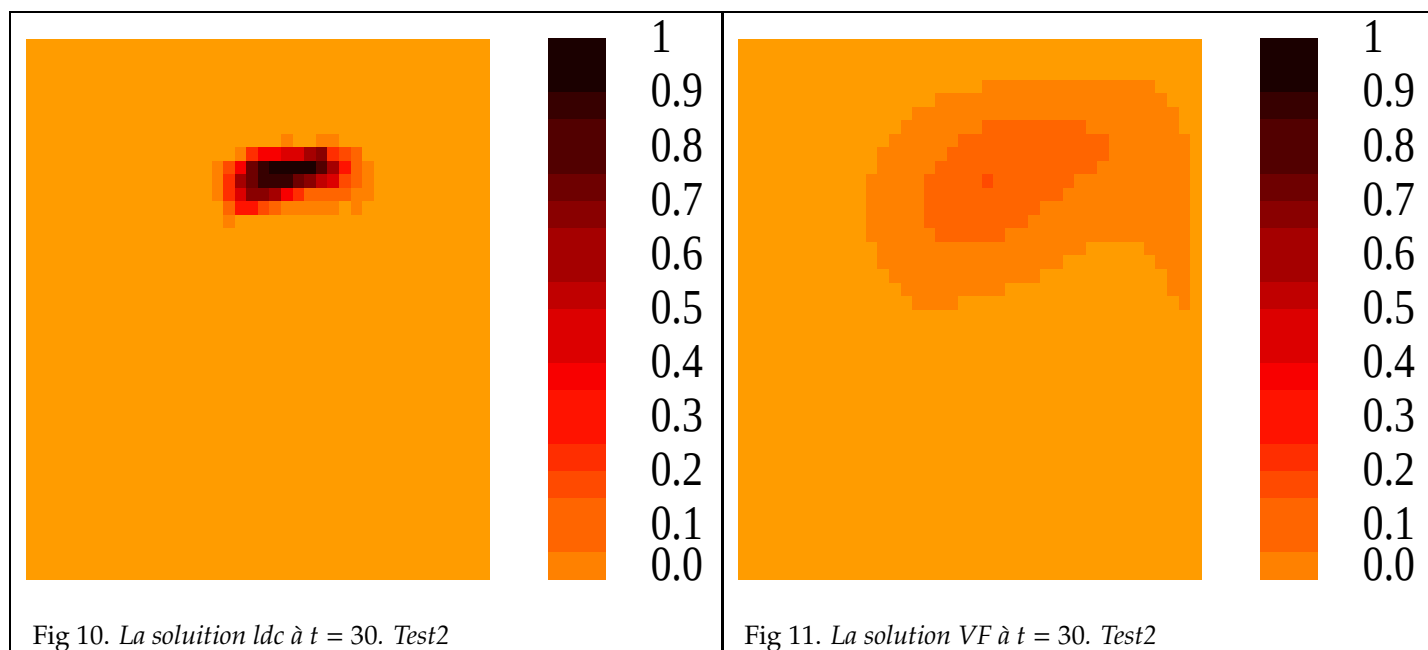
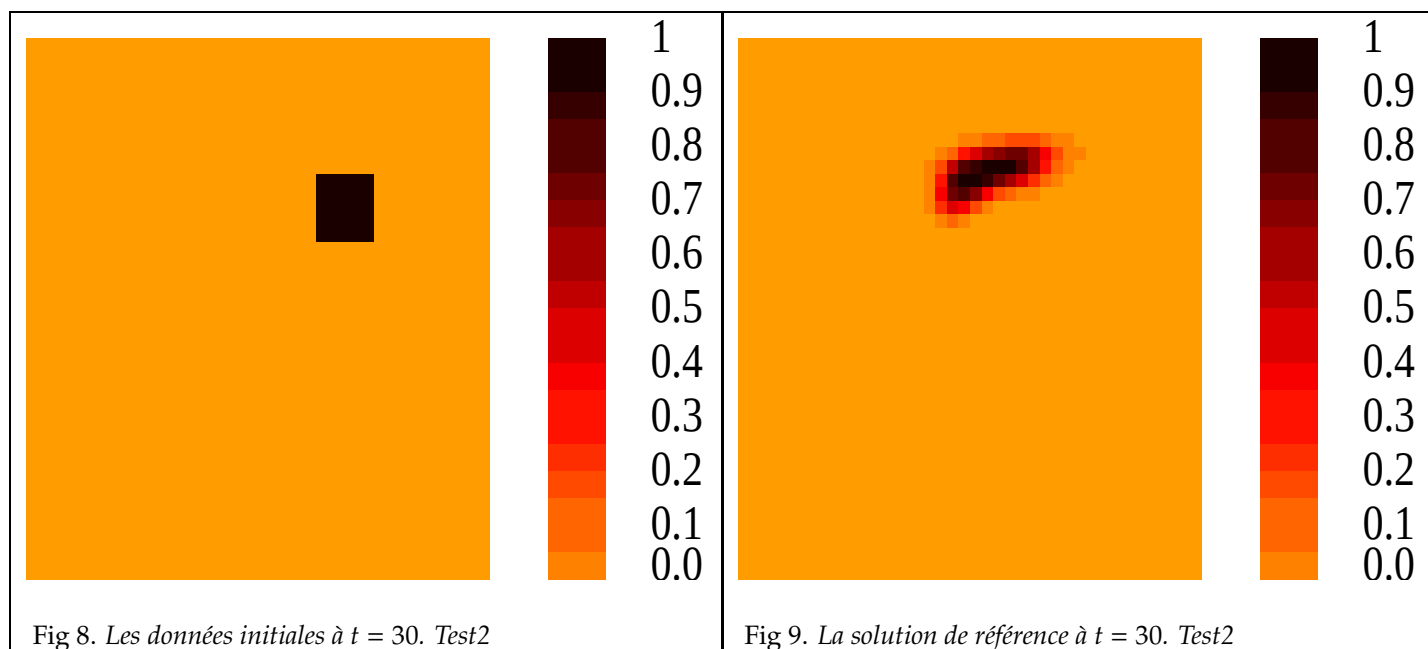
1. A $N_T = 1$ (resp. $N_T = c/h$) fixé, l'erreur tend vers 0 lorsque h tend vers 0, avec une convergence de l'ordre h .
2. Les résultats pour N_T de l'ordre de $1/h$ sont légèrement meilleurs que ceux de $N_T = 1$.

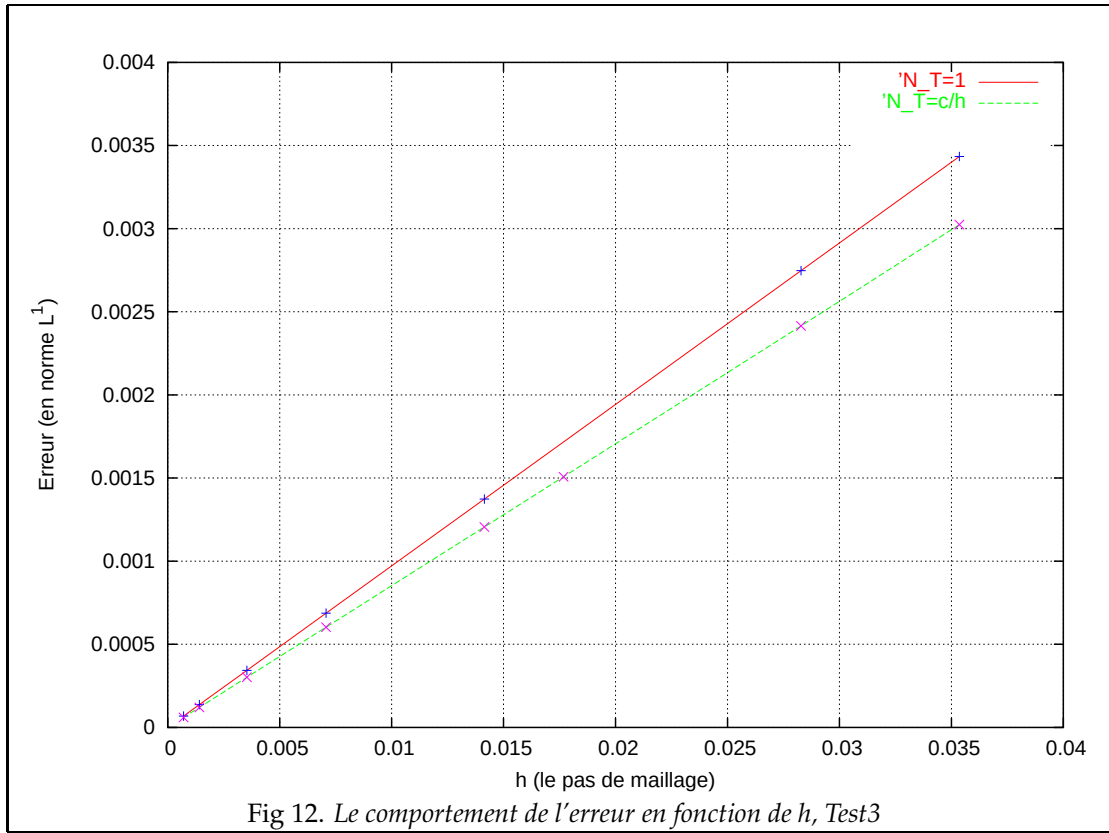
On peut dire à l'issue de ce test que lorsque les données sont régulières et que la vitesse ne dépend pas du temps on a toujours une estimation de l'erreur de l'ordre de h , et cette estimation est indépendante de N_T . Ce qui est donc meilleur que l'estimation théorique démontrée du théorème 2.6.3









Fig 12. Le comportement de l'erreur en fonction de h , Test3

2.9.2 Vitesse non stationnaire..

Dans cette partie on teste la méthode des lignes de courant sur des cas où la vitesse dépend du temps aussi. Le but de ces tests est d'étudier le comportement de cette méthode vis-à-vis de N_T (le grand pas de temps).

Test4

Dans ce premier test on prend une vitesse de la forme $\vec{V}(\cdot, t) = G(t)\vec{V}_0(\cdot)$, avec $\vec{V}_0$ ne dépendant pas du temps. On sait que dans ce cas une ligne de courant tracée dans $\bar{\Omega}$ dont le point d'origine est p garde la même trajectoire au cours du temps, mais que seul le temps de vol change.

On considère $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$ et $I = [0, 1[$ l'intervalle du temps, et les autres données du test sont:

- On suppose que la vitesse est donnée par:

$$\forall (x, y) \in \bar{\Omega}, \vec{V}(x, y) = G(t)(x, -y),$$

avec $G(t) = 2t + 1$. Ainsi $\vec{V}$ vérifie les relations (3.7) et (2.7),

- pour les données initiales à $t = 0$, on prend:

$$\forall (x, y) \in \Omega, u_0(x, y) = x + y,$$

- pour les conditions aux limites, on suppose que:

$$g(x_r, y_r, t) = x_r e^{-(t^2+t)} + y_r e^{(t^2+t)}, \forall (x_r, y_r, t) \in \Sigma_-.$$

Avec ces données, la solution du problème $(\mathcal{P}_1)$ est donnée par:

$$\forall (x, y, t) \in Q = \Omega \times I, u(x, y, t) = x e^{-t^2-t} + y e^{t^2+t}.$$

A l'instant T , les normes de u sont:

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} = 3.7622, \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)} = 4.32499.$$

Pour ce test on a pris un maillage cartésien de Ω , on a fait deux tests avec deux pas de maillage h_1 et $h_2 = 0.5 \times h_1$.

Listes des figures

- Fig-13 représente Er_1 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_1)$
- Fig-14 représente Er_2 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_2)$

On remarque sur ces figures:

- La variation de l'erreur est très grande lorsque DT est grand, en particulier entre $DT = T$, $DT = \frac{T}{2}$ et $DT = \frac{T}{3}$.
- Pour DT proche de 0, l'erreur diminue lorsque DT diminue aussi, mais la variation de l'erreur n'est pas très importante.
- A DT fixé, on remarque que l'erreur diminue par rapport à h , par exemple pour $DT = \frac{T}{10}$, on a $Er_{1,h_1} = 0.1182$ et $Er_{1,h_2} = 0.0984$.

La deuxième remarque rejoint la remarque du test 1, à savoir que l'erreur due à la moyennisation lorsque h diminue devient négligeable devant l'erreur du schéma numérique.

Donc pour ce test, on peut dire qu'on doit prendre DT petit pour avoir de bons résultats. Le DT idéal (qu'on notera désormais DT^*) serait ici $\frac{T}{10}$. Il est intéressant de voir que ce DT est le même pour h_2 et h_1 . Donc ce choix ne dépend pas de h mais uniquement de la vitesse.

Remarque 2.9.3 Il est clair que pour avoir la convergence de la méthode des lignes de courant, il faut que DT tend vers 0. En revanche, ce test montre que DT peut tendre vers 0 indépendamment de h (i.e plus de condition CFL sur DT)

Résultats VF

On donne ici les résultats obtenus pour ce test par la méthode volume fini,

- Pour h_1 ,

dt	0.0125	$dt^* = 0.0111$	10^{-3}	10^{-4}
Er_1	1126.16	0.7467	0.0473	0.0478

- Pour $h_2 = \frac{h_1}{2}$,

dt	0.004	$dt^* = 0.00395$	10^{-3}	$5 * 10^{-4}$
Er_1	15.867	0.4259	0.0238	0.0239

dt^* représente le plus petit pas de temps pour lequel la méthode volume fini donne une bonne précision. On constate sur les résultats de la méthode volume fini que $dt_{h_2}^* < 0.5 \times dt_{h_1}^*$.

Test5

Dans ce test, on prend une vitesse qui ne dépend que du temps. Bien sûr dans ce cas, à chaque grand pas de temps, on retrace les lignes de courant et dans ce cas la trajectoire d'une ligne et le temps de vol changent au cours du temps.

On considère $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$ et $I = [0, 1[$ l'intervalle du temps, et les autres données du test sont:

- On suppose que la vitesse est donnée par:

$$\forall (x, y) \in \overline{\Omega}, \vec{V}(x, y, t) = -(10t^2 - t + 1, 20t),$$

ainsi $\vec{V}$ vérifie les relations (3.7) et (2.7),

- pour les données initiales à $t = 0$, on prend:

$$\forall (x, y) \in \Omega, u_0(x, y) = e^x + e^y,$$

- pour les conditions aux limites, on suppose que:

$$g(x_r, y_r, t) = e^x e^{\frac{10t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t} + e^y e^{10t^2}, \forall (x_r, y_r, t) \in \Sigma_-.$$

Avec ces données, la solution du problème ($\mathcal{P}$) est donnée par:

$$\forall (x, y, t) \in Q = \Omega \times I, u(x, y, t) = e^x e^{\frac{10t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t} + e^y e^{10t^2}.$$

A l'instant T , les normes de u sont:

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} = 37927.1, \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)} = 39444.8.$$

Listes des figures

- Fig-15 représente Er_1 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_1)$

- Fig-16 représente Er_2 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_2)$

Pour ce test on peut prendre les mêmes remarques que pour le test précédent. En particulier le DT^* en question ne dépend pas de h et il dépend de la vitesse (voir aussi remarque 2.9.3).

En fait, pour le test précédent on a constaté que $DT^* = \frac{T}{10}$ alors que pour ce test $DT^* = \frac{T}{75}$, ceci s'explique par la forte dépendance de la vitesse par rapport à t dans le deuxième test.

Remarque 2.9.4 Le DT^* fait penser à une condition CFL, sur le nombre de fois où on doit mettre à jour la vitesse. Or dans cette méthode et contrairement à la méthode volume fini cette condition ne dépend pas de h .

Résultats VF

On donne ici les résultats obtenus pour ce test par la méthode volume fini,

- Pour h_1 ,

dt	$12 * 10^{-4}$	$dt^* = 11 * 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-5}
Er_1	3399	358.02	250.79	242.69

- Pour $h_2 = \frac{h_1}{2}$,

dt	$5,1 * 10^{-4}$	$dt^* = 5 * 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-5}
Er_1	1492.8	181.103	133.387	125.649

dt^* représente le plus petit pas de temps pour lequel la méthode volume fini donne un bon résultat. On note aussi que pour $DT = T/100$, l'erreur Er_1 donnée par la méthode des lignes de courant est 303.782 pour h_1 et 178.347 pour h_2 .

On constate aussi pour ce test, comme pour le test2, que $dt_{h_2}^* \leq 0.5 * dt_{h_1}^*$ pour la méthode volume fini, cependant DT^* reste le même pour les deux h .

Ce qui veut dire que lorsque le pas du maillage baisse, on est obligé de faire plus de mises à jour de la vitesse pour la méthode volume fini (Condition CFL), en revanche pour la méthode des lignes de courant on garde pratiquement le même nombre de mises à jour de la vitesse.

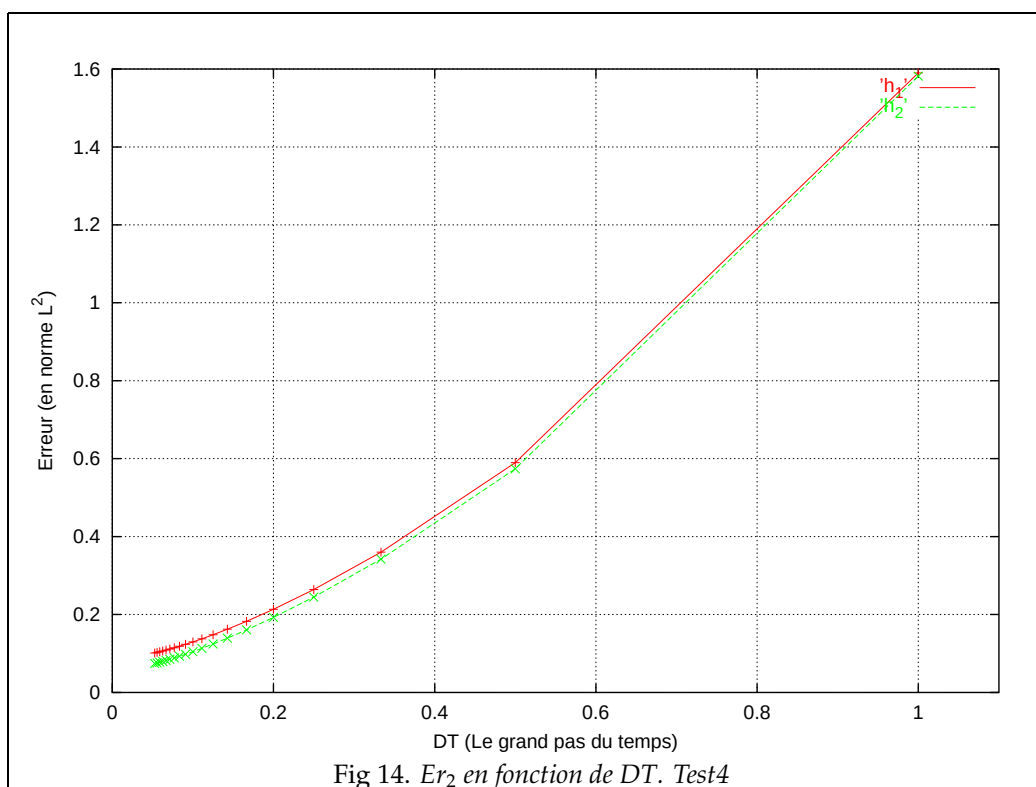
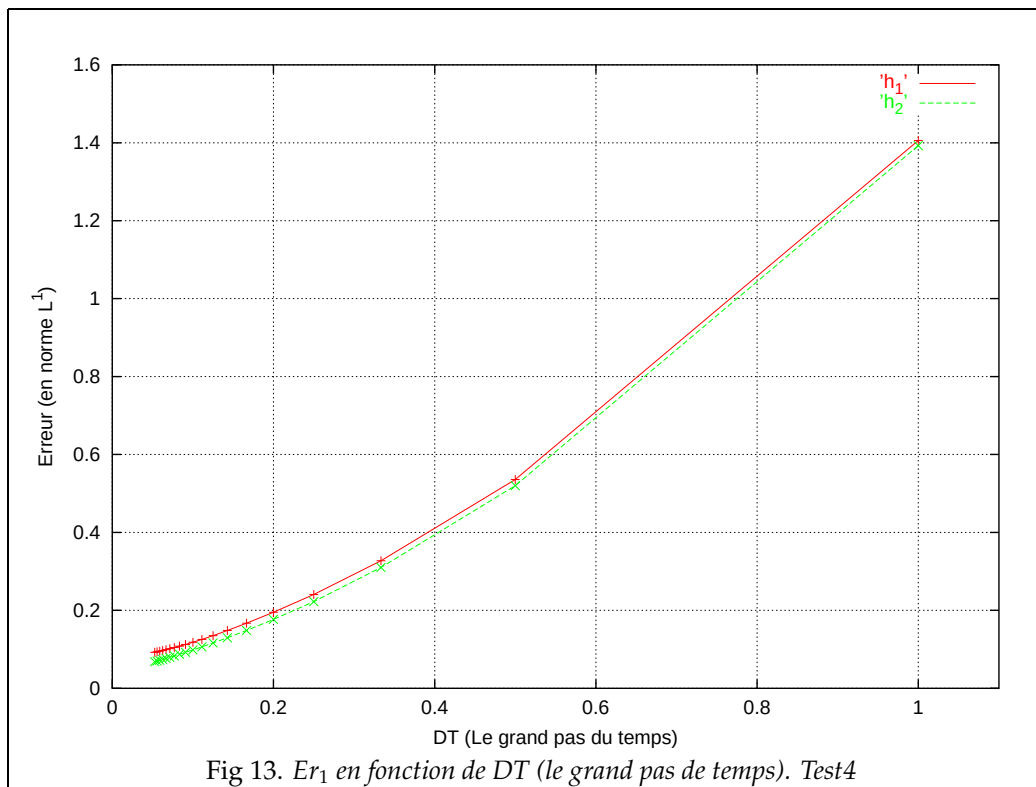
Remarque 2.9.5 *Il est clair que lorsque h diminue, sur chaque ligne de courant le maillage change, et par conséquent, le petit pas de temps sur la ligne baisse aussi.*

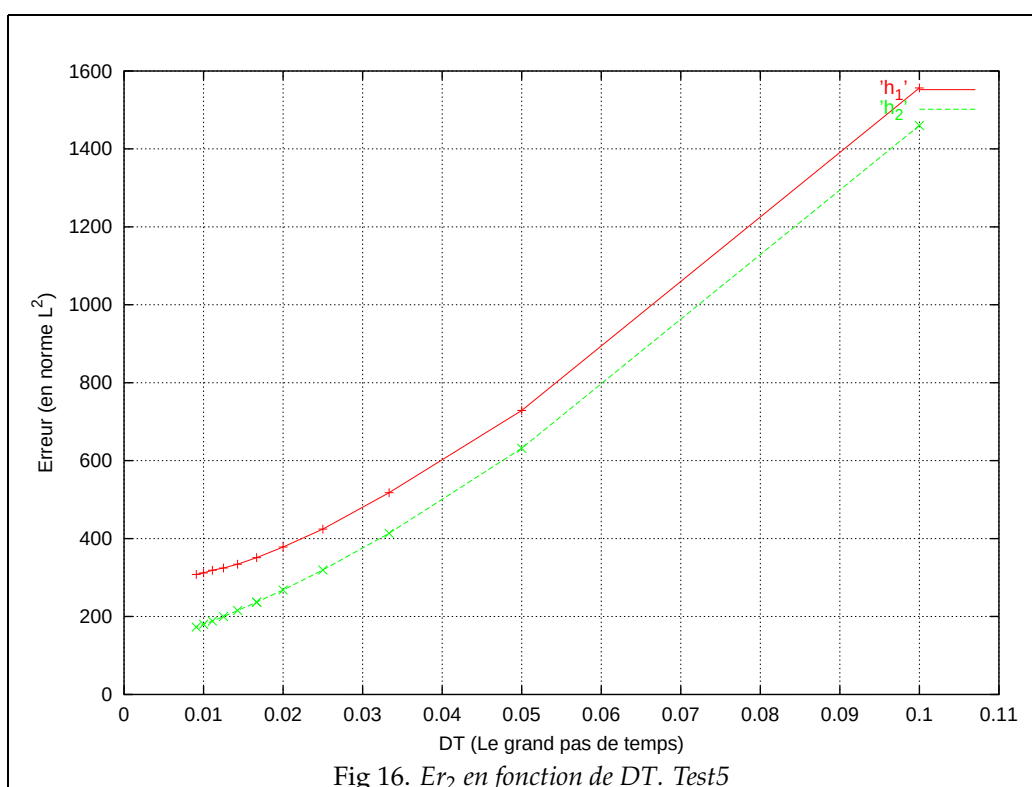
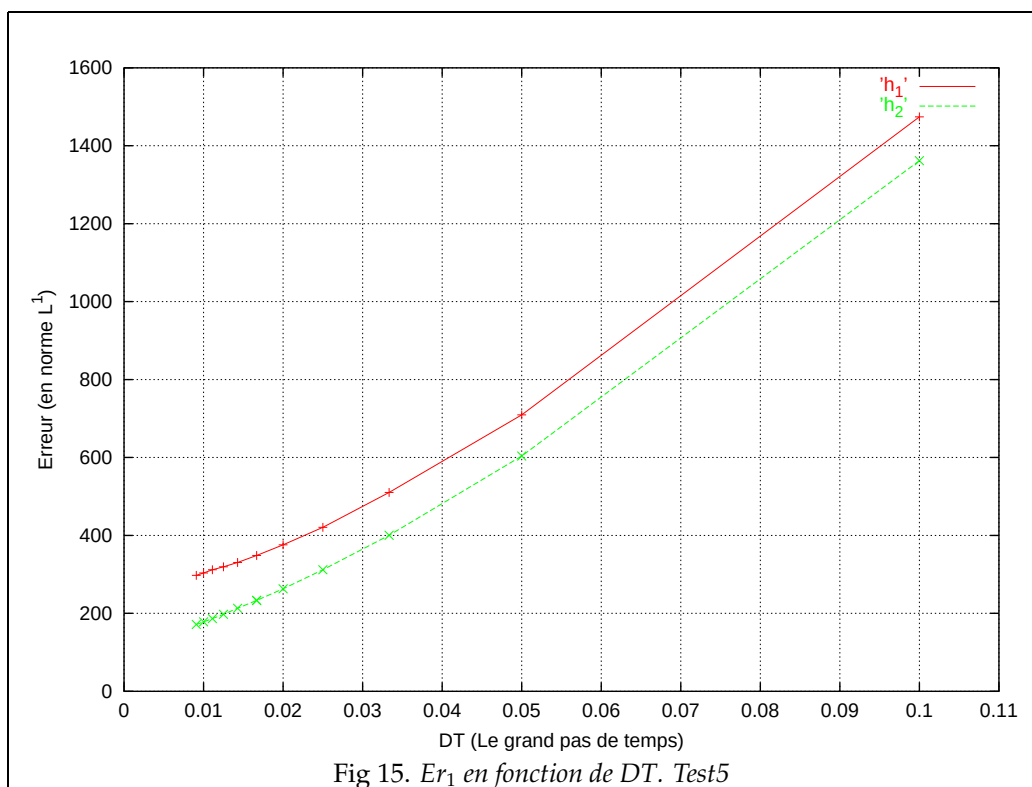
Comportement par rapport à h , Test5Bis

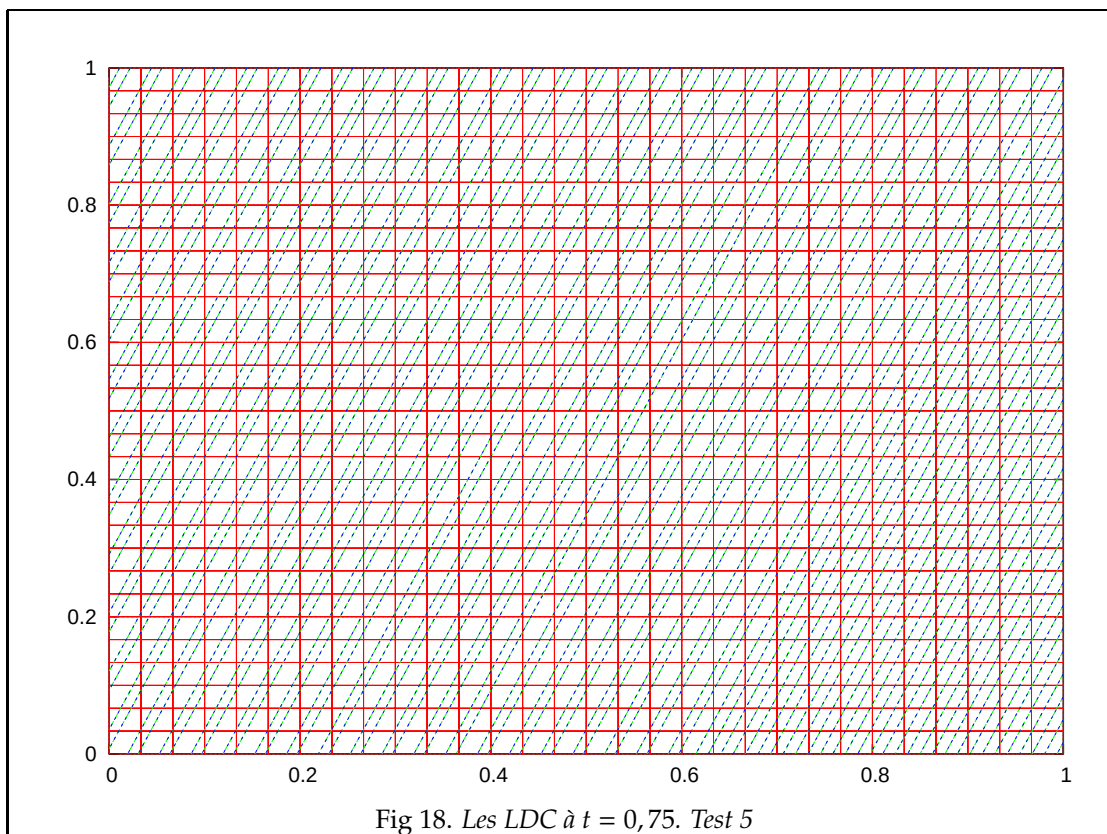
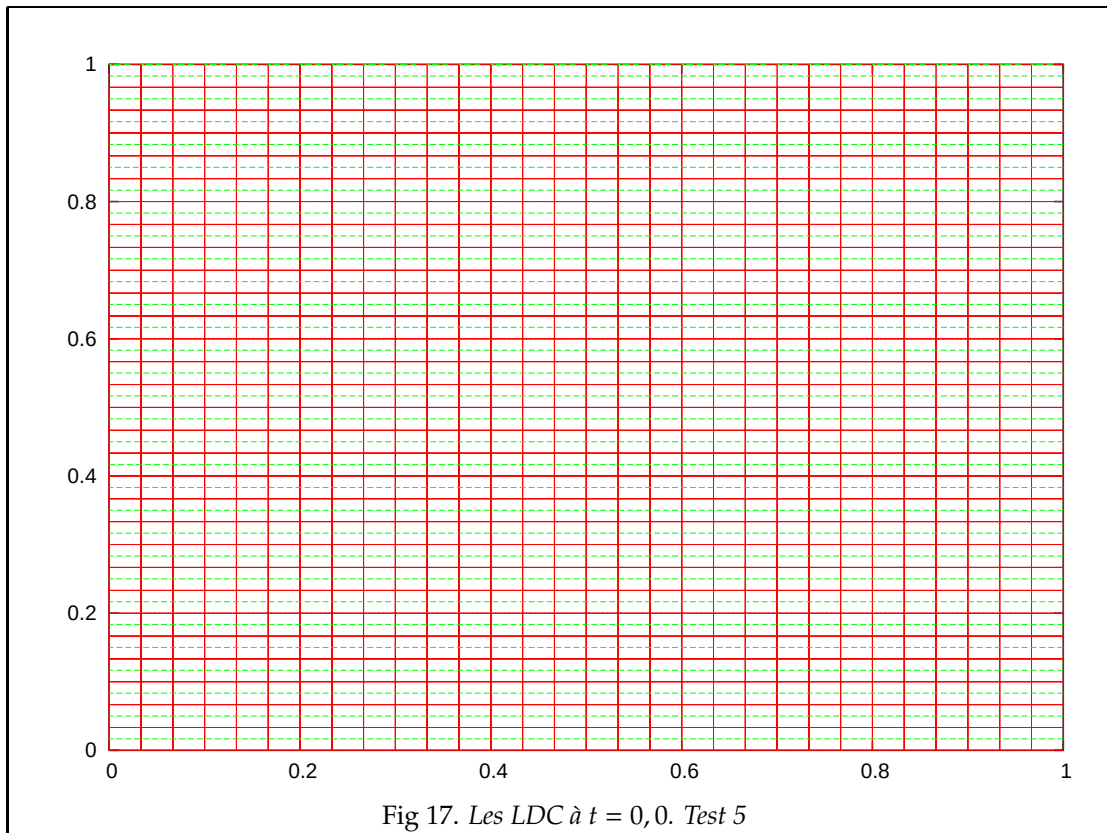
Dans le test 5, on a étudié la méthode des lignes de courant par rapport à N_T . Ici on va fixer N_T à 110, et on fera varier h , on garde les autres données inchangées.

Les résultats obtenus:

h	0.025000	0.016667	0.012500	0.006250	0.003125	0.001562
Er_1	297.534	211.501	171.464	130.267	099.781	?







2.10 Vitesse avec divergence non nulle

Dans les parties précédentes on a traité le cas d'une vitesse $\vec{V}$ qui vérifie $\text{div}(\vec{V}) = 0$. Or dans la modélisation des bassins, et sous l'effet de la compaction la divergence de la vitesse totale n'est plus nulle (cf partie 3 pour la définition de la vitesse totale, et partie 4 pour les équations mathématiques), ce qui n'est pas toujours le cas dans la simulation des réservoirs.

On considère à nouveau le problème $(\mathcal{P})$, mais cette fois-ci on ne prend aucune condition sur la divergence de $\vec{V}$, i.e on supprime la relation (3.7) de l'hypothèse D2. Le résultat d'existence et unicité de la solution entropique (Théorème 2.2.1) reste valable dans ce cas.

On suppose que u la solution de ce problème est de classe C^1 sur Q . Soit l une ligne de courant tracée dans Ω par rapport à $\vec{V}$, caractérisée par le triplet (p, I_l, q) . On définit sur l la fonction v par $v(\tau, t) = u(q(\tau), t)$ pour tout $\tau \in I_l$.

D'après la définition de v , on a :

$$\begin{aligned}\partial_t v(\tau, t) &= \partial_t u(q(\tau), t), \\ \partial_\tau v(\tau, t) &= \vec{V} u(q(\tau), t) \cdot \vec{V}(q(\tau)).\end{aligned}$$

D'autre part on a:

$$\text{div} (f(u(q(\tau), t)) \vec{V}(q(\tau))) = f'(u(q(\tau), t)) \vec{V} u(q(\tau), t) \cdot \vec{V}(q(\tau)) + f(u(q(\tau), t)) \text{div}(\vec{V}(q(\tau))).$$

Vu que u est la solution du problème $(\mathcal{P})$, on en déduit que v résout l'équation suivante:

$$\partial_t v(\tau, t) + \partial_\tau f(v(\tau, t)) + f(v(\tau, t)) \text{div}(\vec{V}(q(\tau))) = 0, \quad \forall (\tau, t) \in I_l \times I. \quad (2.56)$$

Par rapport au cas où $\text{div}(\vec{V}) = 0$ (équation 2.12) on remarque sur cette équation la présence d'un terme en plus, il s'agit de $f \text{div}(\vec{V})$. Ce terme peut être vu comme un terme source.

Schéma numérique pour l'équation 2.56

On utilise les notations de 2.3.2. Pour toute maille $K \in \mathcal{M}$ on pose:

$$D_K = \frac{1}{m(K)} \int_K \text{div}(\vec{V}(x)) dx.$$

Soit $\Gamma^l = (\tau_i)_{0 \leq i \leq N}$ une subdivision de I_l , pour tout $j \in \{0, \dots, N-1\}$, on définit d_j par:

$$d_j = D_K, \quad \text{si } j \in I_{K,l}.$$

($j \in I_{K,l}$ si $\text{Im}(q|_{[\tau_j, \tau_{j+1}])} \subset K$.)

Le schéma numérique est défini par les relations:

$$\forall j \in \{0, \dots, N-1\}, \quad v_j^0 = \mathbb{P}(u_0)_K \quad \text{si } j \in I_{K,l}, \quad (2.57)$$

$$\forall n \in \{1, \dots, T/k\}, \quad v_{-1}^n = g(p, t^n), \quad (2.58)$$

$$\forall (j, n) \in \{0, \dots, N-1\} \times \{1, \dots, T/k\}, \quad \frac{\Delta_j}{k} (v_j^{n+1} - v_j^n) + (f(v_j^n) - f(v_{j-1}^n)) + f(v_j^n) d_j = 0. \quad (2.59)$$

Avec k le pas de temps sur la ligne de courant (voir 2.3.3), k est choisi tel que $T/k \in \mathbb{N}$. v_j^n est l'approximation de v sur $[\tau_j, \tau_{j+1}] \times [t^n, t^{n+1}]$.

Pour assurer la stabilité de ce schéma on pose une condition (CFL) sur le pas de temps de type $k \leq c \Delta_l$, avec $c \in \mathbb{R}_+^*$ une constante qui dépend de la vitesse $\vec{V}$ mais aussi de la fonction f .

Le choix de ce schéma nous semble 'naturel' bien qu'on n'ait pas encore de résultats mathématiques sur ce schéma. Les tests numériques ont donné de bons résultats. Cependant dans ([17]) il y a un résultat de convergence et une estimation d'erreur (de l'ordre $h^{\frac{1}{4}}$) pour une équation similaire (sur $\mathbb{R}^d$), i.e avec un terme source et le même schéma.

La méthode lignes de courant dans ce cas:

On applique le même algorithme expliqué pour le cas où $\text{div}(\vec{V}) = 0$ (voir partie 2.5.2). La seule différence est la résolution numérique de l'équation le long de chaque ligne de courant, car dans ce cas on applique le schéma donné ci-dessus (équations 2.57-2.58 et 2.59).

2.10.1 Test numérique, Test 6

Le but ici est de tester la méthode des lignes de courant lorsque $\text{div}(\vec{V}) \neq 0$, et de valider le schéma numérique qu'on a choisi. D'autres tests pour la modélisation des bassins ont été faits (voir chapitre 4).

On considère $\Omega =]1, 11[\times]0, 10[\subset \mathbb{R}^2$ et $I = [0, 1[$ l'intervalle du temps, et les autres données du test sont:

- On suppose que la vitesse est donnée par:

$$\forall (x, y) \in \overline{\Omega}, \vec{V}(x, y) = (x, y),$$

ainsi $\vec{V}$ vérifie $\forall (x, y) \in \Omega, \text{div}(\vec{V}(x, y)) = 2$.

- pour les données initiales à $t = 0$, on prend:

$$\forall (x, y) \in \Omega, u_0(x, y) = xye^7,$$

- pour les conditions aux limites, on suppose que:

$$g(x_r, y_r, t) = x_r y_r e^{-4t+7}, \forall (x_r, y_r, t) \in \Sigma_-.$$

Avec ces données, la solution du problème ($\mathcal{P}$) est donnée par:

$$\forall (x, y, t) \in Q = \Omega \times I, u(x, y, t) = xye^{-4t+7}.$$

Ainsi à l'instant T , les normes de u dans Ω sont:

$$\|u(\cdot, T)\|_{L^1(\Omega)} = 5.02138, \|u(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)} = 6.69518.$$

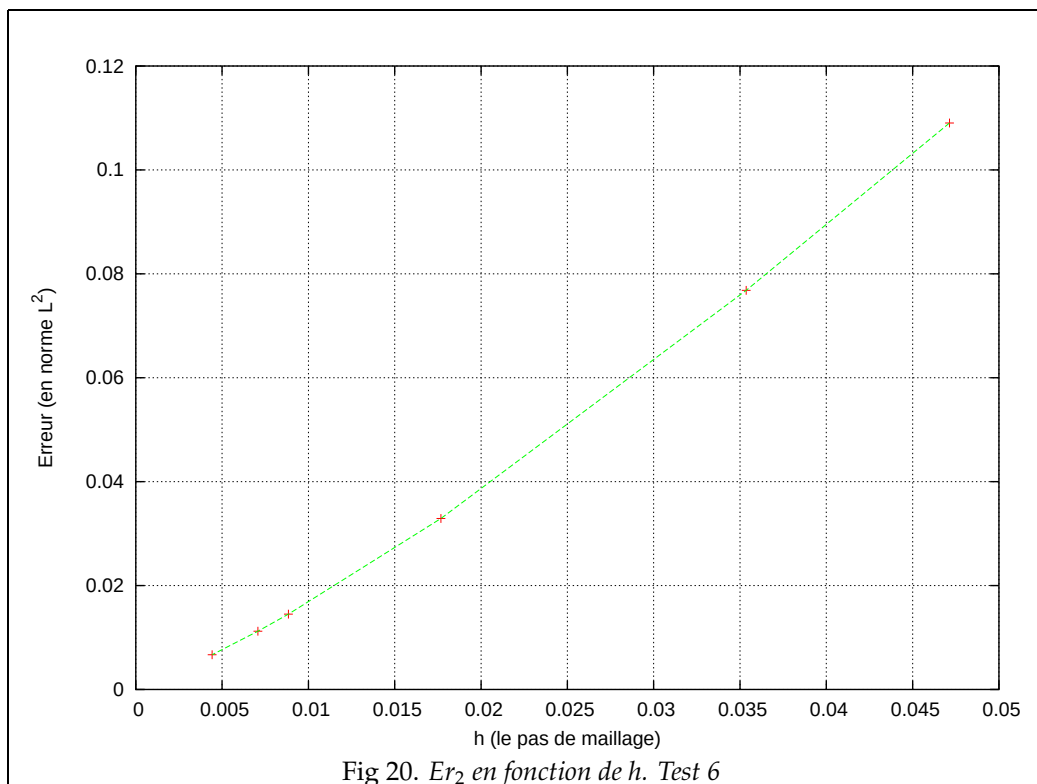
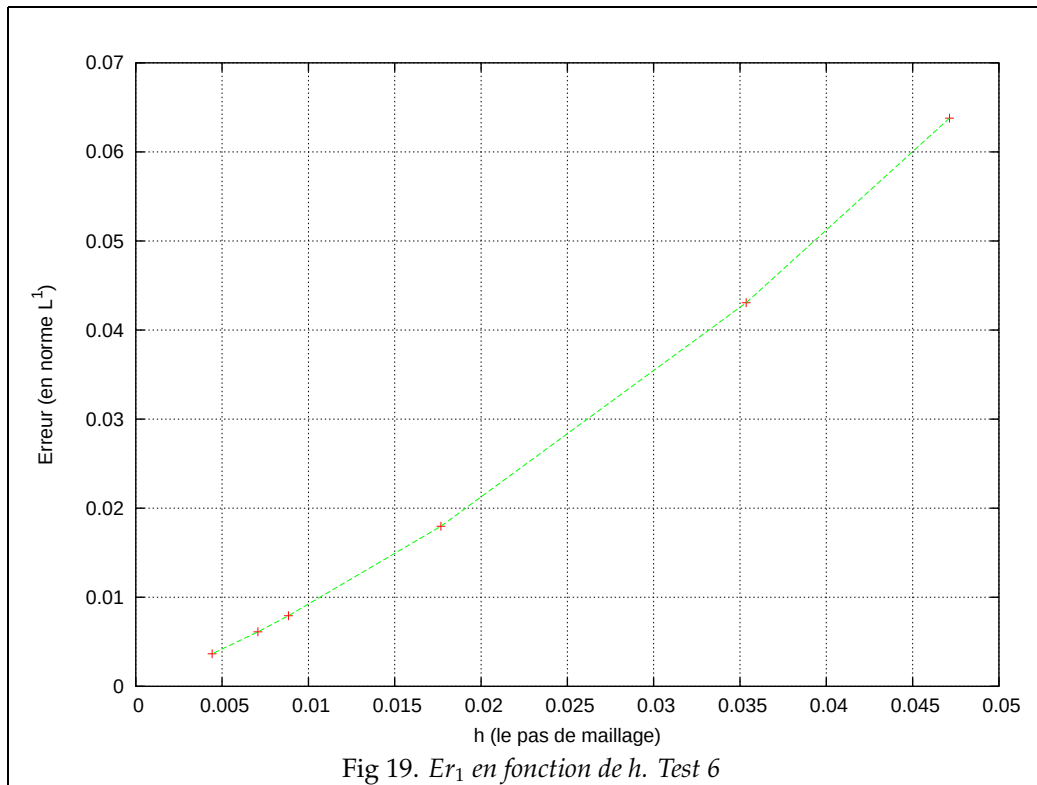
Dans ce cas on prend un maillage cartésien de Ω , constitué de carrés.

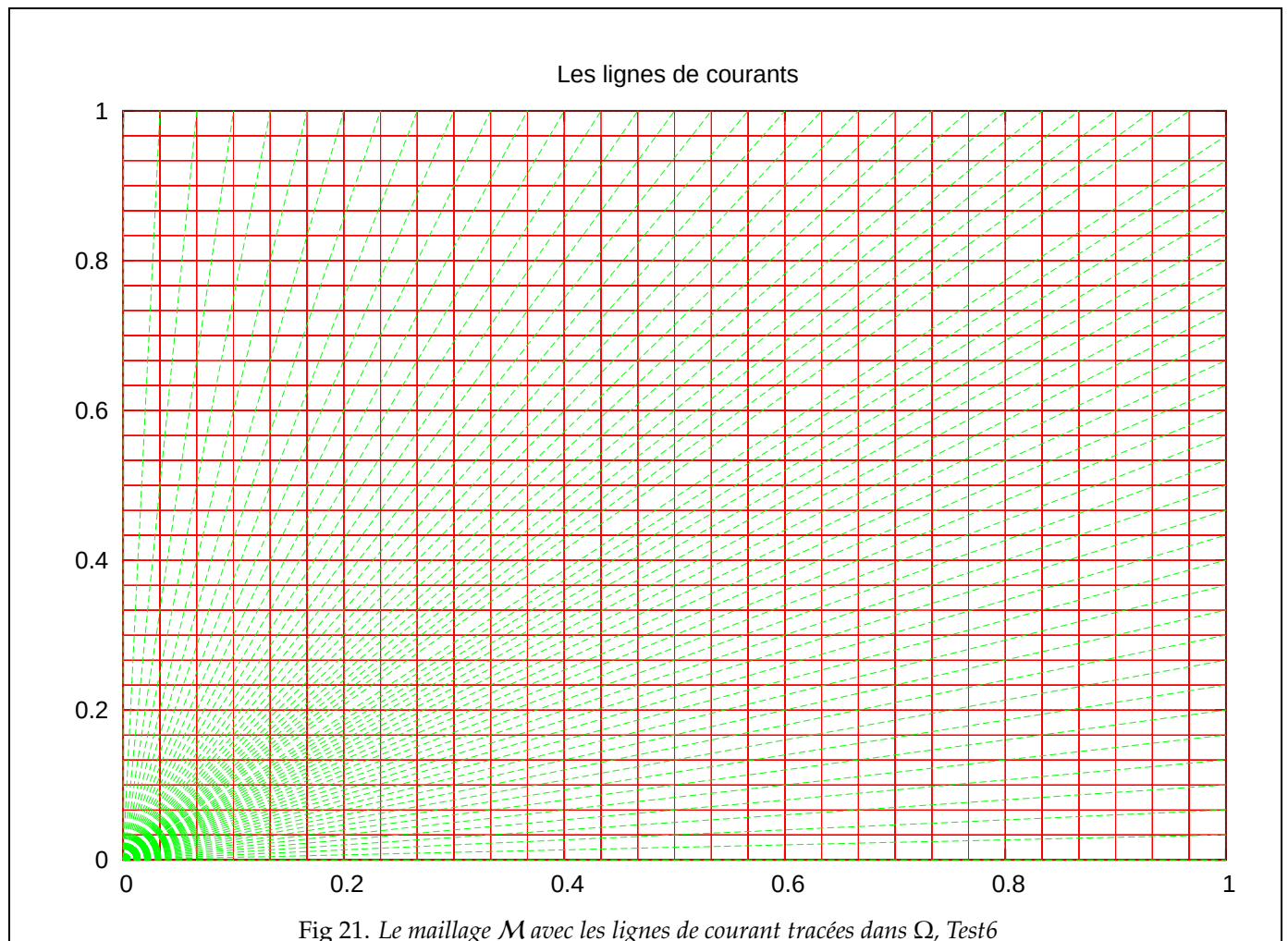
Liste des figures

- Fig-19 représente Er_1 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_1)$
- Fig-20 représente Er_2 l'erreur en norme $(\|\cdot\|_2)$
- Fig-21 représente l'ensemble des lignes de courant tracées dans Ω .

Sur les deux figures, on constate que la méthode se comporte bien et qu'on a une très bonne précision de la solution approchée.

D'autre part, sur la figure (Fig-21), on remarque que dans la maille $K = [0, dx] \times [0, dx]$ on a $I_K = \mathcal{L}$, i.e toutes les lignes de courant passent par cette maille.





2.11 Remarques générales

2.11.1 Le cas où u est BV

Pour avoir le résultat de convergence (Théorème 2.6.3), on a supposé que u la solution du système $(\mathcal{P})$ était de classe C^2 , or cette hypothèse est très forte, car en général les “bons” espaces des fonctions pour étudier les problèmes hyperboliques sont les espaces $BV(\Omega)$ (ou $L^p(\Omega)$).

Pour montrer la convergence de cette méthode dans le cas où u est BV on est confronté à deux problèmes:

1. Définition de u sur une ligne de courant

Lorsque u la solution du problème $(\mathcal{P})$ est de classe C^1 , ou continue, on peut définir sa trace sur une ligne de courant (relation 2.3). Or si u est dans $BV(Q)$ ou $L^p(Q)$, cette définition n’a plus de sens car u n’est plus définie en chaque point $x \in \Omega$.

2. Définition du problème sur une LDC

Le deuxième problème est de déterminer le problème à résoudre sur chaque ligne de courant, car on ne peut plus utiliser le lemme (2.1.4), puisque u n’est pas défini sur la ligne de courant.

Ces deux points posent une difficulté importante pour montrer la convergence de cette méthode vers la solution du problème $(\mathcal{P})$.

Remarque 2.11.1 *Au niveau numérique, il n’y a pas de problèmes pour définir la trace de u sur une ligne de courant, car on travaille avec des fonctions constantes par mailles (les fonctions sont dans $\mathcal{E}_M$), et la projection de u dans $\mathcal{E}_M$ est bien définie.*

Plusieurs tests numériques ont montré le bon comportement de cette méthode, même avec des fonctions BV (voir Test 2), et on estime, sous certaines conditions sur la vitesse, qu’on peut avoir une démonstration de la convergence.

2.11.2 Schéma non conservatif

Pour les problèmes de conservation issus de la physique, on cherche des méthodes numériques qui gardent le caractère conservatif. Plus précisément, on considère u la solution du problème $(\mathcal{P}_1)$, soit $t \in I$, on intègre la première équation vérifiée par u sur Ω , ce qui donne:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t u(x, t) dx &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(f(u(x, t)) \vec{V}(x, t)) dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} f(u) \vec{V} \cdot \vec{n} d\gamma. \end{aligned}$$

Si on suppose de plus que la vitesse vérifie $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ ($\vec{n}$ étant la normale extérieure sur Ω), alors on trouve que u vérifie:

$$\int_{\Omega} \partial_t u(x, t) dx = 0.$$

donc, on cherche une solution approchée de u dans $\mathcal{E}_M$, qui vérifie:

$$\forall n, \sum_{p \in \mathcal{M}} m(p) u_p^{n+1} = \sum_{p \in \mathcal{M}} m(p) u_p^n.$$

Or la méthode des lignes de courant ne vérifie pas cette relation (cf. résultat du test 2). Ceci est dû au passage entre les lignes de courant et l’ensemble des mailles (voir partie 2.4). Néanmoins, on peut signaler que le schéma sur une ligne de courant est conservatif lorsque la vitesse a une divergence nulle.

Remarque 2.11.2 *La méthode volume fini garde le caractère conservatif du problème (cf. remarque 2.8.2).*

Chapitre 3

Vers la modélisation des bassins

3.1 Introduction

Dans cette partie on va appliquer la méthode des lignes de courants à des cas proches du cas des bassins, et comme on l'a dit le cas bassin est très complexe. Il nous a semblé plus raisonnable d'appliquer cette méthode sur un modèle simplifié de bassin mais qui soit en même temps différent du cas réservoir.

Les points de simplifications par rapport au modèle de bassin seront :

- Une température constante.
- Absence de la génération de l'huile par craquage (primaire et secondaire), on supposera une présence d'huile dans le domaine à l'instant initial (voir partie 3.1.4).
- Pas de compaction.
- Modélisation 2d.

Les points de différences par rapport au modèle réservoir seront :

- Prise en compte de la pression capillaire.
- Effet plus important dans la migration de l'huile de la gravité et de la pression capillaire.
- Absence des termes sources dans l'équation de la pression (i.e absence des puits d'injection).

Le modèle qu'on traitera ressemble sensiblement au modèle de réservoir, en particulier sur le système d'équations mathématiques. Néanmoins les différences entre le modèle qu'on va étudier et le modèle de réservoir sont très sensibles par rapport à la méthode des lignes de courants. Donc l'objectif de cette partie est de répondre aux questions suivantes :

1. Présence de la pression capillaire :

Dans le modèle de réservoir les termes de gravité et de pression capillaire sont parfois négligés, car l'écoulement de l'huile se fait en grande partie grâce au flux total qui est dû à la grande variation de pression entre les puits d'injection et de production. Le modèle de la méthode des lignes de courants proposé par Batycky ([10],[12]) tient compte de la gravité mais pas de la pression capillaire.

En revanche dans le cas de bassin ces deux termes forment un facteur essentiel dans le déplacement de l'huile. Donc les questions auxquelles on tente de répondre sont les suivantes :

- La méthode des lignes de courants marche-t-elle encore dans le cas où les effets de la gravité et de la pression capillaire sont importants dans la migration de l'huile ?
- Quel schéma numérique prendre pour la partie gravité et pression capillaire ?

2. Traitement du terme source :

Dans le modèle de réservoir les puits d'injection donnent des renseignements très précieux pour la méthode des lignes de courants, à la fois sur l'endroit où on doit tracer les lignes de courants et leur nombre, mais aussi sur la donnée à la limite pour l'équation 1d à résoudre le long de chaque ligne de courant. En effet les données des puits d'injection apparaissent comme un terme source dans l'équation de la vitesse totale. En revanche dans le cas qu'on va traiter (sans ajouter la compaction) on n'a pas ce type d'information. On fera une discussion sur ce point à la fin de cette partie.

3.1.1 Notations

Soient Ω un ouvert régulier (polygonal) borné de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{I} = [0, T]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}_+$ ($T > 0$). Ω représente le bassin dans lequel le phénomène physique se passe, $\mathcal{I}$ représente la période de temps au cours de laquelle on veut étudier le phénomène physique.

Le milieu poreux Ω est caractérisé par des données physiques, la porosité Φ (une grandeur sans unité) qui est le rapport du volume des pores sur le volume total, et aussi par la matrice de perméabilité K qui donne la lithologie du milieu. K dépend de la porosité du milieu, l'unité de K est m^2 ou *Darcy*.

Par la suite on suppose que:

1. La porosité ne dépend pas du temps ($\partial_t \Phi = 0$), autrement dit on néglige l'effet de la compaction. On verra au chapitre suivant (4) comment traiter une porosité variable au cours du temps.
2. La matrice K est supposée diagonale définie positive:

$$K(x) = \lambda(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Avec } \lambda > 0.$$

On considère un écoulement diphasique **incompressible**, dont les deux phases sont: l'eau (**w**) et l'huile (**o**).

On note S_α la **saturation** de la phase $\alpha \in \{o, w\}$, c'est le rapport du volume occupé par la phase α sur le volume occupé par les deux phases. D'après les définitions de S_α , on a:

$$S_o(x, t) + S_w(x, t) = 1 \quad (3.1)$$

Par la suite on notera $S = S_o$, et par conséquent on a $S_w = 1 - S$. Chaque phase α ($\alpha \in \{o, w\}$), est caractérisée par:

- P_α la pression de la phase α , mesurée en Pa .
- ρ_α la masse volumique de la phase α . Comme l'écoulement est supposé incompressible, ρ_α est constante ($\in \mathbb{R}_+$). ρ_α est mesurée en Kg/m^3 .
- μ_α la viscosité dynamique de la phase α . C'est une constante $\in \mathbb{R}_+$ mesurée en $Pa.s$.
- $\vec{v}_\alpha$ la vitesse moyenne de la phase α , et $\vec{V}_\alpha$ la vitesse de filtration de la phase α . $\vec{V}_\alpha$ est liée à $\vec{v}_\alpha$ par:

$$\vec{V}_\alpha = \Phi S_\alpha \vec{v}_\alpha$$

- kr_α la perméabilité relative de la phase α en présence des autres phases. Physiquement kr_α représente la résistance du milieu (en présence des autres phases) à laisser passer le liquide α . La perméabilité relative kr_α dépend de S_α et vérifie:

$$\begin{aligned} kr_\alpha(s) &\in [0, 1] \text{ si } s \in [0, 1] \\ kr_\alpha(s) &= 0 \text{ si } s \leq 0 \text{ et } kr_\alpha(s) = 1 \text{ si } s \geq 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Enfin pour chaque phase α , on introduit la mobilité volumique $A_\alpha(S_\alpha)$ de la phase α définie par: $A_\alpha(S_\alpha) = kr_\alpha(S_\alpha)/\mu_\alpha$. On définit aussi:

- $A_T(S)$ la mobilité volumique totale définie par:

$$A_T(S) = A_o(S) + A_w(S).$$

- $B_T(S)$ la mobilité massique globale définie par:

$$B_T(S) = \rho_o A_o(S) + \rho_w A_w(S).$$

3.1.2 Modèle mathématique

L'écoulement est décrit par la variation spatiale et temporelle des pressions et saturations de deux phases. L'évolution de ces deux phases au cours du temps est régie par des lois physiques:

- Équation de la conservation des masses:

$$\partial_t(\Phi \rho_\alpha S_\alpha(x, t)) + \text{div}(\rho_\alpha \vec{V}_\alpha(x, t)) = 0. \quad (3.3)$$

- La loi de Darcy généralisée, qui donne la vitesse en fonction de la pression:

$$\vec{V}_\alpha = -A_\alpha(S_\alpha) K(x) (\vec{\nabla} P_\alpha(x, t) - \rho_\alpha \vec{g}), \quad (3.4)$$

avec $\vec{g}$ le vecteur de la gravité, constant dans Ω .

- La pression capillaire:
pour compléter la loi de conservation des masses et la loi de Darcy, on introduit la pression capillaire P_C , qui est la différence entre les pressions des deux phases, donnée par:

$$P_C(S(x, t)) = P_o(x, t) - P_w(x, t). \quad (3.5)$$

La pression capillaire ne dépend que de la saturation.

On choisit comme inconnues la saturation de l'huile, et la pression de l'eau qu'on notera P , ce qui donne $P_o = P_C + P$. Comme on a supposé que Φ ne dépend pas du temps, alors en sommant les équations de conservation de masse ($\alpha \in \{o, w\}$, après avoir divisé chaque équation par ρ_α), et en utilisant la relation (3.1), on obtient:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{V}_o + \vec{V}_w) &= \operatorname{div}(K(-A_T \vec{\nabla} P - A_o \vec{\nabla} P_C + B_T \vec{g})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le système final des équations est le suivant:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \partial_t(\Phi S) + \operatorname{div}(\vec{V}_o) = 0 \\ \operatorname{div}(-K(A_T \vec{\nabla} P + A_o \vec{\nabla} P_C - B_T \vec{g})) = 0 \\ \vec{V}_o + A_o K(\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} P_C - \rho_o \vec{g}) = 0 \end{cases}$$

Le système $(\mathcal{P})$ est un couplage entre deux équations aux dérivées partielles ([23],[27]):

1. La première est l'équation de la conservation de la masse, cette équation à P donnée est de type parabolique, parabolique dégénérée, ou hyperbolique, cela dépend des hypothèses sur la pression capillaire.
2. La seconde est l'équation de la pression qui est (à S donnée) de type équation elliptique.

3.1.3 Vitesse totale

On définit la vitesse totale par:

$$\begin{aligned} \vec{V}_T &= \vec{V}_o + \vec{V}_w \\ &= -K(A_T \vec{\nabla} P + A_o \vec{\nabla} P_C - B_T \vec{g}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

D'après les relations ci-dessus, on a:

$$\operatorname{div}(\vec{V}_T) = 0 \quad (3.7)$$

$\vec{V}_o$ en fonction de $\vec{V}_T$

En utilisant la relation (3.6) on trouve que:

$$K \vec{\nabla} P = -(\vec{V}_T + A_o \vec{\nabla} P_C - B_T \vec{g})/A_T$$

En injectant la formule ci-dessus dans la relation (3.4), on trouve:

$$\begin{aligned} \vec{V}_o &= -A_o \left(\frac{-\vec{V}_T - A_o \vec{\nabla} P_C + B_T \vec{g}}{A_T} - \rho_o K \vec{g} \right) \\ &= \frac{A_o}{A_T} \vec{V}_T - \frac{A_o A_w}{A_T} K \vec{\nabla} P_C - (\rho_w - \rho_o) \frac{A_o A_w}{A_T} K \vec{g}. \end{aligned}$$

On définit les fonctions suivantes:

$$f(S) = A_o(S)/A_T(S), \quad (3.8)$$

$$G(S) = (\rho_w - \rho_o) \frac{A_o(S)A_w(S)}{A_T(S)}. \quad (3.9)$$

Avec ces définitions, on obtient:

$$\vec{V}_o = f(S)\vec{V}_T - \frac{G(S)}{\rho_w - \rho_o} K \vec{V}_{P_C} - G(S) K \vec{g} \quad (3.10)$$

L'intérêt d'écrire la vitesse de l'huile sous cette forme est de voir les facteurs qui participent au déplacement de l'huile ($\vec{V}_T$, $\vec{V}_{P_C}$ et $\vec{g}$). Dans les méthodes numériques classiques on cherche une approximation directe de $\vec{V}_o$, en revanche dans la méthode des lignes de courant on divisera la vitesse de l'huile en deux parties: la première est celle qui correspond au terme du flux total, la seconde est celle de la gravité et de la pression capillaire (voir 3.2.3).

Remarque 3.1.1 • La fonction f définie par la relation (3.8) est une fonction croissante.

- Sur la figure (58), on peut voir un exemple des graphes des fonctions A_o , A_w , G et f .

3.1.4 Conditions initiales et conditions aux limites

Pour compléter les équations du système ($\mathcal{P}$), on doit ajouter des conditions aux limites et initiales.

- Pour la saturation, on suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, la saturation de l'huile est donnée dans Ω ,

$$S(x, 0) = S_0(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.11)$$

avec $\int_{\Omega} S_0(x) dx > 0$. Dans certains tests numériques, on remplacera cette condition par:

$$S(x, t) = \beta, \quad \forall (x, t) \in \Omega_s \times I, \quad (3.12)$$

avec $\Omega_s \subset \Omega$ et $m(\Omega_s) > 0$, $\beta \in]0, 1]$.

Ces conditions initiales sur l'huile vont assurer la présence d'huile dans le domaine et remplacer en quelque sorte la génération de l'huile par craquage qu'on trouve dans le modèle de bassin.

- Pour les conditions aux limites, on se donne $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ tel que $m(\Gamma_1) > 0$, on suppose que:

1. Sur Γ_1 , $P(x, t)$ est donnée pour tout $(x, t) \in \Gamma_1 \times I$
2. Sur $\partial\Omega - \Gamma_1$,

$$\vec{V}_T(x, t) \cdot \vec{n}(x) = 0, \quad \forall (x, t) \in (\partial\Omega - \Gamma_1) \times I$$

3.1.5 Résultats théoriques:

Le système mathématique qu'on a obtenu ressemble beaucoup à celui du modèle de réservoir. Pour ce dernier on peut trouver quelques résultats d'existence des solutions (solutions faibles...), et aussi des résultats de convergence des solutions numériques vers les solutions exactes.

Dans le cadre de cette thèse, nous ne présenterons pas ces résultats, pour plus de détails on peut voir par exemple ([18],[27],[26] [37]) et aussi ([21]).

3.2 Méthodes numériques

L'objectif de cette partie est d'expliquer les méthodes numériques utilisées pour trouver les solutions approchées du système $(\mathcal{P})$, i.e la saturation S et la pression P .

On parlera de la méthode des lignes de courant, mais aussi de la méthode IMPES qui est souvent utilisée pour la modélisation de ce problème, car dans les tests numériques on va comparer les résultats de la méthode des lignes de courant avec ceux donnés par la méthode IMPES.

La différence entre ces deux méthodes réside dans la façon dont on calcule la saturation (voir parties 3.2.2 et 3.2.3). Donc pour l'équation de la pression, on peut prendre un schéma commun entre les deux méthodes.

On considère un maillage $\mathcal{M}$ de Ω , on suppose que $\mathcal{M}$ vérifie les hypothèses données en (2.3.1). On garde aussi les mêmes notations pour le maillage.

Dans la suite $(t^n)_{0 \leq n \leq N}$ désignera une subdivision de $\mathcal{I}$, telle que:

$$0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T,$$

on note aussi pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$, $dt^n = t^{n+1} - t^n$.

Les fonctions seront supposées dans $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, i.e des fonctions constantes par maille sur Ω , par rapport à $\mathcal{M}$. Les notions du maillage $\mathcal{M}$ et aussi les maillages sur les lignes de courant sont donnés au (Chapitre 2, partie 2.3).

3.2.1 Résolution de l'équation de la pression. Schéma à 9 points

On se donne $t^n \in]0, T[$, on suppose que la saturation est connue à t^n , et que $S(\cdot, t^n) \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. On cherche à construire une approximation de la pression à t^n .

On rappelle que l'équation de la pression est la suivante:

$$\operatorname{div} \left(-K(A_T \vec{\nabla} P + A_0 \vec{\nabla} P_C - B_T \vec{g}) \right) = \operatorname{div}(\vec{V}_T) = 0. \quad (3.13)$$

Les fonctions qui apparaissent dans l'équation précédente (A_T, A_0, B_T, P_C) peuvent être discontinues sur l'ensemble des arêtes de $\mathcal{M}$. Ceci est dû à la discontinuité de S , mais aussi à la nature du milieu, par exemple aux différences de la lithologie.

La seule grandeur qui est continue sur l'ensemble des arêtes est le flux total $\vec{V}_T \cdot \vec{n}$ (cf. [22]). Donc on cherche une méthode numérique pour l'équation (3.13) qui respecte cette propriété. On verra que cette propriété est aussi importante lors du traçage des lignes de courants (cf annexe A).

Le choix qu'on a pris est un schéma à 9 points, adapté aux maillages non cartésiens ([22],[20]), et qui garde le caractère continu du flux sur les arêtes du maillage.

Soit p une maille de $\mathcal{M}$, on intègre l'équation (3.13) sur la maille p , ce qui nous donne:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_p \operatorname{div}(\vec{V}_T(x, t^n)) dx \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} \int_{\sigma} \vec{V}_T(x, t^n) \cdot \vec{n}_p d\gamma(x) \\ &\cong \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} m(\sigma) \times V_{p,\sigma}^n \end{aligned}$$

où $V_{p,\sigma}^n$ est une approximation de $\vec{V}_T \cdot \vec{n}_p$ au centre de l'arête σ .

Remarque 3.2.1 Pour calculer cette valeur ($V_{p,\sigma}^n$), on tient compte de :

- Comme $S(\cdot, t^n)$ est connue, alors les valeurs des fonction P_C, A_T, A_0 et B_T sont connues à t^n , et ces fonctions ne sont pas forcément continues à travers σ .
- Le flux total $\vec{V}_T \cdot \vec{n}_p$ est continu sur σ .

On commence par réécrire $\vec{V}_T \cdot \vec{n}_p$ sous la forme:

$$\vec{V}_T \cdot \vec{n}_p = -\beta(\vec{\nabla}P + \alpha\vec{\nabla}P_C - \eta\vec{g}) \cdot \vec{u}.$$

Avec:

$$\beta = \|A_T K \vec{n}_p\|, \quad (3.14)$$

$$\vec{u} = (A_T K \vec{n}_p) / \beta, \quad (3.15)$$

$$\alpha = A_0 / A_T, \quad (3.16)$$

$$\eta = B_T / A_T. \quad (3.17)$$

Pour calculer $V_{p,\sigma}^n$ on distingue deux cas:

1. σ est une arête intérieure, i.e $\sigma \subset \mathcal{A} - \mathcal{A}_\partial$
2. σ est une arête extérieure, i.e $\sigma \subset \mathcal{A}_\partial$.

• **σ est une arête intérieure**

Dans ce cas, il existe $q \in \mathcal{N}(p)$ tel que $\sigma = \sigma_{pq}$. On note aussi $\vec{n}_p = \vec{n}_{pq}$ et $V_{p,\sigma}^n = V_{pq}$.

On note ω le centre de l'arête σ_{pq} , et P_ω la valeur de la pression au point ω , on calcule une approximation de V_{pq} à gauche de ω (V^G) et une à droite de ω (V^D). Puisque $\vec{V}_T \cdot \vec{n}_{pq}$ est continue à travers σ_{pq} on déduit que:

$$V_{pq} = V^G = V^D,$$

l'égalité entre V^G et V^D nous permet de trouver la valeur de P_ω , et une fois que P_ω est trouvée on la remplace par cette valeur dans V^G (ou V^D) pour trouver la valeur cherchée de V_{pq} .

L'indice $*^G$ (resp $*^D$) représente la valeur des fonctions dans la maille à gauche de ω (resp à droite de ω).

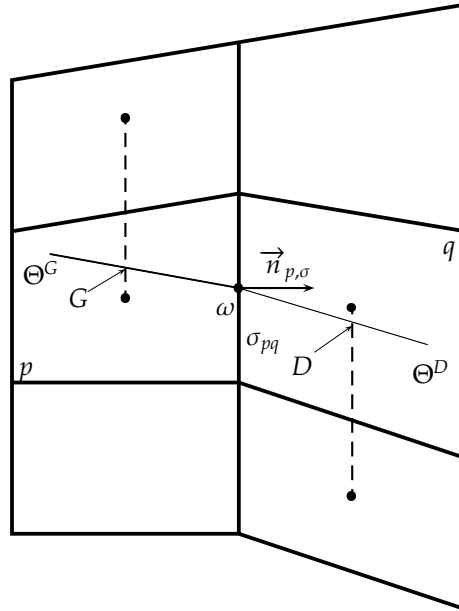


Figure 3.1: Exemple du calcul des points G et D

Calcul de V^G

Soit Θ^G une droite qui passe par ω dans la direction de $\vec{u}^G$, et soit G le point d'intersection de Θ^G avec

la droite qui joint le centre de la maille p avec le centre d'une maille à gauche de σ_{pq} , soit celle au dessus de p ou celle au dessous de p (le choix de la deuxième maille dépend de la position de la droite Θ^G par rapport au centre de la maille p (Fig-3.1)). On note q' la maille correspondant à ce choix. On note P_G une approximation de la valeur de la pression au point G , par exemple, si on note $d_1 = d(\text{centre}(p), \text{centre}(q'))$ et $d_2 = d(G, \text{centre}(p))$, on pose:

$$P_G = (1 - \frac{d_2}{d_1})P_p + \frac{d_2}{d_1}P_{q'}.$$

En utilisant ces notations on trouve que:

$$V^G \cong \frac{\beta^G}{\|G - \omega\|} (P_G - P_\omega) - \beta^G \alpha^G \frac{\partial P_C}{\partial \vec{u}^G} + \beta^G \eta^G \vec{g} \cdot \vec{u}^G \quad (3.18)$$

Calcul de V^D

De la même façon on calcule V^D , on trouve:

$$V^D \cong \frac{\beta^D}{\|D - \omega\|} (P_D - P_\omega) - \beta^D \alpha^D \frac{\partial P_C}{\partial \vec{u}^D} + \beta^D \eta^D \vec{g} \cdot \vec{u}^D \quad (3.19)$$

On note:

$$a = \frac{\beta^G}{\|G - \omega\|}, b = \frac{\beta^D}{\|D - \omega\|}.$$

$$g^\lambda = \vec{g} \cdot \vec{u}^\lambda, \lambda \in \{G, D\}.$$

On prend pour les approximations des $\frac{\partial P_C}{\partial \vec{u}^\lambda}$ ($\lambda \in \{G, D\}$), la valeur:

$$\delta = \frac{\partial P_C}{\partial \vec{u}^G} = \frac{\partial P_C}{\partial \vec{u}^D} = \frac{P_C(q) - P_C(p)}{\|\text{centre}(q) - \text{centre}(p)\|}. \quad (3.20)$$

En faisant l'égalité entre (3.18) et (3.19) on trouve que:

$$P_\omega = \frac{1}{a+b} [aP_G + bP_D - (\beta^G \alpha^G - \beta^D \alpha^D)\delta + (\beta^G \eta^G g^G - \beta^D \eta^D g^D)] \quad (3.21)$$

En injectant l'équation (3.21) dans (3.18), on trouve:

$$V^G = \frac{ab}{a+b} \left((P_G - P_D) - \left(\frac{\beta^G \alpha^G}{a} + \frac{\beta^D \alpha^D}{b} \right) \delta + \left(\frac{\beta^G \eta^G}{a} g^G + \frac{\beta^D \eta^D}{b} g^D \right) \right)$$

On note $\tilde{ab}$ la moyenne harmonique de a et b , et en utilisant la relation de continuité, on trouve finalement:

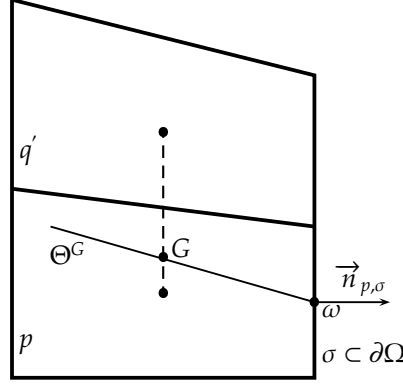
$$V_{pq} = 2\tilde{ab} \left((P_G - P_D) - \left(\frac{\beta^G \alpha^G}{a} + \frac{\beta^D \alpha^D}{b} \right) \delta + \left(\frac{\beta^G \eta^G}{a} g^G + \frac{\beta^D \eta^D}{b} g^D \right) \right) \quad (3.22)$$

- **σ est une arête extérieure**

Dans ce cas, il suffit d'approcher $V_{p,\sigma}$ d'un seul coté de σ , donc on calcule seulement V^G (ou V^D) selon la position de σ par rapport à Ω . Supposons qu'on est dans le cas de figure (3.2), alors, en faisant le calcul comme dans le cas précédent, on trouve:

$$V^G \cong \frac{\beta^G}{\|G - \omega\|} (P_G - P_\omega) - \beta^G \alpha^G \frac{\partial P_C}{\partial \vec{u}^G} + \beta^G \eta^G \vec{g} \cdot \vec{u}^G \quad (3.23)$$

avec les mêmes notations que dans le cas où σ est intérieure.

Figure 3.2: Exemple du calcul de point G (ou D), lorsque $\sigma \in \mathcal{A}_\partial$

Remarque 3.2.2 Pour être complet, il faut distinguer le cas où σ est une arête dont une extrémité appartient à $\partial\Omega$. Dans ce cas le calcul se fait de la même façon que pour les arêtes intérieures, seulement le choix des points G et D est légèrement différent. Pour plus de détails voir ([22]).

On note, pour tout $\sigma \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_\sigma$ l'ensemble des mailles $p \in \mathcal{M}$ telles que $\bar{p} \cap \bar{\sigma} \neq \emptyset$.
On trouve d'après ce qui précède,

$$\forall p \in \mathcal{M}, \forall \sigma \in \mathcal{A}_p, V_{p,\sigma} = \sum_{q \in \mathcal{A}_\sigma} A_{p,q} P_q + B_{p,\sigma} + \epsilon_\sigma P_\sigma, \quad (3.24)$$

avec :

- $\epsilon_\sigma = 1$ si $\sigma \in \mathcal{A}_\partial$ et 0 sinon.
- $A_{p,q}$ sont des coefficients qui dépendent de A_T , K et du maillage sur Ω .
- $B_{p,\sigma}$ sont des coefficients qui dépendent de A_T , K , A_o , B_T , $\vec{g}$, P_C et du maillage sur Ω .

D'autre part, on a $\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} V_{p,\sigma} = 0$. Ce qui nous donne:

$$\forall p \in \mathcal{M}, \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} \left(\sum_{q \in \mathcal{A}_\sigma} A_{p,q} P_q \right) = - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} (B_{p,\sigma} + \epsilon_\sigma P_\sigma). \quad (3.25)$$

Remarque 3.2.3 La présence de P_σ dans la relation (3.24) est artificielle, car si σ est une arête extérieure on utilise les conditions aux bords pour éliminer P_σ . En général on a deux types de conditions aux limites: soit $\vec{V} \cdot \vec{n}$ est donnée sur σ et dans ce cas on a $V_{p,\sigma}$ immédiatement, soit P est donnée sur σ et là encore on a la valeur de P_σ .

Après avoir fait le calcul pour toutes les mailles de $\mathcal{M}$, on trouve que le vecteur Pression est solution d'un système linéaire $AP = B$.

Remarque 3.2.4 La matrice A n'est pas forcément symétrique si le maillage $\mathcal{M}$ n'est pas un maillage cartésien.

3.2.2 Résolution numérique-Méthode IMPES

La méthode IMPES (IMplicite en Pression Explicite en Saturation) est très utilisée dans la modélisation des réservoirs et bassins.

Pour le traitement de l'équation de la saturation, on utilise une discrétisation Euler en temps et volume fini en espace. L'avantage de la méthode volume fini par rapport à ce système est qu'elle est conservative.

Calcul de la Saturation

Soit $t^n \in \mathcal{I}$, supposons connue la saturation de l'huile à cet instant dans Ω , on cherche à calculer une approximation de S à l'instant $t^{n+1} = t^n + dt^n$. Pour cela, il faut mettre à jour le champ de vitesse de l'huile $\vec{V}_o(., t^n)$. Pour calculer une approximation de $\vec{V}_o$, on commence par résoudre l'équation de la pression en utilisant la méthode expliquée dans (3.2.1). Une fois qu'on a une approximation de P^n , on peut grâce à la loi de Darcy, calculer $\vec{V}_o^n$ et ensuite calculer S^{n+1} .

Plus précisément, soit $p \in \mathcal{M}$, le schéma pour la saturation s'obtient en intégrant la première équation du système $\mathcal{P}$, sur $[t^n, t^{n+1}] \times p$, avec une discrétisation Euler en temps, volume fini en espace.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{dt^n} \left(\int_{[t^n, t^{n+1}] \times p} (\partial_t(\Phi(x)S(x, t)) + \text{div}(\vec{V}_o(x, t))) dt dx \right) \\ &\cong \frac{m(p)\Phi_p}{dt^n} (S_p^{n+1} - S_p^n) + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} \int_{\sigma} \vec{V}_o(x, t^n) \cdot \vec{n}_p(x) d\gamma(x) \\ &\cong \frac{m(p)\Phi_p}{dt^n} (S_p^{n+1} - S_p^n) + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} m(\sigma) \times F_{p,\sigma}. \end{aligned}$$

Où F_{pq} est une approximation de $\vec{V}_o \cdot \vec{n}_p(\omega)$, ω est le centre de l'arête σ .

Calcul de $F_{p,\sigma}$

On fera le calcul de $F_{p,\sigma}$ pour les arêtes intérieures, pour $\sigma \in \mathcal{A}_\partial$ le calcul est assez similaire.

Soient $p \in \mathcal{M}$ et $\sigma \in \mathcal{A}_p$ tel que $\sigma \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_\partial$. D'après les hypothèses du maillage, il existe $q \in \mathcal{N}(p)$ tel que $\sigma = \sigma_{pq}$.

On note $F_{pq} = F_{p,\sigma}$ et $\vec{n}_{pq} = \vec{n}_{p,\sigma}$.

D'après la relation (3.10), on a:

$$\vec{V}_o \cdot \vec{n}_{pq} = f(S) \vec{V}_T \cdot \vec{n}_{pq} - \frac{G(S)}{\rho_w - \rho_o} K \vec{\nabla} P_C \cdot \vec{n}_{pq} - G(S) K \vec{g} \cdot \vec{n}_{pq}$$

Alors on écrit F_{pq} sous la forme:

$$F_{pq} = f_{\sigma_{pq}} V_{pq} - \alpha_{\sigma_{pq}}^1 (\delta P_C)_{\sigma_{pq}} - \alpha_{\sigma_{pq}}^2 (\delta g)_{\sigma_{pq}}. \quad (3.26)$$

Avec:

1. V_{pq} est une approximation de $\vec{V}_T \cdot \vec{n}_{pq}$
2. $(\delta P_C)_{\sigma_{pq}}$ est une approximation de $K \vec{\nabla} P_C \cdot \vec{n}_{pq}$, $\alpha_{\sigma_{pq}}^1$ est une approximation de $\frac{G(S)}{\rho_w - \rho_o}$
3. $(\delta g)_{\sigma_{pq}}$ est une approximation de $K \vec{g} \cdot \vec{n}_{pq}$, $\alpha_{\sigma_{pq}}^2$ est une approximation de $G(S)$

L'approximation de V_{pq} est déjà calculée en (3.2.1 relation-3.22). Pour les termes de pression capillaire et de gravité, on pose:

$$(\delta P_C)_{\sigma_{pq}} = \frac{2a_p a_q}{a_p + a_q} \frac{P_C(p) - P_C(q)}{\|\text{centre}(q) - \text{centre}(p)\|} \quad (3.27)$$

$$(\delta g)_{\sigma_{pq}} = \frac{a_p a_q}{a_p + a_q} \left(\left(\frac{K_p}{a_p} \vec{g} + \frac{K_q}{a_q} \vec{g} \right) \cdot \vec{n}_{\sigma_{pq}} \right) \quad (3.28)$$

Avec:

$$a_\lambda = \|K_\lambda \vec{n}_{pq}\|, \quad \lambda \in \{p, q\}$$

Reste à calculer $f_{\sigma_{pq}}$, $G_{\sigma_{pq}}^1$ et $G_{\sigma_{pq}}^2$. Pour cela on pose:

- Approximation de $f_{\sigma_{pq}}$:

$$f_{\sigma_{pq}} = \begin{cases} f(S_p^n) & \text{Si } V_{pq} > 0, \\ f(S_q^n) & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (3.29)$$

Ce choix de $f_{\sigma_{pq}}$ (décentrement amont), est dû au fait que f est croissante.

- Approximation de $\alpha_{\sigma_{pq}}^1$:

$$\alpha_{\sigma_{pq}}^1 = \begin{cases} \frac{A_o(S_p^n) A_w(S_q^n)}{A_o(S_p^n) + A_w(S_q^n)} & \text{Si } (\delta P_C)_{\sigma_{pq}} > 0, \\ \frac{A_w(S_p^n) A_o(S_q^n)}{A_w(S_p^n) + A_o(S_q^n)} & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (3.30)$$

avec $(\delta P_C)_{\sigma_{pq}}$ calculé en relation (3.27)

- Approximation de $\alpha_{\sigma_{pq}}^2$:

$$\alpha_{\sigma_{pq}}^2 = \begin{cases} (\rho_w - \rho_o) \frac{A_o(S_p^n) A_w(S_q^n)}{A_o(S_p^n) + A_w(S_q^n)} & \text{Si } (\delta g)_{\sigma_{pq}} > 0, \\ (\rho_w - \rho_o) \frac{A_w(S_p^n) A_o(S_q^n)}{A_w(S_p^n) + A_o(S_q^n)} & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (3.31)$$

avec $(\delta g)_{\sigma_{pq}}$ calculé par la relation (3.28)

Remarque 3.2.5 L'approximation de F_{pq} telle qu'elle est construite vérifie:

$$\forall \sigma = \sigma_{pq} \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_\partial, \quad F_{pq} = -F_{qp}.$$

Finalement:

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad S_p^{n+1} = S_p^n - \frac{dt^n}{m(p)\Phi_p} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} m(\sigma) \left(f_\sigma V_{p,\sigma} - \alpha_\sigma^1 (\delta P_C)_{p,\sigma} - \alpha_\sigma^2 (\delta g)_{p,\sigma} \right) \quad (3.32)$$

Remarque 3.2.6 La relation (3.32) impose des contraintes sur le pas du temps dt^n . La méthode IMPES demande une restriction sur le pas de temps. En général il y a une condition (CFL) sur le pas du temps, or dans le cas des modélisations de bassin cette condition est difficile à exprimer (voir chapitre 4).

Dans nos tests numériques, on choisit un pas du temps variable, dont le choix dépend de la variation de la saturation. Le choix du pas du temps est traité dans (3.3.1).

3.2.3 Résolution numérique-Méthode des lignes de courants:

Dans cette partie on va parler de la méthode des lignes de courants. Comme on l'a vu dans (3.1.3), les trois facteurs qui causent le mouvement de l'huile dans Ω sont le flux total, la pression capillaire et la gravité. la relation (3.10) donne la contribution de chaque facteur dans le mouvement:

- $f(S)\vec{V}_T$ donne la partie du flux total
- $-\frac{G(S)}{\rho_w - \rho_o} K \vec{\nabla} P_C$ donne la partie pression capillaire
- $G(S)K\vec{g}$ donne la partie de la gravité

L'idée ici est de traiter ces trois facteurs séparément: une première partie traitera le flux total et une seconde la pression capillaire avec gravité.

Calcul de la saturation

On rappelle la première équation du système ($\mathcal{P}$) satisfaite par la saturation:

$$\partial_t(\Phi S) + \operatorname{div}(f(S)\vec{V}_T) - \operatorname{div}\left(\frac{G(S)}{\rho_w - \rho_o} K \vec{\nabla} P_C + G(S)K\vec{g}\right) = 0 \quad (3.33)$$

L'équation (3.33) sera découplée en deux équations:

$$\partial_t(\Phi S) + \operatorname{div}(f(S)\vec{V}_T) = 0 \quad (3.34)$$

$$\partial_t(\Phi S) - \operatorname{div}\left(\frac{G(S)}{\rho_w - \rho_o} K \vec{\nabla} P_C + G(S)K\vec{g}\right) = 0 \quad (3.35)$$

On se donne deux instants t^n et $t^{n+1} = t^n + dt^n$ dans $\mathcal{I}$, on suppose que la saturation est connue à l'instant t^n . Comme pour la méthode IMPES, on commence par chercher une approximation de la pression à l'instant t^n par la méthode expliquée en 3.2.1.

Connaissant maintenant P^n on peut calculer une approximation de la vitesse totale à l'instant t^n , notée $\vec{V}_T^n$.

Une fois $\vec{V}_T^n$ calculée on résout l'équation (3.34) par la méthode des lignes de courants (cf 3.2.3) sur l'intervalle $[t^n, t^{n+1}]$, avec S^n comme donnée initiale. A la fin de cette étape on aura dans chaque maille $p \in \mathcal{M}$ une valeur constante de la saturation à l'instant t^{n+1} , qu'on note S_p^* .

La deuxième étape consiste à résoudre l'équation (3.35) sur l'intervalle $[t^n, t^{n+1}]$ avec S^* comme donnée initiale pour la saturation. Cette équation sera résolue par une méthode volume fini (cf 3.2.3).

Résolution numérique de l'équation (3.34)

On cherche à résoudre l'équation (3.34) par la méthode des lignes de courant. Pour cela, on se donne $N_{\mathcal{L}}$ points dans $\overline{\Omega}$, et pour chaque point on trace la ligne de courant qui passe par ce point par rapport à la vitesse $\vec{V}_T^n$.

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des lignes de courants tracées dans $\overline{\Omega}$. Chaque ligne $l \in \mathcal{L}$ sera caractérisée par le triplet (p^l, I_l, q^l) , et on définit $v_l(\tau, t) = S(q_l(\tau), t)$. L'équation à résoudre sur l , vu qu'on a $\operatorname{div}(\vec{V}_T) = 0$, sera:

$$\Phi \partial_t v_l + \partial_\tau(f(v_l)) = 0, \quad \forall (\tau, t) \in I_l \times [t^n, t^{n+1}]. \quad (3.36)$$

Remarque 3.2.7 *A priori S n'est pas de classe C^1 sur Ω . Donc mathématiquement on n'est pas capable de justifier l'équation (3.36), ni même la définition de v_l . Néanmoins, lorsque $S \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, la définition de v_l est correcte, et la résolution discrète de l'équation (3.36) est faisable. A partir de là et comme S^n est dans $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, on suppose que l'équation (3.36) est valable pour tout $l \in \mathcal{L}$.*

Pour calculer v_l^{n+1} , on applique le schéma donné en (2.5.1); une fois qu'on a v_l^{n+1} pour tout $l \in \mathcal{L}$, on passe ces informations sur le maillage $\mathcal{M}$ (voir 2.4).

Ainsi à l'instant t^{n+1} , on aura une première approximation $S^* \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ de S^{n+1} , et on pourra donc commencer la résolution de l'équation (3.35).

Remarque 3.2.8 D'après (2.5.1), pour assurer la stabilité du schéma numérique pour l'équation (3.36) on doit imposer une condition (CFL) sur le pas de temps k^l en fonction de f' et Δ^l (voir notation 2.3.2).

Pour certaines lignes de courants, et pour diverses raisons, Δ^l peut être très petit ce qui oblige à prendre k^l très petit, et augmente le temps de calcul.

On verra (3.3.2) que dans ces cas on change le maillage sur I_l pour éviter ce problème.

Condition à la limite pour l'équation (3.36)

Pour compléter l'équation (3.36), on a besoin de deux données:

1. Une condition initiale à $t = t^n$, i.e $v(\tau, t^n) = v_0(\tau)$, $\forall \tau$.
2. Une condition au point p (le point d'origine de l), de type " $v(0, t)$ est donné pour tout $t \in [t^n, t^{n+1}[$ ".

Pour les données initiales à $t = t^n$ on prend $v_0 = (\mathcal{L}(S^n))_l$. En revanche la donnée de v au point p n'est pas définie pour tout t , donc pour cela on a fixé les critères suivants:

- Si $p \in \sigma$ avec $\sigma \in \mathcal{A}$.
Dans ce cas, et d'après les hypothèses sur le maillage $\mathcal{M}$, on peut trouver deux mailles K et L telles que $\sigma = \sigma_{KL}$. Alors on pose

$$\forall t, v(0, t) = \begin{cases} S_K^n & \text{Si } \vec{V} \cdot \vec{n}_{KL} > 0 \\ S_L^n & \text{Sinon} \end{cases}$$

où $\vec{n}_{KL}$ est le vecteur normal à σ qui va de K vers L . Ce choix de la condition au point p a été pris de cette façon pour rester compatible avec le fait que f est croissante. En fait, l va de K vers la maille L si $\vec{V}_T \cdot \vec{n}_{KL} > 0$.

- Si p est complètement à l'intérieur d'une maille K
Dans ce cas on distingue deux situations:
 - S'il y a d'autres lignes de courant qui traversent complètement K , alors on pose $v(0, t) = S_K^n$ pour tout t .
 - Sinon, on retrace l en aval, (i.e par rapport à $-\vec{V}_T$) en partant du point p jusqu'à atteindre ∂K , ensuite on remplace le point d'origine de l par le point d'intersection de l avec ∂K . Ce nouveau point qu'on notera encore p vérifie $p \in \sigma_{KL} \subset \partial K$, puis pour la condition à ce point on pose $v(p, t) = S_L^n$ pour tout t (en fait, on a forcément $\vec{V}_T \cdot \vec{n}_{\sigma_{KL}} < 0$).
En fait cette modification est faite pour s'assurer que la saturation de la maille K va évoluer entre t^n et t^{n+1} .

On n'a pas de justification 'rigoureuse' pour ce choix, néanmoins on peut signaler que les résultats de simulations numériques (cf partie 3.4) obtenus avec ces critères sont bons.

Dans le chapitre suivant (4), on verra que le fait d'ajouter la compaction nous donnera un début de réponse à cette question.

Remarque 3.2.9 Dans la simulation des réservoirs, en utilisant les données aux puits, on n'a pas ce problème. (voir [10]-page 74-76).

Résolution numérique de l'équation (3.35)

Une fois qu'on a obtenu la première approximation de la saturation $S^* \in \mathcal{E}_M$, on peut résoudre l'équation (3.35) entre t^n et t^{n+1} avec S^* comme donnée initiale. Pour cette équation on a choisi un schéma numérique de type volume fini.

Soit p une maille de $\mathcal{M}$, on intègre l'équation (3.35) sur p , ce qui donne:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_p \partial_t(\Phi S) - \operatorname{div}\left(\frac{G(S)}{\rho_w - \rho_o} K \vec{\nabla} P_C + G(S) K \vec{g}\right) dx \\
 &\cong \frac{m(p)\Phi_p}{dt^n} (S_p^{n+1} - S_p^*) - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} \int_{\sigma} \left(\frac{G(S^*)}{\rho_w - \rho_o} K \vec{\nabla} P_C \cdot \vec{n}_p + G(S^*) K \vec{g} \cdot \vec{n}_p \right) d\gamma \\
 &\cong \frac{m(p)\Phi_p}{dt^n} (S_p^{n+1} - S_p^*) - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} m(\sigma) \times (\alpha_\sigma^1 \delta_{pc} + \alpha_\sigma^2 \delta_g).
 \end{aligned}$$

Avec:

- δ_{pc} est une approximation de $(K \vec{\nabla} P_C \cdot \vec{n})(\omega)$, ω est le centre de l'arête σ .
- δ_g est une approximation de $(K \vec{g} \cdot \vec{n})(\omega)$.
- α_σ^1 (resp. α_σ^2) est une approximation de $\frac{G(S^*)}{\rho_w - \rho_o}$ (resp. $G(S^*)$) au point ω .

Pour les approximations de δ_{pc} , δ_g , α_σ^1 et α_σ^2 on utilise les équations (3.27, 3.28, 3.30, 3.31), voir partie 3.2.2. Soit:

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad S_p^{n+1} = S_p^* + \frac{dt}{m(p)\Phi_p} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} m(\sigma) \times (\alpha_\sigma^1 \delta_{pc} + \alpha_\sigma^2 \delta_g). \quad (3.37)$$

quelques remarques sur ce schéma:

1. L'équation (3.37) impose une condition CFL sur le pas de temps (dt^n). Pour dt^n grand (et c'est notre objectif) on pourra faire plusieurs sous pas de temps sur l'intervalle $[t^n, t^{n+1}[$.
2. La pression P n'apparaît pas dans l'équation (3.35). Donc si on fait plusieurs sous pas de temps, on n'est pas obligé de mettre à jour la pression.
3. Les choix des approximations des termes de gravité et pression capillaire sont faits ainsi de façon à rester compatible avec le schéma de la pression. D'autres choix sont possibles, (voir le travail de J.Vovelle et N.Seguin [39]).
4. Si la pression capillaire est nulle, on peut traiter l'équation (3.35) par la méthode des lignes de courants, i.e on trace les lignes par rapport au vecteur $\vec{g}$ (ce seront des droites), ensuite on résout l'équation par un schéma volum fini (cf. [10],[14]). Mais ces deux méthodes sont "pratiquement" équivalentes.

3.3 Résumé et quelques remarques

3.3.1 Le test du pas du temps:

Comme on l'a vu dans les schémas IMPES et LDC (3.32, 3.37), il y a des conditions sur le pas de temps de type CFL, afin de s'assurer de la stabilité du schéma et pour avoir toujours des solutions physiquement acceptables. Dans les tests numériques (cf partie 3.4), on a choisi un pas de temps variable, dont (à chaque étape) le choix dépend de la variation de la saturation.

On fixe deux constantes $\alpha_{\min}$ et $\alpha_{\max} > \alpha_{\min}$ dans $]0, 1[$, supposons avoir calculé S^j , $0 \leq j \leq n$ tel que $t^n < T$, on calcule S^{n+1} avec $dt^n = dt^{n-1}$. Alors:

- Si $\|S^{n+1} - S^n\| \geq \alpha_{\max}$, on annule le calcul, et on recommence avec $dt^n = dt^{n-1}/2$.
- Si $\|S^{n+1} - S^n\| \leq \alpha_{\min}$, on continue avec $dt^{n+1} = 2 * dt^n$.
- Sinon, i.e $\|S^{n+1} - S^n\| \in]\alpha_{\min}; \alpha_{\max}[$, on continue avec $dt^{n+1} = dt^n$.

Remarque 3.3.1 On note:

(R1) Au démarrage du programme, on estime dt^0

(R2) Les tests numériques (3.4) sont faits avec cet algorithme, néanmoins on aurait pu changer le troisième point de cet algorithme, par exemple, en choisissant une constante $c \in]1; \alpha_{\max}/\alpha_{\min}[$ telle que:

Si $\|S^{n+1} - S^n\| \in]\alpha_{\min}; \alpha_{\max}[$, on continue avec $dt^{n+1} = c \times dt^n$.

Cette gestion du pas de temps est classiquement utilisée à l'IFP dans la modélisation des bassins, car il est très difficile d'exprimer la condition (CFL) sur le pas de temps. En général, en modélisation de réservoir on utilise une condition sur le pas de temps telle que: le pas de temps doit être inférieur au temps nécessaire pour remplir une maille, cette condition peut s'écrire sous la forme ([22]):

$$dt \leq \min_{p \in \mathcal{M}} \left(\frac{m(p)\Phi_p}{\sum_{\sigma, \vec{V}_\sigma \cdot \vec{n}_{p,\sigma} > 0} m(\sigma)\vec{V}_\sigma \cdot \vec{n}_{p,\sigma} + \sum_{\sigma, \vec{V}_w \cdot \vec{n}_{p,\sigma} > 0} m(\sigma)\vec{V}_w \cdot \vec{n}_{p,\sigma}} \right).$$

3.3.2 Raffinement du maillage sur les lignes de courants

Quand on trace une ligne de courant C , on construit en même temps un maillage "naturel" $(\tau_j)_j$ de I_C . Or dans certains cas la variation de $\Delta\tau$ entre les mailles où C passe peut être très importante, ceci est dû à l'une de ces raisons (ou les deux!!):

- Une grande variation de la vitesse totale, c'est le cas dans la modélisation des réservoirs, car l'écoulement est très important dans les mailles proches des puits d'injection, et il est moins important dans les mailles les plus éloignées. Ce qui signifie un $\Delta\tau$ très petit dans les mailles proches des puits d'injection par rapport à celles un peu plus éloignées
- La trajectoire de C peut être très courte dans une maille, ce qui donne $\Delta\tau$ petit dans cette maille. Par exemple si on prend $\vec{V} = (1, 1)$ (voir fig-3.3) avec un maillage cartésien, on a

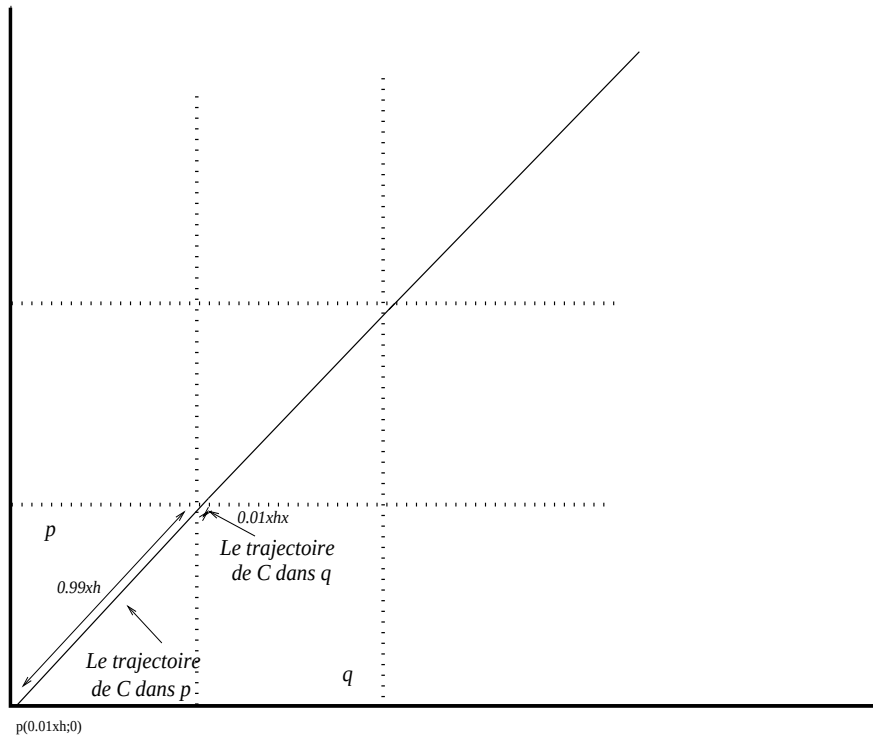
$$\frac{\Delta\tau_p}{\Delta\tau_q} = \frac{0.99 \times 2^{0.5} \times h}{0.01 \times 2^{0.5} \times h} = 99$$

Cela implique que $h^l = \min_j(h_j^l)$ est petit ce qui oblige à prendre le pas du temps petit (condition CFL sur la ligne de courant). Pour éviter ce problème on construit un maillage plus régulier (évitant les petits $\Delta\tau$) sur I_C , les nouvelles valeurs de v sur le maillage régulier (qu'on note v_*) seront ajustées de sorte qu'on aura :

$$\int_K v_*(\tau, t) d\tau = \int_K v(\tau, t) d\tau, \quad \forall K \in \{\text{maille du nouveau maillage}\}$$

Remarque 3.3.2 Cette transformation (où lissage) n'est pas réversible.

Donc on résout l'équation avec v_* , et à la fin du calcul on revient au maillage initial.



Exemple d' une trajectoire courte de la
ligne de courant dans la maille q

Figure 3.3: Exemple de différence de la trajectoire entre les mailles

3.3.3 Algorithme

IMPES

tant que $t^n < T$:

1. Résoudre l'équation de la pression (partie 3.2.1)
2. Calculer $\vec{V}_o, \vec{n}_o$ ($\forall \sigma \in \mathcal{A}$), (3.2.2-relation (3.26))
3. Calculer S^{n+1} (3.2.2-relation (3.32))
4. Test sur le pas du temps (3.3.1)
5. Si le test est bon $n = n + 1$, sinon revenir à l'étape 3 (en ayant changé le pas du temps)

Lignes de courant

L'algorithme pour la méthode Ligne de courant,

1. Résoudre l'équation de la pression (3.2.1)
2. Calculer la vitesse totale 3.22
3. Tracer les LDC
4.
 - Résoudre l'équation (3.34) sur chaque LDC (2.5.1)
 - Résoudre l'équation (3.35)
5. Test sur le pas du temps (3.3.1)
6. Si le test est bon $n = n + 1$, sinon revenir à l'étape 4 (en ayant changé le pas du temps)

Points communs entre la méthode des lignes de courant et la méthode IMPES

La méthode des lignes de courant peut être vue comme une variante de la méthode IMPES, dans la mesure où l'on fixe la saturation à l'instant t^n pour calculer le champ de la pression à l'instant suivant t^{n+1} . Puis, une fois qu'on a P^{n+1} on résout l'équation de la saturation pour trouver S^{n+1} .

La différence ici est la façon dont on traite la partie saturation, le but de ce traitement est de pouvoir prendre des pas de temps plus grands entre deux résolutions de l'équation de la pression, en évitant la condition (CFL) imposée dans la méthode IMPES.

Dans le même esprit, on peut trouver d'autres méthodes comme la méthode des tubes de courant et la méthode de double maillage.

On donnera ici très brièvement les principes de ces deux méthodes :

- - **La méthode des tubes de courant:**

Une fois qu'on a le champ de la vitesse totale $\vec{V}_T^{n+1}$, on trace des lignes de courant particulières (par rapport à l'écoulement) qui définissent une partition complète de domaine. Ces lignes sont aussi appelées limites de drainage ou de partage de l'écoulement. En général elles sont déterminées par l'étude des valeurs d'une fonction appelée fonction des lignes de courant, cette fonction prend une valeur constante sur chaque ligne de

courant.

La résolution de l'équation de la saturation est ensuite faite numériquement dans un tube de courant défini par deux lignes de courant contiguës.

Cette méthode est très similaire à la méthode des lignes de courant, on y trouve beaucoup de notions en commun. En revanche il semble qu'une extension de cette méthode au cas 3d est très difficile à réaliser. Pour plus de détails on peut voir par exemple ([30],[33],[34]).

- **- La méthode de double maillage:**

Cette méthode consiste à définir deux maillages sur Ω , le premier est un maillage grossier, le deuxième est un maillage plus fin construit à partir du premier en divisant chaque maille en plusieurs sous mailles.

L'idée de cette méthode est de résoudre l'équation de la pression sur le maillage grossier, ensuite à partir des valeurs de la pression sur le maillage grossier on définit un champ de pression sur le maillage fin (soit par une méthode d'interpolation, soit par résolution d'un système d'équations locales dans chaque maille). Une fois la pression définie sur le maillage fin, on résout l'équation de la saturation sur ce maillage par une méthode volume fini.

Pour plus de détails sur cette méthode on peut consulter ([1],[35],[37]).

Lorsqu'on néglige la pression capillaire et la gravité on peut voir la méthode des lignes de courant comme une "méthode de double maillage" en prenant comme maillage fin le maillage construit sur les lignes de courant.

Conservation du bilan des fluides

Pour le système d'équations qui nous intéresse la qualité de la solution approchée ne peut être mesurée théoriquement([22]), à cause de la complexité du système. Donc on impose aux méthodes numériques de répondre à certains critères. Pour l'équation de la saturation on cherche une méthode numérique qui respecte le caractère de conservation de cette équation.

Plus précisément pour une maille $p \in \mathcal{M}$, on doit avoir :

$$S_{\alpha,p}^{n+1} - S_{\alpha,p}^n = \frac{dt^n}{m(p)\Phi_p} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} m(\sigma) \vec{V}_{\alpha}^{n+1} \cdot \vec{n}_{p,\sigma}, \quad \alpha \in \{w, o\}.$$

Or la méthode des lignes de courant ne vérifie pas cette propriété, bien que le schéma numérique sur chaque ligne de courant soit conservatif. Or, le fait de faire une moyenne sur l'ensemble des lignes de courant fait perdre cette propriété.

Dans le cas réservoir, Batycky dans sa thèse ([10]) propose quelques corrections pour éviter ce problème (Pas très détaillées!!!). Toutefois, dans le cas bassin on peut négliger ce défaut, car on est plus intéressés par une méthode plus rapide, quitte à perdre un peu de précision.

3.4 Tests numériques

Dans cette partie on montre quelques résultats de simulations obtenues par les deux méthodes IMPES et lignes de courants.

Dans ces tests on construit d'abord une solution du problème sur un maillage fin par la méthode IMPES, qu'on va considérer comme une solution de référence, puis on compare les deux méthodes (sur un maillage grossier) avec cette solution de référence.

Le maillage fin ($\mathcal{M}_f$) est construit à partir du maillage grossier ($\mathcal{M}$) en divisant chaque maille de $\mathcal{M}$ en 9 sous mailles (pour certains tests 4).

Les solutions numériques sont supposées constantes par mailles, i.e elles sont dans $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$. La solution de référence est définie de cette façon:

$$\forall p \in \mathcal{M}, S_p^r = \frac{1}{\sum_{k \in \mathcal{M}_f, k \subset p} m(k)} \sum_{k \in \mathcal{M}_f, k \subset p} m(k) S_k^{\text{ref}}.$$

Avec $S^{\text{ref}} \in \mathcal{E}_{\mathcal{M}_f}$ la solution approchée obtenue sur le maillage fin $\mathcal{M}_f$ par la méthode IMPES.

Pour chaque fonction f dans $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$, et $\alpha \in \{1, 2, \infty\}$ on définit:

- $N_\alpha(f) = \|f\|_\alpha$
- $E_\alpha(f) = \|f - S^r\|_\alpha$
- $ER_\alpha(f) = 100 \frac{E_\alpha(f)}{N_\alpha(S^r)}$

Les définitions des normes dans $\mathcal{E}_{\mathcal{M}}$ sont données dans 2.9.

Enfin, on notera N_{biter} le nombre de fois où on résout l'équation de la pression.

Critères de comparaison :

A- Précision:

Pour valider le schéma numérique de la méthode LDC on compare la solution LDC avec la solution de référence, et aussi on compare la solution IMPES avec la solution de référence. Le but est de savoir si on a une solution LDC acceptable, et sa précision par rapport à la solution IMPES.

B- Rapidité:

Notre critère de rapidité sera le N_{biter} , car l'étape qui consiste à résoudre l'équation de la pression est la plus coûteuse. Donc plus ce nombre est petit, plus la méthode est rapide. (Dans cette partie il n'y aura pas de comparaison de temps du calcul CPU, **sauf pour le dernier test**).

3.4.1 Données communes entre les tests

Les données communes entre les tests numériques sont:

- Les masses volumiques $\rho_o = 500$, $\rho_w = 1050$, en $\text{Kg} \times \text{m}^{-3}$
- Les viscosités $\mu_o = 0.043$, $\mu_w = 0.0013$, en $\text{Pa} \times \text{s}$
- Les perméabilités relatives sont:

$$kr_o(S) = S, \quad kr_w(S) = 1 - S.$$

- Conditions aux limites:

– sur le bord ($y = 0$), la pression est donnée par:

$$P(x, 0) = P_0(X - x), P_0 \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{R}_+^*$$

P_0 varie entre les tests, sa valeur sera donnée pour chaque test, X est la longueur de bassin. (pression en Pa).

- sur les autres bords, le flux est nul ($\vec{V}_T \cdot \vec{n} = 0$).
- $\|g\| = 10$
- L'intervalle du temps $= [0; T]$ avec $T > 0$, et T change dans les tests

3.4.2 Milieu homogène

Dans ce cas on suppose que le milieu est homogène. Il s'agit d'une section 2D d'un bassin constitué d'une lithologie identique, pour les données physiques liées à cette lithologie on a pris $\Phi = 0.2$, $K = 10^{-15} Id$ (en m^2), et pour la pression capillaire (en Pa):

$$P_C(S) = \begin{cases} 0 & \text{Si } S \in [0, 0.2[\\ \frac{10^6}{3}(S - 0.2) & \text{Si } S \in]0.2, 0.8[\\ 2 \times 10^5 & \text{Si } S \in]0.8, 1]. \end{cases}$$

Deux séries de tests ont été faites (Test 1 et Test 1Bis) avec une seule différence sur les conditions aux limites.

Sans Terme source, TEST1

Dans ce cas on suppose que $\Omega = [0, 20] \times [0, 5]$ (distance en Km). Pour les conditions initiales on suppose qu'on a de l'huile au fond du bassin, plus précisément:

$$S(0, x) = 1 \quad \forall x \in \Omega_1$$

Avec $\Omega_1 = [0, 20] \times [4.5, 5]$.

Dans ce test, on a supposé que $P_0 = 5 \times 10^4$, quant à la durée de cette simulation elle est de 1×10^5 ans.

Liste des figures

- (Fig-22) représente la saturation de reference projetée sur le maillage grossier
- (Fig-24) représente la saturation donnée par la méthode IMPES
- (Fig-23) représente la saturation donnée par la méthode des lignes de courants

Toutes ces figures sont à l'instant final.

Sur ces figures on constate que l'huile monte vers le haut du bassin sous les effets de la gravité et de la pression capillaire, mais on remarque que le front de la migration est poussé vers les limites droites du domaine, ceci est dû au flux total généré par le gradient de la pression imposé au toit du bassin.

Les résultats de comparaison avec la solution de référence:

	Nbiter	N_2	ER_2	N_∞	E_∞
ref	3200	481.263	0.000%	0.214	0.000
ldc	21	554.987	21.074%	0.2425	0.075
impes	145	401.720	29.632%	0.1570	0.060

Sans Terme source, TEST1 bis

Dans ce cas on a pris les mêmes données que dans le test 1, sauf pour P_0 qu'on a pris égale à 5×10^3 .

Avec cette valeur de P_0 on va créer un gradient de pression plus faible que dans le test précédent, ce qui donnera un effet plus important de la gravité et de la pression capillaire par rapport à la vitesse totale.

Liste des figures

- (Fig-25) représente la saturation de reference projetée sur le maillage grossier
- (Fig-27) représente la saturation donnée par la méthode IMPES
- (Fig-26) représente la saturation donnée par la méthode des lignes de courants

Toutes ces figures sont à l'instant final.

Les résultats de comparaison avec la solution de référence:

	Nbiter	N_2	ER_2	N_∞	E_∞
ldc	33	1306.58	20.304%	0.4925	0.255
impes	61	1049.54	29.943%	0.2837	0.083

Les figures (Fig-28, Fig-3.4.4, Fig-3.4.4) donnent les lignes de courants tracées dans Ω par rapport à $\vec{V}_o$ à différents instants. Sur ces figures on voit que l'huile monte plus rapidement du côté droit du bassin, et que ces lignes sont un peu déviées vers la droite, cela est dû à l'effet du gradient de pression.

En revanche, par rapport au test précédent on constate que la déviation du front de la migration vers le côté droit du bassin est moins importante.

On remarque que dans ce test le rapport $N_{\text{biter}}(\text{IMPES})/N_{\text{biter}}(\text{LDC})$ est à peu près égale à 2, or dans le test précédent ce rapport était de l'ordre de 7. Ceci est dû au fait que dans ce test, l'effet de la vitesse totale dans la migration de l'huile est moins important que dans le test précédent.

3.4.3 Milieu non homogène

Dans cette partie on suppose que le bassin contient différentes lithologies. On présente les résultats de deux tests, le premier avec des conditions aux limites de type flux nul sur les bords latéraux, le deuxième avec des conditions de charges sur les bords latéraux.

Bassin avec une structure anticlinale, TEST2

Dans les tests précédents, la lithologie était homogène et les couches horizontales. Dans ce test, une structure anticlinale y est ajoutée ainsi qu'une lithologie variable afin de modéliser une barrière pour la migration (Fig-31). Au sommet de la structure, une cheminée de faible perméabilité a été ajoutée, qui représente une zone faillée.

Trois lithologies différentes sont alors présentes : un drain perméable, une couverture à très faible perméabilité et une zone de faille. Ces lithologies ont des propriétés d'écoulement (porosité, perméabilité, pression capillaire) très variables. Ensuite, une pente a été ajoutée afin de pouvoir modéliser la migration le long d'un drain incliné. Cette pente est 0,5/20 puisque la profondeur maximale à la limite gauche est 5 km et à la limite droite est 4.5 km sur une largeur totale du bassin de 20 km.

Pour les conditions aux limites, un gradient de pression est imposé au toit du bassin avec $P_0 = 5 \times 10^4$.

Pour la condition initiale sur la saturation on suppose que la roche mère est donnée par des mailles en bas à gauche avec une saturation en huile constante de 100 % (voir Fig-31).

Les données physiques pour chaque lithologie sont:

- Pour la zone imperméable, on a pris $\Phi = 0.10$, $K = 10^{-19} Id$ et $P_C = 2 \times 10^6$.
- Pour la zone de faille, on a pris $\Phi = 0.15$, $K = 10^{-17} Id$ et $P_C = 10^6$.
- Pour le drain, on a pris $\Phi = 0.2$, $K = 10^{-15} Id$ la même expression de la pression capillaire que dans le test 1.

Liste des figures

- (Fig-33) représente la saturation de référence projetée sur le maillage grossier
- (Fig-34) représente la saturation donnée par la méthode LDC
- (Fig-35) représente la saturation donnée par IMPES.

Toutes ces figures sont à l'instant final.

On remarque que l'anticlinale piège une grande partie de l'huile générée. Cependant, une dismigration par la zone faillée peut être observée, due au contraste de la pression capillaire qui est plus faible en cet endroit que dans la couverture ailleurs. L'écoulement hydrodynamique déclenché par la charge imposée aux limites gauches de la section génère une distribution asymétrique de la saturation en huile à l'endroit du piège (piège hydrodynamique). Les Résultats de comparaison avec la solution de référence:

	Nbiter	N_2	ER_2	N_∞	E_∞
ldc	028	545.757	20.020%	0.438	0.215
impes	148	736.502	36.237%	0.478	0.229

Les figures (Fig-36, Fig-37, Fig-38, Fig-39, Fig-40, Fig-41) donnent les lignes de courants tracées dans Ω par rapport à la vitesse de l'huile, à des instants différents.

(Fig-32) donne les lignes de courants tracées dans Ω par rapport à la vitesse totale à l'instant final.

Conditions aux limites de type charge, TEST3

Dans ce test, on prend deux lithologies différentes. Une zone perméable (avec $\Phi = 20\%$ et $K = 10^{-15} Id$) et une autre zone imperméable pour laquelle $\Phi = 10\%$ et $K = 10^{-20} Id$ (voir Fig-42).

Pour ce test on a changé les conditions aux limites,

- Sur le bord supérieur, $y = 0$, on a posé:

$$P(x, 0) = 2000 \times (20 - x). \quad x \in [0, 20].$$

- Sur les deux bords latéraux, on a posé:

– pour $x = 0$,

$$P(0, y) = \rho_w \|\vec{g}\| \times (y + 40000),$$

– pour $x = X = 20$,

$$P(X, y) = \rho_w \|\vec{g}\| \times y.$$

- Sur le bord inférieur, $\vec{V}_T \cdot \vec{n} = 0$.

Pour la saturation de l'huile, on suppose que:

$$\forall (x, t) \in [0, 1] \times [4.833, 5] \times I, \quad S(x, t) = 0.5.$$

Quant à la durée de ce test elle est de 200000 ans, la pression capillaire dans ce test est supposée nulle.

Liste des figures

- (Fig-44) représente la saturation de référence projetée sur le maillage grossier
- (Fig-45) représente la saturation donnée par la méthode LDC
- (Fig-46) représente la saturation donnée par la méthode impes.

Toutes ces figures sont à l'instant final.

Sur ces figures on constate que: au fond du bassin l'huile monte vers le haut sous l'effet de la gravité tout en étant déviée vers la droite sous l'effet du flux total généré par les conditions aux limites. Ensuite le front de la migration est stoppé par la barrière imperméable et dirigé vers la droite le long de cette barrière jusqu'à la limite de celle ci, là où l'huile peut s'échapper et monter vers le toit du bassin. On peut constater aussi qu'autour de la limite de la zone imperméable on a une accumulation d'huile.

Les Résultats de comparaison avec la solution de référence:

	Nbiter	N_2	ER_2	N_∞	E_∞
ldc	043	857.65	14.813%	0.500	0.140
impes	236	881.87	18.238%	0.500	0.119

(Fig-43) donne les lignes de courants tracées dans Ω par rapport à la vitesse totale à l'instant final. Là encore on peut remarquer que les lignes de courants tracées dans la zone perméable contournent la zone imperméable sans y entrer.

3.4.4 Test avec terme source

Dans les tests précédents, on a supposé qu'on n'avait pas de terme source pour la génération d'huile, la présence d'huile dans le bassin était liée aux conditions initiales (sauf pour le test 3). Dans le modèle complet du bassin la génération de l'huile est due au craquage primaire et secondaire (cf partie 4.2.9). La compaction joue aussi un rôle important dans cette étape. Dans ce test, on cherche à faire une simulation avec un terme source pour l'huile, donc l'équation de conservation de l'huile devient:

$$\partial_t(\Phi S) + \text{div}(\vec{V}_o) = f(S, t).$$

Où f représente la quantité d'huile engendrée au cours du temps.

Avec cette écriture, on aura dans l'équation de la vitesse totale un deuxième membre non nul, i.e $\text{div}(\vec{V}_T) \neq 0$. On espère que dans ce cas on a un effet plus important de la vitesse totale. Cette simulation est proche de la modélisation de réservoir, donc elle nous permet aussi de vérifier les résultats "spectaculaires" cités dans ([10], par exemple).

Les données du test sont: $\Omega = [0, 20] \times [0, 6]$, $\Phi = 0.2$, $K = 10^{-15} Id$ et $P_C = 0$. Pour f on a pris:

$$f = 5 \times 10^{-3} 1_{\Omega_1}(x), \quad \text{avec } \Omega_1 = [0, 0.2] \times [5.94, 6].$$

Pour les conditions aux limites, on a pris un flux nul sur les bords latéraux et la base du bassin, et une pression affine sur le toit du bassin avec $P_0 = 25000$. Enfin la durée de simulation est de 250000 ans.

Pour la méthode IMPES, on a fait deux tests, le premier avec une condition normale sur le pas de temps, le seconde avec une condition moins sévère sur le pas de temps.

Liste des figures

- (Fig-47) représente la saturation de reference projetée sur le maillage grossier
- (Fig-48) représente la saturation donnée par impes1
- (Fig-49) représente la saturation donnée par impes2
- (Fig-50) représente la saturation donnée par la méthode LDC
- (Fig-51) représente les lignes de courants tracées dans Ω

Toutes ces figures sont à l'instant final.

Sur ces figures on remarque une forte concentration de l'huile autour de Ω_1 , ce qui s'explique par la donnée du terme source, ensuite une déviation du front de la migration vers le coté droit du bassin.

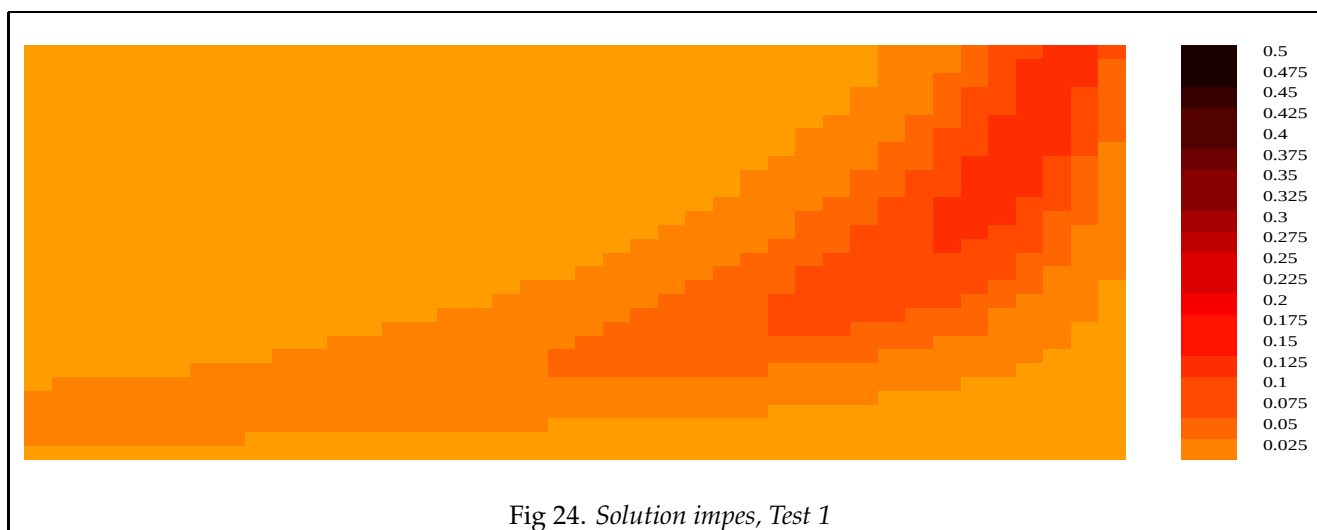
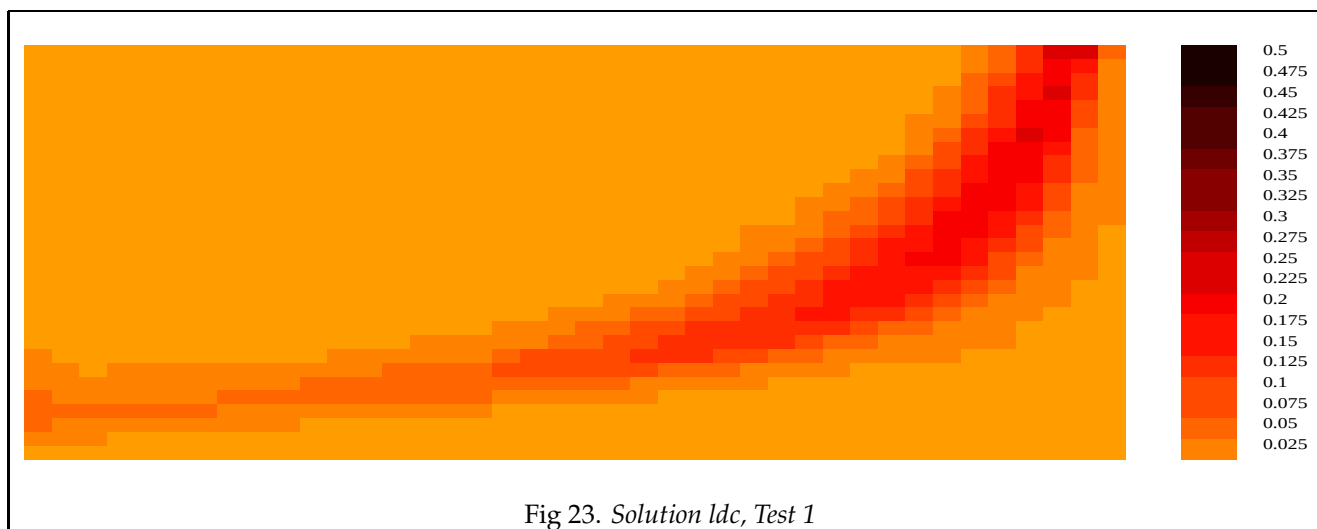
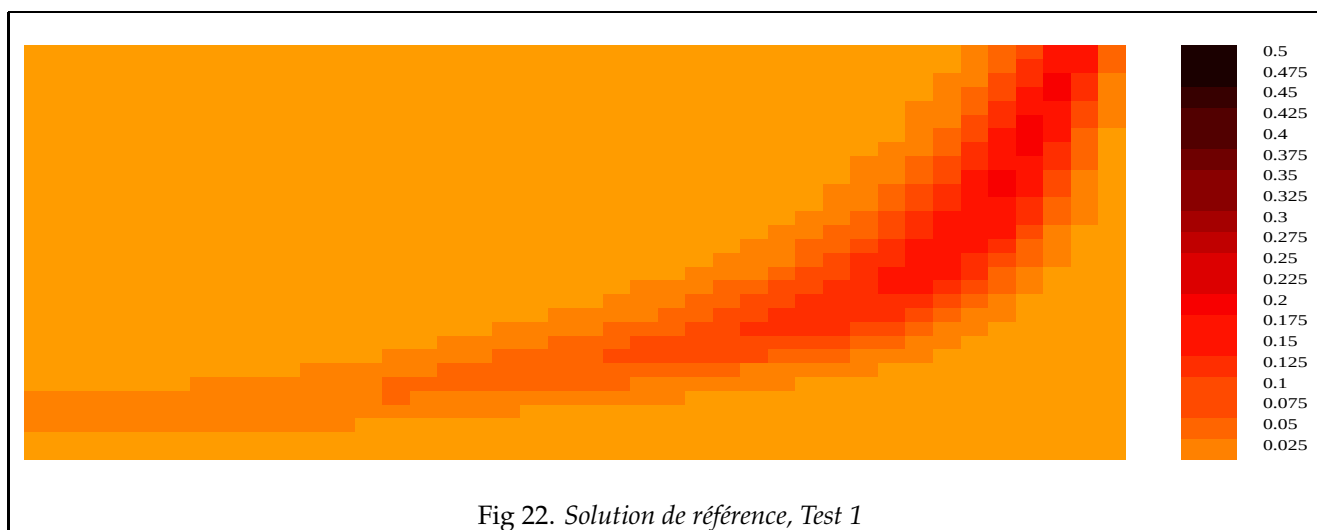
Les résultats de comparaison avec la solution de référence:

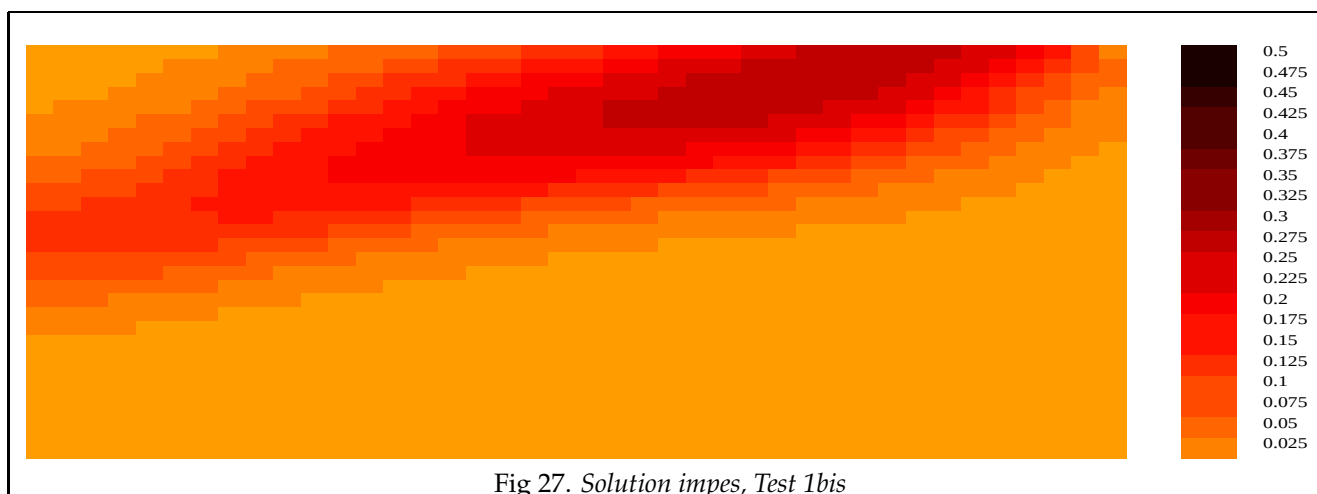
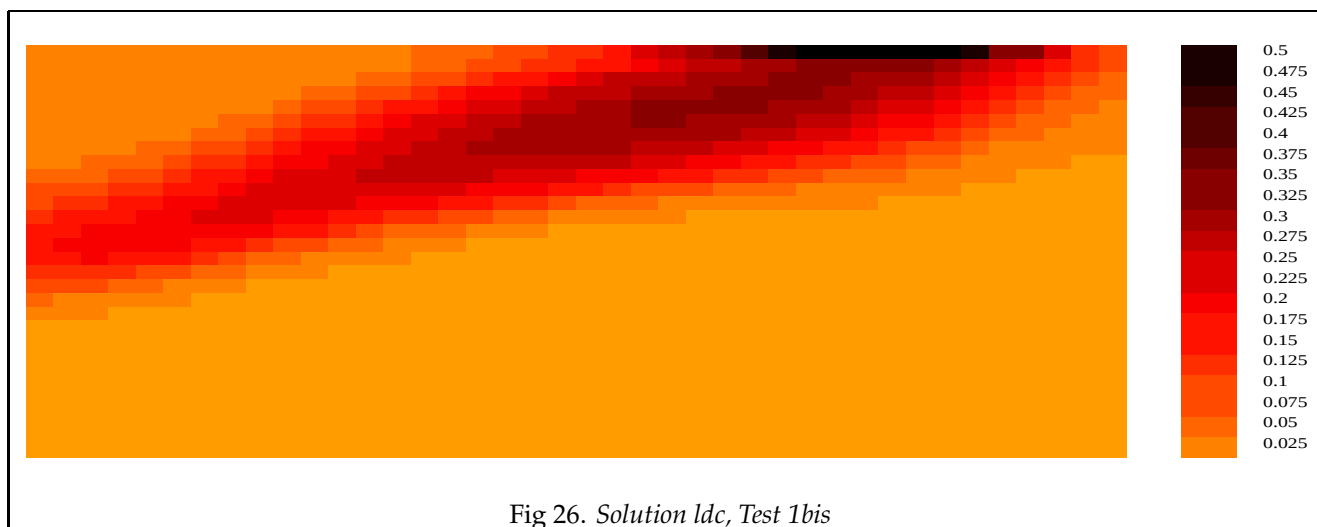
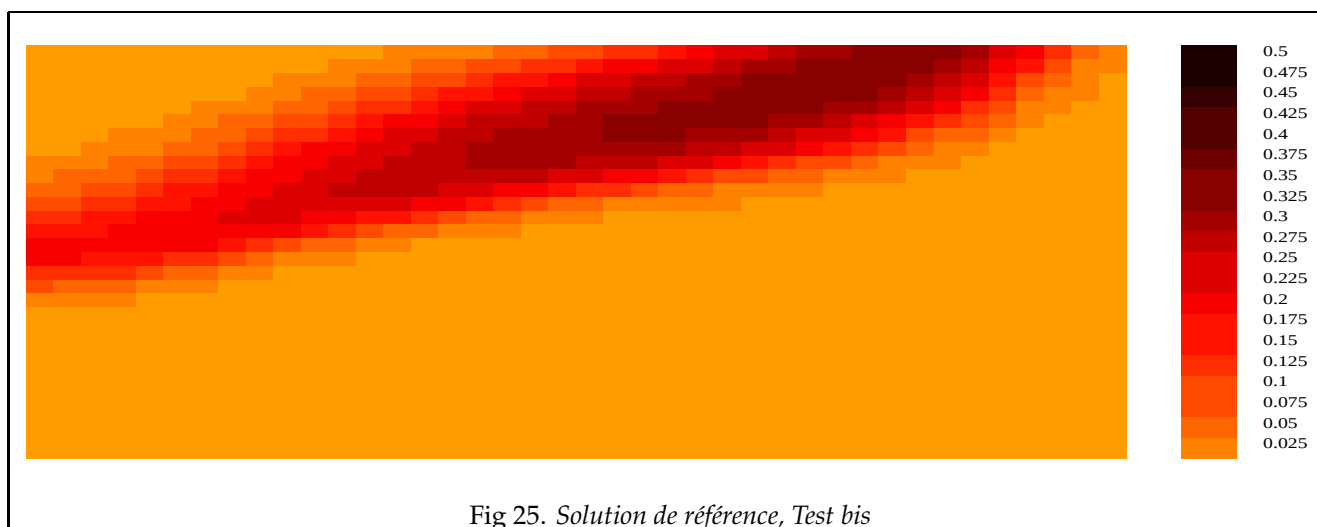
	Nbiter	ER_2	ER_1	CPU (s)
ldc	0173	20.770%	19.459%	074
impes1	3773	07.703%	05.505%	913
impes2	1295	33.268%	28.957%	337

Sur ce test, on peut faire plusieurs remarques :

1. Le rapport $(Nbiter(IMPES)/Nbiter(LDC))$ est plus important que dans les tests qu'on a présentés avant, tout en gardant une précision correcte par rapport à la solution de référence, ceci s'explique par le fait qu'on a ajouté un terme source dans l'équation de la pression.
2. Avec ce terme source on n'a plus $\text{div}(\vec{V}_T) = 0$, en revanche dans la zone où cette relation n'est pas vérifiée (i.e. Ω_1), il n'a pas de lignes de courants qui passent.
3. La présence du terme source nous a guidé sur le choix des points d'origine pour les lignes de courants, car la plupart d'entre elles sont tracées près de Ω_1 . Néanmoins, on peut constater que certaines lignes sont tracées dans différents endroits de Ω (qui vont du coté gauche du domaine vers le coté droit) ceci afin d'empêcher le déplacement de l'huile vers le haut du bassin qui est dû à la résolution numérique de l'équation avec gravité.

4. On peut remarquer dans la solution donnée par la méthode des lignes de courants la présence d'huile dans le haut du bassin. Ceci est dû au fait qu'on prend des grands pas de temps entre deux résolutions de l'équation de la pression, et donc on a un grand déplacement vertical de l'huile généré par le traitement numérique de la gravité.
-





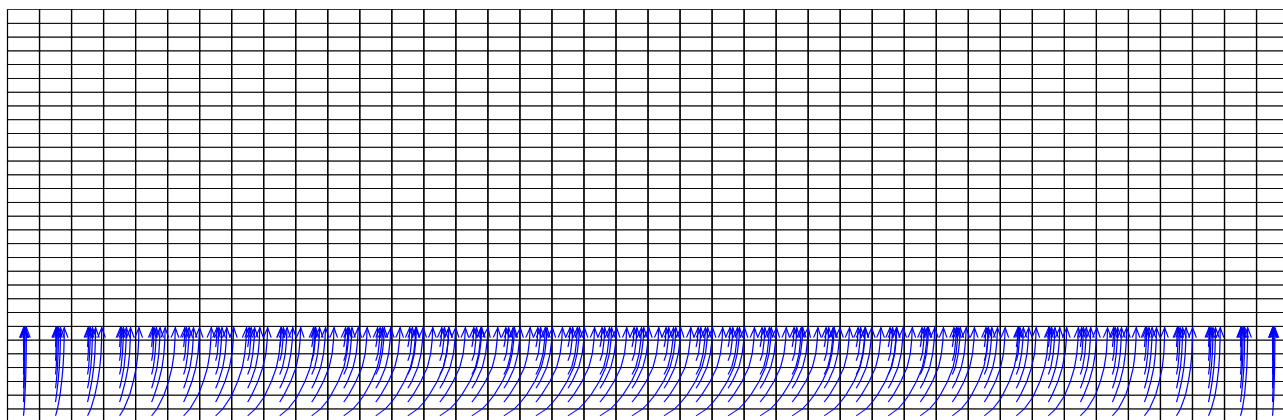


Fig 28. Les LDC par rapport à $\vec{V}_o$ pour $t = 0$, Test 1bis

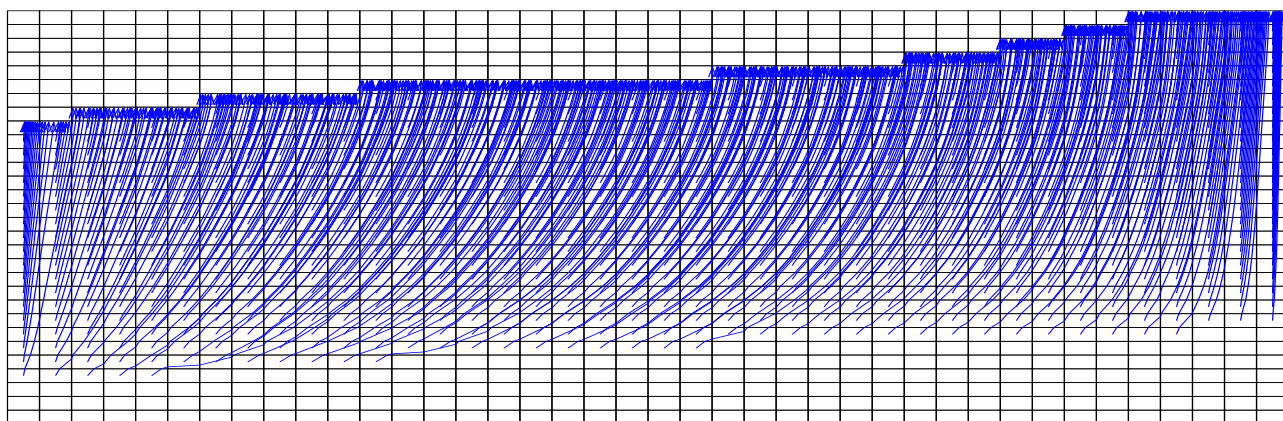


Fig 29. Les LDC par rapport à $\vec{V}_o$ pour $t = T/2$, Test 1bis

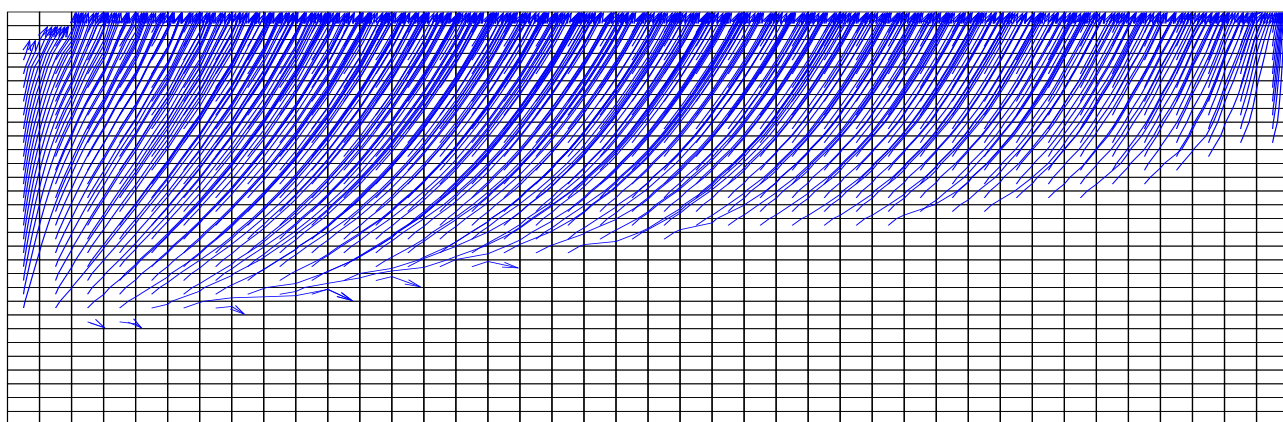
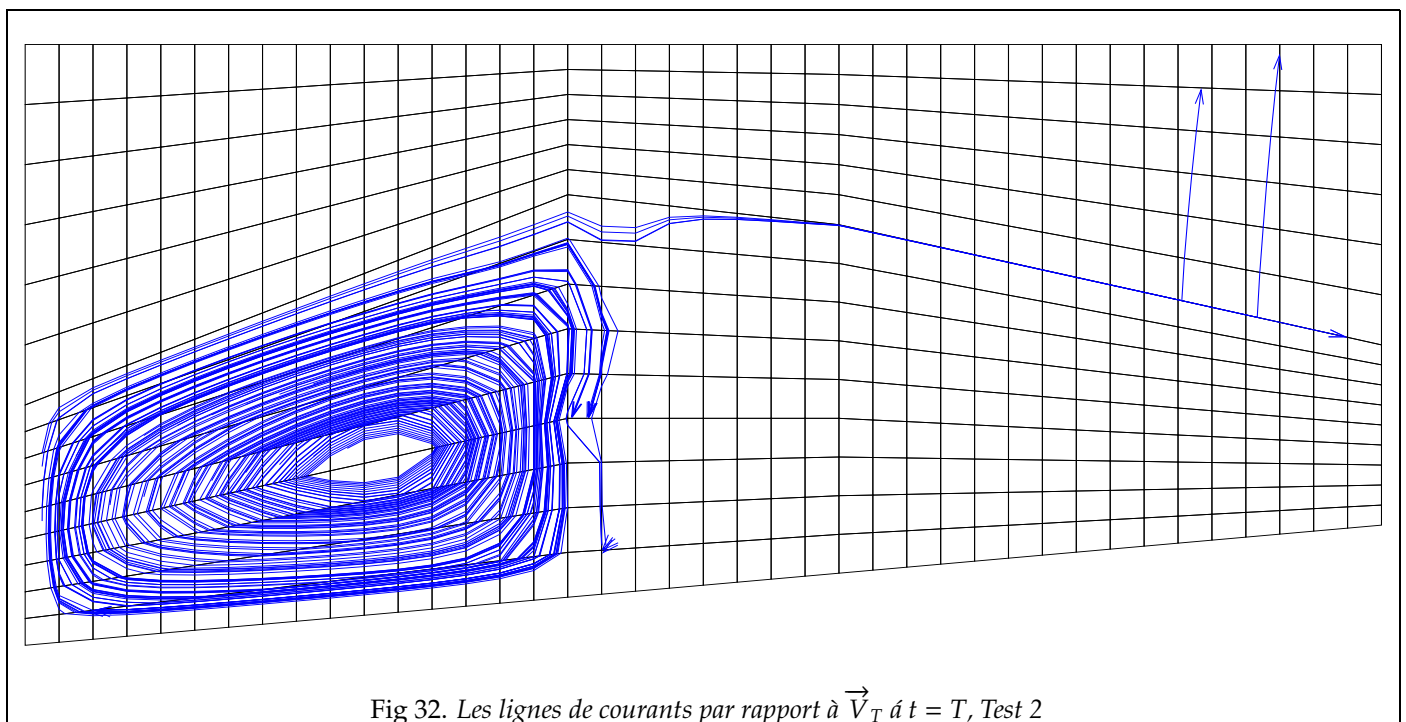
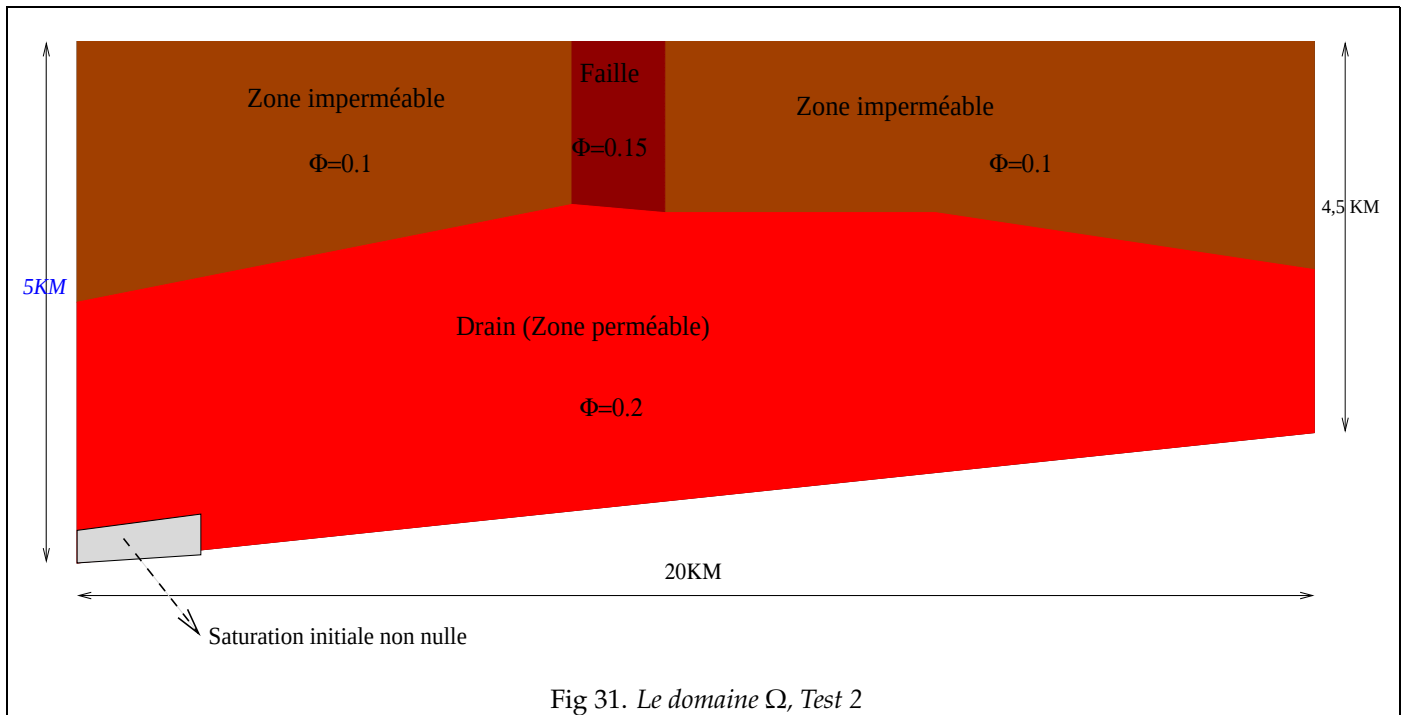
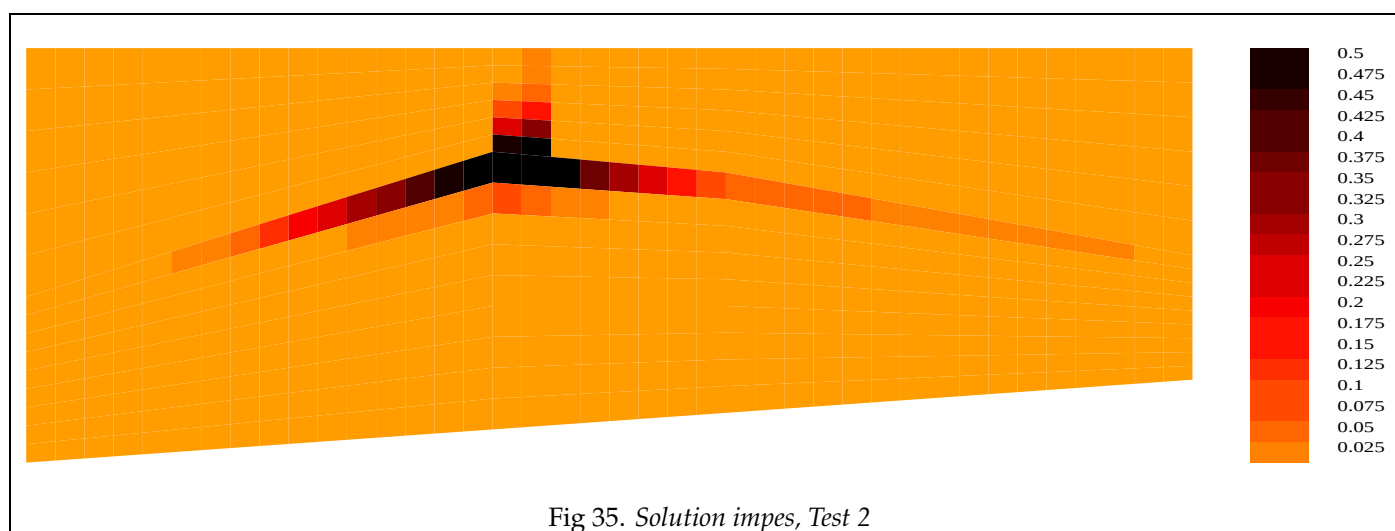
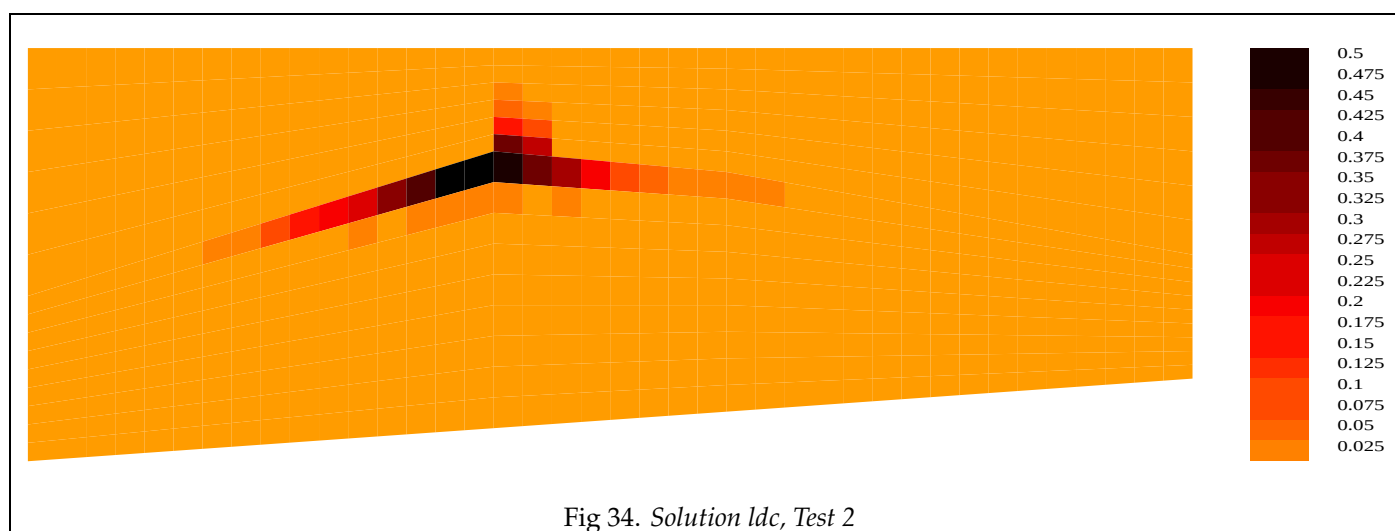
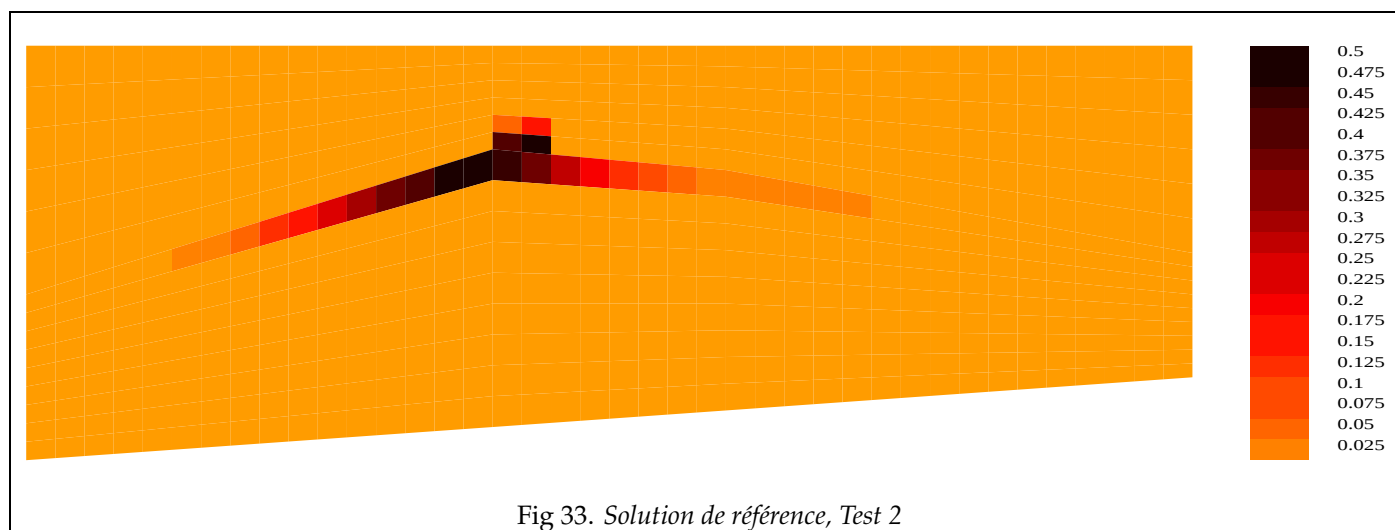


Fig 30. Les LDC par rapport à $\vec{V}_o$ pour $t = T$, Test 1bis





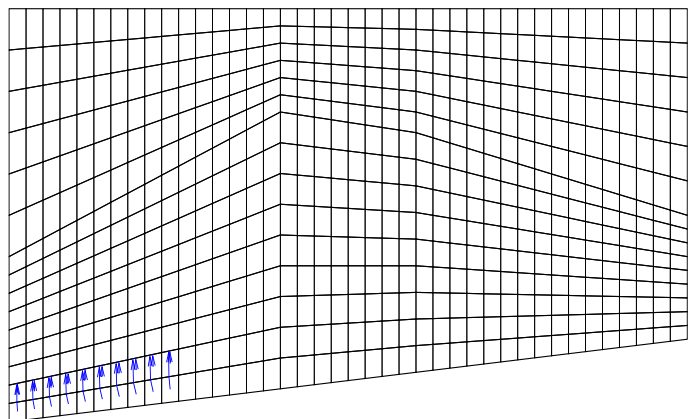


Fig 36. LDC huile 1. Test 2

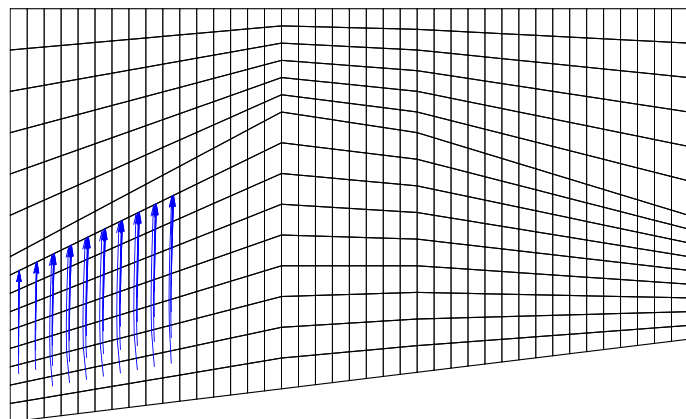


Fig 37. LDC huile 2. Test 2

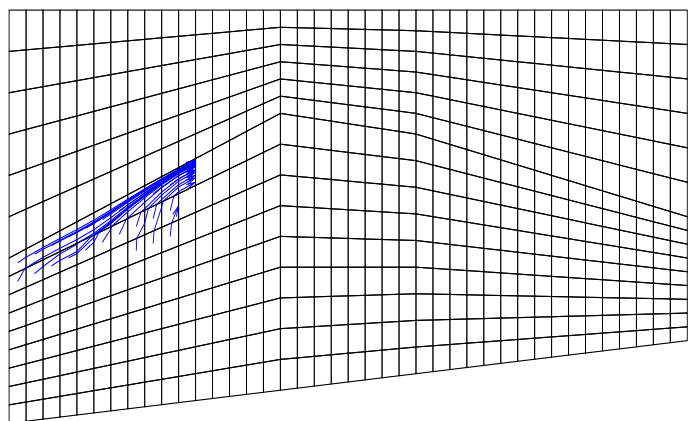


Fig 38. LDC huile 3. Test 2

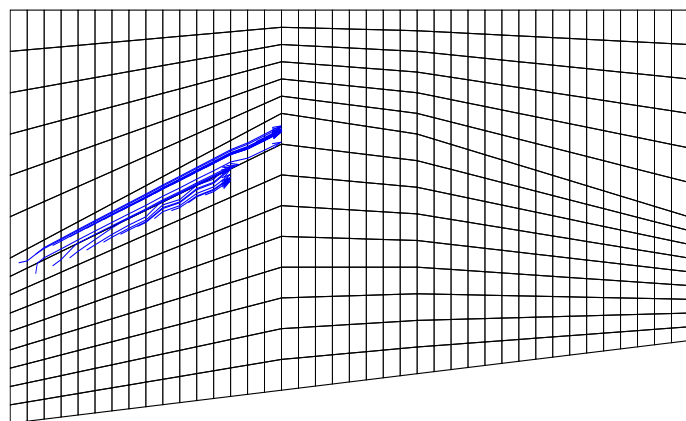


Fig 39. LDC huile 4. Test 2

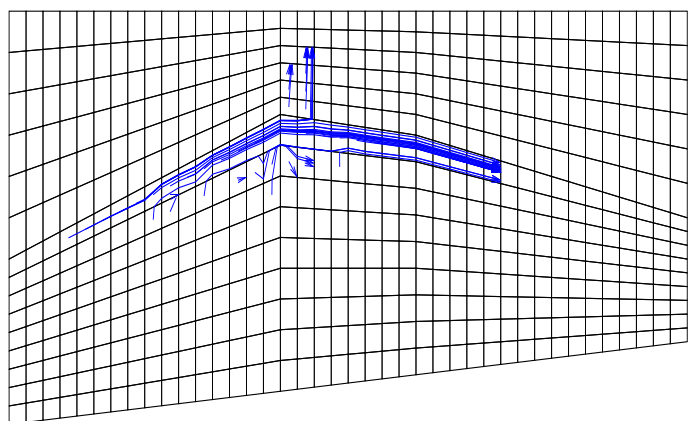


Fig 40. LDC huile 5, Test 2

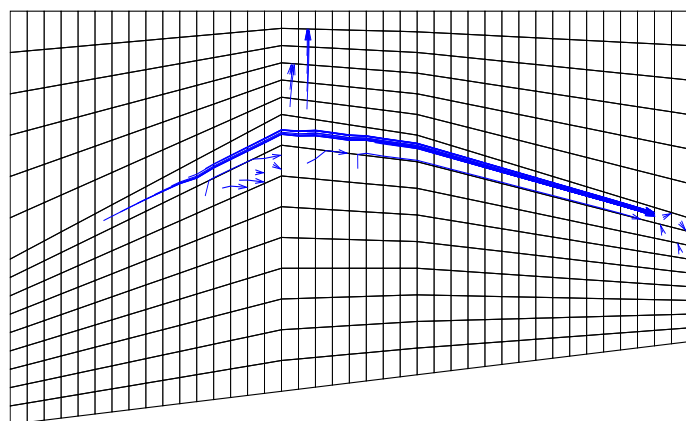
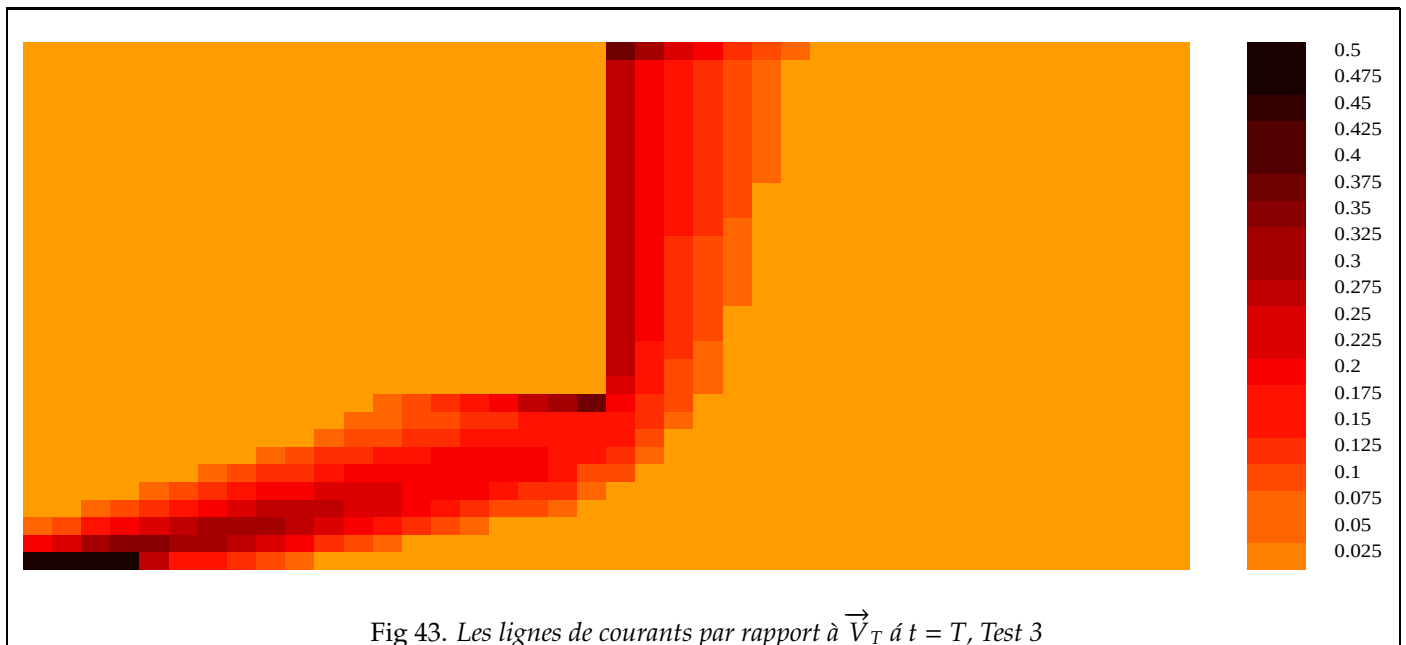
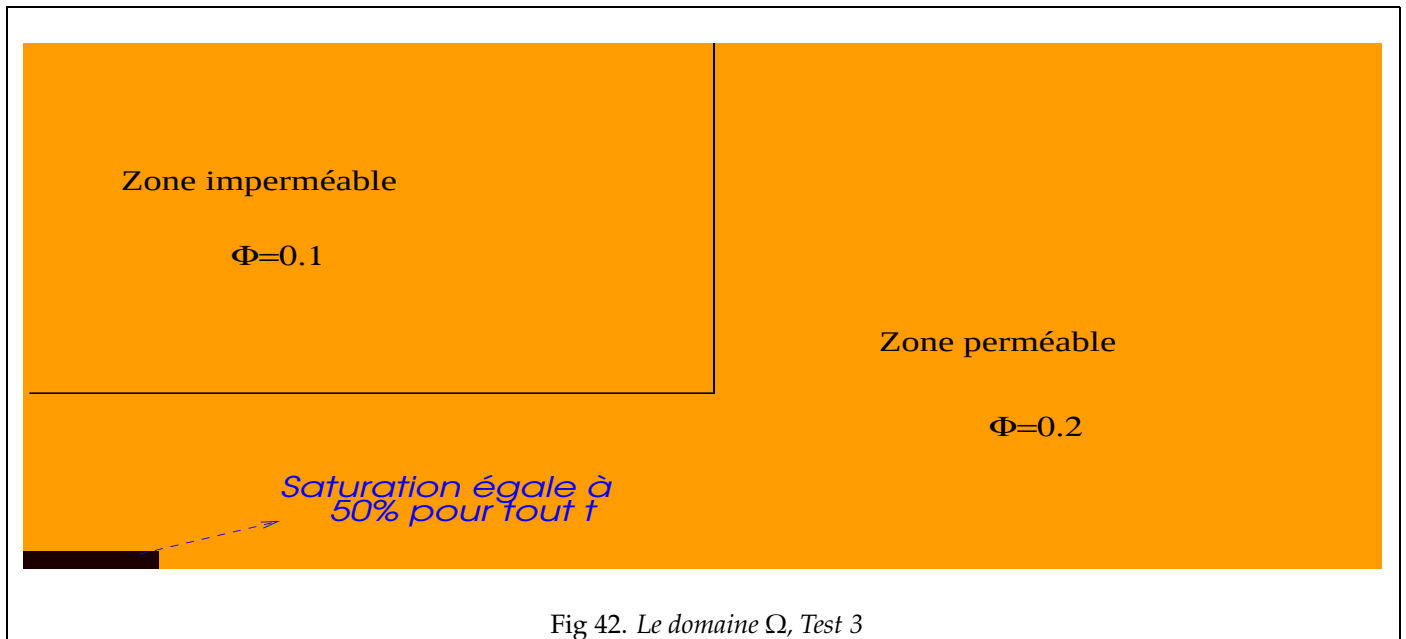
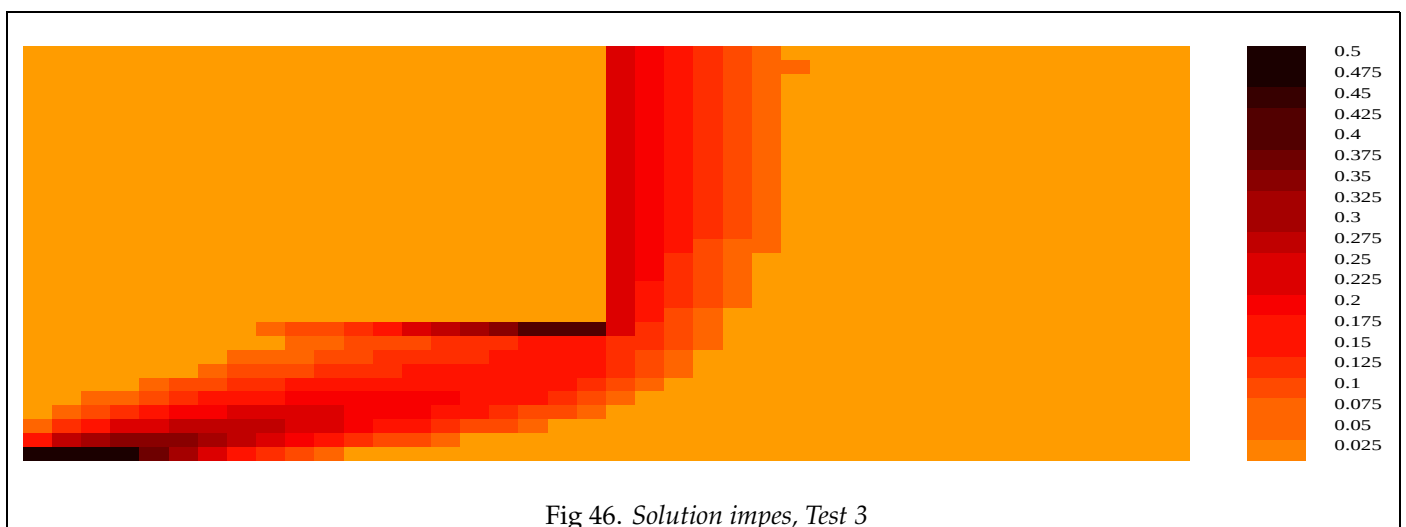
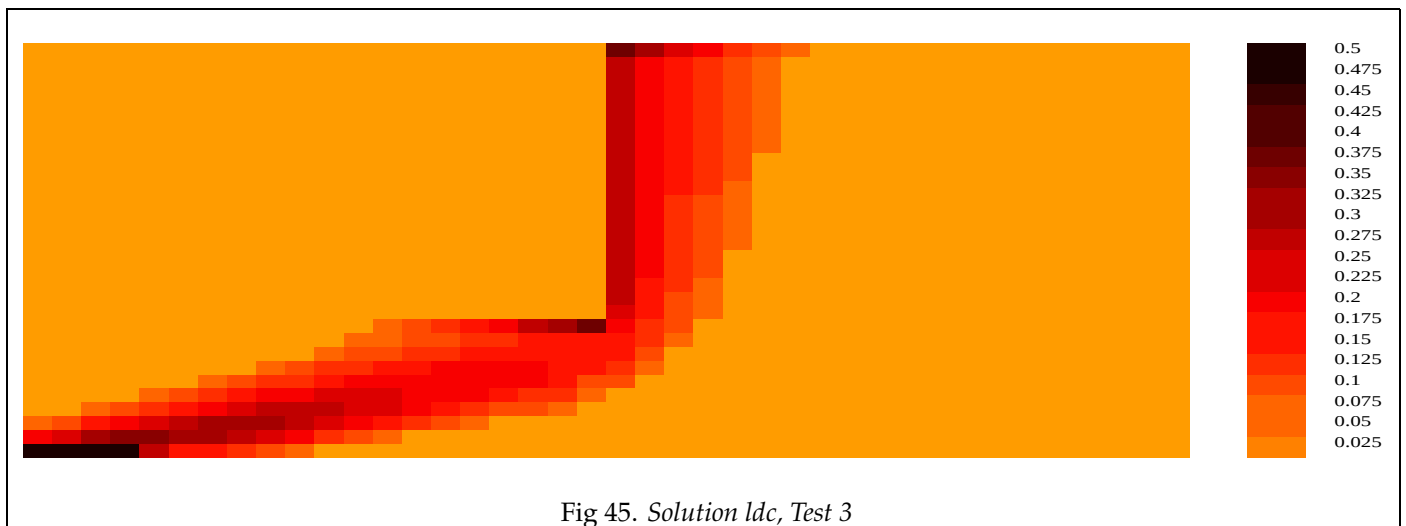
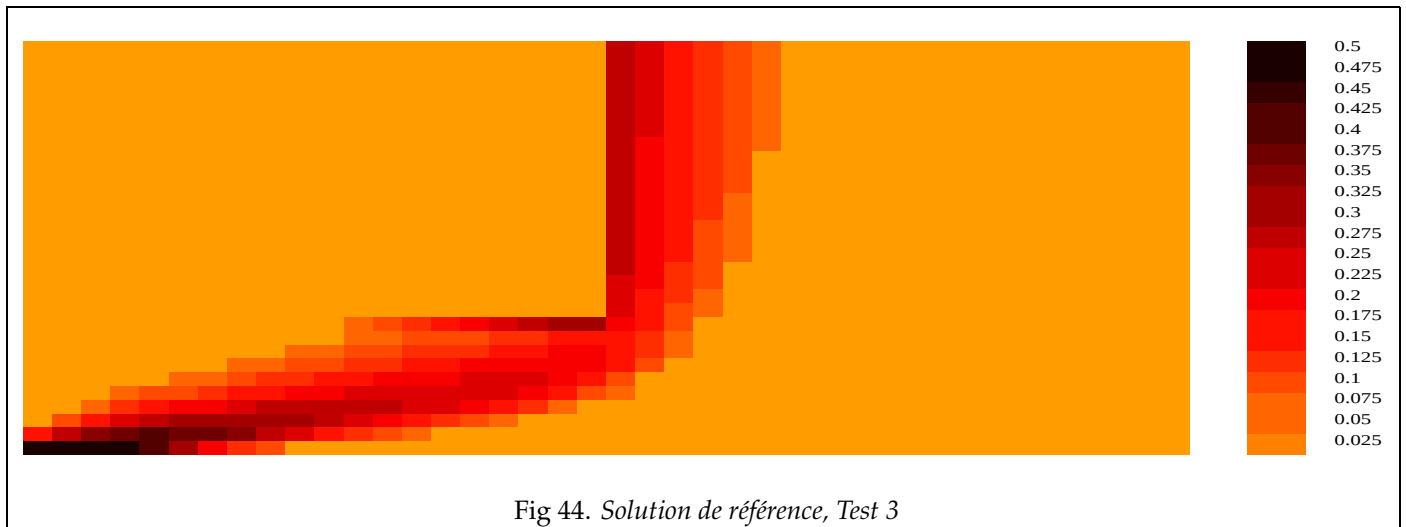
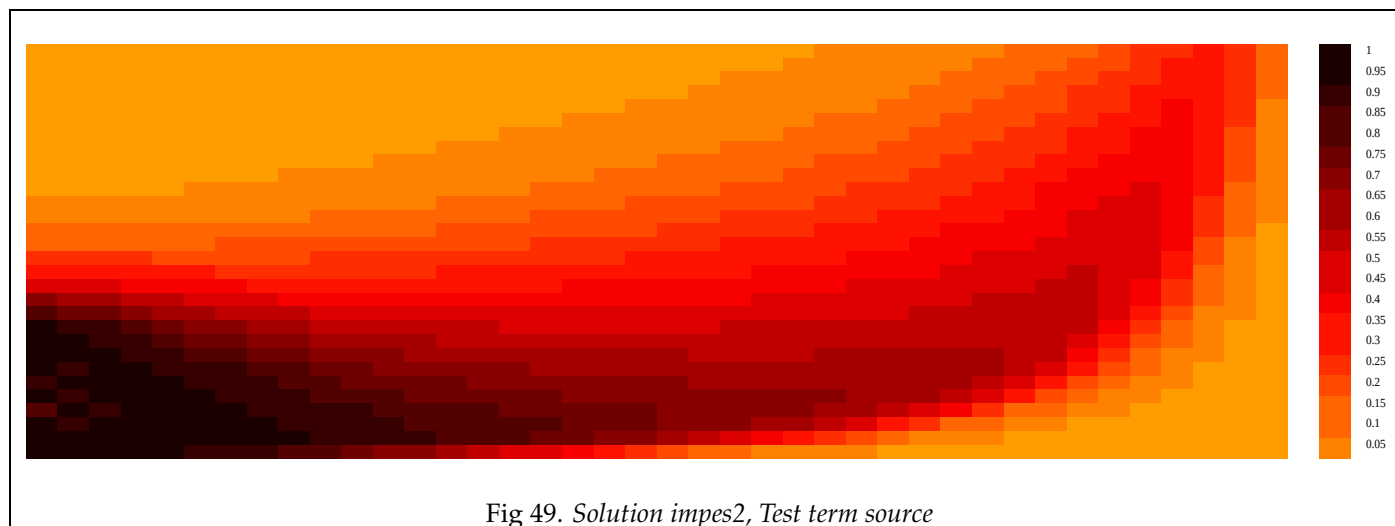
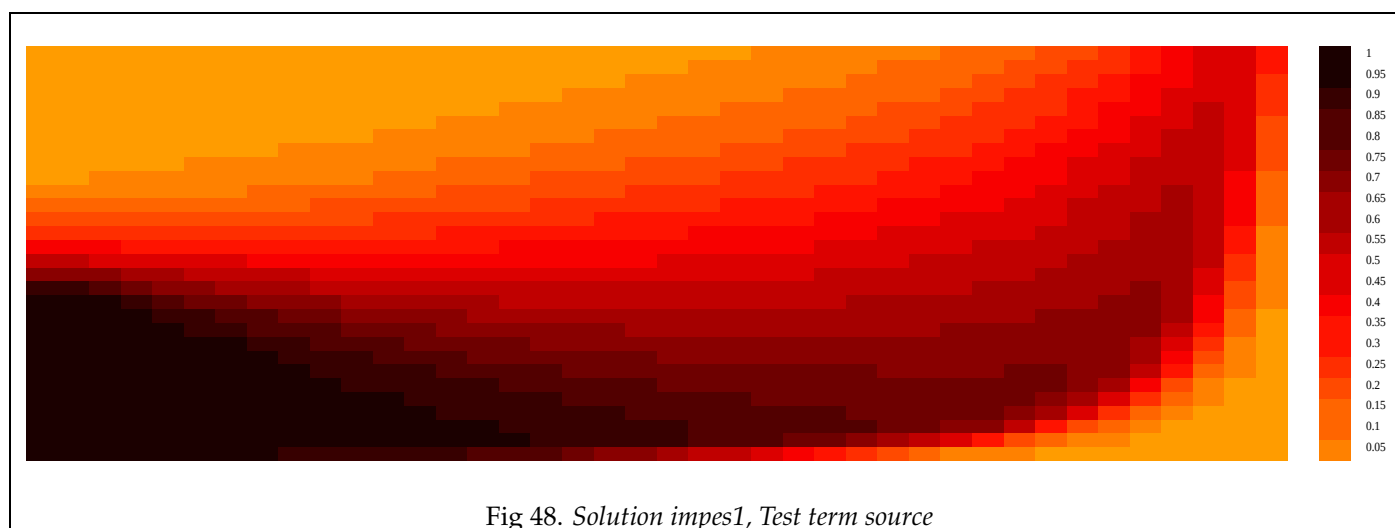
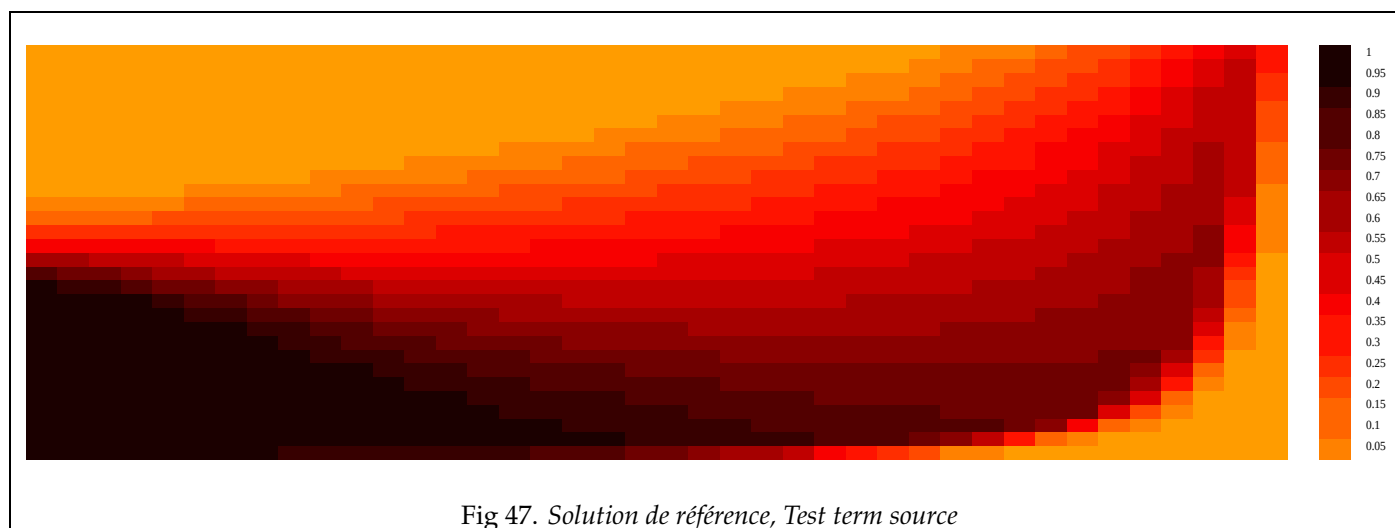
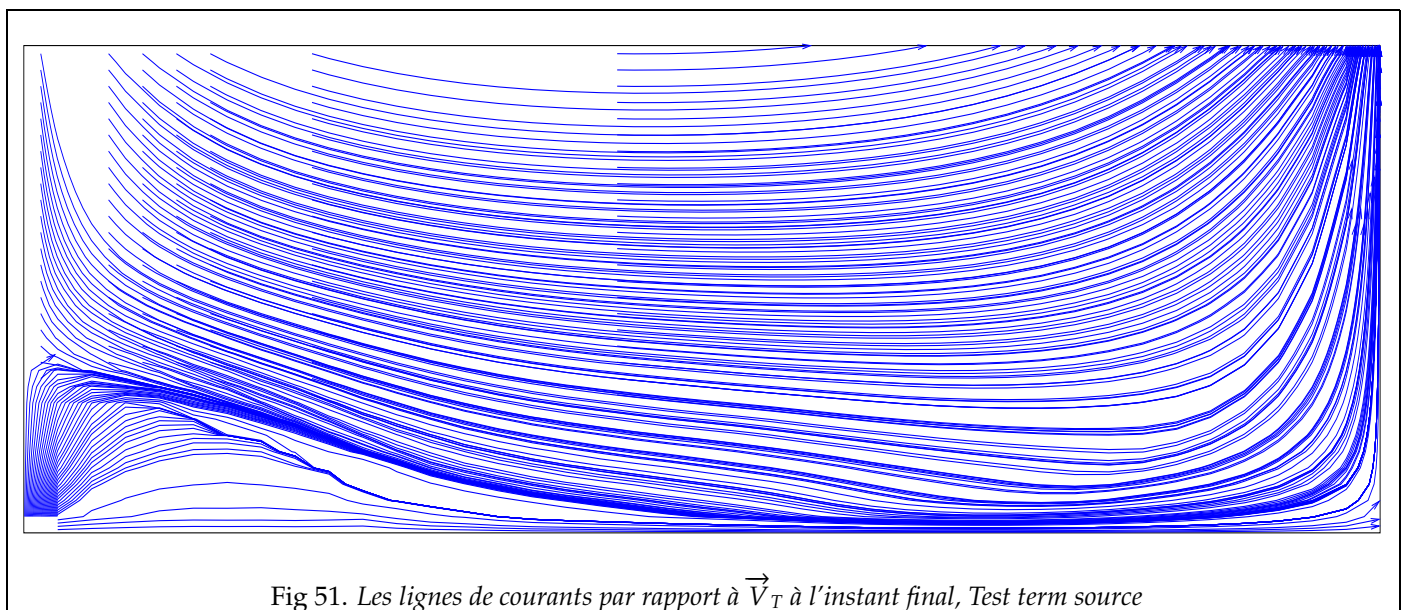
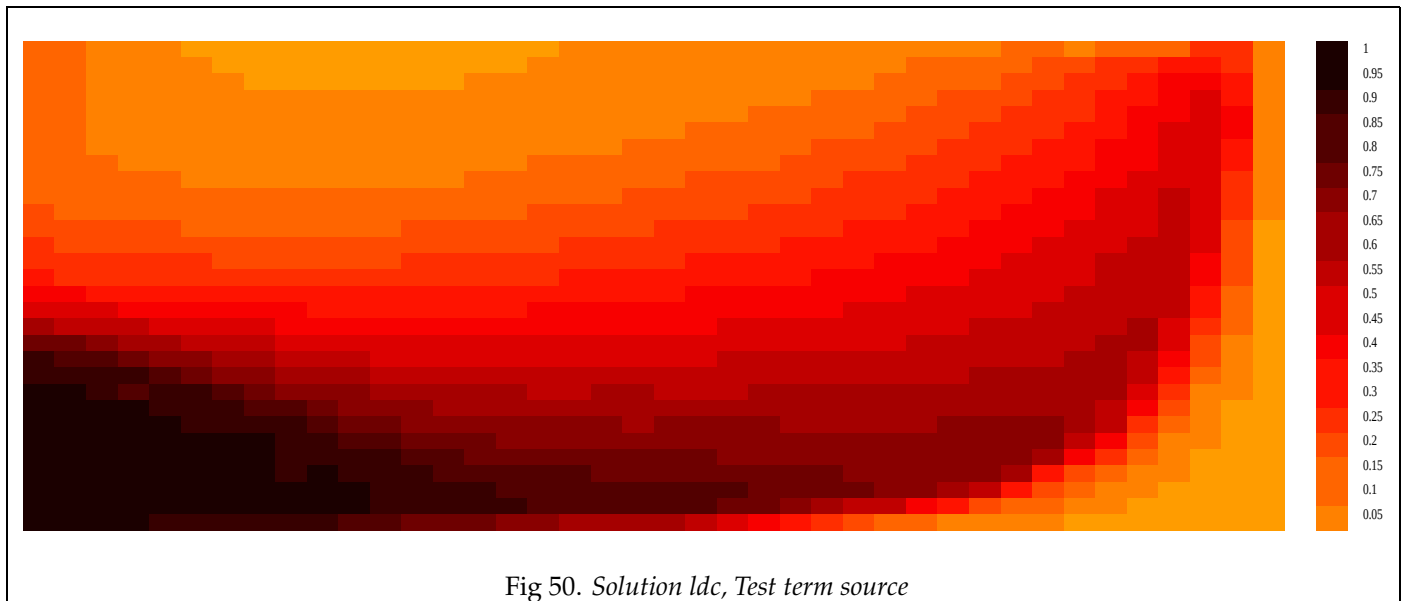


Fig 41. LDC huile 6, Test 2









3.5 Remarques sur les tests numériques

Au vu des résultats numériques qu'on a obtenus dans cette partie, on peut tirer les conclusions suivantes :

1. La méthode des lignes de courants marche bien et une extension au cas de bassin semble tout à fait faisable.
2. Notre choix des conditions aux limites pour l'équation 1d sur les lignes de courants, plus le fait d'ajouter la pression capillaire semble fonctionner pour la méthode des lignes de courants.
3. Sur l'ensemble des tests, on a une bonne précision de la solution LDC et même meilleure dans certains cas que celle de la méthode IMPES.
4. On réduit de façon importante le nombre de résolutions de l'équation de la pression (en moyenne 5) par rapport à la méthode IMPES, sans pour autant diminuer la qualité de la solution, ce qui donne un gain de temps de calcul (surtout au passage 3d).

Les points sur lesquels on doit encore réfléchir sont :

- Trouver des critères efficaces pour déterminer les points d'origine pour les lignes de courants, car ceux-ci déterminent les trajectoires dans le domaine ainsi que les conditions aux limites. Ces critères doivent être basés sur la vitesse totale et la saturation de l'huile mais aussi sur la lithologie du milieu. Par exemple, on peut constater sur les tests avec un milieu non homogène qu'il n'y a pas d'huile qui entre dans des zones imperméables, donc il n'est pas nécessaire de tracer des lignes de courant dans ces zones.
 - Améliorer le traitement du découplage pour l'équation de la saturation, i.e. améliorer le schéma numérique pour la partie gravité et la pression capillaire. Bien que le choix du schéma qu'on a retenu semble marcher, on peut encore faire plus d'efforts sur ce point.
-

Chapitre 4

Application de la méthode des lignes de courant à un cas plus complet

4.1 Introduction

Dans cette partie on va appliquer la méthode des lignes de courants à un modèle de bassin plus complet et réaliste que dans le modèle déjà traité dans la partie précédente. Il y aura plusieurs différences dont les plus importantes sont la compaction et la génération de l'huile.

1- Compaction:

Au cours de la formation du bassin les sédiments sont déposés dans le bassin, ensuite ils se compactent sous le poids des sédiments sus-jacents. Dans les sédiments compactés on peut constater d'abord un changement du volume et une diminution de la porosité, ainsi qu'une expulsion de l'huile pour les sédiments qui en contiennent (les roches mères). Sur le modèle mathématique ceci se traduit par une variation au cours du temps du domaine de résolution du système et de la porosité, ce qui implique une vitesse totale dont la divergence n'est pas nulle (voir équation ci-après).

2- Génération de l'huile:

Certains matériaux déposés dans le bassin pendant sa formation contiennent des débris organiques. Puis, par des réactions chimiques, ces débris donnent naissance à une matière organique appelée kérogène. Ensuite celle ci se transforme sous l'effet du temps et de la température pour donner de l'huile et du gaz. En général il y a deux étapes appelées craquage primaire et craquage secondaire. Dans le système des équations mathématiques ceci se traduit par l'apparition des termes sources dans les équations de conservation de la masse, et on a aussi un terme de plus dans la relation de la divergence de la vitesse totale.

La méthode des lignes de courant sera implantée dans le code Visco3D¹, un code développé à l'IFP pour la modélisation des bassins. On rappelle que dans l'étude d'un bassin sédimentaire, on peut distinguer plusieurs phénomènes physiques. Les plus importants d'entre eux sont:

1. Evolution géométrique du bassin
2. Evolution thermique
3. Génération d'huile à partir de la matière organique
4. Ecoulement polyphasique dans le bassin

La méthode des lignes de courant sera appliquée aux équations de l'écoulement (i.e le quatrième point), les autres équations seront traitées numériquement par le code Visco3D. Dans Visco3D, on utilise deux types de schémas pour traiter les équations de la saturation:

- Schéma IMPES:
Ce schéma nécessite une condition CFL sur le pas de temps pour qu'il reste stable au cours de la modélisation, ce qui oblige à faire plus souvent une résolution d'un système linéaire (équation de la pression), et augmente le temps de calcul.
- Schéma Fully Implicite:
Ce schéma ne demande pas de condition sur le pas de temps. Par contre à chaque pas de temps on a un système non linéaire à résoudre, cette étape est très coûteuse.

Ces deux schémas vérifient le critère de la conservation des bilans de fluides. On donnera dans la suite le schéma IMPES, pour le schéma Fully Implicite voir ([3] et [4]).

¹Pour plus de détails sur Visco3d, on peut consulter ([31], [32]), et les rapports IFP ([22], [3] et [4])

4.2 Les équations mathématiques du modèle

4.2.1 Lois de conservation dans le bassin

- Conservation de la masse solide

$$\partial_t(\rho_s(1 - \Phi)) + \text{div}(\rho_s(1 - \Phi)\vec{V}_s) = \rho_s q_s. \quad (4.1)$$

- Conservation de la masse de la phase α , $\alpha \in \{w, o, g\}$

$$\partial_t(\rho_\alpha \Phi S_\alpha) + \text{div}(\rho_\alpha \vec{V}_\alpha) = \rho_\alpha q_\alpha. \quad (4.2)$$

- Equilibre mécanique

$$\partial_z(\sigma_z) = (\Phi \rho_f + (1 - \Phi)\rho_s)g \quad (4.3)$$

Où:

- Φ est la porosité du milieu
- ρ_s est la densité de la phase solide (entre 2500 et 3000 Kg/m^3)
- $\vec{V}_s$ est la vitesse de la phase solide. Cette vitesse est supposée nulle dans les directions de x et y
- q_s est le terme source de la phase solide, correspondant à la quantité de solide déposée (ou retirée) au toit du bassin
- σ_z est la contrainte totale exercée par les terrains sus-jacents, supposée verticale
- g est la valeur algébrique de la pesanteur ($9.81 \text{ m}/\text{s}^2$)

Pour $\alpha \in \{w, o, g\}$, on a noté:

- ρ_α est la masse volumique de la phase α , qui est soit constante, soit dépendante de la température (entre 1000 – 1100 pour l'eau, 700 – 900 pour l'huile et 1 – 200 Kg/m^3 pour le gaz)
- S_α est la saturation de la phase α , et on a $\sum_\alpha S_\alpha = 1$
- $\vec{V}_\alpha$ est la vitesse de Darcy de la phase α , donnée par la relation

$$\vec{V}_\alpha = \Phi S_\alpha (\vec{v}_\alpha - \vec{V}_s).$$

Où $\vec{v}_\alpha$ est la vitesse de la phase α (entre 10^{-6} et $1 \text{ m}/\text{annee}$)

- q_α est le terme source de la phase α . Pour l'eau, ce terme est lié à la sédimentation ou à l'érosion. Pour l'huile, ce terme est lié aux phénomènes de craquage primaire et secondaire
- ρ_f est la densité moyenne du fluide définie par $\rho_f = \sum_\alpha \rho_\alpha S_\alpha$

4.2.2 Loi de Darcy

Les fluides sont supposés obéir à la loi de Darcy généralisée, qui donne la vitesse de la phase α en fonction de sa pression:

$$\vec{V}_\alpha = -A_\alpha K (\vec{\nabla} P_\alpha - \rho_\alpha \vec{g}). \quad (4.4)$$

Avec:

- P_α est la pression de la phase α
- K est la matrice de perméabilité intrinsèque du milieu

- A_α est la mobilité de la phase α , A_α est donnée par:

$$A_\alpha(S_\alpha, T) = \frac{kr_\alpha(S_\alpha)}{\mu_\alpha(T)},$$

où kr_α est la perméabilité relative de la phase α en présence des autres phases, et μ_α la viscosité de la phase α . T est la température.

4.2.3 Transferts thermiques

Les transferts thermiques sont régis par l'équation de la conservation de la chaleur, dans laquelle sont pris en compte les phénomènes de conduction, convection et radioactivité. On donne ici la forme générale de cette équation:

$$\partial_t(\rho c_b T) + \text{div} \left(\sum_{\alpha \in \{w, o, g\}} (\rho_\alpha c_\alpha T \vec{V}_\alpha) + \rho_s c_s (1 - \Phi) T \vec{V}_s - \lambda_b \vec{\nabla} T \right) = q_h + q_r + q_{oh} \quad (4.5)$$

Avec:

- T la température
- c_α la capacité calorifique de la phase α
- ρc_b la capacité calorifique du milieu poreux saturé par les fluides, donnée par:

$$\rho c_b = \sum_{\alpha \in \{w, o, g\}} \rho_\alpha \Phi S_\alpha c_\alpha + \rho_s (1 - f) c_s$$

- λ_b la conductivité thermique du milieu, donnée par:

$$\lambda_b = \lambda_s^{1-\Phi} \prod_{\alpha \in \{w, o, g\}} \lambda_\alpha^{\Phi S_\alpha}$$

avec λ_α la conductivité de la phase α qui dépend de T

- q_h le terme source de chaleur dû au dépôt ou à l'érosion de sédiments
- q_r le terme source dû à la radioactivité
- q_{oh} le terme source dû à la variation de volume fluide par génération d'huile

Pour les cas particuliers de cette équation, les conditions initiales et aux limites, ainsi que le traitement numérique de cette équation dans le code Visco on se réfère à ([2]).

4.2.4 Perméabilités intrinsèques

La matrice K de perméabilité est supposée diagonale dans le repère strate-antistrade, de la forme:

$$K = k(\Phi) \begin{pmatrix} kx & 0 & 0 \\ 0 & ky & 0 \\ 0 & 0 & kz \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

avec:

- kx, ky et kz sont les coefficients d'anisotropie dans les directions x, y et z
- $k(\Phi)$ est une fonction de la porosité, donnée par la formule de Kozeny-Carman:

$$k(\Phi) = \begin{cases} \frac{0.2\Phi^3}{S_0^2(1-\Phi)^2} & \text{si } \Phi \geq 0.1 \\ \frac{20\Phi^5}{S_0^2(1-\Phi)^2} & \text{si } \Phi \leq 0.1 \end{cases} \quad (4.7)$$

où S_0 est la surface spécifique du sédiment, constante pour chaque lithologie. En général $k(\Phi)$ varie entre 10^{-12} et $10^{-21} m^2$

4.2.5 Perméabilités relatives

Les perméabilités relatives sont des fonctions des saturations et de la lithologie. Dans le cas d'un écoulement diphasique, la perméabilité relative de l'huile est définie de cette façon:

$$kr_o(S_o) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_o \leq S_{atex}^o \\ \left(\frac{S_o - S_{atex}^o}{S_{atir}^o - S_{atex}^o} \right)^{p_{ow}} & \text{si } S_{atex}^o \leq S_o \leq S_{atir}^o \\ 1 & \text{si } S_o \geq S_{atir}^o \end{cases} \quad (4.8)$$

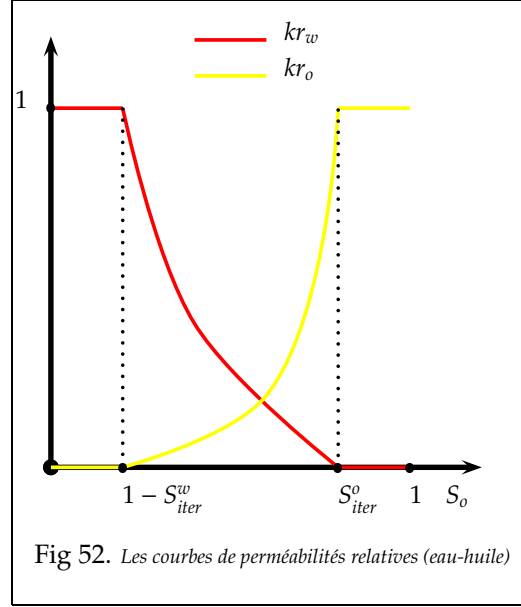
De la même façon, la perméabilité relative de l'eau en présence d'huile est donnée par:

$$kr_w(S_w) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_w \leq 1 - S_{atir}^w \\ \left(\frac{S_w - (1 - S_{atir}^w)}{S_{atir}^w - S_{atex}^w} \right)^{p_{wo}} & \text{si } 1 - S_{atir}^w \leq S_w \leq 1 - S_{atex}^w \\ 1 & \text{si } S_w \geq 1 - S_{atex}^w \end{cases} \quad (4.9)$$

Avec:

- p_{ow} et p_{wo} sont des constantes ≥ 1

- S_{atex}^o est la saturation minimale de l'huile (saturation d'expulsion)
- S_{atir}^o est la saturation maximale de l'huile
- S_{atex}^w est la saturation minimale de l'eau (saturation d'expulsion, entre 0 et 0.25)
- S_{atir}^w est la saturation maximale de l'eau (entre 0.5 et 0.95)



Les constantes S_{atir}^α et S_{atex}^α sont reliées par la relation:

$$S_{atir}^\alpha = 1 - S_{atex}^\beta \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \{o, w\}.$$

4.2.6 Pression capillaire

Les pressions capillaires relient les pressions des fluides. elles vérifient la relation pour $\alpha, \beta \in \{w, o, g\}$:

$$P_{c\alpha\beta} = P_\alpha - P_\beta = P_{c\alpha\beta}(S_\alpha, S_\beta).$$

La formule utilisée pour calculer $P_{c\alpha\beta}$ est:

$$P_{c\alpha\beta}(S_\alpha, S_\beta) = \begin{cases} Pc1_{\beta\alpha} + (Pc1_{\alpha\beta} - Pc1_{\beta\alpha}) \left(\frac{\bar{S}_\alpha - S_{r,\alpha\beta}}{1 - S_{r,\beta\alpha} - S_{r,\alpha\beta}} \right)^{\gamma_{\alpha\beta}} & \text{si } S_{r,\alpha\beta} < \bar{S}_\alpha < 1 - S_{r,\alpha\beta} \\ Pc1_{\beta\alpha} & \text{si } \bar{S}_\alpha \leq S_{r,\alpha\beta} \\ Pc1_{\alpha\beta} & \text{si } \bar{S}_\alpha \geq 1 - S_{r,\alpha\beta} \end{cases} \quad (4.10)$$

Avec $\alpha = w$ et $\beta \in \{o, g\}$, et :

- $S_{r,\alpha\beta}$ est la saturation résiduelle.
- $\bar{S}_\alpha = \frac{S_\alpha}{S_w + S_\alpha}$.
- $\gamma_{\alpha\beta}$ est une constante comprise entre 0 et 1.
- $Pc1_{\alpha\beta}$ et $Pc1_{\beta\alpha}$ sont des constantes.

On définit la pression moyenne du fluide par:

$$P_f = S_w P_w + S_o P_o + S_g P_g. \quad (4.11)$$

On définit, pour chaque phase α , $P_{c\alpha,f}$ par:

$$P_{c\alpha,f} = P_\alpha - P_f.$$

Pression capillaire dans un écoulement diphasique

On considère un écoulement diphasique (eau, huile). Dans ce cas la pression capillaire est définie par:

$$Pc(\Phi, S_w) = P_o - P_w = \overline{\overline{Pc}}(\Phi) + \overline{Pc}(S_w).$$

Avec $\overline{\overline{Pc}}(\Phi)$ donnée par:

$$\overline{\overline{Pc}}(\Phi) = \begin{cases} Pc_0 & \text{si } \Phi > \Phi_0 \\ Pc_0 + (Pc_{lim} - Pc_0) \left(\frac{\Phi_0 - \Phi}{\Phi_0 - \Phi_{lim}} \right)^{p\Phi} & \text{si } \Phi_{lim} \leq \Phi \leq \Phi_0 \\ Pc_{lim} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.12)$$

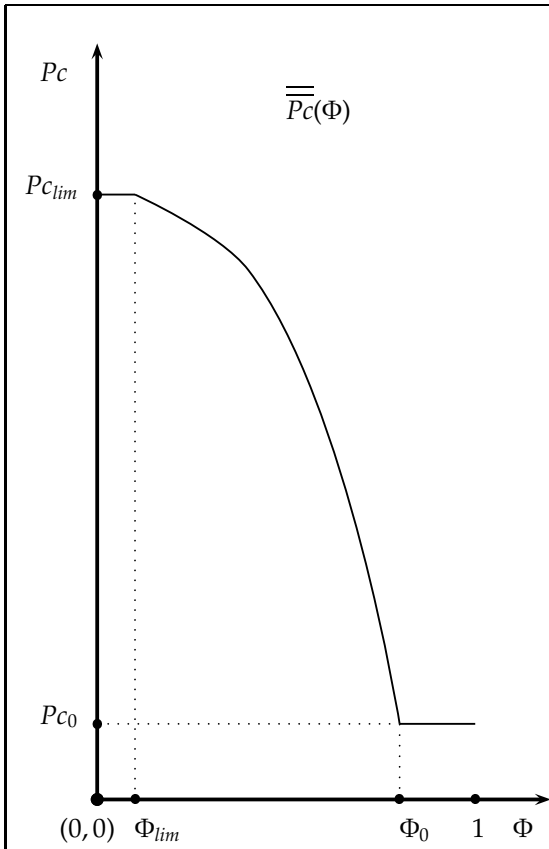
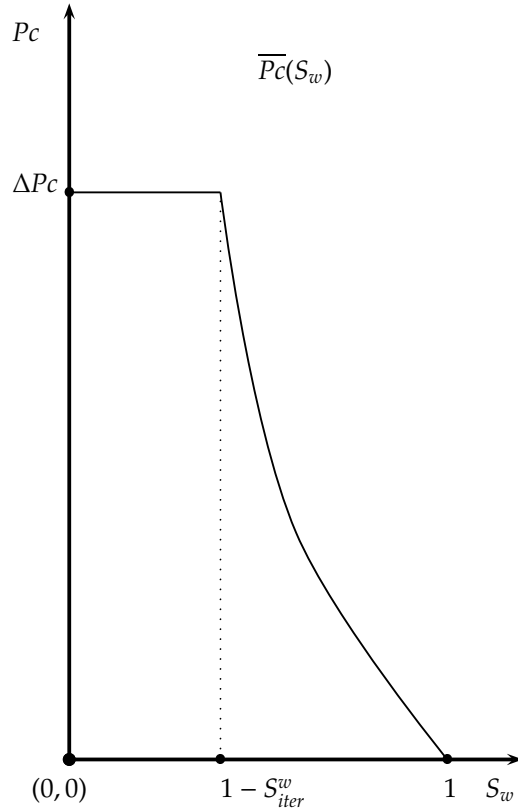
Où

- Pc_0 est la pression capillaire en surface, ou pour une porosité maximale Φ_0 ,
- Pc_{lim} est la pression capillaire pour l'enfouissement maximal ou pour une porosité minimale Φ_{lim}
- $p\Phi$ est une constante.

La dépendance par rapport à la saturation s'exprime par:

$$\overline{Pc}(S_w) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_w = 1 \\ \Delta Pc \left(\frac{1 - S_w}{S_{atir}^w} \right)^{psw} & \text{si } 1 - S_{atir}^w \leq S_w \leq 1 \\ \Delta Pc & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.13)$$

où S_{atir}^w est la saturation maximale de l'eau, ΔPc est l'augmentation de pression capillaire pour une variation maximale de la saturation des hydrocarbures (entre 0 et S_{atir}) et psw est le coefficient en exposant de la fonction.

Fig 53. La dépendance de P_c par rapport à Φ Fig 54. La dépendance de P_c par rapport à S_w

4.2.7 Viscosités

La viscosité de l'eau est une fonction de la température, donnée par la relation suivante (Loi de Bingham):

$$\mu_w(T) = \frac{21.5}{T + \sqrt{8078 + T^2} - 1200}$$

La viscosité de l'huile est une fonction de la température, donnée par:

$$\mu_o(T) = \mu_0 e^{\frac{Ak_0}{T}}$$

où μ_0 est une viscosité de référence et Ak_0 un paramètre. Dans les deux relations ci-dessus T est exprimée en degrés Celsius.

4.2.8 Compaction

La compaction du milieu poreux est décrite par la loi rheologique suivante (ceci nous donne l'évolution de la porosité au cours du temps par rapport à la contrainte effective moyenne σ) :

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\beta(\Phi, \sigma) \partial_t \sigma - \alpha(\Phi, \sigma) \sigma. \quad (4.14)$$

Où σ , β et α sont définies de la façon suivante :

$$\sigma = \sigma_z - P_f. \quad (4.15)$$

$$\beta(\Phi, \sigma) = \begin{cases} \frac{\Phi_a}{E_a} e^{\frac{-\sigma}{E_a}} + \frac{\Phi_b}{E_b} e^{\frac{-\sigma}{E_b}} & \text{si } \sigma \geq \sigma_m \text{ et } \Phi > \Phi_r \\ \frac{1}{E_c} & \text{si } \sigma \leq \sigma_m \text{ et } \Phi > \Phi_r \\ 0 & \text{si } \Phi \leq \Phi_r \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\alpha(\Phi, \sigma) = \begin{cases} \frac{1 - \Phi}{\mu_b(T)} & \text{si } \sigma \geq 0 \text{ et } \Phi > \Phi^{min} \\ 0 & \text{si } \sigma \leq 0 \text{ et } \Phi \leq \Phi^{min} \end{cases} \quad (4.17)$$

où

- $\Phi_r, \Phi_a, \Phi_b, \Phi^{min}, E_a, E_b$ et E_c sont des constantes,
- σ_m est le seuil de plasticité égal à la contrainte effective maximale atteinte au cours de l'histoire géologique,
- μ_b est la viscosité de la roche, c'est une fonction de la température :

$$\mu_b(T) = \mu_0 e^{\frac{E}{R}(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0})},$$

où μ_0 est la viscosité de la roche pour une température de 15° Celsius, E est l'énergie d'activation, R la constante des gaz parfaits.

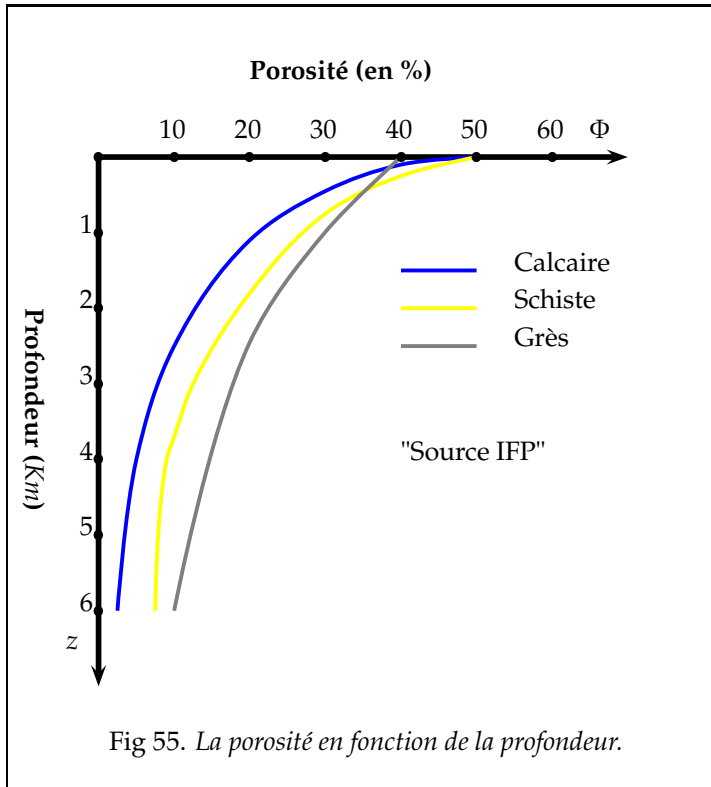


Fig 55. La porosité en fonction de la profondeur.

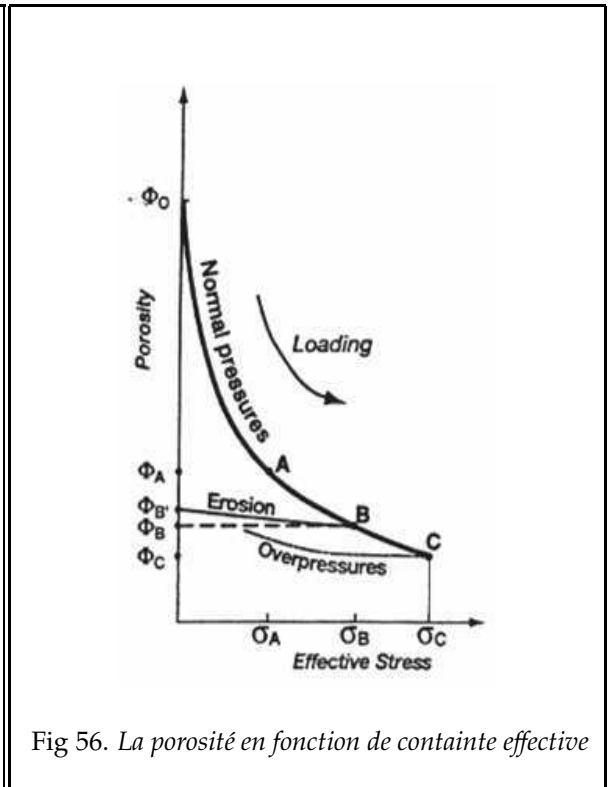


Fig 56. La porosité en fonction de contrainte effective

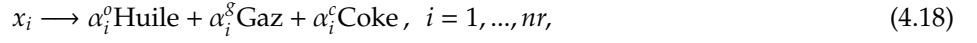
4.2.9 Génération des hydrocarbures

Craquage primaire

La génération des hydrocarbures est effectuée à partir d'un modèle conservatif à deux classes: les hydrocarbures lourds (huile) et légers (gaz). Les phases eau, huile, gaz sont constituées d'un seul composant. Les échanges entre

phases ne sont pas pris en compte.

Lors du craquage primaire, le kérogène se transforme en huile, gaz et coke, suivant nr réactions parallèles :



où

- x_i représente le potentiel normalisé de la réaction i . C'est une donnée du kérogène qui obéit à la condition suivante : $\sum_i x_i = 1$.
- $\alpha_i^o, \alpha_i^g, \alpha_i^c$ sont les quantités d'huile, de gaz et de coke produites par la réaction i , ces quantités vérifient la relation :

$$\forall i \in \{1, \dots, nr\}, \quad \alpha_i^o + \alpha_i^g + \alpha_i^c = 1.$$

Chacune des ces réactions élémentaires obéit à une cinétique du premier ordre qui se formalise ainsi :

$$\frac{dx_i}{dt} = -k_i x_i, \quad \text{avec } k_i = A_i e^{\frac{-E_i}{RT}}. \quad (4.19)$$

A_i est le facteur pré-exponentiel. (A_i est de l'ordre de 10^{-4} s^{-1} et E_i entre 210 et 290 KJ/mol).

Craquage secondaire

L'huile formée par craquage primaire se transforme suivant une réaction cinétique du premier ordre en gaz et en coke :



β_o^g et β_o^c sont des coefficients stoechiométriques de la réaction, ils respectent la condition: $\beta_o^g + \beta_o^c = 1$.

Pour un élément de roche de porosité Φ , les termes sources sont donnés par les relations suivantes:

$$q_o = \rho_s(1 - \Phi) \frac{TOC}{c - TOC} \sum_{1 \leq i \leq nr} \alpha_i^o k_i x_i - \rho_o S_o \Phi k_o \quad (4.21)$$

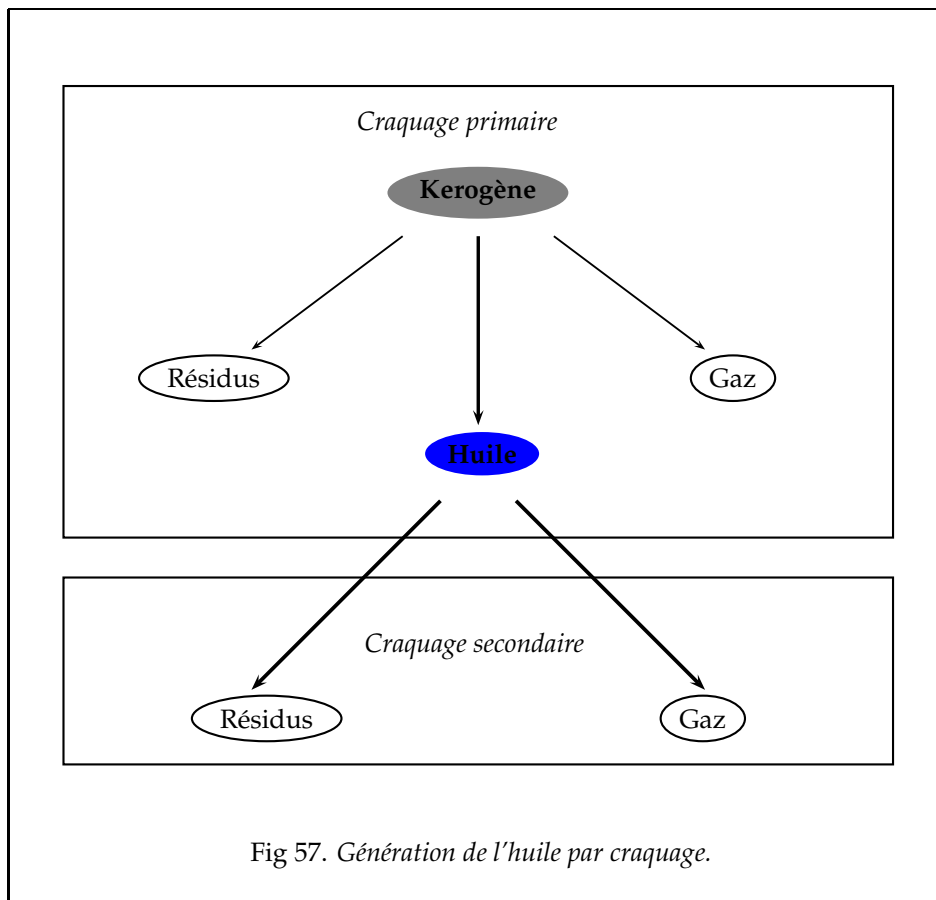
$$q_g = \rho_s(1 - \Phi) \frac{TOC}{c - TOC} \sum_{1 \leq i \leq nr} \alpha_i^g k_i x_i + \rho_o S_o \Phi k_o \beta_o^g \quad (4.22)$$

où TOC (le potentiel en carbone organique) et c (teneur massique en carbone) sont des données caractéristiques du kérogène.

4.2.10 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont:

- la contrainte totale est imposée au toit du bassin, elle est égale à la somme de la pression atmosphérique et de la pression exercée par le poids de la colonne d'eau plus sediments.
- Au toit du bassin, la pression est égale à la somme de la pression atmosphérique et de la pression exercée par le poids de la colonne d'eau en milieu marin.
- A la base du bassin, le flux d'eau est supposé nul.
- Sur les bords latéraux, le flux total est supposé nul.



4.2.11 Conditions initiales

A l'instant initial, le bassin n'existe pas. Les premiers sédiments sont déposés sur le socle. La sédimentation est caractérisée par la donnée de la hauteur solide de sédiments déposés et sa porosité de dépôt.

Le seul fluide présent dans les sédiments lors du dépôt est l'eau.

La pression et la contrainte totale initiales des sédiments déposés sont calculées en considérant l'équilibre hydrostatique:

$$P_f = \sigma_z = P_{atm} + \rho_w g h_w$$

où h_w est la hauteur de la colonne d'eau et P_{atm} la pression atmosphérique.

4.3 Discrétisation des équations

Nous donnons dans cette partie le schéma numérique utilisé dans Visco. La discrétisation en espace est faite avec un schéma volume fini centré sur les mailles, tandis que pour la discrétisation temporelle on utilise:

- Un schéma d'Euler implicite pour les équations de la pression et de la contrainte.
- Un schéma d'Euler explicite pour l'équation de la saturation.

On obtient donc un système découplé en pression-contrainte saturation, on résout un système linéaire pour connaître la pression et la contrainte, puis on met à jour la saturation.

4.3.1 Notions du maillage

Discrétisation en temps

La durée de simulation est divisée en grands intervalles du temps $([T^j, T^{j+1}])_{0 \leq j < Ev_{max}}$ appelés événements. Chaque événement correspond à une période géologique pendant laquelle une nouvelle couche se dépose. Ainsi, le nombre des mailles augmente à ces instants T^j . $Ev_{max} \in \mathbb{N}^*$ est le nombre maximal des événements.

Ensuite, pour chaque événement Ev_j on a une subdivision de l'intervalle $[T^j, T^{j+1}[$ dont le pas de temps est géré dans le code visco selon les variations de la saturation, la porosité et la pression.

Maillage du bassin

Le maillage est défini par un ensemble de colonnes d'arêtes verticales s'appuyant sur une grille horizontale cartésienne. Chaque colonne contient le même nombre d'arêtes verticales, qui peuvent éventuellement être de hauteur nulle.

La géométrie d'une arête est définie par sa hauteur solide qui évolue au cours du temps par dépôt ou érosion.

A chaque début d'événement le nombre d'arêtes dans chaque colonne est augmenté de un.

Une maille est alors définie par la donnée de quatre arêtes verticales voisines dans la même couche. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de toutes les mailles, bien entendu le maillage $\mathcal{M}$ dépend du temps. A chaque instant t^n , on note pour une maille p de $\mathcal{M}$:

- Vol_p^n le volume de la maille p dans le maillage à t^n , ce volume change au cours du temps selon la compaction de la maille p .
- $A_{\sigma,p}$ l'ensemble des interfaces de p , pour chaque σ on notera $\mathcal{S}_\sigma^n$ la surface de σ à l'instant t^n qui peut être de mesure nulle.
- R_p l'ensemble des arêtes verticales de p à l'instant t^n .
- hs_p^n (resp. hr_p^n) la hauteur solide (resp. hauteur réelle) de la maille p à l'instant t^n . hs_p^n et hr_p^n sont définies par:

$$hr_p^n = \frac{1}{4} \sum_{\delta \in R_p} hr_\delta^n,$$

$$hs_p^n = \frac{1}{4} \sum_{\delta \in R_p} hs_\delta^n.$$

On rappelle que la hauteur solide est reliée à la hauteur réelle par cette relation :

$$hs = \frac{hr}{1 - \Phi}.$$

4.3.2 Discrétisation de l'équation de conservation de la phase α

Soit p une maille du maillage $\mathcal{M}$, on intègre l'équation (4.2) sur cette maille, ce qui donne:

$$\int_p \partial_t(\rho_\alpha \Phi S_\alpha) dx + \int_p \operatorname{div}(\rho_\alpha \vec{V}_\alpha) dx = \int_p \rho_\alpha q_\alpha dx.$$

On note $I = \int_p \partial_t(\rho_\alpha \Phi S_\alpha) dx$, $II = \int_p \operatorname{div}(\rho_\alpha \vec{V}_\alpha) dx$ et $TS_\alpha = \int_p \rho_\alpha q_\alpha dx$.

Approximation de I

I sera approché de cette façon:

$$I \cong \frac{\rho_{\alpha,p}^n}{\Delta t} \left((\operatorname{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1} S_{\alpha,p}^{n+1}) - (\operatorname{Vol}_p^n \Phi_p^n S_{\alpha,p}^n) \right).$$

ou:

- $\rho_{\alpha,p}^n$ est l'approximation de ρ_α dans la maille p à l'instant t^n . Comme la densité dépend de la température, on prend pour $\rho_{\alpha,p}^n$ la valeur $\rho_\alpha(T_p^n)$.
- Vol_p^j est le volume de la maille p à l'instant t^j (avec $j \in \{n, n+1\}$).

Approximation de II

D'après la formule de Green, on a :

$$II = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} \int_\sigma \rho_\alpha \vec{V}_\alpha \cdot \vec{n}_{p,\sigma} d\sigma.$$

On donne ici les approximation de $\int_\sigma \rho_\alpha \vec{V}_\alpha \cdot \vec{n}_{p,\sigma} d\sigma$ dans le cas ou σ est une interface intérieure (i.e $\sigma \in \mathcal{A} - \mathcal{A}_\partial$), dans ce cas on peut supposer que $\sigma = \sigma_{pq}$ pour un certain $q \in \mathcal{M}$. Pour les autres cas voir ([?]).

Donc II sera approché par:

$$II \cong \sum_{q \in \mathcal{N}_p} \rho_{\alpha,\sigma_{pq}}^n S_{\sigma_{pq}}^{n+1} Q_{\alpha,\sigma_{pq}}.$$

Avec:

- $\rho_{\alpha,\sigma_{pq}}^n$ est l'approximation de ρ_α sur l'interface σ à l'instant t^n . On prend pour cette approximation la valeur:

$$\rho_{\alpha,\sigma_{pq}}^n = \frac{1}{2}(\rho_{\alpha,p}^n + \rho_{\alpha,q}^n).$$

- $S_{\sigma_{pq}}^{n+1}$ est la surface d'échange entre les mailles p et q à l'instant t^{n+1} .
- $Q_{\alpha,\sigma_{pq}}$ est le flux de la phase α échangé entre les deux mailles p et q .

Pour $\sigma = \sigma_{pq}$ on introduit la fonction $\psi_{\alpha,\sigma}$, définie par:

$$\psi_{\alpha,\sigma}^{n+1} = P_f^{n+1} + P_{c,\sigma}^{n+1} - \rho_{\alpha,\sigma}^n g z,$$

en utilisant cette fonction, on prend pour $Q_{\alpha,\sigma_{pq}}$ la valeur:

$$Q_{\alpha,\sigma_{pq}} = \frac{K_{\sigma_{pq}}^n A_{\alpha,\sigma_{pq}}^n}{d_{\sigma_{pq}}^{n+1}} (\psi_{\alpha,\sigma_{pq}}(p) - \psi_{\alpha,\sigma_{pq}}(q)).$$

Avec:

- $K_{\sigma_{pq}}^n$ est la moyenne harmonique entre $|K_p^n \vec{n}_{\sigma_{pq}}|$ et $|K_q^n \vec{n}_{\sigma_{pq}}|$.

- $d_{\sigma pq}^{n+1}$ est la distance entre les centres des mailles p et q .
- $A_{\alpha, \sigma pq}^n$ est la mobilité de la phase α sur l'interface σpq , définie par:

$$A_{\alpha, \sigma pq}^n = \begin{cases} \frac{kr_{\alpha, p}^n}{\mu_{\alpha, p}^n} & \text{si } (\vec{\nabla} P_{\alpha, \sigma} - \rho_{\alpha, \sigma} \vec{g}) \cdot \vec{n}_{\sigma, p} > 0 \\ \frac{kr_{\alpha, q}^n}{\mu_{\alpha, q}^n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\vec{\nabla} P_{\alpha, \sigma} \cdot \vec{n}_{\sigma, p}$ est approché par:

$$\vec{\nabla} P_{\sigma} \cdot \vec{n}_{\sigma, p} = \frac{1}{d_{\sigma pq}^{n+1}} (P_{\alpha, p}^{n+1} - P_{\alpha, q}^{n+1}).$$

Approximation de TS_{α}

Le dernier terme represente le terme source pour chaque phase, il sera approché de cette façon:

- Pour la phase eau: on pose,

$$TS_{\alpha, p} = \begin{cases} \rho_{w, p}^n \Delta x \Delta y \Phi_p^n \frac{hr_p^{n+1} - hr_p^n}{\Delta t} & \text{si } \Delta \text{Vol}_{s, p} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec $\Delta \text{Vol}_{s, p}$ la variation du volume solide de la maille p , Δx le pas d'espace en x et Δy le pas d'espace en y , hr_p la hauteur réelle de la maille p .

- Pour les phases d'huile et de gaz: le terme source provient du craquage de la matière organique, il sera approché par (pour $\beta \in \{o, g\}$):

$$TS_{\beta} = \rho_{s, p}^n \text{Vol}_{s, p} \text{IHTOC} \sum_{0 \leq i \leq nr} \alpha_i^{\beta} \frac{dx_i}{dt},$$

Les équations différentielles de génération des hydrocarbures sont discrétisées par un schéma d'Euler implicite.

4.3.3 Equation de l'équilibre mécanique

Soit p une maille de $\mathcal{M}$ et q la maille sus-jacente à p , l'équation de l'équilibre mécanique (4.3) est intégrée entre les deux centres des mailles p et q :

$$\int_{z_q}^{z_p} \partial_z \sigma_z dz = \int_{z_q}^{z_p} ((1 - \Phi) \rho_s + \Phi \rho_f) g dz,$$

ou z_j est la profondeur du centre de maille j , $j \in \{p, q\}$.

Le premier membre de l'équation ci-dessus est approché par:

$$\sigma_{z_p}^{n+1} - \sigma_{z_q}^{n+1}.$$

Le second membre est decomposé en deux parties:

$$\begin{aligned} \int_{z_q}^{z_p} ((1 - \Phi) \rho_s + \Phi \rho_f) g dz &= \int_{z_q}^{z_{\sigma pq}} ((1 - \Phi) \rho_s + \Phi \rho_f) g dz + \int_{z_{\sigma pq}}^{z_p} ((1 - \Phi) \rho_s + \Phi \rho_f) g dz \\ &= \frac{hr_q^{n+1}}{2} ((1 - \Phi_q^{n+1}) \rho_s + \Phi_q^{n+1} \rho_{f, q}^n) g \\ &\quad + \frac{hr_p^{n+1}}{2} ((1 - \Phi_p^{n+1}) \rho_s + \Phi_p^{n+1} \rho_{f, p}^n) g. \end{aligned}$$

Avec $\rho_{f,j}^n = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha,j}^n S_{\alpha,j}^n$, $j \in \{p, q\}$.

La discrétisation finale de l'équilibre mécanique est:

$$\sigma_{z_p}^{n+1} - \sigma_{z_q}^{n+1} = \sum_{j \in \{p,q\}} \frac{hr_j^{n+1}}{2} \left((1 - \Phi_j^{n+1}) \rho_s + \Phi_j^{n+1} \rho_{f,j}^n \right) g.$$

4.3.4 Compaction

La loi de compaction (4.14) est discrétisée pour chaque maille par un schéma d'Euler linéairement implicite:

$$\frac{\Phi_p^{n+1} - \Phi_p^n}{\Delta t} = -\beta_p^n \left(\frac{\sigma_p^{n+1} - \sigma_p^n}{\delta t} \right) - \alpha_p^n \sigma_p^{n+1}.$$

où

- $\sigma_p = \sigma_{z_p} - P_{f,p}$ est la contrainte effective de la maille p ,
- $\alpha_p^n = \alpha(\Phi_p^n, \sigma_p^n)$, $\beta_p^n = \beta(\Phi_p^n, \sigma_p^n)$.

4.4 Calcul des saturations, schéma IMPES

On suppose qu'on a deux instants t^n et t^{n+1} et qu'on connaît les valeurs des fonctions à l'instant t^n (i.e P_α^n , S_α^n , σ^n et Φ^n). On cherche à calculer les valeurs de la saturation à t^{n+1} .

La méthode IMPES consiste à résoudre d'abord l'équation de la pression et trouver P_α , σ et Φ à l'instant t^{n+1} , puis calculer les valeurs des saturations à t^{n+1} .

4.4.1 Equation de la pression,

Soit p une maille de $\mathcal{M}$, En sommant les équations discrètes des saturations on obtient:

$$\begin{aligned} \text{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1} - \text{Vol}_p^n \Phi_p^n &+ \sum_{\alpha \in \{w, o, g\}} \frac{\Delta t}{\rho_{\alpha, p}^n} \sum_{p \in \mathcal{N}(p)} \rho_{\alpha, \sigma_{pq}}^n S_{\sigma_{pq}}^{n+1} \frac{K_{\sigma_{pq}}^n A_{\alpha, \sigma_{pq}}^n}{d_{\sigma_{pq}}^{n+1}} (\psi_{\alpha, \sigma_{pq}}(p) - \psi_{\alpha, \sigma_{pq}}(q)) \\ &= \Delta t \sum_{\alpha \in \{w, o, g\}} q_{\alpha, p}^n \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ensuite on remplace la porosité à l'instant t^{n+1} (i.e Φ^{n+1}) par une combinaison linéaire de la pression et de la contrainte verticale et Φ^n :

$$\Phi_p^{n+1} = \Phi^n - \beta_p^n (\sigma_p^{n+1} - \sigma_p^n) - \Delta t \alpha_p^n \sigma_p^{n+1}.$$

Après avoir fait ce calcul pour toutes les mailles, on obtient un système linéaire en pression-contrainte. La résolution de ce système nous donnera P^{n+1} et σ^{n+1} . Ensuite on calcule la valeur de la porosité à l'instant t^{n+1} .

4.4.2 Calcul des saturations

Après avoir calculé les nouvelles valeurs P^{n+1} , σ^{n+1} et Φ^{n+1} , on met à jour les saturations, par la relation suivante ($\alpha \in \{w, o, g\}$):

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathcal{M}, \quad S_{\alpha, p}^{n+1} &= \frac{\text{Vol}_p^n \Phi_p^n}{\text{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1}} S_{\alpha, p}^n + \frac{\Delta t q_{\alpha, p}^n}{\text{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1}} \\ &- \frac{\Delta t}{\rho_{\alpha, p}^n \text{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1}} \sum_{p \in \mathcal{N}(p)} \rho_{\alpha, \sigma_{pq}}^n S_{\sigma_{pq}}^{n+1} \frac{K_{\sigma_{pq}}^n A_{\alpha, \sigma_{pq}}^n}{d_{\sigma_{pq}}^{n+1}} (\psi_{\alpha, \sigma_{pq}}(p) - \psi_{\alpha, \sigma_{pq}}(q)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.4.3 Gestion du pas de temps

Le schéma IMPES nécessite une gestion du pas de temps sous une condition CFL afin que le schéma reste stable au cours de la simulation.

Les critères de la gestion du pas de temps sont basés sur les variations de la porosité, la pression et la saturation. On donne ici les indicateurs sur les saturations.

Deux types d'indicateur sont activés, l'un porte sur la somme des saturations, l'autre sur la variation maximale admissible entre deux pas de temps.

- Si la somme des saturations (i.e $\sum_\alpha S_\alpha^{n+1}$) n'est pas comprise entre 0 et 1, alors le pas de temps est annulé. Cette condition est vérifiée à $\varepsilon_{\text{sat}} = 10^{-3}$ ou 10^{-4} près.
- Si la variation de saturation maximale est atteinte, la valeur du pas de temps suivant est diminuée.

4.5 Méthode des lignes de courants

Dans cette partie on donne l'algorithme de la méthode des lignes de courant, on se limite au cas d'un écoulement diphasique (eau, huile) incompressible. On notera $S = S_o$ et par conséquent $S_w = 1 - S$, et on notera aussi $P = P_w$. La vitesse totale est définie par la somme des deux vitesses:

$$\vec{V}_T = \vec{V}_o + \vec{V}_w.$$

D'après les lois de Darcy, on peut écrire $\vec{V}_T$ sous la forme:

$$\vec{V}_T = -K \left((A_o + A_w) \vec{\nabla} P + A_o \vec{\nabla} P_C - (\rho_o A_o + \rho_w A_w) \vec{g} \right). \quad (4.25)$$

Avec $P_C = P_o - P_w$ la pression capillaire.

En utilisant la loi de Darcy et la relation (4.25), on peut écrire la vitesse de l'huile en fonction de la vitesse totale de cette façon:

$$\vec{V}_o = f(S) \vec{V}_T - \frac{G(S)}{\rho_w - \rho_o} K \vec{\nabla} P_C - G(S) K \vec{g} \quad (4.26)$$

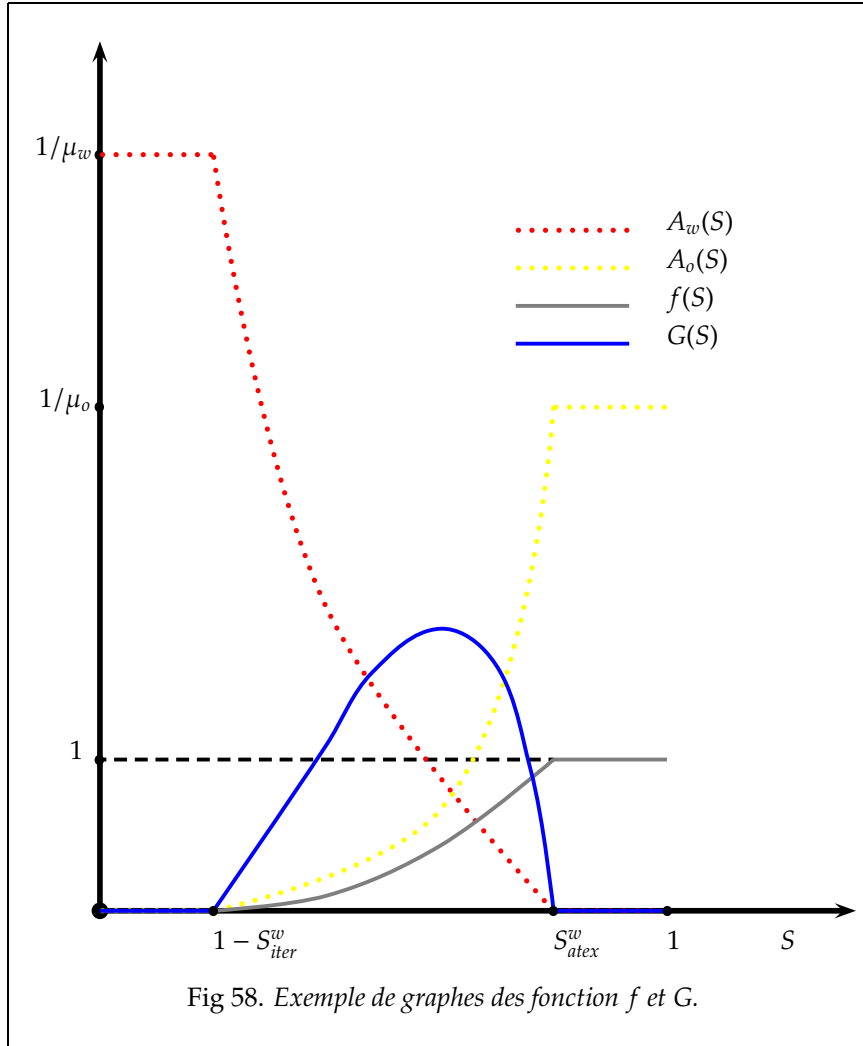
Où les fonctions f et G sont définies par (voir Fig-58):

$$f(S) = \frac{A_o}{A_o + A_w}, \quad (4.27)$$

$$G(S) = (\rho_w - \rho_o) \frac{A_o A_w}{A_o + A_w}. \quad (4.28)$$

Par ailleurs si on somme les deux équations de la conservation de la masse pour les deux phases eau et huile, et en utilisant la relation $S_o + S_w = 1$, on obtient :

$$\partial_t \Phi + \text{div}(\vec{V}_T) = q_o + q_w. \quad (4.29)$$



Remarque 4.5.1 Sur la figure (58), on peut remarquer que f est croissante entre 0 et 1. Il faut tenir compte que cette figure donne une idée "mathématiques" du comportement de ces fonctions et qu'elles n'ont pas la même unité physique.

4.5.1 Résolution numérique de l'équation de la saturation

On se donne deux instants t^n et $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, on suppose qu'on connaît toutes les inconnues discrètes du problème à l'instant t^n (i.e S_α , P , σ et Φ), et on cherche à calculer une approximation de la saturation à t^{n+1} . Pour cela on commence par résoudre le système de la pression et la contrainte pour trouver P^{n+1} et σ^{n+1} , puis on calcule Φ^{n+1} . L'équation de la saturation va être découpée en deux équations:

1. Partie flux total:

$$\partial_t(\Phi S) + \text{div}(f(S)\vec{V}_T) = q_o, \quad (4.30)$$

2. Partie gravité et pression capillaire:

$$\partial_t(\Phi S) - \text{div}\left(\frac{G(S)}{\rho_w - \rho_o} K \vec{\nabla} P_C + G(S) K \vec{g}\right) = 0. \quad (4.31)$$

4.5.2 Equation sur une ligne de courant:

Soit l une ligne de courant tracée dans le bassin par rapport à $\vec{V}_T^{n+1}$, l est caractérisée par (p_l, I_l, q_l) , où:

- p_l est le point d'origine de la ligne l
- I_l est son intervalle de définition
- q_l est un paramétrage de l

On définit sur $I_l \times [t^n, t^{n+1}]$ la fonction $\bar{v}$ par:

$$\bar{v}(\tau, t) = S(q_l(\tau), t), \quad \forall (\tau, t) \in I_l \times [t^n, t^{n+1}].$$

Le but est donc de trouver une approximation de $\bar{v}$ sur l , or il est très difficile de déterminer l'équation vérifiée par $\bar{v}$ sur l . On va donc approcher $\bar{v}$ par une autre fonction v telle que v vérifie l'équation suivante:

$$\partial_t(\Phi v) + \partial_\tau f(v) + f(v)\text{div}(\vec{V}_T^{n+1}) = q_o. \quad (4.32)$$

Schéma numérique pour l'équation 4.32

On se donne une subdivision $(\tau_i)_{0 \leq i \leq M}$ (avec $M \in \mathbb{N}_+^*$) de I_l , on note pour $i \in \{0, \dots, M-1\}$, $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i$. On suppose que:

$$\forall 0 \leq i < M, \exists ! K \in \mathcal{M}, \text{ tel que: } \text{Im}(q_l|_{[\tau_i, \tau_{i+1}])} \subset K.$$

Pour chaque $i \in \{0, \dots, M-1\}$, on notera K_i la maille qui vérifie la relation ci-dessus.

Remarque 4.5.2 La relation précédente implique que l'ensemble des points d'intersection entre l et les interfaces de $\mathcal{M}$ est inclus dans $(q_l(\tau_i))_{0 \leq i \leq M}$.

On se donne aussi une subdivision $(\sigma^j)_{0 \leq j \leq N}$ de $[t^n, t^{n+1}[$ de la forme:

$$\sigma^j = t^n + j \times dt, \text{ avec } dt = \frac{t^{n+1} - t^n}{N}.$$

Discretisation des fonctions!!!!

Pour chaque fonction ψ définie sur $I_l \times [t^n, t^{n+1}]$ on notera ψ_i^j l'approximation de ψ sur $[\tau_i, \tau_{i+1}] \times [\sigma^j, \sigma^{j+1}]$.

- Approximation de Φ .
La porosité sera approchée de cette manière:

$$\phi_i^j = \Phi_{K_i}^n + (\sigma^j - t^n) \frac{\Phi_{K_i}^n - \Phi_{K_i}^{n+1}}{t^{n+1} - t^n}. \quad (4.33)$$

Les valeurs de la porosité aux instants t^n et t^{n+1} sont connues.

- Approximation de $\text{div}(\vec{V}_T^{n+1})$.
La divergence de la vitesse totale sera approchée par:

$$d_i = (\text{div}(\vec{V}_T^{n+1}))_{K_i}. \quad (4.34)$$

Avec:

$$(\text{div}(\vec{V}_T^{n+1}))_{K_i} = \frac{1}{\text{Vol}_{K_i}^{n+1}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_{K_i}} \mathcal{S}_\sigma^{n+1} \vec{V}_T \cdot \vec{n}_{K_i, \sigma}.$$

- Approximation du terme source:
L'approximation du terme source est déjà connue dans chaque maille entre les deux instants t^n et t^{n+1} , on la note $q_{o,K}$ pour la maille K . On pose alors:

$$Q_i = q_{o, K_i}.$$

Enfin, v_i^j sera l'approximation de v sur $[\tau_i, \tau_{i+1}[\times[\sigma^j, \sigma^{j+1}[$.
 v est calculée par le schéma suivant:

$$\begin{aligned} v_i^{j+1} = & \frac{\phi_i^j}{\phi_i^{j+1}} v_i^j - \frac{dt}{\phi_i^{j+1} \Delta_i} (f(v_i^j) - f(v_{i-1}^j)) \\ & - \frac{dt}{\phi_i^{j+1}} f(v_i^j) d_i + \frac{dt}{\phi_i^{j+1}} Q_i. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Pour $i \in \{0, \dots, M-1\}$ et $j \in \{0, \dots, N-1\}$.

Pour compléter ce schéma, il faut définir les conditions initiales et la condition à la limite:

- Pour les conditions initiales, on pose:

$$\forall i \in \{0, \dots, M-1\}, v_i^0 = S_{K_i}^n, \quad (4.36)$$

avec K_i la maille qui vérifie, $\text{Im}(q_l|[\tau_i, \tau_{i+1}]) \subset K_i$.

- Pour la condition à la limite:

$$\forall j \in \{0, \dots, N\}, v_{-1}^j = S_{K_{ori}}^n + (\sigma^j - t^n) q_{0, K_{ori}}, \quad (4.37)$$

avec $p_l \in \overline{K_{ori}}$ (p_l le point d'origine de l).

Une fois que le calcul est fait pour toutes les lignes de courant, on passe les nouvelles valeurs de la saturation au maillage $\mathcal{M}$ par la méthode expliquée au chapitre 2 (partie 2.4). On aura donc une première approximation de la saturation à l'instant t^{n+1} , notée S^* . A la fin de cette étape, on peut commencer la résolution de l'équation (4.31) entre t^n et t^{n+1} avec S^* comme donnée initiale.

Remarques sur le schéma utilisé sur une ligne de courant

Sur le schéma numérique qu'on a choisi sur les lignes de courant, on peut distinguer plusieurs différences avec le modèle déjà traité, au Chapitre (3), et aussi avec la méthode IMPES:

1. Contrairement à la méthode IMPES, où on utilise le volume de la maille aux instants t^n et t^{n+1} (voir relation 4.24), on n'utilise ici que le volume à l'instant t^{n+1} , un choix qu'on a retenu parce que les lignes de courant sont tracées par rapport à $\vec{V}_T^{n+1}$.
 En général l'huile se trouve à des profondeurs assez importantes, or l'effet de la compaction est plus important dans les mailles qui se trouvent dans la partie supérieure (près du toit) du bassin (voir les figures 67, 69, 72 du test numérique). Donc dans les mailles profondes le changement du volume n'est pas très important.
2. Comme on l'a vu au chapitre 3, la méthode des lignes de courant n'est pas conservative à cause du passage des informations entre les lignes de courant et le maillage. En plus, dans ce cas le schéma sur la ligne de courant n'est plus conservatif, car la divergence de la vitesse totale n'est plus nulle.
3. Pour assurer la stabilité du schéma numérique sur chaque ligne de courant, il y a une condition (CFL) sur le pas de temps, qui dépend du maillage sur la ligne, de la fonction f et aussi de $\text{div}(\vec{V}_T)$. Dans les tests numériques, on a adopté une gestion du pas de temps similaire à celle utilisée dans le code Visco3D.

4.5.3 Résolution numérique de l'équation (4.31)

Une fois qu'on a $S^* \in \mathcal{E}_M$, on peut commencer la résolution de l'équation (4.31). Pour cette équation, on a choisi une méthode volume fini, et une discrétisation très proche de celle utilisée dans Visco3d.

Plus précisément, soit $p \in \mathcal{M}$ on intègre l'équation (4.31) sur la maille p , ce qui donne:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_p \partial_t(\Phi S) - \operatorname{div}\left(\frac{G(S)}{(\rho_w - \rho_o)} K \vec{\nabla} P_C + G(S) K \vec{g}\right) dx \\
&\cong \frac{\operatorname{Vol}_p^{n+1} \Phi^{n+1}}{dt} (S_p^{n+1} - S_p^*) - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} \int_{\sigma} \frac{G(S^*)}{(\rho_w - \rho_o)} K (\vec{\nabla} P_C + (\rho_w - \rho_o) \vec{g}) \cdot \vec{n}_{p,\sigma} d\gamma \\
&\cong \frac{\operatorname{Vol}_p^{n+1} \Phi^{n+1}}{dt} (S_p^{n+1} - S_p^*) + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} S_{\sigma}^{n+1} G_{\sigma} \times \bar{K}_{\sigma} A_{\sigma}.
\end{aligned}$$

Où:

- $\bar{K}_{\sigma}$ est une approximation de K sur σ . Si $\sigma = \sigma_{pq}$, alors $\bar{K}_{\sigma}$ est la moyenne harmonique entre K_p et K_q . Sinon (i.e $\sigma \in \mathcal{A}_o$) $\bar{K}_{\sigma} = K_p$
- A_{σ} est une approximation de $-(\vec{\nabla} P_C + (\rho_w - \rho_o) \vec{g}) \cdot \vec{n}_{p,\sigma}$
- G_{σ} est une approximation de $G(S^*)$ calculée en fonction du signe de A_{σ} de la façon suivante:
 - Si $\sigma = \sigma_{pq}$, alors:

$$G_{\sigma} = \begin{cases} \frac{A_o(S_p^*) A_w(S_q^*)}{A_o(S_p^*) + A_w(S_q^*)} & \text{si } A_{\sigma} \geq 0 \\ \frac{A_o(S_q^*) A_w(S_p^*)}{A_o(S_q^*) + A_w(S_p^*)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.38)$$

- Si $\sigma \in \mathcal{A}_o$:

$$G_{\sigma} = \begin{cases} G(S_p^*) & \text{si } A_{\sigma} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit finalement,

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad S_p^{n+1} = S_p^* + \frac{dt}{\operatorname{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} S_{\sigma} G_{\sigma} \bar{K}_{\sigma} A_{\sigma} \quad (4.39)$$

Remarques sur le schéma numérique de l'équation (4.31)

- L'équation précédente impose une condition (CFL) sur le pas de temps, pour un pas de temps grand on peut faire plusieurs sous pas de temps, sans toutefois être obligé de recalculer la pression.
- Dans ce schéma, on remarque que l'on a fixé la porosité à l'instant t^n , ce choix est dû au fait qu'on a déjà traité la variation de la porosité entre t^n et t^{n+1} dans le schéma numérique pour la partie lignes de courant.
- On peut constater la même chose pour le volume, bien que la variation du volume au cours du temps ne soit pas traitée dans la partie lignes de courant. Il nous a semblé plus juste de traiter cette équation sans tenir compte du volume à l'instant t^n .
- Contrairement au schéma " gravité et pression capillaire " déjà traité dans le chapitre 3 (Partie 3.2.3, relation 3.37), où on cherche deux approximations de G_{σ} selon les signes de $\vec{\nabla} P_C \cdot \vec{n}_{p,\sigma}$ et $(\rho_w - \rho_o) \vec{g} \cdot \vec{n}_{p,\sigma}$, ici on cherche la même approximation mais par rapport à leur somme (i.e $(\vec{\nabla} P_C + (\rho_w - \rho_o) \vec{g}) \cdot \vec{n}_{p,\sigma}$). Ce choix est fait de cette façon afin d'être plus proche du schéma déjà implanté dans le code Visco3D.

- Notre principal objectif était orienté vers la partie des lignes de courant, donc on n'a pas testé d'autre choix d'approximation pour l'équation (4.31). Néanmoins, on peut traiter cette équation de différentes manières, par exemple:
 1. Prendre un autre schéma volume fini, par exemple le choix déjà fait dans le chapitre 3 (relation 3.37), ou les propositions faites dans ([39]).
 2. Faire un découplage de l'équation (4.31) en deux parties : gravité et pression capillaire, traiter la partie gravité par une méthode des lignes de courant, et la partie pression capillaire par une méthode de volume fini.

4.6 Conservation des bilans des fluides

L'équation de la conservation de la masse d'huile à l'instant t^{n+1} pour une maille $p \in \mathcal{M}$ s'écrit par:

$$\left((\text{Vol}\Phi S)_p^{n+1} - (\text{Vol}\Phi S)_p^n \right) + \Delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} \mathcal{S}_\sigma^{n+1} V_{p,\sigma}^{n+1} = \Delta t \times q_{o,p}^n. \quad (4.40)$$

Où $V_{p,\sigma}^{n+1}$ est une approximation de $\vec{V}_o^{n+1} \cdot \vec{n}_{p,\sigma}$.

Si σ est une interface intérieure (i.e $\sigma = \sigma_{pq}$, avec $q \in \mathcal{N}(p)$), alors l'approximation de la vitesse sur l'interface σ vérifie:

$$V_{p,\sigma_{pq}}^{n+1} = -V_{q,\sigma_{pq}}^{n+1}.$$

Alors en sommant l'équation (4.40), sur l'ensemble des mailles on trouve :

$$\underbrace{\sum_{p \in \mathcal{M}} \text{Vol}_p^{n+1} \Phi_p^{n+1} S_p^{n+1}}_{M_o^{n+1}} = \underbrace{\sum_{p \in \mathcal{M}} \text{Vol}_p^n \Phi_p^n S_p^n}_{M_o^n} - \underbrace{\Delta t \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_o} \mathcal{S}_\sigma^{n+1} V_{p,\sigma}^{n+1}}_{Tr^{n+1}} + \underbrace{\Delta t \sum_{p \in \mathcal{M}} q_{o,p}^n}_{Cr^n}. \quad (4.41)$$

Où:

- $\mathcal{A}_o$ est l'ensemble des interfaces inclues dans $\partial\Omega$
- M_o^n la masse d'huile présente dans le bassin à l'instant t^n
- Tr^{n+1} représente la variation de la masse d'huile due au terme de transport entre t^n et t^{n+1}
- Cr^{n+1} represente la variation de la masse d'huile due au terme de source (génération de l'huile par craquage) entre t^n et t^{n+1}

Les méthodes numériques déjà implantées dans le code Visco3D respectent le caractère conservatif de cette équation, c-à-d, la solution donnée par Visco3D vérifie:

$$(M_o^{n+1} - M_o^n) + Tr^{n+1} - Cr^{n+1} = 0.$$

En revanche, comme on l'a signalé, la méthode des lignes de courant n'est pas une méthode conservative. En plus il est très difficile de donner une majoration de la différence entre $(M_o^{n+1} - M_o^n) + Tr^{n+1}$ et Cr^{n+1} , vu que le nombre de lignes de courant qui passent par une maille n'est pas constant.

Vu que notre objectif est d'avoir une méthode rapide, alors on peut avoir une tolérance sur cette différence, qui doit être définie selon le cas qu'on traite, par exemple une différence comprise entre 0 et 10% de la valeur de Cr^{n+1} .

Pour le test numérique qui suit, les quantités qu'on mesure à la fin de chaque événement $j \in \{0, Ev_{max} - 1\}$ sont les suivantes:

$$Dif_j = \sum_{n, t^{n+1} \leq T^{j+1}} \left((M_o^{n+1} - M_o^n) + Tr^{n+1} - Cr^{n+1} \right),$$

$$Q_j = \sum_{n, t^{n+1} \leq T^{j+1}} Cr^{n+1}.$$

Notre critère pour une solution LDC acceptable sera:

$$Dif_j \leq 0.1 \times Q_j.$$

4.7 Test numérique

4.7.1 Données du test

Il s'agit d'une section 2D d'un bassin constitué de différentes lithologies. Les dimensions du bassin sont $10Km$ dans la direction de x et une profondeur maximale de $4Km$.

La durée de la simulation est de 8 Millions d'années, divisée en 20 événements.

Le maillage dans la direction de x est donné par une subdivision régulière de pas $dx = \frac{10}{14}Km$, à la fin de chaque événement une nouvelle couche dans la direction de z apparaît.

Les données pour les perméabilités relatives sont: $S_{atex}^o = 0.02$, $S_{atir}^o = 0.98$ et $p_{wo} = p_{ow} = 2$.

Afin de pouvoir comparer les deux solutions obtenues par la méthode des lignes de courant et Visco, on a construit une solution de référence. Cette solution est obtenue par le code Visco sur un maillage plus fin dans la direction de x (le pas en x est divisé par 2). En effet on ne peut pas raffiner plus le maillage, sur tout le maillage dans la direction de z à cause de la variation de la géométrie (ce qui rend très difficile la projection de la solution de référence sur le maillage initial).

L'erreur qu'on mesure à la fin de chaque événement est la suivante:

$$E_M(ev) = 100 \times \frac{\sum_{k \in \Omega} Vol_k^{ev} |S_k^M - S_k^r|}{\sum_{k \in \Omega} Vol_k^{ev} |S_k^r|}.$$

Avec S^r est la solution de référence et S^M est la solution LDC ou Visco.

Les résultats de comparaison avec la solution de référence:

Événement Méthode	13	14	15	16	17	18	19	20
LDC	17.17	15.17	13.20	11.80	11.73	11.71	12.36	12.50
Visco	08.83	23.17	06.73	07.75	06.47	06.56	06.92	06.02

Sur ce tableau on remarque que la solution donnée par la méthode des lignes de courant reste correcte (une erreur moyenne de 13%) par rapport à celle donnée par le code Visco (avec une erreur moyenne de 9%).

4.7.2 Nombre de résolutions de l'équation de pression

Le figure (Fig-59) suivant nous donne le nombre de résolutions de l'équation de la pression pour chaque événement. On remarque que la méthode des lignes de courant reste plus rapide que le code Visco3d , et on résout moins souvent l'équation de la pression, le rapport entre ces deux nombres peut être très important comme pour l'événement 15 (ce rapport s'élève à 12 pour l'ev 15).

La figure (Fig-60), nous donne le temps du calcul (CPU) pour chaque événement. On remarque que la méthode des lignes de courant reste plus rapide que le code Visco3d. Le rapport $CPU(Visco)/CPU(LDC)$ est égal à $44/10 = 4,4$.

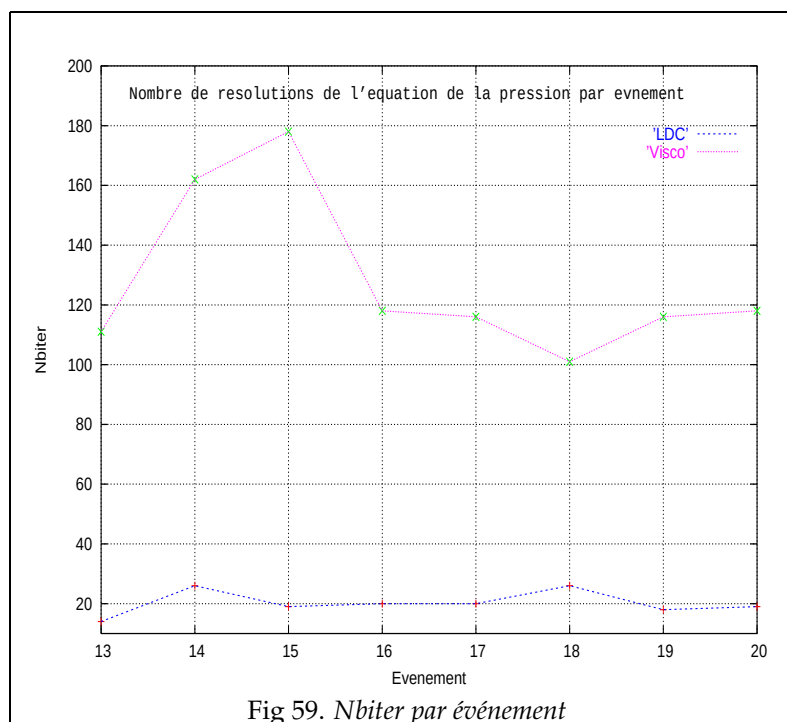


Fig 59. Nbiter par événement

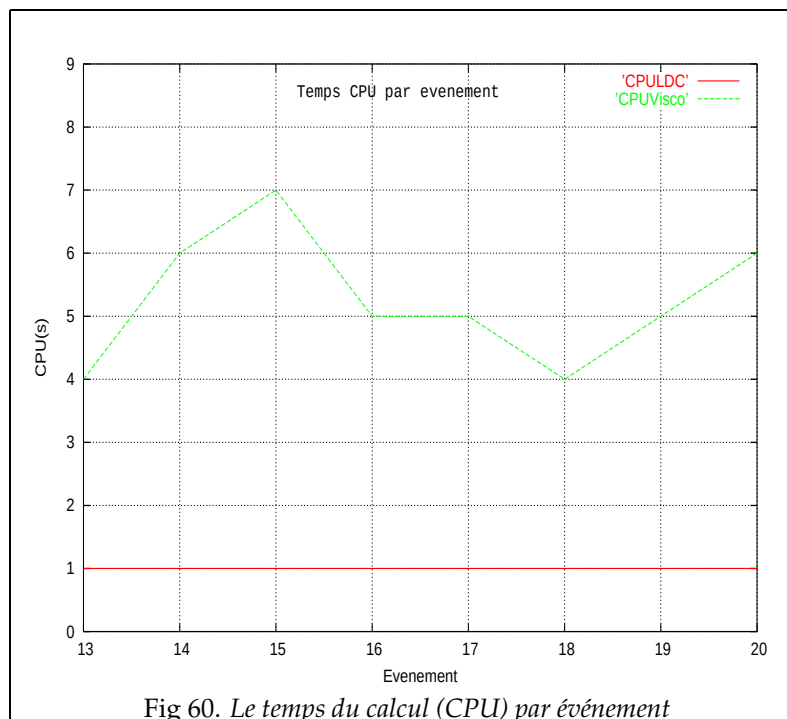


Fig 60. Le temps du calcul (CPU) par événement

4.7.3 Bilan

Le tableau ci-dessous montre le bilan de la méthode des lignes de courant,

Ev	13	14	15	16	17	18	19	20
Q	117.30	188.32	248.34	294.01	329.54	356.24	378.88	397.82
Dif	01.45	01.63	03.98	05.90	09.24	12.92	16.11	20.15
$100 \frac{Dif}{Q}$	01.24%	00.87%	01.60%	02.01%	02.80%	03.62%	04.25%	05.06%

On remarque sur la quantité qu'on mesure pour la conservation du bilan qu'on a une augmentation de la différence par événement ce qui constitue un point négatif pour cette méthode, on peut signaler que cette différence est très sensible par rapport au nombre de lignes de courant tracées dans le bassin. Une des perspectives de ce travail sera d'améliorer l'étude du bilan.

4.7.4 Les figures

Les figures de la saturation:

- (Fig-61) représente la saturation dans le bassin donnée par le code Visco3D à la fin de l'événement 15
- (Fig-62) représente la saturation dans le bassin donnée par la méthode des lignes de courant à la fin de l'événement 15
- (Fig-63) représente la saturation dans le bassin donnée par le code Visco3D à la fin de l'événement 20 (l'âge actuel)
- (Fig-64) représente la saturation dans le bassin donnée par la méthode des lignes de courant à la fin de l'événement 20

Les courbes des lignes de courant:

- (Fig-65) donne les lignes de courant tracées dans le bassin au début de l'événement 14, par rapport à $-\vec{V}_T$
- (Fig-66) donne les lignes de courant tracées dans le bassin au début de l'événement 14, par rapport à $-\vec{V}_T$. C'est la même figure que (Fig-65), à la différence que sur celle ci on voit les différentes lithologies
- (Fig-68) donne les lignes de courant tracées dans le bassin au début de l'événement 15, par rapport à $\vec{V}_T$
- (Fig-70) donne les lignes de courant tracées dans le bassin à la fin de l'événement 15, par rapport à $\vec{V}_T$
- (Fig-71) donne les lignes de courant tracées dans le bassin au début de l'événement 20, par rapport à $\vec{V}_T$
- (Fig-73) donne les lignes de courant tracées dans le bassin à la fin de l'événement 20, par rapport à $\vec{V}_T$

Les figures de $\text{div}(\vec{V}_T)$,

- (Fig-67) donne la divergence de la vitesse totale au début de l'événement 14
- (Fig-69) donne la divergence de la vitesse totale au début de l'événement 15
- (Fig-72) donne la divergence de la vitesse totale au début de l'événement 20

4.7.5 Principe retenu pour tracer les lignes de courants:

Au début de chaque événement on trace des lignes de courant à l'arrière (i.e par rapport à $-\vec{V}_T$) dans plusieurs mailles de Ω , ensuite on suit ces lignes jusqu'à la fin de leur trajectoires.

On remarque que la plupart de ces lignes se dirigent vers les mailles qui contiennent les termes sources (ou les mailles dont la divergence de la vitesse totale est la plus élevée). A partir de là, on trace les lignes de courant par rapport à la vitesse totale dans ces mailles.

Les défauts de cette méthode dans notre test:

- Ce critère donne une idée sur les mailles d'origine des lignes de courant mais pas une indication sur leur nombre ou l'emplacement exact des points d'origine.
- Le choix des points d'origine est fixé par événement, or celui ci doit être amélioré de sorte qu'à la fin de chaque résolution de la l'équation de pression de nouveaux points d'origine soient choisis.

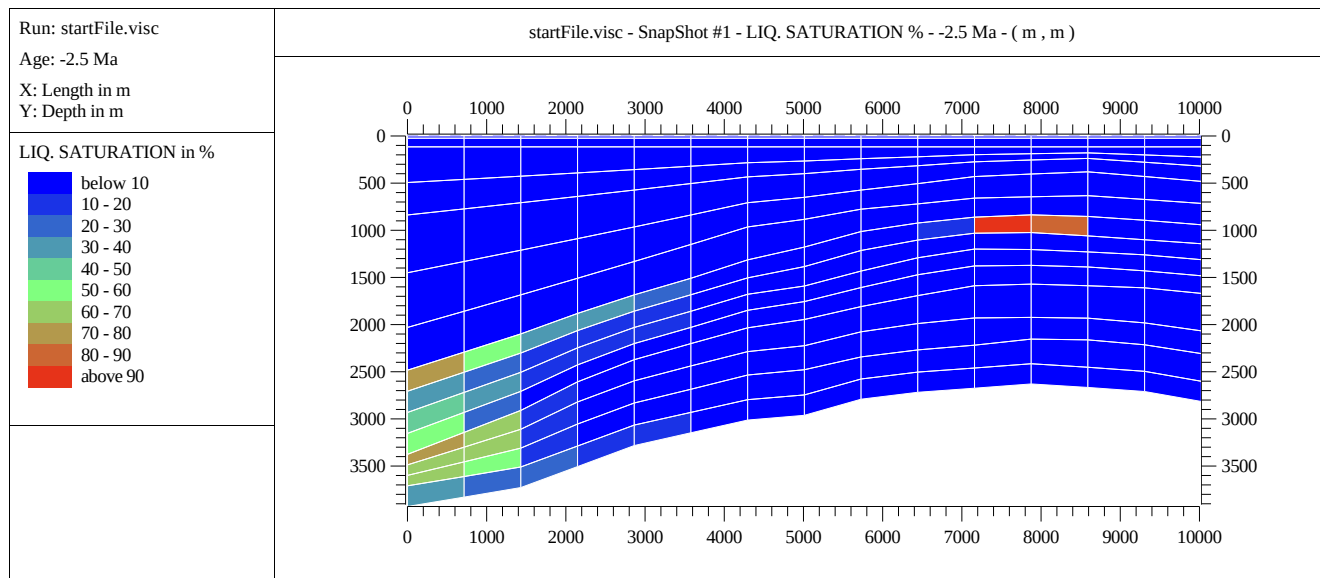


Fig 61. La saturation de l'huile donnée par Visco3D, Ev_15_FIN

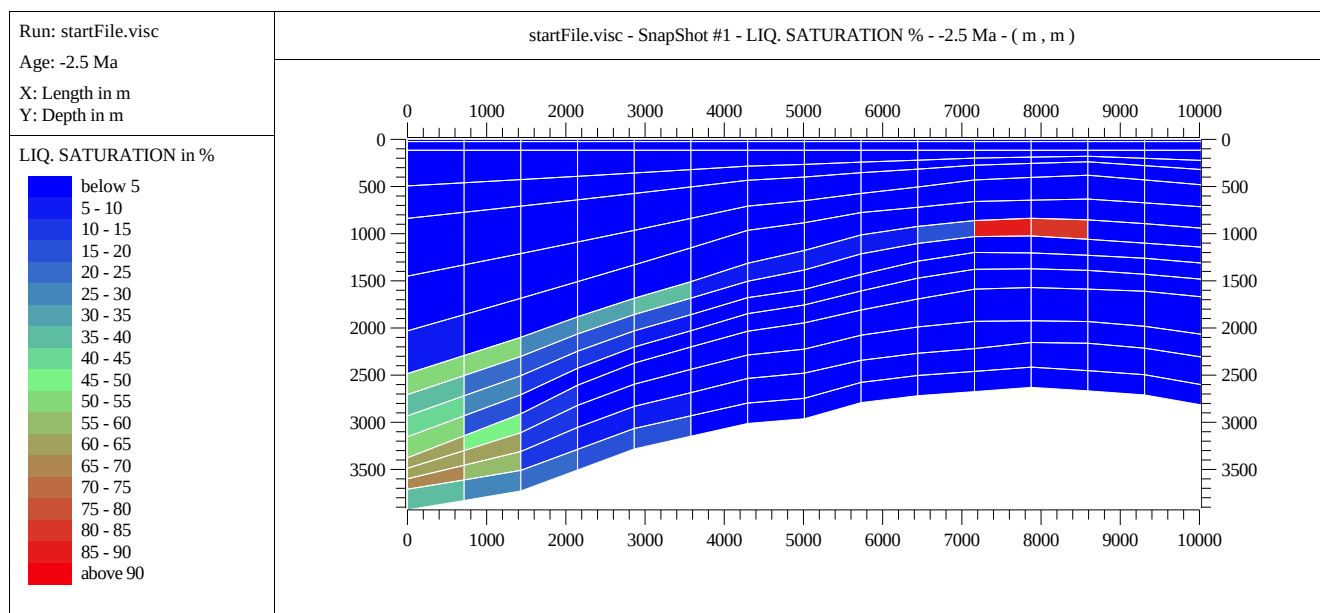


Fig 62. La saturation de l'huile donnée par LDC, Ev_15_FIN

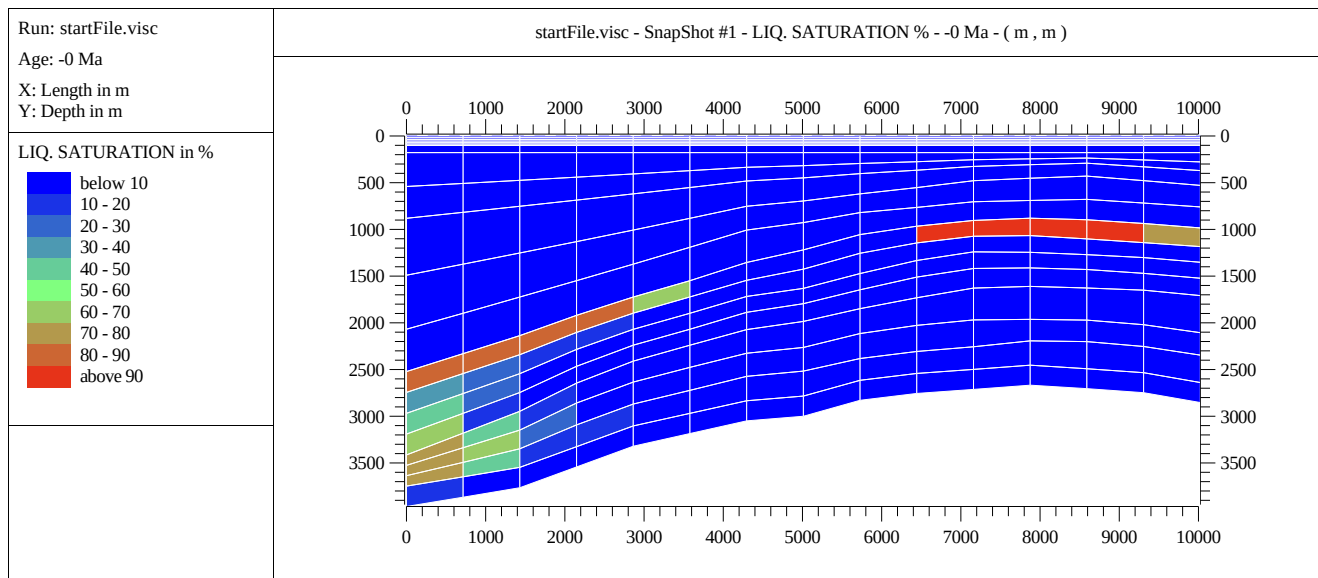


Fig 63. La saturation de l'huile donnée par Visco3D, Ev_20_FIN

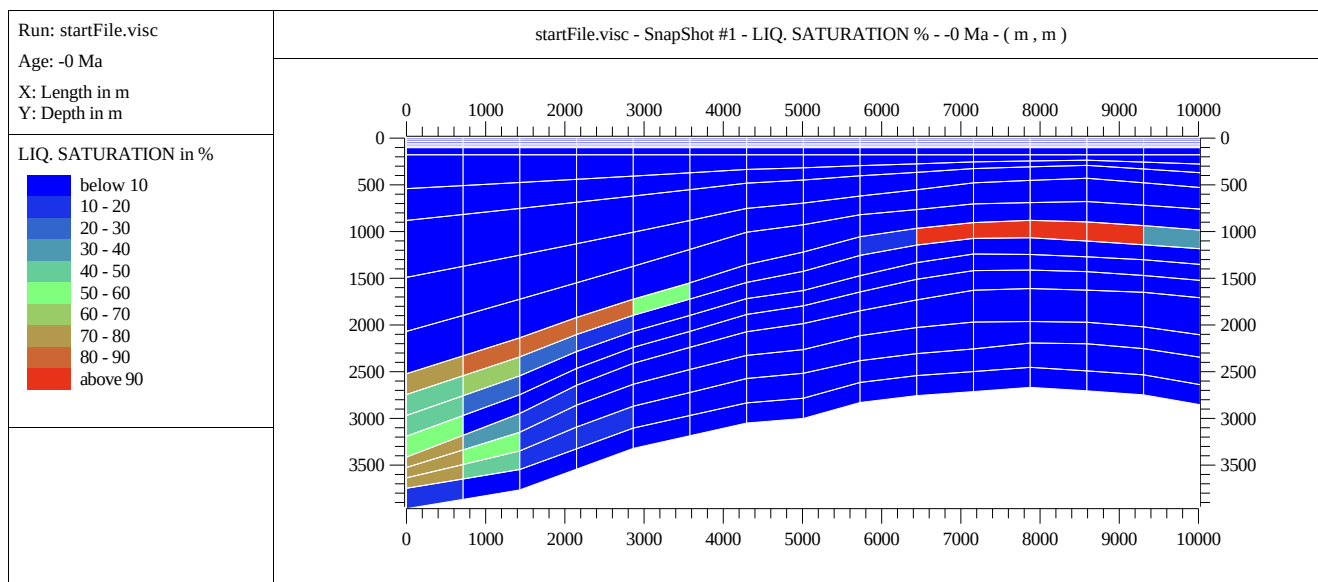
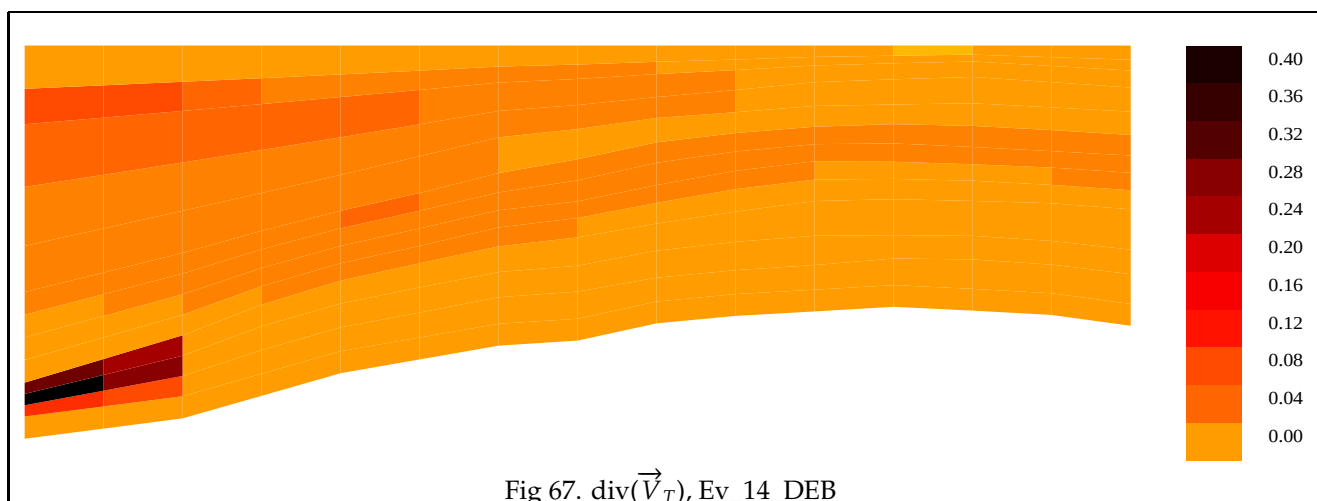
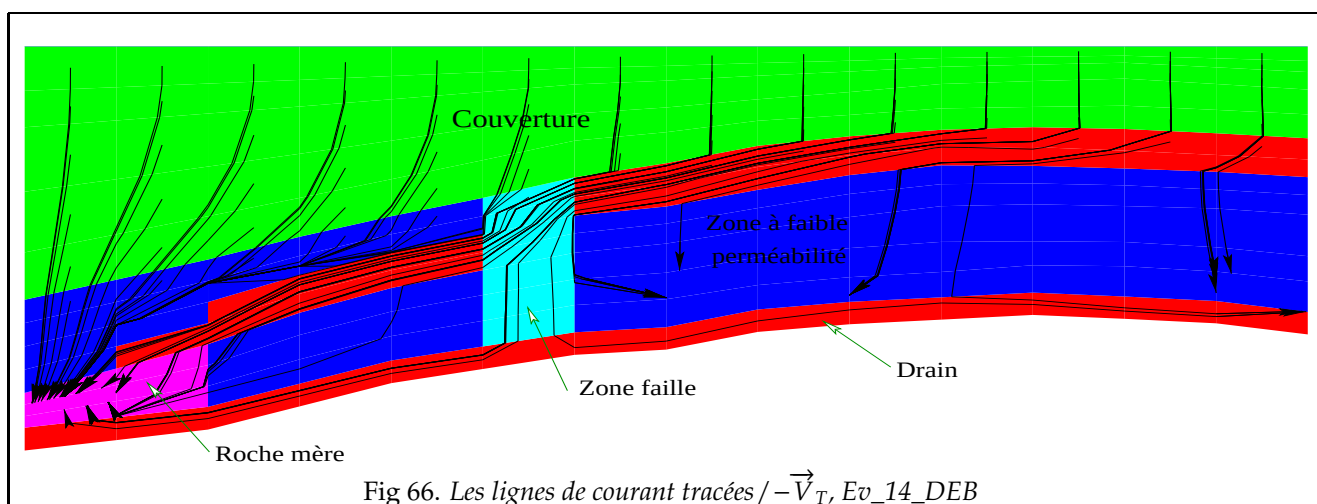
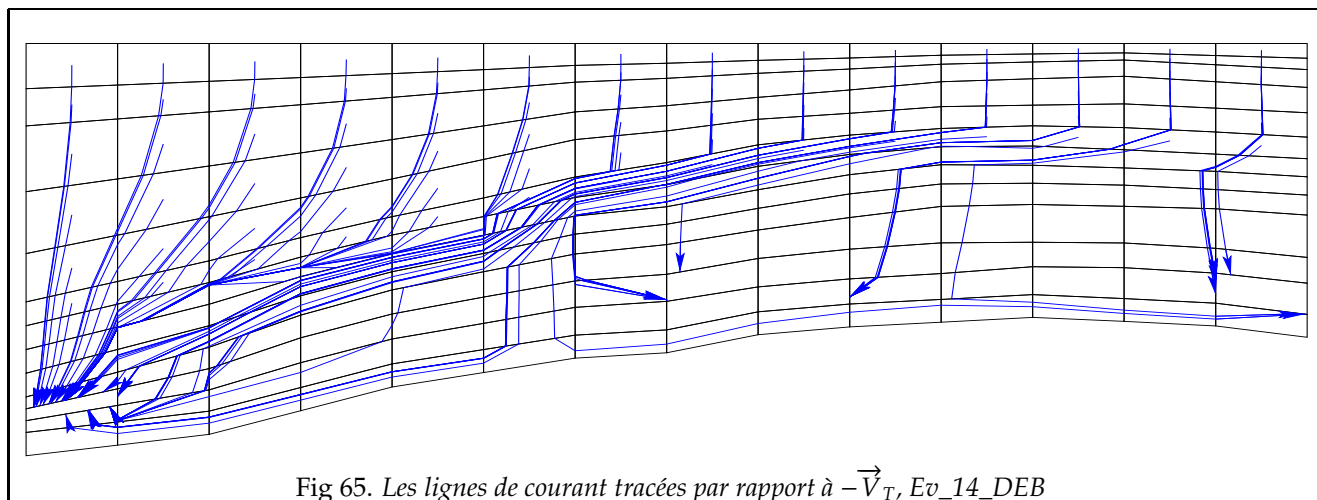
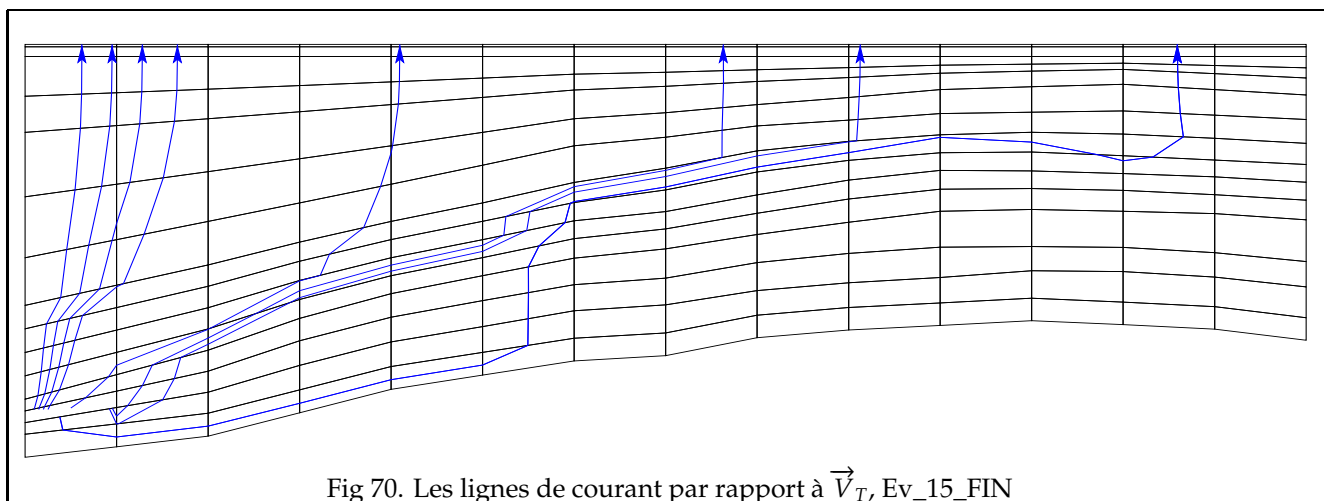
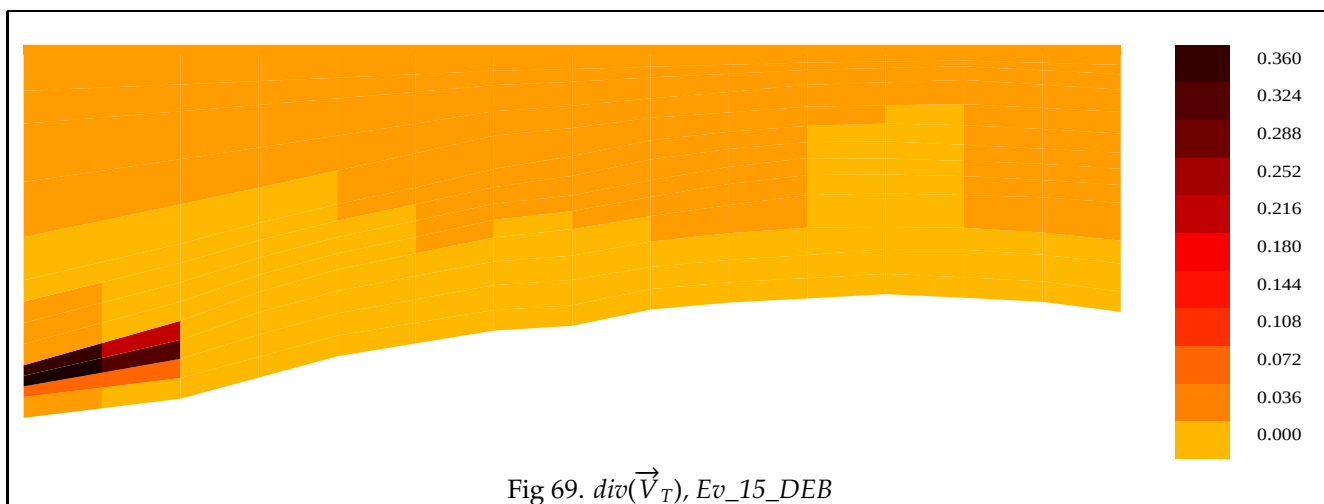
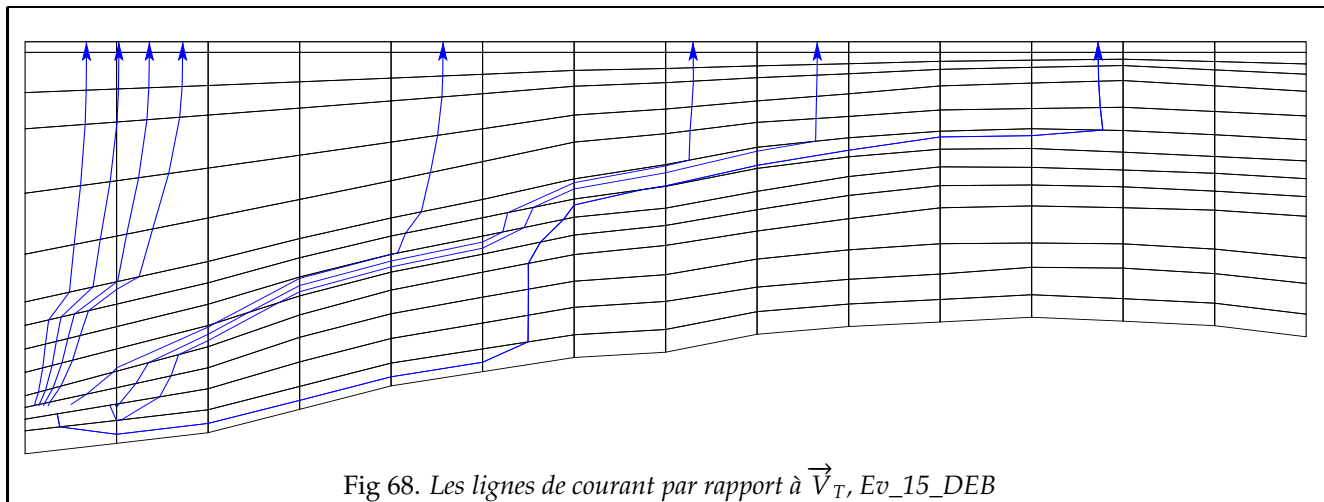
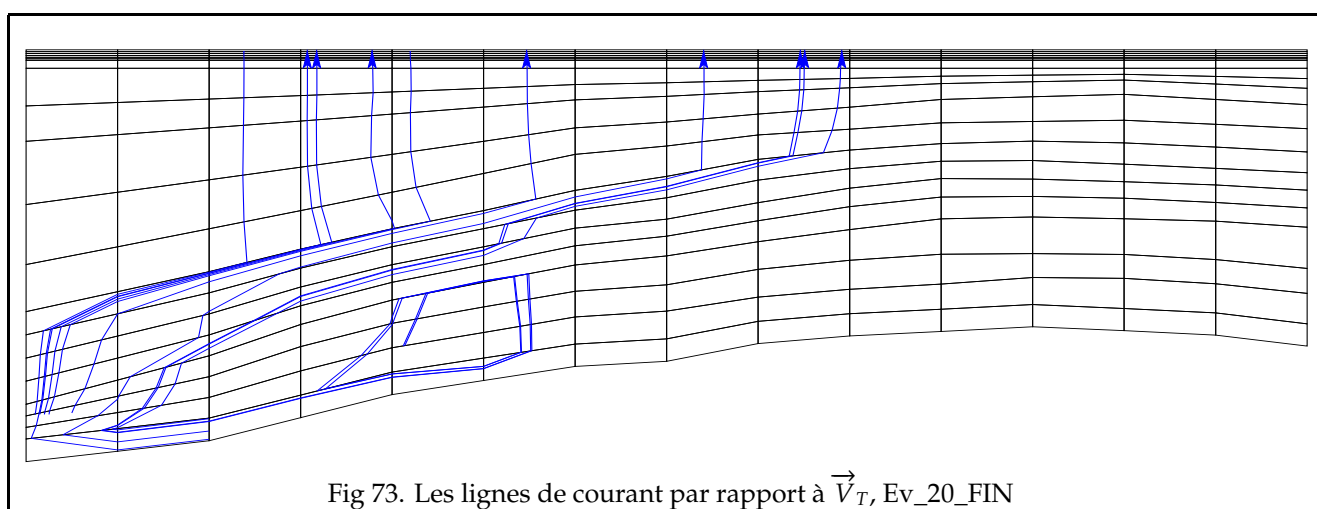
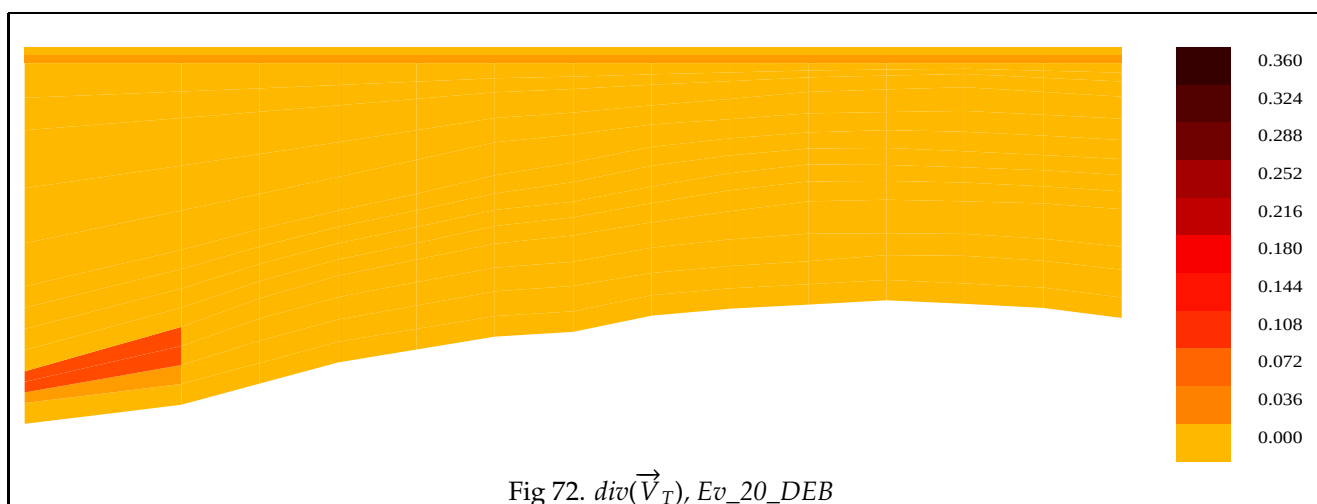
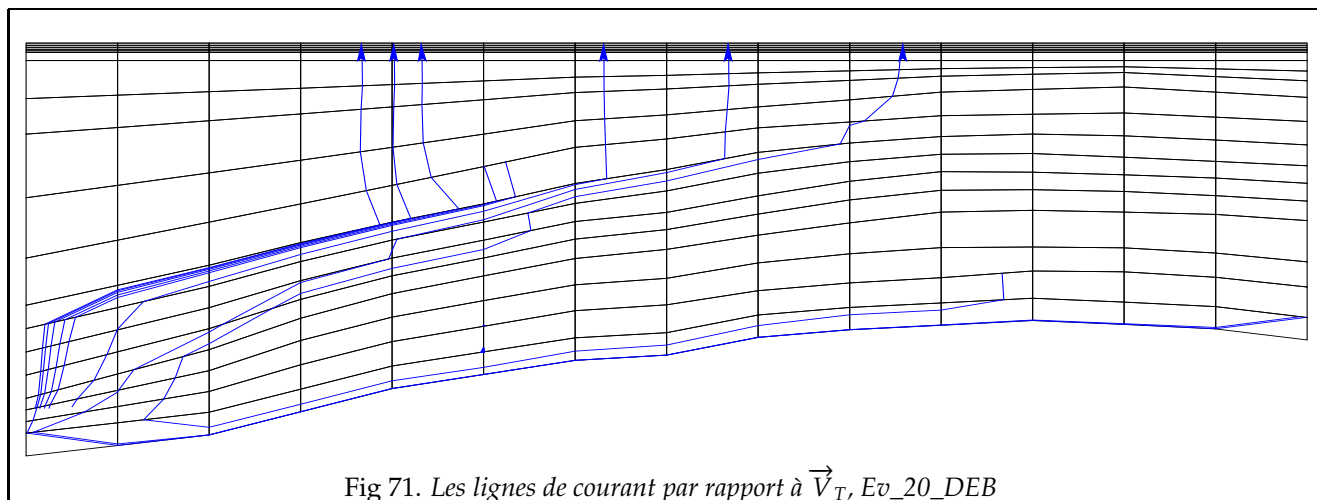


Fig 64. La saturation de l'huile donnée par LDC, Ev_20_FIN







Chapitre 5

Conclusions

Les résultats des tests numériques montrent que la méthode des lignes de courant peut être adoptée pour la modélisation de bassins. En particulier une réduction assez importante du nombre de résolutions de l'équation de la pression permet de réduire significativement le temps de calcul global, sans pour autant diminuer la qualité de la solution approchée obtenue.

Il est important de remarquer que l'ajout de la compaction nous permet de localiser l'endroit de l'origine des lignes de courant. Ce sont les argiles et les roches mères qui génèrent en grande partie les surpressions dans les bassins sédimentaires car ces lithologies sont les zones les plus compactables, créant un fort gradient de pression dû à leurs faibles perméabilités. Par conséquent, ces lithologies figurent souvent comme points d'origine pour les lignes de courant.

Application à l'estimation des incertitudes

Une des raisons principales de l'utilisation de la modélisation de bassins est sa capacité à tester et formaliser des scénarios géologiques qui permettent de quantifier certaines hypothèses faites sur des prospects pétroliers tout en rendant compte des données observées. Puisqu'elle traite un sujet à risque, l'exploration pétrolière est une science probabiliste et tout résultat d'une modélisation devrait prendre en compte l'incertitude sur les paramètres du modèle et sur les hypothèses géologiques faites dans le modèle.

Ceci est particulièrement crucial dans le cas d'une exploration intensive qui cherche à trouver des réserves additionnelles dans des bassins bien explorés où une grande base de données de puits existe déjà qui permet de contraindre le modèle. En revanche pour l'exploration en zones vierges où les risques et les incertitudes sont beaucoup plus élevés car peu ou pas de données sont disponibles, une modélisation ne sert souvent qu'à tester des idées géologiques.

L'exploration intensive présente le moindre risque pour les compagnies où la modélisation de la migration des hydrocarbures donne la plus grande valeur ajoutée. L'approche classique pour quantifier les incertitudes passe par un échantillonnage aléatoire des paramètres d'entrée du modèle, suivi d'une simulation répétitive afin de disposer d'un nombre suffisamment représentatif de sorties du modèle. Ceci demande plusieurs centaines à milliers de réalisations du problème direct. Les méthodes numériques utilisées classiquement dans la modélisation de bassins ne permettent pas d'effectuer un tel calcul car elles sont trop gourmandes en temps de calcul même sur des ordinateurs très performants.

Il faut donc une méthode rapide de résolution du problème direct qui permet de faire de nombreuses réalisations sans pour autant perdre trop de précision sur les résultats. Les résultats de la méthode des lignes de courant obtenus dans cette thèse nous rendent optimistes quant à une future utilisation de cette méthode pour un calcul des incertitudes, car nous avons montré qu'elle permet de réduire significativement la durée d'une simulation individuelle, tout en gardant une solution robuste et physiquement acceptable. Les tests effectués ne concernent que le 2D et ce gain sera encore plus important en 3D.

Utilisation des machines multi-processeurs

Parmi les avantages de la méthode des lignes de courant on compte la possibilité d'une parallélisation du code plus facile que dans les autres méthodes, car chaque ligne peut être calculée indépendamment.

Une parallélisation sera alors directement implantable. Etant donné le développement actuel des ordinateurs qui sont de plus en plus disponibles avec plusieurs processeurs, une utilisation en parallèle devient quasi obligatoire pour tous les codes numériquement exigeants.

Futures améliorations

Deux points sur lesquels on doit encore travailler sont particulièrement importants:

- **Amélioration du schéma numérique pour la partie gravité et pression capillaire :**

Comme on l'a signalé, les forces de gravité et pression capillaire sont très importantes dans la migration des hydrocarbures dans le cas des bassins. Par conséquent l'amélioration du traitement numérique de ces forces dans la méthode des lignes de courant peut conduire à augmenter la précision de celle-ci.

Cette amélioration pourrait être obtenue en essayant d'autres choix, on pourrait par exemple:

1. Séparer les deux forces, et traiter la partie gravité par une méthode des lignes de courant, i.e. résoudre l'équation de la gravité le long des lignes de courant tracées dans le bassin par rapport à $\vec{g}$, puis résoudre la partie de la pression capillaire par une méthode volume fini.

Sur ce choix, on peut faire deux remarques :

- (a) en traitant la partie gravité par une méthode de type lignes de courant, on perd la conservativité, en revanche on peut avoir plus de précision.
 - (b) on peut penser aussi résoudre la partie pression capillaire par la méthode des lignes de courant, or une telle réalisation semble très difficile à mettre en oeuvre, car $\vec{\nabla} P_C$ n'est pas assez régulier, ce qui compliquerait le traçage des lignes de courant par rapport à $\vec{\nabla} P_C$.
2. Garder les deux forces ensemble 'ce que nous avons fait', mais prendre un autre schéma volume fini. On peut s'inspirer du travail du J.Vovelle et N.Seguin ([39]), où on peut trouver d'autres propositions de schémas numériques pour ce type d'équations.

- **Chercher des critères pour trouver les points d'origines des lignes de courant:**

Le fait de rajouter la compaction nous donne des indications sur les points d'origines des lignes de courant. En plus, ces mailles possèdent aussi la divergence de la vitesse totale la plus grande (parmi elles se trouvent les mailles des termes sources 'les roches mères'). On n'a pas encore trouvé un critère "optimal" pour décider le nombre et le placement exact de ces points.

Rappelons que dans le cas réservoir ces lignes sont tracées sur les interfaces des mailles qui contiennent des puits d'injection, leur nombre est alors proportionné au volume injecté.

- **Amélioration du Bilan :**

Comme on l'a dit, la méthode des lignes de courant n'est pas conservative. Ce défaut vient du traitement de la partie du flux total par les lignes de courant, plus précisément, il y a deux causes :

1. Le schéma numérique qu'on a adopté sur une ligne de courant n'est pas conservatif lorsque $\text{div}(\vec{V}_T) \neq 0$.
2. Le passage des informations entre les lignes de courant et les mailles (voir Chapitre 2, partie 2.4).

Il semble impossible de rendre cette méthode conservative, mais la question qu'on peut se poser est: comment pourrait-on la rendre « plus conservative » ? A cette question on n'a pas actuellement de réponse précise, en revanche on peut essayer plusieurs pistes :

A- Tracer plus de lignes de courant :

Comme le test l'a montré, le bilan obtenu par la méthode des lignes de courant est très sensible au nombre de lignes de courant tracées dans le bassin. Batycky dans sa thèse ([10]) propose une augmentation du nombre de lignes de courant tracées dans le réservoir. Bien que l'effet de ce choix sur le bilan ne soit pas très clair, cela reste une idée à tester. On peut signaler qu'en contrepartie on aura une augmentation du temps de calcul.

B- Changer la formule de passage :

La formule qu'on utilise pour faire la moyenne de la saturation dans une maille (en fonction des lignes de courant qui traversent cette maille) est basée sur le temps de vol mis par chaque ligne de courant pour traverser complètement la maille. On peut aussi essayer d'autres formules en utilisant par exemple des poids basés sur le temps de vol et $\text{div}(\vec{V}_T)$ dans les maille d'origine,

$$S_K = \sum_{l \in I_K} \alpha_{l,K} v_l,$$

avec par exemple, $\alpha_{l,K} = \frac{(\text{div}(\vec{V}))_{K_{ori,l}} \Delta_K^l}{\sum_{j \in I_K} (\text{div}(\vec{V}))_{K_{ori,j}} \Delta_K^j}$, tel que $p_o^l \in K_{ori,l}$.

C- Combiner les deux méthodes Volume fini et lignes de courant.

La durée de modélisation du bassin est divisée en plusieurs périodes géologiques appelées événements. Notre idée est de faire la simulation sur certains événements par la méthode des lignes de courant, et sur les autres par une méthode volume fini (le code Visco3d). Ceci peut réduire la perte de la conservativité. Bien entendu le but est d'utiliser la méthode des lignes de courant pour traiter les événements qui demandent le plus de calculs. Pour cela il faut définir des critères pour déterminer ces événements, par exemple : La durée de l'événement, le taux de génération des HC (terme source), la compaction.

Passage au 3D

L'extension de la méthode développée ici au cas 3D est liée à la régularité du maillage. En effet, le seul problème lié à ce passage est le traçage des lignes de courant, car la méthode présentée ici pour tracer les lignes de courant demande une certaine régularité sur le maillage du bassin. Or le traitement choisi dans le code Visco3D pour la modélisation du bassin peut conduire à des mailles dont certaines interfaces ne sont plus continues dans des plans de $\mathbb{R}^2$, ce qui nous a empêché de tester cette méthode en 3D. Il faut donc améliorer les méthodes de traçage des lignes de courant pour tenir compte des mailles non régulières (voir aussi annexe A)

Annexe A

Méthodes numériques pour les traçages des lignes de courants

A.1 Introduction

Le tracé des lignes de courant est une partie essentielle et très importante dans la méthode des lignes de courant, il détermine les mailles qui croisent la trajectoire de la ligne de courant, ainsi que le temps de vol qui sert à résoudre l'équation 1d le long de la ligne de courant.

Nous nous intéressons ici aux méthodes de traçage (utilisées pour les tests numériques), on se limite au cas 2d. Pour plus de détails sur le cas 3d et d'autres méthodes de traçage voir ([19], [29], [28] et [41]) par exemple.

on se donne Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{M}$ est un maillage régulier de Ω , cf Chapitr 2 (partie 2.3 et 2.3.1) pour les hypothèses du maillage et la notation.

Le champ de la vitesse est donné de la manière suivante:

1. $\forall p \in \mathcal{M}$, la divergence de $\vec{V}$ dans p est supposée constante:

$$\text{div}(\vec{V}(x)) = D_p, \quad \forall x \in p$$

2. Pour toute arête σ de $\mathcal{A}_p$, la moyenne de $\vec{V} \cdot \vec{n}_{p,\sigma}$ sur σ est donnée par:

$$v_{p,\sigma} = \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \vec{V}(r) \cdot \vec{n}_{p,\sigma}(r) d\gamma(r)$$

3. Pour toute arête σ de $\mathcal{A}_p$, pour tout $x \in \sigma$, on suppose que:

$$\vec{V}(x) \cdot \vec{n}_{p,\sigma}(x) = v_{p,\sigma}$$

Dans ce cas, D_p vérifie la relation suivante:

$$D_p = \frac{1}{m(p)} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_p} m_{\sigma} v_{p,\sigma} \quad (\text{A.1})$$

A partir de ces données on cherche à construire une interpolation de la vitesse $(\vec{V}_p)_{p \in \mathcal{M}}$ dans Ω , $\vec{V}_p$ est l'approximation de la vitesse dans la maille p . On demande à cette approximation de vérifier les conditions suivantes:

- (C1) Conservation du flux, $\forall p \in \mathcal{M}$, $\forall x \in p$,

$$\text{div}(\vec{V}_p(x)) = D_p$$

- (C2) Pour toute arête σ de $\mathcal{A}_p$:

$$\frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \vec{V}_p(r) \cdot \vec{n}_{p,\sigma}(r) d\gamma(r) = v_{p,\sigma}$$

- (C3) Continuité du flux à travers les arêtes de $\mathcal{M}$, si $\sigma \in \mathcal{A}$ tel que $\sigma = \sigma_{pq}$, alors on a:

$$v_{p,\sigma} = \frac{1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \vec{V}_p(r) \cdot \vec{n}_{p,\sigma}(r) d\gamma(r) = \frac{-1}{m(\sigma)} \int_{\sigma} \vec{V}_q(r) \cdot \vec{n}_{q,\sigma}(r) d\gamma(r).$$

Avec notre notation, on a $\vec{n}_{p,\sigma} = -\vec{n}_{q,\sigma}$.

A.2 Maillages Cartésiens

Soit K une maille de $\mathcal{M}$, quitte à faire une translation on peut supposer que (voir Fig-A.1): $K = [0, dx] \times [0, dy]$. On note:

$$\begin{cases} m_x &= \frac{v_2 + v_0}{dx} \\ m_y &= \frac{v_1 + v_3}{dy} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Avec:

$$0 \leq i \leq 3, v_i = \frac{1}{l_{\sigma_i}} \int_{\sigma_i} \vec{V}(r) \vec{n}_{\sigma_i}(r) d\gamma(r)$$

(les (v_i) sont connues). L'interpolation $\vec{V}_K$ de la vitesse dans K sera donnée par (Interpolation de Pollock):

$$\vec{V}_K(x, y) = \begin{pmatrix} m_x x - v_0 \\ m_y y - v_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

On se donne un point $P_e = (x_e, y_e) \in \bar{K}$, on cherche à tracer la ligne de courant par rapport à $\vec{V}_K$ dont P_e est le point d'origine. i.e on cherche à trouver le point de sortie $P_s = (x_s, y_s)$ de la ligne de la maille K ainsi que le temps de vol τ_K dans la maille que la ligne met entre les deux points P_e et P_s .

Détermination de P_s et τ_K

En fait, la ligne de courant dans ce cas peut être paramétrisée par $q(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$, avec:

$$\begin{cases} x(\tau) = (x_e - \frac{v_0}{m_x}) \exp(m_x \tau) + \frac{v_0}{m_x} \\ y(\tau) = (y_e - \frac{v_3}{m_y}) \exp(m_y \tau) + \frac{v_3}{m_y} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Pour calculer le point de sortie, on calcule d'abord le temps de vol. Dans un premier temps, on calcule τ_x le temps nécessaire pour que q sorte de K dans la direction de x . D'après la relation A.4, on trouve:

$$\tau_x = \frac{1}{m_x} \ln\left(\frac{m_x x_* - v_0}{m_x x_e - v_0}\right)$$

Avec $x_* \in \{0, dx\}$ dont le choix dépend des signes de v_0 et v_2 .

De la même façon on calcule le temps de sortie τ_y dans la direction de y . Le temps de vol final sera:

$$\tau_K = \min\{\max\{\tau_x, 0\}, \max\{\tau_y, 0\}\}. \quad (\text{A.5})$$

Une fois τ_K est trouvé, on détermine (si $\tau_K > 0$) P_s en utilisant la relation (A.4).

Remarque A.2.1 On note:

- Dans la relation (A.4), on a supposé que $m_x \neq 0$ et $m_y \neq 0$. Si par exemple $m_x = 0$, alors $x(\tau) = x_e - v_0 \tau$. et $\tau_x = \frac{x_* - x_e}{-v_0}$ (bien sûr si $v_0 \neq 0$).
- Si $\tau_k \leq 0$, alors la ligne de courant ne rentre pas dans K (si $P_e \in \partial K$), ou elle ne sort pas de K (si $P_e \in K$). Dans ce cas on arrête le tracé de la ligne.
- Si $D_K = 0$, la relation (A.5) est bien définie (i.e $\tau_K > 0$), en revanche si $D_K \neq 0$ il y a des cas où cette relation n'est pas définie (i.e $\tau_K \leq 0$). Par exemple si $\vec{V}_K$ est donné par:

$$\vec{V}_K(x, y) = \begin{pmatrix} -x + (dx/2) \\ -y + (dy/2) \end{pmatrix}$$

et $P_e = (dx/4, dy/4)$. Dans ce cas on ne sort pas de la maille K !!!

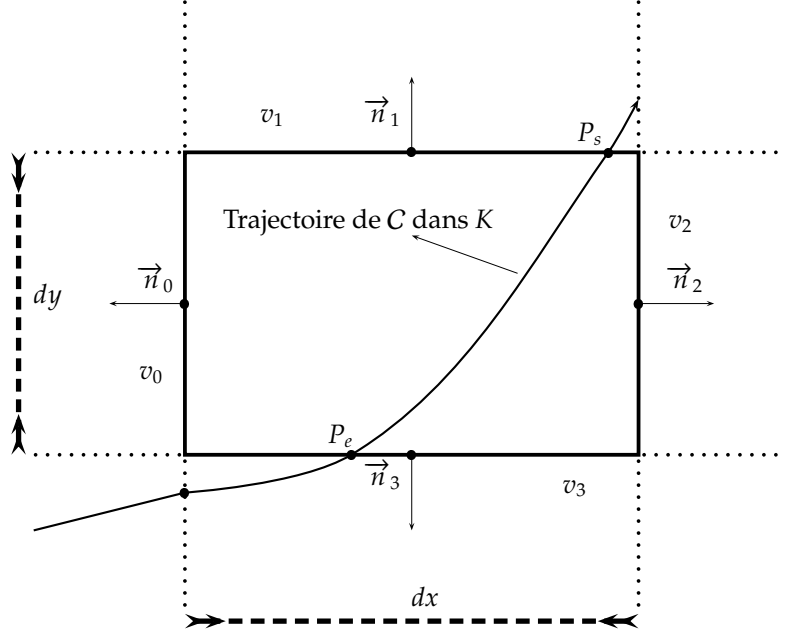


Figure A.1: Cas cartésien. Interpolation de Pollock

A.3 Maillage triangulaire

Dans cette partie on suppose que $\mathcal{M}$ est un maillage triangulaire de Ω . Soit K une maille de $\mathcal{M}$, on note pour $i \in \{0, 1, 2\}$ (voir Fig-A.2):

- $A_i = (x_i, y_i)$, les sommets du triangle K
- $\vec{n}_i = (a_i, b_i)$, la normale extérieure sur l'arête $A_{i \% 3} A_{(i+1) \% 3}$
- $c_i = a_i x_i + b_i y_i$, le produit scalaire entre A_i et $\vec{n}_i$
- $(v_i)_i$ les données de la vitesse sur le bord de K ,

$$v_i = \frac{1}{l_i} \int_{\sigma_i} \vec{V}(r) \vec{n}_i(r) d\gamma(r).$$

l_i étant la longueur de l'arête $A_{i \% 3} A_{(i+1) \% 3}$

L'approximation de $\vec{V}$ dans K sera donnée par:

$$\vec{V}_K(x, y) = \begin{pmatrix} \eta x + \alpha \\ \eta y + \beta \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Où:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{D_K}{2} \\ \alpha &= \frac{b_1(v_0 - \eta c_0) - b_0(v_1 - \eta c_1)}{a_0 b_1 - b_0 a_1} \\ \beta &= \frac{-a_1(v_0 - \eta c_0) + a_0(v_1 - \eta c_1)}{a_0 b_1 - b_0 a_1}\end{aligned}\tag{A.7}$$

La vitesse approchée de cette façon vérifie les trois critères ((C1),(C2),(C3)). On se donne un point $P_e = (x_e, y_e) \in \overline{K}$, on cherche à tracer la ligne de courant par rapport à $\vec{V}_K$ dont P_e est le point d'origine. i.e le point de sortie $P_s = (x_s, y_s)$ de la ligne de la maille K ainsi que le temps de vol dans la maille entre P_e et P_s .

Détermination de P_s et τ_K

En fait, la ligne de courant dans ce cas peut être paramétrisée par $q(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$, avec:

$$\begin{cases} x(\tau) = (x_e + \frac{\alpha}{\eta}) \exp(\eta\tau) - \frac{\alpha}{\eta} \\ y(\tau) = (y_e - \frac{\beta}{\eta}) \exp(\eta\tau) - \frac{\beta}{\eta} \end{cases}\tag{A.8}$$

En éliminant le temps de vol τ entre $x(\tau)$ et $y(\tau)$ dans la relation (A.8), on trouve que le trajectoire de la ligne de courant dans K est une droite $\mathcal{D}_K$, donnée par:

$$\mathcal{D}_K = \{(x, y) \in \overline{K}, \frac{\eta x + \alpha}{\eta x_e + \alpha} = \frac{\eta y + \beta}{\eta y_e + \beta}\}\tag{A.9}$$

Pour calculer le point de sortie, on calcule d'abord le temps de vol. Dans un premier temps, on calcule les points $\{P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2)\}$ d'intersection entre $\mathcal{D}_K$ et ∂K , ensuite on calcule τ_1 (resp τ_2) le temps de vol entre P_e et P_1 (resp P_2), par exemple:

$$\tau_1 = \frac{1}{\eta} \ln\left(\frac{\eta x_1 + \alpha}{\eta x_e + \alpha}\right)\tag{A.10}$$

Le temps de vol final sera:

$$\tau_K = \min\{\max(\tau_x, 0), \max(\tau_y, 0)\}.\tag{A.11}$$

Une fois τ_K calculé, on peut déterminer par la relation (A.8) le point de sortie $P_s \in \{P_1, P_2\}$.

Remarque A.3.1 On note:

- Dans la relation (A.8), on a supposé que $\eta \neq 0$, si $\eta = 0$ alors $q(\tau) = (x_e + \alpha\tau, y_e + \beta\tau)$
- Si $D_K = 0$, la relation (A.11) est bien définie, en revanche si $D_K \neq 0$ il y a des cas où cette relation n'est pas définie (i.e $\tau_K \leq 0$)

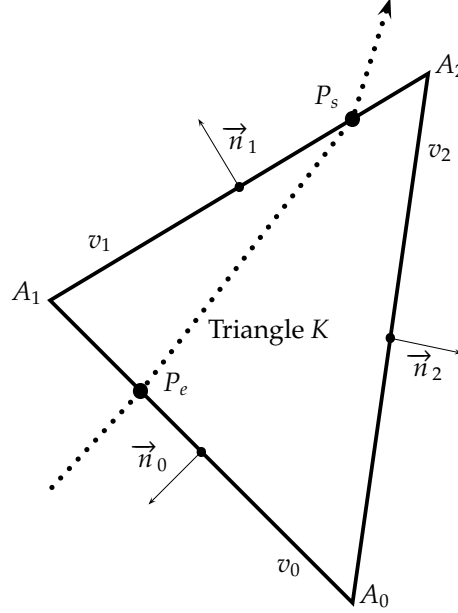


Figure A.2: Cas d'une maille triangulaire.

A.4 Cas D'un Trapèze

On s'intéresse à des maillages constitués de trapèzes. Pour tracer les lignes de courant, on va utiliser deux méthodes, la première est un mélange de traçage dans le cas rectangle et triangle, la seconde est une transformation géométrique d'un trapèze à un rectangle de référence.

A.4.1 Première méthode

Soit K une maille de $\mathcal{M}$ (voir Fig-A.3), on note pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$:

- $A_i = (x_i, y_i)$, les sommets de K
- $\vec{n}_i = (a_i, b_i)$, la normale sur l'arête $A_{i\%4}A_{(i+1)\%4}$
- $(v_i)_i$ les données de la vitesse sur le bord de K ,

$$v_i = \frac{1}{m(\sigma_i)} \int_{\sigma_i} \vec{V}(r) \vec{n}_i(r) d\gamma(r).$$

l_i étant la longueur de l'arête $A_{i\%4}A_{(i+1)\%4}$

On va approcher la vitesse dans K dans le cas de fig-A.3, les autres cas sont similaires. On définit deux points supplémentaires:

$$\begin{cases} A_4 = (x_4, y_4) &= (x_0 + f(y_3 - y_0)(x_3 - x_0), \max(y_0, y_3)) \\ A_5 = (x_5, y_5) &= (x_1 + f(y_1 - y_2)(x_2 - x_1), \min(y_0, y_3)) \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Avec $f(s) = 1$ si $s > 0$ et 0 sinon.

On divise K en deux triangles et un rectangle:

- Premier triangle $\mathcal{T}_1 = A_0A_4A_3$
- Second triangle $\mathcal{T}_2 = A_1A_5A_2$
- Le rectangle $\mathcal{R} = A_0A_1A_5A_4$

On définit aussi:

$$\begin{cases} v_4 &= \frac{|\mathcal{T}_1|D_K - l_3v_3 - |A_4A_3|v_2}{Dx} \\ v_5 &= \frac{|\mathcal{T}_2|D_K - l_1v_1 - |A_5A_2|v_2}{Dx} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

($Dx = x_3 - x_0 = x_2 - x_1$)

L'approximation de $\vec{V}_K$ sera :

$$\vec{V}_K(x, y) = \begin{cases} \vec{V}_{\mathcal{T}_1}(x, y) & \text{si } (x, y) \in \mathcal{T}_1 \\ \vec{V}_{\mathcal{T}_2}(x, y) & \text{si } (x, y) \in \mathcal{T}_2 \\ \vec{V}_{\mathcal{R}}(x, y) & \text{si } (x, y) \in \mathcal{R} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Où

$$\vec{V}_{\mathcal{R}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{v_2 + v_0}{dx}(x - x_0) - v_0 \\ \frac{(-v_5) + (-v_4)}{y_5 - y_4}(x - x_0) - (-v_4) \end{pmatrix}$$

et pour $i \in \{1, 2\}$:

$$\vec{V}_{\mathcal{T}_i}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{D_K}{2}x + \alpha_i \\ \frac{D_K}{2}y + \beta_i \end{pmatrix}$$

Les constantes α_i et β_i sont calculées dans (A.3-A.7);

Cette approximation de la vitesse dans les mailles de $\mathcal{M}$ répond aux trois critères ((C1),(C2),(C3)).

Remarque A.4.1 On remarque que:

- Lorsque $A_4 = A_0$ ou A_3 , alors $\mathcal{T}_1 = \emptyset$ et $v_4 = -v_3$
- Lorsque $A_5 = A_2$ ou A_1 , alors $\mathcal{T}_2 = \emptyset$ et $v_5 = -v_2$

En particulier, dans le cas où le trapèze se réduit à un rectangle, on retrouve la méthode de Pollock

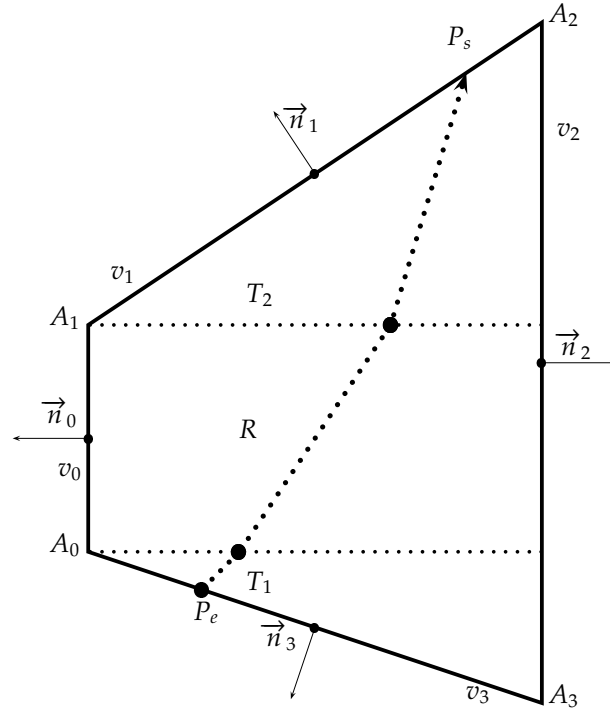


Figure A.3: Maille trapèze, méthode 1

A.4.2 Seconde méthode

Cette méthode consiste à définir une fonction entre K et un carré de référence $\Omega_r =]0; 1[^2$ (voir FigA.4). Quitte à faire une translation on peut supposer que $A_0 = (0, 0)$, on note $X = x_2 = x_3$ et $\Delta = y_2 - y_1 - y_3$.

Transformation Iso-paramétrique

Pour tout $(\eta_1, \eta_2) \in \Omega_r$, on définit $F(\eta_1, \eta_2) \in K$ par:

$$F(\eta_1, \eta_2) = \eta_1(1 - \eta_2)P_3 + \eta_2(1 - \eta_1)P_1 + \eta_1\eta_2P_2$$

Ce qui donne après développement:

$$F(\eta_1, \eta_2) = \begin{pmatrix} \eta_1 X \\ \eta_1 y_3 + \eta_2(y_1 + \eta_1 \Delta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

On définit aussi pour tout $(x, y) \in K$, F^{-1} de K dans Ω_r , par:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{X} \\ \frac{yX - xy_3}{Xy_1 + x\Delta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Transformation de la vitesse

Le but est de calculer pour chaque arête de Ω_r la valeur de $v_i^r = \vec{V} \cdot \vec{n}_i^r$ au centre de l'arête, à partir des valeurs $(v_i)_i$ qui sont connues dans K .

Pour tout $(x, y) \in K$, on a :

$$\vec{V}_r(F^{-1}(x, y)) = DF^{-1}(x, y) \vec{V}(x, y) \quad (\text{A.17})$$

Avec:

$$DF^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{X} & 0 \\ \frac{-X(y_3 y_1 + y \Delta)}{(X y_1 + x \Delta)^2} & \frac{X}{(X y_1 + x \Delta)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

On va calculer $v_r^1 = \vec{V}_r(1/2, 1) \cdot \vec{n}_1^r(1/2, 1)$, les autres cas sont similaires. D'après (A.17), on a :

$$\vec{V}_r(1/2, 1) = DF^{-1}(X/2, (y_1 + y_2)/2) \vec{V}(X/2, (y_1 + y_2)/2)$$

Or, d'après (A.18):

$$DF^{-1}(X/2, (y_1 + y_2)/2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{X} & 0 \\ \frac{(y_1 - y_2)}{X(y_2 + y_1 - y_3)^2} & \frac{1}{(y_2 + y_1 - y_3)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

En écrivant $\vec{V}(X/2, (y_1 + y_2)/2) = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$, on en déduit que:

$$\begin{aligned} v_r^1 &= \vec{V}_r(1/2, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(y_1 - y_2)V_x}{X(y_2 + y_1 - y_3)^2} + \frac{V_y}{(y_2 + y_1 - y_3)} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

D'autre part, on a $\vec{n}_1 = \frac{1}{l_1} \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ X/2 \end{pmatrix}$, par la définition de v_1 , on a:

$$\begin{aligned} v_1 &= \vec{V}(X/2, (y_1 + y_2)/2) \cdot \vec{n}_1 \\ &= \frac{1}{l_1} ((y_1 - y_2)V_x + (X/2)V_y) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne:

$$V_x = \frac{l_1 v_1 - (X/2)V_y}{y_1 - y_2} \quad (\text{A.21})$$

On trouve finalement, en utilisant les relations (A.20) et (A.21):

$$v_1^r = \frac{2l_1 v_1}{y_2 + y_1 - y_3}$$

Après avoir fait le calcul pour toutes les arêtes de Ω_r , on trouve:

$$\begin{cases} v_0^r = \frac{v_0}{X} & , \quad v_2^r = \frac{v_2}{X}; \\ v_1^r = \frac{2l_1 v_1}{y_2 + y_1 - y_3} & , \quad v_3^r = \frac{2l_3 v_3}{y_2 + y_1 - y_3} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Une fois les vitesses $(v_i^r)_i$ calculées dans Ω_r , on peut maintenant tracer une ligne de courant dans K . En fait, pour un point $P_e \in K$ on détermine le point de sortie P_s^r et le tdv τ_r dans Ω_r en traçant la ligne de courant dans Ω_r qui passe par $F^{-1}(P_e)$ par la méthode de Pollock. Pour la maille K , on prend $F(P_s^r) \in \bar{K}$ comme point de sortie et pour le temps de vol dans K (τ_K) on prend τ_r .

Remarque A.4.2 Si la maille K est un rectangle, cette méthode de traçage est identique à la méthode de Pollock.

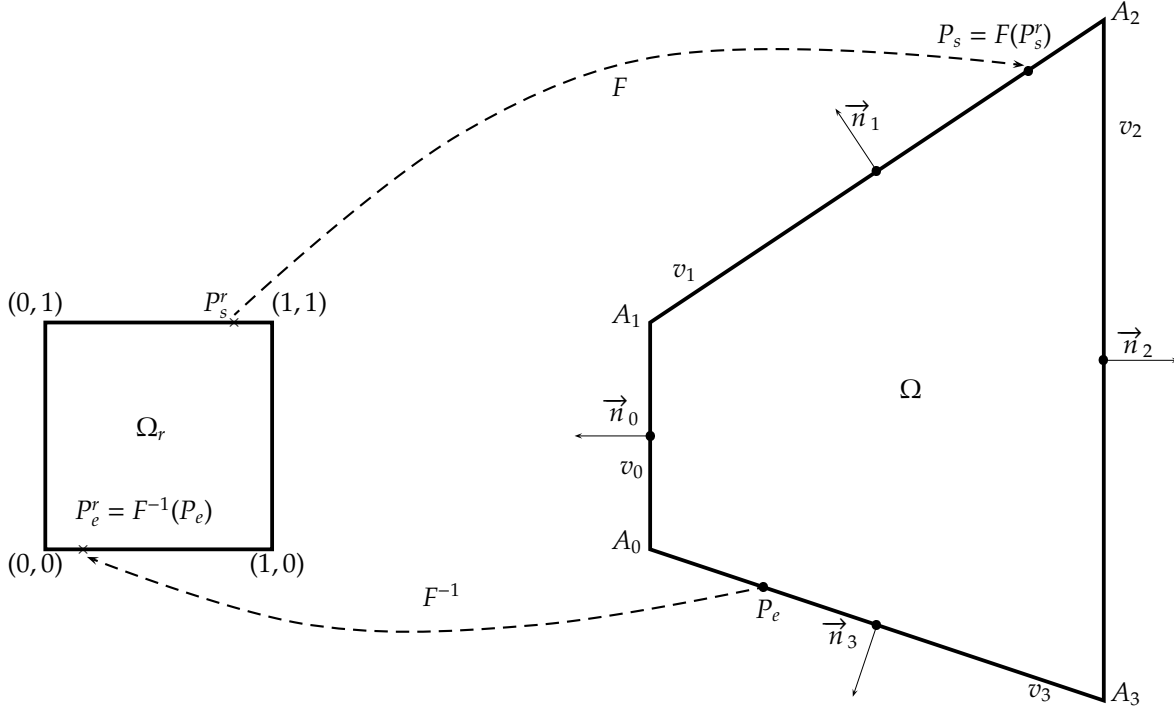


Figure A.4: Maille Trapèze, Méthode 2

A.5 Tests numériques

On a fait des tests de traçage des lignes de courants dans des cas où on connaît la trajectoire exacte des lignes de courant, pour pouvoir comparer les différentes méthodes.

Dans ces tests on a pris $\Omega =]0, 20000[\times]0, 5000[$. On a utilisé 3 types de maillages: $\mathcal{M}_1$ (voir Fig-74) et $\mathcal{M}_2$ (voir Fig-75) sont deux maillages constitués de trapèzes, avec un maillage régulier dans la direction de x , $\mathcal{M}_3$ (voir Fig-76) est un maillage cartésien de Ω .

Principe de comparaison

Une ligne de courant L (dont le point d'origine est P_0) tracée dans Ω par l'une de ces méthodes est caractérisée par l'ensemble $(\tau_i, P_i)_{0 \leq i \leq n_L}$, où τ_i est le temps de vol pour arriver à P_i en partant de P_0 . On note $q_i = q(\tau_i)$ avec q le paramétrage exact de L . On définit les fonctions suivantes:

$$E(L) = \sum_i |P_i - q_i|$$

Premier test

Pour ce test, on suppose que la vitesse est donnée par:

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall (x, y) \in \Omega.$$

Le point d'origine est $P_0 = (0, 0) \in \overline{\Omega}$. Dans ce cas q est donné par la relation suivante:

$$q(\tau) = \begin{pmatrix} \tau \\ \tau \end{pmatrix}, \forall \tau \in [0; \tau_{max}].$$

Les résultats:

- Pour le premier maillage $\mathcal{M}_1$,

	E	E_x	E_y
Méthode1	0	0	0
Méthode2	2.86423	0	2.86423

- Pour le deuxième maillage $\mathcal{M}_2$,

	E	E_x	E_y
Méthode1	0	0	0
Méthode2	22.054	0	22.054

- Pour le troisième maillage $\mathcal{M}_3$, $E = 0$ pour les deux méthodes.

Test 2

Pour ce test, on suppose que la vitesse est donnée par:

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \forall (x, y) \in \Omega.$$

Le point d'origine est $P_0 = (x_0, y_0) \in \overline{\Omega}$. Dans ce cas q est donné par la relation suivante:

$$q(\tau) = \begin{pmatrix} x_0 \exp(\tau) \\ y_0 \exp(-\tau) \end{pmatrix}, \forall \tau \in [0; \tau_{max}].$$

Autrement dit:

$$y = \frac{x_0 y_0}{x}$$

Les résultats obtenus, avec $P_0 = (333.333, 5000)$:

- Pour le premier maillage $\mathcal{M}_1$,

	E	E_x	E_y
Méthode1	2.80433	2.73124	0.231472
Méthode2	5.25302	0	5.25302

- Pour le deuxième maillage $\mathcal{M}_2$,

	E	E_x	E_y
Méthode1	94.1201	93.8872	2.15045
Méthode2	8.11899	0	8.11899

- Pour le troisième maillage $\mathcal{M}_3$, $E = 0$ pour les deux méthodes.

Test 3

Pour ce test, on suppose que la vitesse est donnée par:

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \forall (x, y) \in \Omega.$$

Le point d'origine est $P_0 = (x_0, y_0) \in \overline{\Omega}$. Dans ce cas q est donné par la relation suivante:

$$q(\tau) = \begin{pmatrix} x_0 \exp(\tau) \\ y_0 \exp(\tau) \end{pmatrix}, \forall \tau \in [0; \tau_{max}].$$

Autrement dit:

$$y = \frac{y_0}{x_0} x$$

Les résultats obtenus, avec $P_0 = (333.333, 125)$:

- Pour le premier maillage $\mathcal{M}_1$,

	E	E_x	E_y
Méthode1	0	0	0
Méthode2	3.91235	0	3.91235

- Pour le deuxième maillage $\mathcal{M}_2$,

	E	E_x	E_y
Méthode1	0	0	0
Méthode2	62.5569	0	62.5569

- Pour le troisième maillage $\mathcal{M}_3$, $E = 0$ pour les deux méthodes.

Remarque A.5.1 Pour ce test $\text{div}(\vec{V})$ n'est pas nul dans Ω , et pour toute maille K du maillage on a $D_K = 2$.

Test 4

Pour ce test, on suppose que la vitesse est donnée par:

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \forall (x, y) \in \Omega.$$

Le point d'origine est $P_0 = (x_0, y_0) \in \overline{\Omega}$. Dans ce cas q est donné par la relation suivante:

$$q(\tau) = \begin{pmatrix} x_0 \exp(\tau) \\ y_0 \end{pmatrix}, \forall \tau \in [0; \tau_{max}].$$

Autrement dit:

$$y = y_0$$

Les résultats obtenus, avec $P_0 = (333.333, 125)$:

- Pour le premier maillage $\mathcal{M}_1$,

	E	E_x	E_y
Méthode1	0	0	0
Méthode2	0.371175	0	0.371175

- Pour le deuxième maillage $\mathcal{M}_2$,

	E	E_x	E_y
Méthode1	0	0	0
Méthode2	6.54989	0	6.54989

- Pour le troisième maillage $\mathcal{M}_3$, $E = 0$ pour les deux méthodes.

Remarque A.5.2 Pour ce test $\operatorname{div}(\vec{V})$ n'est pas nul dans Ω , et pour toute maille K du maillage on a $D_K = 1$.

Test 5

Pour ce test, on suppose que la vitesse est donnée par:

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ -y^2/2 \end{pmatrix}, \forall (x, y) \in \Omega.$$

Le point d'origine est $P_0 = (x_0, y_0) \in \overline{\Omega}$. Dans ce cas q est donné par la relation suivante:

$$q(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{4}(2 + y_0\tau)^2 \\ \frac{2y_0}{2 + y_0\tau} \end{pmatrix}, \forall \tau \in [0; \tau_{max}].$$

Autrement dit:

$$y = y_0 \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Les résultats obtenus, avec $P_0 = (333.333, 5000)$:

- Pour le premier maillage $\mathcal{M}_1$,

	E	E_x	E_y
Méthode1	3724.29	79.0563	2.11243
Méthode2	5852.49	122.971	3.57606

- Pour le deuxième maillage $\mathcal{M}_2$,

	E	E_x	E_y
Méthode1	6585.72	119.524	3.98759
Méthode2	6960.69	124.638	5.08125

- Pour le troisième maillage $\mathcal{M}_3$, $E = 3724.29$, $E_x = 69.3638$, et $E_y = 2.83767$.

Remarque A.5.3 Pour ce test $\operatorname{div}(\vec{V})$ est nul dans Ω , mais la différence avec les autres tests est que l'approximation de la vitesse n'est plus exacte pour le maillage régulier, car les composantes de la vitesse ne sont pas linéaires, ce qui donne une erreur non nulle.

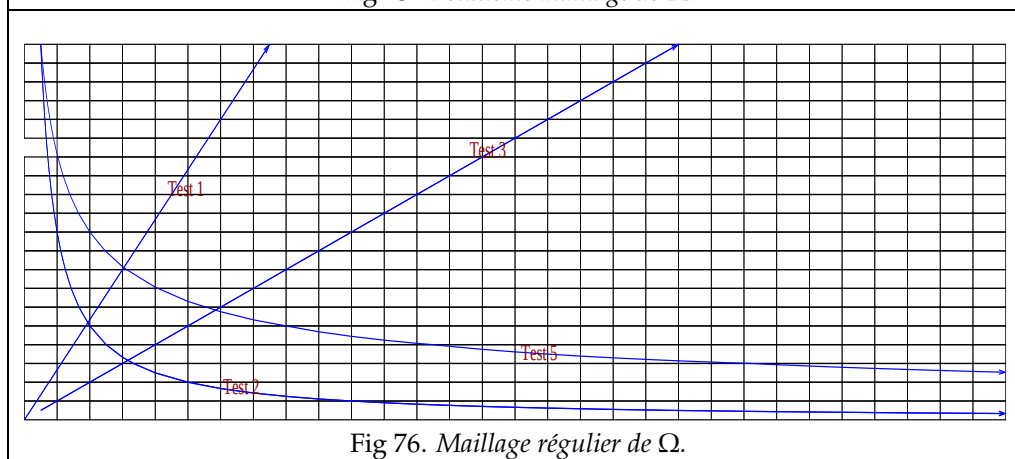
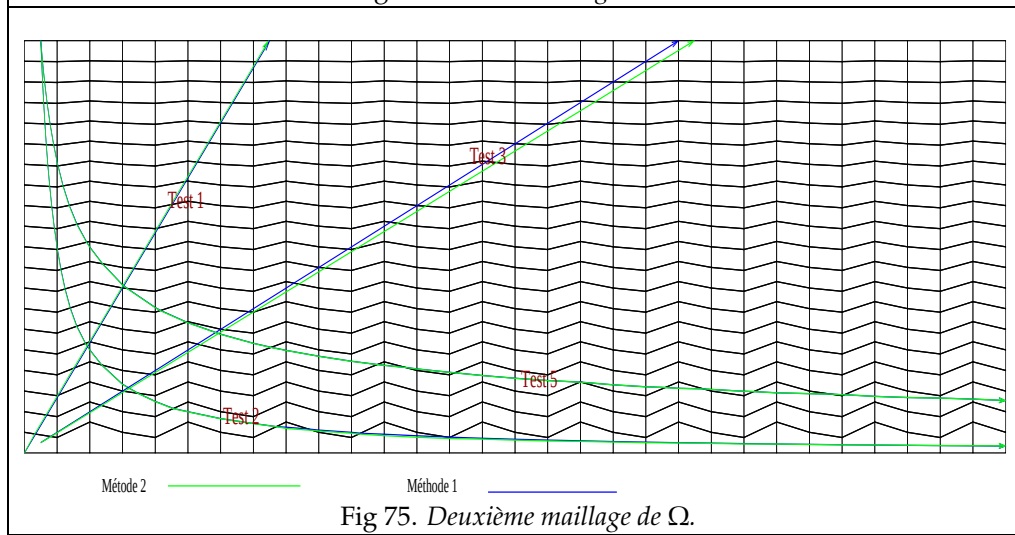
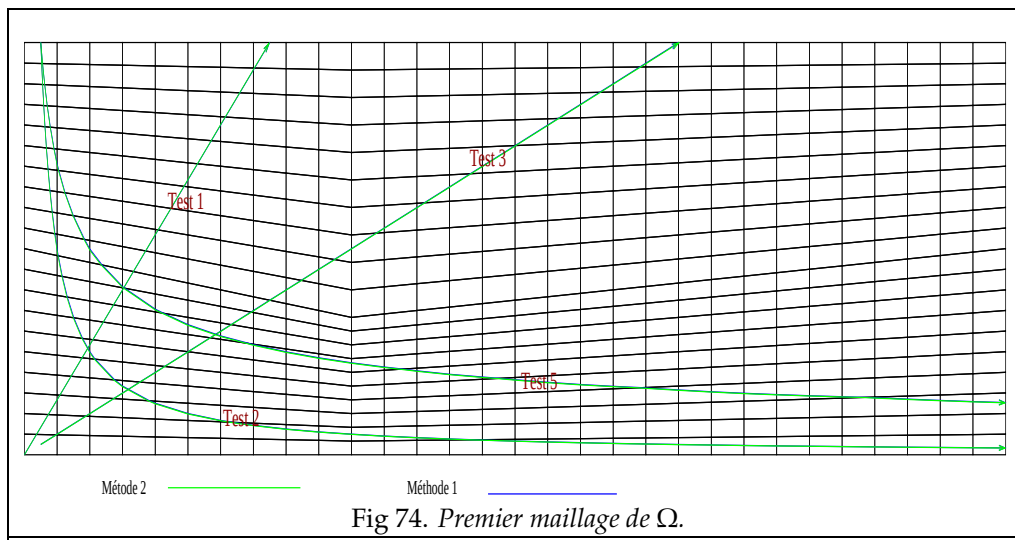
Remarques:

On voit sur ces tests que l'efficacité de ces méthodes dépend beaucoup du maillage, mais pour les maillages considérés on constate que la première méthode est plus efficace que la seconde.

Sur les figures (74,75 et 76), on remarque:

- Sur la figure (74), on a pratiquement la même trajectoire donnée par les deux méthodes, par contre on n'a pas le même temps de vol.
- Sur la figure (75, Test 3), les deux méthodes donnent deux trajectoires différentes!!
- Pour le maillage régulier (76), les deux méthodes de traçage donnent les mêmes résultats (trajectoire et temps de vol).

Pour l'extension 3D de la méthode des lignes de courants, il faut chercher une méthode de traçage "efficace" qui soit adaptée au maillage du bassin, par exemple au maillage produit par le code Visco3d qui donne des interfaces qui ne sont pas contenues dans des plans de $\mathbb{R}^3$.



A.6 Trajectoires particulières

Pour appliquer la méthode des lignes de courant, on a vu qu'il faut tracer les lignes de courant dans Ω , ensuite déterminer pour chaque ligne son intervalle de définition ainsi que le temps de vol. Il est clair que, pour résoudre l'équation de transport 1d sur une ligne de courant, il faut que son intervalle de définition soit de mesure finie dans $\mathbb{R}$ (cf. remarque 2.1.2).

Dans le chapitre 2, pour montrer la convergence on a mis une hypothèse (cf. partie 2.3.2, relation 2.16) sur les longueurs des lignes de courant. Dans certains cas, il arrive que l'intervalle de définition soit de mesure non finie, ceci peut arriver même si la vitesse est très régulière.

Ici on donne quelques exemples de trajectoires 'particulières' dans le cas 2d.

Remarque A.6.1 En général, si l'intervalle de définition de la ligne est de mesure non finie dans $\mathbb{R}$, alors la ligne ne sort pas de Ω et reste "coincée" dans Ω .

On considère à nouveau Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^2$, et $\vec{V}$ un champ de vitesse défini sur Ω dans $\mathbb{R}^2$.

Trajectoire fermée:

Soit C une ligne de courant tracée dans Ω par rapport à $\vec{V}$. On suppose que C est définie par le triplet (I_C, p_0, q) (cf. chapitre 2, partie 2.1.1 pour les notations), où $p_0 \in \Omega$ est le point d'origine de C . On dit que C est une trajectoire fermée s'il existe τ_1, τ_2 dans I_C tels que:

$$\tau_2 > \tau_1, \text{ et } q(\tau_2) = q(\tau_1).$$

Dans ce cas, il est clair que q est défini pour tout $\tau > \tau_2$, ce qui veut dire $I_C = \mathbb{R}_+$.

Pour éviter ce problème (i.e. intervalle de définition de mesure non finie), lors du traçage de C , on arrête le calcul lorsqu'on tombe sur un point p qui fait déjà partie de la ligne. Dans ce cas on prendra $I_C = [0, \tau_p[$ où τ_p est le temps de vol entre p_0 et p .

Remarque A.6.2 Le premier point qu'on rencontre et qui fait partie de C (i.e p) doit être le point d'origine p_0 .

Exemple1:

On peut reprendre l'exemple donné dans les tests numériques du chapitre 2 (partie 2.9, Test2).

La figure (Fig-7) nous donne les trajectoires des lignes de courant tracées dans Ω .

Exemple2:

Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{2} < |x| < 3\} \subset \mathbb{R}^2$. La vitesse $\vec{V}$ est définie par :

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

On considère $p_0 = (1, 0) \in \Omega$. La ligne de courant C tracée dans Ω par rapport à $\vec{V}$, dont p_0 est le point d'origine, est définie par q :

$$q(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix}.$$

Sur cet exemple on voit que q est défini pour tout τ dans $\mathbb{R}_+$, mais on prend $I_C = [0, 2\pi[$ (voir Fig-77).

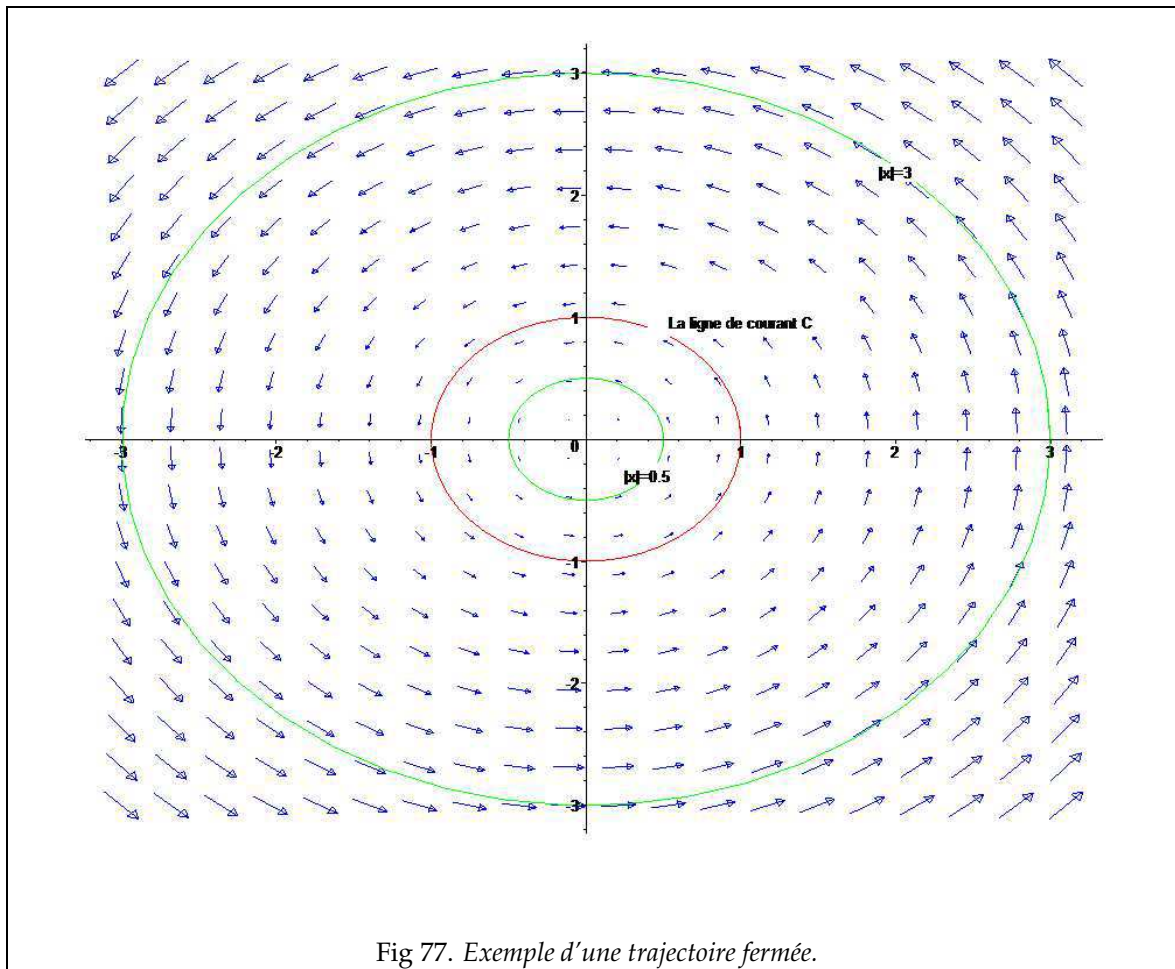


Fig 77. Exemple d'une trajectoire fermée.

Trajectoire non fermée et non finie:

Cela concerne les cas où la trajectoire de la ligne n'est pas fermée, mais en même temps l'intervalle de définition est de mesure non finie, i.e la ligne de courant reste dans Ω .

On a deux possibilités dans ce cas : soit q admet une limite quand τ tend vers $+\infty$ et le point limite (qu'on note p_l) vérifie $\vec{V}(p_l) = \vec{0}$, soit q n'a pas de limite mais la trajectoire possède une asymptote (cf. exemple ci-dessous).

Exemple:

Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{2} < |x| < 3\} \subset \mathbb{R}^2$. La vitesse $\vec{V}$ est définie par :

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-(r-1)^2}{r}x - y \\ \frac{-(r-1)^2}{r}y + x \end{pmatrix},$$

avec $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Il est clair que $\vec{V} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

On considère $p_0 = (2, 0) \in \Omega$. La ligne de courant C tracée dans Ω par rapport à $\vec{V}$ dont p_0 est le point d'origine, est définie par q :

$$q(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{\tau+2}{\tau+1} \cos(\tau) \\ \frac{\tau+2}{\tau+1} \sin(\tau) \end{pmatrix}.$$

Sur cet exemple on voit que q est défini pour tout τ dans $\mathbb{R}_+$, i.e $I_C = \mathbb{R}_+$. De plus, on a:

$$\forall \tau \in \mathbb{R}_+, 1 < |q(\tau)| = \frac{\tau+2}{\tau+1} \leq 2,$$

Ce qui veut dire que la ligne de courant C ne sort pas de Ω . Dans ce cas le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 est un cercle-asymptote à C (voir Fig-78)

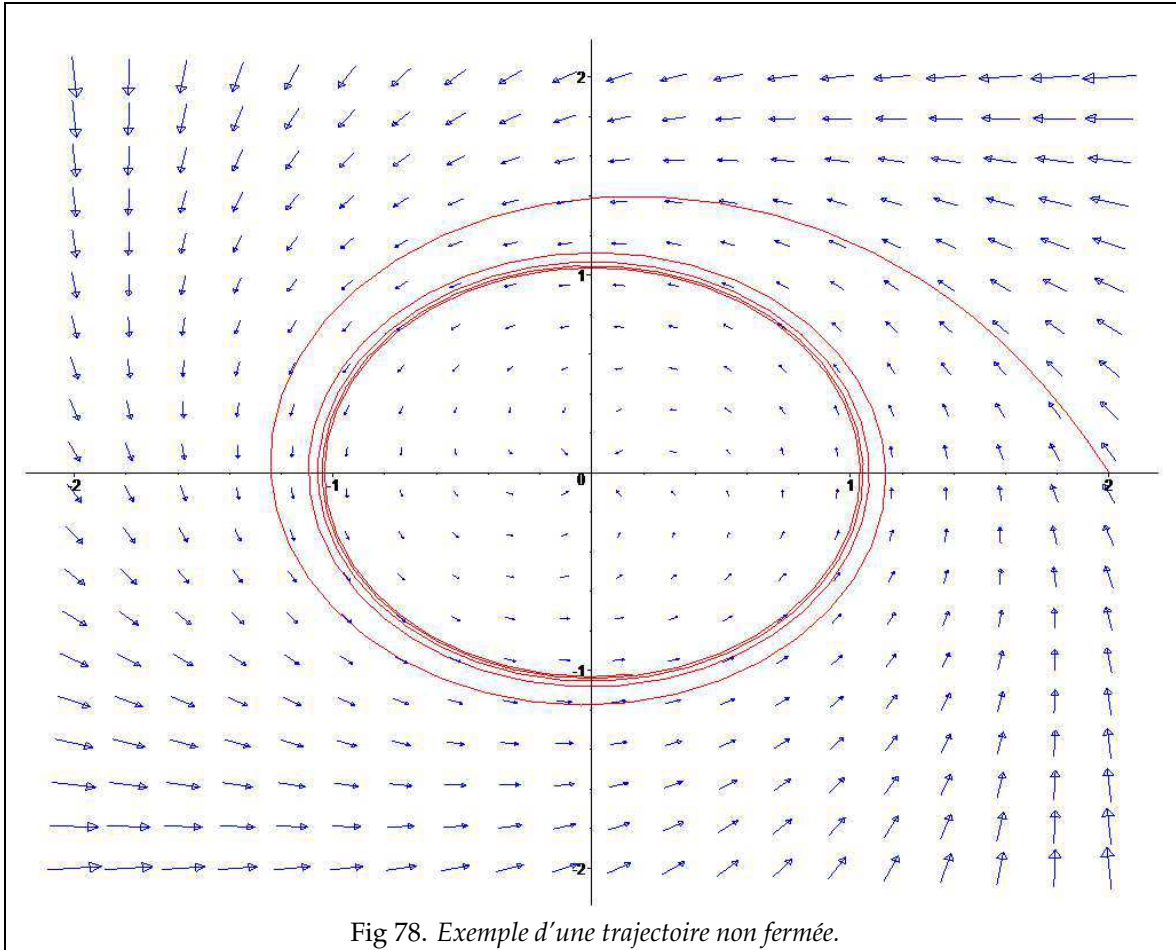


Fig 78. Exemple d'une trajectoire non fermée.

Annexe B

Démonstration du lemme (2.5.3)

Soient X, T deux réels strictement positifs. On considère le problème suivant:

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x(f(u))(x, t) = 0, \forall (x, t) \in I \times \mathcal{I}, \quad (\text{B.1})$$

avec la donnée initiale à $t = 0$,

$$u(x, 0) = u_0(x), \forall x \in I, \quad (\text{B.2})$$

et la condition à la limite donnée par:

$$u(0, t) = g(t), \forall t \in \mathcal{I}, \quad (\text{B.3})$$

On sait que le problème défini par les équations (B.1, B.2 et B.3) admet une unique solution entropique notée $u \in BV([0, X] \times [0, T])$.

Le but de cette partie est de donner une estimation d'erreur entre la solution approchée de ce problème définie par la méthode volume fini et la solution exacte, dans le cas où u est de classe C^2 .

On se donne un maillage de I , de la forme:

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_M = X, \text{ avec } M \in \mathbb{N}_+^*, \quad (\text{B.4})$$

On définit h_i par $h_i = x_{i+1} - x_i$, pour $i \in \{0, \dots, M-1\}$. On définit aussi le pas du maillage h par $h = \sup_i h_i$.

On suppose que le maillage est régulier dans le sens suivant: il existe α dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que:

$$\alpha \in]0, 1], \quad \forall i : \alpha h \leq h_i \quad (\text{B.5})$$

De la même façon, on considère une subdivision de $[0, T]$ de la forme:

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, t^n = n \times k, \text{ avec } N \in \mathbb{N}_+^*, k = T/N. \quad (\text{B.6})$$

k , le pas de temps, vérifie la condition CFL suivante:

$$k \leq \alpha \frac{h}{\|f'\|_\infty}. \quad (\text{B.7})$$

On fait les hypothèses suivantes:

(H1) $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de plus on suppose que $f' \geq 0$ et que $\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$

(H2) Les fonctions g et u_0 sont assez régulières (de classe C^2)

(H3) On suppose que $u \in C^2(I \times \mathcal{I}, \mathbb{R})$

(H4) Les deux maillages sur I et $\mathcal{I}$, vérifient les relations (B.5) et (B.7)

Solution approchée:

La solution approchée du problème est définie par le schéma volume fini:

$$\forall i \in \{0, \dots, M-1\}, \bar{u}_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_0(x) dx, \quad (\text{B.8})$$

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \bar{u}_{-1}^n = g(t^n), \quad (\text{B.9})$$

$$\forall 0 \leq i < M, 0 \leq n < N, \bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n - \frac{k}{h_i} (f(\bar{u}_i^n) - f(\bar{u}_{i-1}^n)). \quad (\text{B.10})$$

Où $\bar{u}_i^n$ est l'approximation de u sur $]x_i, x_{i+1}] \times [t^n, t^{n+1}[$.

Alors l'approximation du u (notée $\bar{u}_h$), sera définie de cette façon:

$$\bar{u}_h(x, t) = \bar{u}_i^n, \text{ si } (x, t) \in]x_i, x_{i+1}] \times [t^n, t^{n+1}[. \quad (\text{B.11})$$

En même temps, on définit u_h par:

$$u_h(x, t) = u_i^n, \text{ si } (x, t) \in]x_i, x_{i+1}] \times [t^n, t^{n+1}[. \quad (\text{B.12})$$

Avec les $(u_i^n)_{i,n}$ définies à partir de la solution exacte, de cette façon:

$$\forall 0 \leq i < M, 0 \leq n \leq N, u_i^n = u(x_{i+1}, t^n). \quad (\text{B.13})$$

Schéma numérique vérifié par u_h

Pour tout $i \in \{0, \dots, M-1\}, n \in \{0, \dots, N-1\}$ on définit:

$$\mathcal{A}_i^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \partial_t u(x, t) dx dt. \quad (\text{B.14})$$

Comme u est solution du problème, alors on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i^n &= - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \partial_x (f(u(x, t))) dx dt. \\ &= - \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(u(x_{i+1}, t)) - f(u(x_i, t))] dt. \end{aligned}$$

Or la fonction $t \in \mathcal{I} \longrightarrow f \circ u(., t)$ est de classe C^2 sur $\mathcal{I}$, alors d'après la formule de Talyor, on a (pour $\alpha \in \{i, i+1\}$):

$$\forall t \in \mathcal{I}, f(u(x_\alpha, t)) = f(u(x_\alpha, t^n)) + (t - t^n) \partial_t f(u(x_\alpha, t^n)) + O((t - t^n)^2).$$

En intégrant la relation ci-dessus entre t^n et t^{n+1} , on trouve:

$$\mathcal{A}_i^n = -k(f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)) + RT_i^n. \quad (\text{B.15})$$

Avec:

$$\begin{aligned} RT_i^n &= \frac{-k^2}{2} (\partial_t f(u(x_{i+1}, t^n)) - \partial_t f(u(x_i, t^n))) \\ &\quad - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_{t^n}^t (\sigma - t^n) [\partial_{tt}^2 f(u(x_{i+1}, \sigma)) - \partial_{tt}^2 f(u(x_i, \sigma))] d\sigma \right) dt. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i^n &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t u(x, t) dt dx. \\ &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n)] dx. \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor appliquée à la fonction qui à x donne $u(x, \cdot)$, on a:

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}], u(x, t^\alpha) = u(x_{i+1}, t^\alpha) + (x - x_{i+1})\partial_x u(x_{i+1}, t^\alpha) + O((x - x_{i+1})^2).$$

Avec $\alpha \in \{n, n+1\}$.

En intégrant la relation ci-dessus entre x_i et x_{i+1} , on obtient:

$$\mathcal{A}_i^n = h_i(u_i^{n+1} - u_i^n) + RX_i^n. \quad (\text{B.17})$$

Avec:

$$\begin{aligned} RX_i^n &= \frac{-h_i^2}{2}(\partial_x u(x_{i+1}, t^{n+1}) - \partial_x u(x_{i+1}, t^n)) \\ &+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_{i+1}}^x (\sigma - x_{i+1})[\partial_{xx}^2 u(\sigma, t^{n+1}) - \partial_{xx}^2 u(\sigma, t^n)]d\sigma dx. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

En faisant l'égalité entre les relations (B.15) et (B.17), on trouve:

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq i < M, 0 \leq n < N \quad u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{k}{h_i}(f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)) \\ &+ \frac{1}{h_i}(RT_i^n - RX_i^n). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Avec $u_{-1}^n = u(0, t^n) = g(t^n)$ pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$.

Estimation de $RT_i^n + RX_i^n$

On note $C_1 = \|\partial_{xt}^2(f \circ u)\|_\infty$, $C_2 = \|\partial_{tx}^2 u\|_\infty$, $C_3 = \|\partial_{tt}^2(f \circ u)\|_\infty$, $C_4 = \|\partial_{xx}^2 f u\|_\infty$. Comme f et u sont de classe C^2 , alors on a $C_1 < \infty$, $C_2 < \infty$, $C_3 < \infty$ et $C_4 < \infty$.

Soient $(i, n) \in \{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, N-1\}$. On commence par faire une estimation de RT_i^n . D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\alpha_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que:

$$\partial_t f(u(x_{i+1}, t^n)) - \partial_t f(u(x_i, t^n)) = h_i \partial_x (\partial_t f(u(\alpha_i, t^n))).$$

Ce qui nous donne:

$$|\partial_t f(u(x_{i+1}, t^n)) - \partial_t f(u(x_i, t^n))| \leq h_i C_1.$$

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} \left| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{t^n}^t (\sigma - t^n) [\partial_{tt}^2 f(u(x_{i+1}, \sigma)) - \partial_{tt}^2 f(u(x_i, \sigma))] d\sigma dt \right| &\leq \\ \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{t^n}^t (\sigma - t^n) |\partial_{tt}^2 f(u(x_{i+1}, \sigma)) - \partial_{tt}^2 f(u(x_i, \sigma))| d\sigma dt &\leq 2C_3 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{t^n}^t (\sigma - t^n) d\sigma dt \leq \frac{C_3 k^3}{3} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne finalement:

$$|RT_i^n| \leq h_i k^2 \frac{C_1}{2} + k^3 \frac{C_3}{3}. \quad (\text{B.20})$$

Par un calcul similaire, on trouve:

$$|RX_i^n| \leq h_i^2 k \frac{C_2}{2} + h_i^3 \frac{C_4}{3}. \quad (\text{B.21})$$

En utilisant les relations (B.5) et (B.7), on trouve:

$$\begin{aligned} |RT_i^n| + |RX_i^n| &\leq h^3 \left(\frac{\alpha^2 C_1}{2\|f'\|_\infty^2} + \frac{\alpha^3 C_3}{3\|f'\|_\infty^3} \right) \\ &+ h^3 \left(\frac{\alpha C_2}{2\|f'\|_\infty} + \frac{C_4}{3} \right). \end{aligned}$$

En notant $C = \left(\frac{\alpha^2 C_1}{2\|f'\|_\infty} + \frac{\alpha^3 C_3}{3\|f'\|_\infty^3} + \frac{\alpha C_2}{2\|f'\|_\infty} + \frac{C_4}{3} \right)$, on a le résultat suivant:

$$\forall (i, n) \in \{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, N-1\}, \quad |RT_i^n| + |RX_i^n| \leq Ch^3. \quad (\text{B.22})$$

Estimation entre u_h et $\bar{u}_h$

On définit la fonction w_h , par:

$$w_h(x, t) = w_i^n = u_i^n - \bar{u}_i^n, \quad \text{si } (x, t) \in]x_i, x_{i+1}] \times [t^n, t^{n+1}].$$

on définit aussi, pour $i \in \{0, \dots, M-1\}$, $n \in \{0, \dots, N\}$:

$$G_i^n = \begin{cases} \frac{f(u_i^n) - f(\bar{u}_i^n)}{u_i^n - \bar{u}_i^n} & \text{si } u_i^n \neq \bar{u}_i^n \\ f'(u_i^n) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

G_i^n est bien défini, de plus, on a $G_i^n \in [0, \|f'\|_\infty]$, car f est une fonction croissante.

On note pour $n \in \{0, \dots, N\}$, $E^n = \int_0^X |w_h(x, t^n)| dx$.

Soit $n \in \{1, \dots, N-1\}$. D'après les définitions de E^{n+1} et w_h , on a:

$$\begin{aligned} E^{n+1} &= \sum_{0 \leq i < M} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u(x, t^{n+1}) - \bar{u}(x, t^{n+1})| dx \\ &= \sum_{0 \leq i < M} h_i |u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}| = \sum_{0 \leq i < M} h_i |w_i^{n+1}|, \end{aligned}$$

Comme k vérifie la condition (CFL) (relation B.7), on a:

$$\forall i \in \{0, \dots, M-1\}, \quad (h_i - kG_i^n) \geq 0,$$

d'après les relations (B.10) et (B.19), on a:

$$\begin{aligned} h_i |w_i^{n+1}| &\leq (h_i - kG_i^n) |w_i^n| + kG_{i-1}^n |w_{i-1}^n| \\ &\quad + |RT_i^n| + |RX_i^n|. \end{aligned}$$

En utilisant la relation (B.22), on trouve:

$$\begin{aligned} h_i |w_i^{n+1}| &\leq (h_i - kG_i^n) |w_i^n| + kG_{i-1}^n |w_{i-1}^n| \\ &\quad + Ch^3. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Comme $w_{-1}^n = 0$, alors en sommant la relation (B.24), pour $i \in \{0, \dots, M-1\}$, on trouve:

$$\begin{aligned} E^{n+1} &\leq \sum_{0 \leq i < M} \left((h_i - kG_i^n) |w_i^n| + kG_{i-1}^n |w_{i-1}^n| + h^3 C \right) \\ &\leq \sum_{0 \leq i < M} (h_i - kG_i^n) |w_i^n| + \sum_{-1 \leq i < M-1} (kG_i^n |w_i^n|) + h^2 \frac{C|I|}{\alpha} \\ &\leq \sum_{0 \leq i < M} (h_i |w_i^n|) + h^2 \frac{C|I|}{\alpha}. \end{aligned}$$

On en déduit que:

$$E^{n+1} \leq E^n + \frac{C|I|}{\alpha} h^2. \quad (\text{B.25})$$

En sommant la relation précédente pour n entre 0 et $N - 1$, on trouve:

$$E^N \leq E^0 + \frac{C|I|}{\alpha} N h^2. \quad (\text{B.26})$$

Or, $N = T/k$ et d'autre part, k vérifie $k \leq (\alpha h)/\|f'\|_\infty$, alors en remplaçant dans la relation (B.26), on trouve:

$$E^N \leq E^0 + \frac{\|f'\|_\infty}{\alpha^2} C|I|T \times h. \quad (\text{B.27})$$

Estimation de E^0

D'après la définition de E^0 , on a:

$$\begin{aligned} E^0 &= \int_0^X |\bar{u}_h(x, 0) - u_h(x, 0)| dx \\ &= \sum_{i=0}^{i=M-1} h_i |\bar{u}_i^0 - u_i^0|. \end{aligned}$$

Or:

$$\begin{aligned} |\bar{u}_i^0 - u_i^0| &\leq \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u_0(x) - u_0(x_{i+1})| dx \\ &\leq \frac{\|u_0'\|_\infty}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x - x_{i+1}| dx \leq \frac{\|\partial_x u\|_\infty}{2} h_i^2. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$E^0 \leq \frac{\|\partial_x u\|_\infty \times |I|}{2} h. \quad (\text{B.28})$$

En utilisant les relations (B.28) et (B.27), on obtient le resultat suivant:

$$\|\bar{u}_h(\cdot, T) - u_h(\cdot, T)\|_{L^1(I)} \leq C_* h. \quad (\text{B.29})$$

Avec C_* est une constante dans $\mathbb{R}_+^*$ qui dépend de $\|f'\|_\infty$, $\|f^{(2)}\|_\infty$, $\|\vec{\nabla} u\|_\infty$, $\|\partial_{\alpha\beta}^2 u\|_\infty$ (avec $\alpha, \beta \in \{x, t\}$) et du maillage sur I (i.e la constante α).

Annexe C

Unités physiques

Nom	unité	unité équivalente
Distance	m (mètre)	$Km = 1000m$
Volume	m^3	
Temps	s (seconde)	$Annee = 3.155 \times 10^7 s$
Vitesse	m/s	$Km/Annee$
Perméabilité intrinsèque	m^2	Darcy, $1 Darcy = 10^{-12} m^2$
Température	K (Kelvin)	C Celsius
Flux thermique	W/m^2 (Watt/mètre carré)	
Pression	Pa (Pascal)	Atmosphère, $1 atm = 1.0135 \times 10^5 Pa$
Viscosité	$Pa \times s$	
Masse	Kg (Kilogramme)	
Masse volumique	$Kg.m^{-3}$	
Potentiel de roche mere	$(Kg HC)/(Kg \text{ de roche})$	

Bibliographie

- [1] M. Afif and B. Amaziane, *Convergence of finite volume schemes for a degenerate convection-diffusion equation arising in flow in porous media*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg **191** (2002), 5265–5286.
- [2] L. Agelas, I. Faille, and S Wolf, *Calcul de la température dans le logiciel Visco3d. Mise en oeuvre du O-schéma*, Rapport IFP (2001), no. 56168.
- [3] L. Agelas and F. Willien, *Modèle de bassin sédimentaire visco3d: méthodes numériques*, Rapport IFP (2002), no. 56936.
- [4] ———, *Visco3d, schéma "fully implicit"*, Rapport IFP (2002), no. 0.
- [5] B. Atfeh and J. Wendebourg, *Modeling petroleum migration using multi-phase streamline simulation*, En préparation.
- [6] B. Atfeh, J. Wendebourg, and S Wolf, *Méthode des lignes de courant*, Rapport IFP (1999), no. 52934.
- [7] K. Aziz and A Settari, *Petroleum reservoir simulation*, Elsevier, London, 1979.
- [8] R. Baker, *Streamline Technology: Reservoir History Matching and Forecasting = Its Success, Limitations, and Future*, Journal of Canadian Petroleum Technology **40** (2001), no. 4, 23–27.
- [9] C. Bardos, A. Y. le Roux, and J.-C. Nédélec, *First order quasilinear equations with boundary conditions*, Comm. Partial Differential Equations **4** (1979), no. 9, 1017–1034.
- [10] R.P. Batycky, *A three-dimensional two-phase field scale streamline simulator*, Thesis Stanford University (1997).
- [11] R.P. Batycky, M.J. Blunt, F.M. Orr, and M.R. Thiele, *Simulating Flow in Heterogeneous Systems Using Streamtubes and Streamlines*, SPE **11** (1996), 5–12.
- [12] R.P. Batycky, M.J. Blunt, and M.R. Thiele, *A 3d Field-Scale Streamline-Based Reservoir Simulator*, SPE **11** (1997), 246–254.
- [13] M.J. Blunt, K. Liu, and M.R. Thiele, *A Generalized Streamline Methode to Predict Reservoir Flow*, Petroleum Geo-science **2** (1996), 259–269.
- [14] Y. Brenier and J. Jaffré, *Upstream differencing for multiphase flow in reservoir simulation*, SIAM **28** (1991), no. 3, 685–696.
- [15] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle: Théorie et application*, Masson, Paris, 1983.
- [16] C. Chainais-Hillairet, *Schémas volumes finis pour des problèmes hyperboliques: Convergence et estimations d'erreur*, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris 6 (1994).
- [17] C. Chainais-Hillairet and S Champier, *Finite volume schemes for nonhomogeneous scalar conservation laws: error estimate*, Numer. Math. **88** (2001), no. 4, 607–639.
- [18] G. Chavent and J. Jaffré, *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation*, Studies in Mathematic and its Application, 1990.
- [19] C. Cordes and W Kinzelbach, *Continuous Groundwater Velocity Fields and Path Lines in Linear, Bilinear, and Trilinear Finite Elements*, Water resources research **28** (1992), no. 11, 2903–2911.

-
- [20] R. Eymard, T. Gallouët, and R Herbin, *Finite volume methods*, Handbook for Numerical Analysis, Ph. Ciarlet J.L. Lions eds, North Holland, Paris, 2000, pp. 715–1022.
- [21] P. Fabrie and T. Gallouët, *Modeling wells in porous media flows*, M3AS **10** (2000), no. 5, 673–709.
- [22] I. Faille, *Modélisation bidimensionnelle de la genèse et de la migration des hydrocarbures dans un bassin sédimentaire*, Thèse de Doctorat de l'Université de Grenoble I (1992).
- [23] Gérard. Gagneux and M Madaune-Tort, *Analyse mathématique des modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière*, Mathématiques & Applications, SMAI, Springer, 1996.
- [24] E. Godlewski and P Raviart, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Mathématiques & Applications, ellipses, Paris, 1991.
- [25] ———, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, 1996.
- [26] A. Michel, *Convergence de schémas volumes finis pour des problèmes de convection diffusion non linéaires*, Thèse de Doctorat de l'Université de Provence (2001).
- [27] A. Monier, *Etude de certains problèmes non linéaires*, Thèse de Doctorat de l'Université de Provence (2002).
- [28] D.W. Pollock, *Semianalytical computation of paths lines for finite-difference models*, Ground Water (1988), no. 6, 743–750.
- [29] M. Prévost, M. G. Edwards, and M. J. Blunt, *Streamline Tracing on Curvilinear Structured and Unstructured Grids*, SPE **7** (2002), no. 2, 139–148.
- [30] G. Renard, *A 2d reservoir streamtube EOR model with periodical automatic regeneration of streamlines*, In Situ **14** (1990), no. 2, 175–200.
- [31] F. Schneider and S. Wolf, *Quantitative HC potential evaluation using 3D basin modeling: application to Franklin structure, Central Graben, North Sea*, Marine and Petroleum Geology (2000), no. 17, 841–856.
- [32] F. Schneider, S. Wolf, I. Faille, and D. Pot, *A 3D Basin Model for Hydrocarbon Potential Evaluation: Application to Congo Offshore*, Oil & Gas **55** (2000), no. 1, 3–13.
- [33] M.R. Thiele, M.J. Blunt, and F.M. Orr, *Modeling flow in heterogeneous media using streamtubes: I miscible and immiscible displacements*, In Situ **19** (1995), no. 3, 299–339.
- [34] ———, *Modeling flow in heterogeneous media using streamtubes: II compositional displacements*, In Situ **19** (1995), no. 4, 367–391.
- [35] S. Verdière and M.H Vignal, *Numerical and theoretical study of a Dual Mesh Method using finite volume schemes for two phase flow problems in porous media*, Numer.Math **80** (1998), 601–639.
- [36] M. H. Vignal, *Convergence of a finite volume scheme for an elliptic-hyperbolic system*, M2AN **30** (1996), no. 7, 841–872.
- [37] M-H. Vignal, *Schémas volumes finis pour des équations elliptiques ou hyperboliques avec conditions aux limites, convergence et estimations d'erreur*, Thèse de Doctorat de l'École normale supérieure de Lyon (1997).
- [38] J. Vovelle, *Convergence of finite volume monotone scheme for scalar conservation law on bounded domain*, Numer. Math. **90** (2002), no. 3, 563–596.
- [39] ———, *Prise en compte des conditions aux limites dans les équation hyperboliques non-linéaires*, Thèse de Doctorat de l'Université de Provence (2002).
- [40] J. Wendebourg, *Uncertainty of petroleum generation using methods of experimental design : application to the Gippsland basin, Australia.*, Proceedings of 1999 AAPG Hedberg Conference on Basin Modeling.
- [41] Cl. Zuily and H. Queffélec, *Eléments d'analyse pour l'agrégation*, Masson, Paris, 1995.
-